

## Lineare Algebra II

### Vorlesung 43

#### POLYNOME IN MEHREREN VARIABLEN UND NULLSTELLENMENGEN

Als eine Anwendung der Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen bzw. der Hauptachsentransformation besprechen wir, wie man einfache polynomiale Gleichungen in mehreren Variablen von niedrigem Grad auf eine besonders einfache Form bringen kann. Dazu führen wir kurz Polynome in mehreren Variablen ein.

**Definition 43.1.** Zu einer Variablenmenge  $X_1, \dots, X_n$  und einem  $n$ -Tupel  $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$  nennt man einen Ausdruck der Form  $X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$  ein *Monom* in den  $X_i$ .

Der *Grad* eines Monoms ist die Summe der Exponenten, also gleich  $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n$ .

**Definition 43.2.** Unter einem *Polynom*  $F$  in den Variablen  $X_1, \dots, X_n$  über einem Körper  $K$  versteht man eine endliche Linearkombination von Monomen

$$F = \sum_{\nu} c_{\nu} X^{\nu}$$

mit  $c_{\nu} \in K$ .

Der *Grad eines Polynoms* ist das Maximum der Grade der beteiligten Monome (also derjenigen Monome, die mit einem von 0 verschiedenen Koeffizienten wirklich vorkommen). Ein Polynom  $F = F(X_1, \dots, X_n)$  in  $n$  Variablen über  $K$  definiert durch Einsetzen eine Funktion

$$K^n \longrightarrow K, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto F(x_1, \dots, x_n).$$

Dies sind wichtige Funktionen in der höherdimensionalen Analysis. Die Variable  $X_i$  in diesem Sinne interpretiert repräsentiert einfach die  $i$ -te Projektion, und die Addition und die Multiplikation von Polynomen entspricht dann der Addition und der Multiplikation von Funktionen, bei der die Werte in  $K$  addiert bzw. multipliziert werden.

**Definition 43.3.** Zu einem Körper  $K$  und einer Variablenmenge  $X_1, \dots, X_n$  besteht der *Polynomring*

$$K[X_1, \dots, X_n]$$

aus allen Polynomen  $F(X_1, \dots, X_n)$  in diesen Variablen, wobei diese Menge durch die komponentenweise Addition und die Multiplikation, die sich durch die distributive Fortsetzung der Regel

$$X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n} \cdot X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n} := X_1^{r_1+s_1} \cdots X_n^{r_n+s_n}$$

ergibt, zu einem kommutativen Ring gemacht wird.

**Definition 43.4.** Es sei  $K$  ein Körper und sei  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein Polynom in  $n$  Variablen. Dann nennt man

$$\{P \in K^n \mid F(P) = 0\}$$

das *Nullstellengebilde* (oder *Nullstellenmenge*) zu  $F$ .

Das Nullstellengebilde zu  $F$  ist also einfach die Faser zu der durch  $F$  gegebenen Funktion

$$F: K^n \longrightarrow K.$$

Bei  $n = 1$  ist dies einfach eine endliche Ansammlung von einzelnen Punkten, den Nullstellen von  $F$ , (bei  $F = 0$  handelt es sich um ganz  $K$ ), bei  $n \geq 2$  entstehen aber zunehmend interessantere und kompliziertere geometrische Gebilde. Das Studium dieser Gebilde heißt *algebraische Geometrie*. Bei  $n = 2$  spricht man von algebraischen Kurven.

