萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

類論梗概

包姆加脫納著

鄭太朴譯

商務印書館發行

萬有文庫

第一集一千種

總編纂者

王雲五

商務印書館發行

類論梗概

包姆加脫納著
鄭太朴譯

算學小叢書

類論梗概

目次

類 論 梗 概

第 一 章

類 之 概 念

數學所研究之對象，亦有爲同類事物或元素所成之系統者，其中每二元素按某種次序以某種方法結合之，所得仍爲一如是之元素。例如由自然數目 1,2,3,… 所成之系統，以加爲結合方法將其中任何二元素結合之，則所得仍爲一自然數目，仍屬於此系統中（如將 3 與 8 結合得 n，仍爲一自然數目也）。但若用減爲結合方法，則結合二元素所得者不必仍屬於此系統中，如將 2 與 5 用減結合之，可得 $2-5=-3$，此數不屬於系統中矣。用加爲結合方法，將二自然數目結合，所得者旣仍爲自然數目，則此數目自可仍與他數目結合，如是輾轉相結，無有限止可言。以下更舉數例，以

明此項系統。所舉者如讀者不甚明其對象，則不妨越過之。

第一節　算術中之例

1. 系統爲自然數目所成，其元素爲 $1,2,3,\cdots$ 結合法用加。例如 $7+2=9$，$10+10=20$（用以結合之二元素自亦可相同）。

2. 系統爲自然數目所成，結合法用乘，則任何二數目之結合，所得仍爲一自然數目，屬於此系統中者。例如 $4\cdot6=24$.

3. 系統爲一切整數……，$-2,-1,0,1,2,\cdots$ 所成，結合方法爲減，則二元素結合之結果，亦仍屬於此系統中。例如 $-6-2=-8$，$1-1=0$.

4. 一切自然數目，零亦在內，用 7 除之所得餘數均同者，名爲『以率 7 相合』之數，例如 6 與 13 是，算式作 $6\equiv13(mod.\ 7)$. 此項數目共可分爲 7 種，每種中數目以 7 除之，所得餘數皆同；如 $0,7,14,\cdots\cdots$；$1,8,15,\cdots\cdots$；$\cdots\cdots$；$6,13,$

20,……今於每種中取其一數作爲該種之代表,則得七數目成爲一系統,名曰『率 7 之完全餘數系統』。其中最簡單者爲 0,1,2,3,4,5,6,七數目。

今卽取此七數目爲系統,結合法則定如下:將二元素相加,所得者可易之以其種中之相合的數目。例如 6 與 4 相結得 3,因 $6+4=10\equiv 3 (mod. 7)$,8 與 8 結合得 2,因 $8+8=16\equiv 2 (mod. 7)$.如是,所得者仍屬於系統中。

第二節　函數論中之例

5.　系統由以下四元素所成:

$$f_1(\chi)=\chi,\quad f_2(\chi)=\frac{1}{\chi},\quad f_3(\chi)=-\chi,\quad f_4(\chi)=-\frac{1}{\chi}.$$

結合法:如將 $f_i(\chi)$ 與 $f_k(\chi)$ 結合,則應得 $f_k(f_i[\chi])$. 例如將 f_3 與 f_4 結合,得 $f_4(f_3[\chi])=-\frac{1}{-\chi}=\frac{1}{\chi}=f_2(\chi)$; f_2 與 f_2 結合,得 $f_2(f_2)=\frac{1}{\frac{1}{\chi}}=\chi=f_1(\times)$. 任何二函數之結合,所得仍爲

一函數屬於此系統中者；結合之次序，須照前所定法（本例中結合之次序尙可顚倒無妨，但如下例中則不能）。

6. 系統由一切整函數 $g(\chi)$所成，於此 χ 爲一複數。此項函數，按之函數論，其所展得之乘方級數，於全個數目平面中收斂。$\chi, a_0+a_1\chi+\cdots+a_n\chi^n$，$e^x$，$sin\,\chi$ 等函數均在此系統中。結合法仍如前例與中所定，如將 $g_1(\chi)$ 與 $g_2(\chi)$ 結合，應得 $g_2(g_1)$。一整函數之整函數仍爲整函數，故任何二函數結合之結果仍屬於此系統中。

第三節 代數及變換論中之例

7. 方程 $\chi^7=1$ 或 $\chi^7-1=0$ 共有七根，卽所謂七次單位根，其中之一爲 1，其餘六根則爲複數。此方程亦可寫作。

$$(\times-1)(\chi^6+\chi^5+\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1)=0.$$

因而 $$\chi^6+\chi^5+\chi^4+\chi^3+\chi^2+\chi+1=0$$

之六根卽爲原方程之六單位根。今設其中之一爲

E，則

$$\varepsilon^7=1,\quad \varepsilon^6+\varepsilon^5+\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,$$

又 $(\varepsilon^2)^6+(\varepsilon^2)^5+(\varepsilon^2)^4+(\varepsilon^2)^3+(\varepsilon^2)^2+(\varepsilon^2)+1=0$,

因 $(\varepsilon^2)^6=\varepsilon^{12}=\varepsilon^5(\varepsilon^2)^5=\varepsilon^{10}=\varepsilon^3$ 等等，從可知ε^2亦爲一根。仿此，可知 ε^3，ε^4 等亦爲其根，故六單位根乃是 $\varepsilon,\varepsilon^2,\varepsilon^3,\varepsilon^4,\varepsilon^5,\varepsilon^6$。

今卽以此爲系統，而結合法則定之如下：將 ε^3 與 ε^6 結合，當得 $(\varepsilon^3)^6$。如是，任何二元素結合之結果必仍爲系統中之元素，例如 ε^3 與 ε^5 得 $(\varepsilon^3)^5=\varepsilon^{15}=\varepsilon^7\varepsilon^7\varepsilon=\varepsilon$。

8. 最重要者爲今所欲舉之例，故稍詳論之。

設有 n 元素 $a,b,c,\cdots\cdots$於此，今將其中每一元素易以其中一元素，俾所得仍爲此 n 元素，如是一變易，名爲此 n 元素之，『變互。』普通將原來之元素寫於上，所用以易之之元素卽寫於其下，并用一括號括之，以明一變互。例如五元素 a,b,c,d,e，如欲將 a 易爲 c，b 易爲 d，c 易爲 a，d 易爲 b，e 易爲 e 以得一變互，則可寫作

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & a & b & e \end{pmatrix}$$

於此，所重者在某元素易以某元素，故原來元素先後之次序可不計，惟某元素之下爲某元素則不可混而已。因而前式亦可作

$$\begin{pmatrix} c & e & d & b & a \\ a & e & b & d & c \end{pmatrix}$$

若各元素均易以本身，則卽無變易，此變互名曰『全同變互』。以下爲簡易起見，元素均用數目字爲之。

設有二變互於此，則可將其結合之。例如

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \text{ 以及 } \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{pmatrix}$$

二變互，欲將其結合，可先照第一變互將 1 易爲 3，復照第二變互將 3 易爲 2，則原來元素之 1 經二變互後易爲 2 矣。仿此，原來之 2 經二變互易爲 1，3 易爲 3，

故將二變互結合所得結果仍爲一變互，卽

$$\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{pmatrix}$$

此項結果，可寫作

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

但如前所述，$\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$亦可寫作$\begin{pmatrix}312\\213\end{pmatrix}$，故前式不如寫爲

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

更爲醒目。所須注意者，二變互結合時，其次序至爲重要，不可相倒，蓋普通次序一倒，結果即不同也；例如將前二變互之結合次序相倒，卽得：

$$\begin{pmatrix}312\\213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}312\\213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}213\\132\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}312\\132\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$$

變互尙有一其他寫法，更爲簡單。例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix}$$

一變互，於中將 1 易爲 3,3 易爲 4,4 易爲 2,2 易爲 5,5 易爲 1。試將各數目字列於一圓週上，每數目字之後繼以所欲易入者，則得一數目字之循環，恰能將原來之變互表出。寫時不妨將圓週

上之數目字仍平列，惟注意其相繼之次序，至以何字開首，則可隨便。如是，前變互可寫作

(1 3 4 2 5) 或 (3 4 2 5 1)

然由一變互所化成之循環中，不必已能將原變互所有之元素盡包入無遺，則未包入之元素須仍化爲循環，至於盡所有之元素爲止。例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

一變互，1 後繼以 4,4 後爲 2,2 後爲 3,3 後又復爲 1，故所得循環(1 4 2 3),不足以盡原有之元素。所餘元素以 5 開始再列之爲循環，則因 5 後繼以 6,6 後復爲 5，所得者爲 (5 6)，如是必尙須將單元素之循環 (7) 加入，方能盡原有之元素。因而原變互化成爲三循環，寫時可幷列之：

$$\begin{pmatrix} 1234567 \\ 4312657 \end{pmatrix} = (1423)\,(56)\,(7) = (7)\,(65)\,(2314)。$$

相異的變互所化成之循環不能相同，此事甚明，故每一變互，亦祗能以一種形式化爲循環。

將變互化爲循環後，其結合法自仍如前，故不贅。

既明前所述理，則又可得一系統，例如爲三元素 1,2,3 之一切變互所成者。三元素 1,2,3 共可得六變互：

(1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)。

結合法如前所述。則可知系統中任何二元素之結合所得仍爲系統中之一元素，卽任何二變互之結合，仍爲此六變互中之一。例如(12)(3)與(123)得(13)(2)。

9. 系統由以下形式之一切變換(相代)所成：

$$\chi' = a\chi + by,$$

$$y' = c\chi + dy,$$

於此 a,b,c,d 爲任何實數，$a:b \neq c:d$. 結合法如下：今設

$$(1)\ \begin{aligned} \chi' &= 3\chi - \sqrt{2}y \\ y' &= \chi + y \end{aligned} \quad 與 \quad (2)\ \begin{aligned} \chi' &= 5\chi + \tfrac{1}{2}y \\ y' &= \chi - 4y \end{aligned}$$

爲系統中之二元素，則所謂將(1)與(5)結合者，

卽將(1)中 χ' 與 y' 之值代入(2)中之 χ 與 y 處;因得結果

$$\chi'=5(3\chi-\sqrt{2}y)+\tfrac{1}{2}(\chi+y)=15\tfrac{1}{2}\chi+(\tfrac{1}{2}-5\sqrt{2})y,$$

$$y'=3\chi-\sqrt{2}y)-4(\chi+y)=-\chi-(\sqrt{2}+4)y.$$

此則仍爲系統中之一變換也。

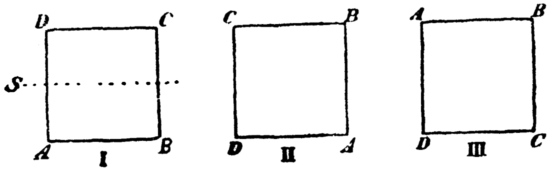
第四節 幾何學中之例

10. 一有法 n 邊形，於其平面中按中心點作 2π 度之旋轉，則其位置仍不變;任何 2π 之倍數之旋轉亦然。今將 $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, ……$\frac{2(n-1)\pi}{n}$, 諸旋轉作爲元素，幷加入不旋轉或 2π 之倍數旋轉，則得一系統。結合法定爲：如將 $\frac{2k\pi}{n}$ 與 $\frac{2l\pi}{n}$ 結合，則卽是作 $\frac{2k\pi}{n}$ 之旋轉後，再作 $\frac{2l\pi}{n}$ 之旋轉。如是，卽可知系統中任何二元素之結合所得，仍爲系統中之一元素。

11. 系統中除前述諸旋轉外，幷加入新元素;

此項新元素爲：此多邊形以其對稱直線爲軸作出平面之旋轉。因 n 邊形有 n 對稱線，故此項旋轉之數共有 n；因而此系統中共有 $2n$ 元素。結合法仍爲二旋轉之先後爲之。則可知此系統中任何二元素之結合所得，仍爲此系統中之一元素。

例如 $n=4$，則爲正方形。$\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 一元素將圖 I 中之 I 旋轉入 II 之位置。又以 DB 對稱線



爲軸將 II 作出平面之旋轉，則 II 成爲 III 之位置。此二元素之結合實仍爲系統中之元素，即是將 I 以 S 爲軸作出平面之旋轉也。

12. 系統爲一有法四面體之旋轉所成。此系統中共有十二元素：自四角至其相對平面所作之四垂線用爲軸各旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ 度，此爲四元素；又仍用

此項軸各轉 $\frac{4\pi}{3}$ 度，此又爲四元素；如 A,B,C,D 爲此四面體之四角，則連 AB 邊中點與 CD 中點，AC 中點與 BD 中點，BC 中點與 AD 中點之三直線可用爲軸，各作 π 度旋轉，此亦爲三元素；其餘一元素卽不旋轉本身。如是，則系統中任何二元素之結合（結合法仿前例）仍爲系統中之一元素。

13. 系統爲一平面形在其平面中之一切運動所成，靜止不動亦作爲一元系。結合法仿前，結合二運動卽將此二運動相繼爲之。則任何二元素之結合仍爲系統中之一元素，因任何二運動相繼爲之，無不可代之一運動也。

14. 將前例廢之，以一立體物在空間中之一切運動爲系統，其理仍與前同，可不多贅。

以上十四例，以後引及時簡單稱爲例 1，例 2，等等，讀者注意之。

第五節 各系統之性質

觀前所舉各例，可知各系統之性質各有不同，系統中所含元素，其數有有盡，亦可多至無窮。有盡者卽名之曰有盡系統，無盡者則曰無盡系統。

以後凡此項系統，概用大楷草字母表之，例如 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$，等均是；系統中之元素，則用大楷羅馬字表之，例如 A,B,C 等。結合法以『乘』表之，所得結果亦稱之爲『乘積』。

