算學叢書

第六種

簡要實用微積術

德國柯勞什原著

李協譯述

商務印書館發行

簡要實用微積術

譯者附言

F. Kohlrausch 於近今物理學多所闡發伊著.是書.頗具深意.其原序云.今世所行微積教科書.非不多且博矣.然學者.窮年孜孜.畢盡算學能事.而與以物理工業等題.則對之仍覺茫然.是弊余在帝國電信試驗場.頗能覺之.故特著是編.令學者以短少光陰.能探微積學之蘊.且立能施之於實用.故多設實用之題.而詳述其解法.

譯者昔在北京專學時.即購是書.以爲自行研究之資.兩月餘而竟其業.後遊伯林.讀 *Scheffers* 及 *Serret* 關乎微積學等著.已無隔閡.再習力學及靜力學之艱深者.皆迎刃而解.所得益於是書者多也.

著是書者爲電信試驗場教授.故書中之題.多偏重於電學.然於他各工業物理等部.亦非省略.

是書之便有三.一已供職各項工業.而微積學識未完足者.得是書.可速補其缺陷.二欲習專門算學.而苦於微積無門徑者.得是書.可驟窺堂奧.三已曾學過高深算學.而臨用時不免遺忘.或未習於實用等題者.得是書,可爲良助.以是之故.是書在德國.不特在職之人多購用之.而大學及工科大學之學生.購用者亦甚衆.

吾國算學傳來已古.而工業一途.今始萌芽.顧算學爲工業之基礎.夫人知之.然今之習算學者.多半於工業隔閡太甚.

而習工業者.又多缺乏算學智識.兩俱不能進步,職是故也.譯者.切望是書之得爲吾國人注意.使知算學之用在工業.而工業非算學.無以致其造境也

譯者譯是書所用名詞.力擇吾國普通所習用者.然間有新創.則以舊者爲失當也.如 *Differential Quotient* 舊譯微係數.然 *Quotient* 之義.本爲商非係數也.故改譯微商.*Moment* 或譯爲能率.則以爲未盡其義.不如譯爲冪.一以諧其音.--因普通 *Moment* 之義.多指力與距離之積.恰合算學中冪之義也.又 *Rational* 及 *Irrational Function* 舊譯爲有理的及無理的函數.今改爲理函數及劇函數.

凡人名地名及量名之爲萬國公定者如 *Meter, Ampere, Volt* 等.皆書原文而附其讀法於括弧內.

譯者於書內間有以己意改竄之處.以求吾國學者讀之易解.

學術語之下.附以英文.蓋是書雖譯自德文而吾國識英文者良多.故特附之以資考證.

凡習理科或工業者用是書皆較用他譯本或英文原本爲得切要而省時力.習專門算學者用是書易於得門徑而進窺堂奧.是則所敢介紹於吾國學者.

民國五年一月十五日李協誌

省文釋義

m	義爲	*Meter* (讀米突)	＝公尺
cm	,, ,,	*Centimeter* (讀生的米突)	＝公分
mm	,, ,,	*Milimeter* (讀密里米突)	＝公厘
km	,, ,,	*Kilometer* (讀啟羅米突)	＝公里
□*cm*	,, ,,	cm^2 (讀平方生的米突)	＝平方公分
□*mm*	,, ,,	mm^2 (讀平方密里米突)	＝平方公厘
❒*cm*	,, ,,	cm^3 (讀立方生的米突)	＝立方公分
❒*mm*	,, ,,	mm^3 (讀立方密里米突)	＝立方公厘
l	,, ,,	*Liter* (讀立脫)	＝公升
g	,, ,,	*Gram* (讀格蘭姆)	＝公兩
hg	,, ,,	*Kilogram* (讀啟羅格蘭姆)	＝公斤
sec	,, ,,	*Second* (義爲秒)	
g	,, ,,	地重力 (*Acceleration of earth or Gravity*)	
C. G. S. 系	,, ,,	*Centimeter-Gram-Second-System*	
sin	,, ,,	*Sine*	＝正弦
cos	,, ,,	*Cosine*	＝餘弦
tan	,, ,,	*Tangent*	＝正切
cot	,, ,,	*Cotangent*	＝餘切
arc	,, ,,	弧	
h	,, ,,	點鐘	

目錄

卷一

微分算法緒論

卷二

微分算法

卷　三

積分算法

附　卷

簡要實用微積術

卷一

微分算法緒論

§1. 函數之義及其分類

今夫物之由空墜下也.其終點速率 $u=\sqrt{2gh}$. 式中 g 爲地重力,在地球上各處各爲一定之不變數. h 爲物墜下所經之路. h 若異.則 u 亦相殊.按上式 u 之值與 h 之平方根爲正比.

凡數之不變者名曰恒數.變者名曰變數.此數變而彼數因之而變者.則前者爲自變數.後者爲因變數.如上式 h 爲自變數. u 爲因變數.今欲表 u 爲關繫於 h 之數.亦可命 u 爲 h 之函數而書之爲"$u=f(h)$".

茲再以電學之理喻之.如左圖 E 爲蓄電池之電動力.[1] A 爲 Ampermeter (讀曰安培米突).[2] W 爲白熾電燈之阻力.[3] 在封合導圈中電流之強 J[4] 因電燈之阻力不變.故但關繫於電動力 E. 設電池之數增加.則電流之強 J 亦增加.與電動力 E 爲正比

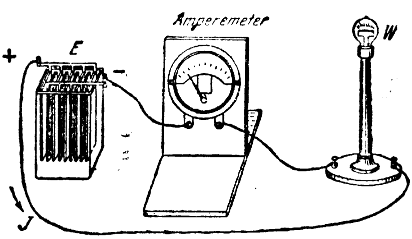


Fig. 1.

(1) *Electromotive Force.*

(2) 量電流強弱之表以 Amper 爲單位.

(3) *Resistance.*

(4) *Intensity of Current.*

(Ohm定律: $J=E/W$). 但於 *Ampermeter* 視針之所指卽可以知之. 在此例中任以一值與 E 而察 J 之變. 故 E 爲自變數. J 爲因變數.按上例亦可命 J 爲 E 之函數而書之爲"$J=f(E)$".

但 E 與 J 之相關係按之 Ohm 定律. 乃交互的. 亦可任以多寡電流輸入電燈. 令 J 隨意增減(如 *Fig.* 2). 而以 *Voltmeter* (讀華特米突)[1] 量電動力之變. 設於此電燈之阻力仍爲不變. 則 E 隨 J 而增卽與之爲正比. 故 E 爲因變數而 J 爲自變數.書之爲 "$E=f(J)$".

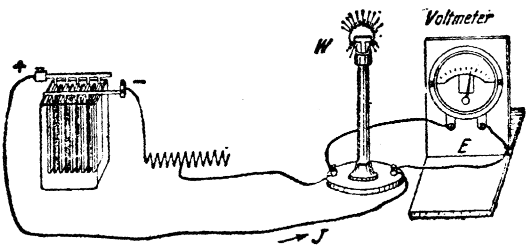


Fig. 2.

篇首所擧第一例. u 與 h 之相關係. 若欲得相異之終點速率 u. 則 h 自必變.故其關係亦爲交互的. 又若貨物爲人需索之多寡. 視其價之昂低. 故需索之數. 可命爲物價之函數. 然亦可云物價爲需索數之函數. 因需索愈多. 其貨自易以廉價貿易也.變數之爲因與自. 但隨時唯人所命耳.

函數定義應用極多. 如力學電學. 實業及一切算數科學皆以用函數定義. 其理倍覺明瞭. 此種定義本乎人之推解力. 而非需乎一定名學之斷定也.

凡變數普通以 x, y, z,…等字母代之. 恒數以 a, b, c,…等字母代之. 上所擧力學電學等關係. 可普通書之爲 $y=f(x)$ 名之曰函數方程式. $f(\ )$ 爲函數符號. 函數方程式亦可書之爲

(1) 量電動之表以 *Volt* 爲單位.

$f(x, y)=0$. 蓋一方程式如 $y^2=2px$ 亦可書之爲 $y^2-2px=0$ 也.設有數不相同之函數則可任用 f, F, ϕ, ψ, z,…等字母以爲區別.

電流之強.若精確論之.則亦爲阻力之函數.蓋電燈之阻力.因溫度之增而減也.命電力之值不變.而以 x 代電燈之阻力.則其與電流之關係.可以 $y=\phi(x)$ 或 $\phi(x, y)=0$ 表之.若欲表示電流之強.同時與兩變數之關係.以 y 代電流之強.以 x 代阻力.以 z 代電動力.則 $y=f(x, z)$

函數之義.不限於兩未知數.未知數爲任何多俱可.

函數之分類不一.其要者如下:

I. 在 $y=f(x)$ 函數式中.若 x 爲實數而得 y 之值亦爲實數則其函數名曰實函數.反是若 x 爲實數而得 y 之值爲虛數者則名曰虛函數.如 $y=x\sqrt{-4}$ 是也.凡數無論爲正爲負.爲整爲分.爲劇 (*Irrational*) 爲越 (*Transcendental*). 舉爲實數.數之以實數虛數合成者.名曰雜數函數.以實數虛數合成者名曰雜函數.

II. 在函數式 $y=f(x)$ 中.每以一值代 x 而得 y 之值只有一者.則其函數爲一解的.每以一值代 x 而得 y 之值有多個者.則其函數爲多解的. 例如 $J=E/W$ 式中. J 及 E 皆爲一定的函數.但有一解.而 $y^2=2px$. 以 y 爲 x 之函數.即 $y=f(x)$. 有二解.因 y 之值可爲 $+\sqrt{2px}$. 亦可爲 $-\sqrt{2px}$ 也.但若以 x 爲 y 之函數.即 $x=f(y)$. 則只有一解.因 x 之值爲 $\dfrac{y^2}{2p}$ 只有一也.

III. 函數若依運算法分別之.則如下.

1. 凡函數但由四則算法成者.名曰理函數(*Rational Function*).

(a) 凡函數式但用加減及乘號者.名曰理整函數 (*Rational Integral Function*). 如

$$y=a+bx-cx^2=\phi(x)$$

(b) 凡函數式並有除號者.名曰理分函數(*Rational Fractional Function*). 如

$$y=\frac{a+bx-cx^2}{a_1+b_1x-c_1x^2}=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$$

理分函數與理整函數之別.其顯然者.在 x 若爲可盡值.而若 $\psi(x)=0$ 則 y 爲無限值也.

2. 凡函數有方根號者.名曰劇函數(*Irrational Function*). 如

$$y=\sqrt{x^2+a^2}$$

3. 越函數 (*Transcendental Function*) 別之如下:

(a) 對數式: $y=log\,x$ 及指數式: $y=a^x$;

(b) 三角函數式: $y=sin\,x\cdots cos\,x\cdots tan\,x\cdots cot\,x$;

(c) 弧函數: $y=arc\,sin\,x\cdots$.

1. 及 2. 下所述諸函數.亦可總名曰代數函數.以其式中運算不出乎代數也.

§2. 圖示法及經緯坐標定義

上款所論.已從算學根本法定函數之義矣.但函數之義.尙有他法可以定之.玆分舉如下.

1. 列表法. 由 $y=f(x)$ 式中任取 x 之值而求 y 值之變.列之爲表.如三角函數表對數表是也.但所取 x 之值大有限制.而 y 之值.亦僅能算得幾位小數.非能準確無差也.

