1932年

第3卷

第1期

國立武漢大學
理科季刊

第三卷第一期

QUATERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. III No. 1 September 1932

本期目錄

中華民國二十一年九月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第三卷第一期目錄

607721

國立武漢大學理科季刊

第三卷第二期目錄預告

向量對於代數定理之應用

Vectorial Treatment of Certain Algebraic Theorems.

T. C. Esty 原著.載于 The American Mathematical Monthly 1932. 六七月合刊

蕭文燦譯

I 試考一次齊次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=o, \tag{1}$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=o. \tag{2}$$

設三向量 α, β, ρ 乃如下式所定義者:

$$\alpha=a_1i+b_1j+c_1k,\qquad \beta=a_2i+b_2j+c_2d,\qquad \rho=xi+yj+zk, \tag{3}$$

其中之 i, j, k 乃互相垂直且爲右系之單位向量.

如此則方程式(1),(2)可書爲

$$\alpha\cdot\rho=o, \tag{1'}$$

$$\beta\cdot\rho=o. \tag{2'}$$

方程式 (1'), (2') 爲垂直於 α 與 β 之任何 ρ 所同時滿足者,即

$$\rho=t\alpha\times\beta \tag{4}$$

時之 ρ, 其中之 t 爲任一靜量(scalar).

將(3)中 α, β, ρ 之值代入此式而展開其向量乘積,且各[illegible], j, k 之係數,則得

$$x=t(b_1c_2-b_2c_1),\quad y=t(c_1a_2-c_2a_1),\quad z=t(a_1b_2-a_2b_1), \tag{5}$$

此卽說明

$$(6)\qquad \frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

(1),(2) 中之 z 令其等于 -1, 則得

$$(7)\qquad \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c, \end{aligned}$$

其解可將(6)中令其 $z=-1$ 時而得之,爲

$$(8)\qquad x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

II. 試考一次齊次方程式

$$(1)\qquad a_1 x + b_1 y + c_1 z = o,$$

$$(2)\qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z = o,$$

$$(3)\qquad a_3 x + b_3 y + c_3 z = o,$$

其中至少有兩式爲獨立,譬如爲(2),(3), 若令

$$(4)\qquad \begin{aligned} \alpha &= a_1 i + b_1 j + c_1 k, \qquad & \beta &= a_1 i + b_2 j + c_2 k, \\ \gamma &= a_3 i + b_3 j + c_3 d, \qquad & \varrho &= x i + y i + z k, \end{aligned}$$

則所設方程式可書如下形:

$$(1')\qquad \alpha \cdot \varrho = o,$$

$$(2')\qquad \beta \cdot \varrho = o,$$

$$(3')\qquad \gamma \cdot \varrho = o.$$

吾人之目的只須求後三式有 $\varrho = o$ 外之公解之充分而必要之條件卽所設之方程式有 $x=y=z=o$ 外之公解.

首先假定 ϱ 乃滿足於(1'),(2') (3')之值.是卽各垂直於

向量 α, β, γ 者,因而 α, β, γ 爲共面.此卽須

(5) $$\alpha\cdot\beta\times\gamma=o$$

或

(6) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=o.$$

此爲必要條件.

次假定(6)滿足卽(5)亦滿足.如(I)節對於 ϱ 解(2')與(3')如次形

(7) $$\varrho=t\beta\times\gamma \quad (\beta \text{ 不平行於 } \gamma),$$

代入(1')求得

$$\alpha\cdot\varrho=t\alpha\cdot\beta\times\gamma,$$

因(5)之故,$\alpha\cdot\varrho$ 恆等於零.如此 $\varrho=t\beta\times\gamma$($t$ 爲靜量)爲(1'),(2')(3')之公解.

此乃證明(5)爲此等方程式有 $\varrho=o$ 外之公解之充分條件.

由此卽可知(6)爲方程式(1),(2),(3),有 $x=y=z=o$ 外之公解之充分條件.

此解之又一形可直接由(7)求得之,卽

(8) $$x=t(b_2c_3-b_3c_2),\qquad y=t(c_2a_3-c_3a_2),\qquad z=t(a_2b_3-a_3b_2),$$

其中之 t 爲任何靜量.

令(1),(2),(3)中之 $z=-1$, 則得

$$a_1x+b_1y=c_1,$$

$$(9)\qquad \begin{aligned} a_2x + b_2y &= c_2, \\ a_3x + b_3y &= c_3, \end{aligned}$$

吾人可見(6)爲方程式(9)有公解之必要條件.若 $a_2b_3-a_3b_2\neq o$ 其解爲唯一;此能由(8)令其 $z=-1$ 將結果之 t 值代入於 x y 式中而得之.

III. 試考方程式系

$$(1)\qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned}$$

吾人假定 d_1, d_2, d_3 皆爲正仍不失其普遍性.

今設三向量 α, β, γ 乃定義如下式:

$$(2)\qquad \alpha=a_1i+b_1j+c_1k,\qquad \beta=a_2i+b_2j+c_2k,\qquad \gamma=a_3i+b_3j+c_3k.$$

則方程式(1)可書成下形:

$$(3)\qquad \alpha\cdot\rho=d_1,\qquad \beta\cdot\rho=d_2,\qquad \gamma\cdot\rho=d_3.$$

若視 α, β, γ, ρ 爲有公共原點 o 之位置向量 (position vectors), 此等方程式乃表各各垂直於 α, β, γ, 而垂足與 o 之距離各爲 d_1/a, d_2/b, d_3/c 之三平面,此處之 a, b, c, 表 α, β, γ 之長.

今引用一習知之公式

$$(4)\qquad \rho(\alpha\cdot\beta\times\gamma)=\beta\times\gamma(\alpha\cdot\rho)+\gamma\times\alpha(\beta\cdot\rho)+\alpha\times\beta(\gamma\cdot\rho),$$

其中之 α, β, γ 乃設爲任不共面之三向量. 在此假設之下則(2)中之 α, β, γ 爲不共面,卽 $\alpha\cdot\beta\times\gamma\neq o$, 由(3)與(4)得

$$(5)\qquad \rho=\frac{d_1\beta\times\gamma+d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta}{\alpha\cdot\beta\times\gamma}.$$

此卽平面(3)有公共點之位置向量.今以 $xi+yj+zk$ 代 ϱ 而將(2)中之 α, β, γ 之值代入則得

$$(6)\qquad xi+yj+zk=\frac{d_1\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+d_2\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}+d_3\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

展開分子之行列式而求其 i 項爲

$$[d_1(a_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)]i=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} i$$

j 項與 k 項亦有類似之結果.

等(6)中相同向量之係數得

$$(7)\qquad x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

$\alpha\cdot\beta\times\gamma\neq o$ 時,(5)中之 ϱ 只有一値,所以方程式(1)於

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq o$$

只有一解.

今再舉一數値之例,如解方程式

$$x+6y-5z=23,$$

$$-3x+8y-4z=1,$$

$$7x-10y+10z=0.$$

令 $\alpha=i+6j-5k,\quad \beta=-3i+8j-4k,\quad \gamma=7i-10j+10k$

而求得

$$\beta\times\gamma=40i+2j-26k,\quad \gamma\times\alpha=-10i+45j+52k,\quad \alpha\cdot\beta\times\gamma=182.$$

又 $d_1=23,\quad d_2=1,\quad d_3=o.$

代諸值於(5)中得

$$\rho=xi+yj+zk=\frac{23(40i+2j-26k)+(-10i+45j+52k)}{182}=5i+\tfrac{1}{2}j-3k,$$

故 $x=5,\ y=\frac{1}{2},\ z=-3.$

其特殊情形乃設 $\alpha\cdot\beta\times\gamma$ 等于零之時,即

(9) $$\rho(o)=d_1\beta\times\gamma+d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta,$$

可分論如下:

(1) α,β 及 γ 爲共面之時,而無其他限制.

此有兩種可能;(a) (9) 之右邊不等於零,(b) 等於零.

在(a)爲無解.實際方程式(3)係表明三平面垂直 α,β,γ 之平面,且兩兩相交於方向同於 $\alpha\times\beta$ 之三平行綫.

在(b),

(10) $$d_1\beta\times\gamma+d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta=o.$$

吾人解釋此結果可注意 γ 在 α 與 β 之平面;因此可令

(11) $$\gamma=l\alpha-m\beta.$$

則 $d_1\beta\times\gamma=ld_1\beta\times\alpha=-ld_1\alpha\times\beta,\quad d_2\gamma\times\alpha=-md_2\beta\times\alpha=md_2\alpha\times\beta$ 而 (10) 成 $(-ld_1+md_2+d_3)\alpha\times\beta=o$ 或因 $\alpha\times\beta\neq o$, 而得

(12) $$d_3=l\,d_1-m\,d_2.$$

將(11)與(12)代入方程式 $\gamma\cdot\rho=d_3$ 中,平面之方程式成爲

(13) $$l(\alpha\cdot\rho-d_1)-m(\beta\cdot\rho-d_2)=o,$$

此乃經過兩平面 $\alpha\cdot\rho=d_1$ 及 $\beta\cdot\rho=d_2$ 之交綫之平面之方程式. 故(3)遇於一綫,此綫平行於 $\alpha\times\beta$, 而在此綫上之點皆爲(3)之解.

所以 x, y, z 對應之值爲方程式(1)之解,而謂此等方程式有無窮多之解.求此時方程式(1)中常數間之關係,吾人可將 α, β, γ 之值代入(10)中而展開其向量乘積.各分開其含 i, j, k 之項,得

(14) $$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} i+\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} j+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} k=o,$$

此須三行列式各等於零,加入此等條件,因 $\alpha\cdot\beta\times\gamma=o$ 則

(15) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=o.$$

解釋此結果須注意方程式(1)乃表有一公共交綫之三平面,此等方程式非獨立的,因依(11)

(11') $$a_3=la_1-ma_2,\qquad b_3=lb_1-mb_2,\qquad c_3=lc_1-mc_2,$$

又依(12)

(12') $$d_3=l\,d_1-m\,d_2.$$

此等關係乃說明所設之方程式之第三式能由 l 乘第一式減去 m 乘第二式而得.求 l 與 m 之值之法可舉下例以釋之.

解
$$2x-3y+4z=5,$$
$$3x+\ y-2z=1,$$
$$-5x-9y+14z=7.$$

此處 $\alpha=2i-3j+4k,\ \beta=3i+j-2k;\ \gamma=-5i-9j+14k,$ 又

(3′) $$\alpha\cdot\varrho=5,\quad \beta\cdot\varrho=1,\quad \gamma\cdot\varrho=7.$$

即 $\alpha\cdot\beta\times\gamma=o,\ \beta\times\gamma=-4i-32j-22k,\ \gamma\times\alpha=6i+48j+33k,\ \alpha\times\beta=2i+16j+11k,$ 如此則

$$d_1\beta\times\gamma+d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta=5\beta\times\gamma+\gamma\times\alpha+7\alpha\times\beta=o.$$

因向量 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 無兩個平行又因 $d_1\beta\times\gamma+d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta=o$, 平面(3)必遇於一綫,故所設之方程式有無窮多之解.

由方程式(11′)之第一式得 $2l-3m=-5$, 由(12′)得 $5l-m=7$. 解此兩方程式,求得 $l=2,\ m=3$. 實際若以 2 乘第一式而減去第二式之 3 倍卽得第三式.

若欲求交綫之方程式可進行如次:

首先求此綫插入 i 與 j 之平面中之點. 此綫之點可視爲三平面 $\alpha\cdot\varrho=5$; 及 $\beta\cdot\varrho=1$ 及 $\varrho\cdot k=o$ 之交綫.其公共點之向量以 σ 表之,而用公式

$$\varrho=\frac{d_1\beta\times\gamma+d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta}{\alpha\cdot\beta\times\gamma}.$$

則得

$$\sigma=\frac{5\beta\times k+k\times\alpha}{\alpha\cdot\beta\times k}=\frac{8i+13j}{11}.$$

因此綫平行於 $\alpha\times\beta$, 其方程式爲 $\varrho=\sigma+t\alpha+\beta$ 之形,其中之 t 乃一變靜量.如此

$$xi+yj+zk=\frac{8}{11}i-\frac{13}{11}j+t(2i+16j+11k)$$

故

$$\frac{x-\frac{8}{11}}{2}=\frac{y+\frac{13}{11}}{16}=\frac{z}{11}.$$

(2) α, β, γ 爲共面如前,但加一其中之二者如 β 與 γ 爲平行之條件.

此處 $\beta\times\gamma=o$ 而由(9)得

(16) $$\rho(o)=d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta.$$

此有兩種可能之情形;(a)右邊不等於零而(b)右邊乃等於零.

在(a)爲無解.卽此等平面之二者平行而截於第三平面之兩綫乃平行於 $\alpha\times\beta$. 且因 $\beta\times\gamma=o$, 故得

(17) $$\frac{a_2}{a_3}=\frac{b_2}{b_3}=\frac{c_2}{c_3}.$$

在(b),

(18) $$d_2\gamma\times\alpha+d_3\alpha\times\beta=o.$$

解釋此結果,首須知 β 與 γ 乃設爲平行者.今若其向(sense)相合,則向量 $\gamma\times\alpha$ 與 $\alpha\times\beta$ 爲異向.而他方面若 β 與 γ 異向則 $\gamma\times\alpha$ 與 $\alpha\times\beta$ 爲同向.在後一假定(18)爲不可能,因 d_2 d_2 與 d_3 皆爲正也.但在前一假定, (18) 成爲

(19) $$d_2c-d_3b=o, \quad \text{或} \quad d_2/b=d_3/c.$$

今 d_2/b 與 d_3/b 乃各爲平面 $\beta\cdot\rho=d_2$ 與 $\gamma\cdot\rho=d_3$ 由 o 之距離,因此距離相等則兩平面重合.此重合之平面與第三平面之交綫上之點皆爲(3)之解,故在此時方程式(1)有無窮

多之解.

方程式在此種情形之條件甚易決定,因 β 乃平行於 γ 而又同向,吾人可書爲

(20) $\beta=n\gamma$, 故 $n=b/c=d_2/d_3$.

亦即

(21) $a_2i+b_2j+c_2k=n(a_3i+b_3j+c_3k)$

由(20)與(21)故得

(22) $a_2/a_3=b_2/b_3=c_2/c_3=d_2/d_3$.

(3) 三向 α, β, γ 皆平行之時.則,

(23) $\beta\times\gamma=o$, $\gamma\times\alpha=o$, $\alpha\times\beta=o$.

在此時平面(3)皆平行一般爲無解.由(3)可見此乃

(24) $a_2/a_3=b_2/b_3=c_2/c_3$, $a_3/a_1=b_3/b_1=c_3/c_1$, 及 $a_1/a_2=b_1/b_2=c_1/c_2$之時.

然若 α, β, 及 γ 之向相同再加入 $d_1/a=d_2/b=d_3/c$, 則三平面重合,亦如在 2(b) 而 (24) 一羣之等比皆各含有第四項 d_2/d_3, d_3/d_1, d_1/d_2.

IV. 三階行列式之平方表如同階之行列式.

試考

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2.$$

引入向量

$$\alpha=a_1i+a_2j+a_3k,\quad \beta=b_1i+b_2j+b_3k,\quad \gamma=c_1i+c_2j+c_3k.$$

吾人可將(1)書如

$$(\alpha\cdot\beta\times\gamma)(\alpha\cdot\beta\times\gamma)=\alpha\cdot\beta\times[\gamma(\alpha\cdot\beta\times\gamma)]\cdot$$

$$=\alpha\cdot\beta\times[\gamma(\alpha\cdot\beta\times\gamma)-\alpha(\gamma\cdot\beta\times\gamma)]\cdot$$

因 $\gamma\cdot\beta\times\gamma=o$ 也.則依向量三乘積之公式得

(2) $$(\alpha\cdot\beta\times\gamma)(\alpha\cdot\beta\times\gamma)=\alpha\cdot\beta\times[(\beta\times\gamma)\times\gamma\times\alpha]\cdot$$

或 $$(\alpha\cdot\beta\times\gamma)(\alpha\cdot\beta\times\gamma)=\alpha\times\beta\cdot[(\beta\times\gamma)\times(\gamma\times\alpha)]$$

$$=(\alpha\times\beta)\cdot(\beta\times\gamma)\times(\gamma\times\alpha),$$

此卽全等於

(3) $$\begin{vmatrix} a_2b_3-a_3b_2 & a_3b_1-a_1b_3 & a_1b_2-a_2b_1 \\ b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \\ c_2a_3-c_3a_2 & c_3a_1-c_1a_3 & c_1a_2-c_2a_1 \end{vmatrix}\cdot$$

V. 兩個三階行列式之乘積表成同階之一行列式

試考

(1) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}.$$

引入向量

(2) $$\alpha=a_1i+a_2j+a_3k,\quad \beta=b_1i+b_2j+b_3k,\quad \gamma=c_1i+c_2j+c_3k,$$
$$\lambda=l_1i+l_2j+l_3k,\quad \mu=m_1i+m_2j+m_3k,\quad \nu=n_1i+n_2j+n_3k.$$

則(1)之積可表如

(3) $$(\alpha\cdot\beta\times\gamma)(\lambda\cdot\mu\times\nu)$$

$$=\alpha\cdot\beta\times[\gamma(\lambda\cdot\mu\times\nu)]$$

$$=\alpha\cdot\beta\times[\mu\times\nu(\gamma\cdot\lambda)+\nu\times\lambda(\gamma\cdot\mu)+\lambda\times\mu(\gamma\cdot\nu)]$$

$$=\alpha\cdot\beta\times\mu\times\nu(\gamma\cdot\lambda)+\alpha\cdot\beta\times\nu\times\lambda(\gamma\cdot\mu)+\alpha\cdot\beta\times\lambda\times\mu(\gamma\cdot\nu)$$

$$=\alpha\cdot[\mu(\beta\cdot\nu)-\nu(\beta\cdot\mu)](\gamma\cdot\lambda)+\alpha\cdot[\nu(\beta\cdot\lambda)-\lambda(\beta\cdot\nu)](\gamma\cdot\mu)$$

$$+\alpha\cdot[\lambda(\beta\cdot\mu)-\mu(\beta\cdot\lambda)](\gamma\cdot\nu)$$

$$=(\alpha\cdot\mu)(\beta\cdot\nu)(\gamma\cdot\lambda)-(\alpha\cdot\nu)(\beta\cdot\mu)(\gamma\cdot\lambda)+(\alpha\cdot\nu)(\beta\cdot\lambda)(\gamma\cdot\mu)-(\alpha\cdot\lambda)(\beta\cdot\nu)(\gamma\cdot\mu)$$

$$+(\alpha\cdot\lambda)(\beta\cdot\mu)(\gamma\cdot\nu)-(\alpha\cdot\mu)(\beta\cdot\lambda)(\gamma\cdot\nu).$$

或

$$(4)\qquad (\alpha\cdot\beta\times\gamma)(\lambda\cdot\mu\times\nu)=\begin{vmatrix}\alpha\cdot\lambda & \alpha\cdot\mu & \alpha\cdot\nu\\ \beta\cdot\lambda & \beta\cdot\mu & \beta\cdot\nu\\ \gamma\cdot\lambda & \gamma\cdot\mu & \gamma\cdot\nu\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3 & a_1m_1+a_2m_2+a_3m_3 & a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3\\ b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3 & b_1m_1+b_2m_2+b_3m_3 & b_1n_1+b_2n_2+b_3n_3\\ c_1l_1+c_2l_2+c_3l_3 & c_1m_1+c_2m_2+c_3m_3 & c_1n_1+c_2n_2+c_3n_3\end{vmatrix}.$$

無窮大之階

Orders of Infinity.

Hardy 原著

蕭文燦譯

I. 緒論.

1.1. 正整變數 n 之函數 $f(n)$,當 n 大時,或連續變數 x 之函數 $f(x)$ 當 x '大'或'小'或幾等於 a' 時之'大之階' (order of greatness) 或'小之階' (order of smallness) 之概念,雖在數學解析之初步亦甚重要. * 吾人知 x^2 乃隨 x 而趨向於無窮大且 x^2 較 x 爲速,卽 x^2/x 亦趨向於無窮大也. x^3 趨向於無窮大又較 x^2 爲速,如斯類推直無止境.因此可導出一'無窮大之尺度' (scale of infinity) 之觀念,此尺度 (x^n) 乃以函數 $x, x^2, x^3, \cdots\cdots x^n, \cdots$ 所作成.如補入非整數冪之 x 則此尺度更爲完備.但雖如此仍有函數增大之速不能以此尺度量之.如 $\log x$ 趨向於無窮大較 x 之任何冪爲慢, e^x 又較 x 之任何冪爲速;而 $x/\log x$ 趨向於無窮大較 x 爲慢而較小於 1 之任何冪之 x 爲速.

在解析之前修中若與其近世發展相接觸,如傅利葉級數 (Fourier's series)之理論,整函數之理論 (Theory of integral functions) 或一般解析函數奇點 (singular points) 之理論等,此觀

---

* 參觀 Hardy, 1, 360 以爲例.

譯者註. 此指參觀附錄文獻集 Hardy 氏之第 1 書第360頁,以下仿此.

念更形重要. Paul du Bois-Reymond 氏之無窮大之計算 (Infinitiarculeül or Culeulus of infinities) 之主題卽對此等觀念作綜合之研究,以探討其關聯之一般定理而講述其整齊之方法者也.

1.2. 設 f 與 Φ 爲連續變數 x 於自 x 之某値 x_0 而上所定義之兩函數.且設 f 與 Φ 爲正,連續遞增,且隨 x 而趨向於無窮大,今試就 $x \longrightarrow \infty$ 時 f/Φ 之比之性質考之.吾人可得四種情形:

(i) 若 $f/\Phi \longrightarrow \infty$, 則吾人謂 f 之增大之階,或速(或簡稱增大)較 Φ 爲大,且書爲

$$f \succ \Phi.$$

(ii) 若 $f/\Phi \longrightarrow o$, 則謂 f 之增大較 Φ 爲小,書爲

$$f \prec \Phi.$$

(iii)若 f/Φ 於 x 自某値 x_1 而上*之一切値常在 δ 與 Δ 之間如 $o<\delta<f/\Phi<\Delta$, 則謂 f 之增大等於 Φ, 而書爲

$$f \asymp \Phi.$$

在此時 f/Φ 可趨向於定極限.如此則書爲

$$f \stackrel{\sim}{\asymp} \Phi.$$

---

* 於 f 與 Φ 爲正且連續之時本不必說 x_1. 於 $x_0 \leqq x < x_1$ 時有 δ_1 與 Δ_1 二數合於 $o < \delta_1 < f/\Phi < \Delta_1$ 又于 $x \geqq x_1$ 時 $o < \delta < f/\Phi < \Delta$ 則於 $x \geqq x_0$ 時 $o < \delta_2 < f/\Phi < \Delta_2$ 其中之 $\delta_2 = \mathrm{Min}(\delta, \delta_1)$, $\Delta_2 = \mathrm{Max}(\Delta, \Delta_1)$.

常常爲吾人之定義便於擴張至比較一般之時起見,留用不必要之字則定義卽刻卽可採用.

如其極限為1則書為

$$f\sim\Phi.$$

f 之增大吾人能以某標準函數 Φ 比較之使其關係如 $f\asymp\Phi$ 之型,則謂 Φ 為 f 增大之測度或簡稱 f 增大猶如 Φ. 例如謂 $2x^2+x+3$ 之增大猶如 x^2,

常有 f/Φ 如 f 與 Φ 中之自身為單調(即遞增或遞減)者. 在此時 f/Φ 必趨向於無窮大,或零或正極限:所以 $f\succ\Phi$ 或 $f\prec\Phi$ 或 $f\asymp\Phi$. 吾人將見此在一般為不真.

(iv). f/Φ 又有又不趨向於無窮大又不趨向於零,又不常在兩正界之間者.

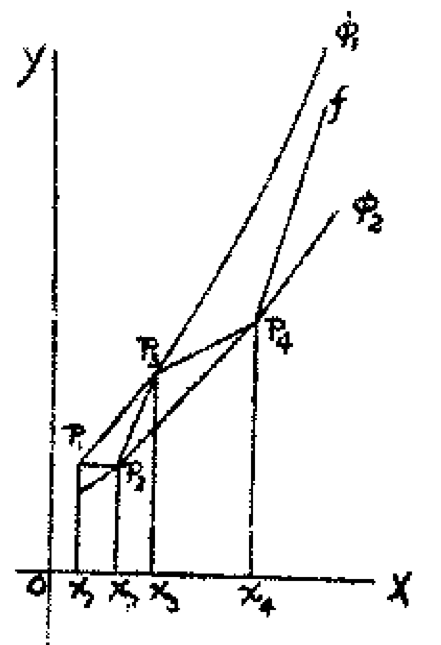
例如: 設有 Φ_1, Φ_2 兩連續遞增函數且 $\Phi_1\succ\Phi_2$. 其形如第一圖吾人作數多梯狀之直綫或曲綫,往返於 Φ_1 與 Φ_2 二圖形之間,得一遞增函數 f. 如此則於 $x=x_1, x_3, x_3, \cdots\cdots, f=\Phi_1$, 於 $x=x_2, x_4, \cdots, f=\Phi_2$, 故於

$$x=x_1, x_3, x_5, \cdots \text{時 } f/\Phi_1=1,$$

但假定於 $x=x_2, x_4\cdots$ 之諸值減少至一切極限之外.而於

$$x=x_2, x_4, \cdots \quad \text{時 } f/\Phi_2=1$$

但假定於 $x=x_2, x_4, \cdots$ 之諸值增加至一切極限之外.今設有函數 Φ 如為 $\sqrt{\Phi_1\Phi_2}$ 於此 $\Phi_1\succ\Phi\succ\Phi_2$ 則 f/Φ 假定之值一則增加於一切極限之外一則減少於一



第一圖

切極限之外.

在後(§4·43)吾人將見此種函數有以解析顯式(explicit analytical formalae)定義之者.

1.3. 設於 x 之一切十分大之值如 $f>\delta\Phi$ 中之一正常數 δ 能夠求得,則書如:

$$f \succcurlyeq \Phi;$$

若於 x 一切十分大之值能求得一正常數 Δ 使如 $f<\Delta\Phi$ 則書如

$$f \preccurlyeq \Phi.$$

若既 $f \succcurlyeq \Phi$ 而又 $f \preccurlyeq \Phi$ 則爲 $f \asymp \Phi$.

雖然 $f \succcurlyeq \Phi$ 並非邏輯的全等於 $f \prec \Phi$ 之否定,此點甚爲重要. $f \succcurlyeq \Phi$, $f \prec \Phi$ 之關係爲互相排拒,但非全無遺漏.第一包含第二之否定但其逆則不真.再 $f \succcurlyeq \Phi$ 又不全等於'$f \succ \Phi$ 或 $f \asymp \Phi$'之一.上述各點可以§1.2末之例題解釋之.在此 $f \succcurlyeq \Phi_1$ 與 $f \prec \Phi_1$ 兩者皆非,而爲 $f \succcurlyeq \Phi_2$,但既非 $f \succ \Phi_2$ 又非 $f \asymp \Phi_2$.若用上限(upper limit)下限(lower limit),之語則 $f \succcurlyeq \Phi$ 之意爲

$$\lambda = \underline{\lim} \frac{f}{\Phi} > o$$

而'非 $f \prec \Phi$'之意爲

$$\Lambda = \overline{\lim} \frac{f}{\Phi} > o;$$

至於確言'$f \succ \Phi$ 或 $f \asymp \Phi$'是確言 $\lambda > o$,且若 λ 爲有限則 Λ 亦爲有限.

讀者不難證明次之定理,同樣性質之簡單定理本甚多,但以此等爲最重要.

(a) 設 $f \succ \Phi,\ \Phi \succcurlyeq \psi,$ 則 $f \succ \psi.$

(b) 設 $f \succcurlyeq \Phi,\ \Phi \succ \psi$ 則 $f \succ \psi.$

(c) 設 $f \succcurlyeq \Phi,\ \Phi \succcurlyeq \psi$ 則 $f \succcurlyeq \psi.$

(d) 設 $f \asymp \Phi,\ \Phi \asymp \psi$ 則 $f \asymp \psi.$

(e) 設 $f \succcurlyeq \Phi$ 則 $f+\Phi \asymp f.$

(f) 設 $f \succ \Phi,$ 則 $f-\Phi \asymp f.$

(g) 設 $f \succ \Phi,\ f_1 \succ \Phi_1$ 則 $f+f_1 \succ \Phi+\Phi_1.$

(h) 設 $f \succ \Phi,\ f_1 \asymp \Phi_1$ 則 $f+f_1 \succcurlyeq \Phi+\Phi_1.$

(i) 設 $f \asymp \Phi,\ f_1 \asymp \Phi_1$ 則 $f+f_1 \asymp \Phi+\Phi_1.$

(j) 設 $f \succ \Phi,\ f_1 \succcurlyeq \Phi_1$ 則 $ff_1 \succ \Phi\Phi_1.$

(k) 設 $f \asymp \Phi,\ f_1 \asymp \Phi_1$ 則 $ff_1 \asymp \Phi\Phi_1.$

由此啓示讀者可作含有 $\asymp$ 與 $\sim$ 記號之一羣同樣定理.

1.4. 且也.吾人雖設所考之函數爲隨 x 而趨向於無窮大者.然對於 f 或 Φ 趨向於零,或趨向於零外之極限諸般情形固無甚妨害,因是吾人可書 $x \succ 1,\ x \succ 1/x,$ 或 $1/x \succ 1/x^2.$ 讀者並可構成 §1·3 同樣之一羣定理而以商代和與積者.

亦可爲便利計將吾人之定義擴張之以應用於負函數趨向於 $-\infty$ 或 o 或一某極限之時.當用 $\succ,\prec,\asymp,\asymp,$此等記號於函數及其模數之間時,並無何等之差異:如書 $-x \prec -x^2$ 或 $-1/x \prec 1$ 其意義亦恰如 $x \prec x^2$ 或 $1/x \prec 1.$ 但 $f \sim \Phi$ 解釋爲一命題時係關於實際之函數而非關於其模數.

於此立下一原理,在本篇之函數除明白說明或有矛盾

而外,若其趨向於無窮大皆言連續單調遞增正函數.如趨向於零則爲遞減函數.但有時爲方便計亦删去此規約.如下例卽取消函數連續之限制者:

$$[x] \sim x, \qquad \Pi(x) \prec x.$$

其中之$[x]$乃表x之整數部分而$\Pi(x)$乃指不超過x之質數.或如

$$1+\sin x \prec x, \qquad x^2 \succ x \sin x,$$

在第一式之意爲$(1+\sin x)/x \longrightarrow o$.吾人又可應用此記號於複函數,如書$e^{ix} \prec x$或$e^{ix} \asymp 1$.讀者不難將定義修改以專供此等情形之用.

尙有其他可能事件可以討論.吾人曾將注意限定於連續變數x之函數於x趨向於無窮大之時.此可以包含重要之應用.卽如正整數n之函數.蓋此不過將x之非整値置諸不論而已.如$n! \succ n^2$, $-1/n \prec n$.

最後令$x=-y$, $x=1/y$,或$x=1/(y-a)$,則吾人可將所考連續變數y之函數於y趨近於$-\infty$或o或一極限a之時皆視同x趨近於∞之時也.讀者於必需修改之處容易補足之.

以後吾人於敍述或證明定理,僅及連續變數趨向於無窮大時之連續增函數,其他各種情形讀者可自作成其對應之定理.

1.5 尙有他種記號有時用於特殊之意義甚爲便利.以

$$O(\Phi)$$

表合于

$$|f|<K\Phi$$

之關係之一函數f.其中之K爲常數而Φ爲x之正函數.此記號之一般採用雖受 Landan 氏之影響,然其首先用之者實爲 Bachmann* 氏觀下例不難知此記號之意義.

$$x+1=O(x),\qquad x=O(x^2),\qquad \sin x=O(1).$$

下列三確言乃彼此全等,甚屬顯然:

$$f=O(\Phi),\qquad |f|<k\Phi,\qquad f\preccurlyeq\Phi.$$

Landan 氏†又以

$$o(\Phi)$$

表合於$f/\Phi\longrightarrow o$關係之函數f.如

$$x=o(x^2),\qquad 1=o(x),\qquad \sin x=o(x)$$

而

$$f=o(\Phi),\qquad f/\Phi\longrightarrow o,\qquad f\prec\Phi$$

三式其意義完全相同.

Borel 氏‡用同一文字K表在一羣不等式中不關於所論之變數之正數,但在諸不等式中其K之値不必相同.如

$$\sin x<K,\qquad 2x+1>Kx,\qquad x^m<Ke^x.\qquad (x\geqq 1).$$

若吾人用K如在不等式中之任意有限數,而此不等式不含x外之其他變數(如上例之1,2兩式);或有所論變數之外

* Bachmann, 1, 140.　† Landan, 1, 61.　‡ Borel 6 與 2, 105.

之其他變數;則凡 K 之一切値在 K_1, K_2 兩數之間(如 K_1 爲 10^{-10} K_2 爲 10^{10}.) 在此則一切之 K 皆滿足於 $o<K_1<K<K_2$ 而每在 $f<K\Phi$ 之關係,可以 $f<K_2\Phi$ 代之,在 $f>K\Phi$ 可以 $f>K_1\Phi$ 代之.但吾人亦有用在式中之 K 含有補助變數(parameter)者(如上第三式其助變數爲 m). 在此 K 雖與 x 無關但爲 m 之函數.設在本篇中有有限個之助變數 $\alpha,\beta,\cdots$ 者.則任與 $\alpha,\beta,\cdots$ 之一組特殊値而能如上決定 K_1, K_2. 如一切之 K 皆滿足於

$$o<K_1(\alpha,\beta,\cdots)<K<K_2(\alpha,\beta,\cdots).$$

其中之 K_1, K_2 爲 $\alpha,\beta,\cdots$ 於其可能之値定義之正函數.但 K_1 之下界可爲零而 K_2 可以無上界.吾人能適宜的選擇 $\alpha,\beta,\cdots$ 使 K_1 如其可能之小,K_2 如其可能之大,如吾人之意.

當 f 於 x 大於某定値之一切値賦有一性質之時,此性質自有關於其函數及其性質,則謂 f 於 $x>x_0$ 時賦有此性質.如

$$x>100,\quad (x>x_0),\qquad e^x>100x^2(x>x_0).$$

吾人用 δ 與 Δ 表任意而固定之正數.δ 用於可能之小數 Δ 用於可能之大數.如

$$f<\delta\Phi\qquad(x>x_0)$$

其意爲'δ 雖屬小亦能求得 x_0 使於 $x>x_0$ 時而能 $f<\delta\Phi$', 即與 $f\prec\Phi$ 之意同;而

$$(\log x)^{\Delta}\prec x^{\delta}$$

之意爲:'$\log x$ 之任何大羃其趨向於無窮大較任何小羃之 x 趨向於無窮大爲慢'.

最後,吾人以 ε 表其極限爲零之函數(其自變數爲關聯之數或添數)而用於所論之變數趨向於無窮大或其極限之時.故 ε 之意爲 $o(1)$, 而下列三式:

$$f=\Phi(1+\varepsilon),\qquad f\sim\Phi,\qquad f=\Phi+o(\Phi)$$

乃表同一事.

1.6. 使上節所定義之記號熟習起見讀者可檢證下列之關係.其中之 $P_m(x)$, $Q_n(x)$ 乃表其次數爲 m 與 n 而其首項之係數爲正之多項式:

$$P_m(x)\succ Q_n(x)\ (m>n),\qquad P_m(x)\asymp Q_n(x)\qquad (m=n)$$

$$P_m(x)\asymp x^m,\qquad P_m(x)/Q_n(x)\asymp x^{m-n},$$

$$\sqrt{(ax^2+2bx+c)}\asymp x\,(a>o),\quad \sqrt{(x+a)}\sim\sqrt{x},\quad \sqrt{(x+a)}-\sqrt{x}\sim\tfrac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}},$$

$$e^x\succ x^\Delta,\quad e^{x^2}\succ e^{\Delta x},\quad e^{e^x}\succ e^{x^\Delta},\quad \log x\prec x^\delta,\quad \log\log x\prec(\log x)^\delta,$$

$$\log P^m(x)\asymp\log Q_n(x),\qquad \log\log P_m(x)\sim\log\log Q_n(x),$$

$$x+a\sin x\sim x,\qquad x(a+\sin x)\asymp x\quad (a>1),$$

$$e^{a+\sin x}\asymp 1,\quad \cosh x\sim\sinh x\sim\tfrac{1}{2}e^x,\qquad \cosh(x+a)\asymp\cosh x,$$

$$x^\Delta=o(e^{\delta x}),\qquad (\log x)^\Delta=o\left\{e^{(\log x)^\delta}\right\},\qquad x^\Delta=o\left\{e^{(\log x)^{1+\delta}}\right\},$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\sim\log n,\qquad 1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n\asymp 1,$$

$$n!\prec n^n,\qquad n!\succ e^{\Delta n},\qquad n!=n^{n^{1+\varepsilon}}=n^{n(1+\varepsilon)},$$

$$n!\sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{(2\pi)},\qquad n!(e/n)^n=(1+\varepsilon)\sqrt{(2\pi n)},$$

$$\int_2^x\frac{dt}{\log t}\sim\frac{x}{\log x},\qquad \int_2^x\frac{dt}{\log t}=\frac{x}{\log x}+O\left\{\frac{x}{(\log x)^2}\right\},$$

$$\int_3^x \frac{dt}{\log\log t} \sim \frac{x}{\log\log x}.$$

II.　一般之無窮大之尺度.

2.1。若由 $\Phi \succ 1$ 之函數 Φ 開始,吾人能以種種之法作成一函數系列.

$$\Phi = \Phi_1,\quad \Phi_2,\quad \Phi_3,\cdots\cdots,\quad \Phi_n,\cdots\cdots$$

使每一函數之增大皆比其前者大.如此之函數敘列可簡表爲 (Φ_n).

其最顯明之一法卽取 $\Phi_n = \Phi^n$. 又一法則如次:若 $\Phi \succ x$, 則

$$\Phi\left\{\Phi(x)\right\}/\Phi(x) \longrightarrow \infty$$

甚明.所以 $\Phi_2(x) = \Phi\Phi(x) \succ \Phi(x)$; 同樣 $\Phi_3(x) = \Phi\Phi_2(x) \succ \Phi_2(x)$, 如此類推.

第一法,如取 $\Phi = x$, 則所作之尺度爲 $x, x^2, x^3, \cdots$ 或 (x^n); 第二法如取 $\Phi = x^2$, 則所得之尺度爲 $x^2, x^4, x^8, \cdots\cdots$ 或 (x^{2^n}). 在此時第二尺度不過由第一尺度之項所選出.若取 $\Phi = e^x$ 則由此兩法所作成之尺度爲 $e^x, e^{2x}, e^{3x}, \cdots\cdots$ 及

$$e^x,\quad e^{e^x},\quad e^{e^{e^x}},\ \cdots\cdots$$

第二尺度之第二項其增大比第一尺度之任何項爲大.

此等尺度爲可數(enumerable)尺度,以函數之簡單級數所作成.吾人能以連續助變數 α 代整助變數 n 而定義一不可數之函數尺度.其最簡者如 (x^α),其中之 α 爲正數.但如此尺度在理論爲次要.

誠然,吾人常能在一尺度之始或其兩項之間插入一新

項.(因而插入任若干項皆可).如 $\sqrt{\Phi}$ (或 Φ^{α}, 其 α 爲比 1 小之任何正數)其增大卽小於尺度中之任何項,而 $\sqrt{(\Phi_n\Phi_{n-1})}$ 或 $\Phi_n^{\alpha}\Phi_{n+1}^{1-\alpha}$ 其增大乃介於 Φ_n 與 Φ_{n+1} 之間.今舉一較顯而又極重要之定理如次.

定理 1.* 設有增函數 Φ_n 中之任何昇尺度(ascending scale)如 $\Phi_1\prec\Phi_2\prec\Phi_3\prec\cdots\cdots$. 吾人常能求得一函數 f 其增大比此尺度之任一函數爲速,卽不論 n 爲何值皆有滿足于 $\Phi_n\prec f$ 之關係之 f 存在.

此爲重要之基本定理,以下將給以兩種不同之證明.

2.21. 吾人知於一切之 n 皆 $\Phi_{n+1}\succ\Phi_n$, 但此自不須包含在問題中 n 與 x 之一切値,皆 $\Phi_{n+1}\geqq\Phi_n$ †.然能作得一新函數之尺度 ψ_n 使合于:

(a) ψ_n 乃於 x 由某値 x_n 而上之一切値恆等於 Φ_n (x_n 自有關於 n),

(b) 於 x 與 n 之一切値皆 $\psi_{n+1}\geqq\psi_n$.

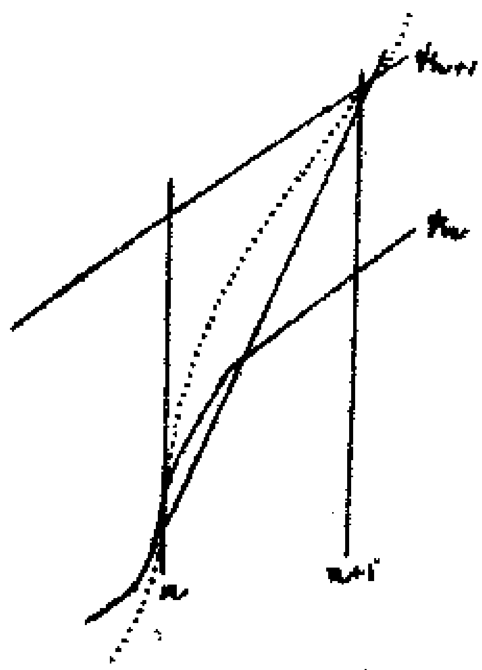
設吾人作得如此之一尺度其 n 項爲 ψ_n,則自易見如何作得 ψ_{n+1}. 因 $\Phi_{n+1}\succ\Phi_n$, $\Phi_n\sim\psi_n$,遂得 $\Phi_{n+1}\succ\psi_n$,故由 x 之某値(譬如命爲 x_{n+1})而上 $\Phi_{n+1}\geqq\psi_n$. 於 $x>x_{n+1}$ 時取 $\psi_{n+1}=\Phi_{n+1}$, 於 $x<x_{n+1}$ 時

* 此定理常呼爲 'Paul du Bois-Reymond 之定理';參觀附錄文獻集之 Borel, 1, 113. 實際 du Bois-Reymond 第一次明白證明之定理乃對應於降尺度之之定理(定理 3 § 2.4.) 參觀 du Bois-Reymond 4, 365.

† 於 x 十分大之時譬如 $x>x_n$ $\Phi_{n+1}>\Phi_n$ 包含 $\Phi_{n+1}\succ\Phi_n$, 但 x_n 可隨 x 而趨向於無窮大.如設 $\Phi_n=x^n/n!$, $x_n=n+1$.

則 ψ_{n+1} 之值取其等於 Φ_{n+1}, ψ_n 之值之大者.則 ψ_{n+1} 滿足於 (a) 與 (b) 兩條件也甚明.

今設
$$f(n)=\psi_n(n).$$
由 $f(n)$ 吾人可導出連續增函數 $f(x)$.使於 $n<x<n+1$ 時
$$\psi_n(x)<f(x)<\psi_{n+1}(x),$$
卽以一直綫或適當曲綫之弧聯結 $(n, \psi_n(n))$ 卽可.則於 $x>n+1$ 時
$$f/\psi_n>\psi_{n+1}/\psi_n,$$
所以 $f\succ\Phi_n$. 故 $f\succ\Phi_n$. 本定理卽證明矣.



第二圖

尙有一點須加注意.* 此時不常用直綫,因用直綫於 $x>n$ 不常保其
$$f(x)>\psi_n(x).$$
(例如第二圖.卽以虛綫代所用之孤.)

此證明若取 $f(n)=\psi_\nu(n)$ 可使其更為一般,但此處之 ν 乃一有關於 n 而又隨 n 以趨向於無窮大之整數.

2.22. du Bois-Reymond 氏定理之第二證明其進行完全不同.吾人常能擇定正係數 a_n 使於 x 之一切值
$$f(x)=\sum_1^\infty a_n\,\psi_n(x)$$
皆收斂.此確有如此之時,例如設
$$1/a_n=\psi_1(1)\,\psi_2(2)\cdots\cdots\psi_n(n).$$
則若 ν 為大於 x 之任一整數於 $n\geq\nu$ 乃 $\psi_n(x)<\psi_n(n)$,而

* Borel, 1, 114; 5, 25.

$$\sum_{\nu}^{\infty} \frac{1}{\psi_1(1)\,\psi_2(2)\cdots\cdots\psi_{n-1}(n-1)}$$

若爲收歛則此級數爲收歛矣甚明.

且亦 $$f(x)/\psi_n(x) > a_{n+1}\psi_{n+1}(x)/\psi_n(x) \longrightarrow \infty,$$

如此則於 n 之一切値皆 $f > \Phi_n$.

2.31. 設 $\Phi_n = x^n$. 若吾人限定 x 之值大於 1, 可取 $\psi_n = \Phi_n = x^n$. 由第一作法自導得

$$f = n^n = e^{n \log n},$$

或 $f = \nu^\nu$, 其中之 ν 乃如 §2.21 末所定義.此等函數之增大皆較 n 之任何乘冪爲大.由第二法得

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{1^1 . 2^2 . 3^3 \cdots n^n}.$$

當 x 爲大時此函數之大之階* 與

$$e^{\frac{1}{2}(\log x)^2/\log\log x}$$

粗同.

一般言之,$f(x)$ 以級數之收歛定義之,而設 a_n 爲如此急速遞減,並無何等必需之意義.卽設 $1/a_n = \Phi_n(n)$ 已足矣;例如若 $\Phi_n(x) = \left\{\Phi(x)\right\}^n$, 其級數乃

$$\Sigma \left\{\frac{\Phi(x)}{\Phi(n)}\right\}^n$$

常爲收歛.此 a_n 之選擇於 $\Phi = x$ 時須導得

$$f(x) = \Sigma \left(\frac{x}{n}\right)^n \frac{xn}{n!} \sqrt{\left(\frac{2\pi x}{e}\right)}\, e^{x/e}\ {}^{+}.$$

---

* Hardy, 6. 亦可參觀 §6.3.

\+ 參觀 Lindeöf, 2.41, 及 3: le Roy, 1; 及 §6.3.

但 a_n 最簡之擇定當

$$f(x)=\Sigma\frac{x^n}{n!}=e^x-1\sim e^x$$

時爲 $1/a_n=n!$; 此忽視其不適宜之 -1 項自然甚便.

2.32.　吾人常能設 $f(x)$ 定義爲於 x 之一切値皆收歛之冪級數 $\Sigma a_n x^n$, 蓋由 Poincare 之一定理 * 之効力使然而此則作成一命題而證明之甚爲有趣也.

定理 2.　設任一連續增函數 $\Phi(x)$, 吾人常能求得一整函數 $f(x)$ 使如 $f(x)\succ\Phi(x)$. (卽於 x 之一切値皆收歛之冪級數定義函數 $f(x)$).

下之簡單證明乃 Borel 所作.**

設 $\Phi(x)$ 爲如 $\Phi\succ\Phi$ 關係之一任函數. (如 ϕ 之平方). 取正數 a_n 之增敍列且使 $a_n\to\infty$, 而另一敍列 b_n 使如

$$a_1<b_2<a_2<b_3<a_3<\cdots\cdots$$

吾人能擇得一整數 ν_n 之敍列使其 (i) $\nu_{n+1}>\mu_n$ 及 (ii)

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\nu_n}>\Phi(a_{n+1}).$$

今設　　$$f(x)=\Sigma\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\nu_n}.$$

此級數於 x 之一切値皆收歛;其第 n 項之 n 次方根不大於 x/b_n (於 $b_n>x$ 時), 故趨向於零.又若 $a_n\leqq x<a_{n+1}$

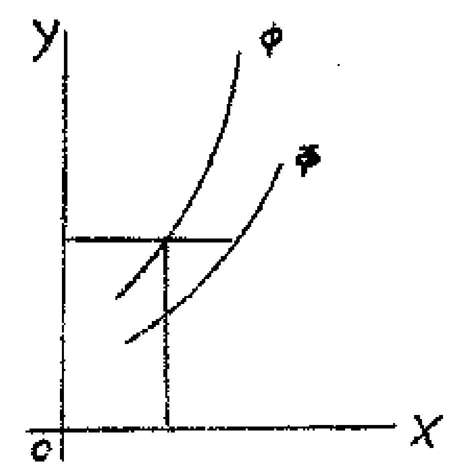
$$f(x)>\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\nu_n}>\Phi(a_{n+1})>\Phi(x),$$

所以於 x 之一切値皆大於 a_1, 故 $f\succ\Phi$.

* Poincare I, 214.　　** Borel 4, 27.

2.4. 前此吾人將注意限定於升尺度,如 $x, x^2, x^3, \cdots x^n, \cdots$ 卽 (x^n); 但可以同樣之方法討論降尺度如 $x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \cdots \sqrt[n]{x}, \cdots$ 卽 $(\sqrt[n]{x})$ 也甚明.一般言之若 (Φ_n) 爲升尺度,而以 ψ 表 Φ 之反函數,則 (ψ_n) 爲降尺度.

若於 x 之一切值(或大於某定值之值) $\Phi>\bar{\Phi}$,則觀第三圖卽可見若 ψ 與 $\bar{\psi}$ 爲 Φ 與 $\bar{\Phi}$ 之反函數則於 x 之一切值(或大於某定值之值) $\psi<\bar{\psi}$. 吾人只須注意 ψ 之圖示可僅由 Φ 變易其觀點而得(將 x 之部分變爲 y).但 $\Phi\succ\bar{\Phi}$ 實不能包含 $\psi\prec\bar{\psi}$. 如 $e^x \succ e^x/x$. e^x 之反函數爲 $\log x$; e^x/x 之反函數乃解出方程式 $x=e^y/y$ 之 y 而得.由此方程式卽得



第三圖

$$y = \log x + \log y,$$

此易見其 $y \sim \log x$.

定理 3. 設有升函數之尺度如

$$\Phi_1 \succ \Phi_2 \succ \Phi_3 \succ \cdots\cdots \succ 1,$$

吾人能求得一升函數 f 使於 n 之一切值皆 $\Phi_n \succ f \succ 1$.

此定理之證明與定理 1 之第一證明 (§2.21) 同一原理.故從略.

2.5. 以下爲定理 1 與 3 之擴張乃 du Bois-Reymond, Pincherle,及 Hadamard 諸氏*所獲得者也.

* du Bois-Reymond, 7, Hadamard, 2; Pincherle, 1.

定理 4. 設 $\Phi_1 \prec \Phi_2 \prec \Phi_3 \prec \cdots \prec \Phi_n \cdots \prec \Phi$,
吾人能求得於 n 之一切值而如 $\Phi_n \prec f \prec \Phi$ 之關係之 f.

定理 5. 設 $\psi_1 \succ \psi_2 \succ \psi_3 \succ \cdots \succ \psi_n \succ \cdots \succ \Psi$
吾人能求得於 n 之一切值而如 $\psi_n \succ f \succ \Psi$ 之關係之 f.

定理 6. 設有升敍列 (Φ_n) 及降敍列 (Φ_p) 於 n 之一切值皆 $\Phi_n \prec \psi_n$ 吾人能求得於 n 與 p 之一切值而如

$$\Phi_n \prec f \prec \psi_p.$$

之關係之 f.

定理 4 之證明如次:吾人僅由觀察,得

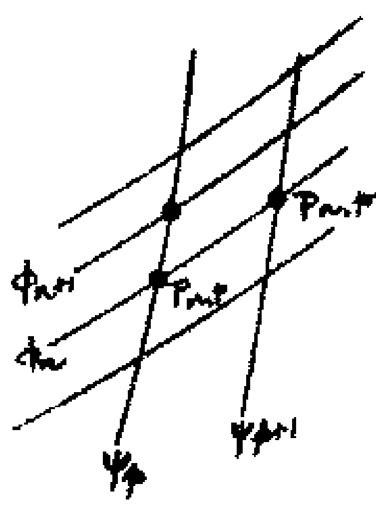
$$\Phi/\Phi_1 \succ \Phi/\Phi_2 \succ \cdots\cdots \succ \Phi/\Phi_n \succ \cdots \succ 1.$$

且作(由定理 3 之効力)一函數 F 其趨向於無窮大比函數 Φ/Φ_n 之任一爲慢.則

$$f = \Phi / F$$

卽如所求之函數.定理 5 同樣證明.定理 6 須稍加注意.

首先吾人設於 x 與 n 之一切值皆 $\Phi_{n+1} > \Phi_n$; 因若不如此吾人能如 §2.21 修改函數 Φ_n 之定義.同樣設於 x 與 p 之一切值 $\psi_{p+1} < \psi_p$.



第四圖

其次,可設若 x 爲固定,當 $n \longrightarrow \infty$ 時 $\Phi_n \longrightarrow \infty$, 當 $p \longrightarrow \infty$ 時 $\psi_p \longrightarrow 0$. 因若所設之函數爲不眞而其定義又如上修改,吾人可以 $\Phi_n = 2^n \Phi_n$ 與 $\Psi_p = 2^{-p}\psi_n$ 修改 Φ_n 與 ψ_n; 則 $\Phi_n > 2^n \Phi_1$, $\Psi_n < 2^{-p}\psi_1$, 如此則於

$n\longrightarrow\infty$ 時而 $\Phi_n\longrightarrow\infty$, 於 $p\longrightarrow\infty$ 時而 $\Psi_n\longrightarrow o$.

因 $\psi_p\succ\Phi_n$, 但於任予之 x, 又於 n 之十分大值時, $\psi_p<\Phi_n$, 曲綫 $y=\psi_p$ 於 n 之一切大值(譬如於 $n>n_p$)交於曲綫 $y=\Phi_n$. 此等曲綫爲連續,其交點形成一閉點組(closed set of points)因之必有一最終之交點,今以 $P_{n,p}$ 表之.

若 p 固定,於 $n>n_p$ 時 $P_{n,p}$ 存在;同樣若 n 固定,於 $p>p_n$ 時 $P_{n,p}$ 存在.又當 n 或 p 增大之時 $P_{n,p}$ 之縱橫坐標亦增大.曲 $y=\psi_p$ 含一切之 $P_{n,p}$ 點於其中 p 有一定值,而 $y=\Phi_n$ 含一切之點於其中 n 有一定值.

對於定義函數 f 使其趨向於無窮大比任何之 Φ_n 爲速任何之 ψ_p 爲慢;吾人可引一曲綫使於無論何處與兩坐標軸皆成正銳角,而通過一切曲綫 $y=\Phi_n$ 係由下而上,通過一切曲綫 $y=\psi_p$ 係由上而下.

擇一正整數 N_p,對應於 p 之各值皆如 (i) $N_p>n_p$ 而 (ii) $p\to\infty$ 時 $N_p\longrightarrow\infty$. 則於 p 之各值 $P_{N_p,p}$ 存在.吾人僅以直綫或其他曲綫選擇的適宜之弧聯結 $P_{N_1,1}, P_{N_2,2}, P_{N_3,3}$……各點所得之曲綫卽合於吾人之目的也明矣.故此定理成立.

2.61. 關於無窮大尺度之更有趣之發展乃得之於Pincherle 氏.*

吾人定義 $f\succ\Phi$ 如 $f/\Phi\longrightarrow\infty$ 意,或同樣之事

(2.611) $$\log f-\log\Phi\longrightarrow\infty.$$

* Pincherle, 1

吾人同樣可定義 $f \succ \Phi$ 如

(2.612) $$F(f)-F(\Phi)\longrightarrow\infty$$

之意,其中之 $F(x)$ 乃隨 x 而趨向於無窮大之任一函數(卽如 x, e^x).設若 (2.612) 成立則

(2.613) $$f \succ \Phi(F),$$

如此則 $f \succ \Phi$ 與 $f \succ \Phi(\log x)$ 全等.同樣定義 $f \prec \Phi(F)$ 如 $F(f)-F(\Phi)\rightarrow-\infty$ 之意,又 $f \asymp \Phi(F)$ 如 $F(f)-F(\Phi)$ 爲有界之意.如因 $e^{x+1}-e^x=(e-1)e^x\longrightarrow\infty$, 則 $$x+\log x\asymp x,\qquad x+\log x\succ x(x),$$

$$x+1\asymp x,\qquad x+1\succ x(e^x),$$

此 F 之增大更速,而對於判定所設兩函數 f 與 Φ 之增大之速度甚顯.且若

$$f \succ \Phi(F),$$

而 $\bar{F}=FF_1$, 此處之 F_1 爲任一增函數,則

$$f \succ \Phi(\bar{F}).$$

蓋 $$\bar{F}(f)-\bar{F}(\Phi)=F(fF_1(f))-F(\Phi F_1(\Phi))>\left\{F(f)-F(\Phi)\right\}F_1(\Phi)\rightarrow\infty.$$

2.62. 下列定理之本質一部分得之於 du Bois-Reymond 而一部分得之於 Pincherle *

定理 7. f 之增大與 Φ 較無論其爲如何之速吾人能選得 F 使如 $f \asymp \Phi(F)$.

定理 8. 若於 $x>x_0$ 時 $f-\Phi$ 爲正,吾人能選得 F 使如 $f \succ \Phi(F)$.

* du Bois-Reymond, 4; Pincherle. 1.

定理 9. 若於 $x>x_0$ 時 $f\geqq\Phi$ 而 $f-\Phi$ 爲單調,又 $f\prec\Phi(F)$, 此 F 之增大無論其爲如何之大,則自 x 之某值而上 $f=\Phi$.

(1)若 $f>\Phi$, 吾人可視 f 爲 Φ 之增函數,命爲

$$f=\theta(\Phi),$$

此處之 $\theta(x)>x$. 吾人能選擇得大於 1 之常數 g, 則選得 X 使於 $x>X$ 時 $\theta(x)>gx$. 設 a 爲大於 X 之任一數,又設

$$a_1=\theta(a),\qquad a_2=\theta(a_1),\qquad a_3=\theta(a_2)\cdots\cdots$$

則 (a_n) 爲增敍列,且 $a_n\longrightarrow\infty$. 蓋 $a_n>g^n a$ 也.

吾人能作得一增函數 F 使如

$$F(a_n)=\tfrac{1}{2}nK,$$

其中之 K 爲常數.則若 $a_{\nu-1}\leqq x\leqq a_\nu$, $a_\nu\leqq\theta(x)\leqq a_{\nu+1}$ 且

$$F\left\{\theta(x)\right\}-F(x)\leqq F(a_{\nu+1})-F(a_{\nu-1})=K.$$

故 $F(f)-F(\Phi)$ 常小於常數而定理 7 遂成立矣.

(2)設 $f-\Phi=\lambda$, 所以 $\lambda>0$. 若 λ 當 x 爲增時常比一常數 K 爲大,則

$$e^f-e^\Phi>(e^k-1)e^\Phi\longrightarrow\infty.$$

如此吾人可取 $F(x)=e^x$.

若 $\lambda\geqq K$ 不真, λ 之下界爲零.設 $\lambda_1(x)$ 定義於 $\xi\leqq x$ 時 $\lambda(\xi)$ 之下界.則 λ_1 當 $x\to\infty$ 而 $\lambda_1\leqq\lambda$ 時趨向於零.吾人亦可視 λ_1 如 Φ 之遞降函數,命爲 $\lambda=\mu(\Phi)$.

設 $\omega(\Phi)$ 爲 Φ 之增函數,使如 $\mu\omega>1$. 則若

$$F(\Phi)=\int^\Phi\omega(t)\,dt,$$

$$F(f)-F(\Phi)=\int_{\Phi}^{\Phi+\lambda}\omega\,dt\geqq\int_{\Phi}^{\Phi+\mu(\Phi)}\omega dt>\mu(\Phi)\omega(\Phi)>1,$$

而 $F(x)$ 滿足於定理 8 之需要也.最後定理 9 明明爲定理 8 之一系.

此三定理皆有如甫證者之相同性質.讀者或求其彼此互演或獨立證明.

定理 10. f 之增大較 Φ 無論其爲如何之大吾人亦能決定一增函數 F 使如 $F(f)\succ F(\Phi)$.

定理 11. 若於 $x>x_0$ 時 $f-\Phi$ 爲正,吾人能決定一增函數 F 使如 $F(f)\succ F(\Phi)$.

定理 12. 若於 $x>x_0$ 時 $f\geqq\Phi$ 及 $f-\Phi$ 爲單調,且 $F(f)\succ F(\Phi)$, F 之增大無論其爲如何之大,則由 x 之某值而上 $f=\Phi$.

於此可加入一定理(與 §2.61 末所證者類似.)卽:若 $\log F(x)/\log x$ 是一增函數(卽與 $F\succ x$ 之條件略全等) $f\succ\Phi$ 包含 $F(f)\succ F(\Phi)$

2.63. 今試將最後一節之定理之例考之.

(i) 說 $f=x^m$ $(m>1)$ 及 $\Phi=x$. 則由 §2,62(1) 之論斷得 $\theta(\Phi)=\Phi^m$. 吾人取

$$a=e,\quad a_1=e^m,\quad a_2=e^{m^2},\ \cdots\cdots,\quad a_n=e^{m^n}\ \cdots\cdots,$$

而定義 F,所以

$$F(e^{m^n})=\tfrac{1}{2}nK.$$

此方程式最自然之解爲

$$F(x)=\frac{K\log\log x}{2\log m}.$$

實際 $$F(x^m)-F(x)=\frac{K}{2\log m}\left\{\log(m\log x)-\log\log x\right\}=\tfrac{1}{2}K,$$

如此則 $x^m \asymp x(F)$.

(ii) 設 $f=e^x+e^{-x}$, $\Phi=e^x$. 由 §2.62(2) 之論斷,求得

$$\lambda==e^{-x}=\lambda_1, \qquad \mu(\Phi)=1/\Phi,$$

吾人可取 $\omega(\Phi)=\Phi^{1+\alpha}$ $(\alpha>o)$. 此使 $F(\Phi)$ 爲 $\Phi^{2+\alpha}$ 之常數倍,若 $k>2$ 易檢證

$$(e^x+e^{-x})^k-e^{kx}\longrightarrow\infty.$$

(iii) $F(f) \succ F(\Phi)$ 之關係全等於 $f \asymp \Phi(\log F)$. 用(i)之結果吾人見若 $1 \prec F \preccurlyeq \log x$ 則 $F(x^m) \asymp F(x)$. 同樣用(ii)之結果,見 $F \succcurlyeq e^{x^k}$ $(k>2)$ 則 $F(e^x+e^{-x}) \succ F(e^x)$.

2.7. 設吾人觀察 §§2.1—2.5 之本質可加以擴張,卽 $\succ$ 等記號可以任意增函數 F 定義之.而此部分則尙未論及留待讀者.

III. 對數指數尺度:基本定理.

3.1. 在解析中最重要而實用之無窮大尺度,乃以對數函數及指數函數之意作得者.

吾人曾見 (§1.1) 於 n 之任何値而有

$$e^x \succ x^n;$$

由此卽刻知於 n 之任何値而有

$$\log x \prec x^{\frac{1}{n}}.\text{*}$$

---

* 在§2.4中曾經指出 $\Phi \succ \overline{\Phi}$ 不必包含 $\psi \prec \overline{\psi}$ (ψ, $\overline{\psi}$ 乃 Φ, $\overline{\Phi}$ 之反函數). 但於 x 十分大之値可包含 $\psi \prec \overline{\psi}$, 故 $\psi \preccurlyeq \overline{\psi}$. 因而 $\Phi \succ \Phi_n$ (於任一 n) 包含 $\psi \preccurlyeq \overline{\psi}_n$ (於任一 n). 且若 (ψ_n) 爲降尺度則於任一 n 著 $\psi \prec \psi_n$ 甚明矣.

此容易導出

$$e^{e^x} > e^{x^n}, \quad e^{e^{e^x}} > e^{e^{x^n}}, \cdots\cdots,$$

$$\log\log x < (\log x)^{1/n}, \quad \log\log\log x < (\log\log x)^{1/n}, \cdots\cdots$$

累次對數函數與累次指數函數在本論題中是如何之重要,而採用一記號以減少其繁重之性質乃爲必需.吾人可書

$$l_1x = lx = \log x \quad l_2x = llx, \quad l_3x = ll_2x, \cdots\cdots \quad {}^*$$

$$e_1x = ex = e^x, \quad e_2x = eex, \quad e_3x = ee_2x, \cdots\cdots$$

以此等函數之助容易書出任幾個升尺度其所含之函數其增大比在任何較前之尺度之任何函數爲大:例如

$$x, x^2, \cdots x^n, \cdots, e^x, e^{2x}, \cdots e^{nx}, \cdots; \; e^{x^2}, e^{x^3}, \cdots, e^{x^n}, \cdots$$

在此等尺度之中吾人可自由插入新函數,例如,如次之函數,

$$x^{\alpha} e^{\beta x^{\gamma} e^{\delta x^{\varepsilon}}},$$

其中之 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ 爲任意正數;而吾人亦能作不可數之尺度如可數者.[+] 同樣吾人能作任幾個降尺度其所含之每一函數其增大比在任何前之尺度之任何數爲小:例如

$$lx, (lx)^{1/2}\cdots\cdots, (lx)^{1/n}, \cdots\cdots; \; l_2x, (l_2x)^{1/2}, \cdots\cdots, (l_2x)^{1/n}, \cdots\cdots$$

基本重要之兩特殊尺度;其升者爲

$$(E) \qquad x, \quad ex, \quad e_2x, \quad e_3x, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

---

* lx 乃定義於 $x > o$ 時,l_2x 定義於 $x > 1$ 時 l_3x 定義於 $x > e$ 時 l_4 定義於 $x > e^e$ 時,以下類推.

\+ 參觀 §2.1.

其降者爲

$$(L) \qquad x, \quad lx, \quad l_2x, \quad l_3x, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

此等尺度乃一切對數尺度與指數尺度之極限.因 §§2.1—2.5 一般定理之効力,自然能定義其增大比任何 l_nx 尙速,或比任何 l_nx 尙慢之函數;但吾人卽刻可見若將函數限定僅以含初等解析之通常函數記號所定義之顯式所表之函數,則不可能.

3.2. 吾人規定對數指數函數(logarithmico-exponential function) 簡稱 L 函數如一單値實函數,而此函數乃謂對於大於某定値之 x 一切之値而以通常代數記號(卽 $+ - \times \div \sqrt[n]{}$)及函數記號 $\log(\cdots)$ 與 $e^{(\cdots)}$ 之有限結合而其計算施於變數 x 及實常數者也.

觀察函數之値所作之結果,以 x 代入所定義之公式中,其各步須皆爲實數.如函數

$$\tfrac{1}{2}\left\{e^{\sqrt{(-x^2)}}+e^{-\sqrt{(-x^2)}}\right\},$$

其根之適當解釋等於 $\cos x$, 乃須除開者也.

定理 13. 任何 L 函數乃常連續同號單調且當 $x\to\infty$ 時趨向於無窮大,或零,或其他之定極限.又若 f 與 Φ 爲 L 函數,則其間必能保持

$$f \succ \Phi, \quad f \asymp \Phi, \quad f \prec \Phi$$

諸關係之一.

吾人亦可如 Liouville*分類'初等'函數之法,將 L 函數分類下如.若 L 函數爲純代數的則爲 o 階(order);若函數之記號 $l(\cdots)$ 與 $e(\cdots)$,其中所含之計算僅爲關於代數函數,則爲 1 階;若其計算爲關於 1 階之代數函數或 L 函數則爲 2 階.以下類推.如

$$e^{x^2}+\sqrt{(\log x)},\quad x^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\log x},\quad x^{x^x}=e^{\log x e^{x\log x}}$$

乃各爲 1 階 2 階 3 階.

吾人可見 n 階之 L 函數常能表成任何高階之函數;如 $x=e(lx)=e_2(l_2x)=\cdots$ 但此乃毋須假設函數須爲其可能之最簡之形.在 Liouvill 氏之工作中其重要之假定乃一'n 階初等函數'不能表如一低階之函數.但在此如斯之假定實不必需.

以下增加之定義亦將見其有用,若一 L 函數 f_n 爲

$$\Sigma\,\rho_{n-1}e^{\sigma_{n-1}}(l\tau_{n-1}^{(1)})^{k_1}(l\tau_{n-1}^{(2)})^{k_2}\cdots\cdots\cdots(l\tau_{n-1}^{(h)})^{k_h},$$

之形則名爲整函數.但其中有添數 $n-1$ 之函數乃 $n-1$ 階之 L 函數,而 $k_1, k_2, \cdots k_h$ 乃正整數.吾人可名 $k_1+k_2+\cdots+k_h$ 爲 f_n 之模範形之項之對數次數 (degree) 或簡稱次數.若 λ 爲 $k_1+k_2+\cdots+k_h$ 之最大數値則可謂 f_n 有對數次數 λ;若在 f_n 中有 λ 次數之項數爲 μ,則可謂 f_n 有對數型 (λ,μ) 吾人以無添數,指數,等之文字 M 表整 L 函數.

* Liouville, I; Watson, 1, 111.　亦可參觀 Hardy, 2;蓋此編乃盡量參考 Liouville 氏之隨筆者也.

若一整 L 函數為 O 階卽如

$$\Sigma \varrho_{n-1}\, e\, \sigma_{n-1}$$

之形,則吾人謂爲指數的.若整指數 L 函數含有 ω 項,則謂爲有 ω 型;若 $\omega=1$ 則謂爲單純指數的.如 $(lx)^2e(e^x lx)$ 爲 2 階之單純指數 L 函數,而 $(lx)^2(l_2x)^2e(e^x lx)$ 爲(2,1)型之 2 階整指數函數.吾人一般以文字 N 表整指數函數.

若 f_n 爲兩整函數之商,卽 M_1/M_2 之形者則吾人謂爲有理的.若 M_1 與 M_2 爲指數的卽 f_n 爲 $N_1/_2N$ 之形者則謂 f_n 爲有理指數 L 函數.

下之命題可卽刻檢證之:

(i) n 階 L 函數之導函數仍爲 n 階惟在指數的時導函數可爲 $n-1$ 階.

(ii) 單純指數函數之導函數爲有同指數因數之單純指數函數.

(iii) ω 型之整指數函數之導函數一般爲 ω 型之整指數函數.若原函數之一項爲常數,其導函數爲 $\omega-1$ 型.

(iv) 對數型 (λ, μ) 之整函數之導函數一般爲同型.若其次數爲 λ 之一項之指數因數 $\varrho_{n-1}\, e\, \sigma_{n-1}$ 爲常數則導函數爲 $(\lambda, \mu-1)$ 型;若 $\mu=1$,導函數爲 $\lambda-1$ 次

3.3. 吾人由下之兩準備注意可簡單的導出定理13之證明.

(i) 若 f 爲 n 階之 L 函數,故其導函數 f' 亦如之,因而若

每個如斯之函數爲恆連續而同號,則如斯之每函數爲恆單調的.

(ii)若 f 與 Φ 爲 n 階之 L 函數,故 f/Φ 亦如之.因而若如斯之每函數爲恆單調的,則 f/Φ 或趨向於無窮大或極限而函數間必保持 $\succ, \asymp, \prec$ 諸關係之一.

故此足以證必若定理13於 $n-1$ 階之函數爲真,則 n 階之任一函數爲恆連續且同號.

證此,可用歸納法.先設 f_n 爲一整指數函數之時.當 f_n 爲1型(即 f_n 爲一單純指數函數 $\varrho_{n-1}\, e^{\sigma_{n-1}}$) 時,其結果甚屬顯然.設吾人假定此於 $\omega-1$ 型之函數爲真;而令

$$f_n=\Sigma\, \varrho_{n-1}\, e^{\sigma_{n-1}}$$

爲 ω 型.若 $\varrho_{n-1}\, e^{\sigma_{n-1}}$ 爲 f_n 之任一項,函數

$$F_n=f_n/(\varrho_{n-1}\, e^{\sigma_{n-1}})$$

爲有一項爲常數(爲1)之 ω 型者;如此依 §3.2(iii), F_n' 爲 $\omega-1$ 型.因而 F'_n 乃恆連續而同號,倣此得 F_n 爲真,故 f_n 亦同樣爲真.

其次吾人證明此結果於 f_n 爲 n 階之任意整函數爲真.設

$$f_n=\Sigma\varrho_{n-1}\, e^{\sigma_{n-1}}(l\tau_{n-1}^{(1)})^{k_1}(l\tau_{n-1}^{(2)})^{k_2}\cdots(l\tau_{n-1}^{(h)})^{k_h}$$

爲對數型 (λ,μ) 於 $\lambda=o$ 時曾證明此結果爲真.因此足以證明

(i) 若於對數次數 $\lambda-1$ 之函數爲真,則於 λ 次 $(\lambda,1)$ 型之函數爲真;

(ii) 若於 $(\lambda, \mu-1)$ 型之函數爲真,則於 (λ, μ) 型亦真;

設模範項乃如上書 f_n 之式,爲 λ 次之一項,設 $F_n=f_n/(\varrho_{n-1}e^{\sigma_{n-1}})$ 仍如前.則依 §3.2(iv) F_n' 除 $\mu=1$ 外(其時爲 $\lambda-1$ 次)爲 $(\lambda, \mu-1)$ 型,因而由上之(i) (ii)吾人可從事證明 F'_n 爲恆連續而同號;而吾人可如前導出 f_n 同樣爲真.

今可以完備吾人之證明矣.任一整 L 函數爲

$$f_n=A\left\{e\Phi^{(1)}_{n-1}, e\Phi^{(2)}_{n-1}, \cdots\cdots e\Phi^{(r)}_{n-1}, l\psi^{(1)}_{n-1}, \cdots\cdots, l\psi^{(s)}_{n-1}, \chi^{(1)}_{n-1}, \cdots\cdots, \chi^{(t)}_{n-1}\right\}$$

$$=A(z_1, z_2\cdots\cdots z_q), \qquad \text{(設爲)}$$

其中之 $q=\gamma+s+t$ 而 A 爲其引數(arguments)之代數函數.故有恆等關係

$$F(x,y)=M_0y^p+M_1y^{p-1}+\cdots\cdots+M_p=0$$

其中之 $y=f_n$ 而係數 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_p$ 爲 n 階之整 L 函數.此等係數之導函數亦爲整函數.故卽刻推得

$$F_x=\frac{\partial F}{\partial x}=\Sigma\frac{dMi}{dx}y^{p-i}, \qquad Fy=\frac{\partial F}{\partial y}=\Sigma(p-i)M_iy^{p-i-1},$$

蓋視其爲兩變數 x, y 於 x 之充分大值 y 之一切值之連續函數也.

設 ξ, η 爲滿足於方程式 $F=0$ 之 x 與 y 一對之值.則若 ξ 爲十足的大,Fy 於 $x=\xi, y=\eta$ 時不能爲零.因若 F 與 F_y 皆於 $x=\xi, y=\eta$ 時爲零,則 $F=0$, 與 $F_y=0$ 間之 y 之消去於 $x=\xi$ 時爲零.但此消去式乃明爲 n 階之整 L 函數,所以凡超過極限之 x 之值不能爲零.但依關於隱函數 (implicit function)之基

本定理,* 卽刻知 f_n 爲 x 之恆連續函數.最後得 ζ_n 爲恆同符號.因 $f_n=o$ 包含 $M_p=o$, 而吾人曾見超過一切極限之 x 之值滿足於此方程式實不可能.斯卽此定理之完全證明也.

3.4. **L 函數之增大之極限**.遞增 L 函數之增大,其速或慢之限制,乃本節之主題.粗率言之可謂一 L 函數之增大不能比一指數函數爲速比一對數函數爲慢.卽若 f 爲任意 L 函數吾人能決定一 k 使 $f\prec e_k x$. 又若 f 爲任意 L 函數亦趨向於無窮大者,吾人能決定一 k 使 $f\succ l_k x$.

更明言之則有下列兩定理.

定理 14. 一 n 階之'L 函數'不能滿足於

$$f_n \succ e_n(x^{\Delta}).$$

定理 15. 一 n 階之'L 函數'不能滿足於

$$1\prec f_n \prec (l_n x)^{\delta}.$$

證明定理14甚易,建立一由 $n-1$ 至 n 之歸納,結論甚屬明瞭.

n 階之任一函數乃某幾個引數 $e\Phi_{n-1},\cdots\cdots l\psi_{n-1},\cdots\cdots,\chi_{n-1},\cdots\cdots$ 之代數函數.其中任一之增大於 K 之某値假設係小於

$$e(e_{n-1}x^{K})=e_n(x^{K})$$

者,因而此函數之增大於 K 與 K_1 之某値係比,

$$(e_n x^{K})^{K_1}$$

* Gaursat, 1(1), 81,94; Hardy, 2, 192; Young, 1.

之增大小.所以於 K_2 之某值比 $e_n(x^{K_2})$ 之增大小.故此定理成立.

定理15之證明雖其原理並不特別困難而載於此殊嫌其過於冗長.* 此包乃含更精確之定理,卽

定理16. 若 f 爲一 n 階之'L 函數',而

$$1 \prec f \prec (l_{n-1}x)^{\delta},$$

則

$$f \asymp (l_n x)^{h},$$

但此處之 h 爲有理.

3.5. 設 f 與 Φ 爲隨 x 而趨向於無窮大之任兩'L 函數'. 設 α 爲任意正數,則 f 與 Φ 間必保持

$$f \succ \Phi^{\alpha}, \quad f \asymp \Phi^{\alpha}, \quad f \prec \Phi^{\alpha}$$

三關係之一;而第二至多只能在 α 之一值成立.至於第一若於任一 α 成,立則於小於 α 之任何值亦成立;而第三若於任一 α 成立,則於大於 α 之任何值亦成立.

如此則有三事可能.或第一關係於每 α 皆成立;則

$$f \succ \Phi^{\Delta}.$$

或第三關係於每 α 皆成立;則

$$f \prec \Phi^{\delta}.$$

或於 α 之某値保持第一關係於 α 之他値保持第三關係,則 α 有一 a 値分 α 爲兩類,而吾人可書

$$f = \Phi^{a} f_1;$$

* 充分之證明可於Hardy, p. 65—72 求之.

但此處 $\Phi^{-\delta} \prec f_1 \prec \Phi^{\delta}$. 吾人求得此結果在下文甚爲有用.

3.6. 所設定階數之 L 函數稍加修改可以分類更爲精密.如此吾人得

定理 17. 一階之'L 函數',隨 x 而趨向於無窮大者爲

$$e^{Ax^s(1+\varepsilon)}, \qquad Ax^s(\log x)^t(1+\varepsilon),$$

諸形之一;但其中之 s 與 t 爲有理.

定理 18. 二階之'L 函數隨 x 而趨向於無窮大者爲

$$e^{e^{Ax^s(1+\varepsilon)}}, \quad e^{Ax^s(lx)^t(1+\varepsilon)}, \quad x^s e^{A(x)^t(1+\varepsilon)}, \quad Ax^s(lx)^t(l_2x)^{\mu}(1+\varepsilon)$$

諸形之一,但其中之 s 與 t 爲有理.

函數

$$e_2x, \quad l_2x, \quad x^x, \quad x^{\sqrt{2}}, \quad e^{\sqrt{(lx)}}$$

每個之增大與定理17中者有別.此等不能表爲低於 2 階之'L 函數'. 同樣 l_3x, $(lx)^{\sqrt{2}}$, 或 $e^{\sqrt{(l_2x)}}$ 不能表爲低於 3 階之'L 函數'. 無 1 階之 L 函數能滿足於

$$x^{\Delta} \prec f \prec e^{x^{\delta}},$$

無 2 階之 L 函數能滿足於

$$e^{x^{\Delta}} \prec f \prec e_2 x^{\delta}, \qquad e^{(lx)^{\Delta}} \prec\prec f e^{x^{\delta}}.$$

讀者如欲求此趨定理之詳細證明可參觀著者之他文.*

IV. 與對數指數尺度關聯之特殊問題

4.1. 函數 $e_r(l_s x)^{\mu}$. a 無論爲如何的大, b 無論爲如何

---

* Hardy, 9.

的小,而 x^c 之增大乃小於 e^x 之增大,今吾人以

$$(4.11)\qquad x^\Delta \prec e^{x^\delta}$$

表此事實.

設吾人企圖求函數 f 使如

$$(4.12)\qquad x^\Delta \prec f \prec e^{x^\delta}.$$

若 $\Phi_1 \succ \Phi_2$, 則 $e^{\Phi_1} \succ e^{\Phi_2}$. 如此若

$$\log x \prec \log f \prec x^\delta,$$

則(4.12)確可滿足.因此設

$$f = e^{(\log x)^\beta} \qquad (\beta > 1).$$

而吾人之問題之解遂得之矣.同様吾人能證明

$$f = e^{(\log x)^\alpha} \qquad (o < \alpha < 1)$$

滿足於 $$(\log x)^\Delta \prec f \prec x^\delta.$$

若書 $$e_0 x \equiv l_0 x \equiv x;$$

甚便, α 爲小於 1 之正數, β 爲大於 1 之正數,而 γ 爲任何正數;則得

$$(4.13)\qquad e_0(l_1x)^\gamma \prec e_1(l_1x)^\alpha \prec e_0(l_0x)^\gamma \prec e_1(l_1x)^\beta \prec e_1(l_0x)^\gamma.$$

今吾人試考函數

$$f = e_\gamma(l_s x)^\mu, \qquad f' = e_{\gamma'}(l_{s'} x)^{\mu'},$$

其中之 μ, μ' 爲正而不等於 1. 若 $\gamma = \gamma'$, 則 $f \succ f'$, 或 $f \prec f'$ 依 $s < s'$, 或 $s > s'$ 而定.若 $s = s'$, 則依 $\gamma > \gamma'$ 或 $\gamma < \gamma'$ 而定.若 $\gamma = \gamma'$, $s = s'$ 則 $f \succ f'$ 或 $f \prec f'$ 依 $\mu > \mu'$ 或 $\mu < \mu'$ 而定.此外設 $s > s'$, $s - s' = \sigma > o$. 令

$l_{s'}\,x=y$, 吾人得

$$f=e_{\gamma}(l_{\sigma}y)^{\mu},\quad f'=e_{\gamma'}y^{\mu'}.$$

若 $\gamma\leqq\gamma'$. 則 $f\prec\Phi$ 矣甚明.若 $\gamma>\gamma'$, 設 $\gamma-\gamma'=\varrho$; 則

$$l_{\gamma}f=(l_{\sigma}y)^{\mu},\quad l_{\gamma}f'=l_{\varrho}y^{\mu'}\asymp l_{\varrho}y.$$

若 $\varrho>1$, 記號 $\asymp$ 可以 $\sim$ 代之,若 $\sigma>f$, $l_{\gamma}f<l_{\gamma}f'$ 所以 $f\prec f'$. 若 $\sigma<\varrho$, 則 $f\succ f'$. 若 $\sigma=\varrho$, 則 $f\succ f'$ 或 $f\prec f'$ 依 $\mu>1$ 或 $\mu<1$ 而定.如此則

$$f\succ f'(\gamma-s>\gamma'-s')\quad f\prec f'(\gamma-s<\gamma'-s'),$$

而若 $\gamma-s=\gamma'-s'$ 則 $f\succ f'$ 或 $f\prec f'$ 依 $\mu>1$ 或 $\mu<1$ 而定. μ 乃在 f 或 f' 中高階對數之指數.

由此即得

$$\cdots\cdots e_1(l_2x)^{\alpha}\prec e_0(l_1x)^{\gamma}=(lx)^{\gamma}\prec e_1(l_2x)^{\beta}\prec e_2(l_3x)^{\beta}\prec\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\prec e_2(l_2x)^{\alpha}\prec e_1(l_1x)^{\alpha}\prec e_0(l_0x)^{\gamma}=x^{\gamma}\prec e_1(l_1x)^{\beta}\prec\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\prec e_3(l_2x)^{\alpha}\prec e_2(l_1x)^{\alpha}\prec e_1(l_0x)^{\gamma}=ex^{\gamma}\prec e_2(l_1x)^{\beta}\prec\cdots\cdots.$$

此等關係,使吾人在其中插入任若干項者可名之曰無窮大之基本對數指數階級.即 $(l_kx)^{\gamma}$, x^{γ}, e_kx^{γ}.如此則

$$e^{(lx)^{\beta}},\quad e^{e^{(llx)^{\beta}}},\ \cdots\cdots\cdots(\beta>1),$$

及

$$e^{e^{(lx)^{\alpha}}},\quad e^{e^{e^{(llx)^{\alpha}}}}\ \cdots\cdots\cdots(o<\alpha<1),$$

爲兩尺度,第一由 x^{γ} 上升,第二由 ex^{γ} 下降,而决不包含.

此等尺度及能插入於其他兩基本對數指數階級間者之類似尺度,倘有另一有有趣之性質.如上書之兩尺度但凡關於'L 函數'皆在 x^{γ} 與 ex^{γ} 全區間之中.此即謂滿足於

$$f \succ e_\gamma (l_\gamma x)^\beta \qquad (一切之\ \gamma)$$

$$f \prec e_{\gamma+1} (l_\gamma x)^\alpha \qquad (一切之\ \gamma)$$

之 L 函數 f 爲不可能.而在 $(l_{k+1}\,x)^\gamma$ 與 $(l_k\,x)^\gamma$, 或 $e_k\,x^\gamma$ 與 $e_{k+1}\,x^\gamma$ 之間之對應之兩尺度有同樣之性質.此性質類似於尺度 $(l_\gamma x)$, $(e_\gamma x)$, 所賦之性質(定理14與15); 卽無有 L 函數能滿足於一切 γ 之 $f \succ e_\gamma x$ 或 $1 \prec f \prec l_\gamma x$ 者,此等討論又歸於前定理矣.其形式之證明可參照 Hardy, 9.

4.21. 對於對數指數之繼續近似值. 試考下列函數

$$f = \sqrt{x}(lx)^2 e^{\sqrt{(lx)}(l_2 x)^2 e^{\sqrt{(l_2 x)(l_3 x)^2}}}$$

若省略 f 之式中之一部分或幾部分,則得其他之函數該函數之增大與 f 之增大,相差頗大或小.但何部分爲最大,何部分爲最小,乃此問題重要之事.卽省略何部分其影響於 f 之增大爲最多或最少.

取對數則得

$$lf = \tfrac{1}{2}lx + \sqrt{(lx)}(l_2 x)^2 e^{\sqrt{(l_2 x)(l_3 x)^2}} + 2l_2 x, \tag{4.211}$$

此三項乃排列於重要階中.再

$$l_2 f = l_2 x - l_2 + \varepsilon, \qquad l_3 f = l_3 x + \varepsilon.$$

若吾人省略此等方程式中之 ε, 導出近似値

$$(1)\quad f = x, \qquad (2)\quad f = \sqrt{x}.$$

省略方程式 (4.211) 中之最後一項則得甚爲接近之近似値

$$(6)\qquad f=\sqrt{x}\,e^{\sqrt{(lx)}(l_2x)^2 e^{\sqrt{(l_2x)}(l_3x)^2}}$$

若欲求得一列完備之近以値,則吾人必以一列近似方程式代方程式 (4.211). 今若

$$\Phi=\sqrt{(lx)}(l_2x)^2 e^{\sqrt{(l_2x)}(l_3x)^2}$$

則

$$l\Phi=\tfrac{1}{2}l_2x+\sqrt{(l_2x)}(l_3x)^2+2l_3x,$$

$$l_2\Phi=l_3x-l2+\varepsilon,\qquad l_3\Phi=l_4x+\varepsilon.$$

因而得 (0) $\Phi=lx$, (3) $\Phi=\sqrt{(lx)}$, 及 (5) $\Phi=\sqrt{(lx)}\,e^{\sqrt{(l_2x)}(l_3x)^2}$ 近似於 Φ 之增大.此等增大雖第一式無甚價値,而依然使 Φ 超過 (4.211) 右邊之第一項.

同樣論證應用於函數 $e^{\sqrt{(l_2x)}(l_3x)^2}$,使吾人在(3)與(5)間插入(4) $\Phi=\sqrt{(lx)}\,e^{\sqrt{(l_2x)}}$. 今以此等對於 Φ 之近似値代入(4.211)中能導得對於 f 之增大之漸漸接近之一完全一系近似値.卽

$$(1)\ x,\quad (2)\ \sqrt{x},\quad (3)\ \sqrt{x}\,e^{\sqrt{(lx)}}\quad (4)\ \sqrt{x}\,e^{\sqrt{(lx)}e^{\sqrt{(l_2x)}}},$$

$$(5)\ \sqrt{x}\,e^{\sqrt{(lx)}e^{\sqrt{(l_2x)}(l_3x)^2}},\qquad (6)\ \sqrt{x}\,e^{\sqrt{(lx)}(l_2x)^2 e^{\sqrt{(l_2x)}(l_3x)^2}}.$$

此階對應於 f 式中各部分之重要之階.

4.22. 對於對數指數函數近似値之純正形式與不純正形式. 此定理之應用如在整函數之理論中,吾人將繼續遇見如下之方程式.

$$(4.221)\qquad f=(1+\varepsilon)e^{x^{\alpha}},\quad f=e^{(1+\varepsilon)x^{\alpha}}\quad f=e^{x^{\alpha+\varepsilon}}\qquad (\alpha>0).$$

對于 f 之如斯表示之確度有明晰觀念,殊爲重要.其最簡

法如在§4.21各取對數.

在第一例 ε 項不影響於 f 之增大:吾人有 $f \sim ex^{\alpha}$. 此在第二爲不真;但 $lf \sim x^{\alpha}$, 所以 ε 項不影響於 lf 之增大,而第三爲不真,然 $llf \sim \alpha$. 此三公式作成 f 之增大,以第一式爲最大第三式爲最小.

如公式

$$f = xe^{(1+\varepsilon)x^{\alpha}}$$

乃近似較之不純正之形,因因數 $e(\varepsilon x^{\alpha})$ 比較正確因數 x 更爲重要.而(4.222)比較(4.221)之第二式並無更多之知識也.

4.3 以記號表示無窮大之階之企圖. 以記號表示無窮大之階級,之簡單之法之嘗試,乃自然之要求.使用此等記號自以儘其可能的仿效通常代數之法則爲便.如 Thomae* 曾提出以

$$of = \alpha + \alpha_1 l + \alpha_2 l_2 + \cdots\cdots\cdots \quad +$$

表示 $f = x^{\alpha}(lx)^{\alpha}(l_2x)^{\alpha_2}\cdots\cdots$ 之無窮大之階,但上式中之 $l_1, l_2, \cdots\cdots$ 視如新單位.此等單位在其彼此間之關係不能服從 Archinedes氏之公理‡甚明蓋 n 雖大而 nl_2 不能如 l_1 之 k. 而 nl 又不如1之大也.

取少數簡單之例,卽足以說明如斯之記號.若其有益須

---

* Thomae, I, 144

\+ 記號 O 之此種用法(此只能在本節)讀者切勿與§1.5所釋者混殽.

‡ '若 $x > y > o$, 吾人能求得一整數 n 使 $ny > x$'.

服從下列法則

$$\text{(i)}\quad 若\quad f \succ \Phi,\qquad O(f+\Phi)=Of;$$

$$\text{(ii)}\qquad O(f\Phi)=Of+O\Phi;$$

$$\text{(iii)}\qquad O\left\{f(\Phi)\right\}=Of\times O\Phi.$$

而 Pincherle[*] 曾指出此等法則與通常代數之法則不能保持一致.如若

$$Ox=1,\qquad Olx=\lambda$$

則依 (iii) $Ollx=\lambda^2$, 又依 (iii) 與 (ii)

$$Ol(xlx)=\lambda(1+\lambda)=\lambda+\lambda^2;$$

而他方面依 (i) $\quad Ol(xlx)=O(lx+llx)=\lambda.$

Pincherle 曾暗示另一系統記號;但作成最善者為 Borl[†]. Borl 保全此 (i), (ii) (iii), 以及加法之交換法則,乘法之結合法則.但乘法無交換法則,而配分法則只在一例.[‡].

彼以 $\qquad w+n,\quad n+\frac{2}{w},\quad 2\cdot w,\quad w\cdot 2,\quad w^2,\quad w\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{w},\quad \frac{1}{w}\cdot\frac{1}{2}\cdot w$

表 $\qquad e^x x^n,\quad x^n(lx)^p,\quad e^{2x},\quad e^{x^2},\quad e^{e^x},\quad e^{\sqrt{lx}},\quad \frac{1}{2}x,$

之階級.惟雖發現如此系統之記號,但亦少應用.而此等事體之表現吾嘗謂為數學中奇巧之性質也.

4.41. **不遵任何對數指數尺度之函數.**在 §1.2 中曾見設有如 $\Phi\succ\psi$ 之兩增函數 Φ 與 ψ, 吾人常能作得一增函數

---

[*] Pincherle, 1, [†] Borel, 4,35 及 5, 14.

[‡] $(a+b)c=ac+bc$. 但一般 $a(b+c)\neq ab+ac$.

f 於 x 增加於一切極限外之無窮大值如 Φ 之階級,而於 x 之其他無窮大值如 ψ 之階級.以顯式表如斯函數之確實作法稍待再述.今將就 Φ 與 ψ 爲 L 函數之特殊情形之時作一詳細之考慮.

若吾人能求得兩 L 函數 Φ 與 ψ $(\Phi \succ \psi)$ 使如

$$f \geqq \Phi\ (x = x_1, x_2 \cdots\cdots) \qquad f \leqq \psi\ (x = x'_1, x'_2 \cdots\cdots)$$

$x_1, x_2 \cdots$ 與 $x'_1, x'_2, \cdots$ 爲 x 之值之任兩無定限之增敍列者之 f, 謂爲不規則增函數 (iregularly increasing function, fonction à croissance irréguliére). 吾人亦謂爲'f 之增大爲不規則的,' 而對數指數函數尺度不適用於 f'.

'fonction a croissance irrèguliѐre' 一熟語各著作家曾定義爲各種之意義.Borel*之定義乃:若

$$e^{x^{\alpha-\delta}} < f < e^{x^{\alpha+\delta}} \qquad (x > x_0)$$

換言之若 $llf \asymp lx$ 則 f 爲 à croissance règuliére.

此定義自然係整函數理論之特殊需要, Boutroux 與 Lindelöf+ 作得更爲精密,彼等係用下形之不等式.

$$e^{x^{\alpha}(lx)^{\alpha}\cdots(l_k x)^{\alpha_k-\delta}} < f < e^{x^{\alpha}(lx)^{\alpha_1}\cdots(l_k x)^{\alpha_k+\delta}}.$$

凡非 à croissance réguliere 之函數此等作者皆以之包含於吾人不規則增函數之類中.

4.42.　對數指數尺度對於函數增量之完全計量其失

* Borel. 2, 108.　　+ Boutroux, 1; Lindelöf, 2. 又參觀 Blumenthal, 1,7.

效有兩道.函數爲不規則增大如上所解釋者,此尺度不適用(inapplicable); 他方面並非不適用乃不足用 (insufficent, en défant). 此卽謂,雖函數之增大非由此'L函數'振動至他L函數,亦可以有L函數不能量之者.如斯函數之存在由§3.4之一般定理卽可知之.如吾人能定義一函數其趨向於無窮大比任何$e_r x$爲速,或比任何$l_r x$爲慢.而如斯函數之增大係比任何L函數或過速或過慢.再(§2.5)吾人能定義一函數其增大於每r皆比$e_r(l_r x)^\beta$之增大爲大,或比$e_{r+1}(l_r x)^\alpha$之增大爲小,但$o<\alpha<1<\beta$; 而由§4.1如斯函數之增大不能等於任何L函數.

今吾人將討論對數指數尺度不適用或不足用之函數之某確切之例.

4.43.　不規則增函數.函數之不規則增加者可以種種不同之法作得.

(i) Pringsheim* 曾用一其增大不規則者之整變數n之函數,此乃有關於級數收斂之理論.如斯函數簡單之例爲

$$f(n)=10^{[(\log_{10}n)^{1/\tau}]^7}\qquad(\tau>1)$$

此處之$[x]$乃表示x之整數部分.此易檢證例如$\nu=2$時$f(n)$之增大在n與$n.10^{-2\sqrt{(\log_{10}n)}}$之兩增大間變化.

(ii)　一最自然之形之函數設如

$$f=\Phi\cos^2\theta+\psi\sin^2\theta,$$

* Pringsheim 5 及 1, 373.

其中之 Φ, ψ, θ 乃增 L 函數而又 $\Phi \succ \psi \succ 1$ 者.今吾人試考 f 恆隨 x 而增大之時, Φ, ψ, θ 必須滿足之條件爲何?此其增大在 Φ 與 ψ 之增大間振動,甚爲顯然。

微分之,得

$$f' = \Phi' \cos^2\theta + \psi' \sin^2\theta + 2(\psi - \Phi)\theta' \cos\theta \sin\theta.$$

今假定 L 函數間之關係含有符號 $\succ$,… 者可以微分與積分(此將在次章證明之). f' 常爲正之條件爲

$$\Phi'\psi' > (\Phi - \psi)^2 \theta'^2,$$

或 $\Phi'\psi' > \Phi^2\theta'^2$. 因 $\Phi' \succ \psi'$, 此包含 $\Phi' \succ \Phi\theta'$, 或 $\log\Phi \succ \theta$; 若

$$\log\Phi \succ \theta, \qquad \psi' \succ \Phi^2\theta'^2/\Phi',$$

則 f 確爲單調的.此等條件爲滿足,例如若 $\Phi = x^{\alpha} e^{x^{\beta}}$, $\psi = x^{\beta} e^{x^{\beta}}$, $\theta = x$, 而 $\alpha - 2\varrho + 2 < \beta < \alpha$. 稍變吾人之記號可見若 $o < \delta < \varrho - 1$. 則

$$f = (x^{\gamma+\delta}\cos^2 x + x^{\gamma-\delta}\sin^2 x)e^{x^{\beta}}$$

爲單調的;而 f 之增大在 $x^{\gamma+\delta} e^{x^{\varrho}}$ 與 $x^{\gamma-\delta} e^{x^{\varrho}}$.之增大間振動.同樣可證明若 $\nu < \mu < \nu + 2$ 則

$$f = (e^{\mu x}\cos^2 x + e^{\nu x}\sin^2 x)e^{e^{x}}$$

爲單調的,*而 f 之增大爲不規則的.

(iii) Borel† 曾證明以冪級數之意,吾人可定義恆隨 x 而增大之函數,而其增大乃在任意範圍之間振動.

設　　$\Phi(x) = \Sigma a_n x^n, \qquad \psi(x) = \Sigma b_n x^n$

* Hardy. 3(1).

† Borel, 2,120 及 4,32. Borel 僅於 $\psi = e^x$, $\Phi = e^{x^2}$ 或 $e_2 x$ 考慮,但此法乃一般的,甚爲顯然.此證明實較一般簡單.

爲有正係數之兩 x 之整函數. Φ 與 ψ 之增大可以大至於隨吾人之意(§2.32, 定理 2). 設 $\Phi\succ\psi\succ x^{\Delta}$, 則吾人能定義一函數

$$f(x)=\Sigma c_n x^n,$$

其中之每 c_n 乃等於 a_n, 或 b_n, 如是則於其極限爲無窮大值之 x_ν 於 x_ν 無窮之值 $f\sim\Phi$, 同樣於 x'_ν 無窮之值 $f\sim\psi$.*

設 (η_ν) 爲其極限爲零之正數之降敍列. 取一正數 x_0 使如 $\Phi(x_0)>1$, $\psi(x_0)>1$, 而 x_1 之爲數乃大於 x_0. 當 x_1 固定之時, 吾人能選擇 n_1 使

$$\sum_{n_1}^{\infty} a_n x_1^n<\tfrac{1}{3}\eta_1, \qquad \sum_{n_1}^{\infty} b_n x_1^n<\tfrac{1}{3}\eta_1,$$

雖 c_n 於 n 之種種相異之值選得, 而如此亦

$$\sum_{n_1}^{\infty} c_n x_1^n<\sum_{n_1}^{\infty}(a_n+b_n)x_1^n<\tfrac{2}{3}\eta_1.$$

於 $0\leqq n<n_1$ 時取 $c_n=a_n$ 則

$$|f(x_1)-\Phi(x_1)|<\sum_{n_1}^{\infty}(a_n+c_n)x_1^n<\eta_1,$$

因 $\Phi(x_1)>1$ 所以

$$\left|\frac{f(x_1)}{\Phi(x_1)}-1\right|<\eta_1$$

今設 x_2 爲大於 x_1 之第二數; 吾人能選擇 x_2 使如

$$\left(\sum_{0}^{n_1-1} a_n x_2^n\right)\Big/\psi(x_2)>\tfrac{1}{5}\eta_2, \quad \left(\sum_{0}^{n_1-1} b_n x_2^n\right)\Big/\psi(x_2)<\tfrac{1}{5}\eta_2.$$

---

* 於 x_ν 無窮之值 $f\sim\Phi$ 乃 x 過此一列特殊之值而必 $x\to\infty$ 時 $f/\Phi\to1$ 之意.

x_2 為固定之時吾選擇大於 n_1 之 n_2，使如

$$\sum_{n_2}^{\infty} a_n x_2 < \tfrac{1}{5}\eta_2, \qquad \sum_{n_2}^{\infty} b_n x_2^n < \tfrac{1}{5}\eta_2.$$

吾人於 $n_1 \leqq n < n_2$ 時取 $c_n = b_n$；雖 c_n 於 $n \geqq n_2$ 可以選擇，亦得

$$\sum_{n_2}^{\infty} c_n x_2^n < \sum_{n_2}^{\infty}(a_n + b_n)x_2^n > \tfrac{2}{5}\eta_2.$$

又
$$|f(x_2)-\psi(x_2)| < \sum_{0}^{n_1-1} a_n x_2^n + \sum_{0}^{n_1-1} b_n x_2^n + \sum_{n_2}^{\infty} c_n x_2^n + \sum_{n_2}^{\infty} b_n x_2^n$$

$$< \tfrac{2}{5}\eta_2\psi(x_2) + \tfrac{2}{5}\eta_2 < \eta_2\psi(x_2)$$

所以
$$\left|\frac{f(x_2)}{\psi(x_2)} - 1\right| < \eta_2.$$

將此法反覆行之，易見能求得一敍列 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ 其極限為無窮大，而如

$$\left|\frac{f(x_3)}{\Phi(x_3)} - 1\right| < \eta_3, \qquad \left|\frac{f(x_4)}{\psi(x_4)} - 1\right| < \eta_4, \cdots\cdots\cdots$$

而吾人之結論遂得之矣.

吾人須注意不僅 f 之自身為遞增而連續，其所有之導函數皆然.又若設有有整係數之函數 $\Phi_1, \Phi_2, \cdots\cdots, \Phi_k$，吾人能定義 f 使於 x 經過一列適當選擇之值而又 $x \to \infty$ 時 $f \sim \Phi_s$，函於數 Φ_s 之各函數皆然，此亦易見者也.

以冪級數之意作不規則之增函數尚另有有趣之法將 §6.34 中解說之.

4.44. 超過對數指數尺度之函數. 吾人今轉而論非對數指數尺度不適用而僅不足用之函數 (§4.42). 如斯函數之存在業已確定.如一函數假定於 $x=1, 2, \cdots, \nu \cdots$ 時之值為

$e_1(1)$, $e_2(2)$, ……, $e_\nu(\nu)$, …… 實有一增大比任何對數指數函數之增大爲大.

(i)　級數　$\Sigma \frac{e_k(x)}{e_\nu(\nu)}$

若於 x 之一切値爲收斂,其和設爲 $f(x)$ 則 $f(x)$ 之增大比任何 $e_\nu(x)$ 之增大爲大明矣.設 $k-1 \leqq x < k$. 則

$$\frac{e_k(x)}{e_k(k)}<1, \qquad \frac{e_{k+\nu}(x)}{e_{k+\nu}(k+\nu)}<\frac{e_{k+\nu}(k)}{e_{k+\nu}(k+\nu)}<\frac{e_{k+\nu}(k)}{e_{k+\nu}(k+1)} \qquad (\nu\geqq 1).$$

但依中値定理,

$$e_{k+\nu}(+1)=e_{k+\nu}(k)+e_{k+\nu}(y)e_{k+\nu-1}(y)\cdots\cdots e_2(y)e_1(y).$$

其中之 y 乃在 k 與 $k+1$ 間之數;所以

$$e_{k+\nu}(k+1)>e_{k+\nu}(k)e_{k+\nu-1}(k)\cdots\cdots e_1(k).$$

因級數

$$\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{e_\nu(x)}{e_\nu(\nu)}$$

之項比級數

$$1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{e_1(k)e_2(k)\cdots\cdots e_{k+\nu-1}(k)}$$

之項小,而此爲收斂也甚明,故原級數爲收斂.吾人以此法作得如此種需要之若干個函數 $f(x)$ 甚爲顯然.

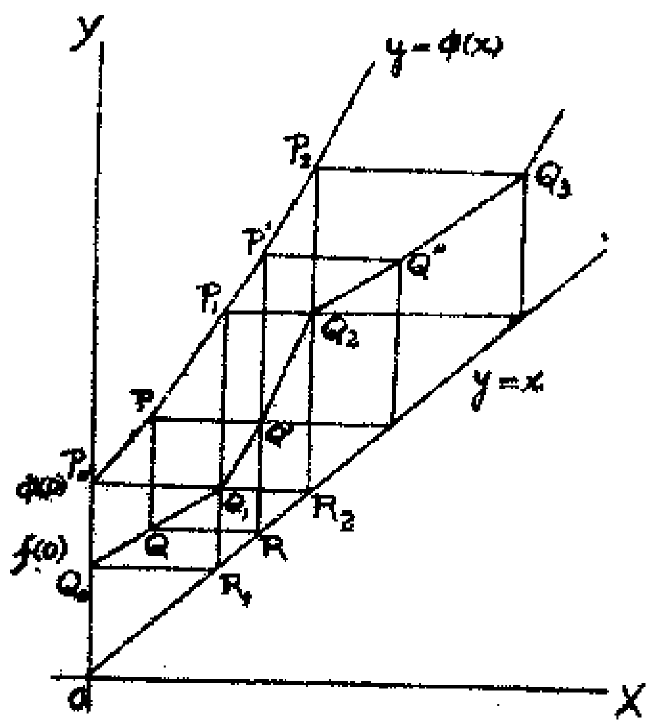
(ii) 設 (Φx) 爲如 $\Phi(o)>o, \Phi>x$ 之一增函數,吾人能定義一增函數 f, 使其滿足於方程式

$$f_2 x=f\left\{f(x)\right\}=\Phi(x)$$

如下.

引曲綫 $y=x$, $y=\Phi(x)$ (第 5 圖) 在 OP_o 上任意取 Q_o; 引 Q_oR_1

平行於Ox而完成矩形Q_oQ_1.以無論何處皆與軸成銳角之任意連續曲綫聯Q_oQ_1.在此曲綫任取一點Q;引QP, QR平行於軸,而完成其矩形QQ'.當Q由Q_o移至Q_1之時,Q'由Q_1移至Q_2;因吾人作由Q至Q',所以能作由Q'至Q''.如斯進行,吾人遂定義一連續曲綫$Q_oQ_1Q_2Q_3\cdots\cdots$對應於連續增函數$f(x)$.則$f(x)$滿足於(4.441).因若$y=f(x)$爲Q之縱坐標,而$f_2(x)$爲Q'之縱坐標,Q'乃等於$\Phi(x)$卽P之縱坐標.



第五圖

設吾人書$f(x)=f_1(x)$,而$f\left\{f_n(x)\right\}=f_{n+1}(x)$,如此則$Q_n$爲$f_n(o)$, $f_{n+1}(o)$之點.更設ψ爲Φ之反函數,而$\psi(x)=\psi_1(x)$, $\psi\left\{\psi(x)\right\}=\psi_2(x),\cdots$; 又設$Q_oQ_1$之方程式爲$\theta(x,y)=o$.則易見$Q_{2n}Q_{2n+1}$及$Q_{2n+1}Q_{2n+2}$之方程式各爲

$$\theta\left\{\psi_n(x),\ \psi_n(y)\right\}=o,\qquad \text{及} \qquad \theta\left\{\psi_{n+1}(y),\ \psi_n(y)\right\}=o.$$

例如設$\Phi(x)=e^x$, $OQ_2=\frac{1}{2}$,而Q_oQ爲直綫$y=\frac{1}{2}+x$.則$Q_{2n}Q_{2n+1}$與$Q_{2n+1}Q_{2n+2}$之方程式爲

$$l_ny=\tfrac{1}{2}+l_nx,\qquad l_nx=\tfrac{1}{2}+l_{n+1}y,$$

或

$$y=e_{n-1}\left\{\sqrt{e}(l_{n-1}x)\right\}=e_{n-2}\left\{(l_{n-2}x)^{\sqrt{e}}\right\}=\lambda_n(x),$$

及 $$y=e_n\left\{(l_{n-1}x)/\sqrt{e}\right\}=e_{n-1}\left\{(l_{n-2}x)^{1/\sqrt{e}}\right\}=\mu_n(x), \qquad \text{(令爲)}$$

令 (§4.1)

$$x^\gamma \prec \lambda_3 \prec \cdots \prec \lambda_n \prec \cdots \prec \mu_n \prec \cdots \prec \mu_3 \prec e^{x^\gamma},$$

而 f 乃於 n 之一切値如 $\lambda_n \prec f \prec \mu_n$ 之關係之函數係超過於對數指數尺度.吾人以上之 f 明明卽一例也.*

此易檢證於 n 之一切値 $\lambda_n\lambda_n x \prec e^x$ 及 $\mu_n\mu_n x \succ e^x$. 因而可推知(1)之任何增解於 n 之一切値必滿足於 $\lambda_n \prec f \prec \mu_n$.

此種圖解之法可用以定義其增大比任何對數之增大爲慢或比任何指數之增大爲速之函數.例如能用以解方程式

$$\Phi(2^x)=2\Phi(x);$$

而此易證明如 $\Phi(2^x)\asymp\Phi(x)$ 之一函數其增大比任何對數爲慢.

5.4. 對數指數尺度之重要.吾人曾見能以種種之法作得其增大不能以任何 L 函數測得之函數.但增大之方式純粹不賴於一切對數指數方式而作得者尙無人成功也.吾人不規則之增函數係依振幅之對數指數法則在兩對數指數函數間振動.而 §4.44 (ii) 之函數乃補充兩對數指數尺度間之罅隙而作成之者也.在解析中無有函數其增大之法則不藉對數指數之辭而能敍述者.

惟此當除去在數論中所遇之算術的函數 (Arithmetical

---

* 欲再詳釋可參觀 Hardy 9.

function)而言,蓋該函數之增大屬於巧妙之一新方式;但於解析中所有者則另取其他途徑耳.可參照.§6.26.

由代數有理函數到自形函數

華　羅　庚

I.

研究算學的人,往往推廣古人所有的學理而普徧之.使前者是後者某種情形下的特例,——也許不但算學是如此.——算學中從代數有理函數到自形函數 (Automorphic Functions), 就是一最美麗最有力的例證;其中一步一步的推廣,及一次一次困難的消除,都足以表出算學家的絕妙的模仿性,及偉大的思考力.不但成功的方面,可值得我們的贊賞和佩服;就是那不能推廣的方面,算學家也都掛起「此路不通」的牌子,使我們知所遵循.我現在將他的推廣和推不廣的各方面,都略加敍述.不過作者學識淺陋,尙希世之先進,指教,指教.又本篇非歷史的敍述,乃說明由代數有理函數到自形函數觀點的遞變.

II.

代數有理函數是沒有週期的半純單値 (Meromorphic) 函數,等到發現了三角函數之後,於是就知道一個函數是可以有一個實週期的;後來雙曲函數 (Hyperbolic Function) 及指數函數 (Exponential Function) 的發現,於是我們就知道週期

不僅是實數;就是虛數也可以.算學家見到這種奇異的現象,——週期——於是便發生了進一步的問題,就是"週期"可多於一個嗎?因此就有許多聰明的算學家,像亞柏爾(Abel)雅各比(Jacobi)等發明了橢圓函數.——就是有兩個週期的單値全純函數,其兩週期的比値非實數.[1]——不過算學家並不以此自滿,就開始研究是否有二個以上週期的單値函數存在;但是雅各比給牠一個負的答覆,說"三個以上週期的單値函數是不能存在的".[2] 推展到此,似乎已屆山窮水盡了.不過算學家並不以此自餒;當算學家與週期一種新意義時,那推廣的前途復重入光明,就是視有週期 ω, ω' 的函數 $f(z)$ 爲受變形

$$z' = z + m\omega + m'\omega' \qquad (m, m' \text{ 爲整數})$$

而不變的函數,但是上面的變形,是線性分式變形的一特種.最先達近這種觀念的,要算橢圓函數論中的絕對不變量[3](Absolute Invarient) $J(\tau)$ 的獲得.這函數是受 $\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ (a, b, c, d 是整數且 $ad - bc = 1$) 而不變的.今先將這函數的來原作一簡單的敍述:魏士特氏 (Weierstrass) 的 $\wp(u)$ 函數有二不變量 g_2, g_3

$$g_2 = 60 \Sigma' \frac{1}{(m\omega + m'\omega')^4} = \frac{1}{\omega^4} g_2(1, \tau), \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}.$$

$$g_3 = 40 \Sigma' \frac{1}{(m\omega + m'\omega')^6} = \frac{1}{\omega^6} g_3(1, \tau),$$

而

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}.$$

依橢圓函數的理論,[4]不僅 ω, ω' 可造成 g_2, g_3 另如 $a\omega+b\omega'$, $c\omega+d\omega'$, (若 a, b, c, d 爲整數,$ad-bc=1$)亦能造成同一的 $g_2\ g_3$, 所以上函數可受

$$\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

而不變.凡具有這性質的函數,就叫做模橢圓函數(Modular elliptic function); 更進一步就可定自形函數的義了.在述此定義之前,先分線性分式變形的羣爲三大類.(此羣俱爲有窮個基本元素所演成的).

1. 初等羣. 凡羣之爲有窮級,或有一個或二個不變點者.

2. 富克羣 (Fuchian Group). 凡羣中之變換,都有一公共不變圓者.

3. 克萊因羣 (Kleinian Group) 凡羣之不屬於上二類者.

這三者統名做自形羣(Automorphic Group). 凡函數之受初等羣不變者,名爲初等函數;[5]受富克羣不變者,名爲富克函數;受克萊因羣不變者,名爲克萊因函數;而總名爲自形函數.——這種分類,蓋自傍卡累[6](Poincare) 始.(此各函數俱爲單値函數.)

所以橢圓函數及三角函數是初等函數,因爲 $z'=z+m\omega+m'\omega'$, $z'=z+2m\pi$ 是有無窮遠點做軸的不變點.模橢圓函數是富克函數;因爲 $z'=\frac{az+b}{cz+d}$ 有實軸(Real Axis) 做軸的不變圓.

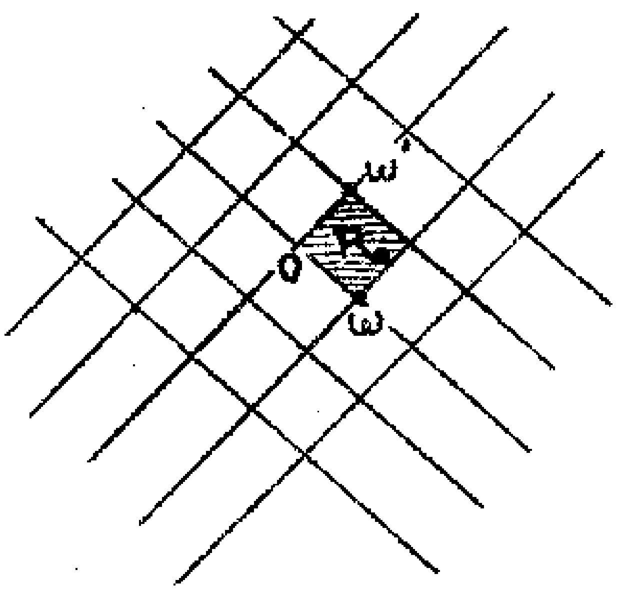
代數函數有是可受一有窮羣而不變的.尤須注意者,卽

自形函數不復一定是半純(Meromorphic),不過我們通常假定他沒有其他的本性異點(Esential Singular Points)舍那種是自形羣的本性異點外.

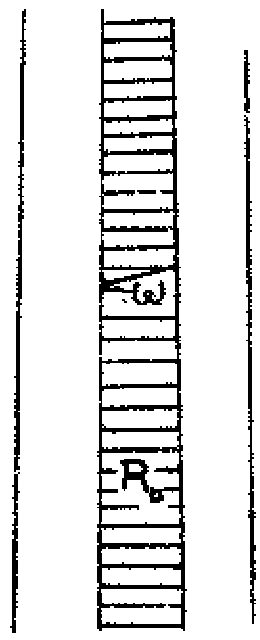
III.

基域之覓得

研究代數函數時取全平面,研究單週期函數時祇須在一長條中;(如圖)因爲當一長條中的情形研究好了之後,其



他諸長條中都是一樣了.研究橢圓函數則在一平行四邊形內;所以我們就發生了一個問題,就是研



究自動(Auto)函數是否仍有研究牠的一斑以窺全豹的方法在.因此就發生了所謂基域(Fundamental Region)之說了.牠的定義是:

平面上的某一部分,其中沒有二點可以所與羣的一變形換來換去,而其周界上各點可與域內或周界上之點換來換去,平面上的如此部分,就叫做基域.

基域是否常在呢?我可作以下的答復:就是基域不存在

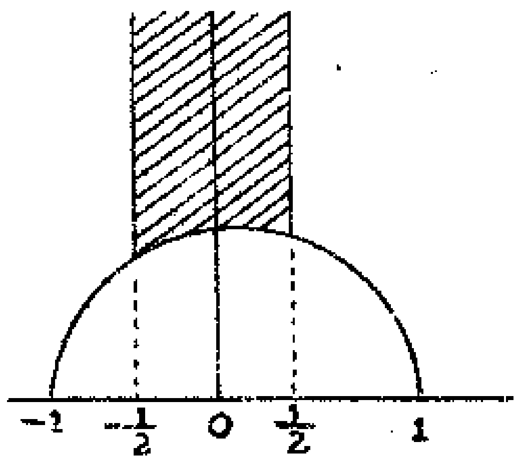
的羣無相應的自形函數存在,因爲旣說沒有基域,那就是說在平面上任一極小的範圍中,常有二點可以用羣內的一個變形變來變去,就是 $f(x+\varepsilon)=f\,x)$, ε 爲極小值,含常數外確沒有這種的單値函數,所以我們知道自形羣是不連續的. (Discontinuous).

我現在將模橢圓函數的基域述於下:

原點爲心, 1 爲半徑,作一圓,

作 $x=\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ 二直線那末在上半個平面

$$x^2+y^2\geqq 1,\quad \tfrac{1}{2}\geqq x\geqq -\tfrac{1}{2}$$



就是牠的基域,可證明牠如下:

若 $c=o$, $\because ad-bc=1$, $\therefore a=d=\pm 1$

就得 $z'=z+b$ 顯然將 R_0 中的點搬到 R_0 外來.

若 $c=+1$ 則 $z'-a=\dfrac{-1}{z+d}$

a, d. 是整數.在 R_0 內任意一點 z, $|z+d|$ 爲表此點到 $o,\pm 1,\pm 2,$ …的距離,故常大於 1,故

$$|z'-a|<1$$

就是表示 z' 與 $\pm 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 的距離小於 1,故 z' 不得不變到 R_0 以外來.

同樣可證明 $c=-1$ 時的情形.

若 $|c|>1$ 則 $z'-\dfrac{a}{c}=-\dfrac{1}{c^2}\cdot\dfrac{1}{z+\dfrac{d}{c}}$,

當 z 在 R_0 內則 $\left|z+\frac{d}{c}\right|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}\left|z'-\frac{a}{c}\right|\leqslant\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4},$$

$$\left|z'-\frac{a}{c}\right|\leqslant\frac{1}{z\sqrt{3}}<\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

就是 z' 與 x 軸上某點$\left(\frac{a}{c}\right)$的距離須小於 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.故亦搬出 R_0 外.

至於周界上則二直線互爲等質(Holomogue)($\because z'=z+1$)圓周的二相等部分互爲等質($\because z'=-\frac{1}{z}$) 故 R_0 爲基域.

又這羣是可以二基元素[8]

$$S: z'=z+1,\qquad z'=-\frac{1}{z}$$

演出牠來.

IV.

在代數有理函數中,若已知牠的零(Zeros) $a_1,\cdots\cdots,a_p$ 及其極(Poles) $b_1,\cdots\cdots,b_q$(可重複)則可表爲下形:

$$f(x)=A\frac{(x-a_1)\cdots\cdots\cdots(a-x_p)}{(x-b_1)\cdots\cdots\cdots(x-b_q)}.$$

(Decomposition into Factors)

又若已知其極 $a_1,\cdots\cdots,a_s$ (不可重複)及其主要部分(Principle Part)則可表爲

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2+x^2+\cdots\cdots\cdots+c_mx^m$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{A_{1,i}}{(x-a_i)}+\frac{A_{2,i}}{(x-a_i)^2}+\cdots\cdots+\frac{A_{k_i,i}}{(x-a_i)^{k_i}}\right]$$

(Decomposition into simple elements), 而 $\frac{1}{x-a_i}$ 爲 $\log(x-a_i)$ 之微係數.

在三角函數中,已知其極及零可表爲

$$f(x)=Ae^{mxi}\frac{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)}{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\cdots\cdots(x-b_p)}.$$

若已知其極之主要部分則可表爲

$$\begin{aligned}f(x)=&c_o+c_1e^{2xi}+c_2e^{4xi}+\cdots\cdots+c_me^{2mxi}\\&+c'_1e^{-2xi}+c'_2e^{-4xi}+\cdots\cdots+c_me^{-2mxi}\\&+2\Big[A_{1,i}\cot(x-a_i)+A_{2,i}\frac{d}{dx}\cot(x-a_i)+\cdots\cdots\\&+A_{k_i i}\frac{d^{k_i-1}}{dx^{k_i-1}}\frac{d^{k_i-1}}{dx^{k_i-1}}\cot(x-a_i)\Big],\end{aligned}$$

而 $\cot(x-a_i)$ 爲 $\log\sin(x-a_i)$ 之微係數。

在橢圓函數之雅各比之記法中,若已知其零或極,可表爲

$$f(x)=Ae^{ax}\frac{H(x-a_1)\cdots\cdots H(x-a_n)}{H(x-b_1)\cdots\cdots H(x-b_n)};$$

若已知其極之主要部分則可表作

$$f(x)=c_o+\Sigma[A_{1,i}Z(x-a_i)+\cdots\cdots+A_{k_i,i}\frac{d^{k_i-1}}{dx^{k_i-1}}Z(x-a_i)]$$

而 $Z(x-a_i)$ 等於 $\frac{d}{dx}\log H(x-a_i)$.

在魏士特氏之記法中尙有相似之式:

$$f(x)=A\frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\cdots\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\cdots\cdots\sigma(u-b_n-2\Omega)};$$

$(\Sigma a_i-\Sigma b_i=2\Omega)$ 及

$$\begin{aligned}f(x)=c+\sum_{i=1}^{k}[&A_{1,i}\xi(u-a_i)-A_{2,i}\xi'(u-a_i)+\cdots\cdots\\&+(-1)^{n_i-1}\frac{A_{n_i,i}}{(n_i-1)!}\xi^{(n_i-1)}(u-a_i)].\end{aligned}$$

$\Sigma A_{1,i}=o.$

由此可引起我們的注意,就是在自動函數中,是否還有同樣的方法,——就是先造成幾種僞自動函數,再拿牠來表任何之自動函數,——不過前途又發生困難了.因爲——就普徧說——自動羣的等質 (Homlogue) 點是可有不止一個的固有奇點,所以與 σ, H 函數相仿的函數是找不出來.即使就沒有固有奇性 (Essential Singularity). 我們也無從去找一數之來使級數 $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i)^a$ 之絕對收歛.【$a_1, a_2, \cdots\cdots a_i, \cdots\cdots$ 是全平面上在自動羣下的一組或幾組等質 (Holomorgue) 點】.

不過這種困難已爲傍卡累所解决,他造出一種狄達 (Theta) 函數(即通常所稱之 Poincare's Theta Function) 然後再從這狄達函數來造成一自動函數,我將牠略述於下:

假定該自動羣是

$$Z'_i=T_i(z)=\frac{a_iz+b_i}{c_iz+d_i}\qquad a_id_i-b_ic_i=1,$$

$$i=1,2,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

並用下之符號

$$Z_o=T(z_o)=z,\qquad Z_{i,j}=T_i(z_j)=T_iT_j(z),$$

$$z_{i,j,K}=T_iT_jT_K(z)$$

今先假定這羣是 n 級的有窮羣,$(i=o,\ 1,\cdots\cdots,m-1)$ 我們可取一有理代數式 $H(z)$ 作函數

$$\varphi(z)=H(z)+H(z_1)\cdots+H(Z_{m-1}).$$

這函數顯然受該自動羣而不變,所以是該羣的自動函數.

倘若所與的羣,不是有窮之級的,那末 $\varphi(z)$ 將變成一無

窮項的級數.這級數通常是不一定收歛的.傍卡累遇此困難後就導入一因子,使牠絕對收歛,經導入後,該函數的形式是;

$$\Theta(z)=\sum_{i=0}^{\infty}(c_i z+d_i)^{-2m}\ H(Z_i)$$

這就是所謂傍卡累的狄達級數了.不過注意這函數不再是一自動函數因爲當我們施一變形

$$\Theta(z_J)=\Sigma\left(c_i\frac{a_J z+b_J}{c_J z+d_J}+d_i\right)^{-2m}\quad H(z_{i,J})$$

$$=\Sigma\left[\frac{c_i a_J+d_i c_J+c_i b_J+d_i d_J}{c_J z+d_J}\right]^{-2m}\quad H(Z_{i,J}).$$

若有一適當的 m, 可使(1)絕對收歛,則我們可重排上式之各項而得

$$\Theta(z_J)=(c_J z+d_J)^{2m}\,\Theta(z).$$

在相當的環境之下,祇要 $m>1$ 就行了.傍卡累也依照羣的分類法而分出狄達富克函數及狄達克萊因函數兩種.

既得狄達函數我們就可進一步而研究如何用此函數表自動函數了;這方法是很容易的,祇須找有同一 m 同一羣的兩個狄達函數

$$F_1,\qquad F_2$$

那末 F_1/F_2 就是該羣的自動函數了.

此處有可注意者就是自動函數的微函數是狄達函數

V

又我們已知道若

$$\int_0^{w}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=u,$$

則

$$x=\sin u;\ \text{若}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=u,$$

則

$$x=\sin u;\ \text{若}$$

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=u,$$

則 $x=\wp(u+c)$. 所以我們就發生進一步的遐想,就是

$$u=\int_a^x \frac{dx}{y}$$

而 $y^2=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$. 若命 $y=0$ 時 x 無等根的反函數,

$$x=F(u)$$

是如何.不過我們已經知道當 n 大於 4 時,此積分有二個以上的週期,就是

$$x=F(u)$$

是一二個週期以上的函數.由雅各比的定理,可知此式一定非單值函數.

同時不但單值函數的性質的破壞,足以使這推廣失却掉牠的固有美.還有下面一個應用方面的缺點.就是我們普通已知三角函數(或代數有理函數)可表任何虧格(Genus)為零的代數曲線的二坐標.虧格為 1 的代數曲線的二坐標,可用一囊變數的橢圓函數表.但是當 $n>6$ 時就不能有相同的定理存在.他根本的原因,就是因為

$$y^2=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots+a_nx^n,\ (n=2m,\ \text{或}\ 2m-1)$$

祇有 $2m-3$ 個獨立模數 (Independent Moduli), 而普通虧格為

$m-1$ 的代數曲線,須有 $3m-6$ 個獨立模數.[9]

魏士特氏見此情形,於是就更放高些眼光一看,而發生了以下的問題:

"
$$u=\int F(x,y)\,dx.$$

而 $P(x,y)=o$, F 與 P 皆是有理代數函數,在何種情形之下,牠的反函數是一單值函數."[10]

他的答復是:

" $P(x,y)=o$ 祇能爲一虧格爲 o 或 1 的曲線,若是 o 時,猶須選擇適當的 $F(x,y)$,使此積分成爲亞柏爾的第二種或第三種積分,若是 1 時,猶須選擇適當的 F,使這積分是亞柏爾的第一種積分."

VI.

若已知 $R(u)$ 是代數函數,則從

$$x=R(u),\qquad y=R(v),\qquad z=R(u+v).$$

中消去 u, v 而得一有理代數式

$$P(x,y,z)=o.$$

若 $R(u)$ 是一單週期函數,(週期是 ω, 則 R 定可表爲 $\tan\frac{\pi u}{\omega}$ 的有理函數,而我們已知

$$\tan\frac{\pi(u+v)}{\omega}=\frac{\tan\frac{\pi u}{\omega}+\tan\frac{\pi v}{\omega}}{1-\tan\frac{\pi u}{\omega}\tan\frac{\pi v}{\omega}}.$$

所以我們從上式及

$$x=R(u),\qquad y=R(v),\qquad z=R(u+v)$$

中消去 $\tan\frac{\pi u}{\omega}$, $\tan\frac{\pi v}{\omega}$ 而得一有理式

$$P(x,y,z)=o$$

又若 $R(u)$ 是一橢圓函數,則 $R(u)=\frac{M+N\wp'u}{L}$

式中 $L. M. N$ 都是 $\wp(u)$ 的多項式.因

$$\wp'^2=\wp^3u-g_2\wp u-g_3$$

及 $$\wp(u+v)=-\wp u-\wp v+\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp u-\wp v}\right\}^2$$

所以 $R(u)$, $R(v)$, $R(u+v)$ 亦有一有理關聯.

魏士特氏見此情形,於是就想下面的問題:

"一如何分析函數可有如此的關聯."

牠的解答已完全爲魏士特氏所解決,即

"若一分析函數 $\Phi(u)$ 具此性質,必爲

(i) (u) 之代數函數.

(ii) $e^{\frac{i\pi u}{\omega}}$ 之代數函數.

(iii) $\wp(u)$ 及 $\wp'(u)$ 之代數函數.

由此可知自動函數,不復具此性質矣.

VII.

其他若微分方程式,[12]黎曼曲面[13] (Riemannian Surface), 等角表示 (Conformal Representation)[14] 等等方面,都因自動函數的發明,而有顯著的進展;但是那更非短篇所能道及的了.

VIII.

以上所述是一個變數的函數,倘若我們將他推到 n 個

變數[16]，則我們的眼界更寬且大了.那時我們所用的變形不一定祇限於有理分式.變形可推廣到雙理變換(Birational Transformation). 我現在先舉一極簡單的列如下:

$$F(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

就是經　$(\Gamma)\,x'=\frac{x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{y}{x^2+y^2},$

不變的函數也就(Γ)下的自動函數.

又可從

$$y=f(x)$$

中假定當 x 與以一變形,則有一相當的變形.而成一僞自形函數(Pseudo-automorphic function). 最簡單且著名的,如赫米特 (Hermite) 的第二種及第三種僞橢圓函數 (Pseudo-elliptic function)羅曾研究

$$f(x+2\omega)=\frac{af(x)+b}{af(x)+d},\qquad f(x+2\omega')=\frac{a'f(x)+b'}{c'f(x)+d'}$$

而得結果如下;該函數可以(i) 赫米特的第一種僞橢圓函數之一次有理分式表之.(ii)哈爾芬 (Halphan) 的僞橢圓函數[16]之一次分式表之.

(iii)　(a)　合關係式 $f(u+2\omega)+f(x)=o,\quad f(x)+(x+2\omega)=H.$

(b)　合關係式 $\left\{f(x)-c_1\right\}\left\{f(+2\omega)-c_1\right\}=(c_1-c_2)(c_1-c$

$$\left\{f(x-c_2)\right\}\left\{f(x+2\omega')-c_2\right\}=(c_2-c_1)(c_2-c_3),$$

並可推廣到

$$f(T_i(z))=S_i(f(z)).$$

$T_i(z)$ 所成之羣與 $S_i(z)$ 所成之羣為 $1:m$ 對應(Isomorphic). m 可為無窮, T_i, S_i 都是一次分式變形.

總之,「籬邊落葉蕭蕭下,無盡長江滾滾來」,一切更美麗的理論還在那兒期待着我們呢.

---

1. 若二週期之比為實數,這種單值函數是不存在,已為雅各比所證明.

2. 週期不能多於二個,亦為雅各比所證明;他的原證,可在他的 Ges. Werke, Band, (ii) pp. 25, 26 中找出.又黎曼的證明可在黎曼氏的 Ges. Werke, P. 294 或 L. Langel 的法文譯本 P.300 找出.他如在 Goursat: Cours d'analyus, Vol. 2, 有一有趣的證明.在 Gordan 及 Clebsclh 所著的 Theorie der Abel'schen Functionen §38 或 Baker 的 Abelian functions 的 Chapt. ix,xix.中,可找出更普偏的定理和證明.

3. Klein: Elliptischan Modulfunktionen b. 1.

4. Tennery et Molk: Éléments de la theorie des Fonctions Élliptiques, Tome I, P.208, §126.

5. 羅曾研究與有窮羣相關之 Pochhammer 之微分方程式,再由該微分方程式之解答而造成關於該羣之初等函數,(見 Tohoko Mathematical Journal 在待印中.)

6. 欲知其詳可參觀 Poincaré: Oeuvre, Tome. II.

7. 讀者可參觀 Methews Theory of Numbers, Part I. P.111.

8. 同上, P.117.

9. Forsyth: Theory of functions, p.565.

10. Apell et Goursat: Théorie des fonctions algêbripues et leurs intégrales, Tome I. P. 436.

11. Forsyth: Chapter. XIII.

[12] Picard: Traité d'analyse, Tome. III.

[13] Apell et Goursat; Tome II.

[14] Ford: Automorphic functions. chap. VIII.

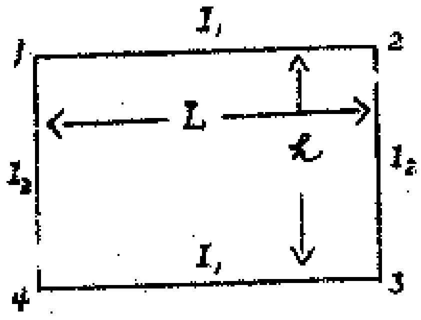
[15] Giraud: Leçons sur les Fonctions automorphes, chap. I.

[16] Halphen: Traité des fonctions elliptiques. Tome.

高樓的風緊張力

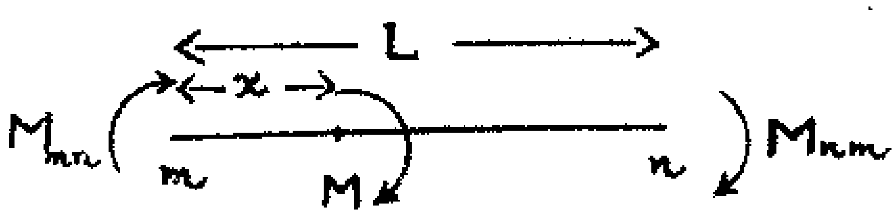
俞　忽

高樓的緊切面彷彿是庶多的長方窿窟的集團.譬如第一圖表示的是這庶多長方窟窿的一個.譬如這個窟窿的



第　一　圖

隨便那一邊 M_n 的兩端的彎曲力(Bensling Moment)是 M_{mn} 和 M_{nm} (見第二圖), 那麼如果這一邊上面所受的外力都是



第　二　圖

從他的兩端傳到的話,在這一邊上面離 m 端有 x 單位遠的地方的彎曲力必定是

$$M = M_{mn} - \frac{x}{L}(M_{mn}+M_{nm})$$

$$=\frac{1}{L}\left\{M_{mn}(L-x)-M_{nm}x\right\}$$

現在譬如我們把這個窟窿在 1 點的地方割開.那麼如果這個窟窿的各邊上面無論那一處的彎曲力仍和先前一樣的話,這個窟窿雖然在 1 點割開,那割口並不分開.因為各邊的彎曲方法是受各邊上面的彎曲力所支配的.現在所有的彎曲力並沒有改變,各點的相對的位置自然也不會改變,故此 14 邊的上端和 12 邊的左端相對移動的尺寸無論在那一個方向裏面都等於零.但是依照力學原理這個相對移動的尺寸可用下面的公式求得:—

$$\Delta = \Sigma\int\frac{M_m\,dx}{EI}$$

在這個公式裏面,Δ 是那相對移動的尺寸,M 是各邊各點原有的彎曲力,m 是在發生相對移動的尺寸 Δ 的兩點上面用了兩個方向相反的單位力之後各邊各點發生的彎曲力.我們要求在那一個方向裏面的相對的移動的尺寸,這兩個單位力就在這一個方向裏面用力.E 是 Young 氏彈性係數,I 是惰性旋轉量.現在譬如我們要求 14 邊的上端和 12 邊的左端向左右分開的尺寸,我們就在 14 邊的上端用一個向左的單位力,在邊 12 的左端用一個向右的單位力,這兩個單位力在 12 邊上面各點發的彎曲力是零,在 43 邊上面各點發生的彎曲力是 h. 在 23 和 14 邊上面各點發生的彎曲力是 $\pm x$, 譬如 x 是各點和 12 邊的距離的話運用上開的公式,我們得

$$E\Delta=\int_2^3\frac{1}{I_2h}\left\{M_{23}(h-x)-M_{32}x\right\}xdx-\int_1^4\frac{1}{I_2h}\left\{M_{14}(h-x)-M_{41}x\right\}xdx$$

$$-\int_4^3\frac{1}{I_1L}\left\{M_{43}(L-x)-M_{34}x\right\}\times h\,dx$$

$$=\frac{1}{6I_2}h^2(M_{23}-2M_{32}-M_{14}+2M_{41})-\frac{1}{2I_2}Lh(M_{43}-M_{34})=o\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣這兩點向上下分開的尺寸和相對旋轉的角度是

$$\int_1^2\frac{1}{I_1L}\left\{M_{12}(L-x)-M_{21}x\right\}xdx+\int_2^3\frac{1}{I_2h}\left\{M_{23}(h-x)-M_{32}x\right\}\times Ldx$$

$$-\int_4^3\frac{1}{I_1L}\left\{M_{43}(L-x)-M_{34}x\right\}xdx$$

$$=\frac{1}{6I_1}L^2(M_{12}-2M_{21}-M_{43}+2M_{34})+\frac{1}{2I_2}Lh(M_{23}-M_{32})=o\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\int_1^2\frac{1}{I_1L}\left\{M_{12}(L-x)-M_{21}x\right\}dx+\int_2^3\frac{1}{I_2h}\left\{M_{23}(h-x)-M_{32}x\right\}dx$$

$$-\int_1^4\frac{1}{I_2h}\left\{M_{14}(h-x)-M_{41}x\right\}dx-\int_4^3\frac{1}{I_1L}\left\{M_{43}(L-x)-M_{34}x\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2I_1}L(M_{12}-M_{21}-M_{43}+M_{34})+\frac{1}{2I_2}h(M_{23}-M_{32}-M_{14}+M_{41})\cdots\cdots(3)$$

從上面這三個方程式,下面這兩個方程式是容易求得的

$$\frac{3}{I_1}L(-M_{12}+M_{21}-M_{43}+M_{34})+\frac{1}{I_2}h(-M_{23}-M_{32}+M_{14}+M_{41})=o\cdots(4)$$

$$\frac{1}{I_1}L(-M_{12}-M_{21}+M_{43}+M_{34})+\frac{3}{I_2}h(M_{23}-M_{32}+M_{14}+M_{41})=o\cdots\cdots(5)$$

現在我們可以動手推算一個高樓在庶多橫力壓逼之下發生的緊張力了.我們假設這個高樓每層只有三個長方形的窟窿但不俱多少層數.爲省工夫起見,我們假設所有的窟窿的橫邊都是一般大小的,所有窟窿的壁邊也是

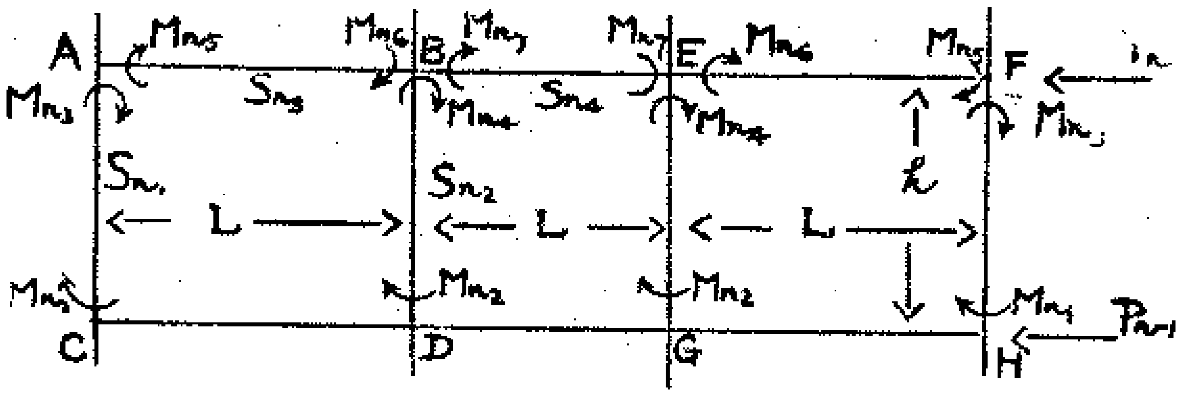
一般大小的.再呢我們拿這些窗櫳的高度 h 做長的單位.這些窗櫳的長度和高度的比例是 $\frac{4}{3}$,又 (I) 比例 I_2/I_1 是1.5.把尺寸這樣定好之後,方程式(3),(4),和(5)就變做

$$2(M_{12}-M_{21}-M_{43}+M_{34})+(M_{23}-M_{32}-M_{14}+M_{41})=o \quad \cdots\cdots(6)$$

$$6(-M_{12}+M_{21}-M_{43}+M_{34})+(-M_{25}-M_{32}+M_{14}+M_{41})=o \quad \cdots\cdots(7)$$

$$2(-M_{12}-M_{21}+M_{43}+M_{34})+3(M_{23}-M_{32}+M_{14}-M_{41})=o \quad \cdots\cdots(8)$$

譬如第三圖代表的是高樓的第 n 層.譬如柱子 AC 和 BD 的下端的彎曲力是 M_{n1} M_{n2},上端的彎曲力是 M_{n3} M_{n4},橫樑



第三圖

AB 的左端和右端的彎曲力是 M_{n5}, M_{n6},橫樑 BE 的左端的彎曲力是 M_{n7}.因為這樓房兩邊相同的緣故,兩邊相同的地點的彎曲力和橫剪力都是相同的,方向也一樣.柱子 AC 上面壓力和柱子 FH 上面的伸力也是相同.柱子 BD 上面的伸力又和柱子 FH 上面的壓力相同.

把方程式(6),(7)和(8)運用到窗櫳 $ABCC$ 和 $BEGD$ 上面來,我們得

$$2(M_{n5}-M_{n6}-M_{(n-1)5}-M_{(n-1)6})+(M_{n4}-M_{n2}-M_{n3}+M_{n1})=o \quad \cdots\cdots(9)$$

$$6(-M_{n5}+M_{n6}-M_{(n-1)5}+M_{(n-1)6})+(-M_{n4}-M_{n2}+M_{n3}+M_{n1})=o \quad \cdots(10)$$

$$2(-M_{n5}-M_{n4}+M_{(n-1)5}+M_{(n-1)6})-3(M_{n4}-M_{n2}+M_{n3}+M_{n1})=0 \cdots\cdots(11)$$

$$2(-2M_{n7}+2M_{(n-1)7})+3(2M_{n4}-2M_{n2})=0 \cdots\cdots(12)$$

各邊在 A 點和 B 點相遇的各端的彎曲力的和數須等於零,故此我們有

$$M_{n3}+M_{n5}+M_{(n+1)1}=0 \cdots\cdots(13)$$

$$M_{n4}+M_{n6}+M_{n7}+M_{(n+1)2}=0 \cdots\cdots(14)$$

柱子AC和FH的橫剪力是$\frac{1}{h}(M_{n1}+M_{n3})$,柱子$BD$和$EG$的橫剪力是$\frac{1}{h}(M_{n2}+M_{n4})$.這些柱子的橫剪力的和數須等於在 $CDGH$ 地板平面以上的總橫力.但是我們已經拿 h 做長的單位,故此我們又得下面的方程式

$$2(M_{n1}+M_{n3})+2(M_{n2}+M_{n4})=R_n \cdots\cdots(15)$$

這裏 R_n 是 $CDGH$ 地板平面 M 上所有的橫力的和數.

從方程式(9)至(15),我們可得

$$M_{n1}=\frac{1}{67}(138M_{(n-1)5}-131M_{(n-1)6}+13M_{(n-1)7}-6M_{(n+1)1}+13M_{(n+1)2}+9.25R_n) \cdots(16)$$

$$M_{n2}=\frac{1}{67}(-104M_{(n-1)5}+123M_{(n-1)6}-3M_{(n-1)7}+22M_{(n+1)1}-3M_{(n+1)2}+10.75R_n) \cdots(17)$$

$$M_{n3}=\frac{1}{67}(24M_{(n-1)5}-49M_{(n-1)6}+11M_{(n-1)7}-36M_{(n+1)1}+11M_{(n+1)2}+5.25R_n) \cdots(18)$$

$$M_{n4}=\frac{1}{67}(-58M_{(n-1)5}+57M_{(n-1)6}-21M_{(n-1)7}+20M_{(n+1)1}-21M_{(n+1)2}+8.25R_n) \cdots(19)$$

$$M_{n5}=\frac{1}{67}(-24M_{(n-1)5}+49M_{(n-1)6}-11M_{(n-1)7}-31M_{(n+1)1}-11M_{(n+1)2}-5.25R_n) \cdots(20)$$

$$M_{n6}=\frac{1}{67}(-11M_{(n-1)5}+42M_{(n-1)6}-19M_{(n-1)7}-17M_{(n+1)1}-19M_{(n+1)2}-4.5R_n) \cdots(21)$$

$$M_{n7}=\frac{1}{67}(69M_{(n-1)5}-90M_{(n-1)6}+40M_{(n-1)7}-3M_{(n+1)1}-27M_{(n+1)2}-3.75R_n) \cdots\cdots(22)$$

我們成立上面的方程式的時候,我們曾經把伸力和壓力所發生的影響棄掉.就是說我們假設所有窩籠的各邊的長度始終沒有改變.故此C,D和 G 三點始終是在一個水

平面上面的.那麼我們如果在 CDG 的彈性曲線的 D 點畫一根切線,C 點和 G 點必定在這一根切線的兩方,而且距離這根切線一般遠.把這個關係表示起來的彈性方程式是

$$\int_C^D \frac{1}{EIL}\left\{M_{(n-1)5}(L-x)-M_{(n-1)6}x\right\}x\,dx=\int_G^D \frac{1}{EIL}\left\{M_{(n-1)7}(L-x)-M_{(n-1)7}x\right\}x\,dx,$$

把這個方程式化簡之後,我們就得

$$M_{(n-1)5}-2M_{(n-1)6}+M_{n-1)7}=o \qquad (23)$$

把方程式(16)至(22)的裏面的 $M_{(n-1)7}$ 消去.這幾個方程式就變做

$$M_{n1}=\frac{1}{67}(125M_{(n-1)5}-105M_{(n-1)6}-6M_{(n+1)1}+13M_{(n-1)2}+9.25R_n) \qquad (24)$$

$$M_{n2}=\frac{1}{67}(-101M_{(n-1)5}+117M_{(n-1)6}+22M_{(n+1)1}-3M_{(n+1)2}+10.75\,R_n) \qquad (25)$$

$$M_{n3}=\frac{1}{67}(13M_{(n-1)5}-27M_{(n-1)6}-36M_{(n+1)1}+11M_{(n+1)2}+5.25\,R_n) \qquad (26)$$

$$M_{n4}=\frac{1}{67}(-37M_{(n-1)5}+15M_{(n-1)6}+20M_{(n+1)1}-21M_{(n+1)2}+8.25\,R_n) \qquad (27)$$

$$M_{n5}=\frac{1}{67}(-13M_{(n-1)5}+27M_{(n-1)6}-31M_{(n+1)1}-11M_{(n+1)2}-5.25\,R_n) \qquad (28)$$

$$M_{n6}=\frac{1}{67}(8M_{(n-1)5}+4M_{(n-1)6}-17M_{(n+1)1}-19M_{(n+1)2}-4.5R_n) \qquad (29)$$

$$M_{n7}=\frac{1}{67}(29M_{(n-1)5}-19M_{(n-1)6}-3M_{(n+1)1}-27M_{(n+1)2}-3.75R_n) \qquad (30)$$

在最下的一層,我們可說各窗檯的下面的那一邊的惰性旋轉量非常之大.因爲各個 M 的數最初次在前面的眾多方程裏面出現的時候,他們的係數總是一個分數,而且這些分數的分母的因數裏面總夾有那惰性旋轉量的.現在這惰性旋轉量既然非常之大,這些分數的數值就都變做零.故此在那最下的一層,方程式(24)至(30)就變成

$$M_{11}=\frac{1}{67}(-6M_{21}+13M_{22}+9.25\,R_1) \quad\cdots\cdots(31)$$

$$M_{12}=\frac{1}{67}(22M_{21}-3M_{22}+10.75\,R_1) \quad\cdots\cdots(32)$$

$$M_{13}=\frac{1}{67}(-36M_{21}+11M_{22}+5.25\,R_1) \quad\cdots\cdots(33)$$

$$M_{14}=\frac{1}{67}(20M_{21}-21M_{22}+8.25\,R_1) \quad\cdots\cdots(34)$$

$$M_{15}=\frac{1}{67}(-31M_{21}-61M_{22}-5.25R_1) \quad\cdots\cdots(35)$$

$$M_{16}=\frac{1}{67}(-17M_{21}-19M_{22}-4.5R_1) \quad\cdots\cdots(36)$$

$$M_{17}=\frac{1}{67}(-3M_{21}-27M_{22}-3.75R_1) \quad\cdots\cdots(37)$$

從方程式(35),(36)和第二層的方程式(24),(25),我們得

$$M_{15}=-0.024841M_{31}-0.059372M_{32}-0.064367R_1-0.074895R_2 \quad\cdots\cdots(38)$$

$$M_{16}=-0.063099M_{31}-0.030804M_{32}-0.058503R_1-0.070239R_2 \quad\cdots\cdots(39)$$

$$M_{21}=-0.03701M_{31}+0.13154M_{32}-0.028406R_1+0.10841R_2 \quad\cdots\cdots(40)$$

$$M_{22}=0.25562M_{31}-0.009067M_{32}-0.005129R_1+0.15072R_2 \quad\cdots\cdots(41)$$

把上面的 M_{15} 和 M_{16} 數値代入第二層的方程式(28),(29),我們得

$$M_{25}=-0.4833M_{31}-0.16507M_{32}-0.011087R_1-0.092131R_2 \quad\cdots\cdots(42)$$

$$M_{26}=-0.260246M_{31}-0.29251M_{32}-0.011178R_1-0.0803R_2 \quad\cdots\cdots(43)$$

把 M_{25} 和 M_{26} 在方程式(42),(43)和第三層的方程式(24),(25)(28),(29)裏消去,再把 $M_{31}, M_{32}, M_{35}, M_{36}$ 當做未知數把賸下的方程式解開我們就得

$$M_{31}=-0.0345M_{41}+0.12922M_{32}-0.0023972R_1-0.031626R_2+0.1070\,R_3 \quad\cdots\cdots(44)$$

$$M_{32}=0.25272M_{41}-0.0074682M_{32}-0.0027437R_1-0.0079221R_2+0.10549R_3 \quad\cdots\cdots(45)$$

$$M_{35}=-0.48399M_{41}-0.16498M_{32}-0.002091R_1-0.013449R_2-0.092474\,R_3 \quad\cdots\cdots(46)$$

$$M_{36}=-0.26059M_{42}-0.29277M_{32}-0.0017137R_1-0.013183R_2-0.080636R_3 \quad\cdots\cdots(47)$$

把上面的手續在第四層樓上重複一遍,我們得

$$M_{41}=-0.0344M_{51}+0.12907M_{52}-0.0007046R_1-0.0032568R_2$$
$$-0.31695R_3+0.10759R_4 \cdots\cdots (48)$$

$$M_{42}=0.2526M_{51}-0.0074003M_{52}-0.0001916R_1-0.0028839\,R_2$$
$$-0.0080086R_3+0.15048R_4 \cdots\cdots (49)$$

$$M_{45}=-0.48403M_{51}-0.16498M_{52}-0.0003072R_1-0.002419R_2$$
$$-0.013513R_3-0.092484\,R_4 \cdots\cdots (50)$$

$$M_{46}=-0.26061M_{51}-0.29278M_{52}-0.0002087R_1-0.0020469R_2$$
$$-0.013234R_3-0.080644R_4 \cdots\cdots (51)$$

在第五層重複一遍,我們得

$$M_{51}=-0.0344M_{61}+0.12907M_{62}-0.0000766R_1-0{\cdot}0008871R_2$$
$$-0.003283R_3-0.031698R_4+0.10759\,R_5 \cdots\cdots (52)$$

$$M_{52}=-0.2526M_{61}-0.0074002M_{62}-0.000063R_1-0.0001358R_2$$
$$-0.0028838R_3-0.0080096R_4+0.15048R_5 \cdots\cdots (53)$$

$$M_{55}=-0.48403M_{61}-0.16498M_{62}-0.0000545R_1-0.000334R_2$$
$$-0.0024268R_3-0.013514R_4-0.092484R_5 \cdots\cdots (54)$$

$$M_{56}=-0.26061M_{61}-0.29278M_{62}-0.0000465R_1-0.0003409R_2$$
$$-0.0020556R_3-0.013235R_4-0.080644R_5 \cdots\cdots (55)$$

現在各方程式裏面的各 M 項的係數已經不改變了,以後只須再重複一遍,把幾個通用的方程式求得就得了.譬如

$$M_{(n-1)5}=-0.48403M_{n1}-0.16498M_{n2}+A \cdots\cdots (56)$$

$$M_{(n-1)6}=-0.26061M_{n1}-0.29278M_{n2}+B \cdots\cdots (57)$$

這裏各 M 項的右下方的小註脚中的 n 號碼須比 5 大,這兩個方程式所有的各 R 項都包括在 A 和 B 兩項裏面,但

各 R 項右下方的小註脚號碼都比 n 小.把 $M_{(n-1)5}$, $M_{(n-1)6}$ 從方程式(24),(25),(27),(28),(56)和(57)裏面消掉,再把 M_{n1}, M_{n2}, M_{n5} 和 M_{n6} 當做未知數把賸下的方程式解開,我們就得

$$M_{n1}=-0.0344M_{(n+1)1}+0.12907M_{(n+1)2}+1.1529A-0.9292B \cdots\cdots (58)$$

$$M_{n2}=0.2526M_{(n+1)1}-0.0074002M_{(n+1)2}-0.94328A+1.1811B \cdots\cdots (59)$$

$$M_{n5}=-0.48403M_{(n+1)1}-0.16498M_{(n+1)2}-0.12575A+0.31178B \cdots\cdots (60)$$

$$M_{n6}=-0.26061M_{(n+1)1}-0.29278M_{(n+1)2}+0.069896A+0.08396B \cdots\cdots (61)$$

把上面的公式運用到第六層的各 M 數值上面去,我們得

$$M_{61}=-0.0344M_{71}+0.12907M_{72}-0.0000196R_1-0.0000683R_2-0.0008878R_3$$
$$-0.003282R_4-0.031686R_5+0.10759R_6 \cdots\cdots (62)$$

$$M_{62}=0.2526M_{71}-0.0074002M_{72}-0.0000035R_1-0.0000875R_2-0.0001387R_3$$
$$-0.002885R_4-0.008011R_5+0.15048R_6 \cdots\cdots (63)$$

$$M_{65}=-0.48403M_{71}-0.16498M_{72}-0.0000076R_1-0.0000638R_2-0.0003357R_3$$
$$-0.002427R_4-0.013513R_5-0.092484R_6 \cdots\cdots (64)$$

$$M_{66}=-0.26061M_{71}-0.29278M_{72}-0.0000077R_1-0.0000519R_2-0.0003422R_3$$
$$-0.0020558R_4-0.013235R_5-0.080644R_6 \cdots\cdots (65)$$

到了這裏,我們如果把所有各 R 項的係數都只留四位小數(在這種問題裏面已夠準確了),那麽這些係數的數值也已經不改變了.故此第七層以上的各 M 數值完全和上面的四個 M 的數值相同,不過各項的小註脚號碼不同罷了.把 M_{71} 和 M_{72} 的數值代入方程式(62),(63),我們得

$$M_{61}=0.03358M_{81}-0.0054M_{82}-0.0001R_2-0.0009R_3-0.0033R_4-0.032R_5$$
$$+0.1077R_6+0.0157R_7 \cdots\cdots (66)$$

$$M_{62}=-0.01056M_{81}+0.03265M_{82}-0.0001R_2-0.0001R_3-0.0031R_4-0.0088R_5$$
$$+0.1426R_6+0.0261R_7 \cdots\cdots(67)$$

再代入一遍我們得

$$M_{61}=-0.00252M_{91}-0.00437M_{92}-0.0001R_2-0.0009R_3-0.0033R_4-0.032R_5$$
$$+0.1076R_6+0.0146R_7+0.00028R_8 \cdots\cdots(68)$$

$$M_{62}=0.0086M_{91}-0.0016M_{92}-0.0001R_2-0.0001R_3-0.0031R_4-0.0088R_5$$
$$-0.1425R_6-0.0261R_7-0.0038R_8 \cdots\cdots(69)$$

代入第三遍,我們得

$$M_{61}=0.00118M_{101}-0.00035M_{102}-0.0001R_2-0.0009R_3-0.0033R_4-0.032R_5$$
$$+0.1076R_6+0.0146R_7+0.0029R_8+0.0004R_9 \cdots\cdots(70)$$

$$M_{62}=-0.0007M_{101}+0.00112M_{102}-0.0001R_2-0.0001R_3-0.0031R_4-0.0088R_5$$
$$+0.1425R_6+0.0261R_7+0.0235R_8+0.0007R_9 \cdots\cdots(71)$$

代入第四遍,我們得

$$M_{61}=-0.00013M_{111}+0.00015M_{112}-0.0001R_2-0.0009R_3-0.0033R_4-0.032R_5$$
$$+0.1076R_6+0.0146R_7+0.0029R_8+0.0004R_9 \cdots\cdots(72)$$

$$M_{62}=0.0003M_{111}-0.0001M_{112}-0.0001R_2-0.0001R_3-0.0031R_4-0.0088R_5$$
$$+0.1425R_6+0.0261R_7+0.0035R_8+0.0007R_9+0.001R_{10} \cdots(73)$$

到了這裏,各 R 項的係數又已經不改變了.而且在這兩個方程式的右方的兩個 M 項的係數也已經減小到這麼樣,我們簡直可以把他們棄掉了.故此 M_{n1} 和 M_{n2} 的 0 公式是

$$M_{n1}=-0.0001R_{n-4}-0.0009R_{n-3}-0.0033R_{n-2}-0.032R_{n-1}+0.1076R_n$$
$$+0.0146R_{n+1}+0.0029R_{n+2}+0.0004R_{n+3}$$
$$=-0.0001P_{n-4}-0.001P_{n-3}-0.0043P_{n-2}-0.0363P_{n-1}+0.0713P_n$$
$$+0.0859P_{n+1}+0.0888P_{n+2}+0.0892R_{n+3} \cdots\cdots(74)$$

$$M_{n1}=-0.0001R_{n-4}-0.0001R_{n-3}-0.0031R_{n-2}-0.0088R_{n-1}+0.1425R_n$$
$$+0.0261R_{n+1}+0.0035R_{n+2}+0.0007R_{n+3}+0.0001R_{n+4}$$
$$=-0.0001P_{n-4}-0.0002P_{n-3}-0.0033P_{n-2}-0.0121P_{n-1}+0.1340P_n$$
$$+0.1565P_{n+1}-0.16P_{n+2}+0.1607P_{n+3}+0.1608R_{n+4}\cdots\cdots(75)$$

這裏各項的小註脚號內的 n 須比 4 大,P_n 是在第 n 層樓板平面的橫力.運用和方程式(64),(65)相同的方程式,我們得

$$M_{n6}=-0.0001P_{n-4}-0.0004P_{n-3}-0.0023P_{n-2}-0.0137P_{n-1}-0.0872P_n$$
$$-0.1648P_{n+1}-0.1762P_{n+2}-0.1782P_{n+3}-0.1785P_{n+4}\cdots\cdots(76)$$
$$M_{n5}=-1.0001P_{n-4}-0.0004P_{n-3}-0.0021P_{n-2}-0.0136P_{n-1}-0.0833P_n$$
$$-0.1531P_{n+1}-0.1645P_{n+2}-0.1663P_{n+3}-0.1666P_{n+4}\cdots\cdots(77)$$

運用方程式(13),(14)和(23),我們得

$$M_{n3}=0.0001P_{n-4}+0.0005P_{n-3}+0.0033P_{n-2}+0.018P_{n-1}+0.1235P_n$$
$$+0.0935P_{n+1}+0.0903P_{n+2}+0.0894P_{n+3}+0.0893P_{n+4}\cdots\cdots(78)$$
$$M_{n4}=0.0002P_{n-4}+0.0009P_{n-3}+0.0042P_{n-2}+0.0304P_{n-1}+0.1748P_n$$
$$+0.1641P_{n+1}+0.1608P_{n+2}+0.1607P_{n+3}+0.1606P_{n+4}+0.1605R_{n+5}\cdots(79)$$
$$M_{n7}=-0.0001P_{n-4}-0.0004P_{n-3}-0.0019P_{n-2}-0.0135P_{n-1}+0.0794P_n$$
$$-0.1414P_{n+1}-0.1528P_{n+2}-0.1544P_{n-1}-0.1547R_{n+4}\cdots\cdots(80)$$

譬如 V_{n1}, V_{n2}, V_{n3} 和 V_{n4} 是 AC, BD, AB 和 BE 各邊(第三圖)的橫剪力 S_{n1}, S_{n2}, S_{n3} 和 S_{n4} 是各邊的伸力,那麼

$$V_{n1}=\frac{1}{h}(M_{n1}+M_{n3})$$
$$=M_{n1}+M_{n3}$$
$$=-0.0005P_{n-3}-0.001P_{n-2}-0.0183P_{n-1}+0.1948P_n+0.1794P_{n+1}$$
$$+0.1791P_{n+2}+0.1786P_{n+3}+0.1785R_{n+4}\cdots\cdots(81)$$

$$V_{n2}=\frac{1}{h}(M_{n2}+M_{n4})$$

$$=M_{n2}+M_{n4}$$

$$=0.0001P_{n-4}+0.0007P_{n-3}+0.0009P_{n-2}+0.0183P_{n-1}+0.3052P_n$$

$$+0.3206P_{n+1}+0.3208P_{n+2}+0.3214\,R_{n+3}\quad\cdots\cdots(82)$$

$$V_{n3}=\frac{1}{L}(M_{n5}+M_{n6})$$

$$=\frac{3}{4}(M_{n5}+M_{n6})$$

$$=-0.0002P_{n-4}-0.0006P_{n-3}-0.0033P_{n-2}-0.0205P_{n-1}-0.1279P_n$$

$$-0.2384P_{n+1}-0.2555P_{n+2}-0.258\,P_{n+3}-0.2588R_{n+4}\cdots\cdots(83)$$

$$V_{n4}=\frac{1}{L}\times 2M_{n7}$$

$$=\frac{3}{4}\times 2M_{n7}$$

$$=-0.0002P_{n-4}-0.0006P_{n-3}-0.0029P_{n-2}-0.0203P_{n-1}-0.1191P_n$$

$$-0.2121P_{n-1}-0.2292P_{n+2}-0.2316P_{n+3}-0.2321R_{n+4}\cdots\cdots(84)$$

如果 m 是這樓房的總層數的話,各邊的伸力的數值是

$$S_{n1}=V_{n3}+S_{(n+1)1}$$

$$=-0.0002P_{n-4}-0.0006P_{n-3}-0.0033P_{n-2}-0.0205P_{n-1}-0.1279P_n$$

$$-0.2384P_{n+1}-0.2555P_{n+2}-0.2584P_{n+3}-0.2588P_{n+4}+S_{(n+1)1}$$

$$=-0.0002P_{n-4}-0.0008P_{n-3}-0.0041P_{n-2}-0.0246P_{n-1}-0.1525P_n$$

$$-0.3909P_{n+1}-0.6464P_{n+2}$$

$$-\sum_{\gamma=n+3}^{\gamma=m}\left\{0.9048+0.2588(r-n-3)\right\}P_r\cdots\cdots(85)$$

$$S_{n2}=V_{n4}-V_{n1}+S_{(n+1)2}$$

$$=0.0004P_{n-2}+0.0002P_{n-1}+0.0088P_n+0.0263P_{n+1}+0.0263P_{n+2}$$

$$+0.0268P_{n+3}+0.0267R_{n+4}+S_{(n+1)2}$$

$$=0.0004P_{n-2}+0.0006P_{n-1}+0.0094P_n+0.0357P_{n+1}+0.062P_{n+2}$$

$$+\Sigma_{\gamma=n+3}^{\gamma=m}\left\{0.0888+0.0267(r-n-3)\right\}P_r \cdots\cdots(86)$$

$$S_{n3}=V_{(n+1)}-V_{n1}$$

$$=0.0005P_{n-3}+0.0005P_{n-2}+0.0173P_{n-1}-0.2131P_n+0.0154P_{n+1}$$

$$+0.0003P_{n+2}+0.0005P_{n+3}+0.0001P_{n+4} \cdots\cdots(87)$$

$$S_{n4}=V_{(n+1)2}-V_{n2}+S_{n3}$$

$$=-0.5P_n \cdots\cdots(88)$$

如果所有的 P 數值都相等的話,那麼方程式(74)到(88)就變做

$$M_{n1}=\left\{0.2043+0.0892(m-n-2)\right\}P$$

$$=\left\{0.0259+0.0892(m-n)\right\}P \cdots\cdots(89)$$

$$M_{n2}=\left\{0.5919-0.1608(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{0.1095+0.1608(m-n)\right\}P \cdots\cdots(90)$$

$$M_{n3}=\left\{0.4186+0.0893(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{0.1507+0.0893(m-n)\right\}P \cdots\cdots(91)$$

$$M_{n4}=\left\{0.8567+0.1605(m-n-4)\right\}P$$

$$=\left\{0.2147+0.1605(m-n)\right\}P \cdots\cdots(92)$$

$$M_{n5}=\left\{-0.6229-0.1785(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{-0.0874-0.1785(m-n)\right\}P \cdots\cdots(93)$$

$$M_{n6}=\left\{-0.5834-0.1666(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{-0.0836-0.1666(m-n)\right\}P \cdots\cdots(94)$$

$$M_{n7}=\left\{-0.5439-0.1547(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{-0.0798-0.1547(m-n)\right\}P \cdots\cdots(95)$$

$$V_{n1}=\left\{0.7121+0.1786(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{0.1766+0.1785(m-n)\right\}P \cdots\cdots(96)$$

$$V_{n2}=\left\{0.9666+0.3214(m-n-2)\right\}P$$

$$=\left\{0.3238+0.3214(m-n)\right\}P \cdots\cdots(97)$$

$$V_{n3}=\left\{-0.9048-0.2588(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{-0.1284-0.2588(m-n)\right\}P \cdots\cdots(98)$$

$$V_{n4}=\left\{-0.816-0.2321(m-n-3)\right\}P$$

$$=\left\{-0.1197-0.2321(m-n)\right\}P \cdots\cdots(99)$$

$$S_{n1}=\left\{-1.2195-0.9048(m-n-2)-\tfrac{1}{2}(m-n-2)(m-n-3)\times 0.2588\right\}P$$

$$=\left\{-0.1863-0.2578(m-n)-0.1294(m-n)^2\right\}P \cdots\cdots(100)$$

$$S_{n2}=\left\{0.1081-0.0888\times(m-n-2)+\tfrac{1}{2}\times(m-n-2)\times(m-n-3)\times 0.0267\right\}P$$

$$=\left\{0.0106+0.022(m-n)+0.0134(m-n)^2\right\}P \cdots\cdots(101)$$

$$S_{n3}=-0.1785\,P \cdots\cdots(102)$$

$$S_{n4}=-0.5P \cdots\cdots(103)$$

伸力 S_{n1}, S_{n2}, 橫力 V_{n1}, V_{n2} 和彎曲力 M_{n1}, M_{n2} 是和第 $(n-1)$ 層樓板以上的外力互相平衡的.把這些力在這一層樓板平面的旋轉量(Moment)加起來,我們得

$$-S_{n1}\times 3L-S_{n2}\times L+2(M_{n1}+M_{n2})-\tfrac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)Ph$$

$$=-4S_{n1}-\tfrac{4}{3}S_{n2}+2(M_{n1}+M_{n2})-\tfrac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)P$$

$$=0.7452P+1.0312(m-n)P+0.5176(m-n)^2P-0.0141P-0.0293(m-n)P$$

$$-0.0179(m-n)^2P+0.0518P+0.1784(m-n)P+0.219P$$

$$+0.3216(m-n)P-P-1.5(m-n)P-0.5(m-n)^2P$$

$$=0.0019P-0.0019(m-n)P-0.0003(m-n)^2P.$$

因爲計算有小小的錯處,這個總數却不能剛好等於零.這裏有一句話須要說明.在最高五層和最下的四層上面的各種緊張力的數值不能適用上面的通用公式.但這幾層每層專用的公式是不難求得的.

植物生理學史略

（續第二卷第三期）

張 珽

第六章

新陳代謝之研究——上

合成作用產物之運轉

植物新陳代謝,有合成(Anabolism)及分解(Katabolism)兩方面.合成作用之研究,第一步爲推求合成產物爲何,合成中有何種變化;第二步再進而求知此等物質合成後究竟有何種利用.關於合成產物之性質及經過之研究情形,大略已見上述光合作用及氮循環兩章,茲再進述關於合作產物利用方式之研究.

自來皆認植物合成其生活所必需之所謂"構成物質Elaborateo substances",胥在葉中;然合成之後,所得產物,固不能長儲於葉,必運諸體中他部,以供需要,過剩者,別於相當地位儲存之,備他日用.關於此種運輸及儲藏之現象,在1860年迄1900年四十年中,Sachs之研究,及其所作指導提倡與獎進,蓋與其在光合作用之研究史中,所建殊功,兩相輝映焉.

第一節 養分循環現象

固體物質雖亦能運動,但阻滯既多,紆緩爲病;養分傳達,既欲其速也,則必賴水液循流爲之媒介.此理想當然,而事實上植物傳佈養分,亦端賴乎環行體中之汁液.曩之學者,以爲植物體內必有與動物體"血液循環 Circulation of the Blood"相應之"樹液循環 Circulation of the Sap"在.自根端藉導管及細胞歷莖而上之"原液 Crude sap,"中含各種新吸收得來之原料,升達葉中,於此經歷製造,作成種種"構成物質"後,遂爲"構成液 Elaborated sap."構成液復循樹皮下降,還達於根.下降之際,應環之需泌出其所含構成物質,益下益稀,及達於根,殆已近竭,於是乃與由根際新吸入之水液,混融復上葉中.此液汁循環之說,由來已久,至 1850 年之頃,其勢彌張. Hartig, De Candolle 諸人,皆贊之, 1858 年之頃,兩氏且皆謂由葉下降之"降流 Descending sap,"爲膠粘物質之溶液,能因蒸發失水而加稠,從而分出各種固態養分於體中各儲藏部分.

I. 樹液循環現象之證明

1. Hanstin 1860 年切斷一小樹之樹皮組織,而將形成層以外之各部除去一環,結果見傷口之上面,生出多數不定芽,由是可知"降流"中實含有形成新組織之成分.

2. Faivre 1879 年重作同樣之實驗,亦得相同結果,爲之證明.

II. 降流中所含物質:

A. 碳水化合物:

1. 澱粉轉移之證明:

a. Sachs 1864 年提出謂植物白晝在葉中所製成而纏積之澱粉,昏夜中卽溶移體內,達旦往檢查,葉中澱粉之量,輒已幾微.後此更發見卽白晝亦有澱粉轉移之現象,特轉移緩而新形成者多,故不及察耳.

b. Godlewski 及 Pfeffer 不謀而合同於 1873 年證明植物葉中之澱粉粒,在白晝中亦時時下輸.若斷其CO_2之供給,則葉中宿存之澱粉,俄卽銷腿,惟暴以强光,亦不可得再見.

c. Morgan 1877 年亦以實驗證明之.

2. 澱粉在移轉時變爲糖類之證明:

a. Sachs 1882 年始在其 Vorlesungen 中提出澱粉在移轉中"或"變爲糖.

b. Meyer 1885 年始證明葉中有具還元力之糖存在,爲澱粉移轉之先所變成.

c. Kosmann, 1877 年在高等植物之葉及苗中發現糖化酵素 Diastase, 謂此酵素必與澱粉之轉移有關.

d. Barentzky 1878 年在芽及馬鈴署 Solanum officinalum 中亦檢得糖化酵素,與 Kosmann 持同一意見.

e. Krauch 1879 年證明 Kosmann 之實驗,且贊同其說.

3. 其他糖類之轉移:

a. Kayser 1883 年在葉中發現麥芽糖及轉化糖 Invert sugar.

b. Brown 及 Morris 1893 年證明 Kayser 之發現,且說明麵芽糖,爲澱粉之崩解成積體,而轉化糖則起自蔗糖之水解蔗糖則兩氏所信爲光合作用之初步產物者也.

B. 蛋白質:

1. Pfeffer 1872 年謂蛋白質在移轉時先經分解變爲䤈基,䤈醯基化合物,及達終點乃復結合而成蛋白質.

2. Würtz 1879 年, Vines 1900 年以蛋白質分解酵素 Protlase 之存在證明Pfeffer之說.

III. 降流之途徑:

1. Sachs 最初以糖糖及轉移中之含氮化合物,其降下皆藉皮層中之柔膜組織爲通路.且舉在此種組織中降流,呈酸性反應爲證.但蛋白蛋質之未經分解變化者,則在篩管 Sieve-tube 傳導,且篩管恆爲生成蛋白質之處.其說多憑臆想,殊缺實證.

2. Haberlanat 1883 年提出謂乳管 Lacticiferous tubes 與養分之轉移有關.

3. Schimper 首先贊同 Haberlandt 之說,且於 1885 年以實驗爲證.Schimper 設法抽去車前草Plantago葉柄中之維管束鞘中之長形細胞爲傳導碳水化合物之通路.

4. Von Mohl 1885 年; Lecomte 1889 年; Strasburger 1891 年宣稱

植物體中之蛋白質皆循韌皮部 Phloëm 而下輸.

5. Kraus 1894 年由分析南瓜屬 Curcurbita 篩管內容物之結果,復提出謂篩管實爲降流之主要途徑,以其內容物乾燥量之 48% 皆爲碳水化合物也.

6. Czapek 1897 年謂韌皮部與管束鞘皆可傳導養分.

7. Gaucher 1900 年贊同 Haberlandt 之說,以乳管爲傳導養分之達道.

IV. 昇流:

1. Fischer 1890 年謂春期中植物有自根上達之養分昇流,由儲藏部分將冬來積存之養料向上輸送以備葉芽之發育.其動力或爲根壓,途徑則主爲材部.

2. Strasburger 1891 年與 Fischer 同時證明此種昇流現象之存在.

V. 養分流轉之動力:

1. 滲透說: Pfeffer 之滲透說,某一時期學者嘗奉圭臬,以爲解釋養分流轉現象之唯一原理.第由細胞膜爲一種半透性 Semi-permeable 膜一點以言,則轉移中之物質,實無通過此種膜壁之可能.反之,糖類輸至儲藏器管中後,恆卽變爲澱粉粒,而生成澱粉粒後之細胞中,其所含糖分之濃度,自必劇減,若依滲透原理以言,則此時此細胞中泌滲出水液於含糖較多之細胞中以求平均,是則全部平衡皆遭破壞,於理良不可言.故滲透一說,在養分之流轉中實無立足地.

2. 擴散說: 糖類之擴散,曩亦有學者持以爲養分移轉之一種主動力者,然 1885 年 De Vries 發現此種擴散,爲率極緩,殊不足以在移轉中有若何重大之貢獻.

3. 分泌說: Brown 及 Escombe 1900 年提出另一假說,謂養分之轉輸,實起自傳導組織各隣接細胞中之一種流動.此假說之根據,則爲 Gardiner 1883 年以後關於各細胞間原形質聯絡 Protoplasmie continuity 之發現.兩氏以爲此等隣接細胞之細胞膜上所開小孔,其情狀大與葉面之氣孔相當.由解釋CO_2之透過葉表皮而傳入葉肉以引起光合之現象着想,兩氏遂謂移轉養分之流,透過此等多孔之隔膜,其易舉直與無隔板存在時適同". Green 則更以爲在此種移轉中,原形質絲本身尤有重大之作用,能由糖類濃度變化之刺激,自細胞液中提取糖分,輸之於正在生成澱粉粒而需要糖分之隣接細胞中,取一種變形的分泌 Modified secretion.

要之養分移轉之動力,實尚爲一未決之問題,卽實驗研究方面之貢獻亦未能多覯.唯關於種子萌芽時胚乳中儲藏養分之輸出,則研究尚有相當結果. Hansteen 1894 年, Puriewitsch 1897 年切去萌芽種子之胚,而以石膏粉團代之,見其胚乳中所存養分,亦全部溶解以去,盡爲石膏粉所吸收.然若以甘油 $C_3H_5(OH)_3$ 或硝石 KNO_3 之溶液代水濕潤種子,則養分之移轉立止,可知胚乳中養分之竭耗,蓋不僅爲一種簡單機械的擴散現象也.

第二節 儲藏養分之蓄聚

I. 碳水化合物之儲藏:

A. 澱粉:

1. 澱粉粒認爲儲藏養分之經過:

a. Sachs 1860 年 —1864 年之間就光合作用研究之結果,謂澱粉粒當爲光合作用之最初有形產物.葉綠體中,恆見其成小點而存在.

b. Nageli 與 Sachs 同時在葉綠體中發現澱粉粒小顆.

c. Böhm 1874 年至 1876 年間發表,謂此種存在葉綠體中之澱粉粒,未必咸屬同化作用之最後產物;蓋斷絕日光及CO_2之供給時,儲藏種子中之碳水化合物亦能運至葉中供消耗,而有時略有成澱粉狀沉積者.

d. A. Meyer 1885 年 —1886 年始確定澱粉粒洵爲儲藏養分.

e. Brown 及 Morris 1898 年乃完全決定澱粉粒爲養分之一種積蓄.

2. 澱粉儲藏之地點.——白色體 Leucoplastid. ——與經過.

a. Schimper 1880 年發表其研究: 由意澱粉粒與葉綠體之關係,遂進而研究植物體中他部分澱粉粒沉積之經過,最後乃得決定凡植物形成澱粉,必有色素體 Plastid 中.此種色素體, Schimper 即名之爲澱粉形成體

Starchforming Corpuscles，在綠色部分者含葉綠素,在非綠色部分則唯不含葉綠素,外此構造性質略無差異;且在光線曝露若干時後,則非綠色部分之色素體亦卽可變爲綠色.唯此兩類色素體之活動力,則有差別:Schimper就紫鴨跖草 Tradescantia 所作實驗,知葉基維管束鞘中之色素體,只能自糖類構成澱粉,而綠色葉片之色素體,含有葉綠素者,則能以CO_2爲構成材料.

据 Schimper 之意見,則色素體不僅爲澱粉粒形成之原動力,且澱粉粒之形成,恆卽在色素內面,具同心紋之澱粉粒,蓋卽色素體吸收糖類供營養後堆積縮水而成之分泌物.遠心紋之輪層澱粉粒,遠心之一側每突出色素體膜之外,而其向心之一側則留附膜中.

1883 年,Schimper更提出一種假說,謂此種澱粉形成體形成澱粉粒之經過,爲原形質本身之一種繼續的崩解:蓋澱粉形成體之原形質原由澱粉蛋白質等複合而成,至厚達一定時期,則起崩解而放出新澱粉,包在原來含有之小澱粉粒上,故澱粉粒實不啻澱粉形成體之一種分泌物.

澱粉形成體本身,據Schimper之意見,蓋來自原有色素體之裂殖.普通爲卵圓形或杆狀之原形質塊,內含蛋白質之假晶體:在澱粉粒形成時此假晶體能溶解,故知其只爲澱粉形成體之一種養料.

b. Dehneche 先後亦有所發表,證明 Schimper 之色素體爲形成澱粉粒之原動力一說.

c. Nägeli 1881 年反對 Schimper, 謂澱粉粒之形成,初不需白色體 Leucoplast, (即澱粉形成體)之存在,細胞之空胞 Vacuole 中亦可有澱粉生成.

d. A. Meyer 1881 年發現澱粉粒之形成,以接近白色體之一側爲最速,證明 Schimper 之說.

e. Strasburger 1882 年在松屬 Pinus 之髓線及蘋屬 Marsilia 中見有起自細胞液腔之澱粉粒,於是提出澱粉粒形成之經過,謂澱粉粒由原形質吸收能形成澱粉之物質,運至澱粉粒核附近,堆積而成,與細胞膜增厚時之情狀相似.第據 Salter 之解釋,則以爲 Strasburger 之所謂澱粉粒,實僅澱粉粒核之經染色者,而其所謂空胞,則爲未能染色之新輪層.

f. Nolf 1878 年改正 Strasburger 之說,以爲澱粉物質非由原形質運至澱粉粒核房,而爲澱粉粒核近房原形質中所含澱粉過多,因而沉澱.

g. Belzung 1887 年就白花羽扇豆 Lupinus albus 及麗羽扇豆 L. mutabilis 發育中之胚作組織細胞的研究,結果見此種細胞中僅有泡末狀之原形質而無所謂白色體,澱粉粒即在此泡末之網孔狀的空隙中生成.

h. Eberdt 1892 年謂無論具同心環或偏心環輪層紋之澱

粉粒,其形成皆在細胞液中,且僅藉原形質之力.葉綠體中小形澱粉粒,有時自體中脫出,原形質卽引而傳諸粒外,而新輪層以起.至Schimper之所謂澱粉形成體,不過澱粉粒之一種構成成分而已.

i. Dodel及Bing 1892年各有所發表,證明Schimper之說.

j. Königsberger 1893年謂白色體洵爲植物形成澱粉粒之器官,但究非普遍存在.亦有不具白色體而能生存澱粉粒之植物. Maranta arundinacea 中有最初在白色體內生成之澱粉粒,能脫出白色體外而獨立生長.

k. Green 1893 年見多種植物甫自藥上降落之花粉,能發生澱粉泊發芽而花粉管延伸時,生成尤多.百合屬 Lilium 花柱成熟之頃,亦確有小點澱粉粒生出.兩種情形中,皆無白色體可見.

l. A. Meyer 1895年發表 Udtersunchungen über Stärkckorner, 利用精密之染色法,從事研究,始知凡澱粉粒皆必在白色體中生成,生成後亦決不脫出,匪若Schimper向之所說.卽偏心環之澱粉粒,其遠心之一側,亦實尙包有白色體之薄層,並未突出其外.

m. Salter次年證明其師Meyer之說,謂澱粉粒絕不能在色素體外生成.

3. 澱粉粒中輪層紋起因之探討:

a. Nägeli曾猌分子楒壘說 Intussusception Theory 以說明植

物器官增長現象,爲其生平得意之一種剏造.1858年,乃更應用之解釋澱粉粒中輪層紋之生成.据其說,則輪層之所以起乃由於含水較多與含澱粉質較多較緻密之層交互相疊.蓋澱粉粒初成後,外界營養物質之濃度偶一變化,則因內在張力 Internaltension 之伸擴,粒中物質遂向表面成層擴出,而生成空隙多層及後營養物質之濃度再復原狀時,新澱粉分子填充於此空隙層中,於是遂成爲層層相疊之澱粉粒.

b. Schimper 於發現白色體之翌年,卽 1881 年頃,對此問題,提出新解釋,贊同 Nägeli 張力變化之假定,而反對其分子褪疊新層塡充舊層間之說.據 Schimper 之解釋,則白色體中沉積之澱粉物質,確能因內在張力而向張力所施之方向膨脹之結果,遂於表面造成一層.澱粉核卽由此造成.核成之後,張力漸弛,而後來澱粉物質再堆傳於核外,成爲當厚徑之一層,此時內在張力再起,又生成一膨脹層.如是再張再弛,內在張力繼續作用不已.而多層之澱粉粒以成.

c. Strasburger 以爲輪層間之暗線,相繼生成不透明各層間之相接面,而非眞正之層.

d. Correns, Bing, Meyer 1891, 1892 兩年,又提出 Nageli 最初之假定,而已爲輪之出現,實在於各層組織物質密度之差別.

e. Acqua 1894年提出謂白色體及游離澱粉粒皆包在細胞質中,細胞質能繼續將其所含澱粉物質沉積於既成之粒外使成新輪層.

f. Meyer 1895年與Salter次年之研究於解釋此現象上有絕大貢獻: Meyer 以Adoxa及山椒草Pellionia等多種植物爲材料作實驗,用染色法研究澱粉粒輪層之情况.結果斷定輪層之起,基於各層中澱粉物質疎密度之不同.較疎之層,染色較易.其所以有疎密之差異,則有兩種原因:

(一)在澱粉粒形成之中途,有種種條件可使澱粉物質之沉積狀况發生變化,而結晶物質分量上之變遷,影響尤大.在澱粉粒形成之始,白色體外層卽有結晶性物質分出.

(二)澱粉粒形成後其最外面一層,往往復被溶解,溶解以後,又恆有新物質堆積傅加.此種程序幾爲一種週期的變化,故澱粉粒遂有稀密不同之層.

g. Salter以極精細之染色法探求各種植物體中澱粉粒生成之方式,結果得見其生成經歷如次:

(一)白色體內部現出澱粉粒之痕跡.此卽澱粉核Nucleus or kern.

(二)白色體中分出澱粉物質,堆積於核之附近.若在偏心粒,則分出物質恆積於一側.

(三)核之四近起一染色甚淡之帶,帶所染之色向外益濃,而形成第一層粗疏澱粉質層.

(四)新層漸漸生成,逐一加傳於舊層之上,可由染色法察知其起始與作成.在偏心粒,含水較多之層,往往在向心之一側薄削甚或不可見,因而愈益覺其偏心.

(五)後此此各層復起分化,而輪層以顯.惟其受染性質,則自核以外愈出愈弱.最外之一層 Salter 名之 Rand,通常恆不易染色,似無組織之物,在初成時,且無層理,洎新 Rand 起後,包裹其外時,則又顯舊層之觀矣.

据 Salter 之觀察,則澱粉粒之各層,常有極顯明之染色性上的區分,與其所函在之白色體之染色性則又截然不同.澱粉粒新輪層之所以生出,則由於白色體之分泌.

4. 澱粉粒與結晶性.

a. Famintzin 1869 年比澱粉粒於霰石(碳酸鈣之球晶).

b. Schimper 1881 年始再注意於澱粉粒之結晶性,由觀察所得結果,提出謂澱粉粒確與普通球晶極相似,膨脹時其光學的性質曾無少變,故 Nägeli 所謂"複出折 Double refraction 起於內在張力"之說,實爲謬誤.澱粉粒蓋由多數針狀之結晶纖維,放射排列而成,與蛋白質之假晶體 Drystalloid 相似.

c. Mikosch 1887 年提出謂觀察馬鈴薯澱粉粒之結果,見此種澱粉粒由無數小杆狀之物放射排列而成,此各

杆能破壞而變爲一種顆粒狀物質.

d. A. meyer 1895 年之發表.與 Schimper 同意,謂澱粉粒確爲球晶,若使澱粉粒稍爲膨大,則放射狀之針晶可以窺見.

B. 肝澱粉 Glycogen: 分佈僅限於無節植物 Thallophyta.

1. Kühne 1868 年始在植物體中 —— Aethalium 之原形體 Plasmodium —— 發現.

2. Reinke, Rodewald 1881 亦發現之於 Aethalium 之原形體,且謂其原形體之 4.7 % 爲肝澱粉.

3. Errera 及其弟子 Clautriau 於 1882, 1885, 1895 三年等時見之於多種藻菌體中.

4. 1885 年以後,在下等植物體中檢出肝澱粉之報告,刊布極多.其分佈以菌類爲最廣,次之則爲藍綠藻,褐藻紅藻幾不含有.

5. Errera 在亞麻 Linum usitatiosimum. Mahoniarepeno, 馬鈴薯 Solanum tuberosum 見有相似之物,第尚未敢遽必其爲肝澱粉.

C. 菊糖 nulin.

1. 十九世紀初期,卽有人知菊科中有一羣植物,其體中含有菊糖溶液.

2. Sachs 似爲發現用酒精處理可使菊糖生成球之第一

人.

3. Meyer 見之於絲蘭 yucca 之葉中.

4. Parkin 1899 年謂單子葉植物 Monocotyledons 之鱗莖及球莖中往往有之.

D. 其他儲藏糖類:

1. 1876 年以前,間亦有關於植物體中具還元力糖 Reducing sugar 存在之報告,第均非儲藏養分.