Bei beliebigem  $n$  hat ein Polynom vom Grad  $\leq 1$  die Gestalt

$$F = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n + b$$

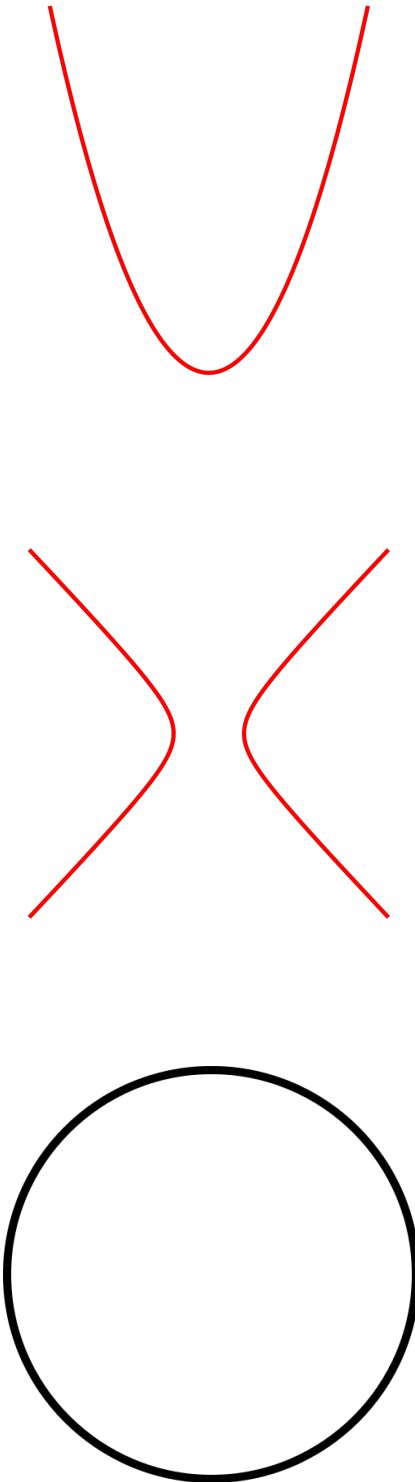
und das zugehörige Nullstellengebilde ist einfach die Lösungsmenge der inhomogenen linearen Gleichung

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = -b,$$

also ein affin-linearer Raum.

## REELLE QUADRIKEN

Die Polynome vom Grad zwei und ihre Nullstellenmengen sind weitgehend mit Mitteln der linearen Algebra beherrschbar.



**Definition 43.5.** Unter einem *quadratischen Polynom*  $F \in K[X_1, \dots, X_n]$  über einem Körper  $K$  versteht man ein Polynom vom Grad 2, also einen

Ausdruck der Form

$$F = \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_i X_i + c$$

mit  $a_{ij}, b_i, c \in K$ .

**Beispiel 43.6.** Zu einem quadratischen Polynom  $aX^2 + bX + c$  in einer Variablen  $X$  mit  $a, b, c \in K$  und  $a \neq 0$  findet man die Nullstellen durch *quadratisches Ergänzen*. D.h. man schreibt (die Charakteristik des Körpers sei nicht 2)

$$aX^2 + bX + c = a \left( X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} \right) = a \left( \left( X + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right).$$

Dies ist genau dann gleich 0, wenn

$$X = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$$

und die Wurzel

$$\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

in dem Körper existiert. Je nachdem gibt es keine, eine oder zwei Lösungen.

Wir stellen nun den Zusammenhang zwischen quadratischen Polynomen und Bilinearformen her.

**Definition 43.7.** Zu einer Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf einem  $K$ -Vektorraum  $V$  nennt man die Abbildung

$$V \longrightarrow K, v \longmapsto \langle v, v \rangle,$$

die *zugehörige quadratische Form*.