2. 圖示法. 表函數之變化.按 x, y 之坐標.作曲線於紙上.但此法亦非能眞正準確.因作圖之事難以確切也.

圖示法雖未能得眞確之結果.然事物變化之法則情狀.以數言之.或紛劇而無章.以圖表之.則顯明而易瞭.蓋此法使變數之關係盡包括於一幾何圖內.而能令人一目瞭然也.解析幾何之基礎.卽本於是.

經緯軸系

作二無限直線於一平面上.其交角可以任意爲之.但常用者多爲直角相交之二直線(*Fig.* 3).其交點爲 O. 平衡者號爲 $X'X$. 名曰 X 軸.垂直者號爲 $Y'Y$ 名曰 Y 軸.於圖紙平面上取一點 P. 由 P 作平行於 OX 及 OY 之直線.交 Y 軸 X 軸於 R 點及 Q 點. OQ 名曰 P 點之緯坐標. OR 名曰 P 點之經坐標.緯坐標之長命爲 x. 經坐標之長命爲 y.

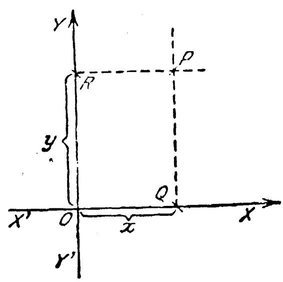


Fig. 3.

x 及 y 總名曰 P 點之坐標.在上圖中 $x=1.5\,cm.$, $y=2\,cm.$

用此法可定他一切點於圖紙平面上.每一點皆有一定之經緯坐標.反言之.每經緯坐標皆有相當之一定點.如欲表示一點 P_1 其緯經坐標 $x=3\,cm.$, $y=4\,cm.$ 則由 O 點起向右度 3 於 X 軸上.向上度 4 於 Y 軸上.由所度端點 3 與 4 起.作二軸之直交線.相交於一點卽 P_1 是也.但由 O 點起於 X 軸.向左亦可度 3. 於 Y 軸向下亦可度 4. 則所得者似不止一點.而有四點 P_1, P_2, P_3, P_4. 但若令二軸分正負二向.則此歧端可免(*Fig.* 4). 今命

與 O 之距離.順箭端之方向者爲正.反對之者爲負.則四點之坐標.可分別之如下:

	x	y
P_1	$+3$,	$+4$
P_2	-3,	$+4$
P_3	-3	-4
P_4	$+3$,	-4

如是則每一經緯坐標.僅有相當之一定點.不致與他點混淆矣.在右圖紙面上以二軸分爲四象限.點之在象限1者其坐標 x, y 俱爲正.在象限2者.x 爲負.y 爲正.在象限3者.x, y 俱爲負.在象限4者.x 爲正.y 爲負.點之在 X 軸者其經坐標俱 $=0$.在 Y 軸者其緯坐標俱 $=0$.二軸之交點 O 名曰原點.其經緯坐標俱 $=0$.經緯軸系.爲用甚廣且極重要.可以表示物理定律.三角術中.用之尤富.

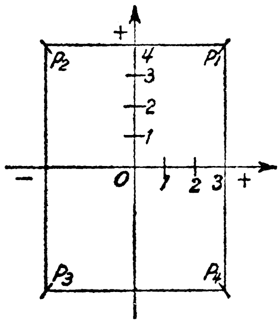


Fig. 4.

玆舉一例以示函數之用途.按 *Mariotte* 定律.氣體容積與其壓力之變易.常有一定的關係.即其容積與壓力之相乘積常爲一恆數.命壓力爲 p.容積爲 v.即 $pv=C=1$.今以圖示此定律如下.

命 p 任意變易而以 v 爲 P 之函數.即 $v=f(P)$ 而求其與 P 相當之値.

命	$p=0.1$	0.2	0.5	1	2	4
則	$v=10$	5	2	1	0.5	0.15

以此諸值度於右圖之經緯軸系上.則得許多之點.可聯之爲一曲線(*Fig.* 5).此曲線即可以表函數式 $v=f(p)$ 之狀態.但此法須算出許多數.始可以作曲線.殊覺困難.但此困難可以免之.蓋按解析幾何.$pv=1$.乃爲一定之曲線.卽雙曲線也.故可按一定之法作圖.不必一一求其點也.解析幾何者.教人以因方程式以作圖.亦因圖以求其方程式也.下款所論.卽解析幾何中最重要者.求各平面圖之方程式.如直線.圓.拋物線.橢圓.雙曲線.或總名之曰圓錐曲線.

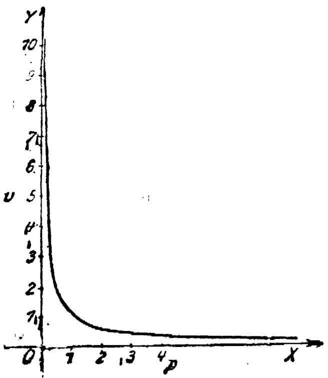


Fig. 5.

§3. 平面解析幾何之基本定則

平面解析幾何者.所以研究簡單之幾何圖象如線面等.其成立守一定之法則者也.如圓之成立.爲用一規取一定距離爲半徑.繞一定點旋轉而得者也.故圓上各點.距此定點(即中心點)俱相等.

本是則圓上一切點之成立.俱依同一之定則.故任取圓上一點(取其最普通者)而求其成立定則.則可以之馭圓上一切點.依此定則.立一方程式.則亦卽爲全圓之方程式.因圓上一切點之成立與所取一點無異致也.

以下所討論直線及圓錐曲線.其成立之定則.俱設爲已知者.

任取直線上一點.而求其成立定則以立方程式.則此方程式亦卽爲該直線之方程式.因直線上各點之成立與所取之點無異致也.

1. 直線之方程式

(a) 先設直線經過原點者.按圖卽可得直線上一點 P 之方程式.亦卽直線之方程式:

$$\tan\alpha=\frac{y}{x},\qquad y=x\tan\alpha.$$

α 角爲正軸 X 順圖中箭端之方向轉至 OP 位置而生者.圖中箭端方向.爲時表針之反向.名曰正轉向.直線之正方向亦以箭端誌之.

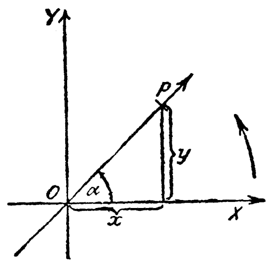


Fig. 6.

(b) 直線對原點之位置爲任意者.設直線截 Y 軸一段 $OG=b$. 截 X 軸一段 $OF=a$(Fig. 7). 則由三角形 FOG. 得

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

任取直線上一點 P. 則由三角形 GQP. 得

$$\tan\alpha=\frac{y-b}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

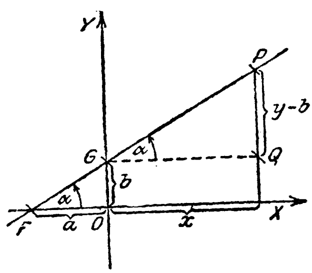


Fig. 7.

由(I),(II) 兩式卽得

$$y=\frac{b}{a}x+b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(III)}$$

此式爲含x及y之第一級方程式.凡第一級方程式.普通書之爲

$$Ax+By+C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(IV)}$$

變此式與(III)式相當.則得

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

此式卽爲一直線方程式.其$\tan\alpha=-\frac{A}{B}$而$b=-\frac{C}{B}$.

設有二直線.其方程式爲

1. $y=x\tan\alpha+b$

2. $y=x\tan\beta+b'$

每一方程式.皆有無數之x及y與之相合.二直線上各點之x, y.各不能相同.但有一對值x_1, y_1則可兼合乎二方程式(*Fig.* 8).卽二直線交點之緯經坐標也.聯立兩個第一級方程式含二未知數者之解法.無他.卽求二直線之交點而已.

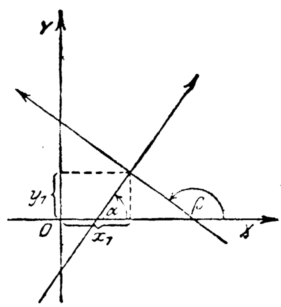


Fig. 8.

練習題

1. 問直線$x-3y-7=0$是否通過他二直線$2y-3x=8$及$4x-7y=1$之交點.

2. 求二直線$6x-7y+5=0$及$56y=40+48x$之交點.

2. 圓之方程式

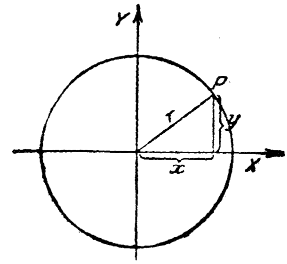


Fig. 9.

茲爲便利計.先設圓之中心點.即在經緯軸系之原點上.由 *Fig.* 9. 卽得圓之方程式爲

$$x^2+y^2=r^2.$$

此方程式爲含 x, y 二未知數之第二級方程式.

設移軸系原點於圓之中心點外.設圓之中心點其對於新軸系之緯經坐標爲 a 及 b. 任取圓上一點 P. 其對於新軸系之緯經坐標爲 x 及 y. 則由 *Fig.* 10. 得方程式

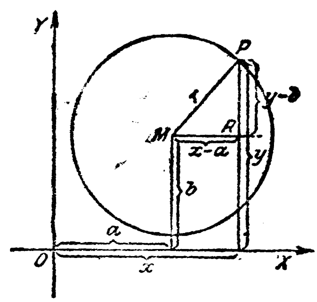


Fig. 10.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

上所用之移軸系原點法.名曰軸系換易法.

練習題

3. 設中心點之坐標爲 $(-3, -5)$. 半徑 $r=5.75$ 求畫一圓.問軸系原點是否在圓中心點上.

4. 求畫一圓 $(x-4)^2+(y-5)^2=16$.

3. 拋物線之方程式

拋物線爲一切點之軌跡.其與一定點 F 及一定直線 DD' 有相等距離者.

如 *Fig.* 11. P 爲拋物線上任一點。則必 $PD=PF$.

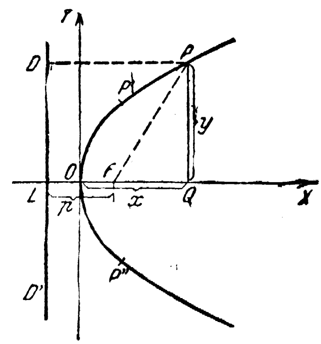


Fig. 11.

命 FL 爲 p. 名之曰拋物線之倍焦距。定點 F 名曰焦點(*Focus*). 定直線 DD' 名曰引線(*Directrix*)[1]. 設令 Y 軸平行於 DD'. 而通過頂點 O. X 軸即爲 OF 之延長線. $OF=OL=\frac{p}{2}$

由直角三角形 FQP(*Fig.* 11) 得

$$(PF)^2=(FQ)^2+(PQ)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$PF=PD=x+\frac{p}{2}$. 因 O 爲拋物線上之點.故其距 L 及 F 必相等

因 $FQ=x-\frac{p}{2}$ 而 $PQ=y$. 故由(I)式得

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y$$

$$y^2=2px \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

此即拋物線之方程式.

設已知方程式 $y^2=2px$ 而求其曲線.則可令二變數之一如 x 任意變易.而求他一變數 y 之相當值.

若 x 爲負.則 y^2 亦爲負.但實數之平方.無有爲負者.故不能令爲負.拋物線上一切點必全在 Y 軸之右.