2. Kühnemann 1875 年發表謂大麥之種子中,儲有蔗糖爲其儲藏養料.

3. Brown 則 Morris 反對之,以爲大麥發芽後,其所含蔗糖能增加三倍,則必非儲藏養分可知.洎後 1890 年,兩氏切斷大麥之胚芽,以 2% 之蔗糖水培養之,見其亦能生長暢適如未與胚乳斷離前之狀.似蔗糖竟可全代澱粉之功能矣.

4. Lepley 1882 年發現玉蜀黍體不含蔗糖時則不能復生澱粉.

5. Balland 1888 年在小麥中亦有同一之發現.

6. Girard 1889 年又發現馬鈴薯之形成澱粉粒亦必賴乎蔗糖.

II. 含氮化合物之儲藏

A. 糊粉粒 Aleurone grains —— 種子中之儲藏蛋白質.

1. 糊粉粒生成情況之推究:

a. Pfefier' 1872年以羽扇豆Lupinus種子爲材料,而推究糊粉粒發生之經過,爲研究糊粉粒之第一聲.據Pfeffer之說,糊粉粒之生成與粒中共存之礦物結晶成分(蓚酸,鈣,磷酸鈣鎂等)有關.此等鹽類之結晶在細胞液腔中出現後不久,蛋白質即圍在其四周沉積以成粒.種子逐漸成熟時,細胞液腔中水液量逐漸減縮,而蛋白質亦逐漸沉澱,終之遂成糊粉粒析出.其形成純爲機械的沉澱,與原形質本身了無關係.

b. Rerdle 1882年研究Lupinus polyphyllus種子中糊粉粒之生成,其結論乃與Schimper研究澱粉粒所得結果相近似. Rendle之觀察,始自種子發芽,子葉吸收胚乳而發芽,漸次脹破種皮之頃.此時子葉表面之原形質即漸含葉綠顆粒,粒中堆積澱粉.同明糊粉粒之前身,即圓形或卵圓形之結晶性蛋白質小突起亦出現.積漸間,此小突起內外兩面增大,最後此等顆粒成團塊而密聚於原形質中,致使原形質呈一種網狀之觀.同時此化學性質亦漸漸變化,對於鹼性試藥及酸性鹽類之反應時有差異.及至最後,則空胞中全爲此種沉積物塞滿,細胞遂充糊粉粒.故Rendle斷定糊粉粒之生成爲原形質分泌所得.

c. Werminski 1886年 Wadker 1888年之觀察,見萆麻Ricinus種子之胚乳中,最初僅有空胞,此乃生成一小形糊粉

粒,至種子成熟之頃,蛋白之結晶始擴大而幾於塞滿其細胞.

d. Van Tieghem 據兩人之觀察,遂更擬一學說,尤與 Schimper 關於澱粉粒形成之假定相似. Tieghem 以為氏所謂空胞,實為含水甚多之原形小體當名之曰含水原形質體 Hydroplastid., 與白色體相似,由其特殊之活動始生成糊粉粒.

e. Lüdtke 1890 年就蓖麻種子作研究,謂球狀體 Globoid 及假晶體 Crystalloid 皆起自細胞質,與空胞了無關係.

f. Belzung. 1891 又提出 Pfeffer 之說而贊揚之,以為形成糊粉粒之蛋白質,原來與鹽基性磷酸鹽成可溶性結合物而存在,後此因細胞中有機酸之生成而始沉澱者. 其生成之步驟與 Rendle 之觀察記載全同. Belzung 所用材料,亦主為豆科植物.

2. 糊粉粒中蛋白質之性質:

a. Denis 1859 年,即 Hartig 發現糊粉粒後四年,曾以浸出動物血球素 Globulin (一種蛋白質)之 10% 食鹽水浸得糊粉粒蛋白質.

b. Hoppe-Seyler 1967 年自 Brazil nut 中析得血球素羣之蛋白質,外此如玉蜀黍,燕麥,豌豆,杏仁,芥子等種子中,據 Hoppe-Seyler 之研究,亦多含有血球素類蛋白質.

d. Ritthausen 1872 年自出心裁以水,稀薄鹻液及酒精等

爲浸劑,浸得多種蛋白質,別之爲三羣:

(一).白色蛋白質類 Albumins: 溶於水,其溶液煑沸則凝固.

(二).酪素類 Calsins: 略溶於水,極易溶於碳酸鉀及鹽基性礦酸鉀溶液.加酸則沉澱.

(三).膠質類 Gelatins: 能溶液酒精及稀酸.

第二類中,又可依其溶解度之不同及分解產物之差異而別爲多種.

d. Weyl 1877 年復用舊時動物生理學者之方法析取糊粉粒蛋白質.Weyl 反對 Ritthausen 之實驗,以其所用溶劑,不足以析出血球素蛋白質,而操作之中,又恆在不意中已使所欲析取蛋白質變性.由 Weyl 之實驗,證明血球素類蛋白質確有存在,且尙有肌肉素 Myosins 類卵黃素 Vittelins 類存在.麥粉中之麩素 Mluten, Ritthausen 以爲膠質類蛋白質者.据 Weyl 言,爲血球素類蛋白質種殆與血液凝固相似之凝固作用,變化而成.

e. Schmiedeberg 同年以實驗爲 Weyl 證明.

f. Ritthausen 同年有所答辯, Hoppe-Seyler 及 Weyl 皆認可其說. 1879 年,仍自以實驗爲辯證,亦頗得信任.

g. Grübler 1881 年又證明 Weyl 之說.

h. Vines 1878—1880 年間繼續發表之論文,於此問題之貢獻爲最大:

(一).材料: 不同多目之種子.

(二).方法: 用微量化學法 Microchemical method,但同時亦製取多量而作平常分析.

(三).結果: 泰半與 Hoppe-Seyler 及 Weyl 同,唯尙有兩類極重要之蛋白質之發現:

(甲)初級蛋白質類 Albumoses: 能溶於水;其水溶液加熱亦不凝固.

(乙)變性蛋白質類 Derived proteins: 歐黑三稜 Sparganinm racemosum 中有之;僅溶於稀酸及稀鹼.

i. Martin 1887 年 Abrus precalorius 中發現血球素類與初級蛋白質類之共存.

j. Chittentan 與 Osborne 及後此 Osborne 與其羣弟子 1891 年以後在美國之研究,於種子中儲藏蛋白質之性質,尤有極大貢獻,結果歸納得:

(一).血球素類蛋白質爲最主要之種子蛋白質,若處理妥當,且可得其結晶品.

(二).初級蛋白質 (Chitenton 等以爲當名 Proteose) 恆略有少量可以檢出.

(三).C. 變性蛋白質及複合蛋白質 Albuminates 在其數種種子中有少量存在.

(四).白色蛋白質 Albumins 不常見;唯禾本科植物種子中間有之.

Ritthansen 所析得能溶於酒精之膠質蛋白質類中,有所謂 Gluten-fibrin 之一種.據 Chittenton 及 Osborne 之研究,玉蜀黍粒中之蛋白質,主亦爲此種物質,而別以 Zein 名之.又麵粉中之麩質 Gliuten 據 Osborne 及 Voorhees 之研究,當卽膠質蛋白質類之兩種,名 Gladin 及 Glutenin 相互作用,複合而成.此等蛋白質,與糊粉粒中之蛋白質是否相關,諸氏皆未明定,然殆必有游離或無定形而存在於種子胚乳中者. Osborne 又在大麥中發現類此之一種蛋白質,名之曰 Hordine.

k. Miss O'Brien 1892 年亦曾有關於麥粒中蛋白質之研究.

B. 種子以外之儲藏蛋白質:

1. Craner 1862 年在真正紅藻類 Florideae 中發現蛋白質之假晶體.

2. Van Tieghem 1876 年見之於菌類.

3. Zöller 1880 年見馬鈴薯塊莖之細胞液有無定形血球素溶存.

4. Zachariaz 1880 年見篩管中有無定形蛋白質.

5. Fischer 次年有同一之發現.

6. Klein 又於 1880 年在菌類及紅藻類體中析得無定形蛋白質.

7. Martin 1885年乳汁中有兩種初級蛋白質及一種白色蛋白質.

8. Green 1886 年亦在乳汁中發現多種蛋白質,且在多種

多漿植物根,莖之皮層中發現有血球素類及初級蛋白質.

a. Vines 斷定 1862 年以前卽已發現之 Lathraea 卵珠中及馬鈴薯塊莖中之蛋白假晶體爲卵黃精類.

C. 蛋白質以外之含氮結晶物:

1. E. Schulze及其羣弟子 1870 年以後之研究,於此方面有極大之貢獻.

2. Scheibler 1870 年在菾薹(Beta vulgaris) 之塊莖中發現石刁柏素(Aspargin)及菾薹素(Betaine).

3. Schulze 及 Urich 1878 年更發現菾薹中尙有麩精 Glutamin.

4. Schulze 及 Barbieri 同年又在馬鈴薯中發現石刁柏素 Leucin, tyrosine.

5. Schulze 1882 年發現馬鈴薯之含氮儲藏物中 56% 爲醯基及醯基醯基化合物, 44% 爲蛋白質.

6. Schorey 1897年在甘蔗中檢出 Glycine.

III. 脂肪類化合物之儲存:

A. 油及脂肪:

1. Sachs最初於研究碳水化合物時曾隨帶注意於油脂之變化,且曾細究由種子內部運輸油脂於萌蘖植物中經過之轉變. 1882 年 Sachs 始正式提出謂油脂及碳水化合物可以互變.

2. Cunningham 1880 年研究菌類飢餓堆脂肪堆積之情形,

推斷謂飢餓開始時原形質耗失而變爲脂肪滴,故脂似當由原形質變出.

3. Nageli 1879 年亦有相似之發現,且更推論謂脂肪之生出與所供食物之性質無多大關係.

4. Wakker 1888年謂脂肪積存時亦須有 Falstid 之存在,此種 Plastid, Wakker 名之爲 Elaioplasts. Vanilla 幼葉之表皮中有之特多,

5. Zimmermann 1893 年重行檢定此種所謂 Elaioplast, 見其形狀極不一致,或圓,或卵圓,或不規則,恆位在細胞核之近側. Ornithogalum, Funkia 之花蓋中, 舌蘭 Agave 某一種之葉中,Oncidium 之根中皆有之.

B. Lecithin 及 Cholesterin:

1. Knop 1860 年在植物種子中發現 Lecithin.

2. Töpler 1861 年謂其分佈甚廣.

3. E. Cchulze 及其羣弟子 1878 年以後,極注意研究,結果得於多種種子中檢出 Lecithins 及 Cholesterins 之存在及其存在量.

4. Lipmann 1887 年在蒼蓬中發現 Lecithin 及其分解成績體.

5. Kunz 1886, 1888 兩年中自多種根中浸得 Choline.

6. Sloklaza 1891 年見花粉之儲藏物質中有Lecithin.

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室中國鳥類標本之地理分佈研究

任國榮

序

(1)

在昔鳥類地理分佈學者將地球表面,分爲三部:一爲海洋部,一切海洋生活之鳥類屬之;一爲島嶼部,一切島嶼上之鳥類屬之;一爲大陸部,凡一切旣非海洋生活,又非島嶼生活之鳥類屬之.如此劃分,絕不適當,因地理,氣候及食物關係.往往有同部鳥類.天壤懸殊,而反與別部較相近似者.自Wallace 之動物地理分佈學出,世界學者,翕然宗之,直至今日,人猶墨守其六大區之成法,鳥學方面,自難獨異.茲於此一述世界六大區鳥類之分佈情況,以爲本文開端.

A 古北極區

本區範圍最廣,包括舊世界之寒溫兩帶,凡歐洲全部,非洲北部以至撒哈拉大沙漠,亞洲北部以至喜馬拉雅山及戈壁大沙漠皆屬之.本區又再分爲四省: 1, 歐洲省,以比利牛斯山,阿爾卑斯山,巴爾幹山,黑海及高加索山脉爲界; 2. 地中海省.凡歐洲南部地中海沿岸一帶及非洲北部屬之,以波斯,阿富汗與東洋區相接,其南部及東部,皆有大漠爲界; 3. 西伯利亞省,亞洲之北部及東部皆屬之,以烏拉山,裏海,

喜馬拉雅山及戈壁大沙漠爲界;4.滿洲省,中國自揚子江以北,滿洲,及日本皆屬之.

本區範圍雖廣,在鳥類分佈上則變化無多,省與省之間,相似之品類繁,而互異之品類少,雖在極北冰雪之地,猶可見鶉鷄目(*Lagopus* 屬),鷲鷹目(*Falco* 屬),鴟鴞目(*Nyctea* 屬),鳴禽目(*Acanthis, Plectrophenax* 屬)等之代表種,雁鴨目與鷗目則尤豐富,且以此爲大本營.稍南,因有高山茂林與熱帶隔離甚遠,故特有之品類亦不少,鴉科有*Nucifraga*,山雀科*Parus*,雀科有 *Loxia, Carpodacus*,啄木科有 *Dryobates, Picoides* 等屬.溫帶耕作之地,雁鴨科,鷗科,鷲鷹科,及鳴禽類均甚繁,而大形之涉禽類如鶴,鷺,鸛等亦多.在中國與日本,有許多東洋區品類之侵入;與埃及交界處,亦可發見走鳥;其南方沙漠中,鴇科(*Otididae*),松鷄科,雲鳥科皆甚豐富,同時亦有熱帶性之禿鷲蜂虎及黃鶯等.鸚鵡目只可見於亞洲.

本區最特別之品類,首推阿比科(*Colymbidae*),棲北方冰雪之地,次爲松鷄科,亦以寒帶爲多.他如雀科之 *Loxia, Fringilla, Acanthis, Emberiza*;鶇科之*Turdus, Luscina, Oenanthe*;鶯科之*Sylvia, Phylloscopus*;等屬,亦各自佔重要之位置.

B. 埃及區

非洲自撒哈拉及亞阿伯二大沙漠以南之地皆屬之,亦可分爲四省:1.西非洲省,幾內亞及剛果屬之;2.南非洲省,非洲南部屬之;3.中非洲省,非洲中部及東部屬之;4.馬達

加斯加省,馬達加斯加及其附近之島嶼屬之.言其一般地勢,則東部多荒野,氣候乾燥,故走鳥類之駝鳥,鴇類之 *Choriotis arabs, Neotis cafra* 滋殖於此,同時,鶴科則有 *Balearica, Bugeranus*,鸛目則有 *Ephippiorhynchus, Anastomus*, 雁鴨科則有 *Chenalopex, Plectropterus*, 禿鷲科則有 *Pseudogyps, Gyps*,等屬.鳴禽類之雲鳥科亦繁.西部多森林,氣候潤濕,故鳴禽類之鶇科甚多,雁鴨科之 *Pteronetta, hartlaubi*, 䴉鷺科 (*Ibididae*) 之 *Lampribis*, 鷺科之 *Trigrisoma, leucolophum* 等,亦皆爲該處所特有.

馬達加斯加一省,可謂爲埃及區與東洋區之接觸點,但其鳥類分佈情况,則甚爲奇特.如 *Alectoridae* 科之 *Mesites, Monias*, 佛法僧類之 *Leptosomus, Brachypteracea*, 鳴禽類中之 *Philepitta* 等屬,皆其特有.同時許多平常品類如鶴,禿鷲,啄木鳥,擬啄木鳥等科,皆不可得見.又,馬達加斯加有一種既經絕種之走鳥名曰 *Aepornis* 者,在古鳥學中,實佔極重要之位置也.

本區鳥類,多被鮮麗之體羽,數量雖繁,而科目則甚少.與古北極區相似者寡而與東洋區相似者多,除 *Musophagidae* 及 *Coliidae* 兩科爲絕對的南非性不可得見於東洋區外,其餘兩區共有之科目,有雉科,三趾鶉科,鳩鴿科,佛法僧科,蜂虎科,犀鳥科,鶇科,太陽鳥科等.又本區特別繁衍之區類,在鶉鷄目則有鷓鴣屬 (*Francolinus*) 及珍珠鷄屬 (*Numidea*);啄

木目之*Capitonidae* 則有 *Lybius, Trachyphonus, Pogoniulus*; 太陽鳥科則有 *Nectarinia, Cinnyris*; 伯勞科則有 *Laniarius, Chlorophoneus, Tschagra* 等屬;織布鳥科更繁,*Eulabetidae* 科亦不少.

C. 東洋區

包含亞洲南部全部,凡印度,印度支那,中國南部,蘇門答拉,爪哇,巴里 (*Bali*), 婆羅洲及菲律賓皆屬之,可再分爲四省: 1.印度省,包含印度全境; 2.錫蘭省,印度南部之錫蘭島屬之; 3.印度支那省,印度支那及中國南部屬之; 4.馬來省,馬拉甲半島,蘇門答拉,爪哇,巴里,婆羅洲及菲律賓屬之.本區西部,大漠連天,與古北極區完全隔絕,惟在中國,則二者無明確之界限,頗呈融和狀態.本區之極東,在爪哇與菲律賓等處,其鳥類與澳洲區者稍稍接近.

東洋區之一般性質與埃及區頗相似,並無若何異常之特點.除走鳥類絕跡本區外,他如鵜鶘,鸛,鶴鷺,禿鷲,鷲鷹之類無不有之,鶉鷄類尤富,喜馬拉雅之角雉, (*Tragopans*),錦雉 (*Lophophores*),印度及印度支那之孔雀,馬來羣島之孔雀鷄 (Argus), 中國之雉(Phasianus), 印度支那之原鷄及樹鶉,皆其最著者也.啄木科,杜鵑科,擬啄木科,亦以此爲分佈之中心.鸚鵡類則不甚繁.蜂虎,佛法僧,翡翠,犀鳥等科亦有相當之代表種.鳴禽類異常發達,其最可注意者爲闊嘴鳥科,及披他科,次則爲鶲科,鶇科,椋鳥科,魚尾燕科等.畫眉科品類甚繁,舉世無匹.伯勞科之 Lanius, 太陽鳥科之 *Aethopyga*, *Leptocoma*,織布鳥科之*Ploceus, Munia*,鴉科之*Cissa*及*Urocissa*,亦皆極饒趣味者也.

D.澳洲區

本區亦可分爲四省:1.馬來省,包含山打羣島之一部,自瑯玻克島(Lombok)以至的摩爾(Timor),西里伯及美拉尼西亞羣島(Melanesia)之大部,新幾內亞,新英蘭,路易西亞特(Louisiade)羣島及瑣羅門羣島;2.澳洲省,包含澳洲本部及塔斯馬尼亞(Tasmania);3.紐西蘭省,包含紐西蘭及其附近羣島;4.波里尼西亞省,波里尼西亞(Polynesia)及米克羅尼亞(Micronesia)羣島屬之.

本區鳥類極爲奇特,走鳥類之食火鳥(*Casuarius*)及擬貓(*Dromaeus*)只可見於新幾內亞及澳洲本部.極樂鳥(*Parodiseidae*)與籃鳥科(*Pilonorhynchidae*)亦早爲世人所熟知.鶉鷄類之*Megapodiidae*以落葉覆卵,藉其發酵時所生之熱力以代抱孵.鸚鵡類之繁,絕非其他各區所能比擬.新幾內亞之鳩鴿類,體羽鮮麗,且以此爲分佈之中心.

本區北部之夏威夷羣島,鳩鴿,鸚鵡,翡翠等普通科目,皆付闕如,但有一科曰*Drepanididae*者,鳴禽類中,尙無近似之品類.南部之紐西蘭,鳥類性質又不同,其最特殊者當爲幾衞(*Apteryx*),此乃一種夜性走鳥,在昔本甚繁多,近因戕殺無度,數量銳減.他如雁鴨類中之*Hymaenolaimus*,秧鷄類中之*Ocydromus*,鸚鵡類之*Stringops, Nestor*,鳴禽類之*Heteralocha*,

皆足爲該地鳥類之代表.至其久經絕種之*Dinornis*,在古鳥學上,亦佔極重要之位置也.

E.新北極區

本區包含北美全部,亦可分爲四省: 1.加拿大省,加拿大全部屬之; 2.東美省,美國東部耕作之地屬之; 3.山陵省,美國中部多山之地屬之; 4.加里福尼亞省,西部山地及沿海一帶山脈屬之.

本區鳥類,一部份與亞洲中部及北部者相似,一部份與新熱帶區者相融利,故除*Chamaeidae*一科外,可謂再無特別之品類.如古北極區之阿比,雁鴨,松鷄,啄木,連雀,雲鳥,鴟鴞等科,皆可於此得相當之代表種.而蜂鳥(*Trochilidae*), *Tanagridae, Icteridae* 等科,則與新熱帶區相共.舊世界之鶯科,在本區則代以 *Mniotilidae*. 本區之鵐亞科(*Emberizinae*)品類極多.野生之火鷄,在昔本極榮繁,今則殺之者衆,幾有絕跡山林之感,幸豢養者多,種族賴以保存耳.

F. 新熱帶區

本區包含南美全部及墨西哥,亦可分爲四省: 1.墨西哥省,墨西哥及美洲中部屬之; 2.巴西省,南美之北部,波里維亞及銀河(Rio de la Plata)屬之: 3.安提利省,安提利羣島屬之: 4.智利省,阿根庭,智利沿海以至祕魯皆屬之.

本區鳥類與東洋區埃及區,相似者尙多,而與新北極區相似者反少,故地質學家以爲在久遠之古代,南美,澳洲及

非洲南部,實有大陸相連,而南北兩美,乃爲海洋所截斷,觀乎動物分佈情況,此說信然.東洋區及埃及區之雁鴨,秧鷄,鸛鷺等目,在此均可得相當之代表,佛法僧目之擬啄木,翡翠兩科較少,而麗鵑科 (*Trogonidae*) 則較多.啄木科及鸚鵡科尤繁.其與新北極區所共有者爲禿鷲科,蜂鳥科, *Tyrannidae, Icteridae, Tanagridae* 等等.

本區特產品類甚多,走鳥類有三趾駝鳥 (*Rheidae*), 居巴西及阿根庭之荒原.*Tinamidae* 形如鷓鴣,自成一目曰 *Tinamiformes*, 宇內尚無相近之親緣. *Cariamidae* 一科,究竟應屬何目,尚有爭執,有將其隸鷲鷹目者,有將其隸鸛鷺目者.該科只有兩屬,卽 *Cariamus* 及 Chunga 是也. *Psophiidae* 之 *Psophia* 一屬,共有六種,頸足長,翼尾短,形頗肖鶴,分佈於英屬圭亞那 (*Guiana*) 以至亞馬孫河.鶉鷄類之*Opisthocomidae* 只有一屬一種 (*Opisthocomus cristatus*), 形大如鴿,習性如秧鷄而構造則似杜鵑,分類上位置,尚未十分確定,分佈地自哥侖比亞以至亞馬孫河下流及波里維亞.鶉鷄類中尚有 *Cracidae* 一科,亦爲本區所特有.啄木鳥目之*Rhamphastidae*,嘴部異常發達,與東洋區之犀鳥科 (*Bucerotidae*) 相似,但無犀鳥嘴上部之裝飾物.同目之 *Bucconidae* 及 *Galbulidae* 兩科,亦爲本區所特有.佛法僧目之 *Momotidae* 及 *Todidae* 兩科,爲佛法僧科與翡翠科之連鎖,與東洋區之蜂虎科亦極相似,前者分佈於墨西哥之南,安提利羣島以至巴拉圭,後者則只

限於安提利羣島.鳴禽類之 *Cotingidae* 及 *Coerebidae* 兩科,亦決無發見於他處.以上只就其最著者言之耳,踈漏之處,倘所在多有也.

(II)

我國幅員遼闊,跨寒溫熱三帶,兼古北極與東洋二區,故鳥類之繁,宇內無敵.大概揚子江以北之地應隸古北極區,以南則爲東洋區,其間雖不免有所混淆,舍此實無更明顯之界限.茲就管見所及,試一論吾國鳥類之分佈情形.

自新疆,甘肅以至內外蒙古,氣候寒冷,森林稀少,黃沙大漠,到處皆是,該部鳥類,與西伯利亞省者相似,除雁鴨,鷺鸛,鶉鷄,鷸等目都有相當之代表種外,鳴禽類亦不少,且大多數爲遷移鳥,如山雀科,鶇科,鶯科,雀科,雲鳥科等皆是.其東,自東三省以至直隸山東,當與日本同隸屬於滿洲省,因海岸綫甚長,故除一般大陸性之古北極區品類外,倘有海鳥甚多,而我國與日本所共有之鳥類,亦以此部爲最繁.由此而南,自江蘇,安徽,湖北,湖南以至江西,福建,浙江諸省,爲古北極區與東洋區之融和點,爲寒溫熱三帶鳥類聚匯之中心.除固有許多留鳥外,倘可得西伯利亞,滿洲,印度及印度支那等四省之遷移鳥.自雁鴨,鸛鷺,鶴,鷸,鳩鴿,鷲鷹,鴟鴞,杜鵑等目以至鳴禽類,皆有且多,鶉鷄類尤爲豐富,大都體羽鮮美,雅緻動人.江浙臨海諸省,海鳥亦不少.且交通便利,商埠林立,歐美人士居留者多,每於工作之餘,射獵採集以爲

樂,故本部鳥類之智識,最爲明瞭.不列顛博物館之中國鳥類標本以此部者爲最多,而英國鳥學雜誌關於中國鳥類之報告,亦以此部者最爲常見也.

福建,江西,湖南,三省之南,與廣東,廣西,雲南,貴州四省,當同隸於東洋區.此部鳥類,除參雜若干之古北極區品類外,大概與印度支那,馬來羣島及印度之東部者相似.如鴉科之 *Cissa*, *Temnurus*, 灰燕科之 *Artamus* 黃鶯科之*Oriolus*(*O. chinensis* 不在內), 椋鳥科之 *Eulabes*, *Gracupica*, *Sturnia*, *sinensis*, 太陽鳥全科,啄花鳥科之 *Dicaeum*, 披他科之 *Pittasoror*, 闊嘴鳥全科,皆非北部與中部各省所能得見.海岸綫長,故海鳥亦繁.又因天氣濕潤,地多沼澤,故鶴鷺,秧鷄之屬亦不少.冬春兩季,亦可得往來南北之遷移鳥.畫眉科更富,除四川省外,恐無倫比.雲南一省,因氣候,雨量及食物關係,鳥類色彩,特別鮮明,故地方種亦種獨多.廣東南部之海南島,其性質實介於廣東與印度支那之間,因與大陸隔離,亦自有若干特別之種類.一般島鳥,其量度常較小於大陸鳥,海南鳥亦自非例外.

青海,西藏,四川,西康諸省,因受西伯利亞,印度,印度支那諸省之包圍,故其鳥類,亦呈紛雜狀態.大概川藏之北部及青海,古北極性較强;西藏之南及東南,喜馬拉雅性較强;西康及四川之南部,則與雲南鳥相似.但無論如何紛雜,此部亦自有其特質,故 *David* 及 *Oustalet* 二氏於 *Les Oiseaux de la*

*Chine*一書中,稱此部爲西藏性中國(*Chine tibetaine*).蜀中山深林密,其留鳥每多特質,鳴禽類中,尤所見不鮮.畫眉科數量之多,品類之奇,不特不讓滇黔桂粵諸省,且或過之.其餘鷲鷹,鶉鷄,啄木等目都有相當之重要.

陝西一省,揆諸地理,當隸古北極區也無疑.自秦嶺以南,頗多與四川相共之種類,*David* 研究之甚詳.河南,山西,及安徽之北部,尙未見有報告,故此部之鳥類智識,異常缺乏.

我國科學萌芽不久,鳥類學尤爲幼稚,故國內各研究機關所存標本之足供研究用者,數極寥寥,反而歐美各大博物館,收藏極富.如甘肅,蒙古及滿州一帶,俄,德搜集最多;中部各省,則首推英國;雲南,四川二省,英法均有詳細之採集,柏林博物館所有者亦不少;廣東沿海以至海南島,採集者大都爲英國人,北部及東北部則爲德人,巴黎博物館此部標本極少,幸有大批安南鳥,相同之品類甚多耳.若專就巴黎博物館鳥類研究室之中國鳥類標本言,採地亦不可謂不廣,蒙古方面,有 Chaffanjon, 北京及陝西有 David; 西藏有 Prince d'Orleans; 漢平有 David; 四川有 David, Prince; d'Orleans, Déjean, Biet;雲南有 Prince d'Orleans, Pēre Soulie, Pēre Cavalerie;貴州有 Pere Cavalerie; 廣東興甯有 Pēre Seguin; 浙江舟山有 M. Nadar; 甯波有 Gladin; 江西有 David; 上海,南京則有 Pere Heude 及 Pere Courtois. 其餘由交換得來之標本,數亦不少,如甘肅標本概來自柏林博物館, Rothschild 之雲南鳥, La Touche 之福建鳥,

各自有相當之數量,英國博物館送來之海南鳥雖不甚多,而該島特有各種之代表,大都可見於此地也.

(III)

余對兩粤標本雖稍事採集,但北方鳥則所見無多,又値年來國家多故,經濟窘乏,無從繼續作大規模之射取,私衷輒爲悒悒.抵法後因補習文字,直至客歲五月,始克再事研究工作.着手之初,余卽擬先將巴黎博物館所藏之中國鳥類標本全看一次,以求有一較普遍而深刻之印象,然後再認識其他各區之奇特標本,終乃鑑定余在國內兩年中射得之鳥類,(爲數約有六千),研究室主任 Berlioz 極同情於余之主張,並賜余以一切之利便與贊助,故書籍標本,皆得恣意擷取,而研究室之開放時間又自上午九時直直下午八時,此文之成, Berlioz 氏之助力爲多也.室中中國標本,大部來自滇蜀,餘則採自京,陝,贛,閩,又有大批安南及印度鳥,亦足與研究中國鳥者以比較研究上許多便利.惜滇蜀標本,概射自土人,不諳製作,其羽毛殘損之情况,決非意料所能及,而室中人力無多,不加整理,只求乾燥,便納之入箱,積累多年,以至今日.其中雖有若干已經定名者,而大部仍係原始材料,卽定名之部,或因鑑定不精,差訛雜出,或因名詞失效,另待考求.余乃爲之分門別類,未定名者爲之定名,名不確者爲之訂正焉.

余於研究之便,並記其梗概,乃成此文.此文特注重地理

分佈,形態與生態,皆略而不詳,蓋能研究地理分佈者,未有不知形態與生態也.余先本欲全體作檢索表以代形態記載,後亦省却之,特於極近似之種或亞種間,作表示其區別.至本文範圍,自以研究室中之中國鳥類種類爲限,凡經有記載於我國之品類,如室中有採自我國之標本者,固依照分類系統爲之編列號碼,並記余所考驗中國鳥之個數,若無採自我國之標本而有別處標本可代表者,亦一律重視,特不記其個數耳.倘無直接採自我國之標本而又無別地標本以代表時,雖有記載於文獻,爲名實相符計,暫不編入,蓋本文以標本爲主,而以文獻爲佐也(如雀科之交嘴雀 *Loxia cuvirostra albiventris* Swinhoe, 本爲我國之品類,因室中既無中國鳥,又無他地標本以爲代,故暫不收入.如雉科之白鷴,室中雖無中國鳥,但安南標本則甚多,爲權宜計,以安南鳥代中國鳥,故爲之編列號碼.其他相似之列尙多). 室中標本雖不足代表中國鳥之全部,大致總可無缺,於此可見其分佈之梗概焉.

自三名法興,亞種乃紛紜出現,究其所極,重名百出,往往有一鳥而負學名數十,學者病之.雖然,此乃定名者之疏忽,非三名法之病也,非三名法無以視其親緣之遠近,差別之大小,易言之,卽無以救二名法之窮也.相差甚微者卽爲異種,相差甚遠者亦爲異種,此二名法之所以不精細也.定名者不待多數標本作比較,徒考驗一二個體後卽予以新名,

於是翼之稍長稍短,嘴之稍大稍小,色彩之稍深稍淺,斑紋之稍疎稍密,卽認爲異型,究竟此係個體之差異歟,季節之影響歟,抑真正爲種或亞種之特性歟,不知也,此未經愼密之考察也.出之不愼,用之無當,無論二名法與三名法,其病也同.余對此點,時爲留意,每遇疑難,如材料充足時則作愼密之比較以解決之,否則誌其疑竇以待考求.如能因此而引起國內同志之研究興趣,則此文之作爲不虛矣.

本文分類系統,大致採自 Stuart Baker 之 Fauna of British India, Birds, second edition. 惟近世自然科學,日進千里,訂前人之所不當,發前人之所未知,多係零縑碎錦,散見各大雜誌中,與 Stuart Baker之分類系統,亦常有出入之處,於鳴禽類中,尤所見不鮮也.

(IV)

本文應用之參攷書及雜誌如下:

A. 參考書類

1. Anderson (J.) :———Anatomical and Zoological Researches of Eastern-Yunnan. 1879.

2. Baker (E. C. Stuart) :———The Fauna of British India, Birds, second edition, 8 vol. 1922-1930. (註1)

3. British Museum :———Catalogue of the Birds in the British Museum, 27 vol. 1874-1898.

4. David (A.) et Oustalet (E.) :———Les Oiseaux de la Chine, 1877. (註2)

5. Delacour (J.) et Jabouille (P.) :———Les Oiseaux de l'Indochine

Française, 4 vol. 1931.

6. Dresser (H.E.) :———A Manual of Palaearctic Birds, 2 vol. 1902-1903.

7. Hartert (E.) :———Die Vögel der Paläarktischen Fauna, 3 vol. 1903-1923. (註3)

8. La Touche (J.D.) :———A Handbook of the Birds of Eastern China, vol. I, part 1-5, vol. II, part 1, 1925-1931. (註4)

9. Rothschild (Lord) :———On the Avifauna of Yunnan, with critical Notes (from Novitates Zoologicae, vol. xxxiii, December, 1926, pp. 189-343). (註5)

10. Sharpe (R.B.) :———A Handlist of the Genera and Species of Birds, 6 vol. 1899-1909.

B. 雜誌類

1. Bulletin of the British Ornithologists' Club, London, 1892-1931. (註6)

2. Ibis (The), a quarterly Journal of Ornithology, London, 1859-1931.

3. Journal für Ornithologie, Cassel und Leipzig, 1853-1931.

4. Novitates Zoologicae, Tring, 1894-1931.

5. Oiseau (L') et la Revue Française d'Ornithologie, Paris, 1929-1931.

6. Ornithologische Monatsberichte, Berlin, 1893-1931.

任國榮自序

于巴黎鳥類研究室

註 1:———簡書作 Baker.

註 2:———簡書作 D. et O.

註 3:————簡書作 Hart. Vög. Pal.

註 4:————簡書作 La Touche.

註 5:————簡書作 Rothschild.

註 6:————簡書作 Bull. B. O. C.

附記:————本文之外國地名,概採自中華書局出版之中外地名辭典.如爲該辭典所未有者,則酌爲翻譯,同時並註原文.

第一目

鳴禽類 PASSERES

鳴禽類一目,品類最繁,約佔鳥類全體二分之一.與其他各目之區別雖尙明瞭,但同在鳴禽類中,科與科,屬與屬之間,頗難得一確切之界限.除 *Pittidae* 及 *Eurylaimidae* 兩科可以解剖學得其特徵外,其餘各科則多注重外部形態,如初列撥風羽及尾羽之數目,幼鳥與成長鳥體羽之比較,皆其至要者也.

余在巴黎博物館鳥類研究室所見我國鳴禽類標本,共有三十二科,一百七十三屬,五百二十二種.及亞種經余作個別研究而記載於本目錄之中國標本,共二千八百四十九個.他如歐洲本部,印度及安南標本,雖常供比較研究,以非本文範圍,概不作數目記載.玆列表示其科屬及數目如下.

科 名	共有幾屬	共有幾種及亞種	中國鳥之個數
1. Corvidae.	10	20	47
2. Paridae,	3	22	106
3. Panuridae.	1	1	0
4. Paradoxovnithidae.	5	10	67
5. sittidae.	1	5	23
6. Timaliidae.	22	80	441
7. Aegithinidae.	2	4	2
8. Pycnonotidae.	6	19	65
9. Certhiidae.	2	5	25
10.Troglodytidae.	3	3	14
11.Cinclidae.	1	3	22
12.Turdidae.	28	80	527
13.Musicapidae.	13	34	113
14.Laniidae.	1	11	38
15.Pericrocotidae.	3	11	15
16 Artamidae.	1	1	5
17.Dicruridae.	5	8	15
18.Sylviidae.	15	48	144
19.Regulidae.	2	5	16
20.Oriolidae.	1	5	13
21.Sturnidae.	6	14	37
22.Ploceidae.	2	6	12
23.Friugillidae.	22	66	356
24.Bombycillidae.	1	2	1
25.Hirundinidae.	4	12	26
26.Motacillidae.	3	20	97
27.Alaudidae.	4	8	54
28.Zosteropidae.	1	3	18
29.Nectariniidae.	1	5	41
30.Dicaeidae.	2	4	12
31.Pittidae.	1	3	1
32.Eurylaimidae.	1	1	0
32	173	521	2849

附記:——客歲夏五月,余始研究鳴禽類,歷時八月,至於歲底,乃得此小結束.本目將完竣時,室中繼續得來標本數大批,其中頗不乏中國鳥,因不便再事更改,乃將該部標本,暫時放棄,待本文全體結束後,當另作一報告也.

一九三二年正月

任國榮誌

CORVIDAE. 鴉科 *

初列撥風羽十,第一枚頗長,常逾次枚之半.尾羽十二.鼻孔完全為鼻鬚或羽毛所掩閉,其下緣與會合綫之距離,較小於上緣與嘴峯脊部之距離.雌雄絕對相似,幼鳥亦似成長鳥,而體色則不及成長鳥之鮮亮.至於生活及生殖情形,各屬不同,各種有別,難作括約的記載.

Corvus 一屬種類既繁,分佈亦廣,在我國境內,除 *Corvus torquatus* 一種外,其餘概全黑而有綠色,藍色,或紫色光輝.但因無顯著之色彩差,而度量大小又隨年齡而不同,故為極難研究之一屬,實不知有多少重名與錯誤也.

Cissa 一屬(綠鵲屬), 我國有記載者,只有兩種,一為海南島之 *Cissa katsumatae* Rothschild, 一為廣西猺山之 *Cissa concolor yeni* Delacour. 室中現無標本,故本目錄竟缺此一屬. *Cissa chinensis chinensis* Bodd. 本以中國為標準地點,但至今尚未於我國本部發見之,其分佈地點只在喜馬拉雅一帶東孟加拉,雅魯藏布江之南北兩岸,暹羅北部,老撾,安南東

京等處.此名成立於1783年.

生活之綠鵲,若營養不足,則體羽之綠色,逐漸藍化,再供給以相當滋養料,又可逐漸恢復原狀.此種現象,可常見於禽室中.其變化之原因,現只知係黃色素之增減所致(綠＝藍＋黃,綠－黃＝藍;藍＋黃＝綠)但養料與與毛細胞及細胞中之色素體究竟有何關係,有何作用,而養料中何種原素爲此現象之因子等,尙未能知也.又綠鵲之剝皮標本若久露陽光,綠色漸褪,終成蒼白,遂不能如生活標本之可以恢復原狀矣.

巴黎博物館鳥類研究室鴉科標本之採自我國或有記載者,據余所見,共有十屬二十種及亞種.經余作個別研究而記載於本目錄之中國鳥,共四十七個.

1. Corvus macrorhynchus hassi Rchw. 北大嘴鳥

D. et O.P. 367 (*Corvus sinensis*) —— 分佈於中國各地,喜近人居.北京附近,爲數尤不可勝計.

La Touche, P.6 —— 直隸,山東,留鳥.中國北部,南行直至秦嶺,留鳥.或可至揚子江中流.

室中有兩中國鳥: 1♀,1868, David, 江西; I(?),1905, 中國.

翼313, 315;尾191, 195;嘴峯56, 57;跗蹠55, 57mm

2. Corvus macrorhynchus colonorum, Swinhoe. 東南大嘴鳥

D. et O. P. 367 (*Corvus sinensis*) —— 見前.

La Touche, P. 7 —— 揚子江流域,浙江,福建,廣東,台灣,留鳥.

室中有一標本,只記採地爲中國南部,無採集期,無性別,無採者名字.

翼 341; 尾 229; 嘴峰長 70,高 26;蹠蹠 60mm

余在廣西猺山射得之大嘴烏,係此種.

Corvus macrorhynchus colonorum 與 *C. m. hassi* 無顯著之色彩差,但前者量度較大,嘴峰較粗壯.

La Touche記載*Corvus coronoides*(=*macrorhynchus*) *mengtzensis* 爲雲南蒙自烏,謂其下體深黑,與中國東南部大嘴烏之灰黑者不同.室中無蒙自烏,無從比較,但觀其所舉之異點,似係具極微弱差別之地方種也.

3. *Corvus corone orientalis* Eversamann. 東烏

D. et O. P. 368——此烏嘴峰遙不及前者之粗壯, Swinhoe于中國南部之硇洲島見之(余按該島位於廣東南部雷洲半島之東), 海南島雖與該島近在咫尺,但未一見.余旅行中國西部時所見之烏鴉,似係此種,但未曾得有標本.

La Touche, P. 8——直隸東北部遷移鳥及冬鳥.沙尾山,揚子江下流遷移鳥.福建,硇洲島,海南,遷移鳥.

註一:我國文字上之所謂"烏"與"鴉",殊無科學的區別,而

一般習慣則統稱爲"烏鴉".爲省事計,不欲徒作文字上之考求,乃統以一"烏"字包括之.至譯 *Corvidae* 爲鴉科,始自日本,商務印書館出版之動物學大辭典(杜亞泉等編)引用之.近人有譯作烏鴉科者,余以爲名既通行,殊無用更改.

慈烏反哺,傳爲美談,但考盡英,法,德三國鳥學文獻皆無記載.余在野外採集數年,射鳥數千,亦從未一見此現象.我國之附會傳說正多,蓋難一一認爲可信也.

Baker;i, p. 24 —— 自西伯利亞之葉尼塞至日本,南至中央亞細亞,阿富汗,波斯東部,克什米爾,西藏及中國北部.

室中標本皆來自西伯利亞,尚無中國鳥,以既有記載於我國,特編入日本錄.

La Touche 記載 *Corvus corone yunnanensis* 爲雲南蒙自鳥,謂與秦皇島之 *C. corone orieutalis* 較,蒙自鳥之嘴遙纖,翕部有綠色光輝,前胸羽毛之長尖形較顯著,下體光輝稍遜.(Bull. B. O.C. vol. xliii, 1922, p. 43,).

4. *Corvus torquatus* Less. 白頸烏

D. et O. p. 368 —— 中國各地之留鳥,甚普通,南部尤多.喜在水邊,鮮至城市,常偶居.

La Touche, p. 9 —— 北京以南之低地皆有之,留鳥.

室中除安南鳥外,只有一中國鳥 1(?), 1923, M. Nadar, 舟山.

余按此鳥廣西猺山,廣東北江及湖南南部皆有之.

5. *Corvus frugilegus pastinator* Gould. 禿鼻烏

D. et O. p. 369——北京甚多,常數雙同巢一樹中,北方各省,除留鳥外,冬季又有來自別處之大羣集.

La Touche, p. 9——四川冬鳥(留鳥?).揚子江中流,下流北至北京,留鳥.福建,廣東,冬鳥.直隸東北部夏鳥及遷移鳥.

室中只有安南鳥.

余曾於廣州郊外射得之,時在冬季.中山大學鳥類標本室,亦有來自福建之標本.

一年以下之未成長鳥,嘴基部及面部被羽,無異常鳥.十個月或一年以後,嘴基部與面部羽毛逐漸脫落,終至完全裸露而略帶白色.

6. *Colaeus dauricus dauricus* pall. 小白頸鳥

關於*dauricus* (黑與白)與 *neglectus* (純黑,或後頸及羽耳有白或灰白之條紋)之異同,頗召爭論,茲特引述各人意見如下:

David et Oustalet以*Colaeus dauricus*與*Colaeus neglectus*爲判然不同之兩種,於Les Oiseaux de la Chine, p. 370 論 *Lycos dauricus* (=*Colaeus dauricus*) 云:"此鳥繁衍於亞洲東部,營巢于西伯利亞,蒙古及中國西部.其二色之特徵(卽白與黑),巢中幼

鳥,旣甚顯著".又同書p 370記 *neglectus* 云:"此鳥與 *dauricus* 親緣極近,但有以下諸區別: 1.量度較小; 2.嘴較纖短; 3.頭頸兩側之灰色較不明顯; 4.附蹠後方鱗片成斜紋."又云:"*dauricus*與*neglectus*常交雜成羣,或同營巢於一地,故易被認爲同種.……*neglectus*春季成羣集經四川,陝西,向東及東北行(卽向蒙古中部),亦有數雙留中國以生殖者.其過程常較遲於 *dauricus*, 且爲數亦較稀,此現象,在北京更爲顯著.……"

Sharpe於Catalogue of Birds in the British Museum, vol. iii, p. 28, 亦承認爲不同之兩種,故以*Colaeus dauricus*及*Colaeus neglectus*分別記載之.

La Touche於Birds of Eastern China p. 11 有云:"吾將兩種統稱爲*dauricus*…………但黑型(*neglectus*)並非斑形(*dauricus*)之未成長鳥,蓋余在蒙自射得一黑幼鳥,其上頸及汙灰色之後頸之一部,又正長出黑羽也……….同地(幾同時)射得之數斑型鳥其幼鳥,羽旣差近完全易爲未長成之斑型羽其後頸或一部黃白,或全部黃白(後代以淺灰),下體則白而帶灰.……… *dauricus* 及*neglectus*冬季經中國北部(直隸東北部不在內).揚子江中流及下流.遷移期及夏季至直隸東北部.在雲南爲留鳥.冬季亦可見於福州."

Rothschild 於 Avifauna of yunnan p. 341 亦有論及此問題.氏云:"此鳥有一變型,此變型,驟視之似爲全黑,細察之,在標

準型白色之部,在變型雖爲黑色,但實黑而近於灰."

Hartert 博士亦以 *neglectus* 與 *dauricus* 係同種而異型.

此同種異型之爭,屢見不鮮.如鶺科之黑鶺與白首鶺,畫眉科之白耳珊瑚與黑耳珊瑚,伯勞科之伯勞與黑伯勞,皆不知費去多少口舌與筆墨矣.又研究室中有一完全白化標本,係養豢於禽室中者,白化原因未詳.

室中有六標本:1♂, 1911, 蒙古 (*dauricus*); 1♂ 1 (?) 1892, Prince d'Orléans, 西藏 (*dauricus*); 2(?), 1896Déjean, 四川打箭爐; 1♀1896 Déjean, 四川打箭爐.

7. Pica pica Linn. 喜鵲

D. et O. p. 373 (*Pica caudata*)——廣佈全國各地,自東至西,自南至北,無不有之.此鳥尙有個體上之差別,如嘴之大小也,尾與翼之長短也,翼部白斑之多少也,腰部灰色之濃淡也,每有不同,故北方鳥雖較鮮豔於南方鳥,但吾等未能貿然承認在中國境內而有兩地方種之存在也.更進一步,吾等將以爲中國喜鵲實無別於歐洲鳥.再推而遠之,歐洲鳥與日本,西伯利亞東部,土耳其,波斯等之所謂 *P. japonica*: *P. leucoptera*; *P. batsiana* 等等,或竟相同,甚至印度之 *P. botannensis* 亦可懷疑也. Sharpe, Catalogue of the Birds in the British Museum, iii, p. 63——經量度大批標本後,可知以量度差而別 *Pica* 爲七亞種之多,實不可靠.Gould 所持之色澤差,經比較

大批標本後,亦將失其效能.翼部白斑一特徵,變異亦大.只有中央亞細亞之*P. leucoptera*乃可成立一地方種.

La Touche, p. 13——Gould 以其翼部白斑較多,乃與歐洲鳥別爲兩種.…………………此鳥分佈於全國各地,留鳥.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥二 2(?), 1923, Nadar, 舟山.

Gould以*Pica serica*記載中國鳥,分類學者引用之,凡數十年,毫無疑間,雖經 David, Oustalet, Sharpe 等之再三申辯,而引用如故.近來 Berlioz 及 Delacour 二氏以中國,安南,歐洲等處大幫標本作比較研究,乃決定中國鳥實無別於歐洲鳥,將*Pica pica serica* Gould 一名詞推翻.

8. *Cyanopica cyana swinhoei Hartert.* 揚子藍翼鵲

D. et o. p. 374 (*Cyanopolius cyaneus*)——廣佈於西伯利亞東部,日本,及中國北方之大部.常成羣集來往叢林中,不特敢至園林,並且直至城市.

La Touche, p. 14 —— 揚子江下流,留鳥.

室中只有一幼鳥:1(?), 1844, M. Montigny, 揚子江.

直隸,陝西,湖北西部之藍翼鵲,據 Hartert 博士研究結果,謂其上體紫灰而非褐灰,乃另定爲*Cyanopica cyana interposita* Hartert, 室中尚無標本.

9. *Urocissa erythrorhyncha erythrorhyncha* Bodd. 紅嘴山鵲

D. et O. p. 375 (*Urocissa chinensis*)——中國各地之留鳥,自南中國直至南滿,無不有之.Swinhoe 以北方鳥體色稍鮮,量度稍小,乃另定為一種,但以余採自遼東以至四川及福建之多數標本觀之,余實不能承認此兩種之存在.

La Touche, p. 15—— 中國中部及南部,自揚子流域一帶以至雲南南部,留鳥.

室中共有中國鳥十八:3(?), 1898, 1902,四川打箭爐;4(?), 1896, Pére Soulié 雲南茨菇; 1(?), 1921, Pére Cavalerie, 雲南;2(?), 1907, Pére Seguin, 興甯;6(?), 1908, Gladin, 甯波;1(?), 1923, M. Nadar,舟山; 1 ♂, 4, xi, La Touche, 中國.

余曾於廣西猺山,廣東北江,湖南南部得有標本,甚普通.

Swinhoe 以北方鳥翕部較淺色而灰色較盛,乃另定為一種. La Touche 於 Birds of Eastern China p. 17 以 *Urocissa erythrorhyncha brevivexilla* Swinhoe 記載直隸鳥.室中無直隸鳥,無從別其異同.

10. *Urocissa erythrorhyncha magirostris* (Blyth). 白頭山鵲

Rothschild, p. 340——雲南.

室中有安南鳥三,暹羅鳥一;尚無中國鳥,以雲南既有記載,特編入本目錄.

此鳥背部純藍而非灰藍;後頭塊斑純白而非白而帶藍;

撥風羽外瓣尖端無白點斑;嘴較大;此爲與 *Urocissa erythrorhyncha erythrorhyncha*, 區別之要點.

11. *Urocissa flavirostris flavirostris* (Blyth). 黃嘴山鵲

Rothschild, P. 341—— 雲南騰越.

室中有一印度鳥,雲南既有記載,特編入本目錄.

12. *Dendrocitta formosae sinica* Stresemann. 黑尾樹鵲

D. et O. p. 541 (*Dendrocita sinensis*)——中國南部及東南部直至甯波皆有之,但未嘗見於四川.

La Touche, p. 17 ——安徽,浙江,福建,廣東,留鳥.

室中有四標本: 1(?), 1901, 四川打箭爐; 1♀, 1872, David,浙江;1(?),1905, 中國; 1(?), 1908 Gladin, 中國(甯波?).

13. *Dendrocitta formosae himalayensis* (Blyth). 灰尾樹鵲

Rothschild, p. 341 ——雲南.

室中有二雲南鳥: 1, 23, V, 1895, Prince d'Orléans, 雲南漾濞江;1(?), 1896, 雲南.

此鳥尾基段深銀灰與 *D. f. sinica* 之純黑者自易區別.

14. *Temnurus temnura* (Temm.). 截尾鵲

Temnurus nigra Styan, Bull. B. O. C. i. p. Vi. 1892, (海南).

室中有安南鳥數十,尙無海南鳥.

Delacour 謂 *T. nigra* 與 *T. temnura* 實係重名.據 Hartert 博士研究,謂東京鳥稍大於海南鳥,比較量度如下:

翼長(安南東京鳥) 10♂: 128—134 11♀: 127—237mm.

翼長(海南鳥) 6♂:125—130 4♀:126—135mm.

此鳥尾羽平整如刀截,極易認識.分佈界限並不廣,除海南及東京外,他處無記載.

15. *Garrulus brandti* Eversm. 花頭懸巢

D. et O. p. 379 —— 滿洲及中國北部.

Cat. Birds Brit. Mus. iii. p. 97 —— 自烏拉山經西伯利亞全部至日本及中國北部.

室中只有西伯利亞鳥,我國既有記載,特編入本目錄.

16. *Garrulus glandarius sinensis* Swinhoe. —— 中國懸巢

D. et O. p. 378 —— 此鳥見於中國東南部直至揚子江.法博物館之標本,乃得自江西,福建,浙江諸省者.

La Touche, p. 19 —— 陝西,四川,揚子江流域,浙江,福建,廣東,雲南,留鳥.

室中共有七標本: 1♀, 26 xi, 1869, David, 四川; 1(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), Père Grosjean, 四川打箭爐; 1♀, xi, 1873, David, 福建西部; 1♂, 2♀, 1908, Gladin, 甯波附近.

余於廣西猺山,廣東北江,湖南南部皆得有標本.於廣西南甯,廣東南部之靈山縣亦見之.

17. *Garrulus leucotis leucotis* Hume. 黑枕懸巢

Rothschild, p. 340 ——雲南.

室中只有安南鳥,雲南既有記載,特編入本目錄.

18. *Pyrrhocorax pyrrhcorax* (Linn.).紅嘴烏

Baker, i, p. 68 —— 非洲北部,歐洲及亞洲北部.印度境內,經喜馬拉雅一帶以至西藏東部皆有之.

室中標本不少,中國鳥只有一個: 1♀, 1892, 西藏 (Aio,5700 密達).

19. *Pyrrhocorax graculus* (Linn.) 黃嘴烏

D. et O. p. 371 (*Fregulus graculus*) —— 自蒙古高原,中國西北部以至秦嶺一帶,皆甚多.黃河河床中,爲數更不少.

Baker, i, p. 70 —— 歐洲南部及中央亞細亞.在印度境內,經喜馬拉雅直至西藏之中部及東南部.

室中標本不少,中國只有三個: 3(?), 1895,1896, 1898, Biet, 四川打箭爐.

La Touche 於 Birds of Eastern China, p. 22, 用 *Pyrrhocorax pyrrhocorax brachypus* Swinhoe 以記載直隸留鳥.究竟直隸鳥與

西藏之 Pyrrhocorax pyrrhocorax 或四川之 *Pyrrhocorax graculus* 有無異同,因無標本比較,難以臆斷

20. *Podoces humilis* Hume.

D. et O. p. 554——最初記載於葉爾羌 (Yarkand), 及後知其亦分佈於甘肅,西藏北部及青海.喜居草原,鮮至森林內部.

室中有一中國鳥:1(?), 1892, Prince d'Orleans, 西藏.

鴉科種類,無有再小於此者,余尚不能給以相當漢名.

研究室中鴉科種類之在我國有記載者,只有以上二十種及亞種.La Touche 於 Birds of Eastern China 中尚有*Nucifraga caryocatactes marcrorhynchus* Brehm 及 *Nucifraga caryocataces interdictus* Kleinschmidt und Weigold 兩亞種爲余所未見.

PARIDAE 山雀科

一般性質與鴉科相似,但一枚撥風羽,長不逾(常爲不及)次枚之半.嘴錐形,纖壯大小,各種不同.跗蹠發達,表面被盾狀鱗.雌雄常相似,幼鳥似成長鳥而體色較淺淡.通常爲留鳥.非在生殖期,每喜羣居.食物大都爲昆蟲,有時兼及菓子,種子及植物之幼芽.常巢於樹穴,石隙及牆壁之孔洞中.卵白,常帶赤斑.

巴黎博物館鳥類研究室山雀科標本之採自我國或經有記載於我國者,據余所見,共有三屬二十二種及亞種,經

余作個別研究而記入本目錄之中國鳥共一百零六個.

21. *Parus major minor* (T. & S.) 山雀

D. et O. p. 278 —— 廣佈中國各地,冬季始可見於平原.在北京,蒙古,陝西,四川,江西,浙江等處山中則甚普通在淇平之高山則爲 *Parus monticola* 所替代.

Cat. Birds Brit. Mus. Viii. p. 15 —— 日本,西伯利亞東部,滿洲,中國之大部.

室中除日本鳥外,有中國鳥三: 1♀, iii, 1870, David, 陝西南部(翼67mm); 1♀,28, Xii, 1908, Gladin, 甯波(翼 67 mm); 1♀,28, iii 1909 Gladin, 甯波(翼 70mm).

22. *Parus major commixtus* Swinhoe. 南山雀

D. et O. p. 280 —— Swinhoe 以爲中國南方鳥爲印度鳥與日本鳥之中間種,乃另名爲 *Parus commixturs.* 以余在江西,浙江,福建西部及四川所得標本,與北京之 *Parus minor* 比較之,區別極微,或竟可謂之曰全無區別.

Baker, i, p. 78 —— 德尼薩拉緬甸東部,暹羅,撣部及中國南部.

La Touche, p. 25 —— 福建東部北行直至福州,廣東東部,留鳥.

室中有三標本: 1♀, 1(?), 1905, La Touche, 福建(翼 64,66mm.);

1(♀), 1911, Père Cavalerie, 貴州(翼65mm.).

23. *Parus major artatus* Thayer & Bangs. 北山雀

D. et O. p. 278 (*parus minor*) ——見前.

La Touche, P. 23 ——中國北部自直隸東北部以至揚子江下流一帶,溯揚子江上行而至四川西部,留鳥.

室中有雲南四川鳥二十五: 1♂, 3, ii, 1869, David, 四川; 1(♀), 1891, Prince d'Orléans, 四川; 8(♀), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1(♀), 1891 Déjean, 四川打箭爐; 4(♀), 1895 Prince d'Orléans, 雲南; 8(♀), 1896 Père Soulié, 雲南茸刧; 1(♀), 1912, Mme. Comby, 雲南; 1(♀), 雲南甯遠府.

24. *Parus major tibetanus* Hartert. 藏山雀

Baker, i, p. 78——西藏東南部,雲南,..................

Rothschild, p. 315 —— 雲南.

室中只有一標本: 1(♀), 17, V, 1820, Prince d'Orléans, 西藏沓甫流域.

25. *Parus major cinereus* Vieillot. 灰山雀

D. et O. p. 279——海南島

Baker, i, p. 74 ——印度北部,亞森母,緬甸西部以至巽他島 (Sunda Island), 爪哇.

室中只有印度及安南鳥.中山大學生物採集隊曾在廣東北部及湖南南部射得標本.

以上 *parus major* 之五亞種,除 *p. m. cinereus* 之上體灰色較易認識外,其餘如 *p. m. minor* 之與 *p. m. commixtus*, *p. m. artaus* 之與 *p. m. tibetanus*, 極難區別.為簡便計,無須作形態之記載,只用下列檢索表表示之:

A 側尾羽第二雙外瓣大部或全部黑色.

a. 翼長在 68 mm. 以上……………………*P. major minor.*

b. 翼長在 68 mm. 以下……………………*P. m. commixtus.*

B 側尾羽第二雙外瓣大部或全部白色.

a. 側尾羽第一雙與第二雙,其內緣之黑色部較寬.

……………………*P. m. artatus.*

b. 側尾羽第一雙內瓣黑緣極狹,第二雙亦然.

……………………*P. m. tibetanus.*

以余考察室中大批標本及參攷各種文獻之結果,對於 *Parus major minor, P. m. commixtus, P. m. artatus, P. m. tibetanus* 等四亞種,實有種種懷疑,茲特分別討論之:

A *Parus major minor* 與 *P. m. commixtus*:——余以陝西南部及甯波之三標本,與 *P. m. minor* 標準地之日本鳥較,無論體色,量度及尾之構造,皆無若何區別.七個日本鳥,其翼長為 65, 67, 67, 67, 68, 69, 69, mm. 與陝西,甯波鳥之 67, 67, 70 mm. 者,可謂完全相同,故余以為陝西及甯波鳥,應用 *Parus major* *minor* 記載之.至 Swinhoe 之 *P. m. commixtus*, 以余研究福建及貴州鳥之結果,覺其既不小於中國北部及甯波之標本,亦不小於標準地日本之標本,則 Swinhoe 所提出之特徵(翼較短……),可謂無效. Stuart Baker 於 Fauna of British India, Birds 第二版, vol. i. p. 78 謂 commixtus 與中國北部及日本之 minor之異點,在其上體青色較少,下體較鵝黃而非純黃.此等差別,余尙不能發見.室中標本尙不足以供推翻一風行六十餘年之老名,故余仍以 *commixtus* 記載福建鳥,特存疑於此以待來日之硏究.至檢索表只就各家所舉之量度爲標準,余實極不信任也.

B *Parus major minor*與*P. m. artatus*.——La Touche於 Birds of Eastern China, p. 23 用 *Parus major artatus* 記載中國北部鳥,舉其分佈地爲"自直隸東北部以至揚子江下流一帶,再上溯而至四川西部". 室中打箭爐標本,確係 *artatus*, 但陝西及甯波鳥則爲 *minor*, 可無疑義.察其翮白色之多少,卽可別之.

C Rothschild 於 Avifauna of Yunnan 一文中以 *P. m. tibetanus* 記載雲南鳥(p. 315),但以余所考察之十四雲南鳥言之,其翮之構造,與四川打箭爐鳥 (*artatus*) 較近而與西藏沓甫流域鳥 (*tibetanus*) 較遠.又, La Touche 以雲南鳥尾部白色較發達,與福建之 *commixtus* 不同,乃命名爲 *Parus major yunnanensis*. 其與 *tibetanus* 之區別,則在雲南鳥之量度較小.但吾

觀其形態記載,實無別於 *artatus*. 氏又舉其翼長為 67—75 mm. 則與 *tibetans* 之在 70 mm. 以上者,有何區別?

D La Touche 於 Birds of Eastern China p. 24 以福建及廣東東部鳥為 *Parus major fohkienensis* La Touche, 則註明為留鳥. 與 *P. m. artatus* 之區別,在其體色較深而量度較小;與 *P. m. commixtus* 之區別,亦在其體色較深;翮之構造,絕未提及.如氏言,則 *P. m. artatus* 與 *P. m. commixtus* 尙有何區別耶?况同一地方,不能容兩亞種之生殖,旣為分類學上不易之定律,况其為留鳥耶? (La Touche 始用 *Parus cinereus commixtus* 一名,後改正為*P. major commixtus*) 則 *Parus major fohkienensis* La Touche 為 *Parus major commixtus* Swinhoe之重名,可斷言也.

E Delacour 以 *Parus major indochinensis* 記載安南鳥,謂翼更短於 *commixtus*, 標準標本只有 62 mm. 但余試量度其餘標本,竟有達 64 mm. 者,若謂其無別於 *commixtus*, 亦未嘗不可.

總之, *Parus major* 一種,因量度差與色彩差之變化甚大,故重名百出.吾以為當捨此不固定之性質,較從尾羽構造方面為判別之標準,較為妥當.不然,翼之稍長稍短,上體之稍深稍淺卽為之另立名目,其結果不特每一小地方有地方種,卽每個體亦將各有一拉丁名也.

26. *Parus ater pekinensis* David. 北京白頸冠山雀

D. et O. p. 283——初只見於北京,及後再見於直隸及漢平.性馴,不畏人.

Cat. Birds Brit. Mus. Viii, p. 42——此鳥分佈於亞細亞東部,自葉尼塞流域以至北京.因其頭羽冠稍稍延長,遂與歐洲鳥別爲兩種.但在同一地點,亦嘗發現無冠之鳥,究竟此無冠之鳥係標準的*ater* (=*Parus a. ater*) 抑係 *pekinensis* 之未長成者,尙未研究清楚也.………………日本及阿穆爾之標本,乃間於*ater*與*pekinensis*之間,從 Askold 得來之兩標本,亦有長羽冠………David et Oustalet之Les Oiseaux de la Chine之第三十四圖,附會許多意想的差別;翕部着色,旣與中國標本不符,又與原來記載不相脗合.

La Touche p. 25 —— 直隸西部留鳥.因羽冠較發達,下體染着汙乳脂色,南部之銹色較淡,乃與 *p. a. ater* 別爲兩型 (Hartert).

室中除三俄國鳥外,有北京鳥三: 1♂, 14, X; 1♂, 9 Xii; 1♀, Xii, 1867, David, 北京.

日本之*Parus ater insularis* Hellmayr據謂因羽冠較短,體之白色部較白,灰色部較灰,而與 pekinensis 別爲不同之兩型.北京鳥脇部銹色較淡於歐洲鳥 (*P. a. ater*), 誠如 Hartert 所言,但余曾以室中日本鳥與北京鳥較,殊不能發見若何差別,北京鳥之羽冠,亦有極不發達者也.故 La Touche 雖記載 *P. a. insularis* 於直隸東北部,室中雖有標本,余並不爲之

編入本目錄,以其或係重名也.

La Touche 又以 *Parus ater kuatunensis* 記載福建西北部掛墩鳥,但未嘗指出其與 *P. a. pekinensis* 之區別.如只觀其形態記載,實無別於北京鳥,須有該地標本作比較,乃能辨其異同.

27. *Parus ater aemodius* (Hodgson). 喜馬拉雅白頸山雀

Baker, i, p. 84——尼泊爾,錫金,南至西藏.

Rothschild, p. 314——雲南麗山山脈.

室中有一雲南鳥,腹以下赭色.爲認識本亞種之一好特徵: 1(?), 1896, Père Saulié, 雲南茸却.

Parus ater 一種,頭部輝黑,後頸之上部有一大白塊斑,是爲本種之重要特徵.

28. *Parus palustris dejeani* Oustalet 雲南黑頭褐山雀

D. et O. p. 288 (*Poecile palustris*)——分佈中國之大部,留鳥.

Baker, i, p. 82 (*Parus palustris poecilopsis*) —— 雲南.

Rothschild, p. 314—— 雲南.

室中有六標本: 1(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1902, 四川打箭爐; 3(?), 1896 Père Soulié, 雲南茸却.

29. *Parus atricapillus sangarus* (Servetz.). 短尾褐頭山雀.

Cat. Birds. Brit. Mus. Viii. p. 48——中央亞細亞之松林,自天山以至甘肅一帶皆有之.

室中有五標本:2(?), 1892, Prince d'Orleans, 西藏; 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1898, Biet. 四川打箭爐,翼 65--68; 56—58 mm.

此鳥與 *P. palustris dejeani* 極相似,但上體橄欖色較遜,頭頂黑而非褐黑.

30. *Parus atricapillus affinis* Przewalski. 甘肅褐頭山雀

D. et O. p. 289 (*Poecile affinis*)——甘肅.

室中有一標本,乃柏林博物館送來者: 1♀, 22, i, 1930, 甘肅新甯府,老虎口,翼 66, 尾 62mm.

此鳥亦與 *P. a. sangarus* 相似,但前頸黑色較遜,腹部赭色較淡,翼較短,尾較長.

Parus palustris 及 *Parus atricapillus* 兩種之後頸皆無白斑,與 *P. ater* 自易區別. *P. palustris* 之頭頂深黑, *P. atricapillus* 則褐黑,兩者亦自不同.

31. *Parus superciliosa* Przewalski 白眉山雀

D. et O. p. 290——Przewalski 于甘肅發見之.

室中有三標本: 1♂, 1♀, iv, 1890, Prince d'Orléans, 西藏, 1♀, 28, xi, 1926. 甘肅新甯府老虎口.(柏林博物館送來)

此鳥之白眉斑極發達,一見即可認識.吾所見山雀科標本,只此一種有白眉斑耳.

32. *Parus rufonuchalis beavani* (Blyth) 黑頸山雀

D. et O. p. 285 (*Lophophanes beavani*) —— 中國西部多樹之山中,青海邊境,秦嶺及陝西南部皆曾見之,但爲數並不甚多.

Baker, i, p, 86 —— 尼泊爾錫金,西藏及中國西部.

Rothschild, p. 314—— 雲南.

室中標本:4(?), 1896, 1898, Biet,四川打箭爐;3(?),1896, Père Soulié, 雲南茸刧.

33. *Parus dichrous dichrous* (Hodgson). 赭腹冠山雀

D. et O. p. 284 (*Lophophanes dichroides*) —— 漢平.

Baker, i, p. 87 —— 雲南及撣部.

Rothschild, p. 313—— 雲南.

室中除印度鳥外,有四川鳥二,雲南鳥五;2(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1896,Prince d'Orleans, 雲南; 3(?), 1896, Père Soulié, 雲南茸刧,

Stuart Baker 以雲南鳥上體較深暗,下體較黃,乃另命名爲*Lophophanes* (=*Parus*) *dichrous wellsi*. 余曾以雲南四川鳥互相比較,不能發見若何差別,再以雲南四川鳥與印度之 P.

d. dichrous 比較,亦無若何不同,故捨 *wellsi* 一名,仍以 *dichrous* 記載雲南四川鳥.

34. *Parus davidi* (Berez. & Bianchi) 大衛栗腹山雀

Dresser, A Man. of Pal. Birds p. 174 —— 甘肅西南部.

Hartert, Vögel paläarkt. p. 370 —— 甘肅南部及四川.

室中有四標本:4(?), 1896, 1899, Biet, 四川打箭爐.

35. *Parus monticolus monticollus* Vigors. 青背山雀

D. et O. p. 281 —— 常見于湊平及四川之山林中,一次見于陝嶺.

Rothschild, p. 314 (*Parus monticollus yunnanensis* La Touche) —— 雲南.

室中有中國鳥十一個: 1♂, 1870 David, 陝西; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2♀, 1902, 四川打箭爐; 2♀, 1♂, 1895 Prince d'Orléans, 雲南雲州; 4(?), 1896, 1897, Père Soulié, 雲南甘却; 1(?), 1900, 雲南甘却.

余不種發見雲南鳥與標準種之 *P. m. monticolus* 有何差別,故仍以 *P. m. monticollus* 記載雲南鳥,而不用 *P. m. Yunnanensis* 一名.

36. *Machlolophus rex* (David). 黃頰山雀

D. et O, p. 286 —— 福建西部山林中留鳥,不甚多.

La Touche, p. 30 —— 福建西北部留鳥,中部冬鳥;雲南東南部留鳥.

Rothschild, p. 318 —— 雲南.

室中大多數標本皆來自安南,中國鳥只有 La Touche 送來之五個: 2♂, 1♀, x, xi, 1896; 1♂, 1♀, iv, vi, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余在廣西猺山得有此鳥百餘個.廣東北部及湖南南部之鳥類,與廣西猺山者本極相近,但在余之兩批標本中,尚無此鳥.在湖南標本中有*Parus m. monticolus*,此又為廣西所無者.

37. *Aegithaliscus caudatus caudatus* (L.). 長尾白頭山雀

La Touche, p. 31 —— 冬季自北平以至河北東北部皆可見之.

室中只有西伯利亞鳥,以有記載于我國,特為中編入本目錄.

38. *Aegithaliscus glaucogularis glaucogularis* (Moore). 銀喉山雀

D. et O. p. 291 (*Acredula glaucogularis*) —— 居中國北部山中者頗多,中國自四川以至浙江亦皆有之.在蒙古,余常見之于烏拉圖及滿州邊境.

La Touche, p. 31 —— 揚子江流域浙江北部,留鳥.

室中有一標本極爲殘破:1(?), Montigny, 中國.

39. *Aegithaliscus vinaceus glaucogularis* Verreaux 赭胸山雀

D. et O. p. 292 (*Acredula vinacea*) —— 得見于蒙古烏拉圖.

La Touche, p. 32 —— 河北留鳥.

室中只有一標本:1(?), 1851, Montigny, 中國.

40. *Aegithaliscus concinnus concinnus* (Gould) 紅頭山雀

D. et O. p. 293 (*Credula concinnas*) —— 廣佈中國各地,自浙江以至漠平皆有之,但最北不逾揚子江.

La Touche p. 33——自揚子江流域以至四川,浙江,福建,廣東,留鳥.一九一一年三月八日于沙尾山得一標本.

室中有五標本: 1♂, 1891, Prince d'Orléans, 四川;1(?), 1911, Père Cavalerie,貴陽; 2♂, 2♀(?), 1896, La Touche,福建.

41. *Aegithaliscus concinnus talifuensis* Ripp. 大理赭頭山雀

Baker, i, p. 95 —— 大理府及揮部等處.

Rothschild, p. 312 —— 雲南.

室中有六標本: 1♂, 1♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 2(?), 1897, Père Soulié 雲南茸却; 1(?), 1912, Mme. Comby, 雲南; 1(?), 1926, 英國博物館送來,雲南騰越.

此鳥頭項赭色,與標準種 *Ae. c. concinnus* 自易區別.余之湖南南部標本,屬此亞種.

42. *Aegithaliscus bonvaloti bonvaloti* (Oustalet). 花頭山雀

Baker, i, p. 96 —— 中國西部,雲南,撣部東北部.

Rothschild, p. 312 —— 雲南.

室中有十八鳥: 1(?), 1891, Prince d'Orléans, 四川打箭爐; 3(?), 1896, Père Déjean,四川打箭爐5(?), 1891, 1892, 1898, 1899, Biet,四川打箭爐; 2(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 7(?), 1896, 1897, Père Soulié,雲南甘却.

PANURIDAE 鬚山雀科

本科位置,尚未十分固定,有將其隸山雀科,有將其隸鸚嘴科,近始有將其另自獨成一科者.雄鳥眼之前,口角之後,有黑鬚一束,最爲奇特;雌鳥闕如.通常爲留鳥,喜棲近水之蘆葦中,以昆蟲及小軟體動物爲食,冬季亦食植物之種子.生殖期約自四月至八月,以蘆葦,草花植物之毛茸等營巢於水草中.卵圓,乳脂色,有黑褐之纓紋.秋季則老幼混合成羣矣.

43. *Panurus biarmicus* L. 鬚山雀

D. et O. p. 295 —— 據 Przewalski 報告,此鳥可見於蒙古,黃

河兩岸沼澤之地亦多.

La Touche, p. 36 ……… 北平市場中.河北東部東陵之冬鳥.一八九〇年二月於牛莊附近之葦叢中見之,甚爲普通,或係遼河兩岸及滿洲西部適宜地點之留鳥.

PARADOXORNITHIDAE鸚嘴科

本科與山雀科最大之區別,在其第一枚撥風,長逾次枚之半,但體羽鬆軟,又與鴉科不同.頭頂羽毛,常聳起成冠狀.鼻孔完全爲鬚所掩閉,是爲與畫眉科區別之要點.嘴短,高而狹窄,會合綫蜿蜒彎曲,其程度之深淺,視種類而不同.除 *Conostoma* 一屬外,其嘴高常等於或大於嘴峰之長度.

本科均屬留鳥,有羣性,喜棲蘆葦草叢中.以昆蟲及種子供食.巢杯狀而堅牢,位於草叢或灌木叢中.卵之大小及顏色,各種不同.

巴黎博物館鳥類研究室鸚嘴科標本之採自我國或經記載於我國者,據余所見,共有五屬十二種及亞種.經余作個別研究而記載於本目錄之中國鳥,共六十七個.

44. *Conostoma aemodium aemodium* Hodgson 大鸚嘴

D. et O. p. 207——中國本部與西藏之間之山中.

Baker, i, p. 104 —— 自尼泊爾經錫金及亞森母北部高山以至西藏及中國西部.

Rothschild, p. 308 ——雲南.

室中有四川鳥十,雲南鳥六: 5(?), 1895, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1898, Biet 四川打箭爐; 3(?), 1902 四川打箭爐 1 (?), 1896, Prince d'Orleans, 雲南; 5(?), 1896, Pere Soulié, 雲南甘却.

室中之印度鳥,並無別於雲南四川鳥.

45. *Paradoxornis guttaticollis guttaticollis* David. 黑耳鸚嘴

D. et O. p. 203 ——于四川西部發見之.

La Touche, p. 47 ——四川西部雲南,廣東,福建,留鳥.

室中有九標本: 4(?), 1899, 四川打箭爐; 1(?), 1900, 雲南甘却; 2(?), 15, ii, 1910, Père Cavalerie, 貴州; 1(?), Père Seguin, 興寧; 1♂, 5, iii, 1896, La Touche, 福建南雅.

46. *Suthora unicolor unicolor* (Hodgson). 褐鸚嘴

D. et O. p. 206 (*Heteromorpha unicolor*) —— 中國本部與西藏間之山中.

Baker, i, p, 108——分佈於尼泊爾及錫金之高原;西藏與中國本部之間之山中亦有之.

室中有十三鳥: 7(?), 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 6(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

47. *Suthora unicolor canaster* (Thayer & Bangs).雲南褐鸚嘴

Rothschild, p. 309——雲南.

室中只有一標本: 1(?), 1896, Pere Soulié, 雲南茈却.

與四川鳥較,則雲南鳥上體赭色較盛而橄欖褐較遜,下體亦然,確爲判然不同之兩地方種.

48. *Suthora gularis gularis* Verreaux. 黑喉全鸚嘴.

D. er O. p. 212——居四川及滇平之高山,非値嚴寒,不至山谷.

室中只有安南鳥,以我國有記載,特編入本目錄.

49. *Suthora alphonsiana* Verreaux. 紅頭小鸚嘴

D. et O. p. 210——分佈於中國東南部,所見籠鳥,皆來自雲南.貴州或可見之.

室中有八標本: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 6(?), 1898 Biet, 四川打箭爐.

50. *Suthora webbiana suffusa* Swinhoe. 揚子粉紅鸚嘴

D. et O. p. 208 (*Suthora webbiana*) —— 除極南外,廣佈全國各地,余于浙江以至四川,北平及蒙古皆曾見之.

La Touche, p. 50 —— 揚子江流域,自浙江以至湖北,北行直至秦嶺,留鳥.

室中有三標本: 3♀, i, 1873, David, 陝西南部.

Biet 有一四川打箭爐鳥,殘破不堪,雖不能十分辨識,但似無別於陝西鳥.

51. *Suthora webbiana fohkienensis* La Touche. 福建粉紅鸚嘴

D. et O. p. 208 (*Suthora webbiana*) —— 見前.

La Touche, p. 50 —— 福建西部留鳥,廣東北部(?).頭後頸及上背之狐赤,較 *suffusa* 更為鮮明.

室中有 La Touche 送來兩標本: 2♂, 16, 23, xi, 福建西北部之掛墩.

52. *Suthora webbiana burnnea* Anderson.安得生粉紅鸚嘴

D. et O. p. 212——Anderson 于雲南西部邊境發見之.

Baker, i, p. 112—— 雲南及嘉錦山.

室中有三雲南鳥:1♂, 22, vi,1896 Prince d'Orléans. 雲南: 1(?) 1897, Père Soulié, 雲南苴却; 1♂, vii, 1924, Rothschild Museum 送來, 雲南騰越

53. *Suthora fulvifrons cyanophrys* (David). 金鸚嘴

D. et O. p. 213——于陝西南部山林中見之,高度 1,800 米達,時正三月十日,積雪尚未消也.甚為稀少.

Rothschild, p. 310—— 雲南.

室中有七標本: 1(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 4(?), 1897, Père Soulié, 雲南甚却; 2(?), 1900. 雲南甚却.

54. *Neosuthora davidiana davidiana* (Slater). 大衞鸚嘴

La Touche, p. 52——福建留鳥.

室中有 La Touche 送來之兩鳥: 2♀, 29, ix, 1896; 10, xi, 1898, La Touche, 福建西北雲之掛墩.

Delacour 定安南鳥爲 *Reosuthora davidiana tonkinensis*, 余並不能發見其與 *N. d. davidiana* 之區別.

55. *Psittiparus gularis fohkiensis* (David). 灰頭鸚嘴

D. et O. p. 206 (*Heteromorpha gularis*)——福建西部甚普通.

La Touche, p. 53 ——自福建以至安徽留鳥.

室中有三標本: 1♂, 27, ix, 1896, 福建西北部清明山; 1♂ 1♀, 10,13, z, 1896, 福建; La Touche 送來.

余在廣西猺山採得之鸚嘴科標本共有三種: *Paradaxornis Guttaticollis guttaticollis* David; *Suthora webbiana fohkienensis* La Touche; *Psittiparus gularis fohkiensis* (David). 此次寄來之廣東北江及湖南南部標本中,亦共有三種: *Paradoxornis webbiana fohkienensis*, *Psittiparus gularis fohkiensis* (以上北江) *Suthora webbiana webbiana* gray(湖南南部).

SITTIDAE 鳾科*

鼻孔不完全爲羽毛或鼻鬚所掩閉,是爲與鶲科,山雀科,鸚嘴科區別之顯著特徵.後趾及爪極爲發達,內趾及爪則較短小,又與畫眉科不同.言其一般性狀,則嘴短壯,成錐形,適於啄鑿;足强健,適於攀援;翼尖長,第一枚撥風,長不及次枚之半;尾短,爲角尾或稍圓.

Sitta 一屬,分佈極廣,自古北極區,印度區,經北美以至墨西哥,無不見其蹤跡.留鳥.樹棲性,行走樹幹橫枝上,上下左右,無不靈便異常.喜啄食小昆蟲及蟲蛹,亦能碎堅果以供食(如橡實,榛實之類). 常于樹穴中營巢,巢以苔蘚,樹皮,毛髮等物構成,產卵五六枚,白而有粉紅或紫紅色斑.

巴黎博物館鳥類研究室鳾科標本之採自我國或有我國之記載者,據余所見,共有一屬五種.經余作個別研究而記載於而目錄之中國鳥,共二十三個.

56. *Sitta europaea sinensis* Verreaux. 漢鳾

D. et O. p. 90——初見於北平,江西,漠平,再見於陝西.本國中部較西部爲多.

La Touche, p. 37 —— 福建中部及西北部,江西,安徽,留鳥.

* 此名稱乃採用商務印書館出版之動物學大詞典.採用後頗覺其不通俗而難于記憶,但一時又不能較妥當之名稱,因暫且保留,以待來日.

河北(?).

室中有四川鳥九,雲南鳥八: 3(?) 1896, Déjean 四川打箭爐; 2(?), 1896, Biet, 四川打箭爐; 4(?), 1899, 1902, 四川打箭爐; 2(?), 2,23, v, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 5(?), 1896, Père Soulié, 雲南苴却; 1(?), 1912, Mme. Comby, 雲南.

La Touche 以 *Sitta europaea nebulosa* 記載雲南鳥 (Bull. B. O. C. vol. xlii, p. 55, 1921), Rothschild 採用之 (Auifauna of Yunnan, p. 316) 據云,雲南鳥翼較長 (77-82mm.) 後爪較小,下體盡灰褐而灰色較遜,頭側色較淺,常帶灰白.但余試以雲南鳥與四川之 *S. e. sinensis*, 較, La Touche, 所舉之特徵,皆不顯著,故余仍以 *sinensis* 記載雲南鳥.

又室中有一由 La Touche 送來之 *S. e. montium* La Touche (♂, 9, iv, 1897, 福建西北部之掛墩). 彼於 Birds of Eastern China, p. 38 記載之,謂比 *sinensis* 稍大,腮,喉及面部無白色,下體較灰,腰及尾筒深栗.但余試以 La Touche 送來之福建掛墩標準的標本與四川及雲南鳥較,無論如何,亦不能發見 La Touche所舉之特徵爲有效.且就其本人之記載觀之, *S. e. montium* 旣係 *S. e. sinensis* 之重名,其理由如次: 1. 二者皆係福建西北部之留鳥; 2. 量度差非特不能證其互異反足以證其相同,如 *sinensis* 翼長爲 73-77.5mm., *montium* 則爲 76-78.5 mm. 試間其中如 75, 75.5, 76, 76.5, 77, 77.5mm. 者,將屬何亞種?

57. *Sitta europaea amurensis* Swinhoe. 塞鳾

D. et O. p. 90 ———Swinhoe 謂其常至北平.

La Touche, p. 39——— 冬季至河北東北部,遼東半島森林中亦甚普通.關外,自阿穆爾,烏蘇里以至滿洲南部都有之.至高麗則爲 *S. e. bedfordi* O.—Grant 所替代.

室中標本皆非來自中國,以旣有記載,特爲之編入本目錄.

58. *Sitta villosa* Verreaux 灰鳾

D. et O. p. 91 —— 北平,熱河,滿洲.

La Touche, p. 40 —— 河北北部之平原及山野中皆有之.

Rothschild, p. 316——雲南.

室中有三標本: 3(?), 1896, Prince d'Orléans 雲南.

59. *Sitta himalyensis* Jard. & Selby. 栗腹鳾

Rothschild, p. 315——雲南怒江流域.

室中只有印度鳥,旣有記載于雲南,特編入本目錄.此鳥下體濃栗,自易南於 *S. e. sinensis* 也.

60. *Sitta frontalis frontalis* Horsfield. 藍鳾

Rothschild, p. 316——雲南.

室中除大批印度,安南,菲律濱,馬拉甲等處標本外,只有

兩中國鳥: 2(?), 13, ii, 1895, Prince d'Orléans, 雲南。

（未　完）

國立武漢大學生物學系
民二二級
臨海實習團報告書

孫祥鍾編

一、序言

西哲有言『地球上之寶藏不在陸而在海』蓋謂海洋面積大於陸地數倍,而物產亦當富於陸地數倍也.誠哉!深淵萬尋,奇珍畢藏,較區區地面所能見者,非可同日而語.是故研究生物學者,要於可能範圍之內,登高山,涉重洋,作大自然之整個觀察,方能正確其理論.彼達爾文(C. Darwin)環遊世界五年,歸而始成其物種原始(The Origin of Species)之名著,乃先河也.

吾校當局,有見及此,對於本系課程於各種理論之研究外,尤注意於實驗工作:平日課事,大都爲實驗室生活,而於野外之實地觀察,更爲重視.本年暑假,二年級同學往廬山採集,本團則赴廈門作臨海之實習.値茲國難期間,學校經費,萬分支絀,然猶能按照原定之課程,着實進行,此本團同人,不能不向當局深致謝意也!惟因費用過少,未能多住海濱,作有系統之精密實驗,引爲遺憾;然卽此一月餘之時間內,所獲所見,於學識上之裨益,已不在少.爰就斯行之始末,

作成簡略報告書,按日記之方式,真實記載,陳諸閱者之前,蓋一以明斯行之旨,一以喚起國人對於研究生物學之注意,而後之來者,得據此以爲參考,而有所改進,是又同人所馨香禱祝者也!

二. 出發前之準備

A. 地點之擇定　中國沿海一帶,如煙台,溫州,廈門,香港等地,皆爲研究海產生物之良好處所,每爲中外學者所涉足之區.廈門以其有廈門大學臨海之便,尤適於實習工作.且本系教授鍾心煊先生任教於廈大多年,對於該地情形熟悉,故此次目的地,擇定廈門.

B. 經費籌劃之經過　經費爲辦事之先決條件,欲使實習之成績優良,必備有巨款充分供給團體之需要.但値茲國難期間,學校經費,異常窘迫,鉅量費用,自不易籌,幸賴本系主任暨諸教授,竭力向學校籌劃,卒以學校當局者,對此種實習工作之重視,得由校務會議通過,每人津貼洋七十元,另指導員用費洋二百元,總共領出洋一千零四十元,始克成行.

C. 實習團之組織　經費籌有着落,乃於學年考試最終之日,全級同學集議組織臨海實習團,團設七股,視工作之輕重,分別置幹事若干人,以收分工合作之效.茲將各股職司,及所選定之幹事,表列於下:

1. 會計股　幹事一人,司經濟出納及預算決算事宜一

——胡定鉌同學當選

2. 庶務股　幹事二人,司購辦物品及一切庶務事宜——蔡人熙張柱國二同學當選

3. 文書股　幹事二人,一司來往函件及新聞投稿事宜——袁顯權同學當選

一司全團工作生活之總記述——孫祥鍾同學當選

4. 交際股　幹事一人,司一切交際事宜——施有光同學當選

5. 交通股　幹事四人,司行李及標本之運輸——任渠劉禮瑞鄒劍龍徐秀青四同學當選

6. 衞生股　幹事一人,司保管藥品及救護事宜——左書良同學當選

7. 攝影股　幹事一人,司工作時及學術上之攝影——傅作舟同學當選

指導員原定二人,一爲鍾心煊先生一爲黃震先生後鍾先生因身體偶感不適未能成行;結果僅由黃先生一人領導出發.

D. 臨時演講　組織旣竣,卽分途準備行李.爲計劃之統一及實習知識充實計,特請鍾心煊先生臨時講演廈門之風土人情,及採集經驗;至旅途中瑣細之事,亦略有所指導.

E. 採集用具及藥品之攜帶

I. 採集及實驗用具

1. 刮刀 2. 長鑷 3. 水網 4. 拖網 5. 採集箱 6. 剪刀 7. 解剖器 8. 解剖皿 9. 擴大鏡 10. 旅行顯微鏡 11. 斧頭 12. 手鍬 13. 石鑽 14. 鐵錘 15. 捕蟲網 16. 毒瓶 17. 木塞廣口瓶 18. 鍍鐵提桶 19. 麻繩 20. 棉花 21. 寒暑表 22. 注射器 23. 台紙 24. 報紙 25. 油紙

II. 標本保存及實驗用藥

1. 酒精(alcohol) 2. 蟻醛(Formaline) 3. 硫酸鎂(Magnesium Sulphate) 4. 苦味酸(Picric acid) 5. 醋酸(acetic acid) 6. 各種注射及衞生用藥

出外實習所攜帶之藥品器械,必須完備.否則工作時,將感受無窮之困難.上列諸物,乃就學校及臨時購買者列入之.其他用具及參考書籍,皆向廈門大學借用.

三. 出發途中之生活

六月二十一日　準備既竣,下午一時三十分全體乘車下山.時招商三北兩公司輪船,皆被封差;不得已改乘太古公司之吳淞輪東下,所有行李搬運等事.除最笨重者,委之於脚夫外,餘皆團員親自動手.蓋分工合作,刻若耐勞,乃全團共同信條之一也.傍晚本系主任張鏡澄先生特渡江至吳淞輪上送別,囑我全體團員於努力工作之下,尤須保重健康,其愛護學生之一片至誠,是使全體團員,銘感奮發.張先生儼然爲吾輩之嚴師而又一慈母也.晚九時半許,船啓錠下駛,時月方東昇,一片銀光照耀於浩浩江流之上,黃先

生笑謂曰:『前途光明,有如此江景耳』.

二十二三日 此行爲節省經費起見,全體十二人只買舖位五張,似此擁擠,縱在冬日,亦感不便而況在炎夏天氣此二日中之消遣方法,或瀏覽小說,或聚談故事,間或散步艙外,觀賞兩岸之風光.

二十四日 船行至長江口,正旭日初昇,時波浪較大,船身微感顚動,迨入黃浦江,又復平隱.黃浦江之水,稍帶碧色,但甚污濁,由兩岸隨風送來之煤氣烏煙,實使人對此東方之大市場,得一種感覺.正午船抵碼頭,將行李交與旅館之接客人,相率登岸,逕赴平安旅館休息.交通股幹事,旋卽外出,探聽南行船期.

二十五日 據各方調查所得消息,開往廈門之船,仍須三日後方有正班;但有一貨船名甯波者,今夜南行.衆皆急欲早日達到廈門,遂決定乘甯波南下.晨六時許整隊至戰區參觀,自寶山車站,搭火車,經天通庵,江灣,高境廟,張華濱,蘊藻濱,至吳淞鎭.沿途但見敗屋頹垣,荒烟蔓草,莫非兵火刼後之遺跡,一種繁盛之經濟中心破壞一至於此足使人觸目心傷!每思及日人之殘暴,衆咸髮指目眦,誓滅朝食.至砲台灣,由警士導吾輩參觀砲台,所有之砲基砲位,毀壞無餘,聞係我軍退後爲日人所炸毀者.至於戰區一帶之大學,亦無一倖免,教育破產,尤爲悲憤!戰區參觀,感慨無窮,茲不縷述.午就江灣一新搭草棚之飯館中用膳,迨回旅館後,卽

刻上船,已是下午四時有半矣.船小且舊,實不雅觀.傍晚天雨,水侵入艙,衆取面盆盛水舀之,幸入夜漸小,方得就寢.

二十六日 清晨五時許,輪在風雨交作中駛向茫茫大海前行.全團除黃先生一人外,皆係第一次航海;衆皆懷着新奇之意想,與恐怖之情緒,而蜷伏於翻布床上,不敢多動,蓋船身震盪,頗極昏暈.俄頃徐君首先嘔吐,任君繼之;及至午夜,風愈大,船愈搖,始也艙門徽動,終則船上貨物亂滾,羣客嘔吐之聲,耳不絕聞,船中穢氣,益令人難耐.幸不久而船下錨停駛,風亦稍停,於是鼾聲大作.

二十七日 昨夜大風,除黃先生及同學孫君外,餘皆嘔吐,時則人人疲困,頭目昏眩.僅黃先生一人,任全體看護之責,東應西付任怨任勞,儼然成一保母矣.

二十八日 船行二日,已稍習慣,早起皆漸呈活躍氣象,同學中已有能稍稍走動者,更有能至船上最高層欣賞海景者,清風吹來,處處皆感到海中新鮮而且壯闊.午後約四五時許,漸見遠處有山,已不似前兩日之四無邊際,蓋船行距岸不遠矣.是日在船中遇一和尙,法號大醒,乃廈門南普陀寺僧喜談論,曾畢業於東南大學,告余輩以廈門情形甚多.

二十九日 昨夜二時半,船抵廈門港,拋錨停駛,晨八時乃復駛近碼頭時細雨濛濛,從瀰漫眼簾之烟霧中,窺見廈島,風景殊覺新奇美麗,僱舟登岸,乃乘車逕赴廈門大學.該

校校址,遠隔城市,背山面海,風景絕佳,建築亦甚完美,陳嘉庚先生興學之功,誠足令人欽仰也!抵校後由黃先生偕交際股幹事謁該校校長及事務人員,商決居處問題,時該校正舉行學期考試,學生多未離校,故宿舍無一空席,乃指定化學院三樓一大教室,暫爲吾輩憩息之所.此院位於海濱,建築設備,均甚完整,今吾輩得息於斯,朝夕得聽海濤衝擊之聲,縱覽遠山瀕海之景,無美不收,心曠神怡,可謂得其所矣!於是整卸行裝,撑床懸帳,未及片時,此大教室一變爲我等行館矣.此際團中彼此相約,嚴守整齊,保持清潔,較之在校,尤有甚焉.每日並推同學一人爲值日生,任整理清潔及收信件諸公共事宜.

林校長之茶會　是日下午四時,該校校長林文慶博士約我團友至鼓浪嶼私第茶會,蓋翌日校長卽將赴廣州矣.三時許,曾呈奎先生來訪,曾乃該校植物學助教,爲鍾師之學生,吾輩此次南來,鍾師曾數致函,託其指導,蓋廈門人地生疏,語言不通,若無一相當人引導,諸感困難也.三時半,由曾先生領導吾輩赴鼓浪嶼之約,甫出門,適與該校植物系主任段續川先生相遇,乃偕行.按鼓浪嶼乃與廈門對峙之一小島,其兩兩相隔之海面甚狹,划舟約一刻鐘卽至,外僑多居於是,因其管理權亦屬外人.其風景之佳,遠過廈門.既至,則見樹木翁翳,蒼郁可愛,尤以榕樹之景爲最巨大氣根,掛滿全樹,內地人不易見之,蓋此地在地理位置上,已處亞

熱燙矣.熱帶情形,已約略可見一二.行不及里,抵林博士家,博士尙未歸,其夫人出而招待,親奉茶點,備極殷勤.俄頃,博士歸,博士乃一年近七十之老叟,精神矍鑠,對吾輩遠來之客,甚表歡欣!蓋博士亦鍾師之契友,事前有函通知也.博士乃一醫學者,對生物學亦極饒興趣,曾任新加坡某植物園主任,對於花木之認識頗多;幼年生長海外,二十一年前,始來鼓浪嶼.據言彼初歸時,鼓浪嶼尙係不毛之地,經博士之首先經營,然後外僑繼之努力,方有今日之可觀.其家庭花木極多,皆自南洋來者,佈置幽雅,風景宜人,博士遍引參觀,復同至室中,取出其英譯離騷一書,付余等簽名其上,以留記念;並作簡短致詞:希望余等努力工作,拿出挾山超海的本事,在海中盡量搜尋,以博得大自然之寶藏.時已五時許,遂各握手辭別.

段續川先生晚宴 由鼓浪嶼回廈門,天色已暮,段曾兩先生邀至廣益酒樓晚餐,所點各菜,處處皆帶研究生物學之意義,既感深情復饒興趣.席間段先生略談及中國目前學術界情形,惜彼一二日內,即將離開廈門,未能爲吾輩指導耳,八時席散,復相偕乘公共汽車回校安息.

四. 實習時之情形

三十日 是日上午參觀廈大生物學院,下午參觀其他部分.生物學院乃廈大建築中之最偉大者,位於海濱山坡之上,凡四層:動物部,植物部分佔二三兩層,最上層爲辦公

室,最下層乃係底樓,爲動物標本製作室,規模宏大,設備完美,中華海產生物學會會址,即設於此,每年暑假,在此舉行盛會.植物室含標本陳列室三,實驗室二,標本製作室一,研究室四;一切設計,及工作成績,據曾先生云,皆鍾師一人慘淡經營之力.動植物系之儀器室,圖書室,亦在此層,圖書之多,(包括專門研究書籍)爲其他大學所不及.由此層而下,至動物室,室較植物部尤爲寬大,計含標本陳列室六,實驗室三,研究室二.標本之陳列室分爲(1)鳥類陳列室;(2)魚類陳列室;(3)甲殼類及,棘皮動物,腔腸動物,海綿動物陳列室;(4)昆蟲陳列室;(5)貝類陳列室;(6)哺乳類陳列室數部.其標本之種類,要以海產及當地產者爲多,櫃櫥雅緻,佈置得宜,既合保藏標本之原則,又極審美之能事,謂爲完善,誰曰不宜.實驗室設備,亦頗完備,而其特點,尤在寬暢透光.海產生物材料供給所,亦即附設此層.內有工作人員三四人,引導參觀者,乃動物系助教金德祥先生,誠熱指導,吾輩得益不少,下午因天氣甚熱,團體參觀未舉行,團員各自單獨行動,黃先生則與廈大生物院諸先生將工作日程磋商確定,茲錄之如下:

來復	月日	時間	地點	目的	附注
星期五	七月一日	上午六時三十分	南普陀	植物	
星期六	七月二日	下午二時	鼓浪嶼	動物與植物	
星期日	七月三日				休息
星期一	七月四日	下午二時	南太武	動物與植物	
星期二	七月五日	下午二時	燈塔	動物與植物	
星期三	七月六日	上午五時三十分	集美	動物與植物	
星期四	七月七日	上午五時三十分	劉五店	蛞蝓魚	
星期五	七月八日				休息

七月十日(星期日)至七月十七日(星期日)乘漁船採集動植物及實驗室中工作

星期一	七月十八日	下午二時	鼓浪嶼	動物與植物	
星期二	七月十九日	下午二時	南太武	動物與植物	
星期三	七月二十日	下午一時	集美	動物	
星期四	七月廿一日	下午一時	集美	動物	
星期五	七月廿二日	下午一時			起程回校

七月一日　工作日程既定,全團皆鼓舞精神,以期待此新事業之開始.清晨卽起,分配採集用具;早餐畢,偕曾先生向南普陀山進發,採取陸上植物.聞廈門附近之山,多花崗岩及玄武岩等岩石,甚鮮草木,惟此南普陀山則草木茂生.據曾先生言:廈門本地之植物種類極少,花木多南洋一帶移來;故凡熱帶植物之特性及其生長狀態,均可窺其一二.

如仙人掌肥碩可愛,絕不似溫帶栽培者之矮小者可比.此外龍舌蘭之花莖,長達二丈許,亦非內地所得見者.(攝有照片存生物室)其他各種植物生活之狀態,與生長內地者,亦多不同,此殆環境相殊而起之變化也.採集時分途工作.攀山越嶺,各顯其能.當興趣正濃,工作緊張之際,天空黑雲迷漫,大雨驟至,衆皆未帶傘,然猶繼續工作,衣帽盡溼弗之顧;蓋野外實習,此等狀況,習以爲常也.時雨愈大,乃至南普陀寺暫避,寺卽在山之麓.建築甚近代化,閩南佛學院在焉.大醒法師,乃本寺之主持僧.投剌訪談,乃親出招待,暢飲清泉,並饗素製米粉,復引導參觀該寺各殿院,及佛教中學之教室,宿舍,與夫圖書館等處,寺中幽靜之景,當以寺後洞中之石屋爲最,天然清雅,涼爽異常,有花數盆曰建蘭花,香馥可餐.時天雨已止,晴爽可愛,海濱氣候之變化無常,誠令人莫測也,回廈大時已過午矣.下午以二人助黃先生佈置實驗室,以二人整理上午所採之標本,兼配備保存標本之各種藥劑,其餘仍復外出,繼續上午未竣之工作.

二日　早餐後黃先生將海產動物之各種特殊習性及各別之採集與保管方法,提綱挈要,稍事溫習.茲錄其綱要如下:

普通海產動物之習性及採集與處理法

一.原生動物

1. 浮游生物(Plankton)——如夜光蟲有孔蟲等

a. 浮游水面宜以掩網捕獲之.

b. 固定於 5 % Formalin 液中

二.海綿動物

1. 普通海綿 Sponges

a. 附着於海濱岩石,或泥沙中.

b. 保存於95% 酒精中,或乾晒之.

三.腔腸動物

1. 水螅類 Hydrozoa

a. 固着於海濱之岩石,或沙粒上,須在有水處檢查.

b. 先以硫酸鎂($MgSO_4$)殺之,再保存於10% Formalin 液中.

2. 水母類 Jelly-fish

a. 浮游生活,當潮水退時於海灘上檢之.

b. 保存於 8% Formalin 液.

3. 海葵類 Sea-anemons or actinica

a. 固着於岩石或沙粒上,石頭或海濱之木柱石尤多

b. 先用硫酸鎂($MgSO_4$)殺之,再保存於 10 % Fomalin 液

4. 珊瑚類 Corals

a. 固着於岩石上,唯海濱只能見其漂來之骨骼或碎片.

b. 先以硫酸鎂($MgSO_4$)殺之,再保存於Formalin $\frac{1}{2}$ +alcohol $\frac{1}{2}$ 液中.

5. 櫛水母類 Ctenophora

a. 浮游於海水中,宜以網掬,當潮退時或藻類中見之.

b. 固定於Picric液中數小時,移置90% 酒精中

四.扁形動物

1. 普通扁蟲 Plathelminthes

a. 附着於石塊下面或介殼中

b. 先置於淡水中,再移於Formalin$\frac{1}{2}$+alcohol$\frac{1}{2}$液中

五.圓形動物

1. 普通圓蟲 Nemathelminthes

a. 蠕行於潮退後海灘之淺水溝中,或寄生於他動物體上.

b. 先置於淡水中,再移入80% 酒精中.或 Formalin $\frac{1}{2}$ + alcohol $\frac{1}{2}$ 液中.

六.苔蘚蟲類

1. 苔蘚蟲 Bryozoa

a. 附着於石塊

b. 先以硫酸鎂 ($MgSO_4$) 或以脫 (ether) 殺之,再保存於80% 酒精中.

七.棘皮動物

1. 海星類 Star-fish

a. 原係自由生活深海中,然於低潮時,亦可於海濱之石塊及沙泥上得之.

b. 保存於10% Formalin液中,最宜用Formalin注射之,以防內部腐爛.

2. 陽遂足類 Stand-Ster

a. 在石塊或沙泥上,或常附着於他動物體.

b. 保存於80% 或90% 酒精液中.

3. 海膽類 Sea-urchin

a. 常附着於石塊,有時亦可於泥沙中得之.

b. 保存於80% 酒精.

4. 海王瓜類 Sea-Cucumber

a. 原在深海中,常漂至海濱,可於泥沙中得之.

b. 如海星之法處理之.

5. 海百合類 Sea-lilly

a. 係深海產,當低潮時,可於海濱得之.

b. 保存於90% 酒精

6. 海羊齒類 Polychaeta

a. 深海產,低潮時可於石塊或泥沙上得之.間亦有附着他動物體上者.

b. 先用過鉻酸鉀 (Potassium bicromate) 殺之,再保存於80 %酒精

八.環形動物

1. 蛭類 Leeches

a. 多附着於他動物體上(魚介體上尤多)

b. 先置淡水中,死後再移入 Fosmalin$\frac{1}{2}$ + alcohol$\frac{1}{2}$ 液中.

2. 沙蠶類 Rag-Worm

a. 在海泥表面常見之,普通為沙蠶(Sipunculus) 及沙蠋(Lug-worm) 之屬.

b. 先置淡水中,再保存於 Formalin$\frac{1}{2}$ + alcohol$\frac{1}{2}$ 液中.

九.節肢動物

a. 自由生活,海濱常見者為蝦(Cruyfish)蟹(Crab), 寄居蟹(Heymit-crab), 海蛆 (Sea-slater) 及藤壺 (Barnacles) 之屬.間或寄生於他動物.

b. 先置淡水中或直接保存於70% 酒精.

十.軟體動物

1. 石鱉類 Amphineura

a. 常在海濱之石上或沙泥上,介殼可於沙上得之.

b. 先入淡水,再保存10% Formalin 液中.

2. 瓣鰓類 Lamellibranchia

a. 常在沙石或軟泥中.

b. 如前法保存.

3. 掘足類 Scaphopoda

a. 藏於泥中而露其水管.

b. 保存如前法.

4. 頭足類 Cephalopoda

a. 自由游泳,原產於深海,間亦有逐潮流而至海濱者.

b. 保存法如前.

5. 腹足類 Gastropoda

a. 自由生活可於沙石上得之.

b. 先入淡水中,再移浸於10% Formalin 液中.

十一.有索動物

1. 蛞蝓魚 Amphioxus

a. 體藏泥沙中,露其體之前部於外面——僅劉武店有.

b. 先以硫酸鎂($MgSO_4$)殺之,再保存於 Formalin $\frac{1}{2}$ + alcohol $\frac{1}{2}$ 液中.

2. 海鞘 Arcidian

a. 單海鞘常在海濱沙石上,複海鞘則產於深海.

b. 保存法如前.

十一時許,自往街購買橡皮底鞋,蓋海濱岩石膩滑,皮鞋及其他球鞋皆不適用.下午一時許在實驗室集合,每人手提一鑌鐵桶(到廈門後購買)及刀,鑷,大小瓶各一,自大學碼頭乘小船渡往鼓浪嶼,同行者有金德祥先生,尚有廈大採集工人二名,採動物者曰阿林,採植物者曰老李,彼等乃專門從事採集者,對當地之情形極熟,經驗亦甚豐富.船泊鼓浪嶼登岸,分兩組工作,一採海藻,一採動物.時潮水尚未全退,僅能就沿岸之海灘上略事觀察,蓋海濱最易觸目者,則為蠔(oyster)與藤壺(Barnacles)其次則為石鼈(Chiton)和海蚓

(Slater). 蠔與藤壺皆固着岩石之上,其介殼鋒利異常,稍一不愼,卽罹流血之災.石鼈亦吸着石上,有時可見其微微蠢動,苟一觸之卽緊着不易攜開.海蛆則成羣遊行於岩石之上下,活潑靈敏,不易捕捉.在此等岩石之裂縫中,亦常見有顏色華麗,具有圓而且尖之觸鬚,親若菊科植物之花苞怒放者,海葵 (Sea-anemone) 是也.其觸鬚感覺靈敏,若用指輕觸其頂,則羣起圍繞手指,覺其四緣有一種特殊之曳動然,蓋海葵卽藉此以捕食弱小之動物也,海葵之種類甚多,有紅色者,有褐色者,有微呈綠色者,有紅色而具白紋者;有綠色而具紅紋者;着生石隙僅觸鬚伸張於外以捕獲食物.採取時,觸鬚立卽收縮,不易得完全之標本.此種生活狀態,可謂盡適應環境之能事矣!或謂海葵爲「有生命的花,生在海中有生命的石上」,實爲至當.此外尙有一種寄居蟹 Hermit-Crab), 亦極有趣,常見各種貝殼,蠕蠕而行.卽此蟹寄居其內,藉貝殼之保護以禦敵也.此日因潮水晚退之故,採集種類不多,但此無甚關係,其重要,尙在觀察生活狀態,與其分佈情形也.歸途中值一漁船,購得鱟魚 (King-Crab) 一對,抵廈大,已是萬家燈火矣!

三日　六時起,齊集實驗室整理昨日所採之標本,分組工作,至午方告一小小結束.下午休息,因明日爲第一日之低潮,須休養精神,努力工作;然尙有少數人在海濱拾取貝殼約數十種,中以筍螺 (Terebra Crenulata) 爲最多.

四日(陰歷六月初一日) 是日乃本團抵廈後所遇之第一日低潮,人人皆滿腔熱望,冀能多多採取標本,恣意試驗.午前皆未外出,飯後即至實驗室攜帶各種用具,由大學碼頭乘民船向南太武進發.同行者有曾金兩先生暨阿林,老李共十六人.南太武乃一半島,位廈門之南,船行二時許即至.但聞不順風之際,須時較多,或竟不能往.余輩此行,適値良好天氣,可謂得天時之助.抵南太武時,不過三句鐘,潮水尙未低落.蓋低潮時期,每月有二次,每日亦有二次,皆有定時.採集者必熟知潮之漲落時間,然後工作,庶免危險.四時許,潮水開始低落,於是衆各努力搜尋.其最有趣者,厥爲紫色大海膽(Sea-urchin),常棲息岩石夾縫中,人手不易接觸,必以甚長鐵鉗,始可得之.其防禦之安全,可謂至矣!至於海星(Star-fish),海綿(Sponges)珊瑚(Coral)海參(Sea-Cucumber)之類,亦皆獲得甚多.當是時人人面有喜色,精神益爲興奮,既採得種類甚多之標本,而又實地觀察其各別生活之情形,較之專在書本上所獲之知識,眞確而有趣.爲欲展開採集之區域,故復另組四五人由阿林嚮導,駕船至附近另一小島上.此島在潮水未退時,全在海中,故種類又略不同.値玆人人興高彩烈,工作努力之際,陰鬱暮色,自遠而至,海潮亦漸回漲;黃先生狂吹號笛,集合乘舟,反棹時,在船上取麵包分食以當晚餐,食時各談其所得,興趣極佳時海風襲來,令人發生一種輕妙快感,而盡忘其疲勞.抵廈門已八句鐘.上岸後,全

體至實驗室,將採集標本,分別整理保存.某種須培養於海水中,某種須注射防腐藥,某種須固定,某種宜乾製,一一分類完畢,距午夜僅一刻鐘矣!據金先生云;「若今日之採集成績,每年中至多不過四五次耳」吾輩真可謂幸運矣!

五日　按照原定之工作日程,今日本應赴燈塔採集藻類,但吾輩咸欲多得若干動物種類,遂臨時變更計劃,先至集美,集美處廈門北約三十里許,其海灘爲採集動物之良好場所.午餐後,各自收拾行李,僱妥汽車,由廈大運往集美碼頭,換乘汽船前往,約二時許即至.住集美學校科學館樓上,承該校博物教員龔禮賢先生妥爲招待,生活頗稱便利.按集美學校亦爲陳嘉庚先生所手創教育事業之一,規模宏大,較之一般大學,猶有過焉!集美包括高中,初中,完全師範,女子師範,幼稚師範,小學,幼稚園,農林,水產等校,學生不下二千人.四時許由科學館向海濱出發,一望無際之海灘,較之鼓浪嶼,南太武兩地,岩石嶙峋之情形,又不相同.工作方始,黑雲自遠而至,知其雨之將至,乃購備斗笠,以備帶雨工作.俄而雨果大至,風助其威,團員咸遍體淋漓,然猶工作於泥沙沒膝之海灘中,經一時之久,卒以雨大風猛,不能支持,乃趨至碼頭暫避,時天色垂暮,而雨仍無停意,於是歸集美市晚餐,晚間稍事整理標本即就寢.

六日　尙在夜間四時許,黃金兩先生即將同學自甘美之夢中喚醒,取冷水洗面,燃洋燭照光,分食麵包,提攜用具

一切動作,皆極輕細,蓋不敢驚動隔房人之好夢也,時繁星仍放光芒.知天氣已晴,遠處鷄聲,以及園中知更鳥之啼叫,已示天之將明.准備既竣,攜手電筒向海濱出發,朦朧曙光之下,此一行人悄然前進,大有行軍時含枚疾進之神氣也.及至海灘,天已大明,潮亦全退.灘多爛泥,行走困難,往往泥沙沒膝,拔足爲難;甚或拔足時而貝殼已割裂皮肉矣.工作之最吃力者,無逾於此!按集美海灘,在沙地多海筆(Sea-pen)之產,泥中多海葵(Sea-anemon)之屬;灘之高處,更有細小鱟魚(King-crab)成羣匍匐;大螯招潮(Gelasimus areuatus)舉足歡迎;潮水低處,間亦可見海綿,海參之類,附着於石條之上.其令人失望者,即所採標本之種類,寥寥無幾,遠不若南太武之豐富;然採取海番茄(Phyllophorus hypsipyrgus)之樂趣,亦不亞於在南太武發見海胆之時.海番茄生長泥中,須涉足於海水之較淺處,以手先入泥中摸尋之.時日出甚高,所帶防雨之斗笠,一變即爲遮蔽日光之用.九時許潮水回漲,而余輩亦莫不汗流滿面,精疲力竭矣!衆議即在此海灘攝影,以留記念.及折回集美學校,時將晌午矣.乃以一部分人整理標本,而另以一部分人復至海濱等候漁船歸來.約十一時果潮水大漲,無數漁船,順流而歸,蓋此等漁船,曾於潮水退時,駛入較深海面,故其所獲較多也.吾輩分頭上船搜索,所得標本種類獲夥;因吾等所要者,大都係漁人遺棄之物,故以甚微之資,可得多量標本,切不可忽視.歸校晚餐,時已一句

鐘許,匆忙整隊參觀水產學校,四時三十分,乘汽輪返廈.

七日　本定今日往劉五店考察文昌魚之產地狀況,嗣以汽船行駛之手續,未經辦妥,遂改爲自由行動,或往山上採集附近陸上植物,或循海濱拾取貝殼,今日天氣,已更覺炎熱矣!

八日　廈門之北,約百里許,劉五店在焉,以產文昌魚(Amphioxus)著名.文昌魚一名蛞蝓魚,或又曰雙尖魚,廈門人咸稱之爲林文慶魚,乃脊椎動物之始祖,在研究生物發生學,及進化問題,均極爲重要.全世界已知之產地尙少,劉五店乃產額之較多者,當地居民,以爲日常食品,售價低廉.(每斤洋二角)此次來廈,劉五店自爲重要目的地之一.晨五時,由大學碼頭乘廈大汽船前往;同行者,有曾金兩先生及阿林等十數人,船行約四小時始至.比登岸略事休息,卽往參觀魚市,據商人云:此時鄉人農事正忙,無暇業此,故魚市中未見新鮮之文昌魚;但有晒乾出售者,其價亦廉.比購一斤,味頗香甜,略似蝦米,以之烹調,當更適口.旋卽回至船中,跟隨所僱之漁船前往,觀察產地及採取方法.按文昌魚生活於海灘之泥沙中,採取時以四方形大鐵鏟(邊緣略高二三寸許)上繫竹竿,竿之上端又繫甚長之廣藤,漁人立船上,猛力擲鏟於海中,然後徐徐曳起,每鏟皆載滿泥沙,沙中卽藏有多量之文昌魚也.當鏟曳出外時,沙之一部,爲水冲洗,而文昌魚則鑽入沙之底部,未隨水流漂去,故採集尙稱簡

便.吾等總共取得四桶,回廈大後卽至實驗室整理之.整理之法,將所有之泥沙,用篩篩去,文昌魚則留於篩上,一一取出,置於淸潔海水盆中,分別大小,固定於Bouins'液溶,或10% Formalin液中.蓋最小之Larva整封標本,供顯微上之硏究,其價値較高.當時尙以一部分飼養於海水中,試驗其生活方法.總計此次所獲之文昌魚,可供吾校實驗材料十年之用,洵不可多得之機會也.

九日 連日因接續採集,工作頗忙,而標本之種類又多,只能略分門類,混合保存於臉盆或水缸中.未能一一分開,妥爲處理.本日潮水已高,不復採集,乃將此等標本從新分類,編製號碼,分別裝入洋油桶中.此時有一事,頗感困難,卽需要之藥品,如酒精,Formalin及瓶,桶等物,不敷應用,多臨時在廈市購買,價昂而品不佳;且此項經費,皆超出原來之預算甚遠,致影響原定計劃,實此行最大之憾事也!

十日 據會計股報告來廈用費,超出預算甚多;如按照原定計劃進行,必須增加經費,因是集衆會議,以謀補救.有主張電向學校請求增加經費者,有主張向教授私人借款者,有主張縮短工作時間,提早返漢者,卒以種種關係,遂忍痛縮短時間,從新變更工作計劃,實此行最不稱意,最無可如何之舉也!乃分配團員爲四組,赴廈門市之魚行及水菓鋪中,購買所未採到之廈產標本;蓋此實可補救採集之不足,切勿以其係購買性質,而忽視之!下午五時許,全團在廈

門海濱共攝一影,以留紀念.

十一日 上午分組再至附近山野,搜索陸上動植物,計分四組,每組三人,各人盡能力之所及,以作此最後之努力.烈日如火,岩石烘熱如爐;衆人爬山越嶺,汗流浹背,渴則飲山中之泉水,倦則倚於大樹之下,可謂極辛勤之至.下午在實驗室中解剖鯊魚,海胆及海葵等物而另以數人隨曾先生在附近田野採集淡水藻類,兼獲食蟲植物三種.

十二日 上午仍分組整理標本,下午全團赴廈門廣谿酒樓宴請陳子英博士(廈大動物系主任)曾呈奎金德祥三先生,以答謝此來諸方指導之盛意.惜林校長赴粵未返,杜佐周博士,段續川主任均已離廈,無以報答.席間除黃先生致詞外,並推同學一人致辭,以表謝意.

十三日 早餐後,仍集實驗室整理標本,並將廈大借來之各種用具,洗刷淨潔,如數交還,十時許全團至鼓浪嶼赴曾先生晚餐之約,曾先生款待殷勤,備極客氣.餐畢復相偕繞鼓浪嶼一遊,登日光岩遠眺,廈門全市,列列在目,時天氣極熱,略事遊覽,即返廈門.五時許又赴陳子英博士家晚餐.此次來廈蒙各方殷勤招待,全團深感不安.

十四日 整日皆忙於裝裹標本工作,凡乾製者,皆置於木箱及網籃之中;液浸者,則用錫封;其着如是既便搬運,且液體不至發散,爲採集工作中之最重要部分.晚黃先生邀全團聚餐,欲盡其地主之誼;但同學皆覺此行黃先生實過

於勞苦,精神上已感覺不安,更何敢再事叨擾,乃堅辭之.結果黃先生購辦茶點水菓,於晚間攜蓆與毯至海濱一平坦之小垢上,團坐聚談.垢之下卽海,大石羅列,海潮激浪,發爲奇響,時皓月當空,迴波萬頃,衆人或談或食,一種大自然幽妙之美,籠罩全心.人人皆覺此海濱明月夜會,爲最可紀念也!別矣!廈門海濱,此後更復有能如斯之盛會乎?!

十五日　清晨卽起整理行裝,由交通股押運至大學碼頭,僱民船二艘,載往太古碼頭,十二時許,太原輪船,始入港,停泊海中.乘客上下擁擠異常,全團團員皆振作精神,以與此混亂之環境決鬬,始於船之下,得一空隙,將行李安置其中,雖悶熱逼人,弗能顧也!黃先生因擬參與中華海洋生物研究會,繼續工作,故留廈未同行.臨別諸般囑咐,依依握別,大有不忍頃刻分離之慨!是夜船略廈港未啓行.

五. 歸途雜述

十六日　十二時許,船拔錠開駛.別矣!南國風光.來廈約兩旬,雖以經費關係,未能久留,然所獲所見,已不虛此一行矣.此時雖未可說滿載而歸,然於海洋所得之印像,又豈可以一般旅行相計耶?!

十七日　船行海中,風浪平穩,與航行江輪,無甚區別.聞航行者言:此固爲夏季常態,若屆秋冬,則風浪極大,非如此平穩矣.是晚月光皎潔,照耀海面,銀光萬道,美不勝收.用思古人「海上明月共潮生」之句,玆獲身歷其境矣.

十八日　船行速度頗準,十一時入吳淞口,所有乘客之行李,經旅館招待之積集,堆疊如山.十二時抵浦東碼頭,經檢疫後,卽登岸渡江至泰安旅館.

十九日　天氣炎熱,使人喘息爲難,本擬參觀滬上各學術機關,卒以炎熱難耐,僉議作罷.間有往兆豐公園遊覽者,歸言園中樹木甚多,草坪尤極美麗,而動物園中飼養各種禽獸亦尙値一觀.

二十日　因船期關係,再留滬濱一日,實則此種喧鬧之大都市生活,吾人皆未習慣,處處感受愁悶厭煩,不如從速離開之爲妙也.

二十一日　購好船票,卽將行李運至江華輪上,交付茶房後,復上岸解決民生問題.傍晚卽行上船,於是此東方之巴黎,亦與吾輩別矣!

二十二日——二十五日　船行四日溽暑難當,同學多有病者,以服濟衆水爲唯一救濟方法.在船中除閱覽小說及互談笑話外,則餵飼豚鼠食料,爲解悶方法之一.最有趣者,此三日之內,竟產小豚鼠三隻,然卒以船上保獲不周,旋卽死去.二十五日,船行至青山,珞珈校舍,巍然在望,羣相歡呼而告曰:此吾校也!別來月餘,湖光山色,得無恙乎?四時許船抵碼頭,校中派來校工二人照料行李,遂渡江乘汽車返校.

六. 標本之種類

A 動物

動物標本,計三百七十餘種,除陸地上所採獲之昆蟲蜘蛛八十餘種外,餘悉爲海產,間有一部分,曾在廈大標本室對定名稱;一部分與校中原存之標本雷同;另一部分參考The Cambridge natural history, The Royal natural history, Harmsworth natural history. Parker & Heswell. The text-book of zoology, China marine biologicol association, First annual report, 日本動物圖鑑,日本海產動物學,內外普通動物誌,魚介藻圖譜,魚類圖說,飯島魁動物學提要,惠利惠動物學精義及商務印書館動物學大辭典等書,檢定種屬.計已檢定者,二百有三,尚餘九十餘種,有待於書籍補充之後也.此二百餘種已檢定之名稱,因時間匆促,錯誤在所難免.他日複檢之後,自當有所更正,尚希海內動物學家有以教之,則幸甚矣.

Phylum Protozoa (原生動物)

Class mastigophora (胞鞭毛蟲類)

Noctiluca miliaria

Phylum Porifera (海綿動物)

Class demospongia (普通海綿類)

Renicra japonica Kadota

Spongilla (lacustris Linne?)

Spongilla sp.

Tethya ovata Thide

未定名稱者三種

Phylum Coelenterata (腔腸動物)

Class hydrozoa (水螅類)

Aglaophenia secunda

Aglaophenia sp.

Dendrocoryne secunda

Phumularia dendritica?

未檢定名稱者三種

Class scyphozoa (水母類)

Aurelia sp.

Charybdea sp.

Physalia sp.

未檢定名稱者六種

Class Authozoa (珊瑚類)

Actinia effoeta

Aiptasia Couchii

Anthopleura xanthogrammica

Dendrocoryne secunda Inaba

Sagartia payuri Verrill

Cavernularia habereri Moroff

Pteroides fusco-notatum Kolliker

Isis sp.

Gorgonia verucosa

未檢定名稱者二種

Class Ctenophora(櫛水母類)

Hormiphora sp.

Phylum Molluscoidea(擬軟體動物)

Class Bryozoa(苔蘚蟲類)

Caberea lata Busk

Phylum Echinodermata(棘皮動物)

Class Asteroidea(海星類)

Anthenea flavescens Gray.

Anthenea pentagonula Lamark.

Anthenea limboonkenii Smith.

Astropecten scoparius

未檢定名稱者一種

Class ophiwroidea(蛇尾類)

Opioplocus japonicu

Ophiothrix? sp.

Class Echinoida(海膽類)

Arachnoides placenta L.

Heliocidaris crassisyina A. agassiz

Pentacta tuberculasa

Temnopleurus toreumaticys Klein

Peronella lessure Agassiz.

未檢定名稱者一種

Class Holothuroidea (海參類)

Acta tuberculos Q. and G.

Actinopyga typica Ludwig

Pentacta Caerulea

Phyllophorus japonicus

Protankysa bidentata Woodward and Barrett

Protankysa sp.

未檢定名稱者一種

Class Crinoidea (海百合類)

Comatula solaris f. gracilior

Phylum Annelida (環形動物)

Class Chaetopoda (毛足類)

Ceratocephale sp.

Chlolia flava

Class Hirudinea (蛭類)

Pontobdella muricata

Class Sedentaria (管住類)

Laouome (japonica Marenzeller)?

Thelepus japonica?

Class Cephyrea(螠類)

Siphunculus sp.

Phylum Mollusca(軟體動物)

Class Amphineura(雙神經類)

Acanthochitona sp.

Chiton squamosus

Plewwtoma disjecta Smith.

Class Gastropoda(腹足類)

Aplysia (incus?)

Aplysia (concava?)

Aplysia lurida

Architectonica serspective L.

Caassis Cornuta L.

Chicoreus ramosus L.

Chorostoma rustica Gm.

Doris Crescentica Collingwood

Euchelus lischkei Pilsbry

Fusus sp.

Hemifusus ternatanus Gmelin

Latrunculus (japonica Sowerly?)

Limpets sp.

Monodonta labie L.

Monodonta sp.

Monodonta (meritoides Philippi?)

Melarhaphe (inlermedia?)

Murex seneglensis

Murex sobrinus A. Ad.

Mitra scutulata Gm.

Natica maculosa Lamark.

Nerita albicilla L.

Neverita ampta Phill.

Olivella (portuner adams?)

Oscanius sp.

Philine sp.

Potamides Cunmgu Crose.

Potamides fluviatilis

Potamides sp.

Purpura tumulesa Rew

Ricinura (musina?)

Stomatella lyrata Pilsbry

Turricula sp.

Turbo argyrostomus L.

Tubo petholatus L.

Umbonium Costatum Kiener

未檢定名稱者二十種

Class Pelecypoda (瓣鰓類)

Anadara granosa L.

Anadara sp.

Arca brandti Phil

Arca inflata Rue

Arca navicularis linter Jonae

Arca Obliquata Gray.

Arca adawsiana

Astarte borealis

Atrina (Pinna) sp.

Cardium elongatum Brug

Cascella chinensis Deshayes

Cardita Cummgrana

Chlamip irregularis Sowerby

Chlamys senatorius Reeve

Chlamys sp.

Cyclina sinensis Gmelin

Codakia tigerina L.

Diplodonta japonica Pilsbry

Gamphina melanaegis Romer

Loripes sp.

Lutraria sp.

Mactra veneraformis Reeve

Mactra violacea Chemn

Meretrix meretrix L.

Murex seneglensis

Murex sobrinus A. ad.

Mytilus (hirsutus?)

Mytilus Pilosus Reeve

Ostraeo denselamellosa

Ostraea talienmhanensis

Paphia euglypta Philippi

Placenta Placenta L.

Psammosolen divarictus Lisehke

Recten Sp.

Septifer virgatus Wiegn

Septifer Sp.

Solecurtus constriactus Lan.

Spondylus regivs

Spondylus (Cruentus?)

Spondylus ducalis Bolten

Tagelus constrictus Lamark

Tellina sp.

未檢定名稱者二十種

Class Cephalopoda (頭足類)

Loligo (beka?) sp.

Octopus octapadia

Sepiadarium kochii

Sepia recurvirostral

Phylum Arthropoda (節肢動物)

Class Crustacea (甲殼類)

Subclass Entomostraca (切甲類)

Balanus trigonus Darw.

Mitalla metella

Tetraclitta sp.

Subclass malacostraca(軟甲類)

Order Decapoda (十脚目)

Suborder macrura(長尾亞目)

Dorippe granulata de Haen.

Leander indicus de Haen.

Macrobranchium sp.

Penaeus semisnlcatus de Haen.

Suborder Brachiura (短尾亞目)

Atergatis (frontalis Orlmann

Brachyonotus sanguineus

Calappa philargius L.

Calappa sp.

Chlorinodes longispinus Miers

Charybdis 6- dentata Herbst

Doclea orientalis de men.

Doclea sp.

Drippe facchina Herbat

Diagenes edwardsii

Eriphia (Scabricula?)

Grapeus haematocheir

Grnpeus grapsus L.

Matuta plancipes Weber.

Ocypoda (Cordimana?)

Philyra pisum de Haan

Portunus sangmnolentis L.

Portunus (Pelagicus?)

Portunus gladiator

Parthenope laciniata de Haan

Petrolithes speciosus Stimpson

Portunus tritubercitatus Miers

Pinnathera sp,

Sesarma dehaani M. Edward

Sesarma intermedius de Haan

Sesarma haematocheir de Haan

Spiropagurus sp.

Uca arcuata de Haan

Uca lactea de Haan

Xantho (distinguendus?)

未檢定名稱者十種

Ordes Stomatopoda(口脚目)

Ibaccus ciliatus de Haan

Squilla oratoria de Haan

Squilla raphidea Fabricius

Class Arachnida (蜘蛛類)

order Acarina (劍尾目)

Xyphosura longispina

order Araneida(真蜘蛛目)

陸地蜘蛛三十種

Class Insecta (昆蟲類)

陸地昆蟲五十種

Phylum Chordata (脊椎動物)

Subphylum Urochordata (被囊類)

Ascidians sp.

Ascidiae compositae sp.

Botryllus sp.

Cynthia superba Ritter

Cynthia sp.

Subphylum Cephalochordata (頭索類)

Branchiostoma belcheri Bloch.

Subphylum Vertebrata (脊索類)

Class Elasmobranchii (板鰓類)

Cynias manazo Bleeker

Chiloscyllium expolitum Smith.

Dasybatus akayei Mullor

Dasybatus acusimilis Gunther.

Rhinobatus schlegeli Muller.

Class Pisces (硬骨魚類)

Atauthocepola limbata

Corvula schlegeli Bleek.

Leptoecphalus (myriaster?)

Monacanthus chinensis Block.

Monacanthus (tomentosus?)

Platycephalus indicus

Periophthalmus cantonensis

Pleuronectidae sp.

Rhinoplagusia japonica T. S.

Spheroides (Porphyreus?)

Stromateoides sp.

Saccopharynx sp.?

Stromateoides argenteus

Sparus aries T. S.

Thunnus orientalis T. S.

Trichiurus japonicus

Usinosta japonicuf T. S.

Zebrias zebrias T. S.

Zebrias sp.

未檢定名稱者二十四種

B 植物

植物標本方面,計分海藻及陸上植物,後者約近百種,其名稱正在審定中,今僅就海藻之已擬定名者,錄之如下:此外倘有陸上植物之果實二十餘種,亦未列入.

Marine algae (海藻)

(1) Chlorophyceae (綠藻)

Bryopsis plaumosa

Codium

Cladophora

Chaetomorpha

Rhizoclonium inplexum

Ulva

Monostroma sp.

Enteromorpha linza

(2) Phaeophyceae(褐 藻)

Ectocarpus

Colpomenea sinnosa

Endarachne binghamiae

Dictyota

Padina

Tubinaria fusiformis

Sargassum fulvellum

Ishige okamurai

(3) Rhodopyceae (紅 藻)

Porphyra suborbiculata

Geldim

Giagartina intermedia

Gymnogongrus

Gracilaria confervoides

Hypnea

Champia parvula

Nitophyllum uncinatum

Hypoglossa germinatum

Caloglossa leprieurii

Laurencia papillosa

Choudria crassucaulis

Pclysiphonia japonica

Symphyocladia marchantioides

Ceramium sp.

Calhthamnion sp.

Gloiopeltis

Grateloupia ramossissima

Jania

未檢定名稱者十餘種

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原書者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第二卷第三期目錄

國立武漢大學理科季刊第二卷第四期目錄

國立武漢大學文哲季刊第二卷第三號目錄

國立武漢大學社會科學季刊第三卷第一號目錄

介紹期刊

牛頓……日本東京市目黑區大岡山七一牛頓月刊社

科學世界……南京山西路國立編譯館中華自然科學社

科學的中國……南京城比蒹巷四號中國科學化運動協會

青年世界……四川重慶天主堂街重慶書店青年世界雜誌社

瓊崖實業雜誌……瓊州海口東門內實業雜誌社

婦女旬刊……杭州中華婦女學社

學風……安徽省立圖書館

南洋情報……上海眞如國立暨南大學

時事類編……上海福煦路八〇三號中山文化教育館

民大校刊……廣東荔枝灣國民大學

安徽大學周刊……安慶安徽大學

國立四川大學周刊……成都四川大學

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

南華評論……上海山東路三二〇號南華評論社

國立武漢大學理科季刊

第三卷第一期

價目	郵費
全年四冊 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十一年九月發行

1932年

第3卷

第2期

國立武漢大學

理科季刊

第三卷第二期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. III No. 2 December 1932

本 期 目 錄

中華民國二十一年十二月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

1

國立武漢大學理科季刊

第三卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊

第三卷第三期目錄預告

射影幾何學的最近趨勢

Erenest P. Lane 原著　　彭先蔭譯

1. 緒言　這篇的目的,是要簡略的叙述射影幾何學最近的趨勢.爲明瞭起見,先比較其發明的過程和古代度量幾何學(Metric Geometry)的關係,次略述前世紀綜合幾何學(Synthetic Geometry)和解析射影幾何學(Analytic Projective Geometry)的演進,再次略論繼起的微分射影幾何學(Projective Differential Geometry)和其近况,最後結論射影幾何學的趨勢和今後的發展.

2. 射影幾何學的起原　度量幾何學研究圖形經過移動而不變的性質,這是一切科學中最古的一種.其發原地是埃及,後由Thales氏,約在紀元前 600 年,傳到希臘,這種傳說從歷史上的考據也許最可靠,觀乎那時所包含的基本觀念的精確,實表現這種科學由來已久.這古代幾何學的流傳,由希臘復至埃及的亞歷山大城,約經千年之久,其時出了不少的專家,如 Thales, Pythagores (500 B. C.), Euclid (300 B.C.), Appollanius(250 B. C.)Archimedes (250 B. C.)和 Pappus(350 A.D.)諸氏.

另一方面射影幾何研究圖形經過射影和截影 (Projeotion and section)而不變的性質,其來原頗不久.

在1812年法俄開戰的時候,拿破倫的軍隊中有一位工程副官叫做Poncelet者(1788—1867),他從拿氏抵抗俄國,在戰場上受了重傷被俄兵擄去,囚於Saratoff的地方(1813—14).在這獄中無書可看,無紙可寫,和任何其他的補助物件,他單憑腦力的想像,研究出射影幾何學的理論,他在1814年被釋回到法國,1822年的九月就發表了他所著的圖形的射影性質(Treatise of projective propertic of figures)一書,這就是射影幾何學第一次集大成的書了.

不過在Poncelet氏以前,我們不能說就沒有射影幾何學的觀念,蓋一變換的度量羣(metric group of tramsformations)就是射影羣的子羣(subgroup of projective group),所以射影的不變性就是度量的不變性.在理論上射影的理論已包含在度量之中了.再從歷史上觀察,以前是度量幾何中的性質,到後來我們就認爲是射影的了,這類的例子很多.不過古時的幾何學家未曾指出這些部份是射影的罷了.所以我們祇能說,在Poncelet氏以前射影幾何學的理論是散漫的未曾整理而成一有條理的科學而已.

爲引證在Poncelet氏以前射影性之隱存於度量幾何中,可察下面的幾個問題和定理.例如內外分一已知線節爲等比的問題,這就顯然是射影問題中在一直線上求一點對於已知兩點的第四調和點(Fourth harmonic)的問題.又

如射影幾何學中所謂四共線點 (collinear points) 的交比 (cross ratio)經過射影和截影而不變的基本定理,就是 Pappus氏所發明,約在 Pappus 氏後一千年有位 Desargues 氏者他發明了射影幾何學上兩個著名的定理,其中一個較普通的是:若有兩個三角形互成一種關係,即連結諸對相當頂點的三直線共遇於一點時,則其諸對相當邊的交點必共在一直線上.其另一個定理是:若一完全四角形內接於一錐線內,則任意一割線必截此錐線和此四角形的諸對對邊於一對合 (Involution) 的四對共軛點.還有一著名的 Pascal氏定理,是 Pascal 氏在 1640年所發明,其時僅十六齡耳,這定理是:若一簡單六角形內接於一錐線,則其諸對對邊的交點必共在一直線上.

3.　綜合和解析射影幾何學的演進　所謂綜合幾何學就是純粹幾何學,是以直覺爲標準以邏輯爲工具而推論其結果的幾何學,和其相反的一種就是解析幾何學,這是引用座標的關係,而以代數和分析的機械方法去運算幾何的理論.所以自然就有綜合射影幾何學和解析射影幾何學之別.

在 Poncelet 氏 1822年發表了他的著作以後,不久綜合射影幾何學就有非常的進步,在前世紀的上葉大有一日千里之勢.其最著名的綜合射影幾何學家爲 Gergonne, Möbius, Chasles, Von Standt, 和 Cremona 諸氏.內中 Gergonne最早,生

於 1771 年. Cremona 最後,死於 1983 年.

解析射影幾何學的發達略遲,在上世紀的中葉和末葉其進步極快.最著名的解析射影幾何學家爲 Plücker, Hesse, Clebsch, Grassman 和 Salmon 諸氏.其中以 Plücket 爲最早,生於 1801 年,Salmon 最後,死於 1904 年.

至於這許多幾何學家的功績和天才這裏也不必多講了.總之他們都是我們極可敬佩的先師.

4. 微分射影幾何學 微分幾何學研究一切巧合形 (configuration)中任意一元的鄰近 (neighborhood) 的性質.例如曲線的微分幾何學研究曲線上任意一點的鄰近的性質.最顯然的,如曲線上任意一點的切線的定義是過這點和鄰近一點之一割線的極限位置.當這鄰近點在曲線上漸漸趨近前一點時,這割線就漸漸成爲這點的切線了.從這定意可以看出微分幾何學的方法,一方面是需要研究這切點的鄰近性質,一方面包含有極限的方法. (Limiting process), 這就是微分幾何學的特性.由此可知研究微分幾何學一定要應用微分學,並且其大部份是由微分學推演出來的.

微分度量幾何學 (metric differential geometry) 和微分射影幾何學 (projective differential geometry) 這兩個名詞是可以顧名思義的.其發展的程序是前者已經成熟後者方始萌芽.不過圖形的微分射影性早已有了相當的印像,這是無疑

的.例如前所言的切線定義,是很古的了,是有微分射影性的.但一直到了前一世紀的末葉,這微分射影幾何學方始有一貫的研究和發展這學問的傾向.Cockle Laguerre, Brioschi和Halphen諸氏均在前世紀畢生研究微分射影幾何學.前三人研究的結果多少是片段的.Helphen 氏約在 1878 到 1880 年間是第一位將微分射影幾何學作一有條理的研究.他對於平面和空間曲線的微分射影幾何學的研究比較多.

Wilcznski 氏約從 1900 到 1923 年研究曲線織面 (ruled surfaces),普通曲面,和直線疊合(rectilinear congruence)的微分射影幾何學.其研究是限於普通空間.他在美國設立了一個所謂美國微分射影幾何學研究會.自創一種方法,會中幾何家俱採用之.其法係用一適當選擇之變換羣的完全可積齊次一次微分方程式系的不變式和協變式而研究一巧合形的微分射影幾何學.因為要組合一完全不變式和協變式系的關係,他根據了 Lie 氏連續羣論 (Lie's Theory of Continuous Groups)應用到無窮小的變換(infinitesimal transformation).

約在 1916 年義大利亦創立了一微分射影幾何學會,內中有 Fubini, Bompiani, Terracini 和其他諸名家, Fubini 是這會中的首領,另有 Cech 氏亦與此會頗有關係,他們的方法是應用不變微分方式系 (system of invariant differential forms) 而研究巧合形的微分射影幾何,因為要研究微分式系的需

要所以他們就應用到 Rici 的絕對微分學 (absolute calculus of Rici).

5. 最近的趨勢　從上觀察可知射影幾何學最近的趨勢,着重的是解析射影幾何,尤其是解析的微分射影幾何,在這情形中必須講的有三個趨勢,茲簡略述之如次:

第一是美國和義大利兩學會研究的方法和結果有融洽一致的趨勢,這個促進的原因是由於交換刊物和兩國的大學教授來往的互換意見,就是在學術方面兩者的方法也有了一相當的聯絡,因在義大利研究的問題中,發生由一已知微分方式系決定一巧合形的問題,這決定的問題,是先定出一組微分方程式系,求出其解即得巧合形,這完全是美國學會中用以作基礎的諸微分方程式.例如義大利學者證明在普通空間曲面對於其漸近網 (asymptotic net) 的理論,是基於下之微分方式系:

$$2\beta\gamma\, du\, dv,\quad 2\beta\gamma(\beta\, du^3+\gamma\, dv^3),\quad p du^2 + q dv^2.$$

次證此諸方式系所代表的曲面,可由下之諸偏微分方程式系之解而決定:

$$x_{uu} = p x + \theta_u x_u + \beta x_v$$

$$x_{vv} = q x + \gamma x_u + \theta_v x_v \qquad (\theta = \log \beta\gamma)$$

美國學者則將此諸方程式爲基礎次求其方式.

其次在 E. Bortolotti 氏的著作中可以看出有將微分射影幾何學的理論和非黎曼幾何學 (Non-riemannian geometry)

合而爲一的趨勢.這是最新的事實所可言者尙少.

最後有將普通空間既得之諸法推廣到超越空間 (hyperspace)的趨勢.義大利的方法是可以應用於普通空間的許多巧合形,和 n 度空間的曲線和超越曲面.雖然 Segre, Bompiani和其他諸氏對於 n 度空間的微分幾何學有了相當的研究,但是還沒有得到一個一貫的有條理的理論.因 $n>4$, 則義大利諸法不適宜於 k 度空間當 $1<k<n-1$.其原因是缺乏二次微分方式的不變式,或因缺乏 n-ary, p-adic 微分方式的絕對微分學.另一方面,美國的方法在理論上似可應用,但當 n 大時計算上頗爲困難.或其方法可以改良和修正使一般的微分射影幾何學可推廣到超越空間.最近的進步頗使吾人樂觀並希望其方法的成功.

初等幾何學極大極小問題

窪田忠彥　原著
管公度　重述

1.　緒言.

1.　極大極小之問題,數學各分科中最重要問題之一也.而物理學上之問題,可使歸於極大極小問題解之者,數見不鮮,故自物理學之立場觀,亦屬重要.此問題之研究,其流甚長,遠自古尼西亞數學者 Euclid (紀元前300年間人)以迄於近代疇人,無不注意及之也.

極大與極小英語稱曰: Maximum 與 Minimum, 二者又總稱曰極值 Extremum.考極值一語,見於 Math. Ann. 第15卷564頁中,迺 P. du Bois Keymond 創用之名詞也.然亦有用極大極小作最大最小之意味,而以極大極小在其近旁爲最大最小解釋之者.

相傳 Euclid 曾解一問題,『將一已知之線段分爲二部份,令其所包之矩形面積爲最大.』據德意志數學歷史家 M. Cantor 之說,此蓋極大極小問題中之最古者云.

2.　1638年法蘭西人 Fermat (1607-1665) 曾發見一求極大極小之新方法,此方法與微分學之方法殆完全一致.故法之數學家如 Laggrange (1736-1813), Laplace (1749—1827), Fourier

(1768—1830)之流,主張於微積分學之發見者英之Newton德之 Leibnitz之前,應追加一 Fermat, 此雖法人誇功之語,亦實賴有此史實爲之佐證也.

關於極大極小之問題, J. Steiner(1796—1863) 之研究特多,復饒興趣.讀者欲其詳,請參閱1824年 Crelle's Journal 第24卷中氏之論文可也.

II. 決定最大最小初等代數學的方法.

3. 問題 1. 設 a 爲正實數,若 x 可取一切之實數值時,試求

$$x(2a-x)$$

之最大值.

因 $$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2>o,$$

卽 $$2ax-a^2\leqq a^2,$$

其在 $x=a$ 之時,上式變爲一等式甚明.

此結果復得述之如次:

定理 1. 二實數 x, y 之和,若常等於一已知之正實數 $2a$, 則其乘積 xy, 當 $x=y$ 時爲最大.

4. 問題 2. 設 a, b, c, 爲已知三實數,若 $a\neq o$, 而 x 可取一切之實數值時,試求

$$y=ax^2+bx+c$$

之最大值及最小值.

因
$$ay=a^2x^2+2abx+ac$$
$$=(ax+b)^2+ac-b^2$$
$$\geqq ac-b^2.$$

故當 $x=-\frac{b}{a}$ 時,ay 之值爲最小,而其最小值爲 $ac-b^2$.

今若 $a>o$ 時,則

$$y\geqq\frac{ac-b^2}{a},$$

即 $x=-\frac{b}{a}$ 時,y 爲最小而其最小值爲 $\frac{ac-b^2}{a}$.

又若 $a<o$ 時,則

$$y\leqq\frac{ac-b^2}{a},$$

即 $x=-\frac{b}{a}$ 時,y 爲最大,而其最大值爲 $\frac{ac-b^2}{a}$.

別法. 即求當 x 爲實數時,下式

$$y=ax^2+2bx+c$$

能取之值之範圍可也.換言之,即爲使方程式

$$ax^2+2bx+c-y=o \qquad (1)$$

唯具實根,y 必爲如何範圍內之實數值而後可之問題是也.

方程式(1)若欲具實根,則其條件如次

$$b^2-a(c-y)\geqq o.$$

即
$$ay\geqq ac-b^2.$$

故若 $a>o$ 時,則

$$y\geqq\frac{ac-b^2}{a},$$

又若 $a<o$ 時,則

$$y \leqq \frac{ac-b^2}{a},$$

上式中等號之成立,適在(1)有等根之時,亦卽 $x=-\frac{b}{a}$ 之時也.

5. 問題 3. 設 a, b, c, p, q, r 爲已知之實數,而令

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r},$$

若 x 取一切之實數值時,試求 y 之最大值及最小值.

此問題卽在求 y 之值之範圍,能使次之二次方程式

$$(py-a)x^2+(qy-b)x+ry-c=o$$

唯具實根者可也.

此二次方程式具有實根之條件爲

$$(qy-b)^2-4(py-a)(ry-c)=o,$$

卽 $$(q^2-4pr)y^2+(4ar+4cp-2bq)y+b^2-4ac\geqq o,$$

由上式 y 之範圍卽足決定也.

例如: 設 $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$,

今求方程式 $x^2(1-y)+x+1-y=o$ 唯具實根之條件得

$$1-4(1-y)^2\geqq o,$$

卽 $$(2y-1)(3-2y)\geqq o$$

亦卽 y 不可不在次之範圍內

$$\frac{1}{2}\leqq y\leqq \frac{3}{2}.$$

因是 y 之最大值爲 $\frac{3}{2}$, 最小值爲 $\frac{1}{2}$, 而與此對應 x 之

値各各爲 1 及 -1 是也.

6. 定理 2. 二實數 x, y 之和,若恆等於一已知之正數 $2a$,則其平方之和 x^2+y^2,當 $x=y=a$, 之時爲最小.

由 $$x+y=2a,$$

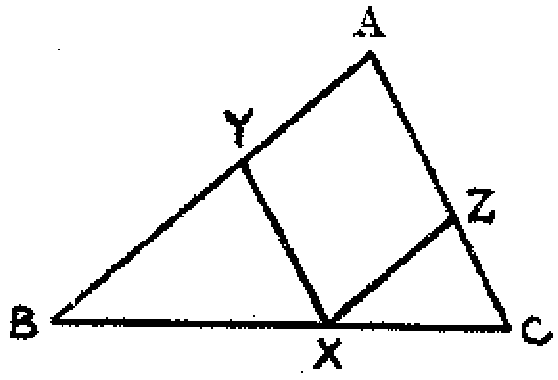
得 $$x^2+y^2=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{2}=2a^2+\frac{1}{2}(x-y)^2,$$

卽 $$x^2+y^2\geqq 2a^2.$$

其在 $x=y=a$ 之時,上式爲一等式甚明.

7. 定理 3. 自三角形 ABC 之底邊上一點 X,與兩邊 AC, AB 平行作兩直線,令其與 AB, AC 各各相交於 Y, Z;於是所生之平行四邊形 $AYXZ$ 之面積,以 X 在 BC 之中點時爲最大.

設邊 BC 之長爲 a, $BX=x$, $XC=y$,



則 $$x+y=a.$$

於是 $$\triangle ABC:\triangle YBX=BC^2:BX^2$$
$$=a^2:x^2,$$

又 $$\triangle ABC:\triangle ZXC=BC^2:XC^2$$
$$=a^2:y^2,$$

從而 $$\triangle ABC:\square AYXZ=a^2:a^2-x^2-y^2.$$

故 $$\square AYXZ=\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)\triangle ABC$$

但在 $x+y=a$ 條件之下, x^2+y^2 之値以 $x=y=\frac{a}{2}$ 時爲最小,而斯時平行四邊形 $AYXZ$ 之面積亦必爲最大甚明.

III. 相加平均及相乘平均之比較.

8. 定理 1. 設 x_1, x_2, x_3 爲正數,則

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 \geqq 3x_1x_2x_3.$$

等式成立,在 $x_1=x_2=x_3$ 之時.

何則

$$\begin{aligned} & x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3 \\ &=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_2x_3-x_3x_1-x_1x_2) \\ &=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)[(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2+(x_1-x_2)^2]\geqq 0, \end{aligned}$$

故

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3 \geqq 3x_1x_2x_3.$$

上式惟限於 $x_1=x_2=x_3$ 時,等式始能成立.

今若將 x_1, x_2, x_3 各各以 $x_1^{\frac{1}{3}}, x_2^{\frac{1}{3}}, x_3^{\frac{1}{3}}$ 置換之,遂得次之定理.

若 x_1, x_2, x_3 爲正實數,則不等式

$$x_1+x_2+x_3 \geqq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

成立,而等式之成立則在 $x_1=x_2=x_3$ 之時也.

此 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ 稱爲三數 x_1, x_2, x_3 之相加平均,而 $\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ 則稱爲三數 x_1, x_2, x_3 之相乘平均.

定理 2. n 個正數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之相加平均,常比其相乘平均爲大,惟限於 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ 時二者始相等.卽

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

若 $n=2^k$, 此定理易於證明.

先證明

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1 x_2},$$

於是 $$\frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1 x_2} = \frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2} \geqq 0,$$

故 $n=2$ 時,此定理成立甚明.

同樣 $$\frac{x_3+x_4}{2} \geqq \sqrt{x_3 x_4},$$

由此二不等式

故 $$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geqq \frac{\sqrt{x_1 x_2}+\sqrt{x_3 x_4}}{2} \geqq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

逐次如斯,故一般的 $n=2^k$ 時,本定理可以推得.

至 $n \neq 2^k$ 之時,則依 $n<2^k$ 之條件選擇一 K,而令

$$n+m=2^k,$$

$$\gamma = \frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}.$$

今以 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \overbrace{\gamma, \gamma, \cdots\cdots \gamma}^{m\text{個}},$ 爲 2^k 個之數,上述之定理在此時既已證明其成立矣,

故 $$\frac{(n+m)\gamma}{n+m} = \frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n+m\gamma}{n+m} \geqq \sqrt[n+m]{x_1 x_2 \cdots x_n \gamma^m}$$

卽 $$\gamma^{n+m} \geqq x_1 x_2 \cdots\cdots x_n \gamma^m,$$

$$\gamma^n \geqq x_1 x_2 \cdots\cdots x_n,$$

亦卽 $$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

此證明乃 Cauchy 氏 (1789—1857) 之方法.(1)

上之定理亦得述之如次.

(1)　Cauchy. Analyse Algébrique P. 457

定理 3. n 個正數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之和,若爲一定,則當此等之數皆相等時,其積爲最大.n 個正數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之積,若爲一定,則當此等之數皆相等時,其和爲最小.

此定理之前半與後半,實一而二二而一者也.今以別法證明後半部之定理[2]

令 γ 表示

$$1+2y+3y^2+\cdots\cdots\cdots+(m-1)y^{m-2}$$

則 $$my^{m-1}-(m-1)y^m=1-(1-y)^2\gamma$$

容易證明.何則,

因 $$(1-y)\gamma=1+y+y^2+\cdots\cdots+y^{m-2}-(m-1)y^{m-1}$$

$$=\frac{1-y^{m-1}}{1-y}-(m-1)y^{m-1},$$

卽 $$(1-y)^2\gamma=1-y^{m-1}-(m-1)y^{m-1}+(m-1)y^m$$

$$=1-my^{m-1}+(m-1)y^m,$$

故也.

上式中若 $y>o$ 時,則 γ 亦必大於零.

令 $n=2$ 時,定理之爲真,不待證自明.故本定理一般的證明,只在用數學的歸納法,假定其當 $n=m-1$ 爲真,而證其卽令 $n=m$ 時定理亦真可也.

設 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$,之積等於 a, 而其中之一數 x_1 有一定之正

(2) G. Chrystal, Algebra II. p. 42-47,

R. Sturm, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie, p. 1-2.

値 x, 且假定本理當 $n=m-1$ 爲真.

則欲研究此等 n 個數之和 $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$ 何時爲最小,第取

$$x+(m-1)\sqrt[m-1]{\frac{a}{x}}$$

而研究之可耳.緣 $x_2+\cdots+x_n$ 由假定當 $x_2, x_3, \cdots x_n$ 皆爲相等而且等於

$$\sqrt[m-1]{\frac{a}{x}}$$

時爲最小故也.

然 x 究應取若何之正値,上式始能爲最小耶?

先令 $$\sqrt[m-1]{\frac{a}{x}}=y\sqrt[m]{a},$$

此處 $y>o$.

於是此相等之 $m-1$ 個數之積等於 $y^{m-1}a^{\frac{m-1}{m}}$.

而 $$xy^{m-1}a^{\frac{m-1}{m}}=a,\qquad x=\frac{a^{\frac{1}{m}}}{y^{m-1}}.$$

故上式變爲

$$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{y^{m-1}}+(m-1)ya^{\frac{1}{m}}=\frac{a^{\frac{1}{m}}\ (1+(m-1)y^m)}{y^{m-1}}$$

$$=a^{\frac{1}{m}}\left\{m+\frac{(1-y)^2\gamma}{y^{m-1}}\right\}.$$

以 y 及 γ 均爲正數

$$\frac{(1-y)^2\gamma}{y^{m-1}}\geqq o,$$

故 $$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{y^{m-1}}+(m-1)ya^{\frac{1}{m}}\geqq ma^{\frac{1}{m}}.$$

等式之成立在$y=1$，卽 $x=a^{\frac{1}{m}}$，亦卽限於一切之數皆相等之時也.

於是本定理被證明矣.

關於定理2之別證,見 Hurwitz, Crell's Journal 108 卷, 266--268 頁及 A. Thacker, The Cambridge and Dublin Math. Journal, 6 卷 81 頁 (1851).

9. 平方平均 若$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$爲$n$個之正數時,則稱

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2}{n}}$$

爲其平方平均.

定理 4. 設$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$爲$n$個實數,則

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2}{n}} \geqq \frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n},$$

惟限於 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n\geqq o$ 時,等式始能成立.一般言之,設$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$皆爲實數,則

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2)$$
$$\geqq(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2,$$

惟限於

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{x_2}=\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{x_n}{y_n}$$

之時,始成爲等式.

今取下式而研究之,

$$(x_1t+y_1)^2+(x_2t+y_2)^2+(x_3t+y_3)^2+\cdots\cdots\cdots+(x_nt+y_n)^2,$$

上式無論 t 爲若何之實數值,恆不爲負.

即
$$(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)t^2+2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)t$$
$$+y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2\geqq 0$$

故
$$(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots\cdots+y_n^2)$$
$$\geqq(x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n)^2.$$

上式中,限於

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots\cdots\cdots=\frac{x_n}{y_n}$$

時,等式始能成立.

此不等式稱曰Laggrange不等式.

若 $y_1=y_2=\cdots\cdots=y_n=1$ 時,則上之不等式變爲

$$n(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)\geqq(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)^2,$$

惟限於 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ 之時,等式始能成立.

10. 冪平均　若 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 爲正數,則稱

$$\left(\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots\cdots\cdots+x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

爲其冪平均,而以 P_k 表之.如是依定義得

$$(P_{k-a})^{k-a}(P_{k+a})^{k+a}-(P_k)^{2k}$$

$$=\frac{1}{n^2}\Big\{(x_1^{k-a}+x_2^{k-a}+\cdots\cdots+x_n^{k-a})(x_1^{k+a}+x_2^{k+a}+\cdots\cdots+x_n^{k+a})$$

$$-(x_1^k+x_2^k+\cdots\cdots+x_n^k)^2\Big\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{p\neq q}\left(x_p^{\frac{k-a}{2}}x_q^{\frac{k+a}{2}}-x_p^{\frac{k+a}{2}}x_q^{\frac{k-a}{2}}\right)^2\geqq 0$$

上式中等號之成立惟限於 $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ 之時,

故　$$\left(\frac{P_{k+a}}{P_k}\right)^{k+a} \geqq \left(\frac{P_k}{P_{k-a}}\right)^{k-a}.$$

夫　$$p_2 \geqq p_1$$

吾人既在§9已證明之矣,

於是依本節　$$\left(\frac{P_3}{P_2}\right)^3 \geqq \frac{P_2}{P_1} \geqq 1,$$

卽　$$P_3 \geqq P_2.$$

同理　$$\left(\frac{P_4}{P_3}\right)^4 \geqq \left(\frac{P_3}{P_2}\right)^2 \geqq 1,$$

$$p_4 \geqq p_3.$$

逐次如斯推之,對於任何 m 之正整數值,常得

$$P_{m+1} \geqq P_m.$$

又若 m 爲正整數,以 $x^{\frac{1}{m}}$ 代 x 而考之,則得

$$P_{\frac{2}{m}} \geqq P_{\frac{1}{m}}.$$

逐次類推,對於任何正整數之值,亦得

$$P_{\frac{n+1}{m}} \geqq P_{\frac{n}{m}}.$$

故一般的若 $k > l > o$ 時,則

$$P_k \geqq P_l.$$

但此第就 k, l 爲有理數之時證明之者耳,雖然若由極限研究之卽令 k, l 爲任何實數將見其仍能成立也.

令取 k 無限趨近於 o 時之極限而考之,由微分學因

$$\lim_{k\to o} \log P_k = \lim_{k\to o} \frac{1}{k} \log \frac{x_1^k + x_2^k + \cdots\cdots + x_n^k}{n} = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \cdots\cdots + \log x_n}{n}$$

$$= \log \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

故對於 $k>0$, 得

$$P_k \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

上式中若 $k=1$, 則是

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

此無他卽吾人前已證明之一定理也.

定理 5. 若 $k>1$, 且 n 個正數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之和爲一定數, 則 $x_1^k+x_2^k+\cdots\cdots+x_n^k$ 以此等之數皆相等時爲最小.又若 $0<k<1$, 且 n 個正數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ 之和爲一定數,則 $x_1^k+x_2^k+\cdots\cdots\cdots+x_n^k$ 以此等之數皆相等時爲最大(Schlömilch).(1)

11. 幾何學上之應用.

定理 6. 三角形之周圍,若爲一定,則其面積,以其形爲正三角形之時爲最大.

設 a, b, c 爲三角形之三邊,且令

$$a+b+c=2s,$$

則其面積 F 由 Heron 之公式得

$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

夫因 s 爲已知之定值,又

$$(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-a-b-c=s,$$

故由定理 3, $s(s-a)(s-b)(s-c)$ 卽 F^2 以

$$s-a=s-b=s-c$$

之時爲最大,卽三角形爲正三角形之時也.於是本定理被

(1) Zeitschrift für Math. u. Phys. 3 (1858) p. 301—308.

證明矣.

12. 定理 7. 自三角形 ABC 之平面上一點 P, 向三邊作垂線,其平方之和,以此點爲Lemoine點時爲最小.

設自點 P 向邊 AB 所作之垂線長爲 α, 向邊 CA 之垂線長爲 β, 向邊 AB 之垂線長爲 γ. 並規定點 P 在三角形之內時 α, β, γ, 皆爲正,若點 P 對於邊 BC 與 A 居反對之側時 α 爲負; β, γ 同樣亦受此符號之約束.於是 $a\alpha+b\beta+c\gamma$ 恆等於三角形之面積 F 之二倍,但 a, b, c 各各表三邊 BC, CA, AB 之長.點 P 若爲一定則 α, β, γ 即可決定;又若 $a\alpha+b\beta+c\gamma=2F$ 中之 α, β, γ 爲已知,則點 P 之位置亦必一定.此 α, β, γ 稱曰點 P 關於三角形 ABC 之三線座標. (Trilinear Coordinates).

由 Lagrange 之不等式

$$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqq(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2,$$

即 $$(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geqq 4F^2.$$

上式惟限於 $$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}$$

時,等式始克成立.今令與此等坐標相對應之點爲 L 三角形之重心爲 G,則以 L 爲具有下列性質之點,

$$\angle BAG=\angle LAC,$$

$$\angle ABG=\angle LBC,$$

$$\angle ACG=\angle LCB.$$

名此點曰三角形之類似重心或 Lemoine 點.點 P 惟限於與點 L 相合時,則 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 始取一最小値 $\frac{4F^2}{a^2+b^2+c^2}$.

定理 8. 自三角形 ABC 形內之一點 P, 向三邊作垂線, 其長之積,以點 P 爲三角形之重心時爲最大.

自三角形 ABC 形內一點 P, 向三邊所作垂線之長,如前題之規定以 α, β, γ 表之.則以

$$a\alpha+b\beta+c\gamma$$

等於一定量 $2F$,故 $a\alpha, b\beta, c\gamma$ 之積,以

$$a\alpha=b\beta=c\gamma$$

之時爲最大.卽積 $\alpha\beta\gamma$ 當

$$a\alpha=b\beta=c\gamma$$

之時亦卽點 P 爲三角形之重心時爲最大也.

IV. 初等幾何學的方法.

13. 初等幾何學的方法,無一定之方針,然趣味深長者極夥,茲述其數種如次.

定理 1. 自三角形 ABC 之底邊上一點 X, 與兩邊 AC, AB 平行作兩直線,令其與 AB, AC 各各相交於 Y, Z; 於是所生之平行四邊形 $AYXZ$ 之面積,以 X 在 BC 之中點時爲最大.

此卽 II 中之定理 3 也.

設 X 爲邊 BC 之中點,點 D 爲邊 BC 上之另一點.自點 D 作 AC, AB 之平行線 DE, DF 各各與邊 AB, AC 相交於 Y, Z, 本定理只在證.

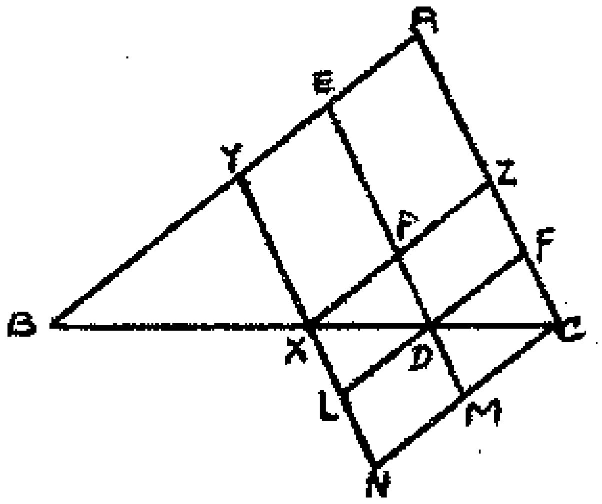
$$平行四邊形\ AYXZ > 平行四邊形\ AEDF$$

可也.(點 D 無論在線段 XC 抑或線段 BX 上,其結果均一致.)

次設 XZ, DE 之交點爲 P, 則欲證上之不等式,第證

$$平行四邊形\ XPEY > 平行四邊形\ DFZP$$

足矣.



今過頂點 C 作邊 AB 之平行線與 ED, YX 各各相交於 M, N, 且命 FD YX 之交點爲 L, 則

$$平行四邊形\ DFZP = 平行四邊形\ DLNM$$

故本定理又變爲只須證

$$平行四邊形\ XPEY > 平行四邊形\ DLNM,$$

卽可.

然此兩平行四邊形,夾在兩平行線 EM, YN 之間,而第一平行四邊形之底邊 XY 較第二平行四邊形之底邊爲大,上之不等式,不難一覽察知,於是本定理遂被證明矣.[1]

14. 定理 2. 過角 AOB 內之一點 P, 作直線 APB, 令與其邊 OA, OB 各各相交於 A, B, 則三角形 ABO 之面積以 $AP=PB$ 時爲最小.

設 APB 爲過點 P 且 $AP=PB$ 之直線,又過點 P 另作一直

(1) 此 Euclid 幾何原本中所載之證明也. 此定理亦卽次之定理 2 之系.

線 CPD 令與邊 OA, OB 各各交相 C, D, 於本定理只在證明

$$\triangle ABO < \triangle CDO$$

可也.

爲證明此,不妨假定點 A 較點 C 距點 O 爲近,又點 D 較點 B 距 O 爲近,其一般性仍不失也.

於是本定理又只須證明

$$\triangle CPA > \triangle DPB$$

足矣.

今過點 A 作邊 DB 之平行線與邊 CP 相交於點 E,

因　　$\triangle AEP \equiv \triangle BDP$,

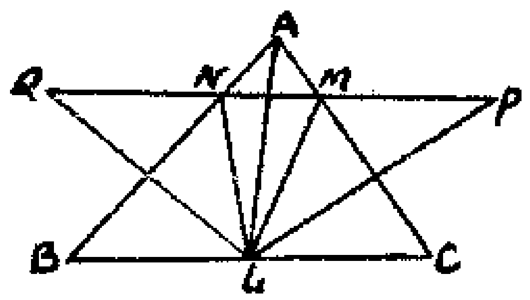
則　　$\triangle ACP > \triangle DPB$

立見,從而本定理遂證明矣.

15. 定理 3. 內接於已知銳角三角形之三角形中,以其垂足三角形之周圍爲最小.

設三角形 ABC 爲已知之銳角三角形,在邊 BC, CA, AB 之上各各取一點 L, M, N, 試求此三點如何取法,則三角形 LMN 之周圍爲最小.

先固定一點 L,而適當選擇 M, N, 使三角形 LMN 之周圍爲最小.今取點 L 關於邊 CA 之對稱點 P 及關於邊 AB 之對稱點 Q 而聯結之,令此直線與兩邊 CA 及 AB 各各相交於 M, N 則三角形 LMN 卽爲點 L 一定時周圍最小之內接三角形也.



此時三角形LMN之周圍,等於PQ之長甚明.

然因三角形APQ爲二等邊三角形,且其頂角QAP爲角BAC之二倍,是以若點L在BC上位置變易時,此二等邊三角形亦不絕移動,且恆爲相似形.

又因

$$PA=QA=LA$$

則是若LA爲最小時,PQ必隨之爲最小,亦卽三角形LMN之周圍最小是也.

但LA以恰爲邊BC之垂線時爲最小.故斯時也,PQ卽三角形LMN之周圍亦爲最小;換言之,卽三角形LMN爲三角形ABC之垂足三角形之時也.

如是本定理被證明矣.此證明乃所謂Fejér之證明,但在氏之前,早爲疇人所習知者也.

J. Steiner及H. A. Schwarz關於此定理尙有其他之證明.(1)

16. 定理 4. 若三角形ABC之最大角較120°爲小之時,欲取一點P,而令$AP+BP+CP$爲最小,卽於此三角形內決定一點P,使角APB, BPC, CPA皆爲120°可也.

此點名曰三角形之Fermat點.

設P爲三角形之Fermat點,過頂點A, B, C各各作AP,BP, CP之垂線,此三直線圍成一正三角形.今於點P之外另取

(1) Steiner全集第二卷p. 728—729, Schwarz全集第二卷p. 344--345.

一點 Q,則自二點 P, Q 向此正三角形之三邊作垂線,此等之垂線長之代數和必相等.然自點 Q 向此正三角形之三邊所作垂線之代數和,較

$$AQ+BQ+CQ$$

之值爲小,故

$$AP+BP+CP<AQ+BQ+CQ$$

於是本定理被證明矣.

L. V. Schrutka 氏在 H. A. Schwarz 受博士學位五十年紀念論文集 (1914) 390 頁中,曾用反折之方法,證明此定理.此蓋與定理 3 之 Steiner及 Schwarz兩氏之證明相對應者也.

17. 定理5. 三角形之周圍若爲已知,則其面積以其形爲正三角形之時爲最大.

假定三角形 ABC 不爲一正三角形,且

$$BC\geqq CA\geqq AB.$$

今將三形 ABC 之邊AC不動,第將頂點 B 以頂點 B' 置換之,而令

$$AB+BC=AB'+B'C,$$

然若新取之一邊 AB' 合於下之條件時,

$$AB'=\frac{AB+BC+CA}{3},$$

則其面積必增大,不難證明之也.

次於三角形$AB'C$ 中,將 AB' 不動,第將 C 以 C' 置換之,而令

$$AC + B'C = AC' + B'C',$$

然若又使新取之邊 $AC'=B'C'$ 時,則其周圍之長,仍屬不變,惟面積又增大耳.

夫以如此所得之三角形,乃一正三角形是也.故原設三角形,如非正三角形,其面積必比與其等周之正三角形之面積爲小.[1]

18. 定理 6. 內接於定圓之諸三角形中,以正三角形之周圍及面積爲最大.

設三角形 ABC 乃內接於中心爲 O 之定圓之一任意三角形; α, β, γ 各各爲其邊所對之中心角 BOC, COA, AOB, 且 $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$.

今將頂點 B 以圓弧 ABC 上之他點 B' 置換之,而令

$$\angle AOB' = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = 120^\circ$$

則其周圍及面積必增,容易證明.

次將點 C 以弧 ACB' 上之點置 C' 置換之,而使

$$\angle AOC' = \angle C'OB' = 120^\circ$$

時,則三角形 $AB'C'$ 之周圍及面積,必更增大.

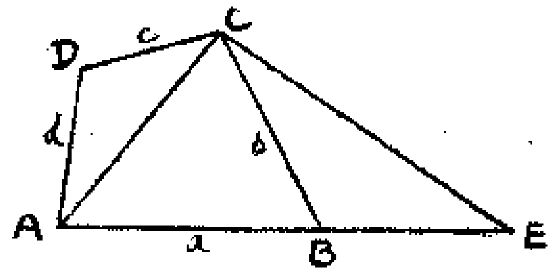
然此時所得之三角形乃一正三角形.於是本定理遂證明矣.

19. 定理 7. 凸四角形四邊之長順次已知時,則其中內接於圓之一凸四角形,得完全決定之.

(1) Sturm 之證明法見 R. Sturm, Maxima and Minima p. 5—7. 1910.

設取 $ABCD$ 凸四角形而研究之，$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$; 於邊 BC 上向外方作一與三角形 ADC 相似之三角形 CBE, 即

$$\frac{BE}{c}=\frac{CE}{CA}=\frac{b}{d}.$$



今若此四邊形能內接一圓,則 $D+B=180°$，故 BE 必落於 AB 之延長線上,而點 E 得由 $BE=\frac{cb}{d}$ 以決定之也.故點 C 在中心爲 B 半徑爲 b 之圓周上.亦卽點 C 可以由距兩點 A, E 距離之比爲 $d:b$ 之動點之軌迹所生之一圓,與中心爲 B 半徑爲 b 之圓之交點決定之.於是四角形遂完全決定矣.(1)

定理 8. 凸四角形之四邊若順次已知,則其面積以凸四角形之能內接於圓者爲最大.

設 F 爲其面積,則

$$4F=2ab\sin B+2cd\sin D,$$

且 $$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D=AC^2,$$

卽 $$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos B-2cd\cos D.$$

因此 $$16F^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(B+D).$$

故當 $B+D=180°$ 時, F 爲最大.於是本定理被證明矣.

20. 定理 9. 凸四角形之四角及周圍若爲已知時,則

(1) 此爲Sturm之證明法. 此問題有一解不難立判,例如 $b>d$, 則二圓之中心距離爲 $\frac{(ab+dc)b}{b^2-d^2}$ 而二圓之半徑各各爲 $b, \frac{(ad+bc)b}{b^2-d^2}$ 故也.但 a, b, c, d 中,任何三者之和,必須比其餘一個爲大,不待言也.

其面積以凸四角形之能外切於圓者爲最大.

設 $ABCD$ 爲一凸四角形;其各邊之方向作爲 AB; BC, CD, DA 而各各以 a, b, c, d 表之,且此等之記號並表示其長度.

復設在四角形之側與邊 AB 垂直於點 A 之直線爲 a'.

於是 $\widehat{(a,a')}=o$, $\widehat{(b,a')}=180^\circ-B$,

$\widehat{(c,a')}=A+D$ 或 $B+C$, $\widehat{(d,a')}=180^\circ-A$.

然由邊 AB, BC, CD, DA 投於邊 AB 上之正射影而研究之,得次之關係式

(α) $a-b\cos B+C\cos(A+D)-d\cos A=o$.

又自其投於 a' 上之正射影而考之,得關係式如下.

(β) $b\sin B+C\sin(A+D)-d\sin A=O$.

今以 $-\cos B$ 乘 (α), $\sin B$ 乘 (β) 相加,得關係式

$$b-c\cos C+d\cos(B+A)-a\cos B=O,$$

又以 $\sin B$ 乘 (α), $\cos\beta$ 乘 (β) 相加,得關係式

$$C\sin C+d\sin(B+A)-a\sin B=O.$$

夫若令

(γ) $a+b+c+d=U$,

(δ) $a+c-(b+d)=x$,

而分別乘

$2(\sin A+\sin B)$, $2(\cos B-\cos A)$,

$\sin C+\sin D+\sin(A+B)$, $\sin C+\sin D-\sin(A+B)$.

於 (α), (β), (γ), (δ), 然後邊邊相加,其結果 a 之係數等於

$$2(\sin A+\sin B+\sin C+\sin D,)$$

用 $2R$ 表之,而 b, c, d 之係數必皆爲零.此事易於證明,例如 c 之係數爲

$$2(\sin A+\sin B)\cos(A+D)+2(\cos B-\cos A)\sin(A+D)+2(\sin C+\sin D)$$

$$=2\Big\{\sin A\cos(B+C)+\sin B\cos(A+D)+\cos B\sin(A+D)$$

$$+\cos A\sin(B+C)+\sin C+\sin D\Big\}$$

$$=2\Big\{\sin(A+B+C)+\sin(B+D+A)+\sin C+\sin D\Big\}$$

$$=2\Big\{-\sin D-\sin C+\sin C+\sin D\Big\}=0.$$

故得 $$2Ra=(U+X)(\sin C+\sin D)+(U-X)\sin(A+B),$$

即 $$2Ra=(U+X)(\sin C+\sin D)-(U-X)\sin(C+D),$$

$$Ra=2\sin\frac{C+D}{2}\Big\{U\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}+x\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\Big\}.$$

同樣可求得 Rb, Rc, Rd 諸式,不過在上式中,爲一圓環順序之置換可也;惟須留意 $b-c+d-a=-x$,應以 $-x$ 易 x 耳.

$$Rb=2\sin\frac{D+A}{2}\Big\{U\sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}-x\cos\frac{D}{2}\cos\frac{A}{2}\Big\},$$

$$Rc=2\sin\frac{A+B}{2}\Big\{U\sin\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}+x\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\Big\},$$

$$Rd=2\sin\frac{B+C}{2}\Big\{U\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-x\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\Big\},$$

苟設四角形之面積爲 F,則

$$2F=ab\sin B+cd\sin D$$

由 $$\sin\frac{C+D}{2}=\sin\frac{A+B}{2},\ \cdots\cdots\cdots$$

$$F=\frac{4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}}{(\sin A+\sin B+\sin C+\sin D)^2}\times$$

$$\left\{U^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}-x^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right\}.$$

但以 $$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+C-B-D}{4}\cos\frac{A+D-B-C}{4}$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\left(90^\circ-\frac{B+D}{2}\right)\cos\left(90^\circ-\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2},$$

故 $$F=\frac{1}{4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}}\times$$

$$\left\{U^2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}-x^2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{D}{2}\right\}.$$

因在凸四角形內,上式中之各角之正弦及餘弦悉爲正,故 F 當 $x=o$ 時卽當凸四角形外切於圓時爲最大.而其時之面積爲[1]

$$F=\frac{1}{4}\frac{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}}U^2.$$

21. 定義 已知在空間有 n 個之點 $P_1, P_2, \cdots\cdots P_n$; 與之對應之一實數爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 而且 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\neq o$. 由解析幾何學,若此等之點之座標爲

$$(x_1\,y_1\,z_1),\quad (x_2\,y_2\,z_2),\quad \cdots\cdots\cdots\cdots,\ (x_n\,y_n\,z_n)$$

時,則以

$$\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n},\quad \frac{a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n},\quad \frac{a_1z_1+a_2z_2+\cdots+a_nz_n}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}$$

(1) 此爲 Sturm 之證明法.

爲座標之點,不問座標平面之如何取法,恆爲同一之點,乃吾人所習知者也.如此之點,名曰 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 對於 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之倍數之均位置中心.

定理10. 已知在空間有 n 個之點 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$; 與之對應之一組實數爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$, 而且 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\neq o$. 若 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n>o$,

$$a_1MA_1^2+a_2MA_2^2+\cdots\cdots+a_nMA_n^2$$

爲最小,則點 M 必爲 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 諸點對於 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之倍數之均位置中心. 又若 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n<o$,

$$a_1MA_1^2+a_2MA_2^2+\cdots\cdots+a_nMA_n^2$$

爲最大,則點 M 必爲 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 諸點對於 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之倍數之均位置中心,

設 M 爲均位置中心, P 爲另外一點.過點 P, M 作直線而研究之,自 A_i 向此直線作垂線 A_iB_i, 則由

$$A_iP^2=MP^2+A_iM^2-2MP\cdot A_iM\cos PMA_i,$$

及
$$\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i \cos PMA_i=\Sigma a_i MB_i=o,$$

得
$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_i P^2=MP^2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)+\sum_{i=1}^{n} a_iA_iM_i^2.$$

故若 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n>o$, 則 $\sum_{i=1}^{n} a_i A_i P^2$ 以點 P 合於點 M 之時爲最小.如 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n<o$, 則 $\sum_{i=1}^{n} a_iA_iP^2$ 以點 P 合於點 M 之時爲最大.

22. 定理11. 自凸 n 角形 $ABC\cdots\cdots$ 之平面上之一點,向各邊作垂線,聯結此等之垂線足而得之垂足 n 角形之面

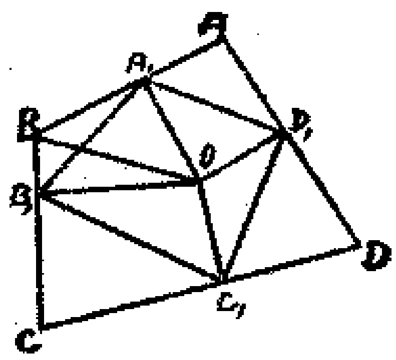
積,以此點爲 $A, B, C,$ …… 諸項點對於 $\sin 2(180^\circ-A)$, $\sin 2(180^\circ-B)$, $\sin 2(180^\circ-C)$,………之倍數之均置中心時爲最大或最小.

此定理在所謂垂足多角形之面積符號規定之下,將見其爲真,例如凸多角形爲三角形時,點在三角形之外接圓之外方,則垂足三角形之面積即定爲負是也.

今設已知之點 O 在凸 n 角形 ABC……之內方,自點 C 作垂線於邊 AB, BC,……之上,其垂足爲 $A_1, B_1, C_1,$……,且此等之垂足悉數落於各對應邊之上時,取而研究之.

因
$$\triangle A_1BB_1=\tfrac{1}{2}A_1A\cdot BB_1\sin B,$$

聯結 BO,分角 B 爲兩角 OBA, CBO 各各命爲 μ, γ. 則



$$\triangle A_1BB_1=\tfrac{1}{2}OB^2\cos\mu\cos\nu\sin B;$$
$$\triangle A_1B_1O=\tfrac{1}{2}OB^2\sin\mu\sin\nu\sin B,$$

故
$$\triangle A_1BB_1-\triangle A_1B_1O=\tfrac{1}{2}OB^2\cos(\mu+\nu)\sin B$$
$$=\tfrac{1}{2}OB^2\cos B\sin B=\tfrac{1}{4}OB^2\sin 2B$$

若以 P, F 各各表示 n 角形 ABC……,及 n 角形 $A_1B_1C_1$……之面積,則

$$\Sigma\triangle A_1BB_1+\Sigma\triangle A_1BO=ABC\cdots\cdots=P,$$
$$\Sigma\triangle A_1B_1O=A_1B_1C_1\cdots\cdots=F.$$

故
$$P-2F=\Sigma\triangle A_1BB_1-\Sigma\triangle A_1B_1O=\tfrac{1}{4}\Sigma OA^2\sin 2A,$$

即
$$2F=P+\tfrac{1}{4}\Sigma OA^2\sin 2A(180^\circ-A).$$

此關係式,雖係就特別圖形而證明者,然由符號之規定,

一般的仍屬真確也.

故若 $\Sigma\sin 2(180°-A)>0$,則點 O 爲 $A, B, C, \cdots\cdots$ 對於倍數 $\sin 2(180°-A), \sin 2(180°-B), \sin 2(180°-C), \cdots\cdots$ 之均位置中心時,F 爲最小;若 $\Sigma\sin 2(180°-A)<0$,則 F 爲最大.

若多角形之內角皆爲鈍角,則以 $\Sigma\sin 2(180°-A)>0$ 之故,F 爲最小甚明.其在多角形爲三角形之時,則以

$$\begin{aligned}&\sin2(180°-A)+\sin2(180°-B)+\sin2(180°-C)\\&=-\sin2A-\sin2B-\sin2C\\&=-4\sin A\sin B\sin C<O,\end{aligned}$$

故 F 爲最大,而均位置中心與三角形之外心一致.

自閉合凸平面曲線(名此曰卵形線)之平面上一點 O,作其切線之垂線.名此垂線 OP 之足 P 之軌迹曰垂足曲線.今研究點 O 應取如何之位置,則其垂足曲線之面積始爲最小?

Steiner 氏曾解此問題,而視爲前之問題中之凸多角形之邊數無限增多之極限.

卽在曲線之無限小部分,(其弧長爲 ds),以密度與其曲率 $\frac{1}{\gamma}$ 相等之物質配置之,此曲線全體之重心,乃所欲決定之點也.名此點曰曲線之曲率重心.(1)

23. 定理 12. 自三角形 ABC 之項點 C,作邊 AB 之垂線,設其足爲 D,在邊 AB 上取一點 P,令 $AP=DB$.若過點 P 另作

(1) Steiner, Crelle's Journ. 卷 21, p. 33—36 (1838)

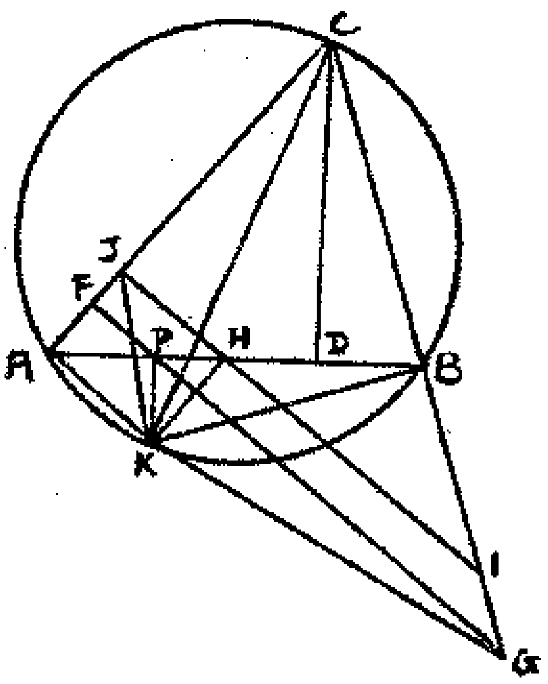
一直線使與邊 CA, CB 各各相交於 F, G, 則

$$APG < FPG.$$

次之證明見於Casey氏所著A sequel to the elements of Euclid第39頁.然在同書之第306頁中尚載有Mac Cullagh氏之證明.

先於三角形 ABC 之外接圓中,作直徑 CK, 自點 K 向邊 AB下垂線,此垂線之足必與點 P 一致.次自點 K 作FPG 之垂線,延長之使與邊AB相交於點 H. 復過 H 作直線FG之平行直線JI交兩邊CA及CB於J, I.

則因 K, H, I, B 在一圓周上, $\angle KBA=\angle KIB$, 又因 K, H, J, A 亦在一圓周上, $\angle KAB=\angle KJH$. 於是三角形 KAB 與三角形 KJI 相似.從而



$$JI > AB;$$

然以 $$FG > JI.$$

故 $$FG > AB.$$

此定理似與吾人以畢達哥拉斯學派之數學者 Philo 氏之問題之解答.即

在已知之定角中,過一定點作直線,令其夾於此角之二邊間之部分爲最小.

然實際此問題,即令已知之定角爲直角,欲僅用直尺與圓規解之,尙不可能也.

更有所謂 Alhazen 之問題,亦作圖不能之問題.此問題爲

自同在定圓之內方或外方之兩定點A, B, 至圓周上一點P之距離之和$AP+BP$,欲爲最大或最小,試決定此點P.

欲解此,則AP, BP二直線與在點P之切線夾成等角,乃其必要條件;然求此條件,僅限於使用直尺及圓規爲不能解之事也.[1]

V. 三角形之周圍,面積,內切圓之半徑,外接圓之半徑間之關係.

24. 今將一求成立於三角形之周圍L,面積F,內切圓之半徑γ,外接圓之半徑R之間之不等式焉.

設已知三角形之三邊爲a, b, c, 與此三角形之周圍相等之正三角形之一邊爲α, 則

$$\alpha=\frac{a+b+c}{3},$$

又此正三角形之面積爲

$$\overline{F}=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha^2,$$

若令已知三角形之面積爲F,周圍爲L,則由前述之L一定時,F以正三角形爲最大之定理,

$$F\leqq\overline{F},$$

故得

$$F\leqq\frac{L^2}{12\sqrt{3}},$$

(1)參看東京物理學校雜誌第86號(大正13年2月)P.472柳原吉次之論文.

而等式之成立,限於原設之三角形爲正三角形之時也.

定理 1. 三角形之面積 F 與周圍 L 之間,不等式

$$12\sqrt{3}F \leqq L^2 \tag{1}$$

成立,唯限於正三角形之時,始成爲等式.

定理 2. 三角形之面積 F 與三角平方之和 $a^2+b^2+c^2=\sigma^2$ 之間,成立有次之不等式,唯限於正三角形之時始成爲等式,(1)

$$4\sqrt{3}\,F \leqq \sigma^2,$$

何則,因 $12\sqrt{3}F \leqq L^2$

由 Lagrange 之不等式

$$L^2=(a+b+c)^2 \leqq 3(a^2+b^2+c^2),$$

故 $4\sqrt{3}F \leqq \sigma^2,$

上式中等號之成立,惟限於正三角形之時也.

就任意之三角形而言,以 $2F=L\gamma$ 之故,在(1)之不等式中,將 F 用 $2\gamma L$ 代入之,

$$\frac{L\gamma}{2} \leqq \frac{L^2}{12\sqrt{3}},$$

即 $6\sqrt{3}\gamma \leqq L.$

於是得次之定理:

定理 3. 三角形之周圍 L 與內切之半徑 γ 之間,成立有不等式 $6\sqrt{3}\gamma \leqq L,$ (2)

(1) Weitzenbock Math. Zeits., 卷 5 (1919). 在此論文中有 n 角形及四面體之擴張.

等式之成立,則限於正三角形之時.

又有不等式 $6\gamma \leqq \sigma$,

而等式之成立,則限於正三角之時也.

25. 設三角形之周圍爲 L, 外接圓之半徑爲 R, 內接於半徑爲 R 之圓之正三角形的周圍爲 L'.

由 IV 中之定理 6 $L' \geqq L$,

因 $L' = 3\sqrt{3}R$

故 $L \leqq 3\sqrt{3}R$.

等式之成立,惟限於正三角形之時.

於是次之定理,遂已證明矣.

定理 4. 三角形之周圍 L 與外接圓之半徑 R 之間,

$$L \leqq 3\sqrt{3}R \tag{3}$$

之不等式成立,而等式則限於正三角形之時始克成立.

由 (3)(1) 兩等式,即

$$L \leqq 3\sqrt{3}R, \qquad F \leqq \frac{L^2}{12\sqrt{3}},$$

得不等式

$$F \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

等式則限於正三角形始成立.於是得次之定理:

定理 5. 三角形之面積與外接圓之半徑之間,成立有

$$F \leqq \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 \tag{4}$$

之不等式,而等式則限於正三角形時始克成立.

由 (2)(3) 兩不等式,卽

$$6\sqrt{3}\,\gamma \leqq L, \qquad L \leqq 3\sqrt{3}\,R,$$

得

$$2\gamma \leqq R,$$

等式之成立限於正三角形之時.

今於不等式

$$L^2 \geqq 12\sqrt{3}\,F$$

之兩邊,以 γ^2 乘之,而引用關係式 $\gamma L=2F$, 則

$$\gamma^2 L^2 \geqq 12\sqrt{3}\,F\gamma^2,$$

$$4F^2 \geqq 12\sqrt{3}\,F\gamma^2,$$

於是得不等式

$$F \geqq 3\sqrt{3}\,\gamma^2.$$

等式之成立,限正三角形之時.

定理 6. 三角形之面積 F 與內接圓之半徑 γ 之間,存立有

$$F \geqq 3\sqrt{3}\,\gamma^2,$$

之不等式,而等式之成立限於正三角形之時.

又 $\sigma \leqq 3R$ 之不等式亦成立.等式之成立亦限於正三角形之時也.

VI. Weierstrass 之定理及 Fermat 之方法.

26. 求最大最小之問題,在 Weierstrass 氏之實變數函數論中,由採用次之一定理,多能簡單的解决之.其定理如次:

設 a, b 爲有限之定數,若在實變數 x 之閉合區域 $a\leqq x\leqq b$ 中,函數 $f(x)$ 爲連續時,則 $f(x)$ 在此區域中,必取具最大値及最小値.

於 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 諸獨立變數之有限閉合區域中,若函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ 爲連續時,則此函數在此區域內,必取具最大値及最小値.

例如取周圍一定之三角形之全體而研究之,三邊之長設爲 a, b, c, 周圍之長設爲 $2s$,卽

$$a+b+c=2s.$$

其在三角形爲普通三角形之時,則恆有 $a>o$, $b>o$, $c>o$; 且 $b+c>a$, $a+c>b$, $a+b>c$ 之條件.若將三角形之意義擴張之,雖一邊爲零,仍認爲一三角形,不過其面積爲零,又諸邊相合之事亦許發生,則其條件遂變爲

$$a\geqq o,\quad b\geqq o,\quad c\geqq o,\quad b+c\geqq a,\quad a+c\geqq b,\quad a+b\geqq c,$$

$$a+b+c=2s.$$

然如此條件所規定 a, b 之區域,爲一有限閉合的區域,在此區域內,三角形之面積

$$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

之最大値及最小値之存在,由 Weierstrass 之定理,不難立判也.