由二元素 A,B 可得二乘積：AB,BA. 若結合之次序與結果無關，則 $AB=BA$，如例 1，例 2，例 4，例 5 等均然。反之，如 3,6,8 等諸例，結合之次序與所得結果有關，次序相倒，結果卽異，則 AB 自與 BA 不同。前一種系統名之曰『可換系統』，後一種則曰『不可換系統』。

設 A,B,C 爲三元素，則可作 $(AB)\,C$ 與 $A\,(BC)$ 二乘積，前者先將 A 與 B 結，其結果再與 C 結，後者則先將 B 與 C 結，然後再以 A 與此結果相結。凡系統中任何三元素 A,B,C，能 $A\,(BC)=(AB)\,C$ 者，此系統稱爲『可聯的』；

反之，卽稱爲『不可聯的』，如例 3 卽爲一『不可聯的』系統也。

系統中倘有一元素，任何元素與之結合時所得仍爲該元素本身，則此元素名曰單位元素 E:

$$AE=A, \text{ 或 } EA=A.$$

前例 1 中無有單位元素；例 2 中單位元素爲 1；例 3 與 4 中之單位元素是 0；例 5 與 6 中爲 χ；例 9 中則爲 $a=d=1$，$b=c=0$ 之『全同變換』；等等。

前所舉諸幾何例中，對於每一元素可有一其他元素恰與之相反，將其抵消者；如例 10 中對於 $\frac{2k\pi}{n}$ 之旋轉，有 $-\frac{2k\pi}{n}=\frac{2(n-k)\pi}{n}$ 之旋轉適將原旋轉抵消，使 n 邊形仍在原地位。如是，將此二元素結合時，所得卽爲單位元素。因而按乘法例，如第一元素爲 A，則此反元素可寫爲 A^{-1} 俾 $AA^{-1}=E$. 前所舉例中，1,2,6 內無有反元素，或非每元素均有之；3 與 5 中每元素本身爲反元

素；其餘如 8 內則任何元素 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 之反卽為 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，卽是將上下行互易；9 內則任何變換之反，卽是將該變換照 x,y 解之，然後於 x',y' 處寫以 x,y，$x\ y$ 處則寫以 x',y' 卽得。

第六節 類之定義

得以前諸節所述，乃可將『類』之概念，明確定之。今下一定義如次：

由元素 $A,B,C,\cdots\cdots$ 所成之系統 S，有以下諸屬性者，是曰一『類』：

I. 可有一方法，將系統中任何二元素 S,T，結合之，以得一新元素 ST；於此 S 與 T 亦可相同。

II. 結合系統中二元素所得之結果，仍為系統中之一元素。

III. 結合上可通用此式：$(ST)U=S(TU)$，因而三元素之結合祇須寫 STU 便得。

IV. 系統中有一單位元素 E，與任何元素 S 結合時得 $SE=ES=S$.

V. 系統中任何一元素 S，有一反元素 S^{-1}，俾 $SS^{-1}=E$.

此五屬性以後徵引時簡稱爲屬性 I，屬性 II 等等。

第七節 由定義所得之定理

屬性 IV 所云或尙有可疑之處，卽系統中得勿於 E 外尙有一第二單位元素 E' 否？按單位元素之性質，倘系統中於 E 外尙有一單位元素 E'，則同時可得

$$EE'=E',\quad EE'=E,\ \text{此卽是}\ E'=E.$$

定理 1. 每一類中祇能有一單位元素。

屬性 V 云任何一元素有一反元素，今欲問 S^{-1} 之反元素爲何？倘 S^{-1} 之反元素爲 X，則必

$$S^{-1}X=E.$$

今用 S 乘其兩端（次序須同），則得

$$S(S^{-1}X)=SE,$$

因屬性 III, $(SS^{-1})X=SE$,

卽 $EX=SE$,

因而按屬性 IV 得 $X=S$.

定理 2. S^{-1} 之反元素卽爲 S.

例如例 8 中取其一元素 $S=(123)$，則其反爲 $S^{-1}=(132)$，因 $(123)(132)=E$. 而 S^{-1} 之反亦卽爲 S，因 $(132)(123)=E$.

定理 3. 每元素祇有一反元素。

證 倘 S 於 S^{-1} 外尙有一反元素 X，則必

$$SX=E,\quad SS^{-1}=E,$$

卽 $SX=SS^{-1}$ 兩端乘以 S^{-1} 得

$$S^{-1}SX=S^{-1}SS^{-1},$$

或 $$EX=ES^{-1},$$

因而 $$X=S^{-1}.$$

定理 4. 設 A,B,C 爲類中任何元素，則

由 $AB=AC$，可知 $B=C$;

由 $BA=CA$，可知 $B=C$.

證 以 A^{-1}『左乘』$AB=AC$,

得 $A^{-1}AB=A^{-1}AC$,

即 $EB=EC$, 因而 $B=C$. 倘以 A^{-1}『右乘』第二式，則亦得此結果。

第八節　類論之意義及其歷史大略

類之概念實爲精確思想上之基本概念，其重要與其他概念如『量』,『函數』等相同。以類之理論用入數學研究上,在許多方面不僅已見其可能，且結果之佳有出於尋常者。非藉『有盡』的類之助，則代數方程之眞相及其可解性之定律，蓋不易明瞭。微分方程與『無盡』的類亦有至密切的關係。他如函數論之某部分上亦多用類之理論爲研究之具。惟此種關係，多涉專門範圍，非本書中所能及。下章中姑略示類之概念在幾何學上有若何重要而已。

類之概念，實胚胎於代數方程之研究中。最初將類作系統的研究者，厥爲高咸氏 *A. L. Cauchy* (1789–1857). 其後經亞倍爾 *N. H. Abel* (1802–29), 迦樂意 *E. Galois* (1811–32), 等之研究,

而類之理論乃大發達。輓近來則郁達 *C. Jordan*, 李淑夫 *Sophus Lie*(1842–99), 葛來恩 *F. Klein* 等於類之理論或應用多有供獻。

第二章
幾何學上類之概念

第一節　同形類

由點與直線所構成之平面形，其屬性不難歸之爲以下根本五者：1. 平面中之位置；2. 絕對量；3. 乘直性；4. 平行性；5. 點及直線之相結位置。

1 與 2 二屬性，非幾何研究所注意。蓋如一三角形之在何處，其大小何若，與此三角形所有之幾何屬性初無關係，故初等幾何學所從事者乃在後者之三屬性。

然將平面形變移時，有恰能將該形之後者三屬性保存而其前二則廢遺者。例如將平面形運動或放大縮小之，則該形之位置及大小雖變，而其形狀不變。此種變移曰『同形變移』；經此變移後，一平面形之後三屬性仍均保存。初等幾何學所研

究之屬性，蓋卽爲能經同形變移而不變者。

由一切同形變移所成之系統，按之第一章第六節中所下類之定義，可知其乃是一類。此類卽稱曰『同形類』，或亦名『主要類』。而初等幾何學因之亦稱爲『同形幾何學』；在此幾何學中，凡形之經同形變移卽能相化成者，概視之爲相同之形。

第二節 *Affine* 類

若於前節所云五屬性中更略去其第三屬性不計，則所得之幾何學其範圍自小於前。此幾何學名爲『*affine* 幾何學』(*Affine Geometrie*). 仿此，若一平面形經過一變移後不僅失去其 1,2 二屬性，且普通幷將屬性 3 亦失去，祇保存屬性 4 與 5 者，此變移亦卽稱曰『*affine*』變移，由此項變移所成之類，名爲『*affine*』類。前節中所云之一切同形變移，亦可包於此類中，因任何一同形變移均將屬性 4 與 5 保存不失也。從可知 (*affine*) 幾何學之範圍雖小於同形幾何學而 (*affine*) 類之範圍則轉大於

同形類。

第三節 射影類

若并將五屬性中之屬性 4 亦不計，祇顧及屬性 5，則得一幾何學，其範圍尤小於前，是曰『射影幾何學』(*Projective Geometrie*). 一變移能將此屬性 5 保存，但普通前四屬性均失去者，稱爲『射影變移』，而由一切此項變移所成之類，卽名『射影類』；前同形類與 (*affine*) 類自亦均包於此中，故射影類之範圍更大矣。

第四節 結論

觀前三節所云，已不難知類之概念能使幾何研究上得若何之秩序。每一幾何學有一類與之相當，其所研究之幾何屬性，亦祇限於對於此類中之變移爲不變者，其他概不問及。從而類之範圍愈大，則所屬之幾何學其範圍反愈小。

試以粗細不同之篩爲喻，則同形類猶一粗篩也，

凡一切基於垂直性，平行性及相結位置上之屬性均穿過無遺；以此所得者再入較細之篩，(*affine*)類，則基於垂直性上之屬性留於篩中不能穿過矣；又再以射影類篩之，則穿過者祗有關于相結位置之屬性而已。同時，射影類所篩得者，爲射影幾何學之對象；(*affine*) 類所得爲 (*affine*) 幾何學者，同形類所篩得者亦卽爲同形幾何學。

第三章
有盡類

第一節 類之次數，等形性，抽象類，

前已略明類之定義及類之概念之重要，今可進而研究類之屬性，先自較簡單之有盡類始，卽類中所有元素之數爲有盡而非無盡者。類中所有元素之數，是爲該類之『次數』，以相當之小楷草字表之，例如 G 類之次數爲 g 是。

例 10 中如設 $n=7$，而以之與例 4 相較，則可見其間有相關處，蓋不僅二者所有元素等多，因而其次數相同，且幷有以下一屬性：試將此二類之元素並列

例 4 者：	0	1	2	3	4	5	6
例 10 者：	0	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{4\pi}{7}$	$\frac{6\pi}{7}$	$\frac{8\pi}{7}$	$\frac{10\pi}{7}$	$\frac{12\pi}{7}$

則不難見例 4 及例 10 中任何二相當元素之結合，所得結果亦相當；如例 4 中第二元素與第五元素

相結合得第六元素，例 10 中第二元素與第五元素相結所得亦爲第六元素也。

如是二類，倘將其中所有元素同次序列之，例如 A 與 B 爲如是二類，將其元素 $A_1, A_2, A_3, \cdots A_g$；$B_1, B_2, B_3, \cdots B_g$ 同次序列之，則由

$$A_iA_k = A_l \text{ 可推得 } B_iB_k = B_l.$$

凡此項類，其中元素之性質雖不同，而結合定律同者，是曰『等形』之類，以符號 $A \cong B$ 表之。

數學研究上，普通於類中元素之性質無大關係，所重者在於類之形，故此項等形之類，直可視之爲同者。以下所論之類，其中元素之性質概不問及，祇用符號代之而已，此種類謂之『抽象』類；惟所得結果自可時時驗之於具體之類。

第二節　類之構造，元素之次數，亞類，

今設 A 爲 G 中任何一元素，試作以下諸元素，

$$A,\ AA,\ AAA,\ AAAA, \cdots\cdots$$

而寫之爲 $$A,\quad A^2,\quad A^3,\quad A^4, \cdots\cdots\cdots$$

俾與尋常乘方相符。仿此并作 A^{-1} 之諸乘方，A^{-1}, A^{-2}, A^{-3}，等等，而設 $AA^{-1}=A^0$. 將此項負指數及正指數之乘方按整數次序列之，可得

$$A, A^{-3}, A^{-2}, A^{-1}, A^0, A, A^2, A^3, A^4,$$

普通乘方算法上之規例，有二者於此亦可用，今示之於下：

$$A^4A^{-3}=AAAAA^{-1}A^{-1}A^{-1}=AAAEA^{-1}A^{-1}$$

$$=AAAA^{-1}A^{-1}=AAEA^{-1}=AAA^{-1}=AE=$$

$A=A^{4-3}$ 仿此，可推得任何二乘方均合此規例，因而於任何

$r, S \gtreqless 0$ 通用 $A^rA^s=A^{r+s}$ 一式。

今試以例 7 驗之。設 $A=\varepsilon^3$、則 $A^2=\varepsilon^2$, $A^3=\varepsilon^6$，等等（參觀該例之結合法），而 $A^{-1}=\varepsilon^5$, $A^{-2}=\varepsilon^5$，等等，又 $A^0=\varepsilon$，故得正負指數各乘方如下

$$\varepsilon^2,\ \varepsilon^6,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^5,\ \varepsilon,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^6,\ \varepsilon^4,\ \varepsilon^5 \ldots\ldots$$

此中 $A^4=\varepsilon^4$, $A^{-3}=\varepsilon^6$, $(\varepsilon^4)^6=\varepsilon^3=A$，與前式合。

又，　$(A^5)^2=A^5A^5=A^{5.2}$

廣之，可得 $(A^r)^s=A^{rs}$ 於任何 $r, s \lesseqgtr 0$ 均通用。

例如 $(A^3)^{-1}=A^{-3}$，事實上 $(A^3)^{-1}$ 爲 A^3 之反元素，以 A^3 與之結合時得 E，故 $(A^3)^{-1}$ 必爲 A^{-3}，同時并可知 $(A^3)^{-1}=(A^{-1})^3$. 又爲 $(A^5)^{-2}=[(A^5)^{-1}]^2=[(A^{-1})^5]^2=[A^{-1}]^{5\cdot2}=A^{-5\cdot2}$；以及 $(A^{-5})^{-2}=\{[(A^{-1})^5]^{-1}\}^2=\{[(A^{-1})^{-1}]^5\}^2=(A^5)^2=A^{5\,2}$. 讀者可仍以前所舉具體之例驗之。

一切乘方按類之定義自均屬於類中，但類中之元素，其數有盡，則可知乘方中必有相同者（前所舉例 7 中已可見之）。今設此中 $A^r=A^s$，而 $r>s$，則 $A^rA^{-s}=A^sA^{-s}=A^{r-s}=E$. 若 $r-s$，非爲此中能通用 $A^{r-s}=E$ 一式之最小數目，則必有更小者可求；得定理如下：

定理 5. 有盡類中對於每一元素 A 可有一最小之數目 a，能 $A^a=E$ 者。

此 a 卽稱爲 A 之次數，E 之次數爲 1。

今設 A 之次數爲 a，則 $A^a=E$，而

$$A^{na}=(A^a)^n=E^n=E,$$

於任何整數 n 均可用。故若 $r-s$ 能爲 a 所除盡，卽 $r-s=am$，則亦必 $A^{r-s}=E$. 此卽是：設 A 之次數爲 a，而 $r\equiv s(mod.\ a)$，則 $A^r=A^s$.

