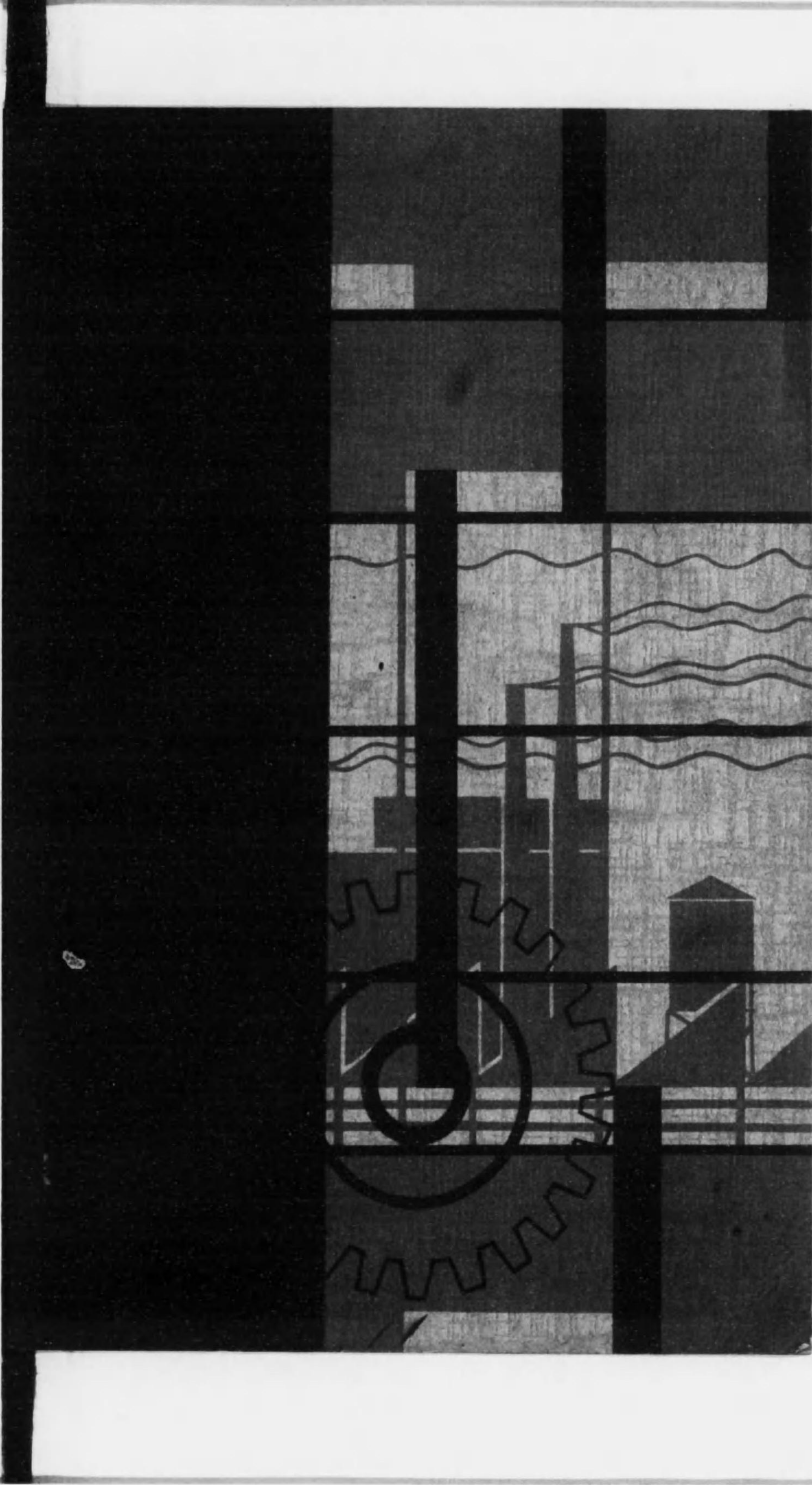


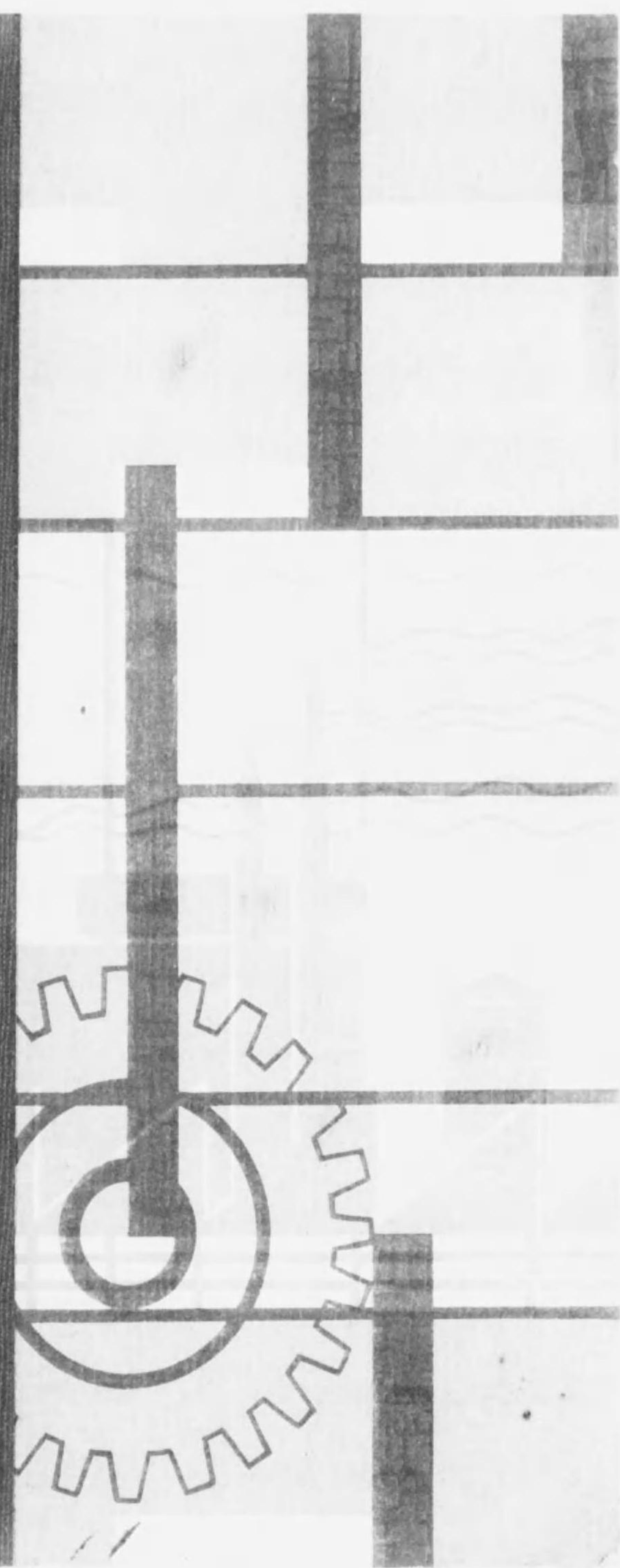


始



實用  
工業幾何三角法

斯文書院



401  
276

特248  
446



# 法三角何幾業互

大阪工業教育研究會  
數學科著

斯文書院



## 序

嚮ニ本會デ刊行シタ「簡明工業數學」ハ幸ヒ全國各地數多ノ工業學校、青年學校ソノ他ニ於テ採用セラレ幾分ニテモ斯界ニ貢獻シツツアルノハ誠ニ本會ノ光榮トスル所デアアル。

ソノ後時勢ノ進運ニ伴ヒ更ニ短時間ニ工業人トシテ必須ナ數學ヲ教授スル必要ヲ痛感シ茲ニ前書ヲ改善改訂シ技能者養成用及ビ青年學校用教科書トシテ本書ヲ編纂シタ次第デアアル。

編纂ニ當ツテ特ニ次ノ事項ニ留意シタ。

- (1) 工業的實用事項ヲ多ク取り入レコレ等ニ關係アル問題及ビ挿圖ヲ多クシタコト。
- (2) 困難ナル論理的證明ハ成ル可ク省キ實際的應用方面ニ意ヲ用ヒタコト。
- (3) 數學科ト專門學科トノ教授上ノ關係ヲ密接ナラシメルタメ教材ノ配列ニ工夫シタコト。
- (4) 豫習復習ニ餘リ時間ノ餘裕ヲ持タナイ生徒ニモ充分解キ得ルヤウニ問題ヲ精選シ特ニ實用ヲ期スルタメ計算問題ヲ多クシタコト。
- (5) 作圖題ハ成ル可ク多ク挿入シ數學ノ實際化ヲ計ツタコト。

(6) 三角函數ノ初歩ハ早ク教授シ幾何、代數、三角法ノ融合ニ注意シタコト。

本書ハコレヲ以テ幾分タリトモ現時ノ要求ニ應ジタモノト信ズルガ尙諸賢ノ御高評ト相俟ツテ今後ノ改善ニ資シタイト思フ。尙コノ機會ニ前書ニ對シテ高見ヲ寄セラレタ各位ニ厚ク謝意ヲ表スル。

皇紀二千六百年一月

大阪工業教育研究會  
數 學 科

## 目 次

	頁
<b>第一章 緒 論</b> .....	[1—12]
1. 立體 面 .....	1
2. 線 點 .....	2
3. 圖 形 .....	3
4. 直線及ビ其ノ性質 .....	3
5. 圓 .....	5
6. 角 .....	5
7. 直角 平角 .....	6
8. 銳角 鈍角 .....	7
9. 垂線 斜線 .....	7
10. 角ノ單位 .....	7
11. 餘角 補角 .....	9
12. 定義 定理及ビ系 .....	9
13. 對頂角 .....	10
<b>第二章 直線圖形</b> .....	[13—59]
14. 三角形 .....	13
15. 三角形ノ種類 .....	13
16. 三角形ノ合同 .....	15
17. 二等邊三角形 .....	16

18. 作圖題	20
19. 平行線	24
20. 三角形ノ内角	27
21. 多角形	28
22. 正多角形	29
23. 平行四邊形	31
24. 矩形 菱形 正方形	33
25. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分	34
26. 四邊形ノ面積	36
27. びたごらすノ定理	38
28. 銳角ノ三角函數	42
29. 餘角ノ三角函數	45
30. 特別ノ角ノ三角函數	46
31. 三角函數ノ眞數表	49
32. 對稱圖形	52
33. 三角形ノ五心	53
34. 力ノ合成	56
<b>第三章 圓</b>	[60—74]
35. 中心角 弧 弦ノ關係	60
36. 圓周角	61
37. 切線	64
38. 内接及ビ外接四邊形	67

39. 圓ト正多角形	69
40. ニツノ圓	72
<b>第四章 比 例</b>	[75—91]
41. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線	75
42. 相似形	78
43. 相似三角形	79
44. 相似多角形ノ面積ノ比	83
45. 相交ハル弦ノ比	85
46. 線分ノ比例中項	87
47. 弓形	88
48. 扇形	89

## 解 答

## 附 録

1. 弧度法	1
2. 圓弧ト中心角ノ弧度トノ關係	2
3. 種々ノ曲線	3
4. 一般ノ角ノ三角函數	7
5. 三角函數ノ値ヲ線分デ表ハスコト	9
6. 三角函數ノぐらふ	10
7. 二角ノ和及ビ差ノ三角函數	12
8. 三角形ノ邊ト角トノ關係	15
9. 邊ノ平方	17

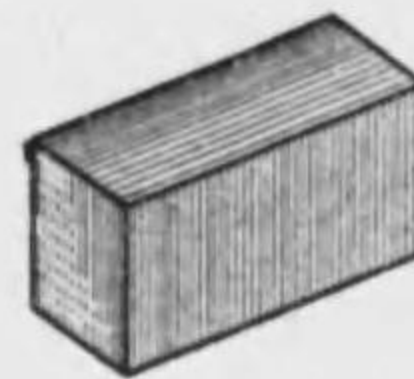
10. 三角形ノ面積..... 19  
 解答.....(巻末)  
 表 三角函數ノ眞數表.....(巻末)

# 第一章

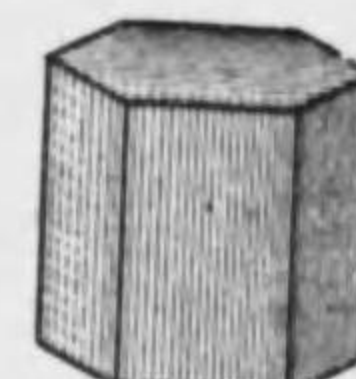
## 緒論

### 1. 立體面

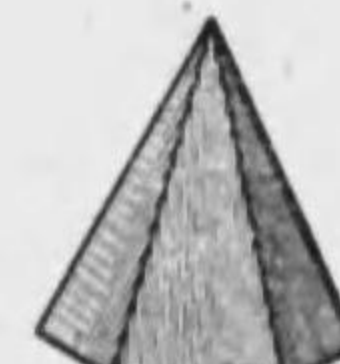
物體ヲ觀察スルニ其ノ物體ノ色,目方,成分等ニ就テ考ヘルコトナクソノ物體ノ形,大イサ,及ビ位置ノ方面ダケニ就テ考ヘルトキ之ヲ**立體**トイフ。ソノ規則正シイモノデ且ツ簡單ナモノハ次ノ圖ノ様ナモノデアアル。



直方體



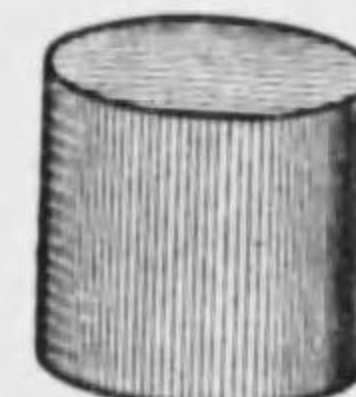
直角塔



直角錐



球



直圓塔



直圓錐

次ニ立體ノ界ノコトヲ**面**又ハ**表面**トイフ。面ハ位置ト廣サハアルガ厚サハナイ。

面ニハ平面ト曲面トガアル。靜ナ水ノ表面ヤ鏡ノ面ハ平面デ,ぼーるノ表面ヤこつぶノ側面ナドハ曲面デアアル。

面ガ平面デアルカドウカヲ試スニハソノ面ニ定規ノ縁ヤ曲尺ヲ當テソレヲドノ向ニ置クトモ縁ト



だいやる・さーふえーす・げいじ

面トガ密着スルナラバ平面デアル。尙工場デ平面ヲ検査スル工具トシテハ定盤、だいやる・さーふえーす・げいじ等ガアル。

## 2. 線 點

面ノ界又ハ面ト面トノ交ハリヲ線トイフ。線ニハ位置ト長サガアルガ幅モ厚サモナイ。

線ニハ直線ト曲線トガアル。糸ノ兩端ヲ強ク引張ルト圖ノ如ク糸ハ直線狀トナリ、弛メルト曲線狀トナル。



線ノ端又ハ線ト線トノ交ハリヲ點トイフ。點ニ

ハ位置ノミアツテ大イサハナイ。大イサノナイモノヲ表ハスノハ困難デアルカラ點ヲ示スニハ(・)ヲ示シソノ傍ニA,B等ヲ附シ之ヲ點A,點B又ハA點,B點等ト呼ブ。

## 3. 圖 形

立體,面,線,點又ハソレ等ノ集リヲ圖形トイフ。

同一ノ平面上ニアル圖形ヲ平面圖形トイヒ,サウデナイ圖形ヲ立體圖形トイフ。三角形,圓,正方形等ハ平面圖形デ直方體,球,角錐等ハ立體圖形デアル。

圖形ノ性質ヲ研究スル學問ヲ幾何學トイフ。

平面圖形ニ關スル幾何學ヲ平面幾何學,立體圖形ニ關スル幾何學ヲ立體幾何學トイフ。

## 4. 直線及ビ其ノ性質

直線ヲ引キ又ハ線ガ直線デアルカドウカヲ試スニハ定規ヲ用ヒル。一ツノ直線ヲ表ハスニハソノ上ニ二ツノ點例ヘバA,Bヲトリテ直線ABト呼ビ通例双方ニ限リナク長イ無限直線ヲサス。



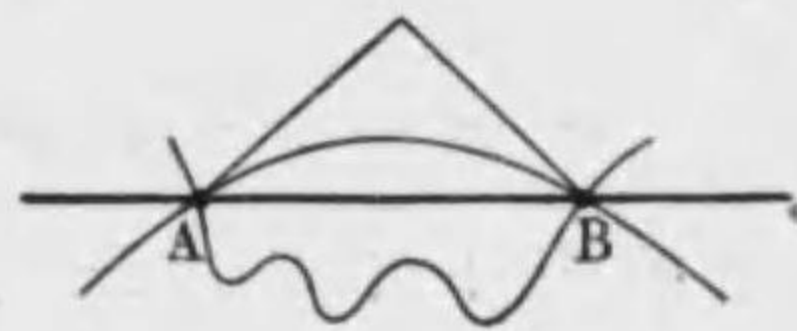
之ニ對シテ二點A,Bヲ兩端トスル有限直線ヲ線分ABトイフ。



次ノ事柄ハ直線ノ重要ナル性質デアツテ誰デモ認メルコトデアル。



- (1) 二點ヲ通ル直線ハ唯一ツダケデアル。
- (2) 二點ノ間ニ引イタ種々ノ線ノ内デ直線ガ最モ短イ。



カヤウニ經驗ニヨツテ誰デモ眞理ト認メタ事柄ヲ公理トイフ。

二點A,Bヲ兩端トシタ線分ヲ引クコトヲABヲ結ブトイヒ、線分ABノ長サヲ二點A,Bノ距離トイフ。

問題 1.

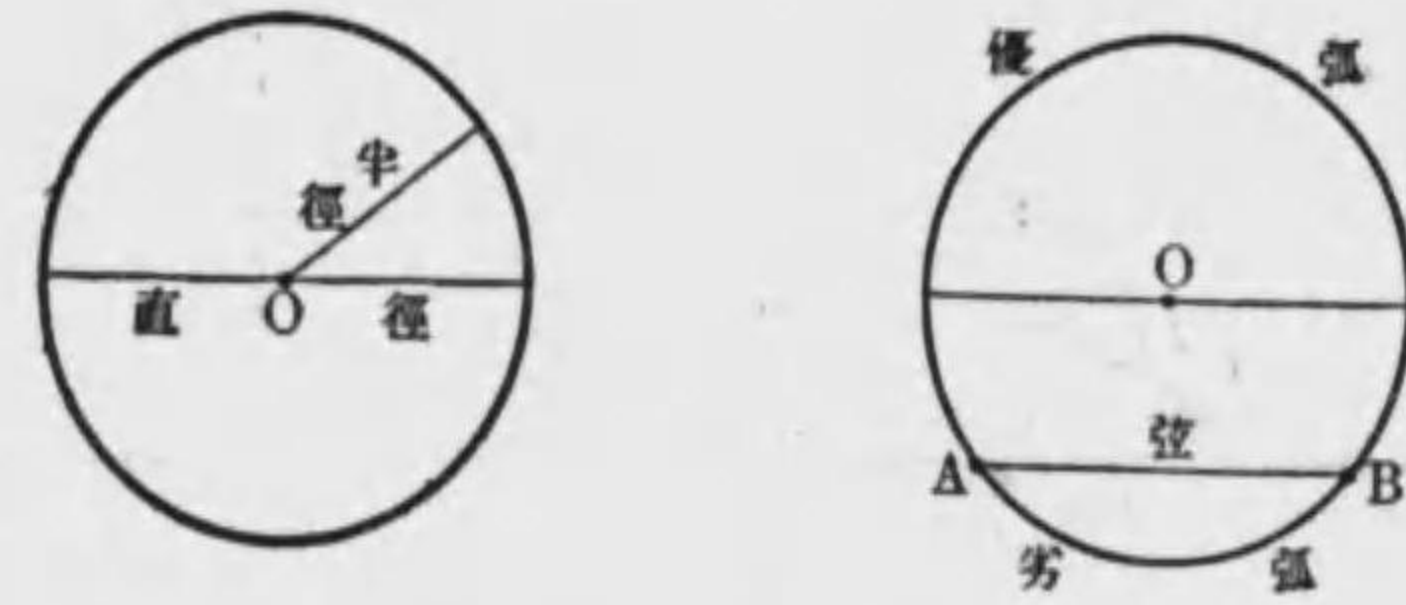
- 1. 直方體,圓壺狀ヲナスモノノ例ヲ舉ゲヨ。
- 2. 球狀ヲナス自然物ノ例ヲ舉ゲヨ。
- 3. 直方體,圓壺,圓錐,球ハ幾ツノ面ヨリナルカ。
- 4. 四ツノ點A,B,C,Dヲトリソレ等ノ内ノ二點ヲ通ル直線ハ幾本引ケルカ。點ノ並ビ方ニヨル色色ノ場合ヲ圖示セヨ。

5. 次ノ線ハ直線デアルカドウカヲ試ス方法ヲイヘ。



5. 圓

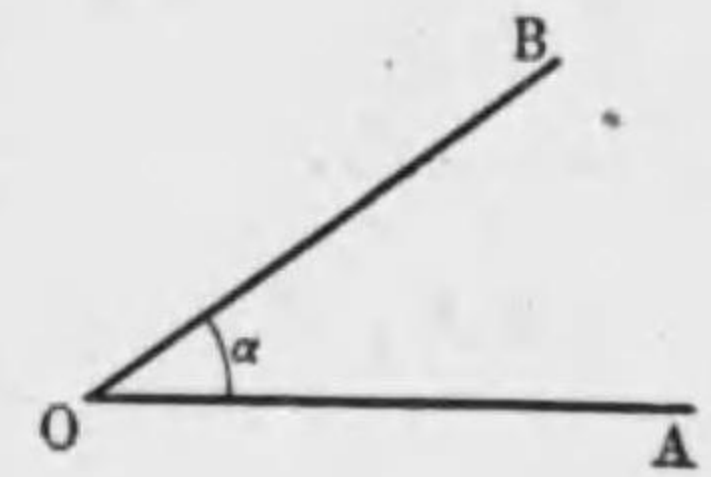
圓ノ各部ノ名稱ハ次ノ圖ノ通りデアル。



中心ガOデアル圓ヲ圓Oト呼ビ弧ABヲ $\widehat{AB}$ ト書ク單ニ弧トイヘバ劣弧ヲサス。

6. 角

一點Oヨリニツノ直線OA, OBヲ引クト角ヲ生ズル。ソノトキOヲ角ノ頂點トイヒ二直線OA, OBヲ角ノ邊トイフ。



此ノ角ヲ角AOB又ハ $\angle O$ ト呼ビ $\angle AOB$ 又ハ $\angle O$ ト書ク。

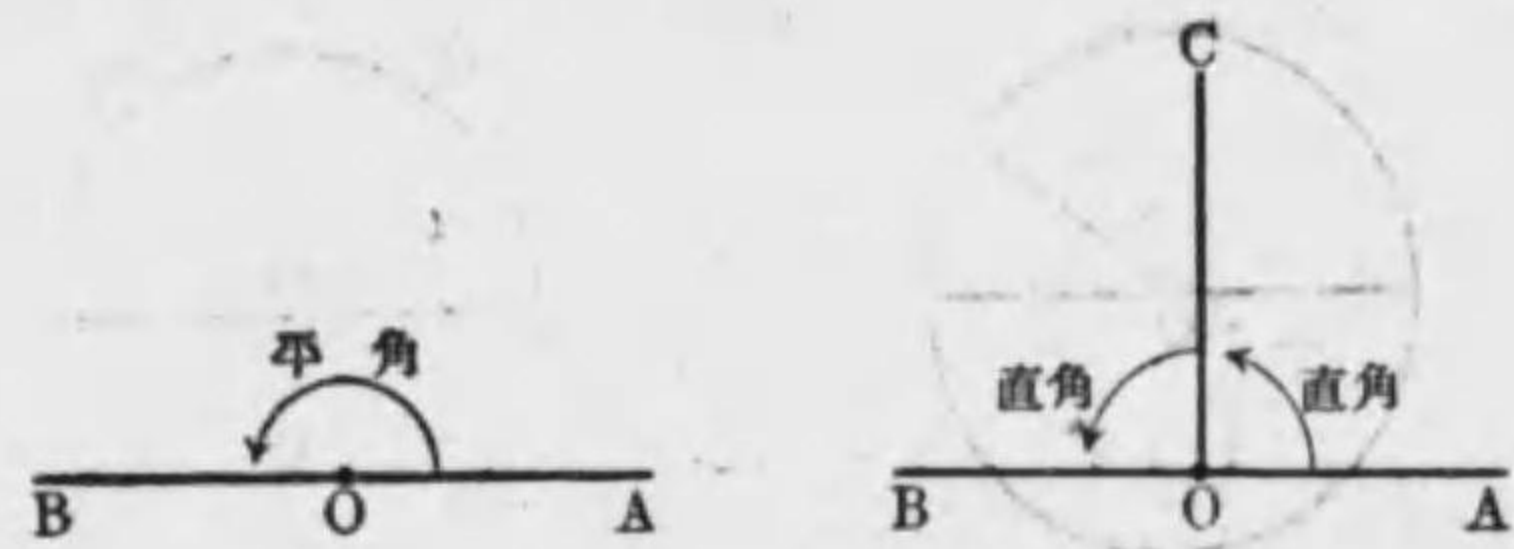
又二邊ノ間ニ一ツノ文字ヲ書イテ角ヲ表ハスコ

トモアル。例ヘバ  $\angle \alpha$  (角アルファ)ノ如キモノデア  
ル。一般ニ次ノ事ガイヘル。

角ノ大イサハ邊ノ長サニハ關係シナイ。

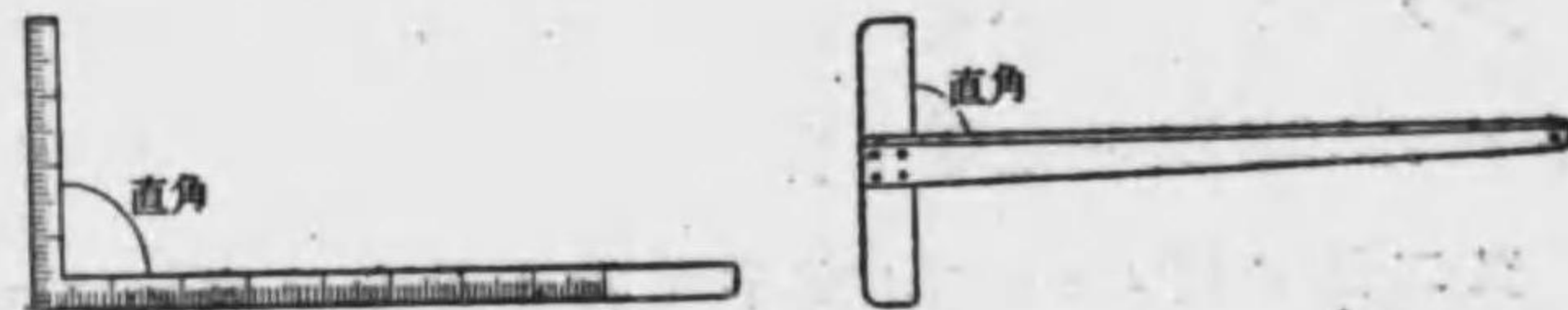
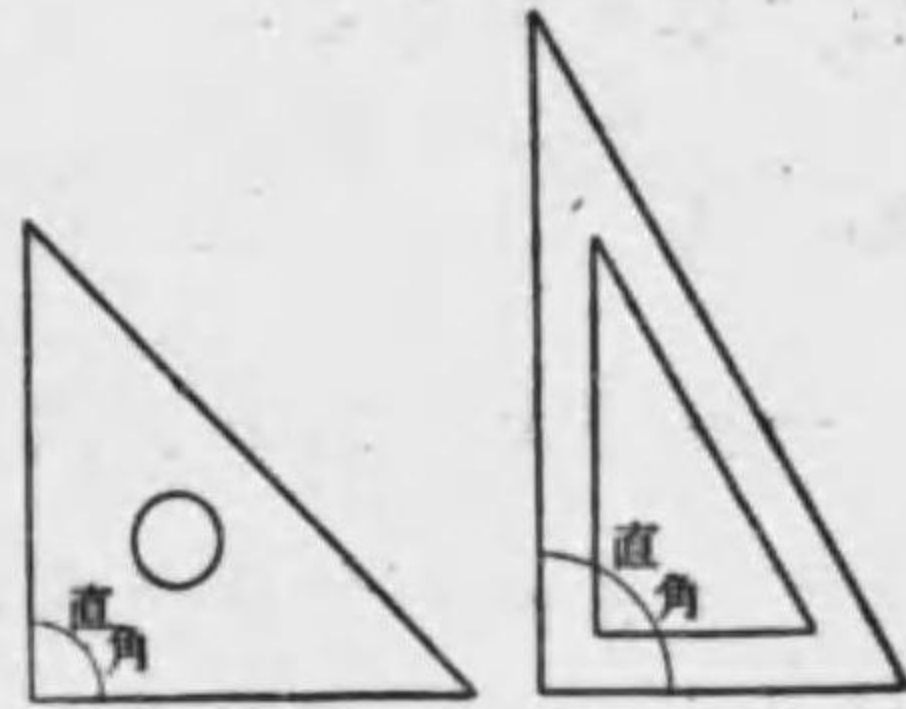
### 7. 直角 平角

角ノ開キガ段々大キクナツテソノ二邊ガ頂點ノ  
兩側デ一直線トナツタトキハコノ角ヲ平角トイヒ、  
平角ノ半分ヲ直角トイフ。



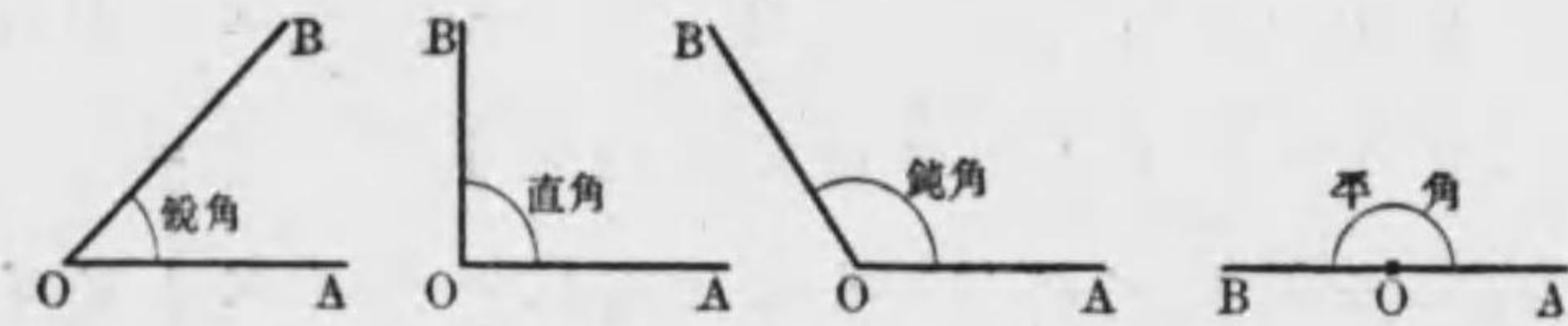
平角ハ相等シク直角モ亦相等シイ。

直角ハ極メテ重要デア  
ルカラ之ヲ應用シタ器具  
ガ數多クアル。即チ定規、  
製圖用T形定規、大工ノ持  
ツ曲尺等デアル。直角ヲ  
表ハスニハ R $\angle$  又ハ RL  
ヲ用ヒル。



### 8. 鋭角 鈍角

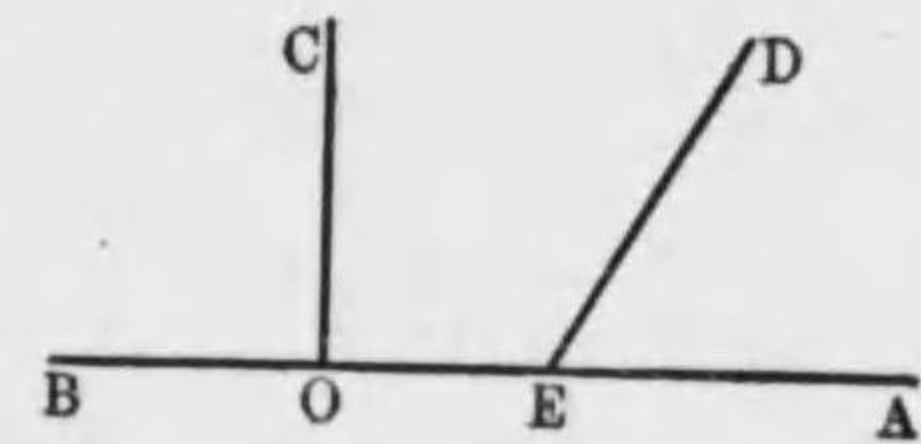
直角ヨリ小サイ角ヲ鋭角トイヒ、直角ヨリ大キク  
平角ヨリモ小サイ角ヲ鈍角トイフ。



### 9. 垂線 斜線

二ツノ直線ガ交ハツテナス角ガ直角デアルトキ  
ハコノ二直線ハ互ニ垂直デアル、又ハ直交スルトイ  
ヒ、ソノ一ツヲ他ノ垂線トイフ。

圖ノ如ク COガ ABニ垂  
直デアルコトヲ  $CO \perp AB$   
ト書キ Oヲ垂線ノ足トイ  
フ。又二直線ガ直交シナ



イトキハ斜交スルトイヒ一方ヲ他ノ斜線デアルト  
イヒソノ交點ヲ斜線ノ足トイフ。

### 10. 角ノ單位

直角ハ大イサ一定デアルカラ之ヲ角ノ單位トシ  
テ用ヒル。併シ實用上トシテハ此ノ單位ハ餘リニ  
大キスギルカラ直角ヲ90等分シタモノヲ1度(1°)ト

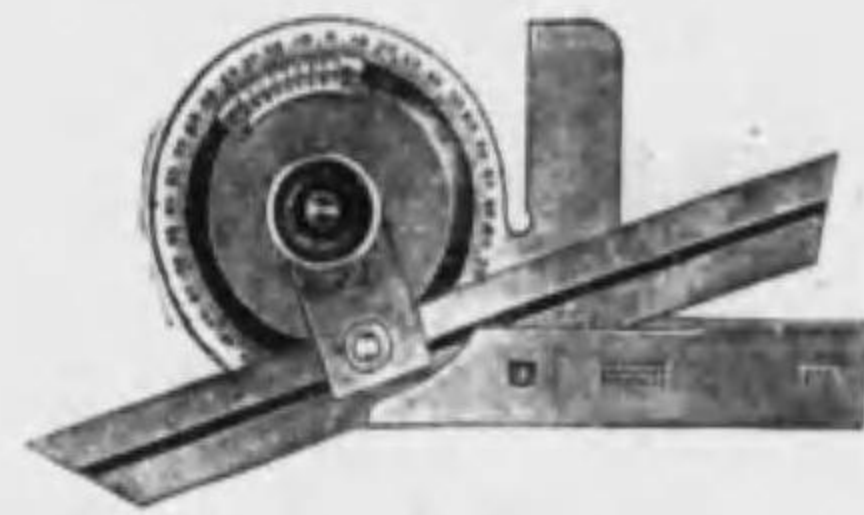
定メ之ヲ基本單位トスル。 $1^\circ$ ノ $\frac{1}{60}$ ヲ1分(1')。1分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ1秒(1'')トイフ。即チ、

$$1R_L = 90^\circ \quad 1^\circ = 60' \quad 1' = 60''$$

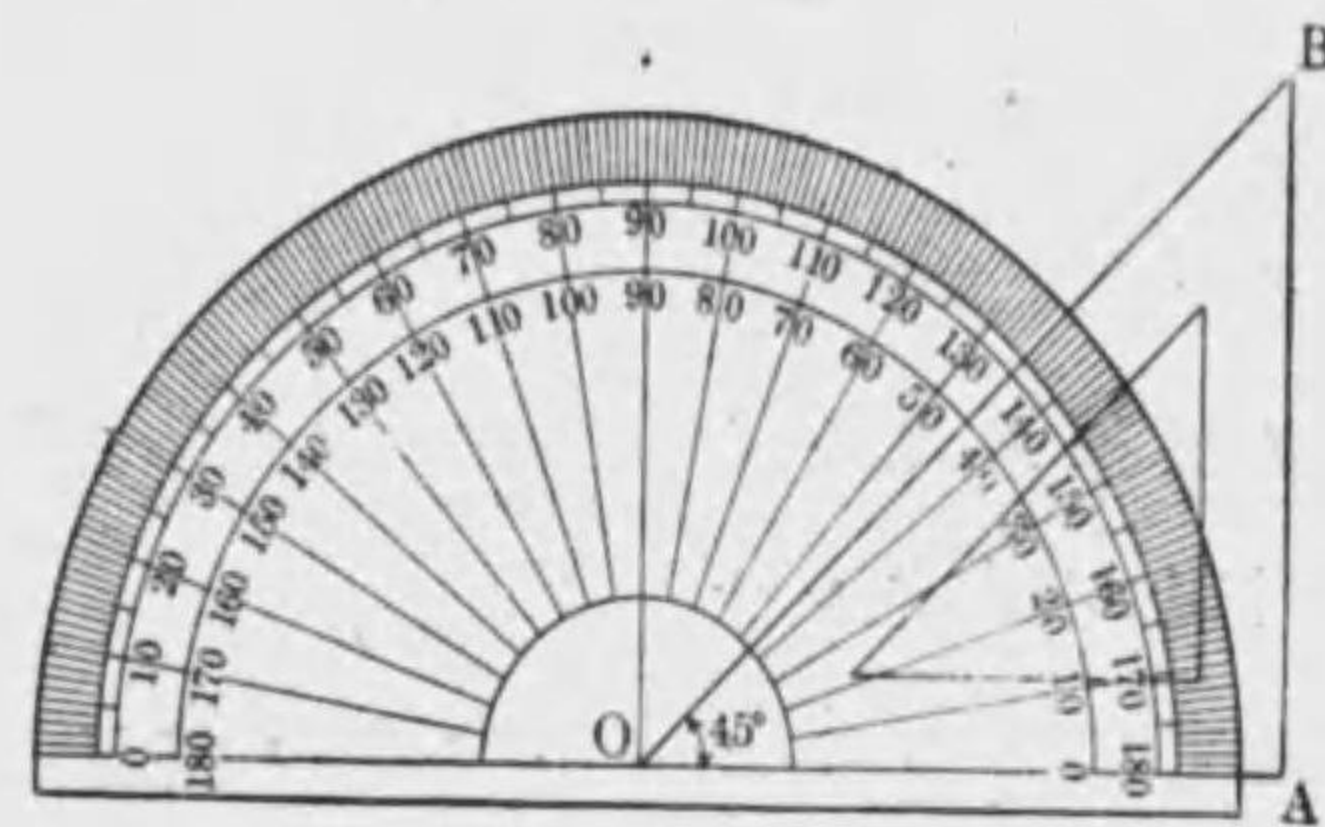
角ヲ測ルニハ普通分度器ヲ用ヒル。之ニテ例ヘバ定規ノ一角ヲ測ルニハ分度器ヲ下圖ノ様ニ $\angle AOB$ ニアテレバOBノ通ル目盛ガ角ノ大イサヲ表ハス。即チ、

$$\angle AOB = 45^\circ$$

尙工場用トシテ角ヲ測ルニベべる・ぶろとらくたー等ヲ用ヒル。



べべる・ぶろとらくたー



### 問題 2.

- $\frac{1}{3}R_L$ ,  $\frac{3}{4}R_L$  ハ各何度カ。
- 半紙ヲ折ツテ直角ヲ作レ。又 $45^\circ$ ノ角ヲ作レ。
- 一點カラ出ル若干ノ直線ガ順次ニナス角ノ和ハ何直角デアルカ。

4. 次ノ時刻ニ於テ時計ノ長短兩針ハ何度ノ角ヲナスカ。

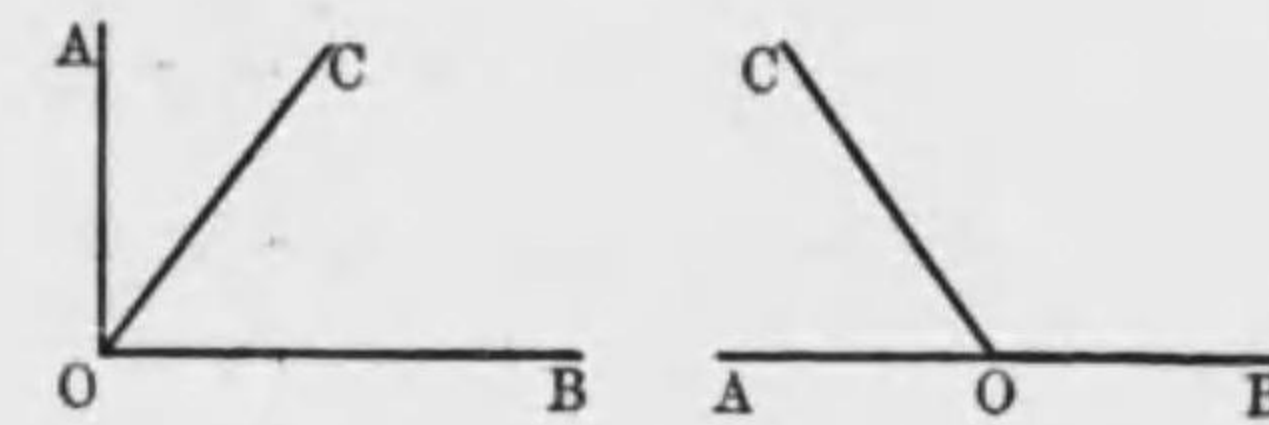
- ① 1時    ② 5時    ③ 9時    ④ 4時半

5. 任意ノ三角形ヲ畫キ三ツノ角ノ和ハ何度トナルカヲ檢ベヨ。

### 11. 餘角 補角

二ツノ角ノ和ガ直角ニ等シトキハコノ二角ハ互ニ餘角デアルトイヒ、二ツノ角ノ和ガ平角(2直角)ニ等シトキハコノ二角ハ互ニ補角デアルトイフ。

圖ニ於テ、



$$\angle AOC + \angle COB = R_L$$

故ニ $\angle AOC$ ト $\angle COB$ ハ互ニ餘角デアル。

又一直線AB上ノ一點Oヨリ引イタ直線ニヨツテ出来タ二ツノ角デハ $\angle AOC + \angle COB = 2R_L$

故ニ $\angle AOC$ ト $\angle COB$ ハ互ニ補角デアル。

### 12. 定義 定理及ビ系

幾何學デハ用語ノ意味ヲ明瞭ニ定メ誰ニデモ常ニ同ジ意味ニ解スルヤウニシテ置カネバナラヌ。

用語ノ意味ヲ嚴密ニ定メタモノヲ定義トイフ。

例へバ“直角ヨリ小サイ角ヲ銳角トイフ”ハ銳角ノ定義デアル。

先ニ述ベタ公理及ビ既ニ眞デアルト確定シタ事柄ニヨツテ證明スルコトノ出來ル事項ヲ定理トイフ。

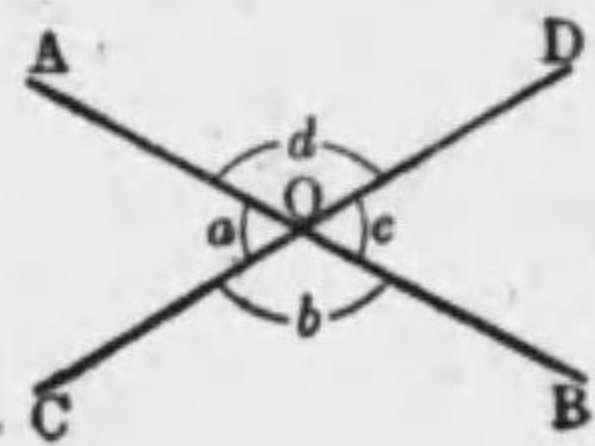
一ツノ定理カラ容易ニ知ラレル定理ヲ初メノ定理ノ系トイフ。

定理ヲ證明スルニハ先ヅソノ定理ニ適スル圖形ヲ畫キ、コレニ適當ナ記號ヲ付ケテソノ題意ヲ述べ然ル後證明ニ入ルノデアル。

### 13. 對頂角

**定義** 二ツノ直線ガ交ハルト四ツノ角ヲ生ズル。ソノ内尙ヒ合ツタ二ツノ角ヲ互ニ對頂角トイフ。

圖ノ如ク直線 AB, CD ガ O ニ於テ交ハツタトスルト  $\angle a$  ト  $\angle c$ ,  $\angle b$  ト  $\angle d$  トハ互ニ對頂角デアル。



### 定理 1. 對頂角ハ相等シイ。

**題意** 二直線 AB, CD ガ O ニ於テ交ハリテナス四ツノ角ノ内相對スル角ヲ  $\angle a$  ト  $\angle c$  及ビ  $\angle b$  ト  $\angle d$  トスレバ,

$$\angle a = \angle c \quad \angle b = \angle d \quad \text{デアル (前圖ニヨル)}$$

**證明**  $\angle AOB$ ,  $\angle COD$  ハ何レモ平角デアルカラ,

$$\angle a + \angle b = 2R\angle \quad \angle c + \angle d = 2R\angle$$

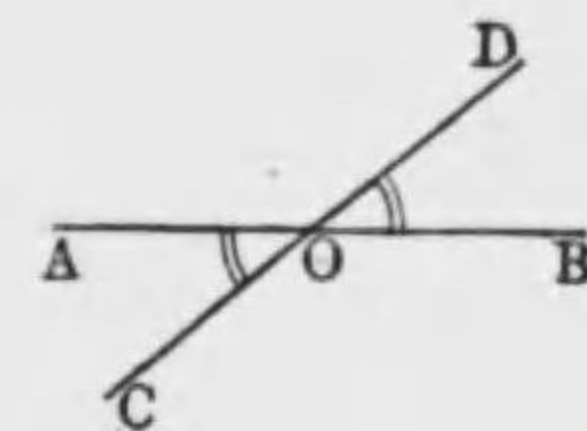
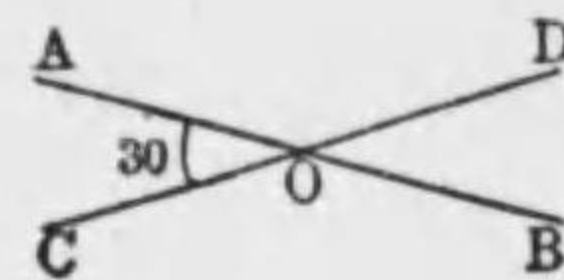
$$\therefore \angle a + \angle b = \angle c + \angle d$$

$$\therefore \angle a = \angle c$$

同様ニシテ,  $\angle b = \angle d$

### 問題 3.

1. 補角, 餘角, 鈍角ノ定義ヲイへ。
2. 直線 AB ト CD ガ O ニ於テ交ハツテ  $\angle AOC$  ガ直角ナラバ他ノ三ツノ角ハ各何度カ。
3. 直線 AB, CD ガ O ニ於テ交ハリ  $\angle AOC = 30^\circ$  ナラバ他ノ三ツノ角ハ各何度カ。(下圖)
4. 右圖ノ如ク直線 AB 上ノ一點 O カラ此ノ直線



ノ兩側ニ直線 OC, OD ヲ引キ,

$$\angle AOC = \angle BOD$$

トスレバ OC, OD ハ一直線ヲナスコトヲ證明セヨ。

## 第二章

## 直線圖形

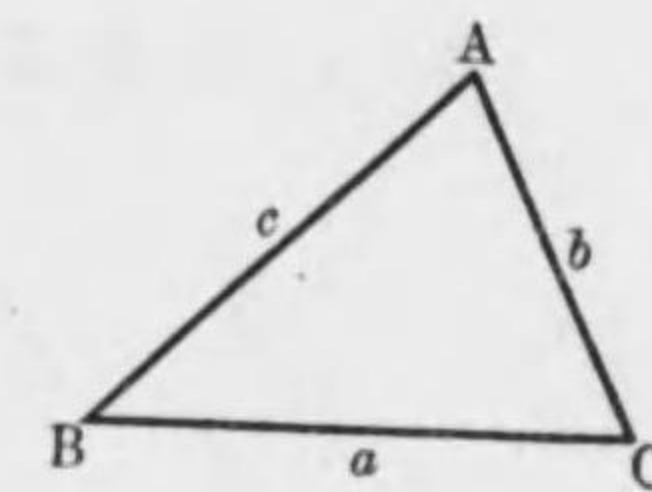
## 14. 三角形

三ツノ線分デ圍マレタ形ヲ三角形トイヒ,ソノ各線分 AB, BC, CA ヲ三角形ノ邊,二邊ノ交點 A, B, C ヲ三角形ノ頂點,  $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$  ヲ

三角形ノ內角又ハ單ニ角トイヒ,コノ三角形ヲ  $\triangle ABC$  ト書ク。

$\triangle ABC$  ニ於テ BC ヲ  $\angle A$  ノ對

邊,  $\angle A$  ヲ BC ノ對角トイフ。 $\triangle ABC$  ノ各邊ヲ小文字  $a, b, c$  デ表ハスコトモアル。



問 1.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle B$ ,  $\angle C$  ノ對邊ヲイヘ。又 AC, AB ノ對角ヲイヘ。