F 之最小値爲零甚明,但欲取最大値,則三角形當爲如何之三角形乎?斯時也,不可不爲一正三角形,何則,如謂其

不爲正三角形,而爲一

$$AB > AC$$

之三角形 ABC.則令邊 BC 不動,而將點 A 以點 A' 置換之使

$$AB+AC=A'B+A'C,$$

且

$$A'B=A'C.$$

於是所得之三角形其周圍之長不變,惟面積更形增大耳,是與假定相矛盾也.故具有最大面積之三角形,不可不爲正三角形.

使用此種之方法,關於最大最小之定理,得以證明者頗多.

27. 茲更就簡單之例,以說明求關於極大極小之必要條件之 Fermat 氏方法.

在可使 $f(x)$ 爲極大或極小之 x 之值的兩旁,恆能選擇與此充分接近之二個適當的 x 之值,而令 $f(x)$ 相等,此吾人之所知也.

今就所謂『過角 O 內之一點 P,求作一直線 APB,與二邊各各相交於 A, B,而使三角形 OAB 之面積爲最小』之問題而研究之.

設 APB 卽爲所求之直線.過點 P 在直線 APB 之兩側,必可另作與此線非常接近之 $A'PB'$, $A''PB''$ 兩直線,而令其與邊 OA, OB 各各相交於 A', A'', B' B'',且使

$$\Delta OA'B' = \Delta OA''B''.$$

於是,則 $$\Delta PA'A''=\Delta PB'B'',$$

即 $$\tfrac{1}{2}A'P\cdot A''P\sin\theta=\tfrac{1}{2}B'P\cdot B''P\sin\theta,$$

此處 θ 代表角 $A'PA''$,

故 $$A'P\cdot A''P=B'P\cdot B''P.$$

當 $A'PB', A''PB''$ 無限接近於 APB 時,其極限必得

$$AP^2=PB^2,$$

即關於所要求之直線 AB 之位置,點 P 不可不爲其中點是也.

前述之方法乃 Fermat 之方法.由此法及 Weierstrass 之定理,IV 中之定理 12[1] 與夫定理 9[2] 得以論證也.

Steiner 氏嘗論述所謂等周問題之許多極大極小之問題.他日有暇,當介紹之於讀者,今述一關聯於此之問題以爲本文之結束.

凸多面體之面數及其表面積爲已知,試求其體積之最大者.

此問題尚未完全解决,吾人所知者,不過下之一特例.在表面積一定之諸四面體中,以正四面體有最大之體積.[3]

Lindelöf 氏在 Math. Ann. 卷 2, 150—159 頁,曾算表其使用

(1) Nixon, Euclid Revised, p. 426.

(2) Nixon, Elementary Trigonometry, p. 302 Genese 之解法

(3) Sturm, Maxima und Minima, p. 116.

Fermat之方法,而求得此問題之解答之必要條件,即所求之凸多面體之各面,必皆切於同一之球,而其切點必爲該面之中心.至於晚近Steinitz氏在 Crelle's Journal 158卷 129—153頁,又曾爲此問題之論述焉.

細胞及體素之通透問題

王 星 拱

今有一布袋於此,傾水其中,則水必漏出,吾人確知水之黏力(Cohesive force)小,故其分子集體小,而布袋之孔隙大,故水可以自由流出也,又置沙與水於其中,則水去而沙留,吾人又確知沙與水之分子集體大小不同,故水可穿過而沙不能穿過也.然有若干物質,(固體或液體)其通透性(Permeability往往非如此之簡單,而以多數細胞(Cell)與體素(Tissue)爲尤甚.或二物同爲液體,此液體能穿過而彼液體不能穿過,例如以水置試管中,以油覆之,上加酒精,則酒精能穿過油層而下入水中,水不能穿過油層而上入酒精中,是也.或爲同類之游子.(Ions)此游子能穿過而彼游子不能穿過,例如水生植物之生長於水中,水中之鉀能穿過其皮而入細胞液中,而水中之鈉,雖較濃於鉀,反不能穿過是也.

通透者,乃物質之一種性質,在一定狀況之下,吾人可利用之,以分判二項以上之混合物或化合物者也.又此篇所注重者,非普通通透之問題,乃分別通透(Selective permeability)之問題.(如上舉之二例)二者同爲分判之方法.(Separation)茲先將各種分判方法,—天然的及人爲的,—

體列於下,以資比較之標準,及參攷之取材.其與本題無甚關係者,亦因連類而舉其名,以備一格.

一　篩漏.　此依顆粒之大小而分判二項固體者.

二　簸揚.　此依比重之大小而分判二項固體者.

三　濾瀝.　此亦依顆粒之大小而分判固體與液體者,例如用濾紙及無釉之漏瓷者是.

四　沉積,　此依物質〔或爲固體.或爲不溶解的液體細珠,卽乳狀物質(Emulsoid).〕在液體中沉下速率之快慢而分判者.沉下速率與物質之比重成正比例,與其圓徑及液體之滯力(Viscosity)成反比例.此關係可以下列公式明之,

$$v=\frac{F}{6\pi r n}$$ (司托克司(Stokes)定律)

此處 v 爲沉下速率,F 爲地心吸力,r 爲沉下物之圓徑,n 爲液體之滯力.此公式經柏靈(Perrin)研究,亦可應用於極小之物質,例如膠體(Colloid)物質.

五　磁性分判.　如二項固體,一有磁性,一無磁性,可用此法分判之.

六　電析分判,　凡溶液之具有正游子與負游子者,可以此法分判之.

七　蒸溜　此依沸點之高下,而分判二項液體者.

八　分别結晶　此依溶度之大小,而分判二項溶液混合物者,溶度小者先結晶成固體,溶度較大者次之.

九　漏斗分判，如二項液體不互相溶解,而比重不同,可用此法分判.有機分析多用之.

十　吸收　此指一種液體分判而言,如甲能吸收(或爲物理的或爲化學的)乙,而不能吸收丙,則丙中所藏少數之乙,可以甲除淨.例如酒精中少許之水,可以無水硫酸銅吸收之,輕油(Benzene)中少許之水,可以鈉吸收之.

十一　棲附 Absorption,　凡二位相的物質相接觸處,皆有能力,謂之面積能力.此能力可生工作.但在尋常二位相接觸狀況之中,(例如以石置水中) 其接觸面積甚小,故其能力甚微,無工作之可言.若接觸面積增加至甚大之地步,例如極細的沉澱,或膠體物質,(固體或液體)懸於水或其他液體之中,則能發生棲附之動作.所棲附之物質,或爲其他膠體物質,或爲分子,或爲游子,或爲電子,不等.如所棲附者爲溶媒,而此溶媒爲水,則爲水化.(hydration) 如所棲附者爲溶解物,而不棲附者爲溶媒,則溶媒與溶解物可以此法分判之.至於氣體棲附之現象,茲不具論.

此種分判現象,可以溶液理論中之分佈定律所管理者相比.如有一物甲可溶解於液體乙,又可溶解於液體丙,而乙丙二者不相溶解.則甲之分佈於乙丙二者之中之分量,視其在乙丙二者之中之溶度而定,而二分量之比例爲一常數.

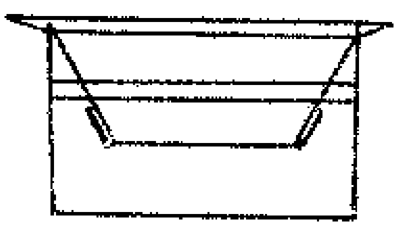
$$K = \frac{C_1}{C_2}$$

設甲原溶解於乙中,而甲在乙中之溶度小,在丙中之溶度大,且乙丙不甚互相溶解則加丙之後,乙丙分爲兩層,而乙中之甲幾全移至丙中.例如水中之溴與碘,可加綠迷液(Chloroform)而分出於綠迷液之中,而水中所溶解之其他物質,不能溶解於綠迷液中者,仍留存於水中,是也.

棲附現象亦復如此.今取一具體舉例而言,水中所溶解之染料,(實爲膠體溶液)若以炭屑濾瀝之,則染料皆棲附於炭屑顆粒面積之上,若再以此染料已經棲附之炭屑置之蒸餾水中,則有若干染料又分出而溶解於水中,蓋受上述分佈定律所支配而然者.不過在前例之中,二位相皆爲液體,在此例之中,一爲固體,一爲液體而已.

此種棲附動作,爲膠體物質重要性質之一.生物細胞物質,均爲膠體狀態,則棲附動作之常見於生物現象界中,乃必然之事也.

十二　薄皮穿分(Membrane Dialysis),法以臘紙薄皮或

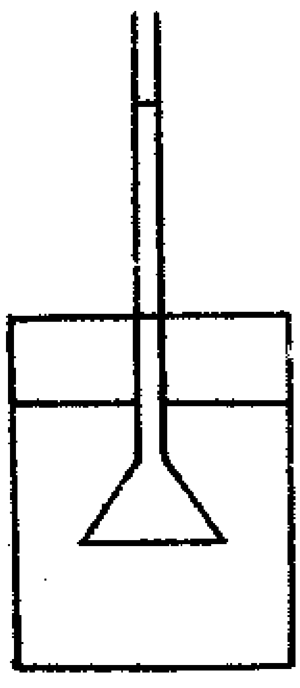


猪膀胱紮於寬管之下,內貯膠體溶液,(例如明膠 Gelatine 溶液,膠糖 Dextrin 溶液之類)與晶體溶液,(例如綠化鈉,硫酸化銅之類)以此管置淸水中,則晶體穿過而膠體不穿過.或嚴格言之,晶體穿過之速率甚大,而膠體穿過之速率甚小.此爲格拉漢(Graham)之老試驗也.大約有機的生物產品,多屬於膠體類,而各種無機鹽,多屬於晶體類.然同一物

質,亦可呈具兩種狀態,例如硫酸化鋇,原爲晶體,若使之沉澱極速,亦可成膠體.輕養化第二鐵,在中和環境之中爲膠體,而在酸性環境之中爲晶體.故格拉漢的舊分類法,近漸不用,吾人但云一物在膠體狀態或在晶體狀態而已.概括言之,膠體溶液中之膠體物質,其集合體大,(約爲50至300μμ*)晶體溶液中之晶體物質,其集合體小.(約爲0.1至50μμ)故其穿過有難易之不同也.

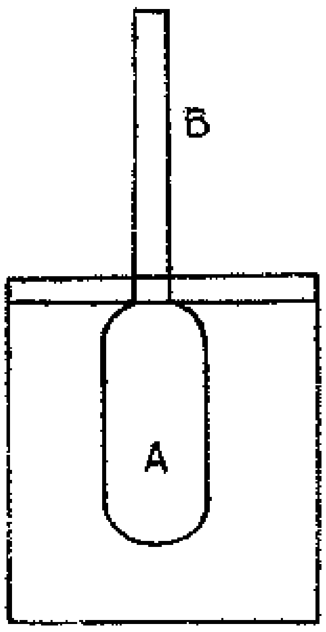
十三, 半通透的薄皮 (Semipermeable membrane),此類薄皮,可讓溶媒自由通過,而阻止溶解物之通過.或爲人爲的,或爲天然的,或爲固體,或爲液體.試敘述數種爲滲透壓力試驗中所用者.

甲 臘紙,或硝酸纖維,或猪膀胱. 法用一長柄漏斗,其口以臘紙紮之,中貯糖溶液,而倒置於水中,則水之分子可以自由出入,而糖之分子不能通過外出.於是柄管中之水逐漸升高,管內外水平面之差數,就其壓力單位計之,等於糖溶液之滲透壓力,此物理化學中基本試驗之一也.



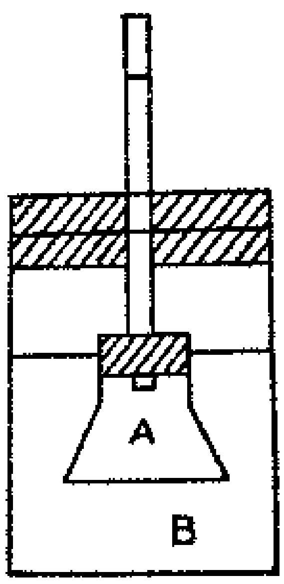
乙 鐵青酸化銅 (Copper ferrocyanide) 之薄皮, 法以一多孔瓷管 A'(其孔甚微)上安一細玻璃管 B. A 管中貯硫酸化銅

*(1 μμ = 10^{-6} mm)



溶液.再將此管置之鐵靑酸化鉀溶液之中.則二溶液交流而相遇於瓷管牆孔之中,而發生鐵靑酸化銅之沉澱.再將瓷管中之硫酸銅溶液傾去,是成一滲透壓力權量器.其權量法如前.此項薄皮,不但可以阻止一定的溶解物之通過,並且可以承受甚大的滲透壓力.凡濃溶液滲透現象之攷研,必藉此而進行.故其用處較臘紙各種爲大也.又此項薄皮,其孔隙必較前數項爲更微密.因此項薄皮可以阻止質量較大之游子或膠體游子之通過,例如以鐵靑酸化鈉溶液置於上述試驗狀況之中,則鈉游子(經過電析後)可以自由出入,而鐵靑酸游子(亦經由電析而來者)不能通過是也.此事實與通透之理論有關,以後當再提及.

丙　液體薄皮　先預備以太一杯,又預備一種有機物之以太溶液一杯.但此有機物必爲可以溶解於以太而不可溶解於水者,例如納夫達林.(Naphthalene)以豬膀胱紮於玻璃管 A,之下端,浸於水中,使膀胱成潮濕狀況.傾納夫達林的以太溶液於管內,至滿乃止,上以木塞塞之,而木塞戴一細管 C 如圖.再將此管置於中貯以太之 B 杯中,以蓋蓋之.



因膀胱組織之中成立水薄皮一層,此層水薄皮.可讓以太

分子自由出入,而阻止納夫達林分子之外出,於是C細管中之液體平面逐漸升高.若曾稍加染料於其中,則平面之升高,更顯而易見.但此試驗中所用之以太,必先以水飽和之,則以後以太出入水薄皮之時,不至侵毀水薄皮之原態也.此為鼐耳司脫(Nerst)定性的表現滲透壓力之試驗,且亦與通過之理論有關,以後亦將重敘及之.

丁　細胞盈朒,　細胞中之溶液,有一定的滲透壓力,而細胞外膜,為天然的半通透的薄皮.其細胞液之滲透壓力,可以盈朒法量之.例如以血球置淨水中,或甚淡之鹽溶液中,則血球澎漲,因淡鹽液之滲透壓力甚小,故水自球外侵入球內也.若置之甚強之鹽溶液中,則收縮,因此時球內之水侵出球外也.若置之百分之零九食鹽溶液中,則血球不澎漲,亦不收縮,因如此濃度之鹽溶液,其滲透壓力與血球中之溶液之滲透壓力相等,亦卽與天然的血液中之血 Plasma 之滲透壓力相等也.其他細胞亦呈現如此現象.例如以植物體素置之蒸餾水中,則細胞澎漲,抵至牆邊為止,若置之強鹽溶液中,則收縮.此種現象,謂之縮朒 Plasmosis,是為生物學中常作之試驗也.

在B項多孔瓷管試驗之中,下列數種物質,亦曾有用以充薄皮者,鐵青酸化第二鐵,矽酸化銅,矽酸化鉛,靭酸化明膠,(Gelatin tannate)靭酸化第二級蛋白,(Peptone tannate)卽硫酸化鋇與綠化銀,亦曾用作此項薄皮也.

十四 一邊通透之薄皮，

甲 以蝦蟆皮隔水，水能自皮外穿入皮內，不能自皮內穿出皮外，是爲一邊通透之現象.

乙 以蝌蚪置鹽溶液中，則漸收縮而死.（其尾不動爲死之徵狀.）若置極淡鹽液中或淡水中，則並不澎漲，而生活如常，足見蝌蚪細胞之外層，可以容水自內往外，而不能自由自外往內也.

丙 以小腸內皮與腔皮比較，二者之通透性質不同.以葡糖水置腔皮外，經過半小時後，腔皮外原置之糖水中有食鹽，腔皮後之淩巴液中有葡糖.足見淩巴液中之食鹽可穿過腔皮而至腔皮外之糖水中，腔皮外之葡糖亦可穿過腔皮而至腔皮後之淩巴液中，是鹽液糖液皆可自由出入腔皮也.又紮取小腸一段，置葡糖液於其中，經過半小時後，小腸內原置葡糖液中仍無食鹽，而小腸內皮後淩巴液中有葡糖，足見小腸內之葡糖，可穿過小腸內皮而至淩巴液中，而淩巴液中之鹽，不能穿過小腸內皮而至小腸中也.蓋小腸內皮之重要機能卽爲吸收液體食料，故有此一邊通透之現象也.

丁 腎中之格勞莫 Glomeruli 體素之重要機能，爲鹽之分泌.一邊爲血，一邊爲尿，尿中之鹽之成分，超過血中之鹽之成分遠甚.（血中之鹽爲百分之零九，食鹽約佔百分之零六.尿中之無機有機各種鹽爲百分之四，而食鹽

約佔百分之一零四.且血之滲透壓力爲七氣壓,而尿之滲透壓力爲三十二氣壓,(此依冰點之降低而推算者.)而血中溶解之鹽,乃反抗較高之滲透壓力,經分泌而至尿中.是腎中之格勞莫體素,祇許鹽自血通透往尿,而不許其自尿通透往血也.是亦一邊通透之現象也.

十五 選擇通透之薄皮 水生植物細胞中包含鉀多於鈉或鈣,而水中溶解物之成分,則鈉與鈣皆多於鉀.海藻中包含碘頗多,而海水之成分,則碘少於綠至數百倍.動物之脊下腺,(Thyroid glands) 中含有碘,而供給各腺以滋養料之血液,其所含碘之成分極微,——微至不可試出之地步.血液中綠之成分頗多,而此腺中無之.足見水生植物細胞之外層,必祇許鉀穿過,而不許鈉鈣穿過,海藻與脊下腺細胞之外層,必祇許碘穿過而不許綠穿過也.

以上敘述分判方法,——天然的或人爲的,——計十五項.其利用薄皮爲分判之工具者,必不出乎下列數種因子之分別動作或共同動作.玆試分項論之.

一 篩漏之動作 以薄皮譬之一網,大魚不能穿過,小魚出入自由.其有黏力而成大粒之固體物質,大魚也.其無黏力而不能成爲較大的分子聯合體的液體物質,小魚也.此乃甚簡單的概念也.試進而推求之,薄皮具有漏孔,漏孔有一定的圓徑.再以氣動說之觀念應用於液體中.則溶解物與溶媒之分子,皆有四方八面之活動.再以屢試有效

之方脫毫夫(Van't Hoff)理論施於此處.以溶解物之分散的分子,比之於氣子分子,以溶媒之密集的分子,比之於顆粒極微的以太,(謂以太爲極微的顆粒所搆成,本爲物理學中固有的理論,近且有分此項顆粒爲正負二類者).換言之,卽比之於真空,則在半通透的薄皮試驗之中,溶媒之所以能自由通過者,如以太之通過貯蓄氣體瓶之牆也.溶解物之不能通過者,如氣體分子之不能通過其瓶之牆也.使果如此,則半通透之現象甚易索解.然溶解物之分子與溶媒之分子,其顆粒之大小,及其他物理性質,大略相同,非如氣體分子與以太之顆粒之有如許區別也.因此,方脫毫夫以氣體定律應用於淡溶液之研究,以解釋滲透壓力之現象,雖有驚人之效果,而究未能滿足物理化學(包含方脫毫夫自己)最後的理論的需求.於是有丁克耳(Tinker)巴克勞夫脫(Bancroft)等以溶媒壓力說解釋滲透壓力之現象.此說之重要基礎觀念,卽在以溶媒之分子與溶解物之分子,視爲質量圓徑及其他物理性質約略相同之物質,是也.今試以此觀念爲意想上的圖畫.溶解物與溶媒之分子,皆自由向各方面行動而互相碰擊.因溶解物少而溶媒多,(吾人常以少者名爲溶解物而以多者爲溶媒.)故就一個分子而言,其與溶媒分子相碰擊之機會必多,而與溶解物分子相碰擊之機會必少.其實在碰擊之次數,可依下列公式計算之.

$$n=\frac{4}{3}\cdot\frac{v\varrho^2\pi}{\lambda^3}$$

此處 n = 每秒鐘內此分子與他分子碰擊之次數,

v = 各分子行動之速率,

ϱ = 動作範圍之半徑(動作範圍者乃其物理的化學的能力所能達到的範圍也)

λ = 兩分子間之平均距離,

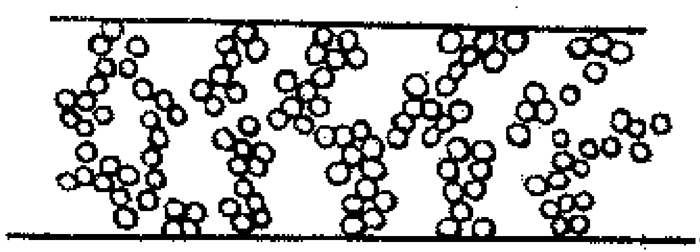
今試設想此溶液中有溶媒而無溶解物,再設想此溶液中有溶解物而無溶媒,但其體積不變.再假定溶媒與溶解物二者之行動速率與動作範圍約略相同.(且爲近理的假定)如此,則不同者惟兩個同樣分子之間之距離耳.溶媒多,故其分子密,故此項距離小.溶解物少,故其分子疏,故此項距離大.則就一個一定的分子而言,其與溶媒分子相碰擊之次數必多,與溶解物分子相碰擊之次數必少,而且其次數多少之區別甚大,因此數與其距離之立方成反比例也.

今以薄皮與溶液相接觸之面上之孔隙,視爲溶液中之分子,復取一個一定的孔隙,視爲一個一定的分子,用上列公式以攷求之.孔隙之大小,在此種試驗狀況之下,必與分子圓徑大致相當,但分子動而孔隙不動耳.然孔隙不動之事實,不能改變上述公式在此處應用之價值,蓋因在大數運動之中,一個動的分子,與其他方向相反而動的分子相碰擊之次數之增加,必與與其他方向相同而動的分子相碰擊之次數之減少,兩相抵消,故就此一個一定的動的

分子而言,與不動的分子無異也.今就一個孔隙而言,實乃與一個不動的分子相同耳.如此則一個一定的孔隙,與溶媒分子或溶解物分子相碰擊(卽相遇)之機會,必與二者之同類的分子之距離之立方成反比例.此距離之立方,卽爲包含一個分子之體積.此體積愈小,則每單位體積中所包含的分子之數愈大也.

由此言之,溶媒之分子密,故與薄皮孔隙相遇之機會多,溶解物之分子疏,故其與薄皮孔隙相遇之機會少.惟其相遇,所以穿過.且溶液愈濃則溶解物穿過薄皮孔隙者亦較多,是亦與預測相符之事實也.此乃純粹的物理的動作.

二　選擇的微管吸引之動作　由極端顯微鏡的實驗,可知半通透的薄皮,其組織爲膠體沉澱顆粒之集合體.每一顆粒之圓徑,多數爲



自 0.1—1μ,其間孔隙之圓徑約亦如之.例如鐵青酸化銅,矽酸化銅,矽酸化鉛,韌酸化第二級蛋白,皆然.惟硫酸化鋇及綠化銀沉澱顆粒之圓徑,約三四μ.爲較大耳.此丁克兒所攷驗也.每一顆粒,又由更小的顆粒集合而成,此更小顆粒之圓徑,約爲十至五十$\mu\mu$.故半通透之薄皮之組織之中,有兩種孔隙,第一爲較大顆粒之間之孔隙,譬如幹路,第二爲更小顆粒之間之孔隙,譬如支路.(如圖)其孔隙愈小者,愈爲完美之薄皮.然滲透現象卽半通透之現象,卽孔隙頗大

之薄皮亦有之.其具有九百μμ圓徑之孔隙者,已略表現滲透現象.若具有一百八十μμ圓徑之孔隙者,則滲透現象更爲顯然.似此,則孔隙之圓徑,並不小於溶解物分子之圓徑,而且在晶體溶液之中,其溶解物分子之大小,與溶媒分子之大小乃約略相等也.然則溶媒分子蹤擊通過,與溶解物分子之不通過,必非僅爲篩漏工作之結果也.

夫薄皮中既有孔隙,此孔隙必有微管吸力,(Capillary force)而此微管吸力對於其所遇而不同的分子又必有選擇的性質也.若爲選擇溶解物之分子而吸引之者,則無滲透(依經常界說而言)之現象.凡發生滲透現象者,皆薄皮孔隙對於溶媒分子之選擇的微管吸力爲之也.故溶媒可以自由出入,而溶解物則不能.又因薄皮兩邊溶液濃度不同,(若一方面爲純粹溶媒,則其濃度當然爲零).故有平均濃度之趨向,而淡溶液方面之溶媒,逐漸鑽穿薄皮而至濃溶液之方向,至濃溶液方面幹管之中之水靜壓力 (hydrostatic pressure) 可以阻止此項運動之時,始爲平衡狀態.此即滲透之現象也.

然在少數舉例之中,溶媒可自濃溶液穿過薄皮而至淡溶液中,謂之反滲透.茲就膠體溶液而言,以濾紙置水中,使成潮濕狀態.再以此紙濕處浸一半於夜藍 (Night blue) 溶液之中,則此項藍色染料停積於濕紙內.惟淨水上升於紙之微管之中,故其上部無藍色.若用同樣方法浸於鹼藍(Alkali blue)溶液之中,則此項藍色染料隨水上升於紙之微管之中,故其上部有藍色.蓋因濾紙濕於水中,亦具有膠體物質之性質,戴有負電,而水之本身戴有正電,(多數膠體物質在水中皆戴負電)而夜藍溶液中之夜藍,(卽溶解物)戴有正電,故與紙上之負電相消而停積爲較大之顆粒.酸藍戴有負電,故隨水而上升也.

故薄皮微管中之吸引,當亦有時有電力動作於其間.若薄皮戴負電,而溶解物(膠體物質)戴正電,則停積甚易發生,於是僅餘溶媒(純粹水)穿過薄皮之孔隙,而且由濃溶液方面向淡溶液方面進行也.

三 凡可溶解或稍可溶解於 A 者,卽可穿過 A. 上述第十三項中液體薄皮之試驗,卽可表現此理.臘紙上所沾之水,能溶解以太而不能溶解納夫達林,故以太可以自由出入,而納夫達林則不能穿過也.而且以太在水中之溶度不大.如溶度過大,則以太與水必成完全溶液.如此,則水之液體薄皮不能存在,尙何穿過之可言.又此篇首節中所引之油水酒精試驗,亦可說明此理.以一試驗管貯若干水,水上覆以橄欖油,油上加酒精,成三層.以木塞封之.放置兩日之後,則橄欖油之平面升高.蓋酒精可以溶解於橄欖油中,且其溶度亦不甚大,故酒精穿過橄欖油而至水中,與水成完全溶液,於是使橄欖油升高也.

又凡化學組織約略相同者,多能互相溶解,此物理化

學中之概括原理也.故有機物質多溶解於有機液體,而無機物多溶解於水,又凡含有脂酸根 fatty acids 之有機鹽,多能溶解於油,凡含有輕養羣之有機物,多能溶解於水也.普通溶媒多爲水,而多數物質皆能溶解於水,特溶度有大小之不同耳.由此言之,凡一物質,但使能成薄皮,而能略溶解於水,皆可使水通過.若溶媒爲水,而溶解物又與此薄皮不發生互相溶解之動作,則此項薄皮,可供半通透現象之表示矣.

溶解問題本甚複雜.其溶度甚高者.或全爲物理的混合,不能發生通透之現象,以通透過快也.(例如酒精與水.)其溶度不甚高者,至少必雜有化學的化合,可以發生通透之現象.以通透甚緩也.如就溶媒爲水之舉例而言,此種化合卽爲水化.(hydration, 例如以太與水)然則液體之穿過薄皮,由於此液體與薄皮中之物質成一種鬆散的化合物.在滲透壓力試驗狀況之中,卽此化合物成立於溶媒方面,而又解散於溶液方面也.薄皮者,乃如一接觸劑,始終不經受變化者也.

此種理論,不但可用之於液體薄皮,亦可用之於固體薄皮.上段已言,多數物質皆可多少溶解於水,固體薄皮自非例外.又多數物質,皆可發生水化作用,而且水化之後,不必成爲溶液,例如水泥遇水,反凝結爲堅石,晶體中之結晶水,不改結晶體之爲固體也.又凡發生水化之動作,不必皆

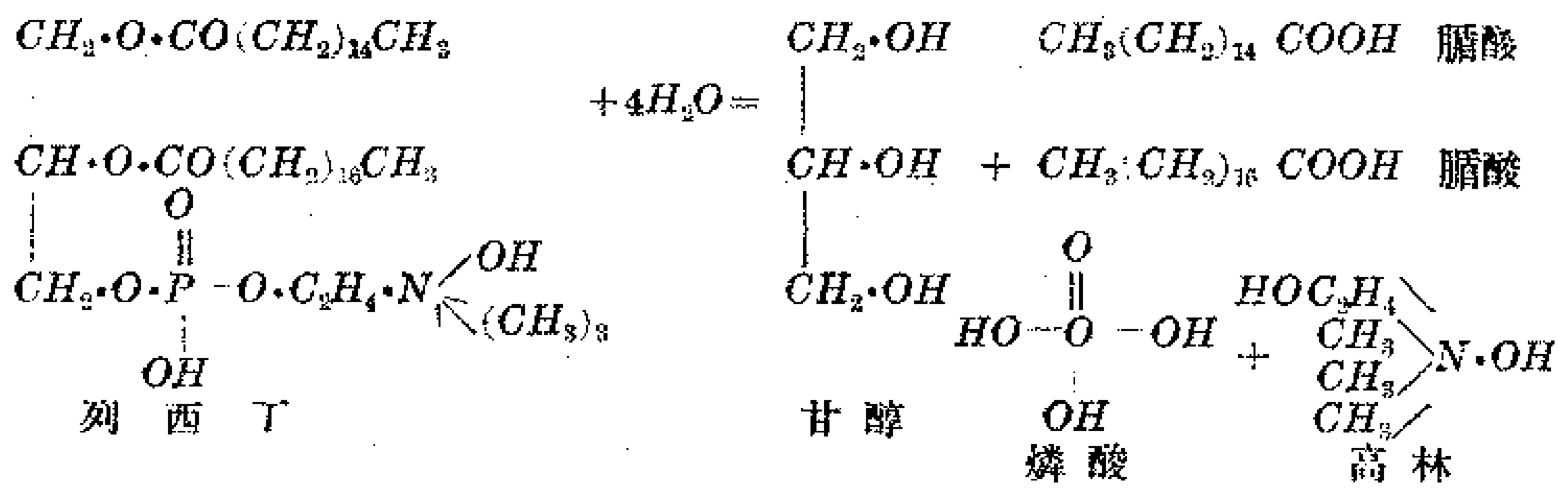
爲一分子也.上而至於分子集合體,可以水化,例如膠體顆粒經水化而加大.(如輕養化第二鐵)下而至於游子,亦可水化,例如硫酸鹽中之硫酸根游子之水化.此乃爲膠體電析物之結塊理論 micelle theory 之要點也.若水化過多,——卽攜帶水分子過多——可將一物(分子或游子)自晶體狀態變爲膠體狀態.此亦破除格拉漢原有簡單分類之事實之一端也.故固體薄皮之讓水通過,而不讓溶解物分子通過者,亦可認爲薄皮中之組織與水起水化作用也.

然就鐵靑酸化銅薄皮而言,有一事實,又與此說不甚相合.若以鐵靑酸化鈉或鉀之溶液試驗之,則鉀或鈉之游子可以穿過,而鐵靑酸根之游子不能穿過.倘以〔組織略同,則相溶解,而相溶解者,則可通過,〕之理衡之,則鐵靑酸根應可通過鐵靑酸化銅之薄皮也.然鐵靑酸根爲膠體游子,而鈉或鉀爲晶體游子,二者大小不同,故此舉例之中之現象,或受篩漏動作之支配,而非受溶解動作之支配也.

四 細胞液外層之特殊構造 欲敘述此說,應先簡單說明細胞液之組織.細胞液中之物質,皆爲膠體狀態.就其化學成分而言,有糖類,有脂肪類,有蛋白類,有鹽類,以及少數酵母及生命素.糖類中有爲真溶液者,如葡糖,有爲膠體溶液者,如小粉.脂肪類有成油泡者,有成乳狀溶液者,(亦爲膠體溶液)而以列西丁(Lecithin)爲最重要.蛋白類分種極多,成爲明膠狀(Gelatin)的膠體溶液.鹽類,或爲真溶液,

如綠化鈉,或與有機體化合而成複雜化合物,於是成膠體溶液,如血輪中含鐵的血色質,(Haematin)及葉中含鎂的葉綠質.(Chlorophyll)脂肪在細胞液中,甚易成爲乳狀油珠,以細胞中之蛋白,可以降低其表面張力也.此項關係.可以試驗明之.綠迷液(Chloroform)與水原不相溶解,置之一試管中,必分成兩層.若加以少量蛋白而震搖之,則成極細的乳狀細珠,而不分離.故細胞液中之列西丁,亦爲乳狀的膠體溶液也.

其成立特殊構造者,是爲列西丁與各種蛋白.試將列西丁之化學組織,與各種蛋白之大概組織,略爲敘述如下.



列西丁爲含淡與燐之化合物,其性質與脂肪相同,不溶解於水.凡可溶解脂肪者,皆可溶解列西丁.觀其組織,與脂肪相同.其不同體,惟燐酸根與高林耳.如遇水析,hydrolysis則成甘醇Glycerine,脂酸 fatty acids,燐酸,與高林.故其性質與脂肪相同,無足怪者.

蛋白分種甚多,但皆有 $-CO\cdot NH-$ 羣爲聯串各根之樞

紐.此羣遇水析,則破裂 $-CO$ 成爲 $-COOH$, $-NH$ 成爲 NH_2. 故其一爲酸,其一爲鹼.其在不分裂時, H 可以移動,或與 O 相

$$-CO\cdot NH- \rightleftharpoons -C\cdot OH:N-$$

聯,或與 N 相聯.與 O 相聯時,可分成 H 游子,故可爲金類游子所代替.與 N 相聯時,則不能分爲 H 游子也.又一蛋白化合物中所含有之 $-CO\cdot NH-$ 羣,往往甚多.試以下列公式表出之.

$$COOH\cdot \underset{\substack{|\\ R_{\text{I}}}}{CH}\cdot CO\cdot NH\cdot CH\cdot CO\cdot NH\cdot \underset{\substack{|\\ R_{\text{II}}}}{CH}\cdot CO\cdot NH\ CH\cdot NH_2$$

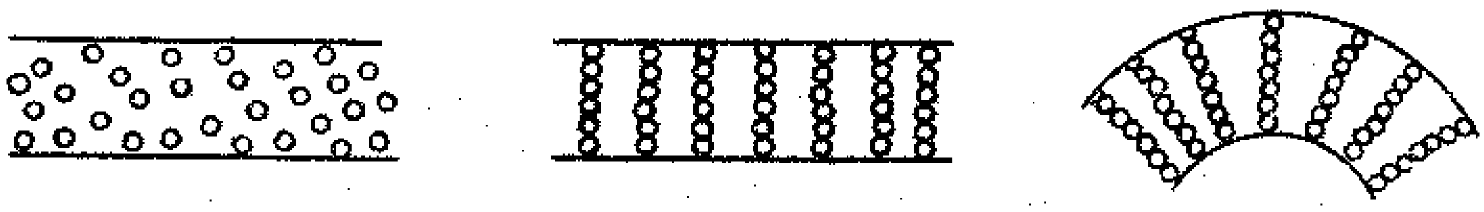
R_{I}, R_{II}, 代表任何單價根.此根之組織,有時極爲繁複,不過總價須等於一耳.其組織可至甚長之地步.此甚長之組織,或與膠體狀况有關也.

觀蛋白化合物之組織,一方有酸羣, $COOH$ 一方有鹼羣, NH_2 二者相等則爲中和,否則有酸性,或有鹼性.酸羣中之 H 游子,及 $COH:N$ 中之 H 游子,皆可爲金類游子所代替.而且此金類游子,亦可移動於 O 與 N 之間.若與 N 相聯,則失其電析的性質,此層與下節所述之非電析的蛋白鹽亦有關也.

既知列西丁與蛋白之組織及性質,吾人可設想細胞液外層之構造矣.在透明的蛋白膠體溶液中,有無數乳狀的列西丁鋪散其間.若爲無系統的鋪散,如圖甲,則惟溶解於蛋白溶液者,(即溶解於水者,蓋蛋白溶液之溶媒爲水也.)可以通過,而溶解於油者不能通過,因油珠不能成爲通過

之溝渠也.若鋪散成行列式,如圖乙,則凡可溶解於油者,可由列西丁柱中通過,凡溶解於水者,可由蛋白溶液基地中通過.若鋪散成爲漏斗式,如圖丙,則凡溶解於油者,可由列西丁柱中通過,凡溶解於水者,祇能經由蛋白溶液中自外入內,不能自內出外,縱能自內出外,亦經受極大的困難,是卽一邊通透之現象也.(凡供給細胞營養之食料,非溶解於油卽溶解於水.)

甲　　乙　　丙



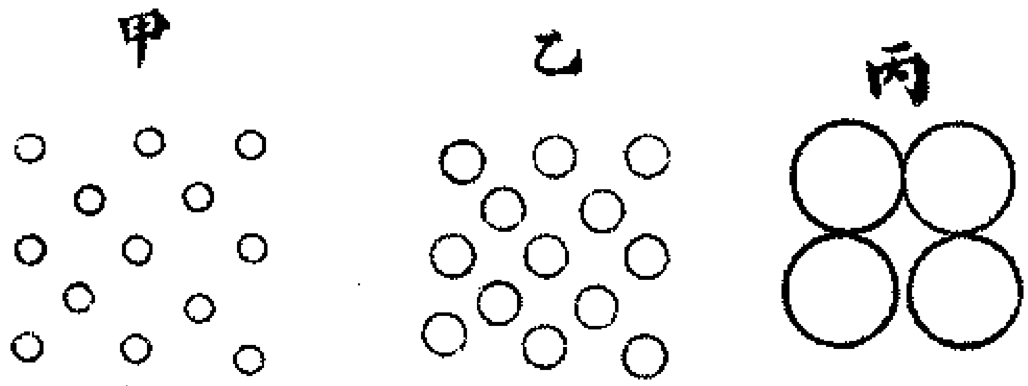
由此言之,凡發生一邊通透現象者,其細胞液之外層,必具有漏斗式之特殊構造.此說若確,則凡一種物質或一種方法可以摧毀列西丁之柱或破壞蛋白溶液之基地者,必能變更其一邊通透之性質.今試於實驗中求之,吾人確知有如此事實之存在.

甲　改變油之性質者.

凡改變油之性質者,皆能改變列西丁之性質.性質改變,則行列之柱不能存在,卽漏斗式之組織不能存在.故一邊通透之特點亦必因之而消滅也.

A　油之溶媒　凡可溶解油者,皆可溶解列西丁.故酒精,綠迷液,以太,皆可毀壞細胞或體素之一邊通透

之性質.試就吾人習知之例而言,綠迷液可使人痲醉.據此理論而言,其痲醉之原因,蓋因綠迷液對於列西丁發生溶解作用,使神經細胞變更其特殊構造,而停止工作也.若所用分量不多,則痲醉而可醒.若所用分量過多,則痲醉而不可醒.蓋綠迷液之變更列西丁之程度有深淺之不同也.試依附圖說明之.



甲為列西丁柱之截面,其空隙處為蛋白溶液.當綠迷液浸入之時,列西丁油珠漲大,而成狀如乙.此時柱間之空隙減小,故凡溶解於水之營養資料,不能穿入細胞,於是細胞停止工作.是卽痲醉也.若再加綠迷液,則列西丁油珠更加漲大,彼此相接,而漸凝結成為更大之油珠,如小泡之合成大泡者然如丙.於是漏斗式之構造根本摧毀,不可恢復原狀矣.

B　醇類　以蝌蚪置酒精中,則漸受毒氣而死.然高級醇(卽 CH_2 之鍊較長者)致死之時間,較短於低級醇,蓋高級醇對於油類之溶解力大於低級醇也.

C　肥皂　以體素置肥皂溶液中,則其通透率增加.蓋肥皂與油類既相溶解,且可於泡面發生棲附作用,故列西丁之組織易摧毀也.又天然肥皂 Saponin 亦有毒,而對於魚尤甚,或亦由於列西丁之摧毀也.

D 脂酸 fatty acids 此類皆可溶解油,試以汗酸 butyric acid 而言,海膽卵之人工受孕,卽可用汗酸而奏效者.蓋因其卵細胞外層之組織受傷,而海水可以侵入,使之澎漲之故也.海水侵入之後,其中之蛋白質又漸另成一薄皮,(所謂薄皮之成立. formation of membrane)再漸長爲成熟之海膽.

乙 改變蛋白之性質者

蛋白溶液成爲明膠狀之組織, gel structure 透明,滯力甚大.析散媒 (dispersing medium) 與析散物 (dispersed) 極不易分,(此膠體溶液中之二位相,若以真溶液比較之,則析散媒等於溶媒,析散物等於溶解物.) 關於此項組織之說明,有二說在.一謂蛋白之化學成分爲鍊形的,牽引甚長,如線,而明膠狀組織中之析散物如網,以線織網,甚爲自然.一說謂明膠狀組織中之析解物,爲未成形之結晶體,錯綜砌集,略如堆石,中有空隙.空隙之中,是爲析散媒.此二說各有實驗的輔助.姑無論何者爲確,然明膠必有一定組織,不待言也.使此組織摧殘,則發生大顆粒的停澱.故凡有可使明膠停澱者,皆能使細胞外層之通透性變更.其有一邊通透之性質者,則基地破除,柱亦無從成立,而漏斗式之組織自不能存在.茲舉三例以證明之.

A 熱 蝦蟆皮原祗容水自內往外,不容水自外往內.但經過熱至五六十度之後,則成爲兩邊皆可通透

之薄皮.蓋明膠狀之膠體溶液,遇熱卽凝結爲大粒也.

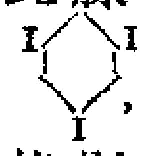
B 重金屬之鹽　凡重金屬之鹽,皆能使蛋白停澱.例如草履蟲 Paramecia 之細胞核,不受咪綠 Methyl green 染色液之影響.若以綠化銅溶液洗之,再置此染色液中,則核變成綠色.蓋其外層經受綠化銅之停澱作用,而蛋白之明膠狀之組織,全部或局部摧毀,於是染色液可以通過,而與核相接也.凡重金屬鹽皆爲毒劑,至少亦有一部分之原因在此點也.

C　不稱量的生理溶液　血淸及淩巴液中之各種無機鹽,皆具有一定比例.若此比例變遷,卽有傷於其所涵潤之細胞.任何一種鹽的溶液,若爲純粹的,皆爲有毒的.但同時有兩種鹽,則彼此之毒可以互相減消.若有三種,則互相減消之力量更大.凡單價正游子,皆增加細胞之通透性.凡雙價正游子,首先減少細胞之通透性,而嗣後則增加.凡酸略與雙價者同,凡鹼略與單價者同.而尤以鈉與鈣之比例爲最重要.蓋此種正游子與明膠中之蛋白物質,有成化合物者.如外邊溶液之成分變遷,則此種化合物,必受摧毀之結果,而明膠狀之組織,亦必倒塌.所以通透性增加,而一邊通透之機能,則更不能發見矣.又凡使鈣發生沈澱者,如含有炭酸根,硫酸根,蓚酸根,之溶解物,皆爲瀉藥,亦必緣於此項理由,而阻止腸部內皮之吸收.於是內皮後邊之液體,可以通透至於腸部,而使之瀉也.

以上所列事實,皆直接的或間接的證明一邊通透之薄皮,具有漏斗組織也.

五　非電析的蛋白鹽之成立.　今有一薄皮於此,其一邊為膠體蛋白質,因分子甚大,不能穿過.其一邊為各種鹽的溶液,可以自由穿過.而此各種鹽中,有一種鹽之游子,或全部分子,與蛋白質成一化合物.而此化合物又不能電析成為游子,則此一項游子或分子為蛋白所包收,而無回返至原來一方面之可能.至於其餘各種鹽之游子或分子,則或自左至右,或右至左,而無阻礙.是此種薄皮,對於甲物質為兩邊通透,而對於乙物質為一邊通透.此種蛋白對於甲為不吸收,對於乙為吸收,而有選擇吸收之能力矣.

淡水植物生長於溪澗之中.水中所溶解者,鉀少而鈉鈣鎂等質多.但此種植物能吸取鉀,而成其細胞中之化合物.蓋或由於鉀與其細胞中之蛋白成為無電析性的化合物,故其細胞外層對於鉀則吸收而不放出,對於其他各游子,則任其自由出入也.

脊下腺中有碘,血液中綠多而碘少,然此腺吸收碘而拒絕綠.蓋由於腺中成立三碘輪狀化合物 , 無電析性.故其外層對於碘則吸收而不放出,對於綠則任其自由出入也.

又如胃內皮之製造鹽酸,久為生理學所難解釋之問題.此鹽酸必自綠化鈉變化而來,乃無疑義.蓋血中無綠化

鈉,則胃汁不能發生,此已定之事實也.然而綠化鈉如何成為鹽酸,終難尋繹.依上述理論,可以說明如下.胃內皮之體

素,其一邊為毛管所供給之血液,中有綠化鈉.其一邊為胃中食物,初自口來,略具酸性.血液中之綠化鈉,微受水析 (hydrolysis)而成鹽酸與輕養化鈉.由此發生之鹽酸,穿過細胞外層,而與其中蛋白質相結合,而成為無電析性之化合物.由此發生之輕養化鈉,則為血液中之炭酸所中和,成酸性炭酸化鈉 $NaHCO_3$.因鹽酸與輕養化鈉均有所歸,於是血液中之綠化鈉,又經水析而成鹽酸與輕養化鈉以補償之.此鹽酸與蛋白結合之化合物,至與胃中食料相遇之一邊,又分解為鹽酸與原來之蛋白.此處之分解,或亦與胃中食料之酸性有關.果爾,則飽食後鹽酸之製造所以較多者,亦由於食物酸性催促鹽酸蛋白化合物之分解.不盡由於神經之刺激也.由此言之,胃內皮細胞中之蛋白,乃一化學的接觸劑,將從綠化鈉變來之鹽酸,運至胃藏之中,而本身不受損傷也.

六　兩邊游子之不相等的分配. (東耐薄皮 Donnon's Membrane) 東耐薄皮之理論,對於膠體游子與晶體游子之可通透與不可通透之區別而發生者也.今有一薄皮於此,

其一邊爲鹽溶液,一邊爲水,或一邊爲强鹽溶液,一邊爲淡溶液.而溶媒與溶解物之分子或游子,皆可通過薄皮孔隙之中,則濃者必漸淡,淡者必漸濃,直到兩邊濃度相等時始止.此時兩邊之未經電析前之分子及既經電析後之游子,皆彼此相等.此可由傳電率之試驗以考知者也.若一邊爲膠體游子與一晶體游子所成之鹽,一邊爲兩個晶體游子所成之鹽,而二鹽之中,有一游子相同,(下例皆就正游子相同者而言)則經過穿透抵於平衡之時,兩邊發生游子之不相等的分配,因此,有同樣游子而有不同的通透性之現象.茲特分別言之.

(A)薄皮對於游子通透之方向

原來狀況

I	II
$Na^{\cdot}$	$Na^{\cdot}$
R'	Cl'

平衡狀況

I	II
$Na^{\cdot}$	$Na^{\cdot}$
R'	
Cl'	Cl'

今有二溶液於此,其一爲 $NaCl$ 無機鹽溶液,其一爲有機鹽 NaR 溶液.R 代表任何膠體游子.如此有機鹽爲肥皂,則爲一高級脂酸根,如爲康哥紅染料,則 R 爲 diphenylbis-azonaphthyl amine sulphonic acid. 中有薄皮隔之.此薄皮之孔隙,可讓鈉游子及綠游子及未電析的綠化鈉分子之通過,而不讓膠體游子 R 之通過.原來 I 室中爲 NaR, II 室中爲 $NaCl$. 經過若干時間之後,則 I 室中有 Cl,而 II 室中無 R,

而抵平衡狀態.茲就平衡理論而推求之.

在平衡狀態之中,設若溫度體積俱不變,而有一個極小的反行的變遷發生.其總工作必等於零.(即自由能力等於零,是爲熱動學第一定律.)此處之變遷,乃就自 II 室至 I 室之極小數的 $Na^{\cdot}$ 與 Cl' 游子之移運而言.其等於零之工作,爲

$$\delta nRT\log\frac{[Na^{\cdot}]_{II}}{[Na^{\cdot}]_{I}}+\delta nRT\log\frac{[Cl']_{II}}{[Cl']_{I}}=O$$

即
$$\log\frac{[Na^{\cdot}]_{II}}{[Na^{\cdot}]_{I}}=\log\frac{[Cl']_{I}}{[Cl']_{II}}$$

即
$$\frac{[Na^{\cdot}]_{II}}{[Na^{\cdot}]_{I}}=\frac{[Cl']_{I}}{[Cl']_{II}}$$

故
$$[Na^{\cdot}]_{II}]\times[Cl']_{II}=[Na^{\cdot}]_{I}\times[Cl']_{I} \qquad (1)$$

此處在方括弧內之符號,乃代表以公錢游子數(Gram ion,最簡單之概念,即認爲游子之個數,蓋游子之個數,與公錢游子數成比例也.)計算之濃度.

其兩邊電距 potential 仍相同,因移運時之 $Na^{\cdot}$ 與 Cl' 相等也.

若以同樣之方法應用於未經電析之 $NaCl$ 分子,則得

$$\delta nRT\log\frac{[NaCl]_{II}}{[NaCl]_{I}}=O$$

故
$$[NaCl]_{II}=[NaCl]_{I} \qquad (2)$$

再以(2)除(1)則爲

$$\frac{[Na^{\cdot}]_{II}\times[Cl']_{II}}{[NaCl]_{II}}=\frac{[Na^{\cdot}]_{I}\times[Cl']_{I}}{[NaCl]_{I}}$$

即 $\frac{[Na^{\cdot}]\times[Cl']}{[NaCl]}=\text{Constant}.$

是無論在 I 室或在 II 室,此游子與分子之比例皆不變.亦即質量動作之定律也.(Law of mass action) 然試驗電傳率之結果,I 室與 II 室中二者之比例並非不變,即(1)(2)兩公式中,至少必有一個爲不符.東耐以爲不符之處在(2)公式中.其所以有此不符者,蓋由於 R 游子之存在也.故 $[NaCl]_{II}\neq[NaCl]_{I}$, 而 $[Na^{\cdot}]_{II}\times[Cl']_{II}=[Na^{\cdot}]_{I}\times[Cl']_{I}$ 仍爲正確.但 I 室中與 II 室中之 $[Na^{\cdot}]$ 之濃度不相等,因 $Na^{\cdot}$ 游子乃從 NaR 與 $NaCl$ 二者電析而來非僅由 $NaCl$ 電析而來也.於是而欲維持(1)公式之相等,則 I 室中與 II 室中之 Cl 游子亦必不相等.今再加以說明如下.

今試假定 (a)NaR 與 $NaCl$ 均爲甚淡之溶液,其分子完全電析,(b) I 室中與 II 室中之體積相等,則可計算其在平衡時兩邊游子不相等之分量如下.

原來狀況				平衡狀況				
$Na^{\cdot}$	R'	$Na^{\cdot}$	Cl'	$Na^{\cdot}$	R'	Cl'	$Na^{\cdot}$	Cl'
C_1	C_1	C_2	C_2	C_1+x	C_1	x	C_2-x	C_2-x

此處 C_1C_2 爲以公錢游子數計算之濃度, x 爲 $Na^{\cdot}$ 或 Cl' 游子自 II 室移至 I 室之數.

故 $\frac{x}{C_2}\times100$ 爲自 II 室移至 I 室之 $NaCl$ (已電析的)之百分數.

$\frac{C_2-x}{x}$ 爲在平衡時 $NaCl$(已電析的)在兩室中之分配比例.

於是公式(I) $[Na^{\cdot}]_I \times [Cl']_I = [Na^{\cdot}]_{II} \times [Cl']_{II}$ 可以寫爲

$$(C_1+x)x=(C_2-x)^2$$

故 $$x = \frac{C^2}{C_1+2C_2}$$

故 $$\frac{x}{C_2}\times 100=\frac{C_2\times 100}{C_1+2C_2}$$

$$\frac{C_2-x}{x} = \frac{C_1+C_2}{C_2}$$

如果 C_2 比 C_1 爲甚小之數,卽 II 室中之 $NaCl$ 甚淡,而 I 室中之 NaR 甚濃,則可寫爲

$$\frac{x}{c_2}=\frac{c_2}{c_1} \qquad \frac{c_2-x}{x}=\frac{c_1}{c_2}.$$

試取一具體數目言之,C_1 爲 100, C_2 爲 1,則 $\frac{x}{c_2}$ 爲 $\frac{1}{100}$.是 II 室中之 $NaCl$,僅有百分之一穿過薄皮而至 I 室也.若 C_1 比較 C_2 爲甚小之數,則可寫爲

$$\frac{x}{c_2}=\frac{1}{2} \qquad \frac{c_2-x}{x}=1$$

試取一具體數目言之,C_1 爲 1, C_2 爲 100, 則 $\frac{x}{c_2}=\frac{50}{100}$ 而 $\frac{c_2-x}{x}=1$,是平衡時兩邊之 $NaCl$ 相等也.

凡平衡者,不論自何方向皆可抵到者也.若 NaR 與 $NaCl$ 原來皆在 I 室之中,而 NaR 甚多,則所有甚少的 $NaCl$, 亦必幾乎完全穿過薄皮而入 II 室中也.此結論之要點,卽在膠體游子對於薄皮之通透性之改變.在上例中,薄皮對於

$NaCl$，本容有出入之自由.然因有 NaR 在一邊,而使 $NaCl$ 祇能往一方向 —— 離開 NaR 之方向 —— 而行動.是乃成爲一邊通透之現象也.試以腎之分泌而言,綠化鈉乃自淡溶液而往濃溶液中進行,——由血往尿,或亦因血中有鈉的有機鹽,可以發生此處 NaR 之作用也.

B 薄皮之水析的作用

原來狀況		平衡狀況	
$Na\ R$	淨水	$Na^{\cdot}\ H^{\cdot}\ R'$	$Na^{\cdot}\ OH'$
I	II	I	II

今有膠體有機鹽 NaR 溶液與淨水,中有一薄皮隔之.如前.Na 游子,及水分子,及 H 游子與 OH 游子,可以自由出入,而 R 膠體游子不能通過.吾人試推測其應得之結果如何.因薄膜可通過 Na,而不能通過 R，故 Na 游子單獨穿過薄皮而至淨水之中.然二室之全部與各部,皆在電的中和狀態之中.故凡有若干戴正電之 Na 游子通過之時,必有同數的戴負電的 OH 游子同時通過.然 OH 游子必自水之電析而發生,故凡有 OH 負游子自 I 室穿入 II 室之時,必有同數 H 正游子自 II 室穿入 I 室之中.故 II 室中成爲有基性,I 室中成爲有酸性.若此 H 游子與 I 室中之膠體有機酸根 R，成爲非電析的,或爲電析度甚小的化合物,則 H 游子減少.於是必更需要水之電析以補充之.故 OH 游子又加多.換言之,即水析之程度更加高也.今再從公式推之如下.

在平衡狀態之中,上節業已說明,

$$[Na^{\cdot}]_{II}\times[OH']_{II}=[Na^{\cdot}]_{I}\times[OH']_{I}$$

故

$$\frac{[Na^{\cdot}]_{I}}{[Na^{\cdot}]_{II}}=\frac{[OH]_{II}}{[OH]_{I}} \tag{1}$$

今更依其濃度計算之,

原來狀態			平衡狀態				
$Na^{\cdot}$	R'	淨水	$Na^{\cdot}$	$H^{\cdot}$	R'	$Na^{\cdot}$	OH'
C_1	C_1		c_1-x	x	c_1	x	x
I		II	I			II	

此處 x 爲自 I 室穿至 II 室之 Na 游子分量. (其單位當然與 C 同)故(1)公式可寫爲

$$\frac{c_1-x}{x}=\frac{x}{[OH]_{I}} \tag{2}$$

此處 $[OH]_{I}$ 爲 I 室中 OH 游子之濃度,爲上表所未列者.但水之電析常數爲 K_w,(約爲 10^{-7})故 $[H][OH]=K_w$. 今 I 室中之 H 游子之濃度爲 x, 故 $[OH]_{I}$ 爲 $\frac{K_w}{x}$.將此數代 $[OH]_{I}$ 於(2)式中,則得

$$\frac{c_1-x}{x}=\frac{x\times x}{K_w}$$

故　$x^3=K_w(c_1-x)$

若 x 與 c_1 相比爲數甚小,則可寫爲

$x^3=K_w\ C_1$

即　$x=\sqrt[3]{K_w\ C_1}$

此公式表示,當 C_1 增加之時, x 亦增加,但如 C_1 之立方根,爲甚緩耳. x 爲 Na 游子穿過薄皮之分量,亦即爲原來膠

體鹽水析之分量也.若 II 室之水之體積增加,大於 I 室溶液之體積,至於 V 倍,則上表中 II 室中之 $Na^{\cdot}$ 及 OH' 游子之在平衡時之濃度,非爲 x 而爲 $\frac{x}{v}$.於是所得之(3)式,當爲

$$x=\sqrt[3]{K_w v^2 C_1} \tag{4}$$

設使(3)式中之 C_1 與(4)式中之 C_1 雖相同,而(4)式中之 x 比(3)式中之 x 必較大,換言之,卽當 II 室淨水體積增加之時,I 室中之膠體有機鹽之水析程度爲更高也.其尤可奇者,此理論開始卽假定 NaR 爲完全電析的.完全電析者,乃强酸根與强基根化合而成之鹽之性質也.以完全電析者,尙有水析之現象發生,若其一根爲弱者,(而且此處 R 所代表者皆爲弱酸根.) 則此鹽之水析程度更高矣.

上述推論之結果,皆已經試驗證明者.夫一邊爲膠體有機鹽,一邊爲淨水,必爲生物細胞或體素常遇之狀況,而植物逢此機會之時爲尤多.由此言之,凡含有 NaR 或 KR 之細胞或體素,其外邊相近處之水,必略具有酸性也.

C　正負電子之選擇的通透. 設有一薄皮於此,其一邊爲 NaR, 其一邊爲 KCl, 兩邊無一相同之游子.但惟 R 游子不能通過.設兩邊之體積相等,而皆爲完全電析的,其原來狀態與平衡狀態之兩邊之濃度如下表.

原來狀態

$Na^{\cdot}$	R'	$K^{\cdot}$	Cl'
C_1	C_1	C_2	C_2
I		II	

平衡狀態

$Na^{\cdot}$	$K^{\cdot}$	Cl'	R'	$K^{\cdot}$	$Na^{\cdot}$	Cl'
C_1-z	x	y	c_1	c_2-x	z	c_2-y
I				II		

因爲兩邊俱在電的中和狀況之中.故自 I 室穿入 II 室之 $Na^{\cdot}$ 正游子,必等於自 II 室中穿入 I 室中之 $K^{\cdot}$ 正游子減去自 II 室中穿入 I 室中之 Cl' 負游子.(三者均爲單價的)故 $z=x-y$. 用同樣的熱動學的推求,其平衡標準如下式.

$$\frac{[Na^{\cdot}]_I}{[Na^{\cdot}]_{II}}=\frac{[K^{\cdot}]_I}{[K^{\cdot}]_{II}}=\frac{[Cl']_{II}}{[Cl']_I}=R$$

試以實在濃度代入,則爲

$$\frac{c_1-z}{z}=\frac{x}{c_2-x}=\frac{c_2-y}{y}=R$$

又　$$z=x-y$$

從上列四等式中,可求得

$$R=\frac{c_1-c_2}{c_2}$$

此 R 卽各游子在平衡時在二室中分布之比例數也.試取一具體數目而言,c_1 爲 100, c_2 爲 1,則自原來狀況至平衡狀況之時,經過下列的變遷.

II 室中原有的 $K^{\cdot}$ 游子,有百分之九十九穿過薄皮而至 1 室中.

II 室中原有的 Cl' 游子,僅有百分之一穿過薄皮而至 I 室中.

I 室中原有的 $Na^{\cdot}$ 游子,亦僅有百分之一穿過薄皮而至 II 室中.

此結果之可奇者,有二點.(一) K 與 Na 原爲同類的游子,今則 $K^{\cdot}$ 幾乎完全穿過薄皮而左行,而 $Na^{\cdot}$ 幾乎完全不能穿過

而右行.K與Cl'除化學性質與正負電荷不同外,其他性質,如原子價,體量,游子速率等,亦大半相同,今則$K^{\cdot}$幾乎完全穿過薄皮,而Cl'則幾乎完全不能穿過薄皮.是皆膠體酸根R之不能通過之性質爲之也.若KCl原與NaR同在I室之中,其結果亦復相同.因平衡可自任何方向抵到也.但在此處則Cl'游子幾乎完全被驅逐穿過薄皮,而$K^{\cdot}$游子幾乎完全被扣不能穿過耳.如是,則等於有選擇通透之能力.而且依NaR與KCl二者之同在一邊或不同邊,而可以改變游子穿過之方向也.此就膠體游子爲負電者而言也,若膠體游子爲正電子,則所發生之現象,恰爲與上列者行動相反,但原理相同也.

D　膠體有機鹽之滲透壓力.　薄皮者爲權量滲透壓力必用之器具.若NaR夾有$NaCl$,而以薄皮權量其滲透壓力,不能得真正滲透壓力,因$NaCl$穿過薄皮而至對面發生方向相反的壓力,可以抵消NaR壓力之一部或全部也.

原來狀態

$Na^{\cdot}$	R'	Cl'	淨水
C_1+C_2	C_1	C_2	
I			II

平衡狀態

$Na^{\cdot}$	R'	Cl'	$Na^{\cdot}$	Cl'
C_1+x	C_1	x	C_2-x	C_2-x
I			II	

若以NaR(例如康哥紅)之水溶液,中夾有$NaCl$者,置於I室之中,II室中爲淨水.而以薄皮權量其滲透壓力.至平衡時,I室中之$NaCl$,穿至II室,而發生與NaR相反之滲

透壓力.故所量得者,非真正 NaR 之滲透壓力也.夫 NaR 之分子重量甚大,其滲透壓力之小,乃當然者.然平常權量此項壓力之時,往往有他項無機鹽雜於其中,而以天然蛋白爲尤甚.(例如雞卵蛋白中有鹽.)故所量得的結果,其小,爲過分耳.

試假定 NaR 與 $NaCl$ 皆爲完全電析的,而二室之體積相等.以 P_0 代表 NaR 之真正滲透壓力,以 P_1 代表所量得的 NaR 之滲透壓力,以 P 代表 II 室中 $NaCl$(來自 I 室者)之反對滲透壓力.

則
$$P_1 = P_0 - P \qquad (1)$$

依氣體定律而言,$PV=RT$. 以此定律應用於淡溶液中,因 $C=\frac{1}{V}$, 故 $P=CRT$. 此處已假定爲完全電析者,故

$$P = 2CRT.$$

故
$$P_0 = 2C_1RT.$$
$$P = 2(C_2-x)RT - 2xRT.$$
$$= 2(C_2-2x)RT.$$

故(1)式可寫爲

$$P_1 = 2C_1RT - 2(C_2-2x)RT$$
$$= 2RT(C_1-C_2+2x)$$

故
$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{2RT(C_1-C_2+2x)}{2C_1RT}.$$
$$= \frac{C_1-C_2+2x}{C_1}.$$

因
$$x = \frac{C_2^2}{C_1+2C_2}\text{(見上 A 節)}.$$

故
$$\frac{P_1}{P_0}=\frac{C_1-C_2+\dfrac{2C_2^2}{C_1+2C_2}}{C_1}$$
$$=\frac{C_1-C_2}{C_1+2C_2}.$$

如 C_1 比 C_2 爲甚小數,則 $\frac{P_1}{P_0}=\frac{C_2}{2C_2}=\frac{1}{2}$. 是所量得的膠體鹽之滲透力,等於其真正滲透壓力之一半也.如 C_2 比 C_1 爲甚小數,則 $\frac{P_1}{P_0}=\frac{C_1}{C_1}=1$,是所量得的膠體鹽之滲透力,卽爲其真正滲透壓力,此理之自然者也.

由此可見晶體電析溶液雜於膠體電析溶之中,因薄皮之存在,後者減少前者之滲透壓力.有游子相同者,如 NaR 與 $NaCl$, 固如此,卽無游子相同者,如 NaR 與 KCl, 亦如此也.且膠體鹽之滲透壓力本甚小.故少數晶體溶液,可使消滅其滲透壓力.例如康哥紅染料中,如雜有百分之十三 $NaCl$, 其滲透壓力卽幾等於零也.滲透動作爲生物界重要工作之一,而無機鹽之攙雜,亦極普通.故此項現象之發見於生物界中,亦應爲常見之事也.

E 薄皮電距 Electropotential 若一薄皮左右之溶液發生不相等的游子之分配,當其在平衡狀態之時,左右有電距高低不同.試依下例求之.

原來狀態				平衡狀態				
$Na^{\cdot}$	R'	$Na^{\cdot}$	Cl'	$Na^{\cdot}$	R'	Cl'	$Na^{\cdot}$	Cl'
C_1	C_1	C_2	C_2	C_1+x	C_1	$+x$	C_2-x	C_2-x
I		*II*		*I*			*II*	

設在平衡之時.I室溶液與薄皮相接之處之電距爲π_1, II室溶液與薄皮相接之處之電距爲π_2.此電距皆依正電爲標準計算.而π_2高於π_1.設溫度不變,有極少分量$F\delta n$(F爲每個游子所戴之電)正電自II室移至I室之中,依熱動學第一定例,其電的工作爲$F\delta n(\pi_2-\pi_1)$.同時必有$p\delta n\,Na^{\cdot}$正游子自II室移至I室,$q\delta nCl'$負游子自I室移至II室.(以發見上項變遷時之電流爲一,電流者爲正負二游子所傳者也.p爲$Na^{\cdot}$正游子所傳之部分,(卽分數)q爲Cl'負游子所傳之部分.故$p+q=1$. p與q卽$Na^{\cdot}$與Cl'二游子各自的移動數(Transport numbers)也.此處之最大滲透的工作,爲

$$p\delta n\,RT\log\frac{[Na^{\cdot}]_{II}}{[Na^{\cdot}]_{I}}+q\delta n\,RT\log\frac{[Cl']_{I}}{[Cl']_{II}}.$$

因此組體乃在平衡狀態之中,上述滲透的工作,必有電的工作以抵消之.其可以抵消此滲透的工作者,必與此滲透的工作之方向相反,卽與上述$F\delta n(\pi_2-\pi_1)$電的工作之方向相反,是爲$F\delta n(\pi_1-\pi_2)$.故上述二項假定的工作必相等.

$$F\delta n(\pi_1-\pi_2)=p\delta n\,RT\log\frac{[Na^{\cdot}]_{II}}{[Na^{\cdot}]_{I}}+q\delta n\,RT\log\frac{[Cl']_{I}}{[Cl']_{II}}. \qquad (1)$$

但在平衡之時,吾人已知

$$\frac{[Na^{\cdot}]_{II}}{[Na^{\cdot}]_{I}}=\frac{[Cl']_{I}}{[Cl']_{II}}=\lambda \qquad (2)$$

在電析溶液之理論中,吾人又知

$$p+q=1 \qquad (2)$$

故(1)式成爲

$$F\delta n(\pi_1-\pi_2)=p\delta n\,RT\log\lambda+q\delta n\,RT\log\lambda$$

$$=(p+q)\delta n\,RT\log\lambda$$

$$=RT\,\delta n\log\lambda \qquad (4)$$

故 $$F(\pi_1-\pi_2)=RT\log\lambda \qquad (5)$$

故 $$\pi_1-\pi_2=\frac{RT}{F}\log\lambda \qquad (5)$$

依乎衡狀態之表言之,(2)式可寫爲

$$\lambda=\frac{C_2-x}{C_1+x}=\frac{x}{C_2-x} \qquad (6)$$

因 $$x=\frac{C_2^2}{C_1+2C_2}$$ (見 A 節)

故求得 $$\lambda=\frac{C_2}{C_1+C_2} \qquad (7)$$

今二室相差之電距,卽薄皮左右之電距,爲 $\pi_2-\pi_1$. 試以 E 代之,則

$$E=\pi_2-\pi_1=\frac{RT}{F}\log\frac{1}{\lambda}=\frac{RT}{F}\log\frac{C_1+C_2}{C_2} \qquad (8)$$

$$=\frac{RT}{T}\log\left(1+\frac{C_1}{C_2}\right).$$

此處 R 爲氣體常數,(以熱之單位計算爲 2 啶,以電之單位計算,爲 0.82 volt conlomb. 此處須以電的單位計算也.) 爲 0.82, T 爲絕對溫度,普通爲 $290^\circ C$, F 爲 96540 conlomb. 又 $\log 1=0$ 故(8)式成爲

$$E=\pi_2-\pi_1=0.058\log\frac{C_1}{C_2} \qquad (9)$$

如 C_2 比 C_1 小,則 E 隨 C_1 之增加而亦增加.如 C_1 比 C_2 小,則當 C_1 逐漸減少之時,E 卽漸趨於零,此乃自然之理.因 C_1 爲

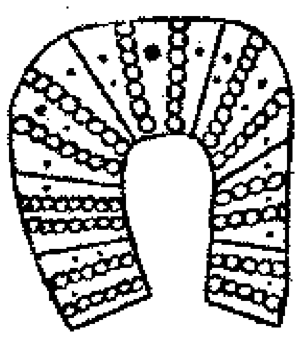
零之時,卽 I 室中無 NaR, 故 II 室中之 $NaCl$ 平均分配於二室之中,無不相等的游子之分配,故無薄皮電距之發生也.

凡此亦皆已經試驗證明者.此理論於膠體物質之戴電的現象,必有關係.因東耐薄皮之理論,其要點在於不相等的游子之分配,並不在於薄皮之本身.縱無薄皮存在,但須兩邊有不相等的游子之分配,則電距之現象仍能發生也.膠體溶液中析解物與析解媒二位相中可有不相等的游子之分配,故發生戴電的現象.如此則所謂電的雙層之理論 Electrical double layer 可以取消矣.

總論　液體通透薄皮之現象,爲物理及化學中之常見者.而細胞與體素之通透,尤爲生理學中之重要問題,其情形頗爲複雜.或在不同舉例之中,由於同一因子之動作,或在同一舉例之中,由於不同因子之共同動作.其原於篩漏之因子者,小者過而大者留,乃其最簡單者.然普通溶媒皆爲水,而多數物質溶解在水中時,皆可發生水化作用,而成帶水之團體.此帶水團體之中心,或爲分子集合體,或爲單獨分子,或爲游子.有一游子而帶六七個水分子者,故其質量與體積之加大可知.此種體積之增加,減少其行動之速率,此已經試驗證明者.同時亦必減少其通透性,而影響及於篩漏之動作也.又質量大而個數少者,其滲透壓力小,故溶解物,若經水化而發生反電析或分子凝結之現象者,其溶媒之滲透,亦必減少也.

然就〔凡溶解於 *A* 皆能通過 *A* 〕之理論而言,溶媒之通過薄皮,由於薄皮與溶媒發生溶解之作用.若溶媒爲水,是卽薄皮亦可少許溶解於水也.又如薄皮可以發生水化作用,而對於溶解物不發生化變者,則亦必容許水之通過,或亦卽選擇的微管吸力之原因也.

至於一邊通透之薄皮,惟以特殊構造之理論解釋之爲最完善.且凡可以改變油類之乳狀性質,或蛋白之明膠式的性質者,皆可消毀一邊通透之特點,是亦其明證.若細胞之一部有此構造,則一部有一邊通透之性質.若全部有此構造,則全部有一邊通透之性質.若使水穿入其中,則必澎漲至抵外牆時方止.若一體素中之細胞,其漏斗式之構造,皆依同一方向而排列,(如圖)則此體素必有一邊通透之性質也.



至於選擇的通透,卽選擇的吸收,尤爲生物界中常見而難經解釋的問題.以前學子皆歸功於生命力,自有蛋白鹽類之非電析性,與東耐薄皮理論之產生,亦可略窺其底蘊矣.

由東耐理論而演繹所得之結果甚多.倘有未能應用於細胞或體素之通透性之解釋者,然遲早必能奏效於此途,乃可斷言者也.

參考書　Robertson--Principle of biological chemistry

Mathew--Physiological Chemistry

Bayyliss- Enzyme reactions

Lewis- System of Physical Chemistry

Taylor- Colloid Chemistry

植物生理學史略

(續第三卷第一期)

張 珽

第 七 章

新陳代謝之研究——下

合成產物之利用

植物合成產物之運轉及儲藏,其研究情形已詳前章.茲請進述關於儲藏中合成產物之利用的研究史.

儲藏產物之受利用,依原理言,當有兩步變化: 第一步由複雜而不能溶解之儲藏狀態,變為可溶性物質.此種作用,普通謂之消化 Digestion; 消化例由酵素 Ferments or Enzymes 司之,故消化作用實際上亦即醱酵作用 Fermentation. 消化後所生成之簡單可溶性養分,更由各種器官各依其需要,復組成之為新體質,或則消費之而取得其中所涵潛在勢能.關於後一種利用方法之研究,將另以一章專述之.茲所當詳者,即為醱酵作用之研究及消化產物之再合成.

第一節 各種植物酵素及其作用之發現史

I. 碳水化合物分解酵素

A. 糖化酵素 Diastase:

1. 糖化酵素之檢出:

a. Payen 及 Persoz 1833 年之頃就發芽大麥粒作研究,始檢出糖化酵素之存在,而證明其與植物之新陳代謝作用有關.又謂馬鈴薯之塊莖中,亦有此物.

b. Von Gorap-Besanez 1874 年始復注意此酵素,而在多種種子中檢出之.

c. Kosmann 1877 年見之於芽及葉.

d. Baranetzky 1878 年又在馬鈴薯塊莖中獲見此酵素,且在芽及其他綠色器官中得見其存在,故遂下推斷以爲凡植物組織中必皆含有.

e. Krauch 1879 年在葉及苗中發現.

f. Duclaux 1883 年在麴菌 Aspergillus 體中發現此種酵素.菌類體中無澱粉,在理原不需糖化酵素之存在.唯據 Errera (見前章)次年之發現菌類能儲蓄肝澱粉,則糖化酵素之存在蓋無足怪.

g. Brasse 1884 年又在高等植物體中檢出,且對於其作用有精密之研究.

h. Kieldahl 1889 年, Brown 及 Morris 1890 年見大麥麥粒尙未發芽以前卽已含有糖化酵素.

i. Wortmann 1890 年始確定糖化酵素在葉中之存在,而指出其與同化澱粉之運輸有關.

j. Haberlandt, 又 Brown 及 Morris 兩人,同在 1890 年,不謀

而合,推定糖化酵素之生成方式與分佈情形,適與動物酵素之情况相同,自某一處生成後,運至適當地方,乃起作用.大麥及稞麥(Rye)之種子中,在萌芽之際,除胚乳中含有定量之糖化酵素外,同時糊粉粒層 Klebeschicht (即外皮內之一層)細胞及吸收器 Scutellum 之表皮細胞中,忽分泌多量之糖化酵素,穿達澱粉儲藏組織,促起其消化.據 Borown 及 Morris之研究,則糖化酵素之生出,爲原形質之一種固定的分泌.又植物界中糖化酵素當有兩種,其成分各不相同,功用則略相一致.

k. Greers 1893 年發現大麥之花粉粒中有糖化酵素,且其存在與後來花粉管之發芽有關.

l. Grüss Hansteen 1894年,Puriewitsch 1896年證明 Brown 及 Morris 糖化酵素起自原形質之分泌之學說.

m. Bonrguelot 及 Hérissey 1895 年證明 Duclaux 菌類體中有糖化酵素之發現.

n. A. Meyer 1895 年研究澱粉粒之形成時,曾附帶注意於糖化酵素之分佈,結果發現葉之細胞中,此種酵素有一定存在之地點可以檢出. Meyer 以爲此種分佈特密之處不在原形質而在葉綠體體質最緻密之處.若在非綠色部分,則以白色體體質緻密處爲其分佈地.且以凡色素體中體質團集最密之地位,其內容所包之澱粉受銷蝕亦最大爲證明.

O. Salter 1896 年證明 Meyer 之發現,且更舉出謂澱粉粒貼近色素體物質處,糖化之程度遙較其他部分爲深,可資佐證.

2. 糖化酵素作用之探究:

a. Payen 及 Persoz 發現糖化酵素之存在時,同時卽曾檢得其作用後所生成之結果物中有糖及某數型之糊精 Dextrin.

b. Muscalus 1860 年發現糖化酵素作用時,同時有糖及糊精生成.

c. Griesmeyer, O'sullivan, Brücke 等在 1871 年至 1872 年之間,各自研究糖化酵素之作用,結果均發現其作用產物中至少當有兩種糊精,而所得之糖則爲麥芽糖 Maltose.

d. Muscalus 及 Grüber 1878 年聯合研究之發表,推定澱粉受糖化酵素之作用時,水解如次:

澱粉 + 水 ⟶ 麥芽糖 + 糊精:

糊精 + 水 ⟶ 麥芽糖 + 另一種較簡單之糊精:

最簡單之糊精 + 水 ⟶ 麥芽糖.

e. Brown 及 Morris 1885 年就此假定略加修正,遂爲今日公認定論.

f. Green 1893 年以碘液試驗正在生長中之花粉管,得見生活細胞中澱粉之崩解經過亦與在體外作用時之歷程相同.

g. Leclere du Sablon 1898 年在多種單子葉植物之鱗莖球莖中亦有同一之發現.

B. 菊糖酵素 Inulase

1. Greens 1887 年始明定菊糖 Inulin 在水解時必需有一種酵素之存在,Green 卽名之為菊糖酵素.最初檢出此酵素之處,為菊芋 Helianthus tuberosum 之發芽中根莖.作用於菊糖後之結果產物,則為一種還元糖與一種中間物質.

2. Bourquelot 1893 年得見此酵素於麴菌中與其他數種酵素混在.Bourquelot 曾析得較純之物,因得檢知其作用結果所生還元糖為果糖.

3. Green 1900 年在棉棗兒屬 Scilla 及 Leucojum 之發芽球莖中亦檢得此酵素.

C. 細胞膜質酵素 Cytase. 細胞膜質雖為植物界中最常見最普通之一種物質,唯儲為貯藏養分,則唯見之於棕櫚科多種種子內胚乳之增厚細胞膜及禾本科之數種種子胚乳膜,故除寄生於高等植物之寄生植物外,高等植物本身含此者僅限於此兩類植物.

1. De Bary 1886 年由碗菌 Peziza 之研究始定出細胞膜質之消化為一種酵素之作用.

2. Marshall Ward 1888 年始將此酵素生成之經過及作用之情形定出.Ward見寄生於百合屬 Lilium某種之 Botrytis,其菌絲分泌多量之酵素,以溶解寄生之細胞膜.

3. Kean 1890 年, Grüss 1896 年在其他多種菌類體中亦曾發現此酵素.

4. Brown 及 Morris 1890 年始在高等植物體中發現:大麥之萌芽種子,在澱粉尚未分解以前,與胚之吸收器細胞(見上)相接之細胞,其膜壁忽起溶解,經兩氏之硏究,始斷定其爲細胞膜質酵素之作用.後此 Brown 及 Escombe 共同工作,發現糊粉粒層細胞實爲供給此種酵素之主要來源.

5. Gardiner 1897 年硏究 Tamus 胚乳之增厚細胞膜,得有同樣結果.

D. 其他消化堅硬碳水化合物之酵素:

1. 棕櫚科植物之硬胚乳:

a. Sachs 1862 年卽曾提出謂此種硬胚乳在發芽生成時之受利用,必有酵素之作用在,然未能檢出其酵素.

b. Greens 1887 年始定出戰捷木屬 Phoenix 蒲葵屬 Livinstonia 胚之吸收器發育時,則胚乳細胞之增厚細胞膜卽逐漸溶解而生成還元糖.又此兩屬植物胚之吸收器,其表細胞之構造,與大麥胚中之 Scutellum 相似.

c. Newcombe 1899年始在戰捷木之發芽種子中析得此種酵素,且同時在白羽扇豆 Lupinus albus 及豌豆 Pisum 蕎麥 Fagohyrum 之子葉中檢出其存在.

2. Effront 1897年見 Carob bean (Ceratonia silliqua) 之發芽種子中有能消化硬碳水化之酵素,卽名之曰 Caroubinase.

3. 豆類中之碳水化物分解酵素.

Bourquelot 及 Hérissey 1899 年在多種豆類種子中得見一種酵素,能分解硬細胞膜質爲多種單糖如甘露蜜糖 Mannose 及分解乳糖 Galaclose 等.兩氏名之曰 Seminase.

4. 木材質酵素 Hadromase.

Czapek 1899年謂寄生於堅木木質細胞之菌類,具有一種能溶解木材質之酵素,名 Hadromase 者,與細胞膜質酵素共存.

E. 轉化酵素 Invertase:

1. 發現之經過:

a. Claude Bernard 1849 年在哺乳動物之消化道中發現此酵素後,即注意於植物中含蔗糖極富之蒼蓬 Beta vulgaris, 結果不但於第二年塊根萌芽時檢出其存在,且更製得其浸出液.

b. Berthelot 1860 年就釀母菌及酒精醱酵之情形作研究,在釀母菌細胞中浸得轉化酵素,名之曰 "Ferment glucosique".

c. Bechamp 1864 年在數種菌類體中及數種花瓣組織 (Robinia viscosa爲尤著)中發現其存在.

d. Donath 1875 年始命之曰 Invertin.

2. 高等植物體中分佈之研究:

a. Kosmann 1877 年見之於芽中.

b. Kjeldahl 1878 年見之於大麥芽之幼根.

c. Van Tieghem 1886 年見之於花粉粒.

d. Brown 及 Morris 1893 年證明尋常綠葉多含有轉化酵素,實爲最重要之一種發現.

f. Gonnermann 1899 年始證實 Brown 及 Morris 之發現.

3. 轉化酵素本身之性質:

O'Sullivan, Tompson 等 1890 年就轉化酵素本身作分析,結果決定其爲碳水化合物及蛋白質以定比結合而成,此爲研究酵素本身組成之第一聲.

F. 來芽糖酵素 Maltase:

1. Cuisinier 1886 年在麥芽及其他穀類種子中檢得其存在.

2. Geduld 1891 年在玉蜀黍之種子中見之.

3. Bourquelot 1893 年見之於麴菌 Aspergillus, 1895 年更在釀母菌 Saccharomyces 中發見之.

G. 乳糖酵素 Lactase:

Bejerincke 1890 年在乳酒 Kaffir 之釀造微生物體中檢出.

H. 棉實糖酵素 Raffinase, 菌糖酵素 Trehalase, 樹膠糖酵素 Melizitase: 皆 Bourquelot 1893 年所發現.

II. 糖原質分解酵素 Glucosidase:

A. 乳化酵素 Emulsin:

1. Liebig 及 Wöhler 1837 年時卽已發現其存在,且推定其對於苦扁桃素 Amygdalin 作用.

2. Thomé 1865 年,Portes 1877 年, Johannsen 1887 年始詳究其分佈.

3. Guignard 1890 年之研究,始定出其在多種植物之組織中所佔之特殊位置.

B. 芥辣酵素 Myrosin:

1. Bussy 1839 年所發現.

2. Guignard 1890 年作有極詳盡精細之研究,定出其爲十字花目 Crusiferae 及相關各目中之重要酵素.

C. 其他糖原質酵素: 關於此一方面之研究,以 Bourquelot 及其羣弟子之工作爲最有成績.在菌類體中,曾檢出多種糖原質分解酵素,且定出謂此等植物在常態或在變態中,體中能有多種共同存在.外此之研究與發見,其在 1900 年以前者計有:

1. Marshall Ward 及 Dunlop 1887 年檢出之 Rhamnase.

2. Schneegans 1894 年檢出之 Gaultherase (卽 Betulase).

3. Pottevin 1900 年在麴菌中檢出之鞣質酵素 Tannase.

4. Dunstan 及 Henry 同年之 Lotase.

III. 蛋白質分解酵素 Proteases: 蛋白質水解酵素之發現,肇始於動物界, 1836 年 Schwann 發現 Pepsin,卽爲蛋白質水解酵素發現之始.至 1876 迄 1886 之十年中,

Kühne及其羣弟子之研究出,始有分擘說 Cleavage Theory 以解釋其作用時之狀况. Cohnheim 之發現 Erepsin, 尙在以後,故自 1860 年以迄於 1900 年間,蛋白質之水解始終認爲有兩大類,卽 Peptic(由蛋白質至 Peptone)及 Tryptic (由蛋白質至錏基酸). 在植物生理學方面之研究,自亦不能在此範圍以外.

1. 高等植物體中之發現:

a. Von Gorup-Besanez 1874 年在箭筈豌豆 Vicia sativa, 亞麻 Linum usitatissimum, 苧蔴 Cannabis sativa 及大麥 Hordeum vulgare 之種子中發現有能變 Fibrin 爲 Pepton 之物質,爲植物體中檢出蛋白質水解酵素之始.

b. Green 1886 年又在發芽之羽扇豆種子中發現此種酵素. 1890 年,復在蓖蔴 Ricinus communis 種子中見之.其分解力能達至錏基酸之生成,故以爲當屬於 Trypsin 之一類. Green 用 Fibrin 及其他多種種子中之儲藏蛋白質爲試驗,結果於種子中儲藏蛋白質所經變化,頗有相當供獻.

c. Neumeioter 於 1894 年更發現此種酵素可自罌子粟 Papaver somniferum, 蕪菁 Brassica campestris 及多種穀類種子中浸出析得之.

d. E. Sahulze 1897年始發表謂此等酵素在植物體中作用與體外作用時情景略無差異.在種子中能檢出錏基酸,錏醯基化合物.

e. Würz 1879 年始在萬壽果 Carica papaya 果實及樹汁中發現萬壽果酵素 Papain.

f. Martin 1883 年至 1884 年就 Papain 作詳盡之研究,斷定其爲 Trypsin 型蛋白質分解酵素.

g. Davis, Sharp, 1893年,各就 Papain 作專門研究, Harlay 1900 年亦有所發表.

h. Bouchet 1880 年在無花果 Ficus carica 汁中發現一種蛋白質分解酵素.

i. Hanseen 1883 年研究 Bouchet所發現之酵素,有所發表.

j. Mussi 1890 年有更詳盡之研究,且爲之定名 Cradina.

k. Green 1892 年在甜胡瓜 Cucumis utilissimus 果汁中發現 Cradina, 且定出其爲 Trypsin 型酵素.

l. Chittenton 1894年與其羣弟子複檢 Marcano 1891 年在成熟波羅 Ananas sativus 果汁中所得之酵素,知其亦爲 Trypsin型,名之日 Bromelin.

2. 下等植物體中之檢出:

A. 菌類:

a. Kruheuberg 1882 年之發表.

b. Bonrqueiot 及 Hérissey 1895 年.

c. Hahn 1898 年.

B. 細菌:

a. Bitter 1887 年.

b. Lauder Brunton 1889 年,同年 Mc Fadyan.

c. Fermi 1891 年.

d. Duclaux 1899 年.

IV. 脂肪分解酵素 Esterase or Lipase: 脂肪分解酵素之發現,與油質種子中脂肪類儲藏養分之利用的研究有密切關係,故吾人當先述油質種子中油脂消化情形之觀察:

A. 油質種子發芽時儲藏養分之變化:

1. Sachs 1859年見油質種子發芽時油質減少而澱粉增加,遂誤認油質已變爲澱粉.

2. Freury 1865年以爲油質養分在發芽時變化爲糖而非變澱粉.

3. Muntz 1871 年在發芽之油質種子中有游離脂酸(Fatty acids),遂漸推想及於 Claude Bernard 1849年在動物體中所發現之脂肪分解酵素 Lipase, 能分解脂肪使成脂酸及甘油者.

4. Schützenberg 1876 年見搗碎之油質種子,其水浸出物中有脂酸及甘油 Glycerine 生出.

5. Detmer 由 Schützenberg 之發現,遂又聯想及於 Sachs 之假定,以爲甘油可以生成澱粉.

B. 脂肪酵素本身之發現及其作用情形之研究.

1. Green 1889年在發芽之蓖麻 Ricinus communis 種子胚乳中發現脂肪酵素,其作用之經過,與 Bernard 所發現之動物脂肪酵素了無二致.所生結果物,則爲結晶性之酸性物質及糖,後此皆轉入萌蘗植物體中.

2. Sigmord 1890 年在蕪菁,罌子粟,苧蔴,亞麻之種子中,亦檢得脂肪酵素,證實 Green 之發現.

3. Leclerc du Sablon 1895 年始詳究此種酵素作用所生成之結果產物,而斷定所生糖類計有兩種:其一能使 Féhling 氏試液還元,一則不能.

4. 1899 年 Green 繼續研究,乃知所生還元糖爲葡萄糖,不還元糖爲蔗糖.葡萄糖乃種子中同時存在之轉化酵素作用於蔗糖所生成.在平常體外實驗時脂肪酵素不能分解脂肪使成甘油,但在組織中則絕無甘油之生出,—— 無論萌蘗植物或正在溶解中之胚乳皆不含有.

5. Biffen 1898 年之觀察,頗足以解釋此種現象之一部分. Biffen 謂冬期休眠既久之胚乳細胞,在種子初發芽時,驟起活動,同時其分量遂亦大增,因使其內部營養情形大起變化.

6. Green 更發現原形質之活動能催促新陳代謝作用之進行,因而遂有糖分之分秘.在發芽以前,種子中實無糖可以檢出.唯脂肪經此分解後,其脂酸之一部,所經變化如何,殊不易知耳.

7. 後此有多數發表,證明在萌芽時,胚乳中脂肪能褪變爲 Lecithin, 在胚中形成乳狀態垂 Emulsion, 則脂酸或卽用爲造成 Lecithin 之原料.

C. 菌類體中發現之脂肪酵素: 在某數種菌類之 Mycelia 中檢出脂肪酵素者,有:

1. Gerard 1897 年.

2. Camus 1897 年.

3. Biffen 1899 年.

第二節　消化產物之應用

各種儲藏養分既受消化而變爲較簡單之化合物後,植物究以何種方式利用之,實爲生理學上最重要之一問題.吾人習知所謂儲藏養分云云,初不外碳水化物,脂肪蛋白質等三大類.碳水化合物除一部分爲構成體質所不可少(卽細胞膜中之細胞膜質)者外,其餘則莫不與脂肪同一命運:卽在呼吸中氧化而放出潛勢能,以供活動.換言之,此等物質,不過儲藏勢能之燃料而已,於生命本身之關係,初無重要.至於蛋白質,吾人已審知其爲構成生命物質——原形質——之主要成分,一切生活現象,胥以此爲基礎,倘由蛋白質變爲原形質之經過,吾人能得灼見,則所謂生命之神祕,卽可解決.惜者原形質之爲物,脆弱柔薄,不任處理,故至今猶不能審知其與蛋白質兩者間真正之關係爲若何耳.關於脂肪及碳水化物中儲藏勢能之利用,當於述研

究呼吸現象時詳及之,茲先述此過去四十年中諸學者對於蛋白質轉變爲原形質經過所提假說之概略如次:

I. 氰酸基 Cyanogen radicle 說: Pflüger 1975 年所提之一種假說.据 Pflüger 之意見,原形質與蛋白質實同類之物質,相異者原形質能生活,而蛋白質則無生命耳.生命現象之起,則由於原形質爲不安定之化合物,具有自己崩解 Auto-decomposition 之力量,能固定外間之氧,使與己身成一種分子間化合物,而組成生命物質.此固定之氧,活動力既大,尤使原形質分子不安定而自己崩解之進行愈劇,於是生命以顯.普通蛋白質所以不能顯有此種特殊之自己崩解者,則由於原形質與蛋白質之構造上,有根本上不同之一點在,卽普通蛋白質中之氮原子,恆與氫結合成錏基 Amins NH_2——次錏基 NH=imins 化合物,較爲安定,不易分解;而原形質分子中之氮原子,則皆成氰酸 Cyanogen N≡C——基狀態,碳氮間之三連帶 Triple bord, 有極活躍之化合力,故遂呈極大之不安定現象,普通蛋白質之變爲原形質,當爲一種分子內重排 Molecular rearrangement 之結果,氮原子由錏基態變爲氰基態,脫出氫原子而與碳原子相結合,由是遂使分子內部之潛力(化合張力)驟增,成爲不安定之化合物.

Pflüger 此說,蓋以實驗事實爲根据者:普通蛋白質受酸或鹼或消化酵素之處理,所生崩鮮產物,多爲錏基,錏醯基,

或錏化合物,而生活原形質崩解產物中,氮原子恆與碳原子結合成氰酸基,或如尿素尿酸等極相近似之化合物.至於其餘各種原質原子之排列,兩類殆相同,蓋其崩解產物在此方面則極端相似也.

II. 易變蛋白質說: Loew 1892 年修正 Pflüger 之說而創此種解釋:Pflüger 謂蛋白質與原形質爲相去無幾之物,Loew 亦無異議.惟 Loew 以爲細胞原形質中,除普通之蛋白質外,尙當有極易變化之蛋白質性物質存在,Loew 自稱其與 Bokorny 合作研究之結果,在了無系統之多種(約百廿上下)植物體葉,花瓣,雄蕊,雌蕊,果,根,莖上之樹皮中,皆曾檢得此種易變之蛋白質.在陰處之葉,其所含之蛋白質體,較光線照灼充分之葉爲少;若使植物久處暗中,則此種蛋白質體卽崩解爲錏基化合物.

此種蛋白質,通常蓄藏於空胞中,但細胞質中有時亦可檢得.若以有機鹽基類或其鹽或錏鹽之淡溶液—— 最佳之試藥則爲0.5%之咖啡鹼 Caffeine 或 Antipyrin 溶液,以此種藥液不至殺害原形質也.—— 處理細胞,則此種蛋白質小體卽成小球狀而沉澱,且其沉澱能漸漸總匯爲一.若除去試劑,此沉澱卽漸漸溶解.殺死原形質,此種沉澱卽變硬而不復能溶解.生出後加熱則凝固.在已死之細胞中,決無此種沉澱生出. Loew 及 Bokorny 名此種沉澱曰蛋白質小體 Proteosomes, 謂其中含有 Lecithin, 1899 年曾有詳細記載發表.

Pfeffer及其弟子,對於Loew之假設,反對甚力,以為Loew所謂 Proteosomes, 者,實為咖啡鹼與蛋白質結成之一種化合物.

III. 生母質 Biogen說: 1894年, Verworn 更提出一種假設,謂生活細胞中,除普通儲存之碳水化合物,脂肪,蛋白質而外,尚有一羣特殊化合物在.此羣化合物殆為蛋白質類,極不安定,時起崩解,而吸收外界之原子團以形成新化合物,若細胞死亡,則立卽變性而不可再復.此等物質,卽為生命所寄之處,其分子中含有極易起化學變化及自己分解之原子團,能感應外界之刺戟而起變易.据 Verworn 言,此種易變之複雜化合物,可名曰生母質 Biogen. 生母質與普通蛋白質不同之處,在於其極大之不安定,卽在生活狀態中,猶時有崩解非若普通無生蛋白質不遇細膜之作用時絕不變化者.至由普通蛋白質變為生母質之經過, Verworn 與 Pflüger 泰半同意,以為當由氮原子與碳原子之聯合.普通細胞吸蛋白質之消化產物後,其細胞中原有之生母質立卽作用於此種蛋白質組成單位,使起分子重排,俾碳與氮相連成氰酸狀連結而放出水分子.至於蛋白質中其他原子團,大概皆與生母質相同——由其分解產物之相同上可以推知——故不需再事變化.

IV. Sachs之說: 1880, 1882 兩年, Sachs提出一說,以解釋生命物質之生成;年,復加改正,以期獲得學術界之同情.

据 Sachs 說,植物之葉,在新陳代謝中能生成一類特殊的刺戟性構成質,植物體之每一新部分,無論爲莖爲根爲葉,皆須有此種特殊物質之刺戟始能生成.且刺激根,莖,葉之生成之物質,各各不同,由其在縱軸中之分佈,遂使各部起不同之生長;至此種分化之起因,則在於地心吸力之牽引.

Sachs 此說,了無事實上之根据,全憑臆測以立論.所謂刺戟物質究竟爲何,Sachs亦未能確舉,不過就植物對於化學刺戟之某數種時例的反應着想而推出耳.故 Vöchting1885, 1899—1900年迭有發表,反對其說,Reinke 1897年亦有同情於 Vöchting之論文. Pfeffer 則更於 Pflanzenphysiologie 中祗 Sachs 爲過於忽視植物之"自身調節作用" Auto-regulation,每一種生活現象通常恆由多種因子頡頏合作而起,使各種因子成不同之配合時,結果所生影響往往有著大差異,一種刺戟物質之作用豈能遽盡調節之能事乎?

廣東北江鳥類之研究

任國榮

本文於今年四月間在巴黎博物館月刊上發表,(Bulletin du Muséum Nationale d'Histoire Naturelle, Paris, II série, Tome IV, no, 3, 1932) 早欲譯爲漢文,以享國內同好,徒以湘,黔,桂,等地標本尚須鑑定,乃遲遲至於今日.値玆暑假,因盡數日之力,將原文稍加減刪,以成此篇,並酌錄重要參考書籍,以便欲作更詳盡之研究者,有所依據焉.

一九三二年六月二十日著者誌於

巴黎博物館鳥類研究室

一九三〇年春,廣東中山大學辛樹幟教授遣植物採集隊赴粵之北江,採集植物標本,並兼採脊椎動物.爲期約一年,除採得植物標本若干外,動物標本計鳥類一千九百餘個.每種抽出數個寄余,俾資研究,此文之成,卽根據三百四十六個寄抵巴黎之標本也.在此三百四十六個標本中,共得一百六十種及亞種(註1)不特絕無新發見,且平常品類,亦多不完,惟足以代表地理分佈上之種種特性者則甚多,玆列其最顯著者如下:

Phasianus ellioti Swinhoe.

Macropygia unchall tusalia (Hodgson).

Otus sunia malayensis (Hay).

Merops viridis viridis L.

Pitta nympha melli Stresemann.

Delichon urbica vigrimentalis (Hartert).

Riparia riparia fohkienensis (La Touche).

Hemichelidon sibirica rothschildi Baker.

Authipes olivacea brunneata (Slater).

Tribura thoracica melanorhyncha (Rickett).

Garrulax moniliger melli Stresemann.

Alcippe nipalensis schaefferi La Touche.

Emberiza chrysophrys Pallas.

Oriolus mellianus Stresemann.

此次採集區域,約在東經113度,北緯25度.最高峯超出海面約七千呎.氣候霜雪極稀,夏季約 35°—37° C, 冬季亦常在 +2°—+3℃之間.雨量頗勻.森林面積甚大,多常綠樹,自不失亞熱帶之色彩.德人 Mell 之採集區域與吾儕採集之地大概相同,特有若干峻嶺,則爲氏所未及至耳.

余因巴黎博物館鳥類研究室書籍標本之助,此文乃克草成,而該室教授蒲魯第爾 (Bourdelle) 及伯利和茲 (Berlioz) 二氏,除賜余以工作上種種便利外,並作不倦之指導;法國

鳥學會長德拉古 (Delacour) 及柏林博物館鳥類研究室主任,國際鳥學會長斯德里斯曼(Stresemann)博士,對余之請益,無不詳爲答覆,皆當於此表示謝忱.至於標本製作之精美,性別,採期記載之準確,野外生態紀錄之詳盡,黃季莊及江,唐諸君,皆有力焉.因限於篇幅,採集經過,概不列入.

鸊鷉科 Podicepedidæ

1. 栗頸小鸊鷉 **Podiceps ruficollis poggei** (Rchw.).

Colymbus nigricans poggei. Richenow, Journ. f. Orn., 1902, p. 125: Provinz Tschili, China.

Podiceps ruficollis poggei. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1455 — Delacour et Jabouille. Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 3.

1♂, 1♀, 7, 8 I 1930.——翼: ♂ 108; ♀ 100 mm.

分佈:——我國各地及安南.

"爲廣東北部湖澤中之留鳥."

註 1:—— 本文既在月刊上發表後,始知第94號 Phylloscopus inornatus inornatus 實係廣西標本,而北江之 Phylloscopus borealis borealis 及 Phylloscopus occipitalis coronatus則混入廣西標本中,因取出改正之.又Anthus richardi rufulus 兩標本中,實有一個係 A. r. malayanus, 又分別記載之.故本文實記載一百六十二種及亞種.

鷺 科 Ardeidœ

2. 綠簑鷺 **Butorides striatus connectens**. Stres.

Butorides striatus connectens. Stresemann, Oruith. Monatsb., No. 2, Marz, 1930, p. 48: Yaoschan, Kwangsi. —— Delacour et Jabouille, Oiseaue de l'Indochine, Vol. I, p. 69.

2♂, 15 IV, 10 V 1930; 1♀, 5 VI 1930.—— 翼: ♂, 181, 198; ♀ 176 mm.

分佈: —— 湖南,廣東,廣西,貴州,安南.

3. 小禾鷺 **Txobrychus sinensis sinensis** (Gm.).

Ardea sinensis. Gmelin, S. N., I, p. 642 (1789): China.

Txobrychus sinensis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1259.

Txobrychus sinensis sinensis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 71.

1♂ 14 VI 1930—— 翼: 136 mm.

分佈: —— 印度,緬甸,馬來半島及馬來羣島以至西里伯; 我國南部及安南.

4. 小栗鷺 **Txobrychus cinnamomeus** (gm.).

Ardea cinnamomea. Gmelin, S. N., I, p. 43 (1789): China.

Txobrychus cinnamomeus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1260 —— Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 72.

1♂, 24 V 1930.——翼: 152 mm.

分佈:——印度,緬甸,馬來羣島,菲律賓,西利伯,安南,經我國以至阿穆爾.

"以上鷺科三種,皆喜至稻田及沼澤之地,傍晚則飛息竹林中."

雁鴨科 Anatidæ

5. 綠頭鳧 **Anas crecca L.**

Anas crecca. Linnaeus, S. N., X ed., I, p. 125 (1758): Sweden.——Hartert, Vögel Paläark Fauna, p. 1314——Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 115.

1♀, 14 XI 1930.——翼 170 mm.

分佈:——生殖於歐亞二洲之北部,冬季則向南部而遷移.

6. 尖尾鳧 **Anas acuta acuta L.**

Anas acuta. Linnaeus, S. N., X ed., p. 126 (1758): Sweden.——Hartert, Vögel Paläark. Fauna p. 1325.——Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 117.

1♀, 15 XI 1930.——翼: 240 mm.

分佈:——生殖於歐亞二洲之北部,冬季向南部而遷移,亦可至非洲之北部.

7. 斑背黑頭鳧 **Nyroca marila marila (L.)**

Anas marila. Linnaeus, Fauna Svecica, II ed., p. 39 (1761): **Lapland.**

Nyroca marila marila. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1342. —— Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 124.

1♂, 7 I 1931. —— 翼: 214 mm.

分佈:——生殖於古北極區之北,自冰蘭島以至西利伯之東.冬季南行至非洲,南亞洲,自波斯印度以迄我國及安南.

"江中野鳧,皆交雜成羣,因不易接近,故極難認識.吾儕雖只採得三種,其實決不止此數."

沙鑽科 Scolopacidæ.

8. 普通沙鑽 **Tringa hypoleucos** L.

Tringa hypoleucos. Linnaeus, S. N, X ed., I, p. 149 (1758): Sweden. —— Hartert Vögel Paläark. Fauna, p. 1623. —— Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 143.

2♂, IV 1930.—— 翼: 108 mm.

分佈:——生殖於歐亞二洲之北部及日本,克什米爾及西藏.冬季向溫熱兩帶而南遷.

"極爲普通".

9. 山沙鑽 **Scolopax rusticola rusticola** L.

Scolopax rusticola. Linnaeus, S. N., X ed., I, p. 146 (1758): Sweden.

Scolopax rusticola rusticola. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1651.

—— Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 161.

1 ♂, 23 XI 1930; 1♀ 19 XII 1930.——翼：♂ 199; ♀ 192 mm.

分佈：——生殖於歐亞二洲之北部,日本,我國之北部及喜馬拉雅一帶.冬季南行至非洲,印度,我國之南部及安南.

10.尖尾沙鑽 **Capella stenura** (Bp.)

Scolopax stenura. Banaparte, Ann. Stor Nat. Bologna, IV, p. 335 (1830): Sunda-Island.

Gallinago stenura. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1663.

Capella stenura. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 166.

1♂, 30 IV 1930.—— 翼: 140 mm.

分佈: ——生殖於西伯利亞及亞洲北部之高原中.冬季南行,經印度,我國,安南以至馬來羣島.

"此鳥與山沙鑽皆喜棲草叢及林下陰濕之地,而普通沙鑽則常至河流水邊及泥濘中."

雉 科 Phasianidæ.

11.環頸雉 **Phasianus torquatus torquatus** Gm.

Phasianus colchicus var. *torquatus.* Gmelin, S. N., I. p. 742: (1788): S. E. China.

Phasianus colchicus torquatus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 19

91.

Phasianus torquatus torquatus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 257.

2 ♂, 22 V 1930, 7I 1931; 2 ♀, 7I, 16 III 1931.—— 翼: ♂, 239, 243; ♀, 210, 217 mm

分佈: —— 我國東南部及安南東京之北部.

"北江各地都有之,喜棲多草之山中."

12.白腹雉 **Phasianus ellioti** Swinhoe.

Phasianus ellioti. Swinhoe, P. Z. S., 1872, p. 550: Chekiang, China. —— Cat Birds Brit. Mus. XXII, p. 335.

1 ♂, 12 V 1930.—— 翼: 237 mm.

分佈: —— 浙江,福建及廣東北部.

"極爲稀罕.此標本採自楊梅浪,高度 7,000 呎.

13.白鷴 **Gennoeus nycthemerus nycthemerus** (L.)

Phasianus nycthemerus. Linnaeus, S. N., X. ed., I, p. 159 (1758): China.

Gennaeus nycthemerus nycthemerus. Delacour, et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. I, p. 244.

1 ♂, (成長) 23 IV; 1 ♂ (幼), 27 XII; 1 ♀ (成長), 22 XII 1930. —— 翼 ♂ 249—265; ♀ 232 mm.

分佈: —— 浙江,福建,廣東,廣西,雲南,安南,東京之東北部.

附記: —— 白鷴之亞種有五,除標準型外,其餘四亞種之

地理分佈界限如下:

G. n. rippoui Sharpe. —— 撣部,緬甸,雲南,安南之北部.

G. n. berliozi Del. et Jab. —— 安南中部.

G. n. beli Oustalet. —— 安南南部.

G. n. whiteheadi O.-Grant. —— 海南島.

14.竹鷄 **Bombusicola thoracica thoracica** (Temm.).

Perdix thoracica. Temminck, Pig. et Gall, III, p. 335 723 (1815): Chine.

Bambusicola thoracica thoracica. Hartert, Vögel Palӓark. Fauna, p. 1944.

2♂, 3V, 23 XI 1930; 2♀, 2IV, 15 XII 1930.—— 翼: ♂ 134, 146; ♀ 130, 134 mm.

分佈: —— 陝西,四川,貴州,廣西,廣東,福建,浙江,湖南.

15.鷓鴣 **Francolinus pintadeanus pintadeanus** (Scop.).

Tetrao pintadeanus. Scopoli, Del. Flor. et Faun., pt. II, p. 93 (1786): Chine.

Fancolinus chinensis. Cat. Birds Brit. Mus. XXII, p. 136.

1♂, 28 V 1930.——翼: 148 mm.

分佈: —— 浙江,福建,廣東,廣西,貴州.

附記: ——雲南,安南,暹羅,緬甸等處標本,因翼稍短乃另自成一亞種,余對此點,不能無疑.余考驗巴黎博物館之大批安南鳥,覺翼之長短,個體的差別極大,殊不能認為亞種

的特徵.惜中國標本無多,此問題乃懸而不決.

鳩鴿科 Columbidæ.

16. 山鳩 **Streptopelia orientalis orientalis** (Latham).

Columba orientalis. Latham, Ind. Orn. II, p. 606 (1790): China.

Streptopelia orientalis orientalis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna. p. 1488.——Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. II, p. 25.

2♂, 19 III, 14 XI 1930; 2♀, 19 III, 19 XI 1930.——翼: 186-191 mm.

分佈:——錫金,泊尼爾,西藏,我國全部,高麗,日本及安南.

"留鳥.喜棲山林,鮮至平野.冬季稍爲繁多,諒係有從北方南下者也."

17.珍珠鳩 **Streptopelia chinensis chinensis** (Scop.).

Columba chinensis. Scopoli Del. Flor. et Faun., p. 94 (1786): Chine

Streptopelia chinensis chinensis. Hartert, Vögel paläark. Fauna p. 1490.

1♂, 12 VI 1930.——翼: 150 mm.

分佈:——我國各地之留鳥.惟在雲南,則爲 *S. c. vacillaus* Hartert 及 *S. c. forresti* Rothschild. 二型所替代.

18.紅鳩 **Oenopopelia tranquebarica humilis** (Temm.).

Columba humilis. Temminck, Pl. Col. 259 (1824): Bengale.

Oenopopelia tranquebarica humilis. Hartert Vögel Paläark. Fauna, p. 1498—— Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. II, p. 38.

1♂, 1♀, 30 IV 1930.—— 翼: 136 mm.

分佈:—— 緬甸,撣部,安南,尼泊爾等處.在我國則北部較稀於南部.

"為北江普通留鳥,喜棲人家附近之松林中."

19.鵑鳩 **Macropygia unchall tusalia** (Hodgson).

Coccysura tusalia. Hodgson, J. A. S. B. XIV, p. 809 (1848): Nepal.

Macropygia unchal tusalia. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. II, p. 40.

1♂ 12 IV 1930. —— 翼: 191 mm.

分佈:—— 喜馬拉雅一帶;緬甸,撣部,暹羅,安南及我國南部.

"在北江異常稀罕.此單獨標本採自楊梅浪,高度約7,000呎"

鷲鷹科 Falconidæ

20.花梨隼 **Falco peregrinus peregrinator** Sund.

Falco peregrinator. Sundevall, Physiogr. Sällskapets Tidskr. Lund, I, p. 177 (1837): Indian Ocean off Nicobrr Island.

Falco peregrinus peregrinator. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 10

51.

1♂, 20 V 1930——- 翼 298 mm.

分佈: —— 印度,緬甸,我國南部以至揚子江.

21.捷隼 **Falco subbuteo streichi** Hart & Neum.

Falco subbuteo streichi Hartert und Neumann. Journ Orn. 1907, p. 592: Süd-China (Swatan).

1♂19V; 1♀ 14 VI 1930.——翼: ♂ 242; ♀ 258 mm.

雌鳥側翮內嗍之赭赤色橫斑極爲顯著,在雄鳥則較不明瞭.

分佈: —— 自我國南部以至雲南及撣部.

22.紅足隼 **Falco amurensis** Radde.

Falco vespertinus var. *amurensis*. Radde, Reis. Ost. Sibir., II, p. 100 (1863): Amur.

Falco vespertinus amurensis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1080.

1♂, 14 XI 1930.—— 翼: 235 mm.

分佈: —— 生殖於西伯利亞之東,自貝加爾湖以至滿洲,及我國之北部與喜馬拉雅山之東部.冬季至我國南部,印度東北部及非洲之東部及南部.

23.橫髻鷲 **Spizaetus nipalensis fokiensis** Kirke-Swan.

Spizaetus nipalensis fokiensis. Kirke-Swann, Syn. List Accip, p. 72 (1919): Fokien, China,——Stuart Baker, Fauna of British, India Birds, Vol. V, p. 91.

1♂, 6 I 1930.——翼: 422 mm.

分佈:—— 中國南部及海南島,緬甸,德尼薩拉.

"甚爲稀罕."

24.蛇鷲 **Spilornis cheela ricketti** Sclater.

Spilornis cheela ricketti. Sclater, Bull. B. O. C., XL, p. 37 (1919): Fokien, China.

Hœmatornis cheela ricketti. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. II, p. 89.

1♀ (日期不明)—— 翼: 475 mm.

分佈: —— 福建,廣東,廣西,雲南,安南及緬甸,

25. 盜鷄鴔 **Buteo burmanicus** Oates.

Buteo burmanicus. Oates, Str. Feath., III, p. 30(1875): Upper Burma. ——Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. II, p. 101.

Buteo buteo japonicus Hartert, Vögel Paläark Fauna, p. 1127.

1♀, 8 XII 1930.—— 翼 385 mm.

分佈: —— 生殖於日本,高麗,我國之北部,滿州,土耳其斯坦等處冬季南行至我國南部,印度,緬甸,馬來半島及安南.

26.赤腹雀鷹 **Astur soloensis** (Horsf.).

Falco soloensis. Horsfield, Trans, Linn. Soc. XIII, p. 137(1821): Java.

Accipiter soloensis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1163.

Astur soloensis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. II,

p. 107.

1♂, 22 IV 1930.—— 翼: 184 mm.

分佈:—— 自我國南部以至新幾內亞,安南,馬來羣島,馬來半島,德尼薩拉及緬甸.

27.普通雀鷹 **Accipiter nisus nisomsimilis** (Tick.)

Falco nisomsimilis. Tickell, J. A. S. B., II, p. 571 (1833): Borabhum, Bengal.

Accipiter nisus nisomsimilis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 1155.——Delacour et Jabouille Oiseaux de l'Indochine, Vol. II, p. 109.

1♂ (幼鳥), 19 XI 1930.——翼: 210 mm.

分佈:—— 生殖於亞洲之北部,中部及日本.冬季南行至我國南部,印度緬甸及安南.

鴟鴞科 Asionidæ.

28.花背耳鴞 **Otus bakkamoena glabripes** (Swinhoe).

Ephialtes glabripes. Swinhoe, Ann. Mag. Nat. Hist. 4, VI, p. 152 (1870): Foo-chow.

Otus bakkamoena glabripes. —— Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, Vol. II, p. 127.

1♂, 1♀, 10 IV 1930.—— 翼: 185 mm.

分佈:—— 自我國南部以至安南東京.

29.馬來小耳鴞 **Otus sunia malayanus** (Hay).

Scops malayanus. Hay, Hadr. Journ. Lit. Sci., XIII, pt. 2, p. 147 (1842): Malacca.

Otus sunia malayanus. Stuart Baker, Fauna of British India, Birds, Vol. IV, p. 437.

1♂, 13 IV 1930,——翼: 140 mm.

分佈:——自德尼薩拉,暹羅半島以至新加坡;廣東,廣西猺山.

30.鵂鶹 **Glaucidium cuculoides whiteleyi** (Blyth).

Athene whiteleyi. Blyth, Ibis 1867, p. 313. Japen in err. China.

Glaucidium cuculoides whiteleyi. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l' Indochine, Vol. II, p. 139.

3♂, 2IV, 12VI 1930; 7I 1931; 2♀, 18III 1930, 7I 1931.—— 翼 :154—159mm.

分佈:——自我國南部以至安南東京.

"爲極普通留鳥."

31.小鵂鶹 **Glaucidium brodiei tubiger** (Hodgson).

Noctua tubiger. Hodgson, As. Res., XIX, p. 175 (1836): Nepal.

Glaucidium brodiei tubiger. Delacour et Jabouelle, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p.140.

2♂, 15V, 25 XII 1930; 1♀,23XII 1930. ——翼 81——-87mm.

分佈:——尼泊爾,亞森毋,馬尼波,緬甸,德尼薩拉,馬來半

島,安南,我國南部及台灣.

"留鳥,但不及前者之普通."

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室中國鳥類標本之地理分佈研究

(續第三卷第一期)

任 國 榮

TIMALIIDAE* 畫眉科

本科一般性質與其餘鳴禽類相似,但鼻孔不完全為羽毛或鼻鬚所掩閉,為與鴉科,山雀科,鷚𪃬科,區別之要點;後趾與內趾等長,與鵐科亦自不同;翼短而圓,跗蹠壯健,與鶇科之區別亦頗明顯.至昔人以鶇科許多種類歸入本科,實係不當,鶇科幼鳥有點斑而畫眉科則否也.

新近有將本科分為三亞科者:1. **Timaliinae**.雌雄相似,主為地棲性;2. **Sibiinae** 雌雄相似,主為樹棲性;3. **Liotrichinae**雌雄異形.巴黎博物館鳥類研究室畫眉科標本之採自我國或經有記載于我國者,兼三亞科而有之,據余所見,共有二十二屬,八十種及亞種.經余作個別研究後而記載于本目錄之中國鳥,共四百四十一個.

* *Timaliidae* 或作 *Timeliidae*,日本譯作知目鳥科,動物學大辭典引用之.余以為畫眉屬(*Garrulax*)對本科之代表性既强,且我國特有之種類又多而國人之認識又較深,為權宜計,乃用以代表本科.其實 *Timaliidae* 之代表屬為 *Timalia* 而非 *Garrulax* 也.

TIMALIINAE. 畫眉亞科

本亞科各種,皆雌雄相似.翼短而圓,不利遠飛.蹠趾壯健,適于爬抓.除少數偶居或單獨生活之品類外,通常皆有羣性.主為地棲,除偶或覓食高樹外,喜棲豐草叢藪中.留鳥,然每因天氣寒冷,常自高山以降落平原山谷,天氣溫和,又自平原山谷,回至舊居.考其昇降之原因,要不外溫度與食物之影響耳.大都為食虫性,有時兼食種子.生殖期約在四,五,六,七等月,卵之多少,大小,色澤,各種不同.

巴黎博物館鳥類研究室主任 Berlioz 以英國及法國兩博物館之畫眉科標本作綜合研究,將其結果發表于法國鳥學雜誌 (L'Oiseau et la Revu française d'Ornithologie, No. i, ii, iii, 1930),標題為 Revision systématique du genre Garrulax. 此文除訂正許多重名,提出許多疑問外,其最大之貢獻,乃將 *Dryonastes, Garrulax, Ianthocincla, Babax, Trochalopterum* 等五屬合而為一而統以 *Garrulax* 代表之.

本文共記載畫眉亞科十屬五十二種及亞種:

61. **Garrulax lanceolatus lanceolatus** (Verreaux). 草眉

D. et O. p. 189 (*Babax lanceolatus*) —— 漠平,四川西部,陝西南部,留鳥.

Baker, i, p. 187——吾對于所謂 *yunnanensis, bonvaloti,* 與標準種,皆不能區別,如是,則此鳥之分佈地點,當自西藏之東部以至中國西部,雲南,嘉錦山以至北撣部矣.

La Touche, p. 65——陝西南部,湖北,四川西部,湖南西部,雲南,福建,留鳥.福建標本,只于閩江河岸得一個耳.

Rothschild, p. 265——在 Forrest 第一次採集報告時,余將 *lanceolatus* 及 *bonvalti* 別為兩亞種,前者翼長 91–98 mm., 後者 106–113 mm. 及 Forrest 1924 年採集結果,經余與 Hartert 博士量度多數標本後,覺翼之長短乃性別之所致,非地方種之特徵也.此現象既曾見于 *taivanus* 與 *waddelli,* 則 *lanceolatus* 亦不必視為獨異矣. ………… 經許久之躑躅,吾今乃宣告 *Babax l. lanceolatus* 與 *B. l. bonvaloti,* 實係相同.

室中有四川鳥二十,雲南鳥一: 1 (?), 1891, Prince d'Orléans, 四川; 7(?), 1892, 1895, Biet, 四川打箭爐; 8(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 3(?), 1899, 四川打箭爐; 1(?), 8 ii, 1912, Pēre Cavalerie, 雲南.

余于廣西猺山及廣東北江皆得有標本. Stresemann 博士另定廣西猺山鳥為 *B. lanceolatus latouchei,* 吾以為猺山鳥實無別于四川鳥.

與 *Garrulax l. lanceolatus* 相似之品類,為 *Garrulax* (= *Babax*) *waddelli* (Dresser), 分佈于西藏南部及錫金,室中尚無標本.

62. **Garrulax ocellatus artamisiae** (David). 黑頭星點眉

D. et O. p. 197 (*Ianthocincla artamisiae*) ——于四川北部及青海得之,喜棲密林,分佈並不廣遠.

室中有四川鳥三: 3(?), 1899, 1928, Biet, 四川打箭爐.

63. **Garrulax maximus** (Verreaux). 大星點眉

D. et O. p. 196 (*Cinclosoma maximum*)—— 此新種,于漠平及姚溪 (Yaotchy) 之高山森林中得之,高度約三四千密達.留鳥,分佈並不廣.……與喜馬拉雅之 *Cinclosma ocellatum* 極相似,但嘴較濶,鼻孔爲羽毛所掩閉,量度較大,下體色澤亦不同.

Rothschild, p. 267 —— 雲南.

室中有四川鳥十三,雲南鳥三: 9(?), 1892, 1895, Biet, 四川打箭爐;3(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 2(?), 1900, 雲南茛刧; 1♀, 22, ix, 1926, Rothschild Museum, 雲南麗江山脉.

64. **Garrulax bieti** (Oustalet). 星點眉

Rothschild, p. 265 (*Ianthocincla bieti*) ——雲南.

室中有四川雲南鳥各一: 1(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Père Soulé, 雲南茛刧.

65. Garrulax lunulatus (Verreaux). 斑背眉

D. et O. p. 195 (*Cinclosoma lunulatum*) —— Verreaux 所記載之標準鳥,乃余于四川西部獲得者.此後常于漢平,青海西部,陝西南部及秦嶺見之.

室中共有六標本: 2(?), 1896, Père Déjean, 四川打箭爐; 4(?), 1898, 1899, 1920, Biet,四川打箭爐.

66. Garrulax cineracea styani (Oustalet).黑頭花翼畫眉

Hartert, Vög. Pal. p. 630 (*Ianthocincla cineracea styani*) ——雲南苴却及四川打箭爐.

Baker, i, p. 157——雲南及撣部之東.

Rothochild, p.265——雲南.

室中有四標本: 1(?), 1902, 四川打箭爐; 3(?), 1896, 1897, Père Soulie, 雲南苴却.

67. Garrulax cineracea cinereiceps (Styan). 灰頭花翼畫眉

Hartert, Vög. Pal. p. 631 ········ (*Ianthocincla cineracea cinereiceps*) 浙江,福建.

La Touche, p. 61 (*Ianthocincla cineracea ningpoensis*) —— 湖北,安徽,浙江,福建,廣東,留鳥.

Rothschild, p. 264 —— 雲南.

室中有 La Touche 送來之三標本: 2♂, 4, 7 xi, 1♀, 11, x, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余之廣東北江及湖南南部標本中,皆有此鳥數個,其頭項及前頭,或橄欖褐,或橄欖褐而帶灰,或純灰,或灰而近于黑.廣西猺山尙未有記載.

68. **Garrulax davidi** (Swinhoe). 大衛山畫眉

D. et O. p. 187 (*Pterorhinus davidi*) ——吾始見于北京,及後再于滿洲,烏拉圖,陜西南部見之.無論何處,皆不及北京西山之多,凡有叢莽之處,無不有之.北京人稱曰山畫眉,有豢作籠鳥者.

室中有柏林博物館送來一標本: 1♂, 9, ii, 1914, 四川.

69. **Garrulax formosus formosus** (Verreaux). 四川紅翼畫眉

D. et O. p. 199 (*Trochalopterum formosum*)——四川西部山林中之留鳥,分佈不廣,居地極高,非遇嚴寒,不至山谷.

室中有六標本: 6(?), 1901, Grosjean, 四川打箭爐.

安南之 *Garrulax* (=*Trochalopterum*) *formosus greenwayi* (Delacour) 與四川鳥相似,但四川鳥茶褐色之部,在安南鳥則代以橄欖褐.

70. **Garrulax milni milni** (David). 赭頭紅翼畫眉

D. et O. p. 200 (*Trochalopterum milni*) —— 福建西北部之掛墩.

La Touche, p. 65 —— 福建西北部,留鳥.

室中有 La Touche 送來之兩標本: 1♂, 1♀, 28, xi, 福建西北部之掛墩.

安南之 *G. m. indochinensis* (Delacour) 與此極相似,但下體黑色較盛,背部較深,而鱗紋較明顯.

余在廣西猺山古陳射得之標本, Stresemann 認為新亞種, 命名為 *Trochalopterum* (=*Garrulax*) *milni sinianum*. 將來標本寄到,當再作比較,以觀其與福建及安南鳥之異同.

71. **Garrulax erythrocephalum forresti** (Rothschild). 雲南金翼畫眉

Rothschild, p. 267 (*Trochalopterum forresti*) —— 雲南怒江與瑞麗江之分水界及騰越.

室中有一標本,乃 Rothschild 送來者: 1♀, 25, vi, 1926, 雲南怒江與瑞麗江分水界.

72. **Garrulax erythrocephalum chrysopterus** (Gould). 金翼畫眉

Baker, i, p. 166——只見于 Khasia 山.

室中有四川打箭爐鳥二,性別,採期,採者皆不詳.

73. **Garrulax affinis blythii** (Verreaux). 四川黑頭橙翼畫眉.

D. et O. p. 201 (*Trochalopterum blythii*) ——四川,滇平及西藏東部之留鳥.

Hartert Vög. p. 633 (*Trochalopterum affinis oustaleti* Hart.) ——雲南茸却.

Rothschild, p. 263 (*Trochalopterum affinis oustaleti*) ——雲南.

室中有四川鳥二十七,雲南鳥九: 1♂, 29, i, 1870, David, 四川西部; 7(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 5(?), 1898, 1899, Biet, 四川打箭爐; 14(?), 1901, 1902, Père Grosjean, 四川打箭爐; 8(?), 1895, 1896, Pēre Soulié, 雲南茸却; 1♀, 25, vii, 1926, Rothschild, 雲南怒江與瑞麗江分水界.

以 Berlioz 研究之結果,知 *Garrulax* (=*Trochalopterum*) *affinis oustaleti* (Hartert), 係 *Garrulax affinis blythii* 之重名.

74. **Garrulax ellioti ellioti** (Verreaux). 橙翼畫眉

D. et O. p. 202 (*Trochalopterum ellioti*) ——最初發見于四川西部,其後于四川北部,陝西,直至黃河皆見之.留鳥,頗為普通,但永不至平原之地.

Rothschild, p. 264—— 雲南.

室中有四川鳥二十六,雲南鳥十七: 1♂, 19, i, 1869, David, 四川南部(此係標準標本), 1♀, 28, i, 1869, David, 四川西部; 9(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐, 12(?), 1893, 1898, Biet, 四川打箭爐; 3(?) 1899, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 16(?), 1896, 1897, Pēre Soulié, 雲南甘刧.

Rippon 以 *Trochalopterum yunnanensis* (=*Garrulax ellioti yunnanensis*) 記載雲南鳥,謂其褐色較著 (Bull. B. O. C. xix, p. 22, 1906).余以室中四十三鳥作愼密比較,無論體色及量度方面,皆不能發見雲南鳥與四川標準標本有何不同.同在四川鳥或同在雲南鳥中,在體色上,亦每有個體的差別,故余以爲因褐色較著而竟另定名稱,殊屬不必.

75. **Garrulax subunicolor subunicolor** (Hodgson). 鱗羽畫眉

Baker, i, p. 171 (*Trochalopterum subunicolor subunicolor*)—— 尼泊爾,錫金,不丹,雅魯藏布江北岸山中.

Rothschild, p. 263 —— 雲南怒江與瑞麗江分水界.

室中有一標本; 1♀, 25, vii, 1926, Rothschild Museum 送來,雲南怒江與瑞麗江分水界.

Rothschild 以雲南鳥之灰色較著而翼較長 (92–93 對 87–88 mm.) 乃另名曰 *griseata* 以別于標準種.但據 Berlioz 研究

結果,謂雲南鳥實無別于標準種,故余仍以 *Garrulax subunicolor subunicolor* 記載雲南鳥.

76. **Garrulax squamatus** (Gould). 藍翼鱗羽畫眉

Baker, i, p. 174 ——喜馬拉雅帶,自尼泊爾以至嘉錦山;雅魯藏布江北部山中以至阿拉干之北,錦山及撣部.

Rothschild, p. 267——雲南瑞麗江與怒江分水界.

室中只有錫金鳥,以既有記載于雲南,特爲之編入本目錄.

77. **Garrulax canorus canorus** (L). 畫眉

D. et O. p. 189 (*Leucodopteron hoamy*) ——廣佈中國南部山中.

La Touche, p. 63 ——江西,江蘇,安徽,浙江,福建,廣東,留鳥.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥四: 1(?), 19, vi, 1909, 中國南部; 1♂, 1♀, 20, x, 27, xi, La Touche, 福建; 1(?), vii, 1910, Mme. Comby, 雲南.

余于廣西猺山得有標本百餘,此次寄來之廣東北江及湖南南部標本中,亦各有畫眉四個.

據 Berlioz 研究結果,所有本種之各亞種,皆係重名,如 *G. c. owstoni*, *G. c. namtiense* 等等皆無成立之可能.

78. **Garrulax pectoralis semitorquatus** Ogilvie-Grant. 海南黑環眉

Baker, i, p. 151 —— 緬甸南部,南撣部,雲南,暹羅及海南.

Rothschild, p. 266 (*Garrulax pectoralis pectoralis*) ——雲南.

室中有雲南及海南鳥各一: 1♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 1♀, 18, iv, 1904, 英國博物館送來,海南.

Rothschild 轉錄 Oustalet 記載,以雲南鳥爲 *G. p. pectoralis*. 余以雲南鳥與海南之 *G. p. semitorquatus* 較,不能發見若何區別,再與印度之 *G. p. pectoralis* 較,則標準種之尾羽先端淨白,而雲南鳥則爲鵝黃,故余贊同Baker之意見,以雲南鳥爲 *Garrulax pectoralis semitorquatus*.

79. **Garrulax pectoralis picticollis** Swinhoe. 灰環眉

D. et O. p. 194—— 浙江,福建.

La Touche, p. 59——廣東,福建,浙江,安徽,留鳥.

室中有四標本: 2♂, 1♀, 24, x, 4, xi, 8, xi, La Touche, 福建西北部之掛墩; 1(?), 23, iii, 1922, Mme. Lecallier, 宜昌(?).

此鳥胸環不發達,常中斷于胸部之中央,色灰黑而非純黑,與海南之 *semitorquatus* 不難區別.

Delacour 于安南東京及老撾發見一種 *Garrulax pectoralis*, 與海南島之 *semitorquatus* 極相似,胸環亦黑,翮之先端亦鵝黃,但胸環不常中斷而量度亦稍大,乃名之曰 *Garrulax pec-*

toralis robini,其與 *Garrulax pectoralis picticollis* 之區別,一則在其胸環純黑而非灰黑,再則在其量度較小而上背後頸之赤環亦較狹云云.此次寄來之廣東北江標本,中有 *Garrulax pectoralis* 四個,灰環黑環者各二,而採期採地皆同.以形態上言之,灰環鳥當係 *G. p. picticollis* 而黑環鳥則爲 *G. p. robini*,但揆諸地理分佈原則,兩不同之亞種,决不生殖于同一地點,生殖于同一地點者,當係同種而異型.同時灰環鳥與黑環鳥,相差又極微弱,不足各自成爲一獨立種(如係不同之兩種,當然能生殖于同一地點).因得 Berlioz 先生之助,遂以室中標本並余之北江鳥作合比較研究,其結果可以下表示之:

性別, 採期, 採地	胸環狀況	耳羽後部色澤	嘴峯	翼長
1(?)23, iii (宜昌?)	灰而中斷	灰色	26 mm.	134mm.
1♂, 24, x, 福建	灰而中斷	灰色	26 ,, ,,	130 ,, ,,
1♂, 4, xi, 福建	黑灰而完整	灰色	26 ,, ,,	130 ,, ,,
1♀, 8, xii, 福建	灰而雜黑, 中斷	灰色	26 ,, ,,	130 ,, ,,
1♂, 4, xii, 廣東北江	灰而雜黑, 完整	灰色	26 ,, ,,	122 ,, ,,
1♂, 15, iv, 廣東北江	深灰雜黑, 完整	灰色	27 ,, ,,	128 ,, ,,
1♀, 10, xii, 廣東北江	淨黑而完整	黑而着灰色	26 ,, ,,	132 ,, ,,
1♀, 7, iv, 廣東北江	淨黑而完整	黑, 微有灰色痕跡	27 ,, ,,	130 ,, ,,
1♀, 20, xii, 老撾	淨黑而完整	淨黑	27 ,, ,,	129 ,, ,,
1♀, 28, xii, 老撾	淨黑而完整	淨黑	27 ,, ,,	131 ,, ,,
1♀, 20, xii, 老撾	淨黑而完整	淨黑	26 ,, ,,	128 ,, ,,
1♀, 27, iii, 雲南	淨黑而完整	淨黑	28 ,, ,,	135 ,, ,,

觀上比較結果可知黑環鳥與灰環鳥,並無大小之差別.

至胸環之或灰或黑或中斷或完整,殊無一定之規則,而有漸進之程序.至背部赤環之廣狹濃淡,更無標準,純以個體為轉移.觀此,不特 *Garrulax pectoralis robini* 為 *G. p. picticollis*之重名,卽海南之 *G. p. semitorquatus* 亦屬可疑,蓋胸環之斷整已非區別的要點,而雲南鳥之量度又不小于其餘諸鳥也.但此問題須有大幫海南鳥作比較,乃能解决耳.

80. **Garrulax moniliger schmackerii** Hartlaub. 海南小黑環眉

Hartlaub Abh. Nat. Ver. Bremen. xiv p. 349, taf. iv (1898).——海南.

室中有 Rothschild 送來一海南鳥: 1♂, 23, iii, Katsumata collection, 海南.

81. **Garrulax moniliger melli** Stresemann. 廣東小黑環眉

La Touche, p. 60——廣東,福建,留鳥.

室中除大幫安南鳥外,有 La Touche 送來之一標本: 1♂, 3, xi, 福建西北部之掛墩.

余前曾以 *Garrulax moniliger tonkinensis* Delacour 記載廣西猺山鳥.此次寄來之廣東北部標本中,亦有 *G. moniliger melli* 兩個.在湖南南部則未有記載.

Delacour 以 *Garrulax moniliger tonkinensis* 記載安南東京北

部北關 (Backan) 鳥,謂與廣東,福建之 *G. moniliger melli* 極相似,但後頸之赤環較狹,而色彩亦較不鮮明。Berlioz 研究結果,謂 *tonkinensis* 實無別于 *melli*, 爲保持優先權計,應採用 *G. moniliger melli* Stresemann 一名。

Garrulax moniliger schmackeri 與 *G. m. melli* 相似,前者耳部黑色較多,後者耳羽黑色較少,前者量度較小,後者量度較大:嘴峯 23×26; 翼 110×124 mm. (此乃室中兩標本之量度比較).

Garrulax pectoralis 與 *Garrulax moniliger* 爲極相近似之兩種,非特生態及習性相類,卽形態與地理分佈,亦極有相同之點.其重要區別在 *Garrulax pectoralis* 較大,初列覆雨羽黑, *G. moniliger* 則反是.

82. **Garrulax albigularis albigularis** (Gould). 白喉眉

D. et O. p. 194——冬季于四川西藏間之樹林中見之.

Rothschild, p. 263 —— 雲南.

室中有中國鳥十二: 1♂, 1895, Prince d'Orléans, 雲南眉公河附近; 9 (?), 1899, 四川打箭爐; 2 (?), 1901, Pēre Grosjean, 四川打箭爐;

83. **Garrulax poecilorhynchus berthemyi** (David et Ou-

staiet). 栗背珊瑚

D. et O. p. 199 (*Ianthocincla berthemyi*) ——福建西部.

La Touche, p. 57 (*Dryonastes poecilorhynchus berthemyi*) —— 福建西北部之留鳥.

室中有 La Touche 送來兩標本: 1♂, 1♀, 16, 19, xi, 福建西北部之掛墩.

84. **Garrulax galbanus courtoisi** Menegaux. 藍頭珊瑚

La Touche, p. 58 (*Dryonastes courtoisi*) —— 安徽南部之婺源縣.直至今日,只有三標本,標準標本及第二個現存巴黎博物館,第三個存上海徐家匯博物館.

室中有上海徐家匯博物館送來之兩鳥: 2 (?), 20, vii, 28 ix, 1919, 安徽婺源縣.

85. **Garrulax chinensis chinensis** (Scopoli). 珊瑚

D. et O. p. 191 —— 中國南部之廣州及香港,頗爲普通,余永未見諸福建及江西. Swinhoe 云亦不見之于海南.

La Touche, p. 57 (*Dryonastes chinensis chinensis*) —— 廣東,香港,留鳥.

室中有大幫安南東京鳥,尙無採自我國之標本.

余于廣西梧州,猺山皆得有標本.但不見于廣東北部及湖南南部.

Garrulax (=*Dryonastes*) *chinensis* 一種,尙有兩種見於雲南,一爲 *G. c. leucogennys* (Blyth), 次爲 *G. c. lowei* (La Touche), 室中皆無標本.安南亦有極相近似之亞種二,卽 *G. c. germaini* (Oustalet) 及 *G. c. leugens* (Oustalet)是也. *G. c. leugens* 與 *G. c. chinensis* 可謂完全相似,特前者耳羽黑褐而後者則爲純白,故亦有以爲係同種而異型者.又,有 *G. c. leugens*之地必有 *G. c. chinensis*, 有 *chinensis* 之地則未必有 *leugens*. Delacour 乃根據其觀察之結果而以 *Garrulax chinensis* form *leugens* Oustalet 記載黑耳鳥.

86. **Garrulax chinensis monachus** Swinhoe. 海南黑面珊瑚

D. et O. p. 193 (*Dryonastes monachus*)——海南.

室中有 Rothschild Museum 送來一標本: 1♂, 18, v, 1902, Katsumata collection, 海南.

87. **Garrulax leucolophus diardi** (Lesson). 白冠眉

Baker, i, p. 148 —— 雲南之極南部,暹羅,東甫寨,安南…….

Rothschild, p. 266 (*Garrulax leucolophus leucolophus*) —— 吾雖欲以雲南爲 *diardi* 或 *belangeri*, 無奈三次記載,俱係 *leucolophus*. Stuart Baker曾記載前二者于雲南,但未嘗示其特異之處.

室中有安南鳥,因有記載于雲南,特編入本目錄,雖然,雲南鳥之亞種問題,尚待解決耳.

G. l. leucolophus, G. l. belangeri, G. l. diardi, 三型,可用下列檢索表區別之:

A. 上胸白,胸下及腹赭,二者有截然之界限.....*G. l. leucolophus.*

B. 胸白,其白色侵入赭色之腹部. .... *G. l. belangeri.*

C. 胸及腹之全部白.. *G. l. diardi.*

88. **Garrulax strepitans castanonotus** (Ogilvie-grant). 海南銹耳珊瑚

Dryonastes castanonotus O.-Grant, Ibis, 1899, p. 584—— 海南.

室中有一標本,乃 Rothschild Museum 送來者: 1♂, 25, iii, 1903, Katsumata collection, 海南.

89. **Garrulax maesi** (Oustalet). 灰頭珊瑚

Oustalet, Bull. Soc. Zool. France, xv, p. 155 (1890)(安南東京).

室中除多數安南鳥外,尚有三四川鳥: 3 (?), 1899, 四川打箭爐.

90. **Garrulax perspicillatus perspicillatus** (Gmelin) 噪眉

D. et O. p. 192 —— 中國南部極普通.于陜西黃河兩岸亦

多見之.

La Touche, p. 55 (*Dryonastes perspicillatus perspicillatus*) —— 揚子江流域,四川福建,廣東,留鳥.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥四: 1(?), 1874, David, 陝西南部; 1(?), 1907, Père Seguin, 興甯 (Shinen); 2(?), M. Nadar, 舟山.

Riley 以陝西鳥體色較淺,嘴較短,乃另自成爲一種,名曰 *Garrulax* (=*Dryonastes*) *perspicillatus shensiensis*. Berlioz 研究之結果,謂係重名.就余在廣西猺山,廣東北江及湖南南部所得標本言之,體色與量度,每有頗大之差別也.

91. **Garrulax sannio** Swinhoe. 小噪眉

D. et O. p. 192 —— 廣佈中國南部,自陝西之南以至雲南,廣西皆有之,但永未見于江西,上海,浙江,福建.

La Touche, p. 55 (*Dryonastes sannio*) —— 江西,湖南,湖北,福建,廣東,廣西,雲南,四川,留鳥.

Rothschild. p. 267. —— 雲南.

室中有四川鳥十五,雲南鳥三,興甯鳥一: 2(?), 1895; Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1896, De'jean, 四川打箭爐; 10(?), 1899, 四川打箭爐; 1(?), 10, iii, 1911. Legendre, 四川甯遠府; 2 (?), 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 1 (?), Mme. Comby, 雲南; 1 (?), 1907, Père Seguin, 興甯 (Shinen), 其餘安南鳥尙多.

余前曾于廣西猺山射得數十枚,此次寄來之廣東北江及湖南南部標本中,亦各有此鳥四枚.

92. **Pomatorhinus ruficollis stridulus** Swinhoe. 竹眉

D. et O. p. 186 (*Pomatorhinus ruficollis*) —— 分佈于中國南部多樹之山中,北行直至黃河.

La Touche, p. 66 ——福建,江西,廣東,留鳥.

室中有 La Touche 送來之三福建鳥: 1♂, 2♀, x, xi, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山,廣東鼎湖山,廣東北江,湖南南部皆得有記載.

93. **Pomatorhinus ruficollis styani** Seebohm. 揚子竹眉

D. et O. p. 186 (*Pomatorhinus ruficollis*) ——見前.

La Touche, p. 68 —— 揚子江流域,自江蘇之山中以至湖北及浙江之甯波,杭州,等處,留鳥.

室中有十標本: 1♂, 1♀, 1870, David, 四川西部及漠平; 4(?), 1896, 1898, 1899, Déjean, 四川打箭爐; 4(?), 1892, 1898, 1900, Père Soulié, 雲南茸却.

P. r. stridulus 上體栗色較盛,胸及腹部條紋濃栗,且極粗密.*styani* 上體栗褐,胸及腹部條紋橄欖褐,且亦較疎.

Pomatorhinus ruficollis 一種,亞種甚多,其中必不乏重名,茲

謹根據文獻記載,作表示其分佈如下:

1. *Pomatorhinus ruficollis ruficollis* Hodgson.——喜馬拉雅,尼泊爾以至東亞森母,雅魯藏布江之北岸.
2. *P. r. bakeri* Harington —— 亞森母境內之雅魯藏布江南部山中,馬尼坡,錦山及嘉錦山.
3. *P. r. saturatus* Delacour ——安南東京.
4. *P. r. similis* Rothschild —— 安南西部及西北部.
5. *P. r. reconditus* Bangs & Phillips ——雲南東南部.
6. *P. r. albipectus* La Touche, —— 雲南南部,老撾北部.
7. *P. r. laurenti* La Touche ——雲南中部之東.
8. *P. r. stridulus* Swinhoe —— 福建,江西,廣東,廣西,湖南南部.
9. *P. r. styani* Seebohm ——江蘇,湖北,浙江.

94. **Pomatorhinus swinhoei swinhoe** David. 栗背鈎嘴

D. et O. p. 184——江西福建交界之森林中.

La Touche p. 69 ——廣東,福建,安徽之留鳥,浙江與江西應有此鳥.

室中有 La Touche 送來之兩標本: 1♀, 1(?), 23, xi, 福建西北部之掛墩.

余在廣西猺山射得之標本,據 Stresemann 博士研究結果,認爲新亞種,乃另名爲 *Pomatorhinus swinhoei abbreviatus* 與標準種 *P. s. swinhoei* 之區別,在其翼較短,雄鳥只有 90—95 mm.

(標準種 97—106 mm.). 此次寄來之廣東北江標本,亦係短翼種.

95. **Pomatorhinus macclellandi gravivax** David. 褐背鈎嘴眉

D. et O. p. 183 —— 見于陝西南部及四川北部,湖南湖北交界之山中亦有之.各處皆不甚多.

Baker, i, p. 221 —— 八莫山中,雲南,以至中國.

Rothschild, p. 262 (*Pomatorhinus macclellandi odicus*) —— 雲南.

室中有四川鳥十一,雲南鳥八: 4(?), 1895, 1896, Biet, 四川打箭爐; 5(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1899, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 5(?), 1897, Père Soulié, 雲南茈却, 1(?), 1912, Père Cavalerie, 雲南 (San-choen).

余不能發見雲南鳥有何特異于四川鳥,故統以 *P. m. gravivox* 記載之.

96. **Timalia pileata intermedia** Kinnear. 紅頂眉

La Touche, p. 71——雲南南部,廣東西江,留鳥.

室中安南鳥甚多,只有一中國鳥: 1(?), 1911, Père Cavalerie, 貴州.

余于廣西猺山得有大批標本.

97. **Pyctorhis sinensis sinensis** (Gm.). 橙眼眉

Baker, i, p. 233 —— 印度及緬甸之全境,南至德尼薩拉,暹羅及安南.

La Touche, p. 72 —— 廣東,廣西,雲南,留鳥.

室中安南鳥頗多,中國鳥只有一個: 1♀, 22, ii, 1895, Prince d'Orléans, 雲南.

La Touche 以 *Pyctorhis sinensis major* 一名記載廣東,廣西,雲南鳥,謂其量度較大,翼 70.5—73 mm. 余試以雲南鳥與安南鳥較,雲南鳥翼長 66 mm. 安南鳥則爲 65—70 mm. 又 Rothschild 于 Avifauna of Yunnan, p. 268 亦以 *P. s. sinensis* 記載雲南鳥,則雲南鳥非 *P. s. major*, 又多一例證.余前在廣西猺山射得之標本,亦係 *P. s. sinensis*, 翼長約 70 mm. 特惜無廣東西江鳥耳.

室中有安南之 *Thringorhina guttata* (Blyth) 頗多.余前在猺山射得之標本,據 Stresemann 及 Kinnear 聯合研究之結果,認爲新亞種,乃名之曰 *Thringorhina guttata sinensis*. 因猺山標本尙未寄到,未知其與安南鳥之異同,故不記載于本目錄.

98. **Stachyridopsis ruficeps davidi** Oustalet. 大衛山紅頭

D. et O. p. 224 (*Stachyris praecognitus*) 初見于台灣,再見于四川及江西,既不棲林,亦不居山,只喜在竹叢中.

La Touche, p. 73 —— 揚子江中流及下流,四川,廣東,福建,浙江,留鳥.

室中有四標本: 1♂ ii, 1896, La Touche, 福州; 1♂, 18, x, La Touche, 福建(?); 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

兩四川鳥,其上體較福建鳥稍為深暗.

此鳥之地方種甚多,要不外以其體色之稍濃稍淡為標準.其實此種性質,變異極大,斷不可靠.如雲南府及滇西滇北之標本,喉及頭頂稍淺色,乃名曰 *Stachyridopsis ruficeps bhamoensis* Harington; 滇南及東南部之標本,上下體之色彩較濃,乃名曰 *S. r. bangsi* La Touche. 余以為雖同一個體,因環境之遷移,氣候之更變,亦每有顏色上之差別也,又余前曾以 *Stachyridopsis ruficeps bangsi* La Touche 記載廣西猺山鳥.此次寄來之廣東北江四標本,採地雖同,因採期互異,體色遂有差別.春季標本,體色較淡,與 *Stachyridopsis ruficeps davidi* 較近 (2♂ iv, v. 荒洞); 冬季標本,體色較濃,與 *S. r. bangsi* 較近 (1♂, 1♀, xi, xii, 荒洞), 其實皆同一型耳.

99. **Mixornis rubicapilla rubicapilla** (Tickell). 黃胸小眉

Rothschild, p. 275 —— 雲南.

室中除安南標本外,有一中國鳥: 1(?), 1895, Prince d'Orléans, 雲南.

室中有一標本,足下標誌,為 *Mixornis erythroptera* (Blyth).

乃 1848 年 M. Montigny 自中國採得者.考 *M. erythroptera* 一種,並無記載于中國,而該標本又殘破異常,無從研究,乃誌此以存疑.

100. **Alcippe nepalensis hueti** (David). 白眼睛

D. et O. p. 218 (*Alcippe nipalensis*) —— 四川西部,漠平,江西,福建山林中皆甚普通.余始以福建鳥與漠平不同,而二者又與喜馬拉雅之 *nipalensis* 不同,但經精密研究後.實係同種.

La Touche p. 74——安徽,江西,浙江,福建,廣東,留鳥.

室中有 La Touche 之四福建鳥: 2♂, 2♀, 福建西北部之掛墩.

湖南南部標本,應逮此型.

101. **Alcippe nepalensis schaefferi** La Touche.

Rothschild, p. 282——雲南.

室中只有安南鳥.

廣西猺山標本,應逮此型. La Touche 雖以廣東鳥爲 *hueti* 但以余之北江四標本觀之,應逮 *schaefferi*.

102. **Alcippe nepalensis yunnanensis** Harington.

Rothschild, p. 282 —— 雲南.

室中有四標本: 2(?), 1896, Père Soulié, 雲南茈却; 1♂, 1♀, v, x, 1925, 雲南騰越(英國博物館送來).

Alcippe nepalensis 一種,地方種甚多,除 *A. n. nepalensis* (Hodgson) 及 *A. n. fratercula* Rippon 分佈印度區外,我國境內,有既知之亞種四,另有安南及台灣種.各亞種間,區別極微,為便利計,省去形態記載,可用下列檢索表區別之:

A. 嘴黃.……………………………………………………*A. n. nepalensis.*

B. 嘴褐黑.

a. 胸部鵝黃或赭黃.

1a. 喉部灰色.

2a. 黑眉斑不顯著,下體鵝黃較盛.

3a. 頭頂灰色較淺,上體銹色較盛.

4a. 脇橄欖色. ……………………………… *A. n. davidi.*

4b. 脇沙黃而染橄欖色.…………………*A. n. hueti.*

3b.頭部灰色較深,上體橄欖色較盛.……………………………………………………………*A. n. schaefferi.*

2b. 黑眉斑顯著,直達上背,下體鵝黃較遜.……………………………………………………………*A. n. major.*

1b. 喉部鵝黃或赭黃.

2c. 頭部淨灰,下體淡赭黃.……………… *A. n. fratercula.*

2d. 頭部灰黑,下體濃赭色.…………… *A. n. yunnanensis.*

1c. 喉部白,眉斑甚顯著.………………………A. n. morrisonia.

b. 胸部白或白而帶灰.………………………… A. n. peracensis.

茲更示其分佈地點如下:

1. *Alcippe nipalensis nipalensis* (Hodgson) ………… 尼泊爾,錫金,亞森毋,雅魯藏布江之南北兩岸,馬尼坡,孟加拉,錦山及亞拉干.

2. *A. n. davidi* Styan ……………中國西部之宜昌.

3. *A. n. hueti* David ……………安徽,江西,浙江,福建,湖南南部.

4. *A. n. schaefferi* La Touche …雲南東部,廣西猺山,廣東北江.

5. *A. n. major* Delacour …………安南中部之北及交趾支那.

6. *A. n. fratercula* Rippon ……撣部及老撾.

7. *A. n. yunnanensis* Harington …… 雲南西部.

8. *A. n. morrisonia* Swinhoe …… 台灣.

9. *A. n. peracensis* Sharpe (= *A. n. annamensis* Robinson & Kloss) ……………馬來半島,暹羅之大部,老撾南部及安南.

室中除 *A. n. davidi* 及 *A. n. morrisonia* 之外,餘皆有標本可比較.

103. **Schoeniparus dubius genestieri** (Outtsalet) 頭鳥線

D. et O. p. 217 (*Alcippe brunnea*) —— 最初發見于台灣,及後余于江西福建皆得有標本,週年皆可見,但爲數常不多.

Baker, i, p. 285 —— 嘉錦及八莫山中,撣部及中國西南部.

La Touche, p. 75 (*Schoeniparus brunneus superciliaris*) —— 廣東,福建,江西.安徽之留鳥.

Rothschild, p. 270 —— 雲南. ………… Rippon 之 *intermedia*, 經 Hartert 博士及余研究大幫標本後,皆認爲係 *genestieri* 之未成長者耳.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥十一: 1 ♀, 13, vi, 1873, David, 江西; 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 1897, Père Soulié, 雲南茸刦; 1(?), 雲南茸刦; 3♂, 2♀, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得標本甚多,此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

經考驗多數標本後,覺此鳥之上體或赭色較盛,或橄欖色較盛,常因個體而不同,下體白色之多少,各個體亦有極大差異.

104. **Pseudominla castaneiceps castaneiceps** (Hodgson).
花頭小金翼

Rothschild, p. 270 —— 雲南.

室中有印度及安南鳥,因既有記載于雲南,特爲之編入本目錄.

105. **Proprus swinhoei** Verreaux. 山雀眉

D. et O. p. 287 —— 于漠平,四川西部及青海邊境之高山中見之,有一次,見于陜西秦嶺中部.

室中只有一四川鳥: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

106. **Proparus chrysotis forresti** (Rothschild). 雲南山雀眉

Rothschild, p. 269 (*Fulvetta chrysotis forresti*) —— 雲南.

室中只有安南鳥.

余曾以四川之 *swinhoei* 與安南之 *forresti*較,無論色彩上,量度上,皆不能得其異點,四川鳥甚殘破,不足供精密之研究,而安南又非 *forresti* 之標準地,故此疑難,無從解決.如能得兩標準地之新標本研究之,或可合二者而爲一,亦未可知也.

107. (**Proparus vinipectus bieti** (Oustalet). 黑耳山雀眉

Hartert, Völ. Pal. p. 617 —— 四川打箭爐.

Rothschild, p. 269 (*Fulvetta vinipectus bieti*) —— 雲南.

室中有四川鳥六,雲南鳥七: 6(?), 1895, 1898 Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 5(?) 1896, Père Soulié, 雲南茛却.

108. **Proparus cinereiceps** (Verreaux). 金腰山雀眉

D. et O. p. 221 (*Fulvetta cinereiceps*)——四川西部及陜西南部山林中留鳥.標準標本,得自漢平.秦嶺標本,體色較暗.

Hartert, Vog. Pal. p. 617——四川西部及秦嶺.

室中有五標本: 5(?), 1898 Biet, 四川打箭爐.

109. **Proparus ruficapillus sordidior** Rippon. 雲南栗頭竹麻

D. et O. p. 221 (*Fulvetta ruficapilla*) —— 四川西部,陜西南部,北行不逾秦嶺之南.喜在短籬及水邊之野竹叢中.

Rothschild, p. 269——雲南.

室中有七標本: 7(?), 1897, Père Soulié, 雲南其切.

此標本足上標簽有註云:"土名竹麻 Chu-Ma" 故援用之.

Proparus ruficapillus ruficapillus (Verreaux), 分佈于四川西部,甘肅南部,陜西南部,室中尚無標本,故不記載. David 之記載,係指 *P. r. ruficapillus* 而非 *sordidior*, 特錄之以供參考耳.

110. **Proparus striaticollis striaticollis** (Verreaux). 斑喉山雀眉

D. et O. p. 222 (*Fulvetta striaticollis*)——于四川漢平四千密達之高度得一單獨之標本.

室中有三標本: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1898,

Biet, 四川打箭爐.

111. **Proparus striaticollis guttaticollis** La Touche. 褐山雀眉

La Touche, p. 76 (*Fulvetta striaticollis guttaticollis*) —— 福建西北部留鳥,冬季亦于廣東北部見之.

室中有 La Touche 送來一標本: 1♀, 16, v, 1898, 福建西北部之掛墩.

此鳥上體葡萄褐,遠不及 *P. s. striaticollis* 之深暗,頭部無褐黑條紋,*striaticollis*喉部之褐黑斑,在 *guttaticollis* 則代以葡萄褐.

112. **Moupina poecilotis** (Verreaux). 長尾山雀眉

D. et O. p. 220 —— 只于漠平見之,頗爲普通,常在三千密達高度之處.……… Verreaux 以其逮 *Alcippe*, 吾頗不以爲然,以鳴聲與習性皆不同也.因特闢一屬曰漠平,以此係採集地也.

室中只有一標本: 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐.

Rothschild 以 *Moupinia poecilotis sordidior* 記載雲南鳥,究竟雲南鳥與標準地之漠平及四川鳥有無區別,因無雲南鳥,無從比較.

(未　完)

數學家姓名錄

曾昭安

數學一科,顯呈今日燦爛之現象,端賴多數專家之努力與發明,論其豐功偉績,誠有表彰之必要.故治數學史及撰科學家傳者,常多方搜集,以期盡行披露.茲篇所載,僅書姓名,或略述要績,聊表瞻仰古賢景慕今儒之意.

篇中所列姓名,係以數學家為主體.其有與數學家有關係者,間亦列入.所有譯名,多採已經通行者,遇不得已時始另立新名.其在括弧中所書數字,乃表示其生卒年日.其作有斜體文字者,即表示該字可省略之意.例如 Abel[亞柏爾] (1802,8,5—1829,4,6), 乃表示挪威數學家亞柏爾生於西曆一千八百零二年八月五日,卒於一千八百二十九年四月六日.又如 Picard, *Charles* Émile [皮伽] 乃表示法國數學家 Charles Émile Picard 可簡書為 Émile Picard 也.

Aall, N. H. [亞爾] 二十世紀 法人

Aasheim, A. N. [亞犀] (1749—1800)

Abadie, T. [阿巴第] 十九世紀中 法人

Abadie-Dutemps [阿巴第・度騰] 二十世紀 法人

Abakanowicz, B. [阿巴康諾威嗣] 十九世紀 波蘭人

Abason, Ernest [阿巴遜] 二十世紀前半期 羅馬利亞人

Abbati, Pierto [阿巴提] (1768—1842) 義人 研究羣論.

Abbatt, Richard [阿巴特] 十九世紀 英人 著變分學

Abbe, C. [阿柏] 二十世紀初 美人

Abbo *von Fleury* [阿波] (945—1003) 法人 著算術及天文學.

Abbot, Edwin A. [阿波特] 卽 Edwin Abbott

Abbott, Edwin [阿波特] 亦作 E. A. Abbot 研究多元空間.

Abbott, P. [阿波特] 二十世紀 英人

Abbott, T. K. [阿波特] 十九世紀後半期 英人

Abbott, W. [阿波特] 二十世紀 英人

Abdank-Abakanovicz, Br. [阿布丹・阿巴坎諾維] (1852—1900) 法人 發明求平面曲線面積之器具.

Abel, Niels Henrik [亞柏爾] (1802,8,5—1829,4,6) 挪威人 創造亞柏爾函數.闡明橢圓函數.證明五次方程式不能用代數解法.

Abenbeder [亞本柏德] 亦作 Ibn Bedr 十三世紀 西班牙人.

Abendroth, A. [亞本羅司] 二十世紀 德人

Abraham, H. [亞伯拉罕] 十九世紀 法人

Abraham, Max [亞伯拉罕] 十九及二十世紀 德人 研究向量解析.

Abraham bar Chiia [亞伯拉罕・巴・契亞] 卽 Savasor'da.

Abraham ben Ezra [亞伯拉罕・本・厄茲剌] 亦作 Rabbi ben Ezra 或 Abraham ibn Esra (至$\frac{1093}{1097}$--1167) 猶太(現今西班牙)人 著數論,幻方,日曆等.

Abramowicz, C. [亞布藍摩威] 二十世紀 法人

Abran, Joao Manuela d' [亞布蘭] 十九世紀前半期 法人

Absolonne, A. [亞布梭倫涅] 二十世紀 比利時人

Abu Ali al-Chaiyat [阿布・阿利・亞察雅] (?—835) 猶太人

Abu Bekr Mohammed [阿布・伯克・穆罕默德] 卽 Al Karkhi.

Abu Ja'far Alchzain [阿布・札發・亞察晉] 亦作 Alkarismi 或 Abu Dscha'far Alchazin (?—$\frac{960}{971}$) 亞剌伯人 著歐氏幾何,代數學及天文學.

Abu Kamil [阿布・喀密] (850—930) 埃及人 研究五角形,十角形及代數

學.

Abu'l-Faradsh [阿部·法拉士] 十世紀後半期 亞剌伯人 著數學家傳記.

Abu'l Hasan Ali [阿部·哈森·阿利] 卽 Al-Nasawi

Abul Jud [阿部·査德] 十一世紀中 亞剌伯人 幾何學家.

Abul Salt [阿部·索特] $\binom{1066}{1067}-\binom{1133}{1134}$ 西班牙人 著幾何學.

Abul Taiyib [阿部·退義] 亦稱 Sind ibn Ali 九世紀中 亞剌伯人

Abul Wefa [阿部·威法] 亦作 Abul Wafa (940,6,10–998,7,1) 波斯(現今美索不達米亞)人 幾何學家及天文學家,造正弦正切表.

Abu Mohammed Al-Khojandi [阿布·穆罕默德·亞柯冉笛]

Abu Yahya [阿布雅雅] 亦作 Al-Batriq (?–至796/806) 亞剌伯人

Accetta, G. [阿森塔] 十八世紀後半期

Achenwall, Gottfried [阿痕發爾] (1719–1772) 德人 統計學家

Ackermann, R. [阿刻曼] 二十世紀前半期 德人

Ackermann, W. [阿刻曼] 二十世紀 德人

Adam, Charles [亞丹] 十九及二十世紀 法人 編輯笛卡兒全集.

Adam, Jehan [亞丹] 十五世紀後半期

Adam, P. E. [亞丹] 十九世紀後半期 法人

Adam, W. [亞丹] 十九世紀後半期 德人

Adamczik, J. [亞丹稷克] 二十世紀 德人

Adamoff, A. [亞丹摩夫] 二十世紀初 俄人

Adams, C. L. [亞當斯] 二十世紀 美人

Adams, C. R. [亞當斯] 二十世紀前半期 美人

Adams, Daniel [亞當斯] 十九世紀 美人

Adams, E. P. [亞當斯] 二十世紀前半期 美人

Adams, George [亞當斯] 十八世紀中

Adams, John [亞當斯] 美人

Adams, John Couch [亞當斯] (1819,6,5—1892,1,21) 英人 依數學之計算,於1845年,預知天王星之位置.

Adams, John Quincy [亞當斯] 十九世紀前半期 美人

Adams, O. S. [亞當斯] 二十世紀前半期 美人

Adams, Rachel B. [亞當斯] 卽 Mrs. C. R. Adams 二十世紀前半期 美女人

Adelard *of Bath* [阿德拉] 亦作 Atelhart von Bath 或 Athelard 十二世紀前半期 英人 譯歐氏幾何原本自亞剌伯文爲拉丁文.

Adémar [阿得瑪] (938—1030) 猶太人

Adhemar, J. [阿德赫瑪] 十九世紀 法人

Adhēmar, Robert d' [阿德赫瑪] 卽 D'Adhēmar

Adler, August [阿德勒] 二十世紀前半期 德人

Adodouroff, Vosilii Endokimovich [阿多杜羅夫] (1709—1778) 俄人

Adrain, Robert [亞得里安] (1775,9,30—1843,8,10) 愛爾蘭人 研究最小二乘法

Adriaen Anthoniszoon [亞得里恩・安吞尼佐] 卽 Adriaen Metius

Adriaen Metius [亞得里恩・米替阿] 卽 A. Metius

Adriaenszoon, Jacob Metius [亞得里恩佐] 卽 Jacob Metius

Adriaen van der Gucht [亞得里恩・凡・得・谷喜] 十六世紀

Adrian, P. [亞得里安] 二十世紀前半期 瑞士人

Adrian, T. [亞得里安] 十九世紀後半期 德人

Adud-ed-daula [阿達愛多拉] (978—983) 美索不達米亞人

Aebly, J. [伊布力] 二十世紀 德人

Aelbehrt, Erzbischof [阿爾柏特] (?—780)

Aeneae, Henri [伊尼伊] (1743—1812) 荷蘭人

Aepinus, Franz Ulrich Theodor [亞皮努斯] (1724—1802)

Æschylus [伊士奇] 紀元前四世紀 希臘人

Aethelstan [阿式爾史坦] (895—941) 英人

Affo [阿福] 十八世紀後半期 義人

Affolta, F. A. [阿福爾塔]

Africanus, Julius [阿夫立授那] 亦作 Sextus Julius Africanus 三世紀前半期 羅馬人 數學史專家.

Aganis [阿加尼] 六世紀 希臘人

Agard, H. L. [阿加笛] 二十世紀前半期 美人

Agatharchus [阿加塔察] (468 B. C. — 399 B. C.) 雅典人

Agnesi, Maria Gaftana [阿內濟] 亦作 Maria Gaetena 或 Maria Gaetana 或 Marie Gabriel (1718,3,16—1799,1,9) 義女人 發明箕舌綫.

Agricola, George [阿基柯拉] (1490,3,24—1555,11,21) 法人

Agrippa [阿克利巴] (63 B.C.—12 B.C.) 羅馬人

Agrippa, Cornelius [阿克利巴] (1486—1535) 作幻方

Aguillon, François [阿基隆] 亦作 François d'Aiguillon 或 Franz von Aiguillon 或 Franz von Aquilonius (1566—1617) 比利時人

Ahl, F. [阿爾] 二十世紀初 德人

Ahmed ibn Yusuf [阿默德·易·優薩] 亦作 Al-Mirsi $\left(? - 或 {}^{912}_{913} \right)$ 埃及人

Ahmes [阿默士] 紀元前十七世紀 埃及人 所遺算術幾何學殘片書,現存倫敦博物院,乃世界僅有之最古數學書.

Ahrendt, A. [阿棱特] 十九世紀後半期 德人

Ahrens, Wilhelm [阿棱斯] (?—1927,4,23) 德人 著遊戲數學

Aichi, K. 二十世紀 日本人

Aida Ammei〔會田安明〕(1742—1817陰曆十月二十六日)　日本人

Aiguillon, François d' [阿基隆]　亦作 Franz von Aiguillon 卽 F. Aguillon

Ailly, Pierre d' [艾伊]　亦作 Peter von Ailly 卽 d'Ailly 或 Alliaco

Airey, J. R. [亞累]　二十世紀　英人

Airy, *Sir* George Biddel [亞立]　(1801,7,27～1892,1,2)

英人　治差誤論,偏微分方程及物理學.

Airy, Osmund [亞立]　十九世紀後半期　英人

Aitken, A.C. [亞墾]　二十世紀前半期　愛爾蘭人　研究矩列式.

Ajello, C. [阿澤羅]

Ajema, Heinrich [亞澤麻]　十八世紀後半期

Ajima Chokuyen〔安島直圓〕(1739—1798)　日本人

Akam, W. G. [亞坎]　二十世紀　英人

Akers, O. P. [亞克斯]　二十世紀前半期　美人

Akhmim [阿克民]　八世紀　埃及人

Akimoff, M. [亞琴摩夫]　二十世紀　法人

Aladern, Joseph [阿拉對]　西班牙人

Alahdab [亞拉達]　亞剌伯人

Alamagni, Alessandro [阿拉曼尼]　十六世紀後半期　義人

Ålander, M. [奧蘭得]　二十世紀前半期　瑞典人

Alantakis [亞蘭塔啓]　(?—987)　亞剌伯人

al-Arjani [亞阿查尼] $\left(?—或\begin{smallmatrix}852\\853\end{smallmatrix}\right)$ 亞剌伯人

Alasia, C. [亞拉西亞]　十九世紀末　義人

al-Astorlabi [亞阿斯托拉比]　九世紀　亞剌伯人

Al-Aziz [亞阿晉]　十世紀後半期　埃及人

al-Baalbeki [亞巴爾柏啓]　亦作 Qosta 或 Kosta $\left(?—或\begin{smallmatrix}912\\913\end{smallmatrix}\right)$ 美索不達米亞人

Albanese, G. [亞爾本尼士] 二十世紀前半期 義人

Albanna [阿爾班拿] (1258—1339) 亞剌伯人

Albategnius [阿巴忒尼厄] 卽 Al Battani

al-Batriq [亞巴特里] 卽 Abu Yahya

Al Battani [亞巴坦尼] 拉丁文作 Albategnius (850—929) 亞剌伯(現今美索不達米亞)人 作天文學及餘弦表.

Albecht, B. [亞柏壽] 二十世紀 德人

Albeggiani, M. [亞柏查尼] 十九世紀後半期 義人

Alberi, E. [阿貝里] 十九世紀 義人

Albert, Johann [亞爾伯特] (1500—1565) 德人

Albert, O. W. [亞爾伯特] 二十世紀前半期 美人

Albert of Saxony [亞爾伯特] 亦作 Albertus de Saxonia 或 Albert von Sachsen (1325—1390) 德人

Albert von Sachsen (亞爾伯特) 卽 Albert of Saxony

Alberti, Andreas [阿貝爾第] 十七世紀

Alberti, Leo Battista [阿貝爾第] 亦作 Leone Battista Alberti (1404—1472) 義人

Albertus de Saxonia [阿柏塔] 卽 Albert of Saxony

Albertus Magnus [阿柏塔·馬格那] 亦作 Albert la Grand (或 $\frac{1193}{1205}$—1280,11,15) 巴伐利亞 (Bavaria) 人

Alberuni [阿貝朗尼] 亦作 Al Biruni (973—1048) 亞剌伯人 貢獻於印度之數學.

Albinus [阿爾拜那斯] 卽 Alcuin

Al Biruni [亞比朗尼] 卽 Alberuni

Albius, Ricardus [亞比阿斯] 卽 Richard White

Albrecht, Theodor [阿布勒喜特] 十九及二十世紀 德人 研究測地術.

Albumassor [阿布馬索] (?—886) 亞剌伯人

Al Buni [亞·班尼] 亦作 El Buni (?—1228) 亞剌伯人

Albuquerque, J. A. [阿布奎基] 十九世紀後半期 法人

Albuzjani [阿布查尼] 亦作 Al Buzdschani 即 Abul Wefa

Alcalá [亞爾喀拉] 十六世紀前半期

Alcalá-Galciano, Dionisio [亞爾喀拉·給栖諾] 十八世紀

al-Chaiyat [亞察雅] 即 Abu Ali al-Chaiyat

Alchazin [亞察晉] 即 Abu Ja'far Alchazin

Alchindi [亞京第] 即 Al Kindi

Alchodschandi [亞綽產第] 十世紀 亞剌伯人

Alchwarizmi [瓦科瓦利米] 即 Al Khowarizmi

Alcock, W. B. [奧爾科克] (1858—1929,1,18) 英人

Alcuin *of York* [阿爾琴] 亦作 Albinus (735—804,5,19) 英人 搜集數學難題.

Alderton, Nina M. [奧得頓] 二十世紀前半期 美人

Aldhelm [阿德赫謨] 七世紀

al-Dimishqi [亞丁米許岐] 亦作 Said ibn Yaqub 十世紀 亞剌伯人

al-Dinavari [亞丁拉發里] (?—895) 亞剌伯人

Aldis, Mary Steadman [阿第斯] 十九世紀 英人

Aldis, W. S. [阿第斯] (1839—1928,3,7) 新西蘭人 數理物理學家.

Aldrich, G. P. [奧爾德立赤] (?—1926) 美人

Aleni, Jules [艾儒略] 亦作 Julius Aleni (1582—1649) 義人 明萬歷壬寅三十年(1602年)來中國.

Alessandro, Padre [阿勒散德洛] 十八世紀前半期 義人.

Alexander, Andreas [亞歷山大] 十五世紀末

Alexander, C. A. [亞歷山大] 十九世紀 美人

Alexander, John [亞歷山大] 十七世紀 瑞士人

Alexander, J. W. [亞歷山大] 二十世紀前半期 美人

Alexander Aphrodisius [亞歷山大・阿富羅底栖] 亦作 Alexander Aphrodisiensis 或 Alexander of Aphrodisias

Alexander the Great [亞歷山大] 亦作 Alexander der Grosse 紀元前四世紀 希臘王

Alexandre de Villedieu [亞歷山得] 十三世紀前半期 法人

Alexandrinus, Paulus [亞歷山德賴訥] 十六世紀後半期 德人

Alexandroff, Paul [亞歷山大洛夫] (1896—) 俄人

Alexandrow, W. [亞歷山德洛]

Alexeiewsky, W. P. [亞歷薛斯啓]

Alexits [亞歷西斯] 二十世紀前半期 德人

Aley, R. T. [阿來] 二十世紀初 美人

Alezais, R. [亞來宰斯] 二十世紀初 法人

al-Fadl [亞法爾] 卽 al Nairizi

al-Faradi [亞法剌第] 亦作 Salhab ibn Abdessalam (?— 922 或 923) 西班牙人

al-Fargani [亞法干尼] 卽 Alfraganus

al-Farrabi [亞法剌比] (?— 950 / 951) 土耳基斯坦人

al-Fayyumi [亞淮育米] (?—941) 埃及人

al-Fazari, Abu Ishaq [亞法紮里] (?—777) 亞剌伯人

al-Fazari, Abu Abdallah [亞法紮里] (?— 796 / 806) 亞剌伯人

Alfieri, Vittorio [阿爾飛亞里]

Alfonso. Vagnoni [亞豐肅] (?—1640) 義人

Alfonso X *von Leon*〔亞豐璜十世〕(1223－1284) 西班牙卡斯提爾 (Castile) 王 著行星表。

Alfraganus〔亞弗剌干那〕 亦作 al-Fargani 九世紀 亞剌伯人

Alfred the Great〔亞勒弗烈〕(848－900) 英皇

al-Gazzali〔亞迦紮力〕(1058－1111) 亞剌伯人

Alger, P. L.〔阿爾澤〕 二十世紀前半期 美人

Al-Haitam *of Basra*〔亞海坦〕 亦作 al-Hasan ibn al-Hasan 或 Hassan ben Haithem 卽 Alhazen。

al-Hajjaj〔亞哈查〕(786－835) 亞剌伯人

Al Hakim〔亞哈金〕 十及十一世紀 埃及人

al-Harrani〔亞哈利尼〕 亦作 Ibrahim ibn Hilal (923－994) 亞剌伯人

al-Harrani〔亞哈利尼〕 亦作 Tabit ibn Korra

Al-Hasan ibn Al-Hasan〔亞哈森•易•亞哈森〕 或作 Al-Hasan ibn Al-Haitam 卽 Al Haitam

Al-Hasan ibn 'Obeidallah〔亞哈森•易•奧拜達拉〕 十世紀 亞剌伯人

al-Hasib〔亞哈西〕 九世紀中 亞剌伯人

Al-Hassâr〔亞哈薩〕 十二世紀 亞剌伯人

Alhazen〔亞哈曾〕 亦作 al-Haitam 或 Hassan ben Haithem (950－1038) 亞剌伯(現今亞洲土耳其)人

Al-Himsi〔亞欣西〕 $\left(?-\frac{883}{884}\right)$ 亞剌伯人

al-Hosein, ibn Sina〔亞何舍〕 卽 Avicenna

Alhossein〔亞何舍〕 卽 Avicenna

Ali Aben Ragel〔阿利•阿本•剌革〕 十或十一世紀 亞剌伯人

Ali ibn Abi Said〔阿利•易•阿比•薩德〕 卽 Ibn Yunus

Ali ibn Ahmed, al-Nasavi〔阿利易阿默德〕 卽 Al-Nasawi

Ali ibn Ibrahim〔阿利·易·易布剌希謨〕 卽 Ibn al-Shatir

Ali ibn Mohammed〔阿利·易·穆罕默德〕 卽 Al Kalsadi,

Ali ibn Veli〔阿利·易·微力〕 十六世紀 亞剌伯人

al-Jauhari〔亞堯哈利〕 九世紀 亞剌伯人

al-Jorjani〔亞約占尼〕 $\left(?-\frac{1009}{1010}\right)$ 亞剌伯人

Al Kalsadi〔亞卡薩第〕 亦作 Al Qalasadi 或 Ali ibn Mohammed (?—1486) 摩爾(現今西班牙)人 代數學家,貢獻於數論.

Alkarismi〔亞卡立斯米〕 卽 Abu Ja'far Alchazin.

Al Karkhi〔亞卡棐〕 亦作 Alkarki 或 Abu Bekr Mohammed 或 Al Karchi (?—1029) 亞剌伯(現今美索不達米亞)人 代數學大家.

Al Karmani〔亞卡馬尼〕 亦作 El Karmani (976—1066 西班牙人

Al-Kashi〔亞卡細〕 亦作 Al-Kushi 又作 Jemshid 或 Al Kaschi (?—1436) 波斯人

Alkayami, Omar〔亞卡雅密〕 十一世紀初 亞剌伯人 代數學家.

Al-Khazin〔亞卡晉〕 $\left(?-\frac{961}{971}\right)$ 亞剌伯人

Al-Khidr〔亞棐耳〕 卽 Al Khojandi

Al Khojandi〔亞科查第〕 亦作 al-Khidr (?—1000) 亞剌伯人 代數學大家

Al Khowarizmi〔瓦科瓦利米〕 亦作 Beni Musa 或 Al-Khowarazmi 或 Alchwarizmi (810—880?) 亞剌伯人 為亞剌伯數學之鼻祖,始以代數學之名稱著書.

Al Kindi〔亞京笛〕 亦作 Yaqub ibn Ishaq 或 Alchindi $\left(810?-\text{或}\,\frac{873}{874}\right)$ 亞剌伯人 著數論,天文學及光學等.

Alkmaar〔亞克馬〕 十六世紀末 荷蘭人

Al Kuhi〔亞庫希〕 十世紀後半期 亞剌伯(現今美索不達米亞)人

Al Kushi〔亞卡細〕 卽 Al Kashi

Allardice, R. E.〔亞拉狄斯〕(1862—1928,5,29) 美人

Allcock, C. H.〔亞科克〕著理論幾何學

Allegret, A.〔亞雷格勒〕十九世紀中　法人

Allen, D. R.〔阿倫〕二十世紀前半期　美人

Allen, Edwin Brown〔阿倫〕二十世紀前半期　美人

Allen, E. F.〔阿倫〕二十世紀前半期　美人

Allen, Edward S.〔阿倫〕二十世紀前半期　美人

Allen, Fiske〔阿倫〕二十世紀　美人

Allen, Florence E.〔阿倫〕二十世紀前半期　美人

Allen, H. Stanley〔阿倫〕二十世紀前半期　美人

Allen, Joseph〔阿倫〕十九世紀末　美人

Allfree, G. F.〔奧爾夫里〕十九世紀後半期　英人

Allgaier, J.〔奧爾給厄〕十九世紀　奧人

Alliaco, Petrus de〔阿來科〕亦作 Pierre d'Ailly 或 Alyaco 或 Heliaco (1350—1420, 8, 8) 法人

Alliaume, Maurice〔阿來奧〕(?—1931) 比利時人

Allison, Eli〔阿利松〕二十世紀前半期　美人

Allman, George Johnston〔奧爾曼〕(1824,9,28—1904,) 愛爾蘭人　著希臘數學史。

Allman, William〔奧爾曼〕(1809—1844) 愛爾蘭人

Allodi, Gaetano〔阿洛狄〕十八世紀後半期　義人

Almadiano, Pietro〔亞馬狄諾〕十五世紀後半期　義人

Al Madschriti〔亞馬士利提〕亦作 El Madschriti (?—1007) 西班牙人

Al-Mahani〔亞馬哈尼〕亦作 Almahani $\left(?-\frac{874}{884}\right)$ 美索不達米亞人　研究三角術及三次方程。

Al-Majriti〔亞麥利替〕$\left(?-\text{或}\begin{matrix}1007\\1008\end{matrix}\right)$ 西班牙人

Al Mamun〔亞瑪蒙〕(786—833) 亞剌伯王

Al Mansur〔阿爾曼蘇〕(在位時 712—775) 亞剌伯王.

Al Masihi〔亞馬西喜〕即 al-Jorjani

Almech, J. M. I.〔亞爾麥契〕二十世紀前半期 西班牙人

Almeida, L. C.〔亞爾美達〕十九世紀末 葡萄牙人

Al Mervarrudi〔亞美發魯狄〕九世紀 亞剌伯人

Al-Mervazi〔亞美發稷〕$\left(?-\text{至}\begin{matrix}864\\874\end{matrix}\right)$ 亞剌伯人

Al-Misri〔亞米理〕即 Ahmed ibn Yusuf

Al-Nadim〔亞那丁〕十世紀末 亞剌伯人

Al-Nairizi〔亞內立戚〕亦作 al-Fadl 或 Al-Nirizi $\left(?-\begin{matrix}922\\923\end{matrix}\right)$ 希臘人 幾何學家.

Al Nasawi〔亞那薩維〕亦作 Al Nasavi 或 Ali ibn Ahmed 或 Abu'l Hasan Ali 或 Kushyar ibn Lebban (971—1029) 亞剌伯人 著印度之算術

Al Nehavendi〔亞內哈汾狄〕$\left(?-\begin{matrix}835\\845\end{matrix}\right)$ 亞剌伯人

Al-Nirizi〔亞尼利稷〕即 Al-Nairizi

Alonso Delatore〔阿倫索·德拉托〕十五世紀後半期 西班牙人

Alpetragius〔亞柏特拉朱〕亦作 Nur ed-din al-Betruji 十二世紀末

Alphonso〔亞豐瑣〕即 Alfonso

Al-Qalasâdî〔亞卡薩第〕即 Al Kalsadi

Al-Qass〔亞喀斯〕亦作 Nazif ibn Jumn 九世紀 希臘人

Al-Qible〔亞啓布爾〕亦作 Muslin ibn Ahmed al-Leiti $\left(?-\text{或}\begin{matrix}907\\908\end{matrix}\right)$ 西班牙人

Al-Qiwam〔亞啓閱〕十二世紀 西班牙人

Al Raschid, Harun〔亞剌犀〕亦作 al-Rashid (763—809) 亞剌伯王

Al Rashid [亞剌犀] 卽 Al Raschid

Al-Razi, Fahr ed-din [亞拉稷] (或$\frac{1149}{1150}$—1210) 波斯人

Al-Razi, Mohammed ibn Zakariya [亞拉稷] 卽 Rhases

Al-Rumi [亞魯米] 亦作 Miram Chelebi (?—1524) 巴爾幹之塞拉斯(Thrace)人

Al-Saffar [亞薩法] (?—1035) 西班牙人

Al Sagani [亞薩干尼] 亦作 As Sagani (?—990) 美索不達米亞人

al-Shadib [亞沙狄] 卽 Zaddik

Al-Shahrastani [亞沙剌塔尼] (?—1153) 亞剌伯人

Alsop, S. [奧爾索普] 十五世紀中　美人

Alsted, Johann Heinrich [奧斯忒] (1588—1638) 普魯士人

Alt, H. [奧爾特] 二十世紀前半期　德人

Alt, Ludovico [奧爾特] 亦作 Ludovico Alt di Salispurgo 十六世紀中　義人

Altalus [奧達盧斯]

Alterauge, L. [奧忒勞治] 二十世紀初　德人

Altshiler-Court, Nathan [亞特示勒・庫特] 二十世紀前半期　美人.

Altshiller, N. [亞特示勒] 二十世紀　美人

Al-Tusi [亞圖西] (?—1213) 波斯人

Al Tusi [亞圖西] 卽 Nasir-Eddin

Alvarez de Castro, A. [阿爾發勒士] 十九世紀末　義人.

Al-Zarkali [亞紮卡利] 亦作 Al-Zarqala 或 Arzachel 或 Ibn al-Zaraqala 或 Ibrahim ibn Yahya 十一世紀後半期　西班牙人

Amaldi, U. [亞馬地] 二十世紀初　義人

Amanzio, D. [阿曼宰] 十九世紀後半期　義人

Ambrose of Milan [安布洛兹] 署名爲 Hegesippus 四世紀 義人

Ameristus [亞美里堵] 亦作 Mamercus 紀元前六世紀 希臘人 幾何學家

Ames, A. F. [恩兹] 十九世紀末 美人

Ames, L. D. [恩兹] 二十世紀初 美人

Ames, William L. [恩兹] 十九世紀末 德人

Amic, Marcel [阿米] 二十世紀 法人

Amicis, Enrico de [阿米息] (1858—1925,6,22)

Amick, T. C. [阿米克] 二十世紀前半期 美人

Amigues, E. *P. M.* [阿米革] 十九世紀末 法人

Amiot, A. [阿米奥] 幾何學家

Amiruoio, Georg [亞密書栖] 十五世紀

Ammerman, Charles [安麥曼] 二十世紀前半期 美人.

Ammon, O. [安夢] 十九世紀後半期 英人

Ammonius, J. [阿摩尼阿斯] 十六世紀後半期 德人.

Amodeo, F. [亞摩對] 二十世紀初 義人 著射影幾何學

Amoretti, F. [亞摩累提] 十九世紀後半期 阿根廷人

Amperé, André Marie [安培] (1775,1,22—1836,6,10) 法人 發明安培定律,成立電力學之數理基礎.

Amphinomus [安斐諾馬] 紀元前四世紀 希臘人

Amsler, A. [阿姆斯勒] 十九世紀後半期 瑞士人

Amsler, Jakob [阿姆斯勒] (1823—1912) 發明極測面器.

Amstein, H. [阿姆斯騰] 十九世紀 德人

Amthor, A. [安叨爾] 十九世紀 德人

Amyclas of Heraclea [阿民克拉斯] 亦作 Amyklas von Heraklea 紀元前四世紀 雅典人

Ananda Rou, K. [亞拿達・牢] (1893－) 印度人

Anatolius [阿那托力雅] 三世紀後半期 希臘人

Anaxagoras *of Clazomenae* [亞拿薩哥拉] 亦作 Anaxagoras von Klazomenae (499 B.C.－428 B.C.) 希臘人 研究化圓爲方之問題.

Anaximander *von Milet* [亞諾芝曼德] 亦作 Anaximandros (611 B.C.－547 B.C.) 希臘人 使用日晷儀.

Anaximenes *of Miletus* [亞諾芝曼尼] (585B.C.－528 B.C.) 希臘人 研究天文數理.

Ancillon [翁栖弄] 十八世紀末 德人

Andalò di Negro [安達羅] (1260－1340) 義人

Anderegg, F. [安得勒格] 十九及二十世紀 美人

Anderhalden, P. B. [安得哈登] 二十世紀初 瑞士人

Andersen, A. F. [安得森] 二十世紀前半期 德人

Anderson, Alexander [安得孫] 十七世紀前半期 法人

Anderson, G. [安得孫] (1760－1796) 英人

Anderson, L. A. [安得孫] (？－1927,1,20) 美人

Anderson, Nola Lee [安得孫] 二十世紀前半期 美人

Anderson, W. E. [安得孫] 二十世紀前半期 美人

Andersson, J. [安得遜] 二十世紀 瑞典人

Anderton, Ethel L. [安得頓] 二十世紀前半期 美人

Anding, E. [安丁] 二十世紀 德人

Andoyer, Henri [安多業] (1863－1929,6,12) 法人

Andrade, Jules [安德拉烈] (1858－) 法人

Andrade, V. [安得拉烈] 十九世紀末 墨西哥人

Andrae, A. [安得累] 二十世紀初 德人

André, Désiré [安得烈] 十九世紀末 法人 研究數學之記號.

Andre, Ph. [安得烈] 十九世紀 法人

Andreae, Joannis Valentini [安德累厄] 德人

Andreas, E. [安德雅] 十九世紀末 瑞士人

Andréief, C. [翁都賴夫] 十九世紀後半期 法人

Andreoli, G. [安累力] 二十世紀前半期 義人

Andrés, Mossen Juan [安得累] 十六世紀前半期 義人

Andrés García de Lovas [安得累•加西] 十六世紀 義人

Andrew, S. O. [安德魯] 二十世紀 英人

Andrews, E. S. [安得魯茲] 二十世紀 英人

Andrews, G. [安德魯茲] 二十世紀初 美人

Andrews, W. S. [安德魯茲] 二十世紀 美人

Andrian, F.v. [安得里安] 二十世紀 奧人

Angel, H. [安吉兒] 十九世紀 美人

Angeli, Stefano degli [安吉里] (1623—1697) 義人

Anger, Carl Theodor [安吉] (1803—1858) 德人

Angerbach, A. [安吉巴哈] 二十世紀 德人

Anglas J. [安格拉] 二十世紀 法人

Anglès, Robert [安格熱] 卽 Robertus Anglicus

Anglin, A. H. [安格林] 十九世紀後半期 英人

Angot, A. [安哥] 二十世紀 德人

Ångström, A J. [安格斯洛] (1814—1874) 瑞典人

Anhaltin, Christian Martini [安哈廷] 十七世紀 荷蘭人

Anianus [安尼安那] 十五世紀後半期 法人 天文學家

Anisimov, V. A. [安尼斯摩] 十九世紀末 波蘭人

Anissimoff, W. [安尼辛摩夫] 十九世紀末 法人

Anitchkof, Dimitri Sergievitch [阿諾基科夫] (1740—1788) 德人

Anning, N. H. [安甯] 二十世紀前半期 美人

Annotis Cataldi, Pietro [安尼泰・卡塔鍇] 卽 Cataldi.

Anthemius von Tralles [安提密阿] (?—534) 土耳其人

Anthonisz, Adriaen [安吞尼次] 亦作 Adriaen Anthonisz von Metz 或 Adriaen Anthonisz von Metius (1527—1607) 荷蘭人 研究圓周率. 其子爲亞得里恩 (Adriaen Metius).

Antilli, A. [安替利] 二十世紀 義人

Antiphon [安替豐] 亦作 Antipho 紀元前五世紀 希臘人 研究探盡法 (Method of exhaution).

Antoine, L. [翁圖] 二十世紀前半期 法人

Anton, L. [安吞] 十九世紀後半期 德人

Antonelli, G. B. [安托涅利] 十九世紀後半期 義人

Antoni, Aless. Vittor. Papacino de [安托尼] 十八世紀後半期 義人

Antonio Biliotti [安托泥奥・比略提] 十四世紀後半期 義人

Antonio de Dominus [安托泥奥] 十七世紀前半期 巨哥斯拉夫人

Antonius Andreas [安吞阿斯・安德雅] 十四世紀前半期

Anvers, S. J. [安微斯] 二十世紀 比利時人

Aoust, l'Abbé [奥斯特] 十九世紀後半期 法人 研究平面曲線及空間曲線.

