升學預備

立體幾何學問題解法指導

上海中華書局印行

註冊商標

幾何學問題解法指導

(立體部)

目 次

幾何學問題解法指導

（立體部）

摘要第一

空間之線與平面之重要定理

1. 通過相交之二直線,僅可作一平面.

2. 相交二平面之交處爲一直線.

3. 從平面上或平面外之一定點,僅可作一垂線於其平面.

4. 一直線成垂線於一平面上之相交二直線,必成垂線於其平面.

5. 從平面上一垂線之足,至其平面上任意一直線作垂線,則自其交點至第一垂線作任意之直線,必成垂線於此平

面內之直線.

6. 兩平行線之一垂直於一平面,則他線亦垂直於同平面.

7. 在一平面上之直線,正射影必爲直線.

8. 含有公共垂線之二平面,必互相平行.

9. 平行二平面若截第三平面,則交線必互相平行.

10. 折四角形爲二平面所成.

11. 三面角之任意兩面角之和,大於其他一面角.

12. 凸多面角各面角之和,小於四直角.

空間之線與平面

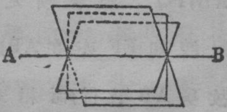
1. 通過任意一定直線,得作無數平面.

【解】

通過AB一定直線,得作無數平面.

【證】

任意取一平面,於其平面上引一直線,令與定直線AB重合,然後以AB為軸旋轉其平面,則凡所占之位置,均為通過直線AB之平面.故題云云.

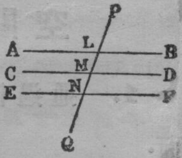


2. 有諸直線,互為平行,而相交於其他之一直線上,則此等直線均在同一平面上.

【解】

AB,CD,EF,……互為平行之直線,與PQ直線相

交,則 AB, CD, EF,….等直線,均在同一平面上.



【證】

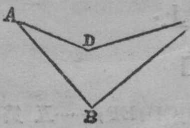
令 PQ 與 AB, CD, EF,….之交點爲 L,M,N,….因AB∥CD,得以決定一平面.然L,M各在直線AB,CD之上,即在AB,CD所定平面上.因知直線PQ亦在其平面上.換言之,CD在AB,PQ二直線所定之平面上.

同樣知EF亦在AB,PQ二直線所定之平面上.故與AB平行,而相交於PQ之各直線,均在AB,PQ二直線所定之平面上.故題云云.

3. 可作各邊不在同一平面內之四邊形否?

【解】

先任意取三點 A,B,C, 次取此三點所決定平面之外之一點 D,而後聯結 ABCDA

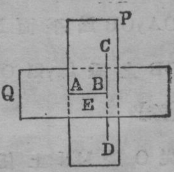


閉折線.然D點不在平面ABC之上,則四邊形ABCD之各邊不能在同一平面.故各邊不在同一平面上,亦得作四邊形.

4. 兩平面相交爲一直線.

【解】

Q爲二平面,AB爲其相交之一直線.



【證】

先從其交線上取一點A,次從平面P上取二點C,D(此C,D點須在平面Q反對之側),連結CD直線,則過C,D有無限平面,在Q之異側,而直線CD必交平面Q,令其交點爲B.此C,D二點在平面P上,故直線CD亦在其平面P上(平面定義),由是知B在平面P上.然A,B二點同在平面P,Q之上,故AB爲二面公共之直線,而二面公共之點,不在此直線AB之外.假令此外再有一公共點E,則二平面P,Q共有直線AB,及此

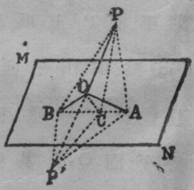
線外之點 E，則此二平面不可不相合（通過一直線及此直線外之一點，只能作一平面故也）.是與題相反，故題云云.

5. 一直線成垂線於一平面上之相交二直線，必成垂線於其平面.

【解】

OA，OB 為平面 MN 上之相交二直線，OP 為 OA，OB 之垂線，則 OP 為 MN 之垂線.

【證】



從 O 於 MN 上任意引一直線 OC，引長 PO 至 P′，令 OP′=OP，而 AB，OC 之交點為 C. 連結 A，B，C 於 P 及 P′.

由是 OP=OP′，OA⊥PP′，∴AP=AP′.

仿此 BP=BP′，又 AB 為公共邊.

∴△APB≡△AP′B，∴∠PAB=∠P′AB，

即 ∠PAC=∠P′AC，又 AC 為公共邊.

由是 △PAC≡△P′AC，∴PC=P′C，

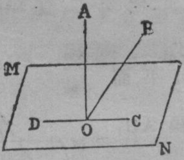
且 $PO=P'O$， $\therefore PP'\perp OC$，即 $OP\perp OC$.

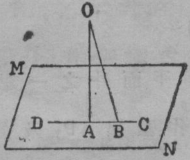
$\therefore OP\perp MN$.

√6. 從平面上或平面外之一定點，僅可作一垂線於其平面.

【解】

MN 為一平面，O為一定點，則從 O 僅能作一垂線於 MN.





【證】

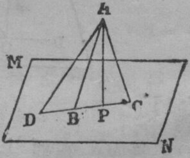
OA 為MN平面上之垂線，若 OA 之外，可作其他垂線 OB 於此平面上.然通過 OA，OB 僅能作一平面，且與 MN 平面相交必為一直線 DC.由是 OA，OB 同成垂線於 DC，與平面幾何所說從直線上一點，祗能作一垂線於此直線上之理不合.故題云云.

從平面外之點，僅可作一垂線於其平面，亦可

同樣證明.

7.　從平面外一點,向其平面作垂線,及諸斜線,此各線中,以垂線為最短,其斜線之長短,視其足及垂線足之距離以為斷.即距離相等,則其斜線亦相等;距離小或大,則其斜線為短或長.

【解】



A為平面外之一點,向平面MN作垂線AP,及斜線AB,AC,AD….

題言 $AP<AB$,而 $BP=PC$,則 $AB=AC$. 又 $DP>PC$,則 $AD>AC$.

【證】

$\because AP\perp$面MN, $\therefore \angle APB=\angle R$,而 $\angle PAB$ 及 $\angle PBA$ 任何亦均小於 $\angle R$. $\therefore AB>AP$.

而 $BP=PC$,又 $\angle APB=\angle APC=\angle R$,AP為共有邊.

$\therefore \triangle ABP\equiv\triangle APC$, $\therefore AB=AC$.

又 DP>PC,

因知 AD>AB. ∴DP>BP,

8. 從三點A,B,C至相等之距離取一點P,則P點必在通過△ABC之外心O而垂直於其平面之直線上.

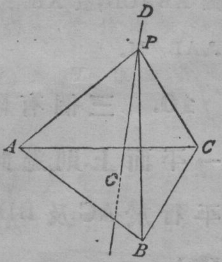
【證】

過P點引直線DO′,令垂直於ABC平面上,其足爲O′,因PA=PB=PC,故

AO′=BO′=CO′.

是O′爲△ABC之外心,必與O重合.

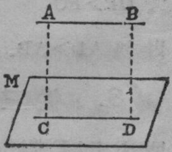
故知P點,必在過O點而垂直於ABC之直線OD上.



9. 有兩平行直線,若過其一直線作一平面,則此平面不與其他之一直線相合,必與之平行.

【解】

AB∥CD,M為過CD而不含AB之任意平面,則AB∥M.



【證】

∵AB∥CD,

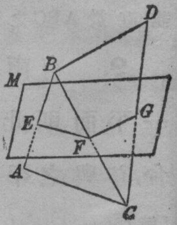
∴AB,CD在同一平面ACDB之上,而ACDB與M相交為直線CD,若直線AB交平面M,則其交點不可不在直線CD之上.

然AB∥CD,故AB不交於平面M.

∴AB∥M.

10. 三個有限直線AB,BC,CD不在同一平面上,則過此三直線中點之平面,必平行於AC及BD.

【證】



令AB,BC,CD之中點為E,F,G,此三中點所定之平面為M.

則△BAC之E,F為二邊AB,BC之中點.

∴EF∥AC，同樣 FG∥BD.

而 M 任何亦不含 AC，若含 AC 則 AB，BC 在平面 M 上，且 FG 亦在平面 M 上，以 C，G 在 M 上，因之 CD 亦在 M 上.

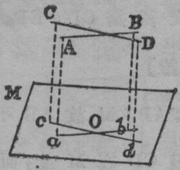
然 AB，BC，CD 不在同一平面 M 之上，是與假設相反.

∴M∥AC，同樣 M∥BD.

11. 通過一定點，得作一平面與空間之二直線平行.

【解】

O 為定點，AB，CD 為空間二直線，M 為過 O 點而平行於 AB 及 CD 之平面.



【證】

先從定點 O，及定直線 AB 所定之平面上，作 aOb∥AB，次從定點 O 及定直線 CD 所定之平面上，作 cOd∥CD.

因 aOb,cOd 所定之平面爲 M.

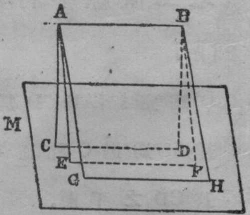
故 M 通過 aOb, 且平行於 aOb 之平行線 AB. 同樣知 M 通過 cOd,且平行於 cOd 之平行線CD. 故題云云.

12. 設有一直線與一平面平行,則通過該直線,可作無數平面,與該平面相交,而其交線互爲平行,且與原直線平行.

【解】

AB 爲一直線,M 爲一平面.

題言 AB∥M,則 CD,EF,GH 各交線爲 CD∥EF∥GH∥AB.



【證】

∵AB∥M,故 AB 不交於 M.

因 CD 在 M 上,而 AB 不能交於 CD. 且 AB,CD 在同一平面 AD 上.

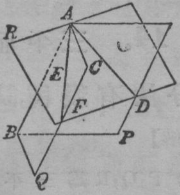
∴AB∥CD.同樣 AB∥EF,AB∥GH.

∴AB∥CD∥FF∥CH.

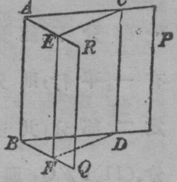
13. 三平面一般相交於一點,然其特別之形狀如何?

【證】

P,Q,R 爲三平面.



P, Q 之交爲 AB; P, R 之交爲 CD;Q,R 之交爲 EF,則 AB,CD在同一平面上,故 (I) 一般此二直線相交,其交點爲 A。然 A 爲 P,Q 之交線 AB 上之點,則 A 爲 P,Q 上之點;又 A 爲 CD 上之點,則 A 亦爲 R 上之點,由是 A 在 P, Q, R上, 而此三平面除 A 以外無公共點. 因 P,Q 上之公共點不可不在 AB 之上; P,R 上之公共點不可不在 CD 之上;故 P,Q,R 之公共點,必在 AB,CD 之公共點上.然二線相交,只有一點,故一般三平面相交於一點.若其特別之形狀,(II)AB∥CD,則 AB,CD 不相交,故 P,Q.R 無公共點, EF∥AB 亦同樣也.(III)AB 與CD 重合,則三平面同過一



直線,有無數公共點.(IV)AB∥CD,而R∥Q;則三平面亦無共公點.(V)R∥Q,Q∥P,則P∥R,卽三平面互爲平行,亦無公共點.

14. 三平面可分空間爲幾部分,而其分法有幾種,試舉各種之形狀以對.

【解】

令P,Q,R爲三平面,先取P,Q二平面考之,一般爲一直線相交,令此交線爲XY,則P,Q分空間爲四部分;次就第三平面R之位置考之,一般令XY與R相交,由是R分P,Q所分之四部分爲八部分矣.

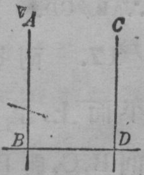
特別(I)P,Q相交,R∥XY.(甲)R與P,Q任何亦不平行,則R分前所分之三部分各爲二部,有一部分不能分,共計七部.(乙)R與P,Q任何亦有一平行,則分前所分相隣之二部分又各分爲二部分,共計六部分.(丙)R過XY亦分爲六部分.(II)P∥Q,則P,Q分空間爲三部分,由是R與之相交,則分空間爲六部分矣(與乙同).若R各

與 P,Q 平行,則前所分中有一部分又分爲二部分,共計四部分.