二點間ノ最短通路ハソノ二點ヲ結ブ直線デアルカラ次ノ定理ガ容易ニ生レル。

定理 2. 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ。

## 15. 三角形ノ種類

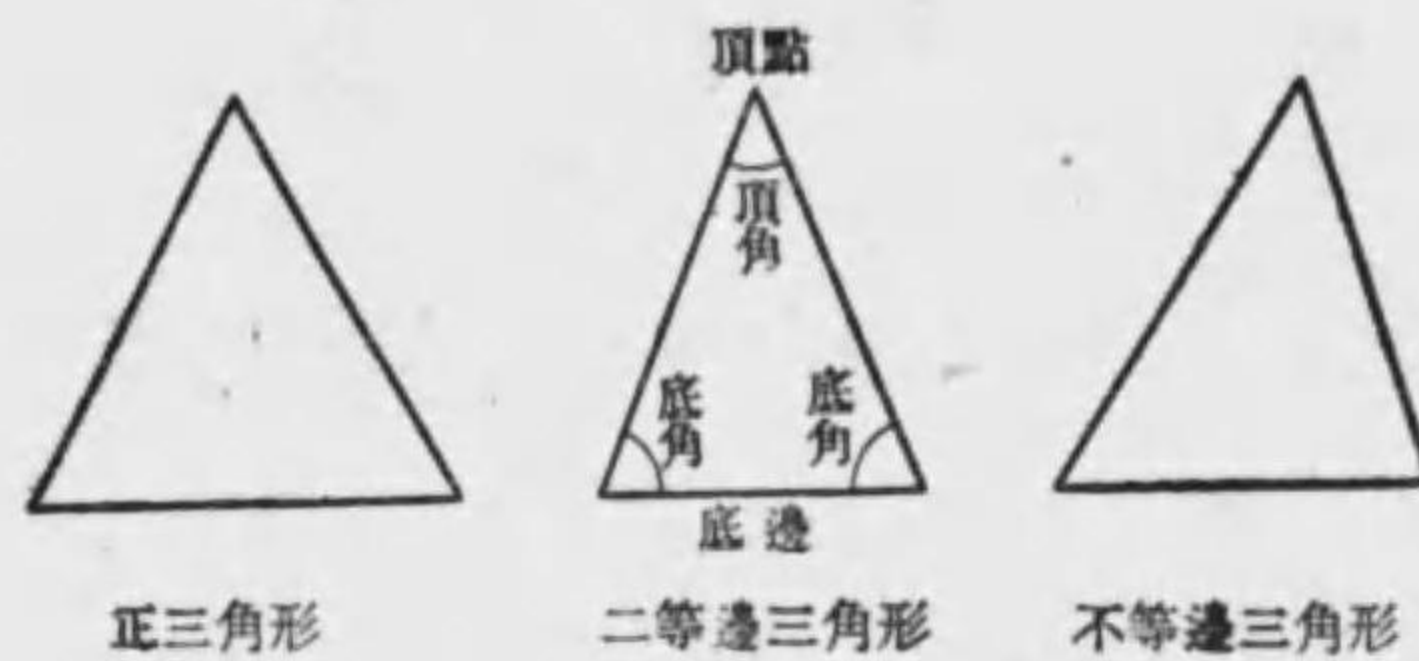
## I. 邊ノ長サノ關係ニヨル分類

① 正三角形……三邊ノ長サガ皆相等シイモノ

② 二等邊三角形……三邊ノ内何レカノ二邊ガ相等シイモノ

此ノ場合相等シカラザル邊ヲ底邊、底邊ノ兩端ニアル角ヲ底角、底邊ニ對スル角ヲ頂角、頂角ノ頂點ヲ頂點トイフ。

③ 不等邊三角形……三邊トモ長サ相等シクナイモノ



II. 角ノ大小關係ニヨル分類

① 銳角三角形……三ツノ角共ニ銳角ナルモノ

② 鈍角三角形……一ツノ鈍角ヲ有スルモノ

③ 直角三角形……一ツノ直角ヲ有スルモノ

直角ニ對スル邊ヲ特ニ斜邊トイフ。



16. 三角形ノ合同

定義 全ク重ネ合スコトノ出來ルニツノ圖形ハ合同デアルトイフ。

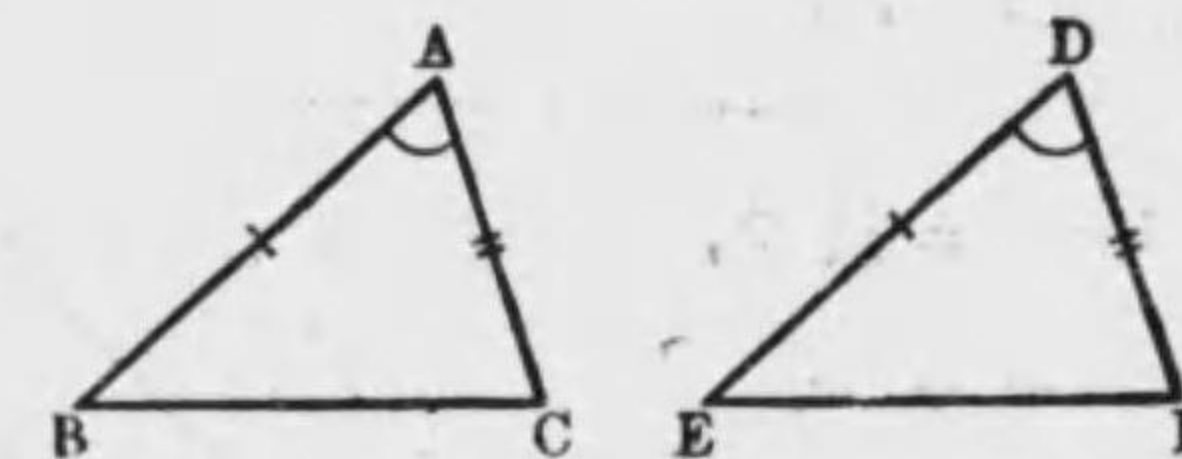
$\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トガ合同デアルコトヲ,  
 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$  ト書ク。

**定理 3.** (三角形合同定理 其ノ一)  
二邊トソノ夾角ガ夫々相等シイニツノ三角形ハ合同デアル。

題意  $\triangle ABC, \triangle DEF$  ニ於テ,

$$\left. \begin{aligned} AB &= DE \\ AC &= DF \\ \angle A &= \angle D \end{aligned} \right\} \text{ナルトキハ,}$$

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

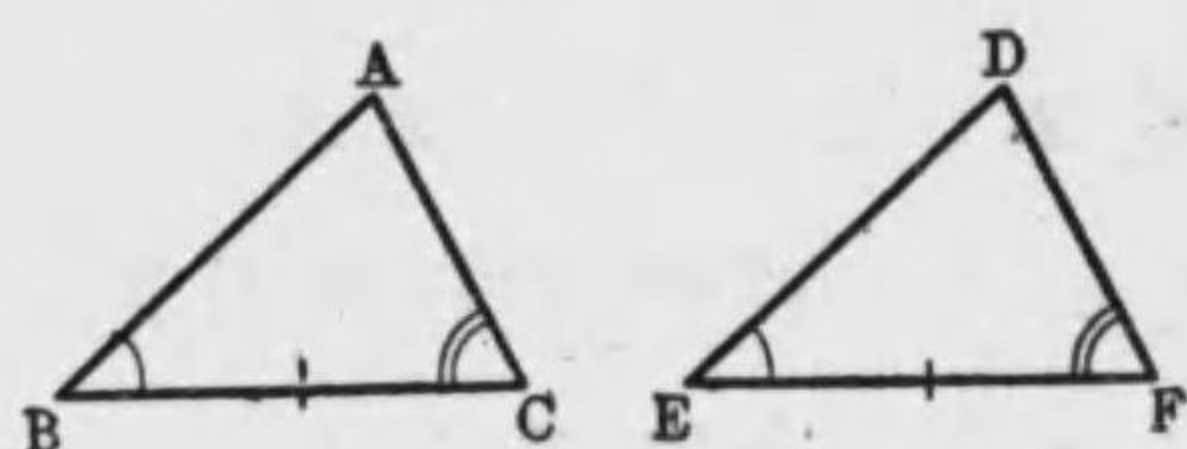


證明 兩三角形ハ互ニ重ネ合スコトガ出來ルカラ合同デアル。

**定理 4.** (三角形合同定理 其ノ二)

二角トソノ間ノ邊トガ夫々相等シ  
イニツノ三角形ハ合同デアアル。

題意  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トニ於テ,  
 $BC=EF$   $\angle B=\angle E$   $\angle C=\angle F$  ナルトキハ,  
 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

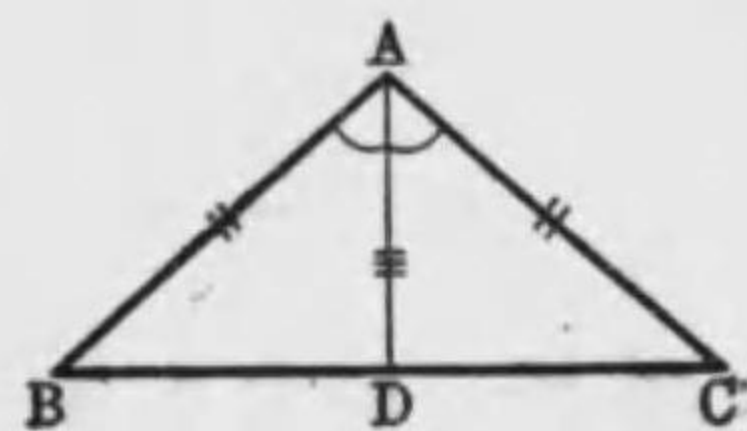


證明 前定理同様兩三角形ハ重ネ合スコトガ出  
來ル。

### 17. 二等邊三角形

定理 5. 二等邊三角形ノニツノ底  
角ハ相等シイ。

題意  $\triangle ABC$  ニ於テ,  
 $AB=AC$  ナラバ,  
 $\angle B=\angle C$



證明 頂角 A ノ二等分線  
ヲ引キ之ガ底邊ト交ハル點ヲ D トスレバ  
 $\triangle ABD, \triangle ACD$  ニ於テ,

$AB=AC$   
 $AD$  ハ共通 }  $\therefore \triangle ABD \equiv \triangle ACD$   
 $\angle BAD = \angle CAD$  }  $\therefore \angle B = \angle C$

スベテ定理ハ假設及ビ終結ノニツノ部分  
カラナル。

假設トハ始メカラ假定シテアル事柄デ終  
結トハ假定ノ結果トシテ必ズ起ツテクル事  
柄デアアル。

ソシテ假設ヨリ終結ヲ理論的ニ導キ出シ  
テ定理ガ真デアアルコトヲ明カニスルコトガ  
即チ證明デアアル。

定理ハ常ニカカル順序ニヨツテ明カニスルノガ  
正當デアアルガ本書ニ於テハ“直観ニヨツテ直グ分  
ルモノ”又ハ“證明ノ稍複雑ナルモノ”ハ略スル  
コトニスル。

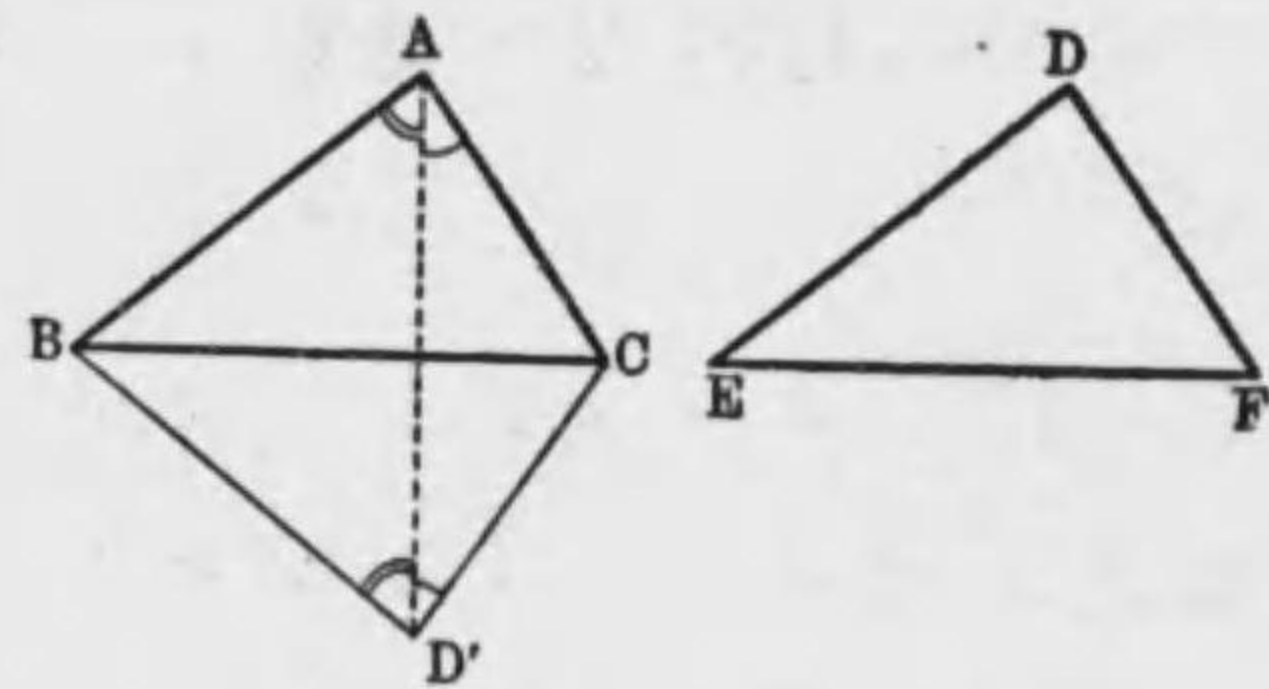
定理 6. (三角形合同定理 其ノ三)  
三邊ガ夫々相等シイニツノ三角形  
ハ合同デアアル。

假設  $\triangle ABC, \triangle DEF$  ニ於テ,  
 $AB=DE$

$BC=EF$

$CA=FD$

終結  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$



證明  $\triangle DEF$ ヲ移動シテ EヲBノ上ニ置キ EFヲ BC上ニ置クト  $BC=EF$  デアルカラ FハCト一致スル。次ニ DガAト反対側ニアル様ニシ、Dノ來ル點ヲD'トスル。A, D'ヲ結ブ。

$AB=DE \quad \therefore AB=D'E$

$\therefore \angle BAD' = \angle BD'A$  (二等邊ノ底角)

同様ニ  $\angle CAD' = \angle CD'A$

故ニ此ノ和ヲトレバ、

$\angle BAC = \angle BD'C$

即チ  $\angle BAC = \angle EDF$

故ニ  $\triangle ABC, \triangle DEF$ ニ於テ、

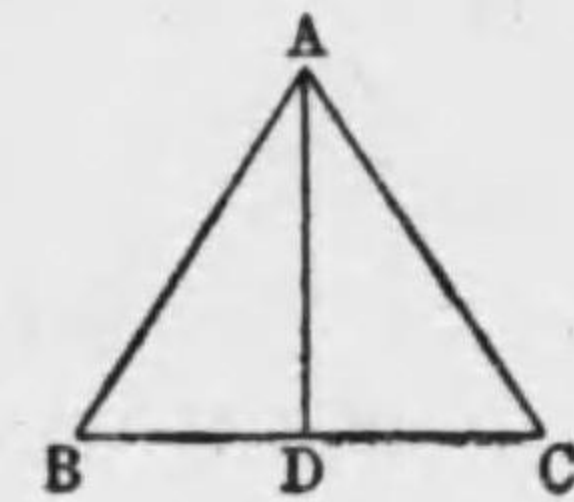
$AB=DE \quad AC=DF$

$\angle BAC = \angle EDF$

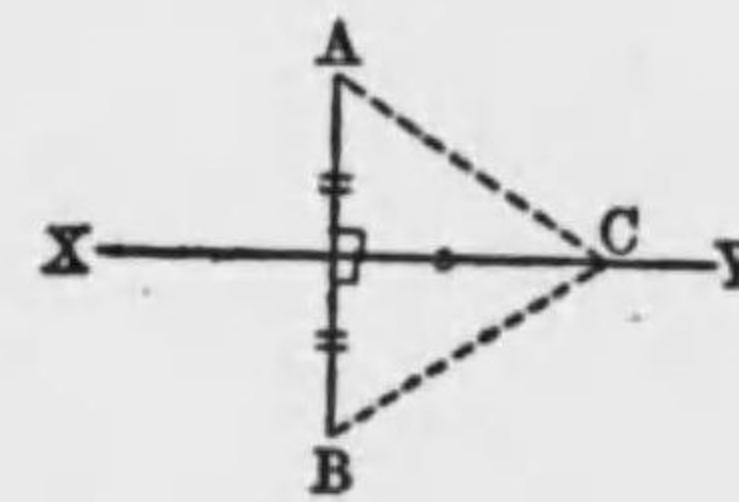
$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle DEF$  (二邊夾角相等)

問題 4.

1. 二等邊三角形 ABCノ底邊 BCノ中點 (BCノ真中) Dト頂點 Aヲ結ベバ  $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$  ナリ。

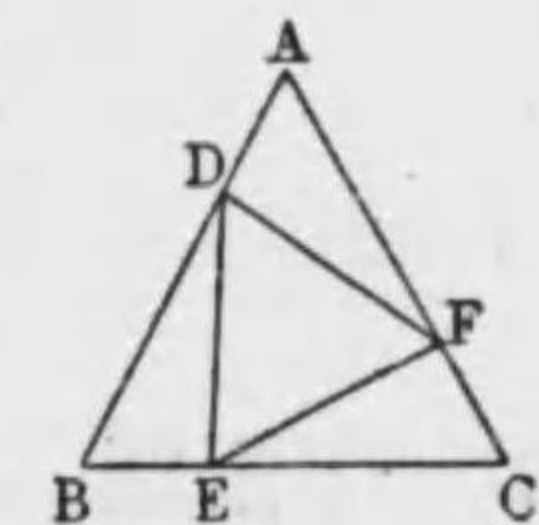


2. 二點 A, B

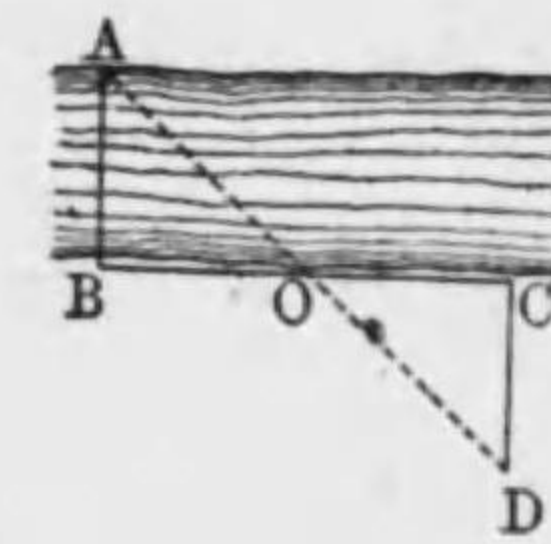
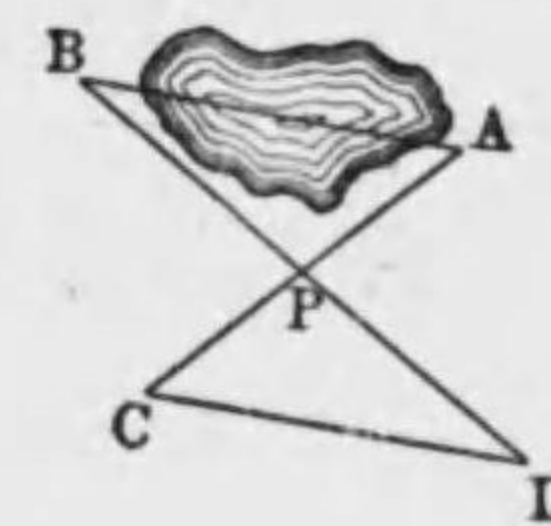


ヲ結ブ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線 XY 上ノ點ハ A, Bヨリ等距離ニアリ。

3. 正三角形 ABCノ邊 AB, BC, CA上ニ  $AD=BE=CF$  ナル様ニ D, E, Fヲトレバ  $\triangle DEF$ ハ正三角形デアル。



4. 圖ニヨリ池ヲ夾ンダ二點 A, B間ノ距離ヲ測ル方法ヲ考ヘヨ。



5. 川幅ヲ測ルニ上圖ノヤウニシテ CDヲ測レバヨイ。何故カ。但シ  $\angle B=90^\circ$ , Oハ BCノ中點デアル。



6. 二角ノ相等シイ三角形ハ二等邊三角形ナリ。

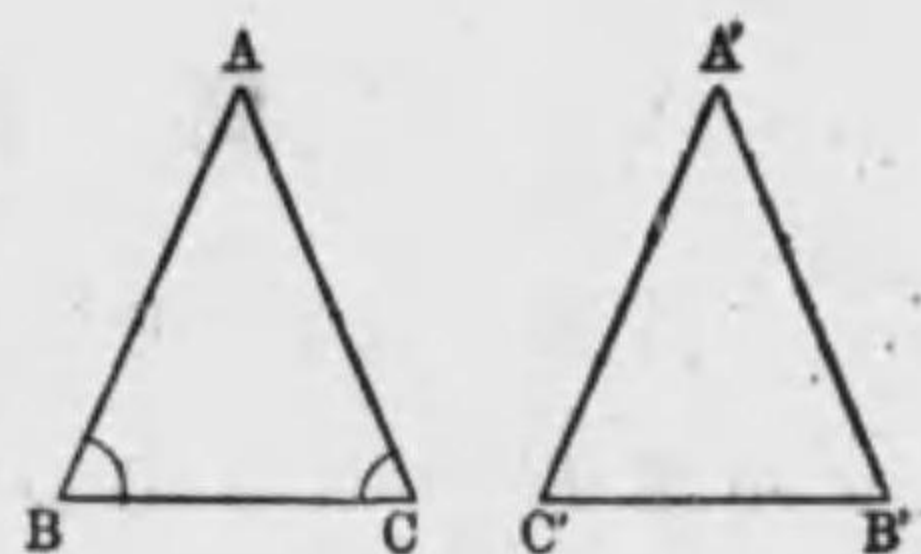
【註】(假設)  $\triangle ABC$  = 於テ

$\angle B = \angle C$  ナラバ (終結)

$AB = AC$  ナリ。之ト定

理5トヲ比ベル = 假設ト終結ト全ク相反ス、カカル定理ヲ前ノ定理ノ逆トイフ。

此ノ定理ハ  $\triangle ABC$  ヲ裏返シ  $\triangle A'C'B'$  ヲ作り  $\triangle ABC$  ト比較シテ考ヘヨ。



7. 正三角形ハ三ツノ角相等シ。

8. 三ツノ角相等シキ三角形ハ正三角形ナリ。(7ノ逆)

### 18. 作圖題

與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク方法ヲ求メル問題ヲ作圖題トイフ。作圖題ヲ解クニ用ヒル器具ハ定規トコンパストダケデアル。

**作圖題 1.** 與ヘラレタ角ヲ二等分セヨ。

題意 與ヘラレタ  $\angle BAC$  ヲ二等分スルコト。

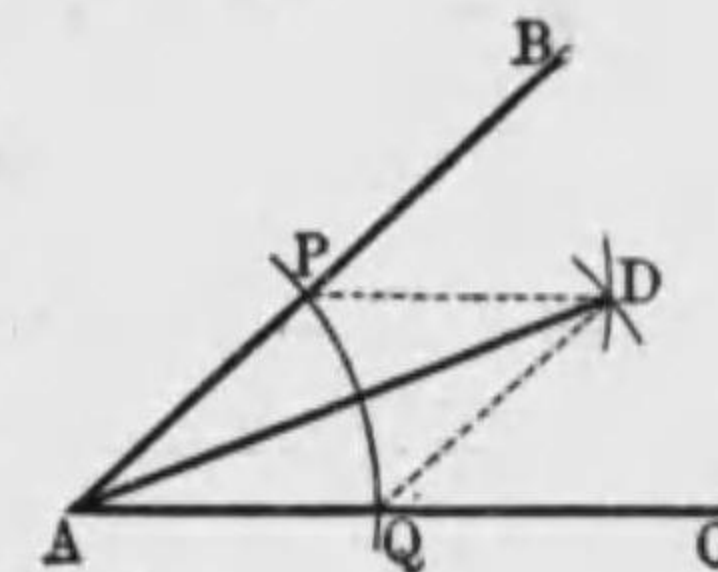
作圖 Aヲ中心トシ任意ノ半徑デ圓弧ヲ畫キ AB, AC トノ交點ヲ P, Q トスル。

次ニ P, Q ヲ中心トシ任意

ノ同ジ半徑ノ圓弧ヲ畫キ

ソノ交點ヲ D トシ AD ヲ

結ベバ AD ハ求メル二等分線デアル。



證明 PD, QD ヲ結ベバ,

$$\triangle APD \equiv \triangle AQD \quad (\text{三邊相等})$$

$$\therefore \angle PAD = \angle QAD$$

故ニ AD ハ  $\angle BAC$  ヲ二等分スル。

**作圖題 2.** 與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ。

題意 線分 AB ヲ二等分スルコト。

作圖 A, B ヲ中心トシ AB

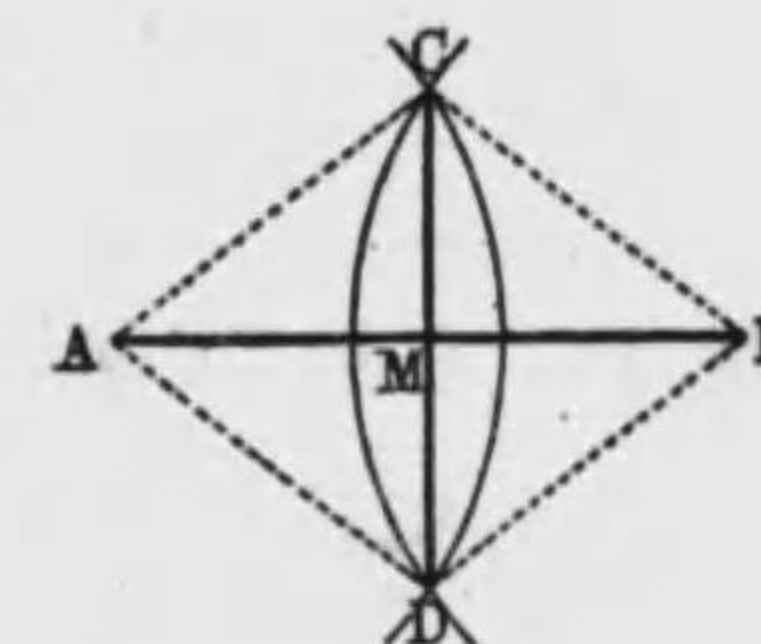
ノ半分ヨリ大キイ同ジ

半徑ノ圓弧ヲ畫キ, ソノ

交點ヲ C, D トシ CD ヲ

結ベバ CD ハ求ムル二

等分線デアル。



證明 AC, AD, BC, BD ヲ結ベバ,

$$\triangle ACD \equiv \triangle BCD \quad (\text{三邊相等})$$

$$\therefore \angle ACM = \angle BCM$$

随ッテ  $\triangle ACM \equiv \triangle BCM$  (二邊夾角相等)

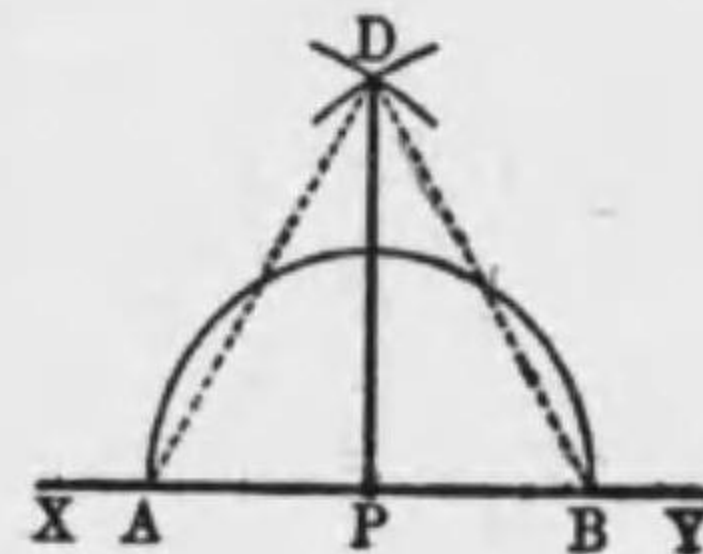
$\therefore AM = BM$

即チ M ハ AB ヲ二等分ス。

**作圖題 3.** 與ヘラレタ直線上ノ一  
點ヨリコレニ垂線ヲ立テヨ。

**題意** 直線 XY 上ノ一 點 P ヲリ之ニ垂線ヲ立テ  
ルコト。

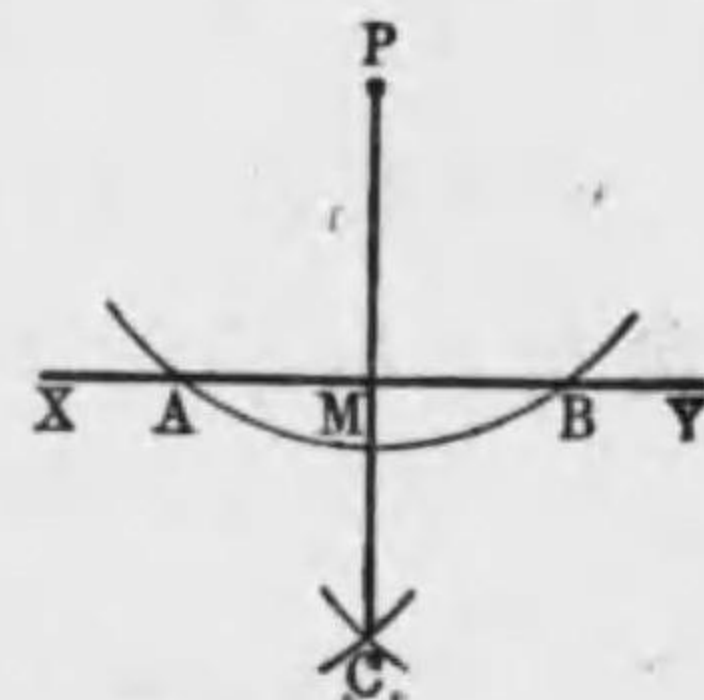
**作圖** 直線 XPY ハ P ヲ頂點  
トスル平角ト考ヘ作圖題  
1 ヲ應用シテ作圖シ之ヲ  
證明セヨ。



**作圖題 4.** 與ヘラレタ直線外ノ一  
點カラコノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

**題意** 直線 XY 外ノ一 點 P カラ XY ニ垂線ヲ引  
クコト。

**作圖** P ヲ中心トシ XY ト  
交ハル圓弧ヲ畫キ, XY ト  
ノ交點ヲ A, B トス。  
A ヲ中心トシ AB ノ半分  
ヨリ大ナル半徑ノ圓弧ヲ



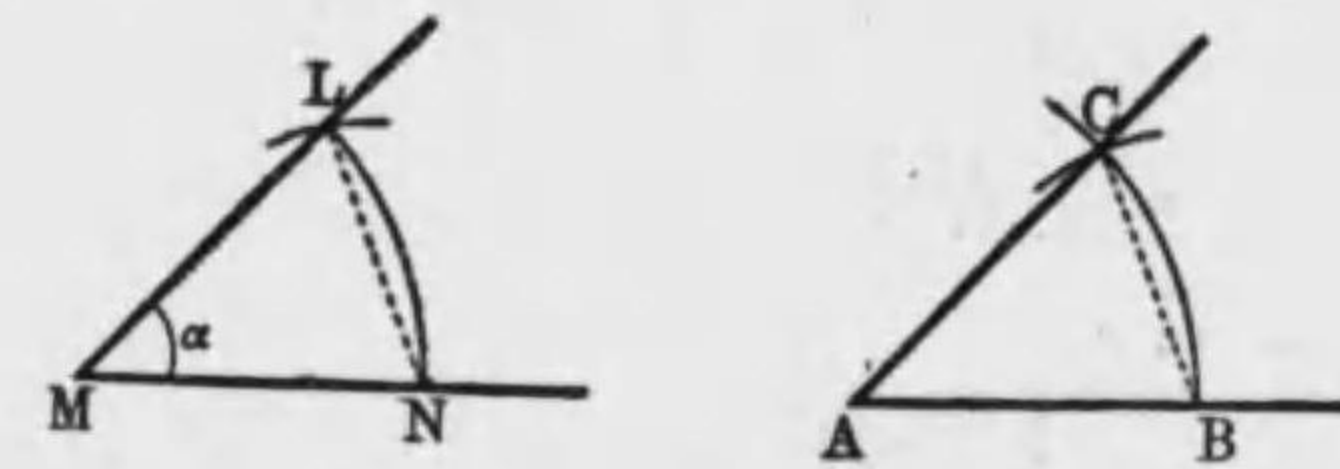
畫キ又 B ヲ中心トシ前ト同ジ半徑デ圓弧ヲ畫  
キ先ニ畫イタ圓弧トノ交點ヲ C トスル。CP ヲ  
結ビ XY トノ交點ヲ M トスレバ PM ハ求ムル  
垂線デアル。

**證明** 各自試ミヨ。

**作圖題 5.** 與ヘラレタ角ニ等シイ  
角ヲ畫ケ。(角ヲ移スコト)

**題意**  $\angle \alpha$  ニ等シイ角ヲ作ルコト。

**作圖** 與ヘラレタ  $\angle \alpha$  ノ頂點 M ヲ中心トシ任意  
半徑ノ圓弧デソノ二邊ヲ L, M デ, キル。次ニ別

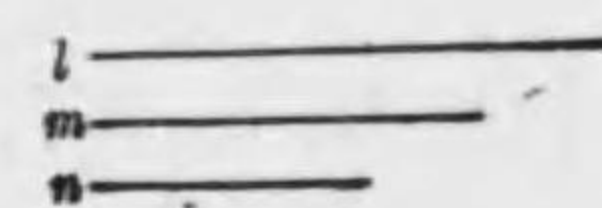


ニ直線 AB ヲ引キ一端 A ヲ中心ニ前ト同ジ半  
徑デ圓弧 CB ヲ畫ク。NL ニ等シク BC ヲトリ  
AC ヲ結ブ。然ラバ  $\angle CAB$  ハ求ムル角デアル。

**證明** LN, CB ヲ結ンデ各自試ミヨ。

**問題 5.**

1. 三邊  $l, m, n$  ヲ與ヘテ三角形  
ヲ畫ケ。



2. 二邊及び夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。
3. 與ヘラレタ長サヲ一邊トスル正三角形ヲ畫ケ。
4. 與ヘラレタ三角形ノ三ツノ頂點カラ對邊ニ垂線ヲ引ケ。

19. 平行線

定義 同ジ平面上ニ在ツテ双方ヘ如何程延長シテモ交ハラナイ二直線ヲ平行線トイフ。

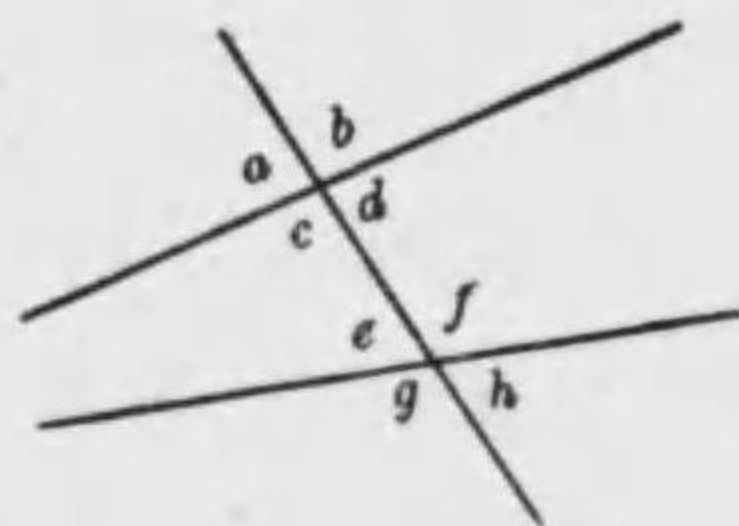
二直線 AB ト CD ガ平行デアル  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  ト書ク。

一般ニ一直線ガ他ノ二直線ニ交ハツテ出來ル角ヲ次ノヤウニ名付ケル。

$\left. \begin{matrix} \angle c \text{ ト } \angle f \\ \angle d \text{ ト } \angle e \end{matrix} \right\}$  錯角

$\left. \begin{matrix} \angle a \text{ ト } \angle e \\ \angle b \text{ ト } \angle f \end{matrix} \right\}$  同位角

$\left. \begin{matrix} \angle c \text{ ト } \angle g \\ \angle d \text{ ト } \angle h \end{matrix} \right\}$  同傍内角



公理 一直線外ノ一點ヲ通りソノ直線ニ平行ナ直線ハ唯一ツデアル。

即チ AB 外ノ一點 C ヲ  
通り AB ニ平行ナ直線ハ  
唯一ツ DCE デアル。

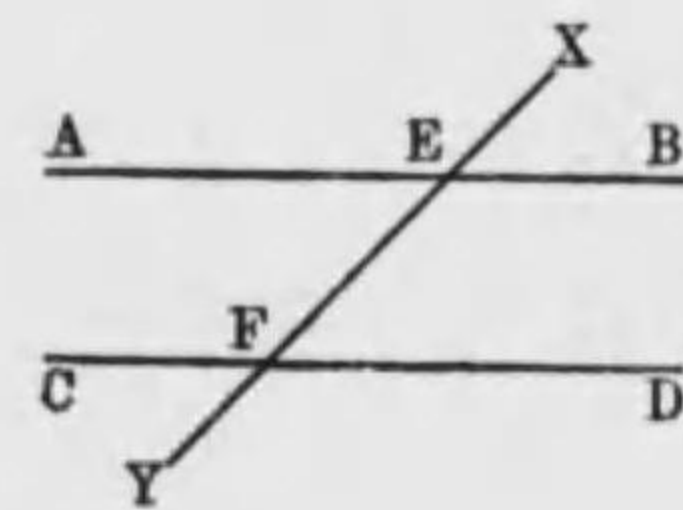
定理 7. 一直線ガ他ノ二直線ニ交ハツテナス錯角ガ相等シイトキハコノ二直線ハ平行デアル。

假設 直線 XY ガ二直線 AB, CD ト夫々 E, F ニテ交ハリ  $\angle AEF = \angle DFE$

トス。

終結  $AB \parallel CD$

證明 略ス。



系 一直線ガ他ノ二直線ニ交ツテ出來ル。

- (1) 同位角ガ等シイトキ、又ハ、
  - (2) 同傍内角ガ補角ヲナストキハ、
- ソノ二直線ハ平行デアル。

製圖ノトキ三角定規ヤT字形定規ヲ用ヒ、又大工ガ曲尺ヲ用ヒテ次頁ノ圖ノ如ク平行線ヲ引クノハ此ノ理ニヨルモノデアル。



**定理 8.** 一直線ガニツノ平行線ニ交ハルトキハ錯角ハ相等シイ。

假設  $AB \parallel CD$  トシ之ニ  $XY$

ガ  $E, F$  デ交ハツタトスル。

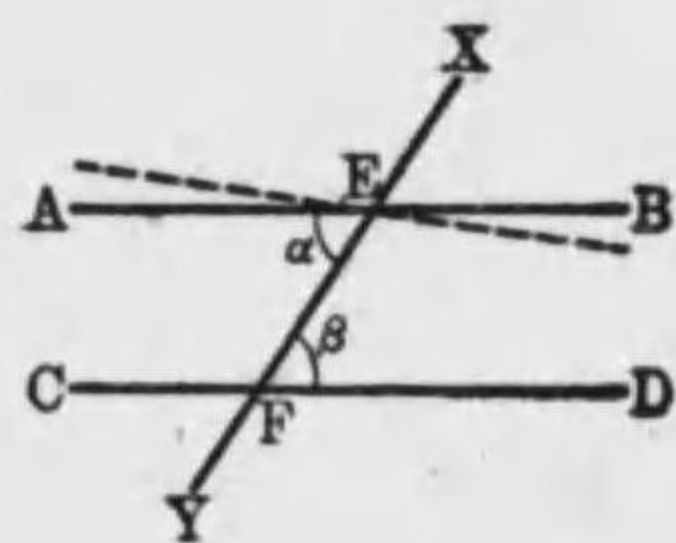
終結  $\angle \alpha = \angle \beta$

證明 若シ  $E$  ヲ通ツテ  $CD$

ニ平行線ヲ引ケバ  $\angle \beta$  ト

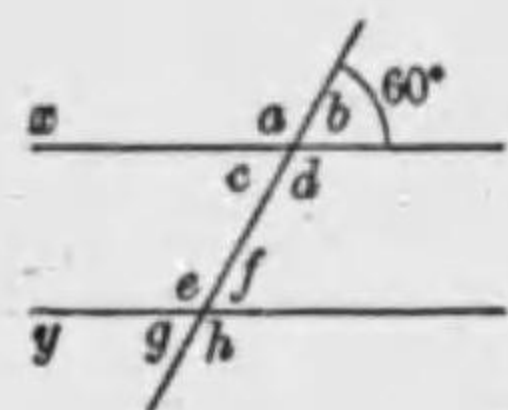
錯角ノ位置ニアル角ガ  $\angle \beta$  ト等シクナツテコノ直線ハ即チ  $AB$  ト重ナツテシマフ。故ニ、

$\angle \alpha = \angle \beta$  デアル。



**問題 6.**

1.



圖ニ於テ、

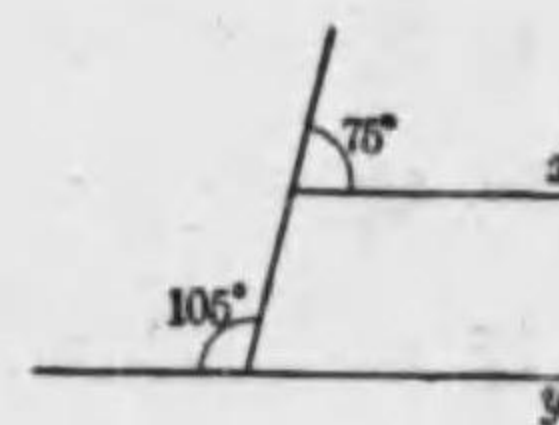
$x \parallel y$  トシ  $\angle b = 60^\circ$

ナラバ他ノ7ツノ角ハ各何度カ。

2. 次頁ノ圖ニ於テ、

$x \parallel y$

ナルコトヲ示セ。

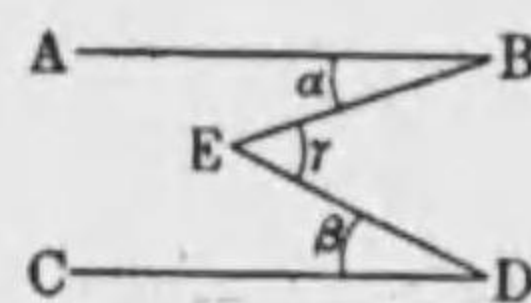


3. 一直線ガニツノ平行線ニ交

ハルトキハ同位角ハ相等シイ。

4. 一直線ニ平行ナニツノ直線ハ互ニ平行デアル。

5. 圖ニ於テ、



$AB \parallel CD$  ナラバ、

$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta$  デアル。

6. 光ガ硝子ノ層ヲ通過スルトキ圖ノヤウナ徑路

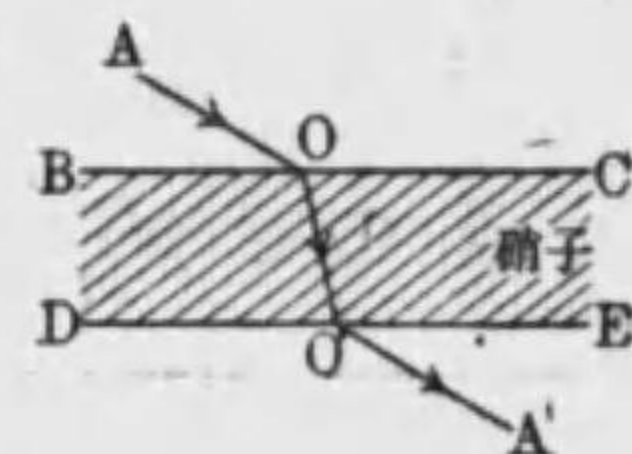
ヲトル。硝子ノ兩面

$BC \parallel DE$  ナラバ、

$\angle AOB = \angle EO'A'$

トナル。コノトキ  $AO \parallel O'A'$

ナルコトヲ證明セヨ。



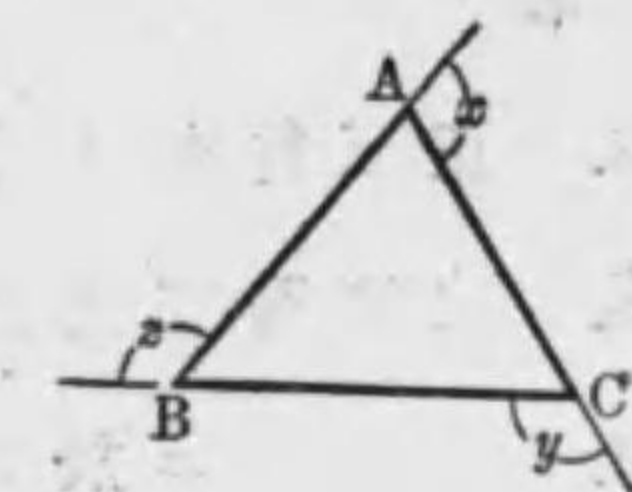
**20. 三角形ノ内角**

定義 圖ノ如ク  $\triangle ABC$  ニ

於テ  $\angle A, \angle B, \angle C$  ヲ内角ト

イヒ、 $\angle x, \angle y, \angle z$  ヲ外角トイ

フ。



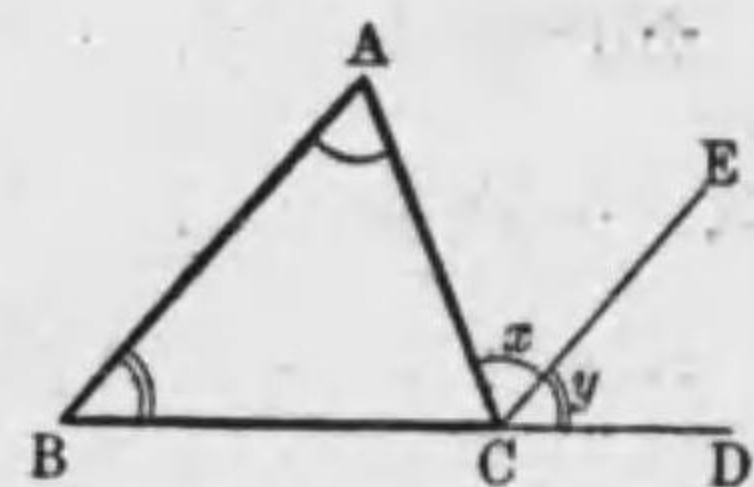
**定理 9.** 三角形ノ内角ノ和ハ二直  
角デアル。

假設  $\triangle ABC$  に於テ,

終結  $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$

證明 BCヲ延長シテ ACD

ヲ作り, Cヨリ BAニ平行  
ニ CEヲ引ク,



$$\angle A = \angle x \text{ (錯角)}$$

$$\angle B = \angle y \text{ (同位角)}$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = \angle x + \angle y + \angle C = 2R$$

系 三角形ノ外角ハ之ニ隣ラナイ  
内角ノ和ニ等シイ。從ツテソノ何レ  
ヨリモ大デアル。

問題 7.

