格物入門

卷七

算學

7

第七卷算學目錄

上章測算水學

壓櫃　計其力

推其理　水面自平之故

平而不平　計其所差

水之下壓　水之旁壓

水之壓力按深遞加　由重心計壓力

多寡相抵　水權之理

以水權物　以高低分輕重

沈浮之理　以水量物

水流疾徐　測算江河

水自孔流　水之倒躍

水面下退以之計時　水自旁躍

物行水中愈速愈阻

第二章測算氣學

吸氣筒　天氣下壓

風雨表細差格　天氣漸高漸薄

天氣高有界限　天氣愈高愈稠

恒雪線　天氣中含水氣

計吸水管之力　計提水管之力

計壓水管之力　計蒸氣之力
其力按熱遞加　其力按稠遞加

第三章測算光學

光按遠近等差　離物稍遠明似無差
天氣阻光令明漸殺　平鏡返光之理
光平來平返　光之聚散返照亦然
凹鏡返光之理　鏡面如球聚光半徑之中
鏡面若拋物線返光皆平
平鏡成影之理　影形方差度
平鏡影形大小比例　凹鏡聚熱之理

釋折光之理　驗折光之法
光透平鏡出入相平　凸鏡影形大小比例
凸鏡光差度　雙線鏡式
撱圓鏡式　月牙鏡式
光生色之故　物隨厚薄變色之理
驗薄物變色之法
第四章測算力學
論吸力　吸力通例
物離地漸高漸輕之例
空球之內無所吸移　物入地漸深漸輕之例

論動靜
物行平速之例
物行漸速之例
平速而行以四邊形度之
漸速而行以三邊形度之
墜地加速之例
上擲減速之例
平速加速相比
計物之下擲
計物之上擲
以自墜爲則
論力之分合
二力合一
路經對角
三力合一
數力相合
物循曲線之故
計擲物之路
以一力分數力

一力分二其角相交　一力分二任成何角
一力分二恒得定數　施力方向與功效相涉
物受數力而定之例　數力自數面總合爲三
論重心　分兩似盡聚重心
察二物之重心　察數物之重心
測三邊形之重心　測多邊形之重心
二物動而重心靜　一物動而重心隨
論物之相觸　無躍力而相觸
無躍力而逆觸　有躍力而相觸
觸後疾徐互易　論助力器具

計算槓桿之力　計算輪軸之力
計算滑車之力　計算斜面之力
計算螺絲之力　計算尖劈之力
六具之通理

第七卷算學協助格物

小引

此卷旣以算學協助格物固非專論算學也蓋自有他書專論之矣孫子算經九章算術梅氏叢書皆有可採究不如英國偉烈亞力續增利氏幾何原本並偉烈氏所作數學啟蒙代數學代微積等部爲詳備而易明至於本卷第四章論計算力學欲稍爲加詳則有艾約色所著之重學在焉然恐各種算學讀者未曾諳熟相應略附數條以分別書中所有名目云

一整數若帶有奇零或以子母分數或以小數計之假

如五零四分之一即寫五$\frac{四}{一}$或五·二五皆同蓋以橫線分子母用小點別整小之數

一各數之加減乘除者用┴┬·✕÷以代字此數較彼數小則用＜較彼數大則用＞相等則用＝即如六┴四＝十

六┬四＝二

六✕四＝二四

六÷四＝一$\frac{二}{一}$

以數字合一字則於左右用（）謂之開弧如

(六┴四)✕四＝四○

餘照此式

一所謂代數即以字代數用春夏秋冬及天干地支是也義與數學相同而其用爲更廣蓋以數而沾沾計

算不免挂一漏萬若使以代數則一字兼包多數故格物而無代數難臻精細即如丁二丙丄甲　巳二丙丅甲　庚二丙乂甲　辛二丙÷甲　若甲爲六丙爲四則丁爲十巳爲二庚爲二十四辛爲一個半皆與上式同隨意換他數亦無不可

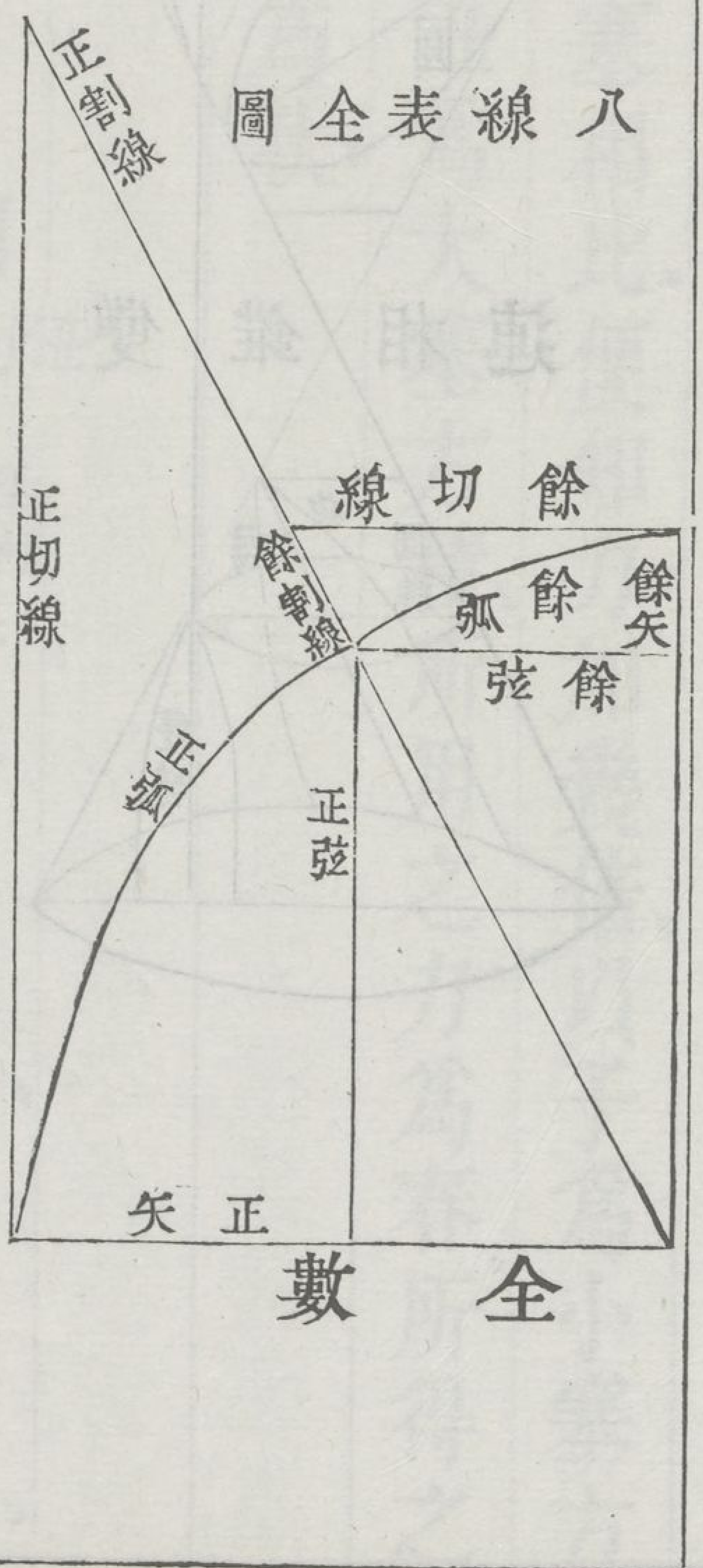
一至以某數自乘如甲乂甲卽寫$甲^{二}$謂之成方如甲乂甲乂甲卽寫$甲^{三}$謂之三乘毋論若干次皆準此若以$甲^{二}$而求甲謂之開方甲卽爲方根以厂爲號或寫$甲^{二}$字亦可他皆準此

一至於各數相比則以：當比字以∷當如字如丑∶子∷丙∶甲由此比例更可推及多式如丙∶丙丄甲∷丑∶丑丄子　丙∶丙丅甲如丑∶丑丅子　$丑^{二}$∶$子^{二}$∷$丙^{二}$∶$甲^{二}$　又本字左

端加・代文字如速:力::速:力是且可以比例變成等數蓋子丙二丑甲 子丙二甲故既知其三即可得其四也若所比二數同增同減而其比例仍無所異則以∝字號之如丙∝甲一至於幾何則比線之長短角之分度積之大小寡之多寡角有三種謂銳謂直謂鈍即∠∟⦦是也二線相交對角總等如×左右皆銳上下皆鈍者是且毗連二角合成二直角蓋上邊銳鈍相合與∨二直角等明矣其上下左右四角相合即爲四直角蓋××其角共合無殊若畫圓線復以二橫線交穿其中即分四段與各角相稱故以弧度其角某角之間其圓

線卽謂之弧以直線連弧之兩端謂之弦一週爲三百六十度有八線名爲割圓八線句股中常用之線也圖列左方以備觀覽

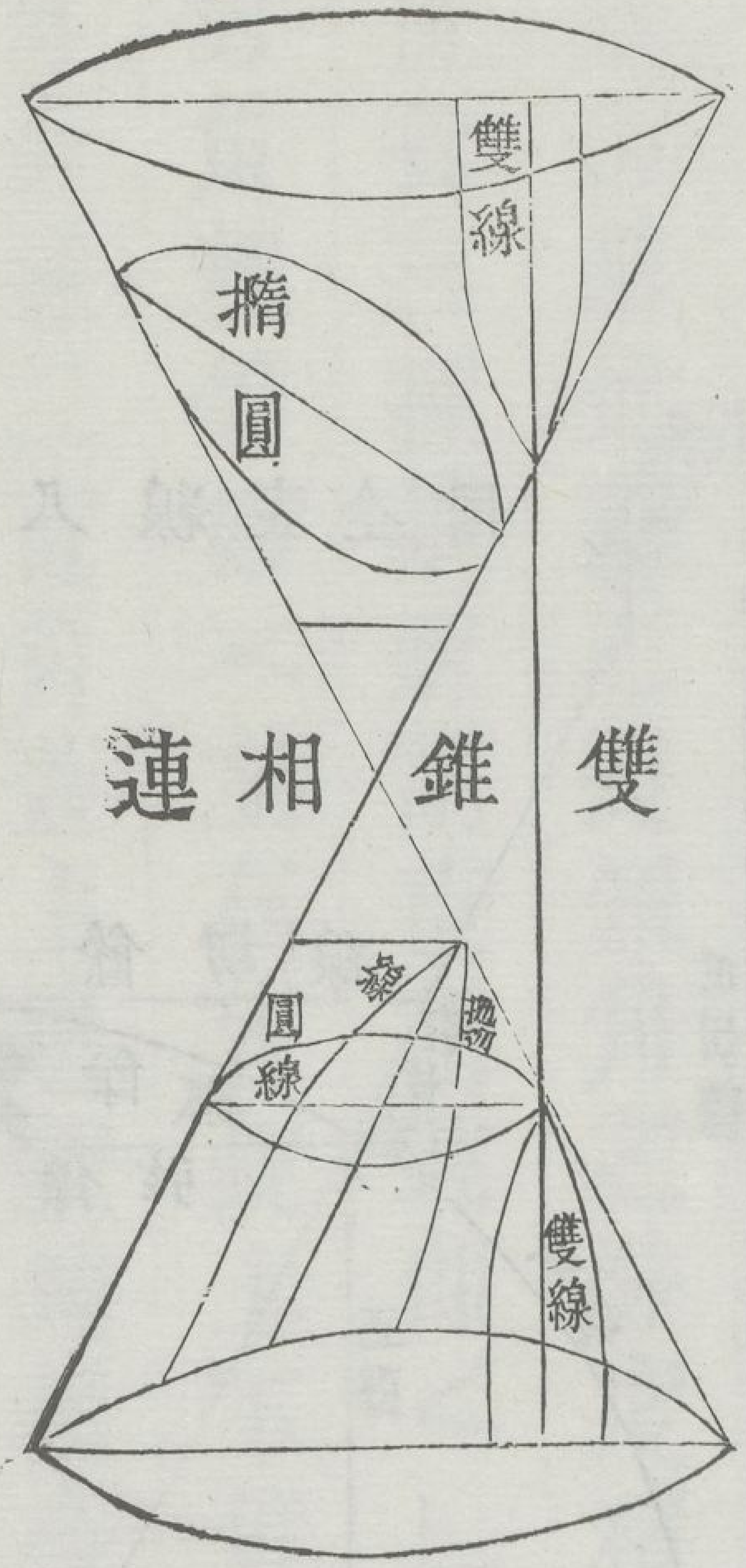
八線表全圖



一圓錐四線亦當熟悉卽圓線撱圓拋物線雙線是也

蓋圓錐與底平割之成圓線與軸斜割之成撱圓與

邊平割之成拋物線雙錐以一面逼割之卽成雙線也圖列左方以備觀覽



壓櫃
計其力

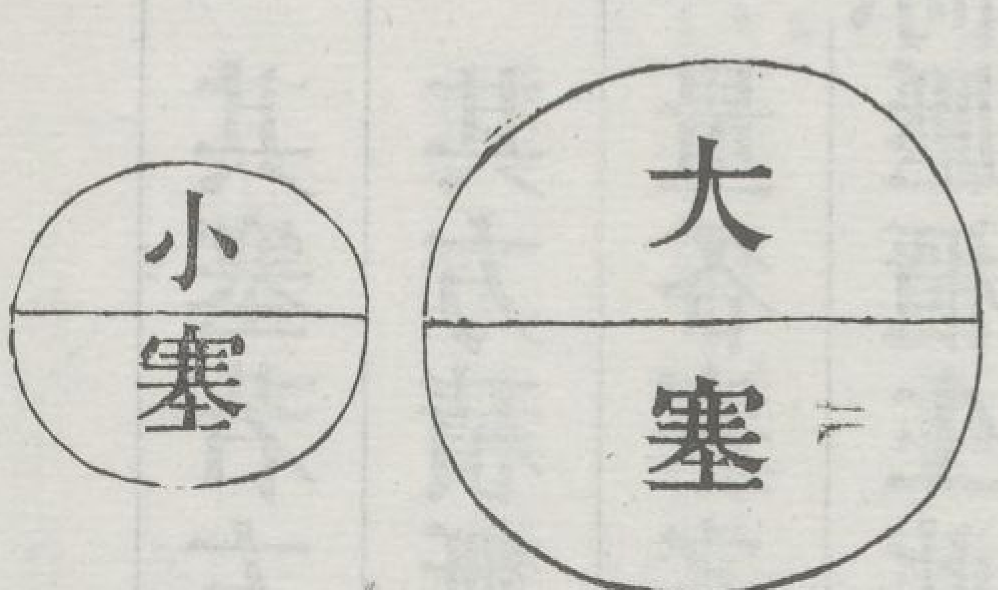
第七卷算學協助格物

美國丁韙良著

上章測算水學

一、問壓櫃之力、何法計算、

答、以小塞與大塞相比、便知力加幾倍、以子爲小塞方積、丑爲大塞方積、所用之力爲春、所得之力爲秋、



則 丑:子::秋:春
$\frac{丑}{子}$春＝秋

若子爲五寸、丑爲百寸、春爲十觔、

則 百丈五十二二秋 所得之力二百觔也、

其塞若方形、以其二邊相乘、卽得其方積、若係圓形、其方積無容計算、蓋圓面相比、卽如其半徑成方、故量各塞之半徑而自乘之、卽可代其方積、法較便也、

推其理

問、壓櫃生此大力、其理何解、

答、卽力學所論大小二力變通之理、蓋動物之力、卽以其輕重疾徐相乘而得、如小塞下行十寸、大塞上行一寸、其力惟均、顧其力愈省、大塞愈慢、所謂以時兌力也、若寅爲小塞之速、卯爲大塞之速、

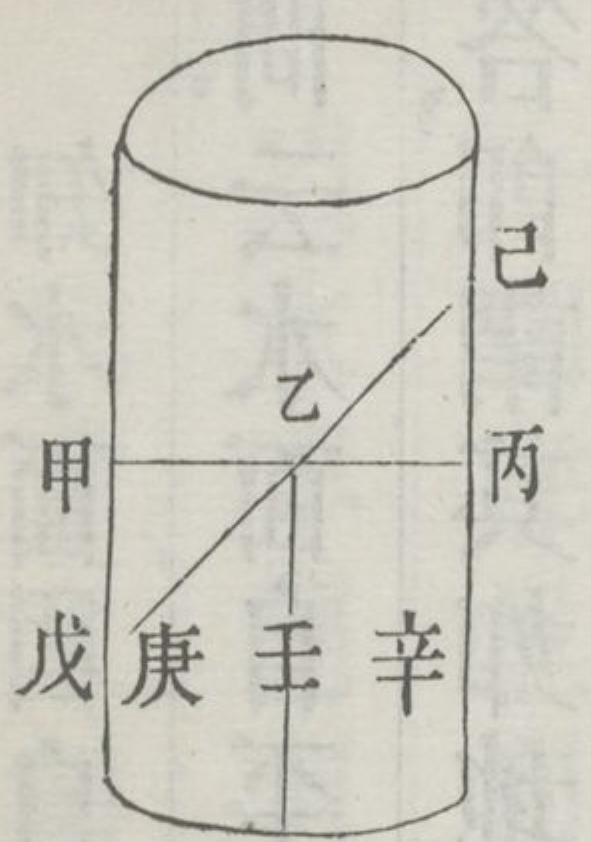
則卯丑二寅子　$\frac{丑}{寅子}$二卯　以子爲十、丑爲百、則卯爲寅十分之一也、

故小塞須下十尺、大塞方起一尺、

水面自平之故

問、水面必平、何以辨之、

答、若甲丙爲水面、其重心在壬、以戊己之板、斜壓左邊、則水必高起於右邊、其重心卽至辛、忽去其壓板、其



水卽高於左而低於右、重心卽移至庚、水忽左忽右、上下如起波然、其重心反覆易位、水漸次就平、重心仍定於壬、是

平而不平

知水面固自平也、

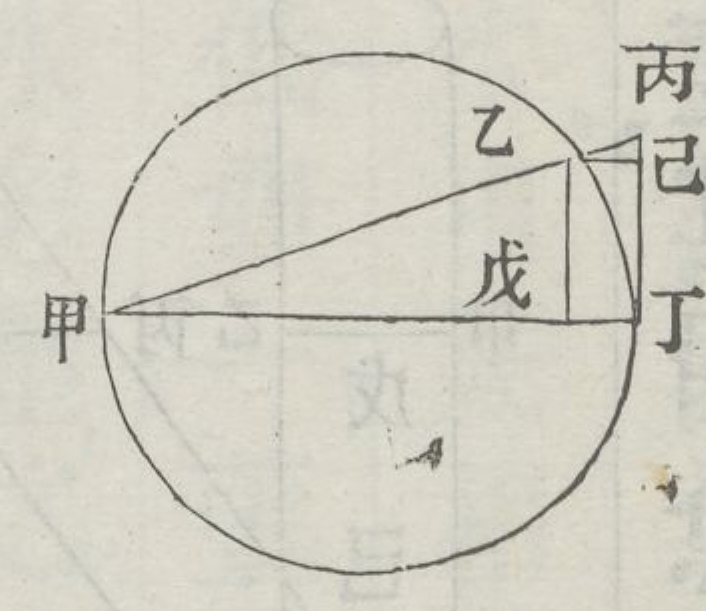
問、云水面自平何謂也、

答、卽謂其如地球之平也、目覩似平、以度測之則凸如球面、地球四分之一、旣被水所蓋、則水面亦球面也、所謂水面自平、謂其各處距地心遠近相等也、

計其所差

五、問、海面與平線所差何法計算、

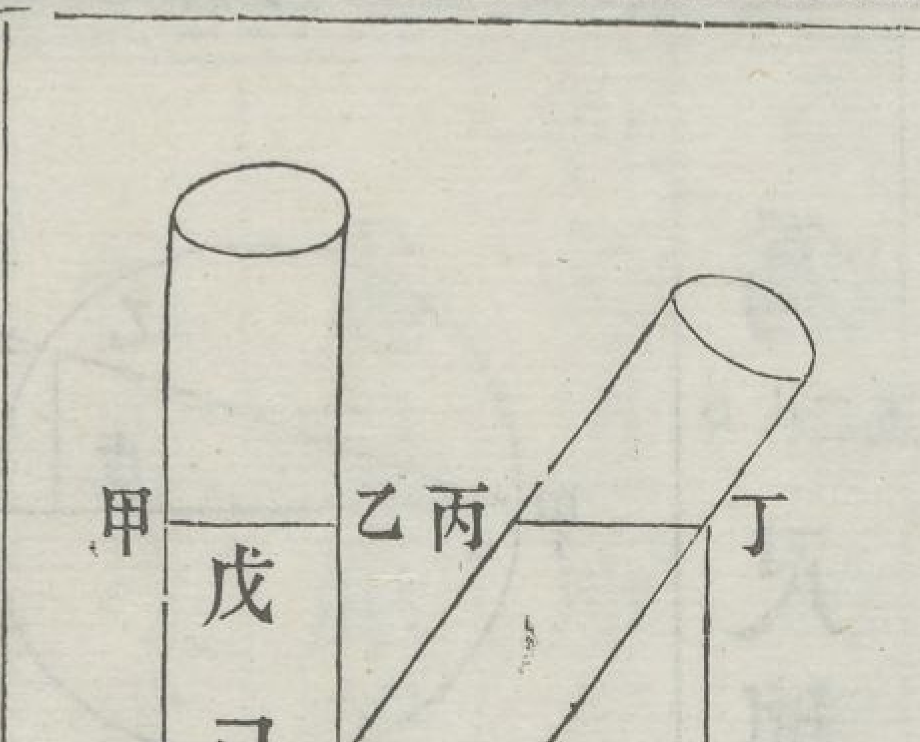
答、每里所差約計二寸、蓋每洋里計八寸也、以春爲二處相距若干洋里、秋爲高低所差尺寸、則其計算之恒式、乃爲 $\frac{二春^{二}}{三}=秋$ 畫圓圈爲球面、甲丁爲球徑、丙丁爲平線、則高低所差乙己也、戊丁與乙己等、乙丁若相



距不遠、則弧弦無分、而戊乙丁之三邊形、與甲乙丁相同、$戊丁:乙丁::乙丁:甲丁$ 卽 $秋:春::春:甲丁$ 則 $秋二\frac{甲丁}{春^{二}}$ 然一洋里旣爲五二八〇尺地徑復爲七九一二洋里、則 $秋二\frac{甲丁}{春^{二}}\frac{(五二八〇)}{(五二八〇)^{二}}$ $二春^{二}\frac{七九一二}{(五二八〇)}$ 故 $秋二\frac{三}{二春^{二}}$ 比如春爲一個洋里、則與平線所差乃八寸、卽中華六寸、始知以水平開河通水、每里須低二寸、水面始平、須再低一二寸、水始可流、

問、水下壓之力、何法計算、

答、總按其深淺尺寸也、設若戊己爲桶水直立、水面在甲乙、若均分數層、則第二層所壓、比第一層加倍、第四層下壓、比第二層加倍、故其器若直立、其水下壓之力、卽與其淺深相稱也、其器若斜立、其理亦同、卽



如以戊己之器斜至丙辛、則須再添水、始能使水面與前同高、水旣加添、其下壓之力、亦應準之加添、惟其水偏倚丁辛之斜旁、而其下壓之勢較輕、其桶愈斜、水之偏倚愈甚、而其下壓之力究無異

也皆與其水深淺相稱耳、故二桶一正一斜、下面之水由㡳相通、其斜桶得水雖多、二器之水面仍舊高低如一、蓋其下壓之勢均也、

水之旁壓

問、水旁壓之力、何法計算、

答、與上文計算下壓之力無異也、蓋水旣爲渾浩流通、則其壓力不僅向下、六面皆同、水深五尺、其桶㡳㨝力、卽有五尺之水㡳旁㨝力、亦如之、蓋其深淺等也、其旁不拘直斜、㨝力無殊、側桶之旁丙辛雖長、其㨝力不過如丁壬之直線耳、

水之壓力按深遞加

問、水之壓力、按深遞加何如、

答、按乘法層次也、蓋此處較彼處深若干倍、其以上之水、即加重若干倍也、今將其數核算、標之於左、

水深尺寸	每尺所受壓力
二尺	一五二觔
四	三〇四
八	六〇八
十六	二千四一六
三十二	二千四三二
六十四	四千八六四
百二十八	九千七三八

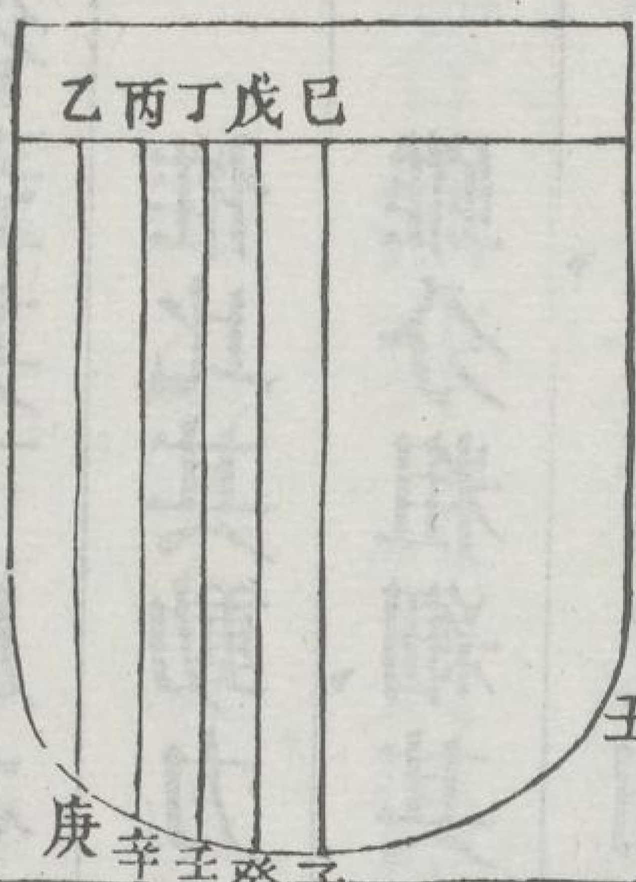
按此、如器高十三丈、盛水至滿、其器之底、每方尺喫力幾乎萬觔、是知水深作隄塘而禦之難也、物之入水亦如是喫力、故小魚不能下至極深、惟鯨鯤大魚、被漁人叉攬、每引線縱而直下、至三四里數、其力概

由重心計壓力

可想也、

問、水之壓力自何處算起、

答、自重心也、比如甲丑爲器、盛水至甲巳、則庚辛壬癸子、各處所㬉之力、卽 $\underline{乙庚}\times庚$ $\underline{丙辛}\times辛$ $\underline{丁壬}\times壬$ 則其壓力統計、卽此各數共合也、然此卽與其方積重心深淺相乘均等、如其方積爲春、其重心深淺爲秋、則計其㬉力者、恆式如左、



$$\underline{丁壬}\times壬\perp\underline{丙辛}\times辛\perp\underline{乙庚}\times庚$$

$$二\ 春\times秋$$

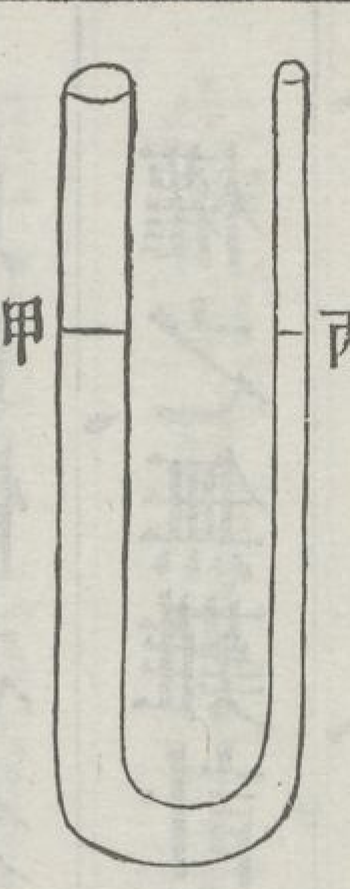
故方器盛滿、其旁㬉力、準其底一半也、

四旁並底所喫之力、即其水之觔兩三倍也、

十、問、曲管兩頭粗細不等、而水面仍不分高低、其理何解、

答、蓋其下壓之力、惟按深淺而已、按其壓力固可辨之、惟比其動力而辨之更明、設甲乙丙爲管盛水、兩頭雖分粗細、其水殊無高低、水自甲口而入、自丙口而出、則管之細處、力以狹逼、水出更急、蓋流之疾徐與其管之粗細相反、甲爲此口之方積、丙爲彼口之方積、其水在甲之速爲子、在丙之速爲丑、則 丑:子::甲:丙 而 丙丑二甲子 也、動力既均、若無水由外添入、兩頭必平而不流也、按此理、則丙頭水雖甚少、甲頭水雖較多、仍可相抵