Apastamba [阿帕坦巴] 印度人

Apianus, Petrus [阿匹安那] 德文作 Peter Bienewitz 或作 Peter Bennewitz 或 Petrus Apian (1495—1552,4,21) 德人 研究無窮遠之意義.

Apollodorus *of Athens* [亞坡臺斗勒] 亦作 Apollodotus 紀元前二世紀 希

臘人

Apollonius *of Perga* [阿坡倫尼] 亦作 Apollonius Pergaeus 或 Apollonius de Perge 或 Apollonius von Pergae (260 B.C.—200 B.C.) 小亞細亞人 著圓錐曲線論八卷(但其末卷現已不存). 發見以平面截斷圓錐得二次曲線,始定拋物線,橢圓,雙曲線之名稱.

Apollonius of Tyana [阿坡倫尼] 亦作 Apollonius von Tyana 一世紀 希臘人 屬於新畢達哥拉斯派.

Aponensis, Petrus [阿坡內西] 卽 d'Abano

Appell, C. E. [亞帕爾] 十九世紀 法人 數理物理家.

Appell, Paul *Emile* [亞帕爾] (1855,9,27—1930,10,24) 法人 高等數理解析大家.

Apuleius [亞飄利尼] 亦作 Appuleius 二世紀中 非洲馬達拉 (Madaura) 人

Aquila, Johannes [亞基拉] 十六世紀 德人

Aquilonius, Franz von [阿奎倫尼] 卽 F. Aguillon

Aquinas, Thomas [阿奎那] (1225—1274) 義人

Aquino [阿奎諾] 卽 Thomas von Aquino

Arago, François Jean Dominique [阿剌各] (1786,2,26—1853,10,2) 法人 天文數理家

Araki Hikoshiro Sonyei [荒木村英] (1640—1718) 日本人

Arant, D. [亞蘭特] 十九世紀末 法人

Aratoribus, Gabriel de [亞拉托利巴] 十六世紀 義人

Aratus [亞拉圖] 紀元前三世紀 希臘人

Arbogast, Louis *François Antoine* [亞波加斯] 亦作 Louis Arbogaste (1759—1803) 法人 研究變分學,級數論,敢麻函數,微分方程式等.

Arbuthnot, John [阿巴諾司] (1658—1735) 英人

Arcerius, Johannes [阿塞里亞] 十六世紀末　荷蘭人

Archibald, Raymond Clare [阿器保] 二十世紀初　英人　數學史專家

Archilochus [阿啓羅卡斯] (714 B. C.—676 B. C.) 希臘人

Archimedes *von Syrakus* [阿基米得] 或作 Archimed (287 B.C.—212 B.C.) 希臘人　幾何學家兼物理學家.測定幾何圖形之體積,拋物線之面積.發見阿基米得螺形線.研究重心,比重,槓杆,滑車,螺旋等.

Archippus [阿基帕斯] 紀元前五世紀　希臘人

Archytas *of Tarentum* [亞開塔斯] 亦作 Archytas von Tarent (430 B.C.—365 B.C.) 希臘人　研究立方倍積問題.

Ardüser, Johann [亞度塞] (1584—1665) 瑞士人

Arendt, G. [亞倫特] 十九世紀　德人

Arendt, T. [亞倫特] 十九世紀　德人

Argand, *Jean* Robert [阿共] (1768—1825) 瑞士人　發明複數之幾何學表示法.

Argyrus, Isaac [阿該剌] (?—1372) 希臘人

Arima Raido [有馬賴僮] (1714—1783) 日本人

Aristæus [阿立斯提阿] 紀元前四世紀　希臘人　論證五個正多面體.

Aristarchus of Samos [亞利斯他克] 亦作 Aristarchus von Samos 或 Aristarchos (310 B.C.—250 B.C.) 希臘人

Aristophanes [亞理斯多芬] (450 B.C.—380 B.C.) 希臘人

Aristotle [亞理斯多德] 亦作 Aristoteles (384 B.C.—322 B.C.) 希臘人　以文字表示未知量.區別幾何學與測地術.謂數學當介乎物理學與心理學之間.

Aristoxenus *von Tarent* [亞利斯托塞納] 亦作 Aristoxenes 或 Aristoxenos

(350 B.C. — ?) 希臘人

Arjani [阿査尼] 即 al-Arjani

Arkel, P.C. von [阿刻爾] 二十世紀前半期 荷蘭人

Armenante Angelo [亞孟南特・安極樂] (1844—1886) 義人

Armstrong, Beulah M. [阿姆斯藏] 二十世紀前半期 美人

Armstrong, Gordon [阿姆斯藏] (?—1926,1,8) 美人

Armstrong, H. C. [阿姆斯藏] 二十世紀

Armstrong, L. E. [阿姆斯藏] 二十世紀前半期 美人

Arnaldi, M. [阿那第] 十九世紀末 義人

Arnaldo de Villa Nova [阿那多] (1233—1313) 法人

Arnaudeau, A. [阿諾對] 十九世紀末 法人

Arnauld, Antoine [阿挪] (1612—1694) 法人

Arnauld de Villeneuve [阿挪] 十三世紀後半期 義人

Arndt, K. [阿倫特] 二十世紀 德人

Arneth, Arthur [阿涅司] (1802,9,19—1858,12,16) 德人

Arnett, B. [阿涅特] 著幾何學

Arnold, A. M. [亞諾爾特] 二十世紀前半期 俄人

Arnold, Thomas [亞諾爾特]

Arnold, W. A. [亞諾爾特] 二十世紀 美人

Arnold, W. C. [亞諾爾特] 二十世紀前半期 美人

Arnoldt, Carl [亞諾爾德特] 十九及二十世紀 德人

Arnoux, Gabriel [阿奴] 十九及二十世紀 法人 著圖解算術

Arnsperger, Walther [安斯柏革] 十九世紀末 德人

Aron, A. [亞綸] 二十世紀 德人

Aronhold, Siegfried Heinrich [亞綸和德] (1819—1884) 德人 貢獻於不變

式論.

Arouet, François Marie [亞盧特] 常稱曰 Voltaire (1694,11,21—1778,5,30) 法人

Arrhenius, Svante [阿亨尼] (1859—1927,10,2) 瑞典人

Artin, Emil [亞廷] 二十世紀前半期 奧人

Artur, J. F. [阿屠] 十九世紀 法人

Arwin, A. [阿溫] 二十世紀前半期 瑞典人

Arya-bhata [亞雅巴塔] 亦作 Arjabahr 一世紀 印度人 創立代數學

Aryabhatta, the elder [亞雅巴塔] (476—550) 印度人 數學著作名家,研究幻方,排列法,不定方程等.

Aryabhatta, the younger [亞雅巴塔] 六世紀 印度人

Arzachel [阿紮車] 即 Al-Zarkali

Arzelà, Cesare [亞濟拉] (1847—1912) 義人 發見似齊一收斂性 (Quasi-uniform convergence).

Ascham, Roger [阿斯坎] (1515—1568) 英人

Aschieri, Ferdinando [阿斯岐里] 十九世紀 義人 著射影幾何學.

Asclepias of Tralles [阿克勒派亞] 亦作 Aslepius 或 Asklepius von Tralles 七世紀前半期 埃及人

Asclepius [阿克勒派亞] 即 Asclepias

Ascoli, G. [亞斯科利] 二十世紀 義人

Ashcraft, T. B. [阿士克剌夫] 二十世紀前半期 美人

Ashton, C. H. [亞士吞] 二十世紀初 美人

Askwith, Edward Harrison [阿斯克尉] 二十世紀 英人 著近世幾何學

Asoka [阿索卡] 紀元前三世紀 印度王

As Sagani [亞薩干尼] 即 Al Sagani

Assemani J. S. [阿舍馬泥] (1687－1768) 義人

Assemani, Simon [阿舍馬泥] 十八世紀末 義人

Ast, F. [阿斯特] 十九世紀前半期 德人

Astengo y Diez M. [阿斯騰各・伊・第] 十九世紀末 烏路圭人

Aston [阿斯呑] 十七世紀後半期 英人

Astorini, Elia [阿斯托利尼] (1651－1702) 義人

Astorlabi [阿斯托拉比] 卽 al-Astorlabi

Astrand, J. J. [阿斯特蘭] 十九世紀 德人

Atabeddin Jamshid [阿達柏丁・古庶] 亦作 Atabeddin Dschamschid 或 Gijat eddin Alkuschi 研究三次方程式.

Atanassiévitch, X. [阿坦那錫維] 二十世紀 法人

Atchison, C. S. [亞奇松] 二十世紀前半期 美人

Ateihart von Bath [阿德拉] 卽 Adelard

Atelhart von Bayeaux [阿德拉]

Ater, Muriel M. [阿忒] 卽 Mrs. M. L. Ater 二十世紀前半期 美女

Athelard [阿德拉] 卽 Adelard

Athenæus of Cyzicus [阿忒泥阿斯] 亦作 Atheneus von Kyzikus 卽 Cyzicinus of Athens

Atkins, E. [阿特琴斯] 十九世紀後半期 英人

Atkinson, E. H. de V. [阿特琴孫] 二十世紀初 英人

Attalus [阿達拉] 亦作 Attalos (241 B. C. － 197 B. C.) 小亞細亞人

Atwood, George [阿特武德] (1746－1807,7,11) 英人

Atwood, G. E. [阿特武德] 二十世紀 美人

Aubert, P. [奧柏耳] 二十世紀 法人

Aubrey, John [奧布立] 十九世紀前半期 英人

Aubry, A. [奧布里] 十九世紀 法人

Aubry, Ch. [奧布里] 二十世紀 法人

Aubry, Léon [奧布里] 二十世紀前半期 法人

Audoin, Ch. [奧多] 二十世紀 法人

Auerbach, Felix [澳厄巴哈] (1856—) 德人

Auerbach, Matilda [澳厄巴哈] 二十世紀 美人

Auffenberg, H. [奧分柏] 二十世紀初 德人

Augsburger, J. [奧格斯柏給] 二十世紀 德人

August, *Ernst* Ferdinand [奧古斯德] (1795—1870) 德人 數理物理家

Augustine, St. [奧加斯廷] 卽 Augustine of Hippo

Augustine of Canterbury [奧加斯廷] 六世紀末

Augustine of Hippo [奧加斯廷] 亦作 St. Augustine (354—430) 羅馬人

Aurel, Marco [奧累爾] 十六世紀中 德意志及西班牙人 以西班牙文著代數學.

Aureolus, Petrus [奧理略] 十四世紀

Auria, Giuseppe [奧里亞] 十六世紀後半期 義人

Auria, Joseph [奧里亞] 十六世紀後半期 義人

Aurispa, Giovanni [奧里斯帕] (1369—1460)

Austin, F.E. [奧斯丁] 二十世紀 德人

Autenheimer, F. [奧騰海麥] 十九世紀 德人 著微積分.

Autolykus [托奧力卡斯] 亦作Autolycus 或 Autolykos 紀元前四世紀 希臘人.

Autonne, Léon [奧吞澄] 十九世紀末 法人

Auwer, A. [奧味] 二十世紀 德人

Avanzini, G. [阿凡威尼] 十九世紀 義人

Avenpace [阿汾帕斯] 十二世紀前半期 西班牙人 著幾何學.

Aventinus, Johannes [阿汾泰那斯] (1477,7,4–1534,1,9) 巴伐利亞 (Bavaria) 人.

Averoës [亞昧洛厄玆] $\left(1126-\frac{1198}{1199}\right)$ 西班牙人 著天文學及三角術

Avers, H. G. [阿味斯] 二十世紀 美人

Avery, Royal A. [亞維立] 二十世紀 美人

Avicenna [亞微森那] 亦作 Al-Hosein 或 Alhossein 或 Ibn Sina (980–1037) 亞剌伯(現今布哈爾 [Bokhard]) 人 著幾何學及算術.

Avogadro, Amedeo [亞佛加德羅] (1776–1856) 義人

Axel, H. [亞克塞爾] 二十世紀 德人

Ayer [阿業] 二至四世紀 希臘人

Aynscom, Franciscus Xaverius [亞斯科] (1624–1660)

Ayres, John [亞勒] 二十世紀 德人

Azal, C. [阿紮] 法人

Baba Nobutake [馬場] 十八世紀初 日本人

Babb, M. J. [巴布] 二十世紀前半期 美人

Babbage, Charles [巴貝治, 查理] (1792,12,26–1871,10,18) 英人 發明計算器

Babbage, H. P. [巴貝治] 十九世紀 英人 查理之子

Babcyński [巴息斯啓] 十九世紀後半期

Babinet, M. [巴俾內] 十九世紀中 法人

Babrius [貝布立阿斯] 三世紀

Bacas, D. [巴卡斯] 十九世紀後半期 西班牙人

Bacchini [拔開尼] 十七世紀後半期 義人

Bach, D. [巴哈] 十九世紀後半期 法人

Bach, J. N. [巴哈] 十九世紀 德人

Bacharach, J. [巴查拉哈] 十九世紀後半期　德人

Bacharach, Max [巴查拉哈] 十九世紀　德人

Bachelard, G. [貝赤拉德] 二十世紀　法人

Bachelier, Louis [貝赤利] 二十世紀前半期　法人　著確率學

Bachet *de Méziriac*, Claude Gaspard [貝奇] (1581,10,9—1638,2,25)　法人　研究整數論,數學遊戲.

Bachheimer, R. [巴哈海麥] 二十世紀

Bachmann, Paul *Gustav Heinrich* [巴克曼] (1837—1920)　德人　著名數論大家.

Bachuone, Arnald [巴察奥] 卽 Arnaldo di Villa Nova.

Bäcklin, G. [巴克林] 十九世紀末　瑞典人

Bäcklund, A. V. [巴克倫] 十九世紀後半期　瑞典人

Backlund, O. [巴克倫] 十九世紀末　俄人

Bacon, Clara L. [培根] 二十世紀前半期　美人

Bacon, Francis [培根] (1561, 1, 22—1626,4,9)　英人

Bacon, Roger [培根] 亦作 Roger Baco (1214,—1294,6,11)　英人　著歐氏幾何學,光學及天文學.

Baconthorp, Johann [培康吞普] 十四世紀中

Bader, H. G. [貝德] 二十世紀

Badoureau, A. [巴杜累] 十九世紀後半期　法人

Bæda [比德] 卽 Bede

Baehr, G. F. W. [俾耳] 十九世紀中　荷蘭人

Baehr, J. K. [俾耳] 十九世紀　德人

Baer, C. [貝爾] 十九世紀後半期　德人

Baer, Karl [貝爾] (1851—　)

Baer, O. [貝爾] 十九世紀 法人

Baer, Reinhold [貝爾] 二十世紀 德人

Baermann, G. F. [貝爾曼] (1717—1769) 德人

Baeyer, J. J. [貝業] 二十世紀 德人

Baëza, Lodoico [巴徽] 十六世紀中 西班牙人

Bagay, Valentin [巴給] 十九世紀 法人

Bagchi, Haridas [班契] 二十世紀前半期 印度人 著幾何解析

Bagnera, F. [班涅拉] 十九世紀後半期 義人

Bagnera, Giuseppe [班涅拉] (?—1927,3,13) 義人

Bahannan, R. D. [巴罕南] 十九世紀 美人

Bähr, E. [貝耳] 二十世紀初 德人

Bahrdt, W. [巴德特] 二十世紀初 德人

Bailey, E. [貝力] 十九世紀中 美人

Bailey, E. A, [貝力] 二十世紀前半期 美人

Bailey, Frederick H. [貝力] 十九世紀末 美人

Bailey, M. A. [貝力] 二十世紀初 美人

Bailey, Samuel [貝力] 十九世紀前半期 英人

Baillaud, B. [巴勞] 十九世紀 法人

Baillet, J. [巴勒] 十九世紀末 法人

Bailly, J. S. [巴宜] (1736—1793) 法人

Bails, Benito [貝爾斯] 十八世紀後半期 西班牙人

Baily, Francis [貝禮] (1774,4,28—1844,8,30) 英人 研究利息與年金

Baily, R. F. [貝禮] 十九世紀 英人

Bainbridge, John [本布立治]

Baire, René [貝累] (?—1932,7,5) 法人 研究不連續函數.

Bajerus, J. G. [巴曼剌] 亦作 J. W. Byer 十八世紀

Baker, Alfred [培克耳] 二十世紀初 美人

Baker, A. H. [培克耳] 十九世紀後半期 美人

Baker, A. L. [培克耳] 十九及二十世紀 美人

Baker, B. B. [培克耳] 二十世紀前半期 英人

Baker, Humphrey [培克耳] (?—1587之後) 英人

Baker, Henry Frederick [培克耳] (1866—) 英人 研究多週期函數幾何學原理.

Baker, J. F. [培克耳] 二十世紀 英人

Baker, R. P. [培克耳] 二十世紀前半期 美人

Baker, S. [培克耳] 十七世紀前半期 英人

Baker, Thomas [培克耳] (1625—1690) 英人 研究計量測度

Baker, W. M. [培克耳] 二十世紀初 英人

Bakhshāli [巴赫來] 八至十世紀 印度人

Bakker, N. [貝剋] 二十世紀初 荷蘭人

Balam, Richard [巴拉] 英人 著代數學

Balbin, V. [巴賓] 十九世紀 阿根廷人

Balbontin, Juan Maria [巴波廷] 十九世紀 墨西哥人

Balbus [巴部] 一世紀末 羅馬人

Baldi, Bernardino [巴爾第] 其姓為 Cantagallina (1553—1617) 義人

Baldus, Richard [波爾達] 二十世紀前半期 德人 著非歐幾何學

Baliani, Giovanni Battista [巴里安尼] 十七世紀前半期 義人

Balitrand [巴里特蘭]

Ball, L. de [波爾] 十九及二十世紀 奧人

Ball, *Sir* Robert *Stawell* [波爾] (1840—1913) 愛爾蘭人 研究螺旋論,剛體

力學,天文數理等.

Ball, Walter William Rouse [波爾] (1850–1925,4,4) 英人 數學史專家.

Ballantine, Constance R. [巴蘭泰因] 卽 Mrs. J. P. Ballantine 二十世紀前半期 美女人

Ballantine, J. P. [巴蘭泰因] 二十世紀前半期 美人

Ballantyne, J. [巴蘭太因] 二十世紀

Balleroy, J. B. [巴勒壘] 十九世紀 比利時人

Ballif, L. [巴力夫]

Ballore, R. de Montessus [巴盧耳] 二十世紀前半期 法人

Bally, Emile [巴列] 二十世紀前半期 法人

Balsain, H. [波爾薩] 十九世紀後半期 德人

Balser, L. [波爾塞] 二十世紀 德人 著球三角術

Baltrusch, S. E. [波爾特剌司] 十九世紀 德人

Baltzer, *Heinrich* Richard [巴爾特策] (1818–1887) 德人 研究行列式

Balu, E. [巴路] 二十世紀 法人

Balzer, B. [巴爾策] 十九世紀中 德人

Banach, St. [巴納哈] 二十世紀前半期 波蘭人

Banachievitz, B. [巴那岐維] 十九世紀 俄人

Bang, A. S. [邦格] 十九世紀末

Bangma, O. S. [班瑪] 十九世紀 荷蘭人

Baniol, A. [班奈爾] 二十世紀 法人

Banister, H. [班尼斯忒] 二十世紀 英人

Bankwitz, C. [班克徽]

Banning, R. [班甯] 十九世紀末 德人

Bapu Deva Sastri [巴普・得瓦・薩利] 十九世紀, 印度人

Baraniecki, Maria Alexander von [巴刺尼啓] 十九世紀後半期　波蘭人

Barbarin, J. [巴巴鑾] 二十世紀　法人　著非歐幾何學

Barbarin, Paul [巴巴鑾] (1858—1931,9,28) 法人

Barbaro, Daniele [巴巴洛] (1513—1570) 義人

Barbaro, Ermolao [巴巴洛] 十五世紀末　義人

Barber, Harry C. [巴柏] 二十世紀前半期　美人

Barbette, Édouard [巴伯提] 二十世紀初　法人

Barbeyrac [巴貝剌克] 十八世紀初　法人

Barbier, E. [巴俾亞] 十九世紀後半期　法人

Barbieri, M. [巴俾亞里] 十八世紀後半期　義人

Barbillon, L. [巴比隆] 二十世紀初　法人

Barbosa [巴波薩] 十五世紀　義人

Barbotte, J. [巴波提] 二十世紀前半期　法人

Barcelo y Portuondo, Antonio [巴塞洛·伊·坡條多] 二十世紀前半期

Borcena, L. de la [巴塞訥] 十九世紀　西班牙人

Barchi, Barth. [巴奇] 十六世紀　義人

Barclay, Alexander [巴克雷] (1475—1552) 英人

Bardelli, G. [巴得力] 十九世紀後半期　義人

Bardey, E. [巴帶] (1828—1897) 德人

Barfuss, F. W. [巴法斯] 十九世紀　德人

Bar Hebræus [巴希伯累] 其亞剌伯名為 Juhanna (1226—1286,6,) 小亞細亞人

Barisien [巴里顯]

Barker, A. H. [巴剋] 二十世紀　英人

Barker, Eugene H. [巴剋] 二十世紀前半期　美人

Barkhausen, H. [巴克豪孫] 二十世紀 英人

Barlaam, Bernard [巴隆] (1290—1348) 希臘人

Bar-le-Duc, I. Errard de [巴勒都] 卽 Deidier 或 Didier 或 Dounot

Barlow, C. W. C. [巴駱] 十九世紀 英人 著數理天文與幾何學

Barlow, Peter [巴駱] (1776,10,13—1862,3,1) 英人 研究數論及數理物理

Barnard, F. A. P. [巴那德] 二十世紀前半期 英人

Barnard, Henry [巴那德] (1811—1900) 美人

Barnard, Raymond W. [巴那德] 二十世紀前半期 美人

Barneck, A. [巴涅克] 二十世紀 德人

Barnes, Erenst William [班茲] (1874—) 英人

Barnett, I. A. [巴聶特] 二十世紀前半期 美人 著解析幾何學

Barocius, Franciscus [巴洛栖] 卽 F. Barozzi

Barolin, C. J. [巴洛林] 二十世紀 奥人

Baroni, E. [巴洛尼] 二十世紀 義人

Bar Oseas [巴·奥栖] 紀元前三世紀 希臘人

Barozzi, Francesco [巴洛戚] 亦作 Franciscus Barocius (1537—1604) 義人

Barozzi, Jacopo [巴洛戚] (1507—1573) 義人

Barr, Archibald [巴] 十九世紀末

Barr, C. J. H. [巴] 二十世紀 英人

Barr, Thomas [巴] 二十世紀 英人

Barral, M. J. A. [巴拉爾] 十九世紀 法人

Barrat, E. M. [巴拉特] 二十世紀 英人

Barrau, J. A. [巴勞] 二十世紀初 荷蘭人

Barrême, Francois [巴棱] (?—1703) 法人

Barrême, Nicolas [巴棱] 十八世紀後半期 法人

Barres, Antonius de [巴雷] 十六世紀中　比利時人

Barrow, D. F. [巴羅] 二十世紀前半期　美人

Barrow, Isaac [巴羅] (1630,10,—1677,5,4) 英人　創立切線法,其學生牛頓因此而發明微積分.

Barsotti, G. [巴索提] 十九世紀　義人

Bartels, Johann *Martin Christian* [巴式] (1769,8,,12—1836,12,19) 俄人

Bartenstein, O. [巴騰斯泰] 二十世紀初　德人

Barter, J. D. [巴式] 二十世紀前半期　美人

Barthel, E. [巴狄爾] 二十世紀　德人　著極幾何學

Bartholinus, Er. [巴托林那]

Bartholomäi. F. [巴托龍美] 亦作 Bartholomaei 十九世紀　德人

Bartholomew, Master [巴托羅繆] 十五世紀後半期

Bartholomew, W. E. [巴托羅繆] 二十世紀前半期　美人

Bartjens, William [巴特眞] (1584—1645) 荷蘭人

Bartl, E. [巴爾] 十九世紀後半期　捷克人

Bartlett, D. P. [巴特勒特] 二十世紀前半期　美人

Bartlett, F. W. [巴特勒特] 二十世紀　英人　著畫法幾何學

Bartlett, George M. [巴特勒特] 二十世紀　美人

Bartlett, W. P. G. [巴特勒特] 十九世紀　美人

Bartol, W. C. [巴托] 二十世紀前半期　美人

Bartoli, Cosimo [巴托利] (1503—1572) 義人　幾何學家

Bartolomeo da Parma [巴托瑣美] 十三世紀末　義人

Barton, Edwin Henry [巴呑] (1858—1926,9,23) 英人

Barton, George Aaron [巴呑] (1859—) 美人

Barton, S. M. [巴呑] (1860—1926,1,5) 美人

Bartsch, Jacob [巴提士] (?—1633) 法人

Barus, C. [貝剌斯] 二十世紀 美人

Bary, N. [巴立] 二十世紀前半期 法人

Barziza, Vincenzo [巴齊紮] 十六世紀 義人

Basedow, Johann Bernhard [巴西多] (1723—1790) 德人

Bashforth, Francis [巴士福司] 十九世紀中 英人 研究射體運動之數理.

Bass, Edgar W. [巴斯] 十九世紀末 美人

Bassani, A. [巴薩尼] 十九世紀末 義人

Bassermann-Jordan, Ernst von [巴塞曼·約但] 二十世紀 德人

Basset, Alfred Barnard [巴塞] (1854—1930,12,5) 英人 著曲面幾何學

Bastien, J. [巴斯天]

Basylides von Tyrus [巴錫力德]

Basyngstoke, Johannes von [巴辛斯托克] 十三世紀

Batchelder, Paul M. [巴車爾德] 二十世紀前半期 美人 著差分方程

Bateman, Harry [巴提曼] 二十世紀前半期 英人 著微分方程式

Batriq [巴特里] 卽 al-Batriq

Batta, M. A. [巴塔] 二十世紀

Battaglini, Giuseppe [巴塔格利尼] (1826—1894) 義人

Battani [巴坦尼] 卽 Al Battani

Battelli, S. [巴忒利] 十九世紀後半期 荷蘭人

Battermann, H. [巴特曼] 十九世紀末 德人

Bauchinger, J. [白欽澤] 二十世紀

Baudhayana [波赫雅那] 印度人

Baudin, Maurice [波丁] 二十世紀前半期 美人

Bauduit, W. J. [波度特] 二十世紀前半期　美人

Bauer, A. [寶厄] 二十世紀　德人

Bauer, Gustav [寶厄] (1820－1906) 德人

Bauer, George N. [寶厄] 十九及二十世紀　美人

Bauer, J. P. [寶厄] 十九世紀末　德人

Bauer, Michel, [寶厄] 十九世紀末　法人

Bauer, W. [寶厄] 十九世紀　瑞士人

Baum, Simon [寶姆] 十八世紀後半期　德人

Baum, T. R. [寶姆] 十九世紀中　德人

Baumann, J. J. [波曼] 十九世紀　德人

Baumeister, A. [鮑邁斯忒] 十九世紀後半期　德人

Baumert, P. [包美特] 十九世紀後半期　德人

Baumgardt, E. [包加特] 十九世紀中　德人

Baumgart, Oswald [包姆加] 十九世紀後半期　德人

Baumgartner, Ludwig [包姆加涅] 二十世紀　德人　著羣論

Baur, F. [保爾] 二十世紀　德人

Baur, L. [保爾] 十九世紀末　德人

Bauschinger, J. [波斯欽澤] 十九及二十世紀　德人　著小數八位之對數三角函數表.

Baxandall, D. [巴贊達爾] 二十世紀前半期　英人

Baxendall [巴芝達爾]

Baxter, H. E. [巴克斯忒] 二十世紀　美人

Bayer, H. G. [貝業] 二十世紀　美人

Bayer, Johann [貝業]

Bayer, J. W. [貝業] 即 J. G. Bajerus

Bayer, Thomas [貝業] (?—1761) 英人 發明機率學中之貝業定理.

Bayes, Thomas [巴葉斯] 十八世紀後半期 英人

Bayle, Pierre [貝爾] (1647—1706) 法人

Bayley, *Sir* E. Clive [貝黎] 十九世紀後半期 英人

Bayliss, R. W. [拜利斯] 二十世紀

Bayma. Joseqh [貝瑪] 十九世紀後半期 英人

Baynes, T. S. [本茲] 十九世紀中 英人

Bays, S. [貝] 二十世紀 法人

Bazin, H. [巴晉] 十九世紀中 法人

Beal, F. W. [俾爾] 二十世紀前半期 美人

Beard, W. S. [俾耳德] 二十世紀 英人

Beare, T. H. [比爾] 十九世紀末 英人

Beasley, R. D. [比茲利] 十九世紀後半期 英人

Beatley, Ralph [俾特力] 二十世紀前半期 美人

Beatty, Samuel [俾替] 二十世紀前半期 美人

Beau, O. [比烏] 十九及二十世紀 德人

Beaugrand, Jean de [波格藍]

Beaumont, M. Élie de [波蒙] 十九世紀

Beaune, Florimond de [逢內] (1601—1652) 荷蘭人

Beaupain, J. [波盆] 二十世紀 比利時人

Beaupré, V. E. [波普累] 二十世紀前半期 美人

Beausard, Peter [波撒] 十六世紀 比利時人

Bearvais, Vincent de [波末] 拉丁文作 Vincentius Bellovacensis (?—1265) 法人

Beauvoir, Armand von [波服] 十四世紀前半期

Beaven, H. C. [波委] 二十世紀　英人

Becher, E. [柏赫] 二十世紀　德人

Bechtel, E. A. [柏喜忒] 十九世紀

Bechterev, P. [柏喜忒勒] 二十世紀　俄人

Beck, Dominicus [伯克] 十八世紀　奧人

Beck, E. G. [伯克] 二十世紀　英人

Beck, Hans [伯克] 二十世紀初　德人　著幾何學

Beck-Calwen, J. F. van [伯克·卡爾溫]

Beck-Ustni, Alexander [伯克·烏斯尼] (?—1926) 拉脫維亞人

Becker, E. [柏刻] 二十世紀　德人

Becker, G. F. [柏刻] 二十世紀初　美人

Becker, G. J. [柏刻] 十九世紀　美人

Becker, J. C. [柏刻] 十九世紀後半期　德人

Becker, K. [柏刻] 十九世紀末　德人

Becker, Oskar [柏刻] 二十世紀　德人

Becker, R. [柏刻] 二十世紀　德人

Beckett, J. A. [柏克特] 二十世紀前半期　英人

Beckman, K. [柏克曼] 十九世紀後半期　瑞典人

Beckwith, Ethelwynn R. [柏克尉] 即 Mrs. W. E. Beckwith　二十世紀前半期　美女

Becqueral, Jean [柏克勒爾] 二十世紀　法人

Beda [比德] 即 Bede,

Bede, the Venerable [比德尊者] 亦作 Bæda 或 Beda 或 Beda Venerabilis (672,—735,5,26) 英人　當時之大學問家,研究日曆及手指算.

Bedwell, Thomas [柏德衞爾] (?—1595) 英人

Beebe, W. [俾比] 十九世紀後半期 美人

Beeckman, Isaac [俾克曼] 十七世紀 荷蘭人

Beeger, U. G. W. H. [俾給] 二十世紀 荷蘭人

Beek, G. van [俾克] 二十世紀初 荷蘭人

Beenken, May M. [俾墾] 二十世紀前半期 美人

Beer, A. [貝耳] 十九世紀 德人

Beetle, R. D. [貝特爾] 十九世紀末 美人

Beghin, H. [貝基] 二十世紀前半期 法人

Beguelin, Nicolas de [柏給林] (1714–1789) 德人

Beha-Eddin [貝哈・厄定] (1547–1622) 波斯人 著算術.

Behaim, Martin [貝亥謨] 十五世紀 葡萄牙人

Behmann, H. [貝曼] 二十世紀 德人 著數學與論理

Behr [柏耳] 卽 Benjamin Ursinus

Behrendsen, O. [白棱德孫] 二十世紀 德人

Behse, W. H. [白栖] 十九世紀 德人

Beke, E. [俾克] 十九世紀末

Belanger, J. B. [柏蘭給] 十九世紀中 法人

Belardinelli, G. [伯拉丁涅利] 二十世紀前半期 義人

Beldomandi, Prodocimo de' [白多孟第] 亦作 Prosdocimo de' Beldamandi $\left(\text{至}{}^{1370}_{1380}-1428\right)$ 義人 著算術,天文及音樂學等.

Belgrado, Jacopo [柏格蘭多] (1704–1789) 義人

Belidor, Bernard Forest de [柏利多] 法人

Bell, A. H. [柏爾] 二十世紀

Bell, Clifford [柏爾] 二十世紀前半期 人美

Bell, E. T. [柏爾] 二十世紀前半期 美人

Bell, G. M. [柏爾] 二十世紀 英人

Bell, Herbert [柏爾] 二十世紀 研究球三角術

Bell, *Johann Adam* Schall von [柏爾] (1591,—1666,8,15) 德人

Bell, Robert J. T. [柏爾] 二十世紀前半期 英人 著立體解析幾何學.

Bellacchi [柏拉奇] 十九世紀末 義人

Bellamy, F. A. [白拉米] 二十世紀 英人

Bellavitis, Guisto [柏拉徵提] (1803,11,22—1880,11,6) 義人

Bellechiere, T. [柏勒希爾]

Bellermann, G. [柏雷曼] 十九世紀後半期 德人

Belli, Silvio [裴立] (?—1575) 義人

Bellovacensis, Vincentius [柏羅發森西] 卽 Vincent de Beauvais

Beltrami, Eugenio [柏拉密] (1835—1900) 義人 著高等幾何學,高等代數學及不變式論.

Beman, Wooster Woodruff [俾曼] 十九世紀末 美人 研究幾何學

Benard [比拿德] 十九世紀中 法人

Bencivenni, Zuchero [本息溫尼] 十四世紀 義人

Bendavid, Lazarus [本大衞] (1762,10,18—1832,3,28) 德人

Bender, H. A. [本德] 二十世紀前半期 美人

Bender, J. R. [本德] 二十世紀前半期 美人

Benecke [白勒克] 十九世紀 德人

Benedetti, Giambattista [貝內得提] 亦作 Johannes Baptista Benedictus 或 Giovanni Battista Benedetti 或 G. B. Benedictis (1530,8,14—1590,1,20) 義人

Benedetti, Johannes Baptista [貝內得提] 卽 G. Benedetti

Benedetto da Firenze [貝內得托] 十五世紀前半期 義人

Benedict, H. Y. [本尼狄克特] 二十世紀前半期 美人

Benedict, J. T. [本泥狄克特] 十九世紀中 美人

Benedict, Suzan R. [本泥狄克特] 二十世紀前半期 美人

Benedict von Nursia [本泥狄克特] 六世紀前半紀 義人

Benedictus Accolytus [本尼狄塔·阿科立塔] 十一世紀初

Benedictus Herbestus [本尼狄塔·赫柏斯塔] (1531—1593) 波蘭人

Bendixson, Ivar [本狄克孫] 十九世紀末 瑞典人 研究點組論

Benese, Rycharde [柏涅斯] 十六世紀 英人

Ben Ezra [本厄剌] 亦作 Ibn Esra 卽 Abraham ben Ezra

Benicansa, Rutilio Cosentino [柏尼坎薩] 十六世紀 義人

Beni Musa [柏尼穆薩] 亦作 Ben Musa 卽 Al Khowarizmi.

Benitt, R. [白尼特] 二十世紀前半期 德人

Benner, H. [本涅] 十九世紀末 美人

Bennett, A. A. [本涅特] 二十世紀前半期 美人

Bennett, G. T. [本涅特] 二十世紀初 英人

Bennett, J. [本涅特] 十九世紀 英人

Bennett, Theodore [本涅特] 二十世紀前半期 美人

Bennewitz, Peter [本涅尉] 卽 P. Apianus

Benny, L. B. [本尼] 二十世紀 蘇格蘭人

Benoist, Adolphe [白訥斯特] 著對數表

Benoy Kumar Sarkar [白諾·庫瑪·薩卡] 二十世紀

Benson, Lawrence S. [本孫]

Benson, R. [本孫] 二十世紀 美人

Benter, E. [本忒] 十九世紀後半期 德人

Bentham, George [邊沁] (1800—1884) 英人

Bentham, J. [邊沁] 十九世紀

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一•本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二•投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚幷加新式標點符號

三•稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四•稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五•本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六•來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七•稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八•稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九•來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第二卷第四期目錄

國立武漢大學理科季刊第三卷第一期目錄

國立武漢大學文哲季刊第二卷第四號目錄

國立武漢大學社會科學季刊第三卷第二號目錄

介紹期刊

牛頓……日本東京市目黑區大岡山七一牛頓月刊社

科學世界……南京山西路國立編譯館內中華自然科學社

瓊崖實業雜誌……瓊州海口東門內實業雜誌社

婦女旬刊……杭州中華婦女學社

學風……安徽省立圖書館

南洋情報……上海眞如國立暨南大學

時事類編……上海福煦路八〇三號中山文化教育館

民大校刊……廣東荔枝灣國民大學

安徽大學週刊……安慶安徽大學

國立四川大學周刊……成都四川大學

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

南華評論……上海山東路三二〇號南華評論社

中學生……上海四馬路八五號開明書局

國立武漢大學理科季刊

第三卷第二期

價目				郵費
全	年	四	册	訂購全年 本國及日本不加郵費
價	銀	二	圓	其他地域加郵費六角
每	期	零	售	函購零本 本國及日本加郵費五分
價	銀	五	角	其他地域郵費一角五分

本刊以九月十二月三月六月爲出版期

費須先惠空函不覆

各地代售處零售概不另加郵費

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌　國立武漢大學出版部

華民國二十一年十二月發行

1933年

第3卷

第3期

國立武漢大學

理科季刊

第三卷第三期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. III No. 3　　　　March 1933

本　期　目　錄

中華民國二十二年三月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第三卷第三期目錄

國立武漢大學理科季刊

第三卷第四期目錄預告

無窮大之階

（續第三卷第一期）

蕭文燦譯

V.　微分與積分

5.1　積分. 對於 $f(x)\succ\varphi(x)$ 等型之關係亦能微分或積分*.吾人可將

$$\int_a^x f(t)dt,\qquad \int_a^x \varphi(t)dt$$

(其中之 a 爲常數)簡表爲 $F(x)$ 與 $\Phi(x)$.

關於 f 與 φ 除明白敍明者而外皆設爲正,連續,及單調,此已爲屢見之事.有些結論在更一般之條件下生效;但如斯定義之時其對應於 f 或 φ 皆爲負者,乃尤屬重要.

引定理. 若 $\Phi\succ 1$,而於 $x>x_0\geqq a$ 時 $f>H\varphi$, 則能選得 x_1 使於 $x>x_1$ 時 $F>(H-\delta)\Phi$; 同樣於 $x>x_0$ 時 $f<h\varphi$, 包含於 $x>x_1$ 時 $F<(h+\delta)\Phi$.

因若於 $x>x_0$ 時 $f>H\varphi$, 則得

$$F=\int_a^x fdt>\int_a^{x_0} fdt+H\int_{x_0}^x \varphi dt=H\Phi+\int_a^{x_0} fdt-H\int_a^{x_0}\varphi dt.$$

因 $\Phi\succ 1$, 吾人能擇得 x_1 使於 $x>x_1$ 時

$$\frac{1}{\Phi}\left(\int_a^{x_0} fdt+H\int_a^{x_0}\varphi dt\right)<\delta$$

*此問題首先作一般之考慮者爲 du Bois-Reymond, 1, 2, 4.

此引定理之第一部分卽得矣.其第二部分亦可同樣證之.

由此引定理卽刻可推得

定理 19. 若 $F\succ 1$, 或 $\Phi\succ 1$, 則下列諸關係

$$f\succ\varphi,\quad f\prec\varphi,\quad f\asymp\varphi,\quad f\ \overline{\asymp}\ \varphi,\quad f\sim\varphi$$

各包含其對應之關係

$$F\succ\Phi,\quad F\prec\Phi,\quad F\asymp\Phi,\quad F\ \overline{\asymp}\ \Phi,\quad F\sim\Phi.$$

對此吾人可加入

定理 20. 若 $\int^{\infty}fdt$, $\int^{\infty}\varphi dt$ 皆收斂,則

$$f\succ\varphi,\quad f\prec\varphi,\quad f\asymp\varphi,\quad f\ \overline{\asymp}\ \varphi,\quad f\sim\varphi$$

在
$$F_1=\int_x^{\infty}fdt,\qquad \Phi_1=\int_x^{\infty}\varphi dt$$

間各包含其對應之關係.

此證明甚易不贅.

5.21. **微分.** 由定 19 與 20 導得

定理 21. 若 $f\succ 1$, 或 $\varphi\succ 1$, 或 $f\prec 1$ 與 $\varphi\prec 1$, 且若 $\succ,\prec,\asymp,\overline{\asymp},\sim$ 諸關係必保持於 f' 與 φ' 間,則 $f\succ\varphi$ 包含 $f'\succ\varphi'$;而其他諸關係亦有對應之結果.

在此定理之解釋中須視爲在 §1.4 中之規約之下.如若 $f\succ\varphi\succ 1$, f' 與 φ' 爲正,而 $f'\succ\varphi'$. 但若 $f\succ 1\succ\varphi$, φ 爲降函數而 $\varphi'\prec o$. 在此時 $f'\succ-\varphi'$, 此關係亦與 $f'\succ\varphi'$ 所表者一致.若 $1\succ f\succ\varphi$, 則 f' 與 φ' 皆爲負,而 $-f'\prec-\varphi'$ 一關係實包含

$$-\int_x^{\infty}f'dt\prec-\int_x^{\infty}\varphi'dt$$

或 $f\prec\varphi$, 此爲不可能.故必得 $-f'\succ-\varphi'$ 此一關係亦可視爲與 $f'\succ\varphi'$ 所表者一致.但 $f\asymp 1$, $\varphi\preccurlyeq 1$ 於此種情形爲例外; $f'\succ\varphi'$ 等關係之任一在此時可以保持.如若 $f=1+e^{-x}$, $\varphi=1/x$, 則有 $f\succ\varphi$, $f'\prec\varphi'$. 實際在此時之 f 視爲 f' 之積分而統治於其積分常數.

吾人可由觀察而知 f' 與 φ' 間保持諸關係之一之存在乃一假定.吾人不能推知那一關係能保持,亦不能推知 f' 或 φ' 爲遞增函數或遞降函數.如若 $f=e^{x}$. $\varphi=e^{x}+\sin e^{x}$ 吾人得 $f'=e^{x}$ 及 $\varphi'=e^{x}(1+\cos e^{x})$. 在此 f 與 φ 爲遞增而 $f'\sim f\sim\varphi$; 但 φ' 不趨向於無窮大,實際 x 之值有無窮多 φ' 爲零.再若

$$\varphi=e^{x}(\sqrt{2}+\sin x)+\tfrac{1}{2}x^{2}$$

則得

$$\varphi'=e^{x}(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)+x$$

此乃 $\varphi\asymp e^{x}$ 而 φ' 在 e^{x} 與 x 之階之間振動.有此性質而 φ' 亦爲單調之例雖不易得然實可能.

5.22. **L 函數之微分.** 若 f 與 φ 爲 L 函數則 f' 與 φ' 亦然,而 $f'\succ\varphi'$. $f'\asymp\varphi'$, $f'\prec\varphi'$ 諸關係之一確能保持(§3.2 定理 13).如此則微分與積分除 $f\asymp 1$, $\varphi\preccurlyeq 1$ 或 $f\preccurlyeq 1$, $\varphi\asymp 1$ 時而外常屬正當*.

凡與 L 函數相關聯之函數,或無論如何類似於 L 函數之函數關於 $f\succ\varphi$, $f\asymp\varphi$, $f\prec\varphi$ 諸關係之一爲有界乃保持於任一對函數之間者,微分與積分爲+可能.

---

*此乃在 du. Bois-Reymond 氏著作之結果下之一默認假定.

+此乃 du Bois-Reymond 氏所導出之實質之結果.

定理22. 若 f 爲增函數,而 $f'\succ f$ 則 $f'\succ e^{\Delta x}$.若 $f'\prec f$ 則 $f'\prec e^{\delta x}$.同樣若 f 爲降函數,$f'\succ f$ 及 $f'\prec f$ 各包含 $f\prec e^{-\Delta x}$ 及 $f\succ e^{-\delta x}$.若 $f'\asymp f$,則吾人能求得一數 μ 使如 $f=e^{\mu x}f_1$,此處 $e^{-\delta x}\prec f_1\prec e^{\delta x}$.

此等命題之證明異常簡明.如若 f 爲一增函數,而 $f'\succ f$,則有

$$f'/f\succ 1,\qquad \log f\succ x,$$

所以於 $x>x_0$ 時,$\log f>\Delta x$,卽 $f>e^{\Delta x}$,或同樣事實 $f\succ e^{\Delta x}$.此定理之最後一句由 §3.5 卽刻可得.

定理23. 更普遍言之,若 v 爲任一增函數,$f'/f\succ v'/v$ 之包含 $f\succ v^{\Delta}$ 或 $f\prec v^{-\Delta}$ 係準乎 f 之爲增函數或降函數而定;而 $f'/f\prec v'/v$ 包含 $f\prec v^{\delta}$ 或 $f\succ v^{-\delta}$.若 $f'/f\asymp v'/v$,吾人能求得一數 μ 使如 $f=v^{\mu}f_1$,此處 $v^{-\delta}\prec f_1\prec v^{\delta}$.

f 爲增函數之時,乃隨 x 而趨向於無窮大,吾人名 f'/f 爲 f 之型 (type) t*. t 又可以比較簡單之函數而如 $t\asymp\tau$ 之關係之 τ 代之.降函數 f 之型可定義爲增函數 $1/f$ 之型.下列之表乃表明其幾種標準函數之型:

函數 ·······	llx	lx	x^{α}	e^{x}	$e^{\alpha x^{\beta}}$	e_2x	e_3x	···········
型 ·······	$\frac{1}{xlxllx}$	$\frac{1}{xlx}$	$\frac{1}{x}$	1	$x^{\beta-1}$	ex	e_2xex	···········

若 $f\succ\varphi$,則 $f'/f\succcurlyeq\varphi'/\varphi$. f 之增大使其充分的大.吾人能使 $t=f'/f$ 之增大至於隨意大.讀者可發現如何書出此等命題

* du Rois-Reymond (1,2) 名 f/f' 爲型;此記號之採用稍有便利.

之形式證明,今舉如次:

1. f之增大甚小甚小之時f'/f之趨向於零亦更快更快,但$f\to\infty$,吾人不能得

$$\frac{f'}{f}\succ\varphi(f),\qquad \int^{\infty}\varphi dx \quad \text{收斂.}$$

他方面若後一積分爲發散,吾人常能求得 f 使如

$$f\succ 1,\qquad f'/f\prec\varphi.$$

2. 雖吾人能求得 f 使f'/f之增大比 x 之任何所設之函數之增大尙大,但不能得

$$\frac{f'}{f}\succ\varphi(f);\qquad \int^{\infty}\frac{dx}{x\varphi(x)} \quad \text{收斂.}$$

他方面若後一積分爲發散,吾人常能求得 f 使如$f'/f\succ\varphi(f)$.

如此則吾人不能求一函數使其趨向於無窮大如$f'/f\prec 1/x^{\alpha}(\alpha>1)$之慢之 f. 但能求得使如 $f'/f\prec 1/xlxllx$ (卽 $f=l_3x$) 之 f. 吾人不能求得使如 $f'/f\succ f^{\alpha}$ 或$f'/f^{1+\alpha}(\alpha>o)$之 f. 但能求得如 $f'/f\succ lf$ (卽 $f=e_3x$) 之 f.

3. 若於 k 之一切値 $f\succ e_kx$, f'/f 滿足於同樣條件,而

$$f'\succ flfl_2f\cdots\cdots l_kf.^*$$

關於正變數 x 之函數其 x 趨向於零時自有其對應之定理.

5.23. **累次微分.** du Bois-Reymond[+] 曾予下之一般定理,

* 在此時 f 不能爲L函數(§3.4 定理 14),然假設其性質如本節之始所述者.

\+ du Bois-Reymond, 2.

此可使吾人書出任何對數指數函數之任幾階導函數之增大.吾人將 f'/f 書以 t 如前節.

定理 24. 　(i) 若 $t \succ 1/x$（如此則 $f \succ x^{\Delta}$ 或 $f \prec x^{-\Delta}$）則

$$f \asymp f'/t \asymp f''/t^2 \asymp f'''/t^3 \cdots\cdots \asymp f^{(n)}/t^n \cdots\cdots$$

(ii) 若 $t \prec 1/x$（如此則 $1 \prec f \prec x^{\delta}$ 或 $x^{-\delta} \prec f \prec 1$）則

$$f \asymp f'/t \asymp xf''/t \asymp x^2 f'''/t \cdots\cdots \asymp x^{n-1} f^{(n)}/t \cdots\cdots$$

(iii) 若 $t \asymp 1/x$（如此則 $f = x^{\mu} f_1$, 其中 $x^{-\delta} \prec f_1 \prec x^{\delta}$）, 則若 μ 非整數之時此等公式之或組有效.若 μ 爲整數則

$$f \asymp xf' \asymp x^2 f'' \cdots \asymp x^{\mu} f^{(\mu)} \asymp x^{\mu} f^{(\mu+1)}/t_1 \asymp x^{\mu+1} f^{(\mu+2)}/t_1 \cdots,$$

此處之 t_1 除 $f \asymp 1$ 外乃 f_1 之型.

(i) 若 $t \succ 1/x$, $1/t \prec x$ 如此則 $t'/t^2 \prec 1$; 因而 $t'/t \prec t = f'/f$ 或 $ft' \prec f't$. 微分 $f' \asymp ft$, 且用方纔建立之關係,吾人得

$$f'' \asymp f't + ft' \asymp f't.$$

所以 f' 之型與 f 者同.此論證可以重復行之而本定理之第一部分卽證明也.

(ii) 若 $t \prec 1/x$, $xf' \prec f$ 如此則

$$xf'' + f' \prec f',$$

此除 $xf'' \asymp f'$ 而外不能爲真.再微分之,推得

$$xf''' + 2f'' \prec f'',$$

從此 $xf''' \asymp f''$; 所以在一般亦如此.* 如斯第二部卽得矣.

(iii) 若 $t \asymp 1/x$, $f = x^{\mu} f_1$ 而 f_1 之型 t_1 滿足於 $t_1 \prec 1/x$. 則

* 更顯明者 $xf'' \sim -f'$, $xf''' \sim -2f''$ 如此等等.

$$f'=\mu x^{\mu-1}f_1+x^{\mu}f_1'\asymp x^{\mu-1}f_1(\mu+xt_1)\asymp x^{\mu-1}f_1.$$

同樣 $f''\asymp x^{\mu-2}f_1$ 如此類推.除 μ 爲整數而外此法可無限的進行.在此時 $f^{(\mu)}\preceq l_1$ 而由此點吾人可如(ii)款進行之.

若 μ 爲整數 n, 而 $f_1\asymp 1$, 則 $f^{(n)}\asymp 1$,但此定理於高階導函數失效.在此時 $f=Ax^n+o(x^n)=Ax^n+\varphi$(命爲)吾人之解析再以 φ 如 f 之地位開始.

例. (i) 若 $f=e^{\sqrt{x}}$, 則 $t=x^{-\frac{1}{2}}\succ 1/x$, 而 $f^{(n)}\asymp x^{-\frac{1}{2}n}e^{\sqrt{x}}$. 若 $f=e^{(\log x)^2}$ 則 $t=(\log x)/x\succ 1/x$, 而 $f^{(n)}\asymp e^{(\log x)^2}(\log x)^n/x^n$.

(ii) 若 $f=x^2llx$, $t\asymp 1/x$. 此地

$$f'\asymp xllx,\quad f''\asymp llx,\quad f'''\asymp 1/xlx,\quad f''''\asymp 1/x^2lx,\cdots\cdots$$

(iv) 此定理之結果在第一二款之時能更明述如下:

若 $t\succ 1/x$, 則

$$f^{(n)}\sim(f'/f)^n f.$$

若 $t\prec 1/x$ 則

$$f^{(n)}\sim(-1)^{n-1}(n-1)!\,f'/x^{n-1}.$$

若 f 爲增正函數,而 $t\succ 1/x$,則凡導來函數是常常爲正.若 $t\prec 1/x$ 則正負相替.

5.3. **積分之又幾定理.** 吾人能求得一組規則以決定 L 函數之徵分之漸近之性質.此結果自然與 §52.3 者不甚相異.依下列後一積分之爲發散或收斂而書爲

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\qquad F(x)=\int_x^{\infty} f(t)\,dt.$$

定理 25. 若 $f\succ x^{\Delta}$ 或 $f\prec x^{-\Delta}$, 則

$$F \sim f^2/f'.$$

若 $f=x^{\alpha}f_1$，此處之 $x^{-\delta}\prec f_1\prec x^{\delta}$，則

$$F\sim\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}f_1,$$

但須將 $\alpha=-1$ 時除外，因此時更須求其他之規則也.

(1) 若 $f\succ x^{\Delta}$，到無窮大之積分為發散，而

$$F=\int_a^x f\,dt=\int_a^x f'\frac{f}{f'}dt=\frac{\{f(x)\}^2}{f'(x)}-\frac{\{f(a)\}^2}{f'(a)}-\int_a^x f\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{f'}\right)dt.$$

今 $\log f\succ\log x$，所以

$$\frac{f'}{f}\succ\frac{1}{x},\quad x\succ\frac{f}{f'},\quad 1\succ\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{f'}\right),\quad \int_a^x f\,dt\succ\int_a^x f\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{f'}\right)dt.$$

如此則 $F\sim f^2/f'$. 此時 $f\prec x^{-\Delta}$ 可以同樣布置.

(2) 若 $f=x^{\alpha}f_1$，其中之 $\alpha>-1$，到無窮大之積分再為發散；而

$$F=\int_a^x t^{\alpha}f_1dt=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}f_1(x)-\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}f_1(a)-\frac{1}{\alpha+1}\int_a^x t^{\alpha+1}f_1'dt.$$

但　$\log f_1\prec\log x,\quad \frac{f_1'}{f_1}\prec\frac{1}{x},\quad x^{\alpha+1}f_1'\prec x^{\alpha}f_1,\quad \int_a^x t^{\alpha+1}f_1'dt\prec\int_a^x t^{\alpha}f_1dt;$

此即結果. 在 $\alpha<-1$ 時並不十分不同.

$\alpha=-1$ 時，須再解析，此可在著者之另一文 (Hardy 9) 中求之.

其他有趣之問題乃 $f=\varphi e^{i\psi}$ 時之性質之問題，但此處之 φ 與 ψ 皆 L 函數. 設 $\psi\succ 1$ 及 $\varphi\succ\psi'$，如此則到無窮大之積分不收斂*. 則此問題可以下之定理解之.

定理 26. 若 $\psi\succ 1,\varphi\succ\psi'$ 則 F 準乎 $\psi\prec l\Phi,\psi\sim Al\Phi$ 或 $\psi\succ l\Phi$ 而漸

* 若 $\psi\preccurlyeq 1$，$e^{i\psi}$ 趨向於一極限，而此振幅因子並未介紹甚麼新形狀. 若 $\varphi\prec\psi'$，積分至無窮大為收斂.

近的全等 (asymptotically equivalent) 於

$$\Phi e^{i\psi},\quad \frac{\Phi e^{i\psi}}{1+Ai},\quad \frac{\varphi}{i\psi'}e^{i\psi},$$

其中之
$$\Phi\sim\int^{x}\varphi\,dt.$$

其詳悉之證明可在著者之他文求之.*

5.4. **幾個 'Tauberian' 定理.** 在§5.21中吾人指出由函數之量之階推論至於其導函數之量之階,比反其道而推之更難,而欲求如此推論之可能須常求特殊之條件.§§5.22–5.23之假設乃言係關於 L 函數之函數,此種假定自甚嚴酷.本節乃放棄此種假設,而證明更一般更精微之定理.此等定理乃屬於 Littlewood 君與著者名爲 'Tauberian' 之一種.

定理27.+ 若 $xf(x)$ 爲於 $x>a$ 時之連續增函數,而

$$F(x)=\int_a^x f\,dt\sim Ax^m \qquad (m>o),$$

則
$$f(x)\sim mAx^{m-1}$$

此逆推論乃定理19之一直接推得之系.

吾人可設 $A=1$ 所以 $F=x^m+o(x^m)$. 因而若 η 爲正而小於1則得

$$F(x+\eta x)-F(x)=\int_x^{x+\eta x} f\,dt=\left\{(1+\eta)^m-1\right\}x^m+o(x^m)$$
$$=m\eta x^m+O(\eta^2x^m)+o(x^m),$$

其中之 $O(\eta^2x^m)$ 乃在問題中於 x 與 η 之一切値而其模小於 η^2x^m 之常數倍之函數.但

* Hardy, 3(6).　　+ Landau, 2, 218 及 3, 116.

$$\int_x^{x+\eta x} f\,dt \geqq \frac{\eta x f(x)}{1+\eta},$$

蓋 tf 於積分之區域爲增加也.聯此不等式與前方程式,而以 $\eta x^m/(1+\eta)$ 除之,則得

$$\frac{f(x)}{x^{m-1}} \leqq m(1+\eta)+H\eta+o(1),$$

其中之 H 乃與 m,η 無關.今若使 $x\to\infty$,吾人求得

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{m-1}} \leqq m(1+\eta)+H\eta;$$

而此包含

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{m-1}} \leqq m,$$

蓋 η 可使其任意小也.在 $(x-\eta x, x)$ 區間同法論證之,則得

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{m-1}} \geqq m;$$

而此兩不等式卽構成此定理之結果.

定理28. 若 $(1-x)f'(x)$ 乃於 $0<x<1$ 時之連續增函數,而於 $x\to1$ 時

$$f(x)\sim\frac{A}{(1-x)^m} \qquad (m>0) \tag{5.41}$$

則

$$f'(x)\sim\frac{mA}{(1-x)^{m+1}}. \tag{5.42}$$

吾人僅書定理27之

$$x=\frac{1}{1-y}, \qquad f(x)=g(y)$$

則以 x 代 y 卽得矣.

定理29.[*] 若 $f(x)=\Sigma a_n x^n$ 爲有正係數之冪級數且於 $0\leqq x<1$ 則(5.41)包含(5.42).

設 $a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n=A_n$, 如此

$$g(x)=\sum_0^\infty A_n x^n=\frac{f(x)}{1-x}\sim\frac{A}{(1-x)^{m+1}}$$

則 $(1-x)g'(x)=A_1+(2A_2-A_1)x+(3A_3-2A_2)x^2+\cdots\cdots$

因其係數爲正乃爲遞增.因而依定理28

$$g'(x)\sim\frac{(m+1)A}{(1-x)^{m+2}},$$

$$f'(x)=(1-x)g'(x)-g(x)\sim\frac{mA}{(1-x)^{m+1}}.$$

定理30. 若 $f(x)$ 有第二階導函數 $f''(x)$,而於 $x\to\infty$ 時 $f=O(x^{\alpha})$, $f''=O(x^{\beta})$,其中之 $\beta>-1$,則

$$f'=O\left\{x^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\right\}.$$

若 $\alpha\geqq\beta+2$ 此結果很平凡,蓋 $f'=O(x^{\beta+1})$,依定理19,而

$$\beta+1\leqq\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

故吾人可設 $\alpha<\beta+2$. 若 $0<\eta<1$ 依 Taylor 氏定理吾人有

$$f(x+\eta x)-f(x)=\eta x f'(x)+\tfrac{1}{2}\eta^2x^2f''(x+\theta\eta x),$$

此處 $0<\theta<1$; 如此

$$|f'(x)|\leqq\frac{|f(x+\eta x)|+|f(x)|}{\eta x}+\frac{1}{2}\eta x\,|f''(x+\theta\eta x)|<H\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\eta}+\eta x^{\beta+1}\right),$$

其中之 H 乃 x 與 η 無關.吾人取 $\eta^2=x^{\alpha-\beta-2}$, 因於 x 大時此確小於 1; 則

* Hardy 與 Littlewood, 2.

$$|f'(x)|<2Hx^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

本定理卽證明矣.

若$\beta\leqq-1$此定理不真.觀 $f=x+\log x$ 之例卽知.此爲無限級數論中之一重要之定理[*].

5.5 **整變數之函數.** 整變數 n 之函數有其對應於§§5.1—5.4之諸定理,但以和

$$A_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$$

代積分,而以差

$$\Delta a_n=a_n-a_{n+1}$$

代微係數.此等對應於前數節之定理讀者能自證明之.如'$a_n\succ b_n$, $a_n\prec b_n$, $a_n\preceq b_n$, $a_n\asymp b_n$, $a_n\sim b_n$ 包含 A_n 與 B_n 所對應之方程式.但 A_n 與 B_n 至少有一隨 n 而趨向於無窮大.' 等等.[+]

5.6. **無窮大計算之另外發展.** 函數 $f(x+a)$, $f(ax)$ 等等.吾人常有須求對於如

$$\frac{f(x+a)}{f(x)},\quad \frac{f(ax)}{f(x)},\quad f(x+a)-f(x)$$

之函數之近似值者,但其中 a 之自身卽 x 之函數[‡].吾人假定凡所遇之函數皆 L 函數,或無論如 §§5.2—5.3 之定理皆可應用.

定理31. 若 $a\prec f/f'$ 則

* 參觀 Hardy 與 Littlewood, 1; 2.

\+ 此爲 Cauchy 與 Stolz 所知之定理.參觀 Bromwich, 1,377; Knopp 1,72.

‡ du Bois-Reymond, 4. 此定理之本質其主要爲 du Bois-Reymond 所發明;但其外表無結果.

$$\frac{f(x+a)}{f(x)}\sim 1.$$

吾人可設 $f\succ 1$ 而 $a>o$. 首先若 $t=f'/f\preccurlyeq 1$, 則得

$$\frac{f(x+a)}{f(x)}=e^{lf(x+a)-lf(x)}=e\left\{a\frac{f'(x+\alpha)}{f(x+\alpha)}\right\}=e\left\{at(x+\alpha)\right\},$$

而 $t(x+\alpha)<kt(x)$, 所以 $at(x+\alpha)\to o$, 此本定理卽證明矣.

若 $t\succ 1$ 而 $T=1/t$, 則

$$at(x+\alpha)=at(x)\frac{T(x)}{T(x+\alpha)}=at(x)\Big/\left\{1+\alpha\frac{T'(x+\alpha_1)}{T(x)}\right\},$$

此處 $o<\alpha_1<\alpha<a$. 但 $at\prec 1$, $\alpha/T\prec 1$, 而 $T'\prec 1$ (因 $T\prec 1$). 因而 $at(x+\alpha)\to o$, 此亦本定理之又一證明.

在特殊時若 (i)$x^{-\Delta}\prec f\prec x^{\Delta}$ 及 $a\prec x$ 或 (ii)$e^{-\Delta x}\prec f\prec e^{\Delta x}$ 及 $a\prec 1$ 此等條件滿足.

定理 32. 若 $la\prec f/xf'$ 則

$$\frac{f(ax)}{f(x)}\sim 1.$$

此爲定理31之系:吾人僅書 $lx=y$, $la=b$, 及 $f(x)=\varphi(y)$ 卽得.

在特殊時若 $(lx)^{-\Delta}\prec f\prec (lx)^{\Delta}$ 及 $x^{-\delta}\prec\alpha\prec x^{\delta}$ 或若 $x^{-\Delta}\prec f\prec x^{\Delta}$ 及 $a\sim 1$ 條件滿足.

吾人再加幾個結果.

(1) 若 $a\prec 1/f'$ 則 $f(x+a)-f(x)\prec 1$.

(2) 若 $a\prec f'/f''$ 則 $f(x+a)-f(x)\sim af'(x)$.

此等結果由定理31及下之公式卽得.

$$f(x+a)-f(x)=af'(x)\frac{f'(x+\alpha)}{f'(x)}\qquad(o<\alpha<a).$$

其特殊時若 $1 \prec f \prec x^{\delta}$ 及 $a \prec x$, 或若 $f \succ x^{\Delta}$ 及 $a \prec f/f'$ 第二結果爲真;此等條件之形式關於 a 可由定理24導出.

(3) 若 $e^{-\Delta\sqrt{(lx)}} \prec f \prec e^{\Delta\sqrt{(lx)}}$, 則

$$\frac{f\{xf(x)\}}{f(x)} \asymp 1, \qquad e^{\left\{\frac{xlf(x)f'(x)}{f(x)}\right\}} \asymp 1,$$

而此兩函數之極限相同,又若 $e^{-\delta\sqrt{(lx)}} \prec f \prec e^{\delta\sqrt{(lx)}}$ 其極限爲1.

設 $f \succ 1$, 與 $f(x)=\varphi(lx)$, $a=f(x)$. 則

$$\frac{f(ax)}{f(x)} = e^{l\varphi(lx+la)-l\varphi(lx)} = e^{la\varphi'(lx+la_1)/\varphi(lx+la_1)},$$

其中 $1<a_1<a$. 此指數爲

$$l\varphi(lx+la_1)\frac{\varphi'(lx+la_1)}{\varphi(lx+la_1)}\ \frac{l\varphi(lx)}{l\varphi(lx+la_1)}.$$

今 $a=f(x) \prec x^{\delta}$ 故 $la_1 \preccurlyeq la \prec lx$, 而依定理31,若 $l\varphi \prec x^{\Delta}$ 或若 $f \prec e^{(lx)^{\Delta}}$ (在此時確如此)則

$$l\varphi(lx+la_1) \sim l\varphi(lx).$$

因而指數乃漸近的全等於

$$l\varphi(u)\varphi'(u)/\varphi(u),$$

其中之 $u=lx+la_1$. 又若 $(l\varphi)^2 \preccurlyeq u$ 卽若 $\varphi \preccurlyeq e^{\Delta\sqrt{u}}$ 或 $f \preccurlyeq e^{\Delta\sqrt{(lx)}}$, 則

$$l\varphi(\varphi'/\varphi) \preccurlyeq 1,$$

在此時 $f(ax) \asymp f(x)$; 此易見若 $f \preccurlyeq e^{\delta\sqrt{(lx)}}$ 則記號 $\asymp$ 可代以 $\sim$.

(4) 若 $f(x)=x\varphi(x)$, 引 $e^{-\delta\sqrt{(lx)}} \prec \varphi \prec e^{\delta\sqrt{(lx)}}$, 則

$$f_2(x) \equiv ff(x) \sim x\varphi^2, \cdots\cdots, f^n \sim x\varphi^n, \cdots\cdots$$

5.7. **方程式之近似解.** 若 ψ 爲一已知函數,而 u 爲已知其增大有限制之未知函數,則吾人謂

$$y=\psi(x,u)$$

爲 y 之'近似形'(approximate form).如

$$e^{x^u}\quad(u\sim1),\quad e^{(1+u)x}\quad(u\prec1),\quad x^{1+u}e^x\quad(u\prec1)$$

爲 $y=xe^x/lx$ 之近似形,而隨其確實之增大以表示 y 之增大.其他近似之例可以次之公式見之,卽若 $a\prec f/f'\prec1$ 則

$$\frac{f'(x+a)}{f(x)}=e\left\{u\,\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}\quad(u\sim u).$$

求得方程式 $f(x,y)=o$ 之漸近之解常甚重要,卽求一函數使其增大近似於 y 之增大也.此無一般之法但有某種之法可以少數之例解釋之.

設方程式爲

$$x=yk(y),\tag{5.71}$$

此處 $y^{-\delta}\prec k\prec y^{\delta}$. 若 k 之增大如是之慢使 $k\{yk(y)\}\asymp k(y)$, 則

$$y\asymp x/k(y)\asymp x/k(x)$$

甚明;又若 k 之增大甚慢,吾人有 $y\sim x/k(x)$.

條件　$e^{-\Delta\sqrt{(ly)}}\prec k(y)\prec e^{\Delta\sqrt{(ly)}}$,　$e^{-\delta\sqrt{(ly)}}\prec k(y)\prec e^{\delta\sqrt{(ly)}}$

乃依 § 5.6 之(3)足以保持假設爲真;則 $y=ux/k(x)$, 其中之 $u\asymp1$ 或 $(u\sim1)$, 爲吾人方程式之近似解. du Bois-Reymond 曾證明更爲精妙之近似.如

$$y=\frac{ux}{k(x/k)},$$

有較廣之有効範圍.其更一般之方程式 $x=y^mk(y)$ 能由上例以 x^m 代 x, k^m 代 k 導出.

一般若 $x=\varphi(y)$, φ 之增大更速吾人能決定 y 之增大如 x 之函數.如若 $x=ye^y$ 吾人有 $lx=y+ly$ 及

$$y=lx-ly=lx(1-u)$$

其中之 $u\sim ly/lx\sim llx/lx$. 此乃比上所考者爲更顯明之解.

讀者可以檢證下例:

(1) 若 $x=ye^{(ly)^{\frac{1}{3}}}$ 則 $y\sim xe^{-(lx)^{\frac{1}{3}}}$.

(2) 若 $x=ye^{(ly)^{\frac{2}{3}}}$ 則

$$y\sim xe^{\left\{-(lx)^{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}(lx)^{\frac{1}{3}}\right\}}.$$

(3) 若 $x=y^m(ly)^{m_1}(l_2y)^{m_2}\cdots(l_ry)^{m_r}$, 則

$$y\sim m^{m_1/m}x^{1/m}(lx)^{-m_1/m}\cdots(l_rx)^{-m_r/m}.$$

(4) 若 $x=y/ly$, 則

$$y=x\left(lx+l_2x+\frac{l_2x}{lx}\right)+O\left\{x\frac{(l_2x)^2}{(lx)_2}\right\}.$$

後一例在質數論中甚爲有趣.

VI. 應 用

6.1. 在本章將在解析範圍中所能統治之重要觀念作一簡略之敍述.

6.21. **級數及積分之收斂與發散. 對數審斂法.** 正項級數 Σu_n 若

$$u_n\preccurlyeq(nln\cdots l_{k-1}n)^{-1}(l_kn)^{-1-\alpha}$$

其中之 $\alpha>0$ 爲收斂.若

$$u_n\succcurlyeq(nln\cdots l_kn)^{-1}$$

為發散.此地之 $k\geq o$ 而 $l_0 n=n$.

積分 $\int^{\infty} f(x)dx$ (被積分函數為正)若

$$f\leqslant(xlx\cdots l_{k-1}x)^{-1}(l_k x)^{-1-\alpha}$$

其中之 $\alpha>o$, 為收斂;若

$$f\geqslant(xlx\cdots l_k x)^{-1}$$

為發散.同樣積分 $\int_0 f(x)dx$ 若

$$f\leqslant(1/x)\Big\{l(1/x)\cdots l_{k-1}(1/x)\Big\}^{-1}\Big\{l_k(1/x)\Big\}^{-1-\alpha}$$

其中之 $\alpha>o$, 為收斂.若

$$f\geqslant(1/x)\Big\{l(1/x)\cdots l_k(1/x)\Big\}^{-1}$$

為發散.

此等結果乃屬古典的.'對數審斂法'之首先作一般陳述其關於級數者為 De Morgan 1,325. 然其本質實在 Abel (2) 之遺著中發現在1839 年始出版:亦參觀 Abel 1. $k=1$ 時乃歸之於 Cauchy, 2. De Morgan 氏之結果 Bertrand (1) 實獨立得之,而此種審斂法乘皆歸之前氏.關於積分之審斂法其首先作明白一般之敍述者似為 Bonnet, 1.

關於級數之對數審斂之又法其對於'比値審斂法'者可參觀 Bromwich, 1, 29; du Bois-Reymond, 3; Goursat, 1 (1), 403; Hardy, 1, 374; Knopp, 1, 117; Pringsheim, 1 (310), 2(77), 3; Riemann, 1.

6.22. du Bois-Reymond **氏定理之類似定理.** 吾人今將述及反對性質之某定理乃類似於 § 2,1 du Bois-Reymond 氏之定理者.

設有一任意發散之正項級數 Σu_n, 吾人能求得一函數 v_n 使如 $v_n<u_n$ 而 Σv_n 又爲發散者;卽有一任意發散級數吾人尙能求得一發散較慢之級數.

設有一任意收斂之正項級數 Σu_n, 吾人能求得 v_n 使如 $v_n>u_n$ 而 Σv_n 又爲收斂者;卽有一任意收斂級數吾人尙能求得一收斂較慢之級數.

設有一任意函數 $\varphi(n)$ 其趨向於無窮大雖爲甚慢而吾人亦能求一收斂級數 Σu_n 及一發散級數 Σv_n 使如 $v_n/u_n=\varphi(n)$.

設有無窮多之一列級數,每一級數之收斂(發散)皆比前者爲慢,吾人能求得一級數使其收斂(發散)比其中任何級數爲慢.

對於級數發散之必需條件乃無有使如 $u_n\varphi(n)\geqslant 1$ 之函數 $\varphi(n)$, 而對於級數收斂之必需條件乃無有使如 $\varphi(n)>1$ 及 $n\varphi(n)u_n<1$ 之函數 $\varphi(n)$.

若 u_n 爲 n 之遞降函數,則 $nu_n<1$ 乃對於收斂之必需條件;但無有函數 $\varphi(n)$ 而如 $\varphi(n)>1$ 與 $n\varphi(n)u_n<1$ 者爲必需條件.

然若 nu_n 爲遞降,則 $n\log n\, u_n\to o$ 爲必需條件;若 $n\psi(n)u_n$ 遞降但其中之 $n\psi(n)>1$ 及 $\int\frac{dn}{n\psi(n)}>1$, 則

$$\left(n\psi(n)\int\frac{dn}{n\psi(n)}\right)u_n\to o$$

爲必需條件.

若 Σu_n 發散而 $U_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$, 則 $\Sigma(u_n/U_n)$ 亦爲發散.又若 $u_n<U_n$ 則

$$\frac{u_1}{U_1}+\frac{u_2}{U_2}+\cdots\cdots+\frac{u_n}{U_n}\sim\log U_n.$$

參觀 Abel 12; Bromwich 1, 40; Dini 1; Hadamard, 2; Littlewood, 5; Pringsheim, 1 (353, 939) 2 (89), 3, 4.

級數與積分其收斂或發散之慢有不能以任何對數審斂法解答之例.所以對此對數審斂法有不足用(§ 4.42) 或不能用.此可參觀 Borel, 4, 5; du Bois-Reymond 3, 7, 8; Gilbert, 1; Goursat, 1 (1), 219; Hardy, 3, (1), (2), (3), (5); Pringsheim, 1 (353) 3,(343), 5, 6; Themae, 2.

6.23. **對於有限和之漸近公式.** 對於

$$A_n=a_1+a_2+\cdots\cdots a_n$$

漸近公式之決定乃甚密切之問題,但於 n 之大値時 a_n 之性質爲已知.對於此問題盡量討論之主要工具乃 (i) Cauchy 與 Stolz 兩氏之定理,卽若 Σb_n 爲正項發散級數而 $a_n\sim Cb_n$ 則 $A_n\sim CB_n$, (ii) 'Euler-Maclaurin 之總和公式'

$$\sum_1^n f(v)=\int^n f(x)dx+C+\frac{1}{2}f(n)+\frac{B_1}{2!}f'(n)-\frac{B_2}{4!}f'''(n)+\cdots\cdots$$

而在特殊之時則爲 (iii) Maclaurin 與 Cauchy 之定理

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)-\int_1^n f(x)\,dx,$$

其中之 $f(x)$ 乃 x 之正降函數,當 $n\to\infty$ 時趨向於一極限.

於 (i) 觀 Cauchy, 1, 50; Jensen, 1; Stolz, 1; 而於 (iii) 觀 Cauchy, 2;

Maclaurin, 1 (1), 289, 此等定理之證明在解析之近代教科書,或級數論中可以見之.觀 Bromwich 1, 29, 377; Knopp, 1, 68, 286. 其更詳悉之發展可觀 Bromwich, 2; Dahlgren, 1; Hardy, 3 (4), 8; Nörlund, 1. 一般 Euler-Maclaurin 總和公式之文獻總述於此太多,可觀 Bromwich, 1, 238, 324; Nörlund, 1, 2; Pringsheim, 2, 102; Selivanoff, 1, 929.

由此等定理所得重要之結果爲

$$1^s+2^s+\cdots\cdots+n^s\sim\frac{n^{s+1}}{s+1}\qquad(s>-1),$$

$$1^s+2^s+\cdots\cdots+n^s-\frac{n^{s+1}}{s+1}\sim\zeta(-s)\qquad(-1<s<1),$$

而一般爲

$$\sum_1^n v^s-\frac{n^{s-1}}{s+1}-\frac{1}{2}n^s-\sum_1(-1)^{i-1}\binom{s}{2i-1}\frac{B_i}{2i}n^{s-2i+1}\sim\zeta(-s).$$

此處之 s 爲非整數之正數,$\zeta(-s)$ 爲 Riemann 之 Zeta 函數,關於 i 之總和可一直繼續至 n 成負冪之時.再

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n\sim A.$$

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}+\cdots\cdots\quad\text{至 } n \text{ 項,}$$

$$\sim\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{n^{\alpha+\beta-\gamma}}{\alpha+\beta-\gamma}\qquad(\alpha+\beta>\gamma)$$

或

$$\sim\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\log n\qquad(\alpha+\beta-\gamma).$$

後一結果之關係可觀 Bromwich, 4; 第一公式之 A 爲 Euler 氏常數.

此種之最重要公式爲

$$\log 1+\log 2+\cdots\cdots+\log n-(n+\tfrac{1}{2})\log n+n\sim\tfrac{1}{2}\log(2\pi),$$

此,在

$$n!\sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{(2\pi)}$$

之形則組成 Stirling 氏定理.同種之又一公式爲

$$1^1 2^2 3^3\cdots\cdots n^n\sim Bn^{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{12}}e^{-\frac{1}{4}n^2},$$

其中之 B 乃方程式

$$\log B=\frac{1}{12}\log 2\pi+\frac{1}{12}\gamma+\frac{1}{2\pi^2}\sum_1^{\infty}\frac{\log\nu}{\nu^2}$$

所定義之常數.

Stirling 氏定理之文獻亦異常衆多;可觀 Bromwich, 1, 461; Brunel, 1; Nielsen, 1, 92; Whittaker and Watson, 1, 251, 276. 常數 B 可觀 Barnes, 1; Glaisher, 1, 2; Kinkelin, 1.

6.24. Stirling **氏定理證明.** Stirling 氏定理,如 §6.23 所述者可以最初等之方法證明;*但其依於 $\Gamma(n+1)$ 之定積分之表示之一證明乃更須啓示.其使用之法可返而至 Laplace+ 氏所討論之原理擴張至複變數領域之時,即所謂'斜度降下法'(Methode der Sattelpunkte 或 Method of sleepest descents ‡,)是也.

吾人設 n 爲正且大,但不必爲整數.在積分

---

* 如斯之證明可觀 Cesàro 1. 221, 395: Jolliffe, 1, 初等證明之主要之難點乃常數 $\sqrt{2\pi}$ 之決定.

\+ Laplace, 1, 88. ‡ Watson, 1, 235.

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^n dx$$

中於 $x=n$ 時被積分函數爲極大.故書成

(6.241)

$$\Gamma(n+1)=J=\int_0^\infty=\int_0^{(1-\eta)n}+\int_{(1-\eta)n}^{(1+\eta)n}+\int_{(1+\eta)n}^{2n}+\int_{2n}^\infty=J_1+J_2+J_3+J_4$$

(命爲)

此處 $o<\eta<1$.

在 J_1 與 J_3 中吾人各書 $x=n(1-y)$ 及 $x=n(1+y)$, 試察 $e^y(1-y)$ 與 $e^{-y}(1+y)$ 皆於 y 由 0 增至 1 時爲遞降,則得

(6.242)

$$J_1=n^{n+1}e^{-n}\int_\eta^1 e^{ny}(1-y)^n dy<n^{n+1}e^{-n}\left\{e^\eta(1-\eta)\right\}^n=n^{n+1}e^{-n}E_1^n,$$

(6.243)

$$J_3=n^{n+1}e^{-n}\int_\eta^1 e^{-ny}(1+y)^n dy<n^{n+1}e^{-n}\left\{e^{-\eta}(1+\eta)\right\}^n=n^{n+1}e^{-n}E_3^n \quad (命爲);$$

此地之 E_1 與 E_3 皆小於 1.若吾人應用同樣之變換於 J_4 亦如 J_3 者,吾人且察得由 $y=1$ 而上 $e^{-y}(1+y)$ 亦爲遞降,則得

(6.244)

$$J_4=n^{n+1}e^{-n}\int_1^\infty e^{-ny}(1+y)^n dy<n^{n+1}e^{-n}\left(\frac{2}{e}\right)^{n-1}\int_1^\infty e^{-y}(1+y)\,dy$$

$$=\frac{3}{2}en^{n+1}e^{-n}\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

由 (6.242), (6.243) 及 (6.244) 卽得

(6.245)
$$\lim_{n\to\infty} n^{-n-\frac{1}{2}}e^n(J_1+J_3+J_4)=o.$$

在 J_2 中吾人再書 $x=n(1+y)$, 則得

$$n\log x-x=n\log n-n-ny+n\log(1+y)=n\log n-n-\frac{ny^2}{2(1+\theta y)^2},$$

此處 $-1<\theta<1$. 因而知 J_2 在

$$n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\int_{-\eta}^{\eta} e^{\left\{-\frac{ny^2}{2(1-\eta)^2}\right\}}dy=(1-\eta)n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2}\int_{-\zeta}^{\zeta}e^{-w^2}dw,$$

(此處之 $\quad \zeta=\frac{\eta}{1-\eta}\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)},$)

及其中以 $1+\eta$ 代 $1-\eta$ 之對應之式.此積分當 n 趨向於無窮大(ζ 亦如之)時之極限爲 $\sqrt{\pi}$. 因而得

(6.246)

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{-n-\frac{1}{2}}e^nJ_2\geqq(1-\eta)\sqrt{(2\pi)},\quad \varlimsup_{n\to\infty} n^{-n-\frac{1}{2}}e^nJ_2\leqq(1+\eta)\sqrt{(2\pi)}.$$

由 (6.245) 與 (6.246) 卽得

$$(1-\eta)\sqrt{(2\pi)}\leqq\varliminf n^{-n-\frac{1}{2}}e^nJ\leqq\varlimsup n^{-n-\frac{1}{2}}e^nJ\leqq(1+\eta)\sqrt{(2\pi)}.$$

但 η 爲任意而 J 是無關於 η. 因而

(6.247) $$\lim n^{-n-\frac{1}{2}}e^nJ=\sqrt{(2\pi)},$$

此卽 Stirling 氏之定理也.

下式可視爲一系:

(6.248) $$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)}\sim\frac{(n+a)^{n+a-\frac{1}{2}}}{(n+b)^{n+b-\frac{1}{2}}}e^{b-a}\sim n^{a-b}.$$

6.25. **對於 L 函數之一般結果.** 第 5 節之結果使吾人能得對於 A_n 之一般公式,而 a_n 爲 n 之 L 函數而 Σa_n 爲發散者.

定理 33. 若 a_n 乃於 $x=n$ 時 L 函數 $a(x)$ 之值,而 Σa_n 爲發散,則若 $a(x)>e^{\Delta x}$, 則

(6.251) $$A_n\sim a(n)$$

若 $a(x)<e^{\delta x}$,則

(6.252) $$A_n \sim \int_1^n a(x)\,dx$$

及若 $a(x)=e^{\alpha x}b(x)$ (此處 $e^{-\delta x}\prec b(x)\prec e^{\delta x}$), 則

(6.253) $$A_n \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\int_1^n a(x)\,dx.$$

首先設 $a(x)\succ e^{\Delta x}$, 所以 $a'\succ a$. 則若設 $a(x)$ 由 $x=1$ 漸增(如此假設亦不失其一般性),依定理25遂得

$$A_{n-1}=\sum_1^{n-1}a(\nu)<\int_1^n a(x)\,dx\sim\frac{\{a(n)\}^2}{a'(n)}\prec a(n),$$

故 $A_n\sim a(n)$.

次設 $a(x)\prec e^{\delta x}$, 所以 $a'\prec a$. 則

$$a_\nu-c_\nu=a(\nu)-\int_{\nu-1}^{\nu}a(x)\,dx=\int_{\nu-1}^{\nu}\{a(\nu)-a(x)\}\,dx=\int_{\nu-1}^{\nu}(\nu-x)a'(\gamma)\,dx,$$

此處 $\nu-1<\gamma<\nu$. 但 $a'(\gamma)\sim a'(\nu)$ 依定理31;如此

$$a_\nu-c_\nu\preccurlyeq a'(\nu)\prec a(\nu)=a_\nu.$$

卽得 $a_\nu\sim c_\nu$ 與 $A_n\sim C_n$, 此卽(6.252)也.

終設 $a(x)=e^{\alpha x}b(x)$. 則

$$\int_{\nu-1}^{\nu}\{a(\nu)-a(x)\}\,dx=b(\nu)\int_{\nu-1}^{\nu}(e^{\alpha\nu}-e^{\alpha x})\,dx+\int_{\nu-1}^{\nu}e^{\alpha x}\{b(\nu)-b(x)\}\,dx$$

$$=\beta_\nu+\gamma_\nu, \qquad \text{(命爲).}$$

故 $b(\nu)-b(x)=(\nu-x)b'(\gamma)\preccurlyeq b'(\nu)$, 如此

$$\gamma_\nu\preccurlyeq e^{\alpha\nu}b'(\gamma)\prec e^{\alpha\nu}b(\nu)=a_\nu$$

而 $$\beta_\nu=\left(1-\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\right)a(\nu).$$

因而 $$a_\nu-c_\nu\sim 1-\frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}a_\nu,\qquad a_\nu\sim\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}c_\nu:$$

(6.253)卽隨之而得也.

對於A_n之公式於$a_n=f_n e^{i\varphi_n}$其中之f與Φ爲L函數但有某種限制,亦能用定理26以求得之;但其結果較紛雜而少一般性.包含較多之結果不能在此除外此易見者也.例如級數Σe^{ain^2}其性質甚奧妙乃依於a爲數之算術性質.但若f_n與φ_n之增大十分之慢,A_n之性質與積分$\int^n f(u)e^{i\Phi(u)}du$相同,而級數$\Sigma a_n$若$f\prec\varphi'$爲收斂.

6.26. **包含質數之公式與算術函數**(arithmetical function).若$\pi(n)$爲不超過n之質數之個數,而p_n爲第n個質數.如此則$\pi(n)$與p_n互爲逆函數,則

$$\pi(n)\sim\frac{n}{\log n},\quad p_n\sim n\log n. \tag{6.261}$$

再顯明者

$$\pi(n)=\int_2^n\frac{dt}{\log t}+O\left(ne^{-A\sqrt{(l_n\,ll_n)}}\right)=\text{lin}+O\left(ne^{-A\sqrt{(l_n\,ll_n)}}\right),\dagger \tag{6.262}$$

此處$A>o$.若關於Zeta函數$\zeta(s)$之零Riemann之假設爲真,其誤差之項可以$O(n^{\frac{1}{2}+\delta})$代之,而實際爲$O(\sqrt{n}ln)$.他方面其誤差之階不小於

$$O\left(\frac{\sqrt{n}l_3n}{ln}\right)\ddagger,$$

此以部分積分法容易證明於k之每值皆

---

* Hardy and Littlewood, 3(2). 對於級數$\Sigma n^{-b}e^{Ain^a}$, 之討論,但其中$o<a<1$觀Hardy, 6.

† 此類公式有一誤差項$O\left\{ne^{-A\sqrt{(ln)}}\right\}$.更明顯之結果述於此者觀Landau, 5, 6; Littlewood, 7.

‡ Littlewood, 6; Hardy and Littlewood, 4.

$$(6.263)\qquad \int_2^n \frac{dt}{\log t}=\frac{n}{ln}+\frac{n}{(ln)^2}+\frac{2!n}{(ln)^3}+\cdots+\frac{(k-1)!n}{(ln)^k}+O\left\{\frac{n}{(ln)^{k+1}}\right\}$$

而 $e^{-A\sqrt{(ln\, lln)}}$ 趨向於零比 ln 之任何冪爲速.故(6.263)之右邊於 k 之任何值皆真實的近似於 $\pi(n)$.

如
$$\sum_{p<n} f(p)$$
形之和之量之階,加以某種保留發現其可以替代第 n 個質數所對應之 $n\log n$,所以

$$\sum_{p<x}\frac{1}{p}\sim llx,\qquad \sum_{p<x}\frac{lp}{p}\sim lx,\qquad \sum_{p<x} lp\sim x.$$

而 $\Sigma\frac{1}{p\,lp}$ 爲收歛.對於此理論之詳博之說明可觀 Landau 1.

對於算術函數之漸近公式吾人引用數例於此. $\pi_\nu(x)$ 乃書以代比 x 小而恰有 ν 因數(重複或不重複)所合成之數之個數; $Q(x)$ 乃書以代無重複因數之數之個數; $R(x)$ 乃書以代 $2^{a_2}3^{a_3}\cdots\cdots p^{a_p}$ 形,但 $a_2\geqq a_3\geqq\cdots\cdots$;之數之個數; $p(n)$ 乃 n 之分解之數;而 $p_r(n)$ 乃 n 分解成第 r 次完全方之數.則

$$\pi_\nu(x)\sim\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{x(llx)^{\nu-1}}{lx},*\qquad Q(x)\sim\frac{6x}{\pi^2},\dagger$$

$$\log R(x)\sim\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{\left(\frac{lx}{llx}\right)},\ddagger\qquad p(n)\sim\frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{(\frac{2}{3}n)}}\S,$$

$$p_r(n)\sim(2\pi)^{-\frac{1}{2}(r+1)}\sqrt{\left(\frac{r}{r+1}\right)}kn^{\frac{1}{r+1}-\frac{3}{2}}e^{\left\{(r+1)kn^{\frac{1}{r+1}}\right\}},$$

而
$$k=\left\{\frac{1}{r}\Gamma(1+\frac{1}{r})\zeta(1+\frac{1}{r})\right\}^{\frac{r}{r+1}}$$

$\zeta(s)$ 爲 Riemann 氏之 Zeta 函數.

* Landau, 1, 208, 211.

† Landau, 1, 582.

‡ Hardy and Ramanujan, 1,

§ Hardy and Ramanujan, 2.

6.31. 羃函數. 整函數之理論. 羃級數

(6.311) $$f(x)=\Sigma a_n x^n$$

之收斂半徑 R 乃定於下式[*]

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

若 $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$ 卽若 $|a_n|<e^{-\Delta n}$ 則級數於 x 之一切值皆收斂.此時之 $f(x)$ 名爲整函數(Integral function).

整函數有三個重要之性質,乃以次款測之:

(i) $a_n=|a_n|$, 第 n 項係數之模.

(ii) $M(r)$, $|f(x)|$ 在 $|x|=r$ 圓上之極大.

(iii) $r_n=|c_n|$, 第 n 次零之模,關於絕對值者.

$M(r)$ 乃 r 之遞增函數,而 $M(r)>r^{\Delta}$,但有極少數(此吾人可以不顧)之例外,其時 $f(x)$ 爲多項式.[+]對於 $M(r)<e^{r^{\Delta}}$ 之函數謂爲有窮階之函數.吾人所考者卽僅此種函數.

此理論之主要問題乃決定 $1/a_n$, $M(r)$ 及 r_n 間增大之速.此在首兩函數甚爲簡單,吾人之注意卽集中於此. r_n 之理論以有 'Picard 之例外情形'甚爲紛亂.其函數或如 e^x 無零,或其零紛散於平面之上.此三函數之增大可以'指數' (indices) 測之兹定義如次[‡]:

---

* 觀 Goursat, 1, (1), 443.

\+ 對於第二命題可觀 Goursat, 1, (2) 92.參照第一之直接而明顯之證明有微妙之難點,此隱然包含有代數之基本定理一類之證明(觀Hardy 1, 433),而在熟知之定理卽 potential function 在正規之點無極大.

‡ Vivanti 1, 228.

$f(x)$ 之'μ–指數' μ 者乃如

$$\sqrt[n]{\alpha_n}<n^{-\xi+\varepsilon} \tag{6.312}$$

中於每一正 ε 及 n 之十分大值時之最大數 ξ 也.依此,因 $\alpha_n\to o$ 故 $\mu\geqq o$. (6.312)於 μ 之一切值爲真,則謂'μ 指數'爲無窮大. $f(x)$ 之'ν 指數' ν 者乃如

$$M(r)<e^{r^{\xi+\varepsilon}} \tag{6.313}$$

中於每一正 ε 及 r 之十分大值時之最小數 ξ 也.'ϱ 指數' ϱ 者乃如

$$\Sigma\frac{1}{r_n^{\xi+\varepsilon}}$$

於每正 ε 爲收斂時最小數 ξ 也.在特殊之時若

$$n^{-\mu-\delta}\prec\sqrt[n]{\alpha_n}\prec n^{-\mu+\delta},\quad e^{r^{\nu-\delta}}\prec M(r)\prec e^{r^{\nu+\delta}},\quad n^{\frac{1}{\varrho}+\delta}\prec r_n\prec n^{\frac{1}{\varrho}+\delta},$$

或若

$$l\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\sim\mu nln,\qquad l_2M(r)\sim\nu lr,\qquad lr_n\sim\frac{ln}{\varrho},$$

此等條件皆滿足.

此論題之基本定理爲(i) $\nu=1/\mu$, $\nu=o$ 之意乃 μ 爲無窮大也.及(ii)加某種保留, $\varrho=\nu$.

6.32. 證明* $\mu=1/\nu$. (i)設 $\mu>o$, 首先證明 $\nu\geqslant1/\mu$. 吾人以 $\mathbf{M}(r)$ 表 α_nr^n 於 $n=0,1,2,\cdots$ 之極大.則於† r 之一切值而 $\mathbf{M}(r)<M(r)$. 由 μ 之定義卽知於每正 ε 及 n 值之不定增級列 (n_j),

$$\sqrt[n]{\alpha_n}>n^{-\mu-\varepsilon}. \tag{6.321}$$

* 此證明之模範乃得之於 Lindelof, 3.　　† Goursat, 1 (2), 92.

若 n 有此等值之一,

(6.322) $$\alpha_n r^n > (rn^{-\mu-\varepsilon})^n.$$

右邊視如 n 之連續函數,於

(6.323) $$n = r^m/e$$

得極大

$$e^{\left(\frac{\mu+\varepsilon}{e} r^m\right)},$$

其中之 $m=1/(\mu+\varepsilon)$. 若 r 有如斯之值卽 (6.323) 爲整數 n_j 之一,則

$$M(r) > \mathbf{M}(r) > e^{\left(\frac{\mu+\varepsilon}{e} r^m\right)}.$$

此於 r 之值之敍列經過其一切極限爲真.而 m 乃小於 $1/\mu$ 之任一數.卽得 $\nu \geqq 1/\mu$.

(ii) 求對於 $M(r)$ 之上界,吾人察得若

(6.324) $$n \geqq n_r = (2r)^{\mathbf{m}'},$$

其中之 $\mathbf{m}'=1/(\mu-\varepsilon)$, 而 r 爲十足大則

$$r^n_n/\alpha_n < rn^{-\mu+\varepsilon} < \tfrac{1}{2}.$$

所以若 r 十足大,

(6.325) $$M(r) \leqq \sum_{0}^{n_r-1} \alpha_n r^n + \sum_{n_r}^{\infty} \alpha_n r^n < n_r \mathbf{M}(r) + \sum_{0}^{\infty} 2^{-n}$$
$$= n_r \mathbf{M}(r) + 2 < 2n_r \mathbf{M}(r),$$

但

(6.326) $$\mathbf{M}(r) = Max\ \alpha_n r^n \leqq Max(rn^{-\mu+\varepsilon})^n = e^{\left(\frac{\mu-\varepsilon}{e} r^{m'}\right)}.$$

由 (6.324), (6.325), 及 (6.326) 於 r 之十分大値卽知

$$M(r) < 2(2r)^{m'} e^{\left(\frac{\mu-\varepsilon}{e} r^{\mathbf{m}'}\right)}.$$

此處之 m' 乃比 $1/\mu$ 大之任意數.因而 $\nu \leqq 1/\mu$,所以 $\nu = 1/\mu$.

此證明之基本觀念乃先測 $f(x)$ 之增大,與以其最大項而為指數之精密之決定.例如指數級數其最大之項乃於 $n=[x]$ 時,而此項之增大為 $e^x/\sqrt{x}$.

吾人假定 μ 為有窮之正數.則稍微變改此論證即可.(a) μ 為無窮大時 $\nu = o$, 而 (b) $\mu = o$ 時 $f(x)$ 非有窮階者.

6.33. **特殊結果.** 若吾人關於係數 a_n 更加有力之假定.則關於 $f(x)$ 自更得明顯之結果.如若

$$\left\{n(ln)^{-b_1}\cdots(l_k n)^{-b_k+\delta}\right\}^{-1/\nu} \prec \sqrt[n]{a_n} \prec \left\{n(ln)^{-b_1}\cdots(l_k n)^{-b_k-\delta}\right\}^{-1/\nu},$$

則
$$e\left\{r^{\nu}(lr)^{b_1}\cdots(l_k r)^{b_k-\delta}\right\} \prec M(r) \prec e\left\{r^{\nu}(lr)^{b_1}\cdots(l_k r)^{b_k+\delta}\right\},$$

及其逆.若

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{-1/\nu}\lambda(n),$$

其中之
$$e^{-\delta\sqrt{ln}} \prec \lambda(n) \prec e^{\delta\sqrt{n}},$$

則
$$\log f(x) \sim \frac{1}{\nu e}\left\{x\lambda(x^{\nu})\right\}^{\nu}.$$

其更確切而特殊之結果之例可引如下:

$$\Sigma \frac{x^n}{n^{an}} \sim \sqrt{\left(\frac{2\pi}{ea}\right)}\, x^{1/2a} e^{(a/e)x^{1/a}},$$

$$\Sigma \frac{x^n}{(n!)^a} \sim \frac{1}{\sqrt{a}}(2\pi)^{(1-a)/2} x^{(1-a)/2a} e^{ax^{1/a}}, \quad \Sigma \frac{x^n}{\Gamma(an+1)} \sim \frac{1}{a} e^{x^{1/a}},$$

$$\Sigma e^{-n^p} x^n \sim \sqrt{\left\{\frac{2\pi}{p(p-1)}\right\}} \left(\frac{\log x}{p}\right)^{\frac{2-p}{2p-2}} e^{(p-1)\left(\frac{\log x}{p}\right)^{p/(p-1)}},$$

其中之 $a>o$ 而在後一式 $1<p<2$, 且 x 係以正值 $\to\infty$. 此結

果若所考之特殊函數於 x 不必爲實之時自可以用於其模之上限,卽用於 $M(r)$.

整函數理論之一般報告乃在 Borel, 2; Vivanti 1, Bieberbach, 1; Valiron, 1. 第一文之第二版有 Valiror 之甚有價值之備註,乃關於此理論之最後發展者.而第二文乃有一至 1906 之最完備之文獻集.特別重要之筆錄 (Borel's 報告係以此着爲基礎)乃 Bontroux, 1; Lindelof, 2; Pringsheim, 7; Valiron, 2, 3; 及 Wiman 1, 2, 3. 對於其明顯而特殊之發展如此節之初所引者,可特別觀 Le Roy, 1; Lindelof, 3; Littewood, 1, 2, 3, 4; 及 Mellin, 1. 對於無窮階整函數之理論觀 Blumenthal, 1.

6.34. 以冪級數定義之不規則增函數. 有裂罅(Gaps)之冪級數. 整函數理論暗示一規則增函數之有趣作法.設 $\Phi(x)=\Sigma a_n x^n$ 爲有正而降之係數之一整函數,且對於所予 x 之值 $\omega(x)=a_\nu x^\nu$ 爲此級數之最大項.一般言之一項爲最大,但於 x 之特別值,如 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 亦有兩繼續之項相等者.*

當 x 增時 $\omega(x)$ 之指數 ν 亦增,且隨 n 以趨向於無窮大:如斯遂定義一函數 $\nu(x)$ 使如

$$\nu(x)=i \qquad (\xi_i<x<\xi_{i+1}).$$

在不連續之點 ξ_i (其時之 $\nu(x)$ 由 $i-1$ 躍至 i)吾人可指定其値爲 i. 於 x 之一切値 ν 如斯定義之之時, $\omega(x)$ 定義爲一隨 x 而連續遞增之函數.而 ω 之增大可期望其甚近於

* 兩項以上相等之可能吾人可以不顧.

φ之增大.

今設
$$f(x)=\Sigma a_{\chi(n)}x^{\chi(n)};$$
其中之 $\chi(n)>n$; 又設 $p(x)$ 爲關於 f 之函數亦如 ω 對於 φ 然. $\omega(x)$ 增大之法則與 $p(x)$ 之增大之法則可期望其爲相同,蓋只須於 $p(x)$ 之定義係由其等項所選擇而成,而此等項 $\omega(x)$ 皆被選擇斯卽可也. $f(x)$ 之增大顯然不比 $\varphi(x)$ 之增大爲大,且可希其比 $\varphi(x)$ 者小;但不能小於 $p(x)$ 之增大.因此吾人所希求之關係爲下形:
$$p\asymp\omega\prec f\prec\varphi.$$
吾人設 $\chi(n)$ 增加甚速,ω 與 φ 之裂罅之間尙須加入 f, 若設 x 之增加十分之速,吾人可希求 $\omega\asymp f$, 如此 f 之增大完全爲一變項之增大所統制也.則得
$$f(x)\asymp a_{N(x)}x^{N(x)},$$
其中之 $N(x)$ 爲 x 之函數可假定其各繼續等於整值 N_i 所以
$$N(x)=N_i\qquad(x_i\leqq x<x_{i+1}).$$
但當 x 由 x_i 增至 x_{i+1} 時 $a_{N_i}x^{N_i}$ 之階可視爲 x 之函數考之,因 N_i 雖關於 x_i, x_{i+1} 區間之值但並不關於在此區間之 x 之特殊位置也.吾人如此所導得之函數其增大如在 § 4.41 所解釋之義係爲不規則.

例如設 $a_n=n^{-n}$ 如此則 (§ 6.33)
$$\varphi(x)=\Sigma\left(\frac{x}{n}\right)^n\sim\sqrt{\left(\frac{2\pi x}{e}\right)}e^{x/e}.$$

此處 $$\xi_i=i\left(1+\frac{1}{i}\right)^{i+1}\sim ei,$$

且易證 $$\omega(x)\asymp e^{x/e}.$$

今設 $\chi(n)=2^n$，如此

$$f(x)=\Sigma\frac{x^{2^n}}{2^{n2^n}}=\Sigma\, v_n, \qquad \text{(命爲)}$$

則若 $x=2^{i+1}$，$v_{i-1}=v_i$，所以於

$$2^{i+1}\leqq x<2^{i+2}$$

$x_i=2^{i+1}$ 及 $N_i=2^i$. 於此區域之 x 值，v_i 爲最大項；其時 $x=2^{i+2}$，$v_i=v_{i+1}$. 且對於證明 $f(x)\asymp p(x)=v_i$ 並不艱難，$f(x)$ 之性質乃被統制於其最大項之性質.* 若置 $x=2^{i+1+\theta}$ 其中 $0<\theta<1$，求得

$$f(x)\asymp v_i=2^{(1+\theta)2^i}=2^{\alpha x},$$

此處之 $\alpha=(1+\theta)2^{-1-\theta}$. $1+\theta=1/(\log 2)$ 時爲極大，而在其時係等於 $1/(e\log 2)=.53\cdots$，因而 $f(x)$ 之增大係略振動於 $2^{.53\cdots x}$ 及 $2^{\frac{1}{2}x}$ 之間.

不規則增函數之又一例係以同法定義爲

$$f(x)=\Sigma\frac{x^{n^3}}{(n^3)!},$$

其增大係振動於 $e^x/\sqrt{x}$ 及

$$x^{-\frac{1}{2}}e^{x-\frac{3}{2}x^{1/3}}\ +$$

---

* 吾人可略謂一般 $f\sim p$，卽謂當 $x\to\infty$，$f/p\to1$，但 x 之值不落在任何區間之側可至於任意之小，卽圍繞 ξ_i 之值，在 ξ_i 點 f/p 乃幾等於 2

\+ Hardy, 3 (3).

之增大之間.此等例子自爲函數之一大類.

6.35. **有有窮收斂半徑之冪級數.** 冪級數 (6.311) 之收斂半徑爲有窮之時,可設其等於 1 並不失其一般性.其對此之必需而充分之條件爲 $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1$:在特殊之時若 a_n 爲正而 $e^{-\delta n}\prec a_n\prec e^{\delta n}$ 爲真.

設 a_n 爲正而 Σa_n 爲發散,即於 $x\to 1$* 時 $f(x)\to\infty$. 則大多數之重要定理會在 (a) 於 $n\to\infty$ 時 $A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$ 之增大及 (b) 於 $x\to 1$ 時 $f(x)$ 之增大之兩關係中證明之.

最基本之定理爲

定理 34. 若 a_n 及 b_n 爲正,與 $A_n\sim A_n$, 則

$$f(x)=\Sigma a_n x^n\sim g(x)=\Sigma b_n x^n. \tag{6.351}$$

特殊時若 $a_n\sim b_n$+ 亦如之.

吾人有

$$F(x)=\frac{f(x)}{1-x}=\Sigma A_n x^n,\qquad G(x)=\frac{g(x)}{1-x}=\Sigma B_n x^n.$$

而此足以證明 $F(x)\sim G(x)$.

任予一正數 ε 於 $n\geqq N(\varepsilon)$ 時有 $B_n(1-\varepsilon)<A_n<B_n(1+\varepsilon)$: 而

$$F(x)=\sum_0^{N-1}A_n x^n+\sum_N^{\infty}A_n x^n=F_N(x)+\sum_N^{\infty}A_n x^n$$

係在

$$F_N(x)+(1-\varepsilon)\sum_N^{\infty}B_n x^n,\qquad F_N(x)+(1+\varepsilon)\sum_N^{\infty}B_n x^n$$

之間;故在

---

* Bromwich, 1, 130. + Bromwich, 1, 132. 此定理乃得之 Cesáro, 2.

$$-B_N+(1-\varepsilon)G(x), \qquad A_N+(1+\varepsilon)G(x)$$

之間.因而於每 ε 之正值

$$1-\varepsilon \leqq \varliminf_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)} \leqq \varlimsup_{x\to 1}\frac{F(x)}{G(x)} \leqq 1+\varepsilon,$$

此卽本定理之證明矣.

例如,

$$\frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+1)}x^n=\sum b_n x^n, \qquad (\text{命爲})$$

而依(6.428)* $b_n \sim n^{-p}=a_n$. 因而

$$\sum\frac{x^n}{n^p}\sim\frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}} \qquad (p<1).$$

同樣

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)\sim\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}} \qquad (\alpha+\beta>\gamma),$$

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta,x)\sim\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,l\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

又一結果如下形.若

$$a_n\sim n^{-p}\left\{l_n\cdots l_{m-1}n\,(l_m n)^q\cdots(l_{m+k}n)^{q_k}\right\}^{-1},$$

則若 $p<1$, $q\neq 1$:

$$f(x)\sim\frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}}\left\{l\frac{1}{1-x}\cdots l_{m-1}\frac{1}{1-x}\left(l_m\frac{1}{1-x}\right)^q\cdots\left(l_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{q_k}\right\}^{-1}$$

但若 $p=1$, $q<1$

$$f(x)\sim\frac{1}{1-q}\left(l_m\frac{1}{1-x}\right)^{1-q}\left\{l_{m+1}\frac{1}{1-x}\right)^q\cdots\left(l_{m+k}\frac{1}{1-x}\right)^{q_k}\Big\}^{-1}.$$

如斯

$$\sum\frac{x^n}{n^p(l n)^q}\sim\frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}}\left(l\frac{1}{1-x}\right)^{-q} \qquad (p<1).$$

* Appell, I.

此性質之其他結果可引如下:

$$x+x^4+x^9+\cdots\sim\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{1-x}\right)},$$

$$x+x^a+x^{a^2}+\cdots\sim\frac{l}{la}\,l\left(\frac{1}{1-x}\right)\qquad(a>1),$$

$$\Sigma a^n x^{n^2}\sim e\left\{\frac{1}{4}\,\frac{(la)^2}{l(1/x)}\right)\qquad(a>1),$$

$$\Sigma e^{n/ln}x^n=e_2\left\{u/(1-x)\right\}\qquad(u\sim 1).$$

關於冪級數而外之級數尚有許多同樣之結果可以建立如

$$\Sigma\frac{x^n}{n(1+x^n)}\sim\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1}{1-x}\right),$$

$$\Sigma\frac{x^n}{1-x^n}\sim\frac{1}{1-x}\,l\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

其更顯明之一例可引如下式:

$$\Sigma\frac{x^n}{1+x^{2n}}=\frac{1}{4}\left\{\frac{\pi}{l(1/x)}-1\right\}+O\left\{(1-x)^{\Delta}\right\}.$$

對於此等結果之報告,及其各種方面之擴張,觀 Barnes, 2; Borel, 4; Bromwich, 2, Hardy, 12; Knopp, 2, 3, 4; Landau, 4; Lasker, 1; Le Roy, 1; Pringsheim; 8.

6.41. 代數微分方程式之實解之增大. 設微分方程式

$$f(x,y,y')\equiv\Sigma A x^m y^n y'^p=0 \tag{6.411}$$

有一解為 $y=y(x)$ 而此為實且於 $x>x_0$ 為連續.此問題可在各方面詳為列舉,而在此各方面中當 $x\to\infty$ 時 y 有其趨向.

此問題之首先攻之者為 Borel (7),彼證明此方程式不能

有一解如次之 y, 卽無有於 x 之值超過其一切之極限時而如

$$y>e^{e^{x}}=e_2(x)$$

之關係之 y 者爲其解. Borel 亦述及對於二階之方程式之對應之定理;卽無連續之解,於 x 之值超過其一切極限時能超於 $e_3(x)$ 者;但此證明並未完備,雖對於此或任何階之方程式所對應之定理之爲真確,尙不無些許之疑問,然實無嚴格之證明發現.

隨後 Lindelöf (1) 亦轉而論及此問題,而證明其更明顯之結果,卽:若有 x 之 m 次之方程式 (6.411) 則於 $x>x_0$ 時對於某 Δ

$$y<e^{\Delta e^{m+1}}.$$

彼更證明或於 $x>x_0$, $|y|<e^{x^{\delta}}$ 或於 $x>x_0$ 對於正數 ϱ

$$e^{x^{\varrho-\delta}}<|y|<e^{x^{\varrho+\delta}}.$$

第一類之解可以振動而第二類之解與其一切之導來函數恆爲單調.

關於方程式 (6.411), 證此須要甚多之篇幅,吾人今僅就其特殊之方程式

$$y'=P(x,y)/Q(x,y) \tag{6.412}$$

其中之 P 與 Q 爲多項式者而考之耳.吾人首先證明 y' 之符號恆相同,所以其解常爲單調的.

* Hardy, 10. 又觀 Boutroux 1, 217.

設不如此,則曲綫 $y=y(x)$, $P=o$ 之交點對應於 x 之值超過其一切極限之無窮大.但 $P=o$ 組成有限枝,所以 $y=y(x)$ 必定常常至少相交於此等無窮之一.

今 $P=o$ 之枝隨 x 軸之向以擴張至無窮大,係(i)有限數直綫 $y=c_s$, 所組成;(ii) $y=Y_t(x)$ 之有限枝所組成,而沿此等綫 y 常恆增或恆減.在第一,$y=y(x)$ 常不能無限的截於 $y=Y_t(x)$. 因例如設 Y_t 爲恆增,而 R 與 S 乃兩繼續之交點,*則 $y=y(x)$ 在 R 與 S 通過 $y=Y_t(x)$ 而在每點皆由上而下,此實不可能,

次考 $y=y(x)$ 與直綫(i)之交點係可能,又吾人可設 x 之大至於與(ii)之各枝之一切交點業已完全包盡,如此 y' 僅能於吾人可考之交點消失.則 y 不能有極大或極小,因於如斯之點 y' 須變號,而 P 則否,蓋綫(i)經過之點即切於此點之切綫也.因而 $y=y(x)$ 通過切綫,不能有不經過極大或極小而可以轉回也.在問題中至多只能有限個之交點自不待言,故 y 恆爲單調.

6.42. 吾人更能證明下之引定理,

引定理. 任一有理函數

$$H(x,y)=K(x,y)/L(x,y)$$

除 $L=o$ 爲方程式(6.441)之一解外乃沿曲綫 $y=y(x)$ 恆爲單調的.

吾人有

* 必爲繼續之點者,因一切之交點皆孤立也.觀 Hardy, 10.

$$\frac{dH}{dx}=\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{P}{Q}\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{U}{W},$$

其中之 U 與 W 爲多項式,而 d/dx 包含沿曲綫 $y=y(x)$ 之微分.若 dH/dx 在曲綫上非恆同號者,則於此綫上必常無限次的消失或成爲無窮大.在第一種情形 $U=o$ 之有限枝至少必有一枝與曲綫相交於無窮大.此枝 C,於 x 之充分大值,可表如次形:

(6.421) $$y=A_0x^{\alpha_0}+A_1x^{\alpha_1}+\cdots\cdots$$

此乃 x 降冪之收斂級數;若 $\delta/\delta x$ 乃沿 C 之微分,則

(6.422) $$y_1=\frac{\delta y}{\delta x}=A_0\alpha_0x^{\alpha_0-1}+A_1\alpha_1x^{\alpha_1-1}+\cdots\cdots$$

再,沿 C, $R(x,y)$ 爲 x 之代數函數,於 x 充分大値,可表如

(6.423) $$R=B_0x^{\beta_0}+B_1x^{\beta_1}+\cdots\cdots$$

乃又一降冪級數;而除(6.422)與(6.423)爲恆等外,C 上由某定點而上在其一切之點吾人有 $y_1>R$ 或 $y_1<R$.由此卽知在交點,C 通過 $y=y(x)$ 係由一側及其同側至他一側及其同側,此明明爲不可能.

他方面若級數(6.422)與(6.423)爲恆等,吾人有 $y_1=R$,而 $U=o$ 爲(6.411)之一解.換言之,H 乃常沿 $y=y(x)$ 者.

如此則僅留

$$\frac{dH}{dx}=\left(L\frac{pK}{dx}-K\frac{dL}{dx}\right)\Big/L^2$$

沿 $y=y(x)$ 常無限項成爲無窮大也.此不能真因爲 K 或 L 或

$$\frac{dK}{dx}=\frac{\partial K}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

或 dL/dx 成爲無窮大,僅於 L 常無限次的消失時遇之.但$L=o$ 吾人能如上證明其爲方程式 (6.411) 之解.如是此引定理卽完全也.至於任意有理函數 $H(x,y,y')$ 除其分母依 (6.441) 之故常常消失外乃恆爲單調的.

6.43. 關於 (6.411) 之解之增大吾人能得甚爲精密之知識.將 (6.411) 書成 $Qy'-P=o$ 之形.任兩項之比爲

$$Ax^m y^m, \qquad Ax^m y^n y'$$

之形之一.其中之 A 爲常數,而恆單調者;如此任兩項 X_i, X_j 間,有

$$X_i \succ X_j, \quad X_i \asymp X_j, \quad X_i \prec X_j$$

中之一關係存在.而無論如何必有一對項如 $X_i \asymp X_j$.若 X_i, X_j 或皆含或皆不含 y',吾人卽得

$$y \sim Ax^s, \tag{7.431}$$

其中之 s 爲有理.若僅有一含 y',吾人得

$$y^m y' \sim Ax^n,$$

因之有四種情形出現.若 $m \neq -1, n \neq -1$, 吾人得 (6.431) 型之關係.若 $m \neq -1$, $n=-1$, 得

$$y \sim A(\log x)^{1/p}, \tag{6.433}$$

其中之 p 爲任一整數.若 $m=-1$, $n \neq -1$, 得

$$\log y \sim Ax^n,$$

$$y=e^{Ax^p(1+\varepsilon)}. \tag{6.434}$$

此處之 p 可設爲正整數,若 p 爲負或零則 $y\asymp 1$. 最後,若 $m=-1$, $n=-1$, 得

$$\log y \sim A \log x,$$

$$y=x^{A+\varepsilon}. \tag{6.435}$$

y 之最末一形包含(6.431)及(6.433)兩式之特殊情形,因後者係 $y=x^{\varepsilon}$. 如此吾人遂證明

定理 35. (6.411)之任一連續的解,乃恆爲單調的,而爲

$$e^{Ax^{p}(1+\varepsilon)}, \qquad x^{A+\varepsilon}$$

之形之一,但其中之 p 爲正整數.

此尙可更多的論列. y 之一切導函數爲恆單調的,而 y 滿足於

$$y\sim Ax^{\alpha}e^{\pi(x)}, \qquad y\sim A(x^{p}\log x)^{1/q},$$

諸關係之一,其中之 $\pi(x)$ 爲多項式而 p 與 q 爲整數.

此等理論充分之發展可觀 Hardy, 10. 對於二階方程式類似之研究,更爲複雜,可觀 Fowler 1, 2. 此等文件對此論題包含許多之參考.

6.5. Dirichlet 氏積分之振動. Fourier 級數之理論,準 Dirichlet 所予之原始觀念而發展之時須有賴於 Dirichlet 氏積分

$$J(\lambda)=\int_0^{\xi}\frac{\sin\lambda(x)}{x}f(x)\,dx \qquad (\xi>0), \tag{6.51}$$

* p 至多等於 $r+1$, 此 r 乃 (6.411) 之 x 之次數:此自與 §6.41 所引 Lindelöfs 之結果一致.

在其原有條件之下，$\lambda\to\infty$ 時有極限 $\frac{1}{2}\pi f(+0)$

在此理論中最有趣之問題乃求對於 $J(\lambda)$ 之漸近公式，但其時

$$f(x)=\varrho(x)e^{i\sigma(x)},$$

ϱ 與 σ 爲'L 函數'，而 $x\to 0$ 時 $\sigma\to\infty$. 第一次攻此問題者爲 du Bois-Reymond (6)，彼宣布顯著之定理，但其解析則甚曖昧，甚至於不能分別何者爲已證明何者爲未證明.* 此問題之重行考慮者爲著者，+ 得有許多確定之結果，而此等結果隨後又爲 Kuniyeda ‡ 完成之.

述此等結果，吾人假定皆 $\varrho\prec\sigma'$，此爲積分 $J(\lambda)$ 存在之充分而必要之條件. 有三種情形之別，即

$$(A)\quad \sigma\prec l\left(\frac{1}{x}\right),\qquad (B)\quad \sigma\asymp l\left(\frac{1}{x}\right),\qquad (C)\quad \sigma\succ l\left(\frac{1}{x}\right):$$

其主要定理如次：至其證明若轉載于此則太費事也.

定理 36. 若 $\sigma\prec l(1/x)$ 及 $\varrho=x^{-a}\text{Ⓛ}(x)$，其中 $x^{\delta}\prec\text{Ⓛ}\prec x^{-\delta}$，如此 $a\leqq 1$，則

$$J(\lambda)=O(\lambda^{-1+\delta})\qquad (a\leqq -1),$$

$$J(\lambda)\sim -\Gamma(-a)\sin\frac{1}{2}a\pi\varrho\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{i\sigma(1/\lambda)}\qquad (-1<a<1),$$

$$J(\lambda)\sim\lambda\mathrm{T}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\qquad (a=1),$$

其中之

$$\mathrm{T}(x)=\int_0^{\lambda}\varrho(t)e^{i\sigma(t)}dt$$

---

* du Bois-Reymond 僅問 $J(\lambda)$ 趨向於極限否，而未注意振動之時之漸近公式.

\+ Hardy, 11.　　　‡ Kuniyeda, 1.

而 $-\Gamma(-a)\sin\frac{1}{2}a\pi$ 於 $a=o$ 係以 $\frac{1}{2}\pi$ 代之.

定理 37. 若 $\sigma\sim bl(1/x)$ 則

$$J(\lambda)=O(\lambda^{-1+\delta}) \qquad (a\leqq-1),$$

$$J(\lambda)\sim-\Gamma(-a-bi)\sin\frac{1}{2}(a+bi)\pi\varrho\left(\frac{1}{\lambda}\right)e^{i\sigma(1/\lambda)} \qquad (-1<a\leqq1).$$

定理 38. 若 $l(1/x)\prec\sigma\prec(1/x)^{\Delta}$ 及 $\varrho\prec x\sigma'$ 而 $\varrho\preccurlyeq x\sqrt{\sigma''}/\sigma'$ 則

$$J(\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

又若 $x\sqrt{\sigma''}/\sigma'\prec\varrho\prec x\sigma'$, 則

$$J(\lambda)\sim\sqrt{(\tfrac{1}{2}\pi)}\,e^{(\beta-\frac{1}{4}\pi)i}\frac{\varrho(\theta)}{\theta\sqrt{\{\sigma''/\theta)\}}}.$$

此處 $\beta=\lambda\theta+\sigma(\theta)$, 而 θ 之決定係以 $\sigma'(\theta)+\lambda=o$ 視如 λ 之函數.

上述之定理其最後形成之者爲Kuniyeda.但仍見其不十分完全.$\sigma\succ(1/x)^{\Delta}$ 時並未得其漸近公式,在定理 38 於 $x\sigma'\preccurlyeq\varrho\prec\sigma'$ 亦未有何報告.定理 36 與 37 之第一式尙有精密決定之餘地.*

Kuniyeda 亦曾研究積分 $K(\lambda)$ 其中之 $\cos(\lambda x)$ 而以 $\sin\lambda x$ 代之者,其結果亦有相同之性質.此積分在三角級數中出現而與 $f(x)$ 之 Fourier 級數相配.而在冪級數論中之收歛圓上亦曾見之.

由 du Bois-Reymond 之著作中分出此問題之特殊情形者爲 Darboux, Hamy, 及 Fejér+ 諸氏.其特別者 Fejér 曾決定對於

* 觀 Kuniyeda, 1, 35.

+ Barboux; 1: Hamy, 1: Fejér, 1. 2.

冪級數

$$f(x)=(1-x)^{-p}e^{-1/(1-x)}=\Sigma a_n x^n,$$

之係數之漸近公式

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{(e\pi)}} n^{-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}p} \sin(2\sqrt{n}+\tfrac{3}{4}\pi-\tfrac{1}{2}p\pi).$$

6.61. **算術的應用. 無理數之分類.** 吾人今將略述在算術方面之最重要的應用以終吾篇.此等應用乃關於無理數分類之問題.

k 次之代數數乃係數無公因數之有理整數之不可約方程式(irreducible equation).

$$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k=0 \tag{6.611}$$

之根.若 $a_0=1$, x 爲整數.凡數之非代數數者爲超越數.

吾人今限定所論爲實數.代數數之集合爲可數的(enumerable)而超越數則在連續統(continuum)* 之每區間之數.在此方法建立之集合論有超越數之存在.但對於創造超越數則無任何直接之方法.其第一次攻此問題者爲 Liouville+ 有下列之定理:

定理 39. 若 x 爲 k 次之代數數,而 p/q 爲不等於 x 之有理數,‡ 則有不關於 q 之一數 $M=M(x)$, 如

* Cantor, 1. 對於 Cantor 氏理論之關係部分之報告覲 Borel, 1: Hausdorff, 1: Hobson, 2: Jourdain, 1.

\+ Liouville, 2.

‡ 此僅 $k=1$ 時所需要自不待言.

(6.612)
$$\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{Mq^k}.$$

設 x 無比 p/q 再良之近似值,其分母爲 q 者,則 p/q 與 x 之差小於 $1/q$, 而於區間 $|y-x|\leqq 1/q$, $|f'(y)|$ 有不關於 q 之上界 $\frac{1}{2}M$.* 但

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)-f(x)=\left(\frac{p}{q}-x\right)f'(y),$$

其中之 y 介乎 x 與 p/q 之間,如此則

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{M}\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|.$$

$|f(p/q)|$ 爲一有理數其分母爲 q^k, 而分子至少爲 1. 於 q 之充分大值,

(6.613)
$$\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{k+1}}$$

甚明.

Liouville 氏定理結果證明不能有更爲精確之有理數近似於一代數數.自他方面言之,容易書出特殊之無理數而該數有任何確度之有理近似值.例如 φ_n 爲 n 之增函數,於每整數 n 爲整數,設

$$x=10^{-\varphi_1}+10^{-\varphi_2}+\cdots+10^{-\varphi_n}+\cdots$$

若 p_n/q_n 爲此級數首 n 項之和,如此 $q_n=10^{-\varphi_n}$, 則

$$o<x-\frac{p_n}{q_n}=10^{-\varphi_{n+1}}+10^{-\varphi_{n+2}}+\cdots\leqq\frac{10}{9}10^{-\varphi_{n+1}}$$

而

* 吾人曾經確定,例如

$$\tfrac{1}{2}M\leqq k|a_0|(|x|+1)^{k-1}+\cdots+|a_{k-1}|.$$

(6.614)　　$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right| \leqq \frac{10}{9} q_n^{-\chi_n},$$

其中之 $\chi_n=\varphi_{n+1}/\varphi_n$, 若 $\chi_n \to \infty$, (6.613) 與 (6.614) 成爲矛盾,所以 x 爲超越數.吾人可設例如 $\varphi_n=n!$

Cantor 氏之理論證明超越數存在,而 Liouville 氏定理使吾人產生超越數之例.至於證明某特殊之數是否爲超越數或無理數一般甚爲困難.而例如 $2^{\sqrt{2}}$, e^{π} 是否超越數或 Euler 氏常數 γ 是否無理數現在尚未證明也.

有少數之數如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{2}$, e, $\log_{10}2$,…… 其無理性之分類已明,可參觀 Hardy, 1, 6, 380, 387. 對於 π 之無理性首先證明者爲 Lambert (1), 而 π^2, 則見 Perron, 1, 254; Vahlen, 1, 319. 證明 $\sqrt[3]{2}$ 不能以任何二次不盡根結合之式表之乃歷史上甚有名之問題;觀 Enriques, 1; Hudson, 1; Klein, 1. 對於 e 非二次不盡根之初等證明見 Vahlen, 1, 325. 而 e 之爲超越數則 Hermite (1) 首先證明者也. π 之超越性之證明爲 Lindemann (1); 此等問題作充分之報告者爲 Enriqes, 與 Klein, 又 Hessenberg, 1; Hobson, 3; Perron, 2. 亦見 Mailiet, 1.

6.62.　前節之作法用于數 10 自無特殊價値.吾人可用之於其他尺度;無理數之表示亦尙有其他之法,例如連分數.數

$$x=\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots$$

若 a_n 充分的速增大時爲一超越數;因若 p_n/q_n 爲第 n 次近

似分數,a'_n 爲對應於 a_n 之完全商,而 $q'_n=a_n'q_{n-1}+q_{n-2}$,則有

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n q'_{n+1}}<\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}:$$

此自能得(6.613)之作法,僅須設 $a_{n+1}<q_n^{\Delta}$ 或其全等之 $q_{n+1}>q_n^{\Delta}$ 卽可.此易證 $a_{n+1}>a_n^{\Delta}$. 如此吾人可取

$$a_1=1,\quad a_2=2^{a_1}=2,\cdots\cdots,\quad a_{n+1}=2^{a_n},\cdots\cdots$$

$k=1$, 或 $k=2$ 時,在一種意義, Liouville 氏定理爲最終的:其右邊之 q^k 不能以較低冪之 q 代之. $k>2$ 時,更真:如 Thue (1) 證明

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{Mq^{\frac{1}{2}k+1+\varepsilon}},$$

其中之 $M=M(x,\varepsilon)$, 而 Siegel (1) 證明

$$\left|x-\frac{q}{p}\right|>\frac{1}{Mq^{2\sqrt{k}}},$$

其中之 $M=M(x)$, 若 $k>11$. 被 Siegel 氏定理指定之指數較佳.但求甚佳之指數之問題除 k 爲 1 或 2 外尙未解決.

$k=2$ 時,對於 x 之連分數爲循環的.所以 $a_n=O(1)$. 當 x 爲高次之代數數時,關於 a_n 之階有何可說此自然應問之問題.由 Liouville 氏定理易推得 $a_n<e_2(an)$, 其中之 a 乃依於 k 之一數;而由 Thue 與 Siegel 之定理亦可引出同樣之推論.以此法證明者爲何所得甚微,且與無論何處恆爲真者甚是不同.

6.63. 對於無理數特類,關於 a_n 之大之階其所知者雖如是其少,而關於所謂大之'通常'的階則有甚趣之結果發現.若 x 有一組之値於此等値 P 不眞者而其量爲零則可

謂 x 常有性質 P, 或 P 常爲真.則若 φ_n 爲 n 之增函數,依 $\Sigma(1/\Phi_n)$ 爲收斂或發散而書 $\varphi_n=k_n$ 或 $\varphi_n=d_n$,則

$$a_n<k_n \qquad (n>n_0)$$

常真,而

$$a_n<d_n \qquad (n>n_0)$$

常不真.* 如 $a_n<n(ln)^2$ 乃常真,而 $a_n<nln$ 爲常不真.+

此易證,於 q 之無窮大值,及 $\varphi_q=k_q$, 若

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q\varphi_q} \qquad (6.631)$$

則於 n 之無窮大值 $a_n>k_n$‡.而(6.631)在此時常不真.

吾人可問須如何之無理數 (6.631) 始常爲真.此可以求其結果.若 φ_q 爲常數 C 而 $C\leqq\sqrt{5}$, 則(6.631) 乃常真(於 q 之無窮大值).若

$$\sqrt{5}<C\leqq 2\sqrt{2},$$

則 (6.631) 除於無理數時**全等於

$$a+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\cdots\cdots$$

外爲常真.若 $2\sqrt{2}<C<3$, 則(6.631)除等於次不盡根之有限數之數外爲真.若 $C\geqq 3$, 係常真,但不可數者爲例外,若 φ_q 爲一增函數,其增大充分的慢仍常真;但於 $\varphi_q=k_q$ 則常不真.更詳之報告則觀 Borel, 5; Bohr 與 Cramér, 1; Grace, 1; Heawood, 1; Her-

---

* 此卽謂於 n 之無窮大值 $a_n>d_n$ 常真.

\+ Borel, 9; Bernstein, 1.

‡ 此處之 k_n 乃 n 之某函數而如 $\Sigma(1/k_n)$ 爲收斂者.此 k_q 爲 q 之函數但不同於 n 之函數.

** 如數 $(a\alpha+b)/(\alpha+d)$, 其中之 a,b,c,d 爲整數而 $ad-bc=1$.

mite, 1; Hurwitz, 1; Markoff, 1; Minkowski, 1; Perron, 2.

尚有甚相接近之問題為數 (nx) 之分布,在區間 $(o,1)$ 其中之 x 為無理數,而 $(u)=u-[u]$. 基本定理為在此區間無論何處皆稠密,係 Kronecker 氏所得.關於此定理及其擴張尚有許多之筆錄.觀 Behnke, 1; Bohr, 1; Bohr 與 Cramer, 1; Hardy 與 Littlewood, 3; Hecke, 1; Kronecker, 1, 2; Lettenmeyer, 1; Minkowski, 1; Ostrowski, 1; Weyel, 1.

6.64. **對於收斂理論之應用.** Liouville 定理及吾人曾述之其他定理對於級數收斂之理論有許多有趣之應用.

此種問題之型為級數

$$\Sigma\frac{\varphi_n}{|\sin n\pi x|} \tag{6.641}$$

之收斂,其中之 φ_n 為 n 之降函數而 x 為無理數.若 p_ν/q_ν 收斂於 x, 則

$$|\sin q_\nu\pi x|<\frac{A}{q'_{\nu+1}}<\frac{A}{a_{\nu+1}q_\nu},$$

其中之 A 為常數,而 $a_{\nu+1}$ 之增大視如 q_ν 之函數可以隨意之速.於是 (6.641) 於 x 所有之值無論 φ 之減少如何地速亦為發散.

若 x 為 k 次代數數,則依 (6.612)

$$|\sin n\pi x|>\frac{B}{n^{k-1}},$$

其中之 B 於 n 之一切值僅為 x 之正函數.因此 (6.641) 於 $\varphi_n<n^{-a}$, 及 $a<k$ 為收斂:此結果自能改正 Thue 與 Siegel 定理之

用法.如

$$\Sigma\frac{n^{-2-\delta}}{|\sin n\pi x|}$$

於一切二次之 x 爲收斂,而

$$\Sigma\frac{e^{-\delta n}}{|\sin n\pi x|}$$

於一切代數數 x 爲收斂.此等結果之第一式之 2 實際可以 1 代之.不過須要更精細之證明.由 §6.63 之結果亦知(6.641) 若 $\Sigma k_q\varphi_q$ 爲收斂時常爲收斂.例如若 $\Phi_q=q^{-2}(\log q)^{-4}$, 吾人可取 $k_q=q(\log q)^2$.

級數 $\Sigma z^n \operatorname{cosec} n\pi x$, 依 x 之算術性質,可以表示 z 之整函數,或在一圓內之正規函數,該圓乃此函數奇異性之線也;再於 z 之一切值可以收斂.

如 $\Sigma\Phi_n \operatorname{cosec} n\pi x$ 之非絕對收斂級數之理論其性質更複雜.

對於更充分之報告可觀 Hardy, 5; Hardy 與 Littlewood, 3 (3); Lerch, 1; Riemann, 2; Smith, 1. 關於積分類似之問題 Hardy, 3 (5) 曾討論之.

附　錄

某種值數值的實例*

1. 函數 $\log x$, $\log\log x$, $\log\log\log x$ 等之表

x	$\log x$	$\log_2 x$	$\log_3 x$	$\log_4 x$	$\log_5 x$
10	2.30	0.834	-0.182	—	—
10^3	6.91	1.933	0.659	-0.417	—
10^6	13.82	2.626	0.966	-0.035	—
10^{10}	23.03	3.137	1.143	0.134	-2.011
10^{15}	34.54	3.542	1.265	0.235	-1.449
10^{20}	46.05	3.830	1.343	0.295	-1.221
10^{30}	69.08	4.235	1.443	0.367	-1.003
10^{60}	138.15	4.928	1.595	0.467	-0.762
10^{100}	230.26	5.439	1.693	0.527	-0.641
10^{1000}	2302.58	7.742	2.047	0.716	-0.334
10^{10^6}	2303×10^3	14.650	2.685	0.987	-0.013
$10^{10^{10}}$	2303×10^7	23.860	3.172	1.154	0.144

2. 函數 e^x, e^{e^x}, $e^{e^{e^x}}$, 等之表

x	ex	e_2x	e_3x	e_4x
1	2.718	15.154	3,814,260	$10^{1,656,510}$
2	7.389	1618.2	5.85×10^{702}	—
3	20.085	5.28×10^{8}	$10^{2.295\times10^8}$	—
5	148.413	2.85×10^{64}	$10^{1.24\times10^{64}}$	—
10	22026	9.44×10^{9565}	—	—

函數 $\log x$ 僅於 $x>o$ 時定義, $\log_2 x$ 於 $x>1$, $\log_3 x$ 於 $x>e$, $\log_4 x$ 於

* 此附錄之表爲 Jackson 君所計算.

$x > e^e = e_2$, 定義.如此類推. $e, e_2, e_3, \cdots$ 等值如上,即 $e = 2.718$, $e_2 = 15.154$, $e_3 = 3,814,260$, $e_4 = 10^{1,656,510}$.

3. 收斂級數之表.

(1) $\sum_{3}^{\infty}\frac{1}{nln(lln)^2}$.　(2) $\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n(ln)^2}$.　(3) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.　(4) $\sum_{0}^{\infty} x^n$.

(5) $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.　(6) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.　(7) $\sum_{0}^{\infty} x^{n^2}$.　(8) $\sum_{1}^{\infty} n^{-n^n}$.

級數	和	計算其和至若干位小數正確所應求之項數			
		2 位小數	10 位小數	100位小數	1000位小數
1	38 43	$10^{3.14\times10^{86}}$	—	—	—
2	2.11	7.23×10^{86}	$10^{8.6\times10^{1}}$	—	—
3($s=1.1$)	10.53	10^{33}	10^{113}	10^{1013}	10^{10013}
3($s=1.5$)	2,612	160,000	16×10^{20}	16×10^{200}	16×10^{2000}
3($s=2$)	$\frac{1}{6}\pi^2=1.64493$	200	2×10^{10}	2×10^{100}	2×10^{1000}
3($s=10$)	1.0069846	1	11	1.093×10^{11}	1.093×10^{111}
3($s=100$)	$1+(1.27\times10^{-30})$	1	1	10	1.213×10^{10}
4($x=.9$)	10	73	247	2214	21883
4($x=.3$)	2	9	36	336	3325
4($x=.1$)	10/9	3	11	101	1001
5	$e-1=1.718282$	5	13	70	440
6	1.291286	3	10	57	386
7($x=.9$)	3.234989	8	15	46	148
7($x=.5$)	1.564468	3	6	19	58
7($x=.1$)	1.100100	2	4	11	32
8	1.062500	2	2	3	4

'計算其和至 m 位小數正確'一語之意乃'其誤差比 $\frac{1}{2}\times10^{-m}$ 尚小'之意.在收斂甚慢之級數計算之項數須甚多.實際其所需之項甚多至於難以計算者用'—'表示之.

級數3($s=100$)乃收斂甚速之級數.所需只少數項而欲求之和卽可正確.

4. 發散級數之表.

(1) $\frac{1}{\log\log 3}+\frac{1}{\log\log 4}+\cdots$　　(2) $\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\cdots$

(3) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$　　(4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

(5) $\frac{1}{2\log 2}+\frac{1}{3\log 3}+\cdots$　　(6) $\frac{1}{3\log 3\log\log 3}+\frac{1}{4\log 4\log\log 4}+\cdots$

級數	所求比下指各數尙大所需要之項數					
	3	5	10	100	1000	10^6
1	1	1	1	116	1800	2.6×10^6
2	3	7	20	440	7600	1.5×10^7
3	5	10	33	2500	2.5×10^5	2.5×10^{11}
4	11	82	12390	10^{43}	$10^{.43\times 10^3}$	$10^{.43\times 10^6}$
5	8690	1.3×10^{20}	10^{4300}	$10^{3\times 10^{42}}$	—	—
6	1	60至70	$10^{10^{100}}$	—	—	—

文　獻　集

N. H. Abel. 1. Note sur un mémoire de M. L. Olivier, ayant pour titre Remarques sur les séries infinies et leur convergence, *Journal für Math.*, 3 (1828), 79-81 (Œuvres, I, 399-402).

2. Sur les séries (Œuvres, II, 197-205).

P. Appell. 1. Sur certaines séries ordonnées par rapport aux puissances d'une variable, *Comptes rendus*, 28 Oct. 1878.

P. Bachmann. 1. *Die analytische Zahlentheorie* (Leipzig, Teubner 1894).

E. W. Barnes. 1. The theory of the G-function, *Quarterly Journal of Math.* 31 (1899), 264-314.

2. On certain functions difined by Taylor's series of finite radius of convergence, *Proc. London Math. Soc.* (2) 4 (1907), 284-316.

H. Behnke. 1. Über die Verteilung von Irrationalitäten mod. 1, *Hamburg Math. Abhandlungen,* 1 (1922), 252-267.

F. Bernstein. 1. Über eine Anwendung der Mengenlehre auf ein aus der Theorie der säkularen Störungen herruhrendes Problem, *Math. Annalen,* 71 (1911), 417-439.

J. Bertrand. 1. Règles sur la convegence des séries, *Journal de math.* (1), 7 (1842), 35-54.

L. Bieberbaach. 1. Neuere Untersuchungen über Funktionen von complexen Variablen, *Encykt. der math. Wissenschaften,* II. C 4, 379-532.

O. Blumenthal. 1. *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini,* (Paris Ganthier-Villars, 1910).

H. Bohr. 1. Another proof of Kroneeker's Theorem, *Proc. London Math. Soc.* (2), 21 (1922), 315-316.

H. Bohr and H. **Cramér.** 1. Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, *Encykl, der math. Wissenschaften,* II C 8, 722-849.

P. du Bois-Reymond. 1. Sur la grandeur relative des infinis des fonctions, *Annali di Mat.* (2) 4 (1871), 338-353.

2. Théorème général, concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées, *Journal für Math.* 74(1872), 294-304.

3. Eune neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Rechen mit positiven Gliedern, *Journal für Math.*, 76 (1873), 61-91.

4. Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Aufläsung von Gleichungen, *Math. Annalen,* 8 (1875), 362-414, 574-578.

5. Notiz über infinitäre Gleichheiten, *Math. Annalen,* 10 (1876), 567-578.

6. Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der

Fourierschen Darstellungsformeln, *Münchener Abhandlungen*, 12 (1876), 1-162.

7. Ueber die Pardoxen des Infinitärcalcüls, *Math. Annalen*, 11 (1877), 149-167.
8. Notiz über Convergenz von Integralen mit nicht verschwindendem Argument, *Math. Annalen*, 13 (1878), 251-254.
9. Ueber Integration und Differentiation infinitären Relationen, *Math. Annalen*, 14 (1879), 498-506.
10. Ueber den Satz: $\lim f'(x) = \lim f(x)/x$, *Math. Annalen*, 16 (1886), 550.

O. Bonnet. 1. Sur la convergence et la divergence des séries, *Journal de Math.* (1), 8 (1843), 73-109.

É. Borel. 1. *Leçons sur la théorie des fonctions* (second edition, Paris, Gauthier-Villars, 1914).

2. *Leçons sur les fonctions entières* (second edition, with note by G. Varliron, Paris, Gauthier-Villars, 1921).
3. *Leçons sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars 1901).
4. *Leçons sur les séries à terms positifs* (Paris, Gauthier-Villars 1902).
5. *Leçons sur la théorie de la croissance* (Paris, Gauthier-Villars 1910).
6. Demonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières, *Comptes rendus*, 11 May 1896.
7. Mémoire sur les séries divergentes, *Annales scientifiques de l'École Normale. Supérieure* (3), 16 (1899) 1-131.
8. Contribution à l'analyse arithmetique du continu, *Journal de math.* (5), 9 (1903), 329-375.
9. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmetiques, *Rendiconti del Circolo Math. di Palermo*, 27 (1909), 247-271.

P. Boutroux. 1. Sur quelques propriétés des fonctions entières, *Acta Math.*, 28 (1904), 97-224.

2. *Leçons sur les fonctions definies par les équations differentielles du premier ordre* (Paris, Gauthier-Villars, 1908).

T. J. I'A. Bromwich. 1. *An introduction to the theory of infinite* (London, Macmillan, 1908).

2. Various extensions of Abel's lemma, *Proc. London Math. Soc.* (2), 6 (1908) 58-76.

3. The relation between the convergence of series and of integrals, *Proc. London Math. Soc.* (2), 6 (1908), 327-338.

4. An asymptotic formula for the generalized hypergeometrie series, *Proc. London Math. Soc.* (2) 7 (1909), 101-106.

G. Brunel. 1. Bestimmte Integrate, *Encykl. der math. Wissenschaften*, II A 3, 135-188.

G. Cantor. 1. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen zahlen, *Journal für Math.*, 77 (1874), 258-262 (French translation *in Acta Math.*, 2 (1883), 305-310).

A. L. Cauchy. 1. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, I: *Analyse algébrique* (Paris, de Bure, 1821; *Œuvres*, sér. 2, 3).

2. Sur la convergence des séries, *Exercices de math.*, 2 (Paris, de Bure, 1827), 221-232 (*Œuvres*, sér. 2, 7, 267-279).

E. Cesàro. 1. *Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechung* (Leipzig, Teubner, 1904).

2. Contribution à la théorie des limites, *Bulletin des sciences math.* (2), 13 (1889), 51-54.

T. Dahlgren. 1. Sur le théorème de condensation de Cauchy, *Lunds Universitets Arsskrift*, 30 (1918), Nr. 4, 1-69.

G. Darboux. 1. Mémoire sur les fonctions de très grands nombres, *Journal de math.* (3), 4 (1878), 5-57, 377-417.

U. Dini. 1. *Sulle serie a termini pasitivi* (Pisa, Nistri, 1867).

F. Enriques. 1. *Fragen der Elementargeometri* (German translation by H. Thieme, Leipzig, Teubuer, 1911).

L. Fejér. 1. Sur une méthode M. Darboux, *Comptes rendus*, 30 Nov. 1908.

2. Asymptotikus értékek meghatározásarról, *Math. és. term-*

észettudományi értesctö 27 (1909), 1-33.

R. H. Fowler. 1. Some results on the form near infinity of real continuous solutions of a certain type of second order differential equation; *Proc. London Math. Soc.* (2), 13 (1914), 341-371.

2. The form near infinity of real continuous solution of a certain differential equation of second order, *Quarterly Journal of Math.*, 45 (1914), 289-350.

Ph. Gilbert. 1. Sur la convergence des intégrals à limits infinies, *Bulletin des sciences Math.* (2), 12 (1888), 66-76.

J. W. L. Glaisher. 1. On the constant which occurs in the formula for $1^1 2^2 \cdots n^n$, *Messenger of Math.*, 24 (1895), 1-16.

2. On products and series involving prime numbers only, *Quarterly Journal of Math.*, 27 (1895) 270-337 and 28 (1896), 1-174.

E. Goursat. 1. *Cours d'analyse mathématique,* Vol. 1. (third edition, Paris, Gauthier-Villars, 1917) and Vol. 2. (third edition, 1918).

J. H. Grace. 1. The classification of national approximations, Proc. London Math. Soc. (2), 17 (1918), 247-258.

J. Hadamard. 1. *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Paris, Naud, 1901).

2. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indefiniment croissantes, *Acta Math.*, 18 (1894), 319-336, 421.

3. Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries, *Acta Math.*, 27 (1903), 177-184.

M. Hamy. 1. Sur l'approximation des fonctions de grands nombres, *Journal de math.* (6), 4 (1908), 203-283.

G. H. Hardy. 1. *A course of pure mathematics* (third edition, Cambridge University Press, 1921).

2. The integration of functions of a single variable (*Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics*, no. 2, second edition, 1916).

3. Notes on some points in the integral calculus, *Messenger of Math.*, (1) III. 31 (1902), 1-6; (2) VIII, 31 (1902), 177-183; (3) XXV, 39 (1910), 28-32; (4) XXXII, 41 (1912), 44-48; (5) XXXIV, 42 (1913), 13-18; (6) XXXVI, 43 (1914), 9-13.
4. On a class of analytic functions, *Proc. London Math., Soc.* (2), 4 (1905), 441-460.
5. On certain series of discontinuous functions connected with the modular functions, *Quarterly Journal of Math.*, 36 (1905), 93-123.
6. On the zeroes of a class of integral functions, *Messenger of Math.*, 34 (1905), 97-101.
7. The singular points of certain classes of function of several variable, *Proc. London Math. Soc.* (2), 5 (1907), 342-360.
8. Theorems connected with MacLaurin's test for the convergence of series, *Proc. London Math. Soc.* (2), 9 (1911), 126-144.
9. Properties of logarithmico-exponetial functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), 10 (1911), 54-90.
10. Some results concerning the behaviour at infinity of a real and continuous solution of an algebra differential equation of the first order, *Proc. London Math. Soc.* (2), 10 (1912), 451-468.
11. Oscillating Dirichlet's integrals, *Quarterly Journal of Math.*, 44 (1913), 1-40, 242-263.
12. Note on Lambert's series, *Proc. London Math. Soc.* (2), 13 (1914), 192-198.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood. 1. Contributions to the arithmetic theory of series, *Proc. London Math. Soc.* (2), 11 (1912), 411-478.

2. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive, *Proc. London Math. Soc.* (2), 13 (1914), 174-191.
3. Some problems of Diophantine approximation: (1) The frac-

tional part of $n^k \theta$, *Acta Math.*, 37 (1914), 155-190; (2) The trigonometrical series associated with the elliptic theta-functions, *Acta Math.*, 37 (1914) 193-238 (further note, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 21 (1922) 1-5); (3) The lattice points of a right-angled triangle, *Proc. London Math., Soc.* (2), 20 (1921), 15-36 and *Hamburg math. Abhandlungen*, 1 (1922), 212-249.

4. Contributions to the theory of the Riemann Zeta-function and the theory of the distribution of primes, *Acta Math.*, 4 (1918) 119-196.

G. H. Hardy and S. Ramanujan. 1. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, *Proc. London Math. Soc.* (2), 16 (1916), 112-132.

2. Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. London Math. Soc.* (2), 17 (1917), 75-115.

F. Hausdorff. 1. *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, Von Veit, 1914).

P. J. Heawood. 1. The classification of national approximations, *Proc. London Math. Soc.* (2), 20 (1922), 233-250.

E. Hermite. 1. Sur l'introduction des variabless continues dans la théorie des nombres, *Journal für Math.*, 41 (1851), 191-216.

2. Sur la fonction exponetielle, *Comptes rendus*, 7, 14, 28 July and 4 Aug. 1873.

G. Hessenberg. 1. *Transzendenz von e und* π (Leipzig, Teubner, 1912).

E. W. Hobson. 1. *A treatise on plane trigometry* (fifth edition, Cambridge University Press, 1921).

2. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series* (Vol. 1, second edition, Cambridge University Press, 1921).

3. *Squaring the circle* (Cambridge University Press, 1913).

H. P. Hudson. 1. *Ruler and compasses* (London, Longmans, 1916).

A. Hurwitz. 1. Über angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche, *Math. Annalen*, 30 (1891), 279-284.

J. L. W. V. Jensen. 1. Om en Saetning of Cauchy, *Tidsskrift for Math.* (5), 2 (1884), 81-84.

A. E. Jolliffe. 1. Stirling's asymptotic formula for $\Gamma(x+1)$, *Messenger of Math.*, 47 (1918), 173-177.

P. E. B. Jourdain. 1. *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (translation of two memoirs by G. Cantor, with introduction, Chicago, Open Court Company, 1915).

H. Kinkelin. 1. Ueber eine mit der Gammafunction verwandte Transendente und deren Anwendung auf die Integralrechnung, *Journal für Math.*, 57 (1860), 122-138.

F. Klein. 1. *Vorträge über ausgewahlte Frage der Elementargeometric* (Leipzig Teubner, 1895).

K. Knopp. 1. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (Berlin, Springer, 1922).

2. *Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze* (Inaugural-Dissertation, Berlin, 1907).

3. Divergenzcharatere gewisser Dirichlet'scher Reihen, *Acta Math.*, 34 (1911), 165-204.

4. Über Lambertsche Reihen, *Journal für Math.*, 142 (1913), 283-315.

L. Kronecker. 1. Dié Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln, *Berliner Sitzungsberichte*, 1884, 1071-1080 (Werke, 3, 31-46).

M. Kuniyeda. 1. Note on asymptotic formulae oscillating Dirichlet's integrals, *Quarterly Journal of Math.*, 48 (1920), 113-135.

J. H. Lambert. 1. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantitié transcendents circulaires et logarithmiques, *Histoire de l'Académie R. des Sciences et Belles-Lettres* (Berlin), 1761, 265-322.

E. Landau. 1. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Leipzig, Teubner, 1909).

2. Beiträge zur analytischen Zahlentheorie, *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, 26 (1908), 169-302.

3. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren

Hardy und Axer, *Prac. Matematyczno-Fizycznych*, 21 (1910), 97-177.

4. Sur les séries de Lambert, *Comptes rendus*, 13 May 1913.
5. Über die Wurzeln der Zetafunktionen, *Math. Zeitschrift*, 20 (1924), 98-104.
6. Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen, *Math. Zeitschrift* 20 (1924), 105-125.

P. S. de Laplace. 1. *Théorie analytique des probabilités* (second edition, Paris, Courcier, 1814).

E. Lasker. 1. Über Reihen auf der Convergenzgrenze, Phil. Trans. Roy. Soc. (A), 196 (1901), 431-477.

M. Lerch. 1. Sur une série analogue aux fonctions modulaires, *Comptes rendus*, 18 April 1904.

F. Lettenmeyer. 1. Neuer Beweis des allgemeinen Kroneckerschon Approximationsatzes, *Proc. London Math. Soc.* (2), 21 (1911), 306-314.

E. Lindelöf. 1. Sur la croissance des intégrales des équations differentielles algébriques du premier ordre, *Bulletin de la soc. math. de France*, 27 (1899), 205-214.

2. Mémoire sur la théorie des fonctions entieres de genre fini, *Acta Societatis Fennicae*, 31 (1902), No. 1. 1-79.
3. Sur la determination de la croissance des fonctions entières définis par un developpement de Taylor, *Bulletin des Sciences Math.* (2), 27 (1903), 213-226.

F. Lindemann. 1. Ueber die Zahl π, *Math. Annalen*, 20 (1882), 213-225.

J. Liouville. 1. Mémoire sur la classification des transcendantes, et sur l'impossibilité déxprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coefficients, *Journal de math.* (1), 2 (1837), 56-104.

2. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algebreque ni méme réductible à des irrationalités algébriques, *Journal de math.* (1), 16 (1851), 133-142.

J. E. Littewood. 1. On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.* (2) (1907), 361-410.

2. On the asymptotic approximation to functions definied by highly convergent product forms, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 20 (1907), 323-370.

3. On the Dirichlet series and asymptotic expansions of integral functions of zero order, *Proc. London Math. Soc.* (2) 7 (1909), 209-262.

4. On a class of integral functions, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 21 (1909), 301-359.

5. Note on the convergence of series of positive Terms, *Messenger of Math.*, 30 (1910), 191-192.

6. Sur la distribution des nombres premiers, *Comptes rendus*, 22 June 1914.

7. Researches in the theory of the Riemann 5-functions, *Proc. London Math. Soc.* (2), 20 (1922), xxii-xxviii (*Records of proceeding at meetings*, 10 Feb. 1921).

C. MacLaurin. 1. *A treatise of fluxions* (Edinburgh, Ruddimans, 1742).

E. Maillet. 1. *Introduction à la théorie des nombres transcendants* (Paris, Gauthier-Villars 1906).

A. Markoff. 1. Sur les formes quadratiques binaires in indéfinies, *Math. Annalen*, 15 (1879), 381-406.

Hj. Mellin. 1. Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht, *Acta Societatis Fennicae*, 29 (1900), no. 4, 1-50.

H. Minkowski. 1. *Diophantische Approximation* (Leipzig, Teubner, 1907).

A. de Morgan. 1. *The differential and integral calculus* (London, Baldwin and Cradock, 1842: previously in parts).

N. Nielsen. 1. *Handbuch der Theorie der Gammafunktion* (Leipzig, Teubner, 1906).

N. E. Nörlund. 1. Neure Untersuchungen über Differenzengleichungen, *Encykl. der math. Wissenschaften,* II C 7, 675-721.

2. Mémoire sur le calcul aux différences finies, *Acta Math.,* 44 (1923), 71-212.

A. Ostrowski. 1. Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, *Hamburg. math. Abhandlungen,* 1 (1921), 77-98 (additional note, ibid., 1 (1922), 250-251).

O. Perron. 1. *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (Leipzig, Teubner, 1913).

2. *Irrationalzahlen* (Berlin, de Gruyter, 1921).

S. Pincherle. 1. Alcune esservazioni orgli d'infinite delle funzioni, *Memorie della R. Accademia delle scienge di Bologna* (4), 5 (1884), 739-750.

H. Poincaré. 1. Sur les fonctions àespaces laucnaires, *American Journal of Math.* 14 (1892), 201-221.

A. Pringsheim. 1. *Vorlesungen über Zahl-und Funktionenlehre* (Leipzig, Teubner, 1916-1921).

2. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher prazesse, *Encykl. der Math. Wissenschaften,* I A 3, 47-146.

3. Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern, *Math. Annalen,* 35 (1890), 297-394.

4. Zur Theorie der bestimmten Integrale und der unendlichen Reihen, *Math. Annalen,* 37 (1890), 591-604.

5. Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz, *Münchenen Sitzungsberichte,* 26 (1896), 605-624).

6. Über die du Bois-Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenzbedingungen, *Münchener Sitzungsberichte,* 27 (1897), 303-334, 356-358.

7. Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen Von endicher Ordnung, *Math. Annalen,* 58 (1904), 257-342.

8. Über den Divergenz-Charakter gewisse Potenzreihen an der

Convergenzgrenze, *Acta Math.*, 28 (1904), 1-30.

B. Riemann. 1. Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trignometrische Reihe, *Göttinger Abhandlungen*, 13 (1867), 87-132 (Habilitationsschrift, 1854, Werke, 213-258).

2. Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen (*Werke*, 427-437, with note by R. Dedekind, 438-447).

E le Roy. 1. Valeurs asymptatiques de certaines séries procedant suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle, *Bulletin des sciences math.* (2) 24 (1900), 245-268.

D. Seliwanoff. 1. Differenzenrchung, *Encykl. der math. Wissenschaften*, I E, 918-937.

C. Siegel. 1. Approximationen algebraischer Zahlen, *Math. Zeitschrift*, 10 (1921), 173-213.

H. J. S. Smith. 1. On some discontinuous series considered by Riemann, *Messenger of Math.* 11 (1881), 1-11 (Collected math. papers, 2, 312-320).

O. Stolz. 1. Über Verallgemeinerung eines Satzes von Cauchy, *Math. Annalen*, 33 (1889), 237-245.

J. Thomae. 1. *Elementare Theorie der analytische Functionen einer complexen Veränderlichen* (second edition, Halle, Nebert, 1898).

2. Über bestimmte Integrale, *Zeitschrift für Math.*, 23 (1878), 67-68.

A. Thue. 1. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *Journal für Math.*, 135 (1909), 284-305.

Th. Vohlen. 1. *Konstruktionen und Approximationen* (Leipzig. Teubner. Teubner, 1911).

G. Valiran. 1. *Lectures on the general theory of integral function* (translation by E. F. Collingwood, Toulouse, Privat, 1923).

2. Sur les functions entières d'ordre nul, *Math. Annalen*, 70 (1911), 471-498.

3. Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul et en particulier les fonctions à correspondance régulière, *Annales*

de la faculté des Sciences de Taulouse (3), 5 (1913), 117-257.

G. Vivant. 1. *Theorie der eindentigen analytischen Funktionen* (German translation by A. Gutzmer, Leipzig, Teubner, 1906).

G. N. Watson. 1. *A treatise on the theory of Bessed functions* (Cambridge Press, 1922).

H. Weyl. 1. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Annalen,* 77 (1916), 313-352.

E. T. Whittaker and G. N. Watson. 1. *A course of modern analysis* (third edition, Cambridge Univ. Press, 1920).

A. Wiman. 1. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zngehörigen Taylorschen Reihe, *Acta Math.,* 37 (1914), 305-326.

2. Über eine Eigenschaft der ganzen Funktionen von der Höhe Null, *Math. Annalen,* 76 (1915), 197-211.

3. Über den Zusammenchang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenem Argnmente der Funktion, *Acta Math.,* 40 (1918), 1-28.

W. H. Young. 1. On implicit functions and their differentials, *Proc. London Math. Soc.* (2), 7 (1909), 397-421.

突桁擁壁之設計

E. J. Flight 著

丁燮和譯

鋼筋混泥土突桁擁壁 (cantiliver retaining wall) 之設計,若欲免省繁累之計算,有時可應用各種公式及圖表,加以少許之修改,使得出之橫斷面 (cross section) 與所須之條件相合.橫斷面之大小,常可由已知之條件猜度之,其結果能持有若干安全限度 (safe limit), 但非經濟之設計.

計劃突桁擁壁時,應注意之點有三,即

(一)能抵抗轉覆 (overturning).

(二)能阻抗壁基 (base) 之滑崩 (Sliding).

(三)壁基與地面間之壓應力在安全限度內

著者意見,第三項須加特別注意,因壁趾 (Toe) 處之壓應力常爲最大,此處爲擁壁之重要部分,特種情形時,地土壓力 (Earth pressure) 稍加,即增加甚大之壓力于壁基上,此層後當再有說明.再壁之設計,如對此項曾加以特別之考慮,則在普通情形之下,此設計亦能合于其他兩項所須之條件.

下面所用之計算方法,可應用于平板 (slab) 及扶壁 (counterfort) 式樣之擁壁.其所任載之泥土加于壁上之壓力,可

假設與流體中之壓力情形同,此種方法,當泥土爲乾性時,已證明確甚安全,且可因此免去繁累之計算.下面各式中所用之號計如下,

H = 壁之高度

B = 壁基之闊度

K = 一分數

w = 所載泥土每單位重量

w_e = 相等流體 (Equivalent fluid) 之每單位重量

f = w_e/w

γ = 地土壓力因數 (Earath pressure factor)

p = 最大單位壓力限度

ε = 總壓力之偏心距 (Eccentricity)

計劃擁壁,必使其能任載普通情況時之地土壓力,且預防地土壓力稍增時,能抵抗其破壞能力.地土壓力之增加率,可以 γ 表之,其值在1.5與2.0之間,選用此值,當由設計者依照建造擁壁地點處之土質而定.

地土加于壁上每單位闊度之全壓力 (P),(第一圖),爲壁本身重量 (W) 及 M C 中泥土重量之和所抵衡.除非壁基甚深時,泥土之自抗力可不必計之.現壁本身之重量,尚不能知,但可假設爲單位厚度之三棱體之重量,而此重量,加于棱體之重心點 (Center of Gravity). 此種假定計算法,其錯誤甚小,富有經驗後,自知若何增減之.在壁趾處之壓力,當

爲最大,而其分佈于壁基上之情形當視 P 及 W 之合力經過底邊之位置而定.當 E 在底邊三分之一之內時,卽 ε 小于 $B/6$ 時,則壓力之分佈當如第二圖,其最大及最小值爲 $\frac{W}{B}\left(1\pm 6\frac{\varepsilon}{B}\right)$, 當 E 在底邊三分之一之外時,此式卽不能應用,因在地面與壁跟(heel)之間發生張應力,而此在設計中,爲不可有之情形.若假設壓力之分佈如第三圖,圖中之

$AL=3AE,\ p/_2\times AL=W,$ 或 $p=\frac{2W}{AL}=\frac{2W}{3AE},$

因此,當 $\varepsilon\leqq\frac{B}{6}$ 時,

$$p=\frac{W}{B}\left(1+6\frac{\varepsilon}{B}\right)$$

$$=\frac{wHB(1-K)}{B}\left(1+6\frac{\varepsilon}{B}\right)$$

$$=wH(1-K)\left(1+6\frac{\varepsilon}{B}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(I_a)$$

而當 $\varepsilon>\frac{B}{6}$ 時,

$$p=\frac{2W}{3AE}=wH(1-K)\frac{4}{3\left(1-2\frac{\varepsilon}{B}\right)}\cdots\cdots\cdots\cdots(I_b)$$

p 和 $w(H1-K)$ 之關係,表示于 $\frac{\varepsilon}{B}$ 弧線中 (第一表), 故當某一擁壁之 p, W, 及 H 之値已定,則 $\frac{\varepsilon}{B}$ 之比率,可依照 K 之値而決定其弧線,且此弧線同時可表示當 E 在底邊三分之一之外時,ε 之値稍增,p 之値卽大增.

泥土加于壁身之最大壓力,由第一圖得

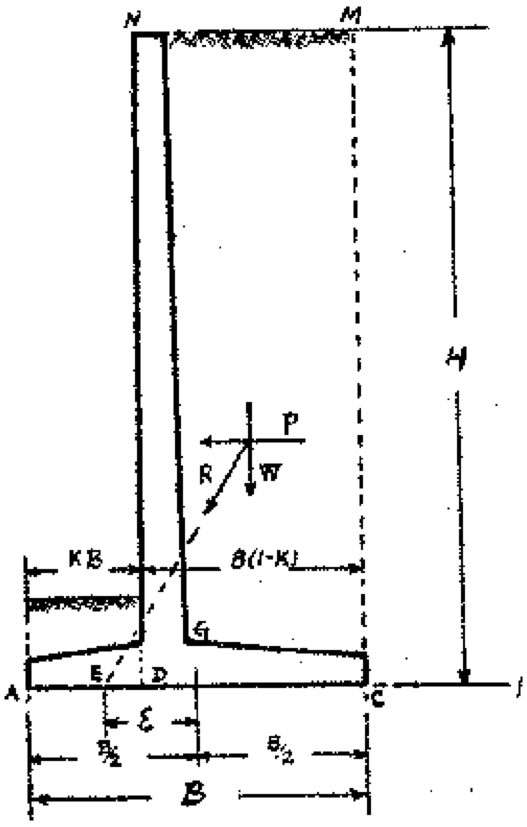
$$\tfrac{1}{2}\gamma w_e H^2,$$

而其繞基之幾力(moment)爲

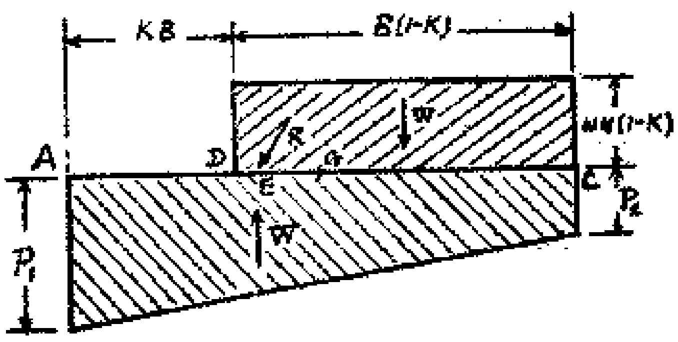
$$p\times\tfrac{1}{3}H=\tfrac{1}{6}\gamma w_e H^3=\tfrac{1}{6}\gamma f w H^3 \qquad (因\ w_e=fw).$$

再 $W=wHB(1-K)$, 而 W 繞 C 點之幾力為

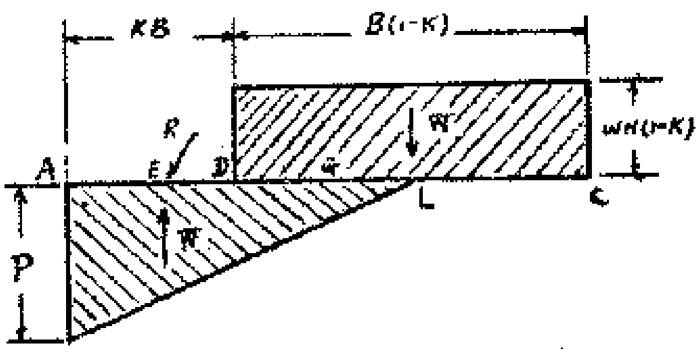
$$\frac{wHB^2(1-K)^2}{2}$$



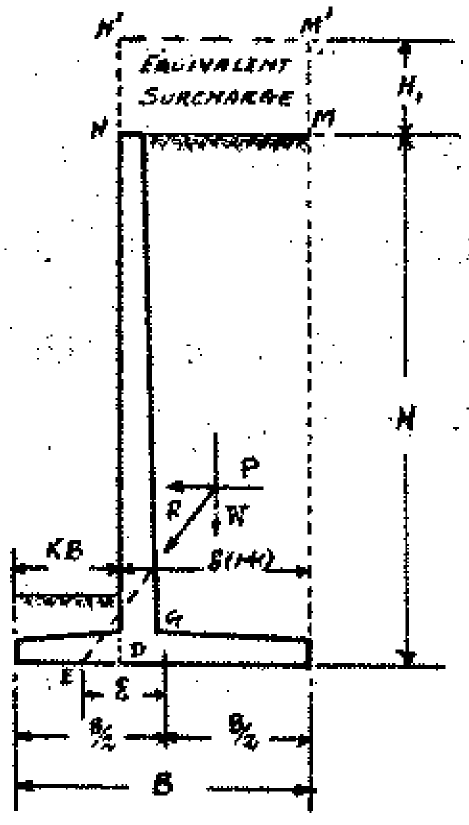
第一圖



第二圖



第三圖



第四圖

故 $$CE=\left\{\frac{1}{2}wHB^2(1-K)^2+\frac{1}{6}\gamma fwH^3\right\}\div wHB(1-K)$$

$$=\frac{3B^2(1-K)^2+\gamma fH^2}{6B(1-K)}$$

而 $$\varepsilon=CE-\frac{B}{2}=\frac{\gamma fH^2-3B^2K(1-K)}{6B(1-K)}$$

故 $$\frac{\varepsilon}{B}=\frac{\gamma fH^2-3B^2K(1-K)}{6B^2(1-K)} \qquad \cdots\cdots (2)$$

如以 $\frac{\varepsilon}{B}=C$ 代入之,則

$$\gamma fH^2-3B^2K(1-K)=6B^2(1-K)C$$

由此得

$$\frac{B^2}{H^2}=\frac{\gamma f}{(1-K)(6C+3K)}$$

或 $$\frac{B}{H}\div\sqrt{\gamma f}=\sqrt{\frac{1}{3(1-K)(2\frac{\varepsilon}{B}+K)}} \qquad \cdots\cdots (3)$$

在第一表中,曾使 K 等于若干不同之值,畫出 $\frac{B}{H}\div\sqrt{\gamma f}$ 及 $\frac{\varepsilon}{B}$ 之值,故現唯一之問題,卽設法決定一種擁壁所用 K 之值將為若干,卽可使壁基之闊度爲最小.

當地土壓力最大時,總壓力 R 之偏心距將較 $\frac{B}{6}$ 爲大,而在壁趾處之壓力則爲

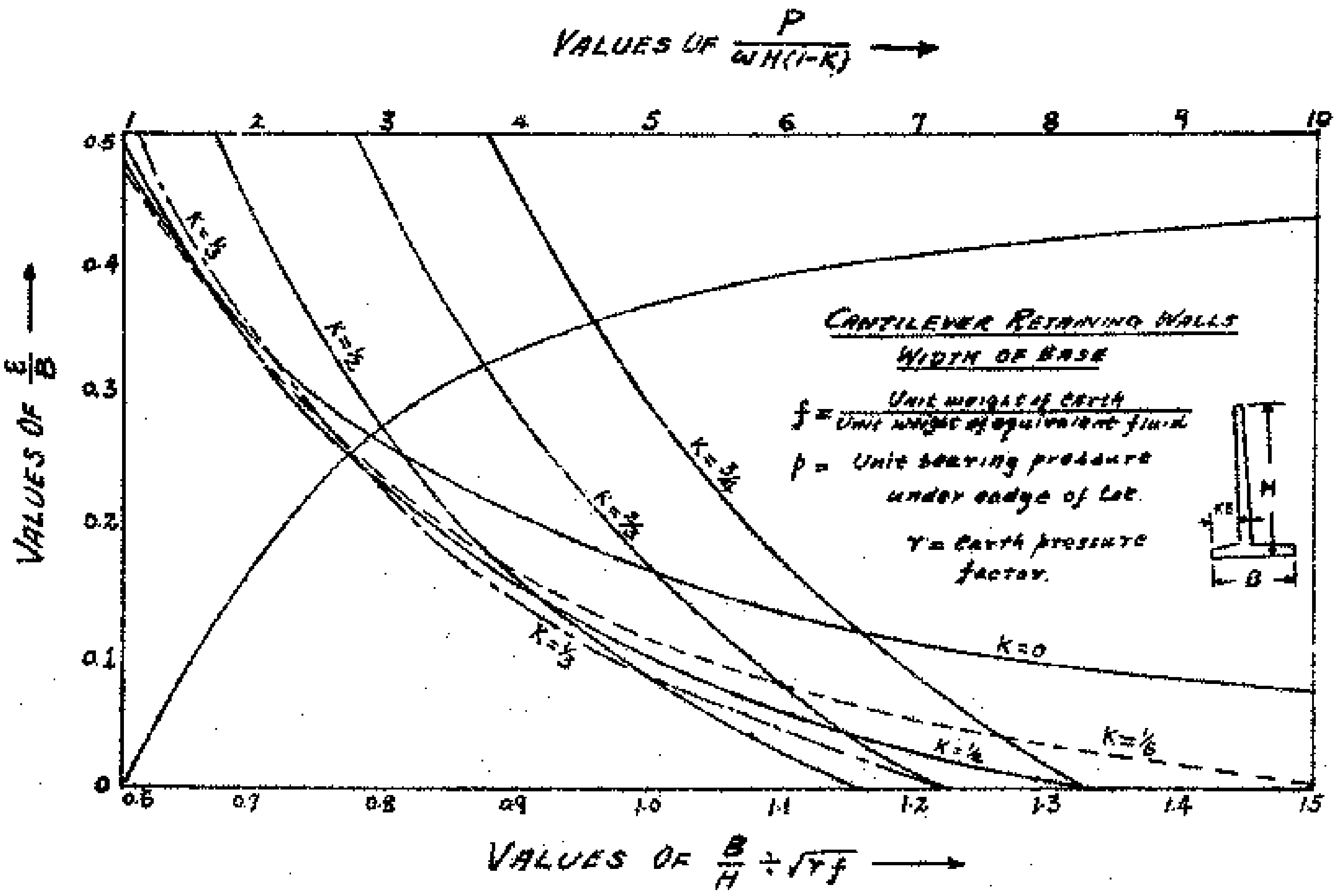
$$p=\frac{2W}{3AE}=\frac{4wHB^2(1-K)^2}{3B^2(1-K^2)-H^2\gamma f}$$

故 $$p\left\{3B^2(1-K^2)-H^2\gamma f\right\}=4wHB^2(1-K)^2$$

由此 $$B^2=\frac{H^2f\gamma}{3(1-K^2)-\frac{4wH}{p}(1-K^2)}$$

且當 $3(1-K^2)-\frac{4wH}{p}(1-K)^2$ 爲最大時,B 之值爲最小,卽

$$K=\frac{1}{\frac{3p}{4wH}+1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$



第一表

地土壓力最大時,轉覆幾力$=\frac{1}{6}\gamma fwH^3$

穩固幾力等于W繞壁趾之幾力$=\frac{wHB^2}{2}(1-K^2)$

而

$$\frac{\text{穩固幾力}}{\text{轉覆幾力}}=\frac{wHB^2}{2}(1-K^2)\div\frac{1}{6}\gamma fwH^3$$
$$=\frac{3B^2(1-K^2)}{\gamma fH^2}$$

將(3)式中之B值代入之,則等于

$$\frac{1+K}{2\frac{\varepsilon}{B}+K}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

因$\frac{\varepsilon}{B}$恆小于0.5, $\frac{1+K}{2\frac{\varepsilon}{B}+K}$將恆大于一單位(Unit)

當一擁壁正在滑崩之前(不計壁前之地土抵抗力)，則

$p=W\times$混泥土在地土上之摩擦係數 (Coefficient of friction of concrete on earth)

或即當 $\frac{P}{W}=\mu$,

故現

$$\frac{P}{W}=\frac{\gamma wfH^2}{2wHB(1-K)}=\frac{\gamma f}{2(1-K)}\times\frac{H}{B}$$

將(3)式中$\frac{H}{B}$之値代入之,則

$$\frac{P}{W}=\sqrt{\frac{3\gamma f(2\frac{s}{B}-K)}{4(1-K)}}\quad\cdots\cdots(6)$$

由(5)式得出之$\frac{P}{W}$之值,如等于或稍小于 μ,則此壁可稱安穩,蓋壁前泥土之抗力,前節中曾假設不計也.當$\frac{P}{W}$小于 μ 之量,則必在壁底處加一短基牆,蓋此可增加抵抗滑崩之力.或即令 p 之值減小,基闊 B 即因此增加.當查照抵抗傾崩安全率時,須使其結果爲地土壓力未曾超過安全限度.

例　題

設一平板式之擁壁(Slab retaining wall)之

$H=12'-0''$, $w=100\ lbs/ft^3$, $w_e=25\ lbs/ft^3$, $p=1\frac{1}{2}ton/ft^2$, $\gamma=1.5$, $\mu=0.6$ $f=\frac{25}{100}=0.25$

由(4)式

$$K=1\div(\frac{3\times15\times2240}{4\times100\times12}+1)=0.328$$

設 $K=\frac{1}{3}$,則

$$\frac{p}{wH(1-K)}=\frac{1.5\times2240}{100\times12\times{}^2/_3}=4.2$$

由第一表得，$\frac{e}{B}=0.34$，而 $\frac{H}{B}=0.7\times\sqrt{1.5\times0.25}=0.426$，而 $B=5.112\ ft$ 故底闊5′-3″，趾長1′-9″之壁基卽甚安全.

由(5)式，

$$\frac{\text{穩固幾力}}{\text{轉覆幾力}}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2\times0.34\times\frac{1}{3}}=1.3$$

由(6)

$$\frac{P}{W}=\sqrt{\frac{3\times1.5\times0.25(0.68+0.33)}{4\times\frac{2}{3}}}=\sqrt{0.43}=0.65$$

此較 μ 之値稍大，但因前節中所述之理由，仍可用之.

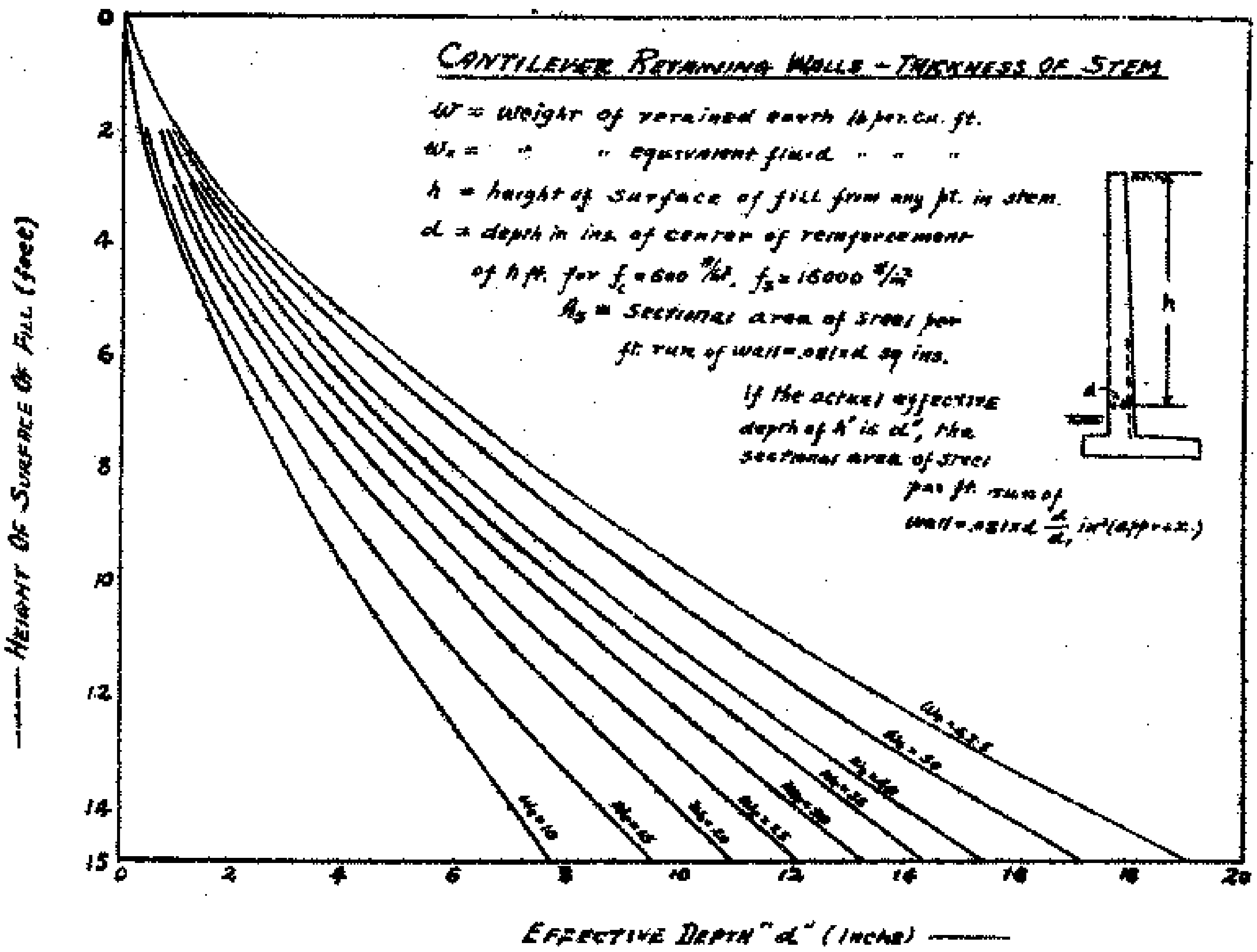
計劃壁身(Stem)，壁趾，壁跟之厚度時，當令其能抵抗在普通情况下時之地土壓力(卽題中所設之地土壓力限度)所引起之幾力及切力(Shear).

如爲平板式之擁壁，在壁頂 h 尺下一點處之幾力必爲 $\frac{1}{6}w_e h^2\ lbs\text{-}ft$，設混泥土之壓應力爲600 lbs/in^2，鋼筋之應力爲16000 lbs/in^2，由幾力算出之壁身高度最小値可由第二表得之，但另再加若干厚，爲保護鋼筋之用.壁身之構造，常爲上下等闊，或卽作有規則之傾斜，由此可使在任何橫斷面處之闊度，較大于所求出之最小値.所須鋼筋之總面積，可由各弧線中決定之.當壁之高度等于或超過15英尺時，卽可不必查照切應力.且壁身超過15英尺時，扶壁式之擁壁，將更經濟，垂直平板之架徑(Span)卽爲扶壁間之距離.距壁項下 h 英尺處一長片(Strip)設其高度爲一英尺，則其每尺之載重當爲 $w_e h$ 磅，如扶壁間之距離爲 S 英尺，其最大正幾力及負幾力爲 $w_e h\frac{S^2}{12}\ lbs\text{-}ft$，設混泥土及鋼筋之應力不變，

則所須之最小闊度當爲

$$d=\sqrt{\frac{w_e hS^2}{1140}},\ 或\ \ \frac{d}{S}=\sqrt{\frac{w_e h}{1140}}$$

$\frac{d}{S}$ 之值可由第三表中決定之,須注意 S 每單位爲英尺.此表中弧線之灣曲方向,適與第二表中者相反,故壁基處平板之厚度,常由較高一點處之幾力決定之.但有一特別情形,當



第 二 表

$\frac{d}{S}$ 之比率爲 $h=o$ 時,壁基高度之決定,卽畫一切線與此弧線相切.

普通各式中,可將壁基上之幾力及切力列入之.惟牽引變數甚多,不甚便利,且亦不能以簡單之弧線代替之.前節所述之壓力分佈圖,應用于各種情形之下,皆易繪畫,而幾力及切力可用簡單方法計算之.

如 ε_1 為普通情形時總壓力之偏心距,將(2)式中之 γ 省去,則

$$\frac{\varepsilon_1}{B}=\frac{fH^2-3B^2K(1-K)}{6B^2(1-K)}$$

將(3)式中 B 之值代入之,

$$\frac{\varepsilon_1}{B}=\frac{2\frac{\varepsilon}{B}-K(\gamma-1)}{2\gamma}=\frac{\frac{\varepsilon}{B}}{\gamma}-\frac{K(\gamma-1)}{2\gamma} \quad\cdots\cdots(7)$$

當 $\gamma=1.5,\ \frac{\varepsilon_1}{B}=\frac{2}{3}\times\frac{\varepsilon}{B}-\frac{1}{6}K \quad\cdots\cdots(7_a)$

當 $\gamma=2.0,\ \frac{\varepsilon_1}{B}=\frac{1}{2}\times\frac{\varepsilon}{B}-\frac{1}{4}K \quad\cdots\cdots(7_b)$

設壁趾處之單位壓力為 p_1,則 p_1 之值數可由第一表中之 $\frac{\varepsilon}{B}$ 弧線得之,或即由下面之公式中求得之.

當 $\frac{\varepsilon_1}{B}\leqq\frac{1}{6}$

$$p_1=wH(1-K)\left\{1+6\frac{\varepsilon_1}{B}\right\} \quad\cdots\cdots(8_a)$$

$$p_2=wH(1-K)\left\{1-6\frac{\varepsilon_1}{B}\right\} \quad\cdots\cdots(8_b)$$

壁基載重之情形,即如第二圖.

當 $\frac{\varepsilon_1}{B}>\frac{1}{6}$

$$p_1=\frac{4wH(1-K)}{3\left(1-2\frac{\varepsilon_1}{B}\right)} \quad\cdots\cdots(9)$$

而壁基載重之情形卽如第三圖.

如塡置泥土處,加一重量,使爲當上載重 (Equivalent Surcharge) 則壁基與壁高之比,亦可用第一表決定之,如第四圖中之 H_1 爲當上載重之高度,則

$$W=wB(H+H_1)(1-K)$$

故比率 $\frac{p}{w(H+H_1)(1-K)}$ 必用之以決定 $\frac{\varepsilon}{B}$. 地土壓力加于壁身最大値爲

$$p=\frac{1}{2}\gamma w_e H(H+2H_1)$$

加壓力處之高度(距底) $=\frac{H}{3}\cdot\frac{H+3H_1}{H+2H_1}$

令 $H=lH$,而 l 爲一分數, $w_e=fw$,

P 繞 C 點之幾力 $=\frac{1}{6}\gamma fwH^3(1+3l)$

W 繞 C 點之幾力 $=\frac{1}{2}wHB^2(1+l)(1-K)^2$

照以前計算之方法,可得

$$\frac{\varepsilon}{B}=\frac{\gamma fH^2(1+3l)-3B^2K(1+l)(1-K)}{6B^2(1+l)(1-K)}$$

由此

$$\frac{B}{H}=H\sqrt{\gamma.f\frac{1+3l}{1+l}}\times\sqrt{\frac{1}{3(1-K)(2\frac{\varepsilon}{B}+K)}}\quad\cdots\cdots(10)$$

從第一表之弧線所得之係數乘以 $H\sqrt{\gamma.f\frac{1+3l}{1+l}}$ 卽得壁趾之闊度.計算 K 之最小値之方法,卽假設未有當上載重之情形,故

$$K=\frac{1}{\frac{3p}{4wH(1+l)}+1}\quad\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{\text{穩固幾力}}{\text{轉覆幾力}}=\frac{1}{2}wHB^2(1+l)(1-K^2)\div\frac{1}{6}\gamma fwH^3(1+3l)$$

$$=\frac{1+K}{2\frac{\varepsilon}{B}+K} \quad\cdots\cdots\cdots (12)$$

此與(5)式同.

再 $$\frac{P}{W}=\frac{H}{B}\cdot\frac{\gamma.f(1+2l)}{(1+l)(1-K)}$$

由(10)將 $\frac{H}{B}$ 之値代入之,則

$$\frac{P}{W}=\sqrt{\frac{3\gamma f(2\frac{\varepsilon}{B}+K)}{4(1-K)}}\times\sqrt{\frac{(1+2l)^2}{(1+l)(1+3l)}} \quad\cdots\cdots\cdots (13)$$

當 $l=0.5$,則

$$\sqrt{\frac{(1+2l)^2}{(1+l)(1+3l)}}=1.033$$

故當擁壁爲當上載重情形時,(6)式可用以查照壁之抵抗轉覆之能力.

當地土壓力在普通情形之下,壁項下 h 英尺處任何一點處之幾力爲

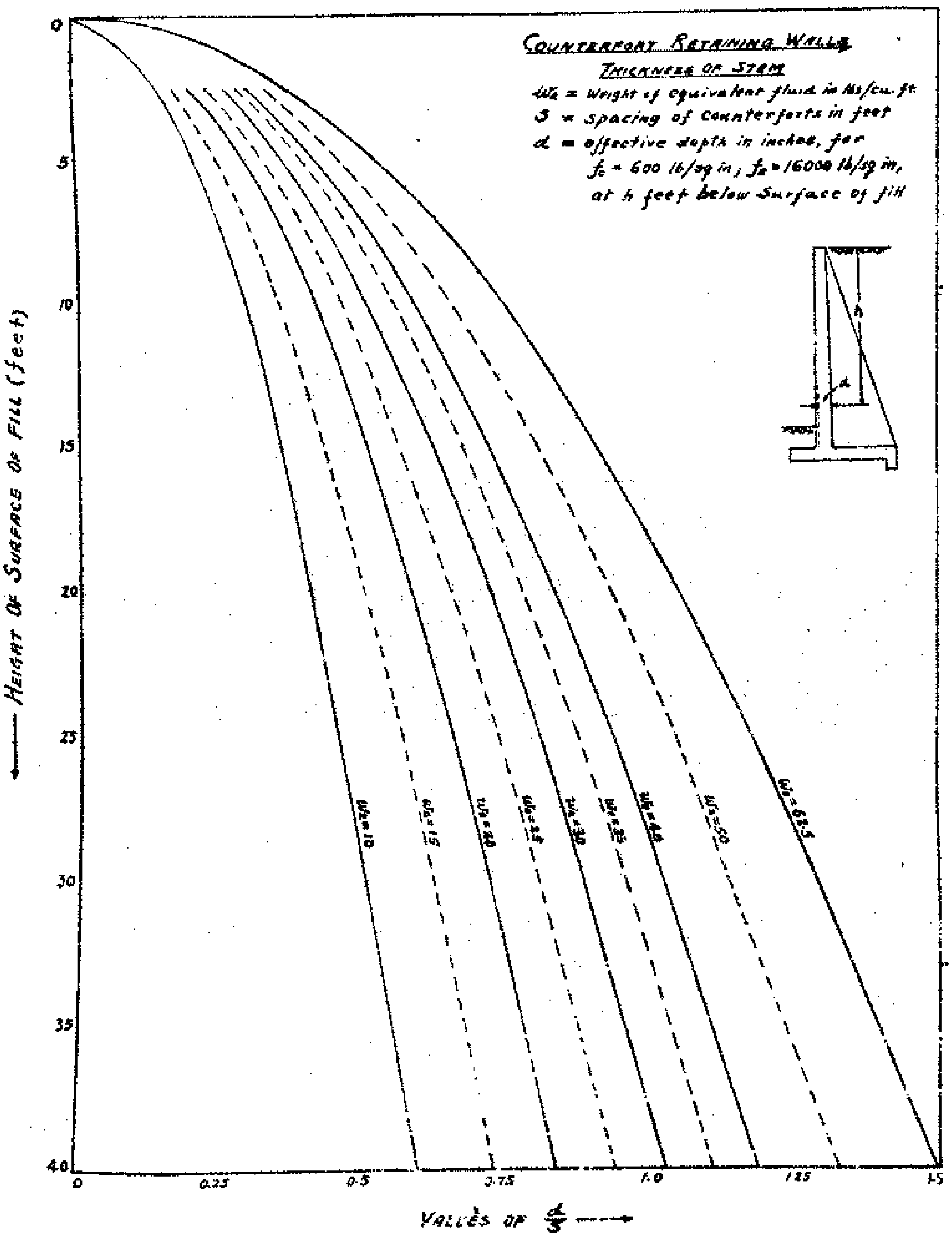
$$\frac{1}{2}w_e h(h+2H_1)\times\frac{hh+3H_1}{3h+2H_1}=\frac{1}{6}w_e h^3(1+3\frac{H_1}{h})lbs\text{-}ft.$$

故欲決定壁項下 h 英尺處之最小高度,可將由第二表中得出之高度乘以 $\sqrt{(1+3\frac{H_1}{h})}$.