1. 直角二等邊三角形一角ガ直角ナル二等邊三角  
形ノ底角ハ何度カ。
2. 正三角形ノ各角ノ大イサヲ問フ。
3. 二等邊三角形ノ底角ハ鋭角ナリ。
4.  $\triangle ABC$  に於テ  $\angle A = 3\angle C$   $\angle B = 2\angle C$  ナラバ各  
角ハ何度カ。

21. 多角形

前節, 定理ヲ應用スレバ四角形, 五角形, 六角形等ノ

内角ノ和ヲ直ニ計算スルコトガ出來ル。即チ,

四角形ノ内角ノ和……4直角…… $(2 \times 4 - 4)$ 直角

五角形ノ内角ノ和……6直角…… $(2 \times 5 - 4)$ 直角

六角形ノ内角ノ和……8直角…… $(2 \times 6 - 4)$ 直角

$n$ 角形ノ内角ノ和…… $(2 \times n - 4)$ 直角



以上ヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得ル。

定理 10.  $n$ 角形 ( $n$ ハ幾ツデモヨイ)  
ノ内角ノ和ハ,  
 $(2n - 4)$  直角  
デアル。

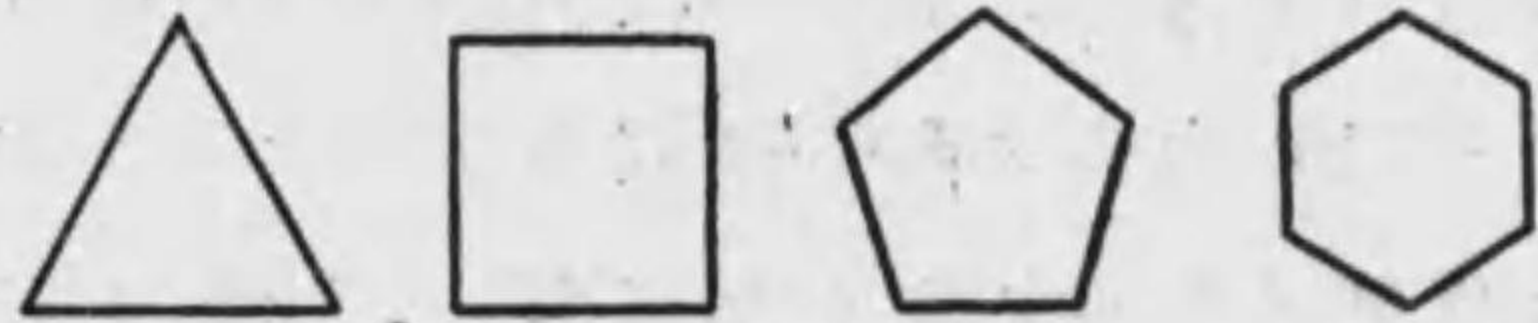
例ヘバ10角形ノ内角ノ和ハ  $(2n - 4)$  直角  $= n = 10$   
ヲ代入シテ,

$$(2 \times 10 - 4) \text{ 直角} \text{ 即チ, } 16 \text{ 直角デアル。}$$

22. 正多角形

定義 多角形ノ内デ總テノ邊ガ相等シク  
且ツ總テノ角ガ相等シイモノヲ正多角形ト

イフ。



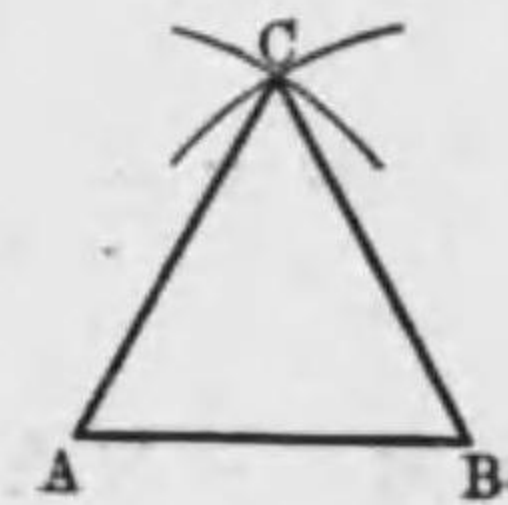
正多角形ノ一角ノ大イサハ前節定理カラ直ニ知ルコトガ出来ル。即チ、

正三角形…… $60^\circ$       正方形……… $90^\circ$   
 正五角形…… $108^\circ$       正六角形……… $120^\circ$

次ニ正多角形ノ作圖法ヲ述ベヤウ。

**作圖題 6. 正三角形,正六角形作圖法。**

ABヲ一邊トスル正三角形ヲ畫クニハ A, Bヲ中心トシ ABヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キソノ交點 Cト A, Bヲ結ベバ  $\triangle ABC$ ハ求ムル正三角形



デアル。



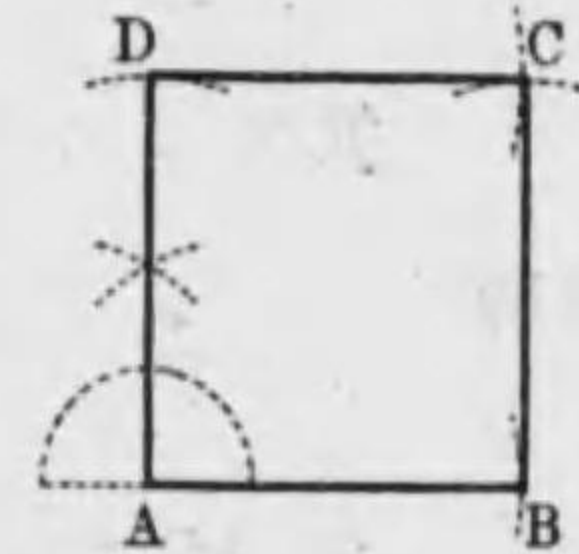
圓ニ内接スル正六角形ヲ畫クニハ其ノ圓ノ半徑デ圓周ヲ順次切ツテ行クト丁度圓周ハ六等分サレル。

故ニ各分點ヲ結ベバ正六角形ヲ得ル。

又分點ヲ一ツ置キニトレバ正三角形ヲ得ル。

**作圖題 7. 正方形,作圖法。**

ABヲ一邊トスル正方形ヲ畫クニハ Aヨリ ABニ垂線ヲ立テソノ長サヲ ABニ等シクシ ADトスル。D, Bヲ中心トシ ABヲ半徑トスル圓弧ノ交點ヲ Cトシ CD, CBヲ結ベバ正方形 ABCDヲ得ル。



**問題 8.**

- 次ノ多角形ノ内角ノ和ヲ求メヨ。  
 ① 8角形    ② 12邊形    ③ 15角形
- 次ノ正多角形ノ一角ノ大イサヲ求メヨ。  
 ① 正八角形    ② 正十角形
- 或正多角形ノ一角ノ大イサガ  $144^\circ$ ナリ。コレハ何角形カ。
- 直角ヲ三等分スル方法ヲ工夫セヨ。

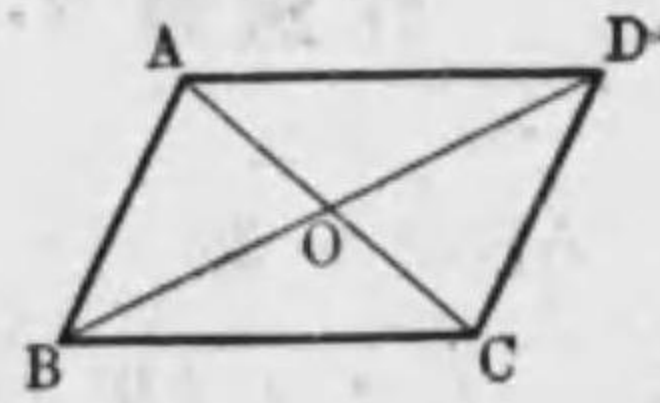
**23. 平行四邊形**

**定義** 相對スル二双ノ邊ガ平行ナル四邊形ヲ平行四邊形トイフ。

圖ニ於テ,  $AB \parallel DC$   $AD \parallel BC$  デアル。平行四邊形

ABCD ヲ  $\square$  ABCD ト書ク。

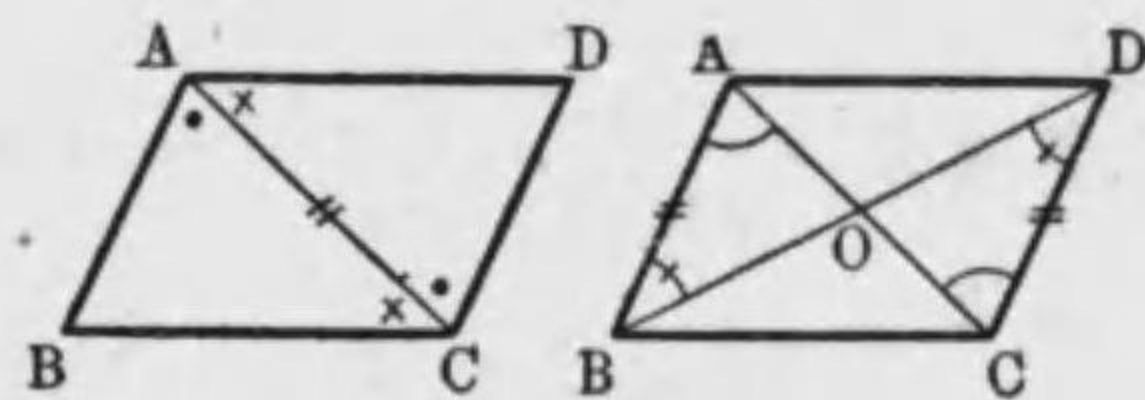
$\square$  ABCD ニ於テ AB ト DC, AD  
ト BC ヲ對邊  $\angle A$  ト  $\angle C$ ,  $\angle B$  ト  
 $\angle D$  ヲ對角 トイヒ, AC, BD ヲ對  
角線 トイフ。



**定理 11.** 平行四邊形ニ於テハ、

- (1) 對角線ハ之ヲ合同ナルニツノ三  
角形ニ分ツ。
- (2) 二双ノ對邊ハ相等シイ。
- (3) 二双ノ對角ハ相等シイ。
- (4) 對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。

即チ圖ニ於テ、



- (1)  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$
- (2)  $AB = DC$      $AD = BC$
- (3)  $\angle A = \angle C$      $\angle B = \angle D$
- (4)  $AO = CO$      $BO = DO$

**證明** 上圖ニヨリ各自ナセ。

**24. 矩形 菱形 正方形**

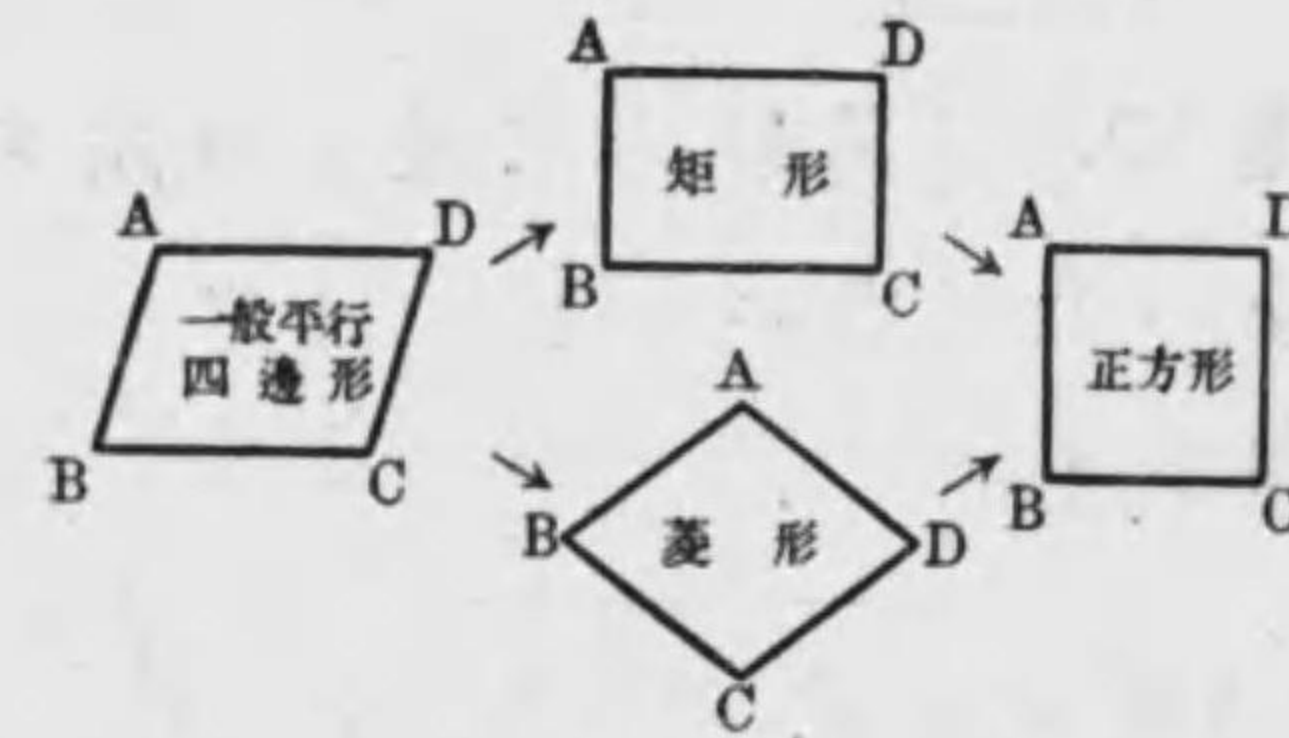
平行四邊形ノ内特殊ノモノニ次ノモノガアル。

總テノ角ガ相等シ(直角)キモノ……**矩形**

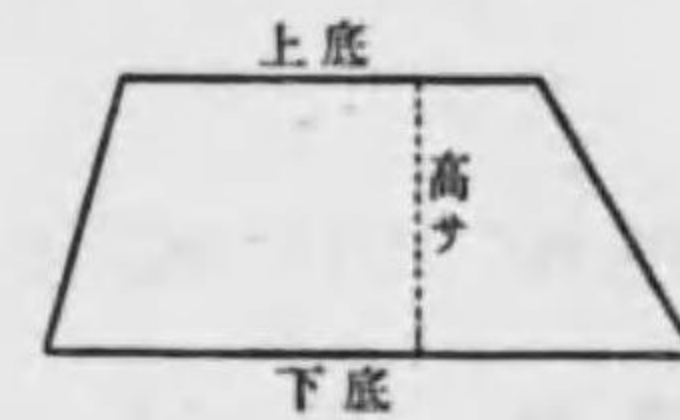
總テノ邊ガ相等シキモノ……**菱形**

總テノ邊モ角モ相等シキモノ……**正方形**

一般四邊形トノ關係ヲ圖示スレバ次ノ通りデア  
ル。



**定義** 一双ノ對邊ガ平  
行ナル四邊形ヲ**梯形**トイ  
ヒ, 平行ナル兩底間ノ距離  
ヲ**高さ**トイフ。



**定理 12.** 四邊形ハ次ノ場合ニ平行  
四邊形トナル。

- (1) 二双ノ相對スル邊ガ夫々相等シ  
イトキ。

- (2) 二双ノ相對スル角ガ夫々相等シイトキ。
- (3) 一双ノ相對スル邊ガ平行テ相等シイトキ。
- (4) 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スルトキ。

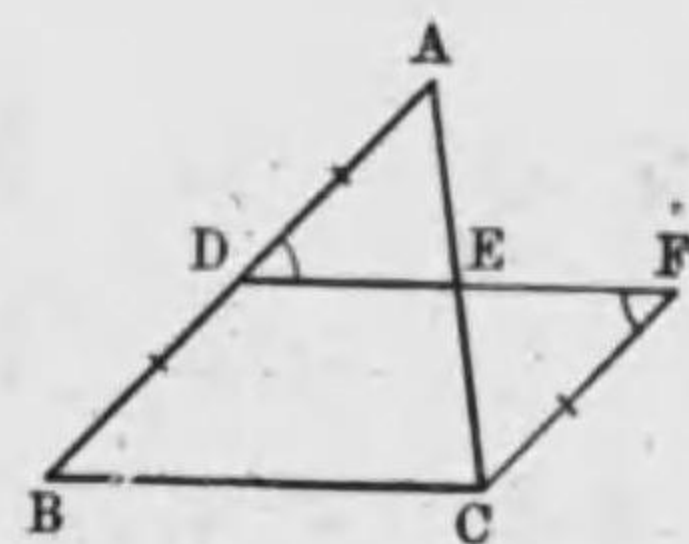
25. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分

**定理 13.** 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行テ且ツソノ半分ニ等シイ。

假設  $\triangle ABC$  ニ於テ、  
 AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トス。

終結  $DE \parallel BC$   $DE = \frac{1}{2}BC$

證明 DE ヲ F マデ延長シ  $EF = DE$  トシ C, F ヲ結ブ。



$\triangle ADE \cong \triangle CFE$  (二邊夾角相等)

$\therefore \angle ADE = \angle CFE$

$\therefore AB \parallel FC$  即チ  $DB \parallel FC$

又  $AD = FC$   $\therefore DB = FC$

$\therefore DBCF$  ハ平行四邊形 (定理 12ノ3)

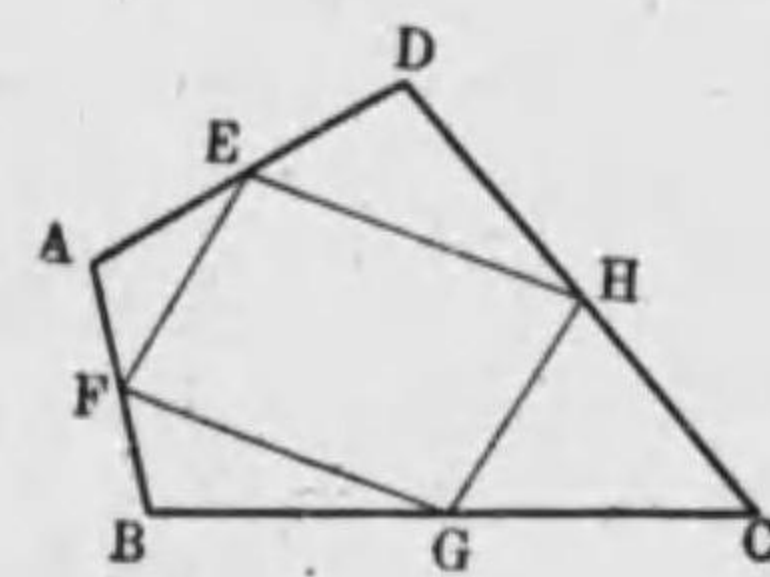
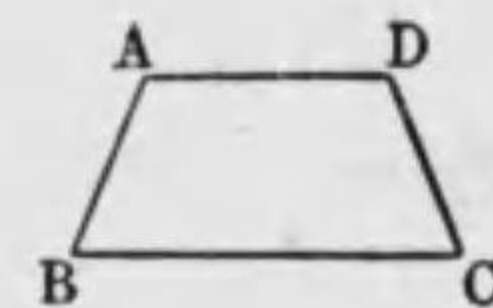
$\therefore DE \parallel BC$  又  $DF = BC$

然ルニ  $DE = EF$   $\therefore DE = \frac{1}{2}BC$

**系** 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通り他ノ邊ニ平行ナ直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル。

問題 9.

1. 平行四邊形ノ一角ガ  $60^\circ$  ナラバ他ノ三ツノ角ハ何度カ。
2. 矩形ノ對角線ハ相等シ。
3. 菱形ノ對角線ハ直交ス。
4. 正方形ノ對角線ハ相等シク且ツ直交ス。
5. 右圖ノ如キ等脚梯形 ( $AB = DC$ )  
 ニ於テハ、 $\angle B = \angle C$   
 $\angle A = \angle D$  ナリ。
6. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル四



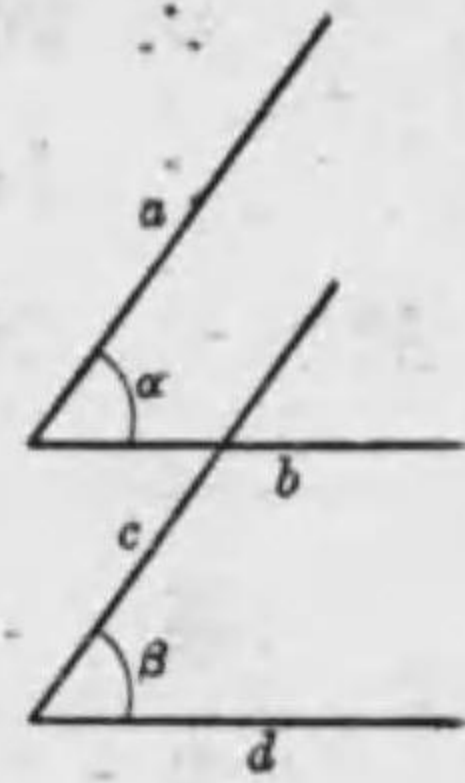


邊形ハ平行四邊形ナリ。

7. 右圖ニ於テ,

$$a \parallel c \quad b \parallel d$$

ナラバ  $\angle\alpha = \angle\beta$  ナルコトヲ證明セヨ。



26. 四邊形ノ面積

**定理 14.** 矩形ノ面積ハソノ長サト幅トノ積ニ等シイ。

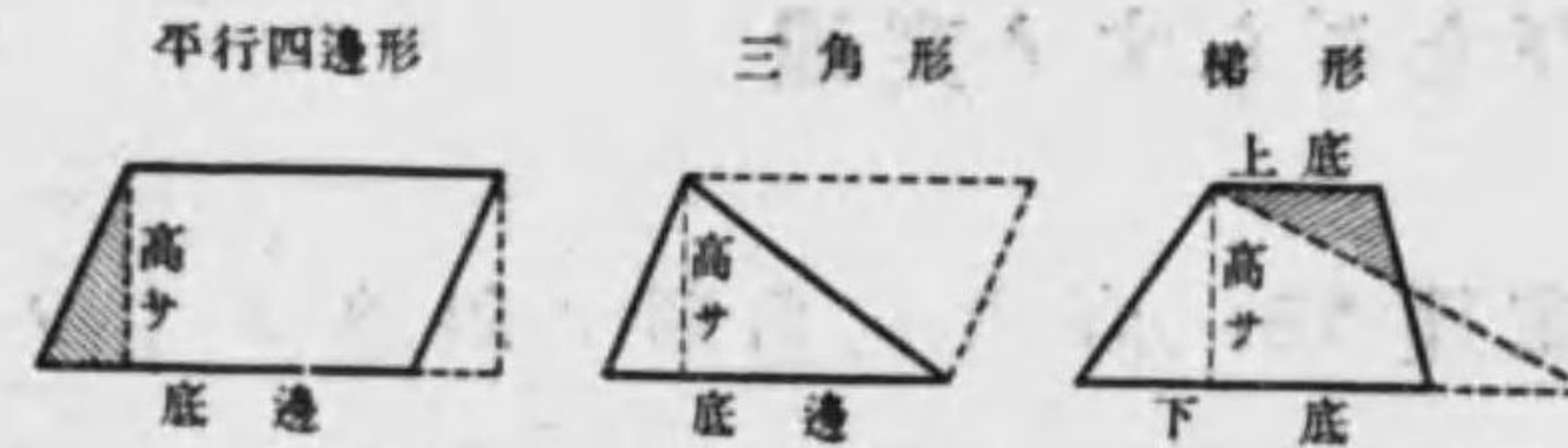
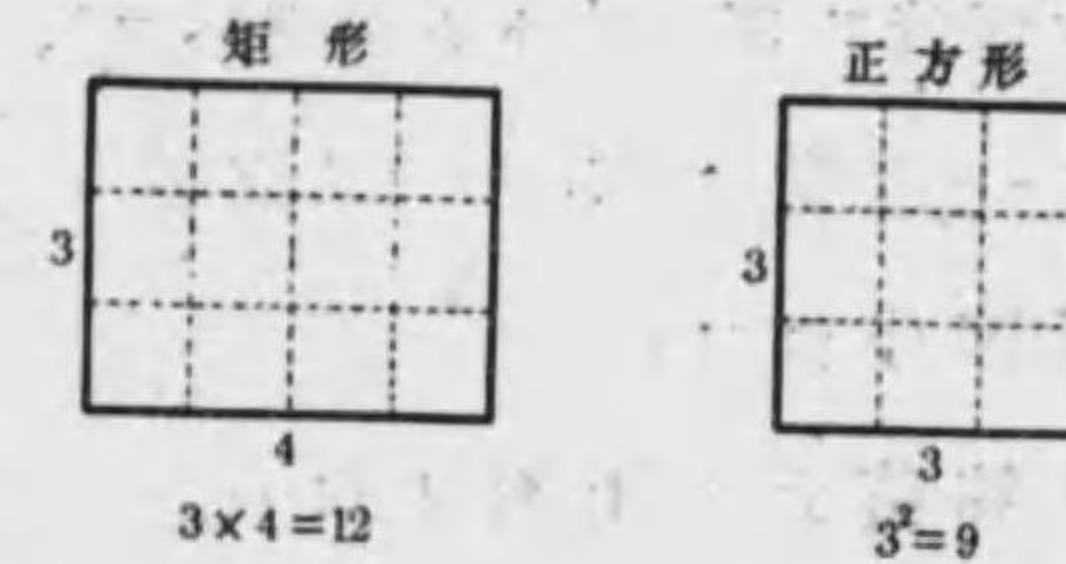
**定理 15.** 正方形ノ面積ハ一邊ノ平方ニ等シイ。

**定理 16.** 平行四邊形ノ面積ハ底邊ト高サトノ積ニ等シイ。

**定理 17.** 三角形ノ面積ハ底邊ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。

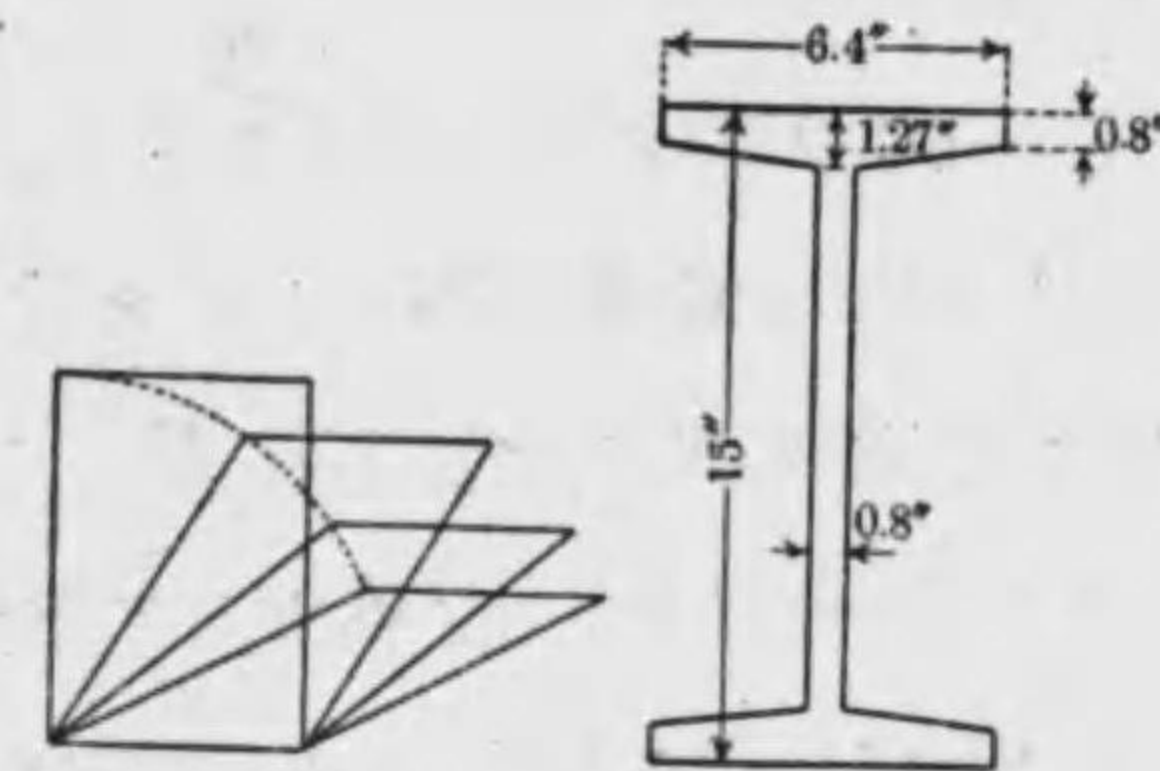
**定理 18.** 梯形ノ面積ハ兩底ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シイ。

次ノ圖ニヨリテ各自會得セヨ。



問題 10.

1. 圖ノ如キ鐵片ノ斷面積ヲ求メヨ。



〔註〕 "ハ吋ノ略號。

2. 二邊ガ夫々一定ナル平行四邊形ノ内デ面積ノ最大ナルモノハ何カ。(上左圖ヨリ考ヘヨ)
3. 周圍ガ一定ナル矩形ノ内デ面積ノ最大ナルモノハ何カ。(假リ=周ヲ 20m トシテ考ヘヨ)。

4. 面積ガ一定ナルトキ周圍ノ最小ナル矩形ハ何か。(假リニ面積ヲ  $36\text{cm}^2$  トシテ考ヘヨ)。
5. 三角形ノ一頂點ヲ過ギルニヨリテコノ三角形ヲ三等分セヨ。
6. 三角形ト等積ナル矩形ヲ作レ。

## 27. びたごらすノ定理

**定理 19.** 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シイ。

假設  $\triangle ABC$  = 於テ  $\angle A = R\angle$  トスレバ、

終結  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

[註]  $BC^2$  トハ  $BC$  ノ上ノ正方形ヲ表ハス。

證明 A ヨリ  $BC$  = 垂線  $AM$  ヲ下シ之ヲ延長シテ  $ED$  トノ交點ヲ  $N$  トス。  $CF, AE$  ヲ結ブ。

$$\triangle ABE \cong \triangle FBC \quad (\text{二邊夾角相等})$$

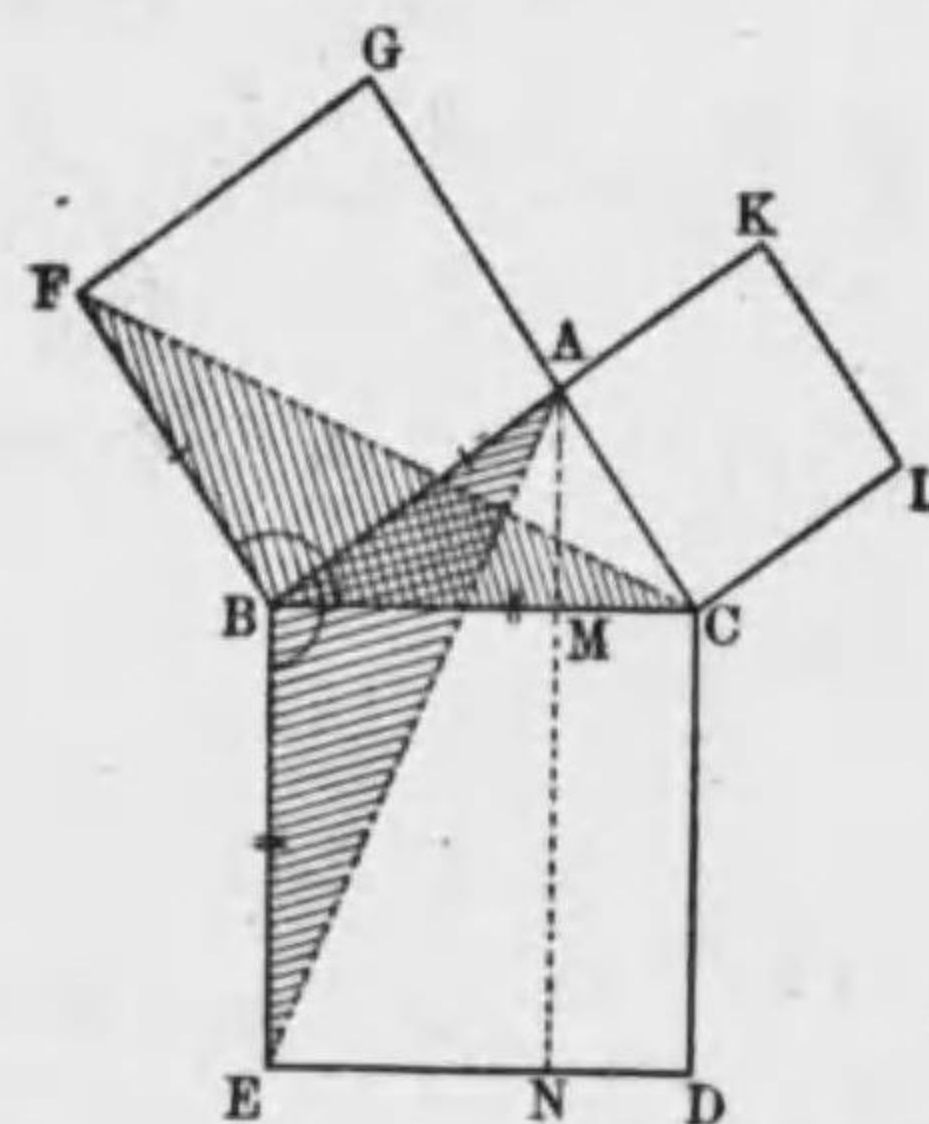
然ルニ矩形  $BENM = 2\triangle ABE$  (同底同高)

正方形  $FBAG = 2\triangle FBC$  (同底同高)

$\therefore$  矩形  $BENM =$  正方形  $FBAG$

同様ニ矩形  $MNDC =$  正方形  $KACL$

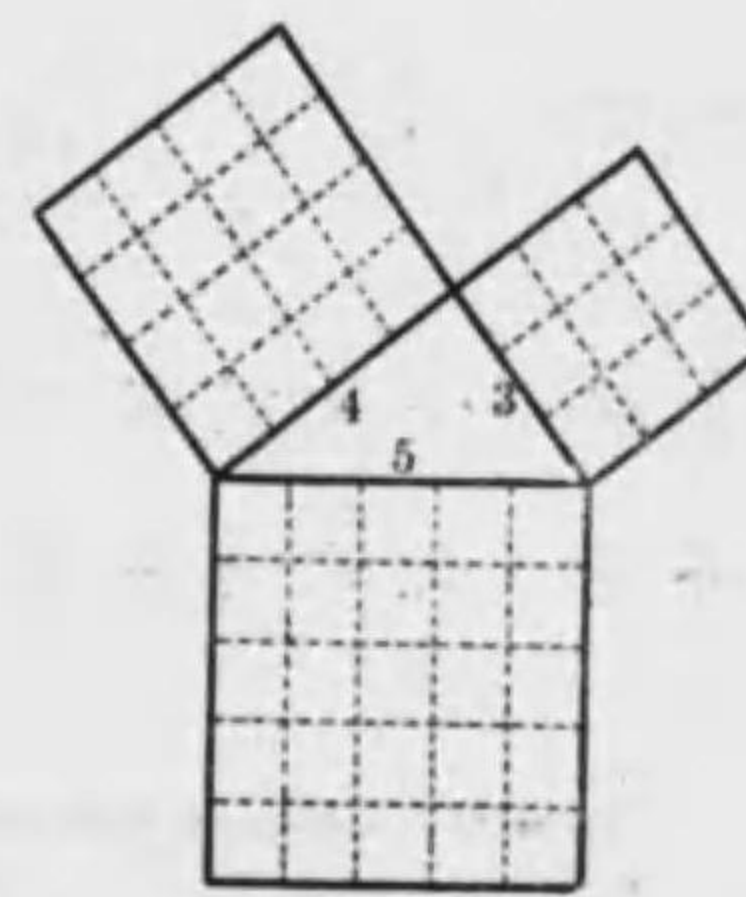
$\therefore$  矩形  $BENM +$  矩形  $MNDC =$  正方形  $FBAG$   
+ 正方形  $KACL$



即チ正方形  $BEDC =$  正方形  $FBAG +$  正方形  $KACL$

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$$

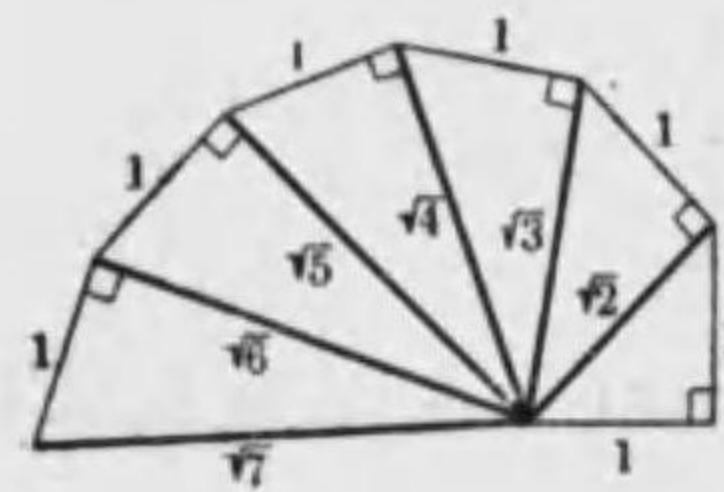
本定理ヲびたごらすノ定理トイヒ、幾何學デハ最モ重要デ且ツ興味アル定理デアル。次頁ノ圖ニヨリテモ直ニ會得スルコトガ出來ル。



Pythagoras (西曆紀元前 582 年—493 年頃) びたごらすハ地中海ノさもす島ニ生レギリシヤ及ビエジボトニ遊學シ、後イタリヤノくろとんニ學校ヲ建テ數學及ビ哲學ヲ講ジ多數ノ學者ヲ養成シタ。

**系1.** 三角形ノ一邊ノ上ノ正方形ガ  
他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シケ  
レバコノ三角形ハ直角三角形デア  
ル。

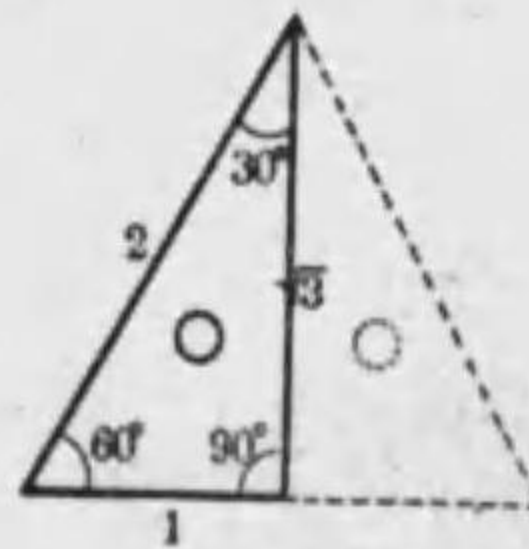
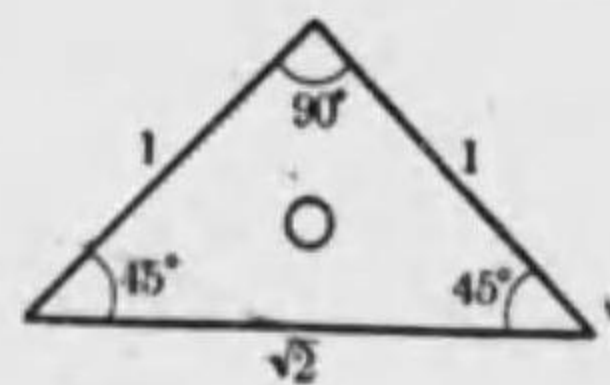
(本定理ノ逆デア  
ル。)



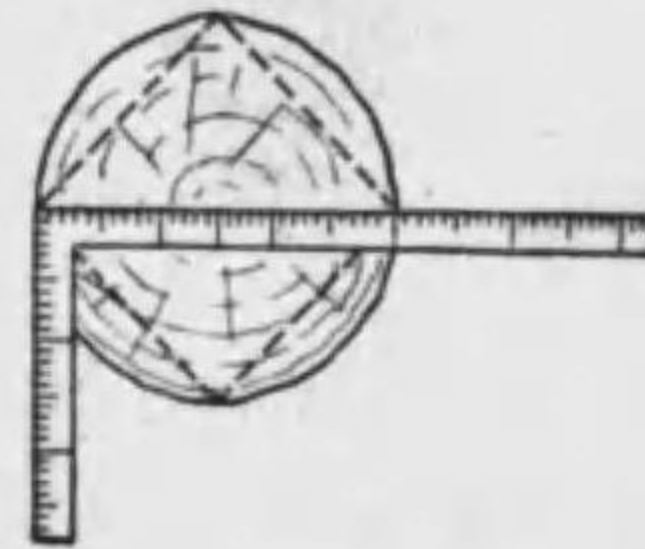
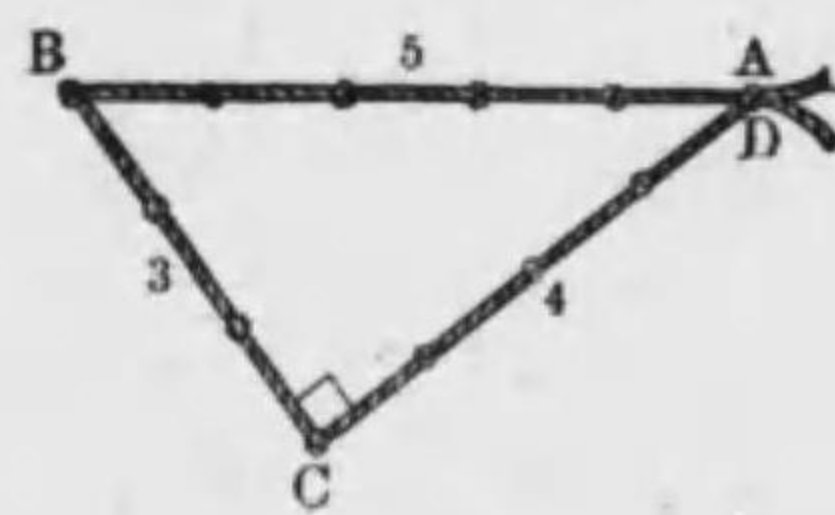
びたごらすノ定理ニ依リ  
左圖ノ如ク單位ノ長サ1ヲ  
知ツテ  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  等ノ長サヲ  
作圖スルコトガ出來ル。

又三角定規ノ各邊ノ比モ下圖ノ如クナル。

直角二等邊三角形      二枚合スレバ正三角形。



建築ヤ土木工事ノ時繩ヤ木デ下圖ノ三角形ヲ作  
リ各邊ノ比ヲ3, 4, 5ノ割合ニトリテ直角ヲ作ルノ



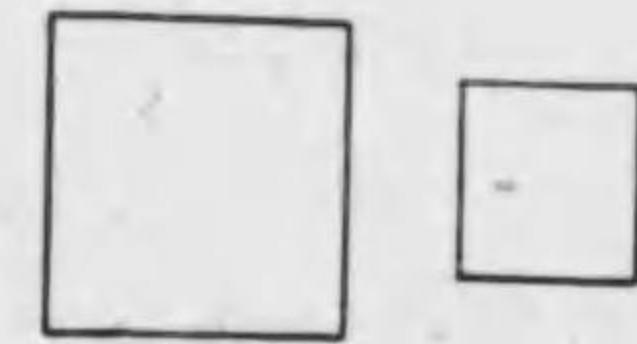
モ本定理ノ應用デア  
ル。大工ノ持ツテキ  
ル曲尺ノ

裏目ハ  $\sqrt{2}$  寸即チ 1.414 寸ヲ 1 寸トシテ目盛ツテア  
ル。コノ目盛ニヨリ丸材ノ直徑ヲ測リ之ヨリ一  
邊  
何程ノ柱(正方形)ヲ取リ得ルヤヲ直ニ見積ルコトガ  
出來ル。

**系2.** 直角三角形ニ於テ斜邊ハ他  
ノ二邊ノ何レヨリモ大デア  
ル。

問題 11.

1. 直角ヲ夾ム二邊ノ長サガ夫々 12m, 5m ナルト  
キハ斜邊ノ長サハ何米カ。
2. 長サ 12m ノ梯子ヲ建築物  
カラ 5.5m 離レタ地點ニオイ  
テ其ノ壁ニ立テカケルト梯  
子ノ他端ハ地上何程ノ處ニ  
達スルカ。
3. 1邊 6cm ナル正三角形ノ  
高サハ何程カ。
4. 與ヘラレタ正方形ノ 5 倍ノ面積ヲ有スル正方  
形ヲ作レ ( $\sqrt{5}$ ヲ作圖セヨ)
5. 左ノ正方形ノ面積ノ和ニ等  
シキ面積ヲ有スル正方形ヲ作



レ。

## 28. 鋭角ノ三角函數

正弦 (sine) 餘弦 (cosine) 正切 (tangent)

任意ノ鋭角 XAY ノ一邊 AY 上ノ任意ノ一點 B カ  
ラ AX ニ垂線 BC ヲ下スト直角三角形 ABC ガ出來  
ル。

∠A ニ對スル邊(垂線) BC 他ノ邊(底邊) AC 斜邊 AB  
ノ中ニツ宛ノ比ヲ作り次ノ如ク名ヲ附ケル。

$$\sin A = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

……∠A ノ正弦ト云フ。

$$\cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

……∠A ノ餘弦ト云フ。

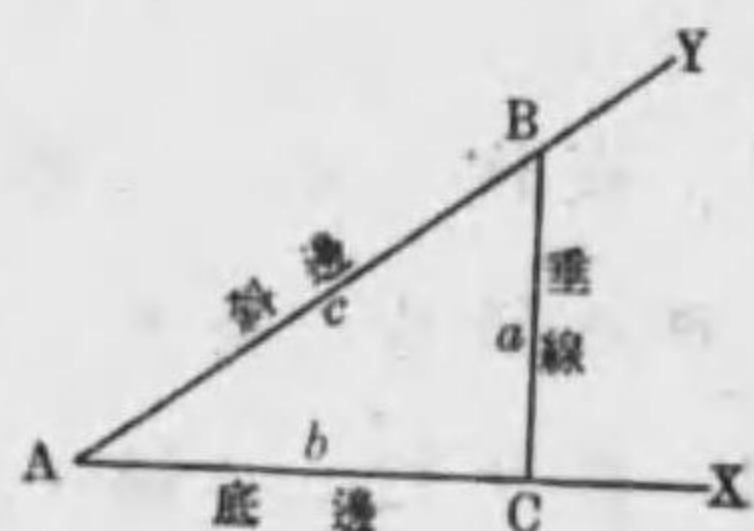
$$\tan A = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \dots \dots \angle A \text{ ノ正切ト云フ。}$$

從ツテ  $a = c \sin A$ ,  $b = c \cos A$ ,  $a = b \tan A$

**注意** 直角三角形 ABC ニ於テ ∠A ガ一定ナラバ三角形  
ABC ノ大小ニカ、ハラズ各邊ノ比ハ一定デア  
ル。又  $\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$  ナドノ A ハ頂點ヲ表ハスニ  
アラスシテ ∠A ノ大サヲ表ハスモノデア  
ル。即チ,  
 $\sin 30^\circ$ ,  $\sin 60^\circ$  ノ如クデア  
ル。生徒ハ、

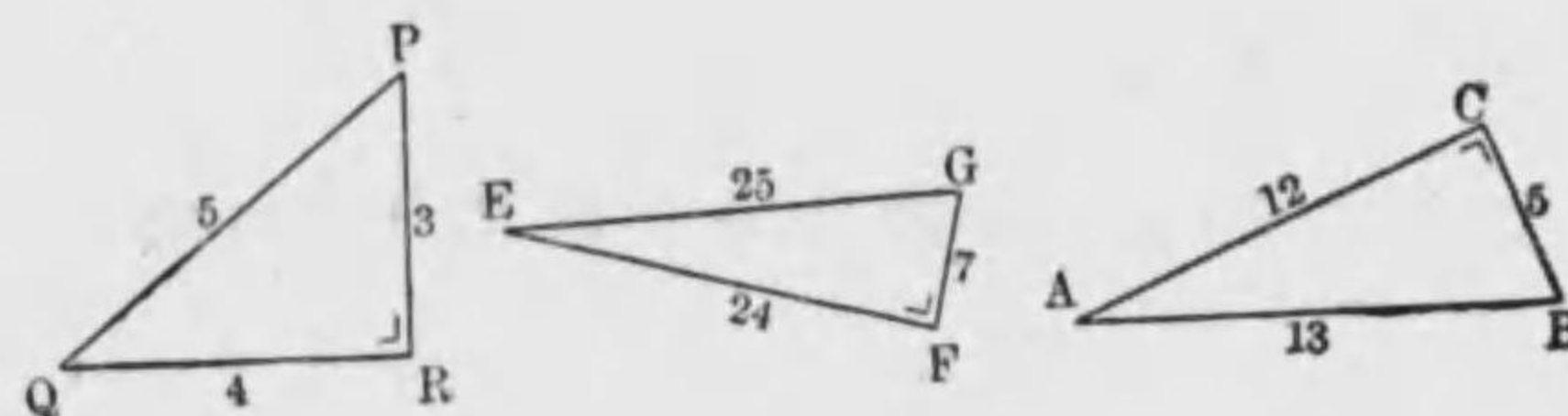
$$\sin A = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} \text{ (水車)} \quad \cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} \text{ (停車)} \quad \tan A = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} \text{ (水底)}$$

ト記憶セヨ。



## 問題 12.

1. 下ノ圖ニ於テ、



$\sin Q$ ,  $\tan P$ ,  $\cos E$ ,  $\sin G$ ,  $\tan F$ ,  $\tan B$  ノ値ヲ問  
フ。

2. 或山腹ノ傾斜ガ  $47^\circ$  デアルトキ頂上ニ向ツテ

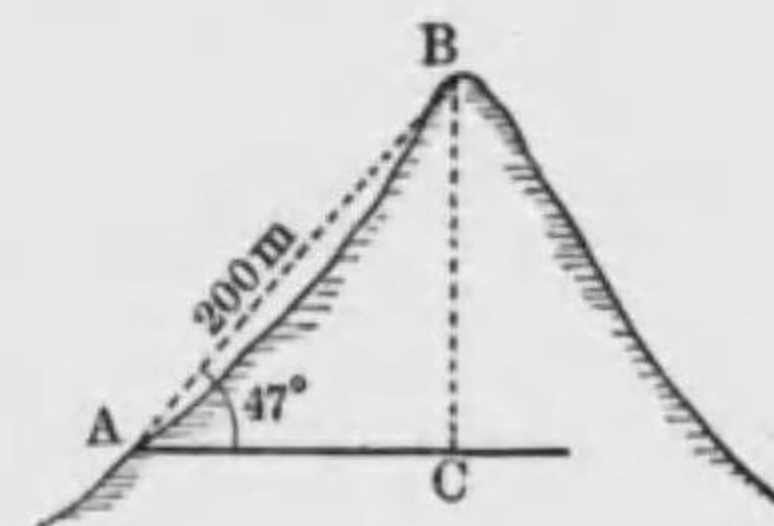
200 m 進メバ垂直ニ何程

昇ツタコトニナルカ。又

水平ニ何程進ンダコトニ

ナルカ。但シ、

$$\sin 47^\circ = 0.7314, \quad \cos 47^\circ = 0.6820$$



3. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

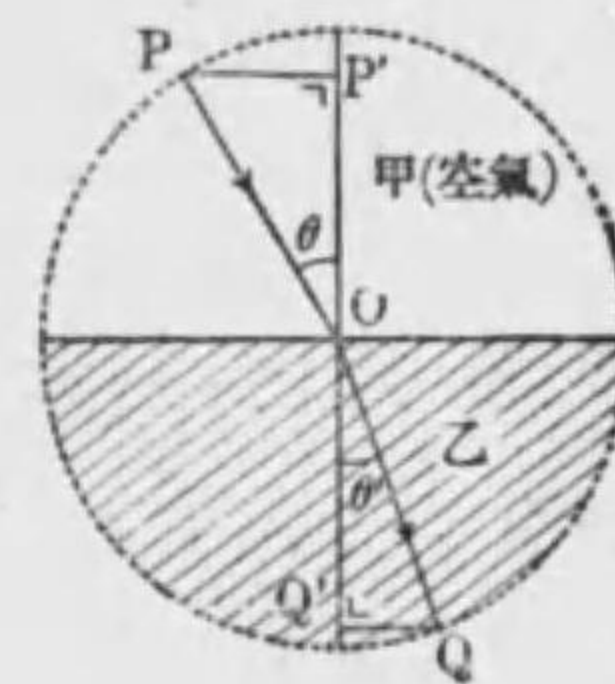
$$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