亦可設法使之托起極重之物、蓋與頂起粗頭之水無異也、壓櫃之生力、卽出於此、而人以獨手執壓櫃之柄、可增力於無窮、水之通力、有如是也、



水權之理

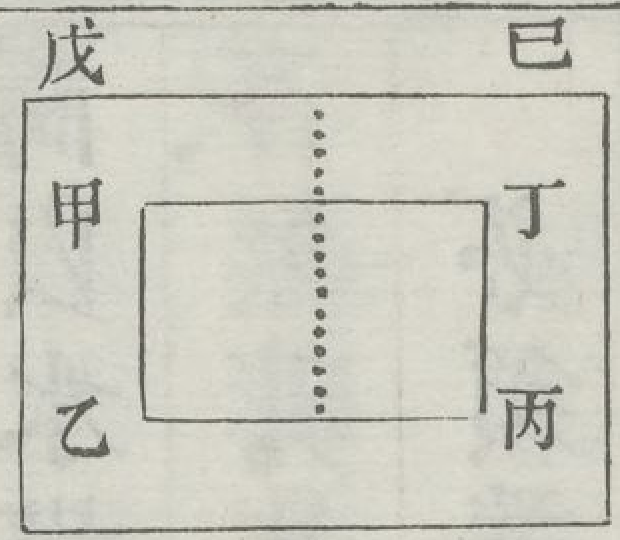
問、以水權物、其理何如、

答、無非比其體質輕重也、蓋物體輕重不一、果欲較之、必須準度、故以水爲則、卽如以寸金之分兩爲實、寸水之分兩爲法、以此約彼、卽知金較水重十九倍有餘、其比水輕重、卽謂之水權、至其恆式則 水權$\frac{\text{一寸水}}{\text{一寸物}}$

以水權物

問、物浸水中而權之、其理何如、

答、所失分兩與若干水無殊也、蓋有甲乙丙丁之物在水、其上之水爲甲戊己丁、卽其水下壓之力也、然其上托之力、卽乙戊己丙之水、以此減彼、則僅賸甲丙之水、卽其上托之餘力也、夫所失分兩、既與若干水相等、在水外權之、復在水中權之、以此約彼、卽可得其水權、蓋比寸物寸水、不過比同體之分兩也、其物較水輕、則必加重物同浸而權之無難計也、



問、流動之物、以水權之、其法何如、

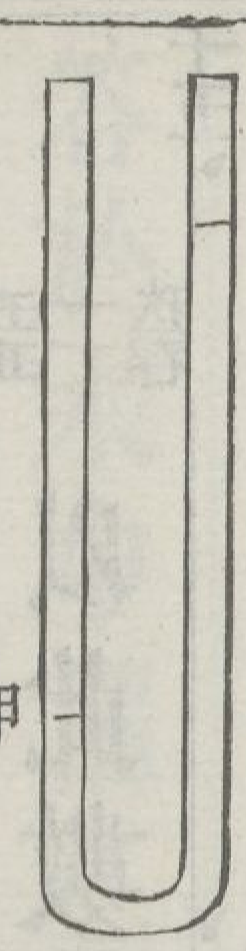
答、其法有二、比如油、以重物先沈其中而權之、復沈水

中而權之、以前數爲實、後數爲法、約之便得此其一
法也、按上文應以油水尺寸均勻、而比其輕重、第須
先量其尺寸、而後權其觔兩、不若以重物浸而權之、
理同而法簡也、蓋其油中所失觔兩、比水中所失觔
兩正如油之輕重比水也、

問、其二何如、

以高低分輕重

答、二物並盛於曲管中間隔住、令其不相攙和、則其輕



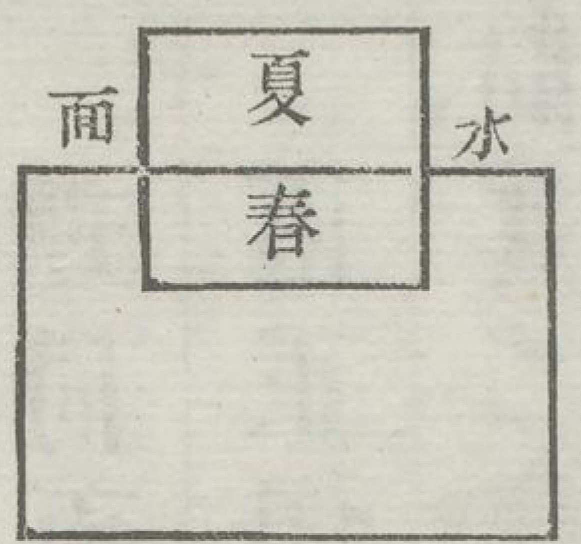
重卽與高低轉比也、設如甲丙丁爲曲
管、盛水於甲、盛酒於丁、其水較酒重、水
面卽比酒較低、以水之尺寸爲春、水之

分兩爲子以酒之尺寸爲秋酒之分兩爲丑則子∶丑∷秋∶春故$\frac{子}{丑}$二$\frac{秋}{春}$以此數約彼即得其水權也

沈浮之理

十五、問物之浮於水其理何也

答、所壓開之水與其物輕重相等其物若干分入水中



以春代之若干分浮水上以夏代之二者皆被水上托其下沈上托二力相抵若移開其物則其原處立即被水填滿此水尺寸同與春同其被水所托復與其物同故重與春夏等以秋代之則夏丄春二秋寸水之重爲子寸物之重爲丑是物之重通計爲丑X(夏丄春)其壓開之水即子X春則丑X(夏丄春)二故丑∶浮∷春∶夏丄春是知其物與

所壓開之水、即如其同體之分兩轉比也、

問、物之下沈上浮、其力何法計算、

答、以其物之輕重、與所壓開水之輕重相比、二數所差、即其下沈或上浮之力也、若其物之分兩爲子、其水之分兩爲丑、其物較水輕、則其上浮之力、即爲丑丅子、物較水重、則其下沈之力、即子丅丑、彼或船沈海底、設法令之上浮、即按此式計算出之也、

以水量物

問、以水計算物之大小何如、

答、於水中權之、即所壓開之水是也、如金石等物、其形不正、欲量其登方尺寸、甚爲不易、不如浸之於水、權

水流疾徐

之、其所失分兩、卽其同體之水也、一尺一寸之水、輕重既知、其統計尺寸、不難悉爲權算、又如冰山浮水、量其入水幾何、卽可計其登方尺寸、亦可知其輕重、

查甜水一尺、重計七十六觔、若海水、則約計七十八觔、

問、管水滿流、疾徐何如、

答、其疾徐、卽如其粗細轉比也、設若甲丙二管相接、水自甲入、既曰滿流、非加快卽不能自丙而出、丙較甲細若干、則丙中之水、較甲中之水流速若干、以

甲丙皆爲橫節方積、其水過甲之速爲子、過丙之速爲丑、則 甲:丙::丑:子

測算江河

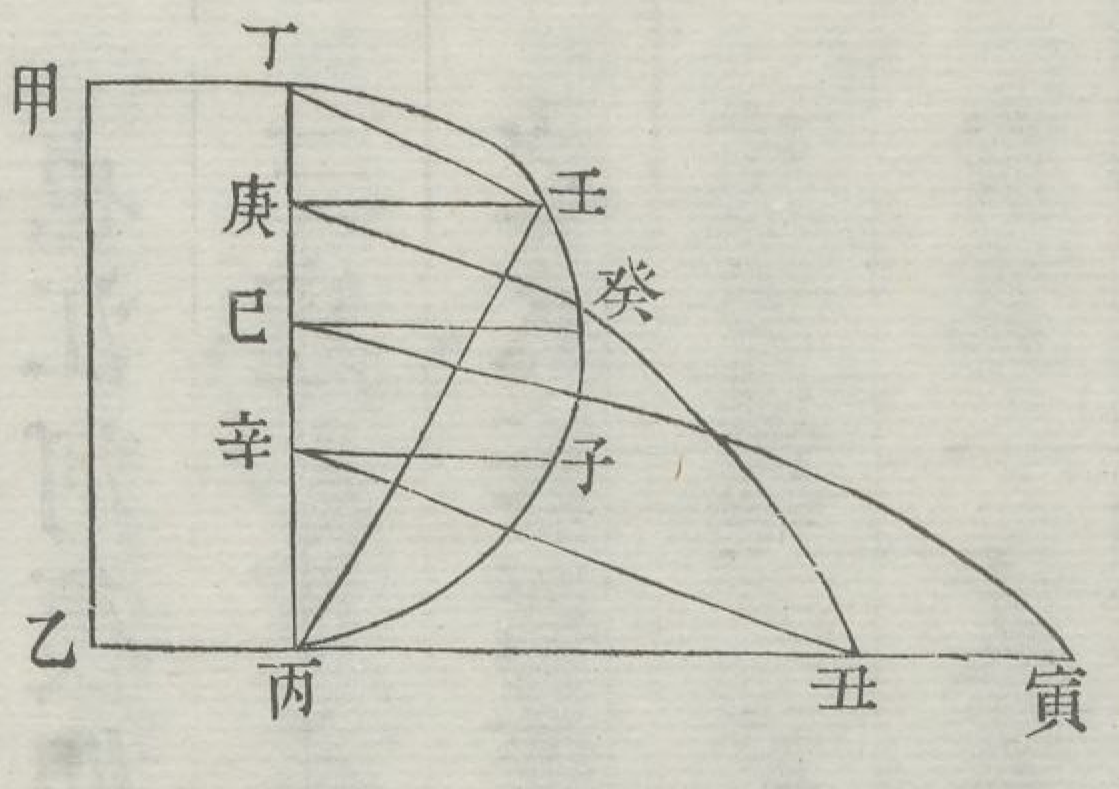
問、江河之水疾徐多寡何法測算、

答、必總其疾徐寬狹深淺而算之也、若水流管中、其倚於管邊者有所阻礙、其流覺慢、故不如管心之流速也、江河復如斯、河涯河底、水流不如河心之急、故此三處、必須查核其疾徐、而絕長補短、即如察知河心之水、每刻流四里、河底流三里、河涯流二里、則統計其流爲三里也、若每分時、其速統計爲十丈、其深統計爲一丈、其寬爲五十丈、以三數相乘、即知其每分流水五百丈登方也、

水自孔流

二十、問水自器旁小孔流出、疾徐何如、

答、其疾徐、卽按其孔上之水深淺方根也、設若甲丙爲高桶盛水恒滿、旁有庚己二孔、則庚孔之上、有甲庚



之水、己孔之上、有甲己之水、正如細管與粗管相接自甲庚之粗管注入之水、與自庚孔所出之水相等、而其動力亦等、甲己粗管中動力、與甲寅細管中之動力復等、以春爲甲庚水之分兩、秋爲甲己水之分兩、申爲庚孔之疾徐、酉爲己孔之疾徐、則庚孔所流之水、爲申春、己孔所流之水、爲酉秋、以二數相比、

水之倒躍

則春乂申⺀秋乂酉⺀丁庚⺀丁己然各孔所流多寡、必按其疾徐、申⊠春
酉⊠秋
式中春秋、卽可換申酉、則申二⺀酉二⺀丁庚⺀丁己、故申酉⺀丁庚⺀丁己卽知各孔之疾徐、正如其深淺之方根、其出水之多寡亦復如是、設其孔一於水下十六尺、一於水下六十四尺則此出水較彼加倍、蓋如八四二數之方根也、

問、其水旁出而上躍、高低何如、

答、以管插桶旁、向上彎曲、若無風氣阻礙、則水應上躍至與其面平高相埒、蓋申二⺀酉二⺀甲庚⺀甲己有物自丁下墜至庚至己、

水面下退以之記時

其所行尺寸、卽按其疾徐之成方、見下文力學是知各孔流水之疾徐、卽與物之下墜若干尺寸等、然能以其下墜之力上擲之、必升至故處、其力始盡、故水自彎管倒湧、應至水面平高、其理同也、按此理、水自高處灌於輪上、不如蓄之使深、自低處放出之力大、蓋自低處而出、其速不啻下墜、復少風氣阻礙故也、

問、桶水旁流、水面漸漸下退、疾徐何如、

答、卽按其孔之深淺方根、蓋水面下行疾徐、隨其外流之疾徐故也、夫水面下行、猶物上擲、其速卽按所行尺寸方根、其物上行漸慢、水面下行亦漸慢、其物每

杪上行之尺寸、即如七五三一之陽數、水面下行亦
如此數、其桶若高式、上下如一、鑽孔只容其水十二
點鐘流盡、按陽數層次畫成其度、漸下漸近、即可以
之記時、蓋式水畫之、按單數倒用而討之、初無二致、
水表之理、卽此、
問、隨流隨添、使桶水恒滿、自孔外流者、多寡何如、
答、乃加倍也、假令不復以水自外添入、則桶水漸虛、孔
流漸慢、如物之上擲而漸慢也、然桶若恒滿、所入與
所出相等、則壓力無差、孔流均速、正如物之上行而
均速也、查物之上行均速、比物之上擲而漸慢者、所

水自旁躍

行尺寸加倍、故桶水外添、使之常滿、自孔噴流、亦必加倍之多也、見力學

問、其水旁躍、遠近何如、

答、以水深爲圓徑、自孔橫畫直線、割圓、其水躍出、卽應加倍於此線之尺寸也、蓋水自庚流、較物墜至庚、其急加倍、則其物至庚時、其水流之尺寸必加倍、卽庚丁二水落至地也、與物自庚落地時等、其物墜至庚時爲春、自庚墜至丙時爲秋、則丙庚：庚丁：：春：秋然已見春時水流、庚丁二則

以此代春秋時所流必丙丑也、蓋其旁躍落地必至此處、卽以丙丑代秋、未知其幾何、則由其比例而計之、蓋 $\sqrt{丁庚} : \sqrt{庚丙} :: 二丁庚 : 丙丑$ $丙丑 = 二丁庚\sqrt{\frac{丁庚}{庚丙}}$ $= 二\sqrt{丁庚 \times 庚丙}$ $= 二庚壬$ 蓋上下之三角形同類、以句股相比、$丁庚 : 庚壬 :: 庚壬 : 庚丙$ 則 $庚壬^{二} = 丁庚 \times 庚丙$ 是知水之旁躍、卽庚壬橫線之加倍也、二孔若離桶底桶面相均、則旁躍亦均、孔適居中、則旁躍最遠、蓋庚壬卽爲圓之半徑也、

物行水中愈速愈阻

二十五、問自孔旁躍水循何等之線而下也、

答、既被壓力旁催、復被地之吸力下引、即循曲線而下、若更考其曲線爲何等、便知其爲抛物線、蓋擲物空中所行之線、與此無異也、抛物線見下文測算力學

二十六、問平面之物橫行水中、被水阻礙、何如、

答、其被水阻礙、即按疾徐之成方也、蓋其物行、掣水俱動、而水所得之動力、必爲其物所失、以春爲水之分兩、以子爲其動之疾徐、以秋爲動力、則子乂春二秋、然其物之行愈速、即所排擠壓開之水愈多也、則子⋈春故子^{二}⋈秋是知水之阻礙、即按其物之疾徐成方、其物不甚疾、此

理卽可驗也、若行之極速、則阻礙遞加更大、按此則舟之行水、定有限制、欲行之異常加速、實爲費力、蓋以火輪機合馬力二十匹、令舟每點鐘行十二里、合馬力一百八十匹、其舟始克行三十六里、是速加三倍、其力必加九倍故也、

卷七算學上章凡二十六問

第七卷算學協助格物

第二章測算氣學

吸氣筩

一、問、吸氣筩所吸、每下遞減何如、

答、即按乘法層次遞減也、設其筩所容爲罩所容十分之一、則第一下必出氣一分、第二下必出所餘賸之氣一分、第三四下皆如是、故列成圖式、餘可類推、觀第二第三行、數雖遞減、永無窮盡、即知罩內之氣總留少許、必不能盡出之也、

擊數	每擊所出	每擊所餘	統計所出
一	十／一	十／九	十／一
二	百／九	百／八一	百／十九
三	千／八一	千／七二九	千／二七一
四	万／七二九	万／六五六一	万／三四三九
五	十万／六五六一	十万／五九〇四九	十万／四〇九五一

天氣下壓

問、天氣下壓分兩、何法計算、

答、以水或水銀稱之皆可、水則二丈九尺、與天氣均重、其水於桶底、每方寸下壓若干、即按上章計算、便知每方寸被天氣所壓若干、然以水稱之、不如水銀之便也、水銀較水重十三倍半、水被天氣壓托高起二丈九尺、水銀高起二尺一寸四分、以十三有半乘之、細核之爲十三零百分之五十七則幾與前數無差、其水銀底積方寸、上下如一、則重計廿二觔有奇、可見天氣下壓之力、每方寸亦廿二觔有奇、

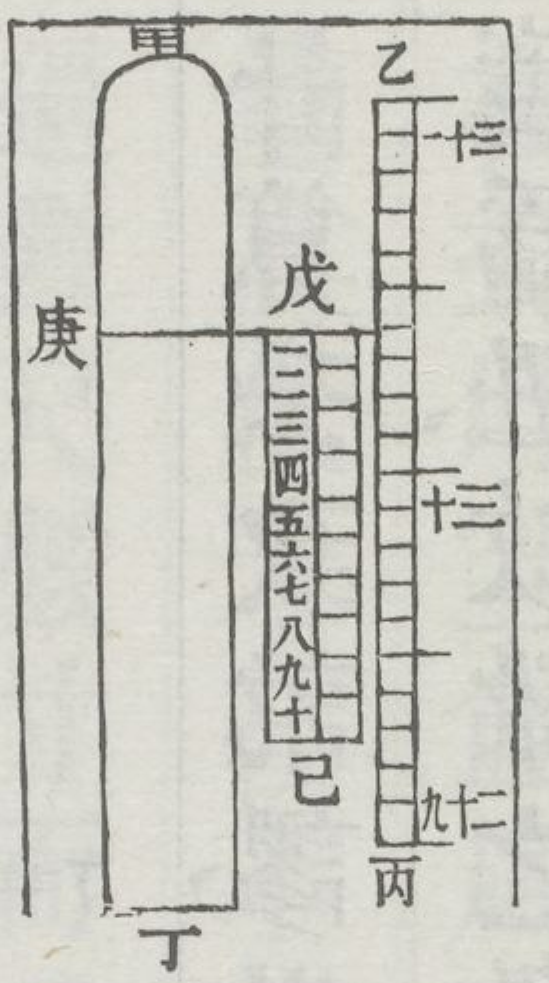
風雨表細差格

問、風雨表細差、何法計算、

答、設若甲丁爲表管之上節、乙丙爲度數格、每寸分十、

風雨表測量高低

戊己為細差格、每格較前小十分之一、水銀高至庚



戊、即為三十寸三分有奇、欲知其奇若干、便將細差格上移至戊、下排至二格平處、即第八格、便知所奇乃百分之八、則三〇三八為正數也、表內水銀高低天下無甚差別、其常不過寸之三四分、是天氣之輕重、天下相同、至其忽變、則有差至三四寸者、即為預報風雨、不可不細察也、風雨表度數皆按洋尺

問、以風雨表測量高低、何如、

答、攜之上升、則水銀漸退、若不甚高、每升八十七尺、即華

尺七丈四水銀下退寸之一分、此其大概也、然天氣愈高愈輕、水銀所退隨高漸少、欲細爲覈算、其法頗煩、不如空盒風雨表爲便也、以此表測量高低、其式如左、

於此處其分度爲甲、於彼處其分度爲丙、二處高低所差爲丁、

則

$$丁=\frac{甲丄丙}{甲丅丙}\times五二四〇〇$$

按此數、爲洋尺、惟天愈高愈冷、苟不計算恐致訛謬、以此處熱氣分度爲子、彼處熱氣分度爲丑、改訛之數爲寅、則

$$寅=\frac{九百}{子丄丑丄八三六}$$

卽爲二處高低所差之正數也、凡二處所差高低不過三千尺、皆可按此式

計算若高過三千尺、則應層層相繼、而算之可也、按右式用空盒風雨表、雖爲更準、然以水銀表按之測量高低、未嘗不可、蓋雖稍有訛謬、數千尺中所差不過數尺數寸而已、

測算天氣輕重

五、問天氣較水銀輕重若何、

答、升高八十七尺、水銀旣下退一分、則一分之水銀足抵八十七尺之氣也、是一寸之水銀、足抵萬〇四四〇寸氣水則較水銀輕十三倍半有奇、以此數約彼、即$\frac{一〇四四〇}{一三.五七}=七六九$此水較天氣重七百六十九倍也、

統計其分兩

問、天氣包裹地球一層、統計分兩若何、
答、天氣下壓、旣如二尺一寸之水銀、則其分兩統計正如二尺一寸深之水銀海包裹地球、海形若球皮、欲計其分兩、其式如左、水銀之高爲丙、地球半徑、爲甲、其圓比徑爲卯、其全體爲春、

則 $\frac{四卯}{三} 乂 甲^{三} = 春$ 水銀全體爲夏、則 $\frac{四卯}{三}(甲丄丙)^{三} = 春丄夏$ 以此減彼、卽餘體

球皮乃 $夏=\frac{三}{四卯(甲丄丙)^{三}}丁\frac{三}{四卯乂甲^{三}}$ 則 $=四卯(甲^{二}丙丄甲丙^{二}丄\frac{三}{丙^{三}})$ 然丙較甲甚小、其第二三元即可不計、則 $夏=四卯甲^{二}丙$ 若配以數、卯爲三·一四甲爲二六萬尺、丙爲二尺一寸、

則

夏二二四×(三·一)(二一六方)×(二·一)

即為

一一二一四九二二二四○○

萬尺乃水銀之立方尺寸、每尺約計千觔、以此乘前數、可得天氣全體之分兩、

問、天氣稠稀、上下若能均勻、其高若干、

答、即以天氣與水銀輕重、轉比而計之也、如以寸水銀較寸天氣重一萬零四百四十倍、天氣即比水銀高若干倍、則為二萬一千九百二十四尺乃十二里有

天氣漸高漸薄

奇、不及大山之高、大海之深也、與水比之、總計體質、亦不如水之多也、而天氣一層雖究不如此之薄、與地之厚比之、不過如極薄之翼也、

問、天氣漸高漸稀遞減層次若何、

答、若升高之路、按加法遞加、則天氣之稠、必按乘法遞減、設若天氣分爲無數層次、其稠下層爲甲、次層爲乙、三層爲丙、在地面其壓力爲子、下層之上壓力爲丑、次層之上壓力爲寅、則下層之重、即子丁丑、次層之重、即丑丁寅、其輕重復如稠稀、蓋按馬氏之例、天氣愈壓愈縮、其尺寸與壓力反比、

則

寅丅丑:丑丅子::丙:甲

然天氣之稠稀、亦按其被壓之分兩、

則

寅:丑::丙:甲

寅:丑::寅丅丑:丑丅子

寅丑丅丑^{二}二寅丑丅寅子

丑丑二丑^{二}二寅子

故

寅:丑::丑:子

按倍遞減也、層層皆必如此、即如升高至二十里、其天氣之稠、不過四分之一、升至四十里、其稠只十六分之一、餘可類推、其式如左、

升高里數、按恒數遞加、

	天氣之稠按倍遞減
二十	$\frac{一}{四}$
四十	$\frac{一}{一六}$
六十	$\frac{一}{六四}$
八十	$\frac{一}{二五六}$
百里	$\frac{一}{一〇二四}$
百二	$\frac{一}{四〇九六}$
百四	$\frac{一}{一六三八四}$
百六	$\frac{一}{六五五三六}$
百八	$\frac{一}{二六二一四四}$
二百	$\frac{一}{一〇四八五七六}$

天氣高有界限

問、天氣之高、有界限否、

答、按上文遞減層次無盡、則天氣雖愈高愈薄、亦該無盡、然至極薄之處、其相驅之力少、被地之吸力與空中之冷相抵、故不復漫散、判然有界限也、是知星宿之間、空然無物、故運行無阻、出没無差也、

十、問、若能掘井通至地心、其內天氣之稠若何、

天氣愈低愈稠

答、必按倍遞加蓋與升高相反也、下至百里、其稠如水、百五十里、則重如黃金、

問、前有法國人駕飛車攜風雨表上升、見其水銀漸退、僅賸十二寸、其上下天氣多寡若何、

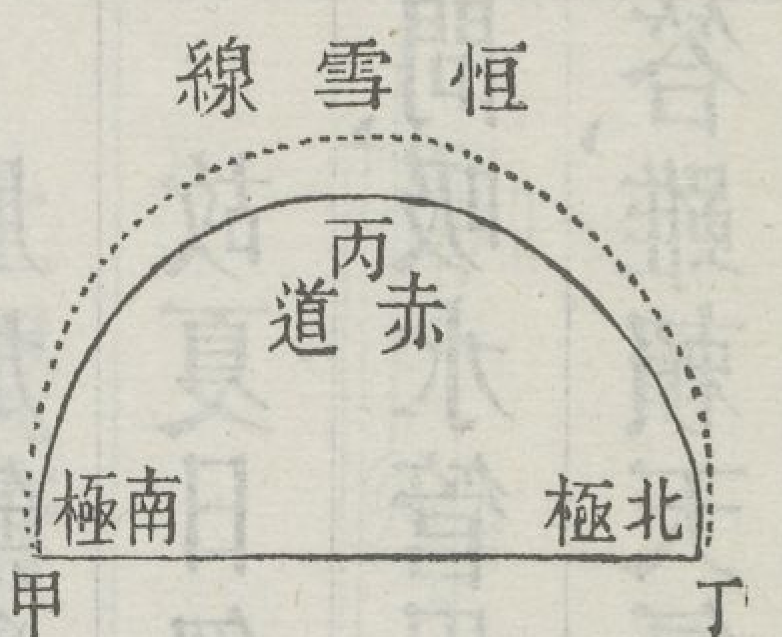
答、按洋尺表內水銀在地面應高三十寸、僅賸十二寸、則其上賸天氣五分之二也、

蓋 $十二 = \frac{二}{五} \times 三〇$ 也、

問、計高至結冰、按南北度數所差若何、

答、離地上升、愈高愈冷、故無論南北、最高山頂、常年積

雪、惟赤道之下、熱氣最盛、離赤道或南或北、熱氣漸次差少、故他處不必如赤道下之高、始可常年積雪也、若細爲查核、則恒雪線自赤道以南以北、漸低而下、直近二



極、即不離平地、圖中甲丙丁爲地面、其上之碎線、即恒雪線也、計其高低、標之於左、

南北度數	恒雪線高低
○度	一千一十二丈
十	二千○七六
二十	九百七九
三十	八百二八
四十	四百四四
五十	四百四七
六十	二百六二
七十	一百○十
八十	九丈

天氣中含水氣

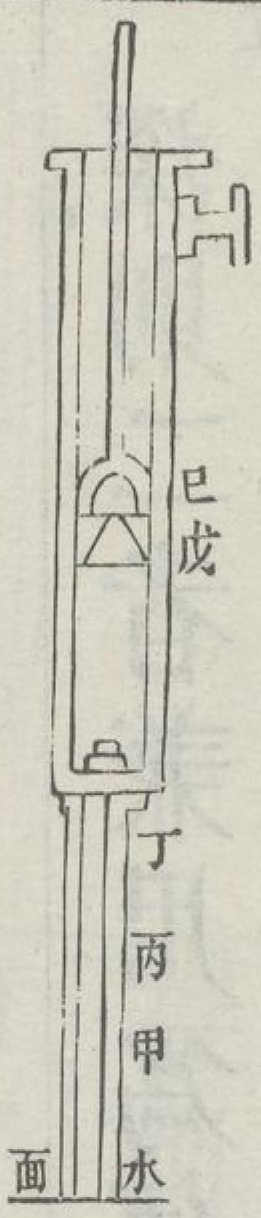
問、天氣中含水氣多寡何如、

答、愈熱愈多也、理應如此、蓋水愈熱愈化爲氣、且天氣愈熱愈稀、故其間容水氣愈多也、是以凡有熱風遇冷風、天氣卽縮、水氣卽凝而雨下也、在三十二度、天氣若干、水氣只爲一五〇二一、至九十三度、則爲二十二一、是天氣愈熱、水氣按倍遞加甚速、冬令雖加熱十度、水氣所加無幾、惟至夏日忽加熱十度、則水氣所加極多、故夏日忽作炎蒸、每致暴雨

計吸水管之力

問、吸水管用力若何、以下水管數段、似應屬之水學、茲歸氣學、以其力由天氣也、

答、雖賴天氣下壓、所用之力、仍與提水無異、卽與其水



之觔兩等也、蓋水上升二丈九尺、無非氣之下壓有若干觔兩、上移其塞、卽上提天氣若干觔兩也、夫上提管內之氣、管外之氣、於是下壓、令水隨塞而上、故所用之力、卽與上提若干水無異也、此理所必然者、復可以測算證之、以甲丙尺寸爲子、水所以升至丙、惟管中之氣漲入戊已、其漲力卽二九丁子、乃其活塞被氣上托之力也、活塞被天氣下壓之力爲二九、蓋天氣足以壓托二丈九尺之水、輕重與之均勻、以此數減彼、

卽 二九丅(二九丅子)二子 其餘臆壓力、本與水之上升尺寸無差、故吸管中之氣、與上提若干水、其力無差、是知吸水管並不省力、惟用力之法較便也、

計提水管之力

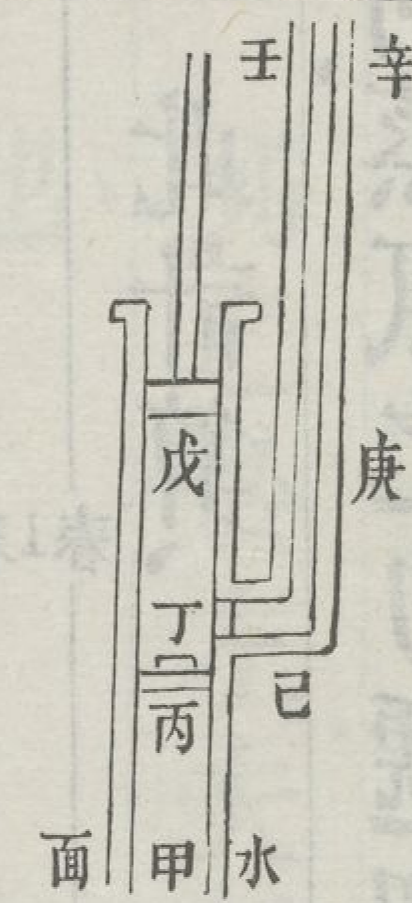
問、提水管用力若何、

答、旣曰提水、則塞上之水、與活塞等件、一並若干重、須用若干力也、圖中吸水管之上節、卽提水管也、若水深、則二者兼用爲便、

計壓水管之力

十五、問壓水管用力若何、

答、較提水管少省、蓋提水必須活塞鐵條等件、一並上提、而壓水管則活塞等件、自然下壓爲用、有分兩若干、卽助力若干也、壓水管下節常與吸水管相連、茲無庸再計、以



其上節之活塞等件分兩爲寅、活塞之半徑爲辰、週圍比徑倍數爲卯、尺水之重爲巳、正管中水高尺寸爲子、須用之力爲春、其水於旁管之高爲丑、下壓之力爲秋、計其上提之力、

則 $寅 + 巳 \times 子 \times 卯 \times 辰^{2} = 春$ 欲計其下壓之力、

則寅丁己乂丑乂辰^{二}二秋若知其水高尺寸、活塞徑線分寸、並活塞等件觔兩、卽可以數計之、卯卽四一三、寅卽六七、連吸帶壓、其力六七乂辰^{二}四一.三乂丑丨子(二秋丄春、卽蓋上下寅之加減對消也、水龍之力、卽按此計算、

