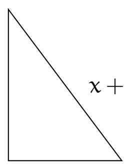
3 Equazioni di secondo grado

3.1 Le equazioni di secondo grado in una incognita

Consideriamo il seguente problema: "in un triangolo rettangolo l'ipotenusa è più lunga del cateto minore di 4cm, mentre l'altro cateto è più lungo del cateto minore di 2cm. Si vogliono determinare le misure dei tre lati".

Si può formalizzare il problema indicando con x la misura incognita del cateto minore. La lunghezza dell'ipotenusa sarà $x+4$, mentre quella dell'altro cateto $x+2$. Applicando il teorema di Pitagora si ha: $x^2+(x+2)^2=(x+4)^2$. Dopo aver effettuato i calcoli e aver portato tutti i termini a sinistra del predicato uguale abbiamo: $x^2-4x-12=0$.



Questa è una equazione di secondo grado in una incognita in quanto la variabile x vi compare elevata al secondo grado.

Definizione 3.1. Si dice *equazione di secondo grado*, un'equazione del tipo: $ax^2+bx+c=0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. I valori a, b, c prendono il nome di *coefficienti* e, in particolare, c viene detto *termine noto*.

Un'equazione di secondo grado si definisce:

monomia quando il secondo e il terzo coefficiente sono nulli: $ax^2=0$;
(incompleta) pura quando il secondo coefficiente è nullo: $ax^2+c=0$;
(incompleta) spuria quando il terzo coefficiente è nullo: $ax^2+bx=0$;
completa quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero: $ax^2+bx+c=0$.

3.1.1 Risoluzione di un'equazione di secondo grado incompleta pura

Il coefficiente della x è nullo e l'equazione si presenta nella forma: $ax^2+c=0$. Si risolve portando al secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente di x^2:

$$ax^2+c=0 \quad\Rightarrow\quad ax^2=-c \quad\Rightarrow\quad x^2=-\frac{c}{a} \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Esempio 3.1. Risoluzione di equazioni pure.

- $4x^2 - 9 = 0$.

  Risoluzione: $4x^2 = +9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = +\frac{3}{2}$.

- $4x^2 + 9 = 0$.

  Risoluzione: $4x^2 = -9 \Rightarrow x^2 = -\frac{9}{4}$. L'equazione non ammette soluzioni reali in quanto il quadrato di un numero reale non è mai negativo.

Le soluzioni dell'equazione incompleta pura $ax^2 + c = 0$ dipendono dal segno di $-\dfrac{c}{a}$:

- se $-c/a > 0$, ovvero se a e c sono discordi, l'equazione ammette *due soluzioni reali distinte opposte*: $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \vee x_2 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$;
- se $-c/a < 0$, ovvero se a e c sono concordi, l'equazione *non ammette soluzioni reali*;
- se $-c/a = 0$, allora $c = 0$, l'equazione ha *due soluzioni reali coincidenti nulle*: $x_1 = x_2 = 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.1, 3.2, 3.3, 3.4

3.1.2 Risoluzione di un'equazione incompleta spuria

Un'equazione incompleta spuria si presenta nella forma: $ax^2 + bx = 0$. Per risolverla, si raccoglie a fattore comune la x; precisamente $x(ax + b) = 0$. Applicando la legge di annullamento del prodotto si ottiene $x_1 = 0$ oppure $ax + b = 0$ da cui $x_2 = -\dfrac{b}{a}$. Pertanto un'equazione di questo tipo ha sempre due soluzioni reali distinte di cui una nulla.

Esempio 3.2. Risoluzione di equazioni incomplete spurie.

- $2x^2 - 4x = 0$.

  Raccogliendo a fattor comune si ha: $2x(x - 2) = 0$ da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue $2x = 0 \vee x - 2 = 0$ da cui $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$;

- $x^2 + x = 0$.

  Raccogliendo x a fattore comune, si ha $x(x + 1) = 0$, da cui, applicando la legge di annullamento del prodotto, segue $x = 0 \vee x + 1 = 0$ da cui $x_1 = 0 \vee x_2 = -1$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.5, 3.6, 3.7, 3.8

3.2 Risoluzione di un'equazione completa

L'equazione di secondo grado completa si presenta nella forma $ax^2 + bx + c = 0$ e per risolverla si applica una formula che si ottiene utilizzando il metodo del completamento del quadrato:

equazione completa di secondo grado	$ax^2 + bx + c = 0$
si moltiplicano ambo i membri per $4a$	$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$
si aggiunge b^2 ad ambo i membri	$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2$
si porta $4ac$ al secondo membro	$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
il primo membro risulta il quadrato di un binomio	$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
si pone $k = 2ax + b$ e l'equazione diventa pura in k	$k^2 = b^2 - 4ac$
si calcolano le soluzioni in k	$k_{1,2} = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
al posto di k si sostituisce $2ax + b$	$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$
si separa il monomio con l'incognita	$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
si risolve rispetto all'incognita x	$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Da quanto ottenuto possiamo osservare che:

- la soluzione si ottiene esclusivamente operando sui coefficienti dell'equazione;
- il valore dell'incognita si ottiene con due calcoli:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

- nel calcolo è coinvolta l'estrazione di radice quadrata: l'espressione $b^2 - 4ac$ prende il nome di *discriminante* e si è soliti indicarla con il simbolo Δ (delta).

Questa formula può essere applicata anche ai tipi di equazioni incomplete che abbiamo già studiato. Il termine discriminante deriva dal sostantivo latino *discrimen* (divisione, punto di separazione); in effetti, il valore assunto da Δ permette di effettuare una distinzione tra la tipologia delle soluzioni di un'equazione di secondo grado. Si possono infatti presentare tre casi:

- Primo caso: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette *due soluzioni reali e distinte*: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Secondo caso: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Il radicale $\sqrt{\Delta} = 0$, quindi l'equazione ammette *due radici reali e coincidenti*: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$;
- Terzo caso: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Il radicale $\sqrt{\Delta}$ non è un numero reale, quindi l'equazione *non ammette soluzioni reali*.

Riassumendo e schematizzando si ha:

$ax^2+bx+c=0$ con $a \neq 0$	
Discriminante	Soluzioni
$\Delta > 0$	Due soluzioni reali e distinte: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \vee x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Due soluzioni reali e coincidenti: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Nessuna soluzione reale: I.S. $= \emptyset$

Esempio 3.3. Risoluzione di equazioni complete.

- $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

  $a = +3$, $b = -5$, $c = +2$. Calcolo del discriminante:

  $$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (+3) \cdot (+2) = 25 - 24 = 1.$$

  Poiché $\Delta > 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (+3)} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{2}{3};$$

- $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

  $a = +4$, $b = -12$, $c = +9$. Calcolo del discriminante:

  $$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot (+4) \cdot (+9) = 144 - 144 = 0.$$

  Poiché $\Delta = 0$ l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti

  $$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-(-12)}{2 \cdot (+4)} = \frac{12}{8} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{3}{2};$$

- $x^2 - x + 3 = 0$.

  $a = +1$, $b = -1$, $c = +3$. Calcolo del discriminante:

  $$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (+1) \cdot (+3) = 1 - 12 = -11.$$

  Poiché $\Delta < 0$ l'equazione non ammette soluzioni reali.