當壁爲扶壁式樣時,第三表亦可應用,但須將表中之縱坐標 h 代以 $h+H_1$,同時須注意,壁項當在弧線原點 (Origin) 下 H 英尺.

當地土壓力在普通情形之下,

$$\frac{\varepsilon_1}{B}=\frac{fH^2(1+3l)-3B^2K(1+l)(1-K)}{6B^2(1+l)(1-K)}$$


COUNTERFORT RETAINING WALLS
THICKNESS OF STEM
Wh = Weight of equivalent fluid in lbs/cu. ft.
S = spacing of counterforts in feet
d = effective depth in inches, for
fc = 600 lb/sq in; fs = 16000 lb/sq in,
at h feet below surface of fill
h
d
Wh=10
Wh=15
Wh=20
Wh=25
Wh=30
Wh=35
Wh=40
Wh=50
Wh=62.5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0.25
0.5
0.75
1.0
1.25
1.5
HEIGHT OF SURFACE OF FILL (feet)
VALUES OF d/S

第三表

如將(10)式中之$\frac{B}{H}$之值代入之,則為$\frac{2\frac{\varepsilon}{B}-K(\gamma-1)}{2\gamma}$,此與擁壁無當上載量時之結果相同.

當$\frac{\varepsilon_1}{B}\leqq\frac{1}{6}$,壁趾處每單位壓應力為

$$p_1=wH(1-K)(1+l)\left\{1+6\frac{\varepsilon_1}{B}\right\},$$

而

$$p_2=wH(1-K)(1+l)\left\{1-6\frac{\varepsilon_1}{B}\right\},$$

而當$\frac{\varepsilon_1}{B}>\frac{1}{6}$,

$$p_1=\frac{4wH(1+l)(1-K)}{3\left(1-2\frac{\varepsilon_1}{B}\right)}.$$

注　本篇譯自"“‘Concrete and Constructional Engineering’’ February, 1933, Vol. XXVIII No. 2, London.

介紹一個定性微量分析的系統

葛毓桂

凡習過化學者,都覺得無機定性分析的手續複雜,過濾,蒸發,沈澱等消耗時間,又藥品儀器之損失量爲數至巨.

微量法用於化學分析,雖已於1866年造其端,但當時所用儀器僅限於顯微鏡一類,範圍甚狹.至演成一個有系統的無機微量定性分析確是近數年內之事體.本文爲篇幅所限及便於讀者參考試驗起見,僅就其應用儀器,必要手續及結果分別介紹於下:

I. 微量分析法應用之儀器大概與普通無機定性所用者相同,不過具體而微耳.

1. 小號手搖離心機(此係普通手續所不需要者)此機之玻璃管容量分爲1cc, 2cc, 3cc,三種見第一圖.

2. 2cc容量之試管若干支. (離機管及試管均插於帶小孔之方木塊上,不必用普通試驗管架).

3. 試劑瓶,試液瓶係以3cc之滴瓶充之

4. 固本試藥瓶,以約二英兩之寬口瓶充之.

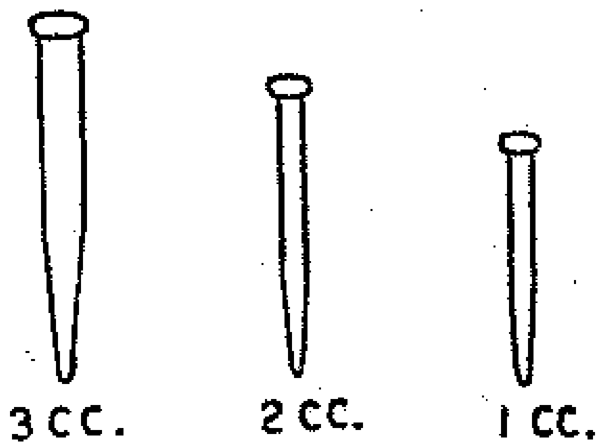
5. 洗瓶,以5cc之錐形瓶裝配

6. 吸瓶大小如第二圖.

7. 滴管卽利用藥用滴管或以細玻璃管裝配如第三圖.

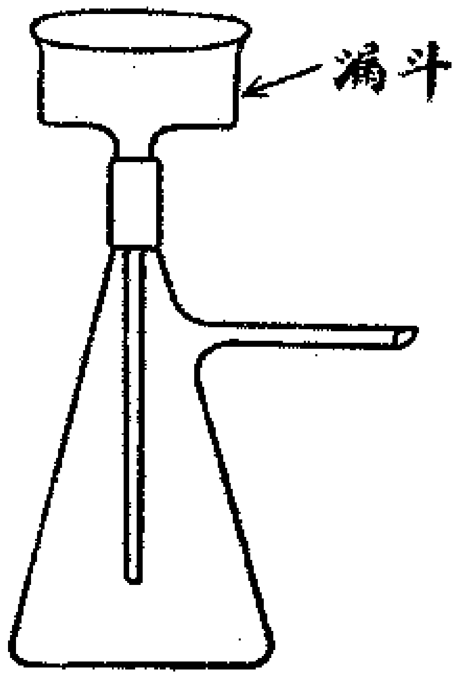
8. 載玻片,(顯微鏡上用者);平常窩板 (Spot Plate), 滴應紙 (drop reaction paper, Schleicher & Schülls "Tupfreactions-papier, No. 601)

9. H_2S 氣體發生器如第四圖.



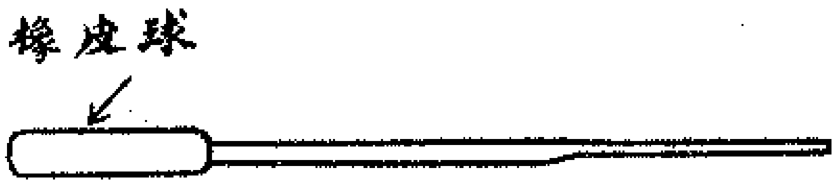
第 一 圖

離心機管(原形 $\frac{1}{2}$)



第 二 圖

吸 瓶(原 形)



第 三 圖

毛 細 滴 管(原 形 之 $\frac{1}{2}$)

II. 微量分析法之重要手續,略述如下:—

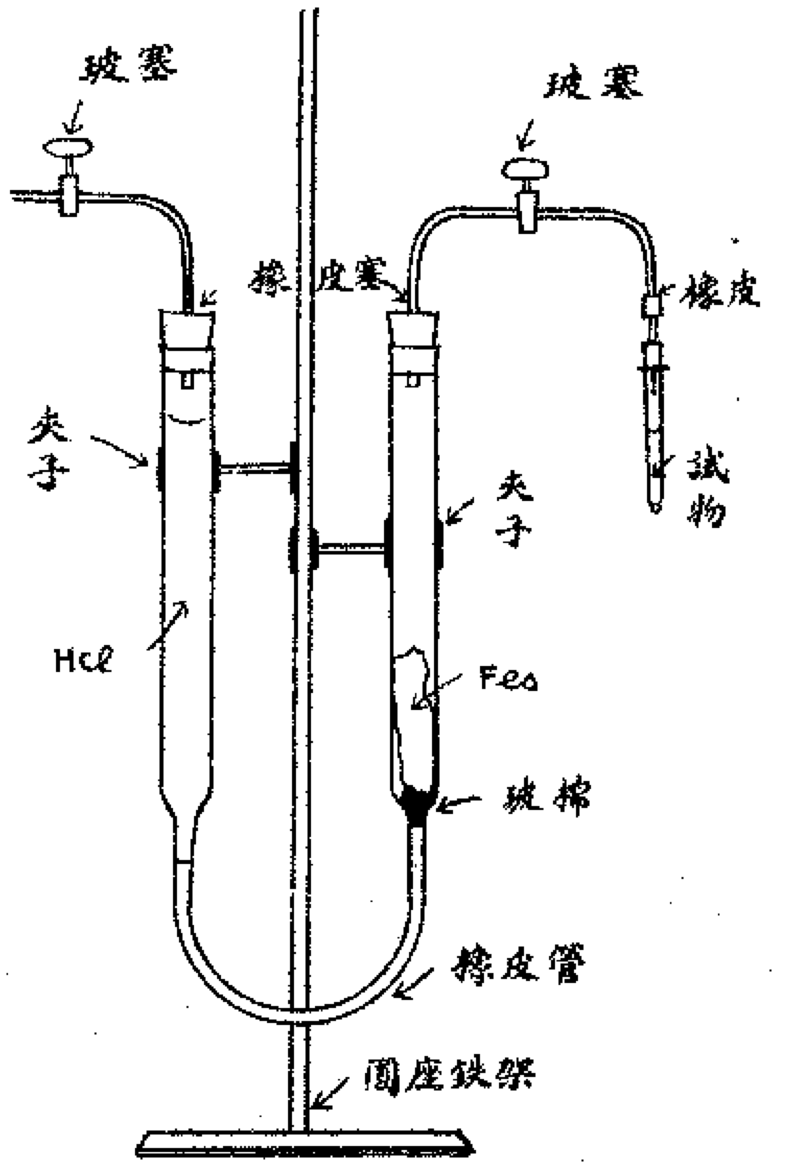
1. 沈澱—— 沈澱手續係在離心機管內,窩板及載玻片

上或滴應紙上執行之.

離機管沈澱法,係取一滴之沈澱劑加於在管內另一滴之溶液,令生沈澱.搖動離心機.此法優點在易於分離沈澱且便觀察

窩板法,係將溶液與沈澱劑各取一滴置於板之一窩,接近混合之使生沈澱.沈澱之顏色在板極易表現.

載玻片法,溶液沈澱劑各取一滴,並置於片上,以鉑絲拌和之.若需要加熱時,則將溶液流於片之一角,置微燈上,小心熱之.微燈見第五圖.



第 四 圖

H_2S 發生器(原物之$\frac{1}{4}$)

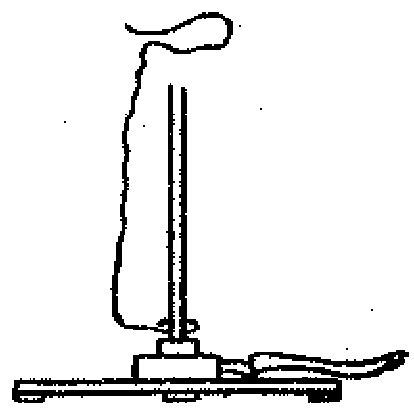
2. 過濾 —— 過濾及洗濁手續究宜在離機管內執行或在載玻片上執行,要看生成沈澱時所用的方法而定.若在離機管內沈澱者,搖動後將上層液以毛細滴管吸去,即是過濾矣.若須洗濁,加蒸餾水數滴以鉑絲拌和之再搖動,再吸去浮液卽可矣.

若在載玻片上,執行過濾與洗濁手續時,則將環於沈澱

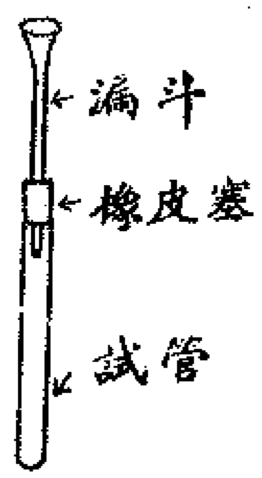
之液體,用棉絮一小塊推擠液體滴狀,趨於毛細滴管之口,放鬆橡皮球,吸去之卽過濾矣.若須洗濁,再加蒸餾水數滴,以鉑絲拌和,再如法吸去.

有時沈澱物需進一步之試驗時,過濾手續宜於吸瓶上(參看第二圖)執行.法取濾紙一片,以打孔器,裁適宜大小之一圓塊,鋪在吸瓶之漏斗內,將沈澱及溶液傾入,以口吸瓶之支管(支管另接橡皮管約六寸許便於口吸).

3. 蒸發——蒸發手續最好將要蒸發之溶液傾入1cc容量之坩堝,置微燈上加熱,務要防備溶液飛濺,致蒙損失.有時於載玻片或錶面玻璃亦能執行蒸發手續.


第五圖
微燈(原形之$\frac{1}{4}$)

4. 氣體發生之試驗——第六圖之儀器卽爲此目的而設,取試藥一滴傾入試管,再加入一滴試劑.然後插上漏斗.另取試紙一片,以試劑浸之,覆於漏斗之口.試管緩緩加熱,則發生之氣體與試紙充分接觸.



第六圖
氣體發生器
(原形$\frac{1}{4}$)

5. 顏色生成之試法———有若干反應因有機試劑而起,浸於滴應紙上之反應混合液若與鹽酸或錏之煙霧接觸往往有顏色發現.此種執行手續頗爲簡單,卽將數滴之鹽酸或錏置瓷坩堝中,加熱

發煙後,再以反應紙與煙霧接觸之.(HCl或NH_4OH須極濃者)

III. 金屬(陽游子)之分析—— 所有"未知"溶液與普通分析之配製法略似,含有各組之金屬.每1cc.之"未知"溶液所含每一金屬(陽游子)不得超過 1 耗(mg).

第一組含有銀鉛及低汞諸金屬,分組之沈澱分離及證實等手續,均以通常方法執行之.在第二組中之金屬與通常第二組所含者相同.區分爲二部以鈉代替多硫化錏更屬滿意.鐵,錳,鉻,鋁等用過量之 NH_4OH 提取,而鎳,鈷,鋅繼以 H_2S 沈澱出來.以$(NH_4)_2CO_3$提取鹼土金屬,剩餘之鎂及鹼金屬單獨試驗之.

金屬分析除應用通常辨別,證實,諸試法之外,尙須利用多種特別試劑及方法處理之;茲將各經驗靈效反應列如下表

第一表

金屬之證實試驗

游子	試劑	採用方法	結果
Bi^{+++}	CsCl, KI	窩板	紅色沈澱
Bi^{+++}	I_2-Chinchomine	離心機管	紅色沈澱
Cu^{++}	$HC_2H_3O_2$, $Pb(C_2H_3O_3)_2$, KNO_2, CsCl, $TlNO_3$	載玻片	黑色沈澱
Cu^{++}	Benzoinosime, NH_3	滴應紙	綠顏色
Cd^{++}	Diphenylcarbazide	滴應紙	紫顏色

Sb^{+++}	CsCl, KI	窩板	紅色沈澱
Sn^{++}	Cacotheline	滴應紙	紫顏色
Sn^{++}	氯化黃金	滴應紙	紫黑顏色
Sn^{++}	粒狀鋅,及 HCl	揮發之氫化物	亮藍火焰
Co^{++}	$2NH_4CNS.Hg(CNS)_2$	窩板	藍沈澱
Zn^{++}	$CuSO_4, 2NH_4CNS.Hg(CNS)_2$	窩板	黑色沈澱
Mn^{++}	NaOH, 酒石酸, Benzidine	窩板	藍沈澱或顏色
Cr^{+++}	Benzidine, $HC_2H_3O_2$	滴應紙	藍色輪環
Mg^{++}	para-Nitrobenzene-azo-resorcinol	窩板	藍色沈澱
Mg^{++}	8-Hydrosyquinoline	窩板	綠黃色沈澱
Na^{+}	Zinc uranyl acetate	離機管	黃色沈澱

IV. 酸根(陰游子)之分析——酸根分析向無完善之系統,如金屬分析者可以遵守.仍以單個試驗為主要手續普通分析手續,凡定性分析書中,皆可參考,不另贅述.下表所列乃是在微量分析法中,曾經應用而有良效之特別試驗.

第 二 表

酸根之證實試驗

游子	試劑	採用方法	結果
CN^-	CuS	滴應紙	脫色
$S^=$	NaOH, p-Aminodi-methylaniline	載玻片	Methylene blue
$SO_3^=$	$ZnSO_4$, Sodium nitroprusside	濾紙	紅顏色

$CO_3^{=}$	$Ba(OH)_2$	鉑圈	白色, $BaCO_3$
$PO_4^{\equiv}$	$(NH_4)_2 M_0O_4$, Benzidine	滴應紙	藍色
$PO_4^{\equiv}$	$(NH_4)_2 M_0O_4$, $SnCl_2$	滴應紙	藍色
$SO_4^{=}$	$BaCl_2$, $Hg(NO_3)_2$	離機管	黃色沈澱及白色 $BaSO_4$
$SiO_3^{=}$	$(NH_4)_2MoO_4$, Benzidine	瓷坩堝	藍色
F^-	$(NH_4)_2MoO_4$, Benzidine	瓷坩堝	藍色
Br^-	Reduced fuchsin	滴應紙	紅色
NO_3^-	Diphenylamine	窩板	藍色

V. 微量法試驗得到之結果——1931 年夏 Pittsburgh 大學有四個學生依此法試驗結果極佳,報告如下:—

第　三　表

學生	未知液中之游子數	報告之正數	報告之誤數	正數之%
1	33	24	9	73
2	37	31	6	84
3	38	36	2	95
4	36	30	6	83
總計	144	121	23	84

VI. 結論——總之微量分析的技術,將來必逐漸推廣,有普遍採用之勢,因為有以下三個優點;

1. 省時——僅用普通分析 $\frac{1}{5}$ 至 $\frac{1}{2}$ 之時間.

2. 省費——儀器數量減少,體量縮小,節省藥品消耗.

3. 改善試驗情形——大部工作可坐着執行便於筆記

及觀察反應之變化.試驗者無匆忙之感.無大量之煙霧發生,不損害人之健康,及沾汚室之美觀.

附註(1)本篇係由 Journal of Chemical Education vol. 9, No. 9, A System of qualitative nucro-analysis 一文縮編而成

(2)去年十一月間魏文悌教授曾在本校化學會介紹過這篇文章——編者.　　22, 2, 5. 於武大.

植物生理學史略

(續第三卷第二期)

張 珽

第八章

植物呼吸現象之研究

第一節 植物呼吸現象之確定:

I. Sachs (1865 年)以前諸學者之觀念:

1. Ingenhausz, De Saussure 諸先進卽已發現植物體有與大氣交換氣體之現象.

2. Dutrochet 1837 年乃提出謂植物之呼吸現象,在根本上與動物實無二致.

3. 當時學者,於植物之光合作用及呼吸作用兩者之不同,未能了了,第就其與大氣中CO_2及O_2之關係情形設想,遂混兩者爲一談,而以爲植物蓋具有日間呼吸 Diural respiration 與夜間呼吸 Nocturnal respiration 兩種適相反對之呼吸現象.當代大家 Liebig 且更進一步否認植物正常能有吸入O_2呼出CO_2之呼吸. Liebig 爲一時宗匠,其說旣出,學者翕從,坐是植物正常呼吸之真象,竟因而湮埋久之.

4. Garreau 1851 年對於 Liebig 之說提出反對,唯不克見信

於當世.

II. Sachs之見解與貢獻:

1. Sachs 1865 年在其 Experimental-physiologie 中,提出謂植物有真正呼吸作用.

2. 1868 年,在 Lehrbuch 中,正式倡言植物之呼吸與動物相同:

a. 主要之作用,爲吸取空中之氧,以氧化其合成產物,或引起其他化學變化.氧化有機物後,卽將有機物中之碳,變爲CO_2而呼出之.

b. CO_2之生成與呼出具可實證.

c. 植物有生命卽有呼吸: 生命之表現彌強,如生長及新陳代謝等作用亢進時,則呼吸之量亦彌大.斷氧之供給,使呼吸滯止,則生命現象亦衰歇.如原形質流動,如週期性運動器官之運動,刺激感應器官之感應等,在缺氧時胥歸停頓.

d. 使某器官持續呼吸於氧中,而絕其合成產物之供給,卽可見其重量之頓減.

e. 故知植物之呼吸,乃銷耗其體質以取得勢能供給內在活動之手段.

III. 與 Sachs 前後諸學者之研究情形:

A. 呼吸商 Respiratory Quotient 問題: 自發現植物之吸呼現象以迄於 Sachs 之時,學者肯僅知植物在呼吸

時能呼出CO_2而已,未知倘有水汽之呼出.由是各學者競起作種種研究,思決定植物吸入之氧,與呼出之CO_2兩者間之定比,卽所謂"呼吸商 Respiratory quotient"所受外界情形之影響,及植物本身各器官各時期生理情形之變化與此呼吸商之關係.所得結果,自不外許多無謂之糾紛,矛盾之辯論,蓋呼吸之真景未明,自末由決定其數理的變化也.

B. 呼吸材料問題: 關於呼吸時受吸入之氧氧化以生成CO_2之呼吸材料,當世亦曾經聚訟多時:

1. 動物生理學者當時主張動物之養分,當分爲兩類,一爲體質構成材料,卽所謂"Flesh-making foodstuffs"爲含氮物質;一爲呼吸 Heat-giving or Respiratory 材料,卽不含氮之各種有機物.

2. Sachs 發現種子發芽之際,因呼吸而銷耗之儲藏養分,皆爲不含氮之化合物,適與動物學者關於呼吸材料之見解相符.

3. Borodin 1878 年提出反對,謂唯原形質中含氮化合物,始能因呼吸而氧化;如蘆冬精 Asparagin 卽由呼吸時含氮化合物之氧化而生成.至不含氮之食物,則不過爲供給原形質以活質材料 Plastic material 者而已.

4. 此外倘有多數學者,亦抱同一見解;由是呼吸現象乃由機械作用,一變而公認爲原形質本身之生活作用.

第二節 植物呼吸與勢能代謝之關係:

I. 呼吸與燃燒: 自發現呼吸作用中氣體交換之關係後,動植物生理學者之推測皆以爲呼吸不過生物體內之一種氧化作用,故以爲呼吸實卽燃燒.自 Sachs 採擇是說以解釋植物之呼吸後,當時學者,羣奉爲圭臬.嗣後動物生理者逐漸證明動物之呼吸未可一概以簡單之機械作用爲解釋,於生活原形質本身之自律現象 Self regulation, 亦當注意,因遂有生體燃燒作用 Physiological combustion 一名詞之創製,爲呼吸進一新解.植物生理學方面,同時亦有相類之研究,使呼吸得以逐漸與簡單之燃燒區別:其中經歷,主爲發現呼吸與環境條件之關係,因而推知植物原形質本體,確有自律作用.

A. 呼吸與溫度:

1. Dehérain, Moissan 1874 年研究植物呼吸中 O_2 與 CO_2 之定量關係,結果發現兩者之相比量,與溫度有關:高溫中 CO_2 之呼出量增加而 O_2 之吸入量略減,低溫中 CO_2 之呼出量大減而 O_2 之吸入頓增.

2. Wolkoff, Meyer 同年發現溫度增加,植物之呼吸量亦隨之而有增盛;但達一定限度後,則雖增高溫度,呼吸量不特無增盛且反至減衰.

3. Ziegenbein 1893 年定出植物呼吸之最適溫度爲 35°C 上下.

B. 呼吸與游離氧:

1. Pflüger 及其他學者,於1870後三數年中之實驗,於低溫中將蛙閉置於無O_2之處,結果仍能呼出CO_2,證明呼CO_2與吸入O_2爲根本上相異之兩作用.換言之,呼吸非若簡單之燃燒,必需有游離氧之存也.

2. Broughton 1870年發現萌蘖植物在氧之給源斷絕後,CO_2之呼出量卽劇減.

3. Laskowski 1874年始發現呼吸中同時尚有水汽之呼出,若依吸入之氧與呼出之CO_2及H_2O中之氧作比,則吸入之游離氧斷不足以供給呼出氣體中氧之銷耗.

4. Deherain 1874年就 De Saussure 所作關於仙人棒屬 Opuntia 植物之呼吸現象之實驗作重驗,結果證實在某數種環境中,雖給以充分之氧,亦無CO_2呼出,僅堆積多量蓚酸 Oxalic acid $[(COOH)_2]$.

5. Mayer 1875年由實驗證知景天科植物 Crassulaceae 中多漿之多種,在停止呼出CO_2後,則堆集多量之林擒酸 Malic acid 於葉中.

6. Wortmann 1880年置發芽之種子於 Torricellian vacuum 中,見其仍能繼續呼出CO_2.又以氫及空氣循迴環繞萌蘖植物,每半小時一換置而量其CO_2之呼出量,知無氧時,CO_2之呼出亦減少,證實 Broughton 十年前之發現.

II. 生體物質本身氧化現象之說明:

1. Pflüger 之新說: Pflüger 1875年發表其關於生活原形

質內部構造之假說,以爲生活原形質與普通無生命蛋白質不同之處,在含有氰基原子團 Cyanogen group-CN-. 生活原形質由氰基原子團與 Satellites 結合而成.(Sattellites)爲 Pfluger 界予蛋白質分子與原形質分子所共有諸原子團之專名). 氰基富有內蓄勢能.其碳原子與氮原子間之分子內振擺 Intramolecular vibration 之力極大.一遇導入之氧,卽與之結合,而起重調現象 Readjustment, 生出 CO_2, 水及其他種種複雜化合物.氰基與 Satellites 之結合,不安定度甚高,氧之導入,恆至引起爆炸性變化,而致分子重排.此爆炸卽爲呼吸,爆炸之結果,生出CO_2及水汽等,卽所謂呼吸產物.爆炸後之氰基,依其活躍化合力,得再與 Satellites 結合,生成新原形質分子.此新原形質分子,又得以其內在勢能之大,再起爆炸.

2. Borodin 1878 年謂呼吸時受氧化者爲含氮物質,爲 Pflüger 之說作强有力之佐證.

3. Detmer 1879, 1893 兩年中發表意見,修改 Pflüger 之說,謂生物藉析出體中高級複雜不安定化合物以獲得勢能.此分出之化合物崩解氧化,最後生出CO_2與水汽.

4. Maquenne 1894 年發表謂由實驗之結果,知生物體能分出一種特殊物質.此物質極不安定,一遇新鮮之氧,卽氧化而生出CO_2及水汽.

5. Verworn 1894 年就 Pflüger 之說整理而擴大之,別創所謂 Biogen 說,以解釋生物質與無生蛋白質之不同,且藉以釋

明呼吸現象.據 Verworn 之說,造成生活原形質之基本物質 Biogen, 與普通蛋白質不同之處,在具有氰基原子團.此氰基原子團原已極不安定.外界之氧,一入於 Biogen 分子中,尤立可使立具極大分解力,故稍有衝動,氧原子即與氰基中之碳原子結合,而引起爆炸.供爆炸之原子團,極易由爆炸後之 Biogen 殘基,自生活物質中雜在之脂肪或碳水化合物中,取原子結合情狀相同之物質以爲補償,重新構成 Biogen分子.此種脂肪或碳水化合物中所含能供 Biogen 分子之補償之材料,Verworn 仍祖 Pflüger 之說,名之曰 Satellites. Verworn 謂呼吸中 Biogen 分子之爆炸,與普通爆炸不同之處,即 Biogen 分子在爆炸時,僅將體中所含因氧之導入而起重排之原子團分出,並不全部毀損;殘餘之物質,又能自週遭取 Satellites 而重組成 Biogen 分子.故其全部作用,恰如製造硫酸時硝酸所起之變化.硝酸於氧化二氧化硫時,本身分解爲亞硝酸,正如 Biogen 分子之析出本身原含有之數原子團以供爆炸.爆炸之後,殘餘之 Biogen 基,又可取外圍之 Satellites,以補成一完全之 Biogen 分子,恰與亞硝酸復取空中之氧以還成原有硝酸分子之狀態相同.

第三節 分子內呼吸現象:

I. 分子內呼吸 Intramolecular respiration 之發現:

A. Pasteur 之發現及其見解: Pasteur 1861 年發現有多種微生物如釀母菌 Saccharomycetes 及多種短桿

細菌 Bacterium 能在無氧之環境中生活,同時卽引起盛旺之醱酵作用 Fermentation. 由是 Pasteur 以爲凡醱酵作用,實卽生物無氧時之生活,而以酒精醱酵 Alcoholic fermentation 爲尤然.當時呼吸爲一種燃燒作用之說正流行,故 Pasteur 卽藉以說明此種現象,以爲無氧(空氣)呼吸 Anaerobic respiration 者,蓋卽取分子內 Intramolecular 氧以代大氣氧而燃燒體質,以取得勢能之一種作用.

B.　關於嫌氣微生物 Anaerobic organism 之研究:

1. Beijerinck 1894 年繼續 Pasteur 之研究,僅得知此等生物之生活勢能,取自化學分解.其後 1899 年繼續發表亦無所增益.

2. Chudiakow 1896 年之發表,與 Beijerinck 大略相同.

C.　微生物以外之分子內呼吸:

1. Lechartier 及 Bellamy 1869, 1872, 1874 三年合同發表之論文,述其就多種多漿果實,馬鈴薯及小麥之種子等所作實驗,謂此等植物物質,密閉器中時,雖將其所能取得之體周氧質,銷耗磬盡後,猶能繼續呼出 CO_2.

2. Pasteur 亦有同一實驗證明.

3. Brefeld、1876 年及 De Luca 1878 年之發表,謂以他種種子,以及枝,葉等等爲材料,亦得同一結果.其後他學者多有同樣發表.

4. Devaux 1899 年竟發表謂老幹之皮,亦有此種作用.

II. 分子內呼吸產物之研究:

A. 酒精(乙醇) Ethyl alcohol C_2H_5OH: 酒精爲醱酵產物,其發現殆在史前時代,觀乎各種民族各有其固有之名酒,可資佐證.酒精醱酵以外之分子呼吸中關於酒精之發現,則有:—

1. Lechartier 及 Bellamy 與 Brefeld, De Luca 諸學者(見上)之實驗中途.

2. Berthelot 1893 年之實驗.

3. Maze 1899 年之發表.

4. Davaux 1899 年之發表.

B. 氫及沼氣 Methane CH_4:

De Luca 所發現.

C. 硇精氣 Ammonia NH_3:

Boehm 1875 年之發表.

III. 分子內呼吸現象之解釋:

A. Pfeffer 1878 年始提出謂分子內呼吸(卽無氧呼吸 Anaerobic respiration)與正常呼吸(卽有氧呼吸 Aerobic respiration) 兩者間有密切關係. 1885 年,乃正式說明氧之隔絕能使新陳代謝起變化而另轉方向,從而新陳代謝之產物亦遂不同.此種變化,逐步漸進,與漸減漸少之氧之供給蓋適相比.

2. Gerber 1876 年以中國柿 (Diospyros kaki) 爲材料研究氧之

供給量與新陳代謝相依漸變之經歷.據 Gerber 之觀察,柿之果實在早期呼吸中,呼出之 CO_2 量,較吸入之氧遙少.此時細胞膜中所含植物膠糖 (Pectose), 逐漸變爲植物膠質 (Pectin), 因使果肉柔軟.同時植物膠質却因其吸水膨脹之性,使果肉中所有細胞間隙,皆窒塞不通,從而內部細胞與外界空氣之交通,大受障蔽,馴至內部細胞所能取得之氧,分量劇減.若此時溫度保持在15°C左右,則氧倘差可透過此縮小之細胞間隙而達內部,以供各細胞之需要.倘溫度昇高達於30°C,則窒息之現象起,呼出之 CO_2 量驟增,$O:CO_2$ 之比,由1:1.26變至1:3.12; 同時起酒精醱酵 Alcoholic fermentation,而生成多量酒精.此時所增多之 CO_2, 蓋卽由酒精醱酵中生出.若再將果實切爲小片,使氧得以從容儘量輸入,CO_2之呼出量,減少甚僅,可以證知 CO_2 之生成,由糖變爲酒精之作用生成者彌復不少.

3. Buchner 1896 年發現釀母菌之能引起酒精醱酵,實由於其能分泌一種酒精醱酵酵素 Zymase, 此酵素乃能分解糖類,經若干變化後,完全變之爲酒精及 CO_2. Effront 1898 年發現果實葉等器官在隔斷氧之給源時,亦能生成 Zymase. 據 Green 之意見.此兩發現似皆可證明在分子內呼吸中,呼吸之過程,亦與正常呼吸相同,成爲一種爆炸性之分解.

總之,在 1900 年以前,氧化酵素 Oxydase 之爲物,尙未發現,學者對於呼吸之經過情形,類多懸揣之詞,莫能爲眞正詳

盡合理之解釋,故治絲愈棼,徒見爭辯愈烈而已耳.

廣東北江鳥類之研究

(續第三卷第二期)

任 國 榮

杜鵑科 Cuculidœ.

32. 喜馬拉雅杜鵑 **Cuculus optatus optatus** Gould.

Cuculus optatus. Gould, P. Z. S., 1845, p. 18: Port Essington, Australia.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 949.

Cuculus optatus optatus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 41.

1♂, 20 V 1930,——翼: 198 mm.

分佈:——日本,西伯利亞,中央亞細亞,經波斯以至喜馬拉雅一帶,緬甸,馬來半島,馬來羣島,新幾內亞及澳洲.我國各地皆有之.

33. 小布穀 **Cuculus poliocephalus poliocephalus** Lath.

Cuculus poliocephalus. Latham, Ind. Orn., p. 214 (1790): Srinagar.

Cuculus poliocephalus poliocephalus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 164.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 44.

Cuculus intermedius intermedius. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 951.

1♂, 1♀, 1, 19V 1930.——翼: 154 mm.

分佈:——生殖於喜馬拉雅一帶,自克什米爾以至亞森毋,中國本部以至滿州及日本.冬季南行至中國之極南,錫蘭,馬來半島及安南.

34. 快割麥 **Cuculus micropterus micropterus** Gould.

Cuculus micropterus. Gould, P Z. S., 1837, p. 137: Himalaya.

Cuculus micropterus micropterus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 952.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 167.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 45.

1♂, 13V 1930.——翼: 202 mm.

分佈:——印度,緬甸,馬來半島,麻拉甲,爪哇,婆羅洲,摩鹿加羣島,安南經中國以至日本.

35. 鷹鵑 **Hierococcyx sparveroides** (Vigors).

Cuculus sparveroides. Vigors P Z. S., 1832, p. 172: Himalaya.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 953.

Hierococcyx sparveroides. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 46.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 168.

1♂, 1♀, 4, 15 V 1930.——翼: 225, 228 mm.

36. 赤腹鷹鵑 **Hierococcyx fugax hyperythrus**(Gould).

Cuculus hyperythrus. Gould, P. Z. S., 1856, p. 96: Shanghai, China.

Cuculus fugax nisicolor. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 953.

Hierococcyx fugax hyperythrus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 48.

1♂, 13 VI 1930.—— 翼: 203 mm.

分佈:——西伯利亞,滿洲,日本,直隸,揚子江流域,福建,廣東,菲律賓,婆羅洲,西利伯北部.

37. 雨鵑 **Cacomantis merulinus querulus** Heine.

Cacomantis querulus. Heine, Journ. f. Orn., 1863, p. 352: Nepal.

Cacomantis merulinus querulus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 49—Delacour et Jabouille, Oiseaux de, l'Indochine, vol. II, p. 171.

1♂, 13 VI 1930.—— 翼: 116 mm.

分佈:——東孟加拉,亞森母,喜馬拉雅一帶,自尼泊爾以至錫金,緬甸,馬來半島,雲南撣部,中國南部,海南及安南.

38. 秋烏鵑 **Surniculus lugubris dicruroides** (Hodgson).

Pseudornis dicruroides. Hodgson J. A. S. B., VIII, p. 136 (1839): Nepal.

Surniculus lugubris dicruroides. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 52.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 178.

1♂, 29 IV 1930.——翼: 142 mm.

分佈: —— 印度北部,亞森母,緬甸,暹羅,我國南部及海南.

39. 紅翼冠杜鵑 **Clamator coromandus** (L.).

Cuculus coromandus. Liuneaus, S. N. XII ed., I. p. 171 (1766): Coromandel.

Clamator coromandus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 53—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 179.

1♂, 19 IV; 1♀, 4 V 1930.—— 翼: ♂ 164; ♀ 157 mm.

分佈: —— 錫蘭,喜馬拉雅一帶,緬甸,馬來半島,婆羅洲,菲律賓,西利伯,安南,我國之東部及南部.

40. 小毛鷄 **Centropus bengalensis bengalensis** (Gm.).

Cuculus bengalensis. Gmelin, S. N., III, p. 412 (1788): Bengal.

Centropus bengalensis bengalensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 59;—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 188.

1♂, 2♀, 8, 9 VI; 11 XII 1930.——翼: ♂ 165; ♀ 166, 180 mm.

分佈: —— 印度,緬甸,暹羅,安南,海南,台灣及我國之東南部.

啄木科 Cuculidœ.

41. 靑啄木 **Picus canus ricketti** Baker.

Picus canus ricketti. Baker, Ibis, 1919, p. 187: Fohkien.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 6.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 195.

1♂ (未成長), 18 VI; 1♀, 2V 1930.——翼: ♂ 127; ♀ 143 mm.

分佈: —— 福建,廣東,廣西,安南東京.

42. 東南斑啄木 **Dryobates cabanisi mandarinus** (Malh.).

Picus mandarinus. Malherbe, Bull. Soc. d'Hist. Nat., VIII, p. 17 (1857): Whampoa, Canton.

Picus cabanisi cabanisi. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 910.

Picus cabanisi mandarinus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 17. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 211.

1♂, 19 XI; 2♀ 11V 1930.——翼: 132—133 mm.

分佈: —— 浙江,福建,廣東,廣西,安南諒山.

43. 噪啄木 **Blythipicus pyrrotis sinensis** (Rickett).

Lepocestes sinensis. Rickett, Bull. B. O. C., VI, p. 50 (1897): Kuatun, Fohkien.

Blythipicus pyrrotis sinensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 24.

2♂, 8 VI, 3 XII; 2♀, 28 V, 27 XII 1930.——翼: ♂ 148—150; ♀ 139—148 mm.

分佈:——福建,廣東,廣西,湖南.

附記:——安南之 *B. P. Annamensis* Kinnear 與中國鳥極爲近似,但一般體色較深,下體更爲顯著.

"廣東北部之留鳥,極爲普通".

44. 豬啄木 **Micropternus brachyurus fokiensis** (Swinh.).

Brachypternus fokiensis. Swinhoe, P. Z. S. 1863, p. 87: Fokien.

Micropternus brachyurus fokiensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 26.

2♂, 13 IV, 9 V 1930; 1♀, 1 I 1930.——翼: 125—129 mm.

分佈:——福建,廣東,雲南.

45. 斑腹小啄木 **Picumnus innominatus chinensis** (Harg.).

Vivia chinensis. Hargitt, Ibis 1881, p. 228: Shanghai.

Vivia innominatus chinensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 28.

Picumnus innominatus chinensis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 237.

1♂, 2 XI; 1♀ 24 III 1930.——翼: 58 mm.

分佈: —— 江蘇,湖北,四川,雲南,安南諒山,廣西,廣東,福建,浙江,江西.

擬啄木科 Capitonidœ.

46. 大擬啄木 **Megalaima virens virens** (Bodd.).

Bucco virens. Boddaert, Tabl. Pl. Enl., p. 53 (1783): China.

Megalaima virens virens. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 32—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 243.

2♂, 16 IV, 27 XII 1930.——翼: 140, 145 mm.

分佈: —— 自緬甸以至德尼薩拉,暹羅,安南,雲南,廣西,廣東,福建,浙江,江西.

佛法僧科 Coraciidœ.

47. 佛法僧 **Eurystomus orientalis orientalis** (L.).

Coracias orientalis. Liuneaus, S. N. XII ed., I, p. 199 (1766): India.

Eurystomus orientalis calonyx. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 875.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 65.

Eurystomus orientalis orientalis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 297.

1♂, 1♀, 8, 22, V 1930.——翼: ♂ 190, ♀ 183 mm.

分佈:——自喜馬拉雅山麓以至亞森母,東孟加拉緬甸,馬來半島,爪哇,蘇門答拉,婆羅洲,菲律賓,西里伯,暹羅,安南,雲南,經我國本部以至滿洲.

附記:——中國標本,據謂次列撥風羽渲染紫藍色Sharpe乃另名爲 *calonyx.* 玆據Delacour之研究,謂此種半爲留鳥,半爲遷移鳥,有一部份留熱帶以生殖,有一部份則再行北上.所謂翼之渲藍紫藍云云,實不外係個體的差別耳.本文根據Delacour之研究結果,故仍以 *E. O. orientalis*(L.).記載廣東鳥.

蜂虎科 Meropidœ

48. 栗頭蜂虎 **Merops viridis viridis** (L.).

Merops viridis. Liunaeus, S. N. I, p. 128 (1766) : Java.

Merops viridis viridis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 70—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine vol. II, p. 301.

1♂, 1♀, 7, 9 V 1930.——翼: 112 mm.

分佈:——暹羅,馬來半島,馬來羣島,爪哇,蘇門答拉,婆羅洲,安南,廣東,廣西,福建,江西.

附記:——Mell氏曾以 *M. v. viridis* L.記載廣東北部標本

(Archiv. für Naturgeschichte, 88 Jahrgang 1922, p. 70)而 La Touche 於 Birds of Eastern China 一書中,竟將其列入 *M. superciliosus philippinus* (L.) 一條之下,意者以爲 Mell 悞定此江鳥也.余經精密比較後, Mell 之定名殊不謬也,廣西猺山標本,亦係 viridis.

"只於夏季見之."

翡翠科 Alcédinidœ.

49. 斑魚狗 **Ceryle rudis leucomelanura** Reichenb.

Ceryle leucomelanura. Reichenbach, Handb. Alced., p. 21 (1851): Ceylan.

Ceryle rudis insignis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 72.

Ceryle rudis leucomelanura. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 878.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 309.

1♂, 14 XI 1930.—— 翼: 142 mm.

分佈: —— 錫蘭,印度,緬甸,雲南,安南及我國南部.

50. 冠魚狗 **Ceryle lugubris guttulata** Stejneger.

Ceryle guttulata. Stejneger, Pvoc. U. S. Nat. Mus., XV, p. 294 (1893): Cachar.

Ceryle lugubris guttulata. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 879.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 73.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 308.

1♂, 17 IV 1930.——翼: 184 mm.

分佈:——喜馬拉雅帶自克什米爾以至亞森母,自緬甸以至德尼薩拉,雲南,安南,我國之南部及中部.

51. 小翠鳥 **Alcedo atthis bengalensis** Gm.

Alcedo bengalensis. Gmelin, S. N. I, p. 450 (1766): Bengal.

Alcedo ispida bengalensis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 882.

Alcedo atthis bengalensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 75.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 311.

2♂, 18 IV, 15XI 1930; 1♀, 4V 1930.——翼: 68—74 mm.

分佈:——孟加拉,亞森母,緬甸,撣部,雲南,安南,菲律賓,馬來半島,蘇門答拉,婆羅洲,我國本部各地,高麗,日本.

52. 黑頭翡翠 **Halcyon pileata** (Bodd.).

Alcedo pileata. Boddaert, Jabl. Pl. Enl. de Daub., p. 41 (1783): Chine.

Halcyon pileata. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 885.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 79.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 320.

1♂, 1♀, 22, 30 IV 1930.——翼: 126, 127 mm.

分佈:——印度緬甸,安南,馬來羣島,西利伯,我國全部及高麗.

戴勝科 Upupidœ.

53. 戴勝 **Upupa epops saturata** (Lönnb.).

Upupa epops saturata. Lönnberg, Arkiv. för Zoologi V. no. 9 p. 29 (1909): Kjachta.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 869. —La Touche, Birds of Eastern China, vol. II, p. 84.

1♂, 19 III 1930.——翼: 148 mm.

分佈:——生殖於葉尼塞及蒙古,錫金西藏等處,或可在我國之中部.冬季南行至我國南部,緬甸,亞森母及印度.

"此鳥頗罕見於北江各地.喜至水濱或陰濕之地以覓食.土人呼之曰布穀鳥或補鏤鳥,像其鳴聲也".

夜燕科 Caprimulgidœ.

54. **Caprimulgus indicus jotaka** Temm. & Schleg.

Caprimulgus jotaka. Temminck & Schlegel, Siebolds Fauna Japonica, Aves, p. 37 (1847): Japon.

Caprimulgus indicus jotaka. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 855.—Delacour et Jabocuille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 270.

1♂, 26 IV 1930.——翼: 205 mm.

分佈:——自阿穆爾至日本,經我國以迄緬甸及馬來半島及安南;又從爪哇至婆羅洲,新幾內亞及印度.

疾燕科 Apodidœ.

55. 霍氏疾燕 **Apus pacificus cooki** (Harington).

Cypselus pacificus cooki. Harington, Bull. B.O.C. XXVI, p. 57 (1912): Gokteik, N. Shan States.

Apus pacificus cooki. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 281.

1♂, 26 IV 1930.——翼: 178 mm.

分佈:——撣部,亞森母,安南,廣西,廣東,

披他科 Pittidœ.

56. 美氏披他 **Pitta nympha melli** Stres.

Pitta nympha melli. Stresemann, Journ. f. Orn., IXXI, 1923, p. 362: Kwangtung. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 471.

1♂, 27 IV 1930.——翼: 115 mm.

分佈:——廣東北江,廣西猺山.

附記:——Stresemann 博士,因廣東北江龍頭山之標本翼較短于標準種,乃另定爲一型(粵北七標本翼 113, 114, 115, 115, 117, 118, 120 mm.; 標準種爲 118—127 mm.)而 La Touche 於 "Birds of Eastern China" 一書中,則舉廣東(汕頭), 福建,安徽等

處爲標準種 P. n. nympha T. & S. 之分佈地.在巴黎博物館中,有一安徽標本,乃上海徐家滙博物院主任Courtois神父送來者,此鳥翼長117 mm.實與廣東鳥較近而與日本鳥(標準種生殖地在日本)較遠,且又在該地生殖(據Courtois之報告)故余對La Touche所舉之地理分佈,不無疑竇,惜只有一標本,且又性別不明,殊不足以供精密之研究耳.究竟安徽鳥係*P. n. melli*歟?抑係P. n. nympha歟?抑或二者同聚于一處,但一則爲留鳥,一則爲遷移鳥歟?此問題,須有大批之良好標本,乃能决定.

燕科 Hirundinidæ.

57. 黑腮毛足燕 **Delichon urbica nigrimentalis** (Hart.).

Hirundo urbica nigrimentalis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 810 (1910): Fokien.

Delichon urbica nigrimentalis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 386.

1♂, 16 V 1930.——翼: 93 mm.

分佈: —— 廣東,廣西,福建,直隸.

附記: —— 此鳥之有記載於廣東,此爲第一次.

58. 福建沙燕 **Riparia riparia fohkienensis** (La Touche).

Cotile fohkienensis. La Touche, Bull. B. O. C., XXII, p. 17 (1908): Fohkien.

Riparia fohkienensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 388.

Riparia riparia fohkienensis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 32.

2♂, 7 I 1930.——翼: ♂ 106; ♀ 115 mm.

分佈:——廣東,福建,四川,湖北,浙江.

附記:——此鳥之有記載於廣東,此爲第一次.

59. 家燕 **Hirundo rustica gutturalis** Scop.

Hirundo gutturalis. Scopoli, Del. Flor. Faun. Insub. 1786. II, p. 93: Nouvelle-Guinée.

Hirundo rustica gutturalis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 803.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 392.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 35.

1♂, 17 V; 1♀ 11 VI 1930.——翼: 106, 115 mm.

分佈:——生殖於亞洲北部,可直至我國之東南部.冬季南行,直至澳洲之北.

60. 斑腹燕 **Hirundo daurica nipalensis** Hodgson.

Hirundo nipalensis. Hodgson, J. A. S. B. V, p. 780 (1836): Nepal.

Hirundo daurica nipalensis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 805.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 397.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 39.

1♂, 30 IV; 1♀, 14 VI 1930.——翼: 113, 114 mm.

分佈:——生殖於喜馬拉雅山及亞洲之東北部.冬季南行至印度,緬甸及安南.遷移時道經我國,亦有留以生殖者.

鶲科 Muscicapidæ.

61. 羅氏寨鶲 **Hemichelidon sibirica rothschildi** Baker.

Hemichelidon sibirica rothschildi. Baker, Bull. B. O. C., X/III, p. 156 (1923): Yunnan.—Baker, Fauna of British India, Birds, vol. II, p. 206.

2♂, 8 V, 21 XI 1930.——翼: 77 mm.

分佈:——撣部,雲南,貴州,廣西,廣東.

62. 斑鶲 **Hemichelidon griseisticta** Swinhoe.

Hemichelidon griseisticta. Swinhoe, Ibis 1861, p. 330: Amoy & Taku.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 157.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 43.

Muscicapa griseisticta. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 478.

1♀, 10 V 1930.——翼: 87 mm.

分佈:——冬季自西伯利亞,滿洲及日本南行經中國以至菲律濱.

63. 日本駒鶲 **Siphia mugimaki** (Temm.).

Muscicapa mugimaki. Temminck, Pl. Col. 577, fig. 2 (1835): Japan.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 492.

Siphia mugimaki. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 161.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 47.

1♀, 22 IV 1930.——翼: 72 mm.

分佈:——生殖於貝加爾湖附近.冬季向中國及日本而遷移.其南行路徑,可直至馬來半島及馬來羣島.

64. 海南藍鶲 **Muscicapula pallipes hainana** (O.-Grant).

Siphia hainana. Ogilvie-Grant, Bull. B. O. C., X, p. 36: Hainan.

Cyornis pallipes hainana. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 166.

Muscicapula pallipes hainana. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 54.

1♂, 18 Avril 1930.——翼: 69 mm.

分佈:——自海南島以至廣東,廣西,雲南,安南,暹羅,緬甸.

65. 白腹藍鶲 **Muscicapula cyanomelana cyanomelana** (Temm.).

Muscicapa cyanomelana. Temminck, Pl. Col. 470 (1828): Japon. —Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 493.

Cyanoptila cyanomelana cyanomelana. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 167.

Muscicapula cyanomelana cyanomelana. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 59.

1♂, 10 IV 1930.——翼: 95 mm.

分佈:——此鳥生殖於日本.冬季經江蘇,福建,廣東諸省

以至安南及馬來羣島.余之貴州標本中,亦有此鳥一個.

66. 黃眉彩鶲 **Muscicapula narcissina narcissina** (Temm.).

Muscicapa narcissina. Temminck, Pl. Col. 577, fig. 1 (1835): Japon.

Muscicapa narcissina narcissina. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 490.

Xanthopygia narcissina narcissina. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 163.

Muscicapula narcissina narcissina. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 60.

1♂, 7 IV 1930.——翼: 69 mm.

分佈:——生殖於日本.遷移期則經江蘇,浙江,江西,福建,廣東,廣西,安南以至馬來半島.

67. 青鶲 **Stroparola thalassina thalassina** (Swain.).

Muscicapa thalassina. Swainson, Nat. Libr. Flycatch. p. 252, (1838): India.

Muscicapa melanops. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 494.

Stroparola melanops melanops. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 173.

Stroparola thalassina thalassina. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 63.

1♀, 4 VI 1930. ——翼: 78 mm.

分佈:——印度,緬甸,安南,雲南,貴州,四川,湖北,福建,廣東,廣西.

68. 白喉鶲 **Anthipes olivacea brunneata** (Slater).

Siphia brunneata. Slater, Ibis 1897, p. 175: Kuatun, Fohkien.

Anthipes olivacea brunneata. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 173.

3♂, 25 IV, 10V, 1930.——翼: 78, 81, 83, mm.

分佈:——浙江,福建,廣東,廣西,夏鳥.尼古巴島,馬來羣島,冬鳥.

69. 闊嘴鶲 **Alseonax latirostris poonensis** (Sykes).

Muscicapa poonensis. Sykes, P. Z. S., 1832, p. 85 (Poona).

Alseonax latirostris poonensis. Baker, Fauna of British India, Birds, vol. II, p. 249.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 156.

1♂, 19. V 1930.——翼: 70 mm.

分佈:——生殖於日本,高麗,貝加爾湖附近及喜馬拉雅一帶,遷移期則至中國全部.

70. 壽帶 **Tchitrea paradisi incei** (Gould).

Muscipeta incei. Gould, B. of A., Book IV, p. 19 (1852): Shanghai.

Tchitrea incei. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 471.

Terpsiphone incei. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 177.

1♂, 1♀ (赤型) 8 V, 2 VI 1930. —翼: ♂ 95; ♀ 88 mm.

分佈:——生殖地點,自滿洲,直隸以迄於我國之南部.冬季至馬來半島及蘇門答拉.

鶇科 Turdidœ.

71. 黑喉鴝 **Saxicola torquata stejnegeri** (Parrot).

Pratincola rubicola stejnegeri. Parrot, Verh. Orn. Ges. Bayern, VIII, p. 124 (1908): Iturup in N. Japan.

Pratincola torquata stejnegeri. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 708.

Saxicola torquata stejnegeri. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 153.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 88.

1♂, 7 I 1930.——翼: 68 mm.

分佈:——生殖於日本,西伯利亞之東及我國之東北部.冬季南行至我國之東南部,馬來半島,緬甸,亞森母,東孟加拉及安南.

"在廣東北部,頗爲普通.喜居開曠之田野中,棲草桿或禿枝上,見有昆蟲,則飛起以捕之,狀與鶲科各鳥相若".

72. 灰叢鴝 **Rhodophila ferrea haringtoni** (Hartert)

Oreicola ferrea haringtoni. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. III (1916): Moupin, Szechuen.—La Touche, Birds of Eastern

China, vol. I, p. 154.

Rhodophila ferrea haringtoni. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 91.

1♂, 22 V 1930.——翼: 65 mm.

分佈:——湖北,四川,湖南,貴州,雲南,安南,廣西,廣東,福建,留鳥.

73. 黑背叉尾鳥 **Enicurus leschenaulti sinensis** Gould.

Enicurus sinensis. Gould, P. Z. S., London 1865, p. 665: Shanghai.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 759.

Henicurus leschenaulti sinensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 136.

1♂, 18 XI 1930.——翼: 110 mm.

分佈:——自揚子江以南直至雲南,留鳥.

74. 灰背叉尾鳥 **Enicurus schistaceus** Hodgson.

Enicurus schistaceus. Hodgson, As. Res., XIX, p. 187 (1836): Nepal.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 95.

Enicurus schistaceus leucoschistus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 135.

1♂, 24 IV; 2♀ 6 IV, 23 VI 1930.——翼: ♂ 95; ♀ 92 mm.

分佈:——亞森母,緬甸,暹羅,安南及我國南部之雲南,廣西,廣東,福建.

75. 小溪真 **Microcichla scouleri scouleri** (Vigors).

Enicurus scouleri. Vigors, P. Z. S., 1831, p. 174: Simla.

Microcichla scouleri. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 760,

Microcichla scouleri fortis Hartert Vögel Palaark. p. 761.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 138.

Microcichla scouleri scouleri. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 96.

1♂, 11 V 1930.——翼: 74 mm.

分佈:——我國南部,安南,緬甸之北及撣部,喜馬拉雅一帶.

76. 藍尾鴝 **Tarsiger cyanurus cyanurus** (Pall.).

Motacilla cyanurus. Pallas, Reis Russ. Reichs., II, p. 769 (1773): Yenissei.

Janthia cyanura. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 148.

Tarsiger cyanurus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 712.

Tarsiger cyanurus cyanurus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 109.

1♂, 8 XII 1930; 2♀ 22 III, 18 XI 1930.——翼: 77—78 mm.

分佈:——生殖於亞洲北部,冬季經我國之中部以至南部及安南.

77. 籬知更鳥 **Phoenicurus auroreus auroreus** (Pall.).

Motacilla aurorea. Pallas, Reis. Russ. Reichs. III, p. 695 (1776): Baikal.

Phœnicurus auroreus auroreus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 725.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 139.

Phœnicurus auroreus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 112.

2♂, 19 III, 10 XII; 1♀ 18 XI 1930.——翼: ♂ 74, 75; ♀ 71 mm.

分佈:——生殖於亞洲北部.冬季南行至我國南部,安南,亞森母,馬來半島,台灣.

78. 小溪駒 **Rhyacornis fuliginosa fuliginosa** (Vigors).

Phœnicura fuliginosa. Vigors, P. Z. S., 1831, p. 35: Himalaya.

Chaimarrornis fuliginosa fuliginosa. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 716.

Rhyacornis fuliginosa fuliginosa. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 143.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 114.

2♂, 3 V, 23 XI; 2♀, 8 IV 29 XII 1930.——翼: ♂ 74—76; ♀ 70—73 mm.

分佈:——自阿富汗,卑路支以迄東亞森母及西藏;緬甸,暹羅,安南,雲南,以至我國本部.

79. 白頂溪駒 **Chaimarrornis leucocephala** (Vigors).

Phœnicura leucocephala. Vigors, P. Z. S., 1830, p. 35: Himalaya.

Chaimarrornis leucocephala. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 715.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 142.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 115.

1♂, 30 I 1930.——翼: 99 mm.

分佈:——自阿富汗東行以至我國之中部及南部,轉入安南之東京,留鳥.

80. 東駒 **Erithacus akahige** (Temm.).

Sylvia akahige. Temminck, Pl. Col. 571 (1824): Riu-Kiu.

Luscinia akahige. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 742.

Erithacus akahige. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 145.

1♂, 23 XI; 1♀ 26 III 1930.——翼: ♂ 77; ♀ 70 mm.

分佈:——生殖於日本.冬季經直隸,沙尾山等處以至福建及兩粵.

81. 知時雀 **Copsychus saularis saularis** (L.).

Gracula saularis. Liunaeus, S. N., I, p. 109 (1758): Bengal.

Copsychus saularis prosthopellus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 149.

Copsychus saularis saularis. Delacour, et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 116.

1♀, 22 V 1930.——翼: 98 mm.

分佈:——印度,緬甸,安南,雲南,貴州,四川,湖北,江西,安徽,浙江,福建,廣東,廣西.

82. 烏鶇 **Turdus merula mandarinus** Bp.

Turdus mandarinus. Bouaparte, Consp. I, p. 275 (1850):

Chine.

Turdus merula mandarinus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 670.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 100.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 125.

1♂, 14 XI 1930.——翼: 145 mm.

分佈:——自揚子江以南以至安南之東北部.

83. 黑麥必 **Turdus cardis cardis** Temm.

Turdus cardis. Temm. Pl. Col., 1838, p. 518: Japon.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 652.

Turdus cardis cardis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 105.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 127.

1♂ (未長成), 10 XII 1930.——翼: 114 mm.

分佈:——生殖於日本.冬季至福建,廣東及安南.

84. 麈鶇 **Turdus eunomus** Temm.

Turdus eunomus. Temminck, Pl. Col., II, pl. 514 (1831): Japon.

Turdus fuscatus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 658.

Turdus fuscatus. Hartert, Vöggel Paläark. Fauna, p. 658.

Turdus naumanni eunomus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 109.

1♂, 3 I 1931.——翼: 124 mm.

分佈:——生殖於亞洲北部.冬季至我國南部,印度北部,

亞森母及緬甸.

85. 鶇鵐 **Turdus hortulorum** Sclater.

Turdus hortulorum. Sclater, Ibis, 1863, p. 196: South-China.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 654.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 104. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 128.

1♂, 14 XI 1930.——翼: 115 mm.

分佈:——生殖於西伯利亞東部.冬季經我國之北部,中部以至南部及安南.

86. 白眉鶇 **Turdus obscurus** Gm.

Turdus obscurus. Gmelin, S. N. I, p. 816 (1789): Baikal.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 656.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 102.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 130.

2♂, 26 IV, 28 XI; 1♀ 24 XI 1930.—翼: ♂ 122, 126; ♀ 120 mm.

分佈:——生殖於西伯利亞.冬季經我國之北部,以至南部各省及安南,暹羅,緬甸及菲律賓.

87. 白腹寒鶇 **Geocichla sibirica sibirica** (Pallas).

Turdus sibiricus. Pallas, Reise Russ. Reichs, III, p. 694 (1776): Daurien.

Turdus sibiricus sibiricus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 644.

Geocichla sibiricus sibiricus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 116.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 133.

1♂, 19 IV; 1♀, 6 V 1930.——翼: ♂ 122; ♀ 113 mm.

88. 金鶇 **Oreocincla aurea aurea** (Holandre).

Turdus aureus. Holandre, Fauna dép. Moselle, Ann. de la Moselle 1825, p. 60: Metz.

Turdus dauma aureus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 642.

Oreocincla aurea aurea. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 113.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 136.

1♂, 3 XII 1930.——翼: 161 mm.

分佈:——生殖於西伯利亞東部,我國之北部及日本.冬季至我國南部,安南及亞森母.去年曾有人於法國南部得一標本,余於法國鳥類學會得見之.

89. 紫嘯鶇 **Myiophoneus coeruleus coeruleus** (Scop.).

Gracula cœrulea. Scopoli, Del. Flor. Fauna Ins. II, p. 88 (1786): Chine.

Myiophonus cœrulea. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 677.

Myiophoneus cœruleus cœruleus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 126.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 141.

2♂, 11 IV; 9 XII; 1♀, 6 XII 1930.——翼: ♂ 175, 176; ♀ 161 mm.

分佈:——爲我國南部之留鳥,亦可見於安南. (未完)

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室
中國鳥類標本之地理分佈研究

(續第三卷第二期)

任 國 榮

SIBIINÆ. 西比亞科

雌雄相似.翼稍長而跗蹠較弱.樹棲,鮮覓食于地上,喜跳躍枝幹間,而不善飛竄叢莽內.

本目錄共記載西比亞科七屬十六種及亞種.

113. **Leioptila desgodinsi** (David). 黑頭西比

D. et O. p. 556—雲南湄公河越家路(Yer-ka-lo)北緯29°26'30".

Rothschild, p. 271——雲南.

室中有十標本: 4(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 23, V. 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 3(?), 1897, Pēre Soulie', 雲南苴却; 2(?), 1900, 雲南苴却.

114. **Leioptila pulchella coeruleotincta** Rothschild, 鐵灰西比

Rothschild, p. 272——雲南.

室中有七標本: 3(?), 1902, 四川打箭爐; 3(?), 28X, 20XI, 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 1♀, 25, IX, 1926, 瑞麗江與怒江分水界, Rothschild Museum 送來.

有一打箭爐鳥,頭頂之前部深黑,與其餘諸鳥之灰藍者有判然之區別.但只有一標本,不能定其爲個體的差別,抑或不同之兩型也.

115. **Actindura egertoni ripponi** Ogilvie-grant. 立般氏斑翼

Rothschild, p. 273——Prince d' Orléans, 于雲南得一標本, Oustalet 以 *egertoni* 記載之.

室中有一雲南鳥: 1(?), 1896, Prince d' Orléans, 雲南.

116. **Actindura ramsayi yunnanensis** Bangs & Phillip. 雲南斑翼

Rothschild, p. 273——雲南.

室中只有安南鳥,因既有記載于雲南,特編入本目錄.

117. **Ixops waldeni saturatior** Rothschild. 栗腹斑翼

Rothschild, p. 274——雲南.

室中有 Rothschild 送來一標本: 1♀, 怒江與瑞麗江分水界, 800 ft. 25, Vi, 1926. 下體自腮以下鵝黃,密佈濃栗色條紋,驟視之,下體似純爲濃栗色.

118. **Staphidia striata torqueola** (Swinhoe). 花頸其公

D. et O. p. 223——見于福建西部多樹之高山中.

La Touche, p. 77——福建,廣東,留鳥.

Rothschild, p. 272——雲南.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥四: 1♀, 16, II, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 2♂, 17 V, 1896, 28 IV, 1898, 1♀, 12 IV, 1897, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得標本不少,此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,各有此鳥四個.

119. **Siva strigula yunnanensis** Rothschild. 雲南橙翼西花

Rothschild, p. 276——雲南.

室中有雲南鳥六: 2(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南茸刧; 4(?), 1896, Pére Soulié, 雲南茸刧.

又另有一打箭爐鳥,與雲南新羽標本相似,吾以為當係同種.

120. **Siva cyanuroptera wingatei** Ogilvie-grant. 雲南藍翼西花

Baker, i, p. 315——自嘉錦山至雲南及撣部.

Rothschild, p. 275——雲南.

室中有雲南鳥五: 3♂, 7, III, 9,V, 11,V, 2♀, 1, III, 11,V, 1895, Prince d'Orléans, 雲南.

余亦有記載于湖南南部.

S. cyanuroptera wingatei 與標準種 *S. c. cyanuroptera* 之區別,在其次列撥風之尖端無白點斑.

121. **Yuhina gularis gularis** (Hodgson). 花喉其公

D. et O. p. 139——只于淇平見一次.

Sharpe, Bull. B. O. C. vol. XIII, p. 12, 1902(*Yuhina gularis yangpiensis*)——雲南漾濞.

Rothschild, p. 276(*Yuhina gularis griseotincta*)——雲南西北部.

室中有四川鳥三,雲南鳥九: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1902, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 7(?), 1897, Pēre Soulie', 雲南茸却.

Déjean 之四川打箭爐鳥,頭項,後頸,喉及前頸俱較淺淡于他鳥,上體橄欖褐而赭色較遜.因係單獨標本,未知此係個體差異抑或係不同之兩型也.

Sharpe 以 *Yuhina gularis yanpiensis* 記載雲南漾濞鳥,謂與標準種 *Y. g. gularis* 相似但上體橄欖褐而非赭褐,頭冠赭褐而非髮褐. Déjean 之打箭爐鳥,與 Sharpe 所舉特徵,頗相脗合,但無標準地之漾濞鳥以比較,難以斷定. Rothschild, 以雲南西北部鳥爲 *Y. g. griseotincta* 謂其頭頸兩側較灰于標準型 *Y. g. gularis* 腮及喉葡萄赤,居地又較高云.又指室中 Prince d'Orléans 及 Pēre Soulié 之標本,係逮該亞種.余試以 Prince d'Orléans 及 Pēre Soulie 之標本與印度之 *Y. g. gularis*, 較,覺 Rothschild 所舉之特徵,殊不顯著,故仍以苴却鳥爲*Yuhina gularis gularis* (Hodgson).

Delacour 亦以 *Y. g. gularis* 記載安南鳥.安南鳥與雲南鳥,以余所見,殊無若何差別.

122. **Yuhina diademata diademata** Verreaux. 白枕其公

D. et O. p. 138——余見之于西藏東部,四川西部,陝西南部.

Hartert, Vög. Pal. p. 2153——甘肅南部,四川西部,湖北宜昌,留鳥.

室中有四川打箭爐鳥十: 3(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 7(?), 1899, 1902, 四川打箭爐;

123. **Yuhina diademata ampelina** Rippon. 雲南白枕其公

Baker, i, p. 318——雲南及嘉錦山.

Rothschild, p. 277——雲南.……初認雲南鳥爲*Y. d. diademata*, 及後得新羽標本,始別爲 *Y. d. ampelina*.

室中有雲南鳥十一: 6(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 5(?), 1897, Pēre Soulie, 雲南苴却.

余以四川鳥(*Y. d. diademata*)與雲南鳥(*Y. d. ampelina*)較,覺體色上之差異尚小,量度上之差異較大,十個四川鳥,翼

長爲 80-85mm. 十一個雲南鳥,翼長爲 73-78mm (Prince d'Orléans 標本中,有一個翼長 81mm.).

124. **Yuhina occipitalis occipitalis** (Hodgson). 橙枕其公

Baker, i, p. 319——尼伯爾,錫金,不丹.

Rothschild, p. 77 (*Yuhina occipitalis obscurior; Yuhina bakeri*)——雲南.

室中除印度鳥外,尚有四川,雲南鳥各六: 6(?), 1902, 四川打箭爐; 4(?), 1896, Pēre Soulié, 雲南茸刧; 1(?), 1900, 雲南茸刧; 1♀, IX, 1922, 雲南麗江山脉, Rothschild Museum 送來(足下簽記作 *Y. occipitalis obscurior* Rothschild).

Rothschild 以 *Y. occipitalis obscurior* 記載雲南鳥,謂其後頸較灰,前頸之葡萄色較盛.余試以 Rothschild 送來之 *obscurior* 與印度鳥較,殊不能發見其異點.又,氏以 *bakeri* 一名記載 Pēre Soulié, 之茸刧鳥,誠然,此四標本自胸以下之赭色較盛于印度鳥,但再觀四川鳥,則個體之差異亦大,故余暫以 *Yuhina occipitalis occipitalis* 記載四川與雲南鳥,以待將來較精確之研究.

125. **Yuhina nigrimentum intermedia** Rothschild. 黑腮其公

Rothschild, p. 278——雲南.

室中有四川鳥七,雲南鳥四: 7(?), 1901, 1902, 四川打箭爐; 4(?), 1897, Pēre Soulié, 雲南茛坦.

David et Oustalet 于 Les Oiseaux de La Chine, p. 139, 知 *Yuhina nigrimentum* 記載漠平及四川鳥.余曾以四川鳥與雲南鳥較,殊不能得其區別,故以四川鳥爲 *intermedia.*

126. **Yuhina nigrimentum pallida** La Touche.

La Touche p. 78——福建西北部留鳥.

室中有 La Touche 送來之六標本: 4♂, 2♀, IV, V, XI, 1896, 福建西北部之掛墩.

Yuhina nigrimentum 一種,有極相近似之亞種三,可以下表示其特徵:

1. *Yuhina nigrimentum nigrimentum* (Hodgson).——自喉以下濃赭黃而渲染橄欖色;翼 55—57mm. 分佈于亞森毋,雅魯藏布江之南北兩岸,馬尼坡,錦山,亞拉干之北.
2. *Yuhina nigrimentum intermedia* Rothschild——自喉以下濃赭黃而渲染橄欖色;翼 60mm. 分佈地見上.
3. *Yuhina nigrimentum pallicla* La Touche.——自喉以下淡鵝黃,翼 60mm. 分佈地見上.余亦曾于廣西猺山射得之.

127. **Yuhina flavicollis rouxi** (Oustalet). 赤頸其公

Rothschild, p. 277——雲南.

室中只有安南鳥,以旣有記載于雲南,特編入本目錄.

128. **Herpornis xantholeuca tyrannula** (Swinhoe). 靑其公

D. et O. p. 216——Swinhoe 記載之于台灣及海南內部山林中.

室中只有安南鳥,以旣有記載于中國,特編入本目錄.

Stresemann 或中國大陸標本之上體較靑而黃色較遜,下體較灰而白色較遜,耳羽深灰,乃另名曰 *Herpornis xantholeuca griseiloris* 以別于海南鳥. La Touche 于 Birds of Eastern China 且舉其分佈地點爲廣東,雲南,福建,台灣.余亦于廣西猺山射得之.室中尙無標本.

LIOTRICHINÆ.* 紅嘴相思亞科

雌雄異形,幼鳥似雌鳥.翼頗長,跗蹠亦壯健,但較適于樹棲,嘴短,山居.

本目錄共記載紅嘴相思亞科五屬十二種及亞種.

129. **Liothrix* lutea lutea** (Scopoli). 紅嘴相思

D. et O. p. 214——漢平,四川,福建,浙江.

La Touche, p. 80——湖北,四川,江西,安徽南部,浙江,福建,留

* Liotrichinae 或作 Leiotrichinae; Liothrix, 或作 Leiothrix.

鳥.

室中有七標本: 1(?), 1896, Dejean, 四川打箭爐; 1(?), 1899, 四川打箭爐; 3♂, 23 IV, 26 V, 14 XI, 1♀ 23 XI, 1897, La Touche, 福建; 1(?), 1907, Pēre Seguin, 興甯 (Shinen).

又另有一貴州鳥,係 Pēre Cavalerie 送來者,背部橄欖灰,吾以爲此亦係 *L. l. lutea*, 特體羽較陳舊耳,將來余之貴州標本寄到,始能再作比較.

130. **Liothrix lutea kwangtungensis** Stresemann.

La Touche, p. 82——廣東北江及雲南東南部.

室中只有安南鳥.

余前在廣西猺山得有標本百餘,俱係 *kwangtungensis*. 此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本,在廣東北部者爲 *kwangtungensis*, 在湖南南部者則爲標準型 *lutea*.

131. **Liothrix lutea yunnanensis** Rothschild.

Baker, i, p. 329——自雲南西行以至嘉錦山.

Rothschild, p. 268——雲南.

室中有四川鳥四,雲南鳥十九: 4(?), 1902, 四川打箭爐; 5(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 13(?), 1896, 1897, Pēre Soulié, 雲南甘却; 1♂, 24, II, 1925, 怒江與瑞麗江分水界,雲南, Rothschild Meseum 送來.

La Touche 以雲南東南部為 *kwangtungensis* 之分佈地點,室中尚無該處標本,無從比較,但所有其却標本(雲南北部),俱係 *yunnanensis* 無疑.四川打箭爐本為 *L. l. lutea* 之分佈地點,但竟有四個 *yunnanensis* 標本,其足下簽記以打箭爐為採集地點,是真不可解也.

以上 *Liothrix lutea* 之三亞種,相差頗為微細,可用下列檢索表示其區別.

A. 初列撥風第七至第九枚,其橙色之外緣,完好無損.

a. 上體橄欖青,耳羽灰……………………*L. lutea lutea*

b. 上體多帶黃色,耳羽灰黃.………… *L. lutea kwantungensis.*

B. 初列撥風第七至第九枚,其橙色之外緣,為黑色所間斷.

……………… *L. lutea yunnanensis.*

132. **Cutea nipalensis nipalensis** Hodgson.

Rothschild, p. 279——雲南.

室中有四川打箭爐鳥二,無採期及採者姓名.余尚不能定此鳥以相當之漢名.

133. **Pteruthius aeralatus ricketti** Ogilvie-Grant. 福建伯勞眉

La Touche, p. 82——雲南,福建,留鳥.

Rothschild, p. 279——雲南.

室中安南鳥頗多,只有一中國鳥: 1♀, 23, IV, 1898, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山得有標本,彼處並不甚多.

134. Pteruthius melanotis melanotis Hodgson. 栗喉伯勞眉

Rothschild, p. 279——雲南.

室中只有安南東京鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

余在廣西猺山採得之 *Pteruthius melanotis* 經 Stresemann 博士研究結果認爲新亞種,乃名曰 *Pteruthius aenobarbus yoaschanensis* (aenobarbus = melanotis).

135. Pteruthius xanthochloris pallidus (David). 大衛伯勞眉

D. et O. p. 215 (*Allotrius pallidus*)——只于四川西部青海邊境見一次,極爲稀罕,似係留鳥.

La Touche, p. 84——四川西部青海邊境,雲南西北部,福建,留鳥.

Rothschild, p. 280——雲南.

室中共有九標本: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?),

1898, Biet, 四川打箭爐; 3(?), 1896, Père Soulié, 雲南茈菇; 1♂, 1♀, 23 XI, 20 XII, La Touche 福建西北部之掛墩.

此鳥雌雄相似,與以上諸種之雌雄異形者不同.但細辨之下,覺雌鳥頭部灰色稍淺,次列擬風羽之外緣青色而非灰色耳.

136. **Pteruthius rufiventer** Blyth. 赭腹伯勞眉

Rothschild, p. 279——雲南.

室中只有安南東京鳥三,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

137. **Myzornis pyrrhoura** Hodgson. 赤尾米孫尼

Rothschild, p. 278——雲南.

室中除兩印度鳥外,有中國鳥六: 1(?), 1900, 雲南茈菇; 5(?), 四川打箭爐.

138. **Minla ignotincta ignotincta** Hodgson. 赤尾美麗

Rothschild, p. 274——雲南西部

室中只有印度鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

139. **Minla ignotincta jerdoni** Verreaux. 成都赤尾美麗

D. et O. p. 224——于四川成都得一單獨標本.

此標本現已裝起,在 Jardin des plants 之 Muséum de Zoologie 之陳列櫃中.

140. **Minla ignotincta mariae** La Touche. 雲南赤尾美麗

La Touche, Bull. B. O. C. vol. x/II, 1921, p. 30.——雲南之迷勒地及猓姑寨.

室中只有安南鳥.

Minla ignotincta 一種,有既知之亞種四,皆可見于我國境內,可以下列檢索表區別之:

A. 背部深栗.. *M. i. ignotincta.*

B. 背部橄欖色.

a. 胸部全白或乳脂色.............................. *M. i. jerdoni.*

b. 胸部黃. .... *M. i. mariae.*

C. 背部灰色. .... *M. i. sini.*

Minla ignotincta sini Stresemann 乃廣西猺山之留鳥,居地在四千至七千呎,只見于古陳及金秀,並無記載于羅香.又此次寄來之湖南南部標本中,亦有二鳥,背部灰色,與 *sini* 極相似,余俟廣西猺山全體標本寄到後,乃作綜合的研究.

ÆGITHINIDÆ.*

* 尚無相當之漢名

在昔分類學者將本科種類,或逮畫眉科,或逮鵯科,然究其性質,實間于二者之間,故新近有將其自成一科者.與畫眉科之區別,在其樹棲性較强,翼較長,足較纖弱.與鵯科之區別,在其足較壯而雌雄異形.至其一般性狀,則嘴頗直,上顎有一缺刻;翼較長于尾;體羽鮮麗;幼鳥與雌鳥相似;以菓子及昆蟲爲食;生殖情形及卵之多少,大小,色澤,各種不同.

本科包含 *Aegithina, Aethorhynchus, Chloropsis* 等三屬,本目錄只記載 *Aegithina, Chloropsis* 等,兩屬四種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,只有兩個.

141. **Aegithina tiphia tiphia** (Linn). 伊俄拉

Rothschild, p. 304——雲南

室中之印度,爪哇,馬拉甲,暹羅,安南等處標本甚多,無一中國鳥,以既有記載于雲南,故爲之編入本目錄.

142. **Chloropsis hardwickii hardwickii** Jard. & Selby.

Rothschild, p. 305——雲南.

室中有一雲南鳥: 1♂, 26, V, 1895, Prince d'Orléans, 滇緬邊境,雲南.

此標本之足上小標籤,記作 *Chloropsis aurifrons*, 係屬錯誤,余既改正之. Rothschild 因根據 Oustalet 之報告而將 *Chloropsis aurifrons aurifrons* (Hume) 一種編入 Avifauna of Yunnan 一文中.

Oustalet 曰 Prince d'Orléans 之標本爲 *C. aurifrons* 既屬錯誤, Rothschild 据其報告而編入雲南鳥類目錄,可謂踏其覆轍.

143. **Chloropsis hardwickii lazulina** (Swinhoe).

D. et O. p. 134 (*Phyllornis lazulina*)——海南.

室中安南鳥甚多,尙無中國鳥,以其最初係發見于海南,特編入本目錄.

144. **Chloropsis hardwickii melliana** Stresemann.

La Touche, p. 85——福建中部,廣東,雲南東部及東南部,留鳥.

室中有一標本: 1♀, 1, XI, La Touche, 福建.

余于廣西猺山得有此鳥甚多.此次寄來之廣東北部標本中,尙無此鳥,真可怪也.

以上 *Chloropsis hardwickii* 之三亞種,相差甚微,可用以下檢索表區別之:

A. 雄鳥前胸黑而帶藍;雌鳥腹之中央及下尾筒青黃.................................*C. h. hardwickii.*

B. 雄鳥前胸靛藍,頭項青藍;嘴 18.5—20mm.; 雌鳥下體濃橙色. .... *C. h. lazulina.*

C. 雄鳥前胸深黑,頭項灰青,嘴 16—18mm.; 雌鳥下體濃橙

色. ……………………………………………………… *C. h. melliana.*

PYCNONOTIDÆ. 鵯科[a]

本科一般性質與畫眉科相似,故在昔有逮入畫眉科而爲之另立一亞科者,但其翼尖長,跗蹠較弱,且食各種漿果,與畫眉科稍有不同,故新近乃自成一科.食料大都爲菓子及昆虫,能飛捕昆虫,狀如鶲科各種.性喧噪,喜羣居,冬季羣集尤大.生殖期與一般鳴禽類相若,巢杯狀,卵白而帶粉紅,有赤或褐或紫色點斑.

巴黎博物館鳥類研究室鵯科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有六屬十九種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共有六十五個.

145. **Microscelis amaurotis amaurotis** (Lesson). 楊梅鳥

D. et O. p. 135 (*Hypsipetes amaurotis*)——上海,甯波.

La Touche, p. 86——浙江,上海,不甚普通.在日本則較多.

室中有浙江鳥三: 1(?), 28, III, 1909, glaolin, 甯波附近; 2(?), 1923, M. Nadar, 舟山.

舟山鳥足下簽標有"楊梅鳥"三中國字.又另有法文

[a] 此名詞來自日本,動物學大辭典引用之,余以其經既流行,無用更改.我國最著名之白頭翁,卽逮本科之 *Pycnonotus* 屬,故名本科曰白頭翁科,亦無不可,且似更切當也.

註解云: "此鳥喜食楊梅,故人以楊梅鳥稱之".

Microscelis leucocephalus 一種,爭論極劇, La Touche 以為 *leucocephalus, concolor, sinensis* 等,皆係不同之品類,而 Stresemann 及 Rothschild 則以為係同種而異型. Rothschild 于 Avifauna of Yunnan 一文中 (p. 302), 以 *Microscelis leucocephalus* 為各型之代表,于此標題下再列各型: 1. *phase leucocephalus;* 2. *phase concolor;* 3. *phase intermediate between concolor and sinensis;* 4. *phase sinensis*. Delacour 于 Les Oiseaux de l' Indochine vol. IV p. 21-23 則分別記載之而各予一號碼.余茲乃採用 Delacour 之辦法.

146. **Microscelis leucocephalus leucocephalus** (Gmelin). 白首黑鵯

D. et O. p. 136 (*Hypsipetes leucocephalus*)——夏季至中國南部,以四川與浙江為尤多.

La Touche, p. 87——安徽南部,浙江,福建,夏鳥.廣東?四川?湖北?雲南留鳥.

Rothschild, p. 302——雲南.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥五: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Père Soulié. 雲南其却.

余于廣西猺山,廣東南部,廣東北部,湖南南部皆得有記

載,冬鳥.

147. **Microscelis psaroides concolor** (Blyth), 灰腹黑鵯

D. et O. p. 137 (*Hypsipetes yunnanensis*)——Anderson 于雲南西部得之.

Rothschild, p. 302 (*phase concolor*)——雲南.

室中除安南鳥外,有一中國鳥: 1♀, 23, V, 1895, Prince d'Orléans, 雲南漾濞江.

觀 David et Oustalet 之形態記載, Anderson 之 *yunnanensis* 當係 *concolor*. Rothschild 亦以 *concolor* 記載 Anderson 之標本. Prince d'Orléans 之漾濞鳥,足下標簽係記作 *yunnanensis*, 余以之與 Delacour 之安南 *concolor* 較,實無區別.

148. **Microscelis psaroides sinensis** (La Touche). 雲南黑鵯

La Touche, Bull. B. O. C. vol. xII, 1921, p. 53——雲南河口及猓姑寨

Rothschild, p. 302 (*Phase sinensis*)——雲南.

室中有兩標本: 1(?), 1896, Pēre Soulié, 雲南茈芄; 1(?), 1900 雲南茈芄.

149. **Microscelis psaroides perniger** (Swinhoe). 海南黑鵯

D. et O. p. 137 (*Hypsipetes perniger*)—— 海南南部及中部樹

林茂盛之處.

室中只有安南鳥.以此鳥最初係發現于海南,乃爲之編入目錄.

本目錄所記載之 *Microscelis* 五種及亞種,形態上相似之點極多.可用下列檢索表區别之:

A. 翼長 130 mm. 以上.……………………*M. a. amaurotis.*

B. 翼長 125 mm. 以下.

a. 頭頸全白.……………………*M. l. leucocephalus.*

b. 頭頸非白色.

1a. 上體光輝極不發達,下體褐而雜灰色.…M.p. concolor.

1b. 上體光輝頗發達,下褐黑而無光輝.……M. p. sinensis.

1c. 上下體皆黑而有鋼藍色光輝 ……………M. p. perniger.

附記:——以余射鳥經驗言之,全黑之鳥最多,頭頸之小部白色者次之,頭頸全白者最少.余在廣東南部所見百餘鳥.頭頸全白者不及十個;在廣西龍州所見三四百鳥,頭頸全白者不及三十個;在廣西猺山所得之五六十標本,頭頸全白者亦不逾十個;此次寄來之廣東北部及湖南南部八標本,頭頸全白者只有一個.同在黑鳥中,其光輝之强與弱腹部白斑之多少,每有不同.又,余常見黑鳥與白頭鳥交雜而成之大羣集,亦嘗見純粹黑鳥所成之大羣集,但永未見純粹白頭鳥所成之羣集,

150. **Ixos castanonotus castanonotus** (Swinhoe). 栗鵯

D. et O. p. 143 (*Hemixus castanonotus*)——只見于海南.

室中只有安南鳥,以既有記載于海南,特為之編入本目錄.

151. **Ixos canipennis canipennis** (Seebohm). 灰翼栗鵯

La Touche, p. 90 (*Hemixus castanonotus canipennis*)——福建,廣東,留鳥.

室中有 La Touche 送來三福建鳥: 1(?), 13, X, 1896, 福建西北部之掛墩; 1♂, 1♀, 6, 7, x, 福建.

余于廣西猺山得有大批標本,此次亦寄來廣東北部標本四個.

Ixos (=*Hemixus*) *castanonotus castanonotus.* 及 *Ixos* (=*Hemixus*) *canipennis canipennis* 兩種,前本同隸于一種,前者曰 *Ixos castanontous castanonotus*, 後者曰 *Ixos castanonotus canipennis*, 及後 Jean Delacour 于安南之 Cam-Dao 同地發見之,遂乃別為兩種. *castanonotus* 初列撥風外緣青黃, *canipennis* 則銀灰,其他無大差別.

152. **Ixos flavala flavala** (Hodgson). 褐耳鵯

Baker, i, p. 374 (*Hemixus flavala flavala*)——喜馬拉雅帶自 Mussoorie 以至東亞森母,錦山之北,嘉錦山,以至雲南.……

Rothschild, p. 305——雲南.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

153. **Ixos macclellandi holti** (Swinhoe). 青翼鵯

D. et O. p. 136 (*Hypsipetes macclellandi*)——中國南部留鳥,冬季余于中國西部得有標本.

La Touche p. 90 (*Iole macclellandi holti*)——福建,廣東,留鳥.

室中有 La Touche 送來三標本: 2♂, 1♀, 26 IV, 2 XI, XII, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,各有此鳥四個.

154. **Ixos macclellandi similis** (Rothschild). 雲南青翼鵯

Rothschild, p. 303 (*Iole macclellandi similis*)——雲南.

室中有 Rothschild Museum 送來一標本: 1♂, 25,IX, 1926, 雲南怒江與瑞麗江分水界.

此鳥胸部之赭色較遜,尾較長(115 mm. 對福建鳥 98—100 mm.).

155. **Molpastes cafer chrysorrhoides** (Lafresnaye). 山高髻冠

D. et O. p. 142 (*Ixus chrysorrhoides*)——自中國南部直至福建邊界.香港尤多,每成小羣.

Baker, i, p. 387 —— 自嘉連尼北部至嘉錦山,撣部,雲南以至中國西部.

La Touche, p. 91——福建,廣東,留鳥.

室中只有印度及安南鳥.又,有一印度鳥,完全白化,只下尾筒仍留紅色.白化之生活籠鳥,余曾在廣州見之.白化原因尙待考求.

余前于廣西柳州附近得有標本,後又于猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本,中有此鳥四個.

156. **Octocompsa jocosa jocosa** (L.). 高髻冠

D. et O. p. 142 (*Ixus jocosus*)——中國極南各地之普通留鳥,香港尤多.

La Touche, p. 95——廣東留鳥.

Rothschild, p. 306——雲南.

室中有大批安南鳥.

余于廣西猺山及廣東北江皆得有記載.

157. **Octocompsa flaviventris flaviventris** (Tickell). 黑冠黃鵯

Baker, i, p. 397 —— ……雅魯藏布江之南岸平原山野中,緬甸,暹羅,撣部及雲南.

Rothschild, p. 306 —— 雲南.

室中除安南標本外,只有一中國鳥: 1♂, 12,V, 1895, Prince d'Orléans,雲南緬甯與雲州之間.

158. **Spizixus semitorque** Swinhoe. 白環鸚嘴鵯

D. et O. p. 143——終年皆可見于漠平,四川,江西福建,浙江諸省多樹之山中,亦曾于陝西南部得有標本.

La Touche, p. 96——中國南部以至揚子江一帶,陝西南部亦有之,留鳥.

Rothschild, p. 303——雲南.

室中除安南標本外,有中國十四: 1♂, 19, i, 1869, David, 四川打箭爐; 1(?), 1891, Prince d'Orléans,四川打箭爐; 2(?),1895 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 8(?), 1899,四川打箭爐; 1(?), 1907, Pēre Seguin, 興甯.

余前既有記載于廣西猺山,此次又有記載于廣東北部及湖南南部.

159. **Spizixus canifrons canifrons Blyth** 鸚嘴鵯

Baker, i, p. 400 —— 雅魯藏布江南部山中,阿拉干,錦山以至雲南.

Rothschild, p. 303——雲南.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

160. **Pycnonotus sinensis sinensis** (Gmelin). 白頭翁

D. et O. p. 140 (*Ixus sinensis*)——中國南部各地直至揚子江北岸爲止,無不有之.

La Touche, p. 92——中國南部自廣東以至上海,揚子江流域(並四川), 留鳥.沙尾山遷移鳥.

室中有十三標本:

1♂, 2, IV, 1870, David, 四川 ……………………翼 92mm.

1♀, 5, II, 1869, David, 四川 ……………………翼 87mm.

1♂, 2, VII, 1908, Gladin, 甯波附近 ………翼約90mm.(翼尖微損)

1♂, 28, III, 1908, Gladin,甯波附近 ………翼 90mm.

1♂, 28, III, 1908, Gladin,甯波附近 ………翼 86mm.

1♀, 12, XI, 1908, Gladin,甯波附近 ………翼 83mm.

1♀, 12, XI, 1909, Gladin,甯波附近 ………翼 85mm.

1♀, 28, III, 1909, Gladin,甯波附近 ………翼 89mm.

1(?), 1923, M. Nadar, 舟山 ……………………翼 88mm.

1(?), 1923, M. Nadar, 舟山 ……………………翼 89mm.

1(?), 1923, M. Nadar, 舟山 ……………………翼 94mm.

2(?), 1899, 四川打箭爐 ……………………翼 85mm.

161. **Pycnonotus sinensis stresemanni** La Touche.

La Touche, p. 94——福建西北部夏鳥.福建西部及廣東之山地,想都可見之.

室中有La Touche送來兩福建鳥: 1♂, 1♀, XI, 福建. 翼長♂85, ♀84.5 mm.

La Touche 以福建鳥稍小,乃另立爲一亞種.以一般言之,長江流域雄鳥翼長多在90或90 mm. 以上,而福建鳥,據La Touche 測量結果,則爲73—78 mm. 此問題太過微細,非再得大幫福建鳥,不易解决也.

余在廣西猺山所採之標本,翼長不逾 90 mm. 廣東北部及湖南南部標本亦然.

Pycnonotus sinensis 一種,廣佈我國南部各地,或爲*P. s. sinensis* (Gmelin), 或爲*P. s. stresemanni* La Touche. 獨在雲南則二者皆不可得見,在安南又可得較小之一型,此種奇特之分佈情況,最堪注意,同時又極不易解釋者也.

安南之 *Pycnonotus sinensis*, 翼較短于標準型 *P. s. sinensis* (Gmelin), Delacour 因爲之另立一亞種,名曰 *Pycnonotus sinensis meridionalis*, 意謂南方種也. Delacour 只以之與 *P. s. sinensis* 比較,至其與 *P. s. stresemanni* 之異同如何,則未嘗提及.余試以安南標本與福建之 *P. s. stresemanni* 作愼密比較.無論體色與量度,皆無區別,簡直可謂之相同.余以爲*P. s. meridionalis* Delacour 實係 *P. s. stresemanni* La Touche 之重名,爲保持優先權計,應採La Touche所定之名.

162. **Pycnonotus hainana** (Swinhoe). 海南白頭翁

D. et O. p. 141 (*Ixus hainanus*)——只發見于海南.

室中有大帮安南鳥.

P. hainana 頭頂純黑,無後頭之白塊斑,爲與 *P. sinensis* 區別之要點.稱此鳥爲白頭翁,本不相宜,但此外又難得更適當之名稱也.

163. **Pycnonotus aurigaster xanthorrhous** (Anderson). 黃肛鵯

D. et O. p. 141 (*Ixus xanthorrhous*)——中國中部極爲普通,余于四川,陝西,江西,福建皆得有標本.

Baker, i, p. 141——緬甸東部之山中,自嘉連尼以至嘉錦山,撣部,雲南及中國內地.

La Touche, p. 94——陝西,揚子江流域(自四川以至江蘇),江西,福建,廣東西北部,留鳥.

Rothschild, p. 304——雲南.

室中除安南標本外,有四川鳥十一,雲南鳥五,興甯鳥一: 1(?),1891, Prince d'Orléans, 四川打箭爐; 4(?), Déjean, 四川打箭爐; 2(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 4(?), 1899, 四川打箭爐; 5(?), 1896, 1897, Pēre Soulié, 雲南茸刼; 1(?), 1907, Pēre Seguin, 興甯 (Shinen).

余曾于廣西猺山射得之,此次湖南南部標本中,亦有數個.

(未完)

數學家姓名錄

(續第三卷第二期)

曾 昭 安

Bentley, A. F. 〔本特力〕 二十世紀前半期 美人

Bentley, Richard 〔本特力〕 (1662, 1, 27—1742, 7, 14) 英人

Bentley, W. 〔本特力〕 二十世紀 英人

Benton, J. R. 〔本吞〕 十九世紀末 德人

Benvenuto d'Imola 〔本芬紐托〕 十五世紀 義人

Bérard, Fréd. 〔貝刺〕 (1789—1828) 法人

Berchuijs, C. J. H. van 〔貝吹斯〕 十九世紀前半期 荷蘭人

Berenguer, Miguel 〔貝倫給〕 十六世紀 西班牙人

Berg, E. J. 〔柏格〕 二十世紀前半期 美人

Berg, F. J. Van Den 〔柏格〕 十九世紀後半期 荷蘭人

Berg, J. C. van den 〔柏格〕 十九世紀後半期 荷蘭人

Bergansius, F. L. 〔柏干栖斯〕

Bergbohm, J. 〔柏格波〕 十九世紀末 德人

Berger, A. 〔柏格爾〕 十九世紀後半期 瑞典人

Berger, C. Ph. 〔柏格爾〕 十八世紀中 德人

Berger, H. 〔柏格爾〕 二十世紀初 德人

Berger, J. 〔柏格爾〕 十九世紀 德人

Bergfeld, E. 〔柏格斐德〕 二十世紀前半期 德人

Bergh, P. 〔伯格〕 十九世紀 德人

Bergmann, G.〔柏格孟〕二十世紀　奧人

Bergmann, H.〔柏格孟〕二十世紀初　德人

Bergmann, Josef〔柏格孟〕十八世紀後半期　捷克人

Bergold, L.〔白哥德〕十九世紀後半期　德人

Bergson, Henri〔柏格森〕(1859—　)　法國猶太人

Bergstedt, J.〔白格斯退〕十九世紀後半期　瑞典人

Bergstrand, Ö.〔白格斯特蘭〕二十世紀初　瑞典人

Berkeley, George〔柏克立〕(1684—1753)　愛爾蘭人　以研究微積分學史而著名

Berkeley, H.〔柏克立〕二十世紀

Berkeley, L. M.〔柏克立〕二十世紀前半期　美人

Berkenbusch, H.〔柏褪部士〕十九世紀末　捷克人

Berkhan, G.〔柏克罕〕二十世紀初　德人

Berkzolari, L.〔柏邏拉利〕二十世紀　德人

Berlet, Bruno〔柏勒〕十九世紀　德人

Berliner, H.〔白林湼〕二十世紀　德人

Berliner, S.〔白林湼〕二十世紀　德人

Berloty, B.〔白洛提〕十九世紀後半期　法人

Bermbach, W.〔伯巴哈〕十九世紀後半期　德人

Bernard, D. M,〔伯爾拿〕二十世紀　英人

Bernard, Edward〔伯爾拿〕(1638—1696)　英人

Bernareggi, Isidoro〔柏那勒季〕(1735—1808)　義人

Bernays, Paul〔柏內斯〕(1888—　)　德人

Berndt, G.〔柏德特〕二十世紀　德人

Bernecker, Hans〔柏芮克〕德人

Bernegger, Mathias〔柏涅給〕(1582—1640) 德人

Bernelinus〔柏涅力那〕十一世紀前半期 法人 著算術

Bernes, T,〔柏倫兹〕十九世紀後半期 德人

Bernhard, Max〔本哈特〕十九及二十世紀 德人

Bernhard *von Hildesheim*, Stiftsschüler〔本哈特〕十五世紀中 德人

Bernhardy, G.〔本哈第〕十九世紀前半期 德人

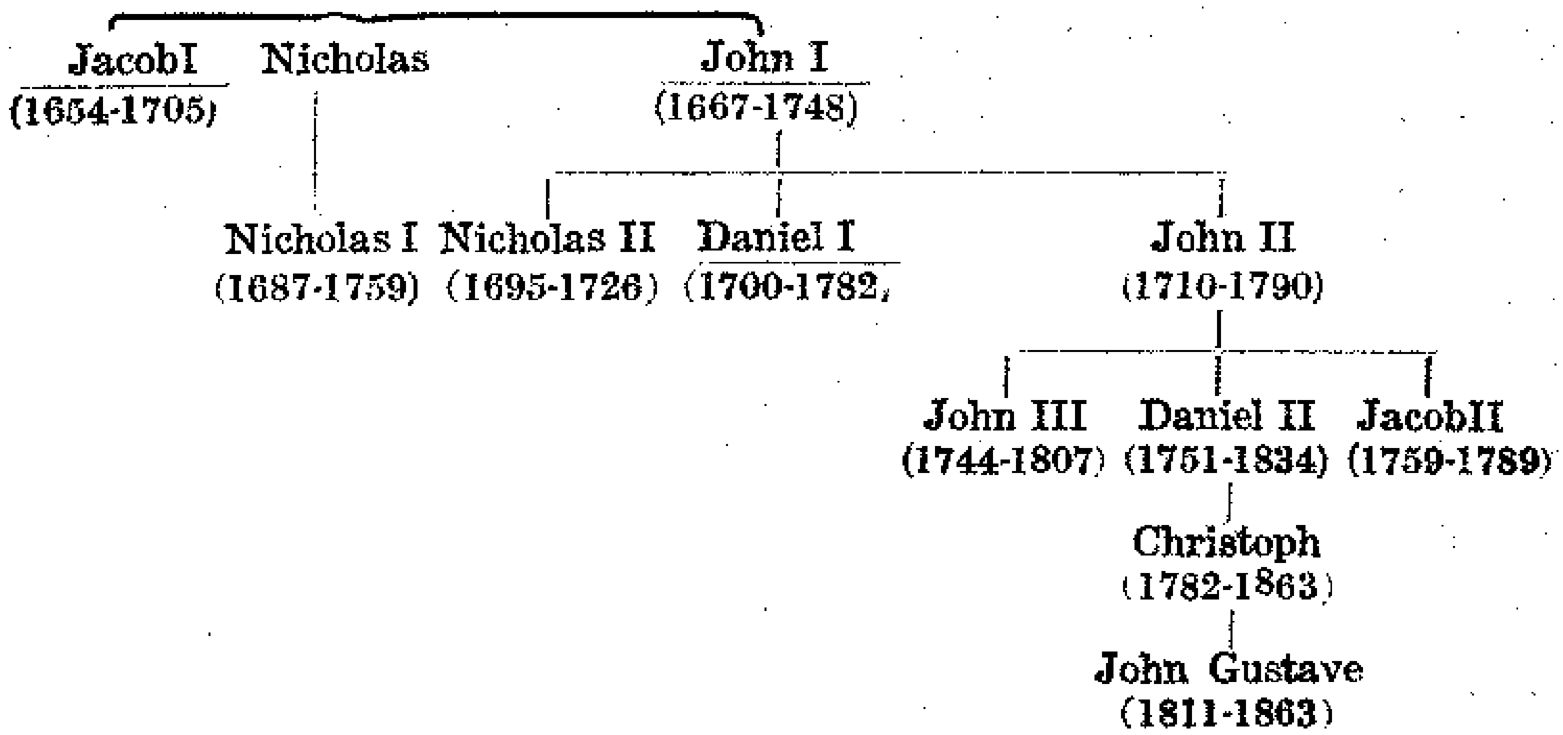
Bernorelli〔白諾尼〕

Bernoulli, Daniel I〔柏努利達尼爾第一〕(1700, 2, 9—1782, 3, 17) 瑞士人 著液體力學,始用微積分於確率學.

Bernoulli, Daniel II〔柏努利達尼爾第二〕(1751—1834) 瑞士人

Bernoulli, Jacob I〔柏努利雅科俾第一〕亦作 Jacques 英人呼曰 James (1654, 12, 27—1705, 8, 16) 瑞士人 在數學史上一家族中享受盛名至九人以上者厥爲柏努利族. 雅科俾第一爲認識微積分學價值之第一人,補充材料而推廣之,發明對數螺線,始著確率學,研究曲線等.

柏氏家族表



Bernoulli, Jacob II〔柏努利雅科俾第二〕英文作 James (1759—1789) 瑞士人

Bernoulli, John I〔柏努利約翰第一〕 亦作 Johann 或 Jean (1667, 8, 7—1748, 1, 1) 瑞士人 爲積分學之鼻祖.推廣微積分學使普及於歐洲.

Bernoulli, John II〔柏努利約翰第二〕 亦作 Johann (1710, 5, 18—1790, 7, 17) 瑞士人

Bernoulli, John III〔柏努利約翰第三〕 亦作 Johann (1744, 11, 4—1807, 7, 13) 瑞士人

Bernoulli, Nicholas I〔柏努利尼哥拉第一〕 亦作 Nikolaus (1687, 10, 10—1759, 11, 29) 瑞士人 貢獻於微分方程式

Bernoulli, Nicholas II〔柏努利尼哥拉第二〕 亦作 Nikolaus (1695, 1, 27—1726, 7, 26) 瑞士人

Bernstein, B. A.〔柏斯泰〕 二十世紀初 美人

Bernstein, Felix〔柏斯泰〕 (1878—) 德人

Bernstein, Serge〔柏斯泰〕 (1880—) 俄人 研究函數論

Bernstein, V.〔柏斯泰〕 二十世紀前半期 義人

Bernstorf, Ella E.〔本斯托弗〕 二十世紀前半期 美人

Bernward von Hildesheim〔柏窩德〕 十世紀末 德人

Berosus〔格洛薩斯〕 亦作 Berosos 紀元前三世紀 希臘人

Berry, Arthur〔柏立〕 (1863—1929, 8, 15) 英人 天文數理家

Berry, E. M.〔柏立〕 二十世紀前半期 美人

Berry, William Johnson〔柏立〕 二十世紀前半期 美人

Berthelot, Claude François〔柏德洛〕 十八世紀後半期 法人

Berthelot, M. Daniel〔柏德洛〕 (1865—1927) 法人

Berthold, E. R.〔柏托爾德〕 十九世紀後半期 德人

Berthold, P.〔柏托爾德〕 十九世紀

Bertholio, Claudio〔柏托略〕 十六世紀 法人

Berthollet, Claude Louis〔柏托雷〕(1748—1822)　法人

Bertillon, J.〔柏提永〕十九世紀末

Bertin, Ch.〔柏湯〕二十世紀　法人

Bertin, George〔柏湯〕十九世紀　英人

Bertini, Eugenio〔柏丁尼〕(1847—1933, 2, 23)　義人

Bertins, Alexis Fontaine des〔柏丁斯〕(1705—1771, 8, 21)　法人

Bertolini, J. B.〔柏托利尼〕十八世紀　義人

Bertrand, Joseph *Louis François*〔柏特龍〕(1822—1900)　法人　解析學家.著確率學,變分學,微分方程式等.

Bertrand, Louis〔柏特龍〕(1840—1923, 5, 13)　瑞士人

Bérulle, Cardinal de〔白魯爾〕(1575—1629)　法人

Berwald, Ludwig〔白瓦特〕(1883—　)　捷克人

Berwick, William E. H.〔貝威克〕二十世紀前半期　英人

Berzolari, L.〔白佐拉利〕二十世紀前半期　義人

Bes, K.〔貝斯〕十九世紀末　荷蘭人

Besant, William Henry〔貝山〕十九世紀　英人　著圓錐曲線論

Bescovitch, A. S.〔柏斯科維希〕亦作 A. Besikovitch　二十世紀前半期　俄人　著幾何週期函數

Beskiba, J.〔柏斯岐巴〕十九世紀　奥人

Besikovitch, A.〔柏斯科維希〕即 A.S. Bescovitch

Bessel, Eriedrich Wilhelm〔柏塞〕(1784—1846)　德人　發明柏塞函數

Bessei. H.〔柏塞〕二十世紀前半期　德人

Bessel-Hagen, E.〔柏塞哈根〕二十世紀前半期　德人

Bessell, F.〔柏塞耳〕十九世紀後半期　德人

Besser, R.〔柏舍〕十九世紀後半期　德人

Besserve, A.〔柏塞服〕 二十世紀前半期 法人

Bessière, G.〔柏舍爾〕 二十世紀前半期 法人

Besso, Davido〔柏索〕 十九世紀後半期 義人

Bessy, Frénicle de〔柏西〕 卽 de Bessy

Besthorn, R. O.〔柏斯托〕 十九世紀末 丹麥人

Beth, H. J. E.〔柏司〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Bétrancourt, F.〔柏特蘭庫〕 二十世紀前半期 法人

Betsch, Chr.〔貝士〕 二十世紀 德人

Betschler, F.〔貝士勒〕 二十世紀前半期 德人

Bettazzi, R.〔柏塔齊〕 十九世紀 義人

Betti, Enrico〔柏提〕（1823—1892） 義人

Bettini, Mario〔柏提尼〕（1582—1657） 義大利猶太人 討論四邊三角形之性質

Betz, Albert〔柏茲〕二十世紀前半期 德人

Betz, Herman〔柏茲〕 二十世紀前半期 美人

Betz, W.〔柏茲〕 二十世紀前半期 美人

Beucke, K.〔柏克〕 十九世紀後半期 德人

Beudon, J.〔柏唐〕 十九世紀末 法人

Beuermann, F.〔柏爾曼〕 二十世紀前半期 德人

Beugham, Cornelis van〔倍嗄〕 十七世紀 荷蘭人

Beust, F.〔倍斯特〕

Beutel, E.〔柏忒〕 二十世紀 德人

Beutel, Tobias〔柏忒〕 十七世紀 德人

Bevan, Benjamin〔貝凡〕（?—1838） 英人

Beveridge, H. R.〔柏昧立治〕 二十世紀前半期 美人

Beverly, William〔柏味力〕 二十世紀前半期 美人

Bevis, J.〔俾維斯〕 十八世紀 英人

Bewersdorff, O.〔柏偉多夫〕 二十世紀 德人

Beyel, C.〔培業〕 十九世紀後半期 瑞士人

Beyer, G.〔培葉〕 十九世紀後半期 德人

Beyer, Johann Hartmann〔培葉〕(1563—1625) 德人

Beyer, R.〔培葉〕 二十世紀前半期 德人

Beyrodt, G.〔伯羅特〕 二十世紀 德人

Bezodis, A.〔貝佐第〕 十九世紀後半期 法人

Bézout, Étienne〔貝組〕(1730, 3, 31—1783, 9, 27) 法人 研究對稱函數及行列式

Bhaskara Acharya〔巴斯卡剌•亞哈雅〕(1114—1185) 印度人 當時代數學家

Bhatta Utpala〔巴塔阿帕拉〕 六世紀初

Bhattacharyya, D. P.〔巴塔察雅〕 二十世紀前半期 印度人 著向量解析

Bhattopala〔巴拉帕拉〕 十世紀 印度人 研究圓周率

Bhut, A. B.〔柏特〕 十九世紀後半期 英人

Biadego, G. B.〔俾亞德哥〕 十九世紀 義人

Biagio, Master〔俾亞佐〕 亦作 Biagio da Parma 或 Biagio Palacani (?—1416, 4, 23) 義人

Biancani, Giuseppe〔俾安坎尼〕 拉丁名爲 Blancanus 十七世紀前半期 義人

Bianchi, G.〔俾安岐〕 十九世紀 義人

Bianchi, Luigi〔俾安岐〕(1856—1928, 6, 6) 義人 微分幾何學家

Bianchini, Giovanni〔俾安岐尼〕 十五世紀中 義人

Biart, Lucien〔俾阿特〕

Biasi, G.〔比亞西〕

Bibb, S. F.〔俾布〕 二十世紀前半期 美人

Bickerton, A. W.〔比克吞〕(1841—1929, 1, 23) 新西蘭人

Bickmore, C. E.〔比克謨耳〕 十九世紀末 英人

Bicquilley, C. F. de〔比岐力〕 十八世紀後半期 法人

Bidauld〔俾道〕 十九世紀後半期 法人

Bidlingmaier, F.〔畢林美厄〕 十九世紀末 德人

Bieberbach, Ludwig〔俾柏巴哈〕(1886—) 德人 著代數學,函數論及微分方程論.

Bieck, W.〔俾克〕 二十世紀 德人

Biedermann, P.〔俾德曼〕 十九世紀後半期 德人

Biehler, Ch.〔畢勒〕 十九世紀後半期 法人 研究方程式論

Biel, P. Christ.〔俾爾〕 十九世紀前半期 德人

Bienaymé, J.〔貝內美〕 十九世紀前半期 法人

Bienenfeld, H.〔俾能斐德〕 十九世紀後半期 德人

Bienewitz, Peter〔俾涅威茲〕 卽 P. Apianus

Bienias, M.〔邊尼士〕二十世紀前半期 德人

Bierens de Haan, David〔俾棱第哈〕 卽 Haan

Biering, Ch. H.〔俾靈〕 十九世紀前半期 丹麥人

Biermann, O.〔俾耳曼〕 十九世紀末 德人 著函數論

Biermann, W. G. A.〔俾耳曼〕 十九世紀後半期 德人

Biernacki, M.〔俾那岐〕 二十世紀前半期 波蘭人

Biernatzki, K. L.〔俾拿啓〕 十九世紀中 德人

Bigelow, A. H.〔比革羅〕 二十世紀 美人

Bigelow, F. H. 〔比革羅〕 二十世紀 美人

Bigler, U. 〔賓勒〕 十九世紀後 瑞士人

Bignon, Abbé 〔賓儂〕 法人

Bigourdan, Guillaume 〔俾谷丹〕 (1852—1932, 2, 28) 法人 天文數理家

Bilby, J. S, 〔畢比〕 二十世紀 美人

Bilfinger, Georg Bernhard 〔比芬格〕 (1693—1750) 德人

Bilguer, J. 〔比爾革〕 十九世紀 德人

Biliotti, Antonio 〔比略提〕 十四世紀後半期 義人

Bill, A. C. 〔比爾〕 二十世紀前半期 美人

Bill, E. G. 〔比爾〕 二十世紀前半期 美人

Billettes 〔比勒提〕 十八世紀 德人

Billingsley, *Sir* Henry 〔比令斯力〕 (?—1606) 英人

Billy, Jacqves de 〔比立〕 亦作 Jacobo de Billy (1602—1679) 法人

Bilstenius, Joannes 〔比斯騰尼阿〕 十六世紀後半期 德人

Bilz, E. 〔比士〕

Binder, W. 〔賓德〕 十九世紀末 德人

Bindoni, A. 〔賓多尼〕 (1879—1928, 12, 17) 義人

Binet, Jacques Philippe Marie 〔賓納〕 (1786—1856) 法人

Bing, J. 〔丙〕 十九世紀 丹麥人

Bini, U. 〔賓尼〕 二十世紀前半期 義人

Binns, W, 〔丙斯〕 十九世紀後半期 英人

Bioche, C. 〔俾徹〕 十九世紀後半期

Bion, E. N. 〔拜溫〕 十八世紀前半期 法人

Bion, Nicolas 〔拜溫〕 (1653—1733) 法人

Biot, Ed. 〔俾奥〕 十九世紀前半期 法人

Biot, Jean Baptiste〔俾奥〕(1774, 4, 21—1862, 2, 3) 法人 數理及天文學家 著曲線論及埃及天文學

Birch, S.〔柏赤〕十九世紀

Birchby, W. M.〔柏赤比〕二十世紀前半期 美人

Birchenough, Harry〔柏徹諾〕二十世紀前半期 美人

Bird, K. H.〔柏德〕二十世紀 英人

Biridanus〔貝利丹那〕卽 Simon Bredon

Birkeland, Richard〔貝克蘭〕(1879—1928, 4, 10) 挪威人

Birkemeier, W.〔貝槼邁耳〕二十世紀 德人

Birkenmajer, A.〔貝根梅澤〕二十世紀

Birkenmajer, L.〔貝根梅澤〕十九世紀末 波蘭人

Birkhoff, George David〔貝克和〕(1884—) 美人

Birks, John〔柏克斯〕十八世紀 英人

Birtwistle, George〔畢威斯特爾〕(1877—1929, 5, 19) 英人

Bisacre, F. F. P.〔畢薩雷〕二十世紀前半期 英人 著應用微積分

Bischof, Johann Jakob〔比壽夫〕亦作 Episcopius 十八世紀初

Bischoff, Anton〔比壽弗〕十九世紀 德人

Bissaker, Robert〔比薩刻〕十七世紀中

Biswas, R. C.〔畢斯瓦〕二十世紀前半期 印度人

Bitale, I, B.〔拜塔爾〕十九世紀末 希臘人

Bixby, W. H.〔俾克斯比〕二十世紀 美人

Bjerknes, Carl Anton〔澤克滋〕(1825—1903) 挪威人

Bjerknes, Vilhelm〔澤克滋〕(1862—) 挪威人

Bjerknes, V. F. K.〔澤克滋〕二十世紀前半期 挪威人

Björling, C. F. E.〔逸林〕十九世紀後半期 瑞典人

Björling, E. G.〔邊林〕十九世紀中

Björnbo, Axel Anthon〔邊波〕二十世紀初　瑞典人

Björnsen, Stephan〔邊森〕(1730—1798)

Bjørnson, B.〔邊孫〕十九世紀　挪威人

Black, Amos〔布拉克〕二十世紀前半期　美人

Black, C. W. M.〔布拉克〕二十世紀初　美人

Black, H. L.〔布拉克〕二十世紀前半期　美人

Black, M.〔布拉克〕二十世紀前半期　英人

Blackburn, Hugh〔布拉克朋〕十九世紀　英人

Blackburn, P. P.〔布拉克朋〕二十世紀

Blades, E.〔布雷得〕英人

Blagg, M. A.〔布拉格〕二十世紀　英人

Blainville, Henri Marie Ducrotay de〔布郎微爾〕(1778—1850)　法人

Blair, Harold〔布雷耳〕二十世紀前半期　美人

Blair, Vevia〔布雷耳〕(1871—　)　美女

Blaise H.〔布雷色〕二十世紀前半期　德人

Blake, E. M.〔布雷克〕十九世紀末　美人

Blake, Francis〔布雷克〕(1718—1780)　英人

Blakelock, R.〔布雷克洛克〕十九世紀前半期　英人

Blakesley, T. H.〔布雷克斯力〕(1848—1929, 2, 13)　著幾何光學

Blanc, Eugène〔勃郎〕二十世紀前半期　法人

Blancanus〔布郎干挪〕卽 G. Biancani

Blanchard〔布蘭察德〕十八世紀後半期　法人

Blanchi, L.〔白蘭歧〕二十世紀前半期　義人

Bland, Miles〔布蘭德〕(1786—1868)　英人

Blank, F.〔布蘭克〕十九世紀 德人

Blar *von Brudzewo*, Albert〔布拉〕(1445—1497) 德人

Blaschke, E.〔布拉什克〕(1856—1926,10,30) 奧人

Blaschke, Wilhelm〔布拉什克〕(1885—) 奧人 著微分幾何學

Blasendorff, M.〔布拉森多夫〕十九世紀後半期 德人

Blasius, E.〔布雷稷阿〕十九世紀末 德人

Blasius, Joannes Martinus〔布雷稷阿〕西班牙名爲 Juan Martínez Silíceo 原名爲 Juan Martinez Guijeno 亦或作 Ioannes Martinus Scilicevs 十六世紀初 西班牙人

Blass, C,〔布拉斯〕十九世紀後半期 德人

Blassière, Jean Jacques〔布拉舍果〕(1736—1791) 荷蘭人

Blassing, G. F.〔布拉里〕二十世紀 美人

Blaster, Joseph〔布拉斯忒〕奧人 著最大之四分平方表

Blauert, M.〔布勞爾特〕二十世紀前半期 德人

Blavier〔布拉徽〕十八世紀末 法人

Bledsoe, Albert Taylor〔布勒德左〕十八及十九世紀 美人 研究數理哲學

Bledsoe, J. M.〔布勒德左〕二十世紀前半期 美人

Bleich, F.〔布來喜〕二十世紀前半期 德人

Bleicher, H,〔布來徽〕二十世紀 德人

Blessing, George F.〔布勒星〕二十世紀 美人

Blichfeldt, Hans F.〔布力基斐〕二十世紀前半期 美人 著有窮同素羣論

Bliedner, E.〔布利德涅〕二十世紀初 德人

Blind, A,〔布林德〕十九世紀末 德人

Blink, H.〔布林克〕二十世紀前半期 荷蘭人

Bliss, Gilbert Ames〔白黎斯〕(1876—) 美人

Bliss, R.〔白黎斯〕英人

Bliss, Ralph P.〔白黎斯〕二十世紀 美人

Bloch, A.〔布羅和〕二十世紀前半期 法人 研究函數論

Bloch, Léon〔布羅和〕二十世紀 法人

Bloch, M.〔布羅和〕十九世紀末 德人

Bloch, W.〔布羅和〕二十世紀 德人

Block, H.〔布羅克〕二十世紀初 瑞典人

Block, H. G.〔布羅克〕二十世紀 瑞典人

Blomfield, C. H.〔布蘭飛德〕二十世紀 英人

Blomqvist, E.〔布倫基斯〕十九世紀末 芬蘭人

Blondel, François.〔布隆得爾〕(1617—1686) 法人

Blondel, Jaques François〔布隆得爾〕(1705—1774) 法人

Blue, Arthur H.〔布盧〕二十世紀前半期 美人

Blumberg, Henry〔布盧柏〕十九及二十世紀 德人

Blumenthal, Leonard M.〔布盧門塔〕二十世紀前半期 美人

Blumenthal, Otto〔布盧門塔〕十九及二十世紀 法人 研究函數論

Blundeville, Thomas〔布蘭得甫爾〕十六世紀末 英人

Blutel, E.〔布拉忒〕十九世紀 法人

Blythe. W. H.〔布力狄〕十九世紀末 英人 研究立體幾何學

Boaretti, Francesco〔波勒提〕十八世紀

Boas, G.〔波士〕二十世紀前半期 英人

Bobek, Karl J.〔波柏刻〕十九世紀末 德人

Bobillier, Étienne〔波比利〕(1797—1832) 法人

Bobynin, V. V.〔波比寧〕二十世紀 法人 研究數學史

Boccaccio, Giovanni〔薄伽邱〕(1313—1375) 義人

Boccara, V.〔波卡剌〕十九世紀末 法人

Boccardi, G.〔波卡第〕二十世紀前半期 義人

Boccardini, G.〔波卡第尼〕二十世紀初 義人

Bôcher, Maxime〔鮑瑟〕(1867,8,28—1918) 美人 闡發積分方程式論,高等代數及函數論.

Bochert, Alfred〔波拆特〕十九世紀後半期 德人

Bochner, S.〔波哈湼〕二十世紀前半期 德人 著傅利積分

Bochow, K.〔波周〕十九世紀後半期 德人

Bock, Hans〔波克〕十六世紀前半期 德人

Bock, Richard〔波克〕(1824—1907) 德人 研究數理統計

Böckh, August〔柏克〕亦作 A. Boeckh 十九世紀前半期 德人

Bocx, D.〔波克斯〕

Bode, A.〔波得〕

Bode, J.〔波得〕十九世紀末 德人

Bode, Johann Elert〔波得〕(1747—1826) 德人

Bodewig, E.〔波得威〕二十世紀前半期 德人

Boeckh, August〔柏克〕即 A. Böckh

Boeckh, L.〔柏克〕十九世紀中 德人

Boeckmann, Joh. Lorenz〔鮑克曼〕(1741—1802) 德人

Boeder, Paul〔波德〕二十世紀前半紀 美人

Boegehold, F.〔鮑基和德〕二十世紀初 德人

Boegel, K.〔鮑吉〕二十世紀

Boeger, R.〔鮑給〕十九世紀末 德人

Boehm, Friedrich〔柏謨〕二十世紀前半期 德人

Boehm, Karl〔柏謨〕二十世紀前半期　德人　著橢圓函數

Boehme, A.〔柏麥〕十九世紀　德人

Boehn, O.〔波〕二十世紀　德人

Boelk, P.〔部克〕二十世紀前半期　德人

Boer, F. de〔都耳〕十九世紀後半期　荷蘭人

Böergen, C.〔波眞〕二十世紀　德人

Boersch, O.〔波士赤〕十九世紀末　德人

Boethius, Anicius, Manlius Torquatus Severinus〔波伊悉阿斯〕亦作 Boetius (475—524, 10, 25) 羅馬人　算術及幾何學名家

Boetius〔波伊悉阿斯〕卽 Boethius

Bogaert〔波機〕二十世紀　法人

Bogard, Augustus〔波加德〕二十世紀前半期　美人

Bogardus, Johannes〔波加達斯〕十六世紀　法人

Böger, Rudolf〔鮑給〕十九世紀末　德人　著位置幾何學

Boggio, I.〔波喬〕二十世紀　義人

Bogoliouboff, N.〔波哥略波夫〕二十世紀前半期　俄人

Bogumil, C.〔波居密〕十九世紀　德人

Bohannan, R. D.〔波罕南〕(1855—1926, 6, 20) 美人

Bohde, H.〔蓬德〕二十世紀　德人

Bohl, P.〔蓬爾〕二十世紀初　德人

Bohlin, K.〔寶林〕十九世紀

Bohlmann, G.〔波爾曼〕十九及二十世紀　德人

Böhm, J. G〔波謨〕

Böhmer, P.〔波美〕二十世紀初　德人

Böhmer, P. E.〔波美〕二十世紀　德人

Bohnenberger, M. J. G. F, 〔波內柏給〕 十八世紀 德人

Bohnenblust, *H.* F. 〔波內布拉〕 二十世紀前半紀 美人

Bohnert, Felix 〔波涅〕 十九及二十世紀 德人

Bohnicek, S. 〔波尼栖克〕 二十世紀 美人

Bohr, Harald 〔波耳〕 (1887—) 丹麥人 著略近週期函數

Bohr, H. A. 〔波耳〕 二十世紀前半期 丹麥人

Bohr, Niels 〔波耳〕 (1885—) 丹麥人

Bohren, A. 〔波棱〕 二十世紀初 瑞士人

Boïleau, J. T. 〔霸羅〕 二十世紀 美人

Boineburg, Joh. Christ. von 〔霸涅柏〕 十七世紀後半期 德人

Bois-Reymond 〔波累夢〕 卽 du Bois Reymond

Boissière, Claude de 〔波舍累〕 亦作 Claudius Buxerius (1500—?) 法人

Bojko, J. 〔波科〕 二十世紀 瑞士人

Böklen, Ernst 〔波克楞〕 二十世紀 德人

Böklen, O. 〔波克楞〕 十九世紀 德人

Boks, T. J, 〔波克斯〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Bol, G. 〔波〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Bolduan, O. 〔波度安〕 二十世紀初 德人

Bolinder, G. 〔波令得〕 二十世紀初 瑞典人

Boll, Franz 〔玻爾〕

Boll, Marcel 〔玻爾〕 二十世紀前半期 法人

Bollée, Léon 〔玻勒〕 十九世紀 法人

Boller, E. 〔波勒〕 二十世紀前半期 瑞士人

Bollinder, G. 〔波林得〕 二十世紀初 瑞典人

Bolognetti, Pompeo 〔波倫涅提〕

Bolton, L.〔波爾敦〕 二十世紀 英人 研究相對論

Boltzmann, Ludwig〔波玆曼〕 (1844—1906) 奧人 數理物理學家

Bolyai, Johann〔波耶佐罕〕 亦作 John Bolyai 或 János Bolyai (1802, 11, 15—1860, 1, 27) 匈人 發明非歐幾何學

Bolyai, Wolfgang〔波耶〕 亦作 Farkas Bolyai (1775, 2, 9—1856, 11,) 匈人 波耶佐罕之父

Bolza, H.〔玻紮〕 二十世紀前半期 德人

Bolza, Oskar〔玻紮〕 (1857—) 德人

Bolzano, Bernhard〔玻紮諾〕 (1781—1848) 波蘭(現今捷克)人 研究級數論

Bombelli, Rafaele〔波尼力〕 (1531—?) 義人 代數學家

Bombelli, Rocco〔波尼力〕 義人

Bomcompagni, Baldassare〔玻康帕尼〕 即 B. Boncompagni

Bomie〔波美〕

Bompiani, Enrico〔波丕尼〕 (1889—) 義人

Bonaccii, Guglielmo〔波那西〕 卽 Fibonaci

Bonaini, F.〔波內尼〕 十九世紀 法人

Bonati, Teodoro〔波那提〕 (1724—1820) 義人

Bonatti, Guido〔波拿提〕 十三世紀前半期 義人

Boncompagni. *Prinz* Baldassare〔玻康帕尼〕 (1821, 5, 10—1894, 4, 12) 義人

Bond, Henry〔逢德〕 十七世紀中

Bond, J. D.〔逢德〕 十九世紀末 美人

Bond, W. M.〔逢德〕 二十世紀前半期 美人

Bonet〔波涅特〕

Bongus, Petrus〔逢考斯〕 亦作 Pietro Bongo 或 Petrus Bungus 或 Peter Bungus (?—1601, 9, 24) 義人

Bonini, Pietro Maria〔波寧尼〕十六世紀前半期 義人

Bonne, Rigobert〔玻奈〕十八世紀

Bonnel, J. F.〔玻涅爾〕十九世紀末 法人

Bonnesen, T.〔逢內森〕(1873—) 丹麥人 研究非歐幾何學

Bonnet, P. Ossian〔波內〕(1819—1892) 法人

Bonnycastle, John〔逢尼卡斯爾〕(1750?—1821) 英人

Bonocchio, Lorenzo〔波諾契〕十六世紀末 義人

Bonola, Roberto〔玻諾拉〕(1875—1911, 5, 16) 義人 研究非歐幾何學

Bonolis, A.〔波諾利斯〕十九世紀後半期 義人

Bonsdorff, I.〔逢斯多夫〕二十世紀初 芬蘭人

Bony, J. A.〔波尼〕十九世紀中 法人

Bonynge, William〔波甯基〕十九世紀

Boole, George〔布爾〕(1815, 11, 2—1864, 12, 8) 英人 創立不變式與協變式論,著數學之思考解析,微分方程,差分法等.

Boole, M. E,〔布爾〕二十世紀初 英人 研究算術論理學

Boon, C. F.〔逢〕英人

Boon, F. C.〔逢〕二十世紀前半期 英人

Boormann, J. M.〔布耳孟〕

Booth, James〔蒲士〕(1806—1878) 英人 著橢圓積分,近世幾何學,發展拋物函數.

Booth, W.〔蒲士〕十九世紀末 英人

Boothroyd, S. L.〔蒲士壘〕二十世紀前半期 美人

Bopp, Karl〔波普〕十九世紀後半期 德人

Boquel, E. G.〔波揆爾〕十九世紀 法人 著解析幾何學

Boquet, F.〔波揆〕十九世紀後半期 法人

Borchard, L.〔波察德〕二十世紀　德人

Borchardt, B.〔波察德特〕十九世紀後半期　德人

Borchardt, Carl Wilhelm〔波察德特〕(1817—1880) 德人

Borchardt, Ludwig〔波察德特〕十九世紀末　德人

Borchardt, W. G.〔波察德特〕二十世紀　英人

Borda, Jean Charles de〔波耳達〕(1733—1799) 法人　著三角函數,對數表

Borden, R. F.〔波登〕(?—1927,3,15) 美人

Bordiga, Giovanni〔波狄加〕二十世紀前半期　義人

Bordigo, G.〔波狄各〕十九世紀後半期　義人

Bordoni, A.〔波多尼〕十九世紀中　義人

Borel, Émile〔波勒爾〕(1871—　) 法人　數理解析大家,研究確率學及函數論

Borel, E. F. E. J.〔波勒爾〕十九世紀末　法人

Borel, Jean〔波勒爾〕(1492—1572) 法人

Borelius, J.〔波勒利阿〕二十世紀初　瑞典人

Borelli, Giovanni Alfonso〔波勒利〕(1608, 1, 28—1679, 12, 31) 義人

Börgen, C.〔婆真〕二十世紀　德人

Börger, R. L.〔玻給〕二十世紀前半期　美人

Borghetti, Smiraldo〔波幾提〕十六世紀末　義人

Borghi, Pietro〔波基〕亦作 Pietro Borgi 或 Piero Borgi　(?—1494之後) 義人　著算術書

Borini, B.〔波靈尼〕十九世紀末　義人

Bork, H.〔婆克〕十九世紀後半期　德人

Born, Max〔婆〕(1882—　) 德人　研究相對論

Borreby, Ole Andersen〔波勒比〕十八世紀後半期　丹麥人

Borrel, Johannes〔鮑勒爾〕 卽 Jean Beteo

Borremans, Guglielmo Silio〔波累曼〕 十八世紀後半期 義人

Borriglione, Pietro〔波里略內〕 十六世紀前半期 義人

Börsch, A.〔波士〕 十九世紀後半期 德人

Borth, C. F.〔波司〕 十九世紀後半期 德人

Bortkiewicz, Ladislaus von〔波岐尉〕 亦作 L. v.Bortkievicz 或 L. von Bortkewich (?—1931, 7, 16) 俄人

Bortolotti, Erea〔波托羅提〕 或作 Ettore Bortolotti 十九世紀末 義人 著解析幾何學

Bos, H.〔博斯〕 十九世紀 法人

Bosanquet, B.〔博山揆〕 二十世紀 英人

Bosanquet, L. S.〔博山揆〕 二十世紀前半期 英人

Bosch, Klaas〔波斯刻〕 荷蘭人

Böschensteyn, Abraham〔波斯奇斯帖〕 十六世紀前半期 德人 佐罕之子

Böschensteyn, Johann〔波斯奇斯帖佐罕〕 亦作 J. Boschenstein (1472—1540) 德人

Boscherus〔部斯徹〕 卽 H. Buscher

Boschi, Pietro〔波斯契〕 (1833—1887) 義人

Boscovich, Ruggero Guiseppe〔波斯科維亦〕 (1711, 5, 18—1787, 2, 13) 義人

Bose, A. C.〔波司〕 (?—1926, 12, 11) 印度人

Bose, R. C.〔波司〕 二十世紀前半期 印度人

Boset〔波塞〕 十九世紀後半期 法人

Bosmans, Henri〔玻斯曼〕 亦作 Henry Bosmans (1852—1928, 2, 3) 比利時人

Bosse, Abraham〔玻色〕 (1611—1678) 法人

Bossut, Charles〔波緖〕(1730, 8, 11—1814, 1, 14)

Bossut, J.〔波緖〕十九世紀初　英人

Bossut, L.〔波緖〕十九世紀後半期　法人

Bostwick, A. E.〔波斯威克〕十九世紀末　英人

Bosworth, A. L.〔波斯衞史〕十九世紀末　德人

Bothmer, Graf〔波司麥〕十八世紀

Böttcher, J. E.〔波提協〕十九世紀後半期　德人

Böttcher, L. E.〔波提協〕十九世紀末　波蘭人

Bottema, O.〔波忒瑪〕二十世紀前半期　荷蘭人

Bottomley James Thomson〔波坦力〕(1845, 1, 10—1926, 5, 18)　蘇格蘭人
著數學表

Bouache, Ph.〔部亞岐〕(1700—1773)

Bouant, E.〔部安特〕十九世紀　法人

Bouasse, H,〔部亞栖〕十九世紀末　法人

Bouchard, J.〔部沙德〕法人

Boucharlat, J. L.〔部沙拉〕十九世紀前半期　法人　著微積分及曲面論

Bouché, Auguste〔部拆〕十九世紀後半期　法人

Boucheny, G.〔部岐力〕二十世紀　法人

Boucher, A.〔部社〕法人

Bocher, Maurice〔部社〕二十世紀前半期　法人

Boudrot〔部德洛〕

Bouelles, Charles de〔波厄耳〕亦作 Carolus Bovillus 或 C. Bouilles 或 C. Bouvelles
(1470—1553) 法人　發見餘擺線

Bougaev〔玻加厄〕十九世紀後半期　俄人

Bougainville, Louis Antoine de〔寶根微爾〕(1729—1811)　法人

Bouguer, Pierce〔波給〕(1698, 2, 16—1758, 8, 15) 法人 始用記號≧及≦. 於1735年至祕魯測子午線

Bouillau, Ismael〔部勞〕拉丁文作 Bullialdus (1605—1694) 法人

Bouilles, Charles〔波尼耳〕即 C. Bouelles

Boukreïeff. B. J.〔部克累夫〕二十世紀初 俄人

Boulanger, Auguste〔布郎熱〕(1866—1923) 法人

Bouligand, C.〔部利干〕二十世紀前半期 法人

Bouligand, Georges〔部利干〕二十世紀前半期 法人 研究調和函數.

Boulton, E. S.〔波爾吞〕二十世紀 英人

Bouman, J.〔步曼〕

Bouniakovski, Victor Jacovlevich〔波尼科斯啓〕(1804—1889) 俄人

Bounïtzky, E.〔波尼玆啓〕

Bouny, F.〔波尼〕二十世紀前半期 法人

Bouquet de la Grye〔寶揆〕十九世紀末

Bouquet, Jean Claude〔寶揆〕(1819—1885) 法人 研究函數論

Bour, *Jacques Edmond* Émile〔步爾〕(1831—1866) 法人 研究偏微分方程

Bourdon, L. P. M.〔部耳洞〕十九世紀

Bourdon, M.〔部耳洞〕十九世紀中 比利時人

Bourdon, P.〔部耳洞〕十九世紀後半期 比利時人

Bourdon, P. L. M.〔部耳洞〕十九世紀 著代數學

Bourgeois, R.〔部耳追斯〕二十世紀

Bourget, H.〔部耳熱〕十九世紀末 法人

Bourget, Justin〔部耳熱〕十九世紀中 法人

Bourget, L.〔部耳熱〕

Bourgoing, Charles〔部荀〕十七世紀後半期 法人

Bourguet, J. B. E. du〔部革〕

Bourguet, Louis〔部革〕(1678—1742) 瑞典人

Bourillon〔部里隆〕二十世紀 法人

Bourlet, C,〔部勒〕十九世紀末 法人

Bourne, A. A.〔勃倫〕二十世紀 英人

Bourne, C. W.〔勃倫〕十九世紀 英人

Bourrand, M.〔部藍德〕十八世紀後半期

Boussinesq, Joseph〔勃辛湼〕(1842—1929, 2, 19) 法人 數理物理學家

Boutin〔部廷〕十九世紀末

Bouton, C. L.〔部呑〕十九世紀末

Boutroux, Emil〔波特魯〕(1845—1921) 法人

Boutroux, Pierre〔波特魯〕二十世紀初 法人

Bouvelles, Charles〔波厄耳〕即 C. Bouelles

Bouvet, Joachin〔白晉〕(1650—1730) 法人 清康熙時來中國

Bovier-Lapierre, G.〔部未拉佩耳〕十九世紀後半期 法人

Bovillus, Carolus,〔波厄耳〕即 C. Bouelles

Bow, Robert Henry〔寶〕十九世紀 蘇格蘭人

Bowden, A. O.〔寶登〕二十世紀 美人

Bowden, Joseph〔寶登〕二十世紀前半期 美人

Bowditch, C. P,〔寶狄尺〕二十世紀初 美人

Bowditch, Nathaniel〔寶狄尺〕(1773, 3, 26—1838, 3, 16) 美人

Bowditch, N. I.〔寶狄尺〕十九世紀 美人

Bowen, L. H,〔玻恩〕二十世紀前半期 美人

Bower, O. K.〔玻偉〕二十世紀前半期 美人

Bowie, William〔玻威〕二十世紀前半期 美人

Bowler, A. J. 〔寶勒〕 二十世紀 英人

Bowles, Charles Farnklin 〔波爾茲〕 二十世紀前半期 美人

Bowley, Arthur Lyon 〔包力〕 (1869—) 英人 統計學家

Bowman, Charles E. 〔寶曼〕 二十世紀 美人

Bowman, F. 〔寶曼〕 二十世紀前半期 英人

Bowring, J. 〔寶鑑〕 十九世紀中 英人

Bowser, Edward A. 〔寶塞〕 十九世紀末 美人

Boy, A. 〔倍〕 二十世紀 德人

Boy, W. 〔倍〕 十九世紀末 德人

Boyce, Fannie W. 〔倍斯〕 二十世紀前半期 美人

Boyce, Maffatt Grier 〔倍斯〕 二十世紀前半期 美人 研究變分學

Boyd, Paul P. 〔倍德〕 二十世紀前半期 德人

Boydston, R. F. 〔倍德斯頓〕 二十世紀前半期 美人

Boyer, Jacques 〔爾耶〕 十九世紀末 法人

Boyle, Robert 〔波義耳〕 (1626—1691) 英人

Boys, C. Veron 〔倍斯〕 十九世紀 英人

Brabant, F. G. 〔不拉奔〕

Bracciolini, Poggio 〔布剌栖利尼〕 十五世紀 義人

Brackett, F. B. 〔布拉刻特〕 二十世紀前半期 美人

Bradford, G. H. 〔布剌佛德〕 (1846—1924, 9, 18) 英人

Bradley, F. H. 〔卜拉德賚〕 十九世紀後半期 英人

Bradley, H. 〔卜拉德賚〕 二十世紀 德人

Bradley, Harry C. 〔卜拉德賚〕 二十世紀 美人

Bradley, James 〔卜拉德賚〕 (1692—1762) 英人 數理天文學家

Bradshaw, J. G. 〔布剌德勺〕 十九世紀末 美人

Bradshaw, J. W.〔布刺德勺〕 二十世紀前半期 美人

Bradwardine, Thomas de〔布喇衛丁〕 亦作 Thomas de Bradwardine (1290—1349, 8, 26) 英人

Bragadino, Domenico〔布刺加第諾〕 十五世紀 義人

Bragelongne, *Abbé* Christophle Bernard de〔布勒革隆內〕 (1688—1744) 法人

Bragg, *Sir* William〔布勒格〕 二十世紀前半期 英人

Bragg, Wiliam Henry〔布勒格〕 (1862—) 英人

Bragstad, O. S.〔布勒斯塔〕 二十世紀初 德人

Brahana, H. R.〔布拉哈那〕 二十世紀前半期 美人

Brahe, Tycho〔布剌,泰綽〕 即 Tycho Brache

Brahmagupta〔婆羅門加塔〕 亦作 Brahmegpta (598—660) 印度人 著作大家,研究算術,代數,三角術及天文學.

Brahy, Ed.〔布剌喜〕 二十世紀前半期 法人

Braikenridge, William〔布累肯利治〕 (1700—1759之後) 蘇格蘭人

Braithwaite, R. B.〔布累威特〕 二十世紀前半期 英人

Brajtzew, J. R.〔布累策〕 二十世紀初 德人

Brambilla, A.〔布藍比拉〕 十九世紀末 義人

Bramble, C. C.〔布藍布爾〕 二十世紀前半期 美人

Bramer, Benjamin〔布藍麥〕 (1588—1648?) 德人

Brancker, Thomas〔勃蘭刻〕 (1636—1676) 英人

Brand, Alexander〔布藍德〕 二十世紀 英人

Brand, B.〔布藍德〕 十六世紀

Brand, E.〔布藍德〕 十九世紀末 法人

Brand, Louis〔布藍德〕 二十世紀前半期 美人 著向量力學

Brand, W.〔布藍德〕 二十世紀前半期 德人

Brandeberry, J. B.〔白蘭德柏立〕 二十世紀前半期 美人

Brandenburg, H.〔勃蘭登堡〕 二十世紀前半期 德人 著三角術表

Brander, Georg Friedrich〔白蘭得〕 十八世紀後半期

Brandes, H.〔白蘭德司〕 德人

Brandis, J.〔布藍狄斯〕 十九世紀後半期 德人

Brandt, H.〔布藍特〕 二十世紀前半期 德人

Brandt, Johann〔布藍特〕 十六世紀 德人

Brandt, Samuel〔布藍特〕 德人

Branford, Benchara〔布蘭福〕 二十世紀初 英人

Branker, Thomas〔勃蘭刻〕 即 T. Brancker

Brant, Laura〔布藍特〕 二十世紀前半期 美人

Brasch, F. E.〔布剌士〕 二十世紀前半期 美人

Brasch, H. D.〔布剌士〕 二十世紀 德人

Brasefield, Stanley Eugene〔布累茲飛德〕 二十世紀前半期 美人

Brasser, Franciscus〔布剌塞〕 十六世紀 德人

Brasser, J. R.〔布剌塞〕 荷蘭人

Brasseur, Jean Baptiste〔布剌秀〕 (1802—1868) 比利時人

Brassine, E.〔布剌幸〕 十九世紀中 法人

Brassinne, E.〔布剌幸內〕 十九及二十世紀 法人

Brathuhn, O.〔伯拉條〕 二十世紀 德人

Bratton, W. A.〔布拉頓〕 二十世紀前半期 美人

Bratu, G.〔布拉徒〕 二十世紀前半期 法人

Braude, A.〔柏勞德〕

Braude, L.〔柏勞德〕 二十世紀 法人

Braüer, Richard〔布牢厄〕 二十世紀前半期 德人

Braun, Ferdinard〔柏藍〕(1850—) 德人

Braun, H,〔柏藍〕二十世紀 德人

Braunmühl, Anton von〔柏藍睦爾〕亦作 Adalbert von Braunmühl (1853, 12, 22—1908, 3, 9) 德人生於俄 著三角術史

Bravais, A.〔布拉陨〕十九世紀中 法人

Bray, H. E.〔布累〕二十世紀前半期 美人

Brayan, H. G.〔布累安〕二十世紀初 英人

Bread, W. S.〔布李德〕二十世紀 英人

Brechtel, Stephan〔布勒威〕十六世紀 德人

Breckenridge, William E.〔布勒翠立治〕二十世紀 美人

Bredon, Simon〔布勒唐〕亦作 Biridanus (?—1386?) 英人

Bréguet, A.〔布累給〕十九世紀後半期 法人

Breidenbach, W.〔布賴登巴哈〕二十世紀前半期 德人

Breit, Gregory〔布來特〕二十世紀前半期 美人

Breitschneider, C. A.〔布來士奈得〕十九世紀中 德人

Breitschwert, C. A.〔布來士味特〕十九世紀 德人

Brelot, Marcel〔布勒洛〕二十世紀前半期 法人

Bremiker, Carl〔布勒密刻〕亦作 Karl Bremiker (1804—1877) 德人 著數學表

Brendel, Georg〔布棱得〕十七世紀 德人

Brendel, Joh. Gottfr.〔布棱得〕(1712—1758) 德人

Brendel, Martin〔布棱得〕二十世紀初 德人

Brenke, William Charles〔布倫克〕二十世紀初 美人 著代數學

Brennan, Louis〔布倫力〕二十世紀初 英人

Brennecke, W.〔布倫涅克〕二十世紀初 德人

Brenner, J.〔布里納〕二十世紀前半期　瑞士人

Breslich, Ernst R.〔布利士力〕二十世紀前半期　美人

Bressius〔布里西阿〕

Bret, Jean Jacques〔布勒〕(1781—?)　法人

Breton, de Champ〔布勒通〕十九世紀中　法人

Bretschneider, Carl Anton〔布勒士奈得〕(1808, 5, 27—1878, 11, 6)　德人　幾何學家

Breuer, A.〔布路厄〕十九世紀末　奧人

Breuer, Samson〔布路厄〕二十世紀前半期　德人

Breusing, A.〔布路星〕十九世紀後半期　德人

Brewer, J. S.〔布魯厄〕十九世紀中　英人

Brewster, *Sir* David〔部廬斯脫〕(1781—1868)　蘇格蘭人

Brewster, G. W,〔部廬斯脫〕二十世紀初　英人

Brianchon, Charles Julien〔布里安春〕(1783, 12, 19—1864, 4, 29)　法人　發明圓錐曲線內接六邊形之各對邊相交於一點。

Bricard, Raoul〔布立卡〕十九世紀末　法人　幾何學家

Bridferth〔布立斐司〕十世紀　英人

Bridge, Bewick〔布立治〕(?—1833, 5, 15)　英人

Bridge, R.〔布立治〕十九世紀前半期　英人

Bridgeman, Percy W,〔布立治曼〕即 P. W. Bridgman

Bridges, Noah〔布立澤茲〕十七世紀中　英人

Bridgett, R. C.〔布立葛特〕二十世紀　英人

Bridgman, Percy W.〔布立治曼〕亦作 P. W. Bridgeman　二十世紀初　美人

Bridgs, J. H.〔布立芝斯〕十九世紀末　英人

Briefmaler, Hanns〔布里夫瑪勒〕十五世紀　德人

Briggs, G. B. 〔布理格〕 二十世紀前半期 美人

Briggs, G. R. 〔布理格〕 十九世紀 美人 著解析幾何學

Rriggs, Henry 〔布理格〕 (1560, 2, —1630, 1, 26) 英人 創造以十爲底之常用對數

Bright, Edward 〔伯來脫〕 (?—1931, 3, 17) 美人

Brill, Alexander v. 〔布理爾〕 (1842—) 德人 研究曲線論,函數論

Brill, John 〔布理爾〕 二十世紀前半期 英人

Brill, L. 〔布理爾〕 十九世紀 德人 設立製造幾何學模型廠於德國丹穆斯達 (Darmstadt)

Brillouin, Léon 〔布里路英〕 二十世紀前半期 法人 數理物理家

Brillouin, Marcel 〔布里路英〕 十九世紀後半期 法人

Bring, Ebbe Samuel 〔布林〕 十九世紀

Bring, Erland Samuel 〔布林〕 (1736—1798) 瑞典人

Brink, Raymond W. 〔勃林克〕 二十世紀前半期 美人

Brinkley, John 〔布麟克力〕 (1763—1835, 9, 14) 英人

Brinkmann, H. W. 〔勃林克曼〕 二十世紀前半期 美人

Brioschi, Francesco 〔布里士奇〕 (1824—1897) 義人 著行列式論

Briot, Charles *Auguste Albert* 〔布里奧〕 亦作 J. A. A. Briot (1817—1882) 法人 研究亞柏爾函數,橢圓函數,週期函數等.

Brioullin, Léon 〔布里奧林〕 二十世紀前半期 法人

Brisse, Ch. 〔布里栖〕 十九世紀末 法人

Brisson, Barnabé 〔布里松〕 (1777—1827) 法人

Brisson, Mathurin Jacques 〔布里松〕 (1723—1806) 法人

Bristol, W. H. 〔布里斯拖〕 (1860—1930) 美人

Brito Rebello, J. I. de 〔布里托.利百洛〕 葡萄牙人

Brix, W.〔布里克斯〕十九世紀後半期　德人

Brixey, John Clark〔布立克色〕二十世紀前半期　美人

Broad, Charlie Danbar〔布洛德〕(1887—　) 英人

Broadbent, T. A. A.〔布洛德本〕二十世紀　英人

Broager, P. D.〔布洛給〕十九世紀中　丹麥人

Brocard, Henri〔卜洛卡〕(1845—　) 法人　貢獻於三角形幾何學

Broch, Ole Jacob〔布洛〕(1818—1889) 挪威人

Brockhaus〔布洛克豪斯〕十九世紀中　德人

Brockmann, F. J.〔布洛克曼〕十九世紀後半期　德人

Brodén, T.〔布洛登〕十九及二十世紀　丹麥人

Brodetsky, Selig〔布洛德司啓〕二十世紀前半期　英人　著直線圖解術

Brodie, W. M.〔布洛狄〕(?—1932, 4,) 美人

Broecker, H.〔布魯刻〕十九世紀末　德人

Broggi, H.〔布洛基〕二十世紀　阿根廷人

Broggi, U.〔布洛基〕二十世紀初　德人

Broglie, Louis de〔布洛利〕(1892—　) 法人　著波動力學

Broman, K. E.〔布洛曼〕

Bromley, Charles H.〔布剌讀力〕二十世紀　美人

Bromse, H.〔布洛栖〕二十世紀初　德人

Bromwich, Thomas John I'Anson〔白郎尉契〕(1875—1929,8,24) 英人　級數論解析學專家

Bronkhorst, Jan〔布龍賀斯特〕通常以其所生地命名曰 Noviomagus (1494—1570) 荷蘭人

Brook-Smith, J.〔布魯克•斯密司〕十九世紀　英人

Brooke, W. E.〔勃魯克〕二十世紀前半期　美人

Brookman, T. A, 〔布魯克曼〕 二十世紀 美人

Brooks, Edward 〔布魯克斯〕 十九及二十世紀 美人 研究數理哲學

Brooks, J. M. 〔布魯克斯〕

Brooksmith, E. J. 〔布魯克斯密〕 十九世紀末 英人

Broscius, Johannes 〔布洛策〕 卽 J. Brożek

Brose, Henry L. 〔布洛栖〕 二十世紀 英人

Brougham, *Lord* Henry 〔布魯姆〕 十八世紀末 英人

Brouncker, *Lord* William 〔布魯剋〕 常稱 Lord Brounker 或 Viscount Brounker (1620—1684, 4, 5) 愛爾蘭人

Brouwer, Dirk 〔布牢厄〕 二十世紀前半期 英人

Brouwer, L. E. J. 〔布牢厄〕 (1881—) 荷蘭人 數理哲學直觀派大家

Brown, A. B. 〔布朗〕

Brown, B. H. 〔布朗〕 二十世紀前半期 美人

Brown, Crum 〔布朗〕 二十世紀 蘇格蘭人

Brown, E. H. 〔布朗〕 二十世紀初 英人 研究差分學

Brown, Eleanor P. 〔布朗〕 卽 Mrs. B. H. Brown 二十世紀前半期 美女人

Brown, Ernest William 〔布朗〕 (1866—) 美人

Brown, Frederick G. W. 〔布朗〕 二十世紀前半期 英人

Brown, George Lincoln 〔布朗〕 十九世紀末 美人

Brown, H. S. 〔布朗〕 二十世紀前半期 美人

Brown, J. 〔布朗〕 十九世紀前半期 英人

Brown, J. C. 〔布朗〕 二十世紀 美人

Brown, J. T. 〔布朗〕 二十世紀前半期 英人

Brown, Lillian O. 〔布朗〕 二十世紀前半期 美人

Brown, O. E. 〔布朗〕 二十世紀前半期 美人

Brown, R.〔布朗〕十九世紀

Brown, Stimson J.〔布朗〕二十世紀 美人

Brown, T. A.〔布朗〕二十世紀前半期 英人

Brown, T. H.〔布朗〕二十世紀前半期 美人

Brown, T. K.〔布朗〕美人

Brown, Wensel Langley〔布朗〕二十世紀前半期 美人

Browne *Jr.*, C. A.〔布牢温〕二十世紀

Browne, E. T.〔布牢温〕二十世紀前半期 美人

Browne, G. F.〔布牢温〕十九世紀 英人

Browne, R. T.〔布牢温〕二十世紀

Brownlee, John〔布勞利〕二十世紀 英人 統計學家

Brożek, Johannes〔布洛策〕亦作 J. Broscius 十七世紀 荷蘭人

Brucæus, Henricus〔布剌偿阿〕(1531—1593, 12, 31) 荷蘭人

Bruce, R. E.〔布魯司〕二十世紀前半期 美人

Bruce, W. H.〔布魯司〕

Brückel, P.〔布律克爾〕十九世紀後半期 德人

Brückner, J. M.〔布律剋涅〕十九世紀後半期 德人

Brückner, Max〔布律剋涅〕十九世紀末 德人

Brudzewo, Albert Blar von〔布剌策窩〕卽 A. Blar

Brües, M.〔布律斯〕二十世紀初 德人

Bruggmann, E.〔布魯格曼〕二十世紀前半期 瑞士人

Brugnatelli, Lodovico Gasparo〔布律那忒利〕(1761—1818) 義人

Brugsch, H.〔布魯克士〕十九世紀中 德人

Bruhns, C.〔布律斯〕二十世紀 英人

Bruhs, Karl Christian〔布魯斯〕德人 著對數表

Brüll, A. 〔布魯爾〕 十九世紀後半期 法人

Brüll, E. 〔布魯爾〕 二十世紀前半期 德人

Brumbaugh, M. A. 〔布剌包〕 二十世紀前半期 美人

Brumby, A. G. 〔布剌比〕 二十世紀 英人

Brun, F. de 〔布崙〕 即 De Brun

Brun, Viggo 〔布崙〕 二十世紀 挪威人

Brunacci, Vincenzo 〔布魯納西〕 義人

Brunace 〔布崙內斯〕

Brunel, G. 〔布剌涅〕 十九世紀末 法人

Brunel, H. M. 〔布剌涅〕 十九世紀

Brunelleschi, Filippo 〔布魯涅勒岐〕 (1379—1446, 4, 16) 義人

Brunet, Pierre 〔布剌涅特〕 法人

Brunhes, Bernard 〔布綸〕 十九世紀末 法人

Bruni, Kaufmann 〔布魯泥〕

Brunn, A. von 〔布隆〕 二十世紀初 但澤人

Brunn, Hermann 〔布隆〕 十九及二十世紀 德人

Bruno, Fr. Faà di 〔白魯諾〕 (1825—1888) 義人 研究不變式論

Bruno, Gioràano 〔白魯諾〕 (1548—1600) 義人 天文數理學家

Bruno, Jordanus 〔白魯諾〕 十六世紀 德人

Bruns, H. 〔布藍士〕 十九世紀後半期 德人

Bruns, H. W. 〔布藍士〕 二十世紀前半期 瑞士人

Brunschvicz, Léon 〔布崙士維〕 亦作 L. Brunschwicz 二十世紀前半期 法人研究數理哲學

Brunus, Albertus 〔布倫那〕 (1461—1541) 法人

Brüser, W. 〔布魯塞〕 二十世紀初 德人

Brusiin, A.〔布魯信〕 十九世紀末 瑞典人

Brusotti, Luighi〔布魯索替〕 二十世紀前半期 義人

Bruton, G. S.〔布魯頓〕 二十世紀前半期 美人

Bryan, Charlotte Lowe〔布賴安〕 二十世紀前半期 美人

Bryan, G. H.〔布賴安〕 (1864—1928,10,13) 德人 著數理天文學

Bryan, N. R.〔布賴安〕 二十世紀前半期 美人

Bryan, William, Lowe〔布賴安〕 二十世紀 美人

Bryan, W. W.〔布賴安〕 二十世紀 英人 研究天文數理

Bryant, H. B.〔布賴安特〕 十九世紀 美人

Bryant, L. W.〔布賴安特〕 二十世紀 英人

Bryant, Sophie〔布賴安特〕 十九世紀 英人

Bryant, W. W.〔布賴安特〕 二十世紀

Bryson of Heraclea〔白賚松〕 亦作 Bryson von Heraklaea 或 Bryso (520?B. C. —450?B. C.) 希臘人

Bryte, Walter〔布賚提〕 十四世紀 英人

Buache〔布亞岐〕 十八世紀

Bubb, F. W.〔巴布〕 二十世紀前半期 美人

Bubnov, Nicolaus〔巴布諾〕 亦作 Nikol. Bubnow 十九及二十世紀 俄人

Bucca〔巴卡〕

Buchanan, Daniel〔布卡南〕 二十世紀前半期 坎拿大人

Buchanan, Herbert E.〔布卡南〕 二十世紀前半期 美人 著高等代數

Buchanan, J.〔布卡南〕 二十世紀初 英人

Buchanan, Margaret〔布卡南〕 二十世紀前半期 美人

Buchanan, R.〔布卡南〕 二十世紀

Buchanan, Scott〔布卡南〕 二十世紀前半期 美人

Buchanan, S. M.〔布卡南〕 二十世紀　美人

Buchbinder, Fr.〔布胡丙得〕 十九世紀　德人

Büchel, C.〔畢拆爾〕 德人

Büchel, W.〔畢拆爾〕 二十世紀初　德人

Bucherer, A. H.〔步拆累〕（1865—1927, 4, 16） 德人　研究函數論及向量解析

Buchheim, Arthur〔布希亥〕（1859—1888） 英人

Buchholz, E.〔布胡和次〕 十九世紀後半期　德人

Buchholz, H.〔布胡和次〕 二十世紀　德人

Büchner, Johann Gottfried〔畢希勒〕（1695—1749） 德人

Bucht, G.〔步希特〕 二十世紀初　瑞典人

Buchwald, E.〔步希窩爾〕 十九世紀後半期　英人

Buchwaldt, F. A.〔步希窩爾特〕 二十世紀前半期　丹麥人

Buck, R. C.〔巴克〕

Buck, Thomas〔巴克〕 二十世紀前半期　美人

Buckingham, C. P.〔巴京汗〕 十九世紀後半期　美人

Buckley, A.〔巴克力〕 二十世紀　英人

Buckley, William〔巴克力〕（?—1569） 英人

Bucks, F. J.〔巴克斯〕（1722—1786）

Budaeus, Guillaume〔步對〕 即 G. Budé

Budan, F. D.〔布丹〕 十九世紀初　法人

Budde, E.〔善特〕 二十世紀　德人

Budde, W.〔善特〕 十九世紀後半期　德人

Budden, E.〔善登〕 二十世紀初　英人

Buddha〔佛佗〕 $\left(\begin{matrix}543?\ \mathrm{B.C.}\\623?\ \mathrm{B.C.}\end{matrix}-?\right)$ 印度人

Budé, Guillaume〔步對〕 亦作 G. Budaeus (1467—1540, 8, 23) 法人 冉之子

Budé, Jean〔步對,冉〕 十五世紀 法人

Budel, René〔步得爾〕 亦作 Budelius 十六世紀末 德人

Budge, E. W.〔巴治〕 十九世紀末 英人

Budisavljevic, E.〔步狄薩澤維〕 二十世紀 奧人

Buée, Abbé Q.〔標厄〕 十九世紀初 法人

Buetzberger, F.〔標柏澤〕 十九世紀末 瑞士人

Buff, H,〔巴夫〕 十九世紀

Buffon, George Louis Leclerc Comte de〔蒲豐〕 (1707—1788) 法人

Buglio, Louis〔利類思〕 (?—1684) 義人 明崇禎十年(1637年)來中國

Buhl, Adolphe〔步爾〕 二十世紀前半期 法人 研究級數及羣論

Buhl, L.〔步爾〕 二十世紀前半期 法人

Bühler, G.〔步勒〕 十九世紀末 法人

Buka, F.〔布卡〕 十九世紀後半期 德人

Bulgaris, Eugenios〔布加利〕 十八世紀末 德人

Bull, L,〔部爾〕 二十世紀 英人

Bullard, James A.〔步拉德〕 二十世紀前半期 美人

Bullard, W. G.〔步拉德〕 (?—1927, 2, 26) 美人

Bullialdus〔步力亞達〕 卽 I. Bouillau

Bullock, R. C.〔步羅克〕 二十世紀前半期 美人

Bumer, C. T.〔班麥〕 二十世紀前半期 美人

Bungus, Peter〔拜斯〕 亦作 Petrus Bungus 卽 Petrus Bongus

Bunicky, E.〔拜尼啓〕 二十世紀前半期 捷克人

Bunkofer, W.〔奔科斐〕 十九世紀後半期 德人

Bunyakovski〔班雅科斯啓〕 十九世紀中 俄人

Burali-Forti, Cesare〔柏拉里福替〕(1861—1931, 1, 21) 義人

Burali-Forti, I.〔柏拉里福替〕二十世紀 義人

Burat, E.〔柏拉〕十九世紀 法人

Buratini〔柏拉廷尼〕十七世紀後半期 義人

Burbach〔裴巴哈〕即 Peuerbach

Burbury, Samuel Hawksley〔柏玻里〕十九世紀後半期 英人 研究數理電磁學

Burcham, F. E.〔柏產〕二十世紀前半期 美人

Burchardt〔柏查德特〕

Burchett, E. S.〔柏拆特〕

Burchett, R.〔柏拆特〕十九世紀 英人

Burchnall, J. L.〔柏契那爾〕

Burckhardt, F.〔部克哈特〕十九世紀 瑞士人

Burckhardt, Heinrich.〔部克哈特〕十九世紀末 德人

Burckhardt, J. Ch.〔部克哈特〕或作 J. K. Burckhardt (1773—1825) 法人

Burckhardt, W.〔部克哈特〕十九世紀 德人

Burg〔堡〕十七世紀

Burg, A.〔堡〕十九世紀前半期 奧人

Burgardt, O.〔柏給特〕二十世紀前半期

Burgatti, P.〔巴咖替〕二十世紀前半期 義人

Burgers〔步革士〕

Burgess, E.〔柏澤斯〕美人

Burgess, H. T.〔柏澤斯〕二十世紀前半期 美人

Burgess, J.〔柏澤斯〕十九世紀末 英人

Burgess, Robert Wilbur〔柏澤斯〕二十世紀前半期 美人 著統計數理

Bürgi, Joost〔步季〕亦作 Jobst Bürgi (1552,2,28—1632,1,31) 瑞士人 發明對數

Bürja, Abel〔步哲〕(1752—1816) 德人

Bürk, Albert〔步克〕二十世紀初 德人

Burkamp, W.〔柏坎普〕二十世紀前半期 德人

Burke, John Butler〔柏克〕二十世紀前半期 英人 研究數理哲學

Burke, L.〔柏克〕二十世紀前半期 美人

Burkett, F. J. H.〔部刻特〕二十世紀前半期 美人

Burkhardt, E.〔柏克哈〕十九及二十世紀 德人

Burkhardt, Heinrich〔柏克哈〕(1861—1914) 瑞士人 著函數論

Burkhardt, Johann Karl〔柏克哈〕(1773—1825) 德人

Bürklen, O. Th.〔步克楞〕二十世紀前半期 德人 著解析幾何學

Burleigh, Walter〔柏力〕卽 Watter Burley

Burley, Walter〔柏力〕亦作 Walter Burleigh $\left(1275—\frac{1337}{1357}\right)$ 英人

Bürmann, Heinrich〔步曼〕亦作 H. Burman (?—1817) 德人

Burmester, Ludwig〔柏麥斯特〕(?—1927) 德人

Burn, J.〔柏〕二十世紀初 英人 著差分學

Burn, R. S.〔柏〕

Burnaby, S. B.〔柏拿比〕二十世紀初 英人

Burnam, J. E.〔柏那〕二十世紀前半期 美人

Burnell, A. C.〔柏涅爾〕十九世紀後半期 英人

Burnengo〔巴能哥〕

Burnet, Gilbert〔柏涅特〕(1643—1715) 英人 威廉之父

Burnet, William〔柏涅特,威廉〕(1688—1729) 英人

Burnet de Kemney, Thomas〔柏涅特〕十八世紀

Burnett, J. C.〔柏涅武〕二十世紀　英人

Burney, Ch.〔柏尼〕(1726—1814) 英人

Burnham, J.〔本罕〕二十世紀前半期　美人

Burnham, R. W.〔本罕〕二十世紀　美人

Burns, Josephine E.〔朋斯〕二十世紀前半期　美人

Burnside, William *Snow*〔本賽德〕(1852—1927, 8, 21) 英人　方程式論及羣論大家

Burrau, Carl〔柏勞〕二十世紀　德人

Burritt, E. H.〔巴立特〕

Burrow, R.〔巴洛〕(1747—1792) 英人

Burstin, C.〔巴司廷〕二十世紀前半期　奧人

Burwell, W. R.〔柏衞爾〕二十世紀前半期　美人

Büsch, J. G.〔部士〕(1728—1800)

Busche, E.〔步徹〕十九世紀後半期　德人

Buscher, Heizo〔部斯徹〕亦作 Boscherus 十六世紀末

Buschius, Hermannus〔步岐阿〕十六世紀初　德人

Busco, P.〔巴斯哥〕二十世紀　法人

Bush, Vannevar〔保士〕二十世紀前半期　美人

Bush, W. N.〔保士〕二十世紀初　美人

Bushey, J. H.〔步申〕二十世紀前半期　美人

Bushing, Anton Friedrich〔巴細〕(1724—1793) 德人　研究比較統計學

Busolt, M.〔巴索爾特〕十九世紀末　德人

Busse, F.〔步柄〕十九世紀末　德人

Busse, Friedr. Gottieb〔步栖〕(1756—1835) 德人

Bussey, William Henry〔步西〕二十世紀初　美人

Bustillo〔部斯替洛〕十九世紀 西班牙人

Buswell, G. T.〔巴斯衞爾〕二十世紀前半期

Butchart, R. K.〔部察特〕(?—1931, 3, 30) 英人

Buteo, Jean〔標條〕亦作 Johannes Buteo 或 Johannes Borrel 或 J. Butéon (1492—1572) 法人 代數及幾何學家

Butler, Loren G.〔蒲脫勒〕二十世紀前半期 美人

Butler, Pierre〔蒲脫勒〕二十世紀前半期 美人

Butler, R.〔蒲脫勒〕十七世紀前半期 英人

Butler, W.〔蒲脫勒〕十八世紀末 英人

Butterworth, John〔標忒衞史〕十九世紀

Butterworth, S.〔標忒衞史〕二十世紀 英人

Butz, W.〔巴茲〕二十世紀 德人

Bützberger, F.〔步柏吉〕十九世紀後半期 瑞士人

Buxerius, Claudius,〔巴克薛利阿〕卽 Boissière

Buy, C. H. D.〔彪〕十九世紀

Buzengeiger, Karl〔步則蓋給〕(1771—1835) 德人

Byer, J. W.〔拜爾〕卽 J. G. Bajerus

Byerly, Perry〔拜力〕二十世紀前半期 美人

Byerly, William, Elwood〔拜力〕十九世紀末 美人 研究微積分,傅利級數,調和函數等.

Byk, A.〔比克〕二十世紀 德人

Byrhtferth〔擺特斐司〕十世紀 英人

Byrne, Oliver〔拜〕十九世紀中 美人

Byrne, W. E.〔拜〕二十世紀前半期 美人

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第三卷第一期目錄

國立武漢大學理科季刊第三卷第二期目錄

國立武漢大學社會科學季刊第三卷第三號目錄

理科季刊委員會編輯委員

介紹期刊

地質彙報……………………………北平西城兵馬司九號國立北平研究院地質學研究所

牛頓……………………………………日本東京市目黑區大岡山七一牛頓月刊社

理工雜誌……………………………上海呂班路二二三號震旦大學理工學院

理學院季刊…………………………河南大學理學院

電業季刊……………………………南京城內大石壩街廿一號全國民營電業聯合會編輯股

無綫電雜誌…………………………上海愛多亞路一三九五號中國業餘無線電社

化學季刊……………………………國立北平大學工學院化學季刊社

化工……………………………………國立浙江大學化學工程學會

土木工程會會刊……………………復旦大學土木工程學會

高工土木工程學會會刊…………浙大高工土木工程學會

瓊崖實業雜誌………………………瓊州海口東門內實業雜誌社

介紹期刊

時事類編……………………………上海福煦路八〇三號中山文化教育館

學風……………………………………安徽省立圖書館

青年世界……………………………四川重慶天主堂街重慶書店青年世界雜誌社

婦女旬刊……………………………杭州中華婦女學社

南洋情報……………………………上海眞如國立暨南大學

民大校刊……………………………廣東荔枝灣國民大學

安徽大學週刊………………………安慶安徽大學

國立四川大學周刊……… …………成都四川大學

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

南華評論……………………………上海山東路三二〇號南華評論社

中學生………………………………上海四馬路八五號開明書局

眞光校刊………… …………………廣州市白鶴洞私立眞光女子中學

國立武漢大學理科季刊

第三卷第三期

價目	郵費
全年四册 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十二年三月發行

1933年

第3卷

第4期

國立武漢大學
理科季刊

第三卷第四期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. III No. 4 June 1933

本 期 目 錄

中華民國二十二年六月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認爲新聞紙類

1

國立武漢大學理科季刊

第三卷第四期目錄

頁數

國立武漢大學理科季刊

第四卷第一期目錄預告

近代之不等式

蕭 文 燦

往昔之解析學僅僅連結等式所表之關係為多.對於不等式未加引用.然簡單之理論等式固足以表之.而繁複之理論則非單用等式所能勝任.數學隨時代而俱進,現時理論之繁雜深遂,迥非前代所可比擬.其推演非藉助於不等式不可.不等式之活用實可稱為現代數學之特徵.由不等式連結而成之推論與結論至成為解析學之骨幹.現代英國解析大家 G. H. Hardy 氏有言:"凡解析數學者,其自身研究而不得之證明,其涉獵文獻,耗費於不等式之探討者,恆費時間之半." 斯言也,實可見不等式在解析學上所占之位置也.

茲篇所集多為最近數十年以來發展之不等式,然其時間並無何等顯明之界限,其性質重要者雖時代稍遠亦附及之.且不等式之滋衍,現在正在發展之途中,各國雜誌時有論文發表,而尤以英國 Hardy, Littlewood 諸氏之研究為盛.欲求於一文中網羅殆盡實不可能.故所論列實亦不過比較重要者耳.說者謂不等式之重要以其為應用計也.現時繁雜之不等式,有尚未發現其應用者,何貴乎此.斯蓋皮相

之言而味於數學之性質者也.吾人卽不論不等式本身之美麗已不失其研究之價値.而數學上往往今日視爲無用而在後日發現其有極重要之應用者.然則今後解析學之演進其有賴於今日認爲無用而繁雜之不等式固未可知也.

以下爲敍述簡單計,如未特別聲明,特約定以

$$a, a_1, a_2, \cdots\cdots, b, b_1, b_2, \cdots\cdots, p, p_1, p_2, \cdots\cdots$$

諸文字表一切之正實數.以

$$m, m_1, m_2, \cdots\cdots, n, n_1, n_2, \cdots\cdots$$

等文字表一切之正整數.

I. 代數的不等式

1. Cauchy 氏不等式.

定理 若 $a_i \geqq 0 \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 則:

$$(1) \qquad \boxed{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}}$$

諸 a 皆相等時,等號成立.

此爲等比中項不大於等差中項之一般定理,爲普通書籍中所常見.其證明方法有人發現其有無窮之多,茲以其重要,特舉 Cauchy 氏之證明於次:

(i) $n=2$ 之時.

$$a_1 a_2=\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2-\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2<\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2.$$

(ii)　$n=2^m$ 之時.

$$a_1 a_2 a_3 a_4<\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)^2<\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^4,$$

....

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_n<\left(\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)^n, \qquad (n=2^m).$$

(iii)　n 非 2^m 之時. 此時選一 m 如 $n<2^m$, 而令

$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

於(ii)中之 (2^m-n) 個換以相同之 a, 則

$$a_1 a_2\cdots a_n a^{2^m-n}<\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^m-n)a}{2^m}\right)^{2^m}=a^{2^m}.$$

故　$$a_1 a_2 \cdots a_n < a^n=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n.$$

又式中 $a_r \neq a_s$ 時將 a_r 與 a_s 皆以 $\frac{1}{2}(a_r+a_s)$ 代之則其和不變, 由(i)可見積增大,故凡 a_s 皆相等之時僅等號成立.

2. Jensen 氏之不等式.

Jensen氏 定理(第一形). $\varphi(x)$ 在某區間連續,且如爲

(i) 中凸*時,則

---

* 實變數 x 之有界一價實函數 $\varphi(x)$ 於某區間滿足於不等式

$$\varphi(x)+\varphi(y)>2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

時,謂函數 $\varphi(x)$ 在該區間爲中凸 (Convex). 滿足於不等式

$$\varphi(x)+\varphi(y)<2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

時謂函數 $\varphi(x)$ 在該區間爲中凹 (Concave). 滿足於等式

$$\varphi(x)+\varphi(y)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

時謂爲綫狀 (Linear).

由此定義可見函數 $\varphi(x)$ 凸凹之意乃係指對于 x 軸而言.

(2
$$\boxed{\varphi\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) \leqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}}$$

(ii)中凹時則

(3)
$$\boxed{\varphi\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) \geqq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}}$$

成立.但此等 x_ν 皆在該區間,而 a_ν 爲任意之正常數.

Jensen之證明. (i) 因 $\varphi(x)$ 爲中凸,是以

$$\varphi(x)+\varphi(x_2)\geqq 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

成立.則

$$\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)+\varphi(x_4)\geqq 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)$$
$$\geqq 4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right).$$

如斯繼續進行,於一般之正整數 m, 而

$$\sum_{\nu=1}^{2^m}\varphi(x_\nu)\geqq 2^m\varphi\left(2^{-m}\sum_{\nu=1}^{2^m}x_\nu\right)$$

皆成立,蓋不難用數學歸納法證明之也.

次 n 爲任意之正整數時,則可選得

$$2^m>n.$$

仍令 $x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots\cdots=x_{2^m}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

則
$$\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu)+(2^m-n)\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right)\geqq 2^m\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right).$$

卽

$$(4)\qquad \boxed{\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu\right)\leqq\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\varphi(x_\nu).}$$

令 n_μ 爲正整數, n 爲

$$n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_m$$

如此由(4)選適當之 x_ν 則

$$\varphi\left(\frac{1}{n}(n_1x_1+n_2x_2+\cdots\cdots+n_mx_m)\right)$$

$$\leqq\frac{1}{n}\Big(n_1\varphi(x_1)+n_2\varphi(x_2)+\cdots\cdots+n_m\varphi(x_m)\Big),$$

$a_1, a_2,\cdots\cdots, a_m$ 爲任意之正數,今令如次:

$$a\equiv a_1+a_2+\cdots\cdots+a_m.$$

而 $n\to\infty$ 時則

$$\lim\frac{n_\nu}{n}=\frac{a_\nu}{a},\quad(\nu=1,2,\cdots\cdots,m-1)$$

如是則

$$\lim\frac{n_m}{n}=1-\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{m-1}}{a}=\frac{a_m}{a}.$$

然由假設 $\varphi(x)$ 爲連續,故

$$\varphi\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m}a_\mu x_\mu}{a}\right)\leqq\frac{\sum_{n=1}^{m}a_\mu\varphi(x_\mu)}{a}.$$

是卽(2)矣.

(ii) 中凹之時同樣證明.

Jensen 氏定理之第二形. $\varphi(t)$ 乃於 $0<t$ 時有有限的二階導來函數之實函數, $p_\nu\,(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$ 爲任意之正數.如

(i)　$\varphi''(t)>0$時則

(2)
$$\varphi\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu t_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}\right) \leqq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \varphi(t_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu};$$

(ii)　$\varphi''(t)<0$時則

(3)
$$\varphi\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu t_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}\right) \geqq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \varphi(t_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}.$$

(2)與(3)於

$$t_1=t_2=\cdots\cdots=t_\nu$$

時僅等號成立.

證明　令

$$T\equiv\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu t_\nu\right):\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right),$$

$\varphi(t)$到二階有有限的導來函數,則用其展開式

$$\varphi(t_\nu)=\varphi(T)+(t_\nu-T)\varphi'(T)+\frac{(t_\nu-T)^2}{2!}\varphi''(T+\theta(t_\nu-T)),$$
$$0\leqq\theta\leqq1.$$

故

$$[(2)之右邊]=\varphi(T)+\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \frac{(t_\nu-T)^2}{2!}\varphi''(\tau_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu},$$

$$\tau_\nu\equiv T+\theta(t_\nu-T).$$

(i)　但$\varphi''(t)>0$,故上式Σ號內爲正,是以

$$[(2)之右邊]\geqq\varphi(T).$$

此處於一切之 ν 皆 $t_\nu=T$ 時,僅等號成立.(2)之證明卽完全也.

(ii) $\varphi''(t)<o$ 時, 上式 Σ 號內爲負與 (i)平行進行得

$$[(3)之右邊]\leqq\varphi(T)$$

於一切之 ν

$$t_\nu=T$$

時僅等號成立.

不等式(2),(3) Jensen 於次之論文證明之.

J. L. W. Jensen, sur les fonctions convexs et les inégalités les valeurs moyennes, Acta Mashematica, 30 (1906).

3. Hölder 氏之不等式.

Hölder 氏之定理, 設有 $p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 之正實數 p,q, 而 $a_s\geqq o,\ b_s\geqq o\ (s=1,2,\cdots\cdots,n)$ 時則:

$$(5)\qquad \boxed{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}}.}$$

若於 $b_\nu^q=\lambda a_\nu^p\ (\lambda>o)$ 時僅等號成立.

Jensen 氏之證明. 令

$$\varphi(t)\equiv t^p,\quad p>1,\quad t>o$$

則

$$\varphi''(t)=p(p-1)t^{p-2}>o,$$

依此,代入(2)中則

$$\left(\frac{p_1t_1+p_2t_2+\cdots\cdots+p_nt_n}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}\right)^p<\frac{p_1t_1^p+p_2t_2^p+\cdots\cdots+p_nt_n^p}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n},$$

卽

$$(5_1) \qquad \boxed{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu t_\nu\right)^p < \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)^{p-1} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu t_\nu^p.}$$

其中,令

$$t_\nu = \left(\frac{q_\nu}{p_\nu}\right)^{\frac{1}{p}}$$

兩邊各開 p 次方則

$$\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu{}^{1-\frac{1}{p}} q_\nu{}^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

令

$$p_\nu = b_\nu^q, \quad q_\nu = a_\nu^p$$

卽得(5)也. 而等號成立僅限於

$$t_1 = t_2 = \cdots\cdots = t_n$$

卽 $$b_\nu^q = \lambda a_\nu^p$$

時.

不等式(5)乃 Hölder, 氏於次之論文最初證明之,氏爲現在之老數學大家,關於級數之總和法有種種研究之人也: Uber einen Mittelwertsatz, Gattinger Nachrichten, (1889). 此乃解析學上最重要之一不等式.而英德二國之解析學書籍殆少載之,惟法國之書籍有與證明者.如此重要之不等式而不見於書籍之中,誠堪稱異.蓋此等不等式之應用乃最近發達之事,在從前殆不甚重視也.

Jensen氏將(5)表如次形曾加以擴張:

(5′) $$\boxed{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{k_1} b_\nu^{k_2} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{k_1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{k_2} \quad (k_1+k_2=1).}$$

定理. (Hölder 氏定理之 Jensen 氏之擴張.)

設 $a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \cdots\cdots a_{\nu_k} \geqq o$, $k_1 k_2 \cdots\cdots, k_k > o$ 則

(5_1) $$\boxed{\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu_1}^{k_1} a_{\nu_2}^{k_2} \cdots\cdots a_{\nu_k}^{k_k} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu_1}\right)^{k_1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu_2}\right)^{k_2} \cdots\cdots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu_k}\right)^{k_k} \\ k_1+k_2+k_3+\cdots\cdots+k_k=1,\end{gathered}}$$

證明　將(5′)之兩邊昇 k' 冪($k'>1$), 兩邊以 $\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-k'}$ 乘之,

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{k_1} a_\nu^{k_2}\right)^{k'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-k'} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{k_1 k'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{k_2 k'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-k'}$$

是卽 $k=3$ 時對與(5_1)之證明.

如此反覆行之卽可證明(5_1).

此定理乃出於:

J. L. W, Jensen, sur les fonctions convexes et les inégalités entre les vale urs moyennes, Acta Math., (1906), p. 182.

Cooper 氏又於一

R. Cooper, Notes on certain Inequalities, (1) Journal; London Math. Sac., 2 (1927), p. 21.

一文中將(5_1)表如次形:

($5'_1$) $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} a_{ij} \leqq \prod_{j=1}^{m} \left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{q_j}\right\}^{\frac{1}{q_j}}, \quad \Sigma q_j^{-1} \geqq 1.}$$

今若於(5)中令 $p=2$, $q=2$ 卽得次之有名之 Cauchy 氏第二

不等式:

Cauchy 氏之定理. $a_s \geqq o,\ b_s \geqq o,\ (s=1,2,\cdots\cdots,n)$:

$$(6)\quad \boxed{\begin{aligned}&(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)^2\\ &\quad\leqq(a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots\quad+b_n^2).\end{aligned}}$$

此定理乃出於

Cauchy, Cours d'Analyse, (1824).

乃一應用極廣之不等式.不由(5)亦甚易獨立證明之.

4. 由 Jensen 氏不等式導出之若干結果.

定理 1. $a_\nu>o,\ b_\nu>o;\ x$ 為任意實數,若令

$$s(x)\equiv\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu^x$$

時,則

$$(7)\quad \boxed{\left[s\left(\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m}a_\mu x_\mu}{\sum\limits_{\mu=1}^{m}a_\mu}\right)\right]^{\sum\limits_{\mu=1}^{m}a_\mu}\leqq\prod_{\mu=1}^{m}(s(x_\mu))^{a_\mu}.}$$

證明 (6)中之 $a_\nu,\ b_\nu$ 各代以

$$a_\nu^{\frac{1}{2}}\,b_\nu^{\frac{x}{2}}\qquad 及\qquad a_\nu^{\frac{1}{2}}\,b_\nu^{\frac{y}{2}}$$

則

$$\left[s\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2\leqq s(x)s(y).$$

故 $\log s(x)$ 於 $(-\infty,+\infty)$ 間為 x 之凸函數.

由(2)

$$\log S\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}\right) \leqq \frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \log s(x_\mu)}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}$$

即得(7)矣.

定理 2. $a_\nu>0,\ b_\nu>0$; x 爲任意之實變數, x_0 爲任意實常數時則函數

$$\Phi(x)=\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu b_\nu^{\chi}}{\sum_{\nu=1}^{m} a_\nu b_\nu^{\chi_0}}\right)^{\frac{1}{x-\chi_0}} \tag{8}$$

於 $(-\infty, x_0)$ 及 $(x_0,+\infty)$ 區間乃非遞減的單調而

$$\Phi(x_0-\varepsilon)<\Phi(x_0+\varepsilon),\quad \varepsilon>0.$$

證明. 令(7)中之 $m=2$, 則

$$\left[s\left(\frac{a_1x_1+a_2x_2}{a_1+a_2}\right)\right]^{a_1+a_2} \leqq \prod_{\mu=1}^{2}\left(s(x_\mu)\right)^{a_\mu}.$$

又令此中之

$$x_2=x_0,\quad a_1=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},\quad a_2=\frac{x_1-x}{x_1-x_0},\quad x_1>x>x_0, \text{ 則}$$

$$s(x)\leqq\left[s(x_1)\right]^{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}\left[s(x_0)\right]^{\frac{x_1-x}{x_1-x_0}}$$

$$\left[s(x)\right]^{x_1-x_0}\leqq\left[s(x_1)\right]^{x-x_0}\left[s(x_0)\right]^{x_1-x}.$$

由此得(9)與(9'):

$$\left[\frac{s(x)}{s(x_0)}\right]^{\frac{1}{x-x_0}}\leqq\left[\frac{s(x_1)}{s(x_0)}\right]^{\frac{1}{x_1-x_0}}, \tag{9}$$

$$\left[\frac{s(x)}{s(x_1)}\right]^{\frac{1}{x-x_1}}\geqq\left[\frac{s(x_0)}{s(x_1)}\right]^{\frac{1}{x_0-x_1}}. \tag{9'}$$

(9)卽表示 $[s(x)/s(x_0)]^{\frac{1}{x-x_0}}$ 乃非遞減. 於(9')乃交換 x_1 與 x_0 則須

$$x_0 > x > x_1,$$

乃表示 x 減少之時 $[s(x)/s(x_0)]^{\frac{1}{x-x_0}}$ 非遞減.

定理之後段於證定理 1 時卽見:

$$[s(x_0)]^2 \leqq s(x_0+\varepsilon)s(x_0-\varepsilon).$$

以上二定理及次之結果其出處爲:

J. L. W. Jensen, sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math., 30 (1906), p. 183.

系 1. (Schlömilch 氏定理) $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots, \lambda$ 乃 n 個正數

而
$$s_p = \alpha^p + \beta^p + \cdots\cdots + \gamma^p$$

則
$$\boxed{\frac{s_1}{n} < \sqrt{\frac{s_2}{n}} < \sqrt[3]{\frac{s_3}{n}} < \cdots\cdots}$$

$$\boxed{\frac{s_1}{n} > \left(\frac{s_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 > \left(\frac{s_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 > \cdots}$$

此系先見於

Schlömilch, Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen, Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. 3, (1858), p. 301.

系 2. (L. Rogers 氏之定理)

$$\boxed{\begin{gathered} a_m > o,\ b_m > o \\ \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots\cdots + a_mb_m}{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n} \geqq \left(b_1^{a_1} b_2^{a_2} \cdots\cdots b_n^{a_n}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}} \end{gathered}}$$

證明. 設 $\varphi(x) = \log x$ 則因 $\varphi(x)$ 爲凹函數,由 Jensen 氏不等

式(2),

$$\log \frac{\sum_1^n a_\nu b_\nu}{\sum_1^n a_\nu} \geqq \frac{\sum_1^n a_\nu \log b_\nu}{\sum_1^n a_\nu},$$

是卽上揭之不等式也.

系 3. (L. J. Rogers 氏之定理).

$$\boxed{\begin{array}{l} a_m>o \quad b_m>o \\ \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n}{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n} \geqq \left(b_1^{a_1b_1}\, b_2^{a_2b_2}\cdots\cdots b_n^{a_nb_n}\right)^{\frac{1}{a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n}} \end{array}}$$

證明 着眼於 $\varphi(x)=x\log x$ 爲凸函數與系 2 同樣證之.

Rogers 氏之定理出自: Messenger of Math., 17 (1888).

5. Minkowski 氏之不等式.

Minkowski 氏之定理. $a_\nu \geqq o,\ b_\nu \geqq o$:

$$(10)\qquad \boxed{\left\{\sum_{\nu=1}^n (a_\nu+b_\nu)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad p\geqq 1.}$$

$p=1$ 時等號成立,卽 $p>1$ 而 $b_\nu=\lambda a_\nu\ (\lambda>o)$ 時僅等號成立.

Riesz 氏之證明. 於恆等式

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu+b_\nu)^p \equiv \sum_{\nu=1}^n a_\nu (a_\nu+b_\nu)^{p-1} + \sum_{\nu=1}^n b_\nu (a_\nu+b_\nu)^{p-1}$$

右邊之各項應用 Hölder 氏之不等式,

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu+b_\nu)^p \leqq \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{\nu=1}^n (a_\nu+b_\nu)\right\}^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{\nu=1}^n (a_\nu+b_\nu)^p\right\}^{\frac{p-1}{p}}.$$

故

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

不等式(10)乃Minkowski所發現,載於所著之Diophantische Approximationen (1907)一書中. Minkowski氏乃與發明相對論Einstein氏同時,且助其研究而完成其一部之人.惜事業未半,中道病死,至不見今日相對論之成功.氏於新的方面有獨創頭腦,對於數學上有種種之貢獻.其所謂Geometrie der Zahlen乃巧妙應用卵形綫與格子幾何之理論而解決整數論之諸問題並創始特殊之理論者也.

此不等式其中所含之理論甚為重要,例如$p=2$時$(\Sigma a_\nu^2)^{\frac{1}{2}}$乃$n$次元空間由原點至一點$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$之距離.故(10)式即與$n$次元之歐氏空間三角形之一邊比他二邊之和小同義.

(4), (5), (10)諸式Hardy氏於次之論文藉微積分之力證之:

Hardy, Prolegomena to a chapter on Inequalities, Journal, London Math. Soc., Vol. 4 (1929).

又於次之論文稍加訂正:

Hardy, Prolegomena to a chapter on Inequalities, Vol. 5 (1930).

如不等(2),(3)同時得,則不等式(11)可與(10)同時得.可述定理如次:

定理. $a_\nu \geqq 0,\ b_\nu \geqq 0$:

(i)

(10) $$\boxed{\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^p\right\}^{\frac{1}{p}}<\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad p>1;}$$

(ii)

(11) $$\boxed{\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^p\right\}^{\frac{1}{p}}>\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad p<1;}$$

(iii) $p=1$ 時及 $p\neq1$ 而 $a_\nu=\lambda b_\nu$ $(\lambda>o)$ 時則僅下之關係成立:

$$\boxed{\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+b_\nu)^p\right\}^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{n=1}^{n}a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}.}$$

證明 令 $t_\nu=\theta a_\nu+(1-\theta)b_\nu,\quad o\leqq\theta\leqq1\quad(\nu=1,2,\cdots,n)$,而考

$$g(\theta)\equiv\left(\sum_{\nu=1}^{n}t_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

則

$$g''(\theta)=(p-1)\left(\sum_{\nu=1}^{n}t_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}-2}\left[\left(\sum_{\nu=1}^{n}t_\nu^p\right)\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu-b_\nu)^2t_\nu^{p-2}\right\}\right.$$

$$\left.-\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu-b_\nu)t_\nu^{p-1}\right\}^2\right].$$

由 Cauchy 氏之第二不等式,而非 $a_\nu=\lambda b_\nu$ $(\lambda\neq o)$ 時,則右邊之

$$[\quad ''\quad]>o$$

是以 $g''(\theta)$ 之正負與 $(p-1)$ 之正負全同,因而知 $p>1$ 時 $g''(\theta)>o$ $p<1$ 時 $g''(\theta)<o$.

$g''(\theta)>o$ 時卽 $g(\theta)$ 爲中凸則於 $\theta=o$ 與 $\theta=1$ 及其中間之 $\theta=\frac{1}{2}$ 所對應之 $g(\frac{1}{2})$ 乃比 $g(0)$ 與 $g(1)$ 之和之半小,卽 $g(\frac{1}{2})$ 在 $g(0)$ 與 $g(1)$ 間連接之弦之下方.

又 $g''(\theta)<o$ 卽中凹之函數,與前相反.