計蒸氣之力

問、蒸氣之力遞加若何、

答、氣愈熱、力愈加、氣愈稠、力愈大、其力卽按二一者遞加、

其力按熱遞加

問、其力按熱遞加何法計之、

答、以水銀高下相抵而計之也、其按熱力加、所有層次、列之於左、夫氣中無水、故稠稀如一、惟因熱而加力也、

蒸氣熱至法倫表若干度數	能抵水銀若干寸數	蒸氣熱至法倫表若干度數	能抵水銀若干寸數
三十二	○·二○	六十	○·五十二
三十五	○·二二	六十五	○·六十
四十	○·二六	七十	○·七十二
四十五	○·三十	七十五	○·八十五
五十	○·三六	八十	○·九十四
五十五	○·四十三	八十五	一·○一

式按洋尺

其力按稠遞加

十七、問、蒸氣按稠稀加力若何、

答、水熱至二百十二度化氣、則漲至一千七百倍、此除

天氣以外、無所被壓、雖加以烈火、其水不增熱、惟化氣而散也、若煮水壓之、不令氣散、水與氣皆可增熱、斯其加熱加稠、至於四百十九度、氣比水漲、不過三十七倍、至五百度、其漲不過水之加倍、則水若干尺寸化氣、不過尺寸加倍而已、其氣如此之稠、如此之熱、漲力甚險、幾乎與火藥相等、蓋若忽然放出、必漲至六百五十倍、若煮水能壓之、勿令稍漲、至熱極則寸水化而爲氣、其力足抵一里半高之水銀、每方寸受力幾乎三萬觔也、其力遞加、層次標之於左、

按蒸氣熱至法倫表若干度數、能抵天氣之壓力

若干倍數、

熱表度數	天氣倍數
二百十二	一
二百五十	二
二百七十五	三
二百九十三	四
三百〇七	五
三百二十	六
三百三十一	七
三百四十一	八
三百五十八	十
三百七十四	十二

熱表度數	天氣倍數
三百八十七	十四
三百九十三	十五
四百十八	二十
四百三十九	二十五
四百五十七	三十
四百七十三	三十五
四百八十六	四十
四百九十九	四十五
五百一十	五十

卷七算學第二章凡十七問

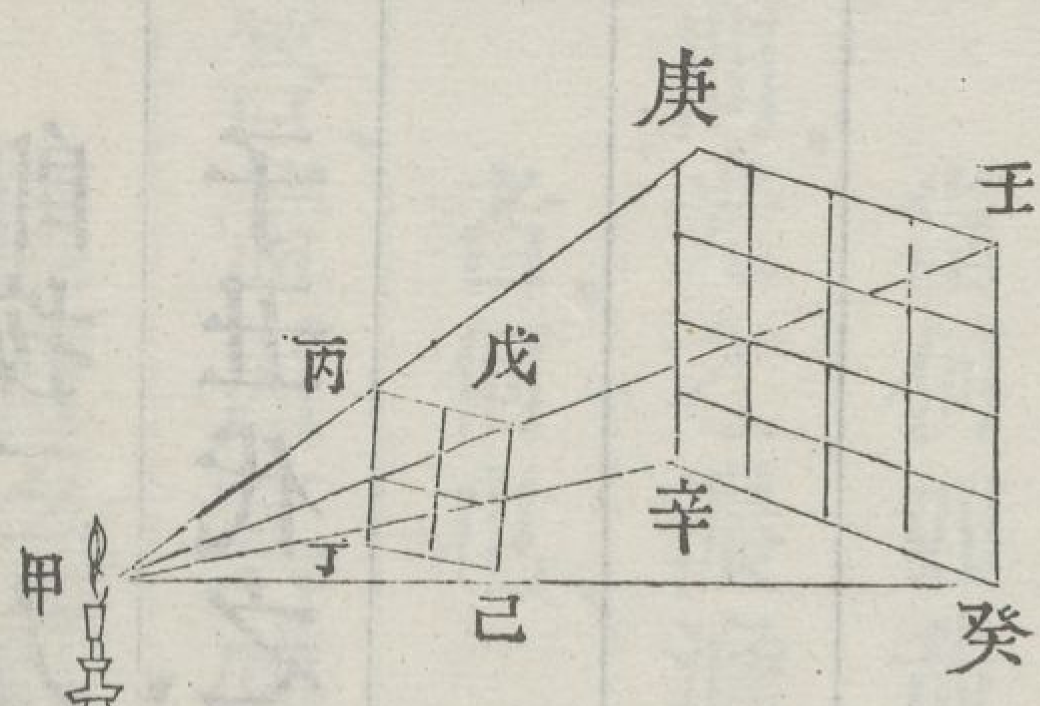
光按遠近等差

第七卷算學協助格物

第三章測算光學 按第三卷火學論熱論光茲祗測算光學因熱氣發散直射返照皆與光同餘無庸計算

問、光之濃澹按遠近等差若何、

答、按其遠近成方反比也、蓋光性直射四週散開、布置均勻、若知其遠近、計其多寡、即無所難、如設燭於甲、



以方板小塊置於丁、即遮大板之在辛者、蓋其光按甲癸甲辛之線直射故也、若移開小板、其光盡照大板、不過散而較澹耳、復以小板移近燭光隔之、則其光全歸小板而較濃、是若則濃若則澹、

即按二方之反比明矣、其光於巳癸二處之濃澹、以子丑代之、則

子:丑::壬癸^{二}:戊己^{二}

然甲戊巳、甲壬癸之三邊形、既爲相類、則

甲癸:甲己::壬癸:戊己

故

子:丑::甲癸^{二}:甲己^{二}

即二處之濃澹、如其遠近之成方反比、

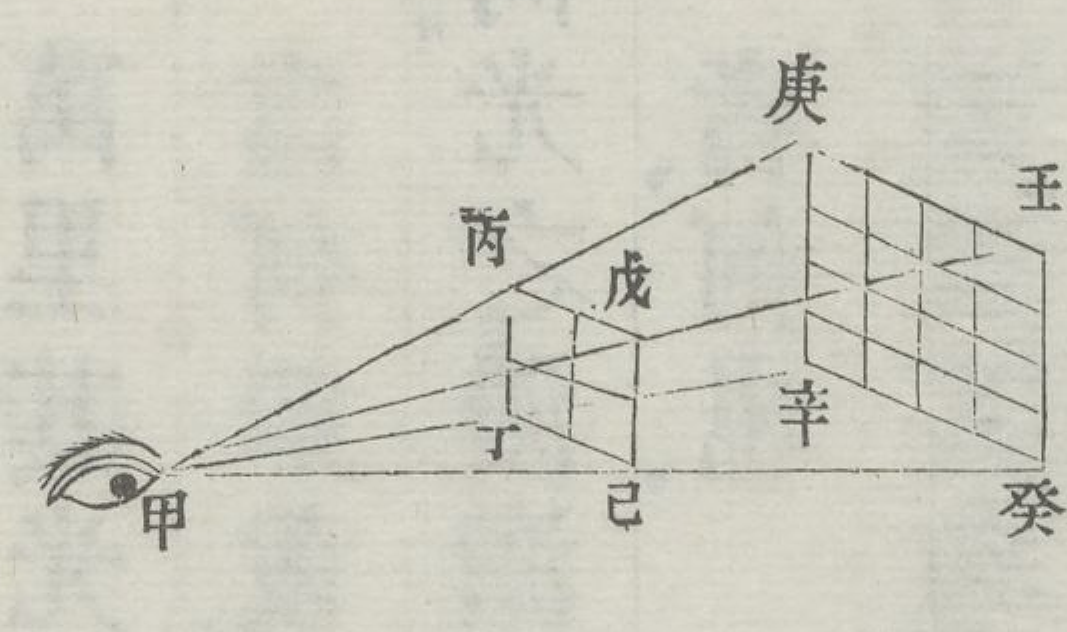
離物稍遠明似無差

是也、是以其方板離光少許、其光即隨減若干、離至加倍、其光不過四分之一、離遠四倍、只賸十六分之一、至離八倍、則僅賸六十四分之一、若移近加倍、反爲加濃四倍、移近千倍、加濃百萬倍、故距太陽三百萬里、其光比地上十萬倍也、復移近之、其明其熱、更當何如哉、

問、光之濃澹、既隨遠近、大有差別、及目視物、似無甚差者、何也、

答、蓋因其物愈遠、愈覺收小、亦按成方反比之例也、依圖言之、目在甲注視壬辛方板、則光由板上返照入

目若小板近目、光卽滿蔽、蓋其板小四倍、若近目加倍、障之必嚴、光雖四散、而僅賸四分之一、其明固無差、若移近十倍、其光卽減少百倍、物影亦收百倍、而其明無差也、若空然無氣阻蔽、則實有此理、然天氣略能阻光、視物漸遠、漸覺模糊、其等差詳於下文測算夫目之



覩物、與藉光視他物、確有分別、蓋其覩雖略遠、明則不差、藉光讀書、稍遠卽難明徹、皆由其濃澹捘成方反比也、二者事反而理同、

天氣阻光令明漸殺

問、天氣若能稠稀均勻、其阻光令明漸殺、等差何如、

答、其漸殺等差、按乘法遞減也、比如天氣一層若干厚、稠稀均勻、以平面分爲無數薄層、光透上層、所減阻爲 $\frac{寅}{一}$ 所出爲 $一丅\frac{寅}{一}＝\frac{寅}{寅丅一}$ 其透第二層、復失其 $\frac{寅}{一}$、卽 $\frac{寅}{寅丅一}\times\frac{寅}{一}＝\frac{寅^{二}}{寅丅一}$ 其透第二層而出者、卽 $\frac{寅}{寅丅一}丅\frac{寅^{二}}{寅丅一}＝\frac{寅^{二}}{(寅丅一)^{二}}$ 其透第三層而出者、爲 $\frac{寅^{三}}{(寅丅一)^{三}}$

餘可類推、則各層之光、按乘法遞減、其式如左、

一層 $\frac{\text{寅}}{\text{寅丅一}}$

二層 $\frac{\text{寅}}{(\text{寅丅一})^{\text{二}}}$

三層 $\frac{\text{寅}}{(\text{寅丅一})^{\text{三}}}$

四層 $\frac{\text{寅}}{(\text{寅丅一})^{\text{四}}}$

率皆如此、

以入每層之光爲實、以$\frac{\text{寅}}{\text{寅丅一}}$爲恆法、乘之、即入次層之光、所謂按乘法遞減、光透體質稠稀均勻之物、皆按此理也、

平鏡返光之理

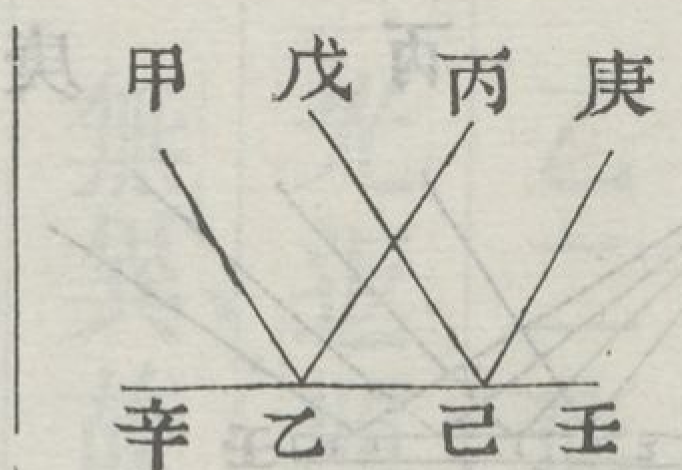
問、光之照於平鏡面、其返照何如、

答、其來光若平、其返光亦平、其來光或散或聚、其返光之散聚亦皆然、

光平來平返

五 問、於平光何以辨之、

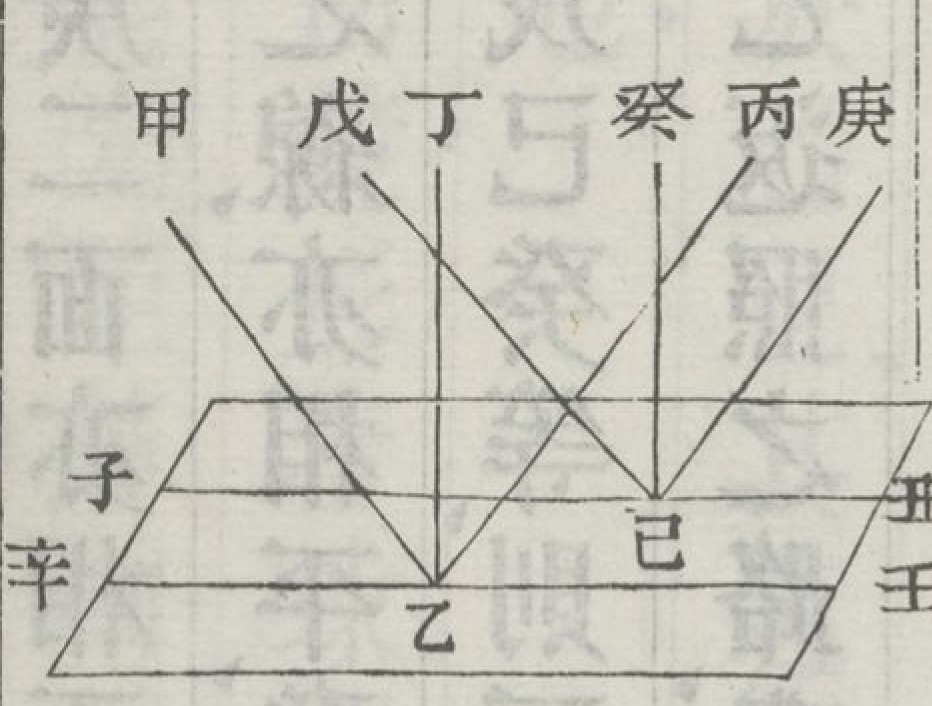
答、假如甲乙戊己爲二線平光、其返照亦必平、蓋甲乙



辛、戊己辛二角旣均、則丙乙壬庚己壬、二角亦均、二角旣均、二線必平、

問、二線平光、若不同一平面、其返照平否、

答、仍然平也、設甲乙戊己不同一平面、與乙己各垂直



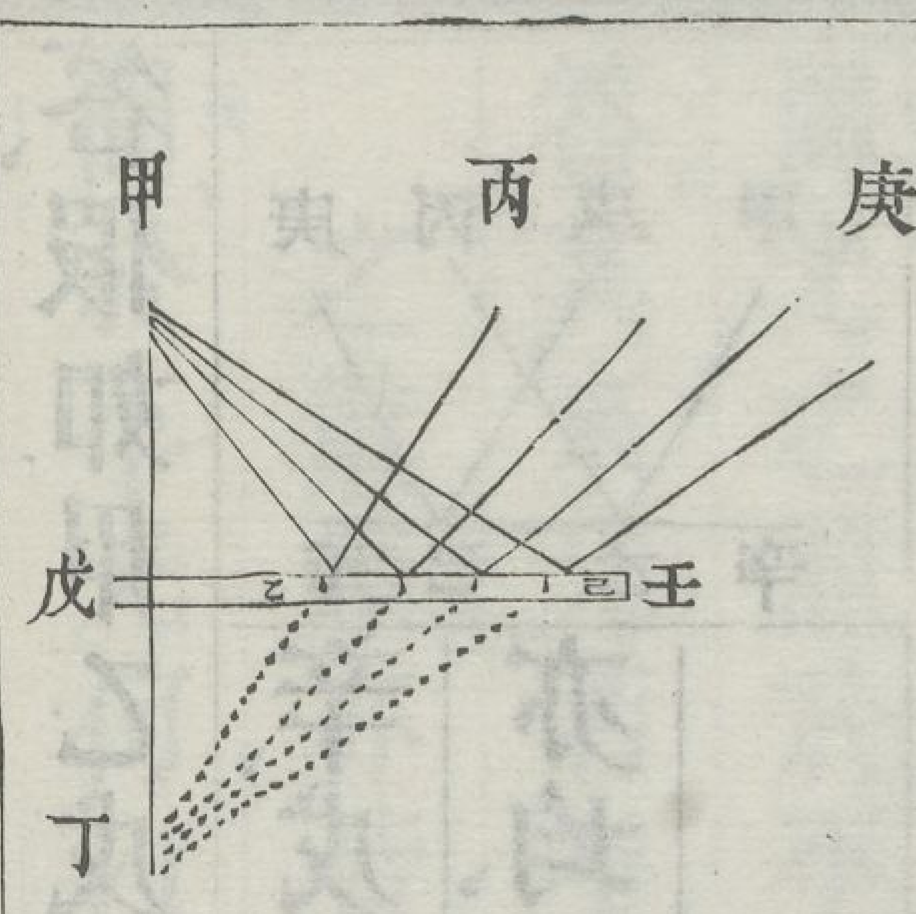
線、則甲乙丁之面、與丙乙己庚之面相切於丙乙、甲乙戊己本係平線、丁乙癸己亦平、則甲乙丁、戊己癸二角等、此四線兩兩相平、則甲乙丙、戊己

光之聚散返照亦然

庚二面亦相平、二面被丙乙己庚之面所切、其所切之線、亦相平、癸己庚、丁乙丙、二角卽等、癸己庚旣與戊己癸等、則丁乙丙與甲乙丁亦必等、乙丙卽爲甲乙返照之路、與己庚相平也、

問、其光照於平鏡、或散或聚、其返照何如、

答、其返光之散聚、卽與來光相同也、設有光二線、自甲



照於乙己、返照於丙庚、則甲乙甲己相離度數若干、乙丙己庚相離度數亦若干也、自甲垂線至丁引乙丙使與甲丁相接則甲乙戊與丙乙壬等、丙乙壬與

戊乙丁亦等、故甲乙戊戊乙丁、三角相同、其句爲戊乙二形共之、則甲戊戊丁二股亦等、故乙丙已庚之光返照方向、正如自丁而發、相離度數、與自甲而發無異、故其來光之眞源、距鏡若干、卽其返光之虛源、亦入鏡若干也、至於二線之光相聚而照、欲究其返照方向、卽與此論相反也、卽如二光自丙庚而發照於乙已、其返照必歸至甲相斜度數、與歸至丁無異也、

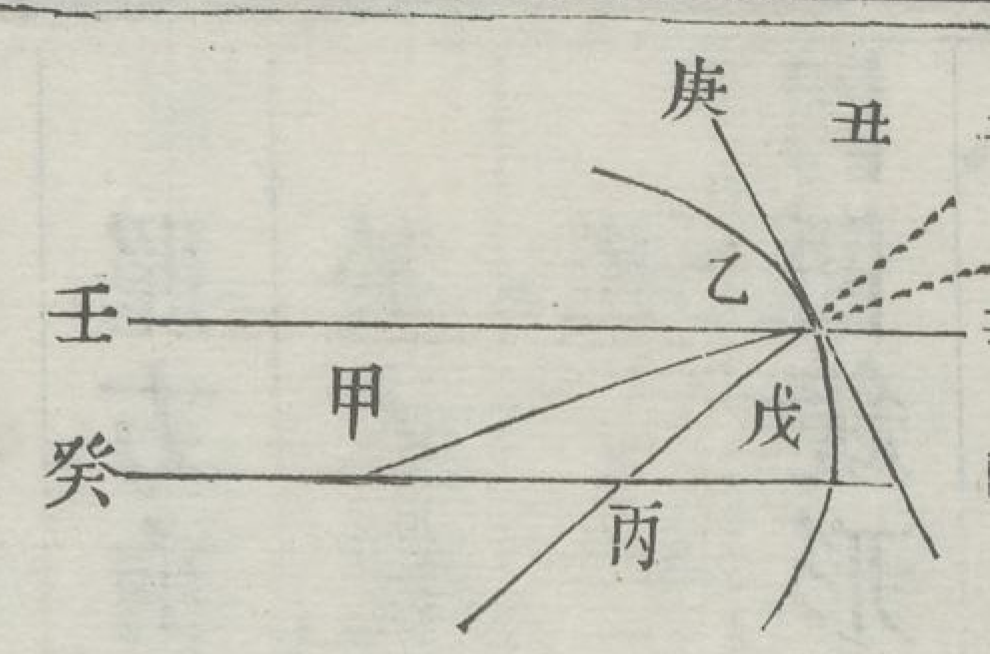
凹鏡返光之理 鏡面如球 聚光半徑

問、凹鏡形若球面、平光照之、返照何如、

答、其光距鏡軸不遠、則所聚光心於鏡面鏡心居中、蓋

之中

以甲爲鏡心、癸爲光線、經甲而照於戊、其必返照至



癸、若更有平光自壬照於乙、其必返照於丙、蓋甲乙丙甲乙壬二角相等故也、於乙畫庚己之切線、二光旣平、則甲乙壬乙甲戊二角必等、而乙甲戊與甲乙丙亦等、夫三邊形二角旣等、其相對二邊必等、是知甲丙與乙丙等、然甲乙己甲乙庚皆直角、除甲乙丙、甲乙壬則丙乙己壬乙庚等、壬乙庚丙乙己庚復等、故丙乙己亦等、而丙乙丙己之二邊均長、若二光相離甚近、則弧切無差、丙己卽無異於丙戊、旣與丙乙等、

鏡面若拋物線返光皆平

與甲丙亦等、故其光心卽在居中也、

問、若平光照鏡、距軸稍遠、其返照何歸也、

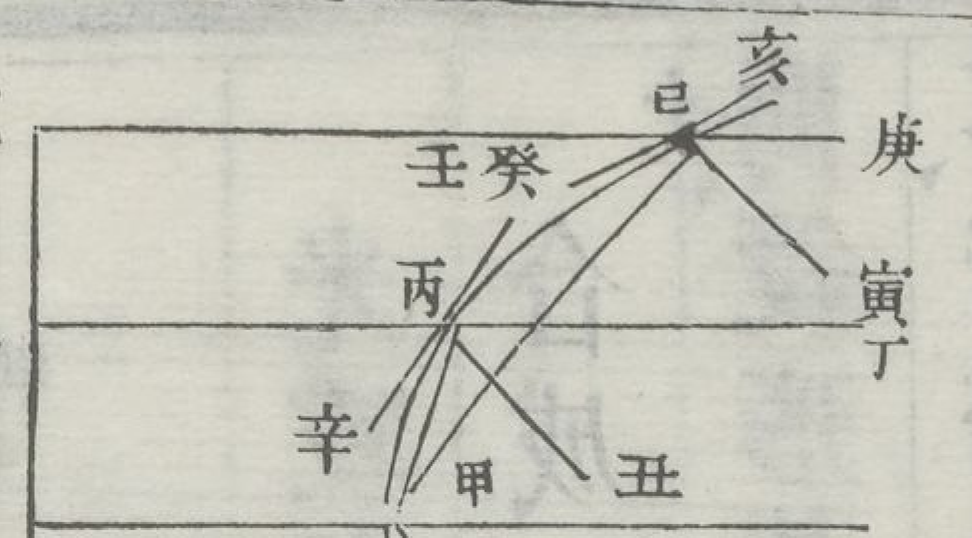
答、其光必聚於與鏡同中之球面也、蓋其光之照於鏡軸、相近者旣歸半徑之中、則凡有平光照於他處者、亦歸半徑之中、光心各點合成球面、

是也、如圖中光照於戊相近、旣歸至丙、其平光或離稍遠、卽返照成光心、於丁丙巳之各點、多點合成一線、多線合成球面、

十、問、鏡形若拋物線、其平光返照何如、

答、皆歸中心也、其鏡若球形、平光與鏡軸相近者、必統

歸一處、即半徑之居中、若離軸稍遠、則不盡一處、惟



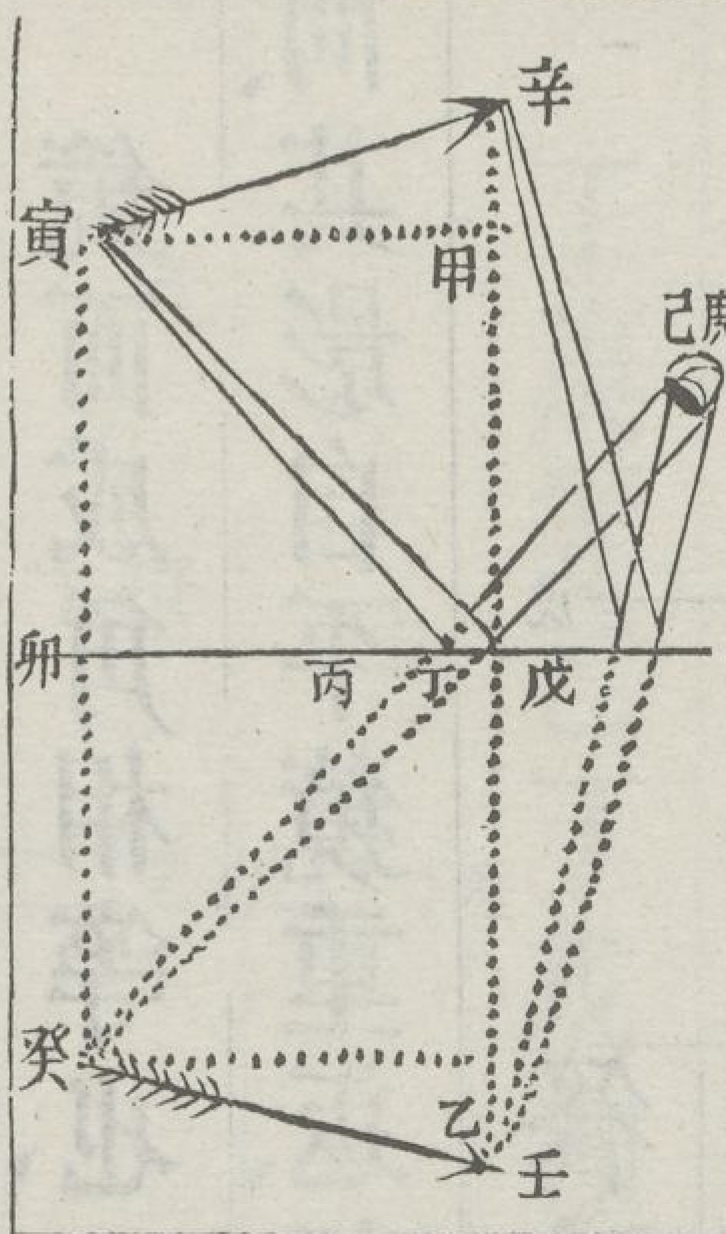
鏡形若類拋物線、平光照之、無論離軸遠近、皆歸一處、以子丙巳爲鏡面、庚巳丁丙爲二線平光、則二線光、必返照於甲、蓋按拋物線之理、凡線與軸相平者、與切線交成角、必等、則丁丙壬與庚巳亥等、其來光之角、等反照之角、亦等、丑丙甲與寅巳甲等、則丁丙庚巳二光、必返照於甲、餘可類推、即知平光莫不歸於甲、或設燈光於甲、其返照必平行不散、故能射遠、海涯建造光塔、每用拋物線鏡、職是故