✍ *Esercizi proposti:* 3.9, 3.10, 3.113.12, 3.13

3.2.1 Formula ridotta per equazioni di secondo grado

Se nell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ il coefficiente b è un numero pari, conviene applicare una formula, detta *formula ridotta*, che semplifica i calcoli.

Supponiamo $b = 2k$, l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ diventa $ax^2 + 2kx + c = 0$ e nella formula risolutiva dell'equazione si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Dato che $b = 2k$ si ha $k = \frac{b}{2}$ e quindi la formula che conviene utilizzare quando b è pari è:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

La quantità sotto radice, uguale a $\frac{\Delta}{4}$, è detta anche *discriminante ridotto*.

Esempio 3.4. Applicazione della formula ridotta nella risoluzione di equazioni complete.

- $x^2 - 4x + 3 = 0$.

  Il coefficiente di primo grado è pari, per cui conviene utilizzare la formula ridotta:

  $$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot (+3)}}{1} = 2 \pm \sqrt{1} \Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 3;$$

- $-x^2 - 2x + 24 = 0$.

  Applichiamo la formula ridotta:

  $$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - (-1) \cdot (+24)}}{-1} = -1 \pm \sqrt{25} \Rightarrow x_1 = -6 \vee x_2 = 4;$$

- $-3x^2 - 6x + 12 = 0$.

  Per prima cosa dividiamo l'equazione per -3. Per il secondo principio di equivalenza, si ha l'equazione equivalente $x^2 + 2x - 4 = 0$. Poiché il coefficiente della x è pari si può applicare la formula ridotta:

  $$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+4} = -1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = -1 + \sqrt{5} \vee x_2 = -1 - \sqrt{5}.$$

Quando b è pari e $a = 1$, la formula si dice *ridottissima*: $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$.

Esempio 3.5. Applicazione della formula ridottissima nella risoluzione di equazioni complete.

- $x^2 - 6x + 8 = 0$.

  Il coefficiente b è pari e il coefficiente $a = 1$, quindi possiamo applicare la formula ridottissima $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8}$, quindi $x_1 = 2 \vee x_2 = 4$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.14, 3.15

Riassumiamo e schematizziamo la risoluzione di un'equazione di secondo grado:

		Equazioni incomplete	
Coefficienti	Tipo	Equazione	Soluzioni
$b = 0, c = 0$	Monomia	$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$
$b = 0, c \neq 0$	Pura	$ax^2 + c = 0$	$\begin{cases} \text{I. S.} = \emptyset & \text{se } ac > 0 \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} & \text{se } ac < 0 \end{cases}$
$b \neq 0, c = 0$	Spuria	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{b}{a}$
	Equazione completa $ax^2 + bx + c = 0$		
Discriminante	Numero soluzioni		Soluzioni
$\Delta > 0$	Due soluzioni reali e distinte		$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\Delta = 0$	Due soluzioni reali e coincidenti		$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Nessuna soluzione reale		$\text{I. S.} = \emptyset$

✍ *Esercizi proposti:* 3.16, 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, 3.21, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32

3.2.2 Equazioni che si possono risolvere con opportune sostituzioni

Esempio 3.6. Risoluzione di equazioni con sostituzioni.

- $(x-1)^2 = 16$.

  Sostituendo $x - 1 = t$ l'equazione diventa $t^2 = 16$, le cui soluzioni sono $t_1 = -4 \vee t_2 = +4$. Per determinare la x sostituiamo i valori di t trovati nella relazione $x - 1 = t$. Si ha $x - 1 = -4 \vee x - 1 = +4$ quindi l'equazione assegnata ammette le due soluzioni $x_1 = -3 \vee x_2 = 5$;

- $(x-1)^2 + 2(x-1) = 0$.

  Sostituendo $x - 1 = t$ l'equazione diventa $t^2 + 2t = 0$ le cui soluzioni sono $t(t+2) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \vee t + 2 = 0 \Rightarrow t_2 = -2$. Sostituendo $x - 1 = t$ si ha $x - 1 = 0 \vee x - 1 = -2$ quindi l'equazione assegnata ammette le due soluzioni $x_1 = -1 \vee x_2 = 1$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.33, 3.34, 3.35

3.3 Discussione e risoluzione di equazioni numeriche frazionarie

Un'equazione in cui compare l'incognita al denominatore si chiama *frazionaria o fratta*.

Esempio 3.7. Risolvere la seguente equazione: $\dfrac{3x+2}{1+x} = \dfrac{2x+3}{x-2}$.

Passo I Determiniamo il mcm dei denominatori: mcm $= (1+x) \cdot (x-2)$.

Passo II Imponiamo le *condizioni di esistenza* (C. E.): C. E. $x \neq -1 \wedge x \neq 2$. La ricerca dei valori che risolvono l'equazione si restringe ai numeri reali appartenenti all'insieme, $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ detto *dominio* dell'equazione o *insieme di definizione* (abbreviato I. D.).

Passo III Applichiamo il primo principio d'equivalenza trasportando al primo membro la frazione del secondo membro $\frac{3x+2}{1+x} - \frac{2x+3}{x-2} = 0$. Riduciamo allo stesso denominatore (mcm):

$$\frac{(3x+2) \cdot (x-2) - (2x+3) \cdot (1+x)}{(1+x) \cdot (x-2)} = 0.$$

Passo IV Moltiplichiamo ambo i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste; l'equazione diventa: $(3x+2) \cdot (x-2) - (2x+3) \cdot (1+x) = 0$.

Passo V L'equazione che si ottiene è di secondo grado; portiamo l'equazione alla forma canonica: $3x^2 - 6x + 2x - 4 - 2x - 3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x^2 - 9x - 7 = 0$.

Passo VI Calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = 81 + 28 = 109$. Il discriminante è positivo quindi l'equazione è determinata e ammette due soluzioni reali distinte:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{109}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{9 - \sqrt{109}}{2} \vee x_2 = \frac{9 + \sqrt{109}}{2}.$$

Passo VII Confrontiamo le soluzioni con le C. E.; in questo caso le radici appartengono all'insieme $\mathcal{D}$; diciamo che sono accettabili e l'insieme soluzione è: I. S. $= \left\{\frac{9-\sqrt{109}}{2}, \frac{9+\sqrt{109}}{2}\right\}$.

Esempio 3.8. Risolvere la seguente equazione: $\dfrac{x^2}{x^2-3x+2} = \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{1}{x+2}$.

Passo I Determiniamo il mcm dei denominatori. Scomponiamo in fattori i denominatori. Riscriviamo: $\frac{x^2}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x+2}$ il mcm è $(x-2)(x-1)(x+2)$.

Passo II Imponiamo le Condizioni di Esistenza: C. E. $x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq -2$ quindi $\mathcal{D} =$ I. D. $= \mathbb{R} - \{-2, 1, 2\}$

Passo III Trasportiamo al primo membro ed uguagliamo a zero; riduciamo allo stesso denominatore (mcm) i membri dell'equazione:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x^2 + 3x - 2 - x^3 - 2x^2 + 4x^2 + 8x - 4x - 8}{(x-2)(x-1)(x+2)} = 0.$$

Passo IV Applichiamo il secondo principio di equivalenza moltiplicando ambo i membri per il mcm, certamente diverso da zero per le condizioni poste in precedenza; l'equazione diventa: $3x^2 + 7x - 10 = 0$.