Zu einer fixierten Basis  $v_1, \dots, v_n$  wird eine Bilinearform durch ihre Gramsche Matrix

$$G = (g_{ij})_{ij}$$

beschrieben, und die zugehörige quadratische Form  $V \rightarrow K$  wird, wenn man  $X_i$  für die  $i$ -te Projektion (die zugehörige Dualbasis) schreibt, durch das quadratische Polynom

$$(X_1, \dots, X_n) G \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{ij} X_i X_j = \sum_i g_{ii} X_i^2 + \sum_{i < j} (g_{ij} + g_{ji}) X_i X_j$$

beschrieben. Im symmetrischen Fall ist dies

$$\sum_i g_{ii} X_i^2 + \sum_{i < j} 2g_{ij} X_i X_j.$$

Umgekehrt kann man jedes rein-quadratische Polynom in  $n$  Variablen in dieser Weise mit einer symmetrischen Gramschen Matrix ausdrücken. Die Theorie der reell-symmetrischen Bilinearformen erlaubt es, durch eine geeignete Koordinatentransformation (einen Basiswechsel) die gemischten Terme wegzukriegen.

**Beispiel 43.8.** Wir erstellen eine Liste von reellen quadratischen Polynomen in den beiden Variablen  $X$  und  $Y$  mit den zugehörigen Nullstellenmengen, wobei wir die Koeffizienten auf  $0, 1, -1$  beschränken. Wenn nur die eine Variable  $X$  vorkommt, so hat man im Wesentlichen die drei folgenden Möglichkeiten.

- $X^2$  Das Nullstellengebilde ist eine „verdoppelte Gerade“.
- $X^2 - 1$  Das bedeutet  $X = \pm 1$ , das Nullstellengebilde besteht also aus *zwei parallelen Geraden*.
- $X^2 + 1$  Das Nullstellengebilde ist *leer*.

In diesen Fällen (wo die zweite Variable  $Y$  nicht explizit vorkommt) ist das Nullstellengebilde einfach die Produktmenge eines nulldimensionalen Nullstellengebildes (endlich viele Punkte) und einer Geraden.

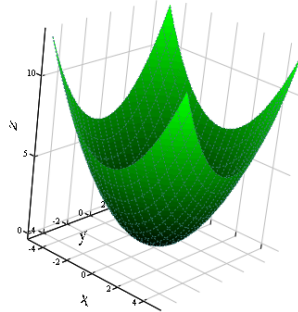
Nun betrachten wir die Polynome, wo beide Variablen vorkommen.

- $Y^2 - X$  Das Nullstellengebilde ist eine *Parabel*.
- $Y^2 - X^2$  Das bedeutet  $(Y - X)(Y + X) = 0$ , das Nullstellengebilde besteht also aus *zwei sich kreuzenden Geraden*.
- $Y^2 + X^2$  Die einzige Lösung ist der *Punkt*  $(0, 0)$ , das Nullstellengebilde ist also ein einziger Punkt.
- $Y^2 - X^2 - 1$  Das bedeutet  $(Y - X)(Y + X) = 1$ , das Nullstellengebilde ist also eine *Hyperbel*.
- $Y^2 + X^2 - 1$  Das Nullstellengebilde ist der *Einheitskreis*.
- $Y^2 + X^2 + 1$  Das ist wieder *leer*.

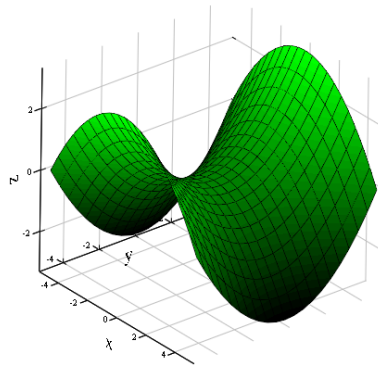
Das Polynom  $XY - 1$  taucht in dieser Liste nicht direkt auf, da es in den Variablen  $X = U + V$  und  $Y = U - V$ , also

$$U^2 - V^2 = 1$$

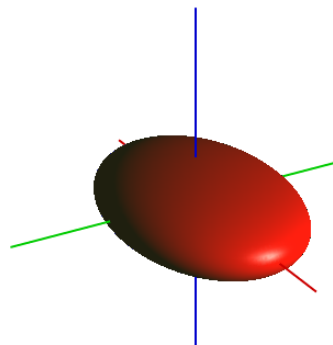
geschrieben werden kann. In dieser Form ist es also doch in der Liste. Der folgende Satz sagt unter anderem, dass bis auf Verzerrungen die Liste vollständig ist.