平鏡成影之理

也、

問物於平鏡成影其影見若何、

答、其物距鏡若干、其影卽入鏡若干、其影與物均大、且

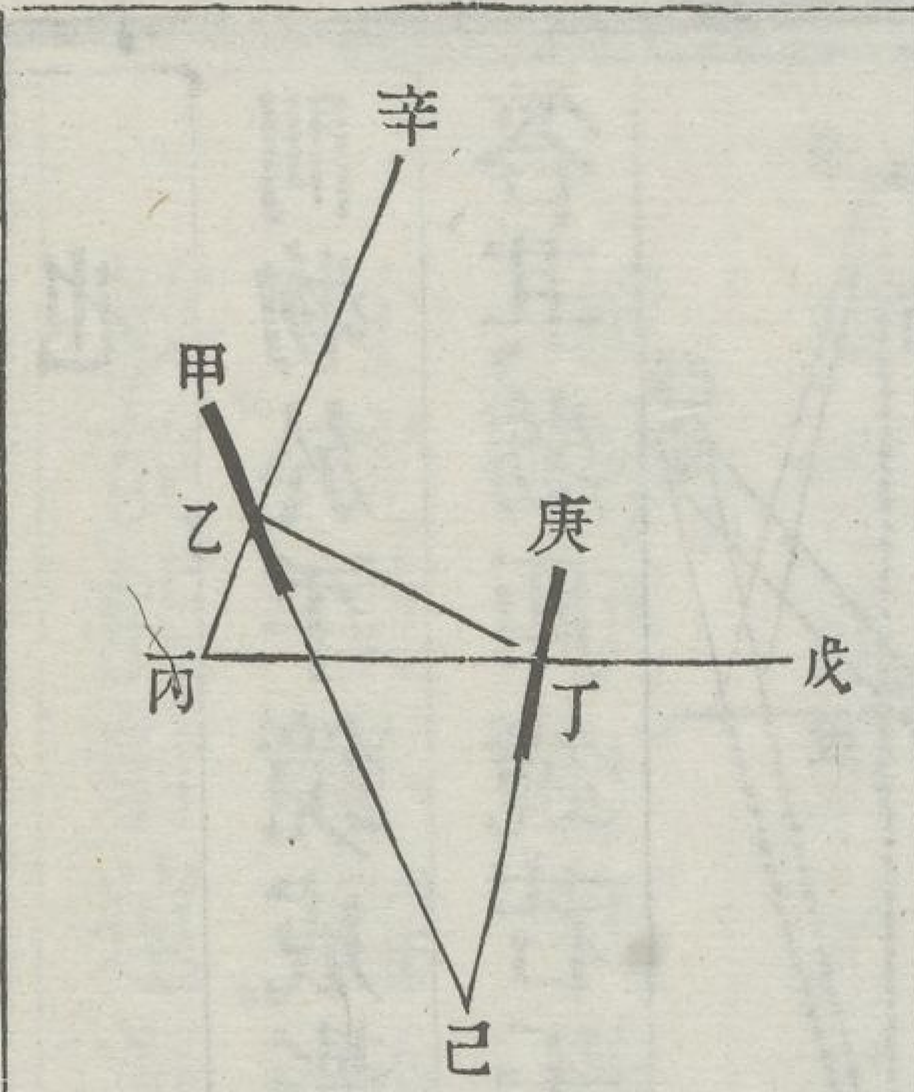


其物與鏡成角若何其影成角亦相等、如圖中寅辛爲物、寅端卽見於癸、按上文第六問、癸卯與寅卯等、辛端見於壬、而壬戊辛戊等、寅辛二端之間、各點皆然、莫不見於壬癸之間、則其物距鏡若干、其影必入鏡若干明矣、壬戊旣與辛戊等、而壬戊癸辛戊庚又等、則各邊各角皆等、影與形均大、至其與鏡成角

若何畫寅甲癸乙二線、與鏡面相平、則辛甲乙壬等、壬癸乙、甲寅辛之三角形、必相肖、故壬癸乙甲寅辛二角等、其物若直立、其影即顚倒相對、其鏡若與地相斜四十五度、而其物與地相平、則影必直、影形與鏡面成角相等也、

問、其影自平鏡重返、相差度數若何、

影形方差度



答二鏡成角若干度、其來光返光二線成角加倍也、如物在辛、二次返照即影現於戊、戊丙辛是影形所差方向、即謂方差度、而加倍於甲己庚、蓋

丙乙已與甲乙辛等、甲乙辛與丁乙已亦等、因直照返照二角均勻也、丙乙丁卽丙乙已加倍也、戊丁庚丙丁已等、丙丁已復因直照返照二角均勻卽與乙丁庚等、乙丁戊卽加倍於乙丁庚、其等數之式如左、

丙乙丁＝二丁乙已

乙丁戊＝二乙丁庚

戊丙辛丄丙乙丁丄乙丁丙＝二乙丁戊丄乙丁丙

因三角共合二直角故也、

去乙丁丙、則

戊丙辛丄丙乙丁＝乙丁戊

戊丙辛＝乙丁戊丅丙乙丁

＝二乙丁庚丅二丁乙巳＝二乙巳丁

故

戊丙辛＝二甲己庚

則影形相差度數加倍於二鏡也、

問、按此理、鏡依軸轉、影動何如、

答、其鏡旋移若干度數、影必旋移加倍、蓋一鏡折轉其軸、卽與其故位成角、與二鏡無異、故鏡與物對立、影亦直立、鏡旋移四十五度、直立卽成平卧、平卧反成

直立、與上第十一問之理同、

問、按此理造有何器、

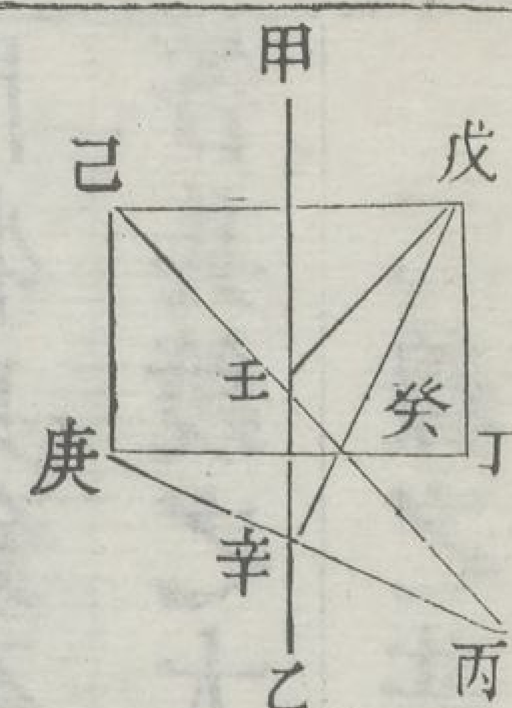
答、此乃紀限儀測天之器也、以平鏡二面、一靜置、一動轉、相斜成角、此接星光、而彼接返光、其重返成影、所差度數加倍、卽如鏡轉二十度、方見星於地平、便知星高四十度也、故重返星光四十五度之器、卽可測量九十度也、

平鏡影形大小比例

十五

問、物與鏡平、其影形大小、與鏡相比何如、

答、其鏡之大小、比其形、如返照二線之長、比直照返照二線之共數也、設甲乙爲鏡、其物在戊丁、影在己庚、



則壬辛上下之鏡無涉、祇以壬辛與戊丁相比、以己壬庚辛二線引至丙、則

壬辛：庚己：：丙壬：丙己

庚己戊丁均、壬己復與壬戊均、故

壬辛：戊丁：：丙壬：丙壬丄壬戊

壬戊爲直照之光、丙壬爲返照之光、丙己爲直照返照二線共合、其理卽驗也、丙壬若爲丙己之半、壬辛卽爲戊丁之半、故平鏡與人身高一半、卽能現全身、使本人自見之、至他人亦見之、移遠卽不全見、若移近、其

凹鏡聚熱之理

鏡雖更小亦能全見、蓋目近影大、以小鏡現大物、即

按此比例也、

問、以凹鏡聚熱何如

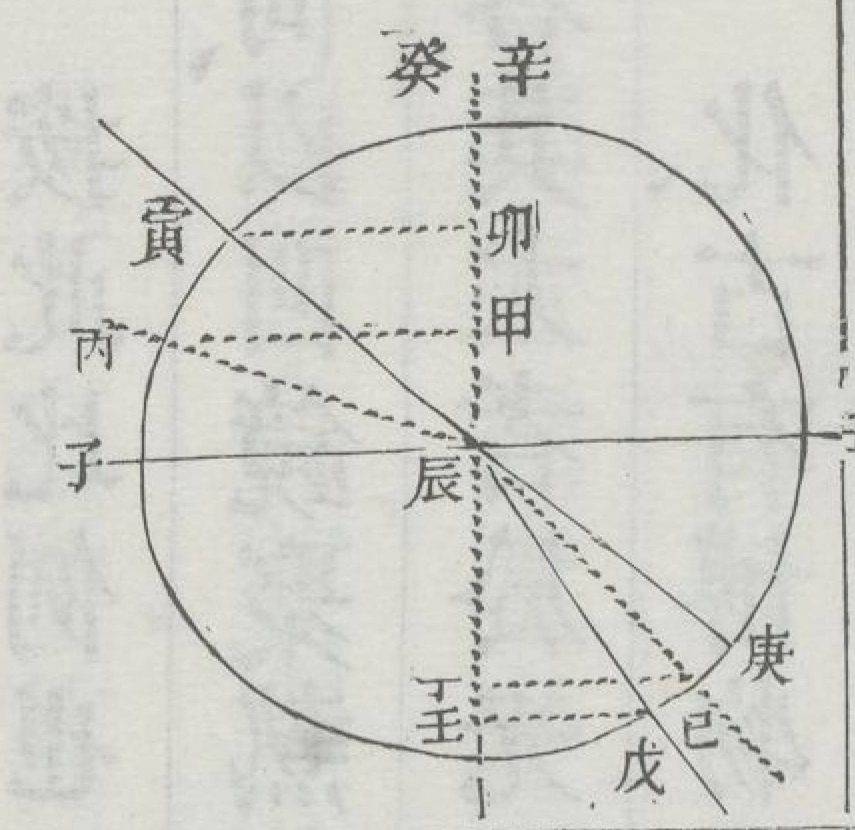
答、其大者於光心聚熱極甚、雖金類之最堅者、皆可鎔化、古有博物士阿幾密底者、以凹鏡返光燒燬羅馬國兵船、按其必非現時所謂凹鏡者、蓋鏡面如抛物線如球皮者、其光心離鏡不過數尺、想其所謂凹鏡者、乃平鏡數十面相合使光聚一處、仍可遠射、法國步方氏曾試之、以方平鏡一百五十餘面、砌成瓦式、使之中凹、嚴絲合縫、以之焚燒物件、雖離物二百五

十尺之遠、仍可聚火燒之、

釋折光之理

問、光之透物而被折、其理何如、

答、二物體質若有稠稀分別、其光自此入彼、必被折回改移方向、其內外二角正弦、恒有定比、即如寅辰丙辰二光線、於辰透水、其一即折至戊、其二即折至已、比例如左、



戊壬：卯寅：：丁巳：丙甲

即內外二角之正弦、恒有定比也、

無論自何度而入皆然、欲驗之、則以器如球形、盛水

半滿、其上開鑽小孔、只容一線之光入水、卽可量其內外二角之正弦而比之也、自天氣入水二角之正弦、卽如四∶三、入玻瓈、卽如三∶二、入硫磺、卽如二∶一、蓋各有折光之力不同也、以內角之正弦爲一、論水則外角之正弦卽一.三三、論玻瓈則爲一.五、此謂折光之力也、至光之直照、左右皆成直角、則其外角正弦爲無、故不論其透何物、皆不被折、惟有斜入則被折也、其各物折光之力、卽標於左、

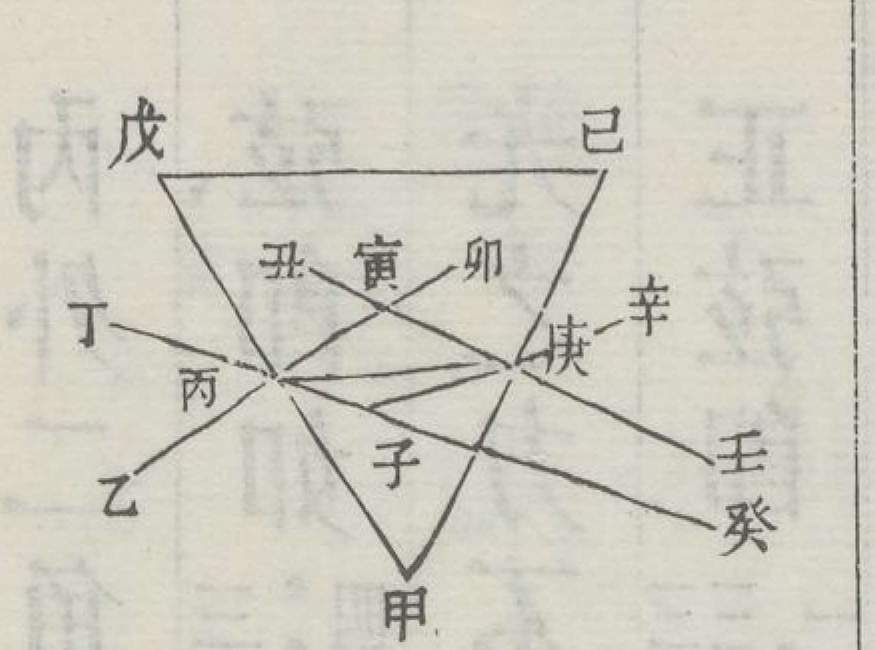
鉛丹	二.九七
紅銀石	二.五六
金鋼鑽	二.四三
光藥	二.一二
硫磺	二.一五
水晶	一.五四

琥珀 一•五四
玻璨 一•五三
橄欖油 一•四七
明礬 一•四五
礦硝各酸 一•四一
酒精 一•三七
水 一•三三
冰 一•三〇

驗折光之法

問、以三棱之物試驗折光之理、何如、

答、以其物作成三棱形、一面與地平、一棱向下、卽謂折光之角、



有光於丙入、被折至庚、出而復折至辛、以丁丙辛庚二線引至子、則庚子癸卽爲其方差度、其折光度以春代之、二角若小、相比卽如其正弦、以上文所說內外二角相比、

則

卯丙子:卯丙庚::春:一

葢

卯丙子二丁丙乙

故也、

卯丙子丅卯丙庚:卯丙庚::春丅一:一

則

庚丙子:卯丙庚::春丅一:一

至光出比例相同、

故

丙庚子:丑庚丙::春丅一:一

二式合之、則

庚丙子丄丙庚子:卯丙庚丄丑庚丙::春丅一:一

然

庚子癸二庚丙子丄丙庚子

卯寅庚二卯丙庚丄丑庚丙

則

庚子癸:卯寅庚::春丅一:一

寅丙甲庚之四邊形、其內之四角、既合爲四直角、而其左右二角既皆直角、則

丙寅庚⊥丙甲庚＝二直角

丙寅庚⊥卯寅庚＝二直角

丙甲庚＝卯寅庚

以此易彼、則

庚子癸∶丙甲庚∷春丅一∶一

春丅一＝$\frac{丙甲庚}{庚子癸}$

其鏡若玻璨、

春＝$\frac{二}{三}$一

庚子癸＝$\frac{二}{丙甲庚}$

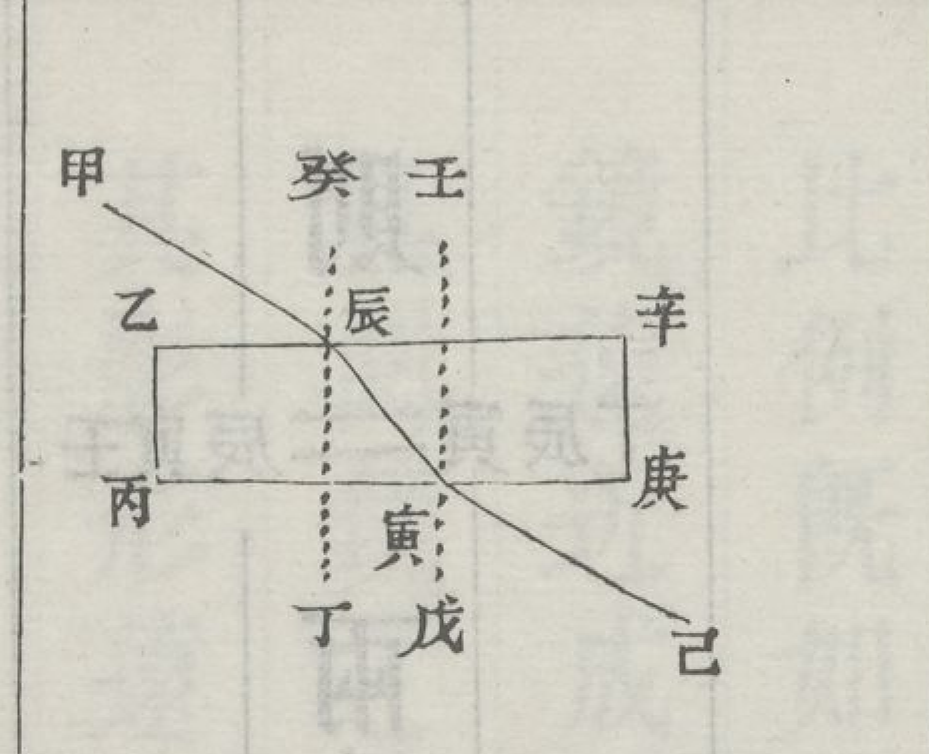
則方差度、即爲折光角之半也、欲得某物折光之度、即量其方差角、以折光角約之而加一、

光透平鏡
出入相平

蓋一丄$\frac{庚甲丙}{癸子庚}$二春

問、有物二面相平者、光透之而被折、何如、

答、其出路與其入路必相平也、蓋光之入也、雖被折、改道、至其出也、而被折則復回原向、與其出路仍然相平、設若丙辛爲玻璨一塊、二面相平、一線之光於辰而入、自寅而出、則寅己必與甲辰相平、蓋於辰寅二點各垂直



線

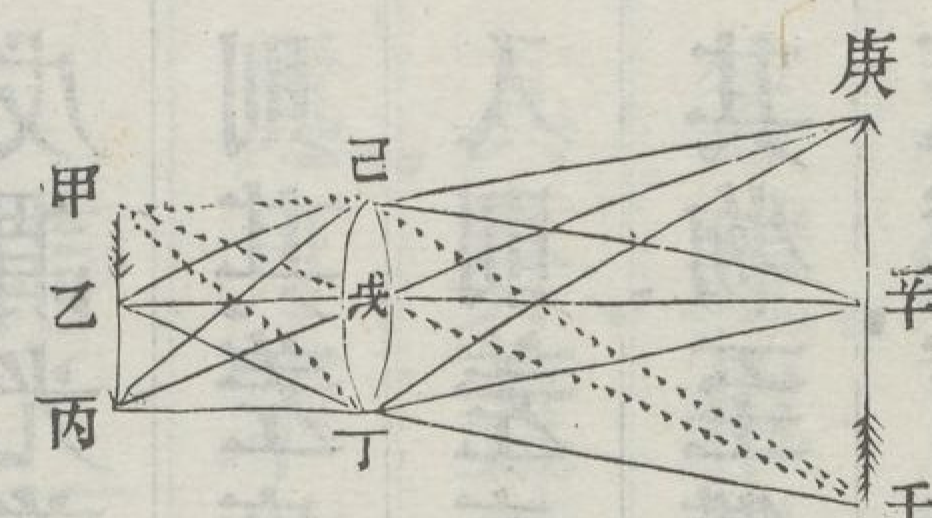
則壬寅辰＝寅辰丁兩邊折光度既等、則正弦己寅戊：正弦壬寅辰：：正弦癸辰甲：正弦寅辰丁然壬寅辰＝寅辰丁故己寅戊＝癸辰甲光之入路與出路既與二平面相交成角均等、則二線必相平明矣、

凸鏡影形大小比例

二十、問以凸鏡視物其大小何法計算、

答、其物之大比影之大、正如物之距鏡、比其影之距鏡也、蓋庚戊辛、甲戊乙二形相類、

凸鏡光差度



卽有

庚辛∶甲乙∷辛戊∶乙戊

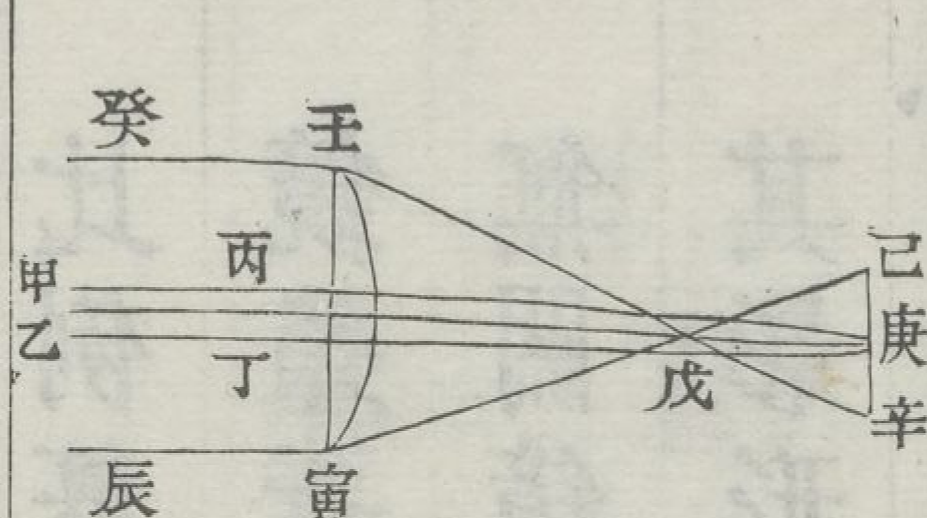
故

庚壬∶甲丙∷辛戊∶乙戊

其物之徑、與其影之徑、比例既如此、至其方積、則影形相肖、卽相比如其離鏡遠近成方、故其物離鏡愈近、其影愈見方大也、此無關鏡之大小、惟二鏡之面若不均凸、其折光不同、其影形遠近大小之比例、亦自不同矣、

問、凸鏡不盡聚光於一處、何也、

答、因其光透之而被折分度不等、設若壬寅爲凸鏡、光自甲乙透之、旣離中不遠、則交凸面幾成直角、而聚於庚、其光自癸辰與凸面相交愈斜、被折愈多、卽聚於戊、相較而散至己辛、凸鏡成影、當中卽明、外邊稍覺模糊、職是故也、庚

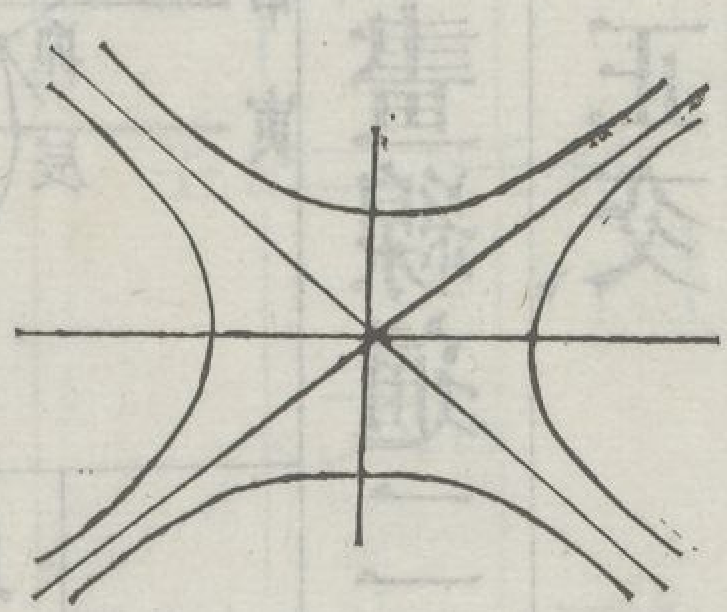


戊謂光差度、其鏡若一面平一面凸、光自平面而入、則其差度卽爲其鏡之厚薄四倍半、若光自凸面而入、則差度只有一倍有奇、故用此等鏡者、凸面應向其物、至雙面凸鏡、其差度則倍半有餘、按此則鏡質極薄、而遮其外邊、使光從中透、影乃眞切、不致模糊、

雙線鏡式

撱圓鏡式

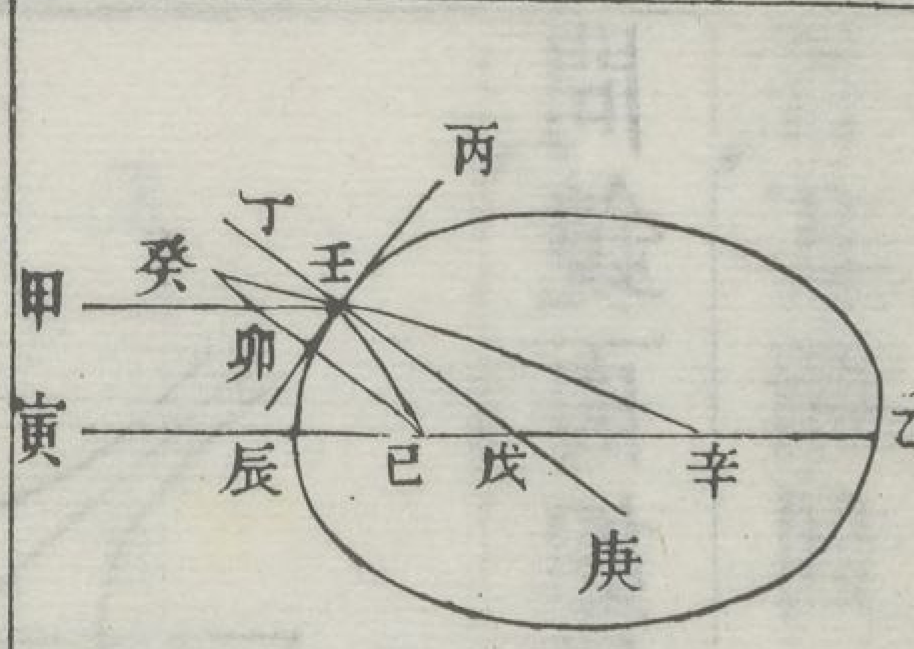
其鏡面如球皮、當中折光則少、四週折光儘多、故此等鏡、單用不能無光差、惟算學家已究得他式可無其弊、蓋鏡面如撱圓、或如雙線之式、則其光盡聚一處、可不散矣、雙線圖附、撱圓詳於下文、



雙線圖式、上下左右相對成雙、而四線之內、任舉一皆名雙線也、

問、鏡面如撱圓式者、應如何方使光線盡歸一處、

答、其撱圓二心之相距、比其長徑、如丙角正弦、比外角



正弦、則光盡歸一處也、

此即正弦外角∶正弦內角∷乙辰∶巳辛設光自甲照壬、與長徑相平、自壬畫線過二心、復畫丙卯切線、再畫丁庚癸巳與丙卯正交、則辛壬丙＝巳壬卯蓋按橢圓之理、勿論其切線於何處、此二角恒等、

癸壬卯＝辛壬丙 卽知壬卯癸、壬卯己皆爲直角、則壬卯左右之三邊形均等、

而 癸壬＝己壬 夫 乙辰＝己壬＋辛壬 蓋由撱圓之理也、故 乙辰＝癸辛 以此易彼、也

則 正弦外角∶正弦內角∷癸辛∶己辛 丁庚癸己旣相平、辛壬戊、辛癸己二形相類、

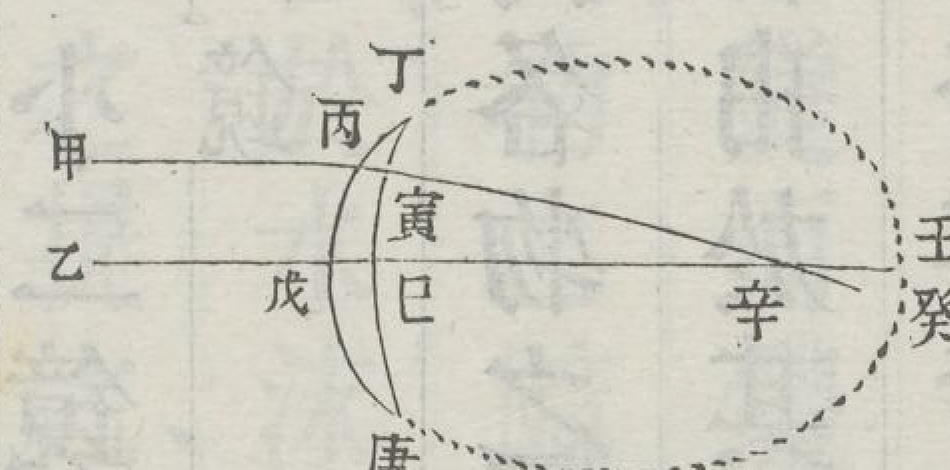
則癸辛：己辛：：壬辛：戊辛正弦外角：正弦內角：：然正弦辛戊壬：正弦辛壬戊：：壬辛：戊辛蓋二邊相比、如其對角正弦故也、

且既正弦辛戊壬＝正弦寅壬而壬戊寅＝丁壬甲故正弦甲壬丁：正弦辛壬戊：：壬辛：戊辛然光自甲照於壬、甲壬丁、即其未折之角、辛壬戊即其既折之角、其光即該自壬折至辛、勿論照於何處、皆該如此、是知其光盡歸一處也、

問、上節辨鏡之外面折光、其被裏面復折、恐致差誤、何法防之、

答、令其裏面如球皮、外面如橢圓、其聚光即無差也、蓋

月牙鏡式



橢圓鏡之折光、前已辨明、茲則以其裏面如球不折光、復推論之、設若丁庚係此等之鏡、隨其外面畫成橢圓、復以辛爲中、隨其裏面畫成圓線、按上節甲丙之光、被外面折向鏡心、光自丙而入、便被折、自寅而出、即不被折、因丁巳庚係圓線之弧、其中在辛、故凡線自外向辛者、皆與其切線正交、是以丙寅之光不被折、而仍

歸至辛、誠能按此式造鏡、則其光必盡聚一處、而影現眞切、祗以此式之鏡、難以磨成、故窺遠顯微等鏡、仍式球面、惟另須設法、以防其散光差度、卽如以大小二鏡配合得當、則其差度相消矣、鏡之內外曲線不同、卽謂月牙鏡

光生色之故

問、各物之有各色者、由於何故、

答、由於其體質、能分析光之各種、令若者存而若者返、所存者卽變化而不再爲光、所反者入目、其物始見、返一色之光者有之、並返數色之光者有之、不但見紅黃綠之各色、一物而兼數色者、亦有之、至其返光

