數

經傳釋詞

光緒元年龝鄂
于署荷池精舍

綴術釋明序

易繫曰極其數遂定天下之象則綜天下難定之象以歸於有定莫數若矣在昔聖神制器尙象利物前民其於數理必有究極精微範圍後世者代久年湮其數學漸至失傳近三百年泰西猶能推闡古法翻陳出新而中國之才人智士或反蹈其成轍而率由之孔子曰天子失官學在四夷正今日數學之謂也中國舊有弧矢算術而未標角度八綫之名未立八綫鈐表則雖有用其理以入算者而無表可藉則每求一數必百倍其功而始得且得而仍非密率明代譯出泰西八綫表及八綫對數表核其立法之

源得數之初甚屬繁難而成表之後一勞永逸大至於無外細至於無微莫不可以此表測之則其用之廣大可想然得表之後雖無事於再求而任舉一數何能較其訛誤若仍用舊術則非匝月經旬不得一數此明靜菴董方立推演杜德美弧矢捷術之可貴也向來求八綫者例用六宗三要二簡各法若任言一弧度必不能考其弦矢諸數至杜氏創立屢乘屢除之法則但有弧徑而八綫均可求董方立解杜術先取直綫之極微者令與弧綫合而後用連比例以推至極大又考諸率數與尖錐理相合故用尖錐以釋弧矢而弧矢之理以顯而數亦顯明靜菴解杜術

先取四分弧通弧十分弧通弦直綫之極大者用連比例以推至千分萬分弧通弦之極微者考其乘除之率數與杜氏原術乘除之理相合故用綴術以釋弧矢而弧矢之數以出而理亦出董明二君均爲弧矢不祧之宗無庸軒輊其閒邇百年中繼起者如戴鄂士煦徐君青有壬李壬叔善蘭所著各書雖自出新裁要皆奉董明爲師資也吾友左君壬叟湘陰相國之姪也英年績學於詩文賦字無不深純每應試必冠其曹而於數學一道尤孜孜不倦遇有疑難之題必窮力追索務洞澈其奧窔而後止嘗謂方圓之理乃天地自然之數吾之宗中宗西不必分其畛域

直以爲自得新法也可曾釋徐君青氏綴術又釋戴鄂士求表捷術玆又釋明靜菴弧矢捷術而一貫以天元寄分之式於圓率一道三致意焉可謂勇矣余癸酉從丁果臣先生遊始識壬叟繼與共述衆布演草圓率考眞二書相得甚歡不啻古所謂同方合志者孰意天厄良才壬叟竟於甲戌秋不永年而逝凡在同學諸人無不歎息不置況余與壬叟兩世神交安能無愴切耶果臣先生爲湖南數學之領袖所刊二十一種算書嘉惠士林良非淺尟玆又集壬叟遺書而彙刊之倩新化黃君玉屛宗憲任讐校之役訂正精審毫髮無憾壬叟得此不朽矣若夫詩古文詞

古人之門徑業已搜括殆盡卽附爲壬叟之緒餘剞劂尙
需諸異日也光緒乙亥孟冬月湘鄉曾紀鴻謹識

明靜菴先生原本

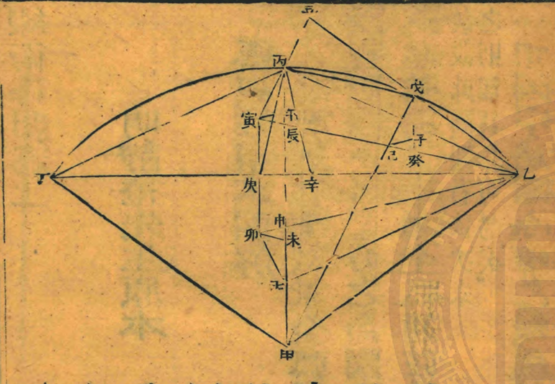
湘陰左　潛壬叟釋
長沙丁取忠雲梧刊

弧與弦相求圖解

分弧通弦率數求全弧通弦率數此弧求通弦所由起

設有圜周一弧二分之。命圜半徑爲連比例第一率。一分弧通弦爲二率。求全弧通弦率數。此題用句股法求之甚易然不能與諸法相通故設此問。觀者依次求之則知其不可易矣。

如圖甲爲圜心。甲乙類爲半徑。乙丙丁爲圜周一弧。乙



丙弧丙丁弧俱爲二分弧之一。爲一分弧乙丁爲全弧通弦乙丙丙丁俱爲一分弧通弦。今命甲乙類爲連比例一率。乙丙類爲二率求乙丁通弦率數。是三綫本非一連比例。欲設法以取之也。試任平分一分弧乙丙於戊作甲戊半徑乙戊丙戊半分弧通弦又與乙戊相等作乙巳綫成

甲乙戊乙戊己連比例三角形見數理精蘊次自乙丁二點取乙丙丁丙之分截乙丁綫於庚於辛作丙庚丙辛二綫成乙丙庚丙庚辛丁丙辛丙辛庚亦同連比例三角形與甲乙戊乙戊己連比例三角形爲同式凡心角邊角對弧等則心角比邊角大一倍對乙丙丙丁一分弧之甲心角倍大於乙丁二邊角則對乙戊半分弧之甲心角必與對乙丙丙丁一分弧之乙丁二邊角等兩等邊三角形一角等餘二角必等故爲同式形如以甲乙與乙戊之比同於乙戊與戊己之比又以甲乙與戊己之比同於乙丙或丙丁與庚辛之比兩邊比例同式則此形一三率相比必同於彼形一三率相比既得庚辛則以乙丙或丙丁一分弧通弦倍之得乙丁多一庚辛減去庚辛即得乙丁爲全弧通弦若依此

求之固易易也然題無乙戊形與乙丙庚形非一連比例今比設法先以乙戊半分弧通弦爲二率求得乙丙所生三率之數然後以乙丙所生三率之數轉求得戊己之數爲三率則二形可合爲一連比例矣試自乙點取乙丙之分作乙壬綫成甲乙丙乙丙壬連比例三角形乙丙爲二率丙壬爲三率又自戊點取戊己之分作戊癸綫自己點取巳癸之分作己子綫成乙戊己戊己癸己癸子連比例三角形乙戊爲二率戊己爲三率己癸爲四率癸子爲五率次將乙戊乙巳引長而倍之成乙丑寅同式形又將乙丑寅形