反之，倘 $A^r=A^s$，卽 $A^{r-s}=E$，而 a 爲 A 之次數，則必 $r\equiv s(mod.\ a)$；蓋如不然，可設 $r-s=na+q$，於此 $0<q<a$，則 $E=A^{r-s}=A^{na+q}=A^{na}A^q=EA^q=A^q$，是 $q(<a)$ 爲 A 之次數，而 a 非爲 A 之次數矣，此卽矛盾。因得

定理 6. 設 a 爲 A 之次數，則惟有 $r\equiv s(mod.\ a)$ 時，方能 $A^r=A^s$.

觀以上所云，可知 A 之一切乘方中，祇有 a 個爲不同者。今試一研究由此項乘方所成之系統，則知其中任何二元素之結合，仍爲其中一元素，E 於此中亦爲單位元素，又每一元素亦均有反元素；因得

定理 7. 類 G 中元素 A 之 a 個不同的乘方

(於此 a 爲該元素之次數）構成一類 A.

此項由一元素之乘方所成之類，謂之『循環類』。又因此類中所有元素爲原類中元素之一部分，卽類 A 包含於類 G 中，故類 A 卽稱爲類 G 之『亞類』(*Untergruppe*)，用符號寫作 $A<G$ 或 $G>A$（此處之 $<$ 及 $>$ 二號較尋常用法意義稍廣，$A<G$ 表『A 包在 G 內』，$G>A$ 則表『G 將 A 包入』）。前所舉例 10，觀此定義可知卽是例 11 之亞類也。又，例 12 中之靜止及末所云三元素亦爲該類中之一亞類。

按亞類之意義，幷可知任何類中之單位元素，倘視之爲一系統，則亦能自成一亞類。此亞類卽表之爲 E，一切類均包含之。又，必要時亦可視一類之本身卽爲該類之亞類。如是，故凡類中任何一亞類非爲 E 或卽該類本身者，名之爲『眞亞類』以示別。

今再一論類中元素之乘方。設 A 爲 a 次元素，B 爲 b 次元素，則普通 $(AB)^2=ABAB$, $(AB)^3$

$=AB\,AB\,AB$，等等，不能用其他式表之，惟如 $AB=BA$，卽可得 A^2B^2, A^3B^3，等等；此與尋常乘方規例不同之處。

按定義，$(AB)^{-1}$ 爲一元素，以 AB 與之結合時能得 E 者。但 $AB\,B^{-1}A^{-1}=AE\,A^{-1}=AA^{-1}=E$，故可知

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},$$

仿此，

$$(AB)^{-n}=(B^{-1}A^{-1})^n.$$

第三節　類之平方列法

今將類中元素縱橫列之如下：

$$\begin{array}{l}
E,\ A_2,\ A_3,\cdots\cdots\cdots\cdots A_i,\ \cdots\cdots\cdots \\
A_2, A^2{}_2, A_3A_2,\ \cdots\cdots\cdots A_iA_2,\ \cdots\cdots\cdots \\
A_3, A_2A_3, A^2{}_3,\ \cdots\cdots\cdots A_iA_3,\ \cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_k, A_2A_k, A_3A_k,\ \cdots\cdots A_iA_k,\ \cdots\cdots
\end{array}$$

於此不難見第 i 縱列與第 k 橫列之相交元素卽爲 A_iA_k. 此項平方列法，有一屬性，卽任何一縱

列或一橫列中之元素，卽爲該類中之一切元素。今得一定理如下：

定理 8. 設 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots A_g$ 爲類 G 之一切不同元素，A_i 爲其中任何一者，則

$$A_1A_i,\ A_2A_i, \cdots\cdots A_gA_i$$

或
$$A_iA_1,\ A_iA_2, \cdots\cdots A_iA_g$$

仍爲該類之一切元素。

此定理之證異常簡單；蓋如不然，設其中 $A_rA_i = A_sA_i$，則按定理 4 必得 $A_r = A_s$.

然亦有 g 個元素 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_g$，將其嵌入一 g^2 格之正方形時，雖每縱列與每橫列均恰爲此 g 個元素，然却不成爲一類者；蓋其中或可無有『可聯性』也。舉例如下：

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

於此可見 $(24)5=2$，而 $2(45)=5$.

第四節 抽象類與變互類間之關係

今仍自類之平行列法出發。如前所云，類中所有 g 個元素，各橫列均具之。因而自第一橫列變爲任何一橫列，卽爲一變互。環列之數爲 g，故連全同變互計入共可得 g 個變互。如前所舉例5，倘祗寫其足下指數，有以下四者：

$$P_1=\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}1234\\2143\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}1234\\3412\end{pmatrix}$$

$$P_4=\begin{pmatrix}1234\\4321\end{pmatrix}.$$

定理 9. 設 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots A_g$ 構成一類 G，則諸變互

$$P_i=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & A_3 & & A_g\\ A_1A_i & A_2A_i & A_3A_i & \cdots\cdots & A_gA_i\end{pmatrix}\ i=1,2,\cdots g.$$

亦構成一類 P（結合法爲二變互之先後作出），而 $P\cong G$.

此類之第 I, III 二屬性自不難見；單位元素卽

爲全同變互。至第 II 屬性則可示之如次：設 P_i 將 A_r 易爲 A_rA_i，P_k 將 A_s 易爲A_sA_k，則經 P_k 後 A_rA_i 卽爲 $A_rA_iA_k$ 故如 $A_iA_k=A_l$，則 $P_iP_k=P_l$，因 A_r 經 P_iP_k 後易爲 $A_rA_iA_k=A_rA_l$，此卽是 P_l 也。於此不獨已將第 II 屬性證明，兼可知二類之等形性。此外第 V 屬性卽更易見，無用多贅。

爲簡單起見，變互概以數目字寫出，蓋各元素祇須寫其足下指數已足辨別也。如是，則由每一 g 次之類 G，可得一 g 個數目字之等形的變互類。此種結果，實至可注意，從此可知變互類能盡一切有盡類之形式，然變互類之屬性則有較易入手研究者，此所以變互類在類論上占重要位置。

第五節　變互之研究

欲研究變互類，自不能不先明變互之屬性，故今先將各個變互略一論之。

前第一章第三節中已提及一變互之屬性，可寫

之爲定理如次。

定理 10. 每一變互可化爲循環，其元素均不同者，此項化法祇有一種。

然若所化得之循環，許其有同元素，則化法卽不止一種矣。蓋一循環本身已可化成數個循環(許其含同元素者)，且化法亦不止一種；例如(1 2 3)一循環，本身已可作兩種化法，成爲二循環之乘積如下：

(1 2 3) = (12) (13) (於此有 1 爲二循環所共)，

(123) = (23) (12) (於此 2 爲二循環之共元素)，

此種祇含二元素之循環，尋常亦稱爲『對調』(*Transposition*) 因此變互僅由對調二元素所成也。

任何一變互無不可經數次對調以得之，故任何一 n 元素之循環，無不可化之爲二元素之循環之乘積；例如

$$(1\ 2\ 3) = (1\ 2)(1\ 3)$$

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2(1\ 3)(1\ 4)$$

……………………………

等等；廣之，并可知任何多元素均可如是化之，因得

定理 11. 任何一 n 元素之循環可化為一 $(n-1)$ 個對調之乘積。

然所得之乘積，決非惟一者，則前已提及，不待論矣。又如 (12) (12) 一乘積，與尋常數目上之單位無異，任何乘積均可隨便加入之，故乘積之式至難一定。惟於此亦自有一定者：

定理 12. 任何一循環，其所含元素之數為偶數者，所化成之『對調乘積』，所有因子之數必為奇數；反之，倘原循環含奇數元素，則所得之乘積，因子數必為偶數。

今設 $P=(123)(45)(6)$ 為一變互，$T_1=(23)$ 為一對調，其元素為 P 之同一循環內者，$T_2=(24)$ 又為一對調，其元素非自 P 之同一循環內得者，則可見 $PT_1=(45)(6)(123)(23)$ 或將其化為各不同元素之循環時（許有同元素之循環與

不許有同元素者須嚴爲分別) 得 $PT_1=(45)(6)(13)(2)$，此卽所有循環之數，較 P 所有者多 1 也。仿此，可知

$$PT_2=(6)(123)(45)(24)=(6)(14523),$$

此卽 PT_2 所有之循環數較 P 少 1 也。此項結果不難廣之於任何多元素之變互，及由此中二元素所成之對調，因得

定理 13. 一 n 元素之變互，代爲 r 個循環(其元素各不同者)後，倘用一對調（其元素爲此 n 元素中之任何二者）乘之，則所得乘積之循環數爲 $r+1$ 或 $r-1$ 個。

得此定理，則非特前定理 12 之證卽不難得，兼可將該定理廣之如下：

定理 14. 任何一變互 P，其元素之數爲 n，其所有循環（元素各不同者）爲 r 個者，可以無窮數種類化之爲對調（此卽是：無論欲得何變互開初時儘可隨意作若干對調），惟對調之總數，其形式總爲 $n-r+2\sigma\ (\sigma=0,1,2,\cdots\cdots)$，故若 $n-r$ 爲

偶數，則該總數亦爲偶，若 $n-r$ 爲奇，則該數亦必爲奇。

倘 r 個循環各關有 $v_1, v_2, \cdots\cdots v_r$ 個元素，則按定理 11，將每個循環化爲對調時，共可得 $(v_1-1)+(v_2-1)+\cdots\cdots+(v_r-1)$ 個對調。於此；$v_1+v_2+\cdots\cdots+v_r=n$，故 $(v_1-1)+(v_2-1)+\cdots\cdots+(v_r-1)=n-r$，此卽 P 化成爲 $n-r$ 個對調也。若乘以二個相同之對調，[如 $(12)(12)=E$] 則 P 不變，是 P 化爲 $n-r+2$ 個對調矣。仿此，可知 P 可化爲 $n-r+2\sigma$ 對調。

今設將 P 化爲任何 s 個對調 $T_1, T_2, \cdots\cdots T_s$，則

$P \qquad\; = T_1T_2T_3\cdots T_{s-2}T_{s-1}T_s$ 有 r 個循環，

$PT_s \qquad = T_1T_2\cdots T_{s-1}$ 按定理 13 有 $r\pm1$ 個循環，

$PT_sT_{s-1} = T_1T_2\cdots T_{s-2}$ 有 $r\pm1\pm1$ 個循環，等等，

而 $PT_sT_{s-1}T_{s-2}\cdots T_2T_1=E$ 有 $r\pm1\pm1\pm1\cdots\pm1$ 個循環。於此 s 個 ±1 中，假定有 σ 個其值爲 -1，而 $s-\sigma$ 個之值則爲 $+1$，則最後一式有 $r-\sigma+s-\sigma$ 個循環；他方面，又因其爲單位

變互 $E=(1)(2)\cdots(n)$，因知此數必爲 n:

$$r-\sigma+s-\sigma=n,\ \text{或}\ s=n-r+2\sigma.$$

定理 14 於是全證明。倘於此定理中設 $r=1$，則卽爲定理 12.

例:

$(1)(234)=(13)(24)(32)(12)(43)(24)$ 有 2 循環，

$(1)(234)(24)=(13)(24)(32)(12)(43)=(1)$
$(23)(4)$ 有 $2+1$ 循環，

$(1)(234)(24)(43)=(13)(24)(32)(12)=(1)$
(243) 有 $2+1-1$ 循環，

$(1)(234)(24)(43)(12)=(13)(24)(32)=(1234)$
有 $2+1-1-1$ 循環，

$(1)(234)(24)(43)(12)(32)=(13)(24)$
有 $2+1-1-1+1$ 循環，

$(1)(234)(24)(43)(12)(32)(24)=(13)=(13)$
$(2)(4)$ 有 $2+1-1-1+1+1$ 循環，

$(1)(234)(24)(43)(12)(32)(24)(13)=E=(1)$
$(2)(3)(4)$ 有 $2+1-1-1+1+1+1$ 循環，

於此例內 $n=4, r=2, \sigma=2, s=6$.