(1) 亦名準線.

若 $x=0$. 則 y 亦 $=0$. 拋物線必通過軸系原點.名曰拋物線之頂點(*Vertex of Parabola*).

若 x 爲正則得 y 之值有二.一爲正.一爲負.設任以一值代 y. 卽令 $x=f(y)$, 則按§1. y 之函數有二解.故每得二點 P' 及 P''.一在 X 軸之上.一在 X 軸之下.二點同在一垂直線上而距 X 軸相等.卽對稱於 X 軸.拋物線卽爲此等對稱點所積而成.故 X 軸可名曰拋物線之對稱軸(*Symetric axis of Parabola*).

令 x 之值愈增不已.則 y 之值亦增至無限.而拋物線上之點.距 X 軸亦愈遠.

今已推知所求之曲線.常在 Y 軸之右.通過軸系原點而對稱於 X 軸.且曲線可延至無限.玆卽可以一定之值.遞代 x 於方程式內而求 y 之值.如令

$x=1, 2, 4, 6, 7\frac{1}{2}, 10, 15, 20\cdots$ 又命倍焦距 $p=4$. 則

$y=\cdots\cdots$(學者可自算之)

以所得之 x, y 諸值.卽可以畫爲曲線.

練習題

5. 設有方程式 $y^2=3x$, $y^2=5x$ 及 $y^2=6x$. 求作拋物線.

6. 試將軸系平行推移.令其原點與焦點 F 相重.問拋物線之方程式若何.

7. 問 $y^2=-2px$ 之曲線若何.

8. 求作 $x^2=2py$ 及 $y=x^2$ 之曲線.

9. 求作 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 之曲線.

4. 橢圓之方程式

橢圓者.一切點之軌跡其與兩定點 F 及 F' 距離之和常爲不變數也.設有一點 P. 動於一曲線上.其在各處與 F 及 F' 之距離和常不變.求作此曲線.

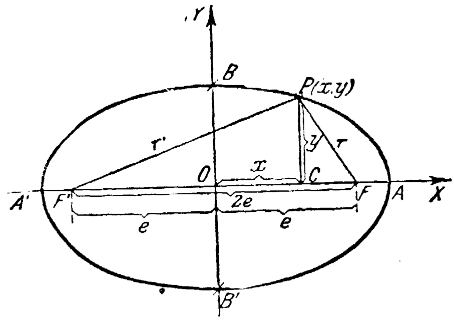


Fig. 12*a*.

以 FF' 之中點 O 爲軸系原點. FF' 之長爲 $2e$. 則 $OF=OF'=e$. F 及 F' 點名曰橢圓之焦點. e 名曰橢圓之離心(*Excentricity of Ellipses*).

P 點距 F 爲 r. 距 F' 爲 r'. r 與 r' 之值固爲變數.而 $r+r'$ 則爲不變數 $=2a$. 故得橢圓之定約爲

$$r+r'=2a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$r+r'$ 必常大於 $2e$. 因三角形二邊之和.常大於第三邊也. P 點之緯經坐標爲 x, y (*Fig.* 12*a*).

由三角形 PCF 得

$$r^2=(e-x)^2+y^2$$

$$r=\sqrt{(e-x)^2+y^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

由三角形 PCF' 得

$$r'^2=(e+x)^2+y^2$$

$$r'=\sqrt{(e+x)^2+y^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

以 r 及 r' 之值代入方程式(I).則

$$\sqrt{(e-x)^2+y^2}+\sqrt{(e+x)^2+y^2}=2a\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}$$

方程式(IV)兩次自乘而算出之.則得

$$x^2(a^2-e^2)+y^2a^2-a^2(a^2-e^2)=0$$

$2a$ 大於 $2e$. 卽 $a>e$. 命 $a^2-e^2=b^2$ 而以 a^2b^2 除之.則得橢圓之方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(V)}$$

此方程式中 x 與 y 俱為平方.故一點 P' 其坐標為 $-x$, $-y$ 亦能合於方程式.與 P 點坐標為 x, y 者同也(*Fig.* 12b).

PP' 聯線通過軸系原點 O.而為 O 所平分.O 點名曰橢圓之中心點.而凡通過 O 之弦名曰徑.一切徑皆與橢圓交於二點.對稱於 O 點.

橢圓又對稱於經緯二軸.而為二軸等分作四象限.

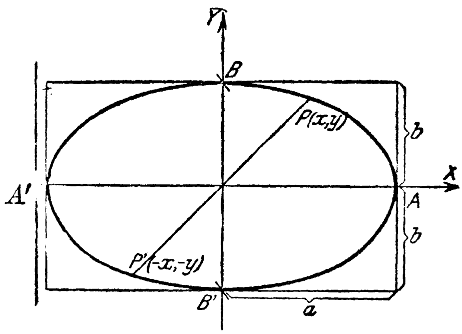


Fig. 12b.

若解方程式(V)而求 y.則得

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

由此式可知 x 之值必在 $-a$ 及 $+a$ 之間.始能得 y 之值為實數.否則方根內得負數.為虛數矣.命 $x=\pm a$ 則 $y=0$. 命 $x=0$. 則 $\frac{y}{b^2}=1$. 卽 $y=\pm b$. 故橢圓必交 X 軸於二點 A, A' (*Fig.* 12b).其距離 $=2a$. 又必交 Y 軸 ($y=\pm b$) 於二點 B, B' 其距離 $=2b$.

AA' 名曰橢圓之大軸. BB' 名曰橢圓之小軸.[1] 大小二軸亦總名橢圓之主軸. 主軸之端點. 名曰橢圓之頂點.

若 $b=a$ 則 $e=0$, 因 $a^2-e^2=b^2$ 也. 按方程式(V)橢圓方程式. 即轉爲圓之方程式 $x^2+y^2=a^2$ 矣.

故圓者乃橢圓之特例. 其焦點合爲一點而二主軸相等者也.

練習題

10. 設主軸 $a=5$ $b=7$, 求作橢圓(命 $x=1, 2, 3, 4\cdots\cdots$ 而求 y 之相當值.)

11. 設有方程式

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$$

求其離心 e 若干. 答. $e=2\sqrt{5}$

5. 雙曲線之方程式

雙曲線者. 一切點之軌跡其與二定點 F 及 F' 距離之較常爲不變數也. 設有一點 P 動於一曲線上. 其在各處與 F 及 F' 距離之較常不變 $=2a$. 求作此曲線.

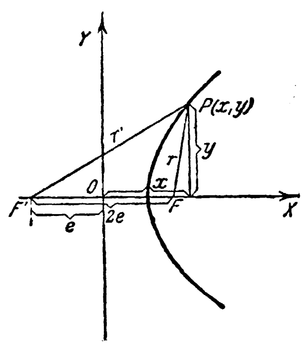


Fig. 13.

F 及 F' 名曰雙曲線之焦點. 其距離 $=2e$ 又設軸系原點爲與 FF' 之中點相重. 故 $OF=OF'=e$. e 名曰雙曲線之離心. 任取曲線上一點 P. 其坐標爲 x, y. 由 P 向二焦點作直線 $PF=r$. $PF'=r'$.

---

(1) 大軸或譯爲長軸. 小軸或譯爲短軸.

按雙曲線定約.

$$r'-r=2a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

按 4. 下之法求 r 及 r' 之值而因 *Fig.* 13. $(x-e)^2=(e-x)^2$.則

$$r'=\sqrt{(e+x)^2+y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

$$r=\sqrt{(e-x)^2+y^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

以此值代入(I). 則得

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2}-\sqrt{(e-x)^2+y^2}=2a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

此式兩次自乘而算出之.則得

$$x^2(a^2-e^2)+y^2a^2-a^2(a^2-e^2)=0$$

因三角形之一邊.常小於他二邊之和.故 $2a$ 必常小於 $2e$ 卽 $a<e$. 又命 $a^2-e^2=b^2$. 則得 b^2 之值爲負.故命 $e^2-a^2=b^2$ 而以 a^2b^2 除之.則得雙曲線之方程式爲

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

或

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{V})$$

因 x 與 y 俱爲平方.故知此曲線亦爲對稱於經緯軸之曲線.

由方程式(V)得

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{VI})$$

x 之絕對值必大於 a 始能得 y 之值爲實數.若通過 X 軸二點 $x=+a$ 及 $x=-a$ 作平行於 Y 軸之二平行線.則此二平行線之間無雙曲線之點.故雙曲線之點.絕不能交於 Y 軸.命

$x=\pm a$. 則 $y=0$. 卽雙曲線交 X 軸於二點 A 及 A' 其距離爲 $2a$.
二點在兩焦點之間.與橢圓相異也. A 及 A' 名曰雙曲綫之頂點.其聯線爲雙曲線之主軸.

命 x 由 $x=a$ 逐漸增加.則按方程式 (VI)y 之值亦增.命 $x=e$. 則得 $y=\frac{b}{a}\sqrt{b^2}=\pm\frac{b^2}{a}$. 此卽二焦點 F 及 F' 之經坐標.亦常以 p 代之 (*Half Parameter*).

方程式VI若改書之爲

$$y=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{VII})$$

則可見 x 愈增則 — 愈近於 0. 而 y 之值愈近於 $\frac{b}{a}x$.

$y=\frac{b}{a}x$ 非他.乃直線方程式也.此直線通過軸系元點其角之正切爲 $\frac{b}{}$. 在 *Fig.* 14 中.畫有此直線.名曰雙曲線之漸近線(*Asymptote of Hyperbola*) 其方程式爲

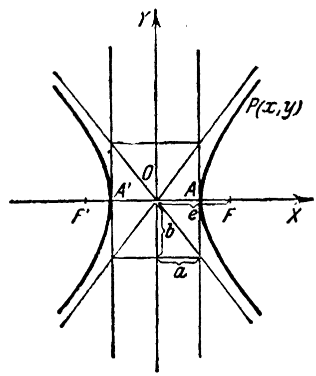


Fig. 14.

$$y=\frac{b}{a}x \text{ 及 } y=-\frac{b}{}x.$$

漸近線漸近雙曲線於無限遠.

若 $a=b$, 則 $\frac{b}{}=\frac{a}{}=1$. 二漸近線必直角相交.而與 X 軸.則交成 45° 之角. 此爲雙曲線之特例.名曰等邊雙曲線.其方程式爲

$$x - y^2 = a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{VIII})$$

橢圓與雙曲線之通用方程式見附卷.

練習題

12. 設 $a=4$ $e=5$ 求作雙曲線.

13. 設有雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. 求定其焦點並作其漸近線.

14. 設 $2a=8$, $p=2.5$. 求立雙曲線之方程式.

15. 設有方程式 $y=\sqrt{x^2+a^2}$ 及 $y=\sqrt{x^2-a^2}$. 令 $a=5$, 求作二曲線之圖.

16. 雙曲線漸近線之方程式若何.等邊雙曲線之漸近線相交爲何角.

立體解析幾何之要略.述於附卷中.

§4. 函數之極限值

極限值之定義.茲設四例以解說之.

1. 凡分數之分母非 2 與 5 者.則分數之值.可變爲無窮小數. 如 $\frac{1}{3}=0.3333\cdots$. 即 0.3; 0.33; 0.333; 0.3333;…等數.俱以 $\frac{1}{3}$ 爲限.無論其小數延至何長.但能近於 $\frac{1}{3}$ 而不能過之也.