之故、或由於其微質粗細排列不同、蓋化學常見無色之物、攙和而生色、且其有色者、隨冷熱而變其色甚至一物隨厚薄變色者亦然、始知色外而體內色變而體常也、

物隨厚薄變色之理

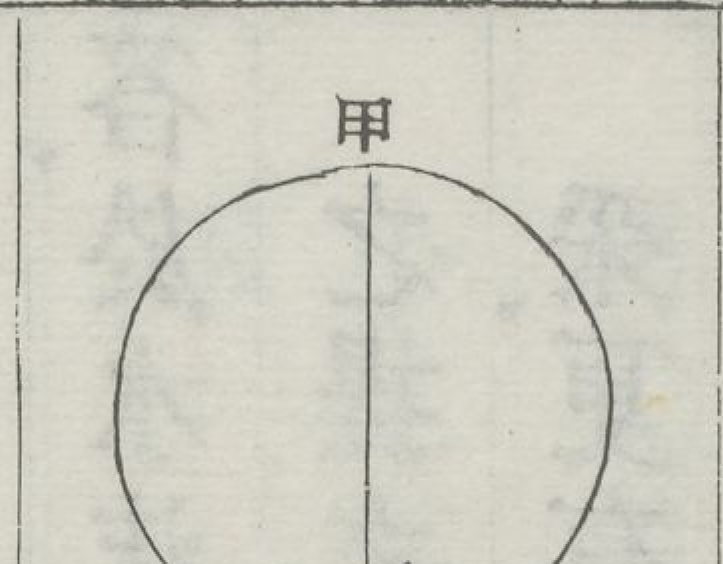
二十五、問物之隨厚薄變色者、何以見之、

答、於水沫起泡常見五采、小兒嬉戲、常以水和松香吹之提之、漂作水毬、不但輕而上浮、而其外面眩發五采、更有雲母千層石等物、自然分爲極薄之片、呈現各色、此皆物之菲薄成色者也、至於水毬其厚薄漸移、其色隨時變遷不定也、

驗薄物變色之法

問以玻瓈鏡驗之何如、

答、牛董曾以二鏡驗之、用此之凸面壓於彼之平面、其



相接之處、遂見其光層層圍繞、現出各色壓之愈緊、色圈現出愈多、其居中相依之處微黑、外見各色近則明、遠則澹、漸至於白、牛氏謂其所以現色者、惟因二鏡之間有氣一層、中邊離有近遠、氣即漸分厚薄、其所以層層圈成各色、蓋因凸面如球皮也、牛董量其各圈之徑知其成方相比、如一三五七各數、遞加且二鏡之間、層氣之厚亦如是、遞加蓋以凸鏡之面畫成圓式則

甲辛為其直徑、以辛癸辛壬為色圈之半徑、丙辛乙辛為各層之厚率、

$辛乙\times乙甲=乙戊^2$

$辛丙\times丙甲=丙丁^2$

則

$辛丙\times丙甲:辛乙\times乙甲::丙丁^2:乙戊^2$

然乙辛丙辛二元、比甲辛甚小、即可以甲乙甲丙換甲辛、則

$辛甲\times辛丙:辛甲\times辛乙::丙丁^2:乙戊^2$

此二率共一元、即可

去之、而其比例如左、

辛丙：辛乙∷丙丁：乙戊

按此卽可計算各層之厚薄、按牛董計算天氣其厚若不及寸中之一萬三百卽不返光而無色、天氣厚過一萬二百七並返各色而爲白、其厚於二數之間者、擇色而返之、卽見色有不同、水與玻璨等物、莫不歸此理、而其數各有不同、故見極薄之物、卽可由其色辨其厚薄也、夫返光之色如此、至透光卽其相成之色也、卽如凸鏡所倚之處、對面視之

則白色圈則外邊反見黑其色圈以透光而見者各層之厚薄卽按二四六之陰數返光而見者其厚卽按一三五之陽數也

卷七算學第三章凡二十六問

論吸力

吸力通例

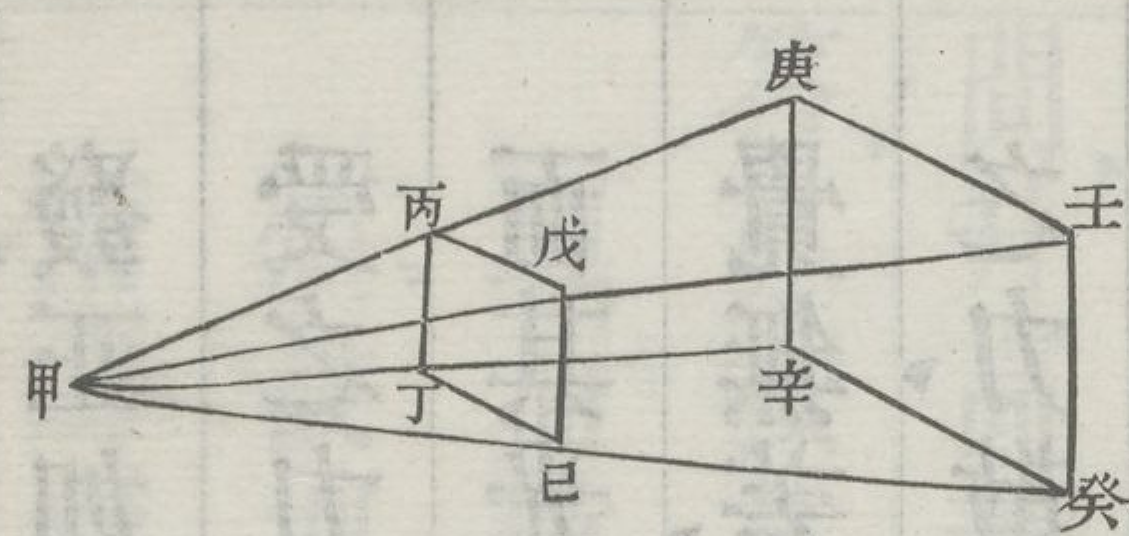
第七卷算學

第四章測算力學

問、地球之吸力、按遠近等差若何、

答、二處之吸力相比、即如二處距地心之成方反比也、

蓋地旣球形、其吸外物、正如一球之體、盡在地中、故



測算吸力、必自地心而起、夫吸力旣本地心、而散布六面、其離開地心愈遠、力則愈少也、其漸遠漸殺、必按遠近成方反比之例、設地心在甲、其力四週散布、如光之普照然、於已癸二處、以三面相平而接之、則其力自甲而

發、正如甲戊壬、甲己癸之各線、而丙己癸庚二方所受之力相等、以光比之、有光自甲發、則丙己之方小、而其光濃、癸庚之方大、而其光澹、二方所受之光、終覺無差、蓋丙己足以遮癸庚也、吸力亦然、丙己所受之力、散布於癸庚、而二方所受之力無殊、然舉各方一寸、其喫力正與二方之大小相反、若其遠者所受之力爲春、其近者所受之力爲秋、

則 $春:秋::戊己^{二}:壬癸^{二}$ 然甲戊己、甲壬癸二形相類、則

$戊己:壬癸::甲己:甲癸$

$戊己^{二}:壬癸^{二}::甲己^{二}:甲癸^{二}$

故 $春:秋::甲己^{二}:甲癸^{二}$ 是知

物離地漸高漸輕之例

二處之吸力相比、即如二處距地心之成方反比也、

設有物離地如月之高、其重較地上應$\frac{一}{三六○○}$蓋六十:一::月徑:半徑

則

$春:秋::(一)^{二}:(六○)^{二}$

$春＝秋\times\frac{一}{三六○○}$

故三千六百觔之物、祇重一觔、

問、升高若干、物較輕若干、何法計算、

答、亦按其離地心遠近成方反比之例也、其離地心較地面數倍則易算、若不足一倍則有奇零而計之稍煩、設地心在甲、地面在巳、物於巳分兩為秋、於癸分兩為春、

則

春∶秋∷甲己三∶(甲己⊥己癸)三〇

以地之半徑爲子、其物所升之路爲丑、則

秋∶春∷(子⊥丑)二∶子二

∴子二⊥二子丑⊥丑二∶子二

若丑較子極小、丑方必更小、不計可也、則

秋∶春∷子二⊥二子丑∶子二

∴子⊥二丑∶子

秋∶秋⊤春∷子⊥二丑∶子⊥二丑⊤子

∴子⊥二丑∶二丑

秋⊤春＝$\frac{子⊥二丑}{秋}$乂二丑

假如丑爲洋里之半、則

秋⊤春＝$\frac{四〇〇〇⊥一}{秋}$乂一

＝$\frac{四〇〇一}{一}$

是知升至三百

空球之內無所吸移

丈之高、其物減重不過四千分之一

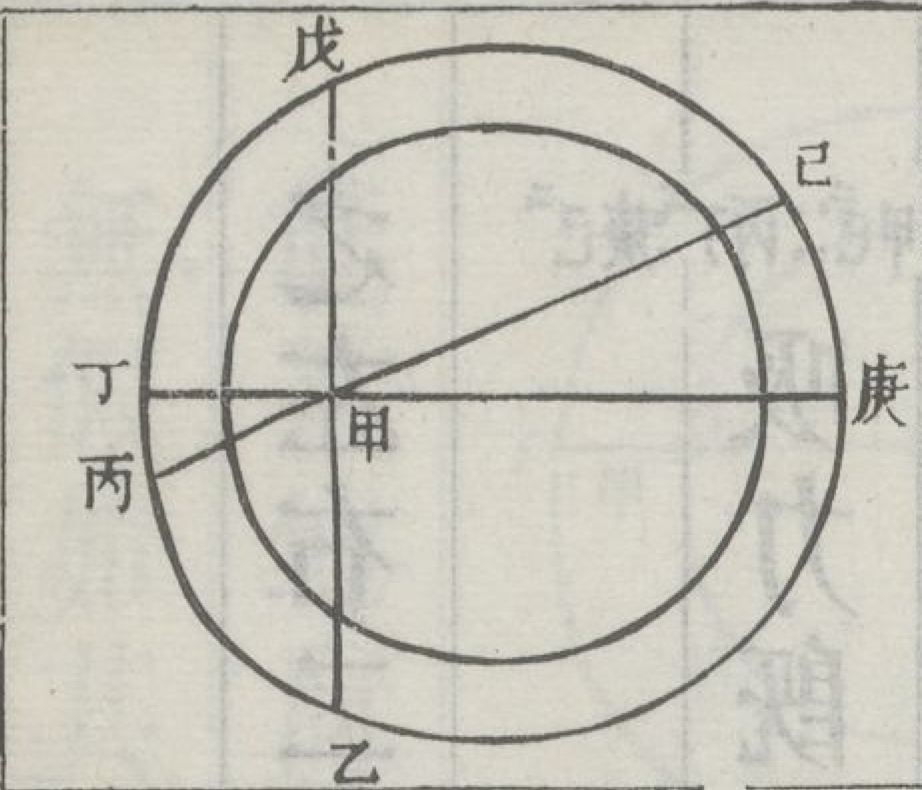
問、設地爲空球、置物空中、其被吸若何、

答、毋論其居正中、或居偏旁、其被吸之力必爲均勻、故定而不移也、設戊丙庚巳爲空球、置物於甲、以平面於甲、分球爲兩段、則各段爲無數圓錐、於甲顛倒相合而成、正如丙甲丁、巳甲庚、頂於甲、底於球面、其底旣甚小、可視之爲平面、其方積卽如其徑方、丙丁、巳庚、旣爲甚小、則可以

甲丙──甲丁

甲庚──甲巳

甲



之左右二角既均、則丙甲丁、己甲庚、二形相類、故 $\text{甲丙}:\text{甲己}::\text{丙丁}:\text{己庚}$

$\text{甲丙}^{2}:\text{甲己}^{2}::\text{丙丁}^{2}:\text{庚己}^{2}$ 吸力既如其質、二底之質、若爲春夏、則 $\text{春}:\text{夏}::\text{甲己}^{2}:\text{甲丙}^{2}$ 以甲丙爲子、甲己爲丑、則 $\text{春}:\text{夏}::\text{丑}^{2}:\text{子}^{2}$ $\text{春}\bowtie\text{丑}^{2}$ 二形之吸力、若爲寅卯、則 $\text{寅}:\text{卯}::\text{春}:\text{夏}$

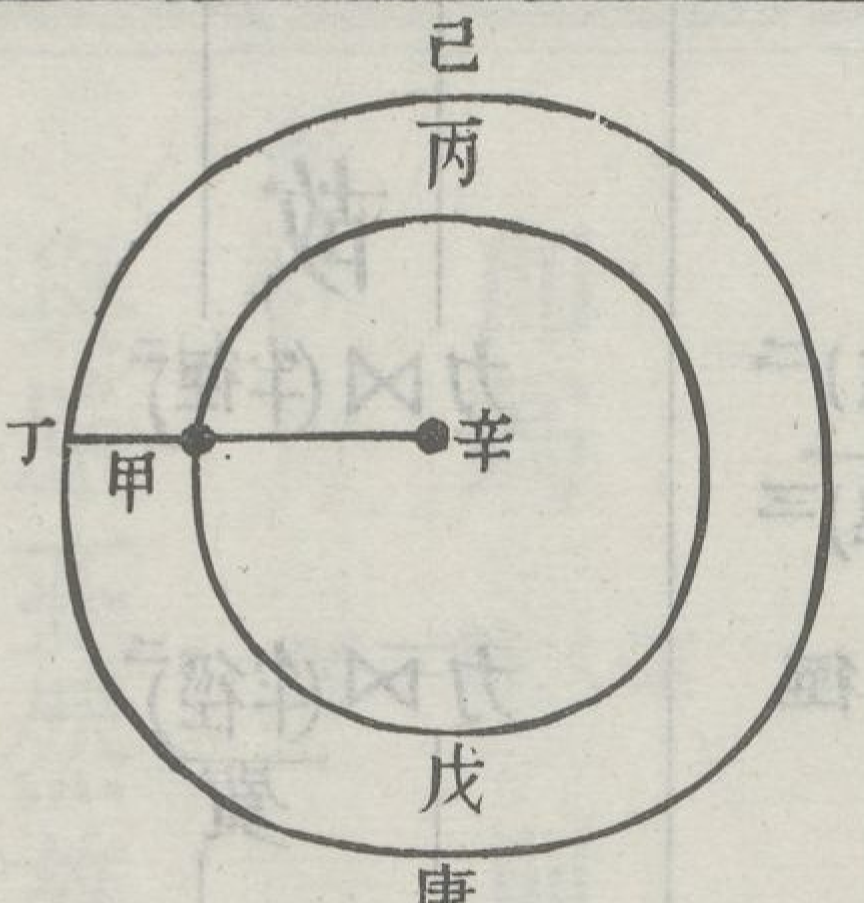
$\text{春}\bowtie\text{寅}$ 復如遠近成方反比、則 $\text{寅}:\text{卯}::\text{丑}^{2}:\text{子}^{2}$ $\text{寅}\bowtie\frac{\text{春}}{\text{丑}^{2}}$ 上文則 $\text{春}\bowtie\text{丑}^{2}$ 故 $\text{寅}\bowtie\frac{\text{丑}^{2}}{\text{丑}^{2}}$ 不論

丑之大小卽無異、二錐如此、其餘盡然、是知物置空中離球面、無論遠近、被吸之力無異、故定而不移也、

一物入地漸深漸輕之例

問、物於地內、其被吸若何、

答、其被吸之力、如其距地心之遠近正比、設其物居地



心、則六面被吸均勻、而其物定也、若居偏旁、則其以外之地吸力相消、故其所受之力、惟自內而發、漸近地心、則受力漸少、故物從外面墜地、雖愈近愈重、若能入地、向地心愈近、則愈輕也、至於地心、則分兩全無、假如其物在甲、按上節所論、己丁庚一層、正如空

球之皮、吸力對消、而其物惟受丙甲戊一球之力、正比則按質之多寡、反比則按遠近成方、

故

$$力 \bowtie (半徑)^{二}$$

$$力 \bowtie \frac{(半徑)^{二}}{質}$$

然一球之質、即按其半徑之立方、則

$$質 \bowtie (半徑)^{三}$$

故

$$力 \bowtie \frac{(半徑)^{二}}{(半徑)^{三}}$$

$$力 \bowtie 半徑$$

是其吸力、正按其離中遠近、若能鑽孔通地心、置物其中、移下一半、則較輕一倍、其升高反加分兩、亦復如此、

論動靜

物行平速之例

五、問設物平速而動其路若干、

答、其路必按時速相乘、蓋其速即其一杪內所行杪數愈多其路亦愈多故以二者相乘而得之、即如每杪物行四丈則十杪必行四十丈、其恆式

即爲 $路=時\times速$ 則 $時=\frac{路}{速}$ $速=\frac{路}{時}$ 若此物 $路=時\times速$ 則他物之時速、與路亦然、故 $\dot{路}=\dot{時}\times\dot{速}$ 加點以別之、

則 $路:\dot{路}::時\times速:\dot{時}\times\dot{速}$ 故 $路\bowtie時\times速$ $時\bowtie\frac{路}{速}$ $速\bowtie\frac{路}{時}$ 路

若有定限、則速二⋈時　時二⋈速　卽時速反比也、凡平速而行者、其速其時其路、莫不準此而計也、

問、物之動力、何法計算、

答、由質速相乘而得也、蓋其微質二點均大、而其力或有異、惟因其行有遲速之分、其衆點共合亦然、

故速X質二力　設彼物質速與此不同者、則.速X質.二力　故.速X質:.速X質::力:力　故速X質⋈力　速力⋈質

質力⋈速　若質有定數、則速二⋈力　若有定速、則質二⋈力　若質與速反比、

其力可計、凡動物之力、速與質互相連涉、莫不準此

物行漸速之例

而計也、

問、物之動、若施力不已、其理若何、

答、若無阻礙、其必漸加速也、蓋用力使物動者有二、陡力與恒力是也、力之陡施於物、雖一霎之間、亦必令之平速而行、若恒施於物、則如以陡力時時相繼、其行自然加速也、欲計其加速若何、則以其時分爲杪忽、其力之恒施、於每杪每忽而施之無異也、設有二物均重者、受力同時、

·力 力 ∷ ·速 速

則若其力同、而其時不等、

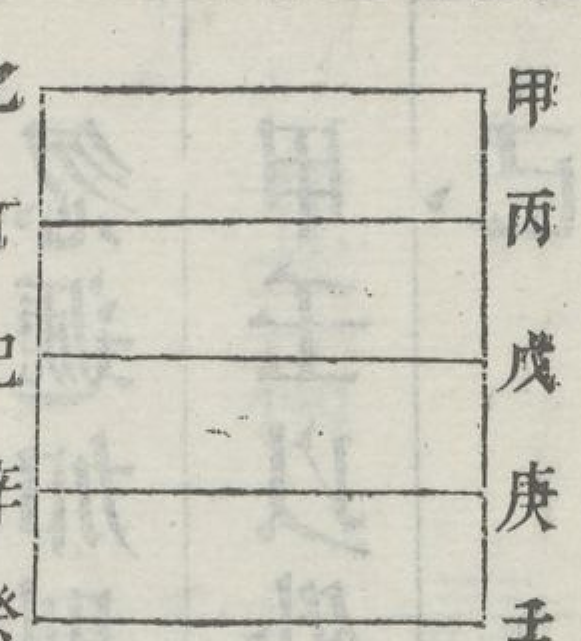
平速而行以四邊度之

則 $速：速：：時：時$ 故 $速：速：：力\times時：力\times時$ 是知 $速\propto力\times時$ 即如一車以二十五觔之力、推至十杪、一車以十八觔之力、推至七杪、及至末杪、二車之速、即如二百五十、與一百二十六相比、此則幾乎加倍於彼也、

問、物之以平速而動者、以面積度之何如、

答、其所過之路、即可以四邊形度之也、蓋 $路＝時\times速$ 然圖中

漸速而行以三邊度之



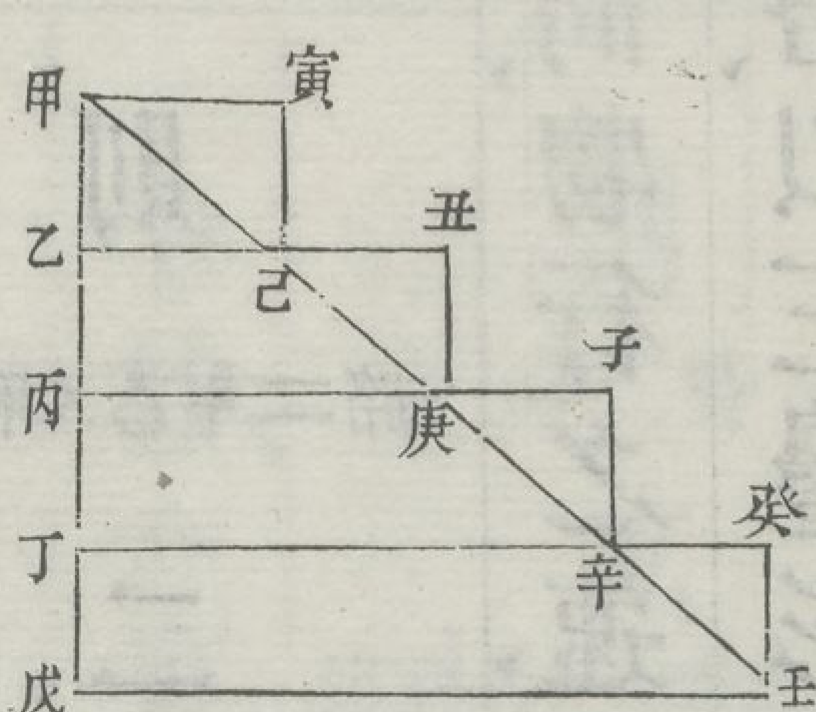
四邊形、其方積 癸壬×壬甲＝ 以壬癸爲速率、而用壬爲時率、其等數卽與上同、如其物自甲至壬、須有四杪、第一杪則 丙甲×乙甲＝路 二杪 戊丙×丁丙＝路 其三其四皆然、合之則四杪之 壬甲×癸壬＝路

問、物行之速、按次遞加、以面積度之何如、

答、以三邊形度之也、設有物自甲行至戊、時有四杪、每

杪加速均等、第一杪時爲甲乙、速爲乙己、

各杪之路相比、卽如乙寅丙丑丁子



路＝甲乙乂乙己

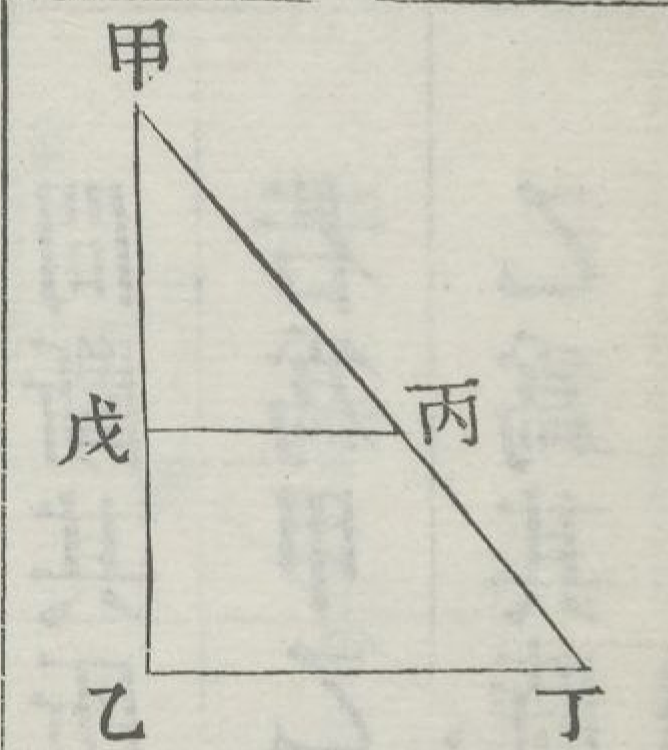
戊癸各形之積、蓋每杪加速、如丑子癸己庚辛各線之加長、四杪之路、統計爲四形共合、卽甲戊壬癸寅之形也、然此爲五個三邊形合成、若以每杪分忽而其速每忽遞加、則甲壬以外之四形極小、若其速遞加無間、甲壬以外各形收小殆盡、惟賸甲戊壬之三邊形而己、

其積 $=壬戊\times\frac{甲戊}{二}$ 是知物之速若漸加、其路卽可以三邊形度之、若以末速而行等時、其路必加倍於前、

墜地加速之例

十、問物之墜地、其速按次遞加、其理何如、

答、其路卽按時成方、或按末速成方、或按末速與其時相乘、設若物自甲墜、以甲戊比其時、地之吸力旣無間斷、其所過之路、卽如甲戊丙之三邊形、所墜之時若爲甲乙、所過之路、卽甲乙丁之三邊形、若甲戊甲乙爲其時、戊丙乙丁卽爲其末速、若比其面積、



則 甲戊丙積：甲乙丁積∷甲戊²：甲乙²

又 ∷戊丙²：乙丁²

如 甲戊×戊丙：甲乙×乙丁

故 路：路∷時²：時²∷速²：速²

由此比例則 速⋈時 較比各線亦應如此、

蓋 戊丙：乙丁∷甲戊：甲乙

既然 路⋈時²

若其時按加法遞加、如一二三四各時末速卽按乘法遞加、而爲一四九十六其路亦如此、其按次所過之路、卽一三五七、

蓋

四丅一＝三

九丅四＝五

十六丅九＝七

上擲減速之例

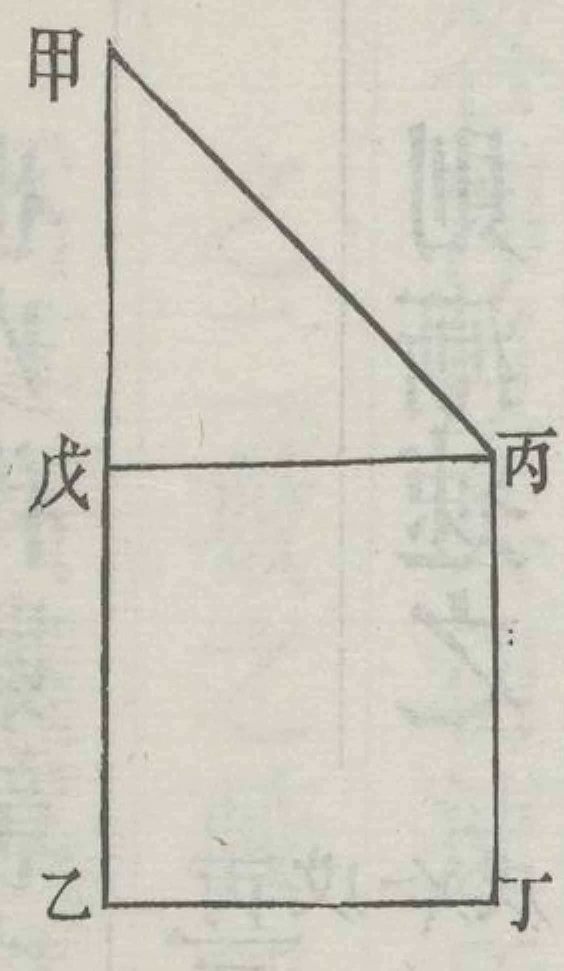
問、物之上行、其速遞減何如、

答、卽與物之下墜相反也、故其路其時其速、皆與上節之數相反、

平速加速相比

問、物之下墜若干時、若以末速平行若干時、其後路與前路相比何如、

答、必加倍也、以甲戊比其下墜之時、以戊乙比其平行之時、以戊丙爲其下墜末速、則其漸速之路、可以甲戊丙之三邊形度之、其平速之路、可以戊乙丁丙之四邊形度之、然二形均底等高、則此之面積、卽加倍於彼