變互所有對調之數爲偶者，曰『偶變互』其奇者曰『奇變互』。

第六節 變互類

前節內已將變互之屬性略論過。倘以二變互之先後作出爲結合法，則可將變互組成一系統而研究之。由 n 元素所成之變互，其所構成之系統，亦稱爲『n 級者』(注意:『級』與前所云之『次』不同,『級』惟變互類有之,『次』則用於任何有盡類)。

初等代數學曾證明，n 元素共可有 $n!$ 個變互 ($n!=1\cdot2\cdot3\cdots n$)；試揆三類之定義，卽知此 $n!$ 變互實亦成爲一類；因得

定理 15. n 元素之 $n!$ 個變互構成一類，卽所謂『對稱類』,其級數爲 n；此類寫作 S_n. 關於此 $n!$ 個變互，可得一定理如下:

定理 16. 對稱類 S_n 中有 $\frac{n!}{2}$ 個偶變互及 $\frac{n!}{2}$ 個奇變互。

蓋將 S_n 中一切變互用一對調，例如 (12) 乘之，則按定理 8（對調亦為一變互）所得仍為此原類中之一切變互，惟偶者已成為奇，奇者則成為偶，從可知類中所有奇變互與偶變互之數必相等。

按諸定理 1 及類之屬性 IV，可知 $\frac{n!}{2}$ 個偶變互亦可成為一類，推 $\frac{n!}{2}$ 個奇變互則不成為類：

定理 17. $\frac{n!}{2}$ 個偶變互構成一類，謂之 n 級之偶變互類。

如是，已於對稱類 S_n 中得一亞類，其次數為 $\frac{n!}{2}$ 者。此外對稱類中尙有何種亞類，如何求得之，此問題至不易總解決，惟其中有數亞類則尙不難得之耳。

第七節　類之屬性之標識

有二問題於類之研究上頗關重要者，本節及下

節內須先一論之。

今有一系統元素於此，欲知其是否爲類，則必驗諸定義中所述之五屬性；但有時每感不便，故有此問題發生：前五屬性能否求得相等而應用較便者代之（至少於有盡類方面）？

倘所論之系統爲一較大的類之部分，則屬性 I 與 III 已可無須驗；事實上，所欲研究之系統每多爲一較大的類之部分，故此二屬性，不必再求其代。屬性 II 爲類之主要屬性，實無可代之者。故所求者卽在屬性 IV 與 V。

欲求 IV, V 之代，可先自此二屬性推出某種必然結果，而觀用此項必然結果以代時，事實上能否已爲充分。前所得定理 4 實爲 IV, V 二屬性之必然結果，故今可試以此定理作爲屬性

IV'. 由 $A_iA_k=A_iA_l$ 得 $A_k=A_l$,

由 $A_kA_i=A_lA_i$ 得 $A_k=A_l$,

而觀由此屬性能否反求得單位元素及倒元素，因而此屬性 IV' 能代前之屬性 IV 與 V。

倘所研究之系統，其所有元素爲 $A_1, A_2, \cdots A_n$；今按屬性 I，可作

(1) $A_iA_1, A_iA_2, \cdots\cdots A_iA_n$,

則按屬性 II，此仍爲系統中之元素，按屬性 IV' 此項元素又各不同，故仍爲系統中之一切元素。因而必有一元素 $A_iA_k = A_i$；乘以 A_i，可得 $A_iA_k A_i = A_iA_i$，按屬性 IV'，有 $A_kA_i = A_i$；從可知有單位元素之屬性，至少於 A_i 是如此。

設 A_j 爲原來元素中之任何一者，則必與 (1) 中之某元素同；今設 $A_j = A_iA_l$，則因 $A_kA_i = A_i$，可得 $A_kA_iA_l = A_iA_l$，此卽是 $A_kA_j = A_j$，由之幷可得 $A_jA_k = A_j$。因之，A_k 實卽爲單位元素 E 無疑。

此單位元素必含於(1)中；今設

$$A_iA_m = E,$$

則 A_m 卽爲 A_i 之反元素。故得

定理 18. 每一有盡系統，有 I, II, III, IV' 四屬性者，卽是一類。

又如所論之系統爲一類之部分，則屬性 IV' 卽無須驗；

定理 19. 一有盡類之任何部分系統，倘有屬性 II，則卽成爲一類。

第八節　關於部分系統及類方面之寫法

前第四節中已述及，由任何一 g 次之抽象類 G，可得一等形的 g 個數目字之變互類，故研究此項變互類卽能知原類之諸多屬性。然此種方法亦惟於次數不甚大之類，乃能用之；若類之次數大，則亦無能爲矣。又於類之普通研究上，此法亦不適；故今不能不仍用普通符號。

前第一章第五節中已曾規定數符號，今當稍廣其例，而於作方程形式之寫法方面，尤多注重焉。

凡由元素 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 所成之系統 C，以後概寫作
$$C=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n,$$
類 G 作
$$G=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_g,$$
或
$$G=\sum_{i=1}^{g} A_i。$$

至元素之次序可不顧及，例如 C 亦可作 $A_n+\cdots\cdots+A_2+A_1$。

倘一系統 C 由諸部分系統 $A_1,A_2,\cdots\cdots A_m$ 所成，則可寫

$$C=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_m,$$

於此，部分系統之次序亦可不計；諸部分系統亦可有同元素，因而該式之右端，可有同一元素而數次列出者，惟所重者則在各不同之元素。因之，系統之算法上，有某種規例於尋常數目之算法上所不見者；例如

$$C<G,\ \text{則}\ G+C=G;$$

$$\text{以及如}\quad G+G=G。$$

如將系統 C 中每一元素用一元素 A 乘之，則所得之系統，當以 CA 或 AC 表之，例如定理 8 用此處所定符號，可簡寫出如下：

$$\text{倘}\ A<G,\ \text{則}\ GA=AG=G。$$

設有二系統 C,D 於此，則可將 C 中每一元素與 D 中每一元素乘（注意其相乘之次序），由

此項相乘所得元素所構成之系統，即以 CD 表之。此中亦可有同元素，但不計及之。因而

倘 $C \lessdot G$，則 $CG=G$，

又可知　　　　$GG=G$。

前述種種關係，於類之研究上頗關重要，其用法有二：一，必要時，可於類 G 上加一部分系統或乘以由部分系統所成之因子(如 G 可寫作 GG)；二，必要時亦可將原有之被加系統或因子消去(例如 AG 可寫作 G)。

系統之相加上，交換定律及聯合定律均通用，此與尋常數目相加無稍異：$A+B$，與 $B+A$，或 $(A+B)+C$ 與 $A+(B+C)$ 均無異，蓋前已云過元素之次序可不計及也。至系統之相乘，則普通祇通用聯合定律：$(AB)C=A(BC)$，其交換即不適用：$AB \neq BA$。

第九節　類之化法

今設類　　$A=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_a$

爲類 G 中之一亞類。按前節所論，將 A_i 與 A 乘所得仍爲 A: $AA_i=A$。倘 B 爲 G 中一元素不屬於 A 中者，則 AB 卽不能與 A 同，因 $EB=B$ 不屬於 A 者也。事實上，尙不僅如此。假使 AB 中有一元素 A_iB 與 A 中一元素 A_k 同，則由

$$A_iB=A_k \text{ 可得 } B=A_i^{-1}A_k,$$

是 B 亦屬於 A 矣，此卽矛盾。故知 AB 中所有元素全爲新者，且必各不相同，蓋若 $A_iB=A_kB$ 則必 $A_i=A_k$ 也；惟 AB 中之元素自亦仍爲 G 中者。

今於 AB 中任取一元素 A_iB，則按前節

$$AA_iB=AB。$$

設 C 又爲 G 中一元素，旣不屬於 A 亦不屬於 AB 者。試作 AC，則仿前可知其各元素又爲新者(亦爲 a 個各不相同而屬於 G 中之元素)。如是繼續爲之，可至盡 G 中所有元素；因得

定理 20. 設 A 爲 G 之亞類，則可有 r 個元

素 $A,B,C,\cdots\cdots S$，能使

(1) $G=AA+AB+AC+\cdots\cdots+AS$。

(1) 之右端各系統，所有元素無有相同者，其數目亦各為 a。倘 A 易以 A 中任何一元素，B 易以 AB 中任何一元素，則(1)仍可用。此項系統 $AB,AC,\cdots\cdots$等等，名為『屬於亞類 A 之附屬系統』；此項化法則稱『照率 A 之化法』，而每一可能的系統 $A,B,\cdots\cdots S$，亦稱為『率 A 之完全餘系統』。

G 中任何一元素，可作為一完全餘系統中之元素，此理甚明，無待論證。故化法(1)不止一式，例如

(2) $G=A'A+B'A+C'A+\cdots\cdots+S'A$

亦其一也。

第十節 亞類及元素之次數

觀前節所得(1)或(2)，而如 G 之次數為 g，則 $g=ar$，因得拉氏定理(*Lagrangescher Satz.*)：

定理 21. G 之亞類之次數，乃是 G 之次數之因子。

$\frac{g}{a}=r$ 名爲亞類 A 之『指數』(對於 G 而言)。

定理 7 曾說明 G 中每一元素之諸不同的乘方構成一亞類，此亞類之次數卽爲該元素之次數，故得

定理 22. G 中每一元素之次數爲 G 之次數之因子。

倘一類 G 之次數 g 爲質數 p，則 G 中除 E 外，祇有次數爲 p 之元素，而每一元素之 p 個乘方已盡 G 之本身。

定理 23. 祇有一種類，其次數爲質數 p 者，此卽是次數爲 p 之循環類。

g 爲非質數時，自亦可有循環類，其次數爲 g 者，如循環變互 $(1234\cdots g)$ 與其乘方卽是其一也。

第十一節　類之構造法

今試用前所得定理，以構造出四次之類。

設所求之類其元素爲 G_1，G_2，G_3，G_4，且此各元素已照其次數列出：即 $G_1=E_1G_4$ 之次數最高。按定理 22，G_4 之次數可爲 4 或 2。若 G_4 之次數爲 4，則其各乘方之循環類次數亦爲 4 ($G_4^2=G_2, G_4^3=G_3G_4^4=E$)。若 G_4 之次數爲 2，則 $G_4^2=E$；而 G_3 與 G_2 之次數亦必爲 2：$G_3^2=G_2^2=E$。G_4G_3 不能爲 E，因 $G_4G_4=E$；亦不能爲 G_4，因若 $G_4G_3=G_4$，則必 $G_3=E$；自亦不能爲 G_3；故祇有 $G_4G_3=G_2$。仿此，并知 $G_3G_4=G_2$。由此，可得

$$G_4G_2=G_3,\qquad G_3G_2=G_4,$$
$$G_2G_4=G_3,\qquad G_2G_3=G_4。$$

設將此項元素，照第三節所云法列成一平方形(爲簡單計祇寫其足下指數)，則得

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

於此已將聯合定律應用。此種類名爲『四元類』。次數爲四之類，亦已盡之，此外更無其他可能性矣。

類中任何一系統元素，由之可得類之全部元素者，是曰『發生元素之系統』。倘此中無有一元素可少去，則各發生元素謂之『不相關的』，而如此中少去其一，卽不能由之以得類之全部元素矣。

前例内若 G_4 之次數爲 4，則 G_4 本身卽爲一發生系統。若 G_4 之次數爲 2，則 G_4, G_3，或 G_4，G_2 或 G_3, G_2 皆發生系統也。

讀者試自爲構造數類；又可將結果驗之下表：

類之次數 g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
所有 g 次類之數	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5
其中所有亞倍氏類之數	1	1	1	2	1	1	1	3	2	1	1	2

第十二節　元素之交換性，變換

設 A, B 爲 G 中任何二元素，則可得二乘積

AB, BA；於此有二可能性如下：

$$1.\ AB=BA;\qquad 2.\ AB\neq BA。$$

倘有第1可能性，則 A, B 謂之可交換的，或簡稱『可換的』。若 G 中任何二元素均有此屬性1，則 G 卽稱為『可換類』或亦稱『亞倍氏類』(*Abelsche Gruppe*)。以下所欲論者，均以『非亞倍氏類』，卽類之無屬性1者，為基本。

1. 與 2. 二可能性，亦可寫作

$1'.\ B^{-1}AB=A$；$2'.\ B^{-1}AB\neq A$。

$1'$ 亦稱『用 B 將 A 變換』，而 $B^{-1}AB$ 卽為『用 B 將 A 變換過後之元素』。今試將此中 A 作為固定元素，而 B 則可變動，遍取 G 中一切元素。仿尋常變數例，B 可寫之為 X。如是，可研究用 G 中一切元素將 A 變換，所得當為何結果。

於此，有二事可注意：1. G 中有若干元素，用以將 A 變換時，所得仍為 A，卽能與 A 有前所云第1. 屬性者，此項元素自構成一類。2. G 中

有若干元素，用以將 A 變換時，所得均爲一與 A 不同之某元素者，此項元素構成一附屬系統。今證明之如下：

按定理 19,若前所云第一項元素有屬性 II, 則卽成爲一類，故今祇須證明此已足。

設 X_1,X_2 爲 G 中任何二元素，以之變換 A 時所得仍爲 A 者，則有

(1)　$X_1^{-1}AX_1=A$,　　(2)　$X_2^{-1}AX_2=A$。

將 (1) 之左端代入 (2) 之左端A處，卽得

$$X_2^{-1}X_1^{-1}AX_1X_2=A。$$

因 $X_2^{-1}X_1^{-1}=(X_1X_2)^{-1}$，故

$$(X_1X_2)^{-1}A(X_1X_2)=A,$$

此卽是倘 X_1,X_2 能將 A 仍變爲 A, 則 X_1X_2 亦必仍變 A 爲 A, 因而第一項元素有屬性 II, 而構成一類：

定理 24. G 中一切與 A 可換的元素構成一類 V_A.