4. 右圖ニ於テ光線ガ空氣中(物

質甲)ヲ通ツテ他ノ物質乙ニ入

ルトキ  $\frac{PP'}{QQ'}$  ノ値ヲ三角函數ヲ

用ヒテ表ハセ。



**注意**  $\frac{PP'}{QQ'}$  ヲ甲物質(空氣)ニ對スル乙物質ノ屈折率ト云フ。通例或物質ノ屈折率トハソノ物質ノ空氣ニ對スル屈折率ヲ云フ。

### 餘切 正割及餘割

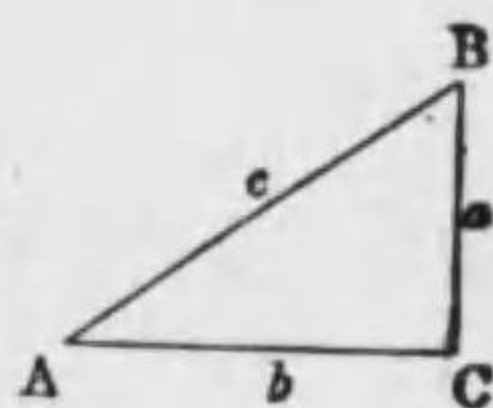
正切, 餘弦, 正弦ノ逆數ヲ夫々餘切 (Cotangent), 正割 (Secant) 及ビ餘割 (Cosecant) ト云ヒ,  $\cot A$ ,  $\sec A$ ,  $\operatorname{cosec} A$  ト書ク。

$$\text{即チ} \begin{cases} \frac{1}{\tan A} = \cot A \\ \frac{1}{\cos A} = \sec A \\ \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A \end{cases}$$

$$\sin A = \frac{a}{c} \longrightarrow \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \longrightarrow \sec A = \frac{c}{b}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \longrightarrow \cot A = \frac{b}{a}$$



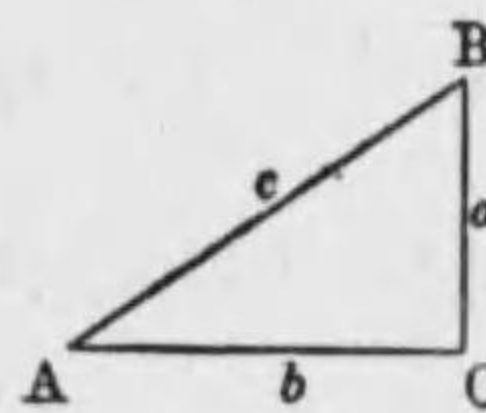
**定義** 一ツノ角ノ正弦, 餘弦, 正切, 餘切, 正割, 餘割ヲ總稱シテ其ノ角ノ三角函數トイヒ三角函數ノ性質及ビソノ應用ヲ研究スル學問ヲ三角法ト云フ。

**注意** 三角法ヲ平面三角法ト球面三角法トニ分ケル。本書ニ論ズルモノハ平面三角法デアアル。

### 正弦 餘弦ノ平方ノ和

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\begin{aligned} \text{證} \quad \sin^2 A + \cos^2 A &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1 \end{aligned}$$



**注意**  $\sin^2 A$  ハ  $(\sin A)^2$  ヲ略シテ書イタモノ。  
 $\sin^n A$  ハ  $(\sin A)^n$  ノ略。

### 問題 13.

1.  $\sin A = \frac{1}{2}$  ヲ知リテ  $\cos A$ ,  $\tan A$  ノ値ヲ求メヨ。
2.  $\cos \theta = \frac{3}{4}$  ヲ知リテ  $\sin \theta$ ,  $\tan \theta$  ヲ求ム。
3.  $\sin^2 \theta (1 + \cot^2 \theta) = 1$  ヲ證明セヨ。
4.  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$  ナルトキ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ナルコトヲ證明セヨ。

### 29. 餘角ノ三角函數

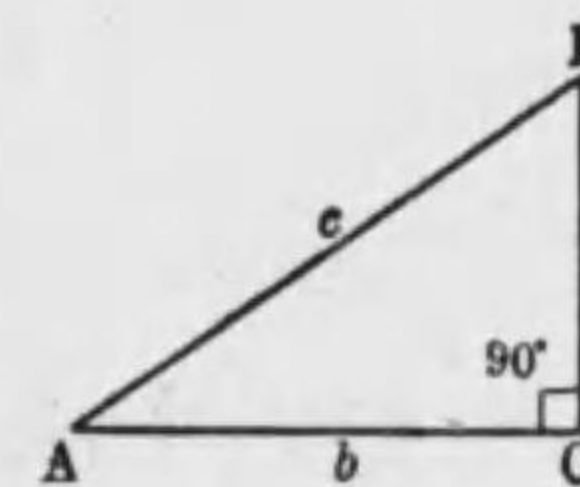
右ノ圖ニ於テ,

$$A + B = 90^\circ \quad B = 90^\circ - A$$

$$\text{然ルニ} \quad \sin B = \frac{b}{c} = \cos A$$

$$\therefore \sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\text{以下同様ニ} \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A$$



$$\tan(90^\circ - A) = \cot A$$

$$\cot(90^\circ - A) = \tan A$$

例へば  $\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$

$$\therefore \sin 60^\circ = \cos 30^\circ$$

又  $\tan 60^\circ = \cot(90^\circ - 60^\circ) = \cot 30^\circ$

$$\therefore \tan 60^\circ = \cot 30^\circ$$

### 問題 14.

1. 次ノ三角函数ヲ  $45^\circ$  ヨリ小サイ角ノ三角函数ニ直セ。

$$\sin 80^\circ \quad \cot 73^\circ \quad \tan 65^\circ 20' \quad \cot 80^\circ 10'$$

2.  $A+B+C=180^\circ$  ナルトキ次式ヲ證明セヨ。

$$\textcircled{1} \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \quad \textcircled{2} \tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$$

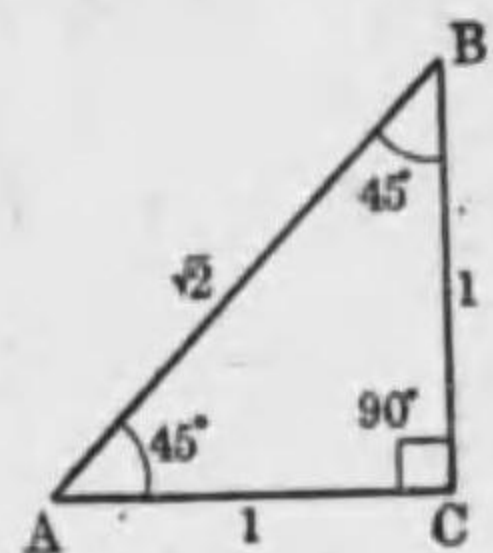
### 30. 特別ノ角ノ三角函数

#### (1) $45^\circ$ ノ三角函数

右圖ニ於テ、

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ = 1 = \cot 45^\circ$$



#### (2) $30^\circ$ 及ビ $60^\circ$ ノ三角函数

次圖ニ於テ AB ヲ 2 トシ BC ノ中點 D トスルト

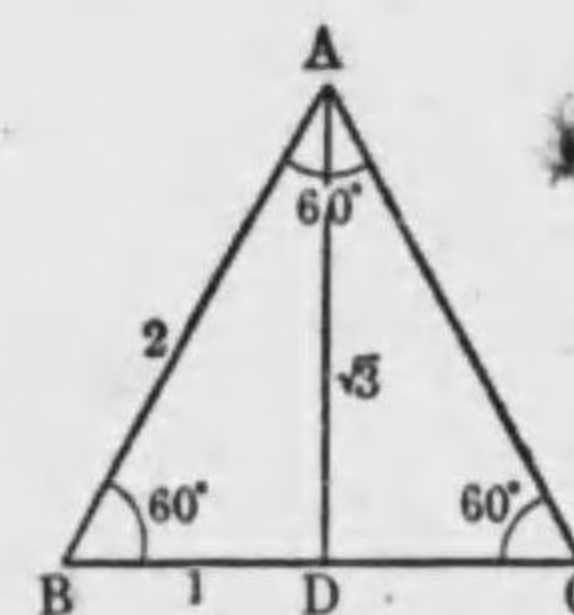
$AD = \sqrt{3}$  トナル。

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

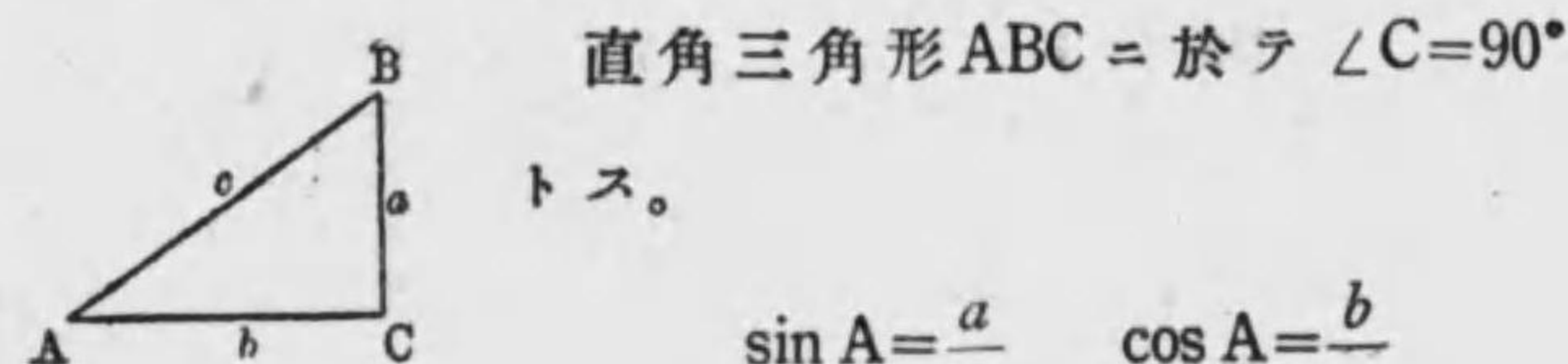
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$$



#### (3) $0^\circ$ 及ビ $90^\circ$ ノ三角函数



直角三角形 ABC ニ於テ  $\angle C = 90^\circ$

トス。

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \cos A = \frac{b}{c}$$

$\angle A$  ガ減少スレバ  $a$  ハ次第ニ減少ス。 $\angle A$  ガ限りナク減少スレバ  $a$  モ亦限りナク減少ス。故ニ極限ニ於テ、

$$\sin 0^\circ = 0$$

又  $A$  ガ限りナク減少スレバ極限ニ於テハ  $c$  ハ  $b$  ニ重ナル。

$$\therefore \cos 0^\circ = 1 \quad \text{又} \quad \tan 0^\circ = 0$$

又  $\cot A = \frac{1}{\tan A}$  ナル故  $A$  ガ減少スレバ  $\tan A$  ハ減少シ  $\cot A$  ハ次第ニ増大ス。故ニ  $\angle A$  ガ限りナク減少スレバ  $\cot A$  ハ限りナク増大ス。故ニ極限ニ於テ、

$$\cot 0^\circ = \infty$$

〔註〕 $\infty$ ハ無限大ノ記號デ如何ナル數ヨリモ大ナル數ヲ表ハス。

$$\text{同様} = \sec 0^\circ = 1 \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty$$

### 特別ナル角ノ三角函數

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$

### 問題 15.

次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

- $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \tan 45^\circ$
- $1 + \tan^2 60^\circ - \sec^2 60^\circ$  ( $\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ}$ )
- $\sin^2 60^\circ - \cot^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$
- $\cos 60^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cot 60^\circ$

5. 右圖ニ於テ大砲ガ初速  $v_0$  仰角  $\theta$  ヲ以テ彈丸ヲ發射スルトキ,



$$\text{彈着距離 (AB)} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g}$$

ヲ以テ表ハサレルト云フ。モシ  $\theta = 45^\circ$  ナラバ彈着

距離ハ何程カ。又  $\theta = 60^\circ$  及  $\theta = 30^\circ$  ノトキドウカ。但  $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$

### 31. 三角函數ノ眞數表

三角函數ノ値ハ角ガ特別ナ角即  $30^\circ, 60^\circ$  等デアレバ幾何學的ニ求メ得ルガ一般ノ角ニ就テハ高尚ナ方法ニ依ラネバ求メルコトガ出來ヌカラ普通ニハ古來學者ノ計算シテ置イタモノヲ使用スル。コノ表ヲ三角函數ノ眞數表ト云フ。

例 1.  $\sin 37^\circ 30'$  ヲ求メヨ。

解 表ノ最上列ノ sin ノ欄ニテ最左端ノ角ノ欄中ノ  $37^\circ 30'$  ト同ジ列ニアル數ヲ取リテ,

$$\sin 37^\circ 30' = 0.6088 \quad \text{ヲ得。}$$

例 2.  $\cos 67^\circ 20'$  ヲ求メヨ。

解 表ノ下端 cos トアル欄ニテ右端ノ角ノ欄中ノ  $67^\circ 20'$  ト同ジ列ニアル數ヲ取リテ,

$$\cos 67^\circ 20' = 0.3854 \quad \text{ヲ得。}$$

例 3.  $\sin 58^\circ 27'$  ヲ求メヨ。

解 表ニヨリ  $\sin 58^\circ 20' = 0.8511$  表差

$$\sin 58^\circ 30' = 0.8526 \quad 0.0015$$

角ノ差ガ小サイ時ハ函數ノ値ハ角ニ比例スルモ

$$\text{ノト見做シテ } 10':7' = 0.0015:x \quad x = \frac{0.0015 \times 7}{10} = 0.0011$$

$$\begin{aligned} \text{故} = \sin 58^\circ 27' &= 0.8511 + 0.0011 \\ &= 0.8522 \end{aligned}$$

コノ計算ハ次ノ如クスル。

$$\begin{array}{r} \sin 58^\circ 27' \\ 58^\circ 20' \dots\dots 0.8511 \\ \quad 7' \dots\dots 11 \\ \hline \sin 58^\circ 27' = 0.8522 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{表差} = 15 \\ 15 \times \frac{7}{10} = 11 \end{array}$$

例 4.  $\cos 24^\circ 18'$  ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r} \cos 24^\circ 18' \\ 24^\circ 10' \dots\dots 0.9124 \\ \quad 8' \dots\dots -10 \\ \hline \cos 24^\circ 18' = 0.9114 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{表差} = 12 \\ 12 \times \frac{8}{10} = 10 \end{array}$$

例 5.  $\tan A = 0.4118$  ヨリ  $A$  ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r} \tan 22^\circ 20' = 0.4108 \\ \tan 22^\circ 30' = 0.4142 \\ 0.4118 - 0.4108 = 0.0010 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{表差} \\ 0.0034 \end{array}$$

$$\text{故} = 0.0034 : 0.0010 = 10' : x' \quad x = 10 \times \frac{10}{34} = 3$$

$$A \text{ハ } 22^\circ 20' \text{ ヨリ } 3' \text{ 大キイト見テ } A = 22^\circ 20' + 3' = 22^\circ 23'$$

コノ計算ハ次ノ如ク記ス。

$$\begin{array}{r} \tan A = 0.4118 \\ 0.4108 \dots\dots 22^\circ 20' \\ \quad 10 \dots\dots 3' \\ \hline A = 22^\circ 23' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{表差} = 34 \\ 10 \times \frac{10}{34} = 3 \end{array}$$

### 問題 16.

表ニヨリ次ノ三角函數ノ値及ビ角  $x$  ヲ求メヨ。

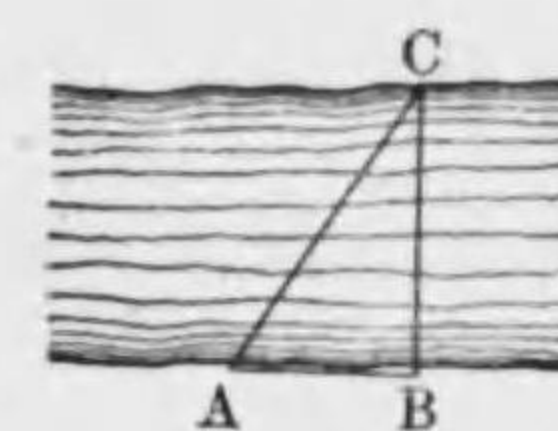
1.  $\sin 35^\circ 20'$
2.  $\cos 63^\circ 40'$
3.  $\tan 23^\circ 30'$
4.  $\cos 51^\circ 36'$
5.  $\tan 63^\circ 24'$
6.  $\sin 18^\circ 12'$
7.  $\sin x = 0.6202$
8.  $\cot x = 0.9601$
9.  $\tan x = 0.6064$
10.  $\cos x = 0.4843$

11. 或人ガ川幅ヲ測ツテ右ノ圖

形ヲ得タ川幅ハ幾ラカ。

$$AB = 23 \text{ m}, \quad A = 58^\circ 30'$$

$$B = 90^\circ$$



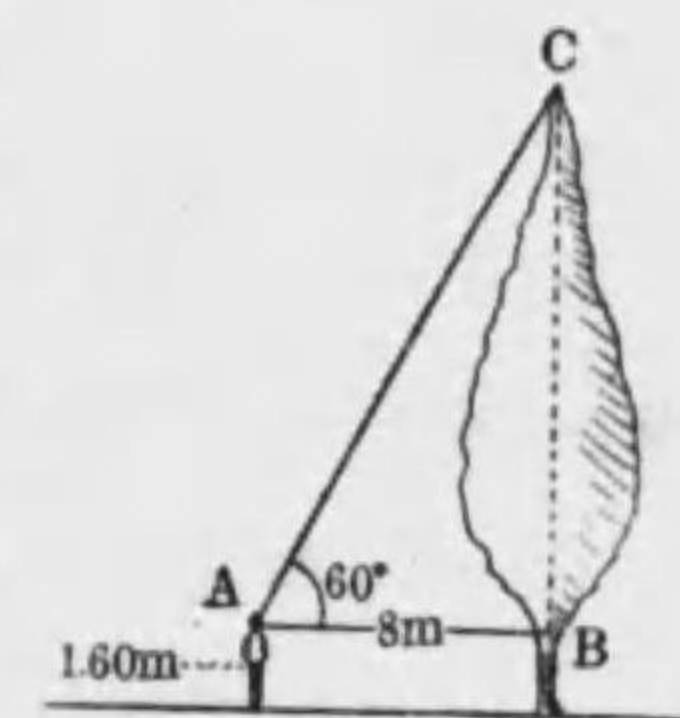
12. 或人ガ平地デ或立木ノ根

元カラ 8m ノ所デソノ立木

ノ頂點ノ仰角ヲ測ツタラ

$60^\circ$  デアツタトイフ立木ノ

高サヲ求メヨ。



13. 高サ 45.5m ノ塔ガアル。太陽ノ仰角ガ  $30^\circ$  デ

アルトソノ影ノ長サハ幾ラカ。

14. 高サ 163m ノ崖ノ上 A カラ海上

ノ舟 B ヲ測ツテ俯角  $54^\circ 10'$  ヲ得

タ AB ノ距離ヲ求メヨ。

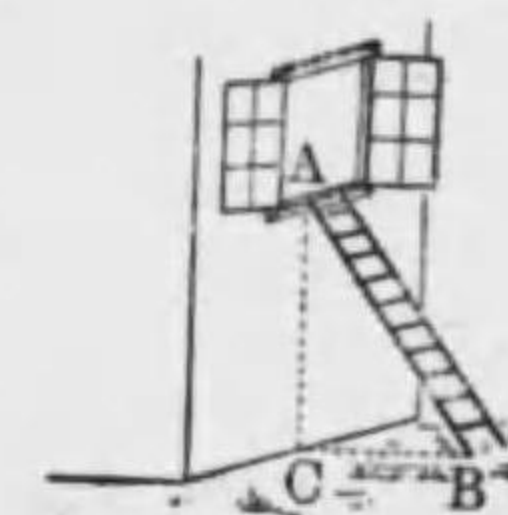


15. 或家屋ノ窓ニ長サ 4m ノ梯子

ヲ懸ケルト地面ト梯子トノ角度

ハ  $45^\circ$  デアツタトイフ。窓ノ高

サヲ求メヨ。

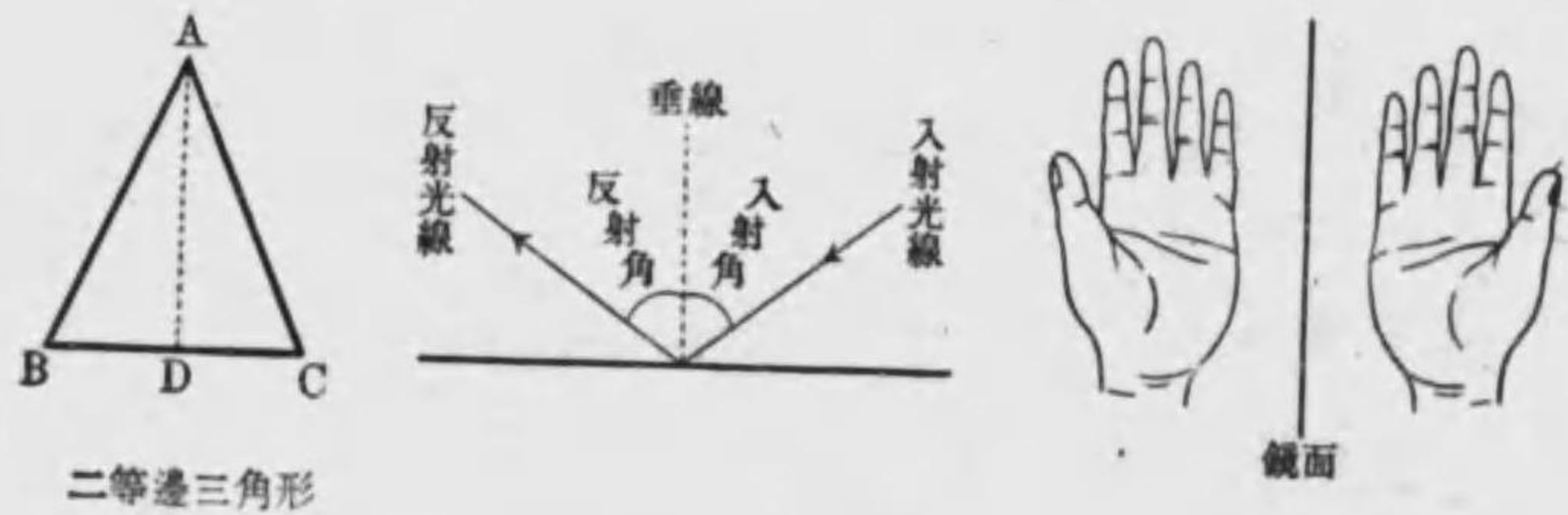




### 32. 對稱圖形

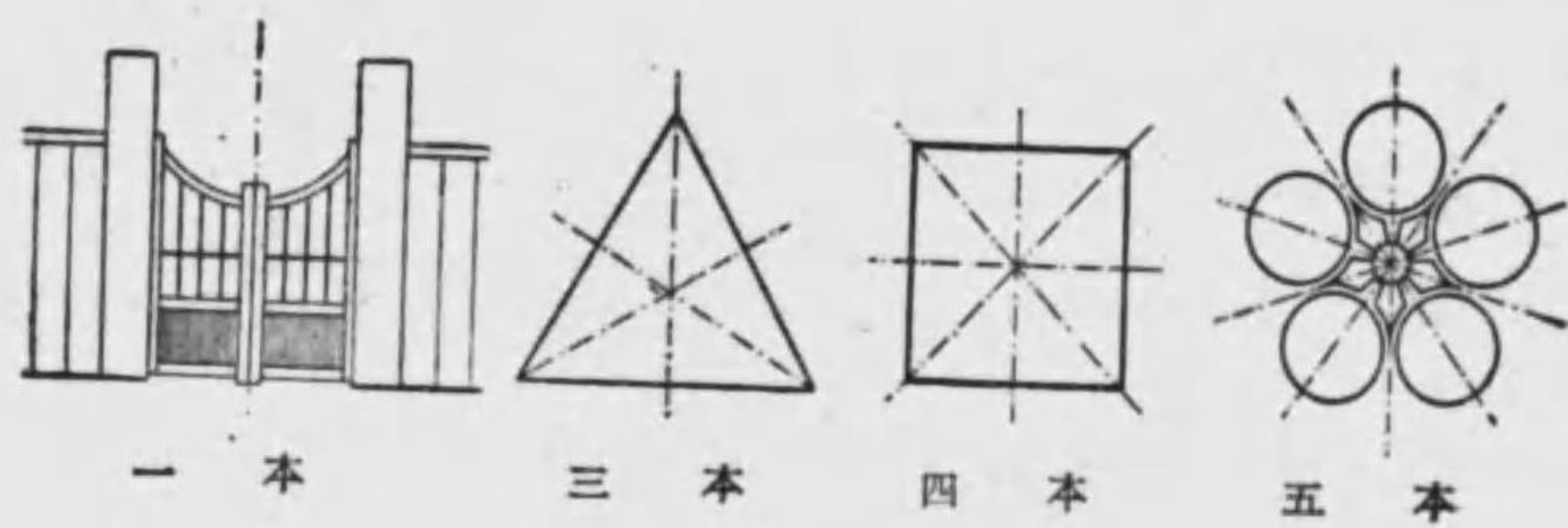
一ツノ直線ヲ折リ目トシテ一ツノ平面ヲ折リ重  
ネタトキコノ直線ノ片側ノ圖形ガ他ノ側ノ圖形ト  
全ク重ナリ合フトキコノ圖形ハ、コノ直線ニ關シテ  
對稱デアルトイヒ、コノ直線ヲ對稱ノ軸トイフ。

カカル圖形ヲ對稱圖形トイフ。



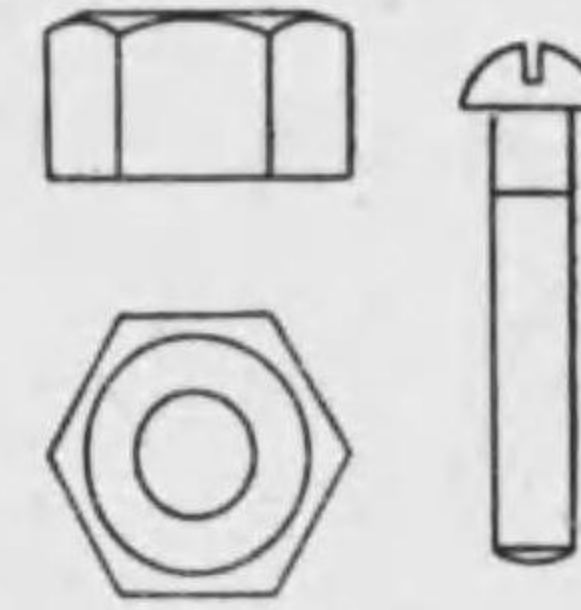
對稱圖形ハ美ノ一要素デアルカラ、裝飾、圖案、建築等ニ應  
用セラルルコトガ甚ダ多イ。

對稱圖形ノ内ニハ數多ノ對稱軸ヲ持ツモノガア  
ル(圓ナドハ無數アル)。



### 問題 17.

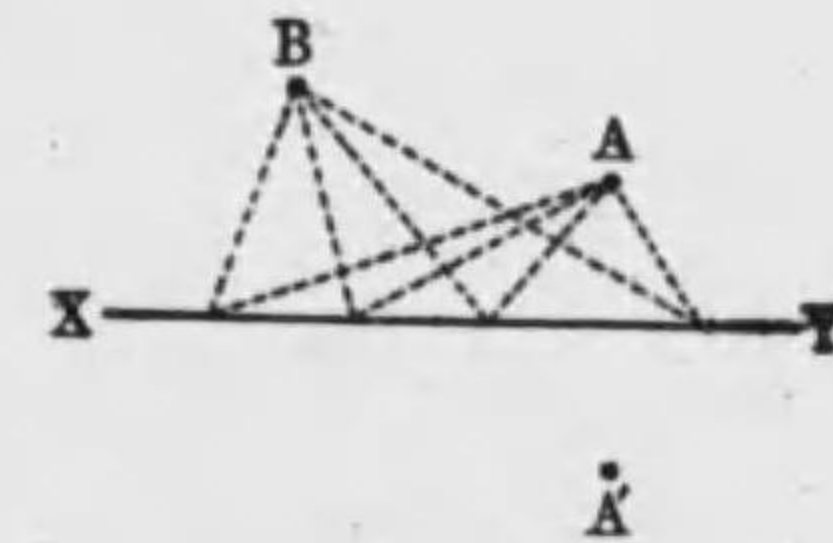
1. 次ノ圖ノ對稱軸ヲ引ケ。



2. 下ノ圖形ノ對稱軸ハ何カ。又幾ツアルカ。



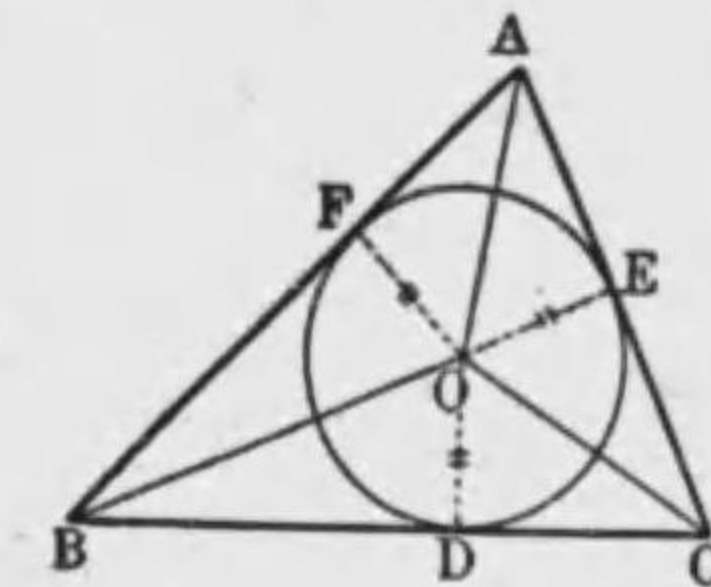
3. 圖ノ如キ一直線XYノ  
同ジ側ニA, Bアリ。A  
ヨリ出デテXY上ノ或一  
點ニ至リ之ヨリBニ達



スル最モ近道ヲ求メヨ。(XYニ關シAノ對稱點A'ヲ  
求メテ考ヘヨ)

### 33. 三角形ノ五心

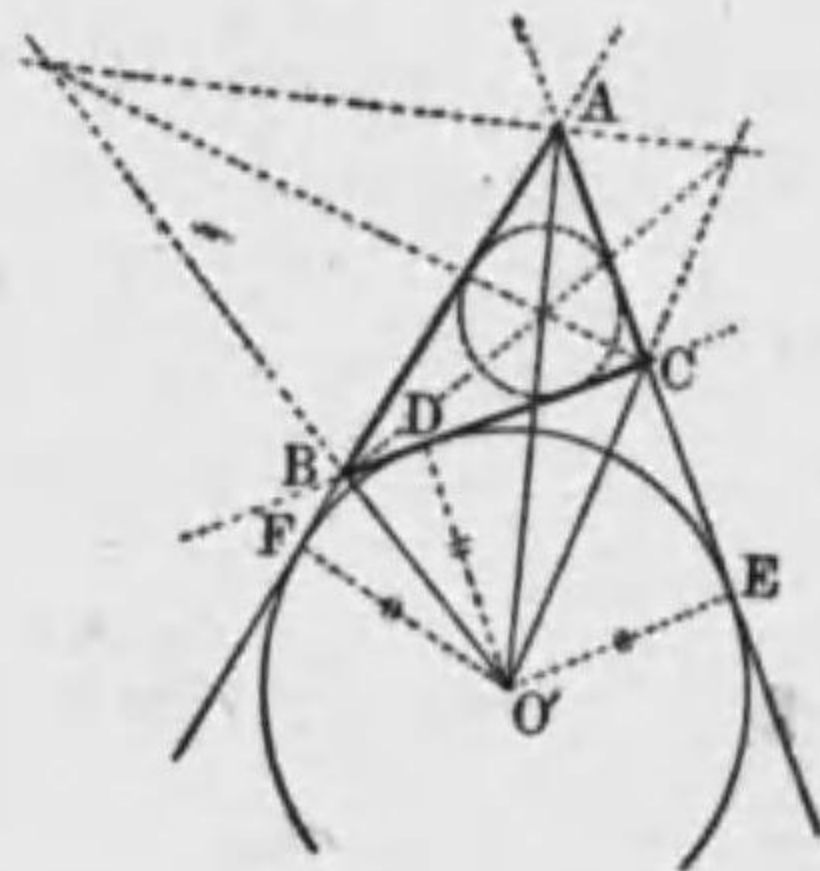
1. 三角形ノ三ツノ内角ノ二等分線ハ一點デ交ハ  
リ、ソノ交點ハ各邊カラ等距離  
ニアル。



コノ點ヲ三角形ノ内心トイ  
フ。

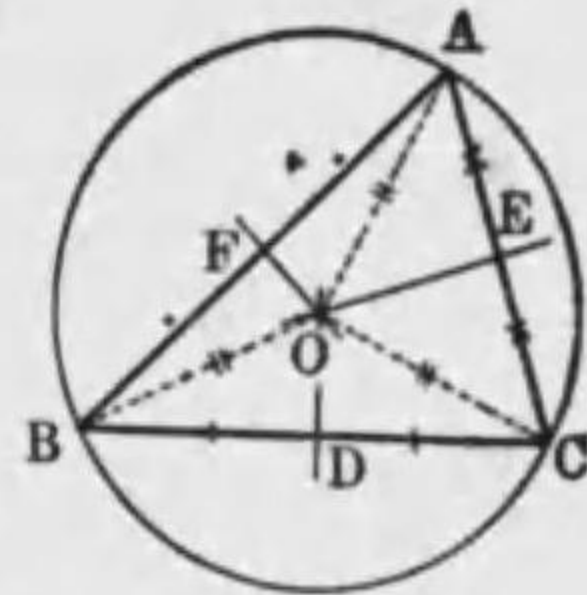
注意 圖ニ於テO圓ヲ内接圓トイフ。

2. 三角形ノ一ツノ内角ノ二等分線ト他ノ二角ノ外角ノ二等分線トハ一點デ交ハリ、ソノ交點ハ各邊カラ等距離ニアル。  
 コノ點ヲ三角形ノ**傍心**トイフ。(一ツノ三角形ニツイテノ傍心ハ三ツアル)



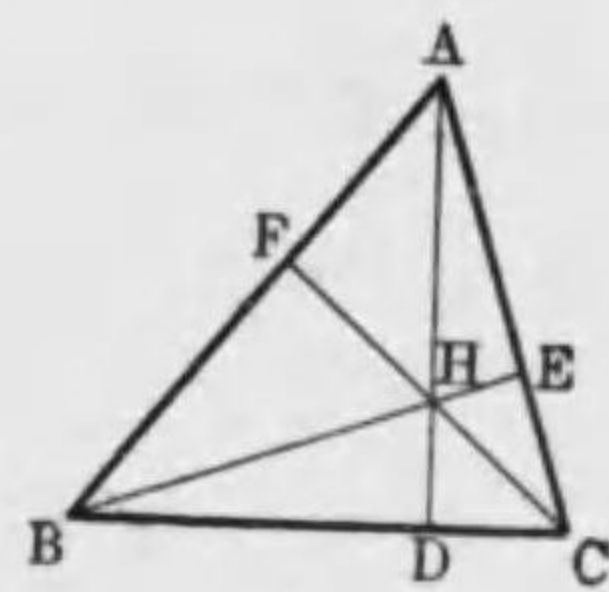
**注意** 圖ニ於テO'圓ヲ傍接圓トイフ。

3. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ一點デ交ハリ、ソノ交點ハ各頂點カラ等距離ニアル。コノ點ヲ三角形ノ**外心**トイフ。



**注意** 圖ニ於テO圓ヲ外接圓トイフ、コレヲ用ヒテ三點ヲ通ル圓ヲ畫キ得ル。

4. 三角形ノ各頂點カラ對邊ヘ下シタ垂線ハ一點デ交ハル。  
 コノ點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。  
**定義** 三角形ノ頂點カラ

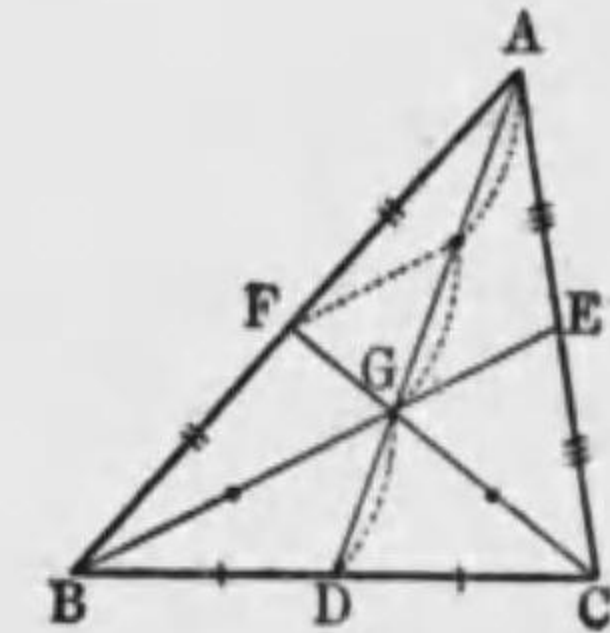


對邊ノ中點ヘ引イタ直線ヲ**中線**トイフ。

5. 三角形ノ三ツノ中線ハ一點デ交ハリ、且ツコノ交點カラ各頂點ニ至ル距離ハ、ソノ頂點カラ出ル

中線ノ  $\frac{2}{3}$  デアル。

コノ點ヲ三角形ノ**重心**トイフ。  
 圖ニ於テ三中線 AD, BE, CF ハ一點 G(重心)ニ會シ、



$$AG = \frac{2}{3}AD \quad BG = \frac{2}{3}BE \quad CG = \frac{2}{3}CF$$

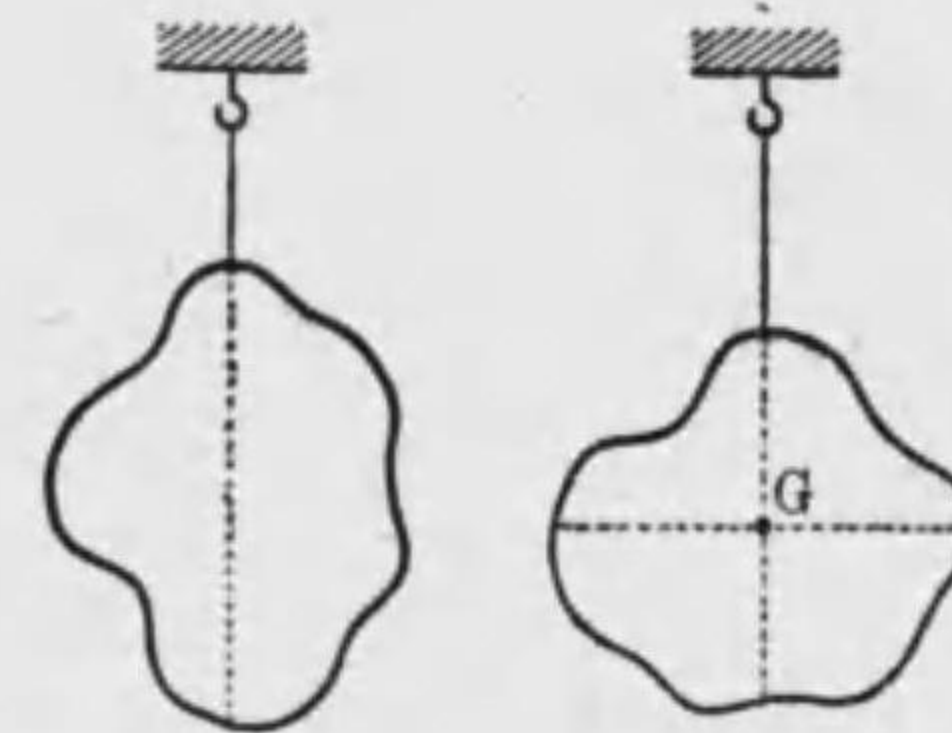
重心ハ力學上重要ナ點デアル。凡ユル物體ニハ皆重心ガアツテ物體ノ全重量ハ常ニコノ點ニ作用スルモノト考ヘラレル。

**規則正シイ形ヲシタ物體ノ重心**

三角形ノ外、規則正シイ形ヲシタ物體例ヘバ正方形、矩形、平行四邊形等ノ重心ハ下圖ノ如ク直ニ知ルコトガ出來ル。



**不規則ナ形ヲシタ物體ノ重心**



不規則ナ形ヲシタ物體(例ヘバ圖ノ如キ板)ノ重心ヲ求メルニハ先ヅ板ノ一端ヲ糸デ吊シソノ糸ノ方向ヲ板上ニ印シ次ニ他ノ別ノ端ヲ吊シ前同様ニ糸ノ

方向ヲ印スレバ先ノ線トノ交點ガ即チ重心トナル。

コノ點ヲ針等デ支ヘルトコノ物體

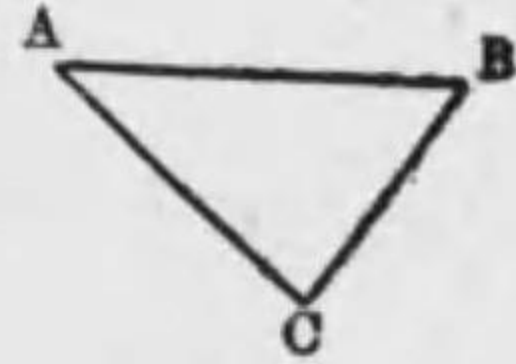
ヲ支ヘルコトガ出來ル。

**注意** 輪ヤこつぶ等ノ重心ハソノ實  
質ノ内ニハナク其ノ内側ノ空  
所ニアル。



問題 18.

1. A, B 及ビ C ナル三村ヨリ等距  
離ナル地點ニ學校ヲ建テントス  
ルニ何處ニ建テタラヨイカ。

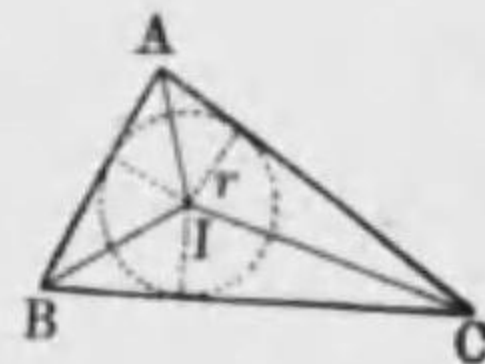


2. 正三角形ニ於テハ内心, 外心, 垂心, 重心ノ四ツガ  
一致スルコトヲ確メヨ。

3. 直角三角形ノ垂心ハ何處カ。

4. 圓 I ハ  $\triangle ABC$  ノ内接圓ナルトキ

$$\triangle ABC \text{ ノ面積} = \frac{r}{2}(AB + BC + CA)$$



ナルコトヲ證明セヨ。但  $r$  ハ内接圓 I ノ半徑。

34. カノ合成

一點 O ニ作用スル二カ P, Q ノ合カヲ R トスレバ,

(1) 二カガ同方向ナラバ,

$$R = P + Q$$

**〔註〕** P, Q ノ長サハカノ大イサニ比例スル線分デ表ハ  
シ, 矢ハ方向ヲ表ハス。

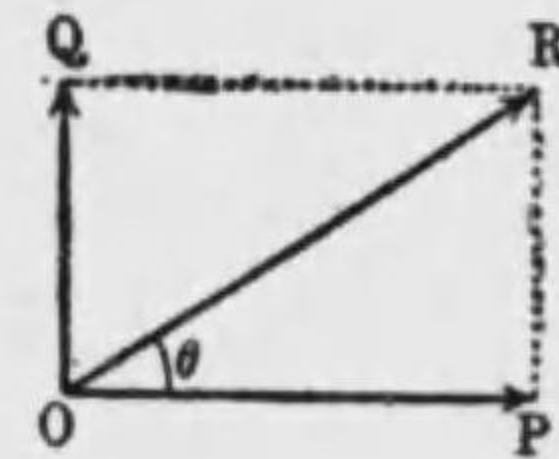
(2) 二カガ反方向ナラバ,

$$R = P - Q$$

若シ  $P = Q$  ナラバ  $R = 0$  此ノトキ二カハ釣合フ  
トイフ。

(3) 二カガ互ニ垂直ナラバ R ハ

P, Q ヲ二邊トシタ矩形ノ對角  
線ヲ以テ表ハサレル。

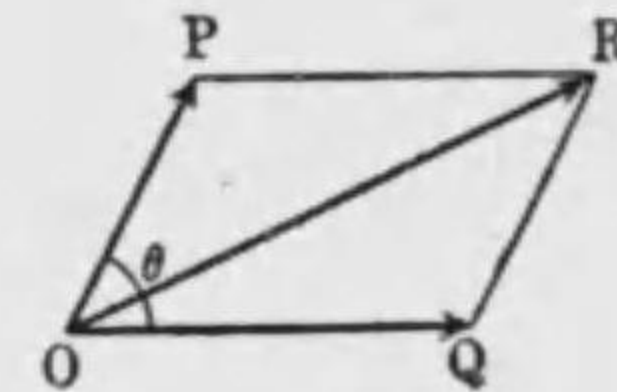
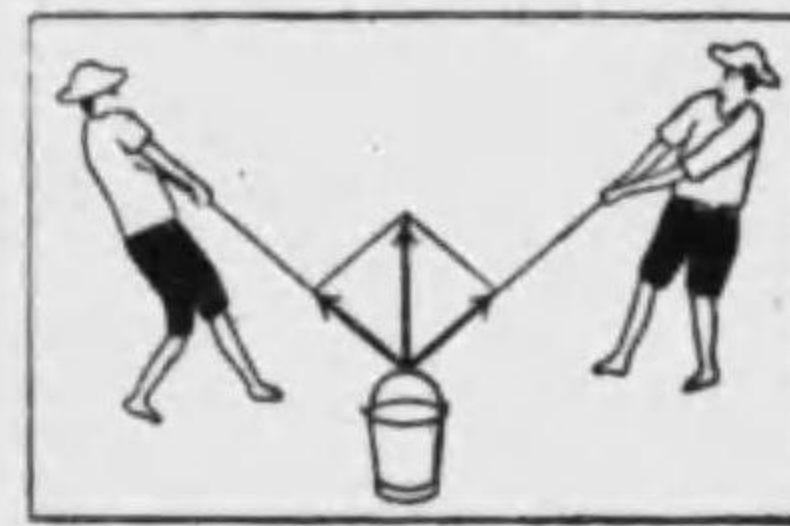


此ノ場合  $R = \sqrt{P^2 + Q^2}$  トナル。

又モシ R ナルカガアツテ R ノ水平分力 P, 垂直分  
力 Q ニ分解出來タトスレバ,

$$P = R \cos \theta, \quad Q = R \sin \theta \quad \text{ヲ以テ表ハサレル。}$$

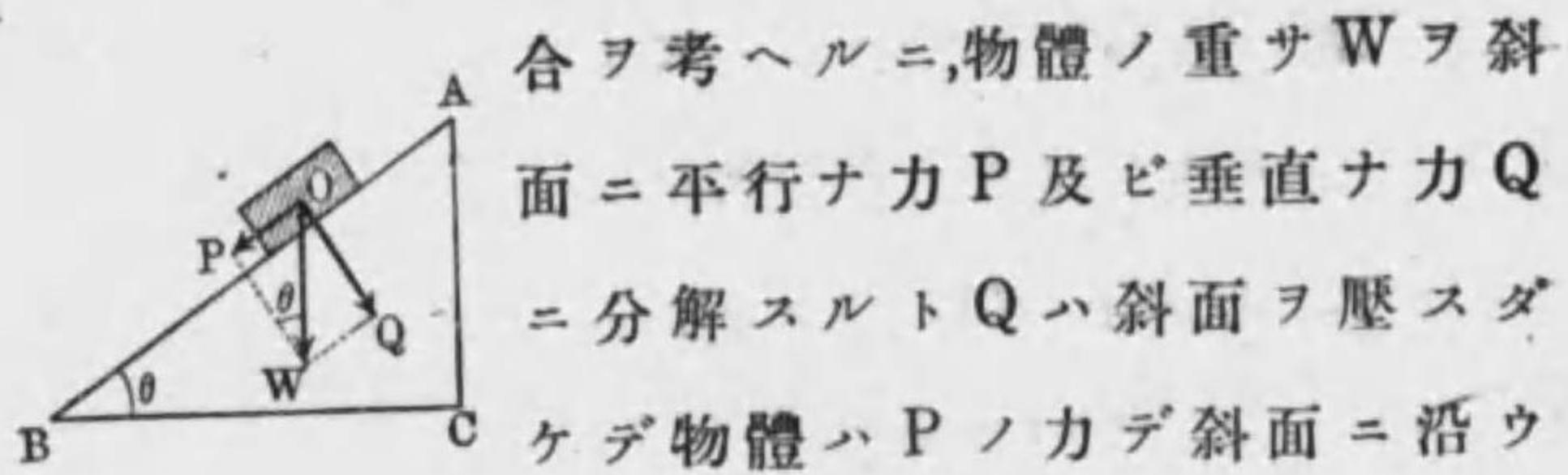
(4) 二カガ  $\angle \theta$  ヲナセバ R ハ P, Q ヲ二邊トシ夾角  
 $\theta$  ヲナス平行四邊形ノ對角線ヲ以テ表ハサレル。



カノ合成ノ實驗

斜面

( $\angle ABC = \theta$ ) ナル滑カナ斜面 AB 上ニ物體ノアル場



合ヲ考ヘルニ、物體ノ重サWヲ斜面ニ平行ナ力P及ビ垂直ナ力Qニ分解スルトQハ斜面ヲ壓スダケテ物體ハPノ力ヲ斜面ニ沿ウテ滑リ落ちル。コノトキ  $P=W \sin \theta$ ,  $Q=W \cos \theta$  デ表ハサル。

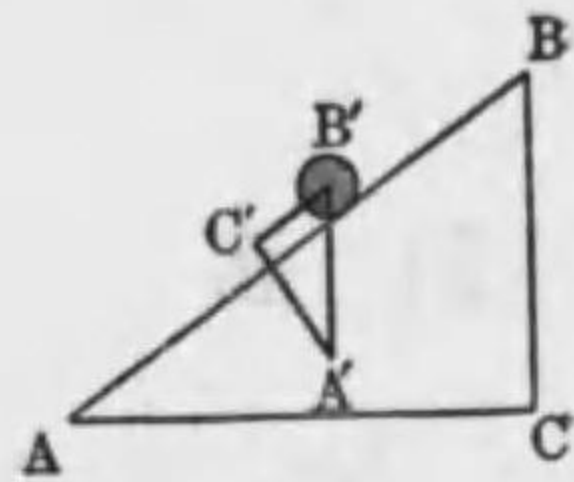
[註]  $OP \parallel AB$ ,  $OW \parallel AC$   $\therefore \angle POW = \angle BAC$   
然ルニ  $\angle POW + \angle OWP = \angle BAC + \theta$   $\therefore \theta = \angle OWP$

斜面ノ應用

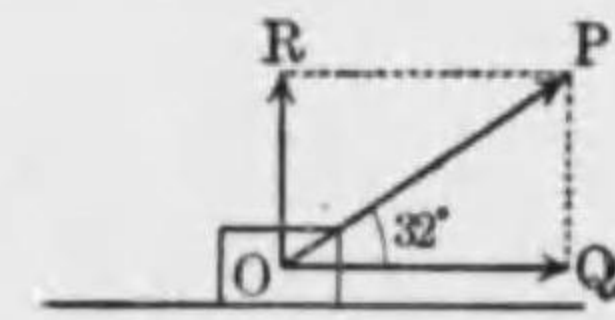


問題 19.

