MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck** zu München. Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XXXII. Band.

Mit drei lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

1888, Aug. 8 – Nov. 15.

Haven fund.

Inhalt des zweiunddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XXXII. Band. 1. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade.

Von

L. Kiepert in Hannover.

Bei den Untersuchungen über Transformation der elliptischen Functionen hat man sich, was die wirkliche Ausführung der Rechnungen betrifft, bisher meist auf den Fall beschränkt, wo der Transformationsgrad n eine *Primzahl* ist. Man unterliess es, die *zusammengesetzten* Zahlen noch besonders zu behandeln, weil man im Allgemeinen eine Transformation vom Grade ab erhält, indem man zuerst eine Transformation a^{ten} Grades und dann eine Transformation b^{ten} Grades ausführt.

Ausserdem häufen sich bei den bisher gebräuchlichen Methoden die Schwierigkeiten, welche die Ausführung der numerischen Rechnungen bietet, ungemein, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist, weil dann der Grad der Modulargleichungen noch schneller wächst als der Transformationsgrad. So ist z. B. für $n = 30$ bei Anwendung der Jacobi'schen Bezeichnungen der Grad der Modulargleichung zwischen u und v in Bezug auf *jede* dieser beiden Veränderlichen gleich

$$(2+1)(3+1)(5+1) = 72.$$

Trotzdem ist diese Beschränkung des Transformationsproblems auf *Primzahlen* eine schädliche gewesen, denn erstens gewinnen die algebraischen Beziehungen, welche bei dieser Aufgabe auftreten, erhöhtes Interesse, wenn man zusammengesetzte Werthe von n berücksichtigt, und zweitens gewähren diese algebraischen Beziehungen auch Mittel, um die Rechnungen, welche für die Transformation vom Grade ab nothwendig sind, wesentlich einfacher zu gestalten als bei dem oben angedeuteten schrittweisen Vorgehen. Diese Mittel sollen in der hier folgenden Abhandlung angegeben werden.

Es besteht nämlich zwischen der absoluten Invariante J*) der

---

*) Die Bezeichnung J ist von Herrn Klein in seiner Abhandlung: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades" (Math. Annalen, Band XIV, S. 111—172) eingeführt worden. Dabei ist

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2},$$

wo g_2 und g_3 die von Herrn Weierstrass benutzten Invarianten sind.

gegebenen elliptischen Function und der absoluten Invariante $\bar{J}$ der transformirten Function eine Gleichung, deren Rang*) ϱ leicht bestimmt werden kann und im Verhältniss zum Grade dieser Gleichung klein ist. Deshalb giebt es nach bekannten Sätzen aus der Algebra Hülfsgrössen ξ, welche dem Rationalitätsbereiche $(J, \bar{J})$ angehören (d. h. welche rationale Functionen von J und $\bar{J}$ sind), und die Eigenschaft besitzen, dass die Gleichungen

$$(1) \qquad F(\xi, J) = 0 \quad \text{und} \quad F_1(\xi, \bar{J}) = 0,$$

welche zwischen ξ und J, bez. zwischen ξ und $\bar{J}$ bestehen, in Bezug auf J und $\bar{J}$ von niedrigerem Grade sind als die Gleichung zwischen J und $\bar{J}$.

In den Fällen, wo $\varrho = 0$ ist, d. h. in den Fällen, wo n eine der Primzahlen

$$2, 3, 5, 7, 13,$$

oder eine der zusammengesetzten Zahlen

$$4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 25$$

ist, kann man sogar J und $\bar{J}$ als *rationale* Functionen einer solchen Hülfsgrösse ξ darstellen, und zwar fanden Herr Klein in der oben erwähnten Abhandlung und Herr Gierster in einer daran anschliessenden „Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrade" (Math. Annalen, Band XIV, S. 537—544) eine solche Darstellung auf *rein algebraischem* Wege.

Eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens für die Fälle, in denen der Rang $\varrho = 1$ ist, lag sehr nahe. Da giebt es solche Hülfsgrössen ξ, für welche die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\bar{J}$ nur noch vom *zweiten* Grade sind. Die Auflösung der Gleichung (1) liefert dann eine Darstellung von J und $\bar{J}$ als *rationale* Functionen von ξ und von einer Quadratwurzel aus einer Function *dritten* oder *vierten* Grades von ξ. Die Versuche aber, eine solche Hülfsgrösse ξ auf *rein algebraischem* Wege zu finden, waren trotz der eifrigsten Bemühungen ganz vergeblich. Erst durch Mittel, welche die Theorie der elliptischen Functionen selbst bietet, ist es mir gelungen, diese Aufgabe für $\varrho = 1$, und ebenso die grösseren Werthen von ϱ entsprechende Aufgabe zu lösen**).

---

*) Die Bezeichnung „*Rang*" rührt von Herrn Weierstrass her und ist gleichbedeutend mit dem Ausdruck „Geschlecht", den Clebsch einführte. Die Zahl ϱ hat hier also denselben Werth wie bei Riemann die Zahl p.

**) Die zahlreichen weiteren Arbeiten, welche Herr Klein und seine Schüler über Transformation der elliptischen Functionen veröffentlicht haben (vergl. insbesondere das Referat in Bd. 26 dieser Annalen, S. 455—464), kommen für diese Entwicklungen nicht unmittelbar in Betracht, insofern es sich in ihnen nur ganz

Für $\varrho = 2$ z. B. giebt es nach Riemann (Seite 116 der ges. Werke) solche Hülfsgrössen ξ, für welche die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\bar{J}$ nur vom *zweiten* Grade werden, und andere Hülfsgrössen η, für welche die Gleichungen

(2) $$F_2(\eta, J) = 0 \quad \text{und} \quad F_3(\eta, \bar{J}) = 0$$

in Bezug auf J und $\bar{J}$ vom *dritten* Grade sind. Hierbei besteht zwischen ξ und η eine Gleichung, welche in Bezug auf ξ vom *dritten* und in Bezug auf η vom *zweiten* Grade ist. Ausserdem sind nicht nur ξ und η *rationale* Functionen von J und $\bar{J}$, sondern auch J und $\bar{J}$ sind *rationale* Functionen von ξ und η, oder, was auf dasselbe hinauskommt, sie sind rationale Functionen von ξ und von der Quadratwurzel aus einer Function *fünften* oder *sechsten* Grades von ξ.

Ist $\varrho > 2$ und *gerade*, so kann man den Grad der Gleichungen (1) nach Riemann auf $\frac{1}{2}(\varrho + 2)$, und ist $\varrho > 2$ und *ungerade*, so kann man den Grad auf $\frac{1}{2}(\varrho + 3)$ herabdrücken. In besonderen Fällen erniedrigt sich der Grad der Gleichungen (1) sogar noch weiter.

Eine solche Hülfsgrösse ξ möge in dem Folgenden ein „*Parameter*" und der Grad der Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\bar{J}$ möge der „*Charakter*" des Parameters ξ genannt werden.

Gelingt es also, Parameter mit möglichst niedrigem Charakter zu bestimmen, so erkennt man ohne Weiteres, wie sehr das Transformationsproblem dadurch vereinfacht werden kann, denn der Grad der Gleichungen, durch welche die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ gegeben wird, ist *wesentlich* kleiner als bei den Gleichungen, welche man bisher zur Vermittelung dieser Beziehung benutzte.

Dabei ist es für zusammengesetzte Transformationsgrade gar nicht nöthig, von der Herstellung der Gleichungen (1) auszugehen, man kommt vielmehr weit schneller zum Ziele, wenn man *mehrere* Parameter mit möglichst niedrigem Charakter bildet, die Form der Gleichungen feststellt, welche zwischen je zweien unter ihnen besteht, und die noch unbestimmten Zahlcoefficienten dadurch ausrechnet, dass man die beiden Parameter nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{n}} = s$ ent-

---

beiläufig um die Aufstellung der zwischen J und $\bar{J}$ bestehenden Gleichung handelt. Immerhin besteht zwischen diesen Arbeiten und meiner Untersuchung eine Uebereinstimmung im Princip: hier wie dort handelt es sich darum, bei der Construction von Gleichungssystemen auch im Falle höheren Ranges den Anschluss an die Theorie der algebraischen Functionen zu bewahren, andererseits geeignete Irrationalitäten der eigentlichen Theorie der elliptischen Functionen zu entnehmen. Vergl. insbesondere die Dissertation von Herrn Fricke (Leipzig 1886): *Ueber Systeme elliptischer Modulfunctionen von niederer Stufenzahl.*

wickelt. Aus diesen Gleichungen ergeben sich dann die Gleichungen (1) fast ohne Rechnung.

Um dieses Verfahren sogleich durch ein paar einfache Beispiele zu erläutern, betrachte man die Transformation vom Grade 12 und vom Grade 18. In beiden Fällen werden die Gleichungen (1) in Bezug auf J und $\bar{J}$ vom *ersten* Grade, aber in Bezug auf ξ werden sie für $n = 12$ vom Grade 24, für $n = 18$ vom Grade 36. Wollte man daher die Gleichungen (1) direct bilden, so würde die Rechnung doch noch ziemlich umfangreich sein. Benutzt man dagegen den Umstand, dass man mehrere Parameter mit dem Charakter 1 angeben kann, und dass zwischen je zweien von ihnen, ξ_α und ξ_β, eine Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0$$

besteht, so kann man die Zahlcoefficienten a, b, c, d in wenigen Minuten durch Reihenentwickelung berechnen. Ist dann die Transformation für irgend einen Factor von n (z. B. für 2 oder für 3) bekannt, so ergiebt sich aus diesen linearen Gleichungen, wie später gezeigt werden soll, ohne Weiteres auch die Darstellung von J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von ξ_α oder von ξ_β.

Wenn auch die Rechnung in den Fällen, wo $\varrho > 0$ ist, nicht ganz so einfach wird wie in den eben besprochenen Beispielen, so war es doch dem Verfasser möglich, die im ersten Theile der Abhandlung hergeleitete Methode im zweiten Theile auf eine grosse Anzahl von Beispielen anzuwenden.

Nachdem nämlich in den *beiden ersten* Abschnitten die Eigenschaften der Transformationsgleichungen und der Parameter, (welche Wurzeln gewisser Transformationsgleichungen sind), untersucht worden sind, werden im *dritten* Abschnitte die Transformationen vom Grade 2, 4, 8, 16 und allgemein vom Grade 2^α erledigt.

Im *vierten* Abschnitte folgen dann die Transformationen vom Grade 3, 9, 27, 81, 243 und allgemein vom Grade 3^α.

Die Potenzen von Primzahlen a, welche von 2 und 3 verschieden sind, werden im *fünften* Abschnitte berücksichtigt, namentlich die Transformationen vom Grade 5, 25, 125, 7 und 49.

Der *sechste* Abschnitt behandelt allgemein die Transformationen vom Grade $2a$ und erledigt die besonderen Fälle

$$n = 6,\ 10,\ 14,\ 22 \text{ und } 26.$$

Ausserdem ist hier noch die Transformation 11ten Grades untersucht worden. Für $n = 11$ wird nämlich $\varrho = 1$, so dass es Parameter mit dem Charakter 2 geben muss. Das Auffinden solcher Parameter ist dem Verfasser aber erst dadurch geglückt, dass er die Transformation

22^{ten} Grades zu Hülfe nahm. Da für andere Primzahlen Aehnliches gilt, so ist dieser Umstand ein weiterer Beleg dafür, dass man das Transformationsproblem durchaus nicht auf *Primzahlen* beschränken darf, dass vielmehr erst die *zusammengesetzten* Zahlen die hinreichenden Hülfsmittel zur befriedigenden Lösung dieses Problems bieten.

Im *siebenten* Abschnitte werden die Transformationen vom Grade $4a$, insbesondere vom Grade 12, 20 und 28 ausgeführt.

Daran schliessen sich im *achten* Abschnitte die Transformationen vom Grade $8a$, $16a$, allgemein vom Grade $2^\alpha a$ mit den besonderen Fällen

$$n = 24,\ 48,\ 96, \ldots 40,\ 80, \ldots.$$

Die Transformation vom Grade $3a$ wird im *neunten* Abschnitte durch die besonderen Fälle $n = 15$ und $n = 21$, und die Transformation vom Grade $9a$ wird im *zehnten* Abschnitte durch die besonderen Fälle $n = 18$ und $n = 45$ erläutert.

Schliesslich handelt der *elfte* Abschnitt noch von der Transformation $6a^{\text{ten}}$ Grades, wofür der Fall $n = 30$ als Beispiel dient.

Bei diesen Anwendungen gelingt es häufig noch, die Resultate in besonders elegante Form zu bringen. Während nämlich die allgemeine Aufgabe nach den vorstehenden Angaben so lauten würde: „Man soll J und $\bar{J}$ als *rationale* Functionen *zweier* Parameter mit möglichst niedrigem Charakter darstellen, so dass die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ durch die viel einfachere Beziehung zwischen diesen Parametern ersetzt wird," kann man in vielen Fällen J als *rationale* Function *eines einzigen* Parameters ξ, und $\bar{J}$ als *dieselbe rationale* Function eines zweiten Parameters $\bar{\xi}$ darstellen, wobei dann zwischen ξ und $\bar{\xi}$ eine verhältnissmässig einfache Beziehung stattfindet.

Mit den durchgeführten Beispielen ist die Zahl der leicht zu bewältigenden Anwendungen durchaus nicht erschöpft; aber der Umfang der Abhandlung wäre zu gross geworden, hätte man noch mehr besondere Fälle herangezogen. Auch wird nicht das Hauptgewicht auf die Durchführbarkeit zahlreicher Beispiele gelegt, sondern auf die algebraischen Beziehungen, welche mit der angegebenen Methode in Zusammenhang stehen. Man hat es nämlich hier mit „Klassen" algebraischer Gleichungen zu thun, deren Verzweigung der Untersuchung leichter zugänglich ist als in den meisten bisher bekannten Beispielen. Ebenso finden die hier erläuterten Methoden, wie ich später zu zeigen hoffe, umfangreiche Verwendung bei der *complexen Multiplication der elliptischen Functionen.*

Was die Bezeichnungen betrifft, so werde ich ebenso wie in meinen früheren Arbeiten die Theorie der elliptischen Functionen nach den Methoden von Herrn Weierstrass zu Grunde legen. Da sich aber die hier folgenden Untersuchungen eng an meine Abhandlung: „Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen" (Math. Annalen, Bd. 26, S. 369—454)*) anschliessen, so sollen mehrere Bezeichnungen, welche ich dort erklärt habe, auch hier benutzt werden.

Dem primitiven Periodenpaare 2ω, $2\omega'$ sollen wieder die Grössen

$$(3)\qquad h = e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}},\quad Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}) = Q$$

entsprechen. Vertauscht man das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit einem äquivalenten

$$(4)\quad 2\varpi = 2p\omega + 2q\omega',\ 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega',\ (pq'-p'q = +1),$$

so ändert sich $Q(\omega, \omega')^{24}$ gar nicht, denn es ist

$$(5)\qquad Q(\varpi, \varpi')^{24} = Q(\omega, \omega')^{24} = \Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Ferner war

$$(6)\qquad f(n) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')^n},\quad L(n) = Q^{n-1}f(n),$$

es wird also, abgesehen von einer 24ten Wurzel der Einheit,

$$(6a)\qquad L(n) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}.$$

Noch etwas einfacher werden mehrere Ausdrücke in meiner vor. Abh., wenn man die von Herrn Weierstrass definirte Function σu für den vorliegenden Zweck durch eine andere Function, nämlich durch

$$(7)\qquad \tau(u) = \tau(u\,|\,\varpi, \varpi') = e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\bar{\omega}}}\sigma(u\,|\,\varpi, \varpi')$$

ersetzt.**) Dabei ist

---

*) Diese Abhandlung wird daher in dem Folgenden öfters zu erwähnen sein. Deshalb soll sie nicht immer mit dem ausführlichen Titel, sondern nur durch die Worte: „meine vorige Abhandlung" oder noch kürzer: „m. vor. Abh." citirt werden.

**) Aus einer mündlichen Mittheilung des Herrn Weierstrass schliesse ich, dass er bei seinen eigenen, nicht veröffentlichten Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Functionen vermuthlich denselben oder doch einen ähnlichen Ausdruck wie $\tau(u)$ benutzt. Nach den Bezeichnungen von Jacobi (ges. Werke, Bd. 1, S. 501) wird

$$\tau(u\,|\,\varpi, \varpi') = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{Q(\varpi, \varpi')^3}\,\vartheta_1\left(\frac{u}{2\varpi},\ e^{\frac{\bar{\omega}'\pi i}{\bar{\omega}}}\right).$$

(4a) $$2\bar{\eta} = 2p\eta + 2q\eta', \quad 2\bar{\eta}' = 2p'\eta + 2q'\eta'.$$

Es folgt dann aus der bekannten Formel

$$\sigma(u+2\bar{\omega}) = (-1)^{pq+p+q} e^{2\bar{\eta}(u+\bar{\omega})} \sigma u,$$

weil in diesem Falle $pq + p + q$ immer eine *ungerade* Zahl ist,

(8) $$\tau(u+2\bar{\omega}) = -\tau(u), \quad \tau(2\bar{\omega}-u) = -\tau(-u) = \tau(u),$$

und wenn man

$$u = \frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}$$

setzt,

(9) $$\begin{cases} \tau\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right) = e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \bar{\eta}\bar{\omega}} \sigma\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right), \\ \tau\left(\frac{2(n-\alpha)\bar{\omega}}{n}\right) = \tau\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right), \quad \tau\left(\frac{2(n+\alpha)\bar{\omega}}{n}\right) = -\tau\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right). \end{cases}$$

Der Vortheil, welchen diese Function $\tau(u)$ für die Transformation der elliptischen Functionen bietet, ergiebt sich z. B. schon aus den folgenden Formeln. Nach Gleichung (17a) m. vor. Abh. war für $n = 2m + 1$

(10) $$\bar{\sigma}(u) = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\bar{\omega}}{n}, \bar{\omega}'\right) = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2} \sigma(u)^n \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right)\right];\text{*)}$$

führt man aber die Functionen $\tau(u)$ und $\bar{\tau}(u)$ statt $\sigma(u)$ und $\bar{\sigma}(u)$ ein, so erhält diese Gleichung die einfachere Form

(10a) $$\bar{\tau}(u) = \tau\left(u \,\middle|\, \frac{\bar{\omega}}{n}, \bar{\omega}'\right) = \tau(u)^n \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right)\right].$$

Ist n eine *gerade* Zahl, also $n = 2m + 2$, so wird nach Gleichung (17b) m. vor. Abh.

(11) $$\bar{\sigma}(u) = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\bar{\omega}}{n}, \bar{\omega}'\right) = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2} \sigma_\lambda(u)\sigma(u)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{m} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\bar{\omega}}{n}\right)\right],$$

eine Gleichung, welche durch Einführung der Functionen $\tau(u)$ und $\bar{\tau}(u)$ die einfachere Form

---

*) Hierbei genügt die Grösse B_1 der Gleichung

$$2B_1\bar{\omega} = 2n(\bar{\eta} - \bar{\bar{\eta}}),$$

in der $\bar{\eta}$ aus $\bar{\bar{\eta}}$ entsteht, indem man das primitive Periodenpaar $2\bar{\omega}, 2\bar{\omega}'$ mit

$$2\bar{\bar{\omega}} = \frac{2\bar{\omega}}{n}, \quad 2\bar{\bar{\omega}}' = 2\bar{\omega}',$$

vertauscht. Ersetzt man nun in Gleichung (10) das Argument u durch

$$u + 2\bar{\omega} = u + 2n\bar{\bar{\omega}},$$

so erhält man ohne Schwierigkeit den angegebenen Werth von B_1. In gleicher Weise wird B_1 für *gerade* Werthe von n erklärt.

$$(11\text{a})\quad \bar{\tau}(u) = \tau\left(u \,\middle|\, \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \tau_\lambda(u)\,\tau(u)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp(u) - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]$$

annimmt. Dabei geht $\tau_\lambda(u)$ in ähnlicher Weise aus $\sigma_\lambda(u)$ hervor, wie $\tau(u)$ aus $\sigma(u)$, es ist nämlich

$$(12)\qquad \tau_\lambda(u) = \tau_\lambda(u|\varpi, \varpi') = e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\bar{\omega}}}\sigma_\lambda(u) = \frac{\tau(\varpi - u)}{\tau(\varpi)}.$$

Aus Gleichung (24) m. vor. Abh. folgt sodann, dass die Grösse, welche dort $\sigma_{ap, aq}$ genannt wurde, mit $-\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ identisch ist, so dass also

$$(13)\qquad \sigma_{\alpha p, \alpha q} = -\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$$

wird, wodurch die Gleichungen (26) und (32) ebendaselbst die einfachere Form

$$(14)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right) = \frac{\tau\left(\frac{2(\beta-\alpha)\varpi}{n}\right)\tau\left(\frac{2(\beta+\alpha)\varpi}{n}\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2 \tau\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)^2},$$

$$(15)\qquad f(n)^2 = f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^2 = \prod_{\alpha=1}^{n-1}\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$$

erhalten.

Erster Theil.

Allgemeine Untersuchungen.

I. Abschnitt.

Eigenschaften der Transformationsgleichungen.

§ 1.

Zurückführung der reducirten Theilungsgleichung auf Transformationsgleichungen.*)

Es sei n eine beliebig zusammengesetzte Zahl, also

$$(16)\qquad n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

und es seien wieder die Zahlen $\varphi(n)$ und $T(n)$ definirt durch die Gleichungen

*) Was hier unter der *reducirten Theilungsgleichung* zu verstehen ist, findet sich in § 2 m. vor. Abh.

$$(17)\qquad \begin{cases} \varphi = \varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots, \\ T = T(n) = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots; \end{cases}$$

ferner sei wieder

$$(18)\qquad w = w_{\lambda,\mu} = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n},$$

wobei die beiden ganzen Zahlen λ und μ keinen Factor gemein haben sollen, der auch ein Factor von n ist, dann gilt bekanntlich der Satz:

I. *Ist S eine symmetrische Function der $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$, wo l alle Werthe annimmt, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$, so ist S die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.*

Der Satz hat nur einen Sinn, wenn n von 2 verschieden ist, und kann dann bewiesen werden, wie folgt:

Da l relativ prim ist zu n, so gehören die Grössen $\wp(lw)$ sämmtlich zu dem reducirten System der Theilwerthe von $\wp(u)$ (vergl. § 2 m. vor. Abh.); ihre Anzahl ist daher $\frac{1}{2}\varphi(n)$. Dieselben Theilwerthe, nur in anderer Aufeinanderfolge, erhält man, indem man w mit mw vertauscht, wenn m zu n relativ prim ist. Es sind nämlich die $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Theilwerthe $\wp(lmw)$ sämmtlich von einander verschieden, weil aus

$$\wp(l_1 mw) = \wp(l_2 mw)$$

folgen würde, dass

$$l_1 mw \mp l_2 mw = mw(l_1 \mp l_2) = 2p\omega + 2q\omega'$$

eine ganze Periode wäre. Dies ist aber nur möglich, wenn $l_1 \mp l_2$ durch n theilbar ist, d. h. wenn

$$\wp(l_1 w) = \wp(l_2 w).$$

Sind die ganzen Zahlen l und m gegeben, so kann man aber immer eine ganze Zahl l_1, welche kleiner als $\frac{n}{2}$ ist, so bestimmen, dass

$$l_1 m \mp l \equiv 0 \pmod{n}$$

und deshalb

$$\wp(l_1 mw) = \wp(lw)$$

wird. Da nun $\wp(lu)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist, so kann S auch als eine rationale Function von $\wp(w)$ allein dargestellt werden. Deshalb ist

$$S = R(\wp(w))$$

sicher die Wurzel einer Gleichung

$$(19)\qquad F(S, g_2, g_3) = 0,$$

deren Grad in Bezug auf S gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$ ist, und deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Setzt man nämlich für $\wp(w)$ die sämmtlichen Theilwerthe des reducirten Systems und bildet die zugehörigen Werthe von $R(\wp(w))$, so sind die symmetrischen Functionen von diesen $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$ Grössen rationale Functionen von g_2 und g_3. Deshalb entsprechen auch die Wurzeln der Gleichung (19) den $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$ verschiedenen Theilwerthen des reducirten Systems.

In diesem Falle sind aber je $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Wurzeln einander gleich, denn S ändert sich gar nicht, wenn man $\wp(w)$ mit $\wp(mw)$ vertauscht. Man erhält daher, von welchem Werthe w man auch ausgehen mag,

$$S = R(\wp(w)) = R(\wp(mw)),$$

wobei m alle Werthe annehmen darf, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$; folglich muss $F(S, g_2, g_3)$ die $\frac{1}{2}\varphi(n)^{\text{te}}$ Potenz einer *ganzen* rationalen Function von S sein, die nur noch vom Grade $T(n)$ ist, d. h. S ist die Wurzel einer Gleichung T^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Dieser Satz findet sich auch in der inhaltsreichen Abhandlung von Herrn H. Weber: „Zur Theorie der elliptischen Functionen" (Acta mathematica, Bd. 6, S. 375), natürlich mit der Modification, dass es sich dort nicht um symmetrische Functionen der $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$, sondern um symmetrische Functionen der $\varphi(n)$ Grössen $\sin \operatorname{am}(s\Omega)$ handelt, wobei

$$\Omega = \frac{4\mu K + 4\mu' K'}{n}$$

ist und s alle zu n relativ primen Zahlen durchläuft, die kleiner als n sind. Deshalb sind dann auch die Coefficienten der Gleichung bei Herrn Weber rationale Functionen von k^2.

Herr Weber nennt eine solche Gleichung *eine zum Transformationsgrad n* (oder kurz *zu n*) *gehörige Transformationsgleichung.*

Diese Bezeichnung soll auch hier benutzt werden, und ebenso die beiden Sätze, welche Herr Weber für solche Transformationsgleichungen angiebt, nämlich:

II. *Jede Transformationsgleichung ist entweder irreducibel oder sie ist die Potenz einer irreduciblen Gleichung.*

III. *Durch die Wurzeln einer beliebigen irreduciblen Transformationsgleichung sind die entsprechenden Wurzeln aller Transformationsgleichungen rational darstellbar.*

Der Beweis dieser Sätze ist für die vorliegende Modification ganz in derselben Weise zu führen möglich wie bei Herrn Weber, soll aber erst bei der hier folgenden Verallgemeinerung gegeben werden.

Der Begriff der Transformationsgleichung lässt sich nämlich noch wesentlich erweitern. Schon in § 3 m. vor. Abh. hatte ich folgenden Satz bewiesen:

IV. *Ist $C_{\lambda,\mu}$ eine cyklische Function von $\wp(w), \wp(kw), \ldots \wp(k^{\varkappa-1}w)$, wo w wieder gleich $w_{\lambda,\mu}$ und wo $\varkappa$ die kleinste Zahl ist, für welche $k^{\varkappa} \equiv \pm 1 \pmod{n}$ ist, so wird $C_{\lambda,\mu}$ die Wurzel einer Gleichung vom Grade $\frac{1}{2\varkappa}\varphi(n)\,T(n)$, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.*

Ist n oder $\frac{n}{2}$ die Potenz einer Primzahl p, die von 2 verschieden ist, oder hat n einen der Werthe 2 und 4, so giebt es primitive Wurzeln g von n. Setzt man in diesem Falle $k = g$, so wird $2\varkappa$ gleich $\varphi(n)$ und $C_{\lambda,\mu}$ die Wurzel einer Resolvente vom Grade $T(n)$, welche dieselben Eigenschaften besitzt wie eine Transformationsgleichung. Auch in einigen anderen Fällen kann man durch *einmalige* Anwendung des Satzes IV Resolventen vom Grade $T(n)$ bilden. Wenn dies aber nicht möglich ist, wenn man also auf diesem Wege nur Resolventen erhält, deren Grad ein *Vielfaches* von $T(n)$ ist, so lässt sich folgendes Verfahren einschlagen.

Da $2\varkappa < \varphi(n)$ ist, so kann man unter den Zahlen, die zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$, eine Zahl s so auswählen, dass sie den $2\varkappa$ Zahlen

$$\pm 1, \pm k, \pm k^2, \ldots \pm k^{\varkappa-1}$$

modulo n *nicht* congruent ist. Es sind dann die $\varkappa$ Grössen

(20) $$\wp(sw), \wp(ksw), \wp(k^2sw), \ldots \wp(k^{\varkappa-1}sw)$$

von einander und von den $\varkappa$ Grössen

(21) $$\wp(w), \wp(kw), \wp(k^2w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1}w)$$

verschieden. Wäre nämlich

$$\wp(k^{\alpha}sw) = \wp(k^{\beta}sw)$$

und ist z. B. $\alpha < \beta$, so müsste

$$k^{\alpha}sw \mp k^{\beta}sw = k^{\alpha}sw(1 \mp k^{\beta-\alpha}) = 2p\omega + 2q\omega'$$

eine ganze Periode sein. Da w aber den Nenner n hat, und die Zahlen k und s zu n relativ prim sind, so müsste

$$k^{\beta-\alpha} \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

sein, und dies ist unmöglich, da α und β beide kleiner als n sind.

Wäre dagegen

(22) $$\wp(k^{\alpha}sw) = \wp(k^{\beta}w),$$

so kann man auch hier voraussetzen, dass $\alpha < \beta$ ist, denn wäre $\alpha > \beta$, so könnte man β mit $\beta + \varkappa$ vertauschen. In beiden Fällen ist

$$0 < \beta - \alpha < \varkappa.$$

Aus Gleichung (22) würde folgen, dass

$$k^\alpha sw \mp k^\beta w = k^\alpha w (s \mp k^{\beta-\alpha}) = 2p\omega + 2q\omega'$$

eine ganze Periode ist, dass also $s \mp k^{\beta-\alpha}$ durch n theilbar ist. Dies widerstreitet aber der Wahl von s.

Bildet man jetzt die Grössen

$$(23) \qquad \wp(s^2 w),\ \wp(ks^2 w),\ \wp(k^2 s^2 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} s^2 w),$$

so können zwei Fälle eintreten. Entweder ist $\wp(s^2 w)$ eine der Grössen $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2 w)$, ... $\wp(k^{\varkappa-1} w)$ in der Reihe (21), oder $\wp(s^2 w)$ ist von ihnen verschieden. Im ersten Falle ist die Reihe (23) nur eine cyklische Vertauschung der Reihe (21); im zweiten Falle aber enthalten die Reihen (20), (21) und (23) lauter *verschiedene* Theilwerthe des $\wp$, was man in ähnlicher Weise zeigen kann, wie es vorhin bei den Reihen (20) und (21) geschehen ist.

Bildet man in dem zweiten Falle noch die Reihe

$$(24) \qquad \wp(s^3 w),\ \wp(ks^3 w),\ \wp(k^2 s^3 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} s^3 w),$$

so können wieder zwei Fälle eintreten: Entweder ist die Reihe (24) nur eine cyklische Vertauschung der Reihe (21), oder sie enthält lauter Theilwerthe von $\wp$, die in den vorhergehenden Reihen noch nicht enthalten sind. In dem zweiten Falle ist das Verfahren noch weiter fortzusetzen, schliesslich wird man aber immer zu einer Reihe

$$(25) \qquad \wp(s^\sigma w),\ \wp(ks^\sigma w),\ \wp(k^2 s^\sigma w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} s^\sigma w)$$

kommen müssen, welche nur eine cyklische Vertauschung der Reihe (21) ist. Bezeichnet man mit σ die kleinste Zahl, welche dieser Forderung entspricht, so muss $2\varkappa\sigma$ ein Theiler von $\varphi(n)$ sein, denn die $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta w)$ sind sämmtlich Grössen von der Form $\wp(lw)$, wo l alle Zahlen durchläuft, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2}$, so dass $\wp(lw)$ im Ganzen $\frac{1}{2}\varphi(n)$ verschiedene Werthe hat. Wenn nun $\varkappa\sigma$ nicht *gleich*, sondern *kleiner* ist als $\frac{1}{2}\varphi(n)$, so wähle man l_1 so, dass $\wp(l_1 w)$ von den $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta w)$ verschieden ist. Vertauscht man jetzt w mit $l_1 w$, so erhält man ein zweites System von $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta l_1 w)$, welche von einander und von den $\varkappa\sigma$ Grössen des ersten Systems verschieden sind.

Entweder sind damit die $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$ erschöpft, so dass $2\varkappa\sigma = \frac{1}{2}\varphi(n)$ wird, oder man kann durch passende Wahl von l_2

noch ein drittes System von $\varkappa\sigma$ Grössen $\wp(k^\alpha s^\beta l_2 w)$ bilden und so fortfahren, bis sämmtliche Grössen $\wp(lw)$ vorgekommen sind.

Braucht man im Ganzen m solche Systeme, so ist also

$$\frac{1}{2}\varphi(n) = m\varkappa\sigma,$$

folglich ist $\frac{1}{2}\varphi(n)$ ein Vielfaches von $\varkappa\sigma$.

Bezeichnet man jetzt mit $C^{(\alpha)}$ die cyklische Function der Grössen $\wp(s^\alpha w)$, $\wp(ks^\alpha w)$, $\wp(k^2 s^\alpha w)$, ... $\wp(k^{\varkappa-1}s^\alpha w)$, welche aus $C_{\lambda,\mu}$ (oder kürzer aus C) durch Vertauschung von w mit $s^\alpha w$ hervorgeht, so kann man eine cyklische Function C' der cyklischen Functionen

(26) $$C,\ C^{(1)},\ C^{(2)}, \dots C^{(\sigma-1)}$$

bilden*) und kann C' wieder als eine cyklische Function der $\varkappa$ Grössen

$$\wp(w),\ \wp(kw),\ \wp(k^2 w), \dots \wp(k^{\varkappa-1}w)$$

betrachten, weil $\wp(s^\alpha u)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist. Deshalb kann man auf C' den Satz IV anwenden, nach welchem C' zunächst die Wurzel einer Resolvente vom Grade $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa}$ wird.

Bei dieser Resolvente sind aber je σ Wurzeln einander gleich, denn durch Vertauschung von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2w)$, ... $\wp(k^{\varkappa-1}w)$ mit $\wp(s^\alpha w)$, $\wp(k s^\alpha w)$, $\wp(k^2 s^\alpha w)$, ... $\wp(k^{\varkappa-1}s^\alpha w)$ geht C in $C^{(\alpha)}$, $C^{(1)}$ in $C^{(\alpha+1)}$, ... über, so dass sich die cyklische Function C' gar nicht ändert. Der Grad der Resolvente, von welcher C' abhängt, lässt sich also auf $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa\sigma}$ reduciren, und es gilt der Satz:

V. *Ist $C^{(\alpha)}$ eine cyklische Function der $\varkappa$ Grössen*

$$\wp(s^\alpha w),\ \wp(ks^\alpha w),\ \wp(k^2 s^\alpha w), \dots \wp(k^{\varkappa-1}s^\alpha w),$$

wo $\varkappa$ der kleinste Exponent ist, für welchen $k^\varkappa \equiv \pm 1$ modulo n wird, und ist C' eine cyklische Function der σ Functionen

$$C,\ C^{(1)},\ C^{(2)}, \dots C^{(\sigma-1)},$$

wo σ der kleinste Exponent ist, für welchen

$$s^\sigma \equiv \pm k^\alpha \ (mod.\ n)$$

wird, während α noch irgend einen der Werthe 0, 1, 2, ... $\varkappa - 1$ *haben darf, so ist C' die Wurzel einer Resolvente vom Grade $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa\sigma}$, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.*

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, muss man schliesslich zu einer Resolvente vom Grade $T(n)$ gelangen, die auch noch „*eine zu n gehörige Transformationsgleichung*" heissen soll.

*) Eine solche Function möge „*eine mehrfach cyklische Function von den Theilwerthen der $\wp$-Function*" heissen.

An Stelle der symmetrischen Functionen von $\wp(lw)$ im Satz I sind jetzt also ein oder mehrere Cyklen dieser Grössen getreten.

Die Sätze II und III gelten auch noch für den so erweiterten Begriff der Transformationsgleichung.

Dass nämlich eine solche Transformationsgleichung irreducibel oder die Potenz einer irreduciblen Gleichung ist, folgt daraus, dass sich g_2 und g_3 gar nicht ändern, wenn man das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega',\ 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega' \quad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht. Dagegen kann man die Zahlen p, q, p', q' so wählen, dass aus *einer* Wurzel der Transformationsgleichung *alle übrigen* durch solche Vertauschungen hervorgehen. Wenn also die Wurzel einer Transformationsgleichung irgend einer Gleichung genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind, so müssen derselben Gleichung auch alle übrigen Wurzeln der Transformationsgleichung genügen.

Sind ferner

$$x_1, x_2, \ldots x_T$$

die Wurzeln einer bestimmten Transformationsgleichung und

$$y_1, y_2, \ldots y_T$$

die entsprechenden Wurzeln irgend einer andern Transformationsgleichung, so sind auch

$$y_1 x_1^\alpha,\ y_2 x_2^\alpha, \ldots y_T x_T^\alpha$$

die Wurzeln einer Transformationsgleichung, denn x_1^α kann als eine Function von $\wp(w)$ allein angesehen werden, deren Werth sich gar nicht ändert, wenn man $\wp(w)$ mit einer der $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$ vertauscht. Dasselbe gilt von y_1, folglich auch von $y_1 x_1^\alpha$.

Deshalb sind die Ausdrücke

$$(27) \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_T = a_0, \\ y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_T x_T = a_1, \\ y_1 x_1^2 + y_2 x_2^2 + \cdots + y_T x_T^2 = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 x_1^{T-1} + y_2 x_2^{T-1} + \cdots + y_T x_T^{T-1} = a_{T-1} \end{cases}$$

als rationale Functionen von g_2 und g_3 darstellbar. Setzt man nun

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_T)$$

und

$$\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} = F_0(x_1) + xF_1(x_1) + x^2 F_2(x_1) + \cdots + x^{T-1} F_{T-1}(x_1),$$

so wird

$$(28) \quad y_1 F'(x_1) = a_0 F_0(x_1) + a_1 F_1(x_1) + a_2 F_2(x_1) + \cdots + a_{T-1} F_{T-1}(x_1).$$

Der Kürze wegen möge ein Ausdruck, welcher die Wurzel einer Transformationsgleichung ist, eine *Transformationsgrösse* heissen.

In ähnlicher Weise lässt sich auch der Satz beweisen:

VI. *Sind x_1 und y_1 beide cyklische Functionen von*

$$\wp(w),\ \wp(kw),\ \wp(k^2 w), \ldots \wp(k^{\varkappa-1} w),$$

so lässt sich y_1 als rationale Function von x_1 und den Invarianten g_2 und g_3 darstellen.

Ist nämlich $\nu = \frac{\varphi(n)\, T(n)}{2\varkappa}$, und sind

$$x_1,\ x_2, \ldots x_\nu$$

die Wurzeln der Resolvente für x, und

$$y_1,\ y_2, \ldots y_\nu$$

die entsprechenden Wurzeln der Resolvente für y, so sind die Ausdrücke

$$(29)\qquad \begin{cases} y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu = b_0, \\ y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_\nu x_\nu = b_1, \\ y_1 x_1^2 + y_2 x_2^2 + \cdots + y_\nu x_\nu^2 = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 x_1^{\nu-1} + y_2 x_2^{\nu-1} + \cdots + y_\nu x_\nu^{\nu-1} = b_{\nu-1} \end{cases}$$

als rationale Functionen von g_2 und g_3 darstellbar, weil $y_1 x_1^\alpha$ gleichfalls eine cyklische Function von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2w)$, ... $\wp(k^{\varkappa-1}w)$ ist. Setzt man also

$$G(x) = (x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_\nu)$$

und

$$\frac{G(x) - G(x_1)}{x - x_1} = G_0(x_1) + x G_1(x_1) + x^2 G_2(x_1) + \cdots + x^{\nu-1} G_{\nu-1}(x_1),$$

so wird

$$(30)\quad y_1 G'(x_1) = b_0 G_0(x_1) + b_1 G_1(x_1) + b_2 G_2(x_1) + \cdots + b_{\nu-1} G_{\nu-1}(x_1).$$

Man erkennt ohne Weiteres, wie man diesen Satz auch noch verallgemeinern kann auf zwei Grössen x_1 und y_1, welche *mehrfach cyklische Functionen* von Theilwerthen der $\wp$-Function sind.

§ 2.

Berechnung der Theilwerthe n^{ten} Grades der Function $\wp u$.

Wie nützlich die vorstehende Erweiterung des Satzes I von *symmetrischen* auf *cyklische* Functionen ist, erkennt man daraus, dass man jetzt sehr leicht die Theilwerthe der $\wp$-Function durch Wurzelausziehen berechnen kann, sobald man die Auflösung *einer* Transformationsgleichung besitzt. Nach Gleichung (28) kennt man dann die Auflösung *aller* Transformationsgleichungen und man kann (unter Beibehaltung der im vorigen Paragraphen erklärten Bezeichnungen) setzen für $\alpha = 0, 1, 2, \cdots \varkappa - 1$

$$(31)\quad C_\alpha = \left[\wp(w) + e^{\frac{2\alpha\pi i}{\varkappa}}\wp(kw) + e^{\frac{4\alpha\pi i}{\varkappa}}\wp(k^2w) + \cdots + e^{\frac{2(\varkappa-1)\pi i}{\varkappa}}\wp(k^{\varkappa-1}w)\right]^\varkappa.$$

Es sind dann $\sqrt[\varkappa]{C_0}, C_1, C_2, \cdots C_{\varkappa-1}$ *cyklische* Functionen von $\wp(w)$, $\wp(kw)$, $\wp(k^2w)$, $\cdots \wp(k^{\varkappa-1}w)$ und deshalb Wurzeln von Resolventen des $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa}$ten Grades. Aus den Gleichungen (31) folgt aber

$$(32)\quad \begin{cases} \varkappa\wp(w) = \sqrt[\varkappa]{C_0} + \sqrt[\varkappa]{C_1} + \sqrt[\varkappa]{C_2} + \cdots + \sqrt[\varkappa]{C_{\varkappa-1}}, \\ \varkappa\wp(kw) = \sqrt[\varkappa]{C_0} + e^{-\frac{2\pi i}{\varkappa}}\sqrt[\varkappa]{C_1} + e^{-\frac{4\pi i}{\varkappa}}\sqrt[\varkappa]{C_2} + \cdots + e^{-\frac{2(\varkappa-1)\pi i}{\varkappa}}\sqrt[\varkappa]{C_{\varkappa-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dabei kann man noch $\wp(w), \wp(kw), \cdots$ rational durch eine *einzige* Wurzelgrösse, z. B. durch $\sqrt[\varkappa]{C_1}$ ausdrücken, denn $\sqrt[\varkappa]{C_0}$ und $\sqrt[\varkappa]{\frac{C_\alpha}{C_1^\alpha}}$ sind cyklische Functionen von $\wp(w), \wp(kw), \wp(k^2w), \cdots \wp(k^{\varkappa-1}w)$ und deshalb nach Satz VI in § 1 *rationale* Functionen von C_1, g_2 und g_3.

Setzt man ferner für $\beta = 0, 1, 2, \cdots \sigma - 1$

$$(33)\quad C'_{\alpha,\beta} = \left[C_\alpha + e^{\frac{2\beta\pi i}{\sigma}}C_\alpha^{(1)} + e^{\frac{4\beta\pi i}{\sigma}}C_\alpha^{(2)} + \cdots + e^{\frac{2(\sigma-1)\beta\pi i}{\sigma}}C_\alpha^{(\sigma-1)}\right]^\sigma,$$

wobei $C_\alpha^{(\gamma)}$ aus C_α hervorgeht, indem man w mit $s^\gamma w$ vertauscht, so ist $C'_{\alpha,\beta}$ die Wurzel einer Resolvente vom Grade $\frac{\varphi(n)\,T(n)}{2\varkappa\sigma}$, und man erhält aus den Gleichungen (33)

$$(34)\quad \begin{cases} \sigma C_\alpha = \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,0}} + \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,1}} + \sqrt[\sigma]{C_{\alpha,2}} + \cdots + \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,\sigma-1}}, \\ \sigma C_\alpha^{(1)} = \sqrt[\sigma]{C'_{\alpha\,0}} + e^{-\frac{2\pi i}{\sigma}}\sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,1}} + e^{-\frac{4\pi i}{\sigma}}\sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,2}} + \cdots + e^{-\frac{2(\sigma-1)}{\sigma}}\sqrt[\sigma]{C'_{\alpha,\sigma-1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Auch hier lassen sich die vorkommenden Wurzelgrössen *rational* durch eine einzige ausdrücken.

Indem man so fortfährt, kann man schliesslich die Theilwerthe der $\wp$-Function, welche dem reducirten System angehören, durch Transformationsgrössen ausdrücken. Dabei hat man genau ebenso viele Wurzelausziehungen nöthig, als Cyklen zu den betreffenden Transformationsgrössen führen, und das Product der Wurzelexponenten ist gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)$.

Die Auflösung der Transformationsgleichungen durch algebraische Operationen ist möglich für die singulären Werthe von $\frac{\omega'}{\omega}$, bei denen complexe Multiplication stattfindet. Dann giebt also die vorstehende Methode einen Weg an, auf dem man die Theilwerthe der $\wp$-Function leicht berechnen kann.

§ 3.

Einige Sätze über die Bildung von Transformationsgrössen.

Bei der Bildung von Transformationsgrössen, wie sie in § 1 durch die Sätze I bis VI angegeben ist, kann man noch dadurch eine Modification herbeiführen, dass jede *symmetrische* Function auch eine *cyklische* Function ist. Deshalb kann man den Satz I mit den Sätzen IV und V in der Weise combiniren, dass man z. B. zunächst die *cyklische* Function C von den Grössen $\wp(w), \wp(kw), \wp(k^2 w), \cdots \wp(k^{\varkappa-1}w)$ bildet, dann aber für C' eine *symmetrische* Function von $C, C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots C^{(\sigma-1)}$ setzt.

Der Vortheil, welchen die Benutzung *symmetrischer* Functionen bietet, liegt in dem Umstande, dass man mehrere Schritte auf einmal machen kann, die man bei *cyklischen* Functionen *nach* einander machen müsste. Ist z. B. $2\varkappa\sigma < \varphi(n)$, ist also

$$\varphi(n) = 2\nu\varkappa\sigma,$$

so kann man der Zahl s im Ganzen ν verschiedene Werthe $s_1, s_2, \ldots s_\nu$ geben, so dass die Theilwerthe $\wp(k^\alpha s_\gamma^\beta w)$ sämmtlich von einander verschieden sind, wenn α die Zahlen 0 bis $\varkappa - 1$, β die Zahlen 0 bis $\sigma - 1$ und γ die Zahlen 1 bis ν durchläuft. Dadurch werden aber die $\frac{1}{2}\varphi(n)$ Grössen $\wp(lw)$ erschöpft.

Geht nun durch Vertauschung von w mit $s_\gamma^\beta w$ die cyklische Function C in $C_\gamma^{(\beta)}$ über, und bildet man eine *symmetrische* Function dieser $\nu\sigma$ Grössen $C_\gamma^{(\beta)}$, so ist sie eine *Transformationsgrösse.*

Bisher waren bei der Bildung der Transformationsgrössen diejenigen Theilwerthe $\wp(lw)$ der $\wp$-Function ausgeschlossen, bei denen l einen gemeinsamen Theiler mit n hat. Auch diese Beschränkung kann noch aufgehoben werden, weil $\wp(au)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist. Wenn also a der grösste gemeinsame Theiler von l und n ist, so wird eine cyklische Function der Grössen

$$\wp(aw),\ \wp(kaw),\ \wp(k^2aw),\ \cdots \wp(k^{\varkappa-1}aw)$$

auch eine cyklische Function von

$$\wp(w),\ \wp(kw),\ \wp(k^2w),\ \cdots \wp(k^{\varkappa-1}w)$$

sein. Dabei kann freilich der Umstand eintreten, dass $\varkappa$ nicht die kleinste Zahl ist, für welche

$$ak^{\varkappa-1} \equiv \pm a \,(\text{mod. } n), \quad \text{oder} \quad k^{\varkappa} \equiv \pm 1 \left(\text{mod. } \frac{n}{a}\right),$$

ist. Wird z. B. schon

$$k^{t} \equiv \pm 1 \left(\text{mod. } \frac{n}{a}\right),$$

so ist t ein Factor von $\varkappa$, also $\varkappa = rt$. Deshalb wird man es in Wirklichkeit nur mit einer cyklischen Function der t Theilwerthe

$$\wp(aw), \;\; \wp(kaw), \;\cdots\; \wp(k^{t-1}aw)$$

zu thun haben; man kann sie aber doch noch als eine cyklische Function der $\varkappa$ Grössen

$$\wp(aw), \;\; \wp(kaw), \;\cdots\; \wp(k^{\varkappa-1}aw)$$

betrachten. Bezeichnet man nämlich mit $C^{(\alpha)}$ diejenige cyklische Function, welche aus C durch Vertauschung von aw mit $k^{\alpha t}aw$ hervorgeht, so wird

$$C^{(\alpha)} = C \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{r}\left(C + C^{(1)} + C^{(2)} + \cdots + C^{(r-1)}\right)$$

eine *cyklische* Function der $\varkappa$ Grössen $\wp(aw)$, $\wp(kaw)$, $\cdots$ $\wp(k^{\varkappa-1}aw)$.

Beschränkt man sich bei dieser Betrachtung auf *symmetrische* Functionen, was für die späteren Untersuchungen ausreicht, so gilt zunächst der folgende Satz:

I. *Durchläuft l alle ganzzahligen Werthe, welche zu n relativ prim und kleiner sind als $\frac{n}{2a}$, wo a ein beliebiger Factor von n ist, so kann man jede symmetrische Function X der $\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{n}{a}\right) = n_a$ Theilwerthe $\wp(law)$ auch darstellen als eine symmetrische Function der $\frac{1}{2}\varphi(n) = n_1$ Theilwerthe $\wp(lw)$.*

Beweis. Die (rationale) symmetrische Function X der n_a Theilwerthe $\wp(law)$ lässt sich bekanntlich als rationale Function der Potenzsummen

$$S_1 = \sum \wp(law), \quad S_2 = \sum \wp(law)^2, \quad S_3 = \sum \wp(law)^3, \;\cdots$$

darstellen, wobei sich die Summen nur über n_a Werthe von l erstrecken.

Nun wird aber

$$\wp(l_1 aw) = \wp(l_2 aw), \quad \text{wenn} \quad l_1 \equiv \pm l_2 \left(\text{mod. } \frac{n}{a}\right)$$

ist. Deshalb darf man die Summation über alle zu n theilerfremden Werthe von l erstrecken, die kleiner sind als $\frac{n}{2}$, ohne dass sich die

Werthe von S_1, S_2, S_3, ..., von dem Factor $\frac{n_1}{n_a}$ abgesehen, ändern. Man kann also X auch als symmetrische Function der n_1 Theilwerthe $\wp(law)$ betrachten und folglich auch als symmetrische Function der n_1 Theilwerthe $\wp(lw)$, weil $\wp(au)$ eine rationale Function von $\wp(u)$ ist.

Da bei diesem Satze a ein ganz beliebiger Theiler von n ist, so ergiebt sich daraus auch noch der folgende allgemeinere Satz:

II. *Sind $a, b, c, \ldots$ beliebige Factoren von n und durchlaufen $l_a, l_b, l_c, \ldots$ alle zu n theilerfremden Zahlen, welche bez. kleiner sind als $\frac{n}{2a}$, $\frac{n}{2b}$, $\frac{n}{2c}$, ..., so kann man eine rationale Function der Theilwerthe $\wp(l_a aw)$, $\wp(l_b bw)$, $\wp(l_c cw)$, ..., welche symmetrisch ist in Bezug auf die n_a Theilwerthe $\wp(l_a aw)$, ebenso in Bezug auf die n_b Theilwerthe $\wp(l_b bw)$, ebenso in Bezug auf die n_c Theilwerthe $\wp(l_c cw)$, u. s. w., als symmetrische Function der n_1 Theilwerthe $\wp(lw)$ darstellen.*

Dabei darf sich unter den Factoren $a, b, c, \ldots$ auch der Factor 1 befinden.

Verwendet man bei Bildung einer Transformationsgrösse *nur* Theilwerthe der $\wp$-Function von der Form $\wp(l_a aw)$, so gehört sie eigentlich zur Transformation vom Grade $\frac{n}{a}$. Deshalb wird in diesem Falle die Transformationsgleichung *reducibel*, d. h. sie ist die Potenz einer *irreduciblen* Gleichung niedrigeren Grades, so dass durch eine solche Transformationsgrösse die übrigen *nicht* mehr rational darstellbar sind.

Der Unterschied zwischen den beiden Grössen

$$w = \frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n} \quad \text{und} \quad \frac{2\varpi}{n} = \frac{2p\omega + 2q\omega'}{n}$$

besteht darin, dass p und q zu einander relativ prim sind, während λ und μ noch einen gemeinsamen Factor haben dürfen, der aber zu n relativ prim sein muss. Die Allgemeinheit der vorliegenden Untersuchungen erleidet jedoch keine Beschränkung, wenn λ und μ derselben Bedingung unterworfen werden wie p und q. Deshalb soll in dem Folgenden der Kürze wegen

$$(35) \qquad \frac{2\varpi}{n} = \frac{2p\omega + 2q\omega'}{n} = w$$

gesetzt werden.

§ 4.

Wirkliche Herleitung einiger Transformationsgrössen.

Unter den Transformationsgrössen, bei deren Bildung hauptsächlich symmetrische Functionen verwendet werden, möge an erster

Stelle diejenige genannt werden, welche Herr Weierstrass angegeben hat*), nämlich die Grösse

$$(36)\qquad G_1 = \wp(w) + \wp(2w) + \cdots + \wp\left(\frac{n-1}{2}\,w\right),$$

wobei n als eine *ungerade* Zahl vorausgesetzt wird. Man kann aber diesen Ausdruck ohne Weiteres so umgestalten, dass er auch noch für *gerade* Zahlen anwendbar ist, indem man setzt

$$(36\,\text{a})\quad B_1 = 2G_1 = \wp(w) + \wp(2w) + \wp(3w) + \cdots + \wp((n-1)w).\text{**})$$

Nach Gleichung (14) wird

$$\wp(\alpha w) - \wp(2\alpha w) = \frac{\tau(3\alpha w)}{\tau(\alpha w)\,\tau(2\alpha w)^2};$$

ferner erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) für $n = 2m + 1 = 6l \pm 1$

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \tau(2\alpha w) = \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w), \qquad \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(3\alpha w) = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w)$$

und deshalb

$$(37)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m} [\wp(\alpha w) - \wp(2\alpha w)] = \frac{(-1)^l}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w)^2}.$$

Setzt man also

$$(38)\qquad f = \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w),$$

so ist

$$(38\,\text{a})\qquad f^2 = \prod_{\alpha=1}^{m} \tau(\alpha w)^2 = \prod_{\alpha=1}^{n-1} \tau(\alpha w)$$

als symmetrische Function der m Theilwerthe $\wp(\alpha w)$ eine *Transformationsgrösse*.

Die Grösse f^2 habe ich schon in meinen früheren Abhandlungen über Transformation der elliptischen Functionen***) benutzt. Auch in der folgenden Untersuchung wird dieser Ausdruck eine wichtige Rolle spielen.

---

*) Vergl. Felix Müller, de transformatione functionum ellipticarum. Berlin 1867.

**) Dieser Ausdruck ist schon in Gleichung (13) m. vor. Abh. erklärt worden.

***) Vergl. Journal für Mathematik, Bd. 87, S. 199—216, Bd. 88, S. 205—212 und Bd. 95, S. 218—231. Math. Annalen, Bd. 26, S. 369—464.

Ist n durch 2 oder durch 3 (oder gar durch 6) theilbar, so soll f^2 auch dann noch durch die Gleichung

$$(39)\qquad f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^2 = f^2 = \prod_{\alpha=1}^{n-1} \tau(\alpha w)$$

definirt werden. In diesem Falle ist aber nicht f^2, sondern erst eine Potenz davon eine *Transformationsgrösse.*

Entwickelt man f, bez. f^2, nach Potenzen von $h = e^{\frac{\varpi' \pi i}{\varpi}}$, so findet man (vergl. § 7 m. vor. Abh.), dass für beliebige Werthe von n

$$(40)\qquad f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')^n}.$$

Auf die Grösse f^3 wird man für *ungerade* Werthe von n, also für $n = 2m + 1$ auch auf folgende Weise geführt. Bekanntlich ist

$$(41)\qquad \wp'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4} = -\frac{\tau(2u)}{\tau(u)^4},$$

folglich ist

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \wp'(\alpha w) = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{\tau(2\alpha w)}{\tau(\alpha w)^4} = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \frac{1}{\tau(\alpha w)^3},$$

oder

$$(42)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m} \wp'(\alpha w) = (-1)^m f^{-3}.$$

Daraus folgt z. B., dass für $n = 6l + 3$ die Grösse f^6 eine *Transformationsgrösse* ist.

Für $n = 9$ ist sogar schon f^3 eine Transformationsgrösse (vergl. § 31 m. vor. Abh.), denn da ist

$$(43)\qquad f^{-3} = \wp'\left(\frac{2\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{6\varpi}{9}\right)$$

eine *cyklische* Function der Grössen $\wp\left(\frac{2\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{4\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{8\varpi}{9}\right)$.

Ein anderes Beispiel für die Benutzung cyklischer Functionen und zwar für die Benutzung *mehrfach* cyklischer Functionen liefert § 23 m. vor. Abhandlung. Ist nämlich n das Quadrat einer ungeraden Primzahl $a = 2b + 1 = 6l \pm 1$, und ist g eine primitive Wurzel in Bezug auf den Modul n, so ist b die kleinste Zahl, für welche

$$(44)\qquad \begin{cases} g^{2b} \equiv 1 \pmod{a}, & g^b \equiv -1 \pmod{a}, \\ g^{2ab} \equiv 1 \pmod{n}, & g^{ab} \equiv -1 \pmod{n}. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$g^\alpha w = w_\alpha \quad \text{und} \quad k = g^b,$$

so lässt sich zeigen, dass

$$x_a = \frac{\wp(aw_a) - \wp(2aw_a)}{\wp'(aw_a)} \prod_{\beta=0}^{a-1} \frac{\wp(k^\beta w_a) - \wp(2k^\beta w_a)}{\wp'(k^\beta w_a)} \tag{45}$$

eine cyklische Function der a Theilwerthe

$$\wp(w_a),\ \wp(kw_a),\ \wp(k^2 w_a),\ \cdots\ \wp(k^{a-1} w_a)$$

wird. Wegen der Congruenzen (44) ist nämlich

$$\begin{array}{llll}
\wp(k^a w_a) = & \wp(w_a), & \wp(2k^a w_a) = & \wp(2w_a), \\
\wp(kaw_a) = & \wp(aw_a), & \wp(2kaw_a) = & \wp(2aw_a), \\
\wp'(k^a w_a) = & -\wp'(w_a), & \wp'(kaw_a) = & -\wp'(aw_a),
\end{array}$$

folglich sind

$$[\wp(aw_a) - \wp(2aw_a)] \prod_{\beta=0}^{a-1} [\wp(k^\beta w_a) - \wp(2k^\beta w_a)]$$

und

$$\wp'(aw_a) \prod_{\beta=0}^{a-1} \wp'(k^\beta w_a)$$

rationale Functionen von $\wp(w_a)$, die sich gar nicht ändern, wenn man $\wp(w_a)$ mit $\wp(kw_a)$ vertauscht. Deshalb ist (nach Satz IV in § 1) x_a die Wurzel einer Resolvente vom Grade

$$b \cdot T(n) = ba(a+1).$$

Schliesslich wird

$$y = \prod_{a=1}^{b} x_a \tag{46}$$

$$= \prod_{a=1}^{b} \left[\frac{\wp(aw_a) - \wp(2aw_a)}{\wp'(aw_a)} \prod_{\beta=0}^{a-1} \frac{\wp(k^\beta w_a) - \wp(2k^\beta w_a)}{\wp'(k^\beta w_a)} \right]$$

eine symmetrische, also auch eine cyklische Function von $x_1, x_2, \dots x_b$ und deshalb (nach Satz V in § 1) die Wurzel einer Resolvente vom Grade $T(n)$, d. h. y ist eine *Transformationsgrösse*.

Man kann jetzt noch zeigen, dass y gleich $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ ist; denn es ist

$$\tag{47} \left\{ \begin{aligned}
y &= \prod_{a=1}^{b} \left[\frac{\wp(ag^a w) - \wp(2ag^a w)}{\wp'(ag^a w)} \prod_{\beta=0}^{a-1} \frac{\wp(g^{b\beta+a} w) - \wp(2g^{b\beta+a} w)}{\wp'(g^{b\beta+a} w)} \right] \\
&= \prod_{\alpha=1}^{2b(b+1)} \frac{\wp(\alpha w) - \wp(2\alpha w)}{\wp'(\alpha w)} = \frac{f^{-2}}{f^{-3}} = f.
\end{aligned} \right.$$

Uebrigens erkennt man ohne Weiteres, dass man das vorstehende Beispiel als eine Combination zweier anderen erhält; das eine findet man, indem man

$$x_a = [\wp(a w_a) - \wp(2 a w_a)] \prod_{\beta=0}^{a-1} [\wp(k^\beta w_a) - \wp(2k^\beta w_a)],$$

$$y = \prod_{a=1}^{b} x_a = f^{-2}$$

setzt, und das andere, wenn

$$x_a = \wp'(a w_a) \prod_{\beta=0}^{a-1} \wp'(k^\beta w_a); \qquad y = \prod_{a=1}^{b} x_a = f^{-3}$$

ist. Dabei bleibt f auch dann noch eine Transformationsgrösse, wenn a *keine* Primzahl ist. (Vergl. m. vor. Abh. § 23 und 24.)

Von besonderem Interesse für das Folgende sind auch die Ausdrücke, welche die Form

(48) $$R = \prod \wp'(lw)$$

haben, wo l alle zu n theilerfremden Werthe durchläuft, welche kleiner sind als $\frac{n}{2}$. Nach Satz I in § 1 ist dann R^2 sicher eine *Transformationsgrösse.* Fügt man jetzt aber noch die Voraussetzung hinzu, dass sich n in zwei Factoren a und b zerlegen lässt, welche zu einander relativ prim und grösser als 2 sind, dann gilt der Satz, *dass R selbst eine Transformationsgrösse ist.*

Beweis. Da a und b relativ prim sind, so giebt es zwei ganze Zahlen x und y, für welche

(49) $$ax - by = 2$$

wird. Setzt man jetzt

$$ax - 1 = r,$$

so ist

$$ax = r + 1, \quad by = r - 1, \quad abxy = r^2 - 1,$$

also

(50) $$r^2 \equiv 1 \text{ (mod. } n).$$

Die Zahl r ist daher sicher theilerfremd zu n; ferner sind auch die Zahlen $r + 1 = ax$ und $r - 1 = by$ kein Vielfaches von n; denn wäre

$$r + 1 = ax = cn = abc,$$

so wäre

$$ax - by = b(ac - y) = 2;$$

das ist aber unmöglich, weil b grösser als 2 vorausgesetzt ist. Ebenso würde aus

$$r - 1 = by = cn = abc$$

folgen, dass

$$ax - by = a(x - bc) = 2$$

wäre, und das ist gleichfalls nicht möglich, weil a nach Voraussetzung grösser als 2 ist.

Da a und b beide grösser als 2 sind, so sind $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ beide durch 2 theilbar, folglich ist

$$\varphi(n) = \varphi(a)\,\varphi(b) = 4\nu$$

durch 4 theilbar. Die Anzahl der Factoren auf der rechten Seite von Gleichung (48) ist daher gleich 2ν, so dass man diese Factoren paarweise ordnen kann, und zwar vereinige man

$$\wp'(lw) \quad \text{mit} \quad \wp'(lrw).$$

Diese beiden Grössen sind, auch vom Vorzeichen abgesehen, von einander verschieden, weil $r \pm 1$ nicht durch n theilbar ist. Es geht jetzt also Gleichung (48) über in

$$R = \pm \prod_{\alpha=1}^{\nu} \wp'(l_\alpha w)\,\wp'(l_\alpha r w), \tag{48a}$$

wobei die 4ν Zahlen

$$\pm l_1,\ \pm l_1 r,\ \pm l_2,\ \pm l_2 r,\ \cdots \pm l_\nu,\ \pm l_\nu r$$

modulo n zu den $\varphi(n)$ Zahlen l congruent werden, welche kleiner sind als n und keinen Factor mit n gemeinsam haben.

Nun ist wegen der Congruenz (50)

$$\wp'(lw)\,\wp'(lrw) = \wp'(lrw)\,\wp'(lr^2w)$$

eine rationale Function von $\wp(lw)$, deren Werth sich gar nicht ändert, wenn man $\wp(lw)$ mit $\wp(lrw)$ vertauscht, d. h. $\wp'(lw)\,\wp'(lrw)$ ist eine cyklische Function von $\wp(lw)$ und $\wp(lrw)$ und ist deshalb die Wurzel einer Resolvente vom Grade

$$\frac{1}{4}\,\varphi(n)\cdot T(n) = \nu\cdot T(n).$$

Da nun R eine symmetrische Function der ν Grössen $\wp'(l_\alpha w)\,\wp'(l_\alpha r w)$ ist, so wird R selbst die Wurzel einer Resolvente vom Grade $T(n)$, d. h. *R ist eine Transformationsgrösse.*

Die Voraussetzung, welche für den Beweis des vorstehenden Satzes erforderlich war, dass sich nämlich n in zwei Factoren a und b zerlegen lässt, welche zu einander theilerfremd und grösser als 2 sind, ist für die meisten Zahlen erfüllt; ausgenommen sind nur die folgenden Fälle

$$n = a,\quad n = a^\alpha,\quad n = 2a \quad \text{und} \quad n = 2a^\alpha,$$

wo a eine ungerade *Primzahl* ist. Aber auch in diesen Fällen ist, wie schon oben erwähnt wurde, R^2 sicher eine Transformationsgrösse. Ist z. B. $n = 2a$ und $a = 2b + 1$, so wird

$$R^2 = \prod_{\alpha=1}^{b} \wp'((2\alpha - 1)\,w)^2 = \pm \prod_{\alpha=0}^{a-2} \wp'(g^\alpha w),$$

wo g eine primitive Wurzel modulo n sein soll.

Gerade für $n = 2a$ kann man aber noch einige andere Transformationsgrössen herleiten, die später mehrfach benutzt werden sollen. Es sei also $n = 2a$ und $a = 2b + 1$, *wobei aber a auch eine zusammengesetzte Zahl sein darf*, dann setze man

$$S = \prod_{\alpha=1}^{2b} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = \prod_{\alpha=1}^{2b} \wp'\left(\frac{\alpha\varpi}{a}\right) = \prod_{\alpha=1}^{2b} \frac{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^4}. \tag{51}$$

Nun ist aber nach Gleichung (39)

$$\prod_{\alpha=1}^{2b} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) = \prod_{\alpha=1}^{a-1} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) = f\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^2 = f(a)^2,$$

$$\prod_{\alpha=1}^{2b} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2 = \frac{1}{\tau(\varpi)} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)^2}{f\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^2} = \frac{f(n)^2}{f(2)^2},$$

folglich wird

$$S = \frac{f(a)^2 f(2)^4}{f(n)^4}. \tag{51a}$$

Zum Beweise, dass S eine Transformationsgrösse ist, benutze man die bekannte Formel

$$\wp(u - \omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(u) - e_1} = \wp(\omega) + \frac{\wp''(\omega)}{2[\wp(u) - \wp(\omega)]}.$$

Daraus folgt, indem man noch ω mit ϖ vertauscht,

$$\wp'(\varpi - u) = \frac{\wp''(\varpi)\,\wp'(u)}{2[\wp(u) - \wp(\varpi)]^2}. \tag{52}$$

Setzt man in dieser Formel $u = \frac{2\alpha\varpi}{a}$, so erhält man

$$\wp'\left(\frac{a - 2\alpha}{a}\,\varpi\right) \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) = \frac{\wp''(\varpi)\,\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^2}{2\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) - \wp(\varpi)\right]^2},$$

folglich wird

$$S = \prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{a - 2\alpha}{a}\,\varpi\right) \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) \tag{53}$$

$$= \frac{\wp''(\varpi)^b}{2^b} \prod_{\alpha=1}^{b} \frac{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^2}{\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) - \wp(\varpi)\right]^2}.$$

S ist also eine rationale Function von $\wp(\varpi)$ und eine symmetrische Function von den b Theilwerthen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)$, folglich ist S eine *Transformationsgrösse.*

Noch wichtiger für das Folgende ist die Grösse T, welche durch die Gleichung

$$(54)\qquad T^3 = \pm \prod_{\alpha=1}^{b} \frac{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\varpi, \varpi'\right)}{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)}$$

definirt werden soll. Es ist nämlich, wie bekannt,

$$\wp'\left(u\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right) = \wp'(u) + \wp'(u - \varpi),$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (52)

$$(55)\qquad \wp'\left(u\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right) = \wp'(u)\left(1 - \frac{\wp''(\varpi)}{2[\wp(u) - \wp(\varpi)]^2}\right).$$

Nun ist nach Gleichung (42)

$$\prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\varpi, \varpi'\right) = (-1)^b f(a)^{-3} = \frac{(-1)^b\, Q(\varpi, \varpi')^{3a}}{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)^3},$$

und wenn man in dieser Gleichung ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht,

$$\prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right) = \pm \prod_{\alpha=1}^{b} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\,\middle|\,\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)$$

$$= \frac{(-1)^b\, Q\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^{3a}}{Q\left(\frac{\varpi}{2a}, \varpi'\right)^3} = (-1)^b\, \frac{f(2)^{3a}}{f(n)^3}.$$

Deshalb wird bei passender Wahl des Vorzeichens

$$(56)\qquad T^3 = \frac{f(n)^3}{f(a)^3 f(2)^{3a}}, \quad T = \frac{f(n)}{f(a)\, f(2)^a}.$$

Jetzt folgt aber aus Gleichung (55), dass T^3 *immer eine Transformationsgrösse* ist, denn es wird

$$(57)\qquad T^{-3} = \pm \prod_{\alpha=1}^{b} \left(1 - \frac{\wp''(\varpi)}{2\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right) - \wp(\varpi)\right]^2}\right)$$

eine rationale Function von $\wp(\varpi)$ und eine symmetrische Function von den b Theilwerthen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)$.

Ist die Zahl a nicht durch 3 theilbar, so ist sogar schon T *selbst eine Transformationsgrösse*. Es ist dann nämlich

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{a}\right)\right]=\frac{\pm 1}{\prod\limits_{\alpha=1}^{b}\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^2},$$

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp(\varpi)\right]=\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\tau\left(\frac{a-2\alpha}{a}\varpi\right)\tau\left(\frac{a+2\alpha}{a}\varpi\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^2\tau(\varpi)^2}$$

$$=\frac{1}{\tau(\varpi)^{2b}}\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\tau\left(\frac{2(2\alpha-1)\varpi}{n}\right)^2}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)^2},$$

folglich wird

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{a}\right)}=\frac{\pm 1}{\tau(\varpi)^{2b}}\prod_{\alpha=1}^{b}\tau\left(\frac{2(2\alpha-1)\varpi}{n}\right)^2$$

$$=\frac{\pm 1}{\tau(\varpi)^{a}}\prod_{\alpha=1}^{a}\tau\left(\frac{2(2\alpha-1)\varpi}{n}\right),$$

oder

$$\prod_{\alpha=1}^{b}\frac{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{a}\right)}=\frac{\pm 1}{\tau(\varpi)^{a}}\frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{n-1}\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\prod\limits_{\alpha=1}^{a-1}\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)}$$

$$=\pm\frac{f(n)^2}{f(a)^2 f(2)^{2a}}=\pm T^2.$$

Deshalb ist auch T^2 eine rationale Function von $\wp(\varpi)$ und eine symmetrische Function der b Theilwerthe $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{a}\right)$; wenn also a nicht durch 3 theilbar ist, so sind T^3 und T^2 Transformationsgrössen, folglich auch

$$\frac{T^3}{T^2}=T.$$

Fassen wir diese Beispiele zusammen, so haben wir folgende Tabelle von Transformationsgrössen:

$$(58)\quad\begin{cases}1)\ f(n)^2=\prod\limits_{\alpha=1}^{n-1}\tau(\alpha w)\quad\text{für}\quad n=6l\pm 1,\\[2ex] 2)\ f(n)^6=\prod\limits_{\alpha=1}^{n-1}\tau(\alpha w)^3\quad\text{für}\quad n=6l+3,\\[2ex] 3)\ f(9)^3=\prod\limits_{\alpha=1}^{4}\tau(\alpha w)^3\quad\text{für}\quad n=9,\end{cases}$$

$$
(58) \left\{ \begin{array}{ll}
4) & f(n) = \prod_{\alpha=1}^{6l(3l\pm1)} \tau(\alpha w) \quad \text{für} \quad n = a^2 = (6l \pm 1)^2, \\
5) & R = \prod \wp'(lw), \ \Big(\text{wo } l \text{ alle Werthe durchläuft, welche zu } n \text{ theilerfremd und kleiner sind als } \tfrac{n}{2}\Big), \text{ wenn sich } n \\
 & \text{in zwei theilerfremde Factoren } a \text{ und } b \text{ zerlegen lässt, die grösser sind als } 2, \\
6) & R^2 = \prod \wp'(lw)^2 \quad \text{für \textit{alle} Werthe von } n, \\
7) & S = \prod_{\alpha=1}^{2b} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{f(a)^2 f(2)^4}{f(n)^4} \quad \text{für} \quad n = 2a = 4b + 2, \\
8) & T = \frac{f(n)}{f(a)\, f(2)^a} \quad \text{für} \quad n = 2a = 2(6l \pm 1), \\
9) & T^3 \quad \text{für} \quad n = 2a = 4b + 2.
\end{array} \right.
$$

Die Zahl dieser Beispiele wird in den späteren Paragraphen noch wesentlich vermehrt werden. Aus der Form der vorstehenden Transformationsgrössen erkennt man auch schon, wie man in analoger Weise noch andere wird bilden können. Bezeichnet man nämlich mit

$$D_1, D_2, D_3, \cdots$$

beliebige Theiler von n und mit

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$$

positive oder negative ganze Zahlen, so haben die gefundenen Transformationsgrössen alle die Form

$$x = f(D_1)^{\delta_1} f(D_2)^{\delta_2} f(D_3)^{\delta_3} \cdots. \tag{59}$$

Es liegt deshalb die Frage nahe: „Wie muss man die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$ bestimmen, damit x eine Transformationsgrösse wird?“ Die Beantwortung dieser Frage wird der Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein.

§ 5.

Transformationsgleichungen nullter Dimension, oder invariante Multiplicatorgleichungen.

Ist eine Transformationsgrösse, sie heisse x, gleichzeitig auch eine *homogene* Function m^{ten} Grades der Grössen $\wp(lw)$, so kann man dadurch noch eine Vereinfachung herbeiführen, dass man die Theilwerthe $\wp(lw)$ sämmtlich durch

$$Q^4 = Q(\omega, \omega')^4 = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 h^{\frac{1}{3}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})^4$$

dividirt. Dadurch wird die Function x selbst durch Q^{4m} dividirt. Setzt man jetzt noch, wie das schon in meinen früheren Arbeiten geschehen ist,

(59) $$g_2 = Q^8\gamma_2, \quad g_3 = Q^{12}\gamma_3, \quad x = Q^{4m}\xi,$$

so erhält man aus der Transformationsgleichung

(60) $$F(x, g_2, g_3) = 0$$

unmittelbar die Gleichung

(60a) $$F(\xi, \gamma_2, \gamma_3) = 0,$$

in welcher die Grösse Q nicht mehr vorkommt.

Ein Beispiel für diese Umformung liefert § 19 m. vor. Abh., wo der Uebergang von der f-Gleichung zur L-Gleichung erklärt wurde. Die Vereinfachung, welche man durch diese Umformung erreicht, besteht nämlich darin, dass man jetzt γ_2 als die *einzige* unabhängige Veränderliche betrachten kann, denn es ist $27\gamma_3^2 = \gamma_2^3 - 1$, während die Transformationsgrösse x eine algebraische Function der *beiden* Veränderlichen g_2 und g_3 war.

Auf der anderen Seite ist es aber wieder störend, dass durch die Factoren

$$Q^8 = \sqrt[3]{g_2^3 - 27g_3^2}, \qquad Q^{12} = \sqrt{g_2^3 - 27g_3^2},$$

welche man zur Erklärung von γ_2 und γ_3 nothwendig hat, *Irrationalitäten* benutzt werden, so dass ξ im Allgemeinen nicht mehr eine Transformationsgrösse ist. Auch die Irrationalität

$$3\gamma_3\sqrt{3} = \sqrt{\gamma_2^3 - 1}$$

muss man zu vermeiden suchen.

Dies geschieht, wenn man noch die Beschränkung hinzufügt, dass die Zahl m (nämlich der Grad der Homogenität) durch 6 theilbar ist, dass also $m = 6r$; dann *bleibt*

(61) $$\xi = \frac{x}{Q^{24r}} = \frac{x}{(g_2^3 - 27g_3^2)^r}$$

noch eine Transformationsgrösse. Die Coefficienten der zugehörigen Transformationsgleichung sind erstens rationale Functionen von g_2 und g_3, sodann aber auch von der *nullten Dimension*, folglich sind die Coefficienten *rationale* Functionen von

(62) $$\gamma_2^3 = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = J, \text{ bez. von } 27\gamma_3^2 = \frac{27g_3^2}{g_2^3 - 27g_3^2} = J - 1.$$

Auf diese Weise gelangt man zu einer Transformationsgleichung nullter Dimension, welche eine „*invariante Multiplicatorgleichung*“ heissen soll. (Vergl. die oben citirte Abhandlung von Herrn Weber, S. 384).

Von solchen invarianten Multiplicatorgleichungen wird in dem Folgenden ausschliesslich die Rede sein.

Setzt man, wie es bereits in Gleichung (59) geschehen ist,

$$(63)\qquad x = f(D_1)^{\delta_1} f(D_2)^{\delta_2} f(D_3)^{\delta_3} \cdots$$

$$= \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_1}, \varpi'\right)^{\delta_1}}{Q(\varpi, \varpi')^{D_1 \delta_1}} \cdot \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_2}, \varpi'\right)^{\delta_2}}{Q(\varpi, \varpi')^{D_2 \delta_2}} \cdot \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_3}, \varpi'\right)^{\delta_3}}{Q(\varpi, \varpi')^{D_3 \delta_3}} \cdots,$$

so wird nach § 19 m. vor. Abh.

$$(64)\qquad -4m = (D_1 - 1)\,\delta_1 + (D_2 - 1)\,\delta_2 + (D_3 - 1)\,\delta_3 + \cdots;$$

diese Gleichung enthält eine erste Bedingung für die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$, und zwar muss nach der getroffenen Festsetzung die Zahl $4m$ durch 24 theilbar sein. Aus x erhält man jetzt durch Multiplication mit $Q(\omega, \omega')^{-4m} = Q(\varpi, \varpi')^{-4m}$

$$(65)\qquad \xi = \prod \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)^{\delta}}{Q(\varpi, \varpi')^{\delta}} = L(D_1)^{\delta_1} L(D_2)^{\delta_2} L(D_3)^{\delta_3} \cdots.$$

Eine solche Hülfsgrösse ξ soll, wenn sie eine *Transformationsgrösse* ist, ein „*Parameter*" für die Transformation n^{ten} Grades heissen. Zwischen J und jedem Parameter ξ besteht nach den früheren Sätzen eine invariante Multiplicatorgleichung, welche in Bezug auf ξ vom Grade

$$T(n) = n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\cdots$$

ist, wenn ξ wirklich zum Transformationsgrade

$$n = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \cdots$$

gehört. Jede andere Transformationsgrösse lässt sich dann, wie früher gezeigt wurde, rational durch ξ, g_2 und g_3 darstellen. *Ist aber die andere Transformationsgrösse auch ein Parameter, so ist sie sogar schon durch die Grössen ξ und J rational darstellbar.*

Zu den Transformationsgrössen gehören auch die Invarianten $\overline{g_2}$ und $\overline{g_3}$ der transformirten Function, die sich nach den Angaben in § 10 m. vor. Abh. als rationale Functionen von $f(n)^2$, g_2 und g_3 darstellen lassen. Deshalb lassen sich $\overline{g_2}$ und $\overline{g_3}$ auch als rationale Functionen von ξ, g_2 und g_3 darstellen, wobei ξ ein beliebiger Parameter ist. Daraus folgt, dass die absolute Invariante

$$\overline{J} = \frac{\overline{g_2}^3}{\overline{g_2}^3 - 27\,\overline{g_3}^2}$$

der transformirten Function sich gleichfalls rational durch ξ und J darstellen lässt; d. h. auch $\overline{J}$ ist die Wurzel einer Transformationsgleichung

$$(66)\qquad F(\overline{J}, J) = 0,$$

welche die „*Invariantengleichung*" heissen soll. (Vergl. die oben citirte Abhandlung von Herrn Weber, S. 383.)

§ 6.

Eigenschaften der Invariantengleichung $F(\overline{J}, J) = 0$.*)

Zu der Invariantengleichung und ihren Eigenschaften kann man auch auf folgendem Wege gelangen. Es sei nach den Bezeichnungen von Herrn Weierstrass

(67) $$\frac{\omega'}{\omega} = \tau, \text{**)}$$

dann ist bekanntlich die absolute Invariante J eine *eindeutige* Function von τ, welche mit $J(\tau)$ bezeichnet werden möge. Diese Function ändert sich gar nicht, wenn man τ mit

(68) $$\tilde{\tau} = \frac{p' + q'\tau}{p + q\tau} \qquad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht. Die beiden Grössen τ und $\tilde{\tau}$ mögen *äquivalent* heissen, und das Zeichen für diese Aequivalenz sei

(69) $$\tilde{\tau} \sim \tau.$$

Eine Transformation n^{ten} Grades führt man aus, indem man $\tilde{\tau}$ mit

(70) $$\overline{\tau} = n\tilde{\tau}$$

vertauscht. Dadurch verwandelt sich die absolute Invariante J oder $J(\tau)$ in $J(\overline{\tau})$, ein Ausdruck, welcher der Kürze wegen auch mit $\overline{J}$ bezeichnet werden möge, und es gilt der Satz:

I. *Zu jedem Werthe von J gehören im Ganzen $T(n)$ von einander verschiedene Werthe von $\overline{J}$.*

Beweis. Nach den Gleichungen (68) und (70) ist

$$\overline{\tau} = n\tilde{\tau} = \frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau}.$$

Bezeichnet man nun den grössten gemeinsamen Factor von n und q mit D, ist also

(71) $$n = AD, \quad q = \beta D, \quad Aq' = \delta,$$

so sind die ganzen Zahlen β und δ zu einander relativ prim, und man kann zwei ganze Zahlen α_0 und γ_0 finden, für welche

$$\alpha_0\delta - \beta\gamma_0 = +1$$

wird. Setzt man jetzt noch

---

*) Dieser Paragraph enthält zum Theil Untersuchungen, welche in ähnlicher Weise schon von den Herren Dedekind (Journal für Mathematik, Bd. 83), Gierster und Hurwitz (Mathematische Annalen) und H. Weber (Acta mathematica, Bd. 6) ausgeführt sind.

**) Diese Veränderliche τ ist nicht zu verwechseln mit der Function $\tau(u)$, die in der Einleitung definirt wurde.

$$\alpha = \alpha_0 + \beta x, \quad \gamma = \gamma_0 + \delta x, \quad C = np'\alpha - p\gamma,$$

so ist auch

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1,$$

und es wird

(72) $C = np'\alpha_0 - p\gamma_0 + Ax(p'q - pq') = np'\alpha_0 - p\gamma_0 - Ax.$

Man kann also die ganze Zahl x immer so bestimmen, dass

(73) $$0 \leqq C < A.$$

Setzt man jetzt

(74) $$\tau' = \frac{C + D\tau}{A},$$

so erhält man mit Rücksicht auf die vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{\gamma + \delta\tau'}{\alpha + \beta\tau'} = \frac{A\gamma + C\delta + D\delta\tau}{A\alpha + C\beta + D\beta\tau} = \frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau} = n\tilde{\tau} = \bar{\tau}.$$

Daraus folgt

(75) $$J(\bar{\tau}) = J\left(\frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau}\right) = J\left(\frac{C + D\tau}{A}\right).$$

Um alle verschiedenen Werthe von $J(\bar{\tau})$ zu erhalten, welche demselben Werthe von $J(\tau)$ entsprechen, genügt es daher, für $\bar{\tau}$ alle Grössen $\frac{C + D\tau}{A}$ zu setzen, für welche

(76) $$AD = n \quad \text{und} \quad 0 \leqq C < A$$

ist. Dabei dürfen A und D noch einen gemeinsamen Theiler t haben, aber C muss zu t relativ prim sein, denn ein Theiler, der den drei Zahlen A, C und D gemeinsam ist, wäre auch ein Theiler von

$$p = A\alpha + C\beta \quad \text{und} \quad q = D\beta.$$

Da aber $pq' - p'q = +1$ ist, so dürfen p und q keinen gemeinsamen Factor haben.

Die von einander verschiedenen Werthe von $\frac{C + D\tau}{A}$, welche man durch die vorstehenden Angaben erhält, sollen die „$\bar{\tau}$-*Repräsentanten*“ heissen. Es bleibt nur noch übrig, ihre Anzahl zu bestimmen.

Da C nur die Werthe annehmen darf, welche zu t relativ prim und kleiner sind als A, so gehören zu jedem Werthe von A

$$\frac{A}{t}\,\varphi(t)$$

Werthe von C; die Anzahl der $\bar{\tau}$-Repräsentanten ist daher

(77) $$\psi(n) = \sum \frac{A}{t}\,\varphi(t),$$

wobei sich die Summirung über alle Zahlen A erstreckt, durch welche n theilbar ist (die Zahlen 1 und n eingeschlossen).

Sind nun n' und n'' zu einander relativ prim, und ist

$$n = n'n'', \quad n' = A'D', \quad n'' = A''D'',$$

sind ferner t' und t'' die grössten gemeinsamen Theiler von A' und D', bez. von A'' und D'', so wird

$$(78) \qquad \psi(n) = \sum \frac{A}{t}\,\varphi(t) = \sum \frac{A'A''}{t't''}\,\varphi(t'\,t'')$$
$$= \sum \frac{A'}{t'}\,\varphi(t') \cdot \sum \frac{A''}{t''}\,\varphi(t'') = \psi(n')\,\psi(n'').$$

Man hat daher nur nöthig, die Zahl $\psi(n)$ zu bestimmen, wenn n die Potenz einer Primzahl a ist. Dann wird

$$\psi(a^\alpha) = \sum \frac{A}{t}\,\varphi(t) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\alpha-1} \frac{a^\lambda}{a^\mu} \cdot a^{\mu-1}(a-1) + a^\alpha = a^\alpha\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

Hieraus folgt, dass für

$$n = a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \cdots$$

$$(79) \qquad \begin{cases} \psi(n) = a^\alpha\left(1+\frac{1}{a}\right) \cdot b^\beta\left(1+\frac{1}{b}\right) \cdot c^\gamma\left(1+\frac{1}{c}\right) \cdots \\ \quad = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \cdots = T(n) \end{cases}$$

wird.

Diese T Werthe von $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ sind, so lange der Werth von τ beliebig ist, wirklich von einander verschieden, denn $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ und $J\left(\frac{C_1+D_1\tau}{A_1}\right)$ können nur dann einander gleich sein, wenn $\frac{C+D\tau}{A}$ und $\frac{C_1+D_1\tau}{A_1}$ zu einander äquivalent sind, d. h., wenn es vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ giebt, für welche

$$\frac{C_1+D_1\tau}{A_1} = \frac{A\gamma + C\delta + D\delta\tau}{A\alpha + C\beta + D\beta\tau} \quad \text{und} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1$$

ist. Dies giebt nothwendiger Weise

$$\beta = 0, \quad \alpha\delta = +1, \quad A_1 = A\alpha.$$

Da A und A_1 beide positiv sind, so muss

$$\alpha = +1, \quad \delta = +1, \quad A_1 = A, \quad D_1 = D, \quad C_1 = A\gamma + C$$

sein. Hierbei ist aber γ sicher gleich 0, weil C und C_1 beide zwischen 0 und $A-1$ liegen sollen. Aus der Gleichheit von $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ und $J\left(\frac{C_1+D_1\tau}{A_1}\right)$ folgt also .

$$\frac{C_1+D_1\tau}{A_1} = \frac{C+D\tau}{A}.$$

Die T verschiedenen $\bar{\tau}$-Repräsentanten liefern daher, wie zu beweisen war, T verschiedene Werthe von $\bar{J} = J\left(\frac{C + D\tau}{A}\right)$, welche

$$\bar{J}_1(\tau),\ \bar{J}_2(\tau),\ \cdots \bar{J}_T(\tau) \tag{80}$$

heissen mögen, da sie sämmtlich Functionen von τ sind.

Bezeichnet man nun mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier beliebige ganze Zahlen, welche der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ genügen, und vertauscht man τ mit $\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$, so sind die T Grössen

$$\bar{J}_1\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right), \bar{J}_2\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right), \cdots \bar{J}_T\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right) \tag{81}$$

gleichfalls von einander verschieden. Da nun aber

$$\frac{np' + nq'\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right)}{p + q\left(\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}\right)} = \frac{n(\alpha p' + \gamma q') + n(\beta p' + \delta q')\tau}{(\alpha p + \gamma q) + (\beta p + \delta q)\tau} = \frac{np_1' + nq_1'\tau}{p_1 + q_1\tau}$$

ist, wobei bekanntlich $p_1 q_1' - p_1' q_1$ wieder gleich 1 wird, so sind die T Grössen (81), abgesehen von der Reihenfolge, identisch mit den T Grössen (80). Deshalb wird das Product

$$\prod_{\alpha=1}^{T} (\bar{J} - \bar{J}_\alpha(\tau))$$

eine eindeutige Function von τ, welche ungeändert bleibt, wenn man τ mit $\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$ vertauscht. Daraus folgt bekanntlich, dass dieses Product eine rationale Function $F(\bar{J}, J)$ von $\bar{J}$ und J ist, und man erhält den Satz:

II. *Die T Grössen $\bar{J}_1(\tau)$, $\bar{J}_2(\tau)$, $\cdots$ $\bar{J}_T(\tau)$ sind die Wurzeln einer Gleichung T^{ten} Grades*

$$F(\bar{J}, J) = 0, \tag{82}$$

deren Coefficienten rationale Functionen von J sind.

Diese Gleichung soll wieder die „*Invariantengleichung*" heissen. Von ihr gilt der Satz:

III. *Die Invariantengleichung ist irreducibel.*

Beweis. Ist $J(n\tau)$ die Wurzel einer algebraischen Gleichung

$$G(J(n\tau), J(\tau)) = 0, \tag{83}$$

so hat man eine Identität für alle Werthe von τ, für welche die Reihenentwickelungen von $J(\tau)$ und $J(n\tau)$ convergiren, d. h. für alle Werthe von τ mit positivem imaginären Bestandtheil. Dieselbe muss auch befriedigt werden, wenn man τ mit $\tilde{\tau} = \frac{p' + q'\tau}{p + q\tau}$ vertauscht.

Da nun aber $J(\widetilde{\tau})$ gleich $J(\tau)$ ist, so ist $J(n\widetilde{\tau})$ eine Wurzel derselben Gleichung (83), d. h. die T verschiedenen Grössen

$$\overline{J}_1,\ \overline{J}_2,\ \cdots\ \overline{J}_T$$

müssen sämmtlich Wurzeln der Gleichung (83) sein, folglich ist die Invariantengleichung *irreducibel.*

Unter den Werthen von $\overline{J}$ mögen die beiden

$$J(n\tau) \quad \text{und} \quad J\left(\frac{\tau}{n}\right)$$

besonders hervorgehoben werden; dadurch erhält man aus Gleichung (82) die beiden Gleichungen

(84) $$F(J(n\tau),\ J(\tau)) = 0$$

und

(84a) $$F\left(J\left(\frac{\tau}{n}\right),\ J(\tau)\right) = 0.$$

Vertauscht man jetzt in Gleichung (84a) die Grösse τ mit $n\tau$, so wird

(85) $$F(J(\tau),\ J(n\tau)) = 0.$$

Die Gleichung (84) bleibt daher noch richtig, wenn man $J(n\tau)$ mit $J(\tau)$, oder $\overline{J}$ mit J vertauscht. Da aber die Gleichung (82) irreducibel ist, so gilt dies nicht nur für $J(n\tau)$, sondern für jedes beliebige $\overline{J}$, und man erhält

$$F(\overline{J}, J) = \pm F(J, \overline{J}).$$

Hierbei muss aber das obere Zeichen gelten, weil für das untere Zeichen die Gleichung (82) auch für $\overline{J} = J$ befriedigt werden müsste, was für beliebige Werthe von τ nicht möglich ist. Dies giebt den Satz:

IV. *In Gleichung* (82) *ist die linke Seite* $F(\overline{J}, J)$ *eine symmetrische Function der beiden Jnvarianten* $\overline{J}$ und J.

Zu jedem primitiven Periodenpaar gehört ein einziger $\overline{\tau}$-Repräsentant, wie vorher gezeigt wurde, zu jedem $\overline{\tau}$-Repräsentanten gehören aber unendlich viele primitive Periodenpaare

$$2p\omega + 2q\omega',\ \ 2p'\omega + 2q'\omega'.$$

Ist der τ-Repräsentant $\frac{C + D\tau}{A}$ gegeben, so kann man die ganzen Zahlen p, q, p', q' z. B. in folgender Weise bestimmen.

Man wähle die ganze Zahl α so, dass

(86) $$p = A\alpha + C \quad \text{und} \quad q = D$$

relativ prim sind; ferner wähle man die ganzen Zahlen p' und q' so, dass

$$pq' - p'q = +1.$$

Setzt man dann

$$(87)\qquad \beta = 1,\quad \gamma = A\alpha q' - 1,\quad \delta = Aq',\quad \tau' = \frac{C + D\tau}{A},$$

so wird in der That

$$\frac{\gamma + \delta\tau'}{\alpha + \beta\tau'} = \frac{A^2\alpha q' - A + Aq'C + Aq'D\tau}{A\alpha + C + D\tau} = \frac{A(pq' - 1) + nq'\tau}{p + q\tau} = \frac{np' + nq'\tau}{p + q\tau}$$

und

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

§ 7.

Der Rang der Invariantengleichung.

Die Gleichung, welche zwischen $\overline{J}$ und J besteht, wirklich zu bilden, ist bis jetzt selbst bei den kleineren Werthen von n unterlassen worden, weil man sie durch wesentlich-einfachere Gleichungen ersetzen kann. Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, giebt es in dem Rationalitätsbereiche $(J, \overline{J})$ Hülfsgrössen ξ, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Gleichungen

$$(1)\qquad F(\xi, J) = 0 \quad\text{und}\quad F_1(\xi, \overline{J}) = 0,$$

welche zwischen ξ und J, bez. zwischen ξ und $\overline{J}$ bestehen, in Bezug auf J und $\overline{J}$ von niedrigerem Grade sind als die Invariantengleichung.

Dieser Grad der Gleichungen (1) ist eine für ξ charakteristische Zahl und soll deshalb der „*Charakter*" von ξ heissen. Ist nämlich η irgend eine andere Grösse des Rationalitätsbereiches $(J, \overline{J})$, so kann man auch eine Gleichung zwischen ξ und η herleiten, deren Grad in Bezug auf η *im Allgemeinen* gleich dem Charakter von ξ ist. Ebenso ist der Grad dieser Gleichung in Bezug auf ξ gleich dem Charakter von η. Nur ausnahmsweise kann sich der Grad dieser Gleichung zwischen ξ und η erniedrigen. Dies geschieht z. B., wenn man für η eine rationale Function von ξ wählt.*)

Ist $\varrho = 0$, so giebt es solche Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter 1, d. h. es giebt Hülfsgrössen ξ, durch welche sich J und $\overline{J}$ *rational* darstellen lassen. Ist ξ eine solche Grösse, so haben alle übrigen die Form

$$\frac{a\xi + b}{c\xi + d}.$$

Ist $\varrho = 1$, so giebt es unendlich viele Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter 2. Zwischen je zweien besteht eine Gleichung, welche in Bezug auf jede der beiden Grössen vom *zweiten* Grade ist, wenn nicht

*) Man vergleiche die von Riemann gegebenen Sätze aus der Theorie der Abel'schen Functionen (ges. Werke, Seite 81 bis 135).

etwa die eine *linear* abhängig ist von der anderen. Deshalb lassen sich J und $\overline{J}$ *rational* darstellen durch eine solche Hülfsgrösse ξ und durch die Quadratwurzel aus einer Function *dritten* oder *vierten* Grades von ξ.

Ist $\varrho = 2$, so giebt es unendlich viele Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter 2, die *aber sämmtlich linear von einander abhängig sind.* Durch zwei solche Hülfsgrössen ξ lassen sich daher J und $\overline{J}$ nicht rational darstellen. Dagegen giebt es ausserdem noch unendlich viele Hülfsgrössen η mit dem Charakter 3, so dass J und $\overline{J}$ sich als rationale Functionen von ξ und η darstellen lassen. Da nun die Gleichung zwischen ξ und η in Bezug auf ξ vom *dritten* und in Bezug auf η vom *zweiten* Grade ist, so kann man J und $\overline{J}$ rational ausdrücken durch ξ und durch die Quadratwurzel aus einer Function *fünften* oder *sechsten* Grades von ξ.

Ist $\varrho > 2$ und *gerade*, so giebt es nach Riemann (ges. Werke, Seite 116) Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter $\frac{1}{2}(\varrho + 2)$;

ist $\varrho > 2$ und *ungerade*, so giebt es nach Riemann Hülfsgrössen ξ mit dem Charakter $\frac{1}{2}(\varrho + 3)$.

In Ausnahmefällen kann der Charakter noch niedriger werden. So wird z. B. die Invariantengleichung bei der Transformation 30ten Grades den Rang $\varrho = 3$ haben. Der Riemann'schen Angabe entsprechend müsste dann der Charakter jeder Hülfsgrösse des Rationalitätsbereiches $(J, \overline{J})$ mindestens 3 sein. Es giebt aber in Wirklichkeit schon Hülfsgrössen mit dem Charakter 2, die sämmtlich *linear* von einander abhängig sind; man hat also den sogenannten hyperelliptischen Fall. Hülfsgrössen mit dem Charakter 3 giebt es in diesem Falle überhaupt nicht. Dagegen findet man noch Hülfsgrössen mit dem Charakter 4, so dass sich J und $\overline{J}$ rational durch ξ und die Quadratwurzel aus einer Function *siebenten* oder *achten* Grades von ξ darstellen lassen.

In *allen* Fällen giebt es aber Hülfsgrössen ξ, deren Charakter gleich oder kleiner ist als $\frac{1}{2}(\varrho + 3)$. Indem man also J und $\overline{J}$ als *rationale Functionen* von zwei solchen Hülfsgrössen ξ und η darstellt, kann man die Invariantengleichung durch die Gleichung zwischen ξ und η ersetzen. Dadurch wird eine um so grössere Vereinfachung herbeigeführt, je niedriger der Charakter von ξ und η ist.

Um zu entscheiden, ob der Charakter einer Hülfsgrösse möglichst klein ist, muss man zunächst den *Rang* ϱ der Invariantengleichung bestimmen.

Dies kann man verhältnissmässig leicht ausführen, weil man die singulären Werthe von J genau kennt. Man weiss nämlich, wie z. B. Herr Klein in seiner oben citirten Abhandlung zeigt, dass für $J=0$ immer nur je *drei* Werthe von $\overline{J}$ einander gleich werden, dass für $J=1$ immer nur je *zwei* Werthe von $\overline{J}$ einander gleich werden, und dass für $J=\infty$ die Verzweigung je nach den Werthen von n eine verschiedenartige ist. Dies sind die *einzigen* singulären Werthe von J, so dass man von diesen singulären Punkten nur noch die Ordnungszahlen, deren Summe s heissen möge, aufzusuchen hat. Kennt man aber die Zahl s, so erhält man auch die Zahl ϱ aus der bekannten Formel

(88) $$2\varrho = s - 2T + 2.$$

Es sei der Kürze wegen ζ eine dritte Wurzel der Einheit, also

(89) $$2\zeta = -1 + i\sqrt{3},$$

dann wird $J=0$, wenn τ mit ζ äquivalent ist. Um nun zu untersuchen, welche von den T Grössen $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ für diesen Werth von τ einander gleich werden, heisse D' der grösste gemeinsame Theiler von A und $C-D$, es sei also

(90) $$A = D'\beta \quad \text{und} \quad C - D = D'\delta,$$

wobei β und δ relativ prim sind. Deshalb kann man zwei ganze Zahlen α_0 und γ_0 so bestimmen, dass

$$\alpha_0\delta - \beta\gamma_0 = +1$$

wird. Setzt man jetzt

(90a) $$\alpha = \alpha_0 + x\beta, \quad \gamma = \gamma_0 + x\delta, \quad A' = D\beta, \quad C' = -D\alpha,$$

so wird

$$A'D' = AD = n, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1,$$

und man kann die ganze Zahl x so bestimmen, dass

$$0 \leqq -\alpha < \beta, \quad \text{oder} \quad 0 \leqq C' < A'.$$

Deshalb ist

$$\tau'' = \frac{C' + D'\tau}{A'}$$

auch einer der T $\bar{\tau}$-Repräsentanten. Dabei folgt aber aus

$$\frac{\gamma + \delta\tau''}{\alpha + \beta\tau''} = \frac{A'\gamma + C'\delta + D'\delta\tau}{A'\alpha + C'\beta + D'\beta\tau} = \frac{-D + (C-D)\tau}{A\tau},$$

dass für $\tau = \zeta$

(91) $$\tau'' \sim \frac{-D + (C-D)\zeta}{A\zeta} = \frac{C + D\zeta}{A} = \tau'.$$

Ferner sei D'' der grösste gemeinsame Theiler von A und C, also

$$A = D''\beta', \quad C = D''\delta',$$

dann kann man zwei ganze Zahlen α_0' und γ_0' so bestimmen, dass

$$\alpha_0'\delta' - \beta'\gamma_0' = 1$$

wird. Setzt man jetzt

$$\alpha' = \alpha_0' + x\beta', \quad \gamma' = \gamma_0' + x\delta', \quad A'' = A\delta' - (C-D)\beta',$$
$$C'' = (C-D)\alpha' - A\gamma',$$

so ist auch $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = +1$, und man kann die ganze Zahl x so bestimmen, dass

$$C'' = (C-D)\alpha_0' - A\gamma_0' - A''x$$

nur einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots A''-1$ hat. Da nun ausserdem

$$A''D'' = AC - AC + AD = AD = n,$$

und die drei Zahlen A'', C'', D'' keinen gemeinsamen Factor haben, so wird

$$\tau''' = \frac{C'' + D''\tau}{A''}$$

gleichfalls einer der T $\bar{\tau}$-Repräsentanten, und es folgt aus

$$\frac{\gamma' + \delta'\tau'''}{\alpha' + \beta'\tau'''} = \frac{A''\gamma' + C''\delta' + D''\delta'\tau}{A''\alpha' + C''\beta' + D''\beta'\tau} = \frac{C - D + C\tau}{A + A\tau},$$

dass für $\tau = \zeta$

$$\tau''' \sim \frac{C - D + C\zeta}{A(1+\zeta)} = \frac{C + D\zeta}{A} = \tau'. \tag{92}$$

Damit ist bewiesen, dass für $\tau = \zeta$ die drei Grössen τ', τ'', τ''' einander äquivalent werden, so dass die drei zugehörigen Werthe $J(\tau')$, $J(\tau'')$ und $J(\tau''')$ einander gleich sind.

Da τ' aus den $\bar{\tau}$-Repräsentanten beliebig ausgewählt war, so werden für $\tau = \zeta$ je drei Werthe von $\bar{J}$ einander gleich. Eine Ausnahme findet nur dann statt, wenn die drei $\bar{\tau}$-Repräsentanten τ', τ'' und τ''' für *alle* Werthe von τ einander gleich sind. Dies geschieht, wenn

$$A = A' = A'', \quad C = C' = C'', \quad D = D' = D'', \tag{93}$$

wenn also nach den Gleichungen (90) und (90a)

$$A = D\beta, \quad C = -D\alpha, \quad C - D = D\delta.$$

Da aber A, C und D keinen gemeinsamen Factor haben, so muss

$$D = 1, \quad A = \beta = n, \quad \alpha = -C, \quad \delta = C - 1$$

sein. Daraus folgt

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -C(C-1) - n\gamma = 1,$$

oder

$$C^2 - C + 1 \equiv 0 \pmod{n}, \text{ oder } (2C-1)^2 \equiv -3 \pmod{4n}. \tag{94}$$

Ist $\tau' = \dfrac{C+\tau}{n}$, und genügt C der Congruenz (94), so werden in der That die Gleichungen (93) befriedigt, d. h. die Grössen τ'' und τ''' werden mit τ' identisch.

Bezeichnet man also mit ε_0 die Anzahl der Werthe von C, welche der Congruenz (94) genügen und kleiner sind als n, so bilden die T Werthe von $\overline{J}$, welche dem Werthe $J=0$ zugeordnet sind, $\frac{1}{3}(T-\varepsilon_0)$ Cyklen zu je drei, während ε_0 Werthe von einander verschieden bleiben.

Deshalb ist $J=0$ *ein singulärer Werth von der Ordnung* $\frac{2}{3}(T-\varepsilon_0)$.

Für $\tau \backsim i$ wird $J=1$; um nun zu untersuchen, welche von den T Grössen $J\left(\frac{C+D\tau}{A}\right)$ für diesen Werth von τ einander gleich werden, heisse D' der grösste gemeinsame Theiler von A und C, es sei also

$$(95)\quad \begin{cases} A=D'\beta, \quad C=D'\delta, \quad \alpha_0\delta-\beta\gamma_0=+1, \\ \alpha=\alpha_0+x\beta, \quad \gamma=\gamma_0+x\delta, \quad A'=D\beta, \quad C'=-D\alpha, \end{cases}$$

dann wird

$$\alpha\delta-\beta\gamma=+1, \quad A'D'=AD=n,$$

und man kann x so bestimmen, dass

$$0 \leqq -\alpha < \beta$$

und deshalb

$$0 \leqq C' < A'.$$

Daraus folgt, dass $\tau''=\frac{C'+D'\tau}{A'}$ auch einer der $\bar{\tau}$-Repräsentanten ist, und dass

$$\frac{\gamma+\delta\tau''}{\alpha+\beta\tau''}=\frac{A'\gamma+C'\delta+D'\delta\tau}{A'\alpha+C'\beta+D'\beta\tau}=\frac{-D+C\tau}{A\tau}$$

wird. Dies giebt für $\tau=i$

$$(96)\qquad \tau'' \backsim \frac{-D+Ci}{Ai}=\frac{C+Di}{A}=\tau'.$$

Die beiden Grössen $J(\tau')$ und $J(\tau'')$ werden daher für $\tau=i$ einander gleich. Wenn also τ' und τ'' zwei von einander verschiedene $\bar{\tau}$-Repräsentanten sind, so sind auch $J(\tau')$ und $J(\tau'')$ von einander verschieden ausser für $\tau=i$. Die beiden Grössen τ' und τ'' können aber nur dann identisch sein, wenn

$$(97)\qquad A=A', \quad C=C', \quad D=D',$$

wenn also nach den Gleichungen (95)

$$A=D\beta, \quad C=D\delta=-D\alpha.$$

Da aber die drei Grössen A, C und D keinen gemeinsamen Theiler haben dürfen, so wird

$$D=1, \quad A=\beta=n, \quad C=\delta=-\alpha,$$
$$\alpha\delta-\beta\gamma=-C^2-n\gamma=+1,$$

also

(98) $$C^2 \equiv -1 \ (\text{mod. } n).$$

Ist $\tau' = \frac{C+\tau}{n}$, und genügt C der Congruenz (98), so werden in der That die Gleichungen (97) befriedigt, d. h. die Grössen τ' und τ'' sind identisch.

Bezeichnet man also mit ε_1 die Anzahl der Werthe von C, welche der Congruenz (98) genügen und kleiner sind als n, so bilden die T Werthe von $\overline{J}$, welche dem Werthe $J=1$ zugeordnet sind, $\frac{1}{2}(T-\varepsilon_1)$ Cyklen zu je zwei, während ε_1 Werthe von einander verschieden bleiben.

Deshalb ist $J=1$ ein singulärer Werth von der Ordnung $\frac{1}{2}(T-\varepsilon_1)$.

Bei jeder Umkreisung des Punktes $J=\infty$ wächst die Veränderliche τ um 1; bei μ Umkreisungen geht also

$$\tau' = \frac{C+D\tau}{A}$$

über in

$$\tau'' = \frac{C+D\mu+D\tau}{A}.$$

Ist t wieder der grösste gemeinsame Theiler von A und D, ist also

$$A = at, \quad D = dt,$$

so wird erst für $\mu = a$ die Grösse $\tau'' = \tau' + d$ mit τ' äquivalent. Man erhält also an dieser Stelle, wenn man von dem Repräsentanten τ' ausgeht, einen Cyklus von $a = \frac{A}{t}$ Repräsentanten, die für $J=\infty$ denselben Werth von $\overline{J}$ liefern.

Jedem Nenner A entsprechen zunächst $\frac{A}{t}\varphi(t)$ Werthe von C, die also $\varphi(t)$ solche Cyklen zu je $\frac{A}{t}$ bilden. *Deshalb ist der Werth $J=\infty$ ein singulärer Werth von der Ordnung*

(99) $$\sum\left(\frac{A}{t}-1\right)\varphi(t) = \sum\frac{A}{t}\varphi(t) - \sum\varphi(t) = T - \sum\varphi(\tau).$$

Damit sind alle singulären Werthe von J erschöpft, so dass die Anzahl der singulären Punkte mit Rücksicht auf ihre Ordnungszahl gleich

(100) $$\begin{cases} s = \frac{2}{3}(T-\varepsilon_0) + \frac{1}{2}(T-\varepsilon_1) + T - \Sigma\varphi(t) \\ \quad = \frac{13}{6}T - \frac{2}{3}\varepsilon_0 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \Sigma\varphi(t) \end{cases}$$

ist. Deshalb findet man aus Gleichung (88)

(101) $$12\varrho = T + 12 - 4\varepsilon_0 - 3\varepsilon_1 - 6\Sigma\varphi(t).$$

Diese wichtige Formel hat schon Herr Gierster in seiner Notiz über

Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrade (Math. Annalen, Bd. 14, S. 537—544) gegeben. Die Andeutungen über ihre Ableitung sind aber so knapp, dass eine ausführliche Darstellung nicht überflüssig erschien.

§ 8.

Tabelle.

Da bei den Anwendungen, welche in den späteren Abschnitten folgen sollen, der Rang ϱ für eine grössere Reihe von Werthen der Zahl n gebraucht wird, so war es nothwendig, aus der Formel (101) eine Tabelle für ϱ herzustellen, welche die weiter unten behandelten Fälle umfasst, und welche hier folgen möge:

n	Bedingungen.	ϱ
$12\nu+1$	$12\nu+1$ ist eine Primzahl	$\nu-1$
$12\nu+5$	$12\nu+5$ „ „ „	ν
$12\nu+7$	$12\nu+7$ „ „ „	ν
$12\nu+11$	$12\nu+11$ „ „ „	$\nu+1$
$(12\nu+1)^2$	$12\nu+1$ „ „ „	$12\nu^2-3\nu-1$
$(12\nu+5)^2$	$12\nu+5$ „ „ „	$12\nu^2+5\nu$
$(12\nu+7)^2$	$12\nu+7$ „ „ „	$12\nu^2+9\nu+1$
$(12\nu+11)^2$	$12\nu+11$ „ „ „	$12\nu^2+17\nu+6$
4^r	$r>1$	$2\cdot4^{r-2}+1-3\cdot2^{r-2}$
$2\cdot4^r$	$r>0$	$4\cdot4^{r-2}+1-4\cdot2^{r-2}$
$2(4c\pm1)$	$4c\pm1$ „ „ „	$c-1$
$4^r(2b+1)$	$2b+1$ „ „ „ , $r>0$	$4^{r-1}(b+1)+1-3\cdot2^{r-1}$
$2\cdot4^r(2b+1)$	$2b+1$ „ „ „ , $r>0$	$2\cdot4^{r-1}(b+1)+1-4\cdot2^{r-1}$
$3(6l\pm1)$	$6l\pm1$ „ „ „	$2l-1$
$9a$	a „ „ „	$a-2$

Insbesondere findet man für die Zahlen 1 bis 61 folgende Tabelle

n	ε_0	ε_1	$\Sigma\varphi(t)$	ϱ
2	0	1	2	0
3	1	0	2	0
4	0	0	3	0
5	0	2	2	0

n	ε_0	ε_1	$\Sigma\varphi(t)$	ϱ
6	0	0	4	0
7	2	0	2	0
8	0	0	4	0
9	0	0	4	0
10	0	2	4	0
11	0	0	2	1
12	0	0	6	0
13	2	2	2	0
14	0	0	4	1
15	0	0	4	1
16	0	0	6	0
17	0	2	2	1
18	0	0	8	0
19	2	0	2	1
20	0	0	6	1
21	2	0	4	1
22	0	0	4	2
23	0	0	2	2
24	0	0	8	1
25	0	2	6	0
26	0	2	4	2
27	0	0	6	1
28	0	0	6	2
29	0	2	2	2
30	0	0	8	3
31	2	0	2	2
32	0	0	8	1
33	0	0	4	3
34	0	2	4	3
35	0	0	4	3
36	0	0	12	1
37	2	2	2	2
38	0	0	4	4
39	2	0	4	3
40	0	0	8	3

n	ε_0	ε_1	$\Sigma\varphi(t)$	ϱ
41	0	2	2	3
42	0	0	8	5
43	2	0	2	3
44	0	0	6	4
45	0	0	8	3
46	0	0	4	5
47	0	0	2	4
48	0	0	12	3
49	2	0	8	1
50	0	2	12	2
51	0	0	4	5
52	0	0	6	5
53	0	2	2	4
54	0	0	12	4
55	0	0	4	5
56	0	0	8	5
57	2	0	4	5
58	0	2	4	6
59	0	0	2	5
60	0	0	12	7
61	2	2	2	4

II. Abschnitt.

Eigenschaften der Parameter.

§ 9.

Bildung von Parametern.

Nach den Ausführungen der beiden vorhergehenden Paragraphen kommt es darauf an, Hülfsgrössen ξ zu bilden, welche dem Rationalitätsbereiche $(J, \overline{J})$ angehören und einen möglichst niedrigen Charakter besitzen.

Auf *rein algebraischem* Wege würde die Lösung dieser Aufgabe schon deshalb grosse Schwierigkeiten bieten, weil die Invariantengleichung, d. i. die Gleichung zwischen J und $\overline{J}$, selbst gar nicht bekannt ist. Dagegen gelangt man durch Anwendung der schon früher (§ 5, Gleichung (65)) erklärten Producte

$$(102)\qquad \xi = \prod\left(\frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}\right)^{\delta} = L(D_1)^{\delta_1} L(D_2)^{\delta_2} L(D_3)^{\delta_3} \ldots,$$

welche der Kürze wegen „*L-Producte*" genannt werden sollen, zum Ziele. Dabei waren $D_1, D_2, D_3, \ldots$ beliebige Theiler von n, und die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ waren positive oder negative *ganze* Zahlen. Sind diese Exponenten so bestimmt, dass ξ eine Transformationsgrösse wird, so wurde ξ ein *Parameter* genannt, weil dann ξ dem Rationalitätsbereiche $(J, \overline{J})$ angehört.

Dies folgt schon aus Satz III in § 1 (Seite 10), nach welchem die Transformationsgrösse ξ durch g_2, g_3 und die Transformationsgrösse $\overline{J}$ *rational* darstellbar ist. In dem vorliegenden Falle ist aber ξ von der nullten Dimension, folglich kommen g_2 und g_3 nur in der Verbindung

$$\frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = J$$

und

$$\frac{27 g_3^2}{g_2^3 - 27 g_3^2} = J - 1$$

vor, d. h. ξ ist eine rationale Function von J und $\overline{J}$.

Es ist also zunächst die Frage, wie man die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ bestimmen muss, damit ξ wirklich ein Parameter wird.

Die Antwort auf diese Frage findet man entweder auf dem Wege, der bei der Bildung der Transformationsgrössen eingeschlagen wurde, indem man

$$(103)\qquad x = f(D_1)^{\delta_1} f(D_2)^{\delta_2} f(D_3)^{\delta_3} \ldots$$

rational durch die Theilwerthe der $\wp$-Function auszudrücken versucht. Man kann aber auch den Umstand benutzen, dass jeder Parameter ξ als rationale Function von $J = J(\tau)$ und $\overline{J} = J(n\tau)$ darstellbar ist. Nun ändert sich $J(\tau)$ gar nicht, wenn man τ mit der äquivalenten Grösse $\frac{p' + q'\tau}{p + q\tau}$ vertauscht.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass bei dieser Vertauschung auch die absolute Invariante $J(n\tau)$ der transformirten elliptischen Function ungeändert bleibt, ist bekanntlich

$$q \equiv 0 \ (\text{mod. } n) \quad \text{oder} \quad q = nr.$$

Jede eindeutige, analytische Function ξ der Grösse τ, welche bei der Vertauschung von τ mit $\frac{p' + q'\tau}{p + nr\tau}$ gleichfalls ungeändert bleibt, und als Function von J überall algebraischen Charakter hat, ist eine rationale Function von J und $\overline{J}$. Dabei ist natürlich

(104) $$pq' - p'nr = +1.$$

Vertauscht man nun das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit dem äquivalenten

(105) $$2\varpi = 2p\omega + 2nr\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega',$$

so verwandelt sich

$$Q(\omega, \omega') \quad \text{in} \quad Q(\varpi, \varpi') = \varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega'),$$

wobei $\varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix}$ eine 24$^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit ist, welche in § 11—15 m. vor. Abh. bestimmt worden ist. Bezeichnet man $\frac{n}{D}$ mit A, so geht bei derselben Vertauschung der Perioden

$$Q\left(\frac{\omega}{D}, \omega'\right) \text{ in } Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right) = \varrho\begin{pmatrix} p, & Ar \\ Dp', & q' \end{pmatrix} Q\left(\frac{\omega}{D}, \omega'\right)$$

über. Deshalb verwandelt sich bei dieser Vertauschung

(106) $$L(D) \quad \text{in} \quad \varrho\begin{pmatrix} p, & Ar \\ Dp', & q' \end{pmatrix} L(D) : \varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix}.$$

Setzt man also

$$A_1 D_1 = A_2 D_2 = A_3 D_3 = \cdots = AD = n,$$

so verwandelt sich ξ bei dieser Vertauschung der Perioden in sich selbst, multiplicirt mit dem Factor

(107) $$\frac{\varrho\begin{pmatrix} p, & A_1 r \\ D_1 p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_1} \varrho\begin{pmatrix} p, & A_2 r \\ D_2 p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_2} \varrho\begin{pmatrix} p, & A_3 r \\ D_3 p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_3} \cdots}{\varrho\begin{pmatrix} p, & nr \\ p', & q' \end{pmatrix}^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots}}.$$

Da ξ als Function von J nirgendwo eine wesentlich singuläre Stelle hat, so heisst die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ξ ein Parameter ist: *Der Factor* (107) *muss immer gleich* 1 *sein, wenn man für die ganzen Zahlen* p, r, p', q' *alle möglichen Werthsysteme einsetzt, welche der Gleichung* (104) *genügen.*

Ist z. B.

$$p = 1, \quad r = 0, \quad p' = 1, \quad q' = 1,$$

so wird nach Gleichung (134) m. vor. Abh.

$$\varrho\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ D, & 1 \end{pmatrix} = e^{\frac{D\pi i}{12}},$$

folglich ist in diesem Falle der Factor (107) gleich

$$e^{\frac{\pi i}{12}[(D_1 - 1)\delta_1 + (D_2 - 1)\delta_2 + (D_3 - 1)\delta_3 + \cdots]}$$

und wird nur dann gleich 1, wenn

$$(108) \begin{cases} \Sigma(D-1)\delta \\ = (D_1-1)\delta_1 + (D_2-1)\delta_2 + (D_3-1)\delta_3 + \cdots \equiv 0 \pmod{24}. \end{cases}$$

Diese Bedingung, der die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ genügen müssen, ist übrigens schon in Gleichung (64) ausgesprochen worden, als man verlangte, dass die Zahl m durch 6 theilbar ist.

Eine zweite Bedingungsgleichung findet man, indem man

$$p = 1, \quad r = 1, \quad p' = 0, \quad q' = 1$$

setzt. Dann wird

$$\varrho\begin{pmatrix}1, & A\\ 0, & 1\end{pmatrix} = e^{-\frac{A\pi i}{12}},$$

folglich ist hier der Factor (107) gleich

$$e^{\frac{\pi i}{12}[n(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots)-A_1\delta_1-A_2\delta_2-A_3\delta_3-\cdots]}$$

und wird nur dann gleich 1, wenn

$$(n-A_1)\delta_1 + (n-A_2)\delta_2 + (n-A_3)\delta_3 + \cdots \equiv 0 \pmod{24},$$

oder

$$(109) \quad (D_1-1)A_1\delta_1 + (D_2-1)A_2\delta_2 + (D_3-1)A_3\delta_3 + \cdots \equiv 0 \pmod{24}.$$

Diese Bedingungen (108) und (109) sind *nothwendig;* sie sind aber auch, wie sogleich gezeigt werden soll, *hinreichend*, wenn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sämmtlich *gerade* und auch n *gerade* ist.

Sind die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sämmtlich *gerade*, aber n *ungerade*, so tritt noch eine dritte Bedingung hinzu.

Die Untersuchung wird nämlich wesentlich einfacher, wenn man sich auf den Fall beschränkt, wo die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ lauter *gerade* Zahlen sind, weil man es dann nur mit 12ten Wurzeln der Einheit zu thun hat, welche sich viel leichter bestimmen lassen als die 24ten Wurzeln der Einheit ϱ. Nach den Angaben von Herrn Hurwitz (Grundlagen einer independenten Theorie der Modulfunctionen u. s. w., Math. Annalen, Bd. 18, S. 528) wird nämlich

$$\varrho\begin{pmatrix}a, & b\\ c, & d\end{pmatrix}^2 = \begin{bmatrix}a, & b\\ c, & d\end{bmatrix} = e^{\frac{E\pi i}{6}},$$

wobei

$$(110) \quad E = (1-c^2)[bd+3(c-1)d+c+3] + c(a+d-3).$$

Deshalb verwandelt sich $L(D)^2$ bei der Vertauschung des primitiven Periodenpaares 2ω, $2\omega'$ mit 2ϖ, $2\varpi'$ in

$$L(D)^2 e^{\frac{\pi i}{6}(E'-E'')},$$

wobei

$$E' = (1-D^2p'^2)[Arq'+3q'(Dp'-1)+Dp'+3]+Dp'(p+q'-3),$$
$$E'' = (1-p'^2)\quad[nrq'+3q'(p'-1)+p'+3]+p'(p+q'-3).$$

Daraus folgt

$$(111)\quad \begin{cases} E'-E''=(D-1)[-nrp'^2q'-p'^3(3q'+1)+3p'^2(q'-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +p'(p+4q'-2)] \\ \qquad -rq'A(D-1)+3p'^2[q'-1-p'(3q'+1)]D(D-1) \\ \qquad -p'^3(3q'+1)D(D-1)(D-2). \end{cases}$$

Damit ξ ein Parameter ist, muss

$$(112)\qquad \Sigma(E'-E'')\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

sein. Nun ist aber nach den Congruenzen (108) und (109) nothwendiger Weise

$$(108\text{a})\qquad \Sigma(D-1)\delta = 24a,$$
$$(109\text{a})\qquad \Sigma(D-1)A\delta = 24b,$$

wo a und b beliebige ganze Zahlen sind, folglich reducirt sich die Bedingung (112) auf

$$(112\text{a})\quad \begin{cases} 3p'^2[(q'-1)(p'+1)-4p'q']\Sigma D(D-1)\delta \\ -p'^3(3q'+1)\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}. \end{cases}$$

Dabei ist $-12p'^3q'D(D-1)\delta$ sicher durch 24 theilbar; ist p' *gerade*, so ist schon $3p'^2(q'-1)$ durch 24 theilbar, und ist p' *ungerade*, so ist $3(p'+1)D(D-1)\delta$ durch 24 theilbar. Die Congruenz (112a) reducirt sich also weiter auf

$$(112\text{b})\qquad p'^3(3q'+1)\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Ist n eine *gerade* Zahl, so wird auch $q = nr$ *gerade*, also q' *ungerade;* deshalb muss in diesem Falle

$3q'+1$ durch 2, $D(D-1)(D-2)$ durch 6 und δ durch 2

theilbar sein, so dass die Congruenz (112b) ganz von selbst befriedigt wird. Ist aber n eine *ungerade* Zahl, so kann man q' so wählen, dass $p'^3(3q'+1)$ die Factoren 2 und 3 nicht enthält, dann tritt also noch die Bedingung

$$(113)\qquad \Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

hinzu. Dadurch erhält man also den folgenden Satz:

I. *Die Hülfsgrösse*

$$\xi = L(D_1)^{\delta_1}L(D_2)^{\delta_2}L(D_3)^{\delta_3}\ldots$$

ist ein Parameter, wenn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ *sämmtlich gerade Zahlen sind, und wenn*

1) $\Sigma(D-1)\delta = 24a,$

2) $\Sigma(D-1)A\delta = 24b,$

3) $\Sigma D(D-1)(D-2)\delta = 24c.$

Die letzte Bedingung kommt noch in Wegfall, wenn n eine gerade Zahl ist.

II. *Sind die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ zum Theil ungerade Zahlen, so kann ξ nur dann ein Parameter sein, wenn auch hier die beiden ersten Bedingungen, dass nämlich $\Sigma(D-1)\delta$ und $\Sigma(D-1)A\delta$ durch* 24 *theilbar sind, erfüllt werden. Diese Bedingungen sind nothwendig, aber noch nicht hinreichend,* wie sich aus den später folgenden Beispielen ergiebt.

§ 10.

Definition und Berechnung des Charakters, welchen ein Parameter besitzt.

Ist ξ ein Parameter, d. h. ist ξ eine rationale Function von $\bar{J}$ und J, so besteht zwischen ξ und J eine Gleichung, welche in § 5 eine „invariante Multiplicatorgleichung" genannt wurde. Der Grad dieser Gleichung in Bezug auf J wurde der *Charakter* des Parameters ξ genannt und möge mit ch bezeichnet werden. Es besteht nämlich zwischen ξ und jeder anderen Grösse η des Rationalitätsbereiches $(\bar{J}, J)$ eine Gleichung, welche in Bezug auf η wieder den Grad ch besitzt, wie aus bekannten algebraischen Sätzen hervorgeht.

Um nun den Werth von ch für einen Parameter ξ zu berechnen, entwickele man die $T(n)$ verschiedenen Werthe von ξ nach Potenzen von

$$h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}.$$

Dies geschieht, indem man die Entwickelung für die einzelnen Factoren von ξ vornimmt. Setzt man zu diesem Zwecke wieder, wie in den Gleichungen (86),

$$p = A\alpha + C \quad \text{und} \quad q = D,$$

wo α so gewählt ist, dass p und q relativ prim sind, so entspricht das primitive Periodenpaar

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

nach § 6 dem $\bar{\tau}$ Repräsentanten $\frac{C + D\tau}{A}$. Jetzt sei t_ν der grösste gemeinsame Theiler von D und D_ν, es sei also

(114) $$q = D = t_\nu v, \quad D_\nu = t_\nu v_\nu,$$

wobei v und v_ν relativ prim sind. Deshalb giebt es zwei ganze Zahlen d und x, für welche

(115) $$d v_\nu = p + x v$$

wird. Nach diesen Bestimmungen setze man

(116) $$a = v_\nu q', \quad b = -v, \quad c = -p' t_\nu - x q',$$

dann wird

$$ad - bc = +1,$$

(117) $$a\frac{\varpi}{D_\nu} + b\varpi' = \frac{\omega}{t_\nu}, \quad c\frac{\varpi}{D_\nu} + d\varpi' = \frac{-x\omega}{t_\nu v_\nu} + \frac{\omega'}{v_\nu},$$

folglich wird

(118) $$Q\left(\frac{\omega}{t_\nu}, \frac{-x\omega}{t_\nu v_\nu} + \frac{\omega'}{v_\nu}\right) = \varrho\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} Q\left(\frac{\varpi}{D_\nu}, \varpi'\right).$$

Bezeichnet man also die Grösse, welche aus h durch Vertauschung von ω, ω' mit $\frac{\omega}{t_\nu}, \frac{-x\omega}{t_\nu v_\nu} + \frac{\omega'}{v_\nu}$ hervorgeht, mit h_ν, so ist

(119) $$h_\nu = e^{-\frac{x\pi i}{v_\nu}} h^{\frac{t_\nu}{v_\nu}}.$$

Da nun die Entwickelung von $Q(\omega, \omega')$ mit $\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}}$ beginnt, so ist das erste Glied in der Entwickelung von $Q\left(\frac{\varpi}{D_\nu}, \varpi'\right)$, wenn man mit K_ν eine Constante bezeichnet, auf deren Werth es hier gar nicht ankommt,

(120) $$K_\nu h^{\frac{t_\nu}{12 v_\nu}} = K_\nu h^{\frac{t_\nu^2}{12 D_\nu}} = K_\nu h^{\frac{1}{12n} A_\nu t_\nu^2}.$$

Ist z. B.

$$D_\nu = 1, \quad \text{also} \quad t_\nu = 1, \; A_\nu = n,$$

so wird das erste Glied in der Entwickelung von $Q(\varpi, \varpi')$

$$K_\nu h^{\frac{1}{12}} = \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}},$$

wie zu erwarten war. Die Entwickelung von

$$L(D_\nu) = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D_\nu}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}$$

fängt also mit

(121) $$K_\nu' h^{\frac{1}{12n}(A_\nu t_\nu^2 - n)} = K_\nu' h^{\frac{A_\nu}{12n}(t_\nu^2 - D_\nu)}$$

an, wo K_ν' wieder eine unwesentliche Constante ist.

Die Entwickelung des Parameters ξ, oder genauer von $\xi\left(\frac{C + D\tau}{A}\right)$, beginnt daher, abgesehen von einem constanten Factor, mit

$$h^{\frac{1}{12n}[A_1\delta_1(t_1^2 - D_1) + A_2\delta_2(t_2^2 - D_2) + A_3\delta_3(t_3^2 - D_3) + \cdots]}.$$

Dagegen beginnt die Entwickelung von J nach steigenden Potenzen von h mit $\frac{1}{1728h^2}$. Nimmt man nun noch hinzu, dass ξ wegen der

Productdarstellung der L nur an solchen Stellen Null oder unendlich werden kann, an denen $J = \infty$ ist, so findet man nach bekannten Sätzen der Algebra das folgende Resultat:

Der Ausdruck

(122) $S(n, D) = A_1\delta_1(t_1^2 - D_1) + A_2\delta_2(t_2^2 - D_2) + A_3\delta_3(t_3^2 - D_3) + \cdots$

werde, wenn er positiv ist, mit P, und wenn er negativ ist, mit N bezeichnet, dann wird

(123) $$\Sigma P = -\Sigma N = 24n \cdot ch,$$

wobei die Summation über alle $\bar{\tau}$-Repräsentanten zu erstrecken ist.

Diese Summation kann man schrittweise ausführen, indem man zunächst alle $\bar{\tau}$-Repräsentanten berücksichtigt, bei denen D und deshalb auch A denselben Werth hat. Die Anzahl dieser $\bar{\tau}$-Repräsentanten ist nach den Auseinandersetzungen in § 6 gleich $\frac{A}{t}\varphi(t)$ und werde mit (A) bezeichnet, so dass also

$$\frac{A}{t}\varphi(t) = (A).$$

Dabei ist t der grösste gemeinsame Theiler von A und D. Für alle diese $\bar{\tau}$-Repräsentanten hat nämlich $S(n, D)$ denselben Werth, so dass man nur die Werthe der Producte $(A)\,S(n, D)$ für alle Theiler D zu untersuchen hat, die in n enthalten sind.

Setzt man noch

(124) $$(A_\nu)\,S(n, D_\nu) = (A_\nu)[A_1\delta_1(t_1^2 - D_1) + A_2\delta_2(t_2^2 - D_2) + A_3\delta_3(t_3^2 - D_3) + \cdots] = 24nk_\nu,$$

so wird nach bekannten Sätzen der Algebra k_ν eine *ganze* positive oder negative Zahl, weil die (A_ν) zu D_ν gehörigen Werthe von $\xi\left(\frac{C + D_\nu\tau}{A_\nu}\right)$ einen Cyklus bilden und für $h = 0$ (bez. für $J = \infty$) einander gleich werden. Bezeichnet man also die positiven Werthe von k_ν mit k_p und die negativen mit k_n, so geht Gleichung (123) über in

(125) $$\Sigma k_p = -\Sigma k_n = ch,$$

wo die Summation jetzt nur noch über alle Theiler D_ν von n zu erstrecken ist.

Ist μ die Anzahl aller Theiler von n, so bildet man die μ Gleichungen

(126) $$(A_\nu)S(n, D_\nu) = 24nk_\nu.$$

Dadurch erhält man z. B. für $D_0 = 1$, $(A_0) = A_0 = n$

(126a) $A_1\delta_1(1 - D_1) + A_2\delta_2(1 - D_2) + A_3\delta_3(1 - D_3) + \cdots = 24k_0;$

und für

$$D_{\mu-1} = n,\ (A_{\mu-1}) = A_{\mu-1} = 1$$

erhält man

(126b) $(D_1 - 1)\delta_1 + (D_2 - 1)\delta_2 + (D_3 - 1)\delta_3 + \cdots = 24k_{\mu-1}.$

Dies giebt nach den Gleichungen (108a) und (109a)

(127) $$k_0 = -b, \quad k_{\mu-1} = a.$$

Aus Gleichung (125) folgt auch noch, dass von den μ Gleichungen (126) die eine schon aus den übrigen $\mu - 1$ Gleichungen folgt.

Bisher waren die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ als gegeben betrachtet, man kann jetzt aber auch die ganzen Zahlen k_ν als gegeben ansehen und aus den Gleichungen (126) die $\mu - 1$ Grössen

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_{\mu-1}$$

berechnen. *Gelingt es nun, die $\mu - 1$ ganzen Zahlen $k_0, k_1, \ldots k_{\mu-2}$ so auszuwählen, dass auch die Grössen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_{\mu-1}$ ganze Zahlen werden, welche durch 2 theilbar sind, so ist ξ für gerade Werthe von n sicher ein Parameter; für ungerade Werthe von n tritt noch die Bedingung*

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta = 24c$$

hinzu.

Bei den Anwendungen wird man übrigens auch diejenigen Werthsysteme der δ berücksichtigen, bei denen sie theilweise *ungerade* Werthe haben. Allerdings muss man dann erst untersuchen, ob ξ ein Parameter ist.

Unter den Werthen von $k_0, k_1, k_2, k_3, \ldots k_{\mu-2}$ welche ganzzahlige Werthe von $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ liefern, sind diejenigen besonders zu beachten, für welche sich ein möglichst kleiner Werth von ch ergiebt.

§ 11.

Complementäre Parameter.

Vertauscht man ω mit $\frac{\omega}{n}$, so geht J in $\bar{J}$ und

$$\xi = \prod \frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)^\delta}{Q(\varpi, \varpi')^\delta} \text{ in } \bar{\xi}$$

über. Es ist die Frage, ob auch $\bar{\xi}$ ein Parameter ist. Setzt man z. B.

$$\varpi = \omega', \quad \varpi' = -\omega,$$

und beachtet man die wichtige Formel

(128) $$Q\left(\frac{\omega}{m}, \frac{\omega'}{m}\right) = \sqrt{m}\, Q(\omega, \omega'),$$

so wird

$$\bar{\xi} = \prod \frac{Q\left(\frac{\omega'}{D}, -\frac{\omega}{n}\right)^\delta}{Q\left(\omega', -\frac{\omega}{n}\right)^\delta} = \prod \frac{Q\left(\frac{\omega}{AD}, \frac{\omega'}{D}\right)^\delta}{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^\delta} = \prod \frac{D^{\frac{\delta}{2}} Q\left(\frac{\omega}{A}, \omega'\right)^\delta}{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)^\delta}.$$

Damit $\bar{\xi}$ ein Parameter wird, müssen zuerst zwei Bedingungen befriedigt werden, welche den Gleichungen (108a) und (109a), nämlich den Gleichungen

$$\Sigma(D-1)\delta = 24a \quad \text{und} \quad \Sigma(D-1)A\delta = 24b$$

entsprechen, und welche hier die Form

$$\Sigma[(A-1)\delta-(n-1)\delta] = -\Sigma(AD-A)\delta = -\Sigma(D-1)A\delta = 24a'$$

und

$$\Sigma[(A-1)D\delta-(n-1)\delta] = -\Sigma(D-1)\delta = 24b'$$

annehmen. Diese Bedingungen sind aber sicher erfüllt, denn es wird, wie man ohne Weiteres erkennt,

$$a' = -b \quad \text{und} \quad b' = -a,$$

wobei a und b ganze Zahlen sind, weil nach Voraussetzung ξ ein Parameter ist. Es wird daher auch $\bar{\xi}$ ein Parameter, wenn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ sämmtlich *gerade* sind, und wenn auch n eine *gerade* Zahl ist.

Ist dagegen n *ungerade*, so tritt noch die Bedingung

$$S = \Sigma[(A^3-n^3-3(A^2-n^2)+2(A-n)]\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

hinzu. Auch diese Bedingung wird erfüllt, denn nach Voraussetzung ist ξ ein Parameter, es ist also

$$\Sigma(D^3-3D^2+2D)\delta = \Sigma[(D^3-1)-3(D^2-1)+2(D-1)]\delta \equiv 0 \pmod{24},$$

folglich ist

$$\begin{aligned} S = & \;\Sigma[A^3(1-D^3)-3A^2(1-D^2)+2A(1-D)]\delta \\ \equiv & -\Sigma[(A^3-1)(D^3-1)-3(A^2-1)(D^2-1)+2(A-1)(D-1)]\delta. \end{aligned}$$

Da n ungerade ist, so müssen auch A und D ungerade sein, also $A = 2B+1$, $D = 2E+1$, folglich wird

$$A^2-1 = 4B(B+1) \quad \text{und} \quad D^2-1 = 4E(E+1).$$

Dies giebt

$$\begin{aligned} S & \equiv -\Sigma[(A^3-1)(D^3-1)+2(A-1)(D-1)]\delta \\ & = -\Sigma[(8B^3+12B^2+6B)(8E^3+12E^2+6E)+8BE]\delta \\ & \equiv -4BE\Sigma(16B^2E^2+2)\delta \\ & \equiv -4BE\Sigma(B^2E^2-1)\delta \equiv 0 \pmod{24}. \end{aligned}$$

Es möge noch ein zweiter Beweis hinzugefügt werden, der auch den Fall umfasst, wo die Exponenten δ theilweise *ungerade* sind.

Da ξ ein Parameter ist, so ist ξ darstellbar als rationale Function von J und $\bar{J}$. Setzt man z. B. wieder

$$\varpi = \omega', \quad \varpi' = -\omega,$$

so wird

$$(129) \qquad \xi = R\left(J(\tau),\ J\left(\frac{\tau}{n}\right)\right).$$

Vertauscht man jetzt ω mit $\frac{\omega}{n}$, so geht $J(\tau)$ in $J(n\tau)$ und $J\left(\frac{\tau}{n}\right)$ in $J(\tau)$ über. Dadurch wird

$$(130) \qquad \bar{\xi} = R(J(n\tau),\ J(\tau))$$

d. h. auch $\bar{\xi}$ ist eine rationale Function von J und $\bar{J}$ und deshalb ein Parameter.

Dabei ist freilich zu beachten, dass die hier benutzten Werthe von ξ und $\bar{\xi}$ *verschiedenen* τ-Repräsentanten zugeordnet sind.

Was für die Vertauschung von ω mit $\frac{\omega}{n}$ gezeigt wurde, lässt sich natürlich auch für die Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{n}$ in ähnlicher Weise zeigen, so dass man zu jedem der $T(n)$ Werthe von ξ einen zugehörigen Werth von $\bar{\xi}$ finden kann.

Die beiden Parameter ξ und $\bar{\xi}$ mögen *„complementäre Parameter“* heissen. Von ihnen gilt also der Satz:

I. *Die Gleichung, welche zwischen einem Parameter ξ und der absoluten Invariante J besteht, geht in eine Gleichung zwischen dem complementären Parameter $\bar{\xi}$* und *$\bar{J}$ über, indem man ξ mit $\bar{\xi}$ und J mit $\bar{J}$ vertauscht.*

Da diese neue Gleichung in Bezug auf $\bar{J}$ denselben Grad hat wie die erste Gleichung in Bezug auf J, so gilt auch noch der Satz:

II. *Zwei complementäre Parameter haben denselben Charakter.*

In vielen Fällen lassen sich J und $\bar{J}$ beide *rational* durch ξ und $\bar{\xi}$ darstellen, so dass die Invariantengleichung gewissermassen durch eine viel einfachere Gleichung zwischen zwei complementären Parametern ersetzt ist. Es kommt aber auch vor, dass der Rang der Gleichung zwischen ξ und $\bar{\xi}$ niedriger ist als der zwischen J und $\bar{J}$, dann ist natürlich eine solche Darstellung nicht möglich. In einzelnen Fällen wird auch ξ mit $\bar{\xi}$ identisch. Dann sind J und $\bar{J}$ sogar Wurzeln *derselben Gleichung.*

II. Theil.

Anwendungen.

III. Abschnitt.

Transformation vom Grade 2^α.

§ 12.

Transformation vom Grade 2.

Für $n = 2$ wird $\varrho = 0$. In diesem Falle wird, wie sogleich gezeigt werden soll,

(131) $$\xi = L(2)^{24} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^{24}}{Q(\varpi, \varpi')^{24}}$$

ein *Parameter* niedrigsten Grades. Es war nämlich nach Gleichung (190) in § 27 m. vor. Abh.

$$L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0,$$

eine Gleichung, welche man auch auf die Form

(132) $$J : J - 1 : 1 = (\xi + 16)^3 : (\xi - 8)^2(\xi + 64) : 1728\,\xi$$

bringen kann.

Der zu ξ complementäre Parameter ist hier

$$\bar{\xi} = \frac{2^{12}\,Q(\varpi, \varpi')^{24}}{Q\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^{24}} = \frac{2^{12}}{\xi},$$

folglich wird

(133) $$\bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\xi} + 16)^3 : (\bar{\xi} - 8)^2\,(\bar{\xi} + 64) : 1728\,\bar{\xi},$$

oder

(133a) $$\bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\xi + 256)^3 : (\xi - 512)^2\,(\xi + 64) : 1728\,\xi^2.$$

§ 13.

Transformation vom Grade 4.

Für $n = 4$ ist wieder $\varrho = 0$ und n hat die Theiler 1, 2 und 4. Setzt man also

$$\xi = L(2)^{\delta_1}\,L(4)^{\delta_2},$$

so findet man aus Gleichung (126) die drei Gleichungen

$$-2\delta_1 - 3\delta_2 = 24k_0, \quad \delta_1 = 24k_1, \quad \delta_1 + 3\delta_2 = 24k_2,$$

oder

(134) $$\delta_1 = 24k_1, \quad \delta_2 = -8(k_0 + 2k_1).$$

Indem man von den drei ganzen Zahlen k_0, k_1, k_2 die eine gleich 0, die zweite gleich $+1$ und die dritte gleich -1 setzt, erhält man drei *Parameter* mit dem Charakter 1, nämlich

$$(135)\qquad \xi_1 = \frac{L(4)^{16}}{L(2)^{24}},\quad \xi_2 = L(4)^8,\quad \xi_3 = \frac{L(4)^8}{L(2)^{24}}.\text{*)}$$

Da k_0 und k_2 *ganze* Zahlen, und δ_1, δ_2, n *gerade* Zahlen sind, so sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 Parameter; ausserdem ist der Charakter bei allen dreien gleich 1, also möglichst niedrig.

Aus diesem Grunde ist auch jeder der drei Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3 durch jeden der beiden anderen *linear* darstellbar. Es giebt also z. B. eine Gleichung von der Form

$$a\xi_1\xi_2 + b\xi_1 + c\xi_2 + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr einfach dadurch bestimmen kann, dass man ξ_1 und ξ_2 nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{2}} = z$ entwickelt.**) Dies giebt

---

*) $k_0 = 0,\ k_1 = -1,\ k_2 = +1$ giebt den Parameter ξ_1,
$k_0 = -1,\ k_1 = 0,\ k_2 = +1$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = +1,\ k_1 = -1,\ k_2 = 0$ „ „ „ ξ_3.

Die übrigen Fälle, welche $\frac{1}{\xi_1}, \frac{1}{\xi_2}, \frac{1}{\xi_3}$ liefern, können übergangen werden.

**) Es ist zweckmässig, bei der Entwickelung der L-Producte

$$\xi = \prod L(D)^\delta = \prod\left(\frac{Q\left(\frac{\varpi}{D}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}\right)^\delta$$

$\varpi = \omega',\ \varpi' = -\omega$ zu setzen; dann wird nämlich

$$L(D) = \frac{Q\left(\frac{\omega'}{D}, -\omega\right)}{Q(\omega', -\omega)} = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{D}\right)}{Q(\omega, \omega')}.$$

Nun ist nach Gleichung (3)

$$Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - h^{2\nu}) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}}(1 - h^2 - h^4 + h^{10} + h^{14} - h^{24} - h^{30} + \cdots),$$

oder, wenn man

$$h^{\frac{2}{n}} = z,\quad \text{also}\quad h^{\frac{2}{D}} = z^A,\quad h^2 = z^n$$

setzt,

$$Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{n}{24}}(1 - z^n - z^{2n} + z^{5n} + z^{7n} - - + + \cdots),$$

$$Q\left(\omega, \frac{\omega'}{D}\right) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{A}{24}}(1 - z^A - z^{2A} + z^{5A} + z^{7A} - - + + \cdots),$$

$$L(D) = z^{-\frac{A}{24}(D-1)} \frac{1 - z^A - z^{2A} + z^{5A} + z^{7A} - - + + \cdots}{1 - z^n - z^{2n} + z^{5n} + z^{7n} - - + + \cdots}.$$

$$(136)\qquad \xi_2 = \frac{16\,\xi_1}{1-\xi_1},\quad \xi_3 = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1-\xi_1}{16},$$

$$(137)\qquad L(2)^{24} = \frac{\xi_2^2}{\xi_1} = \frac{256\,\xi_1}{(1-\xi_1)^2},\quad L(4)^8 = \xi_2 = \frac{16\,\xi_1}{1-\xi_1}.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (132)

$$(138)\qquad J : J-1 : 1 = (1+14\xi_1+\xi_1^2)^3 : (1-34\xi_1+\xi_1^2)^2(1+\xi_1)^2 : 108\,\xi_1(1-\xi_1)^4.$$

Die zu ξ_1, ξ_2, ξ_3 complementären Parameter sind

$$\bar{\xi}_1 = 16\,\xi_3,\quad \bar{\xi}_2 = \frac{256}{\xi_2},\quad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_1}{16},$$

also

$$\xi_1 + \bar{\xi}_1 = 1,$$

folglich wird nach Gleichung (108)

$$(139)\qquad \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (1+14\bar{\xi}_1+\bar{\xi}_1^2)^3 : (1-34\bar{\xi}_1+\bar{\xi}_1^2)^2(1+\bar{\xi}_1)^2 : 108\,\bar{\xi}_1(1-\bar{\xi}_1)^4,$$

oder

$$(139\text{a})\qquad \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (16-16\xi_1+\xi_1^2)^3 : (32-32\xi_1-\xi_1^2)^2(2-\xi_1)^2 : 108\,\xi_1^4(1-\xi_1).$$

§ 14.

Transformation vom Grade 8.

Für $n = 8$ ist gleichfalls $\varrho = 0$ und n hat die Theiler 1, 2, 4 und 8. Setzt man also

$$\xi = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(8)^{\delta_3},$$

so findet man aus Gleichung (126) die vier Gleichungen

$$(140)\qquad \begin{cases} -4\delta_1 - 6\delta_2 - 7\delta_3 = 24k_0, \\ +2\delta_1 + 0 - \delta_3 = 24k_1, \\ +\delta_1 + 3\delta_2 + \delta_3 = 24k_2, \\ +\delta_1 + 3\delta_2 + 7\delta_3 = 24k_3; \end{cases}$$

oder

$$(141)\qquad \begin{cases} \delta_1 = 2(-k_0 + 5k_1 - 2k_2), \\ \delta_2 = 2(+k_0 - k_1 + 6k_2), \\ \delta_3 = 4(-k_0 - k_1 - 2k_2). \end{cases}$$

Indem man jetzt von den vier Grössen k_0, k_1, k_2, k_3 die eine gleich $+1$, die zweite gleich -1 und die beiden anderen gleich 0 setzt, erhält man 6 *Parameter* mit dem Charakter 1, nämlich

$$(141)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(8)^8\,L(2)^4}{L(4)^{12}}, & \xi_2 = \dfrac{L(8)^4\,L(2)^{14}}{L(4)^{14}}, \\ \xi_3 = \dfrac{L(8)^4\,L(2)^2}{L(4)^{10}}, & \xi_4 = \dfrac{L(2)^{10}}{L(8)^4\,L(4)^2} = \dfrac{\xi_2}{\xi_1}, \\ \xi_5 = \dfrac{L(4)^2}{L(8)^4\,L(2)^2} = \dfrac{\xi_3}{\xi_1}, & \xi_6 = \dfrac{L(4)^4}{L(2)^{12}} = \dfrac{\xi_3}{\xi_2}\,{}^{*)}. \end{cases}$$

Da diese Parameter sämmtlich den Charakter 1 haben, so besteht zwischen je zweien von ihnen eine lineare Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man wieder die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{1}{4}} = z$ findet. Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$(142)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1-4\xi_6}{1+4\xi_6}, \quad \xi_2 = \dfrac{1}{1+4\xi_6}, \quad \xi_3 = \dfrac{\xi_6}{1+4\xi_6}, \\ \qquad \xi_4 = \dfrac{1}{1-4\xi_6}, \quad \xi_5 = \dfrac{\xi_6}{1-4\xi_6}. \end{cases}$$

Dabei wird mit Rücksicht auf die Gleichungen (141)

$$(143)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_3^4} = \dfrac{1-16\xi_6^2}{\xi_6^4}, \\ L(4)^8 = \dfrac{\xi_1}{\xi_3^2} = \dfrac{1-16\xi_6^2}{\xi_6^2}, \\ L(8)^{24} = \dfrac{\xi_1^7}{\xi_2\xi_3^7} = \dfrac{(1-4\xi_6)^7(1+4\xi_6)}{\xi_6^7}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die drei Parameter, welche bei der Transformation vierten Grades auftraten, mit $\xi_1(4)$, $\xi_2(4)$, $\xi_3(4)$, so wird

$$(144)\quad \xi_3(4) = \xi_6^2, \quad \text{also} \quad \xi_1(4) = 1 - 16\xi_3(4) = 1 - 16\xi_6^2,$$

folglich geht die Gleichung (138) über in

$$(145)\quad J : J-1 : 1 = (1-16\xi_6^2+16\xi_6^4)^3 : (1-16\xi_6^2-8\xi_6^4)^2(1-8\xi_6^2)^2 \\ : 1728\xi_6^8(1-16\xi_6^2).$$

Der zu ξ_6 complementäre Parameter ist

$$\bar{\xi}_6 = \frac{\xi_1}{4},$$

folglich wird

---

*) $k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = +1$ giebt den Parameter ξ_1,
$k_0 = 0$, $k_1 = +1$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = +1$, $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 0$ „ „ „ ξ_3,
$k_0 = 0$, $k_1 = +1$, $k_2 = 0$, $k_3 = -1$ „ „ „ ξ_4,
$k_0 = +1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, $k_3 = -1$ „ „ „ ξ_5,
$k_0 = +1$, $k_1 = -1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ „ „ „ ξ_6.

$$(146)\qquad \bar{J}:\bar{J}-1:1=[16(1-\xi_1^2)+\xi_1^4]^3:[32(1-\xi_1^2)-\xi_1^4]^2(2-\xi_1^2)^2 \\ :108\,\xi_1^8(1-\xi_1^2),$$

oder

$$(146\text{a})\quad \begin{cases} \bar{J}:\bar{J}-1:1=[(1-4\xi_6)^4+256\,\xi_6(1+4\xi_6)^2]^3 \\ \qquad :[(1-4\xi_6)^4-512\,\xi_6(1+4\xi_6)^2]^2[(1-4\xi_6)^2+32\,\xi_6]^2 \\ \qquad :1728\,\xi_6(1+4\xi_6)^2(1-4\xi_6)^8. \end{cases}$$

Wie vortheilhaft die hier benutzte Methode ist, erkennt man am besten, wenn man sie mit der Herleitung von Gleichung (199) in m. vor. Abh. vergleicht.

§ 15.

Transformation vom Grade 16.

Für $n=16$ ist gleichfalls $\varrho=0$ und n hat die fünf Theiler 1, 2, 4, 8 und 16. Setzt man also

$$\xi=L(2)^{\delta_1}L(4)^{\delta_2}L(8)^{\delta_3}L(16)^{\delta_4},$$

so findet man aus Gleichung (126) die fünf Gleichungen

$$(147)\qquad \begin{cases} -8\delta_1-12\delta_2-14\delta_3-15\delta_4=24k_0, \\ +4\delta_1+\;0\;-\;2\delta_3-\;3\delta_4=24k_1, \\ +2\delta_1+\;6\delta_2+\;2\delta_3+\;0\;=24k_2, \\ +\;\delta_1+\;3\delta_2+\;7\delta_3+\;3\delta_4=24k_3, \\ +\;\delta_1+\;3\delta_2+\;7\delta_3+15\delta_4=24k_4, \end{cases}$$

oder

$$(148)\qquad \begin{cases} \delta_1=-\;k_0+5k_1-2k_2+0, \\ \delta_2=\;\;0\;-2k_1+5k_2-2k_3, \\ \delta_3=+\;k_0+\;k_1-\;k_2+6k_3, \\ \delta_4=-2k_0-2k_1-2k_2-4k_3. \end{cases}$$

Indem man jetzt von den fünf Grössen k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 die eine gleich $+1$, die zweite gleich -1 und die übrigen drei gleich 0 setzt, erhält man 10 L-Producte mit dem Charakter 1,*) nämlich

$$(149)\quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{L(16)^4L(4)^2}{L(8)^6}, & \xi_2=\dfrac{L(16)^2L(4)^7}{L(8)^7L(2)^2}, & \xi_3=\dfrac{L(4)^2}{L(2)^6}, \\ \xi_4=\dfrac{L(16)^2L(2)^5}{L(8)^5}, & \xi_5=\dfrac{L(16)^2L(4)^2}{L(8)^5L(2)}, & \xi_6=\dfrac{L(16)^2L(8)L(2)^2}{L(4)^5}, \end{cases}$$

*) Streng genommen kann nur bei *Parametern* von einem *Charakter* die Rede sein; es soll aber hier, und ebenso bei den folgenden Anwendungen, durch die ganzen Zahlen $k_0, k_1, k_2, \ldots k_{\mu-1}$ der Charakter der L-Producte nach Gleichung (125) erklärt werden gleichviel, ob sie Parameter sind oder nicht.

$$(149)\quad \begin{cases} \xi_7 = \dfrac{L(16)^2 L(4)^2}{L(8)\,L(2)^5}, \quad \xi_8 = \dfrac{L(16)^2 L(2)}{L(8)}, \quad \xi_9 = \dfrac{L(8)^2 L(2)^7}{L(4)^7}, \\ \xi_{10} = \dfrac{L(8)^2 L(2)}{L(4)^5}.\text{*)} \end{cases}$$

Da bei ξ_1 und ξ_3 die Exponenten δ *gerade* sind, so sind für diese Grössen die Bedingungen alle erfüllt, welche bei Parametern erfüllt werden müssen, folglich sind ξ_1 und ξ_3 *Parameter* mit dem Charakter 1. Ferner ist die Grösse

$$\xi_2{}^2 = \frac{L(16)^4 L(4)^{14}}{L(8)^{14} L(2)^4}$$

ein Parameter mit dem Charakter 2, welcher aus

$$\xi_2(8) = \frac{L(8)^4 L(2)^{14}}{L(4)^{14}} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{8}, \varpi'\right)^4 Q\left(\frac{\varpi}{2}, \varpi'\right)^{14}}{Q\left(\frac{\varpi}{4}, \varpi'\right)^{14} Q(\varpi, \varpi')^4}$$

entsteht, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht. In derselben Weise geht $\xi_1(8)$ in $\xi_1{}^2$ über. Nun folgt aus den Gleichungen (142)

$$2\xi_2(8) = 1 + \xi_1(8),$$

oder, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht,

$$(150)\qquad 2\xi_2{}^2 = 1 + \xi_1{}^2.$$

Wäre ξ_2 ein Parameter, so müsste sich ξ_2 *linear* durch den Parameter ξ_1 darstellen lassen. Dies ist aber nach Gleichung (150) nicht möglich, folglich ist ξ_2 *kein Parameter*.

Anders verhält sich die Sache bei ξ_4. Es ist nämlich

$$\xi_4 = \frac{L(16)^2 L(2)^5}{L(8)^5} = \frac{f(16)^2 f(2)^5}{f(8)^5} = \frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{15} \tau\left(\frac{\alpha\varpi}{8}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^5 \tau\left(\frac{2\varpi}{4}\right)^5 \tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^5}.$$

Nach Formel (14), nämlich nach der Formel

---

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
k_0	0	0	+1	0	+1	0	0	−1	0	+1
k_1	0	0	−1	+1	0	0	−1	0	+1	0
k_2	0	+1	0	0	0	−1	0	0	−1	−1
k_3	−1	−1	0	−1	−1	0	0	0	0	0
k_4	+1	0	0	0	0	+1	+1	+1	0	0

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)=\frac{\tau\left(\frac{2(\beta-\alpha)\varpi}{n}\right)\tau\left(\frac{2(\beta+\alpha)\varpi}{n}\right)}{\tau\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2\tau\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)^2}$$

wird

$$\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right)-\wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]$$

$$=-\frac{\tau(\varpi)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^2\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^2\tau\left(\frac{\varpi}{2}\right)^3},$$

$$\left[\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)-\wp(\varpi)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right)-\wp\left(\frac{7\varpi}{8}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{5\varpi}{8}\right)-\wp\left(\frac{3\varpi}{8}\right)\right]$$

$$=-\frac{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{3\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{5\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{7\varpi}{8}\right)^2},$$

folglich ist

$$\frac{\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right)-\wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{4}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{3\varpi}{4}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)\right]}{\left[\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)-\wp(\varpi)\right]\left[\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right)-\wp\left(\frac{7\varpi}{8}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{5\varpi}{8}\right)-\wp\left(\frac{3\varpi}{8}\right)\right]}$$

$$=\frac{\tau\left(\frac{\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{3\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{5\varpi}{8}\right)^2\tau\left(\frac{7\varpi}{8}\right)^2\tau(\varpi)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^3\tau\left(\frac{2\varpi}{4}\right)^3\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^3}$$

$$=\frac{\prod_{\alpha=1}^{15}\tau\left(\frac{\alpha\varpi}{8}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{4}\right)^5\tau\left(\frac{2\varpi}{4}\right)^5\tau\left(\frac{3\varpi}{4}\right)^5}=\xi_4.$$

Hieraus erkennt man, dass sich ξ_4 als eine rationale Function von $\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right)$ darstellen lässt, die sich gar nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{\varpi}{8}\right)$ mit $\wp\left(\frac{3\varpi}{8}\right)$, $\wp\left(\frac{5\varpi}{8}\right)$, oder $\wp\left(\frac{7\varpi}{8}\right)$ vertauscht. Es ist also ξ_4 ein *Parameter* mit dem Charakter 1. Deshalb werden auch die Grössen

(151) $$\xi_5=\xi_3\xi_4,\quad \xi_7=\frac{\xi_1}{\xi_4},\quad \xi_8=\frac{\xi_1}{\xi_3\xi_4}=\frac{\xi_1}{\xi_5}$$

Parameter; dagegen sind die Grössen

$$\xi_2,\quad \xi_6=\frac{\xi_1}{\xi_2},\quad \xi_9=\frac{\xi_4}{\xi_2},\quad \xi_{10}=\frac{\xi_5}{\xi_2}$$

keine Parameter, weil ξ_2 kein Parameter ist. Erst die Quadrate dieser Grössen sind Parameter mit dem Charakter 2.

Zwischen je zweien von den 6 Parametern mit dem Charakter 1 bestehen *lineare* Gleichungen von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d wieder sehr leicht durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{1}{8}} = s$ findet. Auf diese Weise erhält man die Gleichungen

$$(152)\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1-2\xi_3}{1+2\xi_3}, \quad \xi_4 = \dfrac{1}{1+2\xi_3}, \quad \xi_5 = \dfrac{\xi_3}{1+2\xi_3}, \quad \xi_7 = 1-2\xi_3, \\ \xi_8 = \dfrac{1-2\xi_3}{\xi_3}, \quad \xi_2^2 = \dfrac{1+4\xi_3^2}{(1+2\xi_3)^2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (149) folgt dabei:

$$(153)\begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_3^8\xi_4^4} = \dfrac{1-16\xi_3^4}{\xi_3^8}, \\ L(4)^8 = \dfrac{\xi_1\xi_2^2}{\xi_3^4\xi_4^4} = \dfrac{1-16\xi_3^4}{\xi_3^4}, \\ L(8)^{24} = \dfrac{\xi_1^7\xi_2^2}{\xi_3^{14}\xi_4^{16}} = \dfrac{(1-4\xi_3^2)^7(1+4\xi_3^2)}{\xi_3^{14}}, \\ L(16)^8 = \dfrac{\xi_1^5}{\xi_3^5\xi_4^6} = \dfrac{(1-2\xi_3)^5(1+2\xi_3)}{\xi_3^5}. \end{cases}$$

Da nun $\xi_3^2 = \xi_6(8)$, so folgt aus Gleichung (145)

$$(154)\quad J:J-1:1 = (1-16\xi_3^4+16\xi_3^8)^3 : (1-16\xi_3^4-8\xi_3^8)^2(1-8\xi_3^4)^2 \\ : 1728\xi_3^{16}(1-16\xi_3^4).$$

Der zu ξ_3 complementäre Parameter ist

$$(155)\qquad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_1}{2},$$

deshalb findet man sofort aus Gleichung (154)

$$(156)\quad \bar{J}:\bar{J}-1:1 = (16-16\xi_1^4+\xi_1^8)^3 : (32-32\xi_1^4-\xi_1^8)^2(2-\xi_1^4)^2 \\ : 108\xi_1^{16}(1-\xi_1^4).$$

§ 16.

Transformation vom Grade 2^α.

Für $n = 2^\alpha = 16m$ ist $T(n) = 24m$. Man kann aber sogleich Parameter ξ angeben mit dem Charakter m, so dass der Grad der Gleichung zwischen ξ und J in Bezug auf J 24 mal kleiner ist als der Grad der Invariantengleichung.

Für $n = 16$ und für $n = 32$ haben diese Parameter auch einen möglichst niedrigen Charakter, für grössere Werthe von n muss es aber allerdings Parameter geben, deren Grad noch kleiner ist als m

Es wird nämlich für

$$n = 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024, \ldots,$$
$$m = \ \ 4,\ \ \ 8,\ \ 16,\ \ 32,\ \ \ 64, \ldots,$$
$$\frac{1}{2}(\varrho + 3) = \ \ 3,\ \ \ 6,\ \ 12,\ \ 26,\ \ \ 54, \ldots.$$

Beispiele für solche Parameter mit dem Charakter m sind die Grössen

$$(157)\quad \xi_1 = \frac{L(16m)^4 L(4m)^2}{L(8m)^6},\quad \xi_3 = \frac{L(4m)^2 L(m)^4}{L(2m)^6},\quad \xi_4 = \frac{L(16m)^2 L(2m)^5}{L(8m)^5 L(m)^2},$$

welche aus $\xi_1(16)$, $\xi_3(16)$, $\xi_4(16)$ hervorgehen, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{m}$ vertauscht.

Zum Beweise, dass ξ_1 ein *Parameter mit dem Charakter* m ist, beachte man, dass die Theiler von n in diesem Falle

$$D_0 = 1,\ D_1 = 2,\ D_2 = 4, \ldots D_{\alpha-2} = 4m,\ D_{\alpha-1} = 8m,\ D_\alpha = 16m$$

sind. Deshalb wird

$$\delta_1 = 0,\ \delta_2 = 0, \ldots \delta_{\alpha-2} = +2,\ \delta_{\alpha-1} = -6,\ \delta_\alpha = +4$$

und

$$S(n,D) = \Sigma A_\nu \delta_\nu (t_\nu^2 - D_\nu) = 8(t_{\alpha-2}^2 - 4m) - 12(t_{\alpha-1}^2 - 8m) + 4(t_\alpha^2 - 16m)$$
$$= 8t_{\alpha-2}^2 - 12t_{\alpha-1}^2 + 4t_\alpha^2.$$

Giebt man nun dem Theiler D die Werthe $D_0, D_1, D_2, \ldots D_{\alpha-2}$, so wird immer

$$t_{\alpha-2} = t_{\alpha-1} = t_\alpha = D;$$

deshalb ist in diesen Fällen

$$S(n, D) = 0$$

und

$$(158)\qquad k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 0, \ldots k_{\alpha-2} = 0.$$

Dagegen ist

$$(A_{\alpha-1})\ S(n, D_{\alpha-1}) = 8 \cdot 16m^2 - 12 \cdot 64m^2 + 4 \cdot 64m^2$$
$$= -24 \cdot 16m^2 = +24 \cdot 16m \cdot k_{\alpha-1},$$
$$(A_\alpha)\ S(n, D_\alpha) = 8 \cdot 16m^2 - 12 \cdot 64m^2 + 4 \cdot 256m^2$$
$$= +24 \cdot 16m^2 = +24 \cdot 16m \cdot k_\alpha,$$

also

$$(159)\qquad k_{\alpha-1} = -m,\quad k_\alpha = +m.$$

Die Grösse ξ_1 ist also ein *Parameter*, weil die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ *gerade* Zahlen sind, und weil die Grössen k_0 und k_α ganzzahlige Werthe haben. Ausserdem ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (158) und (159) der Charakter von ξ_1 gleich m.

Der Beweis dafür, dass ξ_1 ein Parameter ist, lässt sich auch führen, indem man zeigt, dass sich ξ_1 auf die Form

$$(160)\qquad \xi_1 = (g_2^3 - 27g_3^2)^m \frac{f(16m)^4 f(4m)^2}{f(8m)^6} = \frac{(g_2^3-27g_3^2)^m}{\prod\limits_{\alpha=1}^{4m} \wp'\left(\frac{2\alpha-1}{8m}\varpi\right)}$$

bringen lässt.

Da ξ_1, ξ_3 und ξ_4 aus $\xi_1(16)$, $\xi_3(16)$, $\xi_4(16)$ durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{m}$ hervorgehen, so gelten auch hier die Gleichungen (152), nämlich

$$\xi_1 = \frac{1-2\xi_3}{1+2\xi_3},\quad \xi_4 = \frac{1}{1+2\xi_3},$$

oder

$$2\xi_3 = \frac{1-\xi_1}{1+\xi_1},\quad \xi_4 = \frac{1+\xi_1}{2}.$$

Deshalb sind auch ξ_3 und ξ_4 *Parameter* mit dem Charakter m.

Das Vorstehende genügt schon zur Bildung der Gleichungen zwischen ξ_3 und J. Es wird nämlich nach den Gleichungen (141), (149) und (152)

$$\xi_1(8) = \frac{L(8)^8 L(2)^4}{L(4)^{12}} = \frac{\xi_1(16)}{\xi_2(16)^2} = \frac{2\xi_1(16)}{1+\xi_1(16)^2},$$

also

$$(161)\qquad \frac{1-\xi_1(8)}{1+\xi_1(8)} = \left(\frac{1-\xi_1(16)}{1+\xi_1(16)}\right)^2.$$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{m}$, so geht $\xi_1(8)$ in $\xi_1(8m)^2$ und $\xi_1(16)$ in $\xi_1(16m)$ über, folglich erhält man aus Gleichung (161)

$$(162)\qquad \frac{1-\xi_1(8m)^2}{1+\xi_1(8m)^2} = \left(\frac{1-\xi_1(16m)}{1+\xi_1(16m)}\right)^2 = \left(\frac{1-\xi_1}{1+\xi_1}\right)^2,$$

oder

$$(163)\qquad \frac{\xi_3(8m)}{1+4\xi_3(8m)^2} = \xi_3^2.$$

Daraus folgt

$$(164)\qquad \xi_3(8m) = \frac{1}{8\xi_3^2}\left(1 \pm \sqrt{1-16\xi_3^4}\right).$$

Kennt man also die Gleichung zwischen $\xi_3(8m)$ und J, so findet man hieraus auch ohne Weiteres die Gleichung zwischen ξ_3 und J.

Die zu ξ_1 und ξ_3 complementären Parameter sind bez.

$$(165)\left\{\begin{aligned} \bar{\xi}_1 &= \frac{Q\left(\frac{\varpi}{16m}, \frac{\varpi'}{16m}\right)^4 Q\left(\frac{\varpi}{16m}, \frac{\varpi'}{4m}\right)^2}{Q\left(\frac{\varpi}{16m}, \frac{\varpi'}{8m}\right)^6} = \frac{2L(4)^2}{L(2)^6} = 2\xi_3(16),\\ \bar{\xi}_3 &= \frac{Q\left(\frac{\varpi}{16m}, \frac{\varpi'}{4m}\right)^2 Q\left(\frac{\varpi}{16m}, \frac{\varpi'}{m}\right)^4}{Q\left(\frac{\varpi}{16m}, \frac{\varpi'}{2m}\right)^6} = \frac{L(16)^4 (L(4)^2}{2L(8)^6} = \frac{\xi_1(16)}{2}.\end{aligned}\right.$$

Daraus ergiebt sich eine weit einfachere Darstellung. Es ist nämlich nach Gleichung (154)

$$(166)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = [1 - 16\xi_3(16)^4 + 16\xi_3(16)^8] \\ \qquad : [1 - 16\xi_3(16)^4 - 8\xi_3(16)^8]^2[1 - 8\xi_3(16)^4]^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_3(16)^{16}[1 - 16\xi_3(16)^4]. \end{cases}$$

Vertauscht man jetzt ϖ mit $\frac{\varpi}{16m}$, so geht J in $\overline{J}$ und $\xi_3(16)$ in $\frac{\xi_1}{2}$ über, folglich wird (genau wie in Gleichung (156))

$$(167)\quad \overline{J} : \overline{J} - 1 : 1 = (16 - 16\xi_1{}^4 + \xi_1{}^8)^3 : (32 - 32\xi_1{}^4 - \xi_1{}^8)^2(2 - \xi_1{}^4)^2 : 108\,\xi_1{}^{16}(1 - \xi_1{}^4).$$

Die beiden Gleichungen (166) und (167) geben die Transformation vom Grade $16m$, wenn man noch die Gleichung zwischen $\xi_3(16)$ und ξ_1 hinzufügt. Dies kann aber mit Hülfe der Gleichungen (162) und (163) leicht geschehen, denn es wird

$$(168)\quad \begin{cases} \dfrac{4\xi_3(16)}{1 + 4\xi_3(16)^2} = \left(\dfrac{1 - \xi_1(32)}{1 + \xi_1(32)}\right)^2, \\ \dfrac{1 - \xi_1(32)^2}{1 + \xi_1(32)^2} = \left(\dfrac{1 - \xi_1(64)}{1 + \xi_1(64)}\right)^2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

IV. Abschnitt.

Transformation vom Grade 3^α.

§ 17.

Transformation vom Grade 3.

Nach Gleichung (46) m. vor. Abh. war für ungerade Werthe von n, also für $n = 2m + 1$

$$(169)\quad \prod_{\alpha=1}^{m} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = (-1)^m f^{-3},$$

folglich wird für $n = 3$

$$(170)\quad \xi = L(3)^{12} = Q^{24}f(3)^{12} = \frac{Q^{24}}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)^4}$$

ein *Parameter*, und zwar ein Parameter mit dem Charakter 1, weil nach Gleichung (204) m. vor. Abh.

$$(171)\quad J : J - 1 : 1 = (\xi + 3)^3(\xi + 27) : (\xi^2 + 18\xi - 27)^2 : 1728\xi$$

wird. Der zu ξ complementäre Parameter ist $\frac{729}{\xi}$, folglich wird

$$(172)\quad \overline{J} : \overline{J} - 1 : 1 = (\xi + 243)^3(\xi + 27) : (\xi^2 - 486\xi - 19683)^2 : 1728\,\xi^3.$$

§ 18.

Transformation vom Grade 9.

Für $n = 9$ wird $\varrho = 0$ und n hat die drei Theiler 1, 3 und 9. Setzt man deshalb

$$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2},$$

so findet man aus Gleichung (126) die drei Gleichungen

$$(173)\qquad -6\delta_1 - 8\delta_2 = 24k_0,\quad 4\delta_1 = 24k_1,\quad 2\delta_1 + 8\delta_2 = 24k_2,$$

oder

$$(174)\qquad \delta_1 = 6k_1,\quad 2\delta_2 = -6k_0 - 9k_1.$$

Hieraus ergiebt sich nur ein einziger Parameter mit dem Charakter 1, nämlich

$$(175)\qquad \xi = L(9)^3 = \frac{g_2^3 - 27g_3^2}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)}.$$

Dagegen giebt es drei Parameter mit dem Charakter 2, nämlich

$$(176)\qquad \xi_1 = \frac{L(9)^9}{L(3)^{12}},\quad \xi_2 = \frac{L(9)^6}{L(3)^{12}},\quad \xi_3 = \frac{L(9)^3}{L(3)^{12}}.$$

Dafür, dass ξ_2 ein Parameter ist, sind alle Bedingungen erfüllt. Deshalb sind dann auch

$$\xi_1 = \xi\xi_2 \quad\text{und}\quad \xi_3 = \xi_2 : \xi$$

Parameter. Nun besteht zwischen ξ und ξ_1, bez. zwischen ξ und ξ_2 oder ξ und ξ_3 eine Gleichung von der Form

$$(a\xi^2 + b\xi + c)\xi_\alpha + (a_1\xi^2 + b_1\xi + c_1) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, a_1, b_1, c_1 sehr leicht durch die Entwickelung von ξ und ξ_α nach Potenzen von $h^{\frac{2}{9}} = z$ findet. Dies giebt

$$(177)\qquad \xi_1 = \frac{\xi^2}{\xi^2 + 9\xi + 27},\quad \xi_2 = \frac{\xi}{\xi^2 + 9\xi + 27},\quad \xi_3 = \frac{1}{\xi^2 + 9\xi + 27}.$$

Deshalb wird

$$(178)\qquad L(3)^{12} = \xi(3) = \frac{L(9)^3}{\xi_3} = \xi^3 + 9\xi^2 + 27\xi.$$

Die Gleichung (171) geht daher über in

$$(179)\qquad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\xi^3 + 9\xi^2 + 27\xi + 3)^3(\xi + 3)^3 \\ \qquad : (\xi^6 + 18\xi^5 + 135\xi^4 + 504\xi^3 + 891\xi^2 + 486\xi - 27)^2 \\ \qquad : 1728\xi(\xi^2 + 9\xi + 27). \end{cases}$$

Diese Gleichung kann man noch einfacher schreiben, wenn man der Kürze wegen

$$(180) \qquad \xi + 3 = \eta$$

setzt, dann wird nämlich

$$(179a) \quad J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3 \eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27).$$

Der zu ξ complementäre Parameter ist

$$(181) \qquad \bar{\xi} = \frac{27}{\xi}, \quad \text{also} \quad \bar{\xi} + 3 = \bar{\eta} = \frac{3(\xi + 9)}{\xi} = \frac{3(\eta + 6)}{\eta - 3}.$$

Dadurch erhält man

$$(182) \quad \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3 \bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\bar{\eta}^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27).$$

§ 19.

Transformation vom Grade 27.

Für $n = 27$ wird $\varrho = 1$ und n hat die Theiler 1, 3, 9 und 27. Setzt man also

$$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2} L(27)^{\delta_3},$$

so erhält man aus Gleichung (126) die vier Gleichungen

$$(183) \qquad \begin{cases} -18\delta_1 - 24\delta_2 - 26\delta_3 = 24k_0, \\ +12\delta_1 + 0 - 4\delta_3 = 24k_1, \\ +4\delta_1 + 16\delta_2 + 4\delta_3 = 24k_2, \\ +2\delta_1 + 8\delta_2 + 26\delta_3 = 24k_3, \end{cases}$$

oder

$$(184) \qquad \begin{cases} 6\delta_1 = -2k_0 + 10k_1 - 3k_2, \\ 6\delta_2 = +2k_0 - k_1 + 12k_2, \\ 2\delta_3 = -2k_0 - 2k_1 - 3k_2. \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass k_1 und k_2 durch 2 theilbar sein müssen. Ferner ist

$$6\delta_1 = -2(k_0 + k_1) + 12k_1 - 3k_2,$$

folglich muss $k_0 + k_1$ durch 3 theilbar sein. Deshalb giebt es nur zwei L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

$$(185) \qquad \xi_1 = \frac{L(9)}{L(3)^4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{L(27)^3 L(3)}{L(9)^4}.^{*)}$$

Ausserdem findet man aber noch drei L-Producte mit dem Charakter 3, nämlich

$$(186) \qquad \xi_3 = L(9)^3, \quad \xi_4 = \frac{L(3)^3}{L(27)^3}, \quad \xi_5 = \frac{L(9)^4}{L(3)^4}.^{**)}$$

---

*) $k_0 = 2$, $k_1 = -2$, $k_2 = 0$, $k_3 = 0$ giebt die Grösse ξ_1,
$k_0 = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, $k_3 = +2$ „ „ „ ξ_2,

**) $k_0 = -3$, $k_1 = 0$, $k_2 = +2$, $k_3 = +1$ giebt die Grösse ξ_3,
$k_0 = +1$, $k_1 = +2$, $k_2 = 0$, $k_3 = -3$ „ „ „ ξ_4,
$k_0 = -1$, $k_1 = -2$, $k_2 = +2$, $k_3 = +1$ „ „ „ ξ_5.

Zum Beweise, dass diese fünf Grössen sämmtlich Parameter sind, beachte man zunächst, dass ξ_3 schon für die Transformation 9ten Grades ein Parameter war, folglich ist ξ_3 erst recht ein Parameter für die Transformation 27ten Grades. Ebenso ist ξ_5 ein Parameter, denn die Exponenten δ_1 und δ_2 sind gerade, k_0 und k_3 sind ganze Zahlen und

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Deshalb ist auch

$$\xi_1 = \frac{\xi_5}{\xi_3}$$

ein Parameter. Sodann ist

$$\xi_4 = \frac{f(3)^3}{Q^{72} f(27)^3} = \frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{\alpha=13} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{27}\right)}{Q^{72}\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)} = \frac{1}{Q^{72}} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=9} \wp'\left(\frac{2^\alpha \varpi}{27}\right) \cdot \prod_{\alpha=1}^{\alpha=3} \wp'\left(\frac{2^\alpha \varpi}{9}\right);$$

ξ_4 ist also eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{27}\right)$, welche sich gar nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{2\varpi}{27}\right)$ mit $\wp\left(\frac{4\varpi}{27}\right)$ vertauscht, folglich ist ξ_4 eine cyklische Function von

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{27}\right), \wp\left(\frac{4\varpi}{27}\right), \ldots \wp\left(\frac{512\varpi}{27}\right)$$

und deshalb ein Parameter. Daraus folgt, dass auch

$$\xi_2 = \frac{1}{\xi_4 \xi_5}$$

ein Parameter ist; und zwar sind ξ_1 und ξ_2 *Parameter mit möglichst niedrigem Charakter.*

Zwischen ξ_1 und ξ_2 besteht nun eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_1^2 + b\xi_1 + c)\xi_2^2 + (a_1\xi_1^2 + b_1\xi_1 + c_1)\xi_2 + (a_2\xi_1^2 + b_2\xi_1 + c_2) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ findet, indem man ξ_1 und ξ_2 nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{2}{27}} = z$ entwickelt. Es wird nämlich

$$\xi_1 = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{9}\right) Q(\omega, \omega')^3}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{3}\right)^4} = z^2(1 - z^3 - z^6 + 4z^9 + \cdots),$$

$$\xi_2 = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{27}\right)^3 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{3}\right)}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{9}\right)^4} = 1 - 3z + 0 + 9z^3 - 12z^4 + 0 + 27z^6 - 42z^7 + 0 + 81z^9 - 108z^{10} + \cdots.$$

Daraus ergiebt sich

(187) $$(9\xi_1^2 + 3\xi_1 + 1)\xi_2^2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 - 2)\xi_2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 + 1) = 0,$$

oder

(187 a) $$\xi_2 = \frac{2 + 6\xi_1 - 9\xi_1^2 - 3w}{2(1 + 3\xi_1 + 9\xi_1^2)},$$

wobei

$$(188)\qquad w = +\sqrt{\xi_1(4-27\xi_1^3)} = 2z + \cdots.$$

Das Vorzeichen der Wurzel w ist in Gleichung (187a) durch die Entwickelung nach Potenzen von z bestimmt.

Nach Gleichung (178) war

$$L(3)^{12} = L(9)^9 + 9L(9)^6 + 27L(9)^3,$$

oder

$$\frac{L(3)^{12}}{L(9)^3} = L(9)^6 + 9L(9)^3 + 27,$$

oder, wenn man die in den Gleichungen (185) und (186) gegebenen Bezeichnungen anwendet,

$$(189)\qquad \frac{1}{\xi_1^3} = \xi_3^2 + 9\xi_3 + 27, \quad \xi_3 = \frac{-9\xi_1^2 + w}{2\xi_1^2}.$$

Das Vorzeichen von w findet man wieder durch Reihenentwickelung.

Zwischen ξ_1 und ξ_4 besteht eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_1^3+b\xi_1^2+c\xi_1+d)\xi_4^2+(a_1\xi_1^3+b_1\xi_1^2+c_1\xi_1+d_1)\xi_4 + (a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten wieder durch Reihenentwickelung leicht bestimmen kann. Dies giebt

$$(190)\qquad (3\xi_1-1)^3\xi_4^2 - 3\xi_1(3\xi_1-2)\xi_4 + \xi_1 = 0,$$

oder

$$(190\text{a})\qquad \xi_4 = \frac{3\xi_1(3\xi_1-2)-w}{2(3\xi_1-1)^3}, \quad \frac{1}{\xi_4} = \frac{3\xi_1(3\xi_1-2)+w}{2\xi_1},$$

$$(191)\qquad \xi_5 = \xi_1\xi_3 = \frac{-9\xi_1^2+w}{2\xi_1}.$$

Nun ist

$$(192)\quad \xi(9) = L(9)^3 = \xi_3, \quad \xi(9)+3 = \xi_3+3 = \eta = \frac{-3\xi_1^2+w}{2\xi_1^2},$$

folglich erhält man nach Gleichung (179a)

$$(193)\quad J : J-1 : 1 = (\eta^3-24)^3\eta^3 : (\eta^6-36\eta^3+216)^2 : 1728(\eta^3-27).$$

Der zu η complementäre Parameter heisse $\bar\eta$, dann wird

$$(194)\quad \bar J : \bar J - 1 : 1 = (\bar\eta^3-24)^3\bar\eta^3 : (\bar\eta^6-36\bar\eta^3+216)^2 : 1728(\bar\eta^3-27),$$

wobei

$$(195)\qquad \bar\eta = 27\xi_4 + 3 = \frac{3[54\xi_1^3+27\xi_1^2-36\xi_1-2-9w]}{2(3\xi_1-1)^3}.$$

Da die Parameter η und $\bar\eta$ beide als rationale Functionen von ξ_1 und w dargestellt sind, so geben die Gleichungen (193) und (194) schon die Beziehung zwischen J und $\bar J$. Man kann aber auch noch die Gleichung angeben, welche zwischen η und $\bar\eta$ besteht. Nach den Gleichungen (189) und (190a) ist nämlich

$$\xi_3 + 9 = \frac{9\xi_1^2+w}{2\xi_1^2}, \quad \frac{1}{\xi_4} + 3 = \frac{3\xi_4+1}{\xi_4} = \frac{9\xi_1^2+w}{2\xi_1},$$

folglich ist

$$\frac{3\xi_4+1}{\xi_4} = \xi_1(\xi_3+9), \quad \text{oder} \quad \xi_4 = \frac{1}{\xi_1(\xi_3+9)-3}.$$

Nun wird aber nach Gleichung (189)

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{\xi_3^2+9\xi_3+27}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}},$$

also

$$(196)\quad \xi_4 = \frac{\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}}{\eta+6-3\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}}, \quad \bar{\eta} = \frac{3\left[\eta+6+6\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}\right]}{\eta+6-3\sqrt[3]{\eta^2+3\eta+9}},$$

oder

$$(196\text{a})\qquad (\eta+6)^3(\bar{\eta}-3)^3 = 27(\eta^2+3\eta+9)(\bar{\eta}+6)^3.$$

Durch Elimination von η aus den Gleichungen (192) und (193) erhält man auch eine Gleichung zwischen J und ξ_1, welche in Bezug auf J nur vom zweiten Grade ist, nämlich

$$(197)\quad \begin{cases} 12^6\xi_1^{15}(27\xi_1^3-1)J^2+2^8\cdot 3^5(729\xi_1^{18}-4536\xi_1^{15}+7458\xi_1^{12} \\ \qquad\qquad -3186\xi_1^9-108\xi_1^6+89\xi_1^3-3)J \\ \qquad +(9\xi_1^9-27\xi_1^6+27\xi_1^3-1)^3(9\xi_1^3-1)^3=0. \end{cases}$$

Ebenso findet man aus den Gleichungen (194) und (195) durch Elimination von $\bar{\eta}$ eine Gleichung zwischen $\bar{J}$ und ξ_1, welche in Bezug auf $\bar{J}$ gleichfalls nur vom zweiten Grade ist. Ihre Herleitung ist aber überflüssig, weil die Gleichungen (193), (194) und (196) für die Anwendungen bequemer sind.

Schliesslich ist noch

$$(198)\quad \begin{cases} L(3)^{12}=\xi_3^3+9\xi_3^2+27\xi_3=\dfrac{-9\xi_1^2+w}{2\xi_1^5}, \quad L(9)^3=\xi_3, \\ \qquad L(27)^{12}=\dfrac{\xi_3}{\xi_1^3\xi_4^4}. \end{cases}$$

§ 20.

Transformation vom Grade 81.

Für $n=81$ ist $\varrho=4$ und n hat die Theiler 1, 3, 9, 27 und 81. Setzt man also

$$\xi = L(3)^{\delta_1}L(9)^{\delta_2}L(27)^{\delta_3}L(81)^{\delta_4},$$

so erhält man aus den Gleichungen (126) die fünf Gleichungen

$$(199)\quad \begin{cases} -54\delta_1-72\delta_2-78\delta_3-80\delta_4=24k_0, \\ +36\delta_1+\;0\;-12\delta_3-16\delta_4=24k_1, \\ +12\delta_1+48\delta_2+12\delta_3+\;0\;=24k_2, \\ +\;4\delta_1+16\delta_2+52\delta_3+16\delta_4=24k_3, \\ +\;2\delta_1+\;8\delta_2+26\delta_3+80\delta_4=24k_4, \end{cases}$$

oder

$$(200)\quad \begin{cases} 18\delta_1 = -2k_0 + 10k_1 - 3k_2 + 0, \\ 18\delta_2 = 0 - 3k_1 + 10k_2 - 3k_3, \\ 18\delta_3 = +2k_0 + 2k_1 - k_2 + 12k_3, \\ 6\delta_4 = -2k_0 - 2k_1 - 2k_2 - 3k_3. \end{cases}$$

Hieraus findet man nur *ein* L-Product ξ mit dem Charakter 3, nämlich

$$(201)\quad \xi = \frac{L(3)}{L(27)}, \text{*)}$$

ausserdem erhält man noch 5 L-Producte ξ mit dem Charakter 6, nämlich

$$(202)\quad \begin{cases} \xi_1 = \frac{L(9)}{L(3)^4}, \quad \xi_2 = \frac{L(27)^3 L(3)}{L(9)^4}, \quad \xi_3 = \frac{L(27)^2 L(3)^2}{L(9)^4}, \\ \xi_4 = \frac{L(27) L(3)^3}{L(9)^4}, \quad \xi_5 = \frac{L(81)^3 L(9)}{L(27)^4}. \text{**)} \end{cases}$$

Die Grössen ξ_1 und ξ_2 waren schon Parameter für $n = 27$, folglich sind sie es auch für $n = 81$. Ebenso ist ξ_3 ein Parameter, denn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ sind *gerade*, k_0 und k_4 sind ganze Zahlen, und es ist

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \text{ (mod. 24)}.$$

Deshalb sind auch

$$\xi = \frac{\xi_3}{\xi_2} \quad \text{und} \quad \xi_4 = \frac{\xi_3^2}{\xi_2} = \xi\xi_3$$

Parameter, und zwar ist ξ ein *Parameter mit möglichst niedrigem Charakter*. Endlich ist auch

$$\xi_5 = L(81)^3 \cdot \xi^4 \xi_1$$

ein Parameter, denn es ist, wie man leicht zeigen kann,

$$L(81)^3 = Q^{240} f(81)^3 = \frac{Q^{240}}{\prod\limits_{\alpha=1}^{\alpha=40} \wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{81}\right)}$$

eine cyklische Function der 27 Grössen

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{81}\right), \quad \wp\left(\frac{4\varpi}{81}\right), \quad \wp\left(\frac{8\varpi}{81}\right), \quad \cdots \quad \wp\left(\frac{2^{27}\varpi}{81}\right)$$

und deshalb ein Parameter (mit dem Charakter 12).

---

*) $k_0 = +1,\ k_1 = +2,\ k_2 = 0,\ k_3 = -2,\ k_4 = -1$ giebt die Grösse ξ.

**) $k_0 = +6,\ k_1 = -6,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0$ giebt die Grösse ξ_1

$k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -6,\ k_3 = +4,\ k_4 = +2$ „ „ „ ξ_2,

$k_0 = +1,\ k_1 = +2,\ k_2 = -6,\ k_3 = +2,\ k_4 = +1$ „ „ „ ξ_3,

$k_0 = +2,\ k_1 = +4,\ k_2 = -6,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0$ „ „ „ ξ_4,

$k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = -6,\ k_4 = +6$ „ „ „ ξ_5.

Da

$$\xi_1(81) = \xi_1(27) \quad \text{und} \quad \xi_2(81) = \xi_2(27),$$

so gilt auch hier noch die Gleichung (187), nämlich

(203) $(9\xi_1^2 + 3\xi_1 + 1)\xi_2^2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 - 2)\xi_2 + (9\xi_1^2 - 6\xi_1 + 1) = 0.$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{3}$, so geht ξ_1 in ξ_4 und ξ_2 in ξ_5 über, folglich gilt auch die Gleichung

(204) $(9\xi_4^2 + 3\xi_4 + 1)\xi_5^2 + (9\xi_4^2 - 6\xi_4 - 2)\xi_5 + (9\xi_4^2 - 6\xi_4 + 1) = 0.$

Ferner ist nach Gleichung (186)

(205) $$\xi^3 = \xi_4(27),$$

deshalb geht die Gleichung (190) über in

(206) $$(3\xi_1 - 1)^3 \xi^6 - 3\xi_1(3\xi_1 - 2)\xi^3 + \xi_1 = 0.$$

Um die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ zu erhalten, setze man

(207) $$P_2 = L(9)^3, \quad P_3 = \frac{L(27)^3}{L(3)^3}, \quad P_4 = \frac{L(81)^3}{L(9)^3},$$

dann ist P_2 gleich $\xi_3(27)$ und P_3 ist gleich $\frac{1}{\xi_4(27)}$, folglich wird nach Gleichung (196)

(208) $$P_3 = -3 + \frac{P_2 + 9}{\sqrt[3]{P_2^2 + 9P_2 + 27}},$$

oder

(208a) $$(P_3 + 3)^3 (P_2^2 + 9P_2 + 27) = (P_2 + 9)^3.$$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{3}$, so geht P_2 in P_3 und P_3 in P_4 über, deshalb wird

(209) $$P_4 = -3 + \frac{P_3 + 9}{\sqrt[3]{P_3^2 + 9P_3 + 27}}.$$

Nach Gleichung (179a) oder (193) ist nun

(210) $$J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3\eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27),$$

wobei

(211) $$\eta = P_2 + 3$$

ist. Der zu η complementäre Parameter ist

(212) $$\bar{\eta} = \frac{27}{P_4} + 3,$$

so dass $\bar{\eta}$ mit Rücksicht auf die Gleichungen (208), (209), (211) und (212) als irrationale Function von η darstellbar ist. Es wird dann wieder

(213) $$\bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3\bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\bar{\eta}^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27).$$

§ 21.

Transformation vom Grade 243.

Für $n = 243$ wird $\varrho = 19$ und n hat die Theiler 1, 3, 9, 27, 81, 243. Setzt man also

$$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2} L(27)^{\delta_3} L(81)^{\delta_4} L(243)^{\delta_5},$$

so erhält man aus Gleichung (126) die sechs Gleichungen

$$(214)\quad \begin{cases} -162\delta_1 - 216\delta_2 - 234\delta_3 - 240\delta_4 - 242\delta_5 = 24k_0, \\ +108\delta_1 + 0 - 36\delta_3 - 48\delta_4 - 52\delta_5 = 24k_1, \\ +36\delta_1 + 144\delta_2 + 36\delta_3 + 0 - 12\delta_5 = 24k_2, \\ +12\delta_1 + 48\delta_2 + 156\delta_3 + 48\delta_4 + 12\delta_5 = 24k_3, \\ +4\delta_1 + 16\delta_2 + 52\delta_3 + 160\delta_4 + 52\delta_5 = 24k_4, \\ +2\delta_1 + 8\delta_2 + 26\delta_3 + 80\delta_4 + 242\delta_5 = 24k_5, \end{cases}$$

oder

$$(215)\quad \begin{cases} 54\delta_1 = -2k_0 + 10k_1 - 3k_2 + 0 + 0, \\ 54\delta_2 = 0 - 3k_1 + 10k_2 - 3k_3 + 0, \\ 54\delta_3 = 0 + 0 - 3k_2 + 10k_3 - 3k_4, \\ 54\delta_4 = +2k_0 + 2k_1 + 2k_2 - k_3 + 12k_4, \\ 18\delta_5 = -2k_0 - 2k_1 - 2k_2 - 2k_3 - 3k_4. \end{cases}$$

Hieraus findet man einen Parameter

$$(216)\qquad \xi = \frac{L(81)}{L(9)}$$

mit dem Charakter 9, während $\frac{1}{2}(\varrho + 3) = 11$ ist. Ausserdem erhält man eine ganze Reihe von Parametern mit dem Charakter 18; solche Parameter entstehen z. B. durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{3}$ aus den Parametern mit dem Charakter 6 für die Transformation vom Grade 81.

Um die Beziehung zwischen J und $\overline{J}$ anzugeben, genügt das Folgende. Es sei wieder wie in Gleichung (207)

$$P_2 = L(9)^3, \quad P_3 = \frac{L(27)^3}{L(3)^3}, \quad P_4 = \frac{L(81)^3}{L(9)^3}$$

und

$$(217)\qquad P_5 = \frac{L(243)^3}{L(27)^3},$$

dann wird

$$(218)\qquad P_{\nu+1} = -3 + \frac{P_\nu + 9}{\sqrt[3]{P_\nu^2 + 9P_\nu + 27}}$$

für $\nu = 2, 3, 4$. Setzt man jetzt noch

$$\eta = P_2 + 3, \quad \bar{\eta} = \frac{27}{P_5} + 3,$$

so gelten wieder die beiden Gleichungen

$$(219) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3 \eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27), \\ \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3 \bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\bar{\eta}^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27). \end{cases}$$

§ 22.

Transformation vom Grade 3^α.

Die Methode, welche in den vorstehenden Paragraphen zum Ziele führte, kann auch ganz allgemein für die Transformation vom Grade 3^α benutzt werden. Es sei also

$$(220) \quad P_2 = L(9)^3, \quad P_3 = \frac{L(27)^3}{L(3)^3}, \cdots \quad P_\alpha = \frac{L(3^\alpha)^3}{L(3^{\alpha-2})^3},$$

$$(221) \quad \eta = P_2 + 3, \quad \bar{\eta} = \frac{27}{P_\alpha} + 3,$$

dann gilt für $\nu = 2, 3, 4, \cdots \alpha - 1$ die Gleichung

$$(222) \quad P_{\nu+1} = -3 + \frac{P_\nu + 9}{\sqrt[3]{P_\nu^2 + 9P_\nu + 27}},$$

und es wird

$$(223) \quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^3 - 24)^3 \eta^3 : (\eta^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\eta^3 - 27), \\ \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^3 - 24)^3 \bar{\eta}^3 : (\bar{\eta}^6 - 36\eta^3 + 216)^2 : 1728(\bar{\eta}^3 - 27). \end{cases}$$

Die bei dieser Transformation nothwendigen irrationalen Operationen sind auf die Ausziehung von $\alpha - 3$ Cubikwurzeln beschränkt.

V. Abschnitt.

Transformation vom Grade a^α, wenn a eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$ ist.

§ 23.

Transformation vom Grade a.

Ist a eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, so hat man hier vier Fälle zu unterscheiden, nämlich

I. $a = 12\nu + 1$, II. $a = 12\nu + 5$, III. $a = 12\nu + 7$,
IV. $a = 12\nu + 11$.

I. Für $a = 12\nu + 1$ wird $\varrho = \nu - 1$ und

(224) $$\xi = L(a)^2$$

ist ein Parameter mit dem Charakter $\nu = \varrho + 1$. Es ist hier nämlich

$$S(a, D) = 2(t_1^2 - a),$$

woraus sich

(225) $$2(1 - a) = -24\nu = 24k_0, \quad 2(a - 1) = +24\nu = 24k_1$$

ergiebt. Die Gleichung zwischen ξ und J ist bereits in m. vor. Abh. untersucht worden. Der zu ξ complementäre Parameter ist

(226) $$\bar{\xi} = \frac{a}{\xi},$$

so dass die Gleichungen

$$F(\xi, J) = 0 \quad \text{und} \quad F\left(\frac{a}{\xi}, \bar{J}\right) = 0$$

die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ vermitteln. (Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (148) für $a = 13$).

II. Für $a = 12\nu + 5$ wird $\varrho = \nu$ und es besteht eine Transformationsgleichung zwischen $f(a)^2$ und g_2; es besteht also auch eine ihr entsprechende Gleichung zwischen $L(a)^2$ und $\gamma_2 = \sqrt[3]{J}$. Die Grösse $L(a)^2$ ist aber *kein* Parameter, sondern erst

(227) $$\xi = L(a)^6,$$

und zwar hat ξ den Charakter

$$3\nu + 1 = 3\varrho + 1,$$

denn hier ist

$$S(a, D) = 6(t_1^2 - a),$$

$$6(1 - a) = -24(3\nu + 1) = 24k_0, \quad 6(a - 1) = 24(3\nu + 1) = 24k_1.$$

Für $a = 5$ wird $\nu = 0$ und der Charakter von ξ gleich 1; aber für alle übrigen Werthe von a und ν muss es Parameter geben, deren Charakter noch bedeutend niedriger ist als der von ξ.

Dieser Uebelstand wird einerseits dadurch ausgeglichen, dass schon zwischen $\xi^{\frac{1}{3}}$ und $J^{\frac{1}{3}} = \gamma_2$ eine Gleichung besteht. Es ist aber auch hier die Bildung von Parametern mit niedrigerem Charakter möglich, wenn man nicht die Transformation a^{ten} Grades zum Ausgangspunkte wählt, sondern die Transformation vom Grade ab.

(Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (145) für $n = 5$, Gleichung (149) für $a = 17$ und Gleichung (152) für $a = 29$).

III. Für $a = 12\nu + 7$ wird $\varrho = \nu$, und es besteht eine Transformationsgleichung zwischen $f(a)^2$ und g_3; es besteht also auch eine ihr entsprechende Gleichung zwischen $L(a)^2$ und $\gamma_3 = \left(\frac{J-1}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$. Die Grösse $L(a)^2$ ist auch hier *kein* Parameter, sondern erst

(228) $$\xi = L(a)^4,$$

und zwar hat ξ den Charakter

$$2\nu + 1 = 2\varrho + 1,$$

denn hier ist

$$S(a, D) = 4(t_1{}^2 - a),$$

$$4(1-a) = -24(2\nu+1) = 24k_0, \quad 4(a-1) = 24(2\nu+1) = 24k_1.$$

Für $a = 7$ wird $\nu = 0$ und der Charakter von ξ gleich 1; aber auch hier muss es für alle übrigen Werthe von a Parameter geben, deren Charakter niedriger ist als der von ξ. Ein Ausgleich dieses Uebelstandes findet in ähnlicher Weise statt wie im zweiten Falle.

(Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (146) für $a = 7$ und Gleichung (150) für $a = 19$).

IV. Für $a = 12\nu + 11$ wird $\varrho = \nu + 1$, und es besteht eine Transformationsgleichung zwischen $f(a)^2$, g_2 und g_3. Dagegen ist $L(a)^2$ *kein* Parameter, sondern erst

(229) $$\xi = L(a)^{12},$$

und zwar hat ξ den Charakter

$$6\nu + 5 = 6\varrho - 1,$$

denn es ist

$$S(a, D) = 12(t_1{}^2 - a),$$

$$12(1-a) = -24(6\nu+5) = -24k_0, \quad 12(a-1) = 24(6\nu+5) = 24k_1.$$

Hier ist also ξ nicht einmal für $\nu = 0$ ein Parameter mit niedrigstem Charakter. Ein Ausgleich dieses Uebelstandes findet in ähnlicher Weise statt wie beim zweiten und dritten Falle; in § 34 wird sogar gezeigt werden, wie man mit Hülfe der Transformation 22ten Grades einen Parameter mit niedrigstem Charakter für die Transformation 11ten Grades bilden kann.

(Vergl. m. vor. Abh. Gleichung (147) für $a = 11$ und Gleichung (151) für $a = 23$).

§ 24.

Transformation vom Grade a^2.

Ist

$$n = a^2 = (6l \pm 1)^2 = 12l(3l \pm 1) + 1,$$

so ist $n - 1$ immer durch 24 theilbar, und deshalb ist

(230) $$\xi = L(n) = Q^{n-1} f(n)$$

immer ein Parameter. Wie nämlich schon in § 23 meiner vor. Abh. gezeigt wurde, ist $f(n)$ in diesem Falle, wo $n = a^2$, die Wurzel einer Transformationsgleichung, folglich gilt dasselbe von

$$L(n) = (g_2^3 - 27g_3^2)^{\frac{n-1}{24}} f(n).$$

Hierbei wird

$$S(n, D) = t_2^2 - a^2$$

und deshalb

$$k_0 = -\frac{l(3l \pm 1)}{2}, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = +\frac{l(3l \pm 1)}{2}, \tag{231}$$

so dass der Parameter ξ den Charakter

$$ch = \frac{1}{2} l(3l \pm 1) \tag{232}$$

hat. Der Grad der Invariantengleichung dagegen ist in Bezug auf J und $\overline{J}$

$$T(n) = (n+1)\,n = 24ch + n + 1.$$

Durch Einführung des Parameters ξ wird also der Grad der benutzten Gleichungen um mehr als das 24-fache erniedrigt.