此定理中 A 若易以一系統，則此定理仍可用。

讀者試自證之。

又，亦有元素 A 與 G 中一切元素均可換者，此項元素名『不變元素』或『單獨元素』。照此定義，可知類中之單位元素卽爲該類之單獨元素也。一類中之一切單獨元素亦自構成一亞類。讀者亦試自證之。

今設 X' 爲 G 中不屬於 V_A 之元素，則

(3)　$X'^{-1}AX'=A'(\neq A)$。

試卽以 X' 與 V_A 作一附屬系統 V_AX'，則一切元素以之變換 A 時所得均同爲 A' 者，必盡屬於此 V_AX' 內；卽：當 $XX'<V_AX'$ 時，亦祇當此時，方能

$$(XX')^{-1}A(XX')=A'。$$

事實上，倘 XX' 爲 G 中任何一元素，則由

$$(XX')^{-1}A(XX')=X'^{-1}(X^{-1}AX)X'=A',$$

將此與 (3) 比較，可知

$$X^{-1}AX=A,$$

是卽 $X<V_A$，故 $XX'<V_AX'$ 也。

按定理 20，倘以此 V_A 爲率將 G 化成附屬系統，則每系統將 A 變換成一元素，故得

定理 25. 設 A 爲 G 中一固定元素，X 爲 G 中任何元素，則

當 X 屬於 V_A 時，$X^{-1}AX=A$，

當 X 屬於同一附屬系統，例如 $V_AX^{(a)}$ 內時，$X^{-1}AX$ 之結果不變，

於此 $V_AX^{(a)}$ 爲照率 V_A 所化成附屬系統中之任何一者：

$$G=V_A+V_AX'+V_AX''+\cdots\cdots$$

觀此，可知倘 G 之次數爲 g，V_A 之次數爲 v，則將 A 變換之結果，共可得$\frac{g}{v}$個不同的『變換過後之元素』：$A, A', A'', \cdots\cdots A^{\left(\frac{g}{v}\right)}$。此項元素總稱爲 A 之『共軛元素』(*konjugierte Elemente*)。

今如不用 A，而用 A 之任何一共軛元素 A' 出發，則結果當何若？

前已知，當X爲 V_iX'(V_i 爲 V_A 中任何一元

素)時，亦祇當此時乃有 $X^{-1}AX=A'$。由此可得 $A=XA'X^{-1}$。故知當 $X=V_iX'$ 時，即 $XA'X^{-1}=A$。爲求統一計，可設 $X=Z^{-1}$，則可云：當(亦祇當) $Z=(V_iX')^{-1}=X'^{-1}V_i^{-1}=X'^{-1}V_k$，即有 $Z^{-1}A'Z=A$(V_k 亦屬 V_A 中)

由 $Z^{-1}A'Z=A$，可得

$X^{-1}(Z^{-1}A'Z)X=X^{-1}AX=A'$。$(X=V_iX')$

今若設 $ZX=U$，則得

$$U^{-1}A'U=A',$$

於此必須 $U=X'^{-1}V_kV_iX'$，此即是 $U<X'^{-1}V_A X'$ 也。

仿此，並可知若 $W<X'^{-1}V_AX''$ 時，亦祇當此時，乃能 $W^{-1}A'W=A''$；等等。從可知變換 A' 所得結果，與前無異，仍爲 $A',A'',\cdots\cdots A$ 諸元素，而此時所用系統則爲以下者：

$$(4)\ X'^{-1}V_AX',\ X'^{-1}V_AX'',\ X'^{-1}V_AX''',$$
$$\cdots\cdots X'^{-1}V_AX。$$

今試將此項系統中之第一者稍加研究。設於此

系統中任取二元素 $X'^{-1}V_iX'$ 與 $X'^{-1}V_kX'$，并作其乘積 $X'^{-1}V_iX'X'^{-1}V_kX'=X'^{-1}V_iV_kX'=X'^{-1}V_lX'$，則可知所得仍爲 $X'^{-1}V_AX'$ 中之元素，故 $X'^{-1}V_AX'$ 實卽爲一類。此類卽名爲 V_A 之『共軛類』(對於 G 而言)。倘以此類作爲率以化 G，則 (4) 中其餘各系統卽爲屬於此之附屬系統，蓋任何一者，如

$$X'^{-1}V_AX''=X'^{-1}V_AX'(X'^{-1}X''),$$

無不可寫之爲 $X'^{-1}V_AX'$ 之附屬系統形式也。又可知任何附屬系統中之元素不能爲 $X'^{-1}V_AX'$ 中之元素，蓋如

$$X'^{-1}V_iX''=X'^{-1}V_kX',$$

則必
$$V_iX''=V_kX',$$

然此不可能，因該二元素非屬於 V_A 之同附屬系統者。

總上所得結果，可知用任何一元素 A' 爲出發時，仍得此同樣數共軛元素 $A, A', A'', \cdots A^{\left(\frac{g}{v}-1\right)}$

惟次序有不同而已。因而前所取之 A，於此諸元素中并不能處特別地位，蓋亦與其他元素爲共軛而已。如是，若前之稱 $A',A'',\cdots\cdots$ 等爲 A 之共軛元素，殊無必要；$A,A',A'',\cdots\cdots A^{\left(\frac{g}{v}-1\right)}$ 等 $\frac{g}{v}$ 個元素總稱爲『一羣共軛元素』可矣。

關於共軛類尚有二事實，讀者試自證之：

1. $X'^{-1}V_AX'$ 之元素不僅得自以 X' 變換 V_A 中各元素，兼可得自以 V_iX' 變換 V_A 中各元素(於此 V_iX' 爲 V_AX' 中任何元素)；將 G 照率 V_A 化之爲附屬系統，於每一系統中取一元素變換 V_A，則所得卽爲 V_A 與其一切共軛類(自亦可有同者)。

2. 將 G 照率 $X'^{-1}V_AX'$ 化之爲附屬系統，而於每一系統中取一元素變換 $X'^{-1}V_AX'$，則所得亦爲前之共軛類。從可知 V_A 幷不能有特別地位，本身亦爲一共軛類；因而仿前元素例，亦可稱 V_A 等爲『一羣共軛類』。

又，與 V_A 共軛之類爲等形者，讀者亦試自證之。

第十三節　不變亞類

今再將前節所得結果，總括之爲一定理於下，俾更醒目：

定理 26. 將 G 中任何一元素用 G. 中一切元素變換之，則得一羣共軛元素：

$$A, A', A'', \cdots\cdots, A^{(i)}, \cdots\cdots$$

對於每一元素 $A^{(i)}$ 有一類 $V_A{}^{(i)}$ 與之相當，該類中元素均與 $A^{(i)}$ 爲可換者。此項類亦互相共軛，成一羣共軛類。倘以此中一類 $V_A{}^{(i)}$ 爲率化 G 爲附屬系統，而於每一附屬系統，取其一元素變換 $A^{(i)}$，所得卽爲共軛元素，倘以之變換 $V_A{}^{(i)}$，則所得爲共軛類（但亦可有同者）。

前節內之硏究，若施之於一其他元素 B，不屬於共軛羣 $A, A', \cdots\cdots$ 中者，則所得自爲一羣新共軛元素。如是，不難將 G 化爲數羣共軛元素。

惟每一不變元素（單獨元素）自成一羣。

今舉一具體的例於下，以明上所得關係；於此 G 爲三數目字所成之對稱變互類。爲明顯計，特作爲一表列出（見 60 頁）。

觀於此表，可見如設 $A_1+A_2+A_3$ 爲 V，則

$$A_4^{-1}VA_4=V,$$

而

$$A_4^{-1}A_2A_4=A_3,$$

從可知一元素變換一類所得仍爲該類時，不必變換類中各元素時所得亦爲該元素本身也。換言之，一元素固可與一類爲『可換的』，然不必與其中之元素亦各各可換。

今如 H 爲 G 之一亞類，則可用 G 中一切元素以變換 H。倘 X 爲 G 中任何元素，而 $X^{-1}HX=H$，或 $HX=XH$，換言之，倘 H 與 G 中一切元素均爲可換的，則此 H 卽與尋常亞類不同，故卽名之爲『不變亞類』，或亦稱『特別亞類』，『正則亞類』(*Normalteiler*)。以後此種亞類，寫作 $Hi(<G)$ 以示別。

G 中元素 A	與 A 可換的元素所成之類 V_A	以 V_A 為牽化 G 所得之附屬系統	每系統中取一元素 變換 A 所得之共軛元素	每系統中取一元素 變換 V_A 所得之共軛類
$A_1=E$	G	G	E	G
$A_2=(123)$	$A_1+A_2+A_3$	$(A_1+A_2+A_3)+(A_4+A_5+A_6)$	A_2,A_3	$A_1+A_2+A_3,A_1+A_3+A_2$
$A_3=(132)$	$A_1+A_2+A_3$	$(A_1+A_2+A_3)+(A_4+A_5+A_6)$	A_3,A_2	$A_1+A_2+A_3,A_1+A_3+A_2$
$A_4=(12)$	A_1+A_4	$(A_1+A_4)+(A_2+A_5)+(A_3+A_6)$	A_4,A_6,A_5	A_1+A_4,A_1+A_6,A_1+A_5
$A_5=(13)$	A_1+A_5	$(A_1+A_5)+(A_2+A_6)+(A_3+A_4)$	A_5,A_4,A_6	A_1+A_5,A_1+A_4,A_1+A_6
$A_6=(23)$	A_1+A_6	$(A_1+A_6)+(A_2+A_4)+(A_3+A_5)$	A_6,A_5,A_4	A_1+A_6,A_1+A_5,A_1+A_4

尋常 G 中一亞類用 G 中一切元素變換之時，可得數個類。此項類亦謂之該亞類之共軛類。故若一亞類爲不變亞類，即用 G 中一切元素變換之，所得仍爲該亞類本身時，此項共軛類必盡相同均爲原亞類本身也。

適所舉之例中，$A_1+A_2+A_3$ 即爲一不變亞類，如表中所示不難見。

如 G 爲亞倍氏類，則 G 內一切元素均爲互相可換的，故所有亞類與 G 中一切元素均可換，是即一切亞類均爲不變亞類也。

前第一章第四節中之例 12，即由一四面體之旋轉所成之類，其中含有一亞類，與四元類等形而爲不變者。此亞類之元素爲該例中所說之最後四元素。倘該四面體之四角爲 1,2,3,4，而每一旋轉用其相當的角之交換表之，則此亞類即可作爲一變互類表出之；而其四元素如下：

(1) (2) (3) (4)，(12) (34)，(13) (24)，(14) (23)。

事實上，此類實與前十一節中所云之四元類相同。

此亞類之不變性，頗不難驗得，例如

(123)(4) 爲四面體類中之任何一元素，則其反爲 (132)(4)，試將其變換亞類中之元素，得

$$(132)(4), (1)(2)(3)(4), (123)(4) = (1)(2)(3)(4)$$

$$(132)(4), \qquad (12)(34), (123)(4) = (14)(23)$$

$$(132)(4), \qquad (13)(24), (123)(4) = (12)(34)$$

$$(132)(4), \qquad (14)(23), (123)(4) = (13)(24)$$

類中之單位元素，倘視之爲一亞類，則亦有不變性；以別於其他不變亞類，此單位元素可稱之爲『非眞不變亞類』。又，類之本身亦可視爲該類之『非眞不變亞類』。倘一類中不含『眞不變亞類』，則該類名爲『簡單類』。簡單類之不足驗而可知者，如次數爲質數之類是，蓋此項類中幷眞亞類亦無之也。所最可注意者，爲類之含有眞亞類但却無眞不變亞類者；此種簡單類極不多見，其中次數爲 60 者爲最低次之此項類。

於此有須注意之事，設 H 爲 G 中之不變亞類，而 G 本身爲一較大的類 G' 中之亞類，則

H 對於 G 而言固為不變，然對於 G' 而言，不必亦為不變者；由 $Hi<G, G<G'$，不必得 $Hi<G'$；卽幷 $Gi<G'$ 時，亦不必得 $Hi<G'$，舉例如下：

$G'=$ 四數目字之偶變互類 $=E+(123)+\cdots\cdots$,

$G=$ 四元類 $=E+(12)(34)+\cdots\cdots$,

$H=E+(12)(34)$,

用 (123) 變換 H 時所得為 $E+(14)(23)$。

反之，有

定理 27. 若 $H<G<G'$，而 $Hi<G'$，則必 $Hi<G$。

此定理之理易明，可不煩證。

今如 $Hi<G$，試卽以 H 為率將 G 化成附屬系統，則得（G 之次為 g，H 之次為 h）：

$$G=H+HG_2+HG_3+\cdots\cdots+HG_{\frac{g}{h}},$$

因 H 有不變性，亦可寫作

$$G=H+G_2H+G_3H+\cdots\cdots+G_{\frac{g}{h}}H.$$

用第三節所云類之平方形列法，將 G 之元素按上方之化法列出，而如 H 之元素爲 E, H_2, ……H_h，則得：

H HH_2 ⋮ HH_h	HG_2 HG_2H_2 ⋮ HG_2H_h	HG_3 HG_3H_2 ⋮ HG_3H_h
HG_2 HH_2G_2 ⋮ HH_hG_2	HG_2G_2 $HG_2H_2G_2$ ⋮ $HG_2H_hG_2$	
HG_3 HH_2G_3 ⋮ HH_hG_3	HG_2G_3 $HG_2H_2G_3$ ⋮ $HG_2H_hG_3$	

於此有可見者，則表中任何小平方內之 h 個橫列均各相等，例如 $HG_2H_2G_2=G_2HH_2G_2=G_2HG_2=HG_2G_2$ 是。故若每個小平方內之 h 列祇寫其