Passo V Calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 120 = 169$. Il discriminante è positivo, l'equazione determinata e ammette due soluzioni reali distinte: $x_{1,2} = \frac{-7 \pm 13}{6}$ cioè $x_1 = -\frac{10}{3} \vee x_2 = 1$.

Passo VI Confrontiamo con le C. E.; in questo caso solo x_1 appartiene all'insieme $\mathcal{D}$; diciamo che l'insieme soluzione è: I. S. $= \left\{-\frac{10}{3}\right\}$ mentre $x_2 = 1$ non è accettabile.

✍ *Esercizi proposti:* 3.36, 3.37, 3.38, 3.39, 3.40, 3.41, 3.42, 3.43, 3.44, 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.49, 3.50, 3.51,3.52, 3.53, 3.54,3.55, 3.56, 3.57

3.4 Discussione e risoluzione di equazioni letterali

Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 3.2. Una equazione è *letterale* se i coefficienti dell'incognita sono espressioni letterali, cioè se oltre all'incognita (in genere indicata con la lettera x) compare un'altra lettera (in genere a, b, k, ...) detta *parametro*.

Esempio 3.9. Data l'equazione $kx^2 - (2k-1)x + (k-3) = 0$, discutere, al variare di k, la realtà delle sue soluzioni.

L'equazione è letterale di secondo grado nell'incognita x, i cui coefficienti dipendono dal parametro k. Il parametro k può assumere qualunque valore numerico e l'equazione rappresenta una famiglia di equazioni le cui caratteristiche variano a seconda dei valori attribuiti al parametro. Notiamo subito che se k assume il valore zero, l'equazione non è più di secondo grado. Se k assume il valore 3, l'equazione è ancora di secondo grado ma è incompleta (spuria) perché priva del termine noto.

Discutere un'equazione letterale significa analizzare come varia il suo insieme delle soluzioni al variare del parametro.

Ricordando la formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ in cui compaiono i tre coefficienti a, b, c possiamo dire che, nel caso considerato:

- il primo coefficiente è k, se $k = 0$ l'equazione diventa $x - 3 = 0$ di primo grado con I. S. $= \{3\}$;
- il secondo coefficiente è $-2k + 1$, se questo è nullo, ossia se $k = \frac{1}{2}$ l'equazione diventa $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2} = 0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1 = -\sqrt{5} \vee x_2 = \sqrt{5}$;
- il terzo coefficiente è $k - 3$, se è nullo, cioè se $k = 3$ l'equazione diventa $3x^2 - 5x = 0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{5}{3}$.

Per tutti i valori di $k \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}, 3\right\}$ l'equazione è completa, pertanto l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta = (-2k+1)^2 - 4k(k-3) = 8k+1$, quindi

- se $8k+1 < 0 \Rightarrow k < -\frac{1}{8}$ l'equazione non ammette soluzioni reali: I. S. $= \emptyset$;
- se $8k+1 > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni reali distinte $x_{1,2} = \frac{(2k-1)\pm\sqrt{8k+1}}{2k}$
- se $k = -\frac{1}{8}$ l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = 5$.

Riassumendo e schematizzando si ha:

$kx^2 - (2k-1)x + (k-3) = 0$ con $k \in \mathbb{R}$		
Parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$k = 0$	$x = 3$	di primo grado
$k = \frac{1}{2}$	$x_1 = -\sqrt{5} \vee x_2 = +\sqrt{5}$	pura
$k = 3$	$x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{5}{3}$	spuria
$k \in \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{2}, 3\right\}$		completa, $\Delta = 8k+1$
$k < -\frac{1}{8}$	$\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali, I.S. $= \emptyset$	
$k \geqslant -\frac{1}{8}$	$\Delta \geqslant 0$ esistono soluzioni reali	
$k > -\frac{1}{8}$	$x_1 = \frac{(2k-1)-\sqrt{8k+1}}{2k} \vee x_2 = \frac{(2k-1)+\sqrt{8k+1}}{2k}$	
$k = -\frac{1}{8}$	$x_1 = x_2 = 5$	

Esempio 3.10. Data l'equazione $x^2 - 3x + 1 - k = 0$, discutere, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la realtà delle radici.

Il primo e il secondo coefficiente non dipendono dal parametro k, quindi analizziamo il terzo coefficiente. Se $k = 1$ l'equazione diventa un'equazione spuria con due radici reali $x_1 = 0 \vee x_2 = 3$. Per tutti i valori di k dell'insieme $\mathbb{R} - \{1\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta = 9 - 4(1-k) = 4k+5$, quindi:

- se $k < -\frac{5}{4}$ l'equazione non ammette soluzioni reali: I. S. $= \emptyset$;
- se $k \geqslant -\frac{5}{4}$ l'equazione ammette due radici reali. Esse sono distinte se $k > -\frac{5}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{4k+5}}{2}$ e coincidenti se $k = -\frac{5}{4} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$.

Riassumendo e schematizzando si ha:

$x^2 - 3x + 1 - k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$		
Parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$k = 1$	$x_1 = 0 \vee x_2 = 3$	spuria
$k \in \mathbb{R} - \{1\}$		completa, $\Delta = 4k+5$
$k < -\frac{5}{4}$	$\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali, I.S. $= \emptyset$	
$k \geqslant -\frac{5}{4}$	$\Delta \geqslant 0$ esistono soluzioni reali	
$k > -\frac{5}{4}$	$x_1 = \frac{3-\sqrt{4k+5}}{2} \vee x_2 = \frac{3+\sqrt{4k+5}}{2}$	
$k = -\frac{5}{4}$	$x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$	

Esempio 3.11. Discutere l'equazione letterale: $\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$.

L'equazione, pur presentando delle frazioni, è intera in quanto l'incognita x non compare al denominatore. Se $m=0$ oppure $m=1$ l'equazione è priva di significato, quindi poniamo C. E. $m\neq 0 \wedge m\neq 1$.

Trasportiamo a sinistra del segno di uguaglianza i termini di destra ed eseguiamo il calcolo nella parentesi:

$$\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2\cancel{m}x}{m-1}\cdot\frac{1}{\cancel{m}}=0.$$

Semplifichiamo m nell'ultimo termine, poiché nelle C. E. $m\neq 0$, si ottiene

$$\frac{x^2}{m-1}+3+m-\frac{2mx}{m-1}-\frac{2x}{m-1}=0.$$

Riduciamo allo stesso denominatore $m-1$ ed eliminiamo il denominatore, essendo $m\neq 1$ per le C. E.; si ha: $x^2+3m-3+m^2-m-2mx-2x=0$, che scritta in forma canonica diventa $x^2-2x(m+1)+m^2+2m-3=0$.