以乙寅爲軸展爲乙寅卯形則乙丙與乙庚合丙乙寅角庚乙寅角爲平分角。又將乙卯庚形以乙卯爲軸展爲乙壬卯形則乙庚與乙壬合。庚乙卯角壬乙卯角亦爲平分角。又自寅點取寅辰之分作寅午綫則丙寅辰寅辰午連比例形與戊巳癸巳癸子。連比例形相等。二形爲戊丙乙寅二平行綫內兩三角形其角必等各邊又相平行。故爲相等。如以甲乙爲連比例一率倍乙戊得乙丑與乙戊戊丙併等爲二率求得三率爲丑寅寅卯併。甲乙戊丙四邊形與乙丑寅卯四邊形爲同式與丙寅寅卯卯壬併等。乙丑丙寅庚卯壬五句股形之乙角俱等。又兩兩同用一邊故五形俱相等。爲戊巳之四倍比丙壬三率多一辰午十六分五率之一。丙寅或壬卯與丙辰或壬申等寅卯與辰未或午申等是丙寅。

寅卯卯壬併之三率。比丙壬三率多一辰午或申未。丙寅與戊巳等。辰午與癸子等。丙寅寅卯。卯壬併之三率爲戊巳之四倍。求得五率必爲癸子之十六倍。故與癸子等之辰午爲十六分五率之一也。乃以三率少十六分五率之一爲丙壬三率之數。轉求得丙寅寅卯卯壬併之數。四歸之得丙寅與戊巳等。是戊巳之數不生於乙戊。而生於乙丙。丙壬原生於乙丙。甲乙戊。乙丙庚二形雖非一連比例而其數巳合爲一連比例矣。然後以甲乙與戊巳之比同於乙丙與庚辛之比而得庚辛爲二倍一分弧通弦與全弧通弦之較也。命半徑甲乙爲連比例第一率。其式爲丅。命一分弧通弦乙丑爲二率其式爲亍。以亍自之得四丅。以丅除之得三丅。丙寅

庚卯壬四段。四除之得四〒丙寅即戊己。又自之得四四六以丅除之得四四卉。辰午即癸子。以減〒得〒四四丟。丑丙寅庚卯四段內減去辰午得丙壬。是爲三率式以此式自乘用方格捷法。半徑丅除之如下。

三丨	四四五⊥	
六丨	四四八⊥	三丨
四四八⊥	四四四四十丨	四四五⊥

計得六四四谷四四四四十。以丅除之得卉四四卡四四四四九⊥爲五率式。又以三率式乘之半徑丅除之如下。此後恆以三率爲常法故也。○原書求至十五率止今求至十一率止以下截去不用。緣綴數式不必多求也。且與割圓綴術一例。

三丨	四四五⊥	五丨
八丨	四四十⊥	四四七⊥
四四十⊥	四四四四十二‖	四四四四九丨
四四四四十二丨		

計得六四四亗四四四四十三‖。以丅除之得七丅四四谷四四四四四十‖爲七率式。又以三率式乘之半徑丅除之如下。

三丨	四四五⊥	
十丨	四四十二⊥	七丨
四四十二‖‖		四四九‖‖

計得十丨四四十二㐅。以丅除之得九丅四四十一㐅爲九率式。○凡首位恆爲丨則十一丨爲十一率式。既得各式乃列之。

三率式　三丨 四四五卜

五率式　五丨 四四七卄 四四四四九丨

七率式　七丨 四四九卄 四四四四十一川

九率式　九丨 四四十一㐅

十一率式　十一丨

列三率式以式中所少五率分母分子乘除五率式加之即割圓綴術中還原術

置三率式　三丨 四四五卜 四四四四七卄 四四四四四四九丨

加四四丨乘四四除五率式　五丨 四四七卄 四四四四九丨

得式　三丨 〇 四四四四七卄 四四四四四四九丨

以得式中所少七率分母分子乘除七率式加之

置得式　三丨 〇 四四四四七卄 四四四四四四九丨 四四四四四四四四十一丄

加四四四四川乘四四四四除七率式　七丨 四四四四九丄 四四四四四四四四十一丄

二次得式　三丨 〇 〇 四四四四四四九㐅 四四四四四四四四十一丄

以二次得式中所少九率分母分子乘除九率式加之

置二次得式　三丨 〇 〇 四四四四四四九㐅 四四四四四四四四十一丄

加四四四四四四乘四四四四四四除九率式　四四四四四四九㐅 四四四四四四四四十一〸

三次得式　三丨 〇 〇 〇 四四四四四四四四十一〤

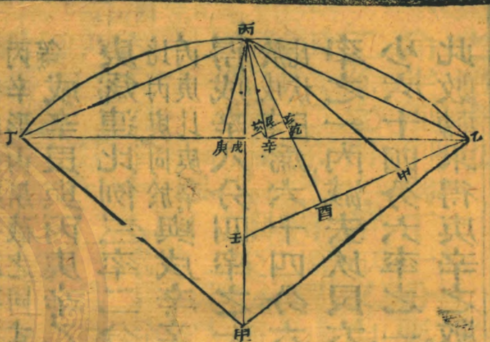
以三次得式中所少十一率分母分子乘除十一率式加之

置三次得式 三丨〇〇〇四四四四四四四四十一乂
加四四四乘四四四四四四四四除十一率式四四四四四四四四十一乂
四次得式 三丨〇〇〇〇
視各位減空惟首位獨存。乃總計所加各率得亍四四卉
四四卄四四四四四四四四四四四四四十乂為所求三率丙寅庚卯壬四段。之共
率式也。前三率式中所少十六分五率之一。今已補足。故此三率式仍為丙寅庚卯壬四段之共數也。
四歸之得亖丨四四四五丨四四四四四卄四四四四四四四四四十乂丙寅又
為三率。戊己以二率乙丙乘之。一率甲乙除之降一位代除。得四四丨
四四六四四四八丨四四四四四十幺四四四四四四四四十乂為倍一分弧通弦乙丙丁丙。
併與全弧通弦乙丁之較。庚辛乃置一分弧通弦亍倍之得

亍。乙庚丁辛併以較減之。得亍四四四六四四四八卄四四四四四四十幺四四四四四
四四十乂即一分弧通弦求二分全弧通弦之率數也
如有圜半徑及一分弧通弦求二分弧通弦之數求二分全弧通弦之數。以半徑為連比例一率。一分弧通弦為二率。求得連比例四率六率八率各率數。次按分數取而併之與倍一分弧通弦相減。即二分全弧通弦之率數也。

又法

按前圖於乙丙壬形內自丙點至乙壬纔與丙壬相等作丙申纔。其所截壬申為連比例四率又自丙點與乙壬纔取直角作丙酉纔壬酉與申酉等兩腰等兩分底必相等。為



二分四率之一。又自戊點與壬酉平行作戊亥綫爲四分四率之一。丙戊爲丙壬二分之一。戊亥必爲壬酉二分之一。爲壬申四分之一。先用乙丙庚丙庚辛。連比例形取戊亥所當庚辛之數。試自辛點與戊亥平行作辛乾綫。與辛戊庚戊俱等。戊丙乾角與丙乙戊角等。亦卽與庚丙辛角等。辛丙戊爲直角。則庚丙戊辛丙乾俱爲直角。三直角三角形一銳角俱等。又兩兩同用一邊。則餘邊角自無不等。又自辛與戊亥。取直角作辛坎綫與亥乾等。則