15. 設空間有二直線俱垂直於第三直線,則此二直線互爲平行否?

【證】

二直線 AB,CD 俱垂直於第三直線 BD.



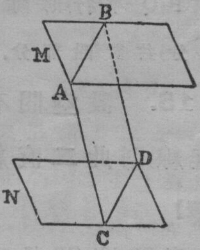
然 AB 因垂直於 BD,故在過 B 而垂直於 BD 之平面上.

同樣 CD 在過 D 而垂直於 BD 之平面上.

由是 AB,CD 各在一平面上,均得爲 BD 之垂直線.然與此相類之直線有無數存在,故 AB,CD 不能恆爲平行.有時 AB,CD 在同一平面上,則 AB∥CD,是其特別之例.

16. 設有兩平行平面,均交於第三平面,則其交線互爲平行.

【證】



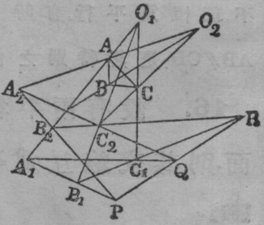
M∥N,而交於第三平面 AD 之上,其交線爲 AB,CD.

因M,N平行而不相交,故在M平面之AB,及在N平面之CD亦不相交.

又 AB,CD 在同一平面 AD 上,

∴AB∥CD.

17. 兩發光點O_1,O_2發射光線在同一平面上,呈△ABC之影爲$A_1B_1C_1$,$A_2B_2C_2$;則B_1C_1與B_2C_2,C_1A_1與C_2A_2,A_1B_1與A_2B_2之交點同在一直線上,A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2同過一點.試證之.



AB,A_1B_1在平面 O_1AB 之上.同樣 AB 與 A_2B_2,A_1B_1 與 A_2B_2 各在同一平面上.

由是 AB,A_1B_1,A_2B_2 互爲

平行,或同交一點.

今令$\triangle ABC$之平面與影之平面M相交於XY.

然AB與XY有相交,或互爲平行之二例:

(I)令AB與XY相交,其交點爲P,因AB在$O_1A_1B_1$上,故P亦在$O_1A_1B_1$上,因知P在A_1B_1上.同樣知P在A_2B_2上.$\therefore AB, A_1B_1, A_2B_2$同過一點.

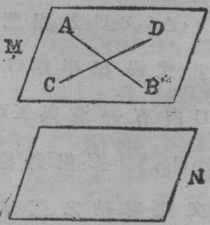
(II)$AB /\!/ XY$則$AB /\!/ M$,因知$AB /\!/ A_1B_1$, $AB /\!/ A_2B_2$.
$\therefore A_1B_1 /\!/ A_2B_2$.即$AB /\!/ A_1B_1 /\!/ A_2B_2$.

次同樣證BC, B_1C_1, B_2C_2,其BC交於XY;則同過其交點,$BC /\!/ XY$,則$BC /\!/ B_1C_1 /\!/ B_2C_2$.然$AB /\!/ XY$,則BC不能平行於XY.因AB,BC相交故也.又就CA, C_1A_1, C_2A_2同樣證之,$\triangle ABC$之各邊與M相交,則$\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_2B_2C_2$之相對應之邊相交於其延長線上,其交點在平面ABC與平面M之交線上.若$\triangle ABC$內有一邊與XY平行,他二邊與XY相交,即$A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$相對應二組之邊相交,他一組與其交點聯結之直線平行.又平面$ABC /\!/$平面M,則$\triangle ABC$之各邊所生對應之邊互爲平行,而不

相交.由是本定理對於一般之例,知$\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_2B_2C_2$之相對應之邊之交點在同一直線上.然特別之例,其對應之邊不相交,即其交點在無限距離也.故本定理恆眞.而$\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_2B_2C_2$對應之頂點A_1與A_2,B_1與B_2,C_1與C_2相連成直線,則兩三角形全等,其各邊同過一點,惟平行則屬例外.

18. 以氣泡水準器決定一平面是否水平,則以水準器就不平行之二位置試驗之.

【解】



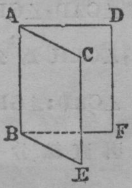
欲決定平面M,是否水平.先以水準器置諸平面M上之AB.其氣泡適在中點,再將水準器移置AB與CD不平行之處,驗其氣泡是否正中,即知M是否水平.

【證】

先設水平面N,若AB//N,CD//N,則含AB,CD之平面M,必與N平行.故題云云.

19. 有二面角從其稜上任意各點所作之平面角均相等.

【證】



CABD為二面角,從其稜AB上任意取A,B二點.過A,B於各面上各作垂直於稜AB之垂線AC,AD及BE,BF;則∠CAD=∠EBF.

∵AC,BE俱垂直於AB,且同在一平面上.

∴AC//BE.

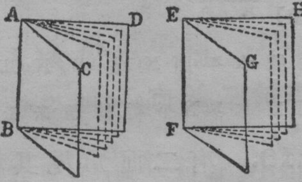
同樣AD//BF.

而∠CAD與∠EBF又同向,故∠CAD=∠EBF.

20. 兩個二面角與其二面角之平面角成比例.

【解】

CABD,GEFH 爲兩個二面角.$\angle CAD$, $\angle GEH$ 爲其平面角.



題言 $CABD:GEFH=\angle CAD:\angle GEH$.

【證】

設 $\angle CAD$, $\angle GEH$ 可以公度,而 $\angle CAD$ 爲公度之 m 倍,$\angle GEH$ 爲公度之 n 倍(m,n 爲整數).

則 $\angle CAD:\angle GEH=m:n$.

次引直線分平面角 CAD 爲 m 等分,作此直線與稜 AB 所決定之平面,則分 CABD 爲 m 個相等之部分.

同樣分 GEFH 爲 n 個相等之部分.

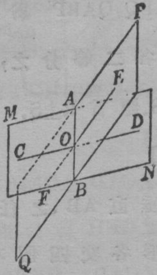
由是 $CABD:GEFH=m:n$.

$\therefore CABD:GEFH=\angle CAD:\angle GEH$.

設 $\angle CAD$, $\angle GEH$ 爲不可公度,則等分 $\angle CAD$,使每份爲極小之角,以度 $\angle GAD$,其剩餘極近於零.推其極限亦可照前法得同樣之結果.

21. 兩平面相交,其相接二面角之和,等於二個直二面角之和.試證之.

【解】



MN,PQ 爲兩平面,AB 爲其交線.

題言 PABM,PABN 之和,等於二個直二面角之和.

【證】

從 AB 上任意取一點 O,過 O 垂直於 AB 在 MN 平面上作 CD,在 PQ 平面上作 EF.

則 ∠EOC,∠EOD 各爲兩相接二面角PABM,PABN 所測之平面角.

由是此二個相接二面角之和,爲

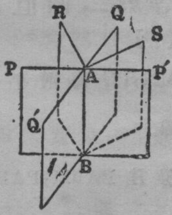
$$\angle EOC+\angle EOD=\angle COD=2\angle R.$$

故題云云.

22. 兩平面相接,若其相接之二面角各二等分,則其分得之二平面,必互爲垂直.

【解】

P,Q 爲二平面,相交於 AB.



PABQ,QABP′ 爲其相接之二面角,各二等分之,其分得之面爲 R,S.題言 R⊥S.

【證】

以垂直 AB 之任意平面,而截圖形各交四個平面 P,Q,R S,其交線爲 PAP′,QAQ′,RA,SA,則 RA,SA 爲接角 PAQ,QAP′ 之二等分.由是 ∠RAS=∠R.

然 ∠RAS 爲測 RAES 之平面角,

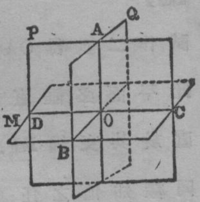
∴ 平面 R⊥ 平面 S.

23. 三直線同交於一點,且互爲垂直,則任一線爲他二線所決定之平面之垂直線.且其所決定之三平面,互爲垂直.

【證】

AO,BO,CO,爲三直線,O 爲三線所交之點.

M 爲 BO,CO 所定之平面; P 爲 AO,CO 所定之平面; Q 爲 AO,BO 所定之平面.



∵AO,BO,CO 互爲垂直.

則 AO,垂直於BO,CO所定之平面.

∴AO⊥M

同樣 BO⊥P,Q⊥P,CO⊥Q.

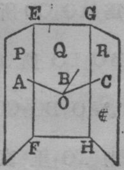
從而 M⊥P⊥Q.故題云云.

24. 諸平面之交線互爲平行,則從空間任意取一點,向諸平面引垂線,皆在同一平面上.

【解】

P,Q,R,....爲諸平面, EF,GH,....爲其交線,且是等交線皆互相平行.題言從空間O點,向各平面引垂線OA,OB,OC,....則在同一平面上.

【證】



試作二垂線OA,OB所定之平面,此平面必垂直於P及Q,因知垂直於其交線EF.

同樣知他之任意相隣之二平面之垂線,例如OB,OC所定之平面,垂直於其交線GH,而與GH平行之交線EF,亦垂直也.

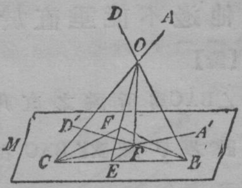
然二平面OAB,OBC同過一點O,且俱垂直於EF,由是此二平面相合.

故過O點向各平面所作之垂線皆在OA,OB所決定之平面上.

25. 有直角投正射影於一平面上,若其一邊及他邊之延線與其平面相交,則爲銳角;若二邊或其延線與其平面相交,則爲鈍角.試證之.

【解】

AOB爲一直角,M爲一平面,A'PB爲其正射影,



卽 AO 之正射影爲 A′P，OB之正射影爲PB.且邊AO之延線及OB邊交於M平面上之點爲C及B；則 $\angle AOB > \angle A'PB$.若二邊或其延線交於M，則其正射影之角爲鈍角.

【證】

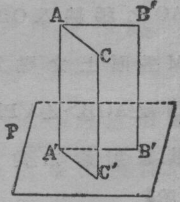
(I)先連結 BC 直線.從 P 作 BC 之垂線 PE.再連結 OE，則 $OP \perp M$，$OE \perp BC$. 又 $\angle OPE = \angle R$，故 $OE > PE$，由是從 EO 上取 $EF = EP$，連結 FC 及 FB，則 $\angle BFC = \angle BPC$，而 F 在 OE 之上，$\angle BFC > \angle BOC$.由是 $\angle BPC > \angle R$，故其補角 $\angle BPA' < \angle R$.

(II)設直角爲 BOC 或 AOD，此各角之正射影爲 $\angle BPC$ 或 $\angle A'PD'$，依前之證明，知 $\angle BPC > \angle BOC$，卽 $\angle BPC$ 爲鈍角.又 $\angle A'PD'$ 爲 $\angle BPC$ 之對頂角，故亦爲鈍角.

26. 有直角欲其在一平面上之射影，亦爲直角，則必有一邊與該平面平行，且

他邊不能垂直於該平面.試證之.

【證】



$\angle BAC$為所設之直角,P為所設之平面.欲$\angle BAC$在M上之射影成角,則任一邊不能垂直於該平面.因垂直則其邊之射影為一點故也.故欲得直角BAC之射影如$B'A'C'$,必無一邊垂直於平面P方可.

試令AC不與平面P平行,則$AB /\!/ P$.因AB若亦不與P平行,則$\angle B'A'C' \gtrless \angle R$故也.

次令$AB /\!/ P$,AC不垂直於P,則$\angle BAC$之正射影為$\angle B'A'C'$.又$AA' \perp A'B'$,$A'B' /\!/ AB$,$AA' \perp AB$,且$AB \perp AC$. $\therefore AB \perp$平面$AA'C'$.

從而$A'B' \perp$平面$AA'C'$,$\therefore A'C' \perp A'B'$。

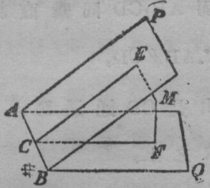
故題云云.

27. 從二面角內任意一點向二面引二垂線,則其垂線所成之角等於二面角

之平面角之補角.

【解】

PABQ為二面角,M為其角內任意一點,故M向二面各作垂線ME,MF;則$\angle EMF=$二面角之平面角之補角.