卽準

$$p>1 \quad 或 \quad p<1$$

而得

$$2g(\tfrac{1}{2})<g(0)+g(1) \quad 或 \quad 2g(\tfrac{1}{2})>g(0)+g(1).$$

將此二式改書卽(10)與(11)也. 其等號乃限 $a_\nu=\lambda b_\nu$ $(\lambda\neq o)$ 時成立.

Minkowski 氏不等式之 Bosanquet 氏的擴張.

(i) $a_{\mu\nu}\geqq o,\ p\geqq 1$:

$$(10') \qquad \boxed{\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu\nu}\right)^{p}\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq\sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}^{p}\right)^{\frac{1}{p}};}$$

(ii) $a_{\mu\nu}\geqq 0\quad p\leqq 1$:

$$(11') \qquad \boxed{\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu\nu}\right)^{p}\right\}^{\frac{1}{p}}\geqq\sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}^{p}\right)^{\frac{1}{p}};}$$

(iii) $p=1$, 及 $a_{\mu\lambda}=o$ 時等號成立,

(iv) $p\neq1,\ a_{\mu\lambda}\neq o\quad a_{s\nu}=\lambda_s a_{1\nu},\ (s=2,3,\cdots,m)$ 時僅等號成立.

證明　(10′)及(11′)之證明乃將(10)及(11)反覆應用卽得.

Bosanquet 氏之定理出自次之論文但僅舉(10′):—

Bosanquet, Generalizations of Minkowski's Inequalty, Journal, London Math. Soc., Vol.3 (1928).

Minkowski 氏第二定理　$a_\nu\geqq o,\ b_\nu\geqq o$:

$$(12) \qquad \boxed{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}.}$$

但 $b_\nu=\lambda a_\nu$ $(\lambda\neq o, \nu=1,2,\cdots,n)$ 時僅等號成立.

證明　令　$$g(\theta)\equiv\prod_{\nu=1}^{n}\Big[\theta a_\nu+(1-\theta)b_\nu\Big]^{\frac{1}{n}}$$

則

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_\nu-b_\nu}{\theta a_\nu+(1-\theta)b_\nu}\right)^2-\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{a_\nu-b_\nu}{\theta a_\nu+(1-\theta)b_\nu}\right)^2.$$

由 Cauchy 之第二不等式右邊若非 $a_\nu=\lambda b_\nu$ $(\lambda\neq o)$ 時明明為負，於是

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}<o.$$

與前同樣之論法卽得(12).

由微分學

$$\lim_{p\to o}\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

故(12)乃(11)之極限之時.

(12)出自次書:

Minkowski, Geometrie der Zahlen (1910).

6.　由 Holder 不等式導出之不等式

定理.　$A_\nu^s\geqq o$,　$A_\nu^r\geqq o$:

$$(13)\qquad \boxed{\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}}\leqq\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}},\quad o<r<s.}$$

$\frac{1}{\nu}=\lambda A_\nu^r$ $(\lambda>o)$ 時僅等號成立.

證明　於 Hölder 氏不等式(5)　令

$$b_\nu=\frac{1}{n}\qquad(\nu=1,2,\cdots\cdots,n)$$

則

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

更令

$$a_\nu = A_\nu^r,\quad \frac{1}{p}=\frac{r}{s},\quad \frac{1}{q}=1-\frac{r}{s},\quad o<r<s$$

則卽得(13)矣.

7. Cooper 氏不等式.

Cooper 氏之定理. $F(x)$, $G(x)$ 及 $\frac{F(x)}{G(x)}$ 乃於 $x\geqq o$ 時爲 x 之連續單調遞增函數,當 $x\to\infty$ 時亦皆發散於 ∞.則

$$\boxed{F^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} F(a_\nu)\right)\leqq G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\right).} \tag{14}$$

證明 令
$$F(x)=G(x)H(x),$$

因 $G(x)$ 爲單調遞增則

$$G(a_\nu)\leqq\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu).$$

依此

$$a_\nu \leqq G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\right).$$

因而

$$\sum_{\nu=1}^{n} F(a_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)H(a_\nu)\leqq\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\,H\left(G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\right)\right).$$

然因

$$FF^{-1}(x)=x,\qquad GG^{-1}(x)=x,$$

則

$$F\left(F^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} F(a_\nu)\right)\right) \leqq G\left(G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\right)\right) H\left(G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\right)\right).$$

此式之右邊因

$$H = \frac{F}{G}$$

是以等于

$$F\left(G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu)\right)\right).$$

卽

$$F\left(F^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} F(a_\nu)\right)\right) \leqq F\left(G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\right)\right).$$

因 $F(x)$ 爲單調遞增函數,由此遂得

$$F^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} F(a_\nu)\right) \leqq G^{-1}\left(\sum_{\nu=1}^{n} G(a_\nu)\right).$$

此卽(14)矣.

此定理出自次之論文.

Cooper, Notes on Certain Inequalities: II, Journal, London Math. Soc., 2 (1927).

系 (Jensen 氏之不等式).

(15)
$$\boxed{\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p>q>o.}$$

證明 於(14)中令

$$F(x) \equiv x^p, \qquad G(x) \equiv x^q$$

故 Cooper 定理之條件滿足,是以由(14)卽得(15).

此不等式出自次之論文:

Jensen, sur les fonctions convexes et les inéqulités entre les valeurs moyennes, Acta Mathematica, 30 (1906).

8. Bosanquet 氏之不等氏.

Bosanquet 氏第一定理.

(i) $a_{\mu\nu} \geqq 0,\ p \geqq 1,\ 0 < q \leqq p$:

$$\boxed{m\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu}\right)^{p}\right\}^{\frac{1}{q}} \leqq \sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^{p}\right)^{\frac{1}{q}};} \tag{16}$$

(ii) $a_{\mu\nu} \geqq 0,\ 0 < p \leqq 1,\ q \geqq p$;

$$\boxed{m\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu}\right)^{p}\right\}^{\frac{1}{q}} \geqq \sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu q}^{p}\right)^{\frac{1}{q}}.} \tag{17}$$

證明 令

$$A_{\mu} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}^{p},$$

由 Jensen 之不等式與 (10′),

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu}\right)^{p} \leqq \left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} A_{\mu}^{\frac{1}{p}}\right)^{p} \leqq \left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} A_{\mu}^{\frac{1}{q}}\right)^{q}.$$

故

$$m\left\{\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} a_{\mu\nu}\right)\right\}^{\frac{1}{q}} \leqq \sum_{\mu=1}^{m} A_{\mu}^{\frac{1}{q}}.$$

此卽(16)矣.

(17)之證明相同.

此定理乃出自次之論文

Bosanquet, Generalizations of Minkowski's Inequality, Journal, London Math.Soc. 3 (1930).

而此定理含次之第三定理.

Bosanquet 氏第二定理.

(i)　$a_{\mu\nu}\geqq o,\quad \Phi'(t)>o,\quad \Phi''(t)\geqq o,$ 而

$$\Phi(t)\equiv\frac{\Phi\,\Phi''}{\Phi'^2}$$

對於 $t>o$ 時爲非遞增函數則

$$(18)\qquad \boxed{m\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu\nu}\right)\right\}\leqq\sum_{\mu=1}^{m}\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(a_{\mu\nu})\right\}.}$$

(ii)　$a_{\mu\nu}\geqq o,\quad \Phi'(t)<o,\quad \Phi''(t)\geqq o,$ 而 $\Phi(t)$ 對於 $t>o$ 時爲非遞增函數則

$$(19)\qquad \boxed{m\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu\nu}\right)\right\}\geqq\sum_{\mu=1}^{m}\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(a_{\mu\nu})\right\}.}$$

補助定理. $\alpha_\nu\geqq o,\quad \beta_\nu\geqq o,\quad \chi_\nu\equiv\alpha_\nu(1-t)+\beta_\nu t$ 時則

$$\chi(t)=\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\chi_\nu)\right\}$$

於 $o\leqq t\leqq 1$ 爲凸函數.

證明　因　$$\Phi(\chi)=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\chi_\nu)$$

關於 (t) 微分之,且注意 $\chi_\nu''=o$ 則

$$\Phi'(\chi)\chi'=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi''(\chi_\nu)\chi'_\nu,$$

$$\Phi''(\chi)\chi'^2+\Phi'(\chi)\chi''=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi''(\chi_\nu)\chi'^2_\nu,$$

$$\Phi'(\chi)\chi''=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi''(\chi_\nu)\chi'^2_\nu-\frac{\Phi''(\chi)}{\{\Phi'(\chi)\}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi'(\chi_\nu)\chi'_\nu\right\}^2,$$

$$\Phi(\chi)\Phi'(\chi)\chi''=\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\chi_\nu)\right\}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi''(\chi_\nu)\chi'^2_\nu\right\}-\Phi(\chi)\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi'(\chi_\nu)\chi'_\nu\right\}^2.$$

然不拘爲何

$$\Phi(\chi)=\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\chi_\nu)\geqq\Phi(\chi_\nu),$$

因 $$\Phi'(t)>o$$

不拘 ν 爲何

$$\chi\geqq\chi_\nu.$$

依 Φ 非遞增函數,不拘 ν 爲何

$$\Phi(\chi)\leqq\Phi(\chi_\nu).$$

故由 Cauchy 氏不等式於 $o\leqq t\leqq 1$

$$\Phi(\chi)\Phi'(\chi)\chi''\geqq\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\chi_\nu)\right\}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi''(\chi_\nu)\chi_\nu'^2\right\}$$

$$-\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(\Phi(\chi_\nu)\Phi''(\chi_\nu)\chi_\nu'^{\frac{1}{2}}\right\}^2\geqq o.$$

由 $\Phi'(\chi)>o$,因而於 $o\leqq t\leqq 1$

$$\chi''(t)\geqq o.$$

Basanquet 氏第二定理之證明.

(i) 因 $\chi(t)$ 於 $o\leqq t\leqq 1$ 爲凸函數;則

$$m\,\chi\left(\frac{1}{m}\right)\leqq(m-1)\chi(0)+\chi(1).$$

故

$$m\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{m-1}{m}\alpha_\nu+\frac{1}{m}\beta_\nu\right)\right\}$$

$$\leqq(m-1)\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\alpha_\nu)\right\}+\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\beta_\nu)\right\}.$$

將 α_ν,β_ν 各令爲

$$\frac{1}{m-1}\sum_{\mu=\nu}^{m-1}a_{\mu\nu}\quad 及\quad a_{\mu\nu},$$

則

$$m\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m-1}a_{\mu\nu}\right)\right\}$$

$$\leqq(m-1)\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m-1}\sum_{\mu=1}^{m-1}a_{\mu\nu}\right)\right\}+\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(a_{\mu\nu})\right\}$$

$$\leqq\cdots\cdots\leqq\sum_{\mu=1}^{m}\Phi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(a_{\mu\nu})\right\}.$$

(ii) 此時之證明仍與(i)同樣。

此定理與前定理同出於一文。

Bosanquet 氏第三定理.

(i) $a_{\mu\nu}\geqq o,\ \Phi'(t)>o,\ \Phi''(t)\geqq o,$ 而

$$\Phi(t)\equiv\frac{\Phi\,\Phi''}{\Phi'^2}$$

於 $t>0$ 爲非遞增函數,且 $\psi(t)/\Phi(t)$ 於 $t>o$ 時之遞增函數時則

(20) $$\boxed{m\,\psi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu\nu}\right)\right\}\leqq\sum_{\mu=1}^{m}\psi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(a_{\mu\nu})\right\}.}$$

(ii) $a_{\mu\nu}\geqq o,\ \Phi'(t)<o,\ \Phi''(t)\geqq o$ 而

$$\Phi(t)\equiv\frac{\Phi\,\Phi''}{\Phi'^2}$$

於 $t>o$ 爲非遞增函數,且 $\psi(t)/\Phi(t)$ 於 $t>o$ 時 t 之遞減函數時則

(21) $$\boxed{m\,\psi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu\nu}\right)\right\}\geqq\sum_{\mu=1}^{m}\psi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(\Phi a_{\mu\nu})\right\}.}$$

證明 (i) 令 $A_\mu\equiv\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(a_{\mu\nu}),$

依(18)及(14),

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m}a_{\mu\nu}\right)\Phi\leqq\left\{\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m}\Phi^{-1}(A_\mu)\right\}\leqq\psi\left\{\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m}\Phi^{-1}(A_\mu)\right\}.$$

故

$$m\psi^{-1}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\Phi\left(\frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu\nu}\right)\right\}\leqq\sum_{\mu=1}^{m}\psi^{-1}(A_\mu).$$

此卽(20)矣.

(ii) 此時之證明亦與(i)同樣.

9. Hardy 氏之不等式.

補助定理. $k>1$, $x>0$ 時則:

$$\boxed{kx^{k-1}\leqq(k-1)x^k+1.} \tag{22}$$

證明 一般因

$$f(x)=f(1)+(x-1)f'(1+\theta(x-1)),\qquad 0\leqq\theta\leqq1,$$

$$x^k-1=(x-1)k(1+\theta(x-1))^{k-1},$$

$$\frac{x^k-1}{x-1}=k(1+\theta(x-1))^{k-1}.$$

此右邊乃曲綫

$$y=x^k$$

於 $x=1$ 與 $x=x$ 時之間之切綫之方向係數,而(22)之左邊乃該曲綫於 $x=x$ 時切綫之方向係數.但 $k>1$ 時因 $y''>0$,切綫之方向係數爲單調增加.依 $0<x<1$ 部分與 $x>1$ 部分分別討論,於 $x>0$ 時(22)常見其成立.

Hardy 氏之定理 .A $k<1$, $\lambda_n>0$, $a_n>0$, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^k$$

爲收斂,設令

$$A_n \equiv \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots\cdots + \lambda_n a_n,$$

$$\Lambda_n \equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots\cdots + \lambda_n.$$

則次之不等式成立:

$$(23) \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{A_n}{\Lambda_n}\right)^k \leqq \frac{k}{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \left(\frac{A_n}{\Lambda_n}\right)^{k-1} \leqq \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^k\right.}$$

且於 $k \geqq s \geqq 1$ 時則

$$k^s (k-1)^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^s \, (A_n/\Lambda_n)^{k-s}$$

為 s 之遞增函數.

證明. 為簡單計令

$$\alpha_n \equiv A_n \Lambda^{-1}$$

則

$$\lambda_n \alpha_n^k - \frac{k}{k-1} \lambda_n a_n \alpha_n^{k-1} \equiv (\lambda_n - \lambda_n \frac{k}{k-1}) \alpha_n^k + \frac{k}{k-1} \Lambda_{n-1} \alpha_{n-1} \alpha_n^{k-1}.$$

於(22)令

$$x = \alpha_n / \alpha_{n-1},$$

則因 $$k \alpha_n^{k-1} \alpha_{n-1} \leqq (k-1) \alpha_n^k + \alpha_{n-1}^k$$

故前式 $$(\text{右邊}) \leqq (\lambda_n - \Lambda_n \frac{k}{k-1}) \alpha_n^k + \Lambda_{n-1} \alpha_n^k + \frac{1}{k-1} \Lambda_{n-1} \alpha_{n-1}^k$$

$$= \frac{1}{k-1} (\Lambda_{n-1} \alpha_{n-1}^k - \Lambda_n \alpha_n^k).$$

卽

$$\lambda_n \alpha_n^k - \frac{k}{k-1} \lambda_n a_n \alpha_n^{k-1} \leqq \frac{1}{k-1} (\Lambda_{n-1} \alpha_{n-1}^k - \Lambda_n \alpha_n^k).$$

此不等式規定 $\Lambda_0 = 0$, 則 $n = 1$ 時成立.

將 $n = 1, 2, 3, \cdots, N$ 作成諸不等式而相加之則

$$(a) \qquad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \alpha_n^k - \frac{k}{k-1} \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n \alpha_n^{k-1} \leqq -\frac{1}{k-1} \Lambda_N \alpha_N^k \leqq 0.$$

然由 Hölder 不等式

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1}\right)^k \leqq \left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n^k\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n \alpha_n^k\right)^{k-1}.$$

以(a)代入此式之右邊則,

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1}\right)^k \leqq \left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n^k\right)\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1}\right)^{k-1}.$$

約去兩邊之相同者,則

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1} \leqq \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n^k\right).$$

由此式及(a)則得

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n \alpha_n^k \leqq \frac{k}{k-1}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1} \leqq \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n^k .$$

然數列

$$\sum_{n=1}^{N}\lambda_n \alpha_n^k \quad 及 \quad \sum_{n=1}^{N}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1}$$

爲正,且遞增,因

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^k$$

爲收斂,是以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \alpha_n^k \quad 及 \quad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1}$$

與

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \alpha_n^k \leqq \frac{k}{k-1}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n \alpha_n^{k-1} \leqq \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n^k$$

亦收斂.

此卽本定理之前半矣.

再應用 Hölder 氏不等式於 $k\geqq s\geqq 1$ 時,可見

$$\Sigma\lambda_n a_n^s \alpha_n^{k-s}$$

爲收斂.今令

$$c^s \equiv k^s(k-1)^{-s}\sum \lambda_n a_n^s a_n^{k-s}$$

由§4.定理 2. 於任意實常數s_0

$$\left(\frac{c_s}{c_{s_0}}\right)^{\frac{1}{s-s_0}} \qquad (s>s_0 \text{ 及 } s<s_0)$$

乃非遞減的單調甚明.故若$\alpha\geqq\beta\geqq\gamma$則

$$\left(\frac{c_\beta}{c_\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}\geqq\left(\frac{c_\gamma}{c_\alpha}\right)^{\frac{1}{\gamma-\alpha}}, \quad \left(\frac{c_\alpha}{c_\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha-\gamma}}\geqq\left(\frac{c_\beta}{c_\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha-\gamma}},$$

因而

$$\left(\frac{c_\beta}{c_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\leqq\left(\frac{c_\gamma}{c_\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-\gamma}}.$$

是以

$$\left(\frac{c_\beta}{c_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}\leqq\left(\frac{c_1}{c_\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}\leqq\frac{c_0}{c_1}\leqq 1.$$

卽若

$$\alpha\geqq\beta\geqq 1 \quad \text{則} \quad c_\alpha\geqq c_\beta$$

依此定理 A 之後半遂證明矣.

此證明乃根據:

E. T. Copson, Note on Series of Positive Terms, Journal, London Math. Soc., 2 (1927).

E. B. Elliot 氏在其前於次之論文曾予一簡單之證明:

E. B. Elliot, A Simple Exposition of Some Recently Proved Facts to Convergency, Journal, London Math. Soc., 1 (1926).

Hardy氏之定理A, B出處如次:

G. H. Hardy, Notes on Some Points in the Integral Calculus: Messeng er of Math. 54 (1925).

倘参照次之論文:

G.H. Hardy, Note on a Theorem of Hilbert, Math. Zeits., 6 (1920), pp. 314−317.

E. Landan, A Note on a Theorem concerning series of positive terms, Journal, 157 London Math. Soc., 1 (1926), pp. 38−39.

Copson 氏於上揭之論文, Hardy 氏及 Littlewood 氏於 Journal für Math., 157 (1927), 141−158 之論文以及次列論文皆有擴張:

E. T. Copson, Note on series of positive terms, Journal, London Math. Soc., 3 (1928) pp. 49−51.

T.A.A. Broadbent, A proof of Hardy's convergence theorem, Joural, London Math. Soc., 3 (1928) p. 242.

Hardy 氏之定理 B $k>1,\ \lambda_n>o,\ a_n>o\ (n=1,2,3\cdots\cdots)$,

$$\Lambda_n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n,$$

$$A_n=\frac{\lambda_n a_n}{\Lambda_n}+\frac{\lambda_{n+1}a_{n+1}}{\Lambda_{n+1}}+\cdots\cdots$$

而

$$\Sigma\lambda_n a_n^k$$

爲收斂時,則

$$\boxed{\Sigma\lambda_n A_n^k\leqq k\Sigma\lambda_n a_n A_n^{k-1}\leqq k^k\Sigma\lambda_n a_n^k.} \tag{24}$$

但諸常數限于適當者.

且 $k\geqq s\geqq 1$ 時則

$$k^s\Sigma\lambda_n a_n^s A_n^{k-s}$$

爲 s 之遞增函數.

證明. 由 Hölder 氏不等式,

$$A_n^k \leqq (\lambda_n a_n^k + \lambda_{n+1} a_{n+1}^k + \cdots\cdots)\left(\lambda_n \Lambda_n^{\frac{-k}{k-1}} + \lambda_{n+1}\Lambda_{n-1}^{\frac{-k}{k-1}} + \cdots\cdots\right)^{k-1}.$$

又

$$\lambda_n\Lambda_n^{\frac{-k}{k-1}} + \lambda_{n+1}\Lambda_{n+1}^{\frac{-k}{k-1}} + \cdots\cdots < \int_{\Lambda_{n-1}}^{\infty} n^{\frac{-k}{k-1}} dn = (k-1)\Lambda_{n-1}^{\frac{-1}{k-1}}, \quad n>1.$$

故對於 $n>1$

$$A_n^k < (k-1)^{k-1} R_{n-1}\Lambda_{n-1}^{-1}.$$

但 R_{n-1} 乃 $\Sigma\lambda_n a_n^k$ 之 $n-1$ 項後之餘項.

又

$$\lambda_n A_n^k - k\lambda_n a_n A_n^{k-1} = (\lambda_n - k\Lambda_n) A_n^k + k\Lambda_n A_n^{k-1} A_{n+1}$$
$$\leqq (\lambda_n - k\Lambda_n) A_n^k + (k-1)\Lambda_n A_n^k + \Lambda_n A_{n+1}^k = \Lambda_n A_{n+1}^k - \Lambda_{n-1} A_n^k,$$

此關係若認 $\Lambda_0 = o$ 則於 $n=1$ 時成立.今將 $n = 1, 2, \cdots, N$ 作成諸不等式而加之得

$$\sum_1^N \lambda_n A_n^k - k\sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1} \leqq \Lambda_N A_{N+1}^k < (k-1)^{k-1} R_N.$$

故

$$\sum_1^N \lambda_n A_n^k k < \left(\sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1} + \varepsilon_N\right).$$

但因 $\Sigma\lambda_n a_n^k$ 爲收斂,

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = 0.$$

由此不等式與

$$\left(\sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1}\right)^k \leqq \sum_1^N \lambda_n a_n^k \left(\sum_1^N \lambda_n A_n^k\right)^{k-1},$$

則

$$\sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1} < k^{k-1} \sum_1^N \lambda_n a_n^k \left(1 + \frac{\varepsilon_N}{\sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1}}\right)^{k-},$$

然 $\Sigma \lambda_n a_n A_n^{k-1}$ 爲正項級數,或收斂或發散於 $+\infty$. 但無論爲何皆

$$\sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1} < k^{k-1} \sum_1^N \lambda_n a_n^k (1 + \eta N),$$

$$\eta N = \left(1 + \frac{\varepsilon_N}{\sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1}}\right)^{k-} - 1 \to o.$$

故

$$\sum_1^n \lambda_n A_n^k < k \sum_1^N \lambda_n a_n A_n^{k-1} + k\varepsilon_N < k^k \sum_1^N \lambda_n a_n^k + k\varepsilon_N + k^k \eta N \sum_1^N \lambda_n a_n^k.$$

遂得定理之前半矣.

定理之後半可與定理 A 同樣證之.

今證明常數 k^k 爲適當之常數.取其特殊情形

$$\lambda_n = 1, \qquad \Lambda_n = n, \qquad a_n = n^{-\mu-\varepsilon}.$$

$$(\mu = k^{-1}, \quad \varepsilon > o)$$

考之則

$$A_n = \sum_n^{\infty} v^{(-1+\mu+\varepsilon)} > \int_n^{\infty} v^{-(1+\mu+\varepsilon)}\, dv = \frac{n^{-\mu-\varepsilon}}{\mu+\varepsilon}.$$

因而

$$\Sigma \lambda_n A_n^k > (\mu+\varepsilon)^{-k} \Sigma n^{-(1+k\varepsilon)} = \frac{k^k}{(1+k\varepsilon)^k} \Sigma \lambda_n a_n^k.$$

因 ε 爲任意小,故 k^k 應爲適當之常數.

10. Carlemann 氏不等式.

定理(Carlemann) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n>0)$ 爲收歛, e 爲自然對數之底則

(25) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqq e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.}$$

證明 於Hardy氏不等式(23),令一切之 $\lambda_n=1$, a_n 爲 $a_n^{\frac{1}{p}}$ $k=p$ 時則得

(26) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+\cdots\cdots+a_n^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n.}$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 爲收斂,則(26)之右邊亦收斂於有限值.

然由不等式(13)知

$$\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+\cdots\cdots+a_n^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p$$

及隨 p 增大而漸次減小.又

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{a_1^{\frac{1}{p}}+a_2^{\frac{1}{p}}+\cdots\cdots+a_n^{\frac{1}{p}}}{n}\right)^p=(a_1 a_2 \cdots\cdots a_n)^{\frac{1}{p}}$$

用微積分之方法容易證明之. (25) 之左邊亦收斂, (26) 之左邊於 $p\to\infty$ 時卽(25)之右邊當然收斂.又因

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p=\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)\to e$$

今假設(23)之不等號反向,卽

左邊>右邊

則(29)於 p 大於某值時

左邊>右邊.

然不論 p 爲何值,(26)常成立,故有矛盾.於是(25)必成立矣.

(26)於次之論文有一證明:

Th. Kaluza und G Szegö, Uber Reihen mit lauter positiven Gliedern, Journal, London Math. Soc., ser. 2 Vol. 2, (1927), pp 266–269.

又此論文於(22)及(23)亦有擴張.

G. Polya, Proof of an inequality, Proc. London Math. Soc., (2) 27 (1926).

Carlemann之定理出處如次:

T. Carlemann, sur les fonctions quasi-analytiques, Fünfter Kongress der skandsnavischen Mathematiker in Helsingsfons, (1923), pp. 181–196, théorème I.

11. Hilbert氏不等式與其擴張.

次所述之Hilbert氏之定理乃

H. Weyl, Singuläre Inlegralgleichungen, Gottingen (1908) p. 83. 所載.茲取之證明乃見於

H. P. Mulholhand, Note on Hilbert's Double-Series Theurem, Journal, London Math.Soc., Vol. 3 (1928), p. 197.

定理 1. (Hilbert氏之二重級數定理).

$$\boxed{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m\,a_n}{m+n+1}\leqq\pi\Sigma a_n^2 \qquad (a_n\geqq o).} \tag{27}$$

證明. 令

$$A(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

則(27)之右邊因

$$\int_0^1\Sigma\Sigma\, a_ma_nx^{m+n}dx=\int_0^1 A^2(x)\,dx$$

則證明

$$(a)\qquad \int_0^1 A^2(x)\,dx \leqq \pi\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

卽足矣. 今記

$$n+\frac{1}{2}=\nu,$$

應用 Cauchy 氏第二不等式於 $A(x)$, 得

$$(b)\qquad A^2(x)=\left[\Sigma a_n \nu^{\frac14}\, x^{\frac{n}{2}}\nu^{-\frac14}x^{\frac{n}{2}}\right]^2 \leqq \Sigma\, a_n^2\,\nu^{\frac12}x^n\cdot\Sigma\nu^{-\frac12}x^n.$$

然

$$(c)\qquad \sum_0^{\infty}\nu^{-\frac12}x^n=\sqrt{2}+\sum_1^{\infty}\frac{x}{(n+\frac12)^{\frac12}}<\sqrt{2}+\int_0^{\infty}\frac{x^t\,dt}{(t+\frac12)^{\frac12}}$$

$$=\int_0^{\frac12}u^{-\frac12}du+\int_{\frac12}^{\infty}x^{u-\frac12}\,u^{-\frac12}du<\int_0^{\infty}x^{u-\frac12}\,u^{-\frac12}du$$

$$=\left(x\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac12}\int_0^{\infty}e^{-\nu}\nu^{-\frac12}d\nu=\Gamma\left(\frac12\right)\left(x\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac12}.$$

故

$$(28)\qquad \int_0^1 A^2(x)\,dx \leqq \Gamma\left(\frac12\right)\int_0^1 \Sigma a_n^2\nu^{\frac12}x^{n-\frac12}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac12}dx$$

$$=\Gamma\left(\frac12\right)\Sigma\, a_n^2\nu^{\frac12}\int_0^1 x^{n-\frac12}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac12}dx.$$

此順序可許變更.因被積分函數之級數乃冪級數與有界函數之積於 $(\varepsilon, 1-\delta)$ 爲齊一收斂也.因而

$$\int_0^1\Sigma=\lim_{\varepsilon,\delta\to0}\int_{\varepsilon}^{1-\delta}\Sigma=\lim\Sigma\int_{\varepsilon}^{1-\delta}$$

且 $\int_{\varepsilon}^{1-\delta}$ 乃當 $\varepsilon\to o,\ \delta\to o$ 時增加,則

$$\lim\Sigma\int_{\varepsilon}^{1-\delta}=\Sigma\int_0^1.$$

故 $$\text{〔(28)之末項〕}=\Gamma\left(\frac12\right)\Sigma a_n^2\nu^{\frac12}\int_0^{\infty}e^{-\nu u}u^{-\frac12}du$$

$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Sigma a_n^2\int_0^{\infty}e^{-v}v^{-\frac{1}{2}}dv=\pi\,\Sigma a_n^2 .$$

定理 2. $p>o,\ q>o,\ a_n\geqq o,\ b_n\geqq o,\ p^{-1}+q^{-1}=1,\ \sum_0^{\infty}a_n^p$ 及 $\sum_0^{\infty}b_n^q$ 皆收斂時則

$$\boxed{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n+1}\leqq\pi\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right)\left(\sum_0^{\infty}a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_0^{\infty}b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}.}\tag{29}$$

證明 (H. P. Mulholland 出處同上).

令
$$A(x)\equiv\sum_0^{\infty}a_nx^n,\qquad B(x)\equiv\sum_0^{\infty}b_nx^n$$

則(29)之右邊如次:

$$\int_0^1 A(x)B(x)dx$$

今令
$$v=x+\frac{1}{q},\qquad \mu=n+\frac{1}{p}$$

則如 (b) 時,

$$A(x)\leqq(\Sigma a_n^p v^{\frac{1}{q}}x^n)^{\frac{1}{p}}(\Sigma v^{-\frac{1}{p}}x^n)^{\frac{1}{q}}\equiv S_1^{\frac{1}{p}}T_1^{\frac{1}{q}},$$

$$B(x)\leqq(\Sigma a_n^q\mu^{\frac{1}{p}}x^n)^{\frac{1}{q}}(\Sigma\mu^{-\frac{1}{q}}x^n)^{\frac{1}{p}}\equiv S_2^{\frac{1}{q}}T_2^{\frac{1}{p}}.$$

用 (5') 則

$$\int A(x)B(x)dx\leqq\int(S_1T_2)^{\frac{1}{p}}(S_2T_1)^{\frac{1}{q}}dx \tag{30}$$
$$\leqq\left(\int S_1T_2dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int S_2T_1dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

與 (c) 同樣得

$$T_1=\sum_0^{\infty}\left(n+\frac{1}{q}\right)^{-\frac{1}{p}}x^n<\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\left(x\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{q}},$$

$$T_2=\sum_0^{\infty}\left(n+\frac{1}{p}\right)^{-\frac{1}{q}}x^n<\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\left(x\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{p}},$$

故與(28)同樣得

$$
\begin{aligned}
(31)\qquad \int S_1 T_2\, dx &\leqq \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Sigma a_n^p \nu^{\frac{1}{q}} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{p}}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{p}} du \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Sigma a_n^p \nu^{\frac{1}{q}} \int_0^\infty e^{-\nu u} u^{-\frac{1}{p}}\, du \\
&= \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Sigma a_n^p \\
&= \pi \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right)\Sigma a_n^p. \qquad (p^{-1}+q^{-1}=1).
\end{aligned}
$$

同樣之結果,$S_2 T_1$ 之積分成立.

由(30)與(31)卽得(29)矣.

(29)之右邊之常數 $\pi \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{p}\right)$ 乃次之論文所證明

Hardy, Littlewood and Pólya, The maximum of a certain billinear form, Proc. London,Math. Soc., (2) 25 (1926), pp. 265−282.

(未 完)

行列式之消亡叢合及其關係

紐約省立師範學院白昂 R. A. Beaver 著

程 綸 譯

自一七七九年卜宋特(Bézaut)重要著作一出,行列式之消亡叢合論,(註一)遂漸發表其宏篇鉅製.驟視之,其結果一若無關者,而細察之,則其關係立見.此篇之主旨在指明何者爲基本叢合,並顯明與其他之關係.

§ 1

一八八二年杜銳斯(Deruyts)及一八八八年繆合(Muir)所證之定理如下.(註二)

定理 A: 若有兩個 n 次行列式 A 及 B.今由此構成兩組行列式.第一組爲 ${}_nC_\gamma$ 個行列式,其每一行列式中之 γ 列與 A 同,而餘列與 B 同,第二組同個數之行列式,其中 γ 行與 A 同,而餘行與 B 同.則第一組之和等於第二組之和.

此定理記之以

$$R\begin{pmatrix} A & B \\ a & b \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} A & B \\ a & b \end{pmatrix}$$

(註一) Vanishing aggaregtes of Deiermtnants

(註二) 參看繆合及梅茲拉合著之行列式論 (1929) §319. 此書以後參攷時,簡稱爲原書.

式中 $a+b=n$.

於一九一七年梅茲拉(Metzler)歸總之得下定理:(註一)

定理 I

$$R\begin{pmatrix} A & B & \cdots & K \\ a & b & \cdots & k \end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} A & B & \cdots & K \\ a & b & \cdots & k \end{pmatrix}$$

式中 $a+b+\cdots+k=n$.

一八八〇年羅潘基(Le Paige)(註二)一八八一年哈孟特(Hammond)一八八四年林銳斯一九二五年丁尼士(Dines)及一九三〇年繆合皆有行列式間一次關係之定理.繆合之定理如下:(註三)

若由一 n 乘 $n+2$ 之陣內,構成以下四個行列式,即

P 由略去第 n 行及第 $n+2$ 行得來

Q 由略去第 $n+1$ 行及第 1 行得來

Y 由略去第 $n+1$ 行及第 $n+2$ 行得來

Z 由略去第 n 行及第 $n+1$ 行得來

則凡有 $n-1$ 列與 P 相同,有一列與 Q 相同之各個行列式之和等於 Y 與 Z 之和.

此定理爲定理 A 之特例,即 $A=P$, $B=Q$, $r=n-1$.

(註一) 參看原書§320. 關於消亡叢合參看 Proceed. R. Soc Edinburgh. xxxvii pp 324—336.

(註二) 參看繆合所著行列式史.

(註三) 參看 Trans. R. Soc. So. Africa. xviiipp 301—303.

丁尼士定理(註一)中之一例爲,此處 $n=3,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3=0, 1, 2,$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & c_3 \\ b_1 & c_2 & o \\ c_1 & o & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & b_3 \\ b_1 & o & c_3 \\ c_1 & o & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & c_3 \\ c_1 & b_2 & o \\ o & c_2 & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_2 & a_3 \\ c_1 & o & b_3 \\ o & o & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c_1 & a_2 & b_3 \\ o & b_2 & c_3 \\ o & c_2 & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_2 & a_3 \\ o & c_2 & b_3 \\ o & o & c_3 \end{vmatrix} = o.$$

應用定理 I 於行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ o & o & o \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ o & o & o \\ o & o & o \end{vmatrix}$$

亦可得此關係.

仿此,可於定理 I 中得丁尼士之普通定理及上述定理.卜宋特(1779)孟治(Monge 1809)高夫(Cauchy 1812)戴納諾(Demanot 1819)史潤士(Schweins 1825)雷斯(Reiss 1829)薛立威士德(Sylvesters 1851)海士(Hesse 1872)繆合(1879, 1930)諸氏,均有關於二元方式之積之消亡叢合之定理.此各叢合,或由拉卜拉斯(Laplace)定理展開零行列式而得,或用兩種方法展開一行列式而使所得之叢合相等而得來,如史潤士是也.或擴充此兩種形式而得來,如戴納諾是也.

由定理 I 亦可得來,如薛立威士德1851年之定理爲:(註二)

(註一) 參看 Am. Journ. of Math. xlv i pp 249—256 所載 On Certain Symmetric Sums of Determinants 一文.

(註二) 參看原書 § 137.

兩同級行列式之積等於相似各積之和,此相似各積,由原式之一行列式中任選相連接之 R 行與其他行列式之 R 行互換得來,於一組中取第一行與他組中之第一行互換.再各取第二行互換,如是繼續皆有影響於以 R 行與 R 行之互換.

設此定理中之兩行列式爲 $|a_{1n}|$ 及 $|b_{1n}|$, 又設所定之 R 行爲 $|a_{1n}|$ 之前 R 行,則此定理爲定理 A 之特例.其中 $r=n$ 而 A 及 B 各爲 $2n$ 級之行列式.

$$
\begin{vmatrix}
0\cdots\cdots 0 & a_{1,R+1}\cdots\cdots a_{1n} & b_{11}\cdots\cdots b_{1n} \\
0\cdots\cdots 0 & a_{2,R+1}\cdots\cdots a_{2n} & b_{21}\cdots\cdots b_{2n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0\cdots\cdots 0 & a_{n,R+1}\cdots\cdots a_{nn} & b_{n1}\cdots\cdots b_{nn} \\
0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0
\end{vmatrix}_{2n}
$$

及

$$
\begin{vmatrix}
0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0\cdots\cdots 0 \\
a_{11}\cdots\cdots a_{1R} & 0\cdots\cdots 0 & b_{11}\cdots\cdots b_{2n} \\
a_{21}\cdots\cdots a_{2R} & 0\cdots\cdots 0 & b_{21}\cdots\cdots b_{1n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
a_{n1}\cdots\cdots a_{nR} & 0\cdots\cdots 0 & b_{n1}\cdots\cdots b_{nn}
\end{vmatrix}_{2n}
$$

其符號因子 $(-1)^R$ 已消去.若所選者非前 R 行,其證法同.

孟治於一八〇九年所舉三元方式之積之消亡叢合之例,可由零行列式之拉卜拉斯展開式得之.或將定理 I 應用於三個行列式得之亦可.若 $(r,s\cdots\cdots)$ 代表 $\|a_{rs}\|$ 陣中之第 r, 第 s …… 行所組成之陣.$[t]$ 代表三列及 t 行爲零之陣.則此三行列式可以

$$A=\begin{vmatrix} (1,2,3,4) & [5] \\ [4] & [5] \\ [4] & [5] \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} [4] & [4] & [1] \\ [4] & (1,2,3,4) & [1] \\ [4] & [4] & [1] \end{vmatrix}$$

$$C=\begin{vmatrix} [2] & [4] & [3] \\ [2] & [4] & [3] \\ (12) & [4] & (345) \end{vmatrix}$$

代表之.A 爲九級行列式;其左項間爲 a 之三列四行之長方形,其餘元素皆爲零.

§ 2.

於一九〇一年梅茲拉對於偶數級 $2n$ 之普通行列式之子式叢合,有一基本定理.(註一)

此定理頗不易簡單述之.但第一步先將 n 級各子式之和表以 $h+g$ 級及 $n-(h+g)$ 級各子式之和.可說明之稱爲定理 II. 若 $h=k$, $g=o$ 則定理 II 成另一形式(註二)謂之定理 B. 其 umbral 記法之例爲

(註一)參看原書 §§ 316, 318. 又 Trans. Am. Math. Soc. ii pp 395－403 所載 On Certain Aggregates of Determinat Minors.

(註二)參看原書 § 312.

$$\begin{vmatrix} 1&2&3&4 \\ 5&6&7&8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1&2&3&5 \\ 4&6&7&8 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 1&2&7&8 \\ 3&4&5&6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&2 \\ 3&4 \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} 5&6 \\ 7&8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5&7 \\ 6&8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5&8 \\ 6&7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6&7 \\ 5&8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6&8 \\ 5&7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7&8 \\ 5&6 \end{vmatrix} \right\}$$

$$- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} 1&2 \\ 7&8 \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} 3&4 \\ 5&6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3&5 \\ 4&6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3&6 \\ 4&5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4&5 \\ 3&6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4&6 \\ 3&5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5&6 \\ 3&4 \end{vmatrix} \right\}$$

此關係之左端可記以

$$\Sigma \begin{vmatrix} 12 & \overline{34} \\ \underline{56} & \underline{78} \end{vmatrix}$$

乃繆合記法.

若 $h=1$, $k=n-1$, 則定理 B 化爲1900 年之繆合定理.

若定理中所含子式所從出之原行列式有共軸子式

$$\begin{vmatrix} k+1 & k+2 \cdots\cdots 2n \\ k+1 & k+2 \cdots\cdots 2n \end{vmatrix}$$

爲軸對稱者,則定理 B 之右端成爲零,故得

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 & 2 \cdots\cdots k & \overline{k+1 \cdots\cdots n} \\ \underline{n+1} & \underline{n+2 \cdots\cdots} & \underline{2n} \end{vmatrix} = 0$$

此處 $k=1, 2, \cdots\cdots n-1$.

當 $k= n-1$, 則以上關係卽爲一八八二年克洛涅克(Kronecker)所得者.

一九〇二年繆合顯明在軸對稱行列式之式如

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 \; 2 \; \overline{4 \; 5} \\ \underline{3 \; 6 \; 7 \; 8} \end{vmatrix} = o$$

形式內,另有關係可視爲(註一)

$$\Sigma\begin{vmatrix} 2\ \overline{4\ 5} \\ \underline{6\ 7\ 8} \end{vmatrix}=0$$

關係之擴充.

故可知

$$\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ \overline{3\ 4} \\ \underline{5\ 6\ 7\ 8} \end{vmatrix}=\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ 3\ \overline{4} \\ \underline{5\ 6\ 7\ 8} \end{vmatrix}+\left\{\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ 4\ \overline{3} \\ \underline{5\ 6\ 7\ 8} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1\ 2\ 4\ 3 \\ 5\ 6\ 7\ 8 \end{vmatrix}\right\}+\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ \overline{5\ 6} \\ 3\ 4\ \underline{7\ 8} \end{vmatrix}$$

因在軸對稱時,以上第一第二第三之和均爲零.故可寫爲

$$\begin{vmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 5\ 6\ 7\ 8 \end{vmatrix}=\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ \overline{5\ 6} \\ 3\ 4\ \underline{7\ 8} \end{vmatrix}$$

於一九二六年巴頓小姐 Miss Barton (註二) 證其普遍定理,以上關係僅其一例而已.而於一九〇二年繆合則已證明此定理矣.(註三)

一八八二年羅治 Runge 在克洛涅克關係中,察得不變指數之一可使之與變數之一相同.例如在克洛涅克關係式

$$\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ \overline{3\ 4} \\ \underline{5\ 6\ 7\ 8} \end{vmatrix}=0$$

中,使 $2=7$. 則此關係式化爲克洛涅克關係式之擴充式

$$\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 3\ \overline{4} \\ \underline{5\ 6\ 8} \end{vmatrix}=0$$

(註一) 參看原書 § 529

(註二) 參看 Proc. Nat Acad. Soc. xii pp 393—396 所載 Generatization of Kronecker's Relation. among the Minors of a Symmetric Determinant 一文.

(註三) 參看 Philos. Magazine iii pp 410—416 所載 Aggregates of Minors of an Axisymmetric Determinant. 一文.

一九〇三年納孫(Nanson)所得關係式,在梅茲拉以爲可以由克洛湼克關係式中移項得來.其關係式之形式爲

$$\Sigma\begin{vmatrix}\overline{1}\ 2\ 4\ 5\\ \\ \underline{3}\ 6\ 7\ 8\end{vmatrix}=-\Sigma\begin{vmatrix}1\ 2\ 3\ \overline{4}\\ \\ \underline{5}\ 6\ 7\ 8\end{vmatrix}=\Sigma\begin{vmatrix}1\ 2\ 3\ \overline{6}\\ \\ 4\ 5\ \underline{7\ 8}\end{vmatrix}$$

可知 $2m$ 個分爲三羣,第一羣含有 $2m$ 中 x 個,第二羣含 y 個,第三羣含 z 個,其中 $x+y+z=2m$. 而於每一情形中第一和之 x 個,第二和之 y 個,第三和之 z 個各可變換.而其餘者不變.(註一)

因於克洛湼克定理中,全部行列式,不必卽爲軸對稱.故繆合於一八八八年及一九一一年由另一觀點以觀察之.若於陣

$$\begin{matrix}a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18}\\ a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28}\\ a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38}\end{matrix}$$

內,依次取零軸之軸對稱行列式爲

$$\begin{vmatrix}0 & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48}\\ a_{45} & 0 & a_{56} & a_{57} & a_{58}\\ a_{46} & a_{56} & 0 & a_{67} & a_{68}\\ a_{47} & a_{57} & a_{67} & 0 & a_{78}\\ a_{48} & a_{58} & a_{68} & a_{78} & 0\end{vmatrix}$$

(註一) 參看 Am. Journ. of Math. xxvii pp 69—76 Nanson 所著 Minors of Axisymmetric Determinants 又 Proceed. Roy. Soc. Edinburgh xxv pp 717—721 Metzler Fh. 著 Variant Forms of Vauishing Aggregate of Minors of Axisymmetric Determinant 又原書 § 530.

再於每一情形下,剔去含零之各行,則所得正負號相間之各行列式之和爲零.因此叢合爲克洛湼克式

$$\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ \overline{3\ 4} \\ \underline{5\ 6\ 7\ 8} \end{vmatrix} = o$$

也.

由此關係,梅茲拉遂創成數種行列式之消亡叢合.(註一)然須注意行列式論書中之關係式(2)(註二)及論文之(10),卽使兩克洛湼克式

$$\Sigma\begin{vmatrix} 1\ 2\ 3\ \overline{4} \\ \underline{5\ 6\ 7\ 8} \end{vmatrix} = o = \Sigma\begin{vmatrix} \overline{1\ 2\ 3\ 4} \\ \underline{5}\ 6\ 7\ 8 \end{vmatrix}$$

對於軸對稱行列式

$$\begin{vmatrix} o & \gamma & \beta & a_{21} & x & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \gamma & o & \alpha & a_{31} & y & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \beta & \alpha & o & a_{41} & z & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{31} & a_{41} & o & \cdot & s & t & u \\ x & y & z & \cdot & o & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{32} & a_{42} & s & a_{12} & o & r & q \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} & t & a_{13} & r & o & p \\ a_{74} & a_{34} & a_{44} & u & a_{14} & q & p & o \end{vmatrix}$$

所得之式相同.

一九〇二年繆合得有大多數關於消亡叢合之定理.然

(註一)參看原書 §§ 533—537 又 Annals of Math. Second Seri·s xxvii pp 407—420 所載 On Certain Determinant Relat:ons 一文.

(註二)參看原書 § 536.

皆賴於克洛溼克關係式或其擴充式.(註一)

由上述軸對稱行列式之末式間關係式,可得非真軸對稱之過對稱子式之關係.(註二)

於一九一一年繆合得有二消亡叢合(註三)

$$(1)\quad \begin{vmatrix} \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 & \theta_4 \\ a & b & c & d \\ B & c & D & e \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & B & \omega & \theta_2 \\ b & c & d & b' \\ c & D & e & c' \\ \beta & \gamma & \delta & b'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B & D & e & \theta_3 \\ a & c & d & a' \\ B & D & e & b' \\ \alpha & \gamma & \delta & a'' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a & b & d & \theta \\ a & b & d & c' \\ B & c & e & a'' \\ \alpha & \beta & \delta & e'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega & d & e & \theta_4 \\ a & b & c & b' \\ B & c & D & c' \\ \alpha & \beta & \gamma & b'' \end{vmatrix} = o$$

及(2)
$$\begin{vmatrix} \theta_2 & \xi & \theta_1 & \theta_4 \\ a & b & e & m \\ B & e & h & n \\ c & f & i & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & B & \omega_1 & \theta_2 \\ b & e & m & s \\ e & h & n & v \\ f & i & o & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & m & \theta_1 \\ a & b & m & v \\ B & e & n & y \\ c & f & o & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_1 & m & n & \theta_4 \\ a & b & e & s \\ B & t & h & v \\ c & f & i & w \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \theta_3 & \theta_6 & \xi & \alpha_5 \\ a & e & h & m \\ B & h & k & n \\ c & i & l & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & B & \omega_2 & \theta_3 \\ e & h & m & q \\ h & k & n & s \\ i & l & o & t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B & k & n & \theta_8 \\ a & h & m & p \\ B & k & n & q \\ c & l & o & r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_2 & m & n & \theta_5 \\ a & e & h & q \\ B & h & k & s \\ c & i & l & t \end{vmatrix} = o$$

(註一) 參看 Trans. R. Soc. Edinburgh xl, pp 511—533 所載 Vanishing Aggregates of Secondary Minors of a Persymmetric Determinant. 一文.

(註二) 參看原書 §§ 538—9.

(註三) 參看 Mess. of Math xli pp 23—28 所載 Cayley's Linear Relation between Minors of a Special Three-raw Array.

如繆合所得之關係式,即以 b 代 B. 但所述之更普遍關係式仍然成立.

又關係式

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 & \theta_4 \\ a & b & c & d \\ B & c & D & e \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \theta_2 & a & B & \omega \\ b' & b & c & d \\ c' & c & D & e \\ b'' & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \theta_3 & a & c & d \\ b' & a & c & d \\ c' & B & D & e \\ b'' & \alpha & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \theta_1 & B & c & e \\ b' & a & b & d \\ c' & B & c & e \\ b'' & \alpha & \beta & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \theta_4 & \omega & d & e \\ b' & a & b & c \\ c' & B & c & D \\ b'' & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = o$$

亦能成立.且可視爲克洛湼克定理之例中,由陣

$$\begin{matrix} b' & a & b & c & d \\ c' & B & c & D & e \\ b'' & \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix}$$

依次取行列式

$$\begin{vmatrix} o & \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 & \theta_4 \\ \theta_2 & o & a & B & \omega \\ \theta_3 & a & o & c & d \\ \theta_1 & B & c & o & e \\ \theta_4 & \omega & d & e & o \end{vmatrix}$$

之各列,而於每一情形剔去含零之各行所得各行列式之和.

(3)中之第三行列式可等於

$$\begin{vmatrix} \theta_3-b' & o & o & o \\ b' & a & c & d \\ c' & B & D & e \\ b'' & \alpha & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_3-b' & o & o & o \\ a' & a & c & d \\ b' & B & D & e \\ a'' & \alpha & \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_3 & B & D & e \\ a' & a & c & d \\ b' & B & D & e \\ a'' & \alpha & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

仿此,第四行列式可等於

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & a & b & d \\ c' & a & b & d \\ a'' & B & c & e \\ c'' & \alpha & \beta & \delta \end{vmatrix}.$$

以此代入(3)卽得繆合之關係式(1).

以下兩關係亦可成立,亦可以視爲(1)之例:

$$(4)\quad \begin{vmatrix} \theta_2 & \xi & \theta_1 & \theta_4 \\ a & b & e & m \\ B & e & h & n \\ c & f & i & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & B & \omega_1 & \theta_2 \\ b & e & m & s \\ e & h & n & v \\ f & i & o & w \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B & h & n & \xi \\ a & e & m & a' \\ B & h & n & s \\ c & i & o & a'' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a & b & m & \theta_1 \\ a & b & m & v \\ B & e & n & y \\ c & f & o & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \omega_2 & m & n & \theta_4 \\ a & b & c & s \\ B & e & h & v \\ c & f & i & w \end{vmatrix} = o,$$

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \theta_2 & \theta_6 & \xi & \theta_5 \\ a & e & h & m \\ B & h & k & n \\ c & i & l & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & B & \omega_2 & \theta_3 \\ e & h & m & q \\ h & k & n & s \\ i & l & o & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & k & n & e_6 \\ a & h & m & p \\ B & k & n & q \\ c & l & o & r \end{vmatrix}$$

$$
+\begin{vmatrix} a & e & m & \xi \\ a & e & m & \varrho \\ B & h & n & d' \\ c & i & o & c'' \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} \omega_4 & m & n & \omega_5 \\ a & e & h & q \\ B & h & h & s \\ i & i & l & t \end{vmatrix} = o.
$$

依第二行之元素展開之,可見(4)中之第三行列式等於(5)中之第四行列式.若關係式(4)及(5)相加,相等之行列式可消去,卽得繆合之關係式(2).

§ 3

一九〇一年梅茲拉之第二基本定理,謂之定理III.將 n 級各子式之和表以 $n-k$ 級及 k 級之各子式之積之和.

當 $k=1$ 時,此定理卽可化爲繆合一九〇〇年所得之定理.

若原行列式爲中心對稱,則定理III中之右端等於零.卽得關於 $2n$ 級之中心對稱之 n 級子式之普通一次關係式.(註一) $k=1$ 之形式繆合於一八八八年最先發現.

§ 4

由此可見叢合之定理實由定理I, II, III變化得來,似乎對於各叢合均成立.只有繆合及梅茲拉所舉與 Circulart 有關之一形式爲例外.(註二) 例如,因行列式

(註一) 參看原書 §524.

(註二) 參看原書 §540.

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & d \\ 1 & b+c+d & a \\ 1 & c+d+a & b \end{vmatrix}$$

恆等於零.故得

$$\begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b & d \\ 1 & c & a \\ 1 & d & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & c & d \\ 1 & d & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = o.$$

此種以恆等式爲消亡叢合之基礎之觀念可推論之,在行列式之消亡叢合,任何字母之係數必爲低次之消亡叢合.否則必恆等於零.如在克洛湼克關係

$$\Sigma \begin{vmatrix} 1 & \overline{2} \\ \underline{3} & \underline{4} \end{vmatrix} = o$$

中 a_{13} 之係數爲 $a_{24}-a_{42}$, 此可將克洛湼克叢合之最簡形式,視爲依軸對稱而爲零.故任何子式之消亡叢合,實賴於含此式之行列式之組織及恆等式.此關係之真確不僅於此處見之.且可以低次行列式或恆等式以成消亡叢合.例如§2 關係(3)卽可由恆等式成之.

用定理 I, II, III 不僅可推出已知之定理,且可得新定理.對於此下陣

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & r_1 & s_1 & t_1 & r_1 & y_1 & z_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & r_2 & s_2 & t_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & r_3 & s_3 & t_3 & x_3 & y_2 & z_3 \end{matrix}$$

用§1 中最後一段之記法,可知應用定理 I 於下三行列式

$$\begin{vmatrix} (12) & [4] & (789) \\ [2] & [4] & [3] \\ [2] & [4] & [3] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} [2] & [4] & [3] \\ [2] & (3456) & [3] \\ [2] & [4] & [3] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} [3] & [6] \\ [3] & [6] \\ [3] & (456\ 789) \end{vmatrix}$$

結果得關係

$$\begin{aligned} |a_1b_2c_3|\cdot|r_1s_2t_3|\cdot|x_1y_2z_3| &= |a_1b_2x_3|\cdot|r_1s_2c_3|\cdot|t_1y_2z_3| \\ &+|a_2b_2x_3|\cdot|r_1c_2t_3|\cdot|s_1y_2z_3|+|a_1b_2x_3|\cdot|c_1s_2t_3|\cdot|r_1y_2z_3| \\ &+|a_1b_2y_3|\cdot|r_1s_2c_3|\cdot|x_1t_2z_3|+|a_1b_2y_3|\cdot|r_1c_2t_3|\cdot|x_1s_2z_3| \\ &+|a_1b_2y_3|\cdot|c_1s_2t_3|\cdot|x_1y_2z_3|+|a_1b_2z_3|\cdot|r_1s_2c_3|\cdot|r_1y_2t_3| \\ &+|a_1b_2z_3|\cdot|r_1c_2t_3|\cdot|x_1y_2s_3|+|a_1b_2z_3|\cdot|c_1s_2t_3|\cdot|x_1y_2r_3| \end{aligned}$$

將三個三次行列式之積表以同形式之積.

欲得四個三次行列式之相似積,可將定理 I 應用於四個十二級之行列式.其中每個之 x 列皆含零之元素.

故所須述及之總定理卽一八五一年薛立威士德定理之擴充.其文如下:

n 級之 p 個行列式之積等於由原行列式中依下法所得各相似積之和:第一行列式之 k 行之某組代以第 p 個行列式 k 行之任一組,第二行列式之 k 行之任何組代以由第一行所代之行.如此繼續,最後由第 p 個行列式所取之行,代以由 $p-1$ 個所取者.此種以 k 行代 k 行之結果,實由於一組之第一行代以他組之第一行.第二行代以第二行等等之影響.

原文見美國數學月刊1932年五月號　　譯者附識.

初等幾何學作圖問題之歷史

窪田忠彥　講演
管公度　重述

I. 玆先就初等幾何學作圖不能問題,即使用直尺與圓規不能解之問題,一論述之.

最著名之初等幾何學作圖不能問題有三:(一)求三等分一已知之角,(二)求作一體積等於已知立方體體積之二倍之立方體(亦稱立方倍積問題,或Thales問題),(三)求作一面積等於已知圓之正方形(亦稱圓化方問題),此等之問題,僅用直尺及圓規乃不可解之事,想讀者所夙知也.前二者之爲不能,據Epstein之說,最初證明之者,乃Wantzel,1837年之事也.至最後一題,則在1882年Lindemann證明π(圓周率)爲超越數之後,同時其解法爲不能之證明,隨之遂生.

此外更舉二三著名之作圖不能問題於次.

Pappus(生於340 A.D.)之問題:

求過已知角之平面上一定點,作一兩端抵此角二邊之線段,令其長等於定長.

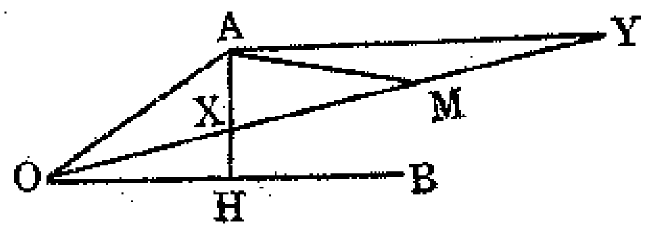
實際上敍之問題,並非真正Pappus之問題,其在定點位於已知角之二等分線上特別情形時,始爲Pappus之問題,

而此時之作圖乃屬可能之事也.

欲證明此一般的問題爲作圖不能,先證明假若此問題由直尺及圓規能解,則角之三等分問題亦不可不解.然以角之三等分問題爲一作圖不能問題,於是 Pappus 之問題亦必爲作圖不能可斷言也.

斯時所用之方法,與 Nicomedes (180. B.C.) 使用彼所發見之 Conchoid 曲線而解角之三等分之方法,完全相同.

設已知之角爲BOA,自邊OA上之一點A向邊OB作垂線,其垂線足爲H.過點A作平行於邊OB之直線AY.



如謂 Pappus 問題爲作圖可能,則過點 O 得作一直線 OXY, 與直線AH相交於點X,與直線AY相交於點Y;且可使線段XY之長等於線段OA之二倍,於是因線段XY之中點M與點A之距離,等於線段XY之半,得OA=AM.故$\angle$BOY等於$\frac{1}{2}\angle$YOA,卽角BOY等於角BOA之$\frac{1}{3}$,從而角BOA被三等分矣.

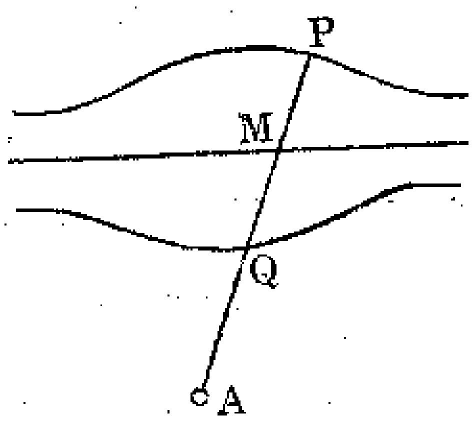
是不啻謂三等分已知角爲可能之事也,故 Pappus 之作圖問題,不可不爲不能問題.

此題Petersen氏在1878年出版渠所著代數方程式一書中,又曾引用已經證得次之定理而證明之.

若一由若干個已知點所決定之不可分解的代數平面

曲線與一任意直線之交點,常以使用直尺及圓規得以求出時,則此曲線必爲直線或圓錐曲線.

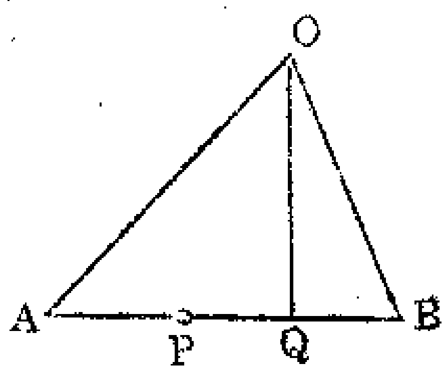
過已知點A,作一直線與已知角之一邊相交於點M.在此直線上,於點 M 之兩側,分取等於定長之MP,MQ兩線段,於是點P,Q之軌迹,卽爲一名曰Conchoid of Nicomedes之不可分解四次代數的平面曲線,而此曲線與已知角他一邊之交點,使用直尺及圓規不能求得,是以知 Pappus 之問題,爲作圖不能也.



又有所謂Philo之問題,亦作圖不能問題也.

在已知角之平面上,求過此角內之一定點P,作一直線APB,與角之二邊各各相交於A,B,且令線段AB之長爲最小.

設此問題能解,則自角之頂角 O 向此直線作垂線令其足爲Q,於是AP=BQ爲其必要而且完全之條件.然僅限用直尺與圓規欲作合於如此條件之直線乃不可能也.



更申言之,若此問題爲作圖可能,則立方倍積問題亦能解可以證明,而以立方倍積之問題爲作圖不能之故,遂得此問題亦爲作圖不能之結論.(參看Casey, Elements of Euclid之附錄).

作圖不能問題又有次之一問題,亦可使用 Petersen 之定理而證明之者也.

試求由同一平面上兩組之五點所決定之二圓錐曲線之四個交點.

此問題之雙對的問題,亦必為作圖不能,卽

試求由同一平面上兩組之五切線所決定之二圓錐曲線之四個共通切線.

借此問題之助,彼著名之 Castillon 作圖問題之擴張亦為作圖不能,不難論證也.

內接於一定圓作一三角形,令其三邊各各與其他三定圓相切.

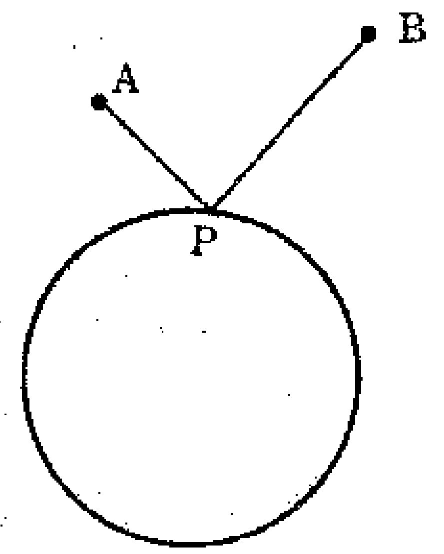
此問題載於 Lachlan 近世幾何學之末,作圖不能問題之一也,昔林鶴一博士曾於東京物理學校雜誌150號為文一論述之,夫上述之問題旣知其為作圖不能,則次述此問題之特別情形,仍為作圖不能,不待證自明矣.

內接於一定圓作一三角形,令其二邊各各過已知之二定點,他一邊與另一定圓相切.

今試設想若內接於定圓且兩邊各各過二定點之三角形在圓內移動時,則其第三邊必切於與所設另一定圓成複切觸之一圓錐曲線而移動.故本問題可使化為求已知之第二定圓與此圓錐曲線之共通切線之一問題,然因此問題為作圖不能,故所考之問題,亦屬作圖不能也.

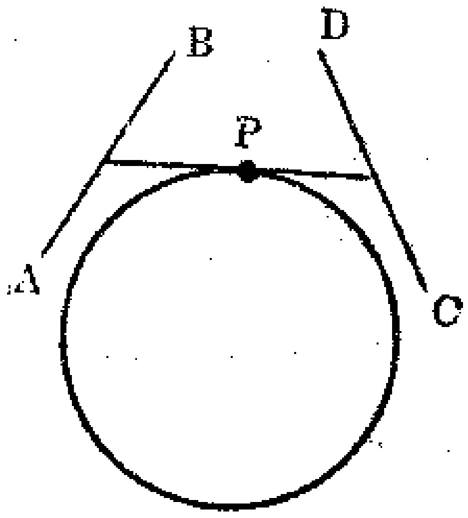
復次又有所謂Alhazen問題之一作圖不能問題.

自同在已知定圓之內方或外方之二定點A, B, 至定圓周上一點P之距離之和AP+PB, 欲求其爲最大或最小試決定此點P.



此問題能解之必要條件,爲二直線AP, PB與圓在點P之切線成等角.下之所述,乃山形高等學校教授柳原吉次在大正13年2月東京物理學校雜誌發表之證明法.

若此問題爲作圖可能,則次之問題亦必作圖可能.



在同一平面上,有AB, CD兩直線及一定圓.試於此圓周上決定一點P令其切線夾於AB, CD間之線段,適以P爲其中點.

但上之問題,遠藤又藏氏在東京物理學校雜誌第七卷(明治三十一年)曾由引用其特例,即能解角之三等分問題,既已證明其作圖不能矣.

於是Alhazen問題之爲作圖不能,勿待吾人之曉舌也.

Alhazen之問題,爲作圖不能,又可用Petersen定理之雙對的定理以證明之.

至於內接於圓作正 n 角形問題,n 爲如何之數時,作圖始屬可能,此問題德人 Gauss 已於 1796 年完全解決之矣.n 如爲素數,則 n 限於爲 2^k+1 之形方屬作圖可能,夫因凡爲 2^k+1 之素數,不可不爲 $2^{2^l}+1$ 之形,故 n 爲素數正 n 角形作圖可能之必要而且完全之條件爲 $N=2^{2^l}+1$,亦卽限於 $n=3, 5, 17, 257, \cdots\cdots$ 等時,作圖始屬可能是也.n 不爲素數時,正 n 角形如爲作圖可能,則 n 不可不爲 $2^t p_1p_2\cdots p_n$ 之形,此處 t 爲正整數,而 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,皆表具 $2^{2^l}+1$形相異素數也.

一般的欲決定某作圖問題用直尺及圓規能解與否,此問題亦如前之所叙,早經解決者也.今記其結果於次:

用以決定求作元素(點,直線,圓等)之量,如能自表示已知元素(點,直線,圓等)之量及自然數之間,施以加減乘除及開平方之運算求出時,則此作圖問題得以直尺及圓規解之;否則不能.

II. 然若僅許使用直尺,則如何之問題,始爲作圖可能耶?此時限僅於射影的一次問題,方屬可能.

但若遇圓錐曲線已完全畫出時,則僅用直尺雖射影的二次問題亦能解.惟是所當注意者,由 Vablen 氏之書,圓錐曲線縱不全畫,只須其弧已畫卽足.

又 Jacob Steiner 曾於 1833 年在柏林刊行一書,證明有次之定理.

若圓已完全畫出且其中心已知之時,則凡以直尺及圓

規作圓可能之問題(此種問題稱爲初等幾何學作圖題),盡得以直尺解之.

此定理如在"圓之中心及半徑已經求得,卽認爲該圓已經作出"之規約下,仍能成立也.Obláth復補充之,而證明圓不全畫以其弧代之卽可,(Monatshefte für Math. u. Phys. 1915)

與此相仿,意大利之幾何學家有 Mascheroni 者,曾於 1799 年證得

在"一直線上有二點已經求得,卽認爲該直線已經作出"之規約下,凡以直尺與圓規能解之作圖題,盡得以圓解之.

此作圖法卽舉世稱道之 Mascheroni 作圖法是也.但據 1928 年丹麥京城出版之 Georg Mohr Euclides Danicus 一書(此書經 Hjelmslev 及 Pál 譯爲德文,1928 年出版)考之,此作圖法在 Mascheroni 前 125 年早已爲丹麥幾何學家 Georg Mohr 所發見.蓋氏於 1672 年所研究之結果,與 Mascheroni 殆全相同,惜以丹麥文及荷蘭文發表,不爲時所知,誠憾事也.

又 Cauer 在 1913 年 Math. Ann. 73 中,以 Hilbert 之講義爲基礎,誘導得次之結果.

A. 中心未與但已完全畫得之二圓,如不相交時,僅用直尺不能求其中心.如爲相切或相交之時,則僅用直尺其心卽可求得.

亦卽謂在後之情况中,僅用直尺,一切初等幾何學的作圖,均屬可能之事也.

B. 中心未與但已完全畫出之不屬於同一共軸系之三圓,如不相交時,其中心僅用直尺卽能求出.

亦卽謂此時僅以直尺解初等幾何學的作圖乃可能之事也.

Cauer開初所引Grossman之證明,中多謬誤.後由 Schur 及 Mierendorff 等之指正,始於 Math. Ann. 74 中,另爲第二次論文以訂正之.

III. 至若不用直尺與圓規,而以直尺及線段截取器(Streckenabträger, Transferer of Segments)代用之,則凡求作之量,可由決定已知元素之量及自然數之間,施以加減乘除及 $\sqrt{a^2+b^2}$ 之演算求出者,得作其圖;而自 $\sqrt{a^2-b^2}$ 之演算得來之量,則不能也.(參攷Feldblum 1899 年之學位論文 Über elementargeometrische Konstruktion) 據 Feldblum 之研究,僅用此等器械 Malfatti 之問題能解,而欲解 Apollonius 之問題乃不可能事也.

IV. 前叙之角之三等分,立方倍積等一類三次代數的問題,如採用作圖紙上已經畫得之特種曲線,仍可以直尺及圓規解之,此自古以還幾何學家致力之事也.關聯於此,次之問題遂生.

在作圖紙上,如圓錐曲線(非圓)已經完全畫出時,則用直

尺與圓規一切的三次及四次之作圖題,是否能解?

此問題乃1866年Steiner氏懸賞之問題,由伯林學士院所提出,1869年H.J.S. Smith及Kortum兩幾何學者獨立解決之,一作圖可能之問題也.

其後1866年F. London在Zeitschrift für Math. u. Phys. 41中,曾證明如作圖紙上有理的三次曲線已完全畫出時,則一切三次及四次之問題,僅用直尺及圓規卽能解之,而特別對於射影的三次及四次之問題,僅用直尺已足.

又1909年Boegehold在Archiv der Math. u. Phys. 14中,發表一文述及在作圖紙上如拋物線已完全畫出時,則一切三次及四次作圖問題,得以直尺及圓規解之.但此不過Smith及Kortum研究事項中之一別解而已.

V. 最後加述柳原吉次及林鶴一之一作圖不能問題,以爲本講之結束焉.

此作圖問題乃使用Lindemann氏研究中之一定理,而證明其爲不能者也.

求於已知圓內,截取一弓形,令其面積,適等於圓之面積之$\frac{1}{n}$(n爲正整數).

此問題當$n=2$時爲作圖可能,而$n>2$時,則爲作圖不能.

(參看東北數學雜誌16卷p. 155林鶴一之論文)

家鼠之解剖

黃震

導言　歲癸酉二月朔,震致書榕垣學生陳某,勗以努力求學,教之結識良朋.措詞欠工,閩省府檢查書信時誤會之.三月朔,鄂省府受閩府托,囚震於武昌省會公安局拘留所,先後凡四十九日,牢中鼠多,警士捕之,日必三五匹,余盡收集而保存於60%Alcohol液中,作解剖材料.取數年來在實驗室中用以指導學生之脊椎動物學實驗講義,加以較縝密之檢查,改正,以成斯篇.講義初稿,作於國立北平師範大學.係參考: 1. Marshall & Hurst; The Practical Zoology. 2. Parker: A Course of Introduction in Zootomy .3. Parker & Haswell: Text Book of Zoology. 4. Reynolds: Vertebrate Skeleton 5. 五島清太郎實驗動物學等書編成.辛未秋,來武大後復參酌: 1. Cambridge natural history Vol X. 2. Heitzmann: Anatomic. 3. Les Animaux de Laboratoire La Souris. 4. Hyman: A laboratory Manual for Comparative Anatomy 5. 平巖馨邦鼠之解剖諸書,略加修改,共成外形,內臟,骨骼,筋肉,血系,神經六篇.蓋哺乳動物之解剖,在研究生物學及醫學者,均極重要;而家鼠之材料易得,器官健全,尤爲研究資料之適宜者.華文專著,尙未多見,初學解剖者引爲憾事.震不惴淺陋,

藉斯刊公諸同好,深冀拋磚引玉,正我錯誤!是則四十九日被囚禁之寃枉,斯不寃枉矣!

外　形

概況　家鼠學名 Mus rattus K. 中國各地皆產,南部尤多,穴居人家壁間或倉庫中,常夜出偷竊食物.全體長約 10cm 至 15cm,可分爲頭胴尾肢四部:(a)頭部成長圓形,耳尖,眼小,口吻突出,唇具硬鬚若干枚.(b)胴部爲圓筒形,背面與腹面之顏色微有不同.(雄者背色黃褐,雌者灰褐,腹色皆較顯淡白).(c)尾細長,被以鱗狀物,且環生粗毛.(d)肢有前後兩對,後者較長,適於跳躍.

A. 頭部

1. 口(Mouth)——頭之前端下部,有橫裂之人字形口,被以肉質唇,形成突出之吻.上唇於中央綫處縱裂爲二,能見其門齒,爲嚙齒類之特徵.
2. 齒(Teeth)——口內具齒兩列,植於上下顎骨之齒槽中.正面中央,有門齒兩對,(上下顎各一對)長而且曲,其形若鑿.其前方凸面,被以黃色之琺瑯質層,能於口外見之.(其他諸齒,待口腔及骨骼之檢驗時,仔細觀察之.)
3. 鬚(Vibrisse)——上唇之左右,卽鼻孔之兩側,散布十八本至二十二本長而且硬之鬚,或稱爲感觸鬚.眼之上下,亦有是項硬鬚.
4. 外鼻孔(External nastrils)——吻之末端,卽口之上方,有兩

斜孔,曰外鼻孔.

5. 眼 (Eyes) —— 頭之兩側,有二圓形之眼,眼有上下眼瞼(Eyelids)——及瞬膜(Nictitating membrane).

6. 耳殼及聽孔 (Pinnue and anditory aperture)——眼之後方,有尖而捲之耳殼一對,支以軟骨,能輕動自如,聽孔卽在其中央.

B. 胴部 頭部之後方,以較細之圓形短頸,連於胴部.胴別爲胸腹兩部分;胸部左右圍以肋骨,腹部則否.去毛後,兩者之區分尤爲顯明.

7. 乳頭(Teats)——腹面有乳頭六對.最後一對,在於後肢基部之鼠蹊部;最前一對,在於前肢基部之腋窩部;餘四對排列於前後兩者之間,唯非出乳時期,狀殊細小,雄鼠則極退化,竟遺殘痕已耳.

8. 肛門 (Anus)——胴部後端,適當尾之基端腹面,有圓形之肛門開口.

9. 尿生殖器 (Urinogenital Organs) ——肛門之下面稍前方,爲外部尿生殖器.雌雄之狀態懸殊,分別述之:

雄	雌
(a)陰囊 (Scrotal sac) ——左右兩鼠蹊之中間,有由皮膚褶成之略隆凸部分,內容長橢圓形之睾	(a)陰戶(Vulva)——肛門前方,有一圓形之窪陷,爲生殖器之外部開口,曰陰戶.

丸一對,是卽陰囊,唯不若其他高等哺乳動物之懸垂.

(b) 陰莖 (Penis)——左右陰囊之前方,挾持一小圓柱形器官,曰陰莖,其尖端之細孔,卽尿生殖孔.

(b) 陰核 (Clitoris)——陰戶前方之小突起,曰陰核,與雄鼠之陰莖同器官而不發達,其末端爲尿道之開口.

C. 尾部 胴部之後端,適當肛門背緣;有細長之尾,被以數多細小鱗狀物,且環生粗毛.

D. 肢部

10.前肢 (Fore limb)——前肢短小,可分爲上膊 (Upper arm), 下膊 (Fore arm), 腕 (Wrist), 指 (Finger) 五部.左右皆具五指,第一指短而無爪,餘四指較長,各具角質之鈎爪 (Claw).

11.後肢 (Hind limb)——後肢較前肢爲長,亦可分爲大腿(Femur), 脛 (Tibial), 跗 (Heel), 蹠 (Plantaris) 及趾 (Toes) 五部.左右各具五趾,趾皆有爪,詳細狀況,有待於骨骼之觀察.

內 臟

A. 皮下諸腺

1. 淋巴腺(Lymph gland)——頸部腹面之中央線左右,適當頭部與頸部之交界處,有二個不規則形之小腺體,密接於皮膚裏面,是卽淋巴腺.下顎與耳之距離間,亦有同樣情形,腋窩下之腺體尤爲發達.

2. 顎下腺(Submaxillary gland)——淋巴腺之背側.復有扁平長橢圓形腺.成於數多小葉,卽顎下腺.其前端以小導管開口於口床.

4. 耳下腺 (Parotid gland)——頸部前端側面,適當耳之後方稍低下處,有一對腺體,曰耳下腺.其前緣出二條細管,沿咬筋之外腹緣進行,而開口於下唇之後隅.

3. 甲狀腺 (Thyroid) ——氣管左右有一對扁平橢圓形之無管腺,曰甲狀腺.

5. 乳腺 (Mammary gland) —— 胸腹部之皮膚裏面,卽前記乳頭底部,有黃色似脂肪質之樹枝狀腺.是爲乳腺.在分娩後,特別發達.

B. 消化器官

6. 口腔 (Buccal cavity) ——消化管開始於上下兩顎之間,其始部形成空腔,是謂口腔.可別之前庭及固有腔兩部,

(a) 前庭 (Vestibulum oris)——唇以頰爲前境,齒牙爲後境.

(i) 唇 (Lippen)——如前記.

(ii)頰 (Buccal)——唇之後部,成口腔之外壁者,曰頰,與唇爲同一之系統.

(iii)齒 (Teeth)——前庭之後境,有着生於顎骨上之牙齒.其正面中央二對門齒,已記於前節.門齒之外,在上顎之後方,尙有三對臼齒 (Molars);下顎亦然.其形狀留待骨骼檢查時,詳察之.

(b) 固有腔 (Cavum oris)——齒列之後方,爲一大腔,上覆口蓋,下承以舌,後部由咽峽 (Isthmus faucium) 通咽頭腔:

(i) 口蓋 (Palatum)——口腔之上壁,曰口蓋.其前方由上顎骨口蓋突起及口蓋骨之平坦部分合成;附以强厚粘膜,呈縱行縫綫 (Raphe),曰硬口蓋 (Palatum durum) 極富血管神經;後方乃黏膜之延長者,略呈瓣狀,包藏强厚之筋肉質,曰軟口蓋 (Palatum molle).

(ii) 舌 (Tongue)——口腔之底部中央有一肉質之舌.外被以數多乳狀突起 (Papillae) 之粘膜,內爲縱橫及上下走之筋肉,能自由運動,以吞嚥食物,調節聲音.依其部位區分之,可別爲舌根 (Radix), 舌尖 (Apex), 舌翼 (Dorsum),舌底及側緣諸部.

(iii) 唾腺 (Salivary gland)——口腔之底部及後隅,有三種唾腺.能分泌唾液,幫助消化食物,顎下腺及耳下腺已加觀察;舌下腺 (Sub-imgui-gland) 卽在於舌之底部,宜用分析針細心檢查之.

7. 咽頭 (Pharynx)——口腔之後部,位於頸椎與喉頭間,爲一扁平之漏斗狀,曰咽頭.其壁爲數種極富伸縮性之筋肉及黏膜所成.

8. 食道 (Oesophagus)——咽頭之後,以長管穿過橫膈膜,而連於胃囊,是管卽名食道,爲富有張力之筋肉管,成於纖維膜,筋纖膜及黏膜三層.

9. 胃(Stomach)——食道之後端,連接於一闊大之胃囊.其位置在於橫隔膜後方,掩蓋於諸肝葉之下.

(a)部位(Parts)——依胃囊之自然位置,得區分爲次列諸部分.(i)前後二面滑澤,常時稍平坦,飽食之後呈凸形.(ii)上下二緣成大小二弓形,上緣爲小弓形曰小灣,下緣爲大弓形,曰大灣,(iii)左右二端形狀各異,左端膨大,曰胃底;右端狹小稱幽門極.(iv)上下二孔一通於食道,曰賁門;一通於十二指腸曰幽門.幽門之周緣有輪狀隆起,稱幽門瓣,藉括約肌之約束,可使食物在胃中充分消化.

(b)構造(Tisseus)——胃壁之構造,與食道略同,其表面被覆漿液膜;中爲縱橫斜三層筋纖膜互相錯綜而成;內面則附以單層圓柱狀細胞所成之上皮黏膜,最宜製作縱橫斷面之標本片就顯微鏡下觀察之.

(c)胃腺(Glands)——胃之上皮黏膜,含二種腺體.(i)胃液腺(glandulae digestive),胃底及胃壁上,有時多固有腺體,其形如管,管腔之上部附於柱狀上皮;底部有多稜形及圓錐形細胞,即胃液腺.(ii)幽門腺(glandulae pylorinae).幽門部之胃壁上,另有多數管狀黏液腺,曰幽門腺.

10.小腸(Intestinum)——幽門之後,接以紆曲迴旋之長管,通稱之曰腸管.其前段約五分之四,形較細小,且其管壁較薄,是爲小腸,可別爲次列三部:

(a)十二指腸(Duodenum)——小腸始端,逕接於幽門之後,成 u 字形之部分曰十二指腸.其壁較他二段爲厚,膵液及膽汁,皆輸入於此,裏面之黏膜呈强厚之橫皺襞,特名之爲自閉瓣.

(b)空腸 (Intestinum jejunum)—— 接於十二指腸後部之小腸,曰空腸.

(c)迴腸(Intestinum ileum)——空腸之下部腸管,迴旋極甚,爲小腸最長之段,是曰迴腸.其末端接連於盲腸,處具瓣膜,用以防止大腸內容物之逆流.

11.大腸(Intestinum grassum)——迴腸之次,接以較粗多之腸管,是卽大腸,約佔全腸五分之一.管壁稍强厚,內有旋形之隆起綫,就外部視之,若花紋然.其末端開口於肛門.

(a)盲腸(Caecum)——大腸之始段,形甚膨大,是卽盲腸,其後部爲一短形盲管,曰蟲樣垂(Proc vermiformis).

(b)結腸(Colon)—— 盲腸之次段,其腸管迴轉屈曲,幾及胃之底部,是卽結腸.

(c)直腸(Rectum)——大腸之末段,達於腸骨窩;更直走至小骨盤腔內,沿薦骨腹面後行,終於肛門,是曰直腸,其內壁平滑,與結腸略異.

12.肝臟(Liver)——腹腔之前端有暗赤色之大形肝臟,適貼合於橫隔膜之後,而蓋覆於胃囊之上,可因其裂隙分爲五葉.其後面凹陷處,有薄壁之膽囊(Gall blader),出自膽囊

之囊管 (Cystic duct) 及由肝臟各部所集成之肝管 (Hepatic duct)互相結合,成公共之輸膽管 (Bill duct), 而開口於近幽門之十二指腸.

13.胰腺 (Pancreas)——十二指腸段之腸間膜上,有一淡紅色不規則之形之胰腺.其先端始於肝臟之下,而蔓延於十二指腸之迴轉間.腺之構造與唾腺同,爲葡萄球形.各腺葉有小排泄管,總合之,成爲胰管 (Ducts pancreatic)出胰頭,與膽合而開口於十二指腸.

14.脾臟 (Spleen)——胃囊底部,有一長而扁之暗紅色體,是爲脾臟.

15.直腸腺 (Recta-gland)——肛門兩側,有一對圓形之腺,曰直腸腺.

C. 吸呼器官

16.喉頭 (Laryax)——口腔之後部,適當咽頭與舌骨間,有一略呈三角形之漏斗狀器官,曰喉頭.其上口曰喉頭咽頭口 (Ostium pharyngeum-laryngis), 呈三角形,開口於咽頭腔內;下口曰喉頭氣管口 (Ostium tracheale-laryngis), 呈圓形,直通於氣管,爲數種軟骨,韌帶,黏膜及筋肉纖維所組成.

(a) 甲狀軟骨 (Cartilage thyreoidea)——喉頭之腹壁及側壁爲一較大形之軟骨,曰甲狀軟骨,呈扁平方形,向左右屈折.

(b) 環狀軟骨 (Cartilage Cricoidea)——喉頭之下部,有指環狀

軟骨板,曰環狀軟骨,其背壁爲板狀,稱板部(Lamina),腹壁爲弓狀,稱弓部(Arcus).

(c) 會厭軟骨(Cartilage epiglettica)——自甲狀軟骨,內面,上申于舌根之後方下部,有略呈匙形之軟骨,即會厭軟骨.當食物嚥下時,屈折而掩閉喉頭孔,若活瓣然.

(d) 披裂軟骨(Cartilage arytaenoidea)——喉頭之背方前部,即環狀軟骨板部之上,有三角錐形之小骨一對,曰披裂軟骨,其基底有卵圓凹陷之關節面,與環狀軟骨相關接.披裂軟骨之尖端,各附着錐形小骨,曰小角軟骨(Cartilage corniculataes sintorinianae),在披裂軟骨與會厭軟骨之縫裂中,另有楔形小骨片,曰楔狀軟骨(Carti'age cunerformmeses wresbergianae).

(e) 聲帶(Vocal chord)——甲狀軟骨內面與披裂軟骨前緣及聲帶突起間,附着有極富彈力之韌帶,曰聲帶.其左右兩帶間之裂隙曰聲門(Glottis).

17.氣管(Trachea)——喉頭之後方,接以數多C狀軟骨連續而成之氣管.其形宛若圓柱然,唯其背側之軟骨缺而不全耳.氣管抵胸腔時,分爲左右兩氣管枝,各達肺門而入於肺臟,自是更分爲若干氣管細枝以入於肺葉.

18.肺臟(Lung)——充滿胸腔之內,而圍擁於心臟之兩側者,爲淡紅色大形之肺臟,居左之肺較長而小,不分葉;居右之肺,稍短而大,分爲四小葉.各肺臟呈三角錐形,有基底

與尖端之別.——基底凹陷,與橫隔膜之前面相接應,尖端鈍圓達於胸廓之前隅.其內部粗鬆,爲海綿體,極富彈力.係由多數之小氣管枝,氣胞,血管及結締組織所組成.

D. 循環器官　左右兩肺圍抱之中,有一圓錐形心臟,是卽循環系統之中樞器官.其內部之結構,及其所關連之各種血管,均有待於色液注射後另作血管系之實驗,此處暫且付闕.

E. 泌尿器官

19.腎臟 (Kidney or Renes) —— 腹腔背側,有一對扁平卵圓形之赤褐色器官,曰腎臟,其內緣稍凹陷,有縱行之裂孔,爲腎動靜脈及輸尿管出入之處,曰腎門 (Hilus). 其內部之構造,最宜作成標本片,就顯微鏡下觀察之;肉眼觀察,只能見其大略:

(a) 皮質 (Sub-ctantia Cortiealis)——腎之表部含血管與麥爾比安氏小體 (Malpighian's body), 甚多,故其斷面呈黃赤色之顆粒狀,是卽所謂皮質也.皮質之深入於髓質,分界麥爾比安氏圓錐體者曰貝爾丁柱 (Columnae Bertin)

(b) 髓質 (Substantia medullaris) ——腎之深部爲細尿管束集成,故其斷面呈綫狀,灰白色,是卽所謂髓質也.各細尿管束成爲數多圓錐體,卽前記之麥爾比安氏圓錐體.圓錐體之基底近皮質,如放綫狀而消失,曰髓腺 (Markstranleres); 尖端向腎竇突出,曰乳頭 (Papillarenalis).

20.副腎(Adrenal body)——腎之前端各附着一略呈三角形之黃色腺體,曰副腎,

21.輸尿管(Uretra)——兩腎臟之內緣,各由腎門出一平扁膜管,曰輸尿管.其上端為漏斗狀,曰腎盂(Pelvis)由若干腎蓋(Calyces majores)集合而成者.

22.膀胱(Vesica urnaria)——輸尿管之下端通於一筋肉質之卵圓形囊,曰膀胱.極富伸縮性,其壁之厚薄,因內容物(尿液)多少而異.

23.尿道(Uretere)——膀胱之後端,為一細管,曰尿道.雄者末端通於尿道海綿體中,而開口於陰莖之末端;雌者開口於陰戶前方突起,即陰核之末端.

F. 生殖器官.

雄

24.睾丸(Testis)——前記陰囊之中,包藏一對卵圓形之腺體,曰睾丸,外部被以纖維膜,曰睾丸白膜(Tunica testis).此膜自後緣侵入實質,成縱隔,曰睾丸縱隔(Corpus highmoris mediastinum testis),分隔丸為數多圓錐形之小葉各小葉中具紆

雌

24.卵巢(Ovary)——腹腔之背面,適當腎臟後部有一對扁平卵圓形之薔薇色小體,是即卵巢.其一端以卵巢韌帶連繫於子宮,他端游離於腹腔之內如製為顯微鏡標本片細察之,得見其外部被以白膜,為固有膜,(Tunica albuginea);內

迴曲屈之細精精管,卽造精之所,宜以顯微鏡察之.

25.副睾 (Epididymis)—— 睾丸之後端有不規則形之囊狀體,內部充滿紆迴曲折之細精管;外部常附着以脂肪體,是卽副睾.

26.輸精管 (Vasdeferens)——從副睾之前端內緣,出一短膜管曰輸精管.

27.貯精囊 (Vesicula seminalia)—— 膀胱底面兩側,適當攝護腺之後方,有長圓形之小膜囊,貯藏精液,曰貯精囊.

28.攝護腺 (Glandulae-prostata)——膀胱之前方左右側,俱有大形淡黃色半透明之長而紆曲之腺體,曰攝護腺.

29.考巴腺 (Glandulae-Cowperi)—— 攝護腺基端背側,有一對小球形之腺體曰考

含大小不定之無數濾胞,(其大者曰顧拉夫氏胞)中擁若干卵子 (Ovulum).

25.輸卵管 (Oviduct)——卵巢之外方,卽腹腔之左右側,有一對曲折小管,曰輸卵管.其前端擴大,呈喇叭形,曰罰絡平尼亞氏管 (Fallopinia's tube),爲剪綵樣之漏斗狀孔,開口於腹腔;後端漸次膨大,成爲下記之子宮.

26.子宮 (Uterus) —— 左右兩輸卵管之後段,膨大而爲子宮,直向腹腔之後部結合.其管壁之筋肉强厚,富擴張性,內面多褶襞,爲胚胎蘊藏之處所.

27.膣道 (Vagina) —— 左右兩子宮會合而爲膣道,其位置,在於直腸與膀胱之間,係扁平膜管,亦富擴張性,

巴腺.

30.陰莖 (Penis)——前記兩陰囊之前方中部挾持一圓柱形之陰莖,其根部連於陰囊之背面;末端有類圓錐形而具三小刃狀突起之龜頭 (Caputs). 龜頭之尖端有縱裂小孔,即尿道口 (Orificium urethrae). 橫斷面觀察時,可見其前面有二個並行之空洞體 (Corpora Cavernosum);後面成於一個柔靭之海綿體(Corps spongiosum).外部全體被以包皮 (Prepuce)膜.

內部有黏液腺,呈強厚皺襞.

28.陰戶 (Vulva) —— 膣道之先端稍稍寬大,名為前庭 (Vestible)其體外之開口卽曰陰戶.

31.直腸腺 (Rectal gland) —— 肛門之兩側,有一對圓形小體,卽直腸腺.(雖雄鼠皆備此器官,與生殖作用無關.)

32.會陰腺 (Perineal gland)——生殖孔之兩側亦具一對圓形小腺體,曰會陰腺.

骨 骼

取新鮮,或預浸於酒精液中之材料,剖開腹腔,盡去其內臟,然後投入沸湯中煮之,除淨其筋肉,依頭部,脊椎,胸廓,肩

帶,前肢,骨盤,後肢等部順序檢查之,如遇有縫合綫不明顯者,可投入10%苛性鉀熱湯中浸之,必能獲得良好効果.

一.頭骨 (The cranium or skull) 剝除頭部筋肉之後,可於其後壁,見一圓孔,稱後頭孔 (Foramen magnum).孔之兩側,各有一個圓突起,稱後頭骨髁狀突起 (Occipital condyles), 頭骨之中部左右,更有弧狀突出部分;本部則內陷,形成眼窩(Orbit);後方兩側,復有圓管狀孔,名曰聽孔 (Auditory aperture).吻部前端有外鼻孔 (External nostrils); 口蓋之後方又有內鼻孔 (Internal nostrils); 此外於頭蓋底部,尙可見有若干小孔,其詳有待於頭蓋部諸骨檢察之後,再爲叙述:

A. 頭蓋部

1. 後頭骨 (Occipital bone)——頭蓋骨之後部,接連於第一頸椎處,有形成貝殼狀之骨骼卽後頭骨,係由下列三種骨骼組合而成.

   (a) 上後頭骨 (Supra-occipital)——後頭孔之上緣骨板,中央隆起,成楯狀突,曰上後頭骨.

   (b) 外後頭骨 (Exoccipitals)——後頭孔之兩旁,成髁狀突起之大部分者,曰外後頭骨.此骨左右各向下方出一突起名側後頭骨突起 (Paraoccipital process).

   (c) 基後頭骨 (Basiocciptals) —— 後頭孔之腹緣,適當中央位置,有一骨板,形成頭蓋腔之後底,曰基後頭骨.

2. 蝴蝶骨 (Ossphenoideum)——頭蓋骨之底面,卽接合於基後

頭骨之前方,而連絡口蓋骨,上顎骨,鋤骨等骨片之蝶形骨,曰蝴蝶骨.亦爲多種骨片集合而成者也.

(a)基蝴蝶骨(Basisphenoid)——基後頭骨之前方連接一骨,成水平位置,爲頭蓋腔底面之中部,是卽基蝴蝶骨.

(b)前蝴蝶骨(Preasphenoid)——基蝴蝶骨之前方,復接一個兩側扁壓之中央骨.曰前蝴蝶骨.

(c)翼蝴蝶骨及眼窩蝴蝶骨(Alisphenoid and orbdospenoids)——基蝴蝶骨及前蝴蝶骨之側面,連絡兩對不整形薄骨板.其在後者呈闊翼狀,曰翼狀突起,(Pterygoid Process),在前者,卽眼窩蝴蝶骨.

3. 涙骨(Lychrymal)——眼窩之前緣內隅,有一小骨板,嵌於前顎骨,口蓋骨及顴骨間,是卽涙骨.

4. 篩骨(Ethmoid bone)——蝴蝶骨之前方.卽腦函前部,有篩狀板,穿以無數小孔,爲嗅神經之通道,是曰篩骨.此篩狀板成中央垂直骨,卽中央篩板(Mesethmoid)之一部.其餘部分卽垂直板(Lamina perpendicularis,)成鼻腔間隔之骨質部.

5. 篩甲介骨及鋤骨(Ethmo-turbiuals and vomer)——鼻腔間隔骨質部之側壁,復有兩個薄螺旋狀骨,融合於中央篩骨,是曰篩甲介骨,或稱篩鼻甲介骨.另於左右篩骨之腹緣間,具一長形中央骨,是卽鋤骨.

6. 顱頂骨(Parietals)——頭蓋腔之頂壁,爲一對外凸內凹之

板狀骨,是卽顱頂骨.

7. 間顱頂骨 (Inter parietals)——顱頂骨與上後頭骨間,有一略呈菱形之中央骨板,名間顱頂骨.

8. 前頭骨 (Frontals)——顱頂骨之前方,有前頭骨一對.其中央雖尙留縫合痕跡,第不易離析,眼窩內壁之上部,卽賴此而成.在各眼窩上部,成弦月形突起者,曰上眼窩突起 (Supraorbital process).

9. 鱗狀骨及顴骨弧 (Squamosal and zygomatic arch)——顱頂骨之外腹緣,有一不整形之幅廣骨板,卽狀骨.前向有一强突起,曰顴突起 (Zygomatic process);其末端連於顴骨,成顴骨弧 (Zygomatic arch).向後復有一細突起,曰後聽骨突起 (Post tympanic process),附於圍耳骨之外面.

10. 顳顬骨及圍耳骨 (Tempanic and periotic bone)——鱗狀骨之下方,適當後頭骨與顱頂骨間,有形成外聽道壁之骨質部,卽顳顬骨.其下方擴大,突出於頭骨之下面,成聽骨囊 (Bulla tympanic).其前隅之孔,卽歐斯達氏管孔 (Eustachian aperture).顳顬骨前部之骨卽圍耳骨,或曰耳前骨.

11. 鼻骨及鼻甲介骨 (Nasals and nasouturbinal bones)——被覆於鼻腔之上,有一對扁平骨板,是卽鼻骨.各骨板之內面俱有一極薄之囊狀突起,曰鼻甲介骨.其在篩甲介骨之前部者曰顎甲介骨 (Maxallaturbinal).

附頭蓋表面之開孔 (Aperture on the surface of the skull).

(a) 視神經孔 (Optic foramen) —— 眼窩蝴蝶骨上之開孔,爲視神經之通道,曰視神經孔.

(b) 內眼窩孔 (Internal orbital foramen) ——視神經孔之前方有一小孔,曰內眼窩孔.

(c) 前破裂孔 (Foramen lacerum anterior)——視神經孔之後側,適當基蝴蝶骨與側蝴蝶骨之間,有一開孔,曰前破裂孔.

(d) 下眼窩孔 (Infra-orbital foramen)——上顎骨之顴突起下方,有一小孔,曰下眼窩孔.

(e) 前口蓋孔 (Anterior palatine foramen) —— 前顎骨與上顎骨之境界上,適當口蓋突起左右之界綫上,有大形之開孔,曰前口蓋孔,

(f) 後口蓋孔 (Posterior palatine foramen) —— 前顎骨與口蓋骨之境界上,有小孔,曰後口蓋孔.

(g) 中破裂孔 (Foramen lacerum medium)——側蝴蝶骨與耳孔之間,適當鼓室前方之開孔,曰中破裂孔.

(h) 莖乳孔 (Stylomastoid foramen) ——鼓室之後緣中央部有小孔,曰莖乳孔.

(i) 後破裂孔 (Foramen lacerum posterior) —— 鼓室與基後頭骨之間,有一開孔,曰後破裂孔.

(j) 髁孔 (Condylar foramen)——後頭髁直前,貫穿外後頭骨之小孔,曰髁孔.

B. 顎骨部

12.前顎骨(Pemaxillae)——鼻骨前面下方,有扁平不規則之梯形骨,曰前顎骨,成吻之前部,上嵌切齒.

13.上顎骨(Maxillae)——前顎骨之後方,有一對不規則形之骨,形成上顎之大部分,是卽上顎骨,上嵌有臼齒.向內側水平突起.合成硬口蓋之前部,曰口蓋突起.又其前外部向後出一突起,成眼窩之外緣前半部,曰上顎骨頰突起.

14.顴骨(Malcer)——左右上顎骨之頰突起後端,關接一個細長之骨,而銜接於鱗狀骨之顴突起,成顴骨弧,是曰顴骨,或稱軛骨(jugalus).

15.口蓋骨(Palatine bone)——鼻腔之底部與口腔項蓋之大部分爲板狀骨片所成,此骨板卽口蓋骨.

16.翼狀骨(Pterygoids)——關接於口蓋骨後方與翼蝴蝶骨之翼狀突起腹面,有一對直立之板狀小骨,曰翼狀骨.

17.下顎骨(Mandible)——前顎骨及上顎骨之下方,有由左右兩半部合成之下顎骨.其前方以縫合線互相貼合;後方豁開,成V字形,以關接髁與鱗狀骨相關應.

C. 舌骨及牙齒部.

18.舌骨(Hyoid bone)——喉頭腹側,有由強厚之骨質部分與其大小不同之兩對短角所成之舌骨.此舌骨之體部名爲基舌骨(Basi-hyals);小角曰角舌骨(Cerato-hyals);大骨曰楯舌骨(Thyro-hyals).

19.齒 (Teeth)——嚙齒類皆缺犬齒與前齶齒;只門齒與後齶齒發達,兩者之間,成為空隙.

(a) 門齒 (Inciser)——上下顎各有一對門齒.位於前顎骨之前端,外被琺瑯質,鋒極銳利.

(b) 齶齒 (Molar)——上下顎各有齶齒三對,第一對最大.齒面積折,有琺瑯質之稜線.

二.脊椎骨 (Spiual Colum)——頭骨之後方,沿軀幹背壁之中央綫上,有數多略同形狀之椎骨 (Vertebra). 接續而成脊樑,為其他各部分骨骼附着之基柱,亦即全身筋肉內臟賴以支持之中樞機關.可別為頸椎,胸椎,腰椎,臀椎,尾椎五部.

20.頸椎 (Cervical vertebra)——脊樑上之第一段椎骨,有七個不具肋骨者名之曰頸椎.其第一椎骨,第二椎骨之形狀與普通椎骨不同,分別記載如次:

(a) 載械 (Atlas)——第一頸椎成環狀,不具椎體,直接於後頭骨,故曰載械.其椎孔為卵圓形,後壁無脊棘,前面兩側有二凹陷,關接後頭骨之髁狀突起.

(b) 樞軸 (axis)——第二頸椎之椎體前面,有向上突出之縱軸,貫入載械之中腔,若戶樞然,故曰樞軸.其縱軸名齒狀突起 (Odontoid process), 椎具脊棘,亦有短促之橫突起.

(c) 普通椎骨 (General vertebra)——自第三頸椎以下,各椎骨之形狀差異甚微,其普通狀態,約略可分為下記各

部:

(i)椎體(Corpus)——椎骨之腹面,爲扁圓形之堅固部分.其前後兩面,均呈圓盤狀.具軟骨接合面.

(ii)椎弧(Archs)——椎體之上方,左右隅各出扁平板,而接合於背方,形成骨環,爲蘊藏脊髓之空腔是卽椎弧,或曰椎弓,亦曰脊髓弧.

(iii)脊棘(Spinous p ocess)——脊髓弧之背側中央,有棘狀突起,曰脊棘,或曰棘狀突起.

(iv)橫突(Transverse process)——椎弧之兩旁,適當與椎體連接處,有向左右突出之部分,曰橫突.

(v)關節突起(Zypapophysis)——椎弧之前後面皆有關節突起.其在前者曰前關節突起(Preas zypapophysis)在後者,曰後關節突起(Post-zypapophysis).

(vi)下突起(Hypapophysis)——椎體腹面之中央隆起卽下突起.

21.胸椎(Thoracio vertebra)——頸椎之次,爲十三個具肋之椎骨,曰胸椎,或曰背椎.其脊棘甚長,橫棘則短而健.在近極端處各有迎合肋骨結節之小關節面,是曰結節關節面(Tubercular facet).各胸椎之前後緣,有一小半月形關節面,(Capitular facet).在椎體與椎弧相界之處,兩連續椎骨各有半月狀關節面,形成杯狀凹陷,容納肋骨之頭部(Capitulum).

22.腰椎(Lumbar vertebra)——胸椎之次,爲六個脊棘較短之椎骨,是爲腰椎.橫棘及椎體上,俱無關接面,前二腰椎之椎體各向下方出短而平之突起,曰腹突起(Hypapophysis).前方復有上突起,斜向前外方,後方更有後突起(Anpapophysis),在於後關節之下.

23.臀椎(Sacral vertebra)——腰椎之次,有四個椎骨,合成一體,是曰臀椎,或稱薦骨(Sacrum).其狀態與腰椎略同,唯腹突起及後突起俱付缺如,上突起亦較小.

24.尾椎(Caudal vertebra)——臀椎之次,有若干(自二十五至三十餘個不等)小形椎骨,稱爲尾椎.其最前方數椎骨,類似臀椎,迨至後方,漸次細小,僅賸圓柱形之椎體已耳.

三.肋骨(Ribs)

25.真肋(True ribs)——胸椎之左右側,先後關接十三對弓形長骨,統稱爲肋骨.其前方七對以軟骨直接聯繫於胸骨,曰真肋.

(a)背端(Extremitas posterior)——肋骨之背端卽關接於胸椎骨之端,稍膨大,以關節面與胸椎體兩側相關接,曰肋骨小頭(Capitulum);其外側狹小之部,曰肋骨頸(Collum Costae).在頸之外後側與胸椎之橫棘爲關節者,曰肋骨結節(Tabercullum costae).

(b)體部(Corpus)——肋骨中部長而扁平,是卽體部.近背端屈折爲鈍角,曰肋骨隅.外面穹窿,內面凹陷;上緣鈍

圓,下緣銳利.

(c) 腹端 (Extrenutas anterior)——肋骨近腹之端,扁平擴張,末後呈凹窩,與肋軟骨結合,是卽腹端.

(d) 肋軟骨 (Cartilage cortales)——連接肋骨前端與胸骨之間,爲一種富有彈力之長扁平軟骨,曰肋軟骨.

26.假肋 (Costa spuriae)——真肋之後方六對肋骨,皆非直接連接於胸骨.是名假肋.第八,第九,第十三對之前端以肋軟骨爲媒介,挨次連於第七肋軟骨;第十一,十二兩對較短,先端游離,別名之曰浮肋 (Costae-fluctuantes).

四.胸骨部 (Sternum)

27.胸骨片 (Sternebrae)——胸壁之正中,有長棒狀骨六個,先後連續,成肋骨之腹端支柱,統稱之曰胸骨.此胸骨除最前一個及最後一個外,餘各個皆稱胸骨片.

28.把柄 (Manubrium)——胸骨之最前一節,較其他各節爲大;其腹面有低隆起綫,兩側有迎合第一真肋之關接面,是爲把柄,或稱前胸骨.

29.劍胸骨 (Xiphisternum)——胸骨之最後一節,形狀較細而長,先端具一圓形之小軟骨盤,曰劍胸骨.

五.肩帶部 (Pectoral girdle).

30.鎖骨 (Clavicle)——胸廓之前端,卽前頸之下境,第一肋骨之前方,有一對略呈 S 字形緩曲之細長棒狀骨,是名鎖骨.其前端以靱帶連於胸骨之把柄兩側;後端連於肩胛

骨之肩峯.

31.肩胛骨(Scapula)——胸廓之後方上部,約當第二至第七肋骨之間,有三角形扁平之骨板,與鎖骨及上膊骨二骨相關連,是曰肩胛骨.

(a)肩胛棘(Spina scapulae)——肩胛骨之外面,有橫行之隆起綫,曰肩胛棘.

(b)肩峯突起(Acromion process)——肩胛骨之下端游離緣,爲一長突起,曰肩峯突起.

(c)後肩峯突起(Meta-acromion process)——肩峯突起,後向另出突起,曰後肩峯突起.

(d)肩臼(Glenoid Cavity)——肩胛骨之下端,有一凹面,爲容納上膊骨頭部杵關節之關接面,曰肩臼.

(e)烏喙突起(Coracoid process)——肩臼之前方,有向內灣曲之小突起,卽烏喙突起.

六.前肢骨(Fore-limb)

32.上膊骨(Humerus)——胸廓之側面,卽肩胛骨與前膊間,有圓柱狀之長骨,曰上膊骨.其基末兩端皆具關節面,分別記載如次:

(a)基端(Bassis end)——上膊骨(i)基端膨大如球,嵌入肩臼內曰頭部(Scaput humerus);(ii)外緣有大突起 (Greater-tubereority);(iii)內緣有小突起(Lesser tubereority) (iv)兩突起間有二頭溝(Bisiptal groobe);(v)基部前面有三角隆

起(Deltoidridge).

(b)末端(Point end)——上膊骨之末端有大小兩關節面,(i)大者曰滑車(Trochler),關接尺骨;(ii)小者曰小頭(Capitellum),關接橈骨.其側部更有內外兩髁狀突起.(iii)在內側者曰內髁狀突起(Internal condyles);(iv)在外側者,曰外髁狀突起(External condyles).(v)兩突起之中間後面具密接滑車面之窪陷曰鶯嘴窩(Fossa olecraon).

33.前膊骨(Unterarmkuchen)——關接於上膊骨之下,爲二個扁圓形長骨.卽前膊骨.

(a)橈骨(Radius)——前膊骨之在內側者爲橈骨,其基端關接上膊骨;末端膨大,以三角關接面與腕骨相關接.

(b)尺骨(Ulna)——前膊骨之在外側者爲尺骨.其基端强厚,前方有縱截痕,曰大半月截痕(Incisura semilunaris mayors fossasigmoidea),與上膊骨相關接.上下二端皆向前突出.上突較大,曰鶯嘴突起(Proc ceronoideus)下突較小,曰烏喙突起(Olecranons procanconaeus).末端膨大,爲半球形,曰小頭(Capitulum ulnae);頭之外側有關節面,曰環狀關節(Circumferentia articularis ulnae),與橈骨下端之截痕爲關節,

34.腕骨(Carpal bone)——橈尺骨之末端有九個形狀參差不齊之腕骨,排成兩列.後列諸骨由內側向外舉之,曰(i)船狀腕骨(Scaphoid),(ii)月狀腕骨(Lunar,),(iii)楔狀腕骨(Cuneiform) (iv) 腕豆骨 (Pisiform); 前列諸骨,由內側舉之,曰 (v) 僧帽腕骨 (Trapezium),多棱腕骨 (Trapezoid),中央腕骨 (Centrale),巨腕骨 (Magnum),及鉤狀腕骨 (Unciform).

35.掌骨 (Metacarpals)—— 關接於前列腕骨之次,爲四個狹長之管狀骨,是卽掌骨.第一個掌骨最短,第三個最長,末端皆與各指骨相關連.

36.種子骨 (Sesamoid bone) ——第一列指骨與掌骨間,各有二個小骨,曰種子骨.(唯拇指只有單個).

37.指骨 (Phalanges) —— 種子骨之次,連續以三個扁圓細小之柱狀骨,曰指骨.構成三指節,(唯第一指,只二節)計其總數爲十四個.

38.爪 (Claw) ——各指最後一節之末端背面,附以角質爪.

七.骨盤部 (Pelvic bone).

前記薦骨(卽臀椎之集合體)之左右側,有扁平不整形之數骨片,互相結合而成髖骨;更連結薦骨,是卽所謂骨盤.髖骨可區別之爲腸骨,坐骨,恥骨三部分,互以軟骨爲界.成長之後,軟骨硬化,遂融合爲一.其與大腿骨爲關節之處,有深窩,曰髀臼 (Acetabulum); 坐骨與恥骨間,擁一大孔,曰閉鎖孔 (Formen obturatum).

39.腸骨 (Ilium)—— 髖骨之前上部最大,形似杓子,因其內面接觸腸之一部,故曰腸骨.

40.坐骨 (Ischium) —— 髖骨之後部爲三角形强厚之骨板,

是卽坐骨.其後端成鈍圓突出狀態,曰坐骨結節 (Tuber Ischü).

41.恥骨 (Pubis)—— 髖骨之腹面,左右結合.成爲陰部,名曰恥骨.其接合面在於腹面中央綫,特名之曰恥骨縫合線 (Symphysis of Pubis).

八.後肢部 (Hind limb)

42.大腿骨 (Femur)—— 髖骨左右髀臼之關節面,關接以長圓柱狀之大腿骨,其基末兩端,各具關節面,分別記之:

(a)基端 (Bassis end) ——大腿骨之基端向內突出,成圓球形,以嵌入於髀臼,名爲大腿骨頭部 (Caput femoris), 其頂端有小窩,曰頭窩 (Fovea capitis), 爲圓靱帶之附着點.頭部下方較狹,名之曰頸 (Collum). 頸之外側有大突起,曰大轉子 (Trochanter major); 內側復有小突起曰小轉子 (Trochanter minor). 二轉子間有隆起綫,曰轉子間線 (Lines intertrochanterica). 大轉子之下方外面,復有一突起,或稱之爲第三轉子 (Third trochanter).

(b)末端 (Point end) —— 大腿骨之末端,成方形而膨大,有內外二突起,與脛骨爲關節.曰內關節髁(Condylus femoris medial); 外關節髁 (C. f. lateral). 其面彎窿,前部互相連合,成鞍狀淺窩,曰膝蓋窩 (Fossa Potelaris) 與膝蓋骨爲關節.

43.膝蓋骨及種子骨 (Patella and sesamoid)——大腿骨與脛腓

骨之關節面前方,有一長扁圓形小骨,是卽膝蓋骨,以靱帶聯繫於大腿骨之末端及脛腓骨之上端.其後面適當內外兩關節髁上方另有一對小形之種子骨.

44.下腿骨(Unterschen kelknochen)——關接於大腿骨之末端,爲兩相結合之二長骨,總稱之曰下腿骨.

(a)脛骨(Tibia)——膝蓋骨下方,卽下腿之內側.有關接於大腿骨之三角形長骨,曰脛骨.其基端有兩關節面,關接大腿骨之髁狀突起.末端亦有兩關節面,在內側者關接於距骨;在外側者關接於跟骨.

(b)腓骨(Fibula)——下腿之外側,亦有一略呈三角形之小骨,曰腓骨.其基端膨大,曰腓骨小頭,(Capitulum fibulae).末部完全合著於脛骨.

45.跗骨(Tarsus)——下腿之前方下部,有七個長短不齊之骰子形小骨,構成足跟,名曰跗骨.排列爲前後兩行,後行祇有(i)距骨(Astragalus)與(ii)跟骨(Calcaneum),皆關接於脛骨.跟骨後部有較長之突出部分,曰長跟骨突起(Calcaneal process).前行五骨,由內方舉之,曰(iii)舟樣骨(Navicular),(iv)內楔狀骨(Internal cuneiform),(v)中楔狀骨(Mesocuneiform)(vi)外楔狀骨(Ectocuneiform),(vii)骰子骨(Cuboid).

46.蹠骨(Metatarsals)——跗骨與趾骨之間,有五個細長而微曲之蹠骨,其基端關接於跗骨,末端則與趾相接續.

47.趾骨(Phalanx)——各蹠骨之前方連續三趾骨,成三趾節,

(蹠趾只二節). 第一趾節與蹠骨之關接面兩側,各有一對微細之種子骨.

48.爪(Claws)——各趾最後趾節之末端背面,俱附以角質之爪.

(未完)

廣東北江鳥類之研究

（續第三卷第三期）

任國榮

鶯科 Sylviidœ.

90.雙眉葦雀 **Acrocephalus bistrigiceps** Swinhoe.

Acrocephalus bistrigiceps. Swinhoe, Ibis 1860, p. 51: Amoy.—Hartert, Vögel Paläark Fauna, p. 565.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 213.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 148.

1♀, 22 V 1930.——翼: 51mm.

分佈:——生殖於日本及西伯利亞之東部,冬季經中國以至暹羅,緬甸,亞森母等處,偶或至安南.

91.黑嘴草鶯 **Tribura thoracica melanorhyncha** (Rickett).

Lusciniola melanorhyncha. Rickett, Bull. B. O. C., VIII, p. 10 (1898): Fohkien.

Tribura thoracica melanorhyncha. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 231.

1♂, 29 IV 1930.——翼: 50mm.

分佈:——前此只有記載於福建.

92.裁縫鳥 **Orthotomus sutorius longicauda** (Gm.).

Motacilla longicauda. Gmelin, S. N. I, p. 954 (1788): China.

Orthotomus sutorius longicauda. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 234.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 156.

1♀, 21 VI 1930.——翼: 46mm.

分佈:——福建,廣東,廣西,雲南及安南.

93.伯氏柳鶯 **Phylloscopus proregulus proregulus** (Pallas).

Motacilla proregulus. Pallas, Zoogr. Rasso-Asiat., I, p. 499 (1827): Daurien.

Phylloscopus proregulus proregulus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 523.—La Touche, Birds of Eastern China vol. I, p. 244.

2♂, 20 III, 13 XI; 1♀, 15 IV 1930,——翼: ♂ 51, 53; ♀ 47mm.

分佈:——生殖於西伯利亞,冬季至我國南部.

94.極鶯 **Phylloscopus borealis borealis** (Blasius.),

Phyllopneuste borealis. Blasieus, Naumannia 1858, p. 313: Ochotskischen Meer.

Acanthopneuste borealis borealis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 247.

Phylloscopus borealis borealis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 517.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 177.

1♀, 22 V 1930.——翼: 66mm.

分佈: ——生殖於歐亞二洲之北部.冬季南行自我國南部,亞森母,緬甸及安南.

95. 褐頭柳鶯 **Phylloscopus occipitalis coronatus** (T. & S.).

Ficedula coronata. Temminck et Schlegel, Faun. Jap. Aves p. 48 (1847): Japon.

Phylloscopus occipitalis coronatus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 521.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 251.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine vol. III, p. 183.

2♂, 26 III, 7 IV 1930.——翼: 62, 65mm.

分佈: ——生殖於西伯利亞之東,高麗及日本,據David氏之記載,曾見其營巢于中部各省.冬季至我國南部,安南北部,緬甸及台灣.

96. 力克柳鶯 **Phylloscopus trivirgatus ricketti** (Slater).

Cryptolopha ricketti. Slater, Ibis 1897, p. 174: Kuatun, Fohkien.

Acanthopneuste trivirgatus ricketti. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 255.

Phylloscopus trivirgatus ricketti. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. II, p. 188.

1♂, 3 IV; 1♀, 2 VI 1930.——翼: ♂ 56; ♀ 54mm.

分佈:——福建,廣東,廣西,貴州,雲南,安南,東京.

97. 叢鶯 **Horornis conturians** (Swinhoe).

Arundinax canturians. Swinhoe, Ibis 1860, p. 52: Amoy.

Horeites cantans canturians. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 532.

Horornis canturians canturians. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 261.

Horornis canturians. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 190.

1♀, 14 XI 1930.——翼: 74mm.

分佈:——生殖於我國北部及揚子江一帶.冬季至我國南部,安南,台灣及菲律賓.

98. 大衛叢鶯 **Horornis fortipes davidiana** (Verreaux).

Arundinax davidianus. Verreaux, Nouv, Arch. Mus. Paris, Bull. VI, p. 37 (1870): Moupin.

Horeites fortipes davidiana. Hartert, Võgel Paläark. Fauna, p. 535.

Horornis fortipes sinensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I. p. 264.

Horornis fortipes davidiana. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 193.

1♀, 3 IV 1930.——翼: 50mm.

分佈:——雲南,四川,貴州,廣西,廣東,福建,浙江等處留鳥.

Delacour亦于安南東京得有許多標本.

99.白眉山鶯 **Suya superciliaris superciliaris** Anderson.

Suya superciliaris. Anderson, P. Z. S,. 1871, p. 212: Yunnan.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 268.

Suya superciliaris superciliaris. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 209.

1♂, 1 IV; 2♀, 7 IV, 27 XI 1930.——翼: ♂49; ♀45, 46mm.

分佈:——緬甸,安南之東京,雲南,廣西,廣東,福建,留鳥.

100. 東南鷦鶯 **Prinia inornata extensicaudata** (Swinhoe).

Drymoica extensicaudata. Swinhoe, Ibis 1860, p. 50: Amoy.

Prinia inornata extensicaudata. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 270.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 215.

1♂, 26 VI 1930.——翼: 49mm.

分佈:——江西,福建,廣東,廣西,安南之北部,留鳥.

畫眉科 Timaliidœ.

101. 草眉 **Garrulax lanceolatus lanceolatus** (Verreaux).

Pterorhinus lanceolatus. Verreaux, Nouv. Arch. Mus. Paris VI, Bull., p. 36 (1871): Moupin.

Janthocincla lanceolatus lanceolatus. Hartert, Vögel Paläark.

Fauna, p. 627. Babax lanceolatus Babax La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 65.

1♂, 19 V; 1♀, 10XII 1930.——翼: ♂93; ♀ 91mm.

分佈:—— 陝西南部,湖北,四川,湖南,貴州,雲南,廣西,廣東,福建.

附記:——此鳥在廣東之記載,此爲第一次.

102. 灰頭花異畫眉 **Garrulax cineraceus cinereiceps (Styan).**

Trochalopterum cinereiceps. Styan, Ibis 1887, p. 167: Hankow (Bird in captivity).

Janthocincla cinereiceps cinereiceps. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 631.

Janthocincla cineracea nipalensis La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 61.

2♂, 28 III, 16 XI; 2♀, 23 III, 16 XI 1930.——翼: 83−87mm.

分佈:——湖北,安徽,浙江,福建,廣東,湖南,雲南.

附記:——十一月十六日之兩標本,頭部色彩較深於其餘二鳥,喉部條紋亦較顯著.

103. 畫眉 **Garrulax canorus canorus** (L.)

Turdus cauorus. Liunaeus S. N. I, p. 169 (1758): China.

Trochalopterum canorum canorum. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 63.

Garrulax canorus canorus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 236.

3♂, 27 III, 11 IV, 27 XI; 1♀, 27 XI 1930,——翼 88–92mm.

分佈:——江西,江蘇,安徽,浙江,福建,廣東,廣西,湖南,貴州,雲南及安南之北部.

"爲北江各地之普通籠鳥."

104. 灰環眉 **Garrulax pectoralis picticollis** Swinhoe.

Garrulax picticollis. Swinhoe, P. Z. S., 1872, p. 554: Ningpo, Chekiang.

Garrulax pectoralis picticollis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 59.

2♂, 15 IV, 4 XII; 2♀, 7 IV 8 XII 1930.——翼: ♂ 134, 135; ♀ 123, 130mm.

分佈:——安徽,浙江,福建,廣東,廣西,(老撾)

附記:——此二雄鳥,胸環深灰而雜黑,其一完整;他一則中斷於胸之中部,頸側淨灰,凡此特性,與室中福建標本 *G. p. picticollis* Swinhoe 全相脗合.餘二雌鳥,則胸環純黑而完整;與老撾之 *G. p. robini* Delacour 相同,特頸側黑而雜灰耳.至於量度,余亦不見有若何顯著之區別:

性別	採期	翼長	採地
♂	24 X	131mm	福建掛墩
♂	24 XI	132mm	福建掛墩
♀	8 XI	133mm	福建掛墩

♀	23 III	133mm	中國
♂	15 IV	130mm	廣東北江
♂	4 XII	123mm	廣東北江
♀	7 IV	135mm	廣東北江
♀	8 XII	134mm	廣東北江
♀	20 XII	134mm	老撾
♀	20 XII	133mm	老撾
♀	28 XII	132mm	老撾

因此,可知 *G. p. picticollis* 與 *G. p. robini* 實係重名也.

105. 美氏黑環眉 **Garrulax moniliger melli** Stresemann.

Garrulax moniliger melli. Stresemann, Journ. f. Orn., 1923, p. 364: Kwangtung.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 60.

2♀, 11, 27 XII 1930.——翼. 115, 118mm.

分佈:——廣東,廣西,福建,(安南東京)

附記:——以余之廣東標本及福建標本 (G. m. melli) 與五個東京標本 (G. m. tonkinensis Delacour)比較,色彩與量度,皆無若何區別,故余以爲 tonkinensis 一名,實不能成立.

106. 噪眉 **Garrulax perspicillatus** (Gm.).

Turdus perspicillatus. Gmelin, S. N., I, 1788, p. 830: China.

Janthocincla perspicillatus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 636.

Dryonastes perspicillatus perspicillatus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 55.

Garrulax perspicillatus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 250.

1♀, 1(?), 24 V, 4 VI 1930.——翼: 124mm.

分佈:——陝西,四川,揚子江中下流,福建,廣東,廣西,湖南,貴州,雲南,安南東京之北部,亞森毋及老撾.

107. 小噪眉 **Garrulax sannis** Swinhoe.

Garrulax sannis. Swinhoe, Ibis 1867, p. 403: Amoy.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 251.

Dryonastes sannis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 55.

1♂, 1♀, 20, 25 V 1930.——翼: 99mm.

分佈:——四川,湖北,湖南,江西,福建,廣東,廣西,貴州,雲南,及安南亞森毋.

108. 竹眉 **Pomatorhinus ruficollis stridulus** Swinhoe.

Pomatorhinus stridulus. Swinhoe, Ibis, 1861, p. 265: Foochow.

Pomatorhinus ruficollis stridulus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 66.

2♂, 24 III, 23 XI; 2♀, 23 IV, 3 XII 1930.——翼: 76–77mm.

分佈:——江西,福建,廣東,廣西.

"喜棲野竹叢中作都都鳴."

110. 斯氏鈎嘴眉 **Pomatorhinus swinhoei swinhoei David.**

Pomatorhinus swinhoei. A David, Ann. Sci. Nat. XIX, art. 9, (1874): Kuatun, Fohkien.—La Touche, Birds of Eastern China, vol, I, p. 69.

2♂, 6V, 29XI; 2♀, 17 IV, 19 XII 1930.——翼: 89–93mm.

分佈:——安徽,福建,廣東.

110. 大衛山紅頭 **Stachyris ruficeps davidi** (Oust.).

Stachyridopsis davidi. Oustalet, Bull. Mus. Paris, 1899, p. 119: Setchouen.

Stachyridopsis ruficeps davidi. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 73.

Stachyris ruficeps davidi. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 290.

3♂, 22 IV, 22 V, 28 XI; 1♀, 4 XII 1930,——翼: 50–54mm.

分佈:——四川,浙江,福建,廣東,廣西.

111. 白眼睛 **Alcippe nipalensis schaefferi** La Touche.

Alcippe uipalensis schaefferi. La Touche, Bull. B. O. C., XLIII, p. 81 (1923): Milati, Yunnan.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 299.

2♂, 4 I, 2 IV; 2♀ 11 V, 4 XII 1930.——翼: 60–64mm.

分佈:——雲南,安南,東京,廣西,廣東.

附記:——La Touche 于 Birds of Eastern China p. 74, 指廣東鳥為 *A. n. hueti David* 余試以此四標本與 *A. n. hueti* David 標準

地之福建鳥比較,余覺廣東鳥之嘴純黑而非黑褐,頭部色彩較深而脅部之橄欖色較盛,凡此皆與雲南種相近而與福建種相遠也.故余以*Schaefferi*記載廣東鳥.

Delacour 及 Jabouille 于 Oiseaux de l'Indochine p. 300, 列舉 *schaefferi* 一型之地理分佈時,包含福建一省.其實福建鳥係*hueti* 而非 *Schaefferi*, 無容置疑.

112. 頭烏線 **Alcippe brunnea superciliaris** (David.).

Ixulus superciliaris. A. David, Ann. Sc. Nat., 5 me ser., XIX, art 9 (1874) : Kiangsi, Fohkien.

Schœniparus brunneus superciliaris. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 75.

2♂, 5 V, 2 XII; 2♀, 19 IV, 2XII 1930.——翼: 60–63mm.

分佈:——安徽,福建,江西,廣東,廣西.

113. 花頸其公 **Siva torqueola** Swinhoe.

Siva torqueola. Swinhoe, A. & M. N. H., V, 4th ser. p. 174 (1870) : Amoy.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 319.

Staphidia torqueola. La Touche Birds of Eastern China, vol. I, p. 77.

2♂, 1 V, 23 XI: 2♀, 31V 1930.——翼: 63–65mm.

分佈:——湖南,福建,廣東,廣西,安南北部.

114. 紅嘴相思 **Leiothrix lutea Kwangtungensis**

Stresemann.

Leiothrix lutea kwangtungensis. Stresemann, Journ. f. Orn., 1923, p. 364: Kwangtung.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 82.

Leiothrix lutea lutea. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. III, p. 331.

2♂, 1 IV, 3 XII; 2♀, 2 V 2 XII 1930.——翼: 68−72mm.

分佈:——廣東,廣西,安南東京之北部.

鵯科 Pycnonotidœ.

115. 白首黑鵯 **Microscelis leucocephalus** (gm.).

Turdus leucocephalus. Gmelin, S. N., I, p. 826 (1788): China.

Microscelis leucocephalus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 87.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 21.

1♂, 22 IV; 1♀, 1 V 1930.——翼: ♂ 119; ♀ 114mm.

分佈:——安徽,湖北,湖南,四川,雲南,安南東京,廣西,廣東福建,浙江.

116. 青翼鵯 **Txos macclellandi holti** (Swinhoe.).

Hypsipetes holti. Swinhoe, Ibis 1861, p. 266: Foochow, Fohkien.

Tole macclellandi holti. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 90.

2♂, 21 V, 21 XI; 2♀ 23 III, 21 XI 1930.——翼: 99-103mm.

分佈:——福建,廣東,廣西.

117. 栗鵯 **Txcs canipennis** Seebohm.

Hemixus canipennis. Seebohm P. Z. S., 1890, p. 342: Foochow, Fohkien.

Hemixus castanonotcis canipennis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 90.

Txos canipennis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 26.

2♂, 10 IV, 20 XI; 2♀ 9 IV, 27 XII 1930.——翼: 96-104mm.

分佈:——福建,廣東,廣西,安南東京.

118. 白頭翁 **Pycnonotus sinensis stresemanui** La Touche.

Pycnonotus sinensis stresemanui. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 94 (1925): N. W. Fohkien.

3♂, 7I, 17V; 1♀, 25 XI 1930.——翼: ♂84, 85, 88; ♀84 mm. 尾: ♂ 81, 82, 88; ♀77 mm.

分佈:——福建西北部,廣東,廣西.(安南)

附記:——正月七日之標本,量度遙大于其餘三鳥,此或係從北方來之 P. s. sinensis (Gmelin) 亦未可知,但須有多數標本,始能定.

Delacour 定安南東京北部(廣西邊境)之白頭翁爲 *P. s.*

meridionalis, 據云,與福建 *stresemanni* 之區別,"在其頭部之白塊斑較小,後頸之褐色較發達." 余試以該亞種之標本及許多副標本與福建及廣東鳥作愼密比較,殊不覺 Delacour 所指出之特徵,爲固定者,頭部白塊斑,隨季節而不同,在夏季標本,常較在冬季標本爲發達. Delacour 之標本皆採自正月,故此特性,頗似固定也.

119. 山高髻冠 **Pycnonotus cafer chrysorrhoides** (Lafr.).

Hœmatornis chrysorrhoides. Lafresnaye, Rev. Zool., 1845, p. 367: Macao, Kwangtung.

Molpastes hœmorrhous chrysorrhoides. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 91.

Pycnonotus cafer chrysorrhoides. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 45.

2♂, 7I, 14 VI; 2♀, 7I, 13 VI, 1930.——翼: ♂ 99; ♀ 92–94mm.

分佈:——福建,廣東,廣西,安南之北部.

120. 高髻冠 **Otocompsa jocosa jocosa** (Linn.).

Lanius jocosus. Linnaeus, S. N I., p. 95 (1758): China.

Otocompsa emeria jocosa. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 95.

Otocompsa jocosa jocosa. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 46.

1♂, 1♀, 4; 5 VI 1930.——翼 90mm.

分佈:——廣東,廣西,安南雲南,緬甸,印度.

121. 鵯嘴鵯 **Spizixos semitorques semitorques** Swinhoe.

Spizixus semitorques. Swinhoe, Ibis, 1861, p. 266: Foochow.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 96.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 51.

2♂, 16 IV, 25 XII. 2♀, 18 V, 20 XI 1930.——翼: 84－94mm.

分佈:——我國自陝西以南之南部各省,安南東京.

山椒鳥科 Campephagidæ.

122. 小龍眼燕 **Lalage melaschistos avensis** (Blyth).

Campephaga avensis. Blyth, C. B. A. S., p. 327 (1854): Arrakan

Lalage melaschistos avensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 202.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 60.

1♂, 28 V; 1♀, 15 IV 1930.——翼: ♂ 122; ♀ 118mm.

分佈:——緬甸,暹羅,撣部,安南,雲南及我國東南部各地,

123. 朱山椒鳥 **Pericrocotus flammeus fohkiensis** Butulin.

Pericrocotus speciosus fohkiensis. Butulin, Mess. Ornith. Moskva i, p. 263 (1910): Fohkien.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 193.

2♂, 20 III, 13 XI; 1♀ 18 IV 1930.——翼: ♂ 102; ♀ 100mm.

分佈: —— 福建,廣東,廣西.

124. 灰喉山椒鳥 **Pericrocotus solaris mandarinus** Stres.

Pericrocotus solaris maudarinus. Stresemaun, Journ. f. Orn., LXXI, 1923, p. 363: Kwangtung.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 196.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 67.

2♂, 23 III, 18 XI; 2♀, 10 IV, 11 XII 1930.——:翼 81–86mm.

分佈: —— 福建,廣東,廣西,安南之東北部.

125. 廣州灰山椒鳥 **Pericrocotus roseus cantonensis** Swinhoe.

Pericrocotus cantonensis. Swinhoe, Ibis, 1861, p. 42: Canton.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 200.

Pericrocotus roseus cantonensis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 72.

2♂, IV, 16 VI; 1♀, 11 VI, 1930.——翼: 90–92mm.

分佈: —— 浙江,福建,廣東,廣西,湖南,湖北,四川,貴州,雲南,緬甸,安南及馬來羣島.

在昔以 *Pericrocotus roseus, P. cantonensis, P. cinereus* 三者爲不同之三種,及經 Stresemann 之研究,乃認爲同種之三亞種.　　(未　完)

法國巴黎自然歷史博物館鳥類研究室中國鳥類標本之地理分佈研究

(續第三卷第三期)

任 國 榮

CERTHIIDÆ. 攀木科*

無嘴鬚,與鳾科,畫眉科,鷦科皆有區別;尾羽尖硬,與鶺鴒科亦不同.趾爪發達,跗蹠頗短.通常爲留鳥.但每因氣候之寒暖而作地方性之小遷移.食虫性.

巴黎博物館鳥類研究室攀木科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有兩屬五種及亞種,經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共二十五個.

164. **Certhia himalayana himalayana** (Vigors). 斑尾攀木

D. et O. p. 88 ——在四川西部及漢平,並不稀罕.

Rothschild, p. 317 (*Certhia himalayensis yunnanensis*) ——雲南.

室中有四川雲南鳥十四個: 4(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♀, 23, V, 1895, Prince d'Orléans,

* 日本鳥類學書作木走科,動物大辭典作走木科,爲切合生態起見,余譯作攀木科.

雲南漾濞江; 5(?), Pére Soulié, 雲南其却.

Sharpe 定雲南 Shayang 鳥為 *C. h. yunnanensis*, 謂上體較黑而腰及上尾筒又不着染赭色云云 (Bull. B. O.C. vol. xiii p. 11, 1902). Baker 于 Birds of British India 第二版, vol. i, p. 432 中亦以 *C. h. yunnanensis* 記載撣部及雲南鳥,室中既無標準地之 *C. h. himalayana*, 又無標準地之 *C. h. yunnanensis* 無從比較,而雲南四川標本,又係當地土人所製,惡劣異常,絕對不能供精密之考查. Prince d'Orleans 之標本,似較深暗,其餘雲南四川鳥,又無不同.因此,余乃有三疑問: 1.雲南四川鳥是否相同?若係相同,當逮 *C. h. himalayana* 歟,抑當逮 *C. h. yunnanensis* 歟? 2.若雲南四川鳥係屬不同之兩地方種,何者當為 *C. h. himalayana*, 何者當為 *C. h. yunnanensis* 歟? 3.究竟 *C. h. himalayana* 與 *C. h. yunnanensis* 是否確有區別歟?凡此問題,須有大批新標本,始能決定.

165. **Certhia familiaris familiaris** L. 普通攀木

D. et O. p. 87 —— 中國本部頗稀,余只見于北京.滿洲及西伯利亞則較普通。中國人稱曰樹耗子.

La, Touche, p. 40——直隸留鳥.

室中有中國鳥四: 3(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1899, 四川打箭爐.

166. **Certhia familiaris khamensis** Bianchi 藏攀木

Baker, i, p. 434——西藏東南部.

Rothschild, p. 317——雲南.

室中有一雲南鳥: 1(?), 1896, Père Soulié, 雲南茛刦.

167. **Certhia familiaris hodgsoni** Brooks. 賀孫攀木

Baker, i, p. 434——自嘉華以至克什米爾西北部.

室中有兩標本: 1♂, 1♀, 24, V, 1891, Prince d'Orléans, 天山, 二千至四千密達之高度.

以上三亞種之 *C. familiaris*, 相似之點多,相異之點少,非有新鮮而製作完善之標本,難作確切之精密研究.室中現有標本,殘破異常,余雖分別記載之,其中實不無疑惑.茲謹根據文獻作以下檢索表,示三型之不同.

A. 翼長 70 mm. 以上.

a. 上體較淺淡,腰及上尾筒多着銹赭色.…*C. f. familiaris.*

b. 上體較深暗,腰及上尾筒之銹赭色較少.*C. f. hodgsoni.*

B. 翼長在 66 mm. 以下,體色極淺淡.……………*C. f. khamensis.*

168. **Tichodroma muraria** (L.) 紅翼攀牆鳥

D. et O. p. 88——陝西,漢平,江西,福建皆有之.

Baker, i, p. 442 ——廣佈歐亞二洲,生殖于喜馬拉雅全部

之適當高度,冬季稍稍降落低處,極寒時亦偶至平原.

La Touche, p. 41——直隸,安徽,陝西,四川,江西,福建,廣東,雲南,留鳥.

Rothschild, p. 317——雲南.

室中有中國鳥四: 1(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 2(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Père Soulié, 雲南茈刦.

TROGLODYTIDÆ. 鷦鷯科

一般性質與攀木科相似,但翼較短而圓;尾羽柔軟;嘴頗直,與攀木科之長而微向下彎者不同;蹠趾及足,均甚發達.雌雄相似或相異,幼鳥或有點斑,或直與成長鳥有絕大之差異.食虫性,喜居陰暗潮濕之地,故體色常不鮮明.生殖期與一般鳴禽類相似.以柔草,細枝,青苔,落葉等構圓頂或囊狀之巢,而開一進入孔于其側.產卵三四枚或五六枚不等,多者至七八枚,色白,或白而有赤,紫,褐等色之斑紋.

巴黎博物館鳥類研究室鷦鷯科標本之採自我國或經有記載于我國者,据余所見,共有三屬三種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國鳥,共十四個.

169. **Troglodytes troglodytes talifuensis** Sharpe. 雲南鷦鷯

D. et O. p. 226 (*Troglodytes nipalensis; Troglodytes fumigatus*) 自尼泊爾經西藏以至中國.冬季嚴寒,余于四川北部邊境及漢平常見之.

Baker, i, p. 446——雲南,撣部,暹羅北部.

室中有中國鳥十三: 1♂, 1♀, Prince d'Orléans, 西藏; 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 8(?), 1896, Père Soulié, 雲南其却.

西藏鳥與雲南四川鳥無體色上之差別,姑視爲相同.試以此十三鳥與印度之 *T. t. nipalensis* 較,印度鳥之體色略深,但再與日本之 *fumigatus* 較,則不能發見異點.總之 *nipalensis, talifuensis, fumigatus* 三者謂爲極近似之地方種固可,但如各地皆得有大批標本作比較時,或可合三者而爲一,亦未可知.蓋 *T. troglodytes* 之形體旣小,體色幽暗,而個體之差異又多,重名百出,自意中事也.

Baker 以 *T. Troglodytes* 之淺色種爲 *neglectus* 及 *tibetanus*, 前者翼較短,常在 51 mm. 以下,分佈于阿富汗,卑路支之山中,經克什米爾以至西摩拉;後者翼較長,常在 53 mm. 以上,分佈于西藏.室中之西藏鳥無別于雲南四川鳥,旣如上言.試以之與克什米爾鳥較,則克什米爾鳥體色遙淺,顯有不同.若然,則西藏境內,其豈有兩型歟?

Richmond 以中國北部鳥爲 *T. troglodytes indius.* La Touche 援用之,且于 Birds of Eastern China 中舉其分佈地爲山東,直

隸,江蘇,福建,沙尾山等處.室中尚無來自該地標本,無從比較.

總之,此等纖微之區別,無論經驗如何豐富,書籍如何充足,如無大幫製作完美之標本,實將束手無策.

170. **Spelaeornis troglodytoides** (Verreaux).長尾鷦鷯

D. et O. p. 228——四川西部及漢平.

室中有一標本: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

171. **Tesia cyaniventer cyaniventer** Hodgson. 青鷦鷯

Rothschild, p. 248——雲南.

室中只有于南鳥.

余曾于廣西猺山得有十餘個.

La Touche 安 Birds of Eastern China 中,尙記載兩種鷦鷯,爲本目錄所未有,其一爲 *Elachura formosa* (Walden), 分佈于錫金及東亞森母與福建之西北部;其次爲 *Pnoëpyga pusilla pusilla* Hodgson,分佈于尼泊爾,錫金,亞森母,緬甸,撣部,雲南,四川,福建,廣東等處,余亦曾于廣西得有標本.雲南湄公河及怒江與瑞麗江分水界所特有之 *Spelaeornis longicaudatus reptatus* (Bingham),室中亦無標本.

CINCLIDÆ. 河烏科

本科特性,介于鶺鴒科與鶇科之間,嘴窄而直,尖端微向下灣;鼻為膜所掩閉;無嘴鬚;翼短而圓;尾極短;跗蹠粗壯;雌雄相似,體羽緊密,幼鳥有橫斑,習于水性,常潛水覓水虫及軟體動物以供食,爲鳴禽類之最特別者.巢爲圓頂屋狀,卵淨白.生殖期約在三四月至五六月.

巴黎博物館鳥類研究室河烏科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有一屬三種及亞種,經余作個別研究而記載于本目錄之標本,共二十二個.

172. **Cinclus cinclus cashmeriensis** Gould. 西河烏

D. et O. p. 147 (*Hydrobata cashmeriensis*) —— 于四川得四標本,極爲稀少. Przewalski 見其營巢于甘肅.

室中有九標本: 1♀, 1(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏(3,600密達); 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 4(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

173. **Cinclus cinclus leucogaster** Bonaparte. 白腹河烏

Baker, ii, p. 3—— 西伯利亞西部,土耳其斯坦,阿爾泰,貝加爾湖一帶.

室中有一中國鳥: 1♀, 30, ix, 1889, Prince d'Orléans, 天山.

174. **Cinclus pallasii souliei** Oustalet. 中國河烏

D. et O. p. 146 (*Hydrobata pallasii*)——北京頗少,在中國中部則常見之.

La Touche, p. 97——陝西,揚子江流域以至雲南南部皆有之,留鳥.

Rothschild, p. 248——雲南.

室中有中國鳥十二: 1(?), 1891, Prince d'Orléans, 四川打箭爐; 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 3(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1928, Père Grosjean, 四川打箭爐; 1(?), 1897, Père Soulié, 雲南茛却; 1(?), 1911, Père Cavalerie, 貴州; 1♂, 1♀, 7, xi, La Touche, 福建西北部之掛墩.

以上之三種 Cinclus, 可用下列檢索表區別之:

A. 腮喉及胸白色.

a. 腮,喉及胸白,腹褐……………………*C. c. cashmeriensis.*

b. 腮,喉,胸及腹皆白……………………*C. c. leucogaster.*

B. 腮,喉及胸皆褐色……………………*C. p. souliei.*

TURDIDÆ. 鶇科

本科與河烏科及鶲科之幼鳥皆有鱗狀斑,但河烏科無嘴鬚而本科則有,鶲科有鼻鬚而本科則無.跗蹠發達.初列撥風羽十.翮常十二,鮮爲十四.

巴黎博物館鳥類研究室鶇科標本之採自我國或經有記載于我國者,據余所見,共有二十八屬八十種及亞種.經余作個別研究而記載于本目錄之中國標本,共五百二十七個.

Stuart Baher 于 Fauna of British India, Birds. 2nd. Ed. 中,將本科分爲六亞科,本目錄亦依照其系統以記載之.

BRACHYTERYGINÆ 短尾亞科

嘴頗纖;翼短而圓;尾短;跗蹠纖長,但不及畫眉科之壯健.無羣性,喜在矮林叢藪中,覓食于地上,食虫性.生殖期,巢之形狀與卵之色澤大小,各種不同.

本目錄共記載短尾亞科三屬六種及亞種.大多數爲遷移鳥.

175. **Brachyteryx cruralis** (Blyth). 白眉短尾

Rothschild, p. 271——雲南.

室中除安南標本外,有一中國鳥: 1♂, 1896, Père Soulié, 雲南茈却.

176. **Brachyteryx sinensis** Rickett. 中國短尾

Baker, ii, p. 20——中國西部,亞森母,或可見于緬甸北部.

La Touche, p. 132——福建西北部留鳥.

室中有一雲南鳥: 1♀, 1896. Prince d'Orleans, 雲南.

此次寄來之湖南南部標本中,亦有此鳥一個.

Brachyteryx cruralis 及 *Brachyteryx sinenis* 之雌與雌,雄與雄,皆有許多相似之點,但前者雄鳥腹部有灰色橫斑,後者則無;前者雌鳥腮喉灰褐而後者則爲赭色.

此外尙有一種 *Brachyteryx carolinae* La Touche, 最初發見于福建西北部之掛墩,其後 Delacour 于安南,余于廣西猺山及湖南南部皆繼續得有標本.

177. **Lavivora cyane** (Pallas), 寒藍喞

D. et O. p. 238——廣佈中國各地,五月間經北京而向北行,其留中部各省以生殖者,爲數亦不少.

Baker, ii, p. 12——生殖于西伯利亞東部及日本,或可在蒙古及中國之東北部.冬季南行至中國南部,印度支那,緬甸,馬來半島,婆羅洲,馬尼坡及亞森母.

La Touche, p. 130——雲南東南部,揚子江下流,沙尾山,直隸,遷移鳥,

室中除安南標本外,有中國鳥三: 2♂, 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐.

178. **Lavivora brunnea** Hodgson. 印度藍喞

Baker, ii, p. 14——生殖于克什米爾,嘉華,錫金及不丹,冬季經印度,錫蘭,亞森母,至緬甸北部及雲南.

Rothschild, p. 250 (*Luscinia brunnea*)——雲南.

室中只有印度鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

179. **Lavivora sibilans** Swinhoe. 斯氏塞喞

D. et O. p. 239——Swinhoe 云,澳門附近頗多.

La Touche, p. 131——雲南東南部,廣東,冬鳥.福建西北部及沙尾山,遷移鳥.于直隸之西北部得一偶然的遷移鳥.

室中只有安南鳥,以既有記載于我國,特編入本目錄.

180. **Hodgsonius phoenicuroides phoenicuroides** (Hodgson). 賀孫短尾

D. et O. p. 234——于漠平度夏與生殖,喜棲野竹叢中,余共得有三標本. Przewalski 亦于甘肅山中得一個.

Baker, ii, p. 21——由克什米爾以至亞森母之北及雲南.

Rothschild, p. 250——雲南.

室中共有中國鳥十五: 1♂, 1890, Prince d'Orleans, 西藏; 1♂, 1♀, 1892, Prince d'Orléans, 四川打箭爐; 4♂, 3♀, 2幼(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1896, Père Soulié, 雲南茈却; 1♀, 1幼(?), 1900, 雲南茈却.

SAXICOLINÆ. 鵖亞科

嘴壯健;嘴鬚發達;翼尖,常長于尾;跗蹠頗發達.食虫性,喜自禿枝上突出以飛捕昆虫,狀與鶲科各種相似.雌雄異形.

本目錄記載鵖亞科三屬十種及亞種,或爲留鳥,或爲遷移鳥.

181. **Saxicola torquata stejnegeri** (Parrot), 黑喉鵖

D. et O. p. 167 (*Pratincola indica*) ——夏季普見于中國各地,北方爲尤多.生殖于甘肅之山中.

Baker, ii, p. 30 —— 生殖于西伯利亞,日本及中國之東北部,冬季見于中國南部各地,印度支那,馬來,緬甸,亞森母及東孟加拉.

La Touche, p. 153 —— 自直隸東北部以至揚子江下流一帶,遷移鳥;福建,廣東,冬鳥;雲南,遷移鳥.

室中除大批安南日本鳥外,有中國鳥十四: 1♂, 2♀, 1896, Dejean, 四川打箭爐; 5♂, 2♀, 1898, Biet, 四川打箭爐; 2♂, 1895, Prince d'Orléans, 雲南, 2♂, 21, ix, La Touche, 福建.

余于廣西猺山得有標本.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

182. **Saxicola torquata przewalski** (Pleske). 甘肅㗛

Baker, ii, p. 30 —— 生殖于西藏,喜鎗山之高處,撣部雲南,及中國西部.冬季至印度東部,亞森母,緬甸,暹羅,西至克什米爾.

室中有中國鳥八: 1♂, 1892, Prince d'Orlèans, 西藏; 1♂, 1895, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂, 1899, 四川打箭爐; 2♂, 1♀, 10, iii, 1911, Legendre, 四川寧遠府; 1♂, 1895, Prince d'Orleans, 雲南蒙自.

S. t. przewalskii 體色較黑,翼在 71 mm. 以上.嘴峯約 15 mm.
S. t. stejnegeri 體色較淺淡,翼在 71 mm. 以下,嘴峯約 12 mm.

183. **Saxicola caparata burmanica** Baker. 黑㗛

Baker, ii, p. 24——緬甸全部,雲南及亞森母……

Rothschild, p. 255——雲南.

室中只有安南,印度,爪哇,等處標本,以旣有記載于雲南,特編入本目錄.

184. **Oreicola jerdoni** Blyth. 白腹黑㗛

Rothschild, p. 254——雲南,

室中有安南鳥三,以旣有記載于雲南,特爲之編入本目錄.

185. **Oreicola ferra haringtoni** Hartert. 灰叢鴫

D. et O. p. 168 (*Pratincola ferra*) —— 夏季中國南部各地皆有之,余于四川及福建皆得有標本.

Baker, ii, p. 38 —— 分佈中國各地及雲南,嘉錦山及錦山.

La Touche, p. 154 ——湖北,福建,廣東,雲南,四川,留鳥.

Rothschild, p. 254 ——雲南.

室中有中國鳥十九: 1♀, 22, iv, 1896, David, 漠平; 3♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂, 1898, Biet, 四川打箭爐; 3♂, 2♀, 1898, 1902, 四川打箭爐; 3♂, 2♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 1♂, 1896, Père Soulie, 雲南甚刼; 2♂, 1912, Mme. Comby, 雲南; 1♂, xiii, 1925, 雲南騰越, Rothschild Museum 送來.

余于廣西猺山多射得之.此次寄來之廣東北部及湖南南部標本中,亦各有標本四個.

186. **Oenanthe opistholeuca** (Strickland). 煤黑漠平

D. et O. p. 163 —— 在中國只見于漠平.

室中只有印度鳥,以既有記載于漠平,特編入本目錄.

187. **Oenanthe leucomela leucomela** (Pallas). 白頭漠鴫

D. et O. p. 166 (*Saxicola morio*) ——春季至中國及蒙古,每年必有若干營巢于北京之山中者,但爲數常不多.

Baker, ii, p. 45 —— 俄羅斯之南,高加索,裏海,土耳其斯坦,

波斯,阿富汗,西藏,西伯利亞東部,中國北部,克什米爾.

La Touche, p. 151 (*Oenanthe pleschanka pleschanka*)——陝西,直隸,蒙古,夏鳥.

室中只有來自西伯利亞,土耳其斯坦,……等處之標本.

188. **Oenanthe oenanthe oenanthe** (L.) 漠鵖

D. et. O. p. 165 (*Saxicola oenanthe*) ——中國本部甚少,蒙古烏拉圖山中岩石上則甚多.

室中標本不少,但地名極難認識,余所敢斷爲中國鳥者,只有一個: 1♂, 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河.

189. **Oenanthe isabellina** (Cretzschm.). 褐漠鵖

D. et O. p. 164——夏季蒙古大烏里 (Daourie) 沙原中甚多. 中國東北部之適宜地點亦有之.

Baker, ii, p. 49——生殖于俄羅斯大草原之南:小亞細亞,伯列斯坦,阿富汗,俾路支,波斯,以至西藏,西伯利亞東境及中國之西北部.

室中標本甚多,因蒙古及西藏地名難以認識,誠不免有所遺漏,據余所敢決定者,只有三鳥: 1♀, 1891, Prince d'Orléans, 天山; 2(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河.

190. **Oenanthe deserti oreophila** Oberholser. 西藏漠鵖

D. et O. p. 540 (*Saxicola deserti*)——Przewalski 于阿拉山兒之

Baker, ii, p. 52——生殖于克什米爾, Ladakh 及西藏.

室中除大幫別處標本外,有中國鳥五: 2♂, 1♀, 1891, Prince d'Orléans, 天山; 2♂, 1911, 蒙古.

此鳥與 *O. isabellina* 極相似,但腮喉深黑而非沙黃.

ENICURINÆ. 叉尾亞科

嘴長而頗壯,下顎中部稍爲澎漲;嘴鬚發達;翼長,撥風羽十,第一枚長約等于次枚之半;體色爲黑與白.喜棲水流岩石間,或山徑陰濕之地.食虫性.生活情形與鶺鴒科相似,但後者之撥風羽只有九枚.雌雄相似,幼鳥易羽兩次,始達成鳥羽之期.四,五,六,七等月爲生殖期,常營巢于水邊之地.卵之大小,多少,色彩,各種不同.

本目錄共記載叉尾亞科兩屬四種,概係留鳥.

191. **Enicurus maculatus guttatus** Gould. 斑背叉尾

Baker, ii, p. 58——錫金,亞森母,雅魯藏布江南北兩岸,暹羅,撣部及雲南.中國本部標本稍大,翼長 106–117 mm. Rothschild 乃名之曰 *Enicurus maculatus omissus*. 安南鳥與中國鳥同大,但上體之點斑較小較稀,余乃名之曰 *Enicurus maculatus robinsoni*. Bangs 之 *Henicurus bacatus* 實不外 *Enicurus macu-*

latus guttatus 之幼鳥耳.

La Touche, p. 139 (*Henicurus maculatus omissus*) —— 福建留鳥.

室中有安南鳥四,印度及中國鳥各一: 1♀, 9, xii, La Touche, 福建西北部之掛墩.

Rothschild 以福建鳥與印度鳥較,謂其翼較長而頸部白點斑較大;乃另名曰 *Enicurus maculatus omissus*. 舉其量度比較爲 112–115 對 95–102mm. (Nov. Zool. xxxviii, p.26, 1921). La Touche 送來之福建掛墩鳥,翼長 103 mm. 而室中之印度鳥,竟達 105mm. 可知翼之長短一問題,個體之差異甚大也.至頸部點斑之大小,據 La Touche 云,此特徵殊無恆性,余比較室中六標本,氏之言,信然.故余以爲福建,安南,印度等地標本,實係相同.

192. **Enicurus schistaceus** Hodgson. 灰背叉尾

D. et O. p. 296 —— 見于中國南部. Swinhoe 于福建,余于四川,皆得有標本.

Baker, ii, p. 59 —— 由 Kumaon 至東亞森毋,雅魯藏布江之南北兩岸,緬甸全境,暹羅,撣部,雲南及南中國之大部.

La Touche, p. 135 (*Henicurus schistaceus leucoschistus*) —— 福建,廣東,留鳥.

室中除印度安南標本外,有中國鳥二: 1♀, 24, ix, 1869; David, 四川西部; 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐.

余于廣西猺山及廣東北江皆得有記載.

Swinhoe 以 *Henicurus leucoschistus* 記載廣東福建鳥,謂其初列撥風羽之尖端無白斑.經比較大批標本後,覺白斑之有無,殊非重要特性,室中之印度鳥,亦往往有缺此斑者,故余以爲印度,安南及中國鳥,實係相同.

193. **Enicurus leschenaulti sinensis** Gould. 黑背叉尾

D. Ct O. p. 295 (*Henicurus leschenaulti*) —— 中國南部山中留鳥,分佈略限,直至黃河.

Baker, ii, p. 63——自中國中部南部以至雲南及撣部.

La Touche, p. 136 —— 中國南部自揚子江流域以至雲南,留鳥.

室中除安南標本外,有中國鳥十三: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), Père Cavalerie, 雲南; 1(?), Père Cavalerie, 貴州; 1(?), 1907, Père Seguin, 興寧 (Shinen); 1♀, 21, vi, 1868, David, 江西九江; 1♀, 1, viii, 1875, David, 江西西部; 2♂, 2♀, x, xi, La Touche, 福建; 2(?), 1923, M. Nadar, 舟山.

余于廣西猺山多射得之,此次寄來之廣東北部及湖南南部兩批標本中,亦各有此鳥數個.

Enicurus leschenaulti sinensis 之側翮短于次雙,常逾 25 mm. 印度之 *E. l. indicus* 則不及 25 mm. 此外無甚差別.

194. **Microcichla scouleri scouleri** (Vigors). 小溪真

D. et O. p. 297 (*Henicurus scouleri*) —— 廣佈黃河以南各地,余于福建,江西,湖北,四川,陝西,皆得有標本.

La Touche, p. 138 (*Microcichla scouleri fortis*) —— 中國南部及陝西,留鳥.

室中有中國鳥十七: 1♀, 22, i, 1869, David, 四川西部; 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 7(?), Pére Soulié, 雲南苴却; 1♂, 23, xi, 1♀, 7, xi, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余前于廣西猺山多射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥一個.

Hartert博士以 *Enicurus scouleri fortis* 記載中國鳥,謂翼較長,十六雄鳥之量度爲 75–81mm. 前頭白帶斑寬 12–15mm. 嘴峯則比標準種 *E. s. scouleri* 長 1–1.5mm. 云云.余試量度室中十七鳥,翼長皆在 75mm.以下,前頭白帶斑鮮有逾 10mm. 者.嘴峯亦不大于印度鳥.此等現象, La Touche 亦曾注意及之.余以爲中國鳥實無別于標準種.

PHŒNICURINÆ. 知更鳥亞科

嘴,足,翼之構造與叉尾亞科相似.尾爲角尾或微圓,決不成叉狀.大都爲遷移鳥,居古北極區,與叉尾亞科之爲留鳥

而居溫熱帶者不同.性喜地棲,以昆虫爲食.

本目錄共記載知更鳥亞科十二屬二十五種及亞種.

195. **Phoenicurus frontalis** Vigors. 藍胸知更鳥

D. et O. p. 169 (*Ruticilla frontalis*)——吾只見于漠平及四川西部,爲彼處山林中之留鳥. Przewalski 亦于甘肅高山中見之.

Baker, ii, p. 69,——生殖于喜馬拉雅帶者,自阿富汗以至亞森母之東,雅魯藏布江之北,西藏,錦山及嘉錦山,北撣部及中國西部.……

Rothschild, p. 252——雲南.

室中除印度安南鳥外,有中國鳥四十三: 3♂, 1892, 1895, Biet, 四川打箭爐; 2♂, 2♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 20♂, 5♀, 1898, 1899, 1902, 四川打箭爐; 2♂, 1♀, 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 6♂, 2♀, 1897, Pére Soulie, 雲南茸刦.

196. **Phoenicurus schisticeps** (Hodgson). 白喉知更鳥

D. et O. p. 541 (*Ruticilla schisticeps*) —— Przewalski 于甘肅多樹之山谷中發見之,極爲普通,營巢于岩穴中,

Baker, ii, p. 70 —— 自尼泊爾,錫金,經西藏及東亞森母以至甘肅.冬季見于雅魯藏布江之南,東孟加拉及緬甸之一部.

Rothschild, p. 251——雲南.

室中有中國鳥二十五: 2♀, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 1♂, 1895, Biet,四川打箭爐; 3♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2♂, 3♀, 1902, 四川打箭爐; 7♂, 7♀, 1896, 1897, Père Soulie, 雲南茸却.

197. **phoenicurus auroreus auroreus** (Pallas). 籬知更鳥

D. et O, p. 170 (*Ruticilla aurorea*) ——廣佈全國各地,直至滿洲及蒙古.

Baker, ii, p. 71 —— 生殖地點,自貝加爾湖經西伯利亞東部,蒙古,滿洲,高麗以至日本及中國東北部.冬季向中國南部,台灣,馬來羣島,印度支那等處遷移,西行直至亞森母.

La Touche, p. 140 —— 生殖于中國北部,在中國東南部度冬.

室中有中國鳥二十九: 1♂, 2♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 2♂, 2♀, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 8♂, 3♀, 1899, 四川打箭爐; 3♂, 1♀, 1895 Prince d'Orléans, 雲南; 2♂, 1♀, 1896, Pére Soulie, 雲南茸却; 2♂, 1♀, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 1♂, 17, xi, La Touche 福建.

冬季余于廣西猺山得有標本,此次寄來之廣東北江標本中,亦有此鳥四個.

198. **Phoenicurus hodgsoni** (Moore). 灰背知更鳥

D. et O. p. 171 (*Ruticilla hodgsoni*) —— 春季至甘肅及中國東南部,余曾于黃河兩岸獲得之.

Baker, ii, p. 74 —— 生殖于西藏東部,南部,中國西部,或可生殖于中國中部之北.冬季見于尼泊爾,亞森母,馬尼坡,錦山及嘉錦山.

Rothschild, p. 252 —— 雲南.

室中有中國鳥二十一: 2♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 2♂, 1892, 1898, Biet, 四川打箭爐; 3♂, 1♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂, 4♀, 1899, 四川打箭爐; 4♂, 3♀, 1897, Père Soulie, 雲南茸刼; 1♀, 6, xi, La Touche, 福建.

199. **Phoenicurus ochrurus rufiventris** (Vieillot) 黑胸知更鳥

D. et O. p. 169 (*Ruticilla rufiventris*) —— 中國及蒙古,余于北京及陝西皆得有標本.

Baker, ii, p. 77 —— 西藏,間亦可見于錫金及尼泊爾,東行至中國中部,北部之山中及蒙古.冬季常見于亞森母,馬尼坡,緬甸及中國西南部.

La Touche, p. 141 —— 直隸西部;蒙古,陝西南部,夏鳥.

室中有中國鳥四: 1♂, 11, v, 1866, David, 沙溪 (Sartchy); 2♂, 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 1♂, 1899, 四川打箭爐.

200. **Phoenicurus erythrogaster grandis** (Gould). 白頭知更鳥

D. et O. p. 542 (*Ruticilla erythrogastra*) —— Przewalski 于甘肅四千密達高度之地見之,極爲稀少.

Baker, ii, p. 78 —— 克什米爾,錫金之東北境,西藏,甘肅.亦可見于土耳斯坦,阿爾泰,貝加爾一帶.

La Touche, p. 142 —— 甘肅,直隸冬鳥.

室中有中國鳥七: 1♂, 1891, Prince d'Orléans, 天山附近; 2♂, 4♀, 1896, Dojéan, 四川打箭爐.

以上知更鳥屬 (*Phoenicurus*=*Ruticilla*) 之六種,互似之點極多,爲簡便計,可用下列檢索表區別之:

A. 尾羽,除中央一雙外,其餘各雙之先端黑色.....*P. frontalis.*

B. 尾之先端非黑色.

a. 喉部有一白塊斑. .... *P. schisticeps.*

b. 喉部無白塊斑.

1a. 中翮與側翮互異,翼長 100mm. 以下.

2a. 次列撥風之內外兩瓣皆有白斑......... *P. auroreus.*

2b. 次列撥風內瓣無白斑.

3a. 次列撥風之白緣極寬...................... *P. hodgsoni.*

3b. 次列撥風,全無白色. .... *P. ochrurus rufiventris.*

1b. 中翮與側翮相似,翼長 100mm. 以上. ....

............*P. erythrogaster grandis.*

201. **Chaimarrhornis leucocephala leucocephala** (Vigors)白頂溪鴝

D. et O, p. 173——可見于甘肅,中國東南部之山中直至秦嶺皆極普通,但從未見于江西,福建及宜昌以北諸地.

Baker, ii, p, 79——由阿富汗,俾路支,克什米爾以至亞森母,雅魯藏布江之南北兩岸,西藏,四川以至揚子江.緬甸北部山中,暹羅,撣部及雲南.

La Touche, p. 142——直隸,山西,陝西,湖北,四川.雲南,江西北部,浙江,安徽,留鳥.

室中有中國鳥十八: 1♂, 6, V, 1890, Prince d'Orleans, 西藏; 1♂, 8, xii, 1869, 2♀, 1, xii, 1868, David, He-tchian; 4(?), 1894, 1895, 1898, Biet, 四川打箭爐; 2(?), 1896, Dejéan, 四川打箭爐; 2(?), 1899, 四川打箭爐; 5(?), 1896, Père Soulie, 雲南甚切; 2(?), 1907, Père Seguin 興甯.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥兩個.

202. **Rhyacornis fuliginosa fuliginosa** (Vigors)溪鴝

D. et O. p. 171——中國中部各省之留鳥,自漠平青海以至福建皆有之.夏季亦可見于北京之山中.

Baker, ii, p. 81——阿富汗,卑路支,以至亞突母之東部及西藏;緬甸北部,德尼薩拉,暹羅,雲南,中國中部,南部及海南.在台灣則爲 *R. f. affinis* 所替代.

La Touche, p. 143——留鳥.北自直隸,南至雲南,無不有之.

室中有中國鳥三十三: 1(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 1♂, 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 3♂, 2♀, 1896, Déjèan, 四川打箭爐; 2♂, 1♀, 1(?), 1899, 四川打箭爐; 3♂, 2♀, 1896, Prince d'Orleans, 雲南; 6♂, 7♀, 1896, Père Soulie, 雲南其刼; 1♂, 1912, Père Cavalérie, 雲南 (San-chouen).

余于廣西猺山多射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥數個.

203. **Eurythacus akahige** (Temm & Schleg). 東駒

D. et O. p. 231——此鳥並非日本所特有,余曾于北京及福建得有標本.

La Touche, p. 145——福建冬鳥.沙尾山遷移鳥.北京春季遷移鳥(?).

室中只有日本鳥.

余曾于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥一雙.

204. **Cyanosylvia suecica robusta** (Buturlin). 中國藍喉

駒

D. et O. p. 234 (*Cyanecula caerulecula*) ——廣佈中國各地,春夏兩季于北京多見之.

Baker, ii, p. 85 ——生殖于西伯利亞之東部,冬季至中國南部,緬甸,亞森母,東孟加拉,尼泊爾及錫金.

La Touche, p. 146 ——中國北部,揚子江中流及下流及沙尾山之遷移鳥.廣東福建之冬鳥.

室中有數十標本,只有中國鳥二: 1♂, 1(?), 1896, Dejean, 四川打箭爐.

冬季余曾于廣西南寧射得之.

205. **Calliope calliope** (Pallas). 紅喉駒

D. et O. p. 235 (*Calliope camtschatkensis*) —— 在中國亦甚普通,春秋兩季必經北京,人多捕之作籠鳥. Przewalski 五月見其營巢于甘肅多樹之區.

Baker, ii, p. 91 —— 生殖于西伯利亞,白令島,千島羣島,中國之東北部.冬季至印度全境,緬甸,德尼薩拉,暹羅,撣部,雲南,中國南部,海南,台灣及菲律賓羣島.

La Touche, p. 147——中國全境,遷移鳥.

室中除大批安南鳥外,有中國鳥五: 2♂, 3♀, 1896, Déjean, 四川打箭爐.

春季余于廣州北郊竹林下得一標本.

206. **Calliope pectoralis pectoralis** Gould. 黑頰紅喉駒

D. et O. p. 236 —— 只于漠平得一標本,甚爲破爛,但余曾數見之.

Rothschild, p. 251 —— 雲南.

室中只有一印度鳥,以既有記載于漠平及雲南,特編入本目錄.

207. **Calliope tschebaiewi** Przewalski. 西藏紅喉駒

D. et O. p. 237 —— Przewalski 于甘肅山中發見之.

Baker, ii, p. 94 —— 生殖于 Ladakh, 西藏,甘肅,錫金,不丹,亞森母及緬甸之北.冬季至緬甸,雲南,暹羅及孟加拉與亞森母之平原中.

室中有四標本: 2♂, 1892, Prince d'Orléans 西藏; 2♂, 1895, Biet, 四川打箭爐.

208. **Calliope davidi** Oustalet. 大衛橙喉駒

Rothschild, p. 250 —— 雲南.

室中有三標本: 3(?), 1898, Biet, 四川打箭爐.

以上四種之*Calliope* 可用下列檢索表示其區別之要點:

A. 喉部塊斑朱紅.

a. 尾羽無白斑.................................. *C. calliope*.

b. 尾羽之尖端或基部白色.

1a.頰之側部黑. ………………………… *C. p. pectoralis.*

1b.顎下線白而寬闊. ………………… *C. tschebaiewi.*

B. 喉部塊斑橙色. ……………………………… *C. davidi.*

209. **Tarsigner chrysaeus chrysaeus** Hodgson. 金叢駒

D. et O. p. 233 —— 甚爲稀少,吾只于漠平得二雄一雌.喜棲野竹叢中,覓食地上.

Baker, ii, p. 95———……雲南,安南及中國西部.

室中除印度安南標本外,有中國鳥八: 1♂, 1♀, 2(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♂, 2♀, 1896, Père Soulié, 雲南苴却.

210. **Janthia cyanura cyanura** (Pallas). 藍尾駒

D. et O. p. 231 ——中國本部及蒙古皆甚普通.

Baker, ii, p. 98 ——由烏拉山東經西伯利亞及中國北部以至日本.冬季南行至中國南部及雲南.

La Touche, p. 148 ——中國北部及揚子江流域之遷移鳥,中國南部(揚子江以南)之冬鳥.

Rothschild, p. 254 ——雲南.

室中除印度安南鳥外,有中國鳥七: 1♀, 29. i. 1869, David, 四川; 1♀, 1899, 四川打箭爐; 2♂, 1897, Père Soulié, 雲南苴

劫; 3♂, xi, La Touche, 福建西北部之掛墩.

余于廣西猺山及廣東北江皆得有記載.

211. **Janthia cyanura rufilata** (Hodgson). 赤脅藍駒

Baker, ii, p. 99 ——尼泊爾,錫金,雅魯藏布江之南北兩岸山中,錦山及嘉錦山,撣部,暹羅之北及雲南,

Rothschild p. 254 (*Tarsiger rufilatus praticus*) ——雲南.

室中有中國鳥二十一: 1♀, 1891, Prince d'Orléans, 四川打箭爐; 1♂, 1896, Biet, 四川打箭爐; 2♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 6♂, 7♀, 1899, 1902, 四川打箭爐; 3♂, 1♀, 1897, Père Soulié, 雲南茈劫.

212. **Janthia indica indica** (Vieillot). 白眉叢駒

D. et O. p. 232 ——四川西部多樹之山中.

Baker, ii, p. 102 ——嘉華,尼泊爾,錫金及亞森母之山中,東至撣部及雲南.

室中有兩印度鳥及三四川鳥: 3♂, 1902, 四川打箭爐.

213. **Janthia indica Yunnanensis** (Rothschild). 雲南白眉叢駒.

Rothschild, p. 253 (*Tarsiger indica yunnanensis*) ——雲南.

室中有兩標本: 1♂, 1♀, 1896, Pére Souliè, 雲南茈劫.

以上 Janthia 之四亞種,相互間甚爲近似,茲以檢索表示其區別如下:

A. 脅橙栗,與其餘下體不同色.

a. 眉斑白. ………… *J. c. cyanura.*

b. 眉斑藍. ………… *J. c. rufilata.*

B. 脅與其餘下體同色.

a. 白腮綫不明顯,喉部深暗,下體銹色較盛. …… *J. i. indica.*

b. 白腮綫極明顯,喉部淺淡,下體橙色較盛. ………… *J. i. yunnanensis.*

214. **Notodela leucura leucura** (Hodgson). 白尾黑駒

Baker, ii, p. 106 —— 自亞摩拉經尼泊爾及錫金以至亞森母之極東與極南,馬尼坡,緬甸及馬來諸邦,南至伯剌河,東至雲南.安南,撣部,及暹羅之北.

Rothschild, p. 253 —— 雲南.

室中之印度安南標本不少,中國鳥只有一個: 1♂, 2, i, 1912, Pére Cavalerie, 雲南 (San-chouen).

余于廣西猺山射得之.

215. **Copsychus saularis saularis** (L.). 知時雀

D. et O. p. 174 —— 中國南部直至揚子江一帶皆甚普通,余于江西九江得數標本,又常于四川見之. …… 中國人喜

紮之作鬥鳥.……

Baker, ii, p. 113 ——印度,緬甸,德尼薩拉之南,撣部,雲南及中國.雲南及中國之標本,量度稍大,雌鳥上體及胸部顯較淺淡,或可另分作一型.

Rothschild, p. 254 ——雲南.

室中除安南鳥外,有中國鳥三: 1♂, 1♀, 1895, Prince d'Orléans, 雲南; 1♀, vii, 1910, Mme. Comby, 雲南.

216. **Copsychus saularis prosthopellus** Oberholser.

D. et O. p. 174 ——見前.

La Touche, p. 149 ——湖北,江西,安徽,浙江,福建,廣東,留鳥.

室中有福建鳥二: 1♂, 1♀, 1905, La Touche, 福建.

Oberholser曾列舉此鳥之特徵曰:"與尼泊爾之*C. s. saularis*相似而平均量度稍大,外側四翮之黑色較發達;雌鳥上體及胸部較爲深暗(著者按恐係較爲淺淡之誤),脅部之黃色亦然."

La Touche 曰:"吾于福建及湖北所得之標本,其上體顯較淺淡于雲南東南部之標本.福建雄鳥之外側四翮,其黑色部確較發達."

雲南鳥之雌雄兩性,皆無別于印度鳥,故余乃以 *C. s. saularis* 記載之.福建鳥與印度鳥及雲南鳥極相似,但雄鳥側翮之黑色較發達,雌鳥上體及胸部較淺淡,誠如La Touche

所言,故余以福建鳥為 *C. s. prosthopellus.* 此次寄來之廣東北部及湖南南部標本,與福建鳥同.

217. **Kittacincla macoura macoura** (Gmelin). 沙廊

D. et O. p. 175 —— 海南.

Baker, ii, p. 117 —— 馬來半島,暹羅,交趾支那,海南.

室中只有安南鳥,以既有記載于海南,特編入本目錄.

TURDINÆ. 鶇亞科

本亞各鳥,形體較大,以昆虫及菓子供食,冬季有羣性,凡此三者,皆所以區別於以上諸亞科.大都為遷移鳥,少數為留鳥,卽為留鳥,亦每因天氣之寒暖,食物之多寡而轉換其居留地,此等小規模之遷移,外國文稱為 local movement, 余尚未能譯作切當之漢名也.

本目錄共記載鶇亞科六屬三十種及亞種.

218. **Turdus merula mandarinus** (Bonaparte). 烏鶇

D. et O. p. 148 (*Merula sinensis*) —— 廣佈中國南部各省,黃河流域則永未見之.

La Touche, p. 100 —— 自揚子江流域以至中國之極南,留鳥.

室中除安南標本外,有兩中國鳥: 1♂, 1♀, 1923, M. Nadar, 舟山.

兩廣平原之地皆有之,余亦有記載于廣東北部及湖南南部,獨不見于廣西猺山.

219. **Turdus merula albicintus** Royle. 白頸褐鶇

Baker, ii, p. 129——克什米爾,亞森母,加沙,馬尼坡……

室中除印度鳥外,有中國鳥二: 2(?), 四川打箭爐.

220. **Turdus boulboul** (Lath.). 灰翼烏鶇

Rothschild, p. 259——雲南蒙自.

室中除印度鳥外,尚有 Delacour 從安南得來之一標本.以其既有記載于雲南,特編入本目錄.

221. **Turdus castaneus gouldi** (Verreaux). 灰頭赤鶇

D. et O. p. 148 (*Merula gouldi*)——余于四川西部及漠平發見之,頗爲繁多,喜棲山林中,冬季降落山谷,就人家以覓食. …… Przewa'ski 於甘肅山林中射得之.

Baker, ii, p. 133——自西藏東部以至甘肅及秦嶺,冬季西行直至母亞森.不列顛博物館中有二雲南鳥.

Rothschild, p. 258——雲南.

室中有四川鳥五,雲南鳥十三: 1♂, 1892, Prince d'Orlèans,

四川打箭爐; 3(?), 1895, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1♀, 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 12(♂?) 1897, Père Soulie, 雲南茛胡.

222. **Turdus eunomus** Temm. 塵鶇

D. et O. p. 155 (*Turdus fuscatus*) ——甚爲普通.

Baker, ii, p. 133 ——北亞洲自東至西皆有之.冬季至印度北部,亞森母,緬甸及中國.

La Touche p. 109 (*Turdus naumanni eunomus*) ——中國南部及揚子江流域,冬鳥.中國北方之大部,冬鳥.沙尾山,遷移鳥.

Rothschild, p. 258 (*Turdus eunomus T. eunomus* × *naumanni*) ——雲南.

室中有中國鳥五: 1♀, 1902, 四川打箭爐; 1(?), 1912, Mme. Comby, 雲南; 1(?), 1912年冬季, Pére Cavalerie, 雲南 (San-chouen); 1(?), 1911, Père Cavalerie, 貴州; 1(?), 1923, M. Nadar, 舟山.

Rothschild 雖以 *T. eunomus* × *naumanni* 記載雲南鳥,但余以雲南鳥與 *T. eunomus* 標準地之日本鳥較,殊無若何不同.

此次寄來之廣東北部及湖南南部標本中,皆有此鳥兩個.

223. **Turdus naumanni** Temm. 赤尾鶇

D. et O. p. 153 ——廣佈中國北部及東部之山林平野.在

北京,自秋初以至春末,皆見其覓食園林花圃中.夏季至滿洲及西伯利亞以生殖. Przewalski 於青海之黃河流域及烏蘇里之鄉村中見之,但未嘗遇之於蒙古.……此鳥體羽,差變甚大.

La Touche, p. 108 ——中國北部及揚子江流域一帶,冬鳥.冬季間或見於福建.沙尾山遷移鳥.

Rothschild, p. 258 ——雲南.

室中有兩標本: 2(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河.

224. **Turdus kessleri** Przewalski 赤腰鶇

D. et O. p. 540 (*Merula kessleri*) ——Przewalski 於甘肅多樹之山中發見之.習性,歌聲與 *gouldi* 相似.

Baker, ii, p. 134 ——西藏東部,四川,青海以至甘肅.錫金邊境亦有之.

室中有中國鳥四: 1(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 3(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐.

225. **Turdus pallidus** Gmelin 灰腹鶇

D. et O. p. 151 ——夏季生殖于日本及亞穆爾,冬季至中國南部及台灣.

Baker, ii, p. 135 ——自西伯利亞東部以至日本,冬季南行

至高麗,中國南部及台灣. Coltart 博士於亞森母射得之.

La Touche, p. 101 —— 揚子江下流,福建,廣東,冬鳥,沙尾山遷移鳥.

Rothschild, p. 259 —— 雲南.

室中只有日本鳥.

226. **Tudus ruficollis** Pallas. 赤喉鶇

D. etrO. p. 156 —— 在北京頗少,秋季於西藏,蒙古,陝西,漠平及其餘中部各省多見之. Swinhoe 云永未見於中國南部,海南,台灣等處. Przewalski 於青海,甘肅見之.

Baker, ii, p. 136 —— 西伯利亞之東,當可見於中國北部,冬季南行至印度緬甸之北及中國南部.

La Touche, p. 110 —— 中國北部及西部,冬鳥.

Rothschild, p. 259 —— 雲南.

室中有中國鳥十七: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 3(?), 1892, Prince d'Orléans, 西藏; 3(?), 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 7(?), 1897, Père Soulié, 雲南甘却; 2(?), 1912, Mme. Comby, 雲南.

T. ruficollis 與 *T. naumanni* 之區別: 1. *T. ruficollis* 之頭與背同色,而 *T. naumanni* 則否; 2. *T. naumanni* 上體常渲染赭赤,而 *T. ruficollis* 則爲淨赭; 3. *T. naumanni* 脅部渲染赭赤,而 *T. ruficollis* 則爲淨灰.

227. **Turdus atrogularis** Temm. 黑喉鶇

Baker, ii, p. 137 —— 生殖于西伯利亞東部及中央亞細亞, Murree, 錫金.

La Touche, p. 111 —— 北京.

室中有中國鳥十五: 1(?), 1911, 蒙古; 3♀, 1891, Prince d'Orléans, 天山; 11(?), 1897, Père Soulie, 雲南其刼.

此鳥上體與 *T. ruficollis* 相似,但下體自腮喉以至前胸,或全黑,或黃白而密佈黑條紋,因雌雄老幼而不同,但決不着赭色.

228. **Turdus ruficollis × atrogularis.**

1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部克魯倫河; 1(?), 1897, Père Soulie, 雲南其刼.

此兩標本之腰及上尾筒,盛染赭赤,胸側及脅部亦然.余以爲係 *T. ruficollis* 與 *T. atrogularis* 之雜種,故用 *T. ruficollis* ×*atrogularis* 記載之.此現象 Stresemann 博士早經注意,且謂其生殖地點,約在貝加爾湖附近云.

229. **Turdus dissimilis dissimilis** Blyth. 黑胸栗腹鶇

Baker, ii, p. 140 —— 亞森妣,馬尼坡,錦山及嘉錦山,撣部及雲南.

Rothschild, D. 259 —— 雲南.

室中只有安南鳥,以既有記載于雲南,特爲之編入本目錄.

230. **Turdus chrysolaus** Temm. 日本褐鶇

D. et O. p. 152 —— 生殖于日本,夏季直至阿穆爾.冬季至中國南部,海南及台灣.

La Touche, p. 103 —— 廣東,福建,沙尾山之遷移鳥.

室中只有三日本鳥,以既有記載于我國,特編入本目錄.

231. **Turdus obscurus obscurus** Gmelin. 白眉鶇

D. et O. p. 153 —— 遷移期經中國全部及蒙古.

Baker, ii, p. 141 —— 生殖于西伯利亞,冬季南行至中國,印度支那,雲南,暹羅,緬甸及亞森母.

La Touche, p. 102 —— 中國各地之遷移鳥.

室中除多數安南鳥外,有中國鳥五: 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1896, Prince d'Orléans, 雲南; 2(?), 1896, Père Soulié, 雲南茸切.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥兩個.

本種與 T. pallidus 甚相似.但 T. pallidus 有以下三特徵與本種完全相反: 1. 無白眉斑; 2. 頭較黑,胸與脅之赭色不發達; 3. 尾暗褐,外側三雙之先端有一白塊斑.

232. **Turdus hortulorum** Sclater. 鶌鶫

D. et O. p. 151 —— 只見于中國南部,留鳥.

La Touche, p. 104 —— 廣東,福建,冬鳥.揚子江下流,沙尾山,直隸東北部,山東,遷移鳥.

室中只有安南鳥.

余于廣西猺山射得之.此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

233. **Turdus cardis cardis** Temm. 黑麥必

D. et O. p. 150 —— 冬季成羣至中國南方各省,夏季至阿穆爾,在北京則永未見之.

La Touche, p. 105 —— 廣東,冬鳥.福建及沙尾山,遷移鳥.

室中只有日本鳥及安南鳥.

此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.

234. **Turdus cardis lateus** Thayer & Bangs 赤脅黑麥必.

La Touche, p. 107 —— 湖北,安徽,夏鳥.雲南東南部,遷移鳥.

室中只有安南鳥.

湖南南部之一標本,當逮此亞種.

T. c. lateus 與 *T. c. cardis* 極相似,但頭部較純黑,與石板灰色之背部有截然之界限.脅部灰色較純淨,下覆兩栗色.

余于廣西猺山射得之 *T. cardis*, Stresemann 博士認爲新

亞種,名之曰 *T. cardis merulinus.* 待標本寄到後,再作詳細比較.

235. **Geocichla sibirica sibirica** (Pallas). 塞鶇

D. et O. p. 149 (*Turdus sibiricus*) —— 見于日本及中國各地,在中國並不甚普通.

Baker, ii, p. 146 —— 生殖于西伯利亞中部,冬季南行至印度,緬甸及中國西部;亦可見于不列顛及法國.

La Touche, p. 116 —— 福建西部,廣東,揚子江下流,沙尾山,山東,直隸,遷移鳥.

室中除安南標本外,有中國鳥二: 1♂, 1♀, 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河.

236. **Geocichla sibirica davisoni** (Hume). 黑腹塞鶇

Baker, ii, p. 147 —— 生殖于日本,冬季向中國,印度支那,緬甸及亞森母等處而南遷.

La Touche, p. 117 —— 福建西北部及沙尾山之遷移鳥.

室中只有日本及安南鳥.

余在廣西猺山, *G. s. sibirica* 及 *G. s. davisoni* 兩者皆曾射得之.此次寄來之廣東北部標本,只有 *G. s. sibirica.*

G. s. sibirica 之腹中部白, *G. s. davisoni* 則下體全部黑或灰黑.

Geocichla citrina melli (Stresemann) 最初發見于廣東北江;及後余于廣西猺山射得多數之標本.此次寄來之北江標本中,此鳥獨付闕如.室中雖有 *G. citrina* 數亞種,但皆非 *melli*, 故不記載.

237. **Oreocincla aurea aurea** Halandre. 金鶇

D. et O. p. 158 (*Oreocincla varia*) —— Przewalski 見之于烏蘇里,Swinhoe 見之于台灣,余則見之于福建之山中.余曾得數標本于北京,彼處每年必可見之,但爲數常不多.

Baker, ii, p. 161 —— 自貝加爾湖以至太平洋,日本及中國北部.冬季南行至台灣.中國南部,緬甸及亞森母.

La Touche, p. 113 —— 中國北部,沙尾山,遷移鳥.揚子江流域直至雲南南部,冬鳥.

室中有中國鳥四: 1(?), 1896, M. Chaffanjon, 蒙古東部之克魯倫河; 1(?), 1897, Père Soulié, 雲南苴刧; 1♂, 4, xi, 1♀, 12, xi, La Touche, 福建西北部之掛墩.

238. **Oreocincla mollissima mollissima** (Blyth). 淨背山鶇

D. et O. p. 159 —— 見于中國西部.

Baker, ii p. 162 —— 尼泊爾,亞森母之東,錦山,嘉錦山,緬甸中部及德尼薩拉之北部山中,南撣及北撣部,安南,暹羅,雲

南.

室中除印度鳥外,有中國鳥六: 1(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 4(?), 1902, 四川打箭爐; 1(?), 1897, Père Soulié, 雲南茛切.

Oreocincla aurea aurea 之上體有黑鱗斑,而 *O. m. mollissima* 則無.前者余于廣西猺山得有大批標本,此次寄來廣東北部標本中亦有一枚,後爲者余採集範圍內所未有.

239. **Monticola rufiventris sinensis** Meinertzhagen. 栗腹磯鶇.

D. et O. p. 159 (*Monticola erythrogastra*) —— 余于四川西部射得之,喜棲樹林,非覓食,不降落地面.

Baker, ii, p. 170 (*Monticola erythrogastra*) —— 自 Chamba 以至東亞森毋,馬尼坡,緬甸之山中,交趾支那,中國西部等處.中國雌鳥,體色深暗,且下體不着金赭色.

La Touche, p. 123 (*Monticola erythrogaster*) —— 福建,廣東,雲南,四川,留鳥.

Meinertzhagen, Bull. B. O. C. xlvii, p. 148, 1927, (福建西北部之掛墩)—— 與標準種 *M. r. rufiventris* (=*M. erythrogastra erythrogastra*)較,則雌鳥上體之石板灰色較深;下背,腰及上尾筒之橫斑及馬締形斑皆木灰色而非鵝黃.

室中尙無掛墩標本,但余以爲安南鳥係屬此型.

余于廣西猺山只得兩標本,稀罕異常.

240. Monticola solitaria pandoo (Sykes). 藍磯鶇

D. et O. p. 163 (*Moticola cyanea*) ——分佈于中國中部各省.余于四川及陝西南部多見之,但永未見于中國北部及蒙古.據 Swinhoe 云福建與廣東沿海則較稀,似爲 *affinis* 所替代云.

Baker, ii, p. 174——自克什米爾至西藏錫金及亞森母北部山中,或可見于錦山.冬季于亞森母及印度全境皆可見之.

La Touche, p. 118 ——揚子江流域,福建,廣東,雲南,四川,留鳥.

Rothschild, p. 257 ——雲南.

室中除大批安南及菲律賓標本外,有中國鳥十: 1♂, 1, xii, 1868, David, 四川西部; 1(?), 1891, Prince d'Orléans, 四川; 1(?), 1895, Biet, 四川打箭爐, 2(?), 1896, Déjean, 四川打箭爐; 1(?), 1899, 四川打箭爐; 2(?), vii, 1910, Mme. Comby, 雲南; 1(?), 1920, 雲南苴刼; 1(?), 1921, Père Cavalerie, 中國南部(雲南,貴州).

余于廣西猺山射得之.

241. Monticola solitaria philippensis (Müller). 栗腹藍磯鶇

D. et O. p. 161 (*Monticola solitaria*) ——普見于中國東部各省,夏季可直至滿洲.春間曾于北京附近射得之.

Baker, ii, p. 175 —— 生殖于中國之東北部及日本,冬季至南中國,台灣,菲律賓,等處.

La Touche, p. 120 —— 廣東,福建,冬鳥(或係留鳥亦未定).揚子江下流遷移鳥.據 Styan 云,在江西則爲留鳥.山東,直隸,夏鳥.

室中有菲律賓及安南標本數十,只有一中國鳥: 1♂, 1864, M. Furet, 中國.

余曾于廣東南部射得之.

Monticola solitaria affinis (Blyth), 分佈于我國西部,雲南,緬甸,馬來羣島,等處,室中尚無標本,故不記入本目錄.

242. **Monticola gularis gularis** (Swinhoe). 白喉磯鶇

D. et O. p. 161 —— 春末經北京,營巢于滿洲.歌聲優美,故北京人喜飼其雄者作籠鳥.

Baker, ii, p. 176 —— 西伯利亞東部,滿州及中國北部.冬季南行至中國南部,印度支那,有時亦至德尼薩拉及緬甸之東南部.

La Touche, p. 124 —— 廣東,福建,江西,安徽,揚子江下流,遷移鳥.直隸,夏鳥及遷移鳥.

室中只有印度及安南鳥.

余于廣西猺山得有標本不少.

243. **Monticola saxatilis** (L.). 磯鶇

D. et O. p. 160 —— 見之于蒙古東部,亦營巢于北京及烏拉圖之高山.

Baker, ii, p. 177 —— 歐洲中部及南部,非洲西北部,亞洲西部,經巴勒斯坦,波斯,蒙古,西伯利亞之南以至中國北部.冬季至滿洲中部,印度北部,緬甸之東西兩部,雲南,印度支那及中國南部.

La Touche, p. 119 —— 直隸西北部夏鳥.

室中有數標本,只有一中國鳥: 1(?), David, 沙溪 (Sartchy).

