(A) $Q^2-PR>0$ ナルトキ。

コノ場合ハ α, β ハ相異ナル實根ナルガ故ニ假リニ $\alpha>\beta$ トスレバ $D\geqq 0$ ヲ滿足セシムルガ爲メニハ $y\geqq\alpha$ ナルカ又ハ $\beta\geqq y$ ナルカナリ。故ニ $P>0$ ニシテ且ツ $Q^2-PR>0$ ナルトキハ, y 即チ與ヘラレタル分數式ハ α ヨリ $+\infty$ ニ至ル凡テノ値及ビ β ヨリ $-\infty$ ニ至ル凡テノ値ヲトルコトヲ得ベシ。

(B) $Q^2-PR\leqq 0$ ナルトキ

コノ場合ニハ $P>0$ ナルガ故ニ y ノ値ノ如何ニ關セズ (4) ガ常ニ成立ス コレ即チ與ヘラレタル分數式ハ x ヲ適當ニサヘトラバ如何ナル値ヲモトリ得ルコトヲ示スモノナリ。

(ii) $P<0$ ナル場合。

(A) $Q^2-PR>0$ ナルトキ。

(3) ニ於ケル α, β ハ相異ナル實根ナルガ故ニ $\alpha>\beta$ ナリト假定スレバ, $P<0$ ナルガ故ニ (3) ヲ成立セシムル爲メニハ $\alpha\geqq y\geqq\beta$ ナルヲ要ス コレ即チ與ヘラレタル分數式ハ α ト β トノ間ノ凡テノ値ヲトルコトヲ得ルモ, ソレ以外ノ値ヲトルコトヲ得ザルコトヲ示スモノナリ。

(B) $Q^2-PR=0$ ナルトキ。

コノ場合ニハ (3) ノ二根ハ等根ナルガ故ニ (3) ハ $P(y-\alpha)^2\geqq 0$ ノ形トナル然ルニ $P<0$ ナルガ故ニ, $y=\alpha$ ナル時ニ限リテ上ノ不等式ハ滿足セラル。換言スレバ x ニ實數ナル如何ナル値ヲトラシムルモ, y ハ α ナル一定ノ値ヲノミトルナリ。

(C) $Q^2-PR<0$ ナルトキ。

コノ場合ハ $Py^2-2Qy+R=0$ ノ二ツノ根ハ虛根トナリ且ツ假定ニヨリテ $P<0$ ナルガ故ニ, $Q^2-PR<0$ ナル假定ノ下ニテハ $Py^2-2Qy+R$ ハ y ノ値ノ如何ニ關セズ常ニ負トナル。即チ如何ナル y ノ値ニテモ決シテ (4) ノ不等式ヲ成立セシムルコト能ハズ。從ツテ y ノ値ノ如何ニ關セズ x ガ實數ナルコト能ハザルベシ。然ルニ實際與ヘラレタル分數ニ實數ナル x ノ任意ノ値ヲ代入スルトキハ, コレニ對應シテ必ズ y ノ値ヲ得ルガ故ニ $Q^2-PR<0$ ナル場合ハ實ハ起ラザルナリ。

(iii) $P=0$ ナルトキ

コノ場合ニハ $Py^2-2Qy+R\geqq 0$ ナル不等式ハ $-2Qy+R\geqq 0$ トナル故ニ, モシ $Q>0$ ナラバ $\dfrac{R}{2Q}\geqq y$ ヲ得ベク $Q<0$ ナラバ $\dfrac{R}{2Q}\leqq y$ ヲ得ベシ。ヨリテ前者ハ y ハ $\dfrac{R}{2Q}$ ニ等シキカ, 又ハソレヨリモ小ナルコトヲ示シ, 後者ハ y ハ $\dfrac{R}{2Q}$ ニ等シキカ, 又ハソレヨリモ大ナルコトヲ示ス。最後ニモシ $Q=0$ ナルトキハ (3) ハ $R\geqq 0$ トナリ, y ノ値ノ如何ニ無關係ナリ。ヨリテ $R\geqq 0$ ナル時ハ x ノ値ヲ適當ニトラバ如何ナル y ノ値ヲモトラシムルコトヲ得ベシ。

注意 上ノ說明ニ於テハ分母 $a'x^2+b'x+c'$ ハ決シテ 0 ナラザルコトヲ假定セリ, 然リト雖モ實際ニ於テハ必ズ考慮セザルベカラズ。コレニ言及セザリシハ餘リノ複雜ヲ厭ヒテナリ。ヨリテ次ノ例ニ於イテコレヲ述ブベシ。

86. 例 1. 分數式 $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}$ ノ變化ヲ考究セヨ。

解
$$y=\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2} \qquad\cdots\cdots(1)$$

ト置キ, $x^2-3x+2\neq 0$ ナリト假定シテ分母ヲ拂フト

$$x^2(1-y)-x(7-3y)+12-2y=0 \qquad\cdots\cdots(2)$$

x ガ實數ナルガ爲メニハ

$$D=(7-3y)^2-4(1-y)(12-2y)\geqq 0$$

即チ
$$y^2+14y+1\geqq 0$$

ヨリテ y ノ限界ハ $y\geqq -7+4\sqrt{3}$ ナルカ $y\leqq -7-4\sqrt{3}$ ナルカナリ。

サテ $y=-7+4\sqrt{3}$ ヲ與フル x ノ値ハ (2) ガ等根ヲ有スル場合ナルガ故ニ, $x=\dfrac{(7-3y)}{2(1-y)}$ ナリ。コレニ y ノ値ヲ代入スレバ

$$\frac{28-12\sqrt{3}}{2(8-4\sqrt{3})}=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

コレ x ガ $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ y 即チ分數式ノ値ハ $-7+4\sqrt{3}$ トナ

ルコトヲ示ス。

同様ニ x ガ $\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ y 即チ分數式ノ値ハ $-7-4\sqrt{3}$ トナルコトヲ知ル。

又　　$$y=\frac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}=\frac{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$$

ナルガ故ニ x ニ絕對値ノ充分大ナルモノヲ代入スレバ $\dfrac{7}{x}$, $\dfrac{12}{x^2}$, $\dfrac{3}{x}$, $\dfrac{2}{x^2}$ ハ共ニ零ニ近ヅキ從ツテ分數式ノ値ハ 1 ニ近ヅク。而シテ x ノ絕對値ガ愈々大ナルニ從ヒソノ分數式ノ値ハ如何ホドニテモ 1 ニ近迫スルガ故ニ，吾人ハ x ガ無限大ノ時コノ分數式ノ値ノ極限値ガ 1 ナリトイフ。*

次ニ $y=\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)}$ ナルガ故ニ x ガ零ヨリ增加シテ次第ニ 1 ニ近ヅクトキハ, $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ ハ共ニ負ナルガ故ニ，コノ分數式ノ値ハ常ニ正ニシテ，x ガ 1 ニ近ヅケバ近ヅクホド分母ハ零ニ近ヅキ從ツテコノ分數式ノ値ハドコマデモ增加ス，ヨリテ x ガ 1 ニナレル途端ニ於ケルコノ分數式ノ極限値ハ無限大ナリトイフ。次ニ x ガ 2 ヨリ次第ニ減少シテ漸次 1 ニ近迫スル時ヲ考フルニ $(x-1)$ ノミハ正ニシテ $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ ハ悉ク負ナリ。而シテ x ガ 1 ニ近ヅケバ近ヅクホド分母ガ零ニ近ヅキ，從ツテコノ分數式ハ負ノ値ヲトリナガラ其絕對値ハドコマデモ增加ス。コレニヨリテ之レヲ觀レバコノ分數式ハ x ハ 0 ヨリ進ンデ 1 ニナリタル途端ニハ $+\infty$ トナリ，2 ヨリ退イテ 1 ニナリタル途端ニハ $-\infty$ トナル。同ジク x ガ 1 ヲ通過スルト雖モ，ソノ進ミ方ノ如何ニヨリテ分數式ノ値ハ $+\infty$ トモナリ $-\infty$ トモナル　即チ x ガ 1 ヲ通過スル途端ニハコノ分數式ノ値ハ急激ノ變化ヲナス　x ガ 2 ヲ通過スル時モ亦コレト同様ノ有様

*コノ事ハ後章極限論ニ於イテ更ニ詳說スル所アルベシ。

ヲ呈ス。以上述ベタルコトヲ表記スレバ次ノ如シ。

x ノ値ノ變化	$-\infty$	→	1	→	$\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$	→	2	→	$\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$	→	$+\infty$
y ノ値ノ變化	$+1$	↗	$\pm\infty$	↗	$-7-4\sqrt{3}$	↘	$\mp\infty$	↘	$-7+4\sqrt{3}$	↗	1
摘要		增	急激變化	增	減ジ初ム	減	急激變化	減	增シ初ム	增	

注意 $x=1$ ナルトキ與ヘラレタル分數ノ値ハ $\pm\infty$ ナリトイフベカラズ。實ニモ $x=1$ ナルトキハ，コノ分數ノ分母ハ零トナリテ分數ノ意義ヲ失ヘバナリ。只玆ニイヘルハ x ヲ動的ニ觀察シ動イテ止マザルトキ，y ガ $\pm\infty$ ニナルト定義スルノミ。靜的ニ考ヘテ突然 x ノ値 1 ヲ代入スルトキハ此分數ハ飽クマデモ無意義ノ記號トナル。彼是レ混同スベカラズ。

例 2. 分數式 $\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$ ノ變化ヲ追跡セヨ。

解 $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}$

ト置ケ，分母 x^2+2x+4 ハ $(x+1)^2+3$ ナルガ故ニ x ノ如何ナル實數ニ對シテモ決シテ零トナルコトナシ。ソコデ分母ヲ拂ヘバ

$$(1-y)x^2-2(1+y)x+4(1-y)=0$$

x ガ實數ナルガ爲メニ

$$D=4\{(1+y)^2-4(1-y)(1-y)\}\geqq 0$$

整頓シテ

$$3y^2-10y+3\leqq 0$$

ヨリテコレヨリ $\dfrac{1}{3}\leqq y\leqq 3$

即チ y ハ 3 ト $\dfrac{1}{3}$ トノ間ノ凡テノ値ヲトルモ，ソレ以外ノ値ハ決シテトルコトナシ。而シテ $y=\dfrac{1}{3}$ ニ應ズル x ノ値ハ 2 ニシテ，$y=3$ ニ應ズル x ノ値ハ -2 ナリ。ヨツテ此式ノ變化ヲ表示スレバ次ノ如シ。

x ノ値ノ變化	$-\infty$	→	-2	→	2	→	$+\infty$
y ノ値ノ變化	$+1$	↗	3	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1
摘　　要		增	減ジ初ム	減	增シ初ム	增	

第二章

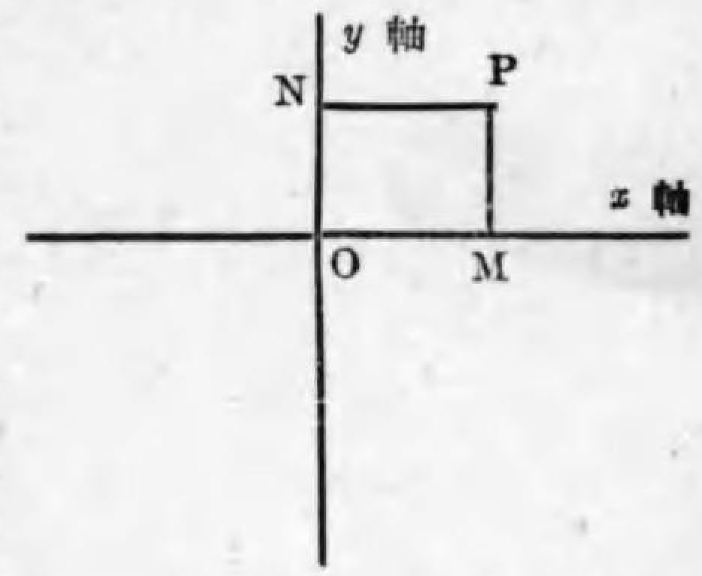
極大極小論

87. 或變數例ヘバ x ニ關スル函數アリトセヨ，x ガ次第ニ增加 (Increase) 若シクハ次第ニ減少 (Decrease) スルトキ，コノ函數 y ノ値ガ次第ニ增シ x ハアル數 x_0 ヲ過グルト同時ニ y ノ値ガ減少シ初ムルトキハ，コノ函數 y ハ $x=x_0$ ニ於テ極大 (Maximum) ニ達ストイヒ，x_0 ニ於ケル y ノ値ヲ其極大値 (Maximum value) トイフ。之レニ反シ若シ x ガ x_0 ヲ過グルトキ，コレマデ次第ニ減少シ居レル函數 y ハコノ時ヨリ增加シ初ムル時ハ，コノ函數 y ハ $x=x_0$ ニ於テ極小 (Minimum) ニ達ストイヒ，x_0 ニ於ケル y ノ値ヲ其ノ極小値 (Minimnm value) トイフ。

函數ノ極大モシクハ極小トハ，必ズシモ函數ノトリ得ル最大ナル値モシクハ最小ナル値ヲ意味スルニ非ラザルナリ。換言スレバ變數ハアル範圍内ニ於テ變化スル時コレト共ニ連續的ニ變化スル函數ノ値ハ增ヨリ減ニ，又ハ減ヨリ增ニ變化スル時ニ極大又ハ極小ニナレリトイフ。故ニ時トシテハ一ツノ函數ハ幾回モ極大及ビ極小ニ達シ，而カモ或極小値ガ極大値ヨリモ却ツテ大ナルガ如キ奇觀ヲ呈スルコトアリ。

注意　極大極小ニ關スル研究ハ啻ニ興味深キモノナルノミナラズ，思考力ヲ增進スル上ニ極メテ必要ナルコトナリト雖モ，充分嚴格ニ研究センニハ高等數學ノ力ヲ藉ラザルベカラズ。サレバ本書ニ於テハソノ最モ簡單ナルモノノミニ就イテ述ベントス。

88. **極大極小ノ問題ハ函數ノ變化ノ考究ト密接不離ノ關係ヲ有ス。**何トナレバ函數ノ變化ヲ充分ニ知悉スルニハ極大及ビ極小ニ就イテ明瞭ナル知識ヲ有シ，コノ函數ハドコマデモ增加シテ止マザルカ，ソレトモアル所マデ增加シ所謂極大ノ位置ヲトリソレヨリ漸次減少シ初ムルモノナルカ，或ハ又コノ函數ハドコマデモ際限ナク減少シ終ルモノナルカ，ソレトモアル所マデ減少シ所謂極小ノ位置ヲトリソレヨリ漸ク增加シ初ムルモノナルカニ就イテ明瞭ニ理解シ居ルコトヲ要スレバナリ。



然ルニ近代佛國ノ碩學でかると (Descartes) ニヨリテ完成セラレタル函數ノ値ノ圖表 (Graph) ヲ利用スレバ，ソノ變化ノ模様並ビニ極大極小ノ位置等頗ル具體的ニ了解スルコトヲ得ベケレバ，茲ニソノ方法ヲ述ベン。圖ノ如ク O 點 (Origin) ニテ直交スル直線ヲ引キ，夫々 x 軸 y 軸トシ P ヲ平面上ノ任意ノ點トス。P ヨリ x, y 軸ニ垂線 PM, PN ヲ引キ足ヲ夫々 M, N トス。

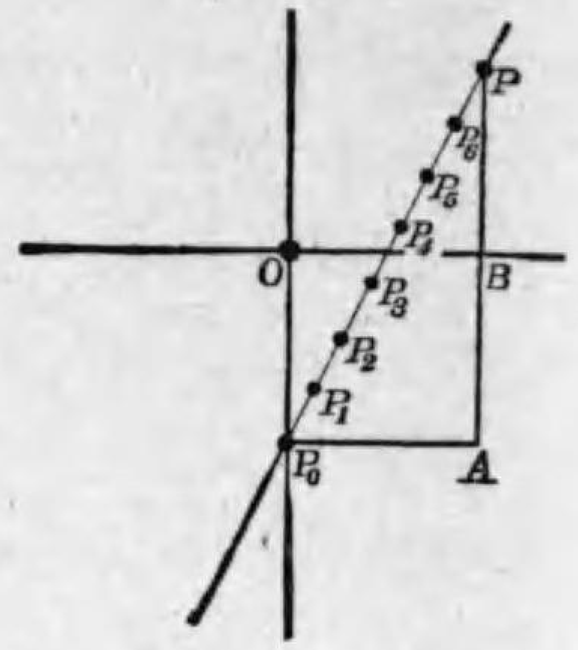
今任意ノ線分ヲ長サノ單位トシテ OM ヲ測リ，其數値 a ナリトセヨ，若シ M ガ O ヨリ右方ニアラバ OM ヲ a ニテ，左方ニアラバ OM ヲ $-a$ ニテ表ハスモノトス。次ニ前ト同ジ線分ヲ單位トシテ ON ヲ測リ其數値 b ナル時，若シ N ガ O ヨリモ上方ニアラバ ON ヲ b ニテ，下方ニアラバ ON ヲ $-b$ ニテ表ハスモノトス。

上ノ規約ニ從ヘバ一點 P ニ對シテ OM, ON ノ大サガ定マリ，逆ニ OM, ON ノ大サガ定マラバコレニ對應スル點 P ガ定マル。

OM ノ長サヲ表ハス數ヲ P 點ノ x 坐標トイヒ，ON ノ長サヲ表ハス數ヲ P 點ノ y 坐標トイヒ之等ヲ總稱シテ P 點ノ坐標トイフ。P 點ノ x, y 坐標ガ夫々 a, b ナル時ハ P 點ヲ點 (a, b) トイフ。

例 1.　$y=2x-7$ ノ變化ヲ圖ニ表ハシ且ツ極大及ビ極小ヲ求メヨ。

解 今 $x=0,1,2,3,4,5,6,\cdots\cdots$ ヲ代入スレバ，コレニ對應シテ y ノ値ハ順次 $-7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5\cdots\cdots$ トナルベシ。



ソコデ原點ヲ O トシ點 $(0,-7)$ ヲ P_0 ニテ，點 $(1,-5)$ ヲ P_1 ニテ，點 $(2,-3)$ ヲ P_2 ニテ，點 $(3,-1)$ ヲ P_3 ニテ點 $(4,1)$ ヲ P_4 ニテ，點 $(5,3)$ ヲ P_5 ニテ，點 $(6,5)$ ヲ P_6 ニテ表ハスモノトセヨ。然ルトキハ $P_0, P_1, \cdots\cdots, P_6, \cdots\cdots$ ハ方程式 $y=2x-7$ ヲ滿足スル點ナリ。而シテ此等ノ點ハ直線的ニ並ブガ如キ觀ヲナス。然レドモコレ果シテ正シキコトナルカ證明ヲ要スルコトナリ。

サテ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル x, y ノ値ヲ代表スル點ヲ一般ニ $P(x,y)$ トセヨ。P_0 ヨリ x 軸ニ平行ニ引ケル直線ハ P ヨリ y 軸ニ平行ニ引ケル直線ト A 點ニテ交ルモノトス。然ル時ハ，

$$PA=PB+BA=y+7,\qquad P_0A=OB=x$$

ナリ。又 $y=2x-7$ ヨリ $2x=y+7$

ナルガ故ニ，$$2P_0A=PA$$

即チ求ムル P 點ハ一般ニ直角三角形 P_0AP ニ於テ $PA=2P_0A$ ニ適スル第三頂點ナリ。ヨリテ P ハ定點 P_0 ヲ過ル直線上ニ在ルコトヲ知ル。

コレニヨリテ x ガ增セバ增スホド y ノ値ハ增加シ，x ガ減ズレバ減ズルホド y ノ値ハ減少シ行クモノナレバ極大モ極小モ起ラザルヲ知ル。

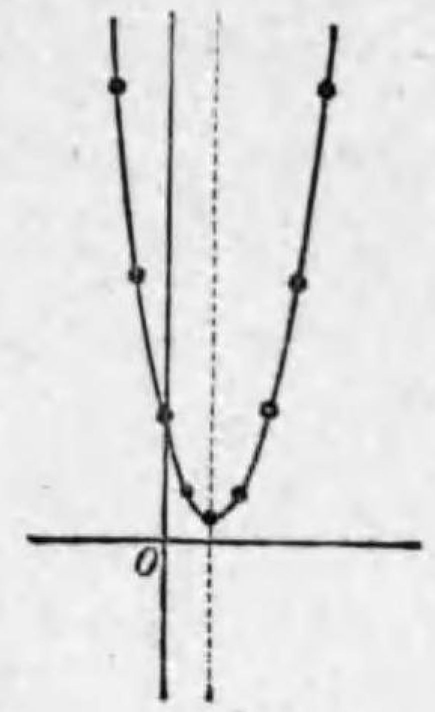
例 2. $y=x^2-4x+5$ ノ變化ヲ圖ニテ表ハシ且ツ極大及ビ極小ヲ求メヨ。

解 $x^2-4x+5-y=0$ 故ニ x ガ實數ナルタメニハ

$$D=16-4(5-y)\geqq 0$$

即チ $y\geqq 1$ コレ x ガ種々ノ實數ヲトルトキ y ハ常ニ 1 又ハ 1 ヨリモ

大ニシテ際限ナク增加シ得ルモノナリト雖モ，1 ヨリ小ナルコト能ハザルコトヲ示ス。ヨリテコノ函數ハ極小値 1 ヲトルモ極大ガナシ。



又與ヘラレタル方程式ヲ書キ換ヘルト

$$y=(x-2)^2+1$$

故ニ $x=2+h$ ニ對應スル y ノ値ト，$x=2-h$ ニ對應スル y ノ値トハ相等シ。即チ此函數ノ表ハス圖形ハ x 軸上ニ於テ原點ヨリ右方 2 ノ所ヲ通ル y 軸ノ平行線ニ關シテ對稱ナリ。

尙詳細ニ其ノ値ヲ見ンニ

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$-4x$	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20	-24
y	17	10	5	2	1	2	5	10	17

ヨリテコノ函數ヲ圖ニ表ハセバ大體上圖ノ如シ。

例 3. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ ノ變化ヲ圖ニテ表ハシ且ツソノ極大及ビ極小ヲ求メヨ。

解 分母ヲ拂ヒテ

$$x^2-xy+2y=0$$

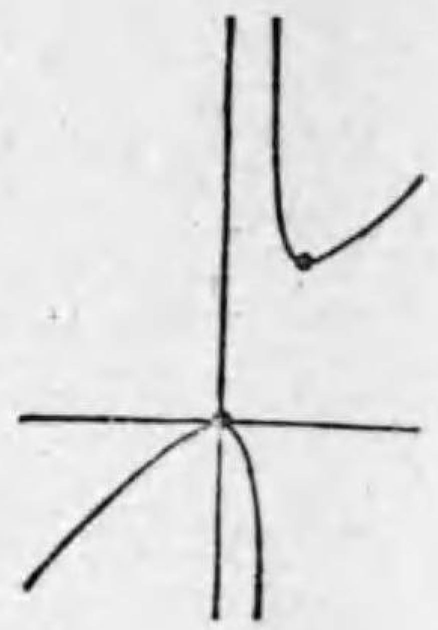
x ガ實數ナルタメニハ $D=y^2-8y\geqq 0$

即チ $y(y-8)\geqq 0$

ヨリテ $0\geqq y$ ナルカ又ハ $y\geqq 8$ ナルカナリ。

即チコノ函數ノ極大値ハ零ニシテ極小値ハ 8 ナリ。(極大値ハ極小値ヨリ小ナルコトニ注意スベシ) 而シテ $y=0$ ニ應ズル x ノ値ハ零ニ

シテ，$y=8$ ニ應ズル x ノ値ハ4ナリ。



又 x ガ負數ナルトキハ，y ハ初メハ負ニシテ $x=0$ ノ時初メテ零トナリ，ソレヨリ進ンデ x ガ 2 ニ至ルマデ，y ハ負ノ値ヲトル而シテ x ガ 2 ヲ過グル途端ニ $-\infty$ ヨリ $+\infty$ ニ急激ニ變化ヲナシ，(從ツテ曲線ハ二ツノ部分ヨリ成ル) ソレヨリ後ハ常ニ正ニシテ x ガ $+\infty$ ノトキコノ函數 y モ亦 $+\infty$ トナル。尙詳細ニ計算スレバ次ノ如シ。

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	$\frac{-49}{9}$	$\frac{-9}{2}$	$\frac{-25}{7}$	$\frac{-8}{3}$	$\frac{-9}{5}$	-1	$\frac{-1}{3}$	0	-1	$\mp\infty$	9	8	$\frac{25}{3}$	9	9.8

ヨリテコノ函數ノ表ハス圖形ハ上圖ニ於テ示セルガ如シ。

例 4. $y=x-2+\sqrt{3x^2-2x+1}$ ヲ圖ニテ表ハシ且ツ極大，極小ヲ求メヨ。

解
$$y-x+2=\sqrt{3x^2-2x+1} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

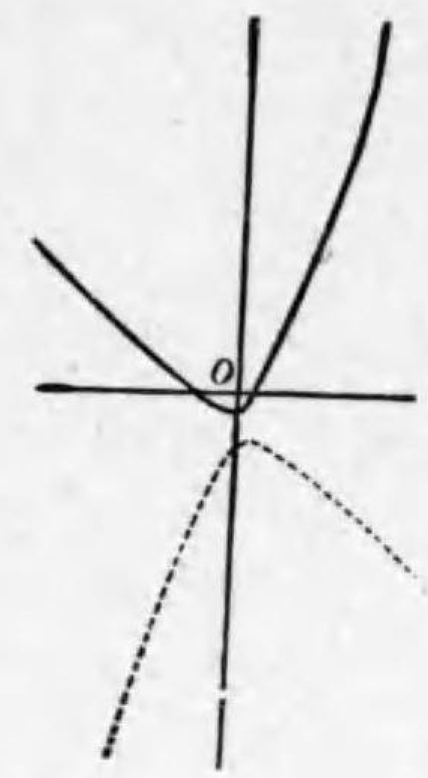
兩邊ヲ平方シ且ツ整頓スレバ
$$2x^2+2(1+y)x-(y^2+4y+3)=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

x ガ實數ナル爲メニ
$$D=4(3y^2+10y+7)\geqq 0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

コレヨリ $y\geqq -1$ ナルカ $y\leqq -\frac{7}{3}$ ナルカナリ。故ニソノ極大ハ $-\frac{7}{3}$ ニシテ，ソノ極小ハ -1 ナリ。而シテ(2)ヨリ $y=-1$ ニ應ズル x ノ値ハ零ニシテ，$y=-\frac{7}{3}$ ニ應ズル x ノ値ハ $\frac{2}{3}$ ナリ。

然レドモコノ結果ハ (2) ヨリ得タルモノナルガ故ニ果シテ原式 (1) ノ極大或ハ極小ニ一致スルモノナリヤ否ヤヲ知ラズ。コレヲ決定センガ爲メニ，原式ニ $x=0$ ト置ケバ $y=-1$ トナルガ故ニ適合スレドモ，

$x=\frac{2}{3}$ ト置ケバ，$y=-\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+1}=-\frac{1}{3}$ トナリテ適合セズ。



蓋シコレハ初メ兩邊ヲ平方セシトキ生ゼシ過剩因數
$$y=x-2-\sqrt{3x^2-2x+1}$$
ノ極大ヲ與フルモノナリ。ヨツテ原式ハ極小ノミ有シ，極大ノ場合ハ起ラザルナリ。

尙精密ニ計算スルト此函數ノ表ハス圖形ハ點 $(0,-1)$, $(1,\sqrt{2}-1)$, $(2,3)$ $(3,1+\sqrt{22})$, $(4,2+\sqrt{41})$, $(5,3+\sqrt{66})$, $(6,4+\sqrt{97})$, $(7,7+\sqrt{134})$, $(-1,\sqrt{6}-3)$ $(-2,\sqrt{17}-4)$, $(-3,\sqrt{34}-5)$ $(-4,\sqrt{57}-6)$ $(-5,\sqrt{86}-7)$ $(-6,3)$,………………ヲ過グルコトヲ知ル，仍ツテ所要ノ圖形ハ上圖ノ如シ。

尙圖中點線ニテ示セルモノハ過剩因數 $y=x-2-\sqrt{3x^2-2x+1}$ ノ圖表ナリ。

例 5. $y=\pm\sqrt{\frac{9x-1}{x+2}}$ ノ變化ヲ圖ニテ表ハセ。

解 $\sqrt{\frac{9x-1}{x+2}}$ ガ實數ナルガ爲メニハ必ズヤ $\frac{9x-1}{x+2}\geqq 0$ ナラザルベカラズ。ヨリテ $x\geqq\frac{1}{9}$ ナルカ，又ハ $x<-2$ ナラザルベカラズ。

コレ即チ x ガ -2 ヨリ $\frac{1}{9}$ マデノ値ニ對シテ y ハ虛數トナルガ故ニ圖ニハ表ハレズ。

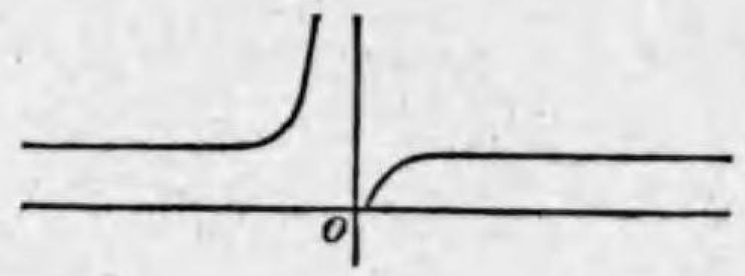
今考ヘヲ簡單ニセンガ爲メニ複號ノ各々ニ就キテ研究スベシ。

(A) $y=\sqrt{\frac{9x-1}{x+2}}$ ナル場合

コノ場合ニ於ケル x ノ値ト y ノ値トノ關係ハ次ノ如シ。

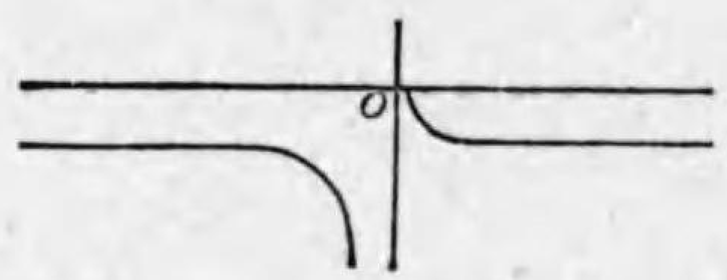
x	$-\infty$	-10	-4	-3	-2		$\frac{1}{9}$	1	2	3	10	$+\infty$
y	$+3$,	$\frac{\sqrt{728}}{8}$	$\frac{\sqrt{74}}{2}$	$\sqrt{28}$	$+\infty$	虛數	0	$\frac{\sqrt{24}}{3}$	$\frac{\sqrt{17}}{2}$	$\frac{\sqrt{130}}{5}$	$\frac{\sqrt{267}}{6}$	3

ヨリテコレヲ圖ニ表ハセバ大體次ノ如シ

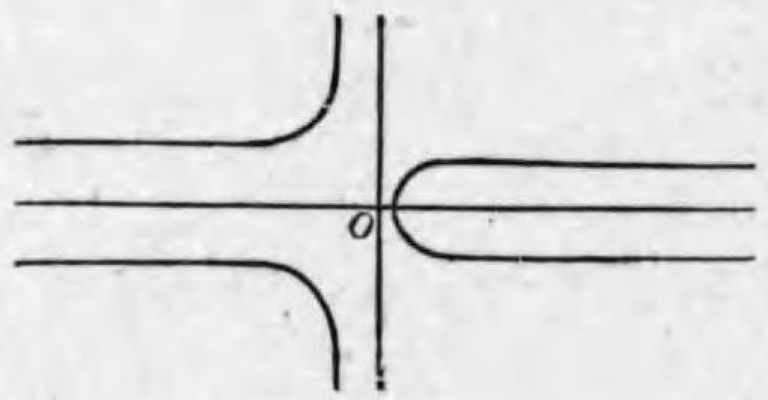


(B)　$y=-\sqrt{\dfrac{9x-1}{x+2}}$　ナル場合

コノ場合ハ (A) ト符號ヲ異ニスルガ故ニコレヲ圖ニテ示ストキハ x 軸ヲ對稱ノ軸 (Axis of symmetry) トセルモノナルガ故ニ容易ニ作リ得. 即チ



以上ノ二圖ヲ合スレバ所要ノ圖形ヲ得。即チ下圖ノ如シ。



89. 上ノ諸例ニ示セル方法ニヨレバ單ニ極大及ビ極小ヲ知ルノミナラズ，ソノ函數ノ性質ヲモ明瞭ニ了解スルヲ得ル故ニソノ効果甚ダ大ナリ。然レドモ唯極大，極小ヲノミ知ラントスルニハ常ニ必ズシモコノ方法ニヨルヲ要セザルナリ。次ニ極大，極小ニ關スル定理ヲ證明セントス。

定理 1. 二數ノ和一定ナルトキハ，ソノ積ハ二數相等シキ時極大ナリ。

證明　二數ノ和ヲ a トシ一ツノ數ヲ x トスレバ他ノ一數ハ $a-x$ ナルガ故ニ，ソノ積ハ $x(a-x)$ ナリ。

ソコデ $x(a-x)=y$ ト置ケバ y ノ極大ヲ求メントスルコトナリ。整頓スレバ

$$x^2-ax+y=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4y}}{2}$$

サテ x ノ値ヲシテ實數ナラシメンガ爲メニハ

$$a^2\geqq 4y \qquad \therefore \quad \frac{a^2}{4}\geqq y$$

即チ y ノ極大ハ $\frac{a^2}{4}$ ニシテ，コレニ應ズル x ノ値ハ $\frac{a}{2}$ ナリ。從ツテ他ノ一數モ又 $\frac{a}{2}$ ナルコトヲ知ル。ヨリテ證明セラレタリ。

例 1. $(5-2x)(2x+3)$ ノ極大ヲ求メヨ。

解　二數ノ和 $(5-2x)+(2x+3)=8$ ナルガ故ニ一定ナリ。ヨリテソノ積ノ極大ハ定理ニヨリテ

$$5-2x=2x+3$$

ナル時即チ $x=\frac{1}{2}$ ナルトキナリ。ヨリテソノ乘積ハ 16 ナリ。

注意　問題ノ性質上二ツノ數相等シキコト能ハザル時アリ。カヽル場合ニハ上ノ定理ガ効ヲナサズ。ヨリテ次ノ定理アリ。

定理 2. 二數ノ和一定ナルトキソノ積ハコノ二數ノ差ノ絕對値ガ出來ルダケ小ナルトキハ極大ナリ。

證明　二數ヲ夫々 x, y トシ，ソノ和ヲ a トシ，ソノ積 xy ノ極大ヲ求メントス。然ルニ

$$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$

左邊ハ假定ニヨリテ一定ナリ。ヨリテ xy ヲシテ極大ナラシムルガ爲メニハ $(x-y)^2$ ヲシテ極小ナラシムベク從ツテ x ト y トノ差ヲ出來ルダケ小ナラシムレバヨシ。ヨリテ定理ハ證明セラレタリ。

例 2. 二ツノ正ノ整數アリ，ソノ和 17 ナルトキソノ積ヲ極大ナラシメヨ。

解　二ツノ數ハ假定ニヨリテ共ニ正ノ整數ニシテソノ和ハ奇數ナルガ故

ニ相等シカラシムルコトヲ得ズ。ヨリテ本定理ニ從ヒソノ差ヲ成ルベク小ナラシメザルベカラズ。卽チ求ムル二ツノ數ハ 8 及ビ 9 ナリ。

90. **定理 3.** 二數ノ積一定ニシテ正ナル時ハソノ和ノ極大又ハ極小ハ二數相等シキ時ニ起ル。

證明 乘積ヲ常數トシコレヲ a トス。二數ノ和ノ極大又ハ極小ヲ求メントスルニ，一數ヲ x トスレバ他ノ數ハ $\frac{a}{x}$ ナリ。

ヨリテ $x+\frac{a}{x}=y$ ト置キ分母ヲ拂ヘバ

$$x^2-xy+a=0$$

x ガ實數ナルガ爲メニハ

$$D=y^2-4a\geqq 0$$

假定ニヨリテ $a>0$ ナルガ故ニ $\sqrt{a}$ ハ虛數トハナラズ。ヨリテコレヨリ $y\geqq 2\sqrt{a}$ ナルカ又ハ $y\leqq -2\sqrt{a}$ ナリ。

コレニヨリテ $2\sqrt{a}$ ハ y 卽チ二數ノ和ノ極小ニシテ，$-2\sqrt{a}$ ハソノ極大ナリ。而シテ $2\sqrt{a}$ ニ應ズル x ノ値ハ $+\sqrt{a}$ ニシテ，從ツテ他ノ一數ハ $\frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$ ナリ。又 $-2\sqrt{a}$ ニ應ズル x ノ値ハ $-\sqrt{a}$ ニシテ，從ツテ他ノ一數ハ $\frac{a}{-\sqrt{a}}=-\sqrt{a}$ ナリ。ヨリテ何レノ場合ニテモ二數相等シキ時ナリ。

例 1. $\frac{x^2+2x+4}{5x}$ ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ。

解 $\frac{x^2+2x+4}{5x}=\frac{x}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5x}$

$\frac{2}{5}$ ガ常數ナルガ故コノ分數ノ極大及ビ極小ハ $\frac{x}{5}+\frac{4}{5x}$ ノ極大及ビ極小ノ場合ニ一致ス。

然ルニコノ二數ノ乘積 $\frac{x}{5}\times\frac{4}{5x}=\frac{4}{25}$ ハ正ノ常數ナリ。ヨリテ本定理ニ從ヒ $\frac{x}{5}=\frac{4}{5x}$ ナルトキ極大及ビ極小ヲ生ズ。卽チ $x=2$ ナル

トキ極小ニシテ $\frac{6}{5}$ トナリ，$x=-2$ ナルトキ極大ニシテ $\frac{-2}{5}$ トナル。

系 二ツノ正數ノ積ハ一定ナルトキハ，コレ等ノ和ハ二數相等シキトキ極小ナリ。

例 2. $x>2$ トシ $\frac{4}{x^2-4}+\frac{x^2-4}{4}$ ノ極小ヲ求メヨ。

解 假定ニヨリテ　$x>2$　$\therefore\ x^2>4$

故ニ $\frac{4}{x^2-4}$ 及ビ $\frac{x^2-4}{4}$ ハ共ニ正ナリ。而シテソノ乘積ハ 1 ナリ。

從ツテ極小ヲトル場合ハ $\frac{4}{x^2-4}=\frac{x^2-4}{4}$

卽チ　$(x^2-4)^2=16$　$\therefore\ x^2-4=\pm 4$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{8},\ 0,$

假定ニヨリテ $x>2$, 從ツテ $x=\sqrt{8}$ ナルトキ極小トナリソノ値ハ 2 ナリ。

91. **定理 4.** 悉クハ等シカラザル正ノ數ノ和ハ常數ナルトキ，ソレ等ノ積ハコレ等ノ數悉ク相等シキ時極大ナリ、

證明 コノ定理ハ次章ニ述ブル定理五ト共ニ極大極小論ノ骨子トナルモノナリ。而シテソノ證明法ハ已ニ述ベタル七十一節定理三ニ基礎ヲ置クモノナリ。今再錄センニ n 個ノ正ノ數ヲ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ トスレバ一般ニ

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

假定ニヨリテ n 個ノ數ノ和ハ一定ナルガ故ニコノ不等式ノ左邊ハ一定ナリ。然ルニ $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ ナルトキニ限リ等式ナリ。コレ $a_1a_2\cdots\cdots a_n$ ナル積ノ極大ハ，ソレ等ノ因數ハ悉ク相等シキトキ起ルコトヲ示スモノナリ。

例 1. 表面積 (Surface) ノ一定ナル直六面體ノ體積ノ極大ハ立方體ナリ

解 直六面體ノ三ツノ稜ヲ夫々 x, y, z トスレバ表面積ハ $2(xy+yz+zx)$ ナリ。コレヲ $2a^2$ ナリトスレバ

$$xy+yz+zx=a^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

直六面體ノ體積 (Volume) ハ xyz ニシテソノ極大ハ平方セルモノ卽

チ $x^2y^2z^2$ ノ極大ニ一致ス。然ルニ $x^2y^2z^2=(xy)(yz)(zx)$ ト書キ得ルガ故ニ本定理ニヨリテ $xy=yz=zx$ 從ツテ $x=y=z$ ナルトキ極大ナリ。ヨリテ立方體ナリ。

例 2. 周圍ノ一定セル三角形ノ中面積ノ最大ナルモノハ正三角形ナリ。

解 周圍ヲ $2s$ トシ三角形ノ三邊ノ長サヲ a, b, c トスレバソノ面積ハへろん*(Heron) ノ公式ニヨリテ

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

面積ノ極大ハ $s(s-a)(s-b)(s-c)$ ノ極大ノ場合ニ一致ス。而シテ s ハ假設ニヨリテ一定ナリ。故ニ $(s-a)(s-b)(s-c)$ ノ極大ヲ求ムレバ可ナリ。

然ルニコノ三ツノ因數ノ和ハ

$$3s-(a+b+c)=s$$

ナルガ故ニ一定ナリ。

$\therefore$ $s-a=s-b=s-c$ 即チ $a=b=c$ ナルトキ極大ナリ。

92. **定理 5.** 多クノ正ノ數ノ乘積ハ一定ナルトキ之レ等ノ和ノ極小ハ之レ等ガ悉ク相等シキ時ナリ。

證明 前節定理4ヲ參照セヨ。

例 體積ノ相等シキ直六面體ニテハ立方體ハソノ表面積ハ最小ナリ

解 直六面積ノ三ツノ稜ヲ x, y, z トシソノ體積ヲ V トスレバ

$$xyz=\mathrm{V}$$

表面積ハ $2(xy+yz+zx)$ ナルガ故ニ本題ハ V ガ一定ナル條件ノ下ニ $xy+yz+zx$ ノ最小ヲ求ムルコトニ歸ス。

然ルニ $\mathrm{V}^2=x^2y^2z^2$ ニシテ $(xy), (yz), (zx)$ ノ積ハ丁度 V^2 ナルガ故ニ一定ナリ。ヨリテ本定理ニヨリテ $xy=yz=zx$ 即チ $x=y=z$ ナルトキ最小ナリ。從ツテ立方體ナリ。

---

* へろん (Heron) ノ生年月日等ニ就イテハ詳カナラズ。サレドモ最近ノ研究ニヨルト大凡紀元後 50 年頃生存セシ人ナリト言ヘル。

93. **本節ニ於テ定理4及ビ5ヨリ誘導 (Introduce) セラルベキ種々ノ定理ヲ述ベントス。**

定理 6. 多クノ正ノ數 $x, y, z, \cdots\cdots$ ノ和ハ一定ニシテ k ニ等シキ時，$x^py^qz^r\cdots\cdots$ ナル積ハ $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{z}{r}=\cdots\cdots=\dfrac{k}{p+q+r+\cdots\cdots}$ ナルトキ極大ナリ。

但シ $p, q, r\cdots\cdots$ ハ正ノ整數ナリトス。

證明 $x+y+z+\cdots\cdots=k$ ナルトキ $x^py^qz^r\cdots\cdots=\mathrm{A}$ ノ極大ヲ求メントス。サテ A ヲ常數 $p^pq^qr^r\cdots\cdots$ ニテ除シタルモノヲ B トスレバ，A ノ極大ハ B ノ極大ノ場合ト同時ニ起ル。而シテ B ハ次ノ如ク書キ換ヘルコトヲ得。

$$\mathrm{B}=\frac{x}{p}\frac{x}{p}\cdots\cdots\frac{y}{q}\frac{y}{q}\cdots\cdots\frac{z}{r}\frac{z}{r}\cdots\cdots$$

コノ積ハ $p+q+r\cdots\cdots$ 個ノ因數ヨリナリ。ソノ和ハ k ナリ。ヨリテ之レ等ノ乘積ナル $\dfrac{x^py^qz^r\cdots\cdots}{p^pq^qr^r\cdots\cdots}$ ノ極大ハ定理4ニヨリテ $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{x}{r}=\cdots\cdots=\dfrac{x+y+z+\cdots\cdots}{p+q+r+\cdots\cdots}=\dfrac{k}{p+q+r+\cdots\cdots}$ ナルトキニ起ル。ヨリテ $x^py^qz^r\cdots\cdots$ ノ極大モ亦 $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{z}{r}=\cdots\cdots=\dfrac{k}{p+q+r+\cdots\cdots}$ ナル時ニ起ル。ヨリテ證明セラレタリ。

系 1. $p, q, r, \cdots\cdots$ ハ正ノ分數ナル時モ上ノ定理ハ成立ス。

證明 $p, q, r, \cdots\cdots$ ヲ分數ナリトシ，コレ等ヲ通分シテ次ノ形トナリタリトス。

$$p=\frac{p'}{d} \qquad q=\frac{q'}{d} \qquad r=\frac{r'}{d}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然ルトキハ $\mathrm{A}=x^{\frac{p'}{d}}y^{\frac{q'}{d}}z^{\frac{r'}{d}}$ ニシテソノ極大ハ d 乘冪ナル $\mathrm{B}=x^{p'}y^{q'}z^{r'}\cdots\cdots$ ノ極大ノ場合ニ生ズ。然ルニ B ヲ極大ナラシムルハ本定理ニヨリテ

$$\frac{x}{p'}=\frac{y}{q'}=\frac{z}{r'}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル時ナリ。而シテコノ關係ハ又次ノ關係ト一致ス。

$$\frac{x}{\frac{p'}{d}}=\frac{y}{\frac{q'}{d}}=\frac{z}{\frac{r'}{d}}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

即チ $\dfrac{x}{p}=\dfrac{y}{q}=\dfrac{z}{r}=\cdots\cdots=\dfrac{x+y+z+\cdots\cdots}{p+q+r+\cdots\cdots}=\dfrac{k}{p+q+r+\cdots\cdots}$

ナル時ナリ。ヨツテ證明セラレタリ。

系 2. 多クノ正ノ數 $px, qy, rz, \cdots\cdots$ ノ和ハ一定ニシテ k ニ等シキトキハ，$x^p y^q z^r \cdots\cdots$ ナル積ハ $x=y=z=\cdots\cdots=\dfrac{k}{p+q+r+\cdots\cdots}$ ナルトキ極大ナリ。

證明 $p, q, r \cdots\cdots$ ハ常數ナルガ故ニ $x^p y^q z^r \cdots\cdots$ ノ極大ハ

$$\frac{x^p}{\left(\frac{1}{p}\right)^p}\frac{y^q}{\left(\frac{1}{q}\right)^q}\frac{z^r}{\left(\frac{1}{r}\right)^r}\cdots\cdots$$

ノ極大ノ場合ニ起ル。

然ルニ本定理ニヨレバ $x_1+y_1+z_1+\cdots\cdots=k$ ナルトキ $x_1^p y_1^q z_1^r \cdots\cdots$ ハ $\dfrac{x_1}{p}=\dfrac{y_1}{q}=\dfrac{z_1}{r}=\cdots\cdots$ ナルトキ極大ナリ。今 $px+qy+rz+\cdots\cdots$ ヲ書キ換ヘテ $\dfrac{x}{\frac{1}{p}}+\dfrac{y}{\frac{1}{q}}+\dfrac{z}{\frac{1}{r}}+\cdots\cdots$ トシ，$\dfrac{x}{\frac{1}{p}}, \dfrac{y}{\frac{1}{q}}, \dfrac{z}{\frac{1}{r}}, \cdots$ ヲ夫々 $x_1, y_1, z_1, \cdots$ ト考フレバ

$$\left(\frac{x}{\frac{1}{p}}\right)\div p=\left(\frac{y}{\frac{1}{q}}\right)\div q=\left(\frac{z}{\frac{1}{r}}\right)\div r=$$

ナルトキ，即チ $x=y=z=\cdots\cdots=\dfrac{k}{p+q+r+\cdots\cdots}$ ナルトキ $x_1^p y_1^q z_1^r \cdots$ 即チ $\left(\dfrac{x}{\frac{1}{p}}\right)^p\left(\dfrac{y}{\frac{1}{q}}\right)^q\left(\dfrac{z}{\frac{1}{r}}\right)^r\cdots\cdots$ ガ極大トナル。從ツテコノ時 $x^p y^q z^r \cdots\cdots$ ヲ極大ナラシム。

94. **前節ト同樣ノ考ヘニテ次ニ示スガ如キ極小ニ關スル定理ヲ得。**

定理 7. 多クノ正ノ數 $x, y, z, \cdots\cdots$ アリ，$x^p y^q z^r \cdots\cdots$ ガ一定ニシテ k ニ等シキ時ハ，コレ等ノ和 $x+y+z+\cdots\cdots$ ハ

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{z}{r}=\cdots\cdots=\left(\frac{k}{p^p q^q r^r\cdots\cdots}\right)^{\frac{1}{p+q+r+\cdots\cdots}}$$ ナルトキ極小ナリ。

系 多クノ正ノ數 $x, y, z, \cdots\cdots$ アリ，$x^p y^q z^r \cdots\cdots$ ガ一定ニシテ k ニ等シキ時ハ，$px+qy+rz+\cdots\cdots$ ハ $x=y=z=\cdots\cdots=k^{\frac{1}{p+q+r+\cdots\cdots}}$ ナルトキ極小ナリ。

95. 以上述ベタル定理ヲ用フレバ多クノ場合ニ問題ヲ解決シ得ルト雖モ

尙往々ニシテソレ等ノ因數ノ和ハ常數ナラザルコトアリ。又假リニ常數ナリトスルモソレ等ノ因數ガ相等シキコト能ハザル事モアルベク，或ハソレ等ノ指數ニ比例スル能ハザルコトモアルベシ。カヽル不便ヲ避ケンガ爲メニ案出セラレタルモノハぐりれー(Grillet) ニヨリテ導入セラレタル未定係數法ト稱セラルヽモノニシテ，各因數ニ夫々常數ナル未定係數ヲ乘ジ以ツテコレ等ノ因數ノ和ヲシテ常數ニシテ而モ相等シカラシムルモノナリ。例ヲ以テ示サントス。

例 1 $a_1>a_2>a_3>\cdots\cdots>a_n$ ナリトシ，$y=(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$ ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ。

解 因數ノ數モシ奇數ナルトキハ變數 x ガ a_1 ヨリ大ナルトキハ y ハ正數ニシテ，x ガ增加スルニ從ヒ y ハドコマデモ增加ス。又 x ガ a_n ヨリモ小ナルトキハ y ハ負數ニシテ，x ガ減少スルニ從ヒ y ノ絕對值ガドコマデモ增加ス。ヨリテコノ二ツノ場合ハ何レモ極大，又ハ極小ヲ生ズルコトナシ。

又 n ガ偶數ナルトキハ變數 x ガ a_1 ヨリモ大ナル時モ a_n ヨリ小ナル時モ共ニ y ハ正數ニシテドコマデモ增加スルコトヲ得ルガ故ニ，コレ亦極大或ハ極小ヲ生ズルコトナシ。

コレニヨリテ考フレバ，ソノ極大モシクハ極小ヲ起ス場合ハ，x ガ $a_1, a_2;\ a_2, a_3;\ \cdots\cdots a_{n-1}, a_n$ 等ノ間ニ在ル時ニ限ル。

ソコデ $\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

ナルヤウニ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ ヲ選ベバ

$\lambda_1(x-a_1)+\lambda_2(x-a_2)+\cdots\cdots+\lambda_n(x-a_n)$ ガ，$-(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots\cdots+\lambda_n a_n)$ トナリテ x ヲ含マザル常數トナル。依ツテ y ノ極大モシクハ極小ハ

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\cdots\lambda_n(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)$$

ノ極大又ハ極小ノ場合ニ一致ス。即チ

$$\lambda_1(x-a_1)=\lambda_2(x-a_2)=\cdots\cdots=\lambda_n(x-a_n)$$

ナル時ナリ、コノ關係ヲ(1)ニ代入スレバ,

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{x-a_n}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)ヲ解キテ x ノ値ヲ求ムレバ, コレ等ノ値ハ y ヲ極大モシクハ極小ニスルモノナリ,

例 2. 上ノ例ニ倣ヒ $a>0$ ナリトシ $x(x-a)(x+a)$ ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ。

解 $y=x(x-a)(x+a)$ ト置キ y ノ極大及ビ極小ヲ見ルニ先ヅ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=0$$

コレヨリ $x=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ コレ y ノ極大又ハ極小ヲ與フル x ノ二ツノ値ナリ。ソノ何レガ極大ヲ與ヘ, 何レガ極小ヲ與フルカハ驗算ニヨリテ確カメザルベカラズ。

驗算 $\frac{a}{\sqrt{3}}$ 及ビコレニ近キ値 $\frac{a}{2}$ ヲトリコレヲ與式ノ x ニ代入スレバ y ノ値トシテ夫々 $\frac{-2a^3}{3\sqrt{3}}$, $\frac{-3a^3}{8}$ ヲ得。然ルニ前者ハ後者ヨリモ小ナルガ故ニ $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ ハ極小ヲ與フ。

又 $-\frac{a}{\sqrt{3}}$ 及ビコレニ近キ $\frac{-a}{2}$ ヲ x ニ代入スレバ y ノ値ガ夫々 $\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$, $\frac{3a^3}{8}$ トナル。而シテ $\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}>\frac{3a^3}{8}$ 故ニ $x=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ ナルトキ極大ヲ與フ。

例 3. $(x-1)(x-2)(x-3)$ ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ。

解 本題モ前ト同樣ノ方法ニテ解キ得ベシト雖モ玆ニハ少シク別ノ考ヘ方ヲナスベシ。

今 x ガ 1 ト 2 トノ間ニアル場合, 2 ト 3 トノ間ニアル場合ヲ別々ニ考ヘン。

(i) $2>x>1$ ナルトキ

コノ場合ハ $x-1>0$, $x-2<0$, $x-3<0$ ナルガ故ニ $y=(x-1)(2-x)(3-x)$ ト置キ換フレバ, 各因數ハ悉ク正ナリ。今 $\lambda>0$ トシ未定係數ヲ夫々 $\lambda+1, \lambda, 1$ トスレバ $(\lambda+1)(x-1)$, $\lambda(2-x)$, $(3-x)$ ハ共ニ正ニシテ且ツソノ和ハ $\lambda+2$ トナリテ一定ナリ、ヨリテ

$$(\lambda+1)(x-1)=\lambda(2-x)=3-x$$

ナルトキ與ヘラレタル函數ハ極大トナル。上ノ等式ヨリ x ヲ消去スレバ

$$\lambda^2-2\lambda-2=0$$

故ニ $\lambda=1\pm\sqrt{3}$, 然ルニ假定ニヨリテ $\lambda>0$, 從ツテ複號ノ中「+」ヲトレバ $\lambda=\sqrt{3}+1$, 從ツテコレニ對應スル x ノ値ハ $2-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ニシテ, コノトキ函數ヲ極大ナラシム。