【證】

令ME,MF所定之平面爲R,則$R\perp AB$.

又令R與AB之交點爲C.

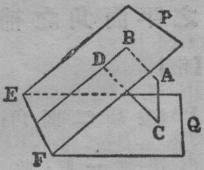
則$EC\perp AB$, $FC\perp AB$; $\therefore\angle ECF$爲二面角AB之平面角.

而四邊形MFCE,其$\angle MEC=\angle R=\angle MFC$.

$\therefore\angle EMF+\angle ECF=2\angle R$.

28. 從一點A,向相交二面P,Q,各作垂線AB,AC;又從C向P作垂線CD;則BD垂直於P,Q之交線上.試證之.

【證】



令 AB,AC 所定之平面爲 R.

則 $R \perp EF$.(EF 爲 P,Q 之交線)

而 AB,CD 同垂直於平面 P,

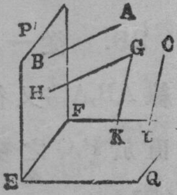
$\therefore AB /\!/ CD$.

由是 CD 通過 R 上之一點 C,而與 AB 平行,必在 R 之上。

從而 $BD \perp EF$.

29. 有二直線不相交,又不平行,而各垂直於一平面上,則此二平面之交線垂直於該二線,及其平行之任意平面上.試證之.

【解】



AB,CD 爲不相交,又不平行之二直線.P,Q 爲二平面.$AB \perp P$, $CD \perp Q$;EF 爲 PQ 之交線.

題言 EF 垂直於 AB,CD,及其平行之任意平面上.

【證】

空間任意取一點G,過G引AB,CD之平行線GH,GK;則AB⊥P,GH⊥P,由是GHK⊥P.

同樣GHK⊥Q,∴EF⊥GHK.

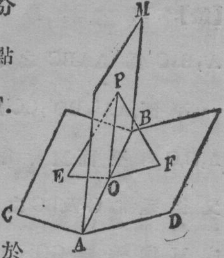
然GHK任何亦與AB,CD平行.

故EF垂直於AB,CD,其及平行之一任意平面上.

30. 分二面角爲二等分,則其分面上之各點,至二面角之各面,有相等之距離.

【解】

AM爲二面角CABD之二等分之平面,從AM上任意取一點P,向ABC,ABD各引垂線PE,PF.題言PE=PF.



【證】

令PE,PF所定之平面,各交於ABC,ABD.其交線爲OE,OF;連結PO.

則平面PEF垂直於平面ABC,ABD;

因知亦垂直於其交線.

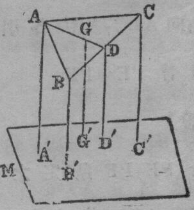
而 $\angle POE$,$\angle POF$ 爲測二面角 MABC, MABD 之平面角.由是 $\angle POE=\angle POF$.

因知兩直角三角形 POE,POF 全等.

$\therefore PE=PF$.

31. 從三角形之三頂點,向不截此三角形之任意一平面作垂線,則此三垂線之和,等於由三角形重心向同平面所作垂線之三倍.試證之.

【證】



A,B,C 爲 $\triangle ABC$ 之頂點,M 爲一平面.AA',BB',CC'爲由頂點 A,B,C 向平面 M 所作之垂線.

又從垂心 G 及 BC 之中點 D,各向 M 作垂線 GG',DD'.

則 B',L',C' 同在一直線上.

$\because BB'C'C$ 爲梯形,$\therefore BB'+CC'=2DD'$.

又 $AG:GD=2:1$,

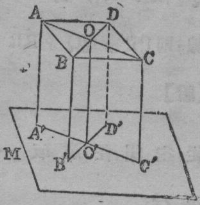
$\therefore 2DD'+AA'=3GG'$.

$\therefore BB'+CC'+AA'=3GG'$.

(注意)若 M 截 △ABC,則以與 G 同側之頂點所引之垂線,減其反對側之垂線,仍等於由 G 所引垂線之三倍.又若對於 M 一方之側爲正,則在反對之側爲負,取三垂線代數之和,故此命題恆爲眞.

32. 從平行四邊形之頂點,向不截取之平面引垂線,則其兩兩相對頂點所作之垂線之和,恆相等.

【解】



令 A, B, C, D 爲四邊形之角頂,M 爲平面.

AA', BB', CC', DD', 爲其所引之垂線.題言 $AA'+CC'=BB'+DD'$.

【證】

令對角線之交點爲O,從O向M引垂線OO'.

然$AA' /\!/ CC'$,故$AA'C'C$爲梯形.

而OO'爲過AC之中點,且與AA',CC'平行.

$\therefore 2OO'=AA'+CC'$.

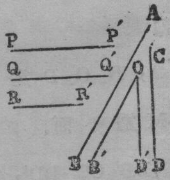
同樣$2OO'=BB'+DD'$.

$\therefore AA'+CC'=BB'+DD'$.

33. 有諸直線,若各垂直於不平行之兩直線上,則諸直線互爲平行.

【解】

AB,CD爲不平行之直線,PP',QQ',RR'⋯爲諸直線,題言PP',QQ',RR'⋯,各爲AB,CD之垂直線,則$PP' /\!/ QQ' /\!/ RR' /\!/$⋯⋯⋯⋯.



【證】

從空間任意取一點O,作OB',OD';令各與AB,CD平行.

因$PP'\perp AB$, $\therefore PP'\perp OB'$.同樣$PP'\perp OD'$.

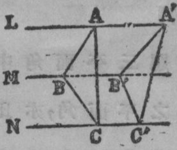
由是$PP'\perp$平面$B'OD'$.

同樣QQ',RR',……亦垂直於平面$B'OD'$.

$\therefore PP'\parallel QQ'\parallel RR'\parallel\cdots\cdots$.

34. 有三平行線,不在同一平面上,試從各線上取角頂作三角形,則其周最小之三角形必垂直於平行線上.試證之.

【證】



$L\parallel M\parallel N$且不在同一平面上,$\triangle ABC$之角頂,均在L,M,N上,則$\triangle ABC$垂直於L,M,N上,

再從L,M,N上,取角頂任意作一$\triangle A'B'C'$,則$\triangle A'B'C'$不垂直於L,M,N.

然$L\perp$平面ABC,$M\perp$平面ABC.

$\angle A'AB=\angle ABB'=\angle R$.

故AB爲L,M之距離,$AB\leq A'B'$.

同樣$BC\leq B'C'$,$AC\leq A'C'$.

然此三個關係式之符號,皆不能二者同時成立.

若 $AB=A'B, BC=B'C'$,則$AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$.

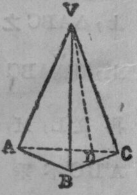
因知 $ABC \parallel A'B'C'$,故 L,M,N 當垂直於 $A'B'C'$,於理不合.

$\therefore AB+BC+CA<A'B'+B'C'+C'A'$.

35. 有三面角,其任意二平面角之和或差,均比第三平面角大或小.

【解】

本題三平面角中,就其最大及最小之平面角,亦比他二平面角之和或差較小或較大,而證明之可也.



即 $\angle AVC<AVB+\angle BVC$,或 $\angle AVC-\angle AVB<\angle BVC$.

【證】

就 AVC 內引直線 VD,令 $\angle AVD=\angle AVB$.

過VD上任意一點D,引直線 ADC 截 VA,VC於A,C.

假設$\angle AVC>\angle AVB$,則 D 在 A,C 之間.

次取 $VB=VD$,連結 AB,BC;則 $\triangle AVD\equiv\triangle AVB$,

$\therefore AD=AB$.

又就 $\triangle ABC$ 得 $AB+BC>AC$.

由是引兩邊相等之 AB,AD;則 $BC>DC$.

故就 $\triangle BVC$ 與 $\triangle DVC$,得 $\angle BVC>\angle DVC$,以 $\angle AVB=\angle AVB$,加其兩邊,則$\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$.

依上之證明$\angle DVC<\angle BVC$;然 $\angle DVC=\angle AVC-AVB$,

$\therefore\angle AVC-\angle AVB<\angle BVC$.

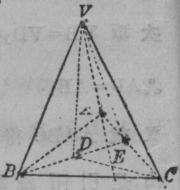
同樣其他二面角之和或差,均比其第三面角大或小也.

36. 有三面角 V-ABC,其頂點V向其三面角內任意引一直線VD:則 $\angle DVB+\angle DVC<\angle AVB+\angle AVC$.試證之.

【證】

與三稜相交,任意作一平面,令與各稜及直線VD之交點為 A,B,C,D.

又 BD 之延線與 AC 之交點為 E.



則就三面角 V-ABE,

得 ∠AVB+∠AVE>∠BVE;

又就三面角 V-EDC,

得 ∠DVE+∠EVC>∠DVC.

由是∠AVB+∠AVE+∠DVE+∠EVC>∠BVE+∠DVC.

兩邊各減 ∠DVE,

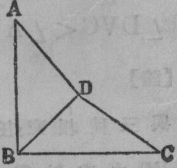
則 ∠AVB+∠AVE+∠EVC>∠BVE−∠DVE+∠DVC,

即 ∠AVB+∠AVC>∠BVD+∠DVC.

37. 可列氏四邊形,其四劣角之和小於四直角.

【解】

ABCD 為可列氏四邊形.



題云此四劣角之和小於四直角.

【證】

作直線 BD.

則分ABCD為$\triangle ABD$,$\triangle CBD$.

此二個三角形之內角之和,等於四直角.

即$\angle A+\angle ABD+\angle ADB+\angle CBD+\angle CDB+\angle C=4\angle R$.

然從B,D之三面角,得

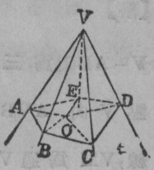
$\angle ABC<\angle ABD+\angle CBD$,$\angle ADC<\angle ADB+\angle CDB$.

故前式中之$\angle ABD+\angle CBD$及$\angle ADB+\angle CDB$代以較小之$\angle ABC$及$\angle ADC$,

則$\angle A+\angle ABC+\angle ADC+\angle C<4\angle R$.故題云云.

38. 任意凸多面角,其各平面角之和小於四直角.

【證】



任意凸多角V以一平面截之,其截面為ABCDE.假設ABCDE為凸多角形,從其內任取一點O,引OA,OB,OC,OD,OE;則共有頂點V之諸三角形VAB,VBC,VCD….各內角之和,等於共以O為頂點所作同數三角

形OAB,OBC,OCD,....各內角之和.

然 $\angle VAE+\angle VAB>\angle EAB$,

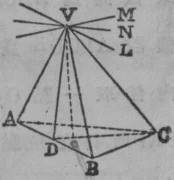
$\angle VBA+\angle VBC>\angle ABC$.

故此不等式兩邊各相加,則共有頂點V各三角形底角之和,比共有頂點O各三角形底角之和較大.

因知頂點V之各頂角之和比頂點O之各頂角之和小,即比四直角小.故題云云.

39. 過三面角之頂點,向其各面上相對之稜作垂線,則此三垂線必同在一平面上.試證之.

【解】



V-ABC 爲三面角,VL 爲過頂點V向 AVB 之對稜 VC 之垂線,VM 爲過V向 BVC 對稜VA 之垂線,VN 爲過 V 向 AVC 對稜 VB 之垂線,題言 VL, VM, VN,

同在一平面上.

【證】

VO爲過各稜垂直於對面之三平面之交線,過O作VO之垂直平面,交各稜於A,B,C點,延長CO交AB於D.然 $VCD \perp VAB$, $VCD \perp ABC$, $\therefore VCD \perp AB$, $\angle VDB = \angle R$.

次平面CVL與平面AVB之交線爲VL.

而VC與VL爲垂直,$\therefore$ 平面 $CVD \perp VL$.

由是 $\angle DVL = \angle R$, $\therefore VL \parallel AB$.

同樣 $VM \parallel BC$, $VN \parallel AC$.

由是VL,VM,VN,均與平面ABC平行.

故過此三直線所作之平面與ABC平行.

則三直線VL,VM,VN皆在同一平面上.

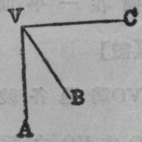
40. 凡面角爲直角之三面角,其各二面角均爲直角.

