Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 51

Stetige Funktionen

Den Abstand zwischen zwei reellen Zahlen x und x' bezeichnen wir mit

$$d(x,x') := |x-x'| .$$

Bei einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann man sich fragen, inwiefern der Abstand in der Wertemenge durch den Abstand in der Definitionsmenge kontrollierbar ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x', die „nahe" an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe" an $f(x)$ sind. Schon lineare Funktionen mit unterschiedlicher Steigung zeigen, dass die „Nähe" im Bildbereich nicht mit der „Nähe" im Definitionsbereich direkt verglichen werden kann. Die Zielsetzung ist vielmehr, dass zu einer gewünschten Genauigkeit im Bildbereich überhaupt eine Ausgangsgenauigkeit gefunden werden kann, die sichert, dass die Funktionswerte innerhalb der gewünschten Genauigkeit beieinander liegen.

Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit". Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit") mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Funktion.

Definition 51.1. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, dass für alle x' mit $|x-x'| \leq \delta$ die Abschätzung $|f(x)-f(x')| \leq \epsilon$ gilt. Man sagt, dass f *stetig* ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Bei D sollte man an den Definitionsbereich der Funktion denken. Typische Situationen sind, dass D ganz $\mathbb{R}$ ist, oder ein reelles Intervall, oder $\mathbb{R}$ ohne endlich viele Punkte und Ähnliches. Statt mit den nichtnegativen reellen Zahlen ϵ und δ kann man genauso gut mit Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ arbeiten.

Beispiel 51.2. Eine konstante Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto c,$$

ist stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ kann man hier ein beliebiges δ wählen, da ja ohnehin

$$d(f(x), f(x')) = d(c, c) = 0 \leq \epsilon$$

gilt.

Eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto cx,$$

mit einem Proportionalitätsfaktor $c \neq 0$ (bei $c = 0$ ist die Funktion konstant und somit auch stetig) ist ebenfalls stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ kann man unabhängig vom Punkt x hier $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ wählen: Wenn nämlich

$$d(x, x') \leq \delta = \frac{\epsilon}{c}$$

gilt, so ist

$$d(f(x), f(x')) = d(cx, cx') = cd(x, x') \leq c \cdot \delta = c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Beispiel 51.3. Wir zeigen, dass das Quadrieren

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

stetig ist. Sei dazu $a \in \mathbb{R}$ fixiert, wir zeigen die Stetigkeit im Punkt a. Sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein $\delta > 0$ finden (bzw. die Existenz eines solchen δ nachweisen), das die Eigenschaft besitzt: Wenn

$$|x - a| \leq \delta,$$

dann ist auch

$$x^2 - a^2 \leq \epsilon,$$

also wenn x und a δ-nahe sind, so sind die beiden Funktionswerte ϵ-nahe. Es ist klar, dass die Wahl von δ nicht nur von ϵ abhängt, sondern auch von a. Wenn man nämlich zu a eine Zahl δ hinzuaddiert, so ist der Funktionswert gleich

$$(a + \delta)^2 = a^2 + 2a\delta + \delta^2,$$

und die Differenz zu a^2 ist somit $2a\delta + \delta^2$. Insbesondere muss der Betrag dieser Differenz kleinergleich dem vorgegebenen ϵ werden. Dies wird erreicht, wenn die beiden Summanden $2a\delta$ und δ^2 beide kleinergleich $\epsilon/2$ sind. Von daher ist bei $a > 0$ und $\epsilon \leq 1$ die Wahl

$$\delta := \min\left(\frac{\epsilon}{4a}, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

naheliegend. Um alle Fälle zu erfassen, wählen wir

$$\delta := \min\left(\frac{\epsilon}{4\,|a|}, \frac{\epsilon}{2}\right),$$

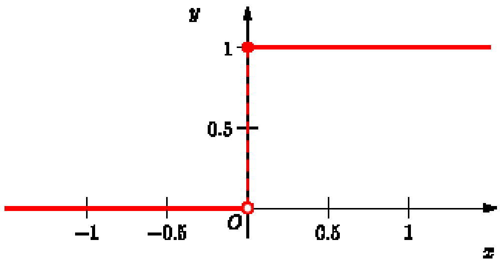
wobei der vordere Term bei $a = 0$ zu ignorieren ist. Es gelten dann in der Tat für

$$|a - x| \leq \delta$$

die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left|x^2 - a^2\right| &= |x-a| \cdot |x+a| \\ &\leq \delta\,(2\,|a| + \delta) \\ &= 2\,|a|\,\delta + \delta^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Das vorhergehende Beispiel zeigt schon, dass im Allgemeinen das Auffinden eines geeigneten δ zu einem gegebenen ϵ recht mühsam sein kann. Wir werden aber gleich wichtige Sätze kennenlernen, mit denen man die Stetigkeit einer Vielzahl an wichtigen Funktionen sofort erhält.