分數 $\frac{1}{3}$ 與0.3及0.33…等數之較爲

$$\frac{1}{3}-0.3=\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{3}-0.33=\frac{1}{300}$$

$$\frac{1}{3}-0.333=\frac{1}{3000}$$

…………………如是例推.

小數延續愈多.則其較愈小.而可令小至無窮.

極限之義以 lim(*) 表之.故可書爲

$$lim\ 0.333\cdots=\frac{1}{3}$$

2. 由幾何學知圜之面積.爲圜內接等邊多角形面積之極限.多角形之邊數愈多.則其面積愈近於圜之面積.

3. 又由三角學知 $\frac{sin\ x}{}$ 及 $\frac{tan\ x}{}$ 之比.皆以 1 爲極限.蓋弧長 x 愈小.則正弦或正切與弧之比愈近於 1 也.以 x 爲自變數.則 $y=f(x)$.而求函數 $y=\frac{sin\ x}{x}$ 之極限值.

令 x 由 20° 漸減至 0° 而因 $45^\circ=\frac{\pi}{4}\cdots 5^\circ=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{\pi}{36}\cdots$.則得

x	$y=\frac{sin\ x}{x}$
$20^\circ\cdots\frac{\pi}{9}$	$\frac{9}{\pi}\cdot sin\ 20^\circ=0.9798$
$10^\circ\cdots\frac{\pi}{18}$	$\frac{18}{\pi}\cdot sin\ 10^\circ=0.9949$
$5^\circ\cdots\frac{\pi}{36}$	$\frac{36}{\pi}\cdot sin\ \ 5^\circ=0.9987$
$1^\circ\cdots\frac{\pi}{180}$	$\frac{180}{}\cdot sin\ \ 1^\circ=0.9999$
$0^\circ\cdots 0$	$\frac{0}{0}$

由是表因可見 x 之值愈減.函數之值愈近於 1 矣.然未知 $x=0$ 時.函數之值爲若干也.因所得函數之值爲 $\frac{0}{0}$.爲不定數

(*) *Limit*

也.欲定其確值.可用下法介其值於他二值之間.命圓之半徑 $OA=1$. 則由 *Fig.* 15.

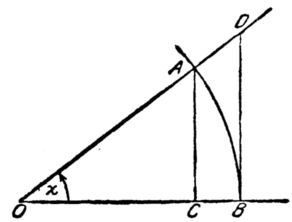


Fig. 15.

$$\frac{AC}{AO}=\frac{AC}{1}=\sin x$$

$AB=AO\cdot x=x$. 式中 x 代 AB 弧用弧度量法.

$$\frac{DB}{OB}=\frac{DB}{1}=\tan x.$$

由圖中可見 $\tan x$ 大於 x 而 x 大於 $\sin x$.

命 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 而以 $\sin x$ 除之.則得

$$\frac{\sin x}{\cos x}>x>\sin x$$

$$\frac{1}{\cos x}>\frac{x}{\sin x}>1.$$

由此得其倒數

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

一角之餘弦.其值因角愈小而愈近於1. 角等於0. 則其餘弦等於1. 故若 $x=0$. 則 $\dfrac{\sin x}{x}$ 之內外兩界 $\cos x$ 及1. 合而爲一故可書爲

$$\lim_{x\doteq 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=1.$$

由是知一函數雖其式爲 $\dfrac{0}{0}$ 亦必有一定之值焉.

4. 更有一最要之極限值.屬乎函數.其式爲

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$ 命 x 增至無窮者.

若即令 $x=\infty$ 代入上式.則得 $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 為無定式.欲求其定值.可用下法.令 x 之值由 $+1$ 遞增.而用對數表算 y 之相當值.則得

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}=2$
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}=2.25$
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}=2.37037$
4	例推 $=2.44141$
10	$=2.59374$
100	$=2.70483$
1000	$=2.71706$
10000	$=2.71828\cdots$
100000	$=2.\cdots\cdots\cdots$
1000000	$=2.7182816$

學者可自算 $x=100000$ 及 $x=10000000$ 時 y 之相當值.至第七位小數為止.

y 之值固增不已.然 x 增加甚大時.則 y 之值增加甚緩.而常近一定之極限值.命此極限值為 e. 故當 x 之值增至無窮時 y 與 x 之關係可書之為

$$\lim_{x\doteq\infty} y=\lim_{(*)x\doteq\infty}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]=e.$$

(*) $\doteq$ 密近之義 (*Approach*)

§5. 用二項例法求e之值

§4. 末所述之數e. 於微分算術及微分方程式.爲用甚廣且要.故特於此詳爲討論之.上款4下函數式中之x以n代之.爲

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

用二項例法展之以應用.

1. 二項例

二項例爲代數中最重要之定理.所以展二項式之任意乘方爲詳式也.

以已知之公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$用$(a+b)$乘之.即得:$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. 又用$(a+b)$乘之.卽得

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中各項之系數4, 6, 4, 名曰二項系數.二項系數.普通以K_1, K_2, K_3,…等代之.則得

$$(a+b)^n=a^n+K_1\,a^{n-1}\,b+K_2\,a^{n-2}\,b^2+K_3\,a^{n-3}\,b^3 + \cdots + K_n\,b^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

式中二項式之乘方.普通以n代之.二項系數之值.但關繫於乘方數n. 因二項式中所含.但爲a, b. 非數值.自不能與二項系數有若何之關繫也.試思$(a+b)^n$爲n因數,$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$…連乘至n次.若乘出化爲詳式.則所得結果.不外乎許多相乘積之和.每一相乘積.皆有n因數.一部分爲a. 一部分爲b. 以第一a與其餘$(n-1)$個a連乘.卽得a^n. 此項只能

出現一次.因 n 個 a. 皆已經被用以相乘也.故其系數爲 1. 同理得 b^n 之系數亦爲 1.

第二項按上方程式(2)爲 $a^{n-1}b$. 其中 $(n-1)$ 因數爲 a. 1 因數爲 b. 此項可以出現 n 次.蓋 n 因數若第一者供給其 b. 則他各因數供給其 a. 若第二者供給其 b. 則第一者及繼第二者以下各因數供給其 a. 故凡有 n 因數.俱可以爲成 $a^{n-1}.b$ 之用.卽得 $n\cdot(a^{n-1}\ b)$. 第三項爲 $a^{n-2}\cdot b^2\cdot$ 在此兩因數爲 b. 其餘 $(n-2)$ 因數爲 a. 此項出現之次數.視於 n 物中.每提出兩物之次數.今令 $n=4$. 每四物中之一.可與他三物中之每一個相並提出.故其數共爲 4×3. 但實際所得.只爲此數之半.因此一物與彼一物相並提出.又彼一物與此一物相並提出.二者實只爲一也.(如首者與末者相乘.及末者與首者相乘.實只一事.)故又須以 2 除之.卽

$$\frac{4\cdot3}{2}\cdot(a^{n-2}.\ b^2)\ \text{普通卽爲}\ \frac{n(n-1)}{2}\cdot a^{n-2}\,b^2.$$

如是例推.則得二項例之公式爲

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}\cdot a^{n-1}\,b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot a^{n-2}\,b^2+$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot a^{n-3}\,b^3+\cdots+b^n$$

練習題

試依二項例展以下各條之二項式

17. $(a+b)^5$ 並以其所得結果.與以 $(a+b)$ 乘方程式(1)所得者相比較.

18. $(a-1)^6=a^6-6a^5+15a^4-20a^3+15a^2-6a+1.$

19. $(1+x)^8=1+8x+28x^2+56x^3+70x^4+56x^5+28x^6+8x^7+x^8.$

20. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4=x^4-4x^2+6-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot$

21. 試以以下各數 10; 1; 0.1; 0.01; 0.001 按次代入 19. 下之 x 而展其二項式.

22. 試以以下各數: 1; 10; 100; 1000 逐次代入 20. 下之 x 而展其二項式.

於 21 及 22 兩題下.可察驗各項指數甚大時於所得結果之影響.

23. 若命 $i=\sqrt{-1}$. 則 $(1-i)^6=8i$.

24. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=\cdots\cdots$

25. $\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6\cdots\cdots$

2. 求 e 之值

依二項例展 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 爲詳式得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1}+\frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\cdots$$

命 $n=\infty$. 則式之右端. $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}\cdots\cdots$比較於 1 皆甚小至等於 0. 故得

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdots\cdots$$

e 之推廣理論及級數之展法.視附卷

e 命爲自然對數之底.學者試迴憶代數之定理如下

設 $a^n=x$. 則 n 爲 x 之對數而以任意選用之數 a 爲底.書之爲 $n={}_a\log x$.

設用10爲底.則得常用對數表上之Briggs(讀布利格司)對數.

$z=\log x$. 設 $10^z=x$.

故所求之對數 z. 爲用以爲10之指數而可得 x 者.

若 $x=0$, 則 $z=-\infty$, 因 $10^{-\infty}=\dfrac{1}{10^{\infty}}=0$ 也.

x 之值愈增.則其相當之曲線(*Fig.* 16)漸高而愈平坦.

經坐標 z. 可由對數表中取用之.

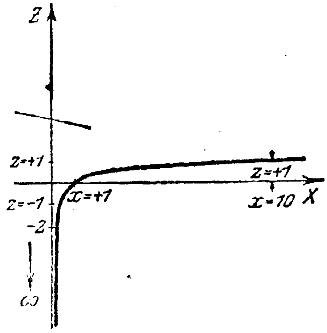


Fig. 16.

練習題

26. 試以以下各數 0; 0.001; 0.01; 0.1; 0.2; 0.4; 1; 4; 6; 10; 100; 1000: 10000 代入 x 而畫其曲線.

若以 e 爲底.則所得者爲自然對數.(*Natural Logarithm*)書之爲

$$y=\log_e x \quad 則 \quad x=e$$

若 $x=0$, 則 y 亦爲 $-\infty$, 因 $e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=0$ 也.

若 $x=1$, 則 $y=0$　　因 $e^0=f(0)=1$ 也.

求作一曲線.與 *Fig.* 16 相似.但其對數底則以 e 代10.

練習題

27. 求作 $y=log_e x$ 及 $y=e^x$. 之曲線.

自然對數與 *Briggs* 對數之關係若何.

在自然對數中10之對數.用以爲 e 之指數.則得10.此數可書之爲 $log_e 10$. 故 $10=e^{log_e 10}$ 命一數 x 之自然對數爲 Y, 其 *Briggs* 對數爲 y. 則 $x=e^Y$ 而 $x=10^y$. 故 $e^Y=10^y$. 又以 $e^{log_e 10}$ 代 10. 則

$e^Y=e^{y\,lgg_e 10}$ 而 $Y=y\ log_e 10$

$$y=\frac{Y}{log_e 10}$$

$\frac{1}{log_e 10}$ 名曰 *Briggs* 對數之系數(*Modulus*)以 m 代之. $m=\frac{1}{log_e 10}$ $=0.4342945\cdots$. 由是得 $log_e 10=2.3026\cdots$. 簡略之. $m=0.434$, $log_e 10$ $=2.3$.

設已知自然對數—— $log_e x$ ——.則其常用對數可由 $log_e x$ $=2.3log\,x$ 求得之.若已知常用對數.則其自然對數可由 $log\,x$ $=0.434\,log_e x$ 求得之.

$x=e^Y$ 展之爲級數則爲

$$x=1+\frac{Y}{1}+\frac{Y^2}{1\cdot 2}+\frac{Y^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

詳見附卷.