【證】

設V-ABC爲三面角.

$\because \angle AVB = \angle BVC = \angle CVA = \angle R$.

則 $VB\perp VA\perp VC$.



故 $\angle BVC$ 爲測二面角 VA 之角。

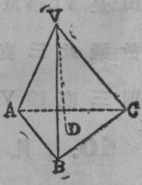
∴ 二面角 $VA=\angle R$.

因知二面角 $VB=$ 二面角 $VC=\angle R$.

41. 過三面角之頂點,向此三面角內引一直線,則此直線與各稜之三個角之和比三面角之三個面角之和小,而比其和之半分大.試證之.

【證】

$V-ABC$ 爲三面角,過其頂點V,向 $V-ABC$ 內任意引直線 VD.



然 $\angle AVD+\angle BVD<\angle AVC+\angle BVC$,

$\angle BVD+\angle CVD<\angle AVB+\angle AVC$,

$\angle CVD+\angle AVD<\angle BVC+\angle AVB$.

以上之不等式兩邊各相加,則

$2(\angle AVD+\angle BVD+\angle CVD)<2(\angle AVC+\angle BVC+\angle AVB)$,

即 $\angle AVD+\angle BVD+\angle CVD<\angle AVC+\angle BVC+\angle AVB$.

次就三面角 $\angle V-BDC$, $\angle V-CDA$, $\angle V-ADB$ 得

$\angle BVD+\angle CVD>\angle BVC$,

$\angle CVD+\angle AVD>\angle AVC$,

$\angle AVD+\angle DVB>\angle AVB$.

由是 $2(\angle AVD+\angle BVD+\angle CVD)>\angle AVB+\angle BVC+\angle AVC$,

即 $\angle AVD+\angle BVD+\angle CVD<\frac{1}{2}(\angle AVB+\angle BVC+\angle AVC)$.

42. 同在 $\triangle ABC$ 平面上,且在其內作 $\triangle DEF$, 又從其平面外之一點 V 爲頂點作 $V-ABC$, $V-DEF$, 則 $V-ABC$ 三個面角之和,比 $V-DEF$ 三個面角之和大.試證之.

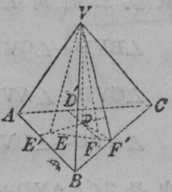
【證】

先延長 EF 交 BC 於 F', 則就 $V-DFF'$,

得 $\angle FVF'+\angle F'VD>\angle DVF$.

由是 $\angle DVE+\angle EVF'+\angle F'VD>\angle DVE+\angle EVF+\angle FVD$.

次延長FD交AC於D′,則就



V－D′EF′,V－DEF′,

得 $\angle D'VE+\angle EVF'+\angle F'VD'>$

$\angle DVE+\angle EVF'+\angle F'VD.$

又延長DE交AB於E′,同樣得

$\angle D'VE'+\angle E'VF'+\angle F'VD'>\angle D'VE+\angle EVF'+F'VD'$,

然 $\angle AVB+\angle BVC+\angle CVA>\angle D'VE'+\angle E'VF'+$

$\angle F'VD.$

因知

$\angle AVB+\angle BVC+\angle CVA>\angle DVE+\angle EVF+\angle FVD.$

43. 以等邊三角形或正方形或二種並用,作多面角.問可得幾種.

【解】

每多面角之面數不能小於三,又凡面角之和,不可不比 $4\angle R$ 小.

然正三角形之一角 $\alpha=\frac{2}{3}\angle R$,正方形之一角 $\beta=\angle R$.

故僅用正三角形之一種,

則 $3\alpha, 4\alpha, 5\alpha$ 皆比 $4\angle R$ 小,而 $6\alpha=4\angle R$.

故以三,四,五個正三角形,均可作得一多面角。

又僅用正方形之一種,

則 $3\beta<4\angle R$,而 $4\beta=4\angle R$.

故用正方形作多面角,只有一種,

而 $\alpha+2\beta, \alpha+3\beta, 2\alpha+\beta, 2\alpha+2\beta, 3\alpha+\beta, 4\alpha+\beta$,均比 $4\angle R$ 小,

但 $\alpha+4\beta, 2\alpha+3\beta, 3\alpha+2\beta, 4\alpha+2\beta, 5\alpha+\beta$,皆不小於 $4\angle R$.

故用正三角形與正方形兩種,作多面角,計有六種.

由是共得十種.

44. 以同一種類之正多角形,作多面角.問可得幾種.

【解】

正 n 邊形之一角 $\alpha=\frac{2n-4}{n}\angle R$.

而多面角之面數,不能小於三。

又其3倍不可不小於$4\angle R$.

由是得不等式如$3\,\frac{2n-4}{n}\angle R<4\angle R$.

解之得$n<6$.

故正多角形之邊數,不可不比6小.

從此得正五邊形之三面角,正方形之三面角.

正三角形之五面角,四面角,三面角,共有五種.

摘要第二

多面體之重要定理

1. 任意多面體,其面數為 F,頂點數為 V,稜數為 E,則 $F+V=E+2$.

2. 正多面體,僅有五種.

3. 平行六面體之對面為相等之平行四邊形,又各對角線交於一點,互為二等分.

4. 過柱體側稜所截之平行平面為全等形.

5. 截錐體之面,與錐體之底平行,則其截面與底面相似,而其比等於自頂點至截面之距離之平方與錐體之高之平方之比.

6. 等底等高之兩錐體相等.

7. 三角臺之體積等於其兩底面及兩底面之比例中項爲底面,而與原體同高之三個三角錐體之體積之和.

8. 相似兩多面體之各相似面平行置之,則各相應角頂之連結線,必會於一點.

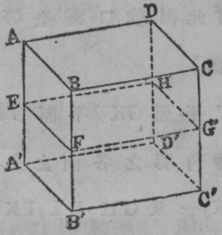
9. 相似兩錐體之比,等於其底面相應邊之立方比.

10. 兩相似多面體之比,等於其相應稜之立方比.

多面體

45. 平行六面體之任意四平行稜之中點,得爲平行四邊形之各角項.

【解】



ABCD−A′爲平行六面體,E,F,G,H爲互相平行四稜AA′,BB′,CC′,DD′之中點.

題言E,F,G,H爲平行四邊形之各角項.

【證】

∵E,F爲平行四邊形AA′B′B對邊之中點.

∴EF∥AB,同様GH∥DC.

然AB∥DC,∴FE∥GH. ∴同様EH∥FG.

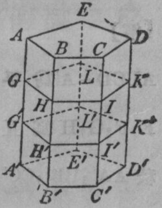
由是四邊∴形EFGH爲平行四邊形.

故題云云.

46. 有一角壔,以其各稜相交之兩平行平面截之,則其截口爲全等之多角形.

試證之.

【解】



AD′ 爲一角壔,GHIKL 及 G′H′I′K′L′ 爲以兩平行平面所截之截口.題言此兩截口爲全等之多角形.

【證】

∵ 平面 GK∥平面 G′K′,此兩平面與角壔之各面之交線 GH, HI, IK,… 及 G′H′,H′I′,I′K′,… 各各平行.

因知此交線所成之角亦各相等.

而此交線夾在角壔各平行稜之間亦相等.

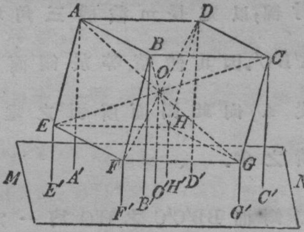
如是兩多角形之邊角各相等;故爲全等之多角形.

47. 從平行六面體之各角頂,向其不相截之一平面上作垂線,則各垂線之和,等於從其對角線之交點向其同平面所

作垂線之8倍.試證之.

【證】

ABCD－EFGH 爲平行六面體,然四對角線同過一點,且互爲二等分.



今從此平行六面體之各角項 A,B,C…及對角線之交點 O,向其不相截之任意一平面 M,引垂線 AA′, BB′, CC′,………,OO′.

然 O 爲 AG 之中點, $\therefore AA'+GG'=2OO'$.

同樣 $BB'+HH'=2OO'$, $CC'+EE'=2OO'$, $DD'+FF'=2OO'$.

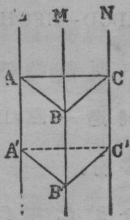
各式相加得.

$AA'+BB+\cdots+HH'=8OO'$.

48. 有三平行線,不在同一平面上,試以定長任截成三角壔,則其體面積均相

等.試證之.

【證】



L,M,N 爲不同在一平面上之三平行線,以定長 m 截成三角壔 $ABC-A'B'C'$.因其體積等於側面 $BB'C'C$ 與從 A 向此側面所引之垂線相乘積之半.

然側面 $BB'C'C$ 之 $C'C$ 爲一定之長.

且 $BB'=CC'$,而其距離亦爲一定.

因知其面積爲一定.

又 $L /\!/$ 面 BC',則從 L 上之點,向面 BC' 引垂線,爲一定之長.

由是其相乘積,亦爲一定.

$\therefore$ 三角壔之體積爲一定.

49. 我國萬里長城長 1500 哩,高 20 呎,頂上之闊 15 呎,底下之闊 25 呎,約含立方碼若干?

【解】

我國萬里長城,實多屈曲,其體積之各面,亦非直線形,玆以梯形直角壔計算,其誤差亦極小.

其底之平行二邊爲15呎,25呎;高爲20呎;

$\therefore$ 面積$=\frac{15+25}{3\times2}\times\frac{20}{3}=\frac{400}{9}$平方碼.

而其長爲1500哩$=1500\times1760$碼.

$\therefore$ 所求之體積$=\frac{400}{9}\times1500\times1760=117333333$,即約爲117300000立方碼.

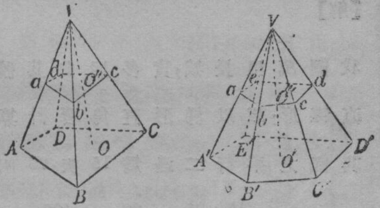
50. 有等高VO,V′O′之兩個角壔V−ABCD,V′−A′B′C′D′E′;其底平行,且從各頂點之等距之平面截之,則其截面abcd與a′b′c′d′e′之比,等於其底ABCD與A′B′C′D′E′之比.

【證】

令高VO,V′O′與截面之交點爲O″,O‴,

則 $abcd : ABCD = \overline{VO''}^2 : \overline{VO}^2$;

$a'b'c'd'e' : A'B'C'D'E' = \overline{V'O''} : \overline{V'O'}$.



然 $VO'' = VO'''$, $V'O = V'O'$.

$\therefore abcd : ABCD = a'b'c'd'e' : A'B'C'D'E'$.

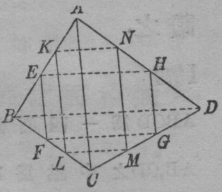
即 $abcd : a'b'c'd'e' = ABCD : A'B'C'D'E'$,

故題云云.

51. 有四面體以平行於其對稜之平面截之,則其截口爲平行四邊形,但所截之平行四邊形有多種,究以何種截口爲最大?

【證】

ABCD 爲四面體,KLMN 爲平行於其對稜 AC,BD 之平面之截口,題言其截口爲平行四邊形.



面 KM∥AC, KL∥MN. 同樣 KN∥LM, 由是知 KLMN 爲平行四邊形. 次求此截口之面積, 在最大之位置.

∵KN∥BD, KL∥AC, ∠NKL 等於 AC, BD 所成之角, 常爲一定, 由是知平行四邊形之面積, 從 KN·KL 而變化.

而 KN∶BD＝AK∶AB, KL∶AC＝BK∶AB.

即 $KN\cdot KL : BD\cdot AC = AK\cdot BK : \overline{AB}^2$.

然 BD·AC 及 $\overline{AB}^2$ 爲一定, KN·KL 隨 AK·BK 而變化.

而 AK＋BK＝AB 爲一定.

AK·BK 爲最大, 則必 AK＝BK

由是 KN·KL 爲最大, 因知平行四邊形 KLMN 爲最大.

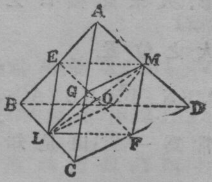
即 K 爲 AB 之中點.

√**52.** 有四面體從其各對稜之中點, 結成直線, 必同交於一點, 且互爲二等分. 試

證之.