Der Charakter dieses Parameters ist auch in allen Fällen nur wenig verschieden von dem niedrigsten Grade, den ein Parameter für den zugehörigen Werth von n überhaupt haben kann. Hierbei hat man acht Fälle zu unterscheiden, die sich aus der folgenden Tabelle ergeben:

(233)

n	ϱ	ch	$ch - \frac{1}{2}(\varrho+2)$	$ch - \frac{1}{2}(\varrho+3)$
$(24\nu+1)^2$	$48\nu^2 - 6\nu - 1$	$24\nu^2 + 2\nu$		$5\nu - 1$
$(24\nu+5)^2$	$48\nu^2 + 10\nu$	$24\nu^2 + 10\nu + 1$	5ν	
$(24\nu+7)^2$	$48\nu^2 + 18\nu + 1$	$24\nu^2 + 14\nu + 2$		5ν
$(24\nu+11)^2$	$48\nu^2 + 34\nu + 6$	$24\nu^2 + 22\nu + 5$	$5\nu + 1$	
$(24\nu+13)^2$	$48\nu^2 + 42\nu + 8$	$24\nu^2 + 26\nu + 7$	$5\nu + 2$	
$(24\nu+17)^2$	$48\nu^2 + 58\nu + 17$	$24\nu^2 + 34\nu + 12$		$5\nu + 2$
$(24\nu+19)^2$	$48\nu^2 + 66\nu + 22$	$24\nu^2 + 38\nu + 15$	$5\nu + 3$	
$(24\nu+23)^2$	$48\nu^2 + 82\nu + 35$	$24\nu^2 + 46\nu + 22$		$5\nu + 3$

Beispiele.

(234)

n	ϱ	ch	$ch - \frac{1}{2}(\varrho+2)$	$ch - \frac{1}{2}(\varrho+3)$
$5^2 = 25$	0	1		
$7^2 = 49$	1	2		
$11^2 = 121$	6	5	1	
$13^2 = 169$	8	7	2	
$17^2 = 289$	17	12		2
$19^2 = 361$	22	15	3	
$23^2 = 529$	35	22		3
$29^2 = 841$	58	35	5	
$31^2 = 961$	67	40		5
$37^2 = 1369$	98	57	7	
$59^2 = 3481$	266	145	11	
$73^2 = 5329$	413	222		14

§ 25.

Transformation vom Grade 25 und 49.

In § 25 m. vor. Abhandlung wurde schon die Transformation vom Grade 25 ausgeführt, und zwar ist nach Gleichung (177 a) und (179)

$$(235)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = [L(5)^{12} + 10L(5)^6 + 5]^3 \\ \qquad : [L(5)^{12} + 22L(5)^6 + 125]\,[L(5)^{12} + 4L(5)^6 - 1]^2 \\ \qquad : 1728\,L(5)^6 \end{cases}$$

und

$$(236)\quad L(5)^6 = \xi^5 + 5\xi^4 + 15\xi^3 + 25\xi^2 + 25\xi = \eta^5 + 5\eta^3 + 5\eta - 11,$$

wobei

$$\eta = \xi + 1 = L(25) + 1$$

gesetzt worden ist. Dies giebt nach Gleichung (180 a) m. vor. Abh.

$$(237)\quad \begin{cases} J:J-1:1 = (\eta^{10}+10\eta^8+35\eta^6-12\eta^5+50\eta^4-60\eta^3+25\eta^2-60\eta+16)^3 \\ \qquad :(\eta^2+4)(\eta^4+3\eta^2+1)^2 \\ \qquad \times(\eta^{10}+10\eta^8+35\eta^6-18\eta^5+50\eta^4-90\eta^3+25\eta^2-90\eta+76)^2 \\ \qquad :1728(\eta^5+5\eta^3+5\eta-11). \end{cases}$$

Die zu ξ und η complementären Parameter sind

(238) $$\bar{\xi} = \frac{5}{\xi} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{\xi + 5}{\xi} = \frac{\eta + 4}{\eta - 1},$$

so dass zwischen $\bar{J}$ und $\bar{\eta}$ dieselbe Gleichung besteht wie zwischen J und η. Da aber $\bar{\eta}$ eine rationale Function von η ist, so kann man J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von η darstellen.

Für $n = 49$ wird $\rho = 1$. Auch für diesen Fall sind schon in § 26 m. vor. Abh. die wichtigsten Formeln angegeben. Nach Gleichung (185a) daselbst erhält man nämlich, wenn man $L(7) = x$ setzt,

(239) $$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (x^8 + 13x^4 + 49)(x^8 + 5x^4 + 1)^3 \\ \qquad : (x^{16} + 14x^{12} + 63x^8 + 70x^4 - 7)^2 : 1728x^4 \end{cases}$$

und

(240) $$x^8 - 7(\xi^3 + 5\xi^2 + 7\xi)x^4$$
$$- (\xi^7 + 7\xi^6 + 21\xi^5 + 49\xi^4 + 147\xi^3 + 343\xi^2 + 343\xi) = 0,$$

oder

(240a) $$2x^4 = 7(\xi^3 + 5\xi^2 + 7\xi) + (\xi^2 + 7\xi + 7)\sqrt{\xi(4\xi^2 + 21\xi + 28)}.$$

Vertauscht man ϖ mit $\frac{\varpi}{49}$, so geht J in $\bar{J}$,

(241) $$\xi \text{ in } \bar{\xi} = \frac{7}{\xi} \quad \text{und} \quad w = \sqrt{\xi(4\xi^2 + 21\xi + 28)} \text{ in } \bar{w} = \pm \frac{7w}{\xi^2}$$

über. Deshalb ist es jetzt leicht J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von ξ und w darzustellen. Dabei wird das Vorzeichen von w durch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von h bestimmt.

§ 26.

Transformation vom Grade a^3.

Setzt man für $n = a^3$

(242) $$\xi = \frac{L(a^3)}{L(a)},$$

so wird

$$S(n, D) = -a^2(t_1^2 - a) + t_3^2 - a^3 = t_3^2 - a^2 t_1^2;$$

deshalb findet man aus der Gleichung (126) die vier Gleichungen

$$1 - a^2 = 24k_0, \quad (a-1)(1-a^2) = 24k_1, \quad 0 = 24k_2, \quad a(a^2 - 1) = 24k_3,$$

oder

(243) $$\begin{cases} k_0 = -\frac{1}{2}l(3l \pm 1), & k_1 = -\frac{a-1}{2}l(3l \pm 1), \\ k_2 = 0, & k_3 = \frac{a}{2}l(3l \pm 1). \end{cases}$$

Der Charakter von ξ ist daher

$$\text{(244)} \qquad ch = \frac{a}{2}\, l(3l \pm 1) = \frac{a(a^2-1)}{24}.$$

Bildet man nun bei der Transformation vom Grade a^2 die Gleichung, welche zwischen $L(a)$ und $L(a^2)$ besteht, also die Gleichung

$$\text{(245)} \qquad F(L(a),\, L(a^2)) = 0, \quad \text{oder} \quad F\left(\frac{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')},\ \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a^2}, \varpi'\right)}{Q(\varpi, \varpi')}\right) = 0,$$

und vertauscht man in dieser Gleichung ϖ mit $\frac{\varpi}{a}$, so erhält man die Gleichung

$$\text{(246)} \qquad F\left(\frac{L(a)^2}{L(a)},\, \xi\right) = 0.$$

Indem man noch aus diesen beiden letzten Gleichungen die Grösse $L(a)$ eliminirt, findet man die Gleichung

$$\text{(247)} \qquad G(L(a^2),\, \xi)) = 0.$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man die Transformation vom Grade a^3 in folgender Weise ausführen. Setzt man der Kürze wegen

$$\text{(248)} \qquad L(a^2) = P_2, \quad \frac{L(a^3)}{L(a)} = P_3,$$

so erhält man bei der Transformation vom Grade a^2 die Gleichung

$$\text{(249)} \qquad H(J,\, P_2) = 0,$$

die in Bezug auf P_2 vom Grade $a(a+1)$ und in Bezug auf J vom Grade $\frac{a^2-1}{24}$ ist. Vertauscht man jetzt ϖ mit $\frac{\varpi}{a^3}$, so geht J in $\overline{J}$ und

$$P_2 = \frac{Q\left(\varpi, \frac{\varpi'}{a^2}\right)}{Q(\varpi, \varpi')} \quad \text{in} \quad \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a^3}, \frac{\varpi'}{a^2}\right)}{Q\left(\frac{\varpi}{a^3}, \varpi'\right)} = \frac{aQ\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)}{Q\left(\frac{\varpi}{a^3}, \varpi'\right)} = \frac{a}{P_3}$$

über. Deshalb vermitteln die drei Gleichungen

$$\text{(250)} \qquad H(J,\, P_2) = 0, \quad H\left(\overline{J}, \frac{a}{P_3}\right) = 0, \quad G(P_2,\, P_3) = 0$$

verhältnissmässig einfach die Beziehung zwischen J und $\overline{J}$.

Dabei ist der Charakter von $\xi = P_3$ noch kleiner als $\frac{1}{2}(\varrho + 2)$ bez. als $\frac{1}{2}(\varrho + 3)$, wie man aus der folgenden Tabelle erkennt:

(251)

n	ϱ	$\frac{1}{2}(\varrho+2)-ch$	$\frac{1}{2}(\varrho+3)-ch$
$a^3=(24\nu+1)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a-2)$		$\nu(a-10)+1$
$a^3=(24\nu+5)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+6)$	$\nu(a-6)$	
$a^3=(24\nu+7)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+4)$	$\nu(a-4)$	
$a^3=(24\nu+11)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+12)$		$\nu a+2$
$a^3=(24\nu+13)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a-2)$	$\nu(a+2)+2$	
$a^3=(24\nu+17)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+6)$		$\nu(a+6)+6$
$a^3=(24\nu+19)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+4)$		$\nu(a+8)+8$
$a^3=(24\nu+23)^3$	$\frac{1}{12}(a^3+a^2-12a+12)$	$\nu(a+12)+13$	

Beispiele.

(252)

n	ϱ	ch	$\frac{1}{2}(\varrho+2)-ch$	$\frac{1}{2}(\varrho+3)-ch$
125	8	5	0	
343	26	14	0	
1331	111	55		2
2197	184	91	2	
4913	417	204		6
6859	583	285		8
12167	1036	506	13	

§ 27.

Transformation vom Grade 125.

Für $n=125$ ist $\varrho=8$ und

(253) $$P_2=L(25),\quad P_3=\frac{L(125)}{L(5)};$$

dann wird nach Gleichung (236)

(254) $$L(5)^6=P_2^5+5P_2^4+15P_2^3+25P_2^2+25P_2.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung ϖ mit $\frac{\varpi}{5}$, so geht sie über in

$$P_2^6 : L(5)^6 = P_3^5 + 5P_3^4 + 15P_3^3 + 25P_3^2 + 25P_3,$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (254)

$$(255)\qquad \begin{cases} P_2^5 : (P_2^4 + 5P_2^3 + 15P_2^2 + 25P_2 + 25) \\ = P_3^5 + 5P_3^4 + 15P_3^3 + 25P_3^2 + 25P_3. \end{cases}$$

Setzt man jetzt wieder

$$P_2 + 1 = \eta,$$

so gilt zwischen J und η die Gleichung (237). Der zu η complementäre Parameter ist aber in diesem Falle

$$(256)\qquad \bar{\eta} = \frac{5}{P_3} + 1 = \frac{P_3 + 5}{P_3}.$$

Jetzt ist $\bar{J}$ dieselbe rationale Function von $\bar{\eta}$ wie J von η nach Gleichung (237), und zwischen η und $\bar{\eta}$ besteht eine Gleichung, welche aus Gleichung (255) hervorgeht, indem man

$$(257)\qquad P_2 = \eta - 1, \quad P_3 = \frac{5}{\bar{\eta} - 1}$$

setzt. Diese Gleichung ist in Bezug auf jede dieser beiden Grössen vom 5ten Grade und heisst

$$(258)\qquad (\eta - 1)^5 (\bar{\eta} - 1)^5$$
$$= 125(\eta^4 + \eta^3 + 6\eta^2 + 6\eta + 11)(\bar{\eta}^4 + \bar{\eta}^3 + 6\bar{\eta}^2 + 6\bar{\eta} + 11).$$

§ 28.

Transformation vom Grade a^α.

Die Transformation vom Grade a^3 ist in § 26 in ganz ähnlicher Weise ausgeführt wie in § 19 die Transformation 27ten Grades, nur gestaltet sich die Rechnung für $n = a^3$ insofern einfacher, als schon $L(a^3) : L(a)$ selbst ein Parameter wird, wenn $a = 6l \pm 1$ ist, während für $a = 3$ erst $L(a^3)^3 : L(a)^3$ ein Parameter wird. Wie aber aus der Transformation 27ten Grades die Regeln für die Transformation vom Grade 3^α hergeleitet wurden, so findet man jetzt auch aus der Transformation vom Grade a^3 die Regeln für die Transformation vom Grade a^α. Setzt man nämlich

$$(259)\qquad P_2 = L(a^2), \quad P_3 = \frac{L(a^3)}{L(a)}, \; \cdots \; P_\alpha = \frac{L(a^\alpha)}{L(a^{\alpha-2})},$$

so gelten die Gleichungen

(260) $H(J, P_2) = 0, \quad H\left(J, \frac{a}{P_a}\right) = 0, \quad G(P_\nu, P_{\nu+1}) = 0$

für $\nu = 2, 3, \cdots \alpha - 1$. Dabei haben die Functionen $G(P_\nu, P_{\nu+1})$ und $H(J, P_2)$ genau dieselbe Bedeutung wie in den Gleichungen (250).

VI. Abschnitt.

Transformation vom Grade $2a$.

§ 29.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $2a$.

Ist $n = 2a$ und hat die Primzahl a die Form $4c \pm 1$, so ist der Rang ϱ gleich $c - 1$. Setzt man in diesem Falle

(261) $$\xi = L(2)^{\delta_1} L(a)^{\delta_2} L(2a)^{\delta_3},$$

so wird

$$S(n, D) = a\delta_1(t_1^2 - 2) + 2\delta_2(t_2^2 - a) + \delta_3(t_3^2 - 2a),$$

und man erhält aus der Gleichung (126) die vier Gleichungen

(262) $$\begin{cases} - a\delta_1 - 2(a-1)\,\delta_2 - (2a-1)\,\delta_3 = 24k_0, \\ + a\delta_1 - (a-1)\,\delta_2 - (a-2)\,\delta_3 = 24k_1, \\ - \delta_1 + 2(a-1)\,\delta_2 + (a-2)\,\delta_3 = 24k_2, \\ + \delta_1 + (a-1)\,\delta_2 + (2a-1)\,\delta_3 = 24k_3, \end{cases}$$

oder

(263) $$\begin{cases} (a^2-1)\,\delta_1 = 8[-(a-2)\,k_0 + 2(a+1)\,k_1 + 3k_2], \\ (a^2-1)\,\delta_2 = 8[+(a-2)\,k_0 + (a+1)\,k_1 + 3ak_2], \\ (a^2-1)\,\delta_3 = 8[-(2a-1)\,k_0 - 2(a+1)\,k_1 - 3ak_2]. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$a^2 - 1 = (4c \pm 1)^2 - 1 = 8c(2c \pm 1),$$

folglich gehen die Gleichungen (263) über in

(263a) $$\begin{cases} c(2c \pm 1)\,\delta_1 = -(a-2)\,k_0 + 2(a+1)\,k_1 + 3k_2, \\ c(2c \pm 1)\,\delta_2 = +(a-2)\,k_0 + (a+1)\,k_1 + 3ak_2, \\ c(2c \pm 1)\,\delta_3 = -(2a-1)\,k_0 - 2(a+1)\,k_1 - 3ak_2. \end{cases}$$

§ 30.

Transformation vom Grade 6.

Für $n = 6$ wird $a = 3$, $c = 1$ und $\varrho = 0$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263a)

(264) $\delta_1 = -k_0 + 8k_1 + 3k_2, \quad \delta_2 = +k_0 + 4k_1 + 9k_2, \quad \delta_3 = -5k_0 - 8k_1 - 9k_2.$

Indem man von den vier Grössen k_0, k_1, k_2, k_3 die eine gleich $+1$, die zweite gleich -1 und die beiden anderen gleich 0 setzt, erhält man 6 L-Producte mit dem Charakter 1, nämlich

$$(265)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(6)^6}{L(3)^4 L(2)^9}, & \xi_2 = \dfrac{L(6)^4}{L(3)^5 L(2)^4}, \quad \xi_3 = \dfrac{L(6)^3}{L(3)^3 L(2)^9}, \\ \xi_4 = \dfrac{L(6)^5 L(2)}{L(3)}, & \xi_5 = \dfrac{L(6)\, L(2)^5}{L(3)^5}, \quad \xi_6 = \dfrac{L(6)^9}{L(3)^9 L(2)^8}.\,*) \end{cases}$$

Die Grössen ξ_1 und ξ_2 sind Parameter, denn die Exponenten δ_1, δ_2, δ_3 sind *gerade* Zahlen, n ist gleichfalls eine *gerade* Zahl. Aber auch ξ_3 ist ein Parameter, denn es ist

$$\xi_3 = \frac{f(6)^3}{f(3)^3 f(2)^9} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)^3}{\tau(\varpi)^3} = \frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right) - \wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)},$$

folglich ist ξ_3 eine rationale Function von $\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right)$ und deshalb eine *Transformationsgrösse*. Da ausserdem die Dimension von ξ_3 gleich 0 ist, so ist ξ_3 ein *Parameter*. (Vergl. Gleichung (58) Nr. 9).

Deshalb sind auch die Hülfsgrössen

$$\xi_4 = \frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \xi_6 = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_3}$$

Parameter, und zwar haben diese 6 Parameter sämmtlich den Charakter 1.

Folglich besteht auch zwischen je zweien dieser 6 Parameter eine Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha \xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch Entwickelung der Parameter ξ_α und ξ_β nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{3}} = z$ finden kann. Dadurch erhält man

$$(266)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{1-\xi_1}{9-\xi_1}, \quad 8\xi_3 = 1 - \xi_1, \quad \xi_4 = \dfrac{8\xi_1}{1-\xi_1}, \\ \xi_5 = \dfrac{8}{9-\xi_1}, \quad \xi_6 = \dfrac{8\xi_1}{9-\xi_1}, \end{cases}$$

oder

---

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
k_0	0	+1	+1	−1	0	0
k_1	−1	0	−1	0	+1	0
k_2	0	−1	0	0	−1	−1
k_3	+1	0	0	+1	0	+1

(266a) $$\xi_1 = \frac{1-9\xi_2}{1-\xi_2}, \quad \xi_3 = \frac{\xi_2}{1-\xi_2},$$

oder

(266b) $$\xi_1 = 1 - 8\xi_3, \quad \xi_2 = \frac{\xi_3}{1+\xi_3}.$$

Aus den Gleichungen (265) folgt nun

(267) $$\begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2}{\xi_3^4} = \dfrac{(1-\xi_2)^3(1-9\xi_2)}{\xi_2^3} = \dfrac{1-8\xi_3}{\xi_3^3(1+\xi_3)}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^3} = \dfrac{1-9\xi_2}{\xi_2^3(1-\xi_2)} = \dfrac{(1+\xi_3)^3(1-8\xi_3)}{\xi_3^3}, \\ L(6)^{24} = \dfrac{\xi_1^5}{\xi_2\xi_3^4} = \dfrac{(1-9\xi_2)^5}{\xi_2^5(1-\xi_2)} = \dfrac{(1+\xi_3)(1-8\xi_3)^5}{\xi_3^5}. \end{cases}$$

Nach Gleichung (132) war

$$J:J-1:1 = [L(2)^{24}+16]^3 : [L(2)^{24}-8]^2\,[L(2)^{24}+64] : 1728\,L(2)^{24}$$

und nach Gleichung (171) war

$$J:J-1:1 = [L(3)^{12}+3]^3\,[L(3)^{12}+27] : [L(3)^{24}+18\,L(3)^{12}-27]^2 \\ : 1728\,L(3)^{12}.$$

Aus jeder dieser beiden Gleichungen kann nun mit Rücksicht auf die Gleichungen (267) J als rationale Function eines der 6 Parameter dargestellt werden. Für den vorliegenden Zweck würde eine dieser Darstellungen genügen, für die später folgende Transformation 12ten und 18ten Grades ist es aber zweckmässig, die Invariante J als Function von ξ_2 *und* von ξ_3 darzustellen. Dies giebt

(268) $$\begin{cases} J:J-1:1 = (1-9\xi_2+3\xi_2^2-3\xi_2^3)^3(1-3\xi_2)^3 \\ \qquad : (1-12\xi_2+30\xi_2^2-36\xi_2^3+9\xi_2^4)^2(1-6\xi_2-3\xi_2^2)^2 \\ \qquad : 1728\xi_2^6(1-\xi_2)^3(1-9\xi_2), \end{cases}$$

oder

(268a) $$\begin{cases} J:J-1:1 = (1-6\xi_3-12\xi_3^2-8\xi_3^3)^3(1-2\xi_3)^3 \\ \qquad : (1-8\xi_3-8\xi_3^3-8\xi_3^4)^2(1-4\xi_3-8\xi_3^2)^2 \\ \qquad : 1728\xi_3^6(1+\xi_3)^2(1-8\xi_3). \end{cases}$$

Die zu ξ_2 und ξ_3 complementären Parameter sind

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi_1}{9} \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_6}{8},$$

deshalb erhält man

(269) $$\begin{cases} \bar{J}:\bar{J}-1:1 = (243-243\xi_1+9\xi_1^2-\xi_1^3)^3(3-\xi_1)^3 \\ \qquad :(729-972\xi_1+270\xi_1^2-36\xi_1^3+\xi_1^4)^2(27-18\xi_1-\xi_1^2)^2 \\ \qquad :1728\xi_1^6(9-\xi_1)^3(1-\xi_1), \end{cases}$$

oder

$$(269\text{a})\quad \begin{cases} J:J-1:1=(64-48\xi_6-12\xi_6^2-\xi_6^3)^3(4-\xi_6)^3 \\ \qquad :(512-512\xi_6-8\xi_6^3-\xi_6^4)^2(8-4\xi_6-\xi_6^2)^2 \\ \qquad :1728\xi_6^6(8+\xi_6)^2(1-\xi_6). \end{cases}$$

§ 31.

Transformation vom Grade 10.

Für $n=10$ wird $a=5$, $c=+1$ und $\varrho=0$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263 a)

$$(270)\quad \begin{cases} \delta_1=-k_0+4k_1+k_2, \quad \delta_2=k_0+2k_1+5k_2, \\ \delta_3=-3k_0-4k_1-5k_2. \end{cases}$$

Indem man von den vier Grössen k_0, k_1, k_2, k_3 die eine gleich $+1$, die zweite gleich -1 und die beiden anderen gleich 0 setzt, erhält man 6 L-Producte mit dem Charakter 1, nämlich

$$(271)\quad \begin{cases} \xi_1=\dfrac{L(10)^4}{L(5)^2L(2)^4}, \quad \xi_2=\dfrac{L(10)^2}{L(5)^4L(2)^2}, \quad \xi_3=\dfrac{L(10)}{L(5)\,L(2)^5}, \\ \xi_4=\dfrac{L(10)^3L(2)}{L(5)}, \quad \xi_5=\dfrac{L(10)\,L(2)^3}{L(5)^3}, \quad \xi_6=\dfrac{L(10)^5}{L(5)^5L(2)}. \text{*)} \end{cases}$$

Die Grössen ξ_1 und ξ_2 sind Parameter, denn die Exponenten δ_1, δ_2, δ_3 sind *gerade* Zahlen, n ist gleichfalls eine *gerade* Zahl. Aber auch ξ_3 ist ein Parameter, wie schon in § 4 gezeigt wurde. (Vergl. Gleichung (58) Nr. 8.) Deshalb sind auch die Hülfsgrössen

$$\xi_4=\frac{\xi_1}{\xi_3}, \quad \xi_5=\frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \xi_6=\frac{\xi_1\xi_2}{\xi_3}$$

Parameter, und zwar haben diese 6 Parameter sämmtlich den Charakter 1.

In derselben Weise wie bei $n=6$ findet man daher die Gleichungen

$$(272)\quad \begin{cases} \xi_2=\dfrac{1-\xi_1}{5-\xi_1}, \quad 4\xi_3=1-\xi_1, \quad \xi_4=\dfrac{4\xi_1}{1-\xi_1}, \\ \xi_5=\dfrac{4}{5-\xi_1}, \quad \xi_6=\dfrac{4\xi_1}{5-\xi_1}, \end{cases}$$

---

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 sind genau dieselben, wie bei den entsprechenden Grössen für $n=6$ und ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
k_0	0	+1	+1	−1	0	0
k_1	−1	0	−1	0	+1	0
k_2	0	−1	0	0	−1	−1
k_3	+1	.0	0	+1	0	+1

oder

$$(272\text{a})\quad \begin{cases} \xi_1 = 1 - 4\xi_3, \quad \xi_2 = \dfrac{\xi_3}{1+\xi_3}, \quad \xi_4 = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3}, \\ \xi_5 = \dfrac{1}{1+\xi_3}, \quad \xi_6 = \dfrac{1-4\xi_3}{1+\xi_3}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (271) folgt jetzt

$$(273)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2}{\xi_3^6} = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3^5(1+\xi_3)}, \\ L(5)^6 = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^2} = \dfrac{(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2}{\xi_3^2}, \\ L(10)^8 = \dfrac{\xi_1^3}{\xi_2\xi_3^2} = \dfrac{(1+\xi_3)(1-4\xi_3)^3}{\xi_3^3}. \end{cases}$$

Indem man diese Werthe von $L(2)^{24}$ in die Gleichung (132) für die Transformation 2ten Grades einsetzt, oder indem man den Werth von $L(5)^6$ in die Gleichung (235) für die Transformation 5ten Grades einsetzt, erhält man

$$(274)\quad \begin{cases} J:J-1:1 = (1-4\xi_3+16\xi_3^5+16\xi_3^6)^3 \\ \qquad :(1+4\xi_3^2)(1-2\xi_3+2\xi_3^2)^2(1-2\xi_3-4\xi_3^2)^2 \\ \qquad\qquad \times(1-2\xi_3-6\xi_3^2-8\xi_3^3-4\xi_3^4)^2 \\ \qquad :1728\xi_3^{10}(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2. \end{cases}$$

Der zu ξ_3 complementäre Parameter ist

$$(275)\quad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_6}{4} = \frac{1-4\xi_3}{4(1+\xi_3)},$$

folglich ist

$$(276)\quad \begin{cases} \bar{J}:\bar{J}-1:1 = (256-256\xi_6+4\xi_6^5+\xi_6^6)^3 \\ \qquad :(4+\xi_6^2)(8-4\xi_6+\xi_6^2)^2(4-2\xi_6-\xi_6^2)^2 \\ \qquad\qquad \times(64-32\xi_6-24\xi_6^2-8\xi_6^3-\xi_6^4)^2 \\ \qquad :1728\xi_6^{10}(1-\xi_6)(4+\xi_6)^2. \end{cases}$$

§ 32.

Transformation vom Grade 14.

Für $n = 14$ wird $a = 7$, $c = 2$ und $\varrho = 1$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263a)

$$(277)\quad 6\delta_1 = -5k_0 + 16k_1 + 3k_2, \quad 6\delta_2 = +5k_0 + 8k_1 + 21k_2,$$
$$6\delta_3 = -13k_0 - 16k_1 - 21k_2.$$

Daraus folgt, dass $k_0 + k_1$ immer durch 3 und $k_0 + k_2$ immer durch 2 theilbar sein muss. Den Charakter 2 haben daher nur die folgenden L-Producte:

$$(278) \quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(14)^7}{L(7)^7\,L(2)}, & \xi_2 = \dfrac{L(14)^3\,L(2)^3}{L(7)^3}, \\[2ex] \xi_3 = \dfrac{L(14)^4}{L(7)^4\,L(2)^4}, & \xi_4 = \dfrac{L(14)}{L(7)\,L(2)^7}. \text{*)} \end{cases}$$

Bei ξ_3 sind ohne Weiteres alle Bedingungen erfüllt, welche erfüllt werden müssen, damit ξ_3 ein Parameter ist. Auch ξ_4 ist nach § 4, Gleichung (58) Nr. 8 ein Parameter. Deshalb sind auch

$$(279) \qquad \xi_1 = \frac{\xi_3^2}{\xi_4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{\xi_3}{\xi_4}$$

Parameter, und zwar haben diese 4 Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sämmtlich den Charakter 2.

Die Gleichungen (277) liefern ausserdem noch L-Producte mit dem Charakter 3, nämlich die Grössen

$$(280) \quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{L(14)^8}{L(7)^4\,L(2)^8}, & \eta_2 = \dfrac{L(14)\,L(7)^3}{L(2)^7}, & \eta_3 = \dfrac{L(14)^4}{L(2)^4}, \\[2ex] \eta_4 = \dfrac{L(14)^3\,L(2)^3}{L(7)^7}, & \eta_5 = L(7)^4, & \eta_6 = \dfrac{L(14)^7}{L(7)^3\,L(2)}, \\[2ex] \eta_7 = \dfrac{L(14)^4}{L(7)^8\,L(2)^4}, & \eta_8 = L(14)^3\,L(7)\,L(2)^3. \text{*)} \end{cases}$$

Hierbei sind die Grössen η_1, η_3, η_5 und η_7, wie aus ihrer Form ohne Weiteres hervorgeht, Parameter. Daraus folgt aber, dass auch

$$(281) \qquad \eta_2 = \frac{\eta_1}{\xi_1}, \quad \eta_4 = \frac{\xi_1}{\eta_3}, \quad \eta_6 = \xi_1\eta_5, \quad \eta_8 = \frac{\xi_1}{\eta_7}$$

Parameter sind.

Man könnte glauben, dass die Anführung der Parameter ξ_1 und ξ_2 überflüssig sei, weil sie sich nach Gleichung (279) rational durch ξ_3 und ξ_4 darstellen lassen. Aus einem ähnlichen Grunde scheint von den Parametern η nur ein einziger erforderlich, denn es ist

$$(282) \qquad \eta_1 = \xi_3\eta_3, \quad \eta_3 = \xi_3\eta_5, \quad \eta_7 = \frac{\xi_3}{\eta_5},$$

während η_2, η_4, η_6, η_8 durch die Gleichungen (281) dargestellt sind. Für die folgenden Rechnungen gewährt aber die Kenntniss so vieler

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8
k_0	0	-1	$+1$	$+2$	0	0	-1	$+1$	-2	-2	$+3$	-3
k_1	0	$+1$	-1	-2	-3	-3	-2	$+2$	-1	-1	0	0
k_2	-2	-1	-1	0	0	$+2$	$+1$	-3	$+2$	0	-3	$+1$
k_3	$+2$	$+1$	$+1$	0	$+3$	$+1$	$+2$	0	$+1$	$+3$	0	$+2$

Parameter wesentliche Vereinfachungen, wie sogleich gezeigt werden soll. Zwischen ξ_3 und ξ_4 besteht nämlich eine Gleichung von der Form

(283) $(a\xi_3^2+b\xi_3+c)\xi_4^2+(a_1\xi_3^2+b_1\xi_3+c_1)\xi_4+(a_2\xi_3^2+b_2\xi_3+c_2)=0.$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (279) folgt hieraus

$$(284)\quad \begin{cases} (a_2\xi_3^2+b_2\xi_3+c_2)\,\xi_2^2+(a_1\xi_3^3+b_1\xi_3^2+c_1\xi_3)\,\xi_2 \\ \qquad\qquad +\,(a\xi_3^4+b\xi_3^3+c\xi_3^2)=0, \\ (a_2\xi_3^2+b_2\xi_3+c_2)\,\xi_1^2+(a_1\xi_3^4+b_1\xi_3^3+c_1\xi_3^2)\,\xi_1 \\ \qquad\qquad +\,(a\xi_3^6+b\xi_3^5+c\xi_3^4)=0. \end{cases}$$

Da aber diese Gleichungen in Bezug auf ξ_3 auch nur vom zweiten Grade sein dürfen, so ergiebt sich hieraus mit Nothwendigkeit

$$a=0,\quad b=0,\quad b_2=0,\quad c_2=0,$$

so dass die Gleichung (283) die einfachere Form annimmt

(283a) $c\xi_4^2+(a_1\xi_3^2+b_1\xi_3+c_1)\,\xi_4+a_2\xi_3^2=0.$

Durch Reihenentwickelung findet man hieraus verhältnissmässig leicht

(285) $8\xi_4^2-(\xi_3^2-7\xi_3+1)\,\xi_4+\xi_3^2=0.$

Ferner besteht zwischen η_1 und ξ_3 eine Gleichung von der Form

$$(286)\quad (a\xi_3^3+b\xi_3^2+c\xi_3+d)\,\eta_1^2+(a_1\xi_3^3+b_1\xi_3^2+c_1\xi_3+d_1)\,\eta_1 \\ +\,(a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)=0,$$

aus der mit Rücksicht auf die Gleichungen (282) folgt

$$(287)\quad \begin{cases} (a\xi_3^5+b\xi_3^4+c\xi_3^3+d\xi_3^2)\,\eta_3^2+(a_1\xi_3^4+b_1\xi_3^3+c_1\xi_3^2+d_1\xi_3)\,\eta_3 \\ \qquad\qquad +\,(a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)=0, \\ (a\xi_3^7+b\xi_3^6+c\xi_3^5+d\xi_3^4)\,\eta_5^2+(a_1\xi_3^5+b_1\xi_3^4+c_1\xi_3^3+d_1\xi_3^2)\,\eta_5 \\ \qquad\qquad +\,(a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)=0, \\ (a_2\xi_3^3+b_2\xi_3^2+c_2\xi_3+d_2)\,\eta_7^2+(a_1\xi_3^6+b_1\xi_3^5+c_1\xi_3^4+d_1\xi_3^3)\,\eta_7 \\ \qquad\qquad +\,(a\xi_3^9+b\xi_3^8+c\xi_3^7+d\xi_3^6)=0. \end{cases}$$

Damit diese drei Gleichungen in Bezug auf ξ_3 sämmtlich nur vom dritten Grade sind, muss

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad b_2=0,\quad c_2=0,\quad d_2=0$$

sein, so dass z. B. die Gleichung zwischen η_5 und ξ_3 die einfache Form

$$d\xi_3^2\eta_5^2+(a_1\xi_3^3+b_1\xi_3^2+c_1\xi_3+d_1)\,\eta_5+a_2\xi_3=0$$

erhält. Die Bestimmung der übrigen Zahlcoefficienten durch Reihenentwickelung macht dann keine grossen Schwierigkeiten mehr und liefert die Gleichung

(288) $\xi_3^2\eta_5^2-(\xi_3^3-8\xi_3^2-8\xi_3+1)\,\eta_5+49\xi_3=0.$

In ähnlicher Weise findet man die Gleichung

(289) $\xi_4^2\eta_5^2+(9\xi_4^2-2\xi_4)\,\eta_5-(8\xi_4^3-17\xi_4^2+10\xi_4-1)=0.$

Der Kürze wegen schreibe man jetzt ξ statt $8\xi_4$, dann gehen die Gleichungen (285) und (289) über in

$$(290)\quad \begin{cases} (\xi-8)\,\xi_3^2 - 7\xi\xi_3 - \xi(\xi-1) = 0, \\ \xi^2\eta_5^2 + \xi(9\xi-16)\eta_5 - (\xi^3 - 17\xi^2 + 80\xi - 64) = 0. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$(291)\qquad w = +\sqrt{4\xi^3 + 13\xi^2 + 32\xi},$$

wobei das Zeichen $+$ bedeutet, dass man in der Entwickelung nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{7}} = z$ das erste Glied positiv nehmen soll, so wird

$$(292)\qquad \xi_3 = \frac{7\xi - w}{2(\xi-8)}, \qquad \eta_5 = \frac{-9\xi + 16 - w}{2\xi},$$

also

$$(293)\qquad \eta_5 = \frac{(\xi-8)\,\xi_3 - 8(\xi-1)}{\xi} = \frac{\xi\xi_3 - 8(\xi+\xi_3) + 8}{\xi}.$$

Jetzt findet man aus den Gleichungen (278) und (280)

$$(294)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_3}{\xi_4^4} = \dfrac{2^{12}\xi_3}{\xi^4}, \qquad L(7)^4 = \eta_5 = \dfrac{\xi\xi_3 - 8(\xi+\xi_3) + 8}{\xi}, \\ L(14)^{24} = \dfrac{\xi_3^7\eta_5^6}{\xi_4^4} = \dfrac{2^{12}\xi_3^7\eta_5^6}{\xi^4}. \end{cases}$$

Indem man den Werth von $L(2)^{24}$ in die Gleichung (132) einsetzt, erhält man

$$(295)\quad J : J-1 : 1 = (\xi^4 + 256\xi_3)^3 : (\xi^4 - 512\xi_3)^2(\xi^4 + 64\xi_3) : 1728\xi^8\xi_3.$$

Die zu ξ und ξ_3 complementären Parameter sind

$$(296)\qquad \bar{\xi} = \xi_1 \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_3 = \xi_3,$$

folglich

$$(297)\quad \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (\xi_1^4 + 256\xi_3)^3 : (\xi_1^4 - 512\xi_3)^2(\xi_1^4 + 64\xi_3) : 1728\xi_1^8\xi_3,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (279)

$$(297\,\text{a})\quad \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (\xi^4 + 16\xi_3^7)^3 : (\xi^4 - 8\xi_3^7)^2(\xi^4 + 64\xi_3^7) : 1728\xi^4\xi_3^{14}.$$

Man kann natürlich noch aus den Gleichungen (290) und (295) die Grösse ξ_3 eliminiren und erhält dadurch die Gleichung

$$(298)\quad \begin{cases} 2^{12}\cdot 3^6\xi^{14}(\xi-1)(\xi-8)^2 J^2 \\ + 2^6\cdot 3^3[7\xi^{18}(\xi-8)^2 - 2^9\cdot 3\xi^{14}(\xi-8)^2(\xi-1) \\ \qquad - 2^{16}\cdot 3\cdot 7\xi^{11}(\xi-8)(\xi-1) - 2^{25}\xi^7(\xi-8)(\xi-1)^2 \\ \qquad - 2^{24}\cdot 7^2\xi^8(\xi-1)]J \\ - [\xi^7(\xi-8) + 2^8\cdot 7\xi^4 - 2^{16}(\xi-1)]^3 = 0. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise kann man auch eine Gleichung zwischen $\bar{J}$ und ξ angeben, für die Anwendungen ist es jedoch zweckmässiger, sich der Gleichungen (295) und (297 a) zu bedienen.

§ 33.

Transformation vom Grade 22.

Für $n = 22$ wird $a = 11$, $c = 3$ und $\varrho = 2$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263a)

$$(299)\quad \begin{cases} 5\delta_1 = -3k_0 + 8k_1 + k_2, \quad 5\delta_2 = 3k_0 + 4k_1 + 11k_2, \\ \qquad 5\delta_3 = -7k_0 - 8k_1 - 11k_2, \end{cases}$$

also

$$5(\delta_1 + \delta_2) = 12(k_1 + k_2), \qquad 5(\delta_2 + \delta_3) = -4(k_0 + k_1),$$
$$5(\delta_3 + \delta_1) = -10(k_0 + k_2).$$

Deshalb müssen $k_0 + k_1$ und $k_1 + k_2$ durch 5 theilbar sein. Soll also der Charakter kleiner als 5 sein, so muss man

$$k_0 + k_1 = 0 \quad \text{und} \quad k_1 + k_2 = 0$$

setzen. Dies giebt $k_1 = -k_0$, $k_2 = +k_0$, folglich erhält man für $k_0 = -1$ die Grösse

$$(300)\qquad \xi = \frac{L(22)^2\, L(2)^2}{L(11)^2},$$

und zwar ist ξ, wie man ohne Weiteres erkennt, ein *Parameter* mit dem Charakter 2. Das ist aber auch der *einzige* Parameter mit so niedrigem Charakter, den das angegebene Verfahren liefert. Dagegen findet man 14 Hülfsgrössen mit dem Charakter 5*), von denen aber nur die beiden

$$(301)\qquad \xi_1 = \frac{L(22)^4}{L(11)^8\, L(2)^4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{L(22)^6}{L(11)^4\, L(2)^8}$$

hervorgehoben werden mögen. Auch ξ_1 und ξ_2 sind Parameter, so dass also zwischen ξ und ξ_1 eine Gleichung von der Form

$$302)\quad \begin{cases} \quad (a\xi^5 + b\xi^4 + c\xi^3 + d\xi^2 + e\xi + f)\,\xi_1^2 \\ + (a_1\xi^5 + b_1\xi^4 + c_1\xi^3 + d_1\xi^2 + e_1\xi + f_1)\,\xi_1 \\ + (a_2\xi^5 + b_2\xi^4 + c_2\xi^3 + d_2\xi^2 + e_2\xi + f_2) = 0 \end{cases}$$

besteht. Setzt man nun $h^{\frac{1}{11}} = z$ und entwickelt die beiden Parameter ξ und ξ_1 nach Potenzen von z, so erhält man

---

*) Diese 14 Hülfsgrössen erhält man, indem man für k_0, k_1, k_2, k_3 die folgenden Werthe einsetzt:

k_0	+5	0	0	+5	−5	0	+1	+1	+2	−2	−3	+3	−4	+4
k_1	0	−5	0	−5	0	+5	−1	+4	−2	−3	−2	−3	−1	−4
k_2	−5	0	−5	0	0	−5	−4	−4	−3	+3	+2	−2	+1	−1
k_3	0	+5	+5	0	+5	0	+4	−1	+3	+2	+3	+2	+4	+1

$$\xi = z^{-1} - 2 + z - 2z^2 + 4z^3 - 4z^4 + 5z^5 - 6z^6 + 9z^7 \\ - 12z^8 + 13z^9 + \cdots,$$

$$\xi_1 = z^5 - 4z^6 + 10z^7 - 24z^8 + 55z^9 - 116z^{10} + 230z^{11} + \cdots.$$

Daraus folgt sofort, dass

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad d_2 = 0, \quad e_2 = 0$$

sein muss. Setzt man $f_2 = 1$, so findet man aus dem ersten Gliede der Entwickelung $a_1 = -1$, dann aus dem zweiten $b_1 = -14$, aus dem dritten $c_1 = -73$, aus dem vierten $d_1 = -184$ und aus dem fünften $e_1 = -240$. Die nächsten Glieder der Entwickelung geben die Gleichungen

$$a + f_1 + 122 = 0, \quad b = 14a, \quad c = 73a, \quad d = 184a, \quad e = 240a, \\ f = 122a + 121.$$

Aus den später folgenden Gliedern ergiebt sich aber, dass a gleich 0 sein muss, folglich ist die Gleichung zwischen ξ und ξ_1

$$(303)\quad 121\xi_1^2 - (\xi^5 + 14\xi^4 + 73\xi^3 + 184\xi^2 + 240\xi + 122)\xi_1 + 1 = 0,$$

oder

$$(303\text{a})\quad 242\xi_1 = \xi^5 + 14\xi^4 + 73\xi^3 + 184\xi^2 + 240\xi + 122 - (\xi+3)(\xi+5)w,$$

wobei

$$(304)\quad w = \sqrt{(\xi^3 + 4\xi^2 + 8\xi + 4)(\xi^3 + 8\xi^2 + 16\xi + 16)} = +z^{-3} + \cdots.$$

Die zu ξ und ξ_1 complementären Parameter sind

$$(305)\qquad \bar{\xi} = \frac{4}{\xi} \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_1 = \frac{\xi_2}{121},$$

folglich besteht zwischen ξ und ξ_2 die Gleichung

$$(306)\quad \begin{cases} \xi^5\xi_2^2 - (122\xi^5 + 960\xi^4 + 2944\xi^3 + 4672\xi^2 + 3584\xi + 1024)\xi_2 \\ \qquad + 121\xi^5 = 0, \end{cases}$$

oder

$$(306\text{a})\quad \begin{cases} \xi^5\xi_2 = 61\xi^5 + 480\xi^4 + 1472\xi^3 + 2336\xi^2 + 1792\xi + 512 \\ \qquad - 4(3\xi + 4)(5\xi + 4)w. \end{cases}$$

Dabei wird

$$(307)\qquad L(2)^{24} = \frac{\xi^6}{\xi_1\xi_2}, \quad L(11)^{12} = \frac{\xi_2}{\xi_1^2}, \quad L(22)^8 = \frac{\xi^2\xi_2}{\xi_1}.$$

Um $L(2)^{24}$ als rationale Function von ξ und w darzustellen, beachte man, dass

$$\frac{2}{\xi_1} = \xi^5 + 14\xi^4 + 73\xi^3 + 184\xi^2 + 240\xi + 122 + (\xi+3)(\xi+5)w,$$

$$\frac{121\xi^5}{\xi_2} = 61\xi^5 + 480\xi^4 + 1472\xi^3 + 2336\xi^2 + 1792\xi + 512 \\ + 4(3\xi + 4)(5\xi + 4)w$$

ist. Setzt man jetzt

(308) $$(\xi+2)(\xi^4+9\xi^3+26\xi^2+36\xi+16)=A,$$

so erhält man

(309) $$2L(2)^{24}=\xi[A^2+2\xi^5+(\xi+1)(\xi+4)Aw],$$

oder

(309a) $$L(2)^{48}-\xi(A^2+2\xi^5)L(2)^{24}+\xi^{12}=0.$$

Deshalb findet man aus der Gleichung (132), welche für die Transformation 2ten Grades aufgestellt wurde,

(310) $$\begin{cases} J:J-1:1=[\xi(A^2+2\xi^5)+32+\xi(\xi+1)(\xi+4)Aw]^3 \\ \qquad :[\xi(A^2+2\xi^5)-16+\xi(\xi+1)(\xi+4)Aw]^2 \\ \qquad \times[\xi(A^2+2\xi^5)+128+\xi(\xi+1)(\xi+4)Aw] \\ \qquad :1728\cdot 4\xi[A^2+2\xi^5+(\xi+1)(\xi+4)Aw]. \end{cases}$$

Einfacher gestaltet sich die Gleichung, wenn man J rational durch ξ, ξ_1 und ξ_2 darstellt, dann wird

(310a) $$\begin{cases} J:J-1:1=(\xi^6+16\xi_1\xi_2)^3:(\xi^6-8\xi_1\xi_2)^2(\xi^6+64\xi_1\xi_2) \\ \qquad :1728\xi^6\xi_1{}^2\xi_2{}^2, \end{cases}$$

und

(311) $$\begin{cases} \overline{J}:\overline{J}-1:1=(256+\xi^6\xi_1\xi_2)^3:(512-\xi^6\xi_1\xi_2)^2(64+\xi^6\xi_1\xi_2) \\ \qquad :1728\xi^{12}\xi_1{}^2\xi_2{}^2. \end{cases}$$

§ 34.

Transformation vom Grade 11.

Besonders bemerkenswerth ist es, dass die Transformation vom Grade 22 auch einen *Parameter vom niedrigsten Charakter* für die Transformation vom Grade 11 liefert. Setzt man nämlich wieder

$$h^{\frac{1}{11}}=z, \qquad e^{\frac{\pi i}{11}}=\varepsilon$$

und nennt man die drei Werthe von $\xi=\frac{L(22)^2L(2)^2}{L(11)^2}$, welche dem Parameter

$$L(11)^{12}=\frac{Q\left(\omega,\frac{\omega'}{11}\right)^{12}}{Q(\omega,\omega')^{12}}=\frac{Q\left(\frac{\omega'}{11},-\omega\right)^{12}}{Q(\omega',-\omega)^{12}}$$

zugeordnet sind, ξ', ξ'' und ξ''', so hat man bez. zu setzen:

$$\varpi=\omega',\ \varpi'=-\omega;\quad \varpi=11\omega+\omega',\ \varpi'=-\omega;$$
$$\varpi=11\omega+2\omega',\ \varpi'=5\omega+\omega';$$

und es wird

$$(312)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{Q\left(\frac{\omega'}{22}, -\omega\right)^2 Q\left(\frac{\omega'}{2}, -\omega\right)^2}{Q\left(\frac{\omega'}{11}, -\omega\right)^2 Q(\omega', -\omega)^2} = \dfrac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{22}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}, \\[2ex] \xi'' = \dfrac{Q\left(\frac{11\omega+\omega'}{22}, -\omega\right)^2 Q\left(\frac{11\omega+\omega'}{2}, -\omega\right)^2}{Q\left(\frac{11\omega+\omega'}{11}, -\omega\right)^2 Q(11\omega+\omega', -\omega)^2} \\[2ex] \quad = i\, \dfrac{Q\left(\omega, \frac{33\omega+\omega'}{22}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{3\omega+\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}, \\[2ex] \xi''' = \dfrac{Q\left(\frac{11\omega+2\omega'}{22}, 5\omega+\omega'\right)^2 Q\left(\frac{11\omega+2\omega'}{2}, 5\omega+\omega'\right)^2}{Q\left(\frac{11\omega+2\omega'}{11}, 5\omega+\omega'\right)^2 Q(11\omega+2\omega', 5\omega+\omega')^2} \\[2ex] \quad = \dfrac{Q\left(\frac{\omega}{2}, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}. ^{*)} \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Formel

$$Q(\omega, \omega') = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})$$

findet man

---

*) Die lineare Transformation der Perioden, welche hierbei erforderlich ist, geschieht nach den Regeln, welche für die lineare Transformation von $Q(\omega, \omega')$ in § 15 m. vor. Abh. gegeben sind. Dabei braucht man für ξ', ξ'', ξ''' bez. die folgenden 24ten Wurzeln der Einheit:

$$\varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} -1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{4\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 10, & 11 \end{pmatrix} = e^{\frac{9\pi i}{12}},$$

$$\varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} 4, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} 11, & 1 \\ 10, & 1 \end{pmatrix} = e^{\frac{9\pi i}{12}},$$

$$\varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{2\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 5, & 11 \end{pmatrix} = e^{\frac{3\pi i}{12}},$$

$$\varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{3\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} 11, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{\frac{8\pi i}{12}}, \quad \varrho\begin{pmatrix} 11, & 2 \\ 5, & 1 \end{pmatrix} = e^{\frac{3\pi i}{12}}.$$

$$
(313)\begin{cases}
\xi' = \quad z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(1-z^{\nu})^2(1-z^{11\nu})^2}{(1-z^{2\nu})^2(1-z^{22\nu})^2} = z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-z^{2\nu-1})^2(1-z^{22\nu-11})^2,\\[2ex]
\xi'' = -z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(1-z^{\nu}\,\varepsilon^{33\nu})^2(1-z^{11\nu}\,\varepsilon^{33\nu})^2}{(1-z^{2\nu})^2(1-z^{22\nu})^2}\\[2ex]
\quad = -z^{-1}\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1+z^{2\nu-1})^2(1+z^{22\nu-11})^2,\\[2ex]
\xi''' = \;4z^2\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\dfrac{(1-z^{4\nu})^2(1-z^{44\nu})^2}{(1-z^{2\nu})^2(1-z^{22\nu})^2} = 4z^2\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1+z^{2\nu})^2(1+z^{22\nu})^2.
\end{cases}
$$

Da nun bekanntlich $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-z^{2\nu-1})\,(1+z^{2\nu-1})\,(1+z^{2\nu}) = +1$ ist, so erhält man

$$(314)\qquad \xi'\xi''\xi''' = -4.$$

Durch Entwickelung nach Potenzen von z findet man

$$\xi' = \quad z^{-1} - 2 + z - 2z^2 + 4z^3 - 4z^4 + 5z^5 - 6z^6 + 9z^7 - 12z^8 + 13z^9 + \cdots,$$

$$\xi'' = -z^{-1} - 2 - z - 2z^2 - 4z^3 - 4z^4 - 5z^5 - 6z^6 - 9z^7 - 12z^8 - 13z^9 + \cdots,$$

folglich ist

$$\xi' + \xi'' = -4(+1 + z^2 + 2z^4 + 3z^6 + 6z^8 + \cdots);$$

ferner ist

$$\xi''' = +4(z^2 + 2z^4 + 3z^6 + 6z^8 + 9z^{10} + 14z^{12} + \cdots),$$

so dass mit grosser Wahrscheinlichkeit

$$(315)\qquad \xi' + \xi'' + \xi''' = -4$$

sein wird. Der *strenge* Beweis für die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich aus dem Folgenden. Nimmt man nämlich vorläufig an, diese Gleichung sei richtig, und setzt man noch

$$(316)\qquad \xi'\xi'' + \xi'\xi''' + \xi''\xi''' = -\eta,$$

so ist ξ eine Wurzel der Gleichung

$$(317)\qquad \xi^3 + 4\xi^2 - \eta\xi + 4 = 0,$$

und es wird

$$(317\text{a})\qquad \eta = \xi^2 + 4\xi + 4\xi^{-1}$$

ein Parameter für die Transformation 11*ten Grades.* Umgekehrt: Ist η durch die Gleichung (317a) definirt, und lässt sich zeigen, dass η wirklich ein solcher Parameter ist, so gelten auch die Gleichungen (317), (316) und (315). Dies kann aber leicht geschehen. Es war nämlich nach Gleichung (307)

$$L^{12} = L(11)^{12} = \frac{\xi_2}{\xi_1^2};$$

oder, wenn man für ξ_1 und ξ_2 nach den Gleichungen (303a) und (306a) ihre Werthe einsetzt und die daraus folgende Gleichung zwischen ξ und L^{12} rational macht,

$$(318)\quad \begin{cases} L^{24} - (\xi^{10} + 10\xi^9 + 158\xi^8 + 628\xi^7 + 1321\xi^6 + 1356\xi^5 + 312\xi^4 \\ \qquad - 276\xi^3 + 288\xi^2 - 384\xi + 586 - 832\xi^{-1} + 896\xi^{-2} \\ \qquad - 448\xi^{-3} - 512\xi^{-4} + 1024\xi^{-5})L^{12} + 11^6 = 0, \end{cases}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (317a)

$$(319)\quad L^{24} - (\eta^5 - 2\eta^4 - 87\eta^3 + 104\eta^2 + 1536\eta - 614)L^{12} + 11^6 = 0.$$

Hieraus erkennt man, dass η für die Transformation 11ten Grades ein Parameter mit dem Charakter 2 ist, und dass η sogar für $n = 11$, wo $\varrho = 1$ wird, ein *Parameter* vom *niedrigsten Charakter* ist.

Setzt man

$$(320)\quad \begin{cases} W = +\sqrt{(\eta+8)(\eta^3 + 4\eta^2 - 72\eta - 364)} \\ \quad = +\sqrt{\eta^4 + 12\eta^3 - 40\eta^2 - 940\eta - 2912}, \end{cases}$$

so wird

$$(321)\quad W = w(\xi + 2 - 2\xi^{-2}),$$

wobei nach Gleichung (304)

$$w = +\sqrt{(\xi^3 + 4\xi^2 + 8\xi + 4)(\xi^3 + 8\xi^2 + 16\xi + 16)}$$

ist. Nach Einführung dieser Bezeichnung folgt aus Gleichung (319)

$$(322)\quad \begin{cases} 2L^{12} = \eta^5 - 2\eta^4 - 87\eta^3 + 104\eta^2 + 1536\eta - 614 \\ \qquad + (\eta - 3)(\eta^2 - 5\eta - 16)W. \end{cases}$$

Um auch die Gleichung zwischen η und J zu erhalten, setze man in Gleichung (310) der Kürze wegen $A^2 + 2\xi^5 = C$, dann wird

$$C^2 - (\xi+1)^2(\xi+4)^2 A^2 w^2 = 4\xi^{10}$$

und die Gleichung (310) geht über in

$$(323)\quad \begin{cases} 1728 \cdot 4\xi[C + (\xi+1)(\xi+4)Aw]J \\ = [\xi C + 32 + \xi(\xi+1)(\xi+4)Aw]^3. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun mit J_1 den Werth, der aus J hervorgeht, indem man w mit $-w$ vertauscht, so wird

$$(324)\quad 1728^2 JJ_1 = (\xi^8 + 16C\xi^{-3} + 256\xi^{-4})^3.$$

Ferner wird

$$1728(J + J_1) = \xi^2C^2 + 16(3\xi + 256\xi^{-11})C - 2\xi^{12} + 1536,$$

folglich ist die Gleichung zwischen ξ und J, wenn man sie rational macht,

$$(324)\begin{cases} 1728^2 J^2 - 1728[\xi^{22}+44\xi^{21}+902\xi^{20}+11484\xi^{19}+102113\xi^{18} \\ \qquad +675796\xi^{17}+3462008\xi^{16}+14084708\xi^{15} \\ \qquad +46285536\xi^{14}+124201792\xi^{13} \\ \qquad +273795522\xi^{12}+496807216\xi^{11} \\ \qquad +740569632\xi^{10}+901431344\xi^{9} \\ \qquad +886328960\xi^{8}+692209408\xi^{7} \\ \qquad +418722656\xi^{6}+188931072\xi^{5} \\ \qquad +59992064\xi^{4}+12176384\xi^{3}+1318912\xi^{2} \\ \qquad +49152\xi+1536+4096(\xi^{-1}+22\xi^{-2} \\ \qquad +209\xi^{-3}+1144\xi^{-4}+4048\xi^{-5}+9746\xi^{-6} \\ \qquad +16192\xi^{-7}+18304\xi^{-8}+13376\xi^{-9} \\ \qquad +5632\xi^{-10}+1024\xi^{-11})]J \\ \quad +[\xi^{8}+16\xi^{7}+176(2\xi^{6}+19\xi^{5}+104\xi^{4}+368\xi^{3} \\ \qquad +886\xi^{2}+1472\xi+1664+1216\xi^{-1}+512\xi^{-2}) \\ \qquad +16384\xi^{-3}+256\xi^{-4}]^3 = 0. \end{cases}$$

Setzt man in dieser Gleichung $\xi^2 + 4\xi + 4\xi^{-1} = \eta$, so geht sie über in

$$(325\mathrm{a})\begin{cases} 1728^2 J^2 - [\eta^{11}+11(2\eta^{10}+3\eta^{9}-8\cdot 29\eta^{8}-128\cdot 13\eta^{7} \\ \qquad +2\cdot 2275\eta^{6}+64\cdot 1267\eta^{5}+64\cdot 2633\eta^{4} \\ \qquad -128\cdot 6331\eta^{3}-1024\cdot 3389\eta^{2}) \\ \qquad -4096(5541\eta-8\cdot 1181)]\,1728J \\ \qquad +(\eta^{4}+256\eta^{3}+64\cdot 87\eta^{2}+64\cdot 643\eta \\ \qquad\qquad +512\cdot 197)^3 = 0. \end{cases}$$

Noch einfacher ist die Herleitung dieser Gleichung, wenn man J und η nach steigenden Potenzen von $z = h^{\frac{1}{11}}$ entwickelt. Da die Entwickelung von $1728J$ mit z^{-22} und die von η mit z^{-2} beginnt, so hat die Gleichung zwischen η und J die Form

$$\begin{aligned} 1728^2(a\eta+a_1)J^2 &+ 1728(b\eta^{12}+b_1\eta^{11}+b_2\eta^{10}+\cdots+b_{11}\eta+b_{12})J \\ &+ (c\eta^4+c_1\eta^3+c_2\eta^2+c_3\eta+c_4)^3 = 0. \end{aligned}$$

Daraus findet man dann verhältnissmässig leicht die Werthe der einzelnen Zahlcoefficienten.

Eine Bestätigung dafür, dass die Gleichung (325) richtig berechnet ist, gewährt ihre Auflösung nach J. Es muss sich nämlich J *rational* durch η und W darstellen lassen. In der That wird

$$(325\text{b})\left\{\begin{aligned}2\cdot 1728 J = \eta^{11} &+ 11(2\eta^{10}+3\eta^9-8\cdot 29\eta^8-128\cdot 13\eta^7\\ &\qquad +2\cdot 2275\eta^6+64\cdot 1267\eta^5+64\cdot 2633\eta^4\\ &\qquad -128\cdot 6331\eta^3-1024\cdot 3389\eta^2)\\ &+4096(-5541\eta+8\cdot 1181)\\ &+W(\eta^9+16\eta^8-25\eta^7-1552\eta^6-5344\eta^5+33544\eta^4\\ &\qquad +199168\eta^3+30208\eta^2-1077760\eta-946176).\end{aligned}\right.$$

Der Parameter $\bar{\xi}$, welcher für die Transformation 11^{ten} Grades zu

$$\xi = \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{22}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\omega, \frac{\omega'}{11}\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}$$

complementär ist, wird

$$(326)\qquad \bar{\xi} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{11}, \frac{\omega'}{2}\right)^2 Q\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)^2}{Q\left(\frac{\omega}{11}, \omega'\right)^2 Q(\omega, \omega')^2}.$$

Dies ist aber einer der 36 Werthe von ξ, die zur Transformation 22^{ten} Grades gehören, so dass die Gleichung (325) ungeändert bleibt, wenn man ξ mit $\bar{\xi}$ vertauscht. Dasselbe gilt von Gleichung (325 a) wenn man η mit $\bar{\eta}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, J mit $\bar{J}$ vertauscht; d. h. *J und $\bar{J}$ sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung* (325a), oder mit anderen Worten: „*Die Invariante J geht in $\bar{J}$ über, wenn man in Gleichung* (325 b) $+W$ *mit* $-W$ *vertauscht.*"

Man kann dies auch in folgender Weise zeigen. Der zu $L(11)^{12}$ complementäre Parameter ist $\frac{11^6}{L(11)^{12}}$; aus Gleichung (322) folgt aber

$$(327)\qquad \begin{aligned}\frac{2\cdot 11^6}{L(11)^{12}} = \eta^5 - 2\eta^4 - 87\eta^3 + 104\eta^2 + 1536\eta - 614\\ -(\eta-3)(\eta^2-5\eta-16)W,\end{aligned}$$

deshalb sind $L(11)^{12}$ und $\frac{11^6}{L(11)^{12}}$ die beiden Wurzeln der Gleichung (319).

§ 35.

Transformation vom Grade 26.

Für $n = 26$ wird $a = 13$, $c = 3$ und $\varrho = 2$. Deshalb findet man aus den Gleichungen (263 a)

$$(328)\qquad \begin{gathered}21\delta_1 = -11k_0 + 28k_1 + 3k_2,\quad 21\delta_2 = 11k_0 + 14k_1 + 39k_2,\\ 21\delta_3 = -25k_0 - 28k_1 - 39k_2,\end{gathered}$$

also

$$\begin{gathered}\delta_1 + \delta_2 = 2(k_1+k_2),\quad 3(\delta_2+\delta_3) = -2(k_0+k_1),\\ 7(\delta_1+\delta_3) = -12(k_0+k_2);\end{gathered}$$

deshalb muss $k_0 + k_1$ durch 3 und $k_0 + k_2$ durch 7 theilbar sein. Man findet daher nur *einen* Parameter mit dem Charakter 2, nämlich

$$(329) \qquad \xi = \frac{L(26)^2}{L(13)^2\, L(2)^2}$$

und vier Parameter mit dem Charakter 3, nämlich

$$(330) \qquad \begin{cases} \xi_1 = L(13)^2, & \xi_2 = \dfrac{L(26)^2}{L(2)^2}, \\ \xi_3 = \dfrac{L(26)^2}{L(13)^4\, L(2)^2}, & \xi_4 = \dfrac{L(26)^4}{L(13)^2\, L(2)^4}.\text{*)} \end{cases}$$

Nun ist

$$(331) \qquad \xi_1 = \frac{\xi}{\xi_3}, \quad \xi_2 = \xi\xi_1, \quad \xi_4 = \xi\xi_2,$$

und zwischen ξ und $\frac{1}{\xi_3}$ besteht eine Gleichung von der Form

$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\frac{1}{\xi_3^2} + (a_1\xi^2 + b_1\xi^2 + c_1\xi + d_1)\frac{1}{\xi_3} \\ + (a_2\xi^3 + b_2\xi^2 + c_2\xi + d_2) = 0.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\xi_1^2 + (a_1\xi^4 + b_1\xi^3 + c_1\xi^2 + d_1\xi)\xi_1 \\ + (a_2\xi^5 + b_2\xi^4 + c_2\xi^3 + d_2\xi^2) = 0,$$
$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\xi_2^2 + (a_1\xi^5 + b_1\xi^4 + c_1\xi^3 + d_1\xi^2)\xi_2 \\ + (a_2\xi^7 + b_2\xi^6 + c_2\xi^5 + d_2\xi^4) = 0,$$
$$(a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d)\xi_4^2 + (a_1\xi^6 + b_1\xi^5 + c_1\xi^4 + d_1\xi^3)\xi_4 \\ + (a_2\xi^9 + b_2\xi^8 + c_2\xi^7 + d_2\xi^6) = 0.$$

Da aber diese Gleichungen in Bezug auf ξ sämmtlich nur vom dritten Grade sein dürfen, so ist

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0,$$

folglich reducirt sich die Gleichung zwischen ξ und ξ_1 auf

$$(332) \qquad a\xi^2\xi_1^2 + (a_1\xi^3 + b_1\xi^2 + c_1\xi + d_1)\xi_1 + d_2\xi = 0.$$

Dabei ist, wenn man $h^{\frac{1}{13}} = z$ setzt,

$$\xi = z - 2z^2 + z^3 - 2z^4 + 4z^5 - 4z^6 + 5z^7 - 6z^8 + 9z^9 + \cdots,$$
$$\xi_1 = z^{-2} - 2 - z^2 + 2z^4 + z^6 + 2z^8 + \cdots,$$

*) $k_0 = +1,\ k_1 = -1,\ k_2 = -1,\ k_3 = +1$ giebt den Parameter ξ,
$k_0 = -2,\ k_1 = -1,\ k_2 = +2,\ k_3 = +1$ „ „ „ ξ_1,
$k_0 = -1,\ k_1 = -2,\ k_2 = +1,\ k_3 = +2$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = +3,\ k_1 = 0,\ k_2 = -3,\ k_3 = 0$ „ „ „ ξ_3,
$k_0 = 0,\ k_1 = -3,\ k_2 = 0,\ k_3 = +3$ „ „ „ ξ_4.

so dass man erhält

$$\xi^2\xi_1^2 - (\xi^3 - 4\xi^2 - 4\xi + 1)\xi_1 + 13\xi = 0, \tag{333}$$

oder

$$2\xi^2\xi_1 = 2\xi^2 L(13)^2 = \xi^3 - 4\xi^2 - 4\xi + 1 + w, \tag{333a}$$

wobei

$$w = +\sqrt{\xi^6 - 8\xi^5 + 8\xi^4 - 18\xi^3 + 8\xi^2 - 8\xi + 1}. \tag{334}$$

Für die Transformation 13^{ten} Grades gilt (nach Gleichung (148) m. vor. Abh.) die Gleichung

$$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\xi_1^2 + 5\xi_1 + 13)(\xi_1^4 + 7\xi_1^3 + 20\xi_1^2 + 19\xi_1 + 1)^3 \\ \qquad : (\xi_1^2 + 6\xi_1 + 13)(\xi_1^6 + 10\xi_1^5 + 46\xi_1^4 + 108\xi_1^3 \\ \qquad\quad + 122\xi_1^2 + 38\xi_1 - 1)^2 : 1728\xi_1, \end{cases} \tag{335}$$

wobei $\xi_1 = L(13)^2$ ist und sich nach Gleichung (333a) rational durch ξ und w darstellen lässt.

Die zu ξ und ξ_1 complementären Parameter sind

$$\bar{\xi} = \xi \quad \text{und} \quad \bar{\xi}_1 = \frac{13}{\xi_2}, \tag{336}$$

folglich ist

$$\begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\xi_2^2 + 5\xi_2 + 13)(\xi_2^4 + 19 \cdot 13\xi_2^3 + 20 \cdot 13^2\xi_2^2 \\ \qquad + 7 \cdot 13^3\xi_2 + 13^4)^3 \\ \qquad : (\xi_2^2 + 6\xi_2 + 13)(\xi_2^6 - 38 \cdot 13\xi_2^5 - 122 \cdot 13^2\xi_2^4 \\ \qquad\quad - 108 \cdot 13^3\xi_2^3 - 46 \cdot 13^4\xi_2^2 - 10 \cdot 13^5\xi_2 - 13^6)^2 \\ \qquad : 1728\xi_2^{13}, \end{cases} \tag{337}$$

wobei

$$\begin{cases} \xi_1 = \dfrac{1}{2\xi^2}(\xi^3 - 4\xi^2 - 4\xi + 1 + w), \\ \xi_2 = \xi\xi_1 = \dfrac{1}{2\xi}(\xi^3 - 4\xi^2 - 4\xi + 1 + w). \end{cases} \tag{338}$$

Da $\xi = \frac{\xi_2}{\xi_1}$ ist, so kann man aus Gleichung (333) auch leicht die Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_2 herstellen; es wird nämlich

$$\xi_1^3 + \xi_2^3 - \xi_1\xi_2[\xi_1\xi_2 + 4(\xi_1 + \xi_2) + 13] = 0. \tag{339}$$

Wegen der Beziehungen, welche zwischen den Parametern ξ, ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4 nach Gleichung (331) bestehen, ist es nothwendig, noch andere Parameter einzuführen, um die Grössen $L(2)^{24}$ und $L(26)^{24}$ rational durch ξ und w darzustellen. Zu diesem Zwecke setze man

$$\eta_1 = \frac{L(13)^{13}L(2)}{L(26)^{13}} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \frac{L(26)}{L(13)L(2)^{13}} = \xi^7\eta_1. \tag{340}$$

Nach Gleichung (58) Nr. 8 ist zunächst η_2 ein Parameter, und deshalb auch $\eta_1 = \eta_2 : \xi^7$; und zwar ist der Charakter dieser beiden Parameter gleich 7. Deshalb hat die Gleichung zwischen ξ und η_1 die Form

$$(a\xi^7 + a_1\xi^6 + \cdots + a_7)\eta_1^2 + (b\xi^7 + b_1\xi^6 + \cdots + b_7)\eta_1 + (c\xi^7 + c_1\xi^6 + \cdots + c_7) = 0.$$

Dies giebt

$$(341)\quad \begin{cases} (a\xi^7 + a_1\xi^6 + \cdots + a_7)\eta_2^2 + (b\xi^{14} + b_1\xi^{13} + \cdots + b_7\xi^7)\eta_2 \\ \qquad + (c\xi^{21} + c_1\xi^{20} + \cdots + c_7\xi^{14}) = 0. \end{cases}$$

Da aber diese Gleichung in Bezug auf ξ auch nur vom 7ten Grade sein darf, so muss

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_7 = 0,$$
$$c = c_1 = c_2 = \cdots = c_6 = 0$$

sein, folglich reducirt sich die Gleichung (341) auf

$$a\eta_2^2 + (b\xi^7 + b_1\xi^6 + \cdots + b_7)\eta_2 + c_7\xi^7 = 0.$$

Durch die Entwickelung von ξ und η_2 nach steigenden Potenzen von z findet man hieraus leicht die Gleichung

$$(342)\quad \begin{cases} 64\eta_2^2 + (\xi^7 - 13\xi^6 + 52\xi^5 - 78\xi^4 + 78\xi^3 - 52\xi^2 + 13\xi - 1)\eta_2 \\ \qquad + \xi^7 = 0, \end{cases}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$(343)\quad \xi^7 - 13\xi^6 + 52\xi^5 - 78\xi^4 + 78\xi^3 - 52\xi^2 + 13\xi - 1 = E$$

setzt,

$$(342\text{a})\qquad 128\eta_2 = -E - (\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1)w,$$

oder

$$(342\text{b})\quad \frac{2\xi^7}{\eta_2} = -E + (\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1)w = 2\xi^6\sqrt{\xi}\,L(2)^{12}.$$

Hieraus folgt

$$(344)\quad 2\xi^{13}L(2)^{24} = E^2 - 128\xi^7 - E(\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1)w,$$

oder

$$(344\text{a})\qquad \xi^{13}L(2)^{48} - (E^2 - 128\xi^7)L(2)^{24} + 4096\xi = 0,$$

$$(345)\quad L(26)^2 = \xi_2 L(2)^2 = \frac{1}{2\xi}(\xi^3 - 4\xi^2 - 4\xi + 1 + w)\,L(2)^2.$$

Dadurch erhält man auch noch eine zweite Darstellung der absoluten Invarianten J und $\overline{J}$ als rationale Functionen von ξ und w. Setzt man nämlich der Kürze wegen

$$(346)\qquad (\xi^2 - 3\xi + 1)(\xi^2 - 6\xi + 1) = F,$$

so wird nach Gleichung (132)

$$(347)\begin{cases} J:J-1:1=(E^2+32\xi^{13}-128\xi^7-EFw)^3 \\ \qquad :(E^2-16\xi^{13}-128\xi^7-EFw)^2(E^2+128\xi^{13}-128\xi^7-EFw) \\ \qquad :1728\cdot 4\xi^{26}(E^2-128\xi^7-EFw). \end{cases}$$

Dabei geht J in $\overline{J}$ über, wenn man $+w$ mit $-w$ vertauscht.

VII. Abschnitt.

Transformation vom Grade $4a$.

§ 36.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $4a$.

Ist $n=4a$ und hat die Primzahl a die Form $2b+1$, so ist der Rang ϱ nach der Tabelle in § 8 gleich $b-1$. Setzt man in diesem Falle

$$(348)\qquad \xi = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(a)^{\delta_3} L(2a)^{\delta_4} L(4a)^{\delta_5},$$

so erhält man

$$\begin{aligned} S(n,D) = 2a\delta_1(t_1^2-2)+a\delta_2(t_2^2-4)+4\delta_3(t_3^2-a) \\ +2\delta_4(t_4^2-2a)+\delta_5(t_5^2-4a). \end{aligned}$$

Deshalb findet man aus der Gleichung (126) die sechs Gleichungen

$$(349)\begin{cases} -2a\delta_1-3a\delta_2-4(a-1)\delta_3-2(2a-1)\delta_4-(4a-1)\delta_5=24k_0, \\ +a\delta_1+0-(a-1)\delta_3-(a-2)\delta_4-(a-1)\delta_5=24k_1, \\ +a\delta_1+3a\delta_2-(a-1)\delta_3-(a-2)\delta_4-(a-4)\delta_5=24k_2, \\ -2\delta_1-3\delta_2+4(a-1)\delta_3+2(a-2)\delta_4+(a-4)\delta_5=24k_3, \\ +\delta_1+0+(a-1)\delta_3+(2a-1)\delta_4+(a-1)\delta_5=24k_4, \\ +\delta_1+3\delta_2+(a-1)\delta_3+(2a-1)\delta_4+(4a-1)\delta_5=24k_5, \end{cases}$$

oder

$$(350)\begin{cases} b(b+1)\delta_1=2[-(b+1)k_0+(5b+2)k_1-(b+1)k_2 \\ \qquad\qquad +0-3k_4], \\ b(b+1)\delta_2=2[+k_0-2bk_1+2(b+1)k_2 \\ \qquad\qquad +k_3+2k_4], \\ b(b+1)\delta_3=2[-k_0+k_1+0 \\ \qquad\qquad +(2b+1)k_3-(2b+1)k_4], \\ b(b+1)\delta_4=2[+(b+1)k_0+(b-2)k_1+(b+1)k_2 \\ \qquad\qquad +0+3(2b+1)k_4], \\ b(b+1)\delta_5=2[-(2b+1)k_0-2bk_1-2(b+1)k_2 \\ \qquad\qquad -(2b+1)k_3-2(2b+1)k_4]. \end{cases}$$

§ 37.

Transformation vom Grade 12.

Für $n = 12$ ist ϱ gleich 0 und die Gleichungen (350) gehen über in

$$(351)\qquad \begin{cases} \delta_1 = -2k_0 + 7k_1 - 2k_2 + 0 - 3k_4, \\ \delta_2 = + k_0 - 2k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4, \\ \delta_3 = - k_0 + k_1 + 0 + 3k_3 - 3k_4, \\ \delta_4 = + 2k_0 - k_1 + 2k_2 + 0 + 9k_4, \\ \delta_5 = -3k_0 - 2k_1 - 4k_2 - 3k_3 - 6k_4. \end{cases}$$

Setzt man also von den 6 Zahlen $k_0, k_1, \ldots k_5$ die eine gleich $+1$, die andere gleich -1 und die 4 übrigen gleich 0, so erhält man 15 L-Producte mit dem Charakter 1. Es genügt aber, zunächst nur 5 von diesen Grössen anzugeben, nämlich

$$(352)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(12)^4 L(2)^2}{L(6)^2 L(4)^4}, \qquad \xi_2 = \dfrac{L(6)^2}{L(3)^4 L(2)^2}, \\ \xi_3 = \dfrac{L(12)^4 L(3)^4 L(2)^{10}}{L(6)^{10} L(4)^4}, \quad \xi_4 = \dfrac{L(12)}{L(4)^3 L(3)}, \\ \qquad \xi_5 = \dfrac{L(12) L(3)^2 L(2)^9}{L(6)^3 L(4)^3}. \text{*)} \end{cases}$$

Dabei erkennt man ohne Weiteres, dass die Hülfsgrössen ξ_1, ξ_2 und ξ_3, bei denen die Exponenten sämmtlich *gerade* sind, *Parameter* werden. Ferner sind nach den Gleichungen (14) und (15)

$$\xi_4 = \frac{f(12)}{f(4)^3 f(3)} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{6}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{6}\right)\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2 \tau(\varpi)} = \frac{\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)}{\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)},$$

$$\frac{\xi_5}{\xi_4} = \frac{f(3)^2 f(2)^9}{f(6)^3} = \frac{\tau(\varpi)^3}{\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)^3} = \frac{\left[\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)\right]^3}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)^2}$$

rationale Functionen von $\wp\left(\frac{\varpi}{6}\right)$, die sich gar nicht ändern, wenn man $\wp\left(\frac{\varpi}{6}\right)$ mit $\wp\left(\frac{5\varpi}{6}\right)$ vertauscht, folglich sind ξ_4 und ξ_5 Transformationsgrössen nullter Dimension, d. h. auch ξ_4 und ξ_5 sind *Parameter*.

---

*) $k_0 = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0,\ k_5 = +1$ giebt die Grösse ξ_1,
$k_0 = +1,\ k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ k_3 = -1,\ k_4 = 0,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_2,
$k_0 = 0,\ k_1 = +1,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,\ k_4 = -1,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_3,
$k_0 = +1,\ k_1 = 0,\ k_2 = -1,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_4,
$k_0 = -1,\ k_1 = +1,\ k_2 = 0,\ k_3 = 0,\ k_4 = 0,\ k_5 = 0$ „ „ „ ξ_5.

Deshalb besteht zwischen je zweien dieser Parameter mit dem Charakter 1 eine Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch Entwickelung nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{6}} = z$ bestimmen kann. Auf diese Weise findet man

$$(353)\quad \xi_2 = \frac{1-\xi_1}{3+\xi_1},\quad \xi_3 = \frac{1+\xi_1}{3-\xi_1},\quad \xi_4 = \frac{1-\xi_1}{4},\quad \xi_5 = \frac{2(1+\xi_1)}{1-\xi_1},$$

oder

$$(354)\quad \xi_1 = \frac{1-3\xi_2}{1+\xi_2},\quad \xi_3 = \frac{1-\xi_2}{1+3\xi_2},\quad \xi_4 = \frac{\xi_2}{1+\xi_2},\quad \xi_5 = \frac{1-\xi_2}{\xi_2}.$$

Jetzt kann man auch ohne Weiteres die übrigen L-Producte mit dem Charakter 1 angeben und aus ihrer Darstellung als rationale Functionen von ξ_1 schliessen, dass sie sämmtlich Parameter sind. Es wird nämlich

$$(355)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi_6 &= \frac{1+\xi_1}{2} = \xi_4\xi_5 = \frac{L(12)^2 L(3) L(2)^9}{L(6)^3 L(4)^6},\\
\xi_7 &= \frac{3+\xi_1}{4} = \frac{\xi_4}{\xi_2} = \frac{L(12) L(3)^3 L(2)^2}{L(6)^2 L(4)^3},\\
\xi_8 &= \frac{3-\xi_1}{2} = \frac{\xi_4\xi_5}{\xi_3} = \frac{L(6)^7}{L(12)^2 L(4)^2 L(3)^3 L(2)},\\
\xi_9 &= \frac{4\xi_1}{1-\xi_1} = \frac{\xi_1}{\xi_4} = \frac{L(12)^3 L(3) L(2)^2}{L(6)^2 L(4)},\\
\xi_{10} &= \frac{2\xi_1}{1+\xi_1} = \frac{\xi_1}{\xi_4\xi_5} = \frac{L(12)^2 L(6) L(4)^2}{L(3) L(2)^7},\\
\xi_{11} &= \frac{4\xi_1}{3+\xi_1} = \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_4} = \frac{L(12)^3}{L(4) L(3)^3},\\
\xi_{12} &= \frac{2\xi_1}{3-\xi_1} = \frac{\xi_1\xi_3}{\xi_4\xi_5} = \frac{L(12)^6 L(3)^3 L(2)^3}{L(6)^9 L(4)^2},\\
\xi_{13} &= \frac{1-\xi_1}{2(3-\xi_1)} = \frac{\xi_3}{\xi_5} = \frac{L(12)^3 L(3)^2 L(2)}{L(6)^7 L(4)},\\
\xi_{14} &= \frac{2(1+\xi_1)}{3+\xi_1} = \xi_2\xi_5 = \frac{L(12) L(2)^7}{L(6) L(4)^3 L(3)^2},\\
\xi_{15} &= \frac{3+\xi_1}{2(3-\xi_1)} = \frac{\xi_3}{\xi_2\xi_5} = \frac{L(12)^3 L(3)^6 L(2)^3}{L(6)^9 L(4)}.
\end{aligned}\right.$$

Es könnte überflüssig erscheinen, diese 10 Parameter wirklich zu bilden; ihre Form ist aber doch von Interesse, weil man mitunter durch Nachbildung derartiger Formen auch für andere Werthe von n Parameter findet.

Aus den Gleichungen (352) erhält man

$$(356)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_1\,\xi_2^2\,\xi_5^4}{\xi_3\,\xi_4^4} = \dfrac{(1-\xi_2^2)^3(1-9\,\xi_2^2)}{\xi_2^6}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^4\,\xi_3} = \dfrac{1-9\,\xi_2^2}{\xi_2^4(1-\xi_2^2)}, \\ L(6)^{24} = \dfrac{\xi_1^5\,\xi_5^4}{\xi_2^2\,\xi_3^5\,\xi_4^4} = \dfrac{(1-9\,\xi_2^2)^5}{\xi_2^{10}(1-\xi_2^2)}. \end{cases}$$

Da

$$(357)\qquad \xi_2^2 = \xi_2(6)$$

ist, so stimmen diese Gleichungen genau mit den Gleichungen (267) überein. Ferner wird

$$(358)\quad \begin{cases} L(4)^8 = \dfrac{\xi_1\,\xi_2}{\xi_4^4} = \dfrac{(1-3\,\xi_2)(1+\xi_2)^3}{\xi_2^3}, \\ L(12)^{24} = \dfrac{\xi_1^{11}\,\xi_2}{\xi_3^2\,\xi_4^{12}} = \dfrac{(1-3\,\xi_2)^{11}(1+3\,\xi_2)^2(1+\xi_2)}{\xi_2^{11}(1-\xi_2)^2}. \end{cases}$$

Sehr einfach gestaltet sich schliesslich die Beziehung zwischen den absoluten Invarianten J und $\bar{J}$. Nach Gleichung (268) wird nämlich

$$(359)\quad \begin{cases} J : J-1 : 1 = (1-9\xi_2^2+3\xi_2^4-3\xi_2^6)^3(1-3\xi_2^2)^3 \\ \qquad : (1-12\xi_2^2+30\xi_2^4-36\xi_2^6+9\xi_2^8)^2(1-6\xi_2^2-3\xi_2^4)^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_2^{12}(1-\xi_2^2)^3(1-9\,\xi_2^2). \end{cases}$$

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist

$$(360)\qquad \bar{\xi}_2 = \frac{\xi_1}{3},$$

folglich wird

$$(361)\quad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (243-243\,\xi_1^2+9\,\xi_1^4-\xi_1^6)^3(3-\xi_1^2)^3 \\ \qquad : (729-972\xi_1^2+270\xi_1^4-36\xi_1^6+\xi_1^8)^2(27-18\xi_1^2-\xi_1^4)^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_1^{12}(9-\xi_1^2)^3(1-\xi_1^2). \end{cases}$$

§ 38.

Transformation vom Grade 20.

Für $n = 20$ ist $a = 5$, $b = 2$ und $\varrho = 1$. Die Gleichungen (349) und (350) gehen daher über in

$$(362)\quad \begin{cases} -10\delta_1 - 15\delta_2 - 16\delta_3 - 18\delta_4 - 19\delta_5 = 24k_0, \\ +\ 5\delta_1 + 0 - 4\delta_3 - 3\delta_4 - 4\delta_5 = 24k_1, \\ +\ 5\delta_1 + 15\delta_2 - 4\delta_3 - 3\delta_4 - \delta_5 = 24k_2, \\ -\ 2\delta_1 - 3\delta_2 + 16\delta_3 + 6\delta_4 + \delta_5 = 24k_3, \\ +\ \delta_1 + 0 + 4\delta_3 + 9\delta_4 + 4\delta_5 = 24k_4, \\ +\ \delta_1 + 3\delta_2 + 4\delta_3 + 9\delta_4 + 19\delta_5 = 24k_5, \end{cases}$$

und

$$(363)\quad \begin{cases} 3\delta_1 = -3k_0 + 12k_1 - 3k_2 + 0 - 3k_4, \\ 3\delta_2 = + k_0 - 4k_1 + 6k_2 + k_3 + 2k_4, \\ 3\delta_3 = - k_0 + k_1 + 0 + 5k_3 - 5k_4, \\ 3\delta_4 = + 3k_0 + 0 + 3k_2 + 0 + 15k_4, \\ 3\delta_5 = -5k_0 - 4k_1 - 6k_2 - 5k_3 - 10k_4. \end{cases}$$

Die Anzahl der *Parameter* mit dem Charakter 2, welche man durch passende Wahl der ganzen Zahlen k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 erhält, ist ziemlich gross; deshalb mögen hier nur diejenigen hervorgehoben werden, welche schon bei der Transformation 10ten Grades Parameter mit dem Charakter 1 waren, nämlich

$$(364)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(10)^4}{L(5)^2 L(2)^4}, \quad \xi_2 = \dfrac{L(10)^2}{L(5)^4 L(2)^2}, \quad \xi_3 = \dfrac{L(10)}{L(5)\, L(2)^5}, \\ \xi_4 = \dfrac{L(10)^3 L(2)}{L(5)}, \quad \xi_5 = \dfrac{L(10)\, L(2)^3}{L(5)^3}, \quad \xi_6 = \dfrac{L(10)^5}{L(5)^5 L(2)} \end{cases}$$

und ausserdem diejenigen, welche aus diesen durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ hervorgehen, nämlich

$$(365)\quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{L(20)^4 L(2)^2}{L(10)^2 L(4)^4}, \quad \eta_2 = \dfrac{L(20)^2 L(2)^4}{L(10)^4 L(4)^2}, \quad \eta_3 = \dfrac{L(20)\, L(2)^5}{L(10)\, L(4)^5}, \\ \eta_4 = \dfrac{L(20)^3 L(4)}{L(10) L(2)^3}, \quad \eta_5 = \dfrac{L(20)\, L(4)^3}{L(10)^3 L(2)}, \quad \eta_6 = \dfrac{L(20)^5 L(2)}{L(10)^5 L(4)}. \text{*)} \end{cases}$$

Diese 12 Grössen haben alle den Charakter 2, wie man aus der Anmerkung ersieht; ferner sind ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5, ξ_6 Parameter für die Transformation 10ten Grades, folglich sind sie erst recht Parameter für die Transformation 20ten Grades. Nach Gleichung (272) bestehen zwischen ihnen die Relationen

$$(366)\quad \begin{cases} \xi_2 = \dfrac{1-\xi_1}{5-\xi_1}, \quad \xi_3 = \dfrac{1-\xi_1}{4}, \quad \xi_4 = \dfrac{4\xi_1}{1-\xi_1}, \quad \xi_5 = \dfrac{4}{5-\xi_1}, \\ \xi_6 = \dfrac{4\xi_1}{5-\xi_1}. \end{cases}$$

*) Diese 12 Parameter erhält man, indem man für k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 die folgenden Werthe einsetzt:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6
k_0	0	+2	+2	−2	0	0	0	+1	+1	−1	0	0
k_1	−1	0	−1	0	+1	0	0	+1	+1	−1	0	0
k_2	−1	0	−1	0	+1	0	−2	0	−2	0	+2	0
k_3	0	−2	0	0	−2	−2	0	−1	0	0	−1	−1
k_4	+1	0	0	+1	0	+1	0	−1	0	0	−1	−1
k_5	+1	0	0	+1	0	+1	+2	0	0	+2	0	+2

Deshalb gelten auch die entsprechenden Gleichungen zwischen den Grössen $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_6$, nämlich

$$(367)\quad \begin{cases} \eta_2 = \dfrac{1-\eta_1}{5-\eta_1}, \quad \eta_3 = \dfrac{1-\eta_1}{4}, \quad \eta_4 = \dfrac{4\eta_1}{1-\eta_1}, \quad \eta_5 = \dfrac{4}{5-\eta_1}, \\ \qquad\qquad \eta_6 = \dfrac{4\eta_1}{5-\eta_1}. \end{cases}$$

Nun ist η_1 ein Parameter, weil die Exponenten sämmtlich *gerade* sind, folglich gilt wegen der Gleichungen (367) dasselbe auch von η_2, η_3, η_4, η_5 und η_6.

Zwischen ξ_3 und η_1 besteht eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_3^2 + b\xi_3 + c)\eta_1^2 + (a_1\xi_3^2 + b_1\xi_3 + c_1)\eta_1 + (a_2\xi_3^2 + b_2\xi_3 + c_2) = 0,$$

wobei man die Zahlcoefficienten sehr leicht bestimmen kann, indem man ξ_3 und η_1 nach Potenzen von $h^{\frac{1}{10}} = z$ entwickelt. Es ist nämlich

$$\xi_3 = z^2 - z^4 + 0 - z^8 + z^{10} + 4z^{12} + \cdots,$$

$$\eta_1 = 1 - 4z + 4z^2 + 0 + 4z^4 - 4z^5 - 16z^6 + 16z^7 + 4z^8 + 12z^9 - 12z^{10} + \cdots;$$

daraus ergiebt sich

$$(368)\qquad \eta_1^2 - 2(8\xi_3^2 + 4\xi_3 + 1)\eta_1 + (16\xi_3^2 - 8\xi_3 + 1) = 0,$$

oder

$$(368\text{a})\qquad \eta_1 = 8\xi_3^2 + 4\xi_3 + 1 - 4w,$$

wo

$$(369)\qquad w = +\sqrt{\xi_3(\xi_3+1)(4\xi_3^2+1)} = +z + \cdots.$$

Daraus folgt noch

$$(370)\qquad \eta_6 = \frac{4\eta_1}{5-\eta_1} = \frac{(1+\xi_3)(1+6\xi_3) - 5w}{(1+\xi_3)(1-4\xi_3)}.$$

Nach den Gleichungen (273) wird

$$(371)\qquad L(2)^{24} = \frac{1-4\xi_3}{\xi_3^5(1+\xi_3)}, \quad L(5)^6 = \frac{(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2}{\xi_3^2},$$

$$L(10)^8 = \frac{(1-4\xi_3)^3(1+\xi_3)}{\xi_3^3};$$

ferner ist

$$(372)\quad \begin{cases} L(4)^8 = \dfrac{\xi_1\eta_5}{\xi_3^2\eta_3} = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3^2}\,\dfrac{16}{(1-\eta_1)(5-\eta_1)}, \\ L(20)^{24} = \dfrac{\xi_1\xi_2\eta_1^9}{\xi_3^6\eta_3^9\eta_5^3} = \dfrac{1-4\xi_3}{\xi_3^5(1+\xi_3)}\cdot\dfrac{2^{12}\eta_1^9(5-\eta_1)^3}{(1-\eta_1)^9}. \end{cases}$$

Nach Gleichung (274) wird schliesslich

$$(373)\quad \begin{cases} J : J-1 : 1 = (1-4\xi_3+16\xi_3^5+16\xi_3^6)^3 \\ \quad :(1+4\xi_3^2)(1-2\xi_3+2\xi_3^2)^2(1-2\xi_3-4\xi_3^2)^2(1-2\xi_3-6\xi_3^2-8\xi_3^3-4\xi_3^4)^2 \\ \quad :1728\,\xi_3^{10}(1-4\xi_3)(1+\xi_3)^2. \end{cases}$$

Nun ist der zu ξ_3 complementäre Parameter

$$(374)\qquad \bar{\xi}_3 = \frac{\eta_6}{4} = \frac{(1+\xi_3)(1+6\xi_3)-5w}{4(1+\xi_3)(1-4\xi_3)},$$

so dass man erhält

$$(375)\quad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (1-4\bar{\xi}_3+16\bar{\xi}_3^5+16\bar{\xi}_3^6)^3 \\ \qquad :(1+4\bar{\xi}_3^2)(1-2\bar{\xi}_3+2\bar{\xi}_3^2)^2(1-2\bar{\xi}_3-4\bar{\xi}_3^2)^2 \\ \qquad \times(1-2\bar{\xi}_3-6\bar{\xi}_3^2-8\bar{\xi}_3^3-4\bar{\xi}_3^4)^2 \\ \qquad :1728\bar{\xi}_3^{10}(1-4\bar{\xi}_3)(1+\bar{\xi}_3)^2. \end{cases}$$

Die Gleichung, welche dabei zwischen ξ_3 und $\bar{\xi}_3$ besteht, folgt aus Gleichung (374), es wird nämlich

$$(374\text{a})\quad 16(1+\xi_3)(1-4\xi_3)\bar{\xi}_3^2-8(1+\xi_3)(1+6\xi_3)\bar{\xi}_3+(1-4\xi_3)^2=0;$$

sie ist in Bezug auf ξ_3 und $\bar{\xi}_3$ symmetrisch.

§ 39.

Transformation vom Grade 28.

Für $n=28$ ist $a=7$, $b=3$ und $\varrho=2$. Deshalb gehen die Gleichungen (350) über in

$$(376)\quad \begin{cases} 6\delta_1 = -4k_0+17k_1-4k_2+0-3k_4, \\ 6\delta_2 = +k_0-6k_1+8k_2+k_3+2k_4, \\ 6\delta_3 = -k_0+k_1+0+7k_3-7k_4, \\ 6\delta_4 = +4k_0+k_1+4k_2+0+21k_4, \\ 6\delta_5 = -7k_0-6k_1-8k_2-7k_3-14k_4. \end{cases}$$

Hieraus findet man zunächst 2 L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

$$(377)\qquad \xi_1 = \frac{L(28)\,L(4)}{L(7)}, \quad \xi_2 = \frac{L(28)^2 L(7) L(4)^2}{L(14)^3 L(2)^3},$$

und 5 L-Producte mit dem Charakter 3, nämlich

$$(378)\quad \begin{cases} \xi_3 = \dfrac{L(28)L(14)^2L(4)}{L(7)L(2)^2}, \quad \xi_4 = \dfrac{L(14)^2}{L(2)^2}, \quad \xi_5 = \dfrac{L(14)^3L(7)}{L(28)\,L(4)\,L(2)^3}, \\ \xi_6 = \dfrac{L(28)^4L(2)^2}{L(14)^2L(4)^4}, \qquad \xi_7 = \dfrac{L(28)^2L(7)\,L(4)^2}{L(14)^5L(2)}.\text{*)} \end{cases}$$

Zum Beweise, dass ξ_1 ein Parameter ist, bilde man mit Rücksicht auf die Gleichungen (14) und (15)

---

*) Die 7 Hülfsgrössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_7$ erhält man, indem man für $k_0, k_1, \ldots k_5$ die folgenden Werthe einsetzt:

$$\frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)}{\wp\left(\frac{2\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{5\varpi}{7}\right)}\cdot\frac{\wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)}{\wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{3\varpi}{7}\right)}\cdot\frac{\wp\left(\frac{6\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)}{\wp\left(\frac{6\varpi}{7}\right)-\wp\left(\frac{\varpi}{7}\right)}$$

$$=\frac{\tau\left(\frac{\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{3\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{9\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{11\varpi}{14}\right)\tau\left(\frac{13\varpi}{14}\right)\cdot\tau\left(\frac{\varpi}{7}\right)\tau\left(\frac{3\varpi}{7}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{7}\right)}{\tau\left(\frac{\varpi}{2}\right)^6\tau(\varpi)^3}=\frac{f(28)}{f(7)\,f(4)^7}.$$

Dies ist eine rationale Function von $\wp\left(\frac{\varpi}{14}\right)$, die sich gar nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{\varpi}{14}\right)$ mit einem der Theilwerthe

$$\wp\left(\frac{3\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{5\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{9\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{11\varpi}{14}\right),\ \wp\left(\frac{13\varpi}{14}\right)$$

vertauscht, folglich ist dieser Ausdruck eine Transformationsgrösse nullter Dimension d. h. also ein Parameter. Ebenso ist auch $L(4)^8$ ein Parameter, denn es ist

$$L(4)^8=\frac{g_2^3-27g_3^2}{\wp'\left(\frac{\varpi}{2}\right)^2\left[\wp\left(\frac{\varpi}{2}\right)-\wp(\varpi)\right]^3}.$$

Deshalb ist auch

$$\xi_1=L(4)^8\,\frac{f(28)}{f(7)\,f(4)^7}$$

ein Parameter und hat den Charakter 2. Bei ξ_4 und ξ_6 sind die Exponenten gerade, folglich sind ξ_4 und ξ_6 Parameter mit dem Charakter 3. Dasselbe gilt von ξ_3 und ξ_5, denn es ist

(379) $$\xi_3=\xi_1\xi_4,\quad \xi_4=\xi_1\xi_5.$$

Die Form der Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_3 ist daher

(380) $$\begin{cases}(a\xi_1^3+b\xi_1^2+c\xi_1+d)\xi_3^2+(a_1\xi_1^3+b_1\xi_1^2+c_1\xi_1+d_1)\xi_3\\ \qquad\qquad+(a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2)=0.\end{cases}$$

Dies giebt ausserdem die Gleichungen

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7
k_0	-1	0	-2	-1	0	0	$+1$
k_1	0	-1	-1	-1	-1	0	0
k_2	$+1$	$+1$	0	-1	-2	-3	$+2$
k_3	-1	0	0	$+1$	$+2$	0	-1
k_4	0	-1	$+1$	$+1$	$+1$	0	-2
k_5	$+1$	$+1$	$+2$	$+1$	0	$+3$	0

$$(a\xi_1^5+b\xi_1^4+c\xi_1^3+d\xi_1^2)\xi_4^2+(a_1\xi_1^4+b_1\xi_1^3+c_1\xi_1^2+d_1\xi_1)\xi_4$$
$$+(a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2)=0,$$
$$(a\xi_1^7+b\xi_1^6+c\xi_1^5+d\xi_1^4)\xi_5^2+(a_1\xi_1^5+b_1\xi_1^4+c_1\xi_1^3+d_1\xi_1^2)\xi_5$$
$$+(a_2\xi_1^3+b_2\xi_1^2+c_2\xi_1+d_2)=0,$$
aus denen hervorgeht, dass
$$a=0,\quad b=0,\quad c_2=0,\quad d_2=0$$
sein muss. Die Gleichung (380) reducirt sich daher auf

(380a) $(c\xi_1+d)\xi_3^2+(a_1\xi_1^3+b_1\xi_1^2+c_1\xi_1+d_1)\xi_3+(a_2\xi_1+b_2)\xi_1^2=0.$

Setzt man $h^{\frac{1}{14}}=z$, so wird
$$\xi_1=z^{-1}-1-z+0+z^3+0-z^5+0+3z^7+0-2z^9+0+2z^{11}+\cdots,$$
$$\xi_3=z^{-2}-z^{-1}-3+2z+2z^2+z^3+0-2z^5+3z^6-z^7-4z^8-2z^9$$
$$-2z^{10}+\cdots,$$
folglich geht die Gleichung (380a) über in

(381) $(\xi_1+2)\xi_3^2-(\xi_1^3+3\xi_1^2-6\xi_1-8)\xi_3-7\xi_1^2(\xi_1+2)=0,$

oder

(381a) $2(\xi_1+2)\xi_3=\xi_1^3+3\xi_1^2-6\xi_1-8+w,$

wo

(382) $$\begin{cases} w=+\sqrt{(\xi_1+1)^6+10(\xi_1+1)^4+25(\xi+1)^2+28} \\ \quad=+\sqrt{(\xi_1^2+\xi_1+2)\,(\xi_1^2+2\xi_1+8)\,(\xi_1^2+3\xi_1+4)} \\ \quad=+z^{-3}+\cdots. \end{cases}$$

Dies giebt auch noch die Gleichung

(383) $2\xi_1(\xi_1+2)\xi_4=\xi_1^3+3\xi_1^2-6\xi_1-8+w.$

In ähnlicher Weise findet man die Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_6, nämlich

(384) $\xi_1^3\xi_6^2+2(3\xi_1^3+16\xi_1^2+24\xi_1+32)\xi_6-7\xi_1^3=0,$

oder

(384a) $\xi_1^3\xi_6=-(3\xi_1^3+16\xi_1^2+24\xi_1+32)+4w.$

Da nun

(385) $$\xi_4\xi_6=\frac{L(28)^4}{L(4)^4}$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (381a) und (384a) durch Multiplication

(386) $$\begin{cases} 2\xi_1^4(\xi_1+2)\dfrac{L(28)^4}{L(4)^4} \\ =(\xi_1^6-\xi_1^5+46\xi_1^4+256\xi_1^3+576\xi_1^2+768\xi_1+512) \\ +(\xi_1+4)(\xi_1^2-8\xi_1-16)w. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

(387) $$L(7)^4=\eta,$$

so werden die zu ξ_1 und η complementären Parameter

(388) $$\bar{\xi}_1 = \frac{4}{\xi_1} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{49\,L(4)^4}{L(28)^4} = \frac{49}{\xi_4\,\xi_6}.$$

Deshalb folgt aus Gleichung (386)

(389) $$\begin{cases} 2\xi_1^4(\xi_1+2)\,\bar{\eta} = (\xi_1^6 - \xi_1^5 + 46\xi_1^4 + 256\xi_1^3 + 576\xi_1^2 + 768\xi_1 + 512) \\ \qquad - (\xi_1+4)(\xi_1^2 - 8\xi_1 - 16)w \end{cases}$$

und

(390) $$\begin{cases} 2\xi_1\ (\xi_1+2)\eta = (\xi_1^6 + 6\xi_1^5 + 18\xi_1^4 + 32\xi_1^3 + 23\xi_1^2 - 2\xi_1 + 8) \\ \qquad + (\xi_1+1)(\xi_1^2 + 2\xi_1 - 1)w. \end{cases}$$

Die Beziehung zwischen den beiden absoluten Invarianten J und $\bar{J}$ ergiebt sich daher unmittelbar aus Gleichung (146) m. vor. Abh., und zwar wird

(391) $$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^2 + 13\eta + 49)(\eta^2 + 5\eta + 1)^3 \\ \qquad : (\eta^4 + 14\eta^3 + 63\eta^2 + 70\eta - 7)^2 : 1728\eta, \end{cases}$$

(392) $$\begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^2 + 13\bar{\eta} + 49)(\bar{\eta}^2 + 5\bar{\eta} + 1)^3 \\ \qquad : (\bar{\eta}^4 + 14\bar{\eta}^3 + 63\bar{\eta}^2 + 70\bar{\eta} - 7)^2 : 1728\bar{\eta}. \end{cases}$$

Wenn man also die Werthe von η und $\bar{\eta}$ aus den Gleichungen (390) und (389) einsetzt, so sind J und $\bar{J}$ als rationale Functionen von ξ_1 und w dargestellt.

Setzt man noch

(393) $$\eta_1 = \frac{L(14)}{L(7)\,L(2)^7} = \xi_4(14),$$

so ist η_1 sicher ein Parameter für die Transformation 14ten Grades, also auch für die Transformation 28ten Grades; dabei ist der Charakter von η_1 gleich 4. Deshalb findet man zwischen ξ_1 und η_1 die Gleichung

(394) $$\xi_1^2(\xi_1+2)^2\eta_1^2 - (\xi_1^4 + 4\xi_1^3 + 11\xi_1^2 + 14\xi_1 + 8)\eta_1 + 1 = 0,$$

oder

(394a) $$2\xi_1^2(\xi_1+2)^2\eta_1 = (\xi_1^4 + 4\xi_1^3 + 11\xi_1^2 + 14\xi_1 + 8) - (\xi_1+1)w.$$

Daraus folgt dann

(395) $$\begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_4^2}{\eta\eta_1^4}, & 49\,L(4)^8 = \xi_1^4\eta\bar{\eta}, \\ L(14)^{24} = \dfrac{\xi_4^{14}}{\eta\eta_1^4}, & L(28)^8 = \dfrac{49\,\xi_1^4\eta}{\bar{\eta}}, \end{cases}$$

so dass man diese Grössen ohne Schwierigkeit als rationale Functionen von ξ_1 und w darstellen kann.

Da ϱ in diesem Falle gleich 2 ist, so müssen alle Parameter mit dem Charakter 2 *linear* von einander abhängig sein; es besteht daher auch zwischen ξ_1 und ξ_2 eine *lineare* Gleichung, nämlich

(396) $$(\xi_1+2)\,\xi_2 = \xi_1.$$

VIII. Abschnitt.

Transformation vom Grade $2^\alpha a$.

§ 40.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $8a$.

Ist a eine Primzahl von der Form $2b+1$, so wird für $n=8a$ der Rang $\varrho = a-2$, während für $n=4a$ der Rang $\varrho_1 = \frac{a-3}{2}$ war.

Es sei nun

$$\xi(4a) = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(a)^{\delta_3} L(2a)^{\delta_4} L(4a)^{\delta_5}$$

ein Parameter für die Transformation vom Grade $4a$, und der Charakter von $\xi(4a)$ sei ch; dann kann man durch Vertauschung von ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ aus $\xi(4a)$ sogleich einen Parameter $\xi(8a)$ mit dem Charakter $2ch$ herleiten.

Setzt man nämlich

$$\delta = -\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 - \delta_5, \tag{397}$$

so wird

$$\xi(8a) = L(2)^{\delta} L(4)^{\delta_1} L(8)^{\delta_2} L(2a)^{\delta_3} L(4a)^{\delta_4} L(8a)^{\delta_5}. \tag{398}$$

Dabei ergiebt sich der Charakter von $\xi(4a)$ aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}
-2a\delta_1 - 3a\delta_2 - 4(a-1)\delta_3 - 2(2a-1)\delta_4 - (4a-1)\delta_5 = 24k_0,\\
+\ a\delta_1 + 0 - (a-1)\delta_3 - (a-2)\delta_4 - (a-1)\delta_5 = 24k_1,\\
+\ a\delta_1 + 3a\delta_2 - (a-1)\delta_3 - (a-2)\delta_4 - (a-4)\delta_5 = 24k_2,\\
-\ 2\delta_1 - 3\delta_2 + 4(a-1)\delta_3 + 2(a-2)\delta_4 - (a-4)\delta_5 = 24k_3,\\
+\ \delta_1 + 0 + (a-1)\delta_3 + (2a-1)\delta_4 + (a-1)\delta_5 = 24k_4,\\
+\ \delta_1 + 3\delta_2 + (a-1)\delta_3 + (2a-1)\delta_4 + (4a-1)\delta_5 = 24k_5.
\end{array}\right. \tag{399}$$

Für $\xi(8a)$ sind dagegen die entsprechenden Gleichungen, wenn man die Relationen (397) berücksichtigt,

$$\left\{\begin{array}{l}
-2a\delta_1 - 3a\delta_2 - 4(a-1)\delta_3 - 2(2a-1)\delta_4 - (4a-1)\delta_5 = 24l_0 = 24k_0,\\
-2a\delta_1 - 3a\delta_2 - 4(a-1)\delta_3 - 2(2a-1)\delta_4 - (4a-1)\delta_5 = 24l_1 = 24k_0,\\
+2a\delta_1 + 0 - 2(a-1)\delta_3 - 2(a-2)\delta_4 - 2(a-1)\delta_5 = 24l_2 = 48k_1,\\
+2a\delta_1 + 6a\delta_2 - 2(a-1)\delta_3 - 2(a-2)\delta_4 - 2(a-4)\delta_5 = 24l_3 = 48k_2,\\
-\ 2\delta_1 - 3\delta_2 + 4(a-1)\delta_3 + 2(a-2)\delta_4 + (a-4)\delta_5 = 24l_4 = 24k_3,\\
-\ 2\delta_1 - 3\delta_2 + 4(a-1)\delta_3 + 2(a-2)\delta_4 + (a-4)\delta_5 = 24l_5 = 24k_3,\\
+\ 2\delta_1 + 0 + 2(a-1)\delta_3 + 2(2a-1)\delta_4 + 2(a-1)\delta_5 = 24l_6 = 48k_4,\\
+\ 2\delta_1 + 6a\delta_2 + 2(a-1)\delta_3 + 2(2a-1)\delta_4 + 2(4a-1)\delta_5 = 24l_7 = 48k_5.
\end{array}\right. \tag{400}$$

Es ist also

$$l_0 + l_1 = 2k_0, \quad l_2 = 2k_1, \quad l_3 = 2k_2, \quad l_4 + l_5 = 2k_3, \quad l_6 = 2k_4, \quad l_7 = 2k_5,$$

d. h. der Charakter von $\xi(8a)$ für die Transformation vom Grade $8a$ ist genau doppelt so gross wie der von $\xi(4a)$ für die Transformation vom Grade $4a$. Ist z. B. der Charakter von $\xi(4a)$, nämlich

$$ch \leqq \frac{\varrho_1 + 2}{2} = \frac{a+1}{4},$$

so ist der Charakter von $\xi(8a)$ für die Transformation vom Grade $8a$

$$2ch \leqq \frac{a+1}{2} = \frac{\varrho + 3}{2},$$

also im Allgemeinen möglichst niedrig, wenn der von $\xi(4a)$ möglichst niedrig ist.

Auch die weiteren Rechnungen lassen sich jetzt verhältnissmässig einfach durchführen. Ist nämlich $\xi(2a)$ irgend ein Parameter für die Transformation vom Grade $2a$, so findet man bei der Transformation vom Grade $4a$ eine Gleichung

(401) $$F(\xi(2a),\ \xi(4a)) = 0.$$

Indem man nun ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht, geht

$$\xi(2a) \text{ in } \xi_1(4a) \quad \text{und} \quad \xi(4a) \text{ in } \xi(8a)$$

über, wodurch man aus der Gleichung (401)

(402) $$F(\xi_1(4a),\ \xi(8a)) = 0$$

erhält. Ist dabei

(403) $$\xi(2a) = L(2)^{\varepsilon_1} L(a)^{\varepsilon_2} L(2a)^{\varepsilon_3},$$

so setze man

$$\delta_1 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad \delta_2 = \varepsilon_1, \quad \delta_3 = 0, \quad \delta_4 = \varepsilon_2, \quad \delta_5 = \varepsilon_3.$$

Dadurch wird nach den früheren Angaben

$$\xi_1(4a) = \xi(4a) = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(2a)^{\delta_4} L(4a)^{\delta_5},$$
$$\xi(8a) = L(4)^{\delta_1} L(8)^{\delta_2} L(4a)^{\delta_4} L(8a)^{\delta_5},$$

und der Charakter von $\xi(4a)$ wird doppelt so gross als der Charakter von $\xi(2a)$ für die Transformation vom Grade $2a$. Da zwischen $\xi(4a)$ und $\xi(8a)$ dieselbe Gleichung besteht wie zwischen $\xi(2a)$ und $\xi(4a)$, so ist jede weitere Rechnung vermieden.

§ 41.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $16a$.

Ist a wieder eine Primzahl von der Form $2b+1$ und $n = 16a$, so wird der Rang ϱ gleich $4b-1$, also $\frac{1}{2}(\varrho+3) = 2b+1 = a$. In diesem Falle lässt sich der folgende Satz beweisen: *Ist*

(407) $\xi(8a) = L(2)^{\delta_1} L(4)^{\delta_2} L(8)^{\delta_3} L(a)^{\delta_4} L(2a)^{\delta_5} L(4a)^{\delta_6} L(8a)^{\delta_7}$

ein Parameter mit dem Charakter ch für die Transformation vom Grade $8a$, *und geht* $\xi(16a)$ *aus* $\xi(8a)$ *durch Vertauschung von* ϖ *mit* $\frac{\varpi}{2}$ *hervor, so ist* $\xi(16a)$ *für die Transformation vom Grade* $16a$ *ein Parameter mit dem Charakter* $2ch$.

Der Beweis wird in ganz ähnlicher Weise geführt wie bei dem entsprechenden Satze im vorhergehenden Paragraphen. Setzt man nämlich nach Gleichung (124)

$$(A_\nu)S(8a, D_\nu) = 24 \cdot 8ak_\nu, \tag{408}$$

wobei $A_\nu D_\nu = 8a$, und wo D_ν die Werthe

$$D_0 = 1,\ D_1 = 2,\ D_2 = 4,\ D_3 = 8,\ D_4 = a,\ D_5 = 2a,\ D_6 = 4a,\ D_7 = 8a$$

annimmt, und setzt man dem entsprechend

$$(A_\nu')\,S(16a,\ D_\nu') = 24 \cdot 16al_\nu, \tag{409}$$

wobei $A_\nu' D_\nu' = 16a$, und wo D_ν' die Werthe

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ a,\ 2a,\ 4a,\ 8a,\ 16a$$

annimmt, so findet man

$$\begin{cases} l_0 = k_0, & l_1 = k_0, & l_2 = 2k_1, & l_3 = 2k_2, & l_4 = 2k_3, \\ l_5 = k_4, & l_6 = k_4, & l_7 = 2k_5, & l_8 = 2k_6, & l_9 = 2k_7. \end{cases} \tag{410}$$

Daraus folgt, dass der Charakter von $\xi(16a)$ genau doppelt so gross st wie der Charakter von $\xi(8a)$.

§ 42.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $2^\alpha . a$.

Diese Betrachtungen lassen sich auch auf den allgemeinen Fall übertragen, wo $n = 2^\alpha \cdot a$ und $\alpha \geqq 2$ ist. Dadurch findet man auch sofort die Gleichungen, welche man bei der Transformation vom Grade $2^\alpha \cdot a$ braucht. Ist nämlich $\xi\left(\frac{n}{4}\right)$ ein Parameter mit möglichst niedrigem Grade für die Transformation vom Grade $\frac{n}{4}$, und geht $\xi\left(\frac{n}{4}\right)$ bez. in $\xi\left(\frac{n}{2}\right)$ und $\xi(n)$ über, indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ und $\frac{\varpi}{4}$ vertauscht, so folgt aus der Gleichung

$$F\left(\xi\left(\frac{n}{4}\right),\ \xi\left(\frac{n}{2}\right)\right) = 0$$

unmittelbar die Gleichung

$$F\left(\xi\left(\frac{n}{2}\right),\ \xi(n)\right) = 0.$$

Beispiel. Es sei

(411) $$\xi(n) = \frac{L\left(\frac{n}{2a}\right)^2 L(n)^4}{L\left(\frac{n}{a}\right)^4 L\left(\frac{n}{2}\right)^2},$$

dann ist $\xi(n)$ ein Parameter, und es wird

$$D_1 = \frac{n}{2a}, \quad D_2 = \frac{n}{a}, \quad D_3 = \frac{n}{2}, \quad D_4 = n$$

und

(412) $$\begin{cases} S(n, D) = 4a\left(t_1^2 - \frac{n}{2a}\right) - 4a\left(t_2^2 - \frac{n}{a}\right) - 4\left(t_3^2 - \frac{n}{2}\right) + 4(t_4^2 - n) \\ \qquad = 4a(t_1^2 - t_2^2) - 4(t_3^2 - t_4^2). \end{cases}$$

Für $D = 1, 2, 4, \ldots 2^{\alpha-1}$ wird daher

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = D,$$

also

$$S(n, D) = 0.$$

Ebenso wird für $D = a, 2a, 4a, \ldots 2^{\alpha-1}a = \frac{n}{2}$

$$t_1 = t_2 = \frac{D}{a}, \quad t_3 = t_4 = D$$

und deshalb

$$S(n, D) = 0.$$

Dagegen wird für $D = 2^\alpha = \frac{n}{a}$

$$t_1 = \frac{n}{2a}, \; t_2 = \frac{n}{a}, \; t_3 = \frac{n}{2a}, \; t_4 = \frac{n}{a},$$

also

$$S\left(n, \frac{n}{a}\right) = -\frac{3n^2(a-1)}{a^2}, \quad (A)\, S\left(n, \frac{n}{a}\right) = -\frac{3n^2(a-1)}{a} = 24nk_\alpha,$$

folglich ist

(413) $$k_\alpha = -2^{\alpha-3}(a-1) = -2^{\alpha-2}b.$$

Endlich wird noch für $D = n$

$$t_1 = \frac{n}{2a}, \quad t_2 = \frac{n}{a}, \quad t_3 = \frac{n}{2}, \quad t_4 = n,$$

$$S(n, n) = \frac{3n^2(a-1)}{a} = 24nk_{2\alpha},$$

oder

(414) $$k_{2\alpha} = +2^{\alpha-3}(a-1) = +2^{\alpha-2}b.$$

Daraus ergiebt sich, dass der Charakter von ξ gleich $2^{\alpha-2}b$ ist. Man erhält auf diese Weise

für $n=4a$,	$8a$,	$16a$,	$32a$,	$64a$,	$128a$,	$256a$,	$512a, \ldots,$
$\varrho+1=b$,	$2b$,	$4b$,	$8b+2$,	$16b+6$,	$32b+18$,	$64b+42$,	$128b+98, \ldots,$
$ch=b$,	$2b$,	$4b$,	$8b$,	$16b$,	$32b$,	$64b$,	$128b, \ldots.$

Dabei hat $\xi(n)$ die gewünschte Form, denn man erhält die Parameter $\xi\left(\frac{n}{2}\right)$ und $\xi(n)$ durch Vertauschung von ϖ bez. mit $\frac{\varpi}{2}$ und $\frac{\varpi}{4}$ aus $\xi\left(\frac{n}{4}\right)$.

§ 43.

Transformation vom Grade 24.

Für $n = 24$ wird $\varrho = 1$ und der in dem vorhergehenden Paragraphen angeführte Parameter

$$(415)\qquad \xi = \frac{L(24)^4 L(4)^2}{L(12)^2 L(8)^4}.$$

Ausserdem mögen hier noch die beiden Parameter

$$(416)\qquad \xi_1 = \frac{L(12)^4 L(2)^2}{L(6)^2 L(4)^4} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{L(6)^2}{L(3)^4 L(2)^2}$$

hervorgehoben werden, die nach Gleichung (352) auch schon Parameter für die Transformation 12ten Grades waren, und zwischen denen nach Gleichung (353) oder (354) die Beziehung

$$(417)\qquad \xi_2 = \frac{1-\xi_1}{3+\xi_1} \quad \text{oder} \quad \xi_1 = \frac{1-3\xi_2}{1+\xi_2}$$

besteht. Jetzt ist aber nach Gleichung (265) und (266a) für die Transformation 6ten Grades

$$\xi_1(6) = \frac{L(6)^8}{L(3)^4 L(2)^8} = \frac{1-9\xi_2(6)}{1-\xi_2(6)},$$

wobei

$$\xi_2(6) = \frac{L(6)^4}{L(3)^8 L(2)^4} = \xi_2^{\,2}$$

ist, folglich ist

$$(418)\qquad \xi_1(6) = \frac{1-9\xi_2^{\,2}}{1-\xi_2^{\,2}} = \frac{\xi_1(3-\xi_1)}{1+\xi_1}.$$

Vertauscht man jetzt ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$, so geht

$$\xi_1(6) \text{ in } \xi_1^{\,2} \quad \text{und} \quad \xi_1 \text{ in } \xi$$

über, folglich wird

$$(419)\qquad \xi_1^{\,2} = \frac{\xi(3-\xi)}{1+\xi} = \frac{\xi(1+\xi)(3-\xi)}{(1+\xi)^2}$$

und

$$(419\text{a})\qquad \xi_1 = \frac{w}{1+\xi}, \quad \text{wo} \quad w = +\sqrt{\xi(1+\xi)(3-\xi)} = 2 + \cdots;$$

$$(420)\qquad \xi_2 = \frac{1+\xi-w}{3+3\xi+w} = \frac{3+6\xi-\xi^2-4w}{(3+\xi)^2}.$$

Durch die Gleichungen (356) und (358) sind $L(2)^{24}$, $L(3)^{12}$, $L(6)^{24}$, $L(4)^8$ und $L(12)^{24}$ als rationale Functionen von ξ_2 dargestellt.

Mit Rücksicht auf Gleichung (420) kann man daher diese Grössen auch als rationale Functionen von ξ und w darstellen.

Vertauscht man noch in der Gleichung

$$L(12)^{24} = \frac{(1-3\xi_2)^{11}(1+3\xi_2)^2(1+\xi_2)}{\xi_2^{11}(1-\xi_2)^2} = \frac{2^{24}\xi_1^{11}(3-\xi_1)^2}{(1-\xi_1)^{11}(1+\xi_1)^2(3+\xi_1)}$$

ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$, so erhält man

$$L(24)^{24} = 2^{24}L(2)^{24}\,\frac{\xi^{11}(3-\xi)^2}{(1-\xi)^{11}(1+\xi)^2(3+\xi)}. \tag{421}$$

Zwischen ξ_2 und J besteht die Gleichung (359), nämlich

$$\left\{\begin{aligned} J:J-1:1 = {} & (1-9\xi_2^2+3\xi_2^4-3\xi_2^6)^3(1-3\xi_2^2)^3 \\ & :(1-12\xi_2^2+30\xi_2^4-36\xi_2^6+9\xi_2^8)^2(1-6\xi_2^2-3\xi_2^4)^2 \\ & :1728\,\xi_2^{12}(1-\xi_2^2)^3(1-9\xi_2^2). \end{aligned}\right. \tag{422}$$

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi}{3},$$

folglich findet man aus Gleichung (422)

$$\left\{\begin{aligned} \bar{J}:\bar{J}-1:1 = {} & (243-243\xi^2+9\xi^4-\xi^6)^3(3-\xi^2)^3 \\ & :(729-972\xi^2+270\xi^4-36\xi^6+\xi^8)^2(27-18\xi^2-\xi^4)^2 \\ & :1728\,\xi^{12}(9-\xi^2)^3(1-\xi^2). \end{aligned}\right. \tag{423}$$

Die Gleichung, welche dabei zwischen ξ und ξ_2 besteht, heisst

$$(3+\xi)^2\xi_2^2 - 2(3+6\xi-\xi^2)\xi_2 + (1-\xi)^2 = 0; \tag{424}$$

sie wird symmetrisch in Bezug auf ξ_2 und $\bar{\xi}_2$, wenn man für ξ den Werth $3\,\bar{\xi}_2$ einsetzt.

§ 44.

Transformation vom Grade 48, 96, u. s. w.

Indem man dieses Verfahren fortsetzt, erhält man auch die Transformation vom Grade 48, 96, u. s. w.

Setzt man nämlich für $n = 48$

$$\xi = \frac{L(48)^4 L(8)^2}{L(24)^2 L(16)^4}, \quad \eta_1 = \frac{L(24)^4 L(4)^2}{L(12)^2 L(8)^4}, \quad \xi_2 = \frac{L(6)^2}{L(3)^4 L(2)^2}, \tag{425}$$

so bleibt die Gleichung (422) zwischen J und ξ_2 bestehen.

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist auch hier wieder

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\xi}{3},$$

so dass auch die Gleichung (423) bestehen bleibt. Da jetzt aber ξ anders definirt ist als in dem vorhergehenden Paragraphen, so muss man hier die Gleichung (424) ersetzen durch die *beiden* Gleichungen

$$(426)\quad \begin{cases}(3+\eta_1)^2\xi_2^2-2(3+6\eta_1-\eta_1^2)\xi_2+(1-\eta_1)^2=0,\\ (1+\xi)\eta_1^2-\xi(3-\xi)=0.\end{cases}$$

Die absolute Invariante J ist daher eine rationale Function 12^{ten} Grades von ξ_2^2, $\overline{J}$ ist genau dieselbe rationale Function von $\frac{\xi^2}{9}$, während die Beziehung zwischen ξ und ξ_2 durch die beiden Gleichungen (426) gegeben ist.

Für $n=96$ müsste man setzen

$$(427)\quad \begin{cases}\xi=\frac{L(96)^4L(16)^2}{L(48)^2L(32)^4}, & \xi_2=\frac{L(6)^2}{L(3)^4L(2)^2},\\ \eta_1=\frac{L(24)^4L(4)^2}{L(12)^2L(8)^4}, & \eta_2=\frac{L(48)^4L(8)^2}{L(24)^2L(16)^2},\end{cases}$$

dann gelten auch jetzt noch die Gleichungen (422) und (423), während die Beziehung zwischen ξ und ξ_2 durch die *drei* Gleichungen

$$(428)\quad \begin{cases}(3+\eta_1)^2\xi_2^2-2(3+6\eta_1-\eta_1^2)\xi_2+(1-\eta_1)^2=0,\\ (1+\eta_2)\eta_1^2-\eta_2(3-\eta_2)=0,\\ (1+\xi)\eta_2^2-\xi(3-\xi)=0\end{cases}$$

gegeben ist.

In dieser Weise kann man fortfahren und erhält für $n=2^\alpha\cdot 3$

$$(429)\quad \begin{cases}\xi=\frac{L(n)^4L\left(\frac{n}{6}\right)^2}{L\left(\frac{n}{2}\right)^2L\left(\frac{n}{3}\right)^4}, & \xi_2=\frac{L(6)^2}{L(3)^4L(2)^2},\\ \eta_\nu=\frac{L(2^\nu.12)^4L(2^\nu.2)^2}{L(2^\nu.6)^2L(2^\nu.4)^4} & (\nu=1,2,3,\ldots\alpha-3).\end{cases}$$

Die Gleichungen (422) und (423) gelten dann für alle Werthe von α, welche grösser als 3 sind, während die Beziehung zwischen ξ und ξ_2 durch die Gleichungen

$$(430)\quad \begin{cases}(3+\eta_1)^2\xi_2^2-2(3+6\eta_1-\eta_1^2)\xi_2+(1-\eta_1)^2=0,\\ (1+\eta_{\nu+1})\eta_\nu^2-\eta_{\nu+1}(3-\eta_{\nu+1})=0,\\ (1+\xi)\eta_{\alpha-3}^2-\xi(3-\xi)=0\end{cases}$$

gegeben ist.

§ 45.

Transformation vom Grade 40, 80 u. s. w.

Setzt man

$$(431)\quad \begin{cases}\eta=\frac{L(10)}{L(5)L(2)^5}, & \eta_1=\frac{L(10)^5}{L(5)^5L(2)},\\ \xi_1=\frac{L(20)^5L(2)}{L(10)^5L(4)}, & \xi_2=\frac{L(40)^5L(4)}{L(20)^5L(8)},\end{cases}$$

allgemein

(432) $$\xi_\nu = \frac{L(2^\nu\cdot 10)^5\, L(2^\nu)}{L(2^\nu\cdot 5)^5\, L(2^\nu\cdot 2)},$$

so gelten nach Gleichung (272) und nach Gleichung (370) die Relationen*)

(433) $$\eta_1 = \frac{1-4\eta}{1+\eta},\quad \xi_1 = \frac{(1+\eta)(1+6\eta)-5w}{(1+\eta)(1-4\eta)},$$

wobei

(434) $$w = \sqrt{\eta(1+\eta)(1+4\eta^2)},$$

oder

(433a) $$(1+\eta)(1-4\eta)\xi_1^2 - 2(1+\eta)(1+6\eta)\xi_1 + (1-4\eta)^2 = 0.$$

Daraus folgt auch noch eine Gleichung zwischen ξ_1 und η_1, nämlich

(435) $$\eta_1\xi_1^2 - 2(2-\eta_1)\xi_1 + \eta_1^2 = 0.$$

Indem man ϖ mit $\frac{\varpi}{2}$ vertauscht, geht η_1 in ξ_1 und ξ_1 in ξ_2 über, folglich findet man aus Gleichung (435)

(436) $$\xi_1\xi_2^2 - 2(2-\xi_1)\xi_2 + \xi_1^2 = 0.$$

Ebenso erhält man die Gleichungen

(437) $$\begin{cases} \xi_2\xi_3^2 - 2(2-\xi_2)\xi_3 + \xi_2^2 = 0, \\ \xi_3\xi_4^2 - 2(2-\xi_3)\xi_4 + \xi_3^2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Jetzt gelten die beiden Gleichungen

(438) $$\begin{cases} J : J-1 : 1 = (1-4\eta+16\eta^5+16\eta^6)^3 \\ \qquad : (1+4\eta^2)(1-2\eta+2\eta^2)^2(1-2\eta-4\eta^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (1-2\eta-6\eta^2-8\eta^3-4\eta^4)^2 \\ \qquad : 1728\eta^{10}(1-4\eta)(1+\eta)^2, \end{cases}$$

und

(439) $$\begin{cases} \bar{J} : \bar{J}-1 : 1 = (1-4\bar{\eta}+16\bar{\eta}^5+16\bar{\eta}^6)^3 \\ \qquad : (1+4\bar{\eta}^2)(1-2\bar{\eta}+2\bar{\eta}^2)^2(1-2\bar{\eta}-4\bar{\eta}^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (1-2\bar{\eta}-6\bar{\eta}^2-8\bar{\eta}^3-4\bar{\eta}^4)^2 \\ \qquad : 1728\bar{\eta}^{10}(1-4\bar{\eta})(1+\bar{\eta})^2, \end{cases}$$

gleichviel ob es sich um die Transformation vom Grade 10, 20, 40, 80 oder allgemein $2^\alpha\cdot 5$ handelt. Auch hat η überall dieselbe Bedeutung; dagegen ist

*) Die Bezeichnungen sind hier so gewählt, dass die Grössen, welche in Gleichung (271), (272) und (364) bis (374a)

$$\xi_3,\quad \xi_6,\quad \eta_6$$

genannt wurden, hier bez.

$$\eta,\quad \eta_1,\quad \xi_1$$

heissen.

$$(440)\quad \begin{cases} \bar{\eta}(10) = \frac{\eta_1}{4} = \frac{1-4\eta}{4(1+\eta)}, \\ 4\bar{\eta}(20) = \xi_1, \quad 4\bar{\eta}(40) = \xi_2, \quad 4\bar{\eta}(80) = \xi_3, \cdots, \\ 4\bar{\eta}(2^\alpha \cdot 5) = \xi_{\alpha-1}. \end{cases}$$

Die Beziehungen zwischen den Grössen η, η_1, ξ_1, ξ_2, $\cdots$ sind dabei durch die Gleichungen (433) bis (437) in der einfachsten Weise gegeben.

IX. Abschnitt.

Transformation vom Grade $3a$.

§ 46.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $3a$.

Ist a eine Primzahl von der Form $2b+1 = 6l \pm 1$ und $n = 3a$, so wird $\varrho = 2l - 1$. In diesem Falle erhält man also

$$(441)\qquad \xi = L(3)^{\delta_1} L(a)^{\delta_2} L(3a)^{\delta_3}$$

und

$$S(3a, D) = a\delta_1(t_1^2 - 3) + 3\delta_2(t_2^2 - a) + \delta_3(t_3^2 - 3a).$$

Dies giebt

$$(442)\quad \begin{cases} -2a\delta_1 - 3(a-1)\delta_2 - (3a-1)\delta_3 = 24k_0, \\ +2a\delta_1 - (a-1)\delta_2 - (a-3)\delta_3 = 24k_1, \\ -2\delta_1 + 3(a-1)\delta_2 + (a-3)\delta_3 = 24k_2, \\ +2\delta_1 + (a-1)\delta_2 + (3a-1)\delta_3 = 24k_3. \end{cases}$$

Für $a = 6l - 1$ erhält man hieraus

$$(443)\quad \begin{cases} 2l(3l-1)\delta_1 = -(3l-2)k_0 + 9lk_1 + 2k_2, \\ 2l(3l-1)\delta_2 = +(3l-2)k_0 + 3lk_1 + 2ak_2, \\ 2l(3l-1)\delta_3 = -(9l-2)k_0 - 9lk_1 - 2ak_2, \end{cases}$$

und für $a = 6l + 1$

$$(443\text{a})\quad \begin{cases} 2l(3l+1)\delta_1 = -(3l-1)k_0 + (9l+3)k_1 + 2k_2, \\ 2l(3l+1)\delta_2 = +(3l-1)k_0 + (3l+1)k_1 + 2ak_2, \\ 2l(3l+1)\delta_3 = -(9l+1)k_0 - (9l+3)k_1 - 2ak_2. \end{cases}$$

§ 47.

Transformation vom Grade 15.

Für $n = 15$ wird $a = 5$, $l = 1$, $\varrho = 1$, und die Gleichungen (443) gehen über in

(444)
$$\begin{cases} 4\delta_1 = - k_0 + 9k_1 + 2k_2, \\ 4\delta_2 = + k_0 + 3k_1 + 10k_2, \\ 4\delta_3 = - 7k_0 - 9k_1 - 10k_2, \end{cases}$$

also

(445)
$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = 3(k_1 + k_2), \quad \delta_1 + \delta_3 = -2(k_0 + k_2), \\ 2(\delta_2 + \delta_3) = -3(k_0 + k_1). \end{cases}$$

Deshalb muss $k_0 + k_1$ durch 2 theilbar sein. Sobald man den Zahlen k_0, k_1, k_2 Werthe beigelegt hat, für welche δ_1 eine *ganze* Zahl ist, so liefern diese Werthe auch für δ_2 und δ_3 *ganze* Zahlen, wie man sofort aus den Gleichungen (445) erkennt. Dadurch findet man leicht die folgenden L-Producte mit dem Charakter 2

(446)
$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{L(15)^3}{L(5)^3 L(3)^3}, \quad \xi_2 = \frac{L(15)^2 L(3)^2}{L(5)^2}, \quad \xi_3 = \frac{L(15)^5}{L(5)^5 L(3)}, \\ \xi_4 = \frac{L(15)}{L(5) L(3)^5}, \quad \xi_5 = \frac{L(15)^2 L(5)}{L(3)^4}, \quad \xi_6 = \frac{L(15)^4}{L(5) L(3)^2}, \\ \xi_7 = \frac{L(15) L(3)}{L(5)^4}, \quad \xi_8 = L(15)\, L(5)^2\, L(3).\text{*)} \end{cases}$$

Nach Gleichung (58) Nr. 5 ist

$$R \doteq \wp'\left(\frac{2\varpi}{15}\right) \wp'\left(\frac{4\varpi}{15}\right) \wp'\left(\frac{8\varpi}{15}\right) \wp'\left(\frac{14\varpi}{15}\right)$$

eine Transformationsgrösse. Dabei wird aber

$$\frac{1}{R} = \tau\left(\frac{2\varpi}{15}\right)^3 \tau\left(\frac{4\varpi}{15}\right)^3 \tau\left(\frac{8\varpi}{15}\right)^3 \tau\left(\frac{14\varpi}{15}\right)^3 = \frac{f(15)^3}{f(5)^3 f(3)^3},$$

folglich ist

$$\xi_1 = \frac{L(15)^3}{L(5)^3 L(3)^3} = \frac{(g_2^3 - 27 g_3^2) f(15)^3}{f(5)^3 f(3)^3}$$

ein Parameter. Dasselbe gilt von ξ_2, denn bei ξ_2 sind die Exponenten sämmtlich gerade und auch die Bedingung

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

wird befriedigt. Deshalb sind auch

(447)
$$\xi_3 = \xi_1 \xi_2 \quad \text{und} \quad \xi_4 = \frac{\xi_1}{\xi_2}$$

---

*) Man erhält diese L-Producte, indem man für k_0, k_1, k_2, k_3 die folgenden Werthe einsetzt:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
k_0	$+1$	-1	0	$+2$	0	-1	$+1$	-2
k_1	-1	$+1$	0	-2	-2	-1	$+1$	0
k_2	-1	-1	-2	0	$+1$	0	-2	$+1$
k_3	$+1$	$+1$	$+2$	0	$+1$	$+2$	0	$+1$

Parameter, und zwar haben ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sämmtlich den Charakter 2.*)

Durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{2}{15}} = z$ findet man, dass zwischen ξ_1 und ξ_2 die Gleichung

(448) $$\xi_1 \xi_2^2 + (\xi_1^2 + 5\xi_1 - 1)\,\xi_2 + 9\xi_1 = 0$$

besteht. Dies giebt

(448a) $$2\xi_1\xi_2 = 1 - 5\xi_1 - \xi_1^2 + w,$$

wobei

(449) $$\begin{cases} w = +\sqrt{(1+\xi_1-\xi_1^2)(1-11\xi_1-\xi_1^2)} \\ \quad = \sqrt{1-10\xi_1-13\xi_1^2+10\xi_1^3+\xi_1^4}. \end{cases}$$

Daraus folgt

(450) $$\begin{cases} 2\xi_1^5\, L(3)^{12} = 2\xi_1^3\xi_2^3 \\ \qquad = (1-5\xi_1-\xi_1^2)(1-10\xi_1-4\xi_1^2+10\xi_1^3+\xi_1^4) \\ \qquad + (1-2\xi_1-\xi_1^2)(1-8\xi_1-\xi_1^2)\,w, \end{cases}$$

oder

(450a) $$\begin{cases} \xi_1^5\, L(3)^{24} - (1-5\xi_1-\xi_1^2)(1-10\xi_1-4\xi_1^2+10\xi_1^3+\xi_1^4)\,L(3)^{12} \\ \qquad + 729\xi_1 = 0. \end{cases}$$

Für $k_0 = -3$, $k_1 = -1$, $k_2 = +3$, $k_3 = +1$ erhält man noch den Parameter

(451) $$\eta = L(5)^6,$$

dessen Charakter gleich 4 ist. Deshalb findet man durch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von z die Gleichung

(452) $$\xi_1^3\, L(5)^{12} - (1+\xi_1^2)(1-9\xi_1-\xi_1^2)\,L(5)^6 + 125\xi_1 = 0,$$

oder

(452a) $$2\xi_1^3\eta = 2\xi_1^3 L(5)^6 = (1+\xi_1^2)(1-9\xi_1-\xi_1^2) + (1-4\xi_1-\xi_1^2)\,w.$$

Setzt man den Werth von $L(3)^{12}$ in die Gleichung (172), nämlich in

$$J : J-1 : 1 = (L^{12}+3)^3(L^{12}+27) : (L^{24}+18L^{12}-27)^2 : 1728\,L^{12},$$

*) Dagegen sind

$$\xi_5,\ \xi_6 = \xi_2\xi_5,\ \xi_7 = \frac{\xi_1}{\xi_5},\ \xi_8 = \frac{\xi_5}{\xi_4}$$

keine Parameter, weil

$$\frac{\xi_5}{\xi_2} = \frac{L(5)^3}{L(3)^6} = \frac{f(5)^3}{f(3)^6} = \frac{\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right)^2}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{5}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{5}\right)}$$

als rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{15}\right)$ das Zeichen wechselt, wenn man $\wp\left(\frac{2\varpi}{15}\right)$ mit $\wp\left(\frac{4\varpi}{15}\right)$ vertauscht.

oder den Werth von $L(5)^6 = \eta$ in die Gleichung

(453) $J:J-1:1 = (\eta^2+10\eta+5)^3:(\eta^2+4\eta-1)^2(\eta^2+22\eta+125):1728\eta$

ein, so erhält man J als rationale Function von ξ_1 und w. Dies giebt

$$(454)\quad \begin{cases} 1728\cdot 4[(1+\xi_1^2)(1-9\xi_1-\xi_1^2)+(1-4\xi_1-\xi_1^2)w]\,\xi_1^{15}J \\ \quad = [(1-18\xi_1+81\xi_1^2-8\xi_1^3-180\xi_1^4+18\xi_1^5+\xi_1^6+8\xi_1^7+\xi_1^8) \\ \qquad +(1-9\xi_1+\xi_1^3-\xi_1^4)(1-4\xi_1-\xi_1^2)w]^3. \end{cases}$$

Der zu ξ_1 complementäre Parameter ist wieder ξ_1, so dass man aus der Gleichung (454) auch $\bar{J}$ erhält, indem man $+w$ mit $-w$ vertauscht; oder mit anderen Worten: *J und $\bar{J}$ sind die Wurzeln derselben quadratischen Gleichung.*

Noch einfacher kann man die Beziehung zwischen J und $\bar{J}$ durch die Gleichung (453) und die Gleichung

(455) $\bar{J}:\bar{J}-1:1 = (\bar{\eta}^2+10\bar{\eta}+5)^3:(\bar{\eta}^2+4\bar{\eta}-1)^2(\bar{\eta}^2+22\bar{\eta}+125):1728\bar{\eta}$

darstellen, wobei

$$(456)\qquad \bar{\eta} = \frac{125\,L(3)^6}{L(15)^6} = \frac{125}{\xi_1^3\eta}$$

der zu η complementäre Parameter ist und aus dem für η gefundenen Werthe hervorgeht, indem man in Gleichung (452a) $+w$ mit $-w$ vertauscht.

Schliesslich ist noch

$$(457)\qquad L(15)^{12} = \xi_1^3\,L(3)^{12}\,L(5)^{12},$$

also gleichfalls eine rationale Function von ξ_1 und w.

§ 48.

Transformation vom Grade 21.

Für $n = 21$ wird $a = 7$, $l = 1$, $\varrho = 1$ und die Gleichungen (443a) gehen über in

$$(458)\qquad \begin{cases} 4\delta_1 = -\ \ k_0 + 6k_1 + \ \ k_2, \\ 4\delta_2 = +\ \ k_0 + 2k_1 + 7k_2, \\ 4\delta_3 = -5k_0 - 6k_1 - 7k_2, \end{cases}$$

also

$$(459)\qquad \delta_1+\delta_2 = 2(k_1+k_2), \quad \delta_2+\delta_3 = -(k_0+k_1),$$
$$2(\delta_1+\delta_3) = -3(k_0+k_2).$$

Deshalb muss k_0+k_2 eine *gerade* Zahl sein. Sind die ganzen Zahlen k_0, k_1, k_2 so bestimmt, dass δ_2 eine *ganze* Zahl wird, so sind auch δ_1 und δ_3 *ganze* Zahlen. Dadurch erhält man 8 L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

$$(460)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(21)^2}{L(7)^2 L(3)^2}, & \xi_2 = \dfrac{L(21)\,L(7)}{L(3)}, \quad \xi_3 = L(21)\,L(3)^2, \\ \xi_4 = \dfrac{L(21)^2 L(3)}{L(7)^3}, & \xi_5 = \dfrac{L(7)}{L(3)^3}, \quad \xi_6 = \dfrac{L(21)^3}{L(7)\,L(3)^3}, \\ \xi_7 = \dfrac{L(21)^3}{L(7)^2}, & \xi_8 = \dfrac{L(21)}{L(7)^3 L(3)}. \text{*)} \end{cases}$$

Hierbei ist ξ_1 sicher ein Parameter, denn die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sind *gerade* Zahlen und genügen der Bedingung

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\,\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Nach Gleichung (58) Nr. 5 ist

$$R = \wp'\left(\frac{2\varpi}{21}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{21}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{21}\right)\wp'\left(\frac{10\varpi}{21}\right)\wp'\left(\frac{16\varpi}{21}\right)\wp'\left(\frac{20\varpi}{21}\right) = \frac{f(7)^3 f(3)^3}{f(21)^3}$$

eine Transformationsgrösse, folglich ist auch

$$\frac{\sqrt{\xi_1}}{Q^{12}} = \frac{L(21)}{Q^{12} L(7)\,L(3)} = \frac{f(21)}{f(7)\,f(3)}$$

eine Transformationsgrösse. Dasselbe gilt von

$$\left[\wp\left(\frac{2\varpi}{7}\right) - \wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{4\varpi}{7}\right) - \wp\left(\frac{8\varpi}{7}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{6\varpi}{7}\right) - \wp\left(\frac{12\varpi}{7}\right)\right]$$
$$= -\frac{1}{f(7)^2} = -\frac{Q^{12}}{L(7)^2},$$

so dass auch

$$\xi_2 = \frac{L(21)\,L(7)}{L(3)} = \frac{Q^{24} f(21)\,f(7)}{f(3)}$$

eine Transformationsgrösse ist, d. h. ξ_2 ist gleichfalls ein Parameter. Dasselbe gilt von

$$(461)\qquad \xi_6 = \xi_1 \xi_2 \quad \text{und} \quad \xi_8 = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Dagegen sind

$$(462)\qquad \xi_3, \quad \xi_4 = \frac{\xi_1 \xi_3}{\xi_2}, \quad \xi_5 = \frac{\xi_2}{\xi_3}, \quad \xi_7 = \xi_1 \xi_3$$

keine Parameter. Durch Entwickelung nach Potenzen von $h^{\frac{2}{21}} = z$ findet man

$$(463)\qquad \xi_1 \xi_2^2 - (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2)\,\xi_2 + 7\xi_1 = 0,$$

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3 sind die folgenden:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8
k_0	$+1$	-1	$+2$	0	$+1$	0	-1	$+2$
k_1	-1	-1	-1	$+1$	-2	-2	0	0
k_2	-1	$+1$	0	-2	$+1$	0	-1	-2
k_3	$+1$	$+1$	-1	$+1$	0	$+2$	$+2$	0

oder

(463a) $$2\xi_1\xi_2 = (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2) + w,$$

wobei

(464) $$w = +\sqrt{1 - 6\xi_1 - 17\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4} = +1 + \cdots.$$

Ferner wird

(465) $$\eta = L(7)^4 = \frac{\xi_2^2}{\xi_1} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{49\,L(3)^4}{L(21)^4} = \frac{49}{\xi_1^2 L(7)^4} = \frac{49}{\xi_1\xi_2^2},$$

und zwar findet man aus Gleichung (463a)

(466) $$\begin{cases} 2\xi_1^3\eta = (1 - 6\xi_1 - 3\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4) + (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2)\,w, \\ 2\xi_1^3\bar{\eta} = (1 - 6\xi_1 - 3\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4) - (1 - 3\xi_1 + \xi_1^2)\,w, \end{cases}$$

d. h. η und $\bar{\eta}$ sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

(467) $$\xi_1^3\eta^2 - (1 - 6\xi_1 - 3\xi_1^2 - 6\xi_1^3 + \xi_1^4)\,\eta + 49\xi_1 = 0.$$

Nun ist nach Gleichung (146) m. vor. Abh.

(468) $$\begin{cases} J : J - 1 : 1 = (\eta^2 + 13\eta + 49)(\eta^2 + 5\eta + 1)^3 \\ \qquad : (\eta^4 + 14\eta^3 + 63\eta^2 + 70\eta - 7)^2 : 1728\eta, \end{cases}$$

so dass man J sehr leicht als rationale Function von ξ_1 und w darstellen kann. Dabei sind die zu ξ_1 und η complementären Parameter ξ_1 und $\bar{\eta} = \frac{49}{\xi_1^2\eta}$, so dass J in $\bar{J}$ übergeht, wenn man $+w$ mit $-w$ vertauscht. Dadurch erhält man

(469) $$\begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (\bar{\eta}^2 + 13\bar{\eta} + 49)(\bar{\eta}^2 + 5\bar{\eta} + 1)^3 \\ \qquad : (\bar{\eta}^4 + 14\bar{\eta}^3 + 63\bar{\eta}^2 + 70\bar{\eta} - 7)^2 : 1728\bar{\eta}. \end{cases}$$

Um auch noch $L(3)^{12}$ und $L(21)^6$ rational durch ξ_1 und w auszudrücken, beachte man, dass

(470) $$L(3)^{12} = \frac{\xi_3^4}{\xi_1\xi_2^2} \quad \text{und} \quad L(21)^6 = \xi_1\xi_2^2\xi_3^2$$

wird. Nun ist allerdings ξ_3 kein Parameter, aber ξ_3^2 ist einer mit dem Charakter 4 und genügt der Gleichung

(471) $$\xi_1^4\xi_3^4 - (1 - 10\xi_1 + 15\xi_1^2 + 28\xi_1^3 - 7\xi_1^4)\,\xi_3^2 + 189\xi_1^2 = 0,$$

oder

(471a) $$2\xi_1^4\xi_3^2 = (1 - 10\xi_1 + 15\xi_1^2 + 28\xi_1^3 - 7\xi_1^4) + (1 - 7\xi_1 + 7\xi_1^2)\,w.$$

Dadurch wird es auch möglich, $L(3)^{12}$ und $L(21)^6$ als rationale Functionen von ξ_1 und w darzustellen.

X. Abschnitt.

Transformation vom Grade $9a$.

§ 49.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $9a$.

Ist $n = 9a$ und a irgend eine Primzahl, so wird $\varrho = a - 2$. Setzt man jetzt wieder

(472) $$\xi = L(3)^{\delta_1} L(9)^{\delta_2} L(a)^{\delta_3} L(3a)^{\delta_4} L(9a)^{\delta_5},$$

so ist

$$S(n, D) = 3a\delta_1(t_1^2 - 3) + a\delta_2(t_2^2 - 9) + 9\delta_3(t_3^2 - a) \\ + 3\delta_4(t_4^2 - 3a) + \delta_5(t_5^2 - 9a).$$

Daraus findet man

(473) $$\begin{cases} -6a\delta_1 - 8a\delta_2 - 9(a-1)\delta_3 - 3(3a-1)\delta_4 \\ \qquad\qquad - (9a-1)\delta_5 = 24k_0, \\ +4a\delta_1 + 0 - 2(a-1)\delta_3 - 2(a-3)\delta_4 \\ \qquad\qquad - 2(a-1)\delta_5 = 24k_1, \\ +2a\delta_1 + 8a\delta_2 - (a-1)\delta_3 - (a-3)\delta_4 \\ \qquad\qquad - (a-9)\delta_5 = 24k_2, \\ -6\delta_1 - 8\delta_2 + 9(a-1)\delta_3 + 3(a-3)\delta_4 \\ \qquad\qquad + (a-9)\delta_5 = 24k_3, \\ +4\delta_1 + 0 + 2(a-1)\delta_3 + 2(3a-1)\delta_4 \\ \qquad\qquad + 2(a-1)\delta_5 = 24k_4, \\ +2\delta_1 + 8\delta_2 + (a-1)\delta_3 + (3a-1)\delta_4 \\ \qquad\qquad + (9a-1)\delta_5 = 24k_5, \end{cases}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $a^2 - 1$ mit G bezeichnet,

(474) $$\begin{cases} G\delta_1 = -(a+1)k_0 + (5a-1)k_1 - (a+1)k_2 + 0 - 6k_4, \\ 2G\delta_2 = +6k_0 - 3(a-2)k_1 + 6(a+1)k_2 + 6k_3 + 9k_4, \\ 2G\delta_3 = -6k_0 + 3k_1 + 0 + 6ak_3 - 3ak_4, \\ G\delta_4 = +(a+1)k_0 + (a-5)k_1 + (a+1)k_2 + 0 + 6ak_4, \\ 2G\delta_5 = -6ak_0 + (6a-3)k_1 - 6(a+1)k_2 - 6ak_3 - 9ak_4. \end{cases}$$

§ 50.

Transformation vom Grade 18.

Für $n = 18$ wird $a = 2$, $\varrho = 0$ und die Gleichungen (474) gehen über in

$$(475)\qquad \begin{cases} \delta_1 = - \ k_0 + 3k_1 - \ k_2 + \ 0 \ - 2k_4, \\ 2\delta_2 = + 2k_0 + \ 0 \ + 6k_2 + 2k_3 + 3k_4, \\ 2\delta_3 = - 2k_0 + \ k_1 + \ 0 \ + 4k_3 - 2k_4, \\ \delta_4 = + \ k_0 - \ k_1 + \ k_2 + \ 0 \ + 4k_4, \\ 2\delta_5 = - 4k_0 - 3k_1 - 6k_2 - 4k_3 - 6k_4. \end{cases}$$

Setzt man daher $k_1 = 0$ und $k_4 = 0$ und von den vier Grössen k_0, k_2, k_3, k_5 die eine gleich $+1$, eine zweite gleich -1 und die beiden übrigen gleich 0, so erhält man 6 L-Producte mit dem Charakter 1, nämlich

$$(476)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(18)^2}{L(9)\,L(2)^2}, & \xi_2 = \dfrac{L(18)}{L(9)^2\,L(2)}, & \xi_3 = \dfrac{L(6)}{L(3)\,L(2)^3}, \\ \xi_4 = \dfrac{L(18)^2\,L(3)}{L(9)^3\,L(6)}, & \xi_5 = \dfrac{L(18)^2\,L(3)\,L(2)}{L(9)\,L(6)}, & \xi_6 = \dfrac{L(18)\,L(3)\,L(2)^2}{L(9)^2\,L(6)}.\text{*)} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\xi_2 = \frac{L(18)}{L(9)^2\,L(2)} = \frac{f(18)}{f(9)^2\,f(2)} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)\tau\left(\frac{5\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{7\varpi}{9}\right)}{\tau\left(\frac{2\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{2\varpi}{3}\right)\tau\left(\frac{10\varpi}{9}\right)\tau\left(\frac{14\varpi}{9}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\wp'\left(\frac{\varpi}{3}\right)} \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2} \frac{\wp'\left(\frac{2.5^\alpha\varpi}{9}\right)}{\wp\left(\frac{5^\alpha\varpi}{9}\right) - \wp\left(\frac{2.5^\alpha\varpi}{9}\right)},$$

folglich ist ξ_2 eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{18}\right)$, die sich nicht ändert, wenn man $\wp\left(\frac{2\varpi}{18}\right)$ mit $\wp\left(\frac{2.5\varpi}{18}\right)$ oder mit $\wp\left(\frac{2.25\varpi}{18}\right) = \wp\left(\frac{14\varpi}{18}\right)$ vertauscht. Deshalb ist ξ_2 eine Transformationsgrösse nullter Dimension, also ein *Parameter*.

Der zu ξ_2 complementäre Parameter ist

$$(477)\qquad \bar{\xi}_2 = \frac{\xi_1}{3},$$

folglich ist auch ξ_1 ein *Parameter*.

---

*) Die zugehörigen Werthe von k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 sind die folgenden:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
k_0	0	$+1$	$+1$	0	-1	0
k_1	0	0	0	0	0	0
k_2	0	-1	0	-1	0	-1
k_3	-1	0	-1	0	0	$+1$
k_4	0	0	0	0	0	0
k_5	$+1$	0	0	$+1$	$+1$	0

Die Grösse

$$(478)\qquad \xi_3{}^3 = \frac{f(6)^3}{f(3)^3 f(2)^9} = \frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right) - \wp(\varpi)}{\wp\left(\frac{\varpi}{3}\right) - \wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)} = \frac{\tau\left(\frac{\varpi}{3}\right)^3}{\tau(\varpi)^3} = \xi_3(6)$$

ist schon für die Transformation 6ten Grades ein Parameter, ausserdem ist auch $\xi_3{}^2$ ein Parameter, weil die Exponenten $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ sämmtlich *gerade* sind. Daraus folgt, dass auch ξ_3 selbst ein Parameter ist. Mithin sind auch

$$(479)\qquad \xi_4 = \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_3},\quad \xi_5 = \frac{\xi_1}{\xi_3},\quad \xi_6 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$$

Parameter mit dem Charakter 1.

Zwischen je zwei von diesen 6 Parametern besteht eine Gleichung von der Form

$$a\xi_\alpha\xi_\beta + b\xi_\alpha + c\xi_\beta + d = 0,$$

wo man die Zahlcoefficienten a, b, c, d sehr leicht durch die Entwickelung von ξ_α und ξ_β nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{9}} = z$ findet. Dies giebt die Gleichungen

$$(480)\qquad \begin{cases} \xi_1 = 1 - 2\xi_3, \quad \xi_2 = -\dfrac{\xi_3}{1+\xi_3}, \quad \xi_4 = \dfrac{1-2\xi_3}{1+\xi_3}, \\ \xi_5 = \dfrac{1-2\xi_3}{\xi_3}, \quad \xi_6 = \dfrac{1}{1+\xi_3}. \end{cases}$$

Da $\xi_3{}^3 = \xi_3(6)$ ist, so folgt aus Gleichung (268a)

$$(481)\qquad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (1 - 6\xi_3{}^3 - 12\xi_3{}^6 - 8\xi_3{}^9)^3 (1 - 2\xi_3{}^3)^3 \\ \qquad : (1 - 8\xi_3{}^3 - 8\xi_3{}^9 - 8\xi_3{}^{12})^2 (1 - 4\xi_3{}^3 - 8\xi_3{}^6)^2 \\ \qquad : 1728\xi_3{}^{18}(1 + \xi_3{}^3)^2 (1 - 8\xi_3{}^3). \end{cases}$$

Der zu ξ_3 complementäre Parameter ist

$$\bar{\xi}_3 = \frac{\xi_4}{2},$$

folglich wird

$$(482)\qquad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (64 - 48\xi_4{}^3 - 12\xi_4{}^6 - \xi_4{}^9)^3 (4 - \xi_4{}^3)^3 \\ \qquad : (512 - 512\xi_4{}^3 - 8\xi_4{}^9 - \xi_4{}^{12})^2 (8 - 4\xi_4{}^3 - \xi_4{}^6)^2 \\ \qquad : 1728\xi_4{}^{18}(8 + \xi_4{}^3)^2 (1 - \xi_4{}^3). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (267) findet man ohne Weiteres

$$(483)\qquad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{1 - 8\xi_3{}^3}{\xi_3{}^9(1+\xi_3{}^3)}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{(1+\xi_3{}^3)^2(1-8\xi_3{}^3)}{\xi_3{}^6}, \\ L(6)^{24} = \dfrac{(1+\xi_3{}^3)(1-8\xi_3{}^3)^5}{\xi_3{}^{15}}, \end{cases}$$

und aus den Gleichungen (476) folgt noch

$$(484)\quad \begin{cases} L(9)^3 = \dfrac{\xi_1}{\xi_2^2} = \dfrac{(1-2\xi_3)(1+\xi_3)^2}{\xi_3^2}, \\[2ex] \dfrac{L(18)^3}{L(2)^3} = \dfrac{\xi_1^2}{\xi_2} = \dfrac{(1-2\xi_3)^2(1+\xi_3)}{\xi_3}. \end{cases}$$

§ 51.

Transformation vom Grade 45.

Für $n = 45$ wird $\varrho = 3$ und die Gleichungen (474) gehen über in

$$(485)\quad \begin{cases} 4\delta_1 = - k_0 + 4k_1 - k_2 + 0 - k_4, \\ 16\delta_2 = + 2k_0 - 3k_1 + 12k_2 + 2k_3 + 3k_4, \\ 16\delta_3 = - 2k_0 + k_1 + 0 + 10k_3 - 5k_4, \\ 4\delta_4 = + k_0 + 0 + k_2 + 0 + 5k_4, \\ 16\delta_5 = - 10k_0 - 9k_1 - 12k_2 - 10k_3 - 15k_4. \end{cases}$$

Hieraus findet man 10 L-Producte ξ mit dem Charakter 4, nämlich

$$(486)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{L(15)}{L(5)^3\,L(3)}, & \xi_2 = \dfrac{L(15)^2}{L(3)^2}, \\[2ex] \xi_3 = \dfrac{L(45)^2}{L(9)\,L(5)^2}, & \xi_4 = \dfrac{L(45)}{L(9)^2\,L(5)}, \\[2ex] \xi_5 = \dfrac{L(45)^3\,L(3)}{L(15)\,L(9)^3}, & \xi_6 = \dfrac{L(45)^2\,L(5)\,L(3)}{L(15)\,L(9)}, \\[2ex] \xi_7 = \dfrac{L(45)\,L(5)^2\,L(3)}{L(15)\,L(9)^2}, & \xi_8 = \dfrac{L(45)\,L(9)}{L(5)}, \\[2ex] \xi_9 = \dfrac{L(45)\,L(5)^2\,L(3)^3}{L(15)^3\,L(9)^2}, & \xi_{10} = \dfrac{L(45)\,L(9)\,L(5)}{L(15)^2\,L(3)^2}. \text{*)} \end{cases}$$

---

*) Die zugehörigen Werthe von $k_0, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$ sind die folgenden:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	η_1	η_2	η_3	η_4
k_0	+4	−1	+1	+3	0	−3	−1	−2	0	+1	+1	−1	+2	0
k_1	0	−2	0	0	0	0	0	0	+2	−2	−2	−2	0	0
k_2	0	−1	−1	−3	−4	−1	−3	+2	−2	+1	−1	+1	0	+2
k_3	−4	+1	−3	−1	0	+1	+3	−2	+2	+1	+2	0	+1	−1
k_4	0	+2	0	0	0	0	0	0	−2	−2	0	0	−2	−2
k_5	0	+1	+3	+1	+4	+3	+1	+2	0	+1	0	+2	−1	+1

Die L-Producte

$$\eta_1 = \frac{L(5)}{L(3)^2}, \quad \eta_2 = \frac{L(45)\,L(9)}{L(3)^2}, \quad \eta_3 = \frac{L(5)}{L(15)^2}, \quad \eta_4 = \frac{L(45)\,L(9)}{L(15)^2},$$

welche in dieser Tabelle noch berücksichtigt sind, haben den Charakter 3, sind aber keine Parameter.

Dabei ist ξ_2 sicher ein Parameter, weil die Exponenten δ *gerade* sind und der Bedingung

$$\Sigma D(D-1)(D-2)\,\delta \equiv 0 \pmod{24}$$

genügen. Auch ξ_1 muss ein Parameter sein, denn

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{L(15)^3}{L(5)^3 L(3)^3} = \xi \tag{487}$$

ist schon ein Parameter für die Transformation 15^{ten} Grades. Zwischen dieser Grösse ξ und $L(5)^6$ gilt aber nach Gleichung (452) die Beziehung

$$\xi^3 L(5)^{12} - (1+\xi^2)(1-9\xi-\xi^2)\,L(5)^6 + 125\,\xi = 0,$$

und es ist

$$\xi^2 L(5)^6 = \xi_2^3,$$

folglich erhält man die Gleichung

$$\xi\xi_2^6 - (1+\xi^2)(1-9\xi-\xi^2)\,\xi_2^3 + 125\,\xi^3 = 0, \tag{488}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (487)

$$\xi_1(1+\xi_1^3)\,\xi_2^4 + 9\xi_1^3\xi_2^3 + 9\xi_1\xi_2 - (1-125\xi_1^3) = 0. \tag{489}$$

Die zu ξ und ξ_2 complementären Parameter sind

$$\bar\xi = \frac{L(45)^3 L(3)^3}{L(15)^3 L(9)^3} \quad \text{und} \quad \bar\xi_2 = \frac{5}{\xi_2}, \tag{490}$$

folglich besteht zwischen $\bar\xi$ und ξ_2 die Gleichung

$$\bar\xi^3\xi_2^6 - (1+\bar\xi^2)(1-9\bar\xi-\bar\xi^2)\,\xi_2^3 + 125\,\bar\xi = 0. \tag{491}$$

Aus den Gleichungen (488) und (491) folgt

$$\xi_2^3 = \frac{-\xi^3 + \bar\xi(1-9\xi) - \bar\xi^2(\xi - 9\xi^2) + \bar\xi^3\xi^2}{\xi\bar\xi(1-\xi\bar\xi)}, \tag{492}$$

$$\left\{\begin{aligned} &[\xi^3 - \xi^2\bar\xi^2(\bar\xi+9) + \xi\bar\xi(\bar\xi+9) - \bar\xi] \\ &\times[\bar\xi^3 - \xi^2\bar\xi^2(\xi+9) + \xi\bar\xi(\xi+9) - \xi] \\ &- 125\,\xi^2\bar\xi^2(\xi\bar\xi-1)^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{493}$$

Aus der Gleichung (145) m. vor. Abh. für die Transformation 5^{ten} Grades findet man daher

$$\left\{\begin{aligned} J : J-1 : 1 = {} & (\xi_2^6 + 10\xi^2\xi_2^3 + 5\xi^4)^3 \\ & : (\xi_2^6 + 4\xi^2\xi_2^3 - \xi^4)^2(\xi_2^6 + 22\xi^2\xi_2^3 + 125\xi^4) \\ & : 1728\,\xi^{10}\,\xi_2^3, \end{aligned}\right. \tag{494}$$

$$\left\{\begin{aligned} \bar J : \bar J-1 : 1 = {} & (\bar\xi^4\xi_2^6 + 250\,\bar\xi^2\xi_2^3 + 3125)^3 \\ & : (\bar\xi^4\xi_2^6 - 500\,\bar\xi^2\xi_2^3 - 15625)^2(\bar\xi^4\xi_2^6 + 22\,\bar\xi^2\xi_2^3 + 125) \\ & : 1728\,\bar\xi^{10}\xi_2^{15}. \end{aligned}\right. \tag{495}$$

Somit sind J und $\bar J$ als rationale Functionen der beiden Parameter ξ und $\bar\xi$ dargestellt, wobei zwischen ξ und $\bar\xi$ die Gleichung (493) besteht.

XI. Abschnitt.

Transformation vom Grade $6a$.

§ 52.

Allgemeine Bemerkungen über die Transformation vom Grade $6a$.

Ist $n = 6a$ und a eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$, so wird $\varrho = a - 2$ und

$$\xi = L(2)^{\delta_1} L(3)^{\delta_2} L(6)^{\delta_3} L(a)^{\delta_4} L(2a)^{\delta_5} L(3a)^{\delta_6} L(6a)^{\delta_7}.$$

Daraus folgt

$$(496)\quad \begin{cases} -3a\delta_1 - 4a\delta_2 - 5a\delta_3 - 6(a-1)\delta_4 - 3(2a-1)\delta_5 \\ \qquad - 2(3a-1)\delta_6 - (6a-1)\delta_7 = 24k_0, \\ +3a\delta_1 - 2a\delta_2 - a\delta_3 - 3(a-1)\delta_4 - 3(a-2)\delta_5 \\ \qquad - (3a-1)\delta_6 - (3a-2)\delta_7 = 24k_1, \\ -a\delta_1 + 4a\delta_2 + a\delta_3 - 2(a-1)\delta_4 - (2a-1)\delta_5 \\ \qquad - 2(a-3)\delta_6 - (2a-3)\delta_7 = 24k_2, \\ +a\delta_1 + 2a\delta_2 + 5a\delta_3 - (a-1)\delta_4 - (a-2)\delta_5 \\ \qquad - (a-3)\delta_6 - (a-6)\delta_7 = 24k_3, \\ -3\delta_1 - 4\delta_2 - 5\delta_3 + 6(a-1)\delta_4 + 3(a-2)\delta_5 \\ \qquad + 2(a-3)\delta_6 + (a-6)\delta_7 = 24k_4, \\ +3\delta_1 - 2\delta_2 - \delta_3 + 3(a-1)\delta_4 + 3(2a-1)\delta_5 \\ \qquad + (a-3)\delta_6 + (2a-3)\delta_7 = 24k_5, \\ -\delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3 + 2(a-1)\delta_4 + (a-2)\delta_5 \\ \qquad + 2(3a-1)\delta_6 + (3a-2)\delta_7 = 24k_6, \\ +\delta_1 + 2\delta_2 + 5\delta_3 + (a-1)\delta_4 + (2a-1)\delta_5 \\ \qquad + (3a-1)\delta_6 + (6a-1)\delta_7 = 24k_7, \end{cases}$$

oder

$$(497)\quad \begin{cases} (a^2-1)\delta_1 = -(3a+2)k_0 + 2(3a-1)k_1 + (a-2)k_2 - 2(a+1)k_3 \\ \qquad + k_4 - 8k_5 - 3k_6, \\ (a^2-1)\delta_2 = -(2a+3)k_0 + (a-3)k_1 + 3(2a-1)k_2 - 3(a+1)k_3 \\ \qquad - k_4 - 4k_5 - 9k_6, \\ (a^2-1)\delta_3 = +(a+6)k_0 - 2(a-3)k_1 - 3(a-2)k_2 + 6(a+1)k_3 \\ \qquad + 5k_4 + 8k_5 + 9k_6, \\ (a^2-1)\delta_4 = -(a+6)k_0 - (a-3)k_1 - (a-2)k_2 - (a+1)k_3 \\ \qquad + 5ak_4 - 4ak_5 - 3ak_6, \end{cases}$$

$$(497)\begin{cases}(a^2-1)\delta_5=+(2a+3)k_0+2(a-3)k_1+(2a-1)k_2+2(a+1)k_3\\ \qquad -ak_4+8ak_5+3ak_6,\\ (a^2-1)\delta_6=+(3a+2)k_0+(3a-1)k_1+3(a-2)k_2+3(a+1)k_3\\ \qquad +ak_4+4ak_5+9ak_6,\\ (a^2-1)\delta_7=-(6a+1)k_0-2(3a-1)k_1-3(2a-1)k_2-6(a+1)k_3\\ \qquad -5ak_4-8ak_5-9ak_6.\end{cases}$$

Setzt man z. B.

$$\xi_1=\frac{L(6a)\,L(2)}{L(2a)\,L(6)},\quad \xi_2=\frac{L(3a)}{L(a)\,L(3)},\quad \xi_3=\frac{L(6a)^2\,L(a)\,L(3)\,L(2)^2}{L(3a)\,L(2a)^2\,L(6)^2},$$

so findet man bez. für

	$12k_0$	$12k_1$	$12k_2$	$12k_3$	$12k_4$	$12k_5$	$12k_6$	$12k_7$
ξ_1	$a-1$	$2(a-1)$	$-(a-1)$	$-2(a-1)$	$-(a-1)$	$-2(a-1)$	$a-1$	$2(a-1)$
ξ_2	$2(a-1)$	$a-1$	$-2(a-1)$	$-(a-1)$	$-2(a-1)$	$-(a-1)$	$2(a-1)$	$a-1$
ξ_3	0	$3(a-1)$	0	$-3(a-1)$	0	$-3(a-1)$	0	$3(a-1)$

§ 53.

Transformation vom Grade 30.

Für $n=30$ wird $a=5$ und $\varrho=3$. Die Gleichungen (497) gehen dann über in

$$(498)\begin{cases}24\delta_1=-17k_0+28k_1+3k_2-12k_3+k_4-8k_5-3k_6,\\ 24\delta_2=-13k_0+2k_1+27k_2-18k_3-k_4-4k_5-9k_6,\\ 24\delta_3=+11k_0-4k_1-9k_2+36k_3+5k_4+8k_5+9k_6,\\ 24\delta_4=-11k_0-2k_1-3k_2-6k_3+25k_4-20k_5-15k_6,\\ 24\delta_5=+13k_0+4k_1+9k_2+12k_3-5k_4+40k_5+15k_6,\\ 24\delta_6=+17k_0+14k_1+9k_2+18k_3+5k_4+20k_5+45k_6,\\ 24\delta_7=-31k_0-28k_1-27k_2-36k_3-25k_4-40k_5-45k_6.\end{cases}$$

Daraus findet man 2 L-Producte mit dem Charakter 2, nämlich

$$(499)\begin{cases}\xi_1=\dfrac{L(30)^2\,L(5)\,L(3)\,L(2)^2}{L(15)\,L(10)^2\,L(6)^2},\\ \xi_2=\dfrac{L(30)\,L(5)^2\,L(3)^2\,L(2)}{L(15)^2\,L(10)\,L(6)},\end{cases}$$

und eine grosse Anzahl von L-Producten mit dem Charakter 4. Es genügt, die folgenden hervorzuheben:

$$(500)\quad \left\{\begin{array}{ll} \xi_3 = \dfrac{L(30)\,L(15)\,L(2)}{L(10)\,L(6)\,L(5)\,L(3)}, & \xi_4 = \dfrac{L(10)^4}{L(5)^2\,L(2)^4}, \\ \xi_5 = \dfrac{L(30)^2\,L(3)^4}{L(15)^4\,L(6)^2}, & \xi_6 = \dfrac{L(10)^2}{L(5)^4\,L(2)^2}, \\ \xi_7 = \dfrac{L(30)^4\,L(3)^2}{L(15)^2\,L(6)^4}, & \xi_8 = \dfrac{L(10)}{L(5)\,L(2)^5}, \\ \xi_9 = \dfrac{L(30)^5\,L(3)}{L(15)^5\,L(6)}. & \end{array}\right.$$

Ausserdem sollen noch drei L-Producte mit dem Charakter 6 benutzt werden, nämlich

$$(501)\quad \xi_{10} = \frac{L(15)^3}{L(5)^3\,L(3)^3},\quad \xi_{11} = \frac{L(15)^2\,L(3)^2}{L(5)^2},\quad \xi_{12} = \frac{L(30)^2\,L(6)^2}{L(10)^2\,L(6)^2}.^{*)}$$

Dabei sind die Grössen

$$(502)\quad \xi_4 = \xi_1(10),\quad \xi_6 = \xi_2(10),\quad \xi_8 = \xi_3(10)$$

sicher Parameter, zwischen denen nach den Gleichungen (272a) die Relationen

$$(503)\quad \xi_4 = 1 - 4\xi_8,\quad \xi_6 = \frac{\xi_8}{1+\xi_8}$$

bestehen. Ebenso ist

$$(504)\quad \xi_{10} = \xi_1(15)$$

ein Parameter, während ξ_5, ξ_7, ξ_{11} und ξ_{12} schon deshalb Parameter sind, weil die Exponenten δ bei ihnen sämmtlich *gerade* sind. Daher ist auch

$$(505)\quad \xi_1 = \frac{\xi_3^2}{\xi_{10}}$$

ein Parameter, und dasselbe gilt von ξ_2, weil $\frac{1}{\xi_2} = \bar{\xi}_1$ der zu ξ_1 complementäre Parameter ist.

---

*) Die zugehörigen Werthe von $k_0, k_1, k_2, \ldots k_7$ ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}	ξ_{11}	ξ_{12}
k_0	0	−1	+1	0	+1	+3	0	+3	0	+2	−2	−1
k_1	+1	0	+1	−3	0	0	−1	−3	0	+1	−1	−2
k_2	0	+1	−1	0	+3	+1	0	+1	0	−2	+2	+1
k_3	−1	0	−1	−1	0	0	−3	−1	0	−1	+1	+2
k_4	0	+1	−1	0	−1	−3	0	0	−1	−2	−2	−1
k_5	−1	0	−1	+3	0	0	+1	0	+1	−1	−1	−2
k_6	0	−1	+1	0	−3	−1	0	0	−3	+2	+2	+1
k_7	+1	0	+1	+1	0	0	+3	0	+3	+1	+1	+2

Zwischen ξ_1 und ξ_2 besteht daher eine Gleichung von der Form

$$(a\xi_1^2 + b\xi_1 + c)\,\xi_2^2 + (a_1\xi_1^2 + b_1\xi_1 + c_1)\,\xi_2 + (a_2\xi_1^2 + b_2\xi_1 + c_2) = 0.$$

Durch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von $h^{\frac{1}{15}} = s$ findet man aber, wie zu erwarten war, dass sich diese Gleichung auf den *ersten* Grad in ξ_1 und ξ_2 reducirt. Es wird nämlich

$$\xi_2 = \frac{1 + \xi_1}{1 - \xi_1} \tag{506}$$

und

$$\xi_3 = \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\xi_1(1 - \xi_1)}{1 + \xi_1}, \quad \xi_{10} = \frac{\xi_1}{\xi_2^2} = \frac{\xi_1(1 - \xi_1)^2}{(1 + \xi_1)^2}. \tag{507}$$

Ferner besteht zwischen ξ_1 und ξ_8 die Gleichung

$$16\xi_1^3\xi_8^2 + 4(1 + 3\xi_1 + \xi_1^3 - \xi_1^4)\xi_8 - (1 - 2\xi_1 + 2\xi_1^3 - \xi_1^4) = 0, \tag{508}$$

oder

$$8\xi_1^3\xi_8 = -(1 + 3\xi_1 + \xi_1^3 - \xi_1^4) + w, \tag{508a}$$

wobei

$$\left\{\begin{aligned} w &= +\sqrt{1 + 6\xi_1 + 9\xi_1^2 + 6\xi_1^3 - 4\xi_1^4 - 6\xi_1^5 + 9\xi_1^6 - 6\xi_1^7 + \xi_1^8} \\ &= +\sqrt{(1 + \xi_1 - \xi_1^2)(1 + 4\xi_1 - \xi_1^2)(1 + \xi_1 + 2\xi_1^2 - \xi_1^3 + \xi_1^4)} \\ &= +4 + \cdots. \end{aligned}\right. \tag{509}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (503) kann man jetzt auch ξ_4 und ξ_6 rational durch ξ_1 und w darstellen.

Nun sind aber die zu ξ_4, ξ_6, ξ_8 complementären Parameter bez.

$$\bar{\xi}_4 = 5\xi_5, \quad \bar{\xi}_6 = \frac{\xi_7}{5}, \quad \bar{\xi}_8 = \frac{\xi_9}{4}, \tag{510}$$

während die zu ξ_1 und w complementären Grössen

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\xi_2} = \frac{1 - \xi_1}{1 + \xi_1} \quad \text{und} \quad \bar{w} = \frac{\pm 4w}{(1 + \xi_1)^4} \tag{511}$$

sind, folglich kann man auch ξ_5, ξ_7 und ξ_9 leicht als rationale Functionen von ξ_1 und w darstellen. Ferner findet man

$$\left\{\begin{aligned} 2\xi_1(1 - \xi_1^2)^2\xi_{11} = {} & (1 - \xi_1 + 5\xi_1^2 + 18\xi_1^3 - 5\xi_1^4 - \xi_1^5 - \xi_1^6) \\ & + (1 - 4\xi_1 - \xi_1^2)\,w \end{aligned}\right. \tag{512}$$

und für den zu ξ_{11} complementären Parameter

$$\bar{\xi}_{11} = \frac{9}{\xi_{12}}. \tag{513}$$

Deshalb lassen sich auch

$$(514)\quad \begin{cases} L(2)^{24} = \dfrac{\xi_4 \xi_6}{\xi_8^6}, \qquad L(5)^6 = \dfrac{\xi_4}{\xi_6^2}, \qquad L(10)^8 = \dfrac{\xi_4^3}{\xi_6 \xi_8^2}, \\ L(3)^{12} = \dfrac{\xi_2^4 \xi_{11}^3}{\xi_1^2}, \quad L(15)^{12} = \dfrac{\xi_2^4 \xi_7^2 \xi_{11}^3}{\xi_1^2 \xi_5^4}, \quad L(6)^{24} = \dfrac{\xi_4^5 \xi_5^2 \xi_{12}^6}{\xi_6 \xi_7^4 \xi_8^6}, \\ \qquad\qquad L(30)^{24} = \dfrac{\xi_4^5 \xi_7^4 \xi_{12}^6}{\xi_5^2 \xi_6 \xi_8^6} \end{cases}$$

als rationale Functionen von ξ_1 und w darstellen.

Schliesslich folgt aus Gleichung (274)

$$(515)\quad \begin{cases} J : J - 1 : 1 = (1 - 4\xi_8 + 16\xi_8^5 + 16\xi_8^6)^3 \\ \qquad : (1 + 4\xi_8^2)(1 - 2\xi_8 + 2\xi_8^2)^2 (1 - 2\xi_8 - 4\xi_8^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (1 - 2\xi_8 - 6\xi_8^2 - 8\xi_6^3 - 4\xi_8^4)^2 \\ \qquad : 1728\,\xi_8^{10}(1 - 4\xi_8)(1 + \xi_8)^2 \end{cases}$$

und

$$(516)\quad \begin{cases} \bar{J} : \bar{J} - 1 : 1 = (256 - 256\xi_9 + 4\xi_9^5 + \xi_9^6)^3 \\ \qquad : (4 + \xi_9^2)(8 - 2\xi_9 + \xi_9^2)^2 (4 - 2\xi_9 - \xi_9^2)^2 \\ \qquad\qquad \times (64 - 32\xi_9 - 24\xi_9^2 - 8\xi_9^3 - \xi_9^4) \\ \qquad : 1728\,\xi_9^{10}(1 - \xi_9)(4 + \xi_9)^2, \end{cases}$$

wobei ξ_8 und ξ_9 rationale Functionen von ξ_1 und w sind.

Hannover, im December 1887.

Ueber die Combinanten binärer Formensysteme, welche ebenen rationalen Curven zugeordnet sind.*)

Von

Wilhelm Gross in Ellwangen.

I. Allgemeines über die rationalen Curven.

§. 1.

Die erzeugenden Functionen.

Eine ebene rationale C_n sei in Dreieckscoordinaten gegeben durch die Gleichungen:

$$\varrho x_i = f_i(\overset{n}{\lambda}) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{in},$$
$$i = 1, 2, 3,$$

mit beliebigen, von einander unabhängigen Constanten $a_{i0}, a_{i1}, \ldots$. Die binäre Variable werde bald nicht homogen wie hier, bald homogen — λ_1, λ_2 — geschrieben; verschiedene Buchstaben λ, μ, ν sollen immer mehrere Reihen binärer Variablen bedeuten.

Die Eigenschaften einer solchen Curve, Punkte und Punktgruppen auf ihr, oder in der Ebene ausserhalb liegende und der Curve zugeordnete geometrische Gebilde sollen dann *invariant* heissen, wenn die in den Gleichungen dieser Eigenschaften, Punkte und sonstigen geometrischen Gebilde auftretenden algebraischen Formen invariant sind sowohl bei linearer Transformation der ternären Variablen x_1, x_2, x_3 und der zu denselben proportionalen Functionen $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$ („erste lineare Transformation"), als auch bei linearer Transformation der binären Variablen λ_1, λ_2, („zweite lineare Transformation").

---

*) Die folgenden Seiten bilden einen Auszug aus der Inaugural-Dissertation des Verf., mit gleichlautendem Titel, welche unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. Brill in Tübingen entstanden, und im Jahre 1887 im Druck (Stuttgart Gebr. Kröner) erschienen ist.

Die entsprechenden algebraischen Formen sind nun sämmtlich Combinanten im Sinne der binären Formentheorie*), nur enthalten unsere Combinanten im Unterschied von der bisherigen Definition dieses Begriffs auch ternäre Variablen, und zwar Punktcoordinaten, welche ebenso zu transformiren sind wie die ihnen proportionalen binären Formen $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$, und Liniencoordinaten, welche zu den Punktcoordinaten contragredient sind.

Die rein binären Combinanten der drei vorgelegten Formen $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$, d. h. diejenigen, welche keine ternären Variablen enthalten, sind nach einem bekannten Satz von Gordan**) insgesammt Invarianten der erzeugenden Function mit drei Reihen binärer Variablen

$$G = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \\ f_1(\nu) & f_2(\nu) & f_3(\nu) \end{vmatrix}.$$

Zu diesem Satz hat Herr Prof. Brill in einer Vorlesung des Wintersemesters 1885/86 einen einfachen Beweis gegeben, welcher sich auf die Ausführungen von Clebsch im Crelle'schen Journal, 59. Bd., p. 7—14, stützt und mit deren Hilfe zunächst zeigt, dass sämmtliche Combinanten ganze rationale homogene Functionen der $\binom{n+1}{3}$ Determinanten

$$(qrs) = \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{2q} & a_{3q} \\ a_{1r} & a_{2r} & a_{3r} \\ a_{1s} & a_{2s} & a_{3s} \end{vmatrix}$$

sein müssen, wo qrs alle Combinationen zu dreien aus den $n+1$ Zahlen $0, 1, 2 \ldots n$ durchläuft.

Analog findet man nun für das erweiterte, auch Formen mit ternären Variablen enthaltende System der Combinanten, welche der rationalen C_n zugeordnet sind: Wenn in diesen Combinanten höchstens g Reihen von Punktcoordinaten $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots$ $i = 1, 2, 3$, und höchstens h Reihen von Liniencoordinaten $u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \ldots$, $i = 1, 2, 3$, vorkommen sollen, so sind sie alle binäre simultane Invarianten folgender erzeugender Functionen:

$$1) \text{ der Function } G = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \\ f_1(\nu) & f_2(\nu) & f_3(\nu) \end{vmatrix},$$

$$2) \text{ der Functionen } G_1(x^{(\varrho)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \\ x_1^{(\varrho)} & x_2^{(\varrho)} & x_3^{(\varrho)} \end{vmatrix},$$

$$\varrho = 1, 2, \cdots g,$$

*) Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen, 2. Aufl., p. 209.

**) Mathematische Annalen, Bd. V.

3) der Functionen $G_2(x^{(\varrho_m)}, x^{(\varrho_n)}) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ x_1^{(\varrho_m)} & x_2^{(\varrho_m)} & x_3^{(\varrho_m)} \\ x_1^{(\varrho_n)} & x_2^{(\varrho_n)} & x_3^{(\varrho_n)} \end{vmatrix}$,

$$\varrho_m, \varrho_n = 1, 2;\ 1, 3;\ \cdots;\ g-1, g,$$

4) der Functionen $G_2(u^{(\sigma)}) = u_1^{(\sigma)} f_1(\lambda) + u_2^{(\sigma)} f_2(\lambda) + u_3^{(\sigma)} f_3(\lambda)$,

$$\sigma = 1, 2, \cdots h.$$

Ausserdem sind sie algebraisch zusammengesetzt mit den ternären identischen Covarianten, nämlich

5) mit $(x^{(\varrho_m)} x^{(\varrho_n)} x^{(\varrho_p)}) = \begin{vmatrix} x_1^{(\varrho_m)} & x_2^{(\varrho_m)} & x_3^{(\varrho_m)} \\ x_1^{(\varrho_n)} & x_2^{(\varrho_n)} & x_3^{(\varrho_n)} \\ x_1^{(\varrho_p)} & x_2^{(\varrho_p)} & x_3^{(\varrho_p)} \end{vmatrix}$,

$$\varrho_m, \varrho_n, \varrho_p = 1, 2, 3;\ 1, 2, 4;\ \cdots;\ g-2, g-1, g,$$

6) mit $u^{(\sigma)}_{x^{(\varrho)}} = u_1^{(\sigma)} x_1^{(\varrho)} + u_2^{(\sigma)} x_2^{(\varrho)} + u_3^{(\sigma)} x_3^{(\varrho)}$,

$$\varrho = 1, 2, \cdots g;\ \sigma = 1, 2, \cdots h.$$

Umgekehrt ist jede binäre simultane In- oder Covariante der viererlei erzeugenden Functionen — und passend eingerichtete algebraische Function der ternären identischen Covarianten — zugleich auch invariant für die erste lineare Transformation, d. h. sie ist eine der rationalen C_n zugeordnete Combinante.

Zu den Determinanten vom Typus (qrs) treten nämlich jetzt noch „einfach geränderte" Determinanten vom Typus

$$(qrx) = \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{2q} & a_{3q} \\ a_{1r} & a_{2r} & a_{3r} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix},$$

„doppelt geränderte" Determinanten vom Typus

$$(qxx') = \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{2q} & a_{3q} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix},$$

Ausdrücke vom Typus $a_{1q}u_1 + a_{2q}u_2 + a_{3q}u_3$, sowie die ternären identischen Covarianten hinzu.

Bei der ersten linearen Transformation verhalten sich die Reihen von Punktcoordinaten $x_1, x_2, x_3;\ x_1', x_2', x_3';\ \ldots$ ebenso wie die dreigliedrigen Reihen $a_{10}, a_{20}, a_{30};\ a_{11}, a_{21}, a_{31};\ \ldots$, welche aus den Coefficienten der Functionen $f_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$ gebildet sind, die Liniencoordinaten bilden contragrediente Reihen.

Die zweite lineare Transformation hat auf die ternären Coordinaten gar keinen Einfluss. Das System der einfach geränderten Combinanten mit nur einer Reihe von Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3 oder das System der Invarianten von $G_1(x) = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) & f_3(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) & f_3(\mu) \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}$ entspricht vollständig dem System der rein binären Combinanten von zwei Formen n^{ter} Ordnung $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, oder dem System der Invarianten von $g_1 = \begin{vmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) \\ f_1(\mu) & f_2(\mu) \end{vmatrix}$ *). Für die einfach geränderten Combinanten gelten dieselben Regeln über das Gewicht und die Differentialgleichungen, welche für binäre simultane Invarianten zweier binären Formen n^{ter} Ordnung gelten.

Die doppelt geränderte Form G_2 verhält sich als binäre Form ebenso wie die Form n^{ter} Ordnung $f_1(\lambda)$.

§ 2.

Die elementaren Combinanten.

Aus G und G_1 bilden wir:

$$G = (-1)^{n-1} (\mu - \nu)(\nu - \lambda)(\lambda - \mu) G',$$
$$G_1 = (\lambda - \mu) G_1'.$$

Wenn man die Formen mit mehreren Reihen binärer Variablen G' und G_1' in bekannter Weise**) in Reihen entwickelt, welche nach aufsteigenden Potenzen der binären identischen Covarianten $(\mu\nu)$, $(\nu\lambda)$, $(\lambda\mu)$ fortschreiten, so erhält man als Coefficienten in diesen Reihen die binären Polaren von Functionen mit nur einer Reihe binärer Variablen. Diese letzteren Functionen heissen die *ungeränderten*, beziehungsweise die *einfach geränderten elementaren Combinanten* der rationalen C_n. Nimmt man hierzu noch die Formen vom Typus G_2 als *zweifach geränderte elementare Combinanten*, und bemerkt, dass G' und G_1' binäre simultane Covarianten der in ihrer Entwicklung auftretenden elementaren Combinanten sind, so hat man den Satz:

Alle, bei einer rationalen C_n auftretenden, für beide lineare Transformationen invarianten, algebraischen Formen sind binäre simultane In- oder Covarianten der elementaren Combinanten; und jede binäre simultane In- oder Covariante der letzteren ist invariant für beide

*) Die Bildung „geränderter" Formen aus ungeränderten hat Herr Franz Meyer in Untersuchung gezogen: Franz Meyer, Apolarität und rationale Curven, p. 18—25.

**) Gordan, Math. Annalen, Bd. III, p. 381. — Clebsch, Theorie der binären Formen § 10. — Gordan, Ueber das Formensystem binärer Formen, § 2.

lineare Transformationen. Ausserdem treten noch die Ausdrücke vom Typus $(x x' x'')$ *und* $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ *auf.*

Das System der Combinanten, welche eine vorgegebene endliche Anzahl von Reihen ternärer Variablen enthalten dürfen und der rationalen C_n zugeordnet sein sollen, ist also ein endliches. Es wird dadurch gewonnen, dass man die elementaren Combinanten bildet, dieselben mit den vorgegebenen Reihen ternärer Variablen anschreibt, und nun mit Hilfe derselben alle möglichen von einander unabhängigen Ueberschiebungen und binären Polaren bildet.*)

Es giebt noch zwei andere Wege zur Herleitung der elementaren Combinanten. Einmal kommen vermöge des Apolaritätsprincips**) zu den obigen erzeugenden Functionen noch andere, indirecte, erzeugende Functionen hinzu. Neben die directe, mit 3 Reihen binärer Variablen geschriebene, erzeugende Function der ungeränderten Combinanten tritt eine indirecte erzeugende Function mit $n-2$ Reihen binärer Variablen

$$\Gamma = \pm (\lambda \mu) \cdots \Gamma'.$$

Neben die directe, mit 2 Reihen binärer Variablen geschriebene, erzeugende Function der einfach geränderten Combinanten tritt eine indirecte erzeugende Function mit $n-1$ Reihen binärer Variablen

$$\Gamma_1 = \pm (\lambda \mu) \cdots \Gamma_1'.$$

Und neben die directe, mit einer Reihe binärer Variablen geschriebene erzeugende Function G_2 der zweifach geränderten Combinanten tritt eine indirecte erzeugende Function mit n Reihen binärer Variablen, welche aus der binären Polare $f_\lambda f_\mu f_\nu \ldots f_\tau$ von

$$f_\lambda^n = (f_1 \lambda_1 + f_2 \lambda_2)^n = f(\overset{n}{\lambda})$$

durch zweifache Ränderung entsteht und mit Γ_2' zu bezeichnen ist.

Reihenentwicklungen von Γ' und Γ_1' liefern wieder die ungeränderten und einfach geränderten elementaren Combinanten.

Ausserdem aber, und zwar am einfachsten, kann man die elementaren Combinanten mittelst der Regeln über Gewicht und Differential-

---

*) Der in den letzten Sätzen enthaltene Gedanke ist von Herrn Study ausgesprochen in den Berichten der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-Physische Classe, 38. Bd., p. 4 f. Doch dürfte obige ausführlichere Darstellung auch selbständigen Werth besitzen. Das zweite Capitel enthält eine systematische Anwendung der hiermit aufgestellten Methode auf die ebene rationale C_3 (Fall $n=3$, $m=3$ bei Study).

**) Ueber den Satz von Brill-Stephanos, betreffend die Combinanten apolarer Systeme, siehe: Brill, Math. Annalen, Bd. XX. — Stephanos, Faisceaux de formes binaires, ayant une même jacobienne (Mémoires présentés par divers savants. Paris 1883, p. 18 ff.). — Franz Meyer, Apolarität u. r. C. — Stroh, Math. Annalen, Bd. XXII.

gleichungen, denen sie als binäre simultane Invarianten der drei Formen $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ genügen müssen, ableiten. Ihre Ordnungszahlen sind aus der Tabelle von Hrn. Stroh*) zu entnehmen.

§ 3.

Zugeordnete Curvenschaaren. Das Einsetzen.

Unter den nach Obigem aufzustellenden und geometrisch zu interpretirenden Formen einer rationalen C_n sind solche vom Typus $\varphi(\overset{p}{\overline{x_1, x_2, x_3}}; \overset{q}{\overline{\lambda_1, \lambda_2}})$, d. h. solche, welche an Variablen nur eine Reihe von Punktcoordinaten zur p^{ten} und eine Reihe von binären Variablen zur q^{ten} Ordnung enthalten. Das durch die Gleichung $\varphi(\overset{p}{\overline{x_1, x_2, x_3}}; \overset{q}{\overline{\lambda_1, \lambda_2}}) = 0$ dargestellte geometrische Gebilde ist eine Schaar von Curven p^{ter} Ordnung mit Parameter λ, wobei die Curven der Schaar den Punkten der rationalen C_n eindeutig zugeordnet sind. Durch jeden Punkt in der Ebene gehen q Curven der Schaar, oder die Schaar ist „von der q^{ten} Classe.“ Ebenso stellt eine Combinante vom Typus $\varphi(\overset{p}{\overline{u_1, u_2, u_3}}; \overset{q}{\overline{\lambda_1, \lambda_2}})$, gleich Null gesetzt, eine Schaar q^{ter} Ordnung von Curven p^{ter} Classe dar.

Weitere Beziehungen solcher Curvenschaaren zu der rationalen C_n werden dadurch gefunden, dass man in den Combinanten die Punktcoordinaten x_i beziehungsweise durch die Functionen $f_i(\mu)$, $i = 1, 2, 3$, und die Liniencoordinaten u_i beziehungsweise durch die Functionen

$$F_i(\overset{2n-2}{\overline{\mu_1, \mu_2}}) = \frac{\partial f_k}{\partial \mu_1}\frac{\partial f_l}{\partial \mu_2} - \frac{\partial f_l}{\partial \mu_1}\frac{\partial f_k}{\partial \mu_2},$$
$$i, k, l = 1, 2, 3;\ \ 2, 3, 1;\ \ 3, 1, 2,$$

ersetzt. Die geometrische Bedeutung dieser Operationen ist klar. Im ersteren Fall erhält man die Schnittpunkte einer Curve λ einer Schaar mit der rationalen C_n, oder die durch einen Punkt μ der C_n gehenden Curven der Schaar. Hat die entstehende Combinante $\psi(\overset{q}{\overline{\lambda_1, \lambda_2}}; \overset{n\cdot p}{\overline{\mu_1, \mu_2}})$ den Factor $(\lambda\mu)$, so liegt jeder Punkt λ der rationalen C_n auf der ihm zugeordneten Curve der Schaar, die Schaar heisst eine erzeugende**). Enthält aber die Combinante ψ eine höhere Potenz von $(\lambda\mu)$ als Factor, so hat die einem Punkt λ der rationalen C_n zugeordnete Curve der Schaar in diesem Punkt λ zwei- oder mehrpunktige

*) Math. Annalen, Bd. XXII, p. 404.

**) Vergl. Brill, Ueber rationale Curven und Regelflächen, Math.-physicalische Classe der Münchener Academie, Mai 1885. — Franz Meyer, Ueber die Reducibilität von Gleichungen, ebend. 1885.

Berührung mit der rationalen C_n, und von den durch einen Punkt μ der rationalen C_n gehenden Curven der Schaar fallen zwei oder mehr zusammen, und bilden diejenige Curve, welche dem Punkt μ zugeordnet ist. Die rationale C_n wird von der Curvenschaar eingehüllt.

Die Operation des Einsetzens lässt sich noch allgemeiner anwenden. Statt der Punktcoordinaten kann man in eine Combinante drei Functionen einsetzen, welche den Punktcoordinaten irgend einer zur rationalen C_n invarianten rationalen Ordnungscurve proportional sind, statt der Liniencoordinaten drei Functionen, welche den Liniencoordinaten irgend einer solchen Classencurve proportional sind. Immer wird man wieder eine Combinante erhalten. Und nicht nur Functionen mit einer, sondern auch solche mit mehreren Reihen binärer Variablen, können an die Stelle der ternären Variablen gesetzt werden.

II. Die rationalen Curven dritter Ordnung mit Zugrundlegung der erzeugenden Functionen und elementaren Combinanten.

§ 1.

Die dreireihigen Determinanten, erzeugenden Functionen und elementaren Combinanten.

Der laufende Punkt λ einer $C_3{}^4$ ist gegeben durch die Gleichungen

$$\varrho x_i = f_i(\overline{\lambda_1, \lambda_2}^{3}) = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3},$$
$$i = 1, 2, 3,$$

die laufende Tangente λ durch die Gleichungen

$$\sigma u_i = F_i(\overline{\lambda_1, \lambda_2}^{4}) = \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_1}\frac{\partial f_l}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial f_l}{\partial \lambda_1}\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_2},$$
$$i, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2.$$

Die auftretenden dreireihigen Determinanten und analogen Functionen der Liniencoordinaten sind

$a_3 = (012)$	$A_1 = (01x)$		$\alpha_0 = \sum_i a_{i0} u_i$
$a_4 = (013)$	$A_2 = (02x)$		$\alpha_1 = \sum_i a_{i1} u_i$
$a_5 = (023)$	$A_3 = (03x)$	$B_3 = (12x)$	$\alpha_2 = \sum_i a_{i2} u_i$
$a_6 = (123)$	$A_4 = (13x)$		$\alpha_3 = \sum_i a_{i3} u_i$
	$A_5 = (23x)$		$i = 1, 2, 3.$

Die directen erzeugenden Functionen sind:

$$
\begin{aligned}
G' &= a_3 \lambda\mu\nu + a_4(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) + a_5(\lambda + \mu + \nu) + a_6,\\
G_1' &= (A_1\mu^2 + A_2 \mu + A_3)\,\lambda^2\\
&\quad + (A_2\mu^2 + (A_3 + B_3)\,\mu + A_4)\,\lambda\\
&\quad + (A_3\mu^2 + A_4 \mu + A_5),\\
G_2 &= \alpha_0\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3 = \alpha_\lambda{}^3.
\end{aligned}
$$

Die indirecten erzeugenden Functionen:

$$
\begin{aligned}
\Gamma' &= a_3\lambda^3 + 3a_4\lambda^2 + 3a_5\lambda + a_6,\\
\Gamma_1' &= (3A_1\mu^2 + 3A_2 \mu + B_3)\,\lambda^2\\
&\quad + (3A_2\mu^2 + (9A_3 + B_3)\,\mu + 3A_4)\,\lambda\\
&\quad + (B_3\mu^2 + 3A_4 \mu + 3A_5),\\
\Gamma_2' &= \alpha_0\lambda\mu\nu + {}^1\!/_3\alpha_1(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) + {}^1\!/_3\alpha_2(\lambda + \mu + \nu) + \alpha_3\\
&= \alpha_\lambda\alpha_\mu\alpha_\nu \text{ (Polare von } G_2 = \alpha_\lambda{}^3).
\end{aligned}
$$

Die elementaren Combinanten sind:

$$
\begin{aligned}
w_\lambda{}^3 &= w_0\lambda^3 + w_1\lambda^2 + w_2\lambda + w_3\\
&= a_3\lambda^3 + 3a_4\lambda^2 + 3a_5\lambda + a_6,\\
W_\lambda{}^4 &= W_0\lambda^4 + W_1\lambda^3 + W_2\lambda^2 + W_3\lambda + W_4\\
&= A_1\lambda^4 + 2A_2\lambda^3 + (3A_3 + B_3)\,\lambda^2 + 2A_4\lambda + A_5,\\
Q &= 3A_3 - B_3,\\
\alpha_\lambda{}^3 &= \alpha_0\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3,\\
&(u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3).
\end{aligned}
$$

Die einfach geränderten erzeugenden Functionen geben, in eine Reihe entwickelt:

$$G_1' = W_\lambda{}^2 W_\mu{}^2 + \frac{1}{6}\,Q(\lambda\mu)^2 \text{*)},$$

$$\Gamma_1' = 3\,W_\lambda{}^2 W_\mu{}^2 - \frac{1}{2}\,Q(\lambda\mu)^2.$$

Ich stelle die einfachsten und wichtigsten Combinanten sammt ihrer geometrischen Bedeutung tabellarisch zusammen. Eine vollständigere Aufzählung der untersuchten Formen ist in der eingangs genannten Inauguraldissertation gegeben. Wir bezeichnen im folgenden durch:

*) Stephanos, l. c. pag. 39.

$\overset{p}{\varphi}(a_{ik})$, $\overset{p}{\varphi}(a)$, u. s. w. ganze homogene Functionen p^{ter} Ordnung, und zwar durch

$\overset{p}{\varphi}(a_{ik})$ e. F. der Coefficienten a_{ik} $(i = 1, 2, 3,\ k = 0, 1, 2, 3)$ der Functionen $\overset{3}{f_i}(\lambda)$;

$\overset{p}{\varphi}(a)$ e. F. der Determinanten a_3, a_4, a_5, a_6;

$\varphi(\overset{p}{\overline{A, B}})$ e. F. der Determinanten $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, B_3$;

$\overset{p}{\varphi}(x)$ (auch z. B. $\overset{p}{W}(x)$), e. F. der Variablen x_1, x_2, x_3;

$\overset{p}{\varphi}(\alpha)$ e. F. der Ausdrücke $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;

$\overset{p}{\varphi}(\lambda)$ e. F. der binären Variablen λ_1, λ_2.

§ 2.

Ungemischte Formen.

a) In- und Covarianten von w_λ^3.*)

Bezeichnung	Der Form, gleich Null gesetzt, entspricht
$w_\lambda^3 = \Gamma'$	Die drei Wendepunkte.
$w_\lambda w_\mu w_\nu = G'$	Die Bedingung, dass die drei Punkte λ, μ, ν auf einer Geraden liegen.
$h_\lambda^2 = {}^1/_2 (ww')^2 w_\lambda w_\lambda'$	Die zwei Parameter des Doppelpunkts.
$q_\lambda^3 = 2(wh)\, w_\lambda^2 h_\lambda$	Die drei conjugirten Punkte der Wendepunkte.