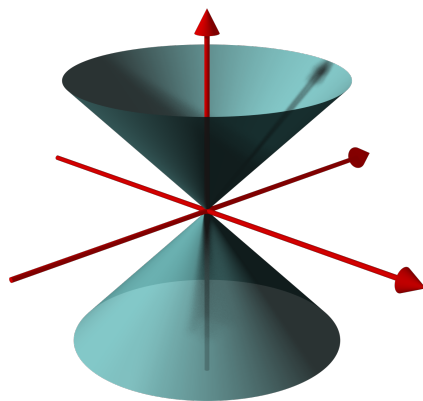
Ein *Paraboloid*.



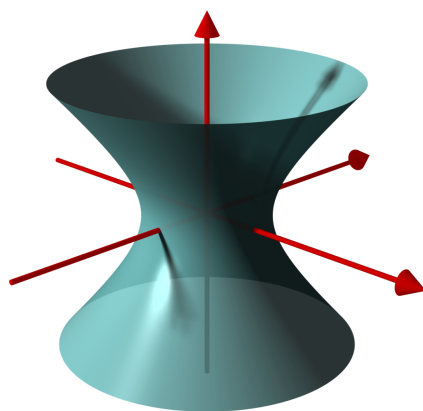
Ein *hyperbolisches Paraboloid*, auch eine *Sattelfläche* genannt.



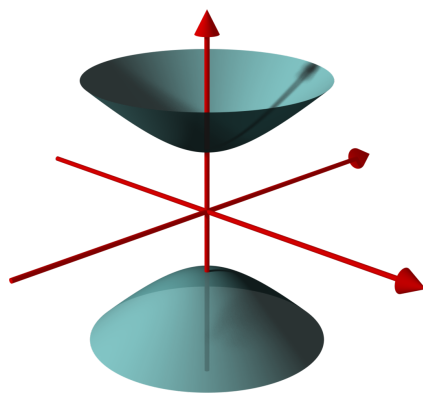
Ein *Ellipsoid*. Die Oberfläche ist eine *Quadrik*.



Ein *Doppelkegel*.



Ein *einschaliges Hyperboloid*.



Ein *zweischaliges Hyperboloid*.

**Beispiel 43.9.** Wir erstellen eine Liste von reellen quadratischen Polynomen in den drei Variablen  $X, Y$  und  $Z$  mit den zugehörigen Nullstellenmengen, wobei wir die Koeffizienten auf  $0, 1, -1$  beschränken. Ferner betrachten wir

nur solche Polynome, wo sämtliche Variablen vorkommen und deren Nullstellengebilde nicht leer ist.

- $Y^2 + X^2 - Z$  Das Nullstellengebilde ist ein *Paraboloid*.
- $Y^2 - X^2 - Z$  Das Nullstellengebilde ist eine *Sattelfläche*.
- $X^2 + Y^2 + Z^2$  Die einzige Lösung ist der *Punkt*  $(0, 0, 0)$ , das Nullstellengebilde ist also ein einziger Punkt.
- $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1$  Das Nullstellengebilde ist eine *Sphäre*, also die Oberfläche einer Kugel.
- $X^2 + Y^2 - Z^2$  Das Nullstellengebilde ist die Lösungsmenge zur Gleichung  $Z^2 = X^2 + Y^2$ . Das ist ein runder (Doppel)-*Kegel*.
- $X^2 + Y^2 - Z^2 - 1$  Das Nullstellengebilde ist ein *einschaliges Hyperboloid*.
- $X^2 + Y^2 - Z^2 + 1$  Das Nullstellengebilde ist ein *zweischaliges Hyperboloid*.