(ii) $3>x>2$ ナルトキ

コノ場合ニハ $x-1>0, x-2>0, x-3<0$ 故ニ $y=(x-1)(x-2)(3-x)$ ト置ケバ各因數ガ悉ク正ナリ。而シテ $\lambda>0$ トシ未定係數ヲ $1, \lambda, \lambda+1$, トスレバ $(x-1)$, $\lambda(x-2)$, $(\lambda+1)(3-x)$, ハ悉ク正ニシテソノ和ハ常數トナルガ故ニ

$$(x-1)=\lambda(x-2)=(\lambda+1)(3-x)$$

ナルトキ y ヲシテ極大ナラシム。而シテ正ナル λ ノ値ハ $\sqrt{3}+1$ ニシテ x ハ $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキニ極大ナリ。然ルニコノ x ノ値ハ y ヲシテ極大ナラシムルガ故ニコレト符號ヲ異ニスル原式ハ極小トナル。

第二章 問　題

1. 正三角形ハ定面積ヲ有スル三角形ノ中, 最小ナル周圍ヲ有スルモノナルコトヲ證セヨ。

解 三角形ノ三邊ノ長サヲ x, y, z トシ, 與ヘラレタル面積ヲ A トスルト

$$16A^2=(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

今周圍ヲ $2s$ トスレバ $2s=x+y+z$ ニシテ之ヲ次ノ如ク書キ換ヘル。

$$2s=\frac{3}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}+\frac{x+y-z}{1}+\frac{x-y+z}{1}+\frac{-x+y+z}{1}\right)$$

ニシテ括弧内ノ四ツノ項ノ乘積ハ $\frac{16A^2}{3}$ トナル故一定ナリ。故ニ定理 5 ニヨツ

テ s ノ極小ハ

$$\frac{x+y+z}{3}=\frac{x+y-z}{1}=\frac{x-y+z}{1}=\frac{-x+y+z}{1}$$

ナル時即チ $x=y=z$ ノ時ニ起ル。ヨツテ問題ハ解カレタリ。

2. 定三角形ニ極大ノ面積ヲ有スル矩形ヲ内接セシメヨ。

解 與ヘラレタル三角形ノ底ヲ a, 高サヲ h トシ 内接スル矩形ノ底及ビ高サヲ夫々 x, y トスレバ相似三角形ノ定理ニヨリ

$$x:a=h-y:h \text{ 即チ } y=\frac{h}{a}(a-x)$$

今矩形ノ面積ヲ S トスレバ

$$S=xy=\frac{h}{a}x(a-x)$$

コノ極大ハ $x(a-x)$ ノ極大ト同時ニ起ルベク又 $x, a-x$ ノ和ハ一定ナルヲ以テ

$$x=a-x \text{ 即チ } x=\frac{a}{2}$$

ナル時極大トナル。

3. 與ヘラレタル底及ビ周ヲ有スル三角形ノ中ソノ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

4. 二數ノ和20ナルトキソノ乘積ノ極大ヲ求ム。

5. a, b ハ共ニ正ノ數ナリトシ $ax+by=c$ ナル條件ノ下ニ xy ノ極大ヲ求メヨ,

解 $(ax+by)^2-(ax-by)^2=4abxy$

然ルニ $ax+by=c$ ニシテ ab ハ一定ニシテ且ツ正ナルガ故ニ xy ノ極大ハ $(ax-by)=0$ ノトキ起ル。ヨリテ求ムル極大値ハ $\frac{c^2}{4ab}$ ナリ。

6. $x+y=c$ ナルトキ x^2+y^2 ノ極小値ヲ求ム。

7. x ガ實數ナラバ $x^2-8x+22$ ノ値ハ 6 ヨリ小ナラザルコトヲ證セヨ。

8. a, b ヲ正數トシ $\frac{(x+a)(x+b)}{x}$ ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ。

解 原式ヲ y ト置キ分母ヲ拂ヘバ

$$x^2+(a+b-y)x+ab=0$$

x ガ實數ナル爲メニハ

$$(a+b-y)^2-4ab\geqq 0$$

$$\therefore \quad a+b-y\geqq 2\sqrt{ab} \text{ 又ハ } a+b-y\leqq -2\sqrt{ab}$$

$\therefore$ $a+b-2\sqrt{ab}$ ハ極大ニシテ, $a+b+2\sqrt{ab}$ ハ極小ナリ。

9. 前題ノ解ニ倣ヒ $ab>0$ ナリトシ $\frac{(a-x)(x-b)}{x}$ ノ極小ヲ求メヨ。

10. $\frac{x^2+ax+b}{x^2+2ax+2b}$ ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ。

11. 未定係數ヲ用ヒテ $(x-1)(x-2)(x+1)$ ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ。

12. $\frac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$ ナル形ノ分數アリ。$x=3$ ナルトキ $4a$ ナル極大値ヲ有シ $x=1$ ナルトキ $5a$ ナル極小値ヲ有スルトキコノ分數ヲ定メヨ。

解 $y=\frac{ax^2+bx+c}{x^2+px+q}$

$$\therefore \quad (y-a)x^2+(py-b)x+qy-c=0$$

x ガ實數ナル爲メニハ

$$D=(py-b)^2-4(y-a)(qy-c)\geqq 0$$

然ルニ y ノ極大又ハ極小ハ $D=0$ ナル時ニ起ルモノナリ。卽チ x ト y トノ間ニ次ノ關係アリ。

$$x=\frac{b-py}{2(y-a)}$$

題意ニヨリテ $x=3$ ナルトキ $y=4a$, $x=1$ ナルトキ $y=5a$ ナルガ故ニ

$3=\frac{b-4ap}{2(4a-a)}$ 及ビ $1=\frac{b-5ap}{2(5a-a)}$ コレヨリ $p=10,\ b=58a$

p, b, y ノ値ヲ判別式ニ代入スレバ零トナルベキ筈ナリ。何トナレバ p, b, y ノ値ハ夫々極大及ビ極小ナラシムル値ナレバナリ。故ニ

$$(10\times 4a-58a)^2-4(4a-a)(4aq-c)=0$$

及ビ $$(10\times 5a-58a)^2-4(5a-a)(5aq-c)=0$$

コレヨリ $c=-119a,\ q=-23$

故ニ求ムル分數ハ $\frac{a(x^2+58x-119)}{x^2+10x-23}$

13. $\frac{x^2+ax+b}{x^2+2x-3}$ ノ極大及ビ極小ハ夫々 $-1, \frac{1}{2}$ トナルヤウニ a, b ノ値ヲ定メヨ。

14. $x+y=6$ ナルトキ x^4y^4 ノ極大ハ 3^8 ナルコトヲ證セヨ。

15. $a^2x^4+b^2y^4=c^6$ ナルトキハ xy ノ極大ハ $\frac{c^3}{\sqrt{2ab}}$ ナルコトヲ證セヨ。但シ a, b, c ハ正ナリトス。

16. a ヲ正ノ數ナリトシ $(5a+\sqrt{a^2-x^2})(2a-\sqrt{a^2-x^2})$ ノ極大ヲ求ム。

解 $5a+\sqrt{a^2-x^2}=A$, $2a-\sqrt{a^2-x^2}=B$ トスレバ吾人ハ AB ノ極大ヲ求ムレ

バ眞シ。

然ルニ $AB=\frac{1}{4}\{(A+B)^2-(A-B)^2\}$ ナル恒等式アリ。故ニ

$$AB=\frac{1}{4}\{(7a)^2-(3a+2\sqrt{a^2-x^2})^2\}$$

$7a$ ハ常數ナルガ故ニ AB ノ極大ハ $3a+2\sqrt{a^2-x^2}$ ノ極小ナル時起ル。ヨリテ $a^2-x^2=0$ 從ツテ $x=\pm a$ ナルトキ極大トナル。

17. 與ヘラレタル圓ニ内接スル二等邊三角形ノ中ニテ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

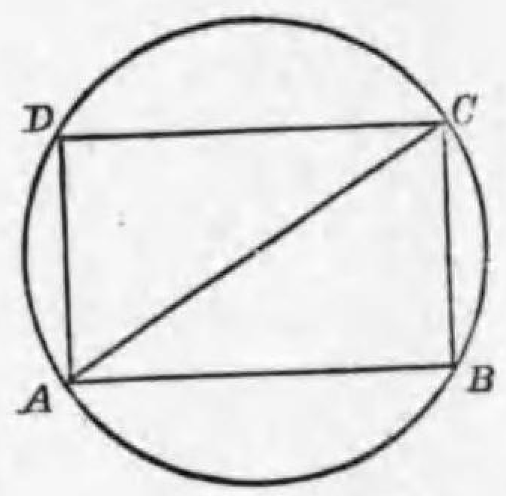
18. 與ヘラレタル圓ニ外接スル二等邊三角形ノ中ニテ面積ノ最小ナルモノヲ求メヨ。

19. 圓ニ内接スル矩形ノ中，面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

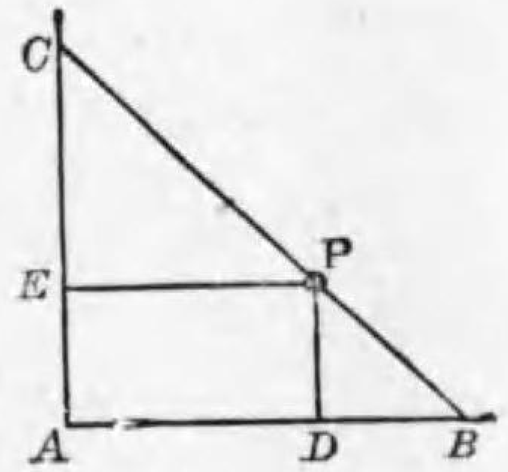
解 圓ニ内接スル矩形ヲ ABCD トシ，$AB=x$, $BC=y$, 圓ノ半徑ヲ r トスレバ本題ハ xy ナル乘積ヲ極大ナラシメントスルニ在リ。△ABC ハ直角三角形ナルガ故ニ

$$x^2+y^2=4r^2$$

サテ xy ノ極大ハ x^2y^2 ノ極大ノ場合ニ一致スルモノニシテ而カモソノ和 x^2+y^2 ハ $4r^2$ トナリテ一定ナルガ故ニ $x^2=y^2=2r^2$ ナルトキ極大ナリ。卽チ $x=y=\sqrt{2}r$ 從ツテ ABCD ハ正方形ノ場合ニソノ面積ガ最大ナリ。



20. 圖ノ如ク互ニ直交スル直線ト一點 P トヲ與フ。P ヲ過リテ直線 BC ヲ引キ，△ABC ヲ作ル時ソノ面積ノ極小ヲ求メヨ。



解 PD, PE ハ夫々 AB, AC ニ垂直ニ引ケル線分トスレバ P ハ與點ナルガ故ニ知ラレタル長サナリ。ソコデ $PD=a$, $PE=b$, $AB=x$, $AC=y$ トスレバ三角形ノ面積ハ

$$A=\frac{xy}{2}$$

相似三角形ノ性質ニヨリ

$$y:a=x:x-b \qquad \therefore\ y=\frac{ax}{x-b}$$

コレヲ $\frac{xy}{2}$ ニ代入スレバ $A=\frac{ax^2}{2(x-b)}$

$$\therefore\quad ax^2-2Ax+2bA=0$$

x ガ實數ナルタメニ $A^2-2abA\geqq 0$ $\therefore$ $A\geqq 2ab$ ナルカ $A\leqq 0$ ナルカナリ。然ルニ三角形ノ面積ハ負トナラザルガ故ニ

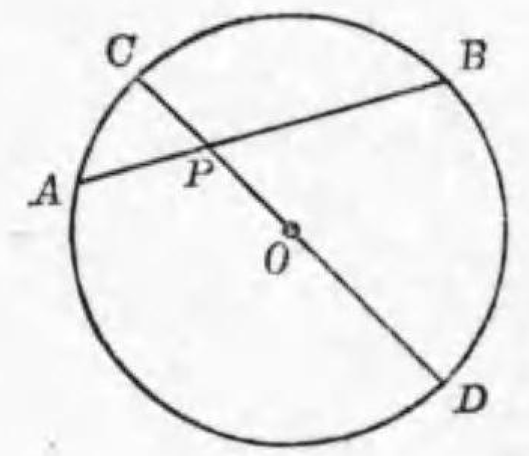
$$A\geqq 2ab,$$

ヨリテ $A=2ab$ ハ極小ノ面積ナリ。コノ時ハ $x=2a$, $y=2b$ トナルガ故ニ三角形ノ面積ノ極小ハ BC ハ P ニテ二等分 (Bisect) セラルヽ時ナリ。

21 半徑 R ナル定圓ニ二等邊三角形ヲ内接セシメ，ソノ高サト底邊トノ和ヲシテ極大ナラシメヨ。

22. 直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ニ下セル垂線一定ナルトキ斜邊ノ極小ナルモノヲ求ム。

23. 定圓内ニ與弦 AB アリ，今任意ノ直徑ヲ引ク時弦 AB ノ爲メニ分タルヽ二ツノ部分ノ包ム矩形ノ面積ヲ極大ナラシメヨ。



解 直徑 CD ハ弦 AB ノ爲メニ PC, PD ノ二部分ニ分タレタリトシ $PC=x$, $PD=y$ トスレバ本題ハ xy ノ極大ヲ求メントスルモノナリ。

然ルニ $x+y=2r$ ニシテ一定ナルガ故ニ本來ナラバ $x=y$ ナルトキ xy ハ極大トナルベキ筈ナルモ，カヽル事ハ弦 AB ハ直徑ナラザレバ不可能ノ事ナリ。ソコデ $OP=z$ トスレバ $x=r-z$, $y=r+z$ ナルガ故ニ

$$xy=(r-z)(r+z)=r^2-z^2$$

xy ノ極大ハ z ノ極小ナル時ナリ。然ルニ z ノ極小ハ O ヨリ AB ノ垂線ナルトキナリ。ヨリテ求ムル直徑ハ弦 AB ニ垂直ナルモノナリ。

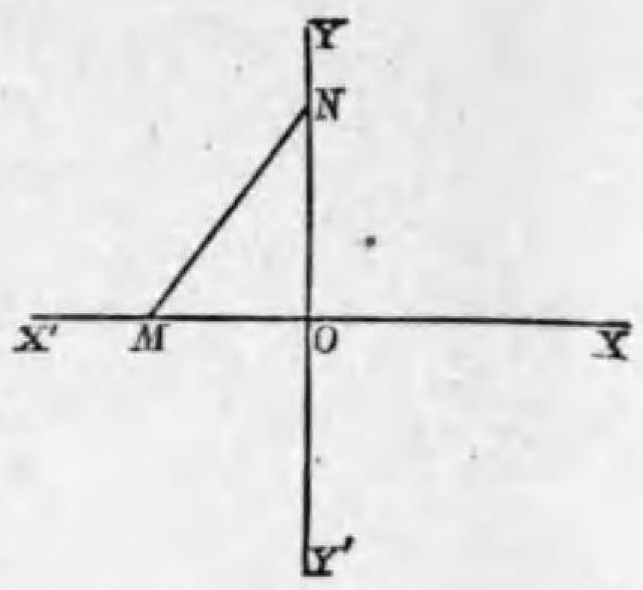
24. 與ヘラレタル半圓ニ内接スル矩形ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

25. 直角ニ交ハル二直線上ヲ等速度ニテ進行スル二點ノ最短距離ヲ求メヨ。

解 第一動點 M ハ X′ ヨリ X ノ方向ニ，第二動點 N ハ Y′ ヨリ Y ノ方向ニ動クモノトス。

t ヲ以ツテアル一定ノ時刻ヨリノ時間ナリトシ（t ノ正ナルモノハ一定ノ時刻ヨ

リ後ナルヲ意味シ，負ナルモノハ前ナルヲ意味ス。) OM, ON ヲ夫々 x, y ニテ表ハスモノトス (M ハ YY′ ノ左ニアラバ x ハ負ニシテ YY′ ノ右ニ在ラバ正トス。N ハ XX′ ノ上ニ在ラバ y ハ正ニシテ下ニ在ラバ y ハ負ナリトス。)



然ルトキハ $t=0$ ナルトキ x, y ノ値ヲ夫々 p, q トシ動點ノ速度 (velocity) ヲ v トスレバ

$$x=p+vt,\qquad y=q+vt$$

二點ノ距離 MN ヲ d トスレバ

$$d^2=x^2+y^2=2v^2t^2+2v(p+q)t+p^2+q^2$$
$$=2\left(vt+\frac{p+q}{2}\right)^2+\frac{(p-q)^2}{2}$$

d^2 ノ極小ハ $vt+\frac{p+q}{2}=0$, 即チ $t=-\frac{p+q}{2v}$ ナル時ニシテ，ソノ値ハ $\frac{(p-q)^2}{2}$ ナリ。故ニソノ距離 d ノ極小値ハ

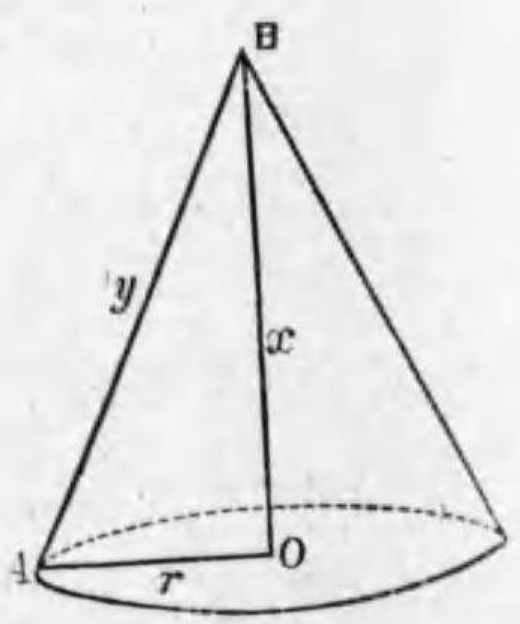
$p>q$ ナラバ $\frac{p-q}{\sqrt{2}}$ ニシテ

$p<q$ ナラバ $\frac{-(p-q)}{\sqrt{2}}$ ナリ。

26. 同ジ側面積ヲ有スル圓錐ノ中ニテソノ體積ノ極大ナルモノヲ求メヨ。

解　高サヲ x, 斜高 (Slant height) ヲ y トシ，底面ノ半徑ヲ r トス。而シテ一定ナル側面積ヲ便宜ノタメニ $k^2\pi$ ナリトス。但シ k ハ一定ナリ。

サテ △OAB ハ直角三角形ニシテ且ツ底面ノ周圍ニ斜高ヲ乘ジタル積ヲ 2 ニテ除シタルモノハ側面積ナルガ故ニ次ノ等式アリ。



$$ry=k^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$r^2+x^2=y^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

圓錐ノ體積 $V=\frac{1}{3}\pi r^2x$　而シテコノ極大ヲ求ムルニハ r^2x ノ極大ヲ求ムレバ可

ナリ。ヨリテ今 (1), (2) ナル條件ノ下ニ r^2x ノ極大ヲ求メントス。

(1), (2) ヨリ y ヲ消去スレバ

$$r^2+x^2=\frac{k^4}{r^2}$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{k^4-r^4}{r^2}\qquad\qquad\therefore\quad x=\frac{\sqrt{k^4-r^4}}{r}$$

ソコデ $r^2x=r\sqrt{k^4-r^4}$ ノ極大ヲ求ムレバ可ナリ。然ルニコノ極大ヲ求ムルハソノ四乘冪タル

$$r^4(k^4-r^4)^2$$

ノ極大ヲ求ムレバ可ナリ。而シテ r^4 ト k^4-r^4 トノ因數ノ和ハ一定ナルガ故ニ第九十三節定理 6 ニヨリテ

$$\frac{r^4}{1}=\frac{k^4-r^4}{2}\ \text{ナルトキ}$$

即チ $r=\frac{k}{\sqrt[4]{3}}$ 從ツテ $x=\frac{k\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$ ナルトキ極大ナリ。故ニ求ムル圓錐ノ體積ノ極大ハ

$$\frac{\pi}{3}r^2x=\frac{\pi}{3}k^3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}}$$

27. O, A ガ與ヘラレタル二點ナルトキ O ヲ中心トシテ半徑 R ナル圓ヲ畫キ A ヨリ之レニ切線 AP ヲ引ク。AP ガ AO ヲ軸トシテ廻轉シテ生ゼル面積ヲ極大ナラシムル R ノ値ヲ求ム。

第七編　順列及組合

第一章

二ツノ定義

96. 茲ニ三ツノモノ例ヘバ a, b, c アリトシ，コレヨリ二個ヲ選ビ出サントスルニ，配列ノ順序 (Order) ヲ考フル時ト，考ヘザル時トニヨリテ異ナル二種ノ結果ヲ生ズ。

(i) 順序ヲ考フル時ハ ab, ba, bc, cb, ca, ac ノ六種

(ii) 順序ヲ考ヘザル時ハ ab, bc, ca ノ三種

即チ第一種ニアリテハ ab ト ba トハ配列ノ順序相反スルガ故ニ異ナル選ビ方 (Selection) ナリト考ヘ，第二種ニアリテハ同ジ選ビ方ナリトス。

n 個ノモノヽ中ヨリ r 個ノモノヲ選ビ，コレニ順序ヲ附ケテ配列シタルモノヲ n 個ノ物ノ中ヨリ r 個トリタル順列又ハ略シテ n 個ノモノヽ r 順列 (Permutation) トイヒ，第一種ノ如キモノナリ。又 n 個ノモノヽ中ヨリ r 個ヲ選ビタル物ノ組 (順序ヲ考ヘズニ) ヲ n 個ノ物ノ中ヨリ r 個トリタル組合又ハ略シテ n 個ノモノヽ r 組合 (Combination) トイフ。以下物ヲ表ハスニ 1, 2, 3, …… 或ハ a, b, c, …… ヲ用ヒ特ニ斷リナケレバ凡テノ物ハ悉ク相異ナルモノトス。

97. **基本定理**

順列，組合ノ數ヲ求ムル場合ニ屢々用ヒラルヽ基本定理ハ次ノ如シ。

定理 第一ノ事柄ガ l 個ノ方法ニテ起リ，次ニ第二ノ事柄ガ m 個ノ方法ニテ起ル時，第一，第二ノ事柄ガ結合シテ起リ得ベキ總テノ方法ノ數ハ lm ナリ。何トナレバ第一ノ事柄ガ l 個ノ方法ニテ起ルガ其一ツヲ考ヘンニソレニ

第二ノ事柄ガ結合シ得ル場合ハ m 個アル　故ニ第一ト第二ノ事柄ガ結合シ得ル場合ハ結局 lm 通リアルベシ。

系 第一ノ事柄ガ l 個ノ方法ニテ起リ，第二ノ事柄ガ m 個ノ方法ニテ起リ第三ノ事柄ガ n 個ノ方法ニテ起ル……時ハ第一，第二，第三……ノ事柄ガ結合シテ起リ得ベキ場合ハ lmn ……通リナリ

例 300 ト 800 トノ間ニアリテ悉ク相異ナル數字ヨリ成ル奇數何程アルカ。

解 先ヅ百位ニ偶數ガツクハ 4 ト 6 トノ二通リナリ。而シテ第一位ニハ 1, 3, 5, 7, 9 ノ何レカ一ツアルヲ要ス。故ニ十位ニハ十個ノ數字ヨリ今考ヘシ二個ノ數字ヲ省キタル殘リノ八個ノ何レカ一ツヲ置ケバヨシ。故ニ 300 ト 800 トノ間ノ奇數ニテ百位ニ偶數ヲ置ク場合ハ

$$2\times 8\times 5=80$$

次ニ百位ニ奇數ノツクハ 3 ト 5 ト 7 ノ三ツナル故ニ，其トリ方ハ三通リアリ。而シテ第一位ニ置キ得ル奇數ハ殘リノ四個ニシテ十位ニ置ク數字ハ八個ナルヲ以テ 300 ト 800 トノ間ノ奇數ニテ百位ニ奇數ヲ置ク場合ハ　$3\times 8\times 4=96$

ヨツテ所要ノ個數ハ $80+96=176$ ナリ。

第二章

順列

98. a, b, c, d ナル四ツノ文字ヨリ順次ニ 1 ツ 2 ツ 3 ツ 4 ツヲ選ビ順列ノ仕方ヲ實際ニ作ルト次ノ表ノ如シ。

1	2	3	4
a	ab	abc	$abcd$
		abd	$abdc$
	ac	acb	$acbd$
		acd	$acdb$
	ad	adb	$adbc$
		adc	$adcb$

1	2	3	4
b	ba	bac	$bacd$
		bad	$badc$
	bc	bca	$bcad$
		bcd	$bcda$
	bd	bda	$bdac$
		bdc	$bdca$

$$c\left\{\begin{array}{l} ca\begin{cases} cab & cabd \\ cad & cadb \end{cases} \\ cb\begin{cases} cba & cbad \\ cbd & cbda \end{cases} \\ cd\begin{cases} cda & cdab \\ cdb & cdba \end{cases} \end{array}\right. \qquad d\left\{\begin{array}{l} da\begin{cases} dab & dabc \\ dac & dacb \end{cases} \\ db\begin{cases} dba & dbac \\ dbc & dbca \end{cases} \\ dc\begin{cases} dca & dcab \\ dcb & dcba \end{cases} \end{array}\right.$$

上ノ表ニヨリ知ル如ク四ツノ文字ヨリ1個ヲトル仕方ハ四通リニシテ,2個ヲトル場合ニハ今トリタル各文字ニ殘リノ三ツノ文字ノ中ヨリ一ツ宛附ケ加フルコトニヨリ $4\times3=12$ 通リノ方法ヲ得。3個ヲトル場合ニハソノ12通リノ各々ニ更ニ殘リノ2ツノ文字ヲ一ツ宛附ケ加フルコトニヨリテ更ニ2倍セラレテ都合 24 通リノ方法ヲ得。然ルニ四個トル場合ヲ考フルニ,コノ場合ハ3個トリシモノニ殘リノ1個ノ文字ヲ單ニ附ケ加フルノミナルガ故ニソノ選出ノ方法ニ增減ナシ。

ソコデ今 n 個ノモノヨリ r 個トル順列ノ數ヲ示スニ ${}_nP_r$ ナル略記法ヲ用フルコト、スレバ上ノ表ヨリ次ノ多クノ關係アルコトヲ知ル。

$${}_4P_1=4, \qquad {}_4P_2={}_4P\times3=4\times3,$$
$${}_4P_3={}_4P_2\times2=4\times3\times2, \quad {}_4P_4={}_4P_3\times1=4\times3\times2\times1=4!,$$
$${}_4P_3={}_4P_4,$$

99. **定理 1.** ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ ナリ。

證明 n 個ノモノヨリ1個トルニハ n 通リノ方法アリ。卽チ ${}_nP_1=n$, 次ニソノ各々ノ順列ニ殘リノ $n-1$ ノ物ノ中ヨリ一ツ宛附ケ加フルコトニヨリテ n 個ノモノヨリ2個ヲトル順列ヲ得。卽チ ${}_nP_2=(n-1){}_nP_1=n(n-1)$ ナリ。

又次ニソノ各々ノ順列ニ殘リノ $n-2$ 個ノ物ノ中ヨリ一ツ宛附ケ加フルコトニヨリテ, n 個ノ物ヨリ3個トル順列ヲ得。卽チ ${}_nP_3=(n-2){}_nP_2=n(n-1)(n-2)$ ナリ。

追ツテカクノ如ク考フレバ一般ニ n 個ノモノヨリ r 個トル順列ハ ${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ ナルコトヲ知ル。

注意 嚴格ニ證明センニハ數學的歸納法ヲ用フルヲ要ス。然レドモソレガ容易ナリ。

系 先キノ r ノ代リニ n ヲ以ツテスレバ n 個ノモノヲ悉ク取ル順列ヲ得ベシ。卽チ

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots2.1=n!$$

ナリ。

例 1. ${}_nP_6=20{}_nP_4$ ヨリ n ヲ求メヨ。

解 ${}_nP_6=n(n-1)\cdots\cdots(n-5),\qquad {}_nP_4=n(n-1)\cdots\cdots(n-3)$

$$\therefore\quad n(n-1)\cdots\cdots(n-5)=20n(n-1)\cdots\cdots(n-3)$$

卽チ $n(n-1)(n-2)(n-3)(n^2-9n)=0$

$$\therefore\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 9$$

然ルニ題意ニヨリ ${}_nP_6$ ナルコトヨリシテ, n ハ少クトモ 6 ナラザルベカラズ。ヨリテ n ノ値 0, 1, 2, 3 ハ採用スルコトヲ得ズ卽チ $n=9$ ナリ。

例 2. 0, 1, 2, ……9 ナル10個ノ數字ニテ三桁ノ數幾ツ作レルカ。但シ各數字ハ重複シテ用フルコトヲ得ザルモノトス。

解 三桁ノ數ハ一般ニ3個ノ數字ヨリ成ルガ故ニ ${}_{10}P_3=720$

然ルニカクシテ作リタルモノヽ中ニハ百位ノ所ニ 0 ヲ有スルモノヲモ含メリ。コレ實ハ二桁ノ數ナルガ故ニ,カヽル場合ヲ除カザルベカラズ。然ルニコノ場合ハ 1, 2……9 ナル9個ノモノヨリ二桁ノ數ヲ作リ居ル場合ナレバ ${}_9P_2=72$, ヨリテ求ムル數ハ ${}_{10}P_3-{}_9P_2=648$,

例 3. 1, 2, 3, 4, 5 ノ5個ノ數字ヲ用ヒテ 23000 ヨリ大ナル數ヲ幾個作レルカ。但シ各數字ハ重複シテ用フルコトヲ得ザルモノトス。

解 五個ノ數字ヲ悉ク用ヒテ作ル五桁ノ數ノ個數ハ ${}_5P_5=5!$ ナリ。然ルニ其中ニハ 23000 ヨリモ小ナル數アリ。ソレハ次ノ二ツノ場合ナリ。

(1) 1 ガ首位ニナリ居ル時。コノ場合ハ 2, 3, 4, 5 ノ四個ヲ悉ク用ヒテ作ル四桁ノ數ノ個數ダケアリ。故ニ ${}_4P_4=4!$

(2) 21 ニ初マル五桁ノ數。コノ場合ハ 3, 4, 5 ヲ悉ク用ヒテ作ル三桁ノ數ノ個數ダケアリ。卽チ ${}_3P_3=3!$

ヨツテ所要ノ個數ハ

$$5!-4!-3!=90.$$

例 4. *figures* 中ノ悉クノ文字ヲ用ヒテ作リ得ル順列中

(1) 奇數番目ニ母音ヲ有スルモノヽ個數如何

(2) 奇數番目ニ子音ヲ有スルモノヽ個數如何

解 母音ハ i, u, e ノ三字ニシテ子音ハ殘リノ f, g, r, s ノ四字ナリ。

(1) コノ場合ニハ奇數番目ハ 1,3,5,7 番目ニシテ之等ニ三個ノ母音ヲ置ク方法ハ ${}_4P_3=24$ ナリ。次ニ其任意ノ一通リニ就キテ子音ノ四ツヲ殘リノ四ツノ番目ニ置ク方法ハ ${}_4P_4=24$ ナリ。故ニ基本定理ニヨリ所要ノ順列ハ $24\times24=576$ ナリ。

(2) コノ場合ニハ 1, 3, 5, 7 番目ニ四個ノ子音ヲ置キ殘リノ三ツノ番目ニ三個ノ母音ヲ置ケバヨシ。故ニ所要ノ順列ハ ${}_4P_4\times{}_3P_3=24\times6=144$ ナリ。

例 5. triangle ノ悉クノ文字ヲ用ヒテ作リ得ル順列中 a, n ヲ兩端ニ有セザルモノヽ數如何。

解 triangle ナル八ツノ文字ノ中 a, n ヲ除キタル六ツノ文字ヲ兩端ニ置ク方法ノ數ハ ${}_6P_2=30$ ニシテ，今トリシ二ツノ文字ヲ除キタル六ツノ文字ヲ悉ク用ヒテ作ル順列ノ數ハ ${}_6P_6=720$ ナリ。故ニ a, n ガ兩端ニアラザル場合ハ $720\times30=21600$ ナリ。 ${}_8P_8-{}_6P_6\cdot 2$

例 6. n 個ノ物ヨリ r 個ヅヽトリテ作レル順列中 p 個ノ特別ノ物ヲ含ムモノハ ${}_{n-p}P_{r-p}\times{}_rP_p$ 通リアルコトヲ證セヨ。但シ $n>r>p$ ナリトス。

解 n 個ノ物ヨリ特別ノ p 個ヲ除キタル $n-p$ 個ノモノヨリ $(r-p)$ 個トル順列ハ ${}_{n-p}P_{r-p}$ ナリ。サテ其順列ノ一ツヲトリソレニ p 個ヲ加ヘテ r 順列ヲ作ルニ其入ルベキ位置ハ r 個中ノ p 個ナルヲ以テ，${}_rP_p$ 通リナリ。故ニ所要ノ個數ハ

$${}_{n-p}P_{r-p}\times{}_rP_p$$

ナリ。

欠

欠

(1) A 群ヨリ四個トル

(2) A 群ヨリ三個トリ B 群ヨリ二個ヲトル

(3) A 群ヨリ三個トリ他ハ相異ナルモノヲトル

(4) A 群 B 群ヨリ二個宛トル

(5) A 群ヨリ二個ヲトリ他ハ相異ナルモノヲトル

(6) B 群ヨリ二個ヲトリ他ハ相異ナルモノヲトル

(7) 悉ク異ナルモノ

ニ分ツ。而シテ其場合ノ順列及ビ組合ハ次ノ如シ。

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
組合	5	1	${}_5C_2$	4	${}_5C_3$	${}_5C_3$	${}_6C_5$
順列	$5\times\frac{5!}{4!}$	$\frac{5!}{3!2!}$	${}_5C_2\times\frac{5!}{3!}$	$4\times\frac{5!}{2!2!}$	${}_5C_3\times\frac{5!}{2!}$	${}_5C_3\times\frac{5!}{2!}$	${}_6C_5\times 5!$

故ニ組合ノ數ハ

$$5+1+10+4+10+10+6=46$$

通リニシテ順列ノ數ハ

$$25+10+200+120+600+600+720=2275$$

通リナリ。

18. 四ツノ文字 x, y, z, u ヲ含ム n 次ノ完全同次式ハ幾ツノ項ヲ有スルカ。玆ニ完全同次式トイフハ是等ノ文字ヨリ生ズル n 次ノ同次式ノ全部ヲイフ。

解　x, y, z, u ノ指數ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスルトキコレ等ハ零又ハ $1, 2, \ldots\ldots n$ ノ何レニテモ宜シク唯其和ハ n ナルヲ要スルノミナリ。故ニ所要ノ項數ハ繰リ返スコトヲ許シテ四個ノモノヨリ n 個トル重複組合ナルコト明カナルヲ以テ

$${}_4H_n={}_{n+3}C_n=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$

19. 或街ニ於テ東西ニ貫通セル道路 m 條, 南北ニ貫通セル道路 n 條アリ, 東南隅ヨリ最短ノ途ヲトリ西北隅ニ至ランニハ其方法幾通リアルカ。

解　東南隅ヨリ西北隅ニ至ルニ通行スベキ道路ノ數ハ東西ニハ $(n-1)$ 條, 南北ニハ $(m-1)$ 條ニシテ合計 $(m+n-2)$ 條ノ道ヲ通過セザルベカラズ。ヨツテ求ムル數ハ之等ヨリ $m-1$ 條 ($n-1$ トスルモ同ジ結果ヲ得) ヲ一度ニトル組合ノ數ナレバ

$${}_{m+n-2}C_{m-1}=\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$$

ナリ。

20. ${}_{m+n}\mathrm{C}_p={}_m\mathrm{C}_p+{}_m\mathrm{C}_{p-1}\times{}_n\mathrm{C}_1+{}_m\mathrm{C}_{p-2}\times{}_n\mathrm{C}_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_p$ ナルコトヲ證明セヨ。

解 $m+n$ 個ノモノヲ二群ニ分チ一ツハ m 個，他ハ n 個ノモノトス。今 $m+n$ 個ヨリ p 個ヲトル組合ヲ次ノ如クニ細別シテ考フル。即チ m 個ノモノヨリ p 個トル場合，m 個ノモノヨリ $p-1$ 個トリ n 個ノモノヨリ 1 個トル場合……n 個ノモノヨリ p 個トル場合トス。然ル時ハ容易ニ與式ヲ得ベシ。

21. ${}_n\mathrm{H}_r={}_n\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-2}\mathrm{H}_{r-1}+\cdots\cdots+{}_1\mathrm{H}_{r-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 第三章定理 4 系 1 ニヨリテ ${}_n\mathrm{H}_r={}_n\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{H}_r$

同様ニ　$${}_{n-1}\mathrm{H}_r={}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-2}\mathrm{H}_r$$

ナルガ故ニ

$${}_n\mathrm{H}_r={}_n\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-2}\mathrm{H}_r$$

コレヲ繰リ返ストキ

$${}_n\mathrm{H}_r={}_n\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-2}\mathrm{H}_{r-1}+\cdots\cdots+{}_2\mathrm{H}_r$$

然ルニ　$${}_2\mathrm{H}_r={}_1\mathrm{H}_r+{}_2\mathrm{H}_{r-1}$$

ニシテ　$${}_1\mathrm{H}_r={}_1\mathrm{H}_{r-1}$$

ナルヲ以テ結局

$${}_n\mathrm{H}_r={}_n\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{H}_{r-1}+{}_{n-2}\mathrm{H}_{r-1}+\cdots\cdots+{}_2\mathrm{H}_{r-1}+{}_1\mathrm{H}_{r-1}$$

ナリ。

22. 一平面上ニ n 個ノ點アリ其中 m 個ハ一直線上ニアルモ殘リノ點ハ何レノ三ツモ一直線上ニアラザルモノトス。此等ノ點ノ中三ツヲ頂點トスル三角形ヲ作ル方法幾通リアルカ。

解 n 個ノ點ノ中何レノ三點ヲトルモ一直線上ニアラザル時ニハ夫等ヲ頂點トスル三角形ノ數ハ ${}_n\mathrm{C}_3$ 通リアルモ m 個ノ點ハ一直線上ニアルヲ以テ此等ノ三ツヲ取ル時ハ三角形ヲ作ルコトナシ。故ニ所要ノ方法ハ

$${}_n\mathrm{C}_3-{}_m\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}\left\{n(n-)(n-2)-m(m-1)(m-2)\right\}$$

通リナリ。

23. 一平面上ニ n 個ノ點アリ，其中何レノ二ツヲ過ル直線モ相合スルコトナク，又平行ナルコトナク且ツ三直線以上同一ノ點ヲ過ルコトナシ，依ツ

テ與ヘラレタル點以外ノ交點ノ數ヲ求メヨ。

解 n 個ノ點ヲ A, B, C, D, …… トシ其中ノ二ツ例ヘバ A ト B トヲ結ブ直線ガ他ノ $(n-2)$ 個ノ點ヲ二ツ宛トリテ結ビ附ケタル直線ト交ルヲ以テ其交點ハ ${}_{n-2}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ アリ。然ルニ A, B, C, D, ……ヨリ二ツ宛トル方法ハ ${}_n\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 通リアルヲ以テ結局

$${}_{n-2}\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2=\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

アルガ如シ。然レドモ之等ハ何レモ二度宛數ヘタルコトニナルヲ以テ所要ノ答ハ $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ ナリトス。

24. 平面上ニ n 個ノ直線アリ，何レノ二ツモ平行ナラズ且ツ三ツ以上同一ノ點ヲ過ルコトナシトイフ。此等ノ直線ニヨリテ平面ハ幾ツノ部分ニ分タレルカ。

解 所要ノ數ハ n ノ函數ナルベキガ故ニ之ヲ $f(n)$ トス。然ルトキハ $(n-1)$ 個ノ直線ガ平面ヲ分ツ數ハ $f(n-1)$ ナリ。サテ $(n-1)$ 個ノ直線ヲ引キテ平面ヲ $f(n-1)$ 個ニ分チ居ル所ニ第 n ノ直線ヲ引クトキハ其平面ハ更ニ n 個ダケ多クニ區分セラル。故ニ

$$f(n)=n+f(n-1)$$

コノ關係ガ n ノ値ノ如何ニ關セズ成立スルヲ以テ

$$f(n-1)=(n-1)+f(n-2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(2)=2+f(1)$$

然ルニ一ツノ直線ガ平面ヲ二ツノ部分ニ分ツガ故ニ $f(1)=2$

ヨツテ　$$f(n)=n+(n-1)\cdots\cdots+2+2$$
$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

ナリ。

25. 平面上ニ $m+n$ 個ノ直線アリ，其中 m 個ハ或一點ヲ過リ，n 個ハ他ノ一點ヲ過リ，且ツ夫等ハ平行シ又ハ相合スルコトナシ。然ルトキ此等ノ直線ハ此平面ヲ $mn+2m+2n-1$ 個ノ部分ニ分ツコトヲ證セヨ。

解 $(m+n)$ 個ノ中 m 個ハ A 點ヲ過リ，n 個ハ B 點ヲ過ルモノト假定ス。然ル時ハ A ヲ過ル第 m 直線ハ B ヲ過ル n 個ノ直線ト A 點トニヨリテ $n+2$ 個ニ分タルヽ

ヲ以テ，此直線ノ爲メニ平面ガ分タルヽ部分ノ增加ハ $n+2$ ナリ。故ニ所要ノ數ヲ $f(m, n)$ ト記スル時ハ (所要ノ數ハ m ニモ n ニモ關係スル故ニ $f(m, n)$ ト記ス)

$$f(m, n)=f(m-1, n)+n+2,$$

$$f(m-1, n)=f(m-2, n)+n+2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(2, n)=f(1, n)+n+2$$

邊々相加フル時ハ

$$f(m, n)=f(1, n)+(m-1)(n+2)$$

然ルニ

$$f(1, n)=f(0, n)+n+1$$

ニシテ

$$f(0, n)=2n$$

ナルコト容易ニ知ラルヽヲ以テ結局

$$f(m, n)=(m-1)(n+2)+2n+n+1$$
$$=mn+2m+2n-1$$

ナリ。

第八編　二項定理

第一章

二項式ノ展開

107. 正ノ整數 n ニ對シテ $(x+a)^n$ ナル代數式ヲ x ノ降冪 (Desending power) ノ順ニ排列スルコトニ關スル定理ヲ二項定理 (Binomial theorem) トイヒ，コノ定理ニヨリテ多項式ニ展開 (Expantion) サレタルモノヲ $(x+a)^n$ ノ展開式トイフ。

今乘法ニヨリテ

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3$$
$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+bcd+cda+dab)x+abcd$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此等ノ乘積ヲ通覽スルニ x ノ最高冪ノ係數ハ常ニ 1 ニシテ，第二項ノ係數ハ因數ノ第二項ノ和ナリ。又第三項ノ係數ハ各因數ノ第二項ヲ二ツ宛組合セタル積ノ和ニシテ，第四項ノ係數ハ三ツ宛組ミ合セタル積ノ和ナリ。以下之レニ準ズ。而シテ最後ノ常數項 (Constant term) ハ各因數ノ第二項ノ凡テヲトル乘積ナリ。一般ニ n 個ノ二項因數ノ乘積ヲ論ゼンニ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots\cdots(x+v)(x+w) \text{ ハ}$$

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+A_n$$

ノ形トナル。玆ニ　$A_1=a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots+v+w$

$$A_2=ab+ac+\cdots\cdots\cdots\cdots+vw,$$

$$A_3=abc+abd+\cdots\cdots\cdots\cdots+uvw$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n=abcd\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots uvw$$

コノ公式ニ於テ $a, b, c, \cdots\cdots u, v, w$ ヲ悉ク皆 a ニ置キカフル時ハ

$$A_1=a+a+\cdots\cdots\cdots+a=na$$

$$A_2=a^2+a^2+\cdots\cdots\cdots+a^2={}_nC_2\times a^2$$

$$A_3=a^3+a^3+\cdots\cdots\cdots+a^3={}_nC_3\times a^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n=aa\cdots\cdots a=a^n$$

故ニ

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+{}_nC_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}a^{n-1}x+a^n$$

ナル公式ヲ得。之ヲ二項定理トイヒ右邊ヲ左邊ノ展開式トイフ。

注意 1. $(x+a)^n$ ノ展開式ニハ $(n+1)$ 個ノ項數アリ。

注意 2. 初項ト末項トヨリ等距離ニ在ル項ノ數係數ハ夫々相等シ。

108. $(x+a)^n$ ノ展開式ニ於テ初メヨリ $r+1$ 番目ノ項ハ ${}_nC_ra^rx^{n-r}$ ニシテ，$n-r+1$ 番目ノ項ハ ${}_nC_{n-r}a^{n-r}x^r$ ナリ。而シテコレ等ヲ二項定理ニ於ケル一般項 (General term) トイフ。

注意 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ナルコトニ注意スレバ一般項ヲ ${}_nC_{n-r}a^rx^{n-r}$ 或ハ ${}_nC_ra^{n-r}x^r$ ナリトイフモ可ナリ。

例 1. $(x-a)^n$ ヲ展開セヨ。

解 一般項ハ ${}_nC_r(-a)^rx^{n-r}$ ナルガ故ニ r ガ奇數ナルトキハ負ノ係數トナリ，r ガ偶數ナルトキハ正ノ係數トナル。故ニ

$$(x-a)^n=x^n-{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}-{}_nC_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(-1)^r{}_nC_ra^rx^{n-r}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}{}_nC_{n-1}a^{n-1}x+(-1)^na^n$$

例 2. $(x-2a)^5$ ヲ直チニ書キ下セ。

解 $(x-2a)^5=x^5-{}_5C_1(2a)x^4+{}_5C_2(2a)^2x^3-{}_5C_3(2a)^3x^2$

$$+{}_5C_4(2a)^4x-(2a)^5$$
$$=x^5-10ax^4+40a^2x^3-80a^3x^2+80a^4x-32a^5$$

例 3. $\left(x^2-\dfrac{1}{2x}\right)^6$ ニ於ケル x^3 ノ係數ヲ求メヨ。

解 一般項 $={}_6C_r\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^r(x^2)^{6-r}=(-1)^r{}_6C_r\dfrac{1}{2^r}x^{12-3r}$

x^3 ノ係數ヲ求ムルガ故ニ $12-3r=3$ ト置クベシ。然ル時ハ

$r=3$, 故ニソノ係數ハ $(-1)^3{}_6C_3\dfrac{1}{2^3}=-\dfrac{5}{2}$

例 4. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ ノ展開ニ於ケル x^r ノ係數ハ

$$\frac{n!}{\left\{\frac{1}{2}(n+r)\right\}!\left\{\frac{1}{2}(n-r)\right\}!}$$ ナルコトヲ證セヨ。

解 一般項ハ公式ニヨルト

$${}_nC_px^{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p={}_nC_px^{n-2p}$$

ニシテ，コノ項ノ x ノ指數ハ r ニ等シキガ爲ニハ $p=\dfrac{n-r}{2}$ トナルベキニヨリ，所要ノ係數ハ

$${}_nC_{\frac{n-r}{2}}=\frac{n!}{\left\{\frac{1}{2}(n-r)\right\}!\left\{\frac{1}{2}(n+r)\right\}!}$$

例 5. $\left(x+\dfrac{1}{3x^2}\right)^{18}$ ノ展開ニ於テ x ヲ含マザル項ヲ求メヨ。

解 一般項ヲ考フルニ

$${}_{18}C_rx^{18-r}\left(\frac{1}{3x^2}\right)^r={}_{18}C_r\times\frac{1}{3^r}x^{18-3r}$$

コレガ x ヲ含マザル項ナル爲ニハ $18-3r=0$ 即チ $r=6$ ナラザルベカラズ。故ニ所要ノ係數ハ

$${}_{18}C_6\times\frac{1}{3^6}=\frac{6188}{243}$$

例 6. $(1+x)^n$ ノ展開ニ於ケル最大項ヲ求メヨ。但シ $x>0$ ナリトス。

解 $\dfrac{(r+1)\text{番目ノ項}}{r\text{番目ノ項}}=\dfrac{{}_nC_rx^r}{{}_nC_{r-1}x^{r-1}}=\dfrac{n-r+1}{r}x$

ナルガ故ニ

$$\frac{n-r+1}{r}x \gtreqless 1 \quad 即チ \quad \frac{n+1}{1+x}x \gtreqless r$$

ナルニ従ヒ$(r+1)$番目ノ項ガr番目ノ項ヨリ大ナルカ，等シキカ又ハ小ナルカナリ。故ニ $\frac{n+1}{1+x}x$ ガ整數ナルトキハ$r=\frac{n+1}{1+x}x$ノ時ニハ$(r+1)$番目トr番目トガ相等シク而カモ他ノ何レノ項ヨリモ大ナリ。若シ $\frac{n+1}{1+x}x$ ガ整數ナラザル時ハ $\frac{n+1}{1+x}x>r$ ヲ滿足スル r ノ最大整數値ニ對シテ $(r+1)$ 番目ノモノガ最大トナル。

109. $(1+x)^n$ ヲ二項定理ニヨリテ展開スレバ

$${}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-2}x^{n-2}+{}_nC_{n-1}x^{n-1}+{}_nC_nx^n$$

ナルコト已ニ知ル所ナリ。然ルニ一般ニ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ナルガ故ニコレハ又

$${}_nC_n+{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x^2+\cdots\cdots+{}_nC_2x^{n-2}+{}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_0x^n$$

トモ書カル。而シテコレ等ノ係數ノ間ニハ種々ノ興味アル關係アリ，今コレヲ一二ノ例題ニ就イテ示サントス。

例 1. (i) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$

(ii) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

解 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$

コノ公式ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ成立ス。ヨリテ x ノ代リニ 1 ト置ケバ公式 (i) ヲ得ベク，x ノ代リニ -1 ト置ケバ公式 (ii) ヲ得ベシ。

例 2. ${}_nC_0^2+{}_nC_1^2+{}_nC_2^2+\cdots\cdots+{}_nC_n^2=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$

解 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$

又 $(1+x)^n={}_nC_n+{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x^2+\cdots\cdots+{}_nC_0x^n$

邊々相乘ジ以ツテ x^n ノ係數ヲ比較スルニ，左邊ヨリハ $(1+x)^{2n}$ ヨリ x^n ノ 係數ヲ求ムルコトニナリ。ソノ數ハ ${}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ 又右邊ヨリ

欠

欠

解　上ノ定理ニヨリテ ab^2c ノ係數ハ

$$\frac{4!}{1!2!1!}=12$$

例 2.　$(1+ax+bx^2+cx^3)^4$ ノ展開ニ於ケル x^3 ノ係數ヲ求ム。

解　コノ展開式ノ一般項ハ

$$\frac{4!}{p!q!r!s!}1^p(ax)^q(bx^2)^r(cx^3)^s$$

卽チ
$$\frac{4!}{p!q!r!s!}a^qb^rc^sx^{q+2r+3s}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

玆ニ $p, q, r, s,$ ハ次ノ二ツヲ滿足スベキモノナリ。

$$p+q+r+s=4\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$q+2r+3s=3\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) 及ビ (3) ヲ解クニ (3) ヨリ $s=0$ ナルカ, $s=1$ ナルカ何レカナリ。

モシ $s=0$ トスレバ (2) 及ビ (3) ハ

$$p+q+r=4$$

$$q+2r=3$$

トナリ。コレヨリ $r=1,\ p=2,\ q=1$ 及ビ $r=0,\ p=1,\ q=3,$ ナル二組ノ解ヲ得。若シ $s=1$ ナルトキハ

$$p+q+r=3$$

$$q+2r=0$$

コレヨリ $r=0,\ p=3\ q=0,$ ヲ得。ヨリテ求ムル係數ハ $\frac{4!}{2!}ab+\frac{4!}{3!}a^3$ $+\frac{4!}{3!}c=12ab+4a^3+4c$ ナリ。

第八編　問　題

1.　$(a+b)$　$(a+b)^2$　$(a+b)^3$　$(a+b)^4$　$(a+b)^5$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

ノ係數ハ右圖ノ如キ形ニ置カル丶コトヲ證セヨ。

{ぱすかる (Pascal 1623—1662) ノ三角形トイフ}

```
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
1  6  15  20  15  6  1
 ......................
```

2. $(a-2b)^7$ ノ第四項ヲ求メヨ。

3. $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ ナルトキ $(a+b)^{100}$ ノ展開式ニ於ケル最大項ヲ求メヨ。

4. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ ノ中項 (Middle term) ヲ求メヨ。

解 n ガ奇數ナルトキハコノ展開式ノ項ノ數ハ偶數ナルガ故ニ $\frac{n+1}{2}$ 番目及ビ $\frac{n+3}{2}$ 番目ハ共ニ中項ナリ。

$$\frac{n+1}{2}\text{番目ノモノハ}\ {}_nC_{\frac{n-1}{2}}x^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n-1}{2}}={}_nC_{\frac{n-1}{2}}x$$

$$\frac{n+3}{2}\text{番目ノモノハ}\ {}_nC_{\frac{n+1}{2}}x^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n+1}{2}}={}_nC_{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{x}$$

又 x ガ偶數ナラバコノ展開式ノ項數ハ奇數ニシテ $\frac{n}{2}+1$ 番目ノモノハ中項トナル。

而シテ ${}_nC_{\frac{n}{2}}x^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{2}}={}_nC_{\frac{n}{2}}$ ナリ。

5. $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^4$ ヲ求メヨ。

6. $(1+x)^8$ ノ展開式ニ於テ中央ノ三項ハ等差級數ヲナストイフ。x ノ値如何。

7. 二項定理ヲ利用シテ 99^5 ヲ計算セヨ。

8. $(1+x)^n$ ノ平方ニ於イテ x_{n-r} ノ係數ヲ二樣ノ方面ヨリ計算シテ以ツテ

$${}_nC_0\,{}_nC_r+{}_nC_1\,{}_nC_{r+1}+{}_nC_2\,{}_nC_{r+2}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-r}\,{}_nC_n=\frac{2n!}{(n+r)!(n-r)!}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$

$(1+x)^n={}_nC_n+{}_nC_{n-1}x+{}_nC_{n-2}x^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-r}x^r+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$

邊々相乘ジテ x^{n-r} ノ係數ヲ求メンニ左邊ヨリハ

$${}_{2n}C_{n-r}=\frac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$$

又右邊ヨリハ

$${}_nC_0\,{}_nC_r+{}_nC_1\,{}_nC_{r+1}+\cdots\cdots+{}_nC_{n-r}\,{}_nC_n$$

故ニ與式ノ如シ。

9. $1^2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots n^2{}_nC_n=n(n+1)2^{n-2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 左邊ヲ s ニテ表ハスト

$$s=1^2\times n+2^2\times\frac{n(n-1)}{2!}+3^2\times\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\cdots\cdots+(n-1)^2\times n+n^2$$

之ヲ逆ノ順序ニカクト

$$s=n^2+(n-1)^2\times n+(n-2)^2\times\frac{n(n-1)}{2!}+\cdots\cdots+n$$

故ニ

$$2s=n^2+n+n(n-1)(n+1)+\frac{n(n-1)}{2!}(n-2)(n+1)\cdots\cdots+n(n-1)(n+1)+n^2+n$$

$$=(n^2+n)\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\cdots\cdots+(n-1)+1\}$$

$$=(n^2+n)(1+1)^{n-1}=(n^2+n)2^{n-1}$$

故ニ

$$s=n(n+1)2^{n-2}$$

トナル。

10. $1^3{}_nC_1+2^3{}_nC_2+\cdots\cdots+n^3{}_nC_n=n^2(n+3)2^{n-3}$ ナルコトヲ證セヨ

解 前題ニヨルト

$$1^2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots\cdots+n^2{}_nC_n=n(n+1)2^{n-2}$$