若命 x 爲常用對數之函數.則得一級數

$$x=1+\frac{y\,log_e 10}{1}+\frac{(y\,log_e 10)^2}{1\cdot 2}+\frac{(y\,log_e 10)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

二級數相比較.第一視若自然.故有自然之名.

練習題

28. $y=log_e e$ 爲若干. $y=log\,10$. $y=_e log\,a$ 爲若干.何以故.

29. $y=log_e 1$ 爲若干 $y=log_a 1$ 爲若干 $y={}_a log\, a$ 爲若干.

30. 設 $x=e^y$. 求 $log_e x$.

31. 設 $log_e x=y$. 求 x.

§ 6. 無限小量

§ 4 所論之極限值.非虛談.乃合乎切要之用者也.如一物動時而欲觀察其瞬時間之狀態(如速率.)則非極限值不可.茲舉一例.以解說之.鐵道汽車之行駛也.其平均速率等於一定時間車所行之路.除以其時.所得之商.如車於 $1\frac{1}{2}h$[(1)] 行 $118km$[(2)]. 則其平均速率爲 78.66 km $per\ h$[(3)]. 或以絕對 $C-G-S$ 系(*Absolute* $C-G-S$-*System*)[(4)] 計之.則等於 2185 $cm\ per\ sec$[(5)]. 但平均速率雖知.而其於任一時點之速率爲若干.則弗知也.如欲知汽車第一點鐘末經過 C 地點之速率爲若干.則可量第一點鐘末繼一分鐘汽車所行之路.設量得1308 m. 則其一秒鐘之平均速率爲 2180 cm 如欲更精確求之.則量第一點鐘末繼一秒鐘汽車所行之路.如所得者仍爲 2180 cm. 則可云汽車於第一點鐘末之速率.約爲 2180 cm. 然其最精確之值.則必所量之時最短.始能得之.所量之時愈短.則其所行之路亦愈短.以最短之時除其所行最短之路.卽車行經 C 地點之實在速率也.但所謂最短之時者一瞬而已.一瞬之時.所行之路.雖難定.然所量之時若甚短.以甚短之

(1) h 爲點鐘之記號

(2) $km=kilometer$ (讀啓羅米突) $=1000$ $meter$

(3) $per\ h$ 爲每一點鍾之記號. 78.66 km $per\ h$. 卽每點鐘行 78.66 km 也.

(4) $C-G-S-System$ 以 cm (讀生的米突)計長短. 以 g (讀格蘭姆)計重以 sec 計時也.

(5) $per\ sec$ ($per\ second$) 爲每一秒鐘之記號.

時.除甚短之路.所得結果.亦可謂之精確矣.故速率之義即可定爲.甚短之路與甚短之時之比.即兩甚小量之比.量之甚小者.名曰無限小量.但兩量雖無限小而其比則爲有限值也.

兩無限小量其比爲有限值者.則二量爲同級的無限小.但何者爲不同級的無限小量.請以有限量之不同級者說明之.

二有限量.其一對於他不能略視者.則爲同級.是則仍關係於運算時所需準確之程.如秤鐵礦 1 *Kilo*(讀 *Kilogram* 啓羅格蘭姆)以與買者.則所秤 1 *Kilo* 之爲 1000 *g* (*Gram* 讀格蘭姆)或爲 990 *g*. 買者必無爭論也.然若與以 900 *g* 則買者必不肯應允.因所少者有 100 *g* 之多也.在是 100 *g* 與 1000 *g* 可云同級而 10 *g* 之與 1000 *g* 則非同級也.故 10 *g* 對於 1000 *g* 可以略視而 100 *g* 對於 1000 *g* 則不能也.

今欲量一導體如電解物(*Electrolyte*)之阻力求其甚確.則必用標準阻力.其值爲 1 *Ohm*(讀歐姆.阻力單位)在德國此標準阻力.必預於國家物理工業試驗所校正之.

設由試驗所校正後.知此標準阻力.與國家所定之標準 *Ohm* 相差 ±0.0001.

量阻力時. 0.01 至 0.001 *Ohm* 皆不宜略視.惟至 0.00001 *Ohm* 乃可以對於 1 *Ohm* 而略視之.因國家試驗所.所定準確之程.爲 0.0001. 過此程.則可以略視之也.

若欲量地上電報導線之阻力.如其值爲 3500 *Ohm*. 則其中即有數 *Ohm* 之差.可不計也.蓋所需準確之程小.故數 *Ohm* 可對於 3500 *Ohm* 而略視之.

以此理轉而用之於無限小數.則得最要之結論曰:凡無限小量加減於有限量者.則無限小量可對於有限量而畧視之.凡無限小量之高級者對於無限小量之低級者.亦可以略視之.此定理於微分算法中.用之頗多.以後尙當論及.然不同級無限小量之定義.則願於此詳論之.

玆所欲研究者但爲二無限小量之究爲同級抑屬於高級或低級.設α及β爲二無限小量之同級者.則其比(如上所舉汽車速率之例)$\frac{\beta}{\alpha}=n$必爲有限值.如二者之比,非有限值.及爲無限大或無限小.則α及β非同級之無限小量也.設$\frac{\beta}{\alpha}$之值爲無限小量$=\gamma$而γ與α爲同級.故$\frac{\gamma}{\alpha}$之值爲有限值.命爲m.則$\gamma=\alpha m$即$\frac{\beta}{\alpha}=\alpha m$或$\beta=\alpha^2 m$以$\alpha$之指數(2)即可以知其級高於$\beta$.而$\beta$即爲第二級無限小量.以第二級無限小量與第一級無限小量相加.得:

$$\alpha+\beta=\alpha+m\alpha^2=\alpha(1+m\alpha).$$

式中括孤之內.爲一無限小量$m\alpha$與一有限量1相加.故$m\alpha$對於1可以略視.即得$\alpha+\beta=\alpha$.是第二級無限小量β對於第一級無限小量α可以略視之也.故上所已述之定理.凡高級之無限小量對於低級者可以略視之.以此可證.同理α^3對於α^2.α^4對於α^3亦可略視之.

§7. 較及微商

上款所舉鐵道汽車之例.於此亦可引用.汽車之速率爲一單位時所行之路即$c=\frac{s}{t}$.式中c代速率.s代路.t代時.若s及

t 爲有限值.則此方程式僅可用於等速之動.蓋動必等速.其每一單位時所行之路乃相等也.動之情狀.亦可以幾何法表之.作經緯二軸 Y 及 X. 以速率 c 度於 Y 軸上.時 t 度於 X 軸上.則圖中陰畫之矩形面積卽 t 時所行之路.因 $s=c\cdot t$ 也.

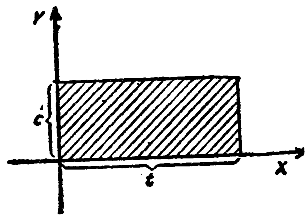


Fig. 17.

假設鐵道汽車由平原駛登山道.而汽機之力.已經開足.今欲知車上山時經過 C 點之速率.設車行於平道.其動等速.其速率爲 c. 則上山時.不能復保其等速之動.因地球引力.加於車上.足以消其速率之一部分也.命現時屢變之速率爲 v. 設山道之上升爲有律的(卽每單位距離高之增加皆相等)則 v 之減亦爲有律的.設山道之升上爲無律.則 v 之減亦爲無律的.

今先論速率 v 之減爲有律者.於等時分各量車行之速率.而度時於 X 軸上.如 *Fig.* 18. 度各時分之速率 $v_0, v_1, v_2 \cdots$ 於 Y 軸上.則可見每一時分速率之減皆相等.若聯各速率之端點.則其聯線爲一直線.命每一單位時速率之減爲 a. 名曰緩率.(*)(車下山時其動卽爲加速)

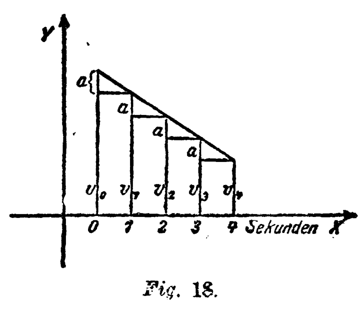


Fig. 18.

設所行之路.愈登愈峻.則速率之減不復爲有律的.乃每秒鐘皆較前一秒鐘減之愈甚.故各時分速率之經坐標.其端點

(*) 緩率 = 減速率 *Negative Acceleration*

之聯線非一直線乃一曲線如 *Fig.* 19.

今於此先就有律減速研究之無律減速.論之於後.由實驗物理學.知物之動爲有律加速或有律減速.於 t 時所行之路.可按 $s=ct-\frac{1}{2}at^2$ 式中. c 爲汽車於 A 處(*Fig.* 20.卽汽車捨平道就山道之地點)之速率.

設汽車現行達 C 點.已經過之路由 A 至 $C=s\,cm$.而所費之時爲 $t\,sec.$ 於 C 之上相距甚短處有一點 D.

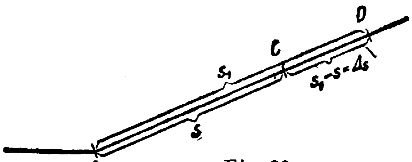


Fig. 20.

其距 A 爲 s_1. 車由 A 至 D 所費之時爲 t_1. 兩距離之較爲 $s_1-s=CD$. 今以 ΔS(*)代之時之較爲 t_1-t 以 Δt 代 A 至 D 之路卽等於 $s+\Delta s\,cm$. 其所費之時卽等於 $t+\Delta t\,sec.$ 由上由所引之公式得二方程式.

AC 段之長.

$$s=ct-\frac{1}{2}at^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

AD 段之長.

$$s+\Delta s=c(t+\Delta t)-\frac{1}{2}a(t+\Delta t)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (2) 式得

$$s+\Delta s=ct+c\Delta t-\frac{1}{2}at^2-at\Delta t-\frac{1}{2}a\Delta t^2.$$

由此式減去(1)式.

則得: $$s=ct-\frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta s=c\Delta t-at\Delta t-\frac{a}{2}\Delta t^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

依前式 $c=\frac{s}{t}$ 之理.則 $v=\frac{\Delta s}{\Delta t}$, 以 Δt 除 (3) 式之兩端.則得

(*) Δ 讀代爾泰. Δs, Δt 日人譯爲增分.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=c-a\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

Δt 名曰時之較. Δs 名曰路之較. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 名曰較之商(*Quotient of Differences*). 在此爲以時除路之商.

試思 D 點卽密接 C 點之上.車行經 Δs 但須費 1 sec 之時.並可設想 D 點與 CD 更加近焉.車行經 Δs. 但須 $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; ……… sec. 如是.則可得無限小量如§6所論者.

蓋 D 之距 C 若極近.則 Δt 及 Δs 俱爲無限小量.故方程式(3′)中之 $\frac{\Delta t}{2}$ 對於有限值可以畧視之(見§6).但因 Δs 及 Δt 同爲無限小量.則其比(卽較之商)爲有限值.而有一定之極限.故可書爲

$$lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=c-a\,t\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此極限值名曰微商(*Differential Quotient*).而書之爲

$$lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

故微商者由較之商而來.較之值達於無限小.則較之商達於其極限值.卽成微商.

ds 及 dt 名曰微分(*Differential*).微分之性質亦可略述之如下.