坎亥與辛乾等。又戊艮與戊辛等。壬乙戊角與丙丁戊角等。丙丁與壬乙必平行。戊艮與壬乙平行。卽與丙丁平行。戊辛艮形爲丁丙辛形內所截之同式兩等邊三角形。故戊艮與戊辛等。戊辛艮與丙庚辛乙丙庚。爲連比例三角形。乃命丙庚爲連比例三率二分之一。與乙丙二率。求得庚辛。乙丙比丙庚。同於丙庚比庚辛。與戊辛辛乾併等爲四分四率之一。折半。得戊辛八分四率之一。與乙丙二率。求得坎艮。丁丙比戊辛。同於戊辛比坎艮。爲六十四分六率之一。於戊辛辛乾併四分四率之一內。減去坎艮六十四分六率之一。得四分之一少六十四分六率之一。爲戊亥所當庚辛之數。然後以此數轉求得庚辛之數。爲庚辛所當戊亥之數卽所用

之四率也

命半徑甲乙爲〡。一分弧通弦丙爲〡。自之〡除之得〡丙壬。二除之得〢〡丙戊。又自之得〡〡〡以〡除得〡〡〡庚辛。艮亥坎巽二除之得〡〡〡戊辛。又自之〡除之得〡〡〡坎艮以減〡得〡〡〡戊辛爲四率式以此自之如下

四〡　六〡

〡〡　〡〡〡　〡〢〡
〡〡〡　〡〡〡　〡〡〡

計得〡〡〡以〡除之得〡〡〡〡〡爲六率式又以四率式乘之

〡〡〡　〡〡〡　〡〡〡〡
〡〡〡　〡〡〡　〡〡〡

計得〡〡〡以〡除之得〡〡〡〡〡爲八率式又以四率式乘之

八〡　十〡

〡〡〡　〡〡　〡〡〡
〡〡〡　〡〡〡　〡〡〡

計得〡〡〡以〡除之得〡〡〡〡〡爲十率式又以四率式乘之

四四四四十一
四四丨四四四四四古丄
計得四四四四四四十四以丅除之得四四四四四四十丅為十二率式乃列之
四率式 四四丨 四四四六卜
六率式 四四四六丨 四四四八卄 四四四四四十丨
八率式 四四四八丨 四四四四四十卄 四四四四四四四十二川
十率式 四四四四十丨 四四四四四四四十二㐅
十二率式 四四四四四四十二丨
以四率式中所少五率分母分子乘除六率式加之因
六率式原有分母四四祇用四除

置四率式 四四丨 四四四六卜
加丨乘四四四四除 六率式 四四四六丨 四四四四四八卄 四四四四四十丨
得式 四四丨 〇 四四四四八卄 四四四四四十丨
以得式中所少八率分母分子乘除八率式加之因八
率式原有分母四四四祇用四四除
置前得式 四四丨 〇 四四四四八卄 四四四四四四十丨
加川乘四四四四四除 八率式 四四四四八川 四四四四四十乚 四四四四四四四十二丄
二次得式 四四丨 〇 〇 四四四四四十㐅 四四四四四四四十二丄
以二次得式中所少十率分母分子乘除十率式加之
因十率式原有分母四四四四祇用四四四四除

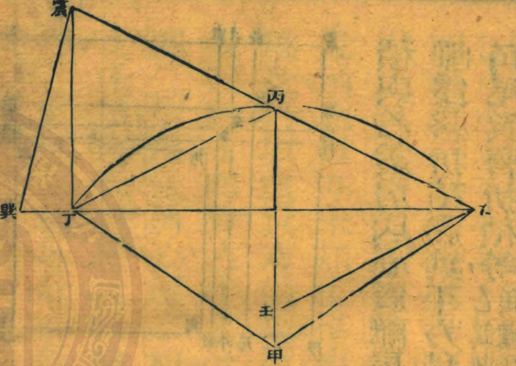
置二次得式　四〡　○　○　四四四四四十ㄠ　四四四四四四十二丄
加ㄠ乘四四四四四四除十率式　四四四四十ㄠ　四四四四四四十二〢
三次得式　四〡　○　○　○　四四四四四四十二〤
以三次得式中所少十二率分母分子乘除十二率式加之。因十二率式原有分母四四四四四四。祇用四四四四四除。
置三次得式　四〡　○　○　○　四四四四四四四十二〥
加〤乘四四四四四四四除十二率式　四四四四四四四十二〤
四次得式　四〡　○　○　○　○　四四四四四四四十二〤
視各位減空。惟首位獨存。乃總所加各率得四四〡四四四亣

綴術釋明　卷上　十

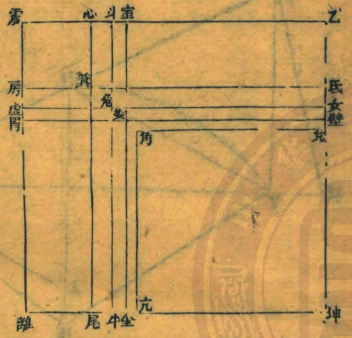
四四四四亓　四四四四亖　四四四四四十亙　庚以減亓乙丙丁併。得亓四四ト
四四亣　四四四四亣　四四四四亖　四四四四四十亙　辛乙丁即一分弧通弦求二分全弧通弦之率數與前術所求悉合也

又法

按前圖將乙丙綫引長至震爲乙丙綫之倍。自丁點與丙壬作平行相等綫。其末交於震。丁角爲直角。成乙丁震句股形。乙震倍二率爲弦。丁震三率爲句。乙丁二分全弧通弦爲股。將乙丁綫依乙震之分引長至巽。作巽震綫成乙震巽兩等邊三角形。丁巽爲股弦較。求得丁巽股弦較之率。與乙震倍二率相減。即得乙丁股之率



式。求丁巽股弦較率數法。如後圖。即前圖乙震弦自乘冪。乙震離坤爲弦方積。圖取明顯不拘原度。兌角亢坤爲股方積。乙兌角亢離震磬折積。與股弦和較相乘之長方積等。即句方積。若以股弦和乙震兌角併。除句方積。即得股弦較矣。乙兌類。然股之數尙未知也。惟弦爲倍連比例二率。句爲連比例三率。可以相比而取股弦較之率數。爰以句三率自乘爲實。倍弦得四二率除之得四分四率之一。乙氐類。比股弦較乙兌小一氐兌夫四倍二率爲乙震震離之和以除乙角離震磬折積。而得乙氐類。是乙角離震磬折