一，則得一表如下：

H	HG_2	HG_3
HG_2	HG_2G_2	HG_3G_2
HG_3	HG_2G_3	

今於此中任取其一，如 HG_2G_3 則因 G_2G_3 仍為 G 中元素，按之前第九節所云可視為一『完全餘系統』中之元素，此卽是 HG_2G_3 仍為以 H 為率化 G 時所得之一附屬系統也。又按第八節，可知

$$HG_2G_3 = HHG_2G_3 = HG_2HG_3$$

故若上表中每一小平方內之系統，視之為一整個，作為一元素，則上表實卽為一類之平方列法。試卽作一定理，并證實之：

定理 28. 倘 $Hi<G$，而

(1) $G = H + HG_2 + \cdots\cdots + HG_{\frac{g}{h}}$

爲 G 之化法（用 H 爲率），則此中各附屬系統，如各視之爲整個的元素，即構成一類（結合法見第八節）。

事實上，類之屬性 I 極易見：

$$HG_i \cdot HG_k = HHG_iG_k = HG_iG_k = HG_l,$$

蓋按第九節所云，G_l 不必爲 $E, G_2, \cdots\cdots G_{\frac{g}{h}}$ 中之元素，祇須任何一附屬系統中之元素，即任何一 G 中元素可矣。

屬性 III 無須驗。屬性 IV 驗之如下：

$HG_iH = HHG_i = HG_i$，是 H 即單位元素也。

屬性 V：$HG_iHG_i^{-1} = HHG_iG_i^{-1} = H$，是即 HG_i^{-1} 爲 HG_i 之反元素也。

此種關係實使人於類之構造上得一更明白之概觀。尋常有一特別寫法，以表上項附屬系統所成之類：$\frac{G}{H}$，而原類則表之爲

$$G = \frac{G}{H} \cdot H,$$

於此 $\frac{G}{H}$ 乘 H 非如尋常之以 $\frac{G}{H}$ 乘 H，亦非如

第八節所定之義，蓋言 $\frac{G}{H}$ 中元素向視之爲整個的者，今須解之爲 G 之原元素也。此式恰與其次數之式相當：　$g=\frac{g}{h}\cdot h$。

$\frac{G}{H}$ 尋常稱爲『因子類』，或『商數類』，或亦稱 H 之『餘類』（對於 G 而言）。$\frac{g}{h}$ 爲 H 之指數，亦即是其餘類之次數也。

定理 28 中 (1) 之右端，隨視其附屬系統爲整個與否而所得不同。爲簡別計，倘視附屬系統爲整個時，當如下寫之：

$$\frac{G}{H}=(H)+(HG_2)+\cdots\cdots(HG_{\frac{g}{h}})。$$

最後，有須注意者，上來所明一切，祇於 H 爲不變亞類方可用，非於任何亞類然也。

第十四節　最大不變亞類，組合級數

設 K 又爲 H 之不變亞類，則據前節所云可得一因子類 $\frac{H}{K}$，而

$$H=\frac{H}{K}\cdot K,\ \text{即}\ G=\frac{G}{H}\cdot\frac{H}{K}\cdot K。$$

倘 K 中仍含有不變亞類 L, L 中仍有不變亞類 M, 等等, 則可仿此繼續化出, 至最後一不變亞類, 其中祇有一『非眞不變亞類』(卽單位元素) E。今將 E 幷計入, 則得

$$G=\frac{G}{H}\cdot\frac{H}{K}\cdot\frac{K}{L}\cdot\cdots\cdots\frac{T}{E}\cdot E。$$

但如此化出, 殊有缺憾, 蓋 G 中所含不變亞類可不止一個, 其中且可有一不變亞類幷將 H 包入者, 今僅取 H 一個, 是則此項化法多少有任意選擇之嫌。

今引入一定義如下:

定義 倘 H 爲 G 中一不變亞類, 而 G 中更無其他不變亞類 H' 能將 H 包入者, 則 H 謂之最大不變亞類, 當寫作 $Hm<G$。G 中所有最大不變亞類自亦可不止一個, 其次數亦可各異。例如 6 次循環類中有二最大不變亞類, 其次數爲 2 與 3。

上面之化法中倘祇用此項最大不變亞類，即 $H m<G, Km<H$，等等，則尙不能不二。今將此項最大不變亞類先後列出，則得一級數

$$G, H, K, \cdots\cdots, T, E,$$

此級數名爲 G 之『組合級數』(*Kompositionsreihe*)。此項級數自亦可不止一個，惟關於此有一定理，明其中有相同處。後當及之。

第十五節　二亞類之橫切面

欲明組合級數方面之定理，須先一再研究亞類方面之關係，而於不變亞類尤宜注意焉。

今設 A 與 B 爲 G 之二亞類，則可有二問題：

1. G 中能否有一亞類，同時包入 A 與 B 內者。

2. G 中能否有一亞類，同時將 A 與 B 并包入者。

今先論 1。設 D_1 爲一元素，同時在 A 與 B 內者，D_2 又爲一如是之元素，則 D_1D_2 亦爲如是

一元素；因得（參觀定理 19）

定理 29. G 中二亞類 A,B 之共同元素構成一類 D.

D 名爲 A,B 之『横切面』，寫作 $D=(A,B)$。

A,B 二亞類至少當有一元素相共，故 D 之存在無須證方知。

又，此項觀念不獨用於二亞類，可推廣至於任何多之亞類（其數自有盡）。

例：G 爲循環變互類，其次數爲 12，

$$G=E+G+G^2+\cdots\cdots+G^{11},$$

$$A=E+G^2+G^4+G^6+G^8+G^{10},$$

$$B=E+G^3+G^6+G^9,$$

$$D=E+G^6。$$

倘 H 爲 G 之亞類，則與 H 相共軛之一切類其横切面 D 爲 G 之不變亞類。讀者試自證之。

欲研究問題 2.，自可試作一系統 AB 或 BA 以驗之。惟該系統中共有若干元素，是否亦構成

一類，則尙未知。

今如 A 之次數爲 a，B 之次數爲 b，而將 A 中各元素遍與 B 中各元素相乘，則共得 ab 個乘積，其中自亦可有同者。今設 A_1B_1 爲此中一乘積，與此相同者共有 $r-1$ 個乘積，例如

(1)　$A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = \cdots\cdots = A_rB_r$；

由此可得

(2)　$AA_1B_1B = AA_2B_2B = \cdots\cdots = AA_rB_rB$。

今視 (2) 中之 A 與 B 爲變數，俾 A 遍取 A 中一切元素，B 遍取 B 中一切元素，則按定理 8 AA_1 與 B_1B 亦遍取該二類中之一切元素，因而 $(AA_1)(B_1B)$ 仍爲 A 中一元素與 B 中一元素之乘積，而照 (2) 每一此項元素有 $r-1$ 個此項元素與之相同。又，每一元素亦祇能有 $r-1$ 個相同者，不則 A_1B_1 亦可有更多相同者矣。因知 AB 之元素(各異者)共有 $\frac{ab}{r}$ 個。

欲知 BA 之元素，可如是爲之。因 G, A, B, 有屬性 V，又因定理 3，可照(1)作

$$(A_1B_1)^{-1}=(A_2B_2)^{-1}=\cdots\cdots=(A_rB_r)^{-1}$$

即 $$B_1^{-1}A_1^{-1}=B_2^{-1}A_2^{-1}=\cdots\cdots=B_r^{-1}A_r^{-1}$$

則 $B_1^{-1}A_1^{-1}$ 卽爲 BA 中之任何一元素，與之同者尙有 $r-1$ 個元素。因得

定理 30. 設 A 與 B 爲 G 之二亞類，則 AB 與 BA 二系統所有元素之數同，此數幷爲 ab 之因子。

倘若 $BA=AB$，則必任何一元素 B_iA_k 與一元素 A_rB_s 同，卽 $B_iA_k=A_rB_s$。如前，可作

$AB_iA_kB=AA_rB_sB$，或 $(AB_i)(A_kB)=(AA_r)(B_sB)$，而使 B_i,A_k,A,B 遍取 B,A 兩類內之元素，則上式左端之二因子 (AB_i) 與 (A_kB) 各各遍取 AB 內之一切乘積，而其右端亦仍爲 AB 內之乘積，是卽 AB 內任何二乘積相乘之結果仍爲 AB 內之乘積，按之定理 19，AB 乃是一類。

反之，倘 AB 是一類，則因其中含有 A，與 B，亦必含 BA，按之前定理 30，AB 之元素數目與 BA 者同，故必 $AB=BA$。於是得

定理 31. 設 A 與 B 爲 G 之二亞類，則當 $AB=BA$ 時，亦祇當此時，AB 是一類。

例：G 爲四數目字之對稱類 $S_4, A=E+(12)(3)(4), B_1=E+(123)(4)+(132)(4), B_2=$ 四數目字之循環類。則 $AB_1=B_1A$；故是一類，而 $AB_2 \neq B_2A$ 二者均非類。

第十六節　二不變亞類之橫切面及乘積

前節內之 A 與 B 倘爲不變亞類，則尚可得數定理，頗能表不變亞類之觀念之重要者。

因 A, B 均爲不變亞類，故於 G 中任何元素 G，有

$$G^{-1}AG=A, G^{-1}BG=B。$$

設 D 爲 A, B 中之共元素，卽 $D=(A, B)$ 中一元素。則 $G^{-1}DG$ 在 $G^{-1}AG$ 及 $G^{-1}BG$ 中，卽在 A 及 B 中，因而亦在 D 中。D 爲 D 中任何元素均得，故 $G^{-1}DG$ 卽在 D 中。但此二者次數相同，故必 $G^{-1}DG=D$，是卽 $Di<G$ 也。按定理 27，亦必 $Di<A, Di<B$。因得

定理 32. 倘 $Ai<G, Bi<G$, $D=(A,B)$，則 $Di<A, Di<B, Di<G$。

前 $G^{-1}AG=A, G^{-1}BG=B$，亦可寫作

$$AG=GA, BG=GB。$$

由此，於 B 爲 B 中任何元素時，自亦必 $AB=BA$，卽是 $AB=BA$；按定理 31，AB 卽是一類。又因 $ABG=AGB=GAB$，於 G 中任何元素 G 均合，故 $ABi\leqq G$。而按定理 27，又可知 $Ai<AB, Bi<AB$。總括此項結果，得

定理 33. 設 $Ai<G, Bi<G$，則 AB 爲一類（BA 自亦爲類），且

$$ABi\leqq G, \quad Ai<AB, \quad Bi<AB。$$

上項論證中倘 A, B 二者非拌爲不變亞類，其中祇有一者有不變性，則結果卽不同，於此 $AB=BA$ 固爲一類，然非不變者。讀者試自證之。

第十七節　二因子類間之關係

今設 $Ai<G$, $Ai<H$, $Hi<G$。十三節內之寫

法，作二因子類：

(1) $$\frac{H}{A}=(A)+(AH_2)+\cdots\cdots+(AH_{\frac{h}{a}})$$

(2) $$\frac{G}{A}=(A)+(AG_2)+\cdots\cdots+(AG_{\frac{g}{a}})$$

而一研究其間之關係。

因任何一元素 Hi 均在 G 中，故 (1) 中諸系統均已在 (2) 之諸系統中，即是

$$\frac{H}{A}<\frac{G}{A}。$$

將 (1), (2) 中任何二系統相乘，可得

$$AH_i\cdot AG_k=AAH_iG_k$$

因 $Hi<G$， $$=AAG_kH_l=AG_k\cdot AH_l,$$

由此即不難知 $\frac{H}{A}$ 對於 $\frac{G}{A}$ 有不變性。

按定理 27，又知由 $Ai<G_1$ 祇須 $A<H$，便可得 $Ai<H$，故得

定理 34. 設 $Ai<G, A<H, Hi<G$，則

$$\frac{H}{A}i<\frac{G}{A}。$$

此定理幷可例之如下:

定理 35. 設 $Ai<G$, $Ai<H$, $\frac{H}{A}i<\frac{G}{A}$, 則亦 $Hi<G$。

(1)中各系統均在(2)中，故若將(1),(2)解爲原來元素時，亦必如此，是卽 $H<G$ 也。照所設 $\frac{H}{A}i<\frac{G}{A}$，故亦可如前得 $AG_k\,AH_i=AH_l\,AG_k$, 於(1)中任何 AH_i 及(2)中任何 AG_k 均合，AH_l 自仍爲(1)中之系統。

由 $AG_kAH_i=AH_lAG_k$，因 A 有不變性，可得

$$AAG_kH_i=AAH_lG_k,\quad \text{卽}\quad AG_kH_i=AH_lG_k,$$

左端中有一元素 EG_kH_i 與右端中一元素同，例如

$$EG_kH_i=AH_lG_k。$$

因 $A<H, AH_l$ 亦爲 H 中之元素 H，故有

$$G_kH_i=HG_k。$$

G_k 既可爲 G 中任何元素，H_i 亦可爲 H 中任何元素，故自必 $H_i<G$。

第十八節 最大不變亞類之橫切面與乘積因子類之等形性

今設 A 與 B 爲 G 中二最大不變亞類（見第十四節），則有

定理 36. 倘 $Am<G$, $Bm<G$, 則

$$AB=G。$$

［證］ 按定理 33 $ABi\leqq G$; 但 A,B 均爲最大不變亞類，故祗能

$$AB=G。$$

前定理 29 下所舉之具體例，事實上其 A 與 B 均爲最大不變亞類，讀者試作其 AB，當知其卽爲 G 也。今爲顯明計，可仍用此例供研究。A,B 之橫切面仍以 $D=(A,B)$ 表之，則因定理 32，可如前節作四因子類：

$$\frac{G}{A}=(A)+(AG)=(A)+(AG^3),$$

$$\frac{G}{B}=(B)+(BG)+(BG^2)=(B)+(BG^2)+(BG^4),$$

$$\frac{A}{D}=(D)+(DG^2)+(DG^4),$$

$$\frac{B}{D}=(D)+(DG^3)。$$

於此，有

定理 37. 倘 $Am<G, Bm<G, D=(A,B)$，則

$$\frac{G}{A}\cong\frac{B}{D},\ \frac{G}{B}\cong\frac{A}{D};\ gd=ab。$$

［證］ 試以 D 為率將 B 化成附屬系統，可得

(1) $$B=D+DB_2+\cdots\cdots+DB_{\frac{b}{d}}。$$

由此有

$$AB=AD+ADB_2+\cdots\cdots+ADB_{\frac{b}{d}}$$

按定理 36，即是

(2) $$G=A+AB_2+\cdots\cdots+AB_{\frac{b}{d}}。$$

(2) 之右端各附屬系統均不相同，故 (2) 實即為 G 之用 A 為率的化法；蓋如 (2) 右端之附屬系統中有二相同，例如

$$AB_i = AB_k,$$

則必 (3) $B_i = AB_k$，或 $A = B_i B_k^{-1} < B$。

因 A 既 $< A$，自亦 $A < D$。而由 (3) 卽可得，

$$DB_i = DAB_k = DB_k,$$

是則(1)中亦有二附屬系統相同矣，卽不合。

既知此，則定理中所云之等形性卽不難知。由

(4) $$DB_i \cdot DB_k = DB_l,$$

可得
$$ADB_iDB_k = ADB_l$$
$$AB_iDB_k = AB_l$$
$$B_iADB_k = AB_l$$
$$B_iAB_k = AB_l$$