コノ公式ニ n ノ代リニ $n-1$ ト置ケバ

$$1^2{}_{n-1}C_1+2^2{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+(n-1)^2{}_{n-1}C_{n-1}=(n-1)n2^{n-3}$$

邊々相減ジ且ツ ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ ナルコトニ注意スレバ

$$1^2{}_{n-1}C_0+2^2{}_{n-1}C_1+3^2{}_{n-1}C_2+\cdots\cdots+n^2{}_nC_n=n(n+3)2^{n-3}$$

兩邊ニ n ヲ乘ズレバ

$$1^3{}_nC_1+2^3{}_nC_2+3^3{}_nC_3+\cdots\cdots+n^3{}_nC_n=n^2(n+3)2^{n-3}$$

トナル

11. ${}_nC_0+\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{3}{}_nC_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}{}_nC_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 原式 $=\frac{1}{1}+\frac{n}{1.2}+\frac{n(n-1)}{1,2,3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1,2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1,2,3}+\cdots\cdots+1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{1+\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1,2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1,2,3}+\cdots\cdots+1-1\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\{{}_{n+1}C_0+{}_{n+1}C_1+{}_{n+1}C_2+\cdots\cdots+{}_{n+1}C_{n+1}-1\}$$

然ルニ括弧内ノモノハ

$(1+x)^{n+1}$ ニ於イテ x ノ代リニ 1 ト置ケルモノヨリ 1 小ナルモノナリ。ヨリテ $\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$ ナルヲ知ル。

12. $(n+1){}_n\mathrm{C}_0-n{}_n\mathrm{C}_1+(n-1){}_n\mathrm{C}_2-\cdots\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$ ナルコトヲ證セヨ。

13. $(x+2)^n$ ノ展開式ニ於イテ x^{n-r} ノ係數ヲ $\{(x+1)+1\}^n$ ヨリモ算出シテ以ツテ次ノコトヲ證セヨ。

$$2^r{}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r+{}_n\mathrm{C}_1{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_n\mathrm{C}_2{}_{n-2}\mathrm{C}_{r-2}+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_r$$

14. $(a+b)^n$ ノ奇數項ノ和ヲ A トシ偶數項ノ和ヲ B トスレバ $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2=(a^2-b^2)^n$ ナルコトヲ證セヨ。

15. n ガ正ノ整數ナルトキハ $(5+\sqrt{18})^n$ ノ整數部分ハ必ズ奇數ナルコトヲ證セヨ。

解　$\sqrt{18}$ ハ無理數ナルガ故ニ $(5+\sqrt{18})^n$ ハ必ズ整數ト不盡根數トヨリ成ル。ソコデ整數ヲ N トシ然ラザル部分ヲ F トスレバ

$$\mathrm{N}+\mathrm{F}=5^n+{}_n\mathrm{C}_1 5^{n-1}\sqrt{18}+{}_n\mathrm{C}_2 5^{n-2}\sqrt{18^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又 18 ハ 4^2 ト 5^2 トノ間ニ挾マルヽ數ナルガ故ニ $(5-\sqrt{18})^n$ ハ 1 ヨリモ小ナル無理數ナリ。コレヲ F′ トスレバ

$$\mathrm{F}'=5^n-{}_n\mathrm{C}_1 5^{n-1}\sqrt{18}+{}_n\mathrm{C}_2 5^{n-2}\sqrt{18^2}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \mathrm{N}+\mathrm{F}+\mathrm{F}'=2(5^n+{}_n\mathrm{C}_2 5^{n-2}\times 18+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

ヨリテ N+F+F′ ハ偶數ナリ。然ルニ F モ F′ モ共ニ 1 ヨリ小ナル不盡根數ナルガ故ニソノ和 2 ナルコト能ハズ，ヨリテ 1 ナリ。從ツテ N ハ奇數ナリ。

注意 1.　讀者ハ $\sqrt{18}$ ハ無理數 (Irrational number) ナルコトヲ確ムベシ。

注意 2.　無理數ハ主トシテ羃ノ逆算トシテ出ヅ。即チ $a^b=c$ ナル等式ニ於イテ c 及ビ b ヲ知リテ a ヲ求メントスル時生ズルモノナリ。而シテ古來無理數ノ積極的定義 (Positive definition) ヲナセルモノナカリシモ，十九世紀ニ至リ獨逸ノでできんど (Dedekind 1831—1916) わいえるすとらす (Weierstrass 1815—1887) かんとる (Cantor 1845—1918) 等ニヨリテ研究セラレタリ。然レドモ今コレニ關レズ。シバラク古來ヨリ用ヒ來リシ消極的定義ヲ用ヒントス。コノ定義ニヨルト無理數トハ互ニ素ナル二ツノ整數 p, q ニ對シテ $\frac{p}{q}$ ナル分數ニテ表ハスコトヲ得ザルモノナリトス。

16. $(a+\sqrt{a^2-1})^n$ ノ整數部分ハ常ニ奇數ナルコトヲ證セヨ。(a ハ正整數)

17. $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$ ノ展開式ニ於ケル x^7 ノ係數ヲ求メヨ。

18. $(1+x+x^2)^n$ ヲ $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ ト置クトキ r ガモシ 3 ノ倍數ナラザルトキハ

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{1,2}a_{r-2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}a_0=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　$\{(1-x)(1+x+x^2)\}^n=(1-x^3)^n$

此左邊ハ假定ニヨツテ

$$\{1-{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots\cdots+(-1)^nx^n\}\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\}$$

ニシテ右邊ハ

$$1-{}_n\mathrm{C}_1x^3+{}_n\mathrm{C}_2x^6-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナリ。而シテ左邊ニ於イテ x^r ノ係數ヲ求ムレバ

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{1,2}a_{r-2}\cdots\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}a_0$$

ニシテ右邊ハ x^3 及ビ其羃ノミヲ含ムガ故ニ r ガモシ 3 ノ倍數ナラザル時ハ其係數零ナリ。故ニ

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{1,2}a_{r-2}\cdots\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}a_0=0$$

19. $(1+x+x^2)^n$ ノ展開ニ於ケル x^r ノ係數ヲ a_r トスレバ次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

(i)　$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2n}=3^n$

(ii)　$a_0-a_1+a_2-\cdots\cdots+a_{2n}=1$

(iii)　$a_{n-r}=a_{n+r}$

(iv)　$a_0^2-a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_{2n}^2=a_n$

(V)　$a_0a_2-a_1a_3+a_2a_4-\cdots\cdots+a_{2n-2}a_{2n}=a_{n+1}$

解　題意ニヨルト x^r ノ係數ガ a_r ナルガ故ニ

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トナル。コノ式ニ $x=1$ ト置クト (i) ナル關係ヲ得。

又 $x=-1$ ト置クト (ii) ナル關係ヲ得。

又 (iii) ヲ證明セン＝ (i) ヲ詳シク書ケバ

$$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-r}x^{n-r}+\cdots\cdots+a_{n+r}x^{n+r}$$
$$+\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。此式＝ x ノ代リ＝ $\frac{1}{x}$ ト置ケバ

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^n=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{a_{n-r}}{x^{n-r}}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{a_{n+r}}{x^{n+r}}+\cdots\cdots+\frac{a_{2n}}{x^{2n}}$$

兩邊＝ x^{2n} ヲ乘ズルト

$$(x^2+x+1)^n=a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\cdots\cdots+a_{n-r}x^{n+r}+$$
$$\cdots\cdots+a_{n+r}x^{n-r}+\cdots\cdots+a_{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) ト (3) トハ全ク同ジモノナルガ故＝右邊＝於ケル x ノ同ジ羃ノ係數ガ相等シ，即チ

$$a_0=a_{2n},\quad a_1=a_{2n-1}$$

一般＝

$$a_{n-r}=a_{n+r}$$

次＝ (iv) ヲ證明セン＝ (1) ノ x ＝ x^2 ト置ケバ，

$$(1+x^2+x^4)^n=a_0+a_1x^2+\cdots\cdots+a_nx^{2n}+a_{n+1}x^{2n+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナリ，$-x$ ト置ケバ

$$(1-x+x^2)^n=a_0-a_1x+a_2x^2-\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

トナル，而シテ

$$(1-x+x^2)(1+x+x^2)=1+x^2+x^4$$

ナルガ故＝ (3) ト (5) トヲ邊々相乘ジテ x^{2n} ノ係數ヲ求ムレバ

$$a_0^2-a_1^2+a_2^2-\cdots\cdots+a^2_{2n}$$

＝シテ，(4) ＝於テハ a_n ナリ。故＝

$$a_0^2-a_1^2+a_2^2-\cdots\cdots+a^2_{2n}=a_n$$

最後＝ (v) ヲ證明セン＝ハ (iv) ト同樣ナル考ヘ＝テ x^{2n+2} ノ係數ヲ比較スレバ可ナリ。

20. $(1+x+x^2)^n$ ノ展開＝於ケル x^r ノ項ヲ t_r ＝テ表ハセバ

$$(t_0+t_2+t_4+\cdots\cdots)^2-(t_1+t_3+t_5+\cdots\cdots)^2=(1+x^2+x^4)^n$$
$$(t_0-t_2+t_4-\cdots\cdots)^2+(t_1-t_3+t_5-\cdots\cdots)^2=(1-x^2+x^4)^n$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 先ヅ前半ヲ證明セン＝，其左邊ヲ因數＝分解スレバ

$$(t_0+t_1+t_2+t_3+\cdots\cdots)(t_0-t_1+t_2-t_3+\cdots\cdots)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。而シテ假定＝ヨリテ

$$(1+x+x^2)^n=t_0+t_1+t_2+\cdots\cdots+t_{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。此式＝ x ノ代リ＝ $-x$ ト置クト

$$(1-x+x^2)^n=t_0-t_1+t_2-\cdots\cdots+t_{2n}$$

トナルヲ以テ (1) ハ

$$(1+x+x^2)^n(1-x+x^2)^n=(1+x^2+x^4)^n$$

トナル。ヨツテ證セラレタリ。次＝後半ヲ證明セン＝ハ x ノ代リ＝ ix ヲ用フレバ可ナリ。(玆＝ i ハ $\sqrt{-1}$ ヲ表ハスモノトス。) 即チ(2)ノ x ＝ ix ト置ク時ハ

$$(1+ix-x^2)^n=t_0+it-t^2-it_3+t_4+\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

＝シテ x ＝ $-ix$ ト置ク時ハ

$$(1-ix-x^2)^n=t_0-it-t_2+it_3+t_4+\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)ト(4)トヲ邊々相乘ズレバ

$$(1-x^2+x^4)^n=\{(t_0-t_2+t_4-\cdots\cdots)+i(t_1-t^3+t^5-\cdots\cdots)\}$$
$$\{(t_0-t_2+t_4-\cdots\cdots)-i(t_1-t_3+t_5-\cdots\cdots)\}$$
$$=(t_0-t_2+t_4-\cdots\cdots)^2+(t_1-t_2+t_5-\cdots\cdots{}^2$$

第九編 對　　數

111. 茲ニ $a^x=b$ ナル算式アリトセヨ，a ト x トヲ知リテ b ヲ求ムルコトハ冪ノ觀念ニシテ，x ガ整數ナルトキハ乘法ヲ繰リ返ヘスコトニヨリテ求メラレ，b ト x トヲ知リテ a ヲ求ムルコトハ開法ノ觀念ニシテ已ニ多少之レニ觸レタルモ更ニ第十編ニ於テ詳論スル所アルベシ。而シテ a ト b トヲ知リテ x ヲ求ムル事ハ本編ニ研究スル所ニシテ，$\log_a b=x$ ナル略記法ヲ用ヒ，a ヲ底數(Base) トイヒ，x ヲ a ヲ底數トスル b ノ對數(Logarithm) ナリトイフ。

抑々對數ナル概念ハ，すこつとらんどノ學者ねぴーや(Napier 1550—1617)ニ發シ 1614 年ニ出版セラレタル著述ニヨリテ初メテ發表セラレタリ。氏ト同時代ナル數學者ぶりっぐす(Briggs, H.1556?—1630)星學者けぷれる (Kepler 1571—1630) モ大ニ研究シ，次イデ丁抹ノめるかーとる (Mercator, N.1620—1687) ガ對數級數(1668 年) ヲ發見スルニ至ツテ殆ンド完成セリ。カクノ如ク多クノ數學者，星學者ニヨリテ盛ンニ研究セラレ，現今ニ於イテハ數學者ニハ勿論ソノ他一般科學家，測量家等ニモ缺クベカラザルモノトナリタリ。

112. 對數ノ基本定理

定理 1. 底數ノ如何ニ關セズ1ノ對數ハ0ナリ。

證明 a ノ値ノ如何ニ關セズ $a^0=1$ ナレバナリ。

定理 2. 底數ノ如何ニ關セズ底數ト同ジ數ノ對數ハ1ナリ。

證明 a ノ値ノ如何ニ關セズ $a^1=a$ ナレバナリ。

定理 3. 積ノ對數ハソノ因數ノ對數ノ和ニ等シ。

證明 $\log_a x=\alpha$,　$\log_a y=\beta$,　$\log_a z=\gamma$,…… トスレバ $a^\alpha=x$

$a^\beta=y$,　$a^\gamma=z$……

ナルガ故ニ

$$xyz\cdots\cdots=a^\alpha a^\beta a^\gamma\cdots\cdots=a^{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots)}$$

從ツテ

$$\log_a xyz\cdots\cdots=\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots$$

ヨリテ證明セラレタリ。

系 アル數ノ冪ノ對數ハソノ對數ニ冪指數ヲ乘ジタルモノニ等シ。

定理 4. 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シ。

證明 $\log_a x=\alpha$,　$\log_a y=\beta$ トスレバ定義ニヨリ $a^\alpha=x$, $a^\beta=y$ ナルガ故ニ

$$\frac{x}{y}=a^{\alpha-\beta}$$

即チ　$\log_a\frac{x}{y}=\alpha-\beta$, 故ニ定理ハ證明セラレタリ。

注意 x ノ如何ナル値ニテモ a^x ヲ零ナラシムルコト能ハザルガ故ニ，a ヲ底數トスル0ノ對數ハナシ。モシ a ヲ 1 ヨリモ大トシ，x ヲ負數ナリトシテソノ絕對値ヲ充分大ニスレバ a^x ハ次第ニ零ニ近迫スルガ故ニ x ヲ $-\infty$ トセル極限ノ場合ハ a^x ハ零ナリト考ヘラルヽガ故ニ 0 ノ對數ハ $-\infty$ ナリトイフコトヲ得ベシ。然レドモコレハ x ヲ變數ト考ヘテノ事ナリ。彼是レ混同スベカラズ。

例 1. $\frac{1}{2}\log20449+\log\frac{4}{7}-\log\frac{13}{35}+\log\frac{5}{11}$ ヲ簡單ニセヨ。

解 原式 $=\frac{1}{2}\log(11^2\times13^2)+\log4-\log7-\log13+\log35+\log5-\log11$

$=\log11+\log13+\log4-\log7-\log13+\log5+\log7+\log5-\log11$

$=\log4+\log5+\log5=\log100=2$

注意 上ノ如ク底數ヲ明示セザルモノハ凡テ 10 ヲ用フルモノト知ルベシ。勿論如何ナル數ヲ底數ニ用フルモ差支ヘナシト雖モ實際家ハ10ヲ用ヒ理論的ニハ e* ヲ用フ、而シテ前者ヲ常用對數 (Common logarithm) トイヒ，おっくすふぉーどノ數學者ぶりっぐすノ用ヒシ所ノモノニシテ，後者ハねぴーりあん對數又ハ自然對數 (Natural logarithm) トイフ。

例 2. 次ノ對數方程式 (Logarithmic equation) ヲ解ケ

$$\log(x^2-1)-\log(x^2-x-2)=\log2$$

解 左邊 $=\log\{(x-1)(x+1)\}-\log\{(x-2)(x+1)\}$

$=\log(x-1)-\log(x-2)$

* e ニ就イテハ後章述ブル所アルベシ。

$$=\log\frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore\quad \frac{x-1}{x-2}=2 \quad 從ツテ \quad x=3$$

例 3. 等比級數ノ第 x, y, z 項ガ夫々 X, Y, Z ナルトキハ次ノ式アルコトヲ證セヨ。

$$(y-z)\log X+(z-x)\log Y+(x-y)\log Z=0$$

解 初項ヲ a トシ公比 (Ratio) ヲ r トスレバ第 x 項, 第 y 項, 第 z 項ハ夫々 ar^{x-1}, ar^{y-1}, ar^{z-1}

$$\therefore\quad \log X=\log a+(x-1)\log r,\quad \log Y=\log a+(y-1)\log r$$

$$\log Z=\log a+(z-1)\log r$$

コレヲ原式ノ左邊ニ代入スレバ容易ニ證明セラル。

例 4. 次ノ指數方程式 (Exponential equation) ヲ解ケ

$$2^{x+1}-3\times2^x+5\times2^{x-1}=12$$

解 左邊 $=2\times2^x-3\times2^x+\frac{5}{2}2^x=\frac{3}{2}2^x$

$$\therefore\quad \frac{3}{2}2^x=12 \quad 從ツテ \quad 2^x=8$$

$$\therefore\quad x\log2=\log8=3\log2 \quad 故ニ \quad x=3 \text{ ナリトス。}$$

定理 5. b ヲ底數トスル a ノ對數ト, a ヲ底數トスル b ノ對數トハ互ニ逆數ナリ,

證明 $\log_b a=x$ トスレバ $b^x=a$ ニシテ

$\log_a b=y$ トスレバ $a^y=b$ ナリ。

コノ二ツヨリ a ヲ消去スレバ $b^{xy}=b$

故ニ $xy=1$ 卽チ x ト y トハ互ニ逆數ナリ。

例 a ヲ底數トスルアル數ノ對數ニ $\log_b a$ ヲ乘ズレバ, b ヲ底數トスル同ジ數ノ對數ヲ得ルコトヲ證セヨ。

解 アル數ヲ x トスレバ本題ハ $\log_a x\times\log_b a=\log_b x$ ナルコトヲ證明スルコトナリ

今 $\log_a x$, $\log_b a$, $\log_b x$ ヲ夫々 p, q, r トスレバ

$a^p=x$ ……………………(1)　　$b^q=a$ ……………………(2)

$b^r=x$ ……………………(3)

(1) 及ビ (3) ヨリ $a^p=b^r$ ……………………………………(4)

(2) 及ビ (4) ヨリ a ヲ消去スレバ

$$b^r=b^{pq} \quad 故ニ \quad r=pq \quad 卽チ \quad \log_b x=\log_a x\times\log_b a$$

注意　コノ公式ニヨレノバ, $\log_e x=\log_{10}x\cdot\log_e 10$. コレ常用對數ヨリ自然對數ヲ求ムル公式ナリ, 而シテ定理 5 ニヨルト $\log_e 10=\dfrac{1}{\log_{10}e}$ ニシテ, $\log_{10}e=0.43429\cdots\cdots$ ナルヲ以テ $\log_e 10=\dfrac{1}{0.43429\cdots}=2.30258\cdots\cdots$ 故ニ $\log_e x$ ガ $\log_{10}x=2.30258\cdots\cdots$ ヲ乘ズルコトニヨツテ得ラル。0.43429…… ヲバ對數率 (Modulus) トイフ。

113. 常用對數ノ性質

常用對數ハ 10 ヲ底トスルガ故ニ

$$y=\log x$$

ハ

$$10^y=x$$

ト同ジ關係ナリ。ヨツテ x ニ種々ノ値ヲ與フル時之ニ對應スル y ノ値ハ次ノ表ノ如シ

x	$\cdot10^{-2}$	10^{-1}	1,	10	10^2	$10^3\cdots\cdots$
y	$\cdots\cdots-2$	-1	0	1	2	$3\cdots\cdots$

故ニ次ノ結論ヲ得ベシ。

一桁ノ數ノ對數ハ零ト 1 トノ間ニアリ, 二桁ノ數ノ對數ハ 1 ト 2 トノ間ニアリ, 三桁ノ數ノ對數ハ 2 ト 3 トノ間ニアリ, 一般ニ n 桁ノ數ノ對數ハ $n-1$ ト n トノ間ニアリ。

又小數點以下第一位ヨリ始マル數ノ對數ハ -1 ト零トノ間ニアリ。小數點以下第二位ヨリ始マル數ノ對數ハ -2 ト -1 トノ間ニアリ。一般ニ小數點以下第 n 位ヨリ始マル數ノ對數ハ $-n$ ト $-n+1$ トノ間ニアリ。

114. 常用對數ノ假數ト指標

一桁ノ數 m ノ對數ヲ x トスレバ x ハ零ト 1 トノ間ニアリ。即チ

$$logm=x \qquad 1>x\geqq 0$$

然ルニ

$$log(10^n\times m)=nlog10+logm=n+x$$

コノ式ニ於テ n ガ正又ハ負ノ整數ナル時ハ, n ヲ $10^n\times m$ ノ對數ノ指標トイヒ, $logm$ 即チ x ヲ其假數トイフ。

例ヘバ

$$log2=0.30103$$

ナリトスレバ 2 ノ對數ノ指標ハ零ニシテ 0.30103 ハ其假數ナリ。

又コレニヨリテ 20, 200,……0.2, 0.02,……ナドノ對數ハ直チニ知ラルベシ。即チ

$$log20=1.30103 \qquad log200=2.30103$$

……………………………………

$$log0.2=0.30103-1 \qquad log0.02=0.30103-2$$

……………………………………

ノ如シ。

指標ハ負ナル時夫レヲ書クニハ通常指標ニ負號―ヲ戴スルモノトス。例ヘバ

$$log0.2=0.30103-1$$

トスベキヲ

$$log0.02=\overline{1}.30103$$

ト書キ

$$log0.02=0.30103-2$$

トスベキヲ

$$log0.02=\overline{2}.30103$$

ト書ク。

115. 對數表ニ就イテノ注意

對數表 (Logarithmic table) ノ公刊セラレタルモノ多數アリト雖モ我ガ國

ニテハがうす氏ノ表廣ク用ヒラル。然ルニ對數表ニハ凡テ指標ヲ省キアリ且ツ特別ナル數ナラザル限リハ其對數ノ假數ハ無理數ナルニモ拘ラズ表ニハ只五桁モシクハ七桁ノミ載セ他ヲ省略セリ。故ニ之ヲ用ヒテナシタル計算ハ嚴密ニイヘバ不精確ナレドモソノ誤差 (Error) ハ頗ル微小ナリ。

尙對數表ニ就イテ最モ注意スベキ事ハ對數ノ增減ハ本數ノ增減ニ比例スルモノト見做セル所謂比例部分ノ法則 (Principle of proportional parts) コレナリ。然レドモコノ法則ハ正確ナルモノニアラズ。ソノ理由ヲ簡單ニ述ブベシ。

例ヘバ茲ニ三ツノ等差級數ヲナス數 $a, a+b, a+2b$ (a, b ハ共ニ正ナリトス) アリトシ相隣レル數ノ對數ノ差ヲ求メントスルニ, モシコノ法則ハ眞ナラバ之レ等ノ對數ノ差ハ相等シカラザルベカラズ。

然ルニ $log(a+b)-loga=log\dfrac{a+b}{a}=log\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$

$$log(a+2b)-log(a+b)=log\frac{a+2b}{a+b}=log\left(1+\frac{b}{a+b}\right)$$

即チ後者ハ前者ヨリモ小ナリ。故ニ三ツノ數ノ差ハ一定ニシテ b ナル時ト雖モ, ソノ對數ノ增加ハ相等シカラザルナリ。然レドモコレ等ノ二者ハ殆ンド相等シキガ故ニ甚ダシキ精密ヲ要セザル場合ニハ, コノ比例部分ノ原則ハ許サルルモノナリ。尙後章對數級數ヲ論ズルニ至ラバ以上ノ理論ハ明瞭ニ了解シ得ラルベシ。

第九編 問 題

1. $log_{27}\dfrac{1}{243}$ ノ値ヲ求ム。

2. 10 ヲ底數トスルトキ $log2=0.30103$, $log7=0.84510$ ナリトス。1000 ヲ底數トスルトキ $\left(\dfrac{4}{343}\right)^{\frac{1}{2}}$ ノ對數ヲ求ム。

解 所要ノ對數ヲ x トスレバ題意ニヨリテ $1000^x=\left(\dfrac{4}{343}\right)^{\frac{1}{2}}$ ナリ。

兩邊ヲ底數 10 ニ就キテノ對數ヲトル時ハ

$$xlog1000=\frac{1}{2}(log4-log343)$$

$$\therefore\quad 3x = \log 2 - \frac{3}{2}\log 7$$

$$\therefore\quad x = -.32221 = \bar{1}.67779$$

3. $8^x = 32$ ヨリ x ヲ求メヨ。

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7} = 64$ ヨリ x ヲ求メヨ。

5. $\log({}_6P_2) - \log({}_4C_2) + \log x = 1$ ヨリ x ヲ求メヨ。

6. $a > b > 0$ トシ且ツ $a^2 + b^2 = 6ab$ ナルトキハ

$\log\left\{\frac{1}{2}(a-b)\right\} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ナルコトヲ證セヨ。

7. アル數 x ノ常用對數ノ 2 倍ハ $x + \frac{11}{10}$ ナル數ノ常用對數ヨリ大ナルコト 1 ナリトイフ。x ヲ求メヨ。

8. $x^{\log x} = 1000x^2$ ヲ解ケ。

9. $4^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$ ヲ解ケ。

10. $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ \log x + \log y = \log ab \end{array}\right\}$ ヲ解ケ。但シ $a > 0,\ b > 0$

11. $\log(x^2 - 4x + 3) - \log(x^2 - 7x + 12) = 0.60206$ ヲ解ケ。但シ $\log 2 = 0.30103$ トス。

12. $\left.\begin{array}{l} x^{2y} = y^{2x} \\ y^2 = x^3 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

13. $\left.\begin{array}{r} 14^x 8^y = 896 \\ 5^x \times 9^y = 405 \end{array}\right\}$ ヲ解ケ。

解 $14^x \times 8^y = 896$ ………………(1)　　$5^x \times 9^y = 405$ ………………(2)

(1) ヨリ $14^x \times 8^y = 14 \times 8^2$　　從ツテ　$14^{x-1} \times 8^{y-2} = 1$ …………(3)

(2) ヨリ $5^x \times 9^y = 5 \times 9^2$　　從ツテ　$5^{x-1} \times 9^{y-2} = 1$ …………(4)

(3), (4) ヨリ

$(x-1)\log 14 + (y-2)\log 8 = 0$ ……(5)

$(x-1)\log 5 + (y-2)\log 9 = 0$ ……(6)

$(5) \times \log 9 - (6) \times \log 8$

$(x-1)\{\log 14 . \log 9 - \log 5 \log 8\} = 0$

然ルニ括弧內ハ 0 ニハアラズ。ヨリテ $x - 1 = 0$ 從ツテ $x = 1$ ナリ，故ニ $y = 2$

14. $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}},\ y = 10^{\frac{1}{1-\log x}},\ z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$ ノ三ツハ共立スルコトヲ證セヨ。

解 各方程式ノ兩邊ノ對數ヲトル時ハ

$$\log x = \frac{1}{1-\log z},\quad \log y = \frac{1}{1-\log x},\quad \log z = \frac{1}{1-\log y}$$

コレハ與ヘラレタル三ツノ方程式ト同値ナリ，ソコデコノ第一式ノ $\log x$ ヲ第二式ニ入レルト

$$\log y = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\log z}}\quad 即チ\quad \log z = \frac{1}{1-\log y}$$

即チ第三式ヲ得タリ。故ニ第一，第二ノ兩式ガ成立スル時ハ第三式モ成立ス。即チ三ツハ同時ニ成立ス。從ツテ與ヘラレタ原式モ同時ニ成立ス。

注意 與ヘラレタル三ツノ中ノ二ツヨリ他ノ一ツヲ誘導シ得ルガ故ニ，之等ヨリ x, y, z ノ比ヲ得ルガ x, y, z ソノモノヲ得ズ。

15. $\left.\begin{array}{l} x^y = y^x \\ x^a = y^b \end{array}\right\}$ ヲ滿足スル x, y ノ實數値ヲ求ム。

16. $\sqrt[m+n+p]{abc}$ ハ $\sqrt[m]{a}$，$\sqrt[n]{b}$，$\sqrt[p]{c}$ ノ中最大ナルモノト最小ナルモノトノ間ニ在ルコトヲ證セヨ。但シ $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

解 $\sqrt[m+n+p]{abc} = x$ トスレバ $\log x = \frac{\log a + \log b + \log c}{m+n+p}$ ナリ。而シテコレハ $\frac{\log a}{m}$, $\frac{\log b}{n}$, $\frac{\log c}{p}$ 即チ $\log\sqrt[m]{a}$, $\log\sqrt[n]{b}$, $\log\sqrt[p]{c}$ ノ中最大ナルモノト最小ナルモノトノ間ニ在リ。然ルニ對數ノ大小ハソノ本數ノ大小ニ一致スルガ故ニ問題ハ解カレタリ。

17. 指標ガ n ナル對數ヲ有スル正ノ整數ノ個數ヲ x トシ，又逆數ガ指標 $-m$ ナル對數ヲ有スル正ノ整數ノ個數ヲ y トスレバ，

$$\log x - \log y = n - m + 1$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ對數ハ常用對數トス。

第十編 複 素 數

116. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ヲ解ケバ二ツノ根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ヲ得。コノ場合若シ $b^2-4ac<0$ ナル時ハ，實數ノミニ就キテ研究スル代數學ニテハ之等ノ二ツノ根ハ全々無意義ニシテ斯カル時ニハ根ヲ有セズト云ハザルベカラズ。然ルニ方程式ノ根ノ存在ヲ普遍的ニセムガ爲メニ，ソコニ新タナル數ヲ導入シテ所謂複素數 (Complex number) ナルモノヲ得タルコト已ニ讀者ノ知ル所ナリ。本編ニ於テハ更ニ稍ヤ詳密ニ論究セントス。

117. 複素數ノ概念ハ十六世紀伊太利ノ Cardan (/501—1576) ニ淵源ス。ソノ後多少ノ變遷ヲ經，佛人あるがん (Argand 1768—1822) ニ至リ大ニ貢獻スル所アリタリ。獨逸ニテモ殆ンド同時ニ碩學がうす (Gauss 1777—1855) 出デ大ニ進歩ヲ促ガシタリ今日用フル記號 i ハ實ニがうすノ創始ニカヽルモノトス。ソノ後こーしー (Cauchy 1789—1857) りーまん (Riemann 1835—1866) ナドノ大家ノ輩出ニヨリテ遂ニ結構壯麗ナル函數論ヲ大成スルニ至リヌ。

118. 複素數ノ一般ノ形ヲ $a+ib$ ニテ表ハシ，虛數ノ一般ノ形ヲ ib ニテ表ハスモノトス。但シ a 及ビ b ハ共ニ實數ナリトシ，i ハ之ヲ平方スル時ハ -1 トナルモノナリトス。而シテ複素數ハ次ノ性質ヲ有スルモノトス。

(1) $a=c$ $b=d$ ナルトキ，二ツノ複素數 $a+ib$, $c+id$ ハ相等シク然ラザル時ハ相等シカラズ。

(2) 二ツノ複素數 $a+ib$, ト $c+id$ トノ和ヲ $(a+c)+i(b+d)$ トス。

(3) 二ツノ複素數 $a+ib$, $c+id$ ノ積ヲ $(ac-bd)+i(bc+ad)$ トス。

(4) 一ツノ複素數 $a+ib$ ヲ $c+id$ ナル他ノ複素數ニテ除スレバ

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

トナルモノトス。

119. 前節ニ複素數ノ性質ヲ述ベシガ，本節ニテハ更ニ進ンデ代數學上三大原則ト稱セラルヽ交換法則 (Commutative law) 配分法則 (Distoributive law) 並ビニ結合法則 (Associative law) ガ啻ニ實數ニノミ成立スルニ限ラズ，コノ新タナル數ニモ適應セラルヽ事ヲ述ベ以ツテ複素數ハ實數ヲモ包含シタル非常ニ範圍ノ大ナルモノナルコトヲ示サントス。

(1) **加法ニ於ケル交換法則** 即チ $(a+ib)+(c+id)=(c+id)+(a+ib)$ ナルコト

證明 前節 (2) ニヨリ

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)\quad\cdots\cdots(1)$$

又

$$(c+id)+(a+ib)=(c+a)+i(d+b)\quad\cdots\cdots(2)$$

然ルニ a, b, c, d ハ共ニ實數ナルガ故ニ

$$a+c=c+a,\qquad b+d=d+b$$

故ニ (1) 及ビ (2) ハ相等シ。

(2) **乘法ニ於ケル交換法則** 即チ $(a+ib)(c+id)=(c+id)(a+ib)$ ナルコト

證明 前節 (3) ニヨリ

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)\quad\cdots\cdots(1)$$

又

$$(c+id)(a+ib)=(ca-db)+i(da+cb)\quad\cdots\cdots(2)$$

然ルニ

$$(ac-bd)=(ca-db)$$
$$(bc+ad)=(da+cb)$$

故ニ (1) 及ビ (2) ハ相等シ。

(3) **乘法ニ於ケル配分法則** 即チ $\{(a+ib)+(c+id)\}(e+if)=(a+ib)(e+if$

複素數ノ大小ハ考ヘズ。

$+(c+id)(e+if)$ ナルコト

證明

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$$

故ニ左邊ハ

$$\{(a+c)+i(b+d)\}(e+if)$$
$$=\{(a+c)e-(b+d)f\}+i\{(b+d)e+(a+c)f\}$$
$$=(ae+ce-bf-df)+i(be+de+af+cf)$$

又右邊ハ

$$(ae-bf)+i(be+af)+(ce-df)+i(de+cf)$$
$$=(ae+ce-bf-df)+i(be+de+af+cf)$$

故ニ證明セラレタリ。

(4) **加法ニ於ケル結合法則** 即チ $\{(a+ib)+(c+id)\}+(e+if)=(a+ib)+\{(c+id)+(e+if)\}$ ナルコト

證明

$$左邊=\{(a+c)+i(b+d)\}+(e+if)=(a+c+e)+i(b+d+f)$$
$$右邊=(a+ib)+\{(c+e)+i(d+f)\}=(a+c+e)+i(b+d+f)$$

ヨツテ左右兩邊相等シ。

(5) **乘法ニ於ケル結合法則** 即チ $\{(a+ib)(c+id)\}(e+if)=(a+ib)\{(c+id)(e+if)\}$ ナルコト

證明

$$左邊=\{(ac-bd)+i(bc+ad)\}(e+if)$$
$$=\{(ac-bd)e-(ad+bc)f\}+i\{(ad+bc)e+(ac-bd)f\}$$
$$=(ace-bde-adf-bcf)+i(ade+bce+acf-bdf)$$
$$右邊=(a+ib)\{(ce-df)+i(cf+de)\}$$
$$=\{a(ce-df)-b(cf+de)\}+i\{b(ce-df)+a(cf+de)\}$$
$$=(ace-adf-bcf-bde)+i(acf+ade+bce-bdf)$$

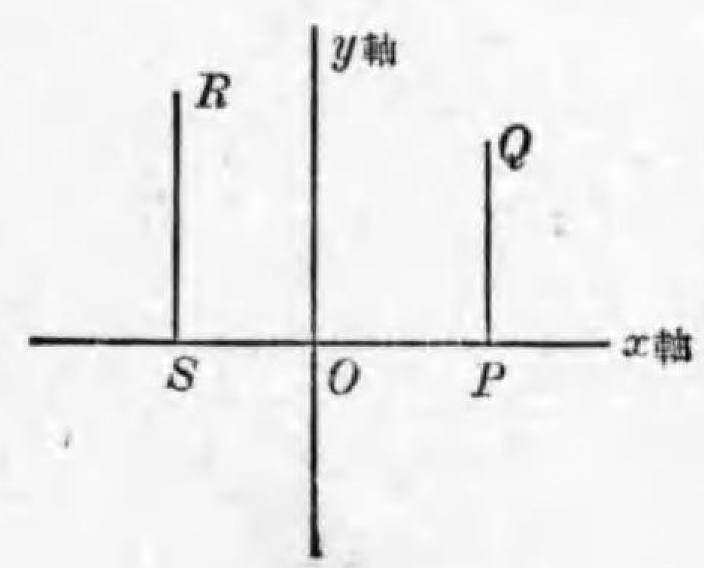
ヨツテ左右兩邊相等シ。

注意 本節ニヨリ實數ニ適用シ得ラルヽ三大原則ノ凡テハ又悉ク複素數ニモ適用シ得ルコトヲ知リタリ。且ツ實數ハ複素數 $a+ib$ ニ於テ $b=0$ ナル特別ノ場合ナルガ故ニ，複素數ハ實數ヨリモ遙カニ其ノ範圍大ナルモノニシテ實數ハ之ニ包含セラレタルモノト観ラルベシ。凡ソ論理學ヲ基調トシ其ノ組織最モ嚴格ナルベキ數學ニアリテハ，數ヲ擴張スルニ當ツテハ成ルベク從來成立シタリシ諸法則ヲ破壞セザルヤウニ建設センコトヲ要ス。

120. 實數ノ幾何學的表示

無限直線ヲトリ，其ノ上ニ任意ノ點 O ヲ定メ之ヲ原點 (Origin) トス。今任意ノ實數 a ヲ此直線上ノ點ニテ表サントス。ソレニハ長サノ單位ノ a 倍ニ等シキ線分ヲ此直線ニ沿ヒテ原點 O ヨリ測ルベシ。但シ a ガ正數ナル時ハ O 點ヨリ右方ニトリ，a ガ負數ナル時ハ O 點ヨリ左方ニトルモノトス。カクシテ定メラレタル線分ノ端點ハ即チ此實數 a ヲ代表スルモノトス。逆ニ直線上ニ任意ノ一點ヲトル時ハ此點ト原點 O トノ距離ヲ前ト同ジ長サノ單位ニテ測リシ測度ヲ a トスルトキ，點ガ O ヨリ右方ニアル時ハ a ソノマヽトシ點ガ O ヨリ左方ニアル時ハ $-a$ ニテ其點ヲ表ハスモノトス。カクノ如クスル時ハ直線上ノ凡テノ點ガ悉クアル實數ヲ表示シ，逆ニ任意ノ實數ハ凡テアル點ヲ表示スルガ故ニ (原點 O ハ零ヲ表ハスコト明カナリ) $-\infty$ ト $+\infty$ トノ間ニアル凡テノ實數ハ此直線上ノ點列ト一々對應 (One to one correspondence) ヲナス。

121. 複素數ノ幾何學的表示



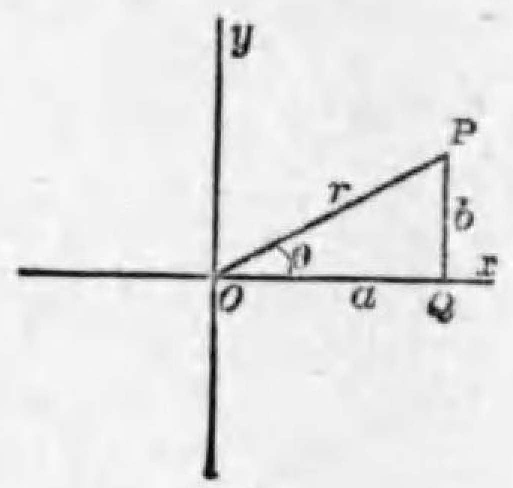
複素數 $a+ib$ ヲ，直交スル二直線ヲ x 軸，y 軸トセル平面上ノ點ニテ表ハサンニハ x 軸ニ沿フテ或長サノ單位ノ a 倍ヲトリ其端點ヲ P トス。(a ガ正又ハ負ナルニ從ヒ P ハ O ノ右，又ハ左ニトルコト前節ノ如クス)。次ニ P 點ヨリ x 軸ニ垂直ノ方向ニ前

ト同ジ長サノ單位ノ b 倍ヲトリテ其端點ヲ Q トスル。コノ場合 b ガ正ナル時ハ Q ヲ x 軸ヨリ上方ニトリ，b ガ負ナル時ハ x 軸ヨリ下方ニトルモノトス。

然ルトキ Q 點ハ $a+ib$ ナル複素數ヲ表ハスモノト規約スベシ。斯ノ如キ規約ノ下ニテハ凡テノ複素數ヲ此平面上ノ點ニテ代表セシムルコトヲ得。逆ニ此平面上ノ凡テノ點ハ只一ツノ複素數ヲ表ハスガ故ニ，平面上ノ凡テノ點ト複素數トハ一々對應ヲナス。之ヲ複素數ノ幾何學的表示法トイヒ實ニ獨逸ノ碩學がうすノ發見ニカヽルモノナレバ之ヲがうすノ表示トイヒ此平面ヲがうすノ平面 (Gaussian-plane) トイフ。

注意　x 軸上ノ點ハ b ガ零ナル場合ナルガ故ニ實數ヲ表ハシ，y 軸上ノ點ハ a ハ零ナル場合ナルガ故ニ虚數ヲ表ハス。故ニ上ノ議論ハ實數モ虚數モ共ニ複素數ノ特別ナル數ナリト見做シテノ事ナリ。

122. がうすノ平面ニ複素數 $a+ib$ ヲ表ハス點ヲ P トシ，原點 O ト P トヲ結ベ，OP ノ長サヲ r トシ，OP ト x 軸トノナス角ヲ θ トスレバ



$$\left.\begin{aligned} a&=r\cos\theta \\ b&=r\sin\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルガ故ニ

$$a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)\cdots\cdots(2)$$

ナリ。又 (1) ヨリ

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

ニシテ且ツ

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta&=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\theta&=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(但シ $2\pi>\theta\geqq 0$ トス)

ナルガ故ニ複素數 $a+ib$ ヲ與フレバ r 及ビ θ ガ定マルベク逆ニ r，θ ガ與ヘラルレバ複素數 $a+ib$ ガ定メラル。而シテ r ヲ $a+ib$ ノ絶對値又ハもぢゅらす (Modulas) トイヒ，θ ヲ偏角又ハあんぷりちゆーど (Amplitude) トイフ。

123. $a+ib$ ガ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ナル形ニテ書カルヽコト已ニ述ベタリ。ソコデ $(a+ib)^2$ ヲ考フルニ，

$$(a+ib)^2=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^2=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

ナルガ故ニ複素數ヲ平方スルトイフ事ハ，がうすノ平面ニテハ絶對値ハ平方セラレ，偏角ハ二倍ニナルコトナリ。

又

$$(a+ib)^3=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)\}$$

ナルガ故ニ，複素數ヲ立方スル事ハ絶對値ハ立方セラレ偏角ガ三倍セラルヽ事ナリ。一般ニ

$$(a+ib)^n=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

ナルガ故ニ複素數ヲ n 乘スルコトハ其ノ絶對値ガ n 乘セラレ，偏角ガ n 倍セラルヽ事ナリ。

次ニ又

$$\frac{1}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}=\frac{\cos\theta_2-i\sin\theta_2}{r_2}$$

ナルガ故ニ

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

即チ二ツノ複素數ノ商ノ絶對値ハ二ツノ數ノ絶對値ノ商ニ等シク，偏角ハ被除數ノ偏角ヨリ除數ノ偏角ヲ減ジタル差ニ等シ。

例 1. $\{\cos\theta+\cos\varphi+i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n+\{\cos\theta+\cos\varphi-i(\sin\theta+\sin\varphi)\}^n$
$=2^{n+1}\left\{\cos\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right\}^n\cos\dfrac{n(\theta+\varphi)}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解　$$左邊=\left\{2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}+2i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right\}^n$$

$$+\left\{2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}-2i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right\}^n$$

$$=2^n\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n\left[\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^n+\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^n\right]$$

然ルニ

$$\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}+i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^n=\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}+i\sin\frac{n(\theta+\varphi)}{2}$$

$$\left(\cos\frac{\theta+\varphi}{2}-i\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\right)^n=\left(\cos\frac{-(\theta+\varphi)}{2}+i\sin\frac{-(\theta+\varphi)}{2}\right)^n$$
$$=\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}-i\sin\frac{n(\theta+\varphi)}{2}$$

ナルヲ以テ

$$\text{左邊}=2^n\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n 2\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}=2^{n+1}\left(\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{n(\theta+\varphi)}{2}$$

例 2. $x=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad y=\cos\beta+i\sin\beta,\quad z=\cos\gamma+i\sin\gamma$ ナル時ハ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$(y+z)(z+x)(x+y)=8xyz\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

解 $y+z=\cos\beta+\cos\gamma+i(\sin\beta+\sin\gamma)$

$$=2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+i\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

同樣ニ

$$z+x=2\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\left(\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+i\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)$$

$$x+y=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

故ニ

$$(y+z)(z+x)(x+y)=8\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\{\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)\}$$

然ルニ

$$xyz=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

トナルコト明カナルヲ以テ本題ハ證明セラレタリ。

例 3. $(\cos\alpha+x\sin\alpha)^m+a\cos m\alpha+bx\sin m\alpha$ ガ x^2+1 ニテ割リ切ル、如ク a, b ノ値ヲ定メヨ。但シ m ハ正ノ整數ニシテ $\cos m\alpha\neq0,\ \sin m\alpha\neq0$ ナリトス。

解 $x^2+1=(x+i)(x-i)$ ナルヲ以テ與式ガ x^2+1 ニテ割リ切ル、爲メニハ, ソノ式ノ x ニ i 及ビ $-i$ ト置キタル式ハ共ニ零ナルコトヲ要ス。

卽チ

$$(1+a)\cos m\alpha+i(1+b)\sin m\alpha=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(1+a)\cos m\alpha-i(1+b)\sin m\alpha=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ $\cos m\alpha\neq0,\ \sin m\alpha\neq0$ ナルヲ以テ (1) ト (2) トガ同時ニ零ナル爲ニハ

$$1+a=0,\qquad 1+b=0$$

ナルコトヲ要ス。ヨツテ所要ノ値ハ

$$a=b=-1,$$

124. 共軛複素數

二ツノ複素數 $a+ib$ ト $a-ib$ トヲ互ニ共軛ナル複素數トイフ。共軛複素數ノ和及ビ積ハ實數ナリ。逆ニ二ツノ複素數ノ和及ビ積ハ共ニ實數ナル時ハ此二ツノ複素數ハ(實數ナラザル時ハ)互ニ共軛ナリ。何トナレバ二ツノ複素數ヲ $a+ib,\ c+id$ ナリト假定スレバ其和

$$(a+c)+i(b+d)$$

ハ實數ナル爲ニハ $b+d=0$ 卽チ $d=-b$ ナラザルベカラズ。又其積

$$(ac-bd)+i(bc+ad)$$

ガ實數ナル爲ニハ $bc+ad=0$ ナラザルベカラズ。然ルニ $d=-b$ ナルベキニヨリ

$$bc+ad=b(c-a)=0$$

故ニ $b=0$ ナルカ又ハ $c=a$ ナリ。モシ $b=0$ ナラバ二ツノ複素數ハ實數トナルベク, $c=a$ ナル時ハ $a+ib,\ a-ib$ ナル關係トナルガ故ニ互ニ共軛ナリ。

注意 互ニ共軛ナル複素數ノ絕對値ハ相等シ。

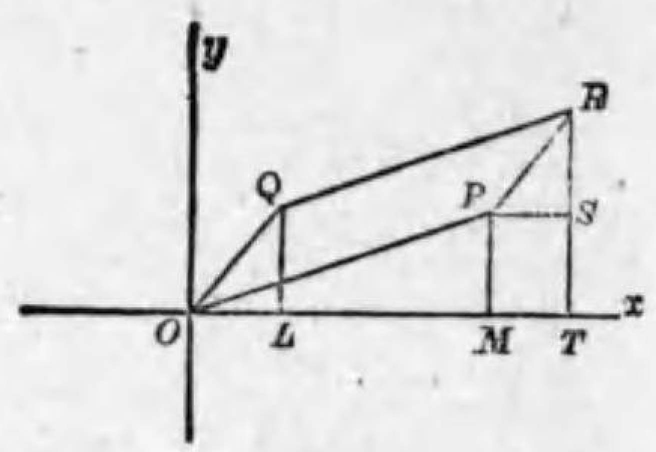
125. 複素數ノ加減乘除ヲ幾何學的ニ研究シ以ツテ本編ヲ終ヘントス。

(1) 加法

$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$ ナリ。之ヲ幾何學的ニ說明センニ，ガウス平面ニテP點ハ $(a+ib)$ ヲ表ハシ，Q點ハ $(c+id)$ ヲ表ハスモノトス。

今 OP, OQ ヲ二隣邊トスル平行四邊形 OPRQ ヲ作ル時ハ

$$OM=a \qquad MP=b$$
$$OL=MT=c$$
$$LQ=SR=d$$



ナルガ故ニ

$$OT=a+c, \qquad TR=b+d$$

ヨツテ平行四邊形ノ第四頂點 R ハ $(a+c)+i(b+d)$ ヲ表ハス。ヨツテ次ノ規則アリ。

二點P, Qニテ代表セラル、二ツノ複素數ノ和ハ OP, OQ ヲ二隣邊トスル平行四邊形ノ第四頂點ニテ表ハサル。

(2) 減法

$(a+ib)-(c+id)=(a-c)+i(b-d)$ 之ヲ幾何學的ニ說明センニ，R ヲ $a+ib$ ヲ表ハス點トシ P ヲ $c+id$ ヲ表ハス點トス (前圖)。然ル時 OP, PR ヲ二隣邊トスル平行四邊形 OPRQ ヲ作ラバ

$$OL=OT-OM=a-c$$
$$LQ=TR-MP=b-d$$

ナルガ故ニ頂點Qハ二ツノ複素數ノ差ヲ代表スル點ナリ

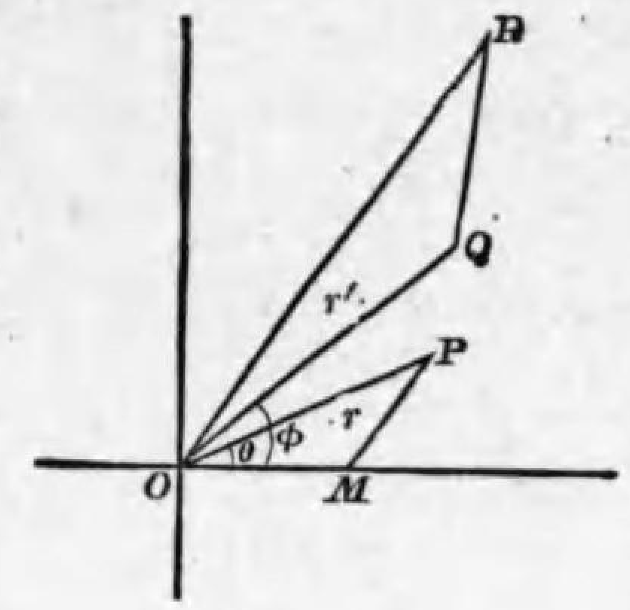
(3) 乘法

二ツノ複素數 $(a+ib)$, $(c+id)$ ヲ夫々 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r'(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ トスレバ

$$(a+ib)(c+id)=r(\cos\theta+i\sin\theta)r'(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=rr'[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)]$$

ナリ。之ヲ幾何學的ニ表示センニ P ヲ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ヲ表ハス點，Q ヲ $r'(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ヲ表ハス點トス。今 OM ヲ長サノ單位ニトル時 OQ 上ニ

△OPM ト同ジ向キニ相似ナル △OQR ヲ作リ，OQ ヲ OM ニ對應セシメ RQ ヲ MP ニ對應セシムル時ハRハ二ツノ複素數ノ乘積ヲ代表スル點ナリ。



何トナレバ

$$\triangle OQR \backsim \triangle OMP$$

ナルガ故ニ $OM:OP=OQ:OR$

即チ

$$OP.OQ=OM.OR$$

然ルニ假定ニヨリテ $OM=1$

$$\therefore\ OP.OQ=OR$$

即チ $OR=rr'$

次ニ 二ツノ三角形ハ同ジ向キニ相似ナルガ故ニ $\widehat{ROM}=\theta+\varphi$ ナルコト明カナリ。ヨツテRハ

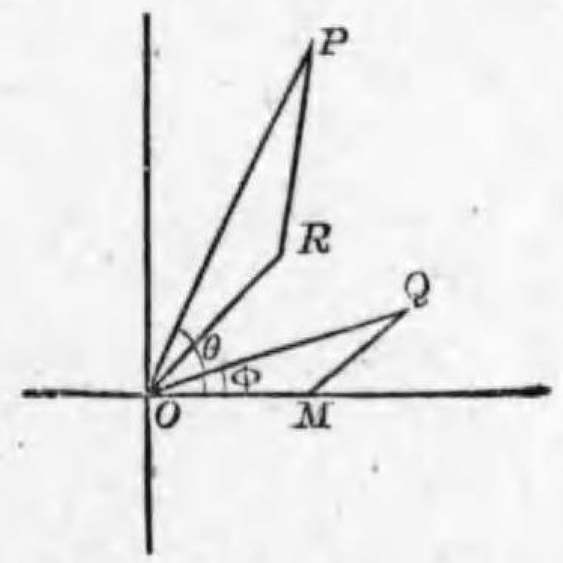
$$rr'[\cos(\theta+\varphi)+i\sin(\theta+\varphi)]$$

ヲ表ハス點ナリ。

(4) 除法

二ツノ複素數 $(a+ib)$, $(c+id)$ ヲ夫々 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r'(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ トスル時ソノ商ハ

$$\frac{r}{r'}[\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)]$$



トナル。之ヲ幾何學的ニ表示センニ圖ニ於イテPヲ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ヲ表ハス點トシ，Qヲ $r'(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ヲ表ハス點トス。今OMヲ長サノ單位ニトリOPノ上ニ △OQM ト同ジ向キニ相似ナル △OPR ヲ作リ，OP ヲ OQ ニ，PR ヲ QM ニ對應セシムレバRハ之等二ツノ複素數ノ商ヲ表ハス點ナリ。

何トナレバ $\triangle OPR \backsim \triangle OQM$

ヨリ $OP:OR=OQ:OM$

$\therefore\ OR.OQ=OP.OM$

然ルニ假定ニヨリ $OM=1$

$\therefore\ OP=OR.OQ$

$\therefore\ OR=\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{r}{r'}$

而シテ $R\hat{O}M$ ハ圖ヨリ直チニ $\theta-\varphi$ ニ等シキコトヲ知ル。ヨッテ R ハ而 $\dfrac{r}{r'}[\cos(\theta-\varphi)+i\sin(\theta-\varphi)]$ ヲ表ハス點ナリ。

第十章 問題

1. $\dfrac{1+3i}{1-3i}$ ヲ $a+ib$ ノ形ニテ表ハセ。 **2.** $\dfrac{1+5i}{1+10i}+\dfrac{1-5i}{1-10i}$ ヲ計算セヨ