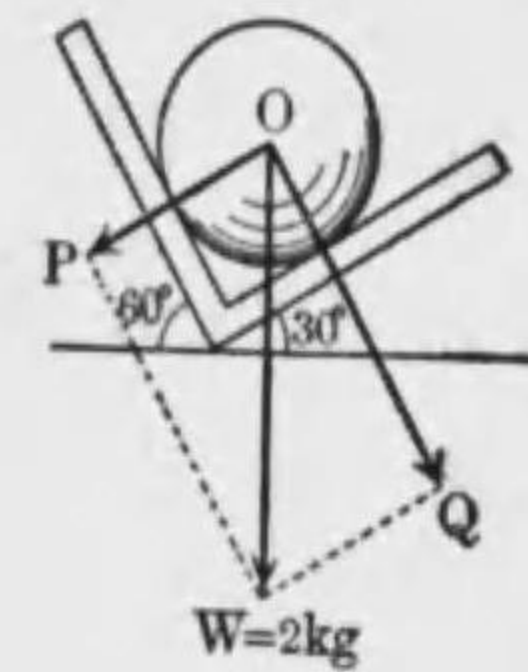
- 傾斜角  $30^\circ$  ノ斜面ニ  $1.8 \text{ kg}$  ノ物體ヲ載セタトキ斜面ニ平行ナ分力及ビ斜面ニ垂直ナ分力ヲ求メヨ。



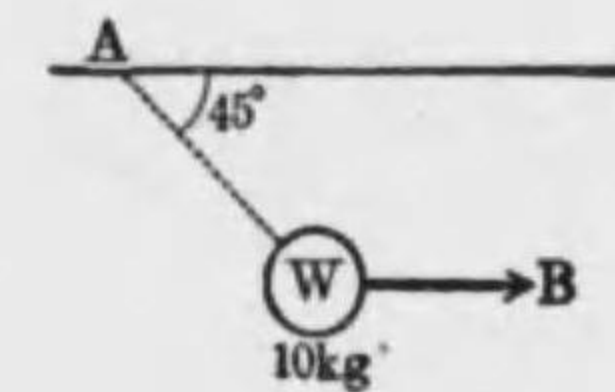
- 或物體ニ水平面ト  $32^\circ$  ノ角度ヲナス方向ニ  $60 \text{ kg}$  ノ力ガ作用シタトキ此ノ物體ニ作用スル水平分力、及ビ垂直分力ヲ求メヨ。



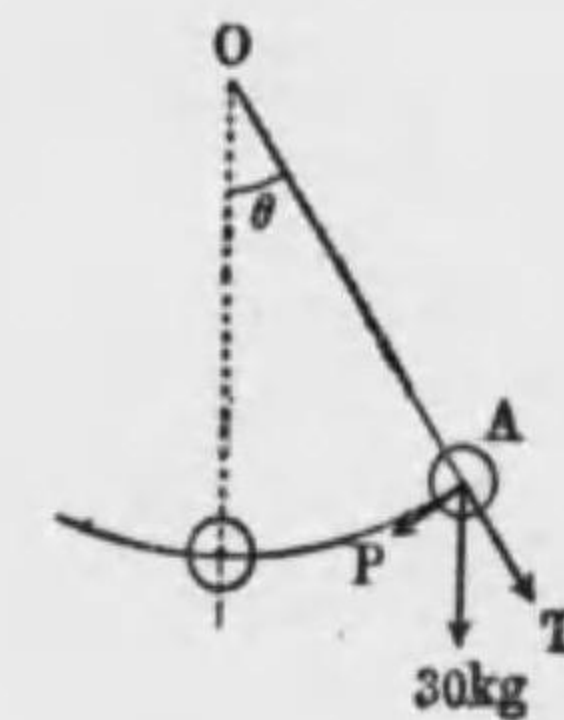
- 圖ノ如ク重サ  $2 \text{ kg}$  ナル球ヲ  $60^\circ$  ト  $30^\circ$  ノ傾キヲ有スル板ノ上ニ乗セタトキ板ニヨツテ支ヘラルル分力P、Qノ大イサヲ求メヨ。



- 圖ノ如ク  $10 \text{ kg}$  ノ錘ヲ鉛直方向ニ吊リ糸AWヲ  $45^\circ$  ノ傾ケタトキ糸ノ張力及ビWBニ沿フテノ力ヲ求メヨ。



- 圖ノ如ク  $30 \text{ kg}$  ノ錘ヲ糸ニテ結ビ他端ヲOニ固定シ振子ヲ作ルトキ振子ガAナル位置ニアルトキノ糸ノ張力T及ビ振子ヲ元ヘモドサウトスル力Pヲ求メヨ。(但シ糸ハタルマヌモノトス)

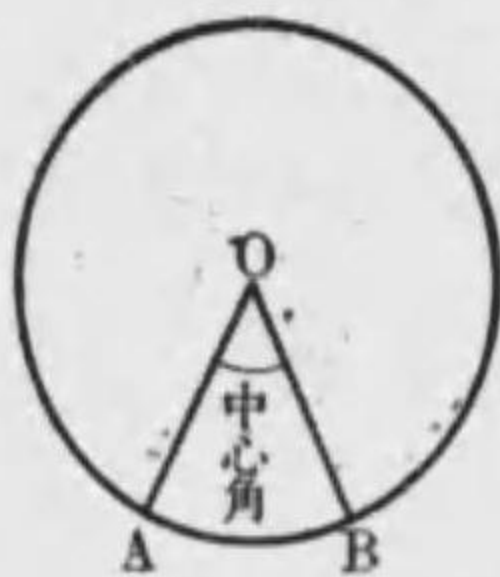


### 第三章 圓

#### 35. 中心角 弧 弦ノ關係

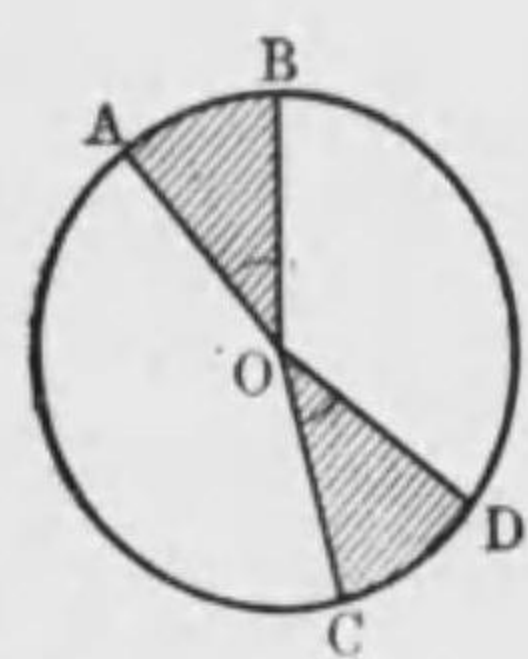
**定義** 圓ノニツノ半徑ノ夾ム角ヲ中心角トイフ。

圖ニ於テ  $\angle AOB$  ガ中心角デアアル。



**定理 20.** 同圓又ハ等圓ニ於テニツノ中心角ガ相等シケレバコレニ對スル弧ハ相等シイ。

**證明**



圖ニ於テ OC ヲ廻轉シ OB ニ重ネルト OD ハ OA ニ重ナリ全ク重ネ合セ得ル。

故ニ  $\widehat{AB}, \widehat{CD}$  ハ一致スル。

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

**系 1.** 同圓又ハ等圓ニ於テニツノ弧ガ相等シケレバ之ニ對スル中心角ハ相等シイ。

即チ  $\widehat{AB} = \widehat{CD}$  ナラバ  $\angle AOB = \angle COD$  デアル。

**系 2.** 同圓又ハ等圓ニ於テ大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリモ大デアアル。此ノ逆モ成立ツ。

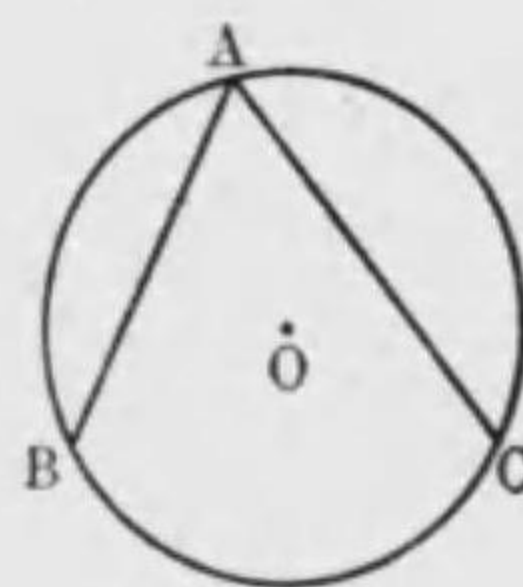
即チ中心角ガ大トナレバ之ニ對スル弧モ大トナル。

**系 3.** 同圓又ハ等圓ニ於テ相等シイ弦ニ對スル弧ハ相等シイ。

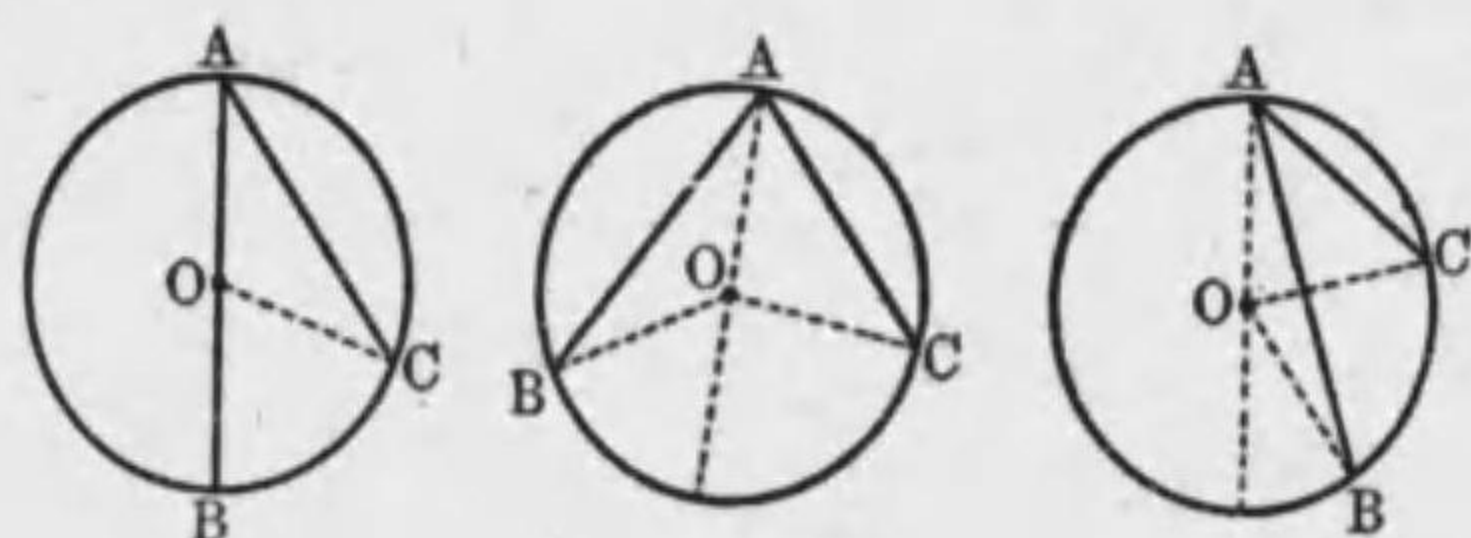
#### 36. 圓周角

**定義** 圓周上ノ一點カラ引イタニツノ弦ノナス角ヲ圓周角トイフ。

圖ニ於テ  $\angle BAC$  ハ  $\widehat{BC}$  上ニ立ツ圓周角デアアル。



**定理 21.** 圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シイ。



假設 圓 O に於て  $\angle BAC$  を BC 上ニ立ツ圓周角トシ、 $\angle BOC$  を同ジ弧上ニ立ツ中心角トス。

終結  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

證明 圖ニ示スヤウニ三ツノ場合ガアル。

(1) 中心 O が AB 上ニアル場合。

$\triangle OAC$  に於て  $OA = OC$

$\therefore \angle A = \angle C$

然ルニ  $\angle BOC = \angle A + \angle C$  (定理 12 系)

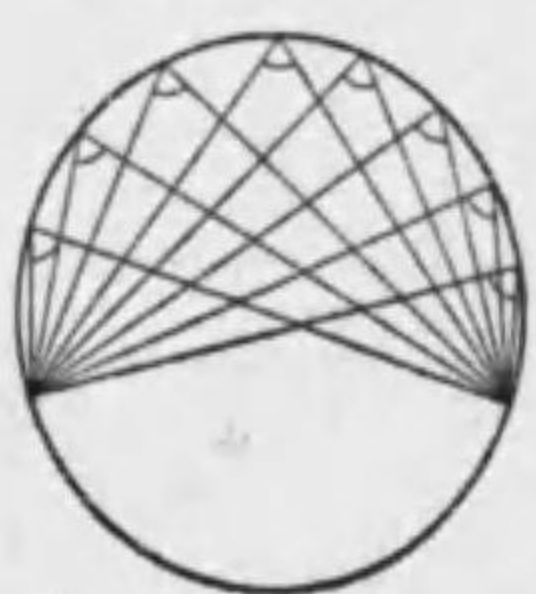
$\therefore \angle BOC = 2\angle A \quad \therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$

(2) 中心 O が  $\angle BAC$  内ニアル場合。

(3) 中心 O が  $\angle BAC$  外ニアル場合。

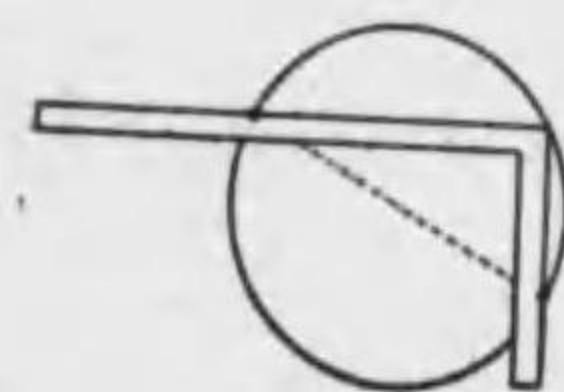
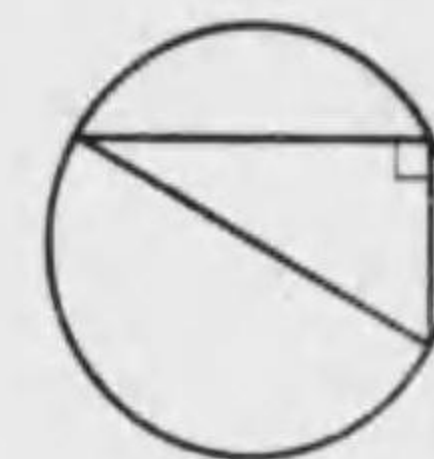
(2), (3) ノ場合モ (1) ト同様ニ考ヘル事ガ出来ル。

系 1. 同圓又ハ等圓ニ於テ同弧又ハ等弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。



系 2. 同圓又ハ等圓ニ於テ相等シイ圓周角ニ對スル弧及ビ弦ハ夫々相等シイ。

系 3. 半圓周又ハ直徑ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアアル。ソノ逆モ眞デアアル。



コノ系ニヨリ曲尺ヲ用ヒテ中心ノ分ラナイ圓板ニ任意ノ點ヲ通ル直徑ヲ引クコトガ出来ル。

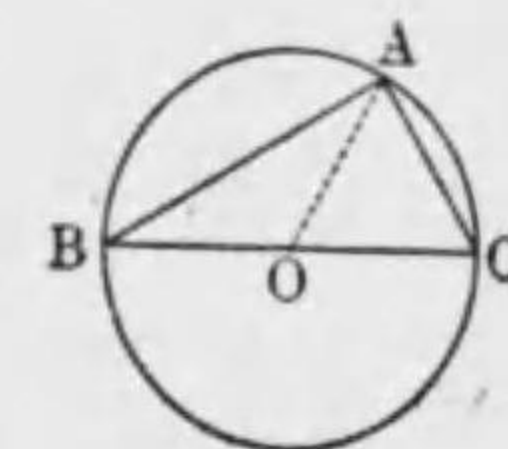
問題 20.

1. 圖ニ於テ正三角形 ABC が圓 O に内接スルトキ  $\angle BOC$  ノ大イサヲ求めヨ。



2. 圓周ノ  $\frac{1}{6}$  ニアリタル弧ニ對スル弦ハ其ノ圓ノ半徑ニ等シイ。

3. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點ヨリ等距離ニアリ。



(ABC ノ外接圓ヲ作り系 3 ヲ用ヒヨ)

4. 相交ハル二弦 AB, CD ノ交點ヲ E トスレバ  $\triangle AEC, \triangle BED$  ノ三ツノ角ハ相等シイ。
5. 圓ノ中心ヨリ弦ニ下セル垂線ハソノ弦ヲ二等分ス。又弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ過ル。

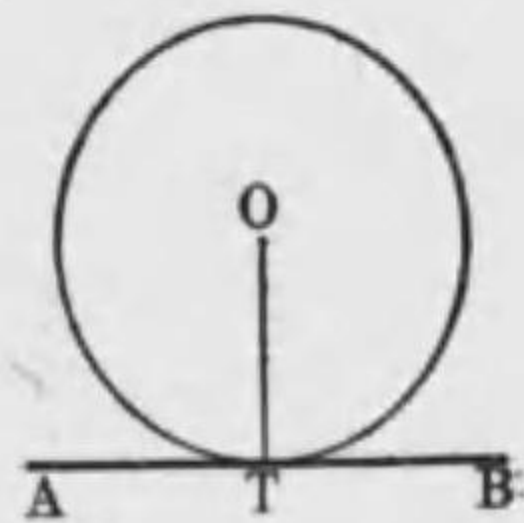
## 37. 切線

**定義** 圓周ト唯一點ニ於テ交ハル直線ヲ切線、ソノ點ヲ切點トイヒ、コノ直線ハ圓ニ切スルト云フ。

**定理 22.** 圓ノ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル直線ハ圓ノ切線デアアル。

**證明** 略ス。

圖ニ於テ  $\angle ATO = \text{R}\angle$  ナラバ ATB ハ切線デアリ T ハ切點デアアル。



**系 1.** 切線ハソノ切點ヲ通ル半徑ニ垂直デアアル。

**系 2.** 切點ニ於テ切線ニ垂直ナル直線ハ中心ヲ通ル。

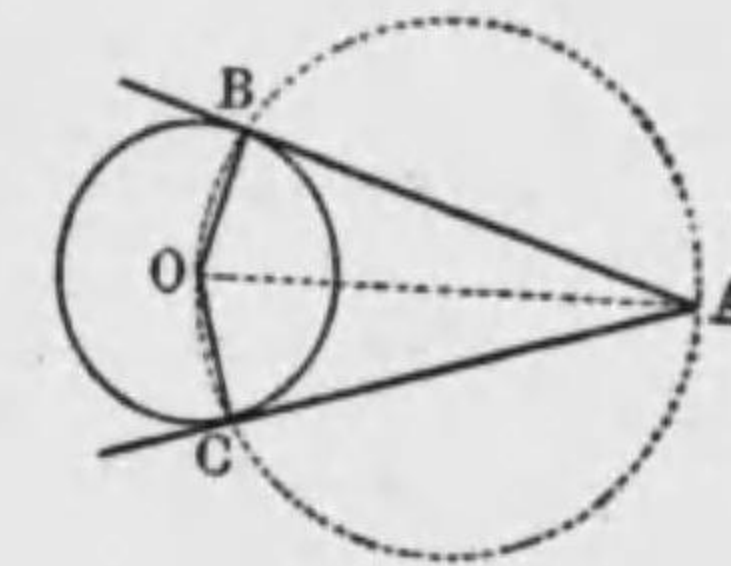
**問** 一錢銅貨ヲ机ノ面ニ直立シテ横ヨリソノ接觸點ヲスカシテ見テ如何ニナルカヲ調べヨ。



**作圖題 8.** 圓外ノ一點カラ此ノ圓ニ切線ヲ引ケ。

**題意** 圓 O 外ノ一點 A ヨリ此ノ圓ニ切線ヲ引クコト。

**作圖** AO ヲ結ビ之ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ圓 O ト B, C ニテ交ハラシメル。AB, AC ヲ結ベバソレ等ガ求メル切線デアアル。



**證明**  $\angle ABO = \angle ACO = \text{R}\angle$  (半圓周上ノ圓周角)

$$\therefore AB \perp OB \quad AC \perp OC$$

故ニ AB, AC ハ圓 O ノ切線デアアル。(定理 22)

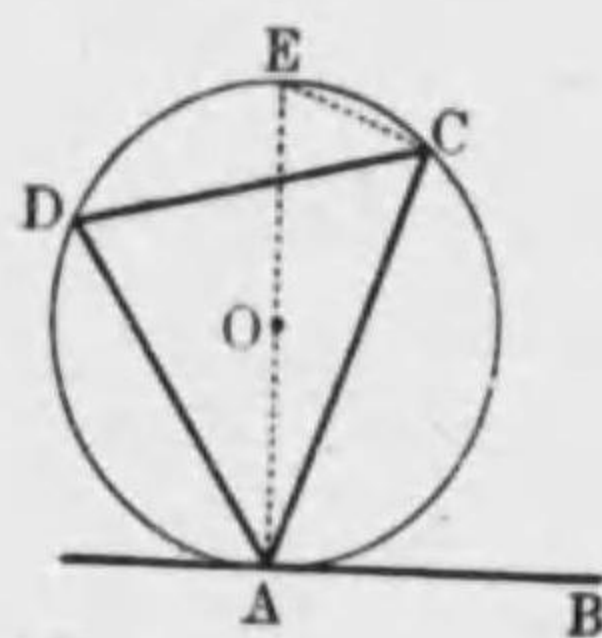
又  $AB = AC$  ( $\triangle ABO \cong \triangle ACO$ )

依テ本作圖ニヨリ圓外ノ一點ヨリ引イタ二本ノ切線ハ相等シイ事ガ分ル。

**定理 23.** 切線トソノ切點ヲ通ル

弦トノナス角ハソノ角内ニアル弧ノ上ニ立ツ圆周角ニ等シイ。

假設 ABヲ圓Oノ周上ノ一點Aニ於ケル切線, ACヲ切點ヲ通ル任意ノ弦トシ, DヲAC上ノ任意ノ一點トス。



終結  $\angle BAC = \angle ADC$

證明 Aヲ通ル直徑AEヲ引キECヲ結ブ,

$$\angle BAC + \angle CAE = R \quad (AE \perp AB)$$

$$\angle AEC + \angle CAE = R \quad (ACE \text{ハ直角三角形})$$

$$\therefore \angle BAC = \angle AEC$$

$$\text{然ルニ } \angle AEC = \angle ADC$$

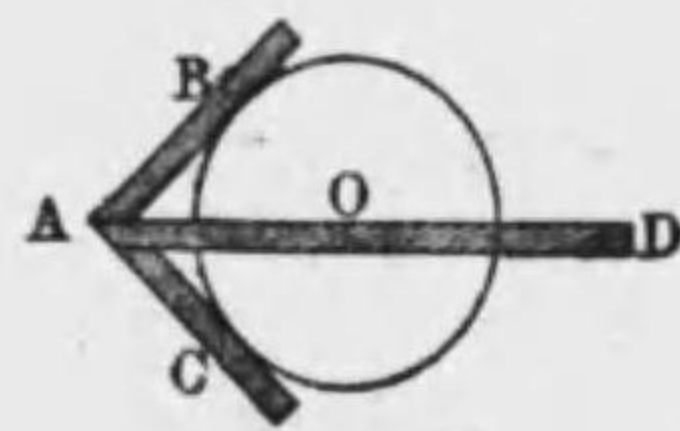
$$\therefore \angle BAC = \angle ADC$$

問題 21.

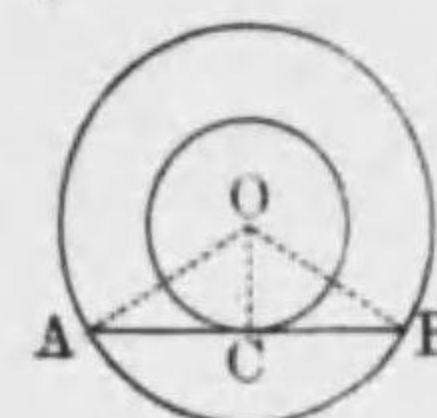
1. 圓外ノ一點ト中心ヲ結ブ線分ハソノ點カラ引イタニツノ切線ノナス角ヲ二等分ス。

(作圖題8ノ圖應用)

2. 右ノ圖ハ圓板ノ中心ヲ見出ス器具デアアル。ソノ構造及ビ用法ヲイへ。

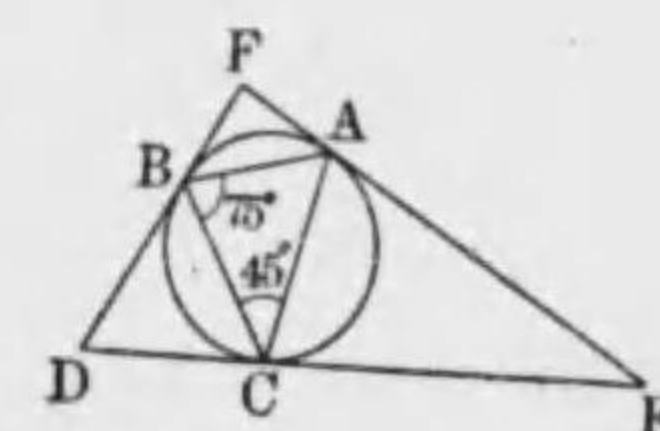


3. ニツノ同心圓ニ於テ大圓ノ弦ABガ小圓ニ切スルトキ,ソノ切點C,ハABノ中點デアアル。



〔註〕同心圓トハ中心ガ同一デ半徑ノ異ナル數多ノ圓ヲイフ。

4. 圖ニ於ケル圓ハ  $\triangle ABC$ ノ外接圓ニシテ  $\triangle DEF$ ノ内接圓ナリ。

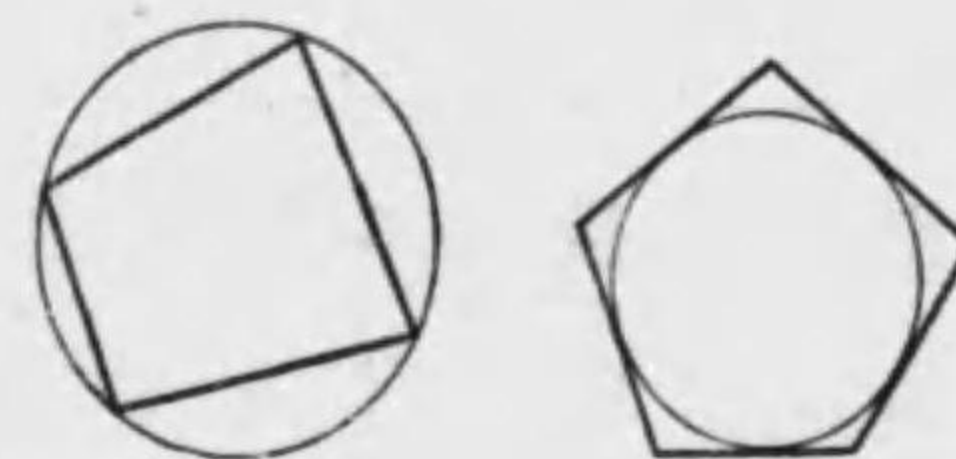


$$\angle ABC = 75^\circ \quad \angle ACB = 45^\circ$$

ナラバ  $\angle D, \angle E, \angle F$ ハ各何度カ。

38. 内接及ビ外接四邊形

定義 多角形ノ各頂點ガ同一圓周上ニアルトキコノ多角形ハ圓ニ内接スルトイヒ,コノ圓ハ多角形ニ外接スルトイフ。又多角形ノ各邊ガソノ形内ニアル同一ノ圓ニ切スルトキハソノ多角形ハコノ圓ニ外接スルトイヒコノ圓ハ多角形ニ内接スルトイフ。





**定理 24.** 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。

假設 ABCD ハ圓ニ内接ス。

終結  $\angle A + \angle C = 2RL$

$\angle B + \angle D = 2RL$

證明 OB, OD ヲ結ビ  $\widehat{BAD}$ ,  $\widehat{BCD}$

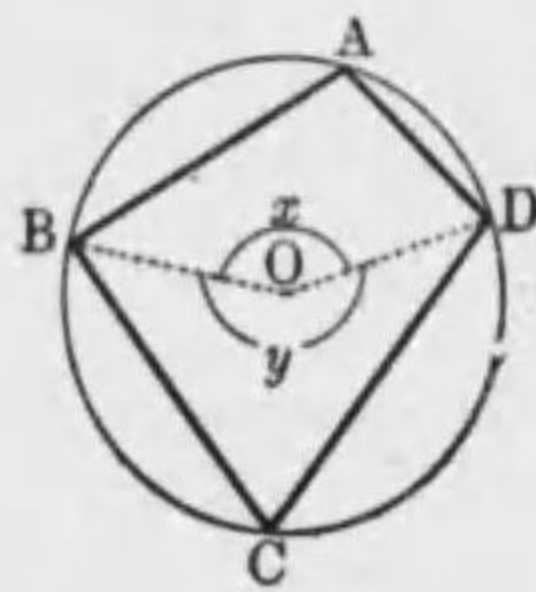
上ニ立ツ中心角ヲ夫々  $\angle x$ ,

$\angle y$  トス。

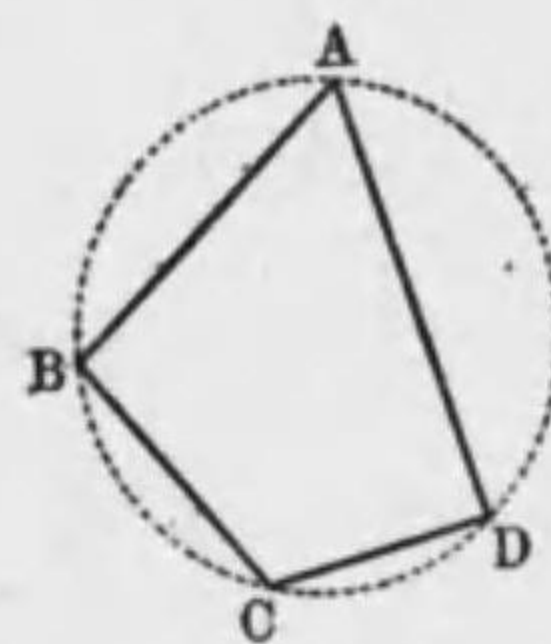
$$\angle A = \frac{1}{2}y \quad \angle C = \frac{1}{2}x$$

$$\therefore \angle A + \angle C = \frac{1}{2}(x+y) = 2RL$$

同様ニシテ  $\angle B + \angle D = 2RL$



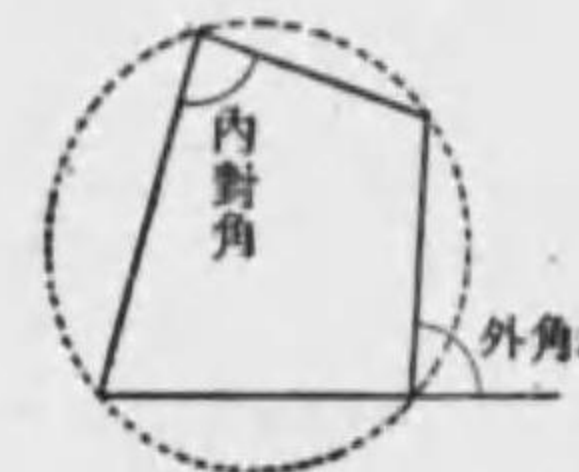
**系 1.** 相對スル角ガ互ニ補角ヲナス四邊形ハ圓ニ内接スル。



$$\angle A + \angle C = 2RL, \quad \text{又ハ} \quad \angle B + \angle D = 2RL$$

**系 2.** 圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハソノ内對角ニ等シイ。

〔註〕 四邊形ノ外角ニ隣ル内角ノ對角ヲ内對角トイフ。



**問題 22.**

1. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ何カ。
2. 圓ニ内接スル梯形ハドンナ梯形カ。
3. 圓ニ外接スル矩形ハ何カ。
4. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ何カ。
5. 圓ニ外接スル四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シイ。

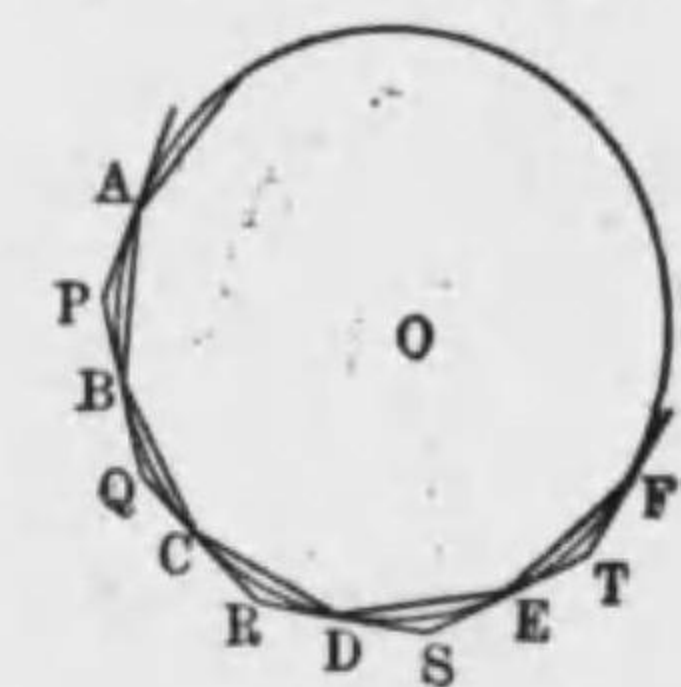
**39. 圓ト正多角形**

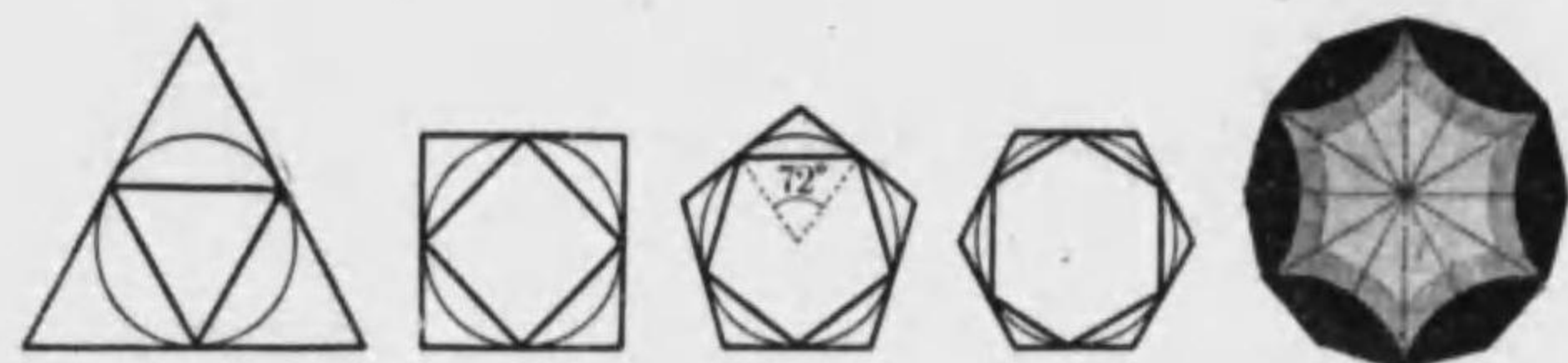
**定理 25.** 圓周ヲ三ツ以上ニ等分シソノ分點ヲ順次ニ結ベバ内接正多角形ヲ得ル。又各分點ニ於テ切線ヲ引ケバ外接正多角形ヲ得ル。

證明 略ス。

即チ下圖ノ如シ。

〔註〕 圓周ヲ等分スルニハ中心角ヲ分度器ニテ等分シテモヨイ。





系 正多角形ノ外接圓ノ中心ト内接圓ノ中心トハ一致スル。此ノ共通ノ中心ヲ正多角形ノ中心トイフ。

定理 26. 正  $n$  多角形ノ外接圓ノ半徑ヲ  $R$ , 一辺ヲ  $a$ , ソノ中心角ヲ  $\theta$ , 面積ヲ  $S$  トスレバ,

$$a = 2R \sin \frac{\theta}{2}, \quad S = \frac{1}{2} n R^2 \sin \theta$$

デアル。但シ  $\theta = \frac{360^\circ}{n}$  デアル。

證明 圖ニ於テ中心  $O$  ヨリ  $AB$  へ下シタ垂線ヲ  $OM$ ,  $B$  ヨリ  $OA$  へ下シタ垂線ヲ  $BN$  トスレバ,

$$\angle AOM = \frac{\theta}{2}$$

$$\triangle AOM \text{ニ於テ} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{AM}{OA}$$



$$\text{依テ} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$\therefore a = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\text{又} \quad \frac{BN}{OB} = \sin \theta \quad \therefore BN = OB \sin \theta = R \sin \theta$$

$$\text{又} \quad \triangle AOB = \frac{1}{2} OA \cdot BN = \frac{1}{2} R \cdot R \sin \theta$$

$$\therefore S = n \cdot \triangle AOB = \frac{1}{2} n R^2 \sin \theta$$

系 前定理ニ於テ内接圓ノ半徑ヲ  $r$  トスレバ

$$a = 2r \tan \frac{\theta}{2} \quad S = nr^2 \tan \frac{\theta}{2}$$

デアル。

$$\text{前圖ニ於テ} \quad AM = OM \tan \frac{\theta}{2} \quad \frac{a}{2} = r \tan \frac{\theta}{2}$$

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} a \cdot r \quad \text{ニ注意シテ證明セヨ。}$$

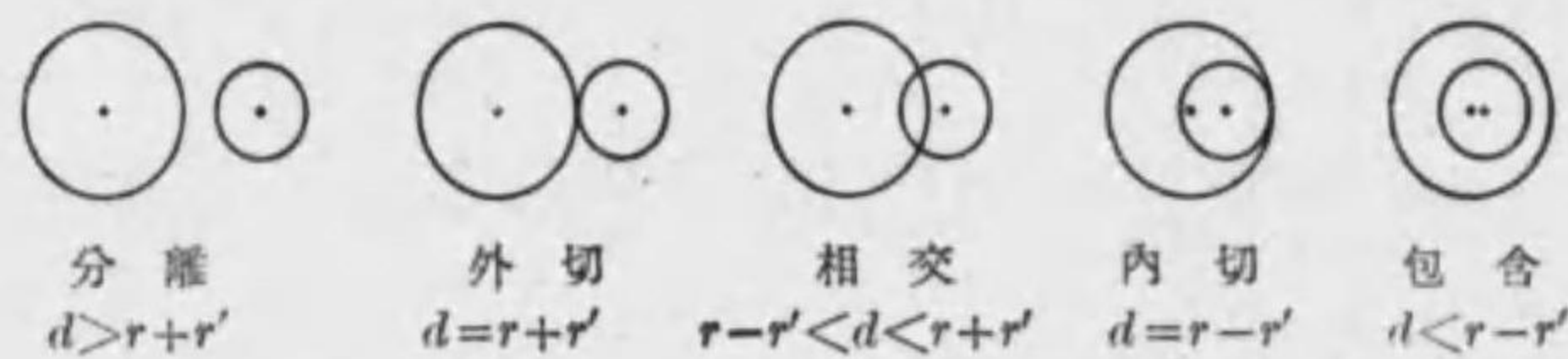
例 正五角形ノ外接圓ノ半徑ガ  $1\text{m}$  ナルトキ一辺ノ長サヲ求メヨ。

$$\text{解} \quad \text{前定理ニ於テ} \quad R = 1 \quad \theta = \frac{360^\circ}{5} \quad \therefore \frac{\theta}{2} = 36^\circ$$

$$\therefore a = 2 \times 1 \times \sin 36^\circ = 2 \times 0.5878 = 1.1756 \text{ (m)}$$

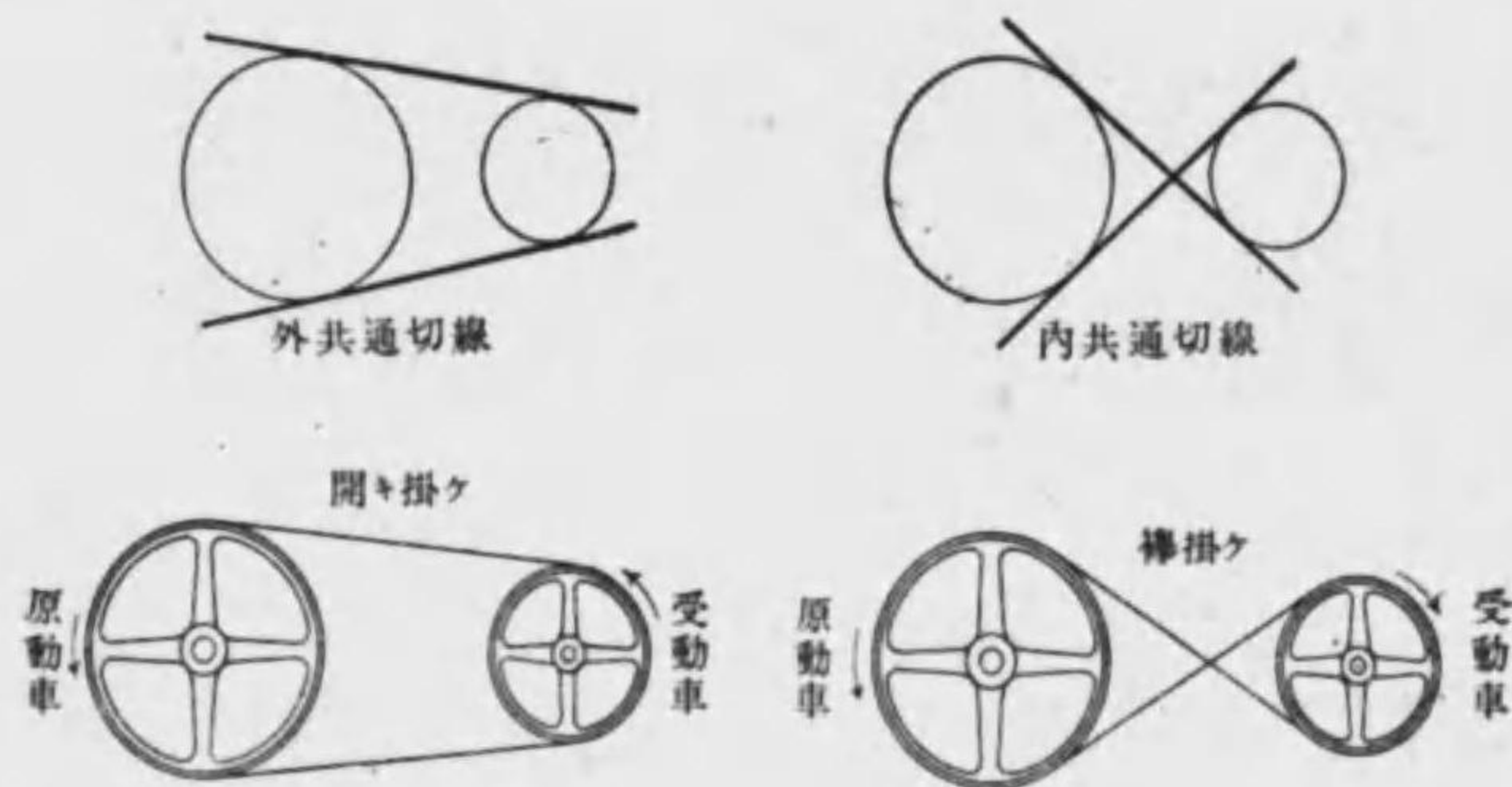
40. ニツノ圓

ニツノ圓ノ相互ノ位置ノ關係ハ次ノヤウデアアル。  
但シ二圓ノ半徑ヲ  $r, r'$  中心間ノ距離ヲ  $d$  トスル。



(1) 共通切線

定義 二圓ノドチラニモ切スル直線ヲ共通切線トイヒ、二圓ガソノ切線ノ同ジ側ニアレバ外共通切線、反対ノ側ニアレバ内共通切線トイフ。



作圖題 9. 二圓ノ共通切線ヲ引ケ。

題意 二圓  $O, O'$  (半徑  $r, r'$ ) ノ共通切線ヲ引クコト。

(1) 外共通切線ノ場合

作圖  $O$  ヲ中心トシ  $r-r'$

ニ等シイ半徑ノ圓  $P$  ヲ

畫キ  $O'$  カラコノ圓  $P$  ニ

切線  $O'E, O'F$  ヲ引キ  $E,$

$F$  ヲ切點トスル。  $OE, OF$  ノ延長ガ  $O$  圓周ト交

ハル點  $A, B$  カラ夫々  $EO', FO'$  ニ平行線  $AA', BB'$

ヲ引ケバ  $AA', BB'$  ハ圓  $O, O'$  ノ外共通切線デア

アル。

證明 略ス。

(2) 内共通切線

$O$  ヲ中心トシ  $r+r'$  ニ等

シイ半徑ノ圓  $P'$  ヲ畫キ  $O'$

カラ圓  $P'$  ニ切線  $O'G, O'H$

ヲ引キ線分  $OG, OH$  ガ  $O$

圓ト交ハル點  $C, D$  カラ夫

夫  $GO', HO'$  ニ平行ナ直線  $CC', DD'$  ヲ引ケバ  $CC', DD'$

ハ内共通切線デア

アル。

問題 23.