用 A 再乘兩端，卽得

(5) $$AB_iAB_l = AB_l。$$

今視 (1) 與 (2) 之右端各附屬系統為整個的元素，則卽為二因子類 $\frac{B}{D}$ 與 $\frac{G}{A}$，而 (4) 與(5) 二式亦表其等形性，如定理中所示者。至 $\frac{G}{B}$ 與 $\frac{A}{D}$ 之等形性，其證法與上同，可不再贅。

$\frac{G}{A}$ 與 $\frac{B}{D}$ 有等形性，卽表明此二類之構造完全相同。按所設，$Am<G$，A 爲 G 之最大不變亞類；今可一研究，A 之最大性與 $\frac{G}{A}$ 有何關係。

今如 A 爲一普通不變亞類，并非最大者，則可有一亞類 H，俾

$$A<H,\ Hi<G,$$

照定理 34，有

$$\frac{H}{A}i<\frac{G}{A}。$$

是卽因子類 $\frac{G}{A}$ 中尙有一不變亞類，故用第十三節所定名稱，$\frac{G}{A}$ 非爲簡單類。反之，倘 $\frac{G}{A}$ 非爲簡單類，則按定理 35，亦必有一類 H 能 $Hi<G$ 而 $A<H$ 者，故 A 亦非最大不變亞類。因得

定理 38. 倘 $Ai<G$，則當 $\frac{G}{A}$ 爲簡單類時，亦祇當此時，乃能 $Am<G$。

前既設 $Am<G$, 故 $\frac{G}{A}$ 爲簡單類，而與之相等形之 $\frac{B}{D}$ 自亦必簡單,從可知 $Dm<B$。

前所得定理 37 於是可補充之使成爲更完滿者:

定理 39. 設 $Am<G$, $Bm<G$, $D=(A,B)$, 則 $Dm<A$, $Dm<B$,

$$\frac{G}{A}\cong\frac{B}{D},\quad \frac{G}{B}\cong\frac{A}{D};\quad gd=ab。$$

第十九節 組合級數定理

前十四節內已提及組合級數,今當稍詳論之。

次數爲 2 及 3 之類,其組合級數自祇有二項,即 G,E 是。

次數爲 4 之類共有二(見十一節); 其中一者爲循環類

$$G=E+(1234)+(13)(24)+(1432),$$

其組合級數爲

$$G,\ E+(13)(24),\ E。$$

其一即爲四元類

$$G=E+(12)(34)+(13)(24)+(14)(23),$$

倘設 $E+(12)(34)=A_1, E+(13)(24)=A_2$, $E+(14)(23)=A_3$，則可有三組合級數：

$$G,\ A_1, E;\quad G,\ A_2, E;\quad G,\ A_3, E;$$

其所屬之因子類及指數各關的如下：

$$\frac{G}{A_1},\ \frac{A_1}{E};\quad \frac{G}{A_2},\ \frac{A_2}{E};\quad \frac{G}{A_3},\ \frac{A_3}{E};$$

$$2,\quad 2;\quad 2,\quad 2;\quad 2,\quad 2。$$

次數爲 5 之類，其組合級數亦爲 G, E。

次數爲 6 之類有二，其一爲循環類

$$G=E+(123456)+(135)(246)$$
$$+(14)(25)(36)+(153)(264)+(165432),$$

倘設 $E+(135)(246)+(153)(264)=A, E+(14)(25)(36)=B$，則得二級數及其各關之因子類并指數如下：

$$G, A, E;\qquad G, B, E;$$

$$\frac{G}{A},\ \frac{A}{E};\qquad \frac{G}{B},\ \frac{B}{E};$$

$$2,\quad 3;\qquad 3,\quad 2。$$

其他一六次之類，乃是三數目字之各變互所成，讀者試自求其組合級數。

觀此數簡單例，已有數事可見到：倘一類所有組合級數不止一，則各級數之項數同；如研究其因子類，則又可知一級數之因子類於他級數中必亦有一因子類與之同次數者，是卽每一指數必有一相等者。不僅此而已，各級數之因子類可每二者相合爲對，其構造相同，有等形性。

用數學上『完全歸納』(*vollständige Induktion*)之論證法，可證明任何次類之各組合級數均然，今示之如次。

今設 G 爲 g 次之類；其二組合級數及相關之因子類如下：

$I.\qquad G, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n = E,$

因子類：$\dfrac{G}{A_1}, \dfrac{A_1}{A_2}, \cdots\cdots, \dfrac{A_{n-1}}{A_n} = \dfrac{A_{n-1}}{E};$

$II.\qquad G, B_1, B_2, \cdots\cdots, B_m = E,$

因子類：$\dfrac{G}{B_1}, \dfrac{B_1}{B_2}, \cdots\cdots, \dfrac{B_{m-1}}{E}$。

若假定凡次數小於 g 之一切類均有上項屬性，而由此可推得次數為 g 者亦然，則『完全歸納』之論證法於此已普通證明一切任何次之類均然。

第一，倘 $B_1=A_1$，則因 A_1,B_1 之次數均小於 g，照假定，於 $A_1,A_2,\cdots\cdots E$ 及 $B_1=A_1,B_2,\cdots\cdots,E$ 均已證明前所云之事實，而又 $\frac{G}{A_1}\cong\frac{G}{B_1}$，故 I, II 亦即合此事實。

第二，倘 $B_1\neq A_1$，則 B_1 與 A_1 為 G 之二個不同的最大不變亞類，按定理 39，A_1 與 B_1 可有一最大不變亞類 $D=(A_1,B_1)$，故尚可得組合級數及相關之因子類如下：

$$III.\qquad G,\ A_1,\ D,\ D_1,\cdots\cdots,\ D_l=E,$$

因子類：$\frac{G}{A_1},\ \frac{A_1}{D},\ \frac{D}{D_1},\cdots\cdots,\ \frac{D_{l-1}}{E}$；

$$IV.\qquad G,\ B_1,\ D,\ D_1,\cdots\cdots,\ D_l=E,$$

因子類：$\frac{G}{B_1},\ \frac{B_1}{D},\ \frac{D}{D_1},\cdots\cdots,\ \frac{D_{l-1}}{E}$。

按之定理 39,可知 *III*,*IV* 之首二因子類可交橫相合,成二對相等形之類。至其下之各因子類,則均相同,因知 *III* 之因子類與 *IV* 之因子類每兩相等形(惟不必 *III* 之第一因子類恰與 *IV* 之第一類相等形,其次序或可有不同耳)。

再將 *I* 與 *III* 相較,則因首二類相同,照假定亦可知 *I* 與 *III* 之因子類每兩相等形。此外,*II* 與 *IV* 亦然。而由此種種,卽可推知 *I* 與 *II* 之因子類亦兩兩相等形者。因而可將所得者譯爲普通定理如下:

定理 40. 一類之一切可能的組合級數,其所有項數同,其因子類(次序不問)每兩相等形,其指數所成之級數(次序不問)亦同。

尤堪注意者,乃是某種類,其組合級數所屬之指數級數盡爲質數,因而其因子類之次數亦統爲質數。此項類名爲『可解類』,或亦稱爲『非常循環類』(*metazyklische Gruppe*)。例如三數目字或四數目字之變互類乃是可解者,至五數目字者卽不然矣。

第二十節 結論

本章內雖已將關於有盡類之研究略示梗概，但限於篇幅，未能多及。關於此方面之問題，主要者有二：

1. g 爲任何一有盡數，則 g 次之非等形的類共可有幾，其性質何如？類之數不能多至無窮，此由定理 9 已可知；惟此問題之解決，現尙僅臻乎初步耳。

2. 設有一 g 次之類於此，則其中可有若干亞類，其性質何如？於此，齊洛夫 (*Sylow*) 氏曾發見一簡單之定理，今錄之於下，至其證則不能再及：

定理. 倘 G 之次數 g 有一因子 p^n，則 G 至少有一 p^n 次之亞類。

此外，如亞倍氏類，及變互類之特別屬性等，均類論內所研究者。而因應用於代數方程上之故，可解類尤多研究，惟此方面之難題，亦多未解耳。

第四章
無盡類

第一節 算術方面之例

類中所有元素，其數多至無窮者，是曰無盡類。如第一章中之例 9, 13, 14 均是。今再舉數例於後。

倘以尋常之乘法爲結合法，并將 0 一數不計入，則一切複數可構成一無盡類。蓋如 $a+bi$ 與 $c+di$ 爲任何二複數，則 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$ 仍爲一如是數。複數之算法上通用聯結定律，故類之屬性 III 不成問題。單位元素卽是 1。至反元素，亦可得之如下：如欲求 $a+bi$ 之反元素，可設所求者爲 $x+yi$，則因 $(a+bi)(x+yi)=1$，解之卽可得 $x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{-b}{a^2+b^2}$，故如 $a+bi$（自亦 a^2+b^2）非爲 0，則 $x+yi$ 亦爲一複數；此前所以將 0 不計入也。複雜之相乘可

通用交換定律，故其所成之類自亦爲可換的，故此類可名之曰『無盡可換類或亞倍氏類』。

此類中有一亞類，爲一切實數所成，0 自亦除外。實數之乘積仍爲實數，聯合定律，單位元素，反元素均不難知。

一切有理數亦自構成一亞類；又如一自然數目 2 之一切乘方，

$$\cdots\cdots, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}, \cdots\cdots$$

亦爲其中一亞類。而與此相等形者，爲一切整數所成之類（0 亦計入），以加爲結合法。此種類僅由一元素之乘方所成，故亦卽稱『無盡循環類』。

第二節　幾何學方面之例

今如以 O 爲中心，r 爲半徑作一圓 K，則可將平面內之點每兩如是相關：對於每一點 P，按以下二規例將另一點 P' 與之相關：

1. P' 在自 O 出發經過 P 之射線上，
2. $OP' : r = r : OP$。

此種相關法亦稱爲『用 K 之倒影法』，P'爲 P 之影點。經倒影後，自一曲線或一面可仍得一曲線或面。以下所欲論者，爲關於此之某數種屬性：

相關法係互相的，倘 P' 對 P 相當，則亦 P 對 P' 相當。

圓 K 上每一點與其自己相當。

對於每一圓與之相當者亦仍爲圓（直線可視爲半徑無窮大之圓），與圓周相當者爲圓周，圓面相當者爲圓面。

與相切之圓相當者仍爲相切之圓，對於自外切 K 之圓，與之相當者爲自內切 K 之圓，反之亦然。

與二相垂直之圓相當者爲二相垂直之圓，與 K 相垂直之圓卽與自己相當。

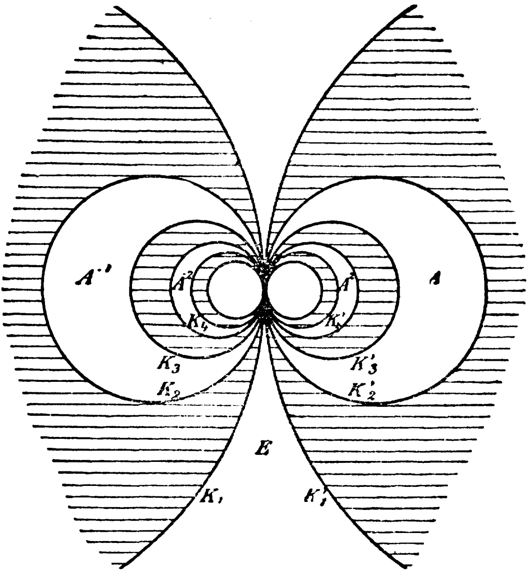
如圖所示，試作二相切之 K_1 與 K'_1（大小可相等）；用倒影法可由此得無限多之圓。經倒影後，其用

K_1 者	K'_1 者
K'_1 轉爲 K_2	K_1 轉爲 K'_2

K'_2 轉爲 K_3　　K_2 轉爲 K'_3

K'_3 轉爲 K_4　　K_3 轉爲 K'_4

……………………　　……………………



圓與圓間之空隙，更迭以黑線劃之如上圖所示。每一空隙卽用其二圓界表之，又隨其曾經用黑線劃過與否，用方括弧或圓括弧爲符號，例如 (K_1 K'_1)，[K'_1 K'_2]，…… 經倒影後，不難知，其用