$d = -2(hh')^2$, Discriminante von h_λ^2 und w_λ^3.

*) Vergl.: Igel, Ebene Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, Math. Annalen, Bd. VI. — H. Rosenow, die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, Inauguraldissertation. Leipzig 1873.

b) Q und das System von W_λ^4.

Bezeichnung	Durch Einsetzen entsteht*)	Der Form, gleich Null gesetzt, entspricht	Bemerkungen
$Q = \varphi(\overset{1}{\overline{A, B}})$	$\psi(\overset{1}{a}, \overset{3}{\lambda}) = -w_\lambda^3$ $x_i = f_i(\lambda)$	Die Wendegerade**)	
$G_1' = \varphi(\overset{1}{\overline{A, B}}; \overset{2}{\lambda}; \overset{2}{\mu})$	$\psi(\overset{1}{a}; \overset{2}{\lambda}; \overset{2}{\mu}; \overset{3}{\nu}) =$ $= (\lambda\nu)(\mu\nu)\, w_\lambda w_\mu w_\nu$ $x_i = f_i(\nu)$	Verbindungslinie der zwei Curvenpunkte λ und μ.	
$W_\lambda^4 = \varphi(\overset{1}{\overline{A, B}}; \overset{4}{\lambda})$	$\psi(\overset{1}{a}; \overset{4}{\lambda}; \overset{3}{\mu}) = (\lambda\mu)^2 w_\lambda^2 w_\mu$ $x_i = f_i(\mu)$	Tangente der C_3^4 im Punkte λ, die C_3^4 als Classencurve	
$H_\lambda^4 = 6(WW')^2\, W_\lambda^2\, W_\lambda'^2$ $= \varphi(\overset{2}{\overline{A, B}}; \overset{4}{\lambda})$	$-(\lambda\mu)^2\, \psi'(\overset{2}{a}; \overset{2}{\lambda}; \overset{4}{\mu}) =$ $= -(\lambda\mu)^2 \{6 w_\lambda w_\mu^2 w_\lambda' w_\mu'^2$ $- 5 w_\lambda^2 w_\mu w_\mu'^2$ $+ 3 h_\mu^2 (\lambda\mu)^2\}$ $x_i = f_i(\mu)$	Eine die C_3^4 einhüllende Schaar vierter Classe von Curven zweiter Ordnung	Vergl. n_λ^2, S. 146
$Q^3 - 6(HW'')^4$ $= 54\,C = \varphi(\overset{3}{\overline{A, B}})$	0 $x_i = f_i(\lambda)$	Die rationale C_3 (Gleichung in Punktcoordinaten)	— C ist die Determinante der Coefficienten von G_1'***)
$54\,C' = \frac{54}{3} \sum_i \frac{\partial C}{\partial x_i}\, x_i'$, $i = 1, 2, 3$ $= Q(x)\, Q(x)\, Q(x')$ $- 6(H(x), W(x'))_4$ $= \varphi(\overset{2}{x}; \overset{1}{x'})$	$\psi(\overset{3}{a}; \overset{6}{\lambda}; \overset{3}{\mu}) =$ $= -18 h_\lambda^2 w_\lambda^2 w_\mu (\lambda\mu)^2$ $x_i = f_i(\lambda)$ $x_i' = f_i(\mu)$	Die Polarkegelschnitte	Ternäre Polare durch binäre Operationen dargestellt

*) Vergl. S. 141.

**) Franz Meyer, Apolarität u. R. C. p. 25. — Vergl. ferner für das Folgende: W. Stahl, Rationale ebene Curven 4. Ordnung, Crelle's J. Bd. 101, p. 303, ff.

***) Franz Meyer, Ap. u. R. C. p. 17 ff. — Baltzer, Determinanten, 3. Aufl., § 11, 15.

c) Das System von α_λ^3.

Bezeichnung	Durch Einsetzen entsteht	Der Form, gleich Null gesetzt, entspricht	Bemerkungen
$G_2 = \alpha_\lambda^3 = \varphi(\overset{1}{\alpha}; \overset{3}{\lambda})$	$\psi(\overset{1}{a}; \overset{3}{\lambda}; \overset{4}{\mu}) = (\lambda\mu)^2 w_\lambda w_\mu^2$ $u_i = F_i(\overset{4}{\mu})$	Punkt λ der C_3^4; die C_3^4 als Ordnungscurve	
$\alpha_\lambda^2 \alpha_\mu = \varphi(\overset{1}{\alpha}; \overset{2}{\lambda}; \overset{1}{\mu})$	$\psi(\overset{1}{a}; \overset{2}{\lambda}; \overset{1}{\mu}; \overset{4}{\nu}) =$ $= (\lambda\nu)\left\{\frac{2}{3} w_\lambda w_\nu^2 (\mu\nu) + \frac{1}{3} w_\mu w_\nu^2 (\lambda\nu)\right\}$ $u_i = F_i(\nu)$	1) Eine Schaar von Ordnungskegelschnitten mit Parameter μ; jeder Kegelschnitt erzeugt die C_3^4 als Classencurve 2) eine Schaar von Geraden mit Parameter λ	Die $C_2 M$ der Schaar fällt zusammen mit der C_2: $H_\lambda^4 - 2W_\lambda^4 Q = 0$ Die Gerade Λ der Schaar fällt zusammen mit der Geraden $W_\lambda^4 = 0$.
$\Delta_\lambda^2 = \frac{9}{2} (\alpha\alpha')^2 \alpha_\lambda \alpha'_\lambda$ $= \varphi(\overset{2}{\alpha}; \overset{2}{\lambda})$	$\psi(\overset{2}{a}; \overset{2}{\lambda}; \overset{3}{\mu}) =$ $= -(\lambda\mu)^2 w_\mu^3 w_\mu'^3$ $u_i = F_i(\mu)$	Einhüllende Kegelschnittschaar. Jeder Kegelschnitt d. S. berührt die drei Wendetangenten.	Durch Transformation auf Punktcoordinaten erhält man als Gleichung der Schaar $H_\lambda^4 - 2W_\lambda^4 Q = 0$
$P = 2(\Delta\Delta')^2 = \varphi(\overset{4}{\alpha})$	0 $u_i = F_i(\lambda)$	Die C_3^4 als Classencurve	

§ 3.

Formen, welche aus geränderten und aus ungeränderten Determinanten gemischt sind.

Bezeichnung	Durch Einsetzen entsteht	Der Form, gleich Null gesetzt, entspricht	Bemerkungen
$s_\lambda = \frac{2}{3} (Ww)^3 W_\lambda$ $= \varphi(\overset{1}{\alpha}; \overline{\overset{1}{A}, B}; \overset{1}{\lambda})$	$\psi(\overset{2}{a}; \overset{1}{\lambda}; \overset{3}{\mu}) = (\lambda\mu)\, h_\mu^2$ $x_i = f_i(\mu)$	Strahlenbüschel aus dem Doppelpunkt	
$n_\lambda^2 = 3(\alpha w)^2 \alpha_\lambda w_\lambda$ $= \varphi(\overset{1}{a}; \overset{1}{\alpha}; \overset{2}{\lambda})$	$\psi(\overset{2}{a}; \overset{2}{\lambda}; \overset{4}{\mu}) =$ $= 6 w_\lambda w_\mu^2 w_\lambda' w_\mu'^2$ $- 5 w_\lambda^2 w_\mu w_\mu'^3$ $+ 3 h_\mu^2 (\lambda\mu)^2$ $u_i = F_i(\mu)$	Der Cayley'sche Kegelschnitt als Ordnungscurve	Die Form ψ ist identisch mit der bei H_λ^4 auftretenden Form ψ'

Bezeichnung	Durch Einsetzen entsteht	Der Form, gleich Null gesetzt, entspricht	Bemerkungen
$\alpha_{H_\lambda}^3 = 6(\alpha h)\,\alpha_\lambda^2 h_\lambda$ $= \varphi(\overset{2}{a};\overset{1}{\alpha};\overset{3}{\lambda})$ $= \sum_i u_i \varphi_i(\overset{2}{a};\overset{1}{a_{ik}};\overset{3}{\lambda})$ $i = 1, 2, 3$	$\psi(\overset{3}{a};\overset{3}{\lambda};\overset{4}{\mu})$ $= (\lambda\mu)\left\{2h_\mu^2 w_\lambda^2 w_\mu + \frac{1}{2} h_\lambda h_\mu w_\lambda w_\mu^2\right\}$ $u_i = F_i(\mu)$	Hesse'sche Curve. Die Hesse'sche als Ordnungscurve „erzeugt" die ursprüngliche C_3^4 als Classencurve	Die Determinante des Polarkegelschnitts $C' = 0$ verschwindet, wenn in C' die x_i' bezw. durch $\varphi_i(\overset{2}{a};\overset{1}{a_{ik}};\overset{3}{\lambda})$ ersetzt werden
$p_2 = (q\alpha)^3 = \varphi(\overset{3}{a};\overset{1}{\alpha})$	$\psi(\overset{4}{a};\overset{4}{\lambda}) = 2h_\lambda^2 h_\lambda'^2$ $u_i = F_i(\lambda)$	Der Doppelpunkt	

Ueber das Büschel derjenigen Kegelschnitte, welche die Tangenten des Doppelpunktes in deren Schnittpunkten mit der Wendegeraden berühren, und die zugehörigen Formen, s. d. Inauguraldissertation d. Verf.

III. Beiträge zur Theorie der rationalen Curven vierter Ordnung.

§ 1.

Die dreireihigen Determinanten und die elementaren Combinanten.

Wir setzen hier wieder:

$$\varrho x_i = f_i(\overline{\lambda_1, \lambda_2}^{4}) = a_{i0}\lambda^4 + a_{i1}\lambda^3 + a_{i2}\lambda^2 + a_{i3}\lambda + a_{i4},$$
$$i = 1, 2, 3,$$

und

$$\sigma u_i = F_i(\overline{\lambda_1, \lambda_2}^{6}) = \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_1}\frac{\partial f_l}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial f_l}{\partial \lambda_1}\frac{\partial f_k}{\partial \lambda_2},$$
$$i, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2.$$

Die dreireihigen Determinanten und analogen Functionen der Liniencoordinaten sind:

$$
\begin{array}{lllll}
a_3 = (012) & & A_1 = (01x) & & \\
a_4 = (013) & & A_2 = (02x) & & \alpha_0 = \sum a_{i0} u_i \\
a_5 = (023) & b_5 = (014) & A_3 = (03x) & B_3 = (12x) & \alpha_1 = \sum a_{i1} u_i \\
a_6 = (123) & b_6 = (024) & A_4 = (04x) & B_4 = (13x) & \alpha_2 = \sum a_{i2} u_i \\
a_7 = (124) & b_7 = (034) & A_5 = (14x) & B_5 = (23x) & \alpha_3 = \sum a_{i3} u_i \\
a_8 = (134) & & A_6 = (24x) & & \alpha_4 = \sum a_{i4} u_i \\
a_9 = (234) & & A_7 = (34x) & & i = 1, 2, 3.
\end{array}
$$

Die elementaren Combinanten sind:

$$
\begin{aligned}
w_\lambda^6 &= w_0 \lambda^6 + w_1 \lambda^5 + w_2 \lambda^4 + w_3 \lambda^3 + w_4 \lambda^2 + w_5 \lambda + w_6 \\
&= a_3 \lambda^6 + 3 a_4 \lambda^5 + (3 a_5 + 6 b_5) \lambda^4 + (a_6 + 8 b_6) \lambda^3 \\
&\qquad + (3 a_7 + 6 b_7) \lambda^2 + 3 a_8 \lambda + a_9 \\
q_\lambda^2 &= q_0 \lambda^2 + q_1 \lambda + q_2 = (a_5 - 3 b_5) \lambda^2 + (a_6 - 2 b_6) \lambda + (a_7 - 3 b_7) \\
W_\lambda^6 &= W_0 \lambda^6 + W_1 \lambda^5 + W_2 \lambda^4 + W_3 \lambda^3 + W_4 \lambda^2 + W_5 \lambda + W_6 \\
&= A_1 \lambda^6 + 2 A_2 \lambda^5 + (3 A_3 + B_3) \lambda^4 + (4 A_4 + 2 B_4) \lambda^3 \\
&\qquad + (3 A_5 + B_5) \lambda^2 + 2 A_6 \lambda + A_7 \\
Q_\lambda^2 &= Q_0 \lambda^2 + Q_1 \lambda + Q_2 \\
&= (2 A_3 - B_3) \lambda^2 + (8 A_4 - B_4) \lambda + (2 A_5 - B_5) \\
\alpha_\lambda^4 &= \alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda + \alpha_4
\end{aligned}
$$

mit theils bekannter, theils leicht abzuleitender geometrischer Bedeutung.

§ 2.

Das Kegelschnittbüschel $A + \beta B = 0$.

Es giebt nur zwei Combinanten vom Typus $\varphi(\overline{a, b}^{\,2}; \overline{\lambda_1, \lambda_2}^{\,8})$, nämlich

$$w_\lambda^6 \cdot q_\lambda^2 = w_0 q_0 \lambda^8 + \cdots = a_3 (a_5 - 3 b_5) \lambda^8 + \cdots$$

und

$$
\begin{aligned}
h_\lambda^8 &= 10 (w w')^2 w_\lambda^4 w_\lambda'^4 = \frac{1}{9} (12 w_0 w_2 - 5 w_1^2) \lambda^8 + \cdots \\
&= (4 a_3 a_5 + 8 a_3 b_5 - 5 a_4^2) \lambda^8 + \cdots .
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $h_\lambda^8 + \alpha w_\lambda^6 q_\lambda^2 = 0$, mit willkürlichem Zahlencoefficienten α, stellt ein invariantes Büschel von Punktgruppen achter Ordnung auf der C_4^6 dar.

Ferner giebt es nur zwei Combinanten vom Typus $\varphi(\overline{A, B}^{\,2})$, nämlich die Ueberschiebungen

$$A = 60(WW')^6 = 120\, W_0 W_6 - 20\, W_1 W_5 + 8\, W_2 W_4 - 3\, W_3^2,$$

m. Eins. v. $x_i = f_i(\lambda) : \psi(\overset{2}{\overline{a, b}}; \overset{8}{\overline{\lambda_1, \lambda_2}}) = \frac{4}{5}(3h_\lambda^8 - 2w_\lambda^6 q_\lambda^2)$

und

$$B = 2(QQ')^2 = 4Q_0 Q_2 - Q_1^2$$

mit E. v. $x_i = f_i(\lambda) : \psi_1(\overset{2}{\overline{a, b}}; \overset{8}{\overline{\lambda_1, \lambda_2}}) = \frac{1}{5}(h_\lambda^8 + 16 w_\lambda^6 q_\lambda^2)$.

Die Gleichung $A + \beta B = 0$, mit willkürlichem Zahlencoefficienten β, stellt ein Büschel von invarianten Kegelschnitten dar. Jeder Kegelschnitt des Büschels schneidet auf der C_4^6 eine Punktgruppe des Büschels $h_\lambda^8 + \alpha w_\lambda^6 q_\lambda^2 = 0$ aus. Zusammengehörige Werthe der Factoren α und β sind durch die bilineare Gleichung verbunden:

$$\alpha\beta + 12\alpha - 16\beta + 8 = 0.$$

Diesem Büschel gehören an:

1) Der Kegelschnitt durch die sechs Wendepunkte und die zwei Wurzelpunkte der Gleichung $q_\lambda^2 = 0$ mit $\alpha = \infty$, $\beta = -12$.

2) Der Kegelschnitt durch die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten mit $\alpha = -4$, $\beta = -2$.

3) Der Kegelschnitt, welcher die sechs Wendetangenten berührt mit $\alpha = \frac{8}{3}$, $\beta = 3$.

4) Der Kegelschnitt, welchem die Wendedreiecke der ersten Osculanten aller Punkte der C_4^6 einbeschrieben sind*) mit $\alpha = -\frac{16}{9}$, $\beta = -\frac{3}{4}$.

§ 3.

Existenz eines dreifachen Punktes.

Die bekannte Bedingungsgleichung für die Existenz eines dreifachen Punktes auf der C_4^6:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 0 & 0 & 0 & a_{10} & a_{20} & a_{30} \end{vmatrix}$$

$$= a_3 a_9 - a_4 a_8 + a_5 b_7 + b_5 a_7 + b_5 b_7 - b_6^2$$

*) Man vergl. W. Stahl, Rationale ebene Curven vierter Ordnung. Crelle's Journal Bd. 101, p. 306 ff.

erhält, mittelst der Combinanten

$$a = 60(ww')^6, \quad b = 2(qq')^2,$$

und unter Berücksichtigung der identischen Relation

$$a_3 a_9 - a_5 a_7 + a_6 b_6 = 0$$

die einfache Form

$$0 = a - 3b.$$

§ 4.

Einhüllende Kegelschnittschaaren.

Auch bei der C_4^6 treten einhüllende Kegelschnittschaaren auf. Man hat

$$H_\lambda^8 = 10(WW')^2 W^{\lambda 4} W_\lambda'^4 = \varphi(\overline{A, B}^{2}; \overline{\lambda_1, \lambda_2}^{8}),$$

mit Einsetzen von $x_i = f_i(\overset{4}{\mu})$

$$\psi(\overline{a, b}^{2}; \overline{\lambda_1, \lambda_2}^{8}; \overline{\mu_1, \mu_2}^{8}) = (\lambda\mu)^2 \psi'(\overline{a, b}^{2}; \overline{\lambda_1, \lambda_2}^{6}; \overline{\mu_1, \mu_2}^{6}),$$

$$W_\lambda^6 = \varphi(\overline{A, B}^{1}; \overline{\lambda_1, \lambda_2}^{6});$$

mit Einsetzen von $x_i = f_i(\overset{4}{\mu})$

$$\psi(\overline{a, b}^{1}; \overline{\lambda_1, \lambda_2}^{6}; \overline{\mu_1, \mu_2}^{4}) = (\lambda\mu)^2 \psi'(\overline{a, b}^{1}; \overline{\lambda_1, \lambda_2}^{4}; \overline{\mu_1, \mu_2}^{2}).$$

Somit ist $H_\lambda^8 + \alpha W_\lambda^6 Q_\lambda^2 = 0$ für jeden Zahlenwerth von α die Gleichung einer einhüllenden Schaar von Kegelschnitten.

Die Schaar

$$H_\lambda^8 - 2 W_\lambda^6 Q_\lambda^2 = 0$$

wird in anderer Form auch dargestellt durch die Gleichungen

$$\alpha_\lambda^2 \alpha_\mu^2 = 0 \quad (\alpha_\lambda^2 \alpha_\mu^2 \text{ binäre Polare von } \alpha_\lambda^4)$$

und

$$\Delta_\lambda^4 \equiv 24(\alpha\alpha')^2 \alpha_\lambda^2 \alpha_\lambda'^2 = 0.$$

Ellwangen, im December 1887.

Zur Theorie der Dedekind'schen Ideale.

Von

Ludwig Baur in Mainz.

In der Abhandlung der Herren Dedekind und Weber „Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen" (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 92, p. 181—290) bedeutet

$$f(\Theta, z) = \Theta^n + b_1 \Theta^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\Theta + b_n = 0,$$

unter der Voraussetzung, dass die Coefficienten $b_1, \cdots b_n$ ganze oder gebrochene rationale Functionen von z ohne gemeinsamen Theiler sind, eine irreductibele algebraische Gleichung. Das System aller rationalen Functionen von Θ und z bildet einen Körper algebraischer Functionen Ω vom Grade n, und die Functionen $1, \Theta, \Theta^2, \cdots \Theta^{n-1}$ eine Basis dieses Körpers. Durch $\mathfrak{o}$ wird der Inbegriff aller ganzen algebraischen Functionen von z in Ω; durch $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{o}$ bezeichnet.

Hieran schliessen sich folgende Bemerkungen, die dazu dienen können, der ganzen Theorie eine etwas concretere Gestalt zu geben. Die eingeklammerten Citate beziehen sich stets auf die genannte Abhandlung.

I. *Ist*

$$\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s]$$

ein beliebiger Modul, und bedeuten $p_1, p_2, \cdots p_s$ *beliebige ganze rationale Functionen von* z, *so ist*

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s] = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s,\ p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_s\alpha_s],$$

denn offenbar ist jede Function des ersten Moduls in dem zweiten Modul enthalten und umgekehrt. Die $(s+1)$ Functionen

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s,\ p_1\alpha_1 + \cdots + p_s\alpha_s$$

bilden eine reductibele Basis des Moduls $\mathfrak{a}$.

II. *Ein jeder Modul* $\mathfrak{a}$ *bleibt ungeändert, wenn man eine Basisfunction* α *ersetzt durch irgend eine Function* β, *die ihr congruent ist* *in Bezug auf den Modul, dessen Basisfunctionen die* $(s-1)$ *übrigen Basisfunctionen des Moduls* $\mathfrak{a}$ *sind.*

Es ist z. B.

$$[\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s] = [\beta_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s],$$

wenn

$$\beta_1 \equiv \alpha_1 \; (\text{mod.}\, [\alpha_2, \cdots \alpha_s]),$$

d. h. wenn

$$\beta_1 = \alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_s\alpha_s,$$

denn offenbar ist auch hier wieder jede Function des einen Moduls in dem anderen enthalten.

Ein einfaches Beispiel möge die Anwendung dieser Regeln zeigen. Es sei

$$f(\Theta, z) = \Theta^2 - R(z) = 0,$$

$$R(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots \quad (z - a_{2\varrho+1}),$$

und keine 2 der Grössen a_λ einander gleich; ferner

$$\mathfrak{a} = [z - a_1, \Theta],$$

$$\mathfrak{b} = [z - a_2, \Theta],$$

so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\mathfrak{b} &= [(z-a_1)(z-a_2),\ (z-a_1)\Theta,\ (z-a_2)\Theta,\ R(z)] \\ &= [(z-a_1)(z-a_2),\ (z-a_1)\Theta,\ (z-a_2)\Theta,\ 0] \\ &= [(z-a_1)(z-a_2),\ (z-a_1)\Theta,\ (a_1-a_2)\Theta] \\ &= [(z-a_1)(z-a_2),\ 0,\ (a_1-a_2)\Theta] \\ &= [(z-a_1)(z-a_2),\ \Theta].\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{a}^2 = [(z-a_1)^2,\ (z-a_1)\Theta,\ R(z)].$$

Bedeutet nun allgemein $\text{Th}(x_1, x_2, \cdots)$ den grössten gemeinsamen Theiler der ganzen rationalen Functionen $x_1, x_2, \cdots$, so ist

$$\text{Th}((z-a_1)^2,\ R(z)) = z - a_1,$$

und man kann daher zwei ganze rationale Functionen von z, etwa p und q so bestimmen, dass

$$p \cdot (z-a_1)^2 + q \cdot R(z) = z - a_1,$$

und es ist dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^2 &= [(z-a_1)^2,\ (z-a_1)\Theta,\ z-a_1] \\ &= [0,\ (z-a_1)\Theta,\ z-a_1] \\ &= [1, \Theta]\,(z-a_1) = \nu(z-a_1).\end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass überhaupt, wenn in der Basis eines Moduls mehrere ganze rationale Functionen $x_1, x_2, \cdots$ von z vorkommen, dieselben stets ersetzt werden können durch $\text{Th}(x_1, x_2, \cdots)$.

III. *Bilden die n ganzen Functionen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{v}$, so kann eine von ihnen stets gleich 1 gesetzt werden.*

Beweis: Bilden $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ eine Basis von $\mathfrak{v}$, ohne dass eine dieser Functionen den Werth 1 hat, so muss es doch, da die Function 1 ebenfalls in $\mathfrak{v}$ enthalten ist, n ganze rationale Functionen $a_{11}, \cdots, a_{1n}$ von z geben derart, dass

$$1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n.$$

Enthielten nun $a_{11}, \cdots a_{1n}$ einen gemeinsamen Factor $z - c$, so würde die Division der beiden Seiten der vorstehenden Gleichung durch $z - c$ zeigen, dass auch $\frac{1}{z-c}$ eine Function des Moduls $\mathfrak{v}$, d. h. eine ganze Function von z ist. Dies ist unmöglich, da eine ganze Function von z für einen endlichen Werth von z niemals unendlich gross werden kann. Es muss also $\mathrm{Th}(a_{11}, \cdots a_{1n}) = \text{const.}$, und deshalb müssen andere ganze rationale Functionen von z, a_{21}, $a_{22}, \cdots a_{nn}$ so bestimmbar sein, dass $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 1$ (§ 4. 1). Setzt man dann:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n,\\
\omega_2 &= a_{21}\alpha_1 + \cdots + a_{2n}\alpha_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_n &= a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nn}\alpha_n,
\end{aligned}$$

so bilden die n Functionen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n$, von denen die erste den Werth 1 hat, ebenfalls eine Basis von $\mathfrak{v}$ (§ 3. 7). Damit ist der Satz bewiesen.

IV. Es sei nunmehr $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so besitzt dasselbe eine irreductibele Basis, die aus n ganzen Functionen $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ besteht (§ 7); und es ist daher

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= [\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n],\\
\beta_1 &= b_{11}\omega_1 + \cdots + b_{1n}\omega_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta_n &= b_{n1}\omega_1 + \cdots + b_{nn}\omega_n,
\end{aligned}$$

wo die $b_{i\varkappa}$ ganze rationale Functionen von z und so beschaffen sind, dass

$$N(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{v}, \mathfrak{a}) = \sum \pm b_{11} \cdots b_{nn} \neq 0.\text{*)}$$

Da $N(\mathfrak{a}) \cdot \omega_\varkappa$ eine Function des Moduls $\mathfrak{a}$ ist, so können die Basisfunctionen $\omega_1, \cdots \omega_n$ von $\mathfrak{v}$ durch Multiplication mit von 0 verschiedenen ganzen rationalen Functionen von z in Functionen des

*) Durch $a \neq b$ soll bezeichnet werden, dass a einen von b verschiedenen Werth hat.

Ideals $\mathfrak{a}$ verwandelt werden. Da ferner das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{a}$ das Ideal $\mathfrak{a}$ selbst ist, so liefert § 6, 3 das Resultat:

Ist $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so kann von diesem eine Basis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ in der Form angenommen werden:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_{11}\,\omega_1, \\
\alpha_2 &= a_{21}\,\omega_1 + a_{22}\,\omega_2, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\alpha_n &= a_{n1}\,\omega_1 + a_{n2}\,\omega_2 + \cdots + a_{nn}\,\omega_n,
\end{aligned}$$

und es ist dann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n], \\
N(\mathfrak{a}) &= a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}.
\end{aligned}$$

Dieser wichtige Satz kann übrigens leicht mit den einfachsten Mitteln direct bewiesen werden.

Es sei in dem für die Functionen $\beta_1, \ldots \beta_n$ aufgestellten Gleichungssystem ω_{ν_1} die letzte der Functionen, deren Coefficienten nicht sämmtlich verschwinden (thatsächlich ist $\nu_1 = n$), ferner

$$\begin{aligned}
Th(b_{1\nu_1}, b_{2\nu_1}, \ldots b_{n\nu_1}) &= a_{\nu_1\nu_1}, \\
b_{\lambda\nu_1} &= a_\lambda \cdot a_{\nu_1\nu_1},
\end{aligned}$$

und $q_1, \ldots q_n$ seien ganze rationale Functionen von z so bestimmt, dass

$$q_1 b_{1\nu_1} + \cdots + q_n b_{n\nu_1} = a_{\nu_1\nu_1}.$$

Setzen wir dann:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\nu_1} &= q_1\beta_1 + \cdots + q_n\beta_n, \\
&= a_{\nu_1 1}\,\omega_1 + \cdots + a_{\nu_1\,\nu_1-1}\,\omega_{\nu_1-1} + a_{\nu_1\nu_1}\,\omega_{\nu_1}, \\
\beta_\lambda' &= \beta_\lambda - a_\lambda \cdot \alpha_{\nu_1},
\end{aligned}$$

so haben die Functionen β' die Form:

$$\begin{aligned}
\beta_1' &= b_{11}'\,\omega_1 + \cdots + b_{1\,\nu_1-1}'\,\omega_{\nu_1-1}, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\beta_n' &= b_{n1}'\,\omega_1 + \cdots + b_{n\,\nu_1-1}'\,\omega_{\nu_1-1},
\end{aligned}$$

und es ist nach I und II

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= [\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \alpha_{\nu_1}], \\
&= [\beta_1', \beta_2', \ldots \beta_n', \alpha_{\nu_1}], \qquad \nu_1 \leq n.
\end{aligned}$$

Die Functionen $\beta_1', \ldots \beta_n'$ enthalten jetzt die Functionen $\omega_{\nu_1}, \ldots \omega_n$ nicht mehr. Wenden wir das eben beschriebene Verfahren genau in derselben Weise auf die Functionen $\beta_1', \ldots, \beta_n'$ an, indem wir durch ω_{ν_2} die letzte der Functionen $\omega_1, \ldots \omega_n$ bezeichnen, die überhaupt noch in den β' vorkommt, so ergiebt sich, dass

$$\mathfrak{a} = [\beta_1'', \ldots, \beta_n'', \alpha_{\nu_2}, \alpha_{\nu_1}], \quad \nu_2 < \nu_1 \leqq n,$$

wo

$$\alpha_{\nu_2} = a_{\nu_2 1}\omega_1 + \cdots + a_{\nu_2\nu_2}\omega_{\nu_2},$$

und die Functionen $\beta_1'', \ldots \beta_n''$ die Functionen $\omega_{\nu_2}, \ldots \omega_{\nu_1}, \ldots \omega_n$ nicht mehr enthalten. Nach höchstens n maliger Anwendung dieses Verfahrens findet man, dass:

$$\mathfrak{a} = [0, \ldots 0, \alpha_{\nu_\varrho}, \alpha_{\nu_{\varrho-1}}, \ldots \alpha_{\nu_1}],$$
$$\nu_\varrho < \nu_{\varrho-1} < \cdots < \nu_1 \leqq n.$$

Da nun die Basis eines jeden Ideals aus n Functionen besteht, so muss

$$\varrho = n; \; \nu_n = 1, \; \nu_{n-1} = 2, \ldots \nu_1 = n$$

sein. Damit ist der Satz bewiesen.

V. Hieraus ergiebt sich sofort die Form der Primideale. Damit nämlich $\mathfrak{a}$ ein Primideal sei, ist nothwendig und hinreichend, dass $N(\mathfrak{a})$ eine lineare Function von z, etwa $N(\mathfrak{a}) = z - z_0$ sei (§ 9, 7). Da nun $N(\mathfrak{a}) = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$, so muss eine von den Functionen $a_{\nu\nu}$ den Werth $z - z_0$, die übrigen müssen den Werth 1 haben. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, $\omega_1, \ldots \omega_n$ sei eine solche Basis von $\mathfrak{o}$, in der $\omega_1 = 1$ ist. Dann kann nicht $a_{11} = 1$ sein, denn sonst würde das Ideal die Function $\omega_1 = 1$ enthalten, und in Folge dessen gleich $\mathfrak{o}$ sein, was dem Begriffe eines Primideals entgegen ist (§ 8, 6). Also muss $a_{11} = z - z_0$, $a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$ und die Basis $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ eines Primideals darstellbar sein in der Form

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (z - z_0)\,\omega_1, \\
\alpha_2 &= a_{21}\omega_1 + \omega_2, \\
\alpha_3 &= a_{31}\omega_1 + a_{32}\omega_2 + \omega_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_n &= a_{n1}\omega_1 + a_{n2}\omega_2 + \cdots + a_{n,n-1}\omega_{n-1} + \omega_n.
\end{aligned}$$

Da nun

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_1 = z - z_0, \\
\alpha_2 &\equiv \beta_2 = \omega_2 - c_2 \pmod{[\alpha_1]}, \\
\alpha_3 &\equiv \beta_3 = \omega_3 - c_3 \pmod{[\alpha_1, \alpha_2]}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_n &\equiv \beta_n = \omega_n - c_n \pmod{[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}]},
\end{aligned}$$

wo die $c_2, c_3, \ldots c_n$ constante Grössen bedeuten, so bilden auch die Functionen $\beta_1, \ldots \beta_n$ eine Basis unseres Primideals und wir erhalten so den Satz:

Legt man, was immer möglich ist, für $\mathfrak{o}$ eine solche Basis $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ zu Grunde, in der $\omega_1 = 1$ ist, so ist jedes

Primideal $\mathfrak{p}$, dessen Norm $N(\mathfrak{p}) = z - z_0$ ist, darstellbar in der Form:

$$\mathfrak{p} = [z - z_0, \ \omega_2 - c_2, \ldots \omega_n - c_n],$$

wo die Grössen $c_2, \ldots c_n$ constante Grössen sind. Umgekehrt ist auch jedes in dieser Form enthaltene Ideal ein Primideal, denn es ist $N(\mathfrak{p}) = z - z_0$ eine lineare Function von z.

Die Bedeutung der Constanten $c_2, \ldots c_n$ ist klar. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{P}$ den Punkt, der das Primideal $\mathfrak{p}$ erzeugt, so muss jede Function des Ideals $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{P}$ den Werth 0 erhalten, d. h. in $\mathfrak{P}$ muss $z = z_0$, $\omega_2 = c_2, \ldots \omega_n = c_n$ sein. Umgekehrt ist auch der Punkt $\mathfrak{P}$ durch diese Forderung vollständig definirt.

Besonders anschaulich gestaltet sich die Form der Primideale, wenn $\Delta(1, \Theta, \ldots, \Theta^{n-1})$ keinen quadratischen Factor enthält, wenn also — beiläufig gesagt — die von Riemann mit r bezeichnete Zahl den Werth 0 hat und keine 2 Verzweigungspunkte zusammenfallen und sich aufheben (Riemann, ges. W. p. 104, 105). In diesem Falle bilden nämlich die Functionen $1, \Theta, \ldots \Theta^{n-1}$ eine Basis nicht nur für Ω, sondern auch für $\mathfrak{o}$. Dies geht direct aus § 3, 7 der Dedekind-Weber'schen Abhandlung hervor, da dort gezeigt wurde, dass, wenn die n ganzen Functionen $\omega_1, \ldots \omega_n$ eine Basis von Ω bilden und eine Function in $\mathfrak{o}$ existiren würde, die nicht in dem Modul $[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ enthalten wäre, dann nothwendig $\Delta(\omega_1, \ldots \omega_n)$ durch einen Factor $(z-c)^2$ theilbar sein müsste. Jedes Primideal $\mathfrak{p}$ eines solchen speciellen Körpers, kann dann, wenn $N(\mathfrak{p}) = z - z_0$, in die Form gesetzt werden

$$\mathfrak{p} = [z - z_0, \ \Theta - \Theta_0, \ \Theta^2 - \Theta_0^2, \ldots \Theta^{n-1} - \Theta_0^{n-1}],$$

wo Θ_0 jede Wurzel der Gleichung $f(\Theta, z_0) = 0$ sein darf.

Die genannte Bedingung ist z. B. erfüllt bei einem hyperelliptischen Gebilde, wo

$$f(\Theta, z) = \Theta^2 - R(z) = 0,$$
$$R(z) = (z - a_1) \ldots (z - a_{2\varrho+1})$$

und keine 2 der Grössen a gleich gross sind. Es ist nämlich dann

$$\text{const.}\ \Delta(1, \Theta) = \begin{vmatrix} S(1) & S(\Theta) \\ S(\Theta) & S(R(z)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2R(z) \end{vmatrix},$$
$$\Delta(1, \Theta) = R(z),$$

und

$$\mathfrak{p} = [z - z_0, \ \Theta - \Theta_0].$$

Mainz, März 1888.

Sur les propriétés graphiques des figures centriques.

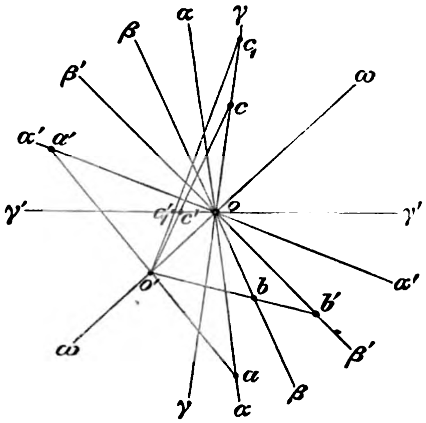
(Extrait d'une lettre adressée à Mr. Pasch.)

Par

VENTURA REYES Y PROSPER à Madrid.

. . . .

Je crois que les propriétés graphiques des figures centriques dont le centre est un point propre peuvent être demontrées sans le secours de la section par un plan et en conséquence sans se servir de la belle



théorie des points et droites impropres. Il suffit de démontrer pour ces figures le théorème qui corresponde à la proposition connue de Desargues sur les triangles perspectifs dans le plan.

Or, on y parvient comme il suit.

Soient

$$o\alpha \cdot o\alpha',$$
$$o\beta \cdot o\beta',$$
$$o\gamma \cdot o\gamma'$$

trois couples de droites, chaque couple étant située dans un même plan avec la droite $o\omega$. On suppose que les droites $o\alpha$, $o\beta$, $o\gamma$, de même que les $o\alpha'$, $o\beta'$, $o\gamma'$ ne tombent pas sur un même plan.

Prenons

sur $o\alpha$ le point a,
sur $o\alpha'$ le point a'

d'une telle façon que la droite aa' coupe $o\omega$ en o', les points o', a et a' étant arrangés dans l'ordre $ao'a'$ (ce que est toujours possible).

Par le point o' menons une droite telle qui coupant $o\beta$ et $o\beta'$ en b et b' les points o', b, b' soient arrangés dans l'ordre $o'bb'$ (ce que l'on peut faire toujours).

Menons enfin par o' une droite telle que coupant $o\gamma$ et $o\gamma'$ en c et c' les points o', c, c' soient arrangés dans l'ordre $o'c'c$ (ce que est de même toujours possible).

Les droites $ao'a'$, $o'bb'$ et $o'cc'$ peuvent être supposées comme non situées dans un même plan.*)

Alors les droites

ab et $a'b'$ se couperont en C,
bc et $b'c'$ se couperont en A
et ac et $a'c'$ se couperont en B.

D'après la situation perspective des triangles abc et $a'b'c'$ (non situés sur un même plan) les points A, B, C seront placés sur une droite et les droites oA, oB, oC tomberont dans un même plan. Cela démontre le théorème en question. Je suppose que tous les points, dont je me suis servi pour la démonstration antérieure, sont toujours des points propres.

Madrid, 1888.

*) Car si les droites $ao'a'$, $o'bb'$ et $o'c'c$ tombent sur le même plan, par le point o' on mène la droite $o'c_1'c$ qui est à considérer alors au lieu de la droite $o'c'c$.

Ueber die uneigentlichen Geraden und Ebenen.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn V. Reyes y Prosper).

Von

M. Pasch in Giessen.

Sie beweisen*) auf denkbar einfachste Art den Satz: Wenn die Strahlen $\alpha\, \beta\, \gamma\, \alpha'\, \beta'\, \gamma'$ durch einen eigentlichen Punkt laufen und die Ebenen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sich in einer Geraden schneiden, so sind die Schnittlinien der Ebenen $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$, $\gamma\alpha$ und $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ in einer Ebene enthalten.

Die Betrachtungen, mittels deren ich in meinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“ die uneigentlichen Geraden und Ebenen eingeführt habe, werden nun erheblich vereinfacht, wenn man Ihren Beweis vorausschickt.

Nachdem nämlich in § 6 die uneigentlichen Punkte eingeführt sind, werden in § 7 behufs Einführung der uneigentlichen Geraden drei beliebige, zu zwei Ebenen P und Q zugleich gehörige Punkte A, B, C und ein eigentlicher, zu keiner dieser beiden Ebenen gehöriger Punkt F angenommen. Es soll bewiesen werden, dass die Punkte $ABCF$ in einer Ebene liegen.

Construirt man Figur 13, wie in dem Buche angegeben, wobei man jetzt den Punkt K ausserhalb der Ebenen $F\beta\gamma$, $F\gamma\alpha$, $F\alpha\beta$ wählen wird, so liegen auf der Ebene P die Punkte abc und auf der Ebene Q die Punkte $\alpha\beta\gamma$ derart, dass sich die Geraden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in dem Punkte K, die Geraden bc und $\beta\gamma$ in A, ca und $\gamma\alpha$ in B, ab und $\alpha\beta$ in C begegnen. Betrachtet man also das Bündel der Strahlen Fa, Fb, Fc, $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$, so schneiden sich die Ebenen $Fa\alpha$, $Fb\beta$, $Fc\gamma$ in der Geraden FK, die Ebenen Fbc und $F\beta\gamma$ in FA, Fca und $F\gamma\alpha$ in FB, Fab und $F\alpha\beta$ in FC, und mithin fallen die Strahlen FA, FB, FC in eine Ebene.

Nachdem hierdurch der Begriff der uneigentlichen Geraden gewonnen ist, werden behufs Einführung der uneigentlichen Ebene in § 8 vier Punkte $BCDE$, von denen keine drei in gerader Linie liegen, so angenommen, dass die Geraden BD und CE sich in einem Punkte A

*) Vergl. die voranstehende Note des Herrn Reyes y Prosper.

begegnen. Es ist zu beweisen, dass auch die Geraden BC und DE einen Punkt gemein haben.

Zu dem Ende benutze ich irgend eine Ebene P, welche keinen der Punkte $ABCDE$ enthält, und einen eigentlichen Punkt K ausserhalb P; der Fall, wo die Punkte $ABCK$ in einer Ebene liegen, bleibt ausser Betracht. Die Ebene P trifft die Strahlen KA, KB, KC, KD, KE bezw. in Punkten a, b, c, d, e derart, dass von den Punkten $bcde$ keine drei in gerader Linie liegen, aber die Geraden bd und ce sich in a begegnen; den Schnittpunkt der Geraden bc und de nenne ich f. Ich nehme ferner ausserhalb der Ebenen P, KAB, KAC, KBC, KDE irgend einen eigentlichen Punkt L; von dem Falle, wo die Punkte $ABCL$ einer Ebene angehören, ist wieder abzusehen. Den Schnittpunkt der Geraden BC mit der Ebene LDE nenne ich F und betrachte nunmehr das Bündel der Strahlen, welche L mit A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e, f verbinden.

Die Ebenen LaA, LbB, LcC gehen durch die Gerade LK, ebenso die Ebenen LaA, LdD, LeE. Folglich schneiden sich die Ebenen Lbc und LBC, Lca und LCA, Lab und LAB in drei Strahlen eines Büschels, ebenso die Ebenen Lad (Lab) und LAD (LAB), Lae (Lac) und LAE (LAC), Lde und LDE. Begegnet also die Gerade bc der Ebene LBC etwa in g, die Gerade de der Ebene LDE etwa in h, so schneiden sich die Ebenen Lab (Lbd) und LAB (LBD) auf der Ebene Lgh, d. h. die Ebenen Lgh, Lbd, LBD laufen durch eine Gerade. Daraus folgt aber weiter, dass die Schnitte der Ebenen LbB und LdD, LgB (LBF) und LhD (LDF), Lgb(Lbf) und Lhd(Ldf), also die Strahlen LK, LF, Lf in eine Ebene fallen, d. h. dass die Strahlen Kf, LF und mithin die Ebenen KBC, KDE, LBC, LDE einen Punkt (F) gemein haben. Durch diesen Punkt laufen die Geraden BC und DE.

Giessen, 4. April 1888.

Hofmann, Fritz, die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte mit imaginären Bestimmungsstücken. Eine Wanderung durch die Theorie der Kegelschnitte in doppelter Berührung an der Hand anschaulicher Methoden. [Mit Figuren im Text.] [IV u. 109 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 3.20.

Holzmüller, Dr. G., Direktor der Gewerbeschule zu Hagen, Einführung in das stereometrische Zeichnen. Mit Berücksichtigung der Krystallographie und Kartographie. [VIII u. 102 S. mit 16 lithographierten Tafeln.] gr. 8. kart. n. ℳ 4.40.

Januschke, Hans, k. k. Professor an der Staats-Oberrealschule in Troppau, das Princip der Erhaltung der Energie in der elementaren Elektricitätslehre. [VIII u. 186 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 4.—

Kohlrausch, Dr. F., ordentl. Professor an der Universität Würzburg, Leitfaden der praktischen Physik mit einem Anhange: Das absolute Mafs-System. Mit in den Text gedruckten Figuren. Sechste vermehrte Auflage. [XXIII u. 364 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 5.60, geb. ℳ 6.10.

In leichtem Leinwandband [nach Art von Baedekers Reisebüchern] elegant gebundene Exemplare n. ℳ 6.10.

Krause, Martin, Professor der Mathematik an der Universität zu Rostock, die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Nebst Anwendungen. [VII u. 276 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 10.—

Legendre, Adrien-Marie, Zahlentheorie. Nach der dritten Auflage ins Deutsche übertragen von H. Maser. Zwei Bände. [I. Bd. XVIII u. 442, II. Bd. XII u. 453 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 23.20.

Lie, Sophus, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig, Theorie der Transformationsgruppen. I. Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel bearbeitet. [X u. 632 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 18.—

Neumann, Dr. Franz, Professor der Physik und Mineralogie, Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen. Herausgegeben von Dr. Carl Neumann, Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. A. u. d. Titel: Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg, herausgegeben von seinen Schülern. In zwanglosen Heften. Sechstes Heft. [XVI u. 364 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 12.—

Planck, Max, Professor an der Universität zu Kiel, das Princip der Erhaltung der Energie. Von der philosophischen Facultät Göttingen preisgekrönt. [XIII u. 247 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 6.—

Rausenberger, Dr. Otto, die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. [VI u. 236 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 5.—

——— Lehrbuch der analytischen Mechanik. Erster Band. Mechanik der materiellen Punkte. Mit Figuren im Text. [VIII u. 318 S.] gr. 8. geh. n. ℳ 8.—

INHALT.

☛ Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.**

Hierzu eine Beilage von **L. Brill in Darmstadt.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XXXII. Band. 2. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Demnächst erscheint:

Die hauptsächlichsten

Theorien der Geometrie

in ihrer

früheren und heutigen Entwickelung.

Historische Monographie

von

Dr. Gino Loria,

Professor der höheren Geometrie an der Universität zu Genua.

Unter Benutzung
zahlreicher Zusätze und Verbesserungen seitens des Verfassers

ins Deutsche übertragen

von

Fritz Schütte.

Mit einem Vorworte von Professor R. Sturm.

[V u. 132 S.] gr. 8. geh.

Die in den Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino Ser. II Bd. 38 im vergangenen Jahre erschienene geschichtliche Monographie des Herrn Loria: „Il passato e il presente delle principali teorie geometriche“ ist ein sehr dankenswerter Versuch, nach einer einleitenden Behandlung der älteren Zeit die Entwickelung der Geometrie seit der Mitte unsers Jahrhunderts darzustellen. Sie führt dem Leser die hauptsächlichsten Untersuchungsrichtungen vor, liefert ein reichhaltiges Verzeichnis der bedeutenderen Veröffentlichungen und bietet so dem Anfänger ein Mittel, sich in dem unermeſslichen Gebiete der modernen Geometrie leichter zurechtzufinden, während sie die Vorgeschrittenen auf die Probleme hinweist, die der Erledigung harren. Sie erscheint hiermit in einer mehr zugänglichen Übertragung ins Deutsche, welche von der Turiner Akademie und dem Verfasser genehmigt, vom letzteren vielfach verbessert und erweitert und in den Litteraturnachweisen vermehrt worden ist. Dieselbe gliedert sich in folgende neun Abschnitte: I. Die Geometrie vor der Mitte des 19. Jahrhunderts. II. Theorie der ebenen Curven. III. Theorie der Oberflächen. IV. Untersuchungen über die Gestalt der Curven und Oberflächen. Abzählende Geometrie. V. Theorie der Curven doppelter Krümmung. VI. Abbildungen, Correspondenzen, Transformationen. VII. Geometrie der Geraden. VIII. Nichteuclidische Geometrie. IX. Geometrie von *n* Dimensionen.

Zur Erinnerung an Axel Harnack.

Von

A. Voss in München.

Der am 3. April dieses Jahres als Professor der Mathematik am k. Polytechnikum in Dresden verstorbene Axel Harnack gehört zu jenen Männern, die sich durch Vielseitigkeit der Begabung und Reichthum der Gedanken in hervorragender Weise ausgezeichnet haben. In der ersten Hälfte des kurzen, kaum mehr als zwölf Jahre umfassenden Zeitraums, während dessen es ihm vergönnt war, selbständig zu arbeiten, mit geometrischen Untersuchungen beschäftigt, zu deren Behandlung gerade in derjenigen Richtung, wie sie Clebsch in so charakteristischer Weise vertreten hat, ihn ein besonders glückliches Talent befähigte, hat er sich in den letzten Jahren seines Lebens fast ausschliesslich und mit immer steigendem Erfolge jenen grossen Fragen der reinen Analysis zugewandt, die seit Dirichlet's Arbeiten über die Darstellung willkürlicher Functionen fortwährend neuen Anstoss zu tieferem Eindringen in die Fundamentalbegriffe der Lehre von den Functionen gegeben haben.

Carl Gustav Axel Harnack ward geboren am 7. Mai 1851 zu Dorpat als Sohn des ausgezeichneten Theologen Theodosius Harnack, jetzt Prof. emer. daselbst. Schon in früher Jugend entwickelte sich bei ihm eine lebhafte Neigung für mathematische und physicalische Gegenstände; die entscheidende Anregung, sich ganz der Mathematik zu widmen, verdankte er auf der Universität Dorpat vorzugsweise seinen Lehrern A. v. Oettingen und F. Minding. Nach Vollendung seiner Studien, von deren Erfolg unter anderen auch seine von der Dorpater physical. medicin. Facultät mit dem ersten Preise gekrönte Arbeit*) „Ueber Maxima und Minima von Ellipseninhalten in Kegelschnittreihen und Netzen“ zeugt, wandte er sich 1873 nach Deutschland, wo neben

*) Diese bereits 1872 vollendete Arbeit ist indess nicht veröffentlicht worden.

den analytischen Disciplinen gerade zu jener Zeit durch die eminente Begabung, mit der Clebsch seinen Schülern die Arbeiten der deutschen und englischen Geometer zugänglich zu machen wusste, auch das Interesse für geometrische Studien weitergehender Art sich in besonders lebhafter Entwickelung befand. In Erlangen, wo sein Vater 1853—1866 als Professor gewirkt, er selbst einen Theil seiner Jugendzeit verlebt hatte, zog er bald die Aufmerksamkeit Klein's auf sich. Vor allen interessirte ihn der Kreis von geometrischen Fragen, welche sich an die von Clebsch und Gordan bearbeitete Theorie der Abel'schen Functionen angeschlossen hatten, in die er namentlich durch Klein eingeführt wurde, sowie die Fortbildung, welche die Algebra in der Bewältigung der auf die Theorie der homogenen Functionen gerichteten Aufgaben erfahren hatte, und in der er sich der ausgezeichneten Förderung Gordan's erfreuen durfte, der nicht lange darnach von Giessen nach Erlangen berufen war. Durch Klein's Anregung entstand zunächst seine Inauguraldissertation*) „Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritter Ordnung", in welcher zum ersten Mal der Gedanke ausgeführt ist, die von Clebsch begründete Parameterdarstellung der Curve dritter Ordnung nach den von Klein eingeführten Gesichtspunkten**) zu entwickeln und durch die mannigfachen Beziehungen, welche die von Clebsch begonnene Connextheorie***) bietet, zu bereichern. Eine weitere Ausdehnung namentlich nach dieser letzteren und der formentheoretischen Seite hin gab er sodann diesen Untersuchungen in der Arbeit über cubische ternäre Formen.†)

Mit diesen ersten Arbeiten stehen in enger Verbindung seine Note über den Abel'schen Satz††), dem er eine neue und für geometrische Anwendungen elegante Form abzugewinnen wusste, ferner seine Untersuchungen über die Behandlung der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten,†††) die fast gleichzeitig auch von Lindemann in den von letzterem bearbeiteten Vorlesungen von Clebsch entscheidend gefördert ist, sowie der von Harnack zuerst aus-

*) Inauguraldissertation, Leipzig 1875, auch erschienen Mathem. Annalen Bd. IX, S. 1.

**) Klein, Ueber eine neue Art der Riemann'schen Flächen, Math. Ann. Bd. VII, S. 558.

***) Vgl. die Darlegungen von Clebsch in den Math. Ann. und den von Lindemann bearbeiteten Vorlesungen, S. 924—1037.

†) Zur Theorie der ternären cubischen Formen, Math. Ann. Bd. IX, S. 218.

††) Berichte der phys. med. Societät zu Erlangen, 1875; dann auch Math. Ann. Bd. IX, S. 383.

†††) Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten, Math. Ann. Bd. IX, S. 371. Man vergleiche auch die Lindemann'sche Arbeit in den Vorlesungen von Clebsch, S. 764—923.

gesprochene Beweis des Satzes, dass eine ebene Curve vom Geschlechte p höchstens aus $p + 1$ getrennten Zügen bestehen kann. Wenn gleich dieser Satz auch auf anderen Wegen gewonnen werden kann,*) so wird doch die völlig elementare Art, in der Harnack, auf Vorstellungen von Möbius und Plücker zurückgehend, die Existenz von Curven der n. Ordnung, denen die genannte Eigenschaft zukommt, begründete, von dauerndem Werthe bleiben.

Noch während des Entstehens dieser Arbeiten hatte sich Harnack als Docent für Mathematik an der Universität Leipzig habilitirt (Herbst 1875).**) Er hat hier vorzugsweise über geometrische Fragen gelesen, auf die er sich sowohl durch die Richtung, die seine eigenen Studien genommen, als auch durch die ihm übertragene Herausgabe der Hankel'schen Vorlesungen über synthetische Geometrie hingewiesen sah.***) Seine ausgezeichnete Lehrbegabung, das ihm eigene Geschick, bei sorgfältiger algebraischer Behandlung des einzelnen stets den Blick auf principielle Fragen zu concentriren, gewannen ihm gleich von Anfang an einen zahlreichen Kreis von Zuhörern und die Anerkennung der Professoren Scheibner und Neumann, mit denen er dauernd in pietätvoller Beziehung geblieben ist.

Die so glücklich begonnene Leipziger Thätigkeit musste Harnack sich gleichwohl entschliessen, aufzugeben, als er im Herbst 1876 an die technische Hochschule zu Darmstadt als Professor der Mathematik berufen wurde. Ostern 1877 begründete er daselbst seinen eigenen Hausstand mit Elisabeth von Oettingen aus Ludenhof bei Dorpat. Nur kurze Zeit hat er in Darmstadt gewirkt; schon im Herbst 1877 siedelte er nach Dresden über.

Das Polytechnicum zu Dresden hatte unter Zeuner's Direction einen mächtigen Aufschwung genommen. Derselbe eröffnete insbesondere auch den mathematischen Studien eine weitere Perspective, die unter Schlömilch's ausgezeichneter Thätigkeit daselbst gepflegt waren,

---

*) Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, Math. Ann. Bd. X, S. 189. Einen anderen, auf der Betrachtung der symmetrischen Riemann'schen Flächen beruhenden Beweis des Harnack'schen Satzes gab Klein, Riemann's Theorie der algebraischen Functionen, Leipzig 1882, S. 72. Uebrigens findet sich auch schon bei Schottky, (conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen, Journal v. Crelle 83 (1877)) der Nachweis der Existenz von ebenen Curven des Geschlechtes ϱ mit $\varrho + 1$ geschlossenen Theilen, daselbst § 5, S. 314.

**) Als Habilitationsschrift hatte Harnack die, Anmerk. S. 162 †††, erwähnte Arbeit eingereicht; den Gegenstand seiner Habilitationsvorlesung bildete eine geschichtliche Darlegung des Begriffs der algebraischen Curven, in der zum Schluss auch der soeben angegebene Satz berührt wird.

***) Hermann Hankel, Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung, herausgegeben von Harnack, Leipzig 1875, Teubner.

und für die nach dessen Uebergang in einen anderen Wirkungskreis in Königsberger aufs neue eine gefeierte Kraft gewonnen war. Nicht ohne Zagen nahm Harnack den Ruf an, der ihm bei Königsberger's Berufung nach Wien zu Theil wurde; mit Eifer aber suchte er den vielfachen Pflichten, welche die Organisation der Anstalt von ihm forderte, gerecht zu werden.

Die Aufgabe, ein grösseres Publicum in die Principien der Differential- und Integralrechnung mit einer auch für weitergehende rein wissenschaftliche Bedürfnisse ausreichenden Allgemeinheit einzuführen, nahm fortan sein ganzes Interesse in Anspruch. Wie er selbst über seine Aufgabe als Lehrer an einer technischen Hochschule dachte, hat er aufs klarste gelegentlich einer Recension im Civilingenieur ausgesprochen.*) „Sieht man von der elementaren Mathematik ab, so erhebt sich immer wieder das schwierige Problem, welches bei allen Lehrbüchern der sogenannten höheren Mathematik, ja bei dem gesammten mathematischen Studium, zumal an den technischen Hochschulen sich geltend macht: die Frage nach der Behandlungsweise der einzelnen Disciplinen hinsichtlich der Vollständigkeit und Präcision. Letztere zumal erfordert nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft eine so grosse Vertiefung, dass man von vornherein darauf verzichten muss, ihr überall dadurch gerecht zu werden, dass man die einzelnen Theoreme in ihrem vollen Umfange klar legt, wohl aber lässt sie sich durch eine genaue Einschränkung derselben jeder Zeit aufrecht erhalten. Die Aufgabe, welche der mathematische Unterricht und jedes Lehrbuch zu lösen haben, ist also meiner Meinung nach so zu fixiren: klare und vollständige Auseinandersetzung der grundlegenden Begriffe, möglichste Beschränkung der reinen Theorie nebst scharfer Formulirung der Lehrsätze innerhalb gegebener eng gezogener Voraussetzungen, Reichhaltigkeit in der Anwendung auf gebotene Probleme."

Aus diesen Vorträgen ist zunächst sein Werk über die Elemente der Differential- und Integralrechnung, hervorgegangen,**) in dem er sich allerdings auch viel weitergehende Aufgaben gestellt hatte. Dasselbe hat wegen der geschickten und originellen Darstellung, in der die principiellen Fragen überall an die Spitze treten, ohne dass doch die Anwendung auf das einzelne vernachlässigt wird, und die Betrachtung sich in völlig abstracte dem Verständnisse der Studirenden weniger

*) Das Citat im Texte ist entnommen aus der von Harnack verfassten Anzeige des von Heger und Reidt veröffentlichten Handbuches der Mathematik, Breslau 1879 und 1881, Civilingenieur Bd. XXIX.

**) Die Elemente der Differential- und Integralrechnung zur Einführung in das Studium dargestellt von Axel Harnack, mit Figuren im Text, Leipzig 1881, Teubner.

zugängliche Fragen verliert, allseitigen Beifall gefunden.*) Sein Wunsch, dasselbe bei Gelegenheit einer neuen Auflage zu einer theoretischen Darlegung der Grundprincipien im Sinne der neueren Functionentheorie zu gestalten, dagegen die Erörterung der mehr elementaren Anwendungen zurücktreten zu lassen, für welche er inzwischen selbst durch die alsbald zu erwähnende Bearbeitung des Serret'schen Cours de calcul différentiel et intégral den angehenden Mathematikern ein vorzügliches Werk geboten hatte, ist leider nicht in Erfüllung gegangen; in seinem Nachlasse**) haben sich übrigens keine Vorarbeiten zu einer solchen Bearbeitung vorgefunden.

Damit beginnt zugleich die zweite Periode in der wissenschaftlichen Thätigkeit Harnack's; in der That hat er seitdem sich fast ausschliesslich analytischen Untersuchungen zugewandt. Zunächst nahm er die Bemerkung Töpler's,***) dass die Coefficienten der Fourier'schen Reihe sich vermittelst einer der Methode der kleinsten Quadrate nachgebildeten Betrachtung ergeben, zum Ausgangspunkt von Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe. Bekanntlich hat Du-Bois-Reymond†) zuerst den Beweis des wichtigen Satzes gegeben, dass die Coefficienten einer trigonometrischen Reihe in die Fourier'sche Form gebracht werden können, wenn die Function endlich und integrabel ist, oder in den Punkten einer Menge erster Gattung unendlich wird. Harnack's Bestreben war zunächst darauf gerichtet, diese Untersuchungen wo möglich zu vereinfachen und zu erweitern. Indem er die allerdings beschränkende Voraussetzung einführte ††), dass die dargestellte Function nebst ihrem Quadrate integrabel sei, liess sich nicht allein das schliessliche Verschwinden der Fourier'schen Coefficienten sondern auch die im allgemeinen gleichmässige Convergenz des beliebig weit ausgedehnten Restgliedes der Reihe nachweisen. Reicht auch die angegebene Voraussetzung nicht aus, um die gliedweise Integrirbarkeit der Reihe zu erweisen, so scheinen doch diese

*) Man sehe die Recensionen von H. Weber, Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 27, S. 161; Wangerin, Deutsche Literaturzeitung vom Jahre 1882; Hoppe, Fortschritte der Mathematik für das Jahr 1881, S. 202; Godt, Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht von Hoffmann, 1883, S. 51; Günther, Blätter für das bayerische Gymnasialwesen 1882, S. 165.

**) Ausser den bereits veröffentlichten Schriften hat sich im Nachlasse Harnack's noch die sorgfältig ausgeführte Habilitationsvorlesung, sowie ein allerdings nur zum Theil fertiges Manuscript vorgefunden, über das S. 171, Anm. berichtet ist.

***) Anzeiger d. Akad. zu Wien, 7. Dec. 1876; Repertorium d. Math. Bd. I, S. 402.

†) Abhandlungen der k. bayerischen Academie, II. Cl., Bd. XII, 1. Abth. Seite 119.

††) Math. Ann. Bd. XVII, S. 123; Bd. XIX, S. 235 u. 324.

Betrachtungen geeignet, auch weitergehende Untersuchungen, wie sie Harnack namentlich in seiner Schrift de la Série de Fourier, Paris Gauthier-Villars 1883,*) ausgeführt hat, zu fördern. Auch von anderen Mathematikern, z. B. Halphen**), der unabhängig davon denselben Gang eingeschlagen hatte, ist die bereits von Harnack erkannte Verwendbarkeit für analoge Fragen betont worden, obwohl andererseits kein Zweifel darüber bestehen kann, dass die weitere Verfolgung des von Du-Bois Reymond eingeschlagenen höchst scharfsinnigen Weges, wie sie von Hölder ausgeführt ist, zu allgemeineren Resultaten hinleitet.***)

In engem Zusammenhange steht hiermit die Einführung des Begriffes der discreten Punktmenge, mit dem Harnack an die von Hankel in dessen Tübinger Festschrift†) ausgesprochenen Ideen anknüpfte. Eine Punktmenge heisst darnach discret,††) wenn sich sämmtliche Punkte derselben in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliessen lassen, deren Summe beliebig klein gemacht werden kann, mag dabei auch die Anzahl jener Intervalle über jeden Betrag wachsen.

Berührte sich einerseits diese Begriffsbildung mit den tiefgehenden und wichtigen Untersuchungen G. Cantor's über Punktmengen überhaupt, so steht doch Harnack mit derselben zunächst auf den dem Riemann'schen Integralbegriff erwachsenen Gesichtspunkten. In der That hat auch die discrete Menge bei den Problemen der Integralrechnung eine wesentliche Wichtigkeit, während für die fundamentalen Untersuchungen, die gleichzeitig die Differential- und Integralrechnung betreffen, die Cantor'schen weit allgemeineren Conceptionen massgebend erscheinen, wie dies z. B. auch aus den Scheeffer'schen Arbeiten†††) hervorgeht.

Die Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe lenkten

---

*) Diese Schrift findet sich auch im Darboux'schen Bulletin des sciences math. et. astr. 1883. Ser. II, t. 6.

**) Vgl. Halphen, Sur la série de Fourier, Comptes Rendus t. 95, S. 1217 und t. 96, S. 168; ebendaselbst auch t. 95, S. 967 die Bemerkung von Hugoniot, Sur le développement des fonctions en séries.

***) Hölder, Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen Bd. XXIV, S. 181.

†) Hankel, Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen, Festschrift der Universität Tübingen 1870; wieder abgedruckt Math. Ann. Bd. XX, S. 63; vgl. besonders S. 87 u. ff.

††) Siehe Math. Ann. Bd. XXIV, S. 218. Der Begriff der discreten Menge bei Harnack deckt sich übrigens mit dem der Punktmenge vom Inhalt Null bei G. Cantor.

†††) Ludwig Scheeffer, Zur Theorie der stetigen Functionen einer reellen Veränderlichen Act. Math. V, S. 183 und 278, ferner allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven, daselbst S. 52. Es ist dies übrigens auch von Harnack selbst bemerkt worden, z. B. Math. Ann. Bd. XXIV, S. 231, Anmerk.

Harnack's Interesse weiter auf den Fundamentalsatz aus der Theorie der Functionen einer complexen Variabelen, nach welchem jede endliche eindeutige und stetige Function, welche in einem Gebiete eine endliche und stetige Ableitung besitzt, in demselben durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann. Er zeigte hier,*) wie dieser Satz nebst der Laurent'schen Erweiterung sich unmittelbar aus der Theorie der Fourier'schen Reihe gewinnen lässt, und wie die von Riemann gegebenen Unstetigkeitsbedingungen präcisirt werden können.

Doch schon während dieser Zeit machten sich die Anfänge des Leidens bemerkbar, das auf sein inzwischen auf das glücklichste entwickeltes Familienleben sobald einen trüben Schatten werfen sollte. Von Hause aus zart organisirt, hatte Harnack sich beim Besuche eines Seebades, wie es schien, eine Erkältung zugezogen, die bald einen ernsteren Charakter annahm. Als auch ein Aufenthalt in Botzen, den er im Frühjahr 1883 nahm, keine wesentliche Besserung herbeiführte, war es leider nicht mehr zu verkennen, dass ein tieferes Leiden seinen Organismus ergriffen hatte. Er musste sich entschliessen — wozu ihm die k. Sächs. Regierung in der entgegenkommendsten Weise die Möglichkeit eröffnete, — seine Lehrthätigkeit zeitweilig ganz aufzugeben, um in Davos, wohin ihm seine Familie Ostern 1884 folgte, Kräftigung zu suchen.

Aber auch in dieser Zeit, die sein lebhaftes Pflichtgefühl besonders schwer empfand, ist er nicht müssig gewesen. Nicht nur nahm er auch aus der Ferne lebhaften Antheil an allen Fragen, welche die Dresdner Hochschule berührten; mit staunenswerther Energie erledigte er während des $1^1/_2$jährigen Aufenthaltes in Davos, fern von allen literarischen Hülfsmitteln, die Aufgabe, die er sich in der deutschen Bearbeitung von Serret's Calcul différentiel et intégral**) gestellt hatte. Von dem Werke Serret's hat Harnack eine vorzügliche Uebersetzung geliefert, die soweit wie möglich das Original wiedergiebt; aber in einer Reihe von Zusätzen, die durch kleineren Druck kenntlich gemacht sind, und namentlich in den beiden letzten Bänden dieses grossen Lehrbuches einen bedeutenderen Umfang einnehmen, hat er eine Fülle wichtiger Ergänzungen hinzugefügt, durch welche dasselbe ganz wesentlich gewonnen hat. Namentlich möge hier die musterhafte Darlegung der Theorie der Fourier'schen Reihen und Integrale***) angeführt werden; sie ist geeignet, den angehenden

*) Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen, Math. Ann. Bd. XXI, S. 305.

**) Serret, Cours de calcul différential et intégral, II édition, Paris, Gauthier-Villars 1880.

***) Siehe in Serret-Harnack, Lehrbuch der Differentialrechnung etc. die Abschnitte: Grundriss der Theorie der Fourier'schen Reihe und der Fourier'schen

Mathematikern auch schon in den ersten Semestern den Zugang zu den Untersuchungen Riemann's und anderer Forscher zu eröffnen.

Als Harnack Ostern 1885 zurückkehrte, schien seine Gesundheit gekräftigt, wenngleich er sich selbst keineswegs verhehlte, dass sein eigentliches Leiden nicht gehoben war. Aber seine Arbeitskraft hatte sich ungeschwächt erhalten; ja, sie schien noch gewachsen.

Die Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Functionen einer reellen Variabelen mussten Harnack naturgemäss auf die erweiterten Probleme führen, welche mit dem sogenannten Dirichlet'schen Princip aufgetreten sind. Bekanntlich ist der Beweis des Satzes, dass die Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$ stets ein Integral besitzt, welches in der Begrenzung eines ebenen oder räumlichen Gebietes vorgeschriebene Werthe annimmt, in der Weise, wie derselbe, von W. Thomson zuerst ausgesprochen, namentlich seit Riemann für die Functionentheorie eine hervorragende Wichtigkeit erlangt hat, längst als nicht ausreichend erkannt worden. Es ist das Verdienst von Neumann und H. A. Schwarz*), diese Schwierigkeit zuerst unter bestimmten Voraussetzungen überwunden zu haben. In der Programmschrift der eidgen. polytechn. Schule von 1870 zeigte Schwarz, wie aus der conformen Abbildung eines Polygons auf die Halbebene die Existenz der Green'schen Function mittels bestimmter Convergenzprocesse erkannt werden kann, falls das Polygon in eine nach Aussen überall convexe Curve übergeht. Einen anderen Beweis, der zum Theil auf erweiterten Voraussetzungen beruht, hat derselbe in den Berichten der Berliner Academie gegeben (1870). Zu derselben Zeit gelang es Neumann,*) den genannten Satz sowohl für die Ebene als den Raum zu beweisen, sobald die Begrenzung überall convex nach aussen ist, und mit Hülfe einer gleichzeitig von Schwarz gefundenen Methode auch auf anderweitig begrenzte, auch mehrfach zusammenhängende, Gebiete zu erweitern. Harnack stellte sich nun die Aufgabe, diese Resultate auch für den Fall, dass die Berandung, die nicht nur eine analytische Curve zu sein braucht, von diesen Einschränkungen befreit ist, directer zu gewinnen. In der That zeigte er, in einer der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am 2. Mai 1886 übergebenen Abhandlung**), wie der von Schwarz eingeschlagene

---

Integrale, Bd. II. S. 343—380; ferner: Zur Integration der partiellen Differentialgleichungen in der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen, Bd. III. S. 378—388, sowie auch die einschlägige Darstellung in den „Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials". Leipzig 1887.

*) Vgl. die Darlegung bei Klein, Math. Ann. Bd. XXI, S. 153, Literarisches zum Dirichlet'schen Princip.

**) Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume, Berichte d. sächs. Gesellschaft d. W. 2. Mai 1886.

Weg sowohl in der Ebene als auch im Raume, wenigstens für ein einfach zusammenhängendes Gebiet durchgeführt werden kann. Die vollständige Darlegung dieser Untersuchungen, namentlich für den Raum war ihm nicht mehr beschieden.

Dagegen hat er in seinem letzten grösseren Werke, über die Theorie des Potentiales*) für die Ebene eine zusammenfassende Darstellung der Schwarz'schen und Neumann'schen Untersuchungen in Verbindung mit seinen eigenen Resultaten gegeben, welche zugleich die wesentlichsten Gesichtspunkte enthält, die er bei dem Problem im Raume einzuhalten beabsichtigte.

Von Ostern 1885 an hatte Harnack seine Vorlesungen ohne Unterbrechung wieder aufgenommen, obwohl sein Befinden ein wechselndes war und namentlich im Sommer 1887 seine Angehörigen wieder mit Sorge erfüllen musste. Im Winter darauf kam wieder eine günstigere Periode für ihn; noch im December nahm er Theil an einer Sitzung der Leipziger Gesellschaft der Wissenschaften, zu deren ordentlichen Mitgliedern er seit 1886 gehörte, ja er unternahm selbst kleinere Reisen, um seinen fast ganz unterbrochenen persönlichen Verkehr mit Fachgenossen zu erweitern. Aber schon im Februar sah er sich wieder gezwungen, seine Ausgänge auf das nothwendigste Mass zu beschränken. Noch hoffte er neue Kräftigung in der milden Luft der oberitalienischen Seen zu finden; mit ungewöhnlicher Energie führte er seine Vorlesungen weiter, um ohne mit seinem eigenen Pflichtgefühl in Widerstreit zu kommen, in den Osterferien eine Erholungsreise etwas länger ausdehnen zu können. Es sollte nicht sein. Am 16. März brach er mitten in der Vorlesung zusammen; sein Leiden, das bisher doch nur langsame Fortschritte gemacht zu haben schien, nahm plötzlich eine unerwartete unheilvolle Wendung: schon nach wenigen Tagen ward er den Seinen entrissen. Die Vorboten dieser Erkrankung waren schon eingetreten, als er sein letztes Manuscript**) an die Redaction dieser Annalen einsandte, und selbst in den letzten Tagen beschäftigte ihn noch der Gedanke an eine Revision seiner Elemente der Differentialrechnung für eine englische Uebersetzung, zu der er seine Genehmigung ertheilt hatte.

Axel Harnack besass eine Persönlichkeit, die auf alle, die mit ihm in Berührung gekommen sind, vom ersten Augenblick an durch die unmittelbar hervortretende Reinheit und Liebenswürdigkeit ihres Charakters einen tiefen Eindruck machte. Liebevoll und kindlich ein-

*) Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der Potentialfunctionen in der Ebene, Leipzig 1887.

**) Es ist dies die hier anschliessend veröffentlichte Schrift Harnack's über Cauchy's zweiten Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe.

fach im häuslichen Kreise, voll von sittlichem Ernste und doch heiterer Fröhlichkeit im Verkehr mit seinen Collegen und Freunden, erfüllt von dem idealsten wissenschaftlichen Streben und dabei doch wieder mit sicherer Festigkeit die gegebenen Verhältnisse unverückt im Auge behaltend, übte er nicht nur auf seine Schüler einen mächtigen Einfluss, auch ältere Männer ordneten sich gerne dem um so vieles jüngeren unter, ohne dass er in seiner Bescheidenheit den Wunsch dazu hätte hervortreten lassen. Eines hohen Vertrauens erfreute er sich nicht nur unter seinen Collegen, sondern auch in weiteren Kreisen, insbesondere auch in seiner alten Heimat, der er stets die treueste Anhänglichheit bewahrt hat. Die Macht der Rede stand ihm in seltenem Masse zu Gebote; mühelos gelang es ihm, den Reichthum seiner Gedanken zugleich in die treffendste Form zu kleiden. Bedeutend war seine Begabung für organisatorische Fragen; bei schwierigen Angelegenheiten wusste er immer den Nagel auf den Kopf zu treffen. Sein fruchtbares Wirken als Lehrer fand auch vielfache äussere Anerkennung: in Dorpat dachte man daran ihn als Nachfolger Minding's zu gewinnen; 1877 erhielt er einen Ruf an die Universität Rostock, 1882 an die technische Hochschule zu Aachen. Beidemale glaubte er ablehnen zu sollen; einem 1883 an ihn ergangenen Rufe an die technische Hochschule zu München war er bereit zu folgen, doch trat seine Gesundheit hindernd dazwischen.

Harnack war zugleich ausgezeichnet durch eine vorzügliche literarische und ästhetische Bildung, die er gern in der Geselligkeit des Hauses weiter förderte; geschichtliche und philosophische Studien beschäftigten ihn unausgesetzt in seinen Mussestunden. In die Einsamkeit von Davos begleitete ihn das zu eben der Zeit vollendete grosse Werk von Wundt*) über die Principien der Erkenntniss, und die Art, wie er sich im eigenen Denken über die Grundlagen aller Naturerkenntniss klar zu werden suchte, mag der seinem Freunde und Lehrer A. v. Oettingen gewidmete Vortrag bezeichnen, den er, von dort zurückgekehrt, in der naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Dresden hielt.**) Leibniz' grossartige Persönlichkeit fesselte ihn begreiflicherweise insbesondere. Von Interesse wird immer die kurze und dabei doch so lebendige Darstellung von Leibniz' Wirken***) bleiben, welche er Ostern 1877 als Redner zur Geburtstagsfeier seines

*) W. Wundt, Logik. Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung. Stuttgart, 1880—1883.

**) Naturforschung und Naturphilosophie, Vortrag, gehalten in der naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Dresden von A. Harnack, Leipzig 1885, Teubner.

***) Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik, Dresden 1887, Zahn und Jaensch.

Landesherrn gab, und von der man mit M. Cantor*) nur wünschen möchte, dass dieselbe in erweiterter Gestalt hätte veröffentlicht werden können. So erinnert Harnack in mehr als einer Beziehung an den ebenfalls der Wissenschaft so früh entrissenen Hermann Hankel. Beider Arbeiten haben, wie sich leicht auch im einzelnen nachweissen liesse, einen ähnlichen Verlauf genommen; beiden war gemeinsam der feine Sinn für die historische Entwickelung der mathematischen Probleme, der sichere Blick für alle Fragen, die mit den Aufgaben des Unterrichtes zusammenhängen, und das lebendige Interesse für das ihnen anvertraute Lehramt.

Sein Geschick hat die weiteren Erfolge, welche die Wissenschaft seinem beharrlichen Forschen bereit zu halten schien, nicht zur Wirklichkeit werden lassen. Aber in Einem ist er auch in der kurzen Lebenszeit zur Vollendung gereift: in der sittlichen Festigkeit seines Charakters, die, getragen von einer tief religiösen Grundanschauung, welche er als ein Erbtheil seines Vaterhauses doch auch völlig selbstständig in sich entwickelt hatte, die Quelle war, aus der sein den höchsten Aufgaben zugewandtes Streben immer neue Kraft schöpfte. Die Wissenschaft wird ihm dauernd ein ehrenvolles Andenken bewahren. Die einzigartige Persönlichkeit Axel Harnack's aber, in der in harmonischer Weise alles vereinigt war, was den eigentlichen Werth des einzelnen Menschenlebens ausmacht, wird seinen Schülern, seinen Freunden und Fachgenossen stets unvergesslich bleiben.

München, im Mai 1888.

*) Vgl. das Referat von M. Cantor in der Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 32, S. 321. Dass Harnack auch selbst beabsichtigen mochte, den im Texte angeführten Wunsch M. Cantor's zu erfüllen, scheint aus einer Vorlesung über die geschichtliche Entwickelung der Geometrie insbesondere des 17. Jahrhunderts hervorzugehen, die er im letzten Semester gehalten hat, und die auf selbständigen Studien über diese Periode beruhen dürfte.

Axel Harnack's literarische Publicationen.

I.

In den Mathematischen Annalen.

1) Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. Inauguraldissertation, Leipzig 1875; Bd. IX, S. 1.
2) Zur Theorie der ternären cubischen Formen, Bd. IX, S. 218.
3) Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten, Bd. IX, S. 371.
4) Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, Bd. X, S. 189.
5) Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystems durch doppeltperiodische Functionen, Bd. XII, S. 47.
6) Bemerkungen zur Geometrie auf den Linienflächen vierter Ordnung, Bd. XIII, S. 49.
7) Ueber eine Eigenschaft der Coefficienten der Taylor'schen Reihe, Bd. XIII, S. 555.
8) Notiz über die algebraische Parameterdarstellung der Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung, Bd. XV, S. 560.
9) Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen, Bd. XVII, S. 123.
10) Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe, Bd. XIX, S. 235.
11) Berichtigung zu diesem Aufsatze, daselbst S. 521.
12) Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen, Bd. XXI, S. 305.
13) Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Functionen einer reellen Variabelen mit ihren Ableitungen. Erster Theil Bd. XXIII, S. 244, zweiter Theil Bd. XXIV, S. 217.
14) Note über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige, Bd. XXIII, S. 285.
15) Ueber den Inhalt von Punktmengen, Bd. XXV, S. 421.
16) Bemerkungen zur Theorie des Doppelintegrales, Bd. XXVI, S. 566.
17) Ueber die mit Ecken behafteten Schwingungen gespannter Saiten, Bd. XXIX, S. 486.
18) Ueber Cauchy's zweiten Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihe und eine damit verwandte ältere Methode von Poisson. Bd. XXXII.

II.

In den Sitzungsberichten der physical.-medicinischen Societät zu Erlangen.

1) Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritter Ordnung, 13. Juli 1874.
2) Zur Theorie der cubischen ternären Formen, 8. Februar 1875.
3) Ueber einen Beweis des Abel'schen Theorems, 12. Juli 1875.

III.

In den Berichten der math. phys. Classe der k. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

1) Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrales, 12. Nov. 1885.
2) Existenzbeweise zur Theorie des Potentiales in der Ebene und im Raume, 2. Mai 1886.
3) Ueber die Darstellung einer willkürlichen Function durch die Fourier-Bessel'schen Functionen, 12. Dec. 1887.

IV.

In Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik.

1) Ueber lineare Constructionen von ebenen Curven dritter Ordnung, XXII, S. 38.
2) Zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern, XXXII, S. 91.

V.

In anderen Zeitschriften.

1) Ueber algebraische Differentiale, Annali di Matematica, Ser. II, t. 9, S. 302.
2) Théorie de la série de Fourier, Darboux, Bulletin des sciences mathém. et astron., ser. II, t. VI, 1883; auch separat erschienen, Paris, Gauthier-Villars 1883.
3) Ueber die einfachsten Methoden zur angenäherten Berechnung ebener Flächen, Civilingenieur, Bd. XXVIII.

VI.

Reden und Festschriften.

1) Ueber den allgemeinen Raumbegriff und seine Anwendbarkeit in der Naturforschung, Sitzungsber. der naturw. Gesellschaft Isis zu Dresden, 1878.
2) Zur Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern, Festschrift der Gesellschaft Isis zu Dresden, 14. Mai 1885; vgl. IV, Nr. 2.

3) Naturforschung und Naturphilosophie, Vortrag gehalten in der naturw. Gesellschaft zu Dresden, Leipzig 1885, Teubner.
4) Festschrift zur Feier des siebenzigsten Geburtstages ihres Vaters Theodosius Harnack, Dr. und Prof. emer. der Theologie an der Universität Dorpat, 3. Jan. 1887; von Dr. A. Harnack, Prof. der Theologie a. d. Universität Marburg, Dr. A. Harnack, Prof. der Mathematik am Polytechnicum zu Dresden, Dr. E. Harnack, Prof. der Medicin a. d. Universität Halle und Dr. O. Harnack, Oberlehrer am Gymnasium Birkenruh, Dresden 1887, Teubner; Ueber den Gebrauch des Unendlichen in der Mathematik, S. 17—29.
5) Leibniz' Bedeutung in der Geschichte der Mathematik. Rede zur Feier des Geburtstages S. M. des Königs von Sachsen, gehalten in der Aula des Polytechnicums zu Dresden, Dresden 1887; Zahn und Jaensch.

VII.

Recensionen, Referate.

1) Besprechung des Handbuches der Mathematik, herausgegeben von Schlömilch, unter Mitwirkung von Heger und Reidt, Breslau 1879, 1881; Civilingenieur, Bd. XXIX.
2) Referate über Arbeiten deutscher Mathematiker in Darboux' Bulletin des sciences math. et astron. aus den Jahren 1876—86.
3) Eine Reihe seit 1882 in der allg. Encyclopädie von Ersch und Gruber erschienener zum Theil ausführlicherer Artikel, so z. B. Kettenbruch, Krümmung, Kreis (Beweis der Unmöglichkeit der Quadratur nach Lindemann), Mathematik u. a. m.

VIII.

Selbständig erschienene Werke.

1) Elemente der Differential- und Integralrechnung, 1 Band, 400 S., Leipzig 1881, Teubner.
2) Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von J. A. Serret, mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von A. Harnack, 3 Bände, Leipzig 1884—85, Teubner.
3) Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der Potentialfunctionen in der Ebene, 1 Band, 158 S. Leipzig 1887, Teubner.

* * *

Hankel, die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung, herausgegeben von A. Harnack, Leipzig 1875, Teubner.

Ueber Cauchy's zweiten Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihen und eine damit verwandte ältere Methode von Poisson.

Von

Axel Harnack †.

Durch die epochemachende Arbeit, welche Dirichlet im Anfang des Jahres 1829 über die Convergenz der Fourier'schen Reihen veröffentlichte (Crelle's Journal Bd. 4), waren alle Versuche in den Schatten gestellt, welche bis dahin gemacht worden waren, um die Gültigkeit dieser Reihen zu erweisen. Dirichlet selbst eröffnete seine Arbeit mit einer Kritik des Beweises, den Cauchy im Jahre 1826 der Academie vorgelegt hatte (Mémoires de l'Académ. T. VI, 1827), indem er nachwies, dass derselbe die Fortsetzbarkeit einer reellen Function in das complexe Gebiet ohne weiteres voraussetze, und überdies eine Schlussfolgerung mache, die in dieser Allgemeinheit sicherlich für bedingt convergente Reihen unzulässig sei. (Er bemerkt dazu: „*Je ne connais sur cet objet qu'un travail dû à M. Cauchy* etc."). Mit der Unterscheidung der bedingten und unbedingten Convergenz, sowie mit dem Nachweis, dass gewisse Integralsätze nur dann angewandt werden können, wenn die Function nicht unendlich viele Oscillationen besitzt, waren überhaupt erst die Grundlagen für eine sichere Untersuchung geschaffen, und zugleich entwickelte sich die Erkenntniss, dass die Function nicht in völlig unbeschränkter Weise willkürlich sein dürfe.

Als dann Riemann seine Arbeit im Jahre 1854 schrieb, führte auch er den nämlichen Cauchy'schen Beweis mit einigen Bemerkungen an, und seitdem hat sich in den historischen Darstellungen dieser Theorie die Gewohnheit eingebürgert, dass abgesehen von dem heuristischen Verfahren Fouriers und seiner Vorgänger keine andere Arbeit als die erwähnte vor der Dirichlet'schen genannt wird. Auch die grosse Abhandlung von Bonnet: „Sur la théorie générale des séries", welche im Jahre 1849 von der belgischen Academie mit einem Preise gekrönt wurde, macht hiervon keine Ausnahme, wiewohl sie sonst recht vollständig in ihren Angaben ist.

Indessen verhalten sich die Thatsachen doch anders. Im 12. Bande (19. Hefte) des Journal de l'École Polytechnique vom Jahre 1823 sind die umfassenden Versuche von Poisson enthalten, welche sich auf die Convergenz der Reihen mit trigonometrischen Functionen und mit Cylinderfunctionen beziehen, und im zweiten Bande seiner „Exercices de mathématiques vom Jahre 1827 hat Cauchy seine Theorie der Residuenrechnung mit einer ausführlichen Abhandlung abgeschlossen („*Sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies*“ pag. 341—376), die einen neuen Beweis für die Convergenz der Fourier'schen Reihen enthält. Bei beiden Autoren handelt es sich nicht blos um die gewöhnliche Reihe, welche nach ganzzahligen Vielfachen des Argumentes fortschreitet, und welche in der Dirichlet'schen Arbeit allein behandelt wird, sondern es werden auch die Reihen in Betracht gezogen, bei welchen die Parameter von den Wurzeln irgend einer vorgeschriebenen transcendenten Gleichung abhängen. Sehen wir vorläufig von der Methode Poisson's ab; für diesen zweiten Beweis von Cauchy gestaltet sich die Sachlage wesentlich günstiger als für den ersten!

Wie ich bereits in einer Anmerkung zu meiner Arbeit über die Fourier-Bessel'schen Functionen (Berichte der k. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1887) ausgesprochen habe, wird dieser Beweis zu einem genauen und vollständigen, sobald man nur die Voraussetzungen über die Beschaffenheit der darzustellenden Function betont, unter welchen gewisse Umformungen bestimmter Integrale, die bei Cauchy vorkommen, allein und überdies in etwas anderer Form als dort zulässig werden.

Von einer Priorität kann bei Cauchy nicht die Rede sein, wenn es sich um den ersten exacten Beweis in der Theorie handelt; seine Leistung ist überhaupt mit der von Dirichlet incommensurabel, weil sie sich von vornherein ein anderes Ziel steckt.

Aber auf Grund der Dirichlet'schen Ergebnisse erlangt die doch ältere Cauchy'sche Methode die Bedeutung, dass sie die eigentliche Grundlage für die ganze Theorie der Reihenentwickelungen dieser Art in ihrer allgemeinsten Form bildet, eine Theorie, welche man seit den Arbeiten Dirichlet's und Riemann's nur auf die speciellsten Formen der Fourier'schen Reihen beschränkt hat, statt sie auf Grund dieser Arbeiten vollständig auszubilden. Nun ist es ja im Allgemeinen bekannt, dass die Residuenrechnung dies alles umfasst; wie aber Cauchy selbst speciell für die trigonometrischen Reihen in einfachster und gegenwärtig leicht corrigirbarer Weise den Beweis ausgeführt hat, ist, irre ich nicht, in Vergessenheit gerathen.

Aus diesem Grunde halte ich es nicht für überflüssig, eine Darstellung des wesentlichen Inhaltes dieser Arbeit zu geben. Dabei lasse ich die zahlreichen Beispiele von Reihenentwicklungen meistens fort, indem ich die Beweise der Hauptsätze, so wie sie dort gegeben sind, entwickele und die Stellen bezeichne, an denen eine bestimmte Voraussetzung über die darzustellende Function nothwendig wird, damit die Mittelwerthsätze angewandt werden können. Die nächstliegende Voraussetzung dieser Art ist die sogenannte Dirichlet'sche, dass nämlich die im Allgemeinen stetige Function nicht unendlich viele Oscillationen hat.

Die von Cauchy gegebene Entwickelung lässt sich nun auch, wie im zweiten Abschnitt gezeigt wird, so modificiren, dass sie (bei einer überall endlichen, oder einer absolut integrirbaren Function) schliesslich nur noch auf die einzige nothwendige Bedingung, nämlich auf die Convergenz des bekannten Dirichlet'schen Integrales, führt; *auch dann, wenn es sich um die Reihen mit allgemeineren Parametern handelt.*

Im dritten Abschnitt habe ich die von Poisson angegebene Methode kurz erörtert, um zu zeigen, wie auch dieser überaus sinnreiche Versuch im Grunde nichts anderes als eine Residuenrechnung ist, die, wenn sie als solche aufgefasst und durchgeführt wird, keinen Bedenken mehr unterliegt, wohl aber den Charakter der darzustellenden Functionen von vornherein etwas einschränkt.

I.

Es sei $f(z)$ eine für alle endlichen Werthe der complexen Variabelen $z = re^{i\varphi}$ definirte, eindeutige analytische Function, so ist das Integral

$$\frac{1}{2i\pi}\int f(z)\,dz$$

geführt in positivem Umlauf um die Begrenzung eines beliebigen Gebietes gleich der Summe der Residuen, welche zu den verschiedenen im Innern des Gebietes gelegenen Unendlichkeitsstellen der Function gehören. Ist die Begrenzung ein Kreis vom Radius r, dessen Mittelpunkt der Coordinatenanfangspunkt ist, so besteht die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi}\,r\int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})\,e^{i\varphi}\,d\varphi = \sum_{0,0}^{r,2\pi} \Re((f(z)))\,^{*}).$$

*) Mit $\Re((f(z)))$ soll ein Residuumwerth von $f(z)$ bezeichnet sein, bekanntlich der Coefficient des Gliedes $\frac{1}{z-z_0}$, wenn z_0 ein Unendlichkeitspunkt ist.

Die Function f soll nun die Eigenschaft haben, dass sich eine in's Unendliche wachsende Werthreihe des Modul $r, r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ angeben lässt, für welche das Product

$$(2) \qquad zf(z) = r_n e^{i\varphi} f(r_n e^{i\varphi})$$

gleichmässig bei allen Werthen von φ nach einem bestimmten Werth F convergirt. Alsdann besteht die Gleichung

$$(3) \qquad F = \sum \Re((f(z))),$$

wobei die unendliche Reihe, welche die Gesammtheit aller Residuen der Function $f(z)$ in der unendlichen Ebene enthält, nach einem bestimmten Gesetz gebildet ist, nämlich so, dass die Radien der concentrischen Kreise die oben erwähnte Werthreihe durchlaufen. Diese Gesammtheit wird daher von Cauchy der Hauptwerth des Integralresiduums genannt. Von besonderer Wichtigkeit aber ist es, zu bemerken, dass die Gleichung (3) selbst dann noch besteht, wenn bei den angegebenen Werthen von r die Gleichung $\lim f(z) = F$ für einzelne Werthe von φ nicht erfüllt ist, vorausgesetzt nur, dass die Differenz $f(z) - F$ endlich bleibt, und nach Ausschluss solcher einzelner Stellen durch beliebig kleine Kreisbögen im übrigen gleichmässig nach null convergirt.

An Stelle des Integrales (1) kann man auch das Integral

$$(4) \qquad \frac{1}{\pi}\, r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(f(re^{i\varphi}) - f(-re^{i\varphi})\right) e^{i\varphi}\, d\varphi$$

betrachten, so dass die Gleichung (3) auf der Voraussetzung basirt, dass dieses Integral den Grenzwerth F hat, oder auf der engeren Voraussetzung, dass das Product

$$(5) \qquad z\,\frac{1}{2}\left(f(z) - f(-z)\right) - F = 0$$

wird, wenn der Modul von z eine bestimmte in's Unendliche wachsende Werthreihe durchläuft, mag dann auch für einzelne Werthe des Argumentes φ $\left(\text{von } -\frac{\pi}{2} \text{ bis } +\frac{\pi}{2}\right)$ diese Differenz nicht null werden, aber endlich bleiben.

Nimmt man nun an, dass die Function $f(z)$ einen Parameter x enthält, und von der Form ist

$$f(z) = \frac{\psi(z)\, f(z, x)}{\varpi(z)},$$

wobei $f(z, x)$ und $\psi(z)$ bei allen endlichen Werthen von z endlich bleiben sollen, so sind die Unendlichkeitsstellen von $f(z)$ diejenigen, an denen $\varpi(z)$ verschwindet. Ferner wird auch der Grenzwerth von F im Allgemeinen von $f(x)$ abhängig, also mit $F(x)$ zu bezeichnen sein, so dass die Gleichung entsteht:

$$(6) \qquad F(x) = \sum \Re \frac{\psi(z)\, f(z, x)}{((\varpi(z)))} = \sum_{\lambda} \frac{\psi(\lambda)}{\varpi'(\lambda)} f(\lambda, x).$$

In dem ersten Summenausdruck soll die doppelte Klammer bei $\varpi(z)$ andeuten, dass die Residuenwerthe sich nur auf die Nullstellen dieser Function beziehen; in dem zweiten Ausdruck ist angenommen, dass sich die Summation über alle Wurzeln der Gleichung $\varpi(\lambda) = 0$ erstreckt, und dass diese Wurzeln nur einfache sind. Für vielfache Wurzeln ist dieser Ausdruck zu ändern.

Es werde nun

$$f(z, x) = \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \qquad (x > x_0)$$

gesetzt, so ist, entsprechend der Gleichung (4), der Grenzwerth von

$$(7) \quad \frac{1}{2}\, z\, \frac{\psi(z)}{\varpi(z)} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu - \frac{1}{2}\, z\, \frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

zu untersuchen. Es möge der Quotient $\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}$ bei Werthen von z, deren Modul in's Unendliche wächst, und deren reeller Bestandtheil nicht negativ ist, im Allgemeinen den Grenzwerth c haben. Ferner soll im Allgemeinen (d. h. immer mit Ausnahme etwaiger einzelner Werthe des Argumentes)

$$\lim z\, \frac{\psi(z)}{\varpi(z)} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = 0$$

sein. Man kann diesen Ausdruck zerlegen in die Factoren

$$\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}\, e^{z(x-x_0)} \quad \text{und} \quad z \int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\, d\mu.$$

Wenn der erste Factor im Allgemeinen den Grenzwerth null hat, und der zweite durchaus endlich bleibt, so hat auch das ursprüngliche Product im Allgemeinen den Grenzwerth null. Man erhält demnach aus dem früheren Satz (Gleichung 3) den

Lehrsatz 1. *Es seien $\varpi(z)$ und $\psi(z)$ eindeutige, analytische Functionen der complexen Variabelen $z = re^{i\varphi}$, welche bei allen endlichen Werthen von z endlich bleiben, ferner sei $f(\mu)$ eine willkürliche Function der reellen Variabelen μ, die innerhalb eines Intervalles von $\mu = x_0$ bis $\mu = x > x_0$ endlich (und selbstverständlich auch integrirbar)* *ist. Wenn nun für passend gewählte Werthe des Modul r, welche in's Unendliche wachsen, und für positive Werthe von* cos φ *die Ausdrücke*

$$(8)\qquad \frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c \quad \text{und} \quad \frac{\psi(z)}{\varpi(z)}\, e^{z(x-x_0)},$$

wobei c eine bestimmte Constante bedeutet, im Allgemeinen gleichmässig null werden, und allenfalls nur in der Umgebung einzelner Stellen von φ *einen von null verschiedenen, jedoch endlichen Werth behalten, so ist*

$$(9)\qquad \sum \Re \frac{(\psi z)}{((\varpi(z)))} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \quad \textit{oder} \quad \sum_{\lambda} \frac{\psi(\lambda)}{\varpi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

gleich

$$-\frac{1}{2}\, c \lim z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,$$

vorausgesetzt, dass dieses Integral einen bestimmten Grenzwerth ergiebt, und dass

$$(10)\qquad \lim z \int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\, d\mu \quad \text{sowie} \quad \lim z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

durchaus endlich bleiben.

Den vorstehenden Satz habe ich absichtlich in dieser Weise formulirt, weil die Entwickelungen bis zu diesem Punkte von Cauchy vollkommen bewiesen sind. Sein Beweis erleidet nun aber einen Sprung, weil er ohne weitere Beschränkungen über die Function $f(x)$, und auf Grund eines Mittelwerthsatzes, der ohne solche Beschränkung unzulässig ist, folgerte, dass

$$(11)\qquad \lim z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = f(x)$$

ist, und dass die letzte Bedingung des Satzes immer erfüllt ist.*) Es

---

*) Er setzt ohne weiteres mittels der Substitution $x - \mu = \frac{1}{r}\, y$

$$z \int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu = (\cos\varphi + i \sin\varphi) \int_{0}^{r(x-x_0)} e^{-(\cos\varphi + i\sin\varphi)y} f\left(x - \frac{1}{r}\, y\right) dy$$

$$= (\cos\varphi + i \sin\varphi)\, f(x) \int_{0}^{\infty} e^{-(\cos\varphi + i\sin\varphi)y}\, dy,$$

ferner:

$$\int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)\cos\varphi} \cos(r(x-\mu)\sin\varphi) f(\mu)\, d\mu = f(\xi_1) \int_{x_0}^{x} e^{r(x-\mu)\cos\varphi} \cos(r(x-\mu)\sin\varphi)\, d\mu$$

wobei ξ_1 einen mittleren Werth bedeutet; u. s. w.

sind vielmehr solche Eigenschaften der Function $f(x)$ anzugeben, bei denen diese Bedingungen sicher erfüllt sind.

Eine hinreichende Voraussetzung dieser Art ist z. B. die Dirichlet'sche, dass die Function $f(x)$ im Intervall von x_0 bis x im Allgemeinen stetig ist, und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat. Denn alsdann wird für alle Werthe von s, deren Argument *innerhalb* der Werthe $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, der Grenzwerth des Integrales gleich

$$\lim s \int_{x-\varepsilon}^{x} e^{-s(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

$$= f(x) \lim \int_{x-\varepsilon}^{x} e^{-s(x-\mu)} s\, d\mu + \lim \int_{x-\varepsilon}^{x} e^{-s(x-\mu)} (f(\mu) - f(x))\, s\, d\mu.$$

Da die Function $f(\mu) - f(x)$ im beliebig kleinen Intervall ihr Zeichen nicht wechselt, so kann mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes ohne weiteres geschlossen werden, dass der Modul des zweiten Integrales durch Wahl von ε beliebig klein wird, wie gross auch r werden mag, während das erste Glied der rechten Seite den Werth $f(x)$ ergiebt. Auf Grund des nämlichen Satzes folgt dann auch, dass der Grenzwerth von (11) endlich bleibt, wenn s in unmittelbarer Umgebung der rein imaginären Werthe $\pm ri$ liegt, und dass auch der Grenzwerth der Integrale (10) bei allen Werthen des Argumentes ein endlicher ist. Denn es lässt sich beispielsweise das zweite Integral in (10) gemäss den Intervallen, in denen $f(\mu)$ monoton ist und sein Zeichen nicht ändert, in eine endliche Anzahl von Theilintegralen zerlegen, die von der Form sind

$$s e^{-sx} f(\xi) \int_{x_1}^{x_2} e^{\mu r \cos\varphi} \cos(\mu r \sin\varphi)\, d\mu$$

und

$$i s e^{-sx} f(\xi) \int_{x_3}^{x_4} e^{\mu r \cos\varphi} \sin(\mu r \sin\varphi)\, d\mu$$

und jedes derselben behält für $r = \infty$ einen endlichen Werth. (x_1, x_2, x_3, x_4, ξ bedeuten stets Werthe zwischen den Grenzen x_0 und x).

Für eine Function, welche der Dirichlet'schen Bedingung genügt, besteht also die Gleichung:

$$(12) \quad -\tfrac{1}{2} c\, f(x) = \sum_{\lambda} \frac{\psi(\lambda)}{\varpi'(\lambda)} \int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu \quad (\varpi(\lambda) = 0; \quad x > x_0).$$

Auch lässt sich die Gültigkeit dieser Gleichung beweisen, wenn $f(x)$ einen endlichen, integrirbaren Differentialquotienten besitzt, u. drgl.

Beispiel: $\varpi(z) = e^{az} - 1 \quad \psi(z) = 1$ (a reell u. positiv)

$$\lim \frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} = -\frac{1}{1-e^{-az}} = -1; \quad \lim \frac{e^{z(x-x_0)}}{e^{az-1}} = \frac{e^{z(x-x_0-a)}}{1-e^{-az}} = 0,$$

wenn der Modul von z unendlich wird, und etwa die Werthreihe $\frac{(2k+1)\pi}{a}$ durchläuft, während das Argument von $\pm\frac{\pi}{2}$ verschieden und $x - x_0 - a < 0$, also $x < x_0 + a$ ist. Ist das Argument gleich $\pm\frac{\pi}{2}$, so bleiben die Ausdrücke endlich. Da hier die Werthe λ, für welche $\varpi(\lambda)$ verschwindet, diejenigen sind, für $a\lambda = 0$ oder $\pm 2k\pi i$, so folgt durch Vereinigung der Glieder, die zu entgegengesetzt gleichen Werthen von λ gehören:

$$(13) \qquad \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(\mu)\,d\mu + \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_{x_0}^{x} f(\mu)\,\frac{\cos 2k\pi(x-\mu)}{a}\,d\mu$$

für alle Werthe von x *innerhalb* des Intervalles von x_0 bis $x_0 + a$. Damit ist bereits das Wesentliche der gewöhnlichen Fourier'schen Reihe bewiesen.

Cauchy giebt überdies noch die Beispiele: $\varpi(z) = e^{az} - z$, $\varphi(z) = z$ und $\varpi(z) = e^{az} - 2bz + e^{-az}$, $\varphi(z) = e^{-az} - 2bz$.

Der bewiesene Satz lässt sich so abändern, dass man an Stelle der constanten unteren Grenze x_0 eine constante obere Grenze $X > x$ einführt, also

$$f(z, x) = \int_{x}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu$$

setzt. Ist dann

$$\lim\left(\frac{\psi(z)}{\varpi(z)} - C\right) \quad \text{und} \quad \lim \frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}\,e^{z(X-x)}$$

im Allgemeinen gleich null, so wird, wenn die Function $f(x)$ wiederum der Dirichlet'schen Bedingung (oder irgend einer anderen als hinreichend erkannten) genügt:

$$\frac{1}{2}Cf(x) = \sum \Re\,\frac{\psi(z)}{((\varpi(z)))}\int_{x}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\,d\mu.$$

Für $\varpi(z) = e^{az} - 1$, $\psi(z) = e^{az}$ wird:

$$\lim \frac{e^{az}}{e^{az}-1} = 1, \quad \lim \frac{e^{-az}}{e^{-az}-1}\,e^{z(X-x)} = 0,$$

wenn $x > X - a$; also besteht *innerhalb* des Intervalles von $X - a$ bis X die Gleichung:

$$(14) \quad \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{a}\int_x^X f(\mu)\, d\mu + \frac{2}{a}\sum_{k=1}^{k=\infty}\int_x^X f(\mu) \cos\frac{2k\pi(x-a)}{a}\, d\mu,$$

so dass durch Addition der Reihen (13) und (14) und für $a = 2\pi$ die Fourier'sche Reihe in der gewöhnlichen Form erhalten wird.

Diese Summation zweier Reihen lässt sich nun auch in folgender Weise allgemein aussprechen:

Lehrsatz 2: *Es sei $\varpi(z)$ eine eindeutige analytische Function, welche bei allen endlichen Werthen von z endlich bleibt; es werde angenommen, dass sich die Function $\varpi(z)$ in zwei Summanden $\psi(z)$ und $\chi(z)$ zerlegen lässt, so dass für Werthe von z mit positivem reellem Bestandtheil, die in's Unendliche wachsen und deren Modul passend gewählt ist, die Quotienten*

$$\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} \quad \textit{und} \quad \frac{\chi(z)}{\varpi(z)}$$

im Allgemeinen null werden, und allenfalls nur in der Umgebung einzelner Werthe des Argumentes φ endlich bleiben, ferner dass dasselbe auch noch von den Ausdrücken

$$\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}\, e^{z(X-x_0)} \quad \textit{und} \quad \frac{\chi(z)}{\varpi(z)}\, e^{z(X-x_0)}$$

gilt. Alsdann ist für alle Werthe von x innerhalb der Grenzen x_0 und X

$$(15) \qquad \frac{1}{2} f(x) = -\sum \Re \frac{\chi(z)}{((\varpi(z)))}\int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,$$

$$(16) \qquad \frac{1}{2} f(x) = \sum \Re \frac{\psi(z)}{((\varpi(z)))}\int_{x}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,$$

wobei $f(x)$ eine willkürliche reelle Function im Intervall von x_0 bis X ist, welche den früher eingeführten Bedingungen genügt.

Denn es ist zufolge der Gleichung $\psi(z) + \chi(z) = \varpi(z)$ und der obigen Bedingungen

$$\lim \frac{\chi(-z)}{\varpi(-z)} - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\chi(z)}{\varpi(z)}\, e^{z(x-x_0)} = 0,$$

mithin gilt der Lehrsatz 1., aus dem die Reihe (15) hervorgeht, und ebenso ist

$$\lim \frac{\psi(z)}{\varpi(z)} - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}\, e^{z(X-x)} = 0,$$

womit der modificirte Satz 1. und also die Reihe (16) bewiesen ist.

Aus den Gleichungen (15) und (16) folgt noch, indem man $\chi(z) = -\psi(z)$ setzt (unter der Bedingung $\varpi(z) = 0$):

$$\frac{1}{2} f(x) = \sum \Re \frac{\psi(z)}{((\varpi(z)))} \int_{x_0}^{x} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$
$$= - \sum \Re \frac{\chi(z)}{((\varpi(z)))} \int_{x}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,$$

so dass also

$$(17) \qquad f(x) = \sum \Re \frac{\psi(z)}{((\varpi(z)))} \int_{x_0}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$
$$= - \sum \Re \frac{\chi(z)}{((\varpi(z)))} \int_{x_0}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu.$$

Unter den Beispielen, welche Cauchy an diese allgemeine Formel knüpft, seien genannt:

$$\varpi(z) = e^{az} - e^{a\alpha}, \qquad \psi(z) = e^{az}, \qquad \chi(z) = e^{a\alpha},$$
$$\varpi(z) = e^{az} + e^{-az} - 2bz, \qquad \psi(z) = e^{az} - bz, \qquad \chi(z) = e^{-az} - bz.$$

Besonders beachtenswerth aber ist die Substitution

$$(18) \qquad \varpi(z) = e^{az} g(z) - e^{a(b-z)} g(b-z), \qquad \psi(z) = e^{az} g(z),$$

wobei $g(z)$ eine ganze rationale Function in z bedeuten soll. Hier ist

$$(19) \qquad f(x) = \sum \Re \frac{e^{az} g(z)}{((e^{az} g(z) - e^{a(b-z)} g(b-z)))} \int_{x_0}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu,$$

wenn $X - x_0 = a$. Diese Gleichung enthält nämlich, worauf Cauchy nur mit der Bemerkung aufmerksam macht: „*ces diverses formules sont fort utiles dans la solution des problèmes de physique mathématique*“ ..., als speciellen Fall die allgemeinere Reihe, welche bereits Fourier in seiner Wärmetheorie angegeben hat, bei dem Problem der Kugel, bei welcher die Punkte in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt auch die gleiche Temperatur haben. Denn es sei $g(z) = z + h$, und $b = 0$, so ist

$$\varpi(z) = z(e^{az} + e^{-az}) + h(e^{az} - e^{-az}).$$

Alle Wurzeln der Gleichung $\varpi(z) = 0$ sind rein imaginär; bezeichnet man sie mit $z = \lambda i$, so genügt λ der Gleichung

$$\lambda \cos a\lambda + h \sin a\lambda = 0,$$

deren Wurzeln reell und paarweise entgegengesetzt sind. Es ist

$$\varpi'(\lambda i) = 2((1 + ah)\cos a\lambda - \lambda a \sin a\lambda) = \frac{\sin 2a\lambda - 2a\lambda}{\sin a\lambda}.$$

Also wird

$$f(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \frac{e^{a\lambda i}(\lambda i + h)}{\sin 2a\lambda - 2a\lambda} \sin a\lambda \int_{x_0}^{X} e^{\lambda i(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

und vereinigt man die Glieder, welche zu entgegengesetzt gleichen Werthen von λ gehören, so folgt

$$(20)\quad f(x) = \frac{h}{2(1+ah)} \int_{x_0}^{X} f(\mu)\, d\mu + \sum \frac{2\lambda}{2a\lambda - \sin 2a\lambda} \int_{x_0}^{X} f(\mu) \cos(x-\mu)\lambda\, d\mu.$$

Die Summation erstreckt sich hier nur noch über die positiven Wurzeln λ.

Eine andere, mit dieser verwandte Formel, welche in den eingangs erwähnten Arbeiten von Poisson vorkommt, findet sich bei Cauchy in der Form

$$(21)\qquad f(x) = \sum \Re \frac{e^{az}(A+z)(B+z) \int_{x_0}^{X} e^{z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu}{(((A+z)(B+z)e^{az} - (A-z)(B-z)e^{-az}))}.$$

Eine weitere Umformung dieser Reihen, insbesondere in solche, welche nur den Cosinus oder nur den Sinus enthalten, erreicht man schliesslich noch durch den

Lehrsatz 3. *Es sei $\psi(x, z)$ eine eindeutige analytische Function der Variabelen z, welche den Parameter x enthält und endlich bleibt bei allen endlichen Werthen von z, während x innerhalb der Grenzen x_0 und X liegt. Wenn dann die Grenzwerthe von*

$$(22)\qquad \frac{\psi(x, z)}{\varpi(z)} e^{-zx_0} \quad \textit{und} \quad \frac{\psi(x, z)}{\varpi(z)} e^{-zX},$$

während der Modul von z in's Unendliche wächst, im Allgemeinen null werden und allenfalls nur für einzelne Werthe des Argumentes von 0 *bis 2π von null verschieden, jedoch endlich bleiben, so ist*

$$(23)\qquad \sum \Re \frac{\psi(x, z)}{\varpi(z)} \int_{x_0}^{X} e^{-z\mu} f(\mu)\, d\mu = 0,$$

vorausgesetzt, wie wir hinzufügen, dass die Function $f(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, oder unter einer anderen als hinreichend erkannten Bedingung.

Denn die Gleichung (23) besteht, falls

$$(24)\qquad \lim z \frac{\psi(x, z)}{\varpi(z)} \int_{x_0}^{X} e^{-z\mu} f(\mu)\, d\mu = 0$$

wird, resp. für einzelne Werthe von φ endlich bleibt; und die Gültigkeit dieser Gleichung lässt sich aus den Bedingungen (22) ableiten, wenn man für alle Werthe von z, deren reeller Bestandtheil positiv ist, den Ausdruck in der Form

$$\frac{\psi(x,z)}{\varpi(z)}\, e^{-z x_0} \cdot z \int_{x_0}^{X} e^{-z(\mu - x_0)} f(\mu)\, d\mu$$

und für alle Werthe von z, deren reeller Bestandtheil negativ ist, den Ausdruck in der Form

$$\frac{\psi(x,z)}{\varpi(z)}\, e^{-z X} \cdot z \int_{x_0}^{X} e^{z(X-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

betrachtet. Diese Integrale mit dem Factor z behaftet, die schon in den Ausdrücken (10) vorkamen, bleiben durchaus endlich auch für rein imaginäre Werthe, wenn $f(x)$ der eingeführten Bedingung genügt.

Cauchy beweist die Gleichung (23) als eine Folge der Bedingungen (21) ohne Voraussetzungen über $f(x)$; aber der Mittelwerthsatz, welchen er anwendet, besteht in dieser Allgemeinheit nicht, und muss durch den zweiten Mittelwerthsatz, bezogen auf den reellen und auf den imaginären Theil des Integrales, ersetzt werden, indem unendlich viele Oscillationen von f ausgeschlossen werden.

Setzt man z. B.

$$\varpi(z) = e^{az} g(z) - e^{a(b-z)} g(b-z),$$
$$\psi(x,z) = e^{az} e^{-z(x-2x_0)} g(z),$$

so ist

$$e^{-zx_0}\frac{\psi(x,z)}{\varpi(z)} = \frac{e^{az}e^{-z(x-x_0)}}{\varpi(z)}\, g(z), \quad e^{-zX}\frac{\psi(x,z)}{\varpi(z)} = \frac{e^{az}e^{-z(X+x-2x_0)}}{\varpi(z)}\, g(z)$$

und die übrigen Bedingungen sind erfüllt, wenn $X - x_0 = a$ und x innerhalb dieses Intervalles liegt. Sonach wird

$$\sum \Re \frac{e^{az} g(z)\, e^{-z(x-2x_0)}}{((e^{az} g(z) - e^{a(b-z)} g(-z)))} \int_{x_0}^{X} e^{-z\mu} f(\mu)\, d\mu = 0.$$

Vereinigt man diesen Ausdruck mit der Reihe (19) durch Addition oder Subtraction, so folgt

$$f(x) = \sum \Re \frac{e^{az} g(z)\, [e^{z(x-x_0)} \pm e^{-z(x-x_0)}]}{((e^{az} g(z) - e^{a(b-z)} g(b-z)))} \int_{x_0}^{X} e^{-z(\mu - x_0)} f(\mu)\, d\mu.$$

Für den Fall $b = 0$, $g(z) = z + h$ erhält man hieraus die Reihen:

$$(26)\quad f(x) = \frac{h}{1+ah}\int\limits_{x_0}^{X} f(\mu)\,d\mu + $$
$$+ \sum_{\lambda} \frac{4\lambda}{2a\lambda - \sin 2a\lambda} \cos\lambda(x-x_0)\int\limits_{x_0}^{X} f(\mu)\cos\lambda(\mu - x_0)\,d\mu,$$

$$(27)\quad f(x) = \sum_{\lambda} \frac{4\lambda}{2a\lambda - \sin 2a\lambda} \sin\lambda(x-x_0)\int\limits_{x_0}^{X} f(\mu)\sin\lambda(\mu - x_0)\,d\mu.$$

Die Werthe λ sind in beiden Fällen die positiven Wurzeln der Gleichung

$$\lambda\cos a\lambda + h\sin a\lambda = 0.$$

Die zweite Reihe ist die von Fourier angegebene. Für $h = 0$ werden die Wurzeln $\frac{(2k+1)\pi}{2a}$; für $h = \infty$ wird $\lambda = \frac{k\pi}{a}$ und man erhält unter anderen auch die gewöhnlichen Sinus- oder Cosinusreihen.

II.

Es soll nun gezeigt werden, dass in den von Cauchy behandelten Beispielen die Convergenz der Reihen immer auf der Convergenz des bekannten Dirichlet'schen Integrales beruht, so dass, ebenso wie für die gewöhnliche Fourier'sche Reihe, diese Bedingung die eigentlich wesentliche auch bei den allgemeinen Reihen dieser Art bildet. Ich nenne sie die eigentlich wesentliche, oder die nothwendige und hinreichende, indem ich im übrigen von der Voraussetzung ausgehe, dass die darzustellende Function eine endliche und integrirbare ist. Bekanntermassen liesse sich letzteres erweitern auf absolute Integrirbarkeit u. drgl., was aber hier nicht in Betracht gezogen werden soll.

Bei dem Beweise des ersten Lehrsatzes, sowie in allen folgenden, ist zur Vereinfachung der Untersuchung an Stelle des Integrales (4) immer das Product in (5) getreten. Behält man aber die ursprüngliche Integralformel bei, so ist statt des Ausdruckes (7) der Grenzwerth von

$$(28)\qquad \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(z)}{\varpi(z)} f(z, x)\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} f(-z, x)\,dz$$

zu untersuchen, wobei die Integration nach $z = re^{i\varphi}$ auf dem Halbkreise mit dem Radius r zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ auszuführen ist. Wir betrachten zunächst das zweite Integral; es ist

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}f(-z,x)\,dz=-\frac{c}{2i\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}f(-z,x)\,dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}-c\right)f(-z,x)\,dz$$

und

$$(29)\quad -\frac{c}{2i\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}f(-z,x)\,dz=-\frac{c}{2i\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}dz\int\limits_{x_0}^{x}e^{-z(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu$$

$$=-\frac{c}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}f(\mu)\,\frac{\sin r(x-\mu)}{x-\mu}\,d\mu.$$

Auf den Grenzwerth dieses Dirichlet'schen Integrales für $r=\infty$ ist also der Werth der Reihe zurückgeführt, wenn gezeigt werden kann, dass die Integrale

$$(30)\quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}-c\right)f(-z,x)\,dz \quad \text{und} \quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}f(z,x)\,dz$$

die Grenzwerthe null haben, wobei angenommen wird, dass die Werthe

$$\lim\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}-c\right) \quad \text{und} \quad \lim\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}$$

im Allgemeinen gleich null sind, und dass sie, wenn sie für einzelne Werthe des Argumentes φ von null verschieden sind, endlich bleiben. Für das Folgende werden wir annehmen, dass diese besonderen Werthe — wie in allen vorhergehenden Beispielen — nur an den Grenzstellen $\pm\frac{\pi}{2}$ sich befinden.

Betrachtet man zuerst die Integrale mit Ausschluss der Grenzstellen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, weil für diese die Grenzwerthe und auch die Function $f(z,x)$ sich in besonderer Weise verhalten, so ist

$$\text{mod}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}-c\right)f(-z,x)\,dz<\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\epsilon}^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}\text{mod}\left[\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}-c\right]\text{mod}.[f(-z,x)]\;r\,d\varphi$$

und da der Werth des ersten Modul auf der rechten Seite beliebig klein wird, so wird auch der Werth des Integrales beliebig klein, wenn

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \mathrm{mod.}\,[f(-z,\,x)]\, r\, d\varphi \quad \text{also} \quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} r\, d\varphi \int\limits_{x_0}^{x} e^{-r\cos\varphi(x-\mu)}\, \mathrm{abs}\,[f(\mu)]\, d\mu$$

endlich bleibt. Wenn nun die Function $f(\mu)$ durchaus endlich ist, so genügt es, dass

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} r\, d\varphi \int\limits_{x_0}^{x} e^{-r\cos\varphi(x-\mu)}\, d\mu = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{1-e^{-r\cos\varphi(x-x_0)}}{\cos\varphi}\, d\varphi$$

bei beliebig wachsenden Werthen von r endlich bleibt, was in der That der Fall ist. Also ist nur noch das Integral in der Umgebung der Grenzstellen zu untersuchen. Wir betrachten die obere:

$$\mathrm{mod.}\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}-c\right) f(-z,x)\, dz < \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{mod.}\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}-c\right) \mathrm{mod.}\,(f(-z,\,x))\, r\, d\varphi.$$

Es wird aber

$$\mathrm{mod.}\, f(-z,\,x) = \mathrm{mod.}\int\limits_{x_0}^{x} e^{-z(x-\mu)} f(\mu)\, d\mu$$

$$= \mathrm{mod.}\int\limits_{x_0}^{x} e^{-r(x-\mu)\cos\varphi}\Big(\cos(r(x-\mu)\sin\varphi)$$
$$-\, i\sin(r(x-\mu)\sin\varphi)\Big) f(\mu)\, d\mu$$

durch Wahl von r beliebig klein, welche Werthe auch φ zwischen $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ und $\frac{\pi}{2}$ haben mag. Denn setzt man $r\sin\varphi = n$, so erkennt man nach einem bekannten Riemann'schen Satze aus der Theorie der trigonometrischen Integrale, dass

$$\int \cos n(x-\mu)\, f(\mu)\, d\mu \quad \text{und} \quad \int \sin n(x-\mu)\, f(\mu)\, d\mu$$

mit wachsenden Werthen von n *unabhängig von ihren Grenzen* beliebig klein werden, und diese Eigenschaft bleibt auch erhalten, wenn der Exponentialfactor $e^{-r(x-\mu)\cos\varphi}$ hinzutritt, da derselbe nach dem zweiten Mittelwerthsatze vor das Integral tritt, so dass sich nur die Grenzen desselben ändern. Demnach ist zu fordern, dass

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \text{mod.}\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c\right) r\,d\varphi$$

endlich bleibt. Diese Forderung ist erfüllt, sobald die darstellenden Functionen $\psi(z)$ und $\varpi(z)$ die Eigenschaft haben, *dass nicht nur*

$$\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c\right) \quad \textit{sondern auch} \quad \left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c\right) e^{\alpha z} \qquad (\alpha > 0)$$

im Allgemeinen null, und für $z = \pm ri$ *endlich wird.* Denn setzt man

$$\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c\right) = e^{-\alpha z} g(z),$$

wobei $g(z)$ eine durchaus endlich bleibende Function bedeutet, so ist

$$(31) \quad \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \text{mod.}\left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c\right) r\,d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \text{mod.}\,[g(z)] \cdot e^{-\alpha r \cos\varphi}\, r\,d\varphi$$

und es ist

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha r \cos\varphi}\, r\,d\varphi = \int\limits_{0}^{\sin\varepsilon} e^{-\alpha r\varphi} \frac{r\,d\varphi}{\sin\varphi} = M\left[\frac{1}{\sin\varphi}\right] \cdot \frac{1 - e^{-\alpha r \sin\varepsilon}}{\alpha},$$

wobei $M\left[\frac{1}{\sin\varphi}\right]$ einen mittleren Werth zwischen 1 und $\frac{1}{\cos\varepsilon}$ bedeutet. Dieser Ausdruck bleibt aber bei noch so grossen Werthen von r endlich, und folglich ist auch

$$\lim \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c\right) f(-z, x)\,dz$$

unter der eingeführten Voraussetzung null. Dasselbe gilt für die Umgebung der unteren Grenze, wodurch das Verschwinden des ersten der Integrale (30) dargethan ist.

Für das zweite der Integrale (30) gilt das nämliche, wenn wir auch hier die Voraussetzung einführen, *dass nicht nur*

$$\lim \frac{\psi(z)}{\varpi(z)} \quad \textit{sondern auch} \quad \lim \frac{\psi(z)}{\varpi(z)} e^{\alpha z}$$

im Allgemeinen null wird, und nur bei rein imaginären Werthen von z *endlich bleibt.*

Denn es wird

$$\text{mod.}\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\left[\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}e^{\alpha z}\right][e^{-\alpha z}f(z,x)]dz$$

beliebig klein, falls

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\text{mod.}[e^{-\alpha z}f(z,x)]\,r\,d\varphi \quad \text{also} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} r\,d\varphi\int_{x_0}^{x} e^{r\cos\varphi(-\alpha+x-\mu)}\,\text{abs}\,[f(\mu)]\,d\mu$$

endlich bleibt. Damit dieses der Fall sei, *muss* $\alpha \geqq x - x_0$ *sein.* Ferner wird für die Umgebung einer Grenzstelle

$$\text{mod.}\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}f(z,x)dz < \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\text{mod.}\left[\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}e^{z(x-x_0)}\right]\text{mod.}\,[e^{-z(x-x_0)}f(z,x)]\,r\,d\varphi.$$

Nun wird aber, wie vorhin gefunden wurde,

$$\text{mod.}\;e^{-z(x-x_0)}f(z,x) = \text{mod.}\int_{x_0}^{x} e^{-z(\mu-x_0)}f(\mu)\,d\mu$$

durch Wahl von r beliebig klein, und

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\text{mod.}\left[\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}e^{z(x-x_0)}\right]r\,d\varphi$$

bleibt, da wir $\frac{\psi(z)}{\varpi(z)}$ der Annahme nach gleich $g(z)e^{-\alpha z}$ setzen können, wobei $g(z)$ durchaus endlich, wenn $\alpha > x - x_0$ ist, wie die Gleichung (31) lehrt, endlich.

Sonach kann man an Stelle des ersten Lehrsatzes folgenden Satz aussprechen (wobei ich die früher genannten allgemeinen Eigenschaften der analytischen Functionen $\varpi(z)$ und $\psi(z)$ nicht wiederhole):

Genügt die überall endliche Function $f(x)$ der Bedingung, dass

$$\lim_{r=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x} f(\mu)\frac{\sin r(x-\mu)}{x-\mu}\,d\mu = \frac{1}{2}f(x) \tag{32}$$

ist, so besteht die Gleichung:

$$-\frac{1}{2}cf(x) = \sum_{\lambda}\frac{\psi(\lambda)}{\varpi'(\lambda)}\int_{x_0}^{x} e^{\lambda(x-\mu)}f(\mu)\,d\mu \tag{33}$$

falls die Functionen $\psi(z)$ *und* $\varpi(z)$ *die Eigenschaft haben, dass für Werthe von* z *mit wachsendem Modul und positivem reellem Theil die Grenzwerthe*

$$\lim \left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} - c\right) e^{\alpha z} \quad \textit{und} \quad \lim \frac{\psi(z)}{\varpi(z)} e^{\alpha z}$$

null werden, für rein imaginäre Werthe von z *aber endlich bleiben, wobei* $\alpha > x - x_0$ *sein muss.*

Aus der Gleichung (33) *folgt auch umgekehrt die Gleichung* (32).

Beispiel: Ist $\varpi(z) = e^{a z} - 1$, $\psi(z) = 1$, so wird $c = -1$, denn es ist

$$\lim \left(\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} + 1\right) e^{\alpha z} = \lim \frac{e^{-(a-\alpha) z}}{e^{-a z} - 1} = 0 \text{ falls } \alpha < a$$

und

$$\lim \frac{\psi(z)}{\omega(z)} e^{\alpha z} = \lim \frac{e^{\alpha z}}{e^{a z} - 1} = 0 \text{ falls } \alpha < a$$

Mithin gilt die Entwickelung (13) für alle Werthe von x, für welche

$$x - x_0 < a.$$

Der *zweite Lehrsatz* des vorigen Abschnittes kann direct beibehalten werden; denn in demselben ist bereits angenommen, dass die Quotienten $\frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)}$ und $\frac{\chi(z)}{\varpi(z)}$ auch dann noch nach Null convergiren, wenn sie mit einem Exponentialfactor von der Form $e^{\alpha z}$ multiplicirt werden; es ist dort $\alpha = X - x_0$. Also ist auch

$$\lim \left(\frac{\chi(-z)}{\varpi(-z)} - 1\right) e^{\alpha z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\chi(z)}{\varpi(z)} e^{\alpha z} = 0,$$

ferner

$$\lim \left(\frac{\psi(z)}{\varpi(z)} - 1\right) e^{\alpha z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\psi(-z)}{\varpi(-z)} e^{\alpha z} = 0.$$

Sonach ist der zweite Lehrsatz gültig, für alle Werthe von x innerhalb des Intervalles von x_0 bis X, *sobald für die Function* $f(x)$ *das Dirichlet'sche Integral*

$$\lim_{r=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{X} f(\mu) \frac{\sin r(x-\mu)}{x-\mu} d\mu = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$$

Geltung hat.

Der dritte Lehrsatz erfordert, wenn wir an Stelle der Bedingung (21) die ursprüngliche Integralbedingung treten lassen, dass

$$(34) \qquad \lim \int_0^{2\pi} dz \frac{\psi(z, x)}{\varpi(z)} \int_{x_0}^{X} e^{-z\mu} f(\mu)\, d\mu = 0$$

wird, wenn dieses Integral auf einem Kreise $z = re^{i\varphi}$ geführt wird, dessen Radius ins Unendliche wächst.

Wir modificiren nun auch diesen Satz, indem wir die Bedingung einführen, dass für Werthe von z, deren reeller Bestandtheil positiv ist,

$$\lim \frac{\psi(z,x)}{\varpi(z)} e^{-\alpha z} = 0$$

wird, und dass für die Werthe von z, deren reeller Bestandtheil negativ ist,

$$\lim \frac{\psi(z,x)}{\varpi(z)} e^{-\beta z} = 0$$

wird; bei rein imaginären Werthen von z sollen die Grenzwerthe endlich bleiben. Bedingungen für die Werthe von α und β, sowie für deren Vorzeichen werden sich sogleich ergeben.

Zerlegt man das Integral (34) in die Theile

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dz \frac{\psi(z,x)}{\varpi(z)} e^{-\alpha z} \int_{x_0}^{X} e^{-z(\mu-\alpha)} f(\mu)\, d\mu + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dz \frac{\psi(z,x)}{\varpi(z)} e^{-\beta z} \int_{x_0}^{X} e^{-z(\mu-\beta)} f(\mu)\, d\mu,$$

so erkennt man, indem man wie früher, zunächst das erste Integral zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ und $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ betrachtet, dass dieser Theil beliebig klein wird, falls

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} r\, d\varphi \int_{x_0}^{X} e^{-r\cos\varphi(\mu-\alpha)}\, d\mu$$

für $r=\infty$ endlich bleibt, woraus *folgt dass* $x_0-\alpha \geqq 0$ *sein muss, oder* $\alpha \leqq x_0$. Es ist also α negativ wenn x_0 negativ ist. *Setzen wir* $\alpha = x_0 - \delta$, so ist das erste Integral in der Umgebung der Grenzstellen:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} dz \frac{\psi(z,x)}{\varpi(z)} e^{-z x_0} \int_{x_0}^{X} e^{-z(\mu-x_0)} f(\mu)\, d\mu.$$

Das innere Integral wird beliebig klein, und

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} r\, d\varphi \bmod. \left[\frac{\psi(z,x)}{\varpi(z)} e^{-z x_0}\right]$$

bleibt wie früher gefunden endlich, weil der Voraussetzung nach

$$\frac{\psi(z,x)}{\varpi(z)} e^{-z x_0} = g(z)\, e^{-\delta z}$$

ist, wobei $g(z)$ eine durchaus endliche Grösse ist; $f(\mu)$ unterliegt keiner anderen Einschränkung, als dass es eine endliche und integrirbare Function ist.

Das zweite Integral erfordert ebenso, dass

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dz \frac{\psi(-z, x)}{\varpi(-z)} e^{\beta z} \int_{x_0}^{X} e^{z(\mu-\beta)} f(\mu)\, d\mu$$

null werde, und führt auf die Bedingung $\beta > X > x_0$. Ist dieselbe erfüllt und setzt man $\beta = X + \delta$, so ist auch an der Grenzstelle

$$\lim \quad -\int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} dz \frac{\psi(-z, x)}{\varpi(-z)} e^{zX} \int_{x_0}^{X} e^{z(\mu-X)} f(\mu)\, d\mu = 0.$$

Es kann demnach der dritte Lehrsatz so formulirt werden: *Wenn für $\alpha < x_0 < X$ und $\beta > X > x_0$ die Grenzwerthe*

$$\lim \frac{\psi(z, x)}{\varpi(z)} e^{-\alpha z} \quad \text{und} \quad \lim \frac{\psi(z, x)}{\varpi(z)} e^{-\beta z}$$

null werden, während der Modul von z in bestimmter Weise ins Unendliche wächst, mit Ausnahme der rein imaginären Werthe von z, für welche sie endlich bleiben, so ist

$$\sum_{r=0,\, \varphi=0}^{r=\infty,\, \varphi=2\pi} \Re \frac{\psi(x, z)}{\varpi(z)} \int_{x_0}^{X} e^{-z\mu} f(\mu)\, d\mu = 0,$$

sobald die Function $f(\mu)$ durchaus endlich ist.

In dem früher behandelten Beispiele ist

$$\varpi(z) = e^{az} g(z) - e^{-a(b-z)} g(b-z),$$
$$\psi(x, z) = e^{az} g(z) e^{-z(x-2x_0)}$$

also

$$\frac{\psi(x, z)}{\varpi(z)} e^{-\alpha z} = \frac{e^{z(a-x+2x_0-\alpha)} g(z)}{e^{az} g(z) - e^{a(b-z)} g(b-z)},$$

$$\frac{\psi(x, z)}{\varpi(z)} e^{-\beta z} = \frac{e^{z(a-x+2x_0-\beta)} g(z)}{e^{az} g(z) - e^{a(b-z)} g(b-z)}.$$

Es muss also

$$-x + 2x_0 - \alpha < 0 \quad \text{oder} \quad \alpha > 2x_0 - x$$

und

$$2a - x + 2x_0 - \beta > 0 \quad \text{oder} \quad \beta < (2a - x + 2x_0) < 2X - x$$

sein, und diese Ungleichungen sind mit den früheren $\alpha < x_0$ und $\beta > X$ verträglich, da x im Intervall zwischen x_0 und X liegt.

Sonach bildet die Convergenz des Dirichlet'schen Integrales — abgesehen von der Endlichkeit und Integrirbarkeit der darzustellenden Function — die nothwendige und hinreichende Bedingung für alle Reihen, die hier betrachtet worden sind.

III.

In einer gewissen Verwandtschaft zu den Sätzen von Cauchy steht das Verfahren, mit dessen Hülfe Poisson in seinen Arbeiten aus dem Jahre 1823 allgemeine Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung zu erledigen suchte. Für die Einsicht in die geschichtliche Entwickelung nicht nur, sondern auch für eine einheitliche Erkenntniss aller zur Theorie gehörigen Methoden, auch solcher, die scheinbar weit auseinander liegen, ist es meines Erachtens von Werth, an einem Beispiele dieses Verfahren zu wiederholen, und zu zeigen, dass es seinen Beweis durch die Residuenrechnung findet.

Poisson geht in seiner Abhandlung*) von dem Laplace'schen Satze aus, dass ein allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

durch das Integral

$$(2) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} f(x + 2a\alpha\sqrt{t})\, d\alpha = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} f(y)\, dy$$

dargestellt wird, wobei $f(y)$ eine von $-\infty$ bis $+\infty$ willkürliche Function ist, die er aber als differentiirbar annimmt, indem er den Werth

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} f'(y)\, dy$$

setzt. An Stelle des unbegrenzten unendlichen Raumes soll nun der Raum betrachtet werden, welcher durch die Ebenen $x = -l$ und $x = +l$ begrenzt wird, und es sollen in diesen Grenzebenen zu jeder Zeit t die Bedingungen erfüllt sein:

$$(4a) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = 0 \quad \text{für} \quad x = l,$$

$$(4b) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \beta' u = 0 \quad \text{für} \quad x = -l,$$

*) Mémoire sur la distribution de la Chaleur dans les Corps solides. pag. 27 ff. Journal de l'École Polyt. T. XII (Cahier 19).

während für $t = 0$ der Wärmezustand durch die Gleichung $u = f(x)$ für das Intervall von $-l$ bis $+l$ gegeben ist. Es entsteht also die Aufgabe, in dem allgemeinen Integral (2) die Function f über das gegebene Intervall hinaus derart fortzusetzen, dass dasselbe eine Lösung der Aufgabe unter den nun vorgeschriebenen Grenzbedingungen darstellt. Auf Grund der Gleichungen (4a) erhält man aus den Gleichungen (1) und (2) die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(l-y)^2}{4a^2t}} \left(\beta f(y) + \frac{df(y)}{dy}\right) dy = 0$$

die bei allen Werthen von t erfüllt sein muss. Da der Exponentialfactor sich nicht ändert, wenn man an Stelle von y den Werth $l+y$ oder $l-y$ einsetzt, so folgt, dass diese Bedingung erfüllt ist, wenn

$$\beta f(y+l) + \frac{df(y+l)}{dy} + \beta f(l-y) - \frac{df(y-l)}{dy} = 0. \tag{5}$$

Ebenso folgt aus (46):

$$\beta' f(-l+y) - \frac{df(y-l)}{dy} + \beta' f(-l-y) + \frac{df(-l-y)}{dy} = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichungen, aus denen sich die Fortsetzung der Function f über das Intervall von $-l$ bis $+l$ hinaus ergeben müsste, werden in folgender Weise benutzt. Das Integral (2) lässt sich mittels der Gleichung

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}} = \frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a^2tz^2} \cos(y-x)z\,dz$$

in der Form darstellen:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2tz^2}\,dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos(y-x)z\,dy, \tag{7}$$

wobei also eine Vertauschung in der Reihenfolge der Integrationen ohne weiteres vollzogen ist. Um das innere Integral zu berechnen, werden die einfacheren Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-hy} f(y)\,dy = p, \qquad \int_0^{-\infty} e^{hy} f(y)\,dy = q \tag{8}$$

eingeführt, in denen h einen reellen positiven Parameter, oder einen complexen, dessen reeller Bestandtheil positiv ist, bezeichnen soll. Alsdann ist

$$(9)\qquad \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-hy} f(l+y)\,dy &= e^{hl}\left(p - \int_0^l e^{-hy} f(y)\,dy\right), \\ \int_0^\infty e^{-hy} f(l-y)\,dy &= -e^{-hl}\left(q - \int_0^l e^{hy} f(y)\,dy\right). \end{aligned}$$

Schreibt man nun die Gleichung (5) in der Form

$$e^{-\beta y} d[e^{\beta y} f(l+y)] = e^{\beta y} d[e^{-\beta y} f(l-y)],$$

so folgt nach Multiplication mit $e^{-hy}\,dy$ und durch Integration

$$e^{-hy} f(l+y) + (h+\beta)\int e^{-hy} f(l+y)\,dy = C + e^{-hy} f(l-y) + (h-\beta)\int e^{-hy} f(l-y)\,dy.$$

Bildet man die Integrale vom Werthe 0 an, so ist $C=0$ und führt man sie bis zur Grenze ∞, so verschwinden die ersten Terme auf jeder Seite. Es wird also

$$(h+\beta)\int_0^\infty e^{-hy} f(l+y)\,dy = (h-\beta)\int_0^\infty e^{-hy} f(l-y)\,dy.$$

Demnach folgt aus den Gleichungen (9) die Relation:

$$(10)\qquad \begin{aligned} (h+\beta)e^{hl}p + (h-\beta)e^{-hl}q = {} & (h+\beta)e^{hl}\int_0^l e^{-hy} f(y)\,dy \\ & + (h-\beta)e^{-hl}\int_0^l e^{hy} f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Eine zweite Gleichung derselben Art wird durch Vertauschung von β mit $-\beta'$, und von l mit $-l$ gewonnen:

$$(11)\qquad \begin{aligned} (h-\beta')e^{-hl}p + (h+\beta')e^{hl}q = {} & (h-\beta')e^{-hl}\int_0^{-l} e^{-hy} f(y)\,dy \\ & + (h+\beta')e^{hl}\int_0^{-l} e^{hy} f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man die Werthe von p und q in der Form:

$$(12)\qquad p = \frac{\psi(h)}{\varpi(h)}, \quad q = \frac{\psi(-h)}{\varpi(-h)}$$

wobei

(13) $\varpi(h) = (h+\beta)(h+\beta')e^{2hl} - (h-\beta)(h-\beta')e^{-2hl}$,

(14) $\psi(h) = (h+\beta)(h+\beta')e^{2hl}\int\limits_0^l e^{-hy}f(y)dy - (h-\beta)(h-\beta')e^{-2hl}\int\limits_0^{-l} e^{-hy}f(y)dy$

$$+(h-\beta)(h+\beta')\int\limits_{-l}^{+l} e^{hy}f(y)\,dy.$$

Die Grössen p und q sind nunmehr lediglich durch die Werthe bestimmt, welche die Functionen f im Intervall von $-l$ bis $+l$ besitzt.

Aus den Integralen p und q lässt sich das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-zyi}f(y)dy$$

bilden, indem man in p für h den Werth $g+zi$, in q den Werth $g-zi$ einsetzt, wobei g eine beliebig kleine positive Grösse bedeuten soll; es ist dann

$$(15)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-zyi}f(y)dy = \lim_{g=0}{}' \left[\frac{\psi(zi+g)}{\varpi(zi+g)} - \frac{\psi(zi-g)}{\varpi(zi-g)}\right].$$

Dieser Ausdruck ist null, ausser in der Umgebung der Stellen, für welche $\varpi(zi) = 0$ wird; an diesen Stellen wird der Werth des Integrales unendlich. Dasselbe gilt also auch von dem Integrale

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos(y-x)z\,dy.$$

Bezeichnet man einen reellen Werth von z, für welchen $\varpi(zi) = 0$ wird mit λ, und setzt man $z = \lambda + z'$, so sind bei der Integration nach z, wie sie die Formel (7) erfordert, immer nur beliebig kleine Werthe von z' in Betracht zu ziehen, welche die Umgebung einer Stelle λ ausmachen; es wird also

$$(16)\qquad u = \lim_{g=0} \frac{1}{2\pi}\sum \left(e^{x\lambda i}\int Z\,dz' + e^{-x\lambda i}\int Z'\,dz'\right)e^{-a^2t\lambda^2}$$

wobei für Z gemäss der Gleichung (15) der Werth

$$\left[\frac{\psi(zi+g)}{\varpi(zi+g)} - \frac{\psi(zi-g)}{\varpi(zi-g)}\right]$$

für Z' der Werth

$$\left[\frac{\psi(-zi+g)}{\varpi(-zi+g)} - \frac{\psi(-zi-g)}{\varpi(-zi-g)}\right]$$

einzusetzen ist, und alsdann der Grenzprocess für $g = 0$ vollzogen werden soll. Den Werth des Integrales $\int Z\,dz'$ in beliebig kleinem Intervall ermittelt Poisson in folgender Weise: Es ist

$$\varpi(zi-g) = (z'i+g)\varpi'(\lambda i), \quad \psi(zi\pm g) = \psi(\lambda i).$$

Also

$$Z = \frac{2g\,\psi(\lambda i)}{(g^2+z'^2)\,\varpi'(\lambda i)} \quad \text{und} \quad \int_{-\delta}^{+\delta} Z\,dz' = \frac{4\psi(\lambda i)}{\varpi'(\lambda i)} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{g}$$

und für $g = 0$

$$= 2\pi\,\frac{\psi(\lambda i)}{\varpi'(\lambda i)}.$$

Den Werth von $\int Z'\,dz'$ erhält man hieraus durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$, und sonach erhält die Gleichung (16) die Form:

$$(17) \qquad u = \sum \left[e^{\lambda x i}\,\frac{\psi(\lambda i)}{\varpi'(\lambda i)} + e^{-\lambda x i}\,\frac{\psi(-\lambda i)}{\varpi'(-\lambda i)} \right] e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Die Summation erstreckt sich über alle positiven Wurzeln λ der Gleichung $\varpi(\lambda i) = 0$, welche nach (13) auf die Form gebracht werden kann:

$$(\beta\beta' - \lambda^2)\sin 2l\lambda + (\beta+\beta')\lambda\cos 2l\lambda = 0$$

und welche nur reelle Wurzeln hat.

Dass dieser Beweis an mehreren Stellen einer genaueren Ueberlegung bedarf, da an den Gliedern einer unendlichen Reihe Grenzprocesse bestimmter Art vollzogen sind, ist evident. Nichts destoweniger hat Liouville denselben im Jahre 1836 im ersten Bande seines Journales als einen gültigen unverändert (nur für den Fall $t = 0$) reproducirt; er fügt in einer Anmerkung hinzu: „*Dans ses Exercices mathématiques M. Cauchy a traité la même question par une méthode fondée sur le calcul des résidus.*“

Ossian Bonnet hat dann im Jahre 1849 in der eingangs erwähnten Abhandlung versucht, den Poisson'schen Beweis, den dieser auch auf die Cylinderfunctionen anwandte (a. a. O. pag. 290 ff.) zu einem exacten zu machen. Es ist ihm aber nicht gelungen, denn erstlich setzt er die Convergenz der zu beweisenden Reihe auf Grund von andersartigen Liouville'schen Untersuchungen voraus, wodurch der Werth der ganzen Methode von vornherein beeinträchtigt wird; Sodann hat er selbst am Schlusse erklärt, dass an einer wesentlichen Stelle die Untersuchung nicht zu Ende geführt ist. Dieselbe ist überdies ungemein complicirt.

Die Convergenz und der Werth der Reihe (17) lässt sich aber unmittelbar feststellen, wenn man dieselbe als Residuenreihe betrachtet, gebildet für alle Wurzeln $z = \lambda$ der Gleichung $\varpi(iz) = 0$ die nur reelle und paarweise entgegengesetzt gleiche Wurzeln hat.

Es ist der Werth der Reihe (17) gleich

$$(18)\qquad i\sum \Re\, e^{isx}\,\frac{\psi(iz)}{((\varpi(iz)))}\,e^{-a^2s^2t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\psi(iz)}{\varpi(iz)}\,e^{-a^2s^2t+izx}\,dz,$$

wenn dieses Integral auf einem Kreise mit dem Radius r geführt wird, dessen Radius ins Unendliche wächst, vorausgesetzt, dass das Integral einen bestimmten Grenzwerth ergiebt. Zerlegt man dasselbe in die Theile

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(iz)}{\varpi(iz)}\,e^{-a^2s^2t+izx}\,dz - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\psi(-iz)}{\varpi(-iz)}\,e^{-a^2s^2t-izx}\,dz$$

und setzt man nach den Gleichungen (12), da in dem ersten Integrale der reelle Theil von iz negativ ist,

$$\frac{\psi(iz)}{\varpi(iz)} = q = \int_0^{-\infty}e^{-izy}f(y)\,dy,\quad \frac{\psi(-iz)}{\varpi(-iz)} = p = \int_0^{\infty}e^{izy}f(y)\,dy,$$

so erhält man:

$$(19)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-a^2s^2t+izx}dz\int_0^{-\infty}e^{-izy}f(y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-a^2s^2t-izx}dz\int_0^{\infty}e^{izy}f(y)\,dy.$$

Der Grenzwerth des Integrales

$$\int_0^{\pi}e^{-a^2s^2t+iz(x-y)}\,dz$$

für $r=\infty$ ist gleich dem negativen Werth des Integrales $\int_{-\infty}^{+\infty}$ geführt auf der reellen Axe und bekommt den Werth

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}.$$

Sonach wird die Summe (19) gleich

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2t}}f(y)\,dy,$$

wobei angenommen ist, dass in derselben die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden durfte.

Will man die Untersuchung der Reihe (17) für den Fall $t=0$ ausführen, so tritt an Stelle von (19) der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{izx}dz\int_0^{-\infty}e^{-izy}f(y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{-izx}dz\int_0^{\infty}e^{izy}f(y)\,dy$$

und es wird, wenn die Integration auf einem Halbkreise mit dem Radius n ausgeführt wird

$$\int_0^{\pi} e^{+iz(x-y)}\,dz = -\frac{2\sin(x-y)r}{x-y}.$$

Also ist die Reihe gleich

$$(20)\qquad \lim_{r=\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\frac{\sin(x-y)r}{x-y}\,dy$$

und dieser Werth ist gleich $f(x)$, vorausgesetzt, dass dieses Integral Geltung hat.

Fasst man alle Voraussetzungen zusammen, so ist, wenn man noch die Differentialgleichungen (4) durch directe Differentiation der Reihe (17) bestätigt, folgender Satz bewiesen.

Wenn eine im Intervall von $-l$ bis $+l$ willkürlich gegebene Function derart über das Intervall hinaus fortgesetzt wird, dass die Integrale (8), in welchen h eine beliebige Grösse bedeutet, deren imaginärer Bestandtheil nicht negativ wird, durch Gleichungen von der Form (12) sich darstellen lassen, und so beschaffen sind, dass in den Formeln (19) die Vertauschung der Integrationsordnung möglich ist, so convergirt die Reihe (17) und stellt ein Integral der Differentialgleichung (1) dar, welches für $t = 0$ den Werth $f(x)$ im Intervall von $-l$ bis $+l$ besitzt, und welches den Grenzbedingungen (4) genügt.

Auch für $t = 0$ convergirt die Reihe (17) und stellt die Function $f(x)$ dar, wenn das Integral (20) diesen Grenzwerth hat. Es wäre also noch zu untersuchen, ob nicht alle diese weiteren Bedingungen nothwendige Folgen der Gleichungen (12) sind.

Diese Untersuchung kann man sich ersparen; denn die Reihe, welche sich für $f(x)$ ergiebt, ist nun, wie eine einfache Umformung lehrt, identisch mit der im ersten Abschnitt Gleichung (21) erwähnten. Denn der Werth $\psi(z)$, welcher durch die Gleichung (14) definirt ist, kann in der Residuenreihe einfach durch den Werth

$$(z+\beta)(z+\beta')e^{2zl}\int_{-l}^{+l} e^{-zy} f(y)\,dy$$

ersetzt werden, weil der Factor

$$(z-\beta)(z-\beta')e^{-2lz} = (z+\beta)(z+\beta')e^{2lz}$$

ist unter der Bedingung $\varpi(z) = 0$, und weil das Glied

$$(z-\beta)(z+\beta')\int_{-l}^{+l} e^{zy} f(y)\,dy$$

einen verschwindenden Beitrag in der Residuenreihe liefert.

Die vorstehenden Betrachtungen sind zu einer allgemeinen Beweismethode für die Darstellung der Function $f(x)$ nicht geeignet, weil sie die Differentiirbarkeit derselben und die Gültigkeit von Integrationen mit unendlichen Grenzen voraussetzen, Bedingungen, die nach dem allgemeinen Satze des vorigen Abschnittes keine nothwendigen sind. Auch für die Cylinderfunctionen wird man daher die Poisson'schen Betrachtungen schwerlich als Grundlage für einen allgemeinen Beweis der Darstellung einer Function ausbilden können.

Dagegen ist es für die Probleme in der Theorie der Wärmeleitung von Werth, dass man nunmehr die Methoden mittelst deren Poisson complicirte Aufgaben behandelte und die Form ihrer Reihendarstellung feststellte, als heuristische beibehalten und sodann durch den Residuensatz von Cauchy vollständig beweisen kann; denn alle diese Reihen stellen sich, wie hier an einem Beispiel gezeigt ist, unmittelbar als Residuenreihen dar.

Dresden, im Februar 1888.

Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche in einer incompressibeln Flüssigkeit in Ruhe sich befinden*).

Von

Eduard Riecke in Göttingen.

Die folgende Mittheilung enthält einen Beweis des bekannten Kirchhoff'schen Satzes, welcher allgemeiner ist als der von Kirchhoff gegebene, insofern er über die Dimensionen und Entfernungen der Ringe keiner beschränkenden Voraussetzungen bedarf. Die Verallgemeinerung wird ermöglicht durch eine eigenthümliche Wahl der erzeugenden Curven und bleibt daher auf Ringflächen von einem gewissen besonderen Charakter beschränkt. Die Grundlage des Beweises wird durch einige Sätze über elektromagnetische und elektrodynamische Fernwirkung geliefert, mit welchen wir uns zuerst zu beschäftigen haben.

I.

Es sei gegeben ein beliebiges System galvanischer Ströme $i_1, i_2, i_3 \ldots$, welche in den geschlossenen Curven $s_1, s_2, s_3 \ldots$ circuliren. Wir bestimmen das elektromagnetische Potential φ derselben und construiren die Flächen constanten Potentiales, sowie die Kraftlinien. Die Flächen constanten Potentiales werden begrenzt von den Stromcurven; jeder bestimmten solchen Curve ordnet sich ein bestimmtes System fächerartig von derselben ausstrahlender Flächen zu; die Zahl dieser Systeme ist daher ebenso gross wie die Zahl der Stromcurven. Sie werden von einander getrennt durch Flächen, welche zwischen den Stromcurven verlaufen und welche den Raum in einzelne Zellen theilen, deren Kerne durch die Stromcurven repräsentirt sind. Auf jenen Flächen, welche wir als Grenzflächen bezeichnen, ist das Potential constant, aber in verschiedenen Theilen derselben verschieden. Die Grenzflächen werden nämlich zu vollständigen Potentialflächen ergänzt durch eine zweite Art von Flächen, welche die einzelnen Stromcurven untereinander verbinden. Sie durchschneiden die zwischen den letzteren liegenden Grenzflächen in gewissen Linien, den Grenzlinien. Be-

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der k. Ges. d. W. zu Göttingen. November 1887.

trachten wir eine bestimmte Grenzlinie, etwa diejenige, welche von der Verbindungsfläche der Ströme i_1 und i_2 erzeugt wird, so unterscheiden sich die Potentialwerthe zu beiden Seiten derselben um $4\pi i_1$ beziehungsweise $4\pi i_2$.

Die Kraftlinien bilden geschlossene Ringe, welche in der unmittelbaren Nachbarschaft einer Stromcurve nur diese eine umschliessen, bei grösserer Entfernung zwei und mehr Stromcurven umschlingen. Der Uebergang wird gebildet durch Curven, welche in der Form einer 8 zwei benachbarte Stromcurven umlaufen. Die Doppelpunkte derartiger Kraftlinien liegen auf den zuvor besprochenen Grenzlinien; die elektromagnetische Wirkung selbst ist in den Doppelpunkten gleich Null. Die Kraftlinien werden im Folgenden bezeichnet durch den Buchstaben m.

Die Potentialflächen P besitzen eine doppelte Schaar von Krümmungslinien; die Linien der einen Schaar sind geschlossen; die äussersten von ihnen laufen parallel mit dem Rande s der Fläche; die folgenden werden von den vorhergehenden stets vollständig umschlossen; wir bezeichnen diese Curven als Parallelcurven p. Ziehen wir alle durch die Punkte einer Parallelcurve gehenden Kraftlinien, so entsteht eine ringförmige Fläche, R, welche die Stromcurve s umhüllt. Die Curve p kann jederzeit so gewählt werden, dass die Fläche R nur diese eine Stromcurve umschliesst. Eine zweite Erzeugungsart des Ringes ergiebt sich, wenn wir erst eine einzige von den Kraftlinien zeichnen, welche bei der vorhergehenden Construction auftraten; durch diese legen wir dann Parallelcurven und verbinden dieselben durch eine Fläche, welche identisch ist mit dem zuvor erhaltenen Ringe. Wir erkennen hieraus, dass jede Ringfläche R überzogen ist mit einem Netze sich rechtwinklig durchschneidender Curven, den Parallelcurven p und den Kraftlinien oder Meridiancurven m.

Wir setzen nun voraus, dass jede der Stromcurven $s_1, s_2, s_3 \ldots$ in der angegebenen Weise umschlossen worden sei von einem Ringe, $R_1, R_2, R_3 \ldots$, auf welchem die Schaaren der Curven m und p verzeichnet sind. Wir denken uns weiter jene Flächen bedeckt mit galvanischen Strömen, welche in der Richtung der Parallelcurven p circuliren. Die Stärke der Strömung sei an irgend einer Stelle m einer Meridiancurve gegeben durch

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dm}$$

wo φ wie früher das elektromagnetische Potential der Ströme $i_1, i_2, i_3 \ldots$ bezeichnet. Die gesammte Elektricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch die Meridiancurve m hindurchgeht ist hiernach gleich

$$\int \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d\varphi}{dm}\, dm;$$

wird das Potential φ so definirt, dass die Componenten der elektromagnetischen Kraft durch seine positiven Differentialquotienten dargestellt werden, so ist dieses Integral gleich i, d. h. gleich der Stärke des Stroms, welcher in der von dem Ringe umhüllten Stromcurve s circulirt. Wenn wir also die Stärke der zu m senkrechten Strömung in der angegebenen Weise bestimmen, so erscheint der in der Axe s des Ringes laufende Strom i ohne Aenderung seiner Stärke ausgebreitet über die Oberfläche. *Mit Bezug auf diese in den Ringflächen* $R_1, R_2, R_3 \ldots$ *circulirenden galvanischen Ströme gelten nun die folgenden Sätze.*

1. *Die elektromagnetische Wirkung auf alle Punkte im Inneren der Ringe ist Null.*

2. *Die elektromagnetische Wirkung auf alle Punkte ausserhalb der Ringe ist dieselbe, wie die der Ströme* $i_1, i_2, i_3, \ldots$, *welche in den Ringaxen* $s_1, s_2, s_3 \ldots$ *circuliren.*

Man kann hiernach die Ströme i bezeichnen als die *Bilder* der an der Oberfläche der Ringe vorhandenen galvanischen Strömungen.

Um diese Sätze zu beweisen, ziehen wir erst auf irgend einer Potentialfläche P_0 das System der Krümmungslinien, die Parallelcurven p und die zu ihnen senkrechten Linien, welche wir durch n bezeichnen. Der Rand der Fläche P_0 wird gebildet durch eine Parallelcurve p_0, welche auf der die Stromcurve s umhüllenden Ringfläche liegt. Wir ziehen auf der letzteren auch eine Meridiancurve m_0 und nehmen auf dieser zwei Punkte O' und O'' so, dass die zwischen ihnen liegende Strecke durch den Schnittpunkt O der Curven m_0 und p_0 halbirt wird; der Abstand von O' und O'' sei dm_0. Wir ziehen endlich die Parallelcurven p' und p'', welche durch O' und O'' hindurchgehen und construiren die von jenen begrenzten Potentialflächen P' und P''. Die gesammte Stärke der zwischen den Curven p' und p'' enthaltenen Strömung ist gleich $\frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{dm_0} dm_0 = \frac{1}{4\pi} (\varphi'' - \varphi')$; hier sind unter φ'' und φ' diejenigen Potentialwerthe zu verstehen, welche den durch p' und p'' begrenzten Flächen entsprechen. Wir denken uns jetzt die ganze Strömung concentrirt in der mittleren Curve p_0; wir ersetzen also die in dem ringförmigen Streifen $p'p''$ ausgebreitete Strömung durch eine lineare. Zerlegt man die ganze Oberfläche des Ringes durch aufeinander folgende Curven $p'p''$ in Parallelstreifen, so können die in ihnen enthaltenen Strömungen alle ersetzt werden durch lineare in den Mittelcurven p laufende Ströme; es wird so die Strömung, welche über die Oberfläche des Ringes continuirlich ausgebreitet war, wieder aufgelöst in ein System von linearen Strömen. Die Stärke derselben ist gleich der Differenz der Potentialwerthe, welche den die Streifen begrenzenden Zwischencurven p' und p'' entsprechen, multiplicirt mit $\frac{1}{4\pi}$.

Wir kehren nun zurück zu der Betrachtung der Potentialfläche P_0; dieselbe zerfällt in eine Reihe von Quadraten durch das System ihrer Krümmungslinien. Denken wir uns alle diese Quadrate umflossen von Strömen von der Stärke $\frac{1}{4\pi}(\varphi'' - \varphi')$, so wird das so entstehende System geschlossener und unendlich kleiner Ströme auf alle ausserhalb der Fläche liegenden Punkte genau dieselbe Wirkung ausüben, wie der in der Curve p_0 circulirende Strom. Vorausgesetzt ist natürlich, dass die Richtung der die Quadrate umfliessenden Ströme übereinstimmt mit der Stromrichtung in p_0.

Durch die Seiten eines der auf P_0 befindlichen Quadrate ziehen wir Kraftlinien; es entsteht dann eine in sich zurücklaufende Röhre, von welcher zunächst vorausgesetzt werde, dass sie nur die eine betrachtete Ringfläche umschlingt. Die Röhre durchschneidet alle Potentialflächen, welche durch die Parallelcurven p, p', p'' hindurchgehen. Sie wird ihrerseits durch die Flächen, welche den Zwischencurven p', p'' entsprechen, in eine Reihe aufeinander folgender Zellen zerlegt; diese sind in ihren mittleren Querschnitten umzogen von den Linien, in welchen die Röhre von den Potentialflächen der Parallelen p durchschnitten wird. Jeden der auf dem Ringe circulirenden linearen Ströme können wir ersetzen durch ein System unendlich kleiner Ströme auf der entsprechenden Potentialfläche. Die Eintheilung der letzteren stellen wir her mit Hülfe der von den Quadraten der Fläche P_0 ausgehenden Röhren. Es sind dann die von Strömen umflossenen Elemente der Potentialflächen gleichzeitig Querschnitte der von den Kraftlinien gebildeten Röhren oder der in diesen von den Flächen P' und P'' ausgeschnittenen Zellen. Bei der von uns betrachteten Röhre werden also die mittleren Querschnitte umflossen sein von Strömen von der Stärke $\frac{1}{4\pi}(\varphi'' - \varphi')$, wo φ'' den Potentialwerth auf der Endfläche, φ' den auf der Anfangsfläche der entsprechenden Zelle repräsentirt. Diese Ströme können wir weiter ersetzen durch magnetische Pole auf den Endflächen der Zellen. Ihre Stärke ist so zu bestimmen, dass das magnetische Moment der durch sie gebildeten Magnete gleich ist dem galvanischen Moment der entsprechenden Ströme. Ist also μ die Stärke des auf der Endfläche liegenden Nordpoles, dm die Länge einer Zelle, $d\omega$ ihr Querschnitt, so ist

$$\mu\, dm = \frac{1}{4\pi}(\varphi'' - \varphi')\, d\omega; \quad \mu = \frac{1}{4\pi} \frac{d\varphi}{dm}\, d\omega.$$

Nach einem bekannten Satze ist $\frac{d\varphi}{dm} d\omega$ innerhalb einer von Kraftlinien gebildeten Röhre constant; die Stärke der auf den Endflächen der Zellen liegenden Nordpole ist also bei allen dieselbe. Nun bildet aber jede solche Fläche gleichzeitig die Anfangsfläche einer folgenden Zelle, sie trägt also gleichzeitig einen Südpol von derselben Stärke $\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}d\omega$. Die Wirkungen der Pole heben sich somit auf in all denjenigen Punkten, welche ausserhalb der betrachteten Röhre sich befinden. Dasselbe ist auch dann der Fall, wenn die betrachtete Röhre gleichzeitig mehrere Ringflächen umschlingt; nur entspringen dann die Potentialflächen, welche die Zelltheilung bewirken, nicht mehr von einem einzigen, sondern gleichzeitig von all den umschlungenen Ringen.

Der ganze zwischen den Ringflächen enthaltene Raum wird ausgefüllt von den durch die Kraftlinien erzeugten Röhren; auf jede derselben findet die vorhergehende Betrachtung Anwendung. Die Gesammtwirkung der in den Röhren hergestellten magnetischen Vertheilung ist also gleich Null für die innerhalb der Ringe liegenden Punkte. Die magnetische Vertheilung ist aber substituirt an Stelle der Ströme, welche die Querschnitte der Zellen umfliessen; diese ihrerseits sind für alle im Inneren der Ringe liegenden Punkte äquivalent mit der auf der Oberfläche der Ringe vorhandenen Strömung. Es ist somit gezeigt, dass auch diese auf die in dem Inneren der Ringflächen befindlichen Punkte keine elektromagnetische Wirkung ausübt.

Es bleibt also noch übrig der Beweis des zweiten Satzes, welcher die Wirkung der Strömung auf einen ausserhalb der Ringe gelegenen Punkt betrifft. Wir verfahren in diesem Fall zunächst ganz ebenso wie in dem vorhergehenden. Ausgehend von den auf der Fläche P_0 gezeichneten Quadraten erfüllen wir den ganzen Raum mit den Röhren, welche durch die von dem Rande der Quadrate aufsteigenden Kraftlinien erzeugt werden. Innerhalb einer dieser Röhren liegt der Punkt A mit der magnetischen Masse $+1$. Wir grenzen ein als geradlinig zu betrachtendes Stück S der Röhre so ab, dass der Punkt A in der Mitte desselben liegt. Die Länge von S sei sehr gross im Vergleich zu den Dimensionen des Querschnittes, es enthalte also der Röhrentheil S seiner Länge nach eine grosse Zahl einzelner Zellen. Wie früher können wir zunächst an Stelle der auf der Oberfläche der Ringe vorhandenen Strömung das System der unendlich kleinen Ströme substituiren, welche die Querschnitte der einzelnen Zellen umfliessen. Die Ersetzung der Ströme durch magnetische Pole ist aber jetzt nur anwendbar bei denjenigen Zellen, welche ausserhalb des Abschnittes S sich befinden. Die Ströme, welche die Oberfläche von S umziehen, bilden in ihrer Gesammtheit ein Solenoid. Die Wirkung eines solchen auf einen inneren Punkt ist gleich der Wirkung derjenigen magnetischen Belegung der Endflächen, welche für alle äusseren Punkte mit dem Solenoid äquivalent ist, vermindert um eine in die Richtung der Axe fallende Kraft, welche gleich ist 4π multiplicirt mit der auf die Längeneinheit der Axe kommenden Stromstärke*). Um die Wirkung des Röhrenabschnittes S auf den Punkt A zu ermitteln, können wir also zunächst wieder die Ströme ersetzen durch die äquivalenten Pole. Wir erhalten dann ganz dieselbe magnetische Vertheilung wie in dem vorhergehenden Falle und die Wirkungen der Pole werden sich daher auch jetzt wieder zerstören. Es bleibt also nur übrig die in die Richtung der Solenoidaxe, also in unserem Falle in die Richtung einer Kraftlinie fallende Wirkung. Um diese zu berechnen, beachten wir, dass auf die Strecke dm der Axe die Stromstärke $\frac{1}{4\pi}(\varphi''-\varphi')$, also auf die Längeneinheit die Stromstärke $\frac{1}{4\pi}\frac{\varphi''-\varphi'}{dm}=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d\varphi}{dm}$ kommt. Die elektromagnetische Wirkung der auf den Ringen vorhandenen Strömungen ist somit in dem betrachteten Punkte A gegeben durch $\frac{d\varphi}{dm}$, sie ist also in der That identisch mit der Wirkung der die Curven s durchlaufenden Ströme i.

II.

Wir gehen nun über zu der Betrachtung *der von den Strömen* $i_1, i_2, i_3 \ldots$ *ausgeübten elektrodynamischen Wirkung*. An der Stelle A, welche durch die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestimmt werden möge, befinde sich ein Stromelement $j\,ds$ mit den Richtungscos. α, β, γ. Wir denken uns in A einen magnetischen Punkt von der Masse 1, und bezeichnen die Componenten der Kraft, welche von den Strömen i auf diesen Punkt ausgeübt wird, durch A, B, C; die Componenten der auf das Element $j\,ds$ ausgeübten elektrodynamischen Wirkung sind dann gegeben durch:

$$X = j(\beta C - \gamma B)\,ds,$$
$$Y = j(\gamma A - \alpha C)\,ds,$$
$$Z = j(\alpha B - \beta A)\,ds.$$

In diesen Formeln ist der bekannte Satz enthalten, dass die elektrodynamische Wirkung senkrecht steht gegen das Stromelement und gegen die durch seinen Anfangspunkt hindurchgehende Kraftlinie. Die Formeln gelten unter der Voraussetzung, dass die Axen des Coordinatensystems in der Reihenfolge x, y, z ein rechtläufiges Strahlenbündel darstellen. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

*) Riecke, Pogg. Ann. 145 S. 218.

ist vermöge der für X, Y, Z geltenden Werthe positiv. Folglich bilden die Richtungen des Stromelementes, der Magnetkraftlinie und der elektrodynamischen Kraft gleichfalls ein rechtläufiges Strahlenbündel. Legen wir eine menschliche Figur in die Richtung des Elementes, wenden wir das Gesicht derselben nach der Magnetkraftlinie, so giebt die ausgestreckte linke Hand die Richtung der elektrodynamischen Kraft an. Ihre Stärke ist gleich

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = j\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sin(ds, m)\, ds.$$

Wir werden diese Sätze nun auf das System unserer ringförmigen Stromflächen in Anwendung bringen. Ihre elektromagnetische Wirkung auf einen äusseren Punkt ist gleich der Wirkung der linearen Ströme i. Aus dem vorhergehenden Satze folgt, dass auch die elektrodynamische Wirkung der auf den Ringen ausgebreiteten Strömung auf ein ausserhalb derselben befindliches Stromelement dieselbe ist, wie die Wirkung der in den Axen der Ringe circulirenden Ströme i_1, i_2, i_3 .... Die elektromagnetische Wirkung der auf den Ringen angenommenen Strömung verschwindet im Inneren derselben; gleiches gilt somit auch von der elektrodynamischen Wirkung auf ein beliebiges im Inneren der Ringe liegendes Stromelement.

Wir lassen den Punkt A, den Anfangspunkt des Elementes jds auf einem beliebigen Wege der Oberfläche eines Ringes näher und näher rücken; immer besteht zwischen den in demselben vorhandenen elektromagnetischen und elektrodynamischen Wirkungen die zuvor gegebene Beziehung. Diess wird auch dann noch der Fall sein, wenn der Punkt A unmittelbar an die äussere Ringoberfläche sich anlegt. Die magnetische Kraftlinie, welche durch A hindurchgeht, ist dann gleichzeitig eine Meridiancurve m des Ringes. Die Richtung der magnetischen Kraft ist dadurch bestimmt, dass das Strahlenbündel, welches durch die Stromrichtung p, die äussere Ringnormale n und die Richtung von m gebildet wird, der Ampèreschen Regel entsprechend ein rechtläufiges sein muss. Lassen wir nun die Richtung des Stromelementes jds zusammenfallen mit der Parallelcurve p, so berührt die durch das Element und die magnetische Kraft gelegte Ebene die Oberfläche des Ringes. Es fällt also die Richtung der elektrodynamischen Kraft in die Normale n und zwar nach dem vorhergehenden Satze in die Richtung der inneren Normale. Da der Winkel (ds, m) bei der angenommenen Lage des Elementes ds ein Rechter ist, so ergiebt sich für die Grösse der elektrodynamischen Wirkung der Ausdruck:

$$j ds \frac{d\varphi}{dm}.$$

Wenn der Punkt A und mit ihm das Stromelement jds auf die innere Seite der Ringfläche tritt, so verschwindet die auf dasselbe ausgeübte elektrodynamische Wirkung.

III.

Wir wenden die vorhergehenden Sätze an auf *die Elemente der auf den Ringflächen vorhandenen Strömungen selbst.* Grenzen wir auf irgend einem der Ringe ein Element ab von der Länge dp, der Breite dm, so hat der in demselben in der Richtung p laufende Strom die Stärke $\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}dm$. Wir denken uns, dass der Ring aus einer Membran von endlicher Dicke hergestellt sei, und nehmen an, dass die Strömung sich nicht beschränke auf seine Oberfläche, sondern vertheile über die ganze Dicke. Bezeichnen wir diese durch N, ein Element der Normalen, welches im Abstand ν von der inneren Oberfläche sich befindet durch $d\nu$, so kommt auf das Volumelement $dp\,dm\,d\nu$ die Stromstärke

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}dm\frac{d\nu}{\mathrm{N}}.$$

Ist M die magnetische Kraft, welche das gegebene Stromsystem an der Stelle des betrachteten Elementes ausübt, so ist die elektrodynamische Wirkung auf dieses letztere gleich

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\varphi}{dm}dp\,dm\,M\frac{d\nu}{\mathrm{N}}.$$

Nun ist M an der inneren Oberfläche, d. h. für $\nu = 0$ ebenfalls gleich Null; an der äusseren für $\nu = \mathrm{N}$ gleich $\frac{d\varphi}{dm}$, somit kann an der Stelle ν gesetzt werden

$$M = \frac{\nu}{\mathrm{N}}\frac{d\varphi}{dm}.$$

Die ganze elektrodynamische Kraft, welche auf das dem Oberflächenelement $dp\,dm$ entsprechende Stück des Ringes ausgeübt wird, ist demnach gegeben durch

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2 dp\,dm\,\frac{1}{\mathrm{N}^2}\int_0^{\mathrm{N}}\nu\,d\nu = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2 dp\,dm.$$

Diese Kraft stellt sich also dar in der Form eines auf die Ringoberfläche nach innen zu ausgeübten Druckes, welcher bezogen auf die Flächeneinheit den Werth besitzt

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2.$$

Die elektrodynamische Wechselwirkung der Ringe $R_1, R_2, R_3 \ldots$ setzt sich zusammen aus der Gesammtheit aller dieser Drucke; betrachten wir einen einzelnen Ring R_1, so ist die Wirkung der auf seine Oberfläche ausgeübten Drucke dieselbe wie die Wirkung der elektrodynamischen Fernkräfte, welche auf seine einzelnen Elemente ausgeübt *werden von den Ringen R_2, R_3 . . . und von den anderen Elementen des Ringes R_1 selbst.* Sind die Ringe starr, so setzen sich jene Drucke zu denselben translatorischen und rotatorischen Kräften zusammen, welche auf der anderen Seite durch die Differentialquotienten des elektrodynamischen Potentiales dargestellt werden.

IV.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt endlich in einfachster Weise *der Beweis des Kirchhoff'schen Satzes.* Es seien gegeben die Curven s; in denselben denken wir uns die galvanischen Ströme i_1, i_2, i_3 . . . circulirend und berechnen das elektromagnetische Potential φ derselben. Wir umschliessen die Curven s durch die Ringe $R_1, R_2, R_3, \ldots$, welche durch das Netz der sich kreuzenden Parallel- und Meridiancurven erzeugt werden. Den Raum zwischen den Ringen erfüllen wir mit einer incompressibeln Flüssigkeit von der Dichte μ, welche im Unendlichen ruht; der constante Druck, welchen sie im Unendlichen besitzt sei gleich Null. Befindet sich die Flüssigkeit in einer stationären Strömung, deren Geschwindigkeitspotential gleich dem elektromagnetischen Potential φ ist, so ist der Druck an einer beliebigen Stelle gegeben durch

$$-\frac{\mu}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

An der Oberfläche eines Ringes ist somit der Druck gleich

$$-\frac{\mu}{2}\left(\frac{d\varphi}{dm}\right)^2,$$

d. h. entgegengesetzt gleich dem früher betrachteten elektrodynamischen Druck, wenn wir die Dichte der Flüssigkeit gleich $\frac{1}{4\pi}$ setzen.

Wenn also eine Flüssigkeit von der Dichte $\frac{1}{4\pi}$ in der angegebenen Weise durch die Ringe hindurch in Circulation versetzt wird, so üben die letzteren eine scheinbare Wechselwirkung auf einander aus, welche der elektrodynamischen Wechselwirkung der entsprechenden auf den Ringoberflächen ausgebreiteten galvanischen Strömungen entgegengesetzt gleich ist.

Zusatz. In noch grösserer Allgemeinheit als von Kirchhoff wurde der in Rede stehende Satz von William Thomson im Jahre 1870 ausgesprochen, wenn auch ohne Beweis. Seine in den „Proceedings of the Royal Society of Edinburgh for Feb. 1870“ enthaltene

Mittheilung „On the Forces experienced by Solids immersed in a Moving Liquid“ bezieht sich auf den Fall, dass in die Flüssigkeit beliebige feste Körper mit und ohne Durchbohrungen eingetaucht sind. Körper, welche nicht durchbrochen sind, oder durch deren Oeffnungen hindurch keine Circulation der Flüssigkeit stattfindet, erfahren Wirkungen entgegengesetzt denjenigen, welche auf einen absolut diamagnetischen Körper unter denselben Umständen im elektromagnetischen Felde ausgeübt werden.

Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.

Von

Sophus Lie in Leipzig.

(Die nachstehende Arbeit erschien zum ersten Male im Frühling 1883 im norwegischen Archiv.)

In einer kurzen Note zur Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen (3. December 1874) gab ich u. A. eine Aufzählung aller continuirlichen Gruppen von Transformationen zwischen zwei Variabeln x und y. Ich lenkte ausdrücklich und stark die Aufmerksamkeit darauf, dass sich hierauf eine Classification und eine rationelle Integrationstheorie aller Differentialgleichungen

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0,$$

die eine continuirliche Transformationsgruppe gestatten, begründen lässt. Später habe ich nun das hiermit scizzirte grosse Programm mehr im Detail ausgeführt. So gab ich in den Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania (1874*)) eine rationelle Methode zur Integration von linearen partiellen Differentialgleichungen mit einer Reihe bekannter infinitesimaler Transformationen; hiermit hatte ich dann gleichzeitig eine vollständige Integrationstheorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$$

mit *bekannten* infinitesimalen Transformationen erhalten. Ich gab ferner in mehreren Abhandlungen**) in diesem Archiv (1876, 78) eine Darstellung von denjenigen Methoden, vermöge deren ich in den

---

*) Die betreffende Arbeit ist im Wesentlichen reproducirt in den Math. Ann. Bd. XI.

**) Diese Abhandlungen sind theilweise (aber nicht vollständig) in den Math. Ann. Bd. XVI in neuer Bearbeitung reproducirt worden.

Jahren 1873—1874 alle continuirlichen Gruppen von Transformationen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmt hatte.

Hiermit war indess keineswegs mein 1874 scizzirtes Programm, selbst auf gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen x und y beschränkt, zur Ausführung gebracht. Nicht allein hatte ich die angekündigte Classification noch nicht durchgeführt, sondern es stand auch noch zurück nachzuweisen, einerseits, wie man entscheidet, ob eine vorgelegte Differentialgleichung eine continuirliche Gruppe gestattet, anderseits wie man diejenigen Differentialgleichungen in rationeller Weise integrirt*), die zur Bestimmung der betreffenden Gruppe dienen. Der Hauptzweck dieser Abhandlung ist, diese beiden wichtigen Capitel meiner Theorie eingehend zu entwickeln. Gleichzeitig halte ich es für zweckmässig, einige Theile meiner Theorie, die ich allerdings früher schon im Wesentlichen gegeben habe, auf's Neue und mehr ausführlich zu behandeln.

Im ersten Abschnitte führe ich die von mir 1874 angekündigte Classification von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen x und y gestatten, vollständig durch. Ich betrachte successiv alle derartigen Gruppen, reducirt auf canonische Formen, und bestimme die zugehörigen invarianten Differentialgleichungen**). Darnach zeige ich, dass eine beliebige vorgelegte Gruppe im Allgemeinen ohne Integration von Differentialgleichungen und jedenfalls durch Integration einer Differentialgleichung 1. O. auf ihre canonische Form gebracht werden kann. Hierdurch gelingt es, alle bei einer beliebig vorgelegten Gruppe invariante Differentialgleichungen anzugeben***).

---

*) Siehe die Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1881. Siehe auch meine Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen. Math. Ann. Bd. VIII, 1874.

**) Die Gesichtspunkte der citirten Note führen indess noch weiter. Man kann u. A. jede Gruppe von *Berührungs*transformationen zwischen xyy' auf gewisse von mir bestimmte canonische Formen bringen, und darnach die zu jeder canonischen Form entsprechenden invarianten Gleichungen angeben u. s. w.

***) Als ich 1874 in meiner mehrmals besprochenen Note hervorhob, dass auf meine Bestimmung aller Gruppen von Transformationen der Ebene eine Classification aller Gleichungen $f(xyy' \dots y^{(m)}) = 0$ mit einer Gruppe gegründet werden kann, hatte ich diese Classification noch nicht im Detail ausgeführt. Ich hatte die Möglichkeit einer Classification, d. h. die Möglichkeit der Aufstellung der Typen aller Differentialgleichungen $f = 0$, die eine Gruppe gestatten, erkannt. Die hierzu erforderlichen Rechnungen hatte ich aber nicht im Detail ausgeführt, und noch weniger publicirt. Indem ich dies ausdrücklich hervorhebe, bemerke ich, dass der berühmte französische Geometer Halphen in seinen ausgezeichneten Untersuchungen über Differentialinvarianten (Liouvilles Journal Bd. 2 (Serie 3) 1876, Sur les invariants diff., Thèse, Paris 1878 u. s. w.) im Grunde einen wichtigen, wenn auch sehr speciellen Theil meines Programms ausgeführt

Im zweiten Abschnitte dieser Arbeit wende ich meine allgemeine längst publicirte Integrationstheorie von linearen partiellen Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen auf gewöhnliche Differentialgleichungen $f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$ mit einer *bekannten* Gruppe an. Derartige Gleichungen können in zwei etwas verschiedenen Weisen behandelt werden. Entweder kann man meine allgemeine Theorie direct anwenden und muss dann successiv eine Reihe vollständiger Systeme aufstellen. Oder auch man fängt damit an, die vorgelegte Gruppe auf ihre canonische Form zu bringen; dadurch erhält $f = 0$ ebenfalls eine canonische Form; hierbei hat man nur gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln zu behandeln. Die Entwickelungen dieses Abschnittes sind grösstentheils nur als Beispiele und Illustrationen zu meiner alten allgemeinen Theorie zu betrachten.

Im dritten Abschnitte denke ich mir eine ganz beliebige Gleichung $f(xyy' \cdots) = 0$ vorgelegt und stelle die Frage, ob dieselbe infinitesimale Transformationen gestattet. Ist dies der Fall, so werden diese Transformationen bestimmt durch gewisse lineare partielle Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung, deren Integration in den meisten Fällen durch successive Quadraturen oder durch Integration einer Riccatischen Gleichung 1. O. geleistet werden kann. Es giebt nur zwei Fälle, in denen die Bestimmung der infinitesimalen Transformationen von $f = 0$ nicht in dieser einfachen Weise geleistet werden kann. Wenn $f = 0$ eine Gruppe gestattet, als deren canonische Form die allgemeine projective Gruppe der Ebene gewählt werden kann, so verlangt die Bestimmung dieser Gruppe im Allgemeinen die Integration einer linearen Gleichung dritter Ordnung. Gestattet andererseits $f = 0$ eine Gruppe, als deren canonische Form die Gruppe einer linearen Gleichung*) gewählt werden kann, so verlangt die Bestimmung unserer Gruppe die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung.

---

hat (siehe § 1, Nummer 3 dieser Arbeit) allerdings mit schönen Anwendungen, die mir theilweise ferner lagen. Halphen macht aufmerksam auf die Beziehungen zwischen seinen Untersuchungen und Klein's und meinen gemeinsamen früheren Untersuchungen über solche Curven, die eine infinitesimale lineare Transformation gestatten. Dagegen kannte er nicht meine anderen viel weiter reichenden Arbeiten, insbesondere nicht meine Note in den Göttinger Nachr., wie auch nicht meine 1874 publicirte Theorie der Integration von linearen partiellen Differentialgleichungen, die eine bekannte Gruppe von Transformationen gestatten.

*) Besonders merkwürdig ist der Fall, dass die lineare Gleichung des Textes in eine mit constanten Coefficienten sich umwandeln lässt. In diesem Falle geschieht wiederum die Bestimmung der gesuchten inf. Transformationen durch Quadratur; kann jedoch die besprochene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten die Form $y^{(r)} = 0$ erhalten, so ist die Integration einer Riccatischen Gleichung 1. O. erforderlich.

In weiteren Abschnitten gedenke ich einige verwandte Theorien, die ich schon seit einiger Zeit im Detail ausgeführt habe, zu entwickeln. Insbesondere werde ich meine Theorien auf solche Gleichungen $f(xy \cdots y^{(m)}) = 0$ anwenden, in denen die Grösse $y^{(m-1)}$ nicht vorkommt. Anderseits werde ich alle Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene in canonischer Form betrachten, und ihre invarianten Differentialgleichungen aufstellen; hieran schliesst sich eine rationelle Integrationstheorie solcher Gleichungen $f = 0$, die eine beliebige Gruppe von *Berührungs*transformationen gestatten.

Abschnitt I.

Classification aller gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen zwischen diesen Variabeln gestatten.

Bestimmen die Gleichungen

$$x_1 = f(xy a_1 a_2 \cdots a_r)$$
$$y_1 = \varphi(xy a_1 a_2 \cdots a_r)$$

zwischen den alten Variabeln xy, den neuen Variabeln $x_1 y_1$ und den Parametern $a_1 a_2 \cdots a_r$ eine (continuirliche) Gruppe von Transformationen, so liefert eine Relation der Form

$$\Omega(f \varphi b_1 \cdots b_\varrho) = 0$$

mit $r + \varrho$ Parametern $a_1 \cdots a_r\, b_1 \cdots b_\varrho$ eine Schaar und zwar die allgemeinste Schaar von Curven, deren Inbegriff die vorgelegte Gruppe gestattet. Dies folgt unmittelbar aus dem Begriffe Transformationsgruppe. Zu bemerken ist allerdings dabei, dass die $r + \varrho$ Parameter a_i, b_k nicht sämmtlich wesentlich zu sein brauchen*).

Wählt man die Function Ω in bestimmter Weise, so kann man durch wiederholte Differentiation hinsichtlich x so viele Gleichungen zwischen xy, den Differentialquotienten

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$$

---

*) Die $r + \varrho$ Parameter sind wesentlich, wenn eine beliebige Curve der Schaar

$$\Omega(xy b_1 \cdots b_\varrho) = 0$$

mit ϱ wesentlichen Parametern durch keine infinitesimale Transformation der Gruppe in sich transformirt wird und auch nicht in eine benachbarte Curve dieser Schaar übergeführt wird; giebt es dagegen σ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe, welche eine beliebige Curve der Schaar wiederum in eine Curve der Schaar überführt, so sind unter den $r + \varrho$ Parametern $a_1 \cdots a_{\varrho'}\, b_1 \cdots b_\varrho$ nur $r + \varrho - \sigma$ wesentlich.

und den Parametern $a_i b_k$ bilden, dass es möglich wird, diese Parameter wegzuschaffen. Hierdurch findet man in jedem einzelnen Falle eine Differentialgleichung, die unsere Gruppe gestattet. Und offenbar kann jede derartige Differentialgleichung in dieser Weise gebildet werden. Diese Methode ist indess nicht zweckmässig, indem sie uns keine Uebersicht über die Gestalt und die Eigenschaften der betreffenden Differentialgleichungen liefert. Zweckmässiger ist es, wie ich seit 1874 bei allen meinen Untersuchungen über Transformationsgruppen zu thun pflege, die *infinitesimalen* Transformationen der Gruppe einzuführen, und vermöge derselben die Bestimmung der betreffenden Differentialgleichungen durchzuführen.

Unsere Gruppe mit den r Parametern a_k enthält nach mir r unabhängige infinitesimale Transformationen*), etwa

$$B_i f = \xi_i(xy)\frac{df}{dx} + \eta_i(xy)\frac{df}{dy}.$$
$$(i = 1, 2 \cdots r)$$

Bei einer solchen inf. Transformation erhält x das Increment $\delta x = \xi_i \delta t$, y das Increment $\delta y = \eta_i \delta t$; gleichzeitig erhält y' ein Increment $\delta y'$, y'' ein Increment $\delta y''$ und überhaupt $y^{(i)}$ ein Increment $\delta y^{(i)}$. Wir werden diese Incremente berechnen. Es ist

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{dy}{dx} = \frac{dx\frac{\delta}{\delta t}dy - dy\cdot\frac{\delta}{\delta t}dx}{dx^2}$$

oder

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dx\cdot d\frac{\delta y}{\delta t} - dy\cdot d\frac{\delta x}{\delta t}}{dx^2} = \frac{d\eta - y'd\xi}{dx}$$
$$= \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y} = \eta^{(1)}.$$

Dementsprechend ist

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \frac{d\eta^{(1)} - y''d\xi}{dx} = \eta^{(2)}$$

und überhaupt

$$\frac{\delta y^{(m)}}{\delta t} = \frac{d\eta^{(m-1)} - y^{(m)}d\xi}{dx} = \eta^{(m)}.$$

*) Die infinitesimale Transformation, bei der x und y die Incremente

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t,\quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t$$

erhalten, bezeichne ich immer mit dem Symbol

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Setze ich nun

$$B_i^{(m)}f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + \eta_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}},$$
$$(i = 1, 2 \cdots r)$$

so sind $B_1^{(m)}f, B_2^{(m)}f, \cdots B_r^{(m)}f$ die r infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe, aufgefasst als transformirend nicht allein xy, sondern zugleich die Differentialquotienten $y' \cdots y^{(m)}$. Und also (Götting. Nachr. 1874, p. 537; Math. Ann. XVI, p. 462—463) bestehen $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Relationen von der Form

$$B_i^{(m)}\left(B_k^{(m)}(f)\right) - B_k^{(m)}\left(B_i^{(m)}(f)\right) = \sum c_{iks} B_s^{(m)}f,$$

in denen die c_{iks} Constanten sind, die überdies von der Zahl m unabhängig sind.

Soll nun eine Differentialgleichung

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$$

unsere Gruppe gestatten, so ist hierzu erforderlich und auch hinreichend, dass sie die r inf. Transformationen $B_i^{(m)}f$ gestattet; denn dann gestattet $f = 0$ jede infinitesimale Transformation $\Sigma c_k B_k^{(m)}f$ der Gruppe und also zugleich jede endliche Transformation derselben, die ja durch Wiederholung einer inf. Transformation erzeugt werden kann. Und dies kommt darauf hinaus, dass die r Gleichungen

$$(1) \qquad \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + \eta_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = 0$$

vermöge $f = 0$ identisch bestehen sollen.

Die weitere Discussion stellt sich verschieden jenachdem r gleich, kleiner oder grösser als $m + 2$ ist.

Nehmen wir zunächst an, dass $m + 2 = r$ ist. Dann ist zum Bestehen der r Gleichungen (1) erforderlich, dass die Determinante

$$\Delta = |\xi_i \eta_i \eta_i^{(1)} \cdots \eta_i^{(r-2)}|$$

verschwindet. Dabei können wir vorläufig von dem Falle, dass Δ identisch verschwindet, absehen, indem dies, wie wir später zeigen, nur ganz ausnahmsweise eintritt. Daher muss die Gleichung $\Delta = 0$ vermöge $f = 0$ bestehen. Es ist anderseits nicht schwierig zu beweisen, dass die Differentialgleichung $\Delta = 0$ immer unsere Transformationsgruppe gestattet. Für eine synthetische Auffassung ist dies unmittelbar evident. Ein Werthsystem $xyy' \cdots y^{(r-2)}$ genügt nämlich der Gleichung $\Delta = 0$ dann und nur dann, wenn dasselbe nicht vermöge der Gruppe in jedes benachbarte Werthsystem übergeführt werden kann. Wünscht man einen analytischen Beweis, so bemerke ich, dass ich für den Fall $m = 1$ schon einen solchen Beweis geliefert habe (siehe Math. Ann. Bd. XVI p. 475), dass ferner der Beweis für einen allgemeinen Werth von m in ganz entsprechender Weise geführt wird. Hierauf näher einzugehen halte ich hier nicht für nothwendig. Ich bemerke nur, dass man im Folgenden bei jeder Anwendung des betreffenden Satzes seine Richtigkeit leicht direct verificirt.

Wir wollen sodann annehmen, dass $m + 2 < r$ ist. Dann ist zum Bestehen der Gleichungen (1) erforderlich, dass alle in der Matrix

$$|\xi_i \, \eta_i \, \eta_i^{(1)} \cdots \eta_i^{(m)}|$$

enthaltenen $(m+2)$-reihigen Determinanten gleichzeitig verschwinden; und da dieselben nicht identisch gleich Null sein können, indem Δ nach unserer Voraussetzung nicht identisch verschwinden soll, so müssen die soeben besprochenen Determinanten, die offenbar ganze Functionen der Grössen $y^{(k)}$ sind, einen gemeinsamen Factor (Δ) enthalten; dabei ist klar, dass diese Grösse (Δ) ebenfalls ein Factor von Δ sein muss. Dies giebt uns nun zunächst den Satz:

Satz. *Sucht man alle bei der vorgelegten Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$ invarianten Differentialgleichungen*

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0,$$

deren Ordnungszahl m nicht grösser als $r - 2$ ist, so muss man die Determinante

$$\Delta = |\xi_i \, \eta_i \, \eta_i^{(1)} \cdots \eta_i^{(r-2)}|$$

bilden. Verschwindet dieselbe nicht identisch, so liefern ihre Factoren gleich Null gesetzt die gesuchten Differentialgleichungen.

Als Corollar fliesst hieraus der Satz:

Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $f = 0$ $m + 2$ oder noch mehr infinitesimale Punkttransformationen, so kann man ohne Beschränkung annehmen, dass f eine ganze Function der Grössen $y^{(i)}$ ist.

Dieser Satz ist im Vorangehenden nur unter der Voraussetzung erwiesen, dass die Determinante Δ nicht identisch verschwindet. Derselbe ist indess allgemein gültig, wie wir später nachweisen werden.

Es erübrigt noch alle bei der Gruppe invarianten Differentialgleichungen $f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$, deren Ordnungszahl m grösser als $r - 2$ ist, zu finden. Dabei schliessen wir wie früher vorläufig den Ausnahmefall $\Delta = 0$ aus. Unter dieser Voraussetzung bilden die r Gleichungen (1) nach meinem früher citirten Satze ein vollständiges System mit $m + 2 - r$ gemeinsamen Lösungen. Sei zunächst $m + 2 = r + 1$, dann giebt es eine Lösung φ_1, die durch Integration gefunden wird*). Dabei hängt φ_1 nur von $xyy' \cdots y^{(r-1)}$ ab. Sei

*) Diese Integration kann immer geleistet werden, wenn die *endlichen* Transformationen der Gruppe bekannt sind.

darnach $m + 2 = r + 2$, dann giebt es zwei Lösungen, *unter denen* φ_1 *die eine ist;* die zweite Lösung φ_2 hängt von $xyy' \cdots y^{(r)}$ ab. Ist $m + 2 = r + 3$, so giebt es drei Lösungen φ_1, φ_2 und φ_3, welch' letztere von $xyy' \cdots y^{(r+1)}$ abhängt. Für einen beliebigen Werth von m giebt es $m - r + 2$ Lösungen $\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{m-r+2}$. Es ist nun leicht zu sehen, dass *jedenfalls* nur die beiden ersten φ_k, nämlich φ_1 und φ_2, durch Integration bestimmt zu werden brauchen. Kennt man φ_1 und φ_2, so findet man die übrigen φ_k folgendermassen durch Differentiation.

Es ist die Gleichung

$$\varphi_2 - a\varphi_1 + b = 0$$

mit den beiden arbiträren Constanten a und b eine invariante Differentialgleichung r^{ter} Ordnung. Differentiirt man nun hinsichtlich x, so ist die hervorgehende Gleichung

$$\frac{d\varphi_2}{dx} - a\frac{d\varphi_1}{dx} = 0$$

oder die äquivalente

$$\frac{\frac{d\varphi_2}{dx}}{\frac{d\varphi_1}{dx}} = a = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$$

eine invariante Gleichung $(r + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer arbiträren Constante.

Also kann die Grösse

$$\frac{d\varphi_2}{dx} : \frac{d\varphi_1}{dx}$$

als Grösse φ_3 gewählt werden. Dementsprechend kann

$$\frac{d\varphi_3}{dx} : \frac{d\varphi_1}{dx}$$

als Grösse φ_4 gewählt werden u. s. w. Dieses Bildungsgesetz zeigt, dass φ_3 hinsichtlich $y^{(r+1)}$, dass φ_4 hinsichtlich $y^{(r+2)}$ linear ist u. s. w.

Satz. *Jede bei der Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$ invariante Differentialgleichung, deren Ordnung grösser als $r - 2$ ist, besitzt die Form*

$$\Omega(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots) = 0.$$

Zuletzt nur noch einige weitere Bemerkungen über invariante Differentialgleichungen

$$f(xy \cdots y^{(\varrho)}) = 0,$$

deren Ordnung ϱ nicht $r - 1$ übersteigt. Nehmen wir wieder an, dass Δ nicht identisch verschwindet, und sei Δ_i ein Factor von Δ, der von den Grössen $x y y' \dots y^{r-2-i}$ abhängt. Dann enthält das Integral von $\Delta_i = 0$ $r - i - 2$ arbiträre Constanten:

$$\varphi(x y a_1 \dots a_{r-i-2}) = 0,$$

d. h. die Gleichung $\Delta_i = 0$ hat ∞^{r-i-2} Integralcurven. Bei den Transformationen der Gruppe werden diese Integralcurven unter sich vertauscht, und zwar wird jede einzelne Integralcurve durch $i + 2$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe in sich selbst transformirt.

Ist insbesondere Δ_0 ein Factor von Δ, der die Grösse $y^{(r-2)}$ enthält*), so ist $\Delta_0 = 0$ eine invariante Differentialgleichung, von deren Integralcurven jede *zwei* unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe gestattet. Besitzt Δ keinen Factor Δ_0, der $y^{(r-2)}$ wirklich enthält, so heisst dies, dass es keine Curve giebt, die zwei und nur zwei infinitesimale Transformationen unserer Gruppe gestattet.

Betrachten wir endlich die invariante Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varphi_1 = a_0,$$

deren arbiträre Constante a_0 einen bestimmten Werth erhalten hat. Diese Differentialgleichung hat ∞^{r-1} Integralcurven, die durch die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe unter sich vertauscht werden. Also schliessen wir, dass jede Integralcurve durch eine und nur eine infinitesimale Transformation der Gruppe in sich transformirt wird.

In den drei ersten Paragraphen dieses Abschnittes betrachten wir successiv alle Gruppen von Punkttransformationen der Ebene, indem wir sie auf die von mir bestimmten canonischen Formen gebracht voraussetzen. Für jede solche canonische Gruppe bestimmen wir die zugehörigen invarianten Differentialgleichungen. In dem letzten Paragraphen zeigen wir, wie eine beliebige vorgelegte Gruppe auf ihre canonische Form gebracht wird.

§ 1.

Gruppen, die keine Differentialgleichung 1. O. invariant lassen.

In meiner Aufzählung aller Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene (Göttinger Nachr. 1874, Math. Ann. Bd. XVI) theilte ich alle derartigen Gruppen in gewisse Hauptclassen, jenachdem die betreffende Gruppe keine, eine, oder mehrere Differentialgleichungen *erster* Ordnung invariant lässt.

In diesem Paragraphen betrachte ich jede Gruppe, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lässt, und bestimme

*) Die Form der Determinante Δ zeigt, dass Δ_0 hinsichtlich $y^{(r-2)}$ linear ist.

alle zugehörigen invarianten Differentialgleichungen höherer Ordnung, unter denen sich immer eine von zweiter Ordnung findet (welche durch passende Coordinatenwahl die lineare Form $y'' = 0$ erhalten kann).

Die betreffende Gruppe enthält entweder acht oder sechs oder fünf Parameter. Sie ist ähnlich mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene oder mit einer Untergruppe derselben, die sechs oder fünf Parameter enthält. Wir denken uns im Folgenden unsere Gruppen auf die soeben genannten canonischen Formen gebracht.

1. Jede fünfgliedrige Gruppe, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lässt, kann auf die canonische Form*)

$$p,\ q,\ xq,\ xp - yq,\ yp$$

gebracht werden. Die Determinante Δ erhält für diese canonische Form den nicht identisch verschwindenden Werth:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & \\ y & -y & -2y' & -3y'' & -4y''' & \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -4y'y''' & -3y''^2 \end{vmatrix} = 9y''^3.$$

Daher ist $y'' = 0$ die einzige invariante Differentialgleichung, deren Ordnung kleiner als vier ist.

Zur Bestimmung der Grössen φ_1 und φ_2 bilden wir die folgenden linearen partiellen Gleichungen, in denen wir, wie immer im Folgenden, y_k statt $y^{(k)}$ schreiben:

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$B_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

$$B_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} - 2y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} \cdots - 6y_5\frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

$$B_5 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - y_1^2\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3y_1y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - (4y_1y_3 + 3y_2^2)\frac{\partial f}{\partial y_3}$$
$$- (5y_1y_4 + 10y_2y_3)\frac{\partial f}{\partial y_4} - (6y_1y_5 + 15y_2y_4 + 10y_3^2)\frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

*) Statt $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ pflege ich zu schreiben p und q. So z. B. schreibe ich $xp - yq$ statt $x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}$, um die infinitesimale Transformation

$$\delta x = x\delta t, \quad \delta y = -y\delta t$$

zu bezeichnen.

und suchen ihre beiden gemeinsamen Lösungen. Die drei ersten Gleichungen zeigen, dass φ_1 und φ_2 nicht von x, y oder y_1 abhängen. Die beiden letzten Gleichungen erhalten durch Reduction die einfachere Form

$$B_4 f = 3y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 4y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 5y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 6y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

$$B_5 f = 3y_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 10 y_2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + (15 y_2 y_4 + 10 y_3^2) \frac{\partial f}{\partial y_5} = 0.$$

Wir integriren $B_5 f = 0$ in der gewöhnlichen Weise, führen sodann ihre Lösungen

$$y_2,\ \varrho_2 = 3y_2 y_4 - 5y_3^2,\ \varrho_3 = 3y_2^2 y_5 - 5\varrho_2 y_3 - \frac{35}{3} y_3^3 \text{*)}$$

als neue unabhängige Variabeln in

$$B_4 f = B_4 y_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} + B_4 \varrho_2 \frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + B_4 \varrho_3 \frac{\partial f}{\partial \varrho_3} = 0$$

ein und erhalten hierdurch die Gleichung

$$3y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 8\varrho_2 \frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + 12 \varrho_3 \frac{\partial f}{\partial \varrho_3} = 0,$$

deren Lösungen

$$\varphi_1 = \frac{\varrho_2}{y_2^{\frac{8}{3}}},\quad \varphi_2 = \frac{\varrho_3}{y_2^4}$$

eben die gesuchten Grössen φ_1 **) und φ_2 sind. Es bleibt nur übrig, die früher gefundenen Werthe der Grössen ϱ_2 und ϱ_3 einzusetzen. Man bemerkt, dass φ_1 linear hinsichtlich y_4 und anderseits φ_2 linear hinsichtlich y_5 ist.

Da φ_1 hinsichtlich y_2 irrational ist, so kann es zuweilen zweckmässiger sein die Grösse φ_1^3 als φ_1 zu wählen. Eine ähnliche Bemerkung lässt sich mehrmals später machen.

2. Jede sechsgliedrige Gruppe, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lässt, kann die canonische Form

$$p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp$$

erhalten. Die Determinante Δ wird für diese canonische Form gleich

---

*) Die Grösse ϱ_3 erhält durch die Substitution $\varrho_2 = 3y_2 y_4 - 5y_3^2$ den Werth

$$\varrho_3 = 3y_2^2 y_5 - 15 y_2 y_3 y_4 + \frac{40}{3} y_3^3.$$

Es ergiebt sich später, dass die Gleichung $\varrho_3 = 0$ eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung besitzt.