**Satz 43.10.** *Jedes reelle rein-quadratische Polynom*

$$F = \sum_{i \leq j} a_{ij} X_i X_j$$

*besitzt in einer geeigneten Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes) die Form*

$$F = \sum_{1 \leq i \leq n} r_i U_i^2.$$

*Die Koeffizienten  $r_i$  sind die Eigenwerte der quadratischen symmetrischen Matrix*

$$M = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

*mit*

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{für } i = j, \\ \frac{a_{ij}}{2} & \text{für } i < j, \\ \frac{a_{ji}}{2} & \text{für } i > j. \end{cases}$$

*Beweis.* Mit der im Satz aufgestellten Matrix  $M$  kann man das Polynom in der Form

$$(X_1, \dots, X_n) M \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Nach Definition ist die Matrix  $M$  symmetrisch. Nach Satz 42.12 gibt es eine Orthonormalbasis  $v_1, \dots, v_n$  des  $\mathbb{R}^n$ , bezüglich der die neue Gramsche Matrix

$$D = B^{\text{tr}} M B$$

Diagonalgestalt besitzt, wobei

$$B = M_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{v}}$$

die Basiswechsellmatrix von der neuen Basis zur Standardbasis bezeichnet, was wir kurz als

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} = B^{\text{tr}} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}$$

im Sinne von Bemerkung 9.3 ausdrücken. Es sei  $U_1, \dots, U_n$  die Dualbasis zur neuen Orthonormalbasis. Die  $U_i$  beschreiben also die neuen Koordinatenfunktionen, und diese fassen wir als neue Variablen auf. Es besteht dann nach Lemma 14.14 die Beziehung

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_d \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_d \end{pmatrix}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} F &= (X_1, \dots, X_n) M \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\ &= (X_1, \dots, X_n) B^{-1\text{tr}} D B^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \\ &= (U_1, \dots, U_n) D \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn man dies ausrechnet, so ergibt sich  $\sum_{i=1}^n r_i U_i^2$ , wobei die  $r_i$  die Diagonaleinträge von  $D$  sind. Nach Lemma 21.10 stimmen die Eigenwerte von  $M$  mit denen von  $D$  (einschließlich der Vielfachheiten) überein.  $\square$

**Beispiel 43.11.** Wir betrachten das rein-quadratische Polynom

$$F = 3X^2 - 4XY + 5Y^2.$$

Um Satz 43.10 anzuwenden, müssen wir von der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte bestimmen. Das charakteristische Polynom ist

$$(X - 3)(X - 5) - 4 = X^2 - 8X + 11 = (X - 4)^2 - 5.$$

Somit sind die Eigenwerte gleich

$$x_1 = \sqrt{5} + 4 \text{ und } x_2 = -\sqrt{5} + 4.$$

In einer geeigneten Orthonormalbasis besitzt dieses Polynom daher die Form

$$F = (\sqrt{5} + 4)U^2 + (-\sqrt{5} + 4)V^2.$$

**Beispiel 43.12.** Wir möchten die rein-quadratische Form

$$\frac{3}{2}X^2 + 2Y^2 + 2XY - 2YZ$$

auf Standardform im Sinne von Satz 43.10 bringen. Die zugehörige symmetrische Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

deren Eigenwerte wir bestimmen müssen. Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} X - \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ -1 & X - 2 & 1 \\ 0 & 1 & X \end{pmatrix} &= \left(X - \frac{3}{2}\right)(X^2 - 2X - 1) - X \\ &= X^3 - \frac{7}{2}X^2 + X + \frac{3}{2} \\ &= (X - 1)\left(X^2 - \frac{5}{2}X - \frac{3}{2}\right) \\ &= (X - 1)(X - 3)\left(X + \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

die Eigenwerte sind also

$$1, 3, -\frac{1}{2}.$$

In den neuen Variablen  $U, V, W$  zur Orthonormalbasis aus den Eigenvektoren zu diesen Eigenwerte ist