K_1 者	K'_1 者
$(K_1\ K'_1)$ 轉爲 $[K_1\ K_2]$	$[K_1\ K_2]$ 轉爲 $(K'_2\ K'_3)$
$(K'_2\ K'_3)$ 轉爲 $[K_3\ K_4]$	$[K_3\ K_4]$ 轉爲 $(K'_4\ K'_5)$
…………………………	…………………………

若經二次倒影——用 K_1 後再用 K'_1——則

…………………………………

$(K_2\ K_3)$ 轉爲 $(K_1\ K'_1)$

$(K_1\ K'_1)$ 轉爲 $(K'_2\ K'_3)$

$(K'_2\ K'_3)$ 轉爲 $(K'_4\ K'_5)$

…………………………………

此卽是每一未經線劃之白空隙仍轉爲一繼其後之白空隙。此種轉變可視爲每一白空隙之擴張或收縮成爲其次一白空隙，然同時經黑線劃過之空隙亦如此，故實爲全平面之擴張或收縮也。

今試將此項二重之倒影，卽將一切空隙同時轉變者，視爲一元素 A; A^{-1} 卽爲與此相反之倒影，A^2, A^3, 等則爲 A 之二次或三次的繼續作出，又

將不變動亦作爲一元素 A^0 或 E。因圖中白空隙之數多至無窮，故 A 之一切乘方均不同。

如是則 A 之一切乘方

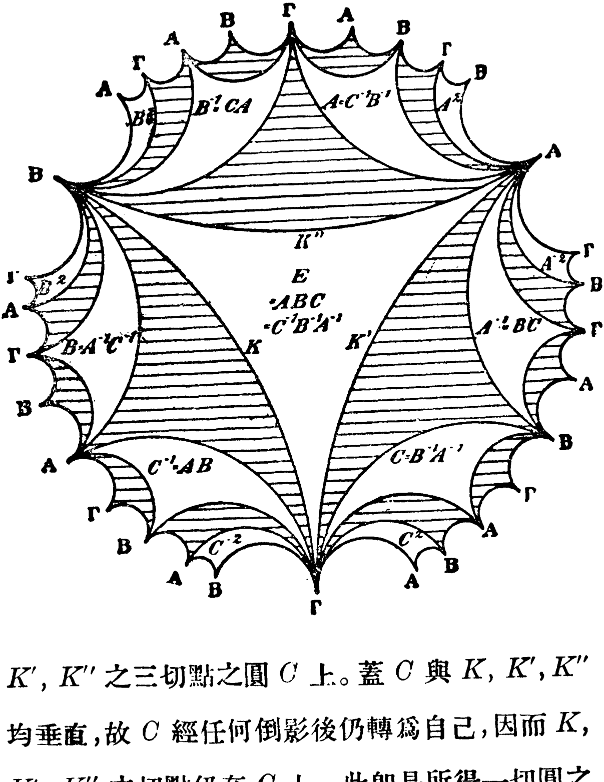
$$\cdots\cdots, A^{-3},\ A^{-2},\ A^{-1},\ A^0,\ A,\ A^2,\ A^3, \cdots\cdots$$

即構成一無盡循環類，因任何二者相結合，例如 A^i 與 A^k，可得 A^{i+k}，仍爲此中一元素，而其他類之屬性亦均無缺也。

上圖中以 $(K_1\ K'_1)$ 爲出發，經 A 後轉爲 $(K'_2\ K'_3)$，故即於該空隙中標以 A，其餘可類推。如此，該類之元素較能明白見出矣。

上項研究可更廣之如下。

如下圖，K, K', K'' 爲大小相等自外相切之三圓。仍用倒影法將每一圓用其餘二圓倒影之。因 K, K' 二圓相切，又均自外切 K''，故用 K'' 倒影後，轉爲二相切之圓自內切 K'' 者。仿此，用 K 及 K' 倒影其餘二者所得亦類此。如是，又可得六圓。將所得者仍仿前倒之，則得十二圓，等等。由此所得之一切圓均相切，其切點則在一經過 $K,$



K', K'' 之三切點之圓 C 上。蓋 C 與 K, K', K'' 均垂直,故 C 經任何倒影後仍轉爲自己,因而 K, K', K'' 之切點仍在 C 上,此卽是所得一切圓之切點均在 C 上也。仿此幷可知所得之一切圓均與 C 相垂直。如上圖中僅將 C 之內部作出,所得之弧三角形亦更迭以黑線劃之,此項三角形均

以 $AB\Gamma$ 表之，其角之經倒影相轉成者以同字母名之。

圖中一空白三角形例如在 K, K', K'' 間者，用 K' 倒影後變爲經黑線劃過之三角形，再將此用 K'' 倒影之，仍得一空白三角形，如圖中之 A 是。用此種雙重之倒影於全圖，則所得仍爲該圖形，但每一空白三角形變成一其他空白三角形。

今視此雙重倒影爲一元素 A，經此後，原來之三角形 E, A, A^{-1}, A^{-2}, 等變而爲 A, A^2, E, A^{-1} 等。至與此相反之倒影，可以 A^{-1} 表之。仿之，將全圖形先用 K'' 然後用 K 倒影之，可視爲一元素 B，其反元素爲 B^{-1}；先用 K 然後用 K' 者爲 C，其反爲 C^{-1}。E 則爲全圖形之不變動。又，A^2 爲 A 之繼續二次作出，AB 爲 A 與 B 之相繼作出等等。但 BA 與 AB 不相同。一切此項元素，其普通形式爲

$A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} A^{\alpha'} B^{\beta'} C^{\gamma'} \cdots$，於此 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \cdots = 0, 1, 2, \cdots\cdots$

由一切此項元素所成之系統，乃是一無盡類，蓋任何二者之相繼作出所得仍爲如是一元素，聯合定律於此可通用，單位元素爲不變動，各元素亦均有一反元素，例如 $A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} A^{\alpha'} B^{\beta'} C^{\gamma'}$ 之反元素爲

$$\cdots\cdots C^{-\gamma'} B^{-\beta'} A^{-\alpha'} C^{-\gamma} B^{-\beta} A^{-\alpha}。$$

若將上項研究再加推廣，用 n 個相切之圜出發亦可，今姑不及。

第三節 變換論中之例

前第一章中所舉之例 9 尙可稍廣之。彼時所用以變換之函數，乃是齊次式；若用不齊次式，則結果亦爲一類，故今可廣之爲

$$x' = ax + by + e,$$

$$y' = cx + dy + f,$$

於此 $ad - bc \neq 0$。

若再廣之，不以整函數爲限，而用分數式，則所得之類較前更廣矣：

$$x'=\frac{ax+by+e}{gx+hy+k},$$

$$y'=\frac{cx+dy+f}{gx+hy+k},$$

於此,同一變換中二式之分母須相同,又必

$$\begin{vmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & k \end{vmatrix} \neq 0。$$

倘更廣之,可將變數增至 n 個,則得所謂普通射影類。例如 $n=3$:

$$x'=\frac{a_{11}\,x+a_{12}\,y+a_{13}\,z+a_{14}}{a_{41}\,x+a_{42}\,y+a_{43}\,z+a_{44}},$$

$$y'=\frac{a_{21}\,x+a_{22}\,y+a_{23}\,z+a_{24}}{a_{41}\,x+a_{42}\,y+a_{43}\,z+a_{44}},$$

$$z'=\frac{a_{31}\,x+a_{32}\,y+a_{33}\,z+a_{34}}{a_{41}\,x+a_{42}\,y+a_{43}\,z+a_{44}},$$

於此,由諸係數所成之行列式自須不等於 0。

設 $n=4$,可於普通射影類中得二亞類,其意義在物理學上至爲重要。此四變數爲 x, y, z, t,所

用之常數爲 v 及與此相關之 k,又有一絕對常數 c:

(1)　$x'=x-vt,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t;$

(2)　$x'=k(x-vt),\ y'=y,\ z'=z,\ t'=k(t-\frac{v}{c^2}x)$

於此,

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}。$$

(1)在物理學上謂之『加里雷換標式』(*Galilei-Transformation*),(2)即是『羅倫玆換標式』(*Lorentz-Transformation*)(關於此可參看敍述相對論之著作)。

第四節　有盡類與無盡類之比較

由以前諸例,已不難知無盡類與有盡類相似之處頗多。無盡類中亦有循環類,可換類與不可換類等分別,他如亞類,等形性,抽象類等概念亦可通用。今可略一研究,無盡類與有盡類之相似至於

若何程度。

第三章第二節中所論於此有仍適用亦有不適用者。無盡類中元素之次數有有盡亦有爲無盡者，故定理 5 及得此定理之硏究於此均不適用。第三，四兩節大都基於類之有盡性，故在此不能用，或至少須增加新概念後方可轉借。以下五，六，七三節亦然。

有盡類方面之寫法，如 $G=G_1+G_2+G_3+\cdots\cdots$ 於無盡類亦尙可用，惟如類中元素難以序次時，此種寫法亦祇表其中任意取出之若干元素耳。

將類化爲附屬系統之法，於此雖亦尙可轉借，但如定理 21 至 23 則不能再用矣。指數之概念亦仍可用，但可有盡或無盡。

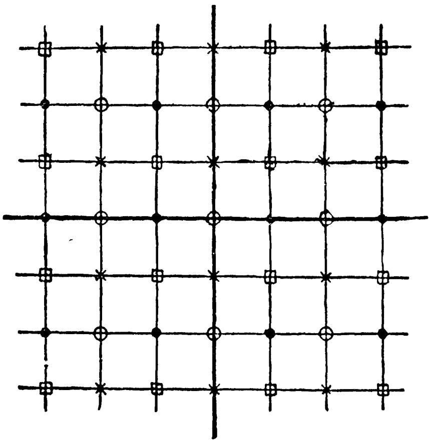
舉二例如下：

(1) G 爲一切整複數 $a+bi$ 所成之類，其結合法爲加（a 與 b 各遍取一切整數）。G 爲一類，實不難見，蓋

$(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$ 仍爲

一如是之數，0 可爲其單位元素，$a+bi$ 之反數爲 $-(a+bi)$ 也。

如下圖，於複數平面上作與坐標軸相平行之線，其與二坐標軸之距離爲 ±1，±2，±3……則得無數方格，其角卽是 G 之元素。



今設 H 爲 G 之亞類，其元素 $a+bi$ 中 a 與 b 統爲偶數。H 之元素可寫作 $2\alpha+2\beta i$，於此 α，β 各遍取一切整數。上圖之中 H 之元素槪以圓圈別之。G 中之元素 $G_2=1$，未屬於 H 中；附屬系

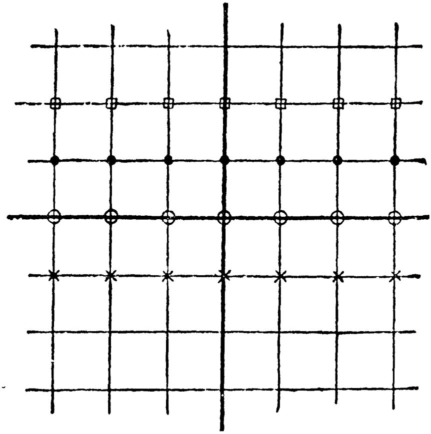
統 HG_2 中之元素爲 $2\alpha+2\beta i+1=(2\alpha+1)+2\beta i$(圖中以黑點表之)。$G$ 中之元素 $G_3=i$ 旣未屬於 H, 亦不屬於 HG_2,故亦可以此作一附屬系統 HG_3, 此中之元素爲 $2\alpha+(2\beta+1)i$ (圖中以+字表之)。G 中尙有一元素未屬於前系統中者爲 $1+i$,以 G_4 表之,則 HG_4 之元素爲$(2\alpha+1)+(2\beta+1)i$(圖中作方形別之)。如是, G 之元素已盡, 故用 H 爲率時,可得 G 之化法爲

(1) $G=H+HG_2+HG_3+HG_4$,

其指數爲 4。

(2) G 仍爲此類, H' 爲實整數 a 所成之亞類(下圖中以圓圈別之)。設 $G_2=i$, 則 $H'G_2$ 之元素爲 $a+i$; $G_3=-i$,得 $H'G_3$ 之元素爲 $a-i$;仿此, $G_4=2i$, $H'G_4$之元素爲 $a+2i$ 等等, 以至於無盡。如是, G 之附屬系統亦多至無盡。因而(2) $G=H'+H'G_2+H'G_3+\cdots\cdots$, 其指數爲$\infty$。

以上二例,略示無盡類之化法, 但如前所云, 類中元素難以序次時,則此種寫法卽不可通用矣。



此外如『可換』,共軛元素及類,不變及最大不變亞類,因子類,二類之橫切面及乘積等概念,於無盡類亦均可用,關於此之定理,其與類之有盡性無關者亦均可保存。但組合級數及其定理則於此成爲無意義矣。

又,適所舉之 G 是一亞倍氏類,故其亞類 H, H' 均爲不變亞類,但非最大者,故可有一亞類介於其間,其元素爲一切複數 $a+bi$,於此 a 盡取一切整數,b 則僅取偶數(上面圖中之圈與點)。

自(1)與(2)兩化法,又可見因子類之例。其前者

$\frac{G}{H}$與四元類等形，其後者$\frac{G}{H'}$則與 H' 等形(此種例於有盡類亦有之)。

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

類論梗概

包姆加脫納著

鄭太朴譯

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

中華民國十九年十月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

ELEMENTS OF THEORY OF GROUPS

By
L. BAUMGARTNER
Translated by
CHÊNG T'AI P'O

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930