Discussione

- il primo coefficiente, essendo uguale a 1, non dipende dal valore del parametro m, quindi l'equazione è di secondo grado per qualunque valore di $m\in\mathbb{R}-\{0, 1\}$;
- il secondo coefficiente è $-2(m+1)$: se $m=-1$ l'equazione diventa $x^2-4=0$, equazione pura con due soluzioni reali opposte $x_1=-2\vee x_2=2$;
- il terzo coefficiente è m^2+2m-3: se $m^2+2m-3=0 \Rightarrow m=1\vee m=-3$ (non consideriamo il caso $m=1$ per le C. E.) l'equazione diventa $x^2+4x=0$, equazione spuria con due soluzioni reali $x_1=0\vee x_2=-4$.

Prima conclusione: per tutti i valori di $m\in\mathbb{R}-\{0, 1, -1, -3\}$ l'equazione è completa e l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante. Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4}=(m+1)^2-(m^2+2m-3)=4$; esso risulta indipendente dal valore del parametro m e sempre positivo, quindi l'equazione ammette sempre due soluzioni reali distinte $x_1=m-1\vee x_2=m+3$.

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

$\frac{x^2}{m-1}+3+m=\frac{2mx}{m-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)$ con $m\in\mathbb{R}$		
Parametro	Insieme Soluzione	Equazione
$m=0\vee m=1$		priva di significato
$m=-1$	$x_1=-2\vee x_2=2$	pura
$m=-3$	$x_1=0\vee x_2=-4$	spuria
$m\in\mathbb{R}-\{0, 1, -1, -3\}$	$x_1=m-1\vee x_2=m+3$	completa: $\Delta=16$

Esempio 3.12. Discutere l'equazione parametrica $\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$.

L'equazione è fratta, poiché l'incognita x compare nel denominatore. Trasportiamo i termini del secondo membro a sinistra del segno di uguaglianza e scomponiamo in fattori i denominatori:

$$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0 \qquad \text{C. E. } x\neq 0\wedge x\neq k\wedge x\neq -k.$$

Svolgiamo i calcoli nella parentesi e moltiplichiamo: $\frac{k^2+x^2}{x(k-x)}-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$; Riduciamo allo stesso denominatore ed eliminiamo il denominatore: $kx^2+kx\cdot(1-k)+k\cdot(k-2)=0$;

Discussione

- Il primo coefficiente è k, se $k=0$ le C. E. si riducono a $x\neq 0$ e l'equazione diventa $0x=0$ indeterminata, quindi I.S. $=\mathbb{R}-\{0\}$ per le condizioni poste sull'incognita. Avendo studiato il caso $k=0$, possiamo ora supporre $k\neq 0$. Dividiamo tutti i coefficienti per k, l'equazione diventa $x^2+x\cdot(1-k)+(k-2)=0$;
- il secondo coefficiente è $1-k$, se $k=1$ le C. E. sono $x\neq 0\wedge x\neq 1\wedge x\neq -1$ e l'equazione diventa $x^2-1=0$, le soluzioni sono $x_1=-1\vee x_2=1$ che non sono accettabili per le C. E.;
- il terzo coefficiente è $k-2$, se $k=2$ le C. E. sono $x\neq 0\wedge x\neq 2\wedge x\neq -2$ e l'equazione diventa $x^2-x=0$ le cui soluzioni sono $x_1=0\vee x_2=1$ di cui $x_1=0$ non è accettabile per le C. E.

Per $k\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$ l'equazione è completa, l'esistenza di soluzioni reali dipende dal discriminante $\Delta=(1-k)^2-4(k-2)=(k-3)^2$, essendo $\Delta\geqslant 0\ \forall k$, si avranno sempre due soluzioni reali: coincidenti se $k=3\Rightarrow x_1=x_2=1$ accettabili essendo le C. E. $x\neq -3\wedge x\neq 0\wedge x\neq 3$; distinte se $k\neq 3\Rightarrow x_1=1\vee x_2=k-2$ e, confrontando con le C. E., si $x_1=1$ non è accettabile se $k=-1$, mentre x_2 è sempre accettabile per $\forall k\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3,-1\}$.

Riassumendo in una tabella tutti i risultati ottenuti:

$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$ con $k\in\mathbb{R}$

Parametro	Incognita	Insieme Soluzione	Equazione
	$x\neq -k\wedge x\neq 0\wedge x\neq k$		
$k=0$	$x\neq 0$	I. S. $=\mathbb{R}-\{0\}$	indeterm.
$k=1$	$x\neq -1\wedge x\neq 0\wedge x\neq 1$	$[x_1=-1\vee x_2=1]^*$	pura
$k=2$	$x\neq -2\wedge x\neq 0\wedge x\neq 2$	$x_1=0^*\vee x_2=1$	spuria
$k\in\mathbb{R}-\{0,1,2\}$			completa
$k=3$	$x\neq -3\wedge x\neq 0\wedge x\neq 3$	$x_1=x_2=1$	
$k\in\mathbb{R}-\{0,1,2,3\}$	$x\neq -k\wedge x\neq 0\wedge x\neq k$	$x_1=1\vee x_2=k-2$	
$k=-1$		$x_1=1^*$	
$k\in\mathbb{R}-\{-1,0,1,2,3\}$		$x_2=k-2$	

* La soluzione o le soluzioni non sono accettabili.

✍ *Esercizi proposti:* 3.58, 3.59, 3.60, 3.61, 3.62, 3.63, 3.64, 3.65, 3.66, 3.67, 3.68, 3.69, 3.70, 3.71, 3.72, 3.73, 3.74,3.75, 3.76, 3.77

3.5 Relazioni tra soluzioni e coefficienti

Consideriamo una generica equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali (cioè $\Delta \geqslant 0$), sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni (o radici) dell'equazione:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = -\frac{b}{a};$$
$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} + 4ac - \cancel{b^2}}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a^2}} = \frac{c}{a}.$$

Quindi, la somma delle radici è $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e il prodotto delle radici è $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Osserviamo che queste relazioni tra radici e coefficienti dell'equazione valgono anche nel caso in cui le radici non siano reali ($\Delta < 0$).

Esempio 3.13. Determinare somma e prodotto delle soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, nei casi seguenti, senza risolverla.

- $2x^2 + 11x - 3 = 0$.

  Calcolo il discriminante $\Delta = 145 > 0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha:

  $$x_1 + x_2 = -\frac{11}{2} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2}.$$

- $x^2\sqrt{2} + 3x - 2\sqrt{2} = 0$.

  Calcolo il discriminante $\Delta = 25 > 0$ pertanto le radici sono reali e distinte. Applicando le precedenti formule si ha:

  $$x_1 + x_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2.$$

- $x^2 + 2x + 15 = 0$.

  Calcolo il discriminante $\Delta = -56 < 0$ pertanto le radici non sono reali anche se la loro somma e il loro prodotto sono reali, infatti applicando le precedenti formule si ha: $x_1 + x_2 = -2$ e $x_1 \cdot x_2 = 15$.

- $x^2 - 12x + 36 = 0$.

  Il discriminate $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 36 = 144 - 144 = 0$. Le radici sono coincidenti, applicando la formula risolutiva si ha $x_1 = x_2 = 6$. Applicando le formule per calcolare somma e prodotto si ha $x_1 + x_2 = 12$ e $x_1 \cdot x_2 = 36$ da cui si conclude ugualmente che $x_1 = x_2 = 6$.