3. $\dfrac{1-2i}{2+3i}$ ノ絶對値ヲ求メヨ。

4. $a+ib=c+id$ ナルトキハ $a=c, b=d$ ナルコトヲ幾何學的ニ説明セヨ。

5. $x^3=1$ ヲ解ケ。

解 求ムル根ヲ假リニ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ トスレバ

$$r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3=1$$

ナルベシ。然ルニ 1 ハがうす平面ニテハ

$$\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi$$

ナリト考フルコトヲ得ベシ。故ニ

$$r^3(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi$$

$$\therefore\ r(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}$$

ツコデ $n=0$ トオケバ $r(\cos\theta+i\sin\theta)=1$

$n=1$ 〃 〃 $=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$n=2$ 〃 〃 $=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

6. 前題ト同樣ノ方法ニテ $x^{10}=1$ ヲ解ケ。

7. $x^n=1$ ヲ解キ，且ツソノ根ハ n 個アルコトヲ證セヨ，但シ n ガ正ノ整數ナリトス。

8. n ガ素數ナル時 $x^n-1=0$ ノ根ノ中 1 ナラザル任意ノ一根ヲ ω トスレバコノ方程式ノ凡テノ根ハ $1, \omega, \omega^2 \cdots\cdots\cdots\cdots \omega^{n-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

9. $12i-5$ ノ平方根ヲ求メヨ。

10. $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$ ナルコトヲ證セヨ。但シ ω ハ $x^3=1$ ノ虚根ノ 1 ツナリトス。

解 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ハ $(x+y+z)$ ナル因數ヲ有スルコト能ク知ル所ナリ。

今 $x+\omega y+\omega^2 z$ モ亦ソノ因數ナルコトヲ示サンニ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=x^3+(\omega y)^3+(\omega^2 z)^3-3x\omega y\omega^2 z$$

トスルコトヲ得ルガ故ニ $(x+\omega y+\omega^2 z)$ ナル因數アリ。

又 $$x^3+y^3+z^3-3xyz=x^3+(\omega^2 y)^3+(\omega z)^3-3x(\omega^2 y)(\omega z)$$

ナル故ニ $x+\omega^2 y+\omega z$ ナル因數アリ。故ニ

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)=A(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$$

而シテ $A=1$ ナルコト容易ニ分カル。

11. $(x+y)^n-x^n-y^n$ ハ n ガ 3 ヨリ大ナル奇數ニシテ且ツ 3 ノ倍數ナラザル時ハ常ニ x^2+xy+y^2 ニテ割リ切ルヽコトヲ證セヨ。

12. $(x+\omega y+\omega^2 z)^3+(x+\omega^2 y+\omega z)^3=(2x-y-z)(2y-z-x)(2z-x-y)$ ナルコトヲ示セ。

解 公式ニヨリ

$$X^3+Y^3=(X+Y)(X^2-XY+Y^2)$$

コレヲ本題ニ利用スレバ $2x+(\omega+\omega^2)y+(\omega^2+\omega)z$ ニテ割リ切ルヽコトヽナル，而シテ $1+\omega+\omega^2=0$ ナルガ故

$$2x+(\omega+\omega^2)y+(\omega^2+\omega)z=2x-y-z$$

ナリ。 又左邊 $=\{(x+\omega y+\omega^2 z)\omega\}^3+\{(x+\omega^2 y+\omega z)\omega^2\}^3$

ト書キカヘラルルガ故ニ

$$(\omega+\omega^2)x+(\omega^2+\omega^4)y+2z \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

モ一ツノ因數ナリ。然ルニ $\omega+\omega^2=-1,\ \omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$ ナルガ故ニ (1) ハ $(2z-y-x)$ ナリ。同樣ニ $(-x+2y-z)$ ニテ割リ切ル。最後ニ數係數 1 ナルコト

ヲ確ムレバ本題ガ解カルヽナリ。

13. $(1+x+x^2)^n=A_0+Ax+A_2x^2+\cdots\cdots+A_{2n}x^{2n}$ ト假定スレバ

$$A_0+A_3+A_6+\cdots\cdots=A_1+A_4+A_7+\cdots\cdots=A_2+A_5+A_8+\cdots\cdots=3^{n-1}$$

ナルコトヲ證セヨ、

解　先ヅ與ヘラレタル等式ノ $x=1$ ヲ代入スレバ

$$A_0+A_1+A_2+\cdots\cdots+A_{2n}=3^n\cdots\cdots(1)$$

$x=\omega$ ヲ代入スレバ

$$A_0+A_1\omega+A_2\omega^2\cdots\cdots=(1+\omega+\omega^2)^n=0\cdots\cdots(2)$$

$x=\omega^2$ ヲ代入スレバ

$$A_0+A_1\omega^2+A_2\omega+\cdots\cdots=(1+\omega^2+\omega^4)^n=(1+\omega^2+\omega)^n=0\cdots\cdots(3)$$

然ルニ (1) ヨリ

$$(A_0+A_3+A_6+\cdots\cdots)+(A_1+A_4+A_7+\cdots\cdots)$$
$$+(A_2+A_5+A_8+\cdots\cdots)=3^n\cdots\cdots(4)$$

(2) ヨリ

$$(A_0+A_3+A_6+\cdots\cdots)+\omega(A_1+A_4+A_7+\cdots\cdots)$$
$$+\omega^2(A_2+A_5+A_8+\cdots\cdots)=0\cdots\cdots(5)$$

(3) ヨリ

$$(A_0+A_3+A_6+\cdots\cdots)+\omega^2(A_1+A_4+A_7+\cdots\cdots)$$
$$+\omega(A_2+A_5+A_8+\cdots\cdots)=0\cdots\cdots(6)$$

(4), (5), (6) ヲ邊々相加ヘ 3 ニテ除スルト

$$A_0+A_3+A_6+\cdots\cdots=3^{n-1}\cdots\cdots(7)$$

(5) ニ ω^2 ヲカケ (6) ニ ω ヲカケ (4) ニ加フルト

$$A_1+A_4+A_7+\cdots\cdots=3^{n-1}\cdots\cdots(8)$$

最後ニ (1) ニ (7) ト (8) トヲ入ルレバ

$$A_2+A_5+A_8+\cdots\cdots=3^{n-1}$$

14. $(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ ハ又 $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ ノ形ニ書キ得ルコトヲ證セヨ。

15. α, β ハ與ヘラレタル複素數ナルトキ $\alpha+\gamma=\beta$ ヲ成立セシムベキ γ ガ必ズ存在シ。且ツ一ツニ限ルコトヲ證セヨ。

16. α, β ハ與ヘラレタル複素數ナルトキ $\alpha\gamma=\beta$ ニ適合スル γ ガ一ツアリ而

シテ一ツニ限ルコトヲ證セヨ。

17. $f(Z)=\dfrac{Z^2-Z+1}{Z^2+Z+1}$ ナリトスレバ $f(1+2i)$ ト $f(1-2i)$ トハ互ニ共軛ナル複素數ナルコトヲ證セヨ。

18. $\alpha+i\beta$ ハ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ナラバ $\alpha-i\beta$ モ亦コノ方程式ノ根ナリコレヲ證セヨ。

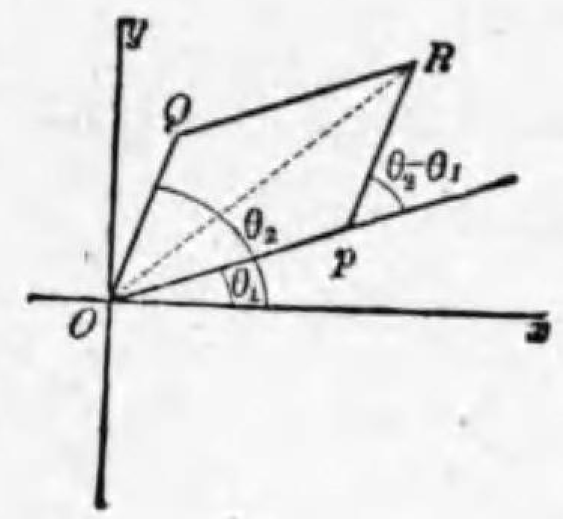
19. 第四編第四章四十二節ニ於ケル $b^2-4ac<0$ ナル場合ヲ研究セヨ。

20. a_1+ib_1, a_2+ib_2 ヲ夫々 Z_1, Z_2 ニテ表ハシ，其絕對値ヲ $|Z_1|$, $|Z_2|$ ニテ表ハス時ハ

$$|Z_1|\sim|Z_2|\leqq|Z_1+Z_2|\leqq|Z_1|+|Z_2|$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　複素數平面ニ於テ Z_1, Z_2 ヲ表ハス點ヲ夫々 P, Q トスレバ Z_1+Z_2 ヲ表ハス點ハ OP, OQ ヲ二隣邊トスル平行四邊形ノ第四頂點 R ナリ。



而シテ $|Z_1|=OP$, $|Z_2|=OQ=PR$, $|Z_1+Z_2|=OR$,

ナリ。サテ三角形 OPR ニ於テ

$$OP\sim PR\leqq OR\leqq OP+PR$$

故ニ

$$|Z_1|\sim|Z_2|\leqq|Z_1+Z_2|\leqq|Z_1|+|Z_2|$$

21. Z_1 ノ偏角ヲ θ_1, Z_2 ノ偏角ヲ θ_2 トスレバ

$$|Z_1+Z_2|^2=|Z_1|^2+|Z_2|^2+2|Z_1Z_2|\cos(\theta_2-\theta_1)$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　前圖ニヨルト $|Z_1+Z_2|=OR$, $|Z_1|=OP$, $|Z_2|=PR$ ニシテ三角形 OPR ヨリ

$$OR^2=OP^2+PR^2+2OP.PR\cos(\theta_2-\theta_1)$$

故ニ

$$|Z_1+Z_2|^2=|Z_1|^2+|Z_2|^2+2|Z_1Z_2|\cos(\theta_2-\theta_1)$$

ナリ。

22. 次ノ方程式ノ根ヲ複素數平面ニ書ケ。

$$x^n+x^{n+1}+\cdots\cdots\cdots+1=0$$

解 兩邊ニ $x-1$ ヲ乘ズレバ

$$x^{n+1}-1=0,$$

然ル時ハ第四編第五章四十九節ニヨリ此二項方程式ノ根ハ $\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$ ナリ。但シ k ハ $1, 2, \cdots\cdots n+1$ ナリトス。コノ中 $k=n+1$ ニ應ズルモノハ 1 ナレドモコレハ今乘ジタル因數ヨリ出ヅルモノナルガ故ニ，ソレダケヲ省カザルベカラズ。サテ k ノ値ノ如何ニ拘ラズ上ノ根ノ絕對値ハ 1 ナルヲ以テ n 個ノ根ハ悉ク半徑 1 ナル圓周ノ上ノ點ニテ表ハサルベク，其偏角ハ $\frac{2\pi}{n+1}$, $\frac{4\pi}{n+1}$, $\frac{6\pi}{n+1}\cdots\cdots\cdots$ $\frac{2n\pi}{n+1}$ ナリ。

23. $x^n-x^{n-1}+\cdots\cdots+1=0$ ニシテ且ツ n ガ偶數ナルトキ此方程式ノ根ヲ複素數平面ノ上ニ求メヨ。

24. $\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}=\frac{Z_1'-Z_2'}{Z_3'-Z_2'}$ ナル時ハ，Z_1, Z_2, Z_3 ヲ表ハス點ヲ頂點トスル三角形ト，Z_1', Z_2', Z_3' ヲ表ハス點ヲ頂點トスル三角形トハ相似ナルコトヲ證セヨ。

解 Z_1, Z_2, Z_3 ヲ表ハス點ヲ A, B, C トシ，Z_1', Z_2', Z_3' ヲ表ハス點ヲ A′, B′, C′ トスレバ

$|Z_1-Z_2|=AB$, $|Z_3-Z_2|=BC$, $|Z_1'-Z_2'|=A'B'$, $|Z_3'-Z_2'|=B'C'$ ナリ。何トナレバ $Z_1=a+ib$, $Z_2=c+id$ トスレバ

$$Z_1-Z_2=(a-c)+i(b-d)$$

ニシテ

$$|Z_1-Z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=AB$$

ナレバナリ。他モ同樣ナリ。

又 $\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}$ ノ偏角ハ $\widehat{ABC}$ ニ等シ。何トナレバ Z_1-Z_2 及ビ Z_3-Z_2 ノ偏角ハ，コレ等ヲ表ハス點ヲ結ブ直線ガ x 軸トナス角ニ等シキヲ以テナリ。ソコデ $\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}$ ノ偏角ヲ $amp\left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}\right)$ ニテ表ハセバ

$$amp\left(\frac{Z_1-Z_2}{Z_3-Z_2}\right)=\widehat{ABC},\quad amp\left(\frac{Z_1'-Z_2'}{Z_3'-Z_2'}\right)=A'B'C'$$

ナリ。即チ二ツノ三角形 ABC, A′B′C′ ニ於テ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{C'B'}\qquad \widehat{ABC}=A'\widehat{B'}C'$$

ナルガ故ニ之等ハ相似形ナリ。

26. 複素數ノ加法及ビ乘法ニ於イテ交換法則ノ行ハルヽコトヲがうすノ平面ヲ利用シテ證明セヨ。

27. 複素數ノ乘法ニ於イテ配分法則ノ行ハルヽコトヲがうすノ平面ヲ利用シテ證明セヨ。

28. z_1, z_2, z_3 ヲ表ハス點ヲ頂點トスル三角形ノ重心ハ $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ ナルコトヲ證セヨ。

第十一編　極　限　論

126. 極限(Limit)ノコトニ關シテハ第三編，第六編及ビ第九編ニ於イテ已ニ多少說述セシ所アリシト雖モ未ダ甚ダ盡サヾル所アリ編者ヒソカニ遺憾ナリシガ，今ヤ讀者ハ一般代數學ヲ研究シソノ步武頗ル整ヒシガ故ニ，本編ニ於イテ組織的ニ說明スル所アルベシ。

コヽニ變數xニ關スル函數yアリトシ，xガ$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ナル値ヲトリナガラ次第ニ$a$ナル値ニ近迫スルトキ，コレニ對應シテ$y$ノ値ハ$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ナル値ヲトリナガラ漸次$b$ナル値ニ近迫スルモノトセヨ。換言スレバ，$\varepsilon$ヲ如何ニ小ナル正數ナリトスルモ，之ニ對シテ適當ナル正數δヲ選ブトキハ

$$0<|x-a|<\delta$$

ナル凡テノxノ値ニ對シテ

$$|y-b|<\varepsilon$$

ナラシムル時ハ$x \to a$ナルトキノyノ極限値ハbナリトイフ。而シテ通常$\underset{x \to a}{Lim}\, y=b$ 又ハ $\underset{x=a}{lim}\, y=b$ ト記號ス。

注意　xガ漸次ニ減少シテaニ近迫スルトキyハ極限値bヲトリ，xガ漸次ニ增加シテaニ近迫スルトキyハ極限値βヲトルガ如ク，同ジxノ値aニ近迫スルニシテモソノ進ミ方ノ如何ニヨリテyノ極限値ヲ異ニスル場合アリ。カヽル場合ハ$\underset{x \to a+0}{lim}\, y=b$ 及ビ $\underset{x \to a-0}{lim}\, y=\beta$ トシテ嚴格ニ之レヲ區別スルコトヲ要ス。

例　$\underset{x \to 1}{lim}\dfrac{x-1}{x-1}$ ヲ求ム。

解　假リニxガ1ニアラズトスレバコノ分數ノ値ハ常ニ1ナリ。ソコデ今δヲ充分小ナル正數ナリトシ$x=1+\dfrac{\delta}{2}$トスレバ$0<|x-1|=\dfrac{\delta}{2}<\delta$ニシテ$\varepsilon$ヲ充分ニ小ナル正ノ數トスルトモ$|y-1|<\varepsilon$ナル條件ヲ具フ何トナレバ $y=\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{1+\frac{\delta}{2}-1}{1+\frac{\delta}{2}-1}=1$ ナルガ故ニ $y-1=0$ ナレバナリ。コ

*絕對値ノ符號ハ獨人わいえるすとらす(Weierstrass)ガ初メテ用ヒタリ。

レニヨリテ $\underset{x \to 1}{lim}\dfrac{x-1}{x-1}=1$ ナリ。

127. xノ値ガ愈々大ナルニ從ヒyノ値ガアル有限ナル値bニ近ヅキ，xガ適當ニ定メタル正ノ數Gヨリモ大ナルトキニ$|y-b|$ガ任意ニ定メタル充分小ナル正ノ數εヨリモ小ナルトキハ，xガ無限大ナルトキyノ極限値ハaナリトイヒ，記號的ニ$\underset{x \to +\infty}{lim}\, y=a$ ト記ス。$\underset{x \to -\infty}{lim}\, y=b$ ノ定義又同樣ナリ。

例　$\underset{x \to \infty}{lim}\dfrac{2x+1}{x}$ ヲ求メヨ。

解　$y=\dfrac{2x+1}{x}$ ニ於テ分母子ヲ零ニアラザルxニテ除シ $\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1}=2+\dfrac{1}{x}$ トシ。次ニεヲ充分ニ小ナル正數トシ，xヲ$\dfrac{1}{\varepsilon}$ヨリ尙大ナラシムルトキハxハ非常ニ大ナル値ヲトリyハ$2+\varepsilon$ヨリモ小ナル値ヲトル，即チxノ値ハ益々大ニナルニ從ヒ，$y-2$ノ値ハ次第ニ零ニ近迫ス。故ニ

$$\underset{x \to \infty}{lim}\frac{2x+1}{x}=2$$

128.　本節ニ於テ極限論ノ基本定理ヲ證明セントス。

定理 1.　$\underset{x \to a}{lim}\, y=b$ ナルトキハ $\underset{x \to a}{lim}(-y)=-b$ ナリ。

證明　假定ニヨリテ $0<|x-a|<\delta$ ニ對シテ $|y-b|<\varepsilon$ ガ成立ス。然ルニ $|y-b|=|-(y-b)|=|-y-(-b)|$ ナルガ故ニ $|-y-(-b)|<\varepsilon$ トナル。即チ定義ニヨリテ　$\underset{x \to a}{lim}(-y)=-b$　ナリ。

定理 2.　$\underset{x \to a}{lim}\, y=b$, $\underset{x \to a}{lim}\, z=c$ ナルトキハ $\underset{x \to a}{lim}(y+z)=b+c$ ナリ。

證明　xノ値aニ近キ時ノyノ値ヲ$b+h$, zノ値ヲ$c+k$ト置ク時ハ，xガ愈々aニ近迫スレバh, 及ビkハ次第ニ如何ホドニテモ零ニ近ヅク。

ヨリテ　$\underset{x \to a}{lim}(y+z)=\underset{\substack{h \to 0\\ k \to 0}}{lim}(b+h+c+k)=b+c$

系　$\underset{x \to a}{lim}\, y=b$ 及ビ $\underset{x \to a}{lim}\, z=c$ ナルトキハ $\underset{x \to a}{lim}(y-z)=b-c$ ナリ。

定理 3.　$\underset{x \to a}{lim}\, y=b$, $\underset{x \to a}{lim}\, z=c$ ナルトキハ $\underset{x \to a}{lim}\, yz=bc$ ナリ。

證明　$\underset{x \to a}{lim}(y \times z)=\underset{\substack{h \to 0\\ k \to 0}}{lim}\{(b+h)(c+k)\}=\underset{\substack{h \to 0\\ k \to 0}}{lim}(bc+ch+bk+hk)=bc$

ヨリテ $\underset{x \to a}{lim}(y \times z)=bc$ ナルコトヲ知ル。

定理 4. $\lim_{x\to a} y=b$, $\lim_{p\to a} z=c$ ニシテ且ツ $c \neq 0$ ナルトキ $\lim_{x\to a}\frac{y}{z}=\frac{b}{c}$ ナリ。

證明 $\lim_{x\to a}\left(\frac{y}{z}\times z\right)=\lim_{x\to a} y$

然ルニ定理3ニヨリテ

$$\lim_{x\to a} y=\lim_{p\to a}\left(\frac{y}{z}\times z\right)=\lim_{x\to a}\frac{y}{z}\times\lim_{x\to a} z$$

$$\therefore\ \lim_{x\to a}\frac{y}{z}=\frac{\lim\limits_{x\to a} y}{\lim\limits_{x\to a} z}=\frac{b}{c}\ \text{ナリ。}$$

例 1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ ヲ求メヨ。

解 x ヲ $1+h$ ト置ケ。x ガ1ニ近迫スルトキハ h ガ0ニ近迫スル。

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x-3}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-3(1+h)+2}{(1+h)^2-4(1+h)+3}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-3-3h+2}{1+2h+h^2-4-4h+3}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-h}{h^2-2h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\lim_{h\to 0}\frac{h-1}{h-2}$$

然ルニ $\lim\frac{h}{h}=1$ ナリ。何トナレバ $\delta=\varepsilon$ ナルガ如クニ選ブ時ハ, $0<|h|<\delta$ ニ對シテ $\left|\frac{h}{h}-1\right|<\varepsilon$ ガ成立スルヲ以テナリ。又 $\lim_{h\to 0}\frac{h-1}{h-2}=\frac{1}{2}$ ナリ。何トナレバ此場合ニモ $\delta=\varepsilon$ ナルガ如ク選ブ時ハ, $0<|h|<\delta$ ニ對シテ $\left|\frac{h-1}{h-2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ ガ成立スルヲ以テナリ。故ニ所要ノ極限値ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。

注意 コノ結果ハ與ヘラレタル分數ヲ已約分數 $\frac{x-2}{x-3}$ トシ, コレニ $x=1$ ト置キタルモノニ等シ。(第三編第三章第三十節參照)

例 2. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+3}$ ヲ求ム。

解 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-3}=0$

注意 例1及ビ例2ニ於ケルコレ等ノ分數ハ x ガ1ナルトキ夫々 $\frac{1}{2}$ 及ビ0ナル値ヲ有ストイフベカラズ。只ソノ極限値トシテ上ノ値ヲトルトイフノミ。

例 3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2}{x+1}=2$

例 4. $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x+1}=0$

例 5. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

例 6. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=0$

上ノ例題ヲ綜合スレバ次ノ規則ヲ得。

規則 1. x ニ關スル有理分數ノ $x=a$ ナルトキノ極限値ハ, 分母子ニ $x-a$ ナル共通ノ因數ノナキ分數ニ化シテ定ム。

規則 2. x ニ關スル有理分數ノ $x=0$ ナルトキノ極限値ハ, 先ヅ分母子ヲソレ等ノ項ニ含マル、x ノ最低ノ冪ニテ割リタルモノニ $x=0$ ト置キテ定ム。

規則 3. x ニ關スル有理分數ノ $x=\infty$ ナルトキノ極限値ハ, 先ヅ分母子ヲソレ等ノ項ニ含マル、x ノ最高ノ冪ニテ割リタルモノニ就キテ定ム。

129. 以下ノ諸定理ハ悉ク基本定理ヨリ誘導サルベキモノナリ。

定理 5. m ヲ正又ハ負ノ有理數トスルトキハ $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=m$ ナリ。

證明 (A) m ガ正ノ整數ナルトキ。

$$\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+x+1$$

故ニ $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=1+1+1+\cdots\cdots\cdots\cdots+1+1=m$

(B) m ガ正ノ分數ナル時, 即チ p, q ヲ共ニ正ノ整數トスルトキ $m=\frac{p}{q}$ ナリトス。

今 $x=y^q$ トスレバ x ノ極限値ガ1ナリトイフコトハ y ノ極限値ガ1ニナルトイフコトニ同ジ。(嚴格ニイヘバ證明ヲ要スレドモ省略ス)

然シテ $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{p}{q}}-1}{x-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^p-1}{y^q-1}$

而シテ $\lim_{y\to 1}\frac{y^p-1}{y^q-1}=\lim_{y\to 1}\left\{\frac{(y^p-1)}{y-1}\div\frac{(y^q-1)}{y-1}\right\}$

然ルニ基本定理4ニヨリテ, 右邊ハ

$$\lim_{y\to1}\frac{y^p-1}{y-1}\div\lim_{y\to1}\frac{y^q-1}{y-1}$$

然ルニ p, q ハ正ノ整數ナルガ故ニ $\lim\limits_{y\to1}\dfrac{y^p-1}{y-1}=p$　　$\lim\limits_{y\to1}\dfrac{y^q-1}{y-1}=q$

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{y\to1}\frac{y^p-1}{y^q-1}=\frac{p}{q}=m$$

(C) m ガ負ノ有理數ナル時。コノ場合ニ $m=-n$ トスレバ n ガ正ノ整數又ハ分數ナリ。

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^{-n}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x^n}-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x^n}{x^n(x-1)}=-\lim\frac{x^n-1}{x^n(x-1)}$$

然ルニ基本定理4ニヨレバコレハ

$$-\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}\lim_{x\to1}\frac{1}{x^n}$$

n ガ正ノ整數ナルトキハ(A)ニヨリ又 n ガ正ノ分數ナルトキハ(B)ニヨリテ何レモ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=n$ ナルガ故ニ結局 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x-1}=-n\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^n}=-n$

然ルニ $-n$ ガ假定ニヨリテ m ナリ。ヨリテコノ場合ニモ證明セラレタリ。

定理 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ハ2ト3トノ間ニアリ。

證明 n ヲ正ノ整數トシ

$$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

ト置ケバ

$$f(n)=1+\frac{n}{1!}\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\left(\frac{1}{n}\right)^r+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$\therefore\ f(n)<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

然ルニ

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}<3$$

ヨッテ $f(n)<3$ ナルコトヲ知ル。次ニ $f(n)<f(n+1)$ ヲ證明センニ

$$f(n+1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

ナルヲ以ツテ $f(n+1)$ ノ第三項以下ハ常ニ $f(n)$ ノ之ニ對應スル項ヨリモ大ニシテ且ツ $f(n+1)$ ハ $f(n)$ ニ比シテ最後ノ項一個多ク而カモ正數ナリ。故ニ

$$f(n)<f(n+1)$$

ナリ。然ルニ $f(n)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ニ於テ n ヲ1トセルモノハ2ナリ。ヨツテ次ノ結論ヲ生ズ。

$f(n)$ ハ2ヨリ常ニ大ニシテ，n ガ次第ニ増加スレバ其ノ値モ從ツテ増加スト雖モ3ヲ超ユルコトナシ。

斯ノ如キ場合ニハ n ヲ限リナク大ニトラバ $f(n)$ ノ値ハ或極限値ニ達スルモノナリ。(コノ證明ハ本書ノ程度ヲ脱スルガ故ニ省略ス)

コノ極限値ヲ e ニテ示シ，2.7182……… ナリ。但シ上ノ定理ハ n ヲ正ノ整數トシテ論ゼリ。然レドモ一般ニ n ガ如何ナル數ナリトモ其絶對値サヘ限リナク大キクトラバ常ニ同一ノ極限値ニ達スルモノナリ。

故ニ　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

定理 7. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$　ナリ。

證明　$\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y=e$

ニ於テ y ノ代リニ $\dfrac{1}{x}$ トオケバ，$y\to\infty$ ナルトキハ x ハ0ニ近迫ス

$$\therefore\ \lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

ヨツテ證明セラレタリ。

定理 8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=e^a$ ナリ

證明 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{x}$ トオケバ $x\to\infty$ ナル時ハ又 $z\to\infty$ ナリ。

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{za}=\lim_{z\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right\}^a=e^a$$

ヨツテ證明セラレタリ。

系 $\lim\limits_{x\to 0}(1+xa)^{\frac{1}{x}}=e^a$ ナリ。

定理 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x}=\infty$ ナリ。但シ $a>1$ ナリトス。

證明 本定理ヲ證明スルニハ x ガ整數ナル時ノミニ就キテ論ズレバ可ナリ，何トナレバ今 p ヲ整數，q ヲ分數トシ $x=p+q$ ト置クニ x ガ ∞ ニナルトキハ p モ亦 ∞ ナラザルベカラズ。

故ニ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=\lim_{p\to\infty}\frac{a^{p+q}}{(p+q)}$$
$$=\lim_{p\to\infty}a^q\frac{p}{p+q}\frac{a^p}{p}$$
$$=a^q\lim_{p\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{q}{p}}\lim_{p\to\infty}\frac{a^p}{p}$$

然ルニ $\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{q}{p}}=1$ ナルガ故ニ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=a^q\lim_{p\to\infty}\frac{a^p}{p}$$

サテ a^q ハ有限ナル値 (Finite value) ナルガ故ニ，$\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{a^p}{p}$ ハ ∞ ナルコトヲ證明スレバ可ナリ。

サテ $u_p=\dfrac{a^p}{p}$ ト置クトキハ $\dfrac{u_{p+1}}{u_p}=\dfrac{ap}{p+1}=\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{p}}$ ニシテ

$$\lim_{p\to\infty}\frac{a}{1+\dfrac{1}{p}}=a>1$$

ナルガ故ニ $a>b>1$ ナル b ニ對シテ，$\dfrac{u_{r+1}}{u_r}>b$ ナル不等式ヲ成立セシムルガ如キ p ノ一ツノ値 r ヲ求ムルトキハ，ソレヨリ以上ノ値ニ對シテハ

$$u_r=u_r$$
$$\frac{u_{r+1}}{u_r}>b$$
$$\frac{u_{r+2}}{u_{r+1}}>b$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{u_p}{u_{p-1}}>b$$

辺々相乘ズレバ

$$u_p>b^{p-r}u_r=b^p\frac{u_r}{b^r}$$
$$\therefore\quad u_p>b^p\frac{u_r}{b^r}$$

然ルニ r ガ有限ナル數ナルガ故ニ $\dfrac{u_r}{b^r}$ ハ有限ニシテ b ハ 1 ヨリモ大ナルガ故ニ $\lim\limits_{p\to\infty}b^p=\infty$ ナリ。

$$\therefore\quad \lim_{p\to\infty}u_p=\lim_{p\to\infty}\frac{a^p}{p}=\infty$$

ヨリテ定理ハ證明セラレタリ。

系 1. $a>1$ ナルトキ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_a x}{x}=0$ ナリ。

證明 本定理ニヨリテ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x}=\infty$ ソコデ $a^x=y$ 即チ $x=\log_a y$ ト置ケバ $x\to\infty$ ナルトキ y モ亦 ∞ ナリ。 $\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y}{\log_a y}=\infty$ ナリ。故ニソノ逆數タル $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\log_a y}{y}=0$ ヨリテ證明セラレタリ。

注意 x ガ無限大トナルトキ $\log_a x$ モ亦無限大トナル。然レドモソノ發散ノ程度ニ大ナル徑庭アリ爲メニソノ商ヲトルトキ零トナリタルナリ。

系 2. $a>1$ ナルトキ $\lim\limits_{x\to+0}x\log_a x=0$ ナリ。

證明 定理ニヨリテ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x}=\infty$ ナリ。

コレニ $a^x=\dfrac{1}{y}$ 即チ $x=-\log_a y$ ヲ代入スレバ x ガ 0 ヨリ ∞ ニ進ムトキ y ハ 1 ヨリ 0 ニ減ズ。ヨリテ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x}=-\lim_{y\to0}\frac{1}{y\log_a y}=\infty$$

$$\therefore\quad \lim_{y\to0} y\log_a y=-\frac{1}{\infty}=0$$

系3. $\lim_{x\to0} x^x=1$ ナリ。

證明 $\lim_{x\to0} x^x=\lim_{x\to0} e^{x\log x}$

然ルニ系2ニヨリテ $\lim_{x\to0} x\log x=0$

ヨリテ $\lim_{x\to0} x^x=e^0=1$ 從ツテ證明セラレタリ。

定理10. $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$ ナリ。

證明 $1+x=\dfrac{1}{y}$ トオケバ $x\to\infty$ ナルトキ $y\to0$ ナリ。

サテ $$\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{1-y}}=(y^y)^{\frac{1}{y-1}}$$

然ルニ $\lim_{y\to0} y^y$ ハ前定理系3ニヨリテ1ニシテ $\lim_{y\to0}\frac{1}{y-1}=-1$

ヨリテ $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to0}(y^y)^{\frac{1}{y-1}}=1$

ヨリテ定理ハ證明セラレタリ。

130. **定理11.** x ガ任意ノ正ノ數ナルトキ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=1$ ナリ

證明 (i) $x>1$ ナル場合

$n=1,2,3,$…………ニ對應シテ，$\sqrt[n]{x}$ ノ値ハ夫々 x，$\sqrt[2]{x}$，$\sqrt[3]{x}$………ナリ，而シテコレ等ハ次第ニ減少スルガ故ニ，コノ數列 (Sequence) ハアル有限ナル値ニ近ヅキテ止マルカ，モシクハ際限ナク減少スルカ何レカナリ。

然ルニ n ノ總テノ値ニ對シ $\sqrt[n]{x}>1$ ナルヲ以ツテ際限ナク減少スルコト決シテナシ。ヨリテアル有限ナル極限値ヲトルベシ，コノ値ヲ v トスレバ $v\geqq1$ ナリ。然ルニ $v>1$ ナルコト能ハズ。何トナレバ $\sqrt[n]{x}$ ガ n ノ增大ニ伴ヒテ次第ニ減少シテ遂ヒニ v トナルガ故ニ一般ノ n ニ對シテハ $\sqrt[n]{x}>v$ ナラザルベカラズ。從ツテ $x>v^n$ ナラザルベカラズ。然ルニ v ガ1ヨリ大ナリトスレバ $\lim_{n\to\infty}v^n=\infty$ 卽チ x ガ ∞ ナラザルベカラズ。コレ假定ニ反ス。ヨリテ $\lim\sqrt[n]{x}=v=1$ ナリ。

(ii) $0<x<1$ ナル場合

$x=\dfrac{1}{y}$ ト置ケバ $y>1$ ニシテ且ツ $\sqrt[n]{x}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{y}}$

然ルニ (i) ニヨリ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y}=1$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{y}}=1$$

ヨリテ x ガ1ヨリ大ナル場合及ビ1ヨリ小ナル場合ノ何レニモ定理ハ成リ立ツコトヲ知ル 又 $x=1$ ナル場合ハ證明ヲ要セズシテ明カナリ。

定理12. 二ツノ數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_n\cdots\cdots$ 及ビ $b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots,b_n\cdots\cdots$ アリ。$\lim a_n=0$, $\lim b_n=0$ ニシテ且ツ $b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots$ ハ次第ニ減少スルモノナリトス。然ルトキモシ $\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$ ガ極限値ヲ有スルトキハ，$\dfrac{a_n}{b_n}$ モ又極限値ヲ有シ而カモソノ値相等シ。

證明 (i) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$ ガ有限確定ノ極限値 v ヲ有スル場合ニ就キテ證明スベシ. コノ場合ニ於テハ定義ニヨリテ

$$v-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}<v+\varepsilon$$

玆ニ ε ハ充分小ナル正ノ數ナリトス。

シカルニ假定ニヨリテ $b_n>b_{n+1}$ ナルガ故ニ b_n-b_{n+1} ハ正ナリ、從ツテ分母ヲ拂フモソノ不等號ノ向キハ變ゼズ。

ヨリテ $(v-\varepsilon)(b_n-b_{n+1})<a_n-a_{n+1}<(v+\varepsilon)(b_n-b_{n+1})$…………………(1)

コノ不等式ハ n ノアル値ヨリ大ナル凡テノ n ニ對シテ成立ス。ヨリテ n ヲ $n+1,n+2,n+3,\cdots\cdots n+p$ ト置ケバ夫々

$$\left.\begin{array}{l}(v-\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2})<a_{n+1}-a_{n+2}<(v+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{n+2})\\(v-\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+3})<a_{n+2}-a_{n+3}<(v+\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+3})\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(v-\varepsilon)(b_{n+p-1}-b_{n+p})<a_{n+p-1}-a_{n+p}<(v+\varepsilon)(b_{n+p-1}-b_{n+p})\end{array}\right\}\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) ヲ邊々相加フレバ

$$(v-\varepsilon)(b_n-b_{n+p})<a_n-a_{n+p}<(v+\varepsilon)(b_n-b_{n+p})$$

卽チ $(v-\varepsilon)\left(1-\dfrac{b_{n+p}}{b_n}\right)<\left(\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+p}}{b_n}\right)<(v+\varepsilon)\left(1-\dfrac{b_{n+p}}{b_n}\right)$ $(\because\ b_n>0)$

サテ $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ ナルガ故ニ P ヲ適當ニ大ニトラバ P ヨリ大ナル凡テノ p ニ對シテ $\dfrac{a_{n+p}}{b_n}<\varepsilon$, $\dfrac{b_{n+p}}{b_n}<\varepsilon$ ガ成立ス。故ニ上ノ不等式ノ前半ヨリ

$$(v-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{a_n}{b_n}+\varepsilon$$

即チ
$$\varepsilon\left\{\varepsilon-(v+2)\right\}<\frac{a_n}{b_n}-v \quad\cdots\cdots(3)$$

同樣ニ後半ヨリ
$$\frac{a_n}{b_n}-\varepsilon<(v+\varepsilon)(1+\varepsilon)$$

即チ
$$\frac{a_n}{b_n}-v<\varepsilon\left\{\varepsilon+(v+2)\right\} \quad\cdots\cdots(4)$$

(3), (4) ヨリ
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=v$$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=\infty$ ナル場合ヲ證明スベシ. コノ場合ニハ如何ニ大ナル正ノ數 G ヲトルモ, n ガアル値ヨリ大ナル時ハ, $\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}>G$ ガ成立ス.

然ルニ $b_n-b_{n+1}>0$ ナルガ故ニ分母ヲ拂フモ不等式ノ向キハ變ゼズ。故ニ

$$a_n-a_{n+1}>G(b_n-b_{n+1}) \quad\cdots\cdots(5)$$

ソコデ前ノ場合ト同ジク n ノ代リニ $n+1, n+2, \cdots\cdots n+p$ ト置ケバ夫々

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1}-a_{n+2}>G(b_{n+1}-b_{n+2}) \\ a_{n+2}-a_{n+3}>G(b_{n+2}-b_{n+3}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n+p-1}-a_{n+p}>G(b_{n+p-1}-b_{n+p}) \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots(6)$$

(5), (6) ヲ邊々相加フレバ

$$a_n-a_{n+p}>G(b_n-b_{n+p})$$

然ルニ
$$\lim_{p\to\infty} a_{n+p}=0, \qquad \lim_{p\to\infty} b_{n+p}=0$$

故ニ (i) ト同樣ニ考フレバ $\dfrac{a_n}{b_n}>G(1-\varepsilon+\dfrac{\varepsilon}{G})$ ナル關係ヲ生ズ

コレ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\infty$ ナルコトヲ示スモノナリ。

(iii) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=-\infty$ ナル場合ニモ定理ガ成立スルト雖モ證明ヲ省クベシ

定理 13. 二ツノ數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n\cdots\cdots$ 及ビ $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, b_n\cdots\cdots$ アリ, $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ ニシテ且ツ $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ ハ次第ニ增加スルモノナリトス. 然ルトキモシ $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ ハ極限値ヲ有スルトキハ, $\dfrac{a_n}{b_n}$ モ亦極限値ヲ有シ且ツソノ値相等シ

證明 (i) $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ ガ有限確定ナル極限値 v ヲ有スル場合ヲ證明スベシ。コノ場合ニハ定義ニヨリ ε ヲ如何ニ小ナル正數トスルモ n ガアル値ヨリ大ナル時ハ

$$v-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<v+\varepsilon$$

ガ成立ス。然ルニ $b_{n+1}-b_n$ ハ假定ニヨリテ正ナルガ故ニ兩邊ニコレヲ乘ズレバ

$$(v-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(v+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$$

n ヲ $n+1, n+2, \cdots\cdots n+p$ ニ置キ換ヘレバ

$$(v-\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+1})<a_{n+2}-a_{n+1}<(v+\varepsilon)(b_{n+2}-b_{n+1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(v-\varepsilon)(b_{n+p}-b_{n+p-1})<a_{n+p}-a_{n+p-1}<(v+\varepsilon)(b_{n+p}-b_{n+p-1})$$

邊々相加フレバ

$$(v-\varepsilon)(b_{n+p}-b_n)<a_{n+p}-a_n<(v+\varepsilon)(b_{n+p}-b_n)$$

n 及ビ p ヲ充分大ニスレバ $b_n>0$, $b_{n+p}>0$ ナルガ故ニ

$$(v-\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+p}}\right)<\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}-\frac{a_n}{b_{n+p}}<(v+\varepsilon)\left(1-\frac{b_n}{b_{n+p}}\right)$$

然ルニ假定ニヨリテ $\lim_{p\to\infty} b_{n+p}=\infty$

$$\therefore \quad (v-\varepsilon)<\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}<(v+\varepsilon)$$

コレ即チ $\dfrac{a_n}{b_n}$ ノ極限値ハ v ナルコトヲ示スモノナリ。

(ii) $\lim\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\infty$ ナル場合 コノ場合ニハ前ノ定理ニ於ケルト同樣ノ證明ヲナス時ハ, アル n ノ値ニ對シテ

$$a_{n+p}-a_n>G(b_{n+p}-b_n)$$

ガ成立ス。然ルニ p ガ充分大ナル時ハ b_{n+p} ノ値ハ必ズ正ナルガ故ニ

$$\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}>\frac{a_n}{b_{n+p}}+G\left(1-\frac{b_n}{b_{n+p}}\right)$$

然ルニ假定ニヨリテ　$\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{a_n}{b_{n+p}}=0,\ \lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{b_n}{b_{n+p}}=0$

ナルガ故ニ，p ヲ適當ニ大ニスレバ次ノ式ガ成立ス

$$\frac{a_{n+p}}{b_{n+p}}>G(1-\varepsilon)$$

コレ $\dfrac{a_{n+p}}{b_{n+p}}$ ガソノ極限値トシテ ∞ ヲ與フル事ヲ示スモノナリ。

(iii) $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ ノ極限値ハ $-\infty$ ナルトキモ定理ハ成立スレドモ證明ヲ省クベシ。

注意 コノ定理ハ前定理ト共ニ要用ナリ。

例 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n}=0$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n\cdots\cdots$ ヲ $\log 1, \log 2, \cdots\cdots, \log n\cdots\cdots$ トシ，$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ ヲ $1, 2, \cdots\cdots, n$ トスレバ b ナル數列ハ次第ニ增加シ且ツ

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$$

$\lim\limits_{n\to\infty}b=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ ナルガ故ニ定理ニヨリ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)-\log n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\{\log(n+1)-\log n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\log 1=0$$

ヨリテ證明セラレタリ。

例 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$ ヲ求メヨ。

解 $\sqrt[n]{n!}=y$ トスレバ $\log y=\dfrac{1}{n}\log n!=\dfrac{\log n!}{n}$

ソコデ $a_1, a_2\cdots\cdots a_n$ ヲ，$\log 1!, \log 2!, \cdots\cdots, \log n!\cdots\cdots$ トシ，$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n\cdots\cdots$ ヲ $1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$ トスレバ

$$\lim_{n\to\infty}\log y=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)!-\log n!}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)=\infty$$

ヨリテ　$\lim\log y=\infty$ 從ツテ y モ ∞ ナリ。

即チ　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ ナリ。

注意 代數上起リ得ベキ不定形ハ次ノ七種ナリ。

(1) $\dfrac{0}{0}$ ナル形　128 節例 1, 例 2, 129 節定理 5, 定理 12, 等コレニ屬シ

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ ナル形　127 節例題, 129 節定理 9, 同系 1, 定理 13, 等コレニ屬シ

(3) $0\times\infty$ 又ハ $\infty\times 0$ ナル形　定理 9, 系 2 コレニ屬シ

(4) ∞^0 ナル形　定理 10 コレニ屬シ

(5) 1^∞ ナル形　定理 6, 定理 7, 定理 8 コレニ屬シ

(6) 0^0 ナル形　定理 9 系 3 コレニ屬シ

(7) $\infty-\infty$ ナル形第十一編問題 4, 5, 6, 8 コレニ屬ス

第十一編　問　題

次ノ諸問題ノ極限値ヲ求メヨ。

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$　2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-5x+6}$　3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a-x}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\{2x-\sqrt{x^2+3}\}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\{2x-\sqrt{x^2+3}\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-\sqrt{x^2+3})(2x+\sqrt{x^2+3})}{2x+\sqrt{x^2+3}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-3}{2x+\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-\dfrac{3}{x}}{2+\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}}=\infty$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\}$　6. $\lim\limits_{x\to\infty}\{x+1-\sqrt{x^2-2x+3}\}$

7. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^n-x^n}{a^2-x^2}$　8. $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

9. 定理 13 ヲ用ヒテ定理 9 ヲ證明セヨ。

10. x ガ有限ナル數ナリトシ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=0$ ナルコトヲ證セヨ。

解　x ガ有限ナルガ故ニ $x<k<n$ ヲ滿足スル正ノ整數 k ガ必ズ存在ス。

$$\therefore\quad \frac{x^n}{n!}=\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\,\frac{x}{k}\,\frac{x}{k+1}\cdots\cdots\frac{x}{n}$$

$$\therefore\quad \frac{x^n}{n!}<\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{x}{k}\right)^{n-k+1}$$

然ルニ $x<k$ ナルガ故ニ $\dfrac{x}{k}<1$　ヨツテ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{k}\right)^{n-k+1}=0$

ヨリテ證明セラレタリ。

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$ ナルコトヲ證セヨ。

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a^2}{4x^2}\right)^{x}$ ヲ求ム。

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a^2}{4x^2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{a^2}{4x^2}\right)^{-\frac{4x^2}{a^2}}\right\}^{-\frac{a^2}{4x}}$

然ルニ前題ニヨリテ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a^2}{4x^2}\right)^{-\frac{4x^2}{a^2}}=e$

又　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a^2}{4x}=0$

ヨリテ求ムル極限値ハ $e^0=1$ ナリ。

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\log_e a$　ナルコトヲ證セヨ。

解　$y=a^x-1$ ト置ケバ $x=\log_a(1+y)$ ニシテ $x\to 0$ ナラバ $y\to 0$ ナリ，

故ニ

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_a e}=\log_e a \text{ ナリ。}$$

第十二編　無限級數論

第一章

概論

131.　級數 (Series) トハ，アル一定ノ法則ニ從ヒ且ツ一定ノ順序ニ並ビタル一列ノ數ニシテ，ソノ項數ノ有限ナルモノヲ有限級數 (Finite series) トイヒ，ソノ項數ノ無限ナルモノヲ無限級數 (Infinite series) トイフ。而シテ有限級數ハ讀者已ニ初等代數學ニテソノ大要ヲ習得セラレタルガ故ニ，本書ニテハ總和ヲ求ムル時ノ外コレニ觸レズ專ラ無限級數ニ就キテ研究セントス。

今 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots$ ヲアル一定ノ法則ニ從ヒテ並ビタル數トシ，且ツ之レ等ノ項數ガ無限ニアルモノトス。コノ場合

$$S_1=u_1$$
$$S_2=u_1+u_2$$
$$S_3=u_1+u_2+u_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$$

トスルトキ n ガ次第ニ增加スルニ從ヒ次ノ三ツノ場合アリ。

(i)　S_n ガ n ヲ充分大ナラシムル時，漸次アル一定ナル有限ノ値 S ニ近迫ス換言スレバ吾人ノ欲スル如何ニ小ナル正ノ數ヨリモ倘 S ト S_n トノ差ヲシテ小ナラシムルコトヲ得ル場合，即チ記號的ニ

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

ナル時コノ無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

ハ收歛 (Convergent) ナリト謂ヒ，或ハコノ級數ハ S ニ收斂スルトイフ。而シテ S ヲソノ總和トイフ。

注意 無限級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ノ和トハ $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$ ナル和即チ S_n ニ於テ n ヲ充分大ニセル極限値ヲイフ。即チ無限級數ノ和ハ S_n ノ極限値ナリ普通ノ意味ニテノ和ニハアラズ。故ニ無限級數ノ和ヲ求ムルニ當リテハ妄リニソノ項ノ順序ヲ變ズベカラズ。

(ii) S_n ガ n ヲ充分大ナラシムル時，漸次ソノ絶對値ガ增大シ吾人ノ選ベル如何ニ大ナル正ノ數ヨリモ尙大ナル時即チ

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$$

ナル時，コノ無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

ハ發散 (Divergent) ナリト謂フ。

(iii) S_n ガ n ガ增加スルトキ，無限大ニモナラズ又一定ノ有限値ヲモトラズシテ n ノ變化ト共ニ常ニ變化スル時，コノ無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

ガ振動 (Oscillate) ナリト謂フ。

132. 無限級數ノ中最モ簡單ナルモノハ次ノ等比級數ナリ。

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n+\cdots\cdots$$

コノ級數ニ就イテ少シク詳細ニ說明センニ

(i) $-1<r<1$ ナルトキ

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

然ルニ $-1<r<1$ ナルガ故ニ $\lim_{n\to\infty} r^n=0$, 故ニ $\lim_{n\to\infty} S_n==\frac{a}{1-r}$ ナリ。故ニ $-1<r<1$ ナル時ハコノ級數ハ $\frac{a}{1-r}$ ナル和ヲ有スル收歛級數ナリ。

(ii) $r=1$ ナルトキ

$$S_n=a(1+1+1+\cdots\cdots+1)=an$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n=\infty$$

ヨリテコノ場合ニハ與ヘラレタル級數ハ發散ナリ。

(iii) $r>1$ モシクハ $r<-1$ ナル時

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

然ルニ $|r|>1$ ナルガ故ニ $\lim_{n\to\infty} r^n=\pm\infty$ トナル。故ニ

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\pm\infty$$

ヨリテ $r>1$ ナル時モ $r<-1$ ナル時モ共ニコノ級數ハ發散ナリ。

(iv) $r=-1$ ナルトキ

$$S_n=a(1-1+1-1+1\cdots\cdots)$$

コノ場合ニハ偶數個ダケトラバソノ和ハ零ニシテ，奇數個ダケトラバ a ナリ。即チ n ハ如何ナル正ノ整數ナリトモ

$$S_{2n}=0,\qquad S_{2n+1}=a$$

故ニコノ級數ハ有限ナル値ヲトルト雖モ，n ノ變化ニヨリテソノ和ヲ異ニス。ヨリテコノ級數ハ振動ナリ。

133. 無限級數

$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ニ於テ第 n 項ヨリ後ノ級數

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots$$

ヲコノ級數ノ殘餘 (Remainder, 又ハ Rest) トイヒ，之ヲ R_n ト記號ス。然ルトキハ百三十一節ノ定義ヨリ直チニ次ノ定理ヲ得ベシ。

基本定理 1. 無限級數

$u_1+u_2+u_3\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ハ收歛ナルガ爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ n ヲ充分大ニスルトキ $|R_n|$ ガ吾人ノ欲スル如何ナル正ノ數ヨリモ尙小ナルコトナリ，即チ $\lim_{n\to\infty} R_n=0$ ナルコトナリ。

系 收歛級數ニアリテハ n ヲ充分大キクトラバソレヨリ以後ノ項ハ漸次減少シ初メ，遂ヒニ $n\to\infty$ トナルトキハ 0 トナラザルベカラズ。即チ

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0$$

ナラザルベカラズ。然ラザレバ $\lim_{n\to\infty} R_n$ ガ零トナラザルガ故ナリ。

注意　コノ定理ハ與ヘラレタル級數ハ收斂スルタメノ必要條件ナルモ充分條件ニハアラズ。故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ ガ零ナレバトテ直チニコノ級數ハ收斂ナリト斷ズベカラズ。然リト雖モ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ナル時ハ與ヘラレタル級數ハ收斂セザルモノト斷定スルコトヲ得ベシ。特ニ正項ノミヨリ成ル級數，所謂正項級數ニアリテハ，收斂スルカ，發散スルカノ二ツノ場合ニ外ナラザルガ故ニ，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ ナルコトアラバ直チニ發散ナリトイフテ可ナリ。

基本定理 2. 無限級數ガ收斂ナルカ，發散ナルカ又ハ振動ナルカヲ判定スル爲メニハ其ノ級數ノ初メノ項ヨリ數ヘテ有限個ノ項ヲ取リ去ルモ差支ヘナシ。

證明　級數ノ n 項ノ和ナル S_n ハソノ級數ガ收斂スルトセザルトニ關セズ常ニ有限ナル値ナリ。故ニ之レ等ノ項ヲ省クモ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ガ單ニ有限ナル數值ダケ增減セラルヽニ過ギザルベク，從ツテソノ收斂或ハ發散等ノ判定ニハ少シモ影響ヲ及ボスコトナシ。

第　二　章

正　項　級　數

134.　**定理 1.** 無限級數ノ各項ハ悉クアル有限ノ數(如何ニ小ナル有限數ナリトモ) ヨリ大ナル時ハ，コノ級數ハ發散ナリ。

證明　$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ニ於テ各項ハアル有限ノ數 a ヨリモ常ニ大ナリトスレバ

$$S_n > na$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} na = \infty$$

ヨリテ證明セラレタリ。

例　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1+x}{2+x}+\dfrac{1+2x}{2+2x}+\cdots\cdots+\dfrac{1+(n-1)x}{2+(n-1)x}+\cdots\cdots$ (但シ $x>0$) ニ於テ一般項ト $\dfrac{1}{2}$ トノ差ヲトル時ハ，

$$\frac{1+(n-1)x}{2+(n-1)x}-\frac{1}{2}=\frac{(n-1)x}{2\{2+(n-1)x\}}$$

故ニ $n>1$ ナル時ハ(卽チ初項以外ノ凡テノ項ニ於テハ) 各項ハ悉ク $\dfrac{1}{2}$ ヨ

リ大ナリ。ヨリテコノ級數ハ發散ナリ。

系　$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ハ發散級數ニシテ，k ハアル有限ナル數ナルトキハ，$ku_1+ku_2+\cdots\cdots+ku_n+\cdots\cdots$ モ亦發散ナリ。

定理 2. 無限級數ニ於テ後項ノ前項ニ對スル比ハ n ノ如何ニ關セズ常ニ 1 ヨリ小ナルトキハコノ級數ハ收斂ナリ。卽チ

$$\frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_2}\cdots\cdots,\ \frac{u_n}{u_{n-1}},\ \frac{u_{n+1}}{u_n},\ \cdots\cdots$$

ガ n ノ如何ニ關セズ常ニ 1 ヨリ小ナル k ナル數ヨリモ尙小ナル時ハ與ヘラレタル級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ハ收斂ナリ。

證明　$S=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$

$$=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_1}+\cdots\cdots+\frac{u_n}{u_1}+\cdots\cdots\right)$$

$$=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\,\frac{u_2}{u_1}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{u_n}{u_{n-1}}\,\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\cdots\frac{u_3}{u_2}\,\frac{u_2}{u_1}+\cdots\cdots\right)$$

$$<u_1(1+k+k^2+\cdots\cdots+k^{n-1}+\cdots\cdots)=u_1\frac{1}{1-k}$$

卽チ　$S<u_1\dfrac{1}{1-k}$

ヨリテ S ハ有限ナル數ナリ。而シテ正項級數ナルガ故ニ振動スルコトナシ。故ニ收斂ナリ。

定理 3. 無限級數ニ於テ後項ノ前項ニ對スル比ハ 1 ヨリモ大ナル時ハ發散ナリ。

證明　假定ニヨリテ

$\dfrac{u_2}{u_1},\ \dfrac{u_3}{u_2},\ \cdots\cdots\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\cdots\cdots$ ハ n ノ如何ニ關セズ常ニ $k(k>1)$ ヨリモ大ナルガ故ニ

$$u_1<u_2<u_3<\cdots\cdots<u_n<u_{n+1}<\cdots\cdots$$

ナリ。

ヨリテ　　$S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n>nu_1$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n > \lim_{n\to\infty} nu_1 = \infty$$

ヨリテ定理ハ證セラレタリ。

注意 1. 前二條ノ定理ヲ一括スレバ $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ハ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ ナラバ收斂ニシテ，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ ナラバ發散ナリ。コレ佛國ノ數學家だらんべる (D' Alembert 1717－1783) ノ發見ニカヽルモノナルガ故ニだらんべるノ定理トイフ。正項級數ノ收斂性ヲ判定スルニ屢々用ヒラルヽモノナリ。

注意 2. モシ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$ ナルトキハコノ方法ニテハ判定スルコト能ハズ。

例 1. $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。

解 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1} \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1$$

ヨリテコノ級數ハ收斂ナリ。

例 2. $\dfrac{1!}{x}+\dfrac{2!}{x^2}+\dfrac{3!}{x^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n!}{x^n}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。(但シ $x>0$)

解 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{x} \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1$$

ヨツテコノ級數ハ發散ナリ。

例 3. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。

解 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1} \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$$

ヨリテコノ級數ハだらんべるノ方法ニテハ判定スルコトヲ得ズ。(百三十六節參照)

135. 定理 4. 二ツノ無限級數

$$A=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$
$$B=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

アル時

(i) A ナル級數ハ收斂ニシテ且ツ B ナル級數ノ各項ハ之レニ對應スル A ノ各項ヨリモ小ナル時ハ，B ガ收斂ナリ。

(ii) A ナル級數ハ發散ニシテ且ツ B ナル級數ノ各項ハ之レニ對應スル A ノ各項ヨリモ小ナラザル時ハ，B ハ發散ナリ。

(iii) A ナル級數ハ收斂ニシテ且ツ B ナル級數ノ各項ハ悉クアル一定ノ數ヨリモ大ナラザルトキハ級數

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots \text{ ハ收斂ナリ。}$$

(iv) A ナル級數ハ發散ニシテ且ツ B ナル級數ノ各項ハ悉クアル一定ノ數ヨリモ小ナラザルトキハ級數

$$u_1v_2+u_2v_2+u_3v_3+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots \text{ ハ發散ナリ。}$$

136. 定理 5. 級數 $\dfrac{1}{1^p}+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^p}+\cdots\cdots$ ニ於テ $p>1$ ナラバ收斂ニシテ $p\leqq 1$ ナラバ發散ナリ。

證明 (i) $p>1$ ナル場合

與ヘラレタル級數ヲ群ニ分ツ。即チ

第一群	$\dfrac{1}{1^p}$	一項
第二群	$\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}$	二項
第三群	$\dfrac{1}{4^p}+\dfrac{1}{5^p}+\dfrac{1}{6^p}+\dfrac{1}{7^p}$	四項
第四群	$\dfrac{1}{8^p}+\dfrac{1}{9^p}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{14^p}+\dfrac{1}{15^p}$	八項

…………………………………

サテ第二群ニ於テハ $\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}<\dfrac{2}{2^p}=\dfrac{1}{2^{p-1}}$

第三群ニ於テハ $\dfrac{1}{4^p}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{7^p}<\dfrac{4}{4^p}=\dfrac{1}{2^{2p-2}}$

第四群ニ於テハ $\dfrac{1}{8^p}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{15^p}<\dfrac{8}{8^p}=\dfrac{1}{2^{3p-3}}$

…………………………………

ヨリテ與ヘラレタル級數ハ

$1+\dfrac{1}{2^{p-1}}+\dfrac{1}{2^{2p-2}}+\dfrac{1}{2^{3p-3}}+\cdots\cdots$ ナル等比級數ヨリモ小ナリ。然ルニコノ級數ノ公比ハ $\dfrac{1}{2^{p-1}}$ ナルガ故ニ $\dfrac{1}{2^{p-1}}<1$ ナルトキ，從ツテ $p>1$ ナルトキハ收斂ナリ。故ニソレヨリモ小ナル元ノ級數ハ收斂ナリ。

(ii) $p=1$ ナル場合

コノ場合ニハ與ヘラレタル級數ハ

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

第一群 $=1$ 第二群 $=\frac{1}{2}$

第三群 $=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 第四群 $=\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

....