積與乙震房氐。心震離尾二長方積併等。亦即與乙箕離震磬折積震箕平方積併等。而震箕平方積。必與氐角尾箕磬折積等。乙箕離震磬折積。加震箕平方。與乙角離震磬折積等。同減一乙箕離震

磬折積則所餘之氐角尾箕磬折積震箕平方積必爲相等次求氐兌之差以四分四率之一自乘得震箕方積與氐角尾箕磬折積等若以氐箕兌角二邊和除之即得氐兌類相差之數矣然兌角之數亦未知也惟震箕四率之方積與二率可以爲比乃以震箕方積爲實仍以四二率爲法除之得氐女類六十四分六率之一比股弦較乙兌尚小一女兌夫四二率爲氐房心尾之和以除氐角尾箕磬折積而得女氐類是氐角尾箕磬折積與氐虛斗尾二長方積併等亦即與女箕尾危心危虛箕二磬折積併等則心危虛箕磬折積必與女角牛危磬折積等氐危尾箕磬折積加心危虛箕

磬折積與氐角尾箕磬折積等同減一氐危尾箕磬折積所餘之心危虛箕女角牛危磬折積必爲相等矣而心危虛箕磬折面之廉長即四分四率之一隅即六率數乃倍四率數爲廉法以六率數爲隅法相加得廉隅共法以隅法乘之得心危虛箕磬折積與女角牛危磬折積等以四二率除之得女壁類一千〇二十四分八率之二多一萬六千三百八十四分十率之一比股弦較乙兌尚小一壁兌依前理推之則壁角奎婁磬折積必與斗婁胃危磬折積等依前法求得廉隅共積以四二率除之得女壁外之十率數必仍小於壁兌而室婁胃震方外附之磬折積又可以求壁兌之差焉是股弦

較方所得之四率猶初商也。六率八率猶次商三商也。用連比例率數推之，故先求得初商而後用初商平方積以求次商，得次商而後用次商廉隅積以求三商。準此而遞推之，則股弦較之率數密矣。

以二率乙丙倍之得亓為弦乙震，以亓為句丁震，句自之得亣，倍弦亓除之得四一為股弦較初商箕心。又以初商自之得亣，以亓除之得亣為股弦較次商心斗。次倍初商得四川為廉法，以亣為隅法，相加得四川亣為廉隅共法，以隅法乘之得亣，以亓除之得亣十為三商數斗室。次倍初商次商共數得四川亣為廉法，以三商數為隅法，相加得亣為廉隅共法，以隅法乘之得十亣為廉隅共法，以隅法乘之得古丄，以亓除之得亣（以下截去尾數）為四商數。次倍前三商共數得父為廉法，以四商數為隅法，相加得父土為廉隅共法，以隅法乘之得古四亖（以下截去尾數），以亓除之得亖為五商數。乃列各商數如下。

初商　四一

次商　亣一

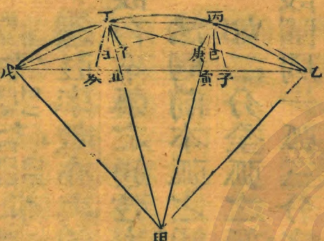
三商　亣十一

四商　四四四四四四四支四四四四四四四四四十二
五商　四四四四四四四四四十三
幷之。得四四一四四四六一四四四四四四介四四四四四四四玄四四四四四四四四四四十六以減弦得亓四四四十四四四四六十四四四四四四介四四四四四四四玄四四四四四四四四四四十六爲股率。卽二分全弧通弦率數。亦與前同也

設有本弧之通弦率數。求二倍弧之通弦率數

法同前本弧之通弦。如一分弧之通弦。二倍弧之通弦。如二分全弧之通弦。後倣此

設圜周一弧三分之。命圜半徑爲連比例第一率。一分弧通弦爲連比例二率。二分弧通弦率數。如前題所得。求三分全弧通弦率數



如圖。甲爲圜心。甲乙類爲半徑。乙丙丁戊爲圜周一弧。乙戊爲全弧通弦。乙丙類弧爲三分弧之一。乙丙類直綫爲三分弧之一之通弦。乙丙丁或丙丁戊二弧爲三分弧之二。乙丁或丙戊爲三分弧之二之通弦。己庚或辛壬爲二倍三分弧之一之通弦。乙丙丙丁類。與三分弧之二之通弦。乙丁類。之較。試自乙戊二點取乙丁或戊丙之二分。截乙戊全弧通弦於癸於子。自丙丁二點至癸子二

點作丁癸丙子二綫又與丁癸丙子相等作丁丑丙寅二綫成乙丁癸丁癸丑戊丙子丙子寅二相等連比例三角形與乙丙庚丙庚巳類丁丙巳丙丁壬戊丁辛三形皆與之等之連比例三角形爲同式形二乙角所對之丙丁丁戊二弧二戊角所對之乙丙丙丁二弧皆爲三分弧之一則角必等故爲同式餘巳見前甲乙類半徑爲連比例第一率乙丙類三分弧之一之通弦爲二率則丙庚類爲三率己庚類爲四率以乙丙與己庚之比同於乙丁或戊丙與癸丑或子寅之比而得癸丑或子寅然後倍乙丁或戊丙得乙戊多一子癸減去癸丑或子寅尚多一子丑或癸寅與丙丁等丙丁癸寅丙丁丑子二形之四邊俱兩兩平行故必等再減

一丙丁得乙戊卽全弧通弦也

四 四〡　四四四 六〡　四四四四四 八〡　四四四四四四四 十玄　四四四四四四四四四 十二〤

四四四四四四 亣玄	四四四四四 仐卄	四四四四 亣	四 吅卜	亓
四四四四四四 十四玄	四四四四四 十二卄	四四四四 十卜	四四 仐	四 亣〡
四四四四四四四 十四卄	四四四四四四 十二卜	四四四四四 十卜	四四四四 介	
四四四四四四四四 十四卄	四四四四四四四 十二卄	四四四四四四 十〤		
四四四四四四四四四 十四玄	四四四四四四四四 十二〇			
四四四四四四四四四四 十四卄				

右三分弧之一之通弦〒。類乙丙倍之得〒。以三分弧之二之通弦類乙丁率數〒四四〡四四四 六〡四四四四四 介〡四四四四四四四 十玄四四四四四四四四四 十二〤卽前題所得減之餘四四〡四四四 六〡四四四四四 介〡四四四四四四四 十玄四四四四四四四四四 十二〤