Beispiel 51.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0\,, \\ 1, & \text{falls } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht stetig. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes beliebige positive δ gibt es nämlich negative Zahlen x' mit $d(0, x') = |x'| \leq \delta$. Für diese ist aber $d(f(0), f(x')) = d(1, 0) = 1 \not\leq \frac{1}{2}$.

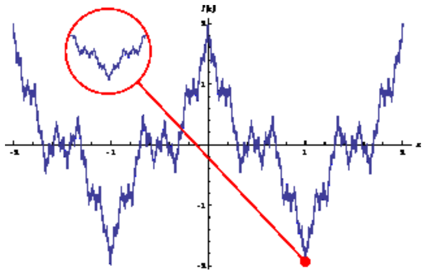
Die folgende Aussage bringt die Stetigkeit mit konvergenten Folgen in Verbindung.

Lemma 51.5. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. *f ist stetig im Punkt x.*
2. *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*



Nicht jede stetige Funktion kann man zeichnen, auch nicht nach beliebiger Vergrößerung. Gezeigt wird eine Approximation einer Weierstraß-Funktion, die stetig, aber nirgendwo differenzierbar ist. Bei einer stetigen Funktion kann man zwar die Größe der Schwankungen im Bildbereich durch Einschränkungen im Definitionsbereich kontrollieren, die Anzahl der Schwankungen (die Anzahl der Richtungswechsel des Graphen) kann man aber nicht kontrollieren.

Beweis. Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} x_n = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta \,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert. Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in D$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl n gibt es ein $x_n \in D$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon \,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2). □

Lemma 51.6. *Es sei*

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

1. *Die Funktion f ist durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig festgelegt.*
2. *Der Funktionswert $f(a)$ ist durch die Funktionswerte $f(x)$, $x \neq a$, festgelegt.*

(3) *Wenn für alle $x < a$ die Abschätzung*

$$f(x) \leq c$$

gilt, so gilt auch

$$f(a) \leq c.$$

Beweis. (1) Nach Korollar 28.10 gibt es für jede reelle Zahl x eine Folge x_n von rationalen Zahlen (sogar von Dezimalbrüchen), die gegen x konvergiert. Wegen der Stetigkeit und Lemma 51.5 ist dann

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist

$$x_n = a - \frac{1}{n} < a.$$

Da die Folge der Stammbrüche eine Nullfolge ist, konvergiert diese Folge gegen a. Wegen der Stetigkeit und Lemma 51.5 ist wieder

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

(3) Dies folgt aus Teil (2) und Lemma 44.14.

□

Die letzte Aussage gilt nicht, wenn man $\leq$ durch $<$ ersetzt.

Rechenregeln für stetige Funktionen

Lemma 51.7. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und*

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn f in $x \in D$ und g in $f(x)$ stetig sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.*
(2) *Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

Beweis. Die Aussage (1) ergibt sich direkt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Daraus folgt auch (2). □

Satz 51.8. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien*

$$f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g \colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq D$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g \colon U \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Dies ergibt sich aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit und Lemma 44.11. □

Korollar 51.9. *Polynomfunktionen*

$$P \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Beispiel 51.2 und Lemma 51.8 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^n,$$

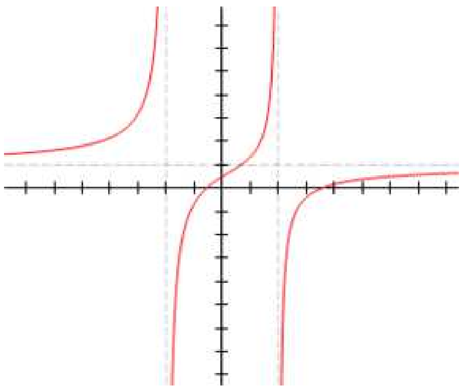
stetig. Daher sind auch für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Lemma 51.8 sind auch alle Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Eine rationale Funktion ist auf ihrer Definitionsmenge stetig.

Korollar 51.10. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ zwei Polynome und es sei $U := \{x \in \mathbb{R} | \, Q(x) \neq 0\}$. Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 51.9 und Lemma 51.8. □

Abbildungsverzeichnis