以上ノ如キ群ニ分ツ時ハ，各群ハ常ニ$\frac{1}{2}$ヨリモ大ナリ。

即チ $$S>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

ヨリテ定理1ニ從ヒテ發散ナリ。

(iii) $p<1$ ナルトキ

$$2^p<2,\quad 3^p<3,\quad 4^p<4,\cdots\cdots,n^p<n\cdots\cdots$$

ナルガ故ニ

$$S>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

然ルニ右邊ハ(ii)ニヨリテ發散ナリ。從ツテ與ヘラレタル級數ハ發散ナリ。

注意 1. $p=1$ ナル場合ノ級數ヲ調和級數 Harmonic series トイヒ，百三十四節例3ニ揭ゲタルモノナリ。而シテだらんべるノ方法ニテハ判別スルコト能ハザリシモノナリ。

注意 2. 調和級數ノ最初ノ百萬項ノ和ハ漸ク 21 ニ達ス。故ニ夫レ以後ノ項ノ和ハ無限大ニナルモノナリ。

例 1. $\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ ハ發散級數ナリ。何トナレバ Harmonic series ノ最初ノ14項ダケヲ省キタルモノナレバナリ。

例 2. $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$ ハ收斂級數ナリ。何トナレバ $p=3$ ニ該當スレバナリ。

137. **定理 6.** 無限級數ニ於テ殘餘 R_n ガ n ノ如何ニ關セズ常ニアル有限ナル數(如何ニ小ナリトモ)ヨリモ大ナル時ハ必ズ發散ナリ。

證明 基本定理1ヲ犯スガ故ニ收斂セザルコトヲ知ル。然ルニ正項級數ニアリテハ振動スルコト決シテナキガ故ニ發散ナリ。

例 $\frac{1+1}{1+1^2}+\frac{1+2}{1+2^2}+\cdots\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。

解 相隣レル二項ノ差

$$\frac{1+n}{1+n^2}-\frac{1+(n+1)}{1+(n+1)^2}=\frac{n^2+3n}{(1+n^2)\{1+(n+1)^2\}}$$

コノ分數ハ $n>1$ ナル故ニ必ズ正ノ數ナリ。ヨリテコノ級數ノ各項ハ單調(Monotone)ニ減少スル級數ナリ。サテ

$$R_n=\frac{1+(n+1)}{1+(n+1)^2}+\frac{1+(n+2)}{1+(n+2)^2}+\cdots\cdots+\frac{1+2n}{1+(2n)^2}+\cdots\cdots$$

而シテ R_n ガ第$(n+1)$項ヨリ第$2n$項マデノ和ヨリ大ナルガ故ニ，勿論次ノ不等式アリ。

$$R_n>\frac{1+2n}{1+(2n)^2}\times n$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}R_n\geqq\lim_{n\to\infty}\frac{n+2n^2}{1+4n^2}=\frac{1}{2}\neq 0$$

ヨリテコノ級數ハ發散ナリ。

137. **定理 7.** $d_1+d_2+d_3+\cdots\cdots+d_n+\cdots\cdots$ ハ發散級數ナルトキ凡テノ n ニ對シテ

$$\frac{1}{d_n}\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{1}{d_{n+1}}\geqq A\quad (A>0)$$

ナル時ハ

$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ナル級數ハ收斂ニシテ

$$\frac{1}{d_n}\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{1}{d_{n+1}}<0$$

ナル時ハ

$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ ナル級數ハ發散ナリ。

證明 (i) **前半ノ證明**

假定ニヨリ凡テノ n ニ對シテ $\frac{1}{d_n}\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{1}{d_{n+1}}\geqq A$ ナルガ故ニ

$$\frac{u_1}{d_1}-\frac{u_2}{d_2}\geqq Au_2$$

$$\frac{u_2}{d_2}-\frac{u_3}{d_3}\geqq Au_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{n-1}}{d_{n-1}}-\frac{u_n}{d_n}\geqq Au_n$$

逐々相加フレバ

$$\frac{u_1}{d_1}-\frac{u_n}{d_n}\geqq A(u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n)$$

故ニ勿論

$$\frac{u_1}{d_1}\geqq A(u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n)$$

$$\therefore\quad \frac{u_1}{Ad_1}\geqq u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$$

然ルニ u_1, A, d_1, ハ有限ナル數ナリ。故ニ $u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$ ハ n ノ如何ナル値ニ對シテモ有限ナリ。ヨリテ無限級數

$$u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$$

ハ收歛ナリ。然ルニコレハ與ヘラレタル級數ヨリ僅カニ最初ノ項ノミヲ省ケルモノナリ。ヨツテ全體ノ級數亦收歛ナリ。

(ii) 後半ノ證明

n ノ凡テニ對シテ $\dfrac{1}{d_n}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-\dfrac{1}{d_{n+1}}<0$ ナルガ故ニ

$$\frac{u_n}{d_n}<\frac{u_{n+1}}{d_{n+1}}$$

コノ不等式ニ n ノ代リニ 1, 2, 3, ……… ト置クトキハ

$$\frac{u_1}{d_1}<\frac{u_2}{d_2}$$

$$\frac{u_2}{d_2}<\frac{u_3}{d_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_n}{d_n}<\frac{u_{n+1}}{d_{n+1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

ヨリテ $\quad \dfrac{u_1}{d_1}<\dfrac{u_2}{d_2}<\dfrac{u_3}{d_3}<\cdots\cdots<\dfrac{u_n}{d_n}<\dfrac{u_{n+1}}{d_{n+1}}<\cdots\cdots$

ソコデ $0<A<\dfrac{u_1}{d_1}$ ナル不等式ヲ滿足スル A ヲ任意ニ定ムル時ハ

$$Ad_1<u_1$$

$$Ad_2<u_2$$

$$Ad_3<u_3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Ad_n<u_n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

逐々相加フレバ

$A(d_1+d_2+d_3+\cdots\cdots)<u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 然ルニ假定ニヨリテ $d_1+d_2+\cdots\cdots+d_n+\cdots\cdots$ ハ發散ナルガ故ニ $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ガ發散ナリ[*]。

注意 1. コノ定理ニ用フル發散級數 $d_1+d_2+d_3+\cdots\cdots+d_n+\cdots\cdots$ ハ多クノ場合 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ 若シクハ單ニ $1+1+1+\cdots\cdots+1+\cdots\cdots$ ヲ用フ。蓋シ何レモ發散スル級數ナレバナリ。

注意 2. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ ヲ上ノ定理ニ代入スルニ $d_n=\frac{1}{n}$ ナルガ故ニ

$$\frac{1}{d_n}\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{1}{d_{n+1}}=n\frac{u_n}{u_{n+1}}-(n+1)=n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1$$

ヨリテ次ノ定理アリ。

定理 8. $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ナル無限級數ハ

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1 \quad ナルトキ收歛ニシテ$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)<1 \quad ナルトキ發散ナリ[◎]。$$

例 $1+\dfrac{1+\alpha}{1+\beta}+\dfrac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{(1+\beta)(2+\beta)}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。

解 $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\dfrac{n+\beta}{n+\alpha}-1\right)=n\left(\dfrac{\beta-\alpha}{n+\alpha}\right)=\dfrac{\beta-\alpha}{1+\dfrac{\alpha}{n}}$

---

*コノ定理ハくんめる (Kummer 1810—1893) ノ創見ニカヽルモノナリ。

◎らーべ (Raabe 1801—1859) ノ定理トイフ。

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\beta-\alpha}{1-\dfrac{\alpha}{n}}=\beta-\alpha$$

$\therefore$　$\beta-\alpha>1$　ナルトキ收斂ニシテ

$\beta-\alpha<1$　ナルトキ發散ナリ。

モシ $\beta-\alpha=1$ 即チ $\beta=1+\alpha$ ナルトキハ Raabe ノ方法ハ無效ニ歸ス。然レドモコノ場合ハ次ニ述ブル他ノ方法ニテ判定スベシ。即チ $\beta=1+\alpha$ ヲ與ヘラレタル級數ニ代入スレバ

$$1+\frac{\alpha+1}{\alpha+2}+\frac{\alpha+1}{\alpha+3}+\frac{\alpha+1}{\alpha+4}\cdots\cdots$$

$$=1+(\alpha+1)\left(\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\alpha+3}+\frac{1}{\alpha+4}+\cdots\cdots\right)$$

α ハ整數ナル時ハ發散ナルコト明カナリ。サテ α ガ整數ナラザルトキハ，α ノ整數部分ヲ i トスレバ $\alpha<i+1$ ナルガ故ニ

$$\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\alpha+3}+\frac{1}{\alpha+4}+\cdots\cdots$$

$$>\frac{1}{i+3}+\frac{1}{i+4}+\frac{1}{i+5}+\cdots\cdots$$

然ルニ右邊ノ級數ハ定理5ニヨリテ發散ナリ。從ツテ左邊モ亦發散ナリ。

第一章　問　題

次ノ各級數ハ收斂ナルカ又ハ發散ナルカヲ判定セヨ。

1. $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\dfrac{1}{4.5}+\cdots\cdots\cdots$

2. $\dfrac{4}{3.2}+\dfrac{5}{4.3}+\dfrac{6}{5.4}+\cdots\cdots\cdots$

3. $\dfrac{4}{6.2}+\dfrac{5}{7.2^2}+\dfrac{6}{8.2^3}+\cdots\cdots\cdots$

4. $1+\dfrac{1}{2.2!}+\dfrac{2}{3.3!}+\dfrac{3}{4.4!}+\cdots\cdots\cdots$

5. $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\dfrac{1}{3.4.5}+\cdots\cdots\cdots$

6. $\dfrac{1!}{10}+\dfrac{2!}{10^2}+\dfrac{3!}{10^3}+\cdots\cdots\cdots$

7. $1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{4}x^3+\cdots\cdots\cdots$　　但シ $x>0$

8. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1.3}{2.4}+\dfrac{1.3.5}{2.4.6}+\dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\cdots\cdots\cdots$

9. $\dfrac{1.2}{3.4.5}+\dfrac{2.3}{4.5.6}+\dfrac{3.4}{5.6.7}+\cdots\cdots\cdots$

10. $\dfrac{a+x}{b+x}+\left(\dfrac{2a+x}{2b+x}\right)^2+\left(\dfrac{3a+x}{3b+x}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$

但シ a, b, x ハ共ニ正ナリトス。

解　今 $\dfrac{a+x}{b+x}+\dfrac{(a+x)^2}{(b+x)^2}+\dfrac{(a+x)^3}{(b+x)^3}+\cdots\cdots\cdots$

ナル級數ヲ作ルニ，コノ級數ハ $\dfrac{a+x}{b+x}<1$ ナルトキ收斂シ，$\dfrac{a+x}{b+x}\geqq 1$ ナルトキ發散ナリ。換言スレバ $b>a$ ナラバ收斂ニシテ，$b\leqq a$ ナラバ發散ナリ。然ルニ $\dfrac{2a+x}{2b+x}$，$\dfrac{3a+x}{3b+x}$ …… ハ $b\gtreqqless a$ ナルニ從ヒテ夫々ハ必ズ $\dfrac{a+x}{b+x}$ ヨリモ小ナルカ相等シキカ，又ハ大ナリ。故ニ與ヘラレタル級數ハ $b>a$ ナルトキハ收斂ニシテ $b\leqq a$ ナルトキハ發散ナリ。

11. $\dfrac{a+x}{b+x}+\dfrac{(a+x)(2a+x)}{(b+x)(2b+x)}+\dfrac{(a+x)(2a+x)(3a+x)}{(b+x)(2b+x)(3b+x)}+\cdots\cdots\cdots$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n!}}=\frac{x}{\sqrt{1!}}+\frac{x^2}{\sqrt{2!}}+\frac{x^3}{\sqrt{3!}}+\cdots\cdots\cdots$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ar^n}{n}$　　但シ a, r ハ共ニ正ナリトス。

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$

15. $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{2^2}{3}+\dfrac{2^3}{4}+\dfrac{2^4}{5}+\cdots\cdots\cdots$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots\cdots+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots\cdots+b_l}$ ガ $l>k+1$ ナラバ收斂ニシテ，$l\leqq k+1$ ナルトキハ發散ナルコトヲ證セヨ。

17. $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ ハ凡テ正ノ數ニシテ且ツ $a_1+a_2+\cdots\cdots$ ナル無限級數ハ發散ナル時次ノ級數ハ收斂ニシテソノ和ハ1ナルコトヲ證セヨ。

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}+\cdots\cdots\cdots$$

解
$$\frac{a_1}{a_1+1}=1-\frac{1}{a_1+1}$$
$$\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故＝
$$S_n=\left(1-\frac{1}{a_1+1}\right)+\left(\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)}\right)+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_{n-1}+1)}-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)}\right)$$
$$=1-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)}$$
$$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)}\right)$$

然ル＝七十一節定理1＝ヨリテ
$$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\cdots\cdots(a_n+1)\cdots\cdots>a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$$
ナルガ故＝ $\dfrac{1}{(a_1+1)(a_2+1)\cdots\cdots(a_n+1)}$ ノ極限値ハ0ナリ。

ヨリテソノ級數ハ收斂＝シテ且ツ1ナル和ヲ與フ。

18. $\dfrac{\alpha.\beta}{1.\gamma}+\dfrac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}+\dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。

解
$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left\{\frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}-1\right\}$$
$$=\frac{n^2(\gamma+1-\alpha-\beta)+n\gamma-n\alpha\beta}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$
$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\gamma+1-\alpha-\beta$$

ヨリテコノ級數ハらーベノ定理＝ヨリテ

$\gamma+1-\alpha-\beta\gtrless1$ 即チ $\gamma\gtrless\alpha+\beta$ ナル＝從ツテ夫々收斂又ハ發散ナリ。

モシ $\gamma=\alpha+\beta$ ナルトキハコノ方法＝テ判別スベカラズ。ソコデ原式＝コノ關係ヲ代入スルト
$$u_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+n)}{1.2.\cdots\cdots(n+1)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots\cdots(\alpha+\beta+n)}$$
$$=\frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots\cdots(\beta+n)}{1,2,\cdots\cdots n}\div\frac{(\alpha+\beta)\cdots\cdots(\alpha+\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n-1)}\times\frac{\beta(\alpha+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+n)}$$

然ル＝ n ガ如何ホド＝テモ大＝ナリ得ル正ノ整數ナルガ故＝
$$\frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots\cdots(\beta+n)}{1.2.\cdots\cdots n}>\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\cdots\cdots(\alpha+\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+n-1)}$$

ガ成立スル n ガ必ズ存立シ，且ツソレヨリ大ナル n ＝對シテハ必ズ成立ス。
$$\therefore\quad u_{n+1}>\frac{\beta(\alpha+n)}{(n+1)(\alpha+\beta+n)}=\frac{\beta}{2(n+1)}\left(1+\frac{\alpha-\beta+n}{\alpha+\beta+n}\right)$$

又アル n ヨリ大ナル凡テ＝對シテ $\dfrac{\alpha-\beta+n}{\alpha+\beta+n}>0$
$$\therefore\quad u_{n+1}>\frac{\beta}{2(n+1)}$$

然ル＝ $\dfrac{\beta}{2(n+1)}+\dfrac{\beta}{2(n+2)}+\cdots\cdots$ ハ發散級數ナリ。從ツテ原ノ級數モ發散ナリ。

19. 上ノ解法＝倣ヒ，がうすノ超越幾何級數ト呼バル、次ノ有名ナル無限級數ヲ判定セヨ。
$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\cdots$$

20. $\dfrac{1}{2^{m+x}}+\dfrac{2^m}{3^{m+x}}+\dfrac{3^m}{4^{m+x}}+\cdots\cdots$ ガ $x>1$ ナルトキ收斂＝シテ $x\leqq1$ ナルトキ發散ナルコトヲ證セヨ。

第　三　章

正項及負項ヲ有スル級數

138. 茲＝正項及ビ負項ヲ有スル級數トハ，正項及ビ負項ノ數ガ共＝無限＝多ク有スル級數ヲ意味シ，ソノ項數ノ有限ナルモノヲ意味セズ。蓋シソノ項數ノ有限ナルモノ＝アリテハ，コレヲ二ツノ級數＝分チ最初ヨリ最後ノ負項ヲ含ム所マデヲ第一部トシ，殘餘ノ凡テノ項ヲ第二部トスルトキハ第一部ハソノ項數有限＝シテ第二部ハ正項ノミヲ有スル無限級數ナルガ故＝ソノ實正項級數ノ章下＝テ研究スベキモノナリ。ヨリテ本章＝テハ正項及ビ負項ノ數ハ無限＝多ク含マル、場合ヲノミ說クベシ。

定理 1. 正負項ノ級數＝於テ若シソノ總テノ負項ヲ變ジテ正項トスルモ尙收斂スルトキハ，元ノ級數ハ收斂ナリ。

正負項ノ級數ノ負項ヲ凡テ正項ト化シタルモ尙收斂スル時ハ，元ノ級數ヲ絕對的收斂級數 (Absolutely convergent series) トイヒ，正負項ノ級數ハ收斂

スルト雖モ，負項ヲ悉ク正項ニ化シタル時ニハ發散スルガ如キモノヲ條件的收斂級數 (Conditionary or Semi convergent series) トイフ。

例 $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\cdots$ ノ負項ヲ悉ク正項ニ化シテ作レル次ノ級數

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots$$

モ收斂ナリ。ヨリテ原ノ級數ハ絶對的收斂ナリ。

注意 上ノ例ノ如ク正項ト負項トガ交互ニ起ルガ如キ級數ヲ交番級數 (Alternating series) トイフ。

定理 2. 交番級數 $u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots$ ニ於テ
$u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots>u_n>\cdots\cdots$ ナル時ハ，コノ級數ノ和ハ必ズ正ニシテ且ツ u_1 ヨリモ小ナリ。

證明 初項ヨリ數ヘテ偶數個ノ和ヲ S_{2n} トシ，奇數個ノ和ヲ S_{2n+1} トスレバ

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S_{2n+1}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots-(u_{2n}-u_{2n+1})\cdots\cdots(2)$$

(1)ニ於テハ括弧內ハ悉ク正ナルガ故ニ

$$S_{2n+1}>S_{2n}>0$$

(2)ニ於テモ括弧內ハ悉ク正ナルガ故ニ

$$u_1>S_{2n+1}$$

ヨリテ證明セラレタリ。

定理 3. $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots$ ナル交番級數ハ

(1) $u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots>u_n>\cdots\cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n=0$

ナルトキハ收斂ナリ。*

證明 前ノ定理ニヨリテコノ級數ノ和ハ有限ナリ。故ニ發散セズ。次ニ n

*らいぷにっつ (Leibnitz 1646–1716) ノ定理ト言ハル。

項以下ノ和ヲ R_n トスレバ

$$R_n=\pm(u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-u_{n+3}+\cdots\cdots)$$

然ルニ又前ノ定理ニヨリテ

$$u_n>u_n-u_{n+1}+u_{n+2}-\cdots\cdots>0$$

而シテ假設ニヨリテ $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ 故ニ R_n ガ極限ニ於テ零トナル。ヨリテコノ級數ハ收斂ナリ。

例 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots$ ナル級數ハ本定理ニテ知ルガ如ク收斂級數ナリト雖モ，負項ヲ悉ク正項ト化シタル時ハ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

トナリテ發散ナルコト已ニ知ル所ナリ。ヨリテ與ヘラレタル級數ハ條件的收斂ナリ。

139. 正負項ノ級數ノ收斂性ノ判定ハ正項級數ニ比シテ著シク困難ニシテ初等的研究ニ於テハ，前ノ定理ヲ措イテ他ニ簡單ナル定理ナシトイフモ不可ナシ。 然リト雖モコノ定理ノミニテハ實際問題ヲ解決スルニハ甚ダ不充分ナルベケレバ玆ニぢりくれー (Dirichlet 1805—1859) ノ判定法ト稱セラル、更ニ一般ナル定理ヲ説明スベシ。

定理 4. 無限級數 $u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots$ ハ交番級數ニシテ $u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots>u_n>\cdots\cdots$ ナリトシ且ツ $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ ナル時正負項級數 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$ ハ收斂ナルカ又ハ有限的ニ振動ナルトキハ

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots \text{ ハ收斂ナリ。}$$

證明 $S_n=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n$ トスル時次ノ恒等式アリ。

$$v_1u_1+\cdots\cdots+v_nu_n=S_1(u_1-u_2)+\cdots\cdots$$
$$+S_{n-1}(u_{n-1}-u_n)+S_nu_n$$

サテ $(u_1-u_2)+(u_3-u_4)\cdots\cdots$ ナル無限級數ハ必ズ收斂ナリ。何トナレバコノ級數ノ各項ハ必ズ正ニシテ且ツ n 項ノ和ハ u_1-v_n ニシテ而カモ $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ ナレバナリ。

然ルニ $v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$

ハ假定ニヨリテ收斂スルカ，又ハ有限的振動ナルガ故ニコノ級數ノr項ノ和ヲS_rトスレバ，アル一定ノ數kニ對シテ常ニ次ノ關係アリ。

$$|S_r|<k \qquad r=1,2,3,\cdots\cdots$$

∴ $\sum_{r=1}^{\infty} S_r(u_r-u_{r+1})$ ハ絕對的收斂ナリ。

而シテ $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ ナルガ故ニ $\lim_{n\to\infty} S_n u_n=0$ ナリ。ヨツテ

$u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots$ ナル無限級數ハ $\lim_{r\to\infty}\sum S_r(u_r-u_{r+1})+\lim_{n\to\infty} S_nu_n$ ナルガ故ニ收斂ナリ。

定理 5. $u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots$ ナル交番級數ニ於イテ $u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots>u_n>\cdots\cdots$ ニシテ且ツ $\lim_{n\to\infty} u_n$ ガ有限ナル數ナルトキハコノ級數ハ振動ナリ。

140. 有限個ノ項ヨリ成ル有限級數ニ於イテハ，ソノ項ノ順序ヲ如何ニ並ベカヘルモ，ソノ和ハ何レモ同一ナルコト勿論ナリト雖モ無限級數ニ於テハ大ニソノ趣キヲ異ニス。コノ事ハ百三十一節ニ於テ已ニ述ベタルガ如シト雖モ尙本節ニ於テ實例ヲ以ツテ示サントス。例ヘバ無限級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ハ$u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots$ヲ滿足シ且ツ$u_n=\frac{\pm1}{n}$ ナルガ故ニ $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pm1}{n}=0$

從ツテ定理3ニヨリテ收斂スル級數ナルガ，コノ順序ヲカヘテ1個ノ正項ニ2個ノ負項ヲ配シテ次ノ如クスベシ。

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}$$
$$-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ル時，(1)ノn項ノ和ヲS_nトシ，(2)ノn項ノ和ヲT_nトスレバ

$$T_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}S_{2n}$$

同樣ニシテ

$$T_{3n+1}=\frac{1}{2}S_{2n}+\frac{1}{2n+1}$$
$$T_{3n+2}=\frac{1}{2}S_{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}$$

然ルニ $\frac{1}{2n+1}$ 及ビ $\frac{1}{4n+2}$ ハnガ無限大ニ達スル時ハ零トナルガ故ニ極限ニ於イテハ T_{3n} モ T_{3n+1} モ T_{3n+2} モ悉ク $\frac{1}{2}S$ トナル*。

141. 上ノ例ニテ示セルガ如ク與ヘラレタル級數ノ項ヲ並ベカヘルト一般ニハソノ和ヲ變ズ。ヨリテ本節ニハ移項ニ關スル定理ヲ述ベントス。

定理 6. 收斂ナル正項級數ハソノ項ノ順序ヲ如何ニ變換スルモ，尙收斂ニシテ而カモソノ和ハ同一ナリ。

發散スル正項級數ハソノ項ノ順序ヲ如何ニ變換スルモ尙發散ナリ。

證明 與ヘラレタル正項級數ヲ

$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

トシコノ項ノ順序ヲ變換シタルモノヲ

$$T=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

トス。サテ(A)ナル級數ハ收斂ナル時ソノ和ヲSトスレバεヲ如何ニ小ナル

*之レぢりくれノ作レル例ナリ。

正數ナリトスルモ充分大ナル n ニ對シテハ

$$S_n > S - \varepsilon$$

ガ成立ス。サテ (B) ハ (A) ノ凡テノ項ヲ含ムガ故ニ

$$T_p = v_1 + v_2 + \cdots\cdots v_p$$

ヲシテ S_n ノ凡テノ項ヲ含マシムル樣ニ充分大ナル整數 p ヲ選べバ

$$S > T_p \geqq S_n > S - \varepsilon$$

ナルガ故ニ

$$T_p > S - \varepsilon$$

ヨリテ $q \geqq p$ ナル凡テノ q ニ對シテ

$$T_q > S - \varepsilon$$

ナリ。而ルニ又 (B) ハ (A) 以外ノ項ヲ決シテ含マザルガ故ニ q ヲ如何ニ大ニトルモ

$$S \geqq T_q$$

ナリ。故ニ

$$S \geqq T_q > S - \varepsilon$$

ε ガ如何ニ小ナル正數ニテモ可ナルガ故ニ極限ニ於テハ

$$S = T$$

ヨツテ原ノ級數 (A) ガ收斂ナル時ハ (B) ナル級數モ亦收斂ニシテソノ和 T ハ原ノ級數ノ和ニ等シ。

次ニ (A) ハ發散ナル時ハ (B) モ亦發散ナラザルベカラズ。何トナレバモシ (B) ハ發散セズシテ收斂ナリト假定スルトキハ，(B) ナル級數ノ順序ヲカヘタルモノハ A ナリト考ヘラルヽガ故ニ前半ノ證明ニヨリテ (A) モ亦收斂ナラザルベカラズ。コレ假定ニ反ス。ヨリテ (B) モ又發散ナリ。

定理 7. 一般ニ正負項ノ級數ハ絶對收斂ナルトキハ，ソノ項ノ順序ヲ如何ニ變更スルモ又收斂ニシテ同ジ和ヲ與フ。

證明

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

ヲ絶對收斂ヲナス一般ノ正負項級數ナリトス。玆ニ $u_1, u_2, \cdots\cdots$ ハ悉ク負ナルカ一部ガ正ニシテ他ノ一部ハ負ナリトス。然ルトキハ假定ニヨリテ

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots\cdots + |u_n| + \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

ガ收斂ナリ。故ニ

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + (u_3 + |u_3|) + \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(C)}$$

モ又收斂ナリ。然ルニコノ級數ノ各項ハ決シテ負ナラズ。(零トナルモノハアルベキモ) ソコデ (A), (B), (C) ノ和ヲ夫々 S, S′, S″, トスレバ

(A) ノ順序ヲ變換シテ

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots + v_n + \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(D)}$$

トシ次ノ級數ヲ作ル。

$$|v_1| + |v_2| + |v_3| + \cdots\cdots + |v_n| + \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(E)}$$

然ルトキ (B) ガ收斂ナルガ故ニ (E) モ亦收斂ナリ。何トナレバ (B) ハ收斂ナル正項級數ナルガ故ナレバナリ。已ニ (E) ガ收斂ナルガ故ニ定理 1 ニヨリテ (D) モ收斂ナリ。ヨリテソノ和ヲ S‴ トス。

サテ (D) 及ビ (E) ヨリ

$$(v_1 + |v_1|) + (v_2 + |v_2|) + (v_3 + |v_3|) + \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(F)}$$

ヲ作レバコレハ又收斂ニシテ而カモ其和ハ (C) ニ異ナルコトナシ。故ニソノ和ハ S″ ナリ。

然ルニ (A), (B), (C) ヨリ

$$S + S' = S''$$

又 (D), (E), (F) ヨリ

$$S''' + S' = S''$$

$$\therefore \quad S = S'''$$

ヨリテ定理ハ證明セラレタリ。

142. **定理 8.** 二ツノ無限級數

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots$$

ハ共ニ收斂級數ナリトシ，ソノ極限値ヲ夫々 S, T トスレバ $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_n \pm v_n) + \cdots\cdots$ ナル無限級數モ亦收斂ニシテソノ極限値ヲ U トスレバ

$$\mathrm{U}=\mathrm{S}\pm\mathrm{T}$$

證明 $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=\mathrm{S}_n$

$$v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n=\mathrm{T}_n$$

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+(u_3\pm v_3)+\cdots\cdots+(u_n\pm v_n)=\mathrm{U}_n$$

トスレバ n ノ如何ニ關セズ

$$\mathrm{S}_n\pm\mathrm{T}_n=\mathrm{U}_n$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}(\mathrm{S}_n\pm\mathrm{T}_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{U}_n$$

$$\therefore\quad \mathrm{S}\pm\mathrm{T}=\mathrm{U}$$

定理 9. 二ツノ級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ 及ビ $v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ ガ共ニ收斂ニシテ且ツソノ極限値ヲ夫々 S, T トス，モシ之レ等ノ中何レカ一ツハ絕對的收斂ナル時ハ次ノ級數

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots\cdots u_nv_1)+\cdots\cdots$$

ハ收斂ニシテソノ極限値ハ S ト T トノ乘積ニ等シ。

證明 $\mathrm{S}_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$

$$\mathrm{T}_n=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n$$

$$\mathrm{U}_n=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots\cdots$$
$$+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots\cdots u_nv_1)$$

トシ且ツ $u_1+u_2+\cdots\cdots u_n+\cdots\cdots$ ヲ絕對收斂級數ナリト假定スベシ。然ルトキハ

$$\mathrm{S}_n\mathrm{T}_n=\mathrm{U}_n+\mathrm{V}_n$$

但シ

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_n=u_2v_n&+u_3v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_2\\&+u_3v_n+\cdots\cdots+u_nv_3\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+u_nv_n\\\hline&=u_2v_n+u_3\,v_n+v_{n-1})+\cdots\cdots+u_n(v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n)\end{aligned}$$

n ガ偶數ナル時即チ $n=2m$ ナリトスレバ

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_n=\{&u_2(v_{2m})+u_3(v_{2m}+v_{2m-1})+\cdots\cdots+u_m(v_{2m}+\cdots\cdots\\&+v_{m+2})+u_{m+1}(v_{2m}+\cdots\cdots+v_{m+1})+\cdots\cdots\\&+u_{2m}(v_{2m}+\cdots\cdots+v_2)\}\end{aligned}$$

ニシテ n ガ奇數ナル時即チ $n=2m+1$ ナリトスレバ

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_n=\{&u_2v_{2m+1}+u_3(v_{2m+1}+v_{2m})+\cdots\cdots+u_m(v_{2m+1}+\cdots\cdots\\&+v_{m+3})+u_{m+1}(v_{2m+1}+\cdots\cdots+v_{m+2})+\cdots\cdots\\&+u_{2m+1}(v_{2m+1}+\cdots\cdots+v_2)\}\end{aligned}$$

ナリ。然ルニ假定ニヨリテ

$v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ ハ收斂ナルガ故ニ m ヲ充分大ニスレバ

$$|v_{2m}|,\quad |v_{2m}+v_{2m-1}|,\cdots\cdots|v_{2m}+\cdots\cdots+v_{m+2}|,$$

及ビ

$$|v_{2m+1}|\quad |v_{2m+1}+v_{2m}|,\cdots\cdots|v_{2m+1}+\cdots\cdots v_{m+3}|$$

ハ悉ク吾人ノ欲スル如何樣ニモ小ニスルコトヲ得ル正ノ數 ε_m ヨリモ尙小ニスルコトヲ得ベシ。(玆ニ ε ニ m ナル接尾語ヲ附セシハ ε ハ m ノトリ方ニヨリテ變化スルヲ以ツテナリ。)

又 $v_2+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ ハ收斂ナルガ故ニ

$$\begin{gathered}|v_{2m}+\cdots\cdots+v_{m+1}|\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\|v_{2m}+\cdots\cdots+v_2|\end{gathered}$$

及ビ

$$\begin{gathered}|v_{2m+1}+\cdots\cdots+v_{m+2}|\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\|v_{2m+1}+\cdots\cdots+v_2|\end{gathered}$$

ハ共ニ有限ナリ。ソノ中最モ大ナルモノヲ h トスレバ

$$\begin{aligned}|\mathrm{V}_n|<\varepsilon_m(&|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots+|u_m|)\\&+h(|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\cdots\cdots+|u_n'|)\end{aligned}$$

玆ニ u_n' ハ n ガ偶數ナルトキハ u_{2m} ヲ表ハシ，n ガ奇數ナルトキハ u_{2m+1}

ヲ表ハスモノナリ。然ルニ $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ハ絕對收歛ナルガ故ニ $|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots+|u_m|$ ハ有限ニシテ $|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\cdots\cdots+|u_n'|$ ハ n ヲ充分大ニスレバ極限ニ於テ零トナルモノナリ。(n ヲ充分大ニスレバ m モ從ツテ充分大トナル故)

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}|\mathrm{V}_n|=0$$

故ニ
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}_n\mathrm{T}_n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{U}_n$$

ヨリテ
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{U}_n=\mathrm{S.\,T.}$$

即チ定理ハ證明セラレタリ。

第三章 問題

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ ハ絕對的收歛ナルコトヲ證セヨ。

2. $1-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{6}+\frac{8}{7}-\cdots\cdots$ ハ振動ナルコトヲ證セヨ。

3. 次ノ二ツノ級數ヲ判定セヨ。

 (i) $\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\frac{6}{5}+\cdots\cdots$

 (ii) $\frac{8}{4}-\frac{4}{5}+\frac{2}{6}-\frac{1}{7}+\frac{\frac{1}{2}}{8}-\cdots\cdots$

4. $1-\frac{m}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!}+\cdots\cdots$ ガ m ガ正ナルトキハ收歛ニシテ，m ガ負ナルトキハ發散ナルコトヲ證セヨ。

5. $a>0$ ナルトキハ次ノ各級數ハ條件的收歛ナルコトヲ證セヨ。

 (i) $\frac{1}{1+a}-\frac{1}{2+a}+\frac{1}{3+a}-\frac{1}{4+a}+\cdots\cdots$

 (ii) $\frac{1}{\sqrt{1+a}}-\frac{1}{\sqrt{2+a}}+\frac{1}{\sqrt{3+a}}-\frac{1}{\sqrt{4+a}}+\cdots\cdots$

 (iii) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{a}}+\cdots\cdots$

 (iv) $\frac{1}{(\sqrt{1}+\sqrt{a})^2}-\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{a})^2}+\frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{a})^2}-\frac{1}{(\sqrt{4}+\sqrt{a})^2}+\cdots\cdots$

6. $a>0$ ナルトキハ

$a^{-s}-(1+a)^{-s}+(2+a)^{-s}-(3+a)^{-s}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。

7. $1-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+x}+\cdots\cdots$ ハ x ガ負ノ整數ナラザル時ハ收歛ナルコトヲ證セヨ。

8. $a_1+a_2+\cdots\cdots a_n+\cdots\cdots$ ハ正項級數ニシテ $|b_1|\leqq ka_1$, $|b_2|\leqq ka_2\cdots\cdots$ 一般ニ $|b_n|\leqq ka_n$ ナルトキハ無限級數 $b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n+\cdots\cdots$ ハ收歛ナルコトヲ示セ。

9. $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$ ハ正項收歛級數ニシテ $-1\leqq x\leqq 1$ ナル時 $a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$ ガ絕對收歛ナルコトヲ證セヨ、

10. $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}-\frac{1}{1+x^4}+\cdots\cdots$ ハ $x>1$ ナル時ハ絕對收歛ナルコトヲ證セヨ。

 解 $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+x^4}+\cdots\cdots$ ナル級數ト，$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\cdots$ トヲ比ブルニ第二ノ級數ノ各項ハ第一ノ級數ノ各項ヨリモ大ナリ。然ルニ第二ノ級數ハ $x>1$ ナル時ハ收歛ナリ。從ツテ第一ノ級數ハ收歛ナリ。ヨリテ與ヘラレタル級數ハ絕對級數ナリ。

11. $a>0,\ b>0$ ナル時ハ

 級數 $\frac{1}{a(a+b)}-\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\frac{1}{(a+4b)(a+5b)}-\cdots\cdots$ ハ絕對收歛ナルコトヲ示セ。

12. $\frac{1}{1.2}-\frac{x}{2.3}+\frac{x^2}{3.4}-\frac{x^3}{4.5}+\cdots\cdots$ ヲ判定セヨ。但シ $1>x>0$ トス，

13. $\frac{1}{a+1}-\frac{b}{a+b}+\frac{b^2}{a+b^2}-\cdots\cdots$ ハ $0<b<1$ ナルトキハ絕對收歛ナルコトヲ證セヨ。

14. $\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{a+2b}+\frac{b^3}{a+3b}-\cdots\cdots$

 ハ $0<b<1$ ナルトキ絕對收歛ナルコトヲ證セヨ。

第四章

二項定理ノ擴張

143. 吾人ハ已ニ第八編ニ於イテ n ガ正ノ整數ナル時ハ

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots+{}_nC_nx^n$$

ナルコトヲ知レリ。但シ ${}_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3.\cdots\cdots r}$

即チ n ガ正ノ整數ナル時ハ二項式ノ n 乘ハ常ニ $n+1$ 個ノ項ヨリナル有限級數ニ展開セラレ得ルコトヲ知レリ。然リト雖モ n ガ若シ正ノ整數ニアラズシテ，分數又ハ負ノ整數或ハ負ノ分數ナル時ニモ尙二項定理ガ成立スルモノナリヤ否ヤコレ大ナル疑問ナリトス。何トナレバ n ガ正ノ整數ナルトキハ ${}_nC_r$ ハ n 個ノモノヨリ r 個ヲ選ビ出ス組合セナルガ故ニ意味分明ナリト雖モ若シ n ガ分數又ハ負數ナルトキハ ${}_nC_r$ ハ全ク無意義ノ記號トナレバナリ。今吾人ハ n ガ正ノ整數ナラザル時ニモ尙 ${}_nC_r$ ハ $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3.\cdots\cdots}$ ニテ表ハスモノト規約ヲ設ケ而シテカヽル規約ノ下ニ果シテ，$(1+x)^n$ ガ n ノ任意ノ値ニ對シテ展開シ得ベキモノナリヤ否ヤニ論及セントス。

144. サテ ${}_nC_r$ ヲ上ノ如ク廣キ意味ニ擴張スルモ尙本問題ヲ解決スルニ至ラズ。ソノ故如何トナレバ n ガ正ノ整數ナル時ハ $(1+x)^n$ ハ $(n+1)$ 個ノ有限個ノ項ヨリナル有限級數トシテ表ハサルベシト雖モ，n ガ正ノ整數ナラザル時ハ $(1+x)^n$ ヲ前節ニヨリテ示サレタルガ如キ形式的展開ヲ行フ時ハ無限級數トナルガ故ニ，假令ヒ ${}_nC_r$ ノ意義ヲ擴張スルト雖モ形式的ニ $(1+x)^n$ ニ演算ヲ施シテ得タル無限級數ハ收斂スルヤ否ヤハ不明ナレバナリ。モシ假リニ夫レハ收斂級數ナリトスルモ果シテソレガ $(1+x)^n$ ニ等シキヤ否ヤヲ確メザルベカラズ。何トナレバソハ $(1+x)^n$ ヲ單ニ器械的ニ展開シタルニ過ギザレバナリ。

之レヲ要スルニ n ガ正ノ整數ナラザル場合ニモ指數ハ正ノ整數ノ時ト同樣ノ形式ニヨリテ展開スルモ差支無キヤ否ヤヲ決定センニハ，先ヅ指數ガ正ノ整數ナル時ト同樣ノ形式ニ從ツテ展開シタル無限級數ハ收斂ナリヤ否ヤヲ吟味シ，次ニ收斂スル時ハ果シテコレガ $(1+x)^n$ ヲ表ハスモノナリヤ否ヤニ就イテ確定セザルベカラズ。然ルニ之レ等ノ決定ニハ幾多ノ豫備定理ヲ要スベケレバ吾人ハ先ヅソレ等ニ就イテ說明スベシ。

豫備定理 1. 無限級數 (二項級數トイフ)

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots\cdots$$

ハ $|x|<1$ ナル時ハ絕對收斂ナリ。

解 だらんべるノ判定法ヲ用フルニ

$$u_r=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}x^{r-1}$$

$$u_{r+1}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}x^r$$

ナルガ故ニ $$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{u_{r+1}}{u_r}\right|=\lim_{r\to\infty}\left|\frac{n-r+1}{r}\right||x|=|x|$$

故ニ $|x|<1$ ナルトキハコノ級數ハ n ノ値ノ如何ニ關セズ絕對收斂ナリ。

豫備定理 2. r ヲ正ノ整數トシ，m 及ビ n ヲ正,負ノ整數又ハ分數トシ $m_r=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-r+1)$ トスレバ

$$(m+n)_r=m_r+rm_{r-1}n_1+\frac{r(r-1)}{2!}m_{r-2}n_2+\cdots\cdots+rm_1n_{r-1}+n_r$$

ナリ。

證明 (i) **m 及ビ n ガ正ノ整數ナルトキ**

コノ場合ハ通常ノ二項定理ニヨリテ

$$(1+x)^m=1+{}_mC_1x+{}_mC_2x^2+\cdots\cdots+{}_mC_rx^r+\cdots\cdots+x^m$$

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots+x^n$$

コノ二ツノ級數ノ乘積ニ於イテ x^r ノ係數ヲ求ムレバ

$${}_mC_r+{}_mC_{r-1}\,{}_nC_1+{}_mC_{r-2}\,{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_mC_1\,{}_nC_{r-1}+{}_nC_r$$

ニシテ之レヲ上ニ規定セル記號ニ書キカフルト

$$\frac{m_r}{r!}+\frac{m_{r-1}}{(r-1)!}\,\frac{n_1}{1!}+\frac{m_{r-2}}{(r-2)!}\,\frac{n_2}{2!}+\cdots\cdots$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{m_1}{1!}\ \frac{n_{r-1}}{(r-1)!}+\frac{n_r}{r!}$$

然ルニコレハ又 $(1+x)^m$ ト $(1+x)^n$ トノ積即チ $(1+x)^{m+n}$ ニ於ケル x^r ノ係數 ${}_{m+n}C_r=\frac{(m+n)_r}{r!}$ ニ等シ。ヨリテ m 及ビ n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$\frac{(m+n)_r}{r!}=\frac{m^r}{r!}+\frac{m_{r-1}}{(r-1)!}\ \frac{n_1}{1!}+\frac{m_{r-2}}{(r-2)!}\ \frac{n_2}{2!}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m_1}{1!}\ \frac{n_{r-1}}{(r-1)!}+\frac{n_r}{r!}$$

分母ヲ拂フト

$$(m+n)_r=m_r+rm_{r-1}n_1+\frac{r(r-1)}{2!}m_{r-2}n_2+\cdots\cdots+rm_1n_{r-1}+n_r$$

(ii) m 及ビ n ガ正ノ整數ナラザルトキ

m 及ビ n ガ正ノ整數ナルトキ得タル上ノ公式ヲ一邊ニ集ムレバ

$$(m+n)_r-m_r-rm_{r-1}n_1-\frac{r(r-1)}{2!}m_{r-2}n_2-\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-rm_1n_{r-1}-n_r=0$$

コレハ m ニ關シテ r 次ノ方程式ナリト考ヘラルヽヲ以ツテソノ形ハ

$$Am^r+Bm^{r-1}+Cm^{r-2}+\cdots\cdots+S=0$$

ナリ。然ルニコノ式ガ m ガ正ノ整數デサヘアレバ常ニ成立ス。ヨリテ第一編第四章定理5ニ注意スレバ係數 A, B, C, ……S ハ各々別々ニ零ナリ。ヨツテコノ式ハ m ガタヾニ正ノ整數ノミニ限ラズ凡テノ實數ニ對シテ成立スルコトヲ知ル。全ク同樣ニシテ n ノ如何ナル實數ニ對シテモ成立スル，即チ m, n ノ値ノ如何ニ關セズ定理ハ證明セラレタリ*。

豫備定理 3. $f(m)$ ヲ以ツテ $1+\frac{m_1}{1!}x+\frac{m_2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{m_r}{r!}x^r+\cdots\cdots$ ヲ表ハスモノトシ且ツ $|x|<1$ ナリトスレバ

$$f(m)f(n)=f(m+n)$$

ナリ。但シ $m_r=m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)$

證明 假定ニヨリテ

*コノ定理ヲゔあんでるもんど Van der Monds ノ定理トイフ。

$f(m)=1+\frac{m_1}{1!}x+\frac{m_2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{m_r}{r!}x^r+\cdots\cdots$ トセルガ故ニ $f(n), f(m+n)$ ハ夫々次ノ如シ。

$$f(n)=1+\frac{n_1}{1!}x+\frac{n_2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{n_r}{r!}x^r+\cdots\cdots$$

$$f(m+n)=1+\frac{(m+n)_1}{1!}x+\frac{(m+n)_2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{(m+n)_r}{r!}x^r+\cdots\cdots$$

$|x|<1$ ナルガ故ニ百四十四節ニヨリ $f(m), f(n)$ 及ビ $f(m+n)$ ガ夫々絕對收歛ナリ。從ツテ百四十二節定理9ニヨリテ $f(m)$ ト $f(n)$ トノ乘積モ亦收歛ナリ。

次ニ $f(m)$ ト $f(n)$ トノ乘積ニ於ケル x^r ノ係數ヲ考フルニ

$$\frac{m^r}{r!}+\frac{m_{r-1}}{(r-1)!}\ \frac{n}{1!}+\frac{m_{r-2}}{(r-2)!}\ \frac{n_2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{m_1}{1!}\ \frac{n_{r-1}}{(r-1)!}+\frac{n_r}{r!}$$

ナルコト明カニシテ，コレハ前ノ定理ニヨリテ $\frac{(m+n)_r}{r!}$ ナリ。然ルニ又 $f(m+n)$ ニ於ケル x^r ノ係數ハ $\frac{(m+n)_r}{r!}$ ナリ。ヨツテ $f(m)f(n)=f(m+n)$

系 $f(m)f(n)f(p)\cdots\cdots=f(m+n+p+\cdots\cdots)$

證明 定理ニヨリテ夫々次ノ關係アリ。

$$f(m)f(n)=f(m+n)$$
$$f(m+n)f(p)=f(m+n+p)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

兩邊ヲ夫々相乘ズレバ容易ニ

$$f(m)f(n)f(p)\cdots\cdots=f(m+n+p+\cdots\cdots)$$

ナルコトヲ知ル*。

豫備定理 4. $|x|<1$ ナルトキハ n ノ値ノ如何ニ關セズ

$$(1+x)^n=1+n_1x+\frac{n_2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{n_r}{r!}x^2+\cdots\cdots.$$

ナリ。

證明 (i) **n ガ正ノ數ナルトキ**

n ガ正ノ整數ナルモ分數ナルモ共ニ正ノ整數 $h, k,$ ニ對シテ $n=\frac{k}{h}$ ト書キ

*二項定理ニ於ケル加法定理 (Addition theorem) トイフ。

得ル故ニ，コレヲ先キノ定理系ニ代入スレバ

$f\left(\frac{h}{k}\right)f\left(\frac{h}{k}\right)\cdots\cdots$ ナル k 個ノ乘積ハ $f\left(\frac{h}{k}\times k\right)$ ナリ。而シテ h ハ正ノ整數ナルガ故ニ $f h=(1+x)^h$ ナルコト明カナリ。

故ニ

$$\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^k=f(h)=(1+x)^h$$

故ニ　$(1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\frac{h}{k}\right)=1+\left(\frac{h}{k}\right)_1x+\frac{1}{2!}\left(\frac{h}{k}\right)x^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{k}\right)_3x^3+\cdots\cdots$

即チ n ガ正ノ數ナルトキハ，一般ニ

$$(1+x)^n=1+\frac{n_1}{1!}x+\frac{n_2}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{n_r}{r!}x^r+\cdots\cdots$$

ナリ。

(ii) n **ガ負數ナルトキ**

n ガ負數ナルトキハ $n=-m$ トオケバ，m ガ正ノ數ナリ。サテ二項定理ノ加法定理ニヨリテ

$$f(-m)f(m)=f(-m+m)=f(0)$$

而シテ $f(0)$ ハ定義ニヨリテ 1 ナルガ故ニ $f(-m)=\frac{1}{f(m)}$

然ルニ m ガ正ノ數ナルガ故ニ已ニ證明シタルガ如ク

$$f(m)=(1+x)^m$$

ナリ。故ニ

$$f(-m)=\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}$$

ナリ。從ツテ　$(1+x)^{-m}=1+\frac{(-m)_1}{1!}x+\frac{(-m)_2}{2!}x^2+\cdots\cdots$

即チ　$$(1+x)^n=1+\frac{n_1}{1!}x+\frac{n_2}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

ヨリテコノ定理ハ n ガ負數ナルトキニモ尙成立ス。

145.　前節ニ證明セル三ツノ定理ハ要スルニ n ガ正ノ整數ニ限ラズ一般ニ正，負ノ整數又ハ分數ナル時ニテモ $|x|<1$ ナルトキハ $1+\frac{n_1}{1!}x+\frac{n_2}{2!}x^2+\cdots\cdots$ ナル無限級數ハ收斂シテ而カモ $(1+x)^n$ ニ等シキコトヲ示スモノナリ．然ルニ吾人ハ百四十三節ニ於テ ${}_nC_r$ ノ意義ヲ擴張シテ n ガ如何ナル數ナリトモ ${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$ ナリト規約シ，更ニ百四十四節ニ至リテ之ハ $\frac{n_r}{r!}$ ニ等シト規約セリ。ヨリテ次ノ結論ヲナスコトヲ得ベシ。

定理 1. x ガ -1 ト 1 トノ間ニ在ルトキハ，n ノ値ノ如何ニ關セズ $(1+x)^n$ ガ收斂無限級數

$$1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots$$

ニ展開セラル。

例 1. $|x|<1$ ナルトキ $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ ヲ無限級數ニ展開セヨ。

解　$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}x^3+\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots\cdots$$

例 2. $|x|<1$ ナルトキ $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ ヲ無限級數ニ展開セヨ。

解　$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.\ 2}x^2$$
$$+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}x^3+\cdots\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots\cdots$$

例 3. $(1+x)^{\frac{5}{2}}$ ノ展開ニ於ケル第 $r+1$ 番目ノ項ヲ求ム。

解　$$(r+1)\text{番目ノ項}=\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{5}{2}-r+1\right)}{r!}x^r$$

而シテ $\frac{5}{2}-2>0$, $\frac{5}{2}-3<0$ ナルガ故ニ，初メヨリ三項マデノ係數ハ正ナリ。故ニ

$$(r+1)\text{番目}=(-1)^{r-3}\frac{5.\ 3.\ 1.\ 1.\ 3.\ 5.\cdots\cdots(2r-7)}{2^r\times r!}x^r$$

ナリ。

例 4. $(1+x)^n$ ニ於ケル絕對値ノ最大ナル項ヲ求ム。

解 r 番目ノ項 $=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}x^{r-1}$

$(r+1)$ 番目ノ項 $=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}x^{r}$

$(r+2)$ 番目ノ項 $=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r)}{(r+1)!}x^{r+1}$

故ニ
$$\frac{第(r+1)項}{第\,r\,項}=\frac{n-r+1}{r}x$$
$$\frac{第(r+1)項}{第(r+2)項}=\frac{r+1}{(n-r)x}$$