【解】

ABCD爲一四面體,其對稜AB,CD之中點爲E,F;對稜AC,BD之中點爲G,H;對稜AD,BC之中點爲M,L;題言EF,GH,LM同交一點,且互爲二等分.



【證】

EM及LF各平行於BD,且等於BD之半.

∴EM∥LF,EM=LF;∴ELFM爲平行四邊形.

而對角線EF,LM互爲二等分.

同樣GLHM亦爲平行四邊形,而GH,LM互爲二等分.

由是EF,GH,LM同交一點,且互爲二等分.

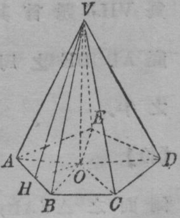
(別證)EF,LM爲可列氏四邊形ABCD對邊中點連結之直線,以其相交,且互爲二等分.

同樣IM,GH亦相交,且互爲二等分.

53. 角錐側面積,比其底之面積較大.

【證】

V-ABCDE爲角錐,從頂點V向ABCDE引垂線VO.從O至底之各頂點以直線連結之.次從O向邊AB引垂線OH,又連結VH.



則就$\triangle VOH$,得$\angle O=\angle R$, $VH>OH$.

而$OH\perp AB$, $VH\perp AB$;

$\therefore \triangle VAB=\frac{1}{2}AB\cdot VH$.

$\triangle OAB=\frac{1}{2}AB\cdot OH$,由是$\triangle VAB>\triangle OAB$.

同樣$\triangle VBC>\triangle OBC$, $\triangle VCD>\triangle OCD$,....

$\therefore \triangle VAB+\triangle VBC+\cdots>\triangle OAB+\triangle OBC+\cdots$,

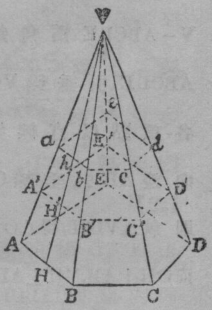
此不等式之左邊爲角錐側面積,右邊爲其垂線之足在底面之周上或在其內之底面積.若O在底外,則右邊比底較大明甚.

故任何之側面積,均比底面積大.

54. 正角錐之側面積,等於其底之周與斜高相乘積之半.

【解】

V－ABCDE 爲正角錐,其斜高爲 VH,題言其側面積等於底 ABCDE 之周與 VH 相乘積之半.



【證】

側面之 △VAB,△VBC,…均爲全等之二等邊三角形,故其高卽斜高,相等之底卽多角形 ABCDE 之邊.

故 △VAB, VBC,…之面積之和等於邊 AB, BC,…之和與斜高 VH 相乘積之半.

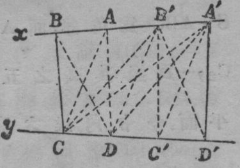
但各三角形面積之和,卽正角錐之側面積.

故正角錐之側面積等於底之周與VH相乘積之半.

55. 有不在同一平面之直線XY,試從X上取一定之長AB,Y上取一定之長CD;作四面體ABCD,而AB,CD各在XY上移動.

其體積仍不變.試證之.

【解】



就直線X上任意之位置,

取 $A'B'=AB$.

又Y上取 $C'D'=CD$.

題言四面體 $A'B'C'D'$ 等於四面體 ABCD.

【證】

先以CD固定,而移動AB於 $A'B'$ 之位置,則得兩個四面體 ABCD,$A'B'CD$,而 $\triangle ABD$,$\triangle A'B'D'$ 之底AB及 $A'B'$ 相等,高又相等,故其積等.

又兩個四面體之高爲從C點向 $A'B$ 與D所決定之平面上之垂線,故其高相等.

如是二個四面體,等底等高,故爲等積.

次就 $A'B'CD$ 證之,先固定AB,而移CD於 $C'D'$.

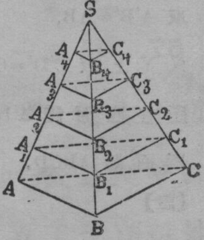
與上同樣,知 $ABC'D'$ 與 $A'B'C'D'$ 爲等積.

故題云云.

56. 有角錐之高,分爲五等分,試過五

分點,以與底平行之平面截之,則其所生之角臺及全角錐之體積之連比如何?

S－ABC 爲角錐,面 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$,…爲過其高之五等分點之平面.今令角錐之高爲h,底之面積爲m;則 $A_1B_1C_1 : ABC =$



$(\frac{4}{5}h)^2 : h^2 = 16:25$, $\therefore A_1B_1C_1 = \frac{16}{25}m$.

同様 $A_2B_2C_2 = \frac{9}{25}m$, $A_3B_3C_3 = \frac{4}{25}m$, $A_4B_4C_4 = \frac{1}{25}m$.

$\therefore S-ABC = \frac{1}{3}mh$, $S-A_1B_1C_1 = \frac{1}{3} \times \frac{16}{25}m \times \frac{4}{5}h = \frac{64}{375}mh$,

$S-A_2B_2C_2 = \frac{1}{3} \times \frac{9}{25}m \times \frac{3}{5}h = \frac{27}{375}mh$.

$S-A_3B_3C_3 = \frac{8}{375}mh$, $S-A_4B_4C_4 = \frac{1}{375}mh$.

由是角臺 $ABC-A_1B_1C_1 = \frac{125-64}{375}mh = \frac{61}{375}mh$,

$A_1B_1C_1 - A_2B_2C_2 = \frac{37}{375}mh$, $A_2B_2C_2 - A_3B_3C_3 = \frac{19}{375}mh$,

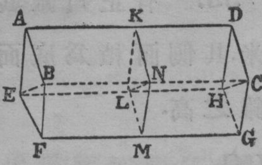
$A_3B_3C_3-A_4B_4C_4=\frac{7}{375}mh$。

$\therefore S-ABC:ABC-A_1:A_1B_1C_1-A_2:A_2B_2C_2-A_3:A_3B_3C_3-A_4:S-A_4B_4C_4=125:61:37:19:7:1$。

57. 橫過一溪築一鐵道線路之隄,其頂上之闊爲20呎,長爲1020碼,其底之闊爲45呎,長爲960碼,而高爲11呎.其土之體積有若干立方呎?

【解】

鐵道線路之堤爲ABCD－EFGH.其底EFGH及頂上之面ABCD,俱可作水平,且爲矩形.今以通過



其對稜BC,EH之平面截之,成兩個截頭三角壔.又以此平行之稜之垂直面截之,其截口爲KLMN.則兩個三角壔之體積爲

$\frac{1}{3}(AD+BC+EH)\times\triangle KLN$及$\frac{1}{3}(FG+BC+EH)\times\triangle LMN$.

然 $\triangle KLN$, $\triangle LMN$ 之面積為$\frac{1}{2}h\cdot KN$, $\frac{1}{2}h\cdot LM$,其 h 為堤體積之高度.

$\therefore$ 此體積為$\frac{1}{6}h\{KN(2BC+EH)+LM(2EH+BC)\}$.

今 $KN=20$ 呎, $LM=45$ 呎, $h=11$ 呎, $BC=1020$ 碼 $=3060$ 呎; $EH=960$ 碼 $=2880$ 呎, V 為所求之體積.

$$\therefore V=\frac{1}{6}\times 11\{20(2\times 3060+2880)+45(2\times 2880+3060)\}$$

$$=1057650 \text{ 立方呎}.$$

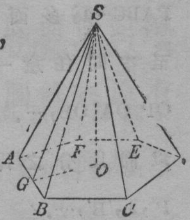
58. 有正角錐其底為六邊形,每邊 3 米,其側面積為底面積之10倍,試求此角錐之高.

【解】

S-ABCDEF 為正六角錐, O 為底之中心,引 SO 垂直於底面,又 $OG\perp AB$.

則 $SG\perp AB$,而 OG 為正六邊形之邊心距, SG 等於

各側面之高.



令SO之長爲x,則$OG=\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$SG=\sqrt{\left(x^2+\frac{27}{4}\right)}$.

由是角錐之側面積爲$\frac{1}{2}\sqrt{\left(x^2+\frac{27}{4}\right)}\times 3\times 6$,底之面積爲$\frac{3\sqrt{3}}{2}\times 9$.

$\therefore 9\sqrt{\left(x^2+\frac{27}{4}\right)}=10\times\frac{27\sqrt{3}}{2}$,即$\sqrt{\left(x^2+\frac{27}{4}\right)}=5\times 3\sqrt{3}$,

即 $x^2+\frac{27}{4}=225\times 3$.

故 $x^2=675-\frac{27}{4}=\frac{2673}{4}$,

即 $x=\frac{9}{2}\sqrt{33}=26\cdots$米.

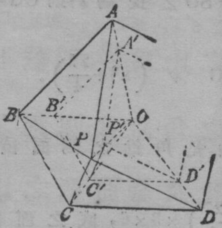
√**59.** 有多面體從各頂點至空間任意一點聯成直線,以同比得各直線之內分點,順次連結成直線.則可得最初多面體相似之一多面體.試證之.

【解】

PABC…爲多面體,從各頂點至空間任意一點O,相連成OP,OA,OB,….

以同比分之得其內分點爲P′,A′,B′,….

題言P′A′B′C′….與PABC….相似.



【證】

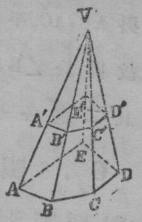
就△OPA,其P′,A′爲OP,OA同比之內分點,PA∥P′A′,又OA:A′A=OB′:B′B;∴AB∥A′B′.

同樣P′B′∥PB,因知△PAB,△P′A′B′爲各邊平行之相似三角形.同樣相對應之面相似且同向平行,由是知平行二面所成之二面角,順次相等,故兩多面體爲相似.

(注意)若同比在OP延線上之外分點,亦可同樣證明其互相似.又同比在OP延線上外分,則其各面各相似,而對應二面角相等,則可得順序相反之二相似多面體.

60. 有角錐或圓錐,以平行於底面之平面截之,從頂點至截面及底面兩距離之比為$\frac{m}{n}$,則截取之角錐或圓錐與原有之角錐或圓錐之底面積之比,側面積之比,及全面積之比,俱等於$\frac{m^2}{n^2}$,而其體積之比等於$\frac{m^3}{n^3}$.試證之.

【證】



$V-ABCDE$為角錐,$A'B'C'D'E'$為截面,

$ABCDE \parallel A'B'C'D'E'$,此兩面至$V$之距離之比為$\frac{m}{n}$.

$\therefore A'B'C'D'E' : ABCDE = m^2 : n^2$.

$\therefore V-A'B'C'D'E' \backsim V-ABCDE$.

其底面積或側面積之比為$\overline{VA'}^2 : \overline{VA}^2$.

然$VA' : VA = m : n$.

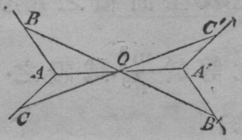
$\therefore$底面積或側面積之比為$m^2 : n^2$.

又全面積之比爲 $m^2:n^2$.

而其體積之比爲 $m^3:n^3$.

61. 關於 $\angle BAC$ 任意一點O,作對稱之圖形,必得相等之角 $\angle B'A'C'$.

【證】



O爲對稱之中心,今A'爲A關於O之對稱點,則邊AB,A'B'關於O點之對稱直線,各過A而與AB,AC平行之直線A'B',A'C'.

故關於 $\angle BAC$ 之點O之對稱圖形爲 $\angle B'A'C'$.

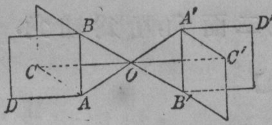
且二邊各平行而俱在反對之方向,又互相等.

62. 關於二面角DABC任意一點O,作對稱圖形,爲其相等之二面角D'A'B'C'.

【證】

今關於面ABD,ABC之點O之對稱平面,爲A'B'D',A'B'C'.

則面 ABD∥面 A′B′D′,



面 ABC∥面 A′B′C′.

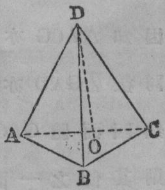
且二面角在反對之方向.

由是知其二個二面角相等.

√63. 已知一稜之長,試作正四面體.