Esempio 3.14. Determina le radici dell'equazione $x^2 + 2x - 15 = 0$ senza applicare la formula risolutiva, ma sfruttando la somma e il prodotto delle radici stesse.

Calcolo il discriminante $\Delta = 64$, le radici sono reali. Esse hanno come somma $-\frac{b}{a} = -2$ e come prodotto $\frac{c}{a} = -15$.

Le coppie di interi che hanno per prodotto -15 sono $(5; -3)$, $(-5; 3)$, $(15; -1)$ e $(-15; 1)$. Tra tutte queste coppie l'unica che ha per somma -2 è la coppia $(-5; 3)$. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $x_1 = -5 \vee x_2 = 3$.

Esempio 3.15. Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla somma dei reciproci delle radici.

Si vuole cioè esprimere $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ attraverso i coefficienti a, b, c dell'equazione generica. Osserviamo in via preliminare che tale somma è possibile con la condizione $x_1 \neq 0 \wedge x_2 \neq 0$ che implica $c \neq 0$. Si ha:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}.$$

Esempio 3.16. Si determini la relazione che lega i coefficienti della generica equazione di secondo grado alla differenza delle radici.

Poiché non abbiamo informazioni a priori su quale delle due soluzioni sia la maggiore, calcoliamo il valore assoluto della differenza richiesta. Il calcolo diventa:

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|-\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a}\right| = \left|-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right| = \left|-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}\right|.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.78, 3.78, 3.80, 3.81, 3.82, 3.83, 3.84, 3.85, 3.86, 3.87, 3.88, 3.89, 3.90,

3.5.1 Determinare due numeri conoscendone la somma e il prodotto

Consideriamo la generica equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali x_1 e x_2. Essendo $a \neq 0$, è possibile dividere ambo i membri per a, ottenendo: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Dato che, per quanto visto precedentemente, $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $p = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, si ha $x^2 - sx + p = 0$.

Tale equazione risolve quindi la classe di problemi del tipo: "determinare due numeri la cui somma è s e il cui prodotto è p".

Dall'equazione $x^2 - sx + p = 0$ discende che tali numeri esistono e sono reali se e solo se $\Delta = s^2 - 4p \geqslant 0$ ovvero se il quadrato della somma è maggiore o uguale al quadruplo del loro prodotto.

Esempio 3.17. Determinare due numeri che sommati danno 12 e moltiplicati danno 35.

L'equazione che risolve il problema è: $x^2 - 12x + 35 = 0$. Le soluzioni sono $x_1 = 5 \vee x_2 = 7$.

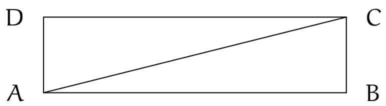
Esempio 3.18. Determinare due numeri che sommati danno 5 e moltiplicati danno 9.

L'equazione che risolve il problema è: $x^2 - 5x + 9 = 0$. Poiché $\Delta = s^2 - 4p = 25 - 36 = -11$, l'equazione non ammette soluzioni reali e, di conseguenza, non esistono due numeri reali aventi la somma e il prodotto richiesti.

✍ *Esercizi proposti:* 3.77, 3.78, 3.79, 3.80

3.5.2 Problemi di natura geometrica di secondo grado

Problema 3.19. Determinate la misura della diagonale di un rettangolo avente il perimetro di 80m e l'area di 375m^2.



Dati: $2p = 2(\overline{AB} + \overline{BC}) = 80\text{m}$, Area $= 375\text{m}^2$.
Obiettivo: $\overline{AC}$.

Soluzione $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$ per il teorema di Pitagora applicato al triangolo ABC retto in B.

Sono incognite le misura dei lati, quindi poniamo $\overline{AB} = x$ e $\overline{BC} = y$ con $x > 0$ e $y > 0$.

Il problema si formalizza con il sistema: $\begin{cases} x + y = 40 \\ x \cdot y = 375 \end{cases}$ che esprime la ricerca di due numeri nota la loro somma 40 e il loro prodotto 375. I numeri richiesti sono le soluzioni reali positive dell'equazione $t^2 - 40t + 375 = 0$ e precisamente $t_1 = 15 \vee t_2 = 25$.

Per come abbiamo disegnato la figura abbiamo quindi: $\overline{AB} = 25\text{m}$ e $\overline{BC} = 15\text{m}$, da cui $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{850} = 5\sqrt{34}\text{m}$.

♦

✍ *Esercizi proposti:* 3.91, 3.92, 3.93

3.6 Scomposizione del trinomio di secondo grado

Si consideri il trinomio di secondo grado: $ax^2 + bx + c$ e sia $ax^2 + bx + c = 0$ (con $\Delta \geqslant 0$) l'equazione associata a tale trinomio. Effettuiamo le seguenti operazioni:

- si mette in evidenza a: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$;
- si sostituiscono le relazioni trovate nel precedente paragrafo riguardo la somma e il prodotto delle soluzioni x_1 e x_2: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2\right]$;
- si svolgono i calcoli nella parentesi quadra:

$$a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] = a\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right];$$

- si effettua il raccoglimento parziale e si ottiene:

$$a\left[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right] = a\left[x\left(x - x_1\right) - x_2\left(x - x_1\right)\right] = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right).$$

Sulla base del segno di Δ è possibile distinguere i casi illustrati in tabella:

Discriminante	Soluzioni	Scomposizione
Caso I: $\Delta > 0$	$x_1 \neq x_2$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Caso II: $\Delta = 0$	$x_1 = x_2$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$
Caso III: $\Delta < 0$	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$	$ax^2 + bx + c$ è irriducibile

Esempio 3.20. Scomporre in fattori i seguenti trinomi.

- $x^2 - 5x + 6$.
  Calcolo le soluzioni dell'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$. Si ha $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$, cioè $x_1 = 2 \vee x_2 = 3$. Applicando la formula ottenuta nel caso I si ha:
  $$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$
- $x^2 - 12x + 36$.
  Poiché $\Delta = 144 - 144 = 0$ il trinomio è un quadrato di un binomio e applicando la formula ottenuta nel caso II si ha: $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$.
- $2x^2 + 3x + 5$.
  Essendo $\Delta = 9 - 40 = -31$, il trinomio è irriducibile.
- $-5x^2 + 2x + 1$.
  Calcolo le radici dell'equazione associata $-5x^2 + 2x + 1 = 0$: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{-10} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}$ quindi $x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5} \vee x_2 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$ e scrivo la scomposizione:
  $$-5x^2 + 2x + 1 = -5\left(x - \frac{1-\sqrt{6}}{5}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{6}}{5}\right).$$

Esempio 3.21. Scrivere un'equazione di secondo grado che ammetta le seguenti soluzioni $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 3$.

