Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 21

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 21.1. Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von 589 und 837.

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.2.*

Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von 116901 und 138689.

Gurru springt 8 Meter

Aufgabe 21.3. Das Riesenkänguru Gurru und das Zwergkänguru Gurinu leben entlang des australischen Highways, ihr Schlafplatz liegt am Beginn des Highways (0 Meter). Gurru legt bei jedem Sprung 8 Meter zurück, Gurinu nur 6 Meter. Charakterisiere die Streckenmeter, an denen sie sich begegnen können.

Aufgabe 21.4. Es sei n eine natürliche Zahl. Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von n und $n+1$.

Aufgabe 21.5.*

Es seien a, m, n natürliche Zahlen mit $a \geq 1$.

(1) Bestimme $\text{ggT}(a^m, a^n)$.
(2) Bestimme $\text{kgV}(a^m, a^n)$.

Aufgabe 21.6.*

Die beiden Flöhe Carlo und Fredo sitzen im Nullpunkt eines beidseitig unendlich langen Zentimeterbandes. Carlo kann Sprünge der Weite 255 und 561 (in Zentimeter) machen, Fredo kann Sprünge der Weite 357 und 595 machen. Auf welchen Zentimeterpositionen können sich die beiden Flöhe begegnen?

Aufgabe 21.7.*

Es sei $n \geq 2$. Woran erkennt man am Kleinen Einmaleins im n-System (ohne die Nuller- und die Zehnerreihe), ob n eine Primzahl ist.

Aufgabe 21.8. Es sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl mit der folgenden Eigenschaft: Sobald k ein Produkt ab teilt, teilt k bereits einen Faktor. Zeige, dass k eine Primzahl ist.

Aufgabe 21.9. Es sei p eine Primzahl. Zeige durch Induktion nach n, dass wenn p ein Produkt von n Zahlen teilt, dass p dann schon eine der Zahlen teilt.

Aufgabe 21.10. Es seien a und b natürliche Zahlen, deren Produkt ab von einer natürlichen Zahl n geteilt werde. Die Zahlen n und a seien teilerfremd. Zeige, dass b von n geteilt wird.

Aufgabe 21.11. Seien r und s teilerfremde Zahlen. Zeige, dass jede Lösung (x, y) der Gleichung

$$rx + sy = 0$$

die Gestalt $(x, y) = v(s, -r)$ mit einer eindeutig bestimmten Zahl v besitzt.

Aufgabe 21.12.*

Es sei n eine ganze Zahl, von der die folgenden Eigenschaften bekannt sind:

(1) n ist negativ.
(2) n ist ein Vielfaches von 8, aber nicht von -16.
(3) n ist kein Vielfaches von 36.
(4) n ist ein Vielfaches von 150, aber nicht von 125.
(5) In der Primfaktorzerlegung von n gibt es keine Primzahl, die größer als 5 ist.

Was ist n?

Aufgabe 21.13.*

Bestimme den Exponenten zu 2 von 203264.

Aufgabe 21.14. Es sei p eine Primzahl und

$$\nu_p \colon \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N},\, n \longmapsto \nu_p(n),$$

der zugehörige p-Exponent. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Zahl $p^{\nu_p(n)}$ ist die größte Potenz von p, die n teilt.
(2) Es ist
$$\nu_p(m \cdot n) = \nu_p(m) + \nu_p(n).$$
(3) Es ist
$$\nu_p(m+n) = \min(\nu_p(m), \nu_p(n))$$
(es sei $m+n \neq 0$ vorausgesetzt).

Aufgabe 21.15.*

Wir betrachten das kleine Einmaleins als eine Verknüpfungstablelle, in der alle Produkte $i \cdot j$ mit $1 \leq i, j \leq 9$ stehen. Bestimme die Primfaktorzerlegung des Produktes über alle Einträge in der Tabelle.

Aufgabe 21.16.*

Zu einer positiven natürlichen Zahl n sei a_n das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$.

(1) Bestimme a_n für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
(2) Was ist die kleinste Zahl n mit
$$a_n = a_{n+1}?$$
(3) Was ist die kleinste Zahl n mit
$$a_n = a_{n+1} = a_{n+2}?$$

Aufgabe 21.17. Zu einer natürlichen Zahl n bezeiche $T(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n. Zeige die folgenden Aussagen über $T(n)$.

a) Sei $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n. Dann ist
$$T(n) = (r_1+1)(r_2+1) \cdots (r_k+1).$$

b) Für teilerfremde Zahlen n und m gilt $T(nm) = T(n)T(m)$.

c) Bestimme die Anzahl der Teiler von $20!$.

Aufgabe 21.18. Finde unter den Zahlen ≤ 100 diejenigen Zahlen mit der maximalen Anzahl an Teilern. Wie groß ist diese Anzahl?

Aufgabe 21.19.*

Finde unter den Zahlen ≤ 1000 diejenige Zahl mit der maximalen Anzahl an Teilern.

Aufgabe 21.20.*

a) Berechne den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen $2 \cdot 3^2 \cdot 7^4$ und $2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^{11} \cdot 7$.

b) Berechne den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen $2 \cdot 3^2 \cdot 6 \cdot 7$ und $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^4$.

Aufgabe 21.21. Es seien $a, b \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass

$$a^b = b^a$$

genau dann gilt, wenn

$$a = b$$

ist oder wenn $a = 2$ und $b = 4$ ist (oder umgekehrt).

Aufgabe 21.22. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge, die aus allen natürlichen Zahlen besteht, die bei Division durch 4 den Rest 1 besitzen, also $M = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$. Zeige, dass man 441 innerhalb von M auf zwei verschiedene Arten in Faktoren zerlegen kann, die in M nicht weiter zerlegbar sind.

Aufgabe 21.23.*

Wir betrachten die Menge der natürlichen Zahlen mit den beiden Verknüpfungen

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (a, b) \longmapsto \operatorname{GgT}\ (a, b)$$

und

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ (a, b) \longmapsto \operatorname{KgV}\ (a, b).$$

(1) Zeige, dass der größte gemeinsame Teiler eine kommutative und assoziative Verknüpfung ist, die ein neutrales Element besitzt (der größte gemeinsame Teiler von 0 und 0 sei als 0 festgelegt).
(2) Zeige, dass das kleinste gemeinsame Vielfache eine kommutative und assoziative Verknüpfung ist, die ein neutrales Element besitzt (das kleinste gemeinsame Vielfache von a und 0 sei als 0 festgelegt).
(3) Zeige, dass mit diesen Verknüpfungen (mit dem GgT als Addition) ein kommutativer Halbring vorliegt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.24. (3 Punkte)

Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache von 3277 und 10057.

Aufgabe 21.25. (3 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeige, dass p den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{k}$ für alle $k = 1, \ldots, p-1$ teilt.

Aufgabe 21.26. (3 Punkte)

Seien a, b und r positive natürliche Zahlen. Zeige, dass die Teilbarkeit $a^r | b^r$ die Teilbarkeit $a|b$ impliziert.

Aufgabe 21.27. (6 Punkte)

Finde unter den Zahlen ≤ 1000000 diejenige Zahl mit der maximalen Anzahl an Teilern.

Abbildungsverzeichnis