ヨリテ $(r+1)$ 番目ノ項ノ絕對値ガ最大ナリトスレバ, r ハ

$$\left|\frac{n-r+1}{r}x\right|>1 \quad 及ビ \quad \left|\frac{r+1}{(n-r)x}\right|>1$$

ヲ滿足スルヲ要ス。例ヘバ $x=\dfrac{1}{2}$ ナルトキ $(1-x)^{-\frac{5}{2}}$ ノ最大項ヲ求ムルニ

$$\left|\frac{-\frac{5}{2}-r+1}{r}\right|\frac{1}{2}>1$$

$$\therefore \quad \frac{3}{2r}+1>2 \quad 從ツテ \quad r<\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又
$$\left|\frac{r+1}{\left(-\frac{5}{2}-r\right)\frac{1}{2}}\right|>1$$

故ニ
$$\frac{r+1}{\frac{5}{2}+r}>\frac{1}{2} \quad 從ツテ \quad r>\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

∴ (1) 及ビ (2) ヨリ $r=1$. 從ツテ第二項ノ絕對値ガ最大ナリ。

例 5. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}.\ \dfrac{3}{6}+\dfrac{1}{3}.\ \dfrac{3.5}{6.9}+\cdots\cdots$ ナル和ヲ求メヨ

解 コノ和ヲ S トシ級數ヲ變形スレバ

$$S=\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\therefore \quad S+1=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1.3}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)+\frac{1.3}{2!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2+\frac{1.3.5}{3!}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

ヨリテ求ムル和ハ $\sqrt{3}-1$ ナリ。

例 6. n ガ正ノ整數ナルトキハ

$$1-\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.\,2^2}-\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.\,2^2.\,3^2}+\cdots\cdots=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $(1-x)^n=1-nx+\dfrac{n(n-1)}{1.2}x^2-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$

$$+(-1)^n\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-n+1)}{1.2.3\cdots\cdots n}x^n\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $|x|>1$ ナルトキノ $\left|\dfrac{1}{x}\right|<1$ ナルヲ以テ

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-n}=1+n\frac{1}{x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\ \frac{1}{x^2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\ \frac{1}{x^3}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+n-1)}{1.2\cdots\cdots n}\ \frac{1}{x^n}+\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)×(2) ノ二ツノ級數ノ常數項ハ

$$1\times1-nx\times n\frac{1}{x}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2\,\frac{n(n+1)}{1.2}\ \frac{1}{x^2}-\cdots\cdots$$

即チ
$$1-n^2+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.\,2^2}-\cdots\cdots$$

然ルニ $(1-x)^n\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-n}=(1-x)^n\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{-n}=(-1)^nx^n$ ナルガ故

ニツノ常數項ハ零ナリ。

ヨツテ

$$1-n^2+\frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.\,2^2}-\cdots\cdots=0$$

146. **定理 2.** $x \neq y$ ナルトキハ n ノ値ノ如何ニ關セズ $(x+y)^n$ 及ビ $(x-y)^n$ ガ二項定理ニヨリテ展開スルコトヲ得。

證明 假リニ $|x|>|y|$ トスレバ $(x\pm y)^n=x^n\left(1\pm\frac{y}{x}\right)^n$ 然ルニ $|x|>|y|$ ナリトスレバ $\left|\frac{y}{x}\right|<1$ ナリ。ヨリテ二項定理ヲ適用スルコトヲ得。又假リニ $|x|<|y|$ トスレバ $(x\pm y)^n=y^n\left(1+\frac{x}{y}\right)^n$ 又ハ $(-1)^n y^n\left(1-\frac{x}{y}\right)^n$

而シテコノ場合 $\left|\frac{x}{y}\right|<1$ ナリ。卽チ又二項定理ヲ應用スルコトヲ得。從ッテ無限級數ニ展開セラル。

第四章 問題

1. $(1+x)^{-2}$ ヲ展開セヨ。

2. $(1-x)^{-3}$ ノ展開式ニ於ケル一般項ヲ求ム。

3. 二項定理ヲ用ヒテ $\sqrt{14}$ ヲ求メヨ。

解
$$\sqrt{14}=\sqrt{16-2}=4\left(1-\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=4\left(1-\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8^2}-\cdots\cdots\right)=3.7416\cdots\cdots$$

4. 二項定理ヲ用ヒテ $\sqrt[5]{3^5-2}$ ヲ小數第四位マデ求メヨ。

5. 二項定理ヲ用ヒテ次ノ式ヲ x ノ昇冪ニ展開セヨ。
$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2-x^2}}$$

解 $\left|\frac{x}{a}\right|<1$ ナリト假定スレバ原式 $=a,\ a^{-\frac{2}{3}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{3}}$
$$=a^{\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\cdots+\frac{1.4.7\cdots\cdots(3r-2)}{3.6.9\cdots 3r}\left(\frac{x}{a}\right)^{2r}+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

6. $\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

解
$$S=\frac{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{3.5}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3.5.7}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\cdots\cdots$$
$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{2}{4}}{2}\right)+\frac{3.5}{2!}\left(\frac{\frac{2}{4}}{2}\right)^2+\frac{3.5.7}{3!}\left(\frac{\frac{2}{4}}{2}\right)^3+\cdots\cdots\cdots-1$$
$$=\left(1-\frac{2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}-1=\sqrt{2^3}-1=2\sqrt{2}-1$$

7. $\frac{5}{6}+\frac{5.7}{6.9}+\frac{5.7.9}{6.9.12}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

8. $1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{1.2}\ \frac{1}{6^2}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\ \frac{1}{6^3}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

9. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots\right)$$
ナルコトヲ證セヨ。

10. $(1+x)^n$ ノ三ツノ連續セル項ガ連比例ヲナスタメニハ $n+1=0$ ナラザルベカラザルコトヲ證セヨ。

解
$$第(r+1)項=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}x^r$$
$$第(r+2)項=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{1.2.3\cdots\cdots(r+1)}x^{r+1}$$
$$第(r+3)項=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r-1)}{1.2.3\cdots\cdots(r+2)}x^{r+2}$$

故ニ第 $(r+1)$ 項 : 第 $(r+2)$ 項 : 第 $(r+3)$ 項 $=1:\frac{n-r}{r+1}x:\frac{(n-r)(n-r-1)}{(r+1)(r+2)}x^2$

コレヨリ $\qquad \frac{r+1}{n-r}=\frac{r+2}{n-r-1}$

從ッテ $\qquad (r+1)(n-r-1)=(r+2)(n-r)$

整頓スレバ $\qquad n+1=0$

11. $(a-x)^n$ ヲ $\frac{1}{a-x}$ ノ昇冪ニ展開セヨ。

解 $(a-x)^n=\left(\frac{1}{a-x}\right)^{-n}=\left\{\frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a-x}\right)\right\}^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\left(1+\frac{x}{a-x}\right)^{-n}$
$$=a^n\left(1+\frac{x}{a-x}\right)^{-n}$$

ソコデ $\left(1+\frac{x}{a-x}\right)^{-n}$ ヲ二項定理ニヨリテ展開スレバ可ナリ。但シコノ場合 $\left|\frac{x}{a-x}\right|<1$ ナル條件ヲ要スルコト勿論ナリ。

12. $(1-x)^n$ ノ展開式ニ於ケル最初ノ $(r+1)$ 項ノ係數ノ和ヲ求メヨ。

解 $(1-x)^n=1-\frac{n_1}{1!}x+\frac{n_2}{2!}x^2-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n_r}{r!}x^r+\cdots\cdots$

玆ニ $n_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

又 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots$

ヨリテコノ二ツノ級數ノ乘積ニ於ケル x^r ノ係數ハ

$$1-\frac{n_1}{1!}+\frac{n_2}{2!}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n_r}{r!}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。而シテ (1) ハ $(1-x)^n$ ノ展開式ニ於ケル最初ノ $(r+1)$ 項ノ係數ノ和ニ外ナラス。

然ルニ $(1-x)^n(1-x)^{-1}=(1-x)^{n-1}$ ナルガ故ニ，コノ展開式ニ表ハルヽ x^r ノ係數ハ

$$(-1)^r\frac{(n-1)_r}{r!}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨリテ $(1-x)^n$ ノ展開式ニ於ケル最初ノ $r+1$ 項ノ係數ノ和ハ

$1-\frac{n_1}{1!}+\frac{n_2}{2!}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n_r}{r!}=(-1)^r\frac{(n-1)_r}{r!}$ ナリ。

13. $(1-x)^{-3}$ ノ展開式ニ於ケル最初ノ r 項ノ係數ノ和ハ $\frac{1}{6}r(r+1)(r+2)$ ナルコトヲ證セヨ。

14. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 $$(1-x)^{-4}=1+4x+\frac{4.5}{1.2}x^2+\frac{4.5.6}{1.2.3}x^3+\frac{5.6.7}{1.2.3}x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) ニ於ケル n 項ノ係數ノ和ハ問題ノ 12 ノ解ニヨリテ $(1-x)^{-5}$ ノ展開式ニ於ケル x^{n-1} ノ係數ニ等シ。然ルニ又 $(1-x)^{-5}$ ノ x^{n-1} ノ係數ハ

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

然ルニ (1) ハ

$$\frac{1}{1.2.3}(1.2.3+2.3.4.x+3.4.5.x^2+4.5.6.x^3+\cdots\cdots)$$

ト書カル。ヨツテ

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}=\frac{1}{1.2.3}(1.2.3+2.3.4+3.4.5+4,5,6+\cdots\cdots)$$

故ニ求ムルn項ノ係數ノ和ハ

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}\times 6=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

15. $\frac{1+2x+3x^2}{(1+x)^2(1+x^2)^2}$ ノ展開式ニ於ケル x^n ノ係數ハ，n ガ 4 ノ倍數ナルトキハ $(n+1)$ ニシテ，n ガ 4 ノ倍數ヨリモ 1 小ナルトキハ，$-(n+1)$ ニシテ，ソノ他ノ場合ハ零ナルコトヲ證セヨ。

16. $a-b$ ハ a 及ビ b ニ比シテ甚ダ小ナル正ノ數ナルトキハ，$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ハ殆ンド $\frac{(n+1)a+(n-1)b}{(n+1)b+(n-1)a}$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

解 $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{a+b+a-b}{a+b-a+b}}=\left(1+\frac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{n}}\div\left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

而シテ $a-b$ ハ a 及ビ b ニ比シテ甚ダ小ナルガ故ニ $\frac{a-b}{a+b}$ ノ絕對値ハ 1 ヨリモ小ナリ。ヨリテ二項定理ニ從ツテ展開スルコトヲ得。即チ

$$原式=\left(1+\frac{1}{n}\ \frac{a-b}{a+b}+\cdots\cdots\right)\div\left(1+\frac{1}{n}\ \frac{a-b}{a+b}+\cdots\cdots\right)$$

而シテ $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$ 以下ノ項ハソノ絕對値ニ於テ甚ダ小ナリ。ヨリテ此等ヲ悉ク省ケバ原式ハ殆ンド $\frac{(n+1)a+(n-1)b}{(n+1)b+(n-1)a}$ ナリ。

17. $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt[3]{x^3+x^2-1}\}$ ヲ求メヨ。

解 $$\sqrt{x^2+3x-1}=x\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=x\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\cdots\cdots\right\}$$

又 $$\sqrt[3]{x^3+x^2-1}=x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=x\left\{1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt[3]{x^3+x^2-1}=\frac{7}{6}-\frac{109}{72x}+\cdots\cdots$$

然ルニ $\frac{1}{x}$ ヨリ以下ノ項ノ和ノ極限値ハ零ナルコト容易ニ證明セラルヽヲ以テソノ極限値ハ $\frac{7}{6}$ ナリ。

第五章

多項定理ノ擴張

147. n ヲ任意ノ正，又ハ負ノ整數或ハ分數ナリトシ，次ノ多項式ノ展開ヲ考究セントス。

$$(m_0+m_1x+m_2x^2+\cdots\cdots+m_rx^r)^n$$

然ルニコレハ常ニ

$$m_0^n\left(1+\frac{m_1}{m_0}x+\frac{m_2}{m_0}x^2+\cdots\cdots+\frac{m_r}{m_0}x^r\right)^n$$

ノ形ニ化スルコトヲ得。今 $\frac{m_1}{m_0}=a_1,\ \frac{m_2}{m_0}=a_2\cdots\cdots\frac{m_r}{m_0}=a_r$ ト置ケバ與ヘラレタル多項式ノ冪ハ $m_0^n(1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^n$ トナルヨリテ一般多項式ノ冪ヲ取リ扱フ代リニ

$$(1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^n$$

ヲ考フレバ可ナリ。然ルニ $|a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r|<1$ ナルトキハ前章ニ於テ示セルガ如キ二項定理ノ法則ニヨリテ展開スルコトヲ得ベシ。而シテソノ一般項ハ

$$\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-p+1)}{p!}(a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^p\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

茲ニ p ガ正ノ整數ナルガ故ニ

$$(a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^p=\{a_1x+(a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)\}^p$$

ナリトシテ展開スレバソノ一般項ハ

$$\frac{p!}{p_1!(p-p_1)!}a_1^{p_1}x^{p_1}(a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^{p-p_1}$$

同樣ニ $(a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^{p-p_1}$ ヲ展開スレバソノ一般項トシテ

$$\frac{(p-p_1)!}{p_2!(p-p_1-p_2)!}a_2^{p_2}x^{2p_2}(a_3x^3+\cdots\cdots+a_rx^r)^{p-p_1-p_2}$$

以下斯ノ如クスレバ結局 $(a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^p$ ノ展開式ノ一般項ハ

$$\frac{p!}{p_1!(p-p_1)!}\times\frac{(p-p_1)!}{p_2!(p-p_2-p_2)!}\times\cdots\cdots$$

$$\times\frac{(p-p_1-p_2-\cdots\cdots-p_{r-1})!}{p_r!(p-p_1-p_2-\cdots\cdots-p_r)!}\times$$

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots\cdots a_r^{p_r}x^{p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+rp_r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ (1), (2) ヨリ

$(1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^n$ ノ展開式ニ於ケル一般項ハ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+1)}{p_1!p_2!p_3!\cdots\cdots p_r!}\times$$

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3}\cdots\cdots a_r^{p_r}x^{p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+rp_r}$$

茲ニ $p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+rp_r=s$ トス。ヨリテ

$$(1+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_rx^r)^n$$

$$=1+\Sigma\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+1)}{p_1!p_2!p_3!\cdots\cdots p_r!}\times$$

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}a_3^{p_3}\cdots\cdots a_r^{p_r}x^{p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+rp_r}$$

茲ニ n ガモシ整數ナルトキハ $p_1, p_2, \cdots\cdots p_r$ ハ夫々

$$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_r=p \qquad (p=1,2,3\cdots\cdots,n)$$

$$p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+rp_r=s \qquad (s=1,2,3\cdots\cdots,nr)$$

ヲ滿足スル零又ハ正ノ整數ニシテ, n ガモシ正ノ整數ナラザル時ハ $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_r$ ハ

$$p_1+2p_2+3p_3+\cdots\cdots+rp_r=s \quad (s=1,2,3,\cdots\cdots,\cdots\cdots nr,\cdots\cdots)$$

ヲ滿足スル正ノ整數ナリトス。

例 $(1-x+2x^2)^{\frac{1}{2}}$ ノ展開式ニ於テ x^4 ノ係數ヲ求メヨ。

解 コノ場合 $n=\frac{1}{2}$ ナルガ故ニ p_1 及ビ p_2 ガ

$$p_1+2p_2=4$$

ヲ滿足スベキ零又ハ正ノ整數ナリ。ヨリテ

$$\left.\begin{array}{l}p_1=0\\p_2=2\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}p_1=2\\p_2=1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}p_1=4\\p_2=0\end{array}\right\}$$

即チ求ムルモノハ

$$\frac{\frac{1}{2}\ \frac{-1}{2}}{0!\ 2!}(-1)^0 2^2+\frac{\frac{1}{2}\ \frac{-1}{2}\ \frac{-3}{2}}{2!\ \ 1!}(-1)^2 2^1+\frac{\frac{1}{2}\ \frac{-1}{2}\ \frac{-3}{2}\ \frac{-5}{2}}{4!\ \ 0!}$$

$$(-1)^4 2^0=-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{15}{384}=\frac{-21}{128}$$

148. **一般ニ多項式ノ展開ニ於ケル x ノアル冪ノ係數ヲ求ムルニハ, 前節ニ述ベタル方法ニヨリテ得ラルベシト雖モ, 時トシテハ頗ル簡單ニ之レヲ求ムルコトヲ得ベシ。今コレヲ例解セン。**

例 1. $(1+x+x^2+x^3)^{-2}$ ヲ展開シ x^8 ノ係數ヲ求メヨ。

解
$$(1+x+x^2+x^3)^{-2}=\frac{1}{(1+x+x^2+x^3)^2}=\left(\frac{1-x}{1-x^4}\right)^2$$
$$=(1-x)^2(1-x^4)^{-2}=(1-2x+x^2)(1+2x^4+3x^8+\cdots\cdots)$$

故ニ x^8 ノ係數ハ3ナリ。

例 2. $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-1}$ ニ於ケル x^n ノ係數ヲ求メヨ。

解
$$(1+x+x^2+x^3+^4)^{-1}=\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4}=\frac{1-x}{1-x^5}$$
$$=(1-x)(1-x^5)^{-1}=(1-x)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots\cdots+x^{5n}+\cdots\cdots)$$

コノ乘積ニ於テ $x^{5r}, x^{5r+1}, x^{5r+2}, x^{5r+3}, x^{5r+4}$ ノ係數ハ夫々 $1, -1, 0, 0, 0$ ナリ。ヨツテ次ノ結果ヲ得。

n ハモシ5ノ倍數ナルトキハ，ソノ係數1ニシテ，5ノ倍數ヨリ1大ナルトキハ -1 ニシテ，ソノ他ノ場合ハ凡テ零ナリ。

注意 コノ事ヨリ $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{-1}$ ノ展開式ヲ得。即チ $1+x^5-x^6+x^{10}-x^{11}+x^{15}-x^{16}+\cdots\cdots$ ナリ。

第五章　問　題

1. $\{(1-x)(1-ax)(1-a^2x)\}^{-1}$ ノ展開ニ於テ x^n ノ係數ヲ求メヨ。

2. n ガ正ノ整數ナル時ハ $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)^n$ ノ展開式ニ於テ x^r ノ係數ハ $\dfrac{(2n+r-1)!}{r!(2n-1)!}$ ナルコトヲ證セヨ。

解
$$(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)=(1-x)^{-2}$$
$$\therefore\quad (1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)^n=(1-x)^{-2n}$$

ソコデ x^r ノ係數ハ

$$(-1)^r{}_{-2n}C_r=(-1)^r\frac{(-2n)(-2n-1)\cdots\cdots(-2n-r+1)}{r!}$$
$$=\frac{2n(2n+1)\cdots\cdots(2n+r-1)}{r!}$$
$$=\frac{(2n+r-1)!}{r!(2n-1)!}$$

3. 2ノ解法ニ做ヒ $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)^2$ ノ展開式ニ於イテ x^r ノ係數ヲ求メヨ。

4. x ガ1ヨリ小ナル正ノ數ナリトスレバ

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\cdots$$

ニ於ケル x^n ノ係數ハ1ナルコトヲ證セヨ。

解
$$原式=\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\cdots}{1-x}$$
$$=\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\cdots}{1-x}$$
$$=\frac{(1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\cdots}{1-x}$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\frac{1-x^\infty}{1-x}$$

然ルニ $x<1$ ナル正ノ數ナルガ故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$

$$\therefore\qquad 原式=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$$

ヨリテソノ係數凡テ1ナリ。

5. 三科目ノ試驗ニ於テ各科滿點10ナルトキ凡テノ成績ニ於テ25點ヲ得ントスルニハ幾通リノ方法アルカ。

解 各科ニ於テトリ得ル點ハ 0. 1. 2. ……9. 10. ノ何レカニシテ．三科目ニ於テ25點ヲ得ントスルガ故ニ $(x^0+x^1+x^2+\cdots\cdots+x^9+x^{10})$ ノ三乘羃ニ於ケル x^{25} ノ係數ヲ求ムルコトニ歸ス。

6. p_n, q_n ヲ夫々 $(1-x+x^2)^{-1}$ 及ビ $(1-x-2x^2)^{-1}$ ノ展開式ニ於ケル x^n ノ係數ヲ示スモノナリトスレバ $3q_n-p_{3n}=2^{n+1}$ ナルコトヲ證セヨ。

7. $\dfrac{1+x}{(1+x+x^2)^2}$ ノ展開ニ於ケル x^3 ノ係數ハ1ナルコトヲ證セヨ。

8. $\dfrac{p+qx+rx^2+sx^3}{(1-x)^4}$ ノ展開ニ於テ x^{m-1} ノ係數ハ m^3 ナルガ爲メニ p, q, r, s ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。

9. $\dfrac{x}{1+x+x^2}$ ノ展開式ニ於テ x^n ノ係數ヲ $f(n)$ トスレバ

$$f(n)+f(n-1)+f(n-2)=0$$ ナルコトヲ證セヨ。

解
$$原式=\frac{x(1-x)}{(1-x^3)}=(x-x^2)(1-x^3)^{-1}$$
$$=(x-x^2)(1+x^3+x^6+\cdots\cdots+x^{3m}+\cdots\cdots)$$

然ルニ $f(n)$ ハ x^n ノ係數ナル故ニ，$f(n-1)$, $f(n-2)$ ハ夫々 x^{n-1}, x^{n-2} ノ係數

ナリ。

サテ $n=3m$ ナルトキハ上ノ式ヨリ直チニ知ルガ如クソノ係數零ナリ，又 $n=3m-1$ ナルトキハソノ係數 -1 ニシテ，$n=3m-2$ ナル時ハソノ係數1ナリ。ヨツテコレ等ノ和ハ零ナリ。而シテ $n, n-1, n-2$ ノ何レカハ必ズ $3m, 3m-1, 3m-2$, ナル形ノモノナリ。ヨリテ證明セラレタリ。

第六章

指數級數

149. $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$

ナル級數ガ收斂ナルコトハ已ニ百三十四節例1ニヨリテ知リタリ。今コノ和ヲ e ニテ表ハスベシ。然ルトキ吾人ハ e ノ近似値 (Approximate value) ヲ求メントス。

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}=2.5 \qquad \frac{1}{3!}=0.166666666666$$

$$\frac{1}{4!}=0.041666666666 \qquad \frac{1}{5!}=0.008333333333$$

$$\frac{1}{6!}=0.001388888888 \qquad \frac{1}{7!}=0.000198412698$$

$$\frac{1}{8!}=0.000024801587 \qquad \frac{1}{9!}=0.000002755731$$

$$\frac{1}{10!}=0.000000275573 \qquad \frac{1}{11!}=0.000000025052$$

$$\frac{1}{12!}=0.000000002087 \qquad \frac{1}{13!}=0.000000000160$$

$$\frac{1}{14!}=0.000000000011$$

コレ等ヲ加フレバ $S_{15}=2.718281828452$ ヲ得。而シテ少クトモ小數第十位マデハ正シ。何トナレバコノ演算ニテ省略セシ部分ハ $\frac{1}{15!}+\frac{1}{16!}+\frac{1}{17!}+\cdots$

即チ $$\frac{1}{15!}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{16.17}+\cdots\cdots\right)$$

サテコレハ $$\frac{1}{15!}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\cdots\right)$$

ヨリモ小ナリ。而シテコレハ多クトモ 0.000000000001 ナリ。又 S_{15} ヲ作ルトキ省略シタル小數第十三位以下ノ影響ヲ考フルモ尙 2.7182818284 マデハ正シ。

定理 1. e ハ無理數ナリ。

證明 無理數トハ互ニ素ナル整數(正又ハ負) p, q ニ對シテ $\frac{p}{q}$ ナル形ノ數ナラザルモノトス。ソコデ今 e ヲ有理數ナリト假定シ，コレヲ $\frac{p}{q}$ ト置ケバ

$$\frac{p}{q}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{(q+1)!}+\cdots\cdots$$

コノ兩邊ニ $q!$ ヲ乘ズレバ

$$\text{正ノ整數}=\text{正ノ整數}+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots\cdots$$

然ルニ

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\cdots\cdots<\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)^2}+\cdots\cdots=\frac{1}{q}$$

ヨリテ e ヲ $\frac{p}{q}$ ナリト假定スレバ結局次ノ結果ニ達ス。即チ

$$\text{正ノ整數}=\text{正ノ整數}+\frac{1}{q}\text{ヨリ小ナル分數}$$

コレ反理ナリ。ヨリテ e ハ $\frac{p}{q}$ ニテ表ハスコトヲ得ズ。卽チ無理數 (Irrational number) ナリ。

定理 2. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$ ハ x ノ凡テノ有限ナル値ニ對シテ收斂ナリ，

證明 何トナレバ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{x}{n}=0$ ヨリテ收斂ナリ。

コノ級數ヲ指數級數 (Exponential series) トイフ。

150. **定理 3.** $f(m)=1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{m^p}{p!}+\cdots\cdots$ トスレバ $f(m)f(n)=f(m+n)$ ナリ。

證明 $$f(m)=1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{m^p}{p!}+\cdots\cdots$$

$$f(n)=1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\frac{n^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n^q}{q!}+\cdots\cdots$$

$$f(m+n)=1+\frac{(m+n)}{1!}+\frac{(m+n)^2}{2!}+\frac{(m+n)^3}{3!}$$

$$+\frac{(m+n)^{p+q}}{(p+q)!}+\cdots\cdots$$

サテ $f(m)$, $f(n)$ ハ m, n ノ如何ニ關セズ收斂ナルガ故ニ本編第三章定理9ニヨリ乘法ハ許サル。ソコデコノ乘積ニ於テ $m^p\,n^q$ ノ係數ヲ求ムルニ $\dfrac{1}{p!q!}$ 又 $f(m+n)$ モ收斂ニシテ $m^p\,n^q$ ノ係數ヲ求ムルニコノ項ハ m 及ビ n ニ關シテ $p+q$ 次ナルガ故ニ必ズヤ $\dfrac{(m+n)^{p+q}}{(p+q)!}$ ノ展開中ニ表ハルベシ。卽チ $m^p\,n^q$ ノ係數ハ ${}_{p+q}C_p\times\dfrac{1}{(p+q)!}=\dfrac{1}{p!q!}$ ヨツテ $f(m)\,f(n)=f(m+n)$ ナリ。

系 $f(m)=1+\dfrac{m}{1!}+\dfrac{m^2}{2!}+\dfrac{m^3}{3!}+\cdots\cdots$ トスレバ $f(m)\,f(n)\,f(p)\cdots\cdots$

$$=f(m+n+p+\cdots\cdots)\ \text{ナリ。}$$

コレヲ指數級數ノ加法定理トイフ。

定理 4. $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$ ナリ。

證明 (i) x **ガ正ノ整數ナル時。**

$f(m)\,f(n)\,f(p)\cdots\cdots=f(m+n+p+\cdots\cdots)$ ニ於テ $m=n=p=\cdots\cdots=1$ トシコノ個數ヲ x 個トスレバ

$$\{f(1)\}^x=f(x)$$

然ルニ

$f(1)=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots\cdots=e$ ニシテ，$f(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}$ ナリ。ヨリテ證明セラレタリ。

(ii) x **ガ正ノ有理數ナルトキ。**

$x=\dfrac{k}{h}$ ナリトス。$m=n=p=\cdots\cdots=\dfrac{k}{h}$ トシ且ツソノ個數 h 個アリトスレバ

$$\left\{f\left(\frac{k}{h}\right)\right\}^h=f\left(\frac{k}{h}\times h\right)=f(k)=e^k$$

故ニ
$$f\left(\frac{k}{h}\right)=e^{\frac{k}{h}}=e^x$$

ナリ。然ルニ $f\left(\dfrac{k}{h}\right)=1+\dfrac{k}{h}+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{k}{h}\right)^2+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{k}{h}\right)^3+\cdots\cdots$

ニシテ $\dfrac{k}{h}=x$ ナルガ故ニ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\ \text{ナリ。}$$

(iii) x **ガ負ノ整數又ハ分數ナルトキ**

$x=-y$ ト置ケバ，y ハ正ノ整數又ハ分數ナリ。

サテ
$$f(-y)\,f(y)=f(-y+y)=f(0)=1$$

故ニ
$$f(-y)=\frac{1}{f(y)}$$

然ルニ $f(y)$ ハ (i) 及ビ (ii) ニヨリテ e^y ナルコトヲ知ル。ヨリテ，

$$f(-y)=\frac{1}{e^y}=e^{-y}$$

從ツテ
$$e^{-y}=1+\frac{(-y)}{1!}+\frac{(-y)^2}{2!}+\cdots\cdots$$

ソコデ $-y$ ヲ x ニ置キカヘルト

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$$

例 1. $\sqrt{e}$ ヲ小數第四位マデ求メヨ。

解 $\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots$

故ニソノ値ヲ計算センニ

$$1+\frac{1}{2}=1.5 \qquad \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2=0.125$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.0208333333 \qquad \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=0.0026041666$$

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5=0.0002604166$$

ナルガ故ニ其和ハ　　1.6486979165

サテコノ計算ニハ $\dfrac{1}{6!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6+\dfrac{1}{7!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^7+\cdots\cdots$ ヲ省略セリ。次ニ省略セル部分ヲ考ヘンニ次ノ二ツノ數ノ間ニ在リ。

$$\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6<\text{省略部分}<\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

故ニ $\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6$ ト $\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$ トノ間ニ在リ。即チ省略セル部分ハ 0.00002 ヨリモ大ニシテ, 0.00005 ヨリモ小ナリ。ヨリテ

$$1.648717<\sqrt{e}<1.648747$$

即チ $\sqrt{e}$ ハ 1.6487……… ナリ。

例 2. $1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(n+1)}{n!}+\cdots\cdots$ ヲ求メヨ。

解 原式 $=1+\frac{1+1}{1!}+\frac{2+1}{2!}+\frac{3+1}{3!}+\cdots\cdots$

$$=\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)+\left(1+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{4}{4!}+\cdots\cdots\right)$$

而シテ第二ノ括弧内ハ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots$ トナル。即チ e ナリ。ヨツテ求ムル値ハ $2e$ ナリ。

定理 5. $a^x=1+\frac{x}{1!}log_ea+\frac{x^2}{2!}(log_ea)^2+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}(log_ea)^n+\cdots\cdots$ ナリ　但シ $a>0$ ナリトス。

證明 $a=e^k$ ト置キ e ヲ底數トスル對數ヲトルト,

$$log_ea=k$$

然ルニ
$$a^x=(e^k)^x=e^{kx}$$

故ニ
$$a^x=1+\frac{kx}{1!}+\frac{(kx)^2}{2!}+\frac{(kx)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

コノ式ニ $k=log_ea$ ヲ代入スレバ

$$a^x=1+\frac{x}{1!}log_ea+\frac{x^2}{2!}(log_ea)^2+\frac{x^3}{3!}(log_ea)^3+\cdots\cdots$$

151. **定理 6.** n ガ正ノ整數ナルトキ

$n^n-n(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{2}(n-2)^n-\cdots\cdots n$ 項ニ至ル $=n!$ ナリ。

證明 $(e^x-1)^n=e^{nx}-\frac{n}{1!}e^{(n-1)x}+\frac{n(n-1)}{2!}e^{(n-2)x}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

e^{nx} ヨリハ x^n ノ係數トシテ $\frac{n^n}{n!}$ ヲ出ダシ

$ne^{(n-1)x}$　〃　〃　$\frac{n(n-1)^n}{n!}$　〃

$\frac{n(n-1)e^{(n-2)x}}{2!}$　〃　〃　$\frac{n(n-1)(n-2)^n}{2!\ n!}$　〃

……………………　……………………

故ニ (1) ヨリ x^n ノ係數ハ

$$\frac{n^n}{n!}-\frac{n(n-1)^n}{n!}+\frac{n(n-1)(n-2)^n}{2!\ n!}-\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ又

$$(e^x-1)^n=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots-1\right)^n$$
$$=x^n\left(\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\cdots\cdots\right)^n\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3) ヨリ x^n ノ係數ハ 1 ナリ。ヨツテ

$$\frac{n^n}{n!}-\frac{n(n-1)^n}{n!}+\frac{n(n-1)(n-2)^n}{2!\ n!}-\cdots\cdots=1$$

變形シテ

$$n^n-n(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{2!}(n-2)^n-\cdots\cdots=n!$$

第六章　問　題

1. $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots$ ナル事ヲ證セヨ。

2. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots$ ナルコトヲ證セヨ。

3. $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)=1$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots=e$

$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots=e^{-1}$

故ニ所設ノ左邊 $=e\times e^{-1}=1$ ナリ。

4. $1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+3}{3!}+\cdots\cdots$ ヲ求メヨ。

解 一般項 $=\frac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n!}=\frac{n(n+1)}{2\times n!}$

然ルニ $\dfrac{n(n+1)}{2\times n!}$ ヲ部分分數ノ和ニ化スレバ

$$\frac{2n}{2\times n!}+\frac{n(n-1)}{2\times n!}=\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{2(n-2)!}$$

ヨツテ與ヘラレタル級數ノ和ハ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}=e+\frac{e}{2}=\frac{3e}{2}$$

5. 4ト同樣ノ方法ニヨリテ次ノ二ツノ公式ヲ證明セヨ。

(i) $\dfrac{1^3}{1!}+\dfrac{2^3}{2!}+\dfrac{3^3}{3!}+\cdots\cdots=5e$

(ii) $\dfrac{s_1}{1!}+\dfrac{s_2}{2!}+\dfrac{s_3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{s_n}{n!}+\cdots\cdots=\dfrac{17}{6}e$

但シ $s_n=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

6. $\dfrac{e^2-1}{e^2+1}=\dfrac{\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{5!}+\cdots\cdots}{1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}+\cdots\cdots}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $$\frac{e^2-1}{e^2+1}=\frac{e(e-e^{-1})}{e(e+e^{-1})}=\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2), (3) ヲ (1)ニ代入スレバ所要ノ結果ヲ得。

7. 兩邊ノ x^n ノ係數ヲ等シト置キテ次ノ式ヲ證セヨ。

$$\frac{1^3x}{1!}+\frac{2^3x^2}{2!}+\frac{3^3x^3}{3!}+\cdots\cdots=(x+3x^2+x^3)e^x$$

8. $\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^n$ ヲ二通リノ方法ニテ展開シ，x^n ノ係數ヲ等シト置キテ次ノ等式ヲ證セヨ。

$$n^n-n(n-2)^n+\frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^n-\cdots\cdots\text{至}(n+1)\text{項}=2^n.n!$$

9. $1-n.2^n+\dfrac{n(n-1)}{2!}3^n-\cdots\cdots$至$(n+1)$項$=(-)^n.n!$ ナルコトヲ證セヨ。

10. $n^2+n(n-2)^2+\dfrac{n(n-1)}{2}(n-4)^2+\cdots\cdots$至$(n+1)$項$=2^n\times n$ ナルコトヲ證セヨ。

11. $\dfrac{e^{nx}-1}{1-e^{-x}}$ ノ展開式ノ x^r ノ係數ハ

$$\frac{1}{r!}(1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r)$$

ナルコトヲ證セヨ

12. $(x+1)^ne^x=\dfrac{1}{e}(1+x)^ne^{1+x}$ ナル恒等式ヲ利用シテ

$$e\left\{1+\frac{n}{1^2}+\frac{n(n-1)}{1^2.2^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots\right\}$$
$$=1+(n+1)+\frac{(n+1)(n+2)}{1^2.2^2}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots$$

ナルコトヲ證セヨ。

13. $\dfrac{1}{e}=2\left(\dfrac{1}{3!}+\dfrac{2}{5!}+\dfrac{3}{7!}+\cdots\cdots\right)$ ナルコトヲ證セヨ。

14. $e^x=y+\sqrt{(1+y^2)}$ ナルトキハ，$y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ナルコトヲ證セヨ。

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^m}=\infty$ ナルコトヲ證セヨ。但シ $m>0$ トス。

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_e x}{x^m}$ ヲ求メヨ。但シ $m>0$ トス。

解 $\log_e x=y$ トスレバ $x=e^y$ ナルガ故ニ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_e x}{x^m}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{my}}=0$$

17. $\displaystyle\lim_{x\to0}x^m\log_e x$ ヲ求ム。

解 $\log_e x=-y$ トスレバ $x=0$ ナル極限ニ於テハ $y=+\infty$ ナリ。サテ $\log x=-y$ ヨリ $x=e^{-y}$ ヲ得ルガ故ニ

$$x^m\log_e x=-ye^{-my}=-\frac{1}{m}\ \frac{my}{e^{my}}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}x^m\log_e x=-\lim_{y\to\infty}\frac{1}{m}\ \frac{my}{e^{my}}=0$$

第七章

對數級數

152. $a>0$ ナル時ハ前章定理 5 ニヨリテ

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{(x\log_e a)^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今 $a=1+y$ ト置ケバ(1)ハ

$$a^x=(1+y)^x=1+x\log_e(1+y)+\frac{\{x\log_e(1+y)\}^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。然ルニ $|y|<1$ ナルトキハ

$$(1+y)^x=1+xy+\frac{x(x-1)}{2!}y^2+\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)ト(3)トヨリ

$$1+xy+\frac{x(x-1)}{2!}y^2+\cdots\cdots+\frac{x(x-1)\cdots\cdots(x-r+1)}{r!}y^r+\cdots\cdots$$

$$=1+x\log_e(1+y)+\frac{\{x\log_e(1+y)\}^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots(4)$$

兩邊ヨリ x ノ係數ヲ比較スレバ

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\cdots(5)$$

ヲ得。コレヲ對數級數(Logarithmic series)トイフ。

153. 任意ノ數ノ對數ノ近似値ヲ求メンニハ公式(5)ヲ用フルヨリモ遙カニ便利ナル方法アリ。今コレヲ說明スベシ。

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{x^r}{r}+\cdots\cdots$$

此公式ニ於テ x ノ代リニ $-x$ ト置ケバ

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots-\frac{x^r}{r}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \log_e\frac{1+x}{1-x}=\log_e(1+x)-\log_e(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right)\cdots(6)$$

$x=\dfrac{m-n}{m+n}$ ト置ケバ, $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{m}{n}$ トナルヲ以ツテ(6)ハ

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots(7)$$

トナル。故ニ2ノ對數ヲ求メントスレバ(7)ニ $m=2,\ n=1$ ヲ代入スレバヨシ。即チ

$$\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ \frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\ \frac{1}{3^5}\cdots\cdots\right)=.693147\cdots\cdots$$

又3ノ對數ヲ求メントスレバ(7)ニ於テ $m=3,\ n=2$ ト置ケバヨシ。即チ

$$\log_e\frac{3}{2}=\log_e 3-\log_e 2=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\ \frac{1}{5^3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\right)=.405465$$

故ニ $\log_e 3=.693147\cdots\cdots+.405465=1.09861\cdots\cdots$

154. 例 1. $\log(1+x+x^2+x^3)$ ノ展開ニ於テ x^n ノ係數ヲ求メヨ(底數ヲ e トス。以下特ニ斷リナケレバ凡テ底數ヲ e トス)。

解 $\log(1+x+x^2+x^3)=\log\dfrac{1-x^4}{1-x}=\log(1-x^4)-\log(1-x)$

$$=-\left(x^4+\frac{1}{2}x^8+\frac{1}{3}x^{12}+\cdots\cdots\right)+\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\cdots\right)$$

ヨリテ n ガ4ノ倍數ナル時ハ x^n ノ係數ハ

$$-\frac{1}{\frac{n}{4}}+\frac{1}{n}=-\frac{3}{n}$$

又 n ガ4ノ倍數ナラザル時ハ上ノ右邊ノ前半ヨリハ x^n ガ生ゼズ。ヨリテソノ係數ハ $\dfrac{1}{n}$ ナリ。

例 2. $a+b+c=0$ ナル時ハ

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $bc+ca+ab=p,\ abc=q$ トスレバ $a+b+c=0$ ナルガ故ニ $(1-ax)(1-bx)(1-cx)=1+px^2-qx^3$

$$\therefore\quad \log(1-ax)+\log(1-bx)+\log(1-cx)=\log\{1-(-px^2+qx^3)\}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l}-ax-\frac{1}{2}a^2x^2-\frac{1}{3}a^3x^3-\cdots\cdots-\frac{1}{n}a^nx^n-\cdots\cdots\\ -bx-\frac{1}{2}b^2x^2-\frac{1}{3}b^3x^3-\cdots\cdots-\frac{1}{n}b^nx^n-\cdots\cdots\\ -cx-\frac{1}{2}c^2x^2-\frac{1}{3}c^3x^3-\cdots\cdots-\frac{1}{n}c^nx^n-\cdots\cdots\end{array}\right\}=$$

$$-(-px^2+qx^3)-\frac{1}{2}(-px^2+qx^3)^2-\cdots\cdots$$

コノ兩邊ヨリ x^2, x^3 及ビ x^5 ノ係數ヲ比ブレバ夫々

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=-p,\qquad \frac{a^3+b^3+c^3}{3}=q$$

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=-pq$$

ヨツテ

$$-pq=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\;\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

例 3. $log(1+n)$ ガ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ ト

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

トノ間ニ在ルコトヲ證セヨ。

解 $1>|x|>0$ ナリトスレバ

$$-log(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots$$

$$=x-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)-\cdots\cdots(2)$$

然ルニ $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$, $\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right)$, …… ハ凡テ正ノ數ナルガ故ニ

(1) 及ビ (2) ヨリ

$$-log(1-x)>x>log(1+x)$$

コノ公式ノ x ニ順次 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1}$ ト置ケバ,

$$\left.\begin{aligned}
&1>log2\\
&-log\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>log\frac{3}{2}\\
&-log\frac{2}{3}>\frac{1}{3}>log\frac{4}{3}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-log\frac{n-1}{n}>\frac{1}{n}>log\frac{n+1}{n}\\
&-log\frac{n}{n+1}>\frac{1}{n+1}
\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad -\left(log\frac{1}{2}+log\frac{2}{3}+\cdots\cdots+log\frac{n}{n+1}\right)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$$

及ビ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>log2+log\frac{3}{2}+\cdots\cdots+log\frac{n+1}{n}$

上ノ不等式ハ $log(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$ トナリ

下ノ不等式ハ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>log(n+1)$ トナル。

ヨツテ

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}>log(n+1)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

155. **對數級數ヲ用ヒテ無限級數ノ和ヲ求ムルコトヲ得ベシ。** コノ場合ニ次ノ四ツノ事項ニ注意スベシ。

(1) $log(1+x)$ ノ展開ニハ x ノ悉クノ冪ヲ含ミ且ツソノ係數ハ正負交番ナリ。

(2) $log(1-x)$ ノ展開ニハ x ノ悉クノ冪ヲ含ミ且ツソノ係數ハ凡テ負ナリ。

(3) $log\frac{1+x}{1-x}$ ノ展開ニハ x ノ奇數冪ノミヲ含ミ且ツソノ係數凡テ正ナリ。

(4) $log\{(1+x)(1-x)\}$ ノ展開ニハ x ノ偶數冪ノミヲ含ミ且ツソノ係數ハ悉ク負ナリ。

例 1. $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\;\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\;\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\;\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

解 $log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\cdots$

ニ於テ $x=\frac{1}{3}$ ト置ケバ與ヘラレタル級數トナル。ヨリテソノ和ハ

$log\frac{4}{3}$ ナリ 注意 (1) 參照。

例 2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\;\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\;\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

解 $\frac{1}{2}$ ノ代リニ x ト置ケバ與ヘラレタル級數ハ x ノ奇數冪ノミヲ含ムコトニナル。而シテ

$$log\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

故ニ　原式$=\frac{1}{2}log\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=log\sqrt{3}$.　ナリ

例 3. $\frac{1}{2}\,\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{3^4}+\frac{1}{6}\,\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

解　$log\{(1+x)(1-x)\}=-2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\right)$

$\therefore\quad \frac{-1}{2}log\{(1+x)(1-x)\}=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$

コノ右邊ニ $x=\frac{1}{3}$ ト置ケバ與ヘラレタル級數トナルガ故ニソノ和ハ

$$-\frac{1}{2}log\left\{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{1}{2}log\frac{9}{8}=log\frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$=log\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

第七章　問　題

1. $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

解　$u_n=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$

故ニ與ヘラレタル級數ハ

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\right)=\frac{1}{2}log2$$

2. $\frac{4}{1.3}-\frac{6}{2.4}+\frac{12}{5.7}-\frac{14}{6.8}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

解　與ヘラレタル級數ヲ變形スレバ　$\frac{1+3}{1.3}-\frac{2+4}{2.4}+\frac{5+7}{5.7}-\cdots\cdots$

$$=\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots=log2$$

3. $\frac{5}{1.2.3}+\frac{7}{3.4.5}+\frac{9}{5.6.7}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求メヨ。

4. $log(x+n)=logx+log\left(1+\frac{1}{x}\right)+log\left(1+\frac{1}{1+x}\right)+\cdots\cdots+log\left(1+\frac{1}{n-1+x}\right)$

ナルコトヲ證セヨ。

5. $log\frac{1}{1+x}=-\left[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots\right]$

ナルコトヲ證セヨ。

6. $a+b+c+d=0$　ナルトキハ

$\frac{a^5+b^5+c^5+d^5}{5}=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\ \frac{a^3+b^3+c^3+d^3}{3}$　ナルコトヲ證セヨ。

7. x ガ正ナルトキハ $logx<2\sqrt{x}$ ナルコトヲ證セヨ。

8. $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots$　ナルトキハ

$x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots$ ナルコトヲ證セヨ。

解　$|x|<1$ ナリトスレバ $y=log(1+x)$ ナルガ故ニ

$e^y=1+x\qquad \therefore\quad e^y-1=x$

然ルニ　$e^y=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\cdots\cdots$

$\therefore\qquad e^y-1=y+\frac{y^2}{2!}+\cdots\cdots=x$ ナルヲ知ル。

9. $log\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$ ヲ x ノ昇冪ニ展開セヨ。

10. 恒等式 $2log(1-x)=log(1-2x+x^2)$ ヲ利用シテ

$$2^n-n2^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2!}2^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}2^{n-6}+\cdots\cdots=2$$

ナルコトヲ證セヨ。

11. $log\frac{1}{1-x-x^2-x^3}$ ヲ展開スル時 x^n ノ係數ハ n ガ偶數ナルカ，奇數ナルカニ從ヒテ，$\frac{3}{n}$ 又ハ $\frac{1}{n}$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

12. α,β ハ方程式 $px^2+qx+r=0$ ノ二根ナルトキ

$$log(p-qx+rx^2)=logp+(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\cdots\cdots$$

ナルコトヲ證セヨ。

13. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{log(1+x)}\right)$ ヲ求メヨ。

14. $(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$　ナルコトヲ證セヨ。

解　$-x=a\quad -y=b\quad x+y=c$　トスレバ　$a+b+c=0,\ xy(x+y)=abc,$　及ビ

$x^2+xy+y^2=-(bc+ca+ab)$ ナリ。サテ $a+b+c=0$ ナルガ故ニ百五十四節例2ニヨリテ

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=abc(bc+ca+ab)^2$$

之レニ $x=-a,\ y=-b,\ x+y=c$ ト置ケバ容易ニ求ムル結果ヲ得ベシ。

15. 上ノ解法ニ倣ヒ

$$(x+y)^{11}-x^{11}-y^{11}=11xy(x+y)(x^2+xy+y^2)\{(x^2+xy+y^2)^3+x^2y^2(x+y)^2\}$$

ナルコトヲ證セヨ。

16. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ ガ n ガ ∞ ナルトキ一定ノ極限値ヲトルコトヲ證セヨ。

解 x ガ正ニシテ且ツ1ヨリモ小ナル時ハ百五十四節例3ヨリ

$$\log(1+x)<x<-\log(1-x)$$

コノ公式ノ x ニ順次 $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots\cdots\frac{1}{n}$ トオクト結局

$$\log\frac{n+1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<\log n$$

$$\therefore\quad 1+\log\frac{n+1}{2}-\log n<1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n<1$$

即チ $$1+\log\frac{n+1}{2n}<1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n<1$$

ソコデ $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n$ ト置ケバ

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<0$$

$$\therefore\quad u_{n+1}<u_n$$

ヨリテ u_n ハ n ガ増スニ從ヒ次第ニ減少ス。然レドモ u_n ハ n ノ値ノ如何ニ關セズ $1+\log\frac{n+1}{2n}$ ヨリ大ナルガ故ニ際限ナク減少スルモノニアラズ。故ニアル極限ニ達ス。

コレヲ精密ニ計算スレバ大凡 0.577215664…… ニシテコレヲおいれるノ常數 (Euler's constant.) トイフ。[*] おいれる(1707—1783)ハ壯年過度ノ勉強ノ爲メ右眼ヲ失ヒ更ニ1766年ニ左眼ヲ失ヒタルモ尙研究ヲ怠ラザリシ偉大ナル數學者ナリキ。

[*] 時トシテハますけろにノ常數 (Mascheroni's constant) トイフコトアリ。同氏ハ小數第32位マデ計算セリト雖モ小數第20位ノ所ニ謬リアルコトガがうす及ビにこらい(Nicolai) ニヨリテ指摘セラレタリ。

第八章

無限乘積

156. ニツノ數列

$$a_1,\quad a_2,\ \cdots\cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ $$P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots\cdots,P_n,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ニ於イテ $P_1=a_1,\ P_2=a_1a_2,\ P_3=a_1a_2a_3,\ \cdots\cdots,\ P_n=a_1a_2\cdots\cdots a_n$ ナリトセヨ。然ル時 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ ガ零ナラザル有限値ナル時ハ，無限乘積 P_n ガ (Infinite product $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ トモ記號ス) ガ收斂ナリトイヒ，其極限値ヲ無限乘積ノ積又ハ値トイフ。モシ極限値ハ無限大ナルカ又ハ零ナルトキハ無限乘積ハ發散ナリトイヒ，然ラザル時ハ無限乘積ハ振動ナリトイフ。

例 1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\cdots$ ニ於テハ

$$P_1=\frac{1.3}{2^2},\quad P_2=\frac{1.3}{2^2}\ \frac{2.4}{3^2},\quad P_3=\frac{1.3}{2^2}\ \frac{2.4}{3^2}\ \frac{3.5}{4^2}\cdots\cdots$$

$$P_n=\frac{1.3.}{2^2}\ \frac{2.4}{3^2}\ \frac{3.5}{4^2}\cdots\cdots\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}\ \frac{n+2}{n+1}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{2}\ \frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}$$

故ニコノ無限乘積ハ收斂ナリ。

例 2. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\cdots1+\frac{1}{n+1}\cdots\cdots$ ニ於テハ

$$P_n=\frac{3}{2}\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{2}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2}=\infty$$

ヨツテコノ無限乘積ハ∞ニ發散ス。

例 3. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\cdots1-\frac{1}{n+1}\cdots\cdots$ ニ於テハ

$$P_n=\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

ヨツテコノ無限乘積ハ零ニ發散ナリ。

157. 有限個ノ因數ハ負數ナルトキハ之レヲ省略シテ正項因數ノミヨリ成ル無限乘積ニ就イテ考究スルモ差支ヘナク，且ツ無限級數ノ收斂モシクハ發散ヲ判定スルニハ(振動ノ場合ヲ除キテハ)其ノ絕對値ヲノミ考フレバヨキ故ニ，(1) ナル數列ハ悉ク正項ナリト假定スルコトヲ得ベシ。故ニ $log\ \mathrm{P}_n = loga_1 + loga_2 + \cdots\cdots + loga_n$ ナリト置クベシ。從ツテ次ノ四ツノ定理ヲ得。

定理 1. モシ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} log\ a_n$ ハ發散ニシテソノ極限値ハ $-\infty$ ナル時ハ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ハ 0 ニ發散ス。

定理 2. モシ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} log\ a_n$ ハ收斂ナラバ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ハ收斂ナリ。

定理 3. モシ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} log\ a_n$ ハ發散ニシテソノ極限値ハ $+\infty$ ナル時ハ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ハ發散ナリ。

定理 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} log\ a_n$ ハ振動ナルトキハ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ハ振動ナリ。

158. 百三十三節系ニヨリテ無限級數 $loga_1 + loga_2 + \cdots\cdots + loga_n + \cdots\cdots$ ガ收斂ナル爲メニ必要ナル條件ハ $lim\ loga_n = 0$ ナルコトナリ。從ツテ $lim a_n = 1$ ナルコトナリ。故ニ次ノ定理アリ。

定理 5. 無限乘積 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ガ收斂ナル爲メノ必要ナル條件ハ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ナリ。

注意 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ナルコトハ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ガ收斂ナルタメニ必要ナル條件ナルモ充分ナル條件ニハアラズ。ソレ故ニモシ $lim\ a_n = 1$ ナルコトアリト雖モ，$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ガ收斂ナリト斷ズベカラズ。然レドモ $\lim\limits_{n\to n} a_n = 1$ ナラザル時ハ $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ガ收斂ナラズトイフテ可ナリ。例ヘバ前ニ揭ゲタル

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots$$ ニ於テハ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$ ナルモソノ實ハ零ニ發散シ

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\cdots$$ ニ於テハ

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) = 1$ ナルモソノ實ハ $+\infty$ ニ發散ス。故ニ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ ナルコトアリト雖モ直チニ無限乘積 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ガ收斂ナリトイフベカラザルナリ。

159. 百五十六節數列(1) ニ於テ $a_1\ a_2 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$ ノ代リニ $(1+u_1)(1+u_2)\cdots\cdots(1+u_n)\cdots\cdots$ ナルガ如キ形ニテ與ヘラレタル時無限乘積，

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n) = (1+u_1)(1+u_2)\cdots\cdots(1+u_n)\cdots\cdots$$

ノ收斂性ヲ判定スルニハ次ノ定理ヲ用フルヲ便トス。

定理 6. n ノ凡テノ値ニ對シテ $u_n > 0$ ナル時無限乘積 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ ハ無限級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ ガ收斂ナルトキ收斂ニシテ，發散ナルトキ又發散ニシテソノ極限値ハ $+\infty$ ナリ。

證明 $$\mathrm{P}_n = (1+u_1)(1+u_2)\cdots\cdots(1+u_n)$$

トスル時ハ

$$\mathrm{P}_n = 1 + (u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n) + \mathrm{R}$$

茲ニ $$\mathrm{R} = \Sigma u_p u_q + \Sigma u_p u_q u_r + \cdots\cdots + u_1 u_2 u_3 \cdots\cdots u_n$$

$$\therefore \quad \mathrm{P}_n > 1 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_n$$

故ニ Σu_n ガ發散ナルトキハ P ガ $+\infty$ ニ發散ス。次ニ Σu_n ガ收斂ナルトキハ n ノ値ヲ充分大ニスレバ

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots < \varepsilon < 1$$

然ルニ

$$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots\cdots = 1 + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots + u_{2n} + \cdots\cdots$$
$$+ \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3 + \cdots\cdots + \mathrm{S}_r + \cdots\cdots$$