243. **Myiophoneus caeruleus caeruleus** (Scopoli) 黑嘴紫嘯鶇

D. et O. p. 176 —— 廣佈全國各地,北京頗稀.在南中國則爲留鳥.

La Touche, p. 126 —— 中國東部各省自直隸以至廣東及雲南,留鳥.

Rothschild, p. 255 —— 雲南.

室中有六標本: 2(?), 1894, 1895, Biet, 四川打箭爐; 3(?), 1912, Pere Cavalerie, 雲南 (San-chouen); 1♂, 13, xi, La Touche, 福建.

余于廣西猺山得有標本,此次寄來之廣東北部標本中,亦有此鳥四個.又在廣東西江之鼎湖山,此鳥異常繁多.

245. **Myiophoneus caeruleus eugenei** Hume. 黃嘴紫嘯鶇

Baker, ii, p. 181 —— 緬甸,暹羅,撣部,雲南及交趾支那.

Rothschild, p. 256 —— 雲南.

室中有四川雲南鳥各七: 2(?), 1892, Prince d'Orléans, 四川打箭爐; 4(?), 1896, Biet, 四川打箭爐; 1(?), 1902, 四川打箭爐; 2♀, 1(?), 1896, 雲南; 1♂, 3(?), Père Soulié. 雲南茸邦.

此鳥之嘴黃,嘴峯脊部略褐,覆雨羽無白點斑. *M. c. caeruleus* 則嘴黑,覆雨羽有粉白色之點斑.

246. **Cochoa purpura** Hodgson. 紫鶇

Rothschild, p. 256 —— 雲南麗江山脈.

室中只有 Delacour 之二安南鳥,以既有記載于雲南,特編入本目錄.

247. **Cochoa viridis** Hodgson. 青鶇

D. et O. p. 214 —— 只于福建獲得一次,極爲稀少.

Baker, iip. 185 —— 喜馬拉雅帶自袭馬安 (Kumaon), 嘉華以至東亞森母,馬尼坡,緬甸山中及德尼薩拉,又經印度支那以至中國西部.

室中有安南鳥三,以經有記載于我國,特編入本目錄.

余記載鶇亞科畢,而知漏去 *Grandala coelicolar* Hodgson —

種,以全體經既妥編號碼,不便更改,乃補述于此.以分類系統言,此種當介于 *Cyanosylvia suecica robusta* (No. 205), 與 *Calliope calliope* (No. 206)之間.

248. **Grandala coelicolor** Hodgson 藍鳥

D. et O. p. 176——夏季見于漢平.五六月間漢中廳(Hon-Chang-tin)亦極多,七月末則不復見.

Baker, ii, p. 89 —— 嘉華,尼泊爾,錫金,西藏及中國西部山中.

室中有四川鳥十一: 1♂, 1896, Déjean, 四川打箭爐; 5♂, 4♀, 1898, Biet, 四川打箭爐; 1♂, 1899, 四川打箭爐.

標本足下標簽記該處土名爲藍鳥 (Oiseau bleu) 因採用之.

(未 完)

數學家姓名錄

（續第三卷第三期）

曾昭安

Cabanié [卡班聶] 十九世紀 法人

Cabreira, A. [卡布賴拉] 二十世紀初 葡萄牙人

Cabul [喀布爾] 亦作 Kabul 阿富汗王

Caccianino, Antonio [卡西安尼諾] 十九世紀 義人

Caccioppoli, R. [卡栖波立] 二十世紀前半期 義人 代數學家

Cadenat, C. [卡第那] 二十世紀 法人

Cæcilius Africanus [卡奇力阿·亞夫利坎那] 一世紀末

Cæsar, Julius [愷撒] (100 B.C.—44,3,15 B.C.) 羅馬人

Cæsar, J. [愷撒] 十九世紀中 巨哥斯拉夫人

Cæsar of Padua, Julius [愷撒] 十六世紀 德意志及義大利人

Cagliari [加格拉里]

Cagnazzi [卡拿濟] 十八世紀 義人

Cagnoli, Antonio [卡諾利] (1743—1816) 義人

Cagnoli, F. [卡諾利] 十八世紀後半期 丹麥人

Cahen, Armand [加亨] 十九世紀末 法人

Cahen, E. [加亨] 十九及二十世紀 法人 研究數論,函數論

Caille [卡厄] 卽 de la Caille

Cailler, Charles [卡勒] 二十世紀初 法人

Cain, William [該隱] (?—1931) 美人

Cairns, S. [S. 懇斯]

Cairns, W. de W. [懇斯] 二十世紀初 德人

Cairns, W. D. [懇斯] 二十世紀前半期 美人

Cairo, E. [開羅] 義人

Cajori, Florian [卡佐理] (1859,2,28—1930,8,14) 美人 數學史專家

Calandri, Filippo [卡蘭德里] 拉丁文作 Philippi Calandri 或 Philippus Calandrus 或 Philippus Calender 十五世紀末 義人 著算術

Caldani, Petronio Maria [卡登尼] (1735—1808) 義人

Caldarera, G. [卡達累剌] 十九世紀後半期 義人

Caldonazzo, B. [卡多那左] 二十世紀前半期 義人

Caldwell, Minnie [科德衞爾] 二十世紀前半期 美人

Calender, Philippus [卡蘭德] 卽 F. Calandri

Calendrini, Ludovico [卡楞德列尼] (1703—1758) 瑞士人

Caley, E. R. [迦力] 二十世紀前半期 英人

Calhoun, J. W. [卡爾渾] 二十世紀前半期 美人

Calippus [卡力帕] 卽 Callippus

Calisti, J. [卡力斯提] 十八世紀後半期 義人

Calkins, *Miss* Helen [卡京斯] 二十世紀前半期 美女人

Callandreau, O. [卡蘭得累] 十九世紀末 法人

Callaway, Iris [卡拉威] 二十世紀前半期 美人

Callet, François [卡勒] (1744—1798) 法人 著對數表

Callimachus of Cyrene [卡林馬卡斯] (?—240?B.C.) 希臘人

Callippus of Cyzicus [卡力帕] 亦作 Calippus 紀元前四紀 希臘人

Calloway, Mrs. Theodosia T. [卡羅威] 二十世紀前半期 美女人

Calo, Mastr e [卡洛] 卽 K lo nymos ben Kalonymos

Calò, B. [卡洛] 二十世紀 義人

Calogerà, Angelo [卡羅給刺] (1699—1766) 義人

Calonghi [卡倫基] 二十世紀前半期

Calsadilha [卡爾薩第哈] 十五世紀 葡萄牙人

Caluso, Tommaso Valpergo di [卡琉索] (1737—1825) 義人

Calvert, J. [卡爾味特]

Calvet-Azal [卡味·阿紮] 法人

Calvino, Nicolò [卡費諾] 十五世紀 義人

Cambuston, Henri [坎巴斯頓] 十九世紀 墨西哥人

Cambyses [坎拜栖兹] 紀元前六世紀 波斯人

Camerarius, Joachin [卡美刺里烏] 其姓爲 Liebhard (1500,4,12—1574,4,17) 德人

Camerer, Joannes Guilelmus [卡美累] (1763—1847) 德人

Camerer, Joh. Wilhelm [卡美累] 十八世紀 德人

Cametti, O. [卡麥替] 十八世紀後半期

Camilla, Giovanni [卡密拉] 十六世紀 義人

Camp, Burton Howard [坎普] 二十世紀前半期 美人

Camp, C. C. [坎普] 二十世紀前半期 美人

Campano, Giovanni [坎佩諾] 亦作 Johannes Campanus 或 G. Campanus 十三世紀中 美人 譯歐氏幾何學

Campbell, Alan D. [坎柏爾] 二十世紀前半期 美人

Campbell, Donald Francis [坎柏爾] 二十世紀前半期 美人

Campbell, George [坎柏爾] 十八世紀 英人

Campbell, George A. [坎柏爾] 二十世紀前半期 美人 著傅利積分

Campbell, John Edward [坎柏爾] (?—1924,10,1) 英人 著連續羣論

Campbell, John W. [坎柏爾] 二十世紀前半期 坎拿大人

Campbell, L. [坎柏爾] 十九世紀後半期 英人

Campbell, Margaret M. [坎柏爾] 二十世紀 美人

Campbell, N. R. [坎柏爾] 二十世紀前半期 美人

Campbell, R. [坎柏爾] 十九世紀中 英人

Campbell, William Bucke [坎柏爾] 二十世紀前半期 美人

Campbell, W. W. [坎柏爾] 二十世紀 美人

Campedelli, Luigi [坎柏得利] 義人

Camus, Charles Etienne Louis [卡睦] (1699-1768) 法人 著幾何學

Canacci, Rafaele [卡那奇] 十四世紀後半期 義人

Cancer, Nicolaus [坎塞] 卽 N. Cusa

Candale, Comte de [坎對爾] 亦作 François de Foix-Candale 卽 Foix

Candalla, François [干達拉] 卽 F. Foix

Candido, G. [干第多] 二十世紀前半期 義人

Candler, H. [坎德勒] 十九世紀 英人

Candolle, A. de [康道爾] 二十世紀 德人

Candy, Albert L. [堪的] 二十世紀初 美人

Canonville, J. T. [坎諾維爾] 法人

Canovai, Stanislao [干諾發] (1740—1811)

Cantagallina [坎退加利拉] 卽 Baldi

Cantelli, F. P. [坎推利] 二十世紀前半期 義人

Canterzani, Sebastiano [卡忒紮尼] (1734—1819) 義人

Cantone, Michele [坎敦] (?—1932,3,25) 義人

Cantone, Oberto [坎敦] 十六世紀末 義人

Cantor, Georg [坎托] (1845,3,3—1918,1,6) 俄人 住德國多年,研究點組論,

以有理數之無窮級列表示無理數.

Cantor, Moritz [坎托] (1829,8,23—1920,4,10) 德人 數學史大家

Canz, E. C. [坎次] 十八世紀中 德人

Caparo, J. A. [卡帕洛] 二十世紀前半期 美人

Capella, Martianus *Mineus Felix* [卡珀拉] (420—490) 希臘人

Capelle, H. [卡珀列] 二十世紀 德人

Capelli, Alfredo [卡珀力] (1855—1910) 義人

Caphanton, Jacob [卡蕃頓] (?—1439) 猶太人

Capocci, Raniero [卡坎息] 義人

Caporali, Ettore [卡坡拉力] (1855—1886) 義人

Cappelle, J. P. van [加柏爾] 十九世紀前半期 荷蘭人

Cappelli, Adriano [卡柏利] 二十世紀初 德人

Capra, Baldassare, [加浦拉] 十七世紀前半期 義人

Capron, Paul [喀普琅] 二十世紀前半期 美人

Capuano, Francesco [加善亞諾] 十五世紀 義人

Caqué, J. [卡魏] 十九世紀

Caraccioli, Giambattista [卡喇綽利] (1695,12,29—1765,) 義人

Caralier, Carl Ludwig [喀拉利爾] 二十世紀 德人

Caramuel Johann [加喇睦爾] 亦作 John Caramuel 或 Johann Caramuel y Lobowitz (1606—1682 波希米亞 Bohemia) 人

Carathéodory, Constantin [卡拉帖多黎] (1873—) 希臘人 著實變數函數論

Caravaggio, Pietro Paolo [加拉華蕎] (1617—1688) 義人

Carazelli, V. [加拉味力] 十八世紀後半期

Carbonnelie [卡邦耐爾] 十九世紀中 比利時人

Carcavi [卡喀微] 十七世紀 法人

Carcavy, Pierre de [卡喀維] 亦作 Peter von Carcavy 十七世紀

Card, E. [卡德] 二十世紀 英人

Carda, K. [卡達] 十世九紀末 德人

Cardan [卡丹] 即 Cardano

Cardano, Facio [卡丹諾] (1444—1524) 義人

Cardano, Hieronimo [卡丹諾] 亦作 Jerome Cardan 或 Girolamo Cardan (1501,9,24—1579,9,21) 義人 著空前之代數學 (Ars Magna)

Cardenas, A. Ruiz de [卡對那斯] 十九世紀後半期

Cardinall, J. [加的那爾] 二十世紀 荷蘭人

Careil, F. de [卡賴爾] 十九世紀 法人

Carette, A. M. [卡勒特] 十八世紀末 法人

Carey, E.F. A. [揆立] 二十世紀前半期 美人

Carey, F. S. [揆立] (1860—1928,7,26) 英格蘭人 著幾何學及極微算法.

Carey, G. C. [揆立] 十九世紀前半期 美人

Caris, P. A. [卡立斯] 二十世紀前半期 美人

Carl, Alexander [卡爾] 二十世紀 德人

Carlbaum, T. [卡爾波] 二十世紀初 瑞典人

Carlebach, J. [卡爾巴哈] 二十世紀 德人

Carleman, T. [卡爾曼] 二十世紀前半期 瑞典人 著半解析函數

Carlini, Francesco [卡利尼] (1783—1862) 義人 天文數理家

Carlini, Luighi [卡利尼] (?—1928,12,28) 義人

Carlitz, Leonard [卡利次] 二十世紀前半期 美人

Carll, Lewis Buffett [喀爾] (1844—1918) 美人

Carlock, F. D. [卡羅克] 二十世紀

Carlos le-Maur [卡羅·勒·摩] 西班牙人

Carlos, S. [卡羅斯] 二十世紀 瑞士人

Carlson, A. [卡爾孫] (1888—) 瑞典人

Carlson, F. [卡爾孫] 二十世紀前半期 瑞典人

Catlson, S. Elizebeth [卡爾孫] 二十世紀前半期 美人

Carman, M. G. [卡曼] 二十世紀前半期 美人

Carmichael, F. L. [卡邁克] 二十世紀前半期 美人

Carmichael, Robert [卡邁克] 十九世紀中 英人 著運算術

Carmichael, Robert Daniel [卡邁克] 二十世紀前半期 美人 研究數論

Carnap, P. [卡那] 二十世紀 德人

Carnap, Rudolf [卡那] 二十世紀前半期 奧人

Carnot, Lazare *Nicolas Margnerite* [噶諾] (1753,5,13—1823,8,22) 法人 數理物理學家

Carnot, Sadi *Nicolas Léonhard* [噶諾] (1796—1832) 法人

Carnoy, Joseph [卡諾] 二十世紀 比利時人 幾何學家

Caro, R. [卡羅] 十九世紀末 法人

Caro-Delvaille, M. Henri [卡羅•得瓦] 二十世紀 美人

Caron, Franciscus 十七世紀 日本人 遊荷蘭國者

Caronnet, Th. [卡瑱涅] 十九世紀末 法人

Carou, J. [卡魯] 十九世紀後半期 法人

Carp, J. A. [卡普] 二十世紀初 荷蘭人

Carpanese, Signorina [卡帕涅斯]

Carpenter, A. F. [卡盆特] 二十世紀前半期 美人

Carpenter, Perry A. [卡盆特] 二十世紀 美人

Carpenter, O. Frank [卡盆特] 二十世紀前半期 美人

Carpini, Fra Plano [卡皮泥] 十三世紀中 法人

Carus, Paul [卡魯司] 二十世紀 美人

Carvalho, Anibal Scipiãs Gomes de [卡瓦和] 二十世紀 葡萄牙人

Carvallo, Emmanuel [卡瓦羅] 十九及二十世紀 法人

Carvallo, M. E. [卡瓦羅] 二十世紀初 法人

Carvello, E. [卡味羅] 二十世紀 法人

Carver, Harry Clyde [卡味] 二十世紀前半期 美人

Carver, Walter B. [卡味] 二十世紀前半期 美人

Casali [卡薩利] (1721—1802) 義人

Casanova, Alvise [卡薩諾瓦] 十六世紀中 義人

Casati, Curtio [卡薩替] 十七世紀初 義人

Casati, Paolo [卡薩替] 十七世紀後半期 義人

Casazza, G. [卡薩紮] 二十世紀前半期 義人

Casey, John [卡寨] (1820—1890) 愛爾蘭人 研究幾何學及函數論.

Casorati, Felice [卡索拉替] (1835—1890) 義人

Caspar, Max [卡索帕] 二十世紀初 德人

Caspari, C. E. [卡斯帕立] 二十世紀

Caspary, F. [卡斯帕里] 十九世紀後半期 法人

Cassani, P. [卡薩立] (1832—1905)

Cassany, Francisco [卡薩里] 十八世紀 西班牙人

Cassel, Gustav [加塞爾] (1866—) 瑞典人

Cassiani, Paolo [卡息亞立] 義人

Cassina. U. [喀西那] 二十世紀前半期 義人

Cassini, *Giovanni* Domenico [喀西尼] 亦作 Jean Dominique Cassini (1625,6,8—1712,9,14) 義人 發明卵形線 其子 (Jacques) 孫 (César François) 曾 (Jacques Dominique) 均為科學界名家

Cassini, Jacques [喀西尼] (1677,2,18—1756,4,16) 法人

Cassini de Thury, César François [喀西尼] (1714,6,17—1784,9,4) 法人

Cassini *de Thury*, Jacques Dominique [喀西尼] (1748,6,30—1845,10,18) 法人

Cassinis, G. [喀西尼斯] 二十世紀前半期 義人

Cassiodorus, Magnus Aurelius [卡息奥多剌] 亦作 M. A. Cassiodorius (470—566) 羅馬人

Cassirer, Ernst [卡息勒] (1874—) 德人

Castel, Louis Bertrand [卡斯忒] (1688—1757) 法人

Castellano, Francesco [卡斯忒拉諾] 二十世紀 義人

Castelli, Benedetto [喀斯特利] (1577—1644) 義人

Castelnau, L. [卡斯忒諾] 十九世紀後半期 法人

Castelnuovo, Guido [卡斯特琉羅] (1865—) 義人

Castelvetri, Giannantonio Andrea [卡斯忒味利] (?—1766) 義人

Castigliano, Carlo Alberto [卡斯提力諾] (1847—1884) 義人

Castillon, Frederic de [卡斯提隆] 十八世紀後半期 義人

Castillon, Giovanni Francesco Maura Melchior Salvemini de [卡斯提隆] 簡稱為 G. Castillon (1708—1791) 西班牙人

Castle, Frank [卡斯爾] (1857—1928,8,4) 英人 著數學表及實用數學

Caswell, John [卡兹衛爾] (1655—1712,4,) 英人

Catalan, Engène *Charles* [卡塔蘭] (1814,5,30—1894,2,19) 比利時人 研究幾何學

Cataldi, Pietro Antonio [卡塔第] 亦作 Perito Annotio 或 Pietro Antonio Cattaldi (1548—1626,2,11) 義人 開始研究連分數論者.

Cataneo, Pietro [卡塔尼] 十六世紀中 義人

Catani [喀大尼] 十六世紀中 義人

Catelan, Abbé [卡退蘭] 十七世紀

Cathalan, Antoine [卡退蘭] 十六世紀中 法人

Cathcart, G. L. [卡司卡特] (?—1927,3,26) 愛爾蘭人 編輯薩曼(Salmon)之著作

Cathcart, William Ledyard [卡司卡特] 著圖解力學

Cattaldi, Pietro Antonio [卡塔第] 即 Cataldi

Cattaneo, Francesco [喀塔尼] (1811—1875) 義人

Cattaneo, P. [喀塔尼] 二十世紀前半期 義人

Cattel, James McKeen [喀忒] (1860—) 美人

Cattell, J. M. [喀忒爾] 二十世紀初 美人

Cauchy, *Baron* Augustin *Louis* [科犀] (1789,8,21—1857,5,23) 法人 闡發數學解析,行列式論,無窮級數論,剩餘論,橢圓函數.完成平直微分方程式論及變分學.

Cauer, D. [科埃] 二十世紀前半期 德人

Caunt, G. W. [歌特] 二十世紀 英人

Caussinus, N. [科辛那] 十七世紀 法人

Cavalieri, Bonaventura [卡發利里] (1598—1647,11,30) 義人 發明以球面餘度求球面三角形面積之法.創立不盡除法則爲積分學之先導.

Cavendish, Henry [卡汾狄士] (1731,10,10—1810,2,4) 生於法國 居英國多年. 研究數學,天文學,地理學.決定地球之密度.

Caxton [卡克斯敦] (1410—1491) 英人

Cayley, Arthur [探力] (1821,8,16—1895,1,26) 英人 研究橢圓函數,不變式論.

Cayzer, T. S. [探策]

Cazzaniga, T. [卡紮尼加] 十九世紀末 義人

Čebyšev, P. L. [西比舍] (1821—1894) 俄人 研究數論

Cecco d' Ascoli [塞科達斯科利] 亦稱 Francesco di Simone Stabili 或 Francesco degli Stabili (1257—1327) 義人

Čech, Edouard [栖喜] 二十世紀前半期 捷克人

Cecioni, F. [塞栖尼] 二十世紀前半期 義人

Cederberg, W. E. [栖得柏] 二十世紀前半期 美人

Cederström, A. [栖得斯綸] 十九世紀中 瑞典人

Celi, J. W. [塞爾] 二十世紀前半期 美人

Cellérier, Ch. [舍勒里] 十九世紀末 瑞士人

Cellérier, G. [舍勒里] 十九世紀 瑞士人

Cellini, Benvenuto [拆利泥] (1500— 或 1569,12,13 / 1571,2,15) 義人

Cels, J. [攝爾] 十九世紀末 法人 研究微分方程

Celsius, Anders [攝爾修] (1701,11,27—1744,4,25) 瑞典人 天文數理學家 發明攝氏寒暑表

Celsus, Juventius [塞爾薩斯] 一世紀後半期

Celtes, Conrad [塞爾特斯] 亦作 Konrad Celtis 十五世紀 奥人

Censorinus [森索利那] 三世紀 羅馬人

Centen, G. [辰滕]

Ceresole, P. [栖里索爾] 二十世紀初 瑞士人

Cerf, Georges [塞夫] 二十世紀前半期 法人

Cerruti [塞露梯]

Cesàro, Ernesto [西沙羅] (1859—1906) 義人 高等解析學家

Ceulen, Ludolph van [修楞] 即 Van Ceulen

Ceva, Giovanni [塞法,佐法泥] (1647,12,—1736,5,13) 義人 發明幾何學中之塞法定理。

Ceva, Tommaso [柴法] (1648,12,20—1737,2,3) 義人佐發泥之弟 著旋輪線.

Chace, Arnold Buffum [察斯] (?—1932,2,28) 美人

Chafee, Zechariah [察斐] 二十世紀前半期 美人

Chaffee, J. Irwin [察飛]

Chaignet. A. Ed. [察涅] 十九世紀後半期 法人

Chailan, E. [察蘭] 十九世紀末 法人

Chaiyat [察雅] 即 al-Chaiyat

Chakrabarti, J. [察克剌巴替] 二十世紀初 印度人

Chalfant, F. H. [卡爾蕃]

Challikan [卡力坎] 亦作 Khallikan 即 Ibn Khallikan

Challis, H. W. [察力斯] 十九世紀後半期 英人

Challis, James [察力斯] (1803—1882,12,3) 英人 研究數理物理

Chalose [察羅斯] 法人

Chamberg, G. G. [產柏] 二十世紀前半期 美人

Chamberlayne, John [張伯需] (1666—1723) 英人

Chamberlin, T. C. [辰柏林] (1843—1928,11,15) 美人

Chambers,Ephraim [察柏斯] 十八世紀前半期 英人

Chambers, G. G. [察柏斯] 二十世紀前半期 美人

Champenois, Jacques, Chauvet [查奔諾] 十六世紀後半期 法人

Champier, B. C. Symphorien [產匹爾] 十六世紀 瑞士人

Champion, H. H. [產匹溫]

Chandler, G. H. [產德勒] 二十世紀初 美人

Chang Chaou [張潮] 中國清初人

Chang Che Kwan [張豸冠] 十八世紀後半期 中國清乾隆時人

Chang Fuh He [張福僖] 十九世紀中 中國清咸豐同治時人

Chang Hŏng [張衡] [78(東漢建初三年)—139(漢永和四年)] 中國人

Chang Keen [張鑑] [1768(清乾隆三十三年)—1850(清道光三十年)] 中國人

Chang Keu Kin [張去斤] 五,六世紀 中國南北朝時人

Chang Khew Keen [張邱建] 三世紀 中國三國時人 著算經三卷

Chang Kwang [張肱] 十七世紀 中國清時人

Chang Tsang [張蒼] [(周赧王季年)—152 B. C.(漢景帝五年)] 中國人

Chang Tseo [張爵] 十六世紀前半期 中國明嘉靖時人

Chang Tsu Nan [張作楠] 十九世紀初 中國清嘉慶道光時人 著翠微山房算學十五種

Chang Tswan [張纘] [499(齊永元元年)—549(梁中大通六年)] 中國人

Chang Tun Jin [張敦仁] [1754(清乾隆二十年)—1834(清道光十四年)] 中國人

Chang Wan Heen [張文謙] [1216(宋嘉定九年)—1283(元至元二十年)] 中國人

Chang Wan Hoo [張文虎] [1808(清嘉慶十三年)—1885(清光緒十一年)] 中國人

Chang Wei [張委] 六世紀 中國南北朝時人

Chaou Ching [趙城] 十三世紀末 中國元大德時人

Chaou Fe [趙䵹] 五世紀前半期 中國南北朝北涼人

Chaou Ke Mei [趙琦美] [1563(明嘉靖四十三年)—1624(明天啓四年)] 中國人

Chaou Shwang [趙爽] 中國漢時人

Chaou Yeu Kin [趙友欽] 十四世紀 中國元時人

Chaou Yu [趙瑀] 十四世紀後半期 中國明洪武時人

Chapell, Harry F. [察拍爾] 二十世紀前半期 美人

Chapelle, Abbé de la [沙拍爾] (1710—1792) 法人

Chapelon, Jacques [察拍隆] 二十世紀前半期 法人

Chapeton, J. J. [察拍吞] 二十世紀前半期 法人

Chapman, C. H. [察普曼] 十九世紀末 美人

Chapman, E. H. [察普曼] 二十世紀 英人

Chapman, Sydney [察普曼] 二十世紀初 英人

Chappell. E. [察拍爾] 二十世紀 美人

Chapple, William [沙普爾] 十八世紀

Charbonnier, P. [沙波磊] 二十世紀 法人

Chardin, Sir John [沙丁] 十七世紀 英人

Charlemagne [查理曼] (742—814) 法王

Charles, E. [查理] 十九世紀 法人

Charles, Jacques [查理] 亦作Alexandre Charles (1746—1823) 法人 闡明氣體體積與壓力之關係法則

Charles, Rollin L. [查理] 二十世紀 美人

Charlier, Carl [查利爾] 十九世紀

Charlier, C. V. L. [查利爾] 二十世紀初 丹麥人

Charlier, L. [查利爾] 二十世紀 瑞典人

Charpentier, T. V. [沙蓬退]十九世紀後半期 法人

Charpit, Paul [查匹] (?—1784) 研究偏微分方程

Charruit, N. [沙稔] 十九世紀末 法人

Chartier, J. [沙退] 十九世紀中 法人

Charve, L. [沙佛] 十九世紀後半期 法人

Chraves [沙佛斯] 十九世紀

Chase, Pliny Edward [徹斯] 十九世紀 美人

Chasles, Michel [沙爾] (1793,11,15—1880,12,12) 法人 從事於近世幾何學

Châtelet, Albert [沙特雷] 二十世紀前半期 法人 著數論及向量解析

Châtelet, Mme Marquise du [沙特雷侯爵夫人] 卽 Marquise du Châtelet, Mme

Châtillon [沙提永] 十八世紀

Chaucer, Geoffrey [樟渠] (1340—1400) 英人

Chaundy, T. W. [產狄] 二十世紀 英人

Chausen, Th. [沙森] 十九世紀

Chauvenet, W. [勺昧內] 十九世紀後半期 美人

Chauvent, William [勺文] (1820—1870) 美人 研究數理天文

Chazy, Jean [沙齊] 二十世紀前半期 瑞典人

Chebichev, Pafnuti Liwowich [岐比拆] 亦作 P. L. Tschebyscheff (1821—1894) 俄人

Chelebi, Miram [岐爾比] 卽 al-Rumi

Chelini, Domenico [車里尼] (1802—1878,11,16) 義人

Chelucci, Paolino [車琉奇] 義人

Chen Chang Tse [陳昌齊] (1743(清乾隆八年)—1820(清嘉慶二十五年)) 中國人

Chen Che [陳熾] 中國三國時人

Chen Chin Mo [陳藎謨] 十七世紀中 中國明末人

Chen Heu [陳訏] (1650 (清順治七年五月十九日)—1732(清雍正十年)) 中國人

Chen Ho Ling [陳鶴齡] 十七世紀 中國清康熙時人

Chen How Yaou [陳厚耀] (1648(清順治五年)—1722(清康熙六十一年)) 中國人

Chen Kee [陳杰] 十九世紀前半期 中國嘉慶道光時人

Chen Khe Tsin [陳其晉] 十九世紀後半期 中國清光緒時人

Chen Lew Wang [陳留王] 三世紀後半期 中國魏時人

Chen Pi Chih [陳必智] 十六世紀前半期 中國明嘉靖時人

Chen Sew Ling [陳修齡] 二十世紀初 中國清光緒時人

Chen Shang Teh [陳尚德] 十三世紀 中國元時人

Chen Shih Jen [陳世仁] [1676(清康熙十五年)—1722(清康熙六十一年)] 中國人

Chen Tsung Yun [陳從運] 中國唐時人

Chen Tsze [陳子] 中國周公之後人

Chen Wan Tseh [陳萬策] 十八世紀前半期 中國清康熙時人

Cheney,William Fitch [瑟內] 二十世紀前半期 美人

Cheng Kaou Shing [鄭高昇] 十六世紀前半期 中國明嘉靖時人

Cheng Kiang Chen [鄭康成] 名鄭玄或譯爲 Chun Shuen (127 (漢永建二年)—200(漢建安五年)) 中國人

Cheng Tai Wei [程大位] 十六世紀末 中國明萬曆時人 著算法統宗十三卷

Cheng Yaou Teen [程瑤田] (1725(清雍正三年)—1814(清嘉慶十九年)) 中國人

Chernac, Ladislaus [瑟那] 十九世紀 荷蘭人

Cherriman, J. B. [徹里曼] 十九世紀後半期 坎拿大人

Chessin, A. S. [徹辛] 十九世紀及二十世紀 美人

Chevalier de Méré [瑟發雷] 十九世紀 法人

Chevillard, A. [哲維拉] 十九世紀中 法人

Chevrel, Georges [瑟勒] 十九世紀末 法人

Cheyne, C. H. H. [徹因] 十九世紀 英人

Cheyne, George [徹因] (1671—1734) 英人

Chiao Hsun [焦循] [1763(清乾隆二十八年)-1820(清嘉慶二十五年夏)] 中國人

C,hiarino Giorgio [岐安里諾] 亦作 Giorgio Chiarini 十五世紀後半期 義人

Chiba Yushichi [千葉胤秀] (1775-1849) 日本人

Chien Tai Hsin [錢大昕] [1728(清雍正六年)—1804(清乾隆五十五年)] 中國人

Chien Tang [錢塘] [1770(清乾隆三十五年)—1842(清道光二十二年八月)] 中國人

Chignell. N. J. [什格孟爾] 二十世紀前半期 英人

Child, J. M. [柴爾德] 二十世紀前半期 美人

Childe, G. F. [柴爾得] 研究曲面之特殊性

Chiminello [琛明涅諾]

Chin Kiu Shao [秦九韶] 亦作 Chin Chiu Shao 十三世紀中 中國宋時人 宋淳祐七年(卽1247年)成數學九章

Chin Lwan [甄鸞] 六世紀中 中國南北朝北周人

Chini, M. [欽尼] 二十世紀前半期 義人

Chio, F. [岐奥] 十九世紀中 義人

Chioniades von Konstantinopel [岐尼亞德] 十四世紀中 土耳其人

Chipart, Henri [契帕] 二十世紀前半期

Chisini, O. [契西尼] (1889—) 義人

Chisnell, E. T. [契斯涅] 二十世紀前半期 英人

Chittenden, E. W. [契騰登] (1885—) 美人 研究點組論

Chittenden, J. B. [契騰登] (1864-1928,3,20) 美人

Chlandi [克蘭狄]

Choisnard, P. [綽斯那] 二十世紀前半期 法人

Chompré N. M. [綽普累] 十八世紀 法人

Chonuphis of Heliopolis [春納菲斯] 紀元前四世紀 埃及人

Choo Ko Paou [諸可寶] [1845(清道光二十五年)—1903(清光緒二十九年)] 中國人

Chope, R. H. [勺普]

Choquet, Charles [綽魁] 十九世紀 法人

Chottoraj, Kaliprasanne [焯托累] 印度人

Chou Kung [周公] (?—1105B.C.) 中國周時人 中國最古數學書,現今尚遺存者曰周髀算經.該書中所記載,相傳係周公與商高二人問答之辭.

Chou Shuh Heo [周述學] 十六世紀中 中國明嘉靖時人

Chou Tsung [周琮] 中國人

Chou Tsze Yu [周子愚] 十七世紀前半期 中國明萬曆時人

Choulant, L. [叔蘭] 十九世紀前半期

Chowla, G. S. [叔拉] (?—1929,12,) 印度人

Chree, Charles [克里] 十九及二十世紀 英人

Christensen, S. A. [基利斯騰森] 十九世紀末 丹麥人

Christesco, S. [克立斯武柯] 二十世紀 法人

Christian of Prag [基利斯當] 亦作 Christanus Prachticensis (1368—1439) 捷克人

Christiani, J. W. [克立斯坦尼] 十八世紀末 德人

Christiansen, C. [克立斯坦森] 十九世紀

Christie, James R. [克立斯替] 十九世紀 英人

Christie, R. W. D. [克立斯替] 十九世紀末 英人

Christman, John M. [克立斯萌] 二十世紀 美人

Christmann, Jacob [克立斯曼] (1554—1630) 德人

Christmann, W. L. [克立斯曼] 十九世紀前半期

Christoffel, Elwin Bruno [克里斯妥斐] (1829—1900) 瑞士人

Chryppfs, Johannes [克立普夫] 十五世紀初 德人

Chrysippus [基利斯波] (280 B. C.—207 B. C.) 希臘人 著書七百零五卷

Chrysococces, Georg [克立索科拆] 十四世紀中

Chrysoloras, Manuel [克立索羅剌] 十四世紀 義人

Chrystal, George [克立斯塔] (1851—1911) 英人 著代數學

Chu Chung Fuh [朱仲福] 十六世紀末 中國明萬曆時人

Chu Hung [朱鴻] 十八世紀後半期 中國清嘉慶時人

Chu I Tsun [朱彝尊] [1629(明崇禎二年)—1709(清康熙四十八年)] 中國人

Chu Keih [朱吉] 十一世紀前半期 中國宋時人

Chu Muh Kee [朱睦㮮] 十六世紀後半期 中國明隆慶時人

Chu Shih Chieh [朱世傑] 亦作 Chu Shie Kie 十三世紀末 中國元大德時人 於元大德七年(卽1303年)著四原玉鑑

Chu Sung Ting [朱松庭] 卽 Chu Shih Chieh

Chu Tsae Teih [朱載埼] 十六世紀 中國明時人

Chu Tsae Yuh [朱載堉] [1536(明嘉靖十五年)—?] 中國人

Chu Tseun Shing [朱駿聲] [1788(清乾隆五十三年)—1858(清咸豐八年)] 中國人

Chu Yuen Seun [朱元濬] 十六世紀後半期 中國明萬曆時人

Chuard, J. [徹亞德]

Chun Shuen [鄭玄] 卽 Cheng Kiang Chen

Chunrad von Junginge1 [察剌] 十四世紀 德人

Chunard von Megenberg [察利] (1309—1374) 德人

Chuproff, A. A. [察普洛夫] 十九世紀 德人

Chuquet, Nicolas [朱魁] (?—1500) 法人 貢獻於代數學.研究紀數法

Church, Alonzo [察基] 二十世紀前半期 美人

Church, Albert E. [察基] 十九世紀 美人 著畫法幾何學

Church, Earl [察基] 二十世紀前半期 美人

Churchill, Randolph [察赤爾]

Churchill, R. V. [察赤爾] 二十世紀前半期 美人

Chvíalkovskij, S. A. [克徽科斯啓] 二十世紀前半期 波蘭人

Chwang Hang Yang [莊亨陽] 1685 (清康熙二十四年)—1746 (清乾隆十一年) 中國人 著莊氏算學八卷

Ciacchi [栖亞契] 十七世紀後半期 義人

Ciamberlini, C. [察柏利尼] 十九世紀末 義人

Ciani, Edgardo [察尼] 二十世紀前半期 義人

Cicero [西塞祿] (160 B. C.—43 B. C.) 羅馬人

Ciermans, Johann [息曼斯] (?—1648) 猶太人

Cinelli, M. [息涅利] 十九世紀末 義人

Cioranesco, N. [栖蘭涅科] 二十世紀前半期 義人

Cipolla, M. [奇坡拉] 二十世紀前半期 義人

Cipro, Johanem de [奇普洛] 十五世紀後半期 義人

Cirodde, P. L. [息洛德] 十九世紀中 法人

Ciruelo, Pedro Sánchez [塞侖洛] (1470—1560) 西班牙人

Ciscar, Don Gabriel [息斯卡] 墨西哥人

Cisotti, U. [西索替] 二十世紀前半期 義人 著數學解析,向量解析.

Clack, Robert Wood [克拉刻] 二十世紀前半期 美人

Claessens [克勒森] 二十世紀 法人

Clairaut, Alexis Claude [克雷洛,亞歷] (1713, 5, 3—1765, 5, 17) 法人 數理及天文學家.著雙曲率之曲線.貢獻於幾何,代數,極大極小問題等.

Clairaut, …… [克雷洛] (1716—1732) 法人 亞歷之弟

Clairaut, Jean Baptiste [克雷洛] (?—1765) 法人 亞歷之父

Clairin, J. [克拉靈] 二十世紀初 法人

Clairin, M. J. [克拉靈] 二十世紀 法人

Claparède, Edouard [克拉帕累德] (1873—) 瑞士人

Clapier, F. C. [克拉皮耳] 二十世紀前半期 法人

Clark, Andrew G. [葛拉克] 二十世紀前半期 美人

Clark, Gilbert [葛拉克] 英人

Clark, Jas. G. [葛拉克] 十九世紀後半期 美人

Clark, J. R. [葛拉克] 二十世紀 美人

Clark, Samuel [葛拉克] 十八世紀中 英人

Clark, Walter Eugene [葛拉克] 二十世紀前半期 美人

Clark, W. G. [葛拉克] 十九世紀後半期 英人

Clarke, A. R. [克拉克] 十九世紀 英人

Clarke, E. H. [克拉克] 二十世紀前半期 美人

Clarke, F. C. [克拉克] 二十世紀 英人

Clarke, Frances Marguerite [克拉克] 二十世紀前半期 美人

Clarke, Frank Wigglesworth [克拉克] (1867—) 美人

Clarke, G. S. [克拉克] 十九世紀 英人

Clarke, H. [克拉克] 十八世紀 英人

Clarke, John [克拉克] 十八世紀 英人

Clarke, John B. [克拉克] 二十世紀初 美人

Clarke, Samuel [克拉克] (1675,10,11—1729) 英人

Clasen, B. J. [克拉森] 十九世紀後半期 比利時人

Classen, J. [克剌松] 二十世紀初 德人

Clatovenus, Andreas [克拉托維那] 十六世紀 捷克人

Claudel, J. [克勞得] 二十世紀 美人

Clausbergs, Christlieb von [克勞斯柏] 亦作 C. Clausberg (1689—1751) 但澤人

Clausen, Friedrich [克勞孫] 十九世紀後半期 德人

Clausen, Thomas [克勞孫] (1801—1885) 德人

Clausius, Rudolph [克勞修司] 亦作 Rudolf Julius Emanuel Clausius (1822—1888) 德人

Claussen, A. P. L. [克勞森] 十九世紀 德人

Claussen, F. [克勞森] 二十世紀 德人

Clauzel, G. [克勞濟] 二十世紀 法人

Clavio, C. S. [克拉徽] 卽 Clavius

Clavius, Christophorus [克拉徽] 亦作 C. S. Clavio 或 Christopher Clavius 或 Christoph Clavius 或 Schlüssel 或 Christoph Klau 德人 曾居義大利.著代數學,算術,歐氏幾何學.

Clawson, J. W. [克羅松] 二十世紀前半期 美人

Clay, C. M. [克雷] 二十世紀初 美人

Clebsch, *Rudolf Friedrich* Alfred [克勒布希] (1833,1,19—1872,11,7) 德人 近世幾何學之泰斗

Cleinias [克來呢士] 紀元前四世紀 希臘人

Clemedes [克雷米咨] 紀元前一世紀 希臘人

Clemens Alexandrinus [克勒門亞歷山大方那] 亦作 Clemens of Alexandria

(150—213?) 希臘人

Clement, Fr. de Sant [克雷蒙] 十六世紀後半期 西班牙人

Clements, G. R. [克雷蔓司] 二十世紀前半期 美人

Clemm, Heinrich Wilhelm [克雷] (1725,12,13—1775,7,27) 德人

Cleostratus [克利斯拉塔] 希臘人

Clericus, J. [克勒里卡] 十七世紀末 荷蘭人

Clerke, *Miss* Agnes M. [克勒克] 十八及十九世紀 英女人 研究數學史

Clerke, Gilbert [克勒克] (1626—1700) 英人

Clersellier, Claude [克勒塞利] (1614—1684) 法人

Cleveland, C. M. [克利夫蘭] 二十世紀前半期 美人

Clichtoveus, Jodocus [克力赤托味] 亦作 Jodocus Clichtovaeus (?—1543) 比利時人

Clifford, A. K. [克利佛德] 十九世紀 英人

Clifford, Harry E. [克利佛德] 二十世紀前半期 美人

Clifford, William Kingdon [克利佛德] (1845,5,4—1879,3,3) 英人 發明八原論

Clinchamp, F. E. V. de [克令喜] 十九世紀 法人

Clinkscales, G. B. [克令斯喀爾] 二十世紀前半期 美人

Cloranesco, Nicolas [克羅藍司科] 二十世紀 法人

Clousing, Nicolai [克勞辛] 十八世紀前半期 德人

Clutz, F. H. [克呂茲] 二十世紀前半期 美人

Cnollen, Adam Andreas [諾列] (1674—1714)

Coates, C. V. [科特斯] 十九世紀後半期 英人

Coates, W. M. [科特斯] 二十世紀前半期 德人

Cobb, C. W. [柯布] 二十世紀前半期 美人

Cobb, Herbert E. [柯布] 二十世紀前半期 美人

Cobb, Sam [柯布] 英人

Cobham, E. M. [科班] 二十世紀前半期 英人

Coble, Arthur B. [科不爾] 二十世紀前半期 美人

Cobleigh, Henry R. [科布利] 二十世紀 美人

Cocker, Edward [科剋] (1631—1675) 英人

Cockle, *Sir* James [科剋爾] (1819—1895) 英人

Cockshott, A. [科剋紹特] 十九世紀 英人

Coculesco, N. [科卡勒斯科] 十九世紀末 法人

Codazzi, D. [柯達濟] (1824—1873) 義人

Coddington, Henry [科定登] (?—1845,3,3) 英人

Coe, C. J. [庫] 二十世紀前半期 美人

Coehn, H. [庫因] 十九世紀 德人

Coffin, J. E. [科芬] 二十世紀 美人 著利息表

Coffin, Joseph George [科芬] 二十世紀 美人 著向量解析

Coffin, L. M. [科芬] 二十世紀前半期 美人

Coffman, L. D. [科夫曼] 二十世紀 美人

Cognet, Michiel [科涅] 亦作 M. Coignet (1549—1623) 荷蘭人

Cohen, Abraham [柯痕] 二十世紀初 美人 著微分方程

Cohen, B. [柯痕] 二十世紀

Cohen, C. [柯痕] 二十世紀前半期 英人

Cohen, J. [柯痕] 二十世紀初 英人

Cohen, Louis [柯痕] 二十世紀 美人

Cohen, Leon Warren [柯痕] 二十世紀前半期 美人

Cohen, Morris R. [柯痕] 二十世紀前半期 英人

Cohen, Teresa [柯痕] 二十世紀前半期 美人

Cohen-Kysper, A. [柯痕·啓斯拍] 二十世紀前半期 德人

Cohn, A. [科因] 二十世紀前半期 德人

Cohn, Berthold [科因] 二十世紀 德人

Cohn, E. [科因] 十九世紀末 德人

Cohn, Fr. [科因] 十九世紀末 德人

Cohn, M. R. [科因] 二十世紀 英人

Cohn-Vossen, Stefan [科因·服孫] 二十世紀 德人

Coi [魁] 亦作 Colla 卽 Da Coi

Coignet, Michel [科涅] 卽 M. Cognet

Cointe, I. L. A. Le [科因特] 十九世紀後半期 義人

Colaw, J. M. [科羅] 十九世紀末

Colbert, Jean Baptiste [科伯特] (1619—1683) 法人

Colburn, Warren [科爾本] 十九世紀前半期 美人

Colburn, Zerah [科爾本] 美人

Colding, L. A. [科爾丁] 十九世紀中 丹麥人

Cole, Frank Nelson [柯爾] (1861,9,20—1926,5,26) 美人

Cole, John [柯爾] 十九世紀後半期 英人

Colebrooke, H. Th. [科爾布魯克] (1765—1837) 英人

Coleman, J. B. [科爾曼] 二十世紀前半期 美人

Colenso, J. W. [科楞索] 十九世紀中 美人

Coleridge, Hartley [哥爾利治] 十九世紀前半期 英人

Colla [科拉] 亦作 Coi 卽 Da Coi

Collar, G. [科剌]

Collet, J. [科雷] 十九世紀末 法人

Colletta, P. [科勒塔] 十九世紀前半期 義人

Colletti, Nicolao [科勒提] 十八世紀後半期 義人

Collier, Myrtie [柯勒頁] 二十世紀前半期 美人

Collignon, E. [科利嫩] 二十世紀 法人

Collimitius [科令米提阿] 卽 Tannstetter

Collingwood, E. F. [科令武德] 二十世紀 英人

Collins, John [叩林斯] (1625,3,5—1683,11,10) 英人

Collins, Joseph V. [叩林斯] 二十世紀初 美人 著代數學

Collinson, Peter [科林孫] 十八世紀 美人

Colmar, Thomas de [哥爾馬耳] 十九世紀前半期

Colombo, B. [科倫波] 二十世紀前半期 義人

Colombo, G. [科倫波] 二十世紀 美人

Colomera y Rodríguez, Venancio [科倫麥拉伊羅得里士] 西班牙人

Colonnetti [柯倫涅替]

Colpitts, E. C. [科爾庇玆] 二十世紀初 美人

Colpitts, Julia T. [科爾庇玆] 二十世紀前半期 美人 研究解析幾何學

Colson, Albert [科爾遜] 二十世紀 法人

Colson, John [科爾遜] (1680—1760,1,20) 英人

Colucci, A. [科蘭息] 二十世紀前半期 義人

Columella, Lucius Junius Moderatus [科蘭麥拉] 一世紀前半期 西班牙人

Coluscci [柯琉西]

Colvin, Fred H. [科爾文] 二十世紀 美人

Colwell, R. C. [科衛爾] 二十世紀前半期 美人

Colyer, Edward Everett [科業] 二十世紀前半期 美人

Combe, J. W. [科謀]

Combebiac, G. [昆柏比亞] 二十世紀初 法人

Comberiac, G. [昆柏里亞] 二十世紀 法人

Comberouse, Charles de [康柏盧斯] 十九世紀後半期 法人 研究幾何學

Combes, Ch. [科謨司] 十九世紀 法人

Combescure, Édouard [康貝斯邱] (1819—?) 法人

Combette, E. [康貝替] 十九世紀末 法人

Comegys, Esther [昆麥吉] 二十世紀前半期 美人

Comenius, Johan Amos [夸美紐斯] (1592—1670) 奥人

Comessatti, Annibale [科麥薩替] 二十世紀前半期 義人

Commandino, Federigo [康曼第諾] (1509—1575,9,3) 義人

Commessati, A. [康麥薩替] 二十世紀前半期 義人

Commines de Marsilly, de [昆米那斯得馬西立] 法人

Commissaire, H. [坎米薩爾] 二十世紀 法人

Compagnon, P. F. [坎帕嫩] 十九世紀 法人

Compaing de la Tour Girard, le Colonel [坎佩·得拉圖吉剌] 法人

Compère, C. [康佩爾] 十九世紀末 比利時人

Compton, Arthur Holly [昆普吞] 二十世紀前半期 美人

Comrie, L. J. [孔里] 二十世紀前半期 美人

Comstock, C. E. [孔司托克] 二十世紀 美人

Comstock, G. C. [孔司托克] 二十世紀 美人

Comte, Auguste [孔德] (1798—1857) 法人 改定數學之定義

Conant, Levi L. [科南] 十九世紀末 美人

Concilium von Nicaea [昆西力安] 四世紀前半期

Condamine, Charles Marie de la [奎達民] (1701,1,28—1774,2,4) 法人

Condillac, *Abbé* Éteinne Bonnet de [康的亞克] (1715—1780) 法人 研究數

學之基礎

Condorcet, Marie Jean *Antoine Nicolas Caritat* de [康多塞] (1743,9,17—1794,3,29) 法人 確率學家

Configliacchi, Pietro [康菲力契] 十八世紀

Connell, J. [昆涅爾] 十九世紀中 英人

Conner, J. R. [康涅]

Conon of Alexandria [科嫩] 紀元前三世紀 希臘人

Conrad, Hans [康拉] 十六世紀

Conran, M. J. [康藍] 二十世紀前半期 愛爾蘭人

Constable, Samuel [坎斯塔布爾] 十九世紀 英人

Constantinus von Fleury [君士坦廷] 亦作 Constantinus von Mici 十世紀

Consterdine, A. [昆斯忒丁] 二十世紀 英人

Contarelli [昆塔勒力] 十八世紀後半期 義人

Contenson, Louis de [康騰遜] 二十世紀 法人

Conti, A. [康體] 二十世紀 義人

Conti, Antonio Schinella [康體] (1677—1749) 義人

Converse, H. M. [康汾斯] 二十世紀前半期 美人

Conway, A. W. [昆威] 二十世紀 愛爾蘭人

Conwell, G. M. [康衛爾] 二十世紀前半期 美人

Conwell, H. H. [康衛爾] 二十世紀前半期 美人

Cook, Alexander [庫克] 二十世紀前半期 坎拿大人

Cook, A. J. [庫克] 二十世紀前半期 坎拿大人

Cook, F. W. [庫克] 二十世紀 英人

Cook, L. T. [庫克] 二十世紀前半期 美人

Cook, Samuel Henry [庫克] 二十世紀前半期 美人

Cooley, H. R. [庫力] 二十世紀前半期　美人

Coolidge, Julian Lowell [科立琪] (1873—) 美人　著圓球座標幾何學,非歐幾何學等.

Cooper, H. O. [庫拍] 二十世紀前半期　英人　著計算尺用法

Cooper, R. [庫拍] 二十世紀前半期　英人

Coos, N. [庫斯] 二十世紀初　瑞典人

Cope, Thomas Freeman [柯普] 二十世紀前半期　美人

Copeland, A. H. [柯普蘭] 二十世紀前半期　美人

Copeland, Lennie P. [柯普蘭] 二十世紀前半期　美人

Copernicus, Nicolaus [哥白尼] 亦作 Coppernicus 或 Zepernik (1473,2,19—1543,5,24) 波蘭人　數理天文學家.著有三角術.

Copp, P. T. [柯蒲] 二十世紀前半期　智利人

Coppons, M. [科逢] 十八世紀後半期　法人

Corachan, Juan Bautista [科剌產] 十八世紀　西班牙人

Coradi, G. [科拉第] (1848—1929,3,2) 創製數學器具,如積分器及調和解析器等.

Coral, M. [科剌爾] 二十世紀前半期　美人

Corbaux, F. [科寶] 十九世紀前半期　法人

Corbellini, G. [科柏利尼]

Corbin, C. E. [珂賓] 二十世紀前半期　美人

Cordeiro, F. J. B. [科第洛] 二十世紀　美人

Cordier, J. [珂第] 二十世紀初　德人

Cordonis, Mattheus [科多尼斯] 十五世紀

Cordovero, Rabbi Moses [科多威洛] (1522—1570,6,25) 巴勒斯坦 (Palestine) 人

Corella, Alfonzo López de [科勒拉] 十六世紀 西班牙人

Corey, S. A. [科累] 十九世紀末 美人

Coriolis [科賴利]

Cornaro, Giacomo Aloise [科那洛] 十七世紀 義人

Cornelissen, C. [科涅利孫] 二十世紀前半期 法人

Cornelius, Hans [哥尼流] (1863—) 德人

Cornelius de Judeis [哥尼流] 十六世紀末 德人

Cornet, C. [科涅] 二十世紀前半期 法人

Cornwell, J. [康瓦爾]

Corral, J. I. del [科拉] 二十世紀前半期 西班牙人

Corral-Alemán, J. I. [科拉·勒阿曼] 二十世紀前半期 古巴人

Corridi, F. [科利第]

Corsonich, Eugen Innocentius [科松尼喜]

Corssen, W. [科森] 十九世紀後半期 德人

Cortazár, D. Juan [科塔紮] 十九世紀 西班牙人

Cortés, Jerónimo [科次] 十六世紀 義人

Cortese, Giuseppe [科特斯] 十八世紀前半期 義人

Cortinovis, Girolamo Pietro [科廷諾維]

Cosalli, Pietro [哥薩力] 義人

Casby, Byron [科斯比] 二十世紀前半期 美人

Cossali, Pietro [科薩力] (1748,6,29—1815,12,20) 義人

Cosserat, Eugène [利塞剌] (1866—1931,5) 法人

Costa [哥斯達] 十九世紀前半期 法人

Costard, George [科斯忒德] (1710?—1782) 英人

Coster, B. [科斯忒] 二十世紀前半期 荷蘭人

Cote [哥特]

Cotes, Roger [科次] (1682,7,10—1716,6,5) 英人　發見關於1之n冪根之重要定理,及二項式之分母爲有理分數時之積分法,始作差錯論.

Cotsworth, M. B. [科次衞史] 二十世紀　美人

Cotter, J. R. [科忒] 二十世紀初　愛爾蘭人

Cotterill, T. [科忒里爾] 十九世紀後半期　英人

Cotton, Émile [科吞] 十九世紀末　法人

Cotton, Sir Robert [科吞] 十七世紀後半期　英人

Cotty, G. [科替] 二十世紀前半期　法人

Couderc, Paul [庫得] 二十世紀　法人

Coulomb, Charles Augustus [庫隆] (1736—1806) 法人　數理物理學家,發明電學中之庫隆法則.

Coulon, J. [庫郎] 二十世紀初　法人

Courant, Richard [庫藍特] (1888—　) 德人

Courant, Robert [庫藍特] 二十世紀前半期　德人

Courcy, Alph. de [庫息] 十九世紀中　法人

Courier, Paul Louis [庫累] (1772—1825) 法人

Cournot, Antoine Augustin [庫諾] 亦作 Anton Augustin Cournot (1801—1877) 法人　研究函數論

Court, N. A. [庫耳] 二十世紀前半期　美人

Courtenay, E. H. [剋特內] 十九世紀後半期　美人

Courtivron, le Marquis de [庫替綸] (1715—1785)

Cousin, Jacques Antoine Joseph [柯常] (1739—1800) 法人

Cousin, Pierre [柯常] 十九世紀末　法人

Cousin, Victor [柯常] (1792—1867) 法人

Cousinéry, Barthélémy-Edouard [庫星涅立] (1790—1851) 法人

Coutereel [庫式里] 十七世紀前半期 荷蘭人

Coutourat, L. [庫圖拉] 著數學之哲學

Couturat, Louis [庫塔拉] (1868—1914) 法人 研究數學與論理學之關係.

Covarrubias, Didacus [卡發納拜斯] (1512—1577) 西班牙人

Covarrubias, F. D. [卡發納拜斯] 十九世紀末 墨西哥人

Cowie, G. D. [考維] 二十世紀 美人

Cowley, Elizabeth B. [考力] 二十世紀初 美女

Cowling, A. H. [考令] 二十世紀

Cox, Carl Syfan [柯克斯] 二十世紀前半期 美人

Cox, Elbert Frank [柯克斯] 二十世紀前半期 美人

Cox, Homersham [柯克斯] 十九世紀中 英人

Cox, M. E. [柯克斯] 二十世紀前半期 美人

Cox, Mary Jane [柯克斯] 二十世紀前半期 美人

Coxeter, H. S. M. [柯克舍威] 二十世紀前半期 英人

Crabtree, H. [克剌特里] 二十世紀 英人

Craig, C. C. [克累格] 二十世紀前半期 美人

Craig, C. F. [克累格] 十九世紀初 美人

Craig, H. V. [克累格] 二十世紀前半期 美人

Craig, John [克累格] (?—1731,10,11) 蘇格蘭人

Craig, J. I. [克累格] 二十世紀前半期 英人

Craig, Thomas [克累格] (1855—1900) 美人

Craigo, Ralph T. [克累哥] 二十世紀 美人

Crakanthorpe, R. [克剌坎吞普] 十七世紀前半期 英人

Cramer, F. [克剌麥] 十九世紀

Cramer, Gabriel [克剌麥] (1704,7,31—1752,1,4) 瑞士人 研究代數曲線之解析.

Cramér, H. [克剌麥] 十九及二十世紀 德人

Cramlet, C. M. [克剌勒] 二十世紀前半期 美人

Crantz, P. [克蘭茲] 二十世紀前半期 德人

Cranz, C. [克蘭] 二十世紀前半期 德人

Cranz, Heinrich [克蘭] 十九世紀末 德人 著解析幾何學

Cranz, P. [克蘭] 二十世紀 德人

Crathorne, A. R. [克剌吞] 二十世紀初 美人

Craufurd, A. Q. G. [克牢費德] 十九世紀中 英人

Crawford, G. E. [克洛福德] 十九世紀末 英人

Crawford, John [克洛福德] 英人

Crawford, L. [克洛福德] 十九世紀末 英人

Crawley, E. S. [克洛雷] (1862—) 美人

Creak, T. C. [克里克] 二十世紀 英人

Creanga, S. L. [克李加] 二十世紀前半期 羅馬利亞人

Cready, Frederick [克里的] 二十世紀前半期 美人

Crefcœur, Albert J. M. [克纍刻]

Creizenach, M. [克賴縉那哈] 十九世紀 德人

Creizenach, W. [克賴縉那哈] 十九世紀 德人

Crelier, L. [克纍利爾] 十九世紀末 瑞士人

Crelle, August *Leopold* [克勒爾] (1780,3,11—1855,10,6) 德人 創刊克勒爾雜誌於1826年

Crelle, E. L. [克勒爾] 二十世紀前半期 德人

Cremona, Livigi [格里摩拿] (1830—1903) 義人 發展曲線論,曲面論,雙有

理變換論等.

Cremonensis, Carolus Marianus『克累步內西』十七世紀

Crenshaw, B. H. [克棱索] 二十世紀 美人

Cresse, G. H. [克累栖] (?—1931,5,3) 美人

Cresswell, Daniel [克累斯衞] (1776—1844,3,21) 英人 著平直透視術

Crew, Henry [克留] 二十世紀 美人

Crezfeldt, Martinus Carolus [克累斐德] 十六世紀 荷蘭人

Cribraio, Maria [克立布雷] 二十世紀前半期 義人

Çridhara [克利哈拉] 印度人

Crivetz, Théodore [克立微兹] 十九世紀末 羅馬利亞人

Crocchi, L. [洛羅欽] 十九世紀後半期 義人

Crockett, C. W. [克洛剌特] 十九世紀末 美人

Croft, W. B. [克洛夫特] (1852—1928,3,23) 英人

Crofton, Morgan W. [克洛夫頓] (1826—1915) 英人

Crone, Christian [克綸] 十九及二十世紀 丹麥人

Cronin, S. E. [克綸甯] 二十世紀 美人

Crook, C. W. [克魯克] 二十世紀 英人

Croone, William [克魯因] (1629—1684) 英人

Crosland, L. [克洛兹蘭] 二十世紀前半期 美人

Cross, J. F. [克洛斯] 二十世紀前半期 坎拿大人

Croswell, W. [克洛兹衞爾] 十八世紀末 美人

Crousaz, Jean Pierre [克洛薩] (1663,4,13—1750,3,22) 瑞士人

Crout, P. D. [克洛特] 二十世紀前半期 美人

Croy, Fr. [克羅] 二十世紀 德人

Crozet, Claude Crnber [克洛則] 十九世紀 美人

Crüger, Peter [克魯吉] (1580—1639) 德人

Crum, W. L. [克剌] 二十世紀前半期　美人

Cruquius, N. [克剌奎]

Cruse, S. R. [克魯斯] (?—1926,2,8) 美人

Crusius, David Arnold [克魯栖] 德人

Crusoe, George E. [克魯蘇]

Ctesibius of Alexandria [特息比斯] 紀元前二世紀　希臘人

Cubberley, E. P. [卡柏雷] 二十世紀

Cullis, Cuthbert Edmund [卡力斯] 二十世紀　英人　著矩陣論

Culman, L. [卡孟] 十六世紀前半期　德人

Culmann, Karl [卡曼] (1821—1881) 瑞士人　所著圖解靜力學極為著名

Culmann, P. [卡曼] 十九世紀後半期　德人

Culpepper, Nicholas [卡佩拍] (1616,10,18—1653,1,10) 英人

Culver, M. M. [卡味] 二十世紀前半期　美人

Culverwell, E. P. [卡味衞爾] (1856—1931,4,17) 愛爾蘭人

Cumming, Forrest [卡明] 二十世紀前半期　美人

Cummings, Louise D. [卡明茲] 二十世紀前半期　美女

Cummings, Stanley R. [卡明茲] 二十世紀前半期　美人

Cunha, José Anastacio da [昆雅] 即 Da Cunha

Cunn, Samuel [堪]

Cunningham, Allan J. C. [堪林子] (?—1928,2,8) 英人　研究數論,方式論,著數學表.

Cunningham, Ebenezer [堪林干] 二十世紀　英人　研究相對論

Cunningham, William [堪林干] 亦作 W. Kunningham (1531—?) 英人

Cuno, Jacob [昆諾] 十六世紀　德人

Cuny, Georges [昆尼] 二十世紀 法人

Curabelle [庫拉柏爾] 十七世紀

Cubastro, Gregorio Ricci [庫巴斯羅] (1853—1925,8,6) 義人 應用絕對微分學於相對論

Cureton, Edward E. [邱耳香] 二十世紀 美人

Curlee, A. T. [剋利] 二十世紀前半期 美人

Currier, C. H. [卡立爾] 二十世紀前半期 美人

Curry, H. B. [庫立] 二十世紀前半期 美人

Curtis, A. H. [剋替斯] 十九世紀中 英人

Curtis, H. B. [剋替斯] 二十世紀前半期 美人

Curtis, M. F. [剋替斯] 二十世紀

Curtiss, David Raymond [剋替司] 二十世紀初 美人

Curtiss, Franciscus [剋替司] 十六世紀 法人

Curtius, Jacob [庫圖斯]

Curtze, Maximilian [庫玆] 亦作 E. L. W. M. Curtze (1837—1903) 波蘭人

Curzon, H. E. J. [剋遜] 二十世紀前半期 英人

Cusa, Nicholas [庫薩] 亦作 Nicolaus von Cusa 或 Nicolas von Cusa 或 Nicolaus Cusanus 或 Nicolaus Cancer (1401—1464,8,11) 德人 研究化圓爲方及數論等.

Cusanus, Johannes [庫薩] 亦作 J. Cusa 十五世紀末 德人

Cusanus, Nicolaus [庫薩] 卽 N. Cusa

Cushing, F. H. [卡醒] 十九世紀末 美人

Cushman, Frank [卡士曼] 二十世紀 美人

Cuthbertson, Francis [卡司柏松] 十九世紀後半期 英人

Cyzicenus of Athens [昔濟辰] 亦作 Athenæus of Cyzicus 紀元前四世紀

雅典人

Czaikowskyj, N. [察科斯啓] 二十世紀前半期　烏克蘭人

Czogler, A. [楚格勒] 十九世紀末　德人

Czuber, Emanuel [蘇柏] (?—1925,8,22) 奥人　著微積分

Czwalina, A. [稽林那] 二十世紀前半期　德人

Czwalina-Allenstein, A. [滑林那亞楞斯騰] 二十世紀

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律横書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外概不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增删但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第三卷第二期目錄

國立武漢大學理科季刊第三卷第三期目錄

國立武漢大學社會科學季刊第三卷第四號目錄

介紹期刊

地質彙報……………………………北平西城兵馬司九號國立北平研究院地質學研究所

牛頓……………………………………日本東京市目黑區大岡山七一牛頓月刊社

理工雜誌……………………………上海呂班路二二三號震旦大學理工學院

理學院季刊…………………………河南大學理學院

電業季刊……………………………南京城內大石壩街廿一號全國民營電業聯合會編輯股

化學季刊……………………………國立北平大學工學院化學季刊社

化工……………………………………國立浙江大學化學工程學會

土木工程會會刊……………………復旦大學土木工程學會

高工土木工程學會會刊…………浙大高工土木工程學會

瓊崖實業雜誌………………………瓊州海口東門內實業雜誌社

介紹期刊

時事類編……上海福煦路八〇三號中山文化教育館

學風……安徽省立圖書館

青年世界……四川重慶天主堂街重慶書店青年世界雜誌社

婦女旬刊……杭州中華婦女學社

南洋情報……上海眞如國立暨南大學

民大校刊……廣東荔枝灣國民大學

安徽大學週刊……安慶安徽大學

國立四川大學周刊……成都四川大學

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

南華評論……上海山東路三二〇號南華評論社

中學生……上海四馬路八五號開明書局

眞光校刊……廣州市白鶴洞私立眞光女子中學

國立武漢大學理科季刊

第三卷第四期

價目	郵費
全年四册 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌國立武漢大學出版部

中華民國二十二年六月發行

國立武漢大學

理科季刊

1

本片卷

自 1930 年 1 卷 1 期

至 1933 年 3 卷 4 期

國立武漢大學

理科季刊

2

本片卷

自 1933 年 4 卷 1 期

至 1944 年 8 卷 2 期

1933年

第1期

國立武漢大學
理科季刊

第四卷第一期

QUARTERLY JOURNAL OF SCIENCE

WU-HAN UNIVERSITY, WUCHANG, CHINA

Vol. IV No. 1 September 1933

本　期　目　錄

中華民國二十二年九月發行

國立武漢大學理科季刊委員會編印

中華郵政局特准掛號認為新聞紙類

國立武漢大學理科季刊

第四卷第一期目錄

國立武漢大學理科季刊

第四卷第二期目錄預告

近代之不等式

（續第三卷第四期）

蕭　文　燦

II 積分不等式

12. 由Cauchy氏第一不等式導出之積分不等式.

定理. 設 $\log f(x)$ 及 $f(x)$ 於 (a,b) 爲積分可能時則

$$(32)\qquad \boxed{e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx} \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,\quad f(x)>0.}$$

其等號乃限于 $f(x)=$ 常數之時成立.

證明 於§1中Cauchy氏不等式(1)之 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ 等各代以 $f_{1n}, f_{2n}, \cdots\cdots$ 等則

$$\sqrt[n]{f_{1n}\, f_{2n} \cdots\cdots f_{nn}} \leqq \frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots\cdots+f_{nn}}{n},$$

$$\frac{1}{n}\left[\log f_{1n}+\log f_{2n}+\cdots\cdots+\log f_{nn}\right]$$
$$\leqq \log\frac{f_{1n}+f_{2n}+\cdots\cdots+f_{nn}}{n}$$

今考

$$f_{jn} \equiv f\left(a+\frac{j}{n}(b-a)\right) \equiv f(x),$$

$$\frac{b-a}{n} \equiv dx$$

於 $n \longrightarrow \infty$ 時之極限值則

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx \leqq \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right),$$

即

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx} \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

13. 由 Hölder 氏不等式導出之積分不等式.

定理 設 $p>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ f(x)\geqq o,\ g(x)\geqq o$ 而次之三積分存在時則

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)dx \leqq \left(\int_a^b [f(x)]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b [g(x)]^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.} \tag{33}$$

其等號限於 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之比爲常數或 $f(x)=g(x)=o$ 時成立.

證明. 於 §3 之不等式 (5) 中 $a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots$ 等各代以 $f_{1n}, f_{2n}, f_{3n}, \cdots\cdots, g_{1n}, g_{2n}, \cdots\cdots$ 等則

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu n}\, g_{\nu n} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu n}^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu n}^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

而考

$$f_{\nu n} \equiv f(x) \equiv f\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right),$$

$$g_{\nu n} \equiv g(x) \equiv g\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right),$$

$$\frac{b-a}{n}=dx,$$

上式兩邊各乘以 dx, 取 $n\to\infty$ 時之極限卽得 (33) 矣.

14. 由 Cauchy 氏第二不等式導出之積分不等式.

定理. 設次之三積分存在時則

$$(34)\quad \boxed{\begin{gathered}\int_a^b f(x)g(x)dx \leqq \left(\int_a^b [f(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b [g(x)]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ f(x)\geqq o,\qquad g(x)\geqq o\end{gathered}}$$

等號乃限于 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之比爲常數或 $f(x)=g(x)=o$ 時成立.

第一證明. 於(33)令 $p=2,\ q=2$ 卽得

第二證明. 於(§3)之 Cauchy 氏第二不等式(6)如前節同樣導出之.

第三證明. 蓋
$$\int_a^b [uf(x)+vg(x)]^2dx\geqq o$$
$$u^2\int_a^b f^2(x)dx+2uv\int_a^b f(x)g(x)dx+v^2\int_a^b g^2(x)dx\geqq o$$
乃有限的(definite)二次形式.故(34)成立.

不等式(32),(33),(34)皆比較簡單,但其應用甚廣.就中(34)一式特稱爲 Schwarz 氏之不等式.於數學研究上殆到處皆遇見其應用焉.

15. 由 Minkowski 氏之不等式導出之積分不等式.

定理. 設 $p\geqq1,\ f(x)\geqq o,\ g(x)\geqq o$, 而次之三積分存在時則

$$(35)\quad \boxed{\left[\int_a^b\left\{f(x)+g(x)\right\}^pdx\right]^{\frac{1}{p}}\leqq\left[\int_a^b\left\{f(x)\right\}^pdx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b\left\{g(x)\right\}^pdx\right]^{\frac{1}{p}}.}$$

其等號限于 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之比爲常數及 $f(x)=g(x)=o$ 時成立.

證明　於 §5 Minkowski 氏不等式(10)之 $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ 等各代以 $f_{1n}, f_{2n}, \cdots\cdots g_{1n}, g_{2n}\cdots\cdots$ 等時則

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(f_{\nu n}+g_{\nu n})^p\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq\left(\sum_{\nu=1}^{n}f_{\nu n}^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{\nu=1}^{n}g_{\nu n}^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad p\geqq1$$

且令

$$f_{\nu n} \equiv f(x) \equiv f\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right)$$

$$dx=\frac{b-a}{n},$$

而于上式之兩邊乘以 $(dx)^{\frac{1}{p}}$ 則于 $n \longrightarrow \infty$ 時卽得(35).

定理 設 $o<p<1,\ f(x) \geqq o,\ g(x) \geqq o$. 而次之三積分存在時則

$$(36)\qquad \boxed{\left[\int_a^b \left\{f(x)+g(x)\right\}^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \geqq \left[\int_a^b \left\{f(x)\right\}^p dx\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b \left\{g(x)\right\}^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.}$$

其等號限于 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之比爲常數及 $f(x)=g(x)=o$ 時成立.

證明 由 §5 之不等式(11)與(35)同樣導得之.

16. 由 Minkówski 氏第二不等式導出之積分不等式.

定理. 設 $f(x)>o \quad g(x)>o$

而次之三積分存在時則

$$(37)\qquad \boxed{e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log[f(x)+g(x)]dx} \geqq e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)dx}+e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log g(x)dx}}$$

其等號限于 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之比爲常數時成立.

證明 於 §5 之 Minkowski氏第二不等式(12)之 $a_1, a_2, \cdots\cdots, b_1, b_2, \cdots\cdots$ 等各代以 $f_{1n}, f_{2n}, \cdots\cdots, g_{1n}, g_{2n}, \cdots\cdots$, 等則

$$\sqrt[n]{(f_{1n}+g_{1n})(f_{2n}+g_{2n})\cdots\cdots(f_{nn}+g_{nn})}$$

$$\geqq \sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots\cdots f_{nn}}+\sqrt[n]{g_{1n}g_{2n}\cdots\cdots g_{nn}}$$

$$e^{\frac{1}{n}\left\{\log(f_{1n}+g_{1n})+\log(f_{2n}+g_{2n})+\cdots+\log(f_{nn}+g_{nn})\right\}}$$

$$\geqq e^{\frac{1}{n}\left\{\log f_{1n}+\log f_{2n}+\cdots+\log f_{nn}\right\}}+e^{\frac{1}{n}\left\{\log g_{1n}+\log g_{2n}+\cdots+\log g_{nn}\right\}}.$$

今令 $$f(x)\equiv f\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right)\equiv f_{\nu n}$$

$$\frac{b-a}{n}=dx$$

取 $n\longrightarrow\infty$ 時之極限卽得(37)矣.

17. 由 Jensen 氏不等式導出之積分不等式.

定理　設 $\varphi(x)$ 乃於 $o<x$ 時有有限的二階導來函數之實函數且 $\varphi''(x)>o$ 而次之三積分存在時則

$$\boxed{\begin{gathered} p(x)>o: \\ \varphi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}\right)\leqq\frac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx}.\end{gathered}} \qquad (38)$$

證明. 於§2之 Jensen 不等式(2)試考

$$a_\nu=p\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right),$$

$$x_\nu=f\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right),$$

於分母分子令

$$x=\frac{\nu}{n}(b-a)$$

取 $n\longrightarrow\infty$ 時之極限卽得(38)矣.

定理　設 $\varphi(x)$ 乃於 $o<x$ 時有有限的二階導來函數,且

$\varphi''(x)<o$ 而次之三積分存在時則

$$
(39)\qquad \boxed{\begin{array}{c} p(x)>o \\ \varphi\left(\dfrac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \geqq \dfrac{\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx}{\int_a^b p(x)dx}. \end{array}}
$$

證明　與(38)同樣由§2 Jensen之不等式(3)卽可導得.

18. 由 Rogers 氏不等式導出之積分不等式.

定理, 設 $f(x)>o,\ p(x)>o,$ 而次之三積分存在時則

$$
(40)\qquad \boxed{e^{\frac{\int_a^b p(x)\log f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}} \leqq \dfrac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}.}
$$

證明　於§4之系令 $a_\nu=p\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right),\ b_\nu=f\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right),$ $\frac{\nu}{n}(b-a)=x,$ 取 $n\longrightarrow\infty$ 時之極限則

$$
\log\frac{\int_a^b p(x)f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx} \geqq \frac{\int_a^b p(x)\log f(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}.
$$

由此遂得(40)矣.

觀上式可見此不過爲(38)之特殊情形耳.

19, 由 Hölder 氏不等式導出之第二積分不等式.

定理. 設 $f(x)\geqq o,$ 而次之三積分存在時則

(41) $$\boxed{\left\{\int_a^b [f(x)]^r\,dx\right\}^{\frac{1}{r}} \leqq \left\{\int_a^b [f(x)]^s\,dx\right\}^{\frac{1}{s}},\ o<r<s.}$$

證明　於§3 Hölder 氏不等式(5)令

$$b_1=b_2=\cdots\cdots=\frac{1}{n}$$

則

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \leqq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

又令

$$a_\nu=A_\nu^r,\quad \frac{1}{p}=\frac{r}{s},\quad \frac{1}{q}=1-\frac{r}{s},\quad o<r<s$$

則

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqq \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^s\right)^{\frac{1}{s}}\qquad o<r<s;$$

再令

$$A_\nu=f\left(a+\frac{\nu}{n}(b-a)\right),\quad dx=\frac{1}{n}(b-a)$$

而取 $n\to\infty$ 時之極限卽(41)矣.

20. 由 Hardy 氏不等式導出之積分不等式.

定理.(Hardy, 設 $f(x)\geqq o$, $k>1$, $f(x)$ 在 (o,X) 爲積分可能

$$F(x)=\int_o^x f(t)\,dt,$$

且 f^k 於 (o,∞) 爲積分可能時,則

(42) $$\boxed{\int_o^\infty\left(\frac{F}{x}\right)^k dx\leqq\left(\frac{k}{k-1}\right)^k\int_o^\infty f^k\,dw.}$$

第一證明.

(i) $$\int_\varepsilon^X \left(\frac{F}{x}\right)^k dx = -\frac{1}{k-1}\int_\varepsilon^X F^k \frac{d}{dx}(x^{1-k})dx$$

$$= \frac{\varepsilon^{1-k}}{k-1}\left\{F(\varepsilon)\right\}^k - \frac{X^{1-k}}{k-1}\left\{F(X)\right\}^k + \frac{1}{k-1}\int_\varepsilon^X x^{1-k}\frac{d}{dx}(F^k)dx$$

$$\leqq \frac{\varepsilon^{1-k}}{k-1}\left\{F(\varepsilon)\right\}^k + \frac{k}{k-1}\int_\varepsilon^X x^{1-k} F^{k-1} f\, dx.$$

令

$$k = \frac{k}{k-1},$$

$$K = \int_0^\infty f^k\, dx$$

$$W = W(\varepsilon, X) = \int_\varepsilon^X \left(\frac{F}{x}\right)^k dx,$$

應用(33)則

$$\left\{F(\varepsilon)\right\}^k = \left(\int_0^\varepsilon f\, dt\right)^k \leqq \int_0^\varepsilon f^k\, dt\left(\int_0^\varepsilon dt\right)^{k-1}.$$

故對于任意之正數 δ, 而有如

(ii) $$\left\{F(\varepsilon)\right\}^k < (k-1)\delta K\varepsilon^{k-1}, \qquad \varepsilon \leqq \varepsilon_0(\delta)$$

之 $\varepsilon_0(\delta)$ 存在.

於又一方面,

(iii) $$\int_\varepsilon^X \left(\frac{F}{x}\right)^{k-1} f dx \leqq \left(\int_\varepsilon^X f^k\, dx\right)^{\frac{1}{k}} \left\{\int_\varepsilon^X \left(\frac{F}{x}\right)^k dx\right\}^{\frac{k-1}{k}}$$

$$\leqq K^{\frac{1}{k}}\, W^{\frac{k-1}{k}}.$$

由 (i),(ii),(iii)

$$W < \delta K + kK^{\frac{1}{k}} W^{\frac{k-1}{k}}$$

卽

(iv) $$z^k-kz^{k-1}-\delta<o$$

$$z^k=W:K.$$

然以方程式

$$\delta y^k+ky-1=o$$

只有唯一之正根,故 (iv) 之左邊亦然.此正根設為 ζ 則由 (iv) $z<\zeta$. 然因 $k>1$,

$$(k+\delta)^k-k(k+\delta)^{k-1}-\delta=\delta\left\{(k+\delta)^{k-1}-1\right\}>o.$$

故

$$\zeta<k+\delta,\qquad z<k+\delta,$$

$$W=\int_\varepsilon^X\left(\frac{F}{x}\right)^k dx<K(k+\delta)^k=(k+\delta)^k\int_0^\infty f^k\,dx.$$

因此於 $\varepsilon\leqq\varepsilon_0(\delta)$ 之一切之 ε 及一切之 X 皆成立,是以

$$\int_0^\infty\left(\frac{F}{x}\right)^k dx<(k+\delta)^k\int_0^\infty f^k\,dx.$$

而 δ 為任意正數 (42) 遂成立矣.

第二證明 (G. Pólya 氏證明)

設 $$o<\alpha<\beta<X$$

於 (i) 將 $F(x)$ 代以 $F(x)-F(\alpha)$, ε 代以 α 而考之則

$$\int_\alpha^X\left\{\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right\}^k dx\leqq\frac{k}{k-1}\int_\alpha^X\left\{\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right\}^{k-1}f\,dx.$$

用 Hölder 氏不等式與 (iii) 同樣,

$$\int_\alpha^X\left\{\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right\}^k dx\leqq\left(\frac{k}{k-1}\right)\int_\alpha^X f^k dx.$$

且

$$\int_\beta^X \left\{\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right\}^k dx \leqq \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \int_0^\infty f^k\, dx.$$

當 $\alpha \longrightarrow 0$ 時 $F(x)-E(\alpha)$ 絕不增加至 $F(x)$,故

$$\int_\beta^X \left(\frac{F}{x}\right)^k dx \leqq \left(\frac{k}{k-1}\right)^k \int_0^\infty f^k dx.$$

因 β 與 X 為任意,遂得(42).

$\frac{k}{k-1}$為可能的小之證明:

$$\lambda=\frac{1}{k}<1, \qquad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}(1-\lambda)<1-\lambda,$$

$$\delta>0, \quad f=0, \quad (0\leqq x<1), \quad f=x^{-\lambda-\varepsilon} \quad (x>1),$$

設 $X=X(k,\delta)$ 則

$$X^{-1}<\delta X^{-\frac{1}{2}(1+\lambda)}<\delta X^{-\lambda-\varepsilon}.$$

但

$$\int_0^\infty f^k dx=\int_1^\infty x^{-1-k\varepsilon}\, dx=\frac{1}{k\varepsilon},$$

$$\frac{F}{x}=\frac{1}{x}\int_1^x t^{-\lambda-\varepsilon}\, dt=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^{1-\lambda-\varepsilon}-1}{1-\lambda-\varepsilon}, \quad (x>1),$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^k dx=\left(\frac{k}{k-1-k\varepsilon}\right)^k\int_1^\infty \left(x^{-\lambda-\varepsilon}-x^{-1}\right)^k dx$$

$$>\left(\frac{k}{k-1}\right)^k\int_X^\infty \left(x^{-\lambda-\varepsilon}-x^{-1}\right)^k dx$$

$$>\left(\frac{k}{k-1}\right)^k(1-\delta)^k\int_X^\infty x^{-1-k\varepsilon}\, dx$$

$$=\left(\frac{k}{k-1}\right)^k(1-\delta)^k\frac{X^{-k\varepsilon}}{k\varepsilon}$$

$$=\left(\frac{k}{k-1}\right)^k(1-\delta)^k X^{-k\varepsilon}\int_0^\infty f^k dx.$$

而如

$$(1-\delta)^k \longrightarrow 1, \qquad X^{-k\epsilon} \longrightarrow 1$$

之 δ, ε 可得,故如題所云.

此兩證明皆出於次之論文:

G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus, L X, An inequality between integrals, Messenger of Math., 54(1925),p. 150.

Hardy 氏又於次之論文已簡述該定理之證明:

G. H. Hardy, Note on a theorem of Hilberts' Math. Zeits., 6(1920) pp. 314 317.

又由上之定理§5 定理 A 亦可導出.

21. Capsen 氏積分不等式.

定理. 設 $f(x)\geqq 0$, $k>1$, $\{f(x)\}^k$ 於 $(0,\infty)$ 爲積分可能時則

$$\varphi(x)=\int_x^\infty f(t)\frac{dt}{t}$$

於 $x>0$ 時爲收斂而

$$\boxed{\int_0^\infty \{\varphi(x)\}^k dx \leqq k^k\int_0^\infty \{f(x)\}^k dx} \tag{43}$$

但 k^k 不能以比其小之常數代之.

此定理對於§9 定理 B 之關係亦猶乎 (42) 對於同節定理 A 之關係然.

22. Young 氏積分不等式與 Cooper 氏積分不等式.

補題. 設函數 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 乃滿足於次之條件者:

(i) $\varphi_i(x)$ 乃於 $x\geqq 0$ 時定義,且爲連續且遞增之函數

(ii) $\Phi_i(x)=x\varphi_i(x)$ 時 $\prod_1^n \Phi_i^{-1}(x)=x$.

則

$$\varphi(0)=0, \quad \lim_{x\to\infty}\varphi_i(x)\longrightarrow\infty.$$

證明 對於 $i=1, 2, \cdots\cdots, r$, $\lim_{x\to\infty}\varphi_i(x)\longrightarrow a_i$ (a_i: 有限), 對于 $i=r+1,\cdots\cdots, n$, ($r<n$ 時), $\Phi_i(x)\longrightarrow\infty$ 則由 $\varphi_i(x)$ 爲連續,當 $x\longrightarrow\infty$ 時

$$\Phi_i(x)=x\varphi_i(x)\sim a_i x \qquad (i=1,2,\cdots\cdots r),$$

故當 $y\longrightarrow\infty$ 時,

$$\Phi_i^{-1}(y)\sim\frac{y}{a_i} \qquad (i=1, 2,\cdots\cdots, r)$$

又對于 i 之各值,見 $y\longrightarrow\infty$ 時皆 $\Phi_i^{-1}(y)\longrightarrow\infty$.

由條(ii),

$$(\alpha) \qquad \prod_{r+1}^{n}\Phi_i^{-1}(y)=\frac{y}{\prod_1^r\Phi_i^{-1}(y)}.$$

於此,$r=n$ 時有左邊 $=1$ 之解.

然當 $y\longrightarrow\infty$,

$$\frac{y}{\prod_1^r\Phi_i^{-1}(y)}\sim\frac{y^{1-r}}{\prod_1^r a_i^{-1}}.$$

(α)之左邊,依 $r=n$ 或 $r<n$ 而爲 1 或 ∞,無論爲何皆有矛盾.

故　　$\varphi_i(x)\longrightarrow\infty,\quad (i=1,2,\cdots\cdots,n).$

由同樣論法

$$\varphi_i(o)=o,\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n).$$

定理. 設 $\varphi_1(x),\cdots\cdots,\varphi_n(x)$ 乃於 $x\geqq o$ 定義爲連續遞增函數, $\Phi_i(x)=x\varphi_i(x)$, 且

(i) $$\boxed{\prod_{i=1}^{n}\Phi_i^{-1}(x)=\frac{x}{\theta(x)}\leqq x}$$

則

(ii) $$\boxed{\prod_{i=1}^{n}a_i\leqq\sum_{i=1}^{n}\int_o^{a_i}\varphi_i(x)dx}$$

且 $\theta(x)\equiv 1$ 時 (ii) 中之 a_i 皆不等於零時等號成立.

證明　a_i 皆不爲 o. 蓋若有一爲 o 則無用也.

函數

$$F(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)=\sum_{i=1}^{n}\int_o^{a_i}\varphi_i(x)dx,\qquad a_i>o,$$

試考

(i) $$\prod_{i=1}^{n}a_i=t\quad(\text{常數})$$

無論何 a_i 如 $a_i\longrightarrow\infty$ 則 $F\longrightarrow\infty$, 而 F 乃比

$$\int_o^{t^{-\frac{1}{n}}}\varphi_i(x)dx$$

之最小者常大.

因 F 爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 之連續函數,則對於 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 中無論何者皆不爲 0 或無窮大時必有有限值之一組,F 不得不爲絕對的極小值.

F 中以(1)之 a_n 代入而微分之則

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_i} = \varphi_i(a_i) - \frac{t}{a_i \prod_1^{n-1} a_j}\,\varphi_n\left(\frac{t}{\prod_1^{n-1} a_j}\right), \quad (i=1,2,\cdots\cdots,n-1).$$

此乃於

$$a_i\varphi_i(a_i) = \frac{t}{\prod_1^{n-1} a_j}\,\varphi_n\left(\frac{t}{\prod_1^{n-1} a_j}\right), \quad (i<n)$$

時爲零.令 y 爲此兩邊之共通值則

$$(3) \qquad a_i = \Phi_i^{-1}(y) \quad (i<n), \quad \frac{t}{\prod_1^{n-1} a_j} = \Phi_n^{-1}(y).$$

由此等式,得

$$(4) \qquad t = \prod_1^n \Phi_i^{-1}(y) = \frac{y}{\omega(y)}.$$

因 $y/\omega(y)$ 爲連續遞增函數,(4)中之 y 表爲 t 僅有一種予以 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 一組之值,(1)與(3)乃對於下之絕對的極小值 F^*

$$F^* = \sum_1^n \int_0^{\Phi_i^{-1}(y)} \varphi_i(x)\,dx.$$

附有添數 i 之項用 $x = \Phi_i^{-1}(\xi)$ 代入之則其項如次:

$$\int_0^y \frac{\xi}{\Phi_i^{-1}(\xi)}\,d\Phi_i^{-1}(\xi) = \int_0^y \omega(\xi)\left\{\prod_{r\neq i} \Phi_r^{-1}(\xi)\right\} d\Phi_i^{-1}(\xi).$$

故

$$F^{\circ}=\int_{o}^{y}\theta(\xi)d\left\{\frac{\xi}{\theta(\xi)}\right\}\geqq\int_{o}^{y}d\left\{\frac{\xi}{\theta(\xi)}\right\}=\frac{y}{\theta(y)}=t. \tag{5}$$

仍然 $$F\geqq F^{\circ}\geqq t.$$

若 $\theta(x)\equiv 1$ 則 (1)之等號成立,着眼於達到極小值 F° 則定理之證明完結也.

此定理乃出於

W. H. Young, On classes of summable functions and their Fourier series, Proc. Royal Soc. (A), 87 (1912), pp 225—229. 卽所謂 Young 氏不等式,卽

設 $\varphi(x)$, $\psi(y)$ 乃於 $x\geqq o$, $y\geqq o$ 時所定義之連續遞增函數,且互爲逆函數,則爲

$$\boxed{ab\leqq\int_{o}^{a}\varphi(x)dx+\int_{o}^{b}\psi(y)dy} \tag{44}$$

之擴張,此時明明

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\longrightarrow\infty,\quad \lim\psi(x)\longrightarrow\infty.$$

此擴張出自次之論文:

R. Cooper, Notes on certain inequalities, Journal, London Math Soc, 2(1927).

Cooper 氏證明次之補題,擴張於 n 個函數之時.

補題. $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 互爲逆函數之必要且充分之條件爲 $\Phi(x)=x\varphi(x)$, $\Psi(y)=y\psi(y)$ 有次之關係成立:

$$\Phi^{-1}(x)\Psi^{-1}(x)=x.$$

證明　　設　　$y=\varphi^{-1}(x)$

則　　$x=\Phi(y)=y\varphi(y)$

卽

(α)　　$$\varphi(y)=\frac{x}{y}.$$

φ 與 ψ 互爲逆函數時,是同於 $y=\psi\left(\frac{x}{y}\right)$,因而

$$x=\frac{x}{y}\psi\left(\frac{x}{y}\right)=\Psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

此又可認爲 $\Psi^{-1}(x)=\frac{x}{y}$. 故由 y 之定義

$$x=y\Psi^{-1}(x)=\Phi^{-1}(x)\Psi^{-1}(x),$$

一方若設 $x=\Phi^{-1}(x)\ \Psi^{-1}(x)$ 時則

$$\Psi^{-1}(x)=x/\Phi^{-1}(x)=\frac{x}{y},$$

$$x=\Psi\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x}{y}\psi\left(\frac{x}{y}\right),\quad y=\psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

合此與(α)式可知 φ 與 ψ 互爲逆函數.

23. Hardy 氏積分不等式與 Widder 氏積分不等式

定理. 設 $a\geqq 0$, $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$, $A^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!}$ 時則

(45)　　$$\boxed{\int_0^1\left\{A(z)\right\}^2dz\leqq\pi\int_0^{\infty}\left\{e^{-z}A^*(z)\right\}^2dz,}$$

其等號限于一切之 a_n 爲 0 時成立. π 不能以比其小之常數代之.

證明 $$A(z)=\int_0^\infty e^{-t}A^*(zt)\,dt=\frac{1}{z}\int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}}A^*(u)du,$$

$$\int_0^1\left\{A(z)\right\}^2dz=\int_0^1\frac{dz}{z^2}\left(\int_0^\infty e^{-\frac{u}{z}}A^*(u)du\right)^2.$$

令 $$\frac{1}{z}=t+1,\qquad e^{-u}A^*(u)=\alpha(u),$$

$$\int_0^1\left\{A(z)\right\}^2dz=\int_0^\infty dt\left(\int_0^\infty e^{-tu}\alpha(u)du\right)^2$$

$$=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-tu}\alpha(u)\,du\int_0^\infty e^{-tv}\alpha(v)\,dv=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\alpha(u)\alpha(v)}{u+v}dudv$$

$$\leqq\pi\int_0^\infty\left\{\alpha(u)\right\}^2du.$$ (Hilbert 氏不等式)

比 π 小之常數代入不能,觀次甚明.

系 (Widder 氏不等式) 次之不等式成立,以小於 π 之常數代之則不能:

(46) $$\boxed{\sum\sum\frac{a_ma_n}{m+n+1}\leqq\pi\sum\sum\frac{(m+n)!}{m!n!}\cdot\frac{a_ma_n}{2^{m+n+1}},\quad a_n\geqq o.}$$

證明 於上揭之定理之右邊,

$$\int_0^\infty\left\{e^{-z}A^*(z)\right\}^2dz=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\left\{A^*\left(\frac{1}{2}u\right)\right\}^2du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}\sum\sum\frac{a_ma_n}{m!n!}\left(\frac{1}{2}u\right)^{m+n}du$$

$$=\sum\sum\frac{(m+n)!}{m!n!}\cdot\frac{a_ma_n}{2^{m+n+1}}.$$

故由上之定理卽得本系也.

此不等式比 Hilbert 氏不等式尙精密, Hilbert 氏不等式

不能以小於 π 之常數代之,故 Widder 氏不等式更不能以小於 π 之常數代之也。

此定理及次之二定理皆出於

G. H. Hardy, Remarks in addition to Dr. Widders note an inequalities, Journal, London Math. Soc., Vol. 4(1929), p. 199.

定理 (Hardy) $p>o$:

$$(47)\qquad \boxed{\int_0^1 z^{p-2}\Big\{A(z)\Big\}^p dz \leqq \Big\{\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)\Big\}^p \int_0^\infty z^{p-1}\Big\{e^{-z}A^*(z)\Big\}^p dz.}$$

證明 用上揭定理同樣之變形,此不等式可導得次形:

$$\int_0^\infty dt\Big\{\int_0^\infty e^{-tu}\,\alpha(u)du\Big\}^p \leqq \Big\{\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)\Big\}^p \int_0^\infty z^{p-2}\Big\{\alpha(z)\Big\}^p dz.$$

由不等式(33),

$$p'=\frac{p}{p-1},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1:$$

因

$$\Big[\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty e^{-tu}\,\alpha(u)du\Big]^p \leqq \Big[\int_0^\infty (f(t)^{p'}dt\Big]^{\frac{p}{p'}}\Big[\int_0^\infty dt\Big(\int_0^\infty e^{-tu}\alpha(u)\,du\Big)^p\Big],$$

$$\int_0^\infty dt\Big\{\int_0^\infty e^{-tu}\ \alpha(u)du\ \Big\}^p$$

乃對于如

$$(a)\qquad \int_0^\infty \Big\{f(t)\Big\}^{p'} dt=1$$

之一切 $f(t)$

$$\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty e^{-tu}\alpha(u)du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt\int_0^\infty e^{-w}\alpha\Big(\frac{w}{t}\Big)dw$$

$$= \int_0^\infty e^{-w}\,dw\int_0^\infty f(t)\alpha\Big(\frac{w}{t}\Big)\,\frac{dt}{t}$$

之極大之 p 乘.

用 Holder 氏不等式與 (a),令 $tz=w$ 則知最後之式不外

$$(b)\qquad \int_0^\infty e^{-w}dw\left[\int_0^\infty\left\{a\left(\frac{w}{t}\right)^p\frac{dt}{t^p}\right]^{\frac{1}{p}}\right.$$

$$=\left[\int_0^\infty e^{-w}w^{\frac{p-1}{p}}dw\right]\cdot\left[\int_0^\infty z^{p-2}\left\{a(z)\right\}^p dz\right\}^{\frac{1}{p}}$$

因(47)之右邊乃 (b) 之右邊之 p 乘.故定理云云.

此證明偶然將前定理及 Hilbert 氏之不等式之證明包于其中.

系 (Widder 氏不等式)

$$\boxed{\begin{aligned}&\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\frac{a_m a_n a_p a_q}{m+n+p+q+3}\\&\qquad\leqq\left\{\Gamma(\tfrac{1}{4})\right\}^4\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\frac{(m+n+p+q+2)!}{m!n!p!q!}\cdot\frac{a_m a_n a_p a_q}{4^{m+n+p+q+3}}\\&\qquad\qquad a_n\geqq 0.\end{aligned}}$$

定理. (Hardy) 設 $K_0(x)\geqq 0,\ K_1(x,y)=\int_0^\infty K_0(xt)K_0(yt)dt,$

$$K_2(x,y)=\int_0^\infty K_1(x,t)K_1(y,t)dt$$

時則

$$(48)\qquad \boxed{\begin{aligned}&\sum_1^\infty\sum_1^\infty K_2(m,n)a_m a_n\leqq J\sum_1^\infty\sum_1^\infty K_1(m,n)a_m a_n\\&J=\int_0^\infty\frac{K_1(w,1)}{\sqrt{w}}dw,\quad a_n\geqq 0.\end{aligned}}$$

證明 令 $t=mw$, 用 k_1 之對稱性與齊一性,

$$\Sigma\Sigma K_2(m,n)a_m a_n=\Sigma\Sigma a_m a_n\int_0^\infty K_1(m,t)K_1(n,t)dt$$

$$=\Sigma\Sigma a_m a_n\int_0^\infty K_1(m,t)K_1(mw,n)\,dt$$

$$=\int_0^\infty K_1(w,1)\Omega(w)dw,$$

$$\Omega(w)=\Sigma\Sigma K_1(mw,n)a_m a_n.$$

則證明次式卽足矣:

$$\Omega(w)\sqrt{w}\leqq\Omega\ (1).$$

然

$$\Omega(w)=\Sigma\Sigma a_m a_n\int_0^\infty K_0(mwt)K_0(nt)\,dt=\int_0^\infty\varphi(wt)\varphi(t)dt,$$

$$\varphi(t)=\Sigma a_n K_0(nt),$$

$$\int_0^\infty\varphi(wt)\ \varphi(t)dt\leqq\left[\int_0^\infty\left\{\varphi(wt)\right\}^2dt\int_0^\infty\left\{\varphi(t)\right\}^2dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{w}}\int_0^\infty\left\{\varphi(t)\right\}^2dt=\frac{\Omega(1)}{\sqrt{w}}.$$

系 (Hardy 氏不等式)

(49) $$\boxed{\Sigma\Sigma\frac{\log(m/n)}{m-n}a_m a_n\leqq\pi\ \Sigma\Sigma\frac{a_m a_n}{m+n},\ a_n\geqq 0.}$$

證明 $K_0(x)=e^{-x}$.

系 Hardy 氏不等式

(59) $$\boxed{\begin{gathered}a_n\geqq 0.\\ \sum_1^\infty\sum_1^\infty\frac{|\log(m/n)|}{Max\,(m,n)}a_m a_n\leqq 2\sum_1^\infty\sum_1^\infty\frac{a_m a_n}{Max\,(m,n)}.\end{gathered}}$$

證明. $K_0(x)=1\quad(x\leqq 1),\qquad 0\quad(x>1);$

$$K_1(x,y)=\mathrm{Min}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right),$$

$$K_2(x,y)=\left(2+\left|\log\frac{x}{y}\right|\right)\mathrm{Min}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right).$$

24. Berwald, 藤原, Brum, Tchebycheff, Stieltjes, Schwaz 諸氏之積分不等式.

定理 1 (L. Berwald 氏第一定理).

1) $\int_a^b f_2\varphi_2\,dx>o\quad[<o]$

2) 於 $a\leqq x\leqq b$, 如

$$\left(f_1(x)-\frac{\int_a^b f_1\varphi_2 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2\,dx}f_2(x)\right)\cdot[\varphi_1(x)-B\varphi_2(x)]\geqq o\qquad[\leqq o]$$

之常數 B 存在之時,則次之不等式成立:

$$\text{(I)}\qquad\boxed{\left(\int_a^b f_1\varphi_1 dx\right)\left(\int_a^b f_2\varphi_2\,dx\right)-\left(\int_a^b f_1\varphi_2 dx\right)\left(\int_a^b f_2\varphi_1 dx\right)\geqq o\ [\equiv o].}$$

其等號乃於 $a\leqq x\leqq b$ 2) 之等號成立時卽 $\frac{f_1}{f_2}$, $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ 中至少有一爲常數之時成立.

證明　於 $a\leqq x\leqq b$

$$(f_1-Af_2)(\varphi_1-B\varphi_2)>o\qquad[<o]$$

卽 f_1-Af_2 與 $\varphi_1-B\varphi_2$ 常有同號(或異號)時則

$$\zeta=\int_a^b(f_1-Af_2)(\varphi_1-B\varphi_2)dx$$

確爲正(負),f_1-Af_2 與 $\varphi_1-B\varphi_2$ 中至少有一在 $a\leqq x\leqq b$ 時爲零則 ζ 爲零.於

$$\int_a^b f_2\varphi_2 dx>o\qquad[<o]$$

之假定下,與以常數A之特値

$$A_o=\frac{\int_a^b f_2\varphi_1 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx},$$

則得

$$\int_a^b (f_1-A_o f_2)B\varphi_2 dx=B\int_a^b f_1\varphi_2 dx-B\int_a^b f_1\varphi_2 dx=o.$$

其時ζ之値

$$\text{(a)}\qquad \zeta_o=\int_a^b (f_1-A_o f_2)(\varphi_1-B\varphi_2)dx$$

因而

$$\zeta_o=\int_a^b (f_1-A_o f_2)\varphi_1 dx$$

$$=\int_a^b f_1\varphi_1 dx-\frac{\int_a^b f_1\varphi_2 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx}\int_a^b f_2\varphi_1 dx.$$

同樣ζ_0之値不定ζ中之A,而予B之特値時則得

$$\text{(b)}\qquad B_0=\frac{\int_a^b f_2\varphi_1 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx},$$

去ζ_o式之分母得

$$\text{(c)}\qquad \zeta_o\int_a^b f_2\varphi_2 dx=\left(\int_a^b f_1\varphi_1 dx\right)\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)-\left(\int_a^b f_1\varphi_2 dx\right)\left(\int_a^b f_2\varphi_1 dx\right).$$

由(a)與(c)卽得吾人之定理矣.

此定理之條件1)改爲

1′) 於$a\leqq x\leqq b$ $f_2(x)\varphi_2(x)>o$

卽藤原氏第一定理.

定理 2. (L. Bowald 氏第二定理).

1)　$\int_a^b f_2\varphi_2 dx > o \quad [<o]$

2)　於 $a \leqq x \leqq b$ 而有如

$$(f_1(x)-Af_2(x))(\varphi_1(x)-B\varphi_2(x)) \geqq o \quad [\leqq o],$$

$$\left(A-\frac{\int_a^b f_1\varphi_2 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx}\right)\left(B-\frac{\int_a^b f_2\varphi_1 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 px}\right) \leqq o \quad [\leqq o]$$

之常數 A, B 存在時,則

$$(1) \quad \boxed{\left(\int_a^b f_1\varphi_1 dx\right)\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)-\left(\int_a^b f_1\varphi_2 dx\right)\left(\int_a^b f_2\varphi_1 dx\right) \geqq o \quad [\leqq o].}$$

其等號乃限於 $\frac{f_1}{f_2}, \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ 中至少有一於 $a \leqq x \leqq b$ 時爲常數之時成立.

證明　由二不等式

$$(\zeta_o-\zeta)\cdot\int_a^b f_2\varphi_2 dx \geqq o \quad [\leqq o],$$

$$\zeta\cdot\int_a^b f_2\varphi_2 dx \geqq o \quad [\leqq o],$$

故得不等式

$$\zeta_o\int_a^b f_2\varphi_2 dx \equiv \left(\int_a^b f_1\varphi_1 dx\right)\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)-\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)\left(\int_a^b f_1\varphi_1 dx\right) \geqq o, \quad [\leqq o].$$

但

$$(\zeta_o-\zeta)=\int_a^b (f_1-A_o f_2)(\varphi_1-B\varphi_2)dx-\int_a^b (f_1-Af_2)(\varphi_1-B\varphi_2)dx$$

$$=(A-A_o)\left(\int_a^b f_2\varphi_1 dx-B\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right).$$

故由 (b)

$$(\zeta_o-\zeta)\int_a^b f_2\varphi_2 dx=-\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)^2(A-A_o)(B-B_o).$$

又以

$$(A-A_o)(B-B_o)\leqq o \qquad [\geqq o],$$

$$\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)\left(\int_a^b (f_1-Af_2)(\varphi_1-B\varphi_2)dx\right)\geqq o \qquad [\leqq o]$$

之兩立.故得(I).

此定理之條件1)改爲

1′)於 $a\leqq x\leqq b f_2(x)\varphi_2(x)>o$

卽藤原氏第二定理.

關於Tchebycheff氏不等式之 H. Brunn氏定理. 設 $f_1=f,\varphi_1=\varphi$, $f_2=\varphi_2=1$:

(II) $$\boxed{(b-a)\int_a^b f\varphi dx-\left(\int_a^b f dx\right)\left(\int_a^b \varphi dx\right)\geqq o\ [\leqq o].}$$

Stieltjes 氏不等式.設 $f_1=f,\quad \varphi_1=\varphi,\quad f_2=1,\quad \varphi_2=\psi$:

(III) $$\boxed{\left(\int_a^b f\varphi dx\right)\left(\int_a^b \psi dx\right)-\left(\int_a^b f\psi dx\right)\left(\int_a^b \varphi dx\right)\geqq o\quad [\leqq o].}$$

Schwarz 氏不等式. 設 $f_1=\varphi_1,\quad f_2=\varphi_2$:

(IV) $$\boxed{\left(\int_a^b f_1^2 dx\right)\left(\int_a^b f_2^2 dx\right)-\left(\int_a^b f_1 f_2\, dx\right)^2\geqq o.}$$

L. Berwald 氏定理1,2之出處如次:

L. Berwald, Über eine Ungleichheit für bestimmte Integrale, Tohoku Math. Journ. 24(1925), p. 88.

藤原松三郎氏第一,第二定理出處如次:

M. Fujiwara, Ein von Brunn vermuteter Satz über konvexe Flächen und eine Verallgemeinerung der Schwarzschen und der Tchebycheffschen Ungluchungen für bestimmte Integrale, Tôhoku Math. Journ. 13(1918), pp. 228-235.

M. Fujiwara, Über eine Unglichung für bestimmte Integrale, Tôhoku Math Journ., 15(1919), pp 285-288.

對應於此之代數不等式有次之論文:

T. Hayashi, On some inequalities, Rend, Palermo, 44(1920), pp. 336-340.

Tchebycheff 氏不等式最初於次之講義發表:

Ch. Hermite, Cours professé á la faculté des sciences pendant le zéme sèmestre 1881/82, 2. éd., Paris (1883), 48 f.

關於Tchebycheff氏不等式Brunn之研究如次文:

H. Brunn, Neue Mittelwertsätze für bestimmte Integrale, Sitzungsber Ak. München 32(1902), pp. 91-112; Nachtrag zu dem Aufssatz über Mittelwertsätze fur bestimmte Integrale, 同誌,33(1903),pp. 205-212.

Tchebycheff 氏之定理有次之文獻:

F. Franklin, Proof of a theorem of Tchebycheff's on definite integral, Amer. Journ. of Math., 7(1885), pp. 377-379.

G. Teixeira, Extraff düne lettre de M. Gomes Teixeira á M. Hermite, Bull. so. math., 23 (1888), pp. 288-290.

其所對應之代數的不等式見次文:

G. d'Arone, Intorno ad un teorema di Tchebychew, Giorn. di Mat., 26 (1888), pp. 61—64.

Stieltjes 氏不等式見於

T. J. Stieltjes in: Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, tome 2, Paris (1905),

J. L. W. Jensen, Sur. une généralisation d'une formule de M. Tchebycheff, Bull. sc. math., 23 (1888), pp. 134—135.

25. Berwald 氏第一不等式之擴張.

定理. (L. Berwald). 設 $f_1\ f_2, \cdots\cdots, f_n;\ \varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_n$ 乃於 $a\leqq x\leqq b$ 積分可能之 x 之 $2n$ 個函數.若對於 $a\leqq x\leqq b$ 有如

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & \int_a^b f_1\varphi_2dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_1\varphi_n dx \\ f_2(x) & \int_a^b f_2\varphi_2dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_2\varphi_n dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & \int_a^b f_n\varphi_2dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_n\varphi_n dx \end{vmatrix} \left\{\Phi_1(x)+B_2\varphi_2(x)+\cdots+B_n\varphi_n(x)\right\}\geqq 0 \quad [\leqq 0]$$

之 $(n-1)$ 個常數 $B_2, B_3, \cdots\cdots, B_n$ 存在時則

$$D_n \equiv \begin{vmatrix} \int_a^b f_1\varphi_1 dx & \int_a^b f_1\varphi_2 dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_1\varphi_n dx \\ \int_a^b f_2\varphi_1 dx & \int_a^b f_2\varphi_2 dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_2\varphi_n dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_a^b f_n\varphi_1 dx & \int_a^b f_n\varphi_2 dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_2\varphi_n dx \end{vmatrix} \geqq o. \qquad [\leqq o].$$

證明　D_n 可如次變形故:

$$D_n = \int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x) & \int_a^b f_1\varphi_2 dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_1\Phi_n dx \\ f_2(x) & \int_a^b f_2\varphi_2 dx & \cdots\cdots & \int_a^b f_2\Phi_n dx \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & \int_a^b f_n\Phi_2 dx & \cdots\cdots & \int_a^b \Phi_n\varphi_n dx \end{vmatrix} (\varphi_1(x) + B_2\varphi_2(x) + \cdots + B_n\varphi_n(x))\, dx.$$

但 $B_2, B_3, \cdots\cdots, B_n$ 爲任意常數.

此定理出於

L. Berwald, Über enil Ungleichheit für bestimmte Integrale, Tôhoku Math. Journ., Vol. 24 (1925), S. 88.

26.　藤原氏不等式之泉氏的擴張

Schur 氏等式之泉氏擴張.　設

$$(f_r\varphi_s) = \int_a^b f_r\varphi_s dx, \qquad (r, s = 1, 2, \cdots\cdots, n),$$

$$\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix} = b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21},$$

$$\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Bmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} + b_{13}b_{22}b_{31} + b_{12}b_{21}b_{33} + b_{11}b_{32}b_{23},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般表如

$$\left\{\begin{matrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots & b_{nn} \end{matrix}\right\} =$$ (由每一行每一列取出一個元素之積之和)

對於 $m\leqq n$ 則次之全等式成立:

$$\begin{vmatrix} (f_1\varphi_1) & (f_1\varphi_2)\cdots\cdots & (f_1\varphi_n) \\ (f_2\varphi_1) & (f_2\varphi_2)\cdots\cdots & (f_2\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_n\varphi_1) & (f_n\varphi_2)\cdots\cdots & (f_n\varphi_n) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \frac{1}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2}\cdots\cdots & b_{nn} \end{vmatrix}} \cdot \int_a^b\cdots\cdots\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1)\cdots\cdots f_1(x_m) & (f_1\varphi_{m+1})\cdots\cdots & (f_1\varphi_n) \\ f_2(x_1)\cdots\cdots f_2(x_m) & (f_2\varphi_{m+1})\cdots\cdots & (f_2\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_1)\cdots\cdots f_n(x_m) & (f_n\varphi_{m+1})\cdots & (f_n\varphi_n) \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} b_{11}\varphi_1(x_1) & b_{21}\varphi_2(x_1)\cdots\cdots\cdots & b_{n1}\varphi_n(x_1) \\ b_{12}\varphi_1(x_2) & b_{22}\varphi_2(x_2)\cdots\cdots\cdots & b_{n2}\varphi_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1m}\varphi_1(x_m) & b_{2m}\varphi_2(x_m)\cdots\cdots & b_{nm}\varphi_n(x_m) \end{vmatrix} dx_1\,dx_2\cdots\cdots\cdots dx_m,$$

但 f_r, f_s 乃於 $x(a,b)$ 爲積分可能的函數.

證明 $\begin{vmatrix} (f_1\varphi_1) & (f_1\varphi_2) & \cdots\cdots & (f_1\varphi_n) \\ (f_2\varphi_1) & (f_2\varphi_2) & \cdots\cdots & (f_2\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_n\varphi_1) & (f_n\varphi_2) & \cdots\cdots & (f_n\varphi_n) \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{b_{11}} \int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & (f_1\varphi_2) & \cdots\cdots & (f_1\varphi_n) \\ f_2(x_1) & (f_2\varphi_2) & \cdots\cdots & (f_2\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_1) & (f_n\varphi_2) & \cdots\cdots & (f_n\varphi_n) \end{vmatrix} (b_{11}\varphi_1(x_1) + b_{21}\varphi_2(x_1) + \cdots\cdots + b_{n1}\varphi_n(x_1))\,dx_1$$

$$= \frac{1}{b_{11}b_{21}+b_{12}b_{22}} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & (f_1\varphi_3) & \cdots\cdots & (f_1\varphi_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & (f_2\varphi_3) & \cdots\cdots & (f_2\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & (f_n\varphi_3) & \cdots\cdots & (f_n\varphi_n) \end{vmatrix}$$

$$\times \left\{ \sum_{r,s}^{1,n} \begin{vmatrix} b_{r1}\,\varphi_r(x_1) & b_{s1}\varphi_s(x_1) \\ b_{r2}\,\varphi_r(x_2) & b_{s2}\varphi_s(x_2) \end{vmatrix} \right\} dx_1\,dx_2 \qquad (r<s)$$

$$\equiv \frac{1}{\begin{Bmatrix} b_{11}b_{12} \\ b_{21}b_{22} \end{Bmatrix}} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & (f_1\varphi_3) & \cdots\cdots & (f_1\varphi_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & (f_2\varphi_3) & \cdots\cdots & (f_2\varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & (f_n\varphi_3) & \cdots\cdots & (f_n\varphi_n) \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} b_{11}\varphi_1(x_1) & b_{21}\varphi_2(x_1) & \cdots\cdots & b_{n1}\varphi_n(x_1) \\ b_{12}\varphi_1(x_2) & b_{22}\varphi_2(x_2) & \cdots\cdots & b_{n2}\varphi_n(x_2) \end{vmatrix} dx_1\,dx_2.$$

如斯進行,至 $m \leqq n$ 卽得上揭之關係式也.

Schur 氏全等式於 $b_{rs}=1$ $(r,s=1,2,\cdots\cdots,n)$, $m=n$ 卽得

$$\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} & b_{n2} \cdots\cdots & b_{nn} \end{Bmatrix} = n!$$

定理 1 (泉信氏) 設

$$\frac{f_2(x_2)}{f_1(x_2)} = k\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}, \qquad \frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(x_2)} - \frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}$$

或

$$\frac{f_2(x_2)}{f_1(x_2)} - \frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}, \qquad \frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(x_1)} - k\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_2)}$$

於 (a,b) 時同符號而有如 $k>-1$ 之常數 k 存在且

$$f_1(x)\varphi_1(x)>o$$

時,則

$$\boxed{\int_a^b f_1\varphi_1 dx \int_a^b f_2\varphi_2 dx \geqq \int_a^b f_1\varphi_2 dx \int_a^b f_2\varphi_1 dx}$$

其等號乃限於 f_1 與 f_2 及 φ_1 與 φ_2 綫狀關聯時成立.

證明 於上揭之全等式,$m=n=2$ 時則

$$G=\begin{vmatrix} (f_1\varphi_1) & (f_1\varphi_2) \\ (f_2\varphi_1) & (f_2\varphi_2) \end{vmatrix} = \frac{1}{b_{11}b_{22}+b_{12}b_{21}}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11}\varphi_1(x_1) & b_{12}\varphi_1(x_2) \\ b_{21}\varphi_2(x_1) & b_{22}\varphi_2(x_2) \end{vmatrix} dx_1dx_2$$

$$=\frac{1}{1+B}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & E\varphi_1(x_2) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) \end{vmatrix} dx_1dx_2$$

$$B\equiv\frac{b_{12}b_{21}}{b_{11}b_{22}}.$$

以 G 乃關於 f 與 φ 對稱的,故又得

$$G=\frac{1}{1+A}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}f_1(x_1) & Af_1(x_2)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2)\\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2)\end{vmatrix}dx_1dx_2.$$

如對于 $k>-1$ 時，$G\geqq o$ 只須

$$\begin{vmatrix}f_1(x_1) & kf_1(x_2)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2)\\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2)\end{vmatrix}\geqq o$$

或

$$\begin{vmatrix}f_1(x_1)f_1(x_2)\\ f_2(x_1)f_2(x_2)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & k\varphi_1(x_2)\\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2)\end{vmatrix}\geqq o$$

即

$$f_1(x)\varphi_1(x)>o$$

及

$$\left\{\frac{f_2(x_2)}{f_1(x_2)}-k\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}\right\}\left\{\frac{\varphi_2(x_2)}{\varphi_1(x_2)}-\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\right\}\geqq o$$

或

$$\left\{\frac{f_2(x_2)}{f_1(x_2)}-\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}\right\}\left\{\frac{\varphi_2(x)_2}{\varphi_1(x)_2}-k\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\right\}\geqq o$$

即足矣.

定理 2. (泉信氏) 設如

$$\int_a^b\left\{f_2(x_2)-k\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}f_1(x_2)\right\}\left\{\varphi_2(x_2)-\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\right\}dx_2\geqq o$$

或

$$\int_a^b\left\{f_2(x_2)-\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}f_1(x_2)\right\}\left\{\varphi_2(x_2)-k\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\varphi_1(x_2)\right\}dx_2\geqq o$$

之常數 $k>-1$ 存在，且

$$f_1(x)\varphi_1(x)>o$$

時則

$$\boxed{\int_a^b f_1\varphi_1 dx\int_a^b f_2\varphi_2\, dx \geqq \int_a^b f_2\varphi_1 dx\int_a^b f_1\varphi_2 dx.}$$

證明 令

$$J_1\equiv\int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & B\varphi_1(x_2)\\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2)\end{vmatrix} dx_2,$$

因

$$J_1=\int_a^b\Big\{f_1(x_1)f_2(x_2)-f_1(x_2)f_2(x_1)\Big\}\Big\{\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)-B\varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)\Big\}dx_2$$

$$=f_1(x_1)\varphi_1(x_1)\int_a^b\Big\{f_2(x_2)-\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}f_1(x_2)\Big\}\Big\{\varphi_2(x_2)-B\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\varphi_1(x_2)\Big\}dx_2,$$

對於$J_1\geqq o$只須

$$f_1(x)\varphi_1(x)>o,$$

$$\int_a^b\Big\{f_2(x_2)-\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}f_1(x_2)\Big\}\Big\{\varphi_2(x_2)-B\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\varphi_1(x_2)\Big\}dx\geqq o$$

卽足矣.

同樣令

$$J_2\equiv\int_a^b\begin{vmatrix} f_1(x_1) & Af_1(x_2)\\ f_2(x_1) & f_2(x_2)\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2)\\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2)\end{vmatrix}dx_2,$$

則對於$J_2\geqq o$之充分條件乃

$$f_1(x)\varphi_1(x)>o,$$

$$\int_a^b\Big\{f_2(x_2)-A\frac{f_2(x_1)}{f_1(x_1)}f_1(x_2)\Big\}\Big\{\varphi_2(x_2)-\frac{\varphi_2(x_1)}{\varphi_1(x_1)}\varphi_1(x_2)\Big\}dx\geqq o.$$

定理3. (Berwald氏定理之變形)

於 (a,b) 有如

$$f_1(x)-\frac{(f_1\varphi_2)}{(f_2\varphi_2)}f_2(x) \text{ 及 } \varphi_1(x)+k\varphi_2(x)$$

或

$$\varphi_1(x)-\frac{(f_1\varphi_2)}{(f_2\varphi_2)}\varphi_2(x) \text{ 及 } f_1(x)+kf_2(x)$$

有同號時之常數 k 存在,且

$$(f_2\varphi_2)>o$$

時則

$$\boxed{\int_a^b f_1\varphi_1dx\int_a^b f_2\varphi_2dx \geqq \int_a^b f_1\varphi_2dx\int_a^b f_2\varphi_1dx.}$$

此與定理 2 同樣可以求得.

G 常爲正乃 Gram 氏行列式之擴張.

以上泉信一氏之研究見於:

S. J. Izumi, Einige Bemerkungen zur verallgemeinerten Schwarzschen Unyleichung, Tohôku Math. Journ., 27(1926), p. 126.

27, 藤原氏不等式的條件之成實淸松氏的擴張.

定理 1. 對於 $a\leqq x\leqq b, \int_a^b f_2\varphi d_2x>o$, 而有如

$$(f_1-Pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2)-p(\varphi_1-Q\varphi_2)f_2-q(f_1-Pf_2)\varphi_2-rf_2\varphi_2\geqq o \quad [\leqq o],$$
$$r\geqq o \quad [\leqq o]$$

$$P\equiv\frac{\int_a^b f_1\varphi_2dx}{\int_a^b f_2\varphi_2dx}, \qquad Q\equiv\frac{\int_a^b f_2\varphi_1dx}{\int_a^b f_2\varphi_2dx}$$

之三常數 p, q, r 常存在則次之不等式成立:

$$\boxed{J \equiv \int_a^b f_1\varphi_1 dx \int_a^b f_2\varphi_2 dx - \int_a^b f_1\varphi_2 dx \int_a^b f_2\varphi_1 dx \geqq o \quad [\leqq o].}$$

證明 對於任意常數 A, B, 如次之 J 之變形可得:

$$J = \int_a^b (f_1 - Af_2)(\varphi_1 - B\varphi_2)\,dx \int_a^b f_2\varphi_2 dx$$
$$- \int_a^b (f_1 - Af_2)\varphi_2 dx \int_a^b (\varphi_1 - B\varphi_2) f_2 dx$$

令 $A = P + p, \quad B = Q + q$

解出任意常數 p, q 則

$$J \equiv \int_a^b (f_1 - Pf_2 - pf_2)(\varphi_1 - Q\varphi_2 - q\varphi_2)\,dx \int_a^b f_2\varphi_2 dx$$
$$- \int_a^b (f_1 - Pf_2 - pf_2)\varphi_2 dx \int_a^b (\varphi_1 - Q\Phi_2 - q\varphi_2) f_2 dx.$$

今以

$$\int_a^b (f_1 - Pf_2)\varphi_2 dx = o$$
$$\int_a^b (\varphi_1 - Q\varphi_2) f_2 dx = o,$$

則

$$\int_a^b (f_1 - Pf_2 - pf_2)\,\varphi_2 dx = -p \int_a^b f_2\varphi_2 dx,$$
$$\int_a^b (\varphi_1 - Q\varphi_2 - q\varphi_2)\, f_2 dx = -q \int_a^b \varphi_2 f_2 dx.$$

故

$$J = \int_a^b (f_1 - Pf_2 - pf_2)(\varphi_1 - Q\varphi_2 - q\varphi_2)\,dx \int_a^b f_2\varphi_2 dx - pq\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)^2$$

$$=\int_a^b\Big\{(f_1-Pf_2)(\varphi_1-\varphi Q_2)-p(\varphi_1-Q\varphi_2)f_2-q(f_1-Pf_2)\varphi_2dx\int_a^b f_2\varphi_2dx,$$

$$J=\int_a^b\Big\{(f_1-Pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2)-p(\varphi_1-Q\varphi_2)f_2-q(f_1-Pf_2)\varphi_2-rf_2\varphi_2\Big\}dx\int_a^b f_2\varphi_2dx$$

$$+r\left(\int_a^b f_2\varphi_2dx\right)^2.$$

但 r 爲任意常數.由此遂得吾人之定理矣.

系 1. 於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$(f_1-Pf_2-pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2)\geqq o \quad [\leqq o]$$

之常數存在,且

$$\int_a^b \varphi_2\varphi_2dx>o$$

時則次之不等式成立:

$$J\leqq o \quad [\geqq o].$$

證明 於定理1令 $q=r=o$ 卽得矣.

此系見於

L. Berwald, Über eine Ungleicheit für bestimmte Integrale, Tôhoku Math. Journ., 24(1925).

系 2. 於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$(f_1-Pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2-q\varphi_2)\geqq o \quad [\leqq o]$$

之常數存在,且

$$\int_a^b f_2\varphi_2dx>o$$

時則次之不等式成立:

$$J\geqq o \quad [\leqq o].$$ (出處同上)

證明 於定理1 令 $p=r=o$ 卽得.

系3. 於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$(f_1-Pf_2-pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2-q\varphi_2)\geqq o \qquad [\leqq o],$$

$$pq\geqq o \qquad [\leqq o]$$

之常數存在,且

$$\int_a^b f_2\varphi_2 dx>o$$

時則次之不等式成立:

$$J\geqq o \qquad [\leqq o]$$ (出處同上)

證明 於定理1令 $r=-pq$ 卽得.

系4. 於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$(f_1-Pf_2-pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2-\varphi_2)-rf_2\varphi_2\geqq o \qquad [\leqq o],$$

$$r\geqq o \qquad [\leqq o]$$

之二常數 p, r 存在,且

$$\int_a^b f_2\varphi_2 dx>o$$

時則次之不等式成立:

$$J\geqq o \qquad [\leqq o].$$

系5. 於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$(f_1-Pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2-q\varphi_2)-rf_2\varphi_2\geqq o \qquad [\leqq o]$$

$$r\geqq o \qquad [\leqq o]$$

之二常數 q, r 存在,且

(出處同上) $$\int_a^b f_2\varphi_2 dx>o$$

時則次之不等式成立:

$$J \geqq o \quad [\leqq o],$$

證明 於定理1令 $p=o$ 可也.

系6. 於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$(f_1-Pf_2)(\varphi_1-Q\varphi_2)-p(\varphi_1-Q\varphi_2)f_2-q(f_1-Pf_2)\varphi_2 \geqq o \quad [\leqq o]$$

之二常數 p, q 存在,且

$$\int_a^b f_2\varphi_2 dx > o$$

時則次之不等式成立:

$$J \geqq o \quad [\leqq o],$$

證明 於定理1令 $r=o$ 可也.

定理2. $f_2\ \varphi_2$ 乃於 $a \leqq x \leqq b$ 有同符號,於 (a,b) 對於 x 之一切值

$$\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-p\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-q\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)-r \geqq o \quad [\leqq o]$$

$$r \geqq o \quad [\leqq o],$$

$$P \equiv \frac{\int_a^b f_1\varphi_2 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx}, \qquad Q \equiv \frac{\int_a^b f_2\varphi_1 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx}$$

時則次之不等式成立:

$$\boxed{J \equiv \int_a^b f_1\varphi_1\, dx \int_a^b f_2\varphi_2 dx - \int_a^b f_1\varphi_2 dx \int_a^b f_2\varphi_1 dx \geqq o \quad [\leqq o].}$$

證明 定理1之條件

$$\int_a^b f_2\varphi_2 dx > o$$

代以於 (a,b) 對於 x 之一切值 $f_2\varphi_2 \geqq o$ 則 J 更可書得如次:

$$J \equiv \int_a^b f_2\varphi_2\left\{\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-p\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-q\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)-r\right\}dx\int_a^b f_2\varphi_2 dx$$
$$+r\left(\int_a^b f_2\varphi_2 dx\right)^2.$$

由此遂得定理 2 矣.

系 7° 於 (a,b) 對於 x 之一切值 $f_2\varphi_2$ 有同符號且於 (a,b) 對於之一切值有如

$$\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q-q\right)\geqq o \qquad [\leqq o]$$

之常數 q 存在時則次之不等式成立:

$$J \geqq o \qquad [\leqq o].$$

證明　於定理 2 令 $p=q=o$ 可也.

此之出處如次:

M. Fujiwara, Ein von Brunn vermuteter Satz Über konvexe Flächen und Verallgemeinerung der Schwarzschen und der Fehebycheffschen Ungleichungen für bestimmte Integrale, Tôhcku Math. Journ., Vol. 15(1918) Ubereine Ungleichung für bestimmte Integrale, Tôhoku Math. Journ., Vol15 (1918).

系 8　於 (a,b) 對於 x 之一切值 $f_2\varphi_2$ 皆同符號且於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$\left(\frac{f_1}{f_2}-P-p\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)\geqq o \qquad [\leqq o]$$

之常數 p 存在,則次之不等式成立:

$$J \geqq o \qquad [\leqq o]. \qquad \text{(出處同上)}.$$

證明.於定理 2 令 $q=r=o$ 可也.

系 9. 於 (a,b) 對於 x 之一切值 f_2 φ_2 有同符號,且於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$\left(\frac{f_1}{f_2}-P-p\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q-q\right)\geqq o \qquad [\leqq o],$$

$$pq \leqq o, \qquad [\geqq o]$$

之二常數 p, q 存在時則次之不等式成立:

$$J \geqq o \qquad [\leqq o] \qquad \text{(出處同上)}$$

證明　於定理 2 令 $r=-pq$ 可也.

定理 3. f_2 φ_2 乃於 (a,b) 不變符號,且於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-p\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-q\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\geqq o \qquad [\leqq o],$$

$$P \equiv \frac{\int_a^b f_1\varphi_2 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx}, \qquad Q \equiv \frac{\int_a^b f_2\varphi_1 dx}{\int_a^b f_2\varphi_2 dx}$$

之二常數 p, q 存在則次之不等式成立:

$$\boxed{J \equiv \int_a^b f_1\varphi_1 dx \int_a^b f_2\varphi_2 dx - \int_a^b f_1\varphi_2 dx \int_a^b f_2\varphi_1 dx \geqq o \quad [\leqq o]}$$

證明　於定理 2 令 $r=o$ 可也.

定理 2 與 3 乃同價值.何則蓋定理 3 為定理 2° 之特殊

情形也.定理 2 何以包含定理3:卽定理 2 之條件

$$\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-p\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-q\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)-r\geqq o \quad [\leqq o],$$

$$r\geqq o \quad [\leqq o]$$

邊邊相加卽得定理 3 之條件

$$\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-p\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}-Q\right)-q\left(\frac{f_1}{f_2}-P\right)\geqq o \quad [\leqq o].$$

定理 4 $f_1, f_2, \cdots\cdots f_n, \varphi_1, \cdots\cdots \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_n$ 存於 (a,b) 積分可能之 $2n$ 個函數,

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} \int_a^b f_1\varphi_1 dx & \int_a^b f_1\varphi_2 dx \cdots\cdots & \int_a^b f_1\varphi_n dx \\ \int_a^b f_2\varphi_1 dx & \int_a^b f_2\varphi_2 dx \cdots\cdots & \int_a^b f_2\varphi_n dx \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \int_a^b f_n\varphi_1 dx & \int_a^b f_n\varphi_2 dx & \int_a^b f_n\varphi_n dx \end{vmatrix}$$

△中除去第 i 行與第 j 列之行列式以行列式 Δij 表之,又除去第 i 行與第 h 行及第 j 列與第 k 列以行列式 $\Delta ij;hk$ 表之而令

$$F_1\equiv\Delta_{11}f_1-\Delta_{21}f_2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\Delta_{n1}f_n,$$

$$\Phi_1\equiv\Delta_{11}\varphi_1-\Delta_{21}\varphi_2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\Delta_{n1}\varphi_n,$$

$$F_{12}\equiv\Delta_{11;22}f_2-\Delta_{11;32}f_3+\cdots\cdots+(-1)^n\Delta_{11;n2}f_n;$$

$$\Phi_{12}\equiv\Delta_{11;22}\varphi_2-\Delta_{11;32}\varphi_3+\cdots\cdots+(-1)^n\Delta_{11;n2}\varphi_n,$$

時,$\Delta_{11}>o$ 且於 (a,b) 對於 x 之一切值有如

$$\frac{F_1}{\Delta_{11}}\cdot\frac{\Phi_1}{\Delta_{11}}-(p_2f_2+p_3f_3+\cdots\cdots+p_nf_n)\frac{\Phi_1}{\Delta_{11}}$$

$$-(q_2\varphi_2+q_3\varphi_3+\cdots\cdots+q_n\varphi_n)\frac{F_1}{\Delta_{11}}-\frac{rF_{12}\Phi_{12}}{\Delta_{11;22}}\geqq o \qquad [\leqq o]$$

$$r\leqq o \qquad [\geqq o]$$

之 $(2n-2)$ 個常數

$$p_2,p_3,\cdots\cdots,p_n;q_2,q_3,\cdots\cdots,q_n$$

存在時則次之不等式成立:

$$\Delta\geqq o \qquad [\leqq o].$$

證明　由行列式之性質,

$$\int_a^b f_1\Phi_1dx=\int_a^b f_1(\Delta_{11}\varphi_1-\Delta_{12}\varphi_2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\Delta_{1n}\varphi_n)dx$$

$$=\Delta_{11}\int_a^b f_1\varphi_1dx-\Delta_{12}\int_a^b f_1\varphi_2dx+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\Delta_{1n}\int_a^b f_1\varphi_ndx$$

$$=\Delta,$$

$i=2,3,\cdots\cdots,n$:

$$\int_a^b f_i\Phi_1dx=\int_a^b f_i(\Delta_{11}\varphi_1-\Delta_{12}\varphi_2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\Delta_{1n}\varphi_n)dx$$

$$=\Delta_{11}\int_a^b f_i\varphi_1dx-\Delta_{12}\int_a^b f_i\varphi_2dx+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\Delta_{1n}\int_a^b f_i\varphi_ndx$$

$$=o.$$

同樣

$$\int_a^b \varphi_1F_1dx=\Delta$$

$$\int_a^b \varphi_iF_1dx=o \qquad (i=2,3,\cdots\cdots,n).$$

故此等各式組合之

$$\int_a^b F_1\Phi_1 dx = \Delta\Delta_{11}$$

且

$$\int_a^b (p_2f_2+p_3f_3+\cdots\cdots+p_nf_n)\Phi_1 dx = o$$

$$\int_a^b (q_2\varphi_2+q_3\varphi_3+\cdots\cdots+q_n\varphi_n)F_1 dx = o$$

但 $p_2, p_3, \cdots\cdots, p_n, q_2, q_3, \cdots\cdots, q_n$ 乃任意之常數.

同樣

$$\int_a^b F_{12}\Phi_{12} dx = \Delta_{12}\Delta_{11;22}.$$

故 $$\frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \int_a^b dx\left\{\frac{F_1}{\Delta_{11}}\cdot\frac{\Phi}{\Delta_{11}} - (p_2f_2+\cdots\cdots+p_nf_n)\frac{\Phi_1}{\Delta_{11}}\right.$$

$$\left. -(q_2\varphi_2+\cdots\cdots+q_n\varphi_n)\frac{F_1}{\Delta_{11}} - \frac{rF_{12}\Phi_{12}}{\Delta_{11;22}}\right\} + r\Delta_{11}.$$

由此遂得吾人之定理矣.

$p_2=p_3=\cdots\cdots=p_n=r=o$ 之時卽得 L. Berwald 氏之結果.

本節以上之硏究其出處如次:

S. Narumi, Note on inequality for definite integral, Tôhoku Math. Journ. Vol 27(1926).

28. Bessel 氏不等式.

定理. (i) $f(x)$ 爲實且連續又 (ii) $\psi_s(x)$ $(s=1,2,\cdots\cdots,m)$ 爲實且連續若

$$\int_a^b \psi_r(x)\psi(x)_s = \begin{cases}1 & r=s\\ 0 & r=s\end{cases}$$

時則

$$\sum_{r=1}^{m}\left[\int_a^b f(x)\psi_s(x)dx\right]^2 \leqq \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

證明　設 c_s 爲任意常數則

$$\int_a^b \left[f(x)-\sum_{s=1}^{m} c_s\psi_s(x)\right]^2 dx \geqq o$$

卽

(1) $$\int_a^b [f(x)]^2 dx - 2\sum_{s=1}^{m} c_s \int_a^b f(x)\psi_s(x)dx + \int_a^b \left[\sum_{s=1}^{m} c_s\psi_s(x)\right] dx \geqq o.$$

然

$$\int_a^b \left[\sum_{s=1}^{m} c_s\psi_s(x)\right]^2 dx = \sum_{s=1}^{m} c_s^2 \int_a^b \psi_s^2 dx + 2\sum_{r,s} c_r c_s \int_a^b \psi_r\psi_s dx,$$

$$\int_a^b \psi^2 dx = 1, \qquad \int_a^b \psi_r\psi_s dx = o.$$

故

$$\int_a^b \left[\sum_{s=1}^{m} c_s\psi_s(x)\right]^2 dx \equiv \sum_{s=1}^{m} c_s^2.$$

以 c_s 爲任意常數,故可得次式:

$$c_s = \int_a^b f(x)\psi_s(x)dx.$$

由 (1) 則

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx - 2\sum_{s=1}^{m}\left(\int_a^b f(x)\psi_s(x)dx\right)^2 + \sum_{s=1}^{m}\left(\int_a^b f(x)\psi_s(x)dx\right)^2 \geqq o.$$

本定理卽證明矣.

巡岸艇與國防

郭霖

中國國防問題,比世界任何國爲複雜.別國在海軍方面只須防海,中國則兼須防江.外國軍艦可任意駛至內地各埠,此種現象爲中國所獨有,可恥孰甚!一旦有事,不但沿海各地橫被蹂躪,卽遠距海岸數千里之市鎭,如漢口重慶等,亦皆在敵艦控制之下,可哀孰甚!遠事無論已,上海一役,苟日艦不能駛入黃浦及瀏河一帶,十九路軍安得敗北?至今思之,誰無餘痛?然中國今日欲驟興一强有力之海軍,又屬决不可能.然則奈何?作者深思孰慮之後,以爲宜注意下列三點:

(一)多造飛機以防空;

(二)多造潛艇以防海;

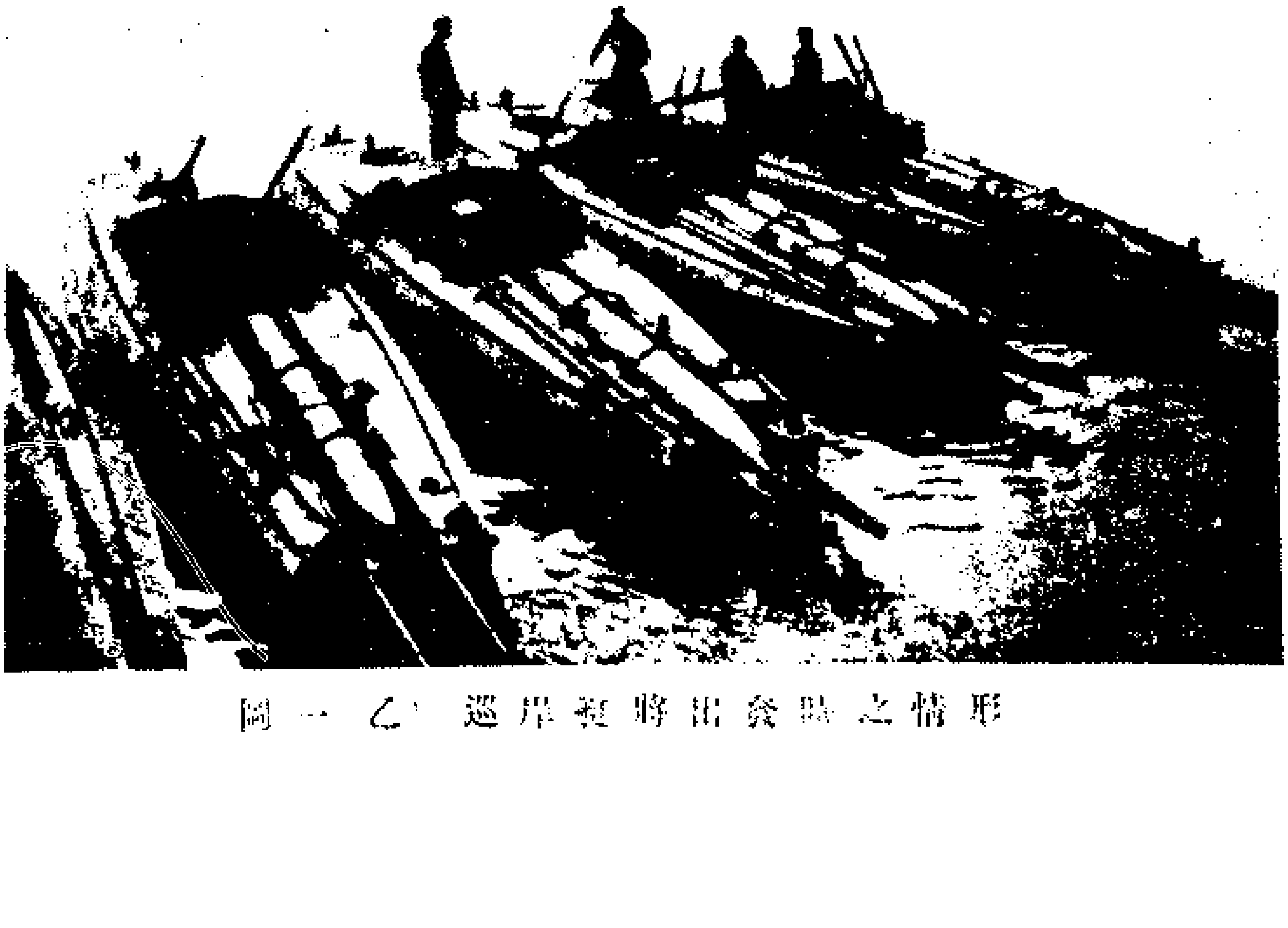
(三)多造巡岸艇以防海與江.

就第一點論,飛機救國之呼聲早已洋洋盈耳,本文姑不具論.至第二點,潛艇救國之說雖尙少有所聞,但作者在三年前已有一文詳加論列(見本季刊第一卷第一及第三兩期),此處亦不贅述.今專論第三點——巡岸艇.

巡岸艇係歐戰時英人商尼克拉弗發明,英名爲"Coastal

Motor Boat",通常但呼爲C. M. B.,不以全名稱也.今以意譯之爲巡岸艇,其長不過四十至七十英尺. (現時英國所有之

圖一(甲) 55尺巡岸艇試車時之情形



圖一(乙) 巡岸艇將出發時之情形

C. M. B.，計為 40 呎，55 呎，及 70 呎三種，但 70呎者尚屬絕少數)，實與普通汽船相似，故英名有 Motor Boat 之稱(圖一)。惟其武器為魚雷 (Torpedo)，故可予一切戰艦以至大之威挾。其作用本與魚雷艇或潛行艇相彷，惟魚雷艇不能逼近敵艦，故收效不大；潛行艇所以可怖者，即因要能潛至敵艦附近施放魚雷故也。至若巡岸艇，因其速度既高，船身又小，不獨舉動敏捷，易近敵艦；且不必擇地而行，活動之範圍自廣。凡魚雷艇所能為者，彼皆優為之；即潛行艇所不能為者，彼亦能為之；故能成驚世駭俗之功，一躍而為江海咸宜之武器焉。茲分段論之如下：

(一)歷史

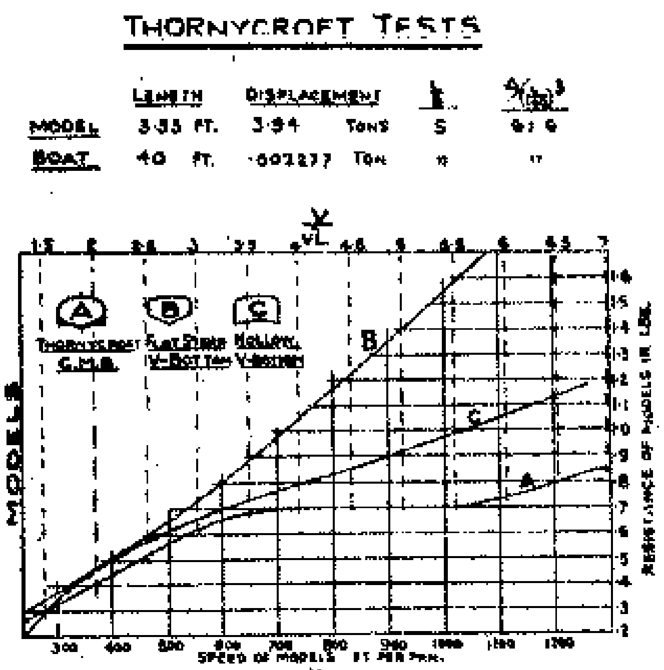
在歐戰前三十餘年，英國商尼拉弗爵士 (Sir J. Thornycroft) 即從事於水面飄行艇 (Skimming Boats) 之試驗。嗣後屢改模型，苦心研究，始知單坎式之掠水艇 (One-Step Hydroplane) 為出類拔萃之作。此種掠水艇有一特點：即船向前進時，船身可自動升至水面，飄飄然凌波而行。其速度之高，為任何他艦所不及。至歐戰發生之次年，英國海軍部欲得一高速之小型魚雷艇，就商於商尼克拉弗船廠，於是此單坎式之掠水艇遂一變而為 C. M. B. 焉。

(二)原理

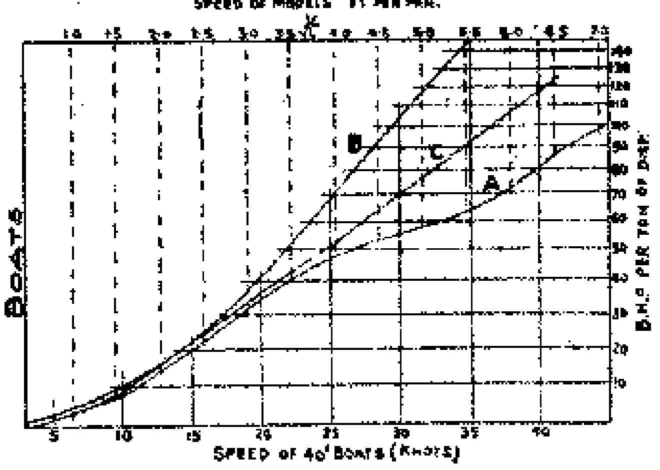
船之阻力，可分為摩擦阻力 (Skin Friction Resistance)，造浪阻力 (Wave-Making Resistance)，造漩阻力 (Eddy Resistance)

及空氣阻力 (Air Resistance) 四種.惟後二者影響至微,常併入於造浪阻力中計之,統稱後三者爲剩餘阻力 (Residuary Resistance);亦有併入後仍稱爲造浪阻力者.茲姑從後說,分船之阻力爲摩擦與造浪二種.普通船係排水式的(Displacement Type): 船重十噸者,即須排去十噸重之水.其前進也,穿行水中,故摩擦阻力與造浪阻力皆大.若 C. M. B. 則係掠水式的 (Skimming Type):船重十噸者.在靜止時亦須排去十噸之水;但若一經行動,則船身即自動升高,排去之水遂不及十噸.以前沒於水中之一部,此時已升至空中,船壳與水接觸之面積(通常稱爲濕面積 —— Wetted Surface) 因以減少;故摩擦阻力比此時應有者特別減小,自然前進加速,前進愈速,船愈升高;船愈升高,前進亦愈速;此高速之所由來也.自然此種速度之增高,亦非漫無限制者:摩擦阻力約與船速之平方成比例,迨船速高至某種程度,使船之阻力恰等於其推進力時,船速便不能再高.然較之普通船速,已不啻倍蓰矣.普通船之速長比 (Speed-Length Ratio, 即 $\frac{V}{\sqrt{L}}$, 此處 V 爲船速,以每小時所行之海浬計; L 爲船長,以英尺計),鮮有過 2 者;而掠水艇之速長比則可至 7 或 8! 不亦大可驚乎?

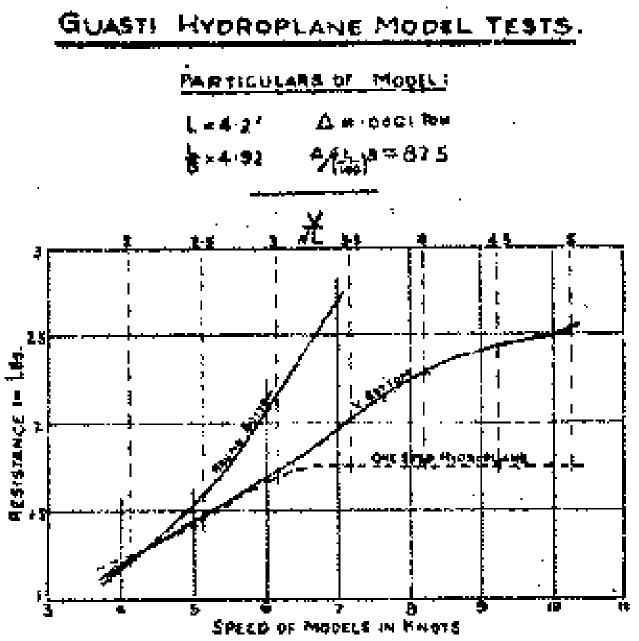
當其向前進行時,排去之水既不足十噸 —— 設祇排去五噸, —— 是水之浮力亦只五噸矣.餘下之五噸重力,自仍向下作用,非借前進時所生之上升力以維持平衡不可.故



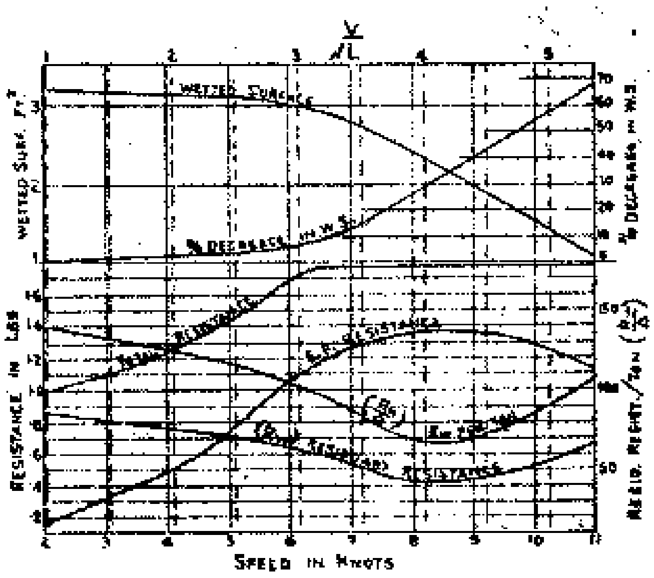
(圖二)



(圖三)



(圖四)



(圖五)

船壳着水部分之形式,非常重要,務須特別合宜,方能得相當之上升力.試細觀圖二,圖三及圖四,就阻力比較之,便知船壳形狀之重要矣.此外船身傾斜度 (Planing Angle) 亦甚重要;機軸亦宜稍斜(參看圖九).

圖二,圖三,爲商尼克拉弗試驗之結果;圖四,圖五,爲咖斯提 (Cesare Guasti) 試驗之結果 (咖氏係意大利掠水艇專家).此四圖皆極有價値,其中最有趣味之一點,當推圖五中之 % Decrease in W. S.—線(即濕面積減低之百分數).在 $\frac{V}{\sqrt{L}}=5$

時,濕面積已減去百分之五十六,餘不及半,是摩擦阻力亦不及此時應有之一半矣.

(三)構造

艇身全部皆係木製,艇殼以薄木板二層三層結合而成,取其堅牢而體輕也.機器爲特製之輕內燃機,卽以飛機之內燃機代之亦可.

魚雷放射裝置 (Torpedo-Discharging Gear),設在艇尾.放時,將魚雷向艇後射之使落水中,於是魚雷隨艇進行.初見,必以爲此乃自殺之道:因魚雷速度甚高,一觸艇尾,勢必炸發.但此艇本身之速度比魚雷初步之速度尤高,不致爲所追及;及魚雷速度加高,此艇又已轉舵,駛出魚雷軌道以外;於是魚雷直奔敵艦;此艇以高速逃開,而敵艦之命運遂不堪問矣!

艇中設備不多:僅無線電,望遠鏡等等.間有不攜魚雷而攜深水炸彈 (Depth Charge),或煙幕彈,高射砲,機關槍等者,則在人各隨所需以應用之耳.

(四)功用

此艇速度既高,船身又小,飄忽往來,有追風逐電之勢,自不易爲敵砲所中;而此艇舉動輕便,一躍卽至敵艦之旁,此時施放魚雷,殊無不中之理.況通常又多於夜間出而攻敵,彼時敵更處於不利地位.我易制敵,敵難制我,勝負之數,何難預決?卽不幸而中敵砲,我之損失亦至有限(每艇不過

三數人),不足以定最後之勝負;敵苟爲我所中,則損失不貲,全軍或因以動搖!若更與飛機合作,上下夾攻,敵縱欲掩旗息鼓而退,亦不可得矣.

再者:此艇船身既輕,吃水自然不大,不獨淺水處可以往來,卽已埋水雷(Mines)之區他艦不敢越雷池一步者,此艇亦可暢行無阻.故能深入敵港,施行破壞工作,如英國巡岸艇隊攻俄國喀朗斯他港(Kronstadt Harbour)內各戰艦,大獲勝利,卽其例也.卽驅逐艦或潛行艇尙不能辦此,況其他乎?不特此也,卽用護木(Boom)圍繞之軍港,此艇亦能跳過護木以攻之,亦奇事也!

(五)設計

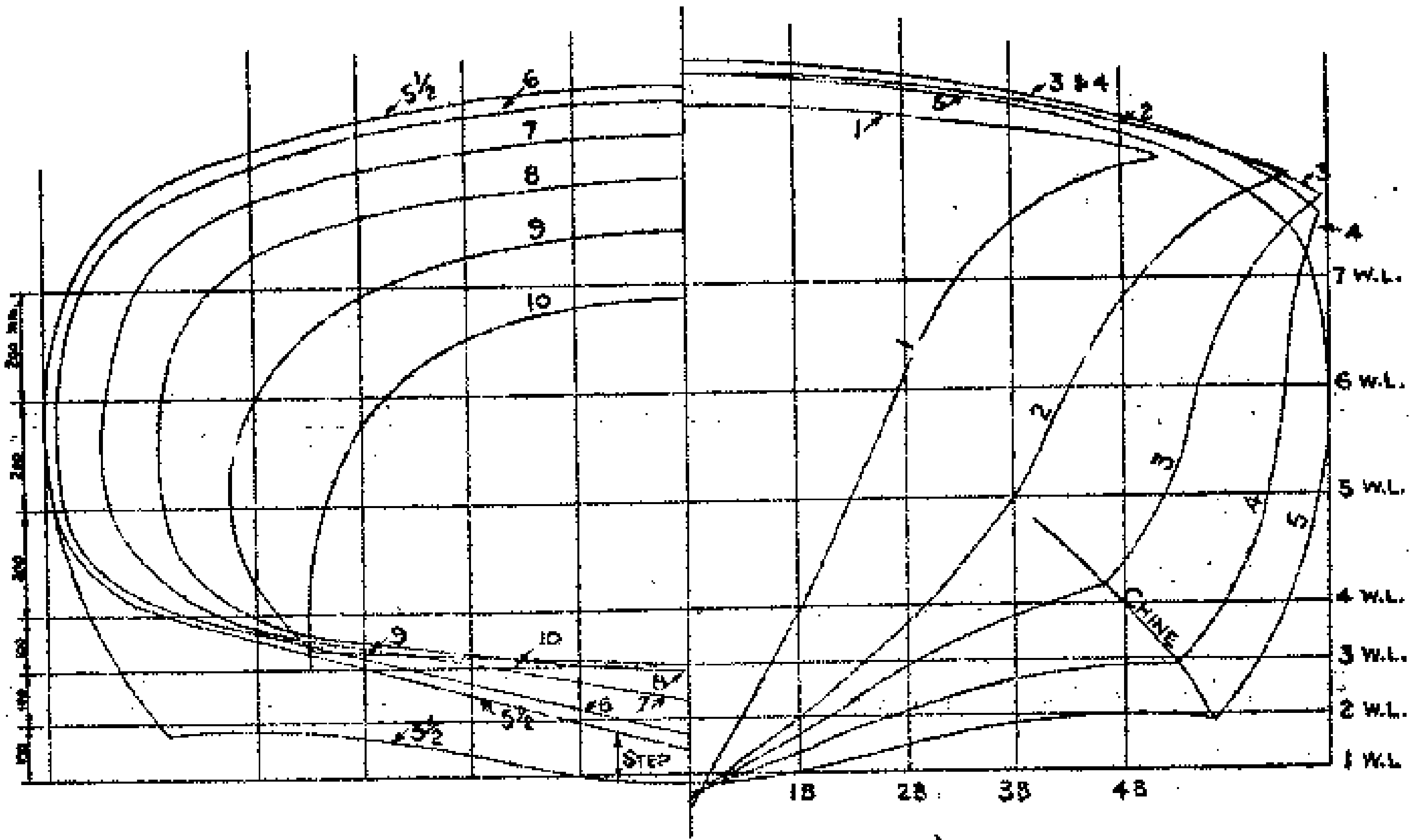
設計工作,可分(甲)(乙)二項論之:——

(甲)船型設計及一切詳細構造——凡關於此類之消息各國皆守祕密,在出版物中披露絕少.作者歷年來常注意搜求,總不可得;爰託一英國友人現尙工作於商尼克拉弗船廠者代爲搜求,結果乃於兩年前寄來一十米突之掠水艇設計圖.此種掠水艇,與C.M.B.本係一而二,二而一者,其水下部分與C.M.B.實無甚區別,惟上部小異耳.爰披露於此,以公同好(圖六).此艇之推進機係屬三瓣式者(3-Bladed Propeller),直徑爲二十三英寸,螺距(Pitch)爲三十六英寸,機器爲Sulzer式內燃機,馬力約爲二百,船速爲每小時四十海里(卽每小時四十六英里).另有一掠水艇之工作尺

圖六

BODY PLAN OF 10-METRE HYDROPLANE

SCALE 1/10TH



(STEP BETWEEN STATIONS 5 & 6)

寸表,此處似不必載,從略.

(乙)馬力估計 ——此項工作,殊爲繁難:因理論既不盡可靠;而試驗之結果經宣布者復少.作者此刻僅有商氏及咖氏試驗圖(卽圖二至圖五),其中惟咖氏之% Decrease in W. S. 及$\frac{R_{10}}{\Delta}$二線最有價值:前者爲濕面積低減之百分數,後者爲每噸排水量平均所受之造浪阻力(以磅數計).用此二線以估計馬力,頗稱便利.法如下:—

摩擦阻力所耗之馬力爲

$$E.H.P._f = \cdot 00307\, F.\, aA.\, V^{2.85}$$

造浪阻力所耗之馬力爲

$$E.H.P_{\cdot w} = \cdot 00307 \cdot \frac{R_w}{\Delta} \Delta . V$$

總共所耗之馬力爲

$$E.H.P. = E.H.P._f + E.H.P._w$$

機器應具之馬力爲

$$I.H.P. = \frac{E.H.P}{e}$$

此處 F= 摩擦阻力之係數 (Skin-Friction Coefficient), 檢表可得;

A= 靜止時之濕面積(以平方英尺計);

a= 前進時濕面積之低減率(由 %Decrease in W.S. 求之),

aA=前進時之濕面積;

V= 船之速度(以每小時若干海浬計);

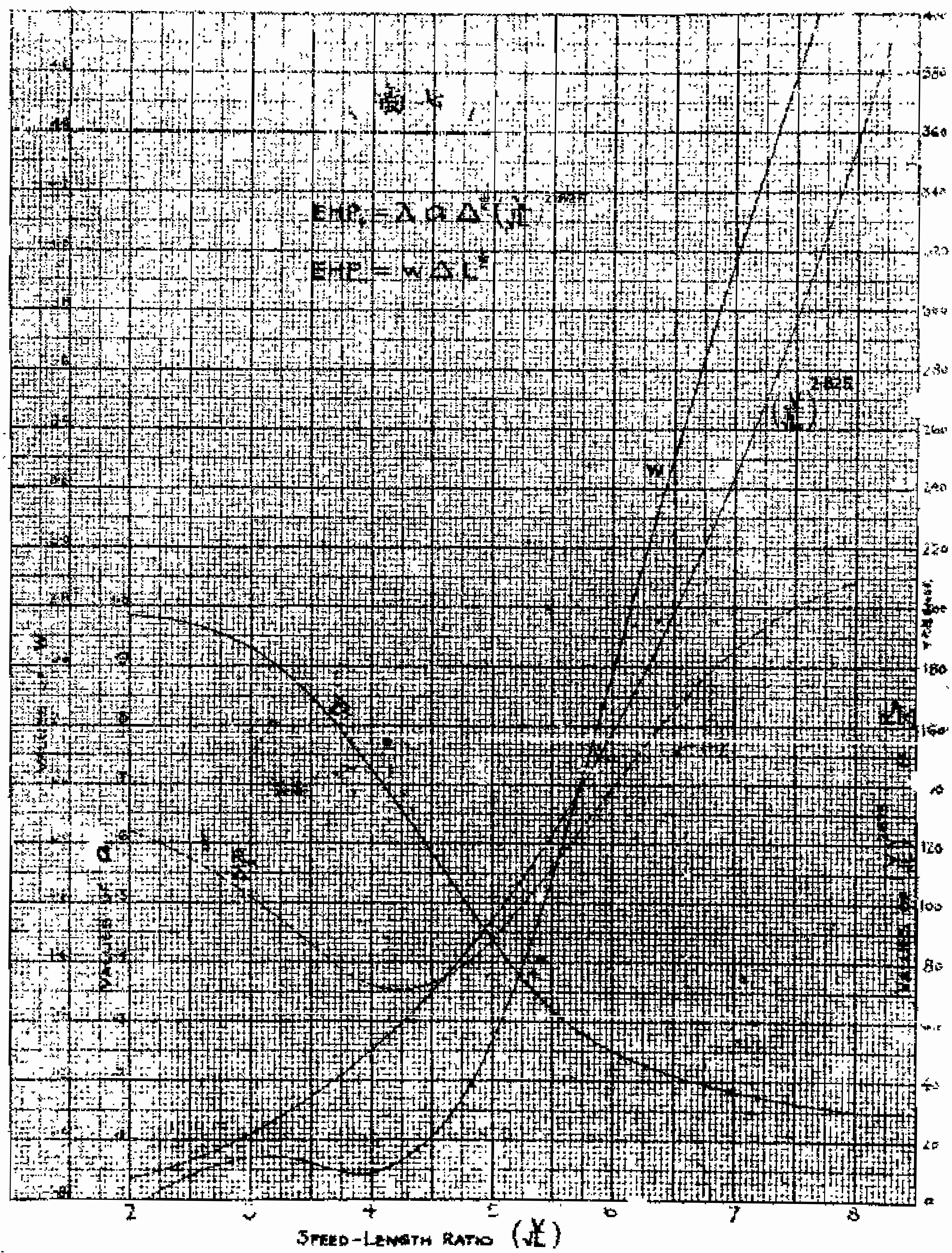
△=排水量(以每噸2240磅計);

$\frac{R_w}{\Delta}$= 每噸中之造浪阻力(以磅數計);

e = 推進係數 (Propulsive Coefficient), 此係數通常爲 ·48至 ·60就掠水艇言,可略作 ·5 (卽 I.H.P.=2E.H.P.).

本來噸位與船長之比,船寬與吃水之比,以及船肚之肥瘦等等,皆能使 $\frac{R_w}{\Delta}$ 變動,難以一概而論;惟同就掠水艇言,此變動尙微,可略而不計.

以上所述,乃通用之法也.但咖氏試驗至 $\frac{V}{\sqrt{L}}=5$ 而止,現時掠水艇之速度却又已至 $\frac{V}{\sqrt{L}}=7$ 以上,亟須有人再作此



EHP = w Δ L
2.825
W
SPEED-LENGTH RATIO (V/√L)
2
4
5
6
7
8
20
40
80
100
120
160
180
220
240
280
360

種試驗,惟至今尚少有所聞.從來設計者遇 $\frac{V}{\sqrt{L}}$ >時,多隨意假定 $\frac{R_w}{\Delta}$ 及 a 之值以估計之,有時錯誤甚遠.作者爰擬覓一較妥之法,使估計手續簡單可靠,並使未習造船學者亦可估計馬力.攷商氏試驗已至 $\frac{V}{\sqrt{L}}=7$, 大可利用.乃先由咖氏試驗畫成圖七中"a"線之前半段,然後由各方面推測,引長此線至 $\frac{L}{\sqrt{V}}=8$.再作下列二假定:——

1. 假定商氏C.M.B.濕面積之低減率"a",與咖氏試驗同;

2. 假定商氏 C. M. B. 水下部分之形狀,與圖六所示之掠水艇同.

由此二假定算得商氏 C. M. B. 之濕面積,由濕面積算得摩擦阻力,自全阻力中減之,於是得每噸中所有之造浪阻力,惟商氏試驗報告若不完全,算時尚有若干假定並參照咖氏試驗略加改動,始成圖七中之 $\frac{R_w}{\Delta}$ 線.此時凡在 $\frac{V}{\sqrt{L}}=8$ 以內之馬力皆可用上法以求之矣.惟檢表及計算濕面積尚覺麻煩,遂又變作下法:——

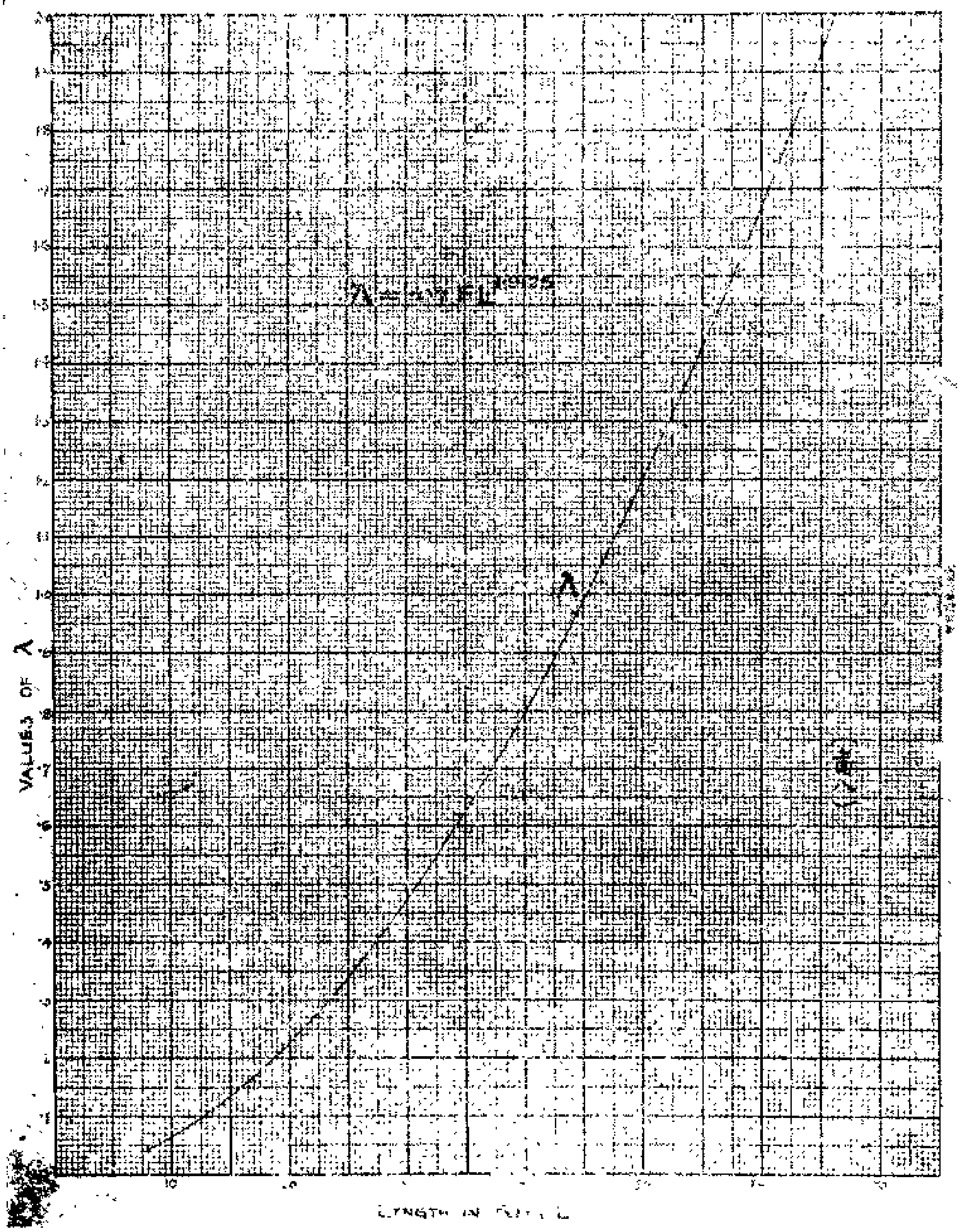
$$E.H.P._w=\cdot00307\frac{R_w}{\Delta}\Delta V=\cdot00307\frac{R_w}{\Delta}\Delta\sqrt{L}\frac{V}{\sqrt{L}}$$

$$=w\Delta\sqrt{L}\quad\cdots\cdots(2)$$

此處 $w=\cdot00307\frac{V}{\sqrt{L}}\cdot\frac{R_w}{\Delta}$ 其值業已畫成圖七中之 w 線,可由該圖直接查得,不須計算.

再 $E.H.P._f=\cdot00307FaAV^{1.83}$

照 Taylor 氏法,命 $A=C\sqrt{\Delta L}$, 此處 C 爲溼面係數,於是得


VALUES OF λ

$$E.H.P._f = \cdot 00307\, Fa\, C\sqrt{\Delta L}\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\cdot\sqrt{L}\right)^{2\cdot825}$$

$$= \cdot 00307 FCL^{1\cdot 9125}\, a\Delta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2\cdot825}$$

$$= \lambda\, a\, \Delta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2\cdot825} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

此處 $\lambda = \cdot 00307\ FCL^{1\cdot 9125}$; F 爲 Froude 氏之摩擦阻力係數(其值隨船長而異);就通常之掠水艇言, $C \doteqdot 20.7$, 幾爲一不變數;再仿 Baker 氏法加百分之十;於是得

$$\lambda = \cdot 07\, F\, L^{1\cdot 9125}$$

但 λ 與 $\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2\cdot825}$ 之值,皆已畫就,不須計算,逕由圖八及圖七檢之可也.如此,則估計馬力之手續,簡單極矣.

上法基於引長圖七中之"a"線,自不無可議;惟現時既無試驗結果,祇得用此過渡方法.且作者之目的,僅在求一簡單而又比較可靠之法,俾事先得知所需馬力之大概耳.就已知之實例驗之,上法尚稱準確.茲舉數例於後:——

(例一)已知商氏40尺長之C.M.B.載一.64噸重之魚雷時,其排水量爲 4.89 噸;以每時34海浬之速度進行,須 250馬力.試用上法驗之.

此時之速長比爲 $\frac{V}{\sqrt{L}} = \frac{34}{\sqrt{40}} = 5.38$

由圖查得 $w = 1.75$

$\lambda = .80$

$a = .345$

$\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2\cdot825} = 116$

於是由(1)(2)兩式得

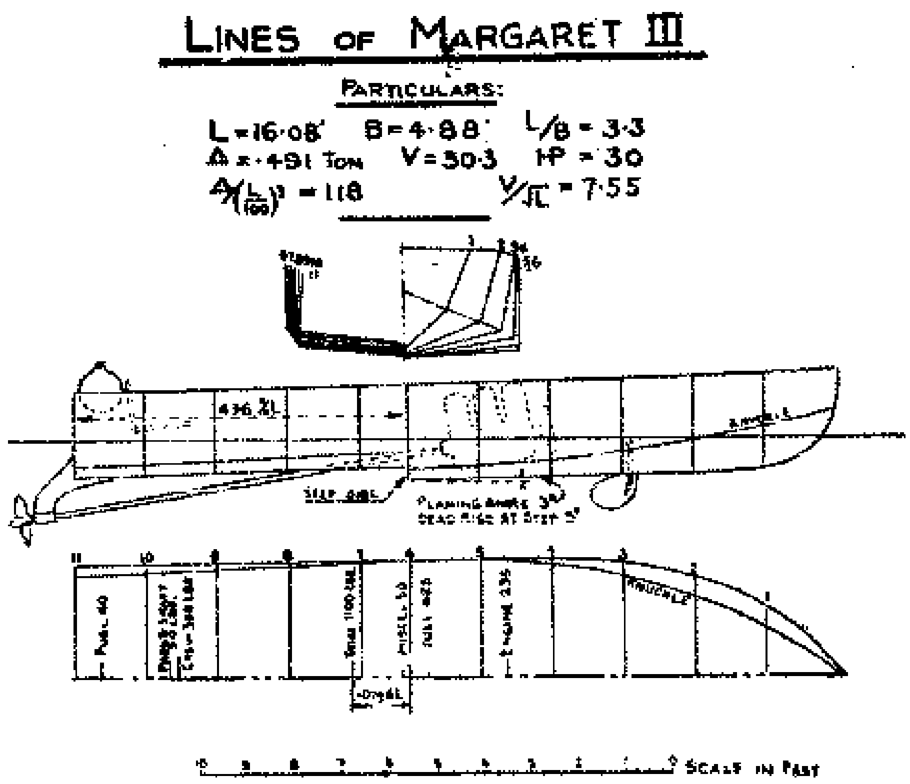
$$EHP_f=\lambda a\Delta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2.825}=.8\times.345\times4.89^{\frac{1}{2}}\times116=70.9$$

$$EHP_w=w\Delta L^{\frac{1}{2}}=1.75\times4.89\times\sqrt{40}=54.1$$

$$\text{故}\quad E.H.P.=125.0$$

若 $e=.5$, 則 I.H.P.=250,恰與實例相符.

(例二)已知圖六中之10米掠水艇在每小時行40海浬時,約需200馬力,試驗之.



(圖九)

此題中噸位未曾敍明,實不能計算,蓋噸位大則馬力亦隨之而大;但若假定此艇之噸位與例一中 C.M.B 之噸位相當 (卽 At Corresponding Displacements),則其噸位應爲

$$\Delta=4.89\left(\frac{32.8}{40.0}\right)^3=2.7\ \text{噸},$$

按題意　$\frac{V}{\sqrt{L}}=\frac{40}{\sqrt{32.8}}=6.984 \doteqdot 7$

由圖查得　$w=3.97$　　$\lambda=.555$

$a=.185$　　$\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2.825}=244$

於是

$$EHP_f=\lambda a\Delta^{\frac{1}{2}}\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2.825}=.555\times.185\times2.7^{\frac{1}{2}}\times244=41.2$$

$$EHP_w=w\Delta L^{\frac{1}{2}}=3.97\times2.7\times32.8^{\frac{1}{2}}=61.4$$

$$\therefore\ EHP=102.8$$

若 $e=.51$, 則 $I.H.P.\doteqdot 200.$

(例三)一直肋式(Straight-framed)之掠水艇,名 Margaret III, (圖九).其長爲16.08英尺,排水量爲.491噸,速度爲每時30.3海浬,馬力爲30.試驗之.

速長比　$\frac{V}{\sqrt{L}}=\frac{30.3}{\sqrt{16.08}}=7.55$

由圖得　$w=4.65$　　$\lambda=.154$

$a=.163$　　$\left(\frac{V}{\sqrt{L}}\right)^{2.825}=303$

於是

$$EHP_f=.154\times.163\times\sqrt{.491}\times303=5.3$$

$$EHP_w=4.65\times.491\times\sqrt{16.08}=9.2$$

$$\therefore\ E.H.P.=14.5$$

若 $e=.5$　則　$I.H.P.=29$

此艇形式稍較特別,馬力或應稍異;但相差要亦甚微,上法

固仍可用以求約值也.

(六)對中國之關係

此艇構造既簡,造價自低(比飛機猶廉);攻人時手術亦不甚繁,訓練自亦較易;且既可防海,又可防江,防海尚可以他艦代之,防江則非此莫屬;洵中國今日之對症藥也!利溥勢便,孰逾於此!或謂中國江防問題,亦可借重飛機,例如用飛機攜帶魚雷或重量炸彈以攻敵艦之類.此說固是;但亦知敵人來攻時,所同來者爲何物乎?必航空母艦是也!敵人孤軍深入,首必利用飛機.彼時中國空軍發展至何程度,敵人早已盡知,必更以超越之空軍攻我,借以取得制空權.我若僅恃飛機以禦之,是小巫見大巫也,去「大刀禦坦克」幾何哉?謂能必勝乎?故發展巡岸艇,實亦中國今日至要之策也!

中國洋莊綠茶調查記

范和鈞

引言

我國爲產茶最古之國,在紀元前三千二百年的時候,神農本草經內,已有"茶味苦,飲之使人益思,少臥,輕身,明目"之紀載,可見當時我國境內,已有茶之栽培,飲用,及功用之研究,而在國外則尙未見其端倪.華茶第一次出口,在一六六九年,數量雖僅百餘磅,以後逐年增加,至一八八〇及一八八八年之九年中,輸出數量年達三萬萬磅卽二百萬担以上,値銀約五千萬元,於出口總額中,佔第一位,爲歷年貿易史上之最高記錄,亦卽華茶出口之黃金時代,當時華茶貿易,悉爲英人操縱,大批茶葉皆先裝運至英國倫敦,再由倫敦之英國茶商,轉售于各國消費者,同時英人於印度錫蘭試種茶樹,一八八八年後,試種成功,印度紅茶乃漸奪華茶市場而代之,同時日本綠茶亦開始脫離洋商之操縱,在世界綠茶市場中,露其頭角,予中國綠茶以有力之壓迫,故自此時期以後,世界茶葉之消費量,雖自三萬萬磅增至九萬萬磅以上,而中國茶葉則不僅不能保持固有之銷路,反激減至百分之八十以上,現在每年出口,僅在四五十萬担

左右,其中綠茶數量,雖無顯着之退減,但最近三年來,洋莊綠茶最大市場之非洲北部,受日本綠茶直接傾銷之影響,前途已甚危急,且價格方面,就紅茶每担平均市價言,(由上海茶棧售與洋行之價目)一八六二年至六六年五年平均價格,紅茶爲每担二十五兩一錢八分,綠茶爲三十三兩四錢六分,一九二一年至二六年五年平均價格,紅茶祗二十九兩七錢四分,綠茶亦祗三十二兩一錢四分,在此七十餘年來,其他物價指數,已增高十倍至乃數十倍,反觀紅茶價格,雖微有增加,而綠茶則反不能維持七十年前之舊價,此種貶價原因,雖有多種,而主要者,綠茶因日本茶之機械生產大量傾銷之結果,而紅茶則因洋商之操縱,製茶習慣上之不分珠,葉,大,小,粗,細,混雜,無標準分類,故不能在倫敦茶市場中,得到公平之估價,一任國內洋商操縱壟斷,爲一大原因也.

日本綠茶之海外貿易,從前亦受洋商之操縱,因海外商情之隔膜,茶價往往低落于操縱情形之下,故自一八六八年起,日人卽開始試驗經營直接輸出,但因再製手續之不精,保藏時間之不久,疊次失敗,至一八八七年以後,特聘華人吳慶喜等爲再製技師後,出品漸精,直接輸出乃有成效,中國綠茶銷路,向以美國加拿大俄國及北非洲爲主要主顧,如美國之華茶輸入,常在二三十萬担之間,佔總數百分之九六,一八九四年且因需要之增加,陡增至四十萬担,然

自一八九七年,美國頒佈"粗惡不正茶葉禁止進口條例"以後,日茶卽能利用時機,在美奪得中國綠茶之銷路,故近年華茶運美,遠在日本之下,又如俄國,俄人向不飲用綠茶,所購綠茶皆由西伯利亞鐵路,運銷于蒙古新疆小亞細亞等處,日本綠茶以前顆粒不得輸入者,今已達四五百萬磅之巨,再如非洲北部,日本茶自一九三〇年起,方開始輸入,三年之中,由六噸增至二百萬磅之巨,佔茶葉輸入總數之四分之一.茲將世界主要綠茶市場,最近五年輸入之中日綠茶統計列下,以資比較:——

美國

一九二八年	華茶	四六一五五〇〇斤
	日茶	一九八一四六一五磅
一九二九年	華茶	三七八〇〇〇〇斤
	日茶	一六九六九〇〇八磅
一九三〇年	華茶	三六六四四〇〇斤
	日茶	一六二〇三八七七磅
一九三一年	華茶	四五九八四〇〇斤
	日茶	一六五九〇〇〇七磅
一九三二年	華茶	三〇五一二一四斤
	日茶	一六五六八五二〇磅

坎拿大

一九二八年	華茶	二二二〇〇斤

	日茶	二五三七五五三磅
一九二九年	華茶	一四八八〇〇斤
	日茶	二五六一〇九八磅
一九三〇年	華茶	八〇一〇〇斤
	日茶	一八九九八〇〇磅
一九三一年	華茶	二七三〇〇斤
	日茶	一九四八七一三磅
一九三二年	華茶	四六九四二斤
	日茶	二〇二一八五三磅
		俄國
一九二八年	華茶	三八二一一〇〇斤
	日茶	一四三一八五一磅
一九二九年	華茶	四〇二四四〇〇斤
	日茶	三三一二三八五磅
一九三〇年	華茶	二三〇四一〇〇斤
	日茶	四四二六二七五磅
一九三一年	華茶	二九五一九〇〇斤
	日茶	四八六一五二一磅
一九三二年	華茶	七七七七五七斤
	日茶	四二七五二〇一磅
		非洲北部
一九二八年	華茶	一四八三三六〇〇斤

	日茶	——————
一九二九年	華茶	一四六五二六〇〇斤
	日茶	——————
一九三〇年	華茶	一〇九八五六〇〇斤
	日茶	一三六〇〇磅
一九三一年	華茶	一四三三七九〇〇斤
	日茶	五五四七六九磅
一九三二年	華茶	一五一九五三四九斤
	日茶	一七三六二三〇磅

(註) 上述數字,關于日茶項下者,係根據日本靜岡再製茶組合所之調查,其年度係指前年五月一日至翌年四月三十日爲止之十二個月的計算,表中一九三二年度之數字,係自一九三二年五月一日,至一九三三年三月三十一日爲止,僅十一個月,不足一年,故實際上一九三二年度之數字,尙不止此數,關於華茶項下者,係綠自商品檢驗局茶葉出口數量報告,及歷年海關貿易統計,

觀于上表,可知中國紅茶已因氣候,種植,製造及推銷等種種不如外人,故在世界茶葉市場中,已無足重輕,成苟延殘喘之狀,然而唯我獨尊的中國綠茶,雖有特優之品質,而獨因商業上缺乏直接推銷能力,已在被日本綠茶壓迫上毀滅之路了!

今年六月,法國茶葉專家顧博氏,(Jean Goubeaux)爲非洲北部法屬殖民地政府之委派,來華調查洋莊綠茶之狀况,余幸得追隨左右,爰將調查所得,記述于後,願閱此文者,明瞭我國綠茶之重要,及前途之危險,思如何急起直追挽此狂瀾于將倒,弗再蹈紅茶之覆轍,則中國茶業前途幸甚!

總論

我國綠茶產地,散漫廣泛,各省皆有,惟能推銷于國外,所謂"洋莊綠茶"者,可大別爲四大系統:

甲徽州茶　產安徽舊屬徽州府,如婺源,歙縣,績溪,休甯,黟縣,屯溪等處,因集中于屯溪,故又名屯溪茶.

乙平水茶　產浙江紹興,上虞,新昌,嵊縣,諸暨,天台,仙居等處,以紹興平水鎮所產爲最有名,故稱平水茶.

丙湖杭茶　產于浙江吳興,長興,安吉,孝豐,臨安,於潛,昌化等,爲舊湖杭府屬,故名湖杭茶,又名湖州茶.

丁土莊茶　由各處另星產地,運往上海之毛茶,在上海再製裝箱者,曰土莊茶.

茲將上列四種之栽培製法,一一分述于下:

甲　徽州茶

一　地勢及交通

徽州府屬各縣,在安徽省之南部,隣近浙江,錢塘江之發源地也,崇山峻嶺,土質肥沃,雲霧籠罩,風調雨順,氣候溫和,平地高度比海平線超出百米左右,爲天然宜茶區域,在屯

溪黎源一帶,荒塚坟間,隨地皆有茶樹滋生,惟交通異常不便,若由陸路,則自杭州坐汽車到昌化,換坐山轎,再行三日,方到歙縣,由歙縣至屯溪及休甯,始有汽車道,惟在最近之將來,此汽車道將可直達杭州及蕪湖,貨物之轉運,則概由水路,由錢塘江逆流而上,須十五六日,方可直達屯溪,然新安江(即錢塘江上流之別名)中,暗礁四伏,危險殊甚,屯溪爲水陸交通之中心會聚點,故四年前雖罹匪患浩刧,然因地位之重要,恢復甚速,現已商鋪林立,市街繁盛,新氣勃勃.

二. 產額及面積

據舊農商部第三次統計,綠茶爲一五三四四八担,面積則無從統計,其中百分之八十運銷國外,佔全國出口綠茶百分之六十云.

三. 栽培及製造

雖漫山遍野皆有茶樹,然皆分屬于各個農家,視爲副產物,無系統,無組織,亦無所謂茶園,農民對於茶樹,專恃歷來經驗,每年依舊歷淸明穀雨等節氣,爲習慣上之採摘而已.對於採摘之能影響于茶樹之發育,茶味之優劣,皆不考究,尤幸茶質甚優,味亦甚佳,且無害蟲發生,惟不能盡量生殖,殊爲可惜耳,茲將各項栽培及製造手續,詳列於下:

A 墾荒　墾荒步驟,有除草,斫柴,開掘,翻土,整地等手續,其每畝費用,頗不一律,視地勢之高低,工程之粗細,而有差異,如係高山,則較平原爲貴,每畝平均約廿工,每工五角,計

洋十元,需用種籽三斗,每斗四角,計洋一元二角,種植費每畝洋一元,共計洋十二元二角,茶樹平均壽命爲十一二年,故每畝每年需洋一元.

B 種植 約在陽歷十一月間,揀種籽圓大結實者,埋于向陽之土窟中,至明年春季,掘起播種,下種方法,多係直播,將地掘成直徑尺許之小穴,並將穴之底土耙鬆,每穴六七粒,以土覆之,厚約三寸,如播種得法,種子優良者,則生活成數必多,否則三五七株不等,移植及壓條等法,皆不爲土人所採用,茶樹種類,屬麥克非拉類,惟小分類極多,中國茶葉專家,正在研究中,恐短時期內,尙不能公之於世耳.播種方法,本有條播,輪播,株播等種種方法,中國所採用者,普通爲不規則默播,即漫山遍野,皆有茶樹,而每株茶樹之距離,不甚一定,并無畦幅之存在,樹與樹之間,空地甚多,常有超過十餘萬米者,宜其產額之不能盡量矣.茶農對於茶葉幼樹之保護,亦甚關心,惟祇知隨時除草,及施糞,幼樹至第四年春,方採摘頂芽一次,以後逐年增加採摘次數,至第七年方逐次採摘,不加顧忌.

C 中耕除草 中耕每年僅兩次,有時僅一次,第一次中耕在陽歷三月間,茶將萌芽時行之,第二次則在八九月間,正在結實之時,除草則無一定,時間視雜草之情形而定,年年一樣.

D.肥料 平地多用人糞屎,高山則都用稻草灰,及油粕

之屬,時間並無一定,恆在二三月與九十月之間,亦有不施肥者.

E. 修剪台刈　茶農對於茶樹愛惜特甚,永不剪刈,惟恐影響收獲,常見二十餘年之老樹,從未剪刈一次,以致茶葉老硬,品質退步,收獲減少者.時有過分衰老,收獲太少者,茶農乃沿地連根刈去,以待長發新枝,但非三四年後,不能採摘,甚爲可惜.若能教以台刈,剪枝等法,則產量可以增多,成本亦可減少矣.

F. 採摘　茶農對於採摘之時間,不依發芽之遲速,惟照舊歷之四時季節,及茶價之高下而定.在清明至穀雨前後所採者,爲頭掔茶,穀雨後十天所採者爲二掔茶,此二期所採之茶,皆日春茶,又日頭茶;至立夏前後所採者,日三掔茶.在三掔茶後一個月所採者日四掔茶,此三四二掔茶,皆日夏茶,或日子茶;尙有秋茶,則採於立秋白露之候,三者時間不同,品質亦隨之優劣,價目亦有貴賤之分,此項採摘人工,男女皆可爲之,採量多者,每人每日可採十二三斤,普通八九斤,近來茶價不振,茶農每將茶芽茶莖新葉一齊摘下,冀圖重量增多,至於下次收獲之優良與否,不問也.

G. 毛茶之製造　除少數店莊,略做紅茶外,其餘皆造綠茶,綠茶之製造,先由茶農製成毛茶,由茶販售給茶莊,由茶莊再製成箱茶,然後運滬銷售,毛茶之製法甚爲簡單,法將茶鍋洗淨,(茶鍋仍係鐵質,有如飯鍋而無邊)微火燒熱,至

相當溫度,卽將當日採下之茶葉,入鍋炒拌,約十分鐘,葉狀萎軟,乃取出放竹簸中,揉成狹長細條,再放入鍋中翻拌烘乾,第二次熱度,比第一次爲低,時間亦較短,烘至八九成乾,卽裝袋出售.

B 箱茶之製造　茶莊收買毛茶後,製成箱茶,手續非常複雜,須經過三次烘焙及篩分,每次烘焙之時間,皆有一定,以熱香計時,第一次烘焙須盡二枝香,第二次須五枝香,第三次須六枝香,每日工作之時間,爲熱香十八枝.茶篩尺寸,網眼大小,亦有一定,茲先將茶篩尺寸大小列下,然後再談烘焙篩分之次序及手續.

篩號	篩孔闊度(糎)	篩篾粗細(糎)
元號	一三・〇	三・〇
二號	一〇・〇	三・〇
三號	八・〇	三・〇
四號	五・五	三・〇
五號	四・〇	二・〇
六號	三・〇	二・〇
七號	二・〇	二・〇
八號	一・五	一・五
九號	一・〇	一・五
十號	〇・四	三・〇

(註) 以上各篩爲基本篩,尙有正副各篩以輔助之篩

眼相差無幾,非技術精巧者不能辯.

篩之直徑,爲八一糎,框高四糎,狀如米篩,惟米篩之底有一層六角形篩売,茶篩則無之.