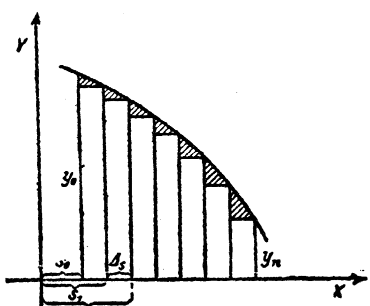


Fig. 21.

微分者非他.卽無限小量也.抑此無限小量.可以 0 目之否.曰.以此無限小量加減一有限量.則可以略視之.卽可以去之. 但專就無限小量而言.則不能以0目之. 茲又舉一譬以明之. 如 *Fig.* 21. 曲線及 X 軸與二經坐標 y_0

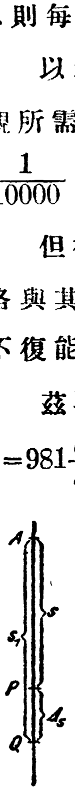
及 y_n 界成一面.欲算此面積.可設想該面分作任意多之條.每條之面積.可作直方形算之.圖中陰畫之小三角形.即略視之.若所分之條愈狹.則該三角形亦愈小.故其對於直方形之面.實可以略視之也.所分之條之寬 s_3-s_2 或 $s_6-s_5\cdots$ 即 $=\Delta s$ 達於無限小量.即爲 ds.故條之面積爲 $h.ds$ 以 h 爲其條之高.

所求之面積.爲一切直方形面積之和. 設目無限小量爲 0.則每一 $h.ds$ 皆 $=0$.所求之面積豈非變爲烏有乎.

以算學之理而論.微分常指無限小量而言.然實用上則各視所需準確之程.取其甚小.即已足矣.如下所舉之例.命 $dt=\frac{1}{10000}$ sec.

但微商 $\frac{ds}{dt}=c-at$ 之義.則又若何.按 §6. $\frac{ds}{dt}$ 爲由 C 至 D 之路與其相當時之比.即速率之義也. D 與 C 相距密近其距離不復能以有限量目之.故 $\frac{ds}{dt}$ 即車行經過 C 點之速率也.

茲再舉一例.以數明之.物之自由自空墜下也.其加速爲 $g=981\frac{cm}{sec^2}$.一物墜下由 A 至 P.費時爲 t sec. AP 之長 $=s$ cm.(*Fig.* 22).又一點 A 直接在 P 點之下.其距 A 爲 $s+\Delta s$ cm.物由 A 至 Q 所費之時爲 $t+\Delta t$ sec.今欲物至 P 點之速率若何. 若不計空氣之摩阻力.則按之墜體公式:



$$s=\frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$s+\Delta s=\frac{1}{2}g(+\Delta t)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由是得

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=g\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

設物墜至 P 所經之時爲 $5\,sec.$ Δt 之值按次設爲 $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{.0}$, $\frac{1}{100}$ …… $sec.$ 時愈短. 則 Q 之距 P 愈短. 今先察 $\frac{\Delta t}{2}$ 之影響何若而研究 Δt 必至若何小. $\frac{\Delta t}{2}$ 始可對於 t 而略視之. 命 $g=981\frac{cm}{sec^2}$ 而以上所設數值. 代入(3)式則得

$$
\begin{array}{llllll}
\text{令}\ \Delta t = & \frac{1}{2} & sec.; & \frac{\Delta s}{\Delta t} = 981\left(5+\frac{0.5}{2}\right) & = 5150{,}250 & \frac{cm}{sec} \\
= & \frac{1}{10} & ,, , & ,, \quad = 981\left(5+\frac{0.1}{2}\right) & = 4954{,}050 & \\
= & \frac{1}{100} & ,, , & ,, \quad = 981\left(5+\frac{0.01}{2}\right) & = 4909{,}905 & \\
,, = & \frac{1}{1000} & ,, , & ,, \quad = 981\left(5+\frac{0.001}{2}\right) & = 4905{,}491 & \\
,, = & \frac{1}{10000} & ,, , & ,, \quad = 981\left(5+\frac{0.0001}{2}\right) & = 4905{,}049 & \\
,, = & \frac{1}{100000} & ,, \cdot & ,, \quad = 981\left(5+\frac{0.00001}{2}\right) & = 4905{,}0049 & ,,
\end{array}
$$

由此表可知所求之值. 以 4905 爲極限而趨近之. 令 $\Delta t = 1/10000\ sec.$ 所得結果. 已頗近似. 然不若卽令 Δt 對於 t 而略視之之較捷且便也. Δt 被略視. 則 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 轉爲 $\frac{ds}{dt} = g.t = 981.5 = 4905\frac{cm}{sec}$ 令 $dt = \frac{1}{10000}$ 所得之結果亦屬準確可用.

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 非他. 卽 Δt 時之平均速率也. 令 Δt 縮之愈短. 卽取一時. 距第五秒鐘愈近. 則其平均速率亦愈近於第五秒鐘之速率. 由上表中可見 $5\,sec.$ 後 $\frac{1}{100000}\ sec.$ 之平均速率卽可視作第五秒鐘之速率矣. 卽物墜下經過 P 點之速率也.

§8. 微商之幾何解釋

定曲線之切線法

微商之最要用途.卽以定一曲線上任一點 P 之切線也.(*Fig.* 23).

今於曲線上再取一點 P_1 而聯 P 及 P_1 爲一直線.則 PP_1 爲曲線之一弦.此弦與 X 軸相交成 σ 角.命 P 之坐標爲 x, y. 而 P_1 之坐標爲 x_1, y_1. 設由 P 點行而至 P_1, 則於 X 軸上必前進一段爲 x_1-x. 在 Y 軸上前進一段爲 y_1-y.

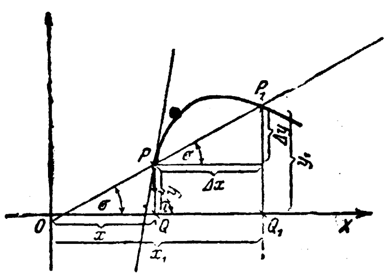


Fig. 23.

依 §7 之理命此較 $x_1-x=\Delta x$, $y_1-y=\Delta y$. 以此值度於圖上.成一直角三角形.以 PP_1 爲弦, Δx 及 Δy 爲股.則得

$$\tan\sigma=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

令 P_1 點順曲線自其原處動而向 P. 則 PP_1 弦繞 P 點而轉. Δy 及 Δx 兩較漸漸減小. 至 P_1 點與 P 點密接. 則兩較 Δy 及 Δx 轉爲微分 dy 及 dx. 而 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 轉爲微商 $\frac{dy}{dx}$ 而 PP_1 弦變爲曲線上 P 點之切線矣. 弦與 X 軸之交角 σ 因轉爲切線與 X 軸之交角 τ. 故可書爲

$$\lim_{P_1=P}\tan\sigma=\tan\tau=\lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}\cdots\cdots\cdots(2)$$

由是得一定理曰. 曲線於 P 點傾斜角 (τ) 之正切.等於 P 點坐標之微商 $\frac{dy}{dx}$.

茲設一例以申明之.

設 *Fig*.23 之曲線.爲一拋物線.其方程式爲 $y^2=2\rho x$(見§3.*Nr*.3) P 點之坐標爲 x, y.至 P_1 點之坐標.則命爲 $x+\Delta x$ 及 $y+\Delta y$(*Fig* 23) 因二點同在拋物線上.故必皆合乎拋物線方程式 $y^2=2\rho x$ 之定約即在 P_1 點.

$$(y+\Delta y)^2=2p(x+\Delta x)$$

$$y^2+2y\Delta y+\Delta y^2=2px+2p\Delta x \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

在 p 點: $$y^2 \qquad =2px \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

由(I)減(II)則得. $$2y\Delta y+\Delta y^2=2p\Delta x$$

$$\Delta y(2y+\Delta y)=2p\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2p}{2y+\Delta y} \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

令 Δx 及 Δy 爲無限小.則上式右端 Δy 無限小量對於 $2y$ 有限量可以略去之.故上式轉爲極限值.

$$\lim_{x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}=\tau \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

故用微分算法.可以定曲線任一點之傾斜角.用此法但需知 x 增加 Δx 時. y 之增加爲若干. y 之增加 Δy 即可由曲線方程式定之.而由 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 之式令轉爲極限值 $\lim\limits_{x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$. 即可得傾斜角之正切.

若用微商之公式.則凡是類題.可以直接算出後當詳論之.

練習題

32. 試於上方程式(1) $\tan\sigma=\frac{y_1-x}{x_1-x}$ 中.以 $\sqrt{2px}$ 代 y.以 $\sqrt{2px_1}$ 代 y_1.而令該式轉爲極限值. $x=x_1$, $\sqrt{x}=\sqrt{x_1}$ 以求 $\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$

卷　二

微分算法

§9. 代數函數之微商

凡函數之微商.皆可按§7及§8之法求得之.

今再引拋物線方程式 $y^2=2px$ 爲例.而求 x 與 y 之關係.卽命此方程式爲(I).以 $y+\Delta y$ 代(I)式之 y.以 $x+\Delta x$ 代(I)式之 x.所得方程式爲(II).由(II)減(I).則得 $\Delta y=\cdots\cdots$ 爲方程式(III).以 Δx 除方程式(III)之兩端.卽得較之商.由是再轉爲極限值.卽得微商爲(IV).

例.　設有函數 $y^2=2px$ 求其微商.

$$y^2 = 2px \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$$(y+\Delta y)^2 = 2p(x+\Delta x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

$$\Delta y^2 = \frac{2p\Delta x}{2y+\Delta y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2p}{2y+\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

設欲用微分 dy.則上式可書之爲

$$dy = \frac{p}{y}\,dx.$$

1. 所設之函數 $f(x)$ 爲他兩函數 $\phi(x)$ 及 $\psi(x)$ 之和.求其微商.

$$y = f(x) = \phi(x) + \psi(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$$y+\Delta y = f(x+\Delta x) = \phi(x+\Delta x) + \psi(x+\Delta x) \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\phi(x+\Delta x)-\phi(x)$$
$$+\psi(x+\Delta x)-\psi(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}$$
$$+\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III}')$$

令Δx近於極限值0.則由上式得微商:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}=\phi'(x)=\frac{d\phi(x)}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}=\psi'(x)=\frac{d\psi(x)}{dx}.$$

$\frac{df(x)}{dx}$常以$f'(x)$代之.以圖簡省.名曰函數之導數(*Derivative of Function.*)同理$\phi'(x)$爲函數$\phi(x)$之導數.故微商之方程式可書之爲

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\phi'(x)+\psi'(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{IV})$$

或

$$dy=f'(x)\,dx=\phi'(x)dx+\psi'(x)dx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{IV}')$$

由是得定理曰.一變數在多函數者,其函數和之微商.等於各函數微商之和.或云和之導數等於各導數之和.(方程式IV)

又曰.函數和之微分等於各函數之微分和.(方程式IV')

函數無論爲若干函數之和.此定理俱可通用.並可通用於多函數之較.

普通書之卽爲

$$d(u+v-w)=du+dv-dw.$$

式中u, v, w皆爲x之任何函數

2. 恒數之微商.

I $$f(x)=\phi(x)+C$$

II. $$f(x+\Delta x)=\phi(x+\Delta x)+C$$

由 (II) 減 (I) 而以 Δx 除之則得

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}$$

或 $$f'(x)=\phi'(x)$$

恒數 C 卽因以消去.由是得定理曰.凡加減於一函數式之恒數.其微商常等於 0.