1. 一邊  $2m$  ノ正六角形ノ面積ヲ求メヨ。 ( $a=R$ )
2. 半徑  $5$  吋ノ圓ニ内接スル正八角形ノ一邊ヲ求

メヨ。

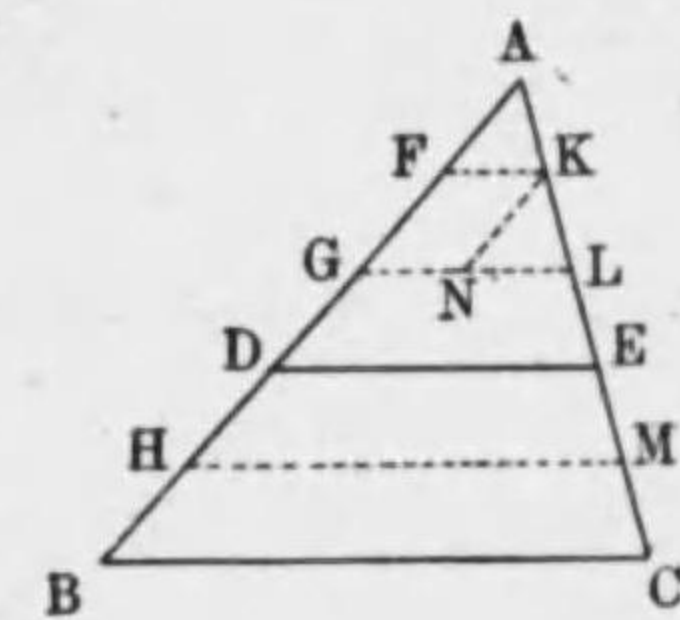
3. 半径ガ 12 cm 及ビ 5 cm, 中心間ノ距離ガ,  
 ① 7 cm    ② 10 cm    ③ 17 cm  
 デアル二圓ノ相互ノ位置ノ關係ヲ問フ。

## 第四章 比例

### 41. 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線

**定理 27.** 三角形ノ一邊ニ平行ナ直線ハ他ノ二邊ヲ相等シイ比ニ分ツ。

**假設**  $\triangle ABC$  ニ於テ  $BC$  ニ  
 平行ナ直線ガ  $AB, AC$  ト  
 交ハル點ヲ夫々  $D, E$  ト  
 スル。



**終結**  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

**證明** 例ヘバ  $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$  トスレバ  $AD, DB$  ヲ夫々

三等分及ビ二等分スル點ヲ  $F, G$  及ビ  $H$  トシ,  
 コレ等ノ點ヨリ夫々  $BC$  ニ平行ニ引イタ直線  
 ガ  $AC$  ト交ハル點ヲ夫々  $K, L, M$  トスルト,

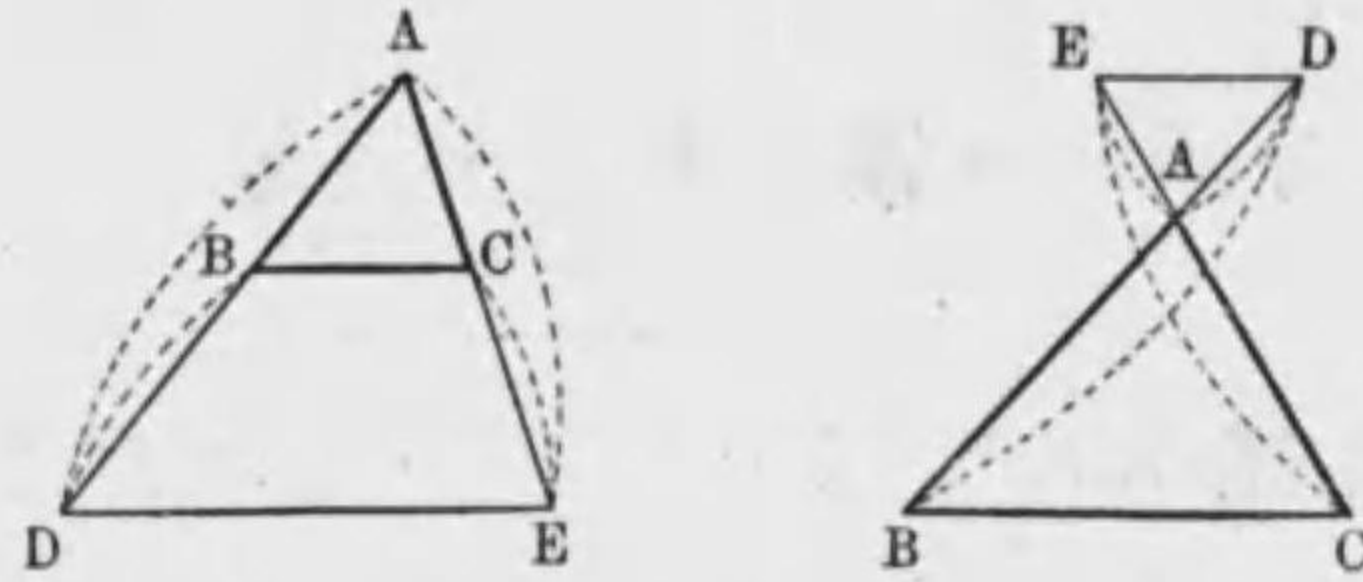
$$AF = FG = GD = DH = HB$$

$$\therefore AK = KL = LE = EM = MC$$

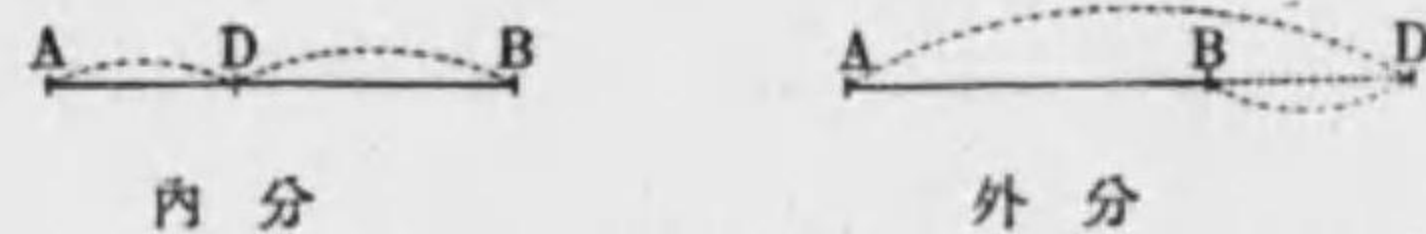
$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{3}{2} \quad \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

一般  $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$  ナラバ  $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n} \therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

【注意】 DEガ AB, ACノ延長上デ交ハルトキモコノ比例式ハ成立スル。



コノ場合ニハ二邊 AB, ACハ夫々 D, Eデ同ジニ比ニ外分セラルト云フ。コレニ對シテ Dガ ABノ上ニアルトキハ Dハ ABヲ内分スルト云フ。



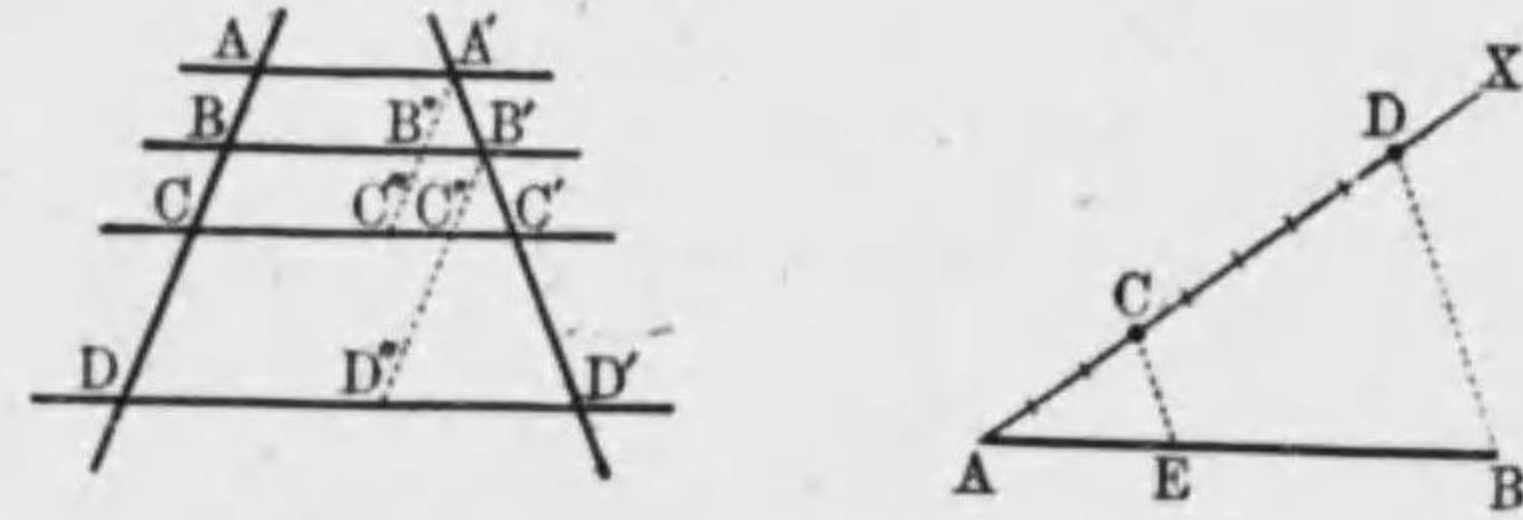
系 二直線ガ數多ノ平行線ニ交ハルトキソノ對應スル部分ノ比ハ相等シ。

【註】 次頁ノ圖ニ於テ ABト A'B', BCト B'C'トハ對應スルトイフ。

圖ニ於テ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$  デアル。

作圖題 10. 一ツノ線分ヲ 3:5ノ比ニ分テ。

題意 線分 ABヲ 3:5ニ分ツコト。



作圖 Aヲ通ル任意ノ直線 AXヲ引キ Aヲ起點トシテ任意ノ或ル等シイ長サデ切ツテ行キ三ツ目ノ分點ヲ Cトシ, Cヨリ五ツ目ノ分點ヲ Dトス。DBヲ結ビ, Cヲ通り DBニ平行線ヲ引キ ABトノ交點ヲ Eトス。Eハ求メル點デアル。即チ,

$$\frac{AE}{EB} = \frac{3}{5}$$

證明 各自ニテナセ。

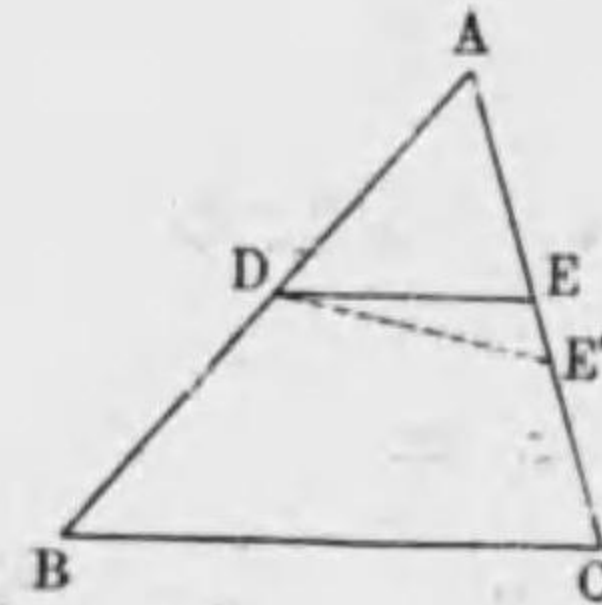
定理 28. 三角形ノ二邊ヲ相等シイ比ニ分ツ點ヲ結ブ直線ハ第三邊ニ平行デアアル。

假設  $\triangle ABC$ ニ於テ,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

終結  $DE \parallel BC$

證明 Dヨリ BCニ平行ナ直



線  $DE'$  ヲ引ケバ,

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C} \quad (\text{前定理})$$

$$\text{然ルニ} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad (\text{假设})$$

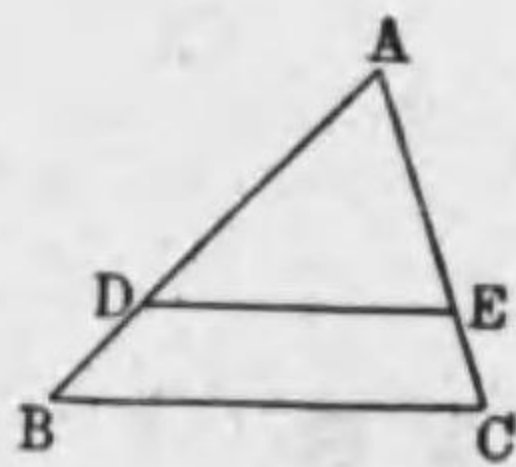
$$\therefore \frac{AE'}{E'C} = \frac{AE}{EC} \quad AC \text{ ヲ } AD:DB \text{ ニ分ケル點}$$

ハ一ツデアルカラ  $E'$  ト  $E$  トハ同ジ點デアル。

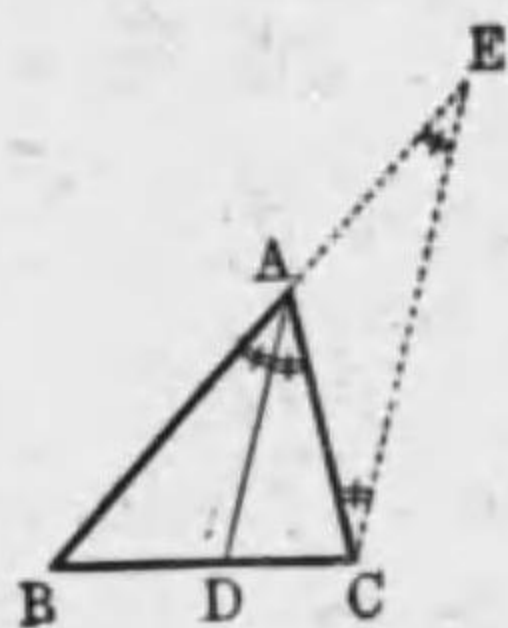
故ニ  $DE \parallel BC$

### 問題 24.

1. 圖ニ於テ  $DE \parallel BC$  デ  $AD=5\text{cm}$   
 $DB=2\text{cm}$   $AC=4.9\text{cm}$  ナラバ  $AE$ ,  
 $EC$  ノ長サハ各何程カ。

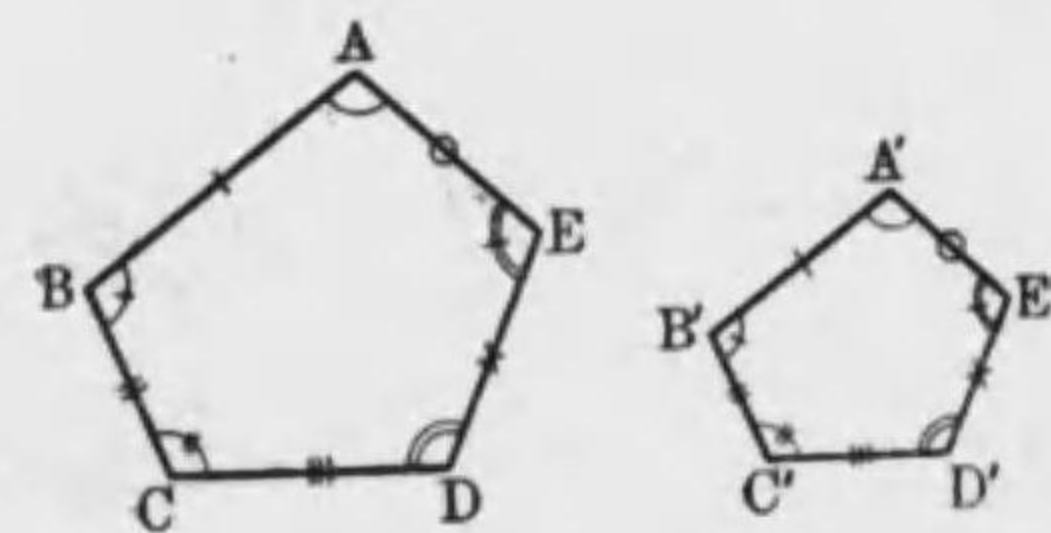


2. 線分  $AB$  ヲ  $2:3:5$  ノ比ニ分テ。  
 3. 三角形ノ一ツノ内角ノ二等分  
 線ハ對邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ分ツ。



### 42. 相似形

**定義** ニツノ多角形  $ABCDE$  ト  $A'B'C'D'E'$   
 ニ於テ  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'$ ,  $\angle D = \angle D'$ ,



$$\angle E = \angle E' \text{ デ且ツ } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

ナラバコノニツノ多角形ハ相似デアルトイ  
 ヒ,コレヲ次ノ如ク書キ表ハス。

多角形  $ABCDE$  の多角形  $A'B'C'D'E'$

ソシテ相等シイ角即チ  $\angle A$  ト  $\angle A'$ ,  $\angle B$  ト  $\angle B'$ ,  $\angle C$   
 ト  $\angle C'$  ...等ヲ**對應角**  $AB$  ト  $A'B'$ ,  $BC$  ト  $B'C'$ ,  $CD$  ト  
 $C'D'$  ...等ヲ**對應邊** トイヒ, 對應邊ノ比  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots$

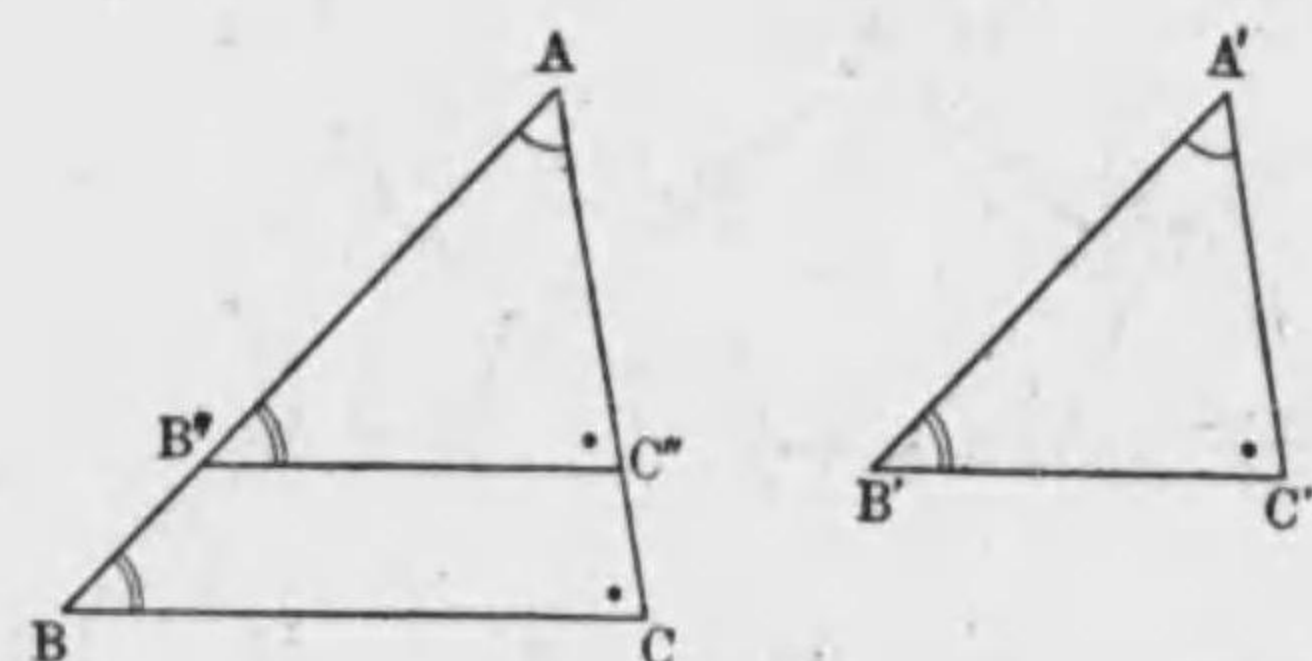
ヲ相似比トイフ。

例ヘバニツノ正三角形又ハニツノ正方形ハ相似  
 デアリ,ニツノ多角形ガ合同デアレバ相似比ハ1デ  
 アル。

### 43. 相似三角形

ニツノ三角形ハ次ノ三ツノ場合ニ相似ニナル。

**定理 29.** 二角ガ夫々相等シイニ  
 ツノ三角形ハ相似デアル。(其ノ一)



假設  $\triangle ABC, \triangle A'B'C' =$  於テ,

$$\angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

終結  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

證明  $\angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C' \therefore \angle A = \angle A'$

$\triangle A'B'C'$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ上ニ重ネ、 $A'B'$  ガ  $AB'' =$   
 $A'C'$  ガ  $AC'' =$  位置ヲ占メテトスルト、

$$\angle B = \angle B' = \angle B''$$

即チ  $\angle B = \angle B'' \therefore BC \parallel B''C''$

$$\therefore \frac{AB}{AB''} = \frac{AC}{AC''} \quad \text{即チ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$\angle B'$  ヲ  $\angle B$  ニ重ネルト同様ニシテ  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

依テ  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

**定理 30.** 一角及ビコレヲ夾ム二  
邊ノ比ガ夫々相等シイニツノ三角形  
ハ相似デアル。(其ノ二)

假設  $\triangle ABC, \triangle A'B'C' =$  於テ,

$$\angle A = \angle A', \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

終結  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

證明 前定理ノ圖ノ如ク  $\triangle A'B'C'$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ上  
ニ重ネルト、

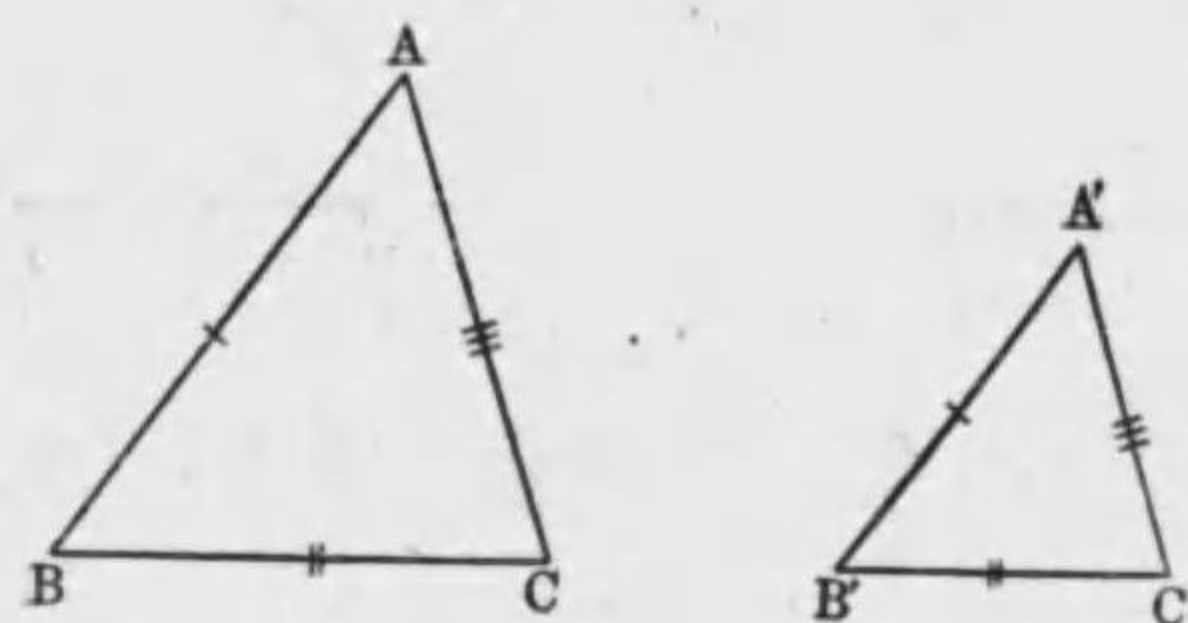
$$\frac{AB}{A'B''} = \frac{AC}{A'C''} \quad \therefore BC \parallel B''C''$$

$$\therefore \angle B = \angle B''$$

即チ  $\angle B = \angle B' \quad \angle A = \angle A'$  (假設)

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad (\text{前定理})$$

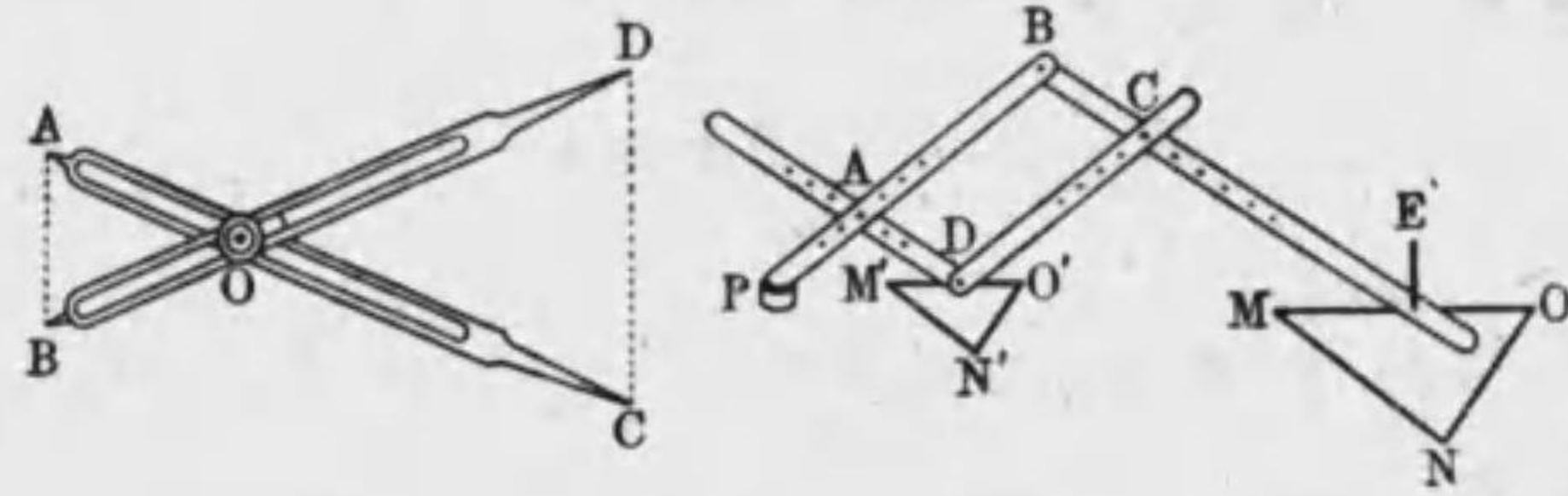
**定理 31.** 三角形ノ三邊ガ他ノ三  
角形ノ三邊ト比例ヲナストキハコノ  
兩三角形ハ相似デアル。(其ノ三)



題意  $\triangle ABC, \triangle A'B'C' =$  於テ,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \quad \text{ナラバ} \quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \quad \text{デアル。}$$

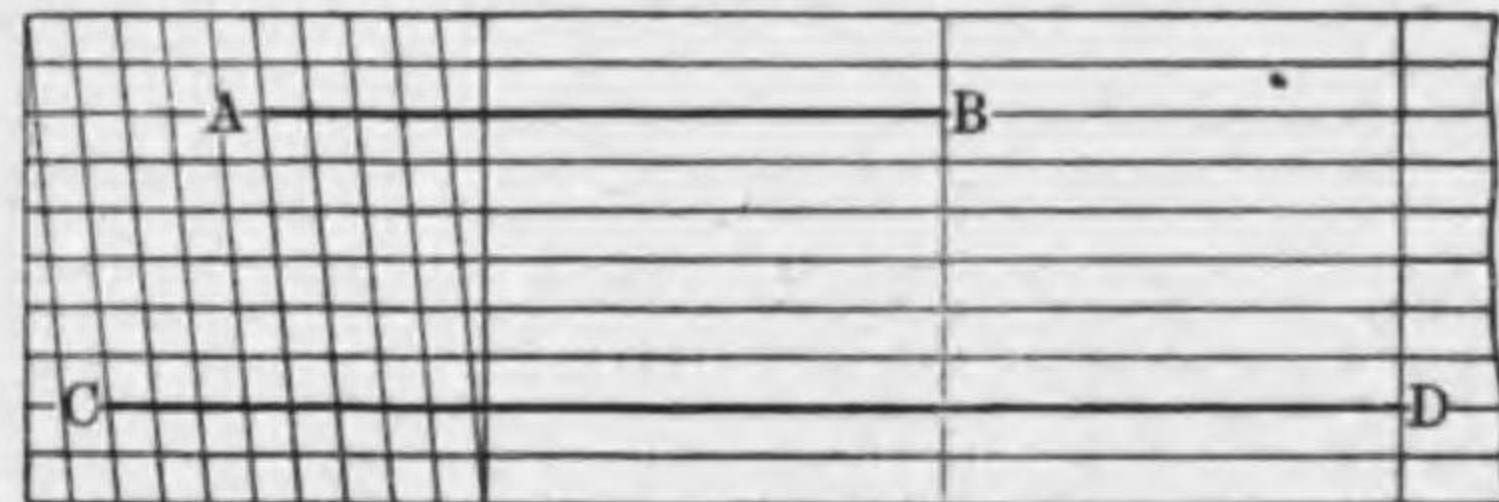
證明 略ス。



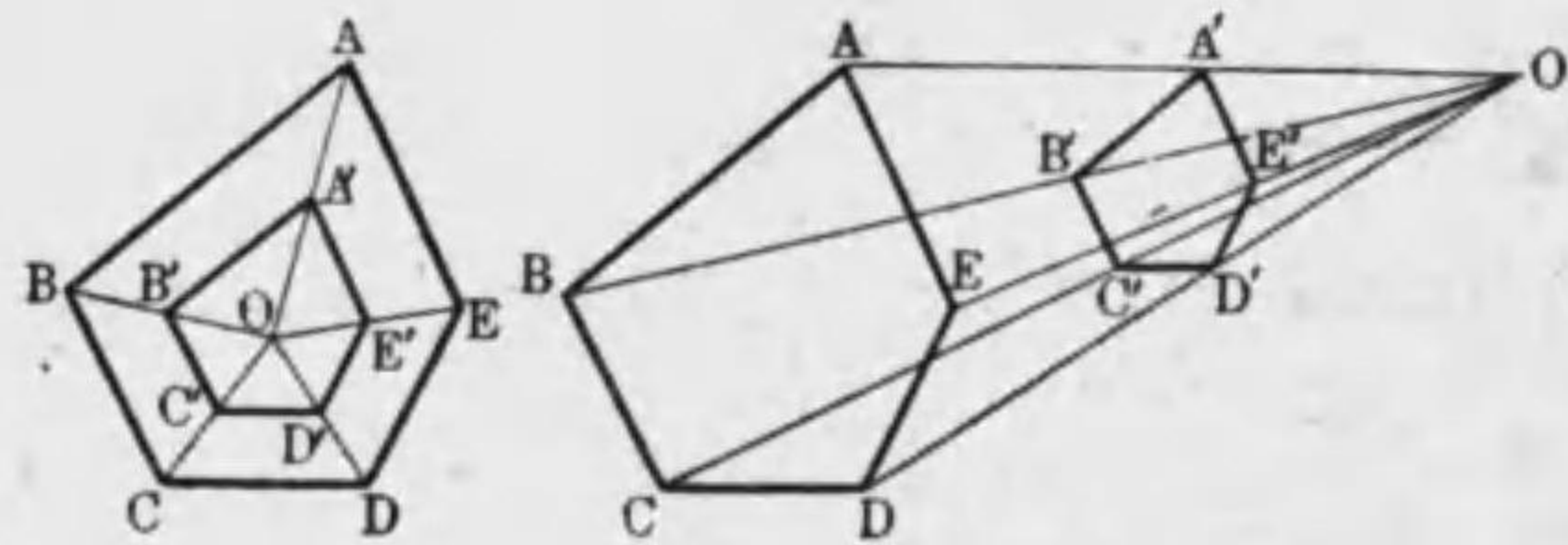
上圖左ハ比例こんばすデアアル。OC=2OA, OD=2OB  
トスレバ CD=2AB デアツテ,アル線分ヲ思ヒ通りニ  
縮少又ハ擴大スルニ用フ。又右ハばんとぐらふデ  
圖形ヲ思ヒ通りニ縮少又ハ擴大スルニ用フ。何レ  
モ相似形ニ關スル定理ノ應用デアアル。

下圖ハ對角線尺ヲ示ス,コレニヨレバ或長サノ  
 $\frac{1}{100}$  マデ測ルコトガ出來ル。

例 AB=1.48 CD=2.82



ニツノ相似多角形ノ對應邊ヲ平行ニ置キ,對應頂



點ヲ夫々結ブ直線ヲ引ケバコレ等ノ直線ハ一點ニ  
集マル。此ノ點ヲ相似ノ中心トイフ。

**作圖題 11.** 與ヘラレタ多角形ト相  
似デ相似比ガ  $m:n$  デアル多角形ヲ畫  
ケ。

**作圖** 前圖ニ於テ  $OA:OA'=m:n$  ニシテ A'ヨリ  
各邊ニ平行線ヲ引イテ作圖シ得。

(但シ  $m > n$  トス)

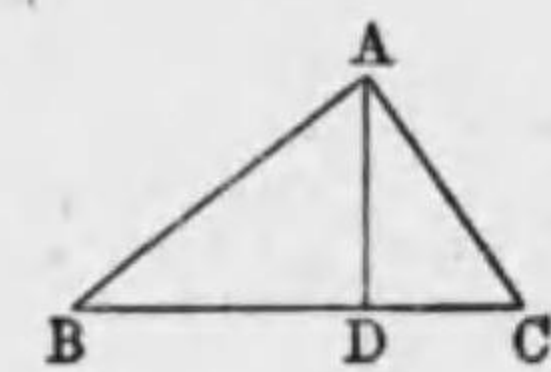
**問題 25.**

1. 同ジ邊數ヲ有スル正多角形ハ相似デアアル。
2. 頂角ノ相等シイ二等邊三角ハ相似デアアル。
3. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂

點Aカラ垂線 AD ヲ下セバ,

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

デアアル。

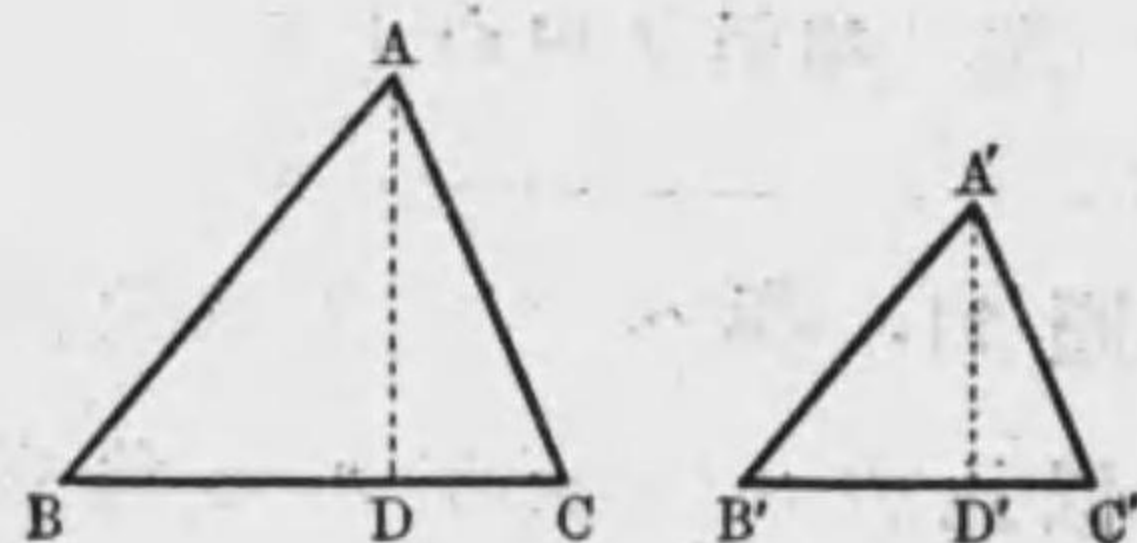


**44. 相似多角形ノ面積ノ比**

**定理 32.** ニツノ相似多角形ノ面  
積ノ比ハ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。



假設  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



終結

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

證明 A, A' から對邊へ垂線 AD, A'D' を下すと,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AD \cdot BC \quad \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} A'D' \cdot B'C'$$

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AD \cdot BC}{A'D' \cdot B'C'} \dots\dots\dots (1)$$

又  $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$

{ $\therefore \angle B = \angle B'$  (假設)  $\angle D = \angle D'$  (作圖)}

$$\therefore \frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} \quad \text{又} \quad \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \quad (\text{假設})$$

(1) = 代入シテ,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

系 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比  
ハソノ對應邊ノ平方ノ比ニ等シイ。

問題 26.

1. 二ツノ同邊數ノ正多角形ガアル。一ツハ一邊ガ 1m デ他ハ一邊ガ 2m デアル。面積ノ比ヲ求メヨ。
2. 二ツノ正方形ノ面積ノ比ガ 9:49 ナラバ一邊ノ比ハイクラカ。
3. 縮尺  $\frac{1}{50000}$  ノ參謀本部ノ地圖デ 1 平方軒ノ土地ノ廣サハ幾平方種ニ表ハレルカ。

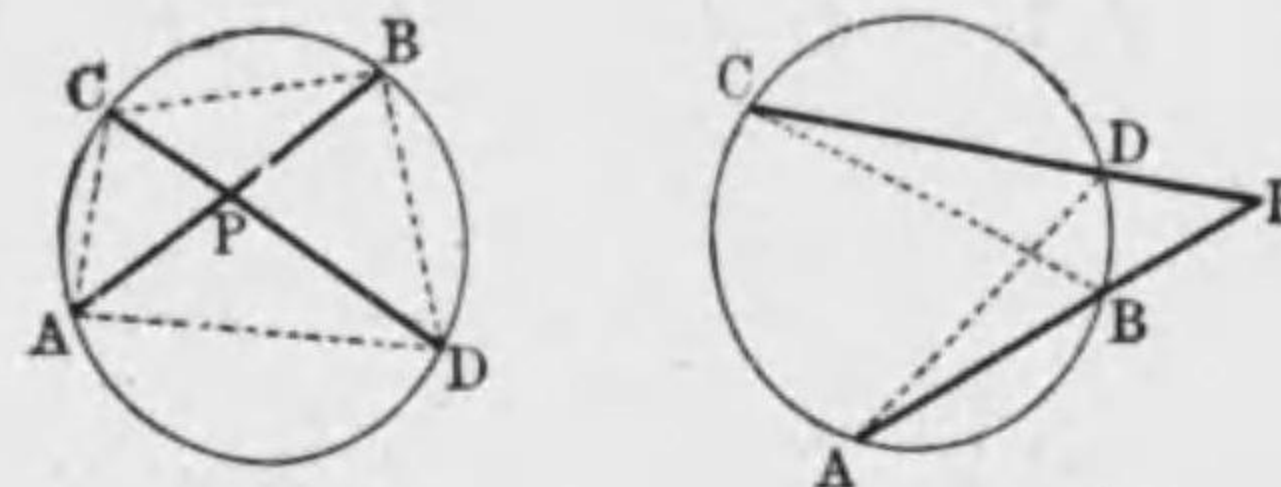
45. 相交ハル弦ノ比

定理 33. 圓ノ二弦又ハソノ延長ガ相交ルトキ,ソノ交點デ内分又ハ外分サレタ各弦ノ包ム矩形ハ相等シイ。

[註] 各弦ノ分ノ包ム矩形トハ分クレタ各分ヲ二邊トシテ矩形トイフ意味デアル。

假設 弦 AB, CD ガ P ニ於テ交ハル。

終結  $AP \cdot BP = CP \cdot DP$



**證明** AD, BC ヲ結ブ。△PAD, △PCB = 於テ,  
 $\angle A = \angle C, \angle D = \angle B$  (又ハ  $\angle P$  共通)

$\therefore \triangle PAD \sim \triangle PCB$  (二角相等)

$$\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP}$$

即チ  $AP \cdot BP = CP \cdot DP$

**系 1.** 圓外ノ一點ヲ通ル弦ガソノ  
 點デ分タレタニツノ分ノ積ハソノ點  
 カラ引イタ切線ノ平方ニ等シイ。

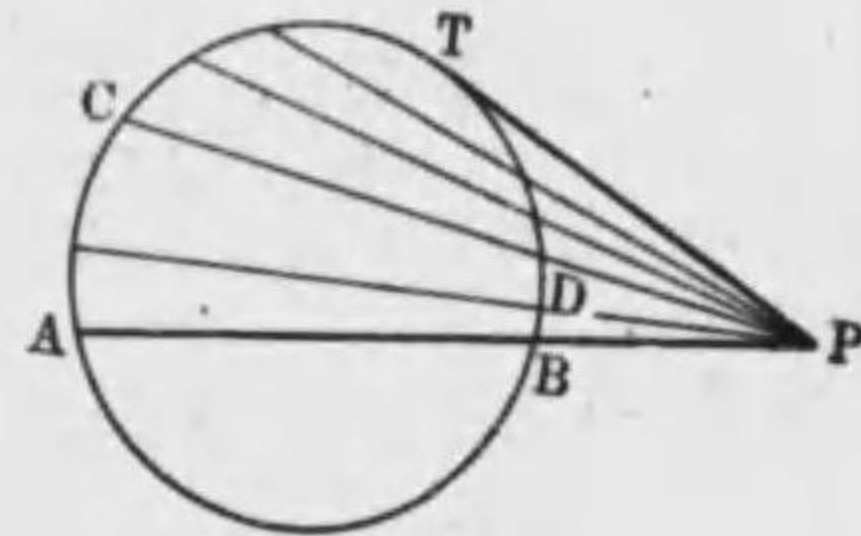
前定理ニヨリ,

$$AP \cdot BP = CP \cdot DP$$

C, D ガ一點 T ニ合スレバ,

$$CP = TP \cdot DP = TP^2$$

$\therefore AP \cdot BP = TP^2$



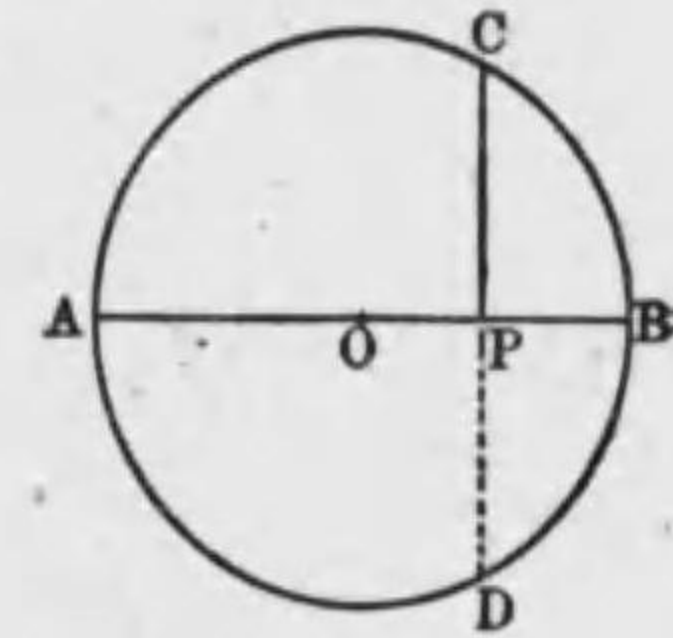
**系 2.** 半圓周上ノ一點カラソノ直  
 徑ヘ下シタ垂線ノ平方ハソノ足ニヨ  
 ツテ分タレタ直徑ノニツノ分ノ積ニ  
 等シイ。

次頁ノ圖ニ於テ,

$$CP \cdot PD = AP \cdot PB$$

然ルニ  $CP = PD$

$$\therefore CP^2 = AP \cdot PB$$



#### 46. 線分ノ比例中項

**定義** 三ツノ線分  $a, b, c$  ニ於テ,

$$a : b = b : c \quad \text{即チ} \quad b^2 = ac$$

ガ成立ツトキハ  $b$  ヲ  $a$  ト  $c$  トノ比例中項ト  
 イフ。

**作圖題 12.** 與ヘラレタ矩形ト等  
 積ナル正方形ヲ作レ。

**題意** 矩形 ABCD ト等積ナル正方形ヲ作ルコト。

**作圖** AD ヲ延長シテ DC

ニ等シク DC' ヲトル。

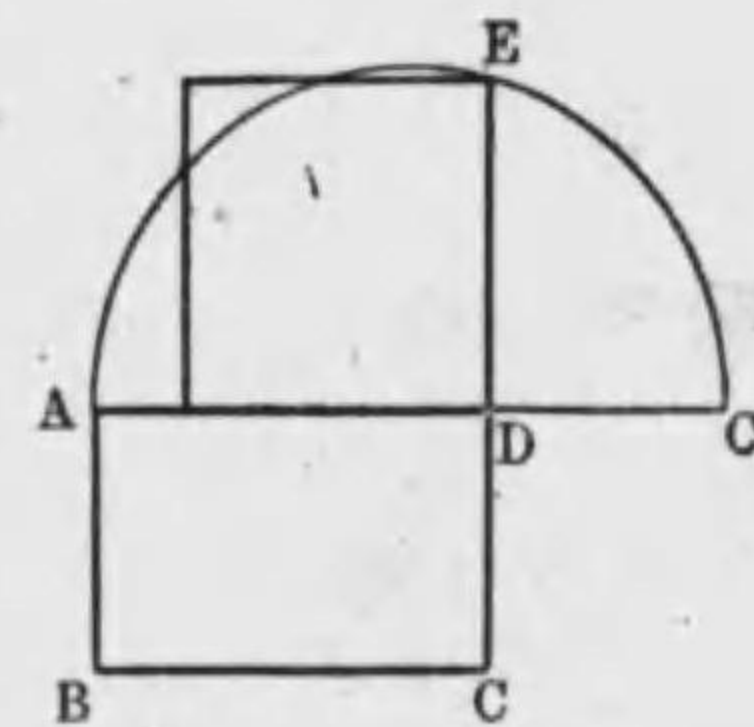
AC' ヲ直徑トスル半圓

ヲ畫キ CD ノ延長ト半

圓周トノ交點ヲ E トス。

DE ハ求ムル正方形ノ

一邊デアル。



**證明** ED ハ半圓周上ノ點ヨリ直徑 AC' ニ下シ

タ垂線デアルカラ,

$$DE^2 = AD \cdot DC' \quad (\text{前定理系2})$$

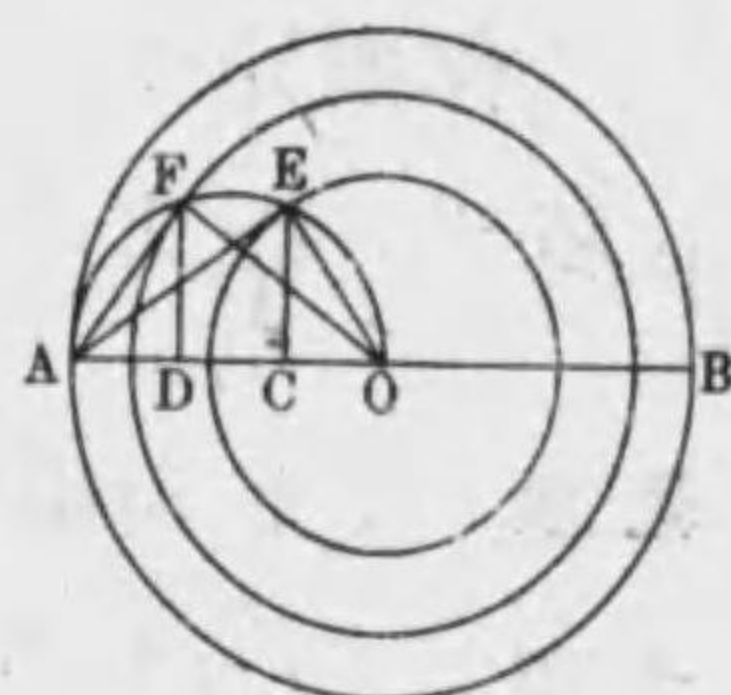
然ルニ  $DC' = DC \quad \therefore DE^2 = AD \cdot DC$

即チ DE ノ上ノ正方形ハ矩形 ABCD ト等積デア  
ル。

**作圖題 13.** 與ヘラレタ圓 O ノ面  
積ヲコレト同心圓デ n 等分セヨ。

[註] 同心圓トハ中心ガ同ジ圓デア  
ル。尙コ、デハ  
 $n=3$  トスル。

作圖 半徑 OA ヲ C, D デ三  
等分シ, C, D カラ垂線ヲ  
作り, OA ヲ直徑トスル半  
圓トノ交點ヲ夫々 E, F ト  
ス, OE, OF ヲ半徑トスル



圓ヲ畫ケバコノ圓ハモトノ圓ヲ三等分スル。

證明 略ス。

**47. 弓形**

定義 弧ト弦トデ圍マレタ圓ノ一部ヲ弓  
形トイフ。

高サ(矢)ト弦ノ長サヲ知ツテ半徑ヲ求メルコト。

圖ニ於テ  $CD=a$   $AB=b$  半徑= $r$

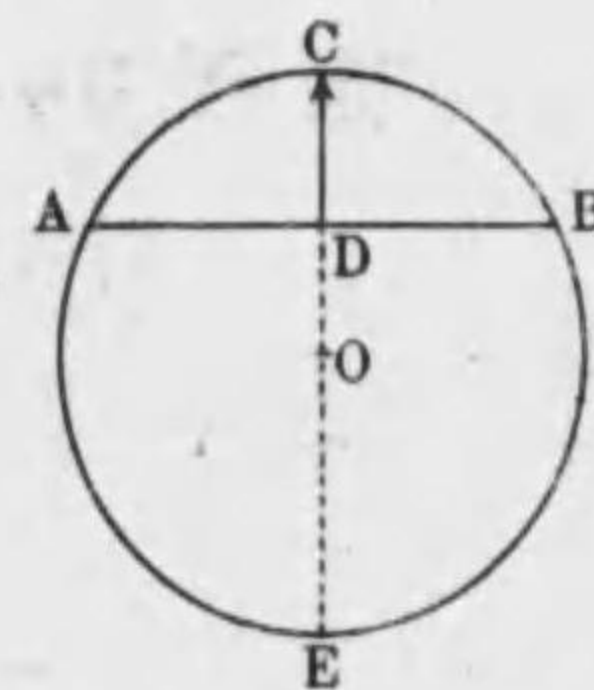
トスレバ,

$$DE = 2r - CD = 2r - a$$

然ルニ  $AD \cdot DB = CD \cdot DE \quad (AD = DB)$

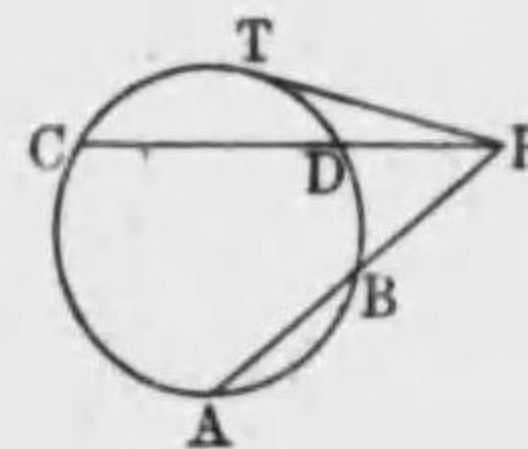
$$\therefore \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a(2r - a)$$

$$\therefore r = \left(\frac{b^2}{4} + a\right) \div 2a$$

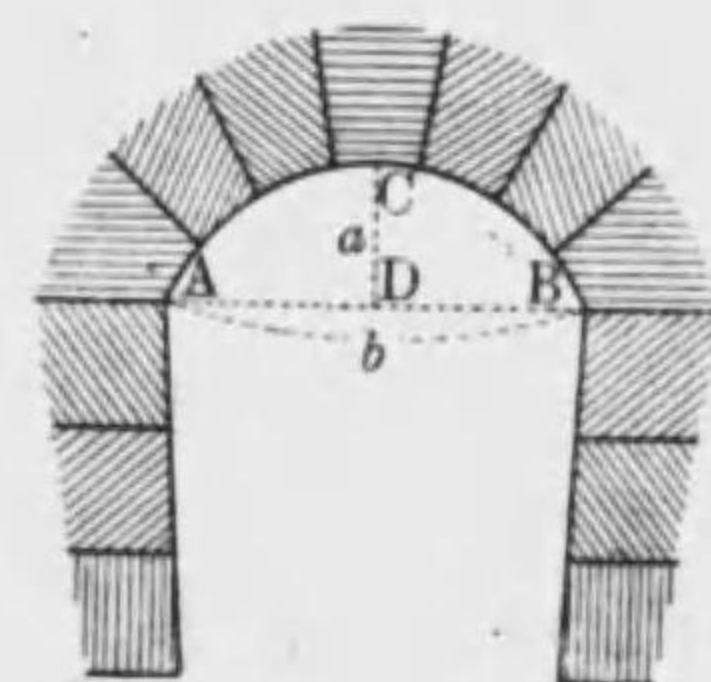


**問題 27.**

1. 圖ニ於テ  $CD=5$  cm  $DP=3$  cm  
 $BP=4$  cm ナラバ AB ノ長サハ  
イクラカ。又 PT ノ長サハ  
イクラカ。