Per quanto visto nel paragrafo, si ha

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0.$$

❑ **Osservazione** Si vuole scomporre in fattori il trinomio $m = 4x^2 + 2x - 6$, avente tutti i coefficienti pari. Anche se osserviamo che tutti i suoi coefficienti sono pari, non possiamo dividire per due, non essendo un'equazione. Il polinomio $m = 2x^2 + x - 3$ è diverso da quello assegnato, mentre le equazioni associate all'uno e all'altro sono equivalenti. Nel procedere alla scomposizione, una volta trovate le radici, per ottenere le quali possiamo anche usare l'equazione equivalente $2x^2 + x - 3 = 0$, è necessario moltiplicare per a. Quindi, in questo caso le radici sono $x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = 1$ e pertanto il trinomio assegnato si scompone come: $4x^2 + 2x - 6 = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)$.

✍ *Esercizi proposti:* 3.94, 3.95, 3.96

3.7 Regola di Cartesio

Se in un'equazione di secondo grado i coefficienti sono tutti diversi da zero e il discriminante è non negativo, è possibile avere delle informazioni sui segni delle soluzioni senza calcolarle esplicitamente.

In un'equazione $ax^2+bx+c=0$, dove i coefficienti sono tutti non nulli, le coppie di coefficienti $(a;b)$ e $(b;c)$ sono dette coppie di *coefficienti consecutivi*. Una coppia di coefficienti consecutivi presenta:

- una *permanenza* se i coefficienti hanno lo stesso segno;
- una *variazione* se i coefficienti hanno segni diversi.

Esempio 3.22. Determinare le variazioni e le permanenze nelle seguenti equazioni:

Equazione	a				b				c
$2x^2-3x-1$	$+$	$\rightarrow$	variazione	$\leftarrow$	$-$	$\rightarrow$	permanenza	$\leftarrow$	$-$
$-x^2-3x-1$	$-$	$\rightarrow$	permanenza	$\leftarrow$	$-$	$\rightarrow$	permanenza	$\leftarrow$	$-$
$-3x^2+4x-1$	$-$	$\rightarrow$	variazione	$\leftarrow$	$+$	$\rightarrow$	variazione	$\leftarrow$	$-$
$2x^2+x-1$	$+$	$\rightarrow$	permanenza	$\leftarrow$	$+$	$\rightarrow$	variazione	$\leftarrow$	$-$

Teorema 3.1 (di Cartesio)**.** *In un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ con a, b, $c \neq 0$ e $\Delta \geqslant 0$, il numero di radici positive è uguale al numero di variazioni presenti nelle coppie di coefficienti consecutivi. Se vi è una sola variazione, le radici sono discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva se la variazione è nella coppia $(a;b)$, mentre è della radice negativa se la variazione è nella coppia $(b;c)$.*

Esempio 3.23. Determinare il segno delle soluzioni dell'equazione $x^2+2x-3=0$ senza risolverla.

L'equazione $x^2+2x-3=0$ ha soluzioni reali in quanto $\Delta=16>0$. Dal momento che vi è una sola variazione, quella della coppia $(b;c)$, l'equazione ha radici discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice negativa.

Dimostriamo quanto è stato affermato tenendo presente che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$; nell'equazione proposta si ha: $x_1+x_2=-2$ e $x_1 \cdot x_2=-3$ dunque prodotto negativo e somma negativa. Il prodotto di due numeri è negativo quando i fattori sono discordi, quindi una soluzione è positiva e una è negativa. Chiamiamo x_1 la soluzione negativa e x_2 la soluzione positiva, poiché $x_1+x_2=-2<0$ deduciamo che in valore assoluto è più grande il numero negativo, cioè $|x_1|>|x_2|$.

Esempio 3.24. Determinare il segno delle soluzioni delle seguenti equazioni senza risolverle.

- $2x^2-6x-56=0$. L'equazione ha soluzioni reali in quanto $\Delta=484>0$; dal momento che vi è una sola variazione le radici sono discordi e il valore assoluto maggiore è quello della radice positiva poiché che la variazione è nella coppia $(a;b)$.
- $-3x^2-24x-21=0$. L'equazione ha soluzioni reali in quanto $\Delta=324>0$; dal momento che non vi sono variazioni, l'equazione ha due radici negative.
- $x^2-10x+25=0$. L'equazione ha due soluzioni coincidenti in quanto $\Delta=0$; dal momento che vi sono due variazioni, le due radici coincidenti sono positive.

✍ *Esercizio proposto:* 3.97

3.8 Equazioni parametriche

Definizione 3.3. Si definisce *parametrica* un'equazione i cui coefficienti dipendono da un parametro.

L'equazione $3x^2 + (k-1)x + 2 - 3k = 0$ è parametrica di secondo grado nell'incognita x; i suoi coefficienti dipendono dal valore del parametro k e quindi la natura e il segno delle sue soluzioni dipendono da k.

In molti problemi di applicazione della matematica in situazioni reali in cui compare un parametro, non interessa tanto determinare le soluzioni dell'equazione che formalizza il problema, quanto sapere se le soluzioni hanno determinate caratteristiche. Sappiamo che attraverso i coefficienti di un'equazione di secondo grado si possono determinare alcune relazioni tra le sue soluzioni:

- soluzioni reali se $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$; reali coincidenti se $\Delta = 0$, reali distinte se $\Delta > 0$;
- la somma delle soluzioni è $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$;
- il prodotto delle soluzioni è $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Nell'equazione $3x^2 + (k-1)x + 2 - 3k = 0$ si ha $\Delta = (k-1)^2 - 12(2-3k)$ dipendente dal parametro k. Dall'analisi del Δ si potranno dedurre quali condizioni deve verificare k affinché esistano soluzioni reali. Analizzando somma e prodotto $x_1 + x_2 = -\frac{(k-1)}{3}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{(2-3k)}{3}$ potremo stabilire il segno ed altre caratteristiche delle soluzioni.

Esempio 3.25. Data l'equazione $(k+1)x^2 + (2k+3)x + k = 0$, stabilire per quale valore di k

a) l'equazione si riduce al primo grado;
b) l'equazione ammette soluzioni reali distinguendo i casi "soluzioni coincidenti" e "soluzioni distinte";
c) la somma delle soluzioni sia nulla, determinando in tal caso le soluzioni.

Svolgimento

a) l'equazione diventa di primo grado se il coefficiente a si annulla, cioè se $k + 1 = 0$ quindi $k = -1$. In tal caso si ha una sola soluzione reale $x = 1$;
b) studiamo il segno del discriminante: $\Delta = (2k+3)^2 - 4k(k+1) \geqslant 0$ da cui ricaviamo

$$4k^2 + 12k + 9 - 4k^2 - 4k \geqslant 0 \;\Rightarrow\; 8k + 9 \geqslant 0.$$

Pertanto se $k = -\frac{9}{8}$ le soluzioni sono coincidenti, se $k > -\frac{9}{8}$ le soluzioni sono reali distinte, se invece $k < -\frac{9}{8}$ non ci sono soluzioni reali;
c) dalla formula della somma delle soluzioni ricaviamo $x_1 + x_2 = -\frac{(2k+3)}{(k+1)}$ e quindi la somma sarà nulla se $2k + 3 = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$. Poiché $-\frac{3}{2} < -\frac{9}{8}$, per $k = -\frac{3}{2}$ non ci sono soluzioni reali, infatti sostituendolo nell'equazione quest'ultima diventa $x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3$ impossibile!