故求多函數和或較之導數.而其中含有恒數者.則但求各函數內含者之導數而加之可也.恒數一項.不必計之.

3. 所設之函數爲含 x 之函數及一恒數之積.如

$$f(x)=C\cdot\phi(x)$$

則 $$f'(x)=C\cdot\phi'(x).$$

以文字表之.卽恒數與函數之積其微商等於恒數與該函數微商之積.

證 $$f(x+\Delta x)=C\cdot\phi(x+\Delta x)\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$f(x)=C\cdot\phi(x)\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=C\cdot\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

$$f'(x)=C\cdot\phi'(x)$$

4. 求兩函數積之微商

$$f(x)=\phi(x)\cdot\psi(x)\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$f(x+\Delta x)=\phi(x+\Delta x)\psi(x+\Delta x)\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\phi(x+\Delta x)\cdot\psi(x+\Delta x)-\phi(x)\cdot\psi(x)}{\Delta x}\cdots(\mathrm{III})$$

在式之右端分子中加$\phi(x).\psi(x+\Delta x)$又減$\phi(x)\psi(x+\Delta x)$則其值仍不變.故式之右端可變爲

$$\frac{\phi(x+\Delta x)\ \psi(x+\Delta x)-\phi(x)\ \psi(x+\Delta x)+\phi(x)\ \psi(x+\Delta x)-\phi(x)\ \psi(x)}{\Delta x}$$

$$=\psi(x+\Delta x)\cdot\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}+\phi(x)\cdot\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}$$

因 $\psi(x+\Delta x)$ 之極限値 $=\psi(x)$

$\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}$,, ,, ,, ,, $=\phi'(x)$

$\phi(x)$,, ,, ,, ,, $=\phi(x)$

$\frac{\psi(x+\Delta x)-\psi(x)}{\Delta x}$,, ,, ,, ,, $=\psi'(x)$

故式之右端變爲$\psi(x)\phi'(x)+\phi(x)\psi'(x)$而其左端則轉爲極限値$f'(x)$.上之方程式卽可書爲

$$f'(x)=\psi(x)\phi'(x)+\phi(x).\psi'(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(IV)}$$

由是得定理云.兩函數積之導數等於二函數之一之導數各與他一函數之積之和.

5. 設有一函數爲他二函數之商.求其導數.(*)

此題可與前題求兩函數積之法一例視之.蓋函數式

$$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$$

亦可書之爲 $\phi(x)=f(x)\psi(x)$

按之 4.

$$\phi'(x)=f(x)\psi'(x)+\psi(x)f'(x)$$

或 $$f'(x)=\frac{\phi'(x)-f(x)\psi'(x)}{\psi(x)}$$

因 $$f(x)=\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$$

(*) 以後多以導數代言微商.

$$f'(x)=\frac{\phi'(x)-\dfrac{\phi(x)}{\psi(x)}\psi'(x)}{\psi(x)}$$

$$f'(x)=\frac{\psi(x)\phi'(x)-\phi(x)\psi'(x)}{[\psi(x)]^2}$$

其定理曰.兩函數商之導數.等於分母與分子導數之積減分子與分母導數之積而除以分母之平方.

6. 求 $y=x^n$ 之導數. n 暫設爲正整數.

$$y=x^n\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

方程式(II)之右端按二項例展之.得

$$y+\Delta y=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$$

由此式減(I)而除以 Δx 則得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{n}{1}x^{n-2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}\cdot\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

令 Δx 爲極小.則上式右端除首項外.皆達於其極限爲0.而得

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

其定理云. 乘方之導數.等於原乘方之指.乘新乘方.其指數較原乘方指數少一者

指數爲負爲分數之乘方.此定理亦可合用.

若 $y=ax^n$,則用同一算法可得

$$\frac{dy}{dx}=anx^{n-1}$$

上所論各題.茲再標列其定理於下.以便記憶.

1. 和之微商.等於各項微商之和. 較之微商等於各項微商之較.

2. 恒數之微商$=0$.

3. 函數帶有恒數爲其系數者.欲求其微商.則求函數之微商而以該恒數乘之.

4. 積之微商.等於每一因數與他一因數之導數之積之和.

5. 商之微商.等於分母乘分子導數.減分子乘分母導數.而除以分母之平方.

6. 乘方之微商.等於其指數乘指數減一之新乘方.

以上定理更以公式表之.庶醒眉目.公式中以 y' 代$\frac{dy}{dx}$,以u'代$\frac{du}{dx}$,以v'代 $\frac{dv}{dx}$ 如是例推.

微分公式

1.	$y=u+v-w$	$y'=u'+v'-w'$
2.	$y=C$	$y'=0$
3.	$y=Cu$	$y'=Cu'$
4.	$y=uv$	$y'=vu'+uv'$
5.	$y=\frac{u}{v}$	$y=\frac{vu-uv}{\quad}$
6.	$y=x$	$y=nx^{n-1}$

u及v皆代x之函數.與前所用$\phi(x),\psi(x)$………者同.§9a下之例題.可依此公式解之.

§ 9a

練習題

33. $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$ $\qquad \frac{dy}{dx}=-1.x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

34. $y=\frac{1}{x^4}=x^{-4}$ $\qquad =-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$

35. $y=a$ $\qquad \frac{dy}{dx}=0$

36. $y=ax$ $\qquad$ „ $=a$

37. $y=ax+b$ $\qquad =a$

38. $y=ax^2$ $\qquad =2ax$

39. $y=6.ax^6$ $\qquad$ „ $=36ax^5$

40. $y=-\frac{4x^3}{a}$ $\qquad =-\frac{12x^2}{}$

41. $y=\frac{a}{x}$ $\qquad =-\frac{}{x^2}$

42. $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ „ $=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

43. $y=\sqrt[3]{x^4}=x^{\frac{4}{3}}$ $\qquad =\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

44. $y=-\frac{a}{}+\frac{b}{}+C$ $\qquad =\frac{2a}{}-\frac{b}{}$

45. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad$ „ $=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

46. $y=x^2\sqrt{x}=x^{\frac{5}{2}}$ $\qquad$ „ $=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$

33至46下之題.間可以任意眞數代入以驗所得結果之合否.並藉此可以練習微分術之實用法.且可以知微分dx之選用.必求其充分小.如

47. (同37) $y=3x+5$ $\qquad \frac{dy}{dx}=3$

命

$x_1=12$ $\qquad y_1=41$

$x_2=12.1$ $\qquad y_2=41.3$

$dx=0.1$ $\qquad dy=0.3$ $\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{0.3}{0.1}=3$

48. (同 39) $y=6.2x^6$ $\frac{dy}{dx}=36.2.32=2304.$ $(x=2).$

命

$x_1=2$ $y_1=768$

$x_2=2.01$ $y_2=791.4$

$dx=0.01$ $dy=23.4$ $\frac{dy}{dx}=\frac{23.4}{0.01}=2340$

在此之微分 dx.卽未爲充分小.故再令

$x=2$ $y_1=768$

$x_2=2.005$ $y_2=779.5$

$dx=0.005$ $dy=11.5$ $\frac{dy}{dx}=\frac{11.5}{0.005}=2300$

每以一値代 x 所得之微商.皆畧相異.

49. (同 41) $y=\frac{18}{x}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-18}{x^2}=-2.$ $(x=3).$

$x_1=3$ $y_1=\frac{18}{3}=6$

$x_2=3.02$ $y_2=\frac{18}{3.02}=5.96$

$dx=0.02$ $dy=-0.04$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-0.04}{0.02}=-2.$

50. (同 43). $y=\sqrt[3]{x^4}$ $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}=1.68.$ $(x=2).$

命

$x_1=2$ $y_1=\sqrt[3]{16}=2.52\cdots\cdots\cdots\cdots$

$x_2=2.02$ $y_2=\sqrt[3]{16.65}=2.554$

$dx=0.02$ $dy=0,034$ $\frac{dy}{dx}=\frac{0.034}{0.02}=1.70$

51. (同 44.) $y=-\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x}+6.$ $\frac{dy}{dx}=\frac{8}{x^3}-\frac{5}{x^2}=-0.25.$ $(x=2).$

$x_1=2$ $y_1=-1+2.5+6=7.5.$

$x_2=2.05 \qquad y_2=-0.952+2.439+6=7.487$

$dx=0.05 \qquad dy=-0.013 \qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-0.013}{0.05}=-0.25$

52. (同 46) $y=x^2\sqrt{x} \qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5}{2}.4.2=20$

$x=4$

$x_1=4 \qquad y_1=16.2=32$

$x_2=4,01 \qquad y_2=32,20$

$dx=0.01 \qquad dy=0.20 \qquad \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{0.20}{0.01}=20$

學者可依此例任以何數代 x 而算33至46各題.算時宜用對數表.

53. $z=(x^2+a^2)^4. \quad x+a=y. \quad dy=2xdx.$

$z=y^4. \qquad dz=4y^3dy. \qquad \dfrac{dz}{dx}=8x(x^2+a^2)^3.$

54 $z=\dfrac{\quad}{(b+cx)^2}=ay^{-2} \qquad dz=-2ay^{-3}dy$

$dy=cdx \qquad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{-2ac}{(b+cx)^3}$

55. $z=\dfrac{1}{3(a+x)^3} \qquad \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{(a+x)^4}$

56. $z=\sqrt[3]{(1-3x^2+2x^3)^4} \qquad \dfrac{dz}{dx}=8x(x-1)\sqrt[3]{1-3x^2+2x^3}$

53至56之題爲函數之函數.而求其微商.其法當詳論之如下.

設 z 爲 y 之函數而 y 又爲 x 之函數.則 z 亦必爲 x 之函數.故

$$z=f(y) \text{ 而 } y=\phi(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

函數之符號以 f 及 ϕ 區別之者.因其關係非相同也.如 $z=\log\sin x$.即 z 爲 $\sin x$ 之函數.而 $\sin x$ 又爲 x 之函數.故方程式(I)可書之爲

$$z=f(\phi(x)) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$

其微商數爲

$$\frac{dy}{dx}=\phi'(x),\text{及}\ \frac{dz}{dy}=f'(y).$$

$$dy=\phi'(x)\,dx,\quad dz=f'(y)\,dy$$

$$dz=f'(y)\,\phi'(x)\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(III)}$$

故 $\quad \dfrac{dz}{dx}=f'(y).\phi'(x)$ 或 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dz}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (IV)

上理可述之如下: x 增加 Δx.則致 y 增加 Δy 而 y 之增又致 z 增加 Δz. 所求之函數導數按上式爲二導數之相乘積. 故欲得 $z=\log\sin x$ 之導數 $\dfrac{dz}{dx}$ 則先求得對數之導數再以正弦之導數乘之.即得

53題. 按此法先求 y^4 之導數 $(y=x^2+a^2)$ 爲 $4y^3$.再乘以之導數

$$y=x\ +a,\quad \text{故}\frac{dy}{dx}=2x\ \text{而}$$

$$\frac{dz}{dx}=y^3.\,2x=8x.\,y^3=\ 8x(x^2+a^2)^3$$

若練習熟慣.則可不必用 y 以爲助.然其算法則一也.

在以下練習題中.皆以 y' 代 $\dfrac{dy}{dx}$ 以求省略在是不復以 z 爲因變數.乃直以 y 爲因變數.若欲用附助變數如在63題.其式過繁者.則可任取 $z, u, v, w\cdots\cdots$ 等字母.