**) Man verificirt leicht, dass jede Integralcurve einer Gleichung $\varphi_1 =$ Const. wirklich eine infinitesimale lineare Transformation unserer Gruppe gestattet. Ich erinnere daran, dass *Klein* und ich in einer gemeinsamen Arbeit die Theorie dieser Curven eingehend entwickelt haben.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 & -3y_3 & -4y_4 \\ y & 0 & -y_1^2 & -3y_1y_2 & -4y_1y_3-3y_2^2 & -5y_1y_4-10y_2y_3 \end{vmatrix} = 2y_2^2(5y_3^2 - 3y_2y_4).$$

Es giebt daher zwei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnungszahl kleiner als fünf ist, nämlich

$$y_2 = 0, \text{ und } 5y_3^2 - 3y_2y_4 = 0^{*)}.$$

Zur Bestimmung der Grössen φ_1 und φ_2 müssen wir nach unseren gewöhnlichen Regeln sechs lineare partielle Differentialgleichungen zwischen $xyy_1y_2\ldots y_6$ bilden. Drei unter diesen Gleichungen

$$B_1f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad B_2f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad B_3f = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

sagen nur aus, dass φ_1 und φ_2 von x, y und y_1 unabhängig sind; die drei übrigen Gleichungen erhalten durch eine einfache Reduction die Form

$$B_4f = y_2\frac{\partial f}{d y_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + \cdots + y_6\frac{\partial f}{\partial y_6} = 0$$

$$B_5f = y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 2y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} + \cdots + 4y_6\frac{\partial f}{\partial y_6} = 0$$

$$B_6f = 3y_2^2\frac{\partial f}{\partial y_3} + 10y_2y_3\frac{\partial f}{\partial y_4} + (15y_2y_4 + 10y_3^2)\frac{\partial f}{\partial y_5} + (21y_2y_5 + 35y_3y_4)\frac{\partial f}{\partial y_6} = 0.$$

Die Lösungen von $B_6f = 0$, nämlich

$$3y_2y_4 - 5y_3^2 = \sigma_2$$

$$3y_2^2y_5 - 5\sigma_2y_3 - \frac{35}{3}y_3^3 = \sigma_3 = 3y_2^2y_5 - 15y_2y_3y_4 + \frac{40}{3}y_3^3$$

$$3y_2^3y_6 - 7\sigma_3y_3 - \frac{70}{3}\sigma_2y_3^2 - 35y_3^4 = \sigma_4 = 3y_2^3y_6 - 21y_2^2y_3y_5 + 35y_2y_3^2y_4 - \frac{35}{3}y_3^4$$

führen wir als neue Variabeln in die Gleichung $B_5f = 0$ ein und bringen sie hierdurch auf die Form

*) In der gewählten canonischen Form besteht unsere Gruppe aus allen projectiven Transformationen, bei denen die unendlich entfernte Gerade ihre Lage behält. Die Integralcurven der Gleichung $5y_3^2 = 3y_2y_4$ sind alle Parabeln, d. h. Kegelschnitte, welche jene Gerade berühren. Jede solche Curve gestattet wirklich zwei unabhängige inf. Transformationen unserer Gruppe.

$$2\sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + 3\sigma_3 \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} - 4\sigma_4 \frac{\partial f}{\partial \sigma_4} = 0.$$

Die entsprechenden Lösungen, nämlich

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\sigma_4}{\sigma_2^2},$$

befriedigen als Grössen nullter Ordnung hinsichtlich $y_2 y_3 \ldots y_6$ ebenfalls $B_4 f = 0$ und können daher als die gesuchten Invarianten φ_1 und φ_2

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_2^{\frac{3}{2}}} \text{*)}, \quad \varphi_2 = \frac{\sigma_4}{\sigma_2^2}$$

gewählt werden. Auch jetzt sind φ_1 und φ_2 ganze Functionen von $y_5 y_6$ und dabei ist φ_1 linear hinsichtlich y_5, φ_2 linear hinsichtlich y_6.

3. Wenn eine achtgliedrige Gruppe keine Differentialgleichung 1. O. invariant lässt, so kann sie auf die canonische Form

$$p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

gebracht werden. Die Determinante Δ erhält durch Ausführung und einfache Reduction die Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ 0 & y_3 & 2y_4 & 3y_5 & 4y_6 \\ 0 & 3y_2^2 & 10y_2y_3 & 15y_2y_4 + 10y_3^2 & 21y_2y_5 + 35y_3y_4 \\ 0 & 3y_2 & 8y_3 & 15y_4 & 24y_5 \\ 0 & 0 & 6y_2^2 & 30y_2y_3 & 60y_2y_4 + 40y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Zur Berechnung derselben subtrahirt man von den Gliedern der dritten Reihe zuerst diejenigen der vierten Reihe, multiplicirt mit y_2, und darnach diejenigen der fünften Reihe, multiplicirt mit $\frac{y_3}{3y_2}$; dann verschwinden alle Glieder der dritten Reihe ausgenommen das letzte, und es wird

$$\Delta = \left(15y_2y_3y_4 - 3y_2^2y_5 - \frac{40}{3}y_3^3\right) \begin{vmatrix} y_3 & 2y_4 & 3y_5 \\ 3y_2 & 8y_3 & 15y_4 \\ 0 & 6y_2^2 & 30y_2y_3 \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta = -2y_2(9y_2^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3)^2,$$

sodass Δ nicht identisch gleich Null ist. Es giebt *zwei* invariante

*) Auch jetzt gestattet jede Integralcurve einer Gleichung $\varphi_1 =$ Const. eine infinitesimale Transformation und gehört somit der von **Klein** und mir untersuchten Categorie an.

Differentialgleichungen, deren Ordnung kleiner als 7 ist*), nämlich $y_2 = 0$ und

(2) $$9y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^2 = 0.$$

Um jetzt die Grössen Φ_1 und Φ_2 zu berechnen, müssen wir nach unseren gewöhnlichen Regeln acht lineare partielle Differentialgleichungen in den Variabeln $x\, y\, y_1 \dots y_8$ (den acht infinitesimalen Transformationen p, q, xq, yq, xp, $x^2p + xyp$, yp, $xyp + y^2q$ entsprechend) bilden. Die drei ersten unter diesen Gleichungen

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad B_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

sagen nur aus, dass Φ_1 und Φ_2 von $x\,y$ und y_1 unabhängig sind. Diejenige Gleichung, die der inf. Transformation $xyp + y^2q$ entspricht, brauchen wir nicht zu bilden; sie ist nämlich wegen der Relation

$$(yp,\ x^2p + xyq) = xyp + y^2q$$

eine Consequenz der übrigen. Die Grössen $\Phi_1\ \Phi_2$ sind daher bestimmt als Functionen von $y_2\, y_3 \dots y_8$ durch die Gleichungen

$$B_4 f = y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \dots + y_8 \frac{\partial f}{\partial y_8} = 0$$

$$B_5 f = y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 2y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \dots + 6y_8 \frac{\partial f}{\partial y_8} = 0$$

$$B_6 f = 3y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 8y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 15 y_4 \frac{\partial f}{\partial y_5} + 24 y_5 \frac{\partial f}{\partial y_6} + 35 y_6 \frac{\partial f}{\partial y_7} + 48 y_7 \frac{\partial f}{\partial y_8} = 0$$

$$\begin{aligned} B_7 f = {} & 3y_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 10 y_2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + (15 y_2 y_4 + 10 y_3^2)\frac{\partial f}{\partial y_5} \\ & + (21 y_2 y_5 + 35 y_3 y_4)\frac{\partial f}{\partial y_6} + (28 y_2 y_6 + 56 y_3 y_5 + 35 y_4^2)\frac{\partial f}{\partial y_7} \\ & + (36 y_2 y_7 + 84 y_3 y_6 + 126\, y_4 y_5)\frac{\partial f}{\partial y_8} = 0. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der gemeinsamen Lösungen Φ_1 und Φ_2 derselben bilden wir zuerst die Lösungen von $B_6 = f$, nämlich

$$y_2 = y_2$$
$$\varrho_2 = 3y_2 y_4 - 4y_3^2$$
$$\varrho_3 = 3y_2^2 y_5 - 5y_3 \varrho_2 - \frac{20}{3} y_3^3 = \frac{1}{3}(9y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^3)$$

*) Das Resultat des Textes war a priori evident. Denn es giebt ja nur zwei Curven, die gerade Linie und der Kegelschnitt, die mehr als eine infinitesimale und lineare Transformation in sich gestatten. Halphen hat zuerst die obenstehende Differentialgleichung (2) der Kegelschnitte wirklich aufgestellt. Ebenso hat Halphen zuerst die später aufgestellen Grössen Φ_1 und Φ_2 berechnet. [Ich erfahre nachträglich, dass schon Monge die Differentialgleichung der Kegelschnitte berechnet hat. Januar 1888].

$$\varrho_4 = 3y_2^3 y_6 - 8y_3\varrho_3 - 20y_3^2\varrho_2 - \frac{40}{3}y_3^4 = 3y_2^3y_6 - 24y_2^2y_3y_5 + 60y_2y_3^2y_4 - 40y_3^4$$

$$\varrho_5 = 9y_2^4y_7 - 35y_3\varrho_4 - 140y_3^2\varrho_3 - \frac{700}{3}y_3^3\varrho_2 - \frac{280}{3}y^5$$

$$= 9y_2^4y_7 - 105y_2^3y_3y_6 + 420y_2^2y_3^2y_5 - 700y_2y_3^3y_4 + \frac{1120}{3}y_3^5$$

$$\varrho_6 = 27y_2^5y_8 - 48y_3\varrho_5 - 24\cdot 35y_3^2\varrho_4 - 16\cdot 140y_3^3\varrho_3 - 2800y_3^4\varrho_2 - \frac{8\cdot 280}{3}y_3^6$$

und führen sie darnach zusammen mit y_3 als neue Variabeln in $B_4f=0$, $B_5f=0$, $B_6f=0$ und $B_7f=0$ ein. Nun ist, wie man leicht sieht

$$B_4y_2 = y_2,\ B_4y_3 = y_3,\ B_4\varrho_k = k\varrho_k;$$
$$B_5y_2 = 0,\ B_5y_3 = y_3,\ B_5\varrho_i = i\varrho_i$$

also erhält $B_4f=0$ in den neuen Variabeln die Form

$$y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + 3\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_3} + \cdots + 6\varrho_6\frac{\partial f}{\partial \varrho_6} = 0$$

und $B_5f=0$ die Form

$$y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + \cdots + 6\varrho_6\frac{\partial f}{\partial \varrho_6} = 0,$$

sodass $B_4f=0$ sich auf

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$$

reducirt. Ferner ist klar, dass $B_6f=0$ die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$$

annimmt. Zur Einführung der ϱ_k als Variabeln in $B_7f=0$ bilden wir die Ausdrücke

$$B_7\varrho_2 = 6y_2^2y_3$$
$$B_7\varrho_3 = 0$$
$$B_7\varrho_4 = -3y_2^2\varrho_3 + 20y_2^2y_3\varrho_2$$
$$B_7\varrho_5 = y_2^2(-21\varrho_4 + 35\varrho_2^2) + y_2^2y_3\cdot 105\varrho_3$$
$$B_7\varrho_6 = y_2^2(-36\varrho_5 + 3\cdot 126\varrho_2\varrho_3) + y_2^2y_3(504\varrho_4 + 210\varrho_2^2);$$

also erhält $B_7f=0$ durch Division mit y_2^2 die Form

$$y_3\left\{6\frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + 20\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_4} + 105\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_5} + (504\varrho_4 + 210\varrho_2^2)\frac{\partial f}{\partial \varrho_6}\right\}$$

$$+\left\{-3\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_4} + (-21\varrho_4 + 35\varrho_2^2)\frac{\partial f}{\partial \varrho_5} + (-36\varrho_5 + 3\cdot 126\varrho_2\varrho_3)\frac{\partial f}{\partial \varrho_6}\right\} = 0,$$

welch letztere Gleichung sich wegen $\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$ in zwei spaltet. Die gesuchten Grössen Φ_1 und Φ_2 sind daher bestimmt als Functionen von $\varrho_2\,\varrho_3\ldots\varrho_6$ durch die drei Gleichungen

$$\begin{cases} 2\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_2}+3\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_3}+\cdots+6\varrho_6\frac{\partial f}{\partial \varrho_6}=0 \\ Cf=6\frac{\partial f}{\partial \varrho_2}+20\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_4}+105\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_5}+(504\varrho_4+210\varrho_2{}^2)\frac{\partial f}{\partial \varrho_6}=0 \\ Df=-3\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_4}+(-21\varrho_4+35\varrho_2{}^2)\frac{\partial f}{\partial \varrho_5}+(-36\varrho_5+3\cdot 126\varrho_2\varrho_3)\frac{\partial f}{\partial \varrho_6}=0 \end{cases}$$

[unter denen die erste aussagt, dass Φ_1 und Φ_2 Functionen von den Verhältnissen der Grössen $\varrho_2^{\frac{1}{2}}\,\varrho_2^{\frac{1}{3}}\cdots\varrho_6^{\frac{1}{6}}$ sind]. Wir bestimmen die Lösungen von $Cf=0$, nämlich

$$\varrho_3,\quad u_4=\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2{}^2$$

$$u_5=\varrho_5-\frac{35}{3}\varrho_2\varrho_3$$

$$u_6=\varrho_6-\frac{175}{3}\varrho_2{}^3-84\varrho_2u_4$$

und führen sie als Variable in $Df=0$ ein. Nun ist

$$D\varrho_3=0,\quad Du_4=-3\varrho_3,\quad Du_5=-21u_4,\quad Du_6=-36u_5$$

und also erhält $Df=0$ durch Division mit -3 die Form

$$\varrho_3\frac{\partial f}{\partial u_4}+7u_4\frac{\partial f}{\partial u_5}+12u_5\frac{\partial f}{\partial u_6}=0.$$

Die entsprechenden Lösungen sind

$$\varrho_3,\quad \sigma=2\varrho_3u_5-7u_4{}^2=2\varrho_3\varrho_5-35\varrho_2\varrho_3{}^2-7\left(\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2{}^2\right)^2$$

$$\sigma_1=\varrho_3u_6-\frac{6\sigma}{\varrho_3}u_2-\frac{14}{\varrho_3}u_4{}^3$$

$$=\varrho_3\left(\varrho_6-84\varrho_3\varrho_4+\frac{245}{3}\varrho_2{}^3\right)-12\left(\varrho_5-\frac{35}{2}\varrho_2\varrho_3\right)\left(\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2{}^2\right)+\frac{28}{\varrho_3}\left(\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2{}^2\right)^3.$$

Und da die gesuchten Grössen Φ_1 und Φ_2 Functionen von den Verhältnissen der Grössen $\varrho_2^{\frac{1}{2}}\,\varrho_3^{\frac{1}{3}}\cdots\varrho_6^{\frac{1}{6}}$ sind, so können wir setzen:

$$\Phi_1=\frac{\sigma}{\varrho_3^{\frac{8}{3}}},\qquad \Phi_2=\frac{\sigma_1}{\varrho_3{}^3}.$$

Hiermit ist diese Untersuchung zum Abschluss gebracht*).

---

*) Im Laufe dieser Abhandlung benutze ich häufig den folgenden bekannten Satz: „Bilden $A_1f=0\ldots A_rf=0$ ein vollständiges System in $x_1\ldots x_n$, so kann die Integration desselben folgendermassen geschehen. Man sucht die Lösungen $\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}$ von $A_1f=0$; bildet sodann

$$A_2f=0=A_2\varphi_1\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}+\cdots+A_2\varphi_{n-1}\frac{\partial f}{\partial\varphi_{n-1}}.$$

Sind die Verhälsnisse der $A_2\varphi_k$ nicht Functionen von $\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}$ allein, so zerlegt die Gleichung $A_2f=0$ sich in mehrere. Wir integriren eine *beliebige* unter ihnen

§ 2.

Gruppen, die zwei und nur zwei Differentialgleichungen erster Ordnung invariant lassen.

Im vorangehenden Paragraphen behandelten wir alle Gruppen, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen, und bestimmten ihre zugehörigen invarianten Differentialgleichungen höherer Ordnung. Jetzt erledigen wir dasselbe Problem für alle Gruppen mit zwei und nur zwei invarianten Differentialgleichungen 1. O. Dabei können wir nach meinen früheren Untersuchungen (Gött. Nachr. 1874, Math. Ann. Bd. XVI) annehmen, dass diese beiden Gleichungen 1. O. eben sind

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y_1} = 0,$$

und dass dementsprechend die betreffende Gruppe eine der folgenden canonischen Formen besitzt:

q	q	q	q	p	$p+q$	q	q	q
yq	yq	yq	yq	q	$xp+yq$	yq	yq	yq
	y^2q	p	y^2q	$xp+cyq$	x^2p+y^2q	p	y^2q	y^2q
	p					xp	p	p
							xp	xp
								x^2p

Wir werden der Reihe nach diese 9 Gruppen betrachten und ihre zugehörigen invarianten Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bestimmen.

4. Zuerst betrachten wir die zweigliedrige Gruppe q, yq. Die zugehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & y \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch; dies beruht darauf, dass *jede* Curve (d. h. Gerade) der Schaar $x =$ Const. bei der Gruppe invariant bleibt. Zur Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung

$$f(xyy_1 \ldots y_m) = 0$$

---

und führen die entsprechenden Lösungen $\psi_1 \ldots \psi_{n-2}$ etwa in $A_3 f = 0$ ein. Die hervorgehende Gleichung $A_3 \psi_1 \frac{\partial f}{\partial \psi_1} + \cdots = 0$ behandeln wir dann in analoger Weise u. s. w.

bilden wir die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m\frac{\partial f}{\partial y_m} = 0.$$

Ist $m > 1$, so ergiebt sich, dass f eine arbiträre Function der Grössen

$$x, \; \frac{y_2}{y_1}\,\frac{y_3}{y_1}\cdots\frac{y_m}{y_1}$$

ist. Wenn dagegen $m = 1$ ist, so können die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

nur dann gleichzeitig bestehen, wenn $y_1 = 0$ ist; es ist nämlich an sich unmöglich, dass f nur x enthält. Zu den hiermit gefundenen invarianten Differentialgleichungen muss die Gleichung

$$\frac{1}{y_1} = 0$$

gefügt werden. Dieselbe entgeht uns bei unserer Coordinatenwahl. Dieselbe Bemerkung ist bei allen Gruppen dieses Paragraphen zu machen.

5. Die zu der Gruppe p, q, yq gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & y_1 \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht identisch. Sie liefert die invariante Differentialgleichung erster Ordnung $y_1 = 0$, wozu wie soeben die Gleichung $\frac{1}{y_1} = 0$ zu fügen ist.

Die invarianten Differentialgleichungen $f = 0$, deren Ordnung grösser als 1 ist, werden bestimmt durch die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m\frac{\partial f}{\partial y_m}$$

und somit ist f eine arbiträre Function von

$$\frac{y_2}{y_1}\,\frac{y_3}{y_1}\cdots\frac{y_m}{y_1}.$$

6. Die zu der Gruppe p, q, yq, xp gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 \end{vmatrix} = -y_1 y_2$$

verschwindet nicht identisch. Es giebt drei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnung kleiner als 3 ist, nämlich

$$y_1 = 0, \quad \frac{1}{y_1} = 0, \quad y_2 = 0.$$

Zur Bildung der invarianten Gleichungen höherer Ordnung

$$f(xy \ldots y_m) = 0$$

bilden wir vier lineare partielle Differentialgleichungen, unter denen zwei nur aussagen, dass f von x und y unabhängig ist. Die beiden übrigen Gleichungen

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

$$y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 2y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \cdots + (m-1) y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

zeigen, dass f eine arbiträre Function von

$$\frac{y_1 y_3}{y_2^2}, \quad \frac{y_1^2 y_4}{y_2^3}, \quad \ldots \frac{y_1^{m-2} y_m}{y_2^{m-1}}$$

ist.

7. Die zu der Gruppe p, q, $xp + cyq$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & cy & (c-1)y_1 \end{vmatrix} = (c-1)y_1$$

verschwindet identisch dann und nur dann, wenn $c = 1$ ist. Diesen Ausnahmefall berücksichtigen wir nicht in diesem Paragraphen, indem die Gruppe p, q, $xp + yq$ einfach unendlich viele Differentialgleichungen erster Ordnung, nämlich jede Gleichung der Form

$$y_1 = \text{Const.}$$

invariant lässt.

Wenn c verschieden von 1 ist, so lässt unsere Gruppe nur zwei Gleichungen erster Ordnung, nämlich

$$y_1 = 0, \quad \text{und} \quad \frac{1}{y_1} = 0$$

invariant. Die invarianten Gleichungen höherer Ordnung $f = 0$ werden bestimmt durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ (c-1) y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (c-2) y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + (c-m) y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0,$$

so dass f eine arbiträre Function der Grössen

$$\frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}} \cdots \frac{y_m}{y_1^{\frac{c-m}{c-1}}}$$

sein muss. Diese Bestimmung bleibt auch dann gültig, wenn c gleich einer unter den Zahlen $2, 3, \ldots m$ ist.

8. Die zu der Gruppe q, yq, y^2q gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & y_1 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, indem jede Curve (d. h. Gerade) der Schaar $x =$ Const. bei unserer Gruppe invariant bleibt.

Zur Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bilden wir die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

$$y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 3y_1y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + (4y_1y_3 + 3y_2^2) \frac{\partial f}{\partial y_4} + \cdots = 0,$$

deren Lösungen sind

$$\varphi_1 = x, \quad \varphi_2 = \frac{y_1y_3 - \frac{3}{2}y_2^2}{y_1^2}, \quad \varphi_3 = \frac{y_1^2y_4 + 3y_2^3 - 4y_1y_2y_3}{y_1^3} \text{ etc.}$$

Man verificirt leicht, dass φ_3 (Siehe die Einleitung) eine Function von x, φ_2 und $\frac{d\varphi_2}{dx}$ ist, indem

$$\varphi_3 = \frac{d\varphi_2}{dx}$$

ist. Jede bei der Gruppe $q\ yq\ y^2q$ invariante Differentialgleichung dritter oder höherer Ordnung hat somit die Form

$$f\left(x\ \varphi_2\ \frac{d\varphi_2}{dx}\ \frac{d^2\varphi_2}{dx}\ \ldots\right) = 0,$$

wo φ_2 den obenstehenden Werth besitzt.*)

9. Die zu der Gruppe $p\ q\ yq\ y^2q$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 & 2yy_2 + 2y_1^2 \end{vmatrix} = 2y_1^3$$

verschwindet nicht identisch; es giebt, wie man sieht, keine invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung. Durch Rechnungen, die mit denen der vorangehenden Nummer fast identisch sind, findet man zur

*) [Die Differentialinvariante φ_2, die schon bei Lagrange auftritt, spielt in Schwarz's schönen Untersuchungen eine wichtige Rolle; Januar 1888.]

Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{y_1 y_3 - \frac{3}{2} y_2^2}{y_1^2}, \quad \varphi_2 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{y_1^2 y_4 - 4 y_1 y_2 y_3 + 3 y_2^3}{y_1^3}$$

und überhaupt

$$\varphi_k = \frac{d^k \varphi_1}{d x_k}.$$

Die betreffenden invarianten Differentialgleichungen haben die Form

$$f(\varphi_1 \, \varphi_2 \ldots \varphi_k) = 0.$$

10. Die zu der Gruppe $p + q$, $xp + yq$, $x^2p + y^2q$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & 0 \\ x^2 & y^2 & 2(y-x)y_1 \end{vmatrix} = 2(y-x)^2 y_1$$

verschwindet nicht identisch. Die Gleichung

$$y - x = 0$$

bestimmt eine invariante Curve. Die invarianten Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - 2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial y} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + 2(y-x) y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + [(2y-4x)y_2 + 2y_1^2 - 2y_1] \frac{\partial f}{\partial y_2}$$
$$+ [(2y-6x)y_3 + 6 y_1 y_2 - 6 y_2] \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

von denen die erste uns lehrt, dass f die Grössen x und y nur in der Combination $u = x - y$ enthält. Die beiden letzten Gleichungen erhalten durch Einführung von u als Variabeln statt x und y die Form

$$u \frac{\partial f}{\partial u} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - 2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

$$2 u y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + [3 u y_2 - 2 y_1^2 + 2 y_1] \frac{\partial f}{\partial y_2} + [4 u y_2 - 6 y_1 y_2 + 6 y_2] \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

Wir führen die Lösungen der ersten Gleichung, nämlich

$$y_1, \; u y_2 = v_2, \; u^2 y_3 = v_3$$

als Variabeln in die letzte Gleichung ein; dies giebt

$$2 y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (3 v_2 - 2 y_1^2 + 2 y_1) \frac{\partial f}{\partial v_2} + [4 v_3 - 6 y_1 v_2 + 6 v_2] \frac{\partial f}{\partial v_3} = 0.$$

Die entsprechenden Lösungen

$$v_2 y_1^{-\frac{3}{2}} + 2\left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right) = \varphi_1,$$

$$v_3 y_1^{-2} + 6\varphi_1 \left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right) - 6(y_1 + y_1^{-1}) = \varphi_2$$

sind die gesuchten Grössen φ_1 und φ_2. Es bleibt nur übrig die Werthe von v_2 und v_3 einzuführen.

11. Die zu der Gruppe p, q, yq, xp, y^2q gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 & -3y_3 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 & 2yy_2 + 2y_1^2 & 2yy_3 + 6y_1y_2 \end{vmatrix} = 4y_1^2\left(y_1y_3 - \frac{3}{2}y_2^2\right)$$

verschwindet nicht identisch. Es giebt ausser $y_1 = 0$ und $\frac{1}{y_1} = 0$ nur eine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung nicht 3 übersteigt, nämlich

$$2y_1y_3 - 3y_2^2 = 0\text{*}).$$

Zur Bestimmung der Grössen φ_1, φ_2, bemerken wir, dass sie als Functionen der drei Grössen

$$(3)\qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{y_3}{y_1} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)^2 \\ w_2 = \dfrac{dw_1}{dx} = \dfrac{y_4}{y_1} - 4\dfrac{y_2y_3}{y_1^2} + 3\dfrac{y_2^3}{y_1^3} \\ w_3 = \dfrac{d^2w_1}{dx^2} = \dfrac{y_5}{y_1} - 5\dfrac{y_2y_4}{y_1^2} - 4\dfrac{y_3^2}{y_1^2} + 17\dfrac{y_2^2y_3}{y_1^3} - 9\dfrac{y_2^4}{y_1^4} \end{cases}$$

durch die (der infinitesimalen Transformation xp entsprechende) Gleichung

$$B_4 f = y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 3y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} + 4y_5\frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

bestimmt sind. Nun ist aber

$$B_4 w_1 = 2w_1, \quad B_4 w_2 = 3w_2, \quad B_4 w_3 = 4w_3$$

und also wird

$$B_4 f = 0 = 2w_1\frac{\partial f}{\partial w_1} + 3w_2\frac{\partial f}{\partial w_2} + 4w_3\frac{\partial f}{\partial w_3}.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen

$$\varphi_1 = \frac{w_2}{w_1^{\frac{3}{2}}}, \quad \varphi_2 = \frac{w_3}{w_1^2}$$

sind die gesuchten Grössen φ_1 und φ_2.

---

*) Die invariante Differentialgleichung des Textes bestimmt alle Kegelschnitte durch zwei gemeinsame Punkte. Diese Kegelschnitte werden durch passende Coordinatenwahl alle Kreise der Ebene (oder alle Kreise einer Kugel).

12. Die zu der Gruppe

$$p \quad q \quad yq \quad xp \quad y^2q \quad x^2p$$

gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 & -3y_3 & -4y_4 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 & 2yy_2+2y_1^2 & 2yy_3+6y_1y_2 & 2yy_4+8y_1y_3+6y_2^2 \\ x^2 & 0 & -2xy_1 & -4xy_2-2y_1 & -6xy_3-6y_2 & -8xy_4-12y_3 \end{vmatrix}$$

hat den nicht identisch verschwindenden Werth

$$\Delta = -4y_1(2y_1y_3 - 3y_2)^2.$$

Es giebt daher ausser $y_1 = 0$ und $\frac{1}{y_1} = 0$ nur eine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung kleiner als fünf ist, die folgende nämlich:

$$2y_1y_3 - 3y_2 = 0.$$

Die zu der Gruppe gehörigen Grössen φ_1 und φ_2 sind Functionen von den früher (3) gefundenen Grössen

$$w_1 = \eta_3 - \frac{3}{2}\eta_2^2 \text{ *)}$$
$$w_2 = \eta_4 - 4\eta_2\eta_3 + 3\eta_2^3$$
$$w_3 = \eta_5 - 5\eta_2\eta_4 - 4\eta_3^2 + 17\eta_2^2\eta_3 - 9\eta_2^4$$
$$w_4 = \eta_6 - 6\eta_2\eta_5 - 13\eta_3\eta_4 + 27\eta_2^2\eta_4 + 42\eta_2\eta_3^2 - 87\eta_2^3\eta_3 + 36\eta_2^5$$

und zwar genügen sie (den Transformationen xp und x^2p entsprechend) den beiden Gleichungen

$$Af = \eta_2\frac{\partial f}{\partial \eta_2} + 2\eta_3\frac{\partial f}{\partial \eta_3} + \cdots + 5\eta_6\frac{\partial f}{\partial \eta_6} = 0,$$

$$Bf = \frac{\partial f}{\partial \eta_2} + 3\eta_2\frac{\partial f}{\partial \eta_3} + 6\eta_3\frac{\partial f}{\partial \eta_4} + 10\eta_4\frac{\partial f}{\partial \eta_5} + 15\eta_5\frac{\partial f}{\partial \eta_6} = 0.$$

Nun ist

$$Aw_1 = 2w_1, \quad Aw_2 = 3w_2, \quad Aw_3 = 4w_3, \quad Aw_4 = 5w_4,$$
$$Bw_1 = 0, \quad Bw_2 = 2w_1, \quad Bw_3 = 5w_2, \quad Bw_4 = 9w_3.$$

Daher sind φ_1 und φ_2 bestimmt als Functionen der w_2 durch die Gleichungen

$$2w_1\frac{\partial f}{\partial w_1} + 3w_2\frac{\partial f}{\partial w_2} + 4w_3\frac{\partial f}{\partial w_3} + 5w_4\frac{\partial f}{\partial w_4} = 0,$$

$$2w_1\frac{\partial f}{\partial w_2} + 5w_2\frac{\partial f}{\partial w_3} + 9w_3\frac{\partial f}{\partial w_4} = 0,$$

deren Lösungen sind

*) Im Texte setzen wir überall η_i statt $\frac{y_i}{y_1}$.

$$\varphi_1 = \frac{4w_1w_3 - 5w_2^2}{w_1^3},$$

$$\varphi_2 = \frac{4w_1^2w_4 - 18w_1w_2w_3 + 15w_2^3}{w_1^{\frac{9}{2}}}.$$

Führt man hier die Werthe der Grössen w_k ein, so erhält man die Ausdrücke von φ_1 und φ_2 als Functionen von den y_k.

§ 3.

Gruppen, die eine und nur eine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen.

Gruppen, die eine und nur eine Differentialgleichung 1. O. invariant lassen, können (Göttinger Nachr. 1874; Math. Annalen, Bd. XVI) auf eine der folgenden canonischen Formen gebracht werden, wobei X_i eine Function von x, ε und c Constante bezeichnen.

$X_1 q$	$X_1 q$	$X_1 q$	$X_1 q$	q
$X_2 q$	.	.	.	xq
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	$X_r q$	$X_r q$	$X_r q$	$x^r q$
			yq	p
$X_r q$	yq	$p + \varepsilon y q$	p	$xp + cyq$

q	q	q	q
xq	xq	xq	xq
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$x^r q$	$x^r q$	$x^r q$	$x^r q$
p	yq	p	p
$xp + [(r+1)y + x^{r+1}]q$	p	$2xp + ryq$	yq
	xp	$x^2p + rxyq$	xp
			$x^2p + rxyq$

p	yq
$xp + yq$	p
	xp
$x^2p + 2xyq$	$x^2p + xyq$

Wir werden successiv diese canonischen Gruppen betrachten und ihre invarianten Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bestimmen.

13. Die zu der Gruppe $p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ x^2 & 2xy & 2y \end{vmatrix} = 2y^2$$

verschwindet nicht identisch. Die invariante Gleichung 1. O.:

$$\frac{1}{y_1} = 0$$

entgeht uns bei unserer speciellen Coordinatenwahl.

Die Grössen φ_1 und φ_2 haben als Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$$

$$y\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$$

die Werthe

$$\varphi_1 = 2yy_2 - y_1^2, \quad \varphi_2 = y^2y_3.$$

14. Die zu der Gruppe $yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 \\ x^2 & xy & y - xy_1 & -3xy_2 \end{vmatrix} = 2y^2y_2$$

verschwindet nicht identisch. Die Gruppe lässt daher eine Gleichung zweiter Ordnung und zwar $y_2 = 0$ invariant, was darauf hinauskommt, dass die Gruppe eine *projective* ist.

Die Grössen φ_1 und φ_2 befriedigen die vier Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0,$$

$$+ y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + 2y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + 4y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0,$$

$$-y\frac{\partial f}{\partial y_1} + 3y_2\frac{\partial f}{\partial y_3} + 8y_3\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0,$$

und haben somit die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{yy_3 + 3y_1y_2}{y^{\frac{1}{2}}y_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varphi_2 = \frac{3yy_2y_4 - 4yy_3^2}{y_2^3}.$$

15. Die zu der Gruppe $X_1 q \cdots X_r q$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0\, X_1\, X_1' \cdots & X_1^{(r-2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0\, X_r\, X_r' \cdots & X_r^{(r-2)} \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, da jede Curve (d. h. Gerade) der Schaar $x = \text{Const.}$ bei der Gruppe invariant bleibt. Zur Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen

$$f(xyy_1 \cdots y_m) = 0$$

bilden wir die r Gleichungen

$$X_i \frac{\partial f}{\partial y} + X_i' \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + X_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0, \tag{4}$$

die nur wenn $m > r - 1$ ist, andere gemeinsame Lösungen als x besitzen können*). Für $m = r$ ist, wie man leicht verificirt, ausser x zugleich die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} X_1 & X_1' & \cdots & X_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_r & X_r' & \cdots & X_r^{(r)} \\ y & y_1 & \cdots & y_r \end{vmatrix}$$

eine Lösung. Wir können daher

$$\varphi_1 = x, \quad \varphi_2 = D^{**})$$

setzen. Setzt man überhaupt

$$D_i = \begin{vmatrix} X_1 & X_1' & \cdots & X_1^{(r-1)} & X_1^{(r+i)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_r & X_r' & \cdots & X_r^{(r-1)} & X_r^{(r+i)} \\ y & y_1 & \cdots & y_{r-1} & y_{r+i} \end{vmatrix}$$

so ist D_i immer eine Lösung der Gleichungen (4), dabei vorausgesetzt dass $m \geqq r + i$. Man kann daher

$$\varphi_{i+2} = D_i$$

setzen.

16. Die zu der Gruppe $X_1 q \cdots X_r q\ yq$ gehörige Determinante Δ verschwindet identisch. Die invarianten Differentialgleichungen $f = 0$ sind bestimmt durch die $(r + 1)$ Gleichungen

---

*) Der Schluss im Texte beruht darauf, dass die X_k in dem Sinne unabhängige Functionen von x sind, dass keine Relation der Form $\Sigma c_i X_i = 0$ mit constanten Coefficienten besteht.

**) Ist $r = 1$, so giebt es unbeschränkt viele invariante Differentialgleichungen *erster* Ordnung, indem die invariante Gleichung $D = f(x)$ von erster Ordnung ist.

$$X_i \frac{\partial f}{\partial y} + X_i' \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + X_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$
$$y \frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0.$$

Dieselben haben (ausser x) keine gemeinsame Lösung, wenn $m < r$. Ist $m = r$, so giebt es eine specielle gemeinsame Lösung, nämlich die lineare und homogene Differentialgleichung

$$D = 0,$$

wobei wir D in derselben Bedeutung wie soeben brauchen. Ist $m = r + i$, so sind die Grössen

$$x \frac{D_1}{D} \frac{D_2}{D} \cdots \frac{D_i}{D}$$

Lösungen unserer linearen partiellen Differentialgleichungen, und wir können daher

$$\varphi_1 = x; \quad \varphi_2 = \frac{D_1}{D}, \cdots \varphi_{i+1} = \frac{D_i}{D}$$

setzen.

17. Die zu der Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q, \quad p + \varepsilon y q \ (\varepsilon = \text{Const.})$$

gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon y & \varepsilon y_1 & \cdots & \varepsilon y_{r-1} \\ 0 & X_1 & X_1' & \cdots & X_1^{(r-1)} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & X_r & X_r' & \cdots & X_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht identisch. Ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ giebt es keine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung kleiner als r ist*). Die Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \cdots$ sind Functionen von $x, D, D_1, D_2 \cdots$ und genügen dabei der Gleichung

$$Bf = \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon y \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + \varepsilon y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

oder der äquivalenten

$$Bx \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + BD \cdot \frac{\partial f}{\partial D} + BD_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial D_1} + \cdots = 0,$$

*) Den Fall $r = 1$ schliessen wir im Texte aus, indem es dann unendlich viele invariante Differentialgleichungen 1. O. giebt (siehe § 4).

wo $Bx = 1$ zu setzen ist. Zur Berechnung der Ausdrücke BD_i erinnern wir (Math. Ann. Bd. XVI p. 499) daran, dass die X_k Relationen der Form

$$(5)\quad \begin{cases} X_1' = \lambda_{11} X_1 \\ X_2' = \lambda_{21} X_1 + \lambda_{22} X_2 \\ X_3' = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2 + \lambda_{33} X_3 \qquad (\lambda_{ik} = \text{Const.}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_k' = \lambda_{k1} X_1 + \lambda_{k2} X_2 + \cdots \lambda_k X_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

erfüllen. Daher ist, wie man durch Ausführung findet,

$$\begin{aligned} BD &= (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \cdots + \lambda_{rr} + \varepsilon)\, D = kD \\ BD_1 &= (\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)\, D_1 = kD_1 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ BD_i &= (\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)\, D_i = kD_i \end{aligned}$$

wo k eine Constante bezeichnet. Die gesuchten Grössen φ_1, φ_2 sind daher bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + kD\frac{\partial f}{\partial D} + kD_1\frac{\partial f}{\partial D_1} + \cdots = 0,$$

sodass

$$\varphi_1 = De^{-kx}, \quad \varphi_2 = D_1 e^{-kx}, \cdots \varphi_{i+1} = D_i e^{-kx}$$

wird.

Unter Nummer 15 gaben wir die allgemeinen Ausdrücke der Grössen D_i. Diese Ausdrücke können indess vermöge der Formeln (5) wesentlich vereinfacht werden. Denn es ist

$$\frac{\partial D_i}{\partial x} = (\lambda_{11} + \cdots + \lambda_{rr})\, D_i = \Sigma\lambda_{kk} \cdot D_i$$

woraus

$$D_i = e^{x\Sigma\lambda_{kk}}\,\Omega_1$$

wo Ω_i eine lineare homogene Function mit *constanten* Coefficienten von $yy_1 \cdots y_{r-1} y_{r+i}$ bezeichnet. Daher wird

$$D_i = e^{x\Sigma\lambda_{kk}}(k_{i0}\, y + k_{i1}\, y_1 + \cdots + k_{i,r-1}\, y_{r-1} + k_{i,r+i}\, y_{r+i})$$

und

$$\varphi_{i+1} = e^{-\varepsilon x}(k_{i0}\, y + \cdots + k_{i,r-1}\, y_{r-1} + k_{i,r+i}\, y_{r+i}).$$

Wir gehen hier nicht auf die einfache Berechnung der Constanten k_{ij} ein*). Dagegen heben wir ausdrücklich hervor, dass die Con-

*) $D = 0$ ist, wie wir gesehen haben, im vorliegenden Falle eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Es ist dabei klar, dass diese Constante beliebige Werthe haben können.

stante ε ohne wesentliche Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann.

Wir bemerken nur noch, dass sich unter den invarianten Differentialgleichungen beliebig viele lineare und homogene mit *constanten* Coefficienten finden. Denn wenn $c_1, c_2 \cdots$ beliebige Constanten bezeichnen, so stellt

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots = 0$$

immer eine solche Gleichung dar.

18. Die der Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q \; yq \; p$$

entsprechende Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_1 & X_1' & \cdots & X_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & X_r & X_r' & \cdots & X_r^{(r)} \\ 0 & y & y_1 & \cdots & y_r \end{vmatrix} = D$$

verschwindet nicht identisch. Es giebt ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ eine und nur eine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung r nicht übersteigt, nämlich

$$D = 0^{*}).$$

Die Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \cdots$ sind Functionen von $x, D, D_1 \cdots$, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial D_1}\frac{\partial D_1}{\partial x} + \cdots$$

$$0 = y\frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m \frac{\partial f}{\partial y_m}.$$

Nun ist, da die X_k durch Relationen der Form

$$X_k' = \lambda_{k1} X_1 + \lambda_{k2} X_2 \cdots + \lambda_{kk} X_k$$

verknüpft sind:

$$\frac{dD_i}{dx} = D_i(\lambda_{11} + \cdots + \lambda_{rr}) = D_i k,$$

woraus

$$D_i = e^{kx}(c_{i0} y + c_{i1} y_1 + \cdots + c_{i,r-1} y_{r-1} + c_{i,r+i} y_{r+i}).$$

Hieraus ergiebt sich, dass wir

$$\varphi_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \varphi_2 = \frac{D_2}{D} \text{ etc.}$$

---

*) Ist $r = 1$, so giebt es zwei invariante Gleichungen 1. O.: $\frac{1}{y_1} = 0$ und $D = 0$. Diesen Fall schliessen wir im Texte aus.

setzen können. Die φ_k sind Brüche, deren Zähler und Nenner ganze und lineare Functionen (mit constanten Coefficienten) von $y y_1 y_2 \cdots$ sind.

19. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q \quad xq \cdots x^{r-1}q \quad p \quad xp + cyq$$

hat den Werth

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & x & 1 & \cdots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ 0 & x^{r-1} & (r-1)x^{r-2} & \cdots & (r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 & 0 \\ x & cy & (c-1)y_1 & \cdots & (c-r-1)y_{r-1} & (c-r)y_r \end{vmatrix}$$

d. h. es ist, wenn wir einen nicht verschwindenden Factor wegwerfen,

$$\Delta = (c-r)\,y_r.$$

Δ verschwindet daher nur, wenn $c = r$ ist.

Ist $c \neq r$, so ist $y_r = 0$ $\left(\text{ausser } \frac{1}{y_1} = 0\right)$ die einzige invariante Differentialgleichung, deren Ordnung r nicht übersteigt*). Die Grössen $\varphi_1\, \varphi_2 \cdots$ sind (Nummer 15) Functionen von $x D D_1 \cdots$ und erfüllen überdies die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + cy\frac{\partial f}{\partial y} + (c-1)\,y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots = 0.$$

Nun aber ist, wie man durch Ausführung findet, indem man unwesentliche constante Factoren wegwirft,

$$D = y_r, \quad D_1 = y_{r+1}, \quad D_2 = y_{r+2} \quad \cdots$$

Also wird

$$\varphi_1 = \frac{y_{r+1}}{y_r^{\frac{c-r-1}{c-r}}}, \quad \varphi_2 = \frac{y_{r+2}}{y_r^{\frac{c-r-2}{c-r}}}, \cdots.$$

Zurück steht noch der Ausnahmefall $c = r$. In diesem Falle verschwindet Δ identisch. Man findet, dass

$$\frac{1}{y_1} = 0, \quad y_r = \text{Const.}^{**}), \quad y_{r+1} = 0$$

die einzigen invarianten Differentialgleichungen sind, deren Ordnung $r + 1$ nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1\, \varphi_2$ sind Functionen von

$$y_r, \quad y_{r+1}, \quad y_{r+2} \cdots,$$

---

*) Auch jetzt soll der Fall $r = 1$ ausgeschlossen sein.

**) Ist insbesondere $r = c = 1$, so giebt es ∞^1 invariante Differentialgleichungen 1. O. (siehe § 4).

bestimmt durch die Gleichung

$$y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + 2y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + 3y_{r+3}\frac{\partial f}{\partial y_{r+3}} + \cdots = 0.$$

Daher wird

$$\varphi_1 = y_r, \quad \varphi_2 = \frac{y_{r+2}}{y_{r+1}^2}, \quad \varphi_3 = \frac{y_{r+3}}{y_{r+1}^3} \text{ etc. } \cdots$$

20. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q \;\; xq \cdots x^{r-1}q \;\; p \;\; xp + (ry + x^r)\, q$$

hat den Werth

$$\Delta = r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

und verschwindet somit weder identisch noch für specielle Werthe der Variabeln. Ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ giebt es daher keine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung r nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1\,\varphi_2$ sind bestimmt durch die Relation

$$r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\frac{\partial f}{\partial y_r} - y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} - 2y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} - \cdots = 0$$

und haben daher, wenn man zur Abkürzung

$$r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = \frac{1}{\omega}$$

setzt, die Werthe

$$\varphi_1 = y_{r+1}e^{\omega y_r}, \quad \varphi_2 = y_{r+2}e^{2\omega y_r}, \quad \varphi_3 = y_{r+3}e^{3\omega y_r} \text{ etc.}$$

21. Die Determinante der Gruppe

$$q \;\; xq \cdots x^{r-1}q \;\; yq \;\; p \;\; xp$$

hat den Werth:

$$\Delta = y_r y_{r+1}.$$

Es giebt daher drei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnung kleiner als $r+2$ ist, nämlich

$$\frac{1}{y_1} = 0, \quad y_r = 0, \quad y_{r+1} = 0\,^*).$$

Die Grössen $\varphi_1\,\varphi_2\cdots$ hängen nur von $y_r,\, y_{r+1}\, y_{r+2}\cdots$ ab und erfüllen dabei die beiden Gleichungen

$$y_r\frac{\partial f}{\partial y_r} + y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + \cdots = 0$$

$$y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + 2y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + \cdots = 0.$$

*) Der Fall $r = 1$ ist im Texte ausgeschlossen.

Sie besitzen somit die Form

$$\varphi_1 = \frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2}, \quad \varphi_2 = \frac{y_r^2 y_{r+3}}{y_{r+1}^3}, \ldots .$$

22. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q, \; xq, \cdots x^{r-1}q, \; p, \; 2xp + (r-1)yq, \; x^2p + (r-1)xyq$$

besitzt (wenn wir von einem nicht verschwindenden constanten Factor absehen) den Werth: y_r^2. Es giebt daher ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ nur eine invariante Gleichung, nämlich $y_r = 0$*), deren Ordnung $r+1$ nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \cdots$ sind Functionen von $y_r y_{r+1} \cdots$ und erfüllen dabei die beiden Gleichungen:

$$Bf = (r+1)y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} + (r+3)y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + (r+5)y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + \cdots = 0$$

$$(r+1)y_r \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + 2(r+2)y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + 3(r+3)y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+3}} = 0.$$

Die Lösungen der letzten Gleichung sind

$$y_r, \quad (r+1)y_r y_{r+2} - (r+2)y_{r+1}^2 = u$$

$$(r+1)^2 y_r^2 y_{r+3} - 3(r+1)(r+3)y_r y_{r+1} y_{r+2} + 2(r+2)(r+3)y_{r+1}^3 = u_1.$$

Führt man dieselben als Variabeln in $Bf = 0$ ein, so kommt die Gleichung

$$(r+1)y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} + 2(r+3)u\frac{\partial f}{\partial u} + 3(r+3)u_1\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0$$

mit den Lösungen

$$\varphi_1 = \frac{u}{y_r^{\frac{2(r+3)}{r+1}}}$$

$$\varphi_2 = \frac{u_1}{y_r^{\frac{3(r+3)}{r+1}}}.$$

23. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q \; xq \cdots x^{r-1}q \; yq \; p \; xp \; x^2p + (r-1)xyq$$

hat den Werth

$$\Delta = y_r[(r+2)y_{r+1}^2 - (r+1)y_r y_{r+2}];$$

dabei ist vorausgesetzt, dass wir von einem constanten, nicht verschwindenden Factor absehen. Es giebt daher ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ nur zwei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnung $r+2$ nicht über-

*) Der Fall $r = 1$ soll im Texte ausgeschlossen sein.

steigt. Die eine ist $y_r = 0$ *), die zweite kann auf die bemerkenswerthe Form

$$\left(y_r^{-\frac{1}{r+1}}\right)'' = 0$$

gebracht werden.

Die Grössen $\varphi_1\ \varphi_2 \cdots$ unserer Gruppe sind Functionen von den φ_k der vorangehenden Gruppe. Ueberdies erfüllen sie, der Transformation yq entsprechend, die Relation

$$y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} + y_{r+1} \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + y_{r+2} \frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + \cdots = 0;$$

daher können wir, indem wir die Symbole u, u_1, u_2 in derselben Bedeutung wie in der vorangehenden Nummer gebrauchen, den Grössen φ_k unserer Gruppe die folgenden Werthe beilegen:

$$\varphi_1 = \frac{u_1}{u^{\frac{3}{2}}}, \quad \varphi_2 = \frac{u_2}{u^2}.$$

§ 4.

Gruppen, die unendlich viele Differentialgleichungen 1. O. invariant lassen.

Wenn eine Gruppe unendlich viele Differentialgleichungen 1. O. invariant lässt, so kann sie auf eine von den drei folgenden canonischen Formen gebracht werden

$$\boxed{\begin{matrix} p \\ q \\ xp + yq \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} q \\ xp + yq \end{matrix}} \quad \boxed{p}\,.$$

Wir werden successiv diese drei canonischen Gruppen betrachten und ihre invarianten Differentialgleichungen bestimmen.

24. Die Determinante Δ der Gruppe $p\ q\ xp + yq$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch. Die invarianten Differentialgleichungen sind bestimmt durch die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 3 y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \cdots = 0.$$

*) Der Fall $r = 1$ soll im Texte ausgeschlossen sein.

Daher sind

$$y_1 = \text{Const.}, \quad y_2 = 0$$

die einzigen invarianten Differentialgleichungen, deren Ordnung 2 nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1\,\varphi_2\cdots$ haben die Werthe

$$\varphi_1 = y_1, \quad \varphi_2 = \frac{y_3}{y_2^2}, \quad \varphi_3 = \frac{y_4}{y_2^3}\cdots.$$

25. Die Determinante Δ der Gruppe $q\ xp + yq$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = -x$$

verschwindet nicht identisch. Die Gerade $x = 0$ bleibt bei der Gruppe invariant. Die Grössen φ_i sind bestimmt durch die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} - 3y_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\cdots = 0$$

und haben daher die Werthe:

$$\varphi_1 = y_2 x, \quad \varphi_2 = y_3 x^2, \quad \varphi_3 = y_4 x^3\cdots.$$

25. Wenn endlich eine Differentialgleichung die einzige infinitesimale Transformation p gestattet, so besitzt sie die Form

$$f(y y_1 y_2\cdots y_m) = 0.$$

Hiermit kennen wir canonische Formen aller Differentialgleichungen zwischen x und y, die eine Gruppe von Transformationen zwischen x und y gestatten.

§ 5.

Reduction einer beliebigen Gruppe auf ihre canonische Form.

Wenn eine beliebige Gruppe von Transformationen zwischen x und y vorgelegt ist, so lässt sich immer, wie wir zeigen werden, durch ausführbare Operationen entscheiden, auf welche canonische Form sie gebracht werden kann. Ist diese Bestimmung geleistet, so verlangt die wirkliche Reduction der vorgelegten Gruppe auf ihre canonische Form in den meisten Fällen nur ausführbare Operationen; ausnahmsweise wird jedoch die Integration einer Gleichung 1. O. nothwendig.

Hieraus folgt, dass die Bestimmung der zu einer *beliebigen* Gruppe gehörigen invarianten Differentialgleichungen im ungünstigsten Falle die Integration einer Gleichung 1. O. verlangt.

26. Wir zeigen in dieser Nummer, wie man durch ausführbare Operationen entscheidet, auf welche canonische Form eine vorgelegte Gruppe gebracht werden kann.

Man bestimmt zuerst durch Determinantenbildung, ob es keine, eine, zwei oder unendlich viele invariante Differentialgleichungen 1. O. giebt.

Existirt keine solche Gleichung 1. O., so hat die Gruppe 5, 6 oder acht unabhängige infinitesimale Transformationen. In jedem von diesen drei Fällen giebt es nur eine entsprechende canonische Form, so dass eine weitere Discussion überflüssig wird.

Giebt es zwei und nur zwei invariante Gleichungen 1. O., so fragt es sich zunächst, ob Δ identisch verschwindet oder nicht. Verschwindet Δ nicht identisch, so hat die Gruppe 3, 4, 5 oder 6 unabhängige infinitesimale Transformationen, und dabei ist die canonische Form vollständig bestimmt, wenn die Zahl der inf. Transformationen gleich 5 oder 6 ist. Enthält unsere Gruppe drei infinitesimale Transformationen $B_1 f, B_2 f, B_3 f$, so kann sie entweder die canonische Form $p, q, xp + cyq$ oder die canonische Form $p + q$, $xp + yq$, $x^2 p + y^2 q$ erhalten. Diese beiden Fälle lassen sich dadurch charakterisiren, dass die inf. Transformationen $(B_i B_k)$ im ersten Falle eine zweigliedrige Untergruppe bestimmen, während sie im letzten Falle eine dreigliedrige Gruppe, nämlich die ursprüngliche Gruppe liefern. Enthält unsere Gruppe vier infinitesimale Transformationen, so kann sie entweder die canonische Form $q\ yq\ p\ xp$ oder die Form $q\ yq\ y^2 q\ p$ erhalten; diese Fälle lassen sich dadurch charakterisiren, dass die $(B_i B_k)$ im ersten Falle eine zweigliedrige Untergruppe, im zweiten eine dreigliedrige Untergruppe liefern. Verschwindet Δ identisch, so kann die Gruppe entweder auf die canonische Form q, yq, oder auf die canonische Form q, yq, $y^2 q$ gebracht werden. Die Zahl der unabhängigen infinitesimalen Transformationen entscheidet, welcher Fall vorliegt.

Jetzt setzen wir voraus, dass eine vorgelegte Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$ eine und nur eine Gleichung erster Ordnung

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = Af = 0$$

invariant lässt. Unter den infinitesimalen Transformationen $k_1 B_1 + \cdots + k_r B_r$ giebt es einige, etwa $B_k^{(0)} f$, die eine Relation der Form

$$B_k^{(0)} f = \varphi_k(xy)\, Af$$

erfüllen; denn es giebt ja jedenfalls $r - 3$ inf. Transformationen, die jede Integralcurve von $Af = 0$ invariant lassen. Wir haben also 4 wesentlich verschiedene Möglichkeiten zu berücksichtigen: a) Befriedigt eine jede inf. Transformation $B_k f$ eine Relation der Form

$$B_k f = \varphi_k(xy)\, Af,$$

so kann die Gruppe entweder auf die canonische Form $X_1 q \cdots X_r q$ oder auf die Form $X_1 q \cdots X_r q\ yq$ gebracht werden. Das erste tritt ein, wenn alle $(B_i B_k) = 0$ sind. Die zweite Hypothese findet statt wenn die $(B_i B_k)$ nicht sämmtlich verschwinden. b) Giebt es unter den s Ausdrücken $B_i f$ $s-1$, etwa $B_1^0 f \cdots B_{s-1}^0 f$, die eine Relation

$$B_k^{(0)} f = \varphi_k(xy)\, Af$$

erfüllen, so bilden die $s-1$ Transformationen $B_k^{(0)} f$ eine Untergruppe, die der Categorie (a) angehört. Verschwinden alle $(B_i^{(0)} B_k^{(0)})$, so hat die Gruppe $B_k f$ die canonische Form $X_1 q \cdots X_r q \;\; p + \varepsilon y q$, wo ε ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Verschwinden die $(B_i^{(0)} B_k^{(0)})$ nicht sämmtlich, so ist $X_1 q \cdots X_r q \;\; yq \;\; p$ die gesuchte canonische Form. c) Giebt es $s-2$ Ausdrücke $B_k^{(0)} f$, die eine Relation

$$B_k^{(0)} f = \varphi \cdot Af$$

erfüllen, so bilden die Transformationen $(B_i B_k)$ eine Untergruppe, die der Categorie (b) gehört. Eine zweite Untergruppe bilden alle $B_k^{(0)} f$. Verschwinden die $(B_i^{(0)} B_k^{(0)})$ nicht sämmtlich, so hat die Gruppe die canonische Form $q \;\; xq \cdots x^{r-1} q \;\; yq \;\; p \;\; xp$. Verschwinden dagegen alle $(B_i^0 B_k^0)$, so kann die Gruppe entweder die Form $q \;\; xq \cdots x^{r-1} \;\; p \;\; xp + Kyq$ oder die Form $q\, xq \cdots x^{r-1} q \;\; p \;\; xp + (ry + x^r) q$ erhalten. Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, bildet man die Determinante Δ. Ist Δ ein nicht identisch verschwindender Differentialausdruck $(s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so hat unsere Gruppe die canonische Form

$$q \;\; xq \cdots x^{r-1} q \;\; p \;\; xp + Kyq$$
$$K \neq r.$$

Verschwindet Δ identisch, so hat die Gruppe ebenfalls die eben hingeschriebene Form, nur mit dem Unterschiede, dass $K = r$ ist. Wenn endlich Δ eine nicht identisch verschwindende Function von x, y und y' ist, so kann unsere Gruppe die canonische Form

$$q \;\; xq \cdots x^{r-1} q \;\; p \;\; xp + (ry + x^r)\, q$$

erhalten. d) Giebt es $s-3$ infinitesimale Transformationen $B_k^{(0)}$, so sind vier verschiedene Fälle möglich. Ist $s = 3$, so kann die Gruppe die canonische Form

$$p \;\; xp + yq \;\; x^2 p + 2xyq$$

erhalten. Ist $s = 4$, so ist

$$yq \;\; p \;\; xp \;\; x^2 p + xyq$$

die gesuchte canonische Form. Ist $s > 4$ und ist dabei jedes $(B_i^{(0)} B_k^{(0)}) = 0$, so ist

$$q \;\; xq \cdots x^{r-1} q \;\; p, \;\; 2xp + (r-1)\, yq, \;\; x^2 p + (r-1)\, xyq$$

die gesuchte canonische Form. Sind dagegen die $(B_i^{(0)} B_k^{(0)})$ nicht sämmtlich Null, so kann unsere Gruppe die canonische Form

$$q\ xq\cdots x^{r-1}q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+(r-1)\,xyq$$

erhalten.

Wenn endlich eine vorgelegte Gruppe unendlich viele Gleichungen erster Ordnung invariant lässt, so kann sie auf eine von den drei Formen

$$q;\ q,\ p+cyq;\ p\ q\ x\ p+yq$$

gebracht werden. Die Anzahl der unabhängigen inf. Transformationen entscheidet, welcher Fall vorliegt.

Also ist es uns wirklich gelungen, durch sehr einfache, immer ausführbare Rechnungen zu entscheiden, welche canonische Form eine vorgelegte Gruppe besitzt.

27. Hat man nach den soeben entwickelten Regeln die zu einer beliebig vorgelegten Gruppe gehörige canonische Form bestimmt, so stellt sich die Frage, wie die Ueberführung auf diese Form wirklich geleistet wird. Ich gebe eine kurzgefasste Erledigung dieser Frage.

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel. Sei $B_1f\cdots B_4f$ die vorgelegte Gruppe und $p_1,\ q_1,\ x_1p_1,\ y_1q_1$ ihre canonische Form. Bilde ich dann die (B_iB_k), so erhalte ich eine zweigliedrige Untergruppe, die überdies in der viergliedrigen invariant ist. Sei $B_1\,B_2$ diese Untergruppe. Ich bilde die Gleichungen

$$(c_1B_1+c_2B_2,\ B_3)=k_1(c_1B_1+c_2B_2)$$
$$(c_1B_1+c_2B_2,\ B_4)=k_2(c_1B_1+c_2B_2),$$

in denen $c_1\,c_2\,k_1\,k_2$ Constante bezeichnen sollen. Das Verhältniss $\frac{c_1}{c_2}$ wird bestimmt durch eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln ich ohne Beschränkung gleich 0 und ∞ setzen kann. Alsdann sind B_1 und B_2 die beiden einzigen invarianten Transformationen unserer Gruppe; sie entsprechen daher p_1 und q_1. Darnach wähle ich B_3 und B_4 so, dass die folgenden Relationen bestehen:

$$(B_1B_3)=B_1,\ (B_1B_4)=0,\ (B_2B_4)=B_2,\ (B_2B_3)=0,\ (B_3B_4)=0.$$

Setze ich sodann

$$B_1=\xi_1p+\eta_1q=p_1,\qquad B_2=\xi_2p+\eta_2q=q_1,$$
$$B_3=\xi_3p+\eta_3q=x_1p_1,\quad B_4=\xi_4p+\eta_4q=y_1q_1,$$

so finde ich

$$x_1=\frac{\xi_3}{\xi_1}=\frac{\eta_3}{\eta_1},\quad y_1=\frac{\xi_4}{\xi_2}=\frac{\eta_4}{\eta_2}.$$

Durch Einführung der hiermit bestimmten Variabeln $x_1\ y_1$ erhält die vorgelegte Gruppe B_if ihre canonische Form.

Als zweites Beispiel betrachte ich eine dreigliedrige Gruppe $B_1f\ B_2f\ B_3f$, die auf die canonische Form $q_1\ x_1q_1\ y_1q_1$ gebracht werden kann. Ich bilde die drei Ausdrücke (B_iB_k), die eine zweigliedrige Untergruppe, etwa $B_1^0 B_2^0$, bilden. Dabei kann ich ohne Beschränkung annehmen, dass B_1^0, B_2^0 und B_3 unabhängige infinitesimale Transformationen unserer Gruppe sind; durch Multiplication von B_3 mit einer zweckmässigen Constante erreicht man, dass Relationen der Form

$$(B_1^0 B_2^0) = 0, \quad (B_1^0 B_3) = B_1^0, \quad (B_2^0 B_3) = B_2^0$$

bestehen. Sodann setze ich

$$\begin{aligned} B_1^0 &= \xi_1 p + \eta_1 q = q_1 \\ B_2^0 &= \xi_2 p + \eta_2 q = x_1 q_1 \\ B_3^0 &= \xi_3 p + \eta_3 q = y_1 q_1, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von q_1

$$\begin{aligned} (\xi_2 - x_1 \xi_1) p + (\eta_2 - x_1 \eta_1) q = 0 \\ (\xi_3 - y_1 \xi_1) p + (\eta_3 - y_1 \eta_1) q = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \\ y_1 &= \frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \end{aligned}$$

folgt. Hiermit kennen wir eine Punkttransformation, vermöge deren unsere Gruppe auf ihre canonische Form gebracht wird.

In den beiden vorangehenden Beispielen hat die Reduction der vorgelegten Gruppe auf ihre canonische Form weder Quadraturen noch Integrationen von Differentialgleichungen, sondern nur Differentiationen und andere ausführbare Operationen verlangt.

Als drittes Beispiel betrachten wir eine dreigliedrige Gruppe $B_1\ B_2\ B_3$ mit der canonischen Form $q\ xq\ p$. Wir bestimmen wie in der vorangehenden Nummer die invariante Gleichung 1. O.: $Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}$ und suchen darnach alle infinitesimalen Transformationen B^0, die eine Relation der Form

$$B_k^0 f = \varphi_k(xy)\, Af$$

erfüllen. Wir wollen annehmen, dass $B_1 f$ und $B_2 f$ solche sind. Dann kann ich ohne Beschränkung voraussetzen, dass die folgenden Relationen bestehen:

$$(B_1 B_3) = 0, \quad (B_2 B_3) = B_1, \quad (B_1 B_2) = 0.$$

Alsdann setze ich

$$\begin{aligned} B_1 &= \xi_1 p + \eta_1 q = q_1 \\ B_2 &= \xi_2 p + \eta_2 q = x_1 q_1 \\ B_3 &= \xi_3 p + \eta_3 q = p_1 \end{aligned}$$

woraus zunächst

$$x_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

hervorgeht. Die Grösse y_1 ist eine Lösung der Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 = \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial y}$$

und diese Gleichung gestattet die bekannte infinitesimale Transformation $q_1 = \xi_1 p + \eta_1 q$; daher findet man ohne weiteres einen Integrabilitätsfactor und für y_1 den Werth

$$y_1 = \int \frac{\xi_3 dy - \eta_3 dx}{\xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1}.$$

Als viertes Beispiel betrachten wir eine zweigliedrige Gruppe $B_1 B_2$ mit der canonischen Form q_1, $x_1 p_1 + y_1 q_1$. Wir können ohne Beschränkung annehmen, dass $(B_1 B_2) = B_1$ ist. Wir setzen

$$B_1 = X_1 p + Y_1 q = q_1$$
$$B_2 = X_2 p + Y_2 q = x_1 p_1 + y_1 q_1.$$

Dann ist x_1 eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 = X_1 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_2 f$. Also ist der Ausdruck

$$w = \int \frac{X_1 dy - Y_1 dx}{X_1 Y_2 - Y_1 X_2}$$

eine Function von x_1 und zwar, wie wir jetzt zeigen, gleich $\log x_1$. Es ist nach meinen bekannten Formeln

$$(q_1 x_1) = 0, \quad (x_1 p_1 + y_1 q_1, x_1) = x_1$$

das heisst

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0, \quad X_2 \frac{\partial x_1}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial x_1}{\partial y} = x_1,$$

woraus

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \frac{\partial \log x_1}{\partial x} = - Y_1$$

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \frac{\partial \log x_1}{\partial y} = X_1$$

und

$$\log x_1 = \int \frac{X_1 dy - Y_1 dx}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}$$

folgt, wie behauptet wurde. — Zur Bestimmung von y_1 bilden wir die Gleichungen

$$(q_1 y_1) = 1, \quad (x_1 p_1 + y_1 q_1, y_1) = y_1$$

oder die äquivalenten

$$X_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1, \quad X_2 \frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial y_1}{\partial y} = y_1$$

und hieraus die Relationen

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_1 y_1 = X_2$$

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \frac{\partial y_1}{\partial y} - X_1 y_1 = - X_2,$$

vermöge deren y_1 durch zwei successive Quadraturen bestimmt wird.

Als fünftes Beispiel betrachten wir eine zweigliedrige Gruppe $B_1 B_2$ mit der canonischen Form q_1, $y_1 q_1$. Dabei können wir annehmen, dass $(B_1 B_2) = B_1$ ist. Wir setzen

$$B_1 = X_1 p + Y_1 q = q_1$$
$$B_2 = X_2 p + Y_2 q = y_1 q_1,$$

woraus

$$y_1 = \frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1}.$$

Die Grösse x_1 ist eine ganz beliebige Lösung der Gleichung

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

deren Integration somit erforderlich ist.

Sei jetzt überhaupt $B_1 \ldots B_r$,

$$B_k f = X_k \frac{\partial f}{\partial x} + Y_k \frac{\partial f}{\partial y},$$

eine beliebige vorgelegte Gruppe und $C_1 \ldots C_r$,

$$C_i f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

ihre canonische Form, die nach den Regeln der vorangehenden Nummer bestimmt wird. Wir können in jedem einzelnen Falle die $B_1 f$ derart wählen, dass die r Gleichungen

$$B_1 f = C_1 f, \; B_2 f = C_2 f, \ldots B_r f = C_r f$$

bestehen können. Können diese Relationen zwischen $x\, y\, p\, q$ und $x_1\, y_1\, p_1\, q_1$ hinsichtlich $x_1\, y_1$ aufgelöst werden, so ist hiermit die gesuchte Punkttransformation gefunden. Ist eine solche Auflösung unmöglich so bildet man zunächst die Ausdrücke

$$C_i x_1 \quad C_i y_1,$$

die *bekannte* Functionen von x_1 und y_1 sind und setzt sodann

$$B_i x_1 = X_i \frac{\partial x_1}{\partial x} + Y_i \frac{\partial x_1}{\partial y} = C_i x_1,$$

$$B_i y_1 = X_i \frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_i \frac{\partial y_1}{\partial y} = C_i y_1.$$

Dies giebt $2r$ Differentialgleichungen 1. O. zwischen $x_1\, y_1\;\, y$ und x, die im Allgemeinen zur Bestimmung von $x_1\, y_1$ durch Quadratur genügen. Nur wenn die canonische Form die eine von den drei folgenden ist

$$q_1;\ q_1\, y_1 q_1;\ q_1\, y_1 q_1\ y_1^2 q_1,$$

ist die Integration einer Differentialgleichung 1. O. nothwendig.

Wenn eine beliebige Gruppe von Transformationen zwischen x und y vorgelegt ist, so entscheidet man zuerst durch Differentiation, auf welche canonische Form sie gebracht werden kann. Ist dies geschehen, so verlangt die Reduction auf diese canonische Form im Allgemeinen nur ausführbare Operationen. Nur wenn die betreffende Form eine von den folgenden ist,

$$q;\quad q, yq;\quad q, yq, y^2q,$$

wird die Integration einer Gleichung 1. *O. nothwendig.*

28. Sucht man alle bei einer beliebig vorgelegten Gruppe zwischen x und y invarianten Differentialgleichungen, so bringt man die Gruppe zuerst auf ihre canonische Form und stellt sodann ohne weiteres die betreffenden Differentialgleichungen auf.

Dies giebt den folgenden Satz, der die wichtigsten Ergebnisse dieser Abhandlung resumirt.

Ist eine ganz beliebige continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen x und y vorgelegt, so findet man alle invarianten Differentialgleichungen ohne Integration von Differentialgleichungen, wenn die Gruppe mehr als drei infinitesimale Transformationen enthält. Giebt es drei inf. Transformationen mit der canonischen Form $q\ yq\ y^2q$ oder zwei inf. Transformationen mit der canonischen Form $q\ \ yq$ oder endlich nur eine inf. Transformation, so wird die Integration einer Gleichung 1. *O. nothwendig. In allen anderen Fällen genügen Differentiationen und Quadraturen.*

In diesem Satze wird vorausgesetzt, dass nur die *infinitesimalen* Transformationen der vorgelegten Gruppe bekannt sind. Kennt man zugleich die *endlichen* Transformationen dieser Gruppe, so kann man immer, auch in den drei Ausnahmefällen, die zugehörigen invarianten Differentialgleichungen ohne Quadratur oder Integration angeben.

Januar 1883.

Abschnitt II.

In dem vorhergehenden Abschnitt bestimmte ich die Form aller Gleichungen

$$f(xy_1y_2\ldots y_m) = 0,$$

die eine continuirliche Gruppe von Transformationen gestatten. In diesem zweiten Abschnitt entwickele ich die allgemeine Integrationstheorie aller derartigen Gleichungen, indem ich meine allgemeine Integrationstheorie von linearen partiellen Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen für die betreffenden Beispiele im Detail durchführe.

Dieser Abschnitt zerfällt in mehrere Paragraphen, deren jeder sich an einen bestimmten Paragraphen der ersten Arbeit als Fortsetzung anschliesst.

§ 1.

Integrationstheorie von Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen der Form

$$X(x)p + Y(y)q.$$

In diesem Paragraphen integrire ich successive alle Differentialgleichungen 2^{ter} und höherer Ordnung mit einer bekannten Gruppe, deren infinitesimale Transformationen sämmtlich die Form

$$X(x)p + Y(y)q$$

besitzen. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die betreffende Gruppe keine anderen Differentialgleichungen 1. O. als $y' = 0$ und $\frac{1}{y'} = 0$ invariant lässt.

1. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe q, yq so ist sie, wenn wir $\frac{y_2}{y_1} = u$ setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x u \frac{du}{dx} \cdots \frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}}\right) = 0.$$

Man integrirt diese Gleichung $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und erhält hierdurch eine Relation mit $m-2$ Constanten

$$y_2 = y_1 f(x a_1 \dots a_{m-2}),$$

aus der durch wiederholte Integration

$$y_1 = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$y = \int dx\, e^{\int f(x)\,dx}$$

hervorgeht.

2. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe p, q, yq, so ist sie, wenn wir

$$\frac{y_2}{y_1} = u, \quad \frac{y_3}{y_1} = v$$

setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(u v \frac{dv}{du} \cdots \frac{d^{m-3}v}{du^{m-3}}\right) = 0.$$

Durch Integration dieser Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation mit $m-3$ Constanten

$$f\left(\frac{y_2}{y_1}\ \frac{y_3}{y_1}\ a_1 \cdots a_{m-3}\right) = 0, \tag{1}$$

die wir auch folgendermassen schreiben können

$$\varphi\left(\frac{y_2}{y_1}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) a_1 \cdots\right) = 0.$$

Man erhält daher jedenfalls durch eine Quadratur eine Gleichung, $y_2 = y_1 F(x)$, die nach den Regeln der vorangehenden Nummer durch zwei Quadraturen integrirt wird.

Nach der soeben angegebenen Methode verlangt die Integration einer Gleichung der Form

$$\frac{y_3}{y_1} = F\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \tag{2}$$

drei und zwar *drei successive* Quadraturen. Ich entwickele jetzt in Uebereinstimmung mit meinen alten Integrationstheorien eine etwas andere Methode, die allerdings ebenfalls drei Quadraturen, nicht aber drei successive Quadraturen verlangt. Die Gleichung (2) ist äquivalent mit der linearen partiellen Differentialgleichung

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_1 F \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0,$$

welche die drei infinitesimalen Transformationen

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad B_3 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

gestattet. Jetzt kann man in *zwei* Weisen ein dreigliedriges vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation bilden. Einerseits gestattet nämlich das vollständige System

$$Af = 0, \quad B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0$$

die infinitesimale Transformation $B_3 f$ und daher (Math. Ann. Bd. XI) hat die äquivalente totale Differentialgleichung

$$y_1 F\, dy_1 - y_2\, dy_2 = 0$$

einen bekannten Integrabilitätsfactor, nämlich $\frac{1}{\Delta}$, wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_2 & y_1 F \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = y_2^2 - y_1^2 F.$$

Dies liefert ein Integral von $Af = 0$ nämlich

$$\int \frac{y_1 F dy_1 - y_2 dy_2}{y_2^2 - y_1^2 F} = \text{Const.} \tag{3}$$

Anderseits aber gestattet das vollständige System

$$Af = 0, \quad B_2 f = 0, \quad B_3 f = 0$$

die bekannte infinitesimale Transformation $B_1 f$ und daher liefert meine alte Theorie auch das Integral

$$\int \frac{(y_1^2 F - y_2^2)\,dx + y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_1^2 F - y_2^2} = \text{Const.}$$

von $Af = 0$. Aus den beiden hiermit gefundenen Integralgleichungen erhält man durch Auflösung y_1 als Function von x, und darnach durch eine neue Quadratur y als Function von x.

3. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $p, q, xp + cyq$, wobei die Constante c von Null und 1 verschieden sein soll, so kann sie, indem wir

$$\varphi_1 = \frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}} \qquad \varphi_2 = \frac{y_3}{y_1^{\frac{c-3}{c-1}}}$$

setzen, auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\, \varphi_2\, \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdots \frac{d^{m-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-3}}\right) = 0$$

reducirt werden. Durch Integration dieser Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation mit $m-3$ Constanten

$$f(\varphi_1\, \varphi_2\, a_1 \ldots a_{m-3}) = 0.$$

Kommt in derselben φ_2 nicht vor, so findet man durch Auflösung

$$y_2 = K \cdot y_1^{\frac{c-2}{c-1}}$$

und darnach y als Function von x durch zwei (unabhängige) Quadraturen. Hat man dagegen zur Integration eine Gleichung der Form

$$y_3 = y_1^{\frac{c-3}{c-1}} F\left(\frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}}\right) = \Pi,$$

so setzt man

$$y_3 = \frac{dy_2}{dy_1}\, y_2 = \Pi$$

woraus

$$\frac{dy_2}{dy_1} = y_2^{-1} y_1^{\frac{c-3}{c-1}} F\left(\frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}}\right) = \Phi. \tag{4}$$

Diese Gleichung 1. O. zwischen den Variabeln y_1 und y_2 gestattet die infinitesimale Transformation

$$(c-1)y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (c-2)y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

und daher ist

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & \Phi \\ (c-1)\,y_1 & (c-2)\,y_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{(c-2)\,y_2 - (c-1)\,y_1\,\Phi}$$

ein Integrabilitätsfactor und somit

$$\int \frac{dy_2 - \Phi\, dy_1}{(c-1)\,y_2 - (c-1)\,y_1\,\Phi} = \text{Const.}$$

ein Integral von (4). Nachdem hiermit eine Relation zwischen y_1 und y_2 erhalten ist, bestimmt man y als Function von x durch zwei (unabhängige) Quadraturen.

4. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $p\ q\ yq\ xp$, so ist sie, wenn wir von der unmittelbar integrablen Gleichung $y'' = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-4}\varphi_2}{d\varphi_1^{\,m-4}}\right) = 0,$$

wo φ_1 und φ_2 die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{y_1 y_3}{y_2^2}, \quad \varphi_2 = \frac{y_1^2 y_4}{y_2^3}$$

haben. Durch Integration dieser Gleichung $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation zwischen $\varphi_1\,\varphi_2$ und $m-4$ Constanten:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

wobei wir von dem einfachen Falle einer Relation $\varphi_1 = \text{Const.}$ absehen. Es handelt sich also darum eine Gleichung der Form

$$y_4 = \frac{y_2^3}{y_1^2}\, f\left(\frac{y_1 y_3}{y_2^2}\right)$$

zu integriren. Wir setzen

$$\frac{y_2}{y_1} = v, \quad \frac{y_3}{y_1} = u;$$

dann wird

$$\frac{du}{dv} = \frac{y_1 y_4 - y_2 y_3}{y_1 y_3 - y_2^2} = v\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 - 1}$$

$$\varphi_1 = \frac{u}{v^2}, \quad \varphi_2 = f\left(\frac{u}{v^2}\right),$$

sodass wir eine Differentialgleichung 1. O. der Form

$$\frac{du}{dv} = v\,F\left(\frac{u}{v^2}\right)$$

integriren müssen. Dieselbe ist homogen in u und v^2, und also ist

$$\int \frac{du - v\,F\,dv}{2u - v^2 F} = \text{Const.}$$

eine Integralgleichung. Hiermit ist Alles reducirt auf die Integration einer Differentialgleichung dritter Ordnung der Form $u = \psi(v)$ oder

$$\frac{y_3}{y_1} = \psi\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Dieselbe kann nach den Regeln der Nummer 2 erledigt werden. Es ist aber möglich einen anderen und einfacheren Weg zu gehen, wie ich jetzt in Uebereinstimmung mit meiner alten Integrationstheorie zeigen werde.

Die vorgelegte Gleichung

$$y_4 = \frac{y_2^3}{y_1^2} f\left(\frac{y_1 y_3}{y_2^2}\right) = W$$

ist äquivalent mit der linearen partiellen Differentialgleichung

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_2} + W \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

welche vier bekannte infinitesimale Transformationen, nämlich

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$B_3 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}$$
$$B_4 f = x \frac{\partial f}{\partial x} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 2y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - 3y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}$$

gestattet. Dabei bilden einerseits die Gleichungen

$$Af = 0, \quad B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0, \quad B_3 f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_4 f$ und dem entsprechenden Integrale

$$\int \frac{(y_3^2 - y_2 W)\, dy_1 + (y_1 W - y_2 y_3)\, dy_2 + (y_2^2 - y_1 y_3)\, dy_3}{y_2^2 y_3 - 2 y_1 y_3^2 + y_1 y_2 W};$$

und anderseits bilden die Gleichungen

$$Af = 0, \quad B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0, \quad B_4 f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_3 f$ und dem entsprechenden Integrale

$$\int \frac{(3y_3^2 - 2y_2 W)\, dy_1 + (y_1 W - 3y_2 y_3)\, dy_2 + (2y_2^2 - y_1 y_3)\, dy_3}{y_2^2 y_3 - 2 y_1 y_3^2 + y_1 y_2 W}.$$

Eliminirt man y_3 zwischen den beiden gefundenen Integralgleichungen, so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi(y_2 y_1) = 0,$$

die durch zwei (unabhängige) Quadraturen erledigt wird.

5. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $p+q$, $xp+yq$, x^2p+y^2q, so ist sie, wenn wir

$$\varphi_1 = (x-y)y_2y_1^{-\frac{3}{2}} + 2\left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\varphi_2 = (x-y)^2y_3y_1^{-2} + 6\varphi_1\left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right) - 6(y_1 + y_1^{-1})$$

setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\varphi_2\cdots\frac{d^{m-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-3}}\right) = 0.$$

Wir integriren diese Differentialgleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung und erhalten hierdurch eine Relation mit $m-3$ Constanten

$$f(\varphi_1\,\varphi_2\,a_1\cdots) = 0.$$

Enthält dieselbe nicht die Grösse φ_2, so integrirt man die betreffende Gleichung $\varphi_1 =$ Const., indem man nur die infinitesimalen Transformationen $p+q$ und $xp+yq$ berücksichtigt. Dagegen ist es unmöglich, eine Gleichung der Form

$$\varphi_2 = F(\varphi_1)$$

allgemein zu integriren, während man sie allerdings auf eine *Riccatische* Gleichung erster Ordnung reduciren kann. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Als Variabeln wählen wir die Grössen y_1 und φ_1. Es ist, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\frac{dy_1}{d\varphi_1} = \frac{y_1\left(\varphi_1 - 2y_1^{\frac{1}{2}} - 2y_1^{-\frac{1}{2}}\right)}{\varphi_2 - \frac{3}{2}\varphi_1 - 12}$$

oder, wenn wir $\sqrt{y_1} = z$ setzen,

$$2\frac{dz}{d\varphi_1} = \frac{z\varphi_1 - 2z^2 - 2}{F(\varphi_1) - \frac{3}{2}\varphi_1 - 12}.$$

Ist $\Phi(y_1\varphi_1) =$ Const. eine Integralgleichung der soeben gefundenen Riccatischen Gleichung, so findet man die beiden fehlenden Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$, durch Differentiation. Setzen wir nämlich

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2(y-x)y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + [(2y-4x)y^2 + 2y_1^2 - 2y_1]\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

so sind

$$B(\Phi) = \text{Const.} \quad \text{und} \quad B(B(\Phi)) = \text{Const.}$$

ebenfalls Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$, und es genügt daher nachzuweisen, dass die drei Grössen Φ, $B\Phi$ und $B(B(\Phi))$ unabhängige Functionen von $x\,y\,y_1$ und y_2 sind. Es ist, da $B\varphi_1$ verschwindet:

$$B(\Phi) = 2(y-x) \cdot y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

$$B(B(\Phi) = 4(y-x)^2 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left(y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right) + 2(y^2-x^2) y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

und also sind die Grössen Φ, $B\Phi$ und $B(B(\Phi))$ unabhängig hinsichtlich $x\,y\,y_1$ und φ_1, womit der Nachweis geführt ist*).

6. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe q, yq, $y^2 q$, so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x\,w\,\frac{dw}{dx} \cdots \frac{d^{m-3}w}{dx^{m-3}}\right) = 0,$$

wo

$$\frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\,\frac{y_2^2}{y_1^2} = w$$

gesetzt ist. Wir integriren die Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ und erhalten hierdurch eine Differentialgleichung 3. O. der Form

$$\frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\,\frac{y_2^2}{y_1^2} = F(x)$$

die wir jetzt auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reduciren werden. Setzen wir

$$\frac{y_2}{y_1} = z,$$

so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y_3}{y_1} - \frac{y_2^2}{y_1^2}$$

oder

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} z^2 + F(x). \tag{5}$$

Ist $W(zx) = \text{Const.}$ eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung, so findet man die beiden fehlenden Integralgleichungen von $w = F(x)$ folgendermassen durch Differentiation. Setzen wir

$$y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + 2yy_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (2y\,y_2 + 2y_1^2)\frac{\partial f}{\partial y_2} = Bf,$$

*) Die Entwickelungen des Textes liefern das einfachste Beispiel zu einem allgemeinen Theoreme in meiner Theorie der Transformationsgruppen. Gesetzt in der That, dass ein vollständiges System $A_1 f = 0 \ldots A_r f = 0$ in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ $n-r$ inf. Transformationen $B_1 f \ldots B_{n-r} f$ gestattet, und dass es nicht gelingt, ein Integral durch Differentiation zu bilden. Dann kann man ohne Beschränkung annehmen, dass die $B_i f$ eine Gruppe bilden. Sei diese Gruppe *einfach*, und sei $B_1 f \ldots B_\varrho f$ eine Untergruppe mit der grösstmöglichen Zahl Parameter. Dann bildet man das vollständige System

$$A_1 f = 0 \ldots A_r f = 0, \quad B_1 f = 0 \ldots B_\varrho f = 0.$$

Gelingt es dasselbe zu integriren, so findet man immer die fehlenden Lösungen des Systems $A_i f = 0$ durch Differentiation. In dieser Arbeit setze ich diesen Satz, den ich im Uebrigen früher in viel allgemeinerer Form aufgestellt habe, nicht als bekannt voraus.

so sind $BW =$ Const. und $B(B(W)) =$ Const. bekanntlich Integralgleichungen von $w = F(x)$; es genügt daher nachzuweisen, dass W, BW und $B(B(W))$ unabhängige Functionen von $x y y_1$ und y_2 sind. Es ist $B(x) = 0$ und

$$B(W) = \frac{\partial W}{\partial z} Bz = 2 \frac{\partial W}{\partial z} y_1,$$

$$B(B(W)) = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} y_1^2 + 4 \frac{\partial W}{\partial z} y y_1,$$

sodass W, BW und $B(B(W))$ wirklich hinsichtlich $y x y_1$ und z unabhängig sind. Hiermit ist die Integration von $w = F(x)$ auf diejenige der Riccatischen Gleichung (5) zurückgeführt.

7. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $q \; yq \; y^2 q \; p$, so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(w \frac{dw}{dx} \cdots \frac{d^{m-3} w}{dx^{m-3}}\right) = 0,$$

wo wiederum

$$\frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2} \frac{y_2^2}{y_1^2} = w$$

gesetzt ist. Man integrirt die Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die offenbar immer auf eine Gleichung $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung reducirbar ist. Die hierdurch gefundene Differentialgleichung 3. O. von der Form

$$w = F(x)$$

wird darnach nach den Regeln der letzten Nummer auf eine Riccatische Gleichung 1. O. zurückgeführt.

8. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q \; yq \; y^2 q \; p \; xp,$$

so ist sie*) reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1 \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdots \frac{d^{m-5} \varphi_2}{d\varphi_1^{m-5}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{w'}{w^{\frac{3}{2}}}, \quad \varphi_2 = \frac{w''}{w^2}, \quad w' = \frac{dw}{dx}, \quad w'' = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

gesetzt ist. Man integrirt die Gleichung $(m-5)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ und findet hierdurch eine Differentialgleichung

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

die wir folgendermassen schreiben

---

*) Wenn wir von der unmittelbar integrablen Gleichung: $2y_1y_3 - 3y_2^2 = 0$ absehen.

$$w'' = w^2 f\left(\frac{w'}{w^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Diese Differentialgleichung gestattet zwei bekannte infinitesimale Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } x\frac{\partial f}{\partial x} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 3y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} - \cdots,$$

die in den Variabeln x und w die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } x\frac{\partial f}{\partial x} - 2w\frac{\partial f}{\partial w}$$

besitzen. Also ist

$$\int \frac{w'\,dw' - w^2 f.dw}{3w'^2 - 2w^3 f} = \text{Const.}$$

eine erste Integralgleichung. Hiernach findet man durch Auflösung und Quadratur eine Differentialgleichung der Form

$$w = F(x),$$

die nach den Regeln der Nummer 6 auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reducirt wird.

Man kann im Uebrigen die Integration der Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ in etwas anderer Weise durchführen, wie hier kurz angedeutet werden soll. In der That, setzt man

$$u = \sqrt{\frac{y_1 y_3}{y_2^2} - \frac{3}{2}},$$

so wird

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{u\varphi_1 - 2u^2 - 1}{2\varphi_2 - 3\varphi_1}.$$

Ist diese Riccatische Gleichung integrirt, so findet man durch Differentiation zwei weitere Integralgleichungen der Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, die man darnach auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den beiden infinitesimalen Transformationen p und xp reducirt. Durch zwei Quadraturen findet man daher endlich y als Function von x.

9. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp \quad x^2p,$$

so ist sie, wenn wir von der integrablen Gleichung $2y_1y_3 - 3y_2^2 = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-6}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-6}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{4ww'' - 5w'^2}{w^3}$$

$$\varphi_2 = \frac{4w^2w''' - 18ww'w'' + 15w'^3}{w^{\frac{9}{2}}}$$

und wie früher

$$w = \frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\frac{y_2^2}{y_1^2}, \quad w' = \frac{dw}{dx} \dots$$

gesetzt ist. Durch Integration der Gleichung $(m-6)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation der Form

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

die eine Differentialgleichung 3. O. in den Variabeln x und w darstellt. Dieselbe gestattet drei bekannte infinitesimale Transformationen p, xp, x^2p, die in den Variabeln xw die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - 2w\frac{\partial f}{\partial w}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x} - 4xw\frac{\partial f}{\partial w}$$

besitzen. Zur Integration unserer Differentialgleichung 3. O. führen wir die Grössen

$$u = w^{-\frac{3}{2}}w', \quad \varphi_1 = 4w^{-2}w'' - 5w^{-3}w'^2$$

als neue Variabeln ein. Dann wird

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{\varphi_1 - u^2}{\varphi_2}. \tag{6}$$

Ist

$$W(u\varphi_1) = \text{Const.}$$

eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung 1. O., so findet man folgendermassen durch Differentiation die beiden fehlenden Integralgleichungen von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, aufgefasst als Differentialgleichung 3. O. in w und x. Setzen wir

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} - 4xw\frac{\partial f}{\partial w} - (6xw' + 4w)\frac{\partial f}{\partial w'} - (8xw'' + 10w')\frac{\partial f}{\partial w''}$$

so ist $B\varphi_1 = 0$

$$BW = \frac{\partial f}{\partial u}Bu = -4\frac{\partial W}{\partial u}w^{-\frac{1}{2}}$$

$$BBW = 16\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}w^{-1} - 8xw^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial W}{\partial u},$$

und da die Grössen W, BW und BBW hinsichtlich $u\ \varphi_1\ x$ und w unabhängig sind, so findet man durch Elimination von u und φ_1 zwischen den drei Gleichungen

$$W = \text{Const.}, \quad BW = \text{Const.}, \quad BBW = \text{Const.} \tag{7}$$

die Grösse w bestimmt als Function von x:

$$w = F(x).$$

Diese Gleichung ist nun selbst eine Differentialgleichung 3. O. in y und x, die nach den Regeln der Nummer 6 vermöge einer Riccatischen 1. O. integrirt wird.

Hiermit ist die Gleichung sechster Ordnung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ vermöge *zweier* Riccatischer Gleichungen 1. O. integrirt. Dabei ist indess zu bemerken, dass wir erst nach der Integration der ersten Hülfsgleichung (6) die zweite Hülfsgleichung 1. O. aufstellen konnten. Es ist aber nicht schwierig einzusehen, dass man die Integration von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ auf die Integration zweier *von einander unabhängiger Riccatischer* Gleichungen 1. O. zurückführen kann. Man bemerke in der That nur, dass die beiden Gruppen q, yq, y^2q und $p\ xp\ x^2p$ vollständig gleichberechtigt sind. Vertauscht man daher im Vorangehenden die Grössen x und y, so erhält man eine mit (6) analoge Riccatische Gleichung, deren Integration ebenfalls drei Integralgleichungen

$$W_1 = \text{Const.}, \quad CW_1 = \text{Const.}, \quad CCW_1 = \text{Const.}$$

von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ liefert. Dabei ist es einleuchtend, dass diese drei neuen Integralgleichungen von den drei früheren (7) unabhängig sind. Und also ist wirklich die Gleichung sechster Ordnung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ auf zwei unabhängige Riccatische Gleichungen 1. O. zurückgeführt.

§ 2.

Integration von Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen der Form

$X(x)p + Y(xy)q$.

In diesem Paragraphen entwickeln wir die Integrationstheorie aller Differentialgleichungen von zweiter und höherer Ordnung mit einer bekannten Gruppe, deren sämmtliche infinitesimale Transformationen die Form $X(x)p + \eta(xy)q$ besitzen. Dabei wird ausdrücklich vorausgesetzt, dass die betreffende Gruppe keine andere Differentialgleichung erster Ordnung als $\frac{1}{y'} = 0$ invariant lässt.

Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe p, $xp + yq$, $x^2p + 2xyq$, so ist sie, wenn wir

$$2yy_2 - y_1^2 = \varphi_1, \quad y^2y_3 = \varphi_2$$

setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-3}}\right) = 0.$$

Man integrirt diese Gleichung $(m-3)$. O. und erhält hierdurch eine Differentialgleichung 3. O.:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

die wir jetzt auf eine Riccatische Gleichung 1. O. reduciren werden. Wir führen neue Variable ein, nämlich y_1 und φ_1; dann wird

$$\frac{dy_1}{d\varphi_1} = \frac{y_1^2 + \varphi_1}{4\varphi_2}.$$

Sei $W(y_1\varphi_1) = \text{Const.}$ eine Integralgleichung der soeben erhaltenen Riccatischen Gleichung und sei

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 2y\frac{\partial f}{\partial y_1} + (2y_1 - 2xy_2)\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

so wird

$$BW = 2\frac{\partial W}{\partial y_1}y$$

$$BBW = 4y^2\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + 4xy\frac{\partial W}{\partial y_1},$$

und, da die Grössen W, BW und BBW offenbar unabhängig sind, so geben die Integralgleichungen

$$W = \text{Const.},\quad BW = \text{Const.},\quad BBW = \text{Const.}$$

durch Elimination von y_1 und φ_1 die Bestimmung von y als Function von x.

11. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$yq,\quad p,\quad xp,\quad x^2p + xyq$$

so ist sie, wenn wir von der unmittelbar integrablen Gleichung $y_2 = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\varphi_2\cdots\frac{d^{m-4}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-4}}\right) = 0$$

wo φ_1 und φ_2 die Werthe

$$\varphi_1 = y^{\frac{1}{2}}y_2^{-\frac{3}{2}}y_3 + 3y^{-\frac{1}{2}}y_1y_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_2 = 3yy_2^{-2}y_4 - 4yy_2^{-3}y_3^2$$

haben. Wir integriren die Gleichung $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$, und erhalten hierdurch eine Relation

$$\varphi_2 = f(\varphi_1)$$

das heisst eine Differentialgleichung vierter Ordnung, die unsere Gruppe gestattet. Dieselbe soll jetzt auf eine Riccatische Gleichung 1. O. reducirt werden. Wir führen φ_1 und

$$u = (yy_1^{-2}y_2)^{\frac{1}{2}}$$

als neue Variabeln ein. Dann wird

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{u\varphi_1 - 2 - 2u^2}{\frac{2}{3}\varphi_2 - \frac{1}{3}\varphi_1^2 + 6}.$$

Ist $W(u\varphi_1)$ eine Integralgleichung der gefundenen Riccatischen Gleichung, so setzen wir

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} + (y - xy_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3xy_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - (5xy_3 + 3y_2)\frac{\partial f}{\partial y_3}$$

und bilden die Ausdrücke

$$BW = -\frac{\partial W}{\partial u} u y y_1^{-1}$$

$$BBW = u\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial W}{\partial u}\right) y^2 y_1^{-2} + u\frac{\partial W}{\partial u}(y^2 y_1^{-2} - 2xyy_1^{-1}),$$

die offenbar von einander und von W unabhängig sind. Daher erhält man durch Elimination von u und φ_1 zwischen den Gleichungen

$$W = \text{Const.}, \quad BW = \text{Const.}, \quad BBW = \text{Const.}$$

eine Relation der Form

$$yy_1^{-1} = F(x),$$

woraus als definitive Integralgleichung

$$y = e^{\int \frac{dx}{F}}$$

hervorgeht.

Man kann im Uebrigen die Integration der Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ in etwas anderer Weise durchführen, wie ich hier kurz angeben werde. Bringt man in der That die vorgelegte Gruppe auf die Form

$$B_1 f = p, \quad B_2 f = 2xp + yq, \quad B_3 f = x^2 p + xyq$$
$$B_4 f = yq,$$

so bilden $B_1 f\, B_2 f\, B_3 f$ eine dreigliedrige Untergruppe und dabei bestehen die Relationen

$$(B_1 B_4) = 0, \quad (B_2 B_4) = 0, \quad (B_3 B_4) = 0$$

(die, wie ich beiläufig bemerke, aussagen, dass $B_1\, B_2\, B_3$ eine *invariante* Untergruppe bilden). Bringe ich daher die Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ auf die Form

$$y_4 = F(xyy_1 y_2 y_3)$$

und ersetze sie darnach durch die lineare partielle Differentialgleichung

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_2} + F\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

so bilden die Gleichungen

$$Bf = 0, \quad B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0, \quad B_3 f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_4 f$. Das entsprechende Integral, das man ohne weiteres aufstellen kann, liefert eine Differentialgleichung 3. O. mit der bekannten Gruppe $p,\ 2xp + yq,\ x^2p + xyq$. Sie wird nach den Regeln der vorangehenden Nummer auf eine Riccatische Gleichung 1. O. reducirt.

13. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$X_1 q,\ X_2 q \ldots X_r q,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x\, D\, \frac{dD}{dx} \cdots \frac{d^{m-r}D}{dx^{m-r}}\right) = 0,$$

wo

$$\begin{vmatrix} X_1 X_1' \cdots X_1^{(r)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_r X_r' \cdots X_r^{r} \\ y \quad y_1 \cdots y_r \end{vmatrix} = D$$

gesetzt ist. Durch Integration der Gleichung $(m-r)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation

$$D = F(x)$$

das heisst eine lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, die bekanntlich nach *Lagranges* oder *Cauchys* Regeln integrirt werden kann, indem das allgemeine Integral von $D = 0$ bekannt und gleich $\Sigma c_i X_i$ ist.

Ist die vorgelegte Gleichung m^{ter} Ordnung linear, so ist auch $\Omega = 0$ linear. Der bekannte Satz, dass eine lineare Gleichung m^{ter} Ordnung mit r bekannten Particularintegralen sich auf eine lineare Gleichung $(m-r)^{\text{ter}}$ Ordnung reduciren lässt, ist somit ein sehr specieller Fall unserer soeben entwickelten Theorie.

Auch die oben besprochene Reduction der Gleichung $D = F(x)$ auf die einfachere Gleichung $D = 0$ fliesst als sehr specielles Corollar aus meinen alten Integrationstheorien. Ich werde diesen Zusammenhang in zwei etwas von einander verschiedenen Weisen begründen. Sei die Gleichung $D = F(x)$ auf die Form

$$y_r = V$$

oder die äquivalente Form

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + V \frac{\partial f}{\partial y_{r-1}} = 0$$

gebracht. Diese lineare partielle Differentialgleichung gestattet r bekannte infinitesimale Transformationen:

$$B_i f = X_i \frac{\partial f}{\partial y} + X_i' \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + X_i^{(r-1)} \frac{\partial f}{\partial y_{r-1}}, \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

die paarweise in der Beziehung

$$(B_i B_k) = 0$$

stehen. Also bilden die Gleichungen

$$Af = 0 \quad B_1 f = 0 \quad B_{k-1} f = 0 \quad B_{k+1} f = 0 \cdots B_r f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_k f$; und daher findet man die entsprechende Lösung W_k

durch Quadratur. In dieser Weise findet man r unabhängige Lösungen von $Af = 0$, deren Integration hiermit geleistet ist.

Die hiermit ausgeführte, principiell einfache Integration von $D = F(x)$ ist insofern unvollkommen, als sie nicht die explicite Form der Grösse y als Function von x liefert. Daher füge ich die folgenden Bemerkungen hinzu. Setze ich

$$\begin{vmatrix} X_1 X_1' \cdots X_1^{(r-1)} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ X_{r-1} \cdots \cdots X_{r-1}^{(r-1)} \\ y \cdots \cdots \cdots y_{r-1} \end{vmatrix} = D_r,$$

so kann die Gleichung $D + F(x) = 0$ nach dem Vorangehenden auf die Form

$$\frac{dD_r}{dx} + \varphi(x) D_r + f(x) = 0$$

gebracht werden. Ordnen wir die letzte Gleichung nach den Grössen y_i, so kommt

$$(X_1 X_2' \cdots X_{r-1}^{(r-2)}) \{y_r + \varphi \cdot y_{r-1}\} + \cdots + f(x) = 0$$

und anderseits erhält $D + F(x)$ durch Entwickelung, wenn wir zur Abkürzung

$$(X_1 X_2' \cdots X_r^{r-1}) = \Delta$$

setzen, die Form:

$$\Delta \cdot y_r + \frac{d\Delta}{dx} y_{r-1} + \cdots + F(x).$$

Durch Vergleichung findet man daher die folgenden Werthe von $\varphi(x)$ und $f(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{d \log \Delta}{dx}, \quad f(x) = \frac{\Delta_r}{\Delta} F(x),$$

wo

$$(X_1 X_2' \cdots X_{r-1}^{(r-2)}) = \Delta_r$$

gesetzt ist. Also kann $D + F(x) = 0$ die Form

$$\frac{dD_r}{dx} + \frac{d \log \Delta}{dx} D_r + \frac{\Delta_r}{\Delta} F(x) = 0$$

erhalten und durch Integration kommt

$$D_r = -\frac{1}{\Delta} \int \Delta_r F(x) dx.$$

Analoge Ueberlegungen geben uns die r Formeln

$$D_i = -\frac{1}{\Delta} \int \Delta_i F(x)\, dx, \ (i = 1 \cdots r),$$

und da die r Grössen D_i linear und homogen in den Grössen $y y_1 \ldots y_{r-1}$ sind, so findet man durch Auflösung die bekannte Form der Grösse y.

Man sieht leicht, dass diese beiden Integrationstheorien der Gleichung $D + F(x) = 0$ im Wesentlichen identisch sind.

13. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q \quad yq,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x \, \frac{d \log D}{dx} \cdots \frac{d^{m-r} \log D}{dx^{m-r}}\right) = 0,$$

wo D dieselbe Determinante wie in der vorangehenden Nummer bezeichnet. Durch Integration dieser Gleichung $(m-r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation

$$\frac{d \log D}{dx} = F(x)$$

und durch Quadratur die lineare Gleichung

$$D = e^{\int F \cdot dx},$$

die nach den Regeln der vorangehenden Nummer integrirt wird.

14. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung eine Gruppe von der Form

$$X_1 q \cdots X_r q, \; p,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi \, \frac{d\varphi}{dx} \cdots \frac{d^{m-r} \varphi}{dx^{m-r}}\right) = 0$$

wo φ eine lineare und homogene Function mit constanten Coefficienten von $y \, y_1 \ldots y_r$ darstellt:

$$\varphi = cy + c_1 y_1 + \cdots + c_r y_r.$$

Man integrirt $\Omega = 0$, die als eine Gleichung $(m-r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu betrachten ist. Hierdurch findet man eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung der Form

$$cy + \cdots + c_r y_r = F(x),$$

die in der bekannten Weise integrirt wird.

15. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q \quad yq \quad p,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1 \, \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-2} \varphi_2}{d\varphi_1^{\,m-r-2}}\right) = 0;$$

φ_1 und φ_2 haben die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi} \quad \varphi_2 = \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{\varphi}$$

wo φ wie soeben eine ganze und homogene Function mit constanten Coefficienten von $y\,y_1 \ldots y_r$ bezeichnet.

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ kommt eine Relation

$$\varphi_2 = f(\varphi_1)$$

oder

$$\frac{1}{\varphi}\,\frac{d^2\varphi}{dx^2} = f\left(\frac{d\log\varphi}{dx}\right)$$

oder endlich

$$\frac{d^2\log\varphi}{dx^2} = f\left(\frac{d\log\varphi}{dx}\right) - \left(\frac{d\log\varphi}{dx}\right)^2.$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung erledigt man durch zwei Quadraturen, und erhält so eine Gleichung

$$\varphi = F(x)$$

die in der bekannten Weise integrirt wird.

16. Gestattet eine Gleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\; xq \cdots x^{r-1}q,\; p,\; xp + cyq,\; c \neq r,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-2}\varphi_2}{d\varphi_1^{\,m-r-2}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{y_{r+1}}{y_r^{\frac{c-r-1}{c-r}}}, \quad \varphi_2 = \frac{y_{r+2}}{y_r^{\frac{c-r-2}{c-r}}}.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation

$$y_{r+1}\,\frac{dy_{r+1}}{dy_r} = y_r^{\frac{c-r-2}{c-r}}\,f(\varphi_1),$$

die eine Differentialgleichung 1. O. in den Variabeln y_r und y_{r+1} darstellt. Diese Gleichung gestattet die infinitesimale Transformation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + cy\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + (c-r)y_r\frac{\partial f}{\partial y_r} + (c-r-1)y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}},$$

und also giebt eine Quadratur eine Bestimmung von y_{r+1} als Function von y_r. Darnach giebt eine zweite Quadratur y_r als Function von x und endlich findet man vermöge r neuer Quadraturen y als Function von x.

17. Gestattet eine Gleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\; xq \ldots x^{r-1}q\; p\; xp + ryq,$$

so ist sie, wenn wir von den integrabeln Gleichungen $y_{r+1} = 0$, $y_r =$ Const. absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-2}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-2}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = y_r, \quad \varphi_2 = \frac{y_{r+2}}{y_{r+1}^2}.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation

$$y_{r+2} = y_{r+1}^2 f(y_r)$$

oder

$$\frac{dy_{r+1}}{dy_r} = y_{r+1} f(y_r),$$

woraus

$$y_{r+1} = e^{\int f(y_r)\, dy_r}$$

und

$$x = \int dy_r\, e^{-\int f(y_r)\, dy_r}.$$

Hierdurch ist y_r bestimmt als Function von x und daher findet man y durch r weitere Quadraturen.

18. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q \quad xq \cdots x^{r-1}q \quad p \quad xp + (ry + x^r)\, q,$$

so hat sie die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-2}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-2}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = y_{r+1}\, e^{w y_r}, \quad \varphi_2 = y_{r+2}\, e^{2 w y_r}$$

$$\frac{1}{w} = 1 \cdot 2 \cdots (r-1)\, r.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ oder

$$y_{r+1} \frac{dy_{r+1}}{dy_r} = e^{-2 w y_r} f\left(y_{r+1}\, e^{w y_r}\right),$$

das heisst eine Differentialgleichung 1. O. zwischen y_r und y_{r+1} mit der bekannten infinitesimalen Transformation

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + (ry + x^r) \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + \frac{1}{w} \frac{\partial f}{\partial y_r} - y_{r+1} \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}.$$

Daher bestimmt man zuerst y_{r+1} als Function von y_r durch eine

Quadratur, darnach y_r als Function von x durch eine zweite Quadratur und schliesslich y als Function von x vermöge r Quadraturen.

19. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\ xq \cdots x^{r-1}q\ yq\ p\ xp,$$

so hat sie, wenn wir von den beiden integrabeln Gleichungen $y_r = 0$, $y_{r+1} = 0$ absehen, die Form

$$\Omega\left(\varphi_1 \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-3}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2}, \quad \varphi_2 = \frac{y_r^2 y_{r+3}}{y_{r+1}^3}.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, das heisst eine Differentialgleichung 2. O. in y_r und y_{r+1}:

$$\frac{y_{r+3}}{y_{r+1}} = \frac{dy_{r+2}}{dy_r} = \frac{y_{r+1}^2}{y_r^2} f\left(\frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2}\right) = \frac{d}{dy_r}\left(y_{r+1} \frac{dy_{r+1}}{dy_r}\right)$$

mit zwei bekannten infinitesimalen Transformationen

$$y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} \quad \text{und} \quad y_{r+1} \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}.$$

Hier führen wir

$$\eta = \log y_{r+1}, \quad \xi = \log y_r$$

als neue Variabeln ein, dann wird

$$\varphi_1 = \frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2} = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \varphi_2 = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\frac{d\eta^2}{d\xi} - \frac{d\eta}{d\xi},$$

sodass die Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ die Form annimmt:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi_1} = F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right).$$

Daher geben zwei Quadraturen η als Function von ξ, das heisst y_{r+1} als Function von y_r. Eine neue Quadratur giebt y_r als Function von x, wonach y durch r Quadraturen als Function von x bestimmt wird.

20. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\ xq \cdots x^{r-1}q\ p\ 2xp + (r-1)\,yq\ x^2p + (r-1)xyq$$

so ist sie, wenn wir von der unmittelbar integrabeln Gleichung $y_r = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\cdots\frac{d^{m-r-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-3}}\right)=0$$

wo φ_1 und φ_2 die Werthe

$$\varphi_1 = y_r^{\frac{-2(r+3)}{r+1}}\left((r+1)\,y_r y_{r+2} - (r+2)\,y_{r+1}^2\right) = y_r^{\frac{-2(r+3)}{r+1}}\,u$$

$$\varphi_2 = y_r^{\frac{-3(r+3)}{r+1}}\,u_1 =$$

$$y_r^{\frac{-3(r+3)}{r+1}}\left((r+1)^2 y_r^2\, y_{r+3} - 3(r+1)(r+3)\,y_r y_{r+1} y_{r+2} + 2(r+2)(r+3)\,y_{r+1}^3\right)$$

haben. Durch Integration der Gleichung $(m-r-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega=0$ erhält man eine Relation $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, die nicht allgemein integrabel ist, während sie, wie jetzt gezeigt werden soll, immer auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reducirt werden kann. Wir wählen φ_1 und

$$v = y_r^{-\frac{r+3}{r+1}}\,y_{r+1}$$

als neue Variabeln. Dann wird

$$\frac{dv}{d\varphi_1} = \frac{v^2+\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{v^2+\varphi_1}{f(\varphi_1)}.$$

Ist $W(v\,\varphi_1) = \text{Const.}$ eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung, so findet man zwei weitere Integralgleichungen von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ durch Differentiation. In der That setzt man

$$Bf = (r+1)\,x\,y_r\,\frac{\partial f}{\partial y_r} + [(r+3)\,x y_{r+1} + (r+1)\,y_r]\,\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}$$
$$+ [(r+5)\,x y_{r+2} + 2(r+2)\,y_{r+1}]\,\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}},$$

so ist $B\varphi_1 = 0$, während die Ausdrücke

$$BW = \frac{\partial f}{\partial v}\,(r+1)\,y_r$$

$$BBW = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\,(r+1)^2 y_r^2 + (r+1)^2\,x\,y_r\,\frac{\partial f}{\partial v}$$

von W unabhängig sind. Daher sind die Relationen $W = \text{Const.}$, $BW = \text{Const.}$, $BBW = \text{Const.}$ unabhängige Integralgleichungen von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$. Und daher erhält man durch Elimination von $y_{r+1}\,y_{r+2}$ und y_{r-3} eine Differentialgleichung der Form

$$y_r = F(x)$$

(mit der bekannten Gruppe $q\;\; xq \cdots x^{r-1}q$) und schliesslich geben r Quadraturen die Bestimmung von y als Function von x.

21. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q \quad xq \cdots x^{r-1}q \quad p, \quad xp \quad yq \quad x^2p + (r-1)\,xyq$$

so ist sie, wenn wir von den unmittelbar integrabeln Gleichungen

$$y_r = 0, \quad \left(y^{-\frac{1}{r+1}}\right)'' = 0$$

absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-4}\varphi_2}{d\varphi_1^{\,m-r-4}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = u^{-\frac{3}{2}}\,u_1, \quad \varphi_2 = u^{-2}u_2$$

während u, u_1 und u_2 dieselben Werthe wie in der vorangehenden Nummer (siehe auch Abschn. I, Nummer 23) haben. Durch Integration der Gleichung $(m-r-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Differentialgleichung $(r-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, die allerdings nicht allgemein integrabel ist, während sie immer, wie jetzt gezeigt werden soll, auf eine Riccatische Differentialgleichung 1. O. reducirt werden kann. Um dies nachzuweisen betrachten wir $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ als eine Differentialgleichung *vierter* Ordnung zwischen y_r und x. In diesen Variabeln erhalten die bekannten inf. Transformationen p, xp, yq, $x^2p + (r-1)\,xyq$ die Formen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y_r\frac{\partial f}{\partial y_r}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x} - (r+1)\,xy_r\frac{\partial f}{\partial y_r}.$$

Setzen wir

$$\eta = y_r^{-\frac{1}{r+1}},$$

so erhalten wir eine Differentialgleichung vierter Ordnung zwischen η und x mit den vier bekannten infinitesimalen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \eta\frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x} + \eta x\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Daher findet man nach den Regeln der Nummer 11 vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. die Grösse η bestimmt als Function von x

$$\eta = y_r^{-\frac{1}{r+1}} = F(x),$$

woraus

$$y_r = F(x)^{-(r+1)};$$

hiernach genügen r Quadraturen zur Bestimmung von y als Function von x.

§ 3.

Integration von Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen der Form $X(xy)p + Y(xy)q$.

In diesem Paragraphen integrire ich alle Differentialgleichungen mit einer bekannten fünfgliedrigen, sechsgliedrigen oder achtgliedrigen Gruppe; dabei wird ausdrücklich vorausgesetzt, dass die betreffende Gruppe keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant lässt und dass sie daher in Uebereinstimmung mit meinen alten Untersuchungen auf die Form einer projectiven Gruppe gebracht worden ist. Ich sehe ab von den unmittelbar integrabeln Gleichungen

$$y_2 = 0, \quad 5y_3^2 - 3y_2y_4 = 0,$$
$$9y^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3 = 0,$$

unter denen die erste alle gerade Linien, die zweite alle Parabeln, die dritte alle Kegelschnitte der Ebene xy bestimmt.

22. Gestattet eine Differentialgleichung, deren Ordnungszahl m grösser als 2 ist, die Gruppe

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp,$$

so besitzt sie die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\,\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\,\cdots\,\frac{d^{m-5}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-5}}\right) = 0$$

wo

$$\varphi_1 = y_2^{-\frac{8}{3}}\varrho_2, \quad \varphi_2 = y_2^{-4}\varrho_3$$

und

$$\varrho_2 = 3y_2y_4 - 5y_3^2, \quad \varrho_3 = 3y_2^2y_5 - 15y_2y_3y_4 + \frac{40}{3}y_3^3.$$

Man integrirt die Gleichung $(m-5)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ und erhält hierdurch eine Relation

$$\varphi_2 = F(\varphi_1)$$

das heisst eine Differentialgleichung*) fünfter Ordnung, die wir jetzt auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reduciren werden.

Wir führen neue Variabeln ein, nämlich φ_1 und

$$u = y_2^{-\frac{4}{3}}y_3;$$

dann wird, wie man leicht findet

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{1}{3}\,\frac{\varrho_2 + y_3^2}{y_2^{-\frac{4}{3}}\varrho_3} = \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_1 + u^2}{\varphi_2}$$

*) Wir sehen im Texte ab von der unmittelbar integrablen Gleichung $\varphi_1 = \text{Const.}$

oder

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{1}{3}\,\frac{u^2+\varphi_1}{F(\varphi_1)}.$$

Ist

$$W(u\varphi_1) = \text{Const.}$$

eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung, so findet man folgendermassen zwei neue Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$ durch Differentiation. Man setzt

$$Bf = y\frac{\partial f}{\partial x} - y_1^2\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3y_1y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - (4y_1y_3+3y_2^2)\frac{\partial f}{\partial y_3} - (5y_1y_4+10y_2y_3)\frac{\partial f}{\partial y_4},$$

dann ist

$$B\varphi_1 = 0,\quad Bu = -3y_2^{\frac{2}{3}}$$

und

$$BW = -3\frac{\partial W}{\partial u}y_2^{\frac{2}{3}}$$

$$BBW = 9y_2^{\frac{4}{3}}\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 6y_1y_2^{\frac{2}{3}}\frac{\partial W}{\partial u},$$

sodass

$$W = \text{Const.},\quad BW = \text{Const.},\quad BBW = \text{Const.}$$

drei unabhängige Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$ darstellen. Eliminirt man zwischen ihnen die Grössen y_5, y_4 und y_3, so erhält man eine Differentialgleichung zwischen y_1 und y_2, die durch zwei Quadraturen erledigt wird.

23. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $(m > 4)$ die Gruppe

$$p \quad q \quad xq \quad yq \quad xp \quad yp,$$

so besitzt sie die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\,\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\cdots\frac{d^{m-6}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-6}}\right) = 0$$

wo

$$\varphi_1 = \varrho_2^{-\frac{3}{2}}\varrho_3,\quad \varphi_2 = \varrho_2^{-2}\varrho_4$$

und

$$\varrho_2 = 3y_2y_4 - 5y_3^2,$$
$$\varrho_3 = 3y_2^2y_5 - 15y_2y_3y_4 + \frac{40}{3}y_3^3,$$
$$\varrho_4 = 3y_2^3y_6 - 21y_2^2y_3y_5 + 35y_2y_3^2y_4 - \frac{35}{3}y_3^4.$$

Wir integriren zuerst die Gleichung $(m-6)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$, und erhalten hierdurch eine Relation mit $m-6$ Constanten*)

*) Wir betrachten im Texte nicht die unmittelbar integrable Gleichung $\varphi_1 = \text{Const.}$

$$\varphi_2 = F(\varphi_1) \quad \text{oder} \quad y_6 = W(y_1 \cdots y_5),$$

die selbst eine Differentialgleichung sechster Ordnung darstellt. Wir reduciren dieselbe durch Quadratur auf eine Gleichung fünfter Ordnung, die nach den Regeln der letzten Nummer vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. erledigt werden kann.

Die bekannte sechsgliedrige Gruppe enthält nämlich die invariante fünfgliedrige Untergruppe

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp.$$

Daher bildet die mit der vorgelegten Gleichung $y_6 = W$ äquivalente lineare partielle Differentialgleichung

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_5 \frac{\partial f}{\partial y_4} + W \frac{\partial f}{\partial y_5}$$

zusammen mit den fünf Gleichungen

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad B_3 f = x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

$$B_4 f = x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} - 2y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \cdots - 5y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

$$B_5 f = y \frac{\partial f}{\partial x} - y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \cdots = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation

$$B_6 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - \cdots - 4y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5}.$$

Daher liefern meine alten Theorien durch eine Quadratur ein Integral

$$U(xy \cdots y_5) = \text{Const.}$$

des vollständigen Systems. Nun aber ist $U = \text{Const.}$ eine Differentialgleichung fünfter Ordnung, welche die Gruppe $p \; q \; xq \; xp - yq \; yp$ gestattet, und welche somit nach den Regeln der vorangehenden Nummer vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. integrirt wird.

Um die hiermit scizzirten Rechnungen in einfachster Weise durchzuführen, ist es zweckmässig, folgendermassen zu verfahren. Wir führen in $\varphi_2 = F(\varphi_1)$ neue Variabeln ein, nämlich

$$\alpha_1 = y_2^{-\frac{8}{3}} \varrho_2 = 3y_2^{-\frac{5}{3}} y_4 - 5y_2^{-\frac{8}{3}} y_3^2$$

$$\alpha_2 = y_2^{-4} \varrho_3 = 3y_2^{-3} y_5 - 15 y_2^{-3} y_3 y_4 + \frac{40}{3} y_2^{-4} y_3^3.$$

Dann wird

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{y_2^{-5}\varrho_4 - \frac{5}{3}\alpha_1^2 y_2^{\frac{1}{3}}}{y_2^{\frac{1}{3}}\alpha_2} = \frac{\alpha_1^2\left(\varphi_2 - \frac{5}{3}\right)}{\alpha_2}$$

und

$$\varphi_1 = \varrho_2^{-\frac{3}{2}} \varrho_3 = \alpha_1^{-\frac{3}{2}} \alpha_2,$$

woraus

$$\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} + \frac{5}{3} = F\left(\alpha_1^{-\frac{3}{2}} \alpha_2\right).$$

Die hiermit gefundene Differentialgleichung 1. O. zwischen α_1 und α_2 gestattet die infinitesimale Transformation

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4}{3} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - 2\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}$$

und wird daher durch eine Quadratur integrirt. Die hervorgehende Relation zwischen α_1 und α_2 ist eine Differentialgleichung fünfter Ordnung, die nach den Regeln der vorangehenden Nummer vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. erledigt wird.

24. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $(m > 5)$ die allgemeine projective Gruppe

$$p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

so ist sie, wenn wir die Symbole ϱ_k, σ, Φ_1 und Φ_2 in derselben Bedeutung wie in Nummer 3 des ersten Abschnittes brauchen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\Phi_1 \Phi_2 \frac{d\Phi_2}{d\Phi_1} \cdots \frac{d^{m-8}\Phi_2}{d\Phi_1^{m-8}}\right).$$

Durch Integration dieser Gleichung $(m-8)^{\text{ter}}$ Ordnung erhalten wir eine Differentialgleichung achter Ordnung

$$\Phi_2 = F(\Phi_1),$$

die wir jetzt in Uebereinstimmung mit meinen alten allgemeinen Integrationstheorien auf eine Gleichung zweiter Ordnung*) reduciren werden. Da nämlich die allgemeine achtgliedrige projective Gruppe sechsgliedrige Untergruppen (dagegen keine siebengliedrige Untergruppe) enthält, so ist es nach mir möglich, zwei*) Integralgleichungen von $\Phi_2 = F(\Phi_1)$ durch Integration einer Gleichung zweiter Ordnung herzuleiten. Aus diesen beiden Integralen findet man dann nach meinen allgemeinen Regeln neue durch *Differentiation*, und zwar findet man in dieser Weise alle, da die achtgliedrige Gruppe keine invariante Untergruppe enthält.

Um die Rechnungen in einfachster Weise durchzuführen, ist es zweckmässig, neue Variabeln einzuführen und zwar Φ_1 und die Grössen

$$A = \varrho_2^{-\frac{3}{2}} \varrho_3, \quad B = \varrho_2^{-2} \varrho_4,$$

*) Nach einer neueren Bemerkung von mir, die ich der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania im Septbr. 1882 mittheilte, genügt es sogar, *ein* Integral dieser Gleichung 2. O. aufzufinden.

(wir gebrauchen wie schon gesagt die Bezeichnungen der Nummer 3 des ersten Abschnittes). Wir berechnen die Differentialquotienten von A, B und Φ_1 hinsichtlich x und finden darnach durch Division die Differentialquotienten von A und B hinsichtlich Φ_1. Zur Ausführung dieser Rechnung bestimmen wir zuerst die nachstehenden Werthe der Differentialquotienten der Grössen ϱ_k hinsichtlich x:

$$\begin{aligned}
y_2\varrho_2' &= \varrho_3 + \frac{10}{3}\, y_3\varrho_2, \\
y_2\varrho_3' &= \varrho_4 - \frac{5}{3}\,\varrho_2^2 + 5y_3\varrho_3, \\
y_2\varrho_4' &= \frac{1}{3}\,\varrho_5 - \frac{8}{3}\,\varrho_2\varrho_3 + \frac{20}{3}\, y_3\varrho_4, \\
y_2\varrho_5' &= \frac{1}{3}\,\varrho_6 - \frac{35}{3}\,\varrho_2\varrho_4 + \frac{25}{3}\, y_3\varrho_5.
\end{aligned}$$

Folglich wird

$$\frac{dA}{dx} = \frac{B - \frac{5}{3} - \frac{3}{2}A^2}{y_2\varrho_2^{-\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\Phi_1 A^{\frac{5}{3}} + 19A - 12AB + 7\left(B - \frac{5}{3}\right)^2 A^{-1}}{6y_2\varrho_2^{-\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d\Phi_1}{dx} = \frac{\varrho_3\sigma' - \frac{8}{3}\,\sigma\varrho_3'}{\varrho_3^{\frac{11}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}\,\Phi_2 - 35}{y_2\varrho_3^{-\frac{1}{3}}}$$

und

$$\frac{dA}{d\Phi_1} = \frac{\left(B - \frac{5}{3}\right)A^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}A^{-\frac{5}{3}}}{\frac{2}{3}\,\Phi_2 - 35},$$

$$\frac{dB}{d\Phi_1} = \frac{\Phi_1 A^{\frac{4}{3}} + 19A^{\frac{2}{3}} - 12A^{\frac{2}{3}}B + 7\left(B - \frac{5}{3}\right)^2 A^{-\frac{4}{3}}}{6\left(\frac{2}{3}\,\Phi_2 - 35\right)}.$$

Da Φ_2 eine gegebene Function von Φ_1 darstellt, so kennen wir hiermit ein gewöhnliches simultanes System zwischen A, B und Φ_1, das offenbar einer Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalent ist.

Unser simultanes System erhält durch die Substitution

$$\alpha = A^{-\frac{4}{3}}\left(B - \frac{5}{3}\right),$$

$$\beta = A^{-\frac{8}{3}}\left(B - \frac{5}{3}\right)^2 - A^{-\frac{2}{3}}$$

die bemerkenswerthe Form

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{d\Phi_1} = \dfrac{\Phi_1 - 2\alpha^2 + \beta}{4\Phi_2 - 210} \\ \dfrac{d\beta}{d\Phi_1} = \dfrac{2\Phi_1\alpha - 2\alpha\beta - 6}{4\Phi_2 - 210} \end{cases} {}^{*)}.$$

Setzt man endlich

$$\alpha = \frac{x_1}{x_3}, \quad \beta = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\frac{dx_3}{d\Phi_1} = \frac{2x_1}{4\Phi_2 - 210},$$

so erhält unser simultanes System die *lineare* Form

$$\frac{dx_1}{\Phi_1 x_3 + x_2} = \frac{dx_2}{2\Phi_1 x_1 - 6x_3} = \frac{dx_3}{2x_1} = \frac{d\Phi_1}{4\Phi_2 - 210}$$

und kann daher, wenn man es vorzieht, durch eine äquivalente lineare Differentialgleichung 3. O. ersetzt werden.

Kennt man die Lösungen W_1, W_2 des Systems (L), so ist nach meinem früher citirten Satze die Integration von $\Phi_2 = F(\Phi_1)$ als geleistet zu betrachten. Dies sieht man auch so ein: Die Gleichungen $W_1 = a$, $W_2 = b$ mit zwei bestimmten Constanten geben ∞^6 Integralcurven, deren Inbegriff alle projective Transformationen gestattet, bei denen die unendlich entfernte Gerade ihre Lage behält. Man führe jetzt durch eine projective Transformation diese Gerade in eine *neue* Lage g_i über. Gleichzeitig erhalten W_1 und W_2 die Werthe $W_1^{(i)}\, W_2^{(i)}$. Wählt man nun vier Geraden $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$, so bestimmen die acht Gleichungen

$$W_1^{(i)} = a_i, \quad W_2^{(i)} = b_i \qquad (i = 1\ 2\ 3\ 4)$$

mit acht bestimmten Constanten eine Schaar von Integralcurven, deren Inbegriff alle projective Transformationen gestattet, bei denen $g_1\, g_2\, g_3\, g_4$ invariant bleiben. Haben daher unsere vier Geraden eine *allgemeine* Lage, so geben die acht Gleichungen eine *einzige* Integralcurve, sodass die Integration geleistet ist.

Aus meinen 1874 gegebenen allgemeinen Integrationstheorien folgt, wie schon gesagt, als Corollar, dass eine Gleichung m^{ter} Ordnung, welche die allgemeine projective Gruppe gestattet, vermöge zweier Hülfsgleichungen von $(m-8)^{\text{ter}}$ und zweiter Ordnung integrirt wird. Dass die Hülfsgleichung zweiter Ordnung mit einer linearen Gleichung 3. O. äquivalent ist, bemerkte *Halphen* in der Sitzung vom 3. Novbr. 1882 der société mathématique.

---

*) Interpretirt man α und β als Cartesische Coordinaten in einer Ebene, Φ_1 als die Zeit, so definiren die Gleichungen (L) eine mit der Zeit variirende projective und infinitesimale Transformation der besprochenen Ebene.

Ist jetzt eine beliebige Gleichung $f(x\,y\,y_1\cdots)=0$ mit einer bekannten Gruppe $B_1f\cdots B_rf$ vorgelegt, so bestimmt man zuerst nach den Regeln des ersten Abschnittes die canonische Form der Gruppe, und bringt sie darnach auf diese Form. Hiernach verfährt man nach den Regeln dieses Abschnittes. Ich discutire später näher die Fälle der canonischen Formen q; $q\;yq$; $q\;yq\;y^2q$.

Im nächsten Abschnitte zeige ich, wie man die Gruppe einer Gleichung in einfachster Weise bestimmt.

März 1883.

Die vorstehende Abhandlung erschien im Jahre 1883 im norwegischen Archiv. *Sie ist also älter als Sylvesters Untersuchungen über Reciprocanten.* Ebenso ist meine in diesen Annalen Bd. XXIV, 1884 gedruckte Arbeit über Differentialinvarianten älter als die genannten Sylvester'schen Publicationen und die sich daran anschliessenden Untersuchungen.

Juli 1888.

Sophus Lie.

Die Abzählung als Fehlerquelle in der modernen Geometrie.

Von

C. Küpper in Prag.

M. de Jonquières hat im Novemberheft der „Comptes rendus" (J. 1887) projectivische Constructionen der Curven m^{ter} Ordnung C^m mit Doppelpunkten mitgetheilt, welche nicht als richtig betrachtet werden können. Er stellt sich die Aufgabe, die *allgemeine* C^m mit einer möglichst grossen Anzahl von Doppelpunkten projectivisch zu erzeugen, und giebt eine Auflösung, welche nicht acceptirt werden kann.

Es wird gut sein, das Princip vorauszuschicken, auf welches M. de Jonquières sich stützt.

Man habe $C^{n+n'}$ mit δ Doppelpunkten D. Wenn $\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2}-3\delta$ Punkte $e_1, e_2 \ldots$ gegeben sind, welche die $C^{n+n'}$ *bestimmen*, so soll diese Curve durch 2 Büschel n^{ter} und n'^{ter} Ordnung, die durch (C^n), $(C^{n'})$ bezeichnet werden mögen, projectivisch erzeugt werden, wobei die D zu den Grundpunkten beider Büschel gehören. (C^n) hat noch $\frac{n(n+3)}{2}-1-\delta$ willkürlich anzunehmende Grundpunkte, $(C^{n'})$ hat deren $\frac{n'(n'+3)}{2}-1-\delta$. Von diesen Grundpunkten könnten noch irgend welche in den e angenommen werden, während gewisse X derselben als Unbekannte zu betrachten sind, die sodann durch $2X$ unabhängige Relationen bestimmt werden. Diese Relationen aber erhält man dadurch, dass man die C^n des ersten Büschels, welche durch je einen von $2X+3$ der Punkte e gehen, den durch die nämlichen e gehenden $C^{n'}$ des zweiten Büschels projectivisch entsprechen lässt. Auf diese Weise hat man über

$$\frac{n(n+3)}{2}-1-\delta+\frac{n'(n'+3)}{2}-1-\delta-X+2X+3$$

Punkte verfügt. Wird nun diese Zahl $=\frac{(n+n')(n+n'+3)}{2}-3\delta$ gesetzt, so findet man $X = nn' - 1 - \delta$. *Man muss daher* („il faut nécessairement" Jonq.) *$nn' - 1 - \delta$ unbekannte Punkte auf die Basen beider Büschel vertheilen.*

Dies ist in Kürze wiedergegeben die Herleitung des Princips. Dasselbe wird nun angewendet:

1) Auf Curven C^{2n} mit δ Doppelpunkten, wenn hier zwei Büschel (C^n), (C^n) zur Erzeugung verwendet werden.

Welches ist das Maximum von δ?

Da die Zahl $X = n^2 - 1 - \delta$ höchstens die *totale* Anzahl disponibler Bestimmungsstücke beider Basen erreichen kann, so hat man

$$n^2 - 1 - \delta \overline{\gtrless} 2\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) - 2\delta;$$

also

$$\delta \overline{\gtrless} 3n - 1.$$

Der Beweis, dass C^{2n} mit $3n - 1$ Doppelpunkten D und

$$n(2n+3) - 3(3n-1) = 2n^2 - 6n + 3 \text{ Punkten } e,$$

welche zusammengenommen mit den D die C^{2n} bestimmen, wirklich durch 2 Büschel (C^n) erzeugt werden kann, besteht nach Herrn de Jonquières einfach darin, dass, wenn man in die beiden Basen

$$n^2 - 1 - 3n + 1$$

unbekannte Punkte einführt — wodurch *alle* disponibeln Grundpunkte erschöpft wären — noch $2(n^2 - 1 - 3n + 1) + 3$ Punkte e, d. h. gerade $2n^2 - 6n + 3$ willkürlich bleiben:

Es entsteht aber die Frage: Kann man durch die projectivischen Beziehungen in der That so viele Unbekannte *bestimmen?* Dies ist keineswegs der Fall, denn die C^{2n} und ihre Erzeugung vorausgesetzt, sind wie bekannt nur dann die Grundpunkte eines der Büschel bestimmt, wenn man einen derselben beliebig auf C^{2n} angenommen hat. Mithin könnte $n^2 - 1 - \delta$ höchstens gleich $2\left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) - 2\delta - 2$ gesetzt werden, woraus

$$\delta = 3n - 3$$

folgen würde.

Nach M. de Jonquières kann man weiter schliessen: Auch C^{2n-1} mit $3n - 1$ Doppelpunkten lässt sich durch zwei Büschel (C^n) hervorbringen, und der Grund scheint sehr einfach. Denn man kann von den $2n^2 - 6n + 3$ willkürlichen Punkten des Erzeugnisses $2n^{\text{ter}}$ Ordnung $2n + 1$ Punkte auf einer beliebigen Geraden L annehmen, welche dann als Bestandtheil des Erzeugnisses auftreten wird. Es bleiben noch $2n^2 - 8n + 2$ Punkte e willkürlich für den Bestandtheil C^{2n-1}; diese Curve ist aber auch durch die $3n - 1$ Doppelpunkte und jene e bestimmt, denn

$$\frac{(2n-1)(2n+2)}{2} = 3(3n-1) + 2n^2 - 8n + 2.$$

Ein einfaches Beispiel mag die Unrichtigkeit darthun.

C^7 mit $3 \cdot 4 - 1 = 11$ Doppelpunkten D wäre durch zwei Büschel (C^4) projectivisch zu construiren!

Von dem Erzeugniss C^8 sind $2(4^2 - 1 - 11) + 3 = 11$ Punkte e willkürlich, 9 derselben werden auf eine beliebige Gerade L gelegt, bleiben 2 übrig, die mit den $11\,D$ gerade eine C^7 bestimmen. Bei genauerer Prüfung wird die Sache illusorisch. Fasst man nämlich die 5 Punkte ins Auge, welche mit den $11\,D$ die Grundpunkte eines Büschels (C^4) ausmachen, so können diese nicht *alle* auf C^7 liegen, da sonst eine C^4 des Büschels nur einen Punkt aus C^7 schnitte, C^7 also rational wäre. Lägen 4 dieser Punkte auf C^7, so wäre C^7 hyperelliptisch, also nicht die allgemeine Curve. Lägen aber drei auf C^7, so ist wie leicht zu beweisen auch eine Gerade L_1 *vollkommen bestimmt*, auf welche die 2 anderen Grundpunkte fallen, also nicht bei *vorliegender* C^7 noch beliebige, wie bei de Jonquières. Nimmt man an, dass 2 Grundpunkte von jedem Büschel (C^4) auf C^7 sind, die 3 anderen also auf L, was eigentlich der Jonquièreschen Auffassung allein entspricht, so wird wiederum nur eine hyperelliptische C^7 erzeugt. Endlich ist es unmöglich, dass nur 1 Grundpunkt auf C^7 ist, weil die 4 anderen auf L wären, und die C^4 diese Gerade nicht mehr schnitten.

Das obige Raisonnement, welches nur in der Form, nicht im Wesen von dem Jonquièreschen abweicht, führt auch auf das absurde Resultat, dass die ∞^3 C^6 mit 8 gegebenen Doppelpunkten durch Büschel (C^3) erzeugbar seien. Zwar schliesst Herr de Jonquières den Fall $m = 6$ als „cas singulier" aus; aber ohne dafür einen Grund anzugeben. Ich habe schon vor längerer Zeit darauf hingewiesen, dass eine allgemeine Curve C^{2n} nicht mehr erzeugt wird, wenn die erzeugenden Büschel (C^n) mehr als $3n - 3$ Doppelpunkte der C^{2n} zu Grundpunkten haben. C^6 ist nur ein besonderer und für sich selbst leicht verständlicher Fall dieses allgemeinen Satzes. Auf die Curven 6^{ter} Ordnung werde ich im Folgenden zurückkommen, um die Punkte hervorzuheben, die bei diesen Curven nicht ausser Acht gelassen werden dürfen.

2) *Anwendung des Princips auf Curven C^{2n+1} mit δ Doppelpunkten, D, bei deren Erzeugung ein Büschel (C^n), ein zweiter (C^{n+1}) benutzt wird.*

Da die Zahl $X = n(n+1) - 1 - \delta$ die totale Anzahl disponibler Bestimmungsstücke beider Basen nicht überschreiten kann, so ist

$$n(n+1) - 1 - \delta \overline{\gtrless} \frac{n(n+3)}{2} - 1 - \delta + \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1 - \delta;$$

also

$$\delta \overline{\gtrless} 3n + 1.$$

Kann nun das Maximum $\delta = 3n + 1$ wirklich erreicht werden?

Diese Frage muss nach de Jonquières bejaht werden. Denn von C^{2n+1} mit $3n + 1$ Doppelpunkten sind noch willkürlich:

$$\frac{(2n+1)(2n+4)}{2} - 3(3n+1) = 2n^2 - 4n - 1 \text{ Punkte } e,$$

und weil $X = n(n+1) - 1 - (3n+1)$, so sind vom projectivischen Erzeugniss beider Büschel $2X + 3$, das ist $2n^2 - 4n - 1$ der willkürlichen Annahme überlassen. So, und nicht anders lautet die Argumentation, obwohl sie in der Schrift Jonquières ein wenig verschleiert erscheint.

Aber in der That kann man durch die projectivischen Beziehungen *niemals* so viele Punkte bestimmen, als zur Completirung der Basen ausser den D noch erforderlich sind: Denn, die C^{2n+1} und die projectivische Erzeugung durch Büschel (C^n), (C^{n+1}) vorausgesetzt, sind bekanntlich von den Grundpunkten der (C^{n+1}) immer noch 3 Punkte auf C^{2n+1} willkürlich, während dann sämmtliche des (C^n) *bestimmt* sind. Folglich könnten höchstens

$$\frac{n(n+3)}{2} - 1 - \delta + \frac{(n+1)(n+4)}{2} - 1 - \delta - 3 \text{ Punkte}$$

als durch die projectivischen Beziehungen festzulegende Unbekannte X angesehen werden, so dass

$$\delta \leqq 3n - 2$$

folgte.

Dass $3n + 1 = \delta$ falsch ist, zeigt übrigens sofort die Annahme $n = 3$. C^7 mit 10 Doppelpunkten kann offenbar nicht so erzeugt werden, nicht einmal C^7 mit 8 Doppelpunkten. Dagegen ist die allgemeine C^7 mit $3n - 2 = 7$ Doppelpunkten durch Büschel (C^3), (C^4) erzeugbar, wie leicht zu beweisen.

De Jonquières schliesst weiter:

C^{2n} mit $3n + 1$ Doppelpunkten lässt sich ebenfalls durch zwei Büschel (C^n), (C^{n+1}) hervorbringen: Nämlich von den willkürlichen $2n^2 - 4n - 1$ Punkten e des Gesammterzeugnisses $2n + 1^{\text{ter}}$ Ordnung nehme man $2n + 2$ auf einer Geraden L an, so wird diese als Bestandtheil sich absondern, und man erhält noch C^{2n} mit $2n^2 - 6n - 3$ willkürlichen e. Da ferner für die C^{2n} mit $3n + 1$ Doppelpunkten

$$\frac{2n(2n+3)}{2} - 3(3n+1) = 2n^2 - 6n - 3$$

einfache Punkte noch frei sind, so wird auf diese Weise die allgemeine C^{2n} hervorgehen.

Das am nächsten liegende Beispiel, an welchem das Illusorische des Verfahrens deutlich hervortritt, ist folgendes:

Es liege C^8 mit $3 \cdot 4 + 1 = 13D$ vor. Ich nehme an, dass durch die D *nur* ∞^1 C^4 möglich sind. Alsdann haben diese C^4 noch drei Punkte g gemein, die nicht in einer Geraden liegen können, weil sonst ∞^2 C^4 durch die D gingen.

Es hat keine Schwierigkeit darzuthun, dass unendlich viele C^8 mit den Doppelpunkten D existiren, welche keinen der drei Punkte g enthalten. Durch die Methode de Jonquières kann nicht eine einzige dieser C^8 erzeugt werden; denn ginge dies an, so müssten die $3g$, von denen keiner auf C^8 ist, in eine Gerade L fallen, was unmöglich ist.

3) Ueber die C^6 mit 8 und 7 Doppelpunkten D.

Wir betrachten zunächst C^7 mit 8 Doppelpunkten D. Der Büschel (C^3), welcher die D zu Grundpunkten hat, liefert noch einen 9ten Punkt g. Wenn die vorgelegte C^7 g enthält, so ist sie projectivisch durch (C^3) nebst einem Büschel (C^4) construirbar, andernfalls ist sie es nicht. Im ersten Falle schneiden die C^3 aus C^7 eine Schaar von vier Punkten, welche die Mannigfaltigkeit 1 hat — $g_4^{(1)}$ —. Diese Schaar lässt sich bekanntlich auch durch Büschel der C^7 adjungirter C^4 ausschneiden, und es haben von den Grundpunkten eines solchen Büschels 3 auf C^7 eine willkürliche Lage. Damit ist die Erzeugung klar. Im zweiten Falle, wo g nicht auf C^7 liegt, würde eine C^3 die C^7 in 5 Punkten schneiden, welche mit den D 13 Punkte der C^3 sind. Da durch diese eine C^4 unmöglich ist, so ist es auch die Erzeugung. Ohne Berücksichtigung des ersten Falles würde man zum Schlusse kommen, dass C^6 mit $8D$ durch 2 Büschel (C^3), (C^4) sich nicht erzeugen lasse. Wegen des hyperelliptischen Charakters von C^6 ist dies aber offenbar doch so, und es wird eine Gerade L mit erzeugt, die durch den Punkt g geht. Man kann folglich — entgegen der Behauptung Jonquières — die allgemeine C^6 mit 8 Doppelpunkten erzeugen, indem man eine durch g gehende Gerade L zugleich miterzeugt.

Um so ausführlich wie möglich zu sein, werde ich zeigen, dass man von einer projectivisch erzeugbaren C^6 ausser den $8D$ noch drei Punkte e_1, e_2, e_3 annehmen kann, und dass sie alsdann auch bestimmt ist. $\mathfrak{C}^6$ bezeichne eine durch die e etwa mögliche Curve, die C^3 schneiden aus ihr ein variabeles Punktepaar, und die ganze Schaar von solchen Paaren kann durch einen Büschel $(C^4)_1$ erhalten werden, der zu Grundpunkten hat die D, $e_1\, e_2\, e_3$ und einen auf $\mathfrak{C}^6$ beliebig gewählten Punkt x_1. Diese beiden Büschel (C^3), $(C^4)_1$ erzeugen nun $\mathfrak{C}^6$ und eine durch g gehende Gerade L_1. Von den Grundpunkten des $(C^4)_1$ fallen ausser den genannten noch 2 auf $\mathfrak{C}^6$, 2 auf L_1. Die Büschel schneiden ferner L_1 in den Paaren einer durch (C^3) schon bestimmten quadratischen Involution j.

Seien jetzt p_1, p_2 zwei Paare von j. Durch D, $e_1\, e_2\, e_3\, p_1$ geht ein Büschel von C^4, der auf L_1 eine Involution j_1 bestimmt, durch $D, e_1\, e_2\, e_3\, p_2$ ein anderer, der die Involution j_2 aus L_1 schneidet. j_1, j_2 haben *ein* gemeinschaftliches Paar Π, welches mit $D\, e_1\, e_2\, e_3$ zu den Grundpunkten eines Büschels $(C^4)_x$ gehört, welcher aus L_1 die j schneidet. Mithin erzeugen (C^3) und $(C^4)_x$ die Gerade L_1 und noch die durch $e_1\, e_1\, e_3$ gehende $\mathfrak{C}^6$. w. z. b. w.

C^6 *mit* 7 *Doppelpunkten* D.

Durch zwei Büschel (C^3), zu deren Grundpunkten die D gehören wird stets die *hyperelliptische Curve* erzeugt, die *allgemeine nicht*. Von dieser allgemeinen C^6 sind 6 Punkte $e_1, e_2 \ldots e_6$ noch willkürlich. Unter (C^3) werde der Büschel verstanden, welcher zu Grundpunkten hat die D, e_1 und einen 9ten Punkt g. Weil die C^6 nicht die hyperelliptische Curve ist, so kann g nicht auf ihr sein, daher werden die C^3 eine Schaar von drei Punkten ausschneiden.

Diese nämliche Schaar kann nun auch durch einen Büschel (C^4) ausgeschnitten werden, zu dessen Grundpunkten die D, $e_2\, e_3\, e_4\, e_5$ gehören. Die Büschel erzeugen hiebei ausser C^6 eine durch g gehende Gerade L, auf welcher zwei Grundpunkte des (C^4) liegen, und welche von den C^3 und C^4 in den Paaren derselben Involution j geschnitten wird. Weil von C^6 der Punkt e_6 gegeben ist, so ist auch L bestimmt. denn die durch e_6 gehenden Curven C^3, C^4 der vorliegenden Büschel müssen sich auf ihr schneiden. Geschieht dies im Punktepaar p, so gehört dieses zu der auf L vorkommenden Involution; die durch p gehende C^4 hat sodann mit L noch 2 Punkte gemein, die beiden auf L befindlichen Grundpunkte von (C^4).

Was endlich die allgemeine C^6 mit sechs D betrifft, so lässt sich stets ein Büschel (C^3) auffinden, von dessen 9 Grundpunkten die D und ein beliebiger Punkt e_1 der C^6 sieben sind, und die beiden fehlenden ebenfalls auf C^6 liegen. Um dies einzusehen braucht man nur C^6 durch das Netz der durch die D und e_1 gehenden C^3 zu transformiren. Somit ist auch die projectivische Erzeugung der C^6 durch zwei Büschel (C^3) zweifellos.

4) Die Betrachtungen des Herrn von Jonquières haben den unbestreitbaren Nutzen, dass sie recht deutlich die Schwäche offenbaren, welche der Methode des blossen Abzählens, auf algebraische Curven angewendet, nothwendig anhaften muss. Wenn man (a. a. O. p. 920) dem Beweise des Autors Glauben schenkt, so sollte kein Zweifel an der Richtigkeit folgender Behauptung bestehen:

Liegen von einer C^{2n-1} *mehr als* $3n - 1 = \delta$ *Doppelpunkte vor, so ist es unmöglich* ***alle*** C^{2n-1}, *welche die* D *zu Doppelpunkten haben können, durch zwei Büschel* (C^n) *mit den Grundpunkten* D *projectivisch zu erzeugen.*

Ein an sich bemerkenswerthes Beispiel wird den Werth erkennen lassen, den diese allgemeine Aufstellung hat. Ist $n = 5$, $2n - 1 = 9$, so giebt es nach der gebrauchten Zählung, für die Annahme $\delta = 18$ eine bestimmte C^9 mit 18 Doppelpunkten D $\left(\frac{9(9+3)}{2} = 3 \cdot 18\right)$. Da $18 > 3 \cdot 5 - 1$, so könnte man nach Jonquières diese C^9 nicht durch zwei Büschel (C^5) construiren. Dies ist ein Irrthum. Auf jedem Hyperboloid F^2 kann man eine Raumcurve R^9 finden, welche die Geraden L der einen Schaar von F^2 zu dreipunktigen, die anderen Geraden L' zu sechspunktigen Secanten hat. Projicirt man R^9 aus irgend einem Punkte des Raumes auf eine Ebene, so erhält man C^9 mit 18 Doppelpunkten D. Die Gruppen von je drei Punkten von R^9 und den L liefern auf C^9 bekanntlich eine Specialschaar $g_3^{(1)}$, welche durch C^6 ausgeschnitten werden kann, die der C^9 adjungirt sind. Ferner ist es ebenso bekannt, dass durch *diese* 18 D sich ∞^3 C^5 legen lassen. abc sei eine Gruppe der $g_3^{(1)}$; dann muss jede durch die D und a, b gehende C^6 auch c enthalten, und hieraus ergiebt sich sofort, dass eine der ∞^3 C^5, welche a enthält auch b, c aufnehmen muss. Mit anderen Worten, durch jede Gruppe der $g_3^{(1)}$ sind noch ∞^2 der C^5 möglich; durch zwei beliebig gewählte Gruppen also noch ∞^1 C^5. So haben wir einen Büschel $(C^5)_1$ gewonnen, dessen Curven C^9 in drei variablen Punkten schneiden, die offenbar die $g_3^{(1)}$ constituiren. Durch einen zweiten, auf analoge Weise erlangten Büschel $(C^5)_2$ denke man ebenfalls die Schaar ausgeschnitten, dann werden die Curven beider Büschel, welche dieselbe Gruppe ausschneiden, einander projectivisch entsprechen, und ausser C^9 noch eine Gerade L erzeugen.

Bei genauerer Untersuchung findet sich: die Gruppen der $g_3^{(1)}$ liegen auf den Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts E^2, und die ∞^1 C^5, welche zwei Gruppen enthalten, gehen auch durch den Schnittpunkt x_1 der beiden Tangenten, welche diese Gruppen tragen. Die Grundpunkte des Büschels $(C^5)_1$ liegen vor in den $18 D$, den beiden angenommenen Gruppen und x_1.

Wenn von einem zweiten Büschel $(C^5)_2$ der 25te Grundpunkt x_2 heisst, so wird $x_1 x_2$ die Gerade L sein; so dass *jede* Gerade der Ebene als L genommen werden kann. Wäre auch das Abzählungsresultat, dass *nur eine* C^9 mit den D existirt, falsch,*) so könnte

*) Den Beweis, dass es hier keine zweite C^9 giebt, unterdrücke ich, weil er zu viel Raum in Anspruch nehmen würde, bemerke aber: δ Doppelpunkte können oft weniger als 3δ Constante einer Curve absorbiren: z. B. Es existirt C^6 mit 9 Doppelpunkten, von welchen jedoch nur 8 willkürliche Lage haben. Obschon $3 \cdot 9 = 27$, so ist C^6 nicht bestimmt, es ist von ihr noch ein einfacher Punkt ganz beliebig. Wenn umgekehrt Relationen der Lage zwischen den Doppelpunkten einer C^m bestehen, so kann doch jeder für drei Bestimmungsstücke der C_m zu rechnen haben. Liegen z. B. 13 Doppelpunkte D von C^8 so,

man doch den Nachweis führen, dass jede solche C^9 als Projection einer Raumcurve R^9, wie wir sie oben angegeben, betrachtet werden darf.

Die C^9 zeigt deutlich, dass für die Möglichkeit der Erzeugung die *Anzahl* der Doppelpunkte selbst dann nicht entscheidend ist, wenn es feststeht, dass ein Doppelpunkt als 3 Bedingungen zu gelten hat; sondern dass es auf die *Lage* derselben, oder besser auf die durch diese Lage bedingten Specialschaaren ankommt.

Prag, 5. Januar 1888.

---

dass noch $\infty^2\, C^4$ durch sie möglich sind, wobei dann nur 11 der D willkürlich angenommen werden dürfen, so beträgt die Mannigfaltigkeit der $C^8 : \infty^5$, ist ebenso gross, als wenn alle D unabhängig von einander sind.

Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen.*)

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

In den nachfolgenden Zeilen beschäftige ich mich namentlich mit der Aufgabe: alle irreducibeln algebraischen Gleichungen

$$f(s, z) = 0$$

zu bestimmen, welche durch eine rationale eindeutig umkehrbare Transformation

$$\begin{cases} s' = \varphi(s, z) \\ z' = \psi(s, z) \end{cases}$$

in sich übergeführt werden können, oder — was offenbar auf dasselbe hinauskommt — alle diejenigen Riemann'schen Flächen (algebraischen Gebilde) anzugeben, auf welchen eine ein-eindeutige algebraische Correspondenz $(s, z;\ s', z')$ existirt. Der Fall, in welchem das Geschlecht p des Gebildes gleich Null oder Eins ist, bildet bei dieser Untersuchung einen leicht für sich zu behandelnden, übrigens seit langem erledigten Ausnahmefall. Ich setze deshalb im Folgenden, wenn ich nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerke, stets voraus, dass das Geschlecht der zu betrachtenden Gebilde grösser ist als Eins.

Die hauptsächlichsten Resultate meiner Untersuchung fasse ich in folgenden Sätzen zusammen:

I. *Jede eindeutige Transformation eines algebraischen Gebildes in sich ist periodisch; d. h. bildet man von irgend einer Stelle P ausgehend die Reihe $P, P', P'', \ldots$, in welcher jede Stelle der unmittelbar vorhergehenden entspricht, so schliesst sich diese Reihe, indem stets etwa die $(n+1)^{\text{te}}$ Stelle $P^{(n)}$ mit der Ausgangsstelle P identisch ist.*

II. *Die Periode n einer eindeutigen Transformation eines algebraischen Gebildes in sich kann eine gewisse von dem Geschlecht p abhängende*

---

*) Abgedruckt aus den Nachrichten von der K. G. d. W. zu Göttingen. 1887. Nr. 6. (Sitzung vom 5. Februar 1887).

Grenze nicht überschreiten. Der grösste Werth, welchen n annehmen kann, ist nämlich gleich $10(p-1)$.

III. *Jedes algebraische Gebilde, welches eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitzt, lässt sich durch eine Gleichung der Gestalt*

$$F(s^n, z) = 0$$

definiren und zwar so, dass zugleich die eindeutige Transformation durch die Formeln

$$\begin{cases} s' = e^{\frac{2i\pi}{n}} s \\ z' = \phantom{e^{\frac{2i\pi}{n}}} z \end{cases}$$

angegeben wird.

Der letzte Satz gilt auch für die Fälle $p = 0$ und $p = 1$.

Die soeben formulirten Sätze beweise ich in der Reihenfolge III, II, I.

1.

Besitzt eine Riemann'sche Fläche, deren Geschlecht einen beliebigen Werth hat, eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n, so lassen sich ihre Stellen in Gruppen von je n, wie

$$P, P', \ldots P^{(n-1)}$$

anordnen von der Beschaffenheit, dass jede Stelle der Gruppe der vorhergehenden und die erste der letzten entspricht. Man bemerke nun vor Allem, dass jede Function der Stelle $P^{(i)}$ auch als Function der Stelle P aufgefasst werden kann. Seien nun S und Z zwei eindeutige algebraische Functionen des Ortes auf unser Fläche,

$$S, S', \ldots S^{(n-1)}$$
$$Z, Z', \ldots Z^{(n-1)}$$

die Werthe, welche diese Functionen an den Stellen

$$P, P', \ldots P^{(n-1)}$$

resp. annehmen. Ferner werde zur Abkürzung

$$\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

gsetzt. Die Grössen

$$\begin{cases} s = S + \varepsilon^{-1} S' + \varepsilon^{-2} S'' + \cdots + \varepsilon^{-(n-1)} S^{(n-1)} \\ z = Z + \phantom{\varepsilon^{-1}} Z' + \phantom{\varepsilon^{-2}} Z'' + \cdots + \phantom{\varepsilon^{-(n-1)}} Z^{(n-1)} \end{cases}$$

stellen dann bestimmte algebraische Functionen der Stelle P vor, welche offenbar die in den Gleichungen

$$\begin{cases} s^{(i)} = \varepsilon^i s \\ z^{(i)} = z \end{cases}$$

ausgesprochene Eigenschaft besitzen. Dabei bezeichnen $s^{(i)}$, $z^{(i)}$ die Werthe, welche s, z an der Stelle $P^{(i)}$ annehmen.

Wenn daher s_0 ein zu $z = z_0$ gehöriger Werth von s ist, so entsprechen *demselben* Werthe von z auch die Werthe εs_0, $\varepsilon^2 s_0 \ldots \varepsilon^{(n-1)} s_0$. Die zwischen s und z bestehende irreducible Gleichung hat also nothwendig die Gestalt

$$F(s^n, z) = 0,$$

d. h. sie enthält die Variable s nur in Potenzen mit durch n theilbaren Exponenten.

Hiermit ist der erforderliche Beweis erbracht. Es ist nur noch ein Punkt zu erledigen: es muss nämlich gezeigt werden, dass bei passender Wahl der vollständig willkürlich gelassenen Functionen S, Z das Werthepaar s, z die einzelne Stelle unserer Riemann'schen Fläche im Allgemeinen eindeutig bestimmt und also die Gleichung $F = 0$ zur Definition des Gebildes hinreicht. Nun wähle man zunächst Z so, dass die Unendlichkeitsstellen dieser Function sich nicht in Gruppen von je n zusammengehörigen Punkten anordnen. Dadurch wird erreicht, dass z sich nicht auf eine Constante reduciren kann. Seien sodann

$$a, a' \ldots a^{(n-1)};\ b, b', \ldots b^{(n-1)};\ \ldots l, l', \ldots l^{(n-1)}$$

die Stellengruppen, an welchen z einen bestimmten Werth z_0 annimmt. Wir bestimmen dann S so, dass die zu $z = z_0$ gehörigen Werthe von s sämmtlich von einander verschieden ausfallen, was auf die mannigfachste Weise dadurch herbeigeführt werden kann, dass wir S passend gewählte Werthe an den Stellen $a, a', \ldots, b, b', \ldots, l, l', \ldots$ aufzwingen. Bei so gewählten Z, S wird aber sicherlich das Werthepaar (s, z) zur Festlegung der einzelnen Stelle der Riemann'schen Fläche ausreichen, weil dieses für die Stellen, an welchen $z = z_0$ ist, zutrifft.

Die vorstehenden Betrachtungen geben zugleich den Weg zur Herstellung der Gleichung $F(s^n, z) = 0$, wenn die Riemann'sche Fläche und ihre Transformation in sich in irgend welcher anderen Form gegeben vorliegt.

2.

Nach dem soeben Bewiesenen lässt sich jede Riemann'sche Fläche, welche eine eindeutige Transformation in sich von der Periode n besitzt, durch eine Gleichung

$$F(s^n, z) = 0 \tag{1}$$

definiren. Es sei nun R_1 die Riemann'sche Fläche, welche zu der Gleichung

$$F(\sigma, \zeta) = 0 \tag{2}$$

gehört, so ist dieselbe auf die ursprüngliche Fläche, welche mit R

bezeichnet werde, $1-n$deutig bezogen, wenn der Stelle s, z von R die Stelle

$$(3) \qquad \sigma = s^n, \quad \zeta = z$$

von R_1 zugeordnet wird. Die Beziehung zwischen beiden Flächen ist offenbar der Art, dass einer Stelle von R_1 die n Stellen einer Gruppe $P, P', \ldots P^{(n-1)}$ auf R entsprechen.

Man beachte nun die Stellen auf R_1, an welchen σ Null oder unendlich wird; die zugehörigen Ordnungszahlen seien

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k,$$

zwischen denen bekanntermassen die Relation

$$(4) \qquad \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k = 0$$

besteht. Wenn nun

$$(5) \qquad \frac{\nu_1}{n} = \frac{\mu_1}{n_1}, \quad \frac{\nu_2}{n} = \frac{\mu_2}{n_2}, \ldots, \frac{\nu_k}{n} = \frac{\mu_k}{n_k}$$

gesetzt wird, wo $\frac{\mu_i}{n_i}$ den in reducirter Form und mit positivem Nenner geschriebenen Bruch $\frac{\nu_i}{n}$ bezeichnet, so findet die Relation statt:

$$(6) \; 2p-2 = (2p_1-2)n + \frac{n}{n_1}(n_1-1) + \frac{n}{n_2}(n_2-1) + \cdots + \frac{n}{n_k}(n_k-1),$$

neben welche ich sogleich die aus (4) folgende:

$$(7) \qquad 0 = \frac{\mu_1}{n_1} + \frac{\mu_2}{n_2} + \cdots + \frac{\mu_k}{n_k}$$

stelle. Der Beweis der Relation (6)*), in welcher p das Geschlecht von R, p_1 das Geschlecht von R_1 bedeutet, ergiebt sich ohne Schwierigkeit, wenn man die über der z-Ebene construirte Fläche R mit der über der ζ-Ebene construirten Fläche R_1 vergleicht. Es sei nun das Geschlecht p eine gegebene Zahl grösser als Eins; dann ergiebt die folgende Discussion der Relationen (6), (7), dass n eine obere von p abhängende Grenze besitzt: Wenn $p_1 \geqq 2$ ist, so folgt unmittelbar aus (6), dass $2p-2 \geqq 2n$ und also

$$(8) \qquad n \leqq p-1$$

ist. Wenn zweitens $p_1 = 1$, so können die Zahlen $n_1, \ldots n_k$ nicht sämmtlich gleich 1 sein, weil sonst $p=1$ folgen würde. Sei etwa

*) Dieselbe steht im Einklang mit der von Herrn Zeuthen (Mathematische Annalen, Bd. 3, pag. 152) aufgestellten Beziehung zwischen den Geschlechtszahlen zweier aufeinander bezogenen algebraischen Curven. Man beachte, dass einer Null- oder Unendlichkeitsstelle von σ mit der zugehörigen Zahl n_k eine Punktgruppe auf R entspricht, deren Punkte zu je $\frac{n}{n_k}$ zusammengefallen sind.

$n_1 \geqq 2$, so muss zufolge (7) nothwendig noch eine weitere der Zahlen n_i, etwa $n_2 \geqq 2$ sein. Daher ergiebt sich nun

$$2p-2 \geqq \frac{n}{n_1}(n_1-1)+\frac{n}{n_2}(n_2-1) \geqq n$$

und also

(9) $$n \overline{\gtrless} 2p-2.$$

Wenn endlich $p_1 = 0$ ist, so ergiebt sich aus (6) zunächst:

(10) $$\frac{2p-2}{n} = r-2-\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n_2}-\cdots-\frac{1}{n_r},$$

falls wir mit $n_1, n_2, \ldots n_r$ diejenigen der Zahlen n_i bezeichnen, welche grösser als 1 sind. Da nun $\frac{2p-2}{n}$ eine positive Grösse ist, so muss r mindestens gleich 3 sein. Für $r \geqq 6$ ist nun, weil $\frac{1}{n_i} \leqq \frac{1}{2}$,

$$\frac{2p-2}{n} \geqq r-2-\frac{r}{2} \geqq 1.$$

Für $r=5$ können wegen (7) nicht sämmtliche Zahlen n_i den Werth 2 annehmen. Dagegen sind zulässig die Combinationen:

$$(n_1, n_2, \ldots n_5) = (2, 2, 3, 3, 3) \quad \text{und} \quad (2, 2, 2, 3, 6),$$

welche $\frac{2p-2}{n} = 1$ ergeben. Alle anderen möglichen Werthsysteme $n_1, \ldots n_5$ machen die rechte Seite von (10) grösser als 1. Es ist also für $r \geqq 5$ stets

(11) $$n \leqq 2p-2.$$

Für $r=4$ bilden die Zahlen $(n_1, \ldots n_4) = (2, 2, 3, 6)$ ein zulässiges System, welches $\frac{2p-2}{n} = \frac{1}{2}$ ergiebt. Bei jeder anderen möglichen Wahl der Zahlen $n_1, \ldots n_4$ fällt die rechte Seite von (10) grösser als $\frac{1}{2}$ aus; also ist $\frac{2p-2}{n} \geqq \frac{1}{2}$ oder

(12) $$n \leqq 4p-4.$$

Für $r=3$ endlich kann $(n_1, n_2, n_3) = (2, 5, 10)$ gesetzt werden und es wird dann $\frac{2p-2}{n} = \frac{1}{5}$, während bei jeder anderen zulässigen Wahl der Zahlen n_1, n_2, n_3 die rechte Seite von (10) grösser als $\frac{1}{5}$ wird. Also ist jetzt

(13) $$n \leqq 10p-10.$$

Die Ungleichungen 8, 9, 11, 12 und 13 zeigen, dass die Periode n einer eindeutigen Transformation der Fläche R in sich die Zahl $10p-10$ nicht überschreiten kann. Zugleich ergiebt sich, dass das Geschlecht p_1 der Fläche R_1 gleich 0 oder 1 ist, wenn n die Zahl $p-1$ überschreitet und dass $p_1 = 0$ sein muss, wenn n grösser wird als $2p-2$.

Ist das Geschlecht $p_1 = 0$, so lassen sich s^n und z als rationale Functionen eines Parameters λ darstellen, welcher so gewählt werden kann, dass sein Werth die einzelne Stelle der Fläche R_1 festlegt. Da bei dieser Annahme das Werthepaar (s, λ) die einzelne Stelle der Fläche R eindeutig bestimmt, so darf $z = \lambda$ angenommen werden, so dass die Fläche R durch eine Gleichung der Gestalt

$$s = \sqrt[n]{(z-a_1)^{\nu_1}(z-a_2)^{\nu_2}\cdots(z-a_r)^{\nu_r}}$$

definirt werden kann. Hier können etwa vorhandene n-fache Factoren unter dem Wurzelzeichen einfach fortgelassen und also $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu^r$ als positive Zahlen $< n$ vorausgesetzt werden. Ueberdies können durch lineare Transformation von z drei der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_r$ irgend vorgeschriebene Werthe, etwa die Werthe $0, 1, \infty$ erhalten.

Diese Bemerkungen in Verbindung mit der obigen Discussion der Gleichung (6) ergeben folgende Sätze:

„*Besitzt eine Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p eine eindeutige Transformation in sich, deren Periode grösser ist als $2p-2$, so lässt sich die Fläche durch die Gleichung*

$$s = \sqrt[n]{z^a(z-1)^b(z-k)^c}$$

definiren; und überschreitet die Periode den Werth $4p-4$, so kann die Fläche durch die Gleichung

$$s = \sqrt[n]{z^a(z-1)^b}$$

definirt werden. Dabei bedeuten a, b, c Zahlen, welche kleiner sind als n.“

Die Existenz einer Transformation von einer $4p-4$ übersteigenden Periode hat hiernach zur Folge, dass sämmtliche $3p-3$ Moduln der Fläche numerische Werthe haben, und bei einer $2p-2$ übersteigenden Periode haben sich alle Moduln der Fläche bis auf einen (k) auf numerische Werthe reducirt.

3.

Zum Beweise des Satzes, dass eine eindeutige Transformation einer Riemann'schen Fläche in sich nothwendig periodisch ist, betrachte ich irgend ein System unabhängiger Integrale erster Gattung der Fläche. Es seien $u_1, u_2, \ldots u_p$ die Werthe welche die Integrale an der Stelle P und $u_1', u_2', \ldots u_p'$ die Werthe, welche sie an der correspondirenden Stelle P' besitzen. Die letzteren Werthe bilden, aufgefasst als Functionen der Stelle P offenbar wieder ein vollständiges System unabhängiger Integrale, was p Gleichungen der Gestalt

$$(1)\qquad du_k' = \pi_{k1}\,du_1 + \pi_{k2}\,du_2 + \cdots + \pi_{kp}\,du_p \quad (k=1, 2, \ldots p)$$

zur Folge hat, wo die Grössen π_{kl} von den Stellen P, P' unabhängig sind*). Indem man nun an Stelle der u geeignete lineare Verbindungen dieser Grössen einführt, kann man nach einem bekannten Satze**) erreichen, dass die Gleichungen (1) folgende Gestalt annehmen:

$$(2)\qquad \begin{cases} du_1' = \varepsilon_1 du_1, \\ du_2' = \varepsilon_2 du_2 + \eta_2 du_1, \\ du_3' = \varepsilon_3 du_3 + \eta_3 du_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ du_p' = \varepsilon_p du_p + \eta_p du_{p-1}. \end{cases}$$

Dabei darf $\eta_2 = 0$ vorausgesetzt werden, wenn ε_1 von ε_2 verschieden ist. Ich betrachte nun die beiden Functionen

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{du_2}{du_1} = z, \\ \dfrac{du_1}{dz} = s, \end{cases}$$

welche eindeutige algebraische Functionen des Ortes P sind. Bezeichnen z', s' die Werthe dieser Functionen an der Stelle P', so ist

$$(4)\qquad \begin{cases} z' = \dfrac{du_2'}{du_1'} = az + b, \\ s' = \dfrac{du_1'}{dz'} = cs, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(5)\qquad a = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},\quad b = \frac{\eta_2}{\varepsilon_1},\quad c = \frac{\varepsilon_1^{\,2}}{\varepsilon_2}$$

gesetzt ist. Die irreducible Gleichung zwischen s und z

$$(6)\qquad f(s, z) = 0$$

hat nun folgende Eigenschaften:

Erstens ist ihr Geschlecht mindestens gleich 1. Denn

$$\int s\, dz = u_1$$

ist eine überall endliche Function. Zweitens geht sie in sich über durch die Transformation (4); es ist also identisch

$$(7)\qquad f(cs, az+b) = \text{const.}\, f(s, z).$$

---

*) Die Gleichungen (1) sind als specieller Fall in den Relationen enthalten, welche ich für irgend eine Correspondenz auf pag. 12 meiner Note: *Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* (Berichte der K. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse, Sitzung am 11. Januar 1886) aufgestellt habe. Diese neuerdings in den Mathematischen Annalen, Bd. 28, wieder abgedruckte Note werde ich in der Folge mit C. citiren.

**) Siehe Hamburger, Crelle's Journal Bd. 76, pag. 113.

Hieraus lässt sich nun folgern, dass $b = 0$ und dass a und c Einheitswurzeln sein müssen. Sei nämlich

$$f(s, z) = \Sigma_i s^i \varphi_i(z),$$

so folgt aus (7), dass

$$\varphi_i(az + b) = \text{const.}\ \varphi_i(z) \tag{8}$$

sein muss. Ist nun b nicht gleich Null, so ist $a = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1$ und wegen (8) zieht jede Wurzel z_0 der Gleichung $\varphi_i(z) = 0$ die unendlich vielen Wurzeln $z_0 + b$, $z_0 + 2b, \ldots$ nach sich. Folglich muss sich $\varphi_i(z)$ auf eine Constante reduciren. Dann würde aber $f(s, z)$ von z unabhängig sein, was widersinnig ist. Daher ist die Annahme, b sei nicht gleich Null, unzulässig.

Wenn nun $s^\nu z^\mu$ und $s^{\nu'} z^{\mu'}$ irgend zwei verschiedene in $f(s, z)$ vorkommende Terme bedeuten, so muss wegen (7)

$$c^\nu a^\mu = c^{\nu'} a^{\mu'} \tag{9}$$

und also $c^{\nu - \nu'} = a^{\mu' - \mu}$ sein. Daher kann man

$$c = t^q, \quad a = t^r \tag{10}$$

setzen, unter r und q ganze Zahlen verstanden, und Gleichung (9) geht über in

$$t^{r\mu + q\nu} = t^{r\mu' + q\nu'}.$$

Angenommen nun t sei keine Einheitswurzel, so folgt:

$$r\mu + q\nu = r\mu' + q\nu'$$

und die Gleichung $f(s, z) = 0$ wird daher identisch befriedigt, wenn

$$\begin{cases} s = s_0 \cdot \lambda^q \\ z = z_0 \cdot \lambda^r \end{cases}$$

gesetzt wird, wo λ einen Parameter und s_0, z_0 irgend ein $f(s, z) = 0$ befriedigendes Werthepaar bezeichnen. Dieses widerstreitet aber dem Umstande, dass $f(s, z) = 0$ mindestens das Geschlecht 1 besitzt und folglich ist die Annahme, t sei keine Einheitswurzel, unzulässig. Mit t sind aber zufolge (10) auch a und c und mit letzteren zufolge (5) auch ε_1 und ε_2 Einheitswurzeln. Dieselbe Betrachtung auf die beiden Integrale u_2, u_3 angewandt, ergiebt dass $\eta_3 = 0$ und ε_3 eine Einheitswurzel sein muss u. s. f. *Das Gleichungssystem* (2) *hat also nothwendig die Gestalt:*

$$\begin{cases} du_1' = \varepsilon_1 du_1, \\ du_2' = \varepsilon_2 du_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ du_p' = \varepsilon_p du_p, \end{cases} \tag{11}$$

unter $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$ *Einheitswurzeln verstanden.*

Bildet man nun von irgend einer Stelle P ausgehend die Stellenreihe $P, P', \ldots P^{(n-1)}, \ldots$ mit der Massgabe, dass jede folgende Stelle der unmittelbar vorhergehenden entsprechen soll, so ist

$$du_1^{(n)} = du_1, \; du_2^{(n)} = du_2, \ldots du_p^{(n)} = du_p,$$

wenn n eine Zahl bezeichnet, für welche die Potenzen

$$(12) \qquad \varepsilon_1^n = \varepsilon_2^n = \cdots = \varepsilon_p^n = 1$$

werden. Daher ist die Stelle $P^{(n)}$ mit der Stelle P identisch und also in der That, wie behauptet wurde, die eindeutige Transformation periodisch. Der Werth der Periode ist offenbar gleich der *kleinsten* positiven Zahl n, für welche die Gleichungen (12) erfüllt sind*).

4.

In dieser Nummer entwickle ich einen allgemeinen Satz über Correspondenzen, aus welchem sich ein neuer Beweis für die Periodicität der eindeutigen Transformationen eines Gebildes in sich ergeben wird. — Zwischen zwei Stellen x, y einer Riemann'schen Fläche möge eine algebraische Correspondenz bestehen, vermöge welcher jeder Stelle x α Lagen $y', y'', \ldots y^{(\alpha)}$ von y und umgekehrt jeder Stelle y β Lagen $x', x'', \ldots x^{(\beta)}$ von x entsprechen. Bilden dann $u_1, u_2, \ldots u_p$ ein System überall endlicher Normalintegrale der Fläche, so bestehen die Relationen

$$(1) \qquad \sum_r^{\alpha}{}_{1} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k, \quad (k=1, 2, \ldots p),$$

wo die Constanten π_{kl} den Gleichungen

$$(2) \qquad \pi_{kl} = h_{kl} + \sum_i g_{il} a_{ki}, \quad \sum_i \pi_{ki} a_{il} = H_{kl} + \sum_i G_{il} a_{ki}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots p)$$

genügen. Dabei bedeuten die Zeichen h, g, H, G ganze Zahlen und

*) Auf den sich hier anschliessenden Satz, dass eine Riemann'sche Fläche ($p > 1$) eine unendliche Zahl von eindeutigen Transformationen in sich nicht besitzen kann, hoffe ich demnächst zurückzukommen. Man vgl. wegen desselben Klein und Poincaré im 7ten Bande der Acta Mathematica p. 16—19. Der Satz, dass eine *continuirliche* Schaar von eindeutigen Transformationen bei $p > 1$ nicht existiren kann, lässt sich leicht aus den Entwicklungen des Textes ableiten. Auf diesen Satz beziehen sich die Aufsätze von H. A. Schwarz (Crelle's Journal, Bd. 87, pag. 139), Hettner (Göttinger Nachrichten, 1880, pag. 386) und Nöther (Mathematische Annalen, Bd. 20, pag. 59 und Bd. 21, pag. 138). — Die letzte Angabe bedarf insofern einer Berichtigung, als Herr Nöther (a. a. O.), sich nicht auf die Betrachtung *continuirlicher* Schaaren von eindeutigen Transformationen beschränkt, sondern in voller Allgemeinheit nachweist, dass ein algebraisches Gebilde ($p > 1$) eine unendliche Anzahl eindeutiger Transformationen in sich nicht besitzen kann. [Januar 1888.]

die Normalintegrale sind so bestimmt, dass sie die in folgender Tabelle angegebenen primitiven Periodicitätsmoduln besitzen:

$$\begin{array}{l}
u_1 \ldots 1, 0, \ldots 0, a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1p}, \\
u_2 \ldots 0, 1, \ldots 0, a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2p}, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
u_p \ldots 0, 0, \ldots 1, a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{pp}.
\end{array}$$

Ferner durchläuft der Summationsbuchstabe i, wie stets in der Folge, die Werthe $1, 2, \ldots p$. Endlich bezeichnen π_k Constante, welche von der Wahl der Anfangswerthe der Integrale abhängen. Wegen des Beweises der Gleichungen (1) und (2) sehe man C. § 1.

Es soll nun untersucht werden, unter welcher Bedingung das System der Zahlen $\begin{vmatrix} h, & g \\ H, & G \end{vmatrix}$ den in der Theorie der Transformation der ϑ-Functionen auftretenden Gleichungen*):

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_i (h_{il}\, g_{ik} - g_{il}\, h_{ik}) = \sum_i (H_{il} G_{ik} - G_{il} H_{ik}) = 0 \\ \sum_i (h_{il} G_{ik} - g_{il} H_{ik}) = - \sum_i (H_{il}\, g_{ik} - G_{il}\, h_{ik}) = \begin{cases} 0 & \text{für } l \gtrless k, \\ m & \text{für } l = k, \end{cases} \end{cases}$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots p)$$

Genüge leistet. Dabei bedeutet m eine positive ganze Zahl, die „Ordnung“ der Transformation.

Zu dem Ende bemerke ich zunächst, dass sich neben die Gleichungen (1), (2) zwei weitere Systeme von derselben Gestalt stellen, nämlich:

$$(4) \qquad \sum_{s}^{1 \ldots \beta} u_k(x^s) = \sum_i \pi'_{ki} u_i(y) + \pi'_k, \quad (k = 1, 2, \ldots p)$$

$$(5) \qquad \pi'_{kl} = h'_{kl} + \sum_i g'_{il} a_{ki}, \quad \sum_i \pi'_{ki} a_{il} = H'_{kl} + \sum_i G'_{il} a_{ki},$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots p)$$

wobei die Zahlen h', g', H', G' mit den Zahlen h, g, H, G durch die Gleichungen:

$$(6) \qquad h'_{kl} = G_{lk}, \quad g'_{il} = -g_{li}, \quad H'_{kl} = -H_{lk}, \quad G'_{il} = h_{li}$$

verbunden sind**).

*) Siehe z. B. Weber, „Ueber die Transformationstheorie der Theta-Functionen, insbesondere derer von drei Veränderlichen“ Annali di Matematica, Serie II, Bd. 9, pag. 126.

**) Vgl. C. § 10, zweite Anmerkung. Der Beweis der Gleichungen (6) ergiebt sich durch Betrachtung des Begrenzungsintegrales: $\int u_k(x)\, d \lg C(x, y)$. Die Bedeutung von $C(x, y)$ siehe in C. § 3.

Es sei nun x irgend eine Stelle der Riemann'schen Fläche, $y', y'', \ldots y^{(\alpha)}$ die correspondirenden Lagen von y. Der Stelle $y^{(r)}$ werden rückwärts ausser der Stelle noch $\beta - 1$ andere Stellen entsprechen, welche mit $x_r', x_r'', \ldots x_r^{(\beta-1)}$ bezeichnet werden mögen. Dann bestehen nach (4) die Gleichungen

$$(7) \quad u_k(x) + \sum_{1}^{\beta-1}{}_s u_k(x_r^s) = \sum_i \pi'_{ki} u_i(y^r) + \pi_k' \quad (k=1,2,\ldots p).$$

Die Summation über $r = 1, 2, \ldots \alpha$ ergiebt unter Berücksichtigung von (1):

$$(8) \quad \alpha u_k(x) + \sum_{1}^{\alpha}{}_r \sum_{1}^{\beta-1}{}_s u_k(x_r^s) = \sum_i \pi''_{ki} u_i(x) + \pi''_k \quad (k=1,2,\ldots p),$$

wenn

$$(9) \qquad \pi''_{ki} = \sum_i \pi'_{ki}\, \pi_{ii}$$

gesetzt wird. Nun ist, den Gleichungen (2), (5), (6) zufolge:

$$(10) \quad \pi''_{ki} = h''_{ki} + \sum_i g''_{ii} a_{ki}, \quad \sum_i \pi''_{ki} a_{ii} = H''_{ki} + \sum_i G''_{ii} a_{ki}$$

unter h'', g'', H'', G'' die folgenden Zahlen verstanden:

$$(11) \begin{cases} h''_{ki} = \sum_i (\,h_{li} G_{ik} - g_{li} H_{ik}), & g''_{ki} = -\sum_i (\,h_{li} g_{ik} - g_{li} h_{ik}) \\ H''_{ki} = \sum_i (H_{li} G_{ik} - G_{li} H_{ik}), & G''_{ki} = -\sum_i (H_{li} g_{ik} - G_{li} h_{ik}). \end{cases}$$

Die Relationen (3) sind hiernach dann und nur dann erfüllt, wenn $h''_{11} = h''_{22} = \cdots = h''_{pp} = G''_{11} = G''_{22} = \cdots = G''_{pp} = m$ und alle übrigen Zahlen h'', g'', H'', G'' verschwinden, oder was hiermit gleichbedeutend ist, wenn das Gleichungssystem (8) sich auf die Form:

$$(12) \quad \alpha u_k(x) + \sum_{1}^{\alpha}{}_r \sum_{1}^{\beta-1}{}_s u_k(x_r^s) = m u_k(x) + \pi_k'' \quad (k=1, 2, \ldots p)$$

reducirt. Dieses findet nun immer Statt, wenn $\beta = 1$, also die Correspondenz $(\alpha, 1)$ deutig ist; denn dann kommt das Summenglied auf der linken Seite von (8) einfach in Wegfall und es muss sich daher wegen der Unabhängigkeit der Integrale die rechte Seite auf $\alpha u_k(x)$ reduciren. Unter Benutzung einer von Herrn Frobenius*) eingeführten Terminologie ergiebt sich also:

*) „Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln", Crelle's Journal, Bd. 95, pag. 264.

Diese Transformationen sind zuerst untersucht von Herrn Kronecker in dem Aufsatze: „Ueber bilineare Formen", Berichte der Berliner Akademie vom 15. October 1866, oder Crelle's Journal Bd. 68. Man sehe auch Weber, *Existirt auf einer Riemann'schen Fläche eine* (α, 1)-*deutige Correspondenz, so entspricht derselben stets eine principale Transformation von der* α^{ten} *Ordnung der zur Fläche gehörigen* ϑ-*Function.*

Insbesondere folgt für $\alpha = 1$:

Einer eindeutigen Transformation eines algebraischen Gebildes in sich entspricht stets eine lineare principale Transformation der zu dem Gebilde gehörigen ϑ-*Function.*

Im Allgemeinen, d. h. wenn über die Zahlen α, β keine Voraussetzung gemacht wird, lassen sich die Gleichungen (12) offenbar folgendermassen deuten:

Ist auf einer Riemann'schen Fläche eine (α, β) Correspondenz gegeben, so leite man aus derselben eine neue Correspondenz ab, indem man je zwei Stellen x, x' einander zuordnet, welche derselben Stelle y correspondiren. Diese neue Correspondenz muss nun eine Werthigkeits-Correspondenz*) sein, deren Werthigkeit γ kleiner ist als α, falls der ursprünglichen Correspondenz eine principale Transformation der zur Fläche gehörigen ϑ-Function entsprechen soll. Die Ordnung dieser Transformation ist dann

$$m = \alpha - \gamma.$$

5.

Dem soeben citirten Aufsatze des Herrn Frobenius entnehme ich nun die folgenden Sätze**):

Die zu einer principalen Transformation gehörige „charakteristische" Determinante

$$(1)\quad D = \begin{vmatrix} h_{11}-r, & h_{12}, \cdots h_{1p} & , g_{11} & , g_{12}, \cdots g_{1p} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\cdot & \cdot & \cdot \;\cdots\cdot \\ h_{p1} & , h_{p2}, \cdots h_{pp}-r, & g_{p1} & , g_{p2}, \cdots g_{pp} \\ H_{11} & , H_{12}, \cdots H_{1p} & , G_{11}-r, & G_{12}, \cdots G_{1p} \\ \cdot & \cdot \;\cdots\cdot & \cdot & \cdot \;\cdots\cdot \\ H_{p1} & , H_{p2}, \cdots H_{pp} & , G_{p1} & , G_{p2}, \cdots G_{pp}-r \end{vmatrix}$$

besitzt lauter lineare Elementartheiler und die $2p$ Werthe von r für welche D verschwindet, haben sämmtlich den absoluten Betrag $\sqrt{m}$.

Einer Correspondenz (α, β), zu welcher die Gleichungssysteme

l. c. und Wiltheiss: „Ueber Thetafunctionen, die nach einer Transformation in ein Product von Thetafunctionen zerfallen", Mathematische Annalen Bd. 26, pag. 127.

*) Siehe C. §. 2.

**) pag. 273, 281 und 282.

(1) (2) der vorigen Nummer gehören, entspreche eine principale Transformation. Führt man dann an Stelle der $u_1, u_2, \dots u_p$ p geeignete lineare Verbindungen dieser Grössen ein und bezeichnet diese Verbindungen wieder mit $u_1, u_2, \dots u_p$, so stellt sich das Gleichungssystem (1) der vorigen Nummer in der Form dar:

$$(2) \qquad \sum_1^{\alpha}{}_r u_k(y^r) = \varepsilon_k u_k(x) + \pi_k, \quad (k=1, 2, \dots p),$$

wo die p Grössen ε_k zusammen mit ihren conjugirt complexen Werthen die Wurzeln r der Gleichung $D = 0$ ausmachen. Ist insbesondere $m = 1$, so sind die Grössen ε_k' sämmtlich Einheitswurzeln. Da nun, wie oben gezeigt, einer (1, 1) Correspondenz *immer* eine principale Transformation mit $m = 1$ entspricht, so folgt, dass für jede solche Correspondenz p linear unabhängige Integrale erster Gattung bestimmt werden können, welche den Gleichungen

$$(3) \qquad u_k(y) = \varepsilon_k u_k(x) + \pi_k \quad (k = 1, 2, \dots p)$$

genügen, wenn x und y irgend zwei correspondirende Stellen und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_p$ Einheitswurzeln bezeichnen. Diese Gleichungen unterscheiden sich aber nur in der Schreibweise von den Gleichungen (11) der Nummer 3, aus welchen unmittelbar die Periodicität der mit der Correspondenz gleichbedeutenden eindeutigen Transformation gefolgert werden konnte.

6.

Hier mögen nun noch einige Bemerkungen über das zu irgend einer (1, 1) Correspondenz gehörige Gleichungssystem

$$(1) \qquad du_k' = \varepsilon_k du_k, \quad (k=1, 2, \dots p)$$

Platz finden, welches ich jetzt wieder in der bequemeren Schreibweise der Nr. 3 angesetzt habe.

Bezeichnet K die Zahl der Coincidenzen der Correspondenz, so ist (nach C. § 10)

$$K = 2 - (h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \cdots + G_{pp}).$$

Andererseits ist die auftretende Klammergrösse gleich der Summe der Wurzeln der Gleichung $D = 0$, also gleich

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_p + \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + \cdots \varepsilon_p^{-1}.$$

Es drückt sich also die Zahl der Coincidenzen der Correspondenz durch die Formel aus:

$$(2) \quad K = 2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \cdots - \varepsilon_p - \varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1} - \cdots + \varepsilon_p^{-1}.$$

Da die Summe $\sum_{1}^{p}{}_{k}(\varepsilon_k + \varepsilon_k^{-1})$ einer ganzen Zahl gleich ist, so können in dem Gleichungssystem (1) nur gewisse Combinationen von Einheitswurzeln auftreten. Ich will in dieser Hinsicht nur den Fall näher betrachten, wo die Periode n eine Primzahl ist. Sei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so werden von den Zahlen ε_k etwa m_0 gleich $\varepsilon^0 = 1$, m_1 gleich $\varepsilon^1, \ldots m_{n-1}$ gleich ε^{n-1} werden, wo natürlich

(3) $$m_0 + m_1 + \cdots m_{n-1} = p$$

ist. Die Formel (2) ergiebt nun

(4) $$K = 2 - 2m_0 - [(m_1 + m_{n-1})\varepsilon + (m_2 + m_{n-2})\varepsilon^2 + \cdots + (m_{n-1} + m_1)\varepsilon^{n-1}].$$

Wegen der Irreducibilität der Gleichung $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$ ist daher nothwendig

(5) $$m_1 + m_{n-1} = m_2 + m_{n-2} = \cdots = m_{\frac{n-1}{2}} + m_{\frac{n+1}{2}}.$$

Wenn also n eine Primzahl ist, treten irgend zwei conjugirt imaginäre complexe Einheitswurzeln zusammengenommen im Gleichungssystem (1) gerade so oft auf, wie irgend zwei andere. Der gemeinsame Werth der Zahlen (5) findet sich aus (3) gleich $2 \cdot \frac{p - m_0}{n - 1}$, so dass

(6) $$K = 2 - 2m_0 + 2 \cdot \frac{p - m_0}{n - 1}$$

wird.

Die Anzahl derjenigen Einheitswurzeln ε_k, welche sich auf $+1$ reduciren, hat in allen Fällen (ich lasse jetzt die Beschränkung, dass n eine Primzahl sei, wieder fallen) eine einfache Bedeutung. Sie ist nämlich stets gleich dem Geschlecht p_1 der durch die Gleichung

$$F(\sigma, \zeta) = 0$$

definirten Fläche R_1 (vgl. Nr. 2). Zum Beweise bemerke ich zunächst, dass jede Function der Stelle P auf der Fläche R auch als Function der entsprechenden Stelle auf der Fläche R_1 (und umgekehrt) angesehen werden kann. In diesem Sinne ist jedes überall endliche Integral von R, welches die Gleichung $du' = du$ erfüllt, auch ein überall endliches Integral von R_1 und umgekehrt befriedigt jedes überall endliche Integral von R_1, aufgefasst als ein Integral der Fläche R, die Gleichung $du' = du$*).

---

*) Diese Betrachtung ergiebt zugleich diejenigen Integrale der ursprünglichen Fläche, welche sich, infolge der eindeutigen Transformation der Fläche in sich, auf ein niederes Geschlecht reduciren.

Die Bedingung dafür, dass $p_1 = 0$ ist, lässt sich hiernach dahin aussprechen, dass sich keine der Einheitswurzeln ε_k auf die positive Einheit reduciren darf.

Sollen die Einheitswurzeln ε_k sämmtlich unter einander gleich werden, so ist dieses nicht anders möglich, als dass sie sämmtlich den Werth -1 besitzen; die Riemann'sche Fläche ist dann hyperelliptisch und die Correspondenz ordnet immer zwei solche Stellen einander zu, in welchen die zweiwerthige Function der Fläche denselben Werth annimmt. Denn unter der Voraussetzung $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_p$ folgt aus den Gleichungen (1), dass jedes an der Stelle P von der zweiten Ordnung verschwindende Differential erster Gattung auch an der Stelle P' von der zweiten Ordnung Null ist, woraus alles Weitere sich leicht ergiebt.

7.

Die Aufgabe, alle Riemann'schen Flächen eines gegebenen Geschlechtes p zu bestimmen, welche eine eindeutige Transformation in sich zulassen, kann man dadurch lösen, dass man alle Gleichungen

$$F(s^n, z) = 0$$

bestimmt, welche das vorgegebene Geschlecht besitzen, wobei natürlich zwei Gleichungen, welche in dieselbe Classe gehören, als nicht verschieden angesehen werden. Die Entwicklungen der Nr. 2 lassen leicht erkennen, dass die Bestimmung der wirklich verschiedenen Gleichungen durch eine endliche Zahl von Versuchen erreicht werden kann. Dieselbe Aufgabe lässt sich auch in der Weise behandeln, dass man die Riemann'sche Fläche durch diejenige Curve im Raume von $p-1$ Dimensionen dargestellt denkt, welche durch den Punkt

$$x_1 : x_2 : \cdots : x_p = du_1(x) : du_2(x) : \cdots : du_p(x)$$

durchlaufen wird, wenn die Stelle x die Riemann'sche Fläche beschreibt*).

Bei diesem Ansatze reducirt sich, den Gleichungen (11) in Nr. 3 zufolge, die Aufgabe darauf, alle diejenigen der genannten Curven herzustellen, deren Gleichungen in sich übergehen, wenn die Coordinaten mit bestimmten Einheitswurzeln multiplicirt werden.

Dieser zweiten Behandlungsweise entziehen sich freilich die hyperelliptischen Gebilde. Letztere lassen sich aber leicht auf folgende Weise

*) Siehe wegen dieser Darstellung der Riemann'schen Flächen: Weber: „Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle", Mathematische Annalen Bd. 13 und namentlich Nöther: „Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen", ib. Bd. 17.

direct behandeln. Es werde angenommen, dass ein hyperelliptisches Gebilde ($p > 1$) ausser der stets vorhandenen eindeutigen Transformation, welche die Punkte gleichen Werthes der zweiwerthigen Function einander zuordnet, noch eine weitere eindeutige Transformation in sich zulasse. Da die zweiwerthige Function z, abgesehen von einer linearen Substitution, welcher dieselbe noch unterworfen werden kann, eindeutig bestimmt ist, so muss

$$(1) \qquad z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

sein, wenn z, z' die Werthe der zweiwerthigen Function an entsprechenden Stellen P, P' bedeuten. Nun ist aber die Transformation periodisch und folglich kann durch eventuelle Einführung einer gebrochenen linearen Function von z an Stelle von z erreicht werden, dass die Gleichung (1) die einfache Gestalt annimmt:

$$(2) \qquad z' = \varepsilon \cdot z,$$

unter ε eine n^{te} Einheitswurzel verstanden. Dabei ist ε von 1 verschieden und also $n > 1$, weil anderenfalls die Transformation mit der bei einem hyperelliptischen Gebilde stets vorhandenen zusammenfallen würde. Sei nun

$$(3) \qquad s = \sqrt{R(z)}$$

die Definitionsgleichung der Fläche, so ist

$$(4) \qquad \frac{dz'}{s'} = \frac{\varepsilon \cdot dz}{\sqrt{R(\varepsilon z)}} = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{R(z)}{R(\varepsilon z)}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

und dieser Ausdruck muss ein Differential erster Gattung sein. Also ist $\sqrt{\frac{R(z)}{R(\varepsilon z)}}$ eine rationale ganze Function von z und folglich eine Constante, so dass

$$(5) \qquad R(\varepsilon z) = \text{const.}\ R(z)$$

wird. Die ganze Function $R(z)$ kann also nur solche Potenzen von z enthalten, deren Exponenten (mod. n) congruent sind und folglich ist entweder $R(z) = R_1(z^n)$ oder $R(z) = z \cdot R_1(z^n)$. Im ersten Falle wird $s' = \pm s$, im zweiten $s' = \pm \varepsilon^{\frac{1}{2}} \cdot s$. Es ergiebt sich also der Satz:

„Jede hyperelliptische Fläche, welche ausser der stets vorhandenen eindeutigen Transformation in sich noch eine weitere solche Transformation besitzt, lässt sich durch eine der beiden Gleichungen

$$s^2 = R(z^n),$$
$$s^2 = z \cdot R(z^n)$$

definiren, dergestalt, dass jene Transformation durch die Formeln:

$$z' = \varepsilon z, \quad s' = \eta s$$

im ersten, und

$$z' = \varepsilon z, \quad s' = \eta \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} s$$

im zweiten Falle angegeben wird. Dabei bezeichnet η einen der Werthe ± 1 und ε eine von $+1$ verschiedene n^{te} Einheitswurzel."

8.

Besitzt eine Riemann'sche Fläche eindeutige Transformationen in sich, so bildet die Gesammtheit der letzteren eine Gruppe, indem die Zusammensetzung je zweier Transformationen (P, P'), (P', P'') eine dritte Transformation (P, P'') ergiebt. Die Gruppe dieser Transformationen ist für $p > 1$ stets eine endliche und es erwächst die Aufgabe, für ein gegebenes Geschlecht alle Möglichkeiten, welche sich hier darbieten können, zu discutiren. Die in der vorigen Nummer besprochene Aufgabe geht aus der jetzt formulirten offenbar durch die Einschränkung hervor, dass man nur cyklische Gruppen betrachten will. Indem ich mich, was die allgemeine Aufgabe betrifft, mit der Bemerkung begnüge, dass eine grosse Zahl von ausführlich studirten Beispielen algebraischer Gebilde mit Gruppen eindeutiger Transformationen in sich in der Litteratur über Modulfunctionen*) vorliegt, möchte ich hier noch einige Sätze entwickeln, welche sich auf eine gewissermassen umgekehrte Fragestellung beziehen und die, wie mir scheint, für die Gleichungstheorie von Wichtigkeit sind.

Es sei irgend eine endliche Gruppe von N Operationen gegeben. Dann giebt es stets algebraische Gebilde, welche eine Gruppe eindeutiger Transformationen in sich besitzen, welche mit jener Gruppe von N Operationen holoedrisch isomorph ist.

Zum Beweise bemerke ich zunächst, dass jeder Gruppe von N Operationen eine holoedrisch isomorphe Gruppe von N Vertauschungen

---

*) Ich nenne hier statt aller nur die den vorliegenden Betrachtungen am nächsten stehende Arbeit von W. Dyck: „Ueber Aufstellung und Untersuchung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen", Mathematische Annalen Bd. 17, pag. 473. Wegen der weiteren im Texte entwickelten Ideen vergleiche man folgende Publicationen von F. Klein: „Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade", Mathematische Annalen Bd. 15, pag. 251; „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade" (Leipzig, 1884), sowie den neuerdings erschienenen Aufsatz: „Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades", Mathematische Annalen, Bd. 28, pag. 499.

von ebensovielen Dingen entspricht. Man bezeichne nämlich die Operationen mit

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_{N-1},$$

dann werden die Operationen

$$x_i x_0,\ x_i x_1,\ \ldots\ x_i x_{N-1}$$

in irgend einer Reihenfolge mit den ursprünglichen Operationen identisch sein. Ordnet man nun der Operation x_i diejenige Vertauschung der Buchstaben $x_0, x_1, \ldots x_{N-1}$ zu, welche x_k durch $x_i x_k$ ersetzt, so wird das hierdurch definirte System von Vertauschungen der vorgelegten Gruppe holoedrisch isomorph sein. Deutet man jetzt

$$x_0 : x_1 : x_2 : \cdots : x_{N-1}$$

als Coordinaten eines Raumes von $N-1$ Dimensionen und bildet irgend eine algebraische Curve dieses Raumes, welche in sich übergeht, wenn die Coordinaten $x_0, x_1, \ldots x_{N-1}$ den genannten Vertauschungen unterworfen werden, so wird diese Curve offenbar ein algebraisches Gebilde von der im Satze angegebenen Beschaffenheit definiren.

Die in diesem Beweise zugleich enthaltene Methode zur Herstellung der betreffenden algebraischen Gebilde wird man in besonderen Fällen natürlich durch einfachere Methoden ersetzen können. Handelt es sich beispielsweise um die Gruppe der Vertauschungen von n Dingen $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$, so wird die durch die $n-2$ Gleichungen:

$$\begin{cases} y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} = 0 \\ y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_0^{n-2} + y_1^{n-2} + \cdots + y_{n-1}^{n-2} = 0 \end{cases}$$

definirte einfach ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeit die in den Vertauschungen der y bestehenden eindeutigen Transformationen in sich zulassen.

Bei einer vorgelegten Gruppe wird es sich nun darum handeln, die einfachsten algebraischen Curven aufzufinden, welche eine isomorphe Gruppe eindeutiger Transformationen besitzen. Als solche *einfachste* Curven definire ich diejenigen, welche das kleinst mögliche Geschlecht aufweisen. Dieses Minimalgeschlecht kann, da es durch die Gruppe eindeutig bestimmt ist, als das *„Geschlecht der Gruppe“* bezeichnet werden. Z. B. hat die Gruppe der geraden Vertauschungen von fünf Dingen das Geschlecht Null, weil es eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht Null — die Kugel — giebt, welche ein holoedrisch isomorphes System von eindeutigen Transformationen — das System der Ikosaedersubstitutionen — zulässt.

Wenn das Geschlecht einer Gruppe gleich p ist, so giebt es immer ein der Gruppe holoedrisch isomorphes System linearer Substitutionen bei p homogenen Variabeln und ein solches System ganzzahliger linearer Substitutionen bei $2p$ Variabeln.

Denn jeder eindeutigen Transformation einer Riemann'schen Fläche in sich entspricht eine lineare homogene Substitution der p Differentiale erster Gattung $du_1, du_2, \ldots du_p$ und eine principale Transformation der zugehörigen ϑ-Function.

Königsberg i. Pr., den 12. März 1887.

INHALT.

☞ Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. Felix Klein
zu Göttingen.

Prof. Walther Dyck
zu München.

Prof. Adolph Mayer
zu Leipzig.

XXXII. Band. 3. Heft.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Elementarer Beweis für die Darstellbarkeit der elliptischen Functionen als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen.

Von

ADOLF KNESER in Breslau.

In seinem Werke „Traité des fonctions elliptiques“ (Paris 1886) hat Herr Halphen die Theorie der elliptischen Functionen von den Integralen ausgehend vollständig und strenge durchgeführt, ohne irgendwelche Sätze der eigentlichen Functionentheorie, insbesondere ohne den allgemeinen Begriff des analytischen Zusammenhangs und die Theorie des Integrals mit complexem Integrationswege als bekannt vorauszusetzen; vielmehr werden neben den Grundbegriffen der Differenzial- und Integralrechnung nur die einfachsten Sätze über das Operiren mit convergenten Potenzreihen angewandt. Bei dieser Darstellungsweise werden einige Weitläufigkeiten dadurch verursacht, dass z. B. die Function $\wp u$ zunächst nur für reelle Argumente, dann durch neue Definitionen successive für rein imaginäre und complexe Argumente erklärt werden, und jedesmal für die definirte allgemeinere Function das Fortbestehen der Fundamentaleigenschaften, insbesondere die Gültigkeit des Additionstheorems nachgewiesen werden muss. Analoge Entwicklungen müssen für die Function ζu, d. h. das Integral zweiter Gattung als Function des Integrals erster Gattung, sowie für die Function σu durchgeführt werden, und gestalten sich besonders bei letzterer etwas unübersichtlich.

Diese Betrachtungen können, ohne den Kreis der von Herrn Halphen benutzten elementaren Beweismittel zu verlassen, dadurch abgekürzt werden, dass man zwar zunächst die zu untersuchenden Functionen von den Integralen ausgehend für ein beschränktes Gebiet reeller Argumente definirt, sie dann aber gleich zu Anfang der Theorie durch Potenzreihen oder Quotienten von Potenzreihen darstellt, welche sich als beständig convergent erweisen, also auch noch über jenes beschränkte Gebiet hinaus einen bestimmten Sinn behalten; diese Reihen liefern dann offenbar in der einfachsten Weise die erweiterte Definition der betrachteten Functionen für beliebige Werthe des Arguments. Dass die so erhaltenen allgemeineren Functionen dieselben Fundamentaleigenschaften besitzen, wie die zuerst eingeführten specielleren, ergiebt sich allgemein auf Grund des Satzes, dass eine Potenzreihe in ihrem ganzen Convergenzbereich den Werth Null hat, wenn dies für ein beschränktes Gebiet reeller Argumente der Fall ist.

Die hiermit angedeutete Methode, die elliptischen Functionen beliebiger Argumente einzuführen, ist im Wesentlichen von Herrn Weierstrass in § 9 seiner „Theorie der Abel'schen Functionen" (Crelle's Journal Bd. LII p. 346) angegeben, wo insbesondere ein ganz elementarer Beweis für die Darstellbarkeit der Jacobi'schen Functionen sinam etc. als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen geliefert wird. Ein von dem Weierstrass'schen verschiedener Beweis dieser Darstellbarkeit, der sich eng an die Rechnungen der „Fundamenta nova" anschliesst, bildet den Inhalt der ersten Paragraphen der vorliegenden Abhandlung; sodann werden die analogen Entwicklungen für die Functionen $\wp u$, ζu, σu durchgeführt, und, um die vollständige Kette der Prämissen übersichtlich zu machen, im Anschluss an Lagrange ein elementarer Beweis für das Additionstheorem der Function $\wp u$ hinzugefügt. Dabei bildet durchgehends die Beschränkung auf einen möglichst eng begrenzten Kreis von Beweismitteln das Hauptziel der Untersuchung.

§ 1.

Einführung der Functionen $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$.