✍ *Esercizi proposti:* 3.98, 3.99, 3.100, 3.101, 3.102, 3.103, 3.104, 3.105, 3.106, 3.107, 3.108,

3.109,3.110, 3.111, 3.112, 3.113, 3.114, 3.115, 3.116, 3.117, 3.118, 3.119, 3.120, 3.121, 3.122

3.9 Problemi di secondo grado in una incognita

> La risoluzione dei problemi [...] serve ad acuire l'ingegno e a dargli la facoltà di penetrare l'intera ragione di tutte le cose.
>
> R. DESCARTES

Sappiamo che nel corso degli studi o nell'attività lavorativa possono presentarsi problemi di diversa natura: di tipo economico, scientifico, sociale; possono riguardare insiemi numerici o figure geometriche. La matematica ci può aiutare a risolvere i problemi quando essi possono essere tradotti in "forma matematica", quando cioè è possibile trascrivere in simboli le relazioni che intercorrono tra le grandezze presenti nel problema e quando si può costruire, tramite queste relazioni, un modello matematico che ci permetta di raggiungere la soluzione al quesito.

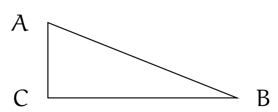
Affronteremo problemi di tipo algebrico o geometrico, che potranno essere formalizzati attraverso equazioni di secondo grado in una sola incognita. Teniamo presente, prima di buttarci nella risoluzione del problema, alcuni passi che ci aiuteranno a costruire il modello matematico:

- la lettura "attenta" del testo al fine di individuare l'ambiente del problema, le parole chiave, i dati e le informazioni implicite, l'obiettivo;
- la scelta della grandezza incognita del problema, la descrizione dell'insieme in cui si ricerca il suo valore, le condizioni che devono essere soddisfatte dall'incognita;
- la traduzione in "forma matematica" delle relazioni che intercorrono tra i dati e l'obiettivo, cioè l'individuazione del modello matematico (equazione risolvente).

Dopo aver risolto l'equazione occorre confrontare la soluzione trovata con le condizioni poste dal problema.

Problema 3.26. Nel triangolo rettangolo ABC rettangolo in C, l'ipotenusa AB supera il cateto maggiore BC di 2m; la differenza tra i cateti è 23m. Determinare la misura del perimetro e l'area del triangolo.

Dati	*Obiettivo*
$\overline{AB} = \overline{BC} + 2$;	$2p$;
$\overline{BC} - \overline{AC} = 23$;	
$A\hat{C}B = 90°$.	Area.



Soluzione Osserva che $2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$ e Area $= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{2}$. Ponendo $\overline{BC} = x$, si ha $\overline{AB} = x + 2$ e $\overline{AC} = x - 23$ con $\begin{cases} x > 0 \text{ essendo misura di un segmento} \\ x > 23 \text{ poiché } \overline{AC} \text{ deve essere positiva} \end{cases}$.

Essendo rettangolo, i lati del triangolo sono legati dal teorema di Pitagora quindi si deve verificare: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \Rightarrow (x+2)^2 = (x-23)^2 + x^2$. Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione risolvente di secondo grado, in forma canonica: $x^2 - 50x + 525 = 0$ con $\Delta = 400$. L'equazione è quindi determinata pertanto esistono due soluzioni reali distinte: $x_1 = 15 \vee x_2 = 35$ entrambe positive. Ai fini del problema $x_1 = 15$ non è accettabile, quindi il problema ha una sola soluzione: $\overline{BC} = 35 \Rightarrow \overline{AB} = 37$ e $\overline{AC} = 12$. Conclusione: $2p = 35 + 37 + 12 = 84m$ e $\text{Area} = 210m^2$.

♦

Problema 3.27. Un padre aveva 26 anni alla nascita del figlio; moltiplicando le età attuali del padre e del figlio si ottiene il triplo del quadrato dell'età del figlio; calcolare le due età.

Indichiamo con p l'età attuale del padre e con f l'età attuale del figlio.
Dati: $p = f + 26$ e $p \cdot f = 3f^2$.
Obiettivo: f, p.

Soluzione I dati permettono di impostare la relazione $(f + 26) \cdot f = 3 \cdot f^2$ che esprime il legame tra le età di oggi del padre e del figlio; siamo di fronte ad un'equazione di secondo grado nell'incognita f. La soluzione dell'equazione deve essere espressa da un numero positivo poiché esprime l'età. Risolviamo l'equazione $2f^2 - 26f = 0$ le cui soluzioni sono $f_1 = 0 \vee f_2 = 13$. Per le condizioni poste la soluzione del problema è $f = 13$. Quindi oggi il figlio ha 13 anni e, di conseguenza, il padre 39.

♦

Problema 3.28. Il trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB di misura 25cm; determina le misure dei lati del trapezio sapendo che il suo perimetro è 62cm.

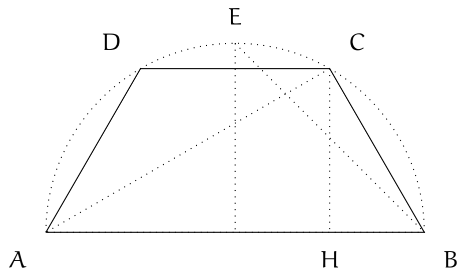
Dati

$\overline{AB} = 25$; $2p = 62$;

$AB \parallel CD$; $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Obiettivo

$\overline{CD}$; $\overline{BC}$.



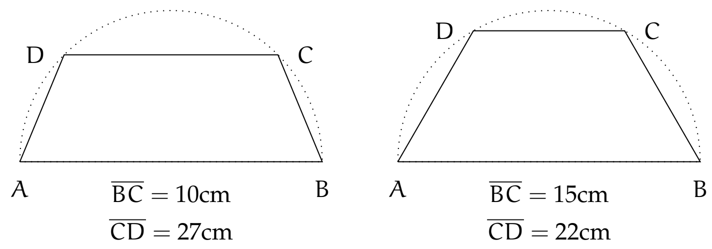
Soluzione $\overline{AB} + \overline{CD} + 2\overline{BC} = 62$; fissiamo come incognita $\overline{BC} = x$. Determiniamo le condizioni sull'incognita: dovrà essere $x > 0$ poiché rappresenta la misura di un segmento e inoltre affinché esista realmente il trapezio isoscele il punto C non deve coincidere con il punto medio E dell'arco CD cioè $CB < EB$, quindi $x < \dfrac{25}{2}\sqrt{2}$.

Tracciata l'altezza CH ($H \in AB$) si ha $\overline{CD} = \overline{AB} - 2\overline{HB}$ e per il 1° teorema di Euclide[1] sul triangolo ACB, rettangolo in C (poiché insiste su una semicirconferenza con diametro AB), $\overline{HB} : \overline{CB} = \overline{CB} : \overline{AB}$; determiniamo quindi la misura di HB in funzione dell'incognita fissata: $\overline{HB} = \dfrac{x^2}{25}$ da cui $\overline{CD} = 25 - \dfrac{2x^2}{25}$.