2. 次ノとんねるノ圖ニ於テ  
 $AB=12$  呎,  $CD=4$  呎 ナラバ  
コノ圓弧ノ半徑ハイクラカ。

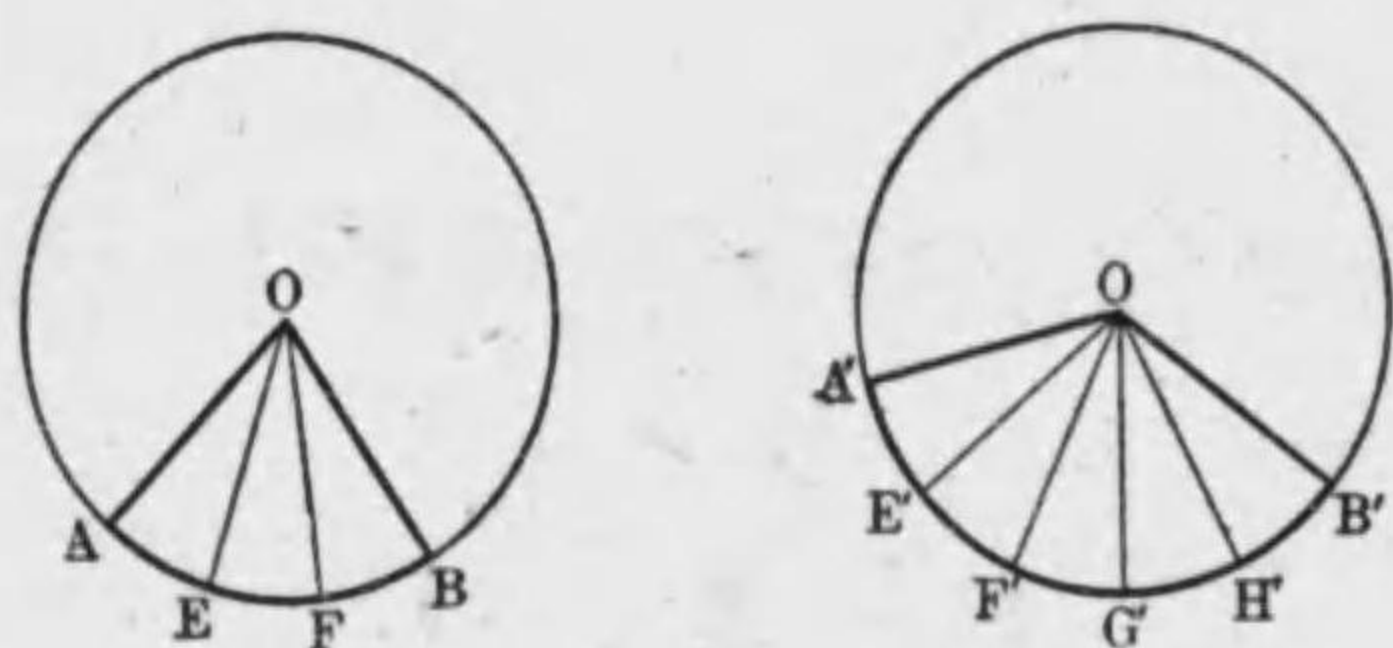


3. 同心圓ニヨツテ與ヘラレ  
タ圓ノ面積ヲ二等分セヨ。

**48. 扇形**

定義 圓ノ弧トソノ兩端ヘ引イタニツノ  
半徑トデ圍マレタ圓ノ一部ヲ扇形トイフ。

**定理 34.** 半径ガ相等シイニツノ扇形ノ面積ノ比ハソノ弧ノ比ニ等シク、又弧ノ比ハ中心角ノ比ニ等シイ。



上圖ニ於テ  $\frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'} = \frac{3}{5}$  トスレバ  $\frac{\text{扇形 } OAB}{\text{扇形 } O'A'B'}$

$= \frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'}$  及ビ  $\frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } A'B'} = \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$  デアルコトヲ

各自證明セヨ。

**系 1.** 扇形ノ面積  $= \frac{1}{2}(\text{弧} \times \text{半径})$

何トナレバ圓ハ一ツノ扇形ト考へ得ル故前圖ニ於テ半径ヲアトスレバ、

$$\frac{\text{扇形 } OAB}{\text{圓 } O} = \frac{\text{弧 } AB}{\text{圓 } O \text{ ノ周}}$$

$$\therefore \frac{\text{扇形 } OAB}{\pi r^2} = \frac{\text{弧 } AB}{2r\pi}$$

$$\therefore \text{扇形 } OAB = \frac{1}{2}(\text{弧 } AB \times r)$$

**系 2.**  $\frac{\text{扇形 } OAB}{\text{扇形 } O'A'B'} = \frac{\text{中心角 } AOB}{\text{中心角 } A'O'B'}$

弧ノ比ハ中心角ノ比ニ等シイカラデアル。

### 問題 28.

1. 半径  $r$ , 角  $d^\circ$  デアル扇形ノ面積ハ  $\frac{d}{360}\pi r^2$  ニ等シイ。

2. 半径 20 cm ノ圓カラ中心角  $90^\circ$  ノ扇形ヲ切り取ルト残りノ面積ハイクラカ。

3. 圖ニ於テ、

半径  $OA = r$

中心角  $AOB = 60^\circ$



デアルトキ AB ヲ弦トスル弓形ノ面積ヲ求メヨ。

## 解 答

(簡單ナルモノハ略ス)

4 頁 4. 一般ノ場合ハ 6 本, 三點一直線上ニアル場合ハ 4 本, 四點一直線上ニアル場合ハ 1 本

9 頁 4. ①  $30^\circ$  ②  $150^\circ$  ③  $90^\circ$  ④  $45^\circ$

28 頁 1.  $45^\circ$  2.  $60^\circ$  5.  $30^\circ$   $60^\circ$   $90^\circ$

31 頁 1. ① 12 直角 ② 20 直角 ③ 26 直角

2. ①  $135^\circ$  ②  $144^\circ$

3. 正十角形

37 頁 1. 23.592 平方呎 2. 矩形 3. 正方形

38 頁 4. 正方形

41 頁 1. 13 m 2. 10.67 m 3. 5.196 cm

43 頁 1.  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{24}{25}$ ,  $\frac{24}{25}$ , 無限大,  $\frac{12}{5}$

2. 146.28 m 136.4 m 3.  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta'}$

45 頁 1.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  2.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ,  $\frac{\sqrt{7}}{3}$

46 頁 1.  $\cos 20^\circ$ ,  $\tan 17^\circ$ ,  $\cot 24^\circ 40'$ ,  $\tan 9^\circ 50'$

48 頁 1.  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$  2. 0 3.  $\frac{2}{3}$  4. 1

5.  $\frac{v_0^2}{9.8}$ ,  $\frac{\sqrt{3}v_0^2}{2 \times 9.8}$ ,  $\frac{v_0^2}{2 \times 9.8}$

51 頁 4. 0.6221 5. 1.9970 6. 0.3123

- |   |   |                     |
|---|---|---------------------|
| 9. $31^{\circ}14'$                                    | 10. $61^{\circ}2'$                                      | 11. 37.53 m         |
| 12. 15.456 m  | 13. 78.8 m  | 14. 201 m           |
| 15. 2.8 m   |   |                     |
| <b>58 頁</b> 1. 0.9 kg, 1.55 kg                        | 2. 50.9 kg, 31.79 kg                                    |                     |
| <b>59 頁</b> 3. 1 kg, $\sqrt{3}$ kg                    | 4. 14.14 kg, 10 kg                                      |                     |
| 5. $30 \cos \theta$ , $30 \sin \theta$                |   |                     |
| <b>67 頁</b> 4. $60^{\circ}$ $30^{\circ}$ $90^{\circ}$ |   |                     |
| <b>73 頁</b> 1. $6\sqrt{3}$ 平方米                        | 2. 3.827 吋  |                     |
| <b>78 頁</b> 1. 3.5 cm, 1.4 cm                         |   |                     |
| <b>85 頁</b> 1. 1:4                                    | 2. 3:7  | 3. $4 \text{ cm}^2$ |
| <b>89 頁</b> 1. 2 cm, $2\sqrt{6}$ cm                   | 2. 6.5 呎  |                     |
| <b>91 頁</b> 2. 942 平方呎                                | 3. $\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$ |                     |

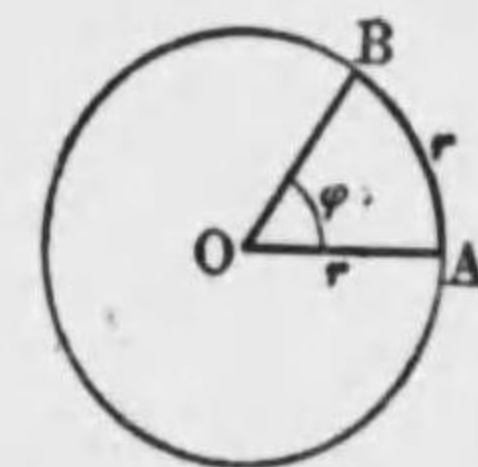
## 附 録

## 1. 弧度法

**定義** 任意ノ圓ニ於テ半徑ニ等シイ長サノ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲらぢあん (Radian) ト云フ。

圖ニ於テ圓ノ半徑ヲ  $r$  トシ、

$$\widehat{AB} = r \quad \angle AOB = \varphi$$



トスレバ中心角ハソノ弧ニ比例スル故、

$$\varphi : 360^{\circ} = r : 2\pi r$$

$$\therefore \varphi = \frac{360^{\circ} r}{2\pi r} = \frac{180^{\circ}}{\pi} = 57^{\circ}17'45'' \text{ 弱}$$

コノ値ハ圓ノ大小ニ拘ラズ一定ノ大サデアルカラ、コレヲ單位トシテ角ヲ測ルコトガアル。コノ測定法ヲ**弧度法**ト云フ。

或角ヲ弧度法デ測ツタトキノ數値ガ  $\theta$  デアレバソノ角ノ大サハ  $\theta$  らぢあんデアルトモソノ弧度ハ  $\theta$  デアルトモ云フ。弧度法デハ通常單位ノ名ヲ省イテ數値ノミヲ書イテ角ノ大サヲ表ハス。

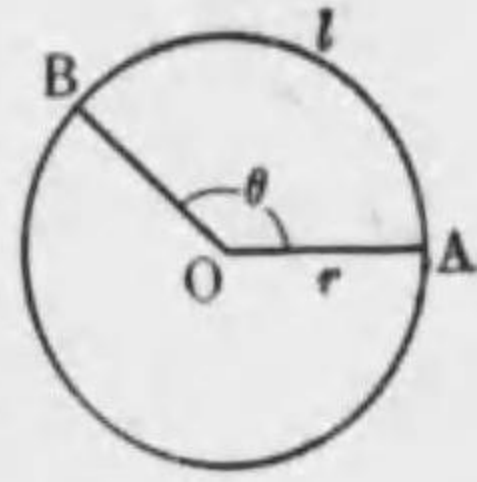
半徑  $r$  デアル圓ノ周ハ  $2\pi r$  デアルカラ  $360^{\circ}$  ハ  $2\pi$  らぢあんデアル。

$$\text{即チ } 180^{\circ} = \pi \quad 90^{\circ} = \frac{\pi}{2} \quad 60^{\circ} = \frac{\pi}{3} \quad \text{ト書ク。}$$

## 2. 圓弧ト中心角ノ弧度トノ關係

圖ニ於テ半徑ヲ  $r$ ,  $\widehat{AB}$  ノ長ヲ  $l$ ,  $\widehat{AB}$  ニ對スル中心角ノ弧度ヲ  $\theta$  トスレバ,

$$\theta = \frac{l}{r} \quad l = r\theta$$



## 問 題 1.

1. 次ノ角ヲ弧度法ニヨリ  $\pi$  ヲ用ヒテ表ハセ。

$$30^\circ \quad 45^\circ \quad 120^\circ \quad 135^\circ \quad 210^\circ \quad 270^\circ$$

2. 弧度法ニヨル次ノ角ヲ度,分,秒ニテ表ハセ。

$$\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3}{4}\pi, \quad \frac{5}{6}\pi, \quad 2\pi, \quad 3.25\pi$$

3. 次ノ三角函數ノ値ヲ求メヨ。

$$\sin \frac{\pi}{3}, \quad \tan \frac{\pi}{4}, \quad \cos \frac{\pi}{2}$$

4. 或車ノ角速度ガ毎秒  $5\pi$  デアルトキ,此ノ車ノ周邊ノ速度ハ毎秒何程カ。但シ半徑ヲ  $60\text{ cm}$  トスル。

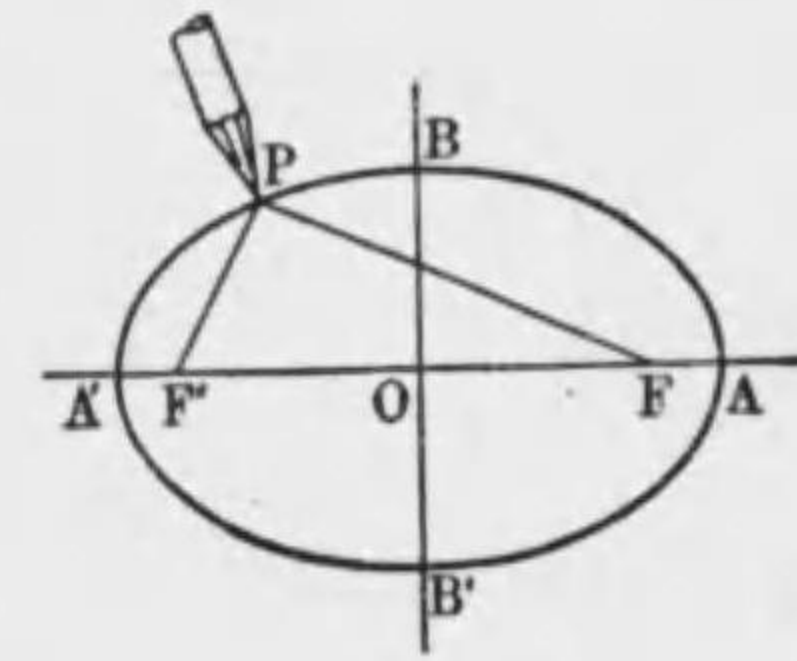
〔註〕角速度トハ圓ノ場合ニハ中心角ノ時ニ對スル變化ノ割合デ單位時間ニ回轉スル角ニテ測ル,單位ハ毎秒1ラちあんヲ用ヒルノガ普通デアル。

5. 半徑  $0.5\text{ m}$  ノ車ノ周邊ノ速度ガ毎分  $5500\text{ m}$  デアルト毎秒ノ角速度及ビ毎分ノ車ノ回轉數ヲ求メヨ。但シ  $\pi = \frac{22}{7}$  トセヨ。

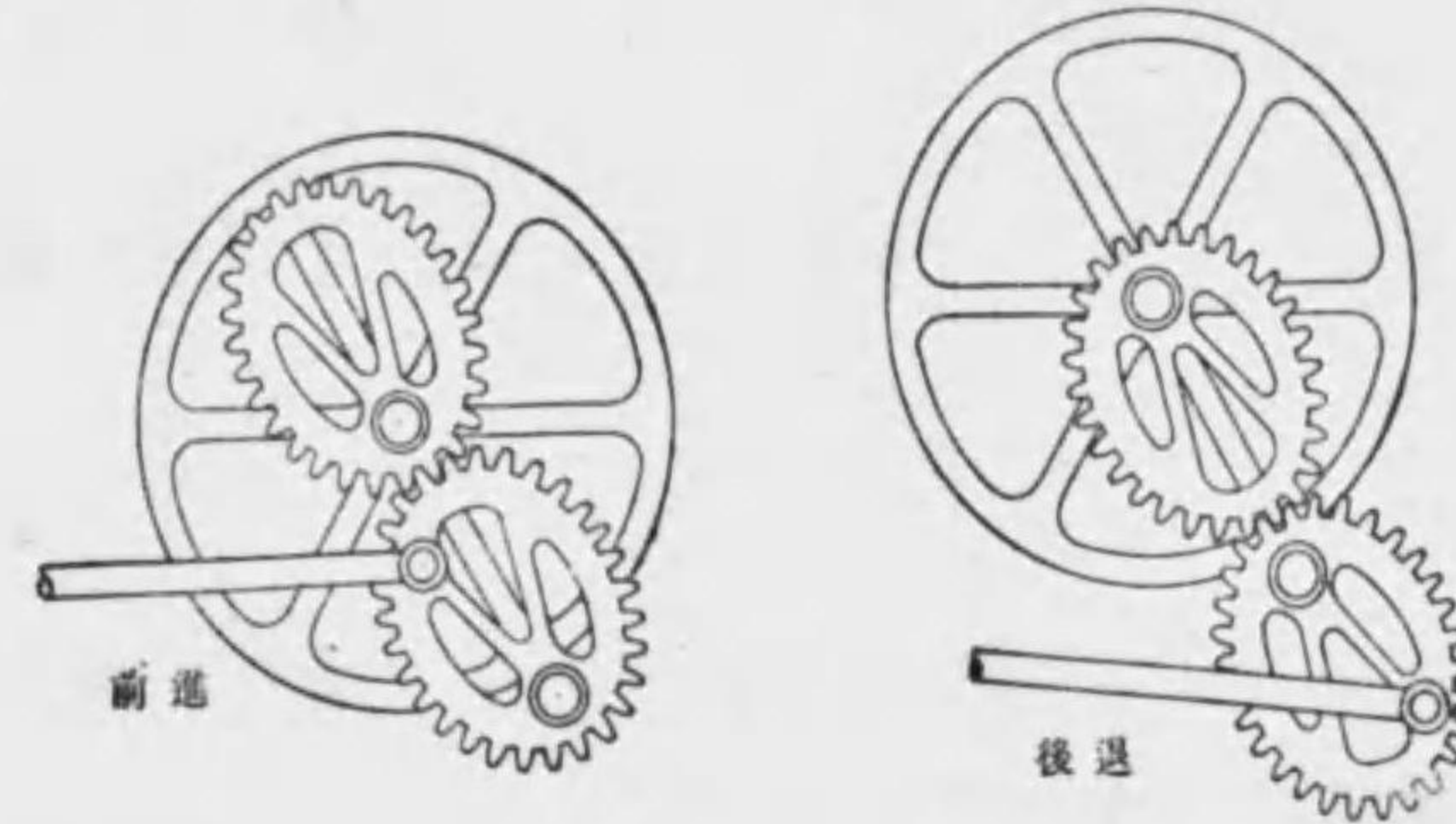
## 3. 種々ノ曲線

## 1. 橢圓

糸ノ兩端ヲ二定點  $(F, F')$  ニ固定シ,コレヲ引張リナガラ鉛筆ノ尖端  $P$  ヲ動カスト,橢圓トイフ曲線ガ出來ル。コノ二點ヲ焦點トイフ。

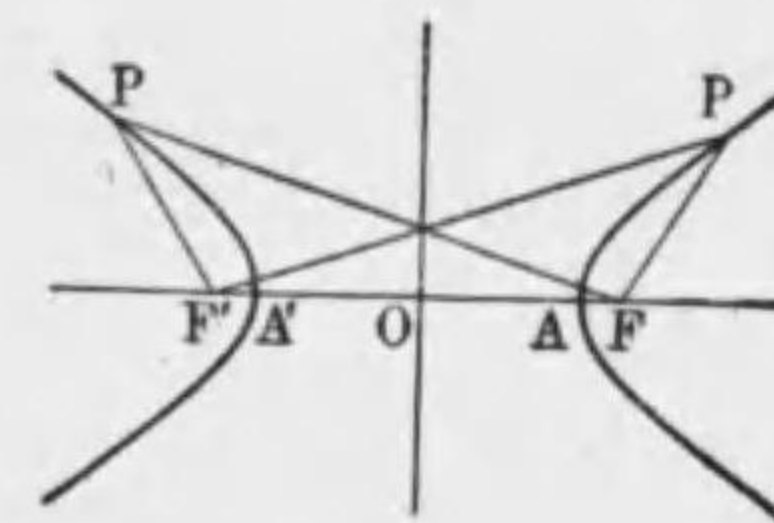


紡織機械ナドデ緩カナ前進急速ナ後退ヲ必要トスル場合ニ橢圓嚙合トシテ應用セララル。



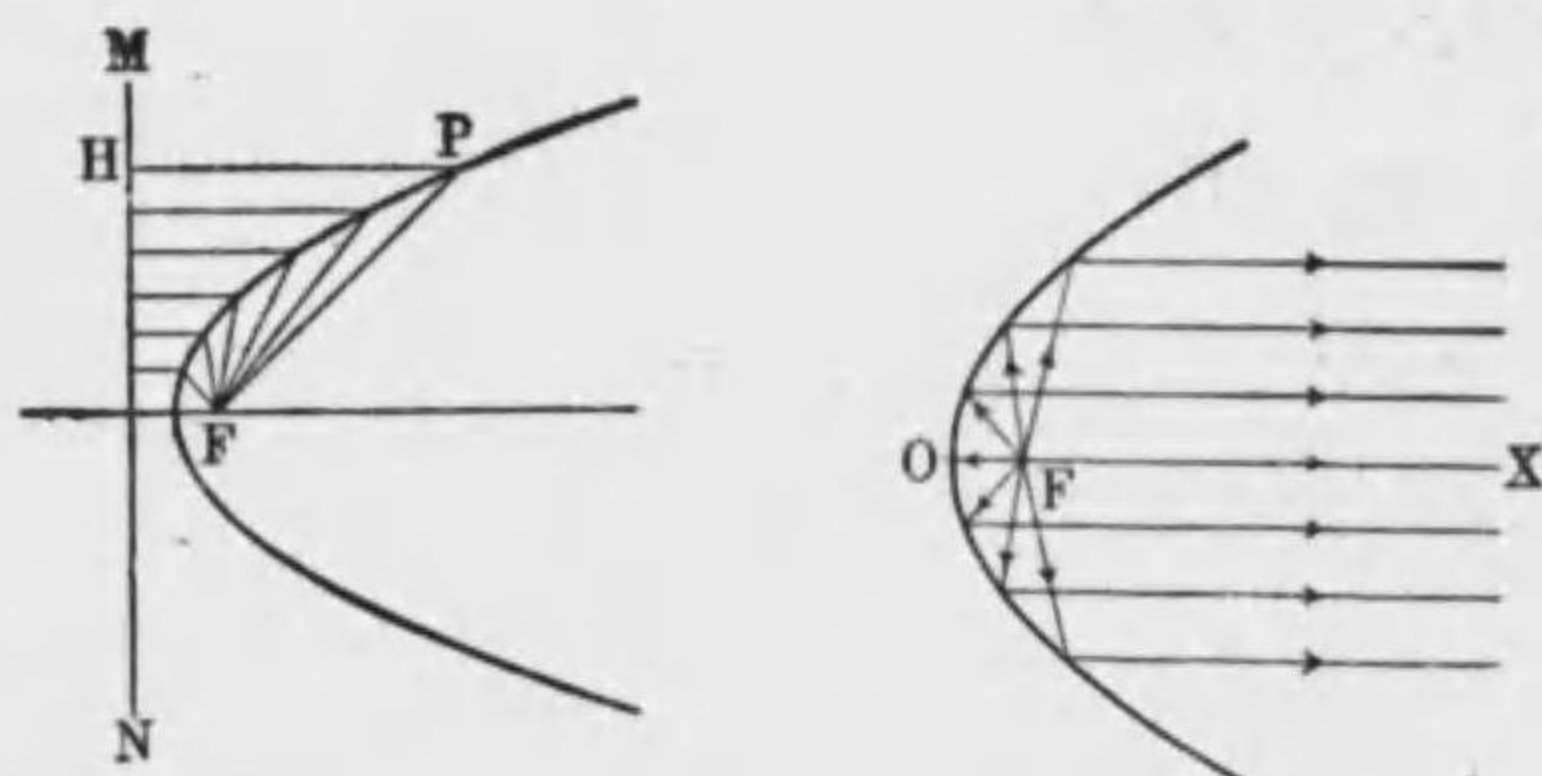
## 2. 双曲線

二定點  $(F, F')$  ニ至ル距離ノ差ガ一定デアルヤウニ一點  $P$  ガ動ケバ双曲線トイフ曲線トナル。コノ二點ヲ焦點トイフ。



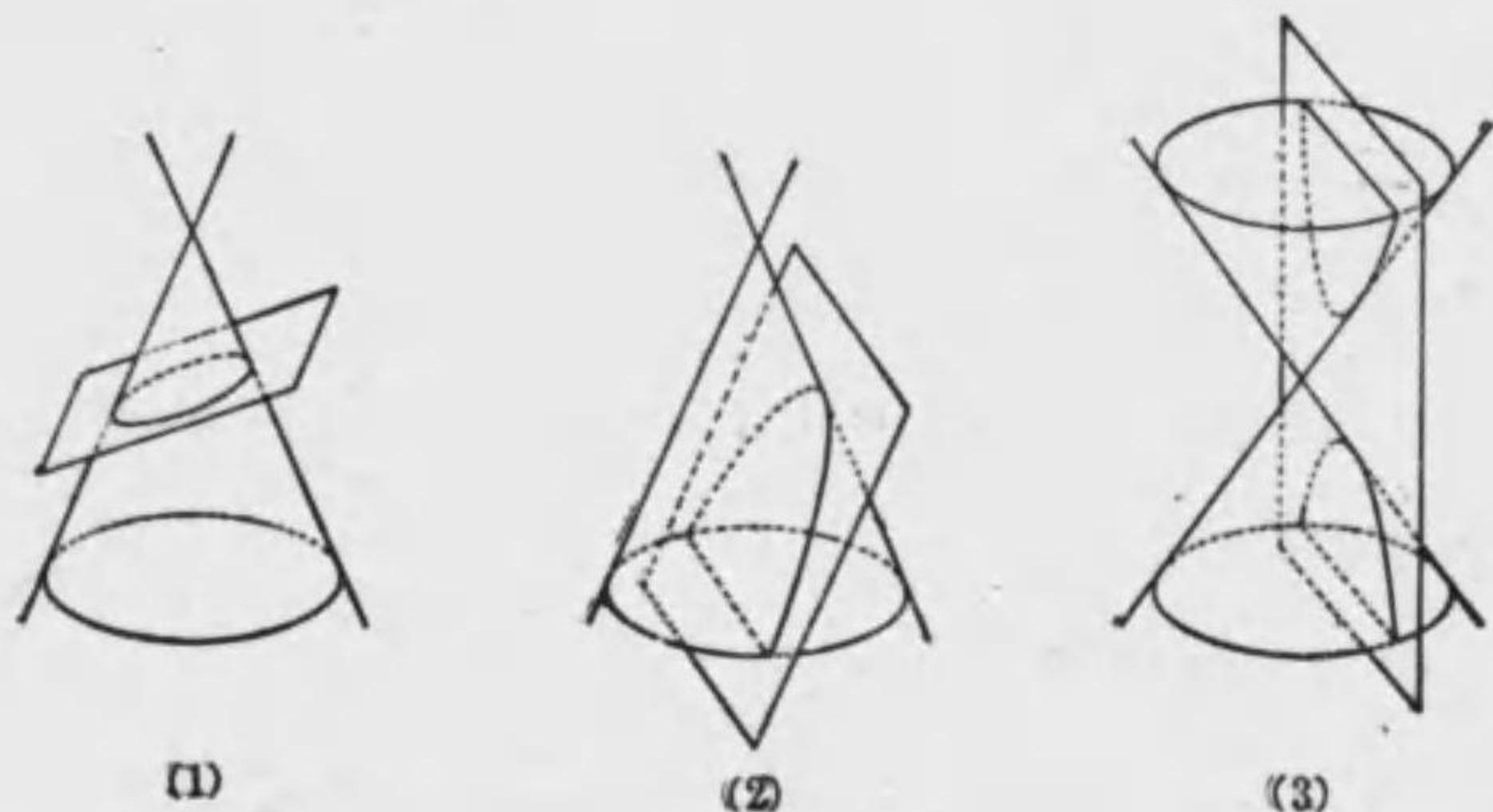
## 3. 拋物線

點  $P$  カラ定直線ヘ至ル距離  $PH$  ト定點  $F$  ニ至ル



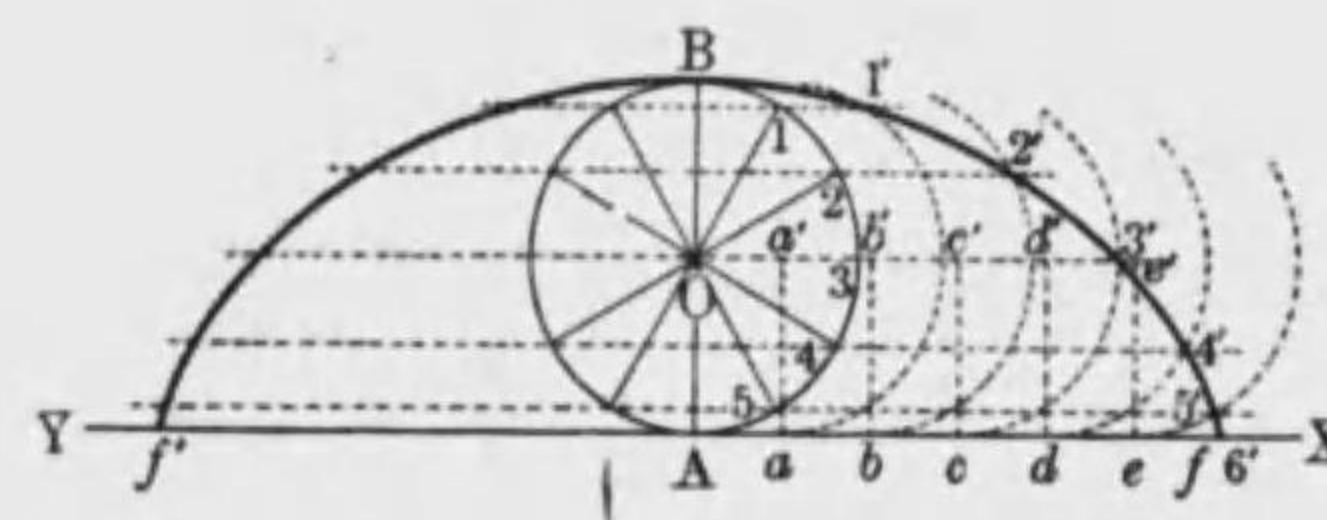
距離 PF トガ常ニ等シイヤウニ P 點ガ動イテ出來ル曲線ヲ拋物線トイヒ、定點 F ヲ焦點トイフ。拋物線ガ軸 OX ノ周リニ回轉シテ出來タ面ヲ拋物面トイヒ、之ヲ反射鏡ニ用フルトソノ焦點カラ出ル光線ハ反射シテ悉ク軸ニ平行ニ進ム。探照燈ニハコノ反射鏡ヲ用ヒル。又石橋ノあーち及ビ建築物ニ楕圓ナドト共ニ用ヒラレル。

又コノ三ツノ曲線ハ直圓錐ヲ頂點ヲ通ラズ且ツ底ニ平行デナイ平面デ截ツトキニ出來ルカラコレヲ圓錐曲線トイフ。



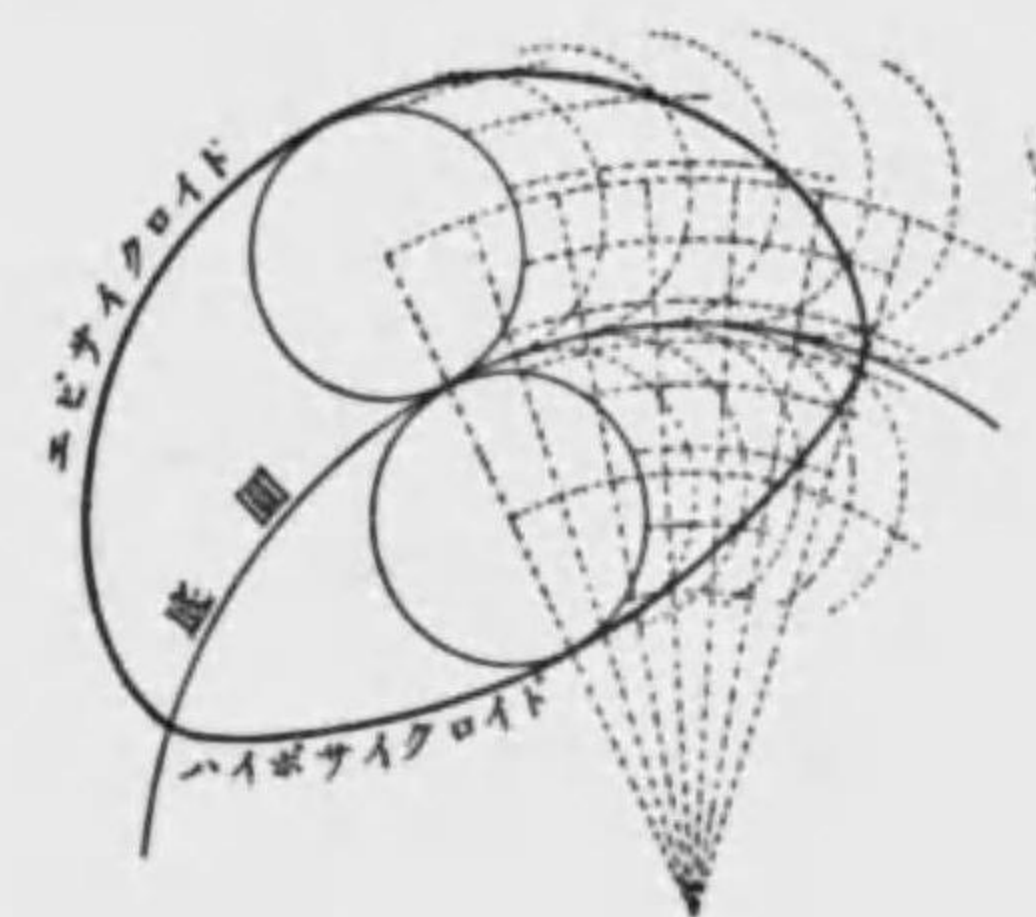
- (1) 截面ガ總テ母線ト交ハルトキ、…楕圓。
- (2) 截面ガ唯一ツノ母線ニ平行ナトキ、…拋物線。
- (3) 截面ガ二ツノ母線ニ平行ナトキ、…双曲線。

4. (1) 普通さいくろいど



一ツノ圓ガ一直線上ヲ轉ルトキ、ソノ圓周上ノ一定點ガ畫ク曲線ヲ云フ。

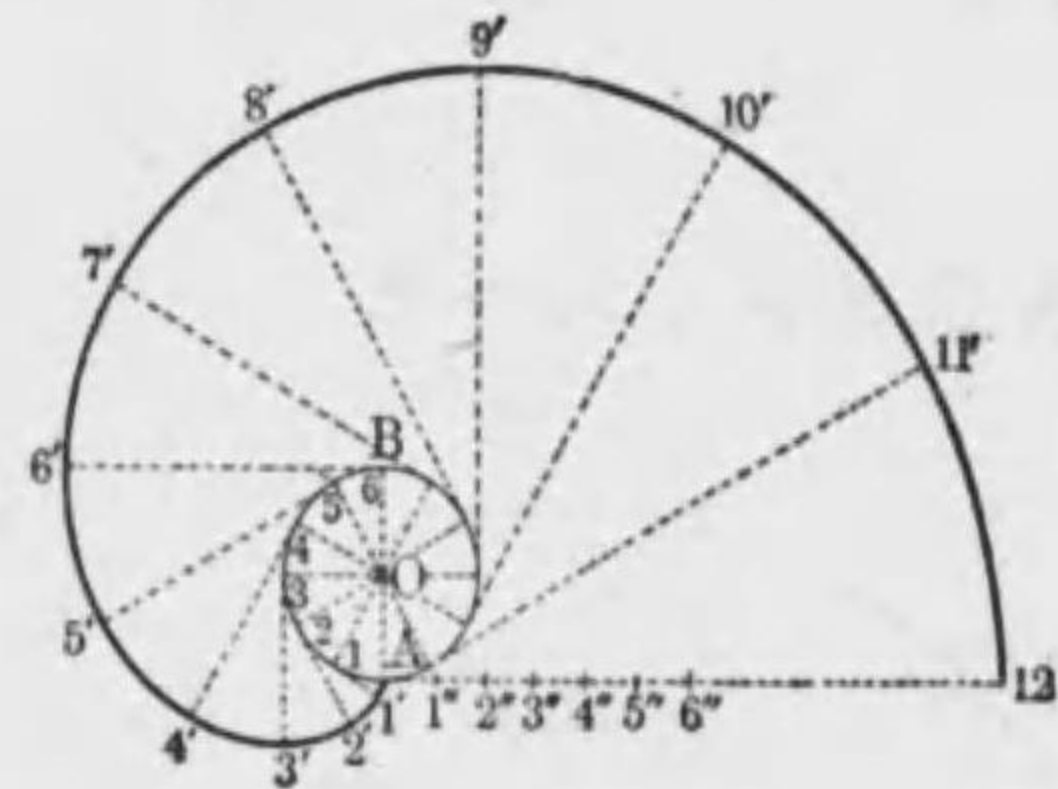
- (2) 外轉さいくろいど(えびさいくろいど)曲線
- (3) 内轉さいくろいど(はいぼさいくろいど)曲線



一ツノ圓ガアル定圓弧ノ外側ヲ轉ツタトキ圓周上ノ一定點ガ畫ク曲線ヲ外轉さいくろいどトイヒ、内側ヲ轉ツテ出來ル曲線ヲ内轉さいくろいどトイフ。

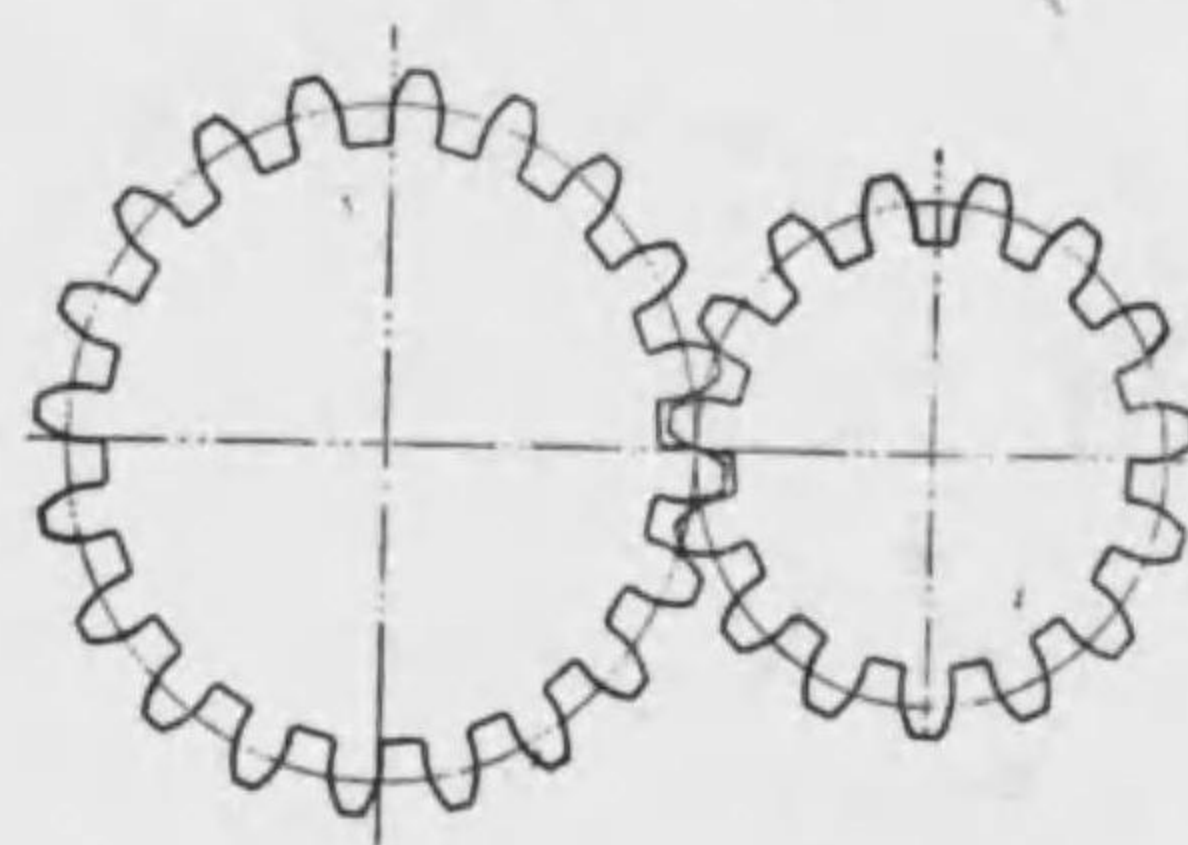


### 5. いんぼりゆーと曲線



圓板ニ卷キ付ケタ糸ヲ引張リ乍ラコレヲ解クトキ糸ノ一端ガ畫ク曲線ヲイフ。

圖ニ於テ 1A=切線 11' 2A=切線 22' 以下同様ニシテ 3, 4, 5……ニ於ケル切線ヲ 3', 4', 5'……ニ於テ切リ



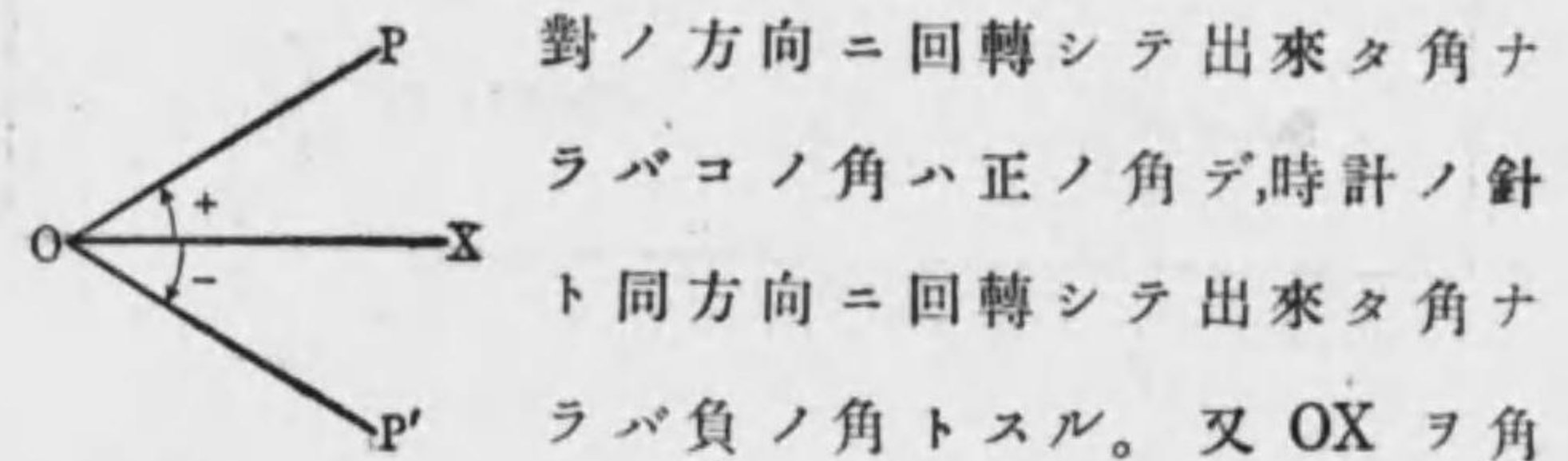
いんぼりゆーと齒車 齒數 15:20

1', 2', 3', 4'……ヲ順次結ベバいんぼりゆーと曲線ヲ得ル。近來齒車ノ齒形ノ曲線ハさいくろいど曲線ヨリモ主トシテいんぼりゆーと曲線ヲ用ヒル。

### 4. 一般ノ角ノ三角函數

#### 一般ノ角及ビ角ノ正負

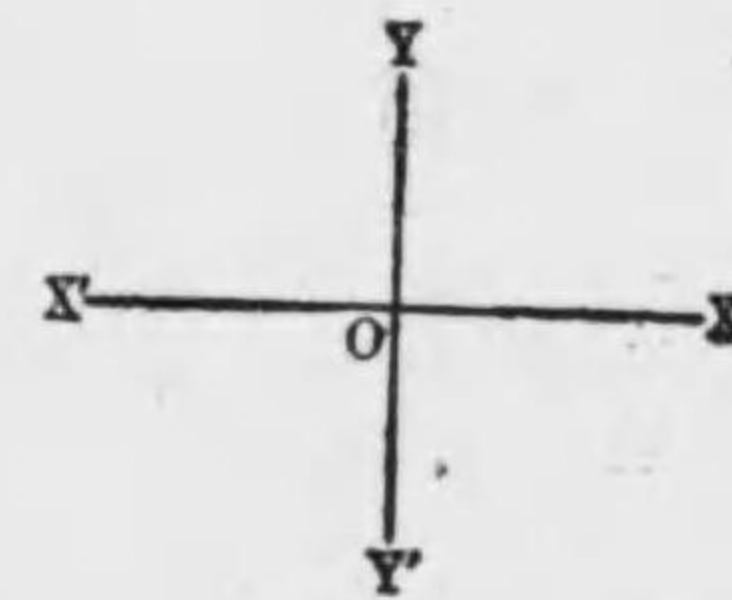
$\angle XOP$  ハ一邊  $OP$  ガ  $OX$  ノ位置カラ時計ノ針ト反



對ノ方向ニ回轉シテ出來タ角ナラバコノ角ハ正ノ角デ,時計ノ針ト同方向ニ回轉シテ出來タ角ナラバ負ノ角トスル。又  $OX$  ヲ角ノ第一邊又ハ原線(主線)トイヒ,  $OP$  ヲ角ノ第二邊又ハ動徑トイフ。動徑  $OP$  ハ  $O$  ノ周リヲ正又ハ負ノ方向ニ幾回デモ回轉シ得ルカラ角ハ正又ハ負ノ幾度ノ角デモ表ハシ得ル。

#### 象 限

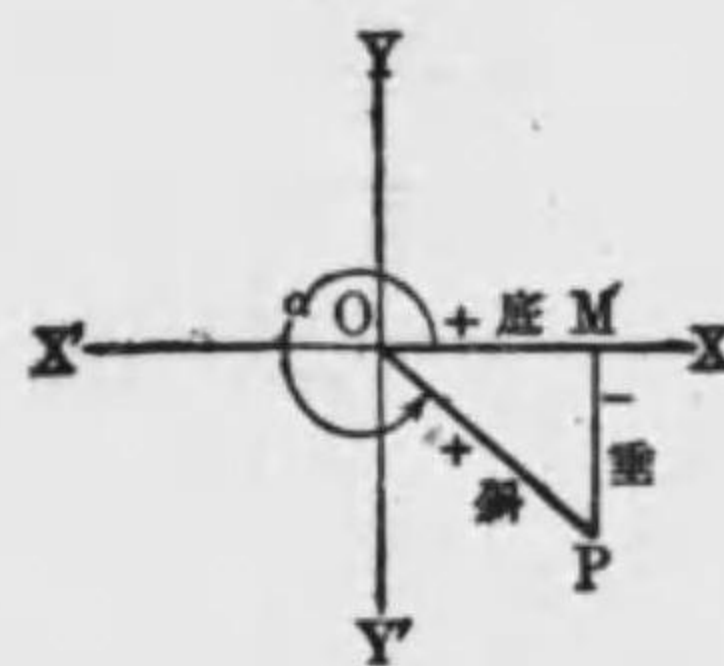
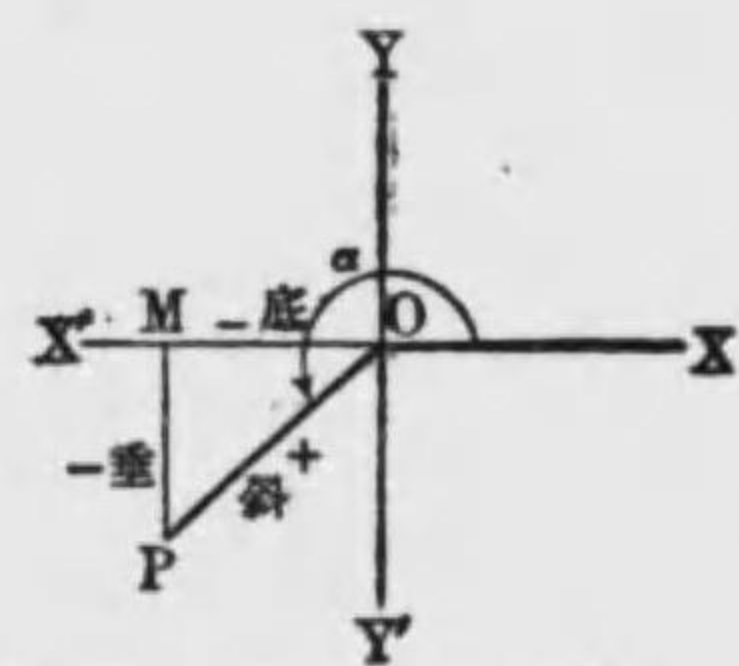
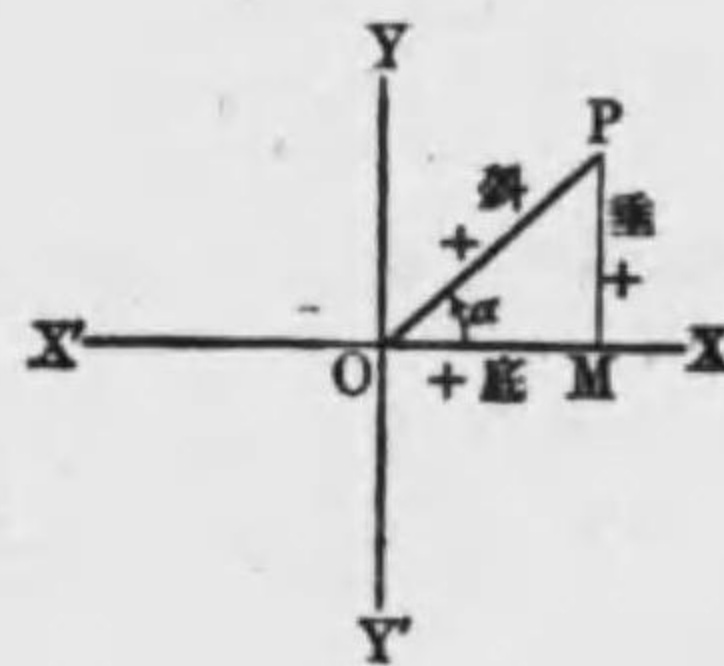
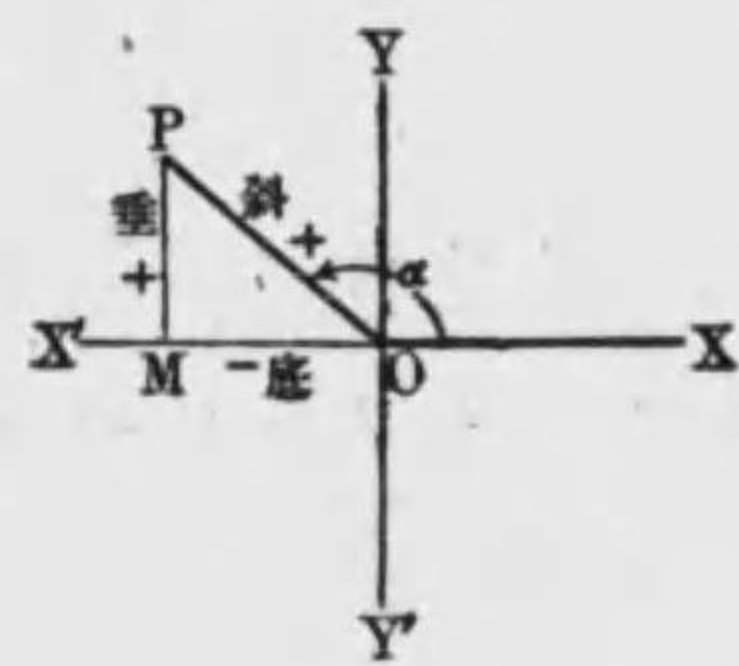
二直線  $XOX', YOY'$  ガ  $O$  デ直交シテ出來ル四ツノ部分ヲ象限トイヒ。  $XOY, YOX, X'OY, Y'OX$  ヲ夫々第一象限,第二象限,第三象限,第四象限トイフ。