【解】

AB 為所設之稜之長,從 AB 上作正三角形 ABC,過其中心 O 作該平面之垂線 OD.令 AD=AB,連結 BD,CD;則 ABCD 為所求之正四面體.



∵ O 為 △ABC 之中心,AO=BO=CO.

∴ AD=BD=CD=AB=….

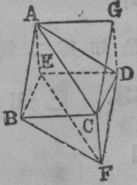
∴ 四面體之各面為正三角形.

由是知其各三面角互等.

∴ABCD 為正四面體.

64. 正四面體之二面角,與正八面體之二面角,互為補角.

【證】



ABCDEF 為正八面體,過頂點 A,引 BC 之平行線 AG,令AG=BC.

次連結 GC, GD,則四邊形 ABCG 為平行四邊形.

而 △ABC 為正八面體之一面,故為正三角形.

因知 △ACG 亦為正三角形.

同樣 △GAD 亦為正三角形.

然四面體 GACD 之三面,為全等之正三角形,則其餘之一面,亦當為全等之正三角形.

故此四面體為正四面體.

由是以 AC 為公共稜之二面角 BCAD,DCAG,因 ABCG 為一為平面,則此二面角互為補角.

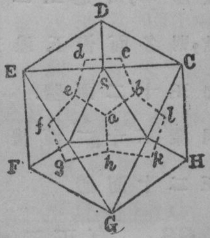
故題云云.

65. 正二十面體得作內接正十二面

體;而正十二面體,亦得作內接正二十面體.

【證】

SABCDEF……爲正二十面體,其多面角爲五個正三角形之面所成,今多面角S之五個正三角形SAB,SBC,…SEA之各重心,令爲a,b,c,d,e, 則 Sa,Sb,Sc,……



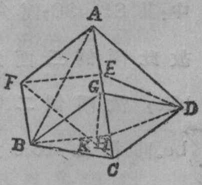
各爲面角之二等分,且爲全等正三角形之外接圓半徑而相等;在二個三面角 S-aBb,S-bCc 中,其 SB=SC,面角 aSB,BSb 各等於面角 bSC,CSc;故此兩個三面角爲全等.因知面角 aSb= 面角 bSc, 故兩個二等邊三角形 Sab,Sbc全等,而 ab=bc.同樣知 abcde 之五邊皆相等,且同在一平面上.此因從 S 向面 ABCDE 作垂線,依 2:1 之比分之,過分點,作平行於其面之平面,則五邊形之各頂點皆在此平面上故也.

次證明此頂點與從S向平面ABCDE引垂線之足,有相等之距離,故abcde限正五邊形.同樣aefgh,ahklb皆五邊形.而其數爲正二十面體頂點之數卽12,由是正二十面體各面之重心,順次連結,則各面皆五邊形,而得其面數爲十二面體,卽正十二面體.

同樣正十二面體之頂點有二十,故可作內接正二十面體.

66. 有正二十面體,求其二面角之大.

【解】



正二十面體之任一頂點,有五稜相會,如A點有AB,AC,AD,AE,AF.

然BCDEF爲正五角形,今從B向稜AC引垂線BG,則DG⊥AC,因△ABC爲正三角形,G爲AC之中點,而△ACD亦爲正三角形故也.且BG=DG.

次從G引BD之垂線GH,則GH分∠EGD爲二等分.由是∠EGD爲正二十面體之二面角之測度,而∠EGH爲其半分.然$\overline{EG}^2=\frac{3}{4}\overline{AB}^2$,FC,BD之交點爲K,則

$DK=DC=BC$, $\overline{DK}^2=BK\cdot BD$.

$$\frac{\overline{GH}^2}{\overline{BH}^2}=\frac{\overline{EG}^2-\overline{EH}^2}{\overline{EH}^2}=\frac{4\overline{BG}^2-4\overline{BH}^2}{4\overline{BH}^2}=\frac{3\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}{\overline{BD}^2}$$

$$=\frac{3\overline{KD}^2-(BK+KD)^2}{\overline{BD}^2}=\frac{2\overline{KD}^2-2BK\cdot KD-\overline{BK}^2}{\overline{BD}^2}$$

$$=\frac{2BK\cdot BD-2BK\cdot KD-\overline{BK}^2}{\overline{BD}^2}=\frac{2BK(BD-KD)-\overline{BK}^2}{\overline{BD}^2}$$

$$=\frac{\overline{BK}^2}{\overline{BD}^2}=\frac{\overline{BK}^4}{\overline{BD}^2\cdot\overline{BK}^2}=\frac{\overline{BK}^4}{\overline{KD}^4}.$$

$$\therefore\frac{GH}{BH}=\frac{\overline{BK}^2}{\overline{KD}^2}.$$

由是所求之二面角,若以任意有限直線爲斜邊,以他二邊之比等於分任意直線爲外中比

之二線分之二乘比,依樣作之,則其二面角等於小邊與斜邊所成之角之二倍.

67. 任意多面體,其面之數爲F,多面角之數爲V,稜之數爲E,則F+V=E+2.試證之.

【證】

試取一m多角形,連次附加於他之多角形,則變成多面體.

於此附加之際,設其稜之數爲E′,面之數爲F′,角頂之數爲V′.由是第一所取之多角形,

$\because F'=1, E'=m, V'=m; \therefore E'-V'=0.$

第二附加一個面,則與前之面含有公共之稜,及公共之二角頂,故新稜比新角頂多增一個.故F′=2時,則E′−V′=1.

第三更附加一個面,則與前同樣,其新稜又比新角項多增一個.$\therefore F'=3$,則E′−V′=2.

順次爲此,每次加一個面,則新稜比新角頂每

多增一個可知.

由是至最後 $F'=F-1$ 時,則 $E'-V=F-2$.

於此更附加一個面得成全多面體.

但此時雖加一個面,而稜及角頂更不增加.

卽 $F'=E$ 時,$E-V=F-2$,卽 $F+V=E+2$.

(注意)此定理是可列氏發見,故名可列氏定理.

68. 試用可列氏之定理,證明各正多面體.

【證】

可列氏定理之公式爲 $F+V=E+2$.

(I)正四面體:

其面數及頂點數均爲4,而稜之數爲6.

則 $F+V=4+4$,$E+2=6+2$,$\therefore 4+4=8=6+2$.

(II)正六面體:

$\because E=12, F=6, V=8$,

$\therefore F+V=E+2=14$.

(III)正八面體:

$\because E=12, F=8, V=6,$

$\therefore F+V=E+2=14.$

(IV)正十二面體:

$\because F=12, V=\frac{5\times 12}{3}=20, E=\frac{5\times 12}{2}=30.$

$\therefore F+V=E+2=32.$

(V)正二十面體

$\because F=20, V=\frac{3\times 20}{5}=12, E=\frac{3\times 20}{2}=30,$

$\therefore F+V=E+2=32.$

摘要第三

旋轉體之重要定義

1. 圓柱之側面積等於底圓周與高之乘積.

2. 圓柱之體積等於底面積與高之乘積.

3. 圓錐之側面積等於底面之圓周與斜高相乘積之半.

4. 截圓錐之側面積等於以兩底圓周之和與斜高相乘積之半.

5. 圓錐體積等於同底同高之圓柱體積三分之一.

6. 球以平面截之,其截面爲圓,若過球心則爲大圓.

7. 球之二大圓必互爲二等分.

8. 通過不在同平面上之四點,僅能作一球面.

9. 球面積等於大圓面積之四倍.

10. 球體積等於含有其面積爲底面,其半徑爲高之錐體之體積.

11. 一球面三角形,若爲他球面三角形之極三角形,則第二之三角形爲第一之極三角形.

12. 球面三角形之面積,等於其等勢三角形之面積.

13. 在同球或等球內,其兩個月形之面積相比,等於其球面角相比.

14. 球面三角形三角之和,大於二直角而小於六直角.

旋轉體

69. 人言稜數小於 6,則不能作成多面體,其說然否?試列式以明之.

【證】

因多面體之面數,不能小於3;多面角之角數,亦不能小於3.

由是知稜數最少之多面體,其各面爲三角形,而多面角爲三面角.

故令其稜,角,面,爲 E,V,F.

則 $E=\frac{3V}{2}=\frac{3F}{2}$,

或 $\frac{E}{3}=\frac{V}{2}=\frac{F}{2}=\frac{V+F}{4}=\frac{E+2}{4}$.

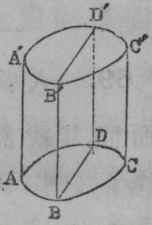
由是得 $E=6$,

即 E 等於 6 爲其最小之數.

70. 有曲線壔,試以過母線之平面截之,則其截口爲平行四邊形.

【解】

ABC－A′B′C′ 爲曲線壔.



題言以通過其母線BB′之平面截之,則截口BB′D′D爲平行四邊形.

【證】

過點D引母線DD′,與母線BB′平行.

故此母線在於截面B′D之上.

由是此母線在壔曲面及截面上.

此與二面之交線DD′爲一致.

而二底平行,卽BD∥B′D′.

∴BB′D′D爲平行四邊形.

因此平面上平行四邊形之外或內之點,皆在曲線壔之外或內.而曲線壔之表面與截面之交點,決不在上所述平行四邊形之周之外.

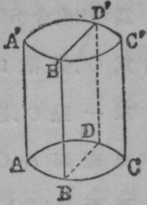
故題云云.

71.　有直曲線壔以與其底垂直之平面截之,則其截口爲矩形.

【證】

直曲線壔爲 ABC－A′B′C′.

以與其底垂直之平面截之,其截口爲 BB′D′D.



題云 BB′D′D 爲矩形.

因截面與底之交線爲 BD. 今過 B 引母線,則其母線垂直於底 ABC.

因知在截面 BD′ 之上.

故曲面與截面之交線爲一母線 BB′.

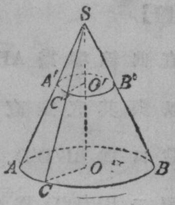
然截面 BD′ 爲平行四邊形.

而 BB′⊥底 ABC,∠B′BD＝∠R.

由是截口 BB′D′D 爲矩形.故題云云.

72. 有直圓錐,以與其軸垂直之平面截之,則其截口爲圓,而其中心爲截面與軸之交點.

【證】



直圓錐爲s-AB,以垂直於軸SO上之平面P截之,則其截口爲A'B'.今SO與平面P之交點爲O'.從截口A'B'之周上任意取一點C'.連結SC',且延長之,交底周於C.又連結OC,O'C'.

則平面P⊥SO,底ACB⊥SO,

故平面P∥底ACB.

因知OC∥O'C'.

由是O'C':OC=SO':SO.

然SO',SO及OC爲一定.

因知O'C'亦爲一定.

故截口周上之點在平面P上,而從定點O'有一定之距離.

由是截口爲圓周,其中心爲截面與軸SO相交之點O'.

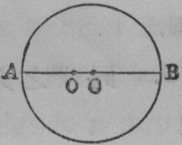
73. 一球只有一中心.

【證】

若球有二個中心 O,O′;

過O,O′引球之直徑 AB.

O,O′既均爲球之中心.



則 $AO=OB=\frac{1}{2}AB$;

$AO'=O'B=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore AO=AO'$.

是O與O′相合.

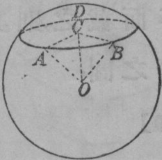
故知一球不能有兩個中心.

74. 以平面截球,則其截口爲圓.

【證】

O爲球之中心,ABD爲其截口,

自截口周上任意之二點A,B至O作OA及OB,又作OC垂直於截口之平面.



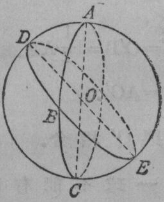
於直角三角形OCA及OCB中,O\ 及OB爲球之半徑必相等,而CC爲公共邊,故兩三角形相等,

$\therefore CA=CB$.

由是知截口周上之各點距C皆相等,故ABD爲圓.

75. 同球之大圓均相等.

【證】



過球心之截口爲大圓,故ABC,DBE均爲大圓.

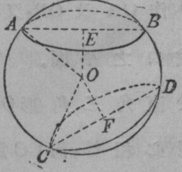
然球之中心O,卽大圓之中心.

球之半徑,卽大圓之半徑.

由是知大圓互相等.故題云云.

