Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 14

> Ich war nie der talentierteste Spieler. Ich musste mir alles unheimlich hart erarbeiten und es gab bestimmt viel bessere Fußballer. Nur, ich hatte Willen! Ich musste und ich wollte nach oben.
>
> Berti Vogts

Linearformen

DEFINITION 14.1. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt eine *Linearform* auf V.

BEISPIEL 14.2. Eine Linearform auf dem K^n ist von der Form

$$K^n \longrightarrow K,\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

zu einem Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$. Besonders einfache Linearformen sind die Projektionen

$$p_j \colon K^n \longrightarrow K,\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_j.$$

Die Nullabbildung nach K ist ebenfalls eine Linearform, die man auch die *Nullform* nennt.

Wir haben schon eine Vielzahl von Linearformen kennengelernt, beispielsweise die Preisfunktion bei einem Einkauf verschiedener Produkte oder der Vitamingehalt von Obstsalaten aus verschiedenen Obstsorten. Bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und einer Basis w von K (dabei ist w einfach ein von 0 verschiedenes Element aus K) besteht die beschreibende Matrix zu einer Linearform einfach aus einer Zeile mit n Einträgen.

BEMERKUNG 14.3. Es sei K ein Körper und seien V und W Vektorräume über K. Zu einer Linearform

$$f \colon V \longrightarrow K$$

und einem Vektor $w \in W$ ist die Abbildung

$$fw\colon V \longrightarrow W,\ v \longmapsto f(v)w,$$

linear. Es handelt sich einfach um die Hintereinanderschaltung

$$V \xrightarrow{f} K \xrightarrow{\iota_w} W\,,$$

wobei ι_w die Abbildung $s \to sw$ bezeichnet.

Beispiel 14.4. Eine Reihe von prominenten Bespielen von Linearformen auf unendlichdimensionalen Vektorräumen finden sich in der Analysis. Zu einem reellen Intervall $[a, b]$ sind die Menge der Funktionen $\operatorname{Abb}([a, b], \mathbb{R})$ bzw. die Menge der stetigen Funktionen $C([a, b], \mathbb{R})$ bzw. die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen $C^1([a, b], \mathbb{R})$ reelle (ineinander enthaltene) Vektorräume. Zu einem Punkt $P \in [a, b]$ ist jeweils die Auswertung $f \mapsto f(P)$ eine Linearform (wegen der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation auf diesen Räumen). Ebenso ist die Auswertung der Ableitung

$$C^1([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto f'(P),$$

eine Linearform. Für $C([a, b], \mathbb{R})$ ist ferner das Integral, also die Abbildung

$$C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \int_a^b f(t)dt,$$

eine Linearform. Dies beruht auf der Linearität des Integrals.

Der Kern der Nullform ist der gesamte Raum, ansonsten besitzt der Kern einer jeden Linearform $f \in \operatorname{Hom}_K(V, K)$ mit $f \neq 0$ die Dimension $\dim(V) - 1$. Dies folgt aus der Dimensionsformel. Abgesehen von der Nullform ist eine Linearform stets surjektiv.

Lemma 14.5. *Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und es sei $U \subseteq V$ ein $n-1$-dimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es eine Linearform $f\colon V \to K$ mit $U = \operatorname{kern} f$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 14.5. □

Lemma 14.6. *Es sei V ein K-Vektorraum und es sei $v \in V$ ein von 0 verschiedener Vektor. Dann gibt es eine Linearform $f\colon V \to K$ mit $f(v) \neq 0$.*

Beweis. Der eindimensionale K-Untervektorraum $Kv \subseteq V$ besitzt ein direktes Komplement, also

$$V = Kv \oplus U$$

mit einem Untervektorraum $U \subseteq V$. Die Projektion auf Kv zu dieser Zerlegung bildet v auf 1 ab. □

Der Dualraum

Definition 14.7. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt der Homomorphismenraum

$$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$$

der *Dualraum* zu V.

Die Addition und die Skalarmultiplikation ist wie allgemein im Fall von Homomorphismenräumen definiert, also $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$ und $(sf)(v) := s \cdot f(v)$. Bei endlichdimensionalem V ist nach Korollar 13.12 die Dimension des Dualraumes V^* gleich der Dimension von V.

Definition 14.8. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Dann nennt man die Linearformen

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*,$$

die durch[1]

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ falls } i = j, \\ 0, \text{ falls } i \neq j, \end{cases}$$

festgelegt sind, die *Dualbasis* zur gegebenen Basis.

Wegen Satz 10.9 ist durch die Vorschrift in der Tat jeweils eine Linearform festgelegt. Die Linearform v_i^* ordnet einem beliebigen Vektor $v \in V$ die i-te Koordinate von v bezüglich der gegebenen Basis zu. Zu $v = \sum_{j=1}^n s_j v_j$ ist ja

$$v_i^*(v) = v_i^*\left(\sum_{j=1}^n s_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n s_j v_i^*(v_j) = s_i.$$

Es ist wichtig zu betonen, dass v_i^* nicht nur von dem Vektor v_i, sondern von der gesamten Basis abhängt. Es gibt keinen „dualen Vektor“ zu einem Vektor. Dies sieht beispielsweise anders aus, wenn auf V ein Skalarprodukt gegeben ist. Wenn man zu der Basis $v_1, \ldots, v_n$ die direkte Summenzerlegung

$$V = Kv_1 \oplus \cdots \oplus Kv_n$$

und dazu die zugehörige i-te Projektion

$$p_i \colon V \longrightarrow Kv_i$$

betrachtet, so besteht zwischen v_i^* und p_i der direkte Zusammenhang $p_i = v_i^* \cdot v_i$, wobei der zweite Ausdruck im Sinne von Bemerkung 14.4 zu verstehen ist.