Durch die Gleichung

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

in welcher k ein reeller echter Bruch ist, wird für hinreichend kleine reelle Werthe von x, wenn man stets den positiven Werth der Quadratwurzel nimmt, die Grösse u als eindeutige und stetige Function von x definirt, welche gleichzeitig mit x wächst und abnimmt, sodass zu zwei verschiedenen Werthen von x stets zwei verschiedene Werthe von u gehören. Es ist also auch umgekehrt x eine eindeutige und stetige Function von u für alle reellen Werthe dieser Grösse, deren absoluter Betrag eine hinreichend klein gewählte positive Grösse nicht übersteigt; man bezeichne den Inbegriff dieser Werthe von u durch (U) und für jeden derselben den bestimmten zugehörigen Werth von x durch $\operatorname{sn} u$. Dann besteht offenbar die Differenzialgleichung

$$(1) \qquad (\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

und da entgegengesetzte Werthe von x auch entgegengesetzte Werthe von u ergeben, so ist

$$\text{sn}(-u) = -\text{sn}\,u. \tag{2}$$

Nun sei für den Fall, dass die drei Grössen u, v, $u+v$ dem Gebiet (U) angehören, die Formel

$$\text{sn}(u+v) = \frac{\text{sn}\,u\,\text{sn}'v + \text{sn}\,v\,\text{sn}'u}{1 - k^2\,\text{sn}^2u\,\text{sn}^2v}$$

bewiesen, etwa nach der elementaren Methode, welche Herr Darboux angegeben und Herr Bertrand in seinem „Traité de calcul intégral" reproducirt hat. Dann ergiebt sich mit Berücksichtigung der Gleichung (1), indem man Zähler und Nenner des Ausdrucks $\text{sn}(n+v)$ mit der Differenz $\text{sn}\,u\,\text{sn}'v - \text{sn}\,v\,\text{sn}'u$ multiplicirt,

$$\text{sn}(u+v) = \frac{\text{sn}^2u - \text{sn}^2v}{\text{sn}\,u\,\text{sn}'v - \text{sn}\,v\,\text{sn}'u}. \tag{3}$$

Aus dieser Formel kann man das Additionstheorem der Integrale zweiter Gattung nach einer Methode ableiten, welche Herr Schellbach in § 106 seines Werkes „Die Lehre von den elliptischen Integralen etc." (Berlin 1864) angewandt hat. Setzt man nämlich $u = -t$, $u+v = w$, so gehören auch die Grössen w, t, $w+t$ dem Gebiet (U) an, und aus den Formeln (3) und (2) folgt sofort:

$$\begin{aligned}\text{sn}^2(w+t) - \text{sn}^2t &= \text{sn}\,w(\text{sn}\,t\,\text{sn}'(w+t) + \text{sn}'t\,\text{sn}(w+t))\\ &= \text{sn}\,w \cdot \frac{d}{dt}(\text{sn}\,t\,\text{sn}(w+t)).\end{aligned}$$

Integrirt man hierin von 0 bis t, so ergiebt sich

$$\int_0^t \text{sn}^2(w+t)\,dt - \int_0^t \text{sn}^2t\,dt = \text{sn}\,w\,\text{sn}\,t\,\text{sn}(w+t),$$

oder in anderer Form

$$\begin{aligned}\int_w^{w+t} \text{sn}^2t\,dt - \int_0^t \text{sn}^2t\,dt &= \int_0^{w+t} \text{sn}^2t\,dt - \int_0^w \text{sn}^2t\,dt - \int_0^t \text{sn}^2t\,dt\\ &= \text{sn}\,w\,\text{sn}\,t\,\text{sn}(w+t).\end{aligned} \tag{4}$$

Setzt man nun mit Jacobi, indem man durch K und E die vollständigen Integrale erster und zweiter Gattung bezeichnet,

$$\mathsf{Z}(u) = \int_0^u (1 - k^2\,\text{sn}^2u)\,du - \frac{E}{K}u,$$

so ist die Function $\mathsf{Z}(u)$ ebenso wie $\text{sn}\,u$ für alle dem Gebiet (U) angehörigen Argumente definirt, und genügt der Gleichung

$$\mathsf{Z}(-u) = -\mathsf{Z}(u). \tag{5}$$

Gehören dann die Werthe u, v, $u+v$, $u-v$ dem Gebiet (U) an, so erhält man aus den Gleichungen (4) und (5) die Additionstheoreme

$$(6)\qquad \begin{aligned} Z(u+v) &= Z(u)+Z(v)-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v),\\ Z(u-v) &= Z(u)-Z(v)+k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u-v). \end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen und berücksichtigt das Additionstheorem der Function $\operatorname{sn} u$, so ergiebt sich

$$(7)\qquad \begin{aligned} Z(u+v)+Z(u-v)-2Z(u) &= \frac{-2k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}' u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}\\ &= \frac{d}{du} \lg(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v). \end{aligned}$$

Setzt man ferner mit Jacobi, indem man durch $\Theta(0)$ eine von Null verschiedene Constante bezeichnet,

$$\Theta(u)=\Theta(0)\, e^{\int_0^u Z(u)\,du}, \qquad H(u)=\sqrt{k}\operatorname{sn} u\cdot\Theta(u),$$

sodass auch die Functionen Θ und H für das Gebiet (U) definirt sind und die Gleichung

$$(8)\qquad \Theta(-u)=\Theta(u)$$

besteht, so kann die Formel (7) in folgende Gestalt gebracht werden:

$$\frac{d}{du}\left(\lg\Theta(u+v)+\lg\Theta(u-v)-2\lg\Theta(u)\right)=\frac{d}{du}\lg(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v).$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\Theta(u+v)\,\Theta(u-v)=V\Theta^2(u)\,(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v),$$

wo V eine von u unabhängige Grösse ist; setzt man speciell $u=0$ und berücksichtigt die Gleichung (8), so ergiebt sich

$$(9)\quad V=\frac{\Theta^2(v)}{\Theta^2(0)},\quad \Theta^2(0)\Theta(u+v)\Theta(u-v)=\Theta^2(u)\Theta^2(v)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v).$$

Die Ableitung dieses Resultats aus den Formeln (6) hat Herr Tichomandritzky in Bd. XXII dieser Annalen p. 452 angegeben.

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit der aus dem Additionstheorem der Function $\operatorname{sn} u$ folgenden

$$k \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v)=\frac{k\operatorname{sn}^2 u-k\operatorname{sn}^2 v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

und substituirt allgemein

$$(10)\qquad \operatorname{sn} w=\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(w)}{\Theta(w)},$$

so erhält man, wie schon Jacobi in § 61 der „Fundamenta nova“ bemerkt hat, das Resultat

$$(11)\quad \Theta^2(0)\,H(u+v)\,H(u-v)=H^2(u)\,\Theta^2(v)-H^2(v)\,\Theta^2(u).$$

Eine ähnliche Gestalt kann man offenbar durch die Substitutionen (10) der Formel (9) geben:

$$(12) \quad \Theta^2(0)\,\Theta(u+v)\,\Theta(u-v) = \Theta^2(u)\,\Theta^2(v) - \mathrm{H}^2(u)\,\mathrm{H}^2(v).$$

Jetzt werde die Gleichung (11) nach u differenzirt und in der resultirenden sowie der Gleichung (12) die Annahme $u = v$ gemacht; dann ergiebt sich

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathrm{H}'(0)\,\Theta^2(0)\,\mathrm{H}(2u) &= 2\,\mathrm{H}(u)\,\Theta(u)\,(\Theta(u)\,\mathrm{H}'(u) - \mathrm{H}(u)\,\Theta'(u)) \\ \Theta^4(0)\,\Theta(2u) &= \Theta^4(u) - \mathrm{H}^4(u). \end{aligned}$$

Dabei ist die neue Voraussetzung einzuführen, dass auch $2u$ eine Grösse des Gebiets (U) sein muss, für welches allein die eingeführten Functionen definirt sind.

Die Gleichungen (13) ergeben nun einen ersten Beweis für die Darstellbarkeit der Function $\mathrm{sn}\,u$ als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen. Denn aus der Gleichung

$$u = \int_0^{\mathrm{sn}\,u} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

folgt offenbar leicht, dass die Function $\mathrm{sn}\,u$ für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Argumente u in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden kann; hieraus schliesst man auf Grund der aufgestellten Definitionen, dass dasselbe von den Functionen $\mathrm{Z}(u)$, $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$ gilt. Die Potenzreihen, welche für $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$ erhalten werden, müssen aber infolge der Gleichungen (13) beständig convergiren, also noch über das Gebiet hinaus, für welches zunächst die Functionen Θ, H definirt sind. Da nun die Gleichung

$$\mathrm{sn}\,u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}$$

besteht, so ist eine Definition der Function $\mathrm{sn}\,u$ für beliebige Argumente unmittelbar gegeben, und die Darstellbarkeit dieser Function als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen bewiesen.

Indessen benutzt diese an die Gleichungen (13) geknüpfte Schlussreihe analytische Sätze, deren strenge Begründung genauere Untersuchungen über Summen von unendlich vielen Potenzreihen voraussetzt. Die Berufung auf diese Sätze entbehrlich zu machen und den Umfang der nothwendigen Beweismittel genauer zu präcisiren, ist das Ziel der zunächst folgenden Untersuchungen.

§ 2.

Allgemeine analytische Hülfssätze.

Bezeichnet man eine nach Potenzen von u fortschreitende Potenzreihe, welche für von Null verschiedene Werthe u convergirt, schlechthin als „convergent", so kann man zunächst einige später zu verwendende Sätze elementaren Charakters in folgender Weise formuliren.

(I) Eine convergente Potenzreihe verschwindet nur dann für alle reellen dem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegenden Werthe des Arguments, wenn die sämmtlichen Coefficienten den Werth Null haben.

(II) Eine endliche Anzahl nach Potenzen einer und derselben Grösse fortschreitender, in irgend einem Bereich (u) convergenter Potenzreihen können wie endliche Summen addirt, subtrahirt und multiplicirt werden, und ergeben als Resultat einer endlichen Anzahl solcher Operationen eine im Bereich (u) convergente Potenzreihe.

(III). Eine convergente Potenzreihe kann gliedweise differenzirt und integrirt werden; Ableitung und Integral sind ebenfalls convergente Potenzreihen,

Die beiden letzten Sätze beweist man wohl am einfachsten auf Grund der Bemerkung, dass eine convergente Potenzreihe $a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots$ stets durch eine Substitution $u = \alpha v$ in eine solche umgewandelt werden kann, bei welcher von einem gewissen Gliede an die absoluten Beträge aller Coefficienten echte Brüche, die einzelnen Glieder also absolut kleiner sind als die entsprechenden der Reihe $1 + v + v^2 + \cdots$. Ueber die Convergenz- und Werthverhältnisse dieser letzteren kann man sich aber bekanntlich durch elementare Betrachtungen orientiren; vergleicht man mit ihrem Rest den der Reihe $a_0 + a_1 \alpha v + a_2 \alpha^2 v^2 + \cdots$, so ergiebt sich der Satz (II) und die gleichmässige Convergenz der Reihe $a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots$; aus dieser folgt aber, dass man gliedweise integriren und hieraus, dass man auch gliedweise differenziren darf, womit der Satz (III) bewiesen ist. — Mit ebenso elementaren Mitteln kann auch der Satz (I) abgeleitet werden; vgl. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik Bd. I p. 283.

Eine positive Grösse α hat die angegebene Beschaffenheit, wenn die Reihe $a_0 + a_1 u + \cdots$ unter der Voraussetzung $|u| \leqq \alpha$ convergirt; dann convergirt die Reihe $a_0 + a_1 \alpha v + a_2 \alpha^2 v^2 + \cdots$, sobald $|v| \leqq 1$ ist, und in der abgeleiteten Reihe $a_1 \alpha + 2 a_2 \alpha^2 v + 3 a_3 \alpha^3 v^2 + \cdots$ ist von einem gewissen Gliede an jeder Coefficient dem absoluten Betrage nach nicht grösser als der entsprechende der Reihe $1 + 2v + 3v^2 + \cdots$. Da nun diese bekanntlich unter der Bedingung $|v| < 1$ convergirt, so gilt dasselbe für die Reihe

$a_1 \alpha + 2 a_2 \alpha^2 v + \cdots$, und wenn man wieder $\alpha v = u$ setzt, so folgt, dass die Reihe $a_1 + 2 a_2 u + 3 a_3 u^2 + \cdots$ convergirt, sobald $|u| < \alpha$ ist. Daraus ergiebt sich,

(IV) dass der Convergenzkreis einer Potenzreihe nicht grösser ist als der ihrer Ableitung.

Mit Hülfe dieser vier verhältnissmässig elementaren Sätze möge noch ein fünfter von speciellerer Natur bewiesen werden, der gewöhnlich aus schwerer zu beweisenden allgemeinen Sätzen gefolgert wird, der Satz nämlich

(V) dass zu einer beliebig gegebenen convergenten Potenzreihe $\varphi(u)$ eine zweite $f(u)$ gefunden werden kann, welche gleichfalls convergent ist und der Gleichung

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \varphi(u) \tag{1}$$

genügt.

Setzt man zum Beweis dieser Behauptung

$$\varphi(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots,$$

und nimmt an, es existire eine convergente, der Gleichung (1) genügende Potenzreihe

$$f(u) = b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + \cdots,$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Sätze (III), (II) und (I)

$$\begin{array}{c} b_1 + 2 b_2 u + 3 b_3 u^2 + \cdots = (a_0 + a_1 u + \cdots)(b_0 + b_1 u + \cdots) \\ (\lambda + 1)\, b_{\lambda+1} = b_0 a_\lambda + b_1 a_{\lambda-1} + \cdots + b_\lambda a_0 \end{array} \tag{2}$$

für jeden Index λ; wenn umgekehrt die sämmtlichen Gleichungen (2) bestehen, und $f(u)$ eine convergente Potenzreihe ist, so besteht die Relation (1). Dabei sind alle Grössen b_λ bestimmt, sobald man b_0 willkürlich fixirt hat.

Wenn nun zunächst die absoluten Beträge von a_0, b_0 echte Brüche sind, und, was bei der Convergenz der Reihe $\varphi(u)$ möglich ist, eine positive Zahl α so gross gewählt wird, dass allgemein $|a_\lambda| < \alpha^\lambda$ ist, so lehren die Gleichungen (2), in welchen rechts $\lambda + 1$ Summanden stehen, dass aus den Ungleichungen

$$|b_0| < 1, \quad |b_1| < 1, \quad |b_2| < \alpha, \quad |b_3| < \alpha^2, \cdots |b_\lambda| < \alpha^{\lambda-1}$$

unter der Annahme $\alpha > 1$ die weitere Ungleichung $|b_{\lambda+1}| < \alpha^\lambda$ folgt; es sind also die Coefficienten der Reihe $f(u)$, wenn man sie den Gleichungen (2) entsprechend bestimmt, beziehentlich dem absoluten Betrage nach kleiner, als die entsprechenden Coefficienten der convergenten Reihe $1 + u + \alpha u^2 + \alpha^2 u^3 + \cdots$; die Reihe $f(u)$ ist somit convergent und genügt der Gleichung (1).

Hat man dagegen die Ungleichung $|a_0| \geq 1$, so setzt man einfach

$$\varphi(u) = a_0' + a_0'' + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots$$

wo $|a_0''| < 1$ ist, und bestimmt, was nach dem Obigen möglich ist, eine convergente Potenzreihe $g(u)$ durch die Forderung

$$g'(u) = g(u)\,(a_0'' + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots);$$

dann genügt die Function

$$f(u) = e^{a_0' u}\, g(u),$$

welche nach dem Satze (II) in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden kann, der Gleichung (1), womit der Satz (V) allgemein bewiesen ist.

§ 3.

Entwicklung der Function $\operatorname{sn} u$ nach Potenzen von u.

Nach diesen allgemeinen Vorbereitungen kann ohne Heranziehung weiterer analytischer Sätze die Entwickelbarkeit der Function $x = \operatorname{sn} u$ in eine convergente Potenzreihe nachgewiesen werden.

Diese Function genügt nach § 1 der Differenzialgleichung

(1) $$x'^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2);$$

es werde statt ihrer die allgemeinere Function y untersucht, welche der Gleichung

(2) $$y'^2 = (1 + \alpha y^2)(1 + \beta y^2)$$

genügt und wie $\operatorname{sn} u$ eine ungerade Function von u ist; ihre Ableitung habe ebenso wie $\operatorname{sn}' u$ für $u = 0$ den Werth 1. Existirt eine solche Function, so kann sie nach ganzen positiven Potenzen von u nur in folgender Weise entwickelbar sein:

(3) $$y = c_0 u + c_1 u^3 + c_2 u^5 + \cdots, \quad c_0 = 1.$$

Aus der Gleichung (2) ergiebt sich nun unmittelbar

(4) $$y'' = (\alpha + \beta)\, y + 2\alpha\beta y^3,$$

und hieraus, indem man die Entwicklung (3) einsetzt und auf Grund der Sätze (III) und (I) die Coefficienten von $u^{2\lambda+1}$ auf beiden Seiten gleichsetzt,

(5) $$(2\lambda + 3)(2\lambda + 2)\, c_{\lambda+1} = (\alpha + \beta)\, c_\lambda + 2\alpha\beta \sum_{\mu, \nu, \varrho} c_\mu c_\nu c_\varrho;$$

dabei ist rechts über alle Systeme nicht negativer ganzer Zahlen μ, ν, ϱ zu summiren, welche der Bedingung

$$(2\mu + 1) + (2\nu + 1) + (2\varrho + 1) = 2\lambda + 1$$

genügen, so dass keine der Zahlen μ, ν, ϱ den Werth λ überschreiten kann. Unter der eingeführten Annahme $c_0 = 1$ sind also sämmtliche Coefficienten c_λ eindeutig bestimmt, und die mit ihnen gebildete Reihe (3) genügt, wenn sie convergirt, der Differenzialgleichung (4).

In der Recursionsformel (5) ist besonders zu beachten, dass ihre rechte Seite, als ganze Function der Argumente α, β, c_0, c_1, $\cdots$, c_λ betrachtet, nur positive Coefficienten besitzt. Bezeichnet man also durch C_0, C_1, $\cdots$ C_λ positive Grössen, bestehen ferner die Ungleichungen

$$1 \geqq |\alpha|, \quad 1 \geqq |\beta|, \quad C_0 \geqq |c_0|, \quad C_1 \geqq |c_1|, \cdots C_\lambda \geqq |c_\lambda|$$

genügen, und setzt man

$$(6) \qquad (2\lambda + 3)(2\lambda + 2)\, C_{\lambda+1} = 2\, C_\lambda + 2 \sum_{\mu, \nu, \varrho} C_\mu C_\nu C_\varrho,$$

indem man über μ, ν, ϱ in derselben Weise wie in der Formel (5) summirt, so ist $C_{\lambda+1}$ eine positive Grösse und besteht die Ungleichung

$$C_{\lambda+1} \geqq |c_{\lambda+1}|.$$

Setzt man speciell $\alpha = -1$, $\beta = -k^2$, $C_0 = 1$ und definirt alle Grössen C_1, C_2, $\cdots$ successive durch die Gleichungen (6), so sind offenbar die Ungleichungen

$$1 \geqq |\alpha|, \quad 1 \geqq |\beta|, \quad C_0 \geqq |c_0|,$$

da $c_0 = 1$ und k ein echter Bruch ist, erfüllt; geht also unter diesen Annahmen c_λ in c_λ' über, sodass die Reihe

$$x = u + c_1' u^3 + c_2' u^5 \cdots,$$

wenn sie convergirt, der Differenzialgleichung

$$x'' = -(1 + k^2)\, x + 2 k^2 x^3$$

genügt, so ist allgemein

$$C_\lambda \geqq |c_\lambda'|.$$

Nun ist die Reihe

$$(7) \qquad z = C_0 u + C_1 u^3 + C_2 u^5 + \cdots, \qquad C_0 = 1$$

wenn sie convergent ist, ein Integral der Differenzialgleichung

$$(8) \qquad z'' = 2z + 2z^3,$$

da auf beiden Seiten die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u infolge der Formeln (6) gleich sind.

Hieraus folgt durch Integration, wenn man durch a eine Constante bezeichnet,

$$z'^2 = a + 2z^2 + z^4,$$

und da für $u = 0$ die Gleichungen $z = 0$, $z' = 1$ bestehen, so folgt $a = 1$, also

$$(9) \qquad z' = 1 + z^2.$$

Unter der Voraussetzung also, dass die Entwicklung (7) convergirt, besteht die Gleichung (9); umgekehrt folgt aus dieser offenbar die

Gleichung (8). Wenn aber eine der Gleichung (9) genügende convergente Entwicklung von der Form (7) existirt, so ist dieselbe mit der Entwicklung (7) identisch, da diese durch ihre Form und die Differenzialgleichung (8) die Recursionsformel (6) ergiebt, welche die Coefficienten unter den Annahmen $C_0 = 1$ in eindeutiger Weise bestimmt.

Versucht man demgemäss, der Gleichung (9) durch eine Reihe von der Form (7) zu genügen, so ergiebt sich auf Grund der Sätze (I), (II), (III) die Recursionsformel

$$(2\lambda + 1)\, C_{\lambda+1} = C_0 C_{\lambda-1} + C_1 C_{\lambda-2} + \cdots + C_{\lambda-1} C_0. \tag{10}$$

Diese Formel lehrt, dass $C_{\lambda+1}$ positiv und nicht grösser als Eins ist, wenn dasselbe von jeder der Grössen $C_0, C_1, \cdots C_\lambda$ gilt; da nun $C_0 = 1$ ist, so folgt allgemein

$$0 < C_\lambda \leqq 1.$$

Die Reihe $z = C_0 u + C_1 u^3 + \cdots$, in welcher $C_0 = 1$ und die übrigen Coefficienten durch die Gleichungen (10) bestimmt sind, convergirt also sicher, sobald $|u| < 1$ ist, und genügt infolge der Formeln (10) den Differenzialgleichungen (9) und (8). Da nun diese Reihe, wie schon bemerkt, mit der früher betrachteten Reihe (7) identisch ist, die Zeichen C_λ also jetzt dieselbe Bedeutung haben wie vorher, so folgt aus den Ungleichungen $C_\lambda \geqq |c_\lambda'|$, dass auch die Reihe

$$x = u + c_1' u^3 + c_2' u^5 + \cdots \tag{11}$$

für von Null verschiedene Werthe von u convergirt und der Differenzialgleichung

$$x'' = -(1 + k^2)\, x + 2k^2 x^3$$

genügt. Hieraus ergiebt sich mit Berücksichtigung der für $u = 0$ bestehenden Gleichungen $x = 0$, $x' = 1$

$$x'^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2).$$

Aus der Darstellung (11) folgt ferner nach dem Satze (III)

$$x' - 1 = 3c_1' u^2 + 5c_2' u^4 + \cdots,$$

wo die Glieder der rechten Seite wegen der Ungleichungen

$$|c_\lambda'| \leqq C_\lambda \leqq 1 \tag{12}$$

einzeln dem absoluten Betrage nach nicht grösser sind als die entsprechenden der leicht summirbaren Reihe $3u^2 + 5u^4 + 7u^6 + \cdots$. Vergleicht man mit der Summe dieser Reihe den absoluten Betrag der Differenz $x' - 1$, so ergiebt sich, dass dieser für alle Argumente u, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht übersteigt, unter einer beliebig gegebenen positiven Grösse verbleibt. Für die bezeichneten Argumente u besteht somit, wenn man die Quadratwurzel positiv nimmt, die Gleichung

$$\frac{1}{x'} = \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wodurch die Identität des Ausdrucks (11) mit der in § 1 definirten Function $\operatorname{sn} u$ evident wird. Für alle reellen Werthe des Arguments also, welche dem absoluten Betrage nach eine gewisse positive Grösse nicht überschreiten, besteht die convergente Entwicklung

$$\operatorname{sn} u = u + c_1' u^3 + c_2' u^5 + \cdots, \quad |c_\lambda| \leq 1.$$

Beiläufig bemerkt ist $z = \operatorname{tg} u$; mit Rücksicht auf die Ungleichungen (12) folgt also, dass die Coefficienten in der Potenzreihenentwicklung von $\operatorname{sn} u$ dem absoluten Betrage nach nicht grösser sind als die entsprechenden der Potenzreihe $\operatorname{tg} u$, welche in bekannter Weise durch die Bernoulli'schen Zahlen ausgedrückt werden können.

§ 4.

Die Function $\operatorname{sn} u$ als Quotient zweier beständig convergenter Potenzreihen.

Aus der erhaltenen Entwicklung der Function $\operatorname{sn} u$ folgt nach den Sätzen (II) und (III) auch die Entwickelbarkeit der von $\operatorname{sn}^2 u$ und $\mathsf{Z}(u)$ in convergente Potenzreihen. Dann kann man auf Grund des Satzes (V) eine convergente Potenzreihe $f(u)$ bestimmen, welche der Gleichung

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \mathsf{Z}(u)$$

genügt und offenbar nur bis auf einen constanten Factor bestimmt ist; da nun aus dieser Gleichung folgt

$$\lg f(u) = a + \int_0^u \mathsf{Z}(u)\, du,$$

wobei a eine Constante ist, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die in § 1 gegebene Definition der Function $\Theta(u)$, dass die Differenz der Grössen $\lg f(u)$ und $\lg \Theta(u)$ von u unabhängig sein muss. Bei passender Bestimmung des in der Reihe $f(u)$ noch willkürlichen Factors kann man also setzen

$$\Theta(u) = f(u),$$

d. h. die Grösse $\Theta(u)$ kann ebenfalls in eine convergente Potenzreihe entwickelt werden. Dasselbe gilt dann nach dem Satze (II) von der Function

$$\mathsf{H}(u) = \sqrt{k}\, \operatorname{sn} u \cdot \Theta(u).$$

Ersetzt man nun u durch $\frac{u}{2}$ in den Formeln (13) des § 1, welche für ein hinreichend beschränktes Gebiet reeller Werthe von u bewiesen waren, so erhält man

$$(1)\quad \begin{aligned} &\mathsf{H}'(0)\,\Theta^2(0)\,\mathsf{H}(u) = 2\mathsf{H}\left(\tfrac{u}{2}\right)\Theta\left(\tfrac{u}{2}\right)\left(\Theta\left(\tfrac{u}{2}\right)\mathsf{H}'\left(\tfrac{u}{2}\right) - \mathsf{H}\left(\tfrac{u}{2}\right)\Theta'\left(\tfrac{u}{2}\right)\right) \\ &\Theta^4(0)\,\Theta(u) = \Theta^4\left(\tfrac{u}{2}\right) - \mathsf{H}^4\left(\tfrac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

und der Satz (I) ergiebt, dass diese Gleichungen, wenn für Θ, H die Potenzreihenentwicklungen eingesetzt werden, identisch bestehen, d. h. in jeder von ihnen beiderseits die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u dieselben sind. — Jetzt sei A eine derartige positive Grösse, dass beide Reihen $\Theta(u)$, $\mathsf{H}(u)$ convergiren, sobald $|u| < A$ ist; dann convergiren die Reihen $\Theta\left(\frac{u}{2}\right)$, $\mathsf{H}\left(\frac{u}{2}\right)$ unter der Voraussetzung $|u| < 2A$; da ferner nach dem Satze (IV) der Convergenzkreis der Reihen Θ', H' nicht kleiner ist als derjenige der Reihen Θ, H, so convergiren alle auf der rechten Seite der Gleichungen (1) auftretenden Reihen, sobald $|u| < 2A$ ist. Unter dieser Annahme sind also stets auch die Reihen $\Theta(u)$, $\mathsf{H}(u)$ convergent. — Man kann jetzt die an die Gleichungen (1) geknüpfte Schlussreihe wiederholen, indem man A durch $2A$ ersetzt und erhält dann das Resultat, dass die Reihen $\Theta(u)$, $\mathsf{H}(u)$ schon unter der Voraussetzung $|u| < 4A$ convergiren, u. s. f.; durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens ergiebt sich, dass diese Reihen beständig convergent sind.

Ursprünglich waren aber die Functionen $\Theta(u)$, $\mathsf{H}(u)$ ebenso wie sn u nur für das Gebiet (U) definirt; für hinreichend kleine reelle Werthe des Arguments können sie, wie gezeigt, durch Potenzreihen dargestellt werden, welche für jeden Werth von u convergiren, also auch über das Gebiet (U) hinaus einen bestimmten Sinn behalten. Man kann also jetzt allgemeinere Definitionen aufstellen, indem man zunächst durch die abgeleiteten Potenzreihenausdrücke für $\Theta(u)$, $\mathsf{H}(u)$ diese Functionen für beliebige complexe Argumente erklärt; dann liefern die Gleichungen

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathsf{H}(u)}{\Theta(u)},\quad \mathsf{Z}(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

unmittelbar die allgemeineren Functionen sn u und $\mathsf{Z}(u)$. Diese Ausdrücke ergeben für alle hinreichend kleinen reellen Werthe von u die früher betrachteten specielleren Functionen; für diese Werthe besteht also z. B. die Differentialgleichung

$$(2)\qquad (\operatorname{sn}' u)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)\,(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

oder es ist

$$(3)\quad (\mathsf{H}'(u)\,\Theta(u) - \mathsf{H}(u)\,\Theta'(u))^2 = (k\Theta^2(u) - \mathsf{H}^2(u))\,(\Theta^2(u) - k\mathsf{H}^2(u)).$$

Dann ergiebt der Satz (I) die Gültigkeit der Gleichung (3) für jeden Werth von u; mithin genügt auch die eingeführte allgemeinere Function sn u der Differentialgleichung (2). Aus dieser aber kann durch

Differenziren und Integriren das Additionstheorem hergeleitet werden, sodass dasselbe auch für beliebige Argumente uneingeschränkte Geltung hat.

Nachdem die zu betrachtenden Functionen für jeden Werth der unabhängigen Variabeln definirt sind, kann man in aller Strenge die Grössen sn ui, $Z(ui)$, $\Theta(ui)$ vermittelst der einfachen in den §§ 19 und 56 der „Fundamenta nova" angegebenen Rechnungen durch Functionen reeller Argumente ausdrücken und aus den erhaltenen Resultaten die Periodicitätseigenschaften ableiten; sodann erhält man nach der Methode der §§ 57 und 61 der „Fundamenta" die Functionalgleichungen, denen die Functionen Θ, H genügen, und aus diesen die Darstellung der Functionen cn u, dn u. Letztere Entwicklungen haben bei Jacobi insofern eine Lücke, als die Function $\Theta(u)$, wenn man von den Productausdrücken absieht, für complexe Argumente nirgends definirt oder durch die Functionen reeller und rein imaginärer Argumente ausgedrückt wird; diese Lücke wird offenbar durch die hier gegebenen Betrachtungen ausgefüllt.

Will man endlich die Functionen Θ, H durch die bekannten trigonometrischen Reihen darstellen, so muss man entweder aus der Theorie der Fourier'schen Reihen als bekannt voraussetzen, dass eine reellperiodische Function auf eine einzige Weise in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, oder man muss die in § 62 der „Fundamenta" gegebene Ableitung als heuristisch betrachten, und von den einmal erhaltenen Θ-Reihen ausgehend ohne weitere Voraussetzungen in der Weise der nachgelassenen Vorlesungen von Jacobi beweisen, dass die Θ-Quotienten mit den elliptischen Functionen, und zwar solchen beliebigen Moduls identificirt werden können. Bei diesem Nachweis würde von analytischen Sätzen, wenn man sich auf reelle, echt gebrochene Moduln beschränkt, nur noch als bewiesen vorauszusetzen sein, dass zwei absolut convergente Reihen stets wie endliche Summen gliedweise multiplicirt werden können.

§ 5.

Definition und Additionstheorem der Function $\wp u$.

Um den bisherigen analoge Entwicklungen für die von Herrn Weierstrass eingeführten Functionen bewerkstelligen zu können, werde zunächst u als zweiwerthige Function von s definirt durch die Gleichung

$$u = \int_s^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

in welcher g_2, g_3 beliebige reelle Constanten sind, die untere Grenze s grösser ist als die grösste reelle Wurzel der Gleichung

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

und die Quadratwurzel während der ganzen Integration mit einem und demselben Zeichen genommen wird. Giebt man der Grösse s immer grössere Werthe und nimmt das Radical für alle diese Werthe mit demselben Zeichen, so nähert sich der erhaltene Werth von u je nach der Wahl des Zeichens entweder beständig abnehmend oder beständig wachsend dem Grenzwerth Null, sodass zwei verschiedene Werthe von s stets verschiedene Werthe von u ergeben. Es gehört also umgekehrt, wenn man sich auf ein hinreichend kleines den Werth Null enthaltendes Gebiet reeller Werthe von u beschränkt, zu jedem derselben ein einziger bestimmter Werth $s = \wp u$, und da die beiden zu einem bestimmten Werth s gehörigen Werthe von u nur durch das Zeichen unterschieden sind, so ist allgemein $\wp(-u) = \wp u$; ferner ist offenbar $\wp 0 = \infty$. Führt man in der Definitionsgleichung (1) die neue Integrationsvariabele

$$v = \frac{t}{\mu^2}$$

ein, so ergiebt sich

$$u\mu = \int_{\frac{s}{\mu^2}}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{4v^3 - g_2\mu^{-4}v - g_3\mu^{-6}}}$$

oder, wenn man in der Function $\wp$ die Invarianten in Evidenz setzt,

(2) $$\wp(u;\, g_2, g_3) = \mu^2 \wp(\mu u;\, g_2\mu^{-4}, g_3\mu^{-6}).$$

Endlich ergiebt die Definition (1) unmittelbar die Differentialgleichung

(3) $$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3.$$

Es mögen nun die drei Grössen u, c, $u + c$ dem reellen Werthgebiet (U) angehören, für welches die Function $\wp u$ eindeutig definirt ist; setzt man dann nach Lagrange

$$p = \wp u + \wp(u+c), \quad q = \wp u - \wp(u+c)$$

und bezeichnet die Ableitungen nach u durch Accente, so erhält man zunächst mit Benutzung der Gleichung (3)

$$\begin{aligned} p'q' = (\wp' u)^2 - (\wp'(u+c))^2 &= 4\left[\left(\frac{p+q}{2}\right)^3 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^3\right] - g_2 q \\ &= 3p^2 q + q^3 - g_2 q. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man ferner das durch Differentiation der Gleichung (3) erhaltene Resultat

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2,$$

so ergiebt sich

$$p'' = 6(\wp^2 u + \wp^2(u+c)) - g_2 = 3(p^2 + q^2) - g_2.$$

Hieraus folgt

$$qp'' - p'q' = 2q^3, \quad \frac{qp'' - p'q'}{q^2} = 2q,$$

oder kurz

$$\left(\frac{p'}{q}\right)' = 2q.$$

Diese Gleichung kann in integrabeler Form geschrieben werden

$$\frac{2p'}{q}\left(\frac{p'}{q}\right)' = 4p'$$

und ergiebt als Integral

$$\left(\frac{p'}{q}\right)^2 = 4p + a,$$

worin die Grösse a von u unabhängig ist. Setzt man jetzt für die Grössen p, q ihre Werthe ein, so erhält man

$$(4)\qquad \left(\frac{\wp' u + \wp'(u+c)}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2 = 4\wp u + 4\wp(u+c) + a,$$

oder in anderer Form

$$(5)\quad \left[\left(\frac{\wp' u}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2 - 4\wp u\right] + \frac{2\wp' u\,\wp'(u+c)}{(\wp u - \wp(u+c))^2} + \left(\frac{\wp'(u+c)}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2$$
$$= a + 4\wp(u+c).$$

Der erste, in eckige Klammern geschlossene Ausdruck hat in Folge der Gleichung (3) den Werth

$$\frac{-g_2\wp u - g_3 - 4\wp u\,\wp^2(u+c) + 8\wp^2 u(u+c)}{(\wp u - \wp(u+c))^2}$$

$$= \frac{8\wp(u+c) - \dfrac{g_2\wp u + g_3 + 4\wp u\,\wp^2(u+c)}{\wp^2 u}}{\left(1 - \dfrac{\wp(u+c)}{\wp u}\right)^2};$$

da nun $\wp 0 = \infty$, so ist der Grenzwerth dieses Ausdruckes für $u = 0$ offenbar $8\wp c$. Schreibt man ferner die Differentialgleichung (3) in der Form

$$\frac{\wp' u}{\wp^2 u} = \sqrt{\frac{4}{\wp u} - \frac{g_2}{\wp^3 u} - \frac{g_3}{\wp^4 u}},$$

so sieht man sofort, dass auf der linken Seite der Gleichung (5) das zweite und dritte Glied verschwinden, wenn man $u = 0$ setzt; durch diese Annahme erhält also die Gleichung (5) die folgende Gestalt

$$8\wp c = a + 4\wp c, \qquad a = 4\wp c.$$

Die Gleichung (4) ergiebt somit

$$\left(\frac{\wp' u + \wp'(u+c)}{\wp u - \wp(u+c)}\right)^2 = 4\wp u + 4\wp c + 4\wp(u+c).$$

Bedenkt man jetzt, dass aus der Gleichung

$$\wp u = \wp(-u)$$

die weitere

$$\wp' u = -\wp'(-u)$$

folgt; dass ferner, wenn man $u+c=-v$ setzt, auch die drei Grössen $u, v, u+v$ dem Gebiet (U) angehören, für welches die Function $\wp$ definirt ist, so erhält man schliesslich das Additionstheorem in bekannter Form

$$(6)\qquad \left(\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right)^2=\wp u+\wp v+\wp(u+v).$$

Beim Beweis dieser Formel ist von den Eigenschaften der Function $\wp u$ nur benutzt, dass sie für ein gewisses Gebiet von Argumenten eindeutig definirt ist, für $u=0$ unendlich wird und der Differentialgleichung (3) genügt. Wenn also diese Eigenschaften bei einer verallgemeinerten Function $\wp u$ erhalten bleiben, so besteht auch für diese das Additionstheorem (6).

Die Gleichung (4) kann als Specialfall der ursprünglichen Form des Additionstheorems angesehen werden, welche Lagrange im ersten Theil der „Théorie des fonctions analytiques", Chap. XI (Oeuvres t. IX, p. 129) angegeben hat. Setzt man nämlich

$$\wp u=x, \qquad \wp(u+c)=y,$$

so dass die Gleichungen

$$(7)\qquad -du=-d(u+c)=\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\frac{dy}{\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}$$

bestehen, so kann die Gleichung (4) in folgende Gestalt gebracht werden

$$(8)\qquad \frac{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}+\sqrt{4y^3-g_2y-g_3}}{x-y}=\sqrt{4(x+y)+a}.$$

Andrerseits wird das Additionstheorem von Lagrange unter der allgemeineren Voraussetzung

$$(9)\qquad \frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^2+Ex^4}}=\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$$

folgendermassen dargestellt

$$(10)\qquad \frac{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}+\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}{x-y}$$
$$=\sqrt{a+D(x+y)+E(x+y)^2},$$

wo wie früher unter a eine Integrationsconstante zu verstehen ist. Aus den Gleichungen (9) und (10) erhält man aber offenbar (7) und (8) durch die Annahme

$$A=-g_3,\quad B=-g_2,\quad C=E=0,\quad D=4.$$

Auf die Verwandtschaft zwischen dem Additionstheorem von Lagrange und demjenigen der Function $\wp u$ hat Herr Greenhill hingewiesen in der Abhandlung „Note on the Weierstrass elliptic functions and their applications" (Proceedings of the London math. society, Bd. XVIII, p. 263).

§ 6.

Entwickelung der Function $\wp u$ in eine Potenzreihe.

Aus der Definitionsgleichung

$$u = \int_s^\infty \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g^2 t - g_3}} = \int_0^{\frac{1}{s}} \frac{dv}{2\sqrt{v}\sqrt{1 - \frac{1}{4} g_2 v - \frac{1}{4} g_3 v^3}}$$

schliesst man durch elementare Betrachtungen, dass das Product $u\sqrt{s}$, je nach dem bei der Integration genommenen Zeichen des Radicals, sich einem der Grenzwerthe ± 1 nähert, wenn man s unendlich gross werden, also u verschwinden lässt. Berücksichtigt man ausserdem, dass $\wp u$ eine gerade Function ist, so folgt, dass die Entwicklung derselben nach ganzen steigenden Potenzen von u, wenn eine solche überhaupt möglich ist, nur die folgende Form haben kann

(1) $$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \cdots.$$

Diese Reihe werde nach der von Herrn Halphen (Traité des fonctions elliptiques p. 92) angegebenen Methode in die Differentialgleichung

$$\wp''' u = 12 \wp u \, \wp' u$$

eingesetzt, welche aus der bekannten

(2) $$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3$$

durch zweimalige Differentiation hervorgeht. Dann ergiebt sich, indem man unter Benutzung der Sätze (I), (II), (III) die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u vergleicht, für $\lambda > 3$ die Recursionsformel

(3) $$(\lambda - 3)(2\lambda + 1) c_\lambda = 3(c_2 c_{\lambda-2} + c_3 c_{\lambda-3} + \cdots + c_{\lambda-2} c_2),$$

und die Gleichung (2) ergiebt die weiteren Resultate

(4) $$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{g_2}{20}, \quad c_3 = \frac{g_3}{28},$$

sodass eine convergente Potenzreihe (1), welche der Differentialgleichung (2) genügt, wenn sie überhaupt existirt, in eindeutiger Weise bestimmt ist. Andrerseits ist klar, dass die Reihenentwicklung (1), welche mit den durch die Gleichungen (4) und (3) bestimmten Coefficienten c gebildet ist, wenn sie convergent ist, der Differentialgleichung (2) genügen muss.

Die Formel (3) lehrt nun, dass aus den Ungleichungen

$$|c_1| \leqq 1, \; |c_2| \leqq 1, \cdots |c_{\lambda-1}| \leqq 1$$

die weitere $|c_\lambda| \leqq 1$ folgt. Nimmt man also an, es sei

$$(5) \qquad |g_2| < 20, \quad |g_3| < 28$$

so folgt aus den Gleichungen (4), dass sämmtliche Coefficienten c_λ dem absoluten Betrage nach nicht grösser als Eins sind; die Reihe

$$c_2 u^2 + c_3 u^4 + \cdots$$

convergirt also sicher, sobald $|u| < 1$ ist. Unter der Annahme (5) giebt es somit einen convergenten Ausdruck

$$\varphi = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \cdots,$$

welcher der Gleichung

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 = 4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3$$

genügt. Differenzirt man diesen Ausdruck φ, so ergiebt der Satz (III) das Resultat

$$\frac{d\varphi}{du} + \frac{2}{u^3} = 2c_2 u + 4c_3 u^3 + 6c_4 u^5 + \cdots;$$

da nun alle Coefficienten rechts dem absoluten Betrage nach nicht grösser sind als die entsprechenden der leicht summirbaren Reihe

$$2u + 4u^3 + 6u^5 + \cdots,$$

so folgt, dass die linke Seite für alle hinreichend kleinen Werthe von u von Null so wenig, wie man will verschieden ist, und dass für kleine positive Werthe von u die Ableitung $\frac{d\varphi}{du}$ negativ ist. Es besteht also für positive Werthe von u, wenn man die Quadratwurzel positiv nimmt, die Gleichung

$$du = \frac{-d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}$$

also, da φ unendlich gross wird für $u = 0$,

$$u = \int_\varphi^\infty \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}.$$

Ebenso erhält man für negative Werthe von u, wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird,

$$du = \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}, \quad u = -\int_\varphi^\infty \frac{d\varphi}{\sqrt{4\varphi^3 - g_2\varphi - g_3}}.$$

Somit folgt, dass für alle reellen Argumente u, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Grenze nicht überschreitet, die Gleichung

$$\varphi = \wp u, \quad \wp u = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \cdots$$

besteht, die Function $\wp u$ also eine convergente Entwicklung nach ganzen steigenden Potenzen von u zulässt.

Dieses zunächst unter der Annahme (5) bewiesene Resultat kann vermittelst der Formel (2) des § 5 auf den allgemeinen Fall beliebiger Invarianten ausgedehnt werden; denn man kann offenbar μ so gross annehmen, dass die Ungleichungen

$$|g_2\mu^{-4}| < 20, \qquad |g_3\mu^{-6}| \lessdot 28$$

bestehen. Dann kann nach dem obigen entwickelt werden

$$\wp(u;\, g_2\mu^{-4},\, g_3\mu^{-6}) = \frac{1}{u^2} + c_2u^2 + c_3u^4 + \cdots$$

und die Reihe rechts ist convergent; also folgt

$$\wp(u; g_2, g_3) = \mu^2\wp(\mu u, g_2\mu^{-4}, g_3\mu^{-6}) = \frac{1}{u^2} + c_2\mu^4u^2 + c_3\mu^6u^4 + \cdots,$$

womit die Entwickelbarkeit der Function $\wp u$ im allgemeinsten Falle reeller Invarianten bewiesen ist.

§ 7.

Die beständige Convergenz der Potenzreihe σu.

Auf Grund der erhaltenen Resultate können jetzt für die von Hrn. Weierstrass eingeführte Function σu die analogen Entwicklungen durchgeführt werden wie in § 4 für die Jacobi'schen Functionen Θ, H.

Zu diesem Zweck geht man von der Reihe

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{c_2}{3}u^3 - \frac{c_3}{5}u^5 - \frac{c_4}{7}u^7 - \cdots = \frac{1}{u} + \varphi(u)$$

aus, welche ebenso wie die Reihe

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + c_2u^2 + c_3u^4 + \cdots$$

convergirt, und, da Potenzreihen gliedweise differenzirt werden dürfen, der Gleichung

(1) $$\wp u = -\zeta' u$$

genügt. Dann kann man nach dem Satze (V) eine convergente Potenzreihe $\psi(u)$ bestimmen, für welche die Gleichung

(2) $$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \frac{d \lg \psi(u)}{du} = \varphi(u)$$

besteht. Setzt man ferner

$$\chi(u) = \int_0^u \varphi(u)\,du,$$

so ist offenbar auch

$$\frac{d}{du}\lg e^{\chi(u)} = \varphi(u);$$

also können sich die Grössen $\psi(u)$ und $e^{\chi(u)}$ nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden, und dieser kann durch passende Wahl des in $\psi(u)$ noch willkürlichen Factors $=1$ gemacht werden; dann ist

$$e^{\chi(u)} = \psi(u).$$

Hieraus folgen mit Berücksichtigung der Gleichungen

$$\varphi(-u) = -\varphi(u), \qquad \chi(u) = \chi(-u)$$

die weiteren

$$\psi(u) = \psi(-u), \qquad \psi(0) = 1. \tag{3}$$

Setzt man also

$$\sigma u = u\psi(u),$$

so ist σu eine wie $\psi(u)$ convergente Potenzreihe, deren erstes Glied u ist, sodass die Gleichung

$$\sigma' 0 = \lim_{u=0} \frac{\sigma u}{u} = 1 \tag{4}$$

besteht und die Gleichungen (2) und (3) ergeben

$$\sigma(-u) = -\sigma u \tag{5}$$

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u, \quad \frac{d^2 \lg \sigma u}{du^2} = -\wp u. \tag{6}$$

Nun folgt aus dem in § 5 abgeleiteten Additionstheorem (6), wenn die Argumente $u, v, u+v, u-v$ dem Werthgebiet (U) angehören, das System der Gleichungen

$$\tag{7} \begin{aligned} \wp(u+v) + \wp u + \wp v &= \left(\frac{1}{2} \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 \\ \wp(u-v) + \wp u + \wp v &= \left(\frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich durch Subtraction

$$\wp(u+v) - \wp(u-v) = \frac{-\wp' u \wp' v}{(\wp u - \wp v)^2}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (1)

$$-\zeta'(u+v) + \zeta'(u-v) = -\frac{d}{dv} \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v}.$$

Integrirt man nach v und bezeichnet durch a eine von v unabhängige Grösse, so folgt

$$-\zeta(u+v) - \zeta(u-v) + a = \frac{-\wp' u}{\wp u - \wp v}.$$

Setzt man speciell $v=0$, so ergiebt sich, da $\wp 0 = \infty$ ist,

$$a = 2\zeta u,$$

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = \frac{d}{du} \lg(\wp u - \wp v).$$

Integrirt man abermals, so erhält man auf Grund der Gleichung (6)

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u} = b(\wp u - \wp v),$$

wo durch b eine Integrationsconstante, also eine nur von v abhängige

Grösse bezeichnet ist. Multiplicirt man diese Gleichung mit u^2 und berücksichtigt die Gleichungen (4) und

$$\lim_{u=0} u^2 \wp u = 1,$$

und lässt die Variabele u verschwinden, so ergiebt sich

$$b = \sigma(-v)\,\sigma v = -\sigma^2 v.$$

Damit ist unter der angegebenen Beschränkung der Argumente u und v die bekannte Weierstrass'sche Fundamentalformel bewiesen:

$$(8) \qquad \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \wp v - \wp u = \frac{d^2 \lg \sigma u}{du^2} - \frac{d^2 \lg \sigma v}{dv^2}.$$

Die Ableitung dieser Formel aus den Gleichungen (7) hat Herr Greenhill auf p. 266 f. der in § 5 citirten Abhandlung angegeben.

Drückt man die rechte Seite der Gleichung (8) durch die Function σ selbst und ihre Ableitungen aus, multiplicirt beiderseits mit dem Product $\sigma^2 u\,\sigma^2 v$ und bezeichnet durch G, G_1, G_2 ganze rationale Functionen der beigefügten Argumente mit numerischen Coefficienten, so erhält man eine Gleichung

$$\sigma(u+v)\,\sigma(u-v) = G(\sigma u, \sigma v, \sigma' u, \sigma' v, \sigma'' u, \sigma'' v)$$

also, wenn man nach u differenzirt,

$$\begin{aligned}\sigma(u+v)\sigma'(u-v) &+ \sigma(u-v)\sigma'(u+v)\\ &= G_1(\sigma u, \sigma v, \sigma' u, \sigma' v, \sigma'' u, \sigma'' v, \sigma''' u, \sigma''' v).\end{aligned}$$

Setzt man hierin $u = v$, indem man annimmt, dass auch die Grösse $2u$ dem Gebiet (U) angehört, so folgt wegen der Gleichung (4)

$$\sigma 2u = G_2(\sigma u, \sigma' u, \sigma'' u, \sigma''' u)$$

oder, indem man u durch $\frac{u}{2}$ ersetzt

$$(9) \qquad \sigma u = G_2\left(\sigma \frac{u}{2}, \sigma' \frac{u}{2}, \sigma'' \frac{u}{2}, \sigma''' \frac{u}{2}\right).$$

Diese Gleichung ist offenbar zunächst nur für diejenigen reellen Werthe von u bewiesen, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Grenze nicht überschreitet. Setzt man also die Potenzreihenentwicklung von σu ein, so besteht die Gleichung (9) nach dem Satze (I) identisch, d. h. die Coefficienten gleich hoher Potenzen von u sind auf beiden Seiten dieselben. Wenn nun A eine positive Grösse ist, und die Reihe σu convergirt, sobald $|u| < A$ ist, so gilt nach nach dem Satze (IV) dasselbe von den Reihen σ', σ'', σ'''; die rechte Seite der Gleichung (9) convergirt also schon unter der Voraussetzung $|u| < 2A$. Damit ist dasselbe für die Reihe σu bewiesen, und durch Wiederholung dieses Schlusses folgt unmittelbar, dass die Reihe σu beständig convergent ist.

Der für σu erhaltene Ausdruck behält somit einen bestimmten

Sinn auch über das beschränkte Gebiet reeller Argumente hinaus, für welche die bisherigen Entwicklungen durchgeführt wurden. Man kann also durch diesen Ausdruck die Function σu, und dann durch die Gleichungen

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \quad \wp u = -\frac{d}{du}\frac{\sigma' u}{\sigma u} \tag{10}$$

die Functionen ζ und $\wp$ für beliebige complexe Werthe von u definiren; diese allgemeine Definition führt dann bei kleinen reellen Werthen des Arguments auf die ursprünglich betrachteten Functionen zurück.

Für die letzteren Werthe besteht nun z. B. die Differentialgleichung

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3,$$

die man als von Brüchen freie Gleichung zwischen den beständig convergenten Potenzreihen $\sigma u, \sigma' u, \sigma'' u, \sigma''' u$ darstellen kann; dann lehrt der Satz (I) die Gültigkeit der Gleichung für beliebige Werthe von u. Es genügt also auch die verallgemeinerte Function $\wp u$ der obigen Differentialgleichung; da sie ferner zufolge der Definition (10) eine gerade Function und eindeutig bestimmt ist, so besitzt sie, ebenso wie die früher betrachtete specielle Function, diejenigen Eigenschaften, aus welchen nach § 5 das Additionstheorem abgeleitet werden kann. Somit gilt die Formel

$$\wp(u+v) + \wp u + \wp v = \left(\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2$$

für beliebige complexe Werthe von u und v; aus ihr aber ergeben sich alle übrigen Eigenschaften der Function $\wp u$ nach den einfachen Methoden, welche Herr Halphen in dem mehrfach citirten Werke angewandt hat.

Breslau, Januar 1888.

Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen.

Von

KRAUSE und MOHRMANN in Rostock.

In zwei Arbeiten gleichen Titels*) ist erstens nachgewiesen worden, dass die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art, bei denen die Zahl der Nullpunkte grösser ist, als die Zahl der Unendlichkeitspunkte, zurückgeführt werden kann auf das Problem die Grössen

$$\frac{\vartheta_{\alpha}(nv+na,\ n\tau)}{\vartheta_{\beta}(v,\ \tau)}$$

zu entwickeln. Zweitens sind dann zwei Methoden angegeben worden, mit deren Hülfe dieses Problem wirklich gelöst werden kann. Diese beiden Methoden sind als *indirecte* bezeichnet worden. Es wurden bei der ersten gewisse Restfunctionen als gegeben angesehen und mit ihrer Hülfe die Darstellung der Primfunctionen in der Form von trigonometrischen Reihen wirklich gegeben. Etwas ähnliches gilt von der zweiten Methode, die allerdings, wie leicht folgt, auch in eine directe verwandelt werden kann.

Im Folgenden sollen nun drei *directe* Lösungen desselben Problems gegeben werden. Die erste ist die in der Theorie der elliptischen Functionen gebräuchliche, welche auf den Eigenschaften der complexen Integrale beruht.

Von besonderem Interesse dürften die zweite und dritte Methode sein und zwar, weil sie mit durchaus elementaren Mitteln operiren und auf einigen wenigen ebenso einfachen wie durchsichtigen Gedanken beruhen. Beide können als Verallgemeinerung der Methode angesehen werden, mit deren Hülfe Herr Biehler in seiner schon

*) Ueber die Entwickelung der doppelt periodischen Functionen zweiter und dritter Art in trigonometrische Reihen, erste und zweite Abhandlung. Von M. Krause. Bd. 30 dieser Annalen p. 425 ff., p. 516 ff.

erwähnten Dissertation eine Fülle schöner Reihenentwickelungen findet. Die Entwickelung der gewöhnlichen elliptischen Functionen kann aus den fertigen Formeln durch Specialisirung unmittelbar abgeleitet werden. Unter allen elementaren Methoden, die bei der Entwickelung dieser Functionen überhaupt existiren, dürfte der letzteren der entschiedene Vorzug zu geben sein.

Die beiden ersten Methoden haben das gemeinsame, dass in den fertigen Ausdrücken eine Reihe unbekannter Constanten auftritt, so zwar, dass man nach einigen Reductionen zu denselben Resultaten gelangt wie bei der ersten indirecten Methode der früheren Arbeit.

Mit ihrer Hülfe kommt man dann durch systematische Entwickelung auf völlig naturgemässem Wege zu der Definition und Darstellung der Restfunctionen, die in der vorigen Arbeit als einmal gegeben angenommen wurden. *Erst hiermit kann die Theorie derselben als wirklich begründet angesehen werden.*

Die dritte Methode ist nur für den Fall der Functionen zweiter Art durchgeführt worden, um ihren Gedankengang möglichst klar hervortreten zu lassen. Im allgemeinen Falle ist durchaus analog vorzugehen. Inwieweit hierbei sich neue Resultate ergeben, wird bei andrer Gelegenheit gezeigt werden.

Die beiden ersten Methoden sind von Herrn Mohrmann im mathematischen Seminar der hiesigen Universität durchgeführt worden.

§ 1.

Erste directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Es möge gesetzt werden:

$$(1)\qquad \varphi(v) = \frac{\vartheta_0(nv + na,\ n\tau)}{\vartheta_0(v,\ \tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\varkappa \cdot e^{2\varkappa\pi i v}.$$

Es handelt sich darum, die Grössen $a_\varkappa$ zu bestimmen. Aus bekannten Theorien folgt:

$$(2)\qquad a_\varkappa = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv.$$

Zur Auswerthung dieses Ausdruckes nehmen wir das Integral:

$$\int \varphi(v) \cdot e^{-2\varkappa\pi i v} \cdot dv$$

und erstrecken dasselbe über den Umfang des Parallelogramms:

$$-\tfrac{1}{2},\quad +\tfrac{1}{2},\quad +\tfrac{1}{2}+\nu\tau,\quad -\tfrac{1}{2}+\nu\tau,$$

wobei ν eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Dann wird das Integral gleich:

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv+\int\limits_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}+\nu\tau}\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv+\int\limits_{+\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}+\nu\tau}\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv$$
$$+\int\limits_{-\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}}\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv.$$

Da $\varphi(v)$ die Periode 1 hat, so wird das zweite und vierte Integral auf der rechten Seite der letzten Gleichung sich gegenseitig fortheben und es bleibt:

$$\int\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv=a_\varkappa+\int\limits_{+\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}+\nu\tau}\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv.$$

In dem letzten Integral auf der rechten Seite setzen wir an Stelle von:

$$v : v+\nu\tau,$$

so wird:

$$\int\limits_{+\frac{1}{2}+\nu\tau}^{-\frac{1}{2}+\nu\tau}\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv=\int\limits_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\frac{\vartheta_0(nv+n\nu\tau+na,\ n\tau)}{\vartheta_0(v+\nu\tau,\ \tau)}\cdot e^{-2\varkappa\pi i(v+\nu\tau)}\cdot dv$$
$$=e^{-\nu\pi i\left[2na+\left(2\varkappa+\nu(n-1)\right)\tau\right]}\int\limits_{+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}}\varphi(v)\cdot e^{-2\left(\varkappa+(n-1)\nu\right)\pi i v}\cdot dv.$$

Mithin erhalten wir:

$$(3)\quad\int\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv=a_\varkappa-e^{-\nu\pi i\left[2na+\left(2\varkappa+\nu(n-1)\right)\tau\right]}\cdot a_{\varkappa+(n-1)\nu}.$$

Das Integral auf der linken Seite kann noch auf andere Weise berechnet werden, indem die Summe der geschlossenen Integrale:

$$\int\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv$$

um die Unstetigkeitspunkte im Innern des Parallelogramms:

$$-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}+\nu\tau,\quad -\frac{1}{2}+\nu\tau$$

gebildet wird. Diese Unstetigkeitspunkte sind, wie man sich leicht überzeugt, die Punkte:

$$\frac{\tau}{2},\quad \frac{3\tau}{2},\quad \ldots\quad \frac{2\nu-1}{2}\tau.$$

Bilden wir das geschlossene Integral

$$\int \varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv$$

um den Punkt $\frac{2m-1}{2}\tau$!

Die Taylor'sche Entwickelung um diesen Punkt herum lautet:

$$\vartheta_0(nv+na,\, n\tau) = \vartheta_0\Big(\frac{n(2m-1)\tau}{2}+na,\, n\tau\Big) + \text{steig. Pot.}$$

$$= i\cdot(-1)^{m-1}\cdot\vartheta_1(na, n\tau)\cdot e^{-\frac{2m-1}{2}\pi i\left(2na+\frac{2m-1}{2}n\tau\right)} + \cdots,$$

$$\vartheta_0(v,\,\tau) = \Big(v-\frac{2m-1}{2}\tau\Big)\cdot\vartheta_0'\Big(\frac{2m-1}{2}\tau,\,\tau\Big) + \text{steig. Pot.}$$

$$= \Big(v-\frac{2m-1}{2}\tau\Big)\cdot i\cdot(-1)^{m-1}\cdot\vartheta_1'\cdot e^{-\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2\pi i\tau} + \cdots,$$

$$e^{-2\varkappa\pi i v} = e^{-(2m-1)\varkappa\pi i\tau} + \text{steig. Pot.}$$

Daraus folgt, dass der Factor von:

$$\frac{1}{v-\frac{2m-1}{2}\tau}$$

in der Entwickelung von

$$\varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}$$

die Form annimmt:

$$\frac{\vartheta_1(na,\, n\tau)}{\vartheta_1'}\cdot e^{-(2m-1)\pi i\left[na+\left(\frac{2m-1}{4}\right)(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]} \tag{4}$$

Das geschlossene Integral um den Punkt

$$v = \frac{2m-1}{2}\tau$$

hat dann denselben Werth multiplicirt mit $2\pi i$.

Demgemäss nimmt das gesuchte Integral:

$$\int \varphi(v)\cdot e^{-2\varkappa\pi i v}\cdot dv$$

die Form an:

$$2\pi i\,\frac{\vartheta_1(na,\,n\tau)}{\vartheta_1'}\sum_1^{\nu}{}_m\, e^{-(2m-1)\pi i\left[\varkappa a+\frac{2m-1}{4}(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]},$$

oder also wir erhalten die Recursionsformel:

$$(5_a)\quad a_\varkappa = e^{-2\nu n\pi i a-\nu\pi i\tau(\nu(n-1)+2\varkappa)}\cdot a_{\varkappa+(n-1)\nu}$$
$$+\,2\pi i\,\frac{\vartheta_1(na,\,n\tau)}{\vartheta_1'}\sum_1^{\nu}{}_m\, e^{-(2m-1)\pi i\left[\varkappa a+\frac{2m-1}{4}(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]}.$$

Genau so würde folgen:

$$(5_b)\quad a_\varkappa = e^{2\nu n\pi i a+\nu\pi i\tau(-\nu(n-1)+2\varkappa)}\cdot a_{\varkappa-(n-1)\nu}$$
$$-\,2\pi i\,\frac{\vartheta_1(na,\,n\tau)}{\vartheta_1'}\sum_1^{\nu}{}_m\, e^{(2m-1)\pi i\left[\varkappa a-\frac{2m-1}{4}(n-1)\tau+\varkappa\tau\right]}.$$

So haben wir Recursionsformeln gefunden, mit deren Hülfe es möglich ist, die Entwickelung in trigonometrische Reihen in expliciter Form wirklich herzustellen.

In der That, jedenfalls können wir schreiben:

$$(6)\quad \varphi(v) = a_0 + a_1\cdot e^{2\pi i v} + \cdots + a_{n-2}\cdot e^{2\pi i(n-2)v}$$
$$+\sum_1^{\infty}{}_\nu\sum_0^{n-2}{}_\varkappa\, a_{\varkappa+(n-1)\nu}\cdot e^{2\pi i(\varkappa+(n-1)\nu)v}$$
$$+\sum_1^{\infty}{}_\nu\sum_0^{n-2}{}_\varkappa\, a_{\varkappa-(n-1)\nu}\cdot e^{2\pi i(\varkappa-(n-1)\nu)v}.$$

Die Ausdrücke $a_{\varkappa\pm(n-1)\nu}$ können vermöge der angegebenen Recursionsformeln durch die Grössen $a_\varkappa$ ersetzt werden. Es ergeben sich dann zweierlei Arten von Gliedern. Erstens erhalten wir Glieder, die den Factor $a_\varkappa$ besitzen, zweitens solche, bei denen dasselbe nicht der Fall ist. Die Glieder der ersten Art sind leicht zu fixiren. In der That, der Factor von $a_\varkappa$ wird:

$$e^{2\pi i\varkappa v}\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, e^{2\nu\pi i((n-1)v+na)+\nu\pi i\tau(\nu(n-1)+2\varkappa)}$$

oder also gleich:

$$(7)\quad e^{2\pi i\varkappa v}\cdot\vartheta_3[(n-1)v+na+\varkappa\tau,\ (n-1)\tau].$$

Etwas complicirter gestaltet sich die Summirung der übrigen Glieder. Für einen festen Werth von ν ergeben sich aus der Summe:

$$\sum_1^{\infty}{}_\nu\sum_0^{n-2}{}_\varkappa\, a_{\varkappa+(n-1)\nu}\cdot e^{2\pi i(\varkappa+(n-1)\nu)v}$$

die Glieder

$$\frac{-2\pi i \vartheta_1(na,\, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot e^{2\pi i(n-1)\nu v} \cdot M,$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
M = {} & e^{(2\nu-1)na\pi i+\left(\nu^2-\frac{1}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \sum_{0}^{n-2}{}_{\varkappa}\, q^{(2\nu-1)\varkappa} \cdot e^{2\pi i\varkappa v} \\
& + e^{(2\nu-3)na\pi i+\left(\nu^2-\frac{3^2}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \sum_{0}^{n-2}{}_{\varkappa}\, q^{(2\nu-3)\varkappa} \cdot e^{2\pi i\varkappa v} \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& + e^{na\pi i+\left(\nu-\frac{1}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \sum_{0}^{n-2}{}_{\varkappa}\, q^{\varkappa} \cdot e^{2\pi i\varkappa v}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
M = {} & e^{(2\nu-1)na\pi i+\left(\nu^2-\frac{1}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \cdot \frac{1-q^{(2\nu-1)(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1-q^{2\nu-1} \cdot e^{2\pi i v}} \\
& + e^{(2\nu-3)na\pi i+\left(\nu^2-\frac{3^2}{2^2}\right)(n-1)\pi i\tau} \cdot \frac{1-q^{(2\nu-3)(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1-q^{2\nu-3} \cdot e^{2\pi i v}} \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
& + e^{na\pi i+\left(\nu-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)(n-1)\pi i\tau} \cdot \frac{1-q^{(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1-q \cdot e^{2\pi i v}}
\end{aligned}$$

oder also:

$$(8) \qquad M = \sum_{0}^{\nu-1}{}_{m}\, e^{(2m+1)\pi i\left[na+(n-1)\tau\left(\nu-\frac{2m+1}{4}\right)\right]} \cdot \frac{1-q^{(n-1)(2m+1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1-q^{2m+1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Dieser Ausdruck für M ist einzusetzen und dann die Summe nach ν von 1 bis ∞ zu nehmen. Als Factor von:

$$-2\pi i \frac{\vartheta_1(na,\, n\tau)}{\vartheta_1'}$$

ergiebt sich hierbei die folgende Grösse:

$$\begin{aligned}
& e^{2\pi i(n-1)v} \cdot e^{na\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)} \cdot \frac{1-q^{(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1-q \cdot e^{2\pi i v}} \\
& + e^{4\pi i(n-1)v} \Bigg[e^{na\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(2-\frac{1}{2^2}\right)} \frac{1-q^{(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1-q \cdot e^{2\pi i v}} \\
& \qquad + e^{3na\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(6-\frac{3^2}{2^2}\right)} \cdot \frac{1-q^{3(n-1)} \cdot e^{2\pi i(n-1)v}}{1-q^3 \cdot e^{2\pi i v}} \Bigg] + \cdots
\end{aligned}$$

Wir addiren jetzt nach Verticalreihen d. h. fassen alle Glieder zusammen, die den Factor:

$$e^{na\pi i} \cdot \frac{1 - q^{(n-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i v}}{1 - q \cdot e^{2\pi i v}} \cdot q^{-(n-1)\frac{1}{4}} \quad \text{etc.}$$

besitzen. Allgemein wird der Factor von:

$$e^{(2m-1)na\pi i} \cdot \frac{1 - q^{(2m-1)(n-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}} \cdot q^{-(n-1)\left(m-\frac{1}{2}\right)^2}$$

wie leicht ersichtlich ist, lauten:

$$q^{(n-1)m(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v} + q^{(n-1)(m+1)(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i (m+1) v} + \dots$$

oder also:

$$\frac{q^{(n-1)m(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{(n-1)(2m-1)} \cdot e^{2(n-1)\pi i v}}.$$

Das Product der beiden Glieder ergiebt:

$$\frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Dieser Ausdruck ist nach m von 1 bis ∞ zu summiren, so dass wir schliesslich erhalten

$$-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_1^{\infty}{}_m \frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Genau so würden sich aus der zweiten Summe die Glieder ergeben:

$$-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_0^{-\infty}{}_m \frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{2m-1} \cdot e^{2\pi i v}}.$$

Daraus folgt, dass die Summe aller Glieder, die nicht mit einer der Grössen a_x multiplicirt sind, lautet:

$$-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{n(2m-1)a\pi i} \cdot q^{(n-1)\left(m^2-\frac{1}{4}\right)} \cdot e^{2(n-1)\pi i m v}}{1 - q^{(2m-1)} \cdot e^{2\pi i v}},$$

oder also:

(9) $$\pi \cdot \frac{\vartheta_1(na, n\tau)}{\vartheta_1'} \cdot e^{(n-2)\pi i v} \cdot F$$

$$F = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{e^{(2m-1)(n-1)i\pi\left[v + \frac{na}{n-1} + \frac{2m-1}{4}\tau + \frac{n-2}{2(n-1)}\tau\right]}}{\sin\pi\left(v + \frac{2m-1}{2}\tau\right)}.$$

Wir kommen hiermit auf völlig naturgemässem Wege zu der Function:

$$e^{(n-2)\pi i v} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_m \frac{e^{(2m-1)(n-1)i\pi\left[v+\frac{na}{n-1}+\frac{2m-1}{4}\tau+\frac{n-2}{2(n-1)}\tau\right]}}{\sin\pi\left(v+\frac{2m-1}{2}\tau\right)}.$$

Diese Function unterscheidet sich nur unwesentlich von der Function

$$F_{00}(v, \tau)$$

der vorigen Arbeit, *so dass wir zu derselben Darstellung der Primfunctionen wie früher gelangt sind, jetzt aber auf systematischem und naturgemässem Wege.*

§ 2.

Zweite directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Man kann, wie leicht zu sehen ist, ansetzen:

$$(1) \qquad \frac{\vartheta_0(2v+2a,\ 2\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} = \varphi(v, a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \cdot b_{2n} \cdot e^{2n\pi i v};$$

desgleichen darf man setzen:

$$(2_a) \quad \frac{\vartheta_1(2v+2a,\ 2\tau)}{\vartheta_1(v,\tau)} - \pi\,\frac{\vartheta_1(2a,2\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\frac{1}{\sin\pi v} = \psi(v, a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, c_n \cdot e^{n\pi i v}$$

oder auch, da

$$\psi(v+1,\ a) = -\psi(v, a)$$

ist:

$$(2_b) \qquad \psi(v, a) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, c_{2n+1}\cdot e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Da nun $v = 0$ für $\psi(v, a)$ kein Unstetigkeitspunkt mehr ist, so sind wir berechtigt, links und rechts an Stelle von v: $v+\frac{\tau}{2}$ zu setzen.

Wir erhalten dann auf der linken Seite den Ausdruck:

$$e^{-\pi i[v+2a]}\cdot q^{-\frac{1}{4}}\cdot\frac{\vartheta_0(2v+2a,\ 2\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} - \pi\,\frac{\vartheta_1(2a,2\tau)}{\vartheta_1'}\cdot\frac{1}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)},$$

auf der rechten dagegen:

$$q^{\frac{1}{2}}\sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n\, c_{2n+1}\cdot q^n\cdot e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Unter solchen Umständen ergiebt sich für $\varphi(v, a)$ ein zweiter Ausdruck, nämlich:

(3) $$\varphi(v, a) = \pi q^{\frac{1}{4}} \cdot e^{\pi i[v+2a]} \cdot \frac{\vartheta_1(2a, 2\tau)}{\vartheta_1'} \frac{1}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}$$
$$+ q^{\frac{3}{4}} \cdot e^{\pi i[v+2a]} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n c_{2n+1} \cdot q^n \cdot e^{(2n+1)\pi i v}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung:

$$\frac{1}{\sin\pi\left(v+\frac{\tau}{2}\right)} = -2iq^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\pi i v} \cdot \sum_0^{\infty}{}_n e^{2n\pi i v} \cdot q^n,$$

so erhalten wir für $\varphi(v, a)$ eine zweite Reihe, die nach steigenden und fallenden Potenzen von $e^{2\pi i v}$ fortschreitet. Durch Vergleichung ergeben sich die Relationen:

(4) $$\begin{cases} \text{I) für } n \geqq 0 \\ q^{-\frac{1}{4}} \lambda\left[-2\pi i \cdot \frac{\vartheta_1(2a, 2\tau)}{\vartheta_1'} \cdot q^n + q^n \cdot c_{2n-1}\right] = b_{2n}, \\ \text{II) für } n < 0 \\ q^{\frac{3}{4}} \cdot \lambda \cdot q^{-n} \cdot c_{-(2n-1)} = b_{-2(n-1)}, \\ \lambda = e^{2\pi i a}. \end{cases}$$

Man sieht ferner unmittelbar, dass die Relationen bestehen:

$$\varphi(-v, -a) = \varphi(v, a), \quad \psi(-v, -a) = \psi(v, a).$$

Sieht man die Grössen b und c als Functionen von a an, so wird:

$$b_{-2n}(-a) = b_{2n}(a), \quad c_{-(2n+1)}(-a) = c_{2n+1}(a).$$

Setzt man nun in Gleichung $(4)_{\text{II}}$ $-a$ an Stelle von a, wobei zu beachten ist, dass hierfür λ in seinen reciproken Werth übergeht, so geht diese Gleichung über in:

$$q^{\frac{3}{4}} \cdot \lambda^{-1} \cdot q^{-n} \cdot c_{-(2n-1)}(-a) = b_{-2(n-1)}(-a),$$

oder also in:

$$q^{\frac{3}{4}} \cdot \lambda^{-1} \cdot q^{-n} \cdot c_{2n-1} \qquad = b_{2(n-1)}$$

oder auch:

$$c_{2n-1} \qquad = q^{-\frac{3}{4}+n} \lambda \cdot b_{2(n-1)}.$$

Dieser Werth von c_{2n-1} in $(4)_I$ eingesetzt, ergiebt die Recursionsformel:

$$(5) \qquad b_{2n} = q^{2n-1} \cdot e^{2\cdot 2\pi i a} \cdot b_{2(n-1)} - 2\pi i q^{n-\frac{1}{4}} \cdot e^{2\pi i a} \cdot \frac{\vartheta_1(2a, 2\tau)}{\vartheta_1'}.$$

Es ist dieses dieselbe Recursionsformel, die bei der ersten Methode gefunden ist, *so dass wir also zu genau denselben Resultaten, wie vorhin gelangt sind.*

§ 3.

Dritte directe Methode, die Primfunctionen in trigonometrische Reihen zu entwickeln.

Wir sind jedenfalls berechtigt, innerhalb eines gewissen Bereichs die Entwickelung anzusetzen:

$$(1) \qquad \frac{\vartheta_3(v+a, \tau)}{\vartheta_0(v)} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} a_{r,k} \cdot q^{r^2} \cdot e^{2\pi i(kv+ra)},$$

und zwar kann hierbei a alle endlichen Werthe annehmen. Setzen wir nun an Stelle von a: $a+\tau$, so wird einerseits:

$$\frac{\vartheta_3(v+a+\tau, \tau)}{\vartheta_0(v)} = e^{-2\pi i\left(v+a+\frac{\tau}{2}\right)} \cdot \frac{\vartheta_3(v+a, \tau)}{\vartheta_0(v)},$$

und andrerseits ergiebt sich für die Grössen a_{rk} die Recursionsformel:

$$a_{r-1,k-1} = a_{r,k}$$

oder

$$(2) \qquad a_{r,k} = a_{r-k,0}$$

Aus dieser Formel folgt, dass es zur Kenntniss der gesuchten Coefficienten völlig genügt, die Grössen: $a_{r,0}$ für alle Werthe von r zwischen $+\infty$ und $-\infty$ zu kennen. Dabei findet zu gleicher Zeit die Relation statt:

$$(3) \qquad a_{r,0} = a_{-r,0}.$$

Ganz genau so können wir setzen:

$$(4) \quad \frac{\vartheta_2(v+a, \tau)}{\vartheta_1(v)} = \pi \frac{\vartheta_2(a, \tau)}{\vartheta_1'} \cdot \frac{\cos \pi v}{\sin \pi v} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{r} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} b_{r,k} \cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2} \cdot e^{\pi i[2kv+(2r+1)a]}.$$

Die Grössen $b_{r,k}$ könnten genau so reducirt werden, wie die Grössen $a_{r,k}$. Da uns aber an ihrer Bestimmung nichts liegt, so beschränken wir uns auf Aufstellung der einen einzigen Beziehung:

$$(5) \qquad b_{r,k} = -b_{-r-1,-k}.$$

Jetzt wird genau so verfahren, wie bei der zweiten Methode. Wir setzen in Gleichung (4) an Stelle von v: $v+\frac{\tau}{2}$. Durch Coefficientenvergleichung ergiebt sich die Relation:

(6) $$a_{r+1,0}\cdot q^{(r+1)^2} = -\frac{\pi\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'}\cdot i\cdot b_{r,0}\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}.$$

In dieser Gleichung setzen wir an Stelle von r: $-r$, so erhalten wir:

$$a_{-r+1,0}\cdot q^{(r-1)^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'} - i\,b_{-r,0}\cdot q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}$$

oder also:

$$a_{r-1,0}\cdot q^{(r-1)^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'} + i\,b_{r-1,0}\cdot q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2}.$$

Setzen wir hierin an Stelle von $r-1$: r, so wird:

$$a_{r,0}\,q^{r^2} = -\frac{\pi q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}}{\vartheta_1'} + i\,b_{r,0}\,q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}.$$

Mithin ergiebt sich die Recursionsformel:

(7) $$a_{r+1,0}\,q^{(r+1)^2} + a_{r,0}\,q^{r^2} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'}\cdot q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}$$

oder auch die Formel:

(8) $$a_{r,0}q^{r^2} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'}\left[q^{\left(r+\frac{1}{2}\right)^2},\, q^{\left(r+\frac{3}{2}\right)^2}\cdots(-1)^n q^{\left(r+n+\frac{1}{2}\right)^2}\right] + (-1)^{n+1}a_{r+n+1}\,g^{(r+n+1)^2}.$$

Diese Formeln lehren alle Grössen $a_{r,0}$ kennen, wenn a_{00} gegeben ist, aber sie geben auch unmittelbar $a_{r,0}$ in expliciter Gestalt, indem wir in der letzten Gleichung $n = \infty$ setzen:

$$a_{r,0} = -\frac{2\pi}{\vartheta_1'}\,q^{-r^2}\cdot\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\cdot q^{\left(r+n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Die soeben gefundene Form der Entwickelung ist von der Hermite'schen verschieden, indessen ist die Reduction auf dieselbe so wenig schwierig, dass von ihr abgesehen werden kann.

Rostock, den 28. Januar 1888.

Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten.

Von

David Hilbert in Königsberg.

Eine algebraische Form gerader Ordnung n mit reellen Coefficienten und m homogenen Variablen möge *definit* heissen, wenn dieselbe für jedes reelle Werthsystem der m Variablen einen positiven Werth annimmt und überdies eine von Null verschiedene Discriminante besitzt. Eine Form mit reellen Coefficienten wird kurz eine reelle Form genannt.

Bekanntlich ist *jede definite quadratische Form* von m Variablen als Summe von m Quadraten reeller Linearformen darstellbar. Desgleichen lässt sich *jede definite binäre Form* als Summe von zwei Quadraten reeller Formen darstellen, wie man durch geeignete Factorenzerlegung der Form erkennt. Da die in Rede stehende Darstellung den definiten Charakter der Form in der denkbar einfachsten Weise zu Tage treten lässt, so erscheint eine allgemeine Untersuchung betreffs der Möglichkeit einer solchen Darstellung von Interesse. Was zunächst den weiteren Fall $n = 4$, $m = 3$ angeht, so gilt der Satz:

Jede definite biquadratische ternäre Form lässt sich als Summe von drei Quadraten reeller quadratischer Formen darstellen.

Zum Beweise betrachten wir eine biquadratische ternäre Form F, welche der Summe der Quadrate dreier quadratischer Formen φ, ψ, χ gleich ist. Soll gleichzeitig dieselbe Form F als Summe der Quadrate der drei quadratischen Formen $\varphi + \varepsilon\varphi'$, $\psi + \varepsilon\psi'$, $\chi + \varepsilon\chi'$ darstellbar sein, wo ε eine unendlichkleine Constante bedeutet, so führt die Vergleichung beider Darstellungen nothwendig zu der Relation:

(1) $$\varphi\varphi' + \psi\psi' + \chi\chi' = 0.$$

Die drei Gleichungen:

(2) $$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \chi = 0$$

mögen kein gemeinsames Lösungssystem besitzen. Es müssen dann auf Grund der Identität (1) die vier gemeinsamen Lösungen der beiden letzteren Gleichungen die quadratische Form φ' zum Verschwinden bringen; hieraus folgt:

$$\varphi' = \alpha\psi + \gamma\chi,$$

und desgleichen:

$$\psi' = \beta\varphi + \zeta\chi,$$
$$\chi' = \delta\varphi + \vartheta\psi.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Identität (1)* gewinnen wir für die eingeführten Constanten die Relationen:

$$\alpha + \beta = 0, \quad \gamma + \delta = 0, \quad \zeta + \vartheta = 0.$$

Sobald daher die Resultante der drei Gleichungen (2) von Null verschieden ist, kann jene Identität (1) ausschliesslich durch eine lineare Combination der drei Lösungen:

$$\begin{array}{lll} \varphi' = \quad 0, & \varphi' = -\chi, & \varphi' = \quad \psi, \\ \psi' = \quad \chi, & \psi' = \quad 0, & \psi' = -\varphi, \\ \chi' = -\psi, & \chi' = \quad \varphi, & \chi' = \quad 0 \end{array}$$

befriedigt werden d. h. es giebt keine mehr als dreifachunendliche Mannigfaltigkeit von Formen φ, ψ, χ, welche dieselbe Form F in der fraglichen Weise zur Darstellung bringen. Da das System der drei quadratischen Formen 18 Coefficienten, die biquadratische Form F dagegen nur 15 Coefficienten besitzt, so folgt aus obigen Betrachtungen, dass eine jede biquadratische ternäre Form sich als Summe von drei Formenquadraten darstellen lässt*).

Die Coefficienten der darstellenden Formen φ, ψ, χ enthalten noch drei willkürliche Parameter und nehmen daher erst dann bestimmte Werthe an, wenn wir ihnen irgend drei von einander unabhängige Bedingungen auferlegen. Ist letzteres geschehen, so giebt es nur eine endliche Anzahl von Formensystemen φ, ψ, χ, durch deren Vermittelung die vorgelegte biquadratische Form F als Quadratsumme dargestellt werden kann. Sollen von diesen Formensystemen bei beliebiger Wahl jener Bedingungen zwei Formensysteme zusammenrücken, so ist es den obigen Ueberlegungen zufolge erforderlich, dass die Resultante der betreffenden Formen φ, ψ, χ und in Folge dessen auch die Discriminante der darzustellenden Form F verschwindet. Der hierdurch gekennzeichnete singuläre Fall ist für die weitere Schlussfolgerung von Bedeutung.

Es seien nämlich F, F', F'' drei definite biquadratische ternäre Formen und p, p', p'' drei veränderliche positive Grössen, deren Verhältnisse durch die Punkte im Inneren eines Coordinatendreieckes dargestellt

*) Das allgemeine hierbei zu Grunde liegende Princip rührt von L. Kronecker her, vergl. Mathematische Annalen Bd. 13, pag. 549.

sein mögen. Wir construiren dann alle diejenigen Punkte p, p', p'', für welche die Gleichung:

$$pF + p'F' + p''F'' = 0 \tag{3}$$

eine Curve vierter Ordnung mit zwei oder mehr Doppelpunkten definirt. Wie auch die beiden definiten Formen F und F' gegeben seien, es ist offenbar stets möglich, F'' so zu wählen, dass jene Punkte p, p', p'' nur in endlicher Zahl vorhanden sind und wir können demnach die beiden Eckpunkte $p = 1$, $p' = 0$, $p'' = 0$ und $p = 0$, $p' = 1$, $p'' = 0$ durch eine krumme Linie verbinden, welche ganz im Innern des Coordinatendreieckes verläuft und keinen der vorhin construirten Punkte trifft. Betrachten wir jetzt einen Punkt p, p', p'' dieser Verbindungslinie, so besitzt die entsprechende biquadratische Curve (3) keinen Doppelpunkt. Denn da dieselbe überhaupt keinen reellen Punkt hat, so müsste jeder etwa existirende Doppelpunkt der Curve nothwendig ein Punkt mit complexen Coordinaten sein; der zu diesem conjugirt imaginäre Punkt würde dann ein zweiter Doppelpunkt der Curve sein, woraus sich ein offenbarer Widerspruch mit den getroffenen Festsetzungen ergiebt. Indem wir mit den Grössen p, p', p'' dem Laufe der Verbindungslinie folgen, gelangen wir von der definiten Form F durch continuirliche Veränderung ihrer reellen Coefficienten zu der definiten Form F', ohne dabei eine Form mit verschwindender Discriminante zu passiren. Wir setzen nun die Form F gleich der Summe der Quadrate dreier reeller quadratischer Formen φ, ψ, χ. Es bleiben dann bei continuirlicher Veränderung der reellen Coefficienten von F offenbar auch die Coefficienten der darstellenden Formen φ, ψ, χ stets reell, solange der vorhin betrachtete singuläre Fall ausgeschlossen wird. Führen wir daher die continuirliche Veränderung von F in F' auf dem angegebenen Wege aus, so folgt nothwendig, dass auch die letztere Form F' die fragliche Darstellung als Summe von drei Quadraten reeller Formen zulässt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Die zu Anfang dieser Arbeit angeregte Frage gelangt jedoch erst durch die strenge Begründung des folgenden Theorems zum befriedigenden Abschluss.

Unter den definiten Formen der geraden Ordnung n von m Variablen giebt es stets solche, welche sich n i c h t *als endliche Summe von Quadraten reeller Formen darstellen lassen**). *Alleinige Ausnahme bilden die drei oben erledigten Fälle:*

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & n = 2, & m \textit{ beliebig}, \\ \text{II.} & n \textit{ beliebig}, & m = 2, \\ \text{III.} & n = 4, & m = 3. \end{array}$$

*) Die Existenz solcher Formen hat bereits H. Minkowski für wahrscheinlich gehalten; vergl. die erste These in seiner Inauguraldissertation: „Untersuchungen über quadratische Formen.“

Der Beweis wird zunächst für den Fall der ternären Form 6^{ter} Ordnung erbracht.

Wir nehmen in der Ebene 8 getrennte Punkte (1), (2), ..., (8) an, von denen weder irgend drei auf einer geraden Linie noch irgend 6 auf einem Kegelschnitte liegen. Durch diese 8 Punkte lege man zwei reelle Curven dritter Ordnung, deren Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ seien. Die beiden Curven schneiden sich noch in einem 9^{ten} Punkte (9), welcher ebenfalls reell ist und von jenen 8 Punkten getrennt liegen möge. Es sei ferner $f = 0$ die Gleichung des durch die Punkte (1), (2), (3), (4), (5) hindurchgehenden Kegelschnittes und $g = 0$ die Gleichung einer Curve vierter Ordnung, welche durch die Punkte (1), (2), (3), (4), (5) ebenfalls einfach hindurchgeht und überdies die Punkte (6), (7), (8) zu Doppelpunkten besitzt. Dementsprechend sind φ, ψ, f, g ternäre Formen mit reellen Coefficienten. Die reellen homogenen Coordinaten der 9 Punkte (i) bezeichnen wir der Kürze halber gleichfalls mit (i) und erkennen dann, dass die Werthe $f(9)$ und $g(9)$ von Null verschieden sind. Wäre nämlich $f(9)$ gleich Null, so könnte man durch lineare Combination der Gleichungen $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ die Gleichung einer Curve dritter Ordnung aufstellen, welche ausser den 6 Punkten (1), (2), (3), (4), (5), (9) noch einen 7^{ten} Punkt mit dem Kegelschnitte $f = 0$ gemein hätte. Diese Curve dritter Ordnung müsste nothwendig in den Kegelschnitt und eine durch (6), (7), (8) gehende Gerade zerfallen, deren Vorhandensein durch unsere Annahme über die Lage der 8 Punkte ausgeschlossen ist. Wäre ferner $g(9)$ gleich Null, so könnte man auf demselben Wege eine nicht zerfallende Curve dritter Ordnung construiren, welche durch die drei Doppelpunkte (6), (7), (8), sowie durch die 6 einfachen Punkte (1), (2), (3), (4), (5), (9) und überdies noch durch einen beliebigen weiteren einfachen Punkt der Curve $g = 0$ hindurchliefe. In Folge dessen müsste die Curve $g = 0$ in jene Curve dritter Ordnung und in eine durch die Punkte (6), (7), (8) gehende Gerade zerfallen; diese Folgerung tritt wiederum mit unserer Annahme in Widerspruch. Nachdem wir das Vorzeichen der Form f so gewählt haben, dass das Product $f(9)\,g(9)$ positiv ausfällt, betrachten wir die ternäre Form der 6^{ten} Ordnung:

$$\varphi^2 + \psi^2 + p f g,$$

worin p eine positive Constante bedeutet. Es sei ferner allgemein p_i die kleinste positive Grösse, für welche die Curve:

$$\varphi^2 + \psi^2 + p_i f g = 0$$

in dem Punkte (i) einen Rückkehrpunkt oder einen dreifachen Punkt erhält. Giebt es eine Grösse solcher Art überhaupt nicht, so setze man $p_i = \infty$. Die Grössen p_i sind sämmtlich grösser als Null, da dem Werthe $p = 0$ die Curve $\varphi^2 + \psi^2 = 0$ entspricht, welche offenbar die sämmtlichen in Rede stehenden 9 Punkte zu isolirten Doppelpunkten besitzt. Verstehen wir nun unter $[p]$ irgend eine von Null verschiedene positive Grösse, welche kleiner ist als die kleinste der Grössen p_i, so besitzt die Curve:

$$\varphi^2 + \psi^2 + [p] f \cdot g = 0$$

nur noch die 8 Punkte $(1), (2), \ldots, (8)$ zu isolirten Doppelpunkten, während sie den Punkt (9) überhaupt nicht mehr trifft. Es ist in Folge dessen möglich, um jene 9 Punkte kleine Kreise von der Beschaffenheit zu beschreiben, dass die ternäre Form:

$$\varphi^2 + \psi^2 + [p] f g$$

überall im Inneren jener 9 Kreise positiv bleibt und allein in den Mittelpunkten der ersten 8 Kreise gleich Null wird. Da ferner ausserhalb jener 9 Kreise der Ausdruck $\varphi^2 + \psi^2$ stets von Null verschieden ist, so besitzt der absolute Werth des Quotienten:

$$\frac{\varphi^2 + \psi^2}{f g}$$

in dem Gebiete ausserhalb der 9 Kreise ein von Null verschiedenes Minimum M. Verstehen wir nun unter $[[p]]$ eine von Null verschiedene positive, weder $[p]$ noch M erreichende Grösse, *so stellt der Ausdruck:*

$$F = \varphi^2 + \psi^2 + [[p]] f g \tag{4}$$

eine ternäre Form der 6^{ten} *Ordnung dar, welche in den 8 Punkten* $(1), (2), \ldots, (8)$ *Null ist, dagegen für alle anderen reellen Werthsysteme der Variablen von Null verschieden und positiv ausfällt.*

Es bedeute P irgend eine definite ternäre Form der 6^{ten} Ordnung und p wiederum eine von Null verschiedene positive Grösse; die Form $F + pP$ ist dann ebenfalls definit und möge sich als Summe von 28 oder weniger Formenquadraten darstellen lassen, wie folgt:

$$F + pP = \varrho^2 + \sigma^2 + \cdots + \tau^2, \tag{5}$$

wo $\varrho, \sigma, \ldots, \tau$ gewisse reelle ternäre cubische Formen bezeichnen, deren Anzahl die Zahl 28 nicht überschreitet. Substituiren wir in dieser Identität (5) die Coordinaten des Punktes (9), so ist nothwendigerweise für eine jener cubischen Formen etwa für die Form ϱ die Ungleichung:

$$|\varrho(9)| > \left| \sqrt{\frac{F(9)}{28}} \right| \tag{6}$$

erfüllt. Andererseits folgen aus derselben Identität (5) die 8 Ungleichungen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} |\varrho(1)| &\leqq |\sqrt{pP(1)}|, \\ |\varrho(2)| &\leqq |\sqrt{pP(2)}|, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ |\varrho(8)| &\leqq |\sqrt{pP(8)}|. \end{aligned}$$

Da ferner die in Rede stehenden 9 Punkte das vollständige Schnittpunktsystem zweier Curven dritter Ordnung bilden, so herrscht eine Beziehung von der Gestalt:

$$(8)\qquad c_1\varrho(1) + c_2\varrho(2) + \cdots + c_8\varrho(8) + c_9\varrho(9) = 0;$$

dabei sind die Grössen $c_1, c_2, \ldots, c_8, c_9$ von den Coefficienten der cubischen Form ϱ unabhängig und besitzen überdies ausnahmslos von Null verschiedene Werthe. Aus der Gleichung (8) folgt:

$$|c_1\varrho(1)| + |c_2\varrho(2)| + \cdots + |c_8\varrho(8)| \geqq |c_9\varrho(9)|$$

und mit Benutzung der Ungleichungen (6) und (7):

$$|c_1\sqrt{pP(1)}| + |c_2\sqrt{pP(2)}| + \cdots + |c_8\sqrt{pP(8)}| > \left|c_9\sqrt{\frac{F(9)}{28}}\right|.$$

Wählen wir daher für p eine Grösse $\{p\}$, welche von Null verschieden, positiv und kleiner ist als der Werth des Quotienten:

$$\frac{c_9^2 F(9)}{28\,\{|c_1\sqrt{P(1)}| + |c_2\sqrt{P(2)}| + \cdots + |c_8\sqrt{P(8)}|\}^2}$$

so erkennen wir, dass unsere Annahme (5) schliesslich auf einen Widerspruch führt; d. h.: *Die definite ternäre Form $F + \{p\}P$ von der 6^{ten} Ordnung lässt sich nicht als Summe von* 28 *oder weniger Quadraten reeller Formen darstellen.*

Angenommen, die Form $F + \{p\}P$ wäre als Summe von 29 Quadraten reeller Formen darstellbar, so besteht jedenfalls zwischen letzteren eine lineare Relation mit constanten positiven und negativen Coefficienten. Von diesen möge der grösste positive Coefficient den Werth γ besitzen. Dividiren wir dann die in Rede stehende Relation durch γ und subtrahiren sie von der Summe jener 29 Formenquadrate, so gelangen wir zu einer Darstellung der Form $F + \{p\}P$ durch 28 positive Formenquadrate. In ähnlicher Weise führt die Annahme einer Darstellung durch mehr als 29 Formenquadrate schliesslich wieder auf die Darstellung durch 28 Formenquadrate zurück d. h. *die ternäre Form $F + \{p\}P$ von der 6^{ten} Ordnung lässt sich überhaupt nicht als endliche Summe von Quadraten reeller Formen darstellen.*

Um die Richtigkeit unseres Theorems für ternäre Formen von beliebiger gerader Ordnung n zu erkennen, sei $f = 0$ die Gleichung irgend einer reellen Curve von der Ordnung $\frac{n}{2} - 3$, welche durch keinen der 9 Punkte (1), (2), ..., (8), (9) hindurchläuft. Man nehme dann auf dieser Curve soviel reelle Punkte (10), (11), ... an, dass jede durch diese Punkte hindurchgelegte Curve von der Ordnung $\frac{n}{2}$ in die Curve $f=0$ und in eine cubische Curve zerfällt, während das Gleiche nicht mehr der Fall ist, sobald wir in der Reihe jener Punkte (10), (11), ... einen Punkt unterdrücken. In Folge dieser Annahme und wegen der Lage der 9 Punkte (1), (2), ..., (8), (9) gilt eine Relation von der Gestalt:

$$c_1\varrho(1)+c_2\varrho(2)+\cdots+c_8\varrho(8)+c_9\varrho(9)+c_{10}\varrho(10)+c_{11}\varrho(11)+\cdots=0,$$

wo ϱ eine beliebige ternäre Form von der Ordnung $\frac{n}{2}$ bedeutet. Die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, \ldots$ sind von den Coefficienten der Form ϱ unabhängig und die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_8, c_9$ besitzen überdies von Null verschiedene Werthe. Bedeutet nun P eine definite ternäre Form von der Ordnung n, so ergiebt sich durch dieselbe Schlussweise, wie vorhin, *dass die ternäre Form Ff^2+pP für ein genügend kleines positives p nicht als Summe von $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Quadraten reeller Formen und folglich überhaupt nicht als endliche Summe von Quadraten reeller Formen dargestellt werden kann.*

Was endlich die Formen mit mehr als drei Variablen betrifft, so bedarf es vor allem einer Untersuchung der quaternären biquadratischen Form.

Wir nehmen zu dem Zwecke in dem dreidimensionalen Raume 7 getrennte Punkte (1), (2), ..., (7) an, von denen nicht vier in einer Ebene liegen. Ferner soll es nicht möglich sein, durch irgend 6 jener Punkte einen Kegel zweiter Ordnung zu construiren, dessen Spitze in den 7ten Punkt fällt. Man lege nun durch jene 7 Punkte drei reelle quadratische Flächen $\varphi=0$, $\psi=0$ und $\chi=0$, welche sich noch in einem bestimmten 8ten Punkte (8) schneiden. Dieser Punkt (8) ist ebenfalls reell und liege von jenen 7 Punkten getrennt. Es sei $f=0$ die Gleichung der durch die Punkte (1), (2), (3) hindurchgelegten Ebene und $g=0$ die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung, welche durch die Punkte (1), (2), (3) einfach hindurchgeht und überdies die Punkte (4), (5), (6), (7) zu Knotenpunkten besitzt. Die reellen homogenen Coordinaten der 8 Punkte (i) bezeichnen wir der Kürze halber ebenfalls mit (i). Wie man leicht einsieht, ist $f(8)$ von Null verschieden. Das Gleiche gilt von $g(8)$. Denn ginge die Fläche $g=0$ auch durch den Punkt (8), so müsste sich g in der Gestalt

$$r\varphi+s\psi+t\chi$$

ausdrücken lassen, wo r, s, t Linearformen bedeuten. Die Definition der Fläche $g=0$ erfordert, dass für jeden der Punkte (4), (5), (6), (7) die ersten Differentialquotienten der Form g nach jeder der vier homogenen Variablen also die Ausdrücke:

$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_1},$$
$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_2},$$
$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_3}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_3},$$
$$r\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}+s\frac{\partial\psi}{\partial x_4}+t\frac{\partial\chi}{\partial x_4}$$

verschwinden und da keine der Linearformen r, s, t in sämmtlichen vier Punkten (4), (5), (6), (7) verschwinden darf, so würde folgen, dass mindestens für einen von jenen vier Punkten die dreireihigen Determinanten der Matrix:

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_3}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_4}, & \frac{\partial\psi}{\partial x_4}, & \frac{\partial\chi}{\partial x_4} \end{array}\right|$$

gleich Null werden. In letzterem Falle könnte man von einem jener vier Punkte einen Kegel zweiter Ordnung construiren, welcher durch alle übrigen 7 Punkte hindurchgeht. Diese Folgerung befindet sich mit den getroffenen Festsetzungen in Widerspruch. Nachdem wir das Vorzeichen von f so gewählt haben, dass $f(8)\,g(8)$ positiv ausfällt, können wir eine ähnliche Schlussweise wie oben bei Behandlung der ternären Form 6ter Ordnung anwenden. *Dann ergiebt sich, dass der Ausdruck:*

$$F=\varphi^2+\psi^2+\chi^2+pfg$$

für ein genügend kleines positives p eine Form darstellt, welche in den Punkten (1), (2), ..., (7) *Null ist, dagegen für alle anderen reellen Werthsysteme der Variablen von Null verschieden und positiv ausfällt.*

Da die in Rede stehenden 8 Punkte das vollständige Schnittpunktsystem dreier Flächen zweiter Ordnung bilden, so gilt eine lineare Identität von der Gestalt:

$$c_1\,\varrho(1)+c_2\,\varrho(2)+\cdots+c_7\,\varrho(7)+c_8\,\varrho(8)=0,$$

wo ϱ eine beliebige quaternäre quadratische Form bedeutet und die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_7, c_8$ nur von den Coordinaten jener 8 Punkte abhängen. Es bedeute ferner P eine definite quaternäre biquadratische Form und $\{p\}$ eine Grösse, welche von Null verschieden, positiv und kleiner ist als der Werth des Quotienten:

$$\frac{c_8{}^2F(8)}{36\,\{|c_1\sqrt{P(1)}|+|c_2\sqrt{P(2)}|+\cdots+|c_7\sqrt{P(7)}|\}^2}.$$

Setzen wir dann voraus, dass sich die Form $F + \{p\}P$ als Summe von 35 oder weniger Quadraten reeller Formen darstellen liesse, so werden wir in gleicher Weise auf einen Widerspruch geführt, wie oben, als es sich um die ternäre Form der 6ten Ordnung handelte. *Die definite quaternäre biquadratische Form $F + \{p\}P$ lässt sich somit nicht als Summe von 35 oder weniger Quadraten reeller Formen und folglich überhaupt nicht als endliche Summe von Quadraten reeller Formen darstellen.*

Nunmehr bedeute Φ eine definite ternäre Form der 6ten Ordnung und Ψ eine definite quaternäre biquadratische Form. Weder Φ noch Ψ sei als Summe von Quadraten reeller Formen darstellbar. Sind dann n und m gleich oder grösser als vier, so ist es offenbar ohne Schwierigkeit möglich, eine definite Form der $n$ten Ordnung von m Variablen zu construiren, welche durch Nullsetzen einer oder mehrerer Variabler in eine der Formen Φ oder Ψ übergeht. *Eine solche Form ist ebensowenig als Summe von Quadraten reeller Formen darstellbar wie die Formen Φ und Ψ selbst.*

Damit ist der vollständige Beweis für die Richtigkeit unseres Theorems erbracht.

Königsberg i. Pr., den 20. Februar 1888.

Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen.

(Zweite Abhandlung.)

Von

Felix Klein in Göttingen.

In einer ersten unter vorstehendem Titel veröffentlichten Abhandlung, die ich weiterhin mit I citiren werde*), habe ich gezeigt, dass sich die Definition der σ-Functionen, die Weierstrass zunächst nur für den Fall $p = 1$ gegeben hat, bei zweckmässiger Deutung der Weierstrass'schen Formeln in einfacher und naturgemässer Weise auf $p = 2$ übertragen lässt: ich entwickelte zunächst, wie die neuen σ-Functionen aus den zugehörigen ϑ-Functionen entstehen (I, (6), (23)), ich gab sodann die Definition der σ am hyperelliptischen Gebilde ((46), (47) ebenda) und beschäftigte mich schliesslich mit gewissen Eigenschaften ihrer Potenzentwickelung (Gl. (50), (51) daselbst)**). Ich habe seitdem diesen Gegenstand in Vorlesungen weiter verfolgt (Sommer 1887 und Winter 1887—88). Hierbei handelte es sich in erster Linie darum, die Darstellung in der Weise systematisch zu ordnen, dass ich die σ-Functionen als den natürlichen Durchgangspunkt betrachtete, um vom hyperelliptischen Gebilde zu den zugehörigen ϑ-Functionen zu gelangen. Andererseits strebte ich Erweiterung aller Entwickelungen auf hyperelliptische Functionen beliebigen Geschlechtes an. Ich werde im Folgenden hierüber Bericht erstatten, indem ich mich, wie in meinen Vorlesungen, auf eine allgemeine Skizzirung des Gedankenganges beschränke und immer nur diejenigen Punkte genauer ausführe, die für meine Ueberlegung besonders charakteristisch sind. Die nothwendige Ergänzung, welche meine Darstellung hiernach im Einzelnen benöthigt, findet sich zum grossen Theile bereits in der

---

*) Diese Annalen, Bd. 27, pag. 431 ff.

**) Die genannten Entwickelungen sind seitdem von Hrn. Wiltheiss (diese Annalen, Bd. 29, pag. 272 ff.) und von Hrn. Brioschi (Annali di Matematica, ser. 2, t. XIV, pag. 241 ff.) eingehender untersucht worden. Hr. Brioschi berechnet die Entwickelungsterme der geraden σ-Functionen bis zu denjenigen vom zwölften Grade einschliesslich.

hier nachfolgend abgedruckten Arbeit des Hrn. Burkhardt, auf die ich wiederholt zu verweisen haben werde; Citate auf dieselbe sollen kurz durch den Buchstaben B. bezeichnet sein. Ich darf dabei nicht unterlassen anzugeben, dass mir der wissenschaftliche Verkehr mit Hrn. Burkhardt auch für diejenigen Ueberlegungen, die ich im Folgenden selbst entwickele, mannigfach förderlich gewesen ist.

§ 1.

Vorerinnerungen.

Die Bezeichnungen, die ich im Folgenden verwende, sind im Grossen und Ganzen dieselben, die ich in I gebraucht habe. Mit f_6 oder kurz f benenne ich die binäre Form sechsten Grades, durch welche das hyperelliptische Gebilde vom Geschlechte 2 definirt wird. Bei der Definition der σ-Functionen hat man zweierlei Zerlegungen dieses f zu betrachten: solche in zwei cubische Formen und andere in einen Linearfactor und einen Factor fünften Grades. Beide will ich hier in die eine Formel zusammenfassen $f = \varphi\psi$, wo dann, sobald es der Deutlichkeit wegen wünschenswerth scheint, φ und ψ im ersten Falle den Index 3 erhalten mögen, im zweiten Falle aber φ_1 und ψ_5 genannt werden sollen. Die zugehörigen σ werden dann ausführlich als $\sigma_{\varphi_3\psi_3}$ und $\sigma_{\varphi_1\psi_5}$ zu bezeichnen sein, wofür ich gelegentlich der Kürze halber $\sigma_{\varphi\psi}$ oder auch, wenn es nur auf den Grad der φ, ψ ankommt, $\sigma_{3,3}$ und $\sigma_{1,5}$ schreibe. Die Integrale erster Gattung, die früher u_1, u_2 hiessen, nenne ich jetzt w_1, w_2:

$$(1)\qquad w_1 = \int_y^x \frac{z_1\,(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1 z_2)}},\quad w_2 = \int_y^x \frac{z_2\,(z\,dz)}{\sqrt{f(z_1 z_2)}}.$$

Dann ist nach I, (46) die Definition der zehn geraden σ die folgende:

$$(2)\qquad \sigma_{\varphi_3\psi_3}(w_1, w_2) = \frac{\sqrt{\varphi_3 x}\sqrt{\psi_3 y} + \sqrt{\psi_3 x}\sqrt{\varphi_3 y}}{2\sqrt[4]{f_6 x \cdot f_6 y}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}},$$

und die der sechs ungeraden σ nach I, (47):

$$(3)\qquad \sigma_{\varphi_1\psi_5}(w_1, w_2) = \frac{(xy)\sqrt{\varphi_1 x \cdot \varphi_1 y}}{\sqrt[4]{f_6 x \cdot f_6 y}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}.$$

Hierbei ist Q nach I, (36) das Normalintegral dritter Gattung:

$$(4)\qquad Q_{x\,y}^{x'y'} = Q_{x'y'}^{x\,y} = \int_{y'}^{x'}\int_y^x \frac{(z'dz')}{\sqrt{fz'}} \cdot \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{\sqrt{fz'}\sqrt{fz} + F(z', z)}{2(z'z)^2},$$

wo $F(z', z)$ die durch 120 dividirte dritte Polare bedeutet:

$$F(z', z) = \frac{1}{120}\left(\frac{\partial^3 f(z_1 z_2)}{\partial z_1^3} \cdot z_1'^3 + \cdots\right), \tag{5a}$$

die man symbolisch so schreiben kann, wenn man $f(z) = a_z^6$ setzt:

$$F(z', z) = a_{z'}^3 \cdot a_z^3. \tag{5b}$$

Ferner sind $\bar{x}, \bar{y}$ die Benennungen derjenigen Stellen des hyperelliptischen Gebildes, die zu den Strecken x, y conjugirt sind (cf. I, p. 446).

Auf der durch $\sqrt{f}$ gegebenen Riemann'schen Fläche fixiren wir jetzt, wie in I, pag. 435, 436, ein System canonischer Querschnitte A_1, A_2, B_1, B_2. Die zugehörigen Perioden der w_1, w_2 bezeichnen wir nach I (9) durch das Schema:

(6)

	A_1	A_2	B_1	B_2
w_1	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}
w_2	ω_{21}	ω_{22}	ω_{23}	ω_{24}

Dabei gilt, wohlverstanden, eine Periode als einem Querschnitte *zugehörig*, wenn sie dem Integralwerthe bei *Ueberschreitung* des Querschnitts hinzutritt. Wollten wir die Perioden so ordnen, wie sie sich bei *Durchlaufung* der einzelnen Querschnitte A, B ergeben, so müssten wir in dem vorstehenden Schema die erste und dritte, wie die zweite und vierte Verticalreihe mit einander vertauschen.

Aus (6) ergeben sich jetzt die Normalintegrale v_i und die Thetamoduln τ_{ik} nach der Tabelle:

(7)

	A_1	A_2	B_1	B_2
v_1	1	0	τ_{11}	τ_{12}
v_2	0	1	τ_{21}	τ_{22}

Die Unterdeterminante aus den beiden ersten Colonnen der ω bezeichnen wir mit p_{12}:

$$p_{12} = \omega_{12}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}. \tag{8}$$

Aus den v, τ denken wir uns des weiteren die 16 ϑ-Reihen gebildet. Wir unterscheiden dieselben in üblicher Weise durch eine *Charakteristik*

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}, \tag{9}$$

wo die g_1, g_2, h_1, h_2 je die beiden Werthe Null und Eins annehmen können. Wenn x in (1) die Querschnitte A_1, A_2, B_1, B_2 überschreitet und die v_1, v_2 dementsprechend die in (8) bezeichneten Periodenzuwächse erhalten, wird das zur Charakteristik $\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|$ gehörige ϑ, das fortan mit

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v_1, v_2) \quad \text{oder kurz} \quad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$$

bezeichnet werden soll, die Factoren erhalten:

$$(10) \quad (-1)^{g_1}, \quad (-1)^{g_2}, \quad (-1)^{h_1} \cdot e^{-2i\pi\left(v_1 + \frac{\tau_{11}}{2}\right)}, \quad (-1)^{h_2} \cdot e^{-2i\pi\left(v_2 + \frac{\tau_{22}}{2}\right)}.$$

Jeder geraden ϑ-Function entspricht eine bestimmte Zerspaltung von f in zwei Factoren φ_3 und ψ_3, jeder ungeraden eine solche in φ_1 und ψ_5. Es wird weiterhin unsere besondere Aufgabe sein, zu entscheiden, welche Zerlegung dies in jedem Falle ist und wie also, je nach der Wahl des Querschnittsystems (6), die 16 ϑ-Functionen den 16 σ-Functionen zugeordnet sind. Bemerken wir hier nur noch, dass die zugehörigen Zerlegungen von f sich insbesondere geltend machen, wenn man die ϑ-Functionen nach Potenzen der v_1, v_2 entwickeln will. Mit $\Delta\varphi_3$, $\Delta\psi_3$ seien, wie in I, die Discriminanten von φ_3, ψ_3 bezeichnet, ebenso mit $\Delta\psi_5$ diejenige von ψ_5. Ich will der Gleichförmigkeit der Formeln wegen hier auch noch das Zeichen $\Delta\varphi_1$ einführen, das einfach den Zahlenwerth Eins repräsentiren soll. Die Coefficienten von $\varphi_1(z_1 z_2)$ nenne ich φ_{11}, φ_{12}:

$$\varphi_1(z_1 z_2) = \varphi_{11} z_1 + \varphi_{12} z_2.$$

Dann ist nach I, pag. 438—440, vermöge der dort citirten Thomae'schen Entwickelungen*) der Anfangsterm der Reihenentwickelung:

a) *beim geraden* ϑ:

$$(11\,\mathrm{a}) \qquad \vartheta(v_1, v_2) = \sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}} \cdot \sqrt[8]{\Delta\varphi_3 \;\; \Delta\psi_3} + \cdots,$$

b) *beim ungeraden* ϑ:

$$(11\,\mathrm{b}) \qquad \vartheta(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}} \cdot \sqrt[8]{\Delta\varphi_1 \cdot \Delta\psi_5} \cdot (\varphi_{11} w_1 + \varphi_{12} w_2) + \cdots$$

(wo in der letzten Formel die w_1, w_2 noch durch die ihnen gleichen linearen Verbindungen der v_1, v_2 zu ersetzen sind, die sich aus (7) ergeben:

$$(12) \qquad \begin{aligned} w_1 &= \omega_{11} v_1 + \omega_{12} v_2, \\ w_2 &= \omega_{21} v_1 + \omega_{22} v_2). \end{aligned}$$

*) Crelle's Journal Bd. 71. *Beitrag zur Bestimmung von* $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ *durch die Classenmoduln algebraischer Functionen.*

§ 2.

Integrale zweiter Gattung.

Es wird sich jetzt zunächst darum handeln, die Periodicitätseigenschaften der σ-Functionen von den Formeln (2), (3) aus festzulegen. Hierzu haben wir vorab die Periodicitätseigenschaften des Integrals Q zu untersuchen. Zu dem Zwecke wird man sich des bekannten Zerlegungsverfahrens bedienen, welches Weierstrass seinen bezüglichen Entwickelungen zu Grunde legt*). Inzwischen konnte mir die Form, in der dieses Verfahren gegeben wird, für meine Zwecke nicht genügen. Vielmehr musste ich versuchen, dasselbe so umzusetzen, dass durchweg invariante Bildungen und Processe zur Verwendung kamen. Hierzu gehörte vor allen Dingen eine geeignete Einführung der beiden, in der Weierstrass'schen Theorie vorkommenden Integrale zweiter Gattung, die den Integralen w_1, w_2 der ersten Gattung correspondiren. Ich werde dieselben nach den in I entwickelten Principien, also unter Vermeidung aller unnöthigen Irrationalitäten und im Anschluss an die Verfahrungsweisen der Invariantentheorie *so wählen, dass ihre gemeinsame Unstetigkeitsstelle* (an der sie, allgemein zu reden, zweifach unendlich werden) *eine beliebige Stelle t des hyperelliptischen Gebildes ist, während gleichzeitig ihre Perioden von der Wahl dieser Stelle unabhängig sind.* Letzteres muss sich in der That erreichen lassen. Ist nämlich t' eine zweite Stelle des algebraischen Gebildes, so wird man auf letzterem eine algebraische Function construiren können, welche in t genau so unendlich wird, wie das eine der beiden zu t gehörigen Integrale zweiter Gattung, welche ferner in t' höchstens doppelt unendlich wird und überall sonst endlich bleibt. Subtrahirt man nun diese algebraische Function von dem in t unendlich werdenden Integral zweiter Gattung, so hat man ein Integral zweiter Gattung gewonnen, dessen Unstetigkeitsstelle nach t' verlegt ist, während seine Perioden völlig ungeändert geblieben sind. —

Die Durchführung der hiermit angedeuteten Entwickelungen wird durch folgende einfache Formeln geliefert. Sei:

$$Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{\sqrt{fz}\sqrt{ft} + F(z,t)}{2(zt)^2}, \tag{12}$$

d. h. dasselbe Integral, welches unter dem Doppelintegral Q vorkommt, sofern man für das bei Q benutzte z' jetzt t setzt. Dieses Z stellt an sich bereits ein Integral zweiter Gattung mit der Unstetigkeitsstelle t

*) Vergl. beispielsweise die Darstellung bei Wiltheiss im 99ten Bande des Journals für Mathematik, p. 238.

vor, an welcher es übrigens nur einfach unendlich wird. Formentheoretisch ist dasselbe als eine Covariante von f mit den Variabelreihen x, y, t vom Gewichte (-1) zu bezeichnen. In den x, y ist Z selbstverständlich vom 0^{ten} Grade, in den t vom ersten, in den Coefficienten von f vom Grade $+\,{}^1/_2$. *Wir gewinnen nun die beiden fernerhin zu benutzenden Integrale der zweiten Gattung, die wir $Z_1^{(t)}, Z_2^{(t)}$ nennen wollen, indem wir $Z^{(t)}$ nach t_1, bez. t_2 differentiiren. Wir setzen also:*

$$(13)\qquad Z_1^{(t)} = \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial t_1}, \quad Z_2^{(t)} = \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial t_2}.$$

Dass diese $Z_1^{(t)}$, $Z_2^{(t)}$ allen von uns aufgestellten Forderungen in der That entsprechen, ist leicht zu sehen. Um zu zeigen, dass ihre Perioden von der Stelle t unabhängig sind, bilde man für eine zweite Stelle, t', die entsprechenden Integrale $Z_1^{(t')}$, $Z_2^{(t')}$. Die Differenzen

$$Z_1^{(t)} - Z_1^{(t')}, \quad Z_2^{(t)} - Z_2^{(t')}$$

erweisen sich dann als algebraische Functionen*).

Ich werde die Perioden, welche die $Z_1^{(t)}$, $Z_2^{(t)}$ an den Querschnitten A_1, A_2, B_1, B_2 annehmen, folgendermassen bezeichnen:

(14)

	A_1	A_2	B_1	B_2
$Z_1^{(t)}$	$-\eta_{11}$	$-\eta_{12}$	$-\eta_{13}$	$-\eta_{14}$
$Z_2^{(t)}$	$-\eta_{21}$	$-\eta_{22}$	$-\eta_{23}$	$-\eta_{24}$

In der That sind dies, wie aus der ferneren Entwickelung hervorgeht, dieselben Grössen, die ich in I (33) als $\eta_{11}, \ldots$ eingeführt habe und die ich damals bereits als Perioden der zweiten Gattung bezeichnete.

Aus (13) folgern wir sofort:

$$(15)\qquad t_1 \cdot Z_1^{(t)} + t_2 \cdot Z_2^{(t)} = Z^{(t)}.$$

Da $Z^{(t)}$ als Covariante von f von dem Gewichte -1 aufzufassen war, so ist in dieser Formel das Verhalten der $Z_1^{(t)}$, $Z_2^{(t)}$ bei linearer Transformation der Integrationsvariabelen z_1, z_2 ausgesprochen. Insbesondere folgt, dass die Summe

$$(16)\qquad w_1^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_1^{(t)}} + w_2^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_2^{(t)}},$$

— wo die x', y', x, y irgendwelche Grenzen der Integrale bedeuten sollen —, eine absolute Covariante der cogredienten Variabelreihen

*) Vergl. Wiltheiss in diesen Annalen Bd. 31, pag. 137, oder auch die Entwickelungen von B. § 2.

x', y', x, y, t ist, vom nullten Grade in jeder derselben wie in den Coefficienten von f.

Diese Bemerkungen übertragen sich auf die Perioden η. Insbesondere lasse man in (16) das x' nach Ueberschreitung des α^{ten} Periodenweges mit y' zusammenfallen, ebenso das x nach Ueberschreitung des β^{ten} Periodenweges mit y. *Dann folgt, dass nachstehender Ausdruck:*

$$(17) \qquad - \omega_{1\alpha}\eta_{1\beta} - \omega_{2\alpha}\eta_{2\beta}$$

eine absolute Invariante von f ist. Die bekannten Bilinearrelationen zwischen den ω und η, auf deren Theorie wir hier nicht weiter eingehen (cf. B. § 9, 10), sind lineare Beziehungen zwischen solchen Invarianten.

§ 3.

Von der Periodicität der σ-Functionen.

Die Zerlegung des Q, von der zu Anfang des vorigen Paragraphen die Rede war, wird jetzt durch folgende Formeln gegeben:

$$(18\text{a}) \qquad Q_{xy}^{x'y'} = \int_{y'}^{x'} \frac{(z'dz')}{\sqrt{fz'}} \left[z_1' \cdot Z_{1(z')}^{xy} + z_2' \cdot Z_{2(z')}^{xy} \right]$$

$$= \int_{y'}^{x'} \frac{(z'dz')}{\sqrt{fz'}} \left[z_1' \left(Z_{1(z')}^{xy} - Z_{1(t')}^{xy} \right) + z_2' \left(Z_{2(z')}^{xy} - Z_{2(t')}^{xy} \right) \right]$$

$$+ w_1^{x'y'} \cdot Z_{1(t')}^{xy} + w_2^{x'y'} \cdot Z_{2(t')}^{xy},$$

$$(18\text{b}) \qquad Q_{x'y'}^{xy} = \int_{y}^{x} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \left[z_1 \cdot Z_{1(z)}^{x'y'} + z_2 \cdot Z_{2(z)}^{x'y'} \right]$$

$$= \int_{y}^{x} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \left[z_1 \left(Z_{1(z)}^{x'y'} - Z_{1(t)}^{x'y'} \right) + z_2 \left(Z_{2(z)}^{x'y'} - Z_{2(t)}^{x'y'} \right) \right]$$

$$+ w_1^{xy} \cdot Z_{1(t)}^{x'y'} + w_2^{xy} \cdot Z_{2(t)}^{x'y'}.$$

Hier ist t', bez. t ein willkürlicher Hülfspunkt. *Erstere Formel gebrauchen wir, wenn es sich um die Aenderung handelt, die Q erleidet, wenn x oder y auf dem hyperelliptischen Gebilde einen Periodenweg durchläuft, letztere Formel, wenn x' oder y' einen Periodenweg beschreibt.* Die Ausführung wolle man in der Arbeit von Hrn. Burkhardt vergleichen, wo auch gezeigt wird, wie man von den so entstehenden

Formeln aus zu den Periodicitätseigenschaften der Function $Q_{x\,y}^{\bar{x}\,\bar{y}}$ und schliesslich des einzelnen $\sigma_{\varphi\psi}$ gelangt. Das Resultat, wie es sich zunächst darbietet, lässt sich folgendermassen aussprechen:

Mögen auf irgend einem Periodenwege die Integrale

$$w_1,\ w_2,\ Z_1^{(\xi)},\ Z_2^{(\xi)}$$

beziehungsweise um

$$\omega_1,\ \omega_2,\ -\eta_1,\ -\eta_2$$

wachsen, dann tritt jeder σ-Function ein Exponentialfactor hinzu von folgender Gestalt:

$$\pm e^{\eta_1\left(w_1+\frac{\omega_1}{2}\right)+\eta_2\left(w_2+\frac{\omega_2}{2}\right)}. \tag{19}$$

Was ich hier ausdrücklich erläutern muss, ist die Bestimmung des bei dieser Formel zu verwendenden Vorzeichens. Man denke sich zu dem Zwecke den geschlossenen Integrationsweg, der die Perioden ω, $-\eta$ liefert, aus lauter solchen einfachen Periodenwegen zusammengesetzt, deren jeder nur zwei Verzweigungspunkte umschliesst. Für diese besonderen Wege ergiebt sich dann folgende Regel:

Es sei $f = \varphi \cdot \psi$ diejenige Zerlegung von f, welche dem gerade in Betracht gezogenen σ entspricht. Wir werden in der zugehörigen Formel (19) *das* $+$ *oder das* $-$ *Zeichen anwenden müssen, jenachdem sich die beiden Verzweigungspunkte, die der Periodenweg umschliesst, auf φ und ψ vertheilen, oder nicht.*

Wiederholte Anwendung dieser Regel ergiebt, wie bereits angedeutet, die für einen beliebigen Periodenweg geltende Vorzeichenbestimmung.

Wir wollen nun insbesondere diejenigen Factoren (19) in Betracht ziehen, welche beim einzelnen $\sigma_{\varphi\psi}$ in dem hiermit erläuterten Sinne den Wegen B_1, B_2, A_1, A_2 (also der Ueberschreitung von A_1, A_2, B_1, B_2) entsprechen. Die zugehörigen Vorzeichen mögen beziehungsweise durch

$$(-1)^{g_1},\quad (-1)^{g_2},\quad (-1)^{h_1},\quad (-1)^{h_2}$$

gegeben sein (wo die g, h die beiden Werthe 0 und 1 jenachdem vorstellen sollen). *Dann lauten die betreffenden Exponentialfactoren in Uebereinstimmung mit* I, (34):

$$\begin{cases} (-1)^{g_1}\cdot e^{\eta_{11}\left(w_1+\frac{\omega_{11}}{2}\right)+\eta_{21}\left(w_2+\frac{\omega_{21}}{2}\right)}, & (-1)^{g_2}\cdot e^{\eta_{12}\left(w_1+\frac{\omega_{12}}{2}\right)+\eta_{22}\left(w_2+\frac{\omega_{22}}{2}\right)}, \\ (-1)^{h_1}\cdot e^{\eta_{13}\left(w_1+\frac{\omega_{13}}{2}\right)+\eta_{23}\left(w_2+\frac{\omega_{23}}{2}\right)}, & (-1)^{h_2}\cdot e^{\eta_{14}\left(w_1+\frac{\omega_{14}}{2}\right)+\eta_{24}\left(w_2+\frac{\omega_{24}}{2}\right)}. \end{cases} \tag{20}$$

Dabei werden von den 16 unterschiedenen σ-Functionen keine zwei dieselben Zahlen g_1, g_2, h_1, h_2 darbieten können; anderenfalls nämlich wäre der Quotient der beiden σ auf dem hyperelliptischen Gebilde eindeutig, was nach (2), (3) nicht angeht.

§ 4.

Darstellung der ϑ durch die σ.

Wir haben gerade mit Bezug auf das zu Grunde gelegte canonische Querschnittsystem der A_1, A_2, B_1, B_2 jedem $\sigma_{\varphi\psi}$ vier bestimmte Zahlen g_1, g_2, h_1, h_2, deren jede 0 oder 1 sein kann, zugeordnet. Ich brauche nun nicht auszuführen, dass dem einzelnen $\sigma_{\varphi\psi}$ unter den zum Querschnittsystem gehörigen ϑ-Functionen gerade diejenige correspondirt, deren Charakteristik durch $\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}$ gegeben ist, und dass wir also zur Definition des $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ eine Formel der folgenden Art haben:

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|} = C_{\varphi\psi} \cdot e^{G(v_1 v_2)} \cdot \sigma_{\varphi\psi}; \tag{21}$$

hier ist $G(v_1 v_2)$ eine homogene quadratische Function der v_1, v_2, die von der Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$, resp. der Zerlegung $f = \varphi \cdot \psi$, unabhängig ist, während $C_{\varphi\psi}$ eine Grösse bezeichnet, in der die v_1, v_2 nicht mehr vorkommen, die aber mit der Zerlegung des f wechselt. Es handelt sich uns um die expliciten Werthe des G und der C. In ersterer Hinsicht ziehen wir die Periodicitätsgleichungen (10) und (20) heran und finden aus den beiden ersten Gleichungspaaren:

$$G(v_1 v_2) = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & w_1 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & w_2 \\ \eta_{11} w_1 + \eta_{21} w_2 & \eta_{12} w_1 + \eta_{22} w_2 & 0 \end{vmatrix} : 2 p_{12}. \tag{22}$$

Die Bestimmung von $C_{\varphi\psi}$ erfolgt aus (11a), bez. (11b). In der That correspondirt in (21), wie wir hier nicht näher nachweisen, jeder geraden Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ eine Zerlegung von f in $\varphi_3 \cdot \psi_3$, jeder ungeraden eine Zerlegung in $\varphi_1 \cdot \psi_5$. Hiernach ist unmittelbar

1) im Falle der geraden Charakteristik:

$$C_{\varphi\psi} = \sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}} \cdot \sqrt[8]{\Delta\varphi_3 \cdot \Delta\psi_3}, \tag{23a}$$

2) im Falle der ungeraden Charakteristik:

$$C_{\varphi\psi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_{12}}{(2i\pi)^2}} \cdot \sqrt[8]{\Delta\varphi_1 \cdot \Delta\psi_5}. \tag{23b}$$

Die Formeln (21), (22), (23) *zusammengenommen enthalten diejenige Definition der ϑ-Functionen am hyperelliptischen Gebilde, die* *wir in der Einleitung in Aussicht nahmen.* Man vergleiche hiermit die genau analogen Formeln, welche Hr. Weierstrass für $p=1$ gegeben hat (Formelsammlung von Schwarz, pag. 42).

§ 5.

Die elliptischen σ für mehrgliedriges Argument.

Wir kehren jetzt einen Augenblick zu den σ-Functionen für $p=1$ zurück. Ich erwähne zunächst die Definition, welche ich für dieselben in I gegeben habe. Sei

$$w=\int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \tag{24}$$

wo fz eine Binärform vierten Grades, sei ferner Q in ähnlicher Weise definirt, wie oben in (4), [nur dass $F(z', z)$ jetzt die durch 12 dividirte zweite Polare von f vorstellt], dann war das ungerade σ:

$$\sigma(w)=\frac{(xy)}{\sqrt{fx\cdot fy}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}. \tag{25a}$$

Um die geraden σ zu construiren, musste f auf alle Weisen in zwei quadratische Factoren zerspalten werden:

$$f=\varphi_2\psi_2.$$

Jeder solchen Zerlegung gehörte dann ein gerades σ an:

$$\sigma(w)=\frac{\sqrt{\varphi x}\sqrt{\psi y}+\sqrt{\psi x}\sqrt{\varphi y}}{2\sqrt{fx\,fy}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}. \tag{25b}$$

Wir werden im Folgenden die hiermit erhaltenen vier σ-Functionen zweckmässigerweise wieder nach der zugehörigen Zerspaltung von f benennen, also die geraden σ als $\sigma_{\varphi_2\psi_2}$, das ungerade σ aber, bei dem in Wirklichkeit keinerlei Zerspaltung von f vorliegt, als $\sigma_{\varphi_0\psi_4}$.

Die Frage, um welche es sich nunmehr handeln soll, ist folgende. Wir denken uns w nicht mehr durch (24) sondern *in Gestalt der mehrfachen Integralsumme* gegeben:

$$w=\int_{y'}^{x'}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}+\int_{y''}^{x''}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}+\cdots\int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}}\frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}}; \tag{26}$$

welches ist dann die Definition der $\sigma(w)$?

Die gewöhnlichen Additionsformeln der σ-Functionen gestatten, diese Frage auf sehr verschiedenartige Weise zu beantworten*). Ich

*) Vergl. etwa Frobenius und Stickelberger im 88ten Bande des Journals für Mathematik, pag. 146 ff. (wo man eine Reihe weiterer Citate findet), oder Schwarz-Weierstrass, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, pag. 16 ff.

werde in dieser Hinsicht hier Formeln mittheilen, welche später unmittelbare Verallgemeinerung auf $p > 1$ zulassen. Dieselben gehen von der in (25a) enthaltenen Definition der ungeraden σ-Function für eingliedriges Argument aus und führen mit deren Hülfe die σ-Functionen mehrgliedriger Argumente (26) auf gewisse einfache Determinantenausdrücke zurück. Hierbei spielt also der in (25a) rechter Hand auftretende Ausdruck eine bevorzugte Rolle. Ich darf nun gleich hinzufügen, dass für $p > 1$ ein ganz ähnlicher Ausdruck, von genau entsprechender Bedeutung, construirt werden kann, der aber nicht mehr mit einer der dann zu unterscheidenden σ-Functionen zusammenfällt, auch nicht, wenn man die in den letzteren auftretenden Argumente specialisirt. Ich werde also für den fraglichen Ausdruck (25a) schon hier ein von σ verschiedenes Zeichen einführen, das bei der späteren Verallgemeinerung beibehalten werden kann. Dementsprechend schreibe ich:

$$(27) \qquad \frac{(xy)}{\sqrt{fx \cdot fy}} \cdot e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}} = \Omega(x, y).$$

Ich will ferner unter M folgendes Aggregat verschiedener Ω-Ausdrücke verstehen:

$$(24) \quad M = \frac{\prod_i \prod_k \Omega(x^{(i)}, y^{(k)})}{\prod_i \prod_k (x^{(i)}, y^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \, \Omega(x^{(i)}, x^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \, \Omega(y^{(i)}, y^{(k)})}$$

Hier sollen die i, k bei den Doppelproducten je die Werthe $1, 2, \ldots \nu$ durchlaufen, mit der Massgabe, dass bei den mit einem Accent versehenen Producten die Glieder mit $i = k$ auszulassen sind und jede Combination zweier Zahlen i, k nur einmal vorkommen soll*). Dieses M ist eine Covariante der Variabelreihen $x', x'', \ldots x^{(\nu)}$; $y', y'' \ldots y^{(\nu)}$, in jeder derselben von der $(-\nu)^{\text{ten}}$ Dimension, dabei in den Coefficienten von f vom Grade $\left(-\frac{\nu}{2}\right)$.

Ich wende mich nun zur Construction der in Betracht kommenden Determinantenausdrücke. Dieselben erhalten je 2ν Reihen, die bez. von den einzelnen $x', x'', \ldots x^{(\nu)}$, $y', y'', \ldots y^{(\nu)}$ abhängen. Da das Bildungsgesetz der ν ersten Reihen genau dasselbe ist, und ebenso das Bildungsgesetz der ν folgenden Reihen, so wird es genügen, eine einzige Reihe mit x und eine Reihe mit y anzuschreiben. In diesem Sinne lautet die Determinante, welche zur Zerlegung $f = \varphi_0 \psi_4$ gehört:

*) In gleichem Sinne wolle man später immer den einem Doppelproduct zugesetzten Accent verstehen.

$$(29a)\quad D_{\varphi_0\psi_4} = \begin{vmatrix} x_1^\nu & x_1^{\nu-1}x_2 \cdots & x_2^\nu & x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x} & x_1^{\nu-3}x_2\sqrt{\psi_4 x}\cdots x_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x} \\ -y_1^\nu & -y_1^{\nu-1}y_2\cdots & -y_2^\nu & y_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 y} & y_1^{\nu-3}y_2\sqrt{\psi_4 y}\cdots y_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x} \end{vmatrix},$$

die zu $f = \varphi_2\psi_2$ gehörige Determinante aber:

$$(29b)\quad D_{\varphi_2\psi_2} = \begin{vmatrix} x_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 x}\cdots & x_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 x} & x_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 x}\cdots x_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 x} \\ -y_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 y}\cdots & -y_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_2 y} & y_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 y}\cdots y_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_2 y} \end{vmatrix};$$

das beidemal zu Grunde liegende Bildungsgesetz tritt noch deutlicher hervor, wenn wir $D_{\varphi_0\psi_4}$ so schreiben:

$$\begin{vmatrix} x_1^\nu\sqrt{\varphi_0 x}\cdots & x_2^\nu\sqrt{\varphi_0 x} & x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x}\cdots x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 x} \\ -y_1^\nu\sqrt{\varphi_0 y}\cdots & -y_2^\nu\sqrt{\varphi_0 y} & y_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 y}\cdots y_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_4 y} \end{vmatrix}.$$

Dieses voraufgeschickt haben wir nun für das durch (26) *gegebene Argument w die folgende Definition der Sigmafunctionen:*

$$(30)\quad \begin{cases} \sigma_{\varphi_0\psi_4}(w) = c_\nu' \cdot M \cdot D_{\varphi_0\psi_4}, \\ \sigma_{\varphi_2\psi_2}(w) = c_\nu \cdot M \cdot D_{\varphi_2\psi_2}. \end{cases}$$

Die c_ν', c_ν sind dabei numerische (von der in (26) auftretenden Gliederzahl ν abhängige) Constanten, mit deren Bestimmung wir uns hier nicht aufhalten. —

Was den Beweis der Formeln (30) angeht, so ist derselbe nach bekannten Vorschriften durch Betrachtung der beiderseitigen Verschwindungsstellen und Periodicitätseigenschaften zu führen. Insbesondere wolle man beachten, dass die σ vermöge (30) Covarianten in den $x', x'', \ldots, y', y'', \ldots$ werden, die in diesen Variabelreihen übereinstimmend die Dimension 0 haben; der Grad in den Coefficienten von f ist dabei für $\sigma_{\varphi_0\psi_4}$ gleich $-{}^1/_2$, für die $\sigma_{\varphi_2\psi_2}$ gleich 0, wie es sein muss.

Nimmt man in (30) die Zahl ν gleich 1, so kommt man auf die Ausgangsformeln (25) zurück.

§ 6.

Entsprechende Verallgemeinerung der σ für $p = 2$.

Es soll sich nunmehr darum handeln, die hiermit für $p = 1$ gegebenen Entwickelungen auf $p = 2$ zu übertragen. Wir schreiben also statt der Formeln (1) mehrgliedrige Integralsummen:

$$(31)\quad \begin{cases} w_1 = \int_{y'}^{x'} \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \int_{y''}^{x''} \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_1(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \\ w_2 = \int_{y'}^{x'} \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \int_{y''}^{x''} \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_2(z\,dz)}{\sqrt{fz}}, \end{cases}$$

und fragen, welche Formeln dementsprechend an Stelle von (2), (3) als Definition der $\sigma(w_1, w_2)$ zu treten haben. Wir haben im vorigen Paragraphen die geeigneten Vorbereitungen getroffen, die uns jetzt ohne weiteres zur Beantwortung dieser Frage hinleiten.

Wir setzen zunächst, wie in (27):

$$(32)\qquad \Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt{fx \cdot fy}}\, e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}.$$

Dieses Ω (dessen Einführung auch für $p > 1$ wir schon vorhin in Aussicht stellten) ist hier, wie im Falle $p = 1$, eine Covariante der beiden Variabelreihen x und y, vom Grade $\left(-\frac{1}{2}\right)$ in den Coefficienten von f. Aber es ist nicht mehr, wie damals, von der 0ten Dimension in den x, oder y, es ist also nicht mehr, wie im elliptischen Falle, eine eigentliche Function der Stellen x, y des algebraischen Gebildes. *Trotzdem werden wir Ω als wesentliches Element der auf $p = 2$ bezüglichen Theorie betrachten dürfen. Es hat nämlich auch bei $p = 2$ die Eigenschaft, an keiner Stelle des algebraischen Gebildes verzweigt zu sein, oder unendlich zu werden, und nur dann und zwar einfach zu verschwinden, wenn x mit y zusammenfällt.* Ω hat also nach wie vor, um es prägnant zu bezeichnen, die Eigenschaft eines *Primausdrucks* *).

Wir construiren jetzt, wie in (28), das folgende Aggregat verschiedener Ω:

$$(33)\qquad M = \frac{\prod_i \prod_k \Omega(x^{(i)} y^{(k)})}{\prod_i \prod_k (x^{(i)} y^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \,\Omega(x^{(i)} x^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' \,\Omega(y^{(i)} y^{(k)})},$$

wir construiren ferner die folgenden Determinanten:

$$(34)\qquad \begin{cases} D_{\varphi_3\psi_3} = \begin{vmatrix} x_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 x}\cdots & x_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 x} & x_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 x}\cdots x_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 x} \\ -y_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 y}\cdots & -y_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_3 y} & y_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 y}\cdots y_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_3 y} \end{vmatrix} \\[2ex] D_{\varphi_1\psi_5} = \begin{vmatrix} x_1^{\nu}\sqrt{\varphi_1 x}\cdots & x_2^{\nu}\sqrt{\varphi_1 x} & x_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 x}\cdots x_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 x} \\ -y_1^{\nu}\sqrt{\varphi_1 y}\cdots & -y_2^{\nu}\sqrt{\varphi_1 y} & y_1^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 y}\cdots y_2^{\nu-2}\sqrt{\psi_5 y} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

---

*) Man wolle den Primausdruck Ω nicht mit der Weierstrass'schen „Primfunction“ $E(x, y)$ verwechseln. Letztere ist eine eigentliche Function der Stellen x und y (nicht nur der homogenen Variabelen x_1, x_2 und y_1, y_2), die allerdings auch nur dann und zwar einfach verschwindet, wenn x mit y coincidirt, nirgends verzweigt ist etc., *die aber an einer bestimmten Stelle des algebraischen Gebildes einen wesentlich singulären Punkt besitzt.* — Mit dem Ausdruck Ω, der sich ganz entsprechend in allen höheren Fällen (nicht nur bei den hyperelliptischen Gebilden) aufstellen lässt, ist meines Erachtens ein allgemeiner Fortschritt in der Theorie der Abel'schen Functionen gegeben. Man hatte seither, wenn ich nicht irre, die ausgezeichneten Eigenschaften des Ω nur desshalb nicht bemerkt, weil man sich

Dann ist die Definition der zu den Integralsummen (31) *gehörigen σ-Functionen die folgende:*

$$(35)\qquad \begin{cases} \sigma_{\varphi_1\psi_1}(w_1, w_2) = c_\nu \cdot M \cdot D_{\varphi_1\psi_1}, \\ \sigma_{\varphi_1\psi_2}(w_1, w_2) = c_\nu' \cdot M \cdot D_{\varphi_1\psi_2}. \end{cases}$$

Die c, c' sind dabei wieder geeignete Zahlenfactoren.

Der Beweis gestaltet sich ganz ähnlich, wie im elliptischen Falle; ich darf dieserhalb auf B. § 19ff. verweisen.

§ 7.

Uebergang zu beliebigem p. Festlegung der zugehörigen Integrale.

Wir haben jetzt die Entwickelungen für $p = 1$ und $p = 2$ bis zu einem Punkte geführt, von dem aus sich unmittelbare Verallgemeinerung für beliebiges p ermöglicht.*)

Sei also jetzt $f(z) = f_{2p+2}(z) = a_z^{2p+2}$ eine binäre Form $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades, durch die wir ein hyperelliptisches Gebilde definiren.

Wir verabreden zunächst, welche zugehörigen Integrale der ersten, zweiten und dritten Gattung wir der weiteren Betrachtung zu Grunde legen wollen.

1) Als fundamentale überall endliche Integrale wählen wir die folgenden p:

$$(36)\quad w_1 = \int_y^x \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}},\quad w_2 = \int_y^x \frac{z_1^{p-2} z_2 (z\,dz)}{\sqrt{fz}},\ \ldots\ w_p = \int_y^x \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}.$$

Wir notiren gleich, wie sich dieselben umsetzen, wenn man die z_1, z_2 einer linearen Substitution unterwirft:

$$(37)\qquad \begin{cases} z_1 = \alpha z_1' + \beta z_2' \\ z_2 = \gamma z_1' + \delta z_2' \end{cases} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = r).$$

Offenbar sind die $w_1, \ldots w_p$ homogene lineare Combinationen der $w_1', \ldots w_p'$. Um das Gesetz dieser Combinationen möglichst einfach zu bezeichnen, sei

$$(38)\quad \chi(t) = w_1 t_2^{p-1} - (p-1)_1 w_2 t_2^{p-2} t_1 + (p-1)_2 w_3 t_2^{p-3} t_1^2 - + \cdots$$
$$= \int_y^x \frac{(zt)^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}.$$

---

scheute, auch im Gebiet der irrationalen, bez. transcendenten Functionen consequent mit homogenen Variabelen zu operiren.

*) Ich habe die bez. allgemeinen Formeln zum grossen Theile bereits in den Göttinger Nachrichten 1887, Nr. 18 mitgetheilt (Sitzung vom 5. November 1887): *Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen.*

Wenn wir dann die t ebenso substituiren, wie die z in (37), so haben wir offenbar

$$\chi(t) = \chi'(t') \cdot r^p, \tag{39}$$

worin das gesuchte Gesetz ausgesprochen ist.

2) Um jetzt zu geeigneten Integralen zweiter Gattung zu kommen (deren wir ebenfalls p gebrauchen), beginnen wir wie bei $p = 2$ mit dem Integral

$$Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{\sqrt{fz}\sqrt{ft} + a_z^{p+1} a_t^{p+1}}{2(zt)^2}. \tag{40}$$

Aus ihm leiten wir dann durch Differentiation nach t_1, t_2 die p fundamentalen Integrale zweiter Gattung ab; wir setzen:

$$Z_1^{(t)} = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \frac{\partial^{p-1} Z^{(t)}}{\partial t_1^{p-1}}, \quad Z_2^{(t)} = \frac{(p-1)_1}{(p-1)!} \cdot \frac{\partial^{p-1} Z^{(t)}}{\partial t_1^{p-2}\, \partial t_2}, \ldots, \tag{41}$$

so dass also nach dem Euler'schen Theoreme:

$$t_1^{p-1} \cdot Z_1^{(t)} + t_1^{p-2} t_2 \cdot Z_2^{(t)} + \cdots + t_p^{p-1} Z_p^{(t)} = Z^{(t)}. \tag{42}$$

Diese $Z_1, \ldots Z_p$ haben, bei $z = t$, allgemein zu reden einen p-fachen Unstetigkeitspunkt. Ihr Verhalten bei einer linearen Substitution (37) ergiebt sich aus der Covariantennatur des $Z^{(t)}$; das Resultat ist, wie bei $p = 2$, *dass die $Z_1, Z_2, \ldots Z_p$ den $w_1, w_2, \ldots w_p$ genau contragredient sind, so dass also der Ausdruck*

$$w_1^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_1^{(t)}} + w_2^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_2^{(t)}} + \cdots + w_p^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_p^{(t)}} \tag{43}$$

bei (37) durchaus ungeändert bleibt.

3) Als Integral dritter Gattung endlich bilden wir das folgende

$$Q_{xy}^{x'y'} = Q_{x'y'}^{xy} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{fz'}} \cdot \frac{\sqrt{fz}\sqrt{fz'} + a_z^{p+1} a_{z'}^{p+1}}{2(zz')^2} \tag{44}$$

$$= \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \cdot \overset{x'y'}{Z^{(z)}} = \int_{y'}^{x'} \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{fz'}} \cdot \overset{xy}{Z^{(z')}},$$

seine Eigenschaften betr. Unendlichwerden und Verhalten bei linearer Substitution der z_1, z_2 gestalten sich genau so, wie in den Fällen $p = 1$ und $p = 2$.

§ 8.

Periodicität der Integrale.

Wir denken uns jetzt auf der durch $\sqrt{f}$ definirten Riemann'schen Fläche $2p$ canonische Querschnitte gezogen:

$$A_1, A_2, \ldots A_p; \quad B_1, B_2, \ldots B_p$$

und betrachten die Perioden, welche unsere Integrale bei Ueberschreitung dieser Querschnitte aufweisen.

1) Bei den Integralen erster Gattung beschränken wir uns darauf, eine feste Benennung der zugehörigen Perioden zu vereinbaren. Wir bezeichnen dieselben folgendermassen:

(45)

	A_1	$\cdots$	A_p	B_1	$\cdots$	B_p
w_1	$\omega_{1,1}$	$\cdots$	$\omega_{1,p}$	$\omega_{1,p+1}$	$\cdots$	$\omega_{1,2p}$
$\vdots$						
w_p	$\omega_{p,1}$	$\cdots$	$\omega_{p,p}$	$\omega_{p,p+1}$	$\cdots$	$\omega_{p,2p}$

2) Bei den Integralen zweiter Gattung führen wir die Perioden durch das Schema ein:

(46)

	A_1	$\cdots$	A_p	B_1	$\cdots$	B_p
$Z_1^{(t)}$	$-\eta_{1,1}$	$\cdots$	$-\eta_{1,p}$	$-\eta_{1,p+1}$	$\cdots$	$-\eta_{1,2p}$
$\vdots$						
$Z_p^{(t)}$	$-\eta_{p,1}$	$\cdots$	$-\eta_{p,p}$	$-\eta_{p,p+1}$	$\cdots$	$-\eta_{p,2p}$

Die hier auftretenden η heissen die *Perioden zweiter Gattung* schlechtweg. In der That zeigt sich, genau wie bei $p = 2$ (oder bei $p = 1$), dass dieselben von der Wahl des bei Construction der Z benutzten t unabhängig sind.

3) Die Periodicität von Q ergiebt sich nun wieder aus einer doppelten Umsetzung desselben.

Wir haben das eine Mal:

$$(47\text{a})\quad Q_{xy}^{x'y'} = \int_{y'}^{x'} \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f z'}} \left[z_1'^{\,p-1}\left(\overset{xy}{Z_1^{(z')}} - \overset{xy}{Z_1^{(t')}}\right) + \cdots + z_2'^{\,p-1}\left(\overset{xy}{Z_p^{(z')}} - \overset{xy}{Z_p^{(t')}}\right)\right]$$
$$+ w_1^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_1^{(t')}} + \cdots + w_p^{x'y'} \cdot \overset{xy}{Z_p^{(t')}},$$

das andere Mal:

$$(47\text{b})\quad Q_{x'y'}^{xy} = \int_{y}^{x} \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f z}} \left[z_1^{p-1}\left(\overset{x'y'}{Z_1^{(z)}} - \overset{x'y'}{Z_1^{(t)}}\right) + \cdots + z_2^{p-1}\left(\overset{x'y'}{Z_p^{(z)}} - \overset{x'y'}{Z_p^{(t)}}\right)\right]$$
$$+ w_1^{xy} \cdot \overset{x'y'}{Z_1^{(t)}} + \cdots + w_p^{xy} \cdot \overset{x'y'}{Z_p^{(t)}}.$$

Wegen der Folgerungen hieraus, der Bilinearrelationen zwischen den ω und η, etc. etc. verweise ich auf die Darstellung von B. § 4ff.

§ 9.

Definition der allgemeinen σ-Functionen.

Um jetzt die 2^{2p} zu $\sqrt{f_{2p+2}}$ gehörigen σ-Functionen zu definiren, wollen wir von vorneherein beliebig vielgliedrige Integralsummen in Betracht ziehen, setzen also an Stelle der einfachen Formeln (36) die folgenden:

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} w_1 &= \int_{y'}^{x'} \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}} \\ &\;\;\vdots \\ w_p &= \int_{y'}^{x'} \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}. \end{aligned}\right.$$

Uebrigens aber halten wir uns genau an die Resultate, die sich bei $p=1,\,2$ ergeben haben.

Wir construiren uns also vor allen Dingen den *Primausdruck:*

$$(49)\qquad \Omega(x,y) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{fx\cdot fy}}\cdot e^{\frac{1}{2}Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}};$$

derselbe ist jetzt in den x und den y bez. vom Grade $-\frac{p-1}{2}$.

Wir setzen ferner, wie früher:

$$(50)\qquad M = \frac{\prod_i\prod_k \Omega(x^{(i)}y^{(k)})}{\prod_i\prod_k (x^{(i)}y^{(k)})\cdot \prod_i\prod_k{}' \,\Omega(x^{(i)}x^{(k)})\cdot \prod_i\prod_k{}' \,\Omega(y^{(i)}y^{(k)})}.$$

Wir betrachten sodann alle *Zerlegungen von* f von folgender Form:

$$(51)\qquad f = \varphi_{p+1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}, \qquad \left(\mu = 0,1,\cdots\left[\frac{p+1}{2}\right]\right),$$

d. h. alle Zerlegungen von f in zwei Factoren, deren Grad sich um ein Multiplum von 4 unterscheidet. Solcher Zerlegungen giebt es gerade 2^{2p} (wobei wir, im Falle p ungerade ist, den Ansatz $f=\varphi_0\,\psi_{2p+2}$ mitgezählt haben, wie wir ja schon im Falle $p=1$ gethan hatten).

Einer jeden dieser Zerlegungen entsprechend construiren wir jetzt eine 2ν-reihige Determinante, die im Sinne der früheren Verabredung folgendermassen zu bezeichnen sein wird:

(52) $$D_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}}$$
$$=\begin{vmatrix} x_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi x}\cdots & x_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi x} & x_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi x}\cdots x_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi x} \\ -y_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\psi y}\cdots & -y_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi y} & y_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi y}\cdots y_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi y}\end{vmatrix}.$$

Hierauf nun führen wir die 2^{2p} σ-Functionen durch folgende Formeln ein):*

(53) $$\sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}} = c_\nu^{(\mu)}\cdot M\cdot \bar{D}_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}}.$$

Die $c_\nu^{(\mu)}$ sollen dabei numerische Constanten sein, die von μ und ν abhängen und über deren Werthe noch weiterhin geeignete Verfügung getroffen werden wird.

§ 10.

Einige Eigenschaften der σ-Functionen.

Die σ-Functionen erscheinen im vorigen Paragraphen als Covarianten der Formen φ, ψ mit den Variabel-Reihen $x', x'', \ldots x^{(\nu)}$; $y', y'', \ldots y^{(\nu)}$. In diesen Variabelreihen sind sie je vom nullten Grade, dagegen in den Coefficienten von φ, ψ bez. vom Grade $+\frac{\mu}{2}$ und $-\frac{\mu}{2}$.

Dabei hat die Definition wegen der Determinanten (52) zunächst nur Bedeutung, wenn $\nu > \mu$ ist.

Immer können wir die Definition auch noch für $\nu = \mu$ aufrecht erhalten, wenn wir die Determinante (52), wie fortan geschehen soll, in diesem Falle dahin interpretiren, dass sie überhaupt keine Colonne mit $\sqrt{\psi}$ enthält, sich also auf den einfachen Werth reducirt:

(54) $$(-1)^\nu\cdot\begin{vmatrix} x_1^{2\nu-1} & \ldots & x_2^{2\nu-1} \\ y_1^{2\nu-1} & \ldots & y_2^{2\nu-1}\end{vmatrix}\cdot\prod_i\sqrt{\varphi(x^{(i)})}\cdot\prod_i\sqrt{\varphi(y^{(i)})}.$$

Es stimmt dies mit der allgemeinen Formel insofern, als die Zahl der Colonnen mit $\sqrt{\psi}$ für $\nu > \mu$ ja $(\nu-\mu)$ beträgt.

Sollte aber $\nu < \mu$ sein, werden wir σ, wie wir jetzt verabreden, einfach $= 0$ setzen.

Es ist jetzt zu zeigen, dass bei geeigneter Abhängigkeit der Constanten $c_\nu^{(\mu)}$ von der Anzahl ν *die hiermit eingeführten σ Functionen allein der Integralsummen* $w_1, \ldots w_p$ (48) *sind.*

Es ist ferner zu zeigen, *dass sie eindeutige ganze Functionen der genannten Integralsummen sind, welche geraden oder ungeraden Charakter besitzen, je nachdem μ gerade oder ungerade ist.*

*) In den Göttinger Nachrichten (l. c.) hatte ich die Definition der allgemeinen σ etwas anders gefasst, indem ich die Function $X(x) = \Omega(x, y)_{\lim(y=\bar{x})}$ einführte; inzwischen erscheint dies zunächst weniger zweckmässig, als das im Texte angewandte Verfahren.

Es ist endlich zu entwickeln, *dass sie als Functionen der* $w_1, \ldots w_p$ *für* $\nu < \mu$ *genau* $(\mu - \nu)$*-fach verschwinden.*

Alle diese Nachweise werden von B. (§ 17 ff.) erbracht.

Bemerken wir insbesondere noch das Folgende. Unser letzter Satz schliesst ein, dass die σ-Functionen für $w_1 \ldots w_p = 0 \ldots 0$ μ-fach zu Null werden.

Die einzigen σ also, welche für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden, sind diejenigen, die Zerlegungen $f = \varphi_{p+1} \cdot \psi_{p+1}$ zugehören.

Die einzigen ferner, die für die Nullwerthe der Argumente nur einfach verschwinden, sind die anderen, die Zerlegungen $f = \varphi_{p-1} \cdot \psi_{p+3}$ entsprechen, etc. etc.

§ 11.

Ueber die Reihenentwickelungen der σ nach steigenden Potenzen der w.

Nach den zuletzt angeführten Sätzen können die σ nach steigenden ganzen Potenzen der w in immer convergente Potenzreihen entwickelt werden (wobei nur gerade oder nur ungerade Potenzen der w auftreten werden, je nachdem μ gerade oder ungerade genommen ist).

Es besteht nun der wichtige Satz, dass die Coefficienten der Reihenentwickelungsterme rationale ganze Functionen der Coefficienten von φ und ψ sind, *dass also die σ nicht nur eindeutige ganze Functionen der* $w_1, \ldots w_p$ *sind, sondern ebensolche Functionen der Coefficienten von φ und ψ.* (Man vergleiche B. § 24, sowie die Darstellung bei Wiltheiss im 31ten Bande dieser Annalen, pag. 410 ff.).

Ich bespreche hier einige besonders einfache Gesetze, denen die in Rede stehenden Reihenentwickelungen unterliegen.

Man erinnere sich vor Allem, dass vermöge der in (53) enthaltenen Definition σ in den Coefficienten von φ den Grad $+\frac{\mu}{2}$ hatte, in den Coefficienten von ψ den Grad $-\frac{\mu}{2}$. Nun sind die w ihrerseits in den Coefficienten von $f = \varphi\psi$ von der $-\frac{1}{2}$ten Dimension. Hat also ein Entwickelungsterm in den w den Grad $\mu + 2\varrho$, so hat er in den Coefficienten von φ den Grad $\mu + \varrho$, in denen von ψ den Grad ϱ; wir werden den Inbegriff derartiger Terme mit

$$\begin{pmatrix} \mu+2\varrho & \mu+\varrho & \varrho \\ w, & \varphi, & \psi \end{pmatrix}$$

bezeichnen dürfen. Aus dem, was über das Verhalten des σ für verschwindende Argumente gesagt wurde, folgt jetzt, dass die niedrigsten überhaupt auftretenden Terme diejenigen sind, die $\varrho = 0$ entsprechen. Ferner ist deutlich, dass ϱ nur ganzzahlige Werthe annehmen kann. *Daher wird die Reihenentwickelung des σ folgendermassen lauten:*

$$(55)\qquad \sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}} = \begin{pmatrix}\mu & \mu & 0\\ w, & \varphi, & \psi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu+2 & \mu+1 & 1\\ w, & \varphi, & \psi\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}\mu+2\varrho & \mu+\varrho & \varrho\\ w, & \varphi, & \psi\end{pmatrix} + \cdots,$$

in Uebereinstimmung mit dem, was über den geraden, bez. ungeraden Charakter der Entwickelungsterme in Aussicht gestellt wurde.

Man bemerke jetzt ferner, dass die σ, vermöge der in (53) enthaltenen Definition, gegenüber linearen Transformationen der Integrationsvariabelen *Covarianten* der φ, ψ sind. Sei die lineare Transformation, wie früher, durch (37) gegeben; mit w', φ', ψ' bezeichnen wir diejenigen Werthe, welche dabei aus den w, φ, ψ entstehen, endlich mit σ' diejenige σ-Function, welche genau so aus den w', φ', ψ' zusammengesetzt ist, wie σ aus w, φ, ψ. Dann ergiebt sich nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(56)\qquad \sigma = r^{\mu^2}\cdot\sigma',$$

und also auch für jeden einzelnen Term in (55):

$$(57)\qquad \begin{pmatrix}\mu+2\varrho & \mu+2\varrho & \varrho\\ w, & \varphi, & \psi\end{pmatrix} = r^{\mu^2}\begin{pmatrix}\mu+2\varrho & \mu+\varrho & \varrho\\ w', & \varphi', & \psi'\end{pmatrix}.$$

Nun haben wir in § 7 genauer untersucht, wie die w und die w' zusammenhängen. Allerdings waren damals die w als einfache Integrale vorausgesetzt, während sie jetzt als Integralsummen gelten, aber es ist deutlich, dass die Beziehungen zwischen den w und den w' von dieser Unterscheidung unabhängig sind. Wir werden also wieder dieselbe Hülfsform χ einführen dürfen, wie damals, wobei ich nur, was jetzt keine Verwechselung erzeugen kann, die in χ auftretenden Variabelen mit z_1, z_2 bezeichnen will, so dass wir haben:

$$\chi(z) = w_1 z_2^{p-1} - (p-1)_1 w_2 z_2^{p-2} z_1 + (p-1)_2 w_3 z_2^{p-3} z_1^2 - + \cdots$$

Unser Resultat betr. Umsetzung der w war dann einfach (Formel (39)), *dass $\chi(z)$ bei linearer Transformation der z_1, z_2, bis auf einen hier nicht wieder anzugebenden Factor ungeändert bleibt.* Wir wollen die w jetzt durchweg als Coefficienten dieses χ betrachten und demnach die Reihenentwickelung (55) folgendermassen schreiben:

$$(58)\qquad \sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}} = \begin{pmatrix}\mu & \mu & \\ \chi, & \varphi, & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu+2 & \mu+1 & 1\\ \chi, & \varphi, & \psi\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}\mu+2\varrho & \mu+\varrho & \varrho\\ \chi, & \varphi, & \psi\end{pmatrix} + \cdots.$$

Die einzelnen Terme rechter Hand sind hier rationale ganze Functionen der in $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ auftretenden Coefficienten, beziehungsweise von den beigesetzten Graden in diesen Coefficienten. Formel (57) giebt dabei

$$(59)\qquad \begin{pmatrix}\mu+2\varrho & \mu+\varrho & \varrho\\ \chi, & \varphi, & \psi\end{pmatrix} = r^{\mu^2}\begin{pmatrix}\mu+2\varrho & \mu+\varrho & \varrho\\ \chi', & \varphi', & \psi'\end{pmatrix}.$$

Dies aber heisst, mit Rücksicht auf das bereits hervorgehobene, in (39) enthaltene Verhalten der Form χ bei linearer Transformation:

Die einzelnen Terme (χ, φ, ψ) *in* (58) *sind simultane Invarianten der drei Formen* $\chi(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Dies ist das hauptsächliche Resultat, welches hier zunächst abgeleitet werden sollte. Wir wollen uns für die folgenden Paragraphen die Aufgabe stellen, wenigstens den ersten Term der Reihenentwickelung (58), also den Term

$$\left(\overset{\mu}{\chi}, \overset{\mu}{\varphi}, \overset{0}{\psi}\right),$$

oder, wie wir kurz sagen werden, den Term

$$\left(\overset{\mu}{\chi}, \overset{\mu}{\varphi}\right)$$

zu berechnen. Zur Gewinnung der höheren Terme werden dann die Differentialgleichungen dienlich sein, welche Herr Wiltheiss im 99ten Bande des Journals für Mathematik (pag. 236ff.) und neuerdings, unter Verwendung invariantentheoretischer Processe, im 31ten Bande dieser Annalen (pag. 134ff.) abgeleitet hat.

§ 12.

Vorbereitungen zur Berechnung des ersten Terms der Reihenentwickelungen.

Indem ich mich jetzt zur Berechnung des Terms $\left(\overset{\mu}{\chi}, \overset{\mu}{\varphi}\right)$ hinwende, habe ich vor Allem Folgendes zu bemerken. In der Definition (53) der σ-Functionen waren die Constanten $c_\nu^{(\mu)}$ zunächst völlig unbestimmt. Nun haben wir in § 10 verabredet, wie dieselben von der Zahl ν abhängig gemacht werden sollen, nämlich so, dass die σ, unabhängig von ν, Functionen der Integralsummen $w_1 \dots w_p$ werden. Die Abhängigkeit der c von der Zahl μ ist dabei noch völlig unbestimmt gelassen. Wir wollen dieselbe jetzt fixiren, indem wir bedingen, *dass der Term* $\left(\overset{\mu}{\chi}\, \overset{\mu}{\varphi}\right)$ *keinen überflüssigen Zahlenfactor enthalten soll.* Dies hat zur Folge, dass wir bei der folgenden Zwischenrechnung von den $c_\nu^{(\mu)}$ überhaupt absehen und alle vortretenden Zahlenfactoren einfach bei Seite lassen dürfen. Es hat ferner zur Folge, worauf es uns hier zunächst ankommt, dass die Reihenentwickelung derjenigen σ, bei denen $\mu = 0$ (die also Zerlegungen $f = \varphi_{p+1}\psi_{p+1}$ entsprechen), mit $+1$ beginnt.

Wir betrachten jetzt ein beliebiges $\sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1+2\mu}}$. Nach dem, was wir gerade verabredeten, wird es auf dasselbe hinauskommen, ob wir den ersten Reihenentwickelungsterm für dieses σ selbst bestimmen oder aber für einen der Quotienten:

$$\frac{\sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}}}{\sigma_{\varphi_{p+1}\,\psi_{p+1}}};$$

diesen Quotienten aber können wir, indem wir das $c_\nu^{(\mu)}$ des Zählers wegwerfen, durch den algebraischen Ausdruck

$$(60)\qquad \frac{D_{\varphi_{p+1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}}}{D_{\varphi_{p+1}\,\psi_{p+1}}}$$

ersetzen. An ihn also werden unsere weiteren Entwickelungen anknüpfen.

Wir werden nun, allgemein zu reden, folgendermassen verfahren. In den Determinanten D treten die Variabelreihen $x', \dots x^{(\nu)}$, $y', \dots y^{(\nu)}$ auf. *Wir lassen jetzt die $x', \dots x^{(\nu)}$ den $y', \dots, y^{(\nu)}$ beziehungsweise consecutiv werden*, setzen also:

$$(61)\qquad x' = y' + dy',\ x'' = y'' + dy'', \dots x^{(\nu)} = y^{(\nu)} + dy^{(\nu)}.$$

Wir bestimmen zunächst, welchen Werth der Determinantenquotient (60) in Folge dieser Formeln annimmt, sofern wir nur unendlich kleine Grössen der niedersten Ordnung (die hier nothwendig die μ^{te} Ordnung ist) beibehalten. Wir haben andererseits nach (48) für die Integralsummen w, indem wir Terme höherer Ordnung bei Seite lassen:

$$(61)\qquad \begin{cases} w_1 = \dfrac{y_1'^{\,p-1}(y'\,dy')}{\sqrt{fy'}} + \dfrac{y_1''^{\,p-1}(y''\,dy'')}{\sqrt{fy''}} + \cdots + \dfrac{y_1^{(\nu)\,p-1}(y^{(\nu)}\,dy^{(\nu)})}{\sqrt{fy^{(\nu)}}}, \\ \quad\vdots \\ w_p = \dfrac{y_2'^{\,p-1}(y'\,dy')}{\sqrt{fy'}} + \dfrac{y_2''^{\,p-1}(y''\,dy'')}{\sqrt{fy''}} + \cdots + \dfrac{y_2^{(\nu)\,p-1}(y^{(\nu)}\,dy^{(\nu)})}{\sqrt{fy^{(\nu)}}} \end{cases}$$

oder für das zugehörige $\chi(z)$:

$$(62)\ \chi(z) = \frac{(y'\,dy')}{\sqrt{fy'}}(y'z)^{p-1} + \frac{(y''\,dy'')}{\sqrt{fy''}}(y''z)^{p-1} + \cdots + \frac{(y^{(\nu)}\,dy^{(\nu)})}{\sqrt{fy^{(\nu)}}}(y^{(\nu)}z)^{p-1}.$$

Unsere Aufgabe ist jetzt, zwischen dem für (60) *gefundenen Werthe und den Formeln* (61), *resp.* (62) *die y, dy zu eliminiren, was möglich sein muss.* Der Quotient (60) wird dann einem Ausdrucke $\left(\overset{\mu}{w}, \overset{\mu}{\varphi}\right)$ oder $\left(\overset{\mu}{\chi}, \overset{\mu}{\varphi}\right)$ proportional werden, der eben das gesuchte erste Reihenentwickelungsglied vorstellt.

Die hiermit angedeutete Rechnung soll nun im folgenden Paragraphen in besonderer Weise durchgeführt werden. Wir wollen nämlich zunächst voraussetzen, dass $\nu = \mu$ sei, wodurch alle Formeln wesentlich vereinfacht werden. Aus dem dann entstehenden particulären Ansatze werden wir sodann *vermöge invariantentheoretischer Principien* das allgemeine Resultat in ganz bestimmter Form ablesen können.

§ 13.

Die wirkliche Berechnung des ersten Terms.

Wir nehmen jetzt, wie verabredet, $\nu = \mu$ und tragen die dieser Voraussetzung entsprechenden Werthe (61) von x in Zähler und Nenner von (60) ein, wobei wir nur Glieder der niedrigsten Ordnung beibehalten.

Was zunächst den Nenner $D_{\varphi_{p+1}\psi_{p+1}}$ betrifft, so kommt dies auf dasselbe hinaus, als wenn wir in ihm einfach $x' = y', \ldots x^{(\nu)} = y^{(\nu)}$ setzten. Durch eine leichte Umstellung, die ich hier nicht ausführe, wird derselbe dabei zu dem Product der Determinanten proportional:

$$\left|y_1^{\nu-1}\sqrt{\varphi_{p+1}y} \ldots y_2^{\nu-1}\sqrt{\varphi_{p+1}y}\right| \cdot \left|y_1^{\nu-1}\sqrt{\psi_{p+1}y} \ldots y_2^{\nu-1}\sqrt{\psi_{p+1}y}\right|$$

d. h. zu folgendem Ausdrucke:

$$\prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^2 \cdot \prod_i \sqrt{f(y^i)}. \tag{63}$$

Hier haben i, k die Werthe $1, 2 \ldots \mu$ zu durchlaufen.

Wir betrachten ferner die Zählerdeterminante $D_{\varphi_{p+1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}}$. Da $\nu = \mu$, so nimmt dieselbe die vereinfachte in (54) angegebene Form an, die wir bei geeigneter Vorzeichenbestimmung der einzelnen Factoren auch so schreiben können

$$\prod_i \prod_k{}' (x^{(i)} x^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)}) \cdot \prod_i \prod_k (x^{(i)} y^{(k)}) \cdot \prod_i \sqrt{\varphi(x^i) \cdot \varphi(y^i)}.$$

Hier nun tragen wir die Werthe (61) der x ein, so zwar, dass wir in jedem einzelnen Factor die Bestandtheile höherer Ordnung einfach weglassen. Offenbar kommt:

$$\prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^4 \cdot \prod_i \varphi(y^{(i)}) \cdot \prod_i (y^{(i)}\, d y^{(i)}). \tag{64}$$

Nehmen wir (63), (64) *zusammen, haben wir für den Quotienten* (60) (*von constanten Factoren abgesehen, die wir vernachlässigten*) *den folgenden Ausdruck gefunden:*

$$\prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^2 \cdot \prod_i \varphi(y^{(i)}) \cdot \prod_i \frac{(y^{(i)}\, d y^{(i)})}{\sqrt{f y^{(i)}}}. \tag{65}$$

Hiermit schliesst die Behandlung des speciellen Falles. Wir haben jetzt, um zum allgemeinen Falle überzugehen, folgende Sachlage vor uns:

Gesucht wird eine simultane Invariante $\left(\overset{\mu}{\chi},\ \overset{\mu}{\varphi}\right)$ zweier unabhängiger binärer Formen $\chi(z)$, $\varphi(z)$, von denen die erste vom $(p-1)^{\text{ten}}$, die zweite vom $(p+1-2\mu)^{\text{ten}}$ Grade ist. Wir kennen den Werth (65), den diese Invariante in dem besonderen Falle annimmt, dass $\chi(z)$

durch (62) mit der Maassgabe vorgestellt wird, dass man das in dieser Formel auftretende ν durch μ ersetzt. Wird hierdurch $\left(\overset{\mu}{\chi},\ \overset{\mu}{\varphi}\right)$ allgemein bestimmt sein?

Ich sage, dass dies in der That der Fall ist. Wir wollen vorübergehend für $\frac{(y'dy')}{\sqrt{fy'}}$, $\frac{(y''dy'')}{\sqrt{fy''}}$, $\cdots c', c'', \cdots$ schreiben, so dass das besondere $\chi(z)$ die folgende Gestalt annimmt:

(66) $$\chi(z) = c'(y'z)^{p-1} + c''(y''z)^{p-1} + \cdots + c^{(\mu)}(y^{(\mu)}z)^{p-1}.$$

Das besondere $\chi(z)$ ist also invariantentheoretisch dadurch particularisirt, dass es sich aus nur μ $(p-1)^{ten}$ Potenzen linearer Formen zusammensetzen lässt. Diese Particularisirung tritt aber nach der Lehre von den Potenzdarstellungen der binären Formen dann und nur dann ein, wenn eine gewisse Covariante $(\mu+1)^{ten}$ Grades in den Coefficienten von χ identisch verschwindet*). Hierdurch aber können keine zwei Ausdrücke $\left(\overset{\mu}{\chi},\ \overset{\mu}{\varphi}\right)$, die im allgemeinen verschieden sind, einander gleich werden. *Es giebt also in der That nur eine Bildung $\left(\overset{\mu}{\chi},\ \overset{\mu}{\varphi}\right)$, die für unser specielles χ die Form* (65) *annimmt, und also muss es möglich sein, die allgemeine Form von $\left(\overset{\mu}{\chi},\ \overset{\mu}{\varphi}\right)$ aus* (65) *abzulesen.*

Uebrigens will ich die Form (65) in Uebereinstimmung mit (66) noch folgendermassen schreiben:

(67) $$\prod_i \prod_k{}' (y^{(i)}y^{(k)})^2 \cdot \prod_i \varphi(y^i) \cdot \prod_i c^{(i)}.$$

Um nun $\left(\overset{\mu}{\chi},\ \overset{\mu}{\varphi}\right)$ wirklich aufzustellen, setze man symbolisch:

$$\chi = \chi_z^{p-1}, \qquad \varphi = \varphi_z^{p+1-2\mu}.$$

Ich behaupte dann, dass die gesuchte Invariante folgenden Werth hat:

(68) $$\left(\overset{\mu}{\chi},\ \overset{\mu}{\varphi}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-2} & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-3}\chi_2 & \cdots & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{\mu-1}\chi_2^{\mu-1} \\ (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-3}\chi_2 & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{2\mu-4}\chi_2^{2} & \cdots & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{\mu-2}\chi_2^{\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_1^{\mu-1}\chi_2^{\mu-1} & \cdot & \cdots & (\chi\varphi)^{p+1-2\mu}\chi_2^{2\mu-2} \end{vmatrix}.$$

Der Beweis hat sich, dem Vorangehenden zufolge, auf den Nachweis zu beschränken, dass (68) in (67) übergeht, sobald man $\chi(z)$ in der besonderen Form (66) voraussetzt. Dies aber ergiebt sich durch eine ganz einfache Rechnung, die nicht weiter angeführt werden soll**).

---

*) Vergl. beispielsweise Gundelfinger im 100^{ten} Bande des Journals für Mathematik: *Zur Theorie der binären Formen*, oder die Dissertation von Hilbert: *Ueber die invarianten Eigenschaften specieller binärer Formen etc.* (Königsberg 1885).

**) Ich habe den Ausdruck (68) bereits l. c. in den Göttinger Nachrichten mitgetheilt. Inzwischen habe ich ihn dort in unrichtiger Weise eingeführt. Unser

Ich komme jetzt noch einmal auf die Bemerkung zurück, mit der ich den vorigen Paragraphen begann. Der Ausdruck (68) enthält keinen ohne weiteres erkennbaren abtrennbaren Zahlenfactor. *Wir werden die in* (53) *noch unbestimmten Constanten* $c_\nu^{(\mu)}$ *also definitiv dahin fixiren, dass wir verlangen, die Reihenentwickelung der einzelnen* σ *soll genau mit dem Term* (68) *beginnen.*

Ist $\mu = 0$, so wird dieser Term gleich 1, wie es sein soll. Wir betrachten noch insbesondere den Fall $\mu = 1$. Setzen wir einen Augenblick $\varphi(z) = a z_1^{p-1} + b z_1^{p-2} z_2 + \cdots$, so reducirt sich das zugehörige $\binom{\mu \;\; \mu}{\chi, \; \varphi}$ auf $a w_1 + b w_2 + \cdots$. *Die Reihenentwickelung derjenigen* σ *also, die Zerlegungen* $f = \varphi_{p-1} \psi_{p+3}$ *entsprechen, beginnt je mit einem in den* w *linearen Gliede, das sich einfach ergiebt, wenn man in* $\varphi(z)$ *statt der successiven Terme* z_1^{p-1}, $z_1^{p-2} z_2$, ... *der Reihe nach die* $w_1, w_2, \ldots$ *einträgt.*

§ 14.

Die Periodicität der σ-Functionen. Der Uebergang zu den ϑ.

Die Frage nach der Periodicität der σ-Functionen erledigt sich jetzt genau so, wie im Falle $p = 2$; ich darf dieserhalb durchaus auf B. verweisen. Das Resultat ist, dass bei Ueberschreitung der in § 8 eingeführten Querschnitte A_k, B_k jedem σ ein Exponentialfactor zutritt, dessen Werth bez.

$$(69) \qquad \pm e^{\sum^i \eta_{ik}\left(w_i + \frac{\omega_{ik}}{2}\right)}, \qquad \pm e^{\sum^i \eta_{i,k+p}\left(w_i + \frac{\omega_{i,k+p}}{2}\right)}$$

ist. Ob hier + oder − zu schreiben ist, hängt von derselben Regel ab, die wir in § 3 für $p = 2$ aufgestellt haben. Wir bezeichnen die Vorzeichen, die dem einzelnen σ in diesem Sinne an den Querschnitten

$$A_1, A_2, \ldots A_p; \;\; B_1, B_2, \ldots B_p$$

zukommen, mit

Ausdruck verschwindet, sobald wir in (66) eine der Constanten $c', c'', \ldots c^{(p)}$ gleich Null nehmen, — in Uebereinstimmung mit dem Satze, dass die ganze σ-Function (nicht nur der erste Term ihrer Reihenentwickelung) identisch verschwindet, sofern wir die Argumente $w_1 \ldots w_p$ aus Summen von weniger als μ Integralen zusammensetzen. Aber hierdurch allein ist unser Ausdruck noch nicht definirt; vielmehr giebt es zahlreiche Ausdrücke $\binom{\mu \;\; \mu}{\chi, \; \varphi}$ der hiermit bezeichneten Eigenschaft, worauf mich Herr Hilbert aufmerksam machte. Es ist also unmöglich, den in Betracht kommenden Term $\binom{\mu \;\; \mu}{\chi, \; \varphi}$ aus dem Satze vom Verschwinden der σ-Function allein zu bestimmen, wie ich damals wollte. Immerhin scheint dieser Satz für die Reihenentwickelung des σ überaus wesentlich; denn er giebt eine Eigenschaft nicht nur des ersten Entwickelungsterms von σ, sondern aller folgenden.

(70) $(-1)^{g_1}, (-1)^{g_2}, \ldots (-1)^{g_p}; \ (-1)^{h_1}, (-1)^{h_2}, \ldots (-1)^{h_p}.$

Hierdurch ist dann, da keine zwei σ dieselben „Charakteristiken" g, h aufweisen, *eine ganz bestimmte Zuordnung* der σ zu den ϑ-Functionen:

$$(71) \qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}(v, \tau) = \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g_1\, g_2 \cdots g_p \\ h_1\, h_2 \cdots h_p \end{smallmatrix}\right|}(v_1, v_2, \ldots v_p; \ \tau_{11}, \ldots \tau_{pp})$$

gegeben. Die Grössen v, τ werden dabei durch das Schema erklärt:

$$(72) \qquad \left\{ \begin{array}{c|ccc|ccc} & A_1 & A_2 \cdots & A_p & B_1 & B_2 \cdots & B_p \\ \hline v_1 & 1 & 0 \cdots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} \cdots & \tau_{1p} \\ v_2 & 0 & 1 \cdots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} \cdots & \tau_{2p} \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & & & & & & \\ v_p & 0 & 0 \cdots & 1 & \tau_{p1} & \tau_{p2} \cdots & \tau_{pp} \end{array} \right.$$

Um jetzt die Beziehung zwischen dem einzelnen $\sigma_{\varphi,\psi}$ und dem zugehörigen $\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|}$ explicit festzulegen, schreiben wir wie in § 4

$$(73) \qquad \vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|} = C_{\varphi\psi} \cdot e^{G(v_1, v_2, \cdots v_p)} \cdot \sigma_{\varphi\psi},$$

wo wieder G eine homogene Function zweiten Grades der v, $C_{\varphi\psi}$ aber eine von den v unabhängige Constante sein wird, deren Werth von der Zerlegung $f = \varphi \cdot \psi$ abhängt, die bei Construction des σ benutzt wurde. Hier bestimmt sich G aus der Periodicität der σ, ϑ. Es wird überflüssig sein, die bekannten Periodicitätseigenschaften der ϑ noch besonders anzugeben, um so mehr als dies für $p = 2$ in § 1 geschehen ist. *Der resultirende Werth von G ist folgender:*

$$(74) \qquad G(v_1, v_2, \ldots v_p)$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1p} & w_1 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2p} & w_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \cdots & \omega_{pp} & w_p \\ \sum \eta_{i1} w_i & \sum \eta_{i2} w_i & \cdots & \sum \eta_{ip} w_i & 0 \end{vmatrix} : 2 \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2p} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \cdots & \omega_{pp} \end{vmatrix}.$$

Wie aber bestimmen sich die $C_{\varphi\psi}$? Ich kann nicht zweifeln, *dass dieselben in Uebereinstimmung mit den Formeln* (23) *allgemein folgende Werthe haben:*

$$(75)\qquad C_{\varphi\psi} = c\cdot\sqrt{\frac{\begin{vmatrix}\omega_{11} & \cdots & \omega_{1p}\\ \vdots & & \\ \omega_{p1} & \cdots & \omega_{pp}\end{vmatrix}}{(2i\pi)^p}}\cdot\sqrt[8]{\Delta\varphi\cdot\Delta\psi}\,.$$

wo c ein rationaler Zahlenfactor ist und $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ die Discriminanten von φ, ψ vorstellen (die gleich Eins zu setzen sind, wenn der Grad von φ, ψ auf 1 oder auf 0 herabsinken sollte). Die Entwickelungen von Thomae, auf die ich mich in § 4 bei $p=2$ stützen konnte, sind allerdings nicht weit genug durchgeführt, um diesen Werth des $C_{\varphi\psi}$ unmittelbar ablesen zu lassen; sie geben denselben nur in den beiden Fällen, dass $\mu=0$ oder $=1$ genommen wird. Es kann aber nicht schwer sein, die Thomae'schen Entwickelungen in dem hier in Betracht kommenden Sinne zu vervollständigen; es muss dies um so mehr gelingen, als wir im vorigen Paragraphen für jedes σ den Anfangsterm der Potenzentwickelung aufgestellt haben. Uebrigens vergleiche man auch Andeutungen von Prym am Schlusse seiner sogleich noch einmal zu nennenden Arbeit: „Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche*)." Wir bemerken noch, dass der in (75) mitgetheilte Werth des C in den Coefficienten von φ, ψ jedenfalls die richtige Dimension hat. Die Perioden ω der Integrale w haben nämlich in den Coefficienten von φ, ψ ersichtlich die Grade:

$$-\frac{1}{2},\qquad -\frac{1}{2},$$

die $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ dagegen beziehungsweise die Grade:

$$2(p-2\mu),\qquad 0$$

und

$$0\quad,\ 2(p+2\mu);$$

die Dimension des C in den φ, ψ ist also:

$$-\frac{\mu}{2},\qquad +\frac{\mu}{2}.$$

Nun hatte $\sigma_{\varphi\psi}$ seinerseits die Dimension

$$+\frac{\mu}{2},\qquad -\frac{\mu}{2},$$

das Product $C\cdot\sigma$ wird also in den φ, wie in den ψ vom nullten Grade, wie es mit Rücksicht auf das Bildungsgesetz der ϑ-Function sein muss.

Mit den Formeln (73), (74), (75) haben wir nun denjenigen Zielpunkt gewonnen, der in dieser Arbeit erreicht werden sollte. *In der That geben diese Formeln bei beliebigem p die Definition der ϑ am*

*) Bd. XXII der Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, Zürich 1866.

hyperelliptischen Gebilde. Sie sind das genaue Analogon derjenigen, die in § 4 für $p = 2$ aufgestellt werden.

Vermöge dieser Formeln kommt ein Theil der Sätze, die wir für die σ aufstellen, naturgemäss auf solche zurück, die man für die ϑ-Functionen bereits kennt.

Beispielsweise treten unsere Determinanten $D_{\varphi\psi}$ in allgemeinster Form bereits in der soeben genannten Abhandlung von Herrn Prym auf (woselbst algebraische Darstellungen für den *Quotienten* zweier hyperelliptischer ϑ gesucht werden); nur ist daselbst die Symmetrie ihres Bildungsgesetzes etwas verdeckt, indem sich Herr Prym unhomogener Schreibweise bedient und zwecks Vereinfachung der dann entstehenden Formeln den einen der $(2p+2)$ Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes ins Unendliche wirft. Hierdurch werden Fallunterscheidungen nothwendig, die bei unserer Darstellung alle fortfallen.

Andererseits hat bereits Herr Weber angegeben (Math. Annalen, Bd. 13, pag. 43), wie viele der 2^{2p} hyperelliptischen ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente keinmal, einmal, zweimal, ... verschwinden. Nach den Entwickelungen unseres § 10 correspondiren diese ϑ beziehungsweise denjenigen σ, bei welchen μ gleich 0, 1, 2, ... genommen ist.

§ 15.

Schlussbemerkungen.

Der Zweck der vorstehenden Betrachtungen war es, wie wiederholt gesagt wurde, die hyperelliptischen ϑ-Functionen *durch Vermittelung der σ-Functionen* zu definiren. In Abhandlung I war dies anders gewesen: ich hatte dort zunächst (unter Beschränkung auf $p = 2$) die σ-Functionen aus den ϑ abgeleitet. Dabei fand ich den zu diesem Zwecke den ϑ-Functionen zuzusetzenden Exponentialfactor dadurch, dass ich verlangte, das Product der geraden σ solle eine Reihenentwickelung nach Potenzen der w ergeben, in der die Terme zweiter Ordnung ausfallen. Wollen wir im Falle eines beliebigen p einen ähnlichen Gang einschlagen, so werden wir statt des Productes sämmtlicher gerader σ das Product nur derjenigen geraden σ in Betracht ziehen müssen, deren Nullwerthe nicht verschwinden (die also Zerlegungen $f = \varphi_{p+1} \cdot \psi_{p+1}$ entsprechen). In der That können bei der Reihenentwickelung dieses Productes von σ-Functionen quadratische Terme wieder nicht auftreten. Dieselben müssten nämlich, wie sofort zu sehen, eine rationale ganze simultane Invariante unserer Hülfsform $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades χ und der Grundform $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grades f bilden, vom zweiten Grade in den Coefficienten von χ, vom ersten Grade in den Coefficienten von f, und eine solche simultane Invariante existirt nicht.

Noch einen anderen Punkt möchte ich hier zur Sprache bringen. Gewiss ist das Wesentlichste an den vorstehenden Entwickelungen, dass ich überhaupt σ-Functionen einführe, d. h. Functionen, die sich, gleich den ϑ, an die in Betracht kommenden Zerspaltungen $f = \varphi\psi$ in einer vom Coordinatensystem unabhängigen Weise anschliessen, ohne doch, wie es die ϑ thun, Irrationalitäten zu benöthigen, die nicht unmittelbar durch die Zerspaltungen selbst gegeben sind. Es findet dies darin seinen prägnanten Ausdruck, dass ich durchaus mit dem Integral dritter Gattung Q operire, dessen Sonderstellung in I, § 7 ausführlich besprochen wurde. Hätte ich im Vorangehenden statt Q durchweg das sonst übliche „transcendent normirte" Integral Π gesetzt (das durch die Eigenschaft definirt wird, an den Querschnitten $A_1, A_2, \ldots A_p$ verschwindende Periodicitätsmoduln zu haben), so würde ich, wie leicht zu sehen, in Formel (53) bei geeigneter Wahl der multiplicirenden Constanten direct zu den ϑ-Functionen geführt worden sein. Aber ich möchte darauf aufmerksam machen, dass meine Darstellung noch in anderem Sinne von der sonst üblichen abweicht. Wir haben in (53), bez. (73) eine *explicite* Definition der σ, resp. ϑ, vor uns. Die gewöhnliche Darstellungsweise begnügt sich mit einer *impliciten* Definition des ϑ, etwa derjenigen, die in der Formel:

$$(76)\quad \log \frac{\vartheta\left(\int_a^x - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right)\cdot\vartheta\left(\int_a^y - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)}{\vartheta\left(\int_a^y - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)\cdot\vartheta\left(\int_a^x - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right)} = \sum_1^p {}_i\, \Pi_{xy}^{x^{(i)}\, y^{(i)}}$$

ihren Ausdruck findet. Hier sind die $a, a', \ldots a^{(p)}$ Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes, deren Auswahl von der Zerlegung

$$f = \varphi_{p+1-2\mu}\, \psi_{p+1+2\mu}$$

abhängt, zu der die gerade gewählte ϑ-Function gehört: 2μ der genannten Verzweigungspunkte können, unter der einzigen Bedingung, dass man sie paarweise zusammenfallen lässt, übrigens beliebig angenommen werden, während die übrigen $(p+1-2\mu)$ in die Wurzeln von $\varphi = 0$ zu verlegen sind. Eine ganz ähnliche Formel kann selbstverständlich für das zugehörige σ construirt werden; sie lautet einfach:

$$(77)\quad \log \frac{\sigma\left(\int_a^x - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right)\cdot\sigma\left(\int_a^y - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)}{\sigma\left(\int_a^y - \int_{a'}^{x'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{x^{(p)}}\right)\cdot\sigma\left(\int_a^x - \int_{a'}^{y'} - \cdots - \int_{a^{(p)}}^{y^{(p)}}\right)} = \sum_1^p {}_i\, Q_{xy}^{x^{(i)}\, y^{(i)}}.$$

Sicher sind dies sehr elegante Formeln, und ich habe desshalb auch nicht unterlassen wollen, sie hier anzuführen. Aber sie stehen doch hinter den expliciten Formeln (53), (73) zurück. Einmal führen letztere ja thatsächlich weiter, indem sie eine genaue Definition der multiplicirenden Constanten ermöglichen. Dann aber erscheinen sie auch principiell einfacher. Ich darf in dieser Hinsicht noch einmal auf B. verweisen, indem ich den Leser bitte, die dort § 22 ff. gegebene Begründung der fundamentalen functionentheoretischen Sätze unseres § 10 mit der sonst üblichen indirecten zu vergleichen.

Göttingen den 24. März 1888.

Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

Die nachfolgende Arbeit beabsichtigt, die in der vorstehenden Abhandlung des Herrn F. Klein*) für die Behandlung der hyperelliptischen Sigmafunctionen aufgestellten Gesichtspunkte in's Einzelne durchzuführen. Zur Präcisirung der Definitionen und zur Entwicklung der Beweise ist dabei fortwährend von denjenigen functionentheoretischen Schlussweisen Gebrauch gemacht, welche Herr Weierstrass ausgebildet und in verschiedenen Abhandlungen sowie in seinen Vorlesungen bekannt gemacht hat; andererseits aber sind auch diejenigen Vorstellungsweisen, wie mehrblättrige Fläche, Periodenweg, canonisches Querschnittsystem u. s. w. benutzt, auf welchen Riemann seine Theorie entwickelt hat.

Im *ersten* Abschnitt wird nach einigen Bemerkungen über die Integrale I. und II. Gattung die Normalform der Integrale III. Gattung einer näheren Untersuchung unterworfen und die analytische Natur der durch sie definirten Function festgestellt. Der Verfasser glaubte jedoch nicht auf die für die folgenden Abschnitte unentbehrlichen Entwickelungen sich beschränken zu sollen; es sind vielmehr auch einige naheliegende andere Fragen berührt worden, deren Beantwortung Nutzen für eine Weiterführung der Theorie zu versprechen schien. Unter anderem werden die bilinearen Relationen zwischen den Perioden der hier zu Grunde gelegten Integrale sowohl nach der Methode von Riemann als nach der des Herrn Weierstrass abgeleitet.

Der *zweite* Abschnitt discutirt in gleicher Weise die Uebergangsformen, welche Herr Klein benutzt, um von den Integralen zur Definition der Sigmafunctionen zu gelangen. Insofern aber diese Uebergangsformen zum Theil keine Functionen von z allein, sondern eben *Formen* sind, d. h. homogene Functionen von z_1 und z_2, deren Dimension nicht Null ist, schien es zweckmässig, diesem Abschnitte einige

*) Im Folgenden kurz mit Kl. citirt.

allgemeine Auseinandersetzungen über den Gebrauch homogener Variabeln in der Functionentheorie einzuverleiben.

Der *dritte* Abschnitt erläutert die a. a. O. gegebene Definition der Sigmafunctionen und entwickelt ihre wesentlichsten Eigenschaften. Insbesondere wird gezeigt, dass sie eindeutige ganze Functionen der Integralsummen sind. Dieser Beweis ist demjenigen nachgebildet, welchen Herr Weierstrass*) gegeben hat; nachdem jedoch die vorangehenden Untersuchungen von Herrn Klein zu einer Definition der Sigmafunctionen selbst, nicht nur ihrer Quotienten, am algebraischen Gebilde geführt haben, ist es ermöglicht, die ganze Betrachtung auf Potenzreihen allein zu stützen, den Gebrauch der Quotienten von Potenzreihen aber zu vermeiden und damit an allen denjenigen Schwierigkeiten vorbei zu kommen, welche das Auftreten von ausserwesentlich singulären Stellen zweiter Art**) mit sich bringt. Die Untersuchung der Abhängigkeit der σ von den Coefficienten des algebraischen Gebildes und die explicite Aufstellung des ersten Gliedes der Reihenentwicklung sammt Bestimmung der numerischen Constanten bilden den Schluss der Arbeit; ausserhalb des Rahmens derselben bleibt die Verfolgung der Operationen, welche von den Sigma's zu den Theta's führen und damit den eigentlich transcendenten Boden betreten.

Dem Verfasser ist es eine angenehme Pflicht, auch an dieser Stelle mit bestem Danke hervorzuheben, wie sehr der vorliegenden Arbeit die lebhafte Theilnahme förderlich war, welche Herr Klein ihr in allen Stadien ihrer Entstehung geschenkt hat.

I. Abschnitt.

Integrale.

§ 1.

Die zu Grunde gelegten Formen der Integrale.

Indem für die nähere Erläuterung der gebrauchten Bezeichnungen durchweg auf Kl. verwiesen wird, mögen hier nur kurz die fundamentalen Definitionen der Integrale der 3 Gattungen zusammengestellt werden.

Die Integrale *erster* Gattung sind definirt durch:***)

$$(1) \qquad w_\alpha^{xy} = \int_y^x \frac{z_1^{p-\alpha} z_2^{\alpha-1} (z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \qquad \text{(Kl. 36).}$$

*) Crelle J. Bd. 52.

**) Weierstrass, Abhandlungen zur Functionenlehre p. 150 ff.

***) Die griechischen Buchstaben $\alpha, \beta \ldots$ sollen im Folgenden überall die Zahlen $1, 2 \ldots p$ durchlaufen.

Als Stammfunction für die Integrale *zweiter* Gattung ist eingeführt:

$$(2)\qquad \overset{xy}{Z}{}^{(t)} = \int_y^x \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)} + F(z,t)}{2(zt)^2}\,\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \qquad \text{(Kl. 40).}$$

Aus dieser Stammfunction ergeben sich durch Differentiation p Integrale II. Gattung:

$$(3)\qquad \overset{xy}{Z}{}_\alpha^{(t)} = \frac{(p-1)_{\alpha-1}}{(p-1)!}\,\frac{\partial^{p-1}\overset{xy}{Z}{}^{(t)}}{\partial t_1{}^{p-\alpha}\,\partial t_2{}^{\alpha-1}} \qquad \text{(Kl. 41).}$$

Das Normalintegral *dritter* Gattung endlich erscheint in der Form des Doppelintegrals:

$$(4)\qquad Q_{xy}^{x'y'} = \int_y^x\int_{y'}^{x'} \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z,z')}{2(zz')^2}\,\frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}}\,\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \qquad \text{(Kl. 44).}$$

§ 2.

Integrale zweiter Gattung mit verschiedenen Unstetigkeitspunkten.

An diese Definitionen möge sogleich noch ein Beweis des Satzes (Kl. § 2, 8) angeschlossen werden, dass die Differenz zweier gleichbezifferter Integrale II. Gattung eine algebraische Function ist*). Dabei soll Gebrauch gemacht werden von der nachfolgenden Eigenschaft der homogenen Functionen nullter Dimension von z_1 und z_2: bilden wir von einer solchen das totale Differential:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_1}\,dz_1 + \frac{\partial f}{\partial z_2}\,dz_2,$$

so kann dasselbe stets so umgeschrieben werden, dass $(z\,dz)$ als Factor heraustritt. Der übrig bleibende Factor soll mit $d_z f$ bezeichnet werden, sodass das Zeichen d_z definirt ist durch:

$$(5)\qquad df = d_z f\cdot(z\,dz).$$

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir uns zu dem erwähnten Beweis. Derselbe beruht darauf, dass der Integrand der Stammfunction $Z^{(t)}$, nämlich:

$$\frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)} + F(z,t)}{2(zt)^2}\,\frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}$$

für $z = t$ nur so unendlich gross wird wie das Differential einer algebraischen Function von z. Es wird also möglich sein, aus jenem Integranden durch Subtraction des Differentials einer algebraischen Function von z eine Function von z und t zu gewinnen, welche für $z = t$ nicht mehr unendlich gross wird. Es wird sogar möglich sein,

*) Vgl. Wiltheiss, math. Ann. Bd. 31, p. 137 Randnote.

die zu subtrahirende Function so zu bestimmen, dass der Rest eine rationale ganze Function von t wird. In der That überzeugt man sich durch Ausführung der Division, dass:

$$d_z \overset{z}{Z}{}^{(t)} - \frac{1}{2} d_z \left\{ \frac{(\lambda z)}{(\lambda t)} \frac{\sqrt{f(t)}}{(zt)} + \frac{(\lambda t)^p}{(\lambda z)^p} \frac{\sqrt{f(z)}}{(zt)} \right\}$$

eine rationale ganze Function von t_1, t_2, vom Grade $p-1$ ist. Wollen wir von einer solchen die $(p-1)^{te}$ Polare in Bezug auf t bilden, unter Einführung einer neuen Veränderlichen z', so erhalten wir dieselbe Function in z' geschrieben. Bezeichnen wir diese Operation der Polarenbildung mit $P_{z'}$, so gelangen wir auf diesem Wege zu der Identität:

$$d_z \overset{z}{Z}{}^{(z')} - \frac{1}{2} d_z \left\{ \frac{(\lambda z)}{(\lambda z')} \frac{\sqrt{f(z')}}{(zz')} + \frac{(\lambda z')^p}{(\lambda z)^p} \frac{\sqrt{f(z)}}{(zz')} \right\}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p} z_1'^{\,p-\alpha} z_2'^{\,\alpha-1} d_z \overset{z}{Z}{}^{(t)}_{\alpha} - \frac{1}{2} d_z P_{z'} \left\{ \frac{(\lambda z)}{(\lambda t)} \frac{\sqrt{f(t)}}{(zt)} + \frac{(\lambda t)^p}{(\lambda z)^p} \frac{\sqrt{f(z)}}{(zt)} \right\}.$$

Aus dieser Gleichung können wir nun die gesuchte Beziehung zwischen $Z^{(t)}_{\alpha}$ und $Z^{(z')}_{\alpha}$ erhalten, indem wir $(p-1)$ mal nach z_1' und z_2' differentiiren, mit $(z\,dz)$ multipliciren und zwischen y und x integriren. Um die erhaltene Formel übersichtlich schreiben zu können, möge die abgekürzte Bezeichnung eingeführt werden:

$$(7) \qquad W^{z}_{t,z'} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\lambda z)}{(\lambda z')} \frac{\sqrt{f(z')}}{(zz')} + \frac{(\lambda z')^p}{(\lambda z)^p} \frac{\sqrt{f(z)}}{(zz')} \right\}$$

$$- \frac{1}{2} P_{z'} \left\{ \frac{(\lambda z)}{(\lambda t)} \frac{\sqrt{f(t)}}{(zt)} + \frac{(\lambda t)^p}{(\lambda z)^p} \frac{\sqrt{f(z)}}{(zt)} \right\};$$

dann erhält die erwähnte Gleichung die Gestalt:

$$(8) \qquad \overset{xy}{Z}{}^{(z')}_{\alpha} - \overset{xy}{Z}{}^{(t)}_{\alpha} = \frac{(p-1)_{\alpha-1}}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial z_1^{\,p-\alpha}\, \partial z_2^{\,\alpha-1}} \left\{ W^{x}_{t,z} - W^{y}_{t,z'} \right\}.$$

Diese Formel enthält in der That den zu beweisenden Satz:

Die Differenz zweier gleichbezifferter Integrale II. Gattung mit denselben Grenzen, aber verschiedenen Unstetigkeitspunkten ist eine algebraische Function sowohl der Grenzen, als der Unstetigkeitspunkte.

Aus dieser Formel (8) ergeben sich dann die beiden Zerlegungen des Integrals III. Gattung (Kl. 47a u. b), welche später dazu dienen sollen, die Periodicitätseigenschaften desselben zu erschliessen. Es wird aber bequemer sein, erst von dem Verhalten der Integrale in der Umgebung einzelner Stellen zu reden, um von den dabei zu erlangenden Resultaten später gleich mit Gebrauch machen zu können.

§ 3.

Verhalten der Integrale I. und II. Gattung in der Umgebung einer einzelnen Stelle.

Das Gebiet, auf welchem unsere Variabeln sich bewegen, ist die durch die Irrationalität:

$$\sqrt{f(z)}$$

definirte *Riemann'sche Fläche*. Das Verhalten der Functionen, mit welchen wir zu thun haben, in der Umgebung einer beliebigen Stelle dieser Fläche wird zu charakterisiren sein durch Angabe von Reihen, in welche sich die Functionen an diesen Stellen entwickeln lassen. Für die Ausführung dieser Reihenentwicklungen wird es bequem sein, von der homogenen Schreibweise der Formeln zu einer nicht homogenen überzugehen; der invariante Charakter sämmtlicher eingeführten Functionen wird es aber gestatten, auch bei nicht homogener Schreibweise von einer Unterscheidung endlicher und unendlichferner Punkte der Riemann'schen Fläche abzusehen: die Einführung der nicht homogenen Variabeln kann in jedem einzelnen Falle so vollzogen werden, dass der gerade betrachtete Punkt in's Endliche fällt.

Es sind dann die Punkte der Riemann'schen Fläche nur in zwei Categorien zu unterscheiden: einerseits die $2p+2$ *Verzweigungspunkte*, die im folgenden mit k bezeichnet werden sollen; andrerseits alle übrigen Punkte: diese sollen *gewöhnliche Punkte* genannt und mit z_0 bezeichnet werden. Wird ein solcher als gegeben bezeichnet, so ist immer der Werth der Quadratwurzel $\sqrt{f(z_0)}$ als mit gegeben zu denken; $-\sqrt{f(z_0)}$ gehört dann zu dem *„conjugirten Werthe“* $\overline{z_0}$ (Kl. Bd. 27 dieser Ann., p. 446).

Geschieht der Uebergang von der homogenen Schreibweise zu der nicht homogenen — wie im folgenden der Einfachheit halber stets angenommen werden mag — durch die Substitution:

$$z = \frac{z_1}{z_2} \tag{9}$$

so ist:

$$(z\,dz) \text{ durch } -dz,$$
$$(zt) \text{ durch } z-t$$

u. s. w. zu ersetzen, während die Bezeichnung $f(z)$ ununterschieden in beiden Schreibweisen gebraucht werden möge.

Als *„regulär in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle z_0 (einer Verzweigungsstelle k)“* soll dann nach Herrn Weierstrass eine Function des Ortes auf der Fläche in dem Falle bezeichnet werden, wenn sie nach Potenzen von $z-z_0$ (von $\sqrt{z-k}$) mit ganzen positiven Exponenten entwickelt werden kann.

In diesem Sinne sind bekanntlich die *Integrale I. Gattung* (1) *überall regulär.*

Für die Discussion der *Integrale II. Gattung* (3) sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Unstetigkeitspunkt t ein gewöhnlicher oder ein Verzweigungspunkt ist. In beiden Fällen ist ohne Schwierigkeit zu zeigen, dass in der Umgebung jeder von t verschiedenen Stelle die Stammfunction $Z^{(t)}$ (2) sowohl, als auch die aus ihr abgeleiteten Integrale II. Gattung (3) sich regulär verhalten.