計物之下擲

也、以代數彰之、

則漸速之

$\frac{丙}{二}$戊乂戊甲二路

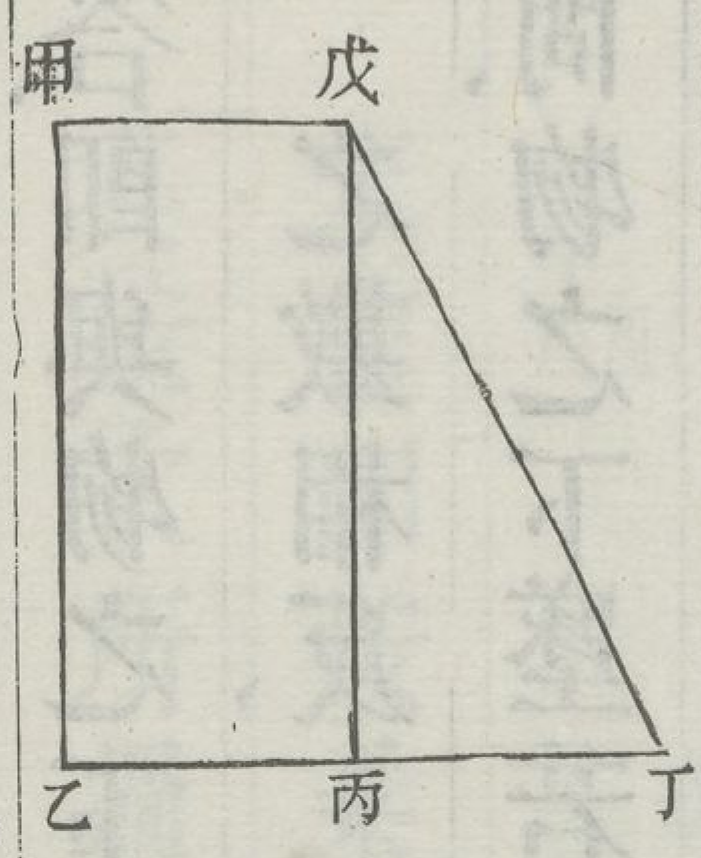
平速之

丙戊乂乙戊二路

亦加倍也

問、物之下擲、何法度之、

答、物以某速某時下擲、欲計其所行之路、即將其平速



應行之路、復加其自墜之路也、若其時爲乙甲初速爲丙乙、則其平速所行之路、即應以甲乙丙戊之四邊形度之、然其被地吸而漸速、所加如丁丙、其因漸速而加之路、乃戊丙

丁之三邊形也、其共路、卽可以二形共合度之、

其爲平速之

丙乙×乙甲二路

其漸速之

丁丙二×丙戊二路

共

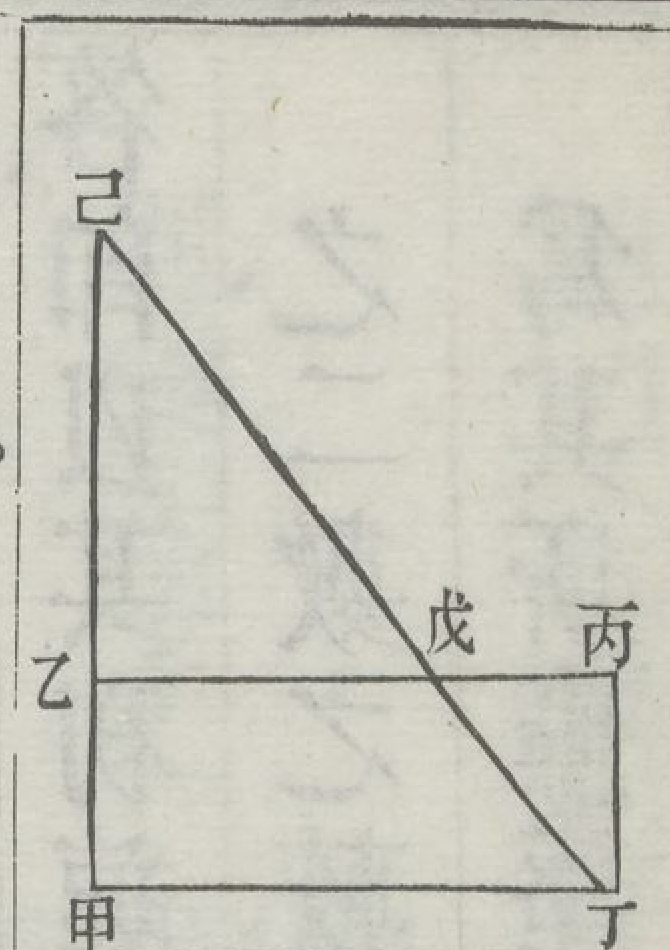
丁丙二×丙戊丄丙乙×乙甲二路

計物之上擲

問、物以某速上擲、何法度之、

答、卽以其初速所應行之路、復以其所應自墜之路減之、二數之較、卽其上行之路也、若其初速爲甲丁、而甲己爲其所應墜之時、始得此速、則丙丁之時、其以初速能

以自墜爲則



過之

$路=甲丁\times丙丁$

其丙丁之時、所有自墜之

$路=丙丁\times\frac{丙戊}{二}$

除此、卽賸甲乙戊丁之四邊形、若以初速而行甲己之時、路自應加倍於自墜、

十五、問欲計物之上擲下墜、以何爲則、

答卽以其初杪所墜之路、乃丈四稍差、其初杪所落若爲寅、其末速卽爲二寅、則

$路:寅::時^{二}:(一)^{二}$

$路=寅\times時^{二}$

$路:寅::速^{二}:(二寅)^{二}$

$路=\frac{四寅}{速^{二}}$

$速^{二}=四寅\times路$

$速=二\sqrt{寅\times路}$

$一:時::二寅:速$

速〓二寅乂時

時〓二$\frac{速}{寅}$

按此比例、墜物之路速時皆可計也、其時有定數、則其末杪所行之路按上文第十問可查、若時無定數、欲計其臨末數杪之路、則以卯爲杪數、除之即爲

時丅卯

路〓寅乂(時丅卯)^{二}

卯杪之

路二寅乂時^{二}丅寅乂(時丅卯)^{二}

欲計其共路、若下擲之、其所共之

路二時乂速丄寅乂時^{二}

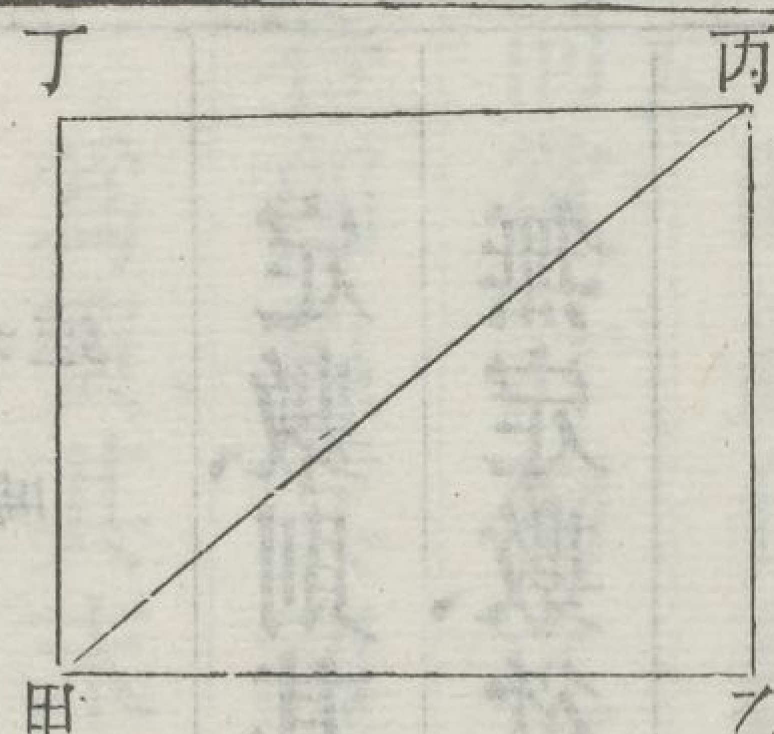
若上擲之、其所共之

路二時乂速丅寅乂時^{二}

論力之分合

二力合一

問、二力並用於一物、其物行何如、
答、二力之多寡與方向、若以四邊形之相連二邊比之、
其物所行之路、必爲對角線也、設其物於甲、彼一力
足令之北行至丁、此一力足令之東行至乙、按五卷

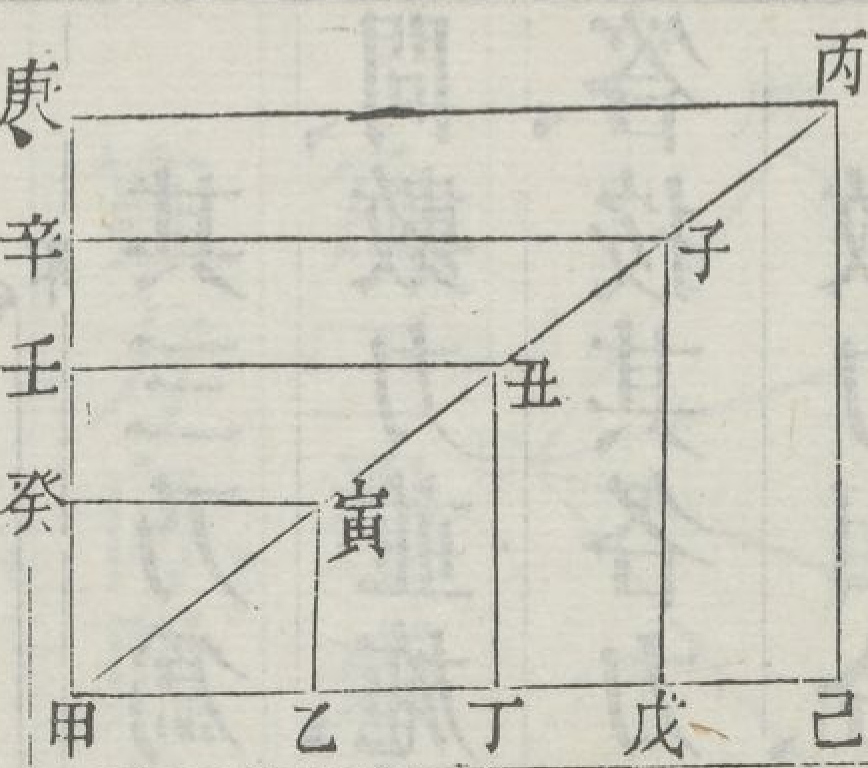


所論、皆有功效、其物必北行與甲丁等、必
東行與甲乙等、即循對角線而行至丙也、
此乃二力合一、蓋一力如甲丙者順施其
功效、與此二力之交用者無異也、

路經對角

問、其物之至丙已明、其路必經甲丙之線何以言之、
答、即以其四邊形分爲同類之小形無數、其物必經各

形之對角、即循甲丙之線而行、是也、蓋各形旣爲相類、如甲己：甲乙甲庚：甲癸其物必經癸寅寅乙二線相交之處、其與各形皆然旣皆同類、其相交之處、即在甲丙之線、故其物循對角線而行也、



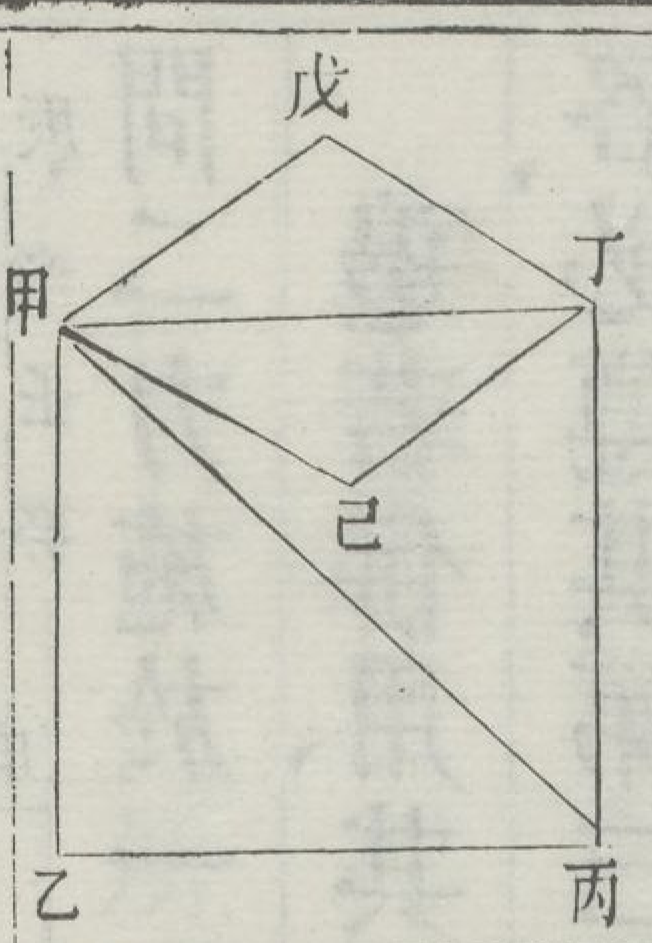
問二力施於一物、各力單用足令之行過三邊形之一邊若併用、其物將行何如、

答、必遵其第三邊而行也、蓋前圖甲己之力、單用足令其行至己、甲庚之力足令之行至庚、上交己見二力併用、其物即行至丙、是其驗也、

三力合一

問、三力並施、其相合若何

答、如有物在甲、甲戊甲己甲乙之三力並施、其物必循甲丙而行、蓋甲戊甲己二力、合成甲丁甲丁甲乙復合成甲丙、然丙丁與甲乙等、戊丁復與甲己等、甲戊丁丙之四邊、



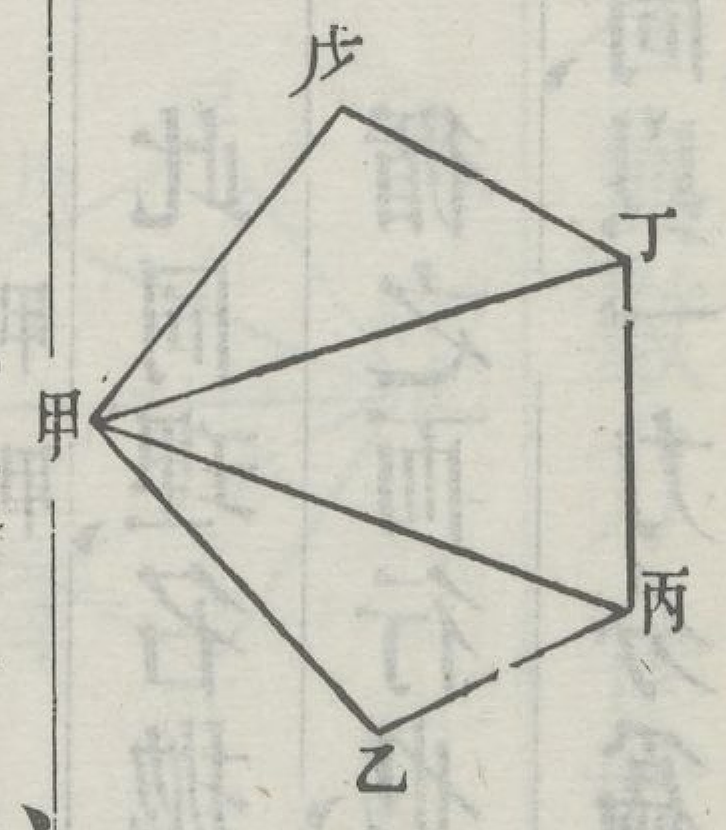
其三乃爲三力所餘之一邊、卽三力合成者也、

數力相合

問、數力並施、其相合之理若何、

答、按其各力若以多邊比之、邊數較力數多一數、則其數力相合、可卽其一邊而比之也、蓋以上文之理推而廣之、甲戊、戊丁、二力合成甲丁、甲丁、丁丙、合成甲

物循曲線之故

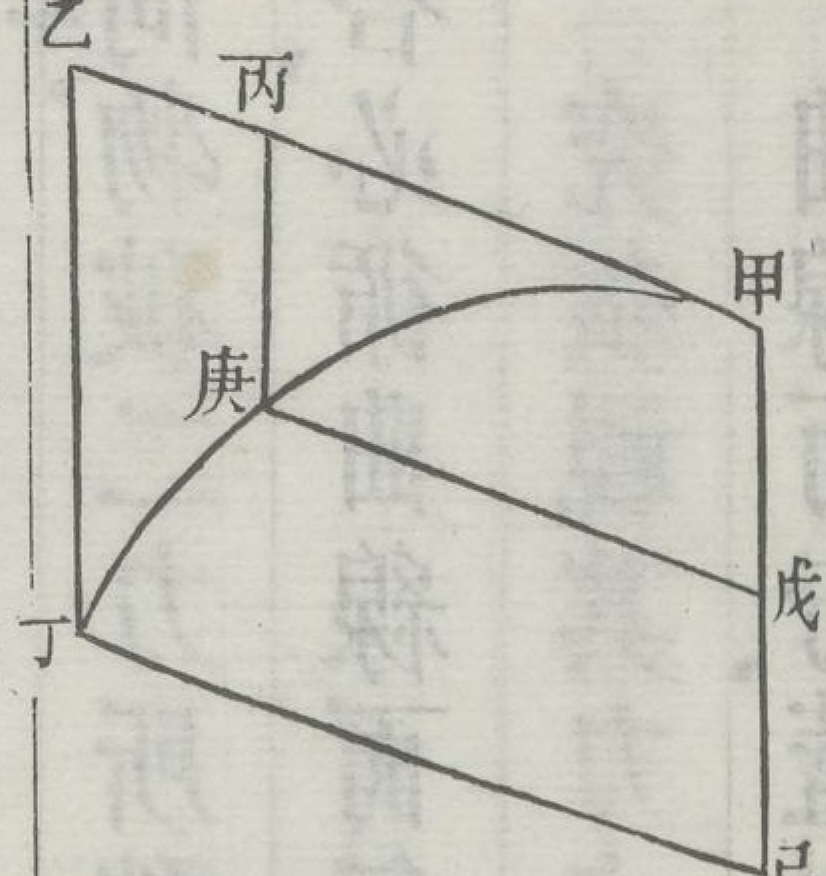


丙、甲丙、丙乙、合成甲乙、此四力合一、而以五邊形度之也、總之其力數不論多少、可以多邊形比之、蓋其多邊形可分為三邊形也、不論自何角而起、以一邊比一力之多寡方向、則其餘賸之邊、必比其總力之多寡方向各邊長短、比物行之疾徐亦然、

二十 問、物被二力所動、惟一力漸增、物將行之若何、

答、必循曲線而行也、然曲線其類不一、故其線為若何、究須視其力之加增若何而定、即如物擲空中、必循曲線而行、蓋以甲乙比其擲之之力、甲己為地之吸

計擲物之路



力、其物必循甲庚丁之曲線也、蓋經過丙庚戊庚各線交接之處故耳、如上文物受二力、而循對角線之論同也、其向乙而擲本應平速而行、則

$甲乙:甲丙::時:時$

$甲乙^{二}:甲丙^{二}::時^{二}:時^{二}$

既物之墜

$路\propto時^{二}$

$乙丁:丙庚::時^{二}:時^{二}$

故

$乙丁:丙庚::甲乙^{二}:甲丙^{二}$

則

$丙庚\propto甲丙^{二}$

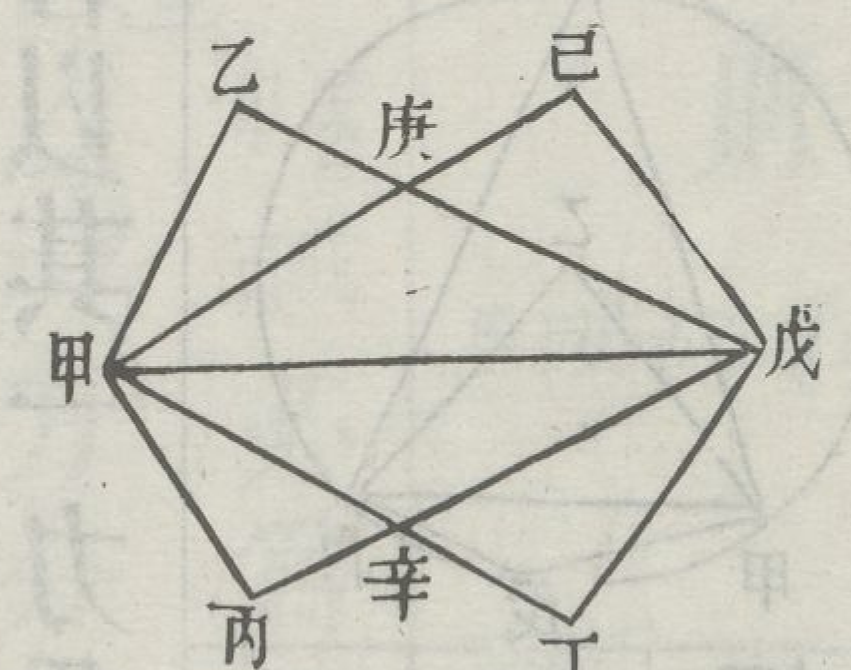
圓錐所割有線與此同理、名拋物線、蓋物擲空中、若無風氣阻礙、莫不循之而行也、

以一力分數力

問、以一力分爲數力、其理若何、

一力分二直角相交

答、與數力合一相反也、假如甲戊爲一力、就之而畫成



三邊形、勿論若干、則此一力可分爲二、如各邊之成對者、各力又可復分析至於無窮、故一力任分若干、任何方向皆可也、

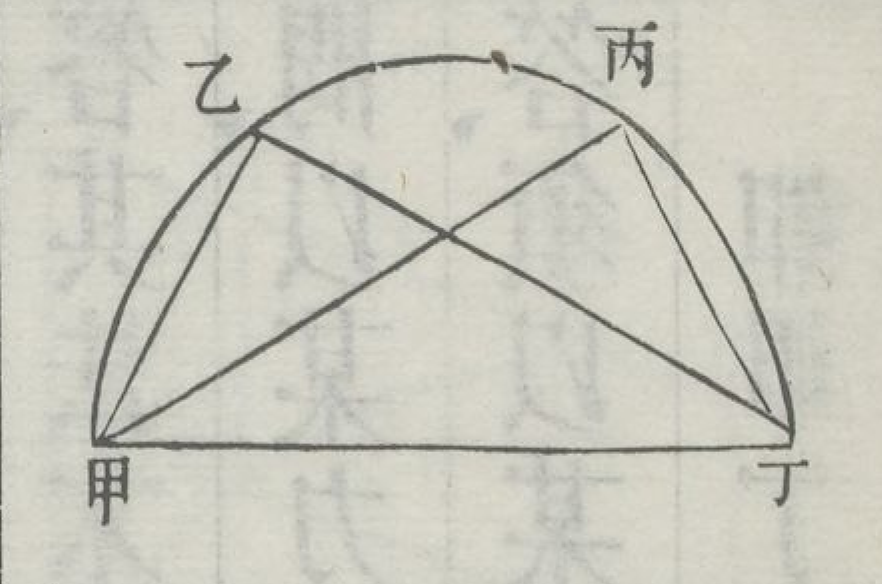
問、以一力分二、使方向有定度、大小有定比、其法何如、

答、其法不一、而理俱同、即於下文表明數種、

問、以某力分二直角相交者、其法何如、

答、須以某力爲徑、而畫圓線、以度其所求之二力也、假如甲丁爲某力、以之爲徑而畫甲乙丙丁之圓線、以

線之一點如丙如乙者與甲丁二端連之即

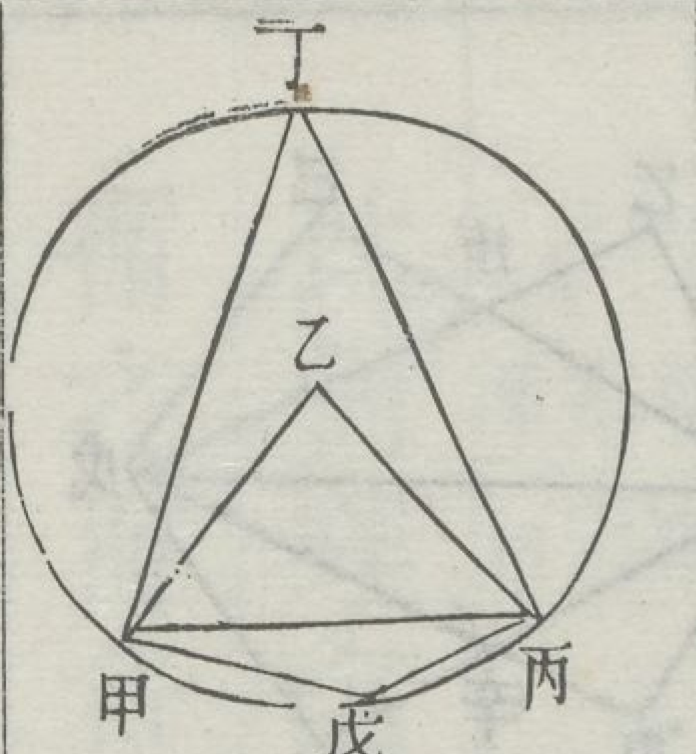


可得其二力蓋其所成之角既爲半圓之半所度即爲直角是半圓之內各對之線無不合式也

一力分二任成何角

問以一力分二使成某角其法何如

答以其一力爲弦畫圓線可容某角之負此線之點與



二端連之是也假如甲丙爲某力須分爲二依一百三十五度相交者其負角即爲四十五度則以甲丙爲弦而畫圓線可容甲丁丙之角復以圓線之中心與兩端相連

一力分二恆得定數

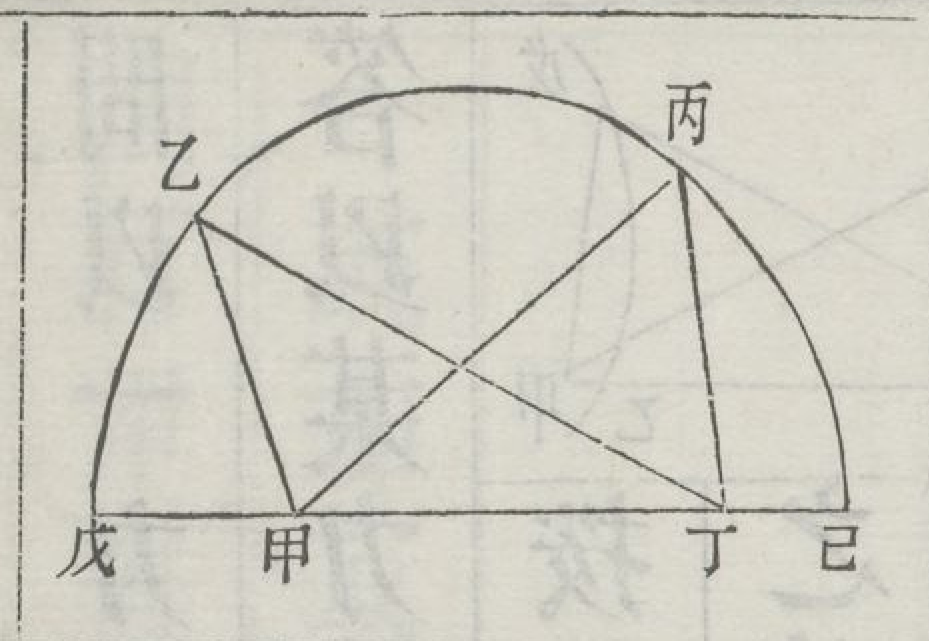
則 乙丙^{二}丄乙甲^{二}＝丙甲

丙甲^{二}＝乙甲^{二}二

故 $\frac{半(二)}{丙甲}$＝乙甲 此即其圓之半徑、按此畫圓、則戊甲戊丙必為所求之二力、蓋其正角一百三十五度也、

二十五問、以一力分二、使二者恆合定數、其法何如、

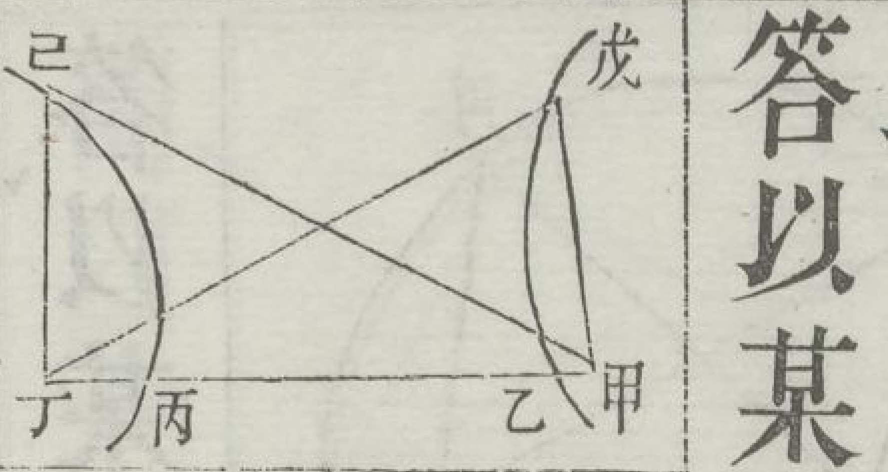
答、以某力為二心所距、某數為長徑、畫成撱圓、則以撱圓勿論何點、與二心相連、其二線即為所求之二力也、假如甲丁為某力、戊己為某數、則以戊己為長徑、畫撱圓、勿論乙甲丁乙或丙甲丁丙、各對之線、皆為所求之二力、皆能合成己戊故也、



問、以一力分二、使二力所差、恒爲定數、其法何如、

答、以某力爲雙線之軸、連二心者、某數爲雙線之相距、

按此畫成雙線、則勿論何點、與二線相連、各對之線、皆爲所求之二力也、蓋己甲與己丁之較、恒爲乙甲、此雙線之理也、

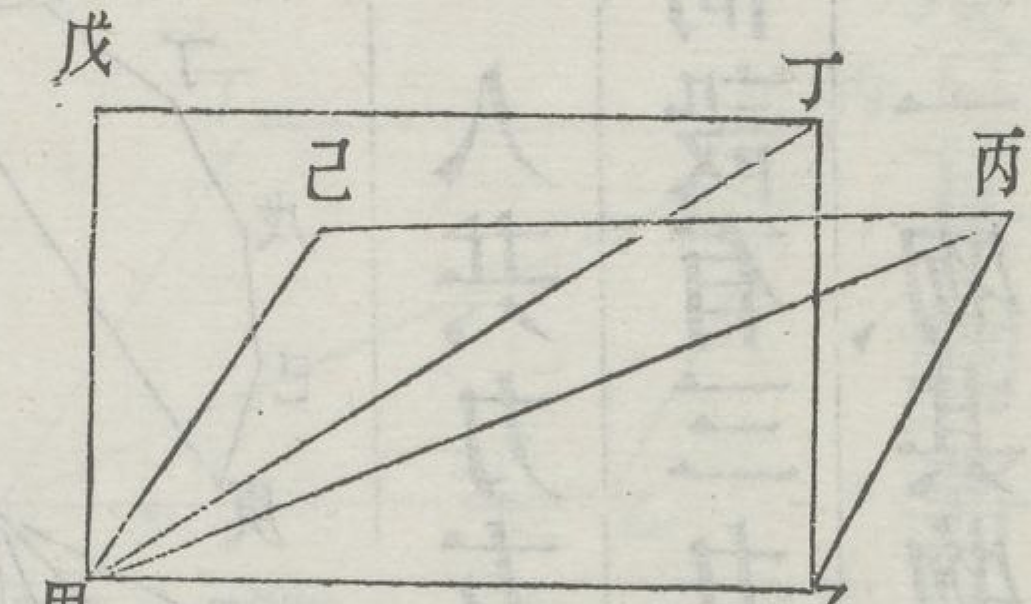


施力方向與功效相涉

問、數力並施、其方向與其功效相涉否、

答、若同向順施、則其功效、卽如數力共合、若同向而逆施、則其功效、卽如其數力之較也、若銳角相交、則仍有相助、若直角相交、則無阻無助、若鈍角相交、則相抵而有阻、設有乙甲之力、復有戊甲己甲二力相等、若己甲乙甲