茶莊所收之毛茶,係茶販或鄉人直接售出者,質頗潮濕,故到莊後,第一步手續卽須加以烘焙,烘焙之鐵鍋皆砌作水平式,鍋下爇以炭團,使熱度保持一律,灶上每兩鍋之中間,砌木板一塊,作凸起傾斜狀,工人工作時將面部側放於上,使左右兩手可以垂下,翻拌左右之茶葉,烘焙之時間,以爇點桿香爲憑,第一次烘焙須爇盡兩枝桿香,畢,用棕帚將茶掃出,傳入篩分間,須先用元號篩,將大部分茶梗撈出,以次從二號篩篩起,以二號之篩底交三號篩,三號篩之篩底交四號,以次遞交至十號篩.二號篩之篩面,名曰頭號茶,三號篩之篩面爲二號茶,四號篩之篩面則爲三號茶,以此類推,至十號篩之篩面則名曰九號茶,篩底則名曰花香,卽茶米,此九號茶,除元號篩面之茶梗及十號篩篩底之花香外,皆須送入風車,利用輕重之別,搧出正副兩種,及花香,頭二三茶交上身車,四五六七八九號茶則交中身車.上身中搧出上中下三種茶葉,中身車則僅搧出中下二種,因風車之構造,正面分二口,車尾則尙有一口:第一口所出之茶,質地最良,是爲正茶,可直接發揀,車尾則爲極輕飄之片米,卽花香,惟流入第二口者,乃半飄半實之茶,名曰副茶,故須復加篩分,篩面方可發揀,是項風過之茶,除花香外,須再用各號

茶篩用抖篩法抖出其中珠茶,然後發交女工,揀出未能篩盡之梗,珠及雜質等,所謂抖篩法,乃篩之一端,用繩繫樑上,一端則持手中,抖篩時將持于手中之一端,上下震動,如是則惟圓形團結比篩眼爲大之珠茶,留于篩面,其餘則一概落下,珍眉之長度,雖較篩眼爲闊,但因狹長之故,仍能于上下震動時落下,抖篩之目的,全爲撈出珠茶之用,尙有所謂平篩者,卽普通篩法,茶葉之任何一端,苟比篩眼略大,卽不能落下,因無上下震動之故也.

以上各號茶發給女工分別揀後,送入烘焙間,作第二次之烘焙,時間爲五枝香,同時卽加入綠色顏料一小匙,(是項顏料關係重要,後章再論)工人翻拌手法及烘鍋之熱度,與第一次同.烘焙畢,因少數茶葉在經過多次之手續,有破碎之故,於第三次烘焙時引起烘焦及過度之虞,故于第三次烘焙畢後,須仍送篩分間,以次篩分,風過,分出正茶,(共九號與前同)殘片,及花香.

上列手續做畢,卽做第三次烘焙,時間爲六枝香,手法及經過與第二次同,顏料亦須于翻拌時再加入一小匙,分量比第一次略多,烘畢篩分,亦似第二次時,經過官堆之手續,所有九號正茶,做成珍眉針眉及珠茶,殘片則爲秀眉,花香則爲茶末,爲製造茶磚之用.

上述九號分類,爲普通基本分法,有許多茶莊,應用正副輔篩時,則比上述更爲繁複.

揀茶皆用女工及女童工,揀茶葉爲木製長方形之作檯,兩面對坐女工十人或八人,茶葉堆于桌上,每人一堆,揀畢用竹籚盛貯,各個女工做同樣工作,無分工合作之制,茶莊中所耗費之女工工錢,價甚便宜,故余等雖曾指示無盡輪帶之新法裝置,而多數茶莊,皆漠然無關於心,以爲反有礙手礙脚之弊,可見彼輩傳統方法之固執,亦即進步及改良之絕大妨礙也.

上述各項製成之茶,由官堆而裝入箱中,每箱約裝五十斤不足,箱係木製,用兩層木板套成,內箱之內紙糊錫皮壳一只,外箱之外則塗油漆,以避潮濕,幷書店號,茶名,產地,每家茶莊,皆有一種或數種專門茶名牌號,同一品質,及同一做法之珍眉,各有特殊名目,至不一律,亦爲直接傾銷之困難點也,此項箱茶運往上海後,由洋行茶莊傾出重製,關係于出洋影響頗大,下章詳述.

乙　平水茶

在錢塘江之東南,舊屬會稽道,有蕭山,紹興,上虞,餘姚,鄞縣,奉化,新昌,嵊縣,諸暨,天台,仙居等縣,叢山高峙,林壑優美,氣候和煦,土壤肥美,產茶甚富,在洋莊茶市中,獨樹一幟,頗稱重要,號爲平水綠茶,因所有製法及裝璜皆仿紹興平水鎭所產者而得名,製茶種類,全係綠茶,而珠茶尤佔多數,珍眉等甚少,銷路以美洲爲大宗,全盛時在淸末民初之間,每年產量約十二三萬担,最近則美銷驟減,年產僅五萬担左

右矣,平水綠茶和其他路莊特異之點,有二,即着色問題及裝璜問題,其餘則和徽州茶相仿彿,茲僅舉其特點如下:

A 着色問題　美國自禁止着色茶葉進口以後,平水茶因對于切身銷路有關,故居然一改陋習,所出茶葉,概不着色,然因在美無直接宣傳之力,被日本茶葉努力排斥之結果,銷路乃一落千丈,不可救藥,時至晚近,美國酒禁已開,再加了各種代用飲料,如咖啡,呵呵,等及印錫爪哇紅茶之排擠,即素有規模及組織之日茶,亦已開始降落,故在最近之將來,平水綠茶恐無甚發展之希望也.

B. 裝璜問題　平水箱茶有一五及二五之別,二五箱裝茶約五十斤,一五箱則僅二十五斤,其他綠莊僅有二五箱一種,一五箱之裝法爲平水茶之特有,運輸皆由甯波出口,運至上海,經洋商收買後,尙須再製打滑,使茶葉表面光滑平整,閃閃有光,以爲悅目而利推銷.

茲將最近五年來由甯波轉口之平水綠茶統計列下,以示每年銳減之猛烈

年份	數　量(單位担)	價值(單位海關量)
一九二八年	九七九九二担	四四〇九六四〇兩
一九二九年	八八一八九担	四一八八九七八兩
一九三〇年	八九七一六担	三四〇九二〇八兩
一九三一年	七七九七三担	二二二二二三一兩
一九三二年		

(註) 上述數字係珠茶之統計,因平水綠茶十九皆作珠茶之製造也.

丙 湖杭茶

茶之產于杭州市杭縣餘杭等處者,普通皆冒稱龍井,銷國內及香港南洋等處,價目甚高,真正龍井每斤售價在十元左右,龍井爲西湖獅子峯下之寺院名,真正龍井茶葉著名之由來,爲乾隆時曾于龍井獅峯間,御封茶樹十八株,號爲貢茶,品質特佳,惟現已無從考究確實地址,現在龍井獅峯間茶樹林立,已不能確知孰爲真正之貢茶矣.現凡在龍井獅峯間之茶,皆自稱爲真正龍井,其實品質確乎甚優,唯產量不多,每年不過六百餘担,施肥除草不遺餘力,製造上以旗鎗爲主,形式頗爲美觀,至于杭縣餘杭等處之冒牌龍井,形式雖和龍井相似,而土質氣候人工皆不及真正龍井,故每況愈下,而價值之相差亦漸遠,普通市上之廉價龍井,皆此類也.龍井茶之製法,頗爲特別,幼茶自第四年起開始採摘,每年四次,第一次在清明之前,僅摘幼芽,第二次在穀雨之前,摘一幼芽一嫩枝,式樣很像小旗一面,是卽旗鎗,第三次在立夏的時候,那時候的形狀和第二次的旗鎗彷彿,惟鎗尖有兩根小葉,第四次在第三次之後一個月,那時芽已成葉,而嫩枝則已長成茶梗了,杭州最大的茶號爲獅子峯之茂記,有茶園七五〇畝,長年工人廿人,在茶市時,臨時工人有五百餘,次爲翁家山,再次爲翁隆盛等,每年營業約

二三萬元不等,龍井茶之製法,大約可分下列四項步驟,

A 先將茶鍋洗淨,用松針燒至攝氏七八十度,將草紙醮燭油少許,拭于鍋內,傾入鮮葉約半鍋,用手播拌,務要每片鮮葉在鍋上略貼而不停留,上下翻飛,手法勻淨,迨鍋內發乍乍之聲,即須用棕帚將葉掃起.

B. 上述旗鎗,經過第一次炒青,即略有扁形,取出鋪于籃內,放通風處吹冷,同時將竹篩篩去粗枝茶梗等,欧約一小時即覆炒.

C. 覆炒熱度普通略低,兩手在邊用壓力將葉拍扁,待茶葉乾燥,即取出篩分粗細二種,并交女工發揀,揀去籽梗,即再炒一道.

D. 第三次炒法須炒至葉顯白毛,篩過,冷却,即可貯而待售,普通保藏之法,係用桑皮紙包好,和石灰同時放入甕中,以免濕氣之侵入,而保霉壞變味之弊,上述採,摘,炒,篩,皆須于一日內做好,方可保持味香之不變,而增進茶葉之價值,據浙江建設月刊之記載,真正龍井茶之成本,約如下表,

類別	價值	備註
1 原料	共九十六元	
墾荒	五	每畝茶園,需墾荒費洋廿元,種籽一元,種植費一元半,共計廿二元半,茶樹平均壽命爲十年,故每畝每年平均洋

		二元二角半,普通乾茶一担需茶園約二畝,故欲算每年每担之成本,需洋五元.
中耕除草及採摘	六五	中耕除草每畝需廿工,每工六角,計洋十二元,採摘每畝洋二十元,共洋三十二元,加倍得每担之成本數如上.
肥料	二一	
雜支	四	
捐稅	一	
2. 製造	共二十四元	每担龍井之製造費須三十二工,每工八角,計洋二十四元.
3. 燃料	共四元八角	每担茶葉需松毛四担,每担一元二角.
4. 損失	共二元	燈油等

共計　一百二十六元八角,卽每担眞正龍井之栽培及製造成本,地價及營業開消則不在內.

在杭州市之西北方湖州一帶,有臨安,於潛,昌化,孝豐,安吉,長興,吳興,武康等,亦爲產茶要地,銷路半作洋莊,半仿龍井,作洋莊者都充土莊茶莊之主要來源,每屆茶季上海土莊皆有專人來鄉收買,做法有炒青及烘青二種,炒青和龍

井相似,烘青則須揉烘,其法如下.

A 栽培　茶亦皆爲農民之副產物,無所謂茶園,種植施肥等亦不注意,記者在臨安鄉中,平地上所見之茶樹,高僅二尺餘,均瘦瘠異常,可見栽培之不注意矣.

B 炒青　揀枝葉嫩者,當日採下,傾入鐵鍋翻炒,鍋中亦放燭油等,一如龍井做法,惟因品質及手法之不及,市面價目亦比龍井爲大減,每担平均僅三十元至五六十元.

C 烘青　樹上採下之茶葉,揀出幼嫩者作炒青外,餘下之較大較老之枝葉,傾入鍋中,略炒,待葉狀發軟,折之不碎,卽取出放竹篾中,或茶床上,用雙手握緊,撚轉數十百次,使茶汁浸出之後,再重行吸入,卽放日光中晒約一小時,再放入茶鍋中或烘籠上烘乾,裝入麻袋背至市上求售,上海土莊特派人卽將是項毛茶運至上海,再製裝箱,經茶棧之手而售給洋商.

據民國十九年浙江農礦處調查報告,杭湖兩區之產茶數量及價值如下:

產地	產茶面積	紅茶	綠茶
杭州市	二〇〇〇畝		六三七担
杭縣	一二〇〇〇畝	一〇〇〇担	一一〇〇〇担
餘杭	七二三四八畝	一一九四〇担	二七八六〇担
臨安	一三五〇〇畝	八一〇担	七二九〇担
於潛	二八四〇〇畝		二〇〇〇担

昌化	二九二〇畝		八五〇担
孝豐	二二八六六畝		八〇〇〇担
安吉	二九八四畝		一九〇〇担
長興	二六二五畝	二五〇担	二六五〇担
吳興	一〇〇〇畝		五〇〇担
武康	五〇〇〇畝	一〇〇担	一九〇〇担
合計	一六五六四三畝	一四一〇〇担	六四五八七担

丁 土莊茶

中國江南各省,到處產茶,上述數處乃素有名望及產額豐富者,此外如江蘇本省及兩湖等處,產茶亦富,毛茶價額亦廉,離滬交通亦便,於是上海閘北一帶有土莊四五十家,應時而起,專收各省廉價毛茶運申製造,裝箱發售,因品質之高下混雜,售價亦在各路莊之下,土莊茶行之篩分,一如上述,徽州茶之製法,惟烘焙則僅毛茶來廠時烘過一次,卽行篩分,篩分後卽入機器烘籠,做第二次卽最後一次之烘焙,同時卽用種種顏料混入器內,比綠莊的烘而又篩,篩而又烘要簡單得多,篩分種類亦較少,蓋已從傳統的方法與習慣上,有所變更改進矣,所用烘籠着色機,係一金屬圓桶,插支于架,桶之中央有軸,可藉馬達之力,將軸轉動,則桶卽隨之而轉,大者可容一担,小者亦可入茶葉數十斤,桶下熱以火炭,軸之一端,有葉子扇作推進機狀,可使筒內空氣流通,不致太熱,所用顏料黃,白,藍,黑等種種不同,視需用而異,

如運銷亞爾及利則用淡黃,非洲東部則用黑墨,西班牙屬之非洲一部則用翠綠,餘則大都淡藍,依各家做出之牌號,及運銷地情形而異,烘染色料之時間,亦至不一定,完全取決于老于此道之工頭,憑素來之經驗,決定此顏料之分量,及烘染時刻之長短.

洋行茶莊

上述各項路莊土莊等的箱茶,經茶棧之介紹,賣給洋行茶莊,各洋行在銷費的大都會處,如非洲,美國等,與該地茶商皆有關係,每年新茶上市,便將各項新茶視市面之需用,來源之貴賤,利用着色的方法,染成種種色彩,標成數十種號碼,寄給消費處的茶商,由消費處茶商隨時需要,隨時來電議定價目,指出茶樣號數,需用箱數,上海洋行茶莊,乃就樣收買,再製,烘染,惟因各種競爭之結果,及榨取最大利潤之奢望,洋行所發出之茶樣,並不就拿各莊來路茶葉原樣寄出,而每以上等路莊作主,攙入各項廉價劣茶,因混合分量之不同,及色彩各別,故能分成多種不同茶樣,每次接到消費茶商來電後,上海洋行茶莊,乃由茶師之指導,取上等茶若干,中等茶若干,下等茶又若干,放入機器烘籠內,同時再加入所需用之顏料,在機內經過若干時之混合烘染,乃得所需指定茶樣,此種手法,純係手藝上之熟練,及經驗,偶一不慎,無意的或有意的攙入劣茶太多,或色彩過度,即無法挽回,每有喪失信用之慮,一旦信用喪失,此項作弊手續,

被消費者發現,洋行茶莊乃將整個舞弊責任,推諉于中國茶莊身上,歷來華茶在海外信用之喪失,皆此種黑幕存在之故也.

賣買手續及習慣

我國的茶葉都是農民的副產物,農民製成的毛茶,皆往附近茶莊求售,或由茶販登門收買,轉售給茶莊,凡毛茶到莊,先由看茶的買手,伸手袋中,隨意抽取看樣,置竹盤內視形狀之整否,條之粗細,色澤之鮮暗,及香氣之良否,於是開盤論價,成交後即過秤落簿,憑簿付款,其秤茶用稱,有以十八兩爲一斤,十九兩爲一斤,或二十兩爲一斤者,至不一律,大抵分莊則比門市略大,因需要個佣之故也,茶農所售毛茶,其乾燥之程度,以二十兩之稱合十六兩者,亦僅八成至八成半,若用十六兩之稱,則不過六成而已,茶莊買來之毛茶,若自製裝箱然後運滬銷售者,即稱路莊,若就所收毛茶裝袋運滬,在滬再製裝箱銷售者,名曰土莊,各幫茶葉自產地運至上海,所需運費大有上下,茲據上海社會局之調查列下:

茶名	起迄地點	毛茶每担運費	箱茶每箱運費
徽州茶	屯溪杭州上海	二元四角 至三元四角	一元一角 至一元四角
浙江茶	杭州——上海	一元四角	
湖州茶	湖州——上海	一元五角	

平水茶	紹興——上海	三元五角	二元五角
	新昌——上海	三元五角	三元
	嵊縣——上海	三元五角	三元
	奉化——上海	三元五角	一元五角

上列各項,係專指交通口岸,車船運費而言,至內地運至交通口岸,及其上下力合計,當有一倍或數倍于此數者,

還有關於資本方面,自茶農起以至茶莊,茶棧,直至洋行,種種階級,皆惟借貸是賴,其中層層剝削,重重壓迫,高利貸借之下,農民真苦不勝言,茲分別略述如下.

每年到了茶季,茶農就要準備茶米,搬運茶柴,買辦燒酒和猪肉,修理製茶傢伙,招雇製茶伙計,籌備開消工錢,村中無論何人,木匠泥匠裁縫以及私塾教員等,皆日夜從事於毛茶的製造,等到把茶製好,經濟較佳的茶戶,把茶賣了,便可休息數天,而那班貧苦茶戶便祇好出雇,這邊茶剛做好,那邊茶號又開工了,男子要去挑茶担,或進茶號去做工,女子便進茶號做揀茶的工作,等到茶號事情做完,已有陽歷九十月的光景,他們便囘去鋤茶除草施肥等,在這時期的生活費,便是被雇時所得的工錢,維持到了冬天極冷極凍雨雪紛飛的時候,那時如果沒有積蓄的餘糧,又無做工吃飯的地方,只得把第二年所產的茶葉當作抵押品,去向商店賒穀米,俗名"負茶米",或向富戶和茶商抵押銀錢,俗名

"負茶債",利息極高,譬如借洋八十元,明年收茶時須作百元計算,且又有預定毛茶之權利,卽到了來年茶葉做好的時候,別的地方或是別的茶客,雖出高價來買,茶戶不能賣去,必待債主以當地市價,再打折扣來買,茶葉假若做得不好,便要特別降價,又在稱茶時和算價付款時,亦較普通爲嚴,茶戶敢怒而不敢言.第一年借起了頭,差不多年年要借,永無反身之日,結果不至破產不已,這是茶農本身直接的第一層的剝削.

內地茶號資本,皆屬有限,少的數千元,或數百元,多的亦不過數萬元,從前外銷暢盛的時候,茶號之經濟有茶棧或本地錢莊爲倚傍,通融極易,現今茶市衰敗以後,僅茶棧方面尙可通融,然已取緊縮政策,故有許多茶號,銀根緊急時就出了極高利息,亦無從貸借,結果茶號倒閉,或減少營業縮小範圍,茶農產出之毛茶,便少人過問,只得貶價出售,常有虧累之事發生,甚致不足償付所謂"茶米和茶債".

茶棧本號皆在上海,惟各產茶地皆有分棧,專做貸款之事,平均月利皆在一分二厘以上,茶棧放款之交換條件,爲製出之茶卽由該茶棧出面,經手介紹于洋行而成交易,茶棧放款多寡,視各莊之信用而異,普通約爲出貨之二成,茶棧將茶售去,須待洋行付款後,方在款中除去貸出之數,利息,及一應費用等,時間三四五個月不等,據屯溪某茶棧負責放款人言,每年各茶棧在徽州屬貸出之款,所收利息,每

年至少須二十萬元云,此項利息之真正支付者,乃內地茶號及終年辛勞一無所得的茶農也.

箱茶由茶棧手中脫售于洋行,雖似直接賣買,而實際中間尚有買辦等等各式正當及不正當之佪佣,簡直黑幕重重,無法調查,茲將數項有名目的佣費,列下以見一班,

洋行費	電報費	驗關費	上下力
壓　磅	保　險	樣　茶	叨　佣
保　安	棧　租	商務律師	碼頭浚浦捐
釘樣出店	水客伙食	公會印花	貧病院
修　箱	棧　用	打　籐	補　辦
力　駁	檢驗費	茶樓磅費	花香保稅費
輪躉力	警　商	公　磅	洋行佪佣等等

上述各項有名目的開銷,再加各項運費等等,約占成本百分之廿.此數皆由茶棧收到洋行款項後,連利息,本金等一同扣除,若有餘利,再還茶號.茶棧有公會,此項佪佣等,皆有定章,不得任意增減,而任何茶莊,無論貸款與否,不得將製成茶葉,直接脫售于洋行,必由茶棧介紹,而取上述之佣費,此即茶棧與洋行勾結之一班.

茶棧資本亦甚微弱,大的茶棧約有十餘萬元,小的亦祇數萬,而每屆茶市每家茶棧方面的貸出,總要有數百萬之巨,此項巨款大都向錢莊轉借,而錢莊方面則由銀行轉借,故即就資金方面的來源而論,已有如許迴折,每一次轉手,

即多一層剝削,每一次剝削的犧牲者,並非錢莊茶棧,因爲他們不問營業之盈虧,他們的利息佣金是不會缺少的,有血本關係的只有茶農和製造箱茶的茶莊,然而茶莊若是蝕本,便可洗手不幹,另謀他業,只有茶農因爲衣食所依,却無法擺脫,啞子吃黃連,只好心裏苦.

上海的洋行茶莊,約十餘家,每年茶葉營業有三千萬海關兩之巨,此項洋行茶商魄力甚大,從前對于付款頗稱敏捷,現因茶業不振,他們亦得步進步,利用華商之無可奈何,付款期限每延宕至數月之久,遂致茶棧貸出款項之利息,增至最大,洋行宕款愈久,則茶棧之利息愈大,而內地茶莊及茶農所受之犧牲亦愈重也.

政府法令

現在國民政府對于茶葉出口已有相當注意,對內方面已有數個茶葉試驗場之成立,專門研究改良茶葉之栽培製造等事,對外方面亦有茶葉檢驗局之設立,取締劣質茶葉之出口,檢驗標準逐年提高,茲將實業部茶葉檢驗局所定一九三三年度茶葉出口標準品格列下:——

實業部商品檢驗局茶葉檢驗規程

第六條　茶葉有下列情事之一者,爲不合格

一　品質低于標準茶者

二　着色及利用黏質物製造者

三　攙入雜葉纖維礦質物或粉飾物者

四　有黴蒸烟臭及腐敗品者

五　綠茶紅茶花燻茶用一公分具六十三網眼之篩（卽一英寸具十六網眼之篩)篩出粉末超過百分之五者

六　同號貨物品質參差不勻或混有尾箱者

七　包裝不良或有破損者

第七條　前條第一款之標準茶應召集有茶葉學識經驗之人員商擬呈由實業部核定公布之幷得按年改定逐次提高

一九三三年度茶葉檢驗標準及着色茶取締辦法

甲　檢驗最低標準

一　綠茶以平水二茶七號珠茶爲標準紅茶以湖南次紅爲標準其餘各種茶葉以色澤相當味香可口爲標準

二　紅綠茶水份以百分之八五爲標準但本年度綠茶以百分之九爲合格紅茶以百分之十一爲合格其餘各種茶葉以百分之十二爲合格

三　綠茶紅茶之灰分最高以百分之七爲標準但本年度最高以百分之七·七爲合格

乙　着色茶取締辦法

一　凡商人檢驗着色茶時須將所着色料之名稱詳細填明遇必要時得令呈驗顏料商之分析成分單

二、茶葉着色過濃與製定標準茶相當或更重者禁止出口

三 凡着有黃色鉻酸鉛（俗名淡黃三魚黃義記黃等）綠色亞砒酸銅氫氧化銅(俗名砂綠等)及其他有毒色料者禁止出口

附註一 水浸出物紅茶不得低于百分之廿六綠茶不得低于百分之卅二

附註二 浸過葉 紅綠茶均不得超過百分之六十

今後改革之芻議

我國紅茶在海外的市場,被印錫爪哇紅茶侵奪迨盡,二百五十年來華茶在世界上稱雄令譽之殘迹,惟有年銷三十餘萬担之綠茶及極少數之紅茶,花熏茶等而已,然而近年來日本綠茶努力傾銷之結果,恐此碩果僅存之綠茶市場,亦將不爲我有,若再不急起直追,挽此殘局,則數年之內,綠茶之銷路,將蹈紅茶之覆轍,而同歸于盡矣.現在政府方面,雖已有相當注意,對於品質上頗有改良之决心,然對於直接推銷之根本手續,尚未着手從事,未能脫離洋商之操縱,以致一切皆受制于人,不能自振,甚至國家法令,視若具文,不予遵照,爰將補救管見,略述如下.

所謂洋行茶商操縱之害,不僅直接的任意攏斷茶市價目,及宕款遲付等,尚有種種間接的黑幕,令人髮指,原來此輩洋商經營華茶,唯顧目前私利,至於整個華茶前途計劃,

則彼輩未嘗計及,一切攙僞着色等作弊行爲,皆係此輩發起,一旦被消費者發覺,則將整個不規則不道德之行爲,推諉于華商茶莊,而自居于中間經手商人之列,不幸華茶在世界市場上信用掃地,則此輩正可另銷印度錫蘭爪哇紅茶,或日本綠茶以代之,此輩利潤,固不受絲毫影響也,不知不覺之中,英屬之印錫紅茶,乃得利用華茶劣跡宣傳,而漸奪中國綠茶之銷路,從前在美國華茶之失敗于日本綠茶及印錫紅茶,此一大原因也.

在此多年摧殘破壞之操縱政策之下,中國綠茶在海外每年仍有十五萬担之銷路者,僅法屬非洲一處,這固爲該處對於綠茶有風俗,習慣,口味上之特別嗜好,故印錫爪哇之紅茶,不爲當地土人歡迎,英人乃不得不仍繼續販運我國綠茶,以應彼邦需用,但最近數年,該處已有日茶之猛烈發展之勢,計于三年中日茶進口數由六噸增至二千噸以上,佔進口茶葉總數四分之一,此種猛進之速度,若繼續增長,則在數年中華茶之未敗于印錫紅茶者,將盡爲日本綠茶所奪矣.據法國茶葉專家顧博氏云:"日本綠茶不及華茶遠甚;所以能侵奪華茶市場者,不着色,不攙假,直接販賣能宣傳廣告而已."原來日人在非洲常公演各種電影片,表示日茶之栽培製造如何合乎衞生,而華茶則糞污狼藉,污濁不堪.常頒發傳單,說明書,小册子等,言日茶之含有多量惟他命,而華茶則無等,其實凡此種種宣傳,皆係利用我

國無代表發言之機關,故信口雌黃,自拉自唱而已.我國方面因無專員駐非,故不能爲有力之辯白,各種劣點皆無形默認,且日人又利用事實,明白指出華茶之攙假,作弊,染有毒性顏料,多量足致人命等,故其效力極大,日茶銷路由是猛進.

國內關心於華茶復興者,頗不乏人,復興計劃,在報章雜誌中,亦常可見到.大都主恃改良品種,以求適合歐人口胃;利用機器,以增生產;因世界銷費量,紅茶比綠茶爲巨,故多致力于紅茶之改革,以圖恢復從前之黃金時代.總而言之,大都偏于研究的,農業的,而忽于最重要之商業的,經濟的直接販賣之急務.故鄙見以爲第一步驟,應設法挽救目下之頹勢,不使擴大,即保持非洲等處之市場,勿被日茶侵奪,然後可談第二步研究改良紅茶之栽培,及製法,與印錫爪哇爭他日之短長.此種理由,甚爲明顯,第一因爲我國地處溫帶,所製紅茶能否如熱帶之印錫爪哇紅茶,有同樣之濃烈口味,尙非數年中可以得到結論;第二若我國廣種"印度種"茶樹,固不論經濟及時間上之困難,即使種後,因氣候及土質之各種關係,印度種之特性及優點,能否長久保持;第三即使華茶可以改良到印茶一樣優良,但我國無航運世界之船舶,魄力雄厚之茶商,恐仍將操持于大半英商之手.日人數十年來,處心積慮唯求戰勝華茶者,亦知地處溫帶,不宜紅茶,故棄難就易,集中力量,向我攻擊,日茶攻擊

之結果,已使美國坎拿大市上,只見日茶及各國紅茶,而不見我國茶葉,(現在運美之華茶,大都爲旅美華僑領用,非美人也). 俄國則於五年之內,激增四倍,同時華茶則激減四倍,在非洲則於三年之中,驟增三百倍,由六噸增至二千噸,佔總額四分之一.事急矣,政府諸公及我國茶葉專家,宜速設法保持此碩果僅存年銷十五萬担之綠茶,有特殊習慣的非洲,弗爲日茶蠶食,使我國數百萬茶農,不致被迫爲匪,現在茶樹不致戰傷迨盡,基礎定,然後可談發展或復興,故當今之急務,雖有千萬方針,皆甚重要,而最要緊者,應爲直接推銷販賣.

欲達到直接推銷販賣之目的,須有政府提創及經營,否則中國茶商如一盤散沙,資力有限,決不能團結一致,而有所企圖,故須由政府選派專員,常駐非洲之摩洛哥亞爾及利和都尼斯等處,除調查該地商業情形,出產原料,及需要物品外,對於茶葉應做之主要工作爲:

1 答辯日茶之攻擊 日茶常用電影或小册子等,宣傳華茶劣點,若不答辯,卽等于默認,影響市場最大,特派員應據理痛駁,不留餘地.

2. 宣傳華茶優點 應就地理上,歷史上,衛生需用上立場,說明華茶之香,味,及所含單甯,確實優異之點,決非後學日本,所能望其項背.

3. 設立品茗館 在通都大邑,熱鬧地點,地位不必太大,

特建我國宮殿式之房屋,闢作品茗館,內容佈置完全東方古代化,而又合乎近代舒適條件,一方宣揚我國文化,一方面又可吸引該處酋長等貴族階級,俾養成品茗習慣,不出數年,上行下效,華茶銷路,將見激速增高,此項品茗館之經常費,卽可由營業項下撥支,惟開辦費則須由政府支付,否則亦可召募該地商人,作此營業,而由中國政府給予津貼,品茗館中設樣子間,廉售華茶樣品,設批發處,代收各城鎮茶葉定單.

4. 介紹 現在非洲商人亦知英人操縱之不便,故頗思與出口華商發生直接關係,每月來滬函詢之郵件,常有十餘封之多,因吾國方面在非洲既無正式之代表,在國內又無聯合之組織,故此項信件皆未能有所應用,賣買兩方,皆感極大之苦痛.上述計劃如能實現,則華茶在消費地有直接發言之機關,不致被人信口雌黃,任意摧殘破壞,洋行之操縱亦可逐漸淘汰,直接推銷販賣始有成效,各種着色作弊行爲,始有肅清之望,政府法令及茶業檢驗局製定之標準規程,亦可厲行無阻,這因爲着色目的,原是遮飾攙假作僞之方法,洋行方面若不着色滲混,卽不能攙假作僞,卽無最大利潤可圖,故政府自頒佈着色命令以後,洋行卽藉口非洲土人習慣不能改易,要求馬虎通融.試問日茶並不着色,何以能銷路激增?此蓋與虎謀皮之必然結果也.故洋行茶棧存在一日,實業部之檢驗茶葉命令,終不能有徹底實

行之一日,非洲土人心目中之華茶,將永遠爲染有毒性顏料之茶葉,將永遠排斥而飲用不染色素之日本綠茶矣,惟吾國有專員派駐後,不着色之華茶方有呈列于非洲市場之希望,而非洲人心目中,方知華茶亦有不着色者!

5. 經費 此項計劃最難實現之處,厥爲經費一項,然若經費無着,則一切計劃祇能徒託空言,竊謂政府已將茶葉出口稅完全取消,原思所以減輕華茶成本,獎勵出口,孰知免稅之結果,僅一班少數外國洋行茶商,得其利益耳.內地之茶莊及茶農,固未嘗因此得有小惠也,反之,今年因廢兩改元之後,去年每担茶價爲一百兩者,今年反減至一百元,相差竟有百分之三十之巨.茶價在洋行操縱下之任意抑落,由此可見一班,故政府此項出口稅之免除,無異爲虎添翼,助長外國茶商之剝削力量耳,何不恢復此項稅則,加以整理,卽以此款作爲改善茶葉前途之用,對內則作試驗改良茶種栽培及製法,津貼贊助產銷合作社之組織,對外則作宣傳廣告派駐專員之用.

6. 努力組織各地茶農產銷合作社 余等在祁門平里,曾見該處茶葉試驗場,有茶農產銷合作社之組織,栽培製造以至裝箱運滬販賣,皆由合作社一手包辦,省却許多中間商人之剝削,不過其結果仍須經過洋行之手,故幷不爲彼輩十分歡迎.若能直接販賣,至消費地,幷洋行一層之手續亦免之,則茶農之受惠,豈淺鮮哉,故一旦直接推銷販賣,

略有端倪,此種合作社之組織,必將感到缺乏,故政府方面應有全盤計劃,分全國爲若干產茶區,每區統率若干合作社,合作社之工作,不僅爲教導農民,栽培,剪枝,台刈,購造簡單機器,製造工業化之茶葉銷運海外,且須確定茶品之標準,研究品種之改革,計劃產銷之平衡,真正爲農民謀利益,則農村經濟可以安定,國家元氣方可養成也.

此項合作社之組織,實爲基本工作,但恐短時期內不能成立,而現在各地各製茶山莊,則已有所謂公會者成立,如余等至屯溪時,卽蒙休甯茶葉公會招待,此種公會,每個產地皆有,但并不互通聲氣,而公會之唯一任務,則當地官廳若有經費上或稅則上之攤派,公會乃拍電呼號,以冀幸免,平日對於公共利益絕不過問,至若產銷之統計,改良之方針等,則從未夢及.會中職員普通僅書記一人,且兼營他項職務,故所謂公會者等於虛設,此種現象固爲我國舊法商界中之積習,而根本原因,實因洋商茶莊及貸款茶棧聯合制度之下,無發展之希望,及可以舉辦之事也,故若上述直接推銷販賣計劃成立後,各地山莊及上海土莊,爲求發展其本身營業起見,甚易聯合各地之公會,組織一代表公會,與海外專員互通聲氣,并可源源不絕的供給各種材料,以爲宣傳之資料,以爲組織合作社時之過度時代之代理者,此時貸款茶棧及操縱的洋行之聯合陣線已破,華茶前途之最大障礙已除,前途始有發展繁榮之希望.

7. 恢復俄國銷路　俄人向嗜紅茶,從前帝俄時代俄商在漢口設廠,製紅綠茶磚兩種,紅茶磚供俄人自用,綠茶磚則由西伯利亞鐵道,運至依爾庫次克內外蒙古新疆青海等,供遊牧人民之用,綠茶富於惟他命,能補專食肉類之遊牧人民之不足.革命以後,俄人營業以國家立場,改海參威設廠製造,日本綠茶遂亦爲製造綠茶磚之原料,以其交通便利,價廉合算也,我國與俄絕交,日茶銷俄數乃大增,五年之中,激增四倍,今我與俄復交,宜從政治及外交上立場,與俄簽訂商約,今後之茶市,恐仍能爲我所奪囘,蓋日俄在國交上頗多衝突之點,日本之所利,非俄人之福也.

國民政府現已注意開發西北,將來如能實現,交通便利後,則我國將能自運茶葉至蒙囘青新等處,而無需乎俄人之越俎代謀矣.

8. 復興美國銷路　美國之華茶前途,頗不樂觀,原因甚多,要爲印錫爪哇紅茶之宣傳結果,美人之一部分已改飲濃烈之紅茶,又因酒禁大開,又一部分人民則已改嗜酒類,支配美國飲料市場者,僅酒精類飲料,咖啡,及英屬印錫之紅茶耳,中日兩國之綠茶皆不能有所發展也,觀近來日茶減退之數字已可知此言之不謬.

結　論

總而言之,統而言之,華茶外銷之不振,皆因不能直接推銷,一向倚賴他人,從前茶葉爲我國獨家出產時代,絕無絲

毫影響,現在則非但代我販賣之英人,在印錫等處已有良好之茶葉出產,卽東鄰日本,南洋爪哇,亦有多量茶葉產生,彼輩皆有雄厚之推銷魄力,華茶處此商戰情形之下,失敗自爲當然之結果,故今後之辦法,宜就地形氣候之特長,用科學化之生產,製造多量廉價綠茶,直接推銷於海外,先將日茶打倒,然後再設法侵占紅茶之市場,否則隔靴搔癢,緣木求魚,非澈底解決方法,所謂東北四省未復,而西南亦非吾有矣.

至若禁止攙僞,不准着色,意固至美,法固至善,其如販賣之權不在我,洋行茶棧不予聽何!

植物生理學史略

(續第三卷第三期)

張 珽

第九章

植物營養方式之研究

第一節 植物營養之基本現象.

1860 年之頃,植物生理學者於植物營養方式之綜結現象,猶未認識明確. "同化作用 Assimilation" 一詞之釋義,卽尙並各種食物材料之攝取,食物之製造,及自食物再合成體質之真正同化作用,賅括在內.坐是當時流行之見解,率以爲植物之營養,偏在合成 Anabolism 方面,專由簡單物質,以構成生命所必需之高等化合物,與動物營養之偏於分解 Catabolism, 卽專將高級化合物復化簡單者,適各在一端. 至 1861 年,此種似是實非之說,始漸由動搖而漸至傾圮.

I. 動物植物根本營養現象相同之證明:

1. Max Schulze 1861 年及 1863 年發表其研究,說明組成動植物生命物質之基本體,卽動物學者,所謂 Sarcode 與植物學者所謂 Protoplasm (當時限指植物原形質而言)在物理學,化學,生理學功能上,胥爲一致.

2. 然 1874 年之頃, British Association 在 Belfast 開會時,會袖

窶倫之學者 Hooker 致詞,猶謂動物取植物爲食,乃自然之規律.

3. 及後動物生理學者發見酵素爲動物營養中發動多種化學作用之物質,建立"醱酵作用"一名稱時,植物學者亦遂努力作同樣之尋求,結果知植物營養中化學變化,亦多由酵素司之,而動植物營養現象根本相同之語,人始不疑.關於此方面研究之學者,最著者當推 Bourquelot, Hérrisey 師弟,此外則有 Payer, Persoz, Green, Kjeldahl, Brown, Morris 諸人.

II. 植物之高級化合物營養現象 Heterotrophism.

A. 高等植物:

1. Böhm, Meyer, Schimper 等,(見前光合作用之研究章)發現植物能利用糖類以製造澱粉.

2. Hampe Knop Wolff 諸學者同於1865年發現植物根能吸收 Glycocoll, Asparagine, Leucine 以至於 Tyrosine 等含氮化合物,以爲氮之給源.

3. Van Tiegehem 1873 年——1877 年研究外胚乳種子中胚與胚乳之關係時,發現胚吸收胚乳而生長,但胚乳可用碳水化合物及蛋白質等之溶液以代之.

4. Correns 1889 年研究花粉管通過花柱之現象,發現花粉能在人工配合之培養基上發芽生長,一如天然.

5. Molisch 1893 年同樣發現爲之證明.

6. Green 1893 年作相同研究,發表謂花粉管之營養狀態,與菌類之營養全同.

B. 菌類藻類:

1. Pasteur 1860 年——1862年研究菌類之碳素營養,結果發現菌類雖與高等植物不同,不能利用大氣中之 CO_2 以行光合,然却與動物之營養現象相似,能利用種種高級碳化物,而關於 Racemic acid 之選擇力,尤爲特別.

2. Nägeli 1879, 1882 兩年; Reinke 1882 年繼續發表關於菌類利用碳化物情狀之研究,謂菌類能利用多種繁簡相差頗著之碳化物以資營養.

3. Beijerinck 1890 年發表謂地衣藻 Lichen-algae對於結合氮之供給,最愛 Peptone.

第二節 植物界之共生生活 Symbiosis.

I. 地衣中菌與藻之共生生活:

1. Sachs 1853 年提出謂岩苔類 Collema 無節體(當時尙無人知地衣爲藻菌共生之生體)中兩種組織原素各具獨立性.

2. Schwendener 1860 年始明定地衣類爲藻與菌之集合.

3. Reess 同年發表其關於岩苔類生理現象之研究,完全與 Schwendener 同意.

4. De bary 1879 年始明詔謂在地衣中,菌類藻類,皆營共

生生活 Symbiosis.

II. 高等植物間之共生生活:

A. 吸根 Hausteria 現象:

1. Solms-Laubach 1875年研究檀香科 Santalaceae及 Rhinantheae 科植物之吸根,與他植物之根,混生一處,而附着於其上者,以爲是蓋寄生 Parasitism 之一例.

2. Koch 1889 1891 兩年就吸根之形態學上親緣關係作研究,以爲此等半寄生植物與其寄主間之關係爲共生而非寄生.

3. Heinricher 1897 年以後繼續研究吸根在形態學上之親緣關係,陸續在 Pringsheims Jahrbücher für Wissenschaftliche Botanik 上發表.

B. 槲寄生科 Loranthaceae 之研究:

1. Pitra 1861 年發表其關於槲寄生科植物之研究,以爲此等植物不過經由寄主間接運輸得水及無機鹽而已.

2. Hartig 1875 年發表謂槲寄生科植物與其寄主實營共生生活而非寄生.

3. Bonnier 1891 年發表與 Hartig 同意.

III. 高等植物與下等植物之共生生活:

A. 根瘤細菌與豆科植物: 固氮現象中已詳述關於此兩類植物之共生研究史,茲不復贅.

B. 菌根 Mycorhiza:

1. Kamienski 1881 年在水晶蘭 Monotropa 之根上發現有外菌根.

2. Frank 1887 年見多種森林樹木亦具有外菌根.又於石南科 Ericaceae 及其近親之 Epacridaceae 科,發見內菌根.次年,乃發表論文,討論菌根情形,而確定外菌根 Ectotrophic mycorhiza (菌絲體包於植物根之外部者)與內菌根 Endotrophic mycorhiza (菌絲體藏在植物根內部者)之分別.

3. Schlicht 1889 年發表其所見多種植物內菌根之情形.

4. Magnus 1900 年研究 Neottia (蘭科植物)內菌根中菌類穿入之情形與其在皮層細胞中生活之狀況,有所發表.

5. Stahl 1900 年亦發表關於 Neottia 與其菌根中菌類共生關係之研究,尤為詳洽.

第三節 植物之寄生生活:

I. 腐生 Saprophytism 與寄生 Parasitism:

1. Wiesner 1871 年發表其關於列當屬 Orobanche 生活情形之研究,謂此等植物能由營腐生生活 Saprophytism. 漸變而營寄生生活 Parasitism.

2. Koch 1880 年關於菟絲子屬 Cuscuta, 1887 年關於列當屬之研究,所得結果亦同.

3. Pierce 1894 年之發表,亦謂菟絲子確有由腐生漸變為寄生之經歷.

4. Heinricher 1895 年發表謂 Lathraea (按即 Rhinantheae 中之

一屬)亦爲由腐生漸變爲寄生之一例.

II. 病源微生物 Pathogenic micro-organisms:

病源微生物中,有多數爲細菌及下等菌類;此等植物,皆爲寄生,蓋無例外.關於此種研究,自 Pasteur開其端以來,大爲科學界所注意,遂有長足進展.醫學者視病源細菌之研究等爲其急務,必當從事.同時植物菌病害學者亦努力於細菌及下等菌類在植物之寄生.此四十年中,兩方面所積功績,頗復不尠.以非純正生理學範圍,故不詳及.

III. 代謝寄生 Metabiosis (舊譯半共生)與選擇寄生:

1. Marshall Ward 1899 年提出代謝寄生一名,以稱寄生生活中之一種奇特現象:——即首由一種寄生植物,侵入寄主體中,使其組織死亡;第二種腐生植物(普通恆爲菌或細菌)乃得於此已死組織中繁殖.後此代謝寄生一名,引用漸廣,並好氣細菌(見前章)之銷盡游離氧,嫌氣細菌乃就此無氧之環境中肆其繁殖者,概予賅括.

2. De Bary 1884 年指出謂植物對於寄生生活,具有選擇性.多種植物能腐生亦能寄生,當名之曰隨適性 Facultative 寄生生物;另有一羣植物,祇能在生體中營寄生生活,出生體輒即死亡者,則名偏執性 Obligate 寄生生物.

第四節 食蟲植物 Insectivorous Palnts (or Carnivorous plants)關於食蟲植物(或稱肉食植物)之知識,1860年以後之進步爲最速.而Charles Robert Darwin 1875年刊行之"食蟲植物" Insectivorous Plants 一書,實爲此時期中空前絕後之大著作,其種種觀察與推論,至今猶保有不朽之地位.

I. 豬籠草類 Pitcher Plants:

1. Hooker 於1874年 British Assoccation 在 Belfast 開會之頃,將以前關於豬籠草類之知識,作一綜結報告,其述Sarracenia屬,豬籠草 Nepenthes屬, Darlingtonia屬,等捕蟲囊捕蟲之裝置,及其捕蟲方法.同時並說明謂豬籠草屬囊狀葉中之液體,有消化力;此消化力乃由囊之內壁所分泌胃液酵素Pepsin類消化物質生出.

2. Mellichanp 在1874年左右亦發現 Sarracenia 囊狀葉中之液體,爲葉內壁之分泌物,初非積存雨水.

3. Von Gorup-Besanez 及 Will於1876年研究豬籠草捕蟲葉分泌液對於絲纖維質 Fibrin 之作用,發現絲纖質能受此分泌液之分解而變爲Peptone. 兩氏歸此分解作用於液中之一種酵素,此酵素僅能在酸性液中有作用.

4. Vines 1877年以甘油 Glycerine浸漬豬籠草之葉,析得一種酵素;且證明在葉未受刺戟以前,此酵素乃成酵素原 Zymogen之形狀而存在.

5. Schimper 1882年發表其關於Sarracenia之研究,謂死於Sarracenia捕蟲葉中之小動物,腐敗後所生成物質,Sarracenia

皆能吸收利用之,唯似未可見有酵素之分泌.

6. Dubois 1890年發表謂豬籠草葉中之消化,爲細菌所引起之腐敗,非酵素作用.

7. Tischutkin1891年贊同Dubois之說.

8. Vines 1897年再就豬籠草捕蟲葉作詳盡研究,發現其葉確能分泌酵素,且酵素爲胰蛋白酵素 Trypsin 類.

II. 茅膏菜科 Droseraceae:

A. 茅膏菜屬 Drosera:

1. Nitschke 1860年注意於茅膏菜屬之捕蟲作用,發表論文,詳述其構造及習性.

2. Scott 1862年發現其葉上觸手毛 Tentacles 能因外界刺戟而立反摺於葉面.

3. Mrs. Treat 1873年曾悉心檢視茅膏菜屬之三種.

4. Warming 1873年於觸手毛之微細構造,有研究發表.

5. C. Darwin 1875年於其大著作"食蟲植物"中,始提出關於茅膏菜類捕蟲作用及消化作用之具體系統討論. Darwin 之研究,雖全部食蟲植物皆在其範圍中,但最注意者,則爲茅膏菜屬.

B. Drosophyllum 屬:

1. C.R. Darwin 1875年發表謂此屬之各種特點,皆與茅膏菜屬相似,

2. De Wevre 1895年又作有詳盡之研究.

C. 捕繩草屬 Dionaea: 捕蟲植物受知於歐洲學術界,當以捕蠅草 Dionaea muscipula(即所謂 Venusfly trap)爲最早.

1. Ellis 1768 年之頃,即已知其有捕蠅之特性.

2. 1800 年以前,頗有學者,注意其各種特徵,著爲鱗爪記載.

3. Curtis 1834 年發表記載,以當時學術界之情況言,已備極詳盡.

4. Nitschke 1860 年復細究其習性.

5. Canby 1868 年研究捕蠅草葉在消化後吸收消化產物之經過,有精當之推斷發表.

6. Mrs. Treat 1871—73 三年間亦有關於捕蠅草之研究.

7. C. Darwin 1875年之巨著,乃將此方面之研究,爲最完善精密之結斷.

D. 貉藻 Aldrovanda 屬:

1. Cohn 1875 年發現其葉之捕蟲作用,具與其近親之捕蠅草屬相似.

2. C. Darwin 1875 年之名著,亦有關於此屬之討論.

III. 狸藻科 Utriculariaceae

A. 狸藻屬 Utricularia:

1. Crouan 1858 年即曾注意狸藻,而發現其捕蟲囊中內有小形水生動物.

2. Holland 1868 年亦有同樣之發現發表.

3. Cohn 1875 年之發表,關於狸藻屬有重要之發現.

4. C. Darwin 1875 年之鉅著,有兩章專論狸藻屬,對於其捕蟲後之消化作用, Darwin以爲容或可以有酵素存在.

5. Mrs. Treat 在此前後亦曾有關於此類植物之硏究,懷疑其有眞正之消化作用,唯承認其能吸收腐敗動物質.

6. Schimper 1882 年之發表,亦謂狸藻類並無消化作用.

7. Darwin 曾記載有數種陸生狸藻類,謂其一切捕蟲作用等,大概與水生種類相似. Schimper 1887 年又有所發現.

B. 捕蟲菫屬 Pinguicula: 此屬中最著名之捕蟲菫 Pinguicula vulgaris, 爲 Darwin 首創硏究材料之一.據 Darwin 之觀察,捕蟲菫之葉,不僅能消化昆蟲遺體,即他種植物之花粉,葉,種子等,凡落入其葉中者,亦恆可消化之取爲養料.同屬中尙有兩種,其性質亦大概相同.

C. Genlisea 屬:

1. Warming 1874 年記載一種名 Genlisea ornata 之捕蟲植物,其捕蟲裝置與方法與狸藻大略相似.

2. C. Darwin 1875年另記載有三種 Genlisea.

IV. 食蟲植物捕蟲之機轉與意義:

A. 捕蟲時葉之運動: 關於捕蟲葉之刺戟感應之硏究史,將於後第十一章另爲詳細之挈述.

B. 消化作用之機轉:

1. C. Darwin 1875年之發表,以爲消化液之分泌,爲原形質活動之結果.

2. Reess及Will 1875年之研究報告,謂捕蟲植物(特指茅膏菜類)消化液之酸性,起自液中所含蟻酸 Formic acid($HCOOH$).消化酵素,可以甘油自葉中浸出.但此酵素未遇酸性液時,始終無顯著之消化力量.

C. 吸收之意義:

1. C. Darwin 1875年提出謂食虫植物確能吸收動物性氮化物以資營養.Saxifraga umbrosa能吸收肉汁以增長.其他肉食植物之葉,皆能攝取氫氧化錏淡溶液,碳酸錏等以取得氮.且以爲此等植物實能自大氣中吸收混在之硇精及碳酸錏.

2. C. Darwin之子,Francis Darwin 1878年發表研究,以同樣之兩組植物爲材料供實驗,一組予以動物性食料(主爲蚜虫類),一組則隔除動物性食料,而比較其生長結果,得知食虫植物吸收動物性食料,確有裨於其生長.

3. Von Raumer 1878年有同樣實驗,所得結果相似,唯不若F. Darwin之完善.

4. Büsgen 1883年亦有類似研究,證明F. Darwin之結果.

(未 完)

家鼠之解剖

(續第三卷第四期)

黃震

筋肉

預先數日採集材料,醉殺之,然後去其皮膚,投入酒精液中以備用.

A. 頭部筋肉 (The muscles of head part).

1, 咬筋 (Masseler)——口之後隅,有連結上下兩顎之大形筋束,即咬筋.始於顴弧之下緣,而終於下顎關接骨之外面,蔽覆下顎之後半部.

2, 顳顬筋 (Temporalis)——咬筋之背側,適當眼與耳之間,亦即前額骨,顱頂骨及鱗狀骨之側面,有一扁平筋肉,起於顳顬窩內面,而終于下顎骨冠狀突起之尖端,是即顳顬筋.

3, 外翼狀筋 (Pterygoidens externus)——除去前記兩種筋肉後,於下顎之內部現一對筋肉,始於蝴蝶骨之下面,終于下顎骨,後部之內面,是即外翼狀筋.

4, 內翼狀筋 (Pterygoidens internal)——與外翼相對之另一對筋肉,即內翼狀筋.

B. 頸部筋肉 (The muscles of neck part.)

5, 闊頸筋 (Platysma) ——頸之兩側面,有廣而薄之膜狀筋,曰闊頸筋.

6, 胸鎖乳頭筋 (Sternocleidomastoidens) ——闊頸筋掩覆之下,有內外排列之二對筋肉,出於胸骨之上端,及鎖骨之中段;前行,終於鱗狀骨之兩側,是爲胸鎖乳頭筋.

7, 腹顎筋 (Siaastricus) —— 鱗狀骨之下方,有一筋肉,其始部進於鱗狀骨之內方,迨至舌骨附近,成爲腱質,旋復以筋肉纖維終於下顎之中部,是卽二腹顎筋.腱質之前部筋質曰前腹;後部曰後腹.

8, 錐狀舌骨筋 (Stylohyoidens)—— 二腹顎筋之內側出一筋肉,與舌骨之後角並行,是爲錐狀舌骨筋.

9, 顎舌骨筋 (Wylohyoidens)—— 下顎骨之前部內側,出一筋肉,與二腹顎筋之骨側合向後方,而終于舌骨體前面,是卽顎舌骨筋.

10,頤舌骨筋 (Ceniohyoidens)——顎舌筋之背側,有同始于下顎骨前部內面,而終於舌骨體者,曰頤舌骨筋.

11,肩胛舌骨筋 (Omohyoidens) —— 肩胛骨之基部腹面出一筋肉,終于舌骨體,是爲肩胛舌骨筋.

12,胸骨舌骨筋 (Sternohyoidens) —— 始于胸骨把柄之腹面一筋,與肩胛舌骨筋同止於舌骨體,是爲胸骨舌骨筋.

13,胸骨甲狀筋 (Sternothyroidens) —— 頸部皮膚之下,有一對筋肉,被覆於甲狀腺之腹面,是爲胸骨甲狀筋.

14,甲狀舌骨筋(Thyreo-hyoidens)——胸骨甲狀筋,胸骨舌骨筋及肩胛舌骨筋之間,有一筋肉連于舌骨者,即甲狀舌骨筋.

15,斜角筋(Scalenns)——頸之側面深部,以腱始於頸椎橫突起,後向,而終于前部肋骨之上面的數對筋肉,曰斜角筋.

16,頸長筋(Longus Colli)——密接頸椎骨之腹面,有一對長筋.始於後方頸椎骨之腹面而終于前方椎骨之前面及橫突起處.是爲頸長筋.

17,頭長筋(Longus Capitis)——與頸長筋同位于頸椎骨之腹面處,有另一長筋.始於後部頸椎骨之橫突起,而附着於後頭骨之基部,與後頭骨基部若干短筋相連,是曰頭長筋.

18,前頭直筋 (Rectus Capitis antesior)——連絡載械(第一頸椎骨)之橫突起與後頭骨基部下面之筋肉,曰前頭直筋.

19,側頭直筋 (Rectus Capitis lateralis)——與前頭直筋同起于載械之橫突起上,而連于後頭骨基部側面之筋肉,曰側頭直筋.

20,後頭直筋(Rectus Capitis Posterior)——連絡載械之神經棘,與後頭骨上,有大小二對筋肉,曰後頭直筋.

21,上頭斜筋 (Obliqus Capitis superior)——後頭直筋之兩側,有連絡于載械橫突起與後頭骨外側部之筋肉曰上頭斜筋.

22,下頭斜筋(Obliqus Capitis inferior)——擴張于樞軸(第二頸椎骨)之神經棘與截械之橫突起間,有斜走之短筋,曰下頭斜筋.

C. 胴部筋肉(The muscles of trunk part.)

I, 背部(The back part)——背面皮膚之下,被以廣闊之背腰筋膜(Dorso-lumbar fascia),與頸部皮膚底下之頸筋膜(Cervical fascia)相連接.

23 僧帽筋(Trapezms)——頸之後部,於背面中央線兩側,有斜向肩胛骨突起及肩峯間之三角形扁平筋,即僧帽筋.

24,背闊筋(Latissimus dorsi)——僧帽筋之後方,被覆于背部後半部之三角形筋肉,曰背闊筋.始於胸椎後方之神經棘上,左右斜向前外方,而附着於上膊骨前面之三角隆起處.

25,菱形筋(Rhomboidens)——僧帽筋之前部下面有菱形筋,其起于後頭骨之中央突起及頸椎骨之神經棘上者,曰頸菱形筋(Rhomboidens Cervicalis);起於前部胸椎骨之神經棘上,左右分向外方,而附着於肩胛骨之上肩胛軟骨緣者曰背菱形筋(Rhomboidens dorsalis).

26,肩胛舉筋(Lovator scapulae)——菱形筋之前方,沿僧帽筋外緣之筋肉曰肩胛舉筋,始於鱗狀骨之前方,而終于肩峯之後端.

27,後鋸筋(Seratus posterior)——菱形筋之前方,更有一組筋

肉,始於後部頸椎及前部胸椎之神經棘,側向後方,而終於肋骨之外面.其後緣成爲鋸狀,故名後鋸筋.

28,夾板筋 (Splenius)——除去僧帽筋,背闊筋,及肩胛骨舉筋時,其下面見有始於後部頸椎及前部胸椎而斜向前面外方之筋肉.即夾板筋.

29,薦棘筋 (Sacrospinalis) —— 背部內面,有數多前後縱走之長筋總稱之曰薦棘筋.始於薦骨之後面,腰椎之棘狀突起及腰背筋膜之後部.逕向前方進行.可分爲外中內之部分:(a)在外側者,曰腸肋筋 (Iliveostalis). 連於各肋骨之上端;(b)在中部者爲長筋肉束,曰最長筋 (Lonyismus), 其前方以腱遙達於鱗狀骨之後緣; (c) 在內側者曰棘筋 (Spinalis), 連於背部各椎體之神經棘間.

30,半棘筋 (Semispinalis) —— 棘筋之更內側,連絡於各椎體之橫突起間者,爲半棘筋.

II. 胸部 (Thorax part)

31,大胸筋 (Pectoralis major)——胴部之腹面前方,皮膚底下,有大形之筋肉,始於胸骨,肋軟骨之前面,及鎖骨連接於胸骨之點,而終於上膊骨之上端,是爲大胸筋.

32,小胸筋 (Pectoralis minor)——大胸筋之下面,適當中部肋骨之前端腹面處出一筋肉,向前外方,而爲附着於肩胛骨烏喙突起上,是爲小胸筋.

33,前鋸筋 (Serratus anterior)—— 大小胸筋之下方,有一組筋

肉,始于肋骨之前部,斜向前上方而附着於肩胛骨上,是爲前鋸筋.其前部掩覆於大小胸筋之下,後部掩覆於背闊筋之下呈鋸狀,故名鋸筋.

34,肋間筋 (Intercostales) —— 各肋骨間張以扁平之膜狀筋,卽肋間.可分爲內外兩層,外層曰外肋間筋;內層曰內肋間筋.

35,胸橫筋 (Transversus thoracis) —— 橫隔膜前部,胸腔腹壁內面之筋肉,曰胸橫筋.

36,橫隔膜 (Siaphragma) —— 胸腔與腹腔間,有橫隔之筋質膜曰橫隔膜,微向胸腔突出,若覆碗然;中央部分爲腱質組織,特稱腱心 (Centrum tendinanm). 其筋質部分,因所繫着之地位不同,可別爲胸骨部 (Pars sternalis),肋骨部 (Pars Costalis) 腰椎部 (Pars lumbalis) 三部,腰椎部分爲數多筋束,呼之曰脚 (Crus); 最內部之脚間,爲食管之通道,曰食道裂孔 (Hiatus Oesophagens).

III 腹部 (Abdomen part)

37,白條 (Linea alba) —— 腹壁表面之正中線上,有白色縱走之線紋,曰白條.

38,腹直筋 (Rectus abdominis) —— 白條之兩側,有一對縱行之帶狀筋肉,曰腹直筋.其前端始於肋軟骨之後部,及胸骨之前面;後端附着於恥骨後方之縫合線上.

39,腹外斜筋 (Obliquns externus abdominis) —— 腹直筋之兩側,

有一組筋肉,始於後部肋骨之外側,斜向腹面內方,而附着於恥骨縫合線之中央,是爲腹外斜筋.

40,腹內斜筋(Rectus internus abdominis)—— 腹外斜筋之底下,另有一組筋膜,起於骨盤及鼠蹊部外側,與腹外斜筋殆成直角交叉,而終於肋骨之前端,是曰腹內斜筋.

41.腹橫筋(Transversus abdominis)—— 腹壁之最裏面筋膜曰腹橫筋.

42,腰方形筋(Onadratus lumborum)—— 內斜筋之背端,有附着於腰椎橫突起上之筋肉,曰腰方形筋.

D. 前肢筋肉(The muscles of fore limb.)

I. 肩部(Shorlder)

43,三角筋(Deltoid)—— 被覆於肩頭之上,有大形三角形廣筋曰三角筋,起于肩胛骨之棘突及肩峯之杜,而止於上膊骨之三角隆起處.

44,棘上筋(Supra-spinatus)—— 僧帽筋之下面,有一筋曰棘上筋,起于肩胛骨之上部,而終于上膊骨大結節之前緣.

45,棘下筋(Infra-spinatus)—— 僧帽筋及三角筋之下,有始於肩胛骨下窩,而附着于上膊骨大結節中央面之筋肉,曰棘下筋.

46,小圓筋(Teres minor)—— 棘下筋之下面,始於肩胛骨之關節窩,腹緣而附着于上膊骨大結節之筋肉,曰小圓筋.

47,大圓筋(Teres majos)——與小圓筋同起于肩胛骨之關節

窩而附着於上膊骨小結節之筋肉,曰大圓筋。

48,肩胛下筋(Subscapularis)——起於肩胛骨下窩之大形扁平三角形筋肉曰肩胛下筋。

II,上膊部(Arm)

49,上膊二頭筋(Biceps brachn)——上膊之前面,適當三角筋之下部,有一筋面,其上端分爲二頭,卽上膊二頭筋.短頭(Caput breve)始于烏喙突起之先端,長頭(Caput longum)始于烏喙骨之關節上,而共止於橈骨之上端。

50,烏喙膊筋(Caracobranchialis)——上膊二頭筋之內部,有一筋同起于烏喙突起,而終於上膊骨之上端,是卽烏喙膊筋。

51,膊筋(Brachialis)——上膊之下部前面,有一筋起于上膊骨之前面下部,而終肘關節之尺骨結節上,是卽膊筋。

52,上膊三頭筋(Iriceps-brachialis)上膊之後面,有一較粗大之筋肉,其上端分爲三叉,卽稱三頭筋:(a)長頭(Caput longum)始始於肩胛骨窩之腹側;(b)內頭(Caput mediate)始于上膊骨之上端後面,(c)外頭,(Caput laterale)始於上膊骨之上端外面.三者合而爲一,下行而止於尺骨之肘頭後面。

III,前膊部(Fore-arm)

53,圓迴前筋(Pronator teres)——前膊之上端前面皮下有一短筋,始於上膊骨下端之內髁,而終于橈骨之內側,是爲圓迴前筋。

54,橈腕屈筋(Flexor carpi radialis)——圓迴前筋近尺骨之側,有一長筋,始於上膊骨之內髁,下行而附着于第二掌骨之基部,曰橈腕屈筋.

55,長掌筋(Plamaris longus)——與橈腕屈筋共始於上膊骨內髁之小筋,曰長掌筋.其下端覆於掌部之內面,成掌筋膜(Plamar-fascia).

56,尺腕屈筋(Flexor carpi ulnaris)——長掌筋之同側,有一筋,始於尺骨鈎狀突起之內面,而附着于豌豆骨(腕骨之一)上,曰尺腕屈筋.

57 淺屈指筋(Flexor digitorum sublimis)——前記諸筋掩覆之下,有一筋始於上膊骨之內髁,及尺骨與橈骨之上端;卽淺屈指筋.其下部於橈腕屈筋及尺腕屈筋之間外出,分爲四條長腱,至第二,第三,第四,第五各指之腹面.于各指之第一節上,復分爲左右二條,而附着於第二節之基部.

58,深屈指筋(Flexor digitorum profundus)——淺屈指筋之深部,有同起上膊骨之內髁及尺橈骨頭之筋肉,曰深屈指筋.其下端外出,以長腱至掌部內面第二至三指上,通淺屈指之二條間而終於指骨之末端.

59,長拇指屈筋(Flexor pollicis longus)——與深屈指筋同在於深部處,有共起於橈骨頭及上膊骨內側之筋肉,以長腱下行,而止於拇指第二節之基底,是曰長拇指屈筋.

60,方形迴前筋(Pronator quadratus)——長拇指屈筋之更內面,

尙有一小筋,覆於橈骨及尺骨之下端,曰方形迴前筋.

61,肘筋(Anconaeus)——前膊之前面上部,適當橈腕伸筋之內側,有一短筋,始於上膊骨之外髁及橈骨之上端側面;而終于尺骨前面之上方外側,是爲肘筋.

62,總指伸筋(Extensor communis digitorum)—— 前膊之前面外側,有一粗筋肉,始於上膊骨外髁,縱走於橈骨尺骨間之溝隙中,直至前膊之下端,分爲四條,出第二至第五各指之背面,是爲總指伸筋.

63,第四指伸筋(Extensor quarti digiti)—— 及第五指伸筋 (E, Pninti, D.)—— 上膊骨外髁有細長之筋,出于第四指之背面者曰第四指伸筋;出于第五指之背面者,曰第五指伸筋.

64,尺腕伸筋(Extensor carpi ulnaris)—— 與前記之筋肉,同起於上膊骨之外髁,而終于第五掌骨基部之細長筋肉,曰尺腕伸筋.

65,迴後筋(Supinator)——總指伸筋之後方外側,有一筋,同起于上膊骨之外髁,及橈骨尺骨之上端前側,而附着于橈骨之外面,曰迴後筋.

66,長拇外轉筋(Abductor pollicis longus)——尺腕伸筋及總指伸筋被覆之下,有一長筋,始于橈骨之上端外側,自橈腕伸筋之腱上,斜向拇指側面,而終于拇指之掌骨基部,曰長拇外轉筋.

67,拇指伸筋 (Extensor pollicis)——起於橈骨上端,下行於橈骨尺骨間之溝隙,以細長之筋向拇指伸延,而終于拇指之第一節基部者為拇指伸筋之短筋;另有一較長而終於第二節者,為拇指伸筋之長筋.

68,第二指伸筋 (Extensor indicis)—— 與拇指伸筋同始點,同徑路.唯其下端斜向於第二指者,曰第二指伸筋.

IV 手部 (Hand)

69,短拇指外轉筋 (Abductor pollicis brevis)—— 拇指腹側皮下,有一筋始於腕部深層,即所謂橫腕靱帶 (Carpi transversum) 之上,而終於拇指骨第一節之基部,曰短拇指外轉筋.

70,短拇指屈筋 (Flexor paliicis brevis)——短拇指外轉筋之更內側腹面,有一筋,始於第三掌骨之側面,而終於拇指指骨第一節之基部,是即短拇指屈筋.

71,拇指對筋 (Opponens pollicis) —— 短拇指外轉筋之外側一筋,為拇指對筋.

72,小指外轉筋 (Abductor digiti quinti)——小指外側及掌之側面,有一小指外轉筋.

73,短小指屈筋 (Flexor digiti quinti brevis)—— 小指外轉筋之內側,有短小指屈筋.

74,小指對筋 (Oppouens digiti quinti)—— 小指外轉筋之外側,有一筋,與上記二筋皆始於橫腕靱帶,而終於小指,是為小指對筋.

75.蟲樣筋(Lumbricoles)——起於掌之中部,適當深屈筋之分歧點腹面,而終於第二至第五各指第一節基部內面之筋肉,曰蟲樣筋.

76,骨間筋(Interossei)——深屈抵筋之內部,有三對小筋,終於掌骨上掌指關節處,爲骨間筋.

E. 後肢筋內　(The muscles of hind limb.)

I, 後肢基部(Bassis of H, L.)

77.腸腰筋(Ilioproas)——後肢基部,成於下列三筋:

(a)腸骨筋 (Iliacus) —— 腰部之腹面,有一廣筋,始于最後之腰椎,第一薦椎及腸骨之凹陷處;下行,終於大腿骨小轉子上,是爲腸骨筋.

(b)大腰筋(Proas major)——始於最後胸椎之前方及第一至第五腰椎之橫突起上,沿中央綫縱行,至中途,斜向外方,與腸骨筋同附着於大腿骨小轉子上,是爲大腰筋.

(c) 小腰筋(Proas minor)——隱藏於大腰筋內部之筋肉,曰小腰筋.其後端終於恥骨之上.

78,大臀筋(Glutens maximus)—— 被覆於腸骨外部卽臀面之大形筋肉,曰大臀筋.始於腸骨,薦骨及恥骨邊緣.下行.而止於大腿骨之上端.

79,中臀筋(Glutens medius)——大臀筋之內面,有一筋,始自薦骨及腸骨上緣,下行而止於大腿骨之大轉子上,是卽中

臀筋.

80,小臀筋 (Glutens minimus)——中臀筋之更內部,有一筋,始於腸骨窩及腸骨緣,與中臀筋同止於大腿骨之大轉子上,曰小臀筋.

81,梨子狀筋 (Diriformis)—— 小臀筋之後方,有一筋,始自薦骨外側,而終於大轉子之尖端,曰梨子狀筋.

82,內鎖筋 (Obturator internus)——閉鎖孔之周圍,出一筋,向外前方而終於大腿骨之轉子窩上,曰內鎖筋.

83,雙桿筋 (Gemeli) —— 與內鎖筋結合之另一筋,成於並行之二筋束,是為雙桿筋,或稱孖筋.前筋始自坐骨之結節上,覆內鎖筋之前緣;後筋亦始於坐骨之結節上,覆內筋之後緣,而與內鎖筋共止於轉子窩.

84,股方形筋 (Pnadratus fermoris)——雙桿筋之下方有一筋,起於坐骨結節之外側,而終于大腿骨頭部之後側,曰股方形筋

II, 大腿部 Thigh part.

85,縫匠筋 (Sartorius)——大腿之前面皮下,有一長筋,始於恥骨縫合部之上方,斜向腿之內側,下行,止於脛骨之上端結節處,為縫匠筋.

86,股四頭筋 (Quadriceps)—— 被覆於大腿前面大部分之大筋為股四頭筋,乃股直筋,外股筋,中間股筋,內股筋四部分結合而成之者.

(a) 股直筋(Rectus femoris)——以二腱始於腸骨前部及髀臼上部,下行,至膝蓋骨上部,與共同之腱結合者,曰股直筋,

(b) 外股筋(Vastus lateralis)——在大腿之外側者曰外股筋.其上端始於轉子窩大轉子之外面,下端與共同之腱合.

(c) 中間股筋(Vastus intermedius)——在股直筋之後方者曰中間股筋.其上端出於大腿骨上端之廣面;下端亦合於共同之腱.

(d) 內股筋(Vastus medialis)——在中間股筋之內側者爲內股筋.其上端始于轉子間,下行而合于共同之腱.

以上四筋共同之腱,乃附着於膝蓋骨之上方兩側緣及前面.

87,櫛狀筋(Pectineus)——股之上部內側,有一筋,始於恥骨之上緣,通腸腰筋與長內轉筋間,而終於大腿骨上,曰櫛狀筋

88,長內轉筋 (Adductor longus)——櫛狀筋之次,有一筋始于恥骨上部前面,而終於大腿骨之上部,曰長內轉筋.

89,薄股筋(Gracilis)——長內轉之內側一筋,始於恥骨下部之前面,與縫匠筋之腱共止於脛骨結節之附近,即薄股筋.

90,短內轉筋(Adductor brevis)——與薄股筋同側之另一筋,始

於恥骨下部,而終於大腿骨之上端,是爲短內轉筋.

91,大內轉筋(Adductor magnus)——長短內轉筋及薄股筋之內面,有一大形筋肉,始於坐骨之下部及結節上,下行,而附着於大腿骨之內側,曰大內轉筋,其下端更延長而及於內髁.

92,小內轉筋(Adductor minimus)——恥骨及坐骨之下部,有一筋,始於大內轉筋之始點前部,與大內轉筋同下行,而止於大腿骨之上端,曰小內轉筋.

93,外鎖筋(Obturator externus)——大腿之內側,有一筋,始於閉鎖孔之周圍,迂迴於坐骨上部結節之外方,轉向前方而終于轉子窩內,曰外鎖筋.

94,股二頭筋(Biceps femoris)——覆於大腿後側後半部之大筋,曰股二頭筋.其始端掩覆于大臀筋之下,有長短二頭:長頭出於坐骨;短頭出大腿骨之前端,下端附着於脛骨之部廣闊.

95,半腱樣筋(Semitentinosus)——股二頭筋之內面,有出於坐骨之另一筋,曰半腱樣筋.其後端終于脛骨之上端.

96,半膜樣筋(Semimembranosus)——與半腱樣筋同出於坐骨後端之膜樣筋,曰半膜樣筋,其下端止於脛骨之後內側.

III,脛部(Leg or Crus.)

97,前脛骨筋(Tibialis anterior)——脛骨之前面皮下,有一長筋,始於脛骨上端之外髁,及外側面.其下端成爲長腱,通

過足基部之靱帶下部,出足背,而止於內楔狀骨及第一蹠骨基底之側面,是爲前脛骨筋.

98,總伸趾筋(Extensor digitorum Communis)—— 前脛骨筋之外側,有一筋,始於大腿骨末端之前面,與前脛骨筋相並下行.以四條細腱終于外側四趾之趾骨,是爲總伸趾筋.

99,長蹈趾伸筋(Extensor hallucis longus)—— 前記之二筋之後方下部,出一筋,終于蹈趾骨之末節,曰長蹈趾伸筋.

100, 長腓骨筋(Peronaeus longus)—— 腓骨側面有一筋肉,始於脛骨之上端外側,以長腱終於第一蹠骨之基部,是即長腓骨筋.

101, 短腓骨筋(Peronaeus brevis)——與長腓骨筋並行一筋,曰短腓骨筋,其上端同始於脛骨之上端外側,下端以長腱止於第五蹠骨.

102, 腓腸筋(Gastrocnemius)—— 小腿後側之大筋,即腓腸筋,具內外二頭,外頭始于大腿骨之外髁及種子骨上;內頭則始于內髁及種子骨上,下端以堅靱之腱,止於跟骨之末端.此腱通常稱爲Tendo Achilis

103, 比目魚筋(Soleus)——與腓腸筋相伴一筋,始於腓骨之上部及外側綫,下端以腱終於跟骨,(此腱即 Tendo achilis 之一部分), 即比目魚筋.此筋與腓腸筋,合稱腓腸三頭筋(Triceps surae)

104, 足蹠筋(Plantaris)——腓腸三頭筋之內面,有一筋起於

大腿骨之下端膝膕面之外側,通腓腸筋之內外兩頭間.以長腱沿Tendo achilis之內側緣,而止於跟骨,曰足蹠筋

105, 膝膕筋(Popliteus) —覆於腓腸筋及足蹠筋內面之一筋,曰膝膕筋.

106, 總屈趾筋(Flexor digitorum Communis) 深部後脛骨筋之內側,有一筋始於脛骨之內面,下端分爲四腱分別附着於第二趾至第五趾趾骨之第三節,是爲總屈趾筋.

107, 長蹞趾屈筋(Flexor hallucis longus)—— 腓腸筋與總屈趾筋間有一長筋,始於腓骨之後面及內側面,以長腱終於蹞趾之第二節,曰長蹞趾屈筋.

108, 後脛骨筋(Tibialis Posterior) —— 總屈趾筋及長蹞趾屈筋間,有後脛骨筋,起於脛骨之內側.被覆於腓腸三頭筋之下.以腱附着于蹠骨及骰子骨上.

IV,足部 (Foot)

109, 短蹞趾伸筋(Extensor hallucis brevis) —— 足背內方,適當蹞趾之側面,有一筋出於跟骨之前部外側,至蹞趾之趾骨第一節上與長蹞趾伸筋之腱相合,是爲短蹞趾伸筋.

110, 短伸趾筋(Extensor digitorum brevis) ——與短蹞趾伸筋同出於跟骨之上面,分爲三小筋束,逕至第二至第四趾之第一節,與長伸趾筋之腱結合,爲短伸趾筋.

111, 蹞趾外轉筋(Adductor hallucis) —— 足蹠裏有一小筋自蹞趾之外側至於內側,爲蹞趾外轉筋.

112, 短蹲趾屈筋(Flexor hallucis)——蹲趾外轉筋之外側,有短蹲趾屈筋,

113, 蹲趾內轉筋(Adductor hallucis)——短趾之更外側,有蹲趾內轉筋.

114, 小趾外轉筋(Adductor digiti quinti)——蹠之小趾側面皮下,有小趾外轉筋,

115, 短小趾屈筋(Flexor digiti quinti brevis)——小趾外轉筋之內側,有短小趾屈筋.

116, 小趾對筋(Opponeus digiti quinti)——小趾外轉筋之外側一小筋,附着于小趾上,曰小趾對筋.

117, 蟲樣筋(Lumbricales)——足蹠腹面中部,有四小筋,附着于第二至第五各趾第一節基部之內面,爲蟲樣筋.

118, 骨間筋(Interossei)——始於各屈趾筋之內部而終於蹠骨上各趾蹠關節上之小節,曰骨間筋.

(未　　完)

廣東北江鳥類之研究

(續第三卷第四期)

任 國 榮

魚尾燕科 Dicruridœ.

126.黑魚尾燕 **Dicrurus macrocercus cathoecus** Swinhoe.

Dicrurus cathœcus. Swinhoe, P Z. S., 1841, p. 377: China.

Dicrurus macrocercus cathœcus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 206.—Delacour et Tabouille, Oiseaux de l'Tndochine, vol. IV, p. 75.

1♂, 27V 1930.——翼: 145mm.

分佈:——我國南部緬甸暹羅及安南.

127. 白頰魚尾燕 **Dicrurus leucogenys leucogenys** (Walden).

Buchanga leucogenys. Walden, Ann. Mag. N. H., V, p. 219 (1870): Nagasaki.

Dicrurus leucogenys cerussatus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 208.

Dicrurus leucogenys leucogenys. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 78.

2♂, 18IV, 16VI; 3♀, 8 IV 28 V, 19VI 1930.——翼: 142-147 mm.

分佈:—— 緬甸,暹羅,安南,馬來羣島,日本及我國全部.

附記:——La Touche於 Birds of Eastern China 一書中,以

Cerussatus (Bangs & Phillips) 記載中國鳥,且謂中國鳥與安南鳥 *D. l. leucogenys* 之區別,"在其體色較淺,頭部之白塊斑較淨白,且界限亦明瞭"余經考驗三十三個標本後,覺中國鳥與安南鳥,實無區別之可能.在七個中國標本中,確有三個具有以上特性,爲 La Touche 所言,但其餘四個則體色甚深,耳羽灰白,在二十六個安南標本中,有四個體色甚淺,無別於淺色之中國標本;其餘二十二個則體色稍深,但最深者亦不外如深色之中國標本而已.至于耳羽,則或灰或白,或界限明顯,或區別不清,殊無一定,視個體爲轉移,無關於一般體色之深淺.且此鳥之幼者體色遙深于成長鳥,早旣爲鳥學者所共知矣.

128.髮冠魚尾燕 **Chibia hottentotta brevirostris** C. & H.

Chibia brevirostris. Cabains & Heine, Mus. Heine, i, p. 112 (1850): China.

Chibia hottentotta brevirostris. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 209.

1♂, IIV; 1♀ 17V 1930.——翼: ♂167;♀163mm.

分佈:——我國全部.

伯勞科 Laniidæ.

129. 伯勞 **Lanius schach schach** L.

Lanius schach. Linnaeus, S. N., I, p. 94 (1758): China.

Lanius schach schach. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 183.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 93.

2♂, 7 I, 14 IV; 2♀, 7I, 6VI 1930,——翼:102-107 mm.

分佈:—— 我國南部,自揚子江以南皆有之.亦可見于安南之東京.

130.菲律賓紅尾伯勞 **Lanius cristatus lucionensis** L,

Lanius lucionensis. Linnaeus, S. N. XII ed., p. 135 (1766): Luzon.

Lanius cristatus lucionensis. La Toche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 189.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 98.

2♂ (成長),30 IV——1VI; 2♂(未成長),20V——13VI; 1♀(成長), 5VI; 2♀(未成長), 2V, 3V; 2(?) (未成長), 13VI 1930.—— 翼: 86-90 mm.

分佈:—— 生殖於西北利亞東部,滿洲,高麗,日本,我國之

北部.冬季南行印度馬來一帶.

山雀科 Paridœ.

131. 灰山雀 **Parus major cinereus** Vieillot.

Parus cinereus. Vieillot, N. Dict. Hist. Nat., XX, p. 316 (1818): Asie orientale.

Parus major cinereus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 102.

3♂, 27 III, 22 XI, 20 XII; 1♀, 8 IV 1930.——翼:64-68mm.

分佈:——自印度北部經亞森母,緬甸,以至巽他羣島及爪哇,安南,廣東,湖南,

附記:——此品種之幼鳥,背部常帶青色,三月二十七日之雄鳥及四月八日之雌鳥,俱甚成長,但背部都渲染青色,在雄者較少,在雌者較盛.

132. 紅頭山雀 **AEgithaliscus concinnus concinnus** (Gould).

Psaltria concinna. Gould, Birds of Asia, II, pl. 65 (1855): Chusan (舟山).

AEgithaliscus concinnus concinnus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. 1, p. 33.

2♀, 28 III, 28 XI 1930.——翼: 48mm.

分佈:——四川,貴州,廣西,廣東,福建,浙江.

附記:——Delacour 以 *Ae. c. tonkinensis* 記載安南東京鳥,據云"其頭部及胸部與體側之栗色俱較深濃."余試以之與廣東,廣西,福建等處標本比較,殊無若何區別.

鸚嘴科 Paradoxornidœ.

133. 粉紅鸚嘴 **Paradoxornis webbiana fohkienensis** (La Touche).

Suthora webbiaua fohkienensis. La Touch, Bull. B. O. C., XLIII, p. 101 (1923): Fohkien.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 50.

1♂, 23 XI 1930.——翼: 52mm.

分佈:——福建,廣東,廣西.

134. 灰頭鸚嘴 **Paradoxornis gularis fokiensis**(David).

Heteromorpha fokiensis. A. David, Ann. Sc. Nat., 5e se'r., XIX art. 9. p. 18 (1874): Fohkien.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 53.

2♂, 24 III, 27 XI; 1♀, 9 XI 1930.

分佈:——安徽,福建,廣東,廣西,湖南.

太陽鳥科 Nectariniidœ.

135. 賴氏太陽鳥 **AEthopyga christinoe latouchii** Slater.

AEthopyga latouchii. Slater, Tbis, 1891, p. 43: Swatow, Kwangtung.

Aethopyga christinæ latouchii. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 461.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV. p. 144.

1♂, 15 XII 1930.——翼: 50mm.

分佈:——福建,廣東,廣西.

繡眼兒科 Zosteropidœ.

136. 繡眼兒 **Zosterops simplex simplex** Swinhoe.

Zosterops simplex. Swinhol. P. Z. S., 1863, p. 203: South China, from Cauton to Foochow.

Zosterops simplex simplex. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 457.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 176.

1♂,20 V 1930.——翼: 55mm.

分佈:——福建,廣東,廣西,雲南,貴州,安南,留鳥,夏季可至揚子江流域一帶及直隸,

鶺鴒科 Motacillidæ.

137. 彩眼鶺鴒 **Motacilla alba ocularis** Swinhœ.

Motacilla, ocularis. Swinhoe, Ibis, 1860 p. 55: Amoy—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 400.

Motacilla alba ocularis. Hartert Vögel Paläark Fauna, p. 307.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 181.

1♂, 30 IV 1931.——翼: 92mm.

分佈:——生殖於亞洲之北部,冬季南行至我國南部,安南緬甸及孟加拉.

138. 白面鶺鴒 **Motacilla yarrelli leucopsis** Gould.

Motacilla leucopsis. Gould, P. Z. S., 1837, p. 78: India.

Motacilla alba leucopsis. Hartert, Vögel Paläark. Fauna. p. 304.

Motacilla lugubris leucopsis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 404.

Motacilla yarrelli leucopsis. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 184.

1♂,27 III 1930.——翼: 86mm.

分佈:—生殖於西伯利亞滿洲,蒙古,西藏及我國之北部,冬季南行至我國南部,安南緬甸,暹羅森林,孟加拉及泥泊爾.

139. 灰鶺鴒 **Motacilla cineracea caspica** (Gm.)

Parus caspicus. Gmelin, Reise Russ., vol. III, p. 104 (1774): Caspian Sea.

Motacilla boarula melanope. Hartert, Vögel Paläark Fauna, p. 300.

Motacilla cinerea caspica. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 408.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV., p. 185.

1♂, 24 III, 2♀, 23 III, 25 VI 1930.——翼:♂86; ♀77, 80mm.

分佈:——生殖于烏拉山,堪察加以至喜馬拉雅一帶.冬季至我國南部,安南,馬來半島,亞森州,緬甸,印度.

140. 青鶺鴒 **Motacilla flava taivana** (Swinhoe).

Budytes taivanus. Swinhoe, Tbis, 1866, p. 138: Formosa.

Motacilla flava taivana. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 293. —La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 413.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 186.

1♂, 30 IV 1930.

分佈:——生殖于西伯利亞.冬季經我國及台灣以至安南,摩鹿加羣島,西里伯,等處.

141.長爪鷚 **Anthus richardi rufulus** Vieillot.

Anthus rufulus. Vieillot, N. Dict. H. Nat., XXXVI, p. 494 (1818): Bengal.

Anthus richardi rufulus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 195.

1♀,22 V 1930.——翼: 86 mm.

分佈:——印度,錫蘭,緬甸,安南,廣東.

附記:——此種只有一標本,不足以供比較,故定名不無懷疑.與巴黎博物館大批標本比較後,覺與 rufulus 最相近似,故暫以此記載之.

142. 馬來長爪鷚 **Anthus richardi malayanus** Eyton.

Anthus malayanus. Eyton, P. Z. S., 1839, p. 104: Malacca.

Anthus richardi malayanus. Delacour & Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 195.

1♂,20 V 1930,——翼: 87 mm.

分佈:——暹羅半島,德尼薩拉,東甫寨,廣西,廣東.

附記:—— Stresemann 以廣西猺山鳥為 *Malayanus*. 余以此標本與猺山鳥及標準地之 *Malayanus* 比較之,皆無差別,故暫以此名詞記載之.

143. 雲南樹鷚 **Anthus hodgsoni yunnanensis** Uch. & Kur.

Anthus hodgsoni yunnanensis. Uchida and Kuroda, Ann. Zool. Jap. IX, 1916, p. 134: Mengtsz, Yunnan.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 190.

2♂, 20 III, 29 XII 1930. —— 翼: 84mm.

分佈:——雲南,撣部,緬甸,安南,廣東.

雀 科 Fringillidœ

144. 小鵐 **Emberiza pusilla** Pallas.

Emberiza pusilla. Pallas, Reise Russe, III, 1776, p. 697: Daurische Alpen.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 188.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 348.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol, IV, p. 206.

1♂, 14 IV;2♀, 7I, 14 IV 1930.—— 翼: 67-72mm.

分佈:——生殖地,自歐洲之東北部以迄于滿洲一帶.冬季南行至我國南部,印度,緬甸及安南.

145. 白眉鵐 **Emberiza tristrami** Swinhoe.

Emberiza tristrami. Swinhoe, P. Z. S., 1870. p. 441: Amoy.—Hartert, Vogel Palaark. Fauna, p. 192.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 352.

5♂, 26 XI —— 3 IV; 2♀, 24 III ——26 XI 1930. —— 翼: 69-71 mm.

分佈:——生殖于大島果之南,阿穆爾,烏蘇里及高麗.冬季經我國之北部以至中部及南部.

146. 黃眉鵐 **Emberiza chrysophrys** Pallas.

Emberiza chrysophrys. Pallas. Reise Russ., III, 1776, p. 698: Daurische Alpen.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 189.—La

Touche, Birds of Eastern China vol. I, p. 351.

1♂, 27 I; 1♀ 24 III 1930,——翼:♂ 80; ♀ 76mm.

分佈:——生殖于西伯利亞之東部,冬季經我國北部以至揚子江流域及福建.

附記:——在廣東此爲第一次記載.

147. 金鵐 **Emberiza aureola** Pallas.

Emberiza aureola. Pallas, Reise Russ., II, 1773, p. 711: Trtysh, Siberiae.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 173. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 375.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 207.

1♀, 6V 1930,——翼: 73mm.

分佈:——生殖於俄羅斯之北,西伯利亞,蒙古,滿洲,高麗及日本.冬季至歐洲之中部及南部,印度之西北部,尼泊爾,錫金,我國之北部及南部,安南暹羅及緬甸.

148. 蓬鵐 **Emberiza spodocephala spodocephala** Pallas.

Emberiza spodocephala spodocephala. Pallas, Reise Russ., III, 1776, p. 698: Daurische Alpen.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 176.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 365.

1♂, 7I 1930,——翼: 74mm.

分佈:——生殖於西伯利亞東部及高麗.冬季我國各地及印度西北部.

149. 銹鵐 **Emberiza rutila** Pallas.

Emberiza rutila. Pallas, Reise Russ., III, 1776, p. 698: Mongoliae.—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 172.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 373.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 210.

1♂. 24 IV, 1930. —— 翼: 74mm.

分佈:——生殖於西伯利亞東部及我國北部,冬季至我國南部,緬甸,亞森毋,馬尼坡,撣部及安南等處.

150. 麻雀 Passer montanus saturatus Stejneger.

Passer montanus saturatus. Stejneger, Proc. U. S. Nat. Mus., VIII, p. 19 (1885):—Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 161.—La Touche, Birds of Eastern China, vol I, 328.

1♂, 19 VI 1930.——翼: 65mm.

分佈:——我國全部.

151. 黃雀 Chloris sinica sinica (L.)

Fringilla sinica. Linnaeus, S. N., I, p. 321 (1766): China.

Chloris sinica sinica. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 64. —La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 321.

2♂, 19 III, 1930.——翼: 78, 79mm.

分佈:——除甘肅及雲南外,我國全部皆有之.

織布鳥科 Ploceidae.

152. 斑腹文鳥 **Munia punctulata topela** Swinhoe.

Munia topela. Swinhoe, Ibis, 1863, p. 380: Amoy.

Uroloncha punctulata topela. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 294.

Munia punctulata topela. Delacour et Jebouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 230.

1♂, 25 V; 1 ♀, 2 IV 1930.——翼: 54, 56mm.

分佈: ——我國南部,安南,撣部,海南及台灣.

153. 白腰文鳥 **Munia striata squamicollis** (Sharpe).

Uroloncha squamicollis. Sharpe, Cat. Birds Brit. Mus., XIII, p. 359 (1890): South Eastern China.

Uroloncha striata squamicollis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 296.

1♂, 3 IV; ♀ 9 V 1930. ——翼: ♂ 52; ♀ 50 mm.

分佈: ——江蘇,江西,福建,廣東,廣西.

椋鳥科 Sturnidae.

154. 噪林鳥 **Sturnia sinensis** (Gm.)

Oriolus sinensis. Gmelin, S. N., I, p. 394, no. 50 (1788): China.

Sturnia sinensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 287.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p.

240.

2♂, 30 IV, 17 V; 2♀, 28 V, 9 VI 1930,——翼:98—104 mm.

分佈:——生殖於我國各地以至日本,台灣及安南之北部.冬季至安南南部,暹羅,馬來羣島及馬尼波等處。

附記:——兩雄鳥白色之部,盛染赭赤,在雌鳥則較不顯著.

"夏季極爲普通.常成羣集以營巢于牆洞及樹穴中."

黃鸝科 Oriolidœ.

155. 黃鸝 **Oriolus chinensis diffusus** Sharpe.

Oriolus diffusus. Sharpe, Cat. Birds Brit. Mus., vol. III, p. 199 (1877) : Malabar.

Oriolus indicus. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 53.

Oriolus chinensis indicus. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 277.

Orilous chinensis diffusus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 261.

1♂, 21 V; 1♀, 22 V 1930,——翼: 151, 152 mm.

分佈:——生殖于高麗,滿洲,烏蘇里及我國全部.冬季至安南,馬來羣島,緬甸及印度.

附記:——此雌鳥標本,彩色鮮麗一如雄鳥,特翼,尾等黑

色之部較近褐色而背部稍着青色.

156. 銀鶯 **Oriolus mellianus** Stresemann.

Oriolus traillii mellianus. Stresemaun, Ornith. Monatsber., XXX, pt. 3, p. 64 (1922): Kwangtung.—La Touche, Birds of Estern China, vol. I, p. 279.

Oriolus mellianus. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 268.

1♂, 1♀, 6V 1930,——翼: ♂ 145; ♀ 141 mm.

分佈:——廣東北江,廣西猺山,柬甫寨,暹羅.

附記:——第一個見知于世之雄成長鳥,乃余于廣西猺山射得者.

鴉 科 Corvidœ.

157. 東南大嘴鳥 **Corvus macrorhynchus colonorum** Swinhoe.

Corvus colonorum. Swinhœ, Ibis, 1864, p. 427: Formosa.

Corvus coronoides colonorum. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 7.

Corvus macrorhynchus colonorum. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 271.

1♂, 16 V 1930, ——翼: 330 mm.

分佈:—— 浙江,福建,廣東,廣西,台灣,海南,安南東京

158. 白頸烏 **Corvus torquatus** Less.

Corvus torquatus. Lesson, Traite d'Oruith., p. 328 (1831): Chine.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 9.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 273.

2♂, 19 III 1930: 8 I 1931.—— 翼: 315, 330mm.

分佈:——我國自北京以南各地及安南皆有之.

159. 喜鵲 **Pica pica pica** (Linn.)

Corvus kica. Linnaeus, S. N. X ed., p. 106 (1758): Sweden.

Pica kica sericea. Hartert, Vögel Paläark. Fauna, p. 22.— La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 13.

Pica kica kica. Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 274.

1♂, 6 VI 1930.——翼: 200mm,

分佈:——居歐亞二洲.

附記:—— Delacour 氏認中國喜鵲與歐洲喜鵲為同型,余經考驗大批標本後,完全與氏同其意見.

"北江各地之普通留鳥."

160. 紅嘴山鵲 **Urocissa erythrorhyncha erythrorhyncha** (Bodd.)

Corvus erythrorhynchus. Boddaert, Tabl. Pl. Enlum., p. 38, (1783): China.

Urocissa erythrorhyncha erythrorhyncha. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 15.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 276.

1♂, 1♀, 13. 23 IV 1930.——翼♂: 183, ♀ 181 mm.

分佈:——揚子江以南直至安南之普通留鳥.

161. 樹鵲 **Dendrocitta formosoe sinica** Stres.

Dendroitta formosoe sinica. Stresemaun, Orn. Monatsber., XXI, p. 9, (1913): Fohkien.—La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 17.—Delacour et Jabouille, Oiseaux de l'Indochine, vol. IV, p. 287.

2♂, 26V, 10 XII; 2♀ 7IV, 23XI 1930.——翼: 136—145mm.

分佈:——安徽,浙江,福建,廣東,貴州,安南東京.

"北江各地森林中之普通留鳥."

162. 懸巢 **Garrulus glandarius sinensis** Swinhoe.

Garrulus sinensis. Swinhoe, P. Z. S., 1863, p. 304: South Eastern, China.

Garrulus glandarius sinensis. La Touche, Birds of Eastern China, vol. I, p. 19.

1♂, 24 XII; 1♀, 19 XI 1930.——翼: 180 mm.

分佈:——陝西,四川,揚子江流域以至浙江,福建,廣東,廣西,湖南,貴州,雲南諸省.

附記:——Swinhoe 于 Proceeding of the Zoological Society, 1863, p. 304, No. 224, 記載此鳥時,本用 *Garrulus sinensis*, Gould.— 名,而

其他鳥類學者則用 *Garrulus sinensis*, Swinhœ. 究竟定名者係 Swinhoe 乎抑係 Gould 乎?此問題頗費解答.及後詳細考查,始知最初定名者本係 Gould,但未經記載及發表, Swinhoe 以其標本作正式發表,依照分類學通例,則, Swinhoe 係定名者也.

"北江各地之普通留鳥".

數學家姓名錄

(續第三卷第四期)

曾昭安

d'Abano, Pietro〔達巴諾〕 亦作 Petrus Aponensis (1250—1316 或 1253—1319) 義人

Dabney, Walter Hampton〔達布內〕 二十世紀前半期 美人

Daboll, Nathan〔達波爾〕 (1750—1818) 美人

d'Abro, A.〔達布洛〕 二十世紀前半紀

Dabuz, Florian〔達部〕 十八世紀後半紀

Dacia, Petrus de〔達謝〕 亦作 Petrus Philomenus de Dacia 或 Petrus von Dacien 十四世紀 丹麥人

Dacien, Petrus von〔達謝〕 即 P. Dacia

Da Coi〔達魁〕 亦作 Coi 或 Colla 十六世紀前半期 義人

Dacres, Arthur〔達克梨〕 (1624—1678) 英人

Da Cunha, José Anastacio〔達昆雅〕 (1744—1787?) 葡萄牙人

D'Adhémar, Robert〔達赫瑪〕 二十世紀初 法人 研究數學史及解析原理

Dadourian, Haroutune Mugurdich〔達杜利安〕 (1878,12,5—) 美人

Dagomari, Paolo〔帕洛・達哥馬里〕 即 Paolo Dagomari

Dahl, W.〔達爾〕 十九世紀後半期 德人

Dahlgren, T.〔達爾格楞〕 二十世紀前半期 瑞典人

Dahlin, E. M.〔達林〕 十九世紀後半期 瑞典人

Dahmen, A.〔達門〕 十九世紀後半期 德人

Dahse〔達西〕 德人

d'Ailly, Pierre〔帶伊〕 卽 Alliaco

Daily, Benjamin W.〔帶力〕 二十世紀　美人

Dakin, A.〔達京〕 二十世紀前半期　英人

Dalaker, Hans H.〔達拉刻〕 二十世紀前半期　美人

Dalby, Isaac〔達比〕 十八世紀　英人

Dale, Julia〔得爾〕 二十世紀前半期　美人

Dale, John Borthwick〔得爾〕 二十世紀　英人　著對數三角術表

Dale, R. Burdette〔得爾〕 二十世紀　美人

D'Alembert, Jean *le Rond*〔達蘭貝〕(1717,11,16—1783,10,29) 法人　創立達蘭貝定理而得剛體運動之微分方程式

d'Alessandro〔達勒散洛〕 十九世紀末　義人

Dal Ferro, Scipio〔達費羅〕 卽 Del Ferro

Dalgarno, George〔達加諾〕 十七世紀　英人

Dalgleish, I. S.〔達格來士〕 二十世紀前半期　英人

Dalhuisen, A. A.〔大休森〕 二十世紀初　荷蘭人

Dalton, John〔道爾頓〕(1766,9,5—1844,7,27) 英人　數理物理學家　創立原子說

Dalton, John Patrick〔道爾頓〕(1886,1,15—　) 英人

Dalton, T.〔道爾頓〕 十九世紀　英人

Dalwigk, F. von〔達尉克〕 十九世紀末　瓦哥斯拉夫人

Dam, J. van〔達謨〕 十八世紀

Damascius *von Damaskus*〔達馬細阿斯〕 五世紀末　希臘人

Damaskus, Johannes von〔達馬斯革〕 八世紀

Damianus〔達米安〕 或卽 Heliodorus

Dancer, Wayne〔丹塞〕 二十世紀前半期　西班牙人

Dancey, L. S.〔丹栖〕 二十世紀前半期　美人

Danck, Johann〔丹刻〕 亦作 Johannes Saxoniensis 十四世紀　法人

Dandelin, Germinal〔丹得林〕 (1794—1847) 比利時人

Dandolo, Vincenzo〔丹多羅〕 十八世紀

Danfrie〔丹夫利〕 十六世紀末　法人

Daniel, H.〔丹尼爾〕 二十世紀前半期　德人

Daniele, E.〔達磊爾〕 二十世紀　義人

Daniell, P. J.〔丹磊兒〕 二十世紀前半期　英人

Daniells, Marian E.〔丹磊兒斯〕 二十世紀前半期　英人

Daniels, A. L.〔丹尼爾斯〕 十九世紀後半期　美人

Daniels, Farrington〔丹尼爾斯〕 (1889,3,8—　) 美人

Daniels, George William〔丹尼爾斯〕 (1878,1,2—　) 英人

Daniels, M. F.〔丹尼爾斯〕 十九世紀末　荷蘭人

Danielsson, O.〔丹尼爾松〕 二十世紀初　丹麥人

Danières〔丹磊累〕 十八世紀後半期　德人

Danitsch, D.〔丹尼次〕 十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Dannacher, S.〔丹那徹〕 二十世紀　瑞士人

Dannehl, H.〔丹涅爾〕 十九世紀後半期　德人

Dannmeyer, F.〔丹邁〕 二十世紀初　德人

Dannreuther, H.〔丹路忒〕 十九世紀後半期　法人

Dansie, John〔丹西〕 十七世紀　英人

Dante Alighieri〔丹第・阿力基利〕 (1265—1321 義人

Dantec, Felix le〔丹忒〕 二十世紀初　法人

Danti, Egnatio〔丹提〕 亦作 Ignatio Danti (1537—1586) 義人

Danti, Giovanni da〔丹提〕 十四世紀後半期 義人

Dantscher, V. von〔丹瑟〕 二十世紀初 德人

Dantzig, Tobias〔但齊〕 二十世紀前半期 美人

Danzel, Th. W.〔丹策〕 二十世紀 德人

Darbi, G.〔達比〕 十九世紀末 義人

Darbishire, A. D.〔達比犀〕 十九世紀 英人

D'Arblay, Alexander Charles Louis〔達布雷〕 十九世紀前半期 英人

Darbon, A.〔達逢〕 二十世紀 法人

Darboux, *Jean* Gaston〔達波〕 (1842—1917) 法人 微分幾何學大家

D'Arcais, F.〔達揆〕

D'Arcy, Graf〔達息〕 (1725—1779)

D'Arcy, R. F.〔達息〕 二十世紀 英人

Daremberg, Ch.〔達棱貝〕 十九世紀後半期 法人

Darkow, Marguerite D.〔達科〕 二十世紀前半期 美女

Darling, Henry A.〔達令〕 二十世紀 英人

Darling, Lewis A.〔達令〕 二十世紀 美人

Darmois, Georges〔達抹〕 二十世紀前半期 法人

Darnell, Albertus〔達納爾〕 二十世紀 美人

Darondeau, M. B.〔達綸篤〕 十九世紀 法人

D'Arrest, H. L.〔達勒斯特〕 十九世紀中 丹麥人

Darreye, A.〔達累〕 十九世紀末 德人

Darvai, M.〔大隈〕

Darwin, Charles Galton〔達爾文〕 (1887,12,19—) 英人

Darwin, *Sir* George Howard〔達爾文〕 (1845—1912) 英人 生物學家達爾文(Charles Darwin, (1809—1882) 之子 地質數理學家貢獻於三體問題

Dase, Zacharias〔對斯〕(1824—1861) 德人

Daseke, E.〔對斯克〕二十世紀前半期 德人

Dassen, C. C.〔達森〕二十世紀前半期 阿根廷人

Dasypodius, Cunradus〔達息披第〕亦作 Conrad Dasypodius (1530—1600, 4, 26) 瑞士人

Dati, Carlo〔大堤〕(1619—1679) 義人

Datta, A.〔大達〕二十世紀 印度人

Datta, Bibhutibhusan〔大達〕二十世紀前半期 印度人

Daugherty, R. D.〔多給替〕二十世紀前半期 美人

Daus, P. H.〔多斯〕二十世紀前半期 美人

Dautheville, M.〔多狄微爾〕二十世紀 法人

Dautheville, S.〔多狄微爾〕十九世紀後半期 法人

Davenport, Charles Benedict〔達九波特〕(1866—) 美人

Davenport, D. H.〔達九波特〕二十世紀 美人

David, Al.〔大衛〕十八世紀後半期 捷克人

David, J. M.〔大衛〕十九世紀後半期 法人

David, M.〔大衛〕十九世紀後半期 德人

David, R. F.〔大衛〕十九世紀末 英人

David, W.〔大衛〕十九世紀初 英人

Davidoglou, A.〔達維鐸廬〕十九世紀末 法人

Davidov, A. J.〔達維多〕十九世紀後半期 西班牙人

Davidson, Anthony〔德衛孫〕二十世紀前半期 美人

Davidson, E. A.〔德衛孫〕十九世紀 英人

Davidson, John〔德衛孫〕十九世紀前半期 英人

Davies, Charles〔對維茲〕十九世紀前半期 美人 著數學辭典

Davies, T. O. Y.〔對維茲〕 二十世紀 英人

Davies, T. S.〔對維茲〕 十九世紀 英人

Davila, Manuel〔達微拉〕 西班牙人

d'Avillez, J. F.〔大維勒〕 十九世紀末 葡萄牙人

Da Vinci, Leonardo〔達芬奇〕 卽 Leonardo da Vinci

Davis, Alfred〔大衞斯〕 二十世紀前半期 美人

Davis, C.〔大衞斯〕 十九世紀後半期 美人

Davis, D. R.〔大衞斯〕 二十世紀前半期 美人

Davis, Ellery Williams〔大衞斯〕 (1857—1918) 美人

Davis, H. A.〔大衞斯〕 二十世紀前半期 美人

Davis, Harvey Nathaniel〔大衞斯〕 (1881,6,6—) 美人

Davis, Harold T.〔大衞斯〕 二十世紀前半期 美人

Davis, J. E.〔大衞斯〕 二十世紀前半期 美人

Davis, J. M.〔大衞斯〕 二十世紀前半期 美人

Davis, J. W.〔大衞斯〕 十九世紀後半期 美人

Davis, Thomas Henry〔大衞斯〕 (1867—) 英人

Davis, William Morris〔大衞斯〕 (1850—) 美人

Daviso, Urbano〔大衞索〕 十七世紀 義人

Davison, Charles〔對維孫〕 (1858,5,1—) 英人 著高等代數

Davison, Charlotte Isabel〔對維孫〕 二十世紀前半期 美人

Davisson, Schuyler C〔對維遜〕 十九世紀末 德人

Dawson, John〔多松〕 (1734 1,—1820.9.) 英人

Day, Edmund E.〔對〕 二十世紀前半期 美人 著統計解析

Day, H. G.〔對〕 十九世紀 英人

Day, Jeremiah〔對〕 十九世紀前半期 美人

Day, Mary S.〔對〕 二十世紀前半期 美人

Daye, John〔對莊〕 十六世紀後半期 英人

Dé, Krishna Prasad〔笛〕（?—1928） 緬甸人

Deakin, R.〔對案〕

de Almeida e Vasconcellos, F.〔得亞美達·伊·發昆舍羅〕 二十世紀前半期 葡萄牙人

Dean, George Reinald〔第因〕（1865,10,21— ） 美人

Deans, Winifred M.〔第因斯〕 二十世紀前半期 英人

Deaux, R.〔第〕 二十世紀前半期 比利時人

Debeaune, Florimond〔第逢內〕 卽 F. de Beaune

De Beaugrand, Jean〔第逢格蘭〕 十七世紀

de Bessy, *Bernhard* Frénicle〔第柏西〕（1602—1675） 法人

de Berulle, Cardinal〔第白魯爾〕 卽 Berulle

Debey, J.〔第培〕 二十世紀前半期 法人

de Bradwardine, Thomas〔第布拉瓦丁〕（1290—1349,8,26） 英人

De Bray, M. E. J. Gheury〔得布栗〕 二十世紀 法人

de Bray, Ruth Gheury〔得布栗〕 二十世紀 法人

De Brun, F. D.〔第布崙〕 十九世紀末 瑞典人

Debye, Peter〔得拜〕（1884— ） 德人生於荷蘭

de Careil, F.〔得卡賴爾〕 卽 Careil

de Castillon〔得卡斯提隆〕 其名爲 Giovanni Francesco M. M. Salvemini （1708—1791） 西班牙人

De Cesare, E. A.〔得西沙累〕 二十世紀前半期 阿根廷人

Dechales, *Claudii Francisci* Milliet〔得卡爾斯〕（1621—1678,3,28） 法人

Dechalles, R. P.〔得卡勒斯〕 十八世紀 法人

Decherd, Mary E.〔第社德〕 二十世紀前半期　美人

Deck, L. J.〔得克〕 二十世紀前半期　美人

Decker, Ezechiel de〔德克〕 十七世紀前半期　荷蘭人

Decker, F. F.〔德克〕 二十世紀前半期　美人

Deckert, A.〔德克特〕 二十世紀前半期　德人

De Cleene, Louis Antoine Victor〔得克雷涅〕 二十世紀前半期　美人

De Colmar, Thomas〔得哥爾馬耳〕 卽 Colmar

Décombe, L.〔第科謨〕 二十世紀初　法人

de Comberousse, Charles〔第康柏廬斯〕 卽 Charles de Comberousse.

de Condorcet, Marquis〔第康多塞〕 卽 Condorcet

De Cou, Edgar Ezekiel〔第庫〕 (1867,7,13—) 坎拿大人

Decourdemanche, J. A.〔第庫得曼奇〕 二十世紀　法人

Decrempo〔第克林坡〕

Dedekind, *Julius Wilhelm* Richard〔德底欽〕 (1831—1916) 德人　創立無理數之截斷說

Dederick, L. S.〔德底立刻〕 二十世紀前半期　坎拿大人

de Dios Salazar, Juan〔第·帶奧·薩來紮〕 秘魯人

Dedoff, T.〔得多夫〕 十九世紀末　德人

De Donder, Th.〔得頓得〕 二十世紀前半期　法人

Dee, John〔底〕 (1527,7,13—1608) 英人　始用：爲相比之記號

Dee, M. I.〔底〕 十六世紀後半期　英人

Deecke, W.〔底克〕 十九世紀　德人

Deetz, C. H.〔底茲〕 二十世紀　美人

Defant, Albert〔得蕃〕 (1884—) 德人

Defoe, L. M.〔笛福〕 (1861—1933,4,3) 美人

De Foe, Ona Kenneth〔笛福〕 二十世紀前半期　美人

de Fontenelle〔第封特涅爾〕 即 Fontenelle

de Fourcy, Lefebure〔第傅息〕 即 Fourcy

De Franchis, M.〔得夫藍岐〕 十九世紀末　義人

de Galdeano, Z. G.〔得格底諾〕

De Gelder〔得給爾德〕 十九世紀前半期　荷蘭人

Degen, C. F.〔得眞〕 十九世紀前半期　丹麥人

Degosang, O.〔得哥散〕 二十世紀前半期　德人

de Graaf〔得格拉夫〕 即 Graaf

Degranges, E.〔得格稜治〕 十九世紀　法人

De Gua, Jean Paul〔笛瓜〕 即 Gua

De Haan〔笛哈〕 即 Haan

Dehn, Edgar〔德〕 二十世紀前半期　美人　著方程式論

Dehn, Max W.〔德〕 (1788—　) 德人

Dei〔第〕

Deidier, Abate〔笛第爾〕 即 L'Abbé Deidier

Deidier, L'Abbé〔笛第爾〕 亦作 A. Didier 或 Abate Deidier 十八世紀　義人　研究曲面與立體之測度

Deighton, H.〔對通〕 十九世紀末　英人

Deimel, R. F.〔對麥爾〕 二十世紀前半期　美人

Deimler, W.〔對勒〕 二十世紀　德人

Deinostratus〔帶諾斯特拉塔〕 即 Dinostratus

De Jans, C.〔得眞〕 二十世紀前半期　法人

De Jonquières, Fauke〔得瓊基爾〕 十九世紀中　法人

de Kempten, V. M.〔得肯浦甸〕 十六世紀　比利時人

De la Bottière〔德拉波提聚〕

de la Cailie, Nicolas Louis〔第拉卡厄〕 卽 La Caille

de Lacaille, Nicolas Louis〔第拉卡厄〕 卽 La Caille

De la Chapelle〔第拉沙背爾〕 法人

de Lagny〔第拉革尼〕 卽 Lagny

de la Gournérie, Jules Antoine René Maillard〔第拉谷內里〕（1814—1883） 法人 研究畫法幾何學

Delagrave, C. M. E.〔德拉格剌甫〕 二十世紀初 法人 著對數表

De la Hire, Philippe〔得拉亥爾〕（1640—1718） 法人

De la Loubère, Antoine〔德拉盧柏〕（1600—1664） 法人 曲線論專家

De la Loubère, Simon〔德拉盧柏〕 十八世紀 法人

Delamain, Richard〔得拉美〕 十七世紀前半期 英人

Delambre, Jean Baptiste Joseph〔得隆布耳〕（1749,9,19—1822,8,19） 法人 數學家及天文家幷研究測地術

Delamétherie, Jean Claude〔得拉美狄里〕（1743—1817）

Delannoy〔得楞諾〕 十九世紀後半期 法人

De la Pène, Jean〔得拉盆〕 卽 J. Pena

Delaporte, L. J.〔得拉波〕 二十世紀初 法人

De la Roche, Éstienne〔得拉洛〕（1480—?） 法人 代數學家

De La-Rosa Toro〔得拉羅薩·托洛〕 秘魯人

Delassus, É.〔得拉薩〕 十九世紀末 法人

Delast lle, F.〔得拉忒爾〕 二十世紀 法人

Delatore, Alonso〔得拉托爾〕 十五世紀 西班牙人

Delatte, Armand〔德拉特〕 二十世紀 法人

Delaunay, Charles *Eugène*〔德羅內〕（1816—1872） 法人 數理物理及天文

學家

Delaunay, N.〔得羅內〕 十九世紀末 俄人

Delboeuf, J.〔得爾柏夫〕 十八世紀

Delbos, Leon〔得爾波斯〕 二十世紀 英人

Delemer, J.〔得雷麥〕 十九世紀末 法人

Delens, P. C.〔得隆斯〕 二十世紀前半期 法人

Delezenne, Louis〔得勒則〕 法人

Del Ferro, Scipio〔得費羅〕 亦作 Scipione del Ferro 即 Scipio Dal Ferro

Delfino, Domenico〔德爾芬諾〕 十六世紀中 義人

Del Grosso, R.〔得爾・格羅索〕 十九世紀中 義人

De l'Hospital〔得勞批他〕 即 l'Hospital

Deligne, A.〔得利涅〕 十九世紀 法人

Delin, C.〔得林〕 十九世紀末 瑞典人

Delingshausen, N.〔得林沙森〕 十九世紀 愛沙尼亞(Esthonia)人

Delisle, Léopold〔得利爾〕 (1826—1899) 法人

Dellac, H.〔第雷〕 十九世紀末 法人

Della Corte, Matteo〔得拉科退〕 二十世紀前半期 義人

Della Francesca, Piero〔得拉・夫藍拆斯卡〕 (或$\frac{1406}{1416}$—1492)

Del Monte, Guidobaldo〔得爾・蒙特〕 即 De Monte

De Long, Ira Mitchell〔得隆〕 (1855,1,7—) 美人

Delorme, F. M.〔德洛姆〕 二十世紀

de Lorme, Philibert〔德洛姆〕 (1518—1577) 法人

Del Pezzo, P.〔得佩佐〕 十九世紀後半期 義人

Del Re, A.〔得爾利〕 十九世紀後半期 義人

Delsarte, Jean〔得爾薩特〕 二十世紀前半期 法人

Delsaux, P. T〔得爾索〕 十九世紀 比利時人

Del Sodo, Giovanni〔得爾索多〕 十六世紀 義人

Deltheil, R.〔得爾台爾〕 二十世紀前半期 法人

De Lury, A. T.〔得呂立〕 二十世紀前半期 坎拿大人

De Mairan, Jean Jaques〔得梅蘭〕 卽 J. J. Mairan

De Malves〔得馬爾佛〕 卽 Malves

Domaratus *von Korinth*〔得馬累塔斯〕

Demartres, G.〔得馬特斯〕 十九世紀後半期 法人

De May, Amy J.〔得梅〕 二十世紀 美人

Demeczky〔德墨啓〕 十九世紀末 法人

Demel, S.〔得麥〕 二十世紀前半期 德人

De Méré, Chevalier〔得梅列〕(1610—1685) 法人

Demetrius von Alexandria〔狄麥多流〕 希臘人

Demetrius Phalereus〔狄麥多流〕 亦作 Démétrius de Phalère (345B.C.—283 B.C.) 希臘人

De Méziriac〔得美最利亞〕 卽 Méziriac

Deming, R. M.〔得民〕 二十世紀前半期 美人

Demme〔德美〕

Democritus of Abdera〔德謨頡利圖〕 亦作 Demokritus von Abdera 或 Demokritos (460 B.C.—370 B.C.) 希臘(現今巴半幹爾島)人 示以無窮小數之觀念

De Moivre, Abraham〔得抹甫〕(1667, 5, 26—1754, 11, 27) 法人 發見三角術中之得抹甫定理,研究複虛數及適遇法.

De Monte, Guido Ubaldo〔得夢式〕 亦稱曰 Guido Ubaldo (1545—1607) 義人

de Montessus de Ballore, R,〔得蒙特薩〕 二十世紀

De Montmort, Pierre Raymond〔得蒙摩〕即 Montmort

De Morgan, Augurtus〔棣麼甘,奧古斯都〕(1806,6,27—1871,3,18) 英人生於印度　貢獻於代數學,解析學,確率學等.

De Morgan, Sophia Elizabeth〔棣麼甘〕十九世紀　英女　奧古斯都之夫人

Demos, Miltiades Stavros〔狄摩斯〕二十世紀前半期　美人

Demoulin, A.〔得穆林〕十九世紀後半期　比利時人

Dence, C. J.〔登斯〕二十世紀　美人

Dendy, A.〔登狄〕二十世紀　英人

Deniker, J.〔登尼克〕十九世紀末　法人

Denizot, A.〔登尼左〕二十世紀前半期

Denjoy, Arnaud〔登佐〕(1884—　) 法人

Dennett, R. E.〔登涅〕二十世紀　英人

Dennis, Trevor〔鄧尼斯〕二十世紀　英人

Denso, Johann Daniel〔鄧索〕(1708—1795)

Denton, W. W.〔登吞〕十九及二十世紀　美人

De Paolis, R.〔得帕利〕十九世紀後半期　義人

Deparcieux the elder, Antoine〔得帕息〕(1703—1768) 法人

Depène, R.〔得盆〕十九世紀後半期　德人

De Porte, J. V.〔得坡提〕二十世紀前半期　美人

De Presle, M.〔得普勒斯爾〕

Derand, Pater〔得蘭〕十七世紀　法人

De Roos, J.D.C.〔得羅斯〕十九世紀後半期　荷蘭人

Derr, Homer Munro〔德耳〕(1877,2,5—　) 美人　著三角術

Deruyts, J.〔得壘次〕十九世紀後半期　比利時人

Desagneaux, P. C. L.〔得薩紐〕二十世紀

Desaguliers〔得薩谷利斯〕(1683—1744) 英人

Desaint, L.〔德聖〕十九世紀末　法人

de Saint Robert, Paul〔德聖·羅伯〕十九世紀後半期　法人數理物理學家

Desargues, Girard〔德薩給〕亦作Gerard Dasargues (1593—1662) 法人　創立透視法

Desboves, Adolphe〔對波佛〕(1818—1888) 法人

Descartes *du Perron*, René〔笛卡兒〕拉丁文作 Cartesius (1596.3.31—1650.2.11) 法人　創立解析幾何學

Deschales, C.F.M.〔對卡爾〕十七世紀後半期　法人

Descharmes, R.〔對沙姆〕二十世紀　法人

d'Esclaibes, Abbé〔笛克雷柏〕十九世紀　法人

Des Coudres, Theodor〔笛庫德勒〕(1862—1926) 德人

De Séguier, Jean A.〔得色基〕即 Séguier, Jean A.

De Sitter, Willem〔得西忒〕二十世紀前半期　荷蘭人

Deslandres, Henri〔得蘭德〕二十世紀前半期　法人

De Sluse, René François〔得石呂斯〕即 Sluse

Des Maizeaux, Pierre〔笛梅濟〕(或$\frac{1672}{1673}$—1745) 英人

Desmarest, E.〔得馬累斯特〕

Desmaze, C.〔笛馬熱〕十九世紀　法人

Desnanot, P.〔笛南諾〕十九世紀前半期　法人

Despagnet〔笛帕涅〕十七世紀

De Sparre, le Comte〔得斯巴〕二十世紀初　法人

de Sparre, Magnus〔得斯巴〕(1850—1933) 法人

Despeyrous, M.〔得斯派魯〕十九世紀　法人

Despiau, L.〔得斯丕〕 法人

D'Espine, C.〔得斯派〕

Desplanques〔對普蘭揆〕 十九世紀後半期 法人

Desprats, A.〔得斯普刺次〕 十九世紀後半期

Dessoye, J.B.J.〔得索宜〕 十九世紀 法人

d'Estaples〔得斯塔普〕 卽 Faber

d'Estrées, Jean〔得斯特里〕 十六世紀 法人

De Suberville, Henry〔得薩柏徵爾〕 十六世紀末 法人

Desvallées, H. R.〔笛發利〕 卽 Rocques Desvallées

Detels, F.〔得忒斯〕 十九世紀後半期 德人

De Tilly, J.M.〔第梯里〕 卽 J. M. Tilly

De Toledo, L. O.〔第托利多〕 卽 Toledo

Dette, W.〔得提〕 二十世紀前半期 德人

Dettonville, Amos〔得吞徵爾〕 十七世紀

Deuring, M.〔雖靈〕 二十世紀 德人

Deutsch, Miss Helen〔兌赤〕 二十世紀前半期 美女

Deutschbein, M.〔兌赤貝〕 二十世紀前半期 德人

Devaus, Paul〔得服〕 (1801—1880) 比利時人

Develey, E.〔得徵力〕 十八世紀末 法人

Develey, Isaak Emanuel Louis〔得徵力〕 (1764—1839) 法人

De Vick, Heinrich〔得徵克〕 十四世紀後半期 德人

Devresse, A.〔得甫勒西〕 二十世紀前半期 比利時人

de Vries, Hendrik〔得甫里斯〕 二十世紀前半期 荷蘭人

de Vries, Hugo〔得甫里斯〕 二十世紀 荷蘭人

de Vries, H. K.〔得甫里斯〕 二十世紀 荷蘭人

de Vries, J.〔得甫里斯〕 十九世紀末 荷蘭人

Dewan Kanh Ji *of Patna*〔得開•干•吉〕 十九世紀 印度人

Dewey, John〔杜威〕 (1859,10,20—) 美人 研究數理哲學

De Witt, Johannis〔得維特〕 亦作 John De Witt 或 Jan de Witt (1625—1672) 荷蘭人

Diaz, Emmanuel Jeune〔陽瑪諾〕 (?—1659) 葡萄牙人 明萬歷三十八年(卽1610年)來中國

Dibislav, W.〔狄畢斯拉〕 二十世紀 德人

Dibuadius, Christophorus〔狄部第〕 十七世紀 丹麥人

Dicæarchus *of Messina*〔代西亞爾克〕 亦作 Dikaearchus (?—285 B.C.) 西西里島人

Dick, F. J.〔紀克〕 (?—1927,5,25) 美人

Dick, G. R.〔紀克〕 十九世紀後半期 英人

Dickinson, Arthur Lowes〔笛欽孫〕 (1859,8,8—) 英人

Dickinson, C. N.〔笛欽孫〕 二十世紀前半期 美人

Dickmann, A.〔狄克曼〕 十九世紀後半期 巨哥斯拉夫人

Dickson, Charlotte〔狄克孫〕 二十世紀 美人

Dickson, James Douglas Hamilton〔狄克孫〕 (1850—1931,2,6) 英人

Dickson, Leonard Eugene〔狄克孫〕 (1874,1,22—) 美人 代數,數論,解析學家。

Dickstein, S.〔狄克斯泰〕 十九世紀末 波蘭人

Diderot, Denys〔狄德羅〕 亦作 Denis Diderot (1713—1784) 法人 創作百科全書

Didier〔笛第爾〕 卽 Deidier

Didion, I.〔狄第溫〕 亦作 J. Didion 十九世紀中 法人

Didon, F.〔狄頓〕十九世紀後半期 法人

Didymos〔狄狄摩斯〕希臘人

Dieck, W.〔第克〕二十世紀初 德人

Diefenbach, L.〔第分巴哈〕十九世紀 德人

Diego de Landa〔第哥·得·蘭多〕十六世紀後半期 墨西哥人

Diego el Castillo〔第哥·愛·卡斯提略〕

Diekmann, J.〔第克曼〕十九世紀後半期 瑞典人

Diels, Hermannus〔第爾斯〕十九世紀後半期

Dienes, Paul〔第恩斯〕(1882—) 匈人

Dienger, J.〔第恩給〕十世紀前半期 德人

Dieren, C.M. van〔第棱〕二十世紀前半期 荷蘭人

Diès, A.〔第斯〕二十世紀前半期 法人

Diesener, H.〔第塞寸〕二十世紀 德人

Diesing, M.〔第星〕十九世紀後半期 德人

Diesselhorst, H.〔第塞和斯特〕二十世紀 德人

Diestel, F.〔第斯武爾〕十九世紀後半期 德人

Diesterweg, W. A.〔第斯多惠〕二十世紀 德人

Dietrich, R.〔第特立喜〕十九世紀後半期 德人

Dietrichkeit, O.〔第特立喜開〕

Dieudonné, Jean〔第董涅〕十九世紀 法人

Diez, *Brother* Juan〔第次兄弟〕亦作 J. Diaz 十六世紀 墨西哥人 第次兄弟二人於1556年在墨西哥刊行一種數學書 (Sumario Compendicso), 此為西半球首出之第一種.

Diez de la Calle, Juan〔第次〕十七世紀 西班牙人

Diez freyle, Juan〔第次〕即 Diez, Brother

Digby *Sir* Kenelm〔低格比〕(1603—1665) 英人

Digges, Leonard〔狄吉士,甯那〕(?—1571) 英人 代數學家

Digges, Thomas〔狄吉士〕(?—1595,8 24) 英人 甯那之子代數學家

Digweed, E. N.〔狄格韋德〕二十世紀前半期 英人

Dijksterhuis, E. J.〔第克斯忒攸〕二十世紀前半期 荷蘭人

Dikaearchus〔代西亞爾克〕即 Dicæarchus

Dillingham, Alexander〔狄林加〕二十世紀前半期 美人

Dilworth, Thomas〔狄爾衞史〕十八世紀中 英人

Dilworth, W.J.〔二十世紀〕

Dimick, C.E.〔的米克〕二十世紀前半期 美人

Dimier, L.〔的美耳〕

Dines, C. R.〔丁斯〕二十世紀

Dines, L. L.〔丁斯〕二十世紀前半期 坎拿大人

Dingeldey, Fr.〔丁革帶〕十九世紀後半期 德人

Dingle, E.〔丁革爾〕

Dingle, H.〔丁革爾〕二十世紀前半期 英人

Dingler, Hugo〔丁革勒〕二十世紀前半期 德人

Dini, Ulisse〔狄尼〕(1845—1918) 義人

Dinnik, A.〔定尼克〕二十世紀 德人

Dinostratus of Cyzicus〔帶諾斯特拉塔〕亦作 Deninor'tratus (335 B. C.—?)
希臘人 孟尼某馬斯 (Menæchmus) 之弟 研究圓積線

Dintz, P.〔丁茲〕二十世紀前半期 德人

Diocles〔帶克爾斯〕亦作 Diokles 紀元前二世紀 希臘人 發見蔓葉形線

Diodorus Siculus〔帶奧多刺〕亦作 Diodore de Sicile 或 Diodoros 紀元前一

世紀 西西里島人

Diogens Laertius〔帶奧澤泥・雷厄細阿斯〕 二世紀 希臘人

Diogo Mendes Vizinho〔帶哥・門第茲・微晉和〕 十五世紀末 葡萄牙人

Diogo Oritz〔帶哥・奧利次〕 十五世紀 葡萄牙人

Diokles〔帶克爾斯〕 即 Diocles

Dionis du Séjour, Achille Pierre〔帶立・杜・塞朱〕 (1734—1794) 法人

Dionisi, G.〔帶奧尼西〕 十九世紀 薩拉(Zara)人

Dionysius, elder〔帶奧立細阿斯〕 亦作 Dionysius of Syracuse 或 Dionysius von Syrakus 紀元前五世紀 希臘人

Dionysius, younger〔帶奧立細阿斯〕 紀元前四世紀 希臘人

Dionysius Exiguus〔帶奧立細阿斯・伊稷谷斯〕 六世紀 羅馬人

Dionysodorus〔帶奧立索多剌〕 紀元前一世紀 希臘人

Diophantus of Alexandria〔帶奧蕃塔斯〕 亦作 Diophantos 或 Diophant 或 Diophantus von Alexandria 或 Diophante D'Alexandrie 三世紀後半期 希臘人 著名研究不定方程式者

Di Pirro, G.〔狄畢洛〕

Dippe, M.C.〔狄佩〕 十九世紀 德人

Dirac, Paul Adrien Maurice〔帶剌〕 (1902,8,8—) 英人

Dirichlet, *Peter* Gustav Lejeune〔狄利士勒〕 (1805,2,13—1859,5,5) 德人 代數學,整數論,方式論之泰斗.

Dircks, H.〔狄克斯〕 十九世紀末 德人

Dirksen, Enno Heeren〔拉克森〕 十九世紀

Disse, A.〔狄色〕 二十世紀 德人

Disteli, Martin〔狄斯忒力〕 亦作 M. Distelli (1860—1923,10,25) 瑞士人

Ditmarsch, A. J. van〔狄特馬士〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Dittmar, O.〔廸特馬〕十九世紀末　德人

Ditton, Humphrey〔狄呑〕(1675,5,29—1715) 英人

Dix, Leon Edward〔狄克斯〕二十世紀前半期　美人

Dixon, Alfred Cardew〔狄克孫〕(1865—　) 英人　著橢圓函數

Dixon, Arthur Lee〔狄克孫〕(1867,11,27—　) 英人

Dixon, E. T.〔狄克孫〕二十世紀前半期　牙買加島(Jamaica)人

Doak, Eleanor C.〔杜阿克〕二十世紀前半期　美人

Dobbs, F. W.〔多布斯〕二十世紀　英人

Dobbs. W. J.〔多布斯〕二十世紀　英人

Dobe, F. W.〔多布〕二十世紀　美人

DoBell, Howard Adams〔多柏爾〕二十世紀前半期　美人

Dobrinder, H.〔多布棱德〕十九世紀後半期　巨哥斯拉夫人

Dobson, C. G.〔多布孫〕二十世紀　英人　研究簿記學

D'Ocagne, Maurice〔杜玖困〕亦作Mauris d'Ocagne (1862—　) 法人
著直線圖解術

Dock, Hans〔多克〕二十世紀　德人

Dockeray, N. R Culmore〔多刻累〕二十世紀　英人

Dodd, E. R.〔多德〕二十世紀前半期　美人

Dodd, Joseph Leo〔多德〕二十世紀前半期　美人

Dodge, R.〔多治〕二十世紀前半期　美人

Dodgson, Charles Lutwidge〔多治孫〕常署名曰Lewis Carroll (1832,1,27—1898,1,14) 英人　研究行列式及幾何學

Dodson, James〔多得松〕(？—1757,11,23) 英人　作逆對數表

Doehlemann, Karl〔多雷曼〕十九及二十世紀　德人　近世幾何學家

Doelp, H.〔多爾普〕十九及二十世紀　德人

Doerge〔多爾治〕(1899—) 瑞士人

Doermann, Fredrick William〔多曼〕二十世紀前半期 美人

Doerr, V.〔多耳〕十九世紀後半期 德人

Doetsch, Gustav〔多赤〕(1892—) 德人

Dohmen. F. J.〔多門〕二十世紀初 德人

Doi Uzumi〔土井不曇〕二十世紀半前期 日本人

Dolbnia, J. P.〔多布尼亞〕亦作 Iwan Dolbnja 十九及二十世紀 法人

Doležal, E.〔多雷贊〕二十世紀前半期 奧人

Dolezalek, F.〔多雷紮勒〕二十世紀 德人

Doll, M.〔多爾〕二十世紀初 德人

Dölle, R.〔多勒〕二十世紀初 德人

Dollon, J.〔多隆〕二十世紀前半期 法人

Dölp, H.〔多爾普〕十九世紀後半期 德人

Dombrowski, M. C. M.〔頓布洛甫斯歧〕二十世紀 俄人

Domenichi, F.〔多門尼契〕十八世紀末

Domenicho de Valsugana〔多門尼綽·得·蘇加那〕亦作 Domenicho da Bien de Valsugana 十六世紀後半期 義人

Domingo de Guzman〔多密哥·得·古孟〕(1170—1221) 義人

Dominicus de Clavasio〔多米尼卡·克拉發柄〕亦作 Dominicus de Clavasio Parisiensis 十四世紀

Dominicus Hispanus〔多米尼卡·希巴那斯〕十三世紀

Dominis, Antonio〔多米尼斯〕十七世紀前半期 巨哥斯拉夫人

Domke, J.〔頓奇〕十九世紀末 巨哥斯拉夫人

Domninus *of Larissa*〔頓尼那斯〕亦作 Domninos von Larissa 或 Domnininos de Larissa 五世紀 敘利亞人

Domsch, P.〔頓士〕 十九世紀後半期 德人

Donadt, A.〔頓那特〕 十九世紀後半期 德人

Donahue, J. E.〔頓那烏〕 二十世紀前半期 美人

Donahue, James N.〔頓那烏〕 (1880—1932,8,13) 美人

Donatello〔多拿的羅〕 (1386—1468) 義人

Donath, M.〔多那史〕 二十世紀 德人

Donati, Luigi〔多那提〕 (?—1932,3,7) 義人

Donder, Th. de〔頓得〕 卽 De Donder

Doner, Ralph Douglas〔多涅〕 二十世紀前半期 美人

Dongier, M. R.〔唐基耳〕 十九世紀末 法人

Donkin, William Fishburn〔唐金〕 (1814—1869) 英人

Donn, Benjamin〔唐〕 十八世紀 英人

Donner, A.〔頓涅〕 十九及二十世紀 芬蘭人

Donnini, P.〔多寧尼〕 十九世紀後半期 法人

Doodson, Arthur Thomas〔杜德遜〕 (1890,3,31—) 英人

D'Ooge, Martin Luther〔杜治〕 二十世紀前半期 美人

Doormann, Johann Gabriel〔多拍美〕 亦作 J. G. Doppelmayer (1671—1750) 德人

Dörge. Karl〔達治〕 二十世紀前半期 德人

Dörholt, K.〔達和爾特〕 十九世紀後半期 德人

Dormoy, E.〔多摩〕 十九世紀後半期 法人

Dorn, E.〔惇〕 二十世紀 德人

Dorner, G.〔多耳涅〕 二十世紀前半期 德人

Dörrie, H.〔多李〕 二十世紀前半期 德人

Dory, E.〔多立〕 二十世紀前半期 比利時人

Dose, A.〔多斯〕二十世紀前半期 德人

Dositheus *of Alexandria* 〔多西式斯〕紀元前三世紀 希臘人

Dostal, B. F.〔多斯塔〕二十世紀前半期 美人

Dostor, G.〔杜思托〕十九世紀後半期 法人

Dostor, G. J.〔杜思托〕十九世紀後半期 法人

Dötsch, G.〔杜赤〕十九世紀後半期 德人

Dou, Joh. Pietersen〔道〕德人

Doub, Arnold V.〔督〕二十世紀 美人

Dougall, John〔答迦爾〕十九及二十世紀 蘇格蘭人

Douglas, Jesse〔答格拉斯〕二十世紀前半期 美人

Douglas, Stair〔答格拉斯〕十九世紀後半期 英人

Douglas, W. D.〔答格拉斯〕十九世紀末 美人

Dounot〔道諾〕即 Deidier

Dove, Heinrich Wilhelm〔多甫〕(1803—1879) 德人 研究數理物理及氣象學

D'ovidio, Enrico〔稻微帶〕(?—1933,3,21) 義人 著解析幾何學

Dowling, C. H.〔道林〕

Dowling, H. H.〔道林〕二十世紀前半期 美人

Dowling, L. E.〔道林〕十九世紀末 美人

Dowling, Linnaeus Wayland〔道林〕(1867,12,7—1928,9,16) 美人 著射影幾何學

Downey, Walter F.〔丹內〕二十世紀 美人

Downing, Harold Hardesty〔道甯〕二十世紀前半期 美人

Dowsett, John F.〔敦塞特〕二十世紀 英人 著作圖幾何學

Drach, Jules〔德剌哈〕十九世紀末 法人

Draeger, M.〔德剌吉〕　二十世紀前半期　德人

Draenert〔德剌涅〕　十九世紀　德人

Dragoni, A.〔德剌哥尼〕　十九世紀前半期　義人

Drapiez〔德拉佩〕

Draycott. G. E.〔德累科特〕　二十世紀　英人

Drechsler, A.〔德勒斯勒〕　十九世紀中　德人

Drecker, Joseph〔德勒刻〕　二十世紀　德人

Dreetz. W.〔德里次〕　二十世紀前半期　德人

Drenckhaln, F.〔德倫克哈〕　二十世紀前半期　德人

Dresden, Arnold〔德勒斯登〕　(1882,11,23—　)　美人　生於荷蘭

Dresden, Kgl.〔德勒斯登〕　二十世紀初　德人

Dresler, J. H.〔德勒斯勒〕　十九世紀　德人

Drew, W.H.〔德留〕　十九世紀後半期　英人

Drews, Arthur〔德留斯〕　(1865—　)　德人

Dreydorff〔德賴多夫〕　十九世紀　德人

Dreyer, J. L. E.〔德賴業〕　〔1852—1926,9,14〕　愛爾蘭人

Drieberg, F. von〔德里柏格〕　十九世紀前半期　德人

Driel, M. J. van〔德里爾〕　二十世紀前半期　荷蘭人

Drinkwater, J. E.〔德靈克窩忒〕　十九世紀前半期　英人

Driscoll, F. A.〔德立斯科爾〕　二十世紀前半期　美人

Drobisch, A.〔德洛比歇〕　十九世紀後半期　德人

Drobisch, Moritz Wilhelm〔德洛比歇〕　(1802—1896)　德人　研究數理心理

Droke, George Wesley〔德洛克〕　(1854,9,26—　)　美人

Dröll, K.〔德洛爾〕　二十世紀　德人

Dronke. Ad.〔德琅克〕　十九世紀後半期　德人

Drost. A. J.〔德羅斯〕二十世紀前半期 荷蘭人

Droste, J.〔德羅斯特〕二十世紀前半期 荷蘭人

Droz-Farny, A.〔德洛·法尼〕二十世紀 瑞士人

Drucker, C.〔德魯刻〕二十世紀前半期 德人

Drude, P.〔杜魯德〕十九世紀後半期 德人

Drum, Martin Linnaeus〔杜魯〕二十世紀前半期 美人

Drumaux, P.〔德魯摩〕二十世紀前半期 法人

Drummond, G. B.〔德藍夢德〕二十世紀前半期 美人

Drury, F. E.〔德魯立〕二十世紀 英人

Drushel, J. A.〔德魯瑟爾〕二十世紀 美人

Druxes, J.〔德魯色斯〕十九世紀末 德人

Dschabir ibn Aflah〔德沙比·易·阿夫拉〕亞剌伯人

Dschafar as Sadik〔德沙法·阿·薩第克〕(699—765) 亞剌伯人

Duarte, F. J.〔杜阿提〕二十世紀前半期 瑞士人

Dubash, P.S.G.〔杜巴士〕二十世紀前半期 印度人

Dubbeld, A.J.J.〔度柏爾德〕二十世紀前半期 荷蘭人

Dubislav, Walter〔杜比斯拉〕二十世紀前半期 德人 著數理哲學

Du Bois, A. J.〔杜波〕十九世紀末 美人

Dubois-Aymé〔杜波·亞麥〕十九世紀 法人

du Bois-Reymond, Emil *Heinrich*〔杜波累夢〕(1818—1896) 德人

Du Bois-Reymond, Paul *David Gustav*〔杜波累夢〕(1831,12,2—1889,4,7) 德人
研究傅利級數,收斂問題,變分學,積分方程式論.

Dubourdieu, J.〔度部第〕二十世紀前半期 德人

Dubreil, Paul〔度布賴爾〕二十世紀前半期 法人

Du Breuil〔度布魯爾〕

Dubroca, Marcelin〔杜卜羅喀〕 二十世紀前半期 法人

Dubs, H. H.〔杜布斯〕 二十世紀前半期 美人

Dubuat-Nançay, L. G.〔杜步阿・南錫〕 (1732—1787)

Duc de Bourgogne〔達・得・部哥內〕 (1682—1712) 法人

Duchesne, Simon〔度申〕 亦作 van den Dycke 十六世紀後半期 荷蘭人

Duclout, Jorge〔達克羅〕 (1854—1929,2,15) 阿根廷人 研究彈性之數論

Dudenny, Henry Ernest〔度登尼〕 二十世紀前半期 英人 著遊戲數學

Dudensing, W.〔度登信〕 十九世紀後半期 德人

Due, L. C.〔雕〕 二十世紀初 丹麥人

Duehring, E.〔斗靈〕 十九世紀 德人,

Duehring, U.〔斗靈〕 十九世紀 德人

Duesing, K.〔斗星〕 二十世紀 德人

Dufailly, J.〔度非力〕 十九世紀 法人

Dufay, Charles François de Cisterney〔度法〕 (1698—1739) 法人

Duffield, W. W.〔達飛爾法〕 十九世紀末 美人

Dufrénois〔達夫棱訥〕 二十世紀 法人

Duhamel, Jean Baptiste〔度阿麥爾〕 (1624—1706) 法人

Duhamel, Jean Marie Constant〔度阿麥爾〕 (1797—1872) 法人 數理物理及解析學家

Duhamel, M.〔度阿麥爾〕 十九世紀中 法人

Duhamel, Pasquier〔度阿麥爾〕 十六世紀後半期

Duhem, Pierre〔度罕〕 (1861—1916) 法人 貢獻於數理物理

Duhre, Anders Gabriel〔度累〕 十八世紀

Dühring, E.〔杜林格〕 十九世紀後半期 德人

Duillier〔雕利爾〕 卽 Fatio de Duillier

Düker, H.〔度劉〕 十九世紀 德人

Dulac, H.〔杜拉〕 二十世紀初 法人

Dulaurens, Francisci〔度羅棱〕 十七世紀 法人

Dull, Raymond W.〔度爾〕 二十世紀前半期 美人

Dulos, Pascal〔度洛〕 十九世紀 法人

Dumans, W.〔杜曼斯〕 十九世紀

Dumas, G.〔杜馬〕 二十世紀初 法人

Dumas, S.〔杜馬〕 十九及二十世紀 瑞士人

Dumesnil, Georges〔杜美泥爾〕

Dumont, E.〔杜蒙〕 二十世紀前半期 法人

Dumont, Francisque〔杜蒙〕 二十世紀前半期

Duncan, R. T.〔當坎〕 二十世紀 英人 著曲求跡法

Duncan, T.〔當坎〕 十九世紀前半期 英人

Dunér, N. C.〔丹涅〕 十九世紀末 瑞典人

Duni, Taddeo〔丹尼〕 十六世紀 德人

Dunkel, Otto〔丹剋爾〕 二十世紀初 美人

Dunlap, Jack W.〔丹拉普〕 二十世紀 美人

Dunlop, H. C.〔丹羅普〕 二十世紀前半期 英人

Dunn, Richard Bolling〔丹〕 (?—1931) 美人

Dunne, John William〔丹內〕 二十世紀前半期 英人

Dunporcq, Ernst〔丹坡〕 二十世紀初 法人

Duns Scotus〔鄧司各脫斯〕 卽 Scotus

du Pasquier, L. Gustave〔度帕斯揆〕 二十世紀初 瑞士人

Dupin, *François Pierre* Charles〔杜鵬〕 (1784—1873) 法人 貢獻於微分幾何學及機械學

Duporcq, Ernest〔杜坡〕十九世紀末　法人

Duport, Henri〔杜坡特〕二十世紀　法人

Duport, M.〔杜坡特〕二十世紀　法人

Dupuis, Jean〔度譜伊〕十九世紀末　法人　著對數表

Dupuis, Nathan F.〔度譜伊〕十九世紀後半期　坎拿大人

Dupuy, Paul〔度普伊〕十八世紀　法人

Durand, C. G.〔度龍〕二十世紀前半期　法人

Durand, G.〔度龍〕二十世紀前半期　法人

Durand, Janet C.〔度龍〕二十世紀前半期　美人

Durand, William Frederick〔度龍〕(1859,3,5—　)　美人

d'Urban, F.〔德爾班〕十九世紀　法人

Durége, Heinrich〔杜累治〕(1821—1893)　捷克人　研究曲線論及函數論

Durell, Clement Vavasour〔杜累爾〕二十世紀初　英人　著幾何學三角術,及相對論等.

Durell, Fletcher〔杜累爾〕二十世紀前半期　美人

Duren *Jr.*, William Larkin〔都棱〕二十世紀前半期　美人　研究變分學

Durer, Albrecht〔度勒〕(1471,5,21—1528,4,6)　德人　創立近世曲線論

Durfee, Walter H.〔度非〕二十世紀前半期　美人

Durfee, William Pitt〔度非〕(1855,2,5—　)　美人　著三角術

Durgin, C. M.〔度京〕二十世紀　美人

Durhold, P.〔度和德〕二十世紀初　德人

Durrande, H.〔都鑑得〕十九世紀後半期　法人

Durrande, J. B.〔都鑑得〕十九世紀

Duschek, Adelbert〔杜徹克〕二十世紀前半期　奧人　著微分幾何學

Du Séjour〔杜色未〕卽 Séjour

Dushman, Saul〔達士曼〕(1883,7,12—) 美人

Düsing, K.〔都辛〕二十世紀 德人

Dutens, L.〔度通〕(1730—1812)

Duval, E. P. R.〔度發爾〕二十世紀 美人

Düx, J. M.〔杜克斯〕十九世紀 德人

Dwyer, P. S.〔杜厄〕二十世紀前半期 美人

Dyck, Walter von〔帶克〕十九世紀後半期 德人

Dycke, M. van den〔帶奇〕即 S. Duchesme

Dyer, J. M.〔帶厄〕十九世紀末 英人

Dyson, *Sir* Frank Watson〔帶松〕(1868,1,8—) 英人

Dziobek, Otto〔宰貝克〕十九及二十世紀 德人 著微積分

Eagle, Albert〔伊格爾〕二十世紀前半期 英人

Eagle, T. H.〔伊格爾〕十九世紀 英人 研究作平面曲線法

Eagles, T. R.〔伊格爾斯〕二十世紀前半期 美人

Earl, J. M.〔厄爾〕二十世紀前半期 美人

Earle, M. D.〔厄列〕二十世紀前半期 美人

Earnshaw, Samuel〔厄索〕十九世紀中 研究偏微分方程

Eason, Charles R.〔伊孫〕二十世紀前半期 美人

Eason, M. A.〔伊孫〕二十世紀前半期 美人

Eastham, J. N.〔伊斯退〕二十世紀前半期 美人

Easton, Burton Scott〔伊斯呑〕二十世紀初 美人

Eastwood, G. S.〔伊斯武德〕二十世紀 英人

Eaton, R. M.〔伊呑〕二十世紀前半期 英人

Eberhard, Victor〔阿柏哈特〕(1861—1928,4,28) 德人

Ebert, Johann Jacob〔亞柏特〕十八世紀後半期 德人

Ebert, W.〔亞柏特〕 二十世紀 奧人

Ebner, F.〔亞柏涅〕 二十世紀 德人

Ebner, M.〔亞柏涅〕 二十世紀 德人

Eccles, James Ronald〔厄克爾斯〕 (1874,1,9—) 英人

Echaguibel, E. de〔厄產基柏〕 二十世紀前半期

Echegaray, José〔厄拆加累〕 (1832—1916) 西班牙人

Echelles, Abraham von〔厄拆爾斯〕

Echols, C. P.〔厄科爾斯〕 二十世紀末 美人

Echols, William Holding, Jr.〔厄科爾斯〕 (1859,12,2—) 美人

Eck, J. B.〔厄克〕 十九世紀末 德人

Eckardt, F, E.〔厄卡德特〕 十九世紀後半期 德人

Eckhardt, E.〔厄克哈〕 十九世紀末 瓦哥斯拉夫人

Eckhardt, Engelhardt August〔厄克哈〕 (1888,8,11—) 美人

Eckhardt, L.〔厄克哈〕 二十世紀前半期 德人

Eckhardt, O.〔厄克哈〕 二十世紀 德人

Eckhart, L.〔伊克哈〕 二十世紀前半期 奧人 著四原空間

Eckwehr, J. Walter von〔厄克威〕 (1789—1857) 德人

Edalji, Jamshedji〔厄達及〕 十九世紀末 印度人

Eddington, *Sir* Arthur Stanley〔厄丁頓〕 (1882,12,28—) 英人 研究相對論

Eddy, Henry Turner〔厄狄〕 (1844—) 美人

Edgar. J. H.〔厄狄加〕 十九世紀 英人

Edge, W. L.〔厄齊〕 二十世紀前半期 英人 著有法曲面論

Edgerton, Edward I.〔厄治吞〕 二十世紀前半期 美人 著商業數學

Edgeworth, F. Y.〔厄治衞司〕 十九世紀後半期 英人

Edghill, E. M.〔厄基爾〕 二十世紀 英人

Edington. W. E.〔愛丁吞〕 二十世紀前半期 美人

Edkins, Joseph〔艾約瑟〕 十九世紀中 英人 清道光季年(即1850年)來中國

Edleston, J.〔厄勒斯吞〕 十九世紀中 英人

Edme, F.〔厄美〕 二十世紀 德人

Edmondson, Thomas Williams〔厄德夢孫〕 (1869,6,26—) 美人 生於英

Edmonson *Jr.*, Nat〔厄德蒙松〕 二十世紀前半期 美人

Edser, Edwin〔愛狄塞〕 二十世紀前半期 英人

Edwards, D.〔愛德華治〕 十九世紀後半期 英人

Edwards, G. C.〔愛德華滋〕 二十世紀前半期 美人

Edwards, H. H.〔愛德華滋〕 二十世紀初 英人

Edwards, Joseph E.〔愛德華滋〕 (1854—1931,5,16) 英人 著微積分

Edwards, Prentice Dearing〔愛德華滋〕 二十世紀前半期 美人

Edwards, R. W. K.〔愛德華滋〕 二十世紀 英人

Eells, W. C.〔亞爾斯〕 二十世紀前半期 美人

Egen, H.〔亞真〕 卽 zum Egen

Egerer, A.〔亞革累〕 二十世紀 德人

Egerer, Heinz〔亞革累〕 二十世紀 德人 著工業數學

Egerváry, J.〔厄澤發立〕 二十世紀前半期 匈人

Eggar, W. D.〔厄給〕

Eggenberger, J.〔厄眞柏革〕 十九世紀末 瑞士人

Eggers, G.〔厄澤斯〕 二十世紀前半期 德人

Egidi, G.〔厄吉第〕 十九世紀後半期 義人

Egli, M.〔厄格力〕 二十世紀初 瑞士人

Eglin, W. C.〔厄格林〕 (?—1928,2,7) 美人

Egnell, Alex〔厄格涅爾〕 二十世紀 法人

Egoroff, D. Th.〔埃哥洛夫〕二十世紀前半期　法人

Ehrat, J.〔哀咧特〕二十世紀初　瑞士人

Ehrenfest, F.〔哀倫斐特〕二十世紀　德人

Ehrenfest-Afanassjewa, T.〔哀倫斐特阿蕃那朱瓦〕二十世紀前半期荷蘭人

Ehrhorn, M.〔愛和〕十九世紀後半期　德人

Eichenberg, S.〔愛痕柏格〕十九世紀後半期　德人

Eickelberg, E. W.〔愛刻柏格〕二十世紀前半期　美人

Eickemeyer〔愛聚邁爾〕十九世紀　德人

Eiesland, John *Arndt*〔埃斯蘭德〕(1867,12,7—　) 美人　生於挪威

Eilker, G.〔伊爾刻〕十九世紀後半期　德人

Einstein, Albert〔愛恩斯坦〕(1879,3,14—　) 德人　於1905年發明特別相對論,1915年發明普徧相對論

Eisenhart, Luther Pfahler〔艾森哈〕(1876,1,13—　) 美人　微分幾何學家

Eisenlohr, August〔愛繒羅〕十九世紀後半期　德人

Eisenlohr, Friedrich〔愛繒羅〕(1831—1904)

Eisenmann, Simon〔愛森曼〕十五世紀　德人

Eisenmenger, Samuel〔埃增門給〕當署名曰 Siderocrates 十六世紀　德人

Eisenstein, *Fredinand* Gotthold *Max*〔愛森史泰〕$\left(1823,\text{或}{}^{4,16}_{10,\ 4}-1852,10,11\right)$ 德人

Eisner, Franz〔埃斯涅〕(1896—1933,6,16) 德人

Elb, O.〔厄爾布〕十九世紀後半期　德人

Elbogen, H.〔厄爾波貢〕二十世紀　奥人

Elderton, Ethel M.〔厄爾得通〕二十世紀　英人

Elderton, W. Palin〔厄爾得通〕二十世紀初　英人

Elfrinkhof, L. van〔厄爾鑑和〕十九世紀末 荷蘭人

El-Hassar〔亞哈薩〕卽 Al-Hassâr

Elia Misrachi, Rabbi〔伊力阿・米剌欽〕亦作 Elias Misrachi (1455—1526) 土耳其人

Eliot, C. W.〔愛略脫〕二十世紀 美人

Elliot, Jas.〔厄力奧脫〕

Elliot, V. Z.〔厄力奧脫〕十九世紀後半期 法人

Elliott, Edwin Bailey〔厄力奧特〕(1851,6,1—) 英人 研究方式論

Elliott, W. W.〔厄力奧特〕二十世紀前半期 美人

Ellis, Alexander John〔厄爾力斯〕(1814—1890) 英人

Ellis, George〔厄爾力斯〕十九世紀 美人

Ellis, J. C. W.〔厄爾力斯〕十九世紀後半期 英人

Ellis, *Robert* Leslie〔厄爾力斯〕(1817—1859) 英人

Ellwood, J. K.〔厄爾武德〕十九世紀末

Elemendorf, A.〔厄門多夫〕二十世紀

Elowson, G.〔厄羅孫〕十九世紀後半期

Elsas, A.〔亞薩斯〕十九世紀後半期 德人

Elsbach, A. C.〔厄爾巴哈〕二十世紀前半期 荷蘭人

Elsee, C.〔厄爾西〕十九世紀後半期 英人

Elston. J. S.〔厄爾斯呑〕二十世紀前半期 美人

Ely, A. M.〔伊里〕十九世紀 美人

Ely, George Stetson〔伊里〕(?—1918) 美人

Emanaud, M.〔厄曼諾〕二十世紀

Emanuel ben Jacob〔伊曼紐爾・本・雅科布〕卽 Imanuel ben Jacob

Emch, Arnold〔恩希〕十九及二十世紀 美人

Emch, Hermann〔恩希〕 二十世紀前半期 瑞士人

Emde, F.〔恩得〕 二十世紀 德人

Emden, R.〔恩登〕 二十世紀 德人

Emerson, Frederick〔愛默生〕 十九世紀前半期 美人

Emerson, William〔愛默生〕 (1701,5,14—1782,5,20) 英人

Emge, C. A.〔恩治〕 二十世紀前半期 德人

Emmanuel〔伊曼紐爾〕 即 Imanuel

Emmanuel, D.〔伊曼紐爾〕 十九世紀後半期 法人

Emmerich, A.〔恩麥里士〕 十九世紀末 德人

Emming, A.〔恩明〕 二十世紀前半期 德人

Emmons, C. W.〔恩蒙斯〕 二十世紀前半期 美人

Emmons, Lloyd C.〔恩蒙斯〕 二十世紀前半期 美人 研究代數學

Empedokles *von Agrigent*〔恩柏多克利〕 亦作 Empedocles 或 Empédocle (460 B.C.—?) 西西里島人

Emsmann. G.〔恩斯曼〕 十九世紀 德人 著高等代數方程

Emtage, William Thomas Allder〔恩塔治〕 (1862—) 英人 研究數理電學

Enache, N.〔埃那奇〕 二十世紀初 法人

Encke, Johann Franz〔恩刻〕 (1791—1865) 德人 數理天文家

End, W.〔恩德〕 十九世紀後半期 德人

Ende, H. F. am〔恩得〕 十九世紀中 德人

Enders, M. A.〔恩得斯〕 二十世紀初 德人

Endo, Toshisada〔遠藤利貞〕 (1844—1915) 日本人

Endoxus〔攸多克薩斯〕 即 Eudoxus

Eneström, Gustaf〔恩湼斯特倫〕 亦作 G. Enestroem (1840—1924) 瑞典人

Enfield, W.〔恩飛德〕

Engberg, Carl Christian〔恩格柏〕(1872,11,3—1920,9,21) 美人

Engel, Ernst〔恩革爾〕(1821—1896) 德人

Engel, Friedrich〔恩革爾〕十九世紀後半期 德人 研究平行論,變換論,偏微分方程之李氏理論.

Engel, J. H.〔恩革爾〕十九世紀後半期 瑞士人

Engelbert von Lüttich〔恩革柏〕

Engelhart, P.〔恩格哈〕二十世紀初 德人

Engelmann, Max〔恩格爾曼〕二十世紀前半期 荷蘭人

Engelmann, R.〔恩格爾曼〕十九世紀 德人

Engstrom, H. T.〔恩格斯特倫〕二十世紀前半期 美人

Enklaar, W.〔恩克拉耳〕二十世紀前半期 荷蘭人

Enneper, Alfred〔恩涅佩〕(1830—1885) 德人 研究橢圓函數

Enriques, Federigo〔恩利魁〕(1871—) 義人 幾何學家

Ensslin, Max〔恩斯林〕二十世紀 德人

Enzo Wada 十八世紀 日本人

Eötting, E.〔厄廷〕

Eötvös, Baron〔厄特味士〕十九世紀 匈人

Epaphroditus〔厄帕夫洛帶塔〕二世紀末 義人 研究數論

Epicharmus〔厄匹卡馬斯〕紀元前五世紀 希臘人

Epicurus〔伊壁鳩魯〕亦作 Epikouros 或 Épicure (341 B.C.—270 B.C.) 希臘人

Epimenides〔厄匹門尼第〕亦作 Épiménide de Gnosse 紀元前七世紀 希臘人

Episcopius, Johann Jakob〔厄匹斯科匹阿〕即 J. J. Bischof

Eppenstein, O.〔厄盆史泰〕十九世紀末 德人

Epperson, C. A.〔厄伯松〕 二十世紀前半期 美人

Epsteen, S.〔厄普斯提〕 二十世紀初 瑞士人

Epstein, P.〔厄普斯騰〕 十九世紀末 瑞典人

Epstein, Paul Sophus〔厄普斯騰〕 (1883,3,20—) 生於波蘭

Epstein, S.〔厄普斯騰〕 二十世紀初 瑞士人

Epstein, S. S.〔厄普斯騰〕 十九世紀末 瑞士人

Epstein, T.〔厄普斯騰〕 十九及二十世紀 奧人

Erasmus〔伊拉斯莫斯〕 亦作 Érasme (1467—1536) 荷蘭人

Eratosthenes *von Kyrene*〔埃拉托色尼〕 亦作 Ératosthène (276B.C.—194B.C.) 希臘人 發明篩出質數法

Erben, A.〔厄本〕 十九世紀後半期 德人

Erdmann, Beno〔愛爾特曼〕 (1851—1920) 德人

Erdmann, G.〔愛爾特曼〕 十九世紀

Erikson, Carl M.〔伊利克孫〕 二十世紀前半期 美人

Erlang, A. K.〔埃蘭格〕 (1878—1929,2,3) 丹麥人 研究數學之應用於電話問題

Erlendssön, Hauk〔厄隆德孫〕 (1264—1334) 挪威人

Erler, W.〔厄拉〕 二十世紀 德人

Ermakoff W. *P.*〔厄馬科夫〕 二十世紀初 俄人

Erményi, L.〔厄門伊〕 十九世紀後半期 奧人

Ernst, M.〔伊倫斯特〕 十九世紀末 波蘭人

Ernst von Baien〔伊倫斯特〕

Errard de Barleduc, Jean〔厄剌德〕

Errera, Alfred〔厄累拉〕 二十世紀前半期 比利時人

Ersch, J. S.〔厄士〕 十九世紀 德人

Erwin, J. T. 〔厄文〕 二十世紀前半期 美人

Escandón, R. 〔厄士干頓〕 十九世紀後半期 西班牙人

Escarra, J. 〔厄士卡拉〕 二十世紀 法人

Escary, J. 〔厄士卡立〕 十九世紀末 法人

Eschenbach, Hieron. Christoph 〔埃申巴哈〕 (1764—1797) 德人

Eschenburg, Nicolaus 〔埃申步〕 十六世紀 德人

Escherich, Gustav von 〔埃盛里士〕 十九世紀末 奧人

Eschmann, J. ed. 〔厄士曼〕 十九世紀 瑞士人

Esclaibes, R. E. A. J. d' 〔厄克雷柏〕 十九世紀後半期 法人

Esclangon, Ernest 〔厄斯克蘭袞〕 二十世紀初 法人

Escudero. J. A. 〔厄斯卡得洛〕 十九世紀 墨西哥人 研究統計學

Eshleman, J. D. 〔厄士勒蒙〕 二十世紀前半期 美人

Espinosa, Pedro 〔亞斯品諾薩〕 十六世紀 西班牙人

Espy, James Pollard 〔厄斯四〕 (1786—1860) 美人

Esscher, F. 〔厄斯徽〕 二十世紀前半期 瑞典人

Essén, M. 〔厄森〕 二十世紀前半期 瑞典人

Esson, W. 〔厄遜〕 十九世紀後半期 英人

Estanave, E. P. 〔厄坦那甫〕 十九世紀末 法人

Estaples, Jacques le Fèvre 〔厄塔普爾〕 亦作 Étaples 卽 Fèvre

Estes, G. Dan 〔伊斯特斯〕 二十世紀前半期 英人

Estève, R. 〔厄斯特微〕 二十世紀前半期 法人

Esty, T. C. 〔厄斯替〕 二十世紀前半期 美人

Étaples 〔厄塔普爾〕 卽 Estaples

Etherington, I. M. H. 〔厄式靈通〕 二十世紀前半期 英人

Etten, Hedrick van 〔厄騰〕 卽 Jean Leurechon

Ettinghausen, Andreas von〔厄廷豪森〕(1796—1878) 奥人

Ettlinger, Hyman J,〔厄特林革〕二十世紀前半期 美人

Euclid *of Alexandria*〔歐幾里得〕亦作 Euklid 或 Eukleides (330? B.C.—275? B.C.) 希臘人 創立幾何學,著幾何原本十三卷(於1482年開始刊印),遺傳至今二千餘年,仍奉爲圭臬,乃科學界中壽命最長之書.

Euclid of Megara〔歐幾里得〕亦作 Euclid von Megara 紀元前四至五世紀 希臘人

Euctemon〔倭騰蒙〕紀元前五世紀 雅典人

Eudemus von Pergamum〔歐德謨〕

Eudemus von Rhodos〔歐德謨〕或作 Eudemos 或 Eudemus of Rhodes 紀元前四世紀 希臘人 數學家及星學家

Eudoxus of Cnidus〔攸多克薩斯〕亦作 Eudoxos von Knidos 或 Endoxus (408 B.C.—355 B.C.) 希臘人 雅典學校中之幾何學名家貢獻於比例論,相似論,及黃金分割等.

Eugenio, V.〔厄熱奈〕十九世紀後半期 義人

Euklid〔歐幾里得〕即 Euclid

Euler, Johann Albrecht〔歐拉〕(1734,11,16{舊曆}—1800,9,6{舊曆}) 瑞士人 生於俄 雷哈特之子

Euler, Léohard〔歐拉,雷哈特〕亦作 Leonhard Euler (1707,4 15—1783,9 18) 瑞士人 十八世紀大解析學家,發明歐拉方程,歐拉函數等,著作極夥.

Euler, Paul〔歐拉〕十八世紀 瑞士人 雷哈特之父

Euripedes〔幼里披底〕亦作 Euripider 或 Euripide (485B.C.—406B.C.) 希臘人

Eurytas of Metapontum〔攸里塔士〕紀元前四世紀 雅典人

Eustace, J. M.〔尤斯退〕

Eutocius of Ascalon〔攸托栖斯〕亦作 Eutokius von Askalon (480—?) 希臘人 幾何學家

Euwe, M.〔尤衛〕二十世紀前半期 荷蘭人

Euwe, W.〔尤衛〕二十世紀前半期 荷蘭人

Evans, Griffith Conrad〔厄文思〕(1887,5,11—) 美人

Evans, G. W.〔厄文思〕二十世紀前半期 美人

Evans. H. B.〔厄文思〕二十世紀前半期 美人

Evans, Herbert Pulse〔厄文思〕二十世紀前半期 美人

Evans, T. J.〔厄文思〕

Eve, Arthur Stewart〔伊佛〕(1862,11,22—) 英人

Everardus, Nicolas〔厄味拉達〕(1473—1532) 荷蘭人

Everett, Harry Scheidy〔厄味勒特〕(1891,1,75—) 美人

Everett, Joseph David〔厄味勒特〕十九世紀末 英人

Everett, John Phelps〔厄味勒特〕二十世紀 美人

Eversull, Bess M.〔厄味薩爾〕二十世紀前半期 美人

Evesham, Walter〔厄甫翠〕十四世紀前半期

Ewing, *Sir James* Alfred〔攸英〕(1855,3,27—) 英人

Exner, Felix〔厄克斯涅〕(1876—) 奧人

Exner, F. M.〔厄克斯涅〕二十世紀初

Eyçaguirre, Sebastian Fernandez〔愛薩基累〕十七世紀 比利時人

Eymieu, A.〔埃美〕二十世紀

Eyraud, Henri〔埃勞〕二十世紀前半期 法人

Eysenhut〔埃森赫〕十六世紀 德人

Eyssenhardt〔愛森哈〕十九世紀後半期

Eytelwein, Johann Albert〔愛忒韋〕十九世紀 德人 著數值方程式

Ezekiel, Mordecai 〔厄濟啓爾〕 二十世紀 美人

Faà di Bruno, Fr. 〔法第白魯諾〕 亦作 Faa de Bruno 卽 Bruno

Faber, F. 〔法柏〕 十九世紀末 德人

Faber, Georg 〔法柏〕 (1877—) 德人

Faber, Karl 〔法柏〕 二十世紀前半期 匈人

Faber Stapulensis, Jacobus 〔法柏·斯退帕楞西〕 亦作 Jacques le Fèvre d'Estaples 或 Fèvre, (1455—1536) 法人 貢獻於幾何學及算術

Fabre, L. 〔法勃爾〕 二十世紀 法人

Fabri, Honorarius 〔法布里〕 亦作 Honoratus Fabri (1607—1688) 義人

Fabri, Ottavio 〔法布里〕 十八世紀中 義人

Fabricius, David 〔法布里齊烏〕

Fabricius, Jo. Albert 〔法布里齊烏〕 (1668—1736) 德人

Fabricius, Magister Johann 〔法布里齊烏〕

Fabroni, A. 〔法布洛泥〕 十八世紀後半期 義人

Fabry, *Charles* Eugène 〔法布立〕 十九世紀後半期 法人

Fabry, L. 〔法布立〕 二十世紀前半期 法人

Fadl 〔法爾〕 卽 al-Fadl

Faerber, Carl 〔法貝〕 卽 C. Färber

Fage, A. 〔發治〕 二十世紀 英人

Fagerholm, E. 〔法革和謨〕 二十世紀初 瑞典人

Fagnano, Giovanni Francesco 〔法那摩〕 (1715—1797) 義人 朱利奧卡羅之子

Fagnano, *Caunt Garf* Giulio Carlo *de' Toshi di* 〔法那摩,朱利奥卡羅〕 亦作 Toshi (1682,12,6—1766,9,26) 義人

發明 $\frac{\pi}{2} = 2\log\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$

Fahie, J. J. 〔華海〕 二十世紀前半期 英人

Fahlbeck 〔華爾伯克〕 十九世紀末 法人

Fahrenheit, Gabriel Daniel 〔華倫海〕 (1686–1736) 德人 發明華氏寒暑表

Faigl, K. 〔非爾〕 二十世紀 德人

Fail, A. 〔肥爾〕 二十世紀 捷克人

Failor, I. I. 〔非羅〕 二十世紀前半期 美人

Fairon, J. 〔非綸〕 (?—1925) 比利時人

Falckenberg, Hans 〔法肯柏格〕 二十世紀 德人 著級數論

Falco, V. de 〔法爾科〕 二十世紀

Fales, H. A. 〔法爾斯〕 二十世紀前半期 美人

Falk, M. 〔法爾克〕 十九世紀後半期 瑞典人

Falkener, E. 〔福墾湼〕 十九世紀末 英人

Falkenhagen, J. H. M. 〔福墾哈根〕 二十世紀初 德人

Fan Ching Fu 〔范景福〕 十八世紀 中國清時人

Fang Chung Tung 〔方中通〕 十七世紀後半期 中國清順治時人

Fano, Gino 〔法諾〕 十九及二十世紀 義人

Fantappiè, Luigi 〔范塔匹〕 二十世紀前半期 義人

Fantoni, Pio 〔番圖尼〕 (1721—1804)

Faraday, Michael 〔法拉第〕 (1791,9,22—1867,8,25) 英人 發明電磁感應,開數理電磁學之新紀元.

Faradi 〔法剌第〕 卽 al-Faradi

Färber, Carl 〔法貝〕 亦作 Carl Faerber 十九世紀後半期 德人

Farber, G. 〔法貝〕 二十世紀 德人

Fargani 〔法干尼〕 卽 al-Fargani

Farish, William〔法里士〕(1759—1837) 英人

Farkas, J.〔法卡斯〕十九世紀後半期 德人

Farley, R.〔法力〕十九世紀中 英人

Farnau, E. F.〔法諾〕二十世紀前半期 美人

Farnum, Fay〔法能〕二十世紀前半期 美女

Farr, Clinton Coleridge〔法耳〕(1866,5,22—) 生於澳洲

Farr, William〔法耳〕(1807—1883) 英人 統計學家

Farrabi〔法喇比〕即 al-Farrabi

Farrar, John〔法勒〕十九世紀前半期 美人

Farrell, O. J.〔法累爾〕二十世紀前半期 美人

Farsky, H.〔法斯啓〕二十世紀 德人

Farwick, W.〔法威克〕二十世紀前半期 德人

Fas, J. A.〔法斯〕十八世紀 荷蘭人

Faselius, August〔法塞力斯〕十九世紀 德人

Fassbinder, Ch.〔法斯賓德〕二十世紀初 法人

Fatio de Duillier, Nicolas〔法泰·得·雕利爾〕(1664,2,16—1753,5,10) 瑞士人

Faton, le P.〔法吞〕十九世紀後半期 法人

Fatou, Pierre〔法都〕(?—1929,9,) 瑞典人

Faugère, A. P.〔福機累〕十九世紀 法人

Faught, J. B.〔伏特〕二十世紀前半期 美人

Faulhaber, Johann〔法哈柏〕(1580,5,5—1635,) 德人 貢獻於級數論

Faulkner, Donald〔福克湼〕二十世紀前半期 美人

Faunce, L.〔豐西〕十九世紀末 美人

Fauquembergue〔福騣柏給〕

Faure, A.〔伏爾〕十九世紀中 法人

Faure, H.〔伕爾〕十九世紀中 法人

Favaro, Antonio〔法發羅〕十九世紀後半期 義人 著圖解靜力學

Favorinus〔法服靈那〕二十世紀 法人

Fawdry, Reginald Charles〔福德立〕(1873,11,5—) 英人

Faxén, H.〔法克舍〕二十世紀前半期 瑞典人

Faye, H. *A.E.L.*〔淮尼〕十九世紀後半期 墨西哥人 研究差誤論

Fazari〔法紮里〕卽 al-Fazari

Fazzari, G.〔法紮立〕二十世紀 義人

Féaux, B.〔斐奧〕十九世紀

Fechner, Gustav Theodor〔費希奈〕(1801—1887) 德人

Feder, J.〔斐得〕十九世紀末 德人

Federhofer, Karl〔斐得和弗〕二十世紀前半期 奧人

Fehr, Henri〔斐耳〕十九世紀末 瑞士人

Feigl, Georg〔淮爾〕二十世紀前半期 德人

Feilberg, H. F.〔淮爾伯格〕十九世紀末 德人

Feinler, F. J. Rose Mary〔淮勒〕二十世紀前半期 美人

Fejér, Leopold〔斐浙〕二十世紀前半期 匈人

Féjer, Lipót〔斐浙〕(1880—) 匈人

Fekete, M.〔菲克提〕(1886—) 匈人

Feldblum, M.〔菲德布盧〕十九世紀末 德人

Feldhaus, F. M.〔斐德豪斯〕

Feldman, Daniel D.〔斐德蒙〕二十世紀 美人

Feldman, William Moses〔斐德蒙〕二十世紀前半期 英人

Feldmesser von Byzanz〔斐德麥塞〕亦作 Heron der Jüngere

Feldner, L.〔斐德涅〕十九世紀後半期 德人

Feldstein, M. M.〔斐德史泰〕 二十世紀前半期 美人

Feliciano, Francesco〔斐力息諾〕 亦作 Lazesio (1490—1563) 義人

Felkel, Anton〔斐爾刻〕 (1750—?) 捷克人

Feller, F. E.〔斐勒〕 十九世紀 德人

Feller, W.〔斐勒〕 二十世紀 德人

Felt, Dorr Eugene〔斐爾特〕 (1862,3,18—) 美人

Fenchel, W.〔樊車〕 二十世紀前半期 德人

Fenkner, H.〔樊克涅〕 二十世紀初 德人

Fenn, I. H.〔樊〕 二十世紀前半期 美人

Fenn, Joseph〔樊〕 十八世紀後半期 愛爾蘭人

Fenning, Daniel〔飛寧〕

Féraud, A.〔分勞德〕 十九世紀末 法人

Ferber, F.〔斐伯〕 十九世紀末 法人

Fergola, E.〔斐哥拉〕 十九世紀後半期 義人

Fergola, Nicola〔斐哥拉〕 十九世紀末 瑞士人

Ferguson, D. F.〔弗格孫〕 二十世紀 英人

Ferjusson, John Coleman〔斐翠松〕

Fériet, J.〔斐里特〕 二十世紀 法人

Fériet, M. J. Kampé de〔斐里特〕 即 Kampé de Fériet

Fermat, Pierre de〔斐馬,佩耳〕 亦作 Peter von Fermat (1608—1665,1,12) 法人 發明數論中之斐馬大定理,并貢獻於解析幾何學.

Fermat, Samuel〔斐馬〕 十七世紀後半期 法人 佩耳之子

Fermi, E.〔斐米〕 二十世紀前半期 義人

Fernandez de Santaella, Rodrigo〔斐南德〕 即 Santaella

Fernel, Jean〔斐涅爾〕 亦作 Johannes Fernelius (1497—1558,4,26) 法人 數

學家兼醫師

Fernkorn, C. M.〔非昆〕 二十世紀前半期

Ferrar, W. L.〔斐勒〕 二十世紀前半期 英人

Ferrari, F.〔斐拉里〕 二十世紀初 德人

Ferrari, G. A.〔斐拉里〕 十八世紀後半期 義人

Ferrari, Ludovico〔斐拉里〕 (1522—1562) 義人 發見四次方程式之解法

Ferraris, Galileo〔非喇里斯〕 十九世紀

Ferrel, J. A.〔斐勒爾〕 十九及二十世紀

Ferrel, William〔斐勒爾〕 (1817—1891) 美人

Ferrer〔斐累〕

Ferrero, Annibale〔斐累洛〕 十九世紀後半期 義人

Ferrers, Norman *Macleod*〔斐勒茲〕 (1829—1903) 英人 著調和解析及三線坐標

Ferris, Charles Edward〔斐利斯〕 (1863,9,23—) 美人

Ferro, Scipione del〔費羅〕 亦作 Fcipio Del Ferro 或 Dal Ferro 或 Ferri 或 Ferreo 拉丁名作 Ferreus (1465—1526.10,29) 義人 解決特別三次方程式

Ferrol, F.〔斐洛爾〕 二十世紀 美人

Ferroni, Pietro〔斐洛尼〕 十八世紀後半期 義人

Ferry, Frederick Carlos〔非里〕 (1868,1,22—) 美人

Férussac, J.B.L. de〔費納薩〕 (1745—1815) 法人

Ferval. H.〔非發〕 十九世紀初 法人

Festa〔斐斯塔〕

Fetlaar. J.〔斐拉耳〕 二十世紀前半期 荷蘭人

Fettweis, E.〔斐特威斯〕 二十世紀前半期 德人

Feuerbach, Karl Wilhelm〔費見巴黑〕(1800—1874) 德人 發明九點圓

Fèvre d'Estaples, Jacques le〔斐味〕卽 Faber

Feyer, Edwin〔費業〕二十世紀前半期 德人

Fiakowski, Nikolaus〔斐科斯啓〕十九世紀末 奥人

Fialka, Z. von〔費爾卡〕十九世紀後半期 烏克蘭人

Fiar〔菲俄〕卽 Fior

Fibonacci〔菲波那奇〕卽 Leonardo of Pisa

Fichte, Johann Gottlieb〔斐希特〕(1762—1814) 德人

Fichtenholz, G.〔斐希騰和〕二十世紀前半期 波蘭人

Fick, A.〔菲克〕十九世紀後半期 德人

Fick, E.〔菲克〕二十世紀前半期 德人

Fick, L.〔菲克〕十九世紀 德人

Ficklin, Joseph〔菲克林〕十九世紀後半期 美人 著代數學

Fiedler, E. W.〔飛德勒〕十九世紀後半期 瑞士人

Fiedler, O. W.〔飛德勒〕二十世紀初 德人

Fiedler, R.〔飛德勒〕二十世紀

Fiedler, Wilhelm〔飛德勒〕(1832—1912) 德人 研究方式論

Field, Allan Bertram〔飛爾德〕二十世紀前半期 美人

Field, Floyd〔飛爾德〕二十世紀前半期 美人

Field, Peter〔飛爾德〕十九及二十世紀 美人 著射影幾何學

Fielden, J. R.〔飛爾登〕二十世紀 英人

Fieldler, W.〔飛德勒〕十九世紀 德人

Fields, John Charles〔飛爾咨〕(1863,5,14—1932,8,9) 坎拿大人

Figulus, P. Nigidius〔非基琉〕紀元前一世紀 希臘人

Filipowski, Herschell E.〔菲里庖斯啓〕

Filon, Louis Napoleon George〔非隆〕(1875,11,22—) 英人 著射影幾何學

Finaeus, Orontius〔湴拿〕即 Oronce Fine

Finance, Ch. S.〔芬南栖〕十九世紀後半期 法人

Finck, P.J.E.〔非克〕十九世紀 德人

Finck, Thomas〔非克〕亦作 T. Finchius 或 T. Fink 或 T. Fincke 或 T. Finke (1561—1656) 丹麥人

Findeisen, C. F.〔非第森〕二十世紀 德人

Findlay, William〔芬得雷〕二十世紀初 坎拿大人

Fine, Henry Burchard〔湴因〕(1858,9,14—1928,12,22) 美人 著解析幾何學微積分.

Fine, Oronce〔湴因〕法文作 Orontius Finaeus 或作 O. Fineus (1494—1555,10,6) 法人 著數學及天文書

Finetti, B. de〔芬涅替〕二十世紀前半期

Finger, J.〔芬革〕十九世紀 巨哥斯拉夫人

Fink, E.〔芬克〕十九世紀後半期 德人

Fink, Karl〔芬克〕十九世紀末 德人 數學史專家

Finkel, Benjamin Franklin〔芬刻爾〕(1865,7,5—) 美人

Finn, S. W.〔芬〕十九及二十世紀 英人

Finney, Harry *Anson*〔芬內〕(1886,11,19—) 美人 著簿記術

Finsler, P.〔非斯勒〕(1894—) 德人

Finsterbusch, J.〔非式部士〕十九世紀後半期 德人

Finsterwalder, Sebastian〔非式窩得〕十九世紀末 德人

Finzel, A.〔芬濟〕二十世紀前半期 德人

Finzi, A.〔芬戚〕二十世紀前半期 義人

Finzi, B.〔芬戚〕二十世紀前半期 義人

Fior, Antonio Maria〔菲俄〕 亦作 Antonio del Fiori 或 A. M. Fiore 或 Floridus 或 Floridas 或 Florido 或 Fiar $\left(1465-1526,\text{ 或 }\frac{10,29}{11,16}\right)$ 義人

Fiore, A. M.〔菲俄〕 卽 A. M. Fior

Fiore, V.〔菲勒〕 十九世紀後半期　義人

Fiorentino, Niccola〔菲勒廷諾〕 (?—1799,12,12) 義人

Fippard, Richard C.〔斐帕德〕 二十世紀　英人

Firmiani〔斐米尼〕 二十世紀　義人

Fischer, A.〔斐西耶〕 十九世紀末　德人

Fischer, C. A.〔斐西耶〕 二十世紀前半期　美人

Fischer, C. G.〔斐西耶〕 十八世紀

Fischer, Ernst *Gottfried*〔斐西耶〕 (1754—1831) 德人

Fischer, Johann〔斐西耶〕 十六世紀中　德人

Fischer, J. C.〔斐西耶〕 十八世紀末　德人

Fischer, K.〔斐西耶〕 十九世紀末　德人

Fischer, Ludwig〔斐西耶〕 二十世紀前半期　德人

Fischer, O.〔斐西耶〕 十九及二十世紀　德人

Fischer, Paul B.〔斐西耶〕 (1875—　) 德人　著行列式,坐標系

Fischer, Th.〔斐西耶〕 十九世紀　德人

Fischer, V.〔斐西耶〕 二十世紀初　德人

Fischer, W. L. F.〔斐西耶〕 十九世紀　德人

Fish, D. W.〔菲士〕 十九世紀後半期　美人

Fish, John Charles Lounsbury〔菲士〕 (1870,6,3—　) 美人

Fishenden, Mergaret White〔菲申登〕 二十世紀前半期　英女

Fisher, Arne〔斐笙〕 二十世紀　丹麥人　著確率學

Fisher, A. M.〔斐笙〕 十九世紀　美人

Fisher, George〔斐雪〕即 Mrs. Slack

Fisher, George Egbert〔斐雪〕十九及二十世紀　美人　研究代數學

Fisher, Irving〔斐雪〕(1867,2,27—　　) 美人

Fisher, James〔斐雪〕(1873,3,29—　　) 美人

Fisher, Ronald Aylmer〔斐雪〕(1890,2,17—　　) 英人

Fisher, Walter〔斐雪〕十八世紀

Fishleigh, W. T.〔菲士利〕二十世紀　美人

Fisk, N. C.〔飛斯克〕二十世紀前半期　美人

Fiske, Thomas Scott〔菲斯克〕(1865,5,12—　　) 美人　解析學家

Fitch, J. G.〔菲赤〕

Fite, William Benjamin〔淮提〕(1869,8,23—　　) 美人

Fithian, J. H.〔菲退安〕二十世紀前半期　美人

Fitterer, J. C.〔菲試勒〕二十世紀前半期　美人

Fitting, Friedrich〔菲廷〕十九世紀後半期　德人

Fitz-Neal〔菲次・泥爾〕十二世紀後半期

Fitzgerald, Edward〔菲次澤剌德〕十九世紀　英人

Fitz-Patrick, J.〔菲次・巴特里克〕十九世紀末　法人

Fizeau〔菲則〕(1819—1896) 法人

Flackenberg, H.〔夫留甕柏〕二十世紀前半期　德人

Fladt, Kuno〔夫留特〕二十世紀前半期　德人　著無窮級數

Flamant, P.〔夫蘭曼〕二十世紀前半期　法人

Flamard, E.〔夫留馬德〕二十世紀

Flamme, J. B.〔佛留姆〕十九世紀　法人

Flammer, Ernest〔佛蘭麥〕二十世紀前半期　坎拿大人

Flamsteed, John〔夫蘭斯提德〕(1646—1719) 英人

Flanders, D. A. 〔法蘭德斯〕 二十世紀前半期 美人

Flanders, R. L. 〔法蘭德斯〕 二十世紀前半期 美人

Flat, K. 〔夫拉特〕 二十世紀 德人

Flauti, V. 〔福羅提〕 (1782—1863) 義人

Flechsenhaar, H. 〔法雷森哈〕 二十世紀 德人

Fleck, A. 〔夫勒克〕 十九世紀

Fleege-Althoff, F. 〔佛利治・阿托夫〕

Fleet, R. R. 〔夫利特〕 二十世紀初 美人

Fleischer, H. 〔夫萊瑟〕 二十世紀初 德人 研究射影幾何學

Fleisher, Edward 〔夫萊薛〕 二十世紀前半期 美人

Fleming, John Ambrose 〔佛來銘〕 二十世紀 英人

Fleming, William 〔佛來銘〕 亦作 William of Moerbecke (?—1281) 荷蘭人

Fletcher, L. 〔夫勒拆〕 十九世紀末 英人

Flexner, William Welch 〔夫雷涅〕 二十世紀前半期 美人

Flicker, H. 〔佛力刻〕 十六世紀 德人

Fliegner, A. 〔佛利涅〕 二十世紀

Flint, D. F. 〔佛林得〕 二十世紀 英人

Flögel, G. 〔傅羅革〕 十九世紀末

Floquet, *Achille Marie* Gaston 〔佛羅魁〕 (1847,12,15—1920,10,7) 法人

Floridas 〔菲俄〕 卽 Fior

Florido 〔菲俄〕 卽 Fior

Floridus 〔菲俄〕 或作 Floridas 卽 Fior

Florin, E. 〔夫羅靈〕 二十世紀前半期 德人

Flörke, W. 〔佛洛克〕 二十世紀 德人

Flotow, A. v. 〔夫羅托〕 二十世紀 德人

Flournoy, T.〔夫盧諾〕(1854—1920) 瑞士人

Flower, Robert〔夫勞威〕十八世紀 英人

Flowers, Robert Lee〔夫勞威斯〕(1870,11,6—) 美人

Fludd, Robert〔夫拉德〕

Flussas〔夫拉薩〕

Flye-Sainte-Marie, C.〔傅來·聖·馬利〕十九世紀後半期 法人 研究平行線理論

Foberg, J. A.〔福柏〕二十世紀前半期 美人

Focke, M. F.〔福克〕十九世紀中 德人

Focke, Theodore Moses〔福克〕(1871,1,3—) 美人

Fœniseca, Joannes〔福尼塞卡〕十五世紀末 德人

Foeppl, August〔斐普爾〕即 A. Föppl

Foering, H. A.〔斐靈〕二十世紀初 美人

Foerster, Emil〔斐斯武〕二十世紀 德人

Foerster, Wilhelm〔斐斯武〕

Foglini, G.〔福格林尼〕十九世紀 義人

Foix, François de〔佛亞〕亦作 Comte de Candale 或 F. Candalla (1502—1594) 法人

Folie, F.〔福利〕十九世紀後半期 比利時人

Folkes, Martin〔佛克斯〕(1690—1754) 英人

Folley, K. W.〔佛力〕二十世紀前半期 美人

Follinus, Hermannus〔福林那〕十七世紀

Follows, G. H.〔福羅斯〕二十世紀 美人

Foncenex, *François* Daviet de〔方辰涅〕(1734—1799)

Fonduli, Oliviers〔封多利〕十六世紀中 義人

國立武漢大學理科季刊投稿簡章

一・本季刊登載關於數學物理化學生物地質等學科之稿件海內外人士惠賜大作一律歡迎

二・投寄稿件不拘文言白話但須依本季刊形式一律橫書每面二十二列每列二十三字繕寫清楚并加新式標點符號

三・稿件題目之下請署姓名如係譯稿須註原著者姓名或雜誌書報之名稱及其出版時期地點

四・稿中如有插畫或圖表請另用白厚紙繪畫或製成照片或附寄原圖

五・本刊稿件依照數學物理化學生物地質等學科之順序登載

六・來稿如未登載除預先聲明者外恕不退還

七・稿件登載後本刊略備薄酬以答雅意

八・稿件內容本刊得酌量增刪但不願意者請預先聲明

九・來稿請寄武昌國立武漢大學理科季刊委員會

國立武漢大學理科季刊第三卷第三期目錄

國立武漢大學理科季刊第三卷第四期目錄

國立武漢大學社會科學季刊第四卷第一號目錄

國立武漢大學文哲季刊第三卷第一號目錄

介紹期刊

地質彙報……北平西城兵馬司九號國立北平研究院地質學研究所

自然科學季刊……國立北京大學自然科學季刊委員會

牛頓……日本東京市目黑區大岡山七一一牛頓月刊社

師大月刊……國立北平師範大學

理工雜誌……上海呂班路二二三號震旦大學理工學院

理學院季刊……河南大學理學院

電業季刊……南京城內大石壩街廿一號全國民營電業聯合會編輯股

化學季刊……國立北平大學工學院化學季刊社

化工……國立浙江大學化學工程學會

土木工程會會刊……復旦大學土木工程學會

高工土木工程學會會刊……浙大高工土木工程學會

瓊崖實業雜誌……瓊州海口東門內實業雜誌社

上海物價月報……上海漢口路外灘新關國定稅則委員會

介紹期刊

時事類編……………………………上海福煦路八〇三號中山文化教育館

螞蟻月刊……………………………上海四川路五三六號

婦女旬刊……………………………杭州中華婦女學社

南洋情報……………………………上海真如國立暨南大學

民大校刊……………………………廣東荔枝灣國民大學

安徽大學週刊………………………安慶安徽大學

國立四川大學周刊…………………成都四川大學

國立北平圖書館館刊………………北平文津街一號

文華圖書館學專科學校季刊……武昌曇華林文華圖書館專科學校

南華評論……………………………上海山東路三二〇號南華評論社

中學生………………………………上海四馬路八五號開明書局

真光校刊……………………………廣州市白鶴洞私立真光女子中學

國立武漢大學理科季刊

第四卷第一期

價目	郵費
全年四冊 價銀二圓	訂購全年 本國及日本不加郵費 其他地域加郵費六角
每期零售 價銀五角	函購零本 本國及日本加郵費五分 其他地域郵費一角五分
本刊以九月十二月三月六月爲出版期	
費須先惠空函不覆	
各地代售處零售概不另加郵費	

編輯者　國立武漢大學理科季刊委員會

發行者　國立武漢大學出版部

印刷者　中國科學公司

代售處　商務印書館

總發行所　武昌 國立武漢大學出版部

中華民國二十二年九月發行