Anders verhält es sich in der Umgebung von t. Um diese Untersuchung durchzuführen, bedürfen wir der Ausdrücke für die Ableitungen von F, wie sie sich aus der symbolischen Darstellung dieser Form (Kl. § 1, 7) ergeben; nämlich:

$$\tag{10} \begin{gathered} \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=t} = \frac{1}{2} f'(t), \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)_{z=t} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right)_{z=t} = \frac{p}{2(2p+1)} f''(t), \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial t}\right)_{z=t} = \frac{p+1}{2(2p+1)} f''(t), \cdots \end{gathered}$$

(die Accente an f bezeichnen Ableitungen nach t).

Ist nun t ein *gewöhnlicher* Punkt der Fläche, so setzen wir:

$$\tag{11} z = t + \zeta;$$

damit erhalten wir die Entwickelungen:

$$\tag{12} F(z, t) = f(t) + \frac{1}{2} f'(t) \cdot \zeta + \frac{p \cdot f''(t)}{4 \cdot (2p+1)} \cdot \zeta^2 + \cdots$$

und:

$$\tag{13} \frac{1}{\sqrt{f(z)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{f'(t)}{f(t)} \zeta + \frac{1}{8} \frac{3f'^2(t) - 2f(t)f''(t)}{f^2(t)} \zeta^2 + \cdots \right\}.$$

Nun ist:

$$\tag{14} (2p+1) f'^2 - 2(p+1) f f'' = -4(2p+1)(p+1)^2 \cdot H,$$

wenn die Hesse'sche Covariante von f für:

$$f_{ik} = \frac{1}{(2p+2)(2p+1)} \frac{\partial^2 f}{\partial z_i\, \partial z_k}$$

durch:

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

oder symbolisch geschrieben:

$$\frac{1}{2} (ab)^2 a_t^{2p} b_t^{2p}$$

definirt ist; benutzen wir dies beim Zusammenziehen von (12) und (13), so erhalten wir:

$$\tag{15} \frac{F(z, t)}{\sqrt{f(z)}} = \sqrt{f(t)} \left\{ 1 - \frac{(p+1)^2}{2} \frac{H(t)}{f^2(t)} \zeta^2 + \cdots \right\}.$$

Zu dieser Gleichung addiren wir beiderseits $\sqrt{f(t)}$, multipliciren mit:

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{(z-t)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

und integriren; kehren wir dann zur ursprünglichen Bezeichnung zurück, so erhalten wir:

$$(16)\qquad Z^{xy}_{(t)} = \sqrt{f(t)}\left\{\frac{1}{x-t} - \frac{1}{y-t} + \frac{(p+1)^2}{4}\frac{H(t)}{f^2(t)}(x-y) \right.$$
$$\left. + \mathfrak{P}_3(x-t,\ y-t)\right\}.$$

In dieser Gleichung (wie im Folgenden stets) bedeutet $\mathfrak{P}$ eine Reihe, welche nach Potenzen der in der Klammer stehenden Grössen mit positiven ganzen Exponenten fortschreitet und deren niedrigste Glieder von der durch den Index angedeuteten Dimension sind. Es wird nicht erforderlich sein, wenn verschiedene solche Reihen auftreten, dieselben auch immer durch verschiedene Zeichen zu unterscheiden.

Die Formel (16) zeigt, dass *die Stammform $Z^{(t)}$ von der ersten Ordnung unendlich gross wird, wenn eine der Grenzen in den Unstetigkeitspunkt fällt;* daraus folgt, dass *die Integrale II. Gattung* (3) *in diesem Falle von der p^{ten} Ordnung unendlich gross werden.*

Jedoch existiren lineare Combinationen der letzteren, nämlich (in nicht homogener Schreibweise):

$$Z,\ \frac{dZ}{dt},\ \frac{d^2Z}{dt^2}\ \cdots\ \frac{d^{p-2}Z}{dt^{p-2}},$$

welche dort genau von der 1., 2., 3. $\cdots$ $(p-1)^{ten}$ Ordnung unendlich gross werden; daraus folgt, dass *die p Integrale II. Gattung* (3) *von einander linear unabhängig sind.*

Ist aber der Unstetigkeitspunkt t ein *Verzweigungspunkt* k der Fläche, so wird man an Stelle von (11) zu setzen haben:

$$(17)\qquad z = k + \zeta^2;$$

über das hiernach noch disponible Zeichen der Hilfsgrösse ζ wird man so verfügen können, dass nach Festsetzung eines beliebigen aber beizubehaltenden Werthes der Wurzelgrösse

$$\sqrt{f'(k)}$$

die Gleichung

$$(18)\qquad \sqrt{f(z)} = \zeta\,\sqrt{f'(k)} + \cdots$$

auch dem Zeichen nach richtig ist. Ist dies für eine Stelle z der Umgebung von k einmal festgesetzt, so wird es in der ganzen Umgebung von k richtig bleiben; zu conjugirten z gehören dann entgegengesetzt gleiche ζ.

An Stelle von (12) und (13) treten dann die Entwickelungen:

$$F(z, k) = \frac{1}{2} f'(k) \cdot \zeta^2 + \frac{p \cdot f''(k)}{4 \cdot (2p+1)} \cdot \zeta^4 + \cdots \tag{19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f(z)}} = \frac{\zeta^{-1}}{\sqrt{f'(k)}} \left\{1 - \frac{1}{4} \frac{f''(k)}{f'(k)} \zeta^2 + \cdots \right\}, \tag{20}$$

aus welchen sich ergiebt:

$$\frac{F(z, k)}{\sqrt{f(z)}} = \frac{1}{2} \sqrt{f'(k)} \cdot \zeta \left\{1 - \frac{1}{4(2p+1)} \frac{f''(k)}{f'(k)} \zeta^2 + \cdots \right\}. \tag{21}$$

Multipliciren wir mit:

$$\frac{-dz}{2(z-k)^2} = -\frac{d\zeta}{\zeta^3},$$

integriren und kehren zur ursprünglichen Bezeichnung zurück, so erhalten wir:

$$Z_{(k)}^{xy} = \frac{1}{2} \sqrt{f'(k)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x-k}} - \frac{1}{\sqrt{y-k}} + \frac{1}{4(2p+1)} \frac{f''(k)}{f'(k)} \left(\sqrt{x-k} - \sqrt{y-k}\right) + \mathfrak{P}_2\left(\sqrt{x-k}, \sqrt{y-k}\right) \right\}. \tag{22}$$

Auch wenn der Unstetigkeitspunkt zugleich ein Verzweigungspunkt ist, wird demnach die Stammfunction Z in ihm von der ersten Ordnung unendlich gross. In diesem Falle erhöht aber jede Differentiation die Ordnung des Unendlichwerdens um *zwei* Einheiten; *die Integrale II. Gattung, welche sich auf einen Verzweigungspunkt beziehen, werden demnach in diesem unendlich gross von der Ordnung* $2p-1$ und es existiren lineare Combinationen derselben, welche bezw. von den Ordnungen $1, 3, 5, \ldots 2p-3$ unendlich gross werden.

Nach einem Satze des Herrn Weierstrass enthält die Reihe der Ordnungszahlen der *algebraischen* Functionen, welche in einem gegebenen Punkt t und nur in diesem unendlich gross werden, stets p Lücken. Für einen gewöhnlichen Punkt treten diese Lücken auf an den Stellen $1, 2, 3, \ldots p$; für einen Verzweigungspunkt an den Stellen $1, 3, 5, \ldots 2p-1$. *In beiden Fällen werden diese Lücken durch die Integrale II. Gattung ausgefüllt*, was durch die oben gefundenen Resultate bestätigt wird.

§ 4.

Verhalten der Integrale III. Gattung in der Umgebung einer beliebigen einzelnen Stelle.

Bei Untersuchung der Integrale III. Gattung werden wir uns ebenso wie dies bei denjenigen der II. Gattung geschehen ist, auf den Fall beschränken, dass die beiden „Argumente“ x, y der Umgebung eines und desselben Punktes der Riemann'schen Fläche angehören; wir können ja den von y nach x führenden Integrationsweg uns immer in hinlänglich kleine Theile zerlegt denken und das Integral betrachten als Summe gleichartiger Integrale, welche über die einzelnen Theile erstreckt sind. Beim Integrale dritter Gattung wird nun von den Parametern $x'y'$ ganz dasselbe gelten; es wird aber darauf zu achten sein, in welcher Beziehung das Gebiet der Parameter zu dem der Argumente steht. So bleiben folgende sechs Fälle zu unterscheiden:

1. Die Argumente liegen in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle z_0, die Parameter in der Umgebung einer von z_0 und $\overline{z_0}$ (§ 3) verschiedenen Stelle z_0';

2. Argumente und Parameter liegen in der Umgebung derselben gewöhnlichen Stelle z_0;

3. die Argumente liegen in der Umgebung von z_0, die Parameter in der Umgebung der conjugirten Stelle $\overline{z_0}$;

4. Argumente und Parameter liegen in der Umgebung desselben Verzweigungspunktes k;

5. die Argumente liegen in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes, die Parameter in der eines Verzweigungspunktes (oder umgekehrt);

6. Argumente und Parameter liegen in der Umgebung verschiedener Verzweigungspunkte.

Diese sechs Fälle sollen nun der Reihe nach besprochen werden.

ad 1. Werden die Umgebungen von z_0 und z_0' so klein angenommen, dass sie keine Stelle gemeinsam haben, so verhalten sich alle Elemente des Integrals regulär und man erhält:

$$Q_{xy}^{x'y'} = \frac{\sqrt{f(z_0)}\sqrt{f(z_0')} + F(z, z_0)}{2(z_0 - z_0')^2 \sqrt{f(z_0)}\sqrt{f(z_0')}}(x - y)(x' - y') \tag{23}$$
$$+ \mathfrak{P}_3(x - z_0,\ y - z_0;\ x' - z_0',\ y' - z_0')$$

d. h.:

Im ersten Fall verhält sich Q regulär.

ad 2. Setzen wir wieder:

$$z - z_0 = \zeta, \quad z' - z_0 = \zeta',$$

so erhalten wir mit Hilfe einer analogen Rechnung wie 12 ff.:

$$\frac{F(z, z')}{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}} = 1 - \frac{(p+1)^2}{4}\frac{H(z_0)}{f^2(z_0)}(\zeta - \zeta')^2 + \cdots. \tag{24}$$

Nun ist für $z = z'$ (vgl. 10):

$$\frac{F(z, z')}{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}} = 1; \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{F(z, z')}{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}} = 0, \tag{25}$$

unabhängig von dem speciellen Werthe von z, für welchen die Gleichheit eintritt; hieraus folgt, dass in (24) alle noch folgenden Glieder durch $(\zeta-\zeta')^2$ theilbar sein müssen. Wird also zu (24) beiderseits 1 addirt, mit

$$\frac{dz\,dz'}{2(z-z')^2}=\frac{d\zeta\,d\zeta'}{2(\zeta-\zeta')^2}$$

multiplicirt und integrirt, so wird erhalten:

$$(26)\quad Q_{xy}^{x'y'}=\log\frac{(x-x')(y-y')}{(x-y')(y-x')}-\frac{(p+1)^2}{4}\frac{H(z_0)}{f^2(z_0)}(x-y)(x'-y')$$
$$+\mathfrak{P}_3(x-z_0,\,y-z_0;\;x'-z_0,\,y'-z_0),$$

also:

Im zweiten Falle verhält sich Q in erster Annäherung wie der Logarithmus des Doppelverhältnisses:

$$(xx'yy')=\frac{(xx')(yy')}{(xy')(yx')};$$

nach Subtraction dieses Logarithmus bleibt eine Function, welche sich regulär verhält.

Der dem Logarithmus beizulegende Werth ergiebt sich aus dem für $x=y$, $x'=y'$ eintretenden Anfangswerth durch stetige Fortsetzung längs der vorgeschriebenen Integrationswege.

ad 3. Die eben durchgeführte Entwicklung gilt auch für diesen Fall, mit dem Unterschiede, dass jetzt die beiden Glieder der Form $\frac{1}{2}(\zeta-\zeta')^2$, statt sich zu summiren, sich gegenseitig zerstören; infolge dessen fällt in der Entwicklung des Integrals das logarithmische Glied fort und es bleibt:

$$(27)\quad Q_{xy}^{x'y'}=\frac{(p+1)^2}{4}\frac{H(z_0)}{f^2(z_0)}(x-y)(x'-y')$$
$$+\mathfrak{P}_3(x-z_0,\,y-z_0;\;x'-z_0,\,y'-z_0),$$

d. h.:

Im dritten Fall verhält sich Q regulär.

ad 4. Setzen wir:

$$z=k+\zeta^2,\qquad z'=k+\zeta'^2,$$

so erhalten wir analog wie Gl. 19 ff.:

$$(28)\quad \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}+F(z,z')}{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}}$$
$$=\zeta^{-1}\cdot\zeta'^{-1}\left\{\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')^2-\frac{1}{8(2p+1)}\frac{f''(k)}{f'(k)}(\zeta^2-\zeta'^2)^2+\cdots\right\}.$$

Für $z'=z$ d. h. $\zeta'=\zeta$ reducirt sich (vgl. 25) die Function links auf 1, ihre erste Ableitung nach z auf 0; für $z'=\bar{z}$ d. h. $\zeta'=-\zeta$

verschwindet sowohl die Function links, als ihre Ableitung; infolge dessen müssen rechts in der Klammer alle Terme bis auf den ersten durch $(\zeta - \zeta')^2$ und alle einschliesslich des ersten durch $(\zeta + \zeta')^2$ theilbar sein.

Werden daher beide Seiten von (28) mit:

$$\frac{dz\,dz'}{2(z-z')^2} = \frac{2\zeta\zeta'\,d\zeta\,d\zeta'}{(\zeta-\zeta')^2(\zeta+\zeta')^2}$$

multiplicirt und integrirt, so wird erhalten:

$$(29)\qquad Q_{xy}^{x'y'} = \log\frac{(\sqrt{x-k}-\sqrt{x'-k})\,(\sqrt{y-k}-\sqrt{y'-k})}{(\sqrt{x-k}-\sqrt{y'-k})\,(\sqrt{y-k}-\sqrt{x'-k})}$$

$$-\frac{1}{4(2p+1)}\,\frac{f''(k)}{f'(k)}\,(\sqrt{x-k}-\sqrt{y-k})(\sqrt{x'-k}-\sqrt{y'-k})$$

$$+\mathfrak{P}_3(\sqrt{x-k},\,\sqrt{y-k};\;\sqrt{x'-k},\,\sqrt{y'-k});$$

d. h.:

Liegen Parameter und Argumente in der Umgebung eines Verzweigungspunktes, so verhält sich Q wie der Logarithmus eines Doppelverhältnisses, in welches statt der Differenzen $x - x' \cdots$ die Differenzen $\sqrt{x-k}-\sqrt{x'-k} \cdots$ eintreten; m. a. W.: um dieses Verhalten kurz zu beschreiben, hat man *die Umgebung des Verzweigungspunktes auf einen einfachen ebenen Bereich abzubilden und in dieser Abbildung die frühere Formel* (26) *anzuwenden.*

Zu bemerken ist noch, dass die Wurzelgrösse $\sqrt{f'(k)}$, welche oben (18) zur Fixirung der Vorzeichen diente, aus (29) weggefallen ist; in der That bleibt diese Formel ungeändert, wenn alle 4 Quadratwurzeln gleichzeitig ihr Zeichen wechseln. Man hat also bei Anwendung derselben nur dafür Sorge zu tragen, dass $\sqrt{x-k}:\sqrt{x'-k}:\cdots$ mit $\sqrt{f(x)}:\sqrt{f'(x)}\cdots$ bis auf kleine Grössen höherer Ordnung übereinstimmt.

ad 5 und **6.** Diese beiden Fälle lassen sich in derselben Weise behandeln; man übersieht sofort, dass *in ihnen die Function sich regulär verhält.*

Damit sind sämmtliche oben aufgestellten Fälle erledigt, und es erübrigt nur noch, einen Blick auf die *Coefficienten* der erhaltenen Entwicklungen zu werfen. Wir haben dieselben erhalten aus dem binomischen Satze; daraus ist zu schliessen, dass diese Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten a von f und der Grössen z_0, $\sqrt{f(z_0)}$ (bezw. k, $\sqrt{f'(k)}$) sein werden, welche in den a homogen von der Dimension null sind, und welche nur Potenzen von $f(z_0)$, bezw. $f'(k)$ zu Nennern haben*). Daraus ergiebt sich eine Folgerung, welche

*) Abgesehen von (23), wo auch eine Potenz von $(z_0 - z_0')$ im Nenner steht.

für spätere Schlüsse von Bedeutung sein wird: betrachten wir auch die Coefficienten als veränderlich und setzen etwa allgemein:

$$a = a_0 + \alpha \tag{30}$$

indem wir unter a_0 feste Ausgangswerthe, unter α veränderliche Incremente verstehen, so können wir alle Glieder unserer Reihen nach Potenzen der α entwickeln; und diese Entwicklungen werden convergiren, solange nicht ein Verzweigungspunkt nach z_0 oder ein weiterer Verzweigungspunkt nach k fällt. Ob im übrigen die Verzweigungspunkte zusammenfallen oder getrennt bleiben, hat darauf gar keinen Einfluss.

§ 5.

Festlegung bestimmter Periodenwege auf der Riemann'schen Fläche.

Für einen grossen Theil der im Folgenden durchzuführenden Periodicitätsuntersuchungen würde es nicht erforderlich sein, mehr als den Begriff eines *„einfachen“* d. i. sich nicht schneidenden *Periodenwegs* auf der Riemann'schen Fläche und der zugehörigen Perioden der Integrale vorauszusetzen; es wird insbesondere nicht erforderlich sein, aus der unendlichen Anzahl verschiedener Periodenwege ein bestimmtes System primitiver Wege herauszuheben und alle übrigen als aus diesen zusammengesetzt zu betrachten.

Indessen wird es doch vielfach eine bequemere Ausdrucksweise gestatten, wenn wir in übrigens ganz willkürlicher Weise ein bestimmtes solches System von $2p$ Querschnitten (Kl. § 8):

$$A_1, A_2 \ldots A_p; \quad B_1, B_2 \ldots B_p$$

einführen. Ueber den positiven Sinn dieser Querschnitte sei wie bei Riemann (ges. W. p. 123), so verfügt, dass im Schnittpunkt von A_β mit B_β die positive Richtung von A_β zur positiven Richtung von B_β ebenso liegt wie die Richtung von 0 nach $+1$ zu der von 0 nach $+i$; oder anders ausgedrückt, dass der Querschnitt A_β den B_β „von links nach rechts“, B_β den A_β „von rechts nach links“ überschreite.

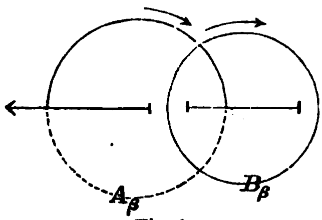


Fig. 1.

Bei Durchlaufung des Querschnitts A_β erhält also das Integral w_α die Periode $-\omega_{\alpha,p+\beta}$, bei Durchlaufung von B_α die Periode $+\omega_{\alpha,\beta}$.

Wegen der allgemeinen Bezeichnung der Perioden der Integrale I. und II. Gattung vgl. Kl. § 8; erwähnt sei hier nur, dass aus der oben bewiesenen Formel (8) sich unmittelbar ergiebt:

Die Perioden der Integrale II. Gattung sind unabhängig von der Unstetigkeitsstelle t.

Die Perioden der Stammfunction $Z^{(t)}$ sind dagegen ganze Functionen von t.

Man findet nämlich:

(31) $$\varphi_\lambda(t) = -\eta_{1,\lambda}\, t_1^{p-1} - \eta_{2,\lambda}\, t_1^{p-2}\, t_2 - \cdots - \eta_{p,\lambda}\, t_2^{p-1}.$$

Soll von einem Periodenweg ohne nähere Bestimmung gesprochen werden, so möge ein solcher in Zukunft mit P und die bei *Durchlaufung* desselben auftretenden Perioden mit ω_α, $-\eta_\alpha$ ohne zweiten Index bezeichnet werden; verschiedene Periodenwege dieser Art sollen durch Accente unterschieden werden.

Insbesondere wird hie und da von „*elementaren Periodenwegen*" die Rede sein; darunter sind dann solche zu verstehen, deren Projectionen auf die Ebene, über welcher die Riemann'sche Fläche ausgebreitet ist, zwei und nur zwei Verzweigungspunkte einfach umgeben.

Wenden wir uns nun zur Untersuchung des Doppelintegrals Q. Solange die Integrationswege $(y' \ldots x')$ und $(y \ldots x)$ auf der Riemann'schen Fläche keinen Punkt gemeinsam haben, hat das Doppelintegral einen bestimmten, übrigens noch von jenen Integrationswegen abhängigen, Werth. Die Gesammtheit dieser Werthe stellt einen Zweig einer analytischen Function der vier unabhängig veränderlichen Argumente x, y, x', y' dar, welche im Innern des ganzen Gebietes, in dem sie durch das Doppelintegral definirt ist, sich überall regulär verhält. Schon in diesem Gebiete ist die Function von den Integrationswegen abhängig und dadurch unendlich vieldeutig. Wir werden aber dabei nicht stehen bleiben dürfen: es wird vielmehr für alle folgenden Entwicklungen von grundlegender Bedeutung die Frage sein, *ob die Function über die Grenzen jenes Gebietes hinaus eine analytische Fortsetzung gestattet.* Wir werden uns davon überzeugen, dass diese Frage zu bejahen ist; wir werden aber die Beantwortung in der Weise theilen, dass wir zunächst nur Fortsetzungen in Bezug auf *eines* der vier Argumente unter Festhaltung der drei übrigen vornehmen; weiter werden wir dann zu untersuchen haben, wie sich aus den Fortsetzungen in Bezug auf jedes einzelne Argument diejenigen zusammensetzen, welche erhalten werden, wenn man alle vier gleichzeitig auf der Riemann'schen Fläche sich frei bewegen lässt.

§ 6.

Die Function Q bei unbeschränkter Veränderlichkeit ihres einen Arguments.

Wir halten zunächst die drei Veränderlichen y, y' und x' *sammt dem die beiden letzteren verbindenden Integrationsweg* fest und betrachten x allein als variabel. Wollten wir die Untersuchung ganz allgemein durchführen, so müssten wir zulassen, dass jener Integrationsweg sich selbst durchsetzt. Aber analog wie § 4 können wir jeden sich selbst durchsetzenden Integrationsweg in Theile zerlegen: wir können ihn zusammengesetzt denken aus sich nicht schneidenden Stücken, aus einfachen Periodenwegen, und aus Schleifen, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Die letzteren liefern zu dem Resultat der Integration in Bezug auf ds' keinen Beitrag, sodass wir dazu gelangen, nur folgende beiden Fälle zu unterscheiden:

1. der Integrationsweg der Parameter verbindet zwei getrennt liegende Punkte y', x' der Riemann'schen Fläche, ohne sich selbst zu durchsetzen;

2. die Punkte x', y' sind identisch, der Integrationsweg der Parameter ist ein einfacher Periodenweg P'.

Betrachten wir zunächst den *zweiten* Fall als den einfacheren. Solange die Definition durch das Doppelintegral platzgreift, können wir die Zerlegungsformel (Kl. 47b) anwenden; aus derselben geht hervor, dass *dieses specielle Doppelintegral, als Function von x betrachtet, sich reducirt auf ein Integral I. Gattung:*

$$(32) \qquad -\sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha' w_\alpha^{xy}.$$

Die analytischen Fortsetzungen des speciellen Doppelintegrals mit Bezug auf x müssen daher identisch sein mit den Fortsetzungen dieses Integrals I. Gattung. Die Natur der letzteren ist aber bekannt, sodass die Untersuchung dieses Falles erledigt ist.

Wenden wir uns nun zum *ersten* Falle. Das Gebiet, auf welches die Veränderlichkeit von x beschränkt werden muss, wenn wir bei der Definition durch das Doppelintegral stehen bleiben, ist dadurch charakterisirt, dass die Function unter dem Integralzeichen für kein Element desselben unendlich gross werden darf. Wir werden also den von y' nach x' führenden Integrationsweg der Parameter auf der Riemann'schen Fläche für das x als Querschnitt ansehen und der Variabeln x zunächst verbieten müssen, denselben zu überschreiten. In dem so definirten Gebiet ist aber die Function, wie bereits § 5 erwähnt, noch unendlich vieldeutig: durchläuft x in diesem Gebiete einen Periodenweg P, so können wir die Vermehrung, welche Q dabei erfährt, aus der Zerlegungsformel (Kl. 47a) ablesen. Wir finden, dass Q sich vermehrt um:

$$(33) \qquad -\sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha w_\alpha^{x'y'},$$

wo als Integrationsweg für die Integrale I. Gattung natürlich der gegebene Weg von y' nach x' zu wählen ist.

Lassen wir an Stelle von P einen Weg treten, der den Integrationsweg $(y' \dots x')$ umkreist, so zeigt dieselbe Zerlegungsformel, dass Q unverändert bleibt, wenn x einen solchen Weg durchläuft.

Wir fragen nun, wie wir die so definirte Function von x über die bisher festgehaltene Grenze hinaus analytisch fortsetzen können und welche neuen Werthe wir dadurch etwa noch zu den unendlich vielen erhalten, die uns bereits das Doppelintegral lieferte. Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst untersuchen, wie sich das letztere in der Nähe der Grenze verhält. Die Mittel zu dieser Untersuchung liefern die Formeln (26) und (29); wir können uns den Schnitt ja immer in so kleine Theile zerlegt denken, dass für jeden dieser Theile die Voraussetzungen jener Formeln erfüllt sind. Dieselben zeigen dann, dass bei Annäherung an die Grenze die Function Q nicht aufhört sich regulär zu verhalten, ausgenommen nur die Punkte y' und x'; sie zeigen ferner, dass *der Werth, welchen das Doppelintegral in* x_1 *auf dem rechten Ufer von* $(y' \dots x')$ *besitzt, um* $2\pi i$ *kleiner ist als der in dem gegenüberliegenden Punkt* x_2 *des linken Ufers erhaltene Werth*, vorausgesetzt, dass die Variable x von x_1 nach x_2 auf einem Wege geführt wird, welcher bis an das Ufer des Querschnitts zusammengezogen werden kann, sodass keine weitere Periode hinzutritt (vgl. die Figur). Dabei ist es gleichgiltig, ob wir x den Punkt x' in einem oder y' im andern Sinne umkreisen lassen, in Uebereinstimmung mit dem Satze oben.

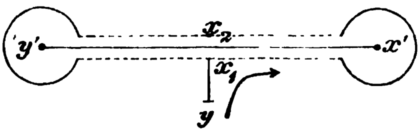


Fig. 2.

Es stehen aber auf der rechten Seite der Gleichungen (26) und (29) wohl definirte analytische Functionen von x, welche ihre Bedeutung nicht verlieren, wenn x die ihm bisher gezogene Grenze überschreitet. Aus den bekannten Eigenschaften des Logarithmus ergiebt sich in der That, dass *die Function* Q *über diese Grenze hinaus fortgesetzt werden kann* und dabei nur in den Endpunkten des Weges $(y' \dots x')$ aufhört regulär zu sein. Lassen wir demzufolge die Variable x den Querschnitt von links nach rechts überschreiten, so erhalten wir um $2\pi i$ grössere Werthe, als wenn wir ihn umgehen; oder anders ausgedrückt, umkreist x den Punkt x' in positivem Sinne oder y' in negativem Sinne, so vermehrt sich der Werth von Q um

$$2\pi i. \tag{34}$$

Damit ist für das Argument x der Function Q unbeschränkte Veränderlichkeit erreicht, und wir können das Resultat der Untersuchung, wenn wir etwa für den Moment ein bestimmtes canonisches Querschnittsystem (§ 5) eingeführt denken, zusammenfassen in den Satz:

Aus dem Doppelintegral Q entsteht durch Fortsetzung eine analytische Function des auf der Riemann'schen Fläche unbeschränkt veränderlichen

Argumentes x, deren sämmtliche Werthe für ein bestimmtes x aus einem von ihnen hervorgehen durch Hinzufügung von ganzen Vielfachen der $2p+1$ Perioden:

$$(35)\qquad 2\pi i;\ \sum \eta_{\alpha,1} w_\alpha^{x'y'};\ \sum \eta_{\alpha,2} w_\alpha^{x'y'}\ \ldots \sum \eta_{\alpha,2p}\, w_\alpha^{x'y'}$$

— in Uebereinstimmung mit den Sätzen, die sonst für Integrale III. Gattung aufgestellt werden.

Die Darstellung des Integrals III. Gattung als *Doppel*integral gestattet aber, die bisher behandelte Frage dahin zu erweitern, dass man Argumente und Parameter als gleichberechtigte und in gleicher Weise veränderliche Grössen auffasst. Insofern dabei vor allem die ersten Glieder der Reihen (26) und (29) in Betracht kommen, wird es nützlich sein, zuerst zu fragen, wie der Logarithmus eines Doppelverhältnisses von vier Punkten mit diesen Punkten sich ändert.

§ 7.

Von dem Logarithmus des Doppelverhältnisses von vier Punkten.

Wir betrachten das Anfangsglied der Reihe (26):

$$\log \frac{(xx')\,(yy')}{(xy')\,(yx')}.$$

Der Werth desselben, welcher in jedem einzelnen Falle zu nehmen ist, wird bestimmt sein durch den für $x=y$, $x'=y'$ eintretenden Anfangswerth 0 und durch die Wege, auf welchen x, x' von diesen Anfangswerthen zu ihren Endwerthen gelangen. Wir werden besonders den Fall zu untersuchen haben, in welchem die beiden Wege sich kreuzen; die Frage ist dann, ob in diesem Falle die Reihenfolge gleichgiltig ist, in welcher sie durchlaufen werden.

Wir dürfen die Wegstücke, die wir betrachten, uns beliebig klein denken; dann können wir sie ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit uns geradlinig vorstellen. Es möge etwa angenommen werden, dass der Weg $(y \ldots x)$ den Weg $(y' \ldots x')$ von rechts nach links überschreite. Die vier Punkte werden dann die Ecken eines Vierecks bilden, von welchem kein Winkel π übersteigt, und sie werden bei positiver Umlaufung der Vierecksfläche in der Reihenfolge:

$$y'\ y\ x'\ x$$

getroffen werden (vgl. Fig. 3). Die Winkel an diesen Ecken, in dem in der Figur angegebenen Sinne gemessen, seien α, β, γ, δ. Bringt man jede der Differenzen $x-x'$ etc. auf die Form $re^{\varphi i}$, so sieht man*) dass

*) Vgl. Möbius, ges. W. Bd. 2, p. 205 ff.

der reelle Theil unseres Logarithmus gegeben wird durch den reellen Logarithmus des aus den absoluten Längen der vier Vierecksseiten gebildeten Doppelverhältnisses:

$$\frac{|x-x'|\,|y-y'|}{|x-y'|\,|y-x'|}.$$

Dieser reelle Theil ist also nur abhängig von der Lage der vier Punkte, unabhängig von den sie verbindenden Wegen. Anders verhält es sich mit dem Factor von i: derselbe ist gleich der Summe zweier gegenüberliegender Winkel des Vierecks; es entsteht daher die Frage, welche Winkel in jedem Fall zu nehmen und in welchem Sinne dieselben zu messen sind.

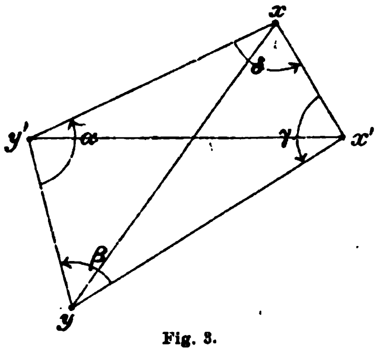


Fig. 3.

Lassen wir nun zuerst z' von y' nach x' gehen, hierauf z von x nach y, so sind nach Ausführung der ersten Operation x' und y' als fest zu betrachten. Wir schreiben daher den Logarithmus:

$$L_1 = \log\frac{x-x'}{y-x'} - \log\frac{x-y'}{y-y'} \tag{36}$$

und definiren die beiden Logarithmen dadurch, dass für $x = y$ jeder derselben sich auf Null reduciren soll; das bleibt in Uebereinstimmung mit der früheren Festsetzung. Schreiben wir dann nur die imaginären Bestandtheile an, so erhalten wir:

$$\log\frac{x-x'}{y-x'} = -\gamma i + \cdots,$$

$$\log\frac{x-y'}{y-y'} = +\alpha i + \cdots,$$

also:

$$L_1 = -(\alpha+\gamma)i + \cdots. \tag{37}$$

Lassen wir aber zuerst z von y nach x, hierauf z' von y' nach x' gehen, so gelangen wir auf demselben Wege zu der Gleichung:

$$L_2 = \log\frac{x-x'}{x-y'} - \log\frac{y-x'}{y-y'} = +(\beta+\delta)\,i + \cdots. \tag{38}$$

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi i,$$

erhalten wir sonach:

$$L_2 - L_1 = 2\pi i. \tag{39}$$

So sind wir zu dem Satze gelangt der das in (34) bereits erhaltene Resultat vervollständigt:

Lassen wir x und x' auf Wegen sich ändern, welche einander überkreuzen, so wird der dadurch erhaltene Werth von L, wenn der zuletzt durchlaufene Weg den zuerst durchlaufenen von links nach rechts überschreitet, um $2\pi i$ grösser sein als im entgegengesetzten Fall.

§ 8.

Q als analytische Function von vier unabhängigen Veränderlichen.

Nunmehr sind alle Vorbereitungen getroffen, um die bereits a. E. des § 5 aufgeworfene Frage nach der Natur derjenigen Function von vier unabhängigen Veränderlichen beantworten zu können, welche durch analytische Fortsetzung in Bezug auf alle diese 4 Variabeln aus dem Doppelintegrale Q entsteht. Zunächst ist klar, dass dieselbe Untersuchung, welche in § 6 für x durchgeführt wurde, sich in gleicher Weise auch für die 3 andern Veränderlichen wird durchführen lassen; wir werden aber zu fragen haben, ob man durch gleichzeitige Fortsetzung in Bezug auf alle vier Variabeln noch zu andern Werthen gelangt als denjenigen, die man durch Fortsetzungen in Bezug auf die einzelnen Variabeln erreichen kann.

Um diese Frage zu beantworten, gehen wir davon aus, dass für das Doppelintegral bei sinngemässer Festsetzung der Integrationswege die Identität besteht

$$Q_{xz}^{x'z'} = Q_{yz}^{y'z'} + Q_{yz}^{x'y'} + Q_{xy}^{x'z'} \tag{40}$$

welche folgendes aussagt: der Werth von Q, welcher erhalten wird, wenn wir von y nach x und gleichzeitig von y' nach x' gehen, wird auch erhalten, wenn wir zuerst von y' nach x' gehen (dadurch vermehrt sich $Q_{yz}^{y'z'}$ um $Q_{yz}^{x'y'}$), hierauf von y nach x. Für diese zweite Operation ist dann selbstverständlich der nach Ausführung der ersten erhaltene Werth zum Ausgangspunkt zu nehmen, sodass noch $Q_{xy}^{x'z'}$ zutritt.

Nach einem bekannten Princip wird die Formel (40) auch für alle analytischen Fortsetzungen Gültigkeit behalten; wir können den durch sie dargestellten Sachverhalt kurz zusammenfassen in die Worte:

Wir dürfen uns die Umläufe unserer Variabeln stets als successiv denken.

Die *Reihenfolge* solcher successiven Fortsetzungen ist *für das Doppelintegral gleichgiltig*, nach dem Satz von der Vertauschbarkeit der Integrationsordnung bei Doppelintegralen mit unabhängigen Grenzen. Sobald aber bei analytischer Fortsetzung die Wege sich schneiden, wird Formel (40) insofern illusorisch, als dann in ihr ein Glied auftritt, dessen Bedeutung nicht mehr von jener Reihenfolge unabhängig ist. Es wird vielmehr in diesem Falle der Werth von Q erst dann ein bestimmter sein, wenn nicht nur die Wege gegeben sind, auf welchen die Variabeln sich ändern, sondern auch angegeben ist, *welche von beiden eher an die Schnittstelle gelangt.* Der Fall, dass zwei *gleichzeitig* durch eine solche Stelle passiren, wird zu Unbestimmtheiten ähnlicher Art führen, wie bei Functionen einer Veränderlichen deren Durchgang durch einen Verzweigungspunkt, und deshalb auszuschliessen sein.

Wir können uns übrigens auf die Veränderlichkeit von x und x' allein beschränken, da es gleichgiltig ist, ob wir eine untere Grenze einen bestimmten Weg in einer Richtung oder die entsprechende obere Grenze denselben Weg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen lassen.

Ferner wird uns eben Formel (40) gestatten, die Untersuchung auf den Fall nur *eines* Schnittpunkts und auf die Umgebung desselben einzuschränken. Dann treten aber sofort die Formeln (26) bezw. (29) in Kraft. In diesen ist für alle Glieder rechts, welche auf das erste folgen, die Reihenfolge der Operationen gleichgiltig; für das erste Glied aber ist der Einfluss der Reihenfolge in § 7 untersucht. Uebertragen wir das dort gefundene Resultat auf unsere Function Q, so wird dasselbe lauten:

Wenn der zuletzt durchlaufene Weg den zuerst durchlaufenen von links nach rechts überschreitet, so wird der dadurch erhaltene Werth von Q um $2\pi i$ grösser sein, als wenn die Reihenfolge der Durchlaufung die umgekehrte ist.

Neben diesen Satz stellen wir den unter (34) ausgesprochenen und am Schlusse von § 7 schon beigezogenen in einer etwas modificirten Form:

Wenn der zuletzt durchlaufene Weg den zuerst durchlaufenen von links nach rechts überschreitet, so wird der dadurch erhaltene Werth von Q um $2\pi i$ grösser sein, als wenn ersterer den letzteren umgeht.

Diese beiden Sätze gestatten nun die Erledigung der allgemeinen Frage. Es sei:

$$(Q_{xy}^{x'y'})$$

irgend ein Werth der aus dem Doppelintegral entstehenden analytischen Function, wie er erhalten wird, wenn die Variabeln von y' nach x' und von y nach x ganz beliebig vorgeschriebene Wege L', L durchlaufen; wir fragen, welche Werthe aus diesem durch analytische Fortsetzung erhalten werden können. Zu diesem Zweck lassen wir x einen beliebigen Periodenweg P auf der Riemann'schen Fläche durchlaufen, der den Weg L' l_1 mal von links nach rechts, l_2 mal von rechts nach links überschreitet; hierauf durchlaufe x' einen Weg P', der den Weg L bezw. P l_1' (l_1'') mal von links nach rechts, l_2' (l_2'') mal von rechts nach links überschreitet.*) Setzen wir längs dieser Wege unseren Functionszweig fort, so haben wir zu berücksichtigen, dass nach Ausführung der ersten Operation für die zweite vom Resultat der ersten auszugehen ist; dies wird sich bemerkbar machen in den Werthen, welche den auftretenden Integralen I. Gattung beizulegen sind. Wollen wir diese

*) Aus Wiederholung solcher Wege lässt sich jeder Weg zusammensetzen; vgl. den Schluss des §.

Integrale durchweg so verstehen, dass sie über die *ursprünglichen* (nicht die erweiterten) Integrationswege genommen werden sollen, so ist die Formel, welche den resultirenden Werth von Q mit dem Ausgangswerth verbindet, folgendermassen zu schreiben:

$$
(41)\quad \begin{aligned} Q_{xy}^{x'y'} = \left(Q_{xy}^{x'y'}\right) - \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha w_\alpha^{x'y'} + (l_1 - l_2)\cdot 2\pi i \\ - \sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha' \left(w_\alpha^{xy} + \omega_\alpha\right) + (l_1' - l_2' + l_1'' - l_2'')\cdot 2\pi i. \end{aligned}
$$

Wollen wir x und x' ihre Wege gleichzeitig durchlaufen lassen, so wird an jedem einzelnen Schnittpunkt zu bestimmen sein, welcher von beiden Punkten dort eher anlangt; so oft nämlich x' dort eher anlangt als x, ist l_1'' bezw. l_2'' um eine Einheit zu vermindern. M. a. W. *bei Bestimmung der Zahlen l'' sind nur diejenigen Punkte mitzuzählen, an welchen x eher anlangt als x'.* Setzen wir aber diese Zahlen als so bestimmt voraus, so können wir das Resultat der letzten Paragraphen zusammenfassen in den Satz:

Aus dem Doppelintegral Q entsteht durch analytische Fortsetzung in Bezug auf alle vier Argumente eine analytische Function derselben, deren sämmtliche Werthe durch die Formel (41) *geliefert werden. Diese Function soll im folgenden unter dem Zeichen $Q_{xy}^{x'y'}$ verstanden werden.*

§ 9.

Bilineare Relationen zwischen den Perioden I. und II. Gattung, nach Weierstrass.

Aus den Periodicitätseigenschaften der Integrale III. Gattung ergeben sich bekanntlich eine Anzahl von Relationen zwischen den Perioden der Integrale I. und II. Gattung. Für die hier zu Grunde gelegte Form des Integrals Q werden dieselben folgendermassen erhalten: wir lassen in (41) die Punkte x mit y, x' mit y' zusammenfallen; wir vertauschen dann die Reihenfolge der Durchlaufung der Wege und vergleichen schliesslich die beiden Resultate mit einander und mit Formel (39). Dabei setzen wir zur Vereinfachung den Ausgangswerth des Q und damit auch die der w gleich Null. Durchläuft wie oben zuerst x den Weg P, hierauf x' den Weg P', so erhalten wir unter dieser Voraussetzung:

$$
(42)\qquad Q_1 = -\sum \eta_\alpha' \omega_\alpha + (l_1'' - l_2'')\, 2\pi i.
$$

Lassen wir aber zunächst x' den Weg P', hierauf x den Weg P durchlaufen, so kommt:

$$
(43)\qquad Q_2 = -\sum \eta_\alpha \omega_\alpha' + (l_2'' - l_1'')\cdot 2\pi i.
$$

Nach (39) ist aber:

$$Q_2 - Q_1 = (l_2'' - l_1'') \cdot 2\pi i;$$

also folgt:

$$(44) \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \omega_\alpha \eta_\alpha' - \omega_\alpha' \eta_\alpha \right\} = (l_1'' - l_2'') \cdot 2\pi i$$

eine *Relation zwischen den* $2 \cdot 2p$ *Perioden I. und II. Gattung, welche zu zwei beliebigen Periodenwegen gehören.*

Führen wir jetzt insbesondere ein canonisches Querschnittsystem der in § 5 geschilderten Art ein, so ergeben sich für die dabei auftretenden $4p^2$ Perioden aus der allgemeinen Gleichung (44) durch Specialisirung $2p^2 - p$ Relationen. Zwei Querschnitte A_β und A_γ eines solchen Systems schneiden sich nicht, ebenso wenig zwei Querschnitte B_β und B_γ, oder A_β und B_γ, wenn $\beta \gtrless \gamma$; in allen diesen Fällen ist ist daher $l_1'' = l_2'' = 0$ zu setzen. Wählen wir aber B_β für P, A_β für P', so ist nach der § 5 getroffenen Vereinbarung:

$$\omega_\alpha = \omega_{\alpha,\beta}, \ \eta_\alpha = \eta_{\alpha,\beta}, \ \omega_\alpha' = -\omega_{\alpha,p+\beta}, \ \eta_\alpha' = -\eta_{\alpha,p+\beta} \ l_1'' = 1, \ l_2'' = 0$$

zu setzen. So erhalten wir das System von Relationen:

$$(45) \qquad \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \omega_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha,\gamma} - \omega_{\alpha,\gamma} \eta_{\alpha,\beta} \right\} = 0; \\ \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \omega_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha,p+\beta} - \omega_{\alpha,p+\gamma} \eta_{\alpha,\beta} \right\} = 0; \quad \beta \gtrless \gamma \\ \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \omega_{\alpha,p+\beta} \eta_{\alpha,p+\gamma} - \omega_{\alpha,p+\gamma} \eta_{\alpha,p+\beta} \right\} = 0; \\ \sum_{\alpha=1}^{p} \left\{ \omega_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha,p+\beta} - \omega_{\alpha,p+\beta} \eta_{\alpha,\beta} \right\} = -2\pi i. \end{cases}$$

Die Art, in welcher hier diese Relationen abgeleitet sind (der Kernpunkt des Beweises liegt in § 7) besteht im wesentlichen darin, dass das von Herrn Weierstrass*) angegebene Verfahren in der Weise umgeformt ist, wie es die Darstellung des Integrals III. Gattung als Doppelintegral bedang.

Wir können die Ableitung der Gleichung (44) auch noch in etwas anderer Weise darstellen; diese andere Darstellung soll hier noch gegeben werden, weil sie zugleich die Beziehung zwischen den Sätzen (32) und (35) erläutert. Der Einfachheit wegen sei $l_1'' = 1$, $l_2'' = 0$ genommen. Formel (32) zeigt, dass die dort betrachtete specielle Q-Function sich um

*) Progr. Gymn. Braunsberg 1849.

(46) $$-\sum \eta'_\alpha \omega_\alpha$$

vermehrt, wenn x den Weg P durchläuft. Andererseits aber können wir den dort behandelten Specialfall auch durch Grenzübergang aus dem allgemeinen Fall ableiten, für den wir (35) erhielten. Betrachten wir nämlich den Integrationsweg $(y' \ldots x')$ zuerst als einen Bestandtheil von P', so können wir einen Weg, der von einem Punkte y auf dem linken Ufer von $(y' \ldots x')$ längs P nach einem gegenüberliegenden Punkte x des rechten Ufers führt, ansehen als zusammengesetzt aus einem mit P' äquivalenten Weg, welcher das Stück $(y' \ldots x')$ nicht trifft, und aus einer Umkreisung von y' im Sinne der wachsenden Winkel. Aus (33) und (34) folgt demnach, dass sich dabei Q vermehrt um:

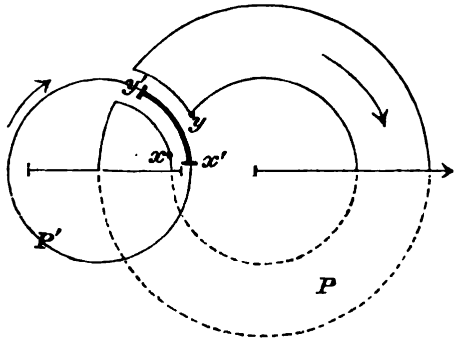


Fig. 4.

(47) $$-\sum \eta_\alpha w_\alpha^{x'y'} - 2\pi i.$$

Dehnen wir nun den Weg $(y' \ldots x')$ längs P' immer weiter aus, bis sich schliesslich sein Endpunkt wieder mit seinem Anfangspunkt zusammenschliesst, so erhalten wir als Periode des so entstehenden speciellen Integrals aus (47)

(48) $$-\sum \eta_\alpha \omega'_\alpha - 2\pi i$$

und die Vergleichung der Ausdrücke (46) und (48), welche dieselbe Periode desselben Integrals darstellen, giebt:

$$\sum \left\{ \omega_\alpha \eta'_\alpha - \eta_\alpha \omega'_\alpha \right\} = 2\pi i$$

in Uebereinstimmung mit (44).

Dass die zuerst betrachtete Function in der That identisch ist mit der Grenze der zuletzt betrachteten, davon überzeugt man sich wohl am einfachsten, indem man neben dem Wegstück $(y' \ldots x')$ das andere $(x' \ldots y')$ betrachtet, welches das erstere zu dem vollen Periodenweg P' ergänzt. Für dieses Stück enthält $(y \ldots x)$ keine Umkreisung der Endpunkte, die zugehörige Periode ist also:

(49) $$-\sum \eta_\alpha w_\alpha^{y'x'}.$$

Durch Addition von (47) und (49) erhalten wir nun in der That (48) ohne Vollziehung eines Grenzübergangs; die Benutzung eines solchen erleichtert aber die Vorstellung, wie man es sich zu denken hat, dass von den beiden im allgemeinen Falle (35) möglichen Perioden:

$$-\sum \eta_\alpha w_\alpha^{x'y'} \quad \text{und} \quad -\sum \eta_\alpha w_\alpha^{x'y'} + 2\pi i$$

im speciellen Fall (32) die erstere gänzlich verloren geht: der Spielraum des Weges, auf welchem sie erhalten werden kann, wird beim Zusammenrücken von y' mit x' immer mehr eingeschränkt und schliesslich ganz abgesperrt.

§ 10.

Bilinearrelationen nach Riemann.

Die Relationen (45) sagen bekanntlich aus: Die ω, η sind Coefficienten einer linearen Substitution, welche die bilineare Form

$$\sum_\alpha \{x_\alpha y_{p+\alpha} - y_\alpha x_{p+\alpha}\}$$

bis auf den Factor $2\pi i$ in sich überführt. Die inverse Substitution muss dann dieselbe Eigenschaft haben: daraus folgt*), dass das Relationensystem (45) äquivalent ist mit dem folgenden:

$$(50)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \{\omega_{\beta,\alpha}\omega_{\gamma,p+\alpha} - \omega_{\beta,p+\alpha}\omega_{\gamma,\alpha}\} = 0, \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \{\omega_{\beta,\alpha}\eta_{\gamma,p+\alpha} - \omega_{\beta,p+\alpha}\eta_{\gamma,\alpha}\} = \begin{cases} 0 \text{ für } \beta \gtrless \gamma, \\ -2\pi i \text{ für } \beta = \gamma; \end{cases} \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \{\eta_{\beta,\alpha}\eta_{\gamma,p+\alpha} - \eta_{\beta,p+\alpha}\eta_{\gamma,\alpha}\} = 0. \end{cases}$$

In dieser Form werden die Relationen auf dem von Riemann**) eingeschlagenen Wege erhalten; derselbe soll hier noch für die hier benutzten Integrale verfolgt werden. Die Methode besteht darin, dass je eines der Integrale mit dem Differential eines andern multiplicirt und das Product über den ganzen Rand der in canonischer Weise zerschnittenen Fläche integrirt wird.

Die Anwendung dieser Methode auf das Randintegral:

$$\int w_\beta \, dw_\gamma$$

führt bei Riemann auf die erste der Gleichungen (50).

*) Weierstrass a. a. O.

**) Ges. W. p. 124; die erste der Formeln (50) ist dort § 20 a. E. gegeben.

Bilden wir ebenso das Integral:

$$\int Z^{(t)}\, d\, w_\beta\,,$$

so können wir den Integrationsweg auf einen Kreis um den Punkt t zusammenziehen; dann können wir $Z^{(t)}$ durch die Reihe (16) ersetzen und gliedweise integriren. Dabei ergeben sämmtliche Glieder Null, mit Ausnahme des ersten, welches

$$\int \frac{\sqrt{f(t)}}{(zt)} \, \frac{z_1^{p-\beta}\, z_2^{\beta-1}}{\sqrt{f(z)}} (z\,dz) = -\, 2\pi i\, t_1^{p-\beta}\, t_2^{\beta-1}$$

liefert. Bezeichnen wir die Perioden der Stammfunction $Z^{(t)}$ wie in (31) mit $\varphi(t)$, so erhalten wir:

$$(51) \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \{\varphi_\alpha(t)\, \omega_{\beta,p+\alpha} - \varphi_{p+\alpha}(t)\, \omega_{\beta,\alpha}\} = -\, 2\pi i\, t_1^{p-\beta}\, t_2^{\beta+1}.$$

Diese Gleichung muss für jeden Werth von t bestehen; durch p-fache Differentiationen nach t_1 und t_2 entspringen aus ihr die Gleichungen der 2. Zeile von (50).

Bilden wir endlich das Randintegral:

$$\int Z^{(t)}\, dZ^{(\tau)} = -\int Z^{(\tau)}\, dZ^{(t)}$$

und ziehen den Integrationsweg auf kleine Kreise um t und τ zusammen, so erhalten wir für dasselbe die Summe aus:

$$\int_{(t)} \frac{\sqrt{f(t)}}{(zt)} \cdot \frac{\sqrt{f(\tau)}\sqrt{f(z)} + F(z,\tau)}{2(z\tau)^2}\, \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = -\, 2\pi i\, \frac{\sqrt{f(\tau)}\sqrt{f(t)} + F(t,\tau)}{2(t\tau)^2}$$

und:

$$-\int_{(\tau)} \frac{\sqrt{f(\tau)}}{(z\tau)} \cdot \frac{\sqrt{f(t)}\sqrt{f(z)} + F(z,t)}{2(zt)^2}\, \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} = +\, 2\pi i\, \frac{\sqrt{f(t)}\sqrt{f(\tau)} + F(t,\tau)}{2(\tau t)^2}$$

also Null; dies liefert die Relation:

$$(52) \qquad \sum_{\alpha=1}^{p} \{\varphi_\alpha(t)\, \varphi_{p+\alpha}(\tau) - \varphi_{p+\alpha}(t)\, \varphi_\alpha(\tau)\} = 0.$$

aus welcher wieder durch Differentiationen nach t_1, t_2 und τ_1, τ_2 die Gleichungen der 3. Zeile von (50) hervorgehen.

Damit ist das System (50) vollständig abgeleitet.

II. Abschnitt.

Uebergangsformen.

§ 11.

Die Function $\overline{Q}(x, y) = Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}$.

Wir wenden uns nun zur Discussion der Formen, die bei Kl. (§§ 1, 5, 9) eingeführt sind, um von den Integralen zu den Sigmafunctionen zu führen. Es ist dort damit begonnen, dass zwischen den Argumenten der Function $Q_{xy}^{x'y'}$ die Relationen:

(53) $$x' = \bar{x}, \quad y' = \bar{y}$$

festgesetzt werden. In Bezug hierauf möge sogleich die Behauptung an die Spitze gestellt werden:

Durch die Festsetzungen (53) *wird aus der* (*vierfachen*) *Gesammtheit der Werthe von* $Q_{xy}^{x'y'}$ *eine zweifache Mannigfaltigkeit von Werthen herausgehoben, die aber nicht alle einer und derselben analytischen Function der zwei Variabeln* x, y *angehören, sondern sich auf unendlich viele solche Functionen vertheilen. Unter diesen Functionen betrachten wir nur eine ausgezeichnete: dieselbe ist dadurch definirt, dass zu ihr alle diejenigen Werthe gehören, welche man erhält, wenn man die Festsetzung* $z' = \bar{z}$ *auch auf die Zwischenpunkte der Wege* $(y' \ldots x')$ *und* $(y \ldots x)$ *erstreckt, und dass alle ihre Werthe auf diesem Wege erhalten werden können. Diese Function soll im folgenden mit* $\overline{Q}(x, y)$ *bezeichnet werden.*

In der That, gehen wir von einem Werthe aus, der der Festsetzung in Bezug auf die Zwischenpunkte genügt, und setzen diesen in Bezug auf x und y analytisch fort, so werden $x' = \bar{x}$, $y' = \bar{y}$ sich in gleicher Weise mit ändern, und es werden x' und x, y' und y nothwendig conjugirte Werthe durchlaufen müssen. Es werden also alle Werthe, zu welchen man durch analytische Fortsetzung gelangt, derselben Festsetzung genügen müssen; und umgekehrt zeigt diese Betrachtung dass man auch zu allen diesen Werthen so gelangen kann. Dieselben constituiren also für sich eine abgeschlossene analytische Function.

Dass diese Function aber nicht sämmtliche Werthe enthält, welche durch die nur auf die Grenzen bezogenen Festsetzungen (53) aus $Q_{xy}^{x'y'}$ erhalten werden, erkennen wir, wenn wir die Perioden von $\overline{Q}$ bestimmen, die wir ohnedies später brauchen werden. Dieselben werden aus Gleichung (41) erhalten; bei der Anwendung derselben auf unsere Function $\overline{Q}$ sind aber folgende Umstände zu berücksichtigen:

Erstens genügt schon der Ausgangswerth der Bedingung, dass für alle Zwischenpunkte $z' = \bar{z}$ sein soll; infolge dessen hat man:

$$w_\alpha^{\bar{x}\bar{y}} = - w_\alpha^{xy} \tag{54}$$

zu setzen (nicht etwa bloss congruent in Bezug auf das Periodensystem).

Ferner sind die Wege P und P' conjugirt; das verlangt, dass ebenso:

$$\omega_\alpha' = - \omega_\alpha, \qquad \eta_\alpha' = - \eta_\alpha$$

gesetzt werde.

Dann entspricht jedem Schnitt von P und L' in einem Blatte ein Schnitt von P' und L, der im conjugirten Punkt des andern Blattes im selben Sinne erfolgt; es ist also:

$$l_1' = l_1, \qquad l_2' = l_2$$

zu setzen.

Als solche Punkte endlich, in welchen P und P' sich schneiden, treten hier *die scheinbaren Doppelpunkte* von P auf, d. h. solche Punkte, deren conjugirte ebenfalls dem Wege P angehören. Diese sind nach der auf Formel (41) folgenden Bemerkung nur je einmal zu zählen, und zwar in demjenigen Blatte, in welchem sie von x bei Durchlaufung von P früher erreicht werden; also z. B. in der Figur a im oberen, b im unteren Blatt, sodass a einen Beitrag zu l_2'', b einen solchen zu l_1'' liefert.*) Werden die Zahlen l'' dementsprechend bestimmt, so erhalten wir das Resultat:

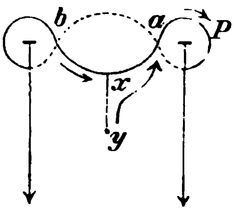


Fig. 5.

Unsere specielle Function $\bar{Q}(x, y)$ vermehrt sich, wenn x einen Periodenweg P durchläuft, um:

$$2\sum_{\alpha=1}^{p} \eta_\alpha \left(w_\alpha^{xy} + \tfrac{1}{2}\,\omega_\alpha\right) + (2l_2 + l_2'' - 2l_1 - l_1'') \cdot 2\pi i. \tag{55}$$

Würde man x einen Periodenweg durchlaufen lassen, ohne zugleich $\bar{x}$ durch den conjugirten Weg zu führen, so würde Formel (41) ausser den in (55) enthaltenen noch andere Perioden liefern. Daraus geht hervor, dass die Werthe von $\bar{Q}(x, y)$ in der That nur einen Theil der Werthe ausmachen, welche aus der Function $Q_{xy}^{x'y'}$ durch die Festsetzungen (53) sich ergeben, wenn diese nur auf die Grenzen und nicht zugleich auf die Zwischenwerthe bezogen werden.

*) Man beachte, dass eine Verzerrung der Figur, welche einen der Punkte a, b über x hinüberschaffte, auch eine Veränderung der Zahlen l_1, l_2 mit sich bringen würde.

Damit ist die vorangestellte Behauptung in allen ihren Theilen gerechtfertigt.

An die Formel (55) mögen sich noch zwei Bemerkungen anschliessen. Einmal zeigt ihre Entstehung, dass hier jeder Weg als Periodenweg aufzufassen ist, der einen scheinbaren Doppelpunkt besitzt, insbesondere also jede *Umkreisung eines Verzweigungspunktes.* Geschieht dieselbe in positivem Sinne, so ist

$$l_2'' = 1, \qquad l_1'' = 0$$

zu setzen. (Fig. 6).

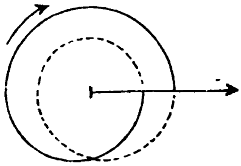


Fig. 6.

Ferner ist zu bemerken, dass Formel (55) ein *gerades* Vielfaches von $2\pi i$ enthält, so oft der Periodenweg P keinen scheinbaren Doppelpunkt besitzt. Insbesondere ist dies der Fall *für die* § 5 *als „elementare" bezeichneten* Periodenwege.

Es bleibt noch übrig, das Verhalten von $\overline{Q}$ an den verschiedenen Stellen der Riemann'schen Fläche zu charakterisiren. Von den in § 4 unterschiedenen 6 Fällen kommen wegen der Bedingungen (53) nur der dritte und vierte in Betracht; dagegen wird ein anderer Fall besonderer Erwähnung bedürfen, der nicht unter jene Eintheilung fällt.

Liegen x und y in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle z_0, so folgt aus (27):

$$(57)\qquad \overline{Q}(x,y) = \frac{(p+1)^2}{4}\,\frac{H(z_0)}{f^2(z_0)}\cdot(x-y)^2 + \mathfrak{P}_3(x-z_0,\ y-z_0).$$

Aus dieser Formel folgt u. a. dass $\overline{Q}$ (d. h. ein bestimmter Zweig dieser Function) *von der zweiten Ordnung Null wird, wenn x mit y zusammenfällt.*

Liegen aber x und y in der Umgebung eines Verzweigungspunktes k, so wird das Verhalten von $\overline{Q}$ dargestellt durch die aus (29) sich ergebende Formel:

$$(58)\qquad \begin{aligned}\overline{Q}(x,y) = \log\frac{4\sqrt{x-k}\sqrt{y-k}}{(\sqrt{x-k}+\sqrt{y-k})^2} + \frac{1}{4(2p+1)}\,\frac{f''(k)}{f'(k)}(\sqrt{x-k}-\sqrt{y-k})^2 \\ + \mathfrak{P}_3(\sqrt{x-k},\ \sqrt{y-k}).\end{aligned}$$

In der Umgebung eines Verzweigungspunktes verhält sich also $\overline{Q}$ wie der Logarithmus einer bestimmten rationalen Function der Stellen x, y, welche unbestimmt wird, wenn x und y sich unabhängig von einander dem Verzweigungspunkte nähern.

Die Formel (58) bestätigt zugleich dasjenige, was unter (56) über die Vermehrung von $\overline{Q}$ um $2\pi i$ gesagt ist, welche eintritt, wenn x einen Verzweigungspunkt umkreist, ohne zugleich y zu umkreisen.

Liegen die Punkte x und y nicht in demselben Element der Fläche, so zeigt eine Zerlegung des Weges $(y \ldots x)$ in Theile (vgl. § 6), dass $\overline{Q}$ sich stets regulär verhält, mit Ausnahme allein des Falles, dass x und y coujugirten Stellen z_0, $\overline{z_0}$ sich nähern. Wir könnten das Verhalten von $\overline{Q}$ in diesem Falle aus (26) erschliessen; bequemer ist es und thut der Allgemeinheit keinen Eintrag, z_0 in der Umgebung eines Verzweigungspunktes anzunehmen und die bereits abgeleitete Formel (58) zu benutzen, indem man in derselben alles nach Potenzen von $x - z_0$, $y - z_0$ entwickelt. Dabei werden eine Reihe von Termen auftreten, die von $x - z_0$ und $y - z_0$ frei sind; ziehen wir diese zu einem zusammen, so werden wir erhalten:

$$(59) \qquad \overline{Q}(x, y) = -2 \log (x-y) + C(z_0) + \mathfrak{P}_1(x-z_0, y-z_0).$$

d. h. $\overline{Q}$ *wird logarithmisch unendlich mit dem Residuum* -2, *wenn* x *mit* $\overline{y}$ *zusammenfällt.*

Die Grösse $C(z_0)$ in Gleichung ist eine transcendente Function von z_0, welche für alle gewöhnlichen Stellen z_0 endlich bleibt, übrigens aber noch von dem Wege abhängt, der von z_0 nach $\overline{z_0}$ führt. Die Untersuchung ihrer Eigenschaften ist für das folgende nicht erforderlich und soll daher hier unterbleiben.

§ 12.

Die Function $e^{\frac{1}{2}\overline{Q}(x,y)}$.

Fassen wir nun den Ausdruck $e^{\frac{1}{2}\overline{Q}(x,y)}$ ins Auge, so haben wir zunächst zu fragen, ob alle die Werthe, welche derselbe annimmt, wenn der Function $\overline{Q}$ alle ihre Werthe beigelegt werden, einer und derselben analytischen Function von x und y angehören. Aus der Eindeutigkeit der Exponentialfunction folgt aber sofort, dass diese Frage zu bejahen ist. Die Eigenschaften dieser Function

$$e^{\frac{1}{2}\overline{Q}(xy)},$$

für welche ein eigenes Zeichen nicht nöthig sein wird, sollen im folgenden kurz zusammengestellt werden; sie ergeben sich unmittelbar aus den Entwickelungen des vorigen Paragraphen.

Durchläuft x *einen beliebigen geschlossenen Weg* P *auf der Riemann'schen Fläche, so tritt zu* $e^{\frac{1}{2}\overline{Q}}$ *der Factor:*

$$(60) \qquad (-1)^{l_2''-l_1''} \cdot e^{\sum \eta_\alpha \left(w_\alpha^{xy} + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}$$

wobei wiederholt sein möge, dass $l_2'' - l_1''$ für jeden „elementaren"

Periodenweg $= 0$, für die Umkreisung eines Verzweigungspunktes $= 1$ ist. (55), (56).

Der Uebersichtlichkeit halber möge hier auch derjenige Factor explicit notirt werden, welcher zutritt, wenn y den Weg P durchläuft; derselbe ist:

$$(61)\qquad (-1)^{h_1''-h_2''} \cdot e^{\sum \eta_\alpha \left(-w_\alpha^{xy} + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}.$$

Die Function $e^{\frac{1}{2}\bar{Q}}$ ist überall regulär und von Null verschieden, mit Ausnahme der Stellen, an welchen $x = \bar{y}$ wird, und der Verzweigungspunkte. Liegt x in der Umgebung von z_0, y in der von $\bar{z}_0$, so existirt nach (59) eine Entwicklung der Form:

$$(62)\qquad e^{\frac{1}{2}\bar{Q}(x,y)} = \frac{e^{C(z_0)}}{x-y}\left\{1 + \mathfrak{P}_1(x - z_0,\ y - z_0)\right\}.$$

Unsere Function wird also von der ersten Ordnung unendlich, wenn x mit $\bar{y}$ zusammenfällt.

In der Umgebung eines Verzweigungspunktes besteht eine Entwickelung:

$$(63)\qquad e^{\frac{1}{2}\bar{Q}(x,y)} = \frac{2\sqrt{\sqrt{x-k}}\,\sqrt{\sqrt{y-k}}}{\sqrt{x-k}+\sqrt{y-k}} \left\{1 + \frac{1}{8(2p+1)}\frac{f''(k)}{f'(k)}\left(\sqrt{x-k} - \sqrt{y-k}\right)^2 + \mathfrak{P}_3\left(\sqrt{x-k},\ \sqrt{y-k}\right)\right\}.$$

Rückt also x allein oder y allein in einen Verzweigungspunkt k, so wird unsere Function Null; rücken aber beide Variabeln gleichzeitig in denselben, so wird sie in der Weise unbestimmt, dass ihr Werth von der Art der Annäherung von x und y an k abhängt.

Was die Vorzeichen der in (63) auftretenden Wurzeln betrifft, so ist über $\sqrt{x-k}$, $\sqrt{y-k}$ § 4 ad 4 das Nöthige bemerkt. Nachdem diese Grössen fixirt sind, können die Quadratwurzeln aus ihnen jeden ihrer beiden Werthe annehmen, indem eine Umkreisung des Verzweigungspunktes den einen in den andern überführt.

Es ist also die Function $e^{\frac{1}{2}\bar{Q}}$ relativ zur Riemann'schen Fläche von $\sqrt{f}$ verzweigt etwa wie $\sqrt[4]{f}$ (ausserdem unendlich vieldeutig durch die multiplicativen Perioden (60), (61)).

Bemerkt möge noch die Entwicklung von $e^{\frac{1}{2}\bar{Q}}$ in der Umgebung von $x = z_0$, $y = z_0$ werden, welche nach (57) die Form hat:

$$(64)\qquad e^{\frac{1}{2}\bar{Q}(x,y)} = 1 + \frac{(p+1)^2}{4}\frac{H(z_0)}{f^2(z_0)}(x-y)^2 + \mathfrak{P}_3(x - z_0,\ y - z_0).$$

§ 13.

Ueber den Gebrauch homogener Variabeln bei Untersuchung mehrwerthiger Functionen.

Bereits oben (3) ist neben den homogenen Functionen nullter Dimension der Variabelnpaare $x_1 x_2$, $y_1 y_2$, $t_1 t_2$, etc., mit welchen wir operiren, eine Function $Z^{(t)}$ von t_1 und t_2 eingeführt worden, welche in diesen Variabeln zwar homogen, aber nicht mehr von der nullten Dimension ist. Diese Einführung brachte keinerlei Schwierigkeit mit sich; einmal war die Dimension dieser Form eine *ganze* Zahl; dann war es nicht erforderlich zu untersuchen, welche Veränderungen $Z^{(t)}$ erfährt, wenn t_1 und t_2 irgendwelche geschlossenen Wege durchlaufen. Beides wird sich im folgenden anders gestalten: wir werden mit homogenen Functionen gebrochener Dimension zu thun bekommen, und es werden uns bei denselben gerade diese Veränderungen interessiren.

Ebenso wie die Variabeln treten auch die Coefficienten von f in homogener Weise in unsern Formeln auf; wir werden aber auch Functionen bekommen — und $\sqrt{f}$ selbst ist schon eine solche — welche in diesen Coefficienten homogen von gebrochener Dimension sind und bei welchen deshalb ähnliche Fragen auftauchen, sobald die Abhängigkeit von den Coefficienten Gegenstand der Untersuchung wird.

Um alle solchen Fragen nicht bei jeder der später auftretenden Functionen für sich behandeln zu müssen, sollen sie in diesen Paragraphen einer allgemeinen Untersuchung unterworfen werden.

An die Spitze dieser Untersuchung möge die Definition treten:

Als „analytische Form“ werde eine analytische Function von zwei Veränderlichen z_1 und z_2 bezeichnet, welche für alle Werthe derselben, für welche sie definirt ist, der Gleichung genügt:

$$f(tz_1, tz_2) = t^{\lambda} f(z_1, z_2); \tag{65}$$

darin bedeutet λ eine reelle Zahl, welche die *Dimension* der Form heissen soll.

Es sei dabei sogleich hervorgehoben, dass wir uns solcher Formen nur als Durchgangspunkte bedienen wollen; wir werden von ihnen immer wieder durch Quotientenbildung zu wirklichen Functionen von $z_1 : z_2$ — Formen nullter Dimension — zurückkehren.

Der Vollständigkeit halber und zum Zwecke der Orientirung über die auftretenden Fragen möge nun zunächst der Satz bewiesen werden:

Eine analytische Form nullter Dimension ist eine analytische Function des Verhältnisses:

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$

Das wird bekanntlich so gezeigt: man setze in Gleichung (65)

$$t = \frac{1}{z_2},$$

so geht sie über in:

$$f(z_1, z_2) = f\left(\frac{z_1}{z_2},\ 1\right) = F(z). \tag{66}$$

Damit ist für *eindeutige* Functionen die Sache in der That erledigt; bei *mehrdeutigen* wird noch ein Einwand geltend gemacht werden können. Legen wir nämlich in einer Function von zwei Veränderlichen der einen von ihnen einen constanten Werth bei — wie hier den Werth 1 — so werden wir nicht ohne weiteres behaupten können, dass die Gesammtheit der so erhaltenen Werthe einer und derselben analytischen Function der andern Veränderlichen — z — angehöre; es können vielmehr diese Werthe in verschiedene analytische Functionen zerfallen. Es ist daher noch zu zeigen, dass das hier nicht eintritt.

Zu diesem Zwecke sind einige Erläuterungen vorauszuschicken. Die Gesammtheit der complexen Werthepaare $z_1\, z_2$ repräsentirt eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, jedes specielle Werthepaar z_1, z_2 eine Stelle („einen Punkt") derselben. Lassen wir z_1 und z_2 sich continuirlich ändern, so sagen wir „der Punkt (z_1, z_2) beschreibt in seinem Gebiete einen Weg." Dieser Weg wird sich schliessen, wenn z_1 und z_2 zu ihren Anfangswerthen zurückkehren. Betrachten wir gleichzeitig die Wege, welche dabei z_1, z_2 in ihren Ebenen beschreiben — die Projectionen des Weges von (z_1, z_2) in diese Ebenen — so sehen wir, dass zwar durch Angabe des Weges von (z_1, z_2) die Wege von z_1 und z_2 mitgegeben sind, dass aber die letzteren den ersteren erst dann bestimmen, wenn sie einander Punkt für Punkt zugeordnet sind.

Ziehen wir nun auch noch das Verhältniss:

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

heran, so sehen wir: durch den Weg von (z_1, z_2) ist zugleich dem z in seiner Ebene ein bestimmter Weg vorgezeichnet; aber jedem Wege von z entsprechen unendlich viele Wege von (z_1, z_2).

Für unsere Gleichung (66) ergiebt sich aus diesen Erörterungen: *Sämmtliche Werthe einer homogenen Function nullter Dimension von z_1 und z_2 werden erhalten, wenn wir z allein variiren* — denn zu jedem Wege von z_1, z_2 können wir entsprechende von z angeben, also jede Aenderung der linken Seite von

$$f(z_1, z_2) = f(z, 1)$$

auch auf der rechten Seite erzielen — *aber auch alle Wege von (z_1, z_2) welche demselben Weg von z entsprechen, bringen dieselbe Aenderung* *von f hervor*; — denn ein bestimmter Weg von z führt zu einem bestimmten Werth der rechten Seite. M. a. W.:

Um eine homogene Function nullter Dimension zu untersuchen, brauchen wir nicht das vierdimensionale Gebiet von z_1 und z_2 heranzuziehen, sondern reichen aus mit der Ebene z.

Damit ist nun auch der Untersuchung der allgemeinen Formen ein bestimmtes Problem gestellt: wir fragen, in wie fern die letzte Behauptung auch für solche Formen gilt, deren Dimension von Null verschieden ist.

Führen wir z in eine solche Form ein, so erhalten wir:

$$f(z_1, z_2) = z_2^{\lambda} f(z, 1) = z_2^{\lambda} F(z). \tag{67}$$

In dieser Gleichung spielt nun aber z_2 eine ausgezeichnete Rolle; es wird dem Princip der homogenen Variabeln besser entsprechen, die zweite Variable unbestimmt zu lassen, etwa eine Linearform mit *unbestimmter* Nullstelle u einzuführen und an Stelle der Gleichung (67) die folgende treten zu lassen:

$$f(z_1, z_2) = (zu)^{\lambda} f\left(\frac{z}{u_2 z - u_1}, \frac{1}{u_2 z - u_1}\right) = (zu)^{\lambda} F(z). \tag{68}$$

Damit ist die vorgelegte Function in zwei Factoren zerspalten, deren einer nur von (zu), der andere nur von z abhängt. Wir können also den Einfluss der Veränderungen von z und von (zu) für sich untersuchen und haben dadurch wieder den Vortheil erlangt, dass wir die *vierdimensionale Mannigfaltigkeit* (z_1, z_2) *auch hier entbehren können.* Wir werden zwar neben der Ebene z auch noch die Ebene (zu) benutzen müssen, allein *es wird ausreichen, die Wege in beiden Ebenen zu kennen, ohne dass wir zu wissen brauchen, wie diese Wege einander Punkt für Punkt zugeordnet sind.*

Wir können nun aber durch eine Reihe conventioneller Festsetzungen die Verhältnisse noch weiter vereinfachen. Wir wollen zuerst aus dem Gebiete (z_1, z_2) *alle diejenigen Stellen ausscheiden, für welche*

$$(zu) = 0 \tag{69}$$

oder:

$$(zu) = \infty \tag{69a}$$

wird, unabhängig von dem Werthe der Unbestimmten u_1, u_2*). Alsdann können wir weiter festsetzen: z_1, z_2 *sollen sich nur so verändern, dass* $(zu)^{\lambda}$ *beständig seinen Werth behält,* etwa geradezu den Werth 1. Dadurch ist dem Punkte z der Werth u verboten, während sonst z in seiner Veränderlickeit nicht eingeschränkt ist. Eine Consequenz dieser zweiten Festsetzung wird daher die folgende dritte sein, dass wir *bei*

*) Also $z_1 = z_2 = 0$, ferner $z_1 = \infty$, $z_2 = z_2$ und $z_2 = \infty$, $z_1 = z_1$.

Abzählung der Null- und Unendlichkeitsstellen einer Form die Stelle u nicht mitrechnen, dagegen bei Schilderung der Verzweigung die Umkreisungen dieser Stelle mit in Betracht ziehen.

Wir dürfen diese Uebereinkunft treffen, ohne der Allgemeinheit der Anwendungen zu schaden, weil bei der Rückkehr zu wirklichen Functionen der Einfluss von u ohnedies verschwindet; wir wollen sie treffen, weil sie uns die Formulirung der Sätze erleichtert.

Treffen wir alle diese Festsetzungen, so reichen wir bei Untersuchung auch der Formen mit der Ebene z aus.

Betrachten wir etwa, um alles dies zunächst an einem Beispiel zu erläutern, die einfache Form:

$$\sqrt{(zt)} = \sqrt{(zu)} \cdot \sqrt{\frac{t_2 z - t_1}{u_2 z - u_1}}. \tag{69}$$

Den eben getroffenen Festsetzungen gemäss werden wir das Verhalten dieser Form folgendermassen zu schildern haben: sie wird nirgends unendlich gross und nur Null für $z = t$; die Ebene z ist für das Studium dieser Form behaftet zu denken mit einem Verzweigungsschnitt, der den Punkt t mit einem willkürlichen Hilfspunkt u verbindet. In der That reicht die Kenntniss dieser Eigenschaften aus, um den Quotienten zweier solcher Formen — der uns ja schliesslich doch allein interessirt — zu discutiren: wir können aus ihr für:

$$\frac{\sqrt{(zt)}}{\sqrt{(zt')}} = \frac{\sqrt{(t_2 z - t_1) : (u_2 z - u_1)}}{\sqrt{(t_2' z - t_1') : (u_2 z - u_1)}} = \sqrt{\frac{t_2 z - t_1}{t_2' z - t_1'}} \tag{70}$$

die Nullstelle bei t, die Unendlichkeitsstelle bei t', den Verzweigungsschnitt von t nach t' unmittelbar ablesen.

Ganz ebenso verhält es sich nun auch im allgemeinen Falle. In der That, was die erste der oben getroffenen Festsetzungen betrifft, so hängt das Verhalten an den durch dieselbe ausgeschlossenen Stellen nur ab von dem Verhalten von $(zu)^\lambda$; also nur von dem Werthe der Dimensionszahl λ. Kehren wir also von Formen zu Functionen zurück, so wird der Einfluss dieses Factors aufgehoben, und wir können die Natur einer solchen Function von z vollständig angeben, auch wenn wir jenen Factor ganz ignorirt haben. Denn der Veränderlichkeit von z ist durch jene Festsetzung gar keine Schranke auferlegt.

Was die zweite Festsetzung betrifft, so kann dieselbe allerdings unter Umständen die Bedeutung haben, dass wir, wenn wir uns an sie binden, statt einer vollständigen analytischen Function von z_1 und z_2 nur einen Zweig einer solchen untersuchen. Aber auch dies wird wieder nur von λ abhängen: bilden wir wieder einen Quotienten, der eine Function von z allein ist, so werden wir zu sämmtlichen Werthen dieser Function gelangen, auch wenn wir von Zähler und Nenner nur die unter der angegebenen Einschränkung erhaltenen Werthe berücksichtigen.

Ganz dasselbe gilt nun auch von unserer dritten Festsetzung: auch die bei u etwa liegenden Null- und Unendlichkeitspunkte der Function $F(z)$ werden für alle Functionen desselben λ dieselben sein, also in Quotienten sich wegheben. In der That können solche Besonderheiten immer nur der Function $F(z)$ zukommen, niemals der Form $f(z_1 z_2)$ selbst, aus der $F(z)$ entstanden ist: diese hat ja mit der unbestimmten Stelle u gar nichts zu thun.

Das wir in Bezug auf die Verzweigung bei u eine andere Festsetzung treffen, ist dadurch veranlasst, dass wir für die Verzweigungsschnitte, die von andern Punkten — in unserm Beispiel von t — ausgehen, einen bestimmten Endpunkt haben wollen.

Damit sind die sämmtlichen oben getroffenen Festsetzungen motivirt. Wie dieselben von der schlichten Ebene z auf beliebige Riemann'sche Flächen und von einer Veränderlichen auf mehrere gleichzeitig homogen gemachte zu übertragen sind, bedarf wohl keiner weiteren Erörterung. Als Beispiel für den letzten Punkt möge nur das bereits zu Anfang dieses Paragraphen erwähnte der Coefficienten von f noch einmal berührt werden: wir werden die Fälle ausschliessen dürfen, dass diese alle gleich Null werden oder dass einer derselben unendlich gross wird. In diesem Sinne wird die am Ende von § 4 ausgesprochene Behauptung zu verstehen sein.

§ 14.

Der Primausdruck $\Omega(x, y)$, insbesondere bei ungeradem p.

Es sind nunmehr alle Vorbereitungen erledigt, welche nothwendig waren, um zur Discussion des Primausdrucks:

$$\Omega(x, y) = \frac{(xy)\, e^{\frac{1}{2}\bar{Q}(xy)}}{\sqrt[4]{f(x)}\,\sqrt[4]{f(y)}} \tag{71}$$

(Kl. 49) übergehen zu können. Dieser Ausdruck ist in x_1, x_2 (ebenso in y_1, y_2) von der Dimension:

$$-\frac{p-1}{2},$$

also für ungerade p von ganzer, für gerade von gebrochener Dimension. Infolgedessen wird er in beiden Fällen etwas verschiedenes Verhalten zeigen; wir werden sie daher auch gesondert untersuchen.

Legen wir die im vorigen Paragraphen eingeführten Festsetzungen zu Grunde, so wird die in (72) enthaltene Definition noch durch eine *Vorzeichenfixirung* ergänzt werden müssen. Dieselbe soll folgendermassen getroffen werden:

Wenn x mit y so zusammenrückt, dass der beide Grössen verbindende Integrationsweg) unendlich klein wird, sollen $\sqrt[4]{f(x)}$ und $\sqrt[4]{f(y)}$ zusammenfallen.*

Um die Nothwendigkeit einer solchen Vorzeichenfixirung einzusehen, betrachten wir erst die Eigenschaften von Ω. Um sein *Verhalten an einzelnen Stellen* zu erkennen, werden wir wieder Reihenentwicklungen benutzen; zur Vereinfachung derselben sei es gestattet, die im vorigen Paragraphen benutzten Hilfsgrössen $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ zu setzen und die vortretenden Factoren

$$x_2^{-\frac{p-1}{2}} \; y_2^{-\frac{p-1}{2}}$$

zu unterdrücken. Alsdann folgt aus den Gleichungen (62)—(64):

wenn x und y in der Nähe einer gewöhnlichen Stelle z_0 liegen:

$$(72)\quad \Omega(x, y) = \frac{x-y}{\sqrt{f(z_0)}}\left\{1 - \frac{1}{4}\,\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\Big((x-z_0)+(y-z_0)\Big) + \mathfrak{P}_2(x-z_0, y-z_0)\right\};$$

wenn x und y in der Nähe eines Verzweigungspunktes k liegen:**)

$$(73)\quad \Omega(x, y) = \frac{2}{\sqrt{f'(k)}}\left\{\sqrt{x-k} - \sqrt{y-k}\right\}\left\{1 + \mathfrak{P}_2(\sqrt{x-k}, \sqrt{y-k})\right\};$$

wenn x in der Nähe von z_0, y in der von $\bar{z}_0$ liegt:

$$(74)\quad \Omega(x, y) = \frac{e^{C(z_0)}}{\sqrt{-f(z_0)}}\left\{1 + \mathfrak{P}_1(x-z_0, y-z_0)\right\}.$$

Aus diesen Formeln sind alle vierten Wurzeln weggefallen: *der Primausdruck* (71) *ist also über der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{f(x)}$ unverzweigt.* Aus den weiter unten abzuleitenden Periodicitätseigenschaften ((75), (76)) folgt, dass es nicht möglich ist, von einem Werthe des Ausdrucks (71), welcher der oben getroffenen Vorzeichenfixirung der 4. Wurzeln genügt, durch analytische Fortsetzung zu einem andern Werthe zu gelangen, welcher jener Vorzeichenfixirung nicht genügt. Diejenigen Werthe von (71) also, welche ihr genügen, constituiren für sich eine analytische Form im Sinne des vorigen Paragraphen; diese soll unter dem Zeichen $\Omega(x, y)$ verstanden werden.

Sehen wir weiter zu, wie sich diese Function verhält, wenn x oder y einen Periodenweg durchläuft. Die Aenderungen des Zählers sind durch (59) und (60) gegeben; was die im Nenner stehenden Formen $\sqrt[4]{f(x)}$, $\sqrt[4]{f(y)}$ oder genauer geschrieben $\sqrt{\sqrt{f(x)}}$, $\sqrt{\sqrt{f(y)}}$ betrifft, so sind dieselben über der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{f(x)}$ überall unverzweigt, mit Ausnahme der Verzweigungspunkte dieser Fläche.

*) Es sei gestattet diesen kurzen Ausdruck auch für solche Functionen beizubehalten, die nicht mehr rein durch Integrale definirt sind.

**) Wegen des Vorzeichens vgl. Glchg. 18.

Durchläuft also x (bezw. y) einen geschlossenen Weg auf dieser Fläche, so wird $\sqrt{f(x)}$ (bezw. $\sqrt{f(y)}$) möglicherweise sein Vorzeichen wechseln; insbesondere wird dies der Fall sein für alle diejenigen Periodenwege, die wir als „elementare" bezeichnet haben (§ 5). Mit Rücksicht hierauf müssen wir sagen:

Durchläuft x (bezw. y) auf der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{f}$ einen elementaren Periodenweg, so tritt zu $\Omega(x, y)$ der Factor:

$$(75) \qquad - e^{\sum \eta_\alpha \left(w_\alpha^{xy} + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)},$$

bezw.:

$$(76) \qquad - e^{\sum \eta_\alpha \left(- w_\alpha^{xy} + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}.$$

Für einen beliebigen Periodenweg werden wir dann das Vorzeichen bestimmen, indem wir denselben in elementare Wege auflösen.

Zusammenfassend können wir also sagen:

$\Omega(x, y)$ ist eine über der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{f}$ unverzweigte analytische Form, welche nirgends unendlich und nur für $x = y$ Null wird, welche ferner bei Durchlaufung der Periodenwege Factoren der Form (75) *resp.* (76) *annimmt.*

§ 15.

Der Primausdruck $\Omega(x, y)$ bei geradem p.

Im Falle eines geraden p sind die Entwicklungen des vorigen Paragraphen in einem Punkte zu modificiren. In diesem Falle ist nämlich $\sqrt{f(x)}$ im Sinne des § 13 über der Riemannschen Fläche von $\sqrt{f(x)}$ nicht nur in den Verzweigungspunkten verzweigt, sondern auch in dem Hilfspunkt u. Wir werden also einen kleinen Kreis, der diesen Punkt umgiebt, selbst als elementaren Periodenweg mitzählen müssen: eine Durchlaufung desselben wird *das Vorzeichen von Ω ändern ohne gleichzeitig andere Aenderungen zu bedingen.* Die Folge davon ist, dass wir durch analytische Fortsetzung von den Entwicklungen (73)—(75) aus zu andern Entwicklungen derselben Form gelangen können, welche sich von jenen nur durch das Zeichen unterscheiden; *für gerade p bilden also alle in* (71) *enthaltenen Werthe eine analytische Form;* diese ist nach ihrem Gesammtverlaufe durch (71) vollständig definirt, ohne dass noch eine Vorzeichenfixirung nothwendig ist. Dafür werden wir in diesem Falle solche Vorzeichenfixirungen nöthig haben, wenn wir aus Producten und Quotienten der Ω zusammengesetztere Ausdrücke (Formen oder Functionen i. e. S.) aufbauen. (Vgl. z. B. § 17).

Im übrigen gelten alle Formeln des vorigen Paragraphen auch für gerade p; nur muss für (75), (76) der „elementare Periodenweg" so definirt werden, dass er den Punkt u von den beiden Verzweigungspunkten trennt.

§ 16.

Beiläufige Bemerkungen.

Im Falle eines ungeraden p folgen aus (73) und (75) die Gleichungen:

$$(77)\qquad \begin{cases} \Omega(x, y) = -\Omega(y, x); \\ \Omega(\bar{x}, \bar{y}) = -\Omega(x, y); \\ \Omega(\bar{x}, \bar{y}) \doteq \quad \Omega(y, x) \end{cases}$$

in dem Sinne, dass jedem Werth der rechten Seite ein Werth der linken und umgekehrt entspricht; für gerade p treten neben diese Gleichungen als gleichberechtigt die andern:

$$(78)\qquad \begin{cases} \Omega(x, y) = \quad \Omega(y, x); \\ \Omega(x, y) = \quad \Omega(\bar{x}, \bar{y}); \\ \Omega(\bar{x}, \bar{y}) = -\Omega(y, x). \end{cases}$$

Die Formeln (75) und (76) zeigen, dass jeder Werth von $\Omega(x, y)$, den wir erhalten können, wenn wir beide Argumente x, y beliebige Wege durchlaufen lassen, auch erhalten werden kann, wenn wir y festhalten und x allein durch geschlossene Wege führen. Setzen wir also:

$$y = \text{const.}$$

so erhalten wir aus unserer Form von 2 Variabelnpaaren *eine analytische Form von x allein* (nicht etwa mehrere getrennte solche Formen). Besonders erwähnt mögen unter diesen die $2p + 2$ Formen werden, welche entstehen, wenn y in einem Verzweigungspunkt k festgehalten wird. In der Umgebung des betreffenden Verzweigungspunktes lautet die Entwicklung einer solchen Form:

$$(79)\qquad \Omega(x, k) = \frac{2\sqrt{x-k}}{\sqrt{f'(k)}}\left\{1 + \mathfrak{P}_1(x-k)\right\}$$

— im Falle eines geraden p ist $\pm$ vorzusetzen.*)

Von grösserer Bedeutung als diese nebensächlichen Bemerkungen ist die folgende, die aber hier ebenfalls nur kurz berührt werden soll, um nicht zu weit von dem Ziele dieser Arbeit abzuführen. Der Umstand, dass Ω nur für $x = y$ Null und nirgends unendlich wird, gestattet es, Functionen mit vorgeschriebenen Null- und Unendlichkeitsstellen als Quotienten von Ω-Producten aufzubauen. Wie man auf diesem Wege zum Abel'schen Theorem und seiner Umkehrung, zum Riemann-Roch-schen Satz etc. gelangen kann, soll hier nicht gezeigt werden: dagegen möge ein Beispiel einer derartigen Darstellung an dieser Stelle Erwähnung finden, weil später von derselben gelegentlich Gebrauch gemacht werden wird; es ist dies die Formel:

*) Wegen des Zeichens von $\sqrt{x-k}$ vgl. Glchg. 18.

(80) $$Q_{xy}^{x'y'} = \log \frac{\Omega(x, x') \,.\, \Omega(y, y')}{\Omega(x, y') \,.\, \Omega(y, x')}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel erkennt man daraus, dass beide Seiten gleichzeitig und mit denselben Residuen Null und unendlich werden und beide dieselbe Periodicität besitzen. Damit aber das letztere der Fall sei, dürfen die rechts zu benutzenden Werthe der unendlich vieldeutigen Functionen nicht beliebig gewählt werden; es muss vielmehr zwischen den dieselben definirenden Integrationswegen eine Beziehung bestehen, die man etwa folgendermassen formuliren kann: man verbinde einen beliebigen Punkt O mit x, y, x', y' durch beliebige Wege; aus diesen sind die Wege zusammenzusetzen, welche die vier Punkte paarweise verbinden. Damit ist zugleich auch bestimmt, welcher Werth von Q sich in jedem Falle ergiebt.

III. Abschnitt.

Sigmafunctionen.

§ 17.

Definition.

Es sind nun alle Vorbereitungen getroffen, um zur Discussion der Sigmafunction überzugehen, wie sie bei Kl. (Glchg. (28) ff. für $p = 1$; (33) ff. für $p = 2$; (54) ff. für beliebige p) definirt sind. Wird die a. a. O. noch unbestimmt gelassene numerische Constante den Kl. § 10 gestellten Forderungen gemäss bestimmt, so ist die zu einer Zerlegung:

(81) $$f = \varphi_{p+1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}$$

gehörige Sigmafunction durch folgende Gleichung definirt*):

(82) $$\sigma_{\varphi\psi}\,[x', x'' \ldots x^{(\nu)};\; y', y'' \ldots y^{(\nu)}] = \frac{(-1)^{\nu\mu + \frac{1}{2}\mu(\mu+1)}}{2^{\nu-\mu}} D_{\varphi\psi} \cdot M;$$

darin bedeutet, um es hier zu wiederholen, $D_{\varphi\psi}$ die Determinante:

(83) $$\begin{vmatrix} x_1^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)}, \cdots & x_2^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)}, & x_1^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(x)} \cdots & x_2^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(x)} \\ -y_1^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(y)}, \cdots & -y_2^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(y)}, & y_1^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(y)} \cdots & y_2^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(y)} \end{vmatrix}$$

— die zunächst nur für $\nu > \mu$ eine bestimmte Bedeutung hat — und M den „transcendenten Zusatzfactor“:

*) Für die algebraischen Argumente des σ sind hier eckige Klammern benutzt, um die runden für die transcendenten (die Integralsummen) zu reserviren.

$$(84)\qquad \frac{\prod_i\prod_k \Omega(x^{(i)}y^{(k)})}{\prod_i\prod_k (x^{(i)}y^{(k)})\cdot\prod_i\prod_k{}' \Omega(x^{(i)}x^{(k)})\prod_i\prod_k{}' \Omega(y^{(i)}y^{(k)})}.$$

Diese Definition bedarf nun noch einzelner Ergänzungen, bei welchen wieder die Fälle eines ungeraden und eines geraden p zu trennen sind. Betrachten wir zunächst den Fall eines *ungeraden* p. Was die Determinante D betrifft, so ist dieselbe über der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{f(x)}$ zwar zweiwerthig, aber nicht verzweigt: wir können von einem ihrer Werthe zum andern nur gelangen, indem wir eine der Veränderlichen einen Periodenweg durchlaufen lassen, was eine gleichzeitige Aenderung von M mit sich bringt. Wir müssen daher noch einen Werth fixiren, von welchem wir ausgehen; wir wollen dies dadurch thun, dass wir festsetzen: Wenn zwei der 2ν Punkte x, y — sie seien mit s, s' bezeichnet — so zusammenrücken, dass der sie verbindende Integrationsweg sich auf einen Punkt reducirt, so soll

$$\sqrt{\varphi(s)}=\sqrt{\varphi(s')},\quad \sqrt{\psi(s)}=\sqrt{\psi(s')}$$

genommen werden. Was dann den Factor M betrifft, so wird aus der Gesammtheit der Werthe, welche derselbe annimmt, wenn man den Ω unabhängig von einander alle ihre Werthe beilegt, eine analytische Function durch folgende Festsetzung über die Integrationswege herausgehoben werden (vgl. § 16a. E.):

Von irgend einem Hilfspunkt O aus ziehe man ganz beliebige Wege nach sämmtlichen Punkten x, y; dadurch sind Wege definirt, welche diese Punkte unter sich verbinden. Diese Werthe bestimmen die zu wählenden Werthe der Ω.

Hat man nämlich für ein bestimmtes Werthsystem der x, y einen dieser Definition genügenden Werth als Anfangswerth genommen und setzt diesen analytisch fort in Bezug auf sämmtliche Variable x, y, so wird man stets nur zu Werthen gelangen, welche derselben Definition genügen. Umgekehrt aber kann auch jedes solche Wegesystem durch continuirliche Bewegung der Punkte x, y in jedes andere übergeführt werden, welches bei gleicher oder anderer Wahl des Punktes O derselben Bedingung genügt.

Die Gesammtheit der unserer Festsetzung genügenden Werthsysteme bildet also in der That eine in sich geschlossene analytische Form; nur diese soll im folgenden mit

$$(85)\qquad M[x', x'' \dots x^{(\nu)};\ y', y'' \dots y^{(\nu)}]$$

bezeichnet und zur Construction der Sigmafunctionen verwendet werden.

Dass der Ausdruck (84) ausser den Werthen dieser analytischen

Form auch noch andere umfasst, wird sich in § 20 bei Untersuchung der Periodicität ergeben.

Um auch über das Vorzeichen von M keinen Zweifel zu lassen, werde ausdrücklich festgesetzt, dass in den mit $\prod_i \prod_k'$ bezeichneten Producten in allen Factoren:

$$i < k$$

genommen werden soll.

Der Fall eines *geraden* p unterscheidet sich dadurch, dass hier sowohl die Determinante D, als das einzelne Ω und damit der Factor M das Zeichen wechselt, wenn eines der Argumente den Hilfspunkt u (§ 13) umkreist. Hier tritt also eine Trennung in zwei Functionen, die wir im Falle eines ungeraden p schon bei Ω und D vornehmen mussten, erst bei der Sigmafunction auf (vgl. den vorletzten Satz von § 15); wir wollen unter σ stets diejenige von beiden verstehen, deren Zeichen dadurch bestimmt ist, dass

$$(86) \qquad \frac{\sqrt{\varphi(z)}}{\sqrt{\varphi(z')}} \cdot \frac{\Omega(z, z')}{(z, z')} = \frac{1}{\sqrt{f(z')}}$$

werden soll, wenn z, z' in derselben Weise wie oben zusammenrücken.

Die so definirte Sigmafunction ist in beiden Fällen eine *symmetrische* Function sowohl der ν Stellen x, als der ν Stellen y auf der Riemann'schen Fläche; *die mit gleichem Index bezeichneten* x, y *stehen keineswegs in anderer Beziehung zu einander als solche mit verschiedenen Indices.* Wollen wir darauf verzichten, diese Symmetrie auch in der Schreibweise hervortreten zu lassen, so können wir nach den Principien des § 16 die in M enthaltenen Factoren in mannigfacher Weise zusammenfassen. Von diesen Umformungen möge eine erwähnt werden, welche jedes x mit dem mit gleichem Index versehenen y in Beziehung setzt und sich auf (81) stützt; sie lautet:

$$(87) \qquad M = (-1)^{\nu} \frac{\prod_i \Omega(x^{(i)}\, y^{(i)})}{\prod_i \prod_k (x^{(i)}\, y^{(k)})} \cdot e^{-\sum_i \sum_k' Q_{x^{(i)}\, y^{(i)}}^{x^{(k)}\, y^{(k)}}}.$$

Endlich möge auch noch einer Umformung der Determinante D Erwähnung gethan werden, welche zwei willkürliche Hilfspunkte benutzt und darauf beruht, dass die Colonnen der Determinante beliebig zu einander addirt werden können, ohne dass der Werth der Determinante geändert wird. Es ist nämlich, entsprechend dem invarianten Charakter der Sigmafunction:

$$(88) \qquad D = \frac{D^{z,t}}{(z\,t)^{\mu^2+\nu^2-\nu}}$$

wenn

$$D^{s,t} = \begin{vmatrix} (xz)^{\mu+\nu-1}\sqrt{\varphi(x)}, & \cdots & (xt)^{\mu-\nu-1}\sqrt{\psi(x)} \\ -(yz)^{\mu+\nu-1}\sqrt{\varphi(y)}, & \cdots & (yt)^{\mu-\nu-1}\sqrt{\psi(y)} \end{vmatrix}$$

gesetzt ist.

§ 18.

Unendlichkeits- und Nullstellen.

Die Sigmafunctionen theilen mit dem Primausdruck Ω die Eigenschaft, dass sie in ihrer Abhängigkeit von den sämmtlichen x, y betrachtet, an keiner Stelle unendlich gross werden. Sie erscheinen zwar in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, wenn zwei Punkte x oder zwei Punkte y oder ein Punkt x mit einem Punkte y oder $\bar{y}$ zusammenfällt; man kann aber zeigen, dass in allen diesen Fällen ein und derselbe bestimmte endliche Grenzwerth erreicht wird, in welcher Weise auch die beiden zusammenrückenden Punkte einander sich nähern mögen. Der Kürze halber sei dabei hier und im folgenden nur von einer Sigmafunction die Rede; die Beweise sind für alle in gleicher Weise zu führen.

Es mögen etwa zwei Punkte x', x'' einer und derselben *gewöhnlichen* Stelle z_0 der Riemann'schen Fläche sich nähern. Es bleiben dann alle Factoren des Nenners von Null verschieden, mit Ausnahme des einen $\Omega(x', x'')$; dieser aber ist nach (73)

$$= \frac{x' - x''}{\sqrt{f(z_0)}} \left\{1 + \mathfrak{P}_1(x - z_0, y - z_0)\right\}.$$

Ebenso kann die Determinante, wenn man die zweite Zeile von der ersten subtrahirt, auf algebraischem Wege umgeformt werden in das Product aus $x' - x''$ in einen Ausdruck, der beim Zusammenrücken von x' mit x'' regulär bleibt. Die Division mit $x' - x''$ lässt sich also ausführen; und die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung ist für diesen Fall bewiesen.

Rücken x' und x'' in einen Verzweigungspunkt k zusammen, so kann ganz dieselbe Schlussweise durchgeführt werden, wenn man an Stelle der Differenz $x' - x''$ die andere:

$$(89) \qquad \sqrt{x' - k} - \sqrt{x'' - k}$$

treten lässt.

In derselben Weise sind die Fälle $y^{(i)} = y^{(k)}$ und $x^{(i)} = \bar{y}^{(k)}$ zu erledigen.

Rücken mehr als zwei Punkte x (oder zwei Punkte y etc.) einer

Stelle z_0 (bezw. k) unendlich nahe, so tritt aus der Determinante das Product der Differenzen je zweier dieser Grössen (bezw. der Differenzen von der Form 89), sodass auch für diesen Fall die Endlichkeit des σ gesichert ist; das gleiche gilt, wenn einige der x etc. in einen Punkt und gleichzeitig andere in andere Punkte zusammenrücken.

Für den Fall aber, dass ein x mit einem y zusammenrückt, wird das Verhalten der σ in § 19 eingehend untersucht werden; unter Vorwegnahme der dort zu erhaltenden Resultate, können wir zusammenfassend sagen:

Als Function der x, y betrachtet werden die Sigmafunctionen nirgends unendlich.

Zu bemerken ist jedoch, dass der Satz, in dieser Form nur richtig ist unter der bei seiner Ableitung gemachten Voraussetzung, dass die Verzweigungspunkte, also die Wurzeln der Gleichung

$$f_{2p+2}(x) = 0, \tag{90}$$

alle von einander verschieden sind. Ist dies nicht der Fall, so werden die mehrfachen Wurzeln von f wesentlich singuläre Punkte der Sigmafunctionen; aber für alle übrigen Stellen der Riemann'schen Fläche bleibt der obige Satz gleichwohl richtig. Das letztere ergiebt sich aus den Schlusssätzen von § 4, deren Geltung sich auch auf alle seitdem eingeführten Functionen erstreckt.

Wir wenden uns nun zur Frage nach den Nullstellen; da M nirgends Null wird, können wir uns dabei auf die Betrachtung von D beschränken. Die Determinante wird Null zunächst, wenn zwei ihrer Zeilen identisch werden; diese Fälle haben wir eben schon untersucht und gefunden, dass in ihnen σ von Null verschieden bleibt. Soll aber $D = 0$ werden, ohne dass zwei Zeilen einander gleich sind, so muss es möglich sein, das System linearer Gleichungen mit den 2ν Unbekannten a:

$$\left\{\begin{aligned} & a_1 x_1^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)} + \cdots + a_{2\nu}\, x_2^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(x)} = 0, \\ -\, & a_1 y_1^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(y)} + \cdots + a_{2\nu}\, y_2^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(y)} = 0 \end{aligned}\right. \tag{91}$$

durch solche Werthe dieser Unbekannten zu befriedigen, welche nicht alle gleich Null sind. M. a. W. es muss eine ganze algebraische Form:

$$g_{\nu+\mu-1}(x)\sqrt{\varphi(x)} + \gamma_{\nu-\mu-1}(x)\sqrt{\psi(x)} \tag{92}$$

existiren, mit g, γ als rationalen ganzen Functionen von x von den angegebenen Graden, welche an den Stellen:

$$x', x'' \ldots x^{(\nu)}, \ \bar{y}', \bar{y}'' \ldots \bar{y}^{(\nu)}$$

Null wird.

Für manche Zwecke bequemer ist eine andere Form dieses Satzes, die man erhält, wenn man (92) mit $\sqrt{\varphi(x)}$ multiplicirt:

Damit $\sigma_{\varphi\psi}$ *gleich Null werde, muss eine rationale ganze Form:*

$$G_{p+\nu-\mu}(x) + \gamma_{\nu-\mu-1}(x)\sqrt{f(x)} \tag{93}$$

existiren, welche die $p + 1 - 2\mu + 2\nu$ *Stellen:*

$$x', \ldots x^{(\nu)}, \ \bar{y}' \ldots \bar{y}^{\nu}, \ k', \ k'' \ldots k^{(p+1-2\mu)}$$

zu Nullstellen hat, unter den k *die Nullstellen von* φ *verstanden.*

Mit Hilfe der zu Anfang dieses Paragraphen angedeuteten Umgestaltung der Determinante kann man sich überzeugen, dass dieser Satz auch dann noch seine Gültigkeit behält, wenn die Stellen x, $\bar{y}$ nicht alle von einander verschieden sind: rücken λ derselben in einen Punkt zusammen, so muss, damit σ verschwindet, die Form (92) bezw. (93) in diesem Punkte λ-fach verschwinden.

In diesem Sinne können wir das Resultat so aussprechen:

Die Sigmafunction verschwindet dann und nur dann, wenn die Punkte x, $\bar{y}$, k' *durch eine Gleichung der Form:*

$$G(x) + \gamma(x)\sqrt{f(x)} = 0$$

mit einander verknüpft sind.

§ 19.

Zusammenhang zwischen σ-Functionen von 2ν und von $2\nu - 2$ Argumenten.

Wir gehen nun über zur Untersuchung der Frage, was eintritt, wenn ein Punkt x und ein Punkt y — wir können unbeschadet der Allgemeinheit annehmen x' und y' — in einen Punkt z der Fläche zusammenrücken. Der Ausdruck für die Sigmafunction erscheint dabei zunächst in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; es ist zu zeigen, dass *ein bestimmter Grenzwerth auftritt*, dass *dieser Grenzwerth von z unabhängig ist*, und dass er *identisch ist mit dem Werthe der gleichnamigen Sigmafunction der $2\nu - 2$ übrigen Argumente x, y.*

Wir dürfen voraussetzen, z sei ein gewöhnlicher Punkt der Fläche; die Modificationen, welche die Entwicklung für den Fall eines Verzweigungspunktes erfahren muss, sind dieselben wie Nr. 89.

Beginnen wir mit der Betrachtung der Determinante D. Wir wählen den Punkt z als Hilfspunkt für die Umgestaltung (89); dann verschwinden, wenn x und y mit z zusammenrücken, in $D^{s,t}$ alle Glieder der ersten und $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Zeile, mit Ausnahme je des $(\nu+\mu)^{\text{ten}}$ und des letzten. $D^{s,t}$ reducirt sich also auf das Product zweier Unterdeterminanten, multiplicirt mit $(-1)^{\mu}$. Die eine derselben ist:

$$\begin{vmatrix} (zt)^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(z)} & (zt)^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(z)} \\ -(zt)^{\nu+\mu-1}\sqrt{\varphi(z)} & (zt)^{\nu-\mu-1}\sqrt{\psi(z)} \end{vmatrix} = 2(zt)^{2\nu-2}\sqrt{f(z)};$$

aus der andern heben wir aus jeder Zeile einen Factor heraus und erhalten:

$$\prod_{2}^{\nu}{}_i (x^{(i)}z)\cdot\prod_{2}^{\nu}{}_i (y^{(i)}z)\cdot D^{z,t}_{\varphi,\psi}[x'', x''' \cdots x^{(\nu)};\ y'', y''' \cdots y^{(\nu)}].$$

Kehren wir also zur ursprünglichen Bezeichnung zurück, so erhalten wir:

(94) $$D[z, x'' \dots x^{(\nu)};\ z, y'' \dots y^{(\nu)}]$$

$$=(-1)^{\mu}.2\sqrt{f(z)}.\prod_{2}^{\nu}{}_i (x^{(i)}z)\prod_{2}^{\nu}{}_i (y^{(i)}z)\cdot D_{\varphi,\psi}[x'',x''' \dots x^{(\nu)};\ y'',y''' \dots y^{(\nu)}].$$

Wir gehen über zur Umformung von M. Den Factor:

$$\frac{\Omega(x'y')}{(x'y')},$$

der allein die Unbestimmtheit veranlasst, trennen wir zuerst ab; derselbe erhält nach (72) den ganz bestimmten Grenzwerth:

$$\frac{1}{\sqrt{f(z)}}.$$

Die übrigen Factoren von M bleiben endlich und von Null verschieden; wir setzen direct z für x' und y' in sie ein und heben die im Zähler und Nenner auftretenden Factoren:

$$\prod_{2}^{\nu}{}_i \Omega(x^{(i)}z) \quad \text{und} \quad \prod_{2}^{\nu}{}_i \Omega(y^{(i)}z)$$

weg; dabei tritt ein Factor $(-1)^{\nu-1}$ auf. Es bleibt also:

(95) $$\frac{(-1)^{\nu-1}M[x'', x''' \dots x^{(\nu)};\ y'', y''' \dots y^{(\nu)}]}{\sqrt{f(z)}\cdot\prod{}_i' (x^{(i)}z)\cdot\prod{}_i' (zy^{(i)})}, \quad (i=2,3,..,\nu)$$

$$= M[x', x'' \dots x^{(\nu)};\ y', y'' \dots y^{(\nu)}]$$

Nun ist aber zufolge (83), wenn wir die Argumente unterdrücken:

$$\frac{\sigma_{\mu,\nu}}{\sigma_{\mu,\nu-1}} = \frac{(-1)^{\mu}}{2}\ \frac{D_{\mu,\nu}}{D_{\mu,\nu-1}}\ \frac{M_{\mu,\nu}}{M_{\mu,\nu-1}};$$

also erhalten wir aus (94) und (95):

(96) $$\sigma[z, x'', x''' \dots x^{(\nu)};\ z, y'', y''' \dots y^{(\nu)}] = \sigma[x'', x''' \dots x^{(\nu)};\ y'', y''' \dots y^{(\nu)}]$$

d. h.:

Fällt ein x mit einem y zusammen, so reducirt sich die Sigmafunction von 2ν Argumenten auf eine solche von $2\nu-2$ Argumenten.

(Die bei Kl. unbestimmt gelassene Constante $c^{(\mu)}_{\nu}$ ist nämlich hier in richtiger Weise von ν abhängig gemacht worden).

Dieser Satz, der zunächst nur für $\nu > \mu + 1$ eine Bedeutung hat, da wir Sigmafunctionen von weniger als $2\mu + 2$ Argumenten bisher nicht definirt hatten, führt uns nun dazu, die Definition in dieser Richtung zu vervollständigen, indem wir festsetzen, dass er auch für $\nu \leqq \mu + 1$ gelten soll. Wir erhalten so die Regel:

Um eine Sigmafunction von 2μ oder weniger Argumenten zu bilden, fügen wir zu diesen so viele Paare neuer Argumente x, y hinzu, als nothwendig sind, um dieselbe Sigmafunction nach der ursprünglichen Regel bilden zu können, und lassen dann die zugefügten Argumente paarweise zusammenfallen.

Sehen wir zu, was wir dabei erhalten. Lassen wir, um zunächst auf $\nu = \mu$ zu kommen, in einer Sigmafunction von $2\mu + 2$ Argumenten deren zwei zusammenfallen und verfahren wie oben, so gelangen wir zu einer Determinante:

$$(97)\quad D_{\mu,\mu} = \begin{vmatrix} x_1^{2\mu-1}\sqrt{\varphi(x)}, & x_1^{2\mu-2}x_2\sqrt{\varphi(x)}\ldots & x_2^{2\mu-1}\sqrt{\varphi(x)} \\ -y_1^{2\mu-1}\sqrt{\varphi(y)}, & -y_1^{2\mu-2}y_2\sqrt{\varphi(y)}\ldots & -y_2^{2\mu-1}\sqrt{\varphi(y)} \end{vmatrix}.$$

Wir sehen also:

Eine Sigmafunction von 2μ Argumenten ist in der Weise zu bilden, dass die Determinante Colonnen mit ψ überhaupt nicht enthält (Kl. § 10).

Lassen wir aber jetzt abermals ein x mit einem y zusammenrücken, so erhält die Determinante zwei gleiche und entgegengesetzte Zeilen, und wir finden daher:

Eine Sigmafunction, für welche die Grade von φ und ψ um 4μ differiren, verschwindet identisch, wenn die Anzahl der Argumente unter 2μ herabsinkt. (Kl. a. a. O.)

§ 20.

Periodicität der Sigmafunctionen.

Durchläuft eine der Variabeln, z. B. x', auf der Riemann'schen Fläche von $\sqrt{f(x)}$ einen elementaren Periodenweg P*) — auf solche Wege dürfen wir uns beschränken — so erhält jedes σ einen Factor, der sich aus den auf die Determinante und auf die einzelnen Ω bezüglichen Factoren zusammensetzt.

Das einzelne Ω erhält nach (75), (76) den Factor:

$$-e^{\Sigma\eta_\alpha\left(w_\alpha^{x'x^{(k)}}+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)};$$

*) Ob derselbe den Hilfspunkt u (§ 17) umschliesst oder nicht, ist gleichgiltig, da D und M dadurch gleichmässig afficirt werden.

der Zähler also:

$$(-1)^{\nu}\, e^{\Sigma \eta_\alpha \left\{ \sum_i w_\alpha^{x'\, y^{(i)}} + \frac{\nu}{2}\, \omega_\alpha \right\}};$$

der Nenner ebenso:

$$(-1)^{\nu-1}\, e^{\Sigma \eta_\alpha \left\{ \sum_i{}' w_\alpha^{x'\, x^{(i)}} + \frac{\nu-1}{2}\, \omega_\alpha \right\}}.$$

Nach den § 17 getroffenen Festsetzungen ist aber:

(98) $$w_\alpha^{x'\, y^{(i)}} - w_\alpha^{x'\, x^{(i)}} = w_\alpha^{x^{(i)}\, y^{(i)}}$$

ohne zutretende Periode; definiren wir also die *Integralsumme* w_α durch die Gleichung (Kl. (26), (31), (48)):

(99) $$w_\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} w_\alpha^{x^{(i)}\, y^{(i)}},$$

so ist der zu M tretende Factor:

(100) $$-\, e^{\Sigma \eta_\alpha \left(w_\alpha + \frac{1}{2}\, \omega_\alpha \right)}.$$

Die Veränderung, welche die Determinante D bei Durchlaufung des elementaren Periodenwegs P erleidet, beschränkt sich auf die Möglichkeit eines Zeichenwechsels. Jenachdem nämlich die beiden Verzweigungspunkte, welche P umschliesst, bei der Zerlegung $f = \varphi\psi$ getrennt werden oder nicht, werden $\varphi(x')$, $\psi(x')$ bei Durchlaufung von P ihr Zeichen beide wechseln oder beide beibehalten: das gleiche wird demzufolge von der Determinante D selbst gelten. In (100) steht aber für jeden elementaren Periodenweg das Minuszeichen; daher kommt die Regel (Kl. § 3):

Durchläuft ein x einen elementaren Periodenweg P, so tritt zu σ der Factor:

(101) $$\pm\, e^{\Sigma \eta_\alpha \left(w_\alpha + \frac{1}{2}\, \omega_\alpha \right)},$$

*dabei gilt das obere Zeichen, wenn die beiden von P umschlossenen Verzweigungspunkte bei der Zerlegung $f = \varphi\psi$ getrennt werden; das untere, wenn sie vereinigt bleiben.**) *Der zutretende Factor ist unabhängig von der Auswahl des x.*

In dieser Form gilt der Satz übrigens nur unter den Festsetzungen des § 17 bezüglich der die Ω definirenden Wege, da nur unter diesen die Gleichung (98) besteht; daraus geht hervor, dass *die durch jene*

*) Analoges gilt natürlich für die y.

Festsetzungen definirte analytische Form M in der That nur einen Theil der in (85) *enthaltenen Werthe umfasst*, wie a. a. O. behauptet, aber nicht bewiesen wurde.

§ 21.

Die Sigmafunctionen hängen nur von den Integralsummen w_α ab.

Betrachten wir nun 2 Sigmafunctionen, deren Argumente durch die Gleichungen:

$$(102) \qquad w_\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} w_\alpha^{x^{(i)} y^{(i)}} = \sum_{i=1}^{\nu'} w_\alpha^{\xi^{(i)} \eta^{(i)}}$$

mit einander verknüpft sind, so wird der Quotient:

$$(103) \qquad \frac{\sigma[\xi, \eta]}{\sigma[x, y]}$$

zufolge (101) bei Durchlaufung der Periodenwege ungeändert bleiben und folglich eine *rationale* Function der sofort näher anzugebenden Argumente auf der Riemann'schen Fläche sein.

Die Angabe dieser Argumente erfordert einige Bemerkungen. Um uns kurz ausdrücken zu können, wollen wir von den Resultaten des § 19 in dem Sinne Gebrauch machen, dass wir uns in (102) die Zahlen ν und ν' beide $\geqq p$ gemacht denken. Dann können wir die sämmtlichen Punkte x, y, η und $\nu' - p$ von den Punkten ξ als unabhängige Veränderliche betrachten; die p übrigen ξ sind dann durch (102) als algebraische Functionen der ersteren definirt. Durchläuft nun irgend eine der unabhängigen Variabeln auf der Riemann'schen Fläche einen Periodenweg, so werden die abhängigen Variabeln dabei gleichzeitig solche Wege durchlaufen müssen, dass deren Gesammtheit jenem Wege äquivalent ist, soweit die Integralsummen in Betracht kommen; zufolge (101) wird dabei der Quotient (103) ungeändert bleiben: *derselbe wird also eine algebraische Function der unabhängigen Veränderlichen sein, welche für jede dieser Veränderlichen auf der Riemann'schen Fläche von* $\sqrt{f}$ *eindeutig ist.*

Um näheres über diese algebraische Function zu erfahren, fragen wir, wo sie unendlich gross wird. Der Zähler bleibt stets endlich, der Nenner wird nur Null, wenn eine Function:

$$G(x) + \gamma(x)\sqrt{f(x)}$$

(93) existirt, welche die Stellen:

$$x, \; y, \; k'$$

zu Nullstellen hat. Zufolge der Umkehrung des Abel'schen Theorems und der Gleichung (102) existirt aber dann stets auch eine Function:

$$\bar{G}(x) + \bar{\gamma}(x)\sqrt{f(x)}$$

derselben Art, welche die Stellen:

$$\xi,\ \eta,\ k'$$

zu Nullstellen hat; dann verschwindet aber auch der Zähler von (103), sodass wir sagen können:

Zähler und Nenner von (103) *verschwinden stets gleichzeitig.*

Der eigentlich noch erforderliche Beweis, dass sie auch immer *von gleicher Ordnungszahl* Null werden, lässt sich auf folgende Weise umgehen: Unsere früheren Untersuchungen zeigen, dass der Nenner da, wo er Null wird, im Allgemeinen nur von der ersten Ordnung Null wird; d. h. soll er von höherer Ordnung Null werden, so müssen noch weitere Bedingungen erfüllt sein. Der Zähler wird als Function der ξ, η von der ersten Ordnung Null; als Function der hier als unabhängig veränderlich geltenden Grössen könnte er sonach nur da von niedrigerer als der ersten Ordnung Null werden, wo die ξ als Functionen der letzteren verzweigt sind. Die Stellen also, an welchen unser Quotient etwa unendlich gross werden könnte, bilden in dem $2(2\nu+2\nu'-p)$-fach ausgedehnten Gebiete unserer $2\nu+2\nu'-p$ Veränderlichen höchstens eine Mannigfaltigkeit von $2(2\nu+2\nu'-p)-4$ Dimensionen. Eine algebraische Function von m Veränderlichen aber, welche keine Constante ist, wird an einer $(2m-2)$-fachen Mannigfaltigkeit von Stellen unendlich gross. Daher können wir schon jetzt schliessen: *unser Quotient muss eine Constante sein.*

Die Richtigkeit dieses Schlusses wird auch nicht beeinträchtigt durch diejenigen Stellen, an welchen die abhängigen Variabeln als Functionen der unabhängigen unbestimmt werden. Man könnte zwar vermuthen, es würde an einer solchen Stelle auch der Quotient (103) unbestimmt; aber unser voriger Schluss zeigt, dass man bei keiner Art der Annäherung an eine solche Stelle zu einem unendlich grossen Werthe des Quotienten gelangt, was doch bei Unbestimmtheitsstellen der hier betrachteten Art*) nothwendig für irgend eine Art der Annäherung eintreten müsste.

Um nun den constanten Werth des Quotienten (103) zu bestimmen, bewirken wir, dass die x mit den ξ, die y mit den η zusammenfallen, was stets möglich ist. Dann wird der Quotient zu 1, also muss er immer $=1$ sein. Damit haben wir das Resultat:

Die Sigmafunctionen hängen nur ab von den Integralsummen:

$$w_\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} w_\alpha^{x^{(i)}y^{(i)}}$$

— *und selbstverständlich von den Coefficienten von φ und ψ.* (Kl. § 10).

Es bleibt die Frage übrig, was für Functionen dieser Grössen sie sind.

---

*) D. h. solchen, welche auch bei algebraischen Functionen vorkommen können.

§ 22.

Die Grenzen als Functionen der Integralsummen für kleine Werthe der letzteren.

Diese Frage soll nun ihre Beantwortung nach der Methode finden, welche Herr Weierstrass*) gegeben hat. Da jedoch, wie bereits in der Einleitung erwähnt, hier eine Definition der Sigmafunctionen selbst, nicht nur ihrer Quotienten, am algebraischen Gebilde vorliegt, so wird es möglich sein, den Beweis unter ausschliesslicher Anwendung von Potenzreihen zu führen und den Gebrauch der Quotienten von Potenzreihen zu vermeiden.

Herr Weierstrass beginnt mit dem Beweise des Hilfssatzes, dass sich die x als Functionen der w in Reihen entwickeln lassen, welche in einem gewissen Bereiche convergiren. Von diesem Bereiche wird a. a. O. nur zu wissen gefordert, dass er nicht unendlich klein ist; hier dagegen wird eine genauere Angabe über seine Ausdehnung nothwendig sein. Es sei daher gestattet den Beweis des Herrn Weierstrass für diesen Hilfssatz in der Sprache und mit den Bezeichnungen, die hier gebraucht sind, zu reproduciren.

Es seien die p Integralsummen $w_1, w_2, \ldots w_p$ als Functionen der p Stellen $x_1, x_2, \ldots x_p$ der Riemann'schen Fläche — nach den Resultaten von § 21 dürfen wir uns auf diese Zahl von algebraischen Argumenten beschränken — gegeben durch die Gleichungen (99), welche ausführlich geschrieben lauten werden:

$$(104) \left\{ \begin{aligned} w_1 &= \int\limits_{y'}^{x'} \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} + \int\limits_{y''}^{x''} \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} + \cdots + \int\limits_{y^{(p)}}^{x^{(p)}} \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}, \\ w_2 &= \int\limits_{y'}^{x'} \frac{z_1^{p-2} z_2(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} + \int\limits_{y''}^{x''} \frac{z_1^{p-2} z_2(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} + \cdots + \int\limits_{y^{(p)}}^{x^{(p)}} \frac{z_1^{p-2} z_2(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_p &= \int\limits_{y'}^{x'} \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} + \int\limits_{y''}^{x''} \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} + \cdots + \int\limits_{y^{(p)}}^{x^{(p)}} \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}. \end{aligned} \right.$$

Verlangt wird, die oberen Grenzen x als Functionen der Integralsummen w für hinlänglich kleine Werthe der letzteren in Potenzreihen zu entwickeln. Um das zu können, *müssen* wir voraussetzen, dass die y keine „Specialgruppe" bilden, d. h. dass nicht zwei derselben

*) Crelle J. Bd. 52.

conjugirt sind, also auch nicht zwei in denselben Verzweigungspunkt fallen; wir *wollen* aber der Einfachheit halber auch voraussetzen, dass die Stellen y alle verschieden sind und keine derselben eine Verzweigungsstelle ist. Nach den Resultaten von § 21 erhalten diese Annahmen eine Beschränkung der Allgemeinheit zwar für den gegenwärtigen Hilfssatz, aber nicht für die Entwicklung der Sigmafunction.

Sind dieselben erfüllt, so lassen sich aus (104) die w nach Potenzen der Differenzen $x^{(i)} - y^{(i)}$ in Reihen entwickeln, deren Anfangsterme, nicht homogen geschrieben, folgendermassen lauten werden:

$$(105)\quad \begin{cases} w_1 = -\dfrac{y'^{\,p-1}}{\sqrt{f(y')}}(x' - y') - \cdots - \dfrac{y^{(p)\,p-1}}{\sqrt{f(y^{(p)})}}(x^{(p)} - y^{(p)}) + \cdots \\ w_2 = -\dfrac{y'^{\,p-2}}{\sqrt{f(y')}}(x' - y') - \cdots - \dfrac{y^{(p)\,p-2}}{\sqrt{f(y^{(p)})}}(x^{(p)} - y^{(p)}) + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_p = -\dfrac{1}{\sqrt{f(y')}}(x' - y') - \cdots - \dfrac{1}{\sqrt{f(y^{(p)})}}(x^{(p)} - y^{(p)}) + \cdots \end{cases}$$

Die Determinante der Coefficienten in diesen Anfangstermen ist:

$$\frac{(-1)^p \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} - y^{(k)})}{\prod_i \sqrt{f(y^{(i)})}},$$

also unter unseren Voraussetzungen von Null verschieden; daraus folgt*) dass sich aus (105) umgekehrt die Differenzen $x^{(i)} - y^{(i)}$ in Reihen entwickeln lassen, welche nach ganzen positiven Potenzen der w fortschreiten. Die Anfangsterme dieser Reihen mögen geschrieben werden:

$$(106)\quad \begin{cases} x' - y' = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \cdots + \alpha_{1p} w_p + \cdots, \\ x'' - y'' = \alpha_{21} w_1 + \alpha_{22} w_2 + \cdots + \alpha_{2p} w_p + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(p)} - y^{(p)} = \alpha_{p1} w_1 + \alpha_{p2} w_2 + \cdots + \alpha_{pp} w_p + \cdots. \end{cases}$$

Die Coefficienten dieser Reihen sind rationale Functionen der y, $\sqrt{f(y)}$ und der Coefficienten von f, deren Nenner nur Potenzen der Differenzen $x^{(i)} - y^{(i)}$ und der $\sqrt{f(y^{(i)})}$ zu Factoren haben.

Die Reihen (106) convergiren sicher, wenn die w einem gewissen Gebiete U_1 angehören, das folgendermassen zu definiren ist:

Man beschreibe in der Ebene des Arguments x um die Punkte $y^{(i)}$ Kreise, von welchen jeder jeden andern sowohl, als die sämmtlichen Verzweigungspunkte ausschliesst. Wird dann jedes $x^{(i)}$ auf das Innere des Kreises um den entsprechenden Punkt $y^{(i)}$ beschränkt, so ist da-

*) Vgl. etwa Biermann, Theorie d. analyt. Funct. p. 234 ff.

durch in dem $2p$-fach ausgedehnten Gebiet der Veränderlichen x ein *Bereich* X definirt. Jedes Werthsystem (x) dieses Bereiches erfüllt die Bedingungen, welche wir oben den y auferlegt haben; infolge dessen gehören zu verschiedenen Stellen desselben auch immer verschiedene Werthsysteme der w. Es entspricht ihm also im Gebiet der w ein $2p$-fach ausgedehnter *Bereich* U. Da die Stelle $(x' = y', \cdots x^{(p)} = y^{(p)})$ im Innern von X liegt, liegt auch die Stelle $w_1 = 0 \cdots w_p = 0$ im Innern von U; infolge dessen kann man eine Grösse ϱ so bestimmen, dass alle den Ungleichungen:

(107) $$|w_1| < \varrho, \quad |w_2| < \varrho, \cdots |w_p| < \varrho$$

genügenden Stellen dem Bereich U angehören. Durch diese Ungleichungen ist der *Bereich* U_1 definirt, von welchem behauptet wird, dass in ihm die Reihen (106) convergiren.

Ist nämlich (w) eine Stelle im Innern von U, so entspricht ihr eine Stelle (x) im Innern von X. Jede solche Stelle (x) genügt denselben Bedingungen wie oben (y); fassen wir also benachbarte Stellen $(w + \delta w)$, bezw. $(x + \delta x)$ in's Auge, so werden sich die δx ebenso nach Potenzen der δw entwickeln lassen, wie oben die $x^{(i)} - y^{(i)}$ nach Potenzen der w. Um so mehr gilt dies von jeder Stelle im Innern von U_1. Würden aber die Reihen (106) nicht im ganzen Innern von U_1 convergiren, so würde im Innern von U_1 mindestens eine Stelle liegen müssen, an welcher keine solche Entwicklung der δx nach den δw möglich wäre.

Also convergiren die Reihen (106) *im ganzen Innern des oben definirten Bereiches* U_1.

Es sei bemerkt, dass Satz und Beweis unabhängig davon sind, ob die Wurzeln von $f(x) = 0$ alle von einander verschieden sind oder nicht.

§ 23.

Die Sigmafunctionen sind eindeutige ganze Functionen der Integralsummen.

Nunmehr kann der Beweis, dass die Sigmafunctionen eindeutige ganze Functionen der Integralsummen sind, in folgender Weise geführt werden. Wir zeigen zunächst, dass sie nach Potenzen der $x - y$ in Reihen entwickelt werden können, welche innerhalb des eben definirten Bereiches X convergiren; diese Reihen setzen wir in andere um, welche nach Potenzen der w fortschreiten und innerhalb U_1 convergiren. Wir können aber auch für $\sigma(nw_1, nw_2 \ldots nw_p)$ Reihen erhalten, welche convergiren, wenn (nw) innerhalb U_1 liegt. Diese gehen durch Vertauschung von w mit $\frac{1}{n} w$ in Reihen für $\sigma(w_1 \ldots w_p)$ über, welche innerhalb eines

Gebietes U_n convergiren, das mit Vergrösserung von n in's unendliche wächst. Daraus folgt, dass die Sigmareihen *beständig* convergiren.

Um dies nun im einzelnen durchzuführen, beginnen wir mit der Entwicklung der σ nach Potenzen der $x^{(i)} - y^{(i)}$. Wir betrachten eine Sigmafunction von $2p$ Argumenten und ordnen jedem y das gleichbezifferte x zu; die y können wir uns mit Rücksicht auf die Resultate des § 21 immer so gewählt denken, dass sie den Bedingungen von § 22 genügen. Die Determinante D wird sich dann innerhalb X in eine Reihe entwickeln lassen, deren Coefficienten rationale Functionen der y, $\sqrt{\varphi(y)}$, $\sqrt{\psi(y)}$ und der Coefficienten von φ, ψ sind. Den Factor M schreiben wir in der Form (88): die Exponentialfunction lässt sich auf Grund von (27) in eine Reihe nach Potenzen der $x - y$ entwickeln, deren Coefficienten rationale Functionen der y, $\sqrt{f(y)}$ und der Coefficienten von f sind und welche ebenfalls innerhalb X convergirt. Dann bleiben noch die Factoren:

$$\frac{\Omega(x^{(i)}y^{(i)})}{(x^{(i)}y^{(i)})},$$

die wir bereits unter (73) in Reihen ähnlicher Art entwickelt haben, und:

$$\frac{1}{(x^{(i)}y^{(k)})},$$

deren Entwickelung keine Schwierigkeit bietet. Multipliciren wir alle diese Reihen aus, so finden wir:

Innerhalb X lässt sich ein bestimmter Zweig des Sigma in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen der $x^{(i)} - y^{(i)}$ entwickeln, deren Coefficienten rationale Functionen der Coefficienten von φ und ψ und der Grössen y, $\sqrt{\varphi(y)}$, $\sqrt{\psi(y)}$ sind.

Nun setzen wir in diese Reihen die Entwickelungen (106) ein und ordnen nach den w; dann kommen wir zu dem weiteren Satze:

Die Sigmafunctionen lassen sich nach ganzen positiven Potenzen der w in Reihen entwickeln, welche sicher innerhalb U_1 convergiren.

Es handelt sich nun darum, nachzuweisen, dass der Convergenzbereich dieser Reihe nicht auf U_1 beschränkt ist, sondern beliebig weit ausgedehnt werden kann. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Function:

$$(108) \qquad \sigma[x', x', x'', x'', \cdots y^{(p)}, y^{(p)}] = \sigma(2w_1, 2w_2 \cdots 2w_p)$$

(wo die w nach wie vor durch (104) definirt sind). Dieselbe erscheint zwar zunächst in unbestimmter Form; gehen wir aber aus von:

$$\sigma[x' + dx', x', x'' + dx'', x'' \cdots y^{(p)} + dy^{(p)}, y^{(p)})$$

und lassen die dx und dy unabhängig von einander unendlich klein werden, so erhalten wir einen ganz bestimmten Grenzwerth, indem

Zähler und Nenner durch das Product der dx, dy theilbar werden (vgl. § 18). Wir dürfen daher alle Factoren auf die Glieder niedrigster Ordnung in den dx, dy reduciren. Die Determinante D geht dabei über in das Product aus sämmtlichen dx, dy in eine Determinante D_2, deren Bildungsgesetz angedeutet sei durch Angabe von zwei Zeilen:

$$(109) \qquad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial (x_1^{2p+\mu-1} \sqrt{\varphi(x)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial (x_2^{2p-\mu-1} \sqrt{\psi(x)})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial (x_1^{2p+\mu-1} \sqrt{\varphi(x)})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial (x_2^{2p-\mu-1} \sqrt{\psi(x)})}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

In M treten die $(x^{(i)} y^{(k)})$ in der vierten Potenz auf, aus (x, y), $(x + dx, y)$, $(x, y + dy)$ und $(x + dx, y + dy)$ entstehend, ebenso die verschiedenen Ω, im ganzen also die 4. Potenz des Ausdrucks $M[x', x'' \ldots y^{(p)}]$, wie er unter (84) notirt ist; ausserdem aber noch im Nenner Factoren $\Omega(x + dx, x)$ und $\Omega(y + dy, y)$, die sich auf $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$, bezw. $\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$ reduciren. Setzen wir alles dies ein und heben die dx, dy weg, so bleibt:

$$(110) \quad \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}}{2^{2p-\mu} \cdot \left(2p + \frac{p-1}{2}\right)^p} \cdot D_2[x', x'' \cdots y^{(p)}] \cdot M[x', x'' \cdots y^{(p)}]^4$$

$$\times \prod_i \sqrt{f(x^{(i)})\, f(y^{(i)})}$$

$$= \sigma(2w_1, 2w_2 \cdots 2w_p).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite theilt nun alle diejenigen Eigenschaften, welche wir oben von $\sigma(w_1, w_2 \ldots w_p)$ benutzten: wir können ihn zunächst innerhalb X nach Potenzen der $x^{(i)} - y^{(i)}$ entwickeln und in diese Entwicklung dann die w einführen. So gelangen wir zu einer Entwicklung von $\sigma(2w_1, 2w_2 \ldots 2w_p)$, welche sicher convergirt, wenn die Werthe w dem Bereich U_1 angehören. Ersetzen wir in ihr die w_α durch $\frac{1}{2} w_\alpha$, so erhalten wir eine *Entwicklung von* $\sigma(w_1, w_2 \ldots w_p)$, *welche sicher in einem Bereiche* U_2 *convergirt*, der durch die Ungleichungen:

$$(111) \qquad |w_1| < 2\varrho, \quad |w_2| < 2\varrho \cdots |w_p| < 2\varrho$$

definirt ist, in welchen ϱ *dieselbe* Bedeutung wie in (107) hat.

Diese Entwicklung kann aber von der früheren nicht verschieden sein. Denn nehmen wir $(2w)$ innerhalb U_1 an und definiren Punkte ξ durch die Gleichungen:

$$2w_\alpha = \sum_{i=1}^{p} w_\alpha^{\xi^{(i)} y^{(i)}},$$

so fallen diese Punkte ξ innerhalb X und die Gleichung

$$\sigma[\xi' \cdots \xi^{(p)};\ y' \cdots y^{(p)}] = \sigma[x', x' \cdots y^{(p)}, y^{(p)}]$$

wird nach § 21 gerade von denjenigen Werthen der σ erfüllt, welche wir hier entwickelt haben. Die frühere und die jetzige Entwicklung liefern demnach dieselben Werthe, solange die $|w| < \frac{1}{2}\varrho$ sind; also müssen sie identisch sein.

Die ursprünglich gefundene Reihenentwicklung des σ convergirt also nicht allein innerhalb U_1, sondern auch innerhalb U_2.

Dieselbe Entwicklung aber, welche hier für $\sigma(2w)$ durchgeführt worden ist, lässt sich ganz ebenso für $\sigma(nw)$ durchführen. Man erhält eine Function von $2np$ algebraischen Argumenten, welche zu je n zusammenfallen; nehmen wir die Argumente zuerst verschieden an, so können wir den zunächst in unbestimmter Form erscheinenden Ausdruck ganz wie oben umformen. Es tritt dann eine Determinante D_n auf, deren Bildungsgesetz angedeutet sei durch Angabe von drei Zeilen:

$$(112)\qquad D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^{n-1}(x_1^{np+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)})}{\partial x_1^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{n-1}(x_1^{np-\mu-1}\sqrt{\psi(x)})}{\partial x_1^{n-1}} \\ \dfrac{\partial^{n-1}(x_1^{np+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)})}{\partial x_1^{n-2}\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^{n-1}(x_1^{np-\mu-1}\sqrt{\psi(x)})}{\partial x_1^{n-2}\partial x_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{\partial^{n-1}(x_1^{np+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)})}{\partial x_2^{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{n-1}(x_1^{np-\mu-1}\sqrt{\psi(x)})}{\partial x_2^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Der Factor M wird ebenso behandelt wie oben; schliesslich erhält man:

$$(113)\ \frac{(-1)^{pn+\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}}{2^{2p-\mu}} \frac{1}{\left(\left(np+\frac{p-1}{2}\right)\left(np+\frac{p-1}{2}-1\right)\cdots\left(np+\frac{p-1}{2}-n+1\right)\right)^p}$$

$$\times D_n[x', x'' \cdots y^{(p)}] \cdot M[x', x'' \cdots y^{(p)}]^{nn} \cdot \left(\prod_i \sqrt{f(x^{(i)})\, f(y^{(i)})}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$= \sigma(nw_1 \cdots nw_p).$$

Definiren wir nun ein Gebiet U_n durch die Ungleichungen:

$$(114)\qquad |w_1| < n\varrho,\ |w_2| < n\varrho \cdots |w_p| < n\varrho,$$

wo ϱ dieselbe Bedeutung hat wie in (107), also ganz unabhängig von der Zahl n definirt ist, so gelangen wir auf demselben Wege wie oben zu dem Satze:

Die Reihenentwicklungen der σ convergiren mindestens innerhalb U_n.

Wie gross aber die w auch genommen werden mögen, immer können wir für n einen so grossen Werth finden, dass für ihn die

Bedingungen (114) erfüllt sind. Die Sigmareihen müssen also *beständig* convergiren, und die Antwort auf die am Ende des § 21 gestellte Frage hat demnach in ihrem ersten Theil folgendermassen zu lauten (Kl. § 10):

Die Sigmafunctionen sind eindeutige analytische Functionen der Integralsummen w_α, welche für alle endlichen Werthe ihrer unbeschränkt veränderlichen Argumente den Charakter ganzer Functionen besitzen.

§ 24.

Die Sigmafunctionen sind ganze eindeutige Functionen der Coefficienten von φ und ψ*).

Die Coefficienten der einzelnen Reihenentwicklungen, aus welchen wir die Reihen für $\sigma(w_1 \dots w_p)$ aufgebaut haben, waren *rationale* Functionen der Coefficienten a, b von φ und ψ und der Grössen y, $\sqrt{\varphi(y)}$, $\sqrt{\psi(y)}$, mit rationalen Zahlencoefficienten. Die gleiche Eigenschaft wird also auch den Coefficienten der Sigmareihen selbst zukommen. Ueberdies haben die Nenner der Coefficienten jener Reihen nur Potenzen der y, $\sqrt{\varphi(y)}$, $\sqrt{\psi(y)}$ und der Differenzen $y^{(i)} - y^{(k)}$ zu Factoren; auch in den Coefficienten der Sigmareihen werden daher nur solche Nenner auftreten. Andererseits aber ist in § 21 gezeigt, dass die Sigmafunctionen allein von den w und den a, b, in keiner Weise aber von den y abhängen. In Folge dessen müssen die y aus den Coefficienten herausfallen; das ist nicht anders möglich, als wenn jene Nenner überhaupt sich wegheben. Wir können sonach neben den Satz des vorigen Paragraphen den weiteren stellen (Kl. § 10):

Die Coefficienten der Sigmareihen sind rationale ganze Functionen der a, b, mit rationalen Zahlencoefficienten.

Der Beweis für diese Behauptung lässt sich auch noch anders darstellen. Wir gehen aus von irgend einem Werthsystem der a, b, welches ganz beliebig gewählt sein soll; nur schliessen wir den Principien des § 13 gemäss diejenigen Werthsysteme aus, für welche $\varphi(y)$ oder $\psi(y)$ unabhängig von den y Null oder unendlich würde. Dann bestimmt das Ausgangssystem der a, b ein System von Verzweigungspunkten k von $\sqrt{\varphi}$ und $\sqrt{\psi}$; wir setzen nichts darüber voraus, ob diese alle verschieden sind. Ertheilen wir den a, b kleine Variationen δa, δb, so variiren auch die k innerhalb gewisser Bereiche. Da wir nun die Wahl der y in der Hand haben, so können wir sie ausserhalb aller dieser Bereiche annehmen. Dann können wir die Kreise um die y, durch welche wir § 22 den Bereich X und damit den Bereich U definirt haben, so klein wählen, dass sie alle in Betracht kommenden Werthsysteme der k ausschliessen. Dadurch ist *im Gebiet*

*) Vgl. Wiltheiss, Bd. 31 dieser Ann.

der w *und der* a, b ein Bereich A definirt, innerhalb dessen wir alle in den σ auftretenden Functionen nach Potenzen der w und der δa, δb entwickeln können. Die Coefficienten der Reihen für die $\sigma(w_1 \dots w_p)$ sind also Functionen der a, b, welche in der Umgebung jedes endlichen Werthsystems derselben nach Potenzen der δa, δb entwickelt werden können, also überall den Charakter ganzer Functionen besitzen. Da sie aber *homogene* Functionen der a, b sind (Kl. § 11), müssen sie rationale ganze Functionen derselben sein.

Die oben ausgeschlossenen endlichen Werthsysteme der a bilden eine Mannigfaltigkeit von zu geringer Dimension, als dass sie diesen Schluss stören könnten.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz abermals bewiesen.

§ 25.

Der Werth von $\sigma_{\varphi_{p+1}\psi_{p+1}}$ für die Nullwerthe der Argumente.

Es bleibt noch übrig nachzuweisen, dass die numerische multiplicative Constante, welche in der Definitionsgleichung (83) der Sigmafunctionen auftritt, in der That den Kl. § 10 gestellten Forderungen in ihrer Abhängigkeit von μ genügt — soweit sie von ν abhängt, ist dies bereits § 19 geschehen.

Betrachten wir zunächst den Fall $\mu = 0$ und zeigen, dass in diesem:

$$\sigma(0, 0 \dots 0) = 1 \tag{115}$$

ist.

Der Factor M zunächst nähert sich, wenn die w verschwinden, also die x mit den y zusammenrücken, einem bestimmten Grenzwerth, den man durch wiederholte Anwendung der Formel (95) erhält, nämlich:

$$M[y' \dots y^{(p)};\ y' \dots y^{(p)}] = \frac{1}{\prod_i \sqrt{f(y^{(i)})} \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^2}. \tag{116}$$

Setzen wir ferner in der Determinante $D_{\varphi_{p+1}\psi_{p+1}} =$

$$\begin{vmatrix} x_1^{p-1}\sqrt{\varphi(x)} \dots & x_2^{p-1}\sqrt{\varphi(x)}, & x_1^{p-1}\sqrt{\psi(x)} \dots x_2^{p-1}\sqrt{\psi(x)} \\ -y_1^{p-1}\sqrt{\varphi(y)} \dots & -y_2^{p-1}\sqrt{\varphi(y)}, & y_1^{p-1}\sqrt{\psi(y)} \dots y_2^{p-1}\sqrt{\psi(y)} \end{vmatrix}$$

$x^{(i)} = y^{(i)}$ und subtrahiren allgemein die $(p+i)^{\text{te}}$ Zeile von der i^{ten}, so zerfällt D in ein Product von zwei Unterdeterminanten, nämlich:

$$\left| 2y_1^{p-1}\sqrt{\varphi(y)} \dots 2y_2^{p-1}\sqrt{\varphi(y)} \right|$$

und

$$\left| y_1^{p-1}\sqrt{\psi(y)} \dots y_2^{p-1}\sqrt{\psi(y)} \right|.$$

Die erste derselben ist:

$$2^p \prod_i \sqrt{\varphi(y^i)} \cdot \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})$$

die zweite:

$$\prod_i \sqrt{\psi(y^{(i)})} \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)}).$$

Die Determinante reducirt sich daher auf:

$$2^p \prod_i \sqrt{f(y^{(i)})} \prod_i \prod_k{}' (y^{(i)} y^{(k)})^2.$$

Nun ist hier:

$$\sigma = 2^{-p} \cdot D \cdot M,$$

also folgt in der That:

Die zu Zerlegungen:

$$f_{2p+2} = \varphi_{p+1} \psi_{p+1}$$

gehörenden Sigmafunctionen reduciren sich für verschwindende w auf 1. (Kl. § 12).

§ 26.

Die Anfangsterme der Sigmareihen als Functionen der y, dy.

Um die Constantenbestimmung auch für $\mu > 0$ durchzuführen, ist es erforderlich, die Glieder niedrigster Dimension in den w zu berechnen, welche in den Sigmareihen auftreten. Diese Rechnung soll hier folgendermassen geführt werden: wir setzen in der Determinante

$$D_{\varphi_{p+1-2\mu} \psi_{p+1+2\mu}}$$

$x^{(i)} = y^{(i)} + dy^{(i)}$ und bestimmen die Glieder niedrigster Ordnung in den dy (§ 26); hierauf werfen wir allgemein die Frage auf, welche Gestalt eine Function der y und dy haben muss, um in eine Invariante der Form χ_x^{p-1} (Kl. 38), als deren Coefficienten die w betrachtet werden, überzugehen, wenn man die dy durch die linearen Glieder der Reihen (106) ersetzt (§ 27); schliesslich wenden wir die damit gewonnene allgemeine Vorschrift auf unsern speciellen Fall an (§ 27).

Um dies nun auszuführen, denken wir uns die Determinante entwickelt nach Producten von Unterdeterminanten aus den $(p+\mu)$ ersten Colonnen, welche φ, und aus den $(p-\mu)$ letzten, welche ψ enthalten. Von diesen Producten werden wir aber nur diejenigen beibehalten, welche Terme der niedrigsten Ordnung in den dy liefern.

Zur Bequemlichkeit der Ausdrucksweise denken wir uns, für jedes solche Product von Unterdeterminanten, die x und die y in verschiedene sogleich näher zu charakterisirende Gruppen:

$$\mathfrak{k},\ \mathfrak{x},\ X,\ \mathfrak{X}$$

bezw.:

$$\eta,\ \mathfrak{y},\ Y,\ \mathfrak{Y}$$

getheilt, in der Weise, dass solche Punkte, welche in der ursprünglichen Bezeichnungsweise denselben Index tragen, in der neuen durch Buchstaben desselben Alphabets bezeichnet werden sollen.

Betrachten wir nun eine Unterdeterminante aus den $(p+\mu)$ ersten Colonnen; sie sei bezeichnet mit:

$$(117)\qquad \begin{vmatrix} x_1^{p+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)} \cdots & x_2^{p+\mu-1}\sqrt{\varphi(x)} \\ -y_1^{p+\mu-1}\sqrt{\varphi(y)} \cdots & -y_2^{p+\mu-1}\sqrt{\varphi(y)} \end{vmatrix}.$$

Sie wird enthalten:

1) eine gewisse Anzahl λ von *Paaren gleichbezifferter* x, y; diese nennen wir ξ, η;

2) eine Anzahl m von einzelnen x, ohne die entsprechenden y; diese nennen wir $\mathfrak{x}$;

3) eine Anzahl n von einzelnen y, ohne die entsprechenden x; diese nennen wir Y.

Dabei ist:

$$(118)\qquad 2\lambda + m + n = p + \mu$$

und:

$$\lambda + m + n \leqq p$$

also:

$$(119)\qquad \lambda \geqq \mu.$$

Die zu (117) complementäre Unterdeterminante:

$$(120)\qquad \begin{vmatrix} x_1^{p-\mu-1}\sqrt{\psi(x)} \cdots x_2^{p-\mu-1}\sqrt{\psi(x)} \\ y_1^{p-\mu-1}\sqrt{\psi(y)} \cdots y_2^{p-\mu-1}\sqrt{\psi(y)} \end{vmatrix}$$

enthält dann:

1) die m den $\mathfrak{x}$ entsprechenden $\mathfrak{y}$;

2) die n den Y entsprechenden X;

3) $\frac{1}{2}(p-\mu-m-n) = \lambda - \mu$ *Paare* x, y; diese nennen wir $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$.

Lassen wir nun die x zu den y consecutiv werden, so wird (117) unendlich klein von der Ordnung λ, (120) von der Ordnung $\lambda - \mu$; das Product aus beiden also von der Ordnung $2\lambda - \mu$. Zufolge der Ungleichung (119) ist μ der kleinste Werth, welchen diese Zahl annehmen kann; da sich nun zeigen wird, dass die Glieder der Ordnung μ sich nicht gegenseitig zerstören, so haben wir zunächst:

Die $\sigma_{\varphi_{p+1-2\mu}\psi_{p+1-2\mu}}$ *werden für verschwindende* w *unendlich klein von der Ordnung* μ (Kl. § 10).

Zu gleicher Zeit sehen wir aber:

Um die Glieder der Ordnung μ *zu erhalten, braucht man nur diejenigen Producte von Unterdeterminanten zu berücksichtigen, in welchen:*

$$(121)\qquad \lambda = \mu$$

ist, also Paare x, y mit gleichem Index uur in der ersten Unterdeterminante, nicht in der zweiten vorkommen.

Jede dieser Unterdeterminanten, die wir nun weiter untersuchen, ist ein Differenzenproduct, multiplicirt mit Producten der $\sqrt{\varphi}$, $\sqrt{\psi}$.

Um diese Differenzenproducte bequem schreiben zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\Delta(\xi) = \prod_i \prod_k{}' (\xi^{(i)}\xi^{(k)}), \quad i < k;$$

$$R(\xi, \eta) = \prod_i \prod_k (\xi^{(i)}\eta^{(k)});$$

$$\Delta(\xi, \eta) = \Delta(\xi) \cdot \Delta(\eta) \cdot R(\xi, \eta)$$

(alle 3 Formeln auch dem Zeichen nach); ferner sei:

$$\varepsilon(\xi, \mathfrak{x}) = \pm 1,$$

je nachdem die Reihenfolge $(\xi', \xi'' \ldots \xi^{(\lambda)}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'' \ldots \mathfrak{x}^{(m)})$ wenn man die Bezeichnung $x^{(i)}$ restituirt, eine gerade oder ungerade Anzahl Inversionen der Indices i aufweist. (Die ξ u. s. f. *unter sich* sollen stets in derselben Reihenfolge genommen werden, in der sie unter den x auftreten).

Die Unterdeterminante (117) wird dann:

$$(-1)^{n+\mu}\varepsilon(\xi,\mathfrak{x})\cdot\varepsilon(\eta, Y)\cdot\Delta(\xi,\mathfrak{x},\eta, Y)\cdot\prod\sqrt{\varphi(\xi)}\prod\sqrt{\varphi(\mathfrak{x})}\prod\sqrt{\varphi(\eta)}\prod\sqrt{\varphi(Y)}$$

wo:

$$\Delta(\xi,\mathfrak{x},\eta, Y) = \Delta(\xi,\mathfrak{x})\cdot\Delta(\eta, Y)\cdot R(\xi,\eta)\cdot R(\xi, Y)\cdot R(\mathfrak{x},\eta)\cdot R(\mathfrak{x}, Y).$$

Setzen wir jetzt

$$\xi = \eta + d\eta, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{y} + d\mathfrak{y},$$

so geht:

$$R(\xi, \eta) \text{ über in: } (-1)^{\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}\Delta^2(\eta)\prod(\eta\, d\eta),$$

$$R(\mathfrak{x}, \eta) \qquad \text{in: } (-1)^{\mu m} R(\eta, \mathfrak{y});$$

die Unterdeterminante (117) reducirt sich also auf:

$$(122) \quad (-1)^{n+m\mu+\frac{1}{2}\mu(\mu-1)}\cdot\varepsilon(\eta, \mathfrak{y})\cdot\varepsilon(\eta, Y)\prod\sqrt{\varphi(\mathfrak{y})}\prod\sqrt{\varphi(Y)}\prod\big(\varphi(\eta)\cdot(\eta\, d\eta)\big)$$
$$\times\Delta^4(\eta)\Delta(\mathfrak{y})\Delta(Y)R^2(\eta, \mathfrak{y})R^2(\eta, Y)R(\mathfrak{y}, Y).$$

Ebenso wird nun die Unterdeterminante (120) umgestaltet; man erhält zunächst:

$$\Delta(X, \mathfrak{y})\prod\sqrt{\psi(X)}\prod\sqrt{\psi(\mathfrak{y})}$$

und beim Uebergang zur Grenze:

$$(123) \qquad (-1)^{mn}\Delta(\mathfrak{y})\Delta(Y)R(\mathfrak{y}, Y)\prod\sqrt{\psi(\mathfrak{y})}\prod\sqrt{\psi(Y)}.$$

Nun ist aber:

$$\Delta(y) = \pm\,\Delta(\eta)\,\Delta(\mathfrak{y})\,\Delta(Y)\,R(\eta,\mathfrak{y})\,R(\eta, Y)\,R(\mathfrak{y}, Y);$$

also wird das Product aus (122) und (126) gleich:

$$(-1)^{n+m(n+\mu)+\frac{1}{2}\mu(\mu-1)}\,\varepsilon(\eta,\mathfrak{y})\,\varepsilon(\eta, Y)\cdot\Delta^2(y)\prod\sqrt{f(\mathfrak{y})}\prod\sqrt{f(Y)}$$
$$\times\,\Delta^2(\eta)\prod\big(\varphi(\eta)(\eta\,d\eta)\big).$$

In der Entwickelung der Determinante D erscheint dieses Product mit einem Vorzeichen, das wir:

$$\varepsilon(\xi, \mathfrak{x}, \eta, Y \mid X, \mathfrak{y})$$

schreiben können und das sich durch die bereits eingeführten ε folgendermassen ausdrückt:

$$(-1)^{n(\mu+n)}\,\varepsilon(\xi, X)\,\varepsilon(\mathfrak{x}, X)\,\varepsilon(\eta,\mathfrak{y})\,\varepsilon(Y,\mathfrak{y}).$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\xi, X) &= \varepsilon(\eta, Y),\\ \varepsilon(\mathfrak{x}, X) &= (-1)^{mn}\varepsilon(Y,\mathfrak{y}),\end{aligned}$$

also wird das Vorzeichen mit Rücksicht auf (118) und (121)

$$(-1)^{pn}\varepsilon(\eta,\mathfrak{y})\,\varepsilon(\eta, Y)$$

und damit das Entwickelungsglied der Determinante D:

$$(124)\quad (-1)^{\mu(p-\mu)+\frac{1}{2}\mu(\mu-1)}\cdot\Delta^2(y)\cdot\prod\sqrt{f(y)}\cdot\Delta^2(\eta)\cdot\prod\frac{\varphi(\eta)\,(\eta\,d\eta)}{\sqrt{f(\eta)}}\,.$$

Die Determinante D selbst entsteht aus diesem Glied, wenn wir dasselbe für alle Möglichkeiten der Vertheilung der y in die 3 Gruppen η, $\mathfrak{y}$, Y bilden und alle so erhaltenen Glieder addiren. Die $\mathfrak{y}$, Y treten aber in (124) gar nicht mehr gesondert auf, sondern nur die η; zu bestimmten η gehören $2^{p-\mu}$ Arten die $\mathfrak{y}$, Y zu bestimmen; *also wird die Determinante D:*

$$(125)\quad \frac{(-1)^{\mu p+\frac{1}{2}\mu(\mu+1)}}{2^{p-\mu}}\cdot\Delta^2(y)\prod\sqrt{f(y)}\sum\left\{\Delta^2(\eta)\prod\frac{\varphi(\eta)\,(\eta\,d\eta)}{\sqrt{f(\eta)}}\right\},$$

die Summe erstreckt über alle Combinationen η der y zu je μ.

Multipliciren wir hier mit dem in (116) gefundenen Werth von M und mit der in (83) angegebenen numerischen Constanten, so erhalten wir den gesuchten *Ausdruck für die Glieder niedrigster Ordnung der σ in der Form:*

$$(126)\qquad \sum\left\{\Delta^2(\eta)\prod\frac{\varphi(\eta)\,(\eta\,d\eta)}{\sqrt{f(\eta)}}\right\}$$

mit derselben Bedeutung des Summenzeichens.

§ 27.

Die Anfangsterme der Sigmareihen als Functionen der w.

Um nun zu sehen wie sich der eben gefundene Ausdruck in eine Function der w umsetzen lässt, fragen wir umgekehrt, wie eine Function der w sich in eine solche der y, dy umsetzt, wenn nur die ersten Glieder der Reihen (105) berücksichtigt werden.

Die Function der w sei symbolisch durch die χ ausgedrückt (Kl.. Glchg. 38)*).

Betrachten wir zunächst eine Form, welche nur ein Symbol χ enthält, so können wir dieselbe jedenfalls in die Gestalt $(a\chi)^{p+1}$ setzen. Dann liefert die Umrechnung:

$$\begin{aligned}(a\chi)^{p-1} &= a_1^{p-1}\chi_2^{p-1} - (p-1)_1 a_1^{p-2} a_2 \chi_1 \chi_2^{p-2} + - \cdots \\ &= a_1^{p-1} w_1 + (p-1)_1 a_1^{p-2} a_2 w_2 + + \cdots \\ &= \sum^i \left\{ a_1^{p-1} y_1^{(i)p-1} + (p-1)_1 a_1^{p-2} a_2 y_1^{(i)p-2} y_2^{(i)} + \cdots \right\} \frac{(y^{(i)}\,dy^{(i)})}{\sqrt{f(y^{(i)})}} \\ &= \sum^i \frac{a_{y^{(i)}}^{p-1}(y^{(i)}\,dy^{(i)})}{\sqrt{f(y^{(i)})}}.\end{aligned}$$

Eine Form mit *zwei* Symbolen χ', χ'' können wir jedenfalls unter Einführung von zwei Reihen symbolischer Coefficienten solcher Beschaffenheit, dass erst die Producte $a_1^{p-\alpha} a_2^{\alpha-1} b_1^{p-\beta} b_2^{\beta-1}$ bestimmte Bedeutung haben, in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned}&(a\chi')^{p-1}(b\chi'')^{p-1} \\ &= \sum^\alpha \sum^\beta (-1)^{\alpha+\beta}(p-1)_\alpha (p-1)_\beta a_1^{p-\alpha} a_2^{\alpha-1} b_1^{p-\beta} b_2^{\beta-1} \chi_2'^{\,p-\alpha} \chi_1'^{\,\alpha-1} \chi_2''^{\,p-\beta} \chi_1''^{\,\beta-1} \\ &= \sum^\alpha \sum^\beta \sum^i \sum^k \Big\{ (p-1)_\alpha (p-1)_\beta a_1^{p-\alpha} a_2^{\alpha-1} b_1^{p-\beta} b_2^{\beta-1} \\ &\qquad \times y_1^{(i)p-\alpha} y_2^{(i)\alpha-1} y_1^{(k)p-\beta} y_2^{(k)\beta-1} \frac{(y^{(i)}\,dy^{(i)})}{\sqrt{f(y^{(i)})}} \frac{(y^{(k)}\,dy^{(k)})}{\sqrt{f(y^{(k)})}} \Big\} \\ &= \sum^i \sum^k \frac{a_{y^{(i)}}^{p-1} b_{y^{(k)}}^{p-1} (y^{(i)}\,dy^{(i)})\,(y^{(k)}\,dy^{(k)})}{\sqrt{f(y^{(i)})}\sqrt{f(y^{(k)})}}.\end{aligned}$$

So fortfahrend gewinnen wir die allgemeine Regel:

Gegeben sei eine Form der w beliebigen Grades durch ihren symbolischen Ausdruck vermittelst der χ. Soll diese unter Berücksichtigung nur der Anfangsglieder in Function der y, dy ausgedrückt werden, so ersetze man, unter $i, k \ldots$ irgend welche der Zahlen $1, 2, \ldots p$ verstanden:

$$\begin{aligned}\chi_1',\ \chi_2' \quad &\textit{durch} \quad -y_2^{(i)},\ y_1^{(i)}, \\ \chi_1'',\ \chi_2'' \quad &\textit{durch} \quad -y_2^{(k)},\ y_1^{(k)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

multiplicire mit dem Product

*) Sodass also $\chi_2^{p-1} = w_1$, $\chi_2^{p-2}\chi_1 = -w_2$, $\cdots$ $\chi_1^{p-1} = (-1)^{p-1} w_p$.

$$\frac{(y^{(i)}\,dy^{(i)})}{\sqrt{f(y^{(i)})}} \cdot \frac{(y^{(k)}\,dy^{(k)})}{\sqrt{f(y^{(k)})}} \cdots$$

und bilde von dem gewonnenen Ausdruck die Summe, indem man jede der Zahlen $i, k \ldots$ unabhängig von den andern die Werthe $1, 2, \ldots p$ durchlaufen lässt.

Umgekehrt zeigt diese Regel, wie eine Function der y, dy beschaffen sein muss, wenn sie in eine rationale Form der w sich soll umsetzen lassen, und wie diese Umsetzung, wenn sie überhaupt möglich ist, sich ausführen lässt.

In unserer Formel (126) erstreckt sich nun die Summe allerdings nicht über Variationen mit Wiederholung, sondern über Combinationen ohne Wiederholung. Allein der einzelne Term ist eine symmetrische Function derjenigen y, die er überhaupt enthält, und verschwindet, wenn zwei derselben einander gleich werden. Also können wir in (126) die Summe auch auf Variationen mit Wiederholung erstrecken, müssen aber dann mit $\mu!$ dividiren. Führen wir hierauf die Umsetzung aus, so gewinnen wir *für den Anfangsterm der Sigmareihe den symbolischen Ausdruck:*

$$(127) \qquad \frac{1}{\mu!}\prod_{i=1}^{\mu}(\varphi^{(i)}\chi^{(i)})^{p+1-2\mu}\prod_{1}^{k-1}{}_{i}\prod_{2}^{\mu}{}_{k}(\chi^{(i)}\chi^{(k)})^{2}$$

welcher, wie leicht zu sehen, mit (Kl. 68) identisch ist.

Durch diese Entwicklung ist sowohl der von Kl. gegebene Ausdruck für den Anfangsterm der Sigmareihe von neuem abgeleitet, als auch die a. a. O. noch unbestimmt gelassene numerische Constante bestimmt.

Einige Beispiele mögen explicit gegeben werden. Seien für $p = 2, 3, 4$ die Formen φ bezw.:

$$\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2,$$
$$\varphi_1 x_1^2 + 2\varphi_2 x_1 x_2 + \varphi_2 x_2^2,$$
$$\varphi_1 x_1^3 + 3\varphi_2 x_1^2 x_2 + 3\varphi_3 x_1 x_2^2 + \varphi_4 x_2^3,$$

so werden als erste Terme der zugehörigen Sigmareihen erhalten:

$p=2,\ \mu=1: \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2,$

$p=3,\ \mu=1: \varphi_1 w_1 + 2\varphi_2 w_2 + \varphi_3 w_3,$

$\mu=2: w_1 w_3 - w_2^2,$

$p=4,\ \mu=1: \varphi_1 w_1 + 3\varphi_2 w_2 + 3\varphi_3 w_3 + \varphi_4 w_4,$

$\mu=2: \varphi_1^2(w_1 w_3 - w_2^2) + \varphi_1\varphi_2(w_1 w_4 - w_2 w_3) + \varphi_2^2(w_2 w_4 - w_3^2).$

Für alle in der vorangehenden Abhandlung des Herrn Klein postulirten Eigenschaften der Sigmafunctionen sind somit die Beweise erbracht.

Göttingen, den 10. April 1888.

Ueber die Reduction hyperelliptischer Differentiale in rationaler Form.

Von

GEORG PICK in Prag.

Die Zerlegung hyperelliptischer Differentiale in eine Summe von (irreduciblen) Normalbestandtheilen wird gewöhnlich unter der Voraussetzung bewerkstelligt, dass die im Nenner des gegebenen Differentials enthaltenen ganzen Polynome in *aufgelöster Form* gegeben sind.*) Eine solche Reduction ist jedoch schon ohne diese Voraussetzung möglich, und zwar in *ausreichender* Weise, sofern es sich um die Erledigung von Fragen handelt, welche an sich zum gegebenen Differential in rationaler Beziehung stehen. Eine solche Frage ist beispielsweise die nach der algebraischen Integrabilität eines hyperelliptischen Differentials.

Ich erlaube mir im Folgenden die Vorschriften zusammenzustellen, nach denen man sich bei Ausführung der Reduction in rationaler Form etwa zu richten hat.**) Bei dem heutigen Stande der Algebra binärer Formen ist an eine allgemeine Lösung des Problems durch explicite (covariante) Ausdrücke natürlich nicht zu denken; doch habe ich die wesentlichen auftretenden Gleichungen, aus denen die Bestimmung der Reductionsgrössen zu erfolgen hat, jedesmal in covarianter Gestalt nochmals unter den Text gesetzt, um auf die covariante Natur der Grössen nachdrücklich hinzuweisen.

Bezüglich der Durchführung ist noch zu bemerken, dass von einer Rücksichtnahme auf scheinbare Ausnahmefälle, welche durch die nicht homogene Schreibweise sich einstellen, gänzlich abgesehen worden ist. Alle Angaben über Grad etc. der vorkommenden Polynome haben also nur bei homogener Schreibweise unbedingte Geltung.

---

*) Vgl. z. B. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale.

**) Wegen des analogen Problems für das ternäre Gebiet vgl. Noether im XXIII. Bande dieser Annalen.

1.

Partialbruchzerlegung.

Es sei

(1) $$\frac{M dx}{N\sqrt{f}} \left(= \frac{M(x_1, x_2) \cdot (x\,dx)}{N(x_1, x_2) \cdot \sqrt{f(x_1, x_2)}} \right)$$

ein gegebenes hyperelliptisches Differential; d. h. f ein ganzes Polynom in x vom Grade $(2p+2)$ mit lauter verschiedenen Linearfactoren; M und N aber beliebige ganze Polynome in x, nur der Bedingung unterworfen, dass der Grad von M den von N um $(p-1)$ übersteigt.

Um dieses Differential in der gewünschten Weise reduciren zu können, zerlegen wir zunächst N in folgender Weise. Erstens spalten wir N mit Zuhilfenahme von f in zwei Factoren, deren einer gegen f theilerfremd ist, deren anderer aber aus Linearfactoren besteht, die sämmtlich in f aufgehen. Zweitens zerlegen wir jeden dieser beiden Factoren weiter, indem wir immer alle Linearfactoren, welche in gleicher Multiplicität auftreten, zusammenfassen und aussondern. Zu alledem sind nach bekannten Sätzen nur rationale Operationen erforderlich. Im Ganzen zerfällt also N in lauter Factoren von der Form

$$\varphi^h,$$

worin h eine positive ganze Zahl, φ ein rational bekanntes Polynom mit lauter *einfachen* Linearfactoren bedeutet, welches entweder gegen f theilerfremd, oder ein Theiler von f ist. Alle in N auftretenden Polynome φ sind untereinander zu zweien relativ prim.

Hieraus folgt weiter eine Zerlegung von $\frac{M}{N}$ in lauter Summanden von der Form

$$\frac{\psi}{\varphi^h},$$

worin der Grad des Polynoms ψ den von φ^h um $(p-1)$ übersteigt. Die Möglichkeit einer solchen Partialbruchzerlegung ist unendlich vielfach und beruht auf folgendem. Wenn A, B zwei ganze Polynome ohne gemeinsamen Theiler sind, C ein beliebiges drittes Polynom, so lassen sich stets zwei Polynome Φ, Ψ auf rationale Weise so bestimmen, dass

$$\frac{C}{A \cdot B} = \frac{\Psi}{A} + \frac{\Phi}{B}.$$

Denn hiezu hat man offenbar nur die unbestimmte Gleichung

(2) $$A\Phi + B\Psi = C$$

aufzulösen, was unter den gemachten Voraussetzungen stets möglich ist. Es sei Φ_0, Ψ_0 ein Auflösungspaar, so lautet die allgemeinste Auflösung

$$\Phi = \Phi_0 + U \cdot B,$$
$$\Psi = \Psi_0 - U \cdot A,$$

unter U ein willkürliches Polynom verstanden. Man kann dann U jedenfalls so bestimmen, dass der Grad von Ψ den von A um irgend eine beliebige Zahl übersteigt, also z. B. um ebensoviel, als der Grad von C den von $A \cdot B$. Dann stellt sich von selbst die gleiche Differenz der Grade für Φ und B ein.

Da die Auflösung von Gleichungen der Form (2) auch im folgenden beständig als Postulat wiederkehrt, möge hier noch eine diesbezügliche Bemerkung Platz finden. Man bewerkstelligt die Auflösung entweder mittelst der Methode des grössten gemeinsamen Theilers, oder auch durch Ansetzung von Φ und Ψ mit unbestimmten Coefficienten, und Bestimmung dieser Coefficienten aus linearen Gleichungen; oder aber — was wenigstens theoretisch einer expliciten Auflösung am nächsten kommt — man geht von der bekannten Relation

$$AX + BY = R$$

aus, in welcher R die Resultante von A und B bedeutet, X und Y aber gewisse in Determinantenform gegebene Polynome sind; man hat nämlich so direct ein Lösungspaar von (2) in der Form

$$\Phi = X \cdot \frac{C}{R}, \quad \Psi = Y \cdot \frac{C}{R}.$$

2.

Reduction der einzelnen Partialbrüche.

Durch die bisherige Zerlegung stellt sich unser Differential als Summe einer Reihe von einfacheren Differentialen der Form

$$\frac{\psi\, dx}{\varphi^h \sqrt{f}}$$

dar, welche je nach dem Verhalten von φ zu f noch von zweierlei Beschaffenheit sein können.

Es sei m der Grad von φ, und erstens angenommen, dass φ gegen f relativ prim sei. Wir stellen die Forderung, ein Polynom Ψ vom Grade $[m(h-1)+p+1]$ derart zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$\frac{\psi\, dx}{\varphi^h \sqrt{f}} - d\left\{\frac{\Psi}{\varphi^{h-1}\sqrt{f}}\right\}$$

in den Nullpunkten von φ nur mehr in der $(h-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird. Sei a irgend eine Wurzel von $\varphi = 0$, so lautet das erste Glied in der Entwickelung von (3) nach Potenzen von $(x-a)$

$$\frac{dx}{(x-a)^h}\left\{\frac{\psi(a)}{\varphi'(a)^h \sqrt{f(a)}} + (h-1)\,\frac{\Psi(a)}{\varphi'(a)^{h-1}\sqrt{f(a)}}\right\}.$$

Wir haben also für jede Wurzel von $\varphi = 0$ die Relation zu erfüllen:

$$\psi(a) + (h-1)\Psi(a) \cdot \varphi'(a) = 0.$$

Die m Gleichungen, welche hiedurch repräsentirt sind, lassen sich offenbar in die eine Identität zusammenfassen:

(4) $$\psi = \Omega \cdot \varphi - (h-1)\Psi \cdot \varphi'^{*}),$$

in welcher Ω ein Polynom vom Grade $[m(h-1)+p]$ vorstellt. Aus dieser Identität ist Ψ nach den am Schlusse der vorigen Nummer angegebenen Regeln zu berechnen. Diese Berechnung, welche übrigens selbstverständlich im Allgemeinen noch eine Reihe von Constanten in Ψ willkürlich lässt, ist möglich, sobald

$$h > 1$$

ist. Für $h = 1$ dagegen führt (4) zu dem Resultat, dass ψ durch φ theilbar sein müsste, während von vornherein jeder gemeinsame Theiler von φ und ψ auszuschliessen ist.

Bilden wir jetzt die Differenz (3) mit Rücksicht auf (4), so nimmt dieselbe nach Ausführung einer Partialbruchzerlegung, wie sie in 1. geschildert worden ist, die Form

$$\frac{\psi_1\,dx}{\varphi^{h-1}\sqrt{f}} + \frac{\omega_1\,dx}{f\sqrt{f}}$$

an. Es ist nun klar, dass durch neuerliche Anwendung des oben erläuterten Processes auf den ersten Theil des gefunden Ausdrucks der Exponent von φ im Nenner abermals um eine Einheit herabgedrückt werden kann, und dass man, so fortfahrend, endlich auf einen *nicht mehr reducirbaren* Rest von der Form

$$\frac{\psi_0\,dx}{\varphi\sqrt{f}}$$

geführt wird, wie aus dem vorhin Gesagten hervorgeht. Im Ganzen stellt sich also die bewerkstelligte Reduction so dar:

(5) $$\frac{\psi\,dx}{\varphi^h\sqrt{f}} = \frac{\psi_0\,dx}{\varphi\cdot\sqrt{f}} + \frac{\omega_0\,dx}{f\sqrt{f}} + d\left\{\frac{\Psi_0}{\varphi^{h-1}\sqrt{f}}\right\}.^{**})$$

Wir machen zweitens die Voraussetzung, dass φ ein Theiler von f ist. Suchen wir hier das erste Glied in der Entwickelung von

$$\frac{\psi\,dx}{\varphi^h\sqrt{f}} - d\left\{\frac{\psi}{\varphi^{h-1}\sqrt{f}}\right\},$$

so ergiebt sich dasselbe gleich

$$\frac{dx}{(x-a)^{h+\frac{1}{2}}}\left\{\frac{\psi(a)}{\varphi'(a)^h\sqrt{f'(a)}} + \frac{2h-1}{2}\,\frac{\Psi(a)}{\varphi'(a)^{h-1}\sqrt{f'(a)}}\right\},$$

---

*) Mit bekannter Bezeichnungsweise lautet diese Gleichung in covarianter Schreibweise:

$$\psi = \Omega^* \cdot \varphi - m(h-1)\,(\Psi, \varphi)_1.$$

**) Es darf dabei angenommen werden, dass ψ_0 nicht durch φ theilbar sei; andernfalls könnte dieses Glied ganz weggelassen, nämlich in das folgende hineinbezogen werden.

so das wir jetzt für jede Wurzel a von $\varphi = 0$ die Relation

$$\psi(a) + \frac{2h-1}{2}\Psi(a)\varphi'(a) = 0$$

zu erfüllen haben werden, was wieder auf die Befriedigung der Identität

$$\psi = \Omega \cdot \varphi - \frac{2h-1}{2}\Psi \cdot \varphi' \text{*)} \quad , \tag{6}$$

hinausläuft. Es gilt nun Aehnliches wie im ersten Falle bezüglich der Fortsetzung des Verfahrens, nur, dass dasselbe jetzt um einen Schritt weiter getrieben werden kann. Man kommt also endlich auf eine Reductionsgleichung von der Form

$$\frac{\psi\,dx}{\varphi^h \sqrt{f}} = \frac{\omega_0\,dx}{f\sqrt{f}} + d\left\{\frac{\psi_0}{\varphi^{h-1}\sqrt{f}}\right\}. \tag{7}$$

3.

Schliessliches Resultat.

Durch die bisherigen Auseinandersetzungen erscheint ein beliebig gegebenes hyperelliptisches Differential auf eine Summe von Normalbestandtheilen folgender drei Arten zurückgeführt:

1. Eine Reihe von Differentialen „dritter Gattung" von der Form $\frac{\psi_0\,dx}{\varphi\sqrt{f}}$.

2. Differentiale „erster" und „zweiter Gattung" zusammenfassbar in ein Glied von der Form $\frac{\omega\,dx}{f\sqrt{f}}$.

3. Das vollständige Differential einer algebraischen Function.

Die Glieder der Form 1. sind ihrer Natur nach irreducibel. Nicht das gleiche gilt von dem Bestandtheil 2., mit welchem wir uns daher noch zu beschäftigen haben. Wir können dabei entweder direct untersuchen, wann ein Differential von der Form

$$\frac{\omega\,dx}{f\sqrt{f}}$$

das vollständige Differential einer algebraischen Function ist, oder aber wir führen die Reduction dieser Grösse weiter bis auf schlechthin irreducible Bestandtheile. Beide Arten der Untersuchung sollen jetzt durchgeführt werden.

Wenn eine Gleichung der Form

$$\frac{\omega\,dx}{f\sqrt{f}} = d\left\{\frac{Q}{\sqrt{f}}\right\} \tag{8}$$

bestehen soll, so müssen die Coefficienten der Reihenentwickelungen um die Nullpunkte von f beiderseits übereinstimmen. Dies giebt zunächst,

---

*) Oder: $\psi = \Omega^* \cdot \varphi - \frac{m(2h-1)}{2}(\Psi, \varphi)_1$.

wenn mit α ein solcher Nullwerth bezeichnet wird, $(2p+2)$ Gleichungen von der Form

$$\omega(\alpha) + \frac{1}{2} Q(\alpha) \cdot f'(\alpha) = 0,$$

oder, was dasselbe ist, die Identität

$$\omega = P \cdot f - \frac{1}{2} Q \cdot f'.\text{*)} \tag{9}$$

Dabei ist zu bemerken, dass der Grad von Q vorgeschrieben ist, nämlich $= p+1$.

Man erkennt leicht, dass in Folge dessen die Befriedigung von (9) durch geeignete Bestimmung von Q und P nicht jederzeit möglich ist, dass vielmehr ω selbst einer Reihe von (p) Bedingungen unterworfen erscheint, welche man erhält, indem man aus den linearen Gleichungen, welche aus (9) zur Bestimmung der Coefficienten von P und Q abzuleiten sind, diese Coefficienten sämmtlich eliminirt. Genügt ω diesen Bedingungen, so lässt sich Q gemäss (9) bestimmen, und es ist dann

$$\frac{\omega\, dx}{f\sqrt{f}} - d\left\{\frac{Q}{\sqrt{f}}\right\}$$

ein Differential *erster* Gattung. Es kommen jetzt also zu den schon gefundenen Bedingungen für ω noch p weitere, welche aussagen, dass dieses Restdifferential identisch verschwindet.**)

Bei der Durchführung des andern Verfahrens, nämlich der Fortsetzung des Reductionsprocesses bis zu wirklich irreduciblen Bestandtheilen zweiter Gattung, ist ein in gewissem Umfange willkürlich zu wählendes Hilfspolynom zu benützen. Wir führen diese Schlussreduction näher aus für zwei Fälle, welche wohl alle in practischer Hinsicht vortheilhaften Annahmen des Hilfspolynoms umfassen.

Erstens sei das Hilfspolynom A gegen f relativ prim; dasselbe ist dann vom p^{ten} Grade, sonst willkürlich anzunehmen. Es handelt sich in diesem Falle um die Bestimmung eines Polynoms Ω vom $(2p+1)^{\text{ten}}$ Grade, so dass

$$\frac{\omega\, dx}{f\sqrt{f}} - d\left\{\frac{\Omega}{A\sqrt{f}}\right\}$$

in den Nullpunkten von f nur mehr höchstens wie $f^{-\frac{1}{2}}$ unendlich wird. Eine ähnliche Rechnung, wie in den früheren Fällen, führt hier auf die Identität

---

*) Oder:

$$\omega = P^* \cdot f - (p+1)(Q, f)_1.$$

**) Man überzeugt sich leicht, dass diese letzteren Bedingungen nichts anderes sind, als jene Gleichungen, welche in der Identität

$$P^* = 0$$

enthalten sind, wo P^* das in der Anm. zu (9) vorkommende Polynom bedeutet.

(10) $$A\omega = \Pi \cdot f - \frac{1}{2}\Omega \cdot f',*)$$

aus welcher sich Ω jedesmal berechnen lässt. Die obige Differenz ist dann in der That ein irreducibles Differential.

Zweitens sei das Hilfspolynom

$$= (x-\alpha)^{p-1},$$

wo α eine Wurzel von $f=0$ ist. Zur Abkürzung bezeichnen wir $\frac{f}{x-\alpha}$ mit F. In diesem Falle ist Ω vom Grade $2p$ so zu bestimmen, dass

$$\frac{\omega\, dx}{f\sqrt{f}} - d\left\{\frac{\Omega}{(x-\alpha)^{p-1}\sqrt{f}}\right\}$$

in den Nullpunkten von F nur mehr höchstens wie $F^{-\frac{1}{2}}$ unendlich wird. Zur Bestimmung von Ω dient hier die Identität

(11) $$(x-\alpha)^{p-2} \cdot \omega = \Pi \cdot F - \frac{1}{2}\Omega \cdot F'.**)$$

Das Restdifferential ist auch hier irreducibel.

Die letztere Wahl des Hilfspolynoms ist die auch sonst meist gebräuchliche.

---

*) Oder:

$$A\omega = \Pi^* \cdot f - (p+1)(\Omega, f)_1.$$

**) Oder:

$$(\alpha x)^{p-2} \cdot \omega = \Pi^* \cdot F - \frac{2p+1}{2}(\Omega, F)_1.$$

Intégration par séries des équations différentielles linéaires*).

Par

G. Peano à Turin.

---

1. L'objet principal de cette Note est la démonstration du théorème suivant:

„Soient données les équations différentielles linéaires homogènes

$$\frac{dx_1}{dt} = r_{11}x_1 + \cdots + r_{1n}x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = r_{n1}x_1 + \cdots + r_{nn}x_n$$

où les r_{ij} sont des fonctions réelles de la variable t, continues dans l'intervalle (p, q), auquel appartiennent toutes les valeurs t, que nous allons considérer. Que l'on substitue dans les seconds membres des équations proposées, à la place de $x_1 \ldots x_n$, n constantes arbitraires $a_1 \ldots a_n$, et que l'on intégre entre t_0 et t; on obtiendra n fonctions $a_1' \ldots a_n'$ de t. Que l'on substitue de même dans les seconds membres des équations proposées, à la place de $x_1 \ldots x_n$ les fonctions $a_1' \ldots a_n'$, et que l'on intégre de t_0 à t; on obtiendra n nouvelles fonctions $a_1'' \ldots a_n''$. En opérant sur $a_1'' \ldots a_n''$ comme on a fait sur $a_1' \ldots a_n'$, on obtiendra les fonctions $a_1''' \ldots a_n'''$, et ainsi de suite. Les n séries

$$x_1 = a_1 + a_1' + a_1'' + \cdots, \quad \cdots, \quad x_n = a_n + a_n' + a_n'' \cdots$$

seront convergentes pour toutes les valeurs de t dans l'intervalle (p, q); leurs sommes sont des fonctions de t qui satisfont aux équations données, et qui, pour $t = t_0$, prennent les valeurs $a_1 \ldots a_n$."

Pour démontrer cette proposition, et en général pour l'étude des équations différentielles linéaires, il est très-utile d'introduire la considération des nombres complexes, ou nombres formés avec plusieurs unités, et de leurs substitutions. Ces questions ont été étudiées, sous

---

*) Cette Note est, avec peu de modifications, la traduction d'un travail publié dans les *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 20. *Febbraio* 1887.

différents points de vue, par **Grassmann**, **Hamilton**, **Cayley**, **Sylvester**, etc. Pour notre but il faut énoncer les définitions principales, et les propriétés qui en découlent immédiatement.*)

2. On appelle *nombre complexe*, ou *complexe*, d'ordre n, la suite de n nombres réels $x_1 \ldots x_n$, et on le désigne par la notation $[x_1, \ldots, x_n]$. Les nombres $x_1 \ldots x_n$ se nomment les éléments du nombre complexe donné. Nous indiquerons aussi un nombre complexe par une seule lettre $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_n]$, $\mathbf{y} = [y_1 \ldots y_n]$, etc.

Définition de l'égalité $\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y}) = (x_1 = y_1)\,(x_2 = y_2) \cdots (x_n = y_n).^{**)}$$

Déf. de la somme:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \cdots\ x_n + y_n].$$

Déf. du produit $k\mathbf{x}$, où k est un nombre réel:

$$k[x_1, \cdots, x_n] = [kx_1, \cdots, kx_n].$$

Déf. de la différence:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{y}.$$

Déf. du nombre complexe 0:

$$0 = [0,\ 0,\ \cdots\ 0].$$

On déduit que si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ sont des complexes d'ordre n, $k, k', \ldots$ dés nombres réels, $k\mathbf{x} + k'\mathbf{y} + \cdots$ répresente toujours un complexe. L'addition des nombres complexes est commutative et associative; son module est 0; le produit $k\mathbf{x}$ est distributif par rapport aux deux facteurs.

Si l'on pose

$\mathbf{i}_1 = [1, 0, 0, \cdots 0]$, $\mathbf{i}_2 = [0, 1, 0, \cdots 0]$, $\cdots$, $\mathbf{i}_n = [0, 0, \cdots, 0, 1]$, tout nombre complexe $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]$ pourra se réduire à la forme

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + \cdots + x_n\mathbf{i}_n.$$

3. On appelle *substitution* des nombres complexes d'ordre n une opération par laquelle à tout nombre complexe $\mathbf{x} = [x_1, \cdots x_n]$ correspond un autre complexe

$$[r_{11}x_1 + \cdots + r_{1n}x_n,\ \cdots,\ r_{n1}x_1 + \cdots + r_{nn}x_n]$$

---

*) Une exposition moins sommaire de cette théorie est contenue dans mon *calcolo geometrico, secondo l' Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, etc. *Torino* 1888

**) Dans cette formule, et dans quelques-unes de celles qui suivent, le signe = entre deux propositions indique leur équivalence; la conjonction de plusieurs propositions est indiquée en écrivant ces propositions l'une après l'autre. Ainsi cette formule signifie: „nous dirons que deux nombres complexes sont égaux entre eux, si les éléments des deux nombres sont respectivement égaux.“

dont les éléments sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments du complexe donné. Nous désignerons une substitution par la matrice

$$\left\{\begin{matrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{matrix}\right\} = \{r_{ij}\}$$

formée avec les n^2 coefficients de la substitution; nous indiquerons aussi une substitution par une seule lettre $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \ldots$ Si $\mathbf{x}$ est un nombre complexe, $\mathbf{R}$ une substitution, $\mathbf{R}\mathbf{x}$ représente le complexe qui dans la substitution $\mathbf{R}$ correspond à $\mathbf{x}$.

Définition de l'égalité de deux substitutions:

$(\mathbf{R} = \mathbf{S}) =$ (pour tout complexe $\mathbf{x}$ on a $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}$).

Déf. de l'égalité d'une substitution et d'un nombre réel k

$(\mathbf{R} = k) =$ (pour tout complexe $\mathbf{x}$ on a $\mathbf{R}\mathbf{x} = k\mathbf{x}$).

Déf. $\quad (\mathbf{R} + \mathbf{S})\,\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{x}.$

L'operation $\mathbf{R} + \mathbf{S}$ est une substitution qu'on appelle *somme* de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$.

Déf. $\quad \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{S}\mathbf{x}).$

L'operation $\mathbf{R}\mathbf{S}$ est une substitution qu'on nomme *produit* de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$.

On déduit:

$(\mathbf{R} = \mathbf{S}) =$ (les coefficients de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$ sont respectivement égaux).

$$\left\{\begin{matrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{matrix}\right\} = k.$$

$\{r_{ij}\} + \{s_{ij}\} = \{t_{ij}\}$, où $t_{ij} = r_{ij} + s_{ij}$.

$\{r_{ij}\} \cdot \{s_{ij}\} = \{t_{ij}\}$, où $t_{ij} = r_{i1}s_{1j} + r_{i2}s_{2j} + \cdots + r_{in}s_{nj}$.

Les sommes des substitutions sont commutatives et associatives; les produits d'une substitution par un complexe, ou de deux substitutions, sont distributifs; mais, en général, ils ne sont pas commutatifs. Deux substitutions $\mathbf{R}, \mathbf{S}$, telles que $\mathbf{R}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{R}$, se nomment *échangeables* entre elles. Une substitution égale à un nombre est échangeable avec toute substitution.

On pose aussi $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}\mathbf{R}$, etc. Si le déterminant formé avec les coefficients de $\mathbf{R}$ n'est pas nul, il résulte determinée une substitution $\mathbf{R}^{-1}$, qu'on appelle *l'inverse* de $\mathbf{R}$, telle que $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = 1$.

4. Nous dirons qu'un variable complexe $\mathbf{x}$, ou une substitution variable $\mathbf{R}$, a pour *limite* le complexe constant $\mathbf{a}$, ou la substitution

constante $\mathbf{A}$, si les éléments de $\mathbf{x}$, ou les coefficients de $\mathbf{R}$, ont pour limites les éléments de $\mathbf{a}$, ou les coefficients de $\mathbf{A}$. On prouve tout de suite les théorèmes sur les limites des sommes, des produits, etc. On définit la convergence des séries dont les termes sont des nombres complexes, ou des substitutions, comme pour les séries à termes réels ou imaginaires. La convergence d'une série dont les termes sont des nombres complexes, ou des substitutions, emporte la convergence des n séries formées avec les éléments des termes complexes, ou des n^2 séries formées avec les coefficients des substitutions.

Si le complexe, ou la substitution, $\mathbf{x}(t)$ est fonction de la variable numerique t, on pose

$$\mathbf{x}'(t) = \lim \frac{1}{h}[\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)], \quad \text{pour} \quad h = 0.$$

On déduit les définitions des dérivées successives, des différentielles, des intégrales définies et indéfinies, etc. On a les formules

$$d(\mathbf{R}+\mathbf{S}) = d\mathbf{R} + d\mathbf{S}, \qquad d\cdot\mathbf{RS} = d\mathbf{R}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{R}\cdot d\mathbf{S},$$
$$d\cdot\mathbf{R}^2 = d\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} + \mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}, \qquad d\cdot\mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}^{-1}\cdot d\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^{-1}, \text{ etc.}$$

5. Pour simplifier les recherches sur les limites, nous introduirons les *modules* des complexes et des substitutions.

Déf. $\quad \text{mod.}\,\mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}; \quad \text{mod.}\,\mathbf{x} \geq 0.$

On déduit:

$$(\lim \mathbf{x} = \mathbf{a}) = (\lim(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0).$$

Une série à termes complexes est convergente si la série formée avec les modules des termes est convergente.

De l'identité

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + + \cdots + y_n^2) - (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2$$
$$= \sum (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

on déduit

(a) $$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq \text{mod.}\,\mathbf{x}\ \text{mod.}\,\mathbf{y}.$$

Multiplions par 2, ajoutons $(\text{mod.}\,\mathbf{x})^2 + (\text{mod.}\,\mathbf{y})^2$, et extrayons la racine carrée; on a

(b) $$\text{mod.}\,(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq \text{mod.}\,\mathbf{x} + \text{mod.}\,\mathbf{y}.$$

Soit $\mathbf{x}$ une fonction de la variable réelle t; on a:

$$\frac{d\cdot\text{mod.}\,\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\text{mod.}\,\mathbf{x}}\left(x_1\frac{dx_1}{dt} + \cdots + x_n\frac{dx_n}{dt}\right),$$

d' où, par la (a),

$$\frac{d\cdot\text{mod.}\,\mathbf{x}}{dt} \leq \text{mod.}\,\frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Posons $\mathbf{x}$ au lieu de $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$, et intégrons de t_0 à $t_1 > t_0$; on déduit

$$\text{(c)} \qquad \text{mod.} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}\, dt \leq \int_{t_0}^{t_1} (\text{mod.}\, \mathbf{x})\, dt.$$

Déf.

$$\text{mod.}\, \mathbf{R} = \text{maximum de } \frac{\text{mod.}\, (R\mathbf{x})}{\text{mod.}\, \mathbf{x}},$$

où $\mathbf{x}$ est un complexe quelconque.

Ce maximum est déterminé et fini, car $\left(\frac{\text{mod.}\, (\mathbf{R}\mathbf{x})}{\text{mod.}\, \mathbf{x}}\right)^2$ est le quotient de deux formes quadratiques dans les éléments de $\mathbf{x}$, et le dénominateur est une forme définie. On déduit:

$$\text{(d)} \qquad \text{mod.}\, (\mathbf{R}\mathbf{x}) \leq \text{mod.}\, \mathbf{R} \cdot \text{mod.}\, \mathbf{x}.$$

On a:

$$\begin{aligned} \text{mod.}\, (\mathbf{R}+\mathbf{S}) &= \text{max.}\, \frac{\text{mod.}\, [(\mathbf{R}+\mathbf{S})\,\mathbf{x}]}{\text{mod.}\, \mathbf{x}} = \text{max.}\, \frac{\text{mod.}\, (\mathbf{R}\mathbf{x}+\mathbf{S}\mathbf{x})}{\text{mod.}\, \mathbf{x}} \\ &\leq \text{max.}\, \frac{\text{mod.}\, (\mathbf{R}\mathbf{x}) + \text{mod.}\, (\mathbf{S}\mathbf{x})}{\text{mod.}\, \mathbf{x}} \\ &\leq \text{max.}\, \frac{\text{mod.}\, \mathbf{R} \cdot \text{mod.}\, \mathbf{x} + \text{mod.}\, \mathbf{S} \cdot \text{mod.}\, \mathbf{x}}{\text{mod.}\, \mathbf{x}} \\ &= \text{mod.}\, \mathbf{R} + \text{mod.}\, \mathbf{S}, \end{aligned}$$

en vertu des formules (b) et (d), et d'identités connues. On déduit:

$$\text{(e)} \qquad \text{mod.}\, (\mathbf{R}+\mathbf{S}) \leq \text{mod.}\, \mathbf{R} + \text{mod.}\, \mathbf{S}.$$

On a:

$$\begin{aligned} \text{mod.}\, (\mathbf{R}\mathbf{S}) &= \text{max.}\, \frac{\text{mod.}\, (\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{x})}{\text{mod.}\, \mathbf{x}} \leq \text{max.}\, \frac{\text{mod.}\, \mathbf{R} \cdot \text{mod.}\, (\mathbf{S}\mathbf{x})}{\text{mod.}\, \mathbf{x}} \\ &\leq \text{max.}\, \frac{\text{mod.}\, \mathbf{R} \cdot \text{mod.}\, \mathbf{S} \cdot \text{mod.}\, \mathbf{x}}{\text{mod.}\, \mathbf{x}} = \text{mod.}\, \mathbf{R} \cdot \text{mod.}\, \mathbf{S}, \end{aligned}$$

d'où

$$\text{(f)} \qquad \text{mod.}\, (\mathbf{R}\mathbf{S}) \leq \text{mod.}\, \mathbf{R} \cdot \text{mod.}\, \mathbf{S}.$$

On déduit

$$\text{mod.}\, \mathbf{R}^n \leq (\text{mod.}\, \mathbf{R})^n.$$

Les formules précédentes suffisent pour notre but. On peut encore ajouter que le carré de mod. $\mathbf{R}$ est la plus grande racine de l'équation en λ:

$$\begin{vmatrix} r_{11}^2 + r_{21}^2 + \cdots + r_{n1}^2 - \lambda, & r_{11}r_{12} + \cdots + r_{n1}r_{n2}, & \cdots \\ r_{11}r_{12} + \cdots + r_{n1}r_{n2}, & r_{12}^2 + r_{22}^2 + \cdots + r_{n2}^2 - \lambda, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

dont les racines sont toutes positives, ou nulles. On déduit

$$\text{mod.}\, \mathbf{R} \leq \sqrt{r_{11}^2 + \cdots + r_{1n}^2 + \cdots + r_{n1}^2 + r_{nn}^2}.$$

car la quantité sous le signe radical est la somme des racines de l'équation en λ.

6. Démontrons maintenant le théorème énoncé. Posons

$$\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n], \qquad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Le système d'équations données se reduira à l'équation unique

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Soit $\mathbf{a}$ un complexe constant quelconque. Posons:

$$\mathbf{a}' = \int \mathbf{R}\mathbf{a}\, dt, \quad \mathbf{a}'' = \int \mathbf{R}\mathbf{a}'\, dt, \quad \mathbf{a}''' = \int \mathbf{R}\mathbf{a}''\, dt, \cdots,$$

où les intégrales s'étendent de t_0 à t. On doit prouver que la série

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{a}' + \mathbf{a}'' + \cdots \tag{2}$$

est convergente, et que sa somme $\mathbf{x}$ est une fonction de t (qui, évidemment, a la valeur $\mathbf{a}$ pour $t = t_0$) satisfaisant à l'équation (1). En effet puisque les r_{ij} sont des fonctions continues de t dans l'intervalle (p, q), mod. $\mathbf{R}$ sera aussi une fonction continue de t, et soit m son maximum. En supposant, pour simplifier, $t > t_0$, on a:

$$\text{mod. } \mathbf{a}' \leq \int \text{mod. } (\mathbf{R}\mathbf{a})\, dt \leq \int \text{mod. } \mathbf{R} \cdot \text{mod. } \mathbf{a} \cdot dt \leq m \cdot \text{mod. } \mathbf{a}(t - t_0),$$

$$\text{mod. } \mathbf{a}'' \leq \int \text{mod.} (\mathbf{R}\mathbf{a}')\, dt \leq \int \text{mod. } \mathbf{R} \cdot \text{mod. } \mathbf{a}' \cdot dt \leq \tfrac{1}{2} m^2 \cdot \text{mod.} \mathbf{a} \cdot (t - t_0)^2, \text{ etc.}$$

$$\text{mod.} \mathbf{a}^{(n)} \leq \frac{1}{n!} m^n \cdot \text{mod. } \mathbf{a} \cdot (t - t_0)^n.$$

Donc la série (2) est uniformément convergente, car les modules des termes sont moindres que des quantités constantes qui forment une série convergente. En différentiant les termes de (2) on obtient la série $0 + \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{R}\mathbf{a}' + \cdots$, qui converge uniformément vers $\mathbf{R}\mathbf{x}$. Donc $\mathbf{x}$ satisfait bien à l'équation proposée.

7. Substituons dans la (2) aux termes $\mathbf{a}', \mathbf{a}'', \mathbf{a}''', \cdots$ leurs valeurs; on obtient:

$$\mathbf{x} = \left(1 + \int \mathbf{R}\, dt + \int \mathbf{R} \int \mathbf{R}\, dt^2 + \cdots\right) \mathbf{a}.$$

Posons:

$$\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0} = 1 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}\, dt^2 + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{R}\, dt^3 + \cdots.$$

Alors, $\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}$ représente une substitution telle, que si $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}_1$ sont les valeurs, pour $t = t_0$ et $t = t_1$, d'un complexe $\mathbf{x}$ qui satisfait à l'équation (1), on a:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{E}\binom{t_1}{t_0} \cdot \mathbf{x}_0.$$

On déduit:

$$\mathbf{E}\binom{t_0}{t_1} \cdot \mathbf{E}\binom{t_1}{t_0} = 1,$$

$$\mathbf{E}\binom{t_2}{t_0} = \mathbf{E}\binom{t_2}{t_1}\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}.$$

Si l'on pose $s = r_{11} + r_{22} + \cdots + r_{nn}$, le déterminant de la substitution $\mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}$ a pour valeur $e^{\int_{t_1}^{t_0} s\,dt}$. Ce déterminant est donc toujours positif.

En posant $\mathbf{E} = \mathbf{E}\binom{t_1}{t_0}$, on déduit

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt_1} = \mathbf{R}\mathbf{E}, \quad -\frac{d\mathbf{E}}{dt_0} = \mathbf{E}\mathbf{R}.$$

Si dans les équations différentielles proposées, les coefficients r_{ij} sont des constantes, on peut calculer les intégrales: en supposant $t_0 = 0$ on a:

$$\mathbf{x} = \left[1 + \mathbf{R}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{R}t)^2 + \cdots\right]\mathbf{a},$$

ou, en posant $e^{\mathbf{R}} = 1 + \mathbf{R} + \frac{1}{2!}\mathbf{R}^2 + \cdots$,

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{R}t}\,\mathbf{a}.$$

Si la substitution $\mathbf{R}$ est variable, mais que ses différentes valeurs sont échangeables entre elles, on obtient

$$\mathbf{x} = e^{\int \mathbf{R}\,dt}\,\mathbf{a}.$$

L'équation différentielle $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{p}$, où $\mathbf{p}$ est un complexe fonction de t, équivaut à n équations différentielles linéaires non homogènes. Son intégral est

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{a} + \mathbf{E}\int \mathbf{E}^{-1}\mathbf{p}\,dt,$$

qu'on peut aussi représenter par la série

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{a} + \int \mathbf{p}\,dt + \int \mathbf{R}\int \mathbf{p}\,dt^2 + \int \mathbf{R}\int \mathbf{R}\int \mathbf{p}\,dt^3 + \cdots.$$

Turin, Avril 1888.

INHALT.

☞ Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XXXII. Band. 4. Heft.

Mit drei lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.

Beiträge zur Analysis situs.

I. Aufsatz.

Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Von

Walther Dyck in München.

[Mit drei lithogr· Tafeln.]

Einleitung.

In den Untersuchungen, welche die folgenden Seiten — zunächst in einem ersten Aufsatze — enthalten, handelt es sich, unter gleichmässiger Berücksichtigung geometrischer wie analytischer Daten, um eine systematische Entwickelung derjenigen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten, welche denselben im Sinne der Analysis situs zukommen, also sich ausschliesslich auf die Anordnungsverhältnisse derselben beziehen.

Es sind hierbei absolute und relative Eigenschaften zu unterscheiden, soferne dieselben eine Mannigfaltigkeit an sich besitzt, oder nur in ihrer Verbindung mit anderen Mannigfaltigkeiten.*) Die absoluten Eigenschaften können auch als diejenigen bezeichnet werden, deren Uebereinstimmung für zwei Mannigfaltigkeiten nothwendig und hinreichend ist für die Herstellung umkehrbar eindeutiger stetiger Beziehung zwischen *allen* Elementen der beiden Mannigfaltigkeiten**).

---

*) Dieser Unterschied findet sich wohl zuerst betont in dem Aufsatze von Klein „Ueber den Zusammenhang der Flächen" (Zweite Abhandlung), diese Annalen Bd. XI, (1875) pag. 478.

**) Es sei hier hervorgehoben, dass es sich dabei um *stetige Beziehungen stetiger Mannigfaltigkeiten* handelt, d. h. um solche Beziehungen, bei welchen Nachbarelemente wieder in Nachbarelemente übergehen. Beziehungen also, wie die Cantor-Lüroth'schen Abbildungen on Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen aufeinander (man vergl. hier insbesondere den Aufsatz von Cantor „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" im 84. Bd. von Crelle's Journal (1877) und weiter dessen Notiz in den Göttinger Nachrichten v. J. 1879; sodann die Aufsätze von Lüroth in den Erlanger Berichten v. J. 1878 und in den Math.

Für zwei Dimensionen sind *die absoluten Eigenschaften in geometrischer Darstellung* wohlbekannt in der Theorie des Zusammenhangs von Flächen, wie sie von Riemann und Neumann*) aufgestellt

---

Annalen Bd. XXI, (1882) „Ueber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe") sind von vorneherein als *unstetige* auszuschliessen.