為倍一分弧通弦率數與二分全弧通弦率數之較己庚類又轉與二分全弧通弦率數相乘也乃取各得式通分列之

四六‖四四四 二六 四四四四四四四十六四四四四四四四四四 十二六三 四四四四四四四四四四四 十四收

四四四 一六 四四四四四四四十六四四四四四四四四四 十二六四四四四四四四四四四四 十四三

四四四四四四十六四四四四四四四四 十二三四四四四四四四四四四四 十四三

四四四四四四四四 十二〇四四四四四四四四四四四 十四收

四四四四四四四四四 十四仁

正負相消得四六‖四四四一八廿四四四四一二五四四四四四四十二‖〇四四四四四四四四四四十四三四 以二除之得四四四廿四四四六廿四四四四二六四四四四四四四十〇‖四四四四四四四四四四十二三 為應減之

四率式乃倍二分弧通弦率數而以此四率式減之再減二率一如下

置二乘全弧通弦式　三六四四廿四四四四四六廿四四四四二六四四四四四四四十〇四四四四四四四四四十二三

減三乘四除四率式　四四‖四四四六廿四四四四二六四四四四四四四十〇四四四四四四四四四四十二三

餘式　三六四四六　〇　〇　〇　〇

再減二率式一　二

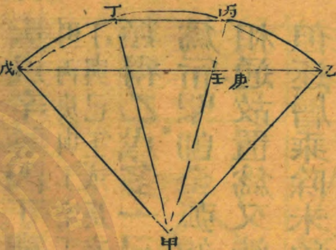
餘式　二‖四四六　〇　〇　〇　〇

計二率三內減四分四率式四得二‖四四卅又所少四率

又法

可以分母約之得二‖四四為全弧通弦率數也

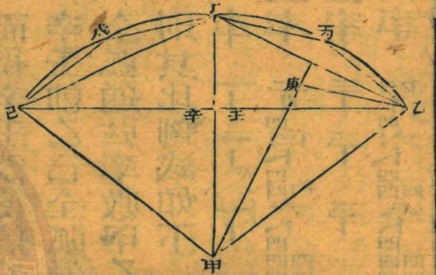
命半徑爲丁命一分弧通弦爲亍自之得卬以丁除之得亖又以二丁與亖相乘得丟以丁除之得卬乃三因亍得亓以四丅減之得亓四丅爲全弧通弦率數與前同



如圖、甲爲圜心甲乙類爲半徑乙丙丁戊爲全弧、乙戊爲全弧通弦乙丙類弧爲一分弧。乙丙類直綫爲一分弧通弦。試自丙丁二點與丁辛丙壬相等、作丁巳丙庚二線。成甲乙丙乙丙壬丙壬庚、與甲戊丁。戊丁辛。丁辛己相等兩連比例三角形甲乙類爲一率乙丙類爲二

率丙壬類爲三率。庚壬類爲四率。乙丙與乙壬等戊丁與戊辛等。丙丁與己壬或庚辛亦等。庚丙壬。己丁辛。二角與丙甲丁角等。則丙庚與丁辛。丁己與丙壬爲平行。而丙丁與己壬或庚辛。又爲平行。故必相等。故三因乙丙類得乙戊多一己辛或庚壬。減去己辛或庚壬得乙戊爲亓四丅卽全弧通弦率數也。此法甚易。然與前法不能相通。故置爲又法。若依本法逐分求之。卽可推至無窮但逐層乘除未免繁數。今設隔一分加減法於後。

設有圜周一弧四分之命圜半徑爲連比例一率一分弧通弦爲二率。二分弧通弦率數如前題所得求四分全弧通弦率數。



如圖甲為圜心甲乙類為半徑乙丙丁戊己為圜周一弧乙己為全弧通弦乙丙類弧為四分弧之一乙丙類直綫為四分弧之一之通弦乙丙丁或丁戊己為二分弧乙丁或丁己為二分弧通弦試自乙點與乙丙相等作乙庚綫則甲乙丙乙丙庚為連比例三角形自乙己二角取乙丁丁己之分截乙己綫於辛於壬作丁辛丁壬二綫則乙丁辛或己丁壬與丁辛壬亦為連比例

三角形與甲乙丙乙丙庚連比例三角形為同式形以甲乙半徑與丙辛之比同於乙丁或丁己與辛壬之比而得辛壬然後倍乙丁或丁己得乙己多一辛壬減去辛壬即乙己全弧通弦乙丁通弦率數即前二分全弧通弦率數甲乙與丙庚為第一率與第三率相比則其比例式如下

一率　丅　丅　丅　丅　丅　丅

二率　亓　四卌八　四四六八　四四八八　四四四十八　四四四四十六八

三率　三丨　三丨　三丨　三丨　三丨　三丨

四率　卌卄　四六八　四四八八　四四四十八　四四四四十二八　四四四四四十六八

右第四行所得四率式尚少分母。四率應有分母四四四四也。六餘準此。乃以分母通之得四四三四四六乂四四四四仌四四四四十乂四四四四四四十三〤四四四四四四四四十四四乂四四四四四四。為應減四率式也。乃置二分全弧通弦率數二因之。以此四率式減之如下。

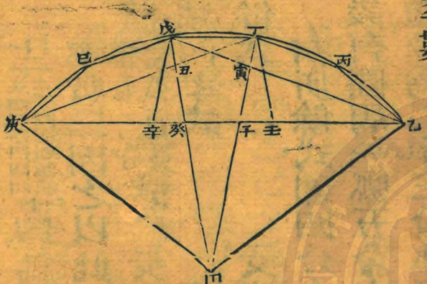
置二乘二分全弧通弦式　二乂四四一四四廿四四四四四六廿四四四四四四仌四四四四四四十乂四四四四四四四十二〤

減四率式　四四三四四六乂四四四四仌四四四四四十乂四四四四四四四十三〤

餘式　二乂四四一四四六乂四四四四仌四四四四四四十四四四四四四四四十二〤

右所餘式。即四分全弧通弦率數也。

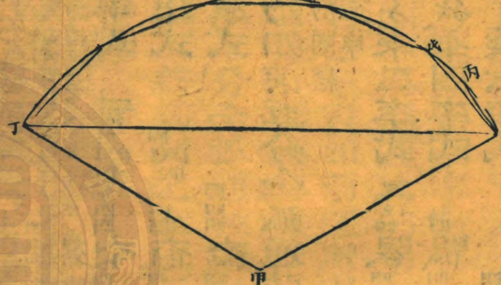
設有圜周一弧五分之。命半徑為連比例第一率。一分弧通弦為二率。三分弧通弦率數如前題所得。求全弧通弦率數。



如圖甲為圜心。甲乙類為半徑。乙丙丁戊己庚為圜周一弧。乙庚為全弧通弦。乙丙類弧為五分弧之一。乙丙類直綫為五分弧之一之通弦。乙丙戊或丁戊庚為三分弧。乙戊丁庚為三分弧通弦。試自乙庚二點取乙戊或丁庚之分截乙庚綫於辛於壬。作戊辛丁壬二綫與甲丁甲戊二半徑各為平行。依前解乙戊辛與甲丁戊形同式。辛角必與甲丁戊角等。丁戊辛子四邊形丁辛二角形。丁戊子辛二綫平行則戊