並施、其功效比$\frac{甲戊}{甲乙}$更大、蓋甲丙之對角線比甲丁之對角線稍長故也、其角愈小、其線愈長、及至其角既盡、則甲丙二甲乙丄乙丙 其二甲乙丄甲己



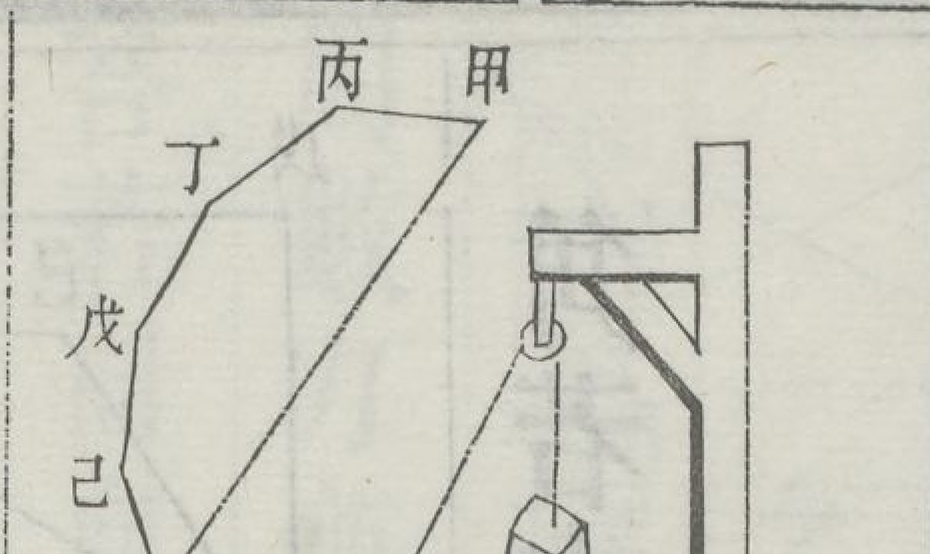
角若大至一百八十度、則甲丙二甲乙丅甲己 餘皆在二數之間、$\frac{己}{甲}$

或加或減、皆視其角爲鋭爲鈍之別、

問、有甲丙丁戊己五人、以滑車起物、各牽一繩、其方向

甲與丙差二十度、丙與丁差十九度、丁與戊差二十一度半、戊與己差二十五度、其共力何如、

答、按次以各繩方向相繼畫線、其線之長短、與各力相

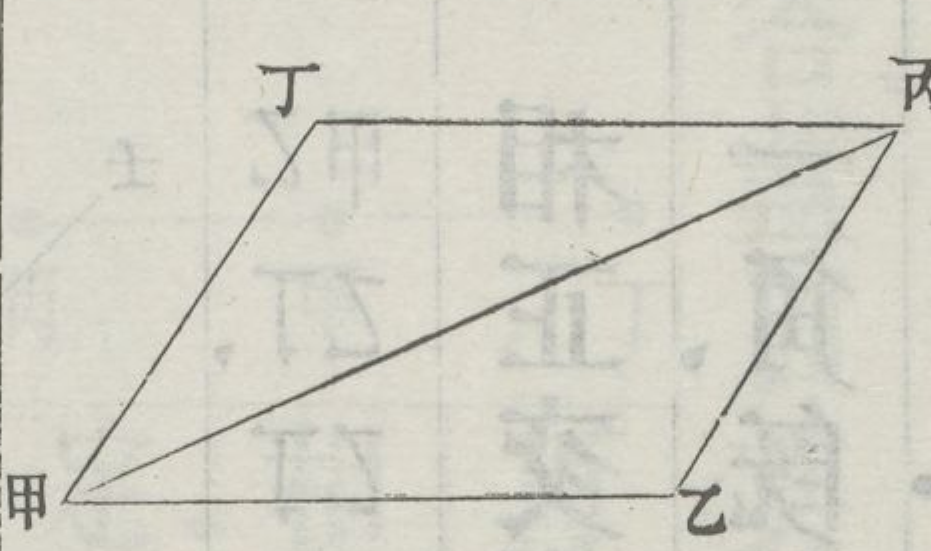


稱、兩端連之、卽其共力也、假如圖中甲丙丁戊己爲五繩、卽與各繩相平畫(甲丙)(丙丁)等線合之、卽成甲庚、乃其共力也、庚甲丙之角四十六度三十三分十秒五人共力方向、卽在丁戊二繩之間、所費之力(一百二十三)

問、設有三力、其大小次序如三邊形之各邊者、並施於一物、其物將行何如、

物受數力而定之例

答、其物將定而不移也、蓋甲乙甲丁、旣足令其物至丙、

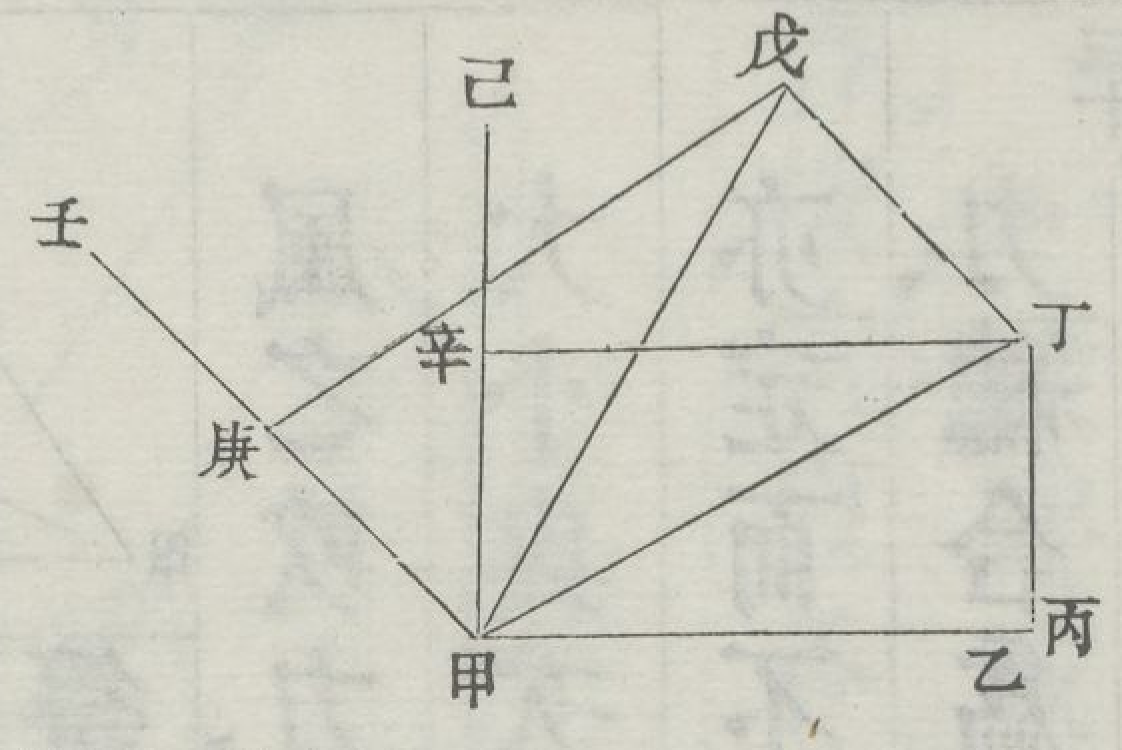


丙甲之力、適足相抵、故三力如丁丙甲甲丁丙者、並施於一物、其物必定而不移也、然丙甲之力、若向丙而施、卽助而不抵、其物動加倍也、風箏之定於空中、蓋緣三力相抵、卽地之吸力、風之吹力、繩之牽力也、以此理擴而充之、則數力若大小與次序、如多邊形之各邊者、並施於一物、其物亦定而不移也、蓋其多邊形能分爲三邊形、而其數力總合爲三也、

數力自數面總合爲

三十、問數力若不同面而並施於一物、其分合何如、

答、其力數與方向、勿論若干、皆能合爲三力、互相正交者也、設若甲戊爲某力、畫甲己甲丙二線直角相交、復畫庚甲與丙甲己之面正交其必與二線正交、自戊垂戊丁之直線、而成甲丁戊庚之四邊形、並甲乙丁辛之四邊形、甲戊之力、卽可分爲甲庚甲丁、復能分爲



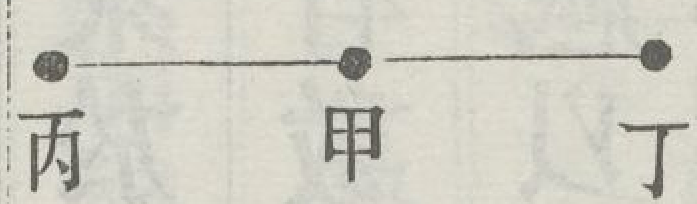
甲乙、乙丁、乙丁旣與甲辛等、是甲戊一力、分爲甲乙甲辛甲庚三力、互相正交者也、夫某點各面總分八個直角、某力於其一角、旣能分爲三向、其力數無論於何角、皆能如此分合也、

論重心

問、物之倚於重心者、正如其分兩盡聚於重心、何也、

分兩似盡聚重心

答、蓋因其形體無論大小、其倚於重心、仍能平定、假如



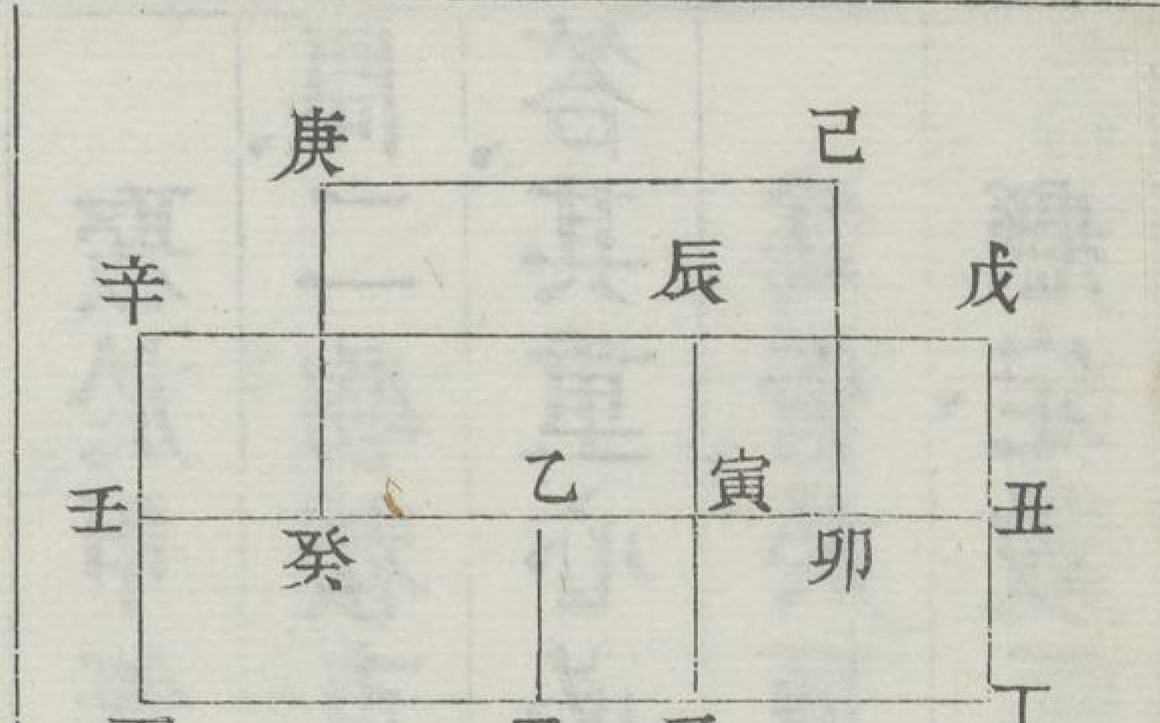
丙丁爲二枚鐵丸、其重均等、被無重直竿橫貫相連、則竿之中、必爲其重心也、蓋二丸倚之而定、則甲所受之力、卽丙與丁相合之分兩、與盡聚於甲無殊也

察二物之重心

問、二物被直竿相連、其重心安在、

答、其重心必距二物、如其分兩反比也、假如丙丁戊辛爲管、於辰子分爲兩段、卯癸爲各段之重心、繫繩索懸定、設二段復合爲一、則與各重心與力無涉、旣合

爲一、其重心卽在乙居中之處、以二繩繫於二重心而懸之、或以一竿於大重心而托之、殊無少異也、



然

壬寅︰丑寅︰︰卯乙︰癸乙

大段︰︰小段

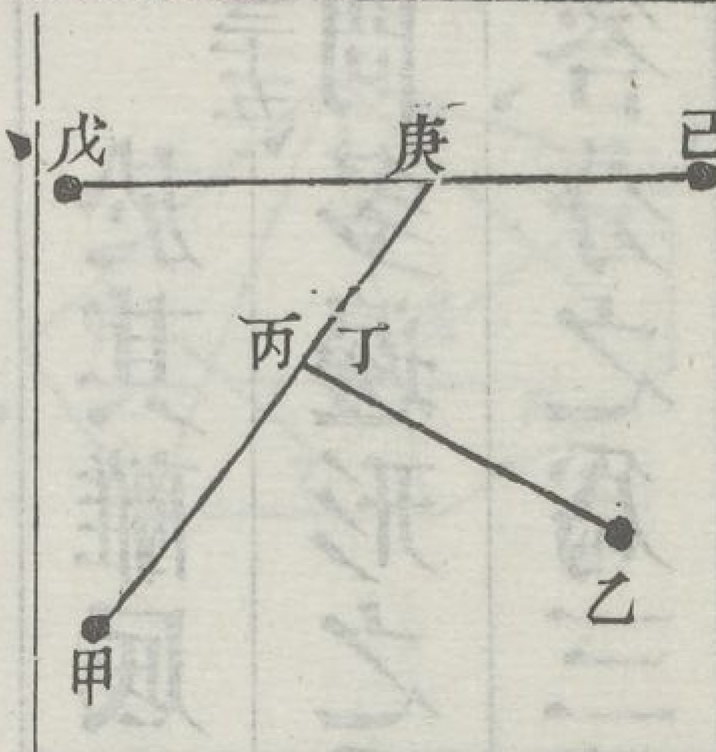
正若分兩盡聚於卯癸二處、故重心距二物如其分兩反比也、

察數物之重心

問、有數物貫以無重直竿、其重心何法察得、

答、祇以數物兩兩比之、而得各對之重心、復以各重心兩兩相比而歸一也、卽如戊己二物、按分兩反比而計其重心在庚、復以之與甲相連、亦按反比之例計

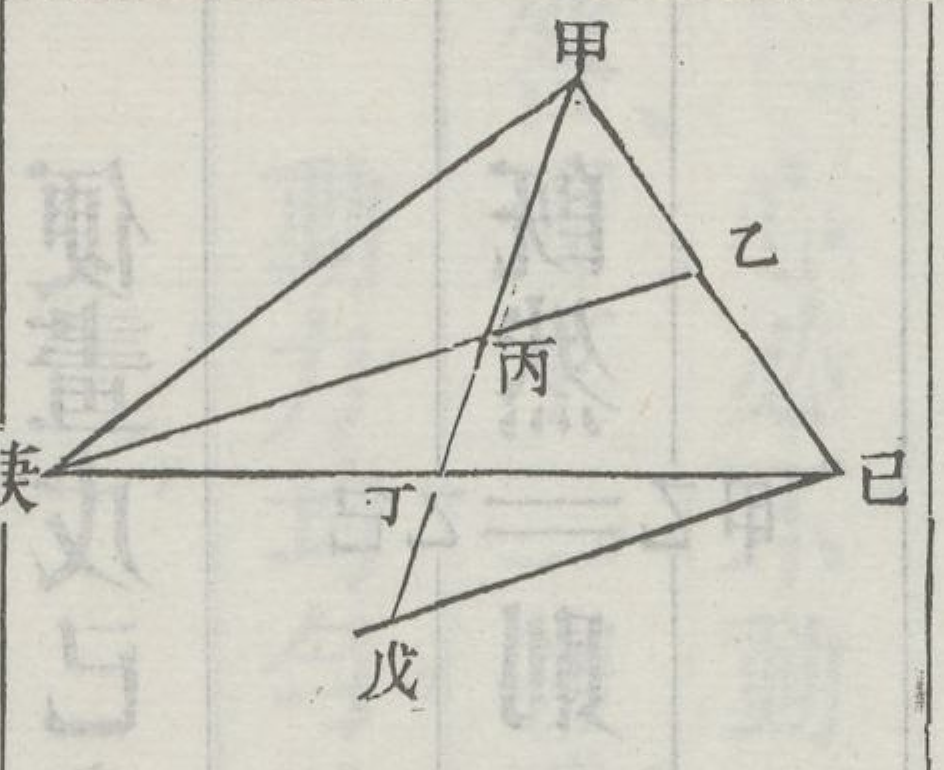
之則甲庚之重心、卽在丙、更以丙乙相連、按反比而計其重心、卽在丁、故丁爲諸物公共之重心也、



測三邊形之重心

問三邊形之重心何在、

答引線自頂至底、分底爲兩半、其重心卽在此線、離頂較離底加倍也、蓋丁爲庚己之中、卽此線之重心也、勿論若干線、與此相平者、皆爲甲丁均分、甲庚己之三邊形、卽被之均分、而其重心在此線明矣、若乙爲甲己之中、三邊形之重心、必在甲庚之線、所以丙爲

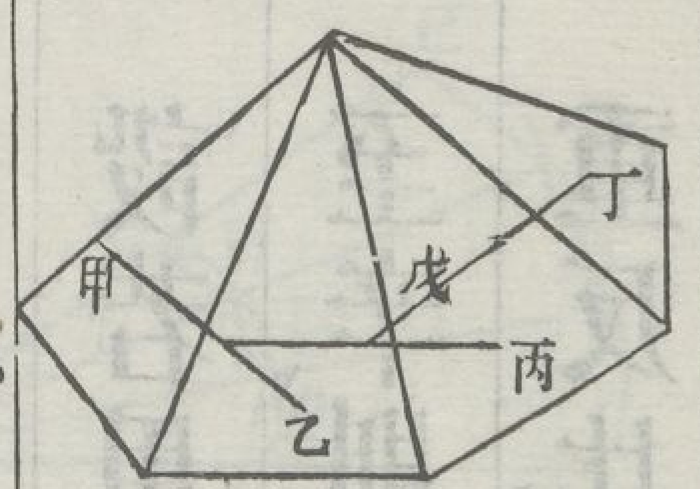


測多邊形之重心

重心、蓋二線相交之處也、既得其重心、欲得其高低、
便畫戊己與庚乙相平、而引甲丁至戊、
既然 甲乙＝乙己 則 甲丙＝丙戊 庚丁丙、戊丁己、二形復相等、蓋其一
邊二角皆等也、故 丙丁＝丁戊 而 甲丙＝二丙丁 即重心之離頂加倍
於其離底也、

三十五 問、多邊形之重心、何法可得、
答、分之爲三邊形、既按上節察得各形之重心、復按第

二物動而重心靜



廿三問、察其公共之重心也、即如甲乙丙丁爲各三邊形之重心以直線兩兩相連、而按反比之例、度其重心之所在、則總歸於戊也、

問、二物若循直線毋論離毗、而其速按輕重反比其重心必不動何也、

答、丙丁二物重心在甲、向甲而行、其速與輕重反比、則動力均勻、此行至庚、彼行至戊則 丙庚:丁戊 如 丙甲:丁甲 若相離而

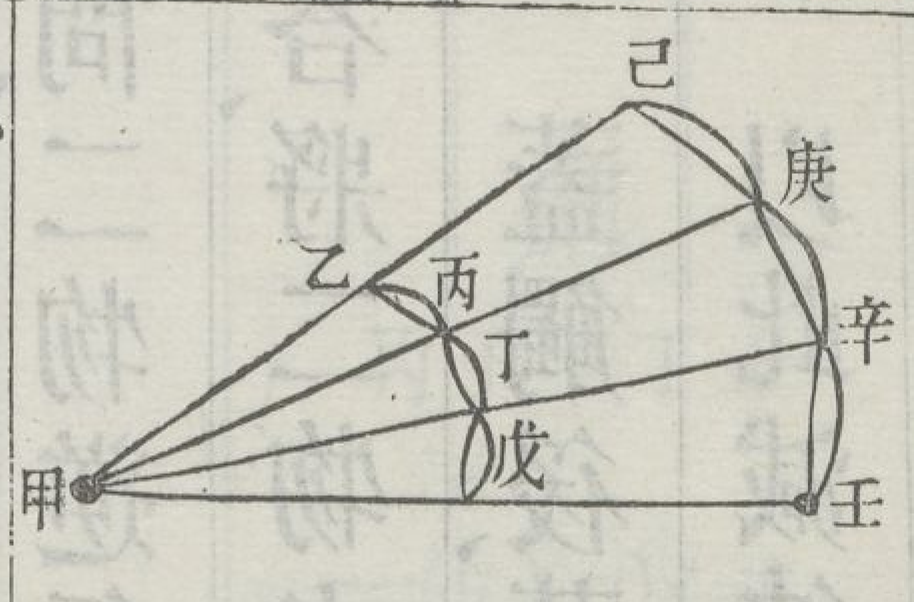
一物動而重心隨

行亦如此、故重心定而不移也、

問、設有二物、一靜一動、其動者圍繞而行、其重心遷移何如、

答、動物循何線而行、其重心亦必循同類之線而行也、設若甲壬二物其重心在戊、甲居定所而不移、壬行至辛、則其重心必行至丁、蓋其重心離二物旣按輕重反比、

論物之相觸 無躍力而順觸



則 丁辛∶甲丁∷戊壬∶甲戊 其物若行至庚己、亦復如此、戊丁丙之線、即與壬辛庚之線同類、

問、二物同向相觸、觸後其動何如、

答、其物若無躍力、必相附而行、欲知其速、則以二物之動力合之、復以二物之質約之是也、設有丙丁二物其速爲子丑、其動力相合、即爲 丙子⊥丁丑 既觸之後其動力

爲

$(丙\perp丁)\times速$

$=丙子\perp丁丑$

故

$速=\frac{丙\perp丁}{丙子\perp丁丑}$

若丁本靜、

$速=\frac{丙\perp丁}{丙子}$

若二物皆動、則丙

所減之速、卽

$子丁\frac{丙\perp丁}{丙子\perp丁丑}$

$=\frac{丙\perp丁}{(子丁丑)\times丁}$

丁所得之速卽爲

$\frac{丙\perp丁}{(子丁丑)\times丙}$

無躍力而逆觸

問、二物逆行相觸、觸後其速何如、

答、將二物之動力所差、復以二物之質約之、卽可得也、

蓋觸後、其動力、卽二物未會相觸其本動力之較也、以此減彼、

則 $丙子丅丁丑$ $＝(丙丄丁)\times速$ 故 $速＝\frac{丙丄丁}{丙子丅丁丑}$ 丙所失之速即為 $子丅\frac{丙丄丁}{丙子丅丁丑}$ $＝\frac{丙丄丁}{(子丄丑)\times丁}$ 丁所得之速、即為 $\frac{丙丄丁}{(子丄丑)\times丙}$ 若二物質速皆等、則由上式 $速＝無$ 二物皆靜也、且 $丙子＝丁丑$ 而 $丙:丁::丑:子$ 故二物逆觸、其速若與輕重反比、其動

有躍力而相觸

力必相消、而二物皆靜也、

四十、問若二物皆有躍力而相觸、其得速失速、何如、

答、其所得所失、皆與無躍力之物加倍也、蓋物之有躍力者、既觸而縮、力有若干、其漲力亦與之等、其無躍力者、按上文丙

$$\text{失速}\ \text{二}\ \frac{\text{丙丄丁}}{(\text{子丅丑})}\times\text{丁}$$

其有躍力者、則丙

$$\text{失速}\ \text{二}\ \frac{\text{丙丄丁}}{(\text{子丅丑})}\text{二丁}$$

觸後其丁之

$$\text{速}\ \text{二}\ \frac{\text{丙丄丁}}{(\text{丁丅丙})\times\text{丑丄二丙子}}$$

二物若無躍力而逆觸、

$$\text{速}\ \text{二子丅}\frac{\text{丙丄丁}}{(\text{子丅丑})}\times\text{二丁}$$

$$\text{二}\ \frac{\text{丙丄丁}}{(\text{丙丅丁})\times\text{子丄二丁丑}}$$

則丙

$失速=\frac{丙\perp丁}{(子\perp丑)\times丁}$

若有躍力而逆觸、丙即

$失速=\frac{丙\perp丁}{(子\perp丑)\times二丁}$

問、有躍力之物相等、觸後其速互易、何也、

答、既曰相等、

則

$丙=丁$

$丙丅丁=無$

$丁丅丙=無$

按上節之式、觸後、丙之

$速=\frac{丙\perp丁}{二丁丑}=\frac{二丁}{二丁丑}=丑$

丁之

$速=\frac{丙\perp丁}{二丙子}=\frac{二丙}{二丙子}=子$

是二物之速互易也、若以其逆

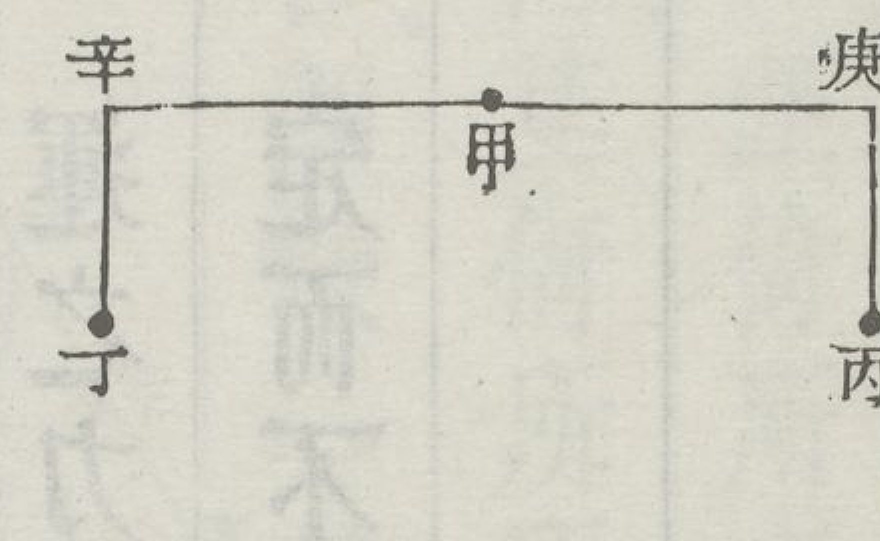
論助力器具

觸之式推之、則丙之$速 = \frac{丙丄丁}{丅二丁丑} = 丅丑$丁之$速 = \frac{丙丄丁}{二丙子} = 子$丙之速既爲丅丑卽所謂負也、而其物乃回行、丁之速既爲丄子、則二物不但易速、且易向也、然此物若本靜、則彼物靜、而此卽動也、

問、槓桿之力何法計之、

答、其力與重物卽如兩臂長短反比也、設二物懸於庚辛二端、而倚定於甲、則甲爲其重心明矣、按上文物離重心、如輕重反比、卽可平定

計算槓桿之力



是

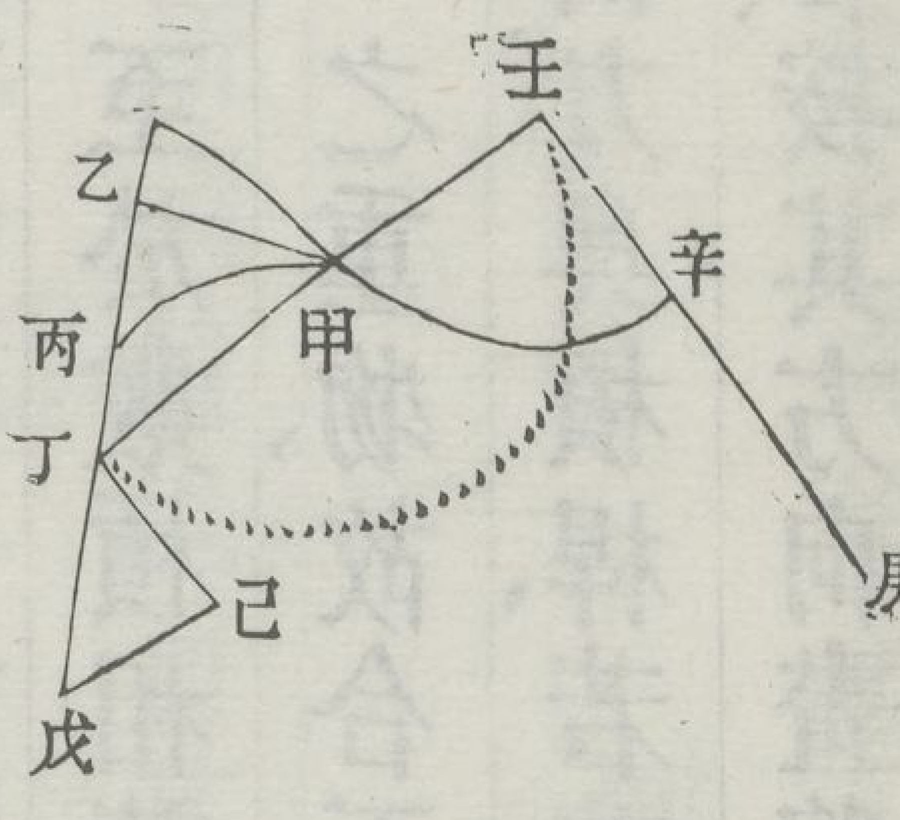
丙：丁∷辛甲：庚甲
∷力：重物

庚甲×丙＝辛甲×丁

乃兩臂所任之力也、若數物倚一桿而定、即將各物距倚所、與其分兩相乘、其在左者左合之、其在右者右合之、二數必等也、無論其倚所何在、皆歸此例、故槓桿之三種、其實皆同、至於數槓相連、其理亦同、不過此槓之力、所為彼槓之重物、故合而計之也、