Weiter ist wohl zu beachten, dass die Uebereinstimmung jener absoluten Eigenschaften für die beiden Mannigfaltigkeiten *nicht mehr* erforderlich ist, sobald wir nur *im Allgemeinen* eindeutig umkehrbare Beziehung verlangen, also Ausnahmeelemente zulassen. So vergleiche man Klein's noch weiter zu erwähnende Abhandlung „Ueber den Zusammenhang der Flächen" (Erste Abhandlung), Math. Annalen Bd. VII, (1874) pag. 554, wo für den Fall eindeutig umkehrbarer algebraischer Beziehung zweier Flächen aufeinander das Auftreten von Fundamentalpunkten und zugehörigen Fundamentalcurven berücksichtigt wird; man sehe hiezu auch die beiden weiteren Abhandlungen Klein's „Ueber eine neue Art Riemann'scher Flächen" im VII. u. X. Bde. dieser Annalen.

Der Satz, dass für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten (Flächen) die Uebereinstimmung der sogleich zu besprechenden „Zusammenhangszahl" und der Anzahl der eindimensionalen Begrenzungen (Randcurven) derselben als einzige absolute Eigenschaften von aus einem einzigen Stück bestehenden Mannigfaltigkeiten (Flächen) nothwendig und hinreichend ist für die Möglichkeit umkehrbar eindeutiger Beziehung zwischen allen Elementen solcher Mannigfaltigkeiten, ist wohl zuerst von C. Jordan bewiesen worden. Man vergl. hierzu die Abhandlung „Sur la déformation des surfaces" in Liouville's Journal, Serie 2, Bd. XI. (1866). Für die genauere Formulirung sehe man auch im Nachfolgenden Theil II, § 5 p. 488.

*) Riemann. „Theorie der Abel'schen Functionen" (1857); Werke p. 84ff., sowie „Fragment aus der Analysis situs" pag. 448.

Neumann. Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen. 1. Aufl. 1865, pag. 291ff., 2. Aufl. 1884, pag. 146ff.

Was speciell gestaltliche Eigenschaften „Riemann'scher Flächen" betrifft, so seien hier auch noch die Untersuchungen von Lüroth und Clebsch in Bd. IV u. VI dieser Annalen erwähnt über die Herstellung gewisser canonischer Formen; ferner die zuerst von Klein gebrauchte Form der „frei im Raum gelegenen Riemann'schen Flächen", sowie dessen in den schon oben erwähnten Aufsätzen gegebene „neue Art von Riemann'schen Flächen."

Weiter sei hier erwähnt ein Aufsatz von Clifford „On the canonical Form and Dissection of a Riemann's surface". Proceedings of the London Math. Soc. vol. 8 (1877), sowie ein neuerdings erschienenes Werkchen von F. Hofmann „Methodik der stetigen Deformation von zweiblättrigen Riemann'schen Flächen" Halle a/S. Nebert's Verlag 1888, in welchem die Umformung solcher Flächen in canonische Formen besonders anschaulich besprochen wird. Es sei mir dabei gestattet, bezüglich eines Abschnittes der Hofmann'schen Darstellung (Nr. 8, p. 27ff.) die Richtigstellung eines Citats zu geben. Die dort besprochene Conception der doppelseitigen Flächen bezieht sich *nicht* auf die „neue Art Riemann'scher Flächen", wie sie Klein am soeben erwähnten Ort, Annalen VII u. X, gegeben hat, vielmehr auf die wesentlich davon verschiedene, an Schwarz und Schottky anknüpfende Auffassung doppelseitiger Riemann'scher Flächen als *symmetrischer* Flächen, sei es nun, dass man es mit einfachen oder mit sog. Doppelflächen zu thun habe. Man vergl. hierzu die Untersuchungen von Schwarz in Crelle's Journal Bd. 70 (1869) u. 75 (1872), u. den Berliner Monatsberichten v. J. 1865; weiter wurde; weiter durch die an Euler und L'Huilier*) anknüpfenden und auch auf mehr Dimensionen ausgedehnten Untersuchungen Listing's**) und die von Möbius***); endlich hat Betti†) für drei und mehr Dimensionen den Riemann'schen analoge Formulirungen gegeben, auf die in neuester Zeit Picard††) zurückgekommen ist.

Zu den *geometrischen Untersuchungen relativer Eigenschaften* gehören die Arbeiten über die Gestalten und Verschlingungen ebener und räumlicher Curven von Listing, Tait, F. Meyer, Simony†††) u. a.

Schottky in Crelle's J. Bd. 83, (1877) sowie die Ausführungen von Klein in „Riemann's Theorie der algebraischen Functionen" (Leipzig 1882) pag. 78ff.

Noch sei bezüglich der an Riemann anschliessenden Betrachtungsweisen der Aufsatz von Lippich „Untersuchungen über den Zusammenhang der Flächen" Annalen, Bd. VII, Schläfli's Aufsatz „Ueber die linearen Relationen zwischen den $2p$ Kreiswegen erster Art etc." in Crelle's Journal Bd. 76 (1873), sowie die bez. Abschnitte in Clebsch-Gordan's „Theorie der Abel'schen Functionen" (1866) erwähnt.

*) Der Euler'sche Polyedersatz ist, wie Baltzer (Monatsberichte der Berliner Akademie vom J. 1861) bemerkt hat, schon in einem Fragment von Descartes enthalten. Die Ausdehnung des Euler'schen Satzes auf sternförmige Polyeder (mehrfache Kugelbedeckung) hat Poinsot 1809 im 10. Heft (5. Bd.) des Journal de l'école polyt. gegeben, während die erste Darlegung der weiteren „Ausnahmefälle" des Euler'schen Satzes von L'Huilier (mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg 1811, Gergonne's Annalen Bd. 3, 1812) herrührt.

**) Listing, Census räumlicher Complexe, Göttinger Abh. Bd. X, (1861), sowie Göttinger Nachr. 1867.

***) Möbius, Werke Bd. II und zwar: „Theorie der elementaren Verwandtschaft" (Sitzungsber. der Ges. d. W. zu Leipzig, Bd. 15, 1863); „Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders" (ebenda, Bd. 17, 1867); „Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft" (zum ersten Mal in den gesammelten Werken aus dem Nachlass veröffentlicht).

†) Betti. „Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni". Annali di Matematica, Serie II, Bd. 4. 1870.

††) Picard, „Sur les fonctions hyperabéliennes". Liouville, Journal de math. Se. IV, Bd. 1, p. 106. (1885).

†††) Man sehe: Listing, insbesondere in den „Vorstudien zur Topologie" (Göttinger Studien v. J. 1847).

Tait in der grossen Abhandlung „On knots", Transactions of the Royal Society of Edinburgh vom Jahre 1879, dann v. J. 84 u. 86 und in den Proceedings der gleichen Gesellschaft a. d. J. 1876—79.

Daran anschliessend eine Reihe von Abhandlungen von Kirkmann, gleichfalls in den vorgenannten Bänden der Transactions und Proceedings, sowie von Little in den Transactions of the Connecticut Academy v. J. 1885.

Franz Meyer in seiner Inaug.-Diss. „Anwendungen der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Curven" (1878) und „Ueber algebraische Knoten" in den Proceedings of the R. Soc. of Edinburgh v. J. 1885—86.

Simony, „Neue Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie", Math. Ann. Bd. XIX u. XXIV, sowie eine Reihe von Aufsätzen in den Sitzungsberichten der Wiener Akad. vom Jahre 1881, 82, 83, 87; und ebenda anschliessende Arbeiten von Koller u. Schuster.

Analytische Darstellungen von Raumcurven mit Knoten sind von Brill

Analytische Formulirungen gewisser Eigenschaften der Lage ebener und räumlicher Gebilde gehen in erster Linie auf Gauss zurück (die Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra von 1799 und 1849, Definition und Darstellung der Curvatura integra von Flächen, dann insbesondere die Potentialsätze in der „Theoria attractionis . . .“ (1813) und in den „Allgemeinen Lehrsätzen“ . . . (1839) (Werke Bd. V), endlich die analytische Darstellung der Umschlingung zweier Curven*) (1833), weiter auf Cauchy (das sog. Cauchy'sche Integral, seine Verwerthung zum Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra); andererseits, auf den Satz von Sturm über die Bestimmung der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen gegebenen Grenzen und die daran sich schliessenden Untersuchungen von Sylvester, Hermite, Jacobi, Brioschi u. a.**).

(diese Annalen Bd. XVIII) (welcher die algebraischen Raumcurven niedrigster, 5ter Ordnung mit dieser Eigenschaft angiebt), dann von Hoppe, Durège, Schlegel (Grunerts Archiv Bd. 64 u. 65, Wiener Akademie-Berichte Bd. 82 (1880), Schlömilch's Zeitschrift Bd. 28) gegeben.

*) Wegen der Beziehung des von Gauss (Werke Bd. V, pag. 605) gegebenen Integrals für die Umschlingung zweier Curven zur Theorie der galvanischen Ströme sehe man noch die Bemerkungen von Schering am Schlusse des genannten Bandes, sowie die von Schering veranlasste Dissertation von Böddiker „Erweiterung der Gauss'schen Theorie der Verschlingungen“. Weiter noch Maxwell's „Treatise on Electricity and Magnetism“ Second Ed. (1881), § 417—422 und die Abhandlungen von Thomson „On vortex motion“ und „On vortex statics“ Transactions of the Royal Society of Edinburgh, vol. 25, (1869) bez. vol. 27, (1875).

Hier anschliessend sind auch noch die physicalischen Untersuchungen zu erwähnen, in welchen das Auftreten von Flächen und Körpern höheren Zusammenhangs für das Verhalten von Potentialfunctionen in Betracht gezogen wird; so sehe man ausser den eben genannten Abhandlungen von Thomson die Bemerkung bei Helmholtz in der Abhandlung „Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“ Crelle, Bd. 55, pag. 27 (1858); weiter Riemann's Vorlesungen über „Schwere, Electricität und Magnetismus“ (1876) § 83 u. ff.; in dem eben erwähnten Werke von Maxwell die Artikel 18—28, 100, 113; in dem Buche von Lamb „A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids“ (1879) die Artikel 53—59, 66, 67, 120 und Note B.

**) Sturm, im Bulletin de Férussac vol. XI, pag. 419 (1829), ausführlicher in den Mémoires présentés par divers savants, vol. VI (1835).

Sylvester, insbesondere in „On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions“ Philosophical Transactions. London. Part. III (1853).

Hermite, „Sur l'extension du théorème de M. Sturm“ (Comptes rendus, Bd. 35, pag. 52 (1852), u. Bd. 36, pag. 294 (1853), sowie Jacobi, Crelle's Journal Bd. 30, pag. 127 ff. u. Bd. 53, pag. 265 ff. (Werke Bd. III). Hierzu die historischen Bemerkungen von Borchard, gleichfalls in Crelle's Journal Bd. 53.

Brioschi insbesondere in den beiden Aufsätzen in den Nouvelles Annales de mathématiques Bd. 13 (1854) und Bd. 15 (1856) „Sur les fonctions de Sturm“ und „Sur les séries qui donnent le nombre de racines réelles etc.

Man vergleiche bezüglich der Litteratur noch die zusammenfassende Dar-

An diese Untersuchungen knüpfen die Arbeiten von Kronecker über die Sturm'schen Functionen und über Systeme von Functionen mehrer Variabeln*) an; er giebt in seiner Charakteristik eines Functionensystems einerseits die von Sylvester vermuthete allgemeinste Formulirung der Sturm'schen Untersuchungen für beliebig viele Variable und stellt andererseits in der Darstellung der Charakteristik durch ein bestimmtes Integral den Zusammenhang dieser Untersuchungen zu den anderen von Gauss und Cauchy fest. Gleichzeitig sind damit die Grundlagen für die analytische Behandlung aller Fragen der Analysis situs gegeben.

Der vorliegende Aufsatz**) verbindet die geometrische und analytische Behandlung für die *Frage nach den absoluten Charakteristiken ein- und zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten*. Der hiebei eingeschlagene Weg führt dann weiter zu gewissen *relativen Eigenschaften*, die sich auf Curvensysteme auf beliebigen Flächen, sowie auf Flächensysteme in unserem Raume beziehen.

I. *Die geometrische Herleitung einer charakteristischen Zahl* (je im I. Abschnitt behandelt) wird an eine rein gestaltliche Herstellung der Mannigfaltigkeiten geknüpft, deren Grundzüge als für alle Dimensionen gemeinsam gleich hier vorangestellt seien.

Wir gehen aus von bestimmten Elementargebilden und fixiren gewisse typische Processe zur Umformung derselben. Indem wir dann

a) je die *Elementargebilde* mit der charakteristischen Zahl 1 behaften und

b) die *Umformungsprocesse* zunächst zur Herstellung neuer Elementargebilde, beziehungsweise zur Vernichtung vorhandener benützen, lassen sich, positive und negative Operationen dabei unterscheidend, auch die einzelnen Processe mit den Zahlen + 1 und — 1, ihrem Einfluss auf die entstehenden Mannigfaltigkeiten entsprechend, bezeichnen. Diese Zählung der Umformungsprocesse behalten wir bei, auch wo sie *andere* Veränderungen einer Mannigfaltigkeit hervorrufen als die eben erwähnten und gelangen, indem wir

c) die Abzählung der successive auf ein Elementargebilde 1 an-

---

stellung von Hattendorf: „Die Sturm'schen Functionen" (Hannover 1874) und insbesondere die sogleich zu nennenden Abhandlungen Kronecker's.

*) Kronecker „Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln", Monatsberichte der Berliner Akad. 1869, p. 159 u. 688; dann „Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen", ebenda 1873, p. 117; weiter „Ueber Sturm'sche Functionen" und „Ueber die Charakteristik von Functionensystemen", ebenda 1878, p. 95, bez. p. 145.

**) Die weitere Ausführung zweier, der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (Juli 1885 und Februar 1886) vorgelegten Mittheilungen, „Beiträge zur Analysis situs I und II".

gewandten Operationen ihrer Summe nach fixiren, zu einer *charakteristischen Zahl* für die entstandene Mannigfaltigkeit.

Die Zahl gewinnt dadurch ihre fundamentale Bedeutung, dass wir ihre *Unabhängigkeit von dem jeweils zu Grunde gelegten Entstehungsprocess* darthun und lässt gleichzeitig die Eigenschaft *unmittelbarer Addirbarkeit*, soferne es sich um ein Aggregat von Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension handelt, erkennen. *Dabei besteht*, was ich gleich hier hervorheben möchte, *für zwei Dimensionen kein Unterschied in der hier entwickelten Abzählung für die einfachen und für die sogenannten Doppelmannigfaltigkeiten* (bezüglich deren ausführlicher Discussion insbesondere auf die §§ 3 bis 5 des zweiten Theiles verwiesen sei) und dies entspricht dem Umstande, dass die Doppelmannigfaltigkeiten sich als solche aus der Charakteristik allein im Allgemeinen nicht erkennen lassen*).

Die erhaltene charakteristische Zahl ist für zwei Dimensionen von der bekannten Riemann'schen Zusammenhangszahl und ihren Modificationen im Wesen nicht verschieden und weicht nur so zu sagen in der Zählrichtung von derselben ab. Ich habe die gegenseitigen Beziehungen ausführlich in § 4 (Theil II) besprochen und dort auch die Gründe erörtert, welche mir, aus der hier gegebenen systematischen Entwicklung der Zahl und der sogleich zu besprechenden analytischen Darstellung derselben folgend, es als nicht unberechtigt erscheinen lassen, die hier getroffene Zählweise an Stelle der Riemann-Neumann'schen zu setzen.

II. *Zur analytischen Formulirung der Charakteristik* (die wir je im II. Abschnitte behandeln) handelt es sich nun darum, für die durch Gleichungen und Ungleichungen gegebenen Mannigfaltigkeiten auch analytisch formulirte, continuirliche Entstehungsprocesse zur Abzählung zu Grunde zu legen. Zu dem Ende betrachten wir die allmähligen Umformungen einer Mannigfaltigkeit in einem einfach unendlichen, continuirlichen Systeme solcher Mannigfaltigkeiten; es bleibt dabei die Charakteristik im Allgemeinen ungeändert, im Besondern aber ergeben sich auch sofort diejenigen Sprungstellen, bei welchen eine Aenderung —

*) Doppelflächen sind zuerst wohl von Möbius in der „Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft" aufgestellt worden. Man vergl. Werke Bd. II, pag 484. Die Ausdehnung der Abzählung des Zusammenhangs auf Doppelflächen ist nach einer Bemerkung Schläfli's zuerst von Klein ausgeführt worden, Annalen Bd. VII, pag. 550ff. Man vergleiche hiezu auch die schon erwähnte Schrift von Klein, „Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" § 23, sowie die Note „Ueber die conforme Abbildung von Flächen", Annalen XIX, pag. 159; und endlich die Dissertation des Herrn Weichold „Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen und die Periodicitätsmoduln der zugehörigen Abel'schen Normalintegrale erster Gattung", Dresden 1883 (in Schlömilch's Zeitschrift Bd. 28 abgedruckt).

im Sinne jener vorhin erwähnten Operationen — im positiven bez. im negativen Sinne statthat. So ergiebt sich die Abzählung direct durch eine Summation über gewisse singuläre Stellen, die durch Gleichungen und Ungleichungen definirt, ihrem „Punktcharakter“ nach im Sinne jener Operationen zu bezeichnen sind, d. h. als eine Summation im Kronecker'schen Sinne über die Punktcharaktere gewisser durch ein Functionensystem definirter Stellen. *Es erweisen sich unsere geometrisch abgeleiteten Zahlen direct als Kronecker'sche Charakteristiken*, in der in den oben erwähnten Abhandlungen entwickelten Bedeutung, und es bilden diese in den vorliegenden Untersuchungen für die Zusammenhangszahlen von Curven und Flächen des dreidimensionalen Raumes getroffenen Abzählungen ein, wie ich glaube, besonders anschauliches Beispiel jener allgemeinen Charakteristikentheorie.

Weiter aber führt die Betrachtung der Systeme von Mannigfaltigkeiten, an deren singulären Stellen als den Sprungstellen der Charakteristik die Abzählungen getroffen werden, zu bemerkenswerthen *Relationen zwischen solchen singulären Stellen*, insoferne sich die Abzählung als unabhängig erweist von dem speciellen zu Grunde gelegten Systeme. Diese Relationen, — hier für beliebige Curvensysteme in der Ebene und auf beliebiger Fläche, sowie für beliebige Flächensysteme unseres Raumes ausgesprochen — sind in speciellen Formulirungen bekannt und führen in erster Linie wohl auf die obenerwähnten Arbeiten von Möbius zurück, der seine Abzählungen für Flächen geradezu auf gewisse auf denselben gezeichnete Curvensysteme stützt*). In der That haben mich auch, wie von der analytischen Seite die Kronecker'schen, von der geometrischen die Entwickelungen von Möbius zu den nachfolgenden Untersuchungen geführt.

---

*) Man sehe die oben angeführten Abhandlungen von Möbius, insbesondere die „Theorie der elementaren Verwandtschaft“ (Werke, Bd. II, pag. 540ff. und 462, 465ff.). Weiter vergleiche man hiezu Bemerkungen bei Gauss: „Theorie des Erdmagnetismus“ art. 12 (Werke, Bd. V, pag. 134ff.), ferner eine Abhandlung von Reech „Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées“ im 21. Bd. (37. Heft) des Journal de l'école polytechnique (1858), sowie die Abhandlungen von Poincaré, „Sur les courbes définies par une équation differentielle“ im Journal de l'école Normale, Serie 3, Bd. VII (1881), VIII (1882), Serie 4, Bd. I (1885) u. II (1886), wo besonders auch die in gegenwärtiger Abhandlung in § 11 geschilderten Relationen behandelt werden; endlich eine Bemerkung von Klein in „Riemann's Theorie“ pag. 39. Relationen für die Art und Anzahl der singulären Stellen von Potentialfunctionen (auf Flächen und im Raume) sind auch in den schon oben angeführten physicalischen Untersuchungen behandelt; es seien hiezu noch die Betrachtungen von Betti erwähnt über die Anzahl der singulären Stellen der Potentialfunction auf der einfach zusammenhängenden Oberfläche eines magnetischen Körpers (Betti, Lehrbuch der Potentialtheorie, deutsche Ausgabe von Franz Meyer, Stuttgart 1885, pag. 334ff.).

Inhalts-Uebersicht.

I. Theil.

Eindimensionale Mannigfaltigkeiten.

I. Abschnitt.

Geometrische Definition und Charakteristik eindimensionaler Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten.

Das Elementargebilde E^I für die eindimensionalen Mannigfaltigkeiten ist geometrisch gegeben durch ein begrenztes Stück einer Curve.

Die allgemeinste eindimensionale Mannigfaltigkeit M^I, die wir hier betrachten, entsteht, wenn wir in einer endlichen oder auch unendlichen Zahl von Elementargebilden einzelne (oder auch alle) Endpunkte paarweise vereinigen. Die M^I enthält dann neben Elementargebilden E^I noch eine gewisse Anzahl geschlossener Curvenzüge, dadurch entstanden, dass die beiden Endpunkte eines E^I vereinigt, oder auch eine Anzahl solcher im Cyklus zusammengefügt wurden. Mannigfaltigkeiten M^I, bei denen in einem Punkte mehr als zwei Curvenzüge sich vereinigen, lassen wir in den gegenwärtigen Abzählungen ausser Betracht.

§ 2.

Herleitung der Charakteristik.

Dem Elementargebilde ertheilen wir die Charakteristik $+1$.

Denken wir uns nun irgend einen Entstehungsprocess für eine eindimensionale Mannigfaltigkeit gegeben, so haben wir zur Herstellung einer Charakteristik für dieselbe das Entstehen eines E^I mit $+1$, das Verschwinden mit -1 zu zählen.

Die Trennung eines E^I in zwei Stücke kommt dem Entstehen eines weiteren E^I gleich und zählt somit für die Charakteristik von M^I als $+1$, während umgekehrt die Vereinigung zweier E^I als -1 zu zählen ist.

Nun kann die Vereinigung zweier Endpunkte auch an einem Elementargebilde vor sich gehen, wo dann ein geschlossener Curvenzug entsteht; indem wir auch hier diese Vereinigung mit -1 in Rechnung bringen ergiebt sich für jeden geschlossenen Curvenzug der M^I ein Beitrag $+1-1=0$.

Die so definirte Charakteristik K^I einer M^I ist also gleich der Anzahl der in derselben enthaltenen nicht geschlossenen Curvenzüge (Elementargebilde); die geschlossenen Curvenzüge liefern keinen Beitrag zu dieser Zahl).*

Sofort ergiebt sich hieraus die *Unabhängigkeit* der charakteristischen Zahl K^I von einem bei der Abzählung zu Grunde gelegten Entstehungsprocess der Mannigfaltigkeit und weiter erkennen wir auch unmittelbar die Charakteristik einer Reihe von Mannigfaltigkeiten M^I als die *Summe der Einzelcharakteristiken.*

II. Abschnitt.

Bestimmung der Charakteristik für gewisse, analytisch gegebene, eindimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 3.

Allgemeine Formulirung für ebene Curven.

Wir denken uns in der Ebene eine eindimensionale Mannigfaltigkeit folgendermassen fixirt:

Gegeben seien zwei Curven durch ihre Gleichungen:

(1) $$\varphi(x, y) = 0; \quad \psi(x, y) = 0;$$

wir nehmen dieselben im Endlichen liegend, übrigens aus einer beliebigen Zahl von Theilen bestehend und ohne Doppelpunkte an. Als das „*Innere*" einer Curve seien diejenigen Theile der Ebene bezeichnet, für welche die betr. Function [hier $\varphi(x, y)$, bez. $\psi(x, y)$] kleiner als Null ist, und dabei sei wieder das Vorzeichen der Function so gewählt, dass dieselbe im Unendlichen positiv ist, d. h. dass der unendlich ferne Punkt der Ebene — wir fassen in der Folge stets die Ebene als *Kugel* mit unendlich grossem Radius auf — im „Aussenraum" der Curve liegt.

Wir fragen nach der Charakteristik derjenigen Theile von $\varphi(x,y) = 0$, welche im Innern von $\psi(x, y) = 0$ liegen.

Diese Mannigfaltigkeit M^I wird im Allgemeinen aus einer Anzahl geschlossener Curvenzüge und einer Anzahl getrennter Stücke bestehen.

*) Man erkennt vielmehr gerade an dieser Stelle, dass die Bestimmung einer charakteristischen Zahl, welche auch *die Anzahl der geschlossenen Curvenzüge* ergiebt, ein weitergehendes Problem ist, insofern es dann nicht mehr genügt, wie bei dem oben behandelten, gewisse Punkte (Vereinigungs- und Trennungsstellen) ihrem „Punktcharakter" gemäss (vergl. pag. 463) zu unterscheiden, sondern der Gesammtverlauf der Curve von einer solchen Stelle ab zu verfolgen ist. Die für die Lösung des letzteren Problems nothwendigen Schritte habe ich in einer Note zur Analysis situs (Dritter Beitrag z. A. s.) in den Berichten der sächs. Ges. d. W. zu Leipzig, 1887 angegeben.

Die letztere Zahl, gleich der gesuchten Charakteristik, ergiebt sich unmittelbar als die halbe Anzahl der reellen Schnittpunkte beider Curven.

Um diese Zahl analytisch darzustellen, legen wir den folgenden Entstehungsprocess für die Mannigfaltigkeit M^I zu Grunde. Wir betrachten die Curve $\varphi(x, y) = 0$ als enthalten in einem einfach unendlichen, sonst beliebigen Curvensystem

$$(2) \qquad \Phi(x, y, \lambda) = 0$$

mit λ als Parameter; und beachten, wie beim Durchlaufen dieser Gesammtheit die Charakteristik der jedesmal im Innern von $\psi(x, y) = 0$ liegenden Theile der mit λ sich continuirlich deformirenden Curve $\Phi(x, y, \lambda) = 0$ sich ändert. Diese Aenderung erfolgt *sprungweise* an gewissen besonderen Stellen des Curvensystems Φ. Wir formuliren dieselbe im Folgenden im Kronecker'schen Sinne durch Angabe des „*Punktcharakters*" *jener Stellen*, dessen geometrische Bedeutung sich hier auf's Einfachste ergiebt. Kennen wir dann für irgend eine specielle, dem Parameter $\lambda = \lambda_\alpha$ entsprechende, Curve des Systems die zugehörige Charakteristik K_α (ihrer innerhalb $\psi = 0$ gelegenen Theile), so können wir von da ab, indem wir λ von λ_α bis λ_φ — dem der Curve $\varphi = 0$ zugehörigen Parameter — abändern, die Aenderung der Charakteristik von K_α bis K_φ — der für die Curve $\varphi = 0$ zu berechnenden Charakteristik — verfolgen. Nehmen wir insbesondere an, einer Ausgangscurve $\lambda = \lambda_\alpha$ entspreche eine Charakteristik $K_\alpha = 0$, so erhalten wir durch eine von hier aus begonnene Zählung direct die Charakteristik K_φ selbst, durch die Summation der Aenderungen im Intervalle λ_α bis λ_φ.

§ 4.

Punktcharakter der Sprungstellen der Charakteristik.

Die Charakteristik K^I der Theile einer Curve des Systems $\Phi(x, y, \lambda) = 0$, welche im Innenraume von $\psi(x, y) = 0$ liegen, ändert sich, wenn wir von einer Curve λ zu einer folgenden $\lambda + d\lambda$ übergehen, im Allgemeinen nicht, solange nicht

α) neue Stücke der sich deformirenden Curve in das Innere von $\psi = 0$ eintreten; bez.

β) vorhandene Stücke austreten, oder

γ) bisher vereinigte Curvenzüge sich trennen, bez.

δ) getrennte sich vereinigen.

Dabei ändern die Fälle (α) und (γ) die Charakteristik um $+1$, die Fälle (β) und (δ) um -1. Wir können sie geometrisch dadurch unterscheiden, dass beim Durchlaufen des Systems Φ in der durch den wachsenden Parameter gegebenen Richtung die Zahl der Schnittpunkte von $\Phi = 0$ mit $\psi = 0$ in den Fällen (α) und (γ) um zwei vermehrt, in den Fällen (β) und (δ) um zwei vermindert wird. Die Vorkommnisse finden nämlich statt *an den Berührungsstellen der Curven des Systems* $\Phi = 0$ *mit* $\psi = 0$, also an den Stellen für welche:

$$\Phi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = 0 \tag{3}$$

ist, wenn wir mit Δ die Functionaldeterminante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \psi_1 \\ \Phi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

der Functionen Φ und ψ bezeichnen. Beachten wir nun, um die eben getroffene Eintheilung analytisch zu fixiren, wie der „Innenraum" der betreffenden Curve $\Phi = 0$ und der „Innenraum" der Curve $\psi = 0$ in der Umgebung des Berührungspunktes gegen einander liegen, so können wir zunächst vier Fälle der Berührung (vergl. die Figuren 1[a, b, c, d]) unterscheiden, die wir folgendermassen zusammenstellen:

	(*a*) (Fig. 1[a] *))	(*b*) (Fig. 1[b])	(*c*) (Fig. 1[c])	(*d*) (Fig. 1[d])	
Die Curve Φ verläuft im	Aussen-Raum	Aussen-Raum	Innen-Raum	Innen-Raum	der Curve ψ
Die Curve ψ verläuft im	Aussen-Raum	Innen-Raum	Aussen-Raum	Innen-Raum	der Curve Φ

Je nachdem nun mit *wachsendem* Parameter λ der Innenraum der Curve $\Phi = 0$ an der betr. Stelle *wächst*, bez. *abnimmt*, entspricht

Fall (*a*) der oben bezeichneten Aenderung (α) bez. (β),
Fall (*b*) „ „ „ „ (β) bez. (α),
Fall (*c*) „ „ „ „ (γ) bez. (δ),
Fall (*d*) „ „ „ „ (δ) bez. (γ),

wie sich aus der Betrachtung der betr. Figuren und der dabei eingetragenen Pfeilrichtungen, welche das Fortschreiten der Curven des Systems mit wachsendem Parameter und dabei wachsendem Innenraum andeuten, leicht ergiebt. Nun wird andererseits das Zu- bez. Abnehmen des „Innenraumes" $\Phi < 0$ an einer Stelle mit wachsendem Parameter durch das positive bez. negative Vorzeichen von $-\Phi_4$, der nach λ genommenen Ableitung von Φ, bestimmt.

*) In den Figuren sind die Curven $\Phi = 0$, bez. $\psi = 0$ mit (1) und (2) bezeichnet, der Innenraum je der beiden ist durch Schraffirung angedeutet.

Indem wir jetzt die von **Kronecker** in den erwähnten Abhandlungen eingeführte Bezeichnung*)

$$[A]$$

benützen, um die Zahl $+1$, 0, -1 zu bezeichnen, je nachdem der Ausdruck A in der eckigen Klammer positiv, Null oder negativ ist, können wir sagen: Die Fälle (a) und (c) sind ihrem Punktcharakter nach durch

$$(4^a) \qquad [-\Phi_4],$$

die Fälle (b) und (d) durch

$$(4^b) \qquad [+\Phi_4]$$

für die Abzählung der Charakteristik unserer eindimensionalen Mannigfaltigkeit bestimmt.

Nun handelt es sich noch darum die Fälle (a) und (c) von den anderen (b) und (d) zu trennen. Man berechnet leicht, dass die Unterscheidung der sämmtlichen Fälle (a), (b), (c), (d) von einander durch die Vorzeichen zweier Determinanten sich darstellen lässt, nämlich der beiden:

$$(5) \qquad \Theta_\Phi = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \psi_1 \\ \Delta_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \Theta_\psi = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \Delta_1 \\ \Phi_2 & \Delta_2 \end{vmatrix}$$

(in denen Δ_1 und Δ_2 die Ableitungen der vorhin definirten Functionaldeterminante Δ bedeuten); und zwar ist

$$\Theta_\Phi \begin{array}{l} \text{positiv in den Fällen } (a) \text{ und } (c), \\ \text{negativ in den Fällen } (b) \text{ und } (d), \end{array}$$

$$\Theta_\psi \begin{array}{l} \text{positiv in den Fällen } (a) \text{ und } (b), \\ \text{negativ in den Fällen } (c) \text{ und } (d). \end{array}$$

Hier kommt also lediglich die erstere Determinante Θ_Φ in Betracht und es wird *mit Berücksichtigung der oben gegebenen Formeln* (4^a) *und* (4^b) *der Punktcharakter aller Berührungspunkte gegeben durch das Vorzeichen des Productes von* $-\Phi_4$ *und* Θ_Φ *d. h. durch*

$$(6) \qquad [-\Phi_4 \cdot \Theta_\Phi].$$

Insoferne nun, ihrer geometrischen Bedeutung zufolge, die Aenderung der Charakteristik beim Uebergang von der Curve (λ_α) zur Curve (λ_φ) stets dieselbe bleibt, welches specielle Curvensystem wir auch zwischen die Anfangs- und Endcurve einschalten mögen, *ergiebt sich eine Relation zwischen den nach Formel* (6) *abgezählten Berührungspunkten der Curven irgend welcher einfach unendlicher zwischen jene beiden Curven continuirlich eingeschalteter Systeme und der Curve* $\psi = 0$. Wir führen im folgenden Paragraphen noch an einem speciellen Beispiele

*) Vergl. Berl. Monatsberichte 1878 pg. 145.

einen besonderen Fall dieser Beziehung aus, wo wir die Summation zwischen zwei Curven von der Charakteristik Null ausführen, für welche also auch die zu berechnende Aenderung gleich Null ist.

Es sei anschliessend noch bemerkt, dass wir eine analoge Abzählung auch an die Erzeugung des Innenraumes von $\psi(x, y) = 0$ knüpfen können, indem wir bei fest gedachter Curve $\varphi(x, y) = 0$ die andere $\psi(x, y) = 0$ in einer unendlichen Schaar $\Psi(x, y, \mu) = 0$ enthalten zu Grunde legen. Insoferne indess bei eindimensionalen Mannigfaltigkeiten die abzuzählende Charakteristik der Theile von φ im Innenraume von ψ ganz ebenso auch die Charakteristik der Theile von ψ im Innenraume von φ ist und endlich auch dieselbe Bedeutung für die Aussenräume besitzt*) (als gleich der halben Zahl der reellen Schnittpunkte beider Curven), führt diese zweite Abzählung zu keiner wesentlich anderen Formulirung**). Noch eine dritte Form der Abzählung — die wir ebenso wie die vorige für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten ausführen — sei bezeichnet: Es entstehe die Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$, $\psi < 0$ dadurch in einem continuirlichen Processe, dass ein System von beliebigen Curven $X(x, y, \nu) = 0$ (mit ν als Parameter) über die abzuzählende Mannigfaltigkeit hinweggleitet; dann lassen sich wieder die Aenderungen der Charakteristik für die innerhalb $X = 0$ gelegenen Theile von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, beim Durchlaufen des Systems X auf die einfachste Weise verfolgen. Es sind dabei einmal die Schnittpunkte $\varphi = 0$, $\psi = 0$ mit Curven des Systems, dann die Berührungsstellen von $\varphi = 0$ mit eben diesen Curven $X = 0$ zu betrachten.

§ 5.

Beispiel für die Summation der Punktcharaktere.

Wir legen für die Abzählung der Charakteristik K^I der im Innern der Curve $\psi(x, y) = 0$ gelegenen Theile von $\varphi(x, y) = 0$ das System

$$\Phi \equiv \varphi(x, y) - \lambda = 0$$

zu Grunde; es ist dies ein die Ebene einfach und lückenlos bedeckendes System, welches im Innern von $\varphi = 0$ nothwendig in gewisse singuläre Punkte (isolirte Doppelpunkte) sich zusammenziehen muss (wenn wir absehen von dem an specielle Bedingungen geknüpften Auftreten

*) Dies spricht sich bei allen unseren Entstehungsprocessen einer M^I darin aus, dass an allen Sprungstellen der Charakteristik diese, wie man sich leicht überzeugt, in *gleicher* Weise sich ändert, ob wir die Abzählung für den *Innenraum* oder für den *Aussenraum* treffen, ein Verhalten, welches für höhere Mannigfaltigkeiten durchaus *nicht* mehr statt hat.

**) Man vergl. hierzu das im folgenden Paragraphen gegebene Beispiel.

doppelt zählender Curven). *Für einen gewissen untersten Werth von* λ *ist also die Charakteristik der innerhalb* $\psi = 0$ *liegenden Theile von* Φ *sicher gleich Null.* Mit wachsendem Parameter λ *wächst* dann der Innenraum von Φ continuirlich. *Die Formel* (6), *ausgedehnt über alle im Bereiche* $\lambda < 0$ *liegenden Berührungspunkte, d. h. über alle Punkte*

$$\varphi < 0 \quad \psi = 0 \quad \Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = 0$$

ergiebt also die Charakteristik K^I *als*

$$K^I = \sum \left[\begin{vmatrix} \Delta_1 & \psi_1 \\ \Delta_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \right];$$

Ein Vergleich mit den von Kronecker gegebenen Formeln) ergiebt also* K^I *direct als Charakteristik des Functionensystems*

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Delta = 0$$

in der Kronecker'schen Terminologie. Dabei ergeben sich aus den l. c. gegebenen Entwickelungen sofort zwei weitere Darstellungen dieser Charakteristik in der Form:

$$K^I = \sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_1 & \Delta_1 \\ \varphi_2 & \Delta_2 \end{vmatrix} \right],$$

die Summation verstanden über alle Punkte, für welche

$$\psi < 0, \quad \Delta = 0, \quad \varphi = 0$$

ist, und endlich auch:

$$K^I = -\sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \right],$$

diese Summe genommen über die Punkte

$$\Delta < 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0.$$

Geometrisch entspringen die letzteren beiden Formeln für die Charakteristik der Betrachtung der Aenderung der Charakteristik bei Zugrundelegung des Curvensystems

$$\psi(x, y) - \mu = 0,$$

beziehungsweise

$$\Delta(x, y) - \nu = 0,$$

(vergl. die Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen). In der letzten Formel wird dabei direct die K^I als die Hälfte der Schnittpunkte von $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ ausgedrückt.

Die Ausdehnung der ersten Summation auf alle Punkte $\psi = 0$, $\Delta = 0$ giebt weiter in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Kronecker'schen Theorie (Formel I a. a. O.) als Summe Null. Denn wir können

---

*) Man vergl. etwa die in den Berl. Monatsberichten 1878 pag. 145 gegebenen Formeln.

dann die Summation betrachten als ausgeführt von einer Anfangscurve, für welche $K = 0$ ist bis zu einer Endcurve, welche $\psi = 0$ ganz umgiebt, für welche also wieder $K = 0$ ist. Geometrisch ausgesprochen lautet der Satz, als Specialisirung der vorhin auf pag. 469 allgemein ausgesprochenen Relation:

Die Anzahl der Punkte, in welchen die Curve $\psi = 0$ eine Curve des Systems $\varphi - \lambda = 0$ von Innen (d. h. im Raume $(\varphi - \lambda) < 0$) berührt, ist gleich der Zahl der Punkte, in denen eine solche Berührung von Aussen (d. h. im Raume $(\varphi - \lambda) > 0$) statthat.

Eine gleiche Relation gilt für die übrigen Summen und *lässt sich sofort für zwei beliebige die Ebene einfach überdeckende Curvensysteme aussprechen.* Man vergleiche Fig. 2, wo dieses Verhalten den einzelnen Punktcharakteren gemäss an zwei (stark gezeichneten) Curven zweier solcher Systeme bezeichnet ist, und andererseits auch die Abzählung der Charakteristik für die innerhalb einer der stark gezeichneten Curven gelegenen Theile der zweiten Curve verfolgt werden kann, sei es durch Abzählung an einem Systeme $\Phi = 0$ oder $\Psi = 0$.

Die Ausdehnung der Formulirungen auf *nichtebene* Curven und Curvensysteme bietet keinerlei Schwierigkeit. Insofern sich überdies die gewonnenen Sätze mit nicht wesentlichen Aenderungen direct übertragen, sehen wir von ihrer Entwicklung ab.

II. Theil.

Zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

I. Abschnitt.

Geometrische Definition und Charakteristik zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

§ 1.

Die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten.

Das Elementargebilde E^{II}, aus welchem wir unsere allgemeinen zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten M^{II} herleiten, ist geometrisch gegeben als ein, von einem sich nicht selbst durchsetzenden Curvenzug begrenztes, in eine Ebene ausbreitbares Flächenstück, also etwa als das Innere eines Kreises in der Ebene.

Die allgemeinste zweidimensionale Mannigfaltigkeit M^{II} betrachten wir als aus solchen Elementargebilden zusammensetzbar, indem wir voraussetzen, dass dieselbe in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte mit einem Elementargebilde identificirt werden darf. Dabei bleibt ganz ausser Betracht, ob wir diese Zusammensetzung aus einer *endlichen* Anzahl solcher E^{II} bewerkstelligen können, oder etwa einer unendlichen Zahl bedürfen. Die Zusammensetzung erfolgt dadurch, dass wir jene E^{II} einmal längs gewisser Randstücke, dann aber auch längs ganzer geschlossener Randcurven vereinigen. Es kann hierbei zweckmässig sein, eine solche Vereinigung von Randcurven nicht wirklich (geometrisch) auszuführen, sondern nur durch *„Zuordnung“* der betr. Randstücke — etwa mit Hülfe einer Tabelle — zu fixiren*).

Betrachten wir unter allen so entstehenden M^{II} diejenigen, welche eine einzige zusammenhängende Fläche bilden, so trennen sich diese in die seit Möbius bekannten zwei, wesentlich verschiedenen Categorien, die wir gleich hier bezeichnen, wenn sich auch dieselben — wie schon in der Einleitung erwähnt — in der abzuleitenden Charakteristik für die M^{II} im Allgemeinen nicht unterscheiden:

Wir können der Elementarmannigfaltigkeit E^{II} *einen bestimmten Sinn* dadurch beilegen, dass wir auf ihr eine kleine kreisförmige Curve eingetragen denken und auf derselben einen Richtungssinn — etwa den des Uhrzeigers — fixiren; die so auch ihrer Richtung nach festgelegte Curve sei zur Kürze als „Indicatrix“ bezeichnet**). Denken wir uns nun eine aus einem Stück bestehende M^{II} durch successive Aneinanderfügung von Gebieten E^{II} entstehend, so können wir, von einer ersten bestimmten Indicatrix aus, auf alle neu hinzukommenden Theile der entstehenden Mannigfaltigkeit den Richtungssinn übertragen. Dann aber sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Wenn ein Gebiet mit *mehreren* Stücken seines Randes an die schon vorhandene Mannigfaltigkeit angeschlossen wird, kann die Indicatrix, welche wir, den einen Rand überschreitend, in das neue Flächenstück eintragen, *dieselbe* sein, wie diejenige, welche wir, den anderen Rand überschreitend, dem Flächenstücke beizulegen haben, oder aber *die entgegengesetzte*. Findet das letztere statt, so giebt es — wie auch sonst die Fläche beschaffen sein mag — Wege auf derselben, für welche sich die Indicatrix umkehrt. So gelangen wir zur Definition der beiden Flächencategorien, die wir als *„Flächen mit nicht umkehr-*

---

*) Man vergleiche beispielsweise den ausgedehnten Gebrauch, der gerade von dieser Vorstellung der „Zuordnung der Randcurven eines Fundamentalpolygons“ in neueren functionentheoretischen Untersuchungen (Schwarz, Klein, Poincaré) gemacht wird. Für die Betrachtung dreidimensionaler Gebilde wird diese Vorstellung, sofern es sich um anschauliche Discussion handelt, nothwendig.

**) An ihre Stelle kann bekanntlich ein bestimmt, auch dem Sinne nach bezeichnetes Axenkreuz (x, y) treten.

barer Indicatrix“ und „*Flächen mit umkehrbarer Indicatrix*“ bezeichnen wollen*).

§ 2.

Herleitung der Charakteristik.

Dem Elementargebilde E^{II} ertheilen wir (analog wie bei den eindimensionalen Mannigfaltigkeiten) die Charakteristik $+1$.

Dann haben wir, indem wir irgend einen Entstehungsprocess für eine Mannigfaltigkeit M^{II} zu Grunde legen, zur Herstellung einer Charakteristik für dieselbe das Entstehen eines Elementargebildes mit $+1$, das Verschwinden mit -1 zu zählen.

Trennen wir ein Elementargebilde durch einen von Rand zu Rand geführten Schnitt, durch eine „*Querlinie*“, so kommt dies dem Entstehen eines weiteren Elementargebildes gleich und wir haben somit diese Operation mit $+1$ zu zählen. Die entgegengesetzte, die Vereinigung zweier Elementargebilde längs eines Stückes ihrer beiden Randcurven kommt umgekehrt dem Verschwinden eines E^{II} gleich und zählt dementsprechend mit -1 für die Charakteristik. Diese Vereinigung zweier Randstücke kann nun auch an *einem* Elementargebilde E^{II} durch Zusammenbiegen statthaben, wobei dann ein ringförmiges Flächenstück entsteht. Auch hier werden wir, gemäss unseren in der Einleitung ausgesprochenen Principien (vergl. pag. 461) für die Abzählung, diese Vereinigung mit -1 für die Gesammtcharakteristik in Rechnung ziehen. Ebenso werden wir die umgekehrte Operation einer Trennung in *jedem* Falle, auch wenn dabei kein Zerfallen der Mannigfaltigkeit eintritt, mit $+1$ zählen. Dabei ist noch zu bemerken, dass die Vereinigung auf die beiden vorhin bezeichneten Weisen entweder zu einem von zwei, oder von einer Randcurve begrenzten ringförmigen Flächenstück (vergl. Fig. 6, Tafel II) geschehen kann; es wird im einen Falle eine Fläche mit nicht umkehrbarer, im anderen eine solche mit umkehrbarer Indicatrix erhalten. *In unserer Abzählung der Charakteristik sind beide Fälle* **nicht** *zu trennen.*

---

*) Ich gebe absichtlich diese schon von Klein (Math. Annalen IX, p. 479) ausgesprochene Definition, welche die gemeinte Eigenschaft der Flächen als eine *innere*, d. h. denselben unabhängig von der Umgebung zukommende, charakterisirt und ich vermeide dabei die wohl auch übliche Bezeichnung „zweiseitige“ bez. „einseitige“ (auch Doppel-) Fläche, welche aus der Bemerkung hervorgeht, dass es bei Flächen mit umkehrbarer Indicatrix möglich ist, von der einen „Seite“ der Fläche auf die andere zu gelangen, während dies bei den Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix nicht möglich ist. *Diese letztere Eigenschaft ist indessen* — wie ich bei anderer Gelegenheit ausführen will — *nur eine* **Lageneigenschaft** *der Flächen in* **unserem** *dreidimensionalen Raum und sie kann verloren gehen, sofern wir von dieser Lage absehen.* Man vergl. noch die Bemerkungen auf pag. 489.

Fassen wir die bisherigen Umformungsprocesse noch in etwas anderer Weise zusammen, so können wir zunächst das soeben durch Vereinigung zweier Randstücke einer E^{II} hergestellte zweifach berandete ringförmige Flächenstück uns auch durch Anbringung einer Oeffnung, „*Punktirung*" im Innern der E^{II} hergestellt denken. Dann müssen wir, der oben getroffenen Abzählung entsprechend, die Anbringung einer Oeffnung im Innern einer M^{II} mit -1 und umgekehrt das Schliessen einer solchen mit $+1$ für die Gesammtcharakteristik in Rechnung bringen. Führen wir (um die Gleichmässigkeit mit den folgenden Sätzen noch schärfer hervorzuheben) den Begriff von *Mannigfaltigkeiten nullter Dimension*, M^0, ein, darunter ein *Aggregat von Punkten* verstanden und bezeichnen als Charakteristik K^0 einer solchen Punktmannigfaltigkeit die Anzahl der Elemente, so können wir die Anbringung von „Punktirungen" in einer M^{II} auch als Ausscheiden einer Punktmannigfaltigkeit M^0 und ebenso das Schliessen von Oeffnungen als Einschaltung einer M^0 bezeichnen. Dann ergiebt sich:

1) *Ein „System von Punktirungen" in einer M^{II} zählt für die Charakteristik K^{II} dieser Mannigfaltigkeit im entgegengesetzten Sinne seiner Punktcharakteristik K^0; und umgekehrt zählt das Einfügen einer solchen M^0 im Sinne der zugehörigen Charakteristik.*

Ebenso können wir das Anbringen und Aufheben von „Querlinien" (also Trennung und Vereinigung von Flächenstücken längs gewisser Strecken) in einer M^{II} auffassen als Ausscheiden bez. Einfügen einer M^I. Auch die Ausführung eines geschlossenen Schnittes „*Rückkehrschnittes*" in der M^{II} kann aufgefasst werden als Ausscheidung einer M^I. Insofern dabei der letztere Schnitt auch als Combination einer Punktirung (-1) und Ziehen eines Querschnittes $(+1)$ von Rand zu Rand jener Punktirung zu zählen ist, erkennen wir, dass wir den Einfluss eines Rückkehrschnittes als $-1+1=0$ für die Charakteristik der M^{II} zu zählen haben. Gehen wir nun auf die früher getroffene Definition der Charakteristik K^I einer M^I zurück, so folgt:

2. *Die Ausscheidung einer M^I von der Charakteristik K^I aus einer M^{II} zählt für deren Charakteristik K^{II} im Sinne von K^I; und umgekehrt die Einfügung einer solchen M^I im entgegengesetzten Sinne.*

Dabei ist noch zu beachten, dass das Anbringen eines Rückkehrschnittes in einer M^{II} entweder zwei (punktweise aufeinander bezogene) Randcurven entstehen lässt, oder nur eine einzige, jenachdem längs jenes Rückkehrschnittes die Indicatrix der Fläche sich nicht umkehrt bez. umkehrt. [Man vergl. hierzu Fig. 6 auf Tafel II, sowie die Ausführungen auf pag. 473 u. 479]. *In der Abzählung der Charakteristik tritt auch hier keinerlei Unterscheidung der verschiedenen Fälle auf.*

Betrachten wir endlich den Einfluss des Entfernens einer zweidimensionalen ebenen Mannigfaltigkeit M_α^{II} aus unserer M^{II}. Zunächst können wir die oben erwähnte „Punktirung" auch auffassen als Ausschneiden einer E^{II} aus der M^{II} längs eines Rückkehrschnittes. Dann zählt diese Operation mit -1, nämlich: Anbringung des Rückkehrschnittes: 0, Weglassen der ausgeschnittenen E^{II}: -1. Schneiden wir dagegen eine E^{II} von der M^{II} weg, indem wir sie zunächst durch einen Querschnitt abtrennen und dann weglassen, so ist hier $+1-1=0$ für die Aenderung der Charakteristik zu zählen und in der That ist auch die M^{II} dabei im Sinne der Analysis situs ungeändert geblieben. Die Abzählung lässt sich sofort auch auf das Ausschneiden beliebiger zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten ausdehnen und ergiebt dann den Satz:

3. *Die Charakteristik K^{II} einer M^{II} wird durch Weglassen eines Theiles M_α^{II} der Mannigfaltigkeit um deren Charakteristik K_α^{II} vermindert (zählt also im entgegengesetzten Sinne von K_α^{II}), falls jene Abtrennung von M_α^{II} ohne Ziehen von Querschnitten (nur mit Hülfe von Rückkehrschnitten) erfolgen kann; andernfalls sind die nothwendigen Querschnitte im Sinne von Satz (2) zu zählen. Die umgekehrte Abzählung tritt für die Zufügung einer M_α^{II} ein.*

Der Satz enthält unmittelbar die wichtige Eigenschaft der *Addirbarkeit der Charakteristik:* Besteht eine Mannigfaltigkeit M^{II} aus irgendwelchen Theilen $M_1^{II}, M_2^{II}, \ldots M_\nu^{II}$, bez. von den Charakteristiken $K_1^{II}, K_2^{II}, \ldots K_\nu^{II}$, so folgt sofort:

Die Charakteristik K^{II} von M^{II} ist gleich der Summe der Charakteristiken der einzelnen Theile:

$$K^{II} = \sum_{i=1}^{i=\nu} K_i^{II}. \tag{1}$$

§ 3.

Unveränderlichkeit der Charakteristik für verschiedene Erzeugungsweisen einer Mannigfaltigkeit. Normalformen für die Mannigfaltigkeiten mit nicht umkehrbarer und mit umkehrbarer Indicatrix.

Der Beweis, dass wir durch die vorstehend gegebene Abzählungsmethode für eine Mannigfaltigkeit M^{II} stets zu *derselben* charakteristischen Zahl geführt werden, welchen Entstehungsprocess für die Mannigfaltigkeit wir auch zu Grunde legen, ist erbracht, sobald wir für die Charakteristik zu einer Definition auch an der fertigen Mannigfaltigkeit geführt werden. Dabei können wir uns nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen über die Addirbarkeit der Einzelcharakteristiken auf ein *einziges Flächenstück* beschränken. Für ein solches lassen sich nun bestimmte *Normalformen* aufstellen, an welchen wir unmittelbar die charakteristische Zahl ablesen.

Zunächst entstehen alle in die Ebene [oder auf eine Kugelfläche] ohne mehrfache Ueberdeckung ausbreitbaren Flächen durch Ausschneiden von n Oeffnungen aus einer Elementarfläche E^{II}. *Für diese ist also die Charakteristik K^{II} gleich $1 - n$ oder gleich $2 - r$, wo r die Zahl der Randcurven bedeutet.*

Wir wollen diese Flächen mit Möbius) als die Grundformen bezeichnen.*

Ihre für das folgende wesentlichste Eigenschaft ist die:

Eine Grundform wird durch jeden Rückkehrschnitt in Stücke zerschnitten,

und umgekehrt:

Jede Fläche, auf welcher keine nicht zerstückenden Rückkehrschnitte gezogen werden können, ist eine Grundform.

Aus den Grundformen ergeben sich für alle zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten die Normalformen.

I. Zunächst lassen sich nämlich *Normalformen für die sämmtlichen Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix* in bekannter Weise**) aus diesen Grundformen dadurch ableiten, das wir einige dieser Randcurven paarweise aufeinander beziehen, und zwar *„gleichsinnig"*. Dann entsteht aus der Grundfläche mit zwei Randcurven durch deren Zuordnung die gewöhnliche Ringfläche, aus der Grundfläche mit drei Randcurven, durch Zuordnung zweier derselben ein Ring mit einer Oeffnung u. s. w.

Die aufeinander bezogenen Randcurven erscheinen dabei als Rückkehrschnitte für die neue Fläche und diese besitzt daher die gleiche Charakteristik mit der Grundfläche.

So erhält also der Ring die Charakteristik 0, der Ring mit einer Oeffnung die Charakteristik -1, der Doppelring die Charakteristik -2 u. s. w.

Nur für die Herleitung der geschlossenen *Kugelfläche* bedürfen wir *zweier* Elementarflächen; sie entsteht durch Zuordnung der Randcurven derselben und wir haben ihr dementsprechend die Zahl 2 zuzuweisen.

Somit ergiebt sich für die Charakteristik K^{II} einer aus einem Stück bestehenden Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix die (von der Erzeugung der Fläche unabhängige) Definitionsgleichung:

*) Möbius, Theorie der elementaren Verwandtschaft (1863). Werke, Band 2, pag. 450. Möbius nennt die obigen Flächen *Grundformen der r^{ten} Classe.*

**) Man vergleiche etwa Klein „Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" Abschnitt II, sowie die schon Eingangs erwähnte Dissertation von Weichold „Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen"; diese insbesondere auch was gewisse Normalformen für die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix anlangt.

$$(2) \qquad K^{II} = 2 - r - 2s,$$

wo r die Anzahl der Randcurven, s die Anzahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte ist, welche die Fläche in eine Grundform verwandeln. Nach dem oben für die Grundformen ausgesprochenen Satze ist dies gleichzeitig auch die Maximalzahl der auf der Fläche möglichen nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden, Rückkehrschnitte. Ein System von Rückkehrschnitten, durch welches eine Fläche in eine Grundform übergeführt wird, sei in der Folge ein „*vollständiges System*" genannt.

Formel (2) zeigt, dass die Zahl $K^{II} - 3$ für ein einziges Flächenstück stets negativ ist.

Indem wir nun für *gerades* K^{II} die Zahl s der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte successive gleich $0, 1, 2 \cdots -\frac{K^{II}}{2}$, für *ungerade* K^{II} gleich $0, 1, 2 \cdots -\frac{K^{II}-1}{2}$ setzen, ergiebt sich:

Eine Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik K^{II} kann

$$(2 - K^{II}),\ (2 - K^{II} - 2),\ (2 - K^{II} - 4) \cdots 2, 0$$

also stets eine gerade Anzahl von Randcurven besitzen, sofern K^{II} gerade ist und

$$(2 - K^{II}),\ (2 - K^{II} - 2) \cdots 3, 1$$

also stets eine ungerade Zahl von Randcurven, sofern K^{II} ungerade ist.

Wir heben hieraus speciell den Satz hervor:

Geschlossene Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix haben eine gerade Charakteristik.

Betreffs derjenigen Systeme von Schnitten, welche eine Fläche in eine *Elementarfläche* verwandeln, formuliren wir noch mit Rücksicht auf die nachfolgenden, auf Flächen mit umkehrbarer Indicatrix bezüglichen Verhältnisse (vergl. pag. 481) den folgenden bekannten Satz:

Hat man die ursprüngliche Fläche F durch die eben erwähnten s Rückkehrschnitte in eine *Grundform* verwandelt mit $2s + r$ Randcurven, so bedarf es $2s + r - 1$ Querschnitte (von Rand zu Rand), um dieselbe in eine *Elementarfläche* überzuführen. Dieselben können — indem man bei $2s$ einander paarweise zugeordneten Randcurven die Querschnitte zwischen je zwei entsprechenden Punkten zieht — so gewählt werden, dass s derselben als in sich zurücklaufende Schnitte in der ursprünglichen Fläche erscheinen. Auf dieser sind dann

$$2s = 2 - r - K^{II}$$

einander paarweise schneidende Rückkehrschnitte und $r - 1$ Querschnitte nach den Rändern gezogen. Jede andere Zerschneidung der Fläche in eine Elementarfläche lässt sich durch blosse Verschiebung und Combination der Curven in diese „*canonische Zerschneidung*" überführen. Somit folgt:

Die Zahl der für eine „canonische Zerschneidung" von F nothwendigen Rückkehrschnitte ist constant und gleich der doppelten Zahl der auf der Fläche möglichen, nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte.

II. Für die Herleitung von *Normalformen der Flächen mit umkehrbarer Indicatrix aus unseren Grundflächen* legen wir den Satz zu Grunde:

Wenn wir eine Oeffnung der Grundfläche, die wir der einfacheren Ausdrucksweise halber uns kreisförmig denken wollen, dadurch schliessen, dass wir die jedesmal diametral gegenüberliegenden Punkte aufeinander beziehen) so ist die so aus der ursprünglichen entstandene Fläche eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix, auf welcher jene auf sich selbst bezogene Kreislinie als Rückkehrschnitt erscheint und zwar dergestalt, dass die Indicatrix längs eben dieser Linie sich umkehrt.*

Die Zahl der Randcurven ist also bei diesem Process um eins verringert worden, während dagegen nach unserem pag. 475 *formulirten Princip der Zählung die Charakteristik sich nicht geändert hat.*

Man überzeugt sich von diesem Satze leicht durch die bekannte Zerschneidung des Möbius'schen Bandes längs einer Mittellinie (vergl. Fig 6, Tafel II). Dasselbe geht dann in ein zweifach berandetes Flächenstück mit nicht umkehrbarer Indicatrix über, dessen *einer* Rand „diametral" auf sich selbst bezogen ist**).

Indem wir diesen Process bei mehreren Randcurven einer Grundfläche ausführen, entstehen *die Normalformen für die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix und es ergiebt sich für die Charakteristik derselben die Definitionsgleichung:*

(3) $$K^{II} = 2 - r - s',$$

wo r die Anzahl der Randcurven, s' die Zahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte ist, längs deren die Indicatrix sich umkehrt.

---

*) In der Tafel II, wo Normalformen für die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix dargestellt sind, ist in den jedesmal links gezeichneten zugehörigen Grundformen die „diametrale Zuordnung" der Punkte eines Randes durch gekreuzte Pfeile angedeutet.

**) Dabei ist zu bemerken, dass das entstandene Band zunächst zwei Torsionen besitzt (man vergl. hierzu die schon erwähnte Abhandlung von Tait im 28. Bd. der Transact. of the R. Soc. Edinburgh pag. 169 ff., etwa auch Simony in der Broschüre „Gemeinfassliche Lösung der Aufgabe, in ein ringförmiges Band einen Knoten zu machen", Wien 1881), also nicht eine *Grundform* darstellt in unserem oben gegebenen Sinne, als eine in die Ebene ohne mehrfache Ueberdeckung ausbreitbare Fläche. Die Festsetzungen auf pag. 474 eliminiren aber diesen Unterschied, den wir desshalb auch in den folgenden Betrachtungen ausser Berücksichtigung lassen.

Indem wir nun (wie oben in I) die Zahl s' jener Rückkehrschnitte successive gleich $1, 2 \cdots 2 - K^{II}$, setzen, ergiebt sich:

Eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik K^{II} *kann*

$$(2 - K^{II} - 1),\ (2 - K^{II} - 2) \cdots 2, 1, 0$$

Randcurven besitzen.

Speciell kommt also:

Geschlossene Flächen mit umkehrbarer Indicatrix können sowohl eine gerade wie auch eine ungerade Charakteristik besitzen.

Die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix lassen sich aus unseren Grundflächen auch dadurch herstellen, dass man einige, 2σ der Ränder paarweise auf einander bezieht (wie in I geschehen) und andere in der Weise von II „diametral" auf sich selbst. *Dabei entstehen indess keine neuen Flächen;* vielmehr gilt der Satz, dass in jeder so entstandenen Fläche ein System von $s' = 2\sigma + \sigma'$ in sich zurücklaufenden, einander nicht schneidenden Curven gezogen werden kann, welches geeignet ist, das vorige System der Rückkehrschnitte zu ersetzen und wobei jetzt *sämmtliche* Curven diametral auf sich selbst bezogen sind. Fig. 3 zeigt eine Fläche, in welcher die Curve A diametral auf sich selbst bezogen ist [wie es die Zuordnung der Punkte $1, 1'$; $2, 2'$; $3, 3'$ angiebt], während die Curven B und C auf einander bezogen sind, so dass a, a'; b, b'; c, c' einander entsprechende Punkte sind. Die Curven A, B, Γ, welche bezüglich durch die Punkte $1, (1')$; $a, (a')$ dann $2, (2')$; $b, (b')$ und endlich $3, (3')$ hindurchgehen, sind neue Curven, längs deren sich die Indicatrix umkehrt. Sie bilden zusammen ein System von die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitten, welche das erstere zu ersetzen vermag [wie man sich leicht durch Neuanordnung der Fläche überzeugt] und für welches jetzt jede einzelne Curve diametral auf sich selbst bezogen ist.

Fig. 4 zeigt endlich noch die dritte Möglichkeit für die Herstellung von Flächen mit umkehrbarer Indicatrix. Die beiden Randcurven A und B einer Fläche sind *paarweise* aufeinander bezogen, aber nicht wie vorhin „gleichsinnig", sondern „*ungleichsinnig*", wie durch die aufeinander bezogenen Punkte a, a'; b, b'; c, c' fixirt ist. Dann entsteht gleichfalls eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix. Analog wie vorhin sind aber wieder die eingezeichneten Curven A, B geeignet, die beiden auf einander bezogenen Curven A, B zu ersetzen, und stellen ein System von auf sich selbst bezogenen einander nicht schneidenden Rückkehrschnitten dar (also solcher, längs deren die Indicatrix sich umkehrt), — wie sich ebenso wie vorhin durch Umordnung der Fläche ersichtlich machen lässt.

Die Methode II reicht also zur Ableitung der Normalflächen mit umkehrbarer Indicatrix aus.

Wir ersehen weiter:

Bei einer Fläche mit umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik K^{II} mit r Randcurven kann man ein „vollständiges System von Rückkehrschnitten" — durch welches also die Fläche in eine Grundfläche verwandelt wird — zusammensetzen aus σ' Rückkehrschnitten, längs deren die Indicatrix sich umkehrt und aus $\sigma + \sigma''$ Rückkehrschnitten, längs deren sich die Indicatrix nicht umkehrt; dabei sind die (getrennten) Ränder der letzteren Schnitte bei σ Curven „gleichsinnig" bei σ'' „ungleichsinnig" auf einander bezogen, und es ist

(4) $$K^{II} = 2 - r - \sigma' - 2(\sigma + \sigma'').$$

Der kleinste Werth, den σ' annehmen kann, ist Null*) bez. Eins (je nachdem $(r + K^{II})$ gerade oder ungerade ist), und dann erreicht die Gesammtzahl der nichtzerstückenden Rückkehrschnitte ihren *Minimalwerth*

$$\frac{2-r-K^{II}}{2} \quad \text{bez.} \quad \frac{3-r-K^{II}}{2};$$

andererseits erreicht diese Gesammtzahl der nicht zerstückenden Rückkehrschnitte ihren *Maximalwerth:*

$$2 - r - K^{II}$$

wenn $\sigma = 0$ und $\sigma'' = 0$, also das volle System der Rückkehrschnitte aus lauter Schnitten, längs denen sich die Indicatrix umkehrt, besteht.

Während also bei Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix die Anzahl der nichtzerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrcurven, welche ein „vollständiges System" bilden, stets dieselbe, nämlich gleich $2 - r - K^{II}$ ist, variirt diese Zahl (je nach der Wahl der Schnitte) für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix innerhalb der beiden angegebenen Grenzen. In der Tabelle auf pag. 487 ist bei den Flächen mit umkehrbarer Indicatrix jener Minimal- und Maximalwerth eingetragen.

Bezüglich derjenigen Systeme von Schnitten, welche eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix in eine *Elementarfläche* verwandeln, gilt nun (man vergl. hier den analogen Satz auf pag. 479) das Folgende:

Es sei die Zerschneidung einer Fläche F in eine *Grundfläche* F' durch irgend eines der eben besprochenen vollständigen Systeme von Rückkehrschnitten getroffen. F' besitzt dann

$$r + s = r + \sigma' + 2\sigma + 2\sigma''$$

Ränder der oben angeführten Arten. Die $r + s - 1$ noch nothwendigen Querschnitte, welche F' in eine Elementarfläche verwandeln, lassen sich dann stets so wählen (durch Verbinden je entsprechender

*) In diesem Falle sind dann nothwendig die Ränder mindestens *eines* der übrigen Rückkehrschnitte *ungleichsinnig* aufeinander bezogen.

Randpunkte), dass $\sigma + \sigma''$ derselben als Rückkehrschnitte auf der ursprünglichen Fläche F erscheinen. Auf dieser sind dann im Ganzen

$$\sigma' + 2\sigma + 2\sigma'' = 2 - r - K^{II}$$

Rückkehrschnitte verzeichnet, von denen σ' (diejenigen, längs deren die Indicatrix sich umkehrt) isolirt laufen, die anderen $2\sigma + 2\sigma''$ je paarweise sich schneiden. Weiter verbinden $\sigma' + r - 1$ Querschnitte jene ersten Rückkehrschnitte und die r Ränder von F. Analog also wie oben für die Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix erschliessen wir hier:

Die Anzahl der auf F nothwendigen Rückkehrschnitte für die canonische Zerschneidung in eine Elementarfläche ist constant und gleich dem oben erhaltenen Maximalwerth der auf der Fläche möglichen nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte.

Wenn es sich um eine geometrische Darstellung der Flächen mit umkehrbarer Indicatrix handelt, so ist zunächst für die eine Fläche von der Charakteristik 1, welche durch diametrale Zuordnung des Randes einer Elementarfläche entsteht, zu beachten, dass sie in unserem Raume im Endlichen nicht ohne Doppelcurve dargestellt werden kann. Wir wählen als einfachstes Bild die in Figur 5 (Tafel II) dargestellte Fläche, in welcher die äussere Contour als Umriss der zweiblättrig über der Zeichnungsebene ausgebreiteten Fläche zu denken ist, während die Linie AB eine Doppelcurve, bei A und B in Cuspidalpunkten (Pinch-points) endigend, ist*). Die eingetragene Linie S stellt einen Rückkehrschnitt dar, welcher die Fläche in eine Elementarfläche [mit jenem Schnitt als diametral auf sich bezogenem Rande] verwandelt und längs welchem die Indicatrix der Fläche sich umkehrt.

An Stelle dieser Fläche kann, wenn wir von der Endlichkeit absehen, die *Ebene* als Repräsentant treten, sofern wir das Unendlichweite derselben im *projectivischen Sinne* deuten. Dann stellt nämlich die Ebene, weil die von einem Punkt diametral aus einander laufenden Richtungen in einander übergehen, eine Fläche mit umkehrbarer Indicatrix dar.**) In gleicher Weise wie in § 5 sind nun die in den Figuren 7a, b, 10a, b, c gegebenen verschiedenen Formen für die geschlossenen Flächen mit umkehrbarer Indicatrix von der Charakteristik 0 und der Charakteristik -1 aufzufassen. Die Flächen mit Randcurven können aus diesen durch Eintragung je einer, zwei ... Oeffnungen gewonnen werden, wobei sich jedesmal die Charakteristik um eins vermindert. Statt dessen sind in den Figuren 6, 8 u. 9 andere Formen dieser *berandeten* Flächen mit umkehrbarer Indicatrix gesetzt

*) In § 4 ist eine derartige Fläche in analytischer Definition näher behandelt.

**) Man vergleiche den Aufsatz von Klein in den Math. Annalen Bd. VII. pag. 550 „Ueber den Zusammenhang der Flächen." Bezüglich der dort getroffenen Abzählung des „Zusammenhangs" vergleiche den folgenden § 4.

worden*), welche zeigen, dass nur *die geschlossenen Flächen von umkehrbarer Indicatrix in unserem Raume nothwendig Doppelcurven besitzen müssen***), *die berandeten aber nicht.* In diesen letzteren Figuren sind dabei die Contouren als die Ränder der Flächen und diese selbst nur *ein*blättrig über der Zeichenebene ausgebreitet zu denken.

§ 4.

Beziehung der Charakteristik zu der Zusammenhangszahl nach Riemann, und zu den weiteren, anschliessenden Abzählungen.

I. Die von Riemann eingeführte Zahl Z für den *Zusammenhang einer Fläche****) ist definirt als die um eins vermehrte Anzahl von Querschnitten, welche nothwendig sind, um die Fläche in eine Elementarfläche zu verwandeln.* Diese letztere erscheint dabei als vom Zusammenhange 1; die (im vorigen Paragraphen gebrauchten) „Grundflächen" mit r Randcurven (denen wir dort die Charakteristik $K^{II} = 2 - r$ zugewiesen haben) erhalten die Zusammenhangszahl $Z = r$. Um die Regel der Bestimmung des Zusammenhangs auch auf *geschlossene* Flächen ausdehnen zu können, sind diese nach Riemann mit einer kleinen Oeffnung versehen zu denken; die Kugel z. B. wird damit als von gleichem Zusammenhange, 1, mit der Elementarfläche bezeichnet; der Ring erhält die Zusammenhangszahl 3 u. s. w. Schläfli†) hat darauf hingewiesen, dass es consequenter ist, statt dessen die Zahl für den Zusammenhang der geschlossenen Flächen um eins zu vermindern; wir bezeichnen diese neue Zahl mit Klein als den *„ungewöhnlichen Zusammenhang"*; derselbe beträgt also für die Kugel Null, für den Ring 2, u. s. w.

Unter Z den Riemann'schen, unter $\overline{Z}$ den ungewöhnlichen Zusammenhang verstanden, ergiebt der Vergleich dieser Abzählung mit der in § 2 getroffenen sofort die Beziehung zur Charakteristik, zunächst für eine aus einem einzigen Stücke bestehende Fläche in den Formeln:

---

*) Man vergleiche hier auch die schon erwähnte Dissertation von Weichold. Die hier gewählten Formen sind von dem Princip aus entworfen, die Randcurven der Flächen zugleich als den *vollständigen Umriss* zu benutzen.

**) Vergl. hierzu auch pag. 489. Man erkennt gleichzeitig an den Formen a, b der Fig. 7 und a, b, c der Fig. 10, *dass bei den geschlossenen Flächen für jede beliebige Charakteristik nur das Vorhandensein einer einzigen Strecke auf der Fläche als Doppelcurve nothwendig ist und dass sie von da beliebig bis zu* $(-K^{II}+2)$ *Strecken als Doppelcurven variiren kann;* selbstverständlich sind hierbei geschlossene Curvenzüge, die als Doppelcurven der Fläche in beliebiger Zahl auftreten können, irrelevant.

***) Es handelt sich zunächst nur um Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix.

†) Man sehe den Eingangs erwähnten Aufsatz von Schläfli, Crelle's J. Bd. 76, pag. 152, Anm., sowie den Aufsatz von Klein, Math. Annalen Bd. VII, pag. 550, Anm.

$$(4) \qquad K^{II} = \left\{\begin{matrix} 3 - Z = \\ \text{(für geschlossene Flächen)} \\ 2 - Z = \\ \text{(für berandete Flächen)} \end{matrix}\right\} = 2 - \overline{Z}.$$

II. Neumann hat zuerst die Riemann'sche Abzählung auf ein System von Flächen ausgedehnt und die *Definition der „Grundzahl“ G für ein Flächensystem gegeben durch die Formel:*

$$(5) \qquad G = {}_i\sum_1^n Z_i + 2 - 2n;$$

dabei bedeuten $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ die Riemann'schen Zusammenhangszahlen (Grundzahlen) der einzelnen Flächenstücke, n ist die Anzahl der Theile.*) Man kann, ohne das Princip, nach welchem die Grundzahl des Systems aufgestellt ist, zu ändern, die Formel (5) *unverändert* auch anwenden zur Definition einer *„ungewöhnlichen Grundzahl“* $\overline{G}$ für das System, wenn man nur auch in der Summe die ungewöhnlichen Zusammenhangszahlen $\overline{Z}_i$ einsetzt. Zwischen den Grundzahlen G und $\overline{G}$ besteht dann eine Relation, welche noch von der Anzahl g der im System enthaltenen *geschlossenen* Flächen abhängt:

$$\overline{G} = G + g.$$

Aber die neue Formel steht in directem Zusammenhang mit unserer in § 2 gegebenen Formel. Bezeichnen wir nämlich mit $\overline{Z}_i$ die Zahlen für den *ungewöhnlichen* Zusammenhang der einzelnen Theile und bez. je die Charakteristiken derselben mit K_i^{II}, so geht die Formel (5) unter Berücksichtigung von (4) direct in die § 2 abgeleitete Formel für die Charakteristik eines Flächensystems

$$(1) \qquad K^{II} = \sum K_i^{II}$$

über, welche gegenüber Formel (5) den Vortheil besitzt, dass sie, als directe Summe der Einzelcharakteristiken, *die Zahl der Theile nicht enthält.* Dabei ist wieder die Gesammtcharakteristik K^{II} des Systems mit der Grundzahl $\overline{G}$ desselben, der Formel (4) analog, verbunden durch die Relation

$$(6) \qquad K^{II} = 2 - \overline{G}.$$

III. Fasst man, wie dies Schläfli vorgeschlagen hat, die Flächen mit umkehrbarer Indicatrix als doppelt bedeckt auf, wobei die beiden Blätter jedesmal längs der Curven in einander übergehen, welche die

*) Vergl. Neumann: „Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale“ (1865), pag. 304 ff., sowie noch ausführlicher in der 2. Aufl. (1884) pag. 152 ff.

Umkehrung der Indicatrix herbeiführen, so kann man auch auf sie die Abzählung der Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix übertragen.*) *Die so für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix fixirte Zusammenhangszahl* $\overline{Z}$ *steht aber jetzt zu der Charakteristik, bei welcher wir die Fläche* ***nicht*** *als eine doppelt überdeckte auffassen, in der Beziehung*

$$K^{II} = 2 - \frac{\overline{Z}}{2}. \tag{7}$$

Für die Betrachtung von Flächensystemen bildet diese Zusammenhangszahl $\overline{Z}$ gegenüber der Charakteristik K^{II} den Nachtheil, dass sie nicht mit den Zusammenhangszahlen der Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix zusammengefasst werden kann, wenn man nicht consequenter Weise auch diese letzteren als Systeme von doppelt überdeckten Flächen abzählen wollte**).

IV. Für aus einem einzigen Stücke bestehende *geschlossene* Flächen formulirt man, sofern sie als frei im Raume gelegene Riemann'sche Flächen zur Darstellung des Werthevorrathes und Verlaufes der Functionen eines complexen Argumentes dienen, (wobei stets *nur die eine Seite der Fläche* mit Functionswerthen belegt zu denken ist) den Begriff des *Geschlechtes p* (Ranges) — zunächst *bei Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix* als

$$p = \frac{2 - K^{II}}{2}, \tag{8}$$

weist also der Kugel das Geschlecht 0, dem Ringe das Geschlecht 1 u. s. w. zu.

Weiter ist die Auffassung auch *berandeter Flächen* als geschlossener Flächen, die, *doppelseitig* mit Functionswerthen belegt, längs der Randcurven zusammenhängen, im Anschluss an Bemerkungen von Schwarz und Schottky zur Darstellung symmetrischer Riemann'scher Flächen von Klein ausführlicher verwendet worden***). Die hierbei getroffene Unterscheidung von *orthosymmetrischen* und *diasymmetrischen* Flächen entspricht dem Umstand, dass die zur Ausbreitung der Functionswerthe verwendeten berandeten Flächen solche mit nicht umkehrbarer bez. mit umkehrbarer Indicatrix sind. *So kommt es, dass auch diesen berandeten*

---

*) Man vergl. hierzu die schon erwähnten Abhandlungen von Klein, Math. Annalen Bd. VII, pag. 551, ferner Bd. XIX, pag. 159 und in „Riemann's Theorie" § 23, sowie die Weichold'sche Dissertation. In den beiden letztgenannten Arbeiten ist die Abzählung für die sogleich zu besprechende Geschlechtszahl p getroffen.

**) Klein, Math. Annalen Bd. VII, pag. 551.

***) Man vergleiche für die Citate die Anmerkungen in der Einleitung p. 458 sowie pag. 462.

Flächen eine bestimmte Zahl p entsprechend gesetzt werden kann. Diese ist, wenn wir die Charakteristik K^{II} auf die *nicht doppelseitig* aufgefasste Fläche beziehen:

$$p = 1 - K^{II}. \tag{9}$$

§ 5.

Zusammenstellung der Abzählungen für aus einem Stück bestehende Flächen. Stetige Abbildung zweier Flächen aufeinander.

Es erscheint nicht unzweckmässig, die für Flächen mit nicht umkehrbarer und mit umkehrbarer Indicatrix in § 3 gewonnenen Resultate tabellarisch zusammenzustellen, um daraus noch einige Schlüsse über diejenigen Abzählungen zu machen, welche nothwendig sind, um für zwei Flächen die Möglichkeit umkehrbar, eindeutiger stetiger Beziehung aller ihrer Elemente zu constatiren. Wir beziehen die folgende Tabelle auf Flächen, welche aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke bestehen, und fügen der Angabe der charakteristischen Zahl, der Randcurven und Rückkehrschnitte noch die Grundzahl nach der Neumann'schen Abzählung (bez. nach der Klein'schen, für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix) bei.

Die Tabelle ergiebt sofort die folgenden Sätze für aus einem Stück bestehende Flächen:

I. *Geschlossene Flächen von ungerader Charakteristik sind stets Flächen mit umkehrbarer Indicatrix.*

Für geschlossene Flächen von gerader Charakteristik reicht die Charakteristik allein nicht aus, um dieselben als Flächen mit umkehrbarer bez. nicht umkehrbarer Charakteristik zu erkennen.

Der Satz ist ein specieller Fall des folgenden:

Weiss man bei berandeten Flächen, ob die Anzahl der Randcurven gerade oder ungerade ist, so gilt:

II. *Flächen von gerader Charakteristik und ungerader Anzahl von Randcurven, sowie Flächen von ungerader Charakteristik und gerader Anzahl von Randcurven sind stets Flächen mit umkehrbarer Indicatrix.*

Für die übrigen Categorien reichen die obigen Kriterien zur Unterscheidung nicht aus. Bezüglich der durch die Charakteristik allein gegebenen Unterscheidung gilt sonach der Satz:

III. *Nur die geschlossenen Flächen von ungerader Charakteristik werden durch diese allein als Flächen von umkehrbarer Indicatrix erkannt.*

Tabelle.

Charakteristik K.	Anzahl r der Randcurven.	Anzahl der Rückkehrschnitte eines „vollständigen Systems" für Flächen mit			Zugehörige Zusammenhangszahl $\overline{Z}$ (ungewöhnlicher Zusammenhang) für die Flächen mit		
		nicht umkehrbarer Indicatrix	umkehrbarer Indicatrix: Minimalzahl	umkehrbarer Indicatrix: Maximalzahl:	nicht umkehrbarer Indicatrix	umkehrbarer Indicatrix	
2	0	0	—	—	0	—	Grundform. (Kugel)
1	1	0	—	—	1	—	Grundform. (Elementarfläche)
	0	—	1	1*)	—	2	
0	2	0	—	—	2	—	Grundform.
	1	—	1	1*)	—	4	
	0	1	1	2*)	2	4	
—1	3	0	—	—	3	—	Grundform.
	2	—	1	1*)	—	6	
	1	1	1	2*)	3	6	
	0	—	2	3*)	—	6	
—2	4	0	—	—	4	—	Grundform.
	3	—	1	1	—	8	
	2	1	1	2	4	8	
	1	—	2	3	—	8	
	0	2	2	4	4	8	
—3	5	0	—	—	5	—	Grundform.
:	:	:	:	:	:	:	:

*) Vergl. beziehungsweise die Figuren 5—10 der Tafel II.

Indem man von der Erzeugung aller Flächen aus den Grundformen ausgeht, ergeben sich *für die Möglichkeit umkehrbar eindeutiger stetiger Abbildung aller Punkte zweier (je aus einem Stücke bestehender) Flächen aufeinander die folgenden Bedingungen*) als nothwendig und hinreichend:*

1. *Die Flächen müssen zur gleichen Classe, Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix bez. Flächen mit umkehrbarer Indicatrix, gehören.*
2. *Ihre Charakteristiken müssen übereinstimmen.*
3. *Die Anzahl der Randcurven muss bei beiden dieselbe sein.*

Die Art der Zuordnung der *Randcurven* kann dann noch beliebig getroffen werden. Betreffs der gegenseitigen noch auf verschiedene Weisen möglichen Zuordnung der einzelnen Curven eines vollständigen Systems nicht zerstückender *Rückkehrschnitte* in beiden Flächen ist für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix noch auf den Unterschied von *„Rückkehrcurven mit umkehrbarer Indicatrix" und solchen „mit nicht umkehrbarer Indicatrix"* — bei den letzteren noch darauf, ob die beiden Ränder der Curve gleichsinnig oder ungleichsinnig auf einander bezogen sind**) — zu achten.

Die Bedingung (2) kann auch ersetzt werden durch die folgende:

2a. *Die Maximalzahl der nicht zerstückenden, einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte (welche also „ein vollständiges System" bilden) muss in beiden Flächen dieselbe sein.*

Dabei giebt (pag. 481) für Flächen mit umkehrbarer Indicatrix das aus lauter Rückkehrschnitten mit umkehrbarer Indicatrix bestehende System diese Maximalzahl; die Anzahlen für andere vollständige Systeme können für die Bestimmung nicht ohne gleichzeitige Unterscheidung der verschiedenen Arten von Rückkehrschnitten verwendet werden.

Die vorstehenden Sätze ergeben gleichzeitig die zu einer vollständigen Beschreibung einer Fläche im Sinne der Analysis situs bezüglich ihrer absoluten Eigenschaften nothwendigen Daten.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich nun mit denjenigen Operationen, die für eine analytisch gegebene zweidimensionale Mannigfaltigkeit auszuführen sind zur *Bestimmung der Charakteristik.* Bezüglich derjenigen Untersuchungen, welche für eine weitere Discussion der gestaltlichen Verhältnisse einer Fläche im Sinne der Analysis situs (also speciell z. B. für die Entscheidung der in den vorstehenden

---

*) Danach sind die schon Eingangs citirten Untersuchungen von C. Jordan in dem Aufsatze „Sur la déformation des surfaces" (Liouville's J. Serie 2, Bd. XI, pag. 105), sowie die Formulirung in § 5 der Weichold'schen Dissertation zu präcisiren.

**) Vergl. pag. 480.

Sätzen discutirten Fragen) anzustellen sind, sei auf meine „Beiträge zur Analysis situs III“ (in den Berichten der k. sächs. Ges. d. W. zu Leipzig. v. J. 1887) verwiesen.

II. Abschnitt.

Bestimmung der Charakteristik für gewisse, analytisch gegebene, zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

§ 6.

Allgemeine Formulirung für Flächen ohne Singularitäten.

Im dreidimensionalen Raume sei eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit folgendermassen fixirt:

Gegeben seien zwei Flächen durch ihre Gleichungen

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0; \tag{1}$$

wir nehmen dieselben im Endlichen liegend, übrigens aus einer beliebigen Zahl von Theilen bestehend an. Als das „Innere“ einer Fläche seien diejenigen Theile des Raumes bezeichnet, für welche die betr. Function φ (bez. ψ) kleiner als Null ist, und dabei sei wieder das Vorzeichen von φ (ψ) so gewählt, dass φ (ψ) im Unendlichen positiv wird, also der „unendlich ferne Punkt“ im Aussenraume jeder der Flächen liegt.

Wir fragen nach der Charakteristik derjenigen Theile von $\varphi = 0$, welche im Innern von $\psi = 0$ liegen.

Diese Theile bilden eine im Allgemeinen aus mehreren Stücken bestehende Fläche, die von der Randcurve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ begrenzt ist. Wir treffen zunächst noch die Einschränkung, dass dieses Gebiet keine singulären Punkte — weder Knotenpunkte noch Doppelcurven besitze, d. h. dass die Function $\varphi(x, y, z)$ nicht zusammen mit ihren ersten Ableitungen für eine endliche oder unendliche Anzahl von Punkten verschwinde. *Damit schliessen wir das Vorkommen von Flächen mit umkehrbarer Indicatrix aus.* Aus der Möglichkeit, für die in unserem Raume gelegenen Flächen mit umkehrbarer Indicatrix die Normalenrichtung in einem Punkte der Fläche beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges umzukehren, folgt nämlich sofort, sofern es sich um *geschlossene* Flächen handelt, dass auf einem solchen Wege eine ungerade Anzahl mal Knotenpunkte bez. Doppelcurven durchsetzt werden müssen.*) Wir behandeln diese Vorkommnisse besonders im § 13, schliessen aber hier zur übersichtlichen Darstellung das Auftreten von *Doppelcurven* für *alle* zu betrachtenden Flächen aus, während

*) Vergl. etwa Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, p. 360.

Knotenpunkte für *specielle* Flächen der weiterhin zu discutirenden Flächensysteme auftreten werden, und gerade solche Punkte sich als *Uebergangsstellen* für die bei Flächen ohne Knotenpunkt abzuzählende Charakteristik ergeben werden.

Analog wie in § 3 des I. Theiles für lineare Mannigfaltigkeiten legen wir auch hier gewisse Entstehungsprocesse für die jetzt abzuzählenden M^{II} zu Grunde, welche wir in den verschiedenen Stadien rechnerisch verfolgen können. Dazu bieten sich sofort drei (den im ersten Theile angeführten analoge) Wege:

I. Wir lassen die Fläche $\varphi = 0$ entstehen, indem wir dieselbe als in irgend einer einfach unendlichen Schaar

$$\Phi(x, y, z, \lambda) = 0 \tag{2}$$

von Flächen enthalten denken. Kennen wir dann für irgend ein Individuum der Schaar die Charakteristik seiner innerhalb $\psi = 0$ liegenden Theile, so können wir von hier aus die Aenderungen der Charakteristik verfolgen, die sich ergeben, wenn wir die Schaar bis zu $\varphi = 0$ hin durchlaufen.

II. Wir lassen die Mannigfaltigkeit $\psi = 0$ aus einer einfach unendlichen Schaar

$$\Psi(x, y, z, \mu) = 0 \tag{3}$$

entstehen und verfolgen, wie die Theile der festen Fläche $\varphi = 0$ successive in den sich ändernden Innenraum von Ψ eintreten.

III. Wir nehmen eine von φ und ψ ganz unabhängige, einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Flächen:

$$X(x, y, z, \nu) = 0 \tag{4}$$

zu Hülfe und achten darauf, wie sich die Charakteristik der im Innern einer solchen Fläche liegenden Theile der Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$, $\psi < 0$ ändert mit ändernder Fläche X.

Alle diese Aenderungen finden wieder sprungsweise statt an gewissen besonderen Stellen der zu Grunde gelegten Flächensysteme. Im folgenden Paragraphen fixiren wir dieselben durch Angabe der (auch geometrisch leicht zu erkennenden) Punktcharaktere jener Sprungstellen. *Indem wir dann die Summe dieser Punktcharaktere zwischen zwei bestimmten Flächen des Flächensystems als unabhängig von dem speciellen dazwischengeschalteten Systeme erkennen, ergeben sich wieder bemerkenswerthe Relationen zwischen den singulären Stellen solcher Systeme*, die wir anschliessend allgemein formuliren, um sie in § 12 an zwei einfachsten Beispielen noch näher durchzuführen.

§ 7.

Punktcharakter für die Sprungstellen der Charakteristik. Erste Abzählung.

Die Charakteristik der Theile einer Fläche des Systems

(2) $$\Phi(x, y, z, \lambda) = 0,$$

welche im Innenraume von $\psi(x, y, z) = 0$ liegen, ändert sich, wenn wir von einer Fläche λ zu einer folgenden $\lambda + d\lambda$ übergehen, im Allgemeinen nicht, solange nicht

A. Berührungen mit der Fläche $\psi = 0$ eintreten, und

B. Singuläre Punkte bei den Flächen des Systems $\Phi = 0$ auftreten.

A. Die Berührungspunkte von Flächen $\Phi = 0$ mit $\psi = 0$ trennen sich zunächst in solche, für welche die zugehörige Schnittcurve beider Flächen einen isolirten bez. einen nicht isolirten Doppelpunkt erhält. Betrachten wir nun drei aufeinander folgende Flächen $\Phi = 0$, den Parametern $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$, $\lambda_\varkappa$, $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$ entsprechend (worin $d\lambda$ eine positive Aenderung bezeichnen soll), und nehmen an

α) die Fläche $(\lambda_\varkappa)$ berühre in einem *isolirten* Punkte die Fläche $\psi = 0$. Dann kann beim Durchgang von $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$ zu $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$

a) ein Elementargebilde E^{II} im Innenraume von $\psi = 0$ entstehen,

b) ein solches verschwinden,

c) eine Oeffnung in dem innerhalb $\psi = 0$ gelegenen Theile der sich ändernden Fläche entstehen,

d) eine solche verschwinden.

Die Fälle (a) und (d) sind mit $+1$ ihrem „Punktcharakter“ nach für die Aenderung der Charakteristik der Fläche $\Phi = 0$ in Rechnung zu ziehen, die Fälle (b) und (c) mit -1.

Nehmen wir andererseits an

β) die Fläche $(\lambda_\varkappa)$ berühre die Fläche $\psi = 0$ in einem *nichtisolirten* Doppelpunkt, so werden hier beim Uebergang von der Fläche $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$ nach $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$ entweder

e) zwei im Innern von $\psi = 0$ gelegene, getrennte Theile der sich ändernden Fläche sich vereinigen, oder

f) ein Flächenstück in zwei sich trennen.

Fall (e) ist mit -1, Fall (f) mit $+1$ seinem Punktcharakter nach zu bezeichnen.

Nun hat man zunächst für die Bestimmung der Berührungspunkte von Flächen des Systems $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ mit $\psi = 0$ die Bedingungsgleichungen:

(5) $$\Phi = 0, \quad \psi = 0, \quad \Phi_1 - \varkappa\psi_1 = 0, \quad \Phi_2 - \varkappa\psi_2 = 0, \quad \Phi_3 - \varkappa\psi_3 = 0$$

und dabei tritt die Berührung in einem isolirten bez. nicht isolirten

Doppelpunkt der Schnittcurve von Φ und ψ ein, je nachdem die Determinante

$$(6) \qquad \mathsf{H}_\Phi = \begin{vmatrix} \Phi_{11} - \varkappa\psi_{11} & \Phi_{12} - \varkappa\psi_{12} & \Phi_{13} - \varkappa\psi_{13} & \Phi_1 \\ \Phi_{21} - \varkappa\psi_{21} & \Phi_{22} - \varkappa\psi_{22} & \Phi_{23} - \varkappa\psi_{23} & \Phi_2 \\ \Phi_{31} - \varkappa\psi_{31} & \Phi_{32} - \varkappa\psi_{32} & \Phi_{33} - \varkappa\psi_{33} & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

positiv oder negativ ist.

Die vorhin bezeichneten Fälle (a), (d) und (e) können weiter von den andern (b), (c) und (f) durch das Verhalten der in das „Innere" der Fläche $\psi = 0$ im Berührungspunkte errichteten Normalen unterschieden werden: In den drei erstgenannten Fällen treffen wir mit dieser Normale auf die Fläche $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$ d. h. auf die der Fläche $(\lambda_\varkappa)$ *folgende* Fläche; in den drei letztgenannten Fällen trifft die in den Innenraum von $\psi = 0$ gerichtete Normale die Fläche $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$, d. h. die der Fläche $(\lambda_\varkappa)$ *vorangehende* Fläche. Dieser Unterschied ergiebt sich aber nach kurzer Rechnung als gegeben durch das positive bez. negative Vorzeichen des Productes

$$(7) \qquad \varkappa \cdot \Phi_4,$$

wo $\varkappa$ wieder die aus den Gleichungen (5) für den jeweiligen Berührungspunkt berechnete Constante, Φ_4 die an eben der Stelle berechnete Ableitung von Φ nach dem Parameter λ bezeichnet.

So ergiebt sich schliesslich der Punktcharakter $+1$ *bez.* -1 *für die Berührungspunkte der Flächen des Systems* $\Phi = 0$ *mit* $\psi = 0$ *für die gewollte Abzählung als gegeben durch das positive bez. negative Vorzeichen des Productes der beiden Ausdrücke* (6), (7) *also* (*indem wir wieder von der schon im ersten Theil* (*vgl. pag.* 469) *angewandten Kronecker'schen Bezeichnungsweise Gebrauch machen*) *aus der Formel:*

$$(8) \qquad [\varkappa \cdot \Phi_4 \cdot \mathsf{H}_\Phi].$$

B. Nun haben wir noch zu untersuchen wie sich die Charakteristik ändert beim Durchgang durch einen singulären Punkt des Systems. Es sind dies die im Innern von $\psi = 0$ gelegenen Stellen, für welche

$$(9) \qquad \Phi = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0$$

wird, die *Knotenpunkte* des Systems, sofern wir hier von der Behandlung weiterer Singularitäten absehen. Sie trennen sich in

α) Knotenpunkte mit imaginärem Tangentialkegel (isolirte Knotenpunkte) und

β) Knotenpunkte mit reellem Tangentialkegel (nichtisolirte Knotenpunkte).

(a) Entsteht ein *isolirter Knotenpunkt* dadurch, dass beim Uebergang von der „vorausgehenden" Fläche $\lambda_k - d\lambda$, durch λ_k, zu $\lambda_k + d\lambda$ (der auf den Knotenpunkt folgenden Fläche) ein neuer, den Knotenpunkt ellipsoidisch umgebender Flächentheil auftritt, so ändert sich dabei die Charakteristik der sich deformirenden Fläche Φ um $+2$;

(b) Sie ändert sich umgekehrt um -2, wenn im isolirten Knotenpunkte ein solcher elliptischer Flächentheil verschwindet;

(c) Wenn beim Durchgang durch einen *nichtisolirten Knotenpunkt* ein Flächentheil (der in der Annäherung an den Knotenpunkt hyperbolische Krümmung aufweist) abgeschnürt wird in zwei (nach dem Durchgang durch den Knotenpunkt elliptisch gekrümmte) Theile, so wird dadurch die Charakteristik um $+2$ geändert, während sie sich umgekehrt

(d) um -2 ändert, wenn dieser Uebergang in der entgegengesetzten Richtung erfolgt.

Die hiermit bezeichneten Unterschiede lassen sich analytisch wieder auf die einfachste Weise fixiren und man erhält den Satz:

Der Punktcharakter der durch die Gleichungen (9) *definirten singulären Punkte* (*Knotenpunkte*) *des Flächensystems* $\Phi = 0$ *im Innern von* $\psi = 0$ *ist gegeben durch den Ausdruck:*

$$(10) \qquad 2 \cdot \left[- \Phi_4 \cdot \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} \end{vmatrix} \right],$$

(*in welchem* Φ_4 *wieder die Ableitung nach* λ *bezeichnet*). *Der Factor* 2 *entspricht dem Umstande, dass für unsere Charakteristik nach dem Obigen das Gewicht der singulären Punkte gleich* ± 2 *ist.*

Die Gesammtänderung, welche die Charakteristik der im Innern von $\psi = 0$ gelegenen Theile einer Fläche $\Phi = 0$ erleidet, wenn wir von der Fläche λ_α zu einer anderen λ_β übergehen, d. i. die Differenz der Charakteristiken beider Flächen ist *unabhängig von dem Wege, auf welchem wir von der Ausgangsfläche* $\Phi(x, y, z, \lambda_\alpha) = 0$ *zur Endfläche* $\Phi(x, y, z, \lambda_\beta) = 0$ *übergehen.* Sie wird ausgedrückt als Summe über die Punktcharaktere einmal der Berührungspunkte der Flächen $\Phi = 0$ mit $\psi = 0$, also der Doppelpunkte des auf $\psi = 0$ durch die Flächen des Systems $\Phi = 0$ ausgeschnittenen Curvensystems, dann über die Punktcharaktere der Knotenpunkte des Flächensystems; *somit ergiebt sich eine Relation für die Anzahl dieser den Regeln* (A) *und* (B) *gemäss abzuzählenden singulären Stellen für irgend welche continuirlichen Flächensysteme, welche wir zwischen diese beiden Flächen als Grenzen einschalten mögen; diese Anzahl ist nämlich stets gleich dem Unterschied der Charakteristiken jener beiden Grenzflächen.*

§ 8.

Punktcharakter für die Sprungstellen der Charakteristik. Zweite Abzählung.

Fragen wir nach den Aenderungen, welche die Charakteristik der im Innern von $\psi = 0$ gelegenen Theile von $\varphi = 0$ erleiden, wenn wir diesen Innenraum abändern, so kommen hier nur die Berührungsstellen der (jetzt festen) Fläche $\varphi = 0$ mit der sich ändernden Fläche

(3) $$\Psi(x, y, z, \mu) = 0$$

in Betracht. Diese Stellen sind definirt durch die Gleichungen

(11) $$\varphi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Psi_1 - \varkappa\varphi_1 = 0, \quad \Psi_2 - \varkappa\varphi_2 = 0, \quad \Psi_3 - \varkappa\varphi_3 = 0.$$

Nehmen wir nun zunächst an, der Innenraum von Ψ wächst mit wachsendem Parameter μ (also Ψ_4 ist an der betr. Stelle negativ), so erkennt man, aus analogen geometrischen Ueberlegungen wie bei I, leicht, dass dann eine Berührung von φ mit einer Fläche Ψ mit $+1$, bez. -1 für die Aenderung der Charakteristik zählt, je nachdem dieselbe in einem isolirten oder nicht isolirten Punkte erfolgt; und dass sich diese Aenderung umkehrt, wenn an der Berührungsstelle der Innenraum Ψ mit wachsendem μ abnimmt (d. h. wenn Ψ_4 positiv ist). Nun wird aber der Unterschied der Berührung in einem isolirten bez. nichtisolirten Punkte gegeben durch das positive bez. negative Vorzeichen der Determinante

(12) $$\mathsf{H}_\Psi = \begin{vmatrix} \Psi_{11} - \varkappa\varphi_{11} & \Psi_{12} - \varkappa\varphi_{12} & \Psi_{13} - \varkappa\varphi_{13} & \Psi_1 \\ \Psi_{21} - \varkappa\varphi_{21} & \Psi_{22} - \varkappa\varphi_{22} & \Psi_{23} - \varkappa\varphi_{23} & \Psi_2 \\ \Psi_{31} - \varkappa\varphi_{31} & \Psi_{32} - \varkappa\varphi_{32} & \Psi_{33} - \varkappa\varphi_{33} & \Psi_3 \\ \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

und also ergiebt sich schliesslich für diese Abzählung *der Punktcharakter der durch die Gleichungen* (11) *definirten Stellen durch die Formel*

(13) $$[-\Psi_4 \cdot \mathsf{H}_\Psi].$$

Betrachten wir jetzt in einem Intervalle zwischen zwei Flächen $\Psi(x, y, z, \mu_\alpha) = 0$ und $\Psi(x, y, z, \mu_\beta) = 0$ die Aenderung der Charakteristik der Fläche $\varphi = 0$, so bleibt diese Zahl, analog wie bei der ersten Abzählung wieder ungeändert, auf welche Weise wir auch von der einen Fläche zur andern durch ein continuirliches Flächensystem übergehen; *es ergiebt sich also eine zweite Relation für die Berührungspunkte der Fläche* $\varphi = 0$ *mit irgend welchen zwischen den beiden Flächen* $\Psi(\mu_\alpha) = 0$ *und* $\Psi(\mu_\beta) = 0$ *eingeschalteten Flächensystemen. Dieselbe besagt, dass die nach Formel* (13) *abgezählte Zahl der Berührungspunkte eines solchen Systems mit der Fläche* $\varphi = 0$ *(die*

Doppelpunkte eines auf $\varphi = 0$ *durch die Flächen des Systems ausgeschnittenen Curvensystems) stets gleich der Differenz der Charakteristiken der innerhalb* $\Psi(\mu_\alpha) = 0$ *und* $\Psi(\mu_\beta) = 0$ *gelegenen Theile von* $\varphi = 0$ *ist*).*

Wir heben hier gleich noch den speciellen besonders anschaulichen Fall hervor, in welchem das auf der Fläche $\varphi = 0$ durch ein System $\Psi = 0$ entstehende Curvensystem in dem betrachteten Intervall μ_α bis μ_β die Fläche $\varphi = 0$ nur *einfach* bedeckt. Die nähere Discussion fügen wir den Entwickelungen des folgenden Paragraphen an.

§ 9.

Punktcharakter für die Sprungstellen der Charakteristik. Dritte Abzählung.

Betrachten wir drittens die Aenderungen, welche die Charakteristik der Mannigfaltigkeit $\varphi = 0$, $\psi < 0$ erleidet, wenn wir ein Flächensystem

$$X(x, y, z, v) = 0 \tag{4}$$

durchlaufen und dabei immer die in das Innere einer Fläche $X = 0$ eintretenden Theile jener Mannigfaltigkeit abzählen. Für diese Aenderungen kommen in Betracht:

A. Die Berührungsstellen der Fläche $\varphi = 0$ mit den Flächen des Systems $X = 0$, soweit sie im Innern von $\psi = 0$ liegen, also die Stellen für welche

$$\varphi = 0,\ X = 0,\ \psi < 0,$$
$$X_1 - \varkappa\varphi_1 = 0,\ X_2 - \varkappa\varphi_2 = 0,\ X_3 - \varkappa\varphi_3 = 0 \tag{14}$$

ist. Sie zählen genau wie die entsprechenden Berührungspunkte von $\varphi = 0$ mit $\Psi = 0$ der vorigen Abzählung II (Formel (12) u. (13)), *sind also ihrem Punktcharakter nach gegeben durch die Formel:*

$$[-X_4 \cdot H_X]. \tag{15}$$

B. Die Berührungsstellen der Flächen $X = 0$ mit der Randcurve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ unserer abzuzählenden Mannigfaltigkeit, also die Stellen, für welche die Gleichungen

$$\varphi = 0,\ \psi = 0,\ X = 0,\ \Delta = 0, \tag{16}$$

*) Dabei bezieht sich diese Relation, was zum Vergleich mit der im vorigen Paragraphen gegebenen hervorgehoben sein mag, jetzt *lediglich auf die Doppelpunkte des Curvensystems*, während die in § 7 gegebene die Doppelpunkte eines Curvensystems (dort auf $\psi = 0$ entstanden) mit den Knotenpunkten des zugehörigen Flächensystems (dort $\Phi(\lambda) = 0$) in Beziehung setzt.

erfüllt sind, wo Δ die Functionaldeterminante der drei Functionen φ, ψ, X bedeutet:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & X_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & X_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & X_3 \end{vmatrix}$$

Hier trennen wir zunächst vier Arten der Berührung, indem wir für die beiden sich berührenden Raumcurven, in welchen die Fläche $\varphi = 0$ von den anderen $\psi = 0$ und $X = 0$ geschnitten wird, die „innere" und „äussere" Berührung (auf der Fläche $\varphi = 0$ betrachtet) in derselben Weise unterscheiden, wie wir dies in § 4 des ersten Theiles für zwei sich berührende ebene Curven gethan haben. Dann haben wir, wie dort:

	(*a*) (Fig. 11[a])	(*b*) (Fig. 11[b])	(*c*) (Fig. 11[c])	(*d*) (Fig. 11[d])	
Die Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ verläuft im	Aussenraum	Aussenraum	Innenraum	Innenraum	der Curve $\varphi = 0$, $X = 0$.
Die Curve $\varphi = 0$, $X = 0$ verläuft im	Aussenraum	Innenraum	Aussenraum	Innenraum	der Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Nehmen wir nun an, das Innengebiet von $X = 0$ wächst mit wachsendem Parameter ν, so entsteht (vergl. die Figuren 11*)) in Fall (*a*) eine Elementarfläche im Innern von X, während in Fall (*d*) die Vereinigung zweier Gebiete statt hat; in den Fällen (*b*) und (*c*) tritt dagegen keine die Charakteristik ändernde Umformung ein.

Nehmen wir aber an, das Innengebiet von $X = 0$ nimmt ab mit wachsendem Parameter ν, so verschwindet jetzt umgekehrt in Fall (*a*) eine Elementarfläche aus dem Innenraum $X = 0$, in Fall (*d*) tritt eine Trennung eines Flächenstückes ein, während wieder die Fälle (*b*) und (*c*) die Charakteristik nicht ändern.

Je nachdem also mit wachsendem ν der Innenraum von $X = 0$ wächst oder abnimmt, d. h. also je nachdem an der betr. Stelle X_4 negativ beziehungsweise positiv ist, zählt

Fall (*a*) mit $+1$ bez. -1,
Fall (*d*) mit -1 bez. $+1$,
Fälle (*b*) und (*c*) mit 0

*) In den Figuren sind die Innenräume je der beiden Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ (Curve 1) und $\varphi = 0$, $X = 0$ (Curve 2_2) durch Schraffirung bezeichnet und ausserdem der beim Uebergang von der berührenden Curve (2_2) zu ihrer *folgenden* (2_3) in den Innenraum von (1) tretende Theil des Innern von (2_3) besonders hervorgehoben.

für die Aenderung der Charakteristik beim Durchgang durch die Sprungstelle.

Die vier Fälle sind nun analytisch [genau den in Theil I (§ 4) für ebene Curven abgeleiteten Formeln entsprechend] nach den Vorzeichen zweier Determinanten zu unterscheiden, welche hier die Form annehmen:

(17) $$\Theta_X = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \Delta_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \Delta_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \Delta_3 \end{vmatrix},$$

beziehungsweise

(18) $$\Theta_\psi = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \Delta_1 & X_1 \\ \varphi_2 & \Delta_2 & X_2 \\ \varphi_3 & \Delta_3 & X_3 \end{vmatrix},$$

in welcher $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ die partiellen Ableitungen nach x, y, z der obigen Functionaldeterminante Δ bedeuten. Und zwar ist, analog wie dort:

(19) $$\Theta_X \begin{array}{l} \text{positiv in Fall } (a) \text{ und } (b), \\ \text{negativ in Fall } (c) \text{ und } (d); \end{array}$$
$$\Theta_\psi \begin{array}{l} \text{positiv in Fall } (a) \text{ und } (c), \\ \text{negativ in Fall } (b) \text{ und } (d). \end{array}$$

Es lässt sich sonach der Punktcharakter unserer durch die Gleichungen (16) *gegebenen Berührungsstellen durch die Formel darstellen:*

(20) $$\left[- X_4 \cdot ([\Theta_X] + [\Theta_\psi])\right],$$

in welcher alle eckigen Klammern die eingeführte Bedeutung besitzen. Für negative X_4 zählt nämlich danach Fall (a) mit $+1$, Fall (d) mit -1, den gleichen Vorzeichen von Θ_X und Θ_ψ entsprechend, wie es sein soll; während die Fälle (b) und (c) dadurch als Null zählen, dass hiefür der zweite Factor, den entgegengesetzten Vorzeichen von Θ_X und Θ_ψ gemäss, Null ergiebt; für positives X_4 tritt die entgegengesetzte Zählung ein.

Man kann diese Darstellung (20) für die Charaktere der Berührungspunkte, sofern man die Fälle (b) und (c), die als Null zu zählen sind, durch die Ungleichung
$$\Theta_X \cdot \Theta_\psi > 0$$
(vergl. die Beziehungen (19)) ausschliesst, auch ersetzen durch die anderen:

(20a) $$[- X_4 \cdot \Theta_X] \quad \text{oder} \quad [- X_4 \cdot \Theta_\psi].$$

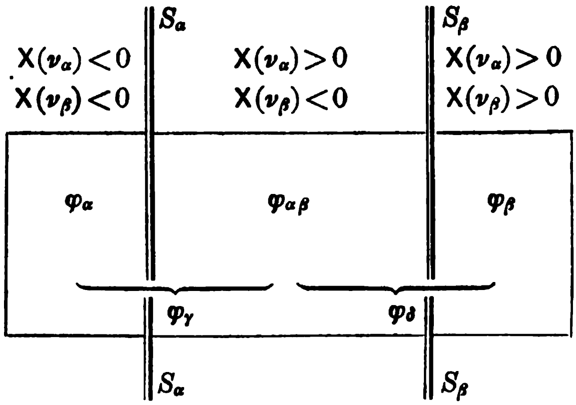
Summiren wir wieder die Punktcharaktere von einer Anfangsfläche v_α bis zu einer Endfläche v_β, so erhalten wir damit die Aenderung der Charakteristik von $\varphi = 0$ in jenem Intervall; diese Zahl, als die

Differenz der Charakteristiken der im Innern von $X(\nu_\alpha) = 0$ bez. von $X(\nu_\beta) = 0$ gelegenen Theile von $\varphi = 0$, ist wieder unabhängig von dem speciellen, zwischen jene beiden Endflächen eingeschalteten Flächensystem, und somit ergiebt sich wieder *eine Relation zwischen den eben fixirten singulären Punkten, nämlich den Doppelpunkten irgend welcher auf $\varphi = 0$ im Innern von $\psi = 0$ zwischen jenen Grenzcurven $X(\nu_\alpha) = 0$ und $X(\nu_\beta) = 0$ eingeschalteten Curvensysteme und den Berührungspunkten derselben mit der Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$.*

§ 10.

Specialisirung der letzten Abzählung.

Die Abzählung gewinnt eine besonders anschauliche und übersichtliche Form, wenn wir zunächst das auf $\varphi = 0$ entstehende Curvensystem als *die Fläche einfach überdeckend* voraussetzen. Es liegen dann auch die Schnittlinien S_α und S_β, einmal der Flächen $X(\nu_\alpha) = 0$ (kurz mit X_α bezeichnet) mit dem Gebiet $\varphi = 0$, $\psi < 0$, dann der Fläche $X(\nu_\beta) = 0$ (X_β) mit $\varphi = 0$, $\psi < 0$ völlig getrennt von einander. Sie theilen das Gebiet $\varphi = 0$, $\psi < 0$ in drei Theile, für welche wir die in der nebenstehenden schematischen Fig. fixirten Bezeichnungen einführen: Das Gebiet φ_α im *Innern* der Fläche X_α gelegen besitze die Charakteristik K_α; ebenso besitzen die weiteren aus der Figur abzulesenden Theile $\varphi_{\alpha\beta}$, φ_β, φ_γ, φ_δ des Gebietes $\varphi = 0$, $\psi < 0$ bez. die Charakteristiken $K_{\alpha\beta}$, K_β, K_γ, K_δ.



Nehmen wir dann an, die Curve S_α, in welcher sich das Gebiet $\varphi_{\alpha\beta}$ an φ_α anschliesst, bestehe aus s_α einzelnen Curvenstücken und weiter noch einer beliebigen Zahl geschlossener Curvenzüge (besitze also nach Theil I die Charakteristik $K^I = s_\alpha$), so folgt aus dem Satze 3 § 2 (pag. 476) sofort die Relation

$$K_{\alpha\beta} = K_\gamma - K_\alpha + s_\alpha \tag{21}$$

und ebenso, wenn die Fläche $\varphi_{\alpha\beta}$ sich an φ_β längs s_β einzelnen Curvenstücken und weiter längs einer gewissen Zahl geschlossener

Curvenzüge anschliesst (also die Curve S_β von der Charakteristik $K^I = s_\beta$ ist), ergiebt sich

$$(22) \qquad K_{\alpha\beta} = K_\delta - K_\beta + s_\beta.$$

Die Charakteristik $K_{\alpha\beta}$ des Flächenstückes $\varphi_{\alpha\beta}$ steht also in einfachster Beziehung zu der Differenz $K_\gamma - K_\alpha$, die wir nach den Regeln des vorigen Paragraphen abzählen, wenn wir das Curvensystem $\mathsf{X}(\nu) = 0$ in der Richtung von X_α nach X_β durchlaufen. Wegen des vorausgesetzten *einfach* überdeckenden Curvensystems X wechselt nun die Ableitung von X nach dem Parameter ν, X_4, innerhalb des Intervalls ihr Zeichen nicht, ist vielmehr (wir haben S_α *innerhalb* S_β angenommen) beständig negativ. Sonach ist nach Formel (15) und (20) direct

$$K_\gamma - K_\alpha = \sum [\mathsf{H}\mathsf{x}] + \sum \big[[\Theta\mathsf{x}] + [\Theta_\psi]\big]$$

oder in anderer Form mit Weglassen der einen eckigen Klammer geschrieben:

$$(23) \qquad K_\gamma - K_\alpha = \sum [\mathsf{H}\mathsf{x}] + \tfrac{1}{2}\Big\{\sum [\Theta\mathsf{x}] + \sum [\Theta_\psi]\Big\},$$

wobei sich die erste Summe auf alle Doppelpunkte des Curvensystems innerhalb des Gebietes $\varphi_{\alpha\beta}$, die zweite auf alle Berührungspunkte dieses Curvensystems mit dem Rande $\varphi = 0$, $\psi = 0$ bezieht. Diese letzteren sind dabei in die Berührungen (a), (b), (c), (d) geschieden (vergl. Fig. 11) wobei die Formel die Punkte (a) und (d) bez. mit $+1$ und -1, die Punkte (b) und (c) mit Null in Rechnung zieht.

Gehen wir nun, das Curvensystem in umgekehrter Richtung von X_β nach X_α durchlaufend von dem Gebiet φ_β aus, so erhalten wir durch eine analoge Abzählung die Differenz $K_\delta - K_\beta$. Sie setzt sich wieder aus der Summe über die Doppelpunkte des Gebietes $\varphi_{\alpha\beta}$ und der Summe über die obigen Berührungspunkte zusammen; nur sind die letzteren jetzt, wegen des umgekehrten Sinnes, in welchem wir das Curvensystem durchlaufen, derart in Rechnung zu ziehen, dass die eben unterschiedenen Punkte (a) und (d) mit Null, die Punkte (b) und (c) aber mit $+1$ bez. -1 zählen. So kommt mit Berücksichtigung der oben gegebenen Unterscheidung die zweite Formel:

$$(24) \qquad K_\delta - K_\beta = \sum [\mathsf{H}\mathsf{x}] - \tfrac{1}{2}\Big\{\sum [\Theta\mathsf{x}] - \sum [\Theta_\psi]\Big\},$$

die Summen auf dieselben Punkte ausgedehnt wie vorhin. Durch Addition der beiden Formeln (23) und (24) und Verbindung mit (21) und (22) ergiebt sich dann für *die Charakteristik der Fläche $\varphi_{\alpha\beta}$ die Formel:*

$$(25) \qquad 2K_{\alpha\beta} = 2\sum [\mathsf{H}\mathsf{x}] + \sum [\Theta_\psi] + s_\alpha + s_\beta,$$

wo die erste Summe sich auf alle Doppelpunkte des Curvensystems $X = 0$ im Innern von $\varphi_{\alpha\beta}$, die zweite sich auf alle Berührungsstellen von $X = 0$ mit dem von der Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ gebildeten Rand der Fläche erstreckt.

Die Doppelpunkte sind dabei unterschieden als isolirte $(+1)$ bez. nicht isolirte (-1) Doppelpunkte, die Berührungspunkte des Curvensystems mit dem Rande aber in dieser Formel lediglich danach, ob die Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ von der betreffenden Curve des Systems im Aussenraume ($+1$; Fälle (a) und (c)), bez. im Innenraume (-1; Fälle (b) und (d)) von $\psi = 0$ berührt wird. $s_\alpha + s_\beta$ ist die Charakteristik K^I der beiden Curven S_α und S_β, welche, dem Curvensystem $X = 0$ angehörig, neben der Curve $\varphi = 0$, $\psi = 0$ als Begrenzung des Gebietes $\varphi_{\alpha\beta}$ auftreten. Diese Curven kommen also nur mit ihren getrennten Begrenzungsstücken für die Charakteristik $K_{\alpha\beta}$ in Rechnung, während noch vorhandene geschlossene Züge derselben ohne Einfluss bleiben.

Die Formel giebt gleichzeitig auch eine geometrische Deutung für die im vorigen Paragraphen gegebene allgemeine Darstellung, die sich auf ein beliebig vielfach von Curven $X = 0$ bedecktes Gebiet der Fläche $\varphi = 0$ bezieht, wenn wir beachten, dass wir ein solches sofort in eine Summe einzelner einfach überdeckter Gebiete durch den Schnitt von $\varphi = 0$ mit $X_4 = 0$ zerlegen können (welcher die Umhüllungscurve des Curvensystems $X = 0$, $\varphi = 0$ bezeichnet). Es handelt sich dann um die Summe der Charakteristiken dieser einzelnen Theile, die sich längs jener Umhüllungscurve aneinanderschliessen und dem Vorzeichen von X_4 entsprechend als *positive* bez. *negative* Ueberdeckungen der Fläche $\varphi = 0$ zu zählen sind.*)

§ 11.

Verallgemeinerung der vorigen Abzählung.

Die in der Formel (25) getroffene Abzählung der singulären Punkte erweist sich als *unabhängig von der Richtung, in welcher wir das Curvensystem* $X = 0$ *durchlaufen*, und dieser Umstand giebt Anlass zu einer Erweiterung der Abzählung auf Curvensysteme, die in irgend welcher Weise ein Gebiet $\varphi_{\alpha\beta}$ überdecken, ohne Rücksicht darauf, ob es möglich ist, ein solches System in einem bestimmten Sinne zu durchlaufen oder nicht. Es sei diese allgemeine Formel, in welche wir gleichzeitig singuläre Punkte irgend welcher Art mit einbegreifen

*) Beiläufig bemerkt ergiebt sich andererseits die Charakteristik der Ueberdeckung der Fläche $\varphi = 0$ mit dem Systeme $X = 0$, diese als eine mehrblättrig über $\varphi = 0$ ausgebreitete Fläche aufgefasst, wenn wir alle Ueberdeckungen in *demselben* Sinne addiren, also die in Formel (15) und (20) gegebenen Punktcharaktere mit Weglassung je des Factors $(-X_4)$ summiren.

wollen, wieder für ein die betreffende Fläche *einfach* überdeckendes System, noch entwickelt; wir sehen dabei von einer analytischen Darstellung ab.

Bezeichne F irgend eine, aus einer beliebigen Anzahl von Theilen bestehende Fläche. Wir tragen auf ihr ein Curvensystem ein, so beschaffen, dass durch jeden Punkt der Fläche im Allgemeinen nur eine einzige Curve des Systems hindurchgeht. Nur von singulären Punkten mögen mehrere Zweige auslaufen, so zwar, dass von einem Punkte $\overset{i}{P}_n$, den wir als im Innern der Fläche gelegen annehmen, n Zweige auslaufen; von einem Punkte $\overset{r}{P}_n$ auf dem Rande ebenso n Zweige sich in das Innere der Fläche erstrecken. n sei dabei eine beliebige der Zahlen $0, 1, 2 \ldots \infty$. Nun seien die Punkte $\overset{i}{P}_n$, $\overset{r}{P}_n$ je in der Zahl $\overset{i}{p}_n$, $\overset{r}{p}_n$ auf F vorhanden, wobei $\overset{i}{p}_2$ und (falls F nicht geschlossen, oder nur von Curven des Systems begrenzt ist) auch $\overset{r}{p}_1$ gleich unendlich ist, während wir alle übrigen Punkte, die *singulären* Punkte des Systems, als in endlicher Zahl und discret auf F vertheilt annehmen. Endlich mögen Curven des Systems auch als theilweise Begrenzungen der Fläche F auftreten und zwar sei K^I die Charakteristik der genannten als Begrenzung auftretenden Curven des Systems (die dann aus K^I Curvenstücken und einer beliebigen Zahl geschlossener Curven bestehen).

Dann besteht zwischen jenen singulären Punkten und der Charakteristik K der Fläche F die einfache Beziehung:

$$(26)\qquad K = -\tfrac{1}{2}\sum(n-2)\overset{i}{p}_n - \tfrac{1}{2}\sum(n-1)\overset{r}{p}_n + \overset{i}{p}_\infty + \tfrac{1}{2}K^I.$$

wobei sich die Summen nur auf die *endlichen* Indices n beziehen**). Insofern wir davon absehen, ob ein solches Curvensystem in einer bestimmten Richtung durchlaufen werden kann oder nicht, ist ein von den früheren Entwickelungen, die stets auf einen Entstehungsprocess der Mannigfaltigkeit recurrirten, unabhängiger, gesonderter Beweis für die Formel zu erbringen. Wir verwandeln zu dem Ende die Fläche F dadurch in eine neue F', dass wir zunächst alle im Innern befindlichen singulären Punkte durch Anbringung kreisförmiger Schnitte herausschneiden — wodurch die Charakteristik K um die Anzahl aller

*) Die Punkte $\overset{r}{P}_0$ können dabei, indem wir uns das Curvensystem auch über den Rand der Fläche hinaus fortgesetzt denken, als den „Berührungen von Aussen" entsprechend betrachtet werden, die Punkte $\overset{r}{P}_2$ als den „Berührungen von Innen" entsprechend.

**) Man erkennt, dass in der Formel die nicht singulären Punkte $\overset{i}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_1$ von vornherein wegfallen.

dieser Punkte vermindert wird — und dann auch alle singulären Punkte auf dem Rande mit Ausnahme derjenigen, von welchen zwei Zweige in das Innere laufen und der isolirten Punkte auf dem Rande (also der Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$). Es zeigt sich dann (vgl. die Figuren 12, a—f für die Punkte $\overset{i}{P}_0$, $\overset{i}{P}_1$, $\overset{i}{P}_3$, $\overset{i}{P}_\infty$; $\overset{r}{P}_3$, $\overset{r}{P}_\infty$), dass alle diese Punkte äquivalent sind einer gewissen Zahl von Punkten $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$, so zwar dass die *Differenz der Anzahl* dieser auf dem Rande neu entstandenen Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ jedesmal ein Charakteristicum des besonderen singulären Punktes ist. Bezeichnen wir diese Differenz mit d, so ist wie aus den Figuren ersichtlich diese Differenz:

(27)
$$\begin{cases} \text{für einen Punkt } \overset{i}{P}_n\text{:} \\ \qquad \overset{i}{d}_n = n, \\ \text{für einen Punkt } \overset{i}{P}_\infty \text{ ist} \\ \qquad \overset{i}{d}_\infty = 0, \\ \text{für einen Punkt des Randes } \overset{r}{P}_n \text{ ist:} \\ \qquad \overset{r}{d}_n = (n-1); \end{cases}$$

für Punkte $\overset{r}{P}_\infty$ des Randes ist zu beachten, in welcher Weise sich die Randcurve gegen die Curven des Systems verhält. Die Figuren 12 kennzeichnen die verschiedenen Möglichkeiten, wonach ein solcher Punkt bez. mit den Zahlen 0, 1, 2 äquivalent wird. In der Abzählung sei nur die erste Form des Punktes $\overset{r}{P}_\infty$ berücksichtigt, indem wir die andern jederzeit als die Combination eines Punktes $\overset{r}{P}_\infty$ mit einem, bez. zwei Punkten $\overset{r}{P}_0$ in Rechnung ziehen können. Die neue Fläche F', von der Charakteristik „K minus Anzahl aller Punkte $\overset{i}{P}$“, besitzt jetzt im Innern keinerlei singuläre Punkte, auf dem Rande nur Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ („innere“ und „äussere Berührungspunkte“ der Systemcurven mit dem Rande); ausserdem besteht der Rand noch aus Curvenzügen von der Gesammtcharakteristik K^I, welche dem Curvensystem angehören.

Für diese Fläche gilt nun aber der Satz, dass ihre Charakteristik gleich ist der Differenz der Anzahl der Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ vermehrt um die Zahl K^I. Wie nämlich auch das Curvensystem auf F' beschaffen sein mag, wir können F' stets durch geeignete Querschnitte in solche einzelne Gebiete zerlegen, für welche das in einem Gebiet enthaltene Curvensystem in bestimmter Richtung zu durchlaufen ist; dann lässt sich jedenfalls für diese Theile einzeln der früher entwickelte Satz anwenden. Die Summation ergiebt aber dann, insofern die durch die Zerschneidung neu entstandenen Querschnitte sich bei der Zusammensetzung wieder compensiren, direct die Erweiterung des Satzes für ein beliebiges Gebiet F'. Gehen wir endlich von hier auf die Fläche F zurück, jeden singulären Punkt seiner ihm äquivalenten Zahl gemäss (nach Formel (27)) in Rechnung ziehend, so folgt sofort die obige allgemeine Formel (26). Auch hier lässt sich dann, wenn wir nur mehrfache Ueberdeckungen durch ganz willkürliche Curvensysteme von einander zu trennen vermögen, die Ausdehnung auf ganz beliebige einfach unendliche Curvensysteme fixiren.

Zur Veranschaulichung der Abzählung mögen die in Fig. 2 (Tafel I) gezeichneten Curvensysteme dienen, aus deren nach den gegenwärtigen Regeln abgezählten singulären Punkten sich sofort die Charakteristiken etwa der Stücke der Ebene ergeben, in welche dieselbe durch die stark ausgezeichneten beiden Curven zerfällt.

§ 12.

Analytische Beispiele für die Summation der Punktcharaktere. Curvatura integra einer geschlossenen Fläche.

Wir wählen zwei Beispiele einfachster Art für die Abzählung der Charakteristik einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit:

1. Beispiel. *Gegeben sei die Gleichung einer ebenen Curve* $\varphi(x, y) = 0$; *welches ist die Charakteristik des Innenraumes* $\varphi < 0$?

I. Zunächst lassen wir die Curve $\varphi = 0$ entstehen aus dem Curvensystem

$$\Phi \equiv \varphi - \lambda = 0,$$

welches wir schon in § 5 des ersten Theiles betrachtet haben. Dasselbe besitzt für $\lambda < 0$ eine gewisse Zahl singulärer Punkte, für welche

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

ist. Da der Innenraum der Curven $\varphi - \lambda = 0$ beständig wächst, mit wachsendem Parameter λ, ist jeder isolirte Doppelpunkt mit $+1$, jeder nicht isolirte mit -1 für die Charakteristik des Innenraumes zu zählen und daher giebt die

$$\sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix}\right]$$

ausgedehnt über alle Punkte

$$\varphi < 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0$$

die fragliche Charakteristik und kennzeichnet sich damit als *Charakteristik des Functionensystems*

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0 \tag{28}$$

im Sinne von Kronecker. *)

II. Lassen wir den Innenraum $\varphi < 0$ andererseits (in Analogie mit der in § 9 getroffenen Abzählung) dadurch entstehen, dass wir eine horizontale Gerade

$$y - v = 0$$

mit wachsender Constanten v über die Curve gleiten lassen und jedesmal die unterhalb der Geraden liegenden Theile des Innenraumes betrachten, so ist deren Charakteristik durch eine Summe über die Berührungspunkte horizontaler Tangenten an die Curve gegeben, in welcher

Minima mit äusserer Berührung mit $+1$,
Maxima mit innerer Berührung mit -1

zu zählen sind, während bei Minimis mit innerer, bei Maximis mit äusserer Berührung die Charakteristik nicht geändert wird. Die entsprechende Formel:

$$K = -\sum [\varphi_2 \cdot \varphi_{11}],$$

die Summe, ausgedehnt über alle Punkte

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 < 0,$$

zeigt sich wieder als die Kronecker'sche Charakteristik des Functionensystems (28) in einer zweiten Form.

III. Die Beziehung zwischen den sämmtlichen Berührungspunkten, welche sich in der Formel:

$$\sum [\varphi_2 \cdot \varphi_{11}] = 0$$

für

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

ausdrückt, ergiebt die Abzählung auch in der Form

$$K = \frac{1}{2} \sum [\varphi_{11}],$$

die Summe über *alle* Punkte

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

ausgedehnt, und stellt so direct einen speciellen Fall der Formel (26) pag. 501 analytisch dar.

2. Beispiel. *Gegeben sei die Gleichung einer Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$. Welches ist ihre Charakteristik?*

*) Man vergl. hier wieder die Eingangs citirten Aufsätze von Kronecker.

I. Wir lassen die Fläche $\varphi = 0$ entstehen aus einem Flächensystem

$$\Phi \equiv \varphi(x, y, z) - \lambda = 0,$$

welches für $\lambda < 0$ das Innere der (im Endlichen angenommenen) Fläche $\varphi = 0$ einfach und lückenlos ausfüllt, dabei schliesslich in einzelne isolirte Knotenpunkte sich zusammenziehend. Es existirt also eine bestimmte untere Grenze λ, für welche die Charakteristik der Fläche 0 ist. Von ihr beginnend berechnen wir die Charakteristik der Fläche $\varphi = 0$ selbst durch eine Summation über alle Knotenpunkte des Flächensystems, diese dabei im Sinne der in § 7 getroffenen Abzählung unterscheidend. So ergiebt sich die Charakteristik

$$K^{II} = 2 \cdot \sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix} \right]$$

die Summe über alle Punkte

$$\varphi < 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0$$

erstreckt. *Sie stellt sich also bis auf den Factor 2 dar als Kronecker'sche Charakteristik des Functionensystems*

(29) $$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0.$$

II. Gehen wir andererseits (in Analogie mit der Abzählung des § 9) von einem auf der Fläche $\varphi = 0$ verzeichneten Curvensystem aus, indem wir die Fläche mit Ebenen, parallel etwa zur (xy) Ebene

$$z - v = 0,$$

schneiden, so ergiebt sich die Charakteristik K^{II} als Ueberschuss der isolirten über die nichtisolirten Doppelpunkte dieses Curvensystems; diese aber, als Berührungspunkte horizontaler Tangentialebenen in Punkten elliptischer bez. hyperbolischer Krümmung, ergeben sofort:

$$K^{II} = \sum \left[\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} \right]$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0,$$

in welcher Formulirung wir wieder die Kronecker'sche Charakteristik des obigen Functionensystems (29) erkennen.

Nun ist die Kronecker'sche Charakteristik des obigen Functionensystems, wie in den Monatsberichten von 1869 (pag. 689) gezeigt ist, direct identisch mit der Gauss'schen Curvatura integra der Fläche $\varphi = 0$; *diese stimmt also, bis auf den Factor 2, auch mit der „geometrischen Charakteristik" der Fläche überein, und steht zu der*

Riemann'schen Zusammenhangszahl in der im § 4 (pag. 484) *angeführten einfachen Beziehung.* Anknüpfend an unsere früheren Definitionen und die Ableitung der Curvatura integra einer Fläche durch die bekannte, durch die Normalen der Fläche vermittelte Abbildung auf die Kugel lässt sich diese Beziehung leicht auch auf geometrischem Wege erkennen.

§ 13.

Auftreten von Doppelcurven. Flächen mit umkehrbarer Indicatrix.

Betrachten wir die Aenderungen der Charakteristik für die im Innern einer Fläche $\psi(x, y, z) = 0$ gelegenen Theile einer sich ändernden Fläche $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$, die wir in § 6 untersucht haben, nunmehr unter der Voraussetzung, dass neben Knotenpunkten — die wir dort als Sprungstellen der Charakteristik erkannt haben — auch Doppelcurven in $\Phi = 0$ auftreten können. Wir schliessen damit nach den zu Anfang des § 5 dieses Abschnittes gegebenen Ausführungen auch die Abzählung von Flächen mit umkehrbarer Indicatrix in unsere analytische Darstellung ein.

Es ist zu untersuchen, einmal, wie sich die Charakteristik ändert beim Durchgang durch eine Fläche mit Doppelcurven, und zweitens, welche charakteristische Zahl wir der Fläche mit Doppelcurve selbst mit Rücksicht auf die in § 2 und 3 gemachten Abzählungen zuzuweisen haben.

In den Innenraum der Fläche $\psi = 0$, für welchen wir unsere Abzählung treffen, treten im Allgemeinen von der Doppelcurve einmal ganze, in sich geschlossene Züge, dann einzelne Stücke, die sich je zwischen zwei Punkten der Begrenzungsfläche hinerstrecken. Dabei verläuft die Doppelcurve entweder isolirt, oder wird von zwei reellen Flächenmänteln durchsetzt. Die Uebergangsstellen zwischen isolirten und nicht isolirten Zügen der Doppelcurve werden gebildet durch Cuspidalpunkte (pinch-points) der Fläche, die je in gerader Anzahl auf den verschiedenen Zügen der Doppelcurve vertheilt sind.

Zunächst übersehen wir nun leicht, dass sich die Charakteristik der Fläche nur an gewissen singulären Stellen der Doppelcurve ändert. Durchsetzen sich nämlich längs eines ganzen geschlossenen Curvenzuges zwei reelle Mäntel der Fläche, ohne dass in demselben ein höherer singulärer Punkt auftritt, so tritt beim Uebergang von der der Fläche mit Doppelcurve vorangehenden zu der ihr folgenden Fläche lediglich eine Umschaltung in der Verbindung der Theile der Fläche ein, die Charakteristik bleibt ungeändert. Tritt andererseits ein geschlossener Zug der Doppelcurve auf, der völlig isolirt verläuft, so entsteht, bez. verschwindet, in ihm ein ringförmig gestalteter, geschlossener Flächentheil von der Charakteristik Null, durch welchen also gleichfalls die Gesammtcharakteristik eine Aenderung nicht erleidet. Ebenso tritt eine Aenderung in der Charakteristik *nicht* ein, wenn ein von der Fläche $\psi = 0$ begrenzter Curvenzug seiner ganzen Ausdehnung nach als isolirte bez. als nicht isolirte Doppelcurve auftritt.

Betrachten wir also singuläre Stellen der Doppelcurve: zunächst die schon erwähnten Cuspidalpunkte, dann Punkte, in denen sich zwei Mäntel der Fläche berühren (Doppelpunkte der Doppelcurve), endlich Punkte, in denen sich drei Mäntel der Fläche durchsetzen. Sie lassen im Wesentlichen die möglichen Umformungen erkennen und desshalb sei die Beschränkung auf diese Singularitäten gestattet*). Denken wir uns die Umgebung eines singulären Punktes etwa durch eine Kugel aus der ganzen Fläche ausgeschnitten und betrachten in der Schaar der Flächen $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ die der Fläche mit singulärem Punkte, $(\lambda_\varkappa)$, vorausgehende, $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$, und folgende, $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$, Fläche (unter $d\lambda$ wieder eine positive Grösse verstanden), so ergiebt die in diesem Bereich erfolgende Aenderung der Charakteristik der ausgeschnittenen Flächentheile den Einfluss des betr. singulären Punktes auf die Gesammtcharakteristik.

a) *Cuspidalpunkte.*

Fig. 13 giebt in der Umgebung eines Cuspidalpunktes die Gestalt unserer drei soeben unterschiedenen Flächen $(\lambda_\varkappa)$, $(\lambda_\varkappa + d\lambda)$ und $(\lambda_\varkappa - d\lambda)$. Die eine ($F_0$ in der Figur) besteht aus einem von zwei Randcurven begrenzten ringförmigen Flächenstück — von der Charakteristik Null; die andere (F_2) ist von zwei Stücken, Elementarflächen, gebildet — ihr kommt sonach die Charakteristik 2 zu; während die dazwischenliegende Fläche (F_1) mit Cuspidalpunkt eine (nach Art einer Verzweigungsstelle verschlungene) Elementarfläche darstellt — derselben also die Charakteristik 1 zukommt. *Die Aenderung der Charakteristik einer Fläche beim Durchgang durch eine Fläche mit Doppelcurve wird also, soweit Cuspidalpunkte dabei auftreten, durch die Zahlen* $+1$, *bez.* $+2$ *bezeichnet, sofern der Durchgang durch den Cuspidalpunkt von der Fläche* F_0 *durch* F_1 *nach* F_2 *erfolgt, durch die Zahlen* -1 *bez.* -2, *wenn dieser Uebergang in der entgegengesetzten Reihenfolge statt hat.*

Die analytische Unterscheidung für die Abzählung der Cuspidalpunkte ergiebt sich nun sofort. Eine Fläche $(\lambda_\varkappa)$ des Systems $\Phi = 0$ besitzt eine Doppelcurve, wenn für diesen Parameter $\lambda_\varkappa$ die Function

*) Beiläufig sei, was sofort geometrisch ersichtlich, noch bemerkt, dass das Auftreten einer continuirlichen Reihe von Cuspidalpunkten, d. h. eine Rückkehrcurve *keine* Aenderung der Charakteristik hervorruft.

Φ sammt ihren ersten Ableitungen nach x, y, z, Φ_1, Φ_2, Φ_3 für ein einfach unendliches Werthsystem der Variablen verschwinden; für einen auf der Doppelcurve gelegenen Cuspidalpunkt verschwindet dann auch noch die Determinante der zweiten Ableitungen sammt ihren zweigliedrigen Unterdeterminanten; die Tangentialebene des Knotenpunktes ist gegeben durch:

$$\Phi_{i1}(x - x_0) + \Phi_{i2}(y - y_0) + \Phi_{i3}(z - z_0) = 0,$$

wo i beliebig 1, 2 oder 3 bedeutet, und

$$\Phi_{i1} = \lambda\Phi_{i2} = \mu\Phi_{i3},$$

insbesondere

$$\Phi_{11} = \lambda^2\Phi_{22} = \mu^2\Phi_{33}$$

ist. Die Entwickelung von Φ im Cuspidalpunkt beginnt mit dem Quadrate dieser Tangentialebene, etwa in der Form

$$\Phi_{11}\left[(x - x_0) + \frac{1}{\lambda}(y - y_0) + \frac{1}{\mu}(z - z_0)\right]^2.$$

In der nächsten Umgebung des singulären Punktes ist also (abgesehen vom Fortschreiten *in* der Tangentialebene) die Function Φ überall positiv bez. überall negativ, dem Vorzeichen von Φ_{11} entsprechend. Es ist dies der Bereich der aus einem Stück bestehenden Nachbarfläche F_0 (Fig. 13), während wir zu der (zweitheiligen) Nachbarfläche F_2 gelangen, wenn wir zunächst in Richtung der Tangentialebene fortschreiten (für die Entwickelung also weiterhin die aus drei linearen Factoren bestehenden Glieder dritter Dimension heranziehen). Nun wird die der Fläche $\Phi = 0$ vorangehende bez. folgende Fläche bei wachsendem Parameter λ) in erster Annäherung dargestellt durch $\Phi - d\lambda \,.\, \Phi_4 = 0$ bez. durch $\Phi + d\lambda . \Phi_4 = 0$. Die *eintheilige* Fläche F_0 der Figur ist also vorangehende bez. folgende Fläche, jenachdem für den singulären Punkt Φ_4 und Φ_{11} im Vorzeichen übereinstimmen bez. nicht übereinstimmen. *Die durch alle Cuspidalpunkte einer Doppelcurve hervorgerufene Aenderung der Charakteristik ist also durch die Summe*

$$\sum [\Phi_4 \cdot \Phi_{11}] \tag{27}$$

für den Uebergang zu der Fläche mit Doppelcurve selbst, beziehungsweise durch die doppelte Summe

$$2 \cdot \sum [\Phi_4 \cdot \Phi_{11}] \tag{28}$$

gegeben, wenn wir den Durchgang (von F_0 nach F_2 oder umgekehrt) betrachten.

b) Selbstberührungspunkte.

Auch hier beginnt die Entwickelung von Φ mit dem Quadrate

$$\Phi_{11}\left[(x - x_0) + \frac{1}{\lambda}(y - y_0) + \frac{1}{\mu}(z - z_0)\right]^2,$$

in welchem der lineare Factor die doppelt zählende Tangentialebene bezeichnet, während die Glieder dritter Ordnung diesen Factor einfach enthalten. Dabei lassen sich (wir haben die Glieder bis zum vierten Grade zu berücksichtigen) zwei getrennte Entwickelungen in dem Selbstberührungspunkte herstellen, welche (in erster Annäherung als Paraboloide) die sich berührenden Flächenmäntel ersetzen. Es ist dann zunächst zu unterscheiden, ob die Berührung der beiden Mäntel in einem isolirten Punkte erfolgt oder in einem Punkte, in welchem sich zwei reelle Zweige der Doppelcurve durchsetzen.

Für den Fall der Berührung in einem isolirten Punkte vereinigen sich (wenn wir wieder (vergl. Fig. 14ª) die nächste Umgebung des singulären Punktes für die der besonderen Fläche vorangehende und folgende Fläche des Systems betrachten) entweder die zwei Theile der Fläche zu einem einzigen, bez. findet das umgekehrte statt, je nachdem (vgl. die vorhin bei (a) gegebene Entwickelung) das Vorzeichen von

$$\Phi_4 \cdot \Phi_{11} \tag{29}$$

positiv oder negativ ist. Die Charakteristik ändert sich bei diesem Durchgange um -2 bez. um $+2$, während wir der zwischenliegenden Fläche mit dem singulären Punkt selbst, insofern wir die Theile derselben in dem Berührungspunkt als *nicht* zusammenhängend betrachten, die *grössere* der beiden Charakteristiken zuweisen.

Durchsetzen sich im Berührungspunkt zwei reelle Züge der Doppelcurve, dann findet (vergl. Fig. 14ᵇ) ein Uebergang von zwei Flächentheilen zu vier Flächentheilen oder der umgekehrte statt, je nach dem positiven bez. negativen Vorzeichen von

$$\Phi_4 \cdot \Phi_{11},$$

und damit eine Aenderung der Charakteristik um $+2$ bez. um -2, während wir diesmal der Uebergangsform selbst die *kleinere* der beiden Charakteristiken zuzuweisen haben.

c) *Dreifache Punkte.*

Durchsetzen sich in einem Punkte drei Mäntel der Fläche, so gehen von ihm drei Zweige der Doppelcurve aus und wir unterscheiden α) zwei der Zweige sind conjugirt imaginär, dann wird ein isolirt verlaufender Zweig der Doppelcurve von einem reellen Flächenmantel geschnitten; β) die drei Zweige sind reell, dann sind auch drei reelle Flächentheile vorhanden. Die in Fig. 15ª und 15ᵇ (Tafel III) gegebene Darstellung der vorausgehenden und folgenden Flächenform zeigt, dass beidemal *beim Durchgang durch die singuläre Fläche die Charakteristik ungeändert bleibt; dass aber der singulären Fläche selbst in Fall α) eine um eins höhere, in Fall β) eine um eins niedrigere Charakteristik zu ertheilen ist.*

Diese Entwickelungen mögen genügen, um die Art des Einflusses höherer singulärer Punkte für die Charakteristik der Flächen eines Systems $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ zu bezeichnen.

Was die Abzählung der Charakteristik einer Fläche $\varphi = 0$ betrifft, sofern wir dieselbe nach den in § 8 und 9 gegebenen Methoden durchführen, wo es sich darum handelt, die Aenderung der Charakteristik im Innern eines Flächensystems $\Psi(x, y, z, \mu) = 0$, beziehungsweise $X(x, y, z, \nu) = 0$ zu verfolgen, also mit Hülfe eines auf der Fläche verlaufenden Curvensystems, so erleidet dieselbe, sofern wir in $\varphi = 0$ Doppelcurven und singuläre Punkte der eben betrachteten Art voraussetzen, *gar keine Aenderung.* Wir haben lediglich zu beachten, dass in einer Doppelcurve sich zwei dort völlig getrennte Mäntel der Fläche durchsetzen, dass also die durch die Doppelcurve hervorgerufenen Doppelpunkte des auf φ betrachteten Curvensystems für die Charakteristik der Fläche *nicht* zu zählen sind; ebenso ergiebt die Betrachtung des Curvensystems, welches die Flächen $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ in der Nähe eines auf $\varphi = 0$ vorhandenen Cuspidalpunktes (vergl. Fig. 16) ausschneiden, lediglich, dass dort eine Curve des Systems eine Spitze besitzt; u. s. w. Wir können allgemein den Satz aussprechen:

Singuläre Punkte des Curvensystems $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ *auf* $\varphi = 0$, *welche durch singuläre Punkte der Fläche* $\varphi = 0$ *hervorgerufen werden*), sind für die Abzählung der Charakteristik von* φ *ohne Einfluss, so lange sie nicht eigentlichen Berührungen einer Fläche* $\Psi = 0$ *bez.* $X = 0$ *mit* $\varphi = 0$ *entsprechen; dann aber zählen sie in dem früher entwickelten Sinne.*

§ 14.

Beispiel für die Discussion einer Fläche mit umkehrbarer Indicatrix.

Um die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems rotire ein die xy-Ebene stets berührender Kreis, dessen Radius sich proportional mit $\cos 2\varphi$ ändert, wo φ den Neigungswinkel der Ebene des Kreises gegen die x-Axe bezeichnet. Die entstehende Fläche (in Fig. 5 (Tafel II) scizzirt) hat die z-Axe zur Doppelcurve, die Punkte $z = 2$, $z = 4$ (bei specieller Wahl der Constanten) zu Cuspidalpunkten mit

*) Es ist zu beachten, dass dies nicht gilt für die auf $\varphi = 0$ durch singuläre Punkte einer Fläche des Systems $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ hervorgerufenen singulären Punkte des Curvensystems. Ein Knotenpunkt einer Fläche $\Psi = 0$ bez. $X = 0$ z. B., der, auf $\varphi = 0$ gelegen, dort einen Doppelpunkt einer Curve des Systems hervorruft, zählt für die Charakteristik von φ im Sinne einer äquivalenten Berührung von Ψ bez. von X mit der Fläche φ.

der (yz)- bez. (xz)-Ebene als Tangentialebenen. Zwischen beiden Punkten wird die Doppelcurve von reellen Flächenmänteln durchsetzt; der sich durch's Unendliche erstreckende Theil der z-Axe — den wir für die Aufstellung der Charakteristik der Nachbarflächen als geschlossen auffassen — verläuft isolirt. Der Coordinatenanfangspunkt ist dreifacher Punkt der Doppelcurve, insofern der isolirte Zweig derselben von der Fläche (senkrecht) durchsetzt wird. Die Flächengleichung lautet:

$$\varphi \equiv (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (4x^2 + 2y^2)z = 0.$$

Betrachten wir im System

$$\varphi - \lambda = 0$$

die der obigen Fläche vorausgehende (innerhalb φ gelegene) und folgende, so bildet die erstere einen Ring, welcher den isolirten Theil der Doppelcurve von $z = 0$ bis $z = 2$ umgiebt, die letztere gleichfalls einen solchen, der zunächst kugelförmig die Fläche $\varphi = 0$ umgiebt und sich dann als unendliche Röhre um den zwischen 0 und $+4$ sich in's unendliche ziehenden Theil der z-Axe legt. Gehen wir aus etwa von der Kenntniss der Charakteristik 0 der ersteren Fläche, so zählt für den *Durchgang* zur letzteren

Cuspidalpunkt	$z = 2$	mit	$+2$,
Cuspidalpunkt	$z = 4$	mit	-2,
dreifacher Punkt	$z = 0$	mit	0,

so dass die Charakteristik der letzteren sich gleichfalls zu 0 ergiebt. Für den *Uebergang zu der singulären Fläche* selbst aber zählt

Cuspidalpunkt	$z = 2$	mit	$+1$,
Cuspidalpunkt	$z = 4$	mit	-1,
Dreifacher Punkt	$z = 0$	mit	$+1$,

so dass deren Charakteristik $= +1$ wird; in der That ist sie im Sinne der Analysis situs mit der schon in § 3 (pag. 482) gegebenen Fläche identisch.

Dabei erkennen wir hier direct aus der Abzählung in der *ungeraden Zahl*, welche wir für die Charakteristik der geschlossenen Fläche erhalten, die Fläche als eine solche *mit umkehrbarer Indicatrix*.

Lassen wir, um ein Curvensystem auf der Fläche zu fixiren, eine Ebene parallel mit der xy-Ebene über die Fläche gleiten, so zählen gleichfalls die Punkte $z = 4, 2, 0$ der z-Axe als singuläre Punkte desselben, weil hier *eigentliche* Berührungen statthaben. In $z = 4$ ist ein isolirter Punkt, in $s = 2$ ein Selbstberührungspunkt einer Curve des Systems — einem Doppelpunkte äquivalent —, in $s = 0$ wieder ein isolirter Punkt vorhanden. Den Abzählungen des § 9 entsprechend zählen die Punkte mit $+1$, -1, $+1$ für die Charakteristik der über der beweglichen Ebene entstehenden Fläche, so dass deren Charakteristik sich wieder als $+1$ ergiebt.

Hiermit seien die auf die Herleitung einer charakteristischen Zahl für ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten bezüglichen Untersuchungen abgeschlossen. Ein folgender Aufsatz wird sich mit den analogen Entwickelungen für drei- und mehr-dimensionale Mannigfaltigkeiten beschäftigen.

München, im März 1888.

Ueber die Goepel'sche Gruppe p-reihiger Thetacharakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind und die Fundamentalrelationen der zugehörigen Thetafunctionen.

Von

A. von Braunmühl in München.

Einleitung.

In den Abhandlungen der Münchener Academie 1887 habe ich die Thetacharakteristiken, welche aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, für beliebiges Geschlecht p untersucht, indem ich die Gesammtheit der 3^{2p} Charakteristiken als eine Gruppe von ebensoviel Additionen auffasste*). Dabei ergab sich als die wichtigste Untergruppe eine Gruppe vom Grade 3^p, die ich, einer Bezeichnung des Herrn Frobenius**) folgend, Goepel'sche Gruppe nannte. Mittelst derselben gewann ich ein Additionstheorem der zugehörigen Thetafunctionen, aus welchem ich verschiedene für die Theorie dieser Thetafunctionen fundamentale Formeln ableitete. Am Schlusse derselben Abhandlung bemerkte ich bereits, dass eine dieser Formeln***) bei entsprechender Umformung zu Formeln führen müsse, welche in unserer Theorie die Stelle der von Jacobi für elliptische†) und von Rosenhain††) für hyperelliptische Thetafunctionen vom Geschlechte $p = 2$ und Halbercharakteristiken gefundenen Formeln vertreten. Die nähere Untersuchung der aus dieser Bemerkung sich ergebenden Formelsysteme ist der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit. Dieselbe umfasst zwei Theile: der eine beschäftigt sich nach Angabe einiger zum Verständniss nothwendiger

*) Untersuchungen über p-reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunctionen. Abhandlungen der k. bayr. Academie der Wiss. II. Cl. XVI. Bd., II. Abtheilung.

**) Journal für Mathematik Bd. 89, pag. 193, woselbst die aus Hälften ganzer Zahlen gebildeten Charakteristiken behandelt werden.

***) l. c. pag 354, Formel 10.

†) Jacobi, Werke. Bd. I, pag. 509 und 534.

††) Mémoires des savants étrangers. t. 11.

Bezeichnungen und Sätze mit der vollständigen Aufstellung und Unterscheidung der Goepel'schen Gruppen im Falle $p = 2$, und zwar wurde die Classificirung derselben mit Rücksicht auf die im 2. Theile aufzustellenden Formeln vorgenommen — der andere Theil behandelt zwei umfassende Complexe von Formelsystemen, die sich für beliebige p mittelst der Goepel'schen Gruppen und Systeme ableiten lassen. Aus dem ersteren Formelcomplexe werden dann die in den Coefficienten einfachsten Formeln ausgesucht, wozu die im ersten Theile behandelten Gruppen das Mittel an die Hand geben, während der zweite Formelcomplex schon für beliebiges p hinreichend einfache Formeln bietet. Der letzte Paragraph endlich umfasst die aus den allgemeinen Formeln entspringenden Thetarelationen und die Relationen der Nullwerthe.

§ 1.

Bezeichnung der Charakteristiken-Gruppen.

Zum leichteren Verständniss des Folgenden schicke ich einige Bemerkungen voraus, deren nähere Begründung in der in der Einleitung erwähnten Abhandlung zu finden ist. Der Zahlencomplex

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_p \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \ldots & \alpha_p' \end{pmatrix}$$

heisst eine p-reihige Charakteristik. Legt man den α nur die Werthe des vollständigen Restsystems mod. 3 bei, so enthält diese Form 3^{2p} Charakteristiken.

Man kann diese Charakteristiken in drei Arten unterscheiden: solche, deren Glieder der Congruenz

$$|\alpha| = \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' + \cdots + \alpha_p\alpha_p' \equiv 0 \text{ (mod. 3)}$$

genügen, solche, für welche der Werth dieser Congruenz $+1$ und solche, für welche er -1 ist; ich nenne im Folgenden $|\alpha| \equiv \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases}$ den *Charakter* der betreffenden Charakteristik.

Die Summe der Charakteristiken (α) und (β) ist

$$(\alpha) + (\beta) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1, & \alpha_2 + \beta_2, & \ldots & \alpha_p + \beta_p \\ \alpha_1' + \beta_1', & \alpha_2' + \beta_2', & \ldots & \alpha_p' + \beta_p' \end{pmatrix}$$

und sei der Kürze halber mit $(\alpha\beta)$ bezeichnet; dann ist:

$$2(\alpha) \equiv (2\alpha) \equiv (\alpha^2) \equiv \begin{pmatrix} -\alpha_1, & -\alpha_2, & \ldots & -\alpha_p \\ -\alpha_1', & -\alpha_2', & \ldots & -\alpha_p' \end{pmatrix} \text{ (mod. 3)},$$

und demnach ist

$$(\alpha) - (\beta) = (\alpha\beta^2).$$

Hieraus folgt, dass sich die $3^{2p}-1$ Charakteristiken, die ausser jener Charakteristik, deren sämmtliche Elemente Nullen sind, und die ich im Folgenden gemäss der obigen Schreibweise mit (1) bezeichne, existiren, in zwei Gruppen theilen, deren einzelne Charakteristiken derart paarweise zusammengehören, dass die Glieder eines Paares sich nur durch das Zeichen unterscheiden, z. B.

$$(\alpha) \quad \text{und} \quad (\alpha^2).$$

Ich werde im Folgenden öfter zwei solche Charakteristiken unter das eine Zeichen

$$[\alpha]$$

zusammenfassen und nenne dann $[\alpha]$, um kürzer zu sein, eine *Gruppencharakteristik* *). Ihre Anzahl beträgt

$$\frac{3^{2p}-1}{2}.$$

Es folgen noch einige beständig gebrauchte Abkürzungen.

Aus der Bedeutung des Symboles $|\alpha|$ folgt sofort:

$$|\alpha| = |\alpha^2| = |-\alpha|;$$

ferner sei

$$\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix} = \alpha_1\beta_1' + \alpha_2\beta_2' + \cdots + \alpha_p\beta_p'$$

und

$$\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\beta\\ \alpha\end{vmatrix} = \alpha\,|\,\beta,$$

dann ist

$$\alpha|\beta \equiv -\beta|\alpha \equiv \beta^2|\alpha; \quad \alpha|\alpha^2 \equiv \alpha^2|\alpha \equiv 0; \quad (\text{mod. } 3)$$
$$\alpha^2|\beta = \alpha|\beta^2.$$

Die 3^{2p} Charakteristiken können durch eine Operationsgruppe von ebensoviel Additionen entstanden gedacht werden, indem die Summe je zweier Charakteristiken wieder eine p-reihige Charakteristik giebt; die Charakteristik (1) vertritt dann die Identität.

Die Operationen dieser Gruppe, oder was dasselbe ist, die 3^{2p} Charakteristiken, können aus $2p$ unabhängigen derselben zusammengesetzt werden. (Ein System von Charakteristiken heisst unabhängig, wenn nicht die Summe irgend einer Anzahl derselben mit Null nach dem Modul 3 congruent ist). Z. B. ergiebt sich, dass für $p = 2$ die ganze Gruppe folgende Gestalt hat, wenn mit (ν_1), (ν_2), (ϱ_1), (ϱ_2) vier unabhängige Charakteristiken bezeichnet werden:

---

*) Bezüglich dieser Bezeichnung vergleiche meine oben citirte Abhandlung pag. 7.

$$(1)\left\{\begin{array}{lllllllllll} (1), & (\nu_1), & (\nu_1^2), & (\nu_2), & (\nu_2\nu_1), & (\nu_2\nu_1^2), & (\nu_2^2), & (\nu_2^2\nu_1), & & (\nu_2^2\nu_1^2) \\ (\varrho_1), & (\varrho_1\nu_1), & (\varrho_1\nu_1^2), & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , & (\varrho_1\nu_2^2\nu_1^2) \\ (\varrho_1^2), & (\varrho_1^2\nu_1), & (\varrho_1^2\nu_1^2), & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , & (\varrho_1^2\nu_2^2\nu_1^2) \\ (\varrho_2), & (\varrho_2\nu_1), & (\varrho_2\nu_1^2), & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , & (\varrho_2\nu_2^2\nu_1^2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , & \cdot \\ (\varrho_2^2\varrho_1^2), & (\varrho_2^2\varrho_1^2\nu_1), & (\varrho_2^2\varrho_1^2\nu_1^2), & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & , & (\varrho_2^2\varrho_1^2\nu_2^2\nu_1^2) \end{array}\right.$$

Jede Horizontalreihe dieses quadratischen Schema's enthält 3^p Charakteristiken; die Charakteristiken der ersten Zeile bilden eine Untergruppe vom Grade 3^p, die übrigen aber Systeme, die aus dieser Untergruppe hervorgehen, indem man zu jeder Charakteristik eine bestimmte Charakteristik addirt. Die Untergruppe mit ihren $3^p - 1$ Systemen zusammen heisst ein *Complex*.

In der erwähnten Abhandlung habe ich gezeigt, dass von den Untergruppen $3^{p\text{ten}}$ Grades jene am wichtigsten sind, deren Charakteristiken der Bedingung

$$\nu_\alpha | \nu_\beta \equiv 0 \text{ (mod. 3)} \quad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots p$$

genügen, und habe sie Goepel'sche Gruppen genannt. Solcher Gruppen giebt es

$$D = (3^p + 1)(3^{p-1} + 1) \cdots (3^2 + 1)(3 + 1).$$

Stellt man eine Goepel'sche Gruppe an die Spitze des obigen quadratischen Schemas, so repräsentirt jede Zeile desselben ein sogenanntes *Goepel'sches System* und die $3^p - 1$ Systeme bilden mit der Gruppe einen *Complex Goepel'scher Systeme* *).

Die Gruppen und Systeme sollen nun im Folgenden für den Fall $p = 2$ aufgestellt und näher untersucht werden.

§ 2.

Goepel'sche Gruppen und Systeme für $p = 2$.

Eine Goepel'sche Gruppe besteht aus 3^p Charakteristiken und kann somit aus p von einander unabhängigen gebildet werden, die wir nach Herrn Frobenius eine *Basis* der Gruppe nennen. Ich habe nun l. c. den Satz bewiesen, dass wenn p unabhängige Charakteristiken der Bedingung

$$\nu_\alpha | \nu_\beta \equiv 0 \text{ (mod. 3)} \quad \left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots p$$

---

*) Bezüglich dieser Bezeichnung vergl. Frobenius: Das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. Journal für Mathematik, Bd. 89, pag. 197.

genügen, auch alle Charakteristiken der aus ihnen gebildeten Gruppe vom Grade 3^p derselben Bedingung genügen müssen; somit haben wir, um eine Goepel'sche Gruppe zu gewinnen, nur eine Basis von p Charakteristiken zu bestimmen, die dieser Bedingung genügt; die Combinationen der Charakteristiken dieser Basis liefern dann die Gruppe.

Da man die Gesammtzahl der Basissysteme findet, indem man die $\frac{p(p-1)}{2}$ Congruenzen

$$\nu_\alpha | \nu_\beta \equiv 0 \quad \left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = 1, 2, \cdots p$$

löst, so wird man in einem bestimmten Falle, z. B. für $p = 2$, diese sämmtlichen Lösungen in eine Tabelle vereinigen. Die Aufstellung derselben wird jedoch wesentlich vereinfacht, wenn man Gruppencharakteristiken einführt, was deshalb geschehen kann, weil nach § 1 aus $\nu | \nu_\alpha \equiv 0$ auch $\nu | \nu_\alpha^2 \equiv 0$ und $\nu^2 | \nu_\alpha \equiv 0$ (mod. 3) folgt. Man braucht somit nur $\frac{3^4 - 1}{2} = 40$ Charakteristiken in's Auge zu fassen.

Die im Anhang für $p = 2$ berechnete Tabelle I wurde in der Weise gebildet, dass man die 40 Gruppencharakteristiken in der aus der ersten Verticalreihe der Tabelle ersichtlichen Reihenfolge zusammenstellte*) und die mit jeder solchen Charakteristik (ν) eine Lösung der Congruenz $\nu | \nu_\alpha \equiv 0$ (mod. 3) bildenden Charakteristiken in die gleiche Horizontalreihe notirte.

Aus dieser Tabelle gewinnt man dann unmittelbar die Tabelle II der $(3^2 + 1)(3 + 1) = 40$ Goepel'schen Gruppen, indem man aus ersterer in bestimmter Reihenfolge je zwei Basischarakteristiken $[\nu_1]$ und $[\nu_2]$ entnimmt, die in der gleichen Horizontalreihe stehen, und daraus die Gruppe in der Gestalt

$$[\nu_1], \ [\nu_2], \ [\nu_1 \nu_2], \ [\nu_1^2 \nu_2]$$

bildet. (In der Tabelle wurden der bessern Uebersicht halber keine Gruppencharakteristiken geschrieben, aber $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ überall weggelassen.) Man hat dabei nur zu beachten, dass $[\nu_1 \nu_2]$ und $[\nu_1^2 \nu_2]$ nicht mehr als Basischarakteristiken gewählt werden dürfen, da sie die schon vorhandene Gruppe liefern würden.

Was nun die Anordnung der Gruppen in Tabelle II betrifft, so war dabei folgender Gesichtspunkt massgebend. Die Aufstellung der

*) Die hier eingehaltene Reihenfolge der Charakteristiken wurde dadurch bestimmt, dass man die 81 Charakteristiken wie in § 1 zu einem Complexe anordnete, in welchem

$$(\nu_1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad (\nu_2) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad (\varrho_1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad (\varrho_2) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ist.

40 Goepel'schen Gruppen zeigt nämlich, dass sie sich in 4 *Classen* von wesentlich verschiedenem Charakter theilen. Die *erste Classe* bilden 6 *Gruppen*, deren sämmtliche Charakteristiken den Charakter Null haben; die *zweite Classe* enthält 12 *Gruppen*, deren jede 4 Charakteristiken vom Charakter Null und 4 vom Charakter $+1$ oder -1 enthält; die *dritte Classe* umschliesst 16 *Gruppen* aus 2 Charakteristiken vom Charakter Null und 6 vom Charakter $+1$ oder -1, und die 4. *Classe* endlich umfasst wieder 6 *Gruppen* aus lauter Charakteristiken vom Charakter $+1$ oder -1. Die Identität (1) $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist hier nirgends mitgezählt.

Eine nähere Betrachtung dieser Gruppen lässt erkennen, dass die der ersten und dritten Classe eine gewisse Eigenschaft gemeinsam haben, die für unsern Zweck von fundamentaler Bedeutung ist.

Wählt man nämlich irgend eine Charakteristik (ν_α) *vom Charakter* $|\nu_\alpha| \equiv 0$ *aus einer dieser Gruppen aus, so findet sich in letzterer mindestens eine weitere unabhängige Charakteristik* (ν_β), *welche mit* (ν_α) *den beiden Congruenzen*

$$\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{3}$$

genügt, und zwar kommt diese Eigenschaft nur den Gruppen erster und dritter Classe zu. Ihre Anzahl beträgt also 22.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich durch folgende Ueberlegung:

Ist 1) ausser der Gruppencharakteristik $[\nu_\alpha]$ auch $[\nu_\beta]$ vom Charakter Null, also $|\nu_\alpha| \equiv 0$ und $|\nu_\beta| \equiv 0 \pmod{3}$, so können 2 Fälle eintreten: entweder ist $\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} \equiv 0$, dann ist auch, vermöge der Bedingung $\nu_\alpha | \nu_\beta \equiv 0$, nothwendig $\begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0$, und die beiden noch in der Goepel'schen Gruppe enthaltenen Gruppencharakteristiken $[\nu_\alpha \nu_\beta]$ und $[\nu_\alpha^2 \nu_\beta]$ sind ebenfalls vom Charakter Null, da

$$(2) \quad \begin{cases} |\nu_\alpha\ \nu_\beta| \equiv |\nu_\alpha| + |\nu_\beta| + \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \\ \text{und} \\ |\nu_\alpha^2 \nu_\beta| \equiv |\nu_\alpha| + |\nu_\beta| - \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \end{cases}$$

ist; dann gehört aber unsere Gruppe zur ersten Classe; oder es tritt der Fall ein, dass $\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix}$ von Null verschieden sind, dann sind es auch die Charaktere der Gruppencharakteristiken $[\nu_\alpha \nu_\beta]$ und $[\nu_\alpha^2 \nu_\beta]$, und die Gruppe gehört zur zweiten Classe.

Ist 2) (ν_α) vom Charakter Null, (ν_β) aber nicht, so folgt aus der Annahme $\begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{vmatrix} \equiv 0$, $\begin{vmatrix}\nu_\beta\\ \nu_\alpha\end{vmatrix} \equiv 0$ vermöge der Gleichungen (2)

$$|\nu_\alpha \nu_\beta| \equiv |\nu_\beta|; \quad |\nu_\alpha^2 \nu_\beta| \equiv |\nu_\beta|$$

und somit gehört in diesem Falle die Gruppe der 3. Classe an. Aus der Annahme, dass $\begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix}\nu_\beta\\ \nu_\alpha\end{vmatrix}$ von Null verschieden sind, folgt hingegen

$$|\nu_\alpha \nu_\beta| \equiv |\nu_\beta| - \begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{vmatrix}; \quad |\nu_\alpha^2 \nu_\beta| \equiv |\nu_\beta| + \begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\beta\end{vmatrix},$$

woraus man erkennt, dass $[\nu_\alpha \nu_\beta]$ und $[\nu_\alpha^2 \nu_\beta]$ nicht gleichzeitig den Charakter Null haben können. Die Gruppe gehört also dann zur 2. Classe; also umschliesst die erste Annahme in den Fällen 1) und 2) die erste und dritte Classe vollständig, womit der Satz bewiesen ist.

Da jedes Goepel'sche System dadurch erhalten wird, dass man zu allen Charakteristiken einer Goepel'schen Gruppe eine bestimmte Charakteristik (ν), die dieser Gruppe nicht angehört, addirt, so wird die Eigenschaft der Goepel'schen Systeme eines bestimmten Complexes von der Wahl dieser Charakteristik abhängen. Für die folgende Entwicklung der Thetarelationen ist es nun von Wichtigkeit

1) zu untersuchen, wie beschaffen eine bestimmte Charakteristik (ν_α) vom Charakter $|\nu_\alpha| \equiv 0$ einer Goepel'schen Gruppe der 1. oder 3. Classe sein muss, damit sich eine Charakteristik (ν) bestimmen lässt, die den Congruenzen

$$(3) \qquad \begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{3}$$

genügt;

2) festzustellen, auf wieviele Arten eine solche Bestimmung von (ν) zu einer gegebenen Charakteristik (ν_α) möglich ist, und wieviele *verschiedene* Goepel'sche Systeme durch Addition derselben zu den Elementen der Gruppe erhalten werden.

Zur Beantwortung der ersten Frage beachte man Folgendes: die beiden linearen Congruenzen (3) haben $3^{2 \cdot 2 - 2} = 9$ Lösungen (ν), oder da (1) auszuschliessen ist, und immer zwei einander entgegengesetzt gleich sind, durch Einführung von Gruppencharakteristiken, 4 Lösungen $[\nu]$; unter diesen ist aber noch $[\nu_\alpha]$ selbst, also bleiben noch drei Lösungen. Sei eine derselben $[\nu]$, dann sind auch $[\nu_\alpha \nu]$ und $[\nu_\alpha \nu^2]$ Lösungen der Congruenzen (3), denn es ist

$$(4) \quad \begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\alpha \nu\end{vmatrix} \equiv |\nu_\alpha| + \begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{vmatrix} \equiv 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix}\nu_\alpha \nu\\ \nu_\alpha\end{vmatrix} \equiv |\nu_\alpha| + \begin{vmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{3},$$

und Aehnliches gilt für $\begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu_\alpha \nu^2\end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix}\nu_\alpha \nu^2\\ \nu_\alpha\end{vmatrix}$.

Da nun aber nach Voraussetzung zwischen den Basischarakteristiken der Gruppe (ν_α) und (ν_β) die Relationen bestehen

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\beta \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0 \ (\text{mod. } 3),$$

so sind $[\nu_\beta]$, $[\nu_\beta \nu]$ und $[\nu_\beta \nu^2]$ drei weitere Lösungen, also müssen sie mit den obigen dreien $[\nu]$, $[\nu_\alpha \nu]$, $[\nu_\alpha \nu^2]$ zusammenfallen, was nur möglich ist, wenn $(\nu) = (\nu_\beta)$ wird; also gehört die einzig mögliche Lösung der Gruppe selbst an und kann somit nicht zur Bildung eines Göpel'schen Systems benützt werden.

Macht man aber über die Charakteristik (ν_α) die Voraussetzung, dass *eine ihrer Horizontalreihen* mit lauter verschwindenden Elementen besetzt ist, so ist eine der beiden Congruenzen (3) identisch befriedigt, z. B. $\begin{vmatrix} \nu \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0$; dann bleibt noch $\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu \end{vmatrix} \equiv 0$ (mod. 3) zu lösen übrig. Diese lineare Congruenz hat 27 Lösungen, hierunter befinden sich aber 3, welche ausgeschlossen werden müssen, nämlich (1), (ν_α), (ν_α^2), also bleiben noch 24 Lösungen (λ), oder, was dasselbe, 12 Lösungen $[\lambda]$ übrig. Ist $[\nu]$ eine derselben, so sind, wie oben (Gl. (4)) $[\nu_\alpha \nu]$ und $[\nu_\alpha \nu^2]$ weitere Lösungen der Congruenz. Diese liefern aber kein anderes Göpel'sches System als $[\nu]$, da die Charakteristiken (1), (ν_α), (ν_α^2) eine Gruppe 3. Grades bilden, die als Untergruppe in unserer aus (ν_α) und (ν_β) gebildeten Gruppe enthalten ist. Somit reducirt sich die Anzahl der brauchbaren Lösungen auf den 3. Theil. Die noch in Betracht zu ziehenden 4 Lösungen seien jetzt

$$[\nu_1], \ [\nu_2], \ [\nu_3], \ [\nu_4].$$

Sie genügen somit den Congruenzen

$$\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\varrho \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_\varrho \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0, \quad (\varrho = 1,2,3,4) \ (\text{mod. } 3).$$

Vergleicht man diese Bedingungen mit den Congruenzen (5), so erkennt man, dass sich $[\nu_\beta]$ unter diesen 4 Lösungen befindet; dann sind aber auch $[\nu_\varrho \nu_\beta]$ und $[\nu_\varrho \nu_\beta^2]$, aus denselben Gründen wie oben, weitere 2 Lösungen. Also sind drei der vier Lösungen $[\nu_\varrho]$ identisch mit $[\nu_\beta]$, $[\nu_\varrho \nu_\beta]$, $[\nu_\varrho \nu_\beta^2]$, welche wieder dasselbe Göpel'sche System, bezüglich die Gruppe liefern; also kann man in diesem Falle $[\nu]$ auf zwei Arten: (ν) und (ν^2) so bestimmen, dass es den gestellten Bedingungen genügt. Dieses Resultat fassen wir in den Satz zusammen:

Wenn aus einer der 22 *Gruppen* 1. *und* 3. *Classe eine Charakteristik* (ν_α) *ausgewählt wird, die in einer Horizontalreihe lauter Elemente Null besitzt, so kann man immer eine weitere Charakteristik, und diese auf zwei Arten* (ν) *und* (ν^2) *so bestimmen, dass den Congruenzen*

$$\begin{vmatrix} \nu_\alpha \\ \nu \end{vmatrix} \equiv 0, \qquad \begin{vmatrix} \nu \\ \nu_\alpha \end{vmatrix} \equiv 0$$

genügt wird.

Hiermit haben wir die Mittel gewonnen, um die Anzahl der Göpel'schen Systeme anzugeben, die aus den Gruppen 1. und 3. Classe durch Addition einer solchen speciellen Charakteristik abgeleitet werden können.

Unter den 6 Gruppen 1. Classe giebt es, wie Tabelle II zeigt, zwei (die erste und letzte), in denen mindestens zweimal zwei Basischarakteristiken (ν_α), (ν_β) ausgewählt werden können, deren eine Horizontalreihe mit Nullen besetzt ist. Zu jeder solchen Auswahl giebt es dann, wie wir sahen, $2 \,.\, 2 = 4$ Charakteristiken (ν_ϱ), also im ganzen 8 Charakteristiken

$$(\nu_\varrho), \ (\nu_\varrho{}^2), \ \varrho = 1, 2, 3, 4,$$

die alle 8 überhaupt möglichen Göpel'schen Systeme des zur Gruppe gehörigen Complexes liefern. In den übrigen 4 Gruppen 1. Classe lässt sich hingegen nur 1 Paar Basischarakteristiken der gewünschten Art auswählen, weshalb zu diesen 4 Gruppen nur 4 Göpel'sche Systeme gehören, die durch die Charakteristiken

$$(\nu_\varrho), \ (\nu_\varrho{}^2), \ \varrho = 1, 2$$

entstehen. *Somit gehören zu den Gruppen* 1. *Classe im Ganzen*

$$2 \,.\, 8 + 4 \,.\, 4 = 32$$

Göpel'sche Systeme von vorgeschriebenem Charakter.

Zu jeder Gruppe 3. Classe lässt sich (ν) nur auf zwei Arten in der gewünschten Weise bestimmen, da sie, wie die Tabelle II zeigt, sämmtlich nur eine Gruppencharakteristik besitzen, in der die Glieder einer Horizontalreihe Null sind. Jeder Gruppe gehören somit zwei Göpel'sche Systeme zu, *und die dritte Classe umfasst im Ganzen ebenfalls* $2 \,.\, 16 = 32$ *Systeme.*

§ 3.

Die Additionsformel für ϑ-Functionen vom Geschlechte p.

Die Thetafunction, die wir im Folgenden zu Grunde legen, sei für beliebiges p definirt durch die Gleichung:

$$\vartheta(1)(u) = \vartheta(1)(u_1, u_2, u_3 \ldots u_p)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{i\pi \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu u_\mu},$$

wo die Moduln $a_{\mu\mu'}$ der Bedingung

$$a_{\mu\mu'} = a_{\mu'}$$

unterworfen sind, und der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} m_\mu\, m_{\mu'}\, a_{\mu\mu'}$ eine wesentlich negative Form sein muss.

Wir ordnen dann den 3^{2p} Charakteristiken (α), (1) mit eingeschlossen, die 3^{2p} möglichen Systeme von Periodendritteln zu, indem wir setzen:

$$\alpha = \frac{\alpha'_\mu}{3} + \frac{1}{3}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \alpha_{\mu'}\, a_{\mu\mu'};$$

die Charakteristik (1) ergiebt sich dann für $\alpha = 0$.

Hiermit wird

$$\vartheta(\alpha)(u) = e^{\frac{i\pi}{9}\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}\alpha_\mu\alpha_{\mu'} + \frac{2i\pi}{3}\sum\limits_{\mu}\alpha_\mu\left(u_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{3}\right)} \cdot \vartheta(1)(u+\alpha).$$

Die Summen im Exponenten erstrecken sich hier wie im Folgenden immer auf die Werthe von 1 bis p.

Der Additionsgruppe der Charakteristiken entspricht dann die Additionsgruppe der 3^{2p} Periodendrittel, welche die ϑ-Functionen in einander überführt.

Weiter ist

$$\vartheta(\alpha)(-u_1, -u_2, \dots -u_p) = \vartheta(-\alpha)(u_1, u_2, \dots u_p) = \vartheta(\alpha^2)(u_1, u_2, \dots u_p)$$
$$\vartheta(\alpha)(0) = \vartheta(\alpha^2)(0),$$

wofür kürzer $\vartheta(\alpha)$ geschrieben werde.

Setzt man endlich noch zur Abkürzung

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = \tau,$$

so ist

$$1 + \tau + \tau^{-1} \equiv 0 \text{ (mod. 3)},$$

Für diese ϑ-Functionen leitete ich in der mehrfach citirten Abhandlung eine Reihe von Additionsformeln für beliebiges p ab, aus denen ich eine, daselbst pag. 354 gegebene herausgreife. Diese dient mir als Quelle der in der Einleitung erwähnten Formeln, welche den von Jacobi und Rosenhain gefundenen analog gebildet sind. Dieselbe lautet für ein beliebiges p in etwas veränderter Schreibweise:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum \tau^{2|\nu_\beta| + \nu_\beta^2|\varrho}\,\vartheta(\sigma\nu_\beta)(a-v_1)(a-v_2)(a-v_3) \\ &\qquad\qquad \cdot\vartheta(\sigma\varrho\nu_\beta)(u-b_1)(u-b_2)(u-b_3) \\ = &\sum \tau^{2|\nu_\beta\varrho|}\,\vartheta(\sigma\varrho^2\nu_\beta{}^2)(a-b_1)(a-b_2)(a-b_3) \\ &\qquad\qquad \cdot\vartheta(\sigma\varrho\nu_\beta)(u-v_1)(u-v_2)(u-v_3), \end{aligned}\right.$$

wo sich die Summation hier wie in den folgenden Formeln, wenn nichts anderes bemerkt ist, auf ν_β bezieht, das alle Charakteristiken einer Göpel'schen Gruppe durchläuft.

Hier ist zur Abkürzung statt der p Argumente

$$u_1 - v_1^{(1)}, \quad u_2 - v_1^{(2)} \cdots u_p - v_1^{(p)}$$

nur

$$u - v_1$$

und statt

$$\vartheta(\alpha)(u - v_1)\,\vartheta(\alpha)(u - v_2)\,\vartheta(\alpha)(u - v_3)$$

$\vartheta(\alpha)$ nur einmal geschrieben. Ausserdem bestehen die Relationen:

$$\begin{gathered}
v_1^{(1)} + v_2^{(1)} + v_3^{(1)} = b_1^{(1)} + b_2^{(1)} + b_3^{(1)} = 0, \\
v_1^{(2)} + v_2^{(2)} + v_3^{(2)} = b_1^{(2)} + b_2^{(2)} + b_3^{(2)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_1^{(p)} + v_2^{(p)} + v_3^{(p)} = b_1^{(p)} + b_2^{(p)} + b_3^{(p)} = 0.
\end{gathered}$$

Wir führen jetzt in diese Formel andere Argumente ein, indem wir

$$\begin{aligned}
a - v_1 &= -u_1', & u - v_1 &= v_1', \\
a - v_2 &= -u_2', & u - v_2 &= v_2', \\
a - v_3 &= -u_3', & u - v_3 &= v_3', \\
u - b_1 &= u_4', & a - b_1 &= -v_4', \\
u - b_2 &= u_5', & a - b_2 &= -v_5', \\
u - b_3 &= u_6', & a - b_3 &= -v_6'
\end{aligned}$$

schreiben und dann die gestrichenen Argumente wieder durch ungestrichene ersetzen.

Dann erhält man unter Beachtung der obigen Bedingungen das involutorische System:*)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
3u_1 &= -2v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6, \\
3u_2 &= v_1 - 2v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6, \\
3u_3 &= v_1 + v_2 - 2v_3 + v_4 + v_5 + v_6, \\
3u_4 &= v_1 + v_2 + v_3 - 2v_4 + v_5 + v_6, \\
3u_5 &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 2v_5 + v_6, \\
3u_6 &= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 2v_6, \\
3v_1 &= -2u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6, \\
3v_2 &= u_1 - 2u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6, \\
3v_3 &= u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4 + u_5 + u_6, \\
3v_4 &= u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4 + u_5 + u_6, \\
3v_5 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 - 2u_5 + u_6, \\
3v_6 &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 - 2u_6,
\end{aligned}\right.$$

*) Vergl. Prym und Krazer: Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. Acta Math. 3, und Krazer: Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Math. Annalen Bd. 22.

mit der Bedingung

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=6} u_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=6} v_\alpha.$$

Dieselben Gleichungen bestehen natürlich für alle p Argumente einer ϑ-Function.

Hiermit geht unsere Gleichung (1) über in:

$$(3)\quad \begin{cases} \sum \tau^{2|\nu_\beta|+\nu_\beta^2|\varrho}\,\vartheta(\sigma^2\nu_\beta{}^2)(u_1)(u_2)(u_3)\vartheta(\sigma\nu_\beta{}^2)(u_4)(u_5)(u_6) \\ = \sum \tau^{2|\nu_\beta\varrho|}\,\vartheta(\sigma\varrho\nu_\beta)(v_1)(v_2)(v_3)\,\vartheta(\sigma^2\nu_\beta\varrho)(v_4)(v_5)(v_6). \end{cases}$$

§ 4.

Formelsysteme für beliebiges p.

Bezeichnet (ν) eine Charakteristik, durch deren Addition zu den Elementen einer Göpel'schen Gruppe ein Göpel'sches System erhalten wird, so gewinnt man aus Formel (3) einen Complex von Formeln, in welchem nur ϑ-Producte von folgendem Charakter auftreten:

$$\vartheta(\varpi)(u_1)(u_2)(u_3)(u_4)(u_5)(u_6)$$

und

$$\vartheta(\varpi)(u_1)(u_2)(u_3)\,\vartheta(\varpi_1)(u_4)(u_5)(u_6),$$

wofür wir

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\varpi)(u_\lambda)$$

und

$$\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\varpi)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\varpi_1)(u_\lambda)$$

schreiben.

Dieser Complex von Formeln umfasst drei Systeme von Formeln, die bezüglich für $\sigma = 1$, $\sigma = \nu$, $\sigma \equiv \nu^2$ gewonnen werden; in jedem dieser Systeme befinden sich drei Gruppen von je drei Formeln. Die Formelgruppen gewinnt man, indem man die sämmtlichen Argumente u um die den Charakteristiken $(1), (\nu), (\nu^2)$ entsprechenden Perioden-drittel vermehrt, wodurch vermöge der Gleichungen (2) auch die Argumente v um 1, ν, ν^2 wachsen, während die in den einzelnen Gruppen enthaltenen Gleichungen dadurch entstehen, dass man $\varrho = 1, \nu, \nu^2$ werden lässt. Ich will hier nur die drei Systeme mit ihren Formelgruppen angeben, die einzelnen Formeln lassen sich dann leicht niederschreiben.

I. System; $\sigma = 1$.

(A) $$\sum A_1 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2)(u_\lambda) = \sum B_1 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \varrho)(v_\lambda),$$

(B) $$\sum A_2 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2 \nu)(u_\lambda) = \sum B_2 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \nu \varrho)(v_\lambda),$$

(C) $$\sum A_3 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2 \nu^2)(u_\lambda) = \sum B_3 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \nu^2 \varrho)(v_\lambda).$$

II. System; $\sigma = \nu$.

(A) $$\sum A_1 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu^2 \nu_\beta^2)(u_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu \nu_\beta^2)(u_\lambda)$$
$$= \sum B_1 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta \nu \varrho)(v_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \nu^2 \varrho)(v_\lambda),$$

(B) $$\sum A_2 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta^2)(u_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2 \nu^2)(u_\lambda)$$
$$= \sum B_2 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta \nu^2 \varrho)(v_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \varrho)(v_\lambda),$$

(C) $$\sum A_3 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta^2 \nu)(u^\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2)(u_\lambda)$$
$$= \sum B_3 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta \varrho)(v_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \nu \varrho)(v_\lambda).$$

III. System; $\sigma = \nu^2$.

(A) $$\sum A_1 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta^2 \nu)(u_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2 \nu^2)(u_\lambda)$$
$$= \sum B_1 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta \nu^2 \varrho)(v_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \nu \varrho)(v_\lambda),$$

(B) $$\sum A_2 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta^2 \nu^2)(u_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2)(u_\lambda)$$
$$= \sum B_2 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta \varrho)(v_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta \nu^2 \varrho)(v_\lambda),$$

$$
\text{(C)}\qquad \sum A_3 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta^2)(u_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta^2\,\nu)(u_\lambda)
$$
$$
= \sum B_3 \prod_{\lambda=1}^{\lambda=3} \vartheta(\nu_\beta\,\nu\,\varrho)(v_\lambda) \cdot \prod_{\lambda=4}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\beta\,\varrho)(v_\lambda).
$$

Hier sind die Coefficienten durch folgende Werthe bestimmt:

$$
A_1 = \tau^{2|\nu_\beta|+\nu_\beta^2|\varrho}, \qquad B_1 = \tau^{2|\nu_\beta\varrho|},
$$
$$
A_2 = \tau^{2|\nu_\beta|+2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\beta\end{smallmatrix}\right|+\nu_\beta^2|\varrho}, \qquad B_2 = \tau^{2|\nu_\beta\varrho|+\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\beta\end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \varrho\end{smallmatrix}\right|},
$$
$$
A_3 = \tau^{2|\nu_\beta|+\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\beta\end{smallmatrix}\right|+\nu_\beta^2|\varrho}, \qquad B_3 = \tau^{2|\nu_\beta\varrho|+2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\beta\end{smallmatrix}\right|+2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \varrho\end{smallmatrix}\right|}.
$$

Einen zweiten Complex von Formeln erhält man aus der Gleichung (3), indem man daselbst

$$
u_2, \qquad u_3, \qquad u_5, \qquad u_6
$$

bezüglich durch

$$
u_2 + \nu_2, \quad u_3 - \nu_2, \quad u_5 + \nu_2, \quad u_6 - \nu_2
$$

ersetzt, dann gehen

$$
v_2, \qquad v_3, \qquad v_5, \qquad v_6
$$

bezüglich in:

$$
v_2 - \nu_2, \quad v_3 + \nu_2, \quad v_5 - \nu_2, \quad v_6 + \nu_2
$$

über.

Hierdurch erhält man zunächst:

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
&\sum \Big\{\tau^{2|\nu_\beta|+\nu_\beta^2|\varrho}\, \vartheta(\sigma^2\nu_\beta^2)(u_1)\,\vartheta(\sigma^2\nu_\beta^2\nu_2)(u_2)\,\vartheta(\sigma^2\nu_\beta^2\nu_2^2)(u_3)\\
&\qquad\cdot \vartheta(\sigma\nu_\beta^2)(u_4)\,\vartheta(\sigma\nu_\beta^2\nu_2)(u_5)\,\vartheta(\sigma\nu_\beta^2\nu_2^2)(u_6)\Big\}\\
= &\sum \Big\{\tau^{2|\nu_\beta\varrho|}\, \vartheta(\sigma\nu_\beta\varrho)(v_1)\,\vartheta(\sigma\nu_\beta\varrho\nu_2^2)(v_2)\,\vartheta(\sigma\nu_\beta\varrho\nu_2)(v_3)\\
&\qquad\cdot \vartheta(\sigma^2\nu_\beta\varrho)(v_4)\,\vartheta(\sigma^2\nu_\beta\varrho\nu_2^2)(v_5)\,\vartheta(\sigma^2\nu_\beta\varrho\nu_2)(v_6)\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Lässt man hier (ν_2) eine der p Basischarakteristiken der Göpel'schen Gruppe bedeuten, beachtet, dass in diesem Falle (1), (ν_2), (ν_2^2) eine Untergruppe derselben bildet, und dass (ν_β) bei der Summation alle Charakteristiken der Gesammtgruppe durchläuft, so erkennt man sofort, dass stets je drei der 3^p ϑ-Producte gleiche Charakteristiken erhalten müssen. Macht man daher die Substitution

$$
u_1 = u_2 = u_3 = u\,, \qquad u_4 = u_5 = u_6 = u_0,
$$

wodurch

$$
v_1 = v_2 = v_3 = u_0, \qquad v_4 = v_5 = v_6 = u
$$

wird, so werden diese drei Producte einander völlig gleich und die Anzahl der Glieder reducirt sich auf jeder Seite der Formel auf 3^{p-1}. Setzt man aber statt (ν_β) (ν_α), lässt (ν_α) alle Charakteristiken der

Gruppe durchlaufen, die (ν_2) und $(\nu_2{}^2)$ nicht enthalten und schreibt die gleichen Argumente nur einmal, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha \Big\{ \Big(\tau^{2|\nu_\alpha|+\nu_\alpha^2|\varrho} + \tau^{2|\nu_\alpha\nu_2|+\nu_\alpha^2\nu_2^2|\varrho} + \tau^{2|\nu_\alpha\nu_2^2|+\nu_\alpha^2\nu_2|\varrho}\Big) \\
&\qquad\qquad \cdot\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha{}^2)\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha{}^2\nu_2)\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha{}^2\nu_2{}^2)(u) \\
&\qquad\qquad \cdot\vartheta(\sigma\nu_\alpha{}^2)\vartheta(\sigma\nu_\alpha{}^2\nu_2)\vartheta(\sigma\nu_\alpha{}^2\nu_2{}^2)(u_0)\Big\} \\
=&\sum_\alpha \Big\{ \Big(\tau^{2|\nu_\alpha\varrho|} + \tau^{2|\nu_\alpha\nu_2\varrho|} + \tau^{2|\nu_\alpha\nu_2^2\varrho|}\Big)\cdot\vartheta(\sigma\nu_\alpha\varrho)\vartheta(\sigma\nu_\alpha\varrho\nu_2)\vartheta(\sigma\nu_\alpha\varrho\nu_2{}^2)(u_0) \\
&\qquad\qquad \cdot\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha\varrho)\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha\varrho\nu_2)\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha\varrho\nu_2{}^2)(u)\Big\}.
\end{aligned}$$

Der auf der linken Seite in Klammern stehende Coefficient ist aber:

$$\begin{aligned}
&\tau^{2|\nu_\alpha|+\nu_\alpha^2|\varrho}\cdot\Big\{1+\tau^{2|\nu_2|-\left\{\begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{vmatrix}+\nu_2|\varrho\right\}}+\tau^{2|\nu_2|+\left\{\begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{vmatrix}+\nu_2|\varrho\right\}}\Big\} \\
=&\tau^{2|\nu_\alpha|+\nu_\alpha^2|\varrho}\cdot\Big\{1+\tau^{2|\nu_2|}(\tau^{-\mu}+\tau^{\mu})\Big\},
\end{aligned}$$

wenn

$$\mu = \begin{vmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{vmatrix}+\nu_2|\varrho$$

gesetzt wird. Da aber vermöge der Bedeutung der Symbole

$$\mu \equiv \pm 1^{*)}\ (\text{mod. } 3)$$

ist, und die Gleichung besteht:

$$1+\tau+\tau^{-1}=0,$$

so reducirt sich der Factor auf

$$\tau^{2|\nu_\alpha|+\nu_\alpha^2|\varrho}\cdot(1-\tau^{2|\nu_2|}).$$

In derselben Weise lässt sich der Factor rechts auf die Gestalt bringen:

$$\tau^{2|\nu_\alpha\varrho|}\cdot(1-\tau^{2|\nu_2|}),$$

mithin wird die Gleichung, da der Factor $1-\tau^{2|\nu_2|}$ hinausfällt:

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_\alpha\Big\{\tau^{2|\nu_\alpha|+\nu_\alpha^2|\varrho}\prod_\lambda\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha{}^2\nu_\lambda)(u)\cdot\vartheta(\sigma\nu_\alpha{}^2\nu_\lambda)(u_0)\Big\} \\
=&\sum_\alpha\Big\{\tau^{2|\nu_\alpha\varrho|}\prod_\lambda\vartheta(\sigma\nu_\alpha\varrho\nu_\lambda)(u_0)\,\vartheta(\sigma^2\nu_\alpha\varrho\nu_\lambda)(u)\Big\}.
\end{aligned}\right.$$

Bei der Productenbildung durchläuft ν_λ die Werthe $1, \nu_2, \nu_2{}^2$, während die Summe auf alle jene Charakteristiken (ν_α) zu erstrecken ist, die (ν_2) und $(\nu_2{}^2)$ nicht enthalten, so dass die Gleichung, wie gewünscht, auf jeder Seite nur mehr 3^{p-1} ϑ-Producte enthält.

*) Damit dies immer eintritt, hat man nur (ν_2) oder (ν) so zu wählen, dass nicht gleichzeitig $\begin{vmatrix}\nu_2\\ \nu\end{vmatrix}\equiv 0$ und $\begin{vmatrix}\nu\\ \nu_2\end{vmatrix}\equiv 0$ (mod. 3) ist, was stets erreicht werden kann.

Aus ihr ergeben sich sofort zwei ähnliche, indem man u und u_0 einmal um (ν), dann um (ν^2) wachsen lässt. Man bekommt so:

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\alpha \left\{ \tau^{2|\nu_\alpha| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \nu_\alpha^2|\varrho} \cdot \prod_\lambda \vartheta(\sigma^2 \nu_\alpha{}^2 \nu \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\sigma \nu_\alpha{}^2 \nu \nu_\lambda)(u_0) \right\} \\ \displaystyle = \sum_\alpha \left\{ \tau^{2|\nu_\alpha \varrho| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \varrho\end{smallmatrix}\right|} \prod_\lambda \vartheta(\sigma \nu_\alpha \varrho \nu \nu_\lambda)(u_0) \cdot \vartheta(\sigma^2 \nu_\alpha \varrho \nu \nu_\lambda)(u) \right\} \end{cases}$$

und:

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\alpha \left\{ \tau^{2|\nu_\alpha| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \nu_\alpha^2|\varrho} \prod_\lambda \vartheta(\sigma^2 \nu_\alpha{}^2 \nu^2 \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\sigma \nu_\alpha{}^2 \nu^2 \nu_\lambda)(u_0) \right\} \\ \displaystyle = \sum_\alpha \left\{ \tau^{2|\nu_\alpha \varrho| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \varrho\end{smallmatrix}\right|} \prod_\lambda \vartheta(\sigma \nu_\alpha \varrho \nu^2 \nu_\lambda)(u_0) \cdot \vartheta(\sigma^2 \nu_\alpha \varrho \nu^2 \nu_\lambda)(u) \right\}. \end{cases}$$

Diese drei Formeln enthalten wieder ähnlich den früher aufgestellten drei Systeme von Gleichungen, die man für $\sigma = 1,\ \nu,\ \nu^2$ erhält. In jedem Systeme sind dann drei Gruppen von Formeln enthalten, von denen jede je drei für $\varrho = 1,\ \nu,\ \nu^2$ resultirende Gleichungen umschliesst. Die 9 Gleichungen eines jeden Systems sind aber nicht wie früher alle verschieden, sondern sie reduciren sich auf drei. Um dies nachzuweisen, schreiben wir die drei Formelgruppen des ersten Systemes hin; diese sind:

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\alpha a_1 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha{}^2 \nu_\lambda)(u)\, \vartheta(\nu_\alpha{}^2 \nu_\lambda)(u_0) \\ \displaystyle = \sum_\alpha b_1 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha \varrho \nu_\lambda)(u_0)\, \vartheta(\nu_\alpha \varrho \nu_\lambda)(u), \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\alpha a_2 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha{}^2 \nu \nu_\lambda)(u)\, \vartheta(\nu_\alpha{}^2 \nu \nu_\lambda)(u_0) \\ \displaystyle = \sum_\alpha b_2 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha \varrho \nu \nu_\lambda)(u_0)\, \vartheta(\nu_\alpha \varrho \nu \nu_\lambda)(u), \end{cases}$$

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\alpha a_3 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha{}^2 \nu^2 \nu_\lambda)(u)\, \vartheta(\nu_\alpha{}^2 \nu^2 \nu_\lambda)(u) \\ \displaystyle = \sum_\alpha b_3 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha \varrho \nu^2 \nu_\lambda)(u_0)\, \vartheta(\nu_\alpha \varrho \nu^2 \nu_\lambda)(u). \end{cases}$$

$$a_1 = \tau^{2|\nu_\alpha| + \nu_\alpha^2|\varrho}, \qquad b_1 = \tau^{2|\nu_\alpha \varrho|},$$

$$a_2 = \tau^{2|\nu_\alpha| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \nu_\alpha^2|\varrho}, \qquad b_2 = \tau^{2|\nu_\alpha \varrho| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \varrho\end{smallmatrix}\right|},$$

$$a_3 = \tau^{2|\nu_\alpha| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + \nu_\alpha^2|\varrho}, \qquad b_3 = \tau^{2|\nu_\alpha \varrho| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \varrho\end{smallmatrix}\right|},$$

Die für $\varrho = 1$ aus (A), (B) und (C) hervorgehenden Formeln werden, wie man sofort erkennt, Identitäten, da für diesen Fall die Coefficienten links denen rechts gleich werden, wenn man rechts ν_α mit ν_α^2 vertauscht; diese Vertauschung bedeutet aber nur eine Umstellung der Summanden in den auf beiden Gleichungsseiten stehenden Summen und ändert somit die Gleichungen selbst nicht. Aus demselben Grunde werden dann die aus (A) für $\varrho = \nu$ und die aus (B) für $\varrho = \nu^2$, die aus (A) für $\varrho = \nu^2$ und die aus (C) für $\varrho = \nu$ und endlich die aus (B) für $\varrho = \nu$ und die aus (C) für $\varrho = \nu^2$ sich ergebenden Gleichungen einander bezüglich gleich. Somit reducirt sich das System auf die drei Gleichungen:

I. System; $\sigma = 1$.

(1)
$$\sum_\alpha c_1 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u_0)$$
$$= \alpha' \sum_\alpha d_1 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha \nu \nu_\lambda)(u_0) \cdot \vartheta(\nu_\alpha \nu \nu_\lambda)(u),$$

(2)
$$\sum_\alpha c_2 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u_0)$$
$$= \alpha' \sum_\alpha d_2 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha \nu^2 \nu_\lambda)(u_0) \cdot \vartheta(\nu_\alpha \nu^2 \nu_\lambda)(u),$$

(3)
$$\sum_\alpha c_3 \prod_\lambda \vartheta(\nu \nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu \nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u_0)$$
$$= \sum_\alpha d_3 \prod_\lambda \vartheta(\nu^2 \nu_\alpha \nu_\lambda)(u_0) \cdot \vartheta(\nu^2 \nu_\alpha \nu_\lambda)(u).$$

Genau dasselbe findet bei dem zweiten Systeme statt, das sich für $\sigma = \nu$ ergiebt. Man erhält:

II. System; $\sigma = \nu$.

(1)
$$\sum_\alpha c_1 \prod_\lambda \vartheta(\nu^2 \nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu \nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u)$$
$$= \sum_\alpha d_1 \prod_\lambda \vartheta(\nu^2 \nu_\alpha \nu_\lambda)(u_0) \cdot \vartheta(\nu_\alpha \nu_\lambda)(u),$$

(2)
$$\sum_\alpha c_2 \prod_\lambda \vartheta(\nu^2 \nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu \nu_\alpha^2 \nu_\lambda)(u_0)$$
$$= \sum_\alpha d_2 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha \nu_\lambda(u_0) \cdot \vartheta(\nu \nu_\alpha \nu_\lambda)(u),$$

$$\sum_\alpha c_3 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha{}^2 \nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu^2 \nu_\alpha{}^2 \nu_\lambda)(u_0) \tag{3}$$
$$= \sum_\alpha d_3 \prod_\lambda \vartheta(\nu_\alpha \nu_\lambda)(u_0) \cdot \vartheta(\nu \nu_\alpha \nu_\lambda)(u).$$

Das dritte System für $\sigma = \nu^2$ wird, wie man sich leicht überzeugt, mit dem II. identisch. Die Coefficienten haben hier nachstehende Bedeutung:

$$c_1 = \tau^{2|\nu_\alpha| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right|}, \qquad d_1 = \tau^{2|\nu_\alpha| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{smallmatrix}\right| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right|},$$
$$c_2 = \tau^{2|\nu_\alpha| + \left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{smallmatrix}\right| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right|}, \qquad d_2 = \tau^{2|\nu_\alpha| + \left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix}\nu\\ \nu_\alpha\end{smallmatrix}\right|},$$
$$c_3 = \tau^{2|\nu_\alpha| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{smallmatrix}\right|}, \qquad d_3 = \tau^{2|\nu_\alpha| + 2\left|\begin{smallmatrix}\nu_\alpha\\ \nu\end{smallmatrix}\right|},$$
$$\alpha' = \tau^{2|\nu|}.$$

§ 5.

Anzahl der allgemeinen Formeln.

Die Anzahl der in den Gleichungen des vorigen Paragraphen enthaltenen Formeln lässt sich leicht bestimmen, da man die Anzahl der Göpel'schen Gruppen und Systeme aus § 1 kennt. Die erste Formel auf pag. 525, die aus (A) hervorgeht, indem man $\rho = 1$ setzt, enthält nur Charakteristiken einer Göpel'schen Gruppe und liefert somit

$$(3^p + 1)(3^{p-1} + 1) \cdots (3^2 + 1)(3 + 1) = D$$

Formeln. Ferner zeigt eine genauere Betrachtung der übrigen Gleichungen, dass immer zwei der andern 8 Formeln in jedem Systeme dadurch ineinander übergehen, dass man (ν) mit (ν^2) vertauscht und eine entsprechende Vertauschung der Argumente vornimmt.*) Da nun aber sowohl (ν) als auch (ν^2) ein Goepel'sches System liefert, so wird nur die Hälfte der Systeme zu zählen sein, die zu einer bestimmten Gruppe gehören, d. h. $\frac{3^p - 1}{2}$ Systeme. Somit enthält das I. Formelsystem $D + 8 \cdot \frac{3^p - 1}{2} \cdot D = 3(4 \cdot 3^{p-1} - 1) D$ Formeln. Für die beiden andern Systeme ist nur zu beachten, dass alle ihre Gleichungen die Charakteristik (ν) enthalten, somit beträgt die Zahl der in ihnen enthaltenen Formeln $2 \cdot 9 \cdot \frac{3^p - 1}{2} D$.**)

*) Werden die in jeder Formelgruppe für $\rho = 1$, ν, ν^2 auftretenden Formeln mit 1, 2, 3 bezeichnet, so geht in allen drei Systemen 1 (A) in sich selbst über; 2 (A) in 3 (A); 1 (B) in 1 (C), 2 (B) in 3 (C) und 3 (B) in 2 (C).