子二角必等戊辛丁子二綫必平行丁戊癸壬形同成乙戊辛戊辛癸與庚丁壬
丁壬子相等兩連比例三角形與甲丁戊丁戊丑或戊
丁寅連比例三角形爲同式形解見前以甲丁類半徑與
戊丑或丁寅之比同於乙戊或丁庚與辛癸或壬子之
比既得辛癸或壬子則倍乙戊或丁庚得乙庚多一辛
壬減去辛癸或壬子尚多一辛子或壬癸與丁戊等解見
前再減一戊丁即得乙庚爲全弧通弦率數
置三分弧通弦率數亖罒丅降二位即三率乘一率除得罒亖丅又
置亖罒丅以二因之得亖丄罒丌以罒亖丅減之得亖丄罒亖丅又以
丅減之即一分弧通弦率數得亖亖罒丅爲五分全弧通弦率數按

此隔一分加減之法較逐位遞求者固爲易矣然析至
千萬分亦不勝其繁故又設以兩分弧通弦率數求兩
分數乘得一分數弧通弦率數之法於後
設圜半徑爲連比例第一率一分弧通弦爲二率二分全
弧通弦率數五分全弧通弦率數俱如前題所得求十分
二五相乘之數全弧通弦率數
如圖甲爲圜心甲乙類爲半徑乙丙丁爲十分全弧乙
丁爲全弧通弦乙丙爲一分弧其直綫爲一分弧通弦
乙丙戊爲二分弧爲全弧五分之一乙戊爲二分弧通
弦法以甲乙半徑爲連比例一率乙戊爲二分弧通弦



率數爲二二率用比例法。見徐君青先生割圜綴術中求其四率六率兩式列之因五分弧率數至第六率止。求法以二二分全弧通弦率數 [illegible] 个 [illegible] 自乘畫方格對列相乘觀前各率乘法可類推後不列草。以丁除之。得 [illegible] 卽 [illegible] 爲三率乘法以此三率式與二率式卽二分全弧通弦率數相乘丁除之得 [illegible] 个 [illegible] 爲四率式又

以三率式乘之丁除之得 [illegible] 爲六率式乃列各式如下。通分列之。

二率式 [illegible]

四率式 [illegible]

六率式 [illegible]

乃如前五分全弧通弦率數 [illegible] 入之如下此卽借徑術見割圜綴術中。

置子乘二率式 [illegible]

加丑乘四率式 [illegible]

加丨乘六率式 [illegible]

正負相消得[illegible]爲十分全弧通弦率數也。此蓋以二分弧爲一分弧以十分全弧爲五分全弧立算。

設圜半徑爲連比例第一率。一分弧通弦爲二率。十分全弧通弦率數如前題所得。求百分全弧通弦率數。百分爲十分自乘數也〇數密不便作圖可以前圖類推。

以十分全弧通弦率數爲二率式。用比例法求其四率以下各式列之。至十二率止。其求法以十分全弧通弦率數[illegible]自乘。丅除之。得[illegible]爲三率乘法。以乘二率式

丅除之。得[illegible]爲四率式。又以三率乘之。丅除之。得[illegible]爲六率式。又以三率乘之。丅除之。得[illegible]爲八率式。又以三率乘之。丅除之。得[illegible]爲十率式。又以三率乘之。丅除之。得[illegible]爲十二率式。既得各式。乃並列之。

二率式 [illegible]

四率式 [illegible]

六率式

八率式

十率式

十二率式

乃如十分弧通弦率數入之

置卜乘二率式

加四乘四除四率式

加六乘四四四除六率式

加乘四四四四除八率式

加乘四四四四四除十率式

加乘四四四四四四除十二率式

各數相乘得二〇〇四[illegible]爲百分全弧通弦率數也。此以十分弧爲一分弧百分全弧爲十分全弧立算。

設圜半徑爲連比例第一率。一分弧通弦爲二率。有十分全弧通弦率數百分全弧通弦率數如前題所得求千分十分百分相乘數全弧通弦率數。

以十分弧通弦率數爲二率式如前題用比例法求其四率以下各式列之。乃如百分全弧通弦率數入之。消爲一行。卽千分全弧通弦率數也。此以十分弧爲一分弧以千分全弧爲百分全弧立算。若以百分全弧爲一分弧。千分全弧爲十分弧亦同。其圖解步法俱與前同。茲不復詳。惟載逐率加減之數於後以備參考

[illegible]

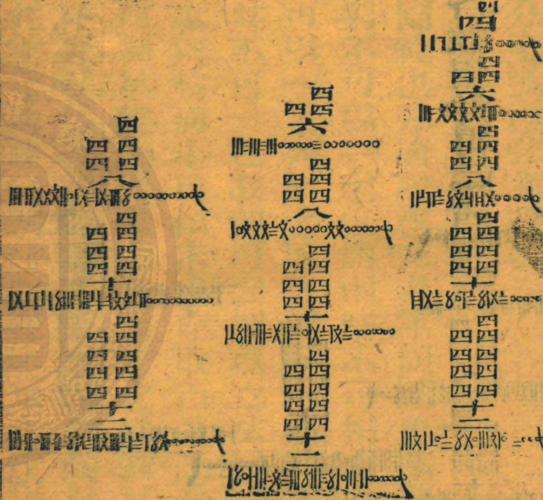
各數相幷得[rod numerals]為千

分全弧通弦率數也。

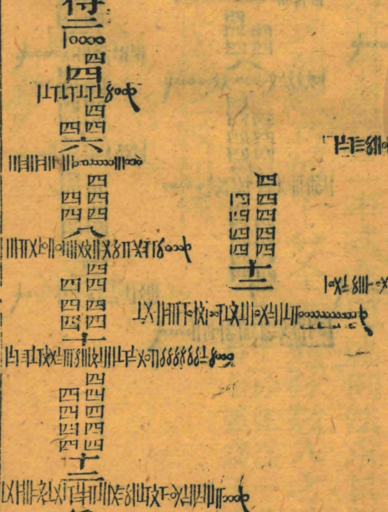
設圜半徑為連比例第一率。一分弧通弦為二率。有十分全弧通弦率數、千分全弧通弦率數、如前題所得求萬分十分千分相乘數。全弧通弦率數。

以十分弧通弦率數為二率式。亦用比例法求其四率六率以下各式列之。乃如千分全弧通弦數入之消為一行。即萬分全弧通弦率數也。此以十分弧為一分弧以萬分全弧為千分全弧立算。其逐率加減之數如後。

[rod numerals]