茲ニ $$\mathrm{S}_2 = \Sigma u_p u_q < (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots)^2 < \varepsilon^2$$

$$\mathrm{S}_3 = \Sigma u_p u_q u_r < (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots)^3 < \varepsilon^3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{S}_r = \Sigma u_p u_q u_r \cdots\cdots < (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots\cdots)^r < \varepsilon^r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ $$(1+u_{n+1})(1+u_{n+2})\cdots\cdots(1+u_{n+r})\cdots\cdots$$

$$<1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots\cdots=\frac{1}{1-\varepsilon}$$

故ニ
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)<\frac{P_n}{1-\varepsilon}$$

然ルニ P_n ガ有限個ノ乘積ナルガ故ニ有限ナル數ニシテ且ツ ε ハ 1 ヨリ小ナルガ故ニ，$\dfrac{P_n}{1-\varepsilon}$ ハ無限大トナルコトナシ。ヨツテ無限乘積 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ ガ收斂ナリ。

注意 百五十六節例2ノ發散ナルコトハ，コノ定理ヨリモ判定スルコトヲ得。

定理 7. 凡テノ n ニ對シテ $1>u_n>0$ ナル時，無限乘積 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-u_n)$ ハ無限級數 Σu_n ガ收斂ナルトキ收斂ニシテ Σu_n ガ發散ナルトキ零ニ發散ス。

證明
$$P_n=(1-u_1)(1-u_2)\cdots\cdots(1-u_n)$$
トスレバ
$$\frac{1}{P_n}=\left(1+\frac{u_1}{1-u_1}\right)\left(1+\frac{u_2}{1-u_2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{u_n}{1-u_n}\right)$$
ナリ。

サテ凡テノ n ニ對シテ $1>u_n>0$ ナルガ故ニ $\dfrac{u_n}{1-u_n}$ ハ n ノ如何ニ關セズ正ノ數ナリ。ヨリテ前定理ニヨリテ $\Sigma\dfrac{u_n}{1-u_n}$ ガ收斂ナルトキハ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{P_n}$ ガ收斂ナリ。故ニソノ逆數タル $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ モ亦收斂ナリ。

次ニ $\Sigma\dfrac{u_n}{1-u_n}$ ガ發散ナル時ハ $\lim P_n$ ガ $+\infty$ ニ發散ス。然ルニ假定ニヨリテ u_n ハ一般ニ 1 ヨリ小ナル正ノ數ナルガ故ニ n ノ凡テノ値ニ對シテ
$$\frac{u_n}{1-u_n}>u_n$$
ナリ。從ツテ $\Sigma\dfrac{u_n}{1-u_n}$ ハ收斂ナラバ Σu_n ハ收斂ニシテ，Σu_n ハ發散ナラバ $\Sigma\dfrac{u_n}{1-u_n}$ モ發散ナリ。ヨツテ定理ハ證明セラレタリ。

160. 無限乘積ト無限級數トノ關係

$$P_n=(1+u_1)(1+u_2)\cdots\cdots(1+u_n)\quad トスレバ$$
$$P_n=(1+u_n)P_{n-1}=P_{n-1}+u_nP_{n-1}$$

同樣ニ
$$P_{n-1}=\qquad P_{n-2}+u_{n-1}P_{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_2=\qquad P_1+u_2P_1$$

邊々相加ヘテ整頓スレバ
$$P_n=P_1+u_2P_1+u_3P_2+\cdots\cdots+u_nP_{n-1}$$
$$=1+u_1+u_2P_1+u_3P_2+\cdots\cdots+u_nP_{n-1}$$
$$\therefore\quad P_n=1+u_1+\sum_{r=2}^{n}u_rP_{r-1}$$
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}P_n=1+u_1+\sum_{r=2}^{\infty}u_rP_{r-1}$$

コレ即チ無限乘積ヲ無限級數ニ化シタルモノナリ。次ニ $S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$ トスレバ n ノ如何ニ關セズ
$$\frac{S_n}{S_{n-1}}=1+\frac{u_n}{S_{n-1}}$$
ナリ。然ルニ又
$$S_n=S_1\frac{S_2}{S_1}\frac{S_3}{S_2}\cdots\cdots\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\frac{S_n}{S_{n-1}}$$
ト書カル。故ニ
$$S_n=S_1\left(1+\frac{u_2}{S_1}\right)\left(1+\frac{u_3}{S_2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{u_{n-1}}{S_{n-2}}\right)\left(1+\frac{u_n}{S_{n-1}}\right)$$
故ニ
$$\lim_{n\to\infty}S_n=S=S_1\left(1+\frac{u_2}{S_1}\right)\left(1+\frac{u_3}{S_2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{u_{n-1}}{S_{n-2}}\right)\left(\frac{u_n}{S_{n-1}}\right)\cdots\cdots$$
コレ即チ無限級數ヲ無限乘積ニ變化シタルモノナリ。

第八章 問題

1. $\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\cdots\cdots$ ハ收斂ナルコトヲ證セヨ。

2. 次ノ無限乘積ヲ判定セヨ。

(i) $\left(1-\dfrac{1}{2^3}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^3}\right)\cdots\cdots$

(ii) $(1+1)\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\cdots$

3. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\cdots$ ハ發散ナルコトヲ證セヨ。

4. $|p|<1$ ナルトキ

$$(1+px)(1+p^2x)(1+p^3x)\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{p}{1-p}x+\frac{p^3}{(1-p)(1-p^2)}x^2+\cdots\cdots+\frac{p^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1-p)\cdots\cdots(1-p^n)}x^n+\cdots$$

ナルコトヲ證セヨ。

5. $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)\cdots\cdots$

$$=1-2(x-x^4+x^9-x^{16}+\cdots\cdots)$$

ナルコトヲ證セヨ。

次ノ二ツノ無限乘積ヲ判定セヨ。

6. $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots\cdots$

7. $\left(1-\frac{1}{2.3}\right)\left(1-\frac{1}{3.4}\right)\left(1-\frac{1}{4.5}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$

8. $a\neq b$ ナルトキ

$$\frac{a}{b}\;\frac{a+1}{b+1}\;\frac{a+2}{b+2}\cdots\cdots\frac{a+n}{b+n}\cdots\cdots$$

ハ發散ナルコトヲ證セヨ。

解 $P_n=\left(1+\frac{a-b}{b}\right)\left(1+\frac{a-b}{b+1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{a-b}{b+n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$

然ルニ $\frac{a-b}{b}+\frac{a-b}{b+1}+\cdots\cdots+\frac{a-b}{b+n}+\cdots\cdots$ ハ發散級數ナルガ故ニ與ヘラレタル無限乘積ハ發散ナリ。

第十三編 級數總和論

第一章

雜定理

161. 讀者ハ已ニ初等代數學ニ於テ有限項ヨリ成ル級數，例ヘバ等差級數 (Arithmetical progression) 及ビ等比級數 (Geometrical progression) 等ノ總和ヲ求ムル方法ニ習熟シ，且ツ本書ニ於テモ前編ニテ多少無限級數ノ和ヲ求ムル方法ヲ說述セリ。サレバ本編ニ於テハ未ダ說明セラレザリシ方法ノミヲ詳論セントス。

162. 例 1. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ ノ和ヲ求メヨ。

解 $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$ ナルガ故ニ

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$$

此公式ノ n ノ代リニ $n-1,\ n-2,\cdots\cdots$ ト置クトキハ，

$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1$$

$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-2)^2+3(n-2)+1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^3-2^3=3.\ 2^2+3.\ 2+1$$

$$2^3-1^3=3.\ 1^2+3.\ 1+1$$

逐々相加フレバ

$$(n+1)^3-1^3=3\{n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots+1^2\}+3\{n+(n-1)+\cdots\cdots+1\}+n$$

$$\therefore\ n^2+(n-1)^2+\cdots\cdots+1^2=\frac{(n+1)^3-1^3-3\{n+(n-1)+\cdots\cdots+1\}-n}{3}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

一般ニ $1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r$ ヲ求ムルコトヲ得。即チ次ノ如シ

$$(n+1)^{r+1}-n^{r+1}=(r+1)n^r+\frac{(r+1)r}{2!}n^{r-1}+\cdots\cdots+(r+1)n+1$$

ナルガ故ニ n ヨリ漸次1ヲ減ズレバ

$$n^{r+1}-(n-1)^{r+1}=(r+1)(n-1)^r+\frac{(r+1)r}{2!}(n-1)^{r-1}+\cdots\cdots$$
$$+(r+1)(n-1)+1$$

....

$$2^{r+1}-1^{r+1}=(r+1)1^r+\frac{(r+1)r}{2!}1^{r-1}+\cdots\cdots+(r+1)1+1$$

邊々相加フレバ

$$(n+1)^{r+1}-1=(r+1)s_n{}^r+\frac{(r+1)r}{2!}S_n{}^{r-1}+\cdots\cdots+(r+1)s_n{}^1+n$$

玆ニ $s_n{}^r$ ハ $1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r$ ヲ表ハスモノトス。

故ニ $(r+1)s_n{}^r+\frac{(r+1)r}{2!}s_n{}^{r-1}+\cdots\cdots+(r+1)s_n{}^1=(n+1)^{r+1}-(n+1)$

コノ公式ハ $\sum_{m=1}^{n}m^r$ ヲ求ムル最モ一般ナル公式ニシテ $r=2$ ト置ケバ直チニ $\sum_{m=1}^{n}m^2=1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2$ 即チ $s_n{}^2$ ヲ得ベク, $s_n{}^2$ ヲ知リタル後ハコノ公式ニ $r=3$ ト置ケバ又直チニ $\sum_{m=1}^{n}m^3=1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3$ 即チ $s_n{}^3$ ヲ得ベシ。カクノ如ク順次ニ求メタル結果ヲ利用シ，同一ノ公式ヲ反覆スルトキハ自然數ノ n 個ノ任意ノ乘冪ノ和ヲ求ムルコトヲ得ベシ。

上ト同樣ニシテ任意ノ等差級數 $a,\ a+b,\ a+2b\cdots\cdots$ ノ各項ノ r 乘冪ノ和モ次ノ公式ヲ反覆スルコトニヨリテ求メラル。

$$(a+nb)^{r+1}-a^{r+1}-nb^{r+1}=(r+1)bs_n{}^r+\frac{(r+1)r}{2!}b^2s_n{}^{r-1}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(r+1)b^rs_n{}^1$$

但シ $\quad s_n{}^r=a^r+(a+b)^r+\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}b)^r$

163. **分數ノ和ハ部分々數ニ分チテ求メラルヽコト屢々アリ，例ヲ以ツテ示スベシ。**

例 1. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$ ノ和ヲ求メヨ。

解 第 r 項 $=\frac{1}{r(r+1)}=\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}$

$$\therefore\ s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

注意 モシ n 項ノ和ノ代リニ無限級數ノ和ヲ求メントスルニハ

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}$$

ナルガ故ニ，コノ級數ハ收斂ニシテ其極限値ハ

$$s=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

例 2. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$ ノ和ヲ求メヨ。

解 第 $(r-1)$ 項 $=\frac{r-1}{r!}=\frac{1}{(r-1)!}-\frac{1}{r!}$

$$\therefore\ s_n=\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right)+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)$$
$$=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

注意 モシ n 項ノ和トイフ代リニ無限級數ノ和ヲ求メンニハ $s_n=1-\frac{1}{(n+1)!}$ ナルガ故ニ

$$s=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1$$

例 3. $\frac{2}{1.3}\frac{1}{3}+\frac{3}{3.5}\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5.7}\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{(n+1)}{(2n-1)(2n+1)}\frac{1}{3^n}+\cdots\cdots$

ナル無限級數ノ和ヲ求メヨ。

解 先ヅコノ無限級數ハ收斂ナリ。而シテ

$$\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$ ナルガ故ニ一般項ハ

$$u_n=\frac{n+1}{(2n-1)(2n+1)}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n-1}\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\therefore\ s_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\therefore\ s=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2n+1}\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{4}$$

164. **アル級數ノ和ヲ求ムルニ當リ補助ノ級數ヲ作リ以ツテ容易ニソノ目的ヲ達スルコトアリ。以下例解セントス。**

例 1. $s=1.2.3\cdots\cdots m+2.3.4\cdots\cdots(m+1)+\cdots\cdots+n(n+1)\cdots\cdots(n+m-1)$ ヲ求メヨ。

解 本題ハ略記號ニテ書クト $\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)$ ヲ求ムルコトナリ。

今

$$v_r=(r-1)r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル補助數ヲ設ケル時ハ,

$$v_{r+1}=r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+m)$$

ナルガ故ニ

$$v_{r+1}-v_r=(m+1)\{r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)\}$$

此等式ニ於テ $r=1, 2, \cdots\cdots, n$ ト置キテ得ル式ヲ邊々相加フレバ,

$$(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\cdots\cdots+(v_{n+1}-v_n)=(m+1)\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)$$

ヨツテ求ムル總和ヲ s_n トスレバ

$$s_n=\frac{v_{n+.}-v_1}{m+1}$$

然ルニ (1) ニヨリ $v_1=0$ ナルガ故ニ

$$s_n=\frac{v_{n+1}}{m+1}=\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+m)}{m+1}$$

ナリ。

注意 コノ公式ニ $m=2$ ト置ケバ

$$1.2+2.3+\cdots\cdots+n(n+1)=\sum_{r=1}^{n} r(r+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ニシテ $m=3$ ト置ケバ

$$1.2.3+2.3.4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

尙本例ヨリモ更ニ一般的ノ問題ヲ次ニ例示スベシ。

例 2. $\{a(a+b)\cdots\cdots(a+\overline{r-1}b)\}+\{(a+b)(a+2b)\cdots\cdots(a+rb)\}+\cdots\cdots$

$\cdots\cdots+\{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)\}$ ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル級數ノ各項ハ悉ク r 個ノ因數ノ乘積ヲ表ハスモノニシテコレヲ $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$ トス。

今補助ノ級數トシテ $v_0+v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n$ ヲ作リ。

$$v_n=(a+\overline{n-1}b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)(a+\overline{n+r-1}b)$$

トス。卽チ v ノ級數ハコレニ對應スル u ノ級數ヨリモ一ツ宛因數ガ多シ。然ル時ハ

$$v_n-v_{n-1}=\{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-1}b)\}$$
$$-\{(a+\overline{n-2}b)(a+\overline{n-1}b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)\}$$
$$=(r+1)bu_n$$

ソコデ n ヨリ順次 1 個ヲ減ズレバ

$$v_{n-1}-v_{n-2}=(r+1)bu_{n-1}$$
$$v_{n-2}-v_{n-3}=(r+1)bu_{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_2-v_1\quad=(r+1)bu_2$$
$$v_1-v_0\quad=(r+1)bu_1$$

邊々相加フレバ

$$v_n-v_0=(r+1)b(u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n)$$

$$\therefore\quad u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=\frac{v_n-v_0}{(r+1)b}$$

從ツテ　$S=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$

$$=\frac{\{(a+\overline{n-1}b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-1}b)\}-\{(a-b)a\cdots\cdots(a+\overline{r-1}b)\}}{(r+1)b}$$

トナル。

注意 上ノ公式ニ於テ $a=b=1.\ r=2$ トスレバ $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)$ ノ和ヲ求ムルモノニシテ，ソノ結果ハ $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ トナリ又 $a=b=1, r=3$ トスレバ $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$ ノ和ヲ求ムルモノニシテソノ結果ハ $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$ ナリ。以下之レニ準ズ。

例 3. $s=\dfrac{1}{1.2.3\cdots\cdots m}+\dfrac{1}{2.3.4\cdots\cdots(m+1)}+\cdots\cdots$

$$\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)\cdots\cdots(n+m-1)}=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)}$$

ヲ求メヨ。但シ $m\geqq 2$ ナリトス。

解 $v_r=\dfrac{1}{r(r+1)\cdots\cdots(r+m-2)}$ ナル補助數ヲ設クル時ハ;

$$v_r-v_{r+1}=\frac{1}{r(r+1)\cdots\cdots(r+m-2)}-\frac{1}{(r+)(r+2)\cdots\cdots(r+m-1)}$$

$$=\frac{m-1}{r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナルガ故ニ

$$(v_1-v_2)+(v_2-v_3)+\cdots\cdots+(v_n-v_{n+1})$$

$$=(m-1)\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r(r+1)\cdots\cdots(r+m-1)}$$

從ツテ

$$s_n=\frac{1}{m-1}(v_1-v_{n+1})=\frac{1}{m-1}\left\{\frac{1}{1.2.3\cdots\cdots(m-1)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+m-1)}\right\}$$

注意 此公式ニ m ヲ 2 ト置ケバ

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

トナリ, m ヲ 3 ト置ケバ

$$\frac{1}{1.2,3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

トナル。尙本例ヨリモ更ニ一般ナル問題ヲ次ニ例示スベシ。

例 4. $\dfrac{1}{a(a+b)\cdots\cdots(a+\overline{r-1}b)}+\dfrac{1}{(a+b)(a+2b)\cdots\cdots(a+rb)}+$

$\cdots\cdots+\dfrac{1}{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)}$ ヲ求ム。

解 コノ級數ヲ便宜 $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$ トスレバ, ソノ各分母ハ悉ク r 個ノ因數ノ乘積ヨリナル。今補助ノ級數トシテ $v_0+v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n$ ヲ作リ

$$v_n=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)}$$

トセヨ。然ル時ハ

$$v_n-v_{n-1}=\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)}$$

$$-\frac{1}{(a+\overline{n-1}b)(a+nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-3}b)}$$

$$=\frac{-(r-1)b}{(a+\overline{n-1}b)(a-nb)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)}$$

$$=-(r-1)bu_n$$

故ニ $\qquad v_n-v_{n-1}=-(r-1)bu_n$

ヨリテ順次ニ

$$v_{n-1}-v_{n-2}=-(r-1)bu_{n-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_2-v_1=-(r-1)bu_2$$

$$v_1-v_0=-(r-1)bu_1$$

逐々相加フレバ

$$v_n-v_0=-(r-1)b(u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n)$$

$$\therefore\quad (u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n)=\frac{v_0-v_n}{(r-1)b}$$

從ツテ $\quad u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=\dfrac{1}{(r-1)b}\left\{\dfrac{1}{a(a+b)\cdots\cdots(a+\overline{r-2}b)}\right.$

$$\left.-\frac{1}{(a+nb)(a+\overline{n+1}b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-2}b)}\right\}$$

注意 上ノ式ニ於テ $a=2, b=1, r=2$ トスレバ

$\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ ヲ求ムルモノニシテ, ソノ結果ハ $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$ トナリ。又 $a=b=1, r=4$ ト置ケバ $\dfrac{1}{1.2.3.4}+\dfrac{1}{2.3.4.5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ ノ和ヲ求ムルモノニシテ, ソノ結果ハ $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1.2.3}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$ トナル以下之ニ準ズ。

例 5. $\dfrac{a}{b}+\dfrac{a(a+c)}{b(b+c)}+\dfrac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求ム。

解 $u_n=\dfrac{a(a+c)(a+2c)\cdots\cdots(a+\overline{n-1}c)}{b(b+c)(b+2c)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}c)}$

トシ, $\qquad v_n=\dfrac{a(a+c)(a+2c)\cdots\cdots(a+\overline{n-1}c)(a+nc)}{b(b+c)(b+2c)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}c)}$

トスレバ, $\quad v_n-v_{n-1}=\dfrac{a(a+c)(a+2c)\cdots\cdots(a+\overline{n-1}c)(a+nc)}{b(b+c)(b+2c)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}c)}$

$$-\frac{a(a+c)(a+2c)\cdots\cdots(a+\overline{n-2}c)(a+\overline{n-1}c)}{b(b+c)(b+2c)\cdots\cdots(b+\overline{n-2}c)}$$

$$=u_n(a-b+c)$$

$$\therefore \quad v_n - v_{n-1} = u_n(a-b+c)$$

$$v_{n-1} - v_{n-2} = u_{n-1}(a-b+c)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v_2 - v_1 = u_2(a-b+c)$$

逐々相加フレバ

$$v_n - v_1 = (u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_n)(a-b+c)$$

$$\therefore \quad v_n - v_1 + u_1(a-b+c) = (u_1 + u_2 + \cdots u_n)(a-b+c)$$

$$\therefore \quad S = u_1 + u_2 + \cdots\cdots u_n = \frac{v_n - v_1 + u_1(a-b+c)}{a-b+c}$$

即チ

$$S = \frac{1}{a-b+c}\left\{\frac{a(a+c)\cdots\cdots(a+nc)}{b(b+c)\cdots\cdots(b+\overline{n-1}c)} - a\right\}$$

165. $1,\ 1+b,\ 1+2b, \cdots\cdots\cdots\cdots 1+(n-1)b,$ ナル等差級數ヲ考ヘ　次ニ $b=0,\ 1,\ 2, \cdots\cdots\cdots\cdots r-1$ ト置キテ r 個ノ等差級數ヲ作ルト次ノ如シ

$$1,\quad 1,\quad 1,\quad 1,\cdots\cdots\cdots\cdots,1$$

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\cdots\cdots\cdots\cdots,n$$

$$1,\quad 3,\quad 5,\quad 7,\cdots\cdots\cdots\cdots,2n-1$$

$$1,\quad 4,\quad 7,\quad 10,\cdots\cdots\cdots\cdots,3n-2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1,\quad r,\quad 2r-1,\quad 3r-2,\cdots\cdots\cdots\cdots,nr-n-r+2,$$

此等ノ級數ノ n 項ノ和ガ夫々 $n,\ \frac{1}{2}n(n+1),\ n^2,\ \frac{1}{2}n(3n-1)\cdots\cdots\cdots$ $\frac{n(nr-n-r+3)}{2}$ ナリ。

次ニコレ等ノ和ノ公式ノ $n=1,2,3,4\cdots\cdots n$ ヲ代入スレバ

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4\cdots\cdots n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

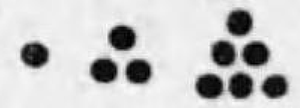
$$1,\quad 3,\quad 6,\quad 10\cdots\cdots\frac{1}{2}n(n+1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16\cdots\cdots n^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(C)}$$

$$1,\quad 5,\quad 12,\quad 22\cdots\cdots\frac{1}{2}n(3n-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(D)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1,\quad r+1,\ 3r,\ 6r-2\cdots\cdots\frac{n(nr-n-r+3)}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(R)}$$

上ノ各級數ノ項ヲ夫々線形數 (Linear number) 三角形數 (Triangular number) 四角形數 (Square number) 五角形數 (Pentagonal number)……r 角形數 (R-gonal number) トイヒ，之レ等ヲ總稱シテ多角形數 (Polygonal number) トイフ。蓋シ (A) ニ於テハ初項ヨリ順次ニ 1 ヅヽ直線的ニ增加シ (B) ニ於テハ初項 1, 第二項 3, 第三項 6…… ナルガ故ニ  …………ノ如キ三角形ノ一列ヲ得，(C) ニ於テハ第一項 1, 第二項 4, 第三項 9,………… ナルガ故ニ  …………ノ如キ正方形ノ一列ヲ得ルガ故ニ夫々線形數，三角形數，四角形數ノ名稱ヲ得タルモノナリ。

166. 下記ノ如キ第一次，第二次，第三次……ノ諸級數アリ。其第一次級數ノ凡テノ項ハ 1 ニ等シク，第二次ノ第一項ハ第一次級數ノ初項ニ等シク第二項ハ第一次級數ノ第一項及ビ第二項ノ和ニ等シク第三項ハ第一次級數ノ第一項，第二項及ビ第三項ノ和ニ等シク，一般ニアル次數ノ第 n 項ハ，ソノスグ前ニアル次數ノ級數ノ n 項ノ和ニ等シキ時ハ，コレ等ノ諸級數ヲ第一次第二次……ノ擬數 (Figurate number) トイフ。

第一次擬數	1. 1. 1. 1. 1.……
第二次擬數	1. 2. 3. 4. 5.……
第三次擬數	1. 3. 6. 10. 15.……
第四次擬數	1. 4. 10. 20. 35.……
…………	…………

コノ定義ヨリ

第二次擬數ノ第 n 項ハ $1+1+\cdots\cdots+1=n$ ニシテ

第三次擬數ノ第 n 項ハ $1+2+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

第四次擬數ノ第 n 項ハ $\frac{1}{2}\{1.2+2.3+\cdots\cdots+n(n+1)\}$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$$

一般ニ第 r 次擬數ノ第 n 項ハ $\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-2)}{(r-1)!}$ ナリ，

167. 整式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots$ ノ係數ノ和

$$a_0+a_1+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

ヲ求メントスルニ，

$$\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+$$

ナルガ故ニ，コノ二式ノ乘積ニ於ケル x^{n-1} ノ係數ヲ求ムレバ可ナリ，即チ $\frac{f(x)}{1-x}$ ヲ x ノ昇冪ニ展開セル時 x^{n-1} ノ係數ヲ求ムレバ可ナリ

例 1. $(1-x)^{-2}$ ノ展開ニ於ケル最初ノ n 項ノ係數ノ和ヲ求メヨ

解 $(1-x)^{-2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots$ トシ

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots$$

コノ二式ノ乘積ニ於ケル x^{n-1} ノ係數ハ，所要ノ和

$$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

ニシテ，コレハ $(1-x)^{-2}(1-x)^{-1}=(1-x)^{-3}$ ニ於ケル x^{n-1} ノ係數ニシ等

即チ

$${}_{-3}C_{n-1}=\frac{(-3)(-3-1)\cdots\cdots(-3-\overline{n-1}+1)}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$$

$$=(-1)^{2n-2}\frac{3.4.\cdots\cdots(n+1)}{(n-1)!}=\frac{n(n+1)}{1.2}$$

例 2. $\frac{1}{1-3x+2x^2}$ ノ展開ニ於ケル最初ノ n 項ノ係數ノ和ヲ求メヨ

解 $\frac{1}{1-3x+2x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots$

ナリト假定ス，又

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots$$

コノ二式ノ乘積ニ於ケル x^{n-1} ノ係數ハ，所要ノ和

$$a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

ニシテ，コレハ $\frac{1}{(1-3x+2x^2)(1-x)}$ ニ於ケル x^{n-1} ノ係數ニ等シ　然ルニ

$$\frac{1}{(1-3x+2x^2)(1-x)}=\frac{-2}{1-x}+\frac{4}{1-2x}-\frac{1}{(1-x)^2}$$

而シテ $\frac{-2}{1-x}$ ヨリ x^{n-1} ノ係數トシテ -2 ヲ得ベク

$\frac{4}{1-2x}$ ヨリ……………………………… 4.2^{n-1}……………

$\frac{-1}{(1-x)^2}$ ヨリ…………………………… $-n$ ヲ得ベシ。

仍ツテ求ムル結果ハ

$$-2+4.2^{n-1}-n=2(2^n-1)-n$$

第一章　問　題

次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。(1−10)

1. $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

解 所要ノ和ヲ s トスレバ

$$s-xs=1+2x+2x^2+\cdots\cdots+2x^{n-1}-(2n-1)x^n=\frac{2(1-x^n)}{1-x}-1-(2n-1)x^n$$

仍ツテ $s=\frac{2(1-x^n)}{(1-x)^2}-\frac{1+(2n-1)x^n}{1-x}$

2. $1+5x^2+9x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$

解 $s-x^2s=1+4x^2+4x^4+\cdots\cdots+4x^{2n-2}-(4n-3)x^{2n}=\frac{4(1-x^{2n})}{1-x^2}-3-(4n-3)x^{2n}$

仍ツテ

$$s=\frac{4(1-x^{2n})}{(1-x^2)^2}-\frac{3+(4n-3)x^{2n}}{1-x^2}$$

3. $1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+\cdots\cdots\cdots\cdots$

解 百六十四節例1ノ公式ニ $m=4$ ト置ケバ直チニ $\frac{n(n+1)\cdots\cdots(n+4)}{5}$

4. $2.5+3.6+4.7+\cdots\cdots\cdots\cdots$

解 本題ハ $\sum_{r=2}^{n+1}r(r+3)$ ヲ求ムルコトナリ。サテ

$$s=\sum_{r=2}^{n+1}r(r+3)=\sum_{r=2}^{n+1}r^2+3\sum_{r=2}^{n+1}r=\sum_{r=1}^{n+1}r^2-1+3(\sum_{r=1}^{n+1}r-1)$$

サテ

$$\sum_{r=1}^{n+1}r^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},\quad \sum_{r=1}^{n+1}r=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

故ニ

$$s=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-1+3\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{3}-1\right\}=\frac{n(n+4)(n+5)}{3}$$

5. $2.7+3.10+4.13+\cdots\cdots\cdots\cdots$

解 本題ハ $\sum_{r=2}^{n+1}r(3r+1)$ ノ和ヲ求ムルコトナリ。故ニ

$$s=\sum_{r=2}^{n+1} r(3r+1)=3\sum_{r=2}^{n+1} r^2+\sum_{r=2}^{n+1} r$$

$$=3\left\{\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-1\right\}+\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right\}$$

$$=\frac{2n^3+9n^2+13n}{2}+\frac{n^2+3n}{2}=n(n^2+5n+8)$$

6. $1.2.3+2.3.5+3.4.7+4.5.9+\cdots\cdots$

解 本題ハ $\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(2r+1)$ ヲ求ムルコトナリ。故ニ

$$s=2\sum_{r=1}^{n} r^3+3\sum_{r=1}^{n} r^2+\sum_{r=1}^{n} r$$

$$=2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2}$$

7. $1.4.7+4.7.10+7.10.13+\cdots\cdots$

解 本題ハ百六十四節例2ノ公式ニ $a=1,\ b=3,\ r=3$ ト置ケバ得ラル。即チ

$$\frac{(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)+2\times4\times7}{12}=\frac{n(81n^3+270n^2+135n-150)}{12}$$

8. $1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots$

9. $a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\cdots\cdots$

10. $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots(2n-1)^3$

解 $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3=1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3$
$-\{2^3+4^3+6^3+\cdots\cdots+(2n-2)^3\}$

即チ

$$1^3+3^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3=1^3+2^3+\cdots\cdots+(2n-1)^3-2^3\{1^3+2^3+\cdots\cdots+(n-1)^3\}$$

然ルニ 百六十二節ニヨリ

$$1^3+2^3+\cdots\cdots(2n-1)^3=\frac{(2n)^2(2n-1)^2}{4}$$

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+(n-1)^3=\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$

$$\therefore\quad \frac{(2n-1)^2(2n)^2}{4}-\frac{8(n-1)^2n^2}{4}=n^2(2n^2-1)$$ ナリ。

11. 歸納法ヲ用ヒテ再ビ

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ ナルコトヲ證セヨ。

12. 第 r 項ハ $r(r+1)(r+3)$ ナル級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 $r(r+1)(r+3)=r^3+4r^2+3r$

ナルガ故ニ $$s=\sum_{r=1}^{n} r^3+4\sum_{r=1}^{n} r^2+3\sum_{r=1}^{n} r$$

然ルニ $\sum_{r=1}^{n} r^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$　$\sum_{r=1}^{n} r^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　$\sum_{r=1}^{n} r=\frac{n(n+1)}{2}$

ヨリテコレ等ノ和ハ $\frac{n(n+1)(3n^2+19n+26)}{12}$

13. $1,2,3\cdots\cdots n$ ナル n 個ノ正ノ整數アリ。コレ等ノ中ヨリ三個宛組合セタル乘積ノ和ヲ求メヨ。

解 $(a_1+a_2+\cdots\cdots a_n)^3=3\Sigma a_1\Sigma a_1^2-2\Sigma a_1^3+6\Sigma a_1a_2a_3$ ナリ。コノ公式ニ

$a_1=1.\ a_2=2\cdots\cdots a_n=n$ トオケバ

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^3=3\frac{n(n+1)}{2}\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2\frac{n^2(n+1)^2}{4}+6S$$

故ニ $S=\Sigma a_1a_2a_3$ ナリトス。

整頓スレバ

$$48S=n^3(n+1)^3-2n^2(n+1)^2(2n+1)+4n^2(n+1)^2$$

$$=n^2(n+1)^2(n-2)(n-1)$$

$$\therefore\quad S=\frac{n^2(n+1)^2(n-2)(n-1)}{48}$$

14. 上ノ例ニ傚ヒテ $1,2,3\cdots\cdots n$ ナル n 個ノ數ヲ二ツ宛組合セテ作レル乘積ノ和ハ $\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)(3n+2)$ ナルコトヲ證セヨ。

15. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ヲ求メヨ。

解 第 r 項 $=\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r-1}-\frac{1}{2r+1}\right)$

コノ式ノ r ニ順次 $1,2,\cdots\cdots n$ ヲ與ヘ，然ル後加フレバ

$$s=\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(2r-1)(2r+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

16. $\frac{4}{2.3.4}+\frac{7}{3.4.7}+\frac{10}{4.5.6}+\cdots\cdots$ ナル n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 第 r 項 $=\frac{3r+1}{(r+1)(r+2)(r+3)}=-\frac{1}{r+1}+\frac{5}{r+2}-\frac{4}{r+3}$

$$=\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+1}+4\left(\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+3}\right)$$

故ニ

$$s=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+1}\right)+4\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+3}\right)$$

$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{5}{6}-\frac{3n+5}{(n+2)(n+3)}$$

17. $\frac{n}{1.2.3}+\frac{n-1}{2.3.4}+\frac{n-2}{3.4.5}+\cdots\cdots$ ナル n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 第 r 項 $=\frac{n-(r-1)}{r(r+1)(r+2)}=\frac{1}{r}\,\frac{n+1}{2}-\frac{n+2}{r+1}+\frac{1}{r+2}\,\frac{n+3}{2}$

$$=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)+\frac{n+3}{2}\left(\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+1}\right)$$

故＝

$$s=\frac{n+1}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)+\frac{n+3}{2}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+2}-\frac{1}{r+1}\right)$$

$$=\frac{n+1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{n+3}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)}{4(n+2)}$$

18. 第 r 項ハ $\frac{1}{r(r+2)(r+3)}$ ナル級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

19. 第 r 項ハ $\frac{1}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ ナル級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

20. $(1-x)^{-m}$ ノ展開式ノ最初ノ $(r+1)$ 項ノ係數ノ和ハ $\frac{(m+r)!}{m!\,r!}$ ナルコトヲ證セヨ。

21. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 $u_r=\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+r}=\frac{2}{r(r+1)}=2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}\right)$

$$\therefore\quad S_n=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

22. $S_n{}^r=1^r+2^r+\cdots\cdots+n^r$ トスレバ $5S_n{}^4=6S_n{}^1S_n{}^2-S_n{}^2$ ナルコトヲ證セヨ。

23. $S_n=1+2+\cdots\cdots+n$ トスレバ

$2(S_1S_{2n}+S_2S_{2n-1}+\cdots\cdots+S_nS_{n+1})=\frac{(2n+4)!}{5!(2n-1)!}$ ナルコトヲ證セヨ。

24. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1)$ ナルコトヲ證セヨ。

25. 第 r 次ノ擬數ノ第 n 項ハ第 n 次ノ擬數ノ第 r 項ニ等シキコトヲ示セ。

26. 第 r 次擬數ノ第 n 項ハ第 $(r-2)$ 次擬數ノ第 $(n+2)$ 項ニ等シキ時ハ $n=r-2$ ナルコトヲ證セヨ。

27. 第 r 項ハ $r^2(r^2-1)$ ナル級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

28. 第 r 項ハ $\frac{1}{(r+1)^2-1}$ ナル級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

29. $\frac{1}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{5}{3!}+\frac{7}{4!}+\frac{9}{5!}+\cdots\cdots$ ナル無限級數ノ和ヲ求メヨ。

30. $\frac{3}{1^2.2^2}+\frac{5}{2^2.3^2}+\frac{7}{3^2.4^2}+\cdots\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots\cdots$ ナル無限級數ノ和ヲ求メヨ。

解 第 r 項 $=\frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}=\frac{r}{r^2(r+1)^2}+\frac{r+1}{r^2(r+1)^2}$

$$=\frac{1}{r(r+1)^2}+\frac{1}{r^2(r+1)}$$

$$=\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}-\frac{1}{(r+1)^2}\right\}+\left\{\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(r+1)^2}$$

故＝ n 項ノ和ハ

$$s_n=\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(r+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

仍ツテ無限項ノ總和ハ

$$\lim_{n\to\infty}\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=1$$

31. $\frac{1}{4}+\frac{1.2}{4.5}+\frac{1.2.3}{4.5.6}+\frac{1.2.3.4}{4.5.6.7}+\cdots\cdots$ ナル無限級數ノ和ハ $\frac{1}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

32. $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ハ $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}$ トセヨ。然ル時ハ

$$Sx=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\cdots+nx^n$$

$$\therefore\quad S(1-x)=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x}$$

$$\therefore\quad S=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

33. $a+(a+b)x+(a+2b)x^2+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

34. $1+4x^3+7x^6+\cdots\cdots=\frac{1+2x^3}{(1-x^3)^2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $|x|<1$ ナルトキハ

$f(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ ナル無限級數ハ收斂ナリ。$1, \omega, \omega^2$, ヲ $x^3=1$ ノ三ツノ根トスレバ

$$f(x)=1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots=(1-x)^{-2} \qquad (1)$$

$$f(\omega x)=1+2\omega x+3\omega^2x^2+\cdots\cdots\cdots=(1-\omega x)^{-2} \qquad (2)$$

$$f(\omega^2x)=1+2\omega^2x+3\omega^4x^2+\cdots\cdots\cdots=(1-\omega^2x)^{-2} \qquad (3)$$

邊々相加フレバ

$$3(1+4x^3+7x^6+\cdots\cdots)=(1-x)^{-2}+(1-\omega x)^{-2}+(1-\omega^2x)^{-2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-\omega x)^2}+\frac{1}{(1-\omega^2x)^2}$$

$$=\frac{1+2x^3}{(1-x^3)^2}$$

35. 上ノ問題ニ倣ヒテ

$2x+5x^4+8x^7+\cdots\cdots\cdots$ ヲ求メヨ。

36. $1^2+\sum_{r=1}^{2}r^2+\sum_{r=1}^{3}r^2+\cdots\cdots\cdots$ ナル n 項ノ和ヲ求メヨ。

第二章

連次差ノ法

168. 級數 $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ アリ。

$u_2-u_1,\ u_3-u_2,\ u_4-u_3,\cdots\cdots,u_{n+1}-u_n,\cdots\cdots$ ヲ表ハスニ夫々

$\Delta u_1,\quad \Delta u_2,\quad \Delta u_3,\cdots\cdots\cdots\Delta u_n\cdots\cdots\cdots$ ヲ以ツテス。次ニコレト同樣ニ

$\Delta u_2-\Delta u_1,\ \Delta u_3-\Delta u_2,\ \Delta u_4-\Delta u_3,\cdots\cdots,\Delta u_{n+1}-\Delta u_n,\cdots\cdots$ ヲ表ハスニ,

$\Delta^2u_1,\quad \Delta^2u_2,\quad \Delta^2u_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,\Delta^2u_n,\cdots\cdots\cdots$ ヲ以ツテス。

カクノ如キ方法ヲ更ニ $\Delta^2u_1, \Delta^2u_2,\ \cdots,\Delta^2u_n,\cdots\cdots$ ニ施セバ $\Delta^3u_1, \Delta^3u_2,\cdots\cdots$ $\cdots,\Delta^3u_n\cdots\cdots$ ヲ得ベシ。サテ Δu_n ハ規約ニヨリテ $u_{n+1}-u_n$ ヲ表ハシ Δ^2u_n モ又規約ニヨリテ $\Delta u_{n+1}-\Delta u_n$ ヲ表ハス。故ニ Δ^2u_n ハ Δu_n ノ平方ナリト誤解スベカラズ。同樣ニ Δ^3u_n, $\Delta^4u_n\cdots\cdots$ 等ハ Δu_n ノ三乘, 四乘……ニアラズ。

上ニ述ベタル略記法ヲ用フル時ハ與ヘラレタル級數

$$u_1\quad u_2\quad u_3\ \cdots\cdots u_n\cdots\cdots \text{ ヨリ }\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\Delta u_1\quad \Delta u_2\quad \Delta u_3\ \cdots\cdots\Delta u_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\Delta^2 u_1\quad \Delta^2 u_2\quad \Delta^2 u_3\cdots\cdots\Delta^2 u_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\Delta^3 u_1\quad \Delta^3 u_2\quad \Delta^3 u_3\cdots\cdots\Delta^3 u_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

……………………………………

$$\Delta^r u_1\quad \Delta^r u_2\quad \Delta^r u_3\cdots\cdots\Delta^r u_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(r+1)$$

……………………………………

ナル新ラシキ級數ヲ得。而シテ (2) ヲ (1) ノ第一次差 (1st order of difference), (3) ヲ (1) ノ第二次差 (2nd order of difference), (4) ヲ (1) ノ第三次差 (3rd order of difference) …… 一般ニ $(r+1)$ ヲ (1) ノ第 r 次差 (r^{th} order of difference) トイヒ, コレ等ヲ總稱シテ連次差トイフ。例ヘバ與ヘラレタル級數ヲ Σn^3 トス。即チ

原級數,	1,	8,	27,	64,	125,	……, n^3, …… トスレバ。
第一次差,	7,	19,	37,	61,	91,	……, $3n^2+3n+1$, ……
第二次差,	12,	18,	24,	30,	36,	……, $6n+6$, ……
第三次差,	6,	6,	6,	6,	6,	……6, ……
第四次差,	0,	0,	0,	0,	0,	……0, ………… ナリ。

コレニ由リテ見ルニ第一次差ハ稍ヤ複雜ナル法則ニ從ヘル級數ナルモ, 第二次差ニ於テハ等差級數トナリ, 第三次差ニ於テハ各數悉ク同一ノモノトナリ, 第四次差, 以下ハ悉ク 0 ヲ項トスル級數トナル。

169. 一般項ノ形ガ知ラレザル級數ノ和ヲ求ムルニ上ノ方法ヲ用ヒテ容易ニ目的ヲ達スルコトアリ。 今例ヲ以ツテ示サントス。

例 1. $4+14+30+52+80+114+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 第一次差, 10, 16, 22, 28, 34……

即チ 6 ヲ公差トスル等差級數ヲ得タリ。ヨリテコノ一般項即チ Δu_{n-1} ハ $10+6(n-2)=6n-2$ ナリ。

ヨツテ $\Delta u_{n-1}=u_n-u_{n-1}=6n-2$, 玆ニ於テ n ノ代リニ順次ニ $n-1$,

$n-2,\cdots\cdots$ ト置ク時ハ

$$u_{n-1}-u_{n-2}=6(n-1)-2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_2-u_1=6(2)-2$$

邊々相加フレバ

$$u_n-u_1=6\left\{\frac{(n+2)(n-1)}{2}\right\}-2(n-1)=(n-1)(3n+4)$$

$$\therefore\quad u_n=(n-1)(3n+4)+u_1=3n^2+n$$

ヨツテ與ヘラレタル級數ノ第n項ハ $3n^2+n$ ナリ。從ツテn項ノ和ハ

$$3\sum_{n=1}^{n}n^2+\sum_{n=1}^{n}n=3\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}+\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)^2$$

例 2. $2+5+12+31+86+\cdots\cdots$ ノn項ノ和ヲ求メヨ。

解 第一次差 $3,\ 7,\ 19,\ 55,\cdots\cdots$

第二次差 $4,\ 12,\ 36,\cdots\cdots$

第二次差ハ公比3ナル等比級數ナリ。コノ級數ニ於ケル第$(n-2)$項ハ

$$4\times3^{n-3}$$

故ニ $\Delta^2u_{n-2}=\Delta u_{n-1}-\Delta u_{n-2}=4\times3^{n-3}$

從ツテ $\Delta u_{n-2}-\Delta u_{n-3}=4\times3^{n-4}$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta u_2-\Delta u_1=4\times3^0$$

邊々相加フレバ

$$\Delta u_{n-1}-\Delta u_1=4(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-3})=2(3^{n-2}-1)$$

$$\therefore\quad \Delta u_{n-1}=2(3^{n-2}-1)+\Delta u_1=2.3^{n-2}+1$$

次ニ $\Delta u_{n-1}=u_n-u_{n-1}=2.3^{n-2}+1$

從ツテ $u_{n-1}-u_{n-2}=2.3^{n-3}+1$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_2-u_1=2.3^0+1$$

邊々相加フレバ

$$u_n-u_1=3^{n-1}+n-2$$
$$\therefore\quad u_n=3^{n-1}+n-2+u_1=3^{n-1}+n$$

コレ與ヘラレタル級數ノ一般項ナリ。

$$\therefore\quad u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=\sum_{n=1}^{n}(3^{n-1}+n)$$
$$=\sum_{n=1}^{n}3^{n-1}+\sum_{n=1}^{n}n=\frac{3^n-1+n^2+n}{2}$$

170. 定理 1. $\Delta^ru_n=u_{n+r}-{}_rC_1u_{n+r-1}+{}_rC_2u_{n+r-2}-\cdots\cdots+(-1)^ru_n$

證明 定義ニヨリテ

$$\left.\begin{array}{l}\Delta u_n=u_{n+1}-u_n\\ \Delta^2u_n=\Delta u_{n+1}-\Delta u_n\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故ニ

$$\Delta^2u_n=(u_{n+2}-u_{n+1})-(u_{n+1}-u_n)$$
$$=u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n$$
$$=u_{n+2}-{}_2C_1u_{n+1}+(-1)^2u_n\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

次ニ $\Delta^3u_n=\Delta^2u_{n+1}-\Delta^2u_n$

然ルニ(2)ニヨリテ

$$\Delta^2u_{n+1}=u_{n+3}-2u_{n+2}+u_{n+1}$$
$$\Delta^2u_n=u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n$$
$$\therefore\quad \Delta^3u_n=(u_{n+3}-2u_{n+2}+u_{n+1})-(u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n)$$
$$=u_{n+3}-3u_{n+2}+3u_{n+1}-u_n$$
$$=u_{n+3}-{}_3C_1u_{n+2}+{}_3C_2u_{n+1}+(-1)^3u_n$$

即チ Δu_n, Δ^2u_n Δ^3u_n ノ場合ニハ共ニ吾人ノ定理ハ成立ス

次ニ

$$\Delta^ru_n=u_{n+r}-{}_rC_1u_{n+r-1}+{}_rC_2u_{n+r-2}-\cdots\cdots+(-1)^ru_n$$

ヲ眞ナリト假定シテ,

$$\Delta^{r+1}u_n=u_{n+r+1}-{}_{r+1}C_1u_{n+r}+{}_rC_2u_{n+r-1}-\cdots\cdots+(-1)^{r+1}u_n$$

ノ眞ナルコトヲ證明センニ定義ニヨリ

$$\Delta^{r+1}u_n=\Delta^r u_{n+1}-\Delta^r u_n$$ ナルガ故ニ

$$\Delta^{r+1}u_n=\{u_{n+r+1}-{}_rC_1u_{n+r}+{}_rC_2u_{n+r-1}-\cdots\cdots+(-1)^r u_{n+1}\}$$
$$-\{u_{n+r}-{}_rC_1u_{n+r-1}+{}_rC_2u_{n+r-2}-\cdots\cdots+(-1)^r u_n\}$$
$$=u_{n+r+1}-({}_rC_1+1)u_{n+r}+({}_rC_2+{}_rC_1)u_{n+r-1}$$
$$-({}_rC_3+{}_rC_2)u_{n+r-2}+\cdots\cdots+(-1)^{r+1}u_n\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

故ニ(3)ハ

$$\Delta^{r+1}u_n=u_{n+r+1}-{}_{r+1}C_1u_{n+r}+{}_{r+1}C_2u_{n+r-1}-\cdots\cdots$$

ヨツテ一般ニ證明セラレタリ。

定理 2. $u_{r+n}=u_r+{}_nC_1\Delta u_r+{}_nC_2\Delta^2u_r+\cdots\cdots+\Delta^n u_r$

證明 定義ヨリ

$$\Delta u_r=u_{r+1}-u_r$$

$$\therefore\quad u_{r+1}=u_r+\Delta u_r\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同様ニ

$$u_{r+2}=u_{r+1}+\Delta u_{r+1}$$

コレニ(1)ヲ代入スレバ

$$=u_r+\Delta u_r+\Delta u_{r+1}$$
$$=u_r+2\Delta u_r+\Delta^2u_r=u_r+{}_2C_1\Delta u_r+\Delta^2u_r$$

故ニ u_{r+1}, 及ビ u_{r+2} ノ場合ハ證明セラレタリ。次ニ

$$u_{r+n}=u_r+{}_nC_1\Delta u_r+{}_nC_2\Delta^2u_r+\cdots\cdots+\Delta^n u_r\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ眞ナリト假定シ

$$u_{r+n+1}=u_r+{}_{n+1}C_1\Delta u_r+{}_{n+1}C_2\Delta^2u_r+\cdots\cdots+\Delta^{n+1}u_r$$

ノ眞ナルコトヲ證センニ(2)ヨリ

$$u_{(r+1)+n}=u_{r+1}+{}_nC_1\Delta u_{r+1}+{}_nC_2\Delta^2u_{r+1}+\cdots\cdots+\Delta^n u_{r+1}\cdots\cdots(3)$$

然ルニ $u_{r+1}=u_r+\Delta u_r$

$$\Delta u_{r+1}=\Delta u_r+\Delta^2u_r$$
$$\Delta^2u_{r+1}=\Delta^2u_r+\Delta^3u_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ(3)ハ

$$u_{(r+1)+n}=u_r+\Delta u_r+{}_nC_1(\Delta u_r+\Delta^2u_r)+{}_nC_2(\Delta^2u_r+\Delta^3u_r)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\Delta^n u_r+\Delta^{n+1}u_r$$
$$=u_r+(1+{}_nC_1)\Delta u_r+({}_nC_1+{}_nC_2)\Delta^2u_r+\cdots\cdots+\Delta^n u_r+\Delta^{n+1}u_r$$
$$=u_r+{}_{n+1}C_1\Delta u_r+{}_{n+1}C_2\Delta^2u_r+\cdots\cdots+\Delta^{n+1}u_r$$

ヨリテ一般ニ證明セラレタリ。

171. 級數ノ初項トソノ級數ノ連次差トヲ與ヘテ n 項ノ和ヲ求ムル公式ヲ誘導セントス。

與ヘラレタル級數ヲ $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ トシ，ソノ初メニ任意ノ項 u_0 ヲ加フ（玆ニ u_0 ハ問題ヲ解カンガ爲メニ補助トシテ用フルモノナレバ，ソノ選ビ方ハ全ク吾人ノ勝手タルベク，ソレヲ如何樣ニ採ルトモ求メントスル結果ニハ少シモ影響ヲ來タサズ）

次ニ
$$\left.\begin{aligned}S_0&=u_0\\S_1&=u_0+u_1\\S_2&=u_0+u_1+u_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\S_n&=u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\Delta^r S_n&=S_{n+1}-S_n=u_{n+1}\\\Delta^2S_n&=\Delta S_{n+1}-\Delta S_n=\Delta u_{n+1}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\Delta^r S_n&=\Delta^{r-1}S_{n+1}-\Delta^{r-1}S_n=\Delta^{r-1}u_{n+1}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルガ故ニ定理2ニヨリテ

$$S_n=S_0+{}_nC_1\Delta S_0+{}_nC_2\Delta^2S_0+\cdots\cdots+\Delta^n S_0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)ニ(2)ヲ代入スレバ

$$S_n=\sum_{n=0}^{n}u_n=u_0+{}_nC_1u_1+{}_nC_2\Delta u_1+{}_nC_3\Delta^2u_1+\cdots\cdots+\Delta^{n-1}u_1$$

コノ兩邊ヨリ u_0 ヲ減ズレバ

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n={}_nC_1u_1+{}_nC_2\Delta u_1+{}_nC_3\Delta^2u_1+\cdots\cdots+\Delta^{n-1}u_1$$

例 1. 上ノ方法ニテ再ビ百六十九節例 1 ヲ解ケ。

解

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$\cdots\cdots$
原級數	4	14	30	52	80	114	$\cdots\cdots$
Δu	10	16	22	28	34	$\cdots\cdots$	
$\Delta^2 u$	6	6	6	6	$\cdots\cdots$		
$\Delta^3 u$	0	0	0	$\cdots\cdots$			

$$\therefore\ u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n={}_nC_1u_1+{}_nC_2\Delta u_1+{}_nC_3\Delta^2u_1$$
$$=n\times4+\frac{n(n-1)}{2!}10+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}6$$
$$=n(n+1)^2$$

例 2. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ ノ和ヲ求メヨ。

解

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	$\cdots\cdots$
原級數	1	4	9	16	25	$\cdots\cdots$
Δu	3	5	7	9	$\cdots\cdots$	
$\Delta^2 u$	2	2	2	$\cdots\cdots$		
$\Delta^3 u$	0	0	$\cdots\cdots$			

$$\therefore\ u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots u_n={}_nC_1u_1+{}_nC_2\Delta u_1+{}_nC_3\Delta^2u_1$$
$$=n\times1+\frac{n(n-1)}{2!}\times3+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\times2$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

第二章 問題

次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。(1—7)

1. $6+17+34+57+86+\cdots\cdots$

2. $2.5+3.6+4.7+\cdots\cdots$

3. $2.4+5.9+8.14+\cdots\cdots$

4. $1.3.5+3.5.7+5.7.9+\cdots\cdots$

5. $1.3.7+2.4.8+3.5.9+\cdots\cdots$

6. $-1+11+39+89+167+\cdots\cdots$

7. $-10+9+29+80+193+400+\cdots\cdots$

8. $8+42+120+260+480+798+\cdots\cdots$

9. $4+36+144+400+900+1764+\cdots\cdots$

10. $4+13+35+94+262+755+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

11. $7+17+31+49+71+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

12. 第四次擬數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

第三章

循環級數

172. **定義** 級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$ ニ於テソノ任意ノ項ヨリ逆ノ順序ニトリタル $r+1$ 個ノ項ガ

$$a_nx^n+p_1x(a_{n-1}x^{n-1})+p_2x^2(a_{n-2}x^{n-2})+\cdots\cdots+p_rx^r(a_{n-r}x^{n-r})=0$$

ナル關係ヲ成立スルトキ，與ヘラレタル級數ハ r 次ノ循環級數 (Recurring series) ナリトイヒ，$1+p_1x+p_2x^2+\cdots\cdots+p_rx^r$ ヲソノ級數ノ級數率 (Scale of relation) トイフ。$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_r$ ヲ級數率ノ常數 (Constants of scale) トイフ。

例ヘバ等比級數

$$a+ax+ax^2+\cdots\cdots+ax^n+\cdots\cdots$$

ニ於テハ n ノ値ノ如何ニ關セズ

$$ax^n-xax^{n-1}=0$$

ナルガ故ニ，コノ級數ハ 1 次ノ循環級數ニシテ級數率ハ $1-x$ ナリ。又

$$1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots$$

ニアリテハ $(5x^2)-2x(3x)+x^2(1)=0$ 及ビ

$$(7x^3)-2x(5x^2)+x^2(3x)=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

ナルガ故ニ，コノ級數ハ 2 次ノ循環級數ニシテ級數率ハ $1-2x+x^2$ ナリ。

73. 循環級數ノ級數率ヲ求ムル方法ヲ述ベンニ二次ノ循環級數 $1+2x$

$+3x^2+7x^3+\cdots\cdots$ ノ級數率ヲ $1+p_1x+p_2x^2$ トスレバ p_1, p_2 ガ次ノ等式ヲ滿足スベシ

$$3+2p_1+p_2=0$$
$$7+3p_1+2p_2=0$$
$$\therefore \quad p_1=1, \quad p_2=-5$$

故ニ求ムル級數率ハ $1+x-5x^2$ ナリ.