$$F = U^2 + 3V^2 - \frac{1}{2}W^2.$$

**Satz 43.13.** *Jedes reelle quadratische Polynom*

$$F = \sum_{i \leq j} a_{ij}X_iX_j + \sum_{i=1}^n b_iX_i + c$$

*besitzt in einer geeigneten (verschobenen) Orthonormalbasis (bezüglich des Standardskalarproduktes) die Form (mit  $k \leq n$  und  $r_i \neq 0$ )*

$$F = \sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s$$

*oder die Form (mit  $k \leq n - 1$  und  $r_i \neq 0$ )*

$$F = \sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s U_{k+1}.$$

*Beweis.* Wir führen auf dem rein-quadratischen Anteil  $\sum_{i \leq j} a_{ij}X_iX_j$  die Transformation aus Satz 43.10 durch und erhalten neue Variablen  $V_j$  (die dual zu

einer Orthonormalbasis sind), in denen das Polynom die Gestalt

$$F = \sum_{1 \leq i \leq k} e_i V_i^2 + \sum_{j=1}^n f_j V_j + g$$

bekommt, mit einem gewissen  $k$  zwischen 1 und  $n$ , wobei die  $e_i \neq 0$  seien. Die Summanden

$$e_i V_i^2 + f_i V_i$$

können durch quadratisches Ergänzen mit den neuen Variablen  $U_i = V_i + h_i$  auf die Gestalt

$$e_i U_i^2 + g_i$$

gebracht werden. Abgesehen vom nun rein-quadratischen Term bleibt entweder eine Konstante oder ein lineares Polynom übrig, welches als Variable  $U_{k+1}$  angesetzt werden kann.  $\square$

Die im vorstehenden Satz auftretende Darstellung nennen wir die *Standardgestalt* einer quadratischen Form. Bei ihr kommen nur rein-quadratische Terme sowie allenfalls eine Variable in der ersten Potenz vor. Der Satz besagt also, dass jede quadratische Form in geeigneten orthonormalen (kartesischen) Koordinaten auf eine solche Standardgestalt gebracht werden kann. Für das Nullstellengebilde bedeutet eine solche Koordinatentransformation lediglich, dass eine affin-lineare Isometrie angewendet wird.

**Bemerkung 43.14.** Eine quadratische Form in Standardgestalt

$$\sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s \text{ bzw. } \sum_{1 \leq i \leq k} r_i U_i^2 + s U_{k+1},$$

wie sie nach Satz 43.13 stets erreicht werden kann, kann weiter vereinfacht werden, wobei man allerdings Verzerrungen in Kauf nehmen muss. In den neuen Koordinaten

$$Z_i = \sqrt{|r_i|} U_i$$

bzw.

$$U_i = \frac{1}{\sqrt{|r_i|}} Z_i$$

für  $i = 1, \dots, k$  besitzt die quadratische Form eine Darstellung der Form

$$\sum_{1 \leq i \leq k} \pm Z_i^2 + s \text{ bzw. } \sum_{1 \leq i \leq k} \pm Z_i^2 + s Z_{k+1},$$

wobei die Vorfaktoren jetzt gleich 1 oder gleich  $-1$  sind. Man spricht von einer *normierten Standardgestalt* der quadratischen Form. Durch Vertauschen der Reihenfolge kann man erreichen, dass die ersten Variablen den Vorfaktor 1 und die hinteren den Vorfaktor  $-1$  besitzen. Bei diesem Übergang erfährt das Nullstellengebilde Verzerrungen, aus einer Ellipse wird beispielsweise ein Kreis gemacht oder eine Parabel wird gestaucht. Da sich das Nullstellengebilde nicht ändert, wenn man die Form mit  $-1$  multipliziert, kann man davon

ausgehen, dass die Anzahl des Vorfaktors 1 mindestens so groß ist wie die Anzahl des Vorfaktors  $-1$ .