各數相并得



爲萬

分全弧通弦率數也。

弧背求通弦率數法解

弧圓綫也弦直綫也二者不同類也不同類雖析之至於無窮不可以一之也然則終不可相求乎非也弧與弦雖不可以一之苟析之至於無窮則所以不可一之故見矣得其不可一之故即可因理以立法是又未嘗不可以一之也何爲而不可相求乎今取百分千分萬分弧通弦率數比例相較而得弧背求通弦之率數其法既確然無疑而其數視求各分弧通弦率數轉爲簡易於此見數理自然之變化誠非人之智力所能測也其法詳著於後

法以百分千分萬分弧共二率數爲二率。百分弧以百爲二率千分弧以千爲二率萬分弧以萬爲二率。以求各率分數求四率分數以百分弧二率共數一百自乘得一萬爲三率數。連比例二率自乘一率除之得三率今二率爲一百。一率仍爲一。一除實得原數故二率自乘。卽得三率數也四率仿此再乘得一百萬爲四率數爲實置百分弧四率分數四分四率之一六六六五○四歸之得四一六六二小餘五爲應減四率數爲法法除實得二十四○○二四不盡是全四率爲應減四率之二十四倍有餘應減四率爲全四率二十四分之一不足也次以千分弧二率共數一千自乘得一百萬爲三率數再乘得十億爲四率數爲實置千分弧四率分數四分四率之一六六六六六五○○四歸之得四一六六六六

五〇二〇為應減四率數為法法除實得二十四〇〇〇〇二四不盡。是全四率亦為應減四率之二十四倍有餘應減四率亦為全四率二十四分之一不足但有餘不足之差較百分弧則微耳次以萬分弧二率共數一萬自乘得一億為三率數再乘得一兆為四率數為實置萬分弧四率分數四分之一六六六六六六六五〇〇〇。四歸之得四一六六六六六六二五〇。為應減四率數為法法除實得二十四〇〇〇〇〇二四不盡。是全四率仍為應減四率之二十四倍有餘應減四率為全四率二十四分之一不足但差數較千分弧愈微耳夫二十四分之數不改惟奇零之差逼弧愈近則愈微若徑以弧背為二率則奇

零必盡而二十四整數矣爰定弧背求通弦應減之四率為二十四分之一焉益累求而奇零不盡者此弧綫直綫之所以不可一也去奇零而用整分者因其不可一而得其所以可一也次求六率分數以百分弧四率數前四歸四率分數所得四一六六二。小餘五與三率一萬相乘得六率數四一六六二五〇〇〇。為實置百分弧六率共分數四分又四分又四分之三三三〇〇〇三〇。以四歸之三次得五二〇三一二五五。小餘不用。為應加六率數為法法除實得八十〇七不盡。又捷法置原四率共分數四分之一六六六五〇。以三率一萬乘之得六率分數四分之一六六六五〇〇〇〇。為實置六率共分數四分又四分又四分之三三三〇〇〇三〇。以兩次四除之得四分之二〇八

一二五〇一。小餘不用。為應加六率分數與四率同母。為法。法除實得數同前。分母同為四。故法實各省一除。而得數無異。後俱用此法。若分母同二三次。或四五次者。皆倣此類推之。是以應減四率分數。求得六率分數。為應加六率分數之八十倍有餘。而應加六率分數為應減四率分數、求得六率分數八十分之一不足也。後同。次置千分弧四率共分數。四分之一六六六六六五〇〇。以三率百萬乘之得四分之一六六六六六六五〇〇〇〇〇〇〇〇。為實。置六率共分數。四分又四分又四分之三三三三〇〇〇〇〇三〇〇。以兩次四除之得四分之二〇八三三一二五〇〇〇一八。為應加六率分數為法。法除實得八十。〇〇〇七不盡。次置萬分弧四率共分數。四分之一六六六六六六五〇〇。以三率一億乘之得六率分數四分之一六六六六六六

六五。空十一位。為實。置六率共分數四分又四分又四分之三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇〇三〇〇〇。以兩次四除之得四分之二〇八三三三三一二五〇〇〇〇〇一八七。為應加六率分數為法。法除實得八十〇〇〇〇〇七不盡。是八十分之數不改。而奇零之差愈推愈微。爰定弧背求通弦應加之六率為二十四分之一、又八十分一分之一焉。四率分數求得六率分數已為二十四分之一。六率分數取應加分數又為八十分之一。故應加六率為全六率二十四分之一。又八十分一分之一。求八率分數、置百分弧六率共分數。以三率一萬乘之。得八率分數四分又四分又四分之三三〇〇〇三〇。截去末四位。為實。置八率共分數五次四分之三一六三五〇二。截去末四位。以兩次四除之得四分又四分又四分之一九七七一八八為應減八率分數為法。法除實得一

百六十八四二一不盡。次置千分弧六率共數以三率百萬乘之得八率分數四分又四分又四分之三三三三三〇〇〇〇〇三〇〇截去末六位為實置八率共分數五次四分之三一七四四九二〇六四三一四。截去末六位。以兩次四除之得四分又四分又四分之一九八四〇五七五四〇一九。為應減八率分數為法法除實得一百六十八〇〇四二二不盡。次置萬分弧六率共分數以三率一億乘之得八率分數四分又四分又四分之三三三三三三三〇〇〇〇〇〇〇。截去末十二位。為實置八率共分數五次四分之三一七四六〇二〇六三四九二一截去末十二位。以兩次四除之。得四分又四分又四分之一九八四一二六二八九六八二為應減八率分數為法法除實得一百六十八分〇〇〇〇四二不盡。是一百六十八分之數不改而奇零之差愈推愈微矣

定弧背求通弦應減之八率為二十四分之一又八十分一分之一又一百六十八分一分之一焉既得此四數則十率十二率以下可化為級數式不須再求試將此所得之分母均四歸之則二十四得六八十得二十一百六十八得四十二而六為二三相乘數二十為四五相乘數四十二為六七相乘數則以下各率分母四歸之必得八九相乘十與十一相乘十二與十三相乘諸數乃以級數列為式得丅二三四四丅二三四五四四六丅二三四五六七四四四八丅二三四五六七八九四四四四十丅二三四五六七八九十十一四四四四四十一丅為弧背求通弦式也觀此式四歸為各率所同四率則加二歸三歸六率則加四歸五歸八率則加六歸七歸

依次遞加至於無窮皆可得而定矣乃依式定有圓半徑及弧背求通弦之法以半徑爲連比例第一率其式爲丅弧背爲二率其式爲亍即以弧背亍爲第一數正 以第一數自之得四丅半徑除之得三丅以乘第一數亍得五丅半徑除之得四丅以四除之又二三遞除之得三/四四丅爲第二數負各數命爲負者式之正負相閒欲與式合故也以下類推 以亍乘第二數得二三/四七丅半徑除之得二三/四六丅以四除之又四五遞除之得二三四五/四四六丅爲第三數正 以亍乘第三數得二三四五/四四九丅半徑除之得二三四五/四四八丅以四除之又六七遞除之得二三四五六七/四四四八丅爲第四數負 以亍乘第四數得二三四五六七/四四四十一丅半徑除之得二三四五六七/四四四十丅以四