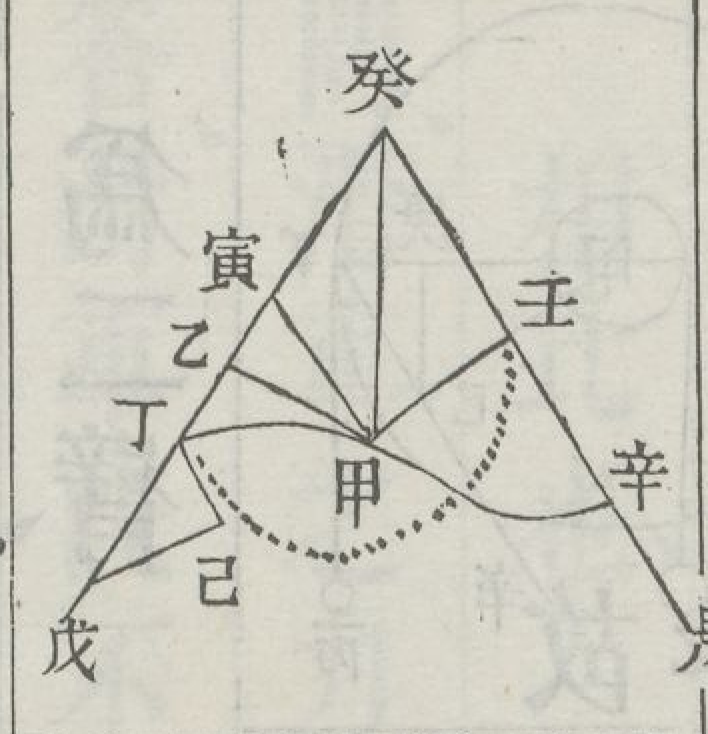
問、力與槓桿、若非正交、何法計算、

答、按其方向畫線自倚所復畫二線與之正交者、若二



力相比、如二線之反比、其槓卽平定、假若甲丙甲辛爲槓之二臂、被戊丙庚辛二繩所牽、畫甲乙甲壬與二繩方向正交、復引甲至丁、設左邊牽力爲丁戊、便以之分爲己戊己丁之二力、則己戊旣與壬丁相平、不能使槓桿轉運、惟旁施於倚所、其轉運之力、只賸丁己、然彼臂若有均力、於壬相抵、其槓卽定而不轉、則 力:力::戊丁:丁己 然 戊丁:丁己::甲丁:甲乙 故 力:力::甲壬:甲乙 則二力相比、卽如其方向

距倚所之反比也、
問、其倚所所受之力、何法計之、
答、卽按二力方向相交之處、距倚所遠近是也蓋自王
乙引二線至癸、畫甲寅與王癸相平、則寅
甲癸、甲癸王、二角等、若以甲癸爲半徑、畫



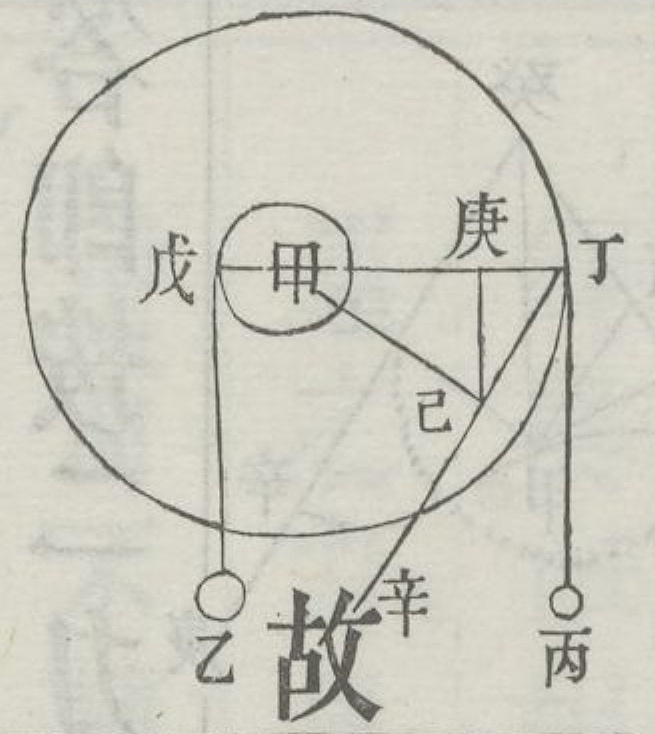
圓線甲乙、卽爲甲癸乙之正弦、甲王卽爲
甲癸王、或寅甲癸之正弦、
然
寅甲:癸寅
::
蕜甲癸寅:蕜癸甲寅
::
乙甲:王甲
故
寅甲:癸寅::力:力
寅甲
癸寅
卽爲二力
癸甲
卽二力合成、

計算輪軸之力

故所受之力、按倚所距方向相交之處也、

四十五 問、輪軸之力、何法計算、

答、其力與物如輪輻軸輻反比、卽可平定、蓋軸心於甲、用力於丁、懸重於戊、戊甲丁儼爲槓桿、甲戊甲丁卽爲二臂、



故 力：重∷甲戊：甲丁

戊甲×重＝丁甲×力

是力與重如輪軸二輻反比卽可平定也、

問、若用力方向與輪輻斜者、何法計算、

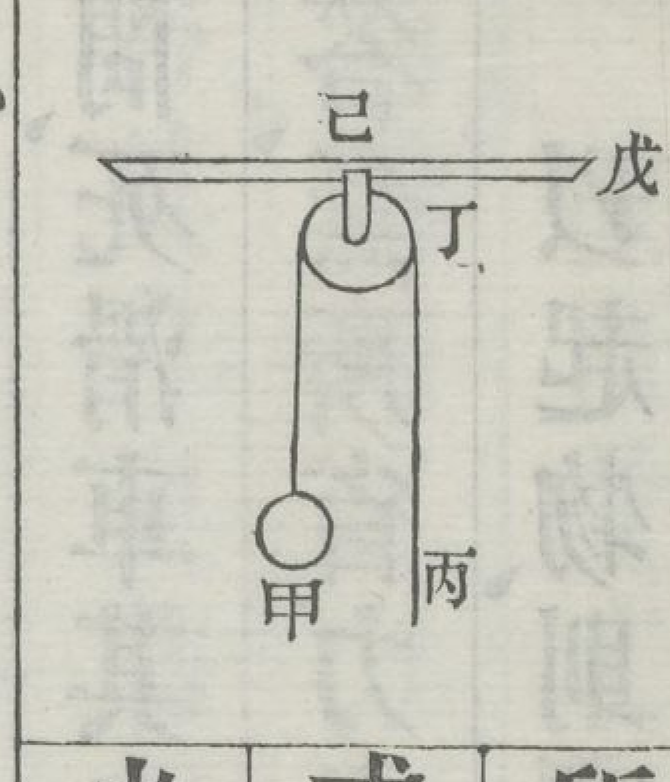
計算滑車之力

答、二力相比、卽如其方向距軸心反比也、蓋上文第四十三
問、力與槓桿斜用、亦此比例、卽如丁辛爲繩牽之則
力較重物如甲戊比甲己、卽如軸輻與用力方向之距中
相比也、

問、滑車之力、何法計算、
答、滑車既不同式、卽不同例、所同者惟其繩索繞樞紐
以通力也、

問、死滑車其力何如、
答、無所省力也、惟其施力方向較便而已、設滑車於丁
以起物、則憑丙甲一索、兩端均緊、喫力無殊、故力無

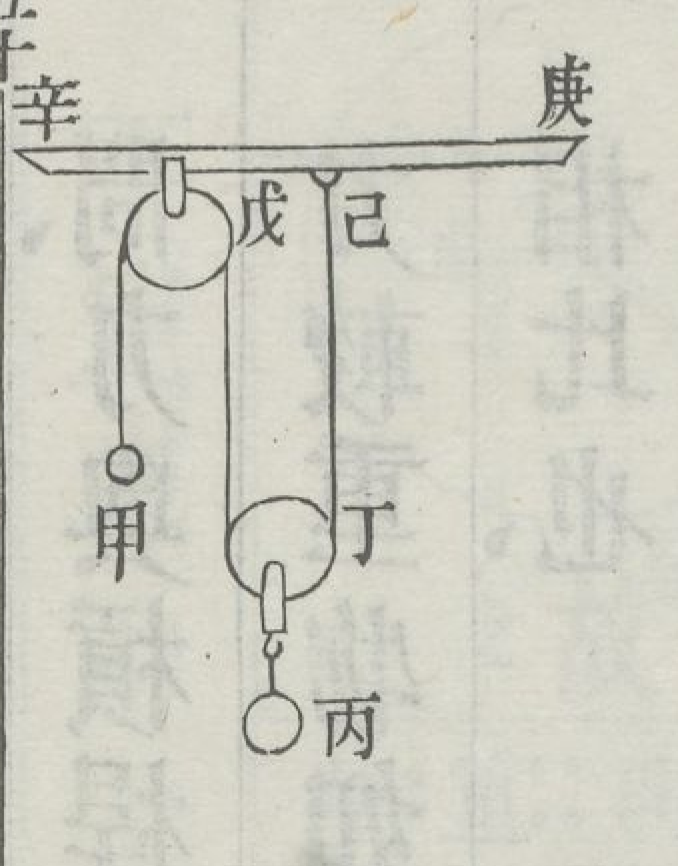
所省也、力與重皆旣倚索、則無論滑車何式、隨繩索而揆其鬆緊、其力卽無難計算也、



問、活滑車省力何如、

答、其滑車倚於數索重物之分兩、亦分倚數索也、假如丁爲滑車、丙爲重物、用力於甲、則丙隨丁、而上分倚左右二繩、故省力有一半也、數具相連、若同貫一繩、則滑車以上、繩索分若干条、是其力爲增加若干倍也、卽 $\frac{\text{重}}{\text{數索}}=\text{力}$

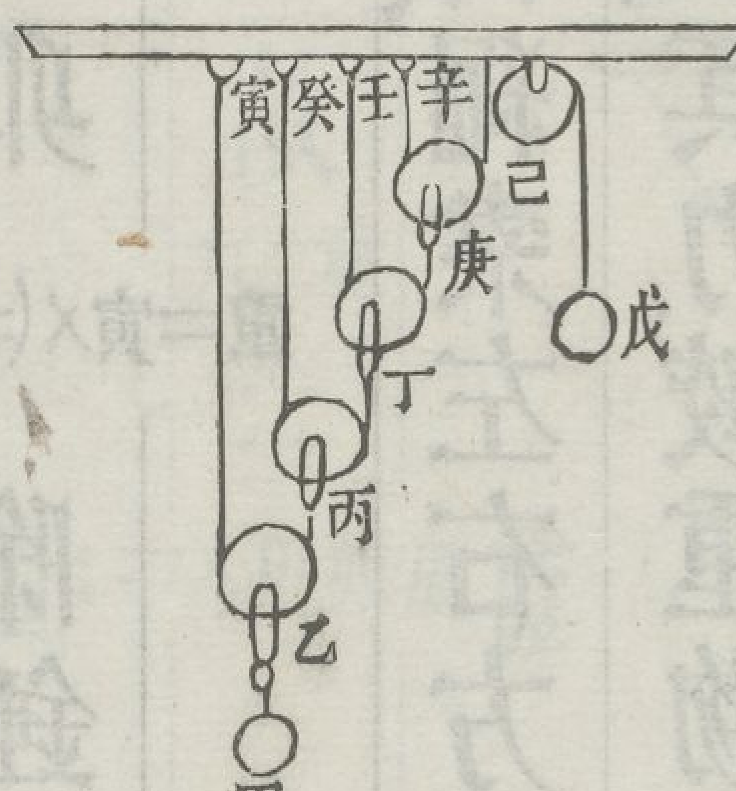
五十



問、若滑車數具相連、各懸一索、以繩貫之、其力何法計

算、

答、即除其一具餘賸若干以二自乘若干次而乘其力也假如乙丙丁庚四具各懸於橫梁



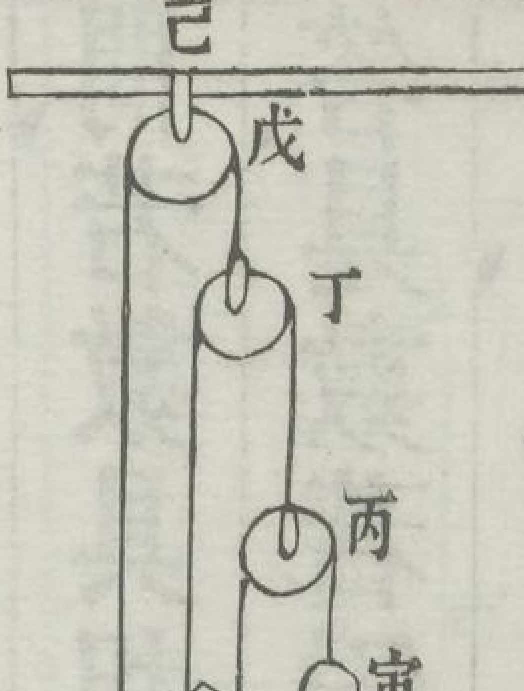
貫之一索用力於戊則庚索喫力加倍於己丁復喫力加倍於庚丙則加倍於丁乙則加倍於丙故一觔於戊可起十六觔於甲總之若卯爲具數

$力\times(二)^{卯}=重$

問、若數具相連各有另繩下繫於重物其力何法計算、

答、具數若干以二自乘若干次以其數減一而乘其力也假如丙丁各繞一繩繫於重物懸錘於寅則丙勝

力爲二寅、丁勝力爲四寅、勿論若干、皆以此例遞加、



則

重=寅⊥二寅⊥四寅

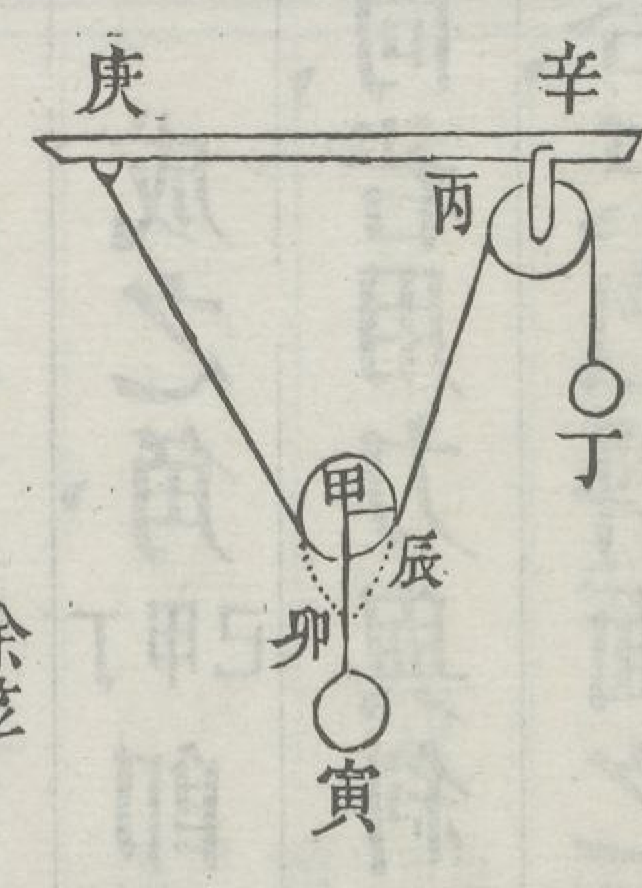
總之索數爲卯、

重=寅×(二卯丅一)

除錘卽得其力之所增、

問、繩索左右方向均斜、其力何法計算、

答、其力較重物如半徑比加倍斜角之餘弦也、卽如以索自丙繞辰而繫於庚、以丙辰庚辰二線引至卯、以辰卯度其力、卽分爲卯甲辰甲二力、辰甲旣與地相平爲無用、



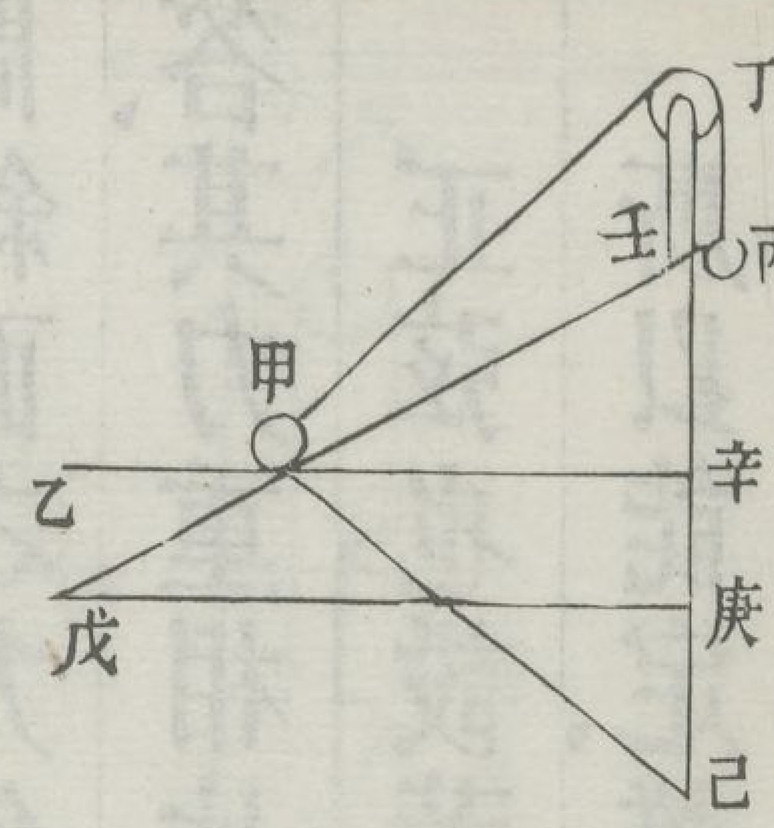
惟賸甲卯可以起物、庚辰之索、分力亦然、實效惟有甲卯、故二索共效二甲卯也、以卯辰爲半徑、則甲卯卽爲甲卯辰之餘弦、

故 重:力 :: 半徑 : 二×甲卯辰餘弦

計算斜面之力

問、斜面之力、何法計算、

答、其力重相比、如面與地力與倚處垂線所成二角之正弦也、設若戊壬爲斜面、甲丙二物以繩相連而定、所以能定、惟因三力相抵、卽二物之重力與斜面之



抵力是也、其物既定而不移、三力必成爲三角形、各力如各邊相比、故力:重::甲丁:丁己各邊既如對角之正弦、則力:重::甲己丁正弦:己甲丁正弦
力:斜面抵力::甲丁:甲己如甲己丁正弦:甲丁己正弦然甲己丁═丁戊庚
庚戊丁卽面與地所成之角丁甲己卽力與倚處垂線所成之角也、

問、若用力與斜面相平、其力何法計算、

答、只以斜面之長高相比而得之、蓋三力悉如丙戊庚、

計算螺絲之力

之三邊、故

丙戊：丙庚：：重：力

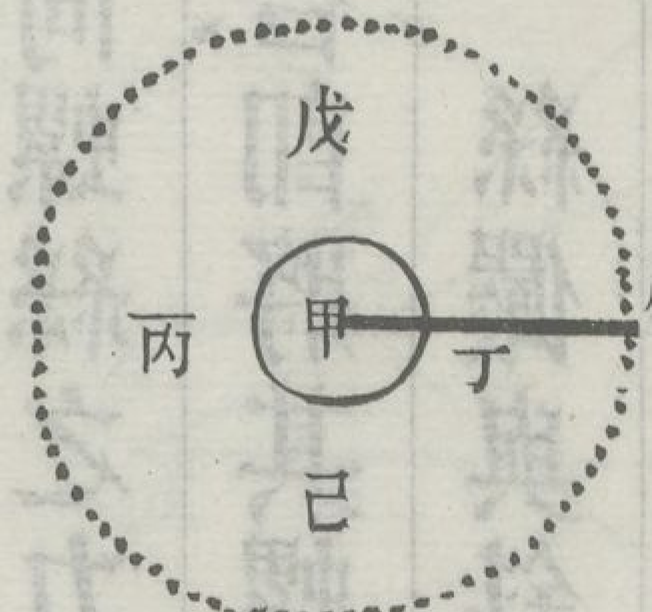
戊庚：丙庚：：斜面抵力：力

力與重、正如其面之長高相比也、所用之力、與斜面之抵力、復如面之高底之長相比也、若力面相平、其力最省、若力與底平、其面之㬥力最多也、

五十五、問螺絲之力、何法計算、

答、卽將其螺紋疎密、與螺絲週遭尺寸相乘、是也、蓋螺絲儼與斜面同理、螺紋遶軸斜旋而上、自一週圍繞多匝、正如斜面數具相繼也、以紙剪成斜面式樣、纏

繞於筆管、即可變為螺絲形像、螺絲若單用、



則 螺過：紋距：：重：力

復加之以柄、用力於庚、

則 丁甲：庚甲：：力：力

螺過：柄路：：

故 柄路：紋距：：重：力

此其恒式也、

$紋距\times重=柄路\times力$

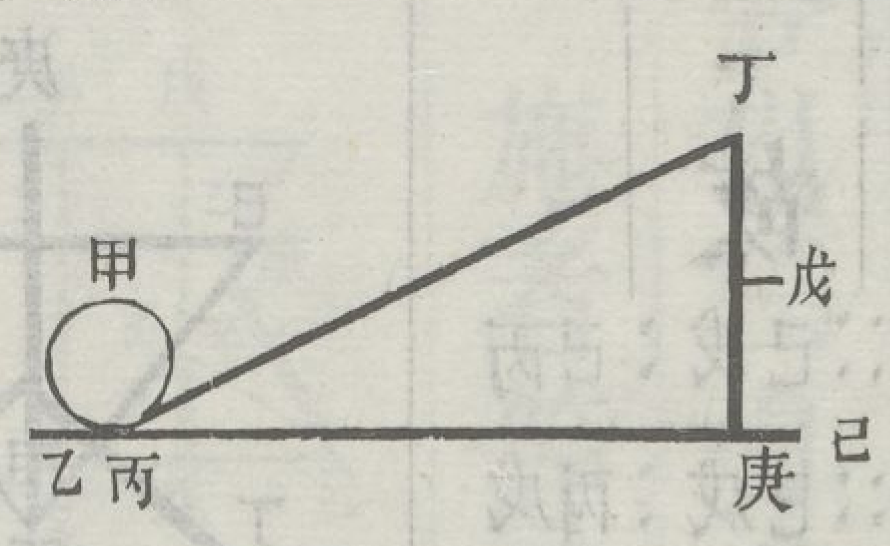
$力=\frac{紋距\times重}{柄路}$

此四率內、若知其三其第四即可計得、無論以之上起下壓、所得之力、比所用之力、正如柄端所過之路、比螺紋之相距、故紋愈密柄愈長力即愈大也、

計算尖劈之力

問尖劈之力、何法計算、

答、若二面均長、其力比重、如其厚比長也、假如有重石於甲、以劈下入而起之、儼如以其石隨斜面而上、故力重相比、與斜面無異也、然斜面之力、與底相平比重、即如面之高比底之長也、至雙面劈、若二面均長、即爲單面二具合成、故力與重如厚長相比也、



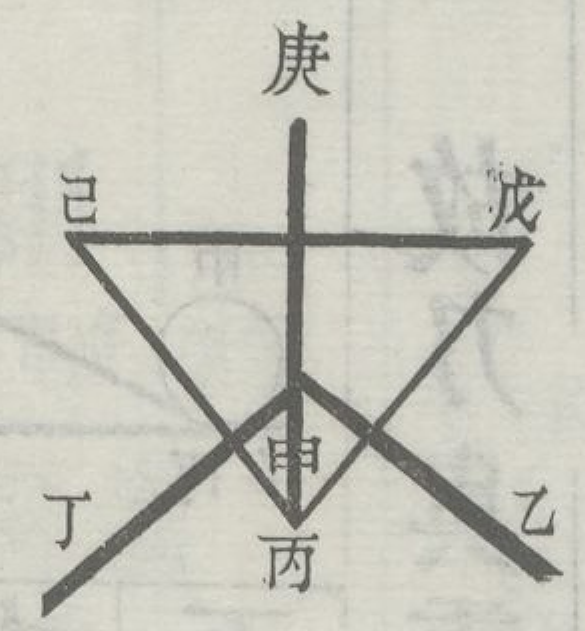
如丙庚、丁庚

故 $\frac{\text{厚}}{\text{長}}$ —— $\frac{\text{力}}{\text{重}}$

則劈愈薄愈長、其力即愈大也、

問若二面不均長其力何法計算、

答若力與阻、皆歸一處則力比阻、如其首之厚比二面之共長也、假如用力爲庚甲、抵力爲甲丁甲乙、三力相消則其三力相比、如三邊形之各邊也、



故

丙己：戊己：：阻：力

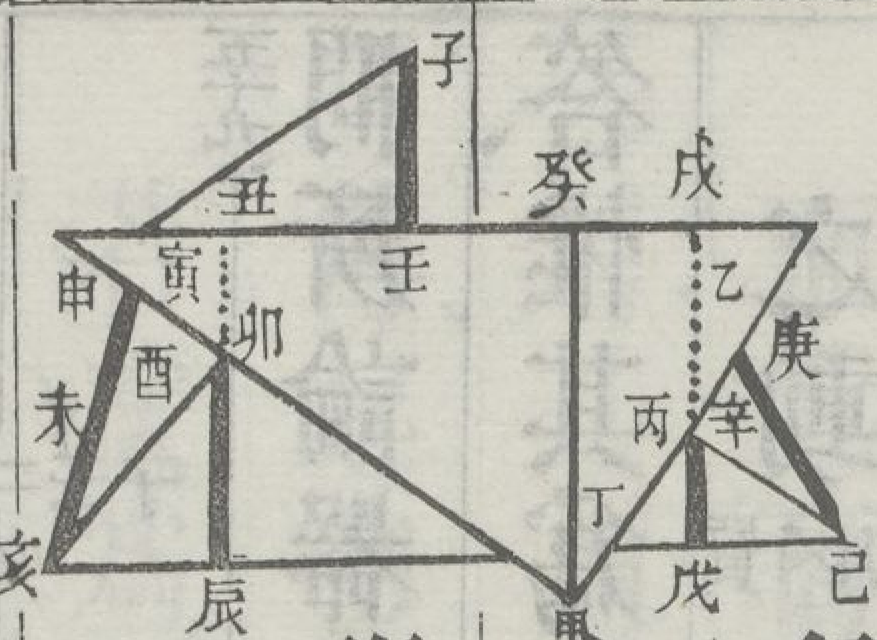
戊丙：戊己：：阻：力

故

戊丙⊥丙己：戊己：：阻⊥阻、力

即如其首之厚比二面之共長也、若二

面均長、則力比阻如其厚之半比其一面之長明矣、
問、若力與阻、不歸於一處、所得之力何法計算、
答、以三力各分爲二、其於劈首順施者、與其於劈面逆
施者等、劈卽能定、其順者逆者必正向劈首、其逆者
多寡、必如其距用力方向反比也、假如壬子爲
力、申亥爲阻分爲卯亥、卯申、卯申與面平、卽無所阻、卯亥
復分爲辰亥辰卯一橫一縱也、彼面亦然、若壬子與
卯丙辰戊等、其劈自定也、然須二阻多寡相比、如
其方向距用力方向之反比也、否則劈將偏而不定、
也、



六具之通理

若丙戊丄卯辰二壬子而丑壬∶戊壬∷丙戊∶卯辰其劈即能定其力須復增以進之也、

五十九、問所論器具六種、何資而助力、

答、惟其爲通力非能生力也、其所以能通力者、惟因物之動質×力又速×力蓋質×速二力設復有物質×速二力如二物力等、則質×速二質×速而質∶質∷速∶速故二物之速、如其質之反比、其力即等也、最小之力、可移至大之物、惟其大物、必行較慢此

理六種皆同、即如槓桿若能增力數倍、此頭較彼頭所過之路亦必數倍、輪軸增力若干、輪邊較軸邊加速若干、滑車增力數倍、繩索須牽拽數尺重物始行一尺、斜面亦復如此、蓋墜一錘以牽重物、其物於斜面升高一尺、其錘必下行數尺、至螺絲、重物起移一層、其柄必運轉一週、劈須尖薄、始有大力、然愈尖愈薄起物必愈慢也、此皆所謂以時免力、然力本有限、若緩爲籌算、繼之以妙機、洞元測微、鉤深致遠、即可增於無窮也、

第七卷算學四章凡五十九問

第七卷算學四章凡五十九問

論坎麻籌也

若設為繪算機之以妙機攝元測微鈎深致遠即可

轉起動必愈速此器所以時分力成力本有限

層其極必運轉一週發頭連先動而大力能使夫倫

而昇高一尺其鐘必不若數尺在干重轉遠一

一尺斜而東復如此盡際一鐘以半重再其遠方鉄

遠若干搢車增力數倍編織須牽數尺重物始行

所過之路亦必數倍輪軸增力若干輪邊較軸邊加

理大概皆同即如積桿者能增力數倍此須較衡面