**) Es ist hier zu bemerken, dass wenn die Charakteristik (ν) vom Charakter

In den im zweiten Formelcomplexe enthaltenen Gleichungen p. 529 und 530 gehen durch Vertauschung von u mit u_0 und (ν) mit (ν^2) stets die zwei ersten jedes Systemes ineinander über, sie enthalten also in allen drei Systemen $2 \cdot 2 \cdot \frac{3^p - 1}{2} \cdot D$ Formeln, während die beiden übrigen $2 \cdot 3^p \cdot D$ Gleichungen repräsentiren, somit hat man im Ganzen $2 \cdot (2 \cdot 3^p - 1) \cdot D$ Formeln, wobei jedoch die gleiche Basischarakteristik (ν_2) zur Bildung sämmtlicher Formeln zu verwenden ist.

Die bisher entwickelten Formeln gelten sämmtlich für beliebiges p. Im folgenden Paragraphen geben wir nun mit Beziehung auf unsere Untersuchung der Göpel'schen Gruppen für $p = 2$ eine Reihe specieller Formeln, die sofort die Analogie mit den in der Einleitung erwähnten Jacobi'schen und Rosenhain'schen Formeln erkennen lassen.

§ 6.

Formeln für $p = 2$.

Man erkennt leicht, dass in den Gleichungen des ersten Formelcomplexes je drei Glieder gleiche Coefficienten erhalten, wenn man die in § 2 aufgestellten speciellen Göpel'schen Gruppen zu Grunde legt.

Setzt man nämlich voraus, dass die Basischarakteristiken (ν_1) und (ν_2) den Bedingungen genügen:

$$|\nu_1| \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu_2 \\ \nu_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{3},$$

die die Bedingung $\nu_1 | \nu_2 \equiv 0$ nach sich ziehen, und bestimmt eine Charakteristik (ν) in der Weise, dass

$$\begin{vmatrix} \nu_1 \\ \nu \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \begin{vmatrix} \nu \\ \nu_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{3}$$

ist, so wird

$$\tau^{2|\nu_\alpha| + \nu_\alpha^2|\nu} = \begin{cases} 1, \\ \tau^{2|\nu_2| + \nu_2^2|\nu}, \\ \tau^{2|\nu_2| + \nu_2|\nu}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \tau^{2|\nu_\alpha \nu|} = \begin{cases} \tau^{2|\nu|}, \\ \tau^{2|\nu \nu_2|}, \\ \tau^{2|\nu \nu_2^2|}, \end{cases}$$

je nachdem man

$$(\nu_\alpha) = (1), \ (\nu_1), \ (\nu_1^2),$$

oder

$$(\nu_\alpha) = (\nu_2), \ (\nu_2 \nu_1), \ (\nu_2 \nu_1^2),$$

oder

$$(\nu_\alpha) = (\nu_2^2), \ (\nu_2^2 \nu_1), \ (\nu_2^2 \nu_1^2)$$

setzt.

Null ist, das ganze System III in II übergeht, indem man die Zeichen der u und v ändert und u_1, u_2, u_3 mit v_1, v_2, v_3 vertauscht, so dass diese Formeln in der obigen Zahl doppelt enthalten sind.

Diese Bedingungen entsprechen aber den 22 speciellen Göpel'schen Gruppen, die wir in § 2 fanden.

Da ferner die Coefficienten der entsprechenden Gleichungen der drei Systeme gleich sind, d. h. die 9 Gleichungen eines jeden Systems völlig gleiche Construction haben, so erhält man die unter obigen Voraussetzungen aus dem ersten Formelcomplexe hervorgehenden Gleichungen am einfachsten, indem man je drei Glieder mit gleichen Coefficienten in ein Zeichen U und V zusammenfasst (je nachdem die Argumente der ϑ-Functionen u oder v sind), ein einziges System von Formeln in U und V aufstellt und den U und V verschiedene Bedeutungen beilegt, je nachdem sie die Formeln des einen oder andern Systemes bezeichnen; schreibt man noch zur Abkürzung:

$$(5) \qquad \tau^{2|\nu_2|} = \alpha, \quad \tau^{2|\nu|} = \alpha', \quad \begin{vmatrix} \nu_2 \\ \nu \end{vmatrix} = \lambda, \quad \begin{vmatrix} \nu \\ \nu_2 \end{vmatrix} = \sigma, \text{*)}$$

so erhält man folgendes System von 9 Formeln:

$$(6)\left\{\begin{array}{ll}
(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l}
U_1 + \alpha U_2 + \alpha U_3 = V_1 + \alpha V_2 + \alpha V_3, \\
U_1 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} U_2 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma} U_3 = \alpha'\left\{V_4 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} V_5 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} V_6\right\}, \\
U_1 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma} U_2 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} U_3 = \alpha'\left\{V_7 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} V_8 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} V_9\right\},
\end{array}\right. \\[2ex]
(\mathrm{B})\left\{\begin{array}{l}
U_4 + \alpha\tau^{2\sigma} U_5 + \alpha\tau^{\sigma} U_6 = V_4 + \alpha\tau^{\sigma} V_5 + \alpha\tau^{2\sigma} V_6, \\
U_4 + \alpha\tau^{2\lambda} U_5 + \alpha\tau^{\lambda} U_6 = V_7 + \alpha\tau^{2\lambda} V_8 + \alpha\tau^{\lambda} V_9, \\
\alpha'\left\{U_4 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} U_5 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} U_6\right\} = V_1 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma} V_2 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} V_3,
\end{array}\right. \\[2ex]
(\mathrm{C})\left\{\begin{array}{l}
U_7 + \alpha\tau^{\sigma} U_8 + \alpha\tau^{2\sigma} U_9 = V_7 + \alpha\tau^{2\sigma} V_8 + \alpha\tau^{\sigma} V_9, \\
\alpha'\left\{U_7 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} U_8 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} U_9\right\} = V_1 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} V_2 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma} V_3, \\
U_7 + \alpha\tau^{\lambda} U_8 + \alpha\tau^{2\lambda} U_9 = V_4 + \alpha\tau^{\lambda} V_5 + \alpha\tau^{2\lambda} V_6.
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Diese Gleichungen kann man auch in folgender Weise schreiben:

$$(7)\left\{\begin{array}{l}
3U_1 = \left\{V_1 + \alpha V_2 + \alpha V_3\right\} + \alpha'\left\{V_4 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} V_5 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} V_6\right\} \\
\qquad\qquad + \alpha'\left\{V_7 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} V_8 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} V_9\right\}, \\
3\alpha U_2 = \left\{V_1 + \alpha V_2 + \alpha V_3\right\} + \alpha'\left\{\tau^{\lambda-\sigma} V_4 + \alpha\tau^{\sigma} V_5 + \alpha\tau^{2\lambda} V_6\right\} \\
\qquad\qquad + \alpha'\left\{\tau^{2(\lambda-\sigma)} V_7 + \alpha\tau^{2\sigma} V_8 + \alpha\tau^{\lambda} V_9\right\},
\end{array}\right.$$

---

*) Die beiden Grössen λ und σ können nicht zu gleicher Zeit congruent mit Null sein; denn wäre dies der Fall, so hätte die Charakteristik (ν) vier linearen Congruenzen zu genügen; diese haben aber nur $3^{4-4} = 1$ Lösung, und da sich unter diesen Lösungen stets die Charakteristik (1) befindet, so muss diese die vorhandene Lösung sein, die aber bei der Wahl von (ν) auszuschliessen ist.

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
3\alpha U_3 &= \quad \{V_1 + \alpha V_2 + \alpha V_3\} + \alpha'\{\tau^{2(\lambda-\sigma)} V_4 + \alpha\tau^{\lambda} V_5 + \alpha\tau^{2\sigma} V_6\} \\
&\qquad + \alpha'\{\tau^{\lambda-\sigma} V_7 + \alpha\tau^{2\lambda} V_8 + \tau^{\sigma} V_9\}, \\
3\alpha U_4 &= \frac{1}{\alpha'}\{V_1 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma} V_2 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} V_3\} + \{V_4 + \alpha\tau^{\sigma} V_5 + \alpha\tau^{2\sigma} V_6\} \\
&\qquad + \{V_7 + \alpha\tau^{2\lambda} V_8 + \alpha\tau^{\lambda} V_9\}, \\
3\alpha U_5 &= \frac{1}{\alpha'}\{\tau^{2(\lambda+\sigma)} V_1 + \alpha\tau^{\sigma} V_2 + \alpha\tau^{\lambda} V_3\} + \{\tau^{\sigma} V_4 + \alpha\tau^{2\sigma} V_5 + \alpha V_6\} \\
&\qquad + \{\tau^{\lambda} V_7 + \alpha V_8 + \alpha\tau^{2\lambda} V_9\}, \\
3\alpha U_6 &= \frac{1}{\alpha'}\{\tau^{\lambda+\sigma} V_1 + \alpha\tau^{2\lambda} V_2 + \alpha\tau^{2\sigma} V_3\} + \{\tau^{2\sigma} V_4 + \alpha V_5 + \alpha\tau^{\sigma} V_6\} \\
&\qquad + \{\tau^{2\lambda} V_7 + \alpha\tau^{\lambda} V_8 + \alpha V_9\}, \\
3 U_7 &= \frac{1}{\alpha'}\{V_1 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} V_2 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma} V_3\} + \{V_4 + \alpha\tau^{\lambda} V_5 + \alpha\tau^{2\lambda} V_6\} \\
&\qquad + \{V_7 + \alpha\tau^{2\sigma} V_8 + \alpha\tau^{\sigma} V_9\}, \\
3\alpha U_8 &= \frac{1}{\alpha'}\{\tau^{\lambda+\sigma} V_1 + \alpha\tau^{2\sigma} V_2 + \alpha\tau^{2\lambda} V_3\} + \{\tau^{2\lambda} V_4 + \alpha V_5 + \alpha\tau^{\lambda} V_6\} \\
&\qquad + \{\tau^{2\sigma} V_7 + \alpha\tau^{\sigma} V_8 + V_9\}, \\
3\alpha U_9 &= \frac{1}{\alpha'}\{\tau^{2(\lambda+\sigma)} V_1 + \alpha\tau^{\lambda} V_2 + \alpha\tau^{\sigma} V_3\} + \{\tau^{\lambda} V_4 + \alpha\tau^{2\lambda} V_5 + \alpha V_6\} \\
&\qquad + \{\tau^{\sigma} V_7 + \alpha V_8 + \alpha\tau^{2\sigma} V_9\},
\end{aligned}
\right.
$$

wozu sich noch ein gleichgebautes System gesellt, welches man durch Auflösung der Gleichungen (6) erhält. Das System (7) ist also involutorisch wie das System der Argumente und repräsentirt sämmtliche in dem ersten Formelcomplex enthaltene Gleichungen, wenn man statt der 9 Grössen U und der 9 Grössen V folgende Werthe substituirt:

I. System.

$$U_1 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_\alpha)(u_\lambda), \qquad U_4 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_2 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda), \qquad U_5 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_3 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda), \qquad U_6 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_7 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_8 = \sum_{\alpha} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=6} \vartheta(\nu^2\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_9=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=6}\vartheta(\nu^2\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda).$$

Die Werthe der Grössen V erhält man aus diesen, indem man die Argumente u mit v vertauscht.

II. System.

$$U_1=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu^2\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_2=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu^2\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_3=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu^2\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_4=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_5=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu_2^2\nu^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_6=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu_2\nu^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_7=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_8=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu_2^2\nu_\alpha)(u_\lambda),$$

$$U_9=\sum_{\alpha}\prod_{\lambda=1}^{\lambda=3}\vartheta(\nu\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda)\cdot\prod_{\lambda=4}^{\lambda=6}\vartheta(\nu_2\nu_\alpha)(u_\lambda).$$

Die zugehörigen Werthe der Grössen V erhält man aus diesen, indem man statt $u_1, u_2, u_3, v_4, v_5, v_6$ und statt $u_4, u_5, u_6, v_1, v_2, v_3$ in obige Gleichungen einsetzt. Die Summation nach α ist in diesen Formeln in der Weise zu verstehen, dass (ν_α) die Werthe (1), (ν_1), (ν_1^2) durchläuft, während die Productenbildung in derselben Weise wie auf pag. 525 aufzufassen ist.

Das dritte System liefert keine neuen Formeln, dieselben werden identisch mit denen des II. Systems. Der Beweis hierfür ergiebt sich leicht, indem man einerseits in den Formeln des Systems III pag. 525 für $\varrho = 1,\ \nu,\ \nu^2$ wirklich einsetzt, wodurch man erkennt, dass nur die Charakteristiken der ϑ-Functionen mit den Argumenten u im Systeme II mit denen der ϑ-Functionen mit den Argumenten v vertauscht erscheinen, und andererseits beachtet, dass durch diese Vertauschung zugleich die U mit den V permutirt werden, und dass hierdurch das System (6) völlig in sich übergeht (vergl. die Anmerkung pag. 530).

Die Anzahl der hiermit erhaltenen Formeln ergiebt sich unmittelbar aus den Betrachtungen des § 2. Die erste Formel umfasst, da sie nur mittelst der Gruppen erster und dritter Classe gebildet wird, 22 einzelne Gleichungen, und die übrigen 8 Formeln des I. Systems liefern $8(16+16) = 256$ Formeln.

Die Gleichungen des 2. Formelcomplexes können für $p = 2$ in ein ebensolches System wie (6) und (7) vereinigt werden, nur reduciren sich diese Systeme auf 3 Gleichungen. Denn die Coefficienten c, d sind der Form nach genau gleich den Coefficienten A, B, und es gelten dann die hieraus hervorgehenden Formeln für *jede beliebige Gruppe.* Man erhält sie somit am einfachsten, indem man den in den Systemen (6) und (7) vorkommenden Grössen folgende Bedeutung giebt:

$$\alpha = \tau^{2|\nu_1|}, \quad \alpha' = \tau^{2|\nu|}, \quad \lambda = \begin{vmatrix} \nu_1 \\ \nu \end{vmatrix}, \quad \sigma = \begin{vmatrix} \nu \\ \nu_1 \end{vmatrix};$$

dann folgt für das I. System am Schlusse des § 4:

$$U_1 = V_1 = \prod_\lambda \vartheta(\nu_\lambda)(u) \quad \cdot \vartheta(\nu_\lambda)(u_0),$$

$$U_2 = V_3 = \prod_\lambda \vartheta(\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u) \quad \cdot \vartheta(\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u_0),$$

$$U_3 = V_2 = \prod_\lambda \vartheta(\nu_1\,\nu_\lambda)(u) \quad \cdot \vartheta(\nu_1\,\nu_\lambda)(u_0),$$

$$U_4 = V_4 = \prod_\lambda \vartheta(\nu\nu_\lambda)(u) \quad \cdot \vartheta(\nu\nu_\lambda)(u_0),$$

$$U_5 = V_6 = \prod_\lambda \vartheta(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u_0),$$

$$U_6 = V_5 = \prod_\lambda \vartheta(\nu\nu_1\,\nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu\nu_1\,\nu_\lambda)u_0),$$

$$U_7 = V_7 = \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u) \quad \cdot \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u_0),$$

$$U_8 = V_9 = \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u_0),$$

$$U_9 = V_8 = \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\,\nu_\lambda)(u) \cdot \vartheta(\nu^2\nu_1\,\nu_\lambda)(u_0).$$

Aehnliche Formeln erhält man für die Grössen des II. Systems: Die drei Gleichungen sind dann aus (6):

$$(8)\begin{cases} U_1 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)}U_2 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma}U_3 = \alpha'\left\{U_4 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)}U_6 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma}U_5\right\}, \\ U_1 + \alpha\tau^{\lambda-\sigma}U_2 + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)}U_3 = \alpha'\left\{U_7 + \alpha\tau^{\lambda+\sigma}U_9 + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)}U_8\right\}, \\ U_4 + \alpha\tau^{2\lambda}U_5 + \alpha\tau^{\lambda}U_6 = U_7 + \alpha\tau^{\lambda}U_9 + \alpha\tau^{2\lambda}U_8. \end{cases}$$

§ 7.

Thetarelationen.

Aus den aufgestellten Formelsystemen kann man eine Reihe von speciellen Formeln ableiten, indem man die Argumente passend wählt. Wir wollen im Folgenden die wichtigsten Formeln angeben, die man durch *eine* besondere Wahl der Argumente erhält und die Relationen zwischen ϑ-Functionen mit gleichen Argumenten sowie zwischen ihren Nullwerthen ermitteln. Zu diesem Zweck machen wir in den für $p = 2$ entwickelten Formeln des ersten Formelcomplexes (Gl. 8) dieselbe Substitution, die wir schon pag. 526 anwandten.

Dadurch erhält man für das I. System

$$U_1 = V_1 = \sum \vartheta^3(\nu_\alpha)(u)\,\vartheta^3(\nu_\alpha)(u_0),$$

$$U_4 = V_4 = \sum \vartheta^3(\nu\nu_\alpha)(u)\,\vartheta^2(\nu\nu_\alpha)(u_0),$$

$$U_7 = V_7 = \sum \vartheta^3(\nu^2\nu_\alpha)(u)\,\vartheta^3(\nu^2\nu_\alpha)(u_0),$$

$U_2 = V_3$, $U_3 = V_2$ geht aus U_1, $U_5 = V_6$, $U_6 = V_5$ aus U_7 und $U_8 = V_9$, $U_9 = V_8$ aus U_7 hervor, indem man die Charakteristiken der ϑ-Functionen bezüglich um (ν_2^2), (ν_2) vermehrt.

Hierdurch reducirt sich aber dann das System (6) wieder auf die drei Gleichungen (8). Genau dasselbe tritt ein für die Gleichungen des Systemes II, pag. 525, wenn man setzt:

$$U_1 = V_1 = \sum \vartheta^3(\nu_\alpha\nu^2)(u)\,\vartheta^3(\nu\nu_\alpha)(u_0),$$

$$U_4 = V_4 = \sum \vartheta^3(\nu_\alpha)(u)\,\vartheta^3(\nu_\alpha\nu^2)(u_0),$$

$$U_7 = V_7 = \sum \vartheta^3(\nu_\alpha\nu)(u)\,\vartheta^3(\nu_\alpha)(u_0),$$

woraus wieder die Werthe der übrigen U und V wie oben genommen werden.

Setzt man in diesen Formeln noch $u_0 n_0 = un$, so erhält man mit Benützung der Werthe des Systems I. *drei Relationen zwischen sechsten Potenzen von Thetafunctionen* und mit Benützung der Werthe des

Systems II *drei Relationen zwischen zweigliedrigen Producten aus dritten Potenzen von ϑ-Functionen.*

Setzt man endlich in diesen $u=0$ und beachtet, dass $\vartheta(\mu)(0) = \vartheta(\mu^2)(0)$, wofür man kürzer $\vartheta(\mu)$ schreibt, so wird die zweite Gleichung (8) identisch mit der ersten, während die dritte in eine Identität übergeht, somit ergeben sich folgende 2 Gleichungen zwischen den Nullwerthen der Thetafunctionen:

$$(1^*) \qquad \sum' \vartheta^6(\nu_\alpha) - \alpha \sum' \vartheta^6(\nu_2\nu_\alpha)$$
$$= \alpha' \left\{ \sum' \vartheta^6(\nu\nu_\alpha) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} \sum' \vartheta^6(\nu\nu_2\nu_\alpha) + \tau^{\lambda+\sigma} \sum' \vartheta^6(\nu\nu_2^2\nu_\alpha) \right\},$$

$$(2^*) \qquad \sum' \vartheta^3(\nu^2\nu_\alpha)\,\vartheta^3(\nu\nu_\alpha) - \alpha \sum' \vartheta^3(\nu^2\nu_2\nu_\alpha)\,\vartheta^3(\nu\nu_2\nu_\alpha)$$
$$= \alpha' \left\{ \sum' \vartheta^3(\nu_\alpha)\,\vartheta^3(\nu^2\nu_\alpha) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} \sum' \vartheta^3(\nu_2\nu_\alpha)\,\vartheta^3(\nu_2\nu^2\nu_\alpha) \right.$$
$$\left. + \ \alpha\tau^{\lambda+\sigma} \sum' \vartheta^3(\nu_2^2\nu_\alpha)\,\vartheta^3(\nu_2^2\nu^2\nu_\alpha) \right\}.$$

Die im zweiten Formelcomplexe enthaltenen Thetarelationen bekommt man unmittelbar, indem man in den Gleichungen am Schlusse des § 6 $u_0 = u$ setzt. Hierdurch ergeben sich mit Benützung der Formeln des I. Systems 3 *Thetarelationen zwischen je* 6 *dreigliedrigen Producten aus ϑ-Quadraten* und mit Benützung der Formeln des II. Systems 3 *Relationen zwischen je* 6 *sechsgliedrigen Thetaproducten.* Da sich dieselben durch besondere Einfachheit auszeichnen, mögen sie hier folgen:

I.

$$\prod_\lambda \vartheta^2(\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu_1^2\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{(\lambda-\sigma)} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$= \alpha' \left\{ \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1^2\nu_\lambda)(u) \right\},$$

$$\prod_\lambda \vartheta^2(\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{\lambda-\sigma} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu_1^2\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$= \alpha' \left\{ \prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{\lambda+\sigma} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_1^2\nu_\lambda)(u) \right\},$$

$$\prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2\lambda} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1^2\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{\lambda} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$= \prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{\lambda} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2\lambda} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1^2\nu_\lambda)(u).$$

II.

$$\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)$$
$$+ \alpha\tau^{\lambda-\sigma}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$= \alpha'\Big\{\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$+ \alpha\tau^{\lambda+\sigma}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\Big\},$$

$$\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{\lambda-\sigma}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)$$
$$+ \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$= \alpha'\Big\{\prod_\lambda \vartheta(\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)}\prod_\lambda \vartheta(\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$+ \alpha\tau^{\lambda+\sigma}\prod_\lambda \vartheta(\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\Big\},$$

$$\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{2\lambda}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)$$
$$+ \alpha\tau^{\lambda}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$= \prod_\lambda \vartheta(\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_\lambda)(u) + \alpha\tau^{\lambda}\prod_\lambda \vartheta(\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u)$$
$$+ \alpha\tau^{2\lambda}\prod_\lambda \vartheta(\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda)(u)$$

Setzt man endlich in diesen Formeln $u = 0$, so reduciren sie sich wieder auf die zwei ersten in jeder Nummer. Man erhält dann als Relationen zwischen den Nullwerthen:

$$(3^*)\quad \begin{cases} \prod_\lambda \vartheta^2(\nu_\lambda) + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)}\vartheta^2(\nu_1{}^2\nu_\lambda) + \alpha\tau^{\lambda-\sigma}\prod_\lambda \vartheta^2(\nu_1\nu_\lambda) \\ = \alpha'\Big\{\prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_\lambda) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)}\prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1\nu_\lambda) + \alpha\tau^{\lambda+\sigma}\prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda)\Big\}, \end{cases}$$

$$(4^*)\quad \begin{cases} \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)\,\vartheta(\nu\nu_\lambda) + \alpha\tau^{2(\lambda-\sigma)}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)\,\vartheta(\nu\nu_1{}^2\nu_\lambda) \\ \qquad + \alpha\tau^{\lambda-\sigma}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)\,\vartheta(\nu\nu_1\nu_\lambda) \\ = \alpha'\Big\{\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)\,\vartheta(\nu_\lambda) + \alpha\tau^{2(\lambda+\sigma)}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)\,\vartheta(\nu_1\nu_\lambda) \\ \qquad + \alpha\tau^{\lambda+\sigma}\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1{}^2\nu_\lambda)\,\vartheta(\nu_1{}^2\nu_\lambda)\Big\}. \end{cases}$$

Diese Formeln (1) bis (4) entsprechen den von Rosenhain l. c. pag. 416 und 417 aufgestellten.

Die Coefficienten der Formeln des 2. Formelcomplexes vereinfachen sich, wenn man die im § 2 aufgestellten speciellen Gruppen zu Grunde legt; es ist nämlich dann

$$|\nu_1| \equiv 0, \quad \text{also} \quad \alpha = 1, \quad \lambda = \begin{vmatrix} \nu_1 \\ \nu \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \sigma = \begin{vmatrix} \nu \\ \nu_1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

wodurch die Gleichungen (8) in § 6 in die Doppelgleichung

$$U_1 + U_2 + U_3 = \alpha' \{U_4 + U_5 + U_6\} = \alpha' \{U_7 + U_8 + U_9\} \quad (9)$$

übergehen, welche mit Benützung von I und II dieses Paragraphen die Relationen liefert:

$$\begin{aligned} &\prod_\lambda \vartheta^2(\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta^2(\nu_1^2\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_\lambda)(u) \\ &= \alpha' \left\{\prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta^2(\nu\nu_1^2\nu_\lambda)(u)\right\} \\ &= \alpha' \left\{\prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta^2(\nu^2\nu_1^2\nu_\lambda)(u)\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1^2\nu_\lambda)(u) \\ &\qquad + \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1\nu_\lambda)(u) \\ &= \alpha' \Big\{\prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_1\nu_\lambda)(u) \\ &\qquad + \prod_\lambda \vartheta(\nu^2\nu_1^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_1^2\nu_\lambda)(u)\Big\} \\ &= \alpha' \Big\{\prod_\lambda \vartheta(\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_\lambda)(u) + \prod_\lambda \vartheta(\nu_1\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu_1\nu\nu_\lambda)(u) \\ &\qquad + \prod_\lambda \vartheta(\nu_1^2\nu_\lambda)(u)\,\vartheta(\nu\nu_1^2\nu_\lambda)(u)\Big\}. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Relationen der Nullwerthe lassen sich unmittelbar aus den Gleichungen (3*) und (4*) ablesen.

Zum Schlusse ist noch zu bemerken, dass die Formeln des ersten Complexes ihre einfachste Gestalt annehmen, wenn man jene zwei Gruppen der 1. Classe zu Grunde legt, die an erster und letzter Stelle der Tabelle II stehen.

Für erstere Gruppe wird nämlich $|\nu_2| \equiv 0$, also $\alpha = 1$, $\lambda = \begin{vmatrix} \nu_2 \\ \nu \end{vmatrix} = \pm 1$, $\sigma = \begin{vmatrix} \nu \\ \nu_2 \end{vmatrix} = 0$, für letztere $|\nu_2| \equiv 0$, $\alpha = 1$, $\lambda = 0$, $\sigma = \pm 1$; es ist dies jene Gruppe, welche im Falle des Moduls 2 von Rosenhain seinen Formeln zu Grunde gelegt wurde.

Tabelle I. [Lösungen von $\nu | \nu_a \equiv 0$ (mod. 3)].

0 0 1 0	0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1, 1 1, -1 1, 0 0, 1 0, -1 0, 0 1, 1 1, -1 1. 0 -1, 1 -1, -1 -1.
0 0 0 1	0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1, -1 1, 0 0, 1 0, -1 0, 0 1, 1 1, -1 1, 0 -1, 1 -1, -1 -1.
0 0 1 1	0 0 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1, 0 0, 1 0, -1 0, 0 1, 1 1, -1 1, 0 -1, 1 -1, -1 -1.
0 0 -1 1	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0, 1 0, -1 0, 0 1, 1 1, -1 1, 0 -1, 1 -1, -1 -1.
0 1 0 0	0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 0, -1 0, 0 0, 1 0, -1 0, 0 0, 1 0, -1 0, 0 0, 1 0, -1 0.
0 1 1 0	0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 0, 0 1, 1 1, -1 1, 0 1, 1 1, -1 1, 0 1, 1 1, -1 1.
0 1 -1 0	1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 -1, 1 -1, -1 -1, 0 -1, 1 -1, -1 -1, 0 -1, 1 -1, -1 -1.
0 1 0 1	0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 1, -1 1, 0 0, 1 0, -1 0, 0 1, 1 1, -1 1, 0 -1, 1 -1, -1 -1.
0 1 1 1	0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1, 0 1, 1 1, -1 1, 0 -1, 1 -1, -1 -1, 0 0, 1 0, -1 0.
0 1 -1 1	1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 -1, 1 -1, -1 -1, 0 0, 1 0, -1 0, 0 1, 1 1, -1 1.
0 1 0 -1	0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1, -1 -1, 0 0, 1 0, -1 0, 0 -1, 1 -1, -1 -1, 0 1, 1 1, -1 1.
0 1 1 -1	0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1, 0 1, 1 1, -1 1, 0 0, 1 0, -1 0, 0 -1, 1 -1, -1 -1.
0 1 -1 -1	1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 -1, 1 -1, -1 -1, 0 1, 1 1, -1 1, 0 0, 1 0, -1 0.
1 0 0 0	1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 1, 0 -1, 0 0, 0 1, 0 -1, 0 0, 0 1, 0 -1.
1 0 1 0	1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 1, 1 -1, 1 0, 1 1, 1 -1, 1 0, 1 1, 1 -1.
1 0 -1 0	1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1, -1 -1, -1 0, -1 1, -1 -1, -1 0, -1 1, -1 -1.
1 0 0 1	1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 -1, 1 0, 1 1, 1 -1, -1 0, -1 1, -1 -1.
1 0 1 1	1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1, -1 0, -1 1, -1 -1, 0 0, 0 1, 0 -1.
1 0 -1 1	1 0 1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1, 0 0, 0 1, 0 -1, 1 0, 1 1, 1 -1.
1 0 0 -1	1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 0, -1 1, -1 -1, 1 0, 1 1, 1 -1.

Tabelle I. (Fortsetzung.)

1 0 1 -1	1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 0, 0 1, 0 -1, -1 0, -1 1, -1 -1.
1 0 -1 -1	1 1 1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 0, 1 1, 1 -1, 0 0, 0 1, 0 -1.
1 1 0 0	1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1, 1 -1, 0 0, -1 1, 1 -1.
1 1 1 0	1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 1, -1 -1, 1 0, 0 1, -1 -1.
1 1 -1 0	1 1 1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 1, 0 -1, -1 0, 1 1, 0 -1.
1 1 0 1	1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 -1, -1 0, 1 1, 0 -1.
1 1 1 1	1 1 1 -1 1 -1 1 -1 0 -1, 0 0, -1 1, 1 -1.
1 1 -1 1	1 1 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1, 1 0, 0 1, -1 -1.
1 1 0 -1	1 -1 1 -1 1 -1 1 0, 0 1, -1 -1.
1 1 1 -1	1 -1 1 -1 1 -1 -1 0, 1 1, 0 -1.
1 1 -1 -1	1 -1 1 -1 1 -1 0 0, -1 1, 1 -1.
1 -1 0 0	1 -1 1 -1 1 1, -1 -1.
1 -1 1 0	1 -1 1 -1 -1 1, 0 -1.
1 -1 -1 0	1 -1 1 -1 0 1, 1 -1.
1 -1 0 1	1 -1 1 -1.
1 -1 1 1	1 -1 -1 -1.
1 -1 -1 1	1 -1 0 -1.
1 -1 0 -1	
1 -1 1 -1	
1 -1 -1 -1	

Tabelle II. [Tabelle der 40 Goepel'schen-Gruppen].

Erste Classe.

0 0 1 0,	0 0 -1 0,	0 0 0 1,	0 0 1 1,	0 0 -1 1,	0 0 0 -1,	0 0 1 -1,	0 0 -1 -1.
0 0 1 0,	0 0 -1 0,	0 1 0 0,	0 1 1 0,	0 1 -1 0,	0 -1 0 0,	0 -1 1 0,	0 -1 -1 0.
0 0 0 1,	0 0 0 -1,	1 0 0 0,	1 0 0 1,	1 0 0 -1,	-1 0 0 0,	-1 0 0 1,	-1 0 0 -1.
0 0 1 1,	0 0 -1 -1,	1 -1 0 0,	1 -1 1 1,	1 -1 -1 -1,	-1 1 0 0,	-1 1 1 1,	-1 1 -1 -1.
0 0 -1 1,	0 0 1 -1,	1 1 0 0,	1 1 -1 1,	1 1 1 -1,	-1 -1 0 0,	-1 -1 -1 1,	-1 -1 1 -1.
0 1 0 0,	0 -1 0 0,	1 0 0 0,	1 1 0 0,	1 -1 0 0,	-1 0 0 0,	-1 1 0 0,	-1 -1 0 0.

Zweite Classe.

0 1 1 0,	0 -1 -1 0,	1 0 0 1,	1 1 1 1,	1 -1 -1 1,	-1 0 0 -1,	-1 1 1 -1,	-1 -1 -1 -1.
0 1 1 0,	0 -1 -1 0,	1 0 1 1,	1 1 -1 1,	1 -1 0 1,	-1 0 -1 -1,	-1 1 0 -1,	-1 -1 1 -1.
0 1 1 0,	0 -1 -1 0,	1 0 -1 1,	1 1 0 1,	1 -1 1 1,	-1 0 1 -1,	-1 1 -1 -1,	-1 -1 0 -1.
0 1 -1 0,	0 -1 1 0,	1 0 0 -1,	1 1 -1 -1,	1 -1 1 -1,	-1 0 0 1,	-1 1 -1 1,	-1 -1 1 1.
0 1 -1 0,	0 -1 1 0,	1 0 1 -1,	1 1 0 -1,	1 -1 -1 -1,	-1 -1 0 1,	-1 1 1 1,	-1 -1 0 1.
0 1 -1 0,	0 -1 1 0,	1 0 -1 -1,	1 1 1 -1,	1 -1 0 -1,	-1 0 1 1,	-1 1 0 1,	-1 -1 -1 1.
0 1 0 1,	0 -1 0 -1,	1 0 -1 0,	1 1 -1 1,	1 -1 -1 -1,	-1 0 1 0,	-1 1 1 1,	-1 -1 1 -1.
0 1 1 1,	0 -1 -1 -1,	1 0 0 1,	1 1 1 -1,	1 -1 -1 0,	-1 0 0 -1,	-1 1 1 0,	-1 -1 -1 1.
0 1 -1 1,	0 -1 1 -1,	1 0 0 -1,	1 1 -1 0,	1 -1 1 1,	-1 0 0 1,	-1 1 -1 -1,	-1 -1 -1 0.
0 1 0 -1,	0 -1 0 1,	1 0 1 0,	1 1 1 -1,	1 -1 1 1,	-1 0 -1 0,	-1 1 -1 -1,	-1 -1 -1 1.
0 1 1 -1,	0 -1 -1 1,	1 0 0 1,	1 1 1 0,	1 -1 -1 -1,	-1 0 0 -1,	-1 1 1 1,	-1 -1 -1 0.
0 1 -1 -1,	0 -1 1 1,	1 0 0 -1,	1 1 -1 1,	1 -1 1 0,	-1 0 0 1,	-1 1 -1 0,	-1 -1 1 -1.

Dritte Classe.

0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 -1	0 -1	0 -1
1 0,	-1 0,	0 1,	1 1,	-1 1,	0 -1,	1 -1,	-1 -1.
0 0	0 0	0 1	0 1	0 1	0 -1	0 -1	0 -1
1 0,	-1 0,	0 -1,	1 -1,	-1 -1,	0 1,	1 1,	-1 1.
0 0	0 0	1 0	1 0	1 0	-1 0	-1 0	-1 0
0 1,	0 -1,	1 0,	1 1,	1 -1,	-1 0,	-1 1,	-1 -1.
0 0	0 0	1 0	1 0	1 0	-1 0	-1 0	-1 0
0 1,	0 -1,	-1 0,	-1 1,	-1 -1,	1 0,	1 1,	1 -1.
0 0	0 0	1 -1	1 -1	1 -1	-1 1	-1 1	-1 1
1 1,	-1 -1,	1 0,	-1 1,	0 -1,	-1 0,	0 1,	1 -1.
0 0	0 0	1 -1	1 -1	1 -1	-1 1	-1 1	-1 1
1 1,	-1 -1,	-1 0,	0 1,	1 -1,	1 0,	-1 1,	0 -1.
0 0	0 0	1 1	1 1	1 1	-1 -1	-1 -1	-1 -1
-1 1,	1 -1,	1 0,	0 1,	-1 -1,	-1 0,	1 1,	0 -1.
0 0	0 0	1 1	1 1	1 1	-1 -1	-1 -1	-1 -1
-1 1,	1 -1,	-1 0,	1 1,	0 -1,	1 0,	0 1,	-1 -1.
0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
0 0,	0 0,	1 0,	1 0,	1 0,	-1 0,	-1 0,	-1 0.
0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
0 0,	0 0,	-1 0,	-1 0,	-1 0,	1 0,	1 0,	1 0.
1 0	-1 0	0 1	1 1	-1 1	0 -1	-1 -1	1 -1
0 0,	0 0,	0 1,	0 1,	0 1,	0 -1,	0 -1,	0 -1.
1 0	-1 0	0 1	1 1	-1 1	0 -1	1 -1	-1 -1
0 0,	0 0,	0 -1,	0 -1,	0 -1,	0 1,	0 1,	0 1.
1 1	-1 -1	0 1	1 -1	-1 0	0 -1	1 0	-1 1
0 0,	0 0,	-1 1,	-1 1,	-1 1,	1 -1,	1 -1,	1 -1.
1 1	-1 -1	0 1	1 -1	-1 0	0 -1	1 0	-1 1
0 0,	0 0,	1 -1,	1 -1,	1 -1,	-1 1,	-1 1,	-1 1.
1 -1	-1 1	0 1	1 0	0 1	0 -1	1 1	-1 0
0 0,	0 0,	-1 -1,	-1 -1,	-1 -1,	1 1,	1 1,	1 1.
1 -1	-1 1	0 1	1 0	-1 -1	0 -1	1 1	-1 0
0 0,	0 0,	1 1,	1 1,	1 1,	-1 -1,	-1 -1,	-1 -1.

Vierte Classe.

0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
0 1,	0 -1,	1 0,	1 1,	1 -1,	-1 0,	-1 1,	-1 -1.
0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
1 1,	-1 -1,	-1 1,	0 -1,	1 0,	1 -1,	-1 0,	0 1.
0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
-1 1,	1 -1,	-1 -1,	1 0,	0 1,	1 1,	0 -1,	-1 0.
0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
0 -1,	0 1,	-1 0,	-1 -1,	-1 1,	1 0,	1 -1,	1 1.
0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
1 -1,	-1 1,	1 1,	-1 0,	0 -1,	-1 -1,	0 1,	1 0.
0 1	0 -1	1 0	1 1	1 -1	-1 0	-1 1	-1 -1
-1 -1,	1 1,	1 -1,	0 1,	-1 0,	-1 1,	1 0,	0 -1.

München, im Januar 1888.

Ueber die Krümmung der Curvenschaaren.

Von

R. v. Lilienthal in Bonn.

Fasst man eine Fläche als eine einfache stetige Mannigfaltigkeit von Curven auf, so wird sich das allgemeinste Krümmungsproblem naturgemäss auf zweifache stetige Mannigfaltigkeiten von Curven beziehen, die man Curvenschaaren nennen kann. Unter das gedachte Problem fällt die Kummer'sche Theorie der geradlinigen Strahlensysteme, in welcher die Curven durch gerade Linien vertreten werden, ferner die Lamé'sche Théorie des coordonnées curvilignes, welche die drei Flächensysteme, die sich bei der analytischen Darstellung einer Curvenschaar ergeben, als sich überall senkrecht schneidend annimmt. In neuester Zeit hat Herr A. Voss in seinen Arbeiten über Punktebenensysteme (Annalen Bd. 16 und 23) verschiedene allgemeine Fragen über Curvenschaaren behandelt.

Bei dem zu betrachtenden Krümmungsproblem treten in erster Linie zwei Gesichtspunkte auf, die man als die Analoga der Krümmung einer Curve und der einer Fläche auffassen kann. An die Stelle eines Punktes einer Curve tritt der Querschnitt eines Curvenbündels, an die Stelle der Tangente das zum Querschnitt gehörende Tangentenbündel, auf welches die meisten Begriffe der Theorie der geradlinigen Strahlensysteme unmittelbar Anwendung finden.

An die Stelle der benachbarten Tangente einer Curventangente tritt das zu einem benachbarten Querschnitt eines Curvenbündels gehörende Tangentenbündel, welches indess im Folgenden nicht betrachtet ist, da es zunächst darauf ankam, solche Krümmungseigenschaften einer Curvenschaar aufzufinden, welche bei den Strahlensystemen erhalten bleiben.

Als zweiter Gesichtspunkt ist der folgende hervorzuheben. Die gewöhnliche Flächentheorie besteht im Wesentlichen aus einer Theorie der Krümmungsaxen der auf einer Fläche durch einen Punkt gehenden Curven oder mit anderen Worten, der orthogonalen Trajectorien eines

Normalensystems. Erweitert man diesen Begriff zu dem der orthogonalen Trajectorien einer Curvenschaar, so ergiebt sich die beabsichtigte Verallgemeinerung ohne Schwierigkeit.

In Bezug auf principielle analytisch-geometrische Definitionen muss ich auf meine „Untersuchungen zur allgemeinen Theorie der krummen Oberflächen und geradlinigen Strahlensysteme, Bonn 1886“ verweisen, die ich wie früher mit 𝔘 citiren werde.

§ 1.

Bezeichnungen, Tangentenbündel.

Eine Curvenschaar wird analytisch dargestellt, indem man die rechtwinkligen Coordinaten u, v, w eines Punktes im Raum durch reelle, stetige Functionen dreier reeller, von einander unabhängiger Veränderlicher p, q, r ausdrückt. Längs jeder Curve der Schaar sollen p und q als constant, r als variabel betrachtet werden. Die Gesammtheit der Curven, welche zu einem Werthsystem (p, q) und den benachbarten Werthsystemen $(p + dp, q + dq)$ gehören, wollen wir ein Curvenbündel nennen. Auf der zu einem Werthsystem (p, q) gehörenden Curve fassen wir einen regulären Punkt (u, v, w) ins Auge. Die Tangente der Curve in diesem Punkte habe die Richtungscosinus ξ, η, ζ. Die im Punkt (u, v, w) zum Strahl (ξ, η, ζ) senkrechte Ebene, welche eine Normalebene der zu (p, q) gehörenden Curve ist, soll eine Normalebene des Curvenbündels heissen. Sie schneide aus dem Curvenbündel einen „Querschnitt“ aus; letzterer ist dann als ein von einer geschlossenen Linie begrenzter unendlich kleiner Ebenentheil zu betrachten, der im Allgemeinen nicht in eine Strecke ausartet. In jedem Punkte dieses Ebenentheils besitze die durch ihn hindurchgehende Curve des Bündels eine bestimmte Tangente, und die Gesammtheit dieser Tangenten heisse das zum Punkt (u, v, w) gehörende Tangentenbündel. Eine nicht zur Curvenschaar gehörende Curve soll eine Trajectorie der Schaar genannt werden, wenn im Allgemeinen durch jeden ihrer Punkte eine Curve der Schaar hindurchgeht. Zu einem solchen Punkt gehört sowohl eine Tangente der Trajectorie wie eine Tangente der durch ihn hindurchgehenden Curve der Schaar. Sind beide Tangenten stets senkrecht aufeinander, so heisse die Trajectorie eine orthogonale Trajectorie der Curvenschaar.

Unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)^2 = a_{11}, \sum\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} = a_{12}, \sum\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial r} = a_{13}, \sum\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2 = a_{22},$$
$$\sum\frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial u}{\partial r} = a_{23}, \quad \sum\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 = a_{33}$$

erhalten wir:

$$\xi = \frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}}, \quad \eta = \frac{\frac{\partial v}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}}, \quad \zeta = \frac{\frac{\partial w}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}},$$

wo $\sqrt{a_{33}}$ als von Null verschieden angenommen wird und das Vorzeichen von $\frac{\partial w}{\partial r}$ besitzt. (Vergl. II. § 1).

Der Punkt $(u+du,\ v+dv,\ w+dw)$ gehört dem durch den Punkt $(u,\ v,\ w)$ gehenden Querschnitt des betrachteten Curvenbündels an, sobald:

$$\sum \xi du = 0$$

d. h.:

(1) $$a_{13}\,dp + a_{23}\,dq + a_{33}\,dr = 0$$

ist.

Eine Trajectorie der Curvenschaar entsteht, wenn in u, v, w zwei der Variabeln p, q, r als Functionen der dritten angesehen werden. Ist dabei die Gleichung (1) erfüllt, so hat man es mit einer orthogonalen Trajectorie zu thun.

Unter δu, δv, δw, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ sollen die unter der Bedingung (1) gebildeten Differentiale von u, ξ etc. verstanden werden, sodass:

$$\delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{a_{13}}{a_{33}}\right)dp + \left(\frac{\partial u}{\partial q} - \frac{\partial u}{\partial r}\,\frac{a_{23}}{a_{33}}\right)dq,$$

$$\delta\xi = \left(\frac{\partial\xi}{\partial p} - \frac{\partial\xi}{\partial r}\,\frac{a_{13}}{a_{33}}\right)dp + \left(\frac{\partial\xi}{\partial q} - \frac{\partial\xi}{\partial r}\,\frac{a_{23}}{a_{33}}\right)dq$$

wird, wo zur Abkürzung:

$$\delta u = u_p dp + u_q dq,$$
$$\delta\xi = \xi_p dp + \xi_q dq$$

gesetzt werden soll. Ferner führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\sum (u_p)^2 = \mathfrak{E}, \quad \sum u_p u_q = \mathfrak{F}, \quad \sum (u_q)^2 = \mathfrak{G},$$
$$\sum (\xi_p)^2 = \mathsf{H}, \quad \sum \xi_p \xi_q = \Phi, \quad \sum (\xi_q)^2 = \Psi,$$

$$\sum \xi_p u_p = \sum \xi_p \frac{\partial u}{\partial p} = e_{11}, \quad \sum \xi_p u_q = \sum \xi_p \frac{\partial u}{\partial q} = e_{12},$$
$$\sum \xi_q u_p = \sum \xi_q \frac{\partial u}{\partial p} = e_{21}, \quad \sum \xi_q u_q = \sum \xi_q \frac{\partial u}{\partial q} = e_{22}.$$

Die Grössen $\mathfrak{E}, \mathfrak{G}, \mathsf{H}, \Psi, \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2, \mathsf{H}\Psi - \Phi^2$ werden als von Null verschieden vorausgesetzt.

An das betrachtete Tangentenbündel knüpfen sich nun die Begriffe, die Herr Kummer in seiner „allgemeinen Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“ (Journal für die r. u. a. Mathematik Bd. 57) auseinandergesetzt hat. Die vom Punkt (u, v, w) aus gerechnete Abscisse (vergl. II. § 1) des Punktes auf dem Strahl (ξ, η, ζ), den sein kürzester Abstand von dem Nachbarstrahl ($\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, $\zeta+\delta\zeta$) trifft, sei $\mathfrak{r}$. Dann entsteht die Gleichung

$$(2)\qquad \mathfrak{r} = -\frac{e_{11}\,dp^2 + (e_{12}+e_{21})\,dp\,dq + e_{22}\,dq^2}{\mathsf{H}\,dp^2 + 2\Phi\,dp\,dq + \Psi\,dq^2}.$$

Maximum $\mathfrak{r}_1$ und Minimum $\mathfrak{r}_2$ von $\mathfrak{r}$ genügen der Gleichung:

$$(3)\quad (\mathsf{H}\Psi-\Phi^2)\mathfrak{r}^2 + \Big(\mathsf{H}e_{22}-(e_{12}+e_{21})\Phi+e_{11}\Psi\Big)\,\mathfrak{r} + e_{11}e_{22} - \frac{(e_{12}+e_{21})^2}{4} = 0,$$

deren stets reelle Wurzeln als von einander verschieden vorausgesetzt werden. Die Werthe $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ des Verhältnisses $\frac{dq}{dp}$, welche die Werthe $\mathfrak{r}_1$ resp. $\mathfrak{r}_2$ von $\mathfrak{r}$ liefern, ergeben sich aus der Gleichung:

$$(4)\qquad \Big(e_{11}\Phi - \frac{e_{12}+e_{21}}{2}\mathsf{H}\Big)\,dp^2 + (\Psi e_{11} - \mathsf{H}e_{22})\,dp\,dq$$
$$+\Big(\Psi\,\frac{e_{12}+e_{21}}{2} - \Phi e_{22}\Big)\,dq^2 = 0.$$

Die unter Umständen imaginären Abscissen $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_4$ der Brennpunkte sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(5)\quad (\mathsf{H}\Psi-\Phi^2)\,\mathfrak{r}^2 + \Big(e_{11}\Psi + e_{22}\mathsf{H} - (e_{12}+e_{21})\Phi\Big)\,\mathfrak{r} + e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21} = 0,$$

und die zu $\mathfrak{r}_3$ und $\mathfrak{r}_4$ gehörenden Werthe $\mathfrak{t}_3$ und $\mathfrak{t}_4$ des Verhältnisses $\frac{dq}{dp}$ folgen aus der Beziehung:

$$(6)\qquad (e_{21}\mathsf{H} - e_{11}\Phi)\,dp^2 + \Big(e_{22}\mathsf{H} + (e_{21}-e_{12})\Phi - e_{11}\Psi\Big)\,dp\,dq$$
$$+ (e_{22}\Phi - e_{12}\Psi)\,dq^2 = 0.$$

Das betrachtete Tangentenbündel heisst ein Normalenbündel, wenn die Strahlen des Bündels die Normalen ein- und derselben Fläche sind. Zu diesem Behuf muss sich $\mathfrak{r}$ so als Function von p und q bestimmen lassen, dass stets die Gleichung (1) besteht, d. h. die rechte Seite der Gleichung:

$$dr = -\frac{a_{13}}{a_{33}}\,dp - \frac{a_{23}}{a_{33}}\,dq$$

muss ein vollständiges Differential sein, was auf die Beziehung:

$$a_{33}\sum\frac{\partial u}{\partial p}\,\frac{\partial^2 u}{\partial q\,\partial r} - a_{23}\sum\frac{\partial u}{\partial p}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{a_{13}}{2}\,\frac{\partial a_{33}}{\partial q}$$
$$= a_{33}\sum\frac{\partial u}{\partial q}\,\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial r} - a_{13}\sum\frac{\partial u}{\partial q}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{a_{23}}{2}\,\frac{\partial a_{33}}{\partial p}$$

hinauskommt. Dieselbe besagt nichts weiteres, als die Gleichung:

$$e_{12} = e_{21}.$$

Man hat nämlich:

$$\xi_p = \frac{a_{33}\dfrac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial r} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial p}}{a_{33}\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{33}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial r}}{a_{33}^2\sqrt{a_{33}}}\,a_{13},$$

$$\xi_q = \frac{a_{33}\dfrac{\partial^2 u}{\partial q\,\partial r} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial q}}{a_{33}\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{33}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial r}}{a_{33}^2\sqrt{a_{33}}}\,a_{23}.$$

Daher:

$$e_{12} = \frac{a_{33}\sum\dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial r} - \dfrac{1}{2}a_{23}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial p}}{a_{33}\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{33}\sum\dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \dfrac{1}{2}a_{23}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial r}}{a_{33}^2\sqrt{a_{33}}}\,a_{13},$$

$$e_{21} = \frac{a_{33}\sum\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial^2 u}{\partial q\,\partial r} - \dfrac{1}{2}a_{13}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial q}}{a_{33}\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{33}\sum\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \dfrac{1}{2}a_{13}\dfrac{\partial a_{33}}{\partial r}}{a_{33}^2\sqrt{a_{33}}}\,a_{23}.$$

Die Richtungscosinus des zu $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ gehörenden kürzesten Abstandes sollen mit $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$, diejenigen des zu $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_2$ gehörenden mit $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2$ bezeichnet werden. Dann folgt:

$$\varkappa_1 = \frac{\xi_p + \xi_q\mathfrak{t}_2}{V_2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{\xi_p + \xi_q\mathfrak{t}_1}{V_1},$$

wo V_1 die mit dem Vorzeichen von $\xi_p + \xi_q\mathfrak{t}_1$ versehene Quadratwurzel aus $\mathsf{H} + 2\Phi\mathfrak{t}_1 + \Psi\mathfrak{t}_1^2$, V_2 die mit dem Vorzeichen von $\xi_p + \xi_q\mathfrak{t}_2$ versehene Quadratwurzel aus $\mathsf{H} + 2\Phi\mathfrak{t}_2 + \Psi\mathfrak{t}_2^2$ bedeutet.

Zwischen den Grössen $\xi, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ bestehen die Gleichungen:

$$\xi = \delta_0(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2), \quad \eta = \delta_0(\mu_1\varkappa_2 - \varkappa_1\mu_2), \quad \zeta = \delta_0(\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2),$$

wo δ_0 gleich $+1$ oder -1 zu nehmen ist, je nachdem $\varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2 > 0$ oder < 0 ausfällt.

Die durch den Punkt (u, v, w) gehende Ebene, deren Normale $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ resp. $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ ist, soll die zu $\mathfrak{r}_1$ resp. $\mathfrak{r}_2$ gehörende Hauptebene des Tangentenbündels genannt werden.

Setzt man:

$$\vartheta_1 = \frac{(e_{11} + \mathfrak{r}_2\mathsf{H})\,dp^2 + 2\left(\dfrac{e_{12}+e_{21}}{2} + \mathfrak{r}_2\Phi\right)dp\,dq + (e_{22} + \mathfrak{r}_2\Psi)\,dq^2}{\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1},$$

$$\vartheta_2 = \frac{(e_{11} + \mathfrak{r}_1\mathsf{H})\,dp^2 + 2\left(\dfrac{e_{12}+e_{21}}{2} + \mathfrak{r}_1\Phi\right)dp\,dq + (e_{22} + \mathfrak{r}_1\Psi)\,dq^2}{\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2},$$

so wird:

(7) $$\mathfrak{r} = \frac{\mathfrak{r}_1\vartheta_1 + \mathfrak{r}_2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}.$$

Führt man nun die Winkel τ und ψ ein mit Hülfe der Gleichungen: (Vergl. II. § 14 u. § 3)

$$\cos\tau = \frac{\Sigma \varkappa_2 \xi_p}{\sqrt{\mathrm{H}}}, \quad \cos(\tau-\psi) = \frac{\Sigma \varkappa_2 \xi_q}{\sqrt{\Psi}},$$

$$\sin\tau = \frac{\Sigma \varkappa_1 \xi_p}{\sqrt{\mathrm{H}}}, \quad \sin(\tau-\psi) = \frac{\Sigma \varkappa_1 \xi_q}{\sqrt{\Psi}},$$

wo $\sqrt{\mathrm{H}}$ das Vorzeichen von ξ_p, $\sqrt{\Psi}$ dasjenige von ξ_q besitzt, so ergeben sich ϑ_1 und ϑ_2 als Quadrate in folgender Form:

$$\vartheta_1 = (\sqrt{\mathrm{H}}\cos\tau\, dp + \sqrt{\Psi}\cos(\tau-\psi)\, dq)^2,$$
$$\vartheta_2 = (\sqrt{\mathrm{H}}\sin\tau\, dp + \sqrt{\Psi}\sin(\tau-\psi)\, dq)^2,$$

sodass die Vergleichung der beiden Werthe von $\mathfrak{r}$ in (2) und (7) die Beziehungen liefert:

$$(8)\quad \begin{cases} e_{11} = -\mathrm{H}(\mathfrak{r}_1\cos^2\tau + \mathfrak{r}_2\sin^2\tau), \\ e_{12}+e_{21} = -2\sqrt{\mathrm{H}}\sqrt{\Psi}\big(\mathfrak{r}_1\cos\tau\cos(\tau-\psi) + \mathfrak{r}_2\sin\tau\sin(\tau-\psi)\big), \\ e_{22} = -\Psi\big(\mathfrak{r}_1\cos^2(\tau-\psi) + \mathfrak{r}_2\sin^2(\tau-\psi)\big). \end{cases}$$

Endlich seien noch die Gleichungen angemerkt:

$$\xi_p = \sqrt{\mathrm{H}}(\varkappa_1\sin\tau + \varkappa_2\cos\tau),$$
$$\xi_q = \sqrt{\Psi}\big(\varkappa_1\sin(\tau-\psi) + \varkappa_2\cos(\tau-\psi)\big),$$
$$\varkappa_1 = \xi_p\frac{\cos(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} - \xi_q\frac{\cos\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$
$$\varkappa_2 = -\xi_p\frac{\sin(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} + \xi_q\frac{\sin\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi}.$$

§ 2.

Darstellung der Differentiale δu, $\delta^2 u$, $\delta\varkappa_1$, $\delta\varkappa_2$. Volumenelement.

Bei Anwendung der Bezeichnungen:

$$\sigma_1 = e_{11}\frac{\cos(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} - e_{21}\frac{\cos\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$
$$\sigma_2 = e_{12}\frac{\cos(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} - e_{22}\frac{\cos\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$
$$\sigma_3 = -e_{11}\frac{\sin(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} + e_{21}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$
$$\sigma_4 = -e_{12}\frac{\sin(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} + e_{22}\frac{\sin\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$
$$\mathfrak{S}_1 = \sigma_1\, dp + \sigma_2\, dq, \quad \mathfrak{S}_2 = \sigma_3\, dp + \sigma_4\, dq$$

erhalten wir für δu, δv, δw das lineare System:

$$\sum \xi \delta u = 0, \quad \sum \varkappa_1 \delta u = \mathfrak{S}_1, \quad \sum \varkappa_2 \delta u = \mathfrak{S}_2,$$

sodass:

(1) $$\delta u = \varkappa_1 \mathfrak{S}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{S}_2.$$

Unter δF, $\delta^2 F$ soll stets das erste resp. zweite unter der Bedingung:

$$a_{13} dp + a_{23} dq + a_{33} dr = 0$$

gebildete Differential einer Function F der drei Veränderlichen p, q, r verstanden werden. Dann folgt:

$$\delta \varkappa_1 = \left(\frac{\partial \varkappa_1}{\partial p} - \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} \frac{a_{13}}{a_{33}}\right) dp + \left(\frac{\partial \varkappa_1}{\partial q} - \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} \frac{a_{23}}{a_{33}}\right) dq = \varkappa_{1p}\, dp + \varkappa_{1q}\, dq,$$

$$\delta \varkappa_2 = \left(\frac{\partial \varkappa_2}{\partial p} - \frac{\partial \varkappa_2}{\partial r} \frac{a_{13}}{a_{33}}\right) dp + \left(\frac{\partial \varkappa_2}{\partial q} - \frac{\partial \varkappa_2}{\partial r} \frac{a_{23}}{a_{33}}\right) dq = \varkappa_{2p}\, dp + \varkappa_{2q}\, dq,$$

sowie:

$$\begin{aligned}
\sum \xi \varkappa_{1p} &= -\sum \varkappa_1 \xi_p = -\sqrt{\mathrm{H}} \sin \tau, \\
\sum \xi \varkappa_{2p} &= -\sum \varkappa_2 \xi_p = -\sqrt{\mathrm{H}} \cos \tau, \\
\sum \varkappa_1 \varkappa_{2p} &= -\sum \varkappa_2 \varkappa_{1p}, \\
\sum \xi \varkappa_{1q} &= -\sum \varkappa_1 \xi_q = -\sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi), \\
\sum \xi \varkappa_{2q} &= -\sum \varkappa_2 \xi_q = -\sqrt{\Psi} \cos (\tau - \psi), \\
\sum \varkappa_1 \varkappa_{2q} &= -\sum \varkappa_2 \varkappa_{1q}.
\end{aligned}$$

Wir nehmen noch:

$$\sum \varkappa_2 \varkappa_{1p} = U_1, \quad \sum \varkappa_2 \varkappa_{1q} = U_2$$

und erhalten aus dem Vorstehenden:

$$\begin{aligned}
\varkappa_{1p} &= \varkappa_2 U_1 - \xi \sqrt{\mathrm{H}} \sin \tau, & \varkappa_{1q} &= \varkappa_2 U_2 - \xi \sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi), \\
\varkappa_{2p} &= -\varkappa_1 U_1 - \xi \sqrt{\mathrm{H}} \cos \tau, & \varkappa_{2q} &= -\varkappa_1 U_2 - \xi \sqrt{\Psi} \cos (\tau - \psi).
\end{aligned}$$

Wird nun:

$$\begin{aligned}
U &= U_1\, dp + U_2\, dq, \\
H_1 &= \sqrt{\mathrm{H}} \cos \tau\, dp + \sqrt{\Psi} \cos (\tau - \psi)\, dq, \\
H_2 &= \sqrt{\mathrm{H}} \sin \tau\, dp + \sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi)\, dq \quad .
\end{aligned}$$

gesetzt, so ergiebt sich:

(2) $$\delta \varkappa_1 = \varkappa_2 U - \xi H_2, \quad \delta \varkappa_2 = -\varkappa_1 U - \xi H_1.$$

Jetzt folgt:

$$\delta^2 u = \varkappa_1(\delta \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2 U) + \varkappa_2(\delta \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_1 U) - \xi(\mathfrak{S}_1 H_2 + \mathfrak{S}_2 H_1).$$

Hier wollen wir die Coefficienten von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ξ mit V_1, V_2, V_0 bezeichnen, sodass:

$$\delta^2 u = \xi V_0 + \varkappa_1 V_1 + \varkappa_2 V_2 \tag{3}$$

wird.

Die Darstellung (1) der Differentiale δu, δv, δw soll auf den Ausdruck des Raumelements angewandt werden.

Derselbe hat bekanntlich die Form:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{vmatrix} dp\, dq\, dr.$$

Den reciproken Werth der hier auftretenden Determinante wollen wir mit ϑ bezeichnen. Die Determinante selbst lässt sich so schreiben:

$$\begin{vmatrix} u_p & u_q & \xi \\ v_p & v_q & \eta \\ w_p & w_q & \zeta \end{vmatrix} \cdot \sqrt{a_{33}}$$

und nimmt unter Benutzung der sich aus (1) ergebenden Gleichungen:

$$u_p = \varkappa_1 \sigma_1 + \varkappa_2 \sigma_3, \qquad u_q = \varkappa_1 \sigma_2 + \varkappa_2 \sigma_4$$

die Form an:

$$\delta_0(\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3)\sqrt{a_{33}},$$

oder nach den Definitionsgleichungen für die Grössen σ:

$$\delta_0 \frac{e_{11} e_{22} - e_{12} e_{21}}{Q_\xi} \sqrt{a_{33}},$$

wo

$$Q_\xi = \sqrt{\mathrm{H}}\sqrt{\Psi} \sin \psi$$

gesetzt ist.

Daher erhält man nach (5) § 1 für die fragliche Determinante den Ausdruck:

$$\delta_0 Q_\xi \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4 \sqrt{a_{33}}$$

und für ϑ die Gleichung:

$$\vartheta = \frac{\delta_0}{\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4 Q_\xi \sqrt{a_{33}}}.$$

Hat man es mit einem Strahlensystem zu thun, sind also sämmtliche Curven der Schaar gerade Linien, so lassen sich u, v, w in der Form:

$$u = x + r\xi, \quad v = y + r\eta, \quad w = z + r\zeta$$

darstellen, wo x, y, z — die Coordinaten der Punkte einer Fläche — und ξ, η, ζ — die Richtungscosinus der Strahlen des Systems — nur von p und q abhängen. Alsdann wird $\sqrt{a_{33}}$ gleich 1. Der Factor $\frac{\delta_0}{Q_\xi}$ ändert sich längs eines Strahls nicht, und nach Absonderung dieses Factors erhält man das Kummer'sche Dichtigkeitsmaass $\bar{\vartheta} = \frac{1}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4}$, welches bei Normalensystemen für eine Fläche $r = \text{const.}$, wenn x, y, z so gewählt sind, dass $\sum \xi\, dx = 0$ ist, mit dem Gauss'schen Krümmungsmaass zusammenfällt.

Der Flächeninhalt eines Querschnitts eines Curvenbündels wird durch den absoluten Betrag des Ausdrucks:

$$(\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3)\, dp\, dq = \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4\, Q_\xi\, dp\, dq$$

gegeben. Das Element der Fläche $r = \text{const.}$ hat im Punkt (u, v, w) bekanntlich den Werth $\sqrt{\sum\left(\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial w}{\partial q} - \frac{\partial v}{\partial q}\frac{\partial w}{\partial p}\right)^2}\, dp\, dq$, welcher sich mit Hülfe des ersten Lamé'schen Differentialparameters:

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial w}\right)^2}$$

durch $h\vartheta^{-1}\, dp\, dq$ ausdrückt. Bezeichnet man den Winkel zwischen den positiven Theilen der Tangente der Curve $(p, q = \text{const.})$ und der Normalen der Fläche $(r = \text{const.})$ mit χ, so wird:

$$\frac{dr}{h} = dr\sqrt{a_{33}} \cdot \cos\chi$$

d. h. $\frac{dr}{h}$ ist die Projection des Elements jener Curve auf die Normale jener Fläche. Für $\chi = 0$ ergiebt sich die von Lamé angegebene Bedeutung des Quotienten $\frac{dr}{h}$.

§ 3.

Krümmung der orthogonalen Trajectorien einer Curvenschaar.

Unter $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ bez. $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ bez. $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ wollen wir die Richtungscosinus der Tangente bez. Binormale bez. Hauptnormale in einem regulären Punkt (u, v, w) einer Raumcurve verstehen.

Dann erhält man:

$$\cos\alpha = \frac{du}{\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}},$$

wo die Quadratwurzel, welche kurz mit ds bezeichnet werden soll, so zu bestimmen ist, dass $\cos\gamma$ positiv ausfällt. (Vergl. II. § 1).

Ferner wird:

$$\cos l = \frac{dv\,d^2w - dw\,d^2v}{\sqrt{\Sigma(dv\,d^2w - dw\,d^2v)^2}},$$

wo die Quadratwurzel, welche D genannt werde, so zu bestimmen ist, dass $\cos n$ positiv wird. Endlich entsteht:

$$\cos a = \varepsilon(\cos m \cos \gamma - \cos n \cos \beta),$$

wo ε gleich $+1$ oder gleich -1 ist, je nachdem

$$\cos l \cos \beta - \cos m \cos \alpha$$

grösser oder kleiner ist wie Null.

Der Krümmungsmittelpunkt d. h. der Schnittpunkt der Hauptnormalen mit der Projection der benachbarten Hauptnormalen auf die Schmiegungsebene habe in Bezug auf (u, v, w) die Abscisse ϱ. Dann entsteht:

$$\varrho = \varepsilon \frac{ds^3}{D}.$$

Die betrachteten Ausdrücke sollen jetzt für eine orthogonale Trajectorie einer Curvenschaar gebildet werden, sodass $du\,d^2u\ldots$ durch $\delta u\,\delta^2 u\ldots$ zu ersetzen sind.

Auf diese Weise ergiebt sich:

$$\cos \alpha = \frac{\varkappa_1 \mathfrak{S}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{S}_2}{\sqrt{\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2}}, \quad \cos l = \delta_0 \frac{\xi(\mathfrak{S}_1 V_2 - \mathfrak{S}_2 V_1) - (\varkappa_2 \mathfrak{S}_1 - \varkappa_1 \mathfrak{S}_2) V_0}{\sqrt{(\mathfrak{S}_1 V_2 - \mathfrak{S}_2 V_1)^2 + (\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2) V_0^2}},$$

$$ds = \sqrt{\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2}, \qquad D = \sqrt{(\mathfrak{S}_1 V_2 - \mathfrak{S}_2 V_1)^2 + (\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2) V_0^2},$$

wo die Wurzeln aus den Bedingungen $\cos \gamma > 0$, bez. $\cos n > 0$ zu bestimmen sind.

Ferner:

$$\cos a = \varepsilon \frac{(\varkappa_2 \mathfrak{S}_1 - \varkappa_1 \mathfrak{S}_2)(\mathfrak{S}_1 V_2 - \mathfrak{S}_2 V_1) + \xi(\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2) V_0}{D \cdot ds},$$

$$\varrho = \varepsilon \frac{(\sqrt{\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2})^3}{\sqrt{(\mathfrak{S}_1 V_2 - \mathfrak{S}_2 V_1)^2 + (\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2) V_0^2}}.$$

Auf der Schmiegungsebene steht im Krümmungsmittelpunkt die Krümmungsaxe senkrecht, welche parallel der Binormale ist. Wir wollen die Coordinaten des Punktes, in welchem diese Krümmungsaxe die Normalebene des Curvenbündels schneidet, mit u', v', w' bezeichnen, ebenso mit $\cos \bar{\alpha}$, $\cos \bar{\beta}$, $\cos \bar{\gamma}$ die Richtungscosinus der durch (u, v, w) und (u', v', w') gehenden Geraden. Dann folgt:

$$u' - u = \frac{ds^2}{\mathfrak{S}_1 V_2 - V_1 \mathfrak{S}_2} (\varkappa_2 \mathfrak{S}_1 - \varkappa_1 \mathfrak{S}_2),$$

$$\cos \bar{\alpha} = \varepsilon' \frac{\varkappa_2 \mathfrak{S}_1 - \varkappa_1 \mathfrak{S}_2}{ds},$$

wo ds die bisherige Bedeutung hat und ε' gleich $+1$ oder -1 zu nehmen ist, so dass $\cos \bar{\gamma}$ positiv ausfällt. Nennen wir nun R die

Abscisse des Punktes (u', v', w') in Bezug auf den Punkt (u, v, w), so wird:

$$R = \varepsilon' \frac{ds^2}{\mathfrak{S}_1 V_2 - V_1 \mathfrak{S}_2}.$$

Man kann R den geodätischen Krümmungshalbmesser einer orthogonalen Trajectorie nennen, ebenso eine solche orthogonale Trajectorie, deren Coordinaten die Gleichung $\mathfrak{S}_1 V_2 - V_1 \mathfrak{S}_2 = 0$ befriedigen, eine geodätische Linie. Von einer solchen lässt sich sowohl zeigen, dass sie unter allen orthogonalen Trajectorien zwischen zwei hinreichend nahen Punkten die kürzeste Verbindung liefert, wie auch, dass sie von einem Punkt beschrieben wird, auf den keine Kräfte wirken, und der gezwungen ist, sich auf einer orthogonalen Trajectorie einer Curvenschaar zu bewegen.

Die Abscisse des Punktes, in welchem die betrachtete Krümmungsaxe den Strahl (ξ, η, ζ) schneidet, soll h genannt werden. Dann entsteht:

$$h = \frac{ds^2}{V_0}.$$

Da in h nur die ersten Differentiale dp und dq vorkommen, so bleibt h für alle orthogonalen Trajectorien mit derselben Tangente ungeändert, zugleich besitzt h die Bedeutung des Krümmungsradius der geodätischen Linie mit dieser Tangente; denn für $\mathfrak{S}_1 V_2 - V_1 \mathfrak{S}_2 = 0$ wird:

$$\cos a = \xi, \quad D = \varepsilon\, ds\, V_0,$$

sodass dann ϱ in h übergeht. Zwischen h und ϱ findet somit diejenige Beziehung statt, welche für die Krümmungsradien aller zur selben Tangente gehörenden ebenen Schnitte einer Fläche durch das Meusnier'sche Theorem ausgesprochen wird.

Um das Analogon des Euler'schen Satzes aufzufinden, stellen wir V_0 als quadratische Form von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ dar. Setzt man die durch $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und die Grössen σ ausgedrückten Werthe von dp und dq in die Ausdrücke für H_1 und H_2 ein, so kommt:

$$H_1 = \frac{\mathfrak{S}_1(\sigma_4 \sqrt{\mathrm{H}} \cos\tau - \sigma_3 \sqrt{\Psi} \cos(\tau - \psi)) - \mathfrak{S}_2(\sigma_2 \sqrt{\mathrm{H}} \cos\tau - \sigma_1 \sqrt{\Psi} \cos(\tau - \psi))}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3},$$

$$H_2 = \frac{\mathfrak{S}_1(\sigma_4 \sqrt{\mathrm{H}} \sin\tau - \sigma_3 \sqrt{\Psi} \sin(\tau - \psi)) - \mathfrak{S}_2(\sigma_2 \sqrt{\mathrm{H}} \sin\tau - \sigma_1 \sqrt{\Psi} \sin(\tau - \psi))}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}.$$

Unter Anwendung der Definitionsgleichungen für die Grössen σ und der Gleichungen (8) § 1 ergiebt sich nun:

$$\sigma_4 \sqrt{\mathrm{H}} \cos\tau - \sigma_3 \sqrt{\Psi} \cos(\tau - \psi) = \frac{e_{12} - e_{21}}{2} = e_0,$$

$$\sigma_2 \sqrt{\mathrm{H}} \cos\tau - \sigma_1 \sqrt{\Psi} \cos(\tau - \psi) = \mathfrak{r}_2 Q_\xi,$$

$$\sigma_4 \sqrt{\mathrm{H}} \sin \tau - \sigma_3 \sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi) = - \mathfrak{r}_1 Q_\xi,$$

$$\sigma_2 \sqrt{\mathrm{H}} \sin \tau - \sigma_1 \sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi) = \frac{e_{12} - e_{21}}{2} = e_0.$$

Daher:

$$H_1 = \frac{e_0 \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{r}_2 Q_\xi \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4 Q_\xi}, \qquad H_2 = \frac{-\mathfrak{r}_1 Q_\xi \mathfrak{S}_1 - e_0 \mathfrak{S}_2}{\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4 Q_\xi}$$

und:

$$V_0 = -(\mathfrak{S}_1 H_2 + \mathfrak{S}_2 H_1) = \frac{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{r}_2 \mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4},$$

sodass:

$$h = \mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4 \frac{\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{r}_1 \mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{r}_2 \mathfrak{S}_2^2}.$$

Hiernach gehört das Maximum von h zur Tangente $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ und hat den Werth $h_1 = \frac{\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4}{\mathfrak{r}_2}$; das Minimum h_2 von h gehört zur Tangente $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und hat den Werth $\frac{\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4}{\mathfrak{r}_1}$. Ist λ der Winkel zwischen den positiven Theilen der durch δu, δv, δw und $\mathfrak{S}_2 = 0$ bestimmten Tangenten, so wird:

$$\frac{1}{h} = \frac{\sin^2 \lambda}{h_1} + \frac{\cos^2 \lambda}{h_2}, \text{*)}$$

welche Gleichung die Form des Euler'schen Theorems besitzt.

Haben $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ entgegengesetzte Vorzeichen, liegt also der Punkt (u, v, w) zwischen den Grenzpunkten der kürzesten Abstände, so existiren zwei orthogonale Trajectorien, welche unendliche Werthe von h liefern, die also die Rolle der Asymptotenlinien spielen.

Ist das betrachtete Tangentenbündel ein Normalenbündel, so wird:

$$e_0 = 0,\ \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_3,\ \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_4,\ H_1 = -\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{r}_1},\ H_2 = -\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{r}_2},\ h_1 = \mathfrak{r}_1,\ h_2 = \mathfrak{r}_2.$$

Es werde noch die Verallgemeinerung des Begriffs „conjugirte Tangenten einer Fläche" betrachtet.**) Die Richtungscosinus der auf den Curventangenten (ξ, η, ζ) und $(\xi + \delta\xi, \eta + \delta\eta, \zeta + \delta\zeta)$ senkrechten Geraden seien $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$, sodass:

$$\cos \alpha' = \frac{\varkappa_1 H_1 - \varkappa_2 H_2}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}},$$

wo die Wurzel so zu bestimmen ist, dass $\cos \gamma'$ positiv ausfällt.

Eine durch den Punkt (u, v, w) gelegte Gerade, deren Richtungscosinus $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ sind, möge die zur Tangente $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ adjungirte Tangente heissen.

---

*) Die Existenz dieser Relation, welche von Herrn A. Voss, Math. Annalen Bd. 23, S. 70 erwähnt wird, ist wohl zuerst von Hamilton bemerkt worden. Der vom Punkt (u, v, w) verschiedene Endpunkt von h ist genau das, was Hamilton focus by projection nennt. (Transactions of the Royal Irish Academy Vol. XVI, Part I, Science p. 47).

**) Vergl. A. Voss, Math. Annalen Bd. 23, S. 46.

Drückt man $\cos\alpha$ durch H_1 und H_2 aus, so wird:

$$\cos\alpha = \frac{\varkappa_1(e_0 H_1 - \mathfrak{r}_2 Q_\xi H_2) - \varkappa_2(\mathfrak{r}_1 Q_\xi H_1 + e_0 H_2)}{\sqrt{(e_0 H_1 - \mathfrak{r}_2 Q_\xi H_2)^2 + (\mathfrak{r}_1 Q_\xi H_1 + e_0 H_2)^2}}.$$

Werden die zu $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ gehörenden Werthe von H_1 und H_2 mit H_1' und H_2' bezeichnet, so ergiebt sich für $\cos\alpha'$ der weitere Ausdruck:

$$\cos\alpha' = \frac{\varkappa_1(e_0 H_1' - \mathfrak{r}_2 Q_\xi H_2') - \varkappa_2(\mathfrak{r}_1 Q_\xi H_1' + e_0 H_2')}{\sqrt{(e_0 H_1' - \mathfrak{r}_2 Q_\xi H_2')^2 + (\mathfrak{r}_1 Q_\xi H_1' + e_0 H_2')^2}}.$$

Der Tangente ($\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$) sei die Tangente ($\cos\alpha''$, $\cos\beta''$, $\cos\gamma''$) adjungirt. Dann folgt:

$$\cos\alpha'' = \frac{\varkappa_1 H_1' - \varkappa_2 H_2'}{\sqrt{H_1'^2 + H_2'^2}} = \frac{\varkappa_1(e_0 H_1 + \mathfrak{r}_2 Q_\xi H_2) - \varkappa_2(-\mathfrak{r}_1 Q_\xi H_1 + e_0 H_2)}{\sqrt{(e_0 H_1 + \mathfrak{r}_2 Q_\xi H_2)^2 + (\mathfrak{r}_1 Q_\xi H_1 - e_0 H_2)^2}}.$$

Hieraus folgt nun, dass wenn eine Tangente (2) zu einer Tangente (1) adjungirt ist, nur bei $e_0 = 0$ auch stets (1) zu (2) adjungirt ist. Alsdann stehen (1) und (2) in derselben Beziehung zu einander, wie conjugirte Tangenten einer Fläche.

Schliessen wir den Fall $e_0 = 0$ aus, so ist (1) zu (2) adjungirt, wenn (1) mit einer der beiden Tangenten zusammenfällt, welche die Gleichung:

$$\mathfrak{r}_1 H_1^2 + \mathfrak{r}_2 H_2^2 = 0.$$

liefert. Dieselben sind nur dann reell, wenn $\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ negativ ist und ergeben sich als die Tangenten der beiden durch den Punkt (u, v, w) gehenden Asymptotenlinien der Curvenschaar. Letztere durchschneiden diejenigen benachbarten Strahlen $(\xi, \xi + \delta\xi)$, deren kürzeste Abstände in die Normalebene des Curvenbündels fallen. Da aber jetzt:

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \quad \cos\beta = \cos\beta', \quad \cos\gamma = \cos\gamma',$$

so sind die fraglichen Tangenten sich selbst adjungirt.

Die Tangente (2) ist senkrecht zu (1), wenn die Beziehung:

$$e_0(H_1^2 + H_2^2) + (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2) Q_\xi H_1 H_2 = 0 \text{*)}$$

besteht, welche, da:

$$e_0^2 = (\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4 - \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2) Q_\xi^2,$$

in die beiden folgenden:

$$2e_0 H_2 + Q_\xi \left(\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 \pm (\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_4)\right) H_1 = 0$$

zerfällt. Die entsprechenden Tangenten (1) sind somit nur dann reell, wenn die Brennpunkte des Bündels (ξ, η, ζ) reell sind, und sie durch-

---

*) Dies ist die Gleichung der Voss'schen Krümmungslinien. Ich habe diese Benennung desshalb nicht beibehalten, weil die fraglichen Curven nicht stets reell zu sein brauchen.

schneiden diejenigen Nachbarstrahlen des Strahls (ξ, η, ζ), welche diese beiden Brennpunkte liefern.

Endlich fällt (2) mit $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ resp. $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ zusammen, wenn H_2 resp. H_1 verschwindet. Alsdann trifft (1) diejenigen Nachbarstrahlen von (ξ, η, ζ), welche zu den Werthen $\mathfrak{r}_1$ resp. $\mathfrak{r}_2$ von $\mathfrak{r}$ d. h. zu den Grenzpunkten der kürzesten Abstände gehören.

Bildet die Tangente $(\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ mit den Tangenten $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ resp. $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ die Winkel φ_1 und φ_2, ist also:

$$\cos\varphi_1 = \frac{H_1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{-H_2}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}},$$

so wird:

$$\delta\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2\,\frac{H_1\,\delta H_2 - H_2\,\delta H_1}{H_1^2 + H_2^2},$$

$$-\delta\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1\,\frac{H_1\,\delta H_2 - H_2\,\delta H_1}{H_1^2 + H_2^2},$$

sodass, wenn:

$$\frac{H_1\,\delta H_2 - H_2\,\delta H_1}{H_1^2 + H_2^2} - U = S$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$\delta\cos\alpha' = S(\varkappa_1\cos\varphi_2 - \varkappa_2\cos\varphi_1)$$

entsteht. Daraus ersieht man, dass benachbarte adjungirte Tangenten sich schneiden. Die Abscisse des Schnittpunkts in Bezug auf den Punkt (u, v, w) sei $\overline{R}$. Dann erhält man die Beziehung:

$$\overline{R} = \frac{\mathfrak{S}_1 H_2 + \mathfrak{S}_2 H_1}{S\cdot\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} = -\frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{r}_2\mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4 S\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} = -\frac{\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2}{h\cdot S\cdot\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}.$$

Es sei noch bemerkt, dass:

$$H_1\,\delta H_2 - H_2\,\delta H_1 = 0$$

die Differentialgleichung derjenigen orthogonalen Trajectorien der Curvenschaar ist, deren adjungirte Tangenten mit den Tangenten $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ constante Winkel bilden. Längs einer solchen Trajectorie wird:

$$\overline{R} = \frac{\mathfrak{S}_1^2 + \mathfrak{S}_2^2}{h\cdot U\cdot\sqrt{H_1^2 + H_2^2}},$$

welcher Werth im Folgenden mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden soll.

§ 4.

Krümmungslinien.

Besonderes Interesse beanspruchen diejenigen orthogonalen Trajectorien einer Curvenschaar, welche ganz in Hauptebenen verlaufen.*)

*) Dieselben decken sich mit den von Herrn A. Voss, Math. Annalen Bd. 23, S. 70 im § 5 zuerst erwähnten Curven.

Eine solche Curve, deren Tangenten die Richtungscosinus $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ resp. $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2$ besitzen, soll die zu $\mathfrak{r}_2$ resp. $\mathfrak{r}_1$ gehörende Krümmungslinie heissen; dann wird die zu $\mathfrak{r}_1$ gehörende durch die Gleichung $\mathfrak{S}_1 = 0$, die zu $\mathfrak{r}_2$ gehörende durch die Gleichung $\mathfrak{S}_2 = 0$ geliefert.

Unter einer isogonalen Trajectorie der Krümmungslinien wollen wir eine solche orthogonale Trajectorie der Curvenschaar verstehen, deren Tangenten mit den Tangenten der Krümmungslinien constante Winkel bilden. Als Differentialgleichung dieser isogonalen Trajectorien ergiebt sich:

$$\mathfrak{S}_1 \delta \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_2 \delta \mathfrak{S}_1 = 0.$$

Zur Vereinfachung des Folgenden ist es nützlich, die Grösse U, welche bisher als lineare Form von dp und dq auftrat, sowohl durch $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$, wie durch H_1, H_2 auszudrücken. Man erhält:

$$U = \frac{(U_1\sigma_4 - U_2\sigma_3)\mathfrak{S}_1 - (U_1\sigma_2 - U_2\sigma_1)\mathfrak{S}_2}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3},$$

$$U = \frac{1}{Q_\xi}\left[(-U_1\sqrt{\Psi}\sin(\tau-\psi) + U_2\sqrt{\mathrm{H}}\sin\tau)H_1 \right.$$
$$\left. + (U_1\sqrt{\Psi}\cos(\tau-\psi) - U_2\sqrt{\mathrm{H}}\cos\tau)H_2\right],$$

und es möge zur Abkürzung:

$$U = u_1\mathfrak{S}_1 + u_2\mathfrak{S}_2 = \frac{Q_{\varkappa_1}H_1 - Q_{\varkappa_2}H_2}{Q_\xi}$$

gesetzt werden.

Nehmen wir nun zunächst $\mathfrak{S}_1 = 0$. Dann wird:

$$\cos\alpha = \varkappa_2, \qquad ds = \mathfrak{S}_2,$$

$$\cos l = \delta_0 \frac{\xi u_2 + \frac{\varkappa_1}{h_1}}{\sqrt{u_2^2 + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2}}, \qquad \cos a = \varepsilon_1 \frac{\xi \cdot \frac{1}{h_1} - \varkappa_1 u_2}{\sqrt{u_2^2 + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2}},$$

$$\varrho = \varrho' = \varepsilon_1 \frac{1}{\sqrt{u_2^2 + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2}}, \quad \varepsilon' = -1, \quad R = R_2 = \frac{-1}{u_2},$$

wo

$$\sqrt{u_2^2 + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 = \pm 1$$

so zu bestimmen sind, dass $\cos n$ und $\cos c$ positiv ausfallen.

Ist zweitens $\mathfrak{S}_2 = 0$, so folgt:

$$\cos\alpha = \varkappa_1, \qquad ds = \mathfrak{S}_1,$$

$$\cos l = \delta_0 \frac{\xi u_1 - \frac{\varkappa_2}{h_2}}{\sqrt{u_1^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2}}, \qquad \cos a = \varepsilon_2 \frac{\xi \cdot \frac{1}{h_2} + \varkappa_2 u_1}{\sqrt{u_1^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2}},$$

$$\varrho = \varrho'' = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{u_1^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2}}, \quad \varepsilon' = 1, \quad R = R_1 = \frac{1}{u_1},$$

wo

$$\sqrt{u_1^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \varepsilon_2 = \pm 1$$

so zu bestimmen sind, dass cos n und cos c positive Werthe erhalten.

Aus diesen Formeln ergiebt sich nun:

$$U = \frac{\mathfrak{S}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{R_2}, \quad U_1 = \frac{\sigma_1}{R_1} - \frac{\sigma_3}{R_2}, \quad U_2 = \frac{\sigma_2}{R_1} - \frac{\sigma_4}{R_2},$$

$$\varrho' = \varepsilon_1 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_1}\right)^2}}, \quad \varrho'' = \varepsilon_2 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2}}.$$

Da ferner der geodätische Krümmungsradius einer isogonalen Trajectorie der Krümmungslinien den Werth:

$$R = \varepsilon' \frac{ds}{U}$$

besitzt, so folgt, wenn c_1 und c_2 die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die Tangente der isogonalen Trajectorie mit den Tangenten $(\varkappa_1\, \lambda_1\, \mu_1)$ resp. $(\varkappa_2\, \lambda_2\, \mu_2)$ bildet, die Gleichung:

$$R = \frac{\varepsilon'}{\frac{c_1}{R_1} - \frac{c_2}{R_2}}.$$

Eine weitere Verwendung finden die Grössen R_1 und R_2 bei folgender Ueberlegung.

Die betrachtete Curvenschaar wird von sämmtlichen durch den Punkt (u, v, w) gehenden Trajectorien in einer doppelt unendlichen Mannigfaltigkeit von Punkten geschnitten. Jedem Punkt dieser Mannigfaltigkeit entspricht ein Werthsystem $\xi, \eta, \zeta, \varkappa_1, \lambda_1, \mu_1, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2$. Zieht man nun die zu den Richtungen ξ, η, ζ resp. $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ resp. $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2$ parallelen Radien der Einheitskugel, so erhält man für das Oberflächenelement der Kugel (ξ, η, ζ) resp. $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ resp. $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ die Werthe

$$\sqrt{\mathrm{H}\Psi - \Phi^2}\, dp\, dq, \quad \text{resp.} \quad \sqrt{\Sigma(\varkappa_{1p})^2\, \Sigma(\varkappa_{1q})^2 - (\Sigma \varkappa_{1p} \varkappa_{1q})^2} \cdot dp\, dq,$$

$$\text{resp.} \quad \sqrt{\Sigma(\varkappa_{2p})^2\, \Sigma(\varkappa_{2q})^2 - (\Sigma \varkappa_{2p} \varkappa_{2q})^2} \cdot dp\, dq,$$

wo die Wurzeln positiv zu nehmen sind.

Die erste dieser Wurzeln ist gleich dem absoluten Werth von Q_ξ. In Betreff der übrigen folgt:

$$\Sigma(\varkappa_{1p})^2\, \Sigma(\varkappa_{1q})^2 - (\Sigma \varkappa_{1p} \varkappa_{1q})^2 = (U_1 \sqrt{\Psi} \sin(\tau - \psi) - U_2 \sqrt{\mathrm{H}} \sin \tau)^2 = Q^2_{\varkappa_1},$$

$$\Sigma(\varkappa_{2p})^2\, \Sigma(\varkappa_{2q})^2 - (\Sigma \varkappa_{2p} \varkappa_{2q})^2 = (U_1 \sqrt{\Psi} \cos(\tau - \psi) - U_2 \sqrt{\mathrm{H}} \cos \tau)^2 = Q^2_{\varkappa_2},$$

und die Grössen $Q_{\varkappa_1}$, $Q_{\varkappa_2}$ erhalten jetzt unter Anwendung der für U_1 und U_2 gefundenen Ausdrücke die Werthe:

$$Q_{\varkappa_1} = \frac{e_0}{R_1} + \frac{\mathfrak{r}_1 Q_\xi}{R_2},$$

$$Q_{\varkappa_2} = \frac{\mathfrak{r}_2 Q_\xi}{R_1} - \frac{e_0}{R_2}.$$

Im Falle $e_0 = 0$ ergiebt sich also:

$$\frac{Q_{\varkappa_1}}{Q_\xi} = \frac{\mathfrak{r}_1}{R_2}, \qquad \frac{Q_{\varkappa_2}}{Q_\xi} = \frac{\mathfrak{r}_2}{R_1}.$$

Ausser den beiden Punkten auf den Tangenten $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ resp. $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$, deren Abscissen R_2 resp. R_1 sind, erhalten wir aus dem am Ende des § 3 angegebenen Werthe von $\mathfrak{R}$ zwei weitere ausgezeichnete Punkte. Es sind nämlich $H_2 = 0$ resp. $H_1 = 0$ die Gleichungen solcher orthogonaler Trajectorien der Curvenschaar, deren adjungirte Tangenten mit den Tangenten $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ resp. $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ zusammenfallen. Somit liefern nach § 3 die fraglichen Gleichungen auf der Tangente $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ einen Punkt, dessen Abscisse:

$$\mathfrak{R} = R'' = \frac{\mathfrak{r}_1 Q_\xi}{Q_{\varkappa_1}},$$

auf der Tangente $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ einen Punkt, dessen Abscisse

$$\mathfrak{R} = R' = \frac{\mathfrak{r}_2 Q_\xi}{Q_{\varkappa_2}}$$

ist. Diese Beziehungen bilden also die Verallgemeinerung der im 31. Band dieser Annalen S. 87 unter (2) und (4) aufgestellten Gleichungen.

Bei einer Betrachtungsweise, wie sie a. a. O. für Flächen durchgeführt ist, werden wir R' und R'' als die Abscissen von Brennpunkten gewisser Strahlenbündel erkennen. Das eine von diesen Bündeln entsteht, wenn man sich durch jeden der Punkte

$$(u, v, w) \text{ und } (u + \delta u,\ v + \delta v,\ w + \delta w)$$

die entsprechenden Geraden

$$(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1) \text{ und } (\varkappa_1 + \delta\varkappa_1,\ \lambda_1 + \delta\lambda_1,\ \mu_1 + \delta\mu_1)$$

gezogen denkt. Um die Haupteigenschaften desselben zu finden, setzen wir:

$$\sum \varkappa_{1p}^2 = L_1, \quad \sum \varkappa_{1p}\varkappa_{2q} = M_1, \quad \sum \varkappa_{1q}^2 = N_1,$$

ferner:

$$\sum \varkappa_{1p} u_p = e_1, \quad \sum \varkappa_{1p} u_q = f_1, \quad \sum \varkappa_{1q} u_p = f_1', \quad \sum \varkappa_{1q} u_q = g_1.$$

Dadurch entsteht:

$$e_1 = \sigma_3 U_1, \quad f_1 = \sigma_4 U_1, \quad f_1' = \sigma_3 U_2, \quad g_1 = \sigma_4 U_2.$$

Da:

$$f_1 - f_1' = \frac{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}{R_1},$$

so kann nur dann ein Normalenbündel vorliegen, wenn R_1 unendlich gross ist, was ebenso wie das Verschwinden der Grösse

$$L_1 N_1 - M_1^2 = Q_{x_1}^2$$

ausgeschlossen werden soll. Die Abscisse des einen Brennpunktes wird Null, die des anderen ergiebt sich als $\mathfrak{R}''$, welche Grösse für $e_0 = 0$ mit R_2 zusammenfällt. Die Gleichung, welche die Abscissen $\mathfrak{r}_1''$ und $\mathfrak{r}_2''$ der Grenzpunkte der kürzesten Abstände des Strahls $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ von seinen Nachbarstrahlen liefert, nimmt die Form an:

$$\mathfrak{r}''^2 - \mathfrak{R}''\mathfrak{r}'' - \frac{1}{4}\frac{h_2^2\mathfrak{R}''^2}{R_1^2} = 0,$$

sodass:

$$\mathfrak{r}_1'' - \mathfrak{r}_2'' = \mathfrak{R}'' h_2 \sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{h_2^2}}$$

d. h. man hat abgesehen vom Vorzeichen:

$$\varrho'' = \frac{\mathfrak{R}'' h_2}{\mathfrak{r}_1'' - \mathfrak{r}_2''}.$$

In ganz analoger Weise ergiebt sich für das Strahlenbündel $(u, v, w, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ als Abscisse des nicht mit dem Punkt (u, v, w) zusammenfallenden Brennpunktes die Grösse $\mathfrak{R}'$; und wenn man die Abscissen der Grenzpunkte der kürzesten Abstände mit $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ bezeichnet, folgt wieder abgesehen vom Vorzeichen:

$$\varrho' = \frac{\mathfrak{R}' h_1}{\mathfrak{r}_1' - \mathfrak{r}_2'}.$$

Die für ϱ' und ϱ'' aufgestellten Gleichungen bilden die Verallgemeinerung des im 31. Bd. dieser Annalen S. 92 unter 4) mitgetheilten Satzes.

§ 5.

Die Curven der Schaar sind gerade Linien.

Wenn die Curven der betrachteten Schaar gerade Linien sind, so lassen sich u, v, w stets auf die Form bringen:

$$u = x + r\xi, \quad v = y + r\eta, \quad w = z + r\zeta,$$

wo $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ nur Functionen von p und q sind, und ξ, η, ζ dieselbe Bedeutung haben, wie bisher. Rechnet man die Abscissen r der Punkte eines Strahls von der Fläche (x, y, z) aus und benutzt die Kummer'schen Bezeichnungen:

$$e = \sum \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad f = \sum \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad f' = \sum \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \xi}{\partial q}, \quad g = \sum \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \xi}{\partial q}$$

so wird:

$$e_{11} = e + r\mathrm{H}, \; e_{12} = f + r\Phi, \; e_{21} = f' + r\Phi, \; e_{22} = g + r\Psi.$$

Bezeichnet α eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, so wird ferner:

$$\mathfrak{r}_\alpha = r_\alpha - r,$$

wenn wir mit r_1, r_2 die Abscissen der Grenzpunkte der kürzesten Abstände, mit r_3, r_4 die Abscissen der Brennpunkte bezeichnen. Zugleich entsteht:

$$e = -\mathrm{H}(r_1\cos^2\tau + r_2\sin^2\tau),$$

$$f + f' = -2\sqrt{\mathrm{H}}\sqrt{\Psi}\left(r_1\cos\tau\cos(\tau-\psi) + r_2\sin\tau\sin(\tau-\psi)\right),$$

$$g = -\Psi\left(r_1\cos^2(\tau-\psi) + r_2\sin^2(\tau-\psi)\right).$$

Setzt man noch:

$$s_1 = \quad e\frac{\cos(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} - f'\frac{\cos\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$

$$s_2 = \quad f\frac{\cos(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} - g\frac{\cos\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$

$$s_3 = -e\frac{\sin(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} + f'\frac{\sin\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$

$$s_4 = -f\frac{\sin(\tau-\psi)}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi} + g\frac{\sin\tau}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$

so wird:

$$\sigma_1 = s_1 + r\sqrt{\mathrm{H}}\sin\tau, \qquad \sigma_2 = s_2 + r\sqrt{\Psi}\sin(\tau-\psi),$$

$$\sigma_3 = s_3 + r\sqrt{\mathrm{H}}\cos\tau, \qquad \sigma_4 = s_4 + r\sqrt{\Psi}\cos(\tau-\psi),$$

$$\mathfrak{S}_1 = s_1 dp + s_2 dq + rH_2, \qquad \mathfrak{S}_2 = s_3 dp + s_4 dq + rH_1.$$

Für die Grössen $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ ergiebt sich:

$$\mathfrak{R}' = \frac{(r_2 - r)Q_\xi}{Q_{x_1}}, \qquad \mathfrak{R}'' = \frac{(r_1 - r)Q_\xi}{Q_{x_2}},$$

sodass die Endpunkte der Abscissen $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ zwei in den Hauptebenen gelegene gerade Linien bilden, die durch die Grenzpunkte der kürzesten Abstände gehen. Anders verhält es sich mit den Grössen R_1 und R_2. Man hat nämlich jetzt:

$$Q_{x_1} = \frac{f - f'}{2R_1} + \frac{(r_1 - r)Q_\xi}{R_2},$$

$$Q_{x_2} = \frac{(r_2 - r)Q_\xi}{R_1} - \frac{f - f'}{2R_2},$$

sodass, wenn man die Beziehungen:

$$\frac{(f-f')^2}{4} = Q_\xi^2(r_3 r_4 - r_1 r_2), \quad r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

berücksichtigt, entsteht:

$$R_1 = \frac{(r_3-r)(r_4-r)Q_\xi^2}{Q_{x_1}\frac{f-f'}{2} + Q_{x_2}Q_\xi(r_1-r)},$$

$$R_2 = \frac{(r_3-r)(r_4-r)Q_\xi^2}{Q_{x_1}Q_\xi(r_2-r) - Q_{x_2}\frac{f-f'}{2}}.$$

Hieraus folgt, dass, abgesehen von dem Fall $f=f'$ die Endpunkte der Abscissen R_1 und R_2 zwei in den Hauptebenen gelegene Hyperbeln bilden, von denen je eine Asymptote im Punkte:

$$r = \frac{Q_{x_1}(f-f') + 2Q_{x_2}Q_\xi r_1}{2Q_{x_2}Q_\xi},$$

resp.

$$r = \frac{2Q_{x_1}Q_\xi r_2 - Q_{x_2}(f-f')}{2Q_{x_1}Q_\xi}$$

den Strahl (ξ, η, ζ) senkrecht schneidet.

Die für die Grössen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, δx_1, $\delta\lambda_1$, $\delta\mu_1$, δx_2, $\delta\lambda_2$, $\delta\mu_2$ aufgestellten Ausdrücke müssen jetzt vollständige Differentiale sein. Dies liefert 9 Relationen, die sich indess, wie man leicht sieht, auf folgende 3 reduciren:

$$Q_{x_1} = -\frac{\partial\sqrt{\mathrm{H}}\cos\tau}{\partial q} + \frac{\partial\sqrt{\Psi}\cos(\tau-\psi)}{\partial p},$$

$$Q_{x_2} = \frac{\partial\sqrt{\mathrm{H}}\sin\tau}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{\Psi}\sin(\tau-\psi)}{\partial p},$$

$$(1) \qquad Q_\xi = \frac{\partial U_1}{\partial q} - \frac{\partial U_2}{\partial p}.$$

Die beiden ersten dieser Beziehungen ergeben unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$Q_{x_1} = -U_1\sqrt{\Psi}\sin(\tau-\psi) + U_2\sqrt{\mathrm{H}}\sin\tau,$$

$$Q_{x_2} = -U_1\sqrt{\Psi}\cos(\tau-\psi) + U_2\sqrt{\mathrm{H}}\cos\tau,$$

die Formeln:

$$U_1 = \frac{\partial(\tau-\psi)}{\partial p} - \frac{\frac{\partial\sqrt{\mathrm{H}}}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{\Psi}}{\partial p}\cos\psi}{\sqrt{\Psi}\sin\psi},$$

$$U_2 = \frac{\partial\tau}{\partial q} + \frac{\frac{\partial\sqrt{\Psi}}{\partial p} - \frac{\partial\sqrt{\mathrm{H}}}{\partial q}\cos\psi}{\sqrt{\mathrm{H}}\sin\psi},$$

welche in U. S. 73 direct abgeleitet sind.

Betrachten wir endlich den Fall $f = f'$, in welchem ein Normalensystem vorliegt. Hier folgt:

$$s_1 = -r_2 \sqrt{H} \sin \tau, \qquad s_2 = -r_2 \sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi),$$
$$s_3 = -r_1 \sqrt{H} \cos \tau, \qquad s_4 = -r_1 \sqrt{\Psi} \cos (\tau - \psi),$$

sodass:

$$\sigma_1 = \sqrt{H} \sin \tau \cdot (r - r_2), \quad \sigma_2 = \sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi)(r - r_2),$$
$$\sigma_3 = \sqrt{H} \cos \tau \,(r - r_1), \quad \sigma_4 = \sqrt{\Psi} \cos (\tau - \psi)(r - r_1).$$

Die Flächen $r = \text{const.}$ bilden jetzt eine Schaar von Parallelflächen.

Die für eine beliebige Fläche der Schaar auftretenden Ausdrücke:

$$du = (\varkappa_1 \sigma_1 + \varkappa_2 \sigma_3)\, dp + (\varkappa_1 \sigma_2 + \varkappa_2 \sigma_4)\, dq \text{ etc.}$$

müssen hier vollständige Differentiale sein. Dadurch treten drei Integrabilitätsbedingungen auf, welche sich indess auf folgende zwei reduciren:

$$(2) \qquad \begin{cases} \sigma_4 U_1 - \sigma_3 U_2 = \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial p} - \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial q}, \\ \sigma_2 U_1 - \sigma_1 U_2 = \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial q} - \dfrac{\partial \sigma_4}{\partial p}. \end{cases}$$

Bezeichnet man die hier auftretende Determinante mit $-D$, so folgt:

$$-D U_1 = -\sigma_1 \frac{\partial \sigma_2}{\partial p} + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial q} + \sigma_3 \frac{\partial \sigma_3}{\partial q} - \sigma_3 \frac{\partial \sigma_4}{\partial p},$$
$$-D U_2 = -\sigma_2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial p} + \sigma_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial q} + \sigma_4 \frac{\partial \sigma_3}{\partial q} - \sigma_4 \frac{\partial \sigma_4}{\partial p}.$$

Nimmt man nun:

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = E dp^2 + 2F\, dp\, dq + G dq^2,$$

so wird:

$$D^2 = EG - F^2$$

und:

$$-D U_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial q} - \frac{1}{2} \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial p} - D \frac{\partial \operatorname{arctg} \frac{\sigma_2}{\sigma_4}}{\partial p},$$

$$-D U_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{F}{G} \frac{\partial G}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q} - D \frac{\partial \operatorname{arctg} \frac{\sigma_2}{\sigma_4}}{\partial q},$$

woraus ersichtlich ist, dass die Gleichung (1) mit dem Liouville'schen Ausdruck für das Krümmungsmaass übereinstimmt.

Es sei noch bemerkt, dass die Gleichungen (2) für $r = 0$ mit den in U. S. 18 unter (9) aufgestellten Beziehungen identisch sind.

Bonn im Februar 1888.

Ueber eine Eigenschaft gewisser linearer irreductibler Differentialgleichungen.

Von

E. Ratner in Odessa

Die Anregung zur folgenden Arbeit erhielt ich durch Herrn Geh. Rath Königsberger, in dessen mathematischem Seminar in Heidelberg ich die Arbeit des Herrn Hurwitz*) „Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen" vorzutragen hatte. Im Anschluss hieran forderte mich Herr Königsberger auf, die von Herrn Hurwitz über die Integrale der Differentialgleichung

$$azy'' = by' + y$$

entwickelten Sätze, auf Integrale von Differentialgleichungen höherer Ordnung zu erweitern. Es sei mir gestattet, Herrn Geh. Rath Königsberger für seine gütige Unterstützung hier meinen herzlichsten Dank auszusprechen. — Zur Entwickelung seiner Sätze hat Herr Hurwitz zwei Hilfsätze**) benutzt, die für die speciell gewählte Differentialgleichung $azy'' = by' + y$ bewiesen wurden. Im folgenden habe ich diese Hilfsätze erweitert, um dieselben für homogene, lineare irreductible Differentialgleichungen höherer Ordnung benutzen zu können.

I.

Sei eine lineare, homogene, irreductible Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(1)\qquad P_\alpha(z)y^{(n)} = P_\beta(z)y^{(n-1)} + P_\gamma(z)y^{(n-2)} + \cdots + P_\lambda(z)y'' + P_\mu(z)y' + P_\nu(z)y$$

gegeben, wobei $P_\alpha(z), P_\beta(z), \ldots, P_\mu(z), P_\nu(z)$ ganze und ganzzahlige Functionen von z bedeuten. Seien ferner $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)$ n ganze und ganzzahlige Functionen von z, und y ein Integral der

*) Mathematische Annalen, XXII. Band, 2. Heft.

**) a. a. O. Satz 1, pag. 214. Satz 2, pag. 218.

vorgelegten Differentialgleichung; wir wollen nun n andere ganze und ganzzahlige Functionen von z $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z)$ so definiren, dass der Differentialgleichung

$$(2)\quad \begin{aligned} &\varphi_1(z)y^{(n-1)} + \varphi_2(z)y^{(n-2)} + \cdots + \varphi_{n-1}(z)y' + \varphi_n(z)y \\ &= \frac{d}{dz}\left\{\psi_1(z)y^{(n-1)} + \psi_2(z)y^{(n-2)} + \cdots + \psi_{n-1}(z)y' + \psi_n(z)y\right\} \end{aligned}$$

Genüge geleistet wird. Wir wollen untersuchen, wie die Functionen $P_\alpha(z), P_\beta(z), \ldots, P_\mu(z), P_\nu(z)$ beschaffen sein müssen, damit eine solche Bestimmung der Functionen $\psi_1(z) \ldots \psi_n(z)$ möglich sein soll.

Führt man die Differentiation in (2) aus und setzt die Coefficienten von $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ auf beiden Seiten einander gleich, so bekommt man ein System von n gleichzeitigen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Functionen $\psi_1(z), \psi_2(z), \ldots, \psi_n(z)$, welches folgendermassen lautet:

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi_1(z) = \dfrac{P_\beta(z)\,\psi_1(z)}{P_\alpha(z)} + \psi_1'(z) + \psi_2(z), \\ \varphi_2(z) = \dfrac{P_\gamma(z)\,\psi_1(z)}{P_\alpha(z)} + \psi_2'(z) + \psi_3(z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}(z) = \dfrac{P_\mu(z)\,\psi_1(z)}{P_\alpha(z)} + \psi_{n-1}'(z) + \psi_n(z), \\ \varphi_n(z) = \dfrac{P_\nu(z)\,\psi_1(z)}{P_\alpha(z)} + \psi_n'(z). \end{cases}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen rechnet man $\psi_1(z)$ und $\psi_1'(z)$ aus und setzt diese Werthe in die übrigen Gleichungen ein. Dann geht das System über in:

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi_1(z) = \left\{\dfrac{P_\beta(z)}{P_\nu(z)} + \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right)\right\}\{\varphi_n(z) - \psi_n'(z)\} \\ \qquad\qquad + \dfrac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\{\varphi_n'(z) - \psi_n''(z)\} + \psi_2(z), \\ \varphi_2(z) = \dfrac{P_\gamma(z)}{P_\nu(z)}\{\varphi_n(z) - \psi_n'(z)\} + \psi_2'(z) + \psi_3(z), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}(z) = \dfrac{P_\mu(z)}{P_\nu(z)}\{\varphi_n(z) - \psi_n'(z)\} + \psi_{n-1}'(z) + \psi_n(z). \end{cases}$$

Den Werth von $\psi_2(z)$ und $\psi_2'(z)$, der aus der 1ten dieser Gleichungen folgt, setzt man in die 2te Gleichung ein und bekommt:

$$
(5)\begin{cases}
\varphi_2(z)-\varphi_1'(z)=\left\{\frac{P_\gamma(z)}{P_\nu(z)}-\frac{d}{dz}\left(\frac{P_\beta(z)}{P_\nu(z)}\right)-\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right)\right\}\{\varphi_n(z)-\psi_n'(z)\} \\
\qquad -\left\{\frac{P_\beta(z)}{P_\nu(z)}+2\frac{d}{dz}\left(\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right)\right\}\{\varphi_n'(z)-\psi_n''(z)\} \\
\qquad -\left\{\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right\}\{\varphi_n''(z)-\psi_n'''(z)\}+\psi_3(z).
\end{cases}
$$

Aus dieser Gleichung rechnet man $\psi_3(z)$ und $\psi_3'(z)$ aus und setzt diese Werthe in die 3[te] Gleichung von (4) ein u. s. w. Man bekommt schliesslich eine lineare, nicht homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zur Bestimmung von $\psi_n(z)$, die lautet:

$$
(6)\begin{cases}
n_0\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\psi_n^{(n)}(z)+\left\{m_0\frac{P_\beta(z)}{P_\nu(z)}+m_1\frac{d}{dz}\left(\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right)\right\}\psi_n^{(n-1)}+\cdots \\
+\left\{a_0\frac{P_\mu(z)}{P_\nu(z)}+a_1\frac{d}{dz}\left(\frac{P_\lambda(z)}{P_\nu(z)}\right)+\cdots+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right)\right\}\psi_n'(z)-\psi_n(z) \\
=-\{\varphi_{n-1}(z)-\varphi_{n-2}'(z)+\varphi_{n-3}''(z)-+\cdots\pm\varphi_1^{(n-2)}(z)\} \\
+n_0\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\varphi_n^{(n-1)}(z)+\left\{m_0\frac{P_\beta(z)}{P_\nu(z)}+m_1\frac{d}{dz}\left(\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right)\right\}\varphi_n^{(n-2)}(z)+\cdots \\
+\left\{a_0\frac{P_\mu(z)}{P_\nu(z)}+a_1\frac{d}{dz}\left(\frac{P_\lambda(z)}{P_\nu(z)}\right)+\cdots+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{P_\alpha(z)}{P_\nu(z)}\right)\right\}\varphi_n(z).
\end{cases}
$$

Die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots, m_0, m_1, n_0$ bedeuten ganze, positive oder negative, von Null verschiedene Zahlen, die durch den Eliminationsprocess eintreten. Wenn man die Differentiationen in dieser Differentialgleichung ausführt, so tritt im Nenner $[P_\nu(z)]^{n-1}$ auf; um $\psi_n(z)$ als ganze Function zu berechnen, muss man in (6) den Nenner wegschaffen, dann $\psi_n(z)$ hypothetisch als ganze Function ansetzen, in die Differentialgleichung einsetzen und auf beiden Seiten die Coefficienten gleicher z-Potenzen einander gleichsetzen, was Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten von $\psi_n(z)$ liefert. Sei N der Grad von $[P_\nu(z)]^{n-1}$ und M der Grad von $\psi_n(z)$. Nach dem Wegschaffen des Nenners wird $\psi_n(z)$ mit $[P_\nu(z)]^{n-1}$ multiplicirt vorkommen, und folglich wird die Gleichung ein Glied mit z^{M+N} besitzen; man bekommt somit $M+N+1$ Bestimmungsgleichungen für die $M+1$ Coefficienten von $\psi_n(z)$. Es wären also die Coefficienten von $\psi_n(z)$ überbestimmt, wenn man nicht über die Coefficienten von

$$P_\alpha(z),\ P_\beta(z),\ \ldots,\ P_\mu(z),\ P_\nu(z)$$

verfügen könnte, die man ja auch als Unbekannte auffassen kann. Wenn man aber diese als Unbekannte auffasst, so bestimmen sich dieselben als Functionen der Coefficienten von $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)$. Da aber die Functionen $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ willkürlich sind, so dürfen auch die Coefficienten von $P_\alpha(z)$, $P_\beta(z)$, ..., $P_\mu(z)$, $P_\nu(z)$ nicht von $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ abhängen. Es ist somit eine Bestimmung von $\psi_n(z)$ nur dann möglich, wenn $N = 0$ ist, d. h. $P_\nu(z)$ muss eine Constante sein. Diese Constante wollen wir mit c bezeichnen. Die Differentialgleichung (6) geht dann über in:

$$(7)\quad \begin{cases} n_0 \dfrac{P_\alpha(z)}{c}\psi_n^{(n)}(z) + \dfrac{1}{c}\left\{m_0 P_\beta(z) + m_1 P_\alpha'(z)\right\}\psi_n^{(n-1)} + \cdots \\ + \dfrac{1}{c}\left\{a_0 P_\mu(z) + a_1 P_\lambda'(z) + \cdots + a_{n-1} P_\alpha^{(n-1)}(z)\right\}\psi_n'(z) - \psi_n(z) \\ = -\left\{\varphi_{n-1}(z) - \varphi_{n-2}'(z) + \varphi_{n-3}''(z) - + \cdots \pm \varphi_1^{(n-2)}(z)\right\} \\ + n_0 \dfrac{P_\alpha(z)}{c}\varphi_n^{(n-1)} + \dfrac{1}{c}\left\{m_0 P_\beta(z) + m_1 P_\alpha'(z)\right\}\varphi_n^{(n-2)}(z) + \cdots \\ + \dfrac{1}{c}\left\{a_0 P_\mu(z) + a_1 P_\lambda'(z) + \cdots + a_{n-1} P_\alpha^{(n-1)}(z)\right\}\varphi_n(z). \end{cases}$$

Man kann jetzt $\psi_n(z)$ hypothetisch als ganze Function ansetzen. Sei M der Grad von $\psi_n(z)$ und Q der Grad der rechten Seite von (7), so ist $M \gtreqless Q$. Wenn $M < Q$ angenommen wird, bekommen wir $Q+1$ Bestimmungsgleichungen für bloss $M+1$ Coefficienten, und es wären die Coefficienten von $\psi_n(z)$ überbestimmt. Man muss also $M \geq Q$ annehmen. Damit wieder keine Ueberbestimmung der Coefficienten eintritt, darf auch auf der linken Seite kein Glied von einem höheren als dem M^{ten} Grade vorkommen; wenn aber auf der linken Seite keines der Glieder den Grad M übersteigt, so ist eine eindeutige Bestimmung der Coefficienten von $\psi_n(z)$ möglich, denn dieselben treten in (7) nur linear auf.

Die Bedingung, dass kein Glied der linken Seite den Grad M übersteigen darf, liefert eine Bedingung für die Gradzahlen der Functionen $P_\alpha(z)$, $P_\beta(z)$, ..., $P_\mu(z)$. Aus dem ersten Gliede der linken Seite folgt nämlich, dass $P_\alpha(z)$ höchstens vom Grade n sein darf; aus dem 2^{ten} Gliede folgt dann, dass $P_\beta(z)$ höchstens vom Grade $n-1$ sein darf u. s. w. Wir bekommen folglich die Bedingung: die Functionen $P_\alpha(z)$, $P_\beta(z)$, ..., $P_\mu(z)$ dürfen höchstens von den resp. Graden n, $n-1$, ..., 1 sein.

Es ist leicht einzusehen, dass wenn man $M > Q$ annimmt, die Coefficienten aller höheren Potenzen bis z^Q sich gleich Null bestimmen, und es bleibt für $\psi_n(z)$ bloss ein Polynom von demselben Grade wie die rechte Seite von (7). Da $P_\nu(z)$, wie wir gesehen haben, eine Constante sein muss, so berechnet man aus der letzten der Gleichungen (3) $\psi_1(z)$ als ganze Function, und dann aus den $n-2$ ersten Gleichungen von (4) $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$, ..., $\psi_{n-1}(z)$ ebenfalls als ganze Functionen.

Aber für den Zweck dieser Untersuchung ist es von Wichtigkeit, die Functionen $\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$ nicht nur als ganze sondern auch als ganzzahlige bestimmen zu können. Vor allem folgt dann aus (7), dass $c = 1$ sein muss. Ferner folgt aus (7), dass auch der Coefficient von z^M ganzzahlig ist, wenn die Glieder ausser $\psi_n(z)$ nur z^{M-1} als höchste Potenz enthalten, d. h., dass die Functionen $P_\alpha(z), P_\beta(z), \ldots, P_\mu(z)$ nur höchstens von den resp. Gradzahlen $n-1, n-2, \ldots, 0$ sein dürfen. Es ist leicht einzusehen, dass dann auch die übrigen Coefficienten von $\psi_n(z)$ ganzzahlig sein werden, und es sind in diesem Falle $\psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)$ ebenfalls ganzzahlig.

Wir gelangen somit zu folgendem Resultat: *Es sei eine irreductible, lineare, homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gegeben*

$$P_{n-1}(z)y^{(n)} = P_{n-2}(z)y^{(n-1)} + P_{n-3}(z)y^{(n-2)} + \cdots + P_1(z)y'' + P_0(z)y' + y,$$

wobei die Functionen $P_\varkappa(z)$ ganz und ganzzahlig und höchstens vom Grade $\varkappa$ sind; seien ferner n willkürliche ganze und ganzzahlige Functionen $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ gegeben, so lassen sich in diesem und nur in diesem Falle n andere ganze und ganzzahlige Functionen

$$\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$$

so definiren, dass die Differentialgleichung

$$\varphi_1(z)y^{(n-1)} + \varphi_2(z)y^{(n-2)} + \cdots + \varphi_n(z)y$$
$$= \frac{d}{dz}\{\psi_1(z)y^{(n-1)} + \psi_2(z)y^{(n-2)} + \cdots + \psi_n(z)y\}$$

befriedigt wird, wenn y ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung ist.

Was die Gradzahlen der Functionen $\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$ betrifft, so sind dieselben von höchstens dem $(m+n-2)^{ten}$ Grade, wenn die Functionen $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$ nicht den Grad m übersteigen.

II.

Aus dem Vorhergehenden ist nun ersichtlich, dass die Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung, die Herr Hurwitz in seiner Abhandlung untersucht hat, die einzige 2^{ter} Ordnung ist, die sich nach der von ihm angewandten Methode untersuchen lässt. Betrachten wir nun eine Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung:

$$(1) \qquad P_2(z)y''' = P_1(z)y'' + P_0(z)y' + y,$$

wobei die ganzen und ganzzahligen Functionen $P_2(z)$, $P_1(z)$, $P_0(z)$ höchstens von den Graden 2, 1, 0 sein sollen, wie es das Vorhergehende erfordert.

Die Relation (2) des vorhergehenden Paragraphen kann benutzt werden zur Auswerthung des Ausdrucks

$$\int \frac{f(z)^m}{m!} \{g(z)\,y + h(z)\,y' + k(z)\,y''\}\,dz,$$

wenn y irgend ein Integral der Differentialgleichung (1) bedeutet. Es sei $f(z)$ eine ganze und ganzzahlige Function vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade, und $g(z)$, $h(z)$, $k(z)$ seien ganze und ganzzahlige Functionen von höchstens dem n^{ten} Grade. Da

$$\{g(z)\,y + h(z)\,y' + k(z)\,y''\}\,dz$$

ein vollständiges Differential ist, so können wir partiell integriren und bekommen:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{f(z)^m}{m!} \{g(z)\,y + h(z)\,y' + k(z)\,y''\}\,dz \\
&= \frac{f(z)^m}{m!} \{g_1(z)\,y + h_1(z)\,y' + k_1(z)\,y''\} \\
&+ \int \frac{f(z)^{m-1}}{(m-1)!} \{-f'(z)\,g_1(z)\,y - f'(z)\,h_1(z)\,y' - f'(z)\,k_1(z)\,y''\}\,dz.
\end{aligned}$$

Es entstehen hier die Functionen $g_1(z)$, $h_1(z)$, $k_1(z)$ aus den Functionen $g(z)$, $h(z)$, $k(z)$, wie die Functionen

$$\psi_1(z), \ldots, \psi_n(z) \quad \text{aus} \quad \varphi_1(z), \ldots, \varphi_n(z)$$

im vorhergehenden Paragraphen. Man kann nun $-f'(z)g_1(z)$, $-f'(z)h_1(z)$, $-f'(z)\,k_1(z)$ als selbstständige Functionen betrachten und kann auf dieselbe Weise das Integral weiter reduciren. Man bekommt schliesslich:

$$\begin{aligned}
(2)\qquad &\int \frac{f(z)^m}{m!} \{g(z)y + h(z)y' + k(z)y''\}\,dz \\
&= f(z)\{\overline{G}_m(z)y + \overline{H}_m(z)\,y' + \overline{K}_m(z)\,y''\} \\
&+ g_{m+1}(z)y + h_{m+1}(z)y' + k_{m+1}(z)y''.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $[g|h|k]$ die höchste der Gradzahlen der Functionen $g(z)$, $h(z)$, $k(z)$ und können folgendes über die Gradzahlen der hier vorkommenden Functionen bemerken.

Es ist

$$n \geqq [g|h|k]$$

und folglich

$$n + 3 > [g_1|h_1|k_1],$$

$2n+3 > [-f'g_1|-f'h_1|-f_1k_1]$ und folglich

$$2(n+3) > [g_2|h_2|k_2]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(m+1)(n+3) > [g_{m+1}|h_{m+1}|k_{m+1}].$$

Die Functionen $g_{m+1}(z)$, $h_{m+1}(z)$, $k_{m+1}(z)$ übersteigen somit nicht den Grad $(m+1)(n+3)$ und umsomehr nicht den Grad $m(n+6)+n$. Man kann daher drei andere ganze und ganzzahlige Functionen $g(z, m)$, $h(z, m)$, $k(z, m)$ so definiren, dass sie der Bedingung genügen, dass

$$A^{m(n+6)}g_{m+1}(z) - g(z, m), \quad A^{m(n+6)}h_{m+1}(z) - h(z, m),$$
$$A^{m(n+6)}k_{m+1}(z) - k(z, m)$$

durch $f(z)$ theilbare Functionen sein sollen, wobei A den Coefficienten der höchsten Potenz in $f(z)$ bedeutet. Wenn man diese Functionen einführt, geht das Integral (2) über in:

$$\text{(3)} \quad \begin{aligned} \int \frac{[A^{n+6} f(z)]^m}{m!} \{g(z)\,y + h(z)\,y' + k(z)\,y''\}\, dz \\ = f(z)\{G(z, m)y + H(z, m)y' + K(z, m)y''\} \\ + g(z, m)\,y + h(z, m)y' + k(z, m)y'', \end{aligned}$$

und die Functionen $g(z, m)$, $h(z, m)$, $k(z, m)$ sind höchstens vom n^{ten} Grade. Der Inhalt dieser Formel lässt sich so aussprechen:

Man verstehe unter y ein beliebiges Integral von

$$P_2(z)y''' = P_1(z)y'' + P_0(z)y' + y,$$

es sei ferner $f(z)$ eine ganze und ganzzahlige Function vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade und A der Coefficient der höchsten Potenz in $f(z)$; es bestehen dann für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$ die folgenden identischen Relationen:

$$\text{(4)}\left\{\begin{aligned} \int \frac{[A^{n+6} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y \; dz &= f(z)\{G_\lambda(z,m)\,y + H_\lambda(z,m)y' + K_\lambda(z,m)y''\} \\ &\quad + g_\lambda(z,m)y + h_\lambda(z,m)y' + k_\lambda(z,m)y'', \\ \int \frac{[A^{n+6} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y' \; dz &= f(z)\{G_{n+1+\lambda}(z,m)y + H_{n+1+\lambda}(z,m)y' + K_{n+1+\lambda}(z,m)y''\} \\ &\quad + g_{n+1+\lambda}(z,m)y + h_{n+1+\lambda}(z,m)y' + k_{n+1+\lambda}(z,m)y'', \\ \int \frac{[A^{n+6} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y'' dz &= f(z)\{G_{2n+2+\lambda}(z,m)y + H_{2n+2+\lambda}(z,m)y' + K_{2n+2+\lambda}(z,m)y''\} \\ &\quad + g_{2n+2+\lambda}(z,m)y + h_{2n+2+\lambda}(z,m)y' + k_{2n+2+\lambda}(z,m)y''. \end{aligned}\right.$$

Hierbei bedeuten für $k = 1, 2, \ldots, 3n+2$

$$G_k(z, m), \; H_k(z, m), \; K_k(z, m)$$

ganze und ganzzahlige Functionen von z und

$$g_k(z, m), \; h_k(z, m), \; k_k(z, m)$$

ganze und ganzzahlige Functionen von z, die nicht den Grad n übersteigen.

Wir wollen jetzt beweisen, dass die drei in Bezug auf z identischen Relationen

$$\begin{aligned} c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \cdots + c_{3n+2} g_{3n+2}(z, m) &= 0, \\ c_0 h_0(z, m) + c_1 h_1(z, m) + \cdots + c_{3n+2} h_{3n+2}(z, m) &= 0, \\ c_0 k_0(z, m) + c_1 k_1(z, m) + \cdots + c_{3n+2} k_{3n+2}(z, m) &= 0 \end{aligned}$$

nur dann bestehen können, wenn $c_0 = c_1 = \cdots = c_{3n+2} = 0$ ist.

Dieses soll jedoch unter der Annahme bewiesen werden, dass $f(z)$ weder mit $f'(z)$ noch mit $P_2(z)$ einen Theiler gemein haben soll. Angenommen diese Relationen könnten bestehen, so folgt aus (4)

$$\int \frac{[A^{n+6} f(z)]^m}{m!}\left\{y \sum_0^n{}^{\lambda} c_\lambda z^\lambda + y' \sum_0^n{}^{\lambda} c_{n+1+\lambda} z^\lambda + y'' \sum_0^n{}^{\lambda} c_{2n+2+\lambda} z^\lambda\right\} dz$$
$$= f(z)\left\{\overline{G}(z, m) y + \overline{H}(z, m) y' + \overline{K}(z, m) y''\right\}$$

und diese Gleichung differentiirt liefert:

$$(5)\qquad \begin{gathered} f(z)^m \varphi(z) y + f(z)^m \psi(z) y' + f(z)^m \chi(z) y'' \\ = \frac{d}{dz}\left\{f(z)^\lambda G(z)\, y + f(z)^\mu H(z)\, y' + f(z)^\nu K(z)\, y''\right\}, \end{gathered}$$

wenn die Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\frac{A^{(n+6)m}}{m!} \sum_0^n{}^{\lambda} c_\lambda z^\lambda = \varphi(z), \quad \frac{A^{(n+6)m}}{m!} \sum_0^n{}^{\lambda} c_{n+1+\lambda} z^\lambda = \psi(z),$$
$$\frac{A^{(n+6)m}}{m!} \sum_0^n{}^{\lambda} c_{2n+2+\lambda} z^\lambda = \chi(z),$$

$$f(z)\overline{G}(z, m) = f(z)^\lambda G(z), \quad f(z)\overline{H}(z, m) = f(z)^\mu H(z),$$
$$f(z)\overline{K}(z, m) = f(z)^\nu K(z);$$

man darf jetzt freilich die Functionen $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$ als durch $f(z)$ nicht theilbare Functionen ansehen.

Seien a, b, c die Gradzahlen der Functionen $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$. Es folgt aus der Gleichung (5), da sie dieselbe Form hat wie die Gleichung (2) des Paragraphen I, und man hier mit einer Differentialgleichung 3ter Ordnung zu thun hat,

$$(6)\qquad \begin{cases} (m+1)(n+1) + 2 > \lambda(n+1) + a, \\ (m+1)(n+1) + 2 > \mu(n+1) + b, \\ (m+1)(n+1) + 2 > \nu(n+1) + c. \end{cases}$$

Aus (5) folgt durch Ausführung der Differentiation:

$$(7)\qquad \begin{cases} f(z)^m \varphi(z) = \dfrac{d}{dz}\left\{f(z)^\lambda G(z)\right\} + f(z)^\nu K(z) \dfrac{1}{P_2(z)}, \\[2ex] f(z)^m \psi(z) = f(z)^\lambda G(z) + \dfrac{d}{dz}\left\{f(z)^\mu H(z)\right\} + f(z)^\nu K(z) \dfrac{P_0(z)}{P_2(z)}, \\[2ex] f(z)^m \chi(z) = f(z)^\mu H(z) + \dfrac{d}{dz}\left\{f(z)^\nu K(z)\right\} + f(z)^\nu K(z) \dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen müssen identisch befriedigt werden.

a) Angenommen es verschwinden $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$ identisch. Die Gleichungen (7) gehen dann über in $\varphi(z)=0$, $\psi(z)=0$, $\chi(z)=0$

und dieses bedeutet, da die Gleichungen identisch sind, dass alle Coefficienten c gleich Null sein müssen.

b) Angenommen es verschwinden $G(z)$ und $H(z)$ identisch. Die Gleichungen (7) gehen dann über in:

$$f(z)^m \varphi(z) = f(z)^\nu K(z) \frac{1}{P_2(z)},$$

$$f(z)^m \psi(z) = f(z)^\nu K(z) \frac{P_0(z)}{P_2(z)},$$

$$f(z)^m \chi(z) = f(z)^\nu K'(z) + \nu f(z)^{\nu-1} f'(z) K(z) + f(z)^\nu K(z) \frac{P_1(z)}{P_2(z)}.$$

Da der Annahme nach $f(z)$ mit $P_2(z)$ keinen Theiler gemein hat, so folgt aus der ersten Gleichung $\nu = m$ und dann aus der letzten, dass $K(z)$ durch $f(z)$ theilbar sein muss, was unmöglich ist.

Ich mache hier die Bemerkung: aus der ersten der drei Gleichungen folgt, dass $K(z)$ durch $P_2(z)$ theilbar sein muss; d. h. der Grad c von $K(z)$ muss mindestens 2 sein.

In analoger Weise untersucht man die Fälle: $K(z)$ und $H(z)$ verschwinden identisch, $K(z)$ und $G(z)$ verschwinden identisch. Auch die Fälle, $G(z)$ allein verschwinde identisch und $K(z)$ allein verschwinde identisch, werden in derselben Weise untersucht. Eine Ausnahme bildet der Fall: $H(z)$ verschwinde identisch. In diesem Falle hilft die vorhin gemachte Bemerkung.

Die Gleichungen (7) gehen über in:

$$f(z)^m \varphi(z) = \lambda f(z)^{\lambda-1} f'(z) G(z) + f(z)^\lambda G'(z) + f(z)^\nu K(z) \frac{1}{P_2(z)},$$

$$f(z)^m \psi(z) = f(z)^\lambda G(z) + f(z)^\nu K(z) \frac{P_0(z)}{P_2(z)},$$

$$f(z)^m \chi(z) = \nu f(z)^{\nu-1} f'(z) K(z) + f(z)^\nu K'(z) + f(z)^\nu K(z) \frac{P_1(z)}{P_2(z)}.$$

Nach der gemachten Bemerkung ist der Grad von $K(z)$ mindestens gleich 2 und folglich nach (6) $m + 1 > \nu$ oder $m \geqq \nu$; dann folgt aus der letzten der drei Gleichungen, dass $K(z)$ durch $f(z)$ theilbar sein muss, was unmöglich ist.

Es bleibt noch der Fall übrig

c) Keine der Functionen $G(z)$, $H(z)$, $K(z)$ verschwinde identisch.

Die Gleichungen (7) gehen nach ausgeführter Differentiation über in:

$$f(z)^m \varphi(z) = f(z)^\lambda G'(z) + \lambda f(z)^{\lambda-1} f'(z) G(z) + f(z)^\nu K(z) \frac{1}{P_2(z)},$$

$$f(z)^m \psi(z) = f(z)^\lambda G(z) + f(z)^\mu H'(z) + \mu f(z)^{\mu-1} f'(z) H(z) + f(z)^\nu K(z) \frac{P_0(z)}{P_2(z)},$$

$$f(z)^m \chi(z) = f(z)^\mu H(z) + f(z)^\nu K'(z) + \nu f(z)^{\nu-1} f'(z) K(z) + f(z)^\nu K(z) \frac{P_1(z)}{P_2(z)}.$$

Ist λ kleiner als μ und ν, so folgt aus der ersten der drei Gleichungen, dass $G(z)$ durch $f(z)$ theilbar sein muss, was unmöglich ist; ist μ kleiner als λ und ν oder ν kleiner als λ und μ, so stösst man auf einen ähnlichen Widerspruch. Ist $\lambda = \mu = \nu$, so geht die 1[te] Gleichung über in:

$$f(z)^{m-\nu+1}\varphi(z) = f(z)\,G'(z) + \nu f'(z)\,G(z) + f(z)K(z)\,\frac{1}{P_2(z)},$$

und aus dieser folgt, da $m+1 > \nu$ ist, dass $G(z)$ durch $f(z)$ theilbar sein muss, was unmöglich ist. — Die Annahme, dass die Coefficienten c von Null verschieden sind, führt in allen Fällen auf Widersprüche, und man bekommt den Satz:

Die in Bezug auf z identischen Relationen

$$\begin{aligned}
c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \cdots + c_{3n+2} g_{3n+2}(z, m) &= 0,\\
c_0 h_0(z, m) + c_1 h_1(z, m) + \cdots + c_{3n+2} h_{3n+2}(z, m) &= 0,\\
c_0 k_0(z, m) + c_1 k_1(z, m) + \cdots + c_{3n+2} k_{3n+2}(z, m) &= 0
\end{aligned}$$

können unter den gemachten Annahmen [$f(z)$ hat weder mit $f'(z)$ noch mit $P_2(z)$ einen gemeinsamen Theiler] nur dann bestehen, wenn

$$c_0 = c_1 = \cdots = c_{3n+2} = 0$$

ist.

Sei nun eine lineare, homogene, irreductible Differentialgleichung q^{ter} Ordnung gegeben

$$P_{q-1}(z)y^{(q)} = P_{q-2}(z)y^{(q-1)} + P_{q-3}(z)y^{(q-2)} + \cdots + P_1(z)y'' + P_0(z)y' + y,$$

wobei die Functionen $P_\alpha(z)$ ganz und ganzzahlig und höchstens vom Grade α sein sollen. Für eine solche Differentialgleichung gilt, wie wir gesehen haben, die Relation (2) des § 1. Sei $f(z)$ eine ganze und ganzzahlige Function vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade; und $g(z), h(z), \ldots, r(z), s(z)$ seien q ganze und ganzzahlige Functionen von höchstens dem n^{ten} Grade. Es ist dann, wenn die Relation (2) des § 1 zu Hilfe gezogen wird,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{f(z)^m}{m!}\left\{g(z)y + h(z)y' + \cdots + r(z)y^{(q-2)} + s(z)y^{(q-1)}\right\}dz\\
&= f(z)\left\{\overline{G}_m(z)y + \overline{H}_m(z)y' + \cdots + \overline{R}_m(z)y^{(q-2)} + \overline{S}_m(z)\,y^{(q-1)}\right\}\\
&\quad + g_{m+1}(z)y + h_{m+1}(z)y' + \cdots + r_{m+1}(z)y^{(q-2)} + s_{m+1}(z)y^{(q-1)}.
\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned}
n &\geqq [g|h|\ldots|r|s],\\
n+q &> [g_1|h_1|\ldots|r_1|s_1],\\
2n+q &> [-f'g_1|-f'h_1|\ldots|-f'r_1|-f's_1],\\
2(n+q) &> [g_2|h_2|\ldots|r_2|s_2],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(m+1)(n+q) &> [g_{m+1}|h_{m+1}]\cdots|r_{m+1}|s_{m+1}].
\end{aligned}$$

Die Functionen $g_{m+1}(z)$, $h_{m+1}(z)$, ..., $r_{m+1}(z)$, $s_{m+1}(z)$ übersteigen somit nicht den Grad $(m+1)(n+q)$, und umsomehr übersteigen sie nicht den Grad $m(n+2q)+n$; daher können wir q andere ganze und ganzzahlige Functionen

$$g(z, m),\ h(z, m), \ldots, r(z, m),\ s(z, m)$$

so definiren, dass sie den Grad n nicht übersteigen und der Bedingung genügen sollen, dass die Ausdrücke

$$A^{m(n+2q)} g_{m+1}(z) - g(z, m), \ldots, A^{m(n+2q)} s_{m+1}(z) - s(z, m)$$

durch $f(z)$ theilbar sein sollen, wenn A den Coefficienten von z^{n+1} in $f(z)$ bedeutet. Wenn man diese Functionen einführt, geht das obige Integral über in:

$$\begin{aligned}\int \frac{[A^{n+2q} f(z)]^m}{m!} &\{g(z)y + h(z)y' + \cdots + r(z)y^{(q-2)} + s(z)y^{(q-1)}\}\,dz \\ = f(z) &\{G(z,m)y + H(z,m)y' + \cdots + R(z,m)y^{(q-2)} + S(z,m)y^{(q-1)}\} \\ &+ g(z,m)y + h(z,m)y' + \cdots + r(z,m)y^{(q-2)} + s(z,m)y^{(q-1)}.\end{aligned}$$

Aus diesem Integral erhält man, wie im Beispiele der Differentialgleichung 3ter Ordnung, für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n$:

$$(\alpha)\begin{cases}\displaystyle\int \frac{[A^{n+2q} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y\,dz = f(z)\{G_\lambda(z,m)y + \cdots + S_\lambda(z,m)y^{(q-1)}\} \\ \qquad\qquad + g_\lambda(z,m)y + \cdots + s_\lambda(z,m)y^{(q-1)}, \\ \displaystyle\int \frac{[A^{n+2q} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y'\,dz = f(z)\{G_{n+1+\lambda}(z,m)y + \cdots + S_{n+1+\lambda}(z,m)y^{(q-1)}\} \\ \qquad\qquad + g_{n+1+\lambda}(z,m)y + \cdots + s_{n+1+\lambda}(z,m)y^{(q-1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \displaystyle\int \frac{[A^{n+2q} f(z)]^m}{m!} z^\lambda y^{(q-1)}\,dz = f(z)\{G_{(q-1)(n+1)+\lambda}(z,m)y + \cdots + S_{(q-1)(n+1)+\lambda}(z,m)y^{(q-1)}\} \\ \qquad\qquad + g_{(q-1)(n+1)+\lambda}(z,m)y + \cdots + s_{(q-1)(n+1)+\lambda}(z,m)y^{(q-1)}.\end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln, wollen wir nun beweisen, dass die in Bezug auf z identischen Relationen

$$(\beta)\begin{cases}c_0 g_0(z,m) + c_1 g_1(z,m) + \cdots + c_{q(n+1)-1} g_{q(n+1)-1}(z,m) = 0, \\ c_0 h_0(z,m) + c_1 h_1(z,m) + \cdots + c_{q(n+1)-1} h_{q(n+1)-1}(z,m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 s_0(z,m) + c_1 s_1(z,m) + \cdots + c_{q(n+1)-1} s_{q(n+1)-1}(z,m) = 0\end{cases}$$

nur dann bestehen können, wenn alle Coefficienten $c_0, \ldots, c_{q(n+1)-1}$ Null sind. Dieses soll jedoch unter der Annahme bewiesen werden, dass $f(z)$ weder mit $f'(z)$ noch mit $P_{q-1}(z)$ einen Theiler gemein haben soll.

Angenommen, dass die Relationen (β) bestehen können ohne dass die Coefficienten $c_0, \ldots, c_{q(n+1)-1}$ Null sind, so folgt daraus, wenn man (α) benützt:

$$\int \frac{[A^{n+2q}f(z)]^m}{m!}\left\{y\sum_0^n c_\lambda z^\lambda + y'\sum_0^n c_{n+1+\lambda}z^\lambda + \cdots + y^{(q-1)}\sum_0^n c_{(q-1)(n+1)+\lambda}z^\lambda\right\}dz$$
$$= fz\left\{\overline{G}(z)y + \overline{H}(z)y' + \cdots + \overline{R}(z)y^{(q-2)} + \overline{S}(z)\,y^{(q-1)}\right\}.$$

Nach Differentiation dieser Gleichung erhält man:

$$(\gamma)\begin{cases} f(z)^m\varphi(z)y + f(z)\psi(z)y' + \cdots + f(z)^m\omega(z)y^{(q-1)} \\ = \dfrac{d}{dz}\left\{f(z)^\varkappa G(z)y + f(z)^\lambda H(z)y' + \cdots + f(z)^\mu R(z)y^{(q-2)} + f(z)^\nu S(z)\,y^{(q-1)}\right\}, \end{cases}$$

wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$A^{m(n+2q)}\sum c_\lambda z^\lambda = \varphi(z),\quad A^{m(n+2q)}\sum c_{n+1+\lambda}z^\lambda = \psi(z)\ \cdots$$
$$\cdots A^{m(n+2q)}\sum c_{(q-1)(n+1)+\lambda}z^\lambda = \omega(z),$$

$f(z)\overline{G}(z) = f(z)^\varkappa G(z)$, $f(z)\overline{H}(z) = f(z)^\lambda H(z), \ldots f(z)\overline{S}(z) = f(z)^\nu S(z)$;
man darf auch jetzt die Functionen $G(z)$, $H(z)$, ..., $S(z)$ als durch $f(z)$ nicht theilbare Functionen ansehen.

Seien $a, b, \ldots, c, d$ die Gradzahlen der Functionen

$$G(z), H(z), \ldots, R(z), S(z);$$

es folgt aus (γ), da es dieselbe Form hat, wie die Gleichung (2) des § 1:

$$(\delta)\begin{cases} (m+1)(n+1) + q - 1 > \varkappa(n+1) + a, \\ (m+1)(n+1) + q - 1 > \lambda(n+1) + b, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (m+1)(n+1) + q - 1 > \nu(n+1) + d, \end{cases}$$

wobei $\varkappa, \lambda, \ldots, \nu \geqq 1$ sind. Aus (γ) folgt ferner:

$$(\varepsilon)\begin{cases} f(z)^m\varphi(z) = \dfrac{d}{dz}\{f(z)^\varkappa G(z)\} + f(z)^\nu S(z)\dfrac{1}{P_{q-1}(z)}, \\ f(z)^m\psi(z) = f(z)^\varkappa G(z) + \dfrac{d}{dz}\{f(z)^\lambda H(z)\} + f(z)^\nu S(z)\dfrac{P_0(z)}{P_{q-1}(z)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f(z)^m\omega(z) = f(z)^\mu R(z) + \dfrac{d}{dz}\{f(z)^\nu S(z)\} + f(z)^\nu S(z)\dfrac{P_{q-2}(z)}{P_{q-1}(z)}. \end{cases}$$

Wir werden auch hier, wie bei der Differentialgleichung 3ter Ordnung Unterfälle zu untersuchen haben und zwar ist die Anzahl derselben
$\binom{q}{0} + \binom{q}{1} + \cdots + \binom{q}{q-1} + \binom{q}{q} = 2^q$.

Das Charakteristische in allen Unterfällen der Differentialgleichung 3ter Ordnung war, dass darin immer Glieder vorkamen, die mit einer Potenz von $f(z)$ multiplicirt waren, welche um 1 niedriger war als die Potenzen von $f(z)$ anderer Glieder; und, da die Gleichungen jedesmal identisch sein sollten, so kam man dadurch auf einen Widerspruch. Die niedrigeren Potenzen von $f(z)$ kamen dadurch herein, dass in jeder Gleichung eines Unterfalls ein Glied von der Form $\frac{d}{dz}\{f(z)^\varrho \Pi(z)\}$ vorkam und dieses differentiirt

$$f(z)^\varrho \Pi'(z) + \varrho f(z)^{\varrho-1} f'(z)\, \Pi(z)$$

gab. Da aber solche Glieder in jeder einzelnen Gleichung von (ε) vorkommen, so bleiben auch für diese Differentialgleichung q^{ter} Ordnung alle Schlüsse für die Unterfälle erhalten. Auch muss in diesem allgemeinen Falle $S(z)$, falls es nicht identisch verschwindet, durch $P_{q-1}(z)$ theilbar sein; und mithin muss $S(z)$ mindestens vom $(q-1)^{\text{ten}}$ Grade sein. Folglich muss nach (δ) $\nu < m + 1$ sein, und dann bleibt auch der Schluss für den Fall, dass keine der Functionen $G(z), \ldots, S(z)$ verschwindet, bestehen. Wir finden somit:

Die in Bezug auf z identischen Relationen:

$$\begin{gathered} c_0 g_0(z, m) + c_1 g_1(z, m) + \cdots + c_{q(n+1)-1} g_{q(n+1)-1}(z, m) = 0, \\ c_0 h_0(z, m) + c_1 h_1(z, m) + \cdots + c_{q(n+1)-1} h_{q(n+1)-1}(z, m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_0 s_0(z, m) + c_1 s_1(z, m) + \cdots + c_{q(n+1)-1} s_{q(n+1)-1}(z, m) = 0 \end{gathered}$$

können nur dann bestehen, wenn $c_0 = c_1 = \cdots = c_{q(n+1)-1} = 0$ ist.

III.

Herr Hurwitz beweist in seiner Abhandlung, dass $\dfrac{t'\left(\frac{s}{r}\right)}{t\left(\frac{s}{r}\right)}$, wenn $\frac{s}{r}$ ein rationaler Bruch ist, nicht rational sein kann, wenn

$$t(z) = z^{1+\frac{b}{a}} \left\{1 + \frac{1}{b+2a} z + \frac{1}{(b+2a)(b+3a)} \frac{z^2}{2!} + \cdots \right\}$$

das particuläre Integral der Differentialgleichung

$$azy'' = by' + y$$

bedeutet. Dieser Satz verdankt seine Entstehung nur dem Umstande, dass die Functionen $g_\lambda(z, m)$ und $h_\lambda(z, m)$ für jeden Werth von λ und m ganz und ganzzahlig sind, und dass ihre Determinante nicht Null sein kann. In Folge dessen wird man den analogen Satz auf die Integrale aller derjenigen Differentialgleichungen ausdehnen können, für welche die beiden in Rede stehenden Hilfsätze gelten. Wie im Vorhergehenden bewiesen wurde, gelten diese Hilfsätze für alle Differentialgleichungen von der Form

$$P_{q-1}(z) y^{(q)} = P_{q-2}(z) y^{(q-1)} + \cdots + P_1(z) y'' + P_0(z) y' + y,$$

wo die Functionen $P_\lambda(z)$ ganz und ganzzahlig und höchstens vom Grade λ sind. Für alle particulären Integrale dieser Differentialgleichungen, die die Form besitzen

$$(z-a)^{q-1+\alpha}\{\beta_0+\beta_1(z-a)+\beta_2(z-a)^2+\cdots\},$$

wo a ein singulärer Punkt ist, und α eine positive rationale Zahl ist, gilt der analoge Satz.

Als Beispiel sei die Differentialgleichung 3[ter] Ordnung

$$azy'''=(bz+c)\,y''+dy'+y$$

gebracht, wo a, b, c, d ganze positive Zahlen bedeuten sollen. Für diese Differentialgleichung gelten die Sätze des § 1 und § 2.

Wir müssen zunächst ein particuläres Integral dieser Differentialgleichung suchen. Man setzt hypothetisch an

$$y=z^{\omega}\{1+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\alpha_3 z^3+\cdots\}$$

und berechnet den Exponenten ω und die Coefficienten, indem man das Integral differentiirt, in die Differentialgleichung einsetzt und die Coefficienten vergleicht. Zunächst ergiebt sich der Werth $\omega=2+\frac{c}{a}$, d. h. von der Form $q-1+\alpha$, wie das für unsere Zwecke nöthig ist. Für die Coefficienten ergiebt sich ferner die Recursionsformel

$$ak(\omega+k-1)\,(\omega+k)\,\alpha_k=\{b(\omega+k-2)+d\}\,(\omega+k-1)\,\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}.$$

Aus dieser Formel folgt:

$$\text{(I)}\qquad \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\frac{k(\omega+k-1)}{(k+1)\,(\omega+k+1)}$$

$$\times\left\{\frac{b}{ak}+\frac{d}{ak(\omega+k-1)}+\frac{\alpha_{k-1}}{\{b(\omega+k-2)+d\}\,(\omega+k-1)\,\alpha_{k-1}+\alpha_{k-2}}\right\}.$$

Im letzten Posten theilen wir Zähler und Nenner durch α_{k-2} und erhalten, wenn wir $\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_{k-2}}=A$ bezeichnen,

$$\text{(II)}\qquad \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}=\frac{k(\omega+k-1)}{(k+1)\,(\omega+k+1)}$$

$$\times\left\{\frac{b}{ak}+\frac{d}{ak(\omega+k-1)}+\frac{A}{\{b(\omega+k-2)+d\}\,(\omega+k-1)\,A+1}\right\}.$$

Wir setzen nun voraus $A<1$; es ist dann $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}<1$, wenn die rechte

Seite von (II) kleiner als 1 ist. Diese Bedingung ist gewiss erfüllt, wenn die Ungleichheit

$$1)\quad \frac{b}{ak} + \frac{d}{ak(\omega + k - 1)} + \frac{1}{\{b(w + k - 2) + d\}(w + k - 1) + 1} < 1$$

erfüllt ist. Wenn diese Ungleichheit für irgend einen Werth von k erfüllt ist, so ist sie auch erfüllt für jedes grössere k, denn a, b, c, d waren als positive Zahlen angenommen. Wir wählen nun $k = 3$ und fügen noch die Bedingungen hinzu

$$2)\quad \alpha_1 > \alpha_2, \qquad 3)\quad \alpha_2 > \alpha_3.$$

Wenn die Bedingungen 1), 2), 3) erfüllt sind, so ist $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 1$ für jedes k, wie unschwer einzusehen ist. Die ersten 3 Coefficienten α_1, α_2, α_3 sind leicht zu berechnen und somit kann man sofort die Bedingungen 1), 2), 3) aufstellen, und da wir hier 3 Bedingungen mit den 4 Unbekannten a, b, c, d haben, so können dieselben immer durch ganze und positive Werthe für a, b, c, d befriedigt werden, wie es ja nöthig ist. Aus der Recursionsformel ist ersichtlich, dass alle Coefficienten der Reihe positiv sind und da $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} < 1$ ist für jedes k, so fallen immer die Coefficienten. Wenn wir jetzt zur Formel (I) zurückkehren, so sehen wir, dass

$$\lim_{k=\infty} \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = 0$$

ist, und da wir es mit einer Potenzreihe zu thun haben, so ist dieselbe demnach convergent in der ganzen Ebene. Die Coefficienten der Reihe sind aus der Recursionsformel eindeutig bestimmt. Es ist also

$$F(z) = y = z^{2+\frac{c}{a}}\{1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots\}$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$azy''' = (bz + c)\,y'' + dy' + y$$

und das Integral ist convergent in der ganzen Ebene.

Wir gehen nun zu den Formeln (α) des § II zurück. Wir setzen $f(z) = rz - s$, r und s seien irgend welche ganze Zahlen, und wollen integriren von 0 bis $\frac{s}{r}$; es gehen dann die betreffenden Formeln über in:

$$(\alpha)\quad\begin{cases} g_0\left(\frac{s}{r}, m\right) F\left(\frac{s}{r}\right) + h_0\left(\frac{s}{r}, m\right) F'\left(\frac{s}{r}\right) + k_0\left(\frac{s}{r}, m\right) F''\left(\frac{s}{r}\right) \\ \qquad = \int\limits_0^{\frac{s}{r}} \frac{[r^6(rz-s)]^m}{m!} F(z)\, dz, \\ g_1\left(\frac{s}{r}, m\right) F\left(\frac{s}{r}\right) + h_1\left(\frac{s}{r}, m\right) F'\left(\frac{s}{r}\right) + k_1\left(\frac{s}{r}, m\right) F''\left(\frac{s}{r}\right) \\ \qquad = \int\limits_0^{\frac{s}{r}} \frac{[r^6(rz-s)]^m}{m!} F'(z)\, dz, \\ g_2\left(\frac{s}{r}, m\right) F\left(\frac{s}{r}\right) + h_2\left(\frac{s}{r}, m\right) F'\left(\frac{s}{r}\right) + k_2\left(\frac{s}{r}, m\right) F''\left(\frac{s}{r}\right) \\ \qquad = \int\limits_0^{\frac{s}{r}} \frac{[r^6(rz-s)]^m}{m!} F''(z)\, dz, \end{cases}$$

und wir wissen, dass die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} g_0\left(\frac{s}{r}, m\right) & h_0\left(\frac{s}{r}, m\right) & k_0\left(\frac{s}{r}, m\right) \\ g_1\left(\frac{s}{r}, m\right) & h_1\left(\frac{s}{r}, m\right) & k_1\left(\frac{s}{r}, m\right) \\ g_2\left(\frac{s}{r}, m\right) & h_2\left(\frac{s}{r}, m\right) & k_2\left(\frac{s}{r}, m\right) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein muss. Ferner sind die Integrale rechts in (α) so beschaffen, dass sie mit wachsendem m verschwinden.

Sei nun angenommen, es verhalten sich

$$F\left(\frac{s}{r}\right) : F'\left(\frac{s}{r}\right) : F''\left(\frac{s}{r}\right) = P : Q : R,$$

wo P, Q, R, ganze Zahlen sind. Es folgt dann aus den Formeln (α), da die rechten Seiten mit wachsendem m unendlich klein werden, dass die ganzen Zahlen

$$g_0\left(\frac{s}{r}, m\right) P + h_0\left(\frac{s}{r}, m\right) Q + k_0\left(\frac{s}{r}, m\right) R,$$

$$g_1\left(\frac{s}{r}, m\right) P + h_1\left(\frac{s}{r}, m\right) Q + k_1\left(\frac{s}{r}, m\right) R,$$

$$g_2\left(\frac{s}{r}, m\right) P + h_2\left(\frac{s}{r}, m\right) Q + k_2\left(\frac{s}{r}, m\right) R$$

mit wachsendem m streng Null werden müssen. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $D = 0$ ist. Da aber D von Null verschieden sein muss, so war auch unsere Annahme, dass $F\left(\frac{s}{r}\right)$, $F'\left(\frac{s}{r}\right)$, $F''\left(\frac{s}{r}\right)$ in rationalem Verhältniss stehen, falsch. Auf denselben Widerspruch führt auch die Annahme, dass

$$\frac{F'\left(\frac{s}{r}\right)}{F\left(\frac{s}{r}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{F''\left(\frac{s}{r}\right)}{F\left(\frac{s}{r}\right)}$$

gleichzeitig rational sein können, d. h. es giebt keinen rationalen Werth $\frac{s}{r}$ so, dass sowohl

$$\frac{F'\left(\frac{s}{r}\right)}{F\left(\frac{s}{r}\right)} \quad \text{als} \quad \frac{F''\left(\frac{s}{r}\right)}{F\left(\frac{s}{r}\right)}$$

rational sind.

Odessa.

Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenter Functionen II.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Im Anschluss an die vorstehende Abhandlung des Herrn Ratner entwickle ich in den folgenden Zeilen einen neuen Beweis und einige Verallgemeinerungen des Satzes, welchen ich auf pag. 222 meiner unter obigem Titel im 22. Bande dieser Annalen erschienenen Arbeit*) aufgestellt habe.

Die beständig convergirende Potenzreihe

(1) $$y = 1 + \frac{1}{b}z + \frac{1}{b(b+a)}\frac{z^2}{2!} + \frac{2}{b(b+a)(b+2a)}\frac{z^3}{3!} + \cdots,\text{**})$$

welche beiläufig bemerkt nur unwesentlich von der Bessel'schen Reihe verschieden ist, genügt der Differentialgleichung

(2) $$azy'' = -by' + y.$$

Aus dieser Gleichung leitet man leicht die folgende ab:

(3) $$(az)^{n-1}y^{(n)} = \psi_n \cdot y' + \chi_n \cdot y.$$

Hier bedeuten ψ_n, χ_n ganze ganzzahlige Functionen von a, b, z,

---

*) Ich benutze diese Gelegenheit zur Berichtigung einer irrthümlichen Angabe, welche sich auf pag. 229 dieser Arbeit findet und auf welche mich Herr Stickelberger vor längerer Zeit aufmerksam gemacht hat. Das dort für die Differentialgleichung $2zy'' = by' + y$ angegebene Integral ist zu ersetzen durch den Ausdruck

$$c_1 e^{\sqrt{2z}} G(\sqrt{2z}) + c_2 e^{-\sqrt{2z}} G(-\sqrt{2z}),$$

wo G eine ganze Function von $\sqrt{2z}$ des Grades $\frac{b+1}{2}$ bedeutet. Die Zahl b wird als eine ungerade positive Zahl vorausgesetzt.

**) Es wird angenommen, dass $\frac{b}{a}$ nicht eine negative ganze Zahl ist, weil sonst die Reihe sinnlos würde. Ueberdies wird der Fall $a = 0$ ausgeschlossen, für welchen sich y offenbar auf $e^{\frac{z}{b}}$ reducirt.

welche in Bezug auf z von den Geraden $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n-2}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-3}{2}$ sind, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Der Beweis hiervon ergiebt sich durch den Schluss von n auf $n+1$. Setzt man nämlich

$$(az)^n y^{(n+1)} = \psi_{n+1} \cdot y' + \chi_{n+1} \cdot y,$$

so findet man nach kurzer Zwischenrechnung

$$(4) \qquad \begin{cases} \psi_{n+1} = (a-na-b)\psi_n + az(\chi_n + \psi_n'), \\ \chi_{n+1} = \qquad\qquad \psi_n - (n-1)a\chi_n + az\chi_n'; \end{cases}$$

wobei sich die Differentiationen (ψ_n', χ_n') auf das Argument z beziehen.

Die Gleichungen (4) zeigen nun, dass die von ψ_n, χ_n behaupteten Eigenschaften sich von n auf $n+1$ übertragen. Da diese Eigenschaften aber der Gleichung (2) zufolge für $n=2$ bestehen, so finden sie für jeden Werth von $n \geq 2$ statt.

Zu dem Zwecke, welchen ich verfolge, bedarf es noch der Reihenentwicklung der n^{ten} Ableitung von y, wie sie sich unmittelbar aus (1) ergiebt:

$$(5) \quad y^{(n)} = \frac{1}{b(b+a)\ldots(b+(n-1)a)} + \frac{1}{b(b+a)\ldots(b+na)} z + \cdots$$

Aus dieser Entwicklung geht hervor, dass der absolute Betrag von

$$k^n y^{(n)}$$

mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, welche Werthe auch der Grösse k und dem Argumente z beigelegt werden mögen.

Seien nun a und b ganze Zahlen; dann lässt sich auf folgende Weise zeigen, dass der Werth von $\frac{y'}{y}$ irrational ist, wenn das Argument z einen rationalen, von Null verschiedenen Werth erhält. Angenommen es sei für $z = \frac{r}{s}$

$$(6) \qquad y' = \varrho t, \quad y = \varrho u,$$

wo $r \gtrless 0$ und r, s, t, u ganze Zahlen, ϱ einen nicht verschwindenden Factor bezeichnen. Unter Einführung dieser Werthe von z, y', y geht die Gleichung (3) nach leichter Umformung über in die neue Gleichung:

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho a r}(ar)^n y^{(n)} = s^{n-1}(\psi_n t + \chi_n u),$$

deren rechte Seite offenbar für jeden Werth von n eine ganze Zahl darstellt. Diese ganze Zahl muss, weil die linke Seite mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, von einem genügend gross gewählten Werthe von n ab beständig gleich Null sein. Folglich verschwinden für $z = \frac{r}{s}$ alle Differentialquotienten $y^{(N)}$, $y^{(N+1)}, \ldots,$ unter N jenen genügend gross gewählten Werth von n verstanden. Dieses ist aber offenbar unmöglich. Denn die Entwicklung von y nach steigenden Potenzen von $z - \frac{r}{s}$ würde dann abbrechen, und y also eine rationale ganze Function von z sein, was nicht der Fall ist. Somit ist die Annahme, $\frac{y'}{y}$ habe für einen rationalen von Null verschiedenen Werth von z selber einen rationalen Werth, unzulässig. Setzt man in dem Quotienten $\frac{by'}{y}$ an Stelle von $b : \xi z$, an Stelle von $a : \eta z$, so geht derselbe in eine Function $\varphi(\xi, \eta)$ von ξ und η über. Das Ergebniss der bisherigen Betrachtungen lässt sich offenbar als eine Eigenschaft dieser Function $\varphi(\xi, \eta)$ so aussprechen:

„*Der Werth von*

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi(\xi+\eta)} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{\xi(\xi+\eta)(\xi+2\eta)} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots}{1 + \frac{1}{\xi+\eta} + \frac{1}{(\xi+\eta)(\xi+2\eta)} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1}{(\xi+\eta)(\xi+2\eta)(\xi+3\eta)} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots}$$

ist stets irrational, wenn den Argumenten ξ, η irgend welche rationale Werthe beigelegt werden, welche nur der Einschränkung unterliegen, dass der Quotient $\frac{\xi}{\eta}$ weder Null, noch unendlich, noch einer negativen ganzen Zahl gleich sein darf."

Diesen Satz kann man zunächst folgendermassen verallgemeinern. Es sei m eine positive ganze Zahl und es werde als rational jede Grösse der Form

$$\mu + \nu \sqrt{-m}$$

angesehen, wenn μ und ν rationale Zahlen im gewöhnlichen Sinne des Wortes bezeichnen. Eine rationale Zahl $\mu + \nu\sqrt{-m}$ heisse „ganz", wenn μ und ν ganze Zahlen sind. Setzt man nun in der Gleichung (3) für a, b, z ganze Zahlen der Form $\mu + \nu\sqrt{-m}$ und macht sodann die Annahme, dass gleichzeitig $\frac{y'}{y}$ einer rationalen Zahl derselben Form gleich sei, so ergiebt sich wie oben der Widerspruch, dass y sich auf eine ganze rationale Function von z reducirt. Denn eine ganze Zahl $\mu + \nu\sqrt{-m}$ kann nur dann einen unendlich kleinen Betrag haben, wenn sie gleich Null ist. Es folgt also:

Der obige Satz bleibt gültig, wenn man unter „rationaler Zahl" jede Zahl der Form $\mu + \nu\sqrt{-m}$ versteht, wo μ, ν rationale Zahlen im gewöhnlichen Sinne des Wortes bezeichnen, und m eine beliebig aber fest zu wählende positive ganze Zahl bedeutet.

Ich bemerke noch, dass sich der Beweis unseres Satzes, falls man sich auf reelle Zahlen beschränkt, auch nach der bekannten Lambert'schen Methode führen lässt — eine Methode, die sich übrigens ohne

Zweifel auch auf complexe Zahlen übertragen lassen wird. Dieser „Lambert'sche" Beweis wird ermöglicht durch die wohl von Euler herrührende Kettenbruchentwicklung*)

$$(8)\qquad \frac{y}{y'} = b + \cfrac{az}{a+b+\cfrac{az}{2a+b+\ddots}}$$

Mit dieser Entwicklung stehen auch die oben angestellten Betrachtungen in einem innern Zusammenhang. Nach einer bekannten Schlussweise folgt nämlich aus der Gleichung (3), dass $-\frac{\psi_n}{\chi_n}$ den $n-1^{\text{ten}}$ Näherungsbruch des Kettenbruches (8) vorstellt.

Ich gehe nun dazu über den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen, welcher den oben abgeleiteten Satz als einen ganz speciellen Fall enthält:

„Die beständig convergirende unendliche Potenzreihe

$$y = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

genüge folgenden Bedingungen:

1) *Sie convergire so stark, dass für jeden Werth von z der absolute Betrag von $k^n y^{(n)}$ mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, wenn k eine beliebig gross aber fest gewählte Zahl bezeichnet.*
2) *Sie befriedige eine Differentialgleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Gestalt*

$$(9)\qquad \varphi y^{(r+1)} = \varphi_r y^{(r)} + \varphi_{r-1} y^{(r-1)} + \cdots + \varphi_0 y,$$

wo $\varphi, \varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots \varphi_0$ ganze ganzzahlige Functionen von z bedeuten.

Dann ist stets mindestens Eines der Verhältnisse

$$y : y' : \cdots : y^{(r)}$$

irrational, wenn dem Argumente z irgend ein rationaler Werth beigelegt wird, für welchen der Coefficient φ der höchsten Ableitung in (9) *nicht verschwindet."*

Die Ausdrücke „rational", „ganzzahlig" dürfen hier auch in dem allgemeineren oben angegebenen Sinne verstanden werden.

Zum Beweise des aufgestellten Satzes leite ich aus der Gleichung (9) die folgende neue Gleichung ab, in welcher n irgend eine positive Zahl bedeutet:

$$(10)\qquad \varphi^n y^{(r+n)} = \varphi_{r,n} y^{(r)} + \varphi_{r-1,n} y^{(r-1)} + \cdots + \varphi_{1,n} y' + \varphi_{0,n} y.$$

*) Vgl. Legendre's Elemente der Geometrie, vierte Anmerkung, wo der obige Kettenbruch, welcher für $b=1$, $a=2$, $z=-\frac{x^2}{2}$ den Werth $1-x\,\mathrm{tg}\,x$ besitzt, zum Beweise der Irrationalität von π und π^2 benutzt wird.

Man zeigt hier leicht durch den Schluss von n auf $n+1$, dass $\varphi_{r,n}, \varphi_{r-1,n}, \ldots \varphi_{0,n}$ ganze ganzzahlige Functionen von n sind, deren Grade die Zahl $\gamma \,.\, n$ nicht übersteigen. Dabei bezeichnet γ die höchste unter den Gradzahlen der Functionen $\varphi, \varphi_r, \varphi_{r-1}, \ldots \varphi_0$.

Nimmt man nun an für irgend einen rationalen Werth von z, für welchen φ nicht verschwindet, seien sämmtliche Verhältnisse

$$y : y' : \cdots : y^{(r)}$$

rational, so führt die Gleichung (10), in entsprechender Weise wie oben die Gleichung (3), auf den Widerspruch, dass y sich auf eine rationale ganze Function von z reducirt. Daher ist jene Annahme unzulässig, was zu beweisen war.

Eine ausgedehnte Classe von Potenzreihen, welche den Bedingungen des soeben bewiesenen Satzes genügen, liefern „die verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen*), wie ich zum Schluss näher ausführen will. Man bilde mit irgend $2r+2$ Constanten

$$a_0, a_1, \ldots a_r, \quad b_0, b_1, \ldots b_r$$

die beiden ganzen Functionen

$$(11) \quad \begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + \cdots + a_r x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1), \\ g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1) + \cdots + b_r x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1). \end{cases}$$

Dann befriedigt die Potenzreihe

$$(12) \quad y = 1 + \frac{f(0)}{g(0)} z + \frac{f(0)f(1)}{g(0)g(1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{f(0)f(1)f(1)}{g(0)g(1)g(2)} \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

wie man durch eine kurze Rechnung bestätigt, die Differentialgleichung

$$(13) \quad b_r z^r y^{(r+1)} = z^{r-1}(a_r z - b_{r-1}) y^{(r)} + z^{r-2}(a_{r-1} z - b_{r-2}) y^{(r-1)} + \cdots + a_0 y.$$

Damit die Reihe (12) nicht sinnlos wird, müssen die Werthe von $g(0), g(1), \ldots$ sämmtlich von Null verschieden sein; damit sie nicht abbricht, muss das Gleiche für die Werthe von $f(0), f(1), \ldots$ stattfinden; damit endlich der in unserem Satze verlangte Grad der Convergenz eintritt, ist nothwendig und hinreichend, dass der Grad von $f(x)$ niedriger ist als der von $g(x)$.

Nimmt man für $f(x)$ und $g(x)$ ganzzahlige Functionen, so werden freilich $a_0, \ldots a_r, b_0, \ldots b_r$ im Allgemeinen nicht sämmtlich ganze, sondern nur rationale Zahlen. Aber man kann dann die Gleichung (13) mit dem gemeinsamen Nenner jener Zahlen multipliciren und so an ihre Stelle eine Gleichung mit lauter ganzzahligen Constanten setzen.

Fasst man alle diese Bemerkungen zusammen, so erkennt man die Richtigkeit des folgenden Satzes:

---

*) Vgl. für das Folgende: Thomae „Ueber die höheren hypergeometrischen Reihen etc.", diese Annalen, Bd. II, pag. 427.

„Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei ganze ganzzahlige Functionen von x, welche nur der Einschränkung unterliegen, dass $f(x)$ von niedrigerem Grade als $g(x)$ ist, und dass die Gleichungen $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ durch keinen ganzzahligen nicht negativen Werth von x befriedigt werden. Dann besitzt die beständig convergirende Potenzreihe

$$y = 1 + \frac{f(0)}{g(0)} z + \frac{f(0)\,f(1)}{g(0)\,g(1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{f(0)f(1)f(2)}{g(0)g(1)g(2)} \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

die Eigenschaft, dass unter den Verhältnissen $y : y' : y'' : \cdots : y^{(r)}$ mindestens Eines irrational ist, wenn dem Argumente z irgend ein von Null verschiedener rationaler Werth beigelegt wird. Dabei bezeichnet r den Grad von $g(x)$.

Zu bemerken ist noch, dass offenbar $f(x)$ und $g(x)$ unbeschadet der Allgemeinheit ohne gemeinsamen Theiler vorausgesetzt werden dürfen.

Der specielle Fall $f(x) = 1$, $g(x) = ax + b$ führt auf die Reihe (1) und den oben für diese Reihe bewiesenen Satz.

Königsberg i. Pr., den 24. März 1888.

Ueber rectificirbare Curven.

Von

Leo Koenigsberger in Heidelberg.

Herr G. Humbert beweist in seiner interessanten Arbeit „sur les courbes algébriques planes rectifiables“ *) den Satz, dass der Bogen einer rectificirbaren ebenen algebraischen Curve stets einer Gleichung zweiten Grades genügt, deren Coefficienten rationale Functionen der Coordinaten der Curve sind, dass ferner für rectificirbare Curven die nothwendige und hinreichende Bedingung für die rationale Ausdrückbarkeit in den Coordinaten darin besteht, dass sich für diese die Basis des Bogenintegrales, welche durch eine Quadratwurzel dargestellt ist, rational durch die Coordinaten der Curve ausdrücken lasse, und leitet daraus eine Reihe weiterer Theoreme zur Auffindung solcher Curven her. Nach dem von ihm gegebenen Beweise könnte es scheinen, als ob diese Sätze irgendwie mit der geometrischen Bedeutung des Bogenintegrales oder mit der analytischen Form dieses speciellen Integrales verknüpft seien, und ich will daher im Folgenden die Quelle dieser Sätze darzulegen versuchen und zugleich eine allgemeinere Definition von rectificirbaren Curven aufstellen.

Sei y eine durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

definirte algebraische Function, und für diese Function

$$S = \int \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}\, dx = F(x, y, y', \ldots), \tag{2}$$

worin ω eine rationale und F eine algebraische Function bedeutet, so wird sich nach dem bekannten Satze von Abel **), weil $\sqrt{\omega}$ sowie F

---

*) Journal de Mathématiques 1888 tome IV, fasc. Nr. 2.

**) nach welchem der Werth eines algebraisch ausführbaren Integrales einer algebraischen Function einer Variabeln sich stets rational durch diese Function und ihre Variable ausdrücken lässt.

als algebraische Functionen von x aufgefasst werden können, $F(x, y, y', \ldots)$ rational durch x und $\sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}$ darstellen lassen und somit

$$(3) \qquad S = \int \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}\, dx$$

$$= R_1(x, y, y', \ldots) + R_2(x, y, y', \ldots)\sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}$$

sein, worin R_1 und R_2 rationale Functionen bedeuten, und man wird, da y sowie jede Ableitung von y rational durch x und jede beliebig gewählte andere Ableitung von y ausgedrückt werden kann*), die Functionen ω, R_1, R_2 auch als rationale Functionen von x und y oder einer willkürlich gewählten Ableitung von y auffassen können. Hieraus folgt schon der Satz

dass, wenn für eine algebraische Function y das Integral

$$S = \int \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}\, dx$$

algebraisch durch x, y und die Ableitungen ausdrückbar ist, jedenfalls S die Lösung einer quadratischen Gleichung sein wird, deren Coefficienten rational aus x und y oder einer willkürlich gewählten Ableitung von y zusammengesetzt sind.

Bemerkt man aber, dass durch Differentiation der Gleichung (3)

$$(4) \quad \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)} = \frac{dR_1}{dx} + \left(\frac{dR_2}{dx} + \frac{1}{2} R_2 \frac{\frac{d\omega}{dx}}{\omega}\right)\sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}$$

folgt, so wird, wenn $\frac{dR_1}{dx} = 0$ oder R_1 eine Constante c ist, die Irrationalität $\sqrt{\omega}$ herausfallen, und das übrig bleibende durch die Function ω befriedigt sein, wenn dagegen $\frac{dR_1}{dx}$ von Null verschieden ist, $\sqrt{\omega}$ sich rational durch x und y oder irgend eine Ableitung ausdrücken lassen, und somit nach (3) S ebenfalls rational durch die letztgenannten Grössen darstellbar sein. Da aber auch umgekehrt, wenn S eine solche rationale Darstellung in der Form

---

*) Dass y' eine rationale Function von x und y ist, folgt unmittelbar aus der Gleichung (1), und es lässt sich, wenn (1) in Bezug auf y vom n^{ten} Grade war, als eine ganze Function von y vom $n - 1^{\text{ten}}$ Grade darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind; da ferner

$$\int y'\, dx = y$$

ist, so folgt aus dem oben angeführten Abel'schen Satze auch, dass y rational durch x und y' ausdrückbar ist, es lässt sich somit y' rational durch x und y, y rational durch x und y' darstellen, und dasselbe gilt für die höheren Ableitungen.

$$S = \int \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}\, dx = R(x, y, y', \ldots) \tag{5}$$

besitzt, worin R eine rationale Function bedeutet, wie durch Differentiation folgt, $\sqrt{\omega}$ rational durch x und y oder irgend eine beliebige Ableitung darstellbar ist, so erhalten wir das folgende Resultat:

Nennt man das Integral

$$S = \int \sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}\, dx,$$

worin y eine algebraische Function von x, und ω eine rationale Function bedeutet, algebraisch reducirbar, wenn sich dasselbe als algebraische Function von x und y oder irgend einer Ableitung darstellen lässt, so wird ein solches stets die Lösung einer Gleichung zweiten Grades von der Form sein

$$(S - c)^2 = r^2(x, y, y' \ldots)\, \omega(x, y, y', \ldots), \tag{6}$$

worin c eine Constante und r eine rationale Function bedeutet. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass dieses Integral ein rational reducirbares ist, ist die, dass $\sqrt{\omega(x, y, y', \ldots)}$ sich rational durch x und y oder irgend eine Ableitung ausdrücken lasse.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass dieser Satz nicht auf Quadratwurzeln von rationalen Functionen von $x, y, y', \ldots$ beschränkt ist, indem für höhere Wurzelexponenten nur noch die Potenzen dieser Irrationalität in den Ausdruck für das algebraisch reducirbare Integral eintreten; es hat jedoch kein Interesse, dies hier weiter auszuführen, indem ich nur zeigen wollte, dass die von Herrn Humbert für algebraisch und rational rectificirbare Curven bewiesenen Sätze eine unmittelbare analytische Folgerung aus dem bekannten Abel'schen Satze sind, wenn man in der oben gewählten Bezeichnung

$$\omega(x, y, y', \ldots) = \sqrt{1 + y'^2}$$

setzt, und es braucht ebenso kaum hervorgehoben zu werden, dass diese Sätze hiernach ebenso für räumliche algebraisch rectificirbare Curven gelten.

Aber wir wollen das Problem jetzt noch allgemeiner fassen, um nicht auf algebraische Curven beschränkt zu bleiben.

Eine transcendente Curve soll rectificirbar genannt werden, wenn ihr Bogen sich als algebraische Function ihrer beiden Coordinaten ausdrücken lässt,

also

$$s = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx = F(x, y) \tag{7}$$

ist, worin F eine algebraische Function bedeutet.

Zunächst ist sofort zu sehen, dass, weil durch Differentiation von (7)

$$(8)\qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'$$

folgt, *jede rectificirbare transcendente Curve das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein muss, und dass daher irreductible Differentialgleichungen von höherer Ordnung als der ersten nie rectificirbare Curven als Integrale enthalten können.*

Sei nun diese Differentialgleichung erster Ordnung, welche die rectificirbare transcendente Curve definirt und die wir in Bezug auf y' im algebraischen Sinne als irreductibel betrachten dürfen,

$$(9)\qquad y' = f(x, y),$$

so wird, wenn

$$(10)\qquad \sqrt{1+y'^2} = z \quad \text{oder} \quad y' = \sqrt{z^2-1}$$

gesetzt wird, zunächst aus (9) und (10) z als algebraische Function von x und y in der Form sich ergeben

$$(11)\qquad z = \omega(x, y),$$

woraus durch Differentiation

$$(12)\qquad z' = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} f$$

und durch Elimination von y zwischen den Gleichungen (11) und (12)

$$(13)\qquad z' = \Omega(x, z)$$

folgt, *sonach z ebenfalls ein Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ist*, die in der in z' algebraisch irreductiblen Form

$$(14)\qquad z'^{\nu} + \varrho_1(x, z)\, z'^{\nu-1} + \cdots + \varrho_\nu(x, z) = 0$$

dargestellt werden mag, in welcher $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\nu$ rationale Functionen bedeuten.

Vermöge dieser Substitution geht aber die Gleichung (7) in

$$(15)\qquad \int z\,dx = \mathfrak{F}(x, z)$$

über, worin $\mathfrak{F}$ eine algebraische Function bedeutet, und es ist zunächst die Form der Function $\mathfrak{F}$ näher zu charakterisiren oder zu untersuchen, welche analytische Gestalt der von Abscisse, Ordinaten und einer transcendenten Curve, welche das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ist, eingeschlossene Flächeninhalt annimmt, wenn sich derselbe algebraisch durch die Coordinaten der Curve ausdrücken lassen soll.

Setzen wir

$$(16)\qquad \mathfrak{F}(x, z) = t_1,$$

so dass t_1 die Lösung der algebraischen Gleichung

(17) $$t^\mu + \mathfrak{F}_1(x, z)\, t^{\mu-1} + \cdots + \mathfrak{F}_\mu(x, z) = 0,$$

in welcher $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_\mu$ rationale Functionen bedeuten, und mag diese Gleichung, wenn noch die Ableitung z' adjungirt wird, für die Lösung t_1 die irreductible Gleichung liefern

(18) $$t^\lambda + r_1(x, z, z')\, t^{\lambda-1} + \cdots + r_\lambda(x, z, z') = 0,$$

worin $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ rationale Functionen bedeuten, so wird, wie aus bekannten Ueberlegungen ersichtlich, da t' aus (18) sich als ganze Function $\lambda - 1^{\text{ten}}$ Grades in t ergiebt, deren Coefficienten rationale Functionen von x, z, z', z'' sind und z'' nach (14) als rationale Function von x, z und z' folgt,

(19) $$t_1' = R_1(x, z, z')\, t_1^{\lambda-1} + R_2(x, z, z')\, t_1^{\lambda-2} + \cdots + R_\lambda(x, z, z')$$

sein, wenn $R_1, R_2, \ldots, R_\lambda$ wiederum rationale Functionen bedeuten. Da aber vermöge (15) und (16) $t_1' = z$ folgt, so wird die Gleichung (19) in

(20) $$R_1(x, z, z')\, t_1^{\lambda-1} + R_2(x, z, z')\, t_1^{\lambda-2} + \cdots + \big(R_\lambda(x, z, z') - z\big) = 0$$

übergehen, was mit der Annahme der Irreductibilität der Gleichung (18) nur dann vereinbar ist, wenn

(21) $$R_1(x, z, z') = 0, \quad R_2(x, z, z') = 0 \cdots R_\lambda(x, z, z') - z = 0$$

erfüllt sind; daraus ergiebt sich aber wieder, dass auch für jede andere Lösung t_2 der Gleichung (18) die Gleichung (20) also auch nach (19)

$$t_2' = z \quad \text{oder} \quad \int z\, dx = t_2$$

befriedigt wird, und dass daher

(22) $$t_2 = t_1 + c$$

sein muss, wenn c eine Constante bedeutet. Da sich aber aus (18) in diesem Falle

$$(t_1 + c)^\lambda + r_1(x, z, z')\, (t_1 + c)^{\lambda-1} + \cdots + r_\lambda(x, z, z') = 0$$

und

$$t_1^\lambda + r_1(x, z, z')\, t_1^{\lambda-1} + \cdots + r_\lambda(x, z, z') = 0$$

ergiebt, so würde aus diesen beiden Gleichungen

$$\lambda c t_1^{\lambda-1} + \mathfrak{r}_1(x, z, z')\, t_1^{\lambda-2} + \cdots + \mathfrak{r}_{\lambda-1}(x, z, z') = 0$$

folgen, was mit der Annahme der Irreductibilität von (18) wiederum nicht vereinbar ist — es muss daher die Gleichung (18) in t vom ersten Grade sein und daher t_1 rational durch x, z, z' ausdrückbar sein, so dass nach Gleichung (15) und (16) sich der folgende Satz ergiebt, wenn man noch erwägt, dass durch Differentiation von (15)

$$z = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\, z'$$

folgt, und z somit das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung ist, also nie einer irreductiblen Differentialgleichung von höherer Ordnung als der ersten angehören kann:

Eine transcendente Curve, deren Flächenstück durch die Coordinaten derselben algebraisch quadrirbar sein soll, muss das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein, und das Flächenstück ist dann stets rational ausdrückbar durch die Coordinaten und deren erste Ableitung.

Da sich nun statt (15) die Gleichung ergiebt

$$\int z\,dx = \Re(x, z, z'), \tag{20}$$

worin $\Re$ eine rationale Function bedeutet, so wird vermöge der Substitutionsgleichung (10)

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+y'^2}\,dx &= \Re\left(x, \sqrt{1+y'^2}, \frac{y'y''}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\\ &= \Re_1(x, y, y', \sqrt{1+y'^2}),\end{aligned} \tag{24}$$

worin $\Re_1$ wiederum eine rationale Function bedeutet, da y'' rational durch x, y und y' ausdrückbar ist, und man erhält somit, wie unmittelbar zu sehen,

$$\int\sqrt{1+y'^2}\,dx = \varrho_0(x, y, y') + \varrho_1(x, y, y')\sqrt{1+y'^2}, \tag{25}$$

worin ϱ_0 und ϱ_1 rationale Functionen darstellen.

Der Bogen einer rectificirbaren transcendenten Curve hat also stets die Gestalt

$$s = \varrho_0(x, y, y') + \varrho_1(x, y, y')\sqrt{1+y'^2}, \tag{26}$$

worin ϱ_0 und ϱ_1 rationale Functionen bedeuten.

Da nun durch Differentiation von (26) sich

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{d\varrho_0}{dx} + \left(\frac{d\varrho_1}{dx} + \frac{\varrho_1 y'y''}{1+y'^2}\right)\sqrt{1+y'^2} \tag{27}$$

ergiebt, so wird, wenn $\frac{d\varrho_0}{dx} = 0$ oder ϱ_0 eine Constante c ist, die Irrationalität $\sqrt{1+y'^2}$ herausfallen, und das übrig bleibende durch die transcendente Curve erfüllt sein müssen, wenn dagegen $\frac{d\varrho_0}{dx}$ von Null verschieden ist, $\sqrt{1+y'^2}$ sich rational durch x, y, y' ausdrücken lassen und somit nach (26) s ebenfalls rational durch x, y, y' ausdrückbar sein. Da aber auch umgekehrt, wenn s eine solche rationale Darstellung in der Form

$$s = \int\sqrt{1+y'^2}\,dx = \varrho(x, y, y') \tag{28}$$

besitzt, worin ϱ eine rationale Function bedeutet, wie durch Differentiation folgt, $\sqrt{1+y'^2}$ rational durch x, y, y' darstellbar ist, wenn y durch eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung definirt ist, so erhalten wir den nachfolgenden Satz:

Jede rectificirbare transcendente Curve ist das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, und ihr Bogen die Lösung einer quadratischen Gleichung von der Form

$$(s-c)^2 = \varrho_1{}^2(x, y, y')\,(1+y'^2),$$

worin c eine Constante und ϱ_1 eine rationale Function bedeutet. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der algebraisch rectificirbare Bogen ein rational rectificirbarer in dem Sinne ist, dass sich derselbe rational in den Coordinaten und der ersten Ableitung ausdrücken lässt, ist die, dass $\sqrt{1+y'^2}$ sich als rationale Function von x, y und y' darstellen lässt.

Heidelberg, im Mai 1888.

Ein Satz über Potenzreihen.

Von

August Gutzmer in Berlin.

Bisher ist, soviel mir bekannt, nur ein Satz über das arithmetische Mittel von Functionen complexer Veränderlichen aufgestellt worden, welcher im Wesentlichen von Herrn Rouché*) herrührt und die Werthe einer Potenzreihe für alle Punkte eines innerhalb des Convergenzbereiches gelegenen Kreises betrifft. Derselbe findet sich in mehr oder minder modificirter Form bei Herrn Rausenberger**) und Stolz***), sowie bei Herrn Thomae†), welcher ihn zugleich erweitert hat. Im Folgenden wird ein analoger Mittelwerthsatz mitgetheilt, der sich auf die Werthe bezieht, welche das Quadrat des absoluten Betrages einer Potenzreihe längs eines im Convergenzbereiche gelegenen Kreises annimmt, und aus demselben ein bekannter Satz über die Coefficienten einer convergenten Potenzreihe hergeleitet. Da aber eine Function $\varphi(r, \Theta)$ längs eines Kreises um den Nullpunkt im Grunde nur von der *reellen* Veränderlichen Θ abhängt und andererseits Mittelwerthe von der Art des hier betrachteten sich immer als specielle Fälle bestimmter Integrale auffassen lassen, so erkennt man — eine Bemerkung, die ich Herrn Pringsheim verdanke — unmittelbar die Möglichkeit, diesen Satz auch aus der von Harnack††) gegebenen Gleichung

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [\varphi(x)]^2 \, dx = 2\pi b_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k^2 + b_k^2,$$

---

*) Journal de l'Ecole Polytechnique, 1862, cahier 39. — Serret, Höhere Algebra, Bd. 1, Nr. 204.

**) Lehrbuch der periodischen Functionen, § 22, 7.

***) Arithmetik, Bd. II, S. 171.

†) Elementare Theorie der analytischen Functionen, S. 130.

††) Math. Annalen, Bd. 17, pag. 127.

wo

$$\varphi(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

abzuleiten. Obschon aus dem obigen Grunde die Form dieser Gleichung etwas allgemeiner erscheint und auch ihre Herleitung allgemeinere Voraussetzungen gestattet als die hier gegebene des nachfolgenden Mittelwerthsatzes, so dürfte die letztere doch ihres rein elementaren Charakters halber nicht ohne Interesse sein.

Angenommen, es sei die Potenzreihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

für den durch die Ungleichung

$$|x| \leqq R$$

definirten Bereich absolut convergent. Setzt man

$$x = r \cdot e^{\Theta i}, \quad (r < R),$$

so nimmt (1) die Form

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi(r, \Theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{k\Theta i}$$

an; multiplicirt man diese Gleichung mit der conjugirten Grösse

$$\bar{\varphi}(r, \Theta) = \sum_{h=0}^{\infty} \bar{a}_h r^h e^{-h\Theta i},$$

so ergiebt sich

$$|\varphi(r, \Theta)|^2 = \sum_{k,h=0}^{\infty} a_k \bar{a}_h r^{k+h} \cdot e^{(k-h)\Theta i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} + \sum_{k,h=0}^{\infty}{}' a_k \bar{a}_h r^{k+h} e^{(k-h)\Theta i},$$

wo durch $\sum'$ angedeutet werden soll, dass die Combination $k = h$ bei der Summation auszuschliessen ist. Nimmt man

$$a_k = \alpha_k + \beta_k i,$$

so liefert die letzte Gleichung:

$$\begin{aligned}|\varphi(r, \Theta)|^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} + 2 \sum_{k,h=0}^{\infty}{}' \{(\alpha_h \alpha_k + \beta_k \beta_h) \cos (k-h)\Theta + \\ &\qquad (\alpha_k \beta_h - \alpha_h \beta_k) \sin (k-h)\Theta\} r^{k+h} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \{(\alpha_{h+l}\alpha_h + \beta_{h+l}\beta_h) \cos l\Theta + \\ &\qquad (\alpha_{h+l}\beta_h - \alpha_h \beta_{h+l}) \sin l\Theta\} r^{2h+l}.\end{aligned}$$

Führt man zur Abkürzung

$$(2)\qquad \begin{aligned}\sum_{h=0}^{\infty}(\alpha_{h+l}\alpha_h+\beta_{h+l}\beta_h)\,r^{2h+l}&=A_l,\\ \sum_{h=0}^{\infty}(\alpha_{h+l}\beta_h-\alpha_h\beta_{h+l})\,r^{2h+l}&=B_l\end{aligned}$$

ein, so geht die obige Gleichung über in die folgende:

$$|\varphi(r,\Theta)|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\,r^{2k}+2\sum_{l=1}^{\infty}\left\{A_l\cos l\Theta+B_l\sin l\Theta\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar:

$$|\varphi(r,\Theta+\pi)|^2=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\,r^{2k}+2\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\left\{A_l\cos l\Theta+B_l\sin l\Theta\right\},$$

also

$$\frac{1}{2}\left\{|\varphi(r,\Theta)|^2+|\varphi(r,\Theta+\pi)|^2\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\,r^{2k}+2\sum_{l=1}^{\infty}\left\{A_{2l}\cos 2l\Theta+B_{2l}\sin 2l\Theta\right\}.$$

Aus dieser Gleichung schliesst man weiter:

$$\frac{1}{4}\left\{|\varphi(r,\Theta)|^2+\left|\varphi\left(r,\Theta+\frac{\pi}{2}\right)\right|^2+|\varphi(r,\Theta+\pi)|^2+\left|\varphi\left(r,\Theta+\frac{3\pi}{2}\right)\right|^2\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\,r^{2k}+2\sum_{l=1}^{\infty}\left\{A_{4l}\cos 4l\Theta+B_{4l}\sin 4l\Theta\right\}.$$

Durch fortgesetzte Wiederholung dieses Verfahrens findet man schliesslich:

$$(3)\qquad \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\left|\varphi\left(r,\Theta+\frac{\nu\pi}{2^{n-1}}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\,r^{2k}+2\sum_{l=1}^{\infty}\left\{A_{2^nl}\cos(2^nl\Theta)+B_{2^nl}\sin(2^nl\Theta)\right\}.$$

Geht man nun auf die in (2) angegebenen Ausdrücke für A_l und B_l zurück und beachtet die über die Potenzreihe (1) gemachte Voraussetzung, so bemerkt man, dass der zweite Summand der rechten

Seite in (3) mit wachsendem n beliebig klein wird, so dass man schliessen kann:

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{2^n-1} \left| \varphi\left(r,\, \Theta + \frac{\nu\pi}{2^{n-1}}\right) \right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt das arithmetische Mittel aus den Quadraten der absoluten Beträge der Potenzreihe (1) für alle Punkte des Kreises $|x| = r$, $(r < R)$ dar; dasselbe ist nur von r abhängig, wie auch a priori klar ist. Bezeichnen wir dieses Mittel durch $\mathfrak{M}_r$, so können wir (4) in der Form schreiben:

$$(5) \qquad \mathfrak{M}_r\, |\mathfrak{P}(x)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}$$

und haben damit den Satz:

Das arithmetische Mittel aus den Quadraten der absoluten Beträge aller Werthe, welche die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

auf dem Kreise $|x| = r$ $(r < R)$ annimmt, ist gleich der Summe aus den Quadraten der absoluten Beträge der einzelnen Glieder.

Offenbar gilt dieser Satz für jeden beliebigen im Convergenzbereich der Reihe gelegenen Kreis, wenn man von der Reihe (1) zu einer Entwicklung derselben in der Umgebung des Mittelpunktes des betreffenden Kreises übergeht. Auch überzeugt man sich, dass der Satz Geltung hat, wenn man Potenzreihen mit unendlich vielen positiven und negativen Potenzen einer oder mehrerer Veränderlichen betrachtet.

Aus diesem Satze kann man unmittelbar einen Schluss ziehen. Es folgt nämlich aus (5), dass es unter den Werthen $|\mathfrak{P}(x)|^2$ solche geben muss, für welche die Relation besteht:

$$|\mathfrak{P}(x)|^2 \geqq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Für diese Werthe ist dann auch sicher

$$|\mathfrak{P}(x)|^2 > |a_k|^2 r^{2k}$$

oder

$$|\mathfrak{P}(x)|\, r^{-k} > |a_k|.$$

Setzt man an Stelle dieser Werthe der Potenzreihe ihre obere Grenze g für die Werthe $|x| = r$, so ergiebt sich:

$$g \cdot r^{-k} > |a_k|.$$

Damit ist aber ein bekannter Satz über die Coefficienten einer Potenzreihe bewiesen.*) Für allgemeinere Potenzreihen lässt sich der analoge Satz durch dasselbe Schlussverfahren herleiten.

Berlin, Anfang Februar 1888.

*) Weierstrass, Abhdl. a. d. Functionenlehre, S. 93, 94. — Biermann, Theorie der analyt. Funct., S. 141 ff. — Thomae, a. a. O., S. 131. Nach Stolz (Arithm. II, S. 321) rührt der Satz von Cauchy her.

Fig. 1.

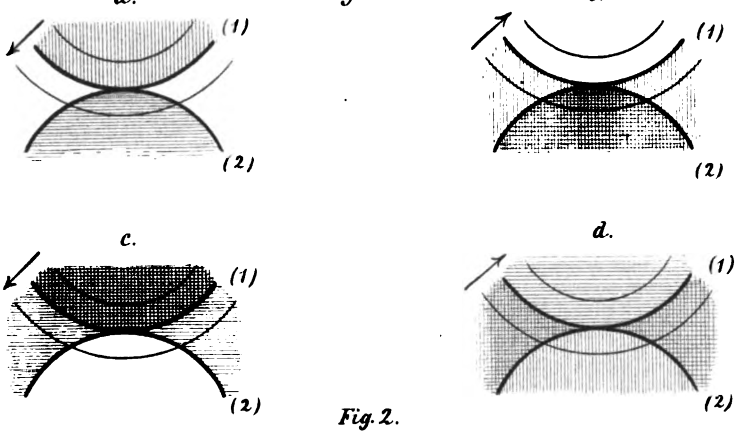


Fig. 2.

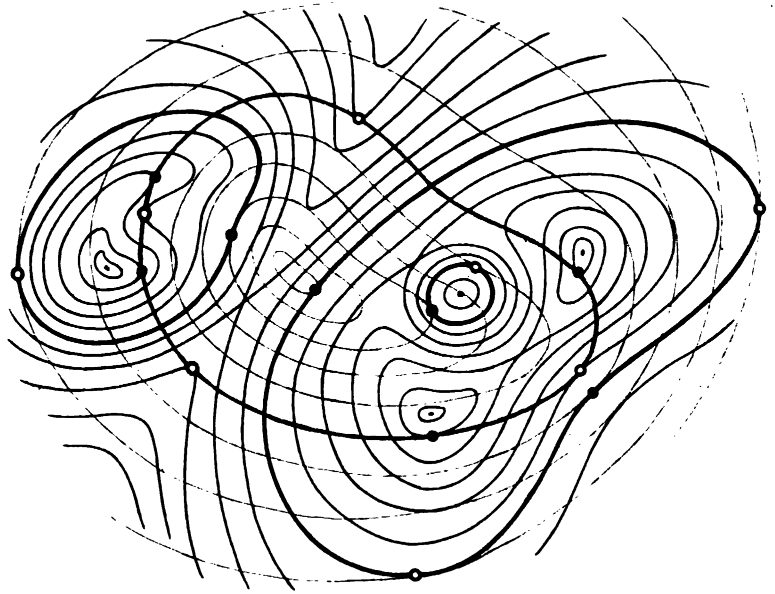


Fig. 3.

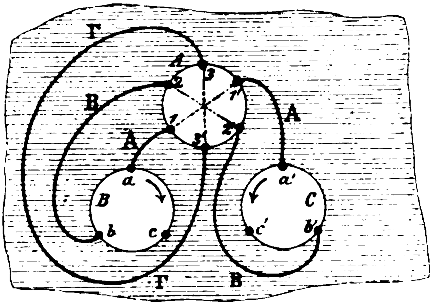
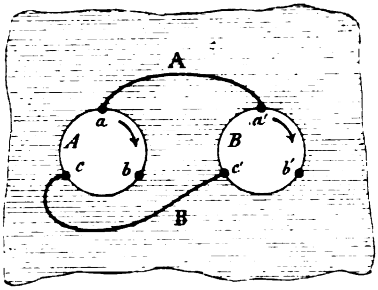


Fig. 4.

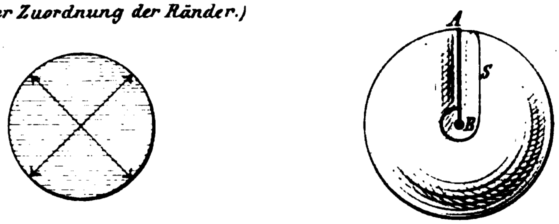


Flächen mit umkehrbarer Indicatrix.

Grundformen:
(mit der Zuordnung der Ränder.)

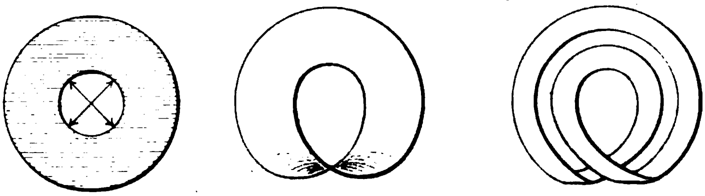
Normalformen:

Fig. 5.
K = 1.
r = 0.



Längs der Mittellinie durchschnitten:

Fig. 6.
K = 0.
r = 1.



a. b.

Fig. 7.
K = 0.
r = 0.

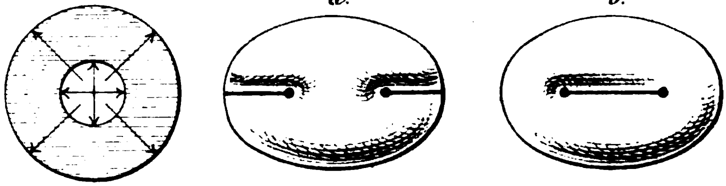


Fig. 8.
K = -1.
r = 2.

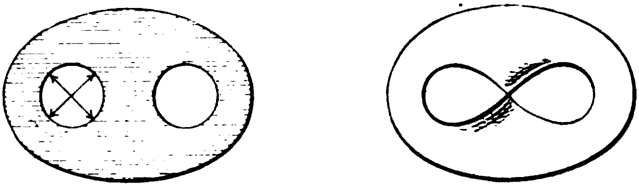
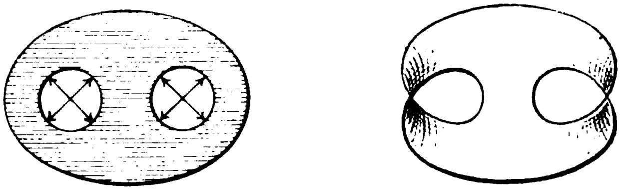


Fig. 9.
K = -1.
r = 1.



a. b. c.

Fig. 10.
K = -1.
r = 0.

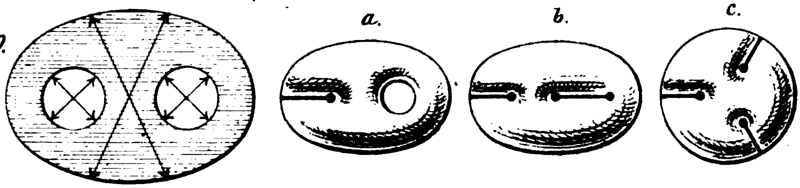


Fig. 11.

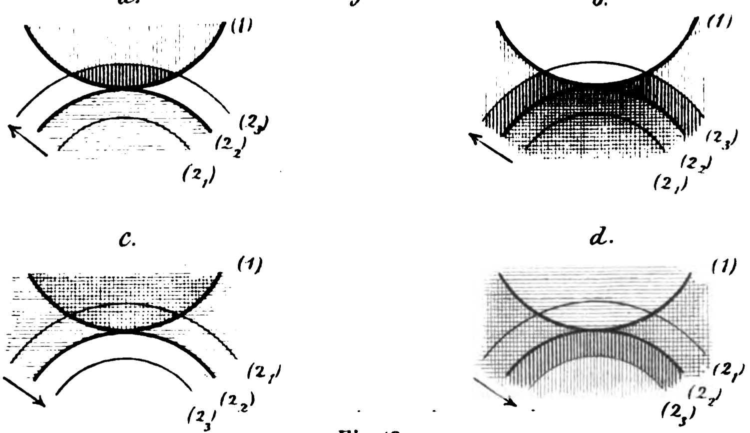


Fig. 12.

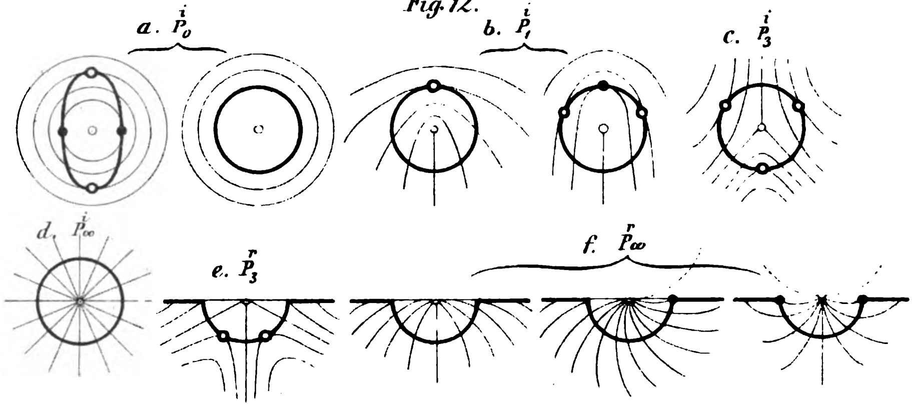


Fig. 14 a.

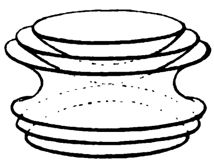


Fig. 13.

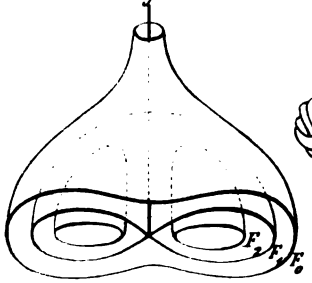


Fig. 14 b.

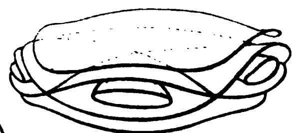


Fig. 15 a.

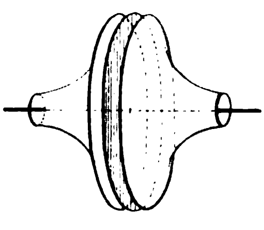


Fig. 16.

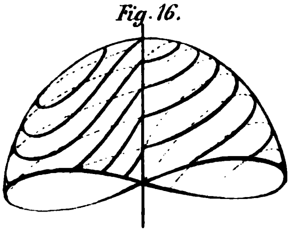
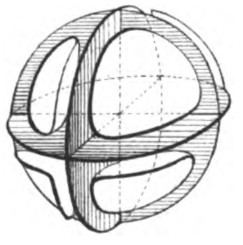


Fig. 15 b.



INHALT.

☞ **Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.**