76. 從球之中心,至相等之距離,以兩平面截之,則其截口爲相等之圓.

【證】



從球之中心O,至二平面AB,CD引垂線OE,OF.

則OE=OF (假設),而截口AB,

CD爲圓.

E,F各爲其圓之中心.

連結AO,CO成兩直角三角形AEO,CFO.

∵AO=CO(均爲球之半徑),

∴OE=OF,AE=CF.

卽二圓AB,CD之半徑相等.

∴圓AB=圓CD.

77. 過球面上任意兩點,得畫大圓周.

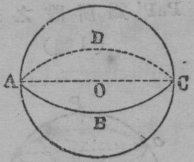
【證】

設球面上之二點爲A,D;球心爲O.

過A,D及O作平面.

則其截面之周,卽爲大圓周.

以其截面過中心故也.



(注意)A,D若在徑之兩端,

則A,D,O同在一直線上.

過此三點之平面,有無數存在.

由是可得無數之解答.

然過不在同一直線上三點之平面,只有一個.

故過A,D之大圓周,亦只有一個.

78. 過球面上之三點,得畫一小圓.

【解】

通過三點作平面,則此平面之截口即所求之小圓.

因通過任何三點之平面之截口,均為過三點之一圓周也.

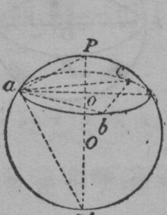
若過三點之平面,又過中心,則截口為大圓,而非小圓矣.

79. 試求球之半徑,

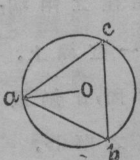
【解】

PaP′為所設之球,O為其中心.

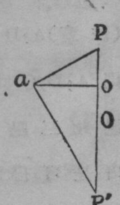
(1圖)



(2圖)



(3圖)



(I) 從球面上任意取一點P,以兩脚規之一端置於P,取其適宜之展開在球面上晝圓周abc,然P爲小圓abc之極,Pa爲兩脚規展開之長度.

(II) 從小圓周上任意取三點a,b,c,以ab,bc,ca爲三邊,作 △abc 於一平面上(2圖),其外接圓之中心爲o,此圓等於1圖之小圓,因知半徑ao等於小圓之半徑.

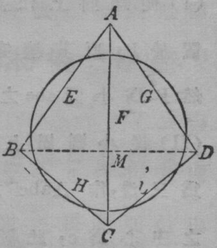
(III) 以半徑ao爲一邊,及旣知之長Pa爲斜邊,作直角三角形Pao(3圖),引Pa之垂線aP′,交Po之延線於P′.

然PP′爲其球徑,其半分OP卽所求之半徑.因直角三角形PaP′與1圖之△PaP′全等故也.

80. 四面體之六稜,若同切一球,則其對稜之和相等,試證之.

【解】

四面體ABCD之六稜同切於一球,其切點爲E,F,G,H,L,M.



然 AE=AF=AG, BE=BM=BH,

CL=CF=CH, DL=DM=DG.

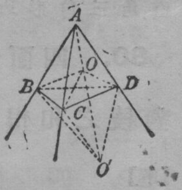
各邊相加,則

AE+BE+CL+DL=AF+BM+CF+DM=AG+BH+CH+DG.

即 AB+CD=AC+BD=AD+BC.

81. 有四面體其內切球之半徑爲 r, 其四個傍切球之半徑爲 r_1, r_2, r_3, r_4; 則 $\frac{3}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$, 試證之.

【解】



O爲四面體ABCD之內切球之中心,連結 OA, OB, OC, OD; 則一個四面體分爲四個四面體;而其高皆等於 r. 今令原四面體之體積爲V,則 $V=\frac{1}{3}r(ABC+ACD+ADB+BCD)$.次令 O′爲切於面 BCD 之傍切球之中心,

則原四面體之體積等於三個四面體. $O'-ABC$, $O'-ACD$, $O'-ADB$之和,減四面體$O'BCD$.

由是 $V=\frac{1}{3}r_1(ABC+ACD+ADB-BCD)$.

同樣可得其他之關係式.

由是卽可得次式:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{3V}(ABC+ACD+ADB+BCD),$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{3V}(ABC+ACD+ADB-BCD),$$

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{3V}(ABC-ACD+ADB+BCD),$$

$$\frac{1}{r_3}=\frac{1}{3V}(ABC+ACD-ADB+BCD),$$

$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{3V}(ACD+ADB+BCD-ABC).$$

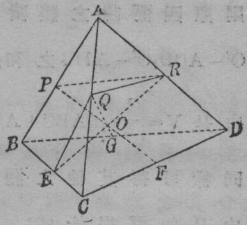
$$\therefore \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}=\frac{3}{3V}(ABC+ACD+ADB+BCD)$$

$$=\frac{3}{r}.$$

82. 四面體之對稜,互相垂直,則各面之九點圓之圓周在同一球面上.

【解】

ABCD爲對稜互相垂直之四面體.



令稜 BC,CD,DB,AB,AC,AD 之中點爲E,F,G,P,Q,R.

且連對稜之中點,結成三直線 PF,QG,RE,相交於O.

以O爲中心,OP爲半徑畫球,則此六稜之中點均在其球面上.而各面之邊之中點,在其面之九點圓之周上.且此球面過其九點圓之周上之三點,由是可知均過其圓周上.故題云云.

(注意)此球之中心O,即四面體之重心.

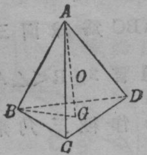
83. 試以正四面體之一稜,表其內切及外接球之半徑.

【解】

ABCD爲正四面體.從A向BCD引垂線AG,則G爲正三角形BCD之中心.

故從各頂點向其對面所作之垂線,與過各面

之外心而垂直於其面之直線同一者也。



故此等直線,同過一點,且該點爲內分點,而分垂線爲3:1. 今令其交點爲O,則O爲正四面體外接球之中心。

次就正四面體解之,過一稜及與此稜相對之稜之中點,作一平面,則此平面分正四面體中一個二面角爲二等分.

此等平面之交點爲O,卽正四面體內切球之中心。

今令正四面體之一邊之長爲a,

則 $\overline{AG}^2=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2}{3}a^2$, 卽 $AG=\frac{\sqrt{6}}{3}a$,

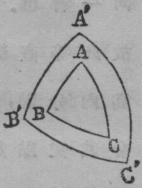
由是 $AO=\frac{3}{4}AG=\frac{\sqrt{6}}{4}a$, $OG=\frac{1}{4}AG=\frac{\sqrt{6}}{12}a$.

其AO爲外接球之半徑,OG爲內切球之半徑.

84. 有球面三角形,其三角和比二直角大,而比六直角小.

【證】

ABC為球面三角形.



題言 $2\angle R<\angle A+\angle B+\angle C<6\angle R$.

今作極三角形$A'B'C'$,而其極三角形對A,B,C之邊之中心角,為a',b',c';則

$\angle A=2\angle R-a'$,$\angle B=2\angle R-b'$,

$\angle C=2\angle R-c'$,

由是 $\angle A+\angle B+\angle C=6\angle R-(a'+b'+c')$.

然 $a'+b'+c<4\angle R$,

$\therefore\angle A+\angle B+\angle C>2\angle R$.

又此各角均比$2\angle R$小,

$\therefore\angle A+\angle B+\angle C<6\angle R$.

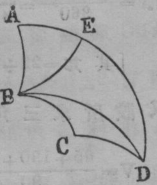
85. 有球面五角形,其各角之和比6直角大,而比10直角小,試證之.

【證】

ABCDE為球面五角形.

題言 $6\angle R<\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E<10\angle R$.

因各角均比$2\angle R$小，故五角之和比$10\angle R$小。



次畫大圓之弧BF,BD，分爲三個球面三角形，而各內角之和比$2\angle R$大。

此三角形之各內角相加，等於五角形之五角之和，故五角形各角之和比$6\angle R$大。

86. 有半徑一尺之球面上，作球面三角形，其三角爲$65°$, $130°$, $105°$，則此三角形之面積，及以此爲底面所作三角錐之體積各若干。

【解】

先求其球面過剩得

$65°+130°+105°-180°=120°$。

則此三角形之面積等於$60°$之月形面積。

由是令所求之面積爲s，球之面積爲4π。

則$4\pi:s=360°:60°$。

$\therefore s=\frac{4\pi\times 60}{360}=\frac{2}{3}\pi=\frac{44}{21}=2.1$ 平方尺.

[其 $\pi=22\div 7$.]

又設所求三角錐之體積爲V.則

$$V=\frac{65+130+105}{90}-2=\frac{120}{90}=\frac{4}{3}.$$

但此體積之單位爲底之三個角爲直角之球面三角錐,即爲球之體積八分之一.

故以立方尺爲單位.則

$$V=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{9}\times\pi=\frac{44}{63}=0.7.$$

87. 地球半徑爲3960哩,東經40°及東經53°兩子午線之間所含之面積有幾平方哩?

【解】

以地球視作圓球,則其兩子午線間所含之面積爲一月形之面積.但此月形之角爲$53°-40°=13°$.

由是設所求之面積爲x平方哩.

則地球之全面積爲 $4\pi \times 3960^2$ 平方哩.

$\therefore \dfrac{4\pi \times 3960^2 \times}{x} = \dfrac{360}{13}$.

$\therefore x = \dfrac{4\pi \times 3960^2 \times 13}{360} = 2265120 \times \pi = 7116100$ 平方哩.

88. 球之全面積爲 4 平方米,若此球上之月形之角度爲30°,月形之面積幾何?

【解】

令所求月形之面積爲 s 平方米.

則 $4:s = 4\angle R:30°$,

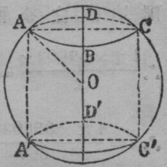
卽 $4:s = 360:30$.

$\therefore s = \dfrac{4 \times 30}{360} = \dfrac{1}{3}$ 平方米.

89. 有半徑一尺之球,其內接直圓壔之側面積等於其球之大圓面積之半分.試求其體積.

【解】

ABC−A′爲所求之內接直圓壔,O 爲球之中心,R 爲其半徑,AD 爲直圓壔底之半徑.令等於 r.



然球之大圓之面積爲 πR^2,直圓壔之側面積爲 $2\pi r\cdot DD'$. 而 $DD'=2OD=2\sqrt{(R^2-r^2)}$.

∴ 側面積爲 $4\pi\sqrt{(R^2-r^2)}$.

依題知 $R=1$.

$\therefore 4\pi r\sqrt{(1-r^2)}=\frac{1}{2}\pi$. $\therefore 8r\sqrt{1-r^2}=1$,

從此得 $64r^2-64r^4=1$,

$\therefore r^2=\frac{32\pm8\sqrt{15}}{64}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{8}\sqrt{15}$.

由是直圓壔之體積爲 $\pi r^2\times\angle\sqrt{1-r^2}$

$$=2\pi r^2\sqrt{1-r^2}=2\pi\times\left(\frac{1}{2}\pm\frac{1}{8}\sqrt{15}\right)$$

$$\times\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{8}\sqrt{15}\right)}$$

$$=\pi\times\frac{4\pm\sqrt{15}}{4}\times\sqrt{\left(\frac{4\mp\sqrt{15}}{8}\right)}=\pi\times\frac{4\pm\sqrt{15}}{4}\times\frac{\sqrt{5}\mp\sqrt{3}}{8}$$

$$=\pi\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{32}.$$

90. 有直圓壔狀中空之管,其長爲 9

糎,重爲90瓦.今以比重13.568之水銀充其管內,則全體之重爲150瓦,求管之內半徑.

【解】

令管之內半徑爲r糎.

則水銀之容積爲$\pi r^2\times9$立方糎.

其重爲$150-90=60$瓦.

依題意得$9\pi r^2\times13.568=60$.

$$\therefore r=\sqrt{\frac{60}{9\times13.568\pi}},$$

今$\pi=\frac{22}{7}$.

則$r=0.39$糎.

91. 作容水5升之圓筒,其內部之徑與深之比爲2:3;則內部之徑及深各若干.

【解】

令圓筒之徑爲2r寸,深爲h寸.

依題得 $2r:h=2:3$，$\therefore h=3r$.

由是圓筒之容積爲 $\pi r^2 h=3\pi r^3$ 立方寸.