上ノ例ニテ知ルガ如ク二次ノ級數率ヲ定ムルニハ與ヘラレタル循環級數ニ於テ四個ノ項ヲ知ラザルベカラズ、ヨリテ次ノ定理アリ.

定理 1. r 次ノ循環級數ノ級數率ハ, ソノ級數ノ最初ノ $2r$ 項ヲ知ルトキハ決定スルコトヲ得.

證明 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2r-1}x^{2r-1}+\cdots\cdots$

ヲ r 次ノ循環級數ナリトシ, 級數率ヲ假リニ

$$1+p_1x+p_2x^2+\cdots p_rx^r$$

ナリトスレバ定義ニヨリテ次ノ一組ノ方程式アリ

$$a_r+p_1a_{r-1}+p_2a_{r-2}+\cdots\cdots+p_ra_0=0$$
$$a_{r+1}+p_1a_r+p_2a_{r-1}+\cdots\cdots+p_ra_1=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{2r-1}+p_1a_{2r-2}+p_2a_{2r-3}+\cdots\cdots+p_ra_{r-1}=0$$

即チ r 個ノ方程式ニヨリテ $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_r$ ハ一般ニ求ムルコトヲ得。而シテコレ等ノ方程式中ニハ元ノ級數ノ最初ノ $2r$ 個ノ項ノ係數即チ $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}$ ヲ含メリ。ヨリテ定理ハ證明セラレタリ。

定理 2. r 次ノ循環級數ノ最初ノ $2r$ 個ノ項ヲ知ル時ハソノ級數ノ他ノ項ヲ決定スルコトヲ得。

例ヘバ前ニアゲタル例題

$$1+2x+3x^2+7x^3+\cdots\cdots$$

ノ四項ヲ知ル時ハ, 二次ノ級數率 $1+x-5x^2$ ヲ決定シ得タリ。ソコデ與ヘラレタル級數ヲ

$$1+2x+3x^2+7x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+\cdots\cdots$$

ナリトシ $a_4, a_5, a_6\cdots\cdots$ ヲ求メントスルニ, コノ場合ニハ p_1, p_2 ガ夫々 $1, -5$ ナルガ故ニ

$$a_4+1.7+3(-5)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$a_5+1.a_4+7(-5)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$a_6+1.a_5+a_4(-5)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1) ヨリ $a_4=8$, (2) ヨリ $a_5=27$, (3) ヨリ $a_6=13$ ヲ得, 以下同樣ナル手續ヲ施セバ $a_7, a_8\cdots\cdots$ ヲ求ムルコトヲ得。

174. 循環級數ノ n 項ノ和ヲ求ムルコト

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

ヲ循環級數ナリトシ, コレヲ2次ノモノト假定スベシ。(幾次ニテモ理論ハ同樣ナリ)而シテコノ級數率ヲ $1+p_1x+p_2x^2$ ナリトス。然ルトキ

$$S_n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

トスレバ

$$p_1xS_n=p_1a_0x+p_1a_1x^2+p_1a_2x^3+p_1a_3x^4+\cdots\cdots\cdots$$
$$+p_1a_{n-2}x^{n-1}+p_1a_{n-1}x^n$$
$$p_2x^2S_n=\qquad p_2a_0x^2+p_2a_1x^3+p_2a_2x^4+\cdots\cdots$$
$$+p_2a_{n-3}x^{n-1}+p_2a_{n-2}x^n+p_2a_{n-1}x^{n+1}$$
$$\therefore \quad S_n(1+p_1x+p_2x^2)=a_0+(a_1+p_1a_0)x+(a_2+p_1a_1+p_2a_0)x^2$$
$$+(a_3+p_1a_2+p_2a_1)x^3+(a_4+p_1a_3+p_2a_2)x^4+$$
$$\cdots\cdots+(a_{n-1}+p_1a_{n-2}+p_2a_{n-3})x^{n-1}$$
$$+(p_1a_{n-1}+p_1a_{n-2})x^n+p_2a_{n-1}x^{n+1}$$

然ルニ假定ニヨリテ

$$a_2x^2+p_1x(a_1x)+p_2x^2(a_0) \quad 即チ \quad (a_2+p_1a_1+p_2a_0)x^2=0$$
$$a_3x^3+p_1x(a_2x^2)+p_2x^2(a_1x) \quad 即チ \quad (a_3+p_1a_2+p_2a_1)x^3=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\therefore \quad S_n(1+p_1x+p_2x^2)=a_0+(a_1+p_1a_0)x+(p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2})x^n+p_2a_{n-1}x^{n+1}$$

$$\therefore\quad S_n=\frac{a_0+(a_1+p_1a_0)x+(p_1a_{n-1}+p_2a_{n-2})x^n+p_2a_{n-1}x^{n+1}}{1+p_1x+p_2x^2}$$

系 1. $|x|<1$ ナルトキハ

$$S=\lim_{n=\infty}S_n=\frac{a_0+(a_1+p_1a_0)x}{1+p_1x+p_2x^2}$$

系 2. $|x|<1$ ナルトキ三次循環級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

ノ總和ハ

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_0+(a_1+p_1a_0)x+(a_2+p_1a_1+p_2a_0)x^2}{1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3}\quad ナリ。$$

175. 循環級數ノ母函數,

二次ノ循環級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$ ナル無限級數ハ $|x|<1$ ナル時ソノ和ハ $\dfrac{a_0+(a_1+p_1a_0)x}{1+p_1x+p_2x^2}$ ナルコト前節ニ於テ述ベタルガ如シ 逆ニコノ分數ヲ x ノ昇冪ノ收斂無限級數ニ展開スルトキハ, ソノ x^n ノ係數ハ n ノ如何ニ關セズ與ヘラレタル級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ノ係數ト全ク相等シカルベシ。故ニ $\dfrac{a_0+(a_1+p_1a_0)x}{1+p_1x+p_2x^2}$ ヲコノ循環級數ノ母函數 (Generating function) トイフ。

例 二次ノ循環級數 $3+4x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 級數率ヲ $1+p_1x+p_2x^2$ トスレバ

$$6+4p_1+3p_2=0$$

$$10+6p_1+4p_2=0$$

$\therefore\quad p_1=-3,\quad p_2=2$ ヲ得ベク。ヨツテコノ級數率ハ $1-3x+2x^2$ ナリ。 モシ與ヘラレタル級數ハ收斂ナラバソノ母函數ハ

$$\frac{3+(4-9)x}{1-3x+2x^2}=\frac{3-5x}{(1-x)(1-2x)}\quad ナリ。$$

ソコデ部分々數ニ化シタル後展開スレバ,

$$\frac{3-5x}{(1-x)(1-2x)}=\frac{2}{1-x}+\frac{1}{1-2x}$$

$$=2(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots)$$

$$+(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots\cdots+2^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots)$$

故ニ一般項即チ第 r 項ハ $(2+2^{r-1})x^{r-1}$

故ニコノ級數ノ n 項ノ和ハ百七十四節ニヨリテ

$$\frac{3-5x-(2+2^n)x^n+(4+2^n)x^{n+1}}{1-3x+2x^2}$$

ナルヲ知ル

注意 實際的ノ計算ニハ次ノ如クスルヲ便利ナリトス。即チ

$$2(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1})=\frac{2(1-x^n)}{1-x}$$

$$1+2x+2^2x^2+\cdots\cdots+2^{n-1}x^{n-1}=\frac{1-2^nx^n}{1+2x}$$

$$\therefore\quad S^n=\frac{2(1-x^n)}{1-x}+\frac{1-2^nx^n}{1-2x}$$

コレ全ク上ノ結果ニ一致ス,

176. 循環級數ノ理論ヲ利用シテ或種ノ級數ノ和ヲ求ムルコトヲ得,

例 $3+8+9+14+15+20+\cdots\cdots$ ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル級數ヲ假リニ

$$3+8x+9x^2+14x^3+15x^4+20x^5+\cdots\cdots\quad トシ$$

コノ級數率ヲ $1+p_1x+p_2x^2+p_3x^3$ トスレバ, p_1, p_2, p_3 ハ夫々次ノ方程式ヨリ得ラル。

$$\left.\begin{aligned}14+9p_1+8p_2+3p_3=0\\15+14p_1+9p_2+8p_3=0\\20+15p_1+14p_2+9p_3=0\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad p_1=-1,\quad p_2=-1,\quad p_3=1$$

故ニソノ母函數ハ百七十四節系 2 ニヨリ $\dfrac{3+5x-2x^2}{1-x-x^2+x^3}$ ナリ。

コレヲ部分々數ニ化シタル後展開スレバ

$$\frac{1}{1-x}+\frac{3}{(1-x)^2}-\frac{1}{1+x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots$$

$$+3(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots)$$

$-(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots$

故ニ x^{n-1} ノ係數ハ $1+3n+(-1)^n$ ナリ。ヨツテ與ヘラレタル級數ノ n 項ノ和ハ

$$\sum_{n=1}^{n}\{1+3n+(-1)^n\}=n+3\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{n=1}^{n}(-1)^n$$

故ニモシ n ガ偶數ナラバ $n+3\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n(3n+5)}{2}$ ニシテ

n ガ奇數ナルトキハ $n+\dfrac{3n(n+1)}{2}-1=\dfrac{3n^2+5n-2}{2}$ ナリ。

第三章 問題

次ノ各級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ。(1—6)

1. $2+6+14+30+\cdots\cdots\cdots$　　2. $1+2+7+20+\cdots\cdots\cdots$

3. $2+5+13+35+97+\cdots\cdots\cdots$　　4. $1+4x+17x^2+76x^3+353x^4+\cdots\cdots\cdots$

5. $2+17x+95x^2+461x^3+\cdots\cdots\cdots$　　6. $2-x+5x^2-7x^3+\cdots\cdots\cdots$

7. $1+4x+2x^2-4x^3+2x^4+24x^5+\cdots\cdots$ ノ級數率ヲ求メヨ。

8. $2+5x+9x^2+15x^3+25x^4+43x^5+\cdots\cdots$ ガ三次循環級數ナリトイフ。コノ級數ノ第七項以下ヲ見出セ。

9. 上ノ問題ニ於テソノ母函數ハ $\dfrac{2-3x-x^2}{(1-2x)(1-x)^2}$ ナルコトヲ示シ，依リテ以ツテ x^n ノ係數ハ $(2n+1+2^n)$ ナルコトヲ證セヨ。

10. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ 及ビ $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$ ハ共ニ循環級數ノ係數ナルコトヲ示シ，以ツテ n 項ノ和ハ夫々 $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ナルコトヲ示セ。

11. $1+3+4+7+11+18+\cdots\cdots\cdots$ ノ第 n 項ヲ求メヨ。

解　級數 $1+3x+4x^2+7x^3+11x^4+18x^5+\cdots\cdots$ ノ級數率ヲ $1+p_1x+p_2x^2$ ナリトセヨ（モシコノ級數率ガ $1+p_1x$ ノ如ク一次ナルモノナラバ演算ノ結果 $p_2=0$ トナルベク，又モシコノ級數率ハ三次ノモノナル時ハ $4+3p_1+p_2=0$ ガ滿足セラレザルベシ。）然ルトキハ $p_1=-1$, $p_2=-1$.

故ニ母函數ハ $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$

部分々數ニ化スレバ

$$\frac{1+2x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{\frac{2+\alpha}{\alpha-\beta}}{1-\alpha x}-\frac{\frac{2+\beta}{\alpha-\beta}}{1-\beta x}\qquad 但シ\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ヨリテ x^{n-1} ノ係數ハ $\dfrac{2+\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\dfrac{2+\beta}{\alpha-\beta}\beta^{n-1}$

即チ　$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\alpha^{n-1}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta^{n-1}=\dfrac{1}{2^n}\{(1+\sqrt{5})^n+(1-\sqrt{5})^n\}$

12. 二ツノ循環級數

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots$

$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots\cdots\cdots$

ノ級數率ヲ夫々 $1+px+qx^2$, $1+rx+sx^2$ トスレバ

$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots\cdots$ モ亦循環級數ニシテ，ソノ級數率ハ

$1+(p+r)x+(q+s+pr)x^2+(qr+ps)x^3+qsx^4$ ナルコトヲ證セヨ。

第十四編　連分數

第一章

概　論

177. 連分數 (Continued fraction) トハ

$$a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cfrac{b_4}{a_4+\cdots\cdots}}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ノ如キ形ノ分數ヲイフ。茲ニ $a_1, a_2, \cdots\cdots, b_2, b_3, \cdots\cdots$ ハ正又ハ負ノ整數ヲ表ハスモノトス。n ガ有限ナルトキハ有限連分數 (Terminating continued fraction) トイヒ，n ガ無限ナルトキハ無限分數 (Non terminating continued fraction) トイフ。

(1) ニ於テ $a_1, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}$ ヲ連分數ノ元 (Element) トイヒ，コレ等ノ元ハ一定ノ法則ニヨリテ限リナク繰リ返ヘサルル時ハ，循環連分數或ハ週期的連分數 (Recurring or Periodic continued fraction) トイフ。

a_1 ハ例外トシテ $b_2=b_3=\cdots\cdots=b_n=\cdots\cdots1$ ニシテ，$a_2, a_3, \cdots\cdots a_n\cdots\cdots$ ハ悉ク正ノ整數ナルモノヲ單純連分數 (Simple continued fraction) トイヒ，

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots\cdots}}}$$

ノ如キ形ヲナス。之レニ反シテ a 及ビ b ニ何等ノ制限ヲ有セザルモノヲ一般連分數 (General continued fraction) トイヒ，更ニ細分シテ二ツトス。卽チ a_2, $a_3\cdots\cdots, b_2, b_3$ ハ共ニ正ノ整數ナル時 (a_1 ハ正，負何レナルモ可)

$$a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots\cdots}}$$

ハ第一種ニシテ

$$a_1+\cfrac{b_2}{a_2-\cfrac{b_3}{a_3-\cdots\cdots}}$$

ハソノ第二種ノモノナリ。

178. 連分數ヲ記スニ上ノ方法ヲ以ツテスレバ頗ル紙塞ヲナスヲ以ツテ，通常次ノ如キ各種ノ略記法ヲ用フ。

i　$a_1\pm\frac{b_2}{a_2\pm}\ \frac{b_3}{a_3\pm}\cdots\cdots\cdots$

但シコノ記法ヲ用フルトキハ，$a_1\pm\frac{b_2}{a_2}\pm\frac{b_3}{a_3}\cdots\cdots$ ノ如キ普通ノ分數ノ加法，減法ト混同スル虞レアルガ故ニ「±」ナル符號ヲ横線ノ下ニ記入ス。

ii　$a\dot{\pm}\frac{b_2}{a_2}\dot{\pm}\frac{b_3}{a_3}\dot{\pm}\cdots\cdots\cdots$

コノ記法ハ分數ノ加減法ト全ク同一ノ形式ナルガ故ニ，コレト混同ヲ避クル爲メニ「±」ノ上ニ黑點ヲ附ス。

iii　獨逸ニテハ近時尤モ進歩セル記號トシテ有限單純連分數ハ $\left(a_1;\frac{1}{a_r}\right)^n$ ヲ以ツテ表ハシ，a_1 ノナキモノハ $\left(\frac{1}{a_r}\right)^n$ ヲ以ツテス。又無限單純連分數ハ $\left(a_1;\frac{1}{a_r}\right)^\infty$ ヲ以ツテシ a_1 ナキ時ハ $\left(\frac{1}{a_r}\right)^\infty$ ヲ用フ。

179. 漸近分數

連分數ヲ最上分數ヨリ順次ニ下部ニ向ヒテ n 項ヲトリタル和ヲ，第 n 漸近分數 (Convergent fraction) トイフ。例ヘバ

$$a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\cdots\cdots}}$$

ニ於テハ第一漸次分數ハ a_1 ニシテ第二漸近分數ハ $a_1+\frac{b_2}{a_2}=\frac{a_1a_2+b_2}{a_2}$ ナリ以下之レニ準ズ。

第二章

單純連分數

180. 例 1. $\dfrac{32}{17}$ ヲ連分數ニ直セ。

解 $$\frac{32}{17}=1+\frac{15}{17}=1+\cfrac{1}{\cfrac{17}{15}}\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $$\frac{17}{15}=1+\frac{2}{15}=1+\cfrac{1}{\cfrac{15}{2}}\cdots\cdots(2)$$

又 $$\frac{15}{2}=7+\frac{1}{2}\cdots\cdots(3)$$

故ニ求ムル連分數ハ $1+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{7+}\,\dfrac{1}{2}$ ナリ。

注意 上ノ運算ニテ見ルガ如ク (1) ニ於ケル剩餘 15 ハ (2) ニ於ケル除數トナリ，(2) ニ於ケル剩餘 2 ハ (3) ニ於テ除數トナル。ソノ有様恰カモ 32 ト 17 トノ最大公約數ヲ求ムル場合ノ互除法ノ如シ。次ノ例ハコノ法ニヨル。

例 2. $\dfrac{245}{103}$ ヲ連分數ニ直セ。

245	2	103
206	2	78
39		25
25	1	14
14	1	11
11	1	9
3	3	2
2	1	2
1	2	0

$$\therefore\ 2+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2}$$

例 3. $\sqrt{3}$ ヲ連分數ニ直セ。

解 $\sqrt{3}$ ヨリ小ナル最大整數ハ 1 ナリ。

$$\therefore\ \sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdots\cdots(2)$$

而シテ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ ヨリモ小ナル最大整數ハ 1 ナリ。

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}=1+\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1\right)=1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=1+\cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{3}-1}}\cdots(3)$$

又 $$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1\cdots\cdots(4)$$

而シテ $\sqrt{3}+1$ ヨリモ小ナル最大整數ハ 2 ナリ。

$$\therefore\ (\sqrt{3}+1)=2+(\sqrt{3}-1)=2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{3}-1}}\cdots\cdots(5)$$

同様ニ $$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdots\cdots(6)$$

(6) ハ全ク (2) ニ一致ス。ヨツテコレヨリ先キハ凡テ前ト同一ノ結果ガ繰リ返ヘサル。即チ求ムルモノハ $1+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\cdots\cdots$ ニシテ所謂循環連分數ナリ。

181. **定理 1.** 有限單純連分數ハ有理數ナリ。

定理 2. 有理數ハ有限單純連分數ニ化スルコトヲ得，

證明 與ヘラレタル有理數ヲ $\dfrac{p}{q}$ トス。玆ニ正ノ有理數ナラバ p, q ハ共ニ正ノ整數ニシテ負ノ有理數ナラバ p ヲ負ノ整數ナリトス。

然ルトキハ $p=a_1q+p_1$ ヲ滿足スル正ノ整數 a_1, p_1 ハ必ズ存在シ且ツ $p_1<q$ ナリ (負ノ有理數ナルトキハ a_1 ハ負ノ整數トナル) 又

$$q=a_2p_1+p_2$$

ヲ滿足スル正ノ整數 a_2, p_2 ガ存在ス。同様ニシテ

$$p_1=a_3p_2+p_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

カクノ如ク繼續スル時ハ剩餘 p_n ハイツカハ零トナルガ故ニ $p_{n-2}=a_np_{n-1}$ ニ至リテ演算ハ終結ス。

ヨリテ $$\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_n}$$ ナリ。

注意 與ヘラレタル數ハ正數ナルモ負數ナルモ，コレヲ連分數ニ化スル時ハ單ニ a_1

ガ正數トナルカ負數トナルカノ區別アルノミニシテ $a_2, a_3, \cdots\cdots b_2, b_3 \cdots\cdots$ 等ハ凡テ正ナリ。ヨリテ本書ニテハ a_1 ヲ正ノ數ナリトシテ論ズ。

182. $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}$ ニ於テ $a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots$ ヲコノ連分數ノ第一，第二，第三，……部分商トイフ。

定理 3. 有限單純連分數ノ部分商ヲ奇數個ニスルコトヲ得。又偶數個ニスルコトヲ得。

證明 $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}\,\dfrac{1}{a_n}$ ニ於テ n モシ奇數ナル時偶數個ノ部分商ヲ有スル連分數ニ直スニハ $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n-1+1}=\dfrac{1}{(a_n-1)+\dfrac{1}{1}}$ ナルガ故ニ，與ヘラレタル連分數ハ $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}\,\dfrac{1}{(a_n-1)+}\,\dfrac{1}{1}$ トナリテ偶數個ノ部分商ヲ有ス。コレト全ク同樣ニシテ n ガ偶數ナルトキコレヲ奇數個ノ部分商ヲ有スル連分數ニ直スコトヲ得。

注意 普通連分數トイヘバ最後ノ部分商ガ 1 ヨリ大ナル正ノ整數ヲ意味ス。故ニ上ノ定理ハコノ制限ヲ顧ミザル時ニ成立スルトイフ義ナリ。

定理 4. 無理數ハ有限單純連分數ニ化スルコトヲ得ズ。

證明 假リニ無理數ヲ有限單純連分數ニ化シ得タリトセヨ。然ラバコノ連分數ハ有限個ノ部分商ヲ有スルガ故ニ，コノ連分數ガ有限回ノ演算ニヨリテ普通ノ分數トナル。從ツテ有理數ナリ。コレ假定ニ反ス。故ニ無理數ヲ有限單純連分數ニ直スコトヲ得ズ。

定理 5. 任意ノ數ヲ單純連分數ニ展開スル方法ハ只一通リニ限ル。

證明 假リニ $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}$ ノ外ニ尙 $b_1+\dfrac{1}{b_2+}\,\dfrac{1}{b_3+\cdots\cdots}$ ニ展開セラレタリトセヨ。$a_2, a_3, \cdots\cdots$ ハ凡テ正ノ整數ナルガ故ニ $\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}$ ハ眞分數ナリ。同樣ニ $\dfrac{1}{b_2+}\,\dfrac{1}{b_3+\cdots\cdots}$ モ亦眞分數ナリ。故ニ整數部分ハ相等シカラザルベカラズ。從ツテ $a_1=b_1$

然ルトキハ $\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}=\dfrac{1}{b_2+}\,\dfrac{1}{b_2+\cdots\cdots}$

普通ノ方法ニテ書クトキハ

$$\frac{1}{a_2+\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}}=\frac{1}{b_2+\dfrac{1}{b_3+\cdots\cdots}}$$

ヨツテソノ分母相等シ　即チ

$$a_2+\frac{1}{a_3+\cdots\cdots}=b_2+\frac{1}{b_3+\cdots\cdots}$$

ナリ，從ツテ前ト同樣ニシテ $a_2=b_2$

コノ方法ヲ繰リ返ヘストキハ

$$a_3=b_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n=b_n$$

即チ定理ハ證明セラレタリ。

定理 6. 連分數 $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+\cdots\cdots}$ ノ第 n 漸近分數ヲ $\dfrac{p_n}{q_n}$ トスレバ

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}$$

ナリ。

證明 連分數 $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$ ニ於テ

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_1}{1},\quad \frac{p_2}{q_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2},\quad \frac{p_3}{q_3}=\frac{a_1a_2a_3+a_1+a_3}{a_2a_3+1}$$

$$\frac{p_4}{q_4}=\frac{a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4}$$

故ニ

$$\left.\begin{array}{l}p_1=a_1\\ q_1=1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}p_2=a_1a_2+1\\ q_2=a_2\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}p_3=a_1a_2a_3+a_3+a_1\\ q_3=a_2a_3+1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}p_4=a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1\\ q_4=a_2a_3a_4+a_2+a_4\end{array}\right\}$$

故ニ

$$\left.\begin{array}{l}p_3=a_3p_2+p_1\\ q_3=a_3q_2+q_1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}p_4=a_4p_3+p_2\\ q_4=a_4q_3+q_2\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナル關係アリ。ソコデ

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナル關係ヲ假定シテ

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-2},\quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}$$

ナルコトヲ數學的歸納法ニヨツテ證明セントス。ソレガ爲ニハ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{a_{n+1}}$$

ト

$$\frac{p_n}{q_n}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\frac{1}{a_n}$$

トヲ比較センニ前者ハ後者ノ a_n ノ代リニ $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}$ ト置キ換フレバヨシ、

故ニ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}$$

故ニ (2) ヨリ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}$

(1), (2) ヨリ n ガ正ノ整數ナル時ハ一般ニ

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ガ成立ス。

定理 7. $\frac{p_n}{p_{n-1}}$ 及ビ $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ ヲ連分數ニ化スレバ，何レモソノ部分商ノ順序ハ相反ス。

證明　$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$　$\therefore\ \frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}$

又 $p_{n-1}=a_{n-1}p_{n-2}+p_{n-3}$　$\therefore\ \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}=a_{n-1}+\frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$p_3=a_3p_2+p_1$　$\therefore\ \frac{p_3}{p_2}=a_3+\frac{p_1}{p_2}=a_3+\frac{1}{\frac{p_2}{p_1}}$

然ルニ　$\frac{p_2}{p_1}=\frac{a_1a_2+1}{a_1}=a_2+\frac{1}{a_1}$

$$\therefore\ \frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_{n-2}+\cdots\cdots}\ \frac{1}{a_1}$$

同様ニシテ

$$\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_{n-2}+\cdots\cdots}\ \frac{1}{a_2}$$

即チ何レモ與ヘラレタル連分數トソノ部分商ノ順序ヲ異ニス

定理 8. $p_nq_{n-}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$ ナリ

證明　$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$ ナリト假定シテ(歸納法)

$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(-1)^{n+1}$ ナルコトヲ證センニ

$p_{n+}=a_{n+1}p_n+p_{n-1}$　$q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}$ ナルガ故ニ

$$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(a_{n+1}p_n+p_{n-1})q_n-p_n(a_{n+1}q_n+q_{n+1})$$

$$=p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1}=-(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n)=(-1)^{n+1}$$

然ルニ實際計算ノ結果

$$p_2=a_1a_2+1\qquad q_2=a_2$$

$$p_1=a_1\qquad q_1=1$$

$$\therefore\ p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1(=-1)^2$$

ヨツテ定理ハ一般ニ證セラレタリ。

定理 9. $\frac{p_n}{q_n}$ ハ已約分數ナリ。

證明　$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$

故ニモシ p_n ト q_n トニ共通ノ因數アルトキハ，ソノ共通因數ハ $(-1)^n$ ヲ整除セラルベカラズ。ヨツテ p_n ト q_n トノ間ニハ 1 ヨリ以外ノ因數アルコトナシ。即チ已約分數ナリ。

系 1.　$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$ ナリ。

系 2.　$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}}$ ナリ。

證明 系1ニヨリ $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$

及ビ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}}$

逐々相加フレバ

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{p_{n-2}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}}=(-1)^{n-1}\left\{\frac{-1}{q_nq_{n-1}}+\frac{1}{q_{n-1}q_{n-2}}\right\}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{-q_{n-2}+q_n}{q_nq_{n-1}q_{n-2}}$$

然ルニ $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=(-1)^{n-1}\frac{(a_nq_{n-1}+q_{n-2})-q_{n-2}}{q_nq_{n-1}q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}}$$

系1及ビ2ハ頗ル重要ナルモノニシテ，コレヨリ次ノ三ツノ定理ヲ得。

定理 10. 連分數ノ偶數番目ノ漸近分數ハソノ値ハ次第ニ減少シ，奇數番目ノ漸近分數ハソノ値次第ニ增加ス。

定理 11. 各偶數番目ノ漸近分數ハ，何レノ奇數番目ノ漸近分數ヨリモ大ナリ。

定理 12. アル數ヲNトシソレヲ連分數ニ直ストキ其漸近分數ヲ$\frac{p_n}{q_n}$トスレバ次ノ不等式アリ。

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_5}{q_5}<\cdots\cdots<N<\cdots\cdots<\frac{p_6}{q_6}<\frac{p_4}{q_4}<\frac{p_2}{q_2}$$

コノ定理ニヨルト任意ノ連分數ハ必ズ偶數番目ノモノト奇數番目ノモノトノ間ニ挾マレ且ツnヲ次第ニ大ニスレバスルホド漸近分數ノ値ハ與ヘラレタル連分數ニ近ヅクコトヲ知ル。

183. 吾人ハ前節ニヨリテ連分數ノ値ハ奇數番目ト偶數番目トノ漸近分數ノ間ニ存在スルコトヲ知レルガ，更ニ本章ニ於テハ一歩ヲ進メテ連分數ノ値ハソノ何レノ方ニ接近セルヤヲ考察セントス。

任意ノ數Nヲ連分數ニ化スルトキハ

$$N=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+\cdots\cdots}$$

而シテ $\frac{1}{a_{n+2}+\cdots\cdots}$ ハ1ヨリモ小ナル眞分數ナルガ故ニ之レヲaトスレバ

$$N=\frac{(a_{n+1}+a)p_n+p_{n-1}}{(a_{n+1}+a)q_n+q_{n-1}}$$

即チ

$$N=\frac{(a_{n+1}p_n+p_{n-1})+ap_n}{(a_{n+1}q_n+q_{n-1})+aq_n}=\frac{p_{n+1}+ap_n}{q_{n+1}+aq_n}$$

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-N=\frac{a(p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1})}{q_{n+1}(q_{n+1}+aq_n)}=\frac{(-1)^{n+1}a}{q_{n+1}(q_{n+1}+aq_n)}$$

然ルニ又

$$N-\frac{p_n}{q_n}=\frac{q_n(p_{n+1}+ap_n)-p_n(q_{n+1}+aq_n)}{(q_{n+1}+aq_n)q_n}$$

$$=\frac{p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}}{(q_{n+1}+aq_n)q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{q_n(q_{n+1}+aq_n)}$$

然ルニ $q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}$ ナルガ故ニ $q_{n+1}>q_n$ ニシテ且ツ $a<1$ ナルガ故ニ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ トNトノ差ハ$\frac{p_n}{q_n}$トNトノ差ヨリモ小ナリ。從ツテ次ノ定理アリ。

定理 13. 漸近分數ハソノ番目進ムニ從ヒ漸次眞ノ値ニ近迫ス。

注意 コレニヨリテ之レヲ觀レバ第一漸近分數ヨリハ第二漸近分數ノ方ガ眞ノ値ニ近ク，第二漸近分數ヨリモ第三漸近分數ノ方ガ眞ノ値ニ近シ。一般ニ第n漸近分數ヨリモ第$(n+1)$漸近分數ノ方ハ更ニ眞ノ值ニ近シ，コレ漸近分數ノ名稱ヲ得タル所以ナリトス。

184. 定理 14. $\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}<\left|N-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}$ ナリ。

證明 前ノ定理ニヨリ

$$N-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{q_n(q_{n+1}+aq_n)}\qquad\therefore\quad\left|N-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(q_{n+1}+aq_n)}$$

然ルニ $a<1$ ナルガ故ニ定理ハ容易ニ證明セラル。

系 $q_{n+1}>q_n$ ナルガ故ニ

$$\frac{1}{2q^2_{n+1}}<\left|N-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q^2_n}$$

例 圓周率ハ $3+\frac{1}{7+}\ \frac{1}{15+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{292+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{1+}\cdots\cdots$ ナリトイフ。コノ漸近分數ヲ求ム。

解　第一漸近分數	$a_1=3$	∴　$p_1=3$	$q_1=1$
第二　〃	$a_2=7$	$p_2=22$	$q_2=7$
第三　〃	$a_3=15$	$p_3=333$	$q_3=106$
第四　〃	$a_4=1$	$p_4=355$	$q_4=113$
第五　〃	$a_5=292$	$p_5=103993$	$q_5=33102$
第六　〃	$a_6=1$	$p_6=104348$	$q_6=33215$

……………………………

故ニ求ムル漸近分數ハ*

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215}\cdots\cdots$$

注意　定理12ニヨリテ $\frac{3}{1}$, $\frac{333}{106}$……等ノ如ク奇數番目ノモノガπノ不足ナル近似値, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$……等ノ如ク偶數番目ノモノガπノ過剩ナル近似値ニシテ，何レモソノ番目ガ進ムニ從ヒ漸次πノ眞値ニ近迫ス。

定理15. 單純連分數ノ漸近分數ハ，ソノ分母ヨリ小ナル他ノ如何ナル已約分數ヨリモ眞値ニ近キモノナリ。

證明　連分數ノ眞値ヲNトシ，$\frac{p_n}{q_n}$ハnノ如何ニ關セズq_nヨリ小ナル分母ヲ有スル已約分數例ヘバ$\frac{p}{q}$ヨリモNニ近キモノナルコトヲ證セントス。

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{q_nq_{n-1}}$$

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\sim\frac{p}{q}=\frac{p_{n-1}q\sim pq_{n-1}}{q_{n-1}q}$$

サテp, q, p_{n-1}, q_{n-1}ハ正ノ整數ナルガ故ニ$p_{n-1}q\sim pq_{n-1}$ハ零又ハ整數ナリ。モシ零ナルトキハ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p}{q}$ ナルガ故ニ前定理注意ニヨリテ $\frac{p_n}{q_n}$ ハ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 卽チ$\frac{p}{q}$ヨリモ眞値ニ近シ。次ニ $p_{n-1}q\sim pq_{n-1}$ ハ零ナラザル場合ヲ考フルニ

* $\frac{22}{7}$ ハあるきめです (Archimedes 287B.C.?－212B.C.) ニヨツテ，$\frac{355}{113}$ ハめちうすニヨツテ與ヘラル。支那ニテハ前者ヲ約率トイヒ後者ヲ密率トイヒタリ。くらいんガ古今ヲ通ジテ最モ偉大ナル數學者ハ三人アリトイヒ，あるきめです，にゆーとん，がうすヲ推セリ。

$q_n>q$ ナルガ故ニ $q_nq_{n-1}>q_{n-1}q$ ナリ。ヨツテ

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\sim\frac{p}{q}>\frac{p_{n-}}{q_{n-1}}\sim\frac{p_n}{q_n}$$

而シテNハ$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ト$\frac{p_n}{q_n}$トノ間ニ存在スルガ故ニコレ等ノ數ハ次ノ二ツノ中何レカノ順序ナリ。卽チ

(A)　$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, N, $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p}{q}$

(B)　$\frac{p}{q}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, N, $\frac{p_n}{q_n}$

故ニ何レノ場合ニモ定理ハ證明セラル。

第二章　問　題

1. $\frac{48}{17}$ヲ連分數ニ直セ。

2. $\frac{91}{53}$ヲ連分數ニ直シ且ツソノ漸近分數ヲ求メヨ。

3. $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}$ ヲアル連分數ノ最初ノ三ツノ漸近分數トスルトキハ $(p_3-p_1)q_2=(q_3-q_1)p_2$ ナルコトヲ證セヨ。

4. 上ノ問題ヲ擴張シテ一般ニ次ノ等式アルコトヲ證セヨ。

$$(p_{n+1}-p_{n-1})q_n=(q_{n+1}-q_{n-1})p_n$$

5. $\sqrt{17}$トノ差0,00001ヨリモ小ナル分數ノ中分母ノ最モ小ナルモノヲ見出セ。

解　連分數ニ化スレバ, $4+\frac{1}{8+}\ \frac{1}{8+}\ \frac{1}{8+}\cdots\cdots$

故ニ	第一漸近分數	$\frac{4}{1}$,	第二漸近分數	$\frac{33}{8}$
	第三　〃	$\frac{268}{65}$,	第四　〃	$\frac{2177}{528}$
	第五　〃	$\frac{17684}{4289}$,		

サテ定理14ニヨレバ

$$\frac{1}{528(528+4289)}<\left|\sqrt{17}-\frac{2177}{528}\right|<\frac{1}{528\times4289}$$

然ルニ $528(528+4289)$ 及ビ 528×4289 ハ何レモ 100000 ヨリモ大ナルガ故ニ $\sqrt{17}$ ト $\frac{2177}{528}$ トノ差ハ 0.00001 ヨリモ小ナリ。ヨツテ $\frac{2177}{528}$ ハ要件ニ適スル分數ナリ。

然ルニコレヨリモ分母ノ小ナル $\frac{268}{65}$ ヲ用フレバ如何ニトイフニ

$$\frac{1}{65(65+528)}<\left|\sqrt{17}-\frac{268}{65}\right|<\frac{1}{65\times528}$$

然ルニ $65(65+528)$ 及ビ 65×528 ハ共ニ 100000 ヨリモ小ナルガ故ニ用フベカラズ。

6. $\frac{62}{35}=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{x+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2}$ ナルコトヲ知リテ x ヲ求メヨ。

7. 1哩ハ 1.609 きろめーとる ナリトス。然ルトキコノ二ツノ量即チ 1哩ト 1 きろめーとる トヲ比較シテ $18:29$ トスレバ殆ンド正シク，$289:465$ トスレバ更ニ精密ナルコトヲ證セヨ。

8. $p_nq_{n-1}+p_{n-1}q_{n-2}=p_{n-1}q_n+p_{n-2}q_{n-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

9. $\frac{1}{a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{a+}\cdots\cdots$ ニ於テ $p^2{}_n+p^2{}_{n+1}=p_{n-1}p_{n+1}+p_np_{n+2}$ ナルコトヲ證セヨ。

10. $\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\cdots\cdots$ ニ於テ $q_{2n}=p_{2n+1}$ 及ビ $q_{2n-1}=\frac{a}{b}p_{2n}$ ナルコトヲ示セ。

11. $\frac{p_n}{q_n}$ ハ $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}\cdots\cdots$ ノ第 n 漸近分數ナル時，p_{n-2} ト p_n トニ共通ノ因數アル時ハソレハ必ズ a_n ノ約數ナルコトヲ證セヨ。

解 定理9系2ニヨリテ $p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(-1)^{n-1}a_n$ ナリ。ヨツテ容易ニ證スルコトヲ得。

12. $\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{n-1}+}\,\frac{1}{a_n}$ ナリトスレバ

$$\frac{1}{a_n+}\,\frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_1} \quad ト \quad \frac{1}{a_n+}\,\frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_2}$$

トノ差ハ $\frac{1}{pq}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\frac{p}{q}$ ノ漸近分數ヲ $\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\cdots\cdots,\ \frac{p_n}{q_n}$ トスレバ $\frac{p}{q}=\frac{p_n}{q_n}$ ナリ。

定理7ニヨレバ
$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{p}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\,\frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_1}$$
$$\frac{q_n}{q_{n-1}}=\frac{q}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\,\frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_2}$$

$\therefore\ \frac{p_{n-1}}{p_n}=\frac{1}{a_n+}\,\frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_1}$ ニシテ

$\frac{q_{n-1}}{q_n}=\frac{1}{a_n+}\,\frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_2}$ ナリ。

サテ題意ニヨリテ二ツノ連分數ノ差ハ $\frac{p_{n-1}}{p}\sim\frac{q_{n-1}}{q}$ ナリ。然ルニ定理8ニヨリテ $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$，而シテ本題ニ於テハ $p_n=p,\ q_n=q$ ナルガ故ニ

$$pq_{n-1}-p_{n-1}q=(-1)^n$$

ヨツテ
$$\frac{p_{n-1}}{p}\sim\frac{q_{n-1}}{q}=\frac{1}{pq}$$

即チ證明セラレタリ。

13. $\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\cdots\cdots$ ヲ單純連分數 $1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{4+}\cdots\cdots$ ノ漸近分數ナリトスレバ $p_n=(n-1)p_{n-1}+(n-1)p_{n-2}+(n-2)p_{n-3}+\cdots\cdots+3p_2+2p_1+2$ ナルコトヲ證明セヨ。

14. 單純連分數ノ第一漸近分數ト第 n 漸近分數トノ差ハ

$$\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$$ ナルコトヲ證セヨ。

15. $\frac{1}{a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{a+}\cdots\cdots$ ノ漸近分數ヲ $\frac{p_n}{q_n}$ トセバ，p_n 及ビ q_n ハ夫々 $\frac{x}{1-ax-x^2}$ 及ビ $\frac{ax+x^2}{1-ax-x^2}$ ノ展開ニ於ケル x^n ノ係數ニ等シキコトヲ證セヨ。

16. $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}},\ \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{Q}'},\ \frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{Q}''}$ ヲ夫々連分數 $\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots,\ \frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}\cdots\cdots,\ \frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{a_4+}\,\frac{1}{a_5+}$ ノ第 n，第 $n-1$ 第 $n-2$ ノ漸近分數ナリトスレバ

$$\mathrm{P}=a_2\mathrm{P}'+\mathrm{P}'',\qquad \mathrm{Q}=(a_1a_2+1)\mathrm{P}'+a_1\mathrm{P}''$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 題意ニヨリテ

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{Q}'}=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{P''}{Q''}=\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots\cdots \atop +\cfrac{1}{a_n}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) ヨリ $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{1}{a_1+\dfrac{P'}{Q'}}$ $\therefore$ $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{Q'}{a_1Q'+P'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4) ニ於テハ P, Q 及ビ P′, Q′ ハ共ニ互ニ素ナル數ナルガ故ニ，何レモ已約分數ナリ。

$$\therefore\ P=Q' \qquad Q=a_1Q'+P'$$

同様ニ (2), (3) ヨリ

$$P'=Q'' \qquad Q'=a_2Q''+P''$$

コノ四ツノ等式ヨリ容易ニ證明セラル。

17. $\dfrac{p_n}{q_n}$ ヲ $\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n+}\cdots\cdots$ ノ第 n 漸近分數トスル時ハ，

$\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_{n-1}+}\,\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{p_{n-1}q_{n-1}+p_nq_n}{q_{n-1}{}^2+q_n{}^2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$ $\therefore$ $\dfrac{q_n}{p_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$

故ニ $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$

然ルニ $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}$ ナルガ故ニ，$\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_{n-1}+}\,\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$ ニ於テ，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$ ト見レバ $a_{n+1}=\dfrac{q_n}{q_{n-1}}$ ナルガ故ニ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{\dfrac{q_n}{q_{n-1}}p_n+p_{n-1}}{\dfrac{q_n}{q_{n-1}}q_n+q_{n-1}}=\frac{q_np_n+p_{n-1}q_{n-1}}{q_n{}^2+q^2{}_{n-1}}\ \text{ナリ。}$$

18. $\dfrac{\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}}{\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}}=\dfrac{\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_{n-1}}}{\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_2}}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$ $\therefore$ $\dfrac{q_n}{p_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$

又 $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$ 從ッテ $\dfrac{q_{n-1}}{q_n}=\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$

然ルニ原式ノ左邊$=\dfrac{p_n}{q_n}\div\dfrac{q_{n-1}}{q_n}=\dfrac{p_n}{q_{n-1}}$， 右邊$=\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\div\dfrac{p_{n-1}}{n}=\dfrac{p_n}{q_{n-1}}$

ヨリテ左右兩邊兩相等シ。

19. $na_1+\dfrac{1}{na_2+}\,\dfrac{1}{na_3+}\cdots\cdots\cdots=n\left(a+\dfrac{1}{n^2a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\,\dfrac{1}{n^2a_4+}\cdots\cdots\right)$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\dfrac{1}{na_4+}\,\dfrac{1}{na_5+}\cdots\cdots$ ヲ x_4 トスレバ

$$\text{原式}=na_1+\cfrac{1}{na_2+\cfrac{1}{na_3+x_4}}=n\left(a_1+\cfrac{1}{n^2a_2+\cfrac{n}{na_3+x_4}}\right)$$

同様ニ $\dfrac{x_4}{n}=\dfrac{1}{n}\left(\cfrac{1}{na_4+\cfrac{1}{na_5+x_5}}\right)=\dfrac{1}{n^2a_4+}\,\dfrac{1}{a_5+}\,\dfrac{x_5}{n}$

之ノ方法ヲ繰リ返セバ

$$na_1+\frac{1}{na_2+}\,\frac{1}{na_3+}\,\frac{1}{na_4+}\cdots\cdots=n\left(a_1+\frac{1}{n^2a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{n^2a_4+}\,\frac{1}{a_5+}\cdots\cdots\right)$$

20. 連分數 N ノ相連續スル二ツノ漸近分數ヲ $\dfrac{p}{q}$, $\dfrac{p'}{q'}$ トスレバ $\dfrac{p}{q}\gtrless\dfrac{p'}{q'}$ ナルニ從ヒテ $\dfrac{pp'}{qq'}\gtrless N^2$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\lambda>1$ トスレバ $N=\dfrac{\lambda p'+p}{\lambda q'+q}$ ト書カル。

ソコデ
$$\frac{pp'}{qq'}-N^2=\frac{pp'(\lambda q'+q)^2-qq'(\lambda p'+p)^2}{qq'(\lambda q'+q)^2}$$
$$=\frac{\lambda^2p'q'(pq'-p'q)-pq(pq'-p'q)}{qq'(\lambda q'+q)^2}$$
$$=\frac{(pq'-p'q)(\lambda^2p'q'-pq)}{qq'(\lambda q'+q)^2}$$

然ルニ $\lambda>1$, $p'>p$, $q'>q$ ナルガ故ニ

$$\lambda^2p'q'-pq>0$$

ヨッテ $pq'-p'q>0$ 從ッテ $\dfrac{p}{q}>\dfrac{p'}{q'}$ ナラバ $\dfrac{pp'}{qq'}>N^2$ ニシテ，$pq'-p'q<0$ 從ッテ $\dfrac{p}{q}<\dfrac{p'}{q'}$ ナラバ $\dfrac{pp'}{qq'}<N^2$ ナリ。

第三章

循環連分數

185. 例 循環連分數 $[1.\ \overline{12}]$ ヲ計算セヨ。

解 $1+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\cdots\cdots$ ヲ x トスレバ $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\cdots\cdots=x-1$ ナリ。

$$\therefore\quad x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(x-1)}}\qquad \text{従ッテ}\quad x^2=3$$

故ニ $x=\pm\sqrt{3}$ 然ルニ x ハ正ノ數ナルガ故ニ $\sqrt{3}$ ナリ。(180節例3參照)

定理 1. $a+\frac{b}{c+}\ \frac{b}{c+}\cdots\cdots$ ノ連近分數 $\frac{p_n}{q_n}$ ハ $\frac{cp_{n-1}+bp_{n-2}}{cq_{n-1}+bq_{n-2}}$ ナリ。

證明 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{cp_{n-1}+bp_{n-2}}{cq_{n-1}+bq_{n-2}}$ ヲ眞ナリトシ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{cp_n+bp_{n-1}}{cq_n+bq_{n-1}}$ ナルコトヲ證セントス。(數學的歸納法)

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}+\frac{b}{c}p_{n-2}}{q_{n-1}+\frac{b}{c}q_{n-2}}$$

ト書クコトヲ得。然ルニ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ハ $\frac{p_n}{q_n}$ ニ於テ $\frac{b}{c}$ ノ代リニ $\cfrac{b}{c+\cfrac{b}{c}}$ ト置キタルモノナリ。

ヨリテ
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_{n-1}+\cfrac{b}{c+\cfrac{b}{c}}p_{n-2}}{q_{n-1}+\cfrac{b}{c+\cfrac{b}{c}}q_{n-2}}=\frac{c(cp_{n-1}+bp_{n-2})+bp_{n-1}}{c(cq_{n-1}+bq_{n-2})+bq_{n-1}}$$

$$=\frac{cp_n+bp_{n-1}}{cq_n+bq_{n-1}}$$

而シテ最初ノ數個ノ漸近分數ヲ見ルニ

$$\left.\begin{array}{l}p_1=a\\ q_1=1\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}p_2=ac+b\\ q_2=c\end{array}\right\}\quad \begin{array}{ll}p_3=ac^2+ab+bc&=cp_2+bp_1\\ q_3=c^2+b&=cq_2+bq_1\end{array}$$

故ニ $\frac{p_3}{q_3}=\frac{cp_2+bp_1}{cq_2+bq_1}$ ガ成立ス。即チ定理ハ一般ニ證明セラル。

注意 上ニ證明シタルガ如ク

$$\left.\begin{array}{l}p_n=cp_{n-1}+bp_{n-2}\\ q_n=cq_{n-1}+bq_{n-2}\end{array}\right\}$$

ナルガ故ニ今

$$p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots\cdots+p_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

及ビ
$$q_1+q_2x+q_3x^2+\cdots\cdots+q_nx^{n-1}+\cdots\cdots$$

ナル級數ヲ作ラバ共ニ循環級數ニシテ，ソノ級數率ハ $1-cx-bx^2$ ナリ。故ニコノ二ツノ級數ノ母函數ハ夫々

$$\frac{p_1+(p_2-cp_1)x}{1-cx-bx^2},\qquad \frac{q_1+(q_2-cq_1)x}{1-cx-bx^2}$$

コレニ p_1, p_2, q_1, q_2 ノ値ヲ代入スレバ

$$\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}\ \text{及ビ}\ \frac{1}{1-cx-bx^2}$$

トナル。コレニヨリテ $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}$ ヲ x ノ昇冪ニ展開スルトキハ x^{n-1} ノ係數ハ p_n ニシテ，$\frac{1}{1-cx-bx^2}$ ヲ x ノ昇冪ニ展開スルトキ x^{n-1} ノ係數ハ q_n ナリ。ヨリテ次ノ定理アリ。

定理 2. $a+\frac{b}{c+}\ \frac{b}{c+}\cdots\cdots$ ナル循環連分數ノ第 n 漸近分數ノ分子及ビ分母ハ夫々 $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}$，$\frac{1}{1-cx-bx^2}$ ヲ x ノ昇冪ニ展開スルトキ生ズル x^{n-1} ノ係數ナリ。

186. **定理 3.** N ヲ平方數ニアラザル正ノ整數トスレバ，$\sqrt{N}$ ヲ連分數ニ化スルトキハ必ズ循環連分數ナリ。

證明 三段ニ分チテ證明セントス。先ヅ第一段トシテ $\sqrt{N}$ ヲ連分數ニ化スル手續ヲ論ズベシ。

(A): $\sqrt{N}$ ニ含マル、最大整數ヲ a_1 トスレバ

$$\sqrt{N}=a_1+(\sqrt{N}-a_1)=a_1+\frac{N-a_1^2}{\sqrt{N}+a_1}=a_1+\frac{r_1}{\sqrt{N}+a_1}$$

$$=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}}\quad \text{茲ニ}\ r_1=N-a_1^2$$

次ニ $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ ニ含マ、ル最大整數ヲ b_1 トスレバ

$$\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}+a_1-b_1r_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}-a_2}{r_1}$$

$$=b_1+\frac{N-a_2^2}{r_1(\sqrt{N}+a_2)}=b_1+\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2}=b_1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a^2}{r^2}}$$

茲ニ $a_2=b_1r_1-a_1,\quad r_2=\frac{N-a_2^2}{r_1}$

次ニ $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$ ニ含マル、最大整數ヲ b_2 トスレバ

$$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}=b_2+\frac{\sqrt{N}+a_2-b_2r_2}{r_2}=b_2+\frac{\sqrt{N}-a_3}{r_2}$$

$$=b_2+\frac{N-a_3^2}{r_2(\sqrt{N}+a_3)}=b_2+\frac{r_3}{\sqrt{N}-a_3}=b_2+\frac{1}{\frac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}}$$

茲ニ $a_3=b_2r_2-a_2,\quad r_3=\frac{N-a_3^2}{r_2}$

同様ノ方法ヲ繰リ返セバ

$$\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{1}{\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}}$$

茲ニ $a_n=b_{n-1}r_{n-1}-a_{n-1},\quad r_n=\frac{N-a_n^2}{r_{n-1}}$

$$\therefore\ \sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\frac{1}{b_{n-1}+}\cdots\cdots$$

(B): 次ニ吾人ハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\cdots\cdots$ 及ビ $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n\cdots\cdots$ ハ共ニ正ノ整數ナルコトヲ證セントス。

$\frac{p}{q}$ 及ビ $\frac{p'}{q'}$ ヲ連續セル第 $(n-1)$ 及ビ第 n 漸近分數トシ、$\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ヲ一般ニ $\frac{\sqrt{N}+a}{r}$ ト置ケバ

$$\sqrt{N}=\frac{\frac{\sqrt{N}+a}{r}p'+p}{\frac{\sqrt{N}+a}{r}q'+q}=\frac{(\sqrt{N}+a)p'+rp}{(\sqrt{N}+a)q'+rq}$$

$$\therefore\ q'N+(aq'+rq)\sqrt{N}=p'\sqrt{N}+ap'+rp$$

左右兩邊ニ於テ有理數ハ有理數ニ、無理數ハ無理數ニ等シカルベキニヨリ

$$ap'+rp=q'N$$

$$aq'+rq=p'$$

r ヲ消去スレバ $a(p'q-pq')=qq'N-pp'$ ……(1)

又 a ヲ消去スレバ $r(p'q-pq')=p'^2-q'^2N$ ……(2)

(1)ナル公式ヲ更ニ吟味センニ

$\frac{p'}{q'}>\frac{p}{q}$ ナラバ $\frac{p'}{q'}>\sqrt{N}>\frac{p}{q}$ ニシテ而カモ $\sqrt{N}$ ハ $\frac{p}{q}$ ヨリモ $\frac{p'}{q'}$ ニ接近スルガ故ニ

$$N>\frac{p'p}{q'q}\qquad\therefore\ q'qN-p'p>0.$$

之レニ反シテ $\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}$ ナラバ $\frac{p'}{q'}<\sqrt{N}<\frac{p}{q}$ ナルガ故ニ

$$N<\frac{p'p}{q'q}\qquad\therefore\ q'qN-pp'<0$$

然ルニ $\frac{p'}{q'}>\frac{p}{q}$ ナルトキハ $p'q-pq'=1$ ニシテ、$\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}$ ナルトキハ $p'q-pq'=-1$ ナルガ故ニ、$\frac{p}{q}\lesseqgtr\frac{p'}{q'}$ ノ何レノ場合ニモ $a>0$ ナリ。而シテ p, p', q, q' ハ正ノ整數ナルヲ以ツテ a ハ正ノ整數ナリ。

次ニ(2)ヲ吟味センニ

$$\frac{p'}{q'}>\frac{p}{q}\ \text{ナルトキハ}\ \frac{p'}{q'}>\sqrt{N}>\frac{p}{q}$$

$$\therefore\ p'^2-q'^2N>0$$

$$\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}\ \text{ナルトキハ}\ \frac{p'}{q'}<\sqrt{N}<\frac{p}{q}$$

$$\therefore\ p'^2-q'^2N<0$$

ヨツテソノ何レノ場合ニモ r ガ正ノ數ニシテ且ツ(1)ノ場合ト同ジク正ノ整數ナリ。即チ $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ヲ n ノ如何ニ關セズ $\frac{\sqrt{N}+a}{r}$ ト置ケバ、a 及ビ r ガ正ノ整數ナルガ故ニ

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\cdots\cdots$$

$$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n\cdots\cdots$$

ハ共ニ正ノ整數ナリ。

(C): 最後ニコノ連分數ハ循環ナルコトヲ論述セントス。$r_n=\frac{N-a_n^2}{r_{n-1}}$ ナルガ故ニ $a_n^2=N-r_{n-1}r_n$

然ルニ(B)ニ於テ r 及ビ a ハ正ノ整數ナルコトヲ證明シタルガ故ニ

$$a_n\leqq(\sqrt{N}\ \text{ニ含マル、整數})$$

ナリトイフコトヲ得。サテ $\sqrt{N}$ ニ含マル、最大整數ヲ a_1 トセルガ故ニ