除之又八九遞除之得二三四五六七八九/四四四四十丅爲第五數正 以亍乘第五數得二三四五六七八九/四四四四十三丅半徑除之得二三四五六七八九/四四四四十二丅以四除之又十與十一遞除之得二三四五六七八九十十一/四四四四四十二丅爲第六數負 如是遞求俱與式合求至單位下乃併各正數又併各負數相減得通弦

通弦求弧背法解

弧背求通弦率式既定用其率式反求之卽可得通弦求弧背率式法以弧背求通弦率數爲二率式用比例法求其四率以下各式列之按弧背求通弦共率數內所少率數遞加至得一整二率而止乃計所加各率爲通弦求弧

背率數也。此即割圜綴術中還原法。

先以二率式自乘。半徑丁除之。得 $丁^{二}$ $\frac{二三}{四}丁^{四}$ $\frac{二三四五三}{四四}丁^{七}$ $\frac{二三四}{四四}$ $\frac{}{五六七}$ $\frac{四四}{四}$。在為三率亦為乘法。以乘法乘二率式。半徑除之。得四率式。以乘法乘四率式。半徑除之。得六率式。以乘法乘六率式。半徑除之。得八率式。以下遞推列所得各式如後。

二率式 $丁^{二}$ $\frac{二三}{四}丁^{四}$ $\frac{二三四五}{四四}丁^{六}$ $\frac{二三四五六七}{四四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七八九}{四四四四}丁^{十}$

四率式 $丁^{四}$ $\frac{二三四}{}丁^{六}$ $\frac{二三四五}{四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七三}{四四四}丁^{十二}$

六率式 $丁^{六}$ $\frac{二三}{四}丁^{八}$ $\frac{二三四五三}{四四}丁^{十二}$

八率式 $丁^{八}$ $\frac{二三四}{}丁^{十}$

十率式 $丁^{十}$

綴術釋明 卷上 圭

以二率式中所少四率分母分子乘除四率式通分加之。

置二率式 $丁^{二}$ $\frac{二三}{四}丁^{四}$ $\frac{二三四五}{四四}丁^{六}$ $\frac{二三四五六七}{四四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七八九}{四四四四}丁^{十}$

加 $\frac{丨}{二三四}$ 乘除 四率式 $\frac{二三}{四}丁^{四}$ $\frac{二三四五}{四四}丁^{六}$ $\frac{二三四五六七}{四四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七八九}{四四四四}丁^{十}$

得式 $丁^{二}$ ○ $\frac{二三四五}{四四}丁^{六}$ $\frac{二三四五六七}{四四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七八九}{四四四四}丁^{十}$

以得式中所少六率分母分子乘除六率式通分加之。

置前得式 $丁^{二}$ ○ $\frac{二三四五}{四四}丁^{六}$ $\frac{二三四五六七}{四四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七八九}{四四四四}丁^{十}$

加 $\frac{文}{二三四五四四}$ 乘除 六率式 $\frac{二三四五}{四四}丁^{六}$ $\frac{二三四五六七}{四四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七八九}{四四四四}丁^{十}$

二次得式 $丁^{二}$ ○ ○ $\frac{二三四五六七}{四四四}丁^{八}$ $\frac{二三四五六七八九}{四四四四}丁^{十}$

以二次得式中所少八率分母分子乘除八率式通分

加之

置二次得式　〒　〇　〇　三三四五六七八九四四四四作八分一百六十八

加〡〢〤乘三三四五六七四四四除 八率式

三次得式　〒　〇　〇　三三四五六七四四四作八分三三四五六七八九四四四四一百八分

以三次得式中所少十率分母分子乘除十率式加之

置三次得式　〒　〇　〇　三三四五六七八九四四四四十九分

加〡〢〤乘三三四五六七八九四四四四除 十率式

四次得式　〒　〇　〇　〇　三三四五六七八九四四四四十分

視二位以下俱空。乃計所加各率、得〒三三四四四三三四五四四三三四五交 六七四四四八作八分二三四五六七八九一四四四四四十分 爲通弦求弧背式也。〇此式以前

率除法較後率除法、得三三八七四五八九等數、爲遞次除法。又每

率皆用四除。與弧背求通弦同。復以前率乘法除後率乘法、得

一二五九四九各奇數、爲遞次乘法。由是推之、至無窮皆可

得而定矣。

弧背正弦相求法解

三角形八綫用正弦、而不用通弦。今按弧背通弦相求之

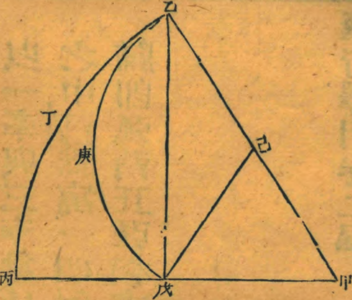
法、省一四除、卽弧背正弦相求之法。於通弦式中四率去分母四。於六率去分

母四四四。於八率去分母四四四四。卽正弦式。

如圖、甲爲圜心、甲乙・甲丙皆爲半徑・乙丁丙爲弧背・乙

戊爲正弦。試將甲乙半徑平分于己、自己至戊作己戊

綫與甲己乙己等。甲乙戊爲句股形。倍之爲直角長方形。直角長方形內兩對角斜綫必交於中心。自中心至四角必皆相等。己戊與甲己乙己皆爲直角長方形內中心至四角綫。故皆相等。乃以己爲心。己乙爲半徑。作乙庚戊弧。與乙丁丙弧等。己乙小圓半徑爲大圓圓半徑之半。若小圓角與大圓角等。則小圓角所當弧背必爲大圓角所當弧背之半。今甲己戊三角形。己甲。己戊。二邊等。甲戊二角亦等。幷甲戊二內角。與己一外角等。是小圓之乙己戊角爲大圓甲角之倍。則小圓己角所當乙庚戊弧。必與大圓甲角所當乙丙弧相等無疑。則乙丁丙弧之正弦乙戊。即爲乙庚戊弧之通弦矣。故以乙丁丙弧之數。爲乙庚戊弧之數。求



得乙庚戊弧之數。即乙丁丙弧之數也。然用小圓乙庚戊弧通弦。亦當用小圓乙己半徑。今仍用大圓甲乙半徑。是用倍半徑爲首率矣。求得三率。必爲二歸之數。再以一率與三率爲比。必爲兩次二歸之數。是逐次比例之中。已默寓一四歸矣。故弧背通弦相求之法。省一四歸。即弧背正弦相求之法也。

綴術釋明卷上畢