而5升之容積$=5\times 64.827=324.135$立方寸.

$3\pi r^3=324.135$.

$\therefore r=\sqrt[3]{\dfrac{324.135}{3\pi}}=3.2$寸. $\left(\pi=\dfrac{22}{7}\right)$

$\therefore h=9.6$寸.

92. 有銀製直圓錐,其高等於底徑之二倍,而重爲2.5瓩.銀之比重10.47,求圓錐之高及徑各若干.

【解】

令直圓錐體之底之半徑爲 r 糎,則高爲 4r 糎.

由是銀製直圓錐之體積爲

$\dfrac{1}{3}\pi r^2\times 4r=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 立方糎.

而其重爲$\dfrac{4}{3}\pi r^3\times 10.47$ 瓦.

由是 $\frac{41.88}{3}\times\pi r^3=2500$.

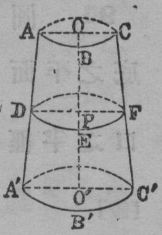
$\therefore r=\sqrt[3]{\left(\frac{2500\times3}{44.88\pi}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{625}{3.49\pi}\right)}$.

以$\pi=\frac{22}{7}$算至小數第二位,

則 $r=3\cdot84$ 糎.

93. 計算圓木體積,其兩端至等距離截口之周爲 C,圓木之高爲 H,則體積 $V=\frac{HC^2}{4\pi}$. 試求其與實際之誤差.

【解】



ABC－A′B′C′爲正圓臺形之圓木,H爲其高,DEF爲至兩底等距離之平面截口.

令 AO,A′O′,DP 各爲 R,r,p.

則圓木之體積,爲

$$V=\frac{1}{3}\pi H\{R^2+r^2+Rr\}=\frac{1}{3}\pi H\{(R+r)^2-Rr\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi H\{4p^2-Rr\}.$$

然 $2\pi p=C, p=\frac{C}{2\pi}$. $\therefore V=\frac{1}{3}\pi H\left(4\times\frac{C^2}{4\pi^2}-Rr\right)$

$=\frac{HC^2}{3\pi}-\frac{\pi HRr}{3}$. 故 V 若為$\frac{HC^2}{4\pi}$. 則其誤差為

$\frac{HC^2}{3\pi}-\frac{\pi HRr}{3}-\frac{HC^2}{4\pi}=\frac{HC^2}{\pi}\times\frac{1}{12}-\frac{\pi HRr}{3}=\frac{H}{12}\times\frac{C^2-4\pi^2Rr}{\pi}$

$=\frac{H}{13}\times\frac{C^2-S\cdot S}{\pi}$.(S,S′為二底之周.)

C為S,S′之和之平均而比$\sqrt{(SS')}$大,故$V=\frac{HC^2}{4\pi}$

比實際之體積小,其誤差為

$\frac{H}{12}\times\frac{C^2-S\cdot S'}{\pi}=\frac{H}{12\pi}\times\left[\left(\frac{S+S'}{2}\right)^2-S\cdot S'\right]=\frac{H(S'-S)^2}{48\pi}$.

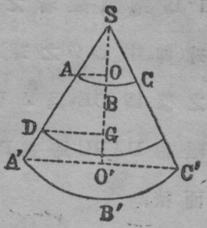
94. 圓臺二底之半徑為a,b,以平行於底之平面分其側面積為二等分,則其截口之半徑為$\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right\}}$.試證之.

【證】

圓臺為ABC−A′,二底之半徑AO,A′O′為a,b.分側面積為二等分之截口為DEF.

其半徑DG為r.

此圓臺之原圓錐之頂點爲S.



三側面積 S－ABC, ABC－A′, ABC－D 爲 P, Q, R.

則 $\frac{P+Q}{P}=\frac{\overline{SO'}^2}{\overline{SO}^2}=\frac{b^2}{a^2}$.

由是 $\frac{Q}{P}=\frac{b^2-a^2}{a^2}$.

同樣 $\frac{R}{P}=\frac{r^2-a^2}{a^2}$,

$\therefore \frac{Q}{R}=\frac{b^2-a^2}{r^2-a^2}=\frac{2}{1}$

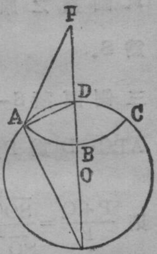
由是 $2r^2=a^2+b^2$,

或 $r=\sqrt{\left\{\frac{1}{2}(a^2+b^2)\right\}}$.

95. 有乘飛艇者,在高出地面 h 之處,見地球之表面積爲 $\frac{2\pi R^2 h}{R+h}$. 但 R 爲地球之半徑,且以地球視作圓球者.

【證】

P爲乘飛艇者之位置,從P至地球(即中心O之球)引切線PA,過P之徑爲DE,過A引DE垂直面,則環帶DABC爲在P所見地球之表面積.



就$\triangle PAD$,$\triangle PEA$證之,$\angle P$共通.

$\angle PAD=\angle PEA$,$\therefore \triangle PAD \backsim \triangle PEA$,

由是$\dfrac{AD}{AP}=\dfrac{AE}{PE}$,

$$\therefore \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AP}^2}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{PE}^2}=\frac{\overline{DE}^2-\overline{AD}^2}{\overline{PE}^2}=\frac{\overline{PE}^2}{\overline{PE}^2+\overline{AP}^2}.$$

$$\text{或}\ \frac{\overline{AO}^2}{PD\cdot PE}=\frac{\overline{DE}^2}{\overline{PE}^2+PD\cdot PE},\ \therefore \overline{AD}^2=\frac{PD\cdot\overline{DE}^2}{PE+PD}.$$

然球帶DABC之面積$=\pi\overline{AD}^2$,而$PD=h$,$DE=2R$.

$$\therefore \pi\overline{AD}^2=\frac{\pi PD\cdot\overline{DE}^2}{PE+PD}=\frac{4\pi hR^2}{2R+h+h}=\frac{2\pi R^2h}{R+h}.$$

96. 有圓壔狀之蒸氣鑵,其兩端各附

半球,其全長爲20呎,周圍爲11呎,則其全面積及容水量各若干?

【解】

圓壔之半徑爲 r,兩端所附之半球之半徑亦爲 r,由是圓壔之周圍爲 $2\pi r=11$.

$\therefore r=\dfrac{11}{2\pi}$,由是球之全面積爲 $4\pi\times\dfrac{11^2}{4\pi^2}=\dfrac{11^2}{\pi}$.

而體積 $=\dfrac{4}{3}\pi\times\dfrac{11^3}{8\pi^3}=\dfrac{11^3}{6\pi^2}$.

次圓壔之高等於氣鑪之全長減半徑之二倍

即 $20-\dfrac{11}{\pi}=\dfrac{20\pi-11}{\pi}$,

由是圓壔之側面體爲

$$2\pi\times\frac{11}{2\pi}\times\frac{20\pi-11}{\pi}=\frac{11(20\pi-11)}{\pi}.$$

體積 $=\pi\times\dfrac{11^2}{4\pi^2}\times\dfrac{20\pi-11}{\pi}=\dfrac{11^2(20\pi-11)}{\pi}$,

$\because \pi=\dfrac{22}{7}$,

$\therefore$ 全面積 $=\dfrac{11^2}{\pi}+\dfrac{11(20\pi-11)}{\pi}=\dfrac{7\times11(11+20\times\frac{22}{7}-11}{22}$

$=220$ 平方呎略.

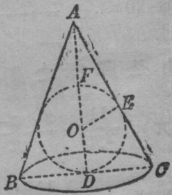
$$體積=\frac{11^3}{6\pi^2}+\frac{11^2(20\pi-11)}{4\pi^2}$$

$$=\frac{7^2\times11^2\left(11\times2+3\times20\times\frac{22}{7}-3\times11\right)}{12\times22^2}$$

$=181$ 立方呎.

97. 有外切於球之直圓錐,其高等於球徑之 2 倍,則圓錐之全面積與體積各等於球之面積與體積之二倍.試證之.

【證】



ABC 爲外切於球 O 之直圓錐,其高 AD 等於球徑之 2 倍.

然 AD 過球之中心,而 D 爲底之中心,E 爲圓錐側面切於球之一點.

然兩直角三角形 AOE,ACD 互爲相似.

因 AD 爲球徑之 2 倍,

故 AO:OE=3:1.

$\therefore AC:CD=3:1$, $\therefore AC=3CD$.

$\because \triangle ACD$ 爲直角三角形, $\therefore \overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$.

即 $9\overline{CD}^2=16\overline{OD}^2+\overline{CD}^2$, 或 $8\overline{CD}^2=16\overline{OD}^2$;

即 $\overline{CD}^2=2\overline{OD}^2$, 而圓錐全面積爲

$\pi CD(CD+AC)=4\pi\overline{CD}^2=8\pi\overline{OD}^2=2\times$ 球面積。

又圓錐之體積 $=\frac{1}{3}\pi\overline{CD}^2\cdot AD=\frac{1}{3}\pi\times 2\overline{OD}^2\times 4OD$

$=\frac{8}{3}\pi\overline{OD}^3=2\times$ 球之體積。

98. 地球,月及日之徑之比爲11:3:1232試以地球之表面積及體積爲單位,計算月,日之面積及體積.

【解】

令地球之半徑爲r,

則月,日之半徑爲 $\frac{3}{11}r$, $\frac{1232}{11}r$.

而球之表面積與其半徑之平方成比例。

$\therefore$ 月之表面積:地球之表面積$=\left(\frac{3}{11}r\right)^2:r^2=3^2:11^2$.

由是以地球之表面積爲單位,則

月之表面積$=\frac{9}{121}=0.074$.

同様日之表面積$=\left(\frac{1232}{11}\right)^2=112^2=12544$.

又球之體積與半徑之立方成比例.

$\therefore$ 以地球之體積爲單位,則

月之體積$=\left(\frac{3}{11}\right)^3=\frac{27}{1331}=0.020$.

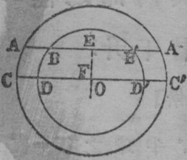
日之體積$=\left(\frac{1232}{11}\right)^3=112^3=1404928$.

99. 有兩個同心球,其半經爲r, r'.今從此二球中心之同側在 $a, a+b$ 之距離以兩個平行平面截之,則此二平面與二球面間一部分之體積若干?

【解】

O爲兩球之中心,從O至 $a+b$ 之距離有截平面

ABB′A′,與此平行而距O為a



離,又有截平面CDD′C′.且從O至各截面上,有共同之深OFE.

令 $OA=r, OB=r'$

則 $\overline{AE}^2=r^2-(a+b)^2, \overline{BE}^2=r'^2-(a+b)^2,$

$\overline{CF}^2=r^2-a^2, \overline{DF}^2=r'^2-a^2.$

球缺ACC′A′之體積

$=\frac{1}{2}\pi b\{r^2-(a+b)^2+r^2-a^2\}+\frac{1}{6}\pi b^3$

$=\pi b(r^2-a^2-ab)-\frac{1}{3}\pi b^3.$

同樣得球缺BDD′B′之體積為 $\pi b(r'^2-a^2-ab)-\frac{1}{3}\pi b^3.$

所求之體積等於此兩體積之差,

$\pi b(r^2-a^2-ab-r'^2+a^2+ab)-\frac{1}{3}\pi b^3+\frac{1}{3}\pi b^3$

$\pi b(r^2-r'^2).$

60. 釜之上部為直圓壔,下部為半球.

其內部之徑25寸,深爲2尺,則此釜容水若干升?

【解】

$\because$ 半球之徑=直圓壔之徑=25寸,

$\therefore$ 直圓壔之高$=20-12.5=7.5$寸。

由是直圓壔之容積$=\pi\times12.5^2\times7.5$立方寸,

半球之容積$=\frac{2}{3}\pi\times12.5^3=\frac{1}{12}\pi\times25^3$立方寸。

$\therefore$ 釜之全容積$=\pi(12.5^2\times7.5+\frac{1}{12}\times25^3)$

$=7775.3$立方寸,(但$\pi=\frac{22}{7}$)。

然一升之容積$=64.827$立方寸,

$\therefore$ 所求之量$=7775.3\div64.827=119$升。

(終)