**Beispiel 43.15.** Wir betrachten das quadratische Polynom

$$F = 3X^2 - 4XY + 5Y^2 + 6X + 2Y - 7$$

und möchten es gemäß Satz 43.13 auf Standardform bringen. In Beispiel 43.11 haben wir den rein-quadratischen Anteil  $3X^2 - 4XY + 5Y^2$  mit Hilfe der symmetrischen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

untersucht und die Eigenwerte als

$$x_1 = \sqrt{5} + 4 \text{ und } x_2 = -\sqrt{5} + 4$$

bestimmt. Um  $F$  selbst auf Standardform zu bringen, brauchen wir die Eigenvektoren, und müssen mit ihnen den Variablenwechsel explizit durchführen. Die Eigenvektoren sind

$$\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$$

und somit bilden

$$u = \frac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5} + 1 \end{pmatrix} \text{ und } v = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Es besteht die Beziehung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

im Sinne von Bemerkung 9.3, und mit den neuen Variablen  $U, V$  gilt gemäß Lemma 14.14 die Beziehung

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Daher ist (für den rein-quadratischen Anteil muss man nichts ausrechnen)

$$\begin{aligned} & F \\ &= 3X^2 - 4XY + 5Y^2 + 6X + 2Y - 7 \\ &= (\sqrt{5} + 4)U^2 + (-\sqrt{5} + 4)V^2 + 6 \left( \frac{-2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U + \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V \right) \\ &\quad + 2 \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U + \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V \right) - 7 \\ &= (\sqrt{5} + 4)U^2 + (-\sqrt{5} + 4)V^2 + \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V - 7. \end{aligned}$$

Quadratisches Ergänzen mit

$$U = W + \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{5} + 4)}$$

bzw.

$$V = Z + \frac{-5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}(-\sqrt{5} + 4)}$$

liefert

$$\begin{aligned} & (\sqrt{5} + 4)U^2 + \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}U \\ = & (\sqrt{5} + 4)W^2 + \frac{-10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}(\sqrt{5} + 4)} \\ = & (\sqrt{5} + 4)W^2 - \frac{60 - 20\sqrt{5}}{(10 + 2\sqrt{5})(\sqrt{5} + 4)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & (-\sqrt{5} + 4)V^2 + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}V \\ = & (-\sqrt{5} + 4)Z^2 + \frac{10 + 2\sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \cdot \frac{-5 - \sqrt{5}}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}(-\sqrt{5} + 4)} \\ = & (-\sqrt{5} + 4)Z^2 - \frac{60 + 20\sqrt{5}}{(10 - 2\sqrt{5})(-\sqrt{5} + 4)}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$F = (\sqrt{5} + 4)W^2 + (-\sqrt{5} + 4)Z^2 - \frac{60 - 20\sqrt{5}}{(10 + 2\sqrt{5})(\sqrt{5} + 4)} - \frac{60 + 20\sqrt{5}}{(10 - 2\sqrt{5})(-\sqrt{5} + 4)} - 7.$$



## ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Quelle = Simple Parabola.svg , Autor = Benutzer Phancy Physicist auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Quelle = Simple Hyperbola.svg , Autor = Benutzer Phancy Physicist auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Quelle = Disk 1.svg , Autor = Benutzer Paris 16 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	3
Quelle = Circular Paraboloid.png , Autor = Benutzer Luke33 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	6
Quelle = Hyperbolic paraboloid.png , Autor = Benutzer Luke33 auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	6
Quelle = Elipsoid trojosy321.png , Autor = Benutzer Pajs auf cz. Wikipedia, Lizenz = gemeinfrei	6
Quelle = DoubleCone.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	7
Quelle = Hyperboloid1.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	7
Quelle = Hyperboloid2.png , Autor = Benutzer RokerHRO auf Commons, Lizenz = gemeinfrei	7
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <a href="http://commons.wikimedia.org">http://commons.wikimedia.org</a> ) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	15
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	15