Costruiamo l'equazione risolvente: $25 + 2x + 25 - \dfrac{2x^2}{25} = 62 \Rightarrow x^2 - 25x + 150 = 0$ che ha soluzioni $x_1 = 10 \vee x_2 = 15$, entrambe accettabili. Si hanno dunque due trapezi inscritti

[1] in ogni triangolo rettangolo ciascun cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

che risolvono il problema. Poiché $\overline{CD} = 2p - \overline{AB} - 2\overline{BC}$ si ha $\overline{CD} = 62 - 25 - 10 = 27\text{cm}$ o $\overline{CD} = 62 - 25 - 15 = 22\text{cm}$.



♦

Problema 3.29. Un capitale di € 25 000 viene depositato in banca a un tasso di interesse annuo c. Gli interessi maturati durante il primo anno non vengono ritirati. Nell'anno seguente si investono sia il capitale sia gli interessi maturati a un tasso di interesse annuo aumentato dello 0,5%. Alla fine dei due anni si ritira la somma di € 26 291,10. Calcola i tassi di interesse praticati dalla banca.

Assumiamo come incognita c il tasso di interesse praticato il primo anno, espresso come numero decimale e non in forma percentuale. Il tasso praticato nel secondo anno sarà $c + 0{,}005$.

Soluzione Alla fine del primo anno in banca si hanno tra capitale e interessi

$$25\,000 + 25\,000 \cdot c = 25\,000(1 + c).$$

Nel secondo anno il tasso praticato è $c + 0{,}005$ che va applicato alla somma $25\,000(1 + c)$. Si ottiene quindi l'equazione

$$25\,000(1 + c)(1 + c + 0{,}005) = 26\,291{,}10.$$

Moltiplicando le parentesi tonde si ha $25\,000(1{,}005 + c + 1{,}005c + c^2) = 26\,291{,}10$ e poi dividendo per 25 000 e ordinando otteniamo $c^2 + 2{,}005c - 0{,}046\,644 = 0$ con soluzioni

$$c_{1,2} = \frac{-2{,}005 \pm \sqrt{4{,}020\,025 + 0{,}186\,576}}{2} = \frac{-2{,}005 \pm 2{,}051}{2} \Rightarrow c_1 = -2{,}028 \vee c_2 = 0{,}023.$$

La soluzione c_1 è negativa e pertanto non accettabile. La risposta al problema è 0,023 cioè 2,3% il primo anno e quindi 2,8% il secondo anno.

♦

✍ *Esercizi proposti:* 3.123, 3.124, 3.125, 3.126, 3.127, 3.128, 3.129, 3.130, 3.131, 3.132,

3.133, 3.134, 3.135, 3.136, 3.137, 3.138, 3.139, 3.140, 3.141, 3.142, 3.143, 3.144, 3.145,

3.146, 3.147,3.148, 3.149, 3.150, 3.151, 3.152, 3.153, 3.154, 3.155, 3.156, 3.157, 3.158,

3.162, 3.163, 3.164, 3.165, 3.166, 3.167, 3.168, 3.169,3.159, 3.160, 3.161,

3.9.1 Problemi con un parametro

I problemi che abbiamo proposto sono caratterizzati da dati numerici e di conseguenza le soluzioni numeriche dell'equazione risolvente sono facilmente confrontabili con le condizioni poste sull'incognita. Abbiamo anche visto che le soluzioni dell'equazione non sempre sono soluzioni del problema e può anche succedere che il problema abbia due soluzioni.

Affrontiamo ora un problema letterale, nel quale alcuni dati sono espressi da lettere. In questi problemi dovremo rispettare le condizioni poste sull'incognita, ma anche analizzare per quali valori della lettera il problema ammette soluzioni reali. Dovremo quindi procedere con la discussione dell'equazione parametrica risolvente per stabilire se il problema letterale ammette soluzioni.

Problema 3.30. Sul lato a dell'angolo $a\widehat{V}b$ di 60° si fissano i punti A e B tali che $\overline{VA} = 2k$ e $\overline{VB} = 8k$. Determina sul lato b un punto P in modo che il rapporto tra $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ sia 2.

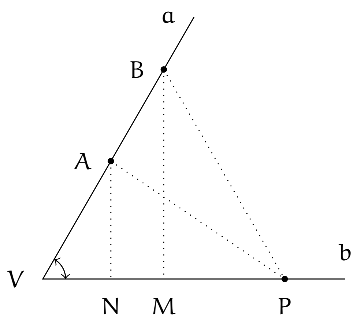
Dati

$a\widehat{V}b = 60°$;

$\overline{VA} = 2k$; $\overline{VB} = 8k$.

Obiettivo

$P \in b$ tale che $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = 2$.



Osservazione preliminare: le misure dei segmenti VA e VB sono espresse in forma letterale, affinché il problema abbia significato deve essere $k > 0$.

Soluzione La posizione del punto P sul lato b sarà individuata dalla distanza di P da V: poniamo quindi $\overline{VP} = x$ con $x > 0$ e determiniamo $\overline{PB}$ e $\overline{PA}$ in funzione di x per poter sfruttare la richiesta contenuta nell'obiettivo come equazione risolvente.

Sia M il piede della perpendicolare da B al lato b; nel triangolo rettangolo PMB si ha $\overline{PB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{PM}^2$ (*) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo BVM, rettangolo in M con l'angolo V di 60° si ha $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BV} \cdot \sqrt{3} = 4k \cdot \sqrt{3}$; $\overline{PM} = \overline{VP} - \overline{VM}$ e $\overline{VM} = \frac{1}{2}\overline{VB} = 4k$; per quanto detto sul triangolo BVM, si ha che $\overline{PM} = x - 4k$; sostituendo in (*) si ottiene

$$\overline{PB}^2 = 48k^2 + (x - 4k)^2.$$

Sia N il piede della perpendicolare da A al lato b; nel triangolo rettangolo PNA, con analogo ragionamento otteniamo: $\overline{PA}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{PN}^2$ (**) per il teorema di Pitagora. Nel triangolo AVN, rettangolo in N con l'angolo V di 60°, si ha $\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{AV} \cdot \sqrt{3} = k \cdot \sqrt{3}$; $\overline{VN} = \frac{1}{2}\overline{AV} = k$ e $\overline{PN} = \overline{VP} - \overline{VN} = x - k$; sostituendo in (**) si ottiene

$$\overline{PA}^2 = 3k^2 + (x - k)^2.$$

Determiniamo l'equazione risolvente ricordando che il rapporto tra due segmenti è uguale al rapporto tra le rispettive misure ed elevando al quadrato si ha $\frac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2} = 4$. Sostituendo quanto trovato si ottiene l'equazione $48k^2 + (x - 4k)^2 = 4 \cdot \left[3k^2 + (x - k)^2\right]$ da cui $x^2 = 16k^2$.

Si tratta di un'equazione di secondo grado pura avente due soluzioni reali opposte, essendo il secondo membro positivo. Quindi $x_1 = -4k$ e $x_2 = 4k$; per le condizioni poste solo x_2 è accettabile.

Con quale punto della figura tracciata inizialmente viene a coincidere il punto P che risolve il problema?

♦

✍ *Esercizi proposti:* 3.170, 3.171, 3.172, 3.173, 3.174, 3.175, 3.176, 3.177, 3.178