#### 一般角ノ三角函數ノ定義

角ノ第二邊(動徑)ハ常ニ正トシ,坐標ノ正負ト同様ノ規約ヲ用ヒテ任意ノ角  $\alpha$  ノ三角函數ヲ次ノ如ク定義スル。(次頁ノ圖参照)

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{MP}{OP} = \frac{\text{垂}}{\text{斜}} & \cos \alpha &= \frac{OM}{OP} = \frac{\text{底}}{\text{斜}} \\ \tan \alpha &= \frac{MP}{OM} = \frac{\text{垂}}{\text{底}} & \cot \alpha &= \frac{OM}{MP} \\ \sec \alpha &= \frac{OP}{OM} & \text{cosec } \alpha &= \frac{OP}{MP} \end{aligned}$$



この定義によ  
り、任意ノ角ノ三  
角函数ノ値ノ符  
號ハ右表ノ通り  
デアル。

象限 函数	I	II	III	IV
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tan α	+	-	+	-

三角函数ノ定  
義ヲカク定メテモ鋭角ノトキニ得タ公式ハ皆成立

スル。

例へバ  $\tan \alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{\frac{MP}{OP}}{\frac{OM}{OP}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

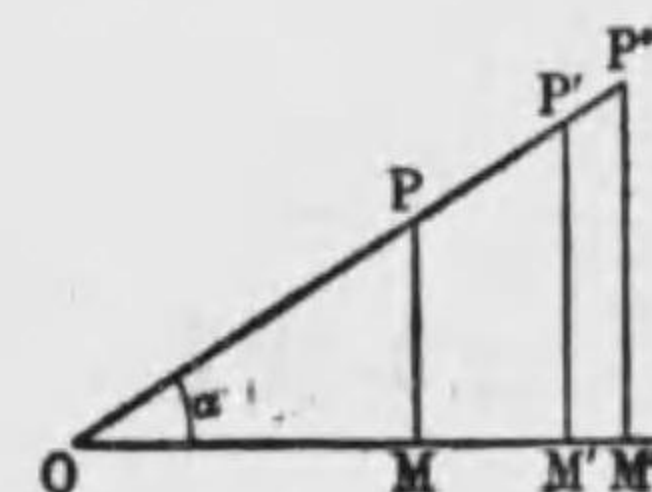
又  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$   
 $= \frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = \frac{MP^2 + OM^2}{OP^2}$   
 $= \frac{OP^2}{OP^2} = 1$

他モ同様ニ成立ス。

### 5. 三角函数ノ値ヲ線分デ表ハスコト

$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{MP'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} \text{ デ、}$$

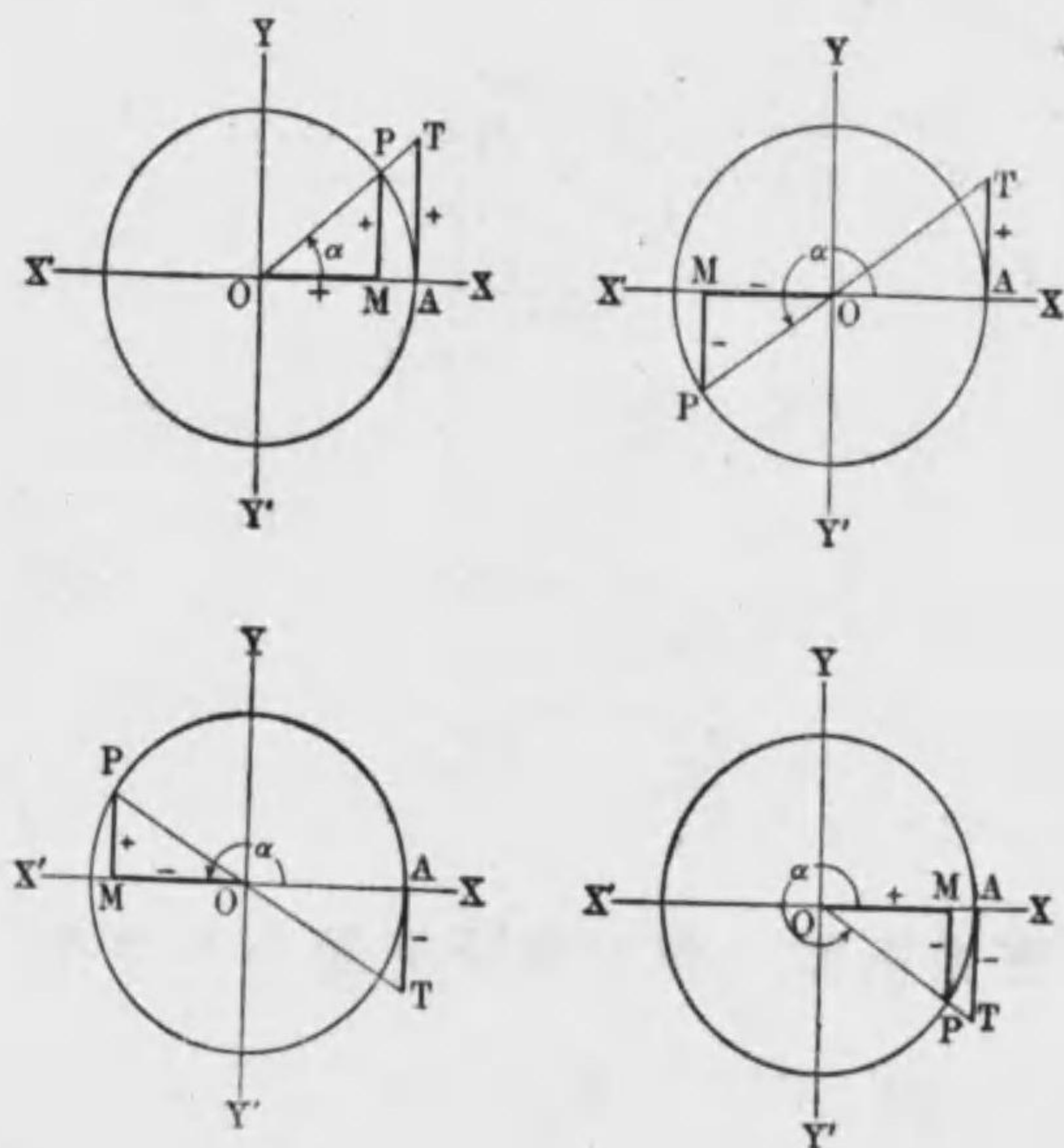
邊ノ大小ニ關係ガナイ。即チ三角函数ノ値ハ角ニ關係シ邊ノ大小ニ關係ガナイ。故ニ斜邊ガ1ニナル様ニ作圖シテ研究スルト便利デアル。今角αノ頂點Oヲ中心トシ單位ノ長サヲ半径トスル圓(單位圓)ヲ畫クト何レノ象限デモ、(次頁ノ圖)



$$\sin \alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{MP}{1} = MP \text{ (即チ垂線ノ長サ)}$$

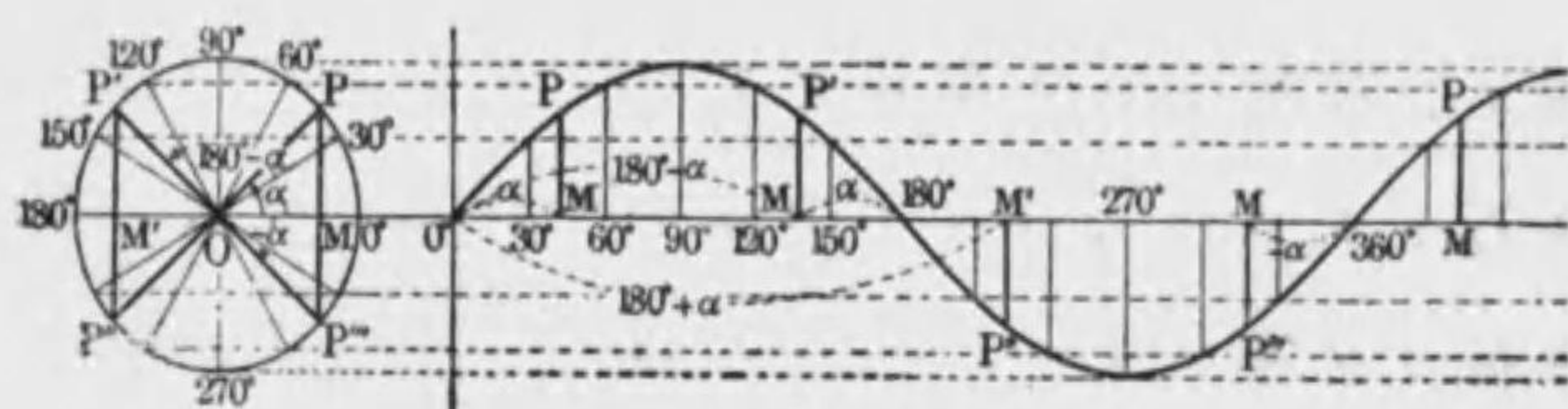
$$\cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM \text{ (底ノ長サ)}$$

$$\tan \alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT \text{ (切線ノ長サ)}$$



6. 三角函数ノぐらふ

(1) 正弦ノぐらふ (単位圆デ MP ノ变化)



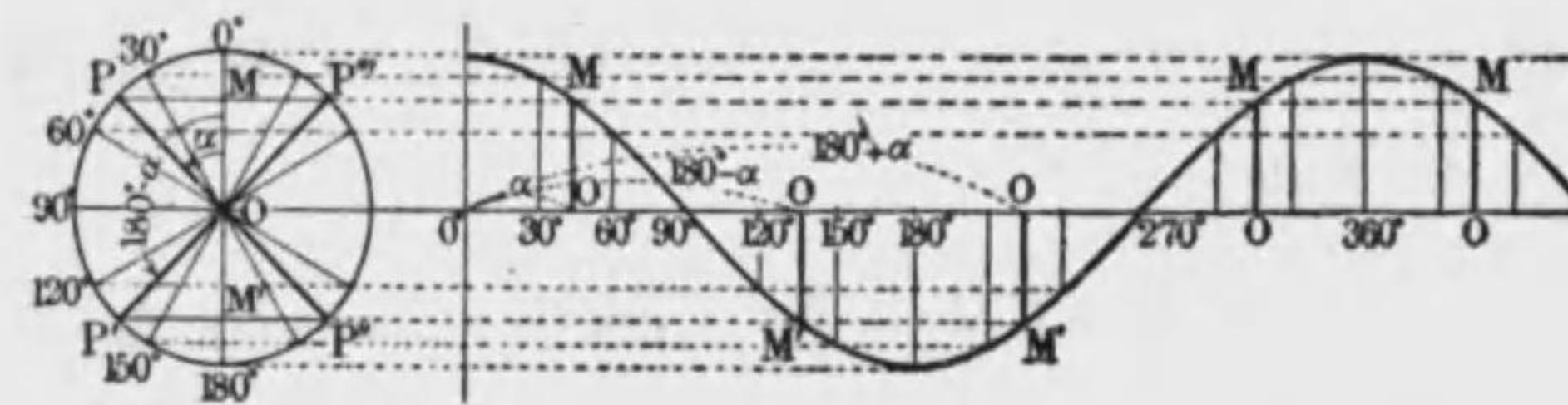
コノぐらふカラ次ノ重要ナ公式ガワカル。

- (1)  $\sin 0^\circ = 0$     $\sin 90^\circ = 1$     $\sin 180^\circ = 0$   
 $\sin 270^\circ = -1$  等
- (2)  $-1 < \sin \alpha < 1$    (3)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

- (4)  $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$    (5)  $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- (6)  $\sin(360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$    (7)  $\sin(n360^\circ + \alpha) = \sin \alpha$

(2) 餘弦ノぐらふ (前圖ノ単位圆デ OM ノ变化)

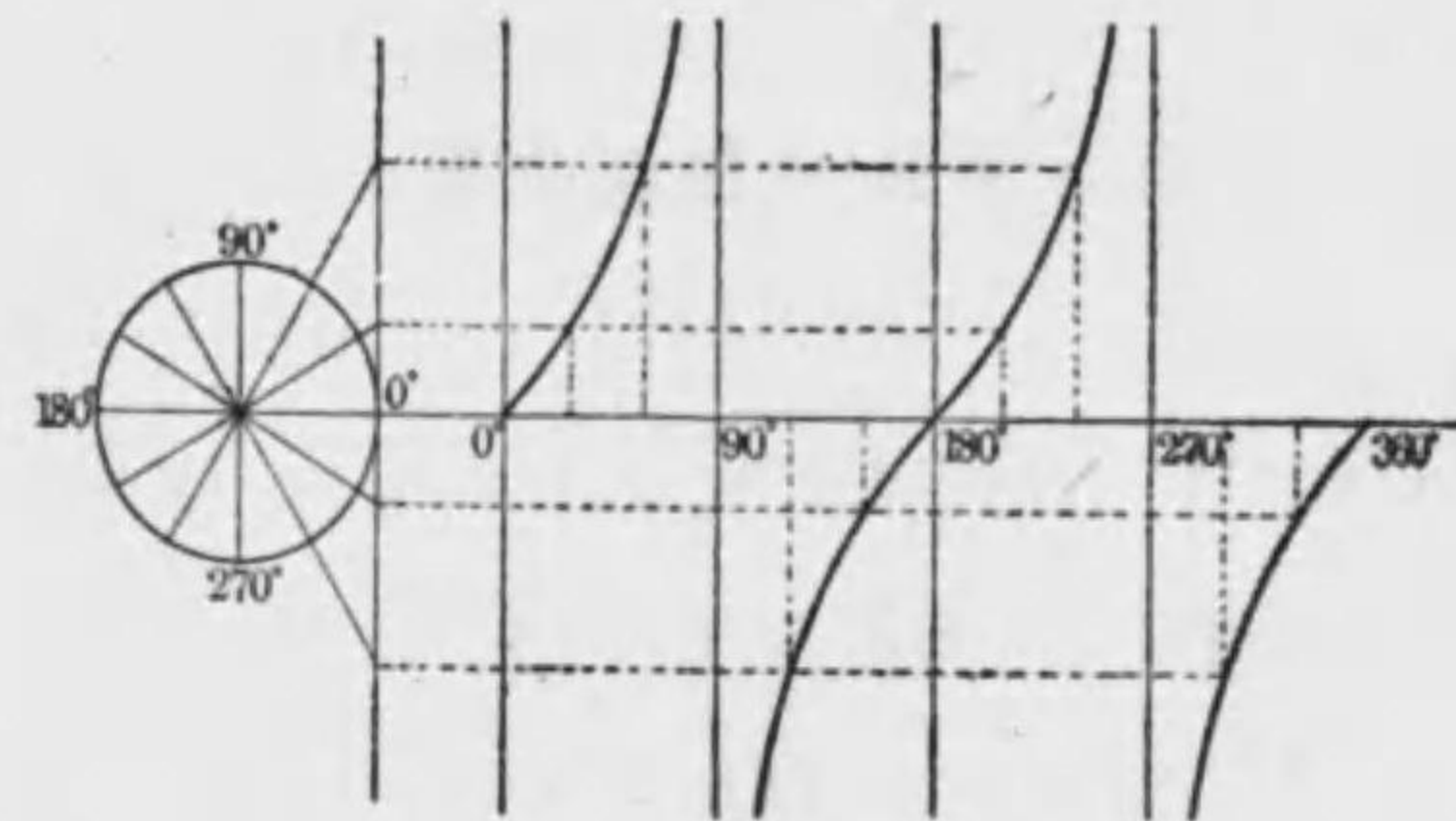
正ノ方向 = 90° 回轉シテ作ル方ガ便利デアル。



コノぐらふカラ次ノ重要ナ公式ガワカル。

- (1)  $\cos 0^\circ = 1$     $\cos 90^\circ = 0$     $\cos 180^\circ = -1$
- (2)  $-1 < \cos \alpha < 1$    (3)  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- (4)  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- (5)  $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- (6)  $\cos(360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
- (7)  $\cos(n360^\circ + \alpha) = \cos \alpha$

(3) 正切ノぐらふ (前圖単位圆デ AP ノ变化)



コノぐらふカラ次ノ重要ナ公式ガワカル。

- (1)  $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$   
 (2)  $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$   
 (3)  $\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$   
 (4)  $\tan(n360^\circ + \alpha) = \tan \alpha$   
 (5)  $\tan 0^\circ = 0$                       (6)  $\tan 90^\circ = +\infty$

例  $A+B+C=180^\circ$  ナラバ,

$$\sin(B+C) = \sin A, \quad \cos(B+C) = -\cos A$$

解  $B+C=180^\circ - A$

$$\therefore \sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\text{又} \quad \cos(B+C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$$

## 7. 二角ノ和及ビ差ノ三角函數

A, B ヲ任意ノ角トスルトキハ,

$$\begin{cases} \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \end{cases}$$

コレヲ正弦及ビ餘弦ノ加法定理ト云フ。

證明  $\angle XOY = A, \angle YOZ = B$  トシ OZ 上ノ點 P ヲ

リ OX, OY = 垂線 PM, PQ ヲ下シ, Q ヲリ OX,

PM = 垂線 QN, QL ヲ下スト,

$$ML = NQ \quad LQ = MN$$

$$\angle LPQ = A \quad \angle XOZ = A+B$$

$$\therefore \sin(A+B) = \frac{MP}{OP}$$

$$= \frac{ML+LP}{OP} = \frac{NQ+LP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OP} + \frac{LP}{OP}$$

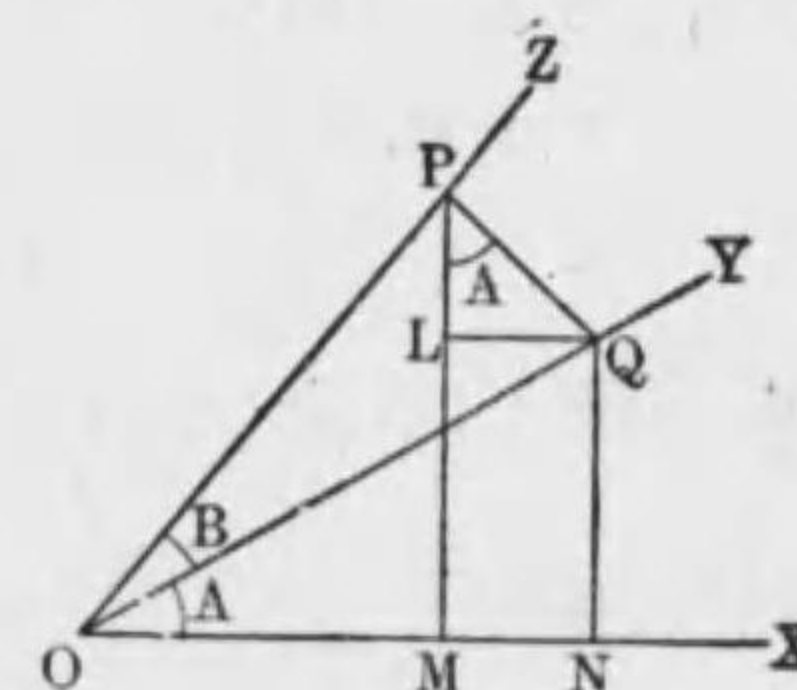
$$= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{LP}{QP} \cdot \frac{QP}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{ON-MN}{OP} = \frac{ON-LQ}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OP} - \frac{LQ}{OP} = \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{LQ}{QP} \cdot \frac{QP}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B$$



$$\begin{cases} \sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{cases}$$

證明  $\sin(A-B) = \sin\{A+(-B)\}$

$$= \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

$$= \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

又  $\cos(A-B) = \cos\{A+(-B)\}$

$$= \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B)$$

$$= \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

コレヲ正弦及ビ餘弦ノ減法定理トイフ。

**注意** 上ノ證明ハ A, B, A+B, ガ鋭角デアルトシテ證明シタガ A, B ノ任意ノ値ニ於テモ成立スル。コノ證明ハ稍繁雜デアルカラ本書ニハ省ク。

**例**  $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$  ヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sin(A+B)\sin(A-B) \\ & =(\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \\ & =\sin^2A \cos^2B - \cos^2A \sin^2B \\ & =\sin^2A(1-\sin^2B) - (1-\sin^2A)\sin^2B \\ & =\sin^2A - \sin^2A \sin^2B - \sin^2B + \sin^2A \sin^2B \\ & =\sin^2A - \sin^2B \end{aligned}$$

## 問 題 2.

1. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

- ①  $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$
- ②  $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$
- ③  $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$
- ④  $-\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \sin A \sin B$

2. 上ノ公式ニ於テ  $A+B=C$ ,  $A-B=D$  トスレバ

$$A = \frac{C+D}{2}, B = \frac{C-D}{2} \text{ ナルコトヨリ次ノ公式ヲ證$$

明セヨ。

$$\text{①} \quad \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\text{②} \quad \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$\text{③} \quad \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\text{④} \quad \cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

3.  $\sin 2A = \sin(A+A)$   $\cos 2A = \cos(A+A)$  ナルコトカラ次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\text{①} \quad \sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\text{②} \quad \cos 2A = \cos^2A - \sin^2A = 2 \cos^2A - 1 = 1 - 2 \sin^2A$$

$$4. \quad \tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} \quad \tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} =$$

注意シテ次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

5.  $\tan 2A = \tan(A+A)$  ニ注意シテ次式ヲ證明セヨ。

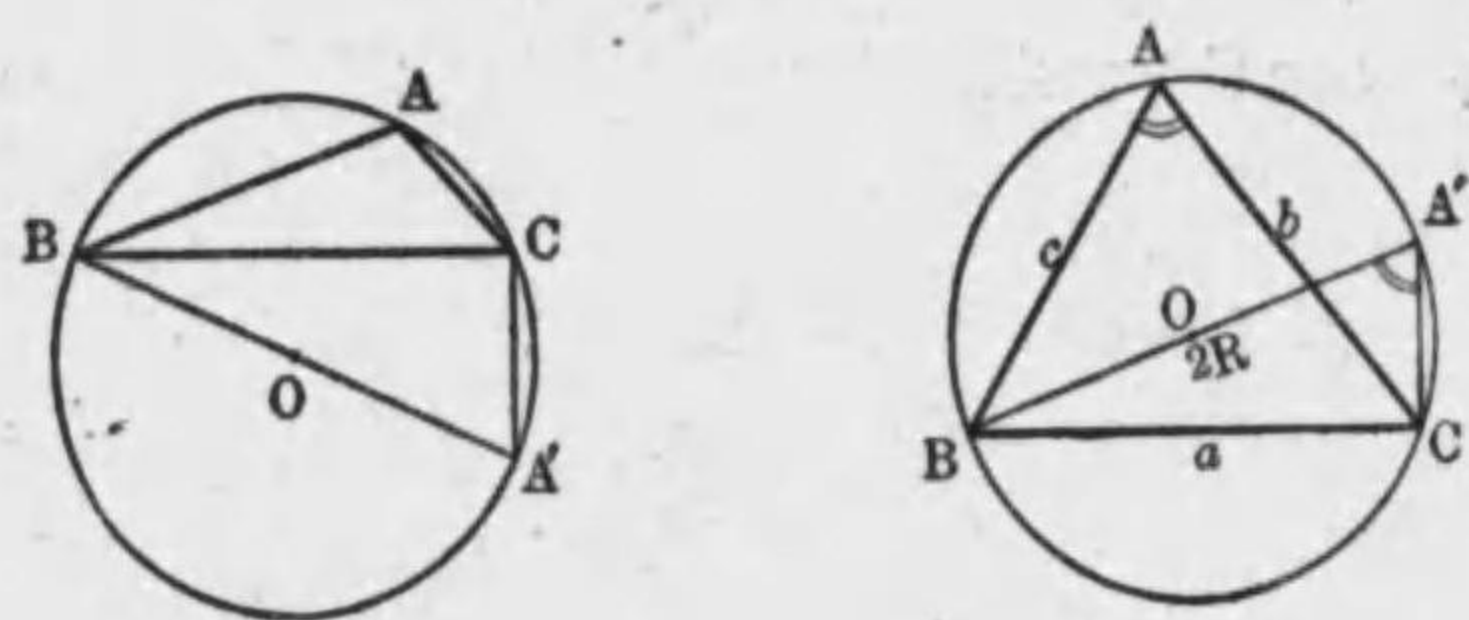
$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2A}$$

## 8. 三角形ノ邊ト角トノ關係

三角形ノ邊ハソノ對角ノ正弦ニ比例ス。

$$\text{即チ} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{正弦法則})$$

證明 三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ R トス。



直徑 BA' ヲ作レバ  $\angle A'CB = R\perp$

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R} \quad \therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

同様ニシテ  $\frac{b}{\sin B} = 2R \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$

故ニ  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

若シ A ガ鈍角デアルトキハ、

$$\angle A + \angle A' = 180^\circ \quad A' = 180^\circ - A$$

$$\therefore \frac{a}{2R} = \sin A' = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} (=2R)$$

系  $a = 2R \sin A \quad b = 2R \sin B$   
 $c = 2R \sin C$

例 次圖ニ於テ點 A, B デ測ツタ山頂 C ノ仰角ヲ夫  
 夫  $\alpha, \beta$  トシ  $AB = a$  デアルトキ山ノ高サ CD ヲ

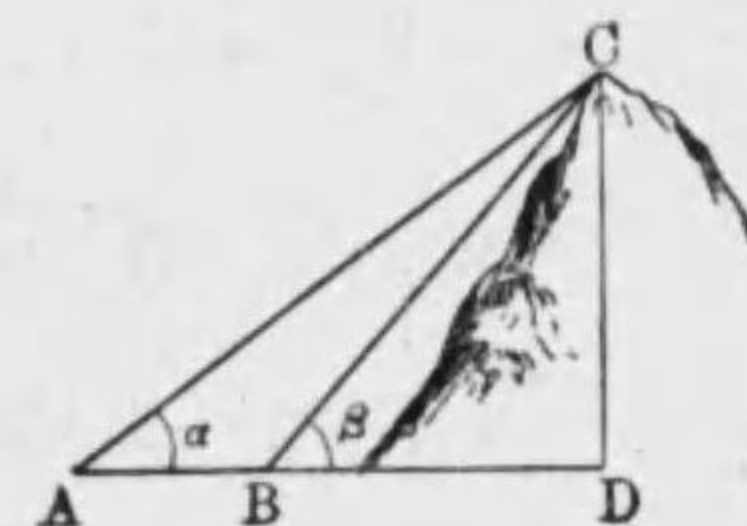
求ム。但シ A, B, D ハ一直線上ニアルモノトス。

解  $\triangle ABC$  ニ於テ、

$$\angle ACB = \beta - \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore BC = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$



$\triangle BCD$  ニ於テ、

$$CD = BC \sin \beta \quad \therefore CD = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

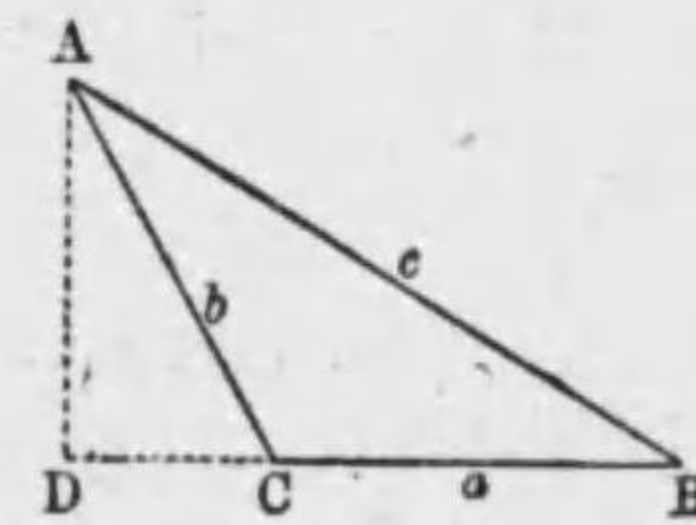
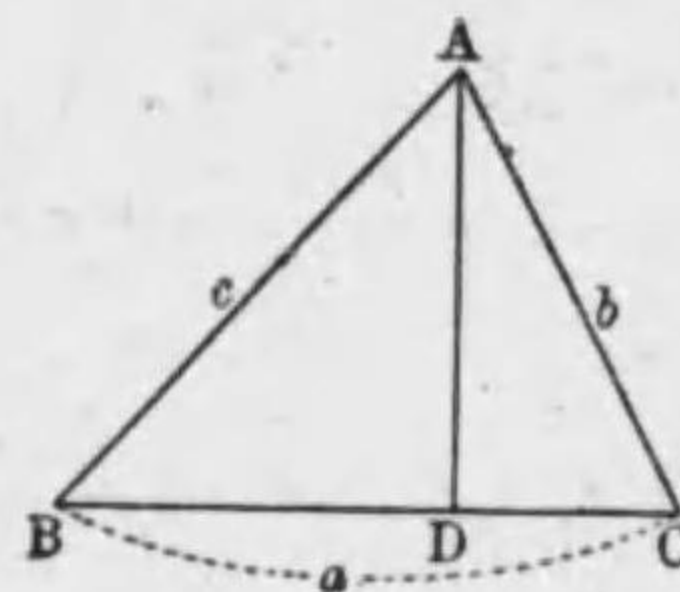
### 9. 邊ノ平方

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

證明  $AD \perp BC$  トス。



上圖ニテ、

$$c^2 = AD^2 + BD^2$$

$$= AD^2 + (BC - DC)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= AD^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC + DC^2 \\
 &= AD^2 + DC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC \quad \left( \frac{DC}{AC} = \cos C \right) \\
 &= AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC \cos C \\
 &= b^2 + a^2 - 2ab \cos C
 \end{aligned}$$

又前頁左圖ニテハ、

$$\begin{aligned}
 c^2 &= AD^2 + DB^2 \\
 &= AD^2 + (DC + CB)^2 \\
 &= AD^2 + DC^2 + 2DC \cdot CB + CB^2 \\
 &= AC^2 + CB^2 + 2DC \cdot CB \\
 &= AC^2 + CB^2 + 2CB \cdot AC \cos(180^\circ - C) \\
 &= b^2 + a^2 + 2ab \cos(180^\circ - C) \\
 \cos(180^\circ - C) &= -\cos C \\
 \therefore c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C
 \end{aligned}$$

$\angle C = 90^\circ$  ノトキハ  $\cos C = 0$   $\therefore C^2 = a^2 + b^2$  デユノ公式ハ適ス。故ニ三角形ノ種類ノ如何ニ拘ラズ適ス。他ノ二邊ニツイテモ證明ハ同様デアル。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$$

$$\text{但シ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

**註** 系 2 ハ  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}$  カラ出ルガ計算ガ繁雜デアルカラ略ス。

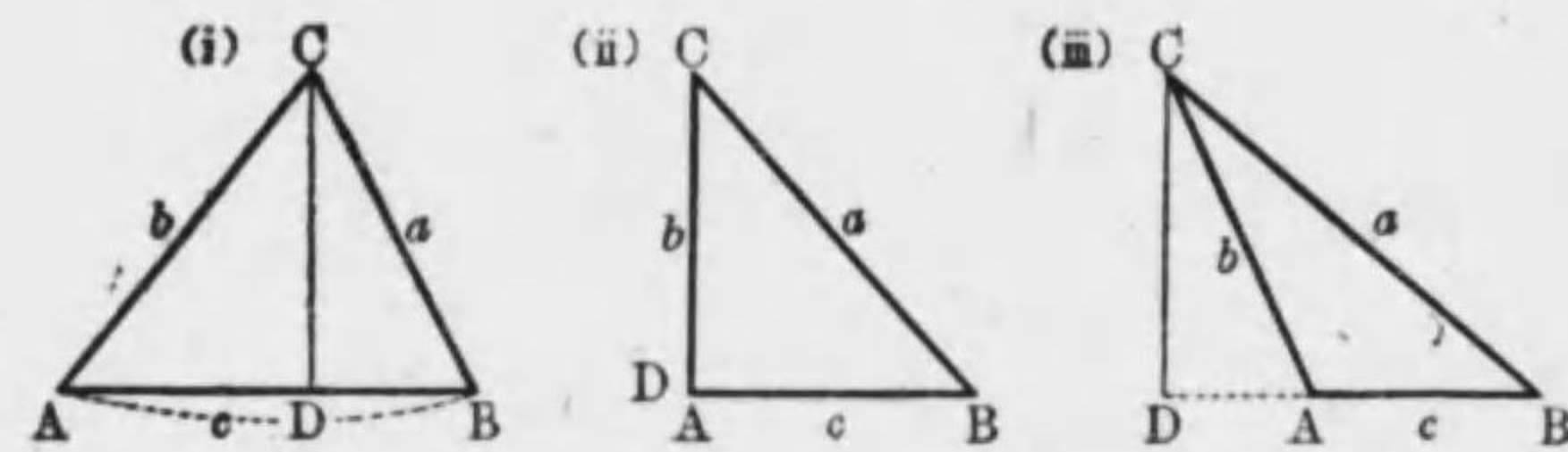
## 10. 三角形ノ面積

三角形ノ面積ヲ  $S$  ニテ表ハセバ、

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \quad S = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

**證明** 三角形  $ABC$  ノ高サヲ  $CD$  トスレバ、



$$(i) \quad S = \frac{1}{2} AB \cdot CD \quad AB = c \quad CD = b \sin A$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$(ii) \quad CD \text{ ト } CA \text{ ガ一致ス。} \quad \sin A = \sin 90^\circ = 1$$

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CA \quad S = \frac{1}{2} bc \times 1 = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$(iii) \quad S = \frac{1}{2} AB \cdot CD \quad AB = c$$

$$CD = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

他ノ二ツモ同様ニシテ求メ得ラル。

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

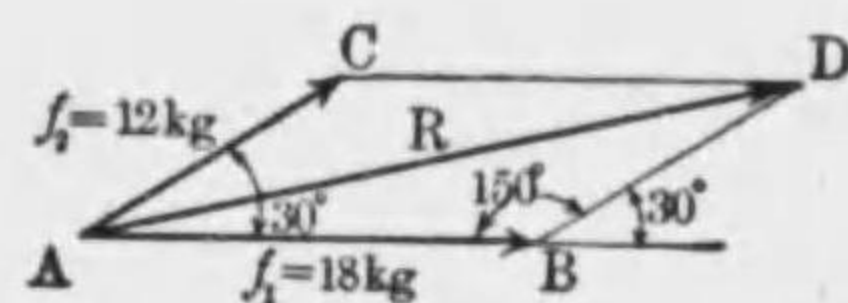
$$\text{但シ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

前頁ノ系2ヲ  $S = \frac{1}{2} bc \sin A$  ニ代入スレバ求メ得。

例 一點 A へ  $f_1, f_2$  ナル二カガ互ニ  $30^\circ$  ノ角度ヲナシテ作用スルトキ、コノ二カノ合力 R ノ大サ及ビ合力ト  $f_1$  トノナス角ヲ求メヨ。

但シ  $f_1 = 18 \text{ kg}$   $f_2 = 12 \text{ kg}$  トス。

解 題意ニヨリカノ平行四邊形ヲ作ルト、



$$R = AD \quad AD = 18^2 + 12^2 - 2 \times 18 \times 12 \cos 150^\circ$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AD^2 = 842.112$$

$$\therefore AD = 29.02 \text{ kg}$$

又三角形 ABDニ於テ、

$$\frac{12}{\sin DAB} = \frac{29.02}{\sin 150^\circ}$$

$$\therefore \sin DAB = \frac{12 \times \sin(180^\circ - 30^\circ)}{29.02} = \frac{12 \times \frac{1}{2}}{29.02}$$

$$\therefore \angle DAB = 11^\circ 56'$$

### 問題 3.

ABCニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$1. \quad \frac{\sin A + 2 \sin B}{\sin C} = \frac{a + 2b}{c}$$

$$2. \quad a = 2R \sin A = 2R \sin\{180^\circ - (B+C)\} = 2R \sin(B+C) \text{ヨリ}$$

$$a = b \cos C + c \cos B \text{ヲ導キ出セ。}$$

$$3. \quad \text{三角形 ABCノ面積ヲ } S \text{ トスレバ } S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

コレヨリ次ノ公式ヲ證明セヨ。

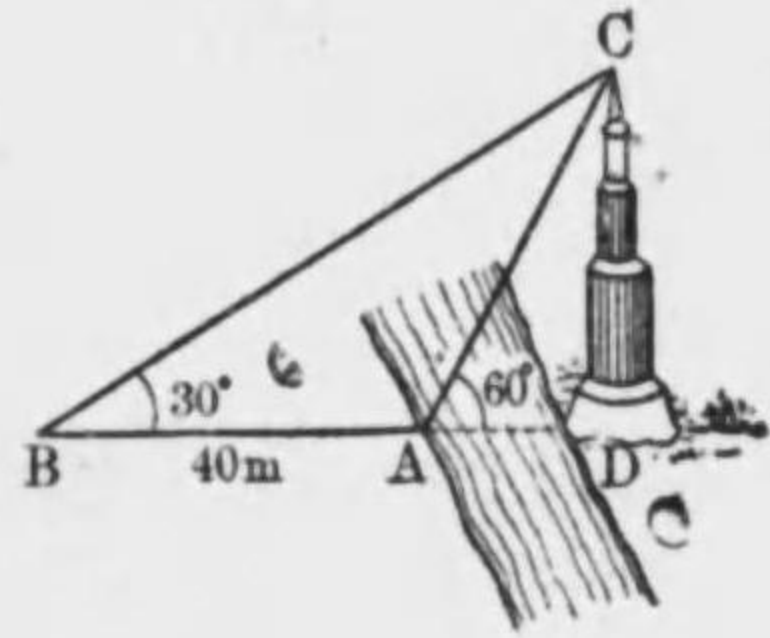
$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{abc}{4R}$$

$$4. \quad \text{底邊 } 12 \text{ cm 頂角 } 60^\circ \text{ デアル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。}$$

$$5. \quad \text{三角形ノ二邊ガ } 60 \text{ cm, } 48 \text{ cm デソノ夾角ガ } 72^\circ \text{ デアル三角形ノ面積ヲ求メヨ。}$$



6.  $\triangle ABC$  に於テ  $a=7$   $b=8$   $c=9$  デアルト最大ノ角ハ何度何分カ。
7.  $A=49^\circ$   $B=51^\circ$   $a=1$  デアルトキ  $b, c$  ヲ求メヨ。
8. 25kg ト 18kg トノ二力ガ互ニ  $60^\circ$  ノ角ヲナシテ一點 P ニ働クトキ合力ノ大サ及ビソノ方向ヲ求メヨ。
9. 川ノ岸ノ一點 A ニ於テ對岸ノ塔ノ頂點 C ノ仰角ハ  $60^\circ$  デアル。ソレカラ眞直ニ 40m 退ヒタ點 B ニ於ケル C 點ノ仰角ハ  $30^\circ$  デアルトイフ。塔ノ高サト川幅ヲ求メヨ。
10. 四邊形ノ對角線ノ長サガ夫々 25cm, 18cm デソノ交角ガ  $38^\circ 20'$  デアルトイフ面積ヲ求メヨ。



## 解 答

(簡單ナルモノハ略ス)

- 2頁 4. 942 糶/秒 5. 1750 回轉,  $58\frac{1}{3}\pi$
- 21頁 4. 6.928 cm 5. 1369.584 cm<sup>2</sup>
- 22頁 6.  $73^\circ 24'$  7. 1.03, 1.30
8. 37.4 kg, 25 kg ノカト  $24^\circ 38'$  ヲナス
9. 34.64 m, 20 m 10. 139.545 cm<sup>2</sup>

三角函数ノ真数表

角	sin	tan	cot	cos	角	sin	tan	cot	cos		
0° 0'	0.0000	0.0000	∞	1.0000	0° 90'						
10'	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50'						
20'	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40'						
30'	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30'						
40'	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20'						
50'	0.0145	0.0145	68.7501	0.9999	10'						
1° 0'	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0° 89'						
	cos	cot	tan	sin	角						
1° 0'	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0° 89'	7° 0'	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0° 83'
10'	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50'	10'	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50'
20'	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40'	20'	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40'
30'	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30'	30'	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30'
40'	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20'	40'	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20'
50'	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10'	50'	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10'
2° 0'	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0° 88'	8° 0'	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0° 82'
10'	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50'	10'	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50'
20'	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40'	20'	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40'
30'	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30'	30'	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30'
40'	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20'	40'	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20'
50'	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10'	50'	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10'
3° 0'	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0° 87'	9° 0'	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0° 81'
10'	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50'	10'	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50'
20'	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40'	20'	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40'
30'	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30'	30'	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30'
40'	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20'	40'	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20'
50'	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10'	50'	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10'
4° 0'	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0° 86'	10° 0'	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0° 80'
10'	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50'	10'	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50'
20'	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40'	20'	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40'
30'	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30'	30'	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30'
40'	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20'	40'	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20'
50'	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10'	50'	0.1880	0.1814	5.2257	0.9822	10'
5° 0'	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0° 85'	11° 0'	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0° 79'
10'	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50'	10'	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50'
20'	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40'	20'	0.1965	0.2004	4.9804	0.9805	40'
30'	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30'	30'	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30'
40'	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20'	40'	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20'
50'	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10'	50'	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10'
6° 0'	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	0° 84'	12° 0'	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0° 78'
10'	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50'	10'	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50'
20'	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40'	20'	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40'
30'	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30'	30'	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30'
40'	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20'	40'	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20'
50'	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10'	50'	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10'
7° 0'	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0° 83'	13° 0'	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0° 77'
	cos	cot	tan	sin	角		cos	cot	tan	sin	角

三角函数ノ真数表

角	sin	tan	cot	cos	角	sin	tan	cot	cos		
13° 0'	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0° 77'	21° 0'	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0° 69'
10'	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50'	10'	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50'
20'	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40'	20'	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40'
30'	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30'	30'	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30'
40'	0.2363	0.2432	4.1125	0.9717	20'	40'	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20'
50'	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10'	50'	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10'
14° 0'	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0° 76'	22° 0'	0.3746	0.4041	2.4751	0.9272	0° 68'
10'	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50'	10'	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50'
20'	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40'	20'	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40'
30'	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30'	30'	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30'
40'	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20'	40'	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20'
50'	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10'	50'	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10'
15° 0'	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0° 75'	23° 0'	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0° 67'
10'	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50'	10'	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50'
20'	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40'	20'	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40'
30'	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30'	30'	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30'
40'	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20'	40'	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20'
50'	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10'	50'	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10'
16° 0'	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0° 74'	24° 0'	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0° 66'
10'	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50'	10'	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50'
20'	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40'	20'	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40'
30'	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30'	30'	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30'
40'	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20'	40'	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20'
50'	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10'	50'	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10'
17° 0'	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0° 73'	25° 0'	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0° 65'
10'	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50'	10'	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50'
20'	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40'	20'	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40'
30'	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30'	30'	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30'
40'	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20'	40'	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20'
50'	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10'	50'	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10'
18° 0'	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0° 72'	26° 0'	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0° 64'
10'	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50'	10'	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50'
20'	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40'	20'	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40'
30'	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30'	30'	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30'
40'	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20'	40'	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20'
50'	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10'	50'	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10'
19° 0'	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0° 71'	27° 0'	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0° 63'
10'	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50'	10'	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50'
20'	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40'	20'	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40'
30'	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30'	30'	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30'
40'	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20'	40'	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20'
50'	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10'	50'	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10'
20° 0'	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0° 70'	28° 0'	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0° 62'
10'	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50'	10'	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50'
20'	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40'	20'	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40'
30'	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30'	30'	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30'
40'	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20'	40'	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20'
50'	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10'	50'	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10'
21° 0'	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0° 69'	29° 0'	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0° 61'
	cos	cot	tan	sin	角		cos	cot	tan	sin	角

三角函数ノ真数表

角	sin	tan	cot	cos	角	sin	tan	cot	cos	
29° 0'	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	61° 37° 0'	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	
10'	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	10'	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	
20'	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	20'	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	
30'	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30'	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	
40'	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	40'	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	
50'	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	50'	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	
30° 0'	0.5000	0.5774	1.7221	0.8660	60° 38° 0'	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	
10'	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	10'	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	
20'	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	20'	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	
30'	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30'	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	
40'	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	40'	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	
50'	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	50'	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	
31° 0'	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	59° 39° 0'	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	
10'	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	10'	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	
20'	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	20'	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	
30'	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30'	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	
40'	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	40'	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	
50'	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	50'	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	
32° 0'	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	58° 40° 0'	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	
10'	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	10'	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	
20'	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	20'	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	
30'	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30'	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	
40'	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	40'	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	
50'	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	50'	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	
33° 0'	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	57° 41° 0'	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	
10'	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	10'	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	
20'	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	20'	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	
30'	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30'	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	
40'	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	40'	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	
50'	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	50'	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	
34° 0'	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	56° 42° 0'	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	
10'	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	10'	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	
20'	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	20'	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	
30'	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30'	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	
40'	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	40'	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	
50'	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	50'	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	
35° 0'	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	55° 43° 0'	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	
10'	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	10'	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	
20'	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	20'	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	
30'	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30'	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	
40'	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	40'	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	
50'	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	50'	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	
36° 0'	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	54° 44° 0'	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	
10'	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	10'	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	
20'	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	20'	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	
30'	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30'	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	
40'	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	40'	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	
50'	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	50'	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	
37° 0'	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	53° 45° 0'	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	
	cos	cot	tan	sin	角	cos	cot	tan	sin	角

實用幾何三角法

昭和15年3月20日印刷  
昭和15年3月25日發行

定價 金五拾五錢

著者 大阪工業教育研究會  
數 學 科  
發行者 宮部 富三郎  
東京市牛込區市ヶ谷加賀町二ノ九  
印刷者 晉成 貞吉  
東京市小石川區瀧口表邊町四六

發行所  
斯文書院

東京市牛込區市ヶ谷加賀町二丁目九番地  
振替口座東京五三二二九番・電話牛込七四二八番

發賣所

柳原書店  
大阪市東區北久太郎町四丁目一六番地  
振替大阪二三一三番・電話船場四八五七番  
柳原書店東京出張所  
東京市神田區神保町三丁目一九ノ一番地  
振替東京一一六三番・電話九段一九〇〇番

青年學校及技能者養成所用教科書目錄

相引 村田熊	茂藏 共著	ビギナーズ・テクニカル・リーダー	¥ .65
相引	茂著	ザ・プラクティカル・コウゲフ・リーダーズ 卷 1.2 各	¥ .38
坂本重	關著	日本工場精神綱要	¥ .85
同		工場精神教本	¥ .50
大阪工業教育研究會 數學科	著	簡明工業數學 算術代數	¥ .65
同		簡明工業數學 幾何三角法	¥ .70
同		新工業數學	¥ .50
同		實用工業算術代數	¥ .55
同		實用工業幾何三角法	¥ .55
大阪工業教育研究會 機械科	著	簡明初等力學及材料強弱學	¥ .50
同		簡明機械の要素	¥ .50
同		簡明機械工作法	¥ 1.30
同		簡明電氣工學	¥ .60
同		簡明蒸汽原動機	¥ .65
同		簡明水力原動機及ポンプ	¥ .75
同		簡明旋盤作業法	¥ 1.20
同		簡明仕上作業法	¥ 1.00
同		簡明木型作業法	¥ .60
同		簡明工業要項	¥ .35
同		簡明機械製圖	近刊
同		簡明機械材料	同
同		簡明內燃機關	同
同		簡明工作機械	同
同		簡明鑄造作業法	同
同		簡明火造作業法	同

特 248  
446

終