Beispiel 14.9. Zur Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ im K^n besteht die Dualbasis aus den Projektionen auf eine Komponente, also gleich $e_i^* = p_i$ mit

$$p_i \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i.$$

Sie heißt die *Standarddualbasis*.

[1] Das so definierte Symbol heißt Kronecker-Delta.

Lemma 14.10. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Dann bildet die Dualbasis*

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$$

eine Basis des Dualraums.

Beweis. Es sei

$$\sum_{j=1}^{n} a_j v_j^* = 0$$

mit $a_j \in K$. Wenn wir diese Linearform auf v_i anwenden, ergibt sich direkt

$$a_i = 0.$$

Die $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sind also linear unabhängig. Nach Korollar 13.12 besitzt der Dualraum die Dimension n, daher muss bereits eine Basis vorliegen. □

Lemma 14.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ und der Dualbasis*

$$v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*.$$

Dann gilt für jeden Vektor $v \in V$ die Gleichheit

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) v_i.$$

D.h. die Linearformen v_i^* ergeben die Skalare (Koordinaten) eines Vektors bezüglich einer Basis.

Beweis. Der Vektor v hat eine eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{j=1}^{n} s_j v_j$$

mit $s_i \in K$. Die rechte Seite der behaupteten Gleichheit ist somit

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} s_j v_j \right) v_i = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i = v.$$

□

Lemma 14.12. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit der Dualbasis $v_1^*, \ldots, v_n^*$. Es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine weitere Basis mit*

$$w_r = \sum_{k=1}^{n} a_{kr} v_k.$$

Dann ist

$$w_j^* = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^*,$$

wobei $(b_{ij})_{ij} = (A^{-1})^{tr}$ *die Transponierte der inversen Matrix von* $A = (a_{kr})_{kr}$ *ist.*

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^*\right)(w_r) &= \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} v_i^*\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kr} v_k\right) \\ &= \sum_{1 \leq i,k \leq n} b_{ij} a_{kr} v_i^*(v_k) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ir}.\end{aligned}$$

Hier steht das „Produkt“ aus der j-ten Spalte von B und der r-ten Spalte von A, also das Produkt aus der j-ten Zeile von $B^{\text{tr}} = A^{-1}$ und der r-ten Spalte von A. Bei $r = j$ ist dies 1 und bei $r \neq j$ ist dies 0. Daher stimmt die angegebene Linearform mit w_j^* überein. □

Mit Basiswechselmatrizen kann man dies auch als

$$M_{\mathfrak{v}^*}^{\mathfrak{w}^*} = ((M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}})^{-1})^{\text{tr}} = (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}})^{\text{tr}}$$

ausdrücken.

Beispiel 14.13. Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis e_1, e_2, seiner Dualbasis e_1^*, e_2^* und die Basis bestehend aus $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wir wollen die Dualbasis u_1^* und u_2^* als Linearkombinationen der Standarddualbasis ausdrücken, also in

$$u_1^* = ae_1^* + be_2^*$$

(bzw in $u_2^* = ce_1^* + de_2^*$) die Koeffizienten a und b (bzw. c und d) bestimmen. Dabei ist $a = u_1^*(e_1)$ und $b = u_1^*(e_2)$. Um dies berechnen zu können, müssen wir e_1 und e_2 als Linearkombination der u_1 und u_2 ausdrücken. Dies ist

$$e_1 = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$e_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$a = u_1^*(e_1) = u_1^*\left(\frac{3}{7}u_1 - \frac{1}{7}u_2\right) = \frac{3}{7}$$

und entsprechend

$$b = u_1^*(e_2) = u_1^*\left(\frac{1}{7}u_1 + \frac{2}{7}u_2\right) = \frac{1}{7}$$

und somit ist

$$u_1^* = \frac{3}{7}e_1^* + \frac{1}{7}e_2^*.$$

Mit den gleichen Rechnungen ergibt sich

$$u_2^* = -\frac{1}{7}e_1^* + \frac{2}{7}e_2^*.$$

Die Übergangsmatrix von u^* zu e^* ist daher

$$M_{\mathfrak{e}^*}^{\mathfrak{u}^*} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix davon ist

$$\left(M_{\mathfrak{e}^*}^{\mathfrak{u}^*}\right)^{\text{tr}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \left(M_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{u}}\right)^{-1}.$$

Die umgekehrte Aufgabe, die Standarddualbasis durch u_1^* und u_2^* auszudrücken, ist einfacher zu lösen, da man dies aus der Darstellung der u_i bezüglich der Standardbasis direkt ablesen kann. Es ist

$$e_1^* = 2u_1^* + u_2^*$$

und

$$e_2^* = -u_1^* + 3u_2^*,$$

wie man überprüft, wenn man beidseitig an u_1, u_2 auswertet.

Die Spur

Definition 14.14. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt

$$\text{Spur}\,(M) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur* von M.

Definition 14.15. Es sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man Spur (M) die *Spur* von φ, geschrieben Spur (φ).

Nach Aufgabe 14.12 ist dies unabhängig von der gewählten Basis. Die Spur ist eine Linearform auf dem Vektorraum der quadratischen Matrizen bzw. auf dem Vektorraum der Endomorphismen.