練習題

57. $y=\frac{x}{1+x}$ $\qquad y'=\frac{(1+x)\cdot 1-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}$

58. $y=\frac{a+x}{b+x}$ $\qquad y=\frac{(b+x)\cdot 1-(a+x)\cdot 1}{(b+x)^2}$

$$=\frac{b-a}{(b+x)^2}$$

59. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ $\qquad y=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

60. $y=\frac{}{9+4x^2}$ $\qquad y=\frac{9-4x^2}{(9+4x^2)^2}$ ✓

61. $y=\frac{3+5x^2}{5-3x^2}$ $\qquad y=\frac{68x\cdot}{(5-3x^2)^2}$

62. $y=\frac{a+bx}{a-bx}$ $\qquad y'=\frac{2ab}{(a-bx)^2}$

63. $y=\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ $\qquad y'=\frac{(x+3)^2(3x+6-2x-6)}{(x+2)^3}$

$$=\frac{x(x+3)^2}{(x+2)^3}$$

64. §5所求出之二項系數.茲更以微分算法求之.以$(a+x)^n$代§5之$(a+b)^n$而命其系數爲K_1 K_2 $K_3\cdots\cdots\cdots K_n$.則

$$(a+x)^n=a^n+K_1a^{n-1}x+K_2a^{n-2}.x^2$$
$$+K_3a^{n-3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+K_nx^n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

兩端各按x(卽以x爲自變數.後做此)微分之.則得

$$n(a+x)^{n-1}=K_1.a^{n-1}\cdot 1+2K_2a^{n-2}.x$$
$$+3K_3a^{n-3}.x^2+\cdots\cdots\cdots n\cdot K_n\cdot x^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

此方程式於x之值無論若何.皆合用.卽亦合用於$x=0$.故得

$$n\,a^{n-1}=K_1\,a^{n-1}$$

因他項皆變爲0也.

故 $$K_1=\frac{n}{1}$$

欲求K_2.則取方程式(II)再微分之.則得

$$n(n-1)(a+x)^{n-2}=2K_2a^{n-2}+2.3K_3a^{n-3}x\cdots\cdots\text{(III)}$$

令 $x=0$ 則

$$n(n-1)a^{n-2}=2K_2a^{n-2}$$

故 $$L_2=\frac{n(n-1)}{1\cdot2}$$

65. K_3, K_4…………之值各若干².學者可任擇一二項式如$(a+x)^7$及$(a-bx)^4$而按上法.定其系數之值.

66. $s=ct-\frac{1}{2}at^2$ $\quad\frac{ds}{dt}=c-at$

67. $s=\frac{1}{2}gt^2$ $\quad\frac{ds}{dt}=gt$

參照§7

68. $y^2=2px$

$$y=\sqrt{2px}=(2px)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\cdot2p\cdot1\cdot(2px)^{-\frac{1}{2}}=\frac{p}{\sqrt{2px}}=\frac{p}{y}$$

參照§8.

§10.對數及指數函數之微商

A. 求越函數$y=\log_e x$之微商

由§6之理.再按對數定理

$$\log a-\log b=\log\frac{a}{b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此定理自亦可用之於自然對數.卽

$$\log_e a-\log_e b=\log_e\frac{a}{b}$$

再者每一種對數.皆合乎下定理.

$$a\log b = \log(b^a) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

知此數定理.乃以求本題方程式之微商.

$$y = \log_e x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (I)$$

$$y+\Delta y = \log_e x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (II)$$

$$\Delta y = \log(x+\Delta x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (III)$$

$$\Delta y = \log_e \frac{x+\Delta x}{}$$

以$\frac{x}{\Delta x}$乘上式兩端

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x}\log_e \frac{x+\Delta x}{}$$

或

$$x\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{\Delta x}\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (III')$$

此式之右端(2)之定理變爲

$$x\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_e\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

命$\frac{x}{\Delta x} = m$而$\frac{\Delta x}{} = \frac{1}{m}$.則上式右端

$$= \log_e\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]$$

令Δx爲無限小.則$m = \frac{x}{\Delta x}$.愈增愈大.按§4之4.及§5.

$$\lim_{m \doteq \infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

故上之方程式轉爲

$$\frac{dy}{dx} = \log_e e = 1$$

或 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\text{..............................}\quad(IV)$$

若所設者非自然對數.而爲任意底a之對數.

即

$$x=a\ ,\qquad y=\log_a x.$$

如是則 $$\log_e x=y\log_e a$$

$$y=\frac{\log_e x}{\log_e a}$$

故任意底之對數.可變爲自然對數.因 $\log_e a$ 爲恒數故其微商爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\log_e a}=\frac{1}{x\cdot\log_e a}$$

B. 指數函數之導數.

所設之函數爲$y=a^x$.求其微商.按§6.

可書爲 $$\log_e y=x\log_e a\quad\text{卽}$$

$$x=\frac{\log_e y}{\log_e a}.$$

由A下所得之結果得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\log_e a}$$

由是得 $$\frac{dy}{dx}=y\ \log_e a$$

或因 $y=a$ $$\frac{dy}{dx}=a^x\log_e a.$$

指數函數之導數.等於本函數乘以其底之自然對數.

特例. $y=e^x$. 求其微商

按上法求之.得

$$\frac{dy}{dx}=e^x.\ \log_e e\qquad\text{因 }\log_e e=1$$

$$\frac{dy}{dx}=e^x$$

函數e^x之導數.卽等于函數不變.

§ 10a. 練 習 題

69. $y=log_e x-log_e x^2+log_e x^3+4$ $\qquad y'=\frac{1}{}-\frac{2}{x}+\frac{3}{}=\frac{2}{}.$

70. $y=log_e(bx-a)$ $\qquad y'=\frac{b}{bx-a}.$

在此可加入一附助變數w.令$y=log_e w$,

$$y=\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx},\quad \frac{dw}{dx}=b\cdot 1.\qquad \text{卽 } y=\frac{b}{w}=\frac{b}{bx-a}.$$

下各題中皆可加入附助變數以算之.

71. $y=log_e(x^2+x+1)$ $\qquad y=\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$

72. $y=log_e\sqrt{a^2+x^2}=\frac{1}{2}log_e(a^2+x^2)$ $\qquad y'=\frac{}{a^2+x^2}.$

73. $y=log_e\sqrt[3]{a+bx^3}=\frac{1}{3}log_e(a+bx^3)$ $\qquad y'=\frac{bx^2}{a+bx^3}.$

74. $y=(log_e x)^2$ $\qquad y=\frac{2log_e x}{x}$

75. $y=log_e\frac{1+x}{1-x}=log_e(1+x)-log_e(1-x)$ $\qquad y'=\frac{2}{1-x^2}.$

76. $y=log_e\frac{x-a}{x+a}$ $\qquad y'=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$

$=log_e(x-a)-log_e(x+a)$ $\qquad =\frac{2a}{x-a^2}.$

77 $y=log_e\frac{m+x}{2nx}$ $\qquad y'=\frac{x-m}{x^3+mx}.$

78. $y=log_e\frac{1}{x}$ $\qquad y'=-\frac{1}{}$

79. §9. *No.* 4及5下兩函數積及商之導數.試更以對數之導數按定理

$$log_e a\cdot b = log_e a + log_e b \text{ 及 } log_e \frac{a}{b} = log_e a - log_e b.$$

求之.

80. $y=e^{mx}$ $\qquad$ $y = me^{mx}$

81 $y=a^{x^3+1}$ $\qquad$ $y' = 3x^2\cdot a^{x^3+1}\, log_e a.$

82. $y=a$ $\qquad$ $y' = 2x\cdot a^x\ log_e a.$

83. $y=5^{x\ -2}$ $\qquad$ $y' = 2x\cdot 5^{x^2-2}\, log_e 5.$

48. $y=xe$ $\qquad$ $y' = e^x\cdot 1 + x\cdot e^x = e^x(x+1).$

85. $y=(x+2)e^x$ $\qquad$ $y' = (x+3)e^x.$

86. $y=(x-1)e^x$ $\qquad$ $y' = xe^x.$

87. $y=(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}$ $\qquad$ $y' = 8x^3\cdot e^{2x}.$

88. $y=x^3e^x$ $\qquad$ $y' = e^x x^2\cdot(3+x).$

89. $y=\frac{\quad}{x}$ $\qquad$ $y' = \frac{x\,log_e a - 1}{x^2}a^x.$

90. $y=\frac{\quad}{a^x}$ $\qquad$ $y' = \frac{1 - x\,log_e a}{\quad}$

91. $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ $\qquad$ $y = -\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}.$

92. $y=log_e \frac{e^x-1}{e^x+1}$ $\qquad$ $y' = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$

§11. 三角函數之導數

茲所欲用者當 $x=0$ 時 $sin\,x$ 及 $cos\,x$ 之極限值.由 *Fig.* 24 知

$$\lim_{x \doteq 0} \sin x = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\lim_{x \doteq 0} \cos x = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

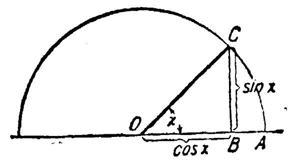


Fig. 24.

角x.以弧度量之.半徑$OC=1$.

再者$\lim\limits_{x \doteq 0}\dfrac{\sin x}{x}$及$\lim\limits_{x \doteq 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$亦須預知以供下之研究.

按§4. No. 3.

$$\lim_{x \doteq 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$\dfrac{1-\cos x}{x}$可書爲$\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \sin\dfrac{x}{2}$

$\lim\limits_{x \doteq 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$按方程式(3)$=1$而$\lim\limits_{x \doteq 0}\sin\dfrac{x}{2}$按方程式(1)$=0$

故得 $$\lim_{x \doteq 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

由是再求各微商.

1. 設有 $y=\sin x$. 求$\dfrac{dy}{dx}$.

$$y = \sin x \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$$y + \Delta y = \sin(x+\Delta x) \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

按三角定理.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

故可書

$$\Delta y = \sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x \cdots\cdots\cdots (\mathrm{III}')$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \sin x \frac{1-\cos \Delta x}{\Delta x} \cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

轉爲極限值.令 Δx 爲無限小則

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdots\cdots\cdots (\mathrm{IV})$$

或 $dy = \cos x\, dx$ 即 $d(\sin x) = \cos x\, dx$.

因按方程式(3)

$$\lim_{\Delta x \doteq 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$$

而按方程式(4)

$$\lim_{\Delta x \doteq 0} \frac{1-\cos x}{\Delta x} = 0$$

故也.

2. $y = \cos x$. $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$

命 $y = (1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$ 而求 $\frac{dy}{dx}$

按 § 9a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[-2\sin x]\frac{d(\sin x)}{dx}(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$$

按上 No. 1. 以 $\cos x\, dx$ 代 $d(\sin x)$ 則

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \cdot \cos x \cdot (1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{\sin x \cos x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x.$$

3. $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

按 § 9. 公式 5

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{vu-uv}{v^2}$$

則得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x\,\frac{d(\sin x)}{dx}-\sin x\,\frac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

4. $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x\,\frac{d(\cos x)}{dx}-\cos x\,\frac{d(\sin x)}{dx}}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\,(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

以上所得三角函數之微商各公式可共列下表以便記憶.

y	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{dy}{dx}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

§ 11a. 練習題

93. $y=\cos x+x\sin x$ $\quad y'=-\sin x+1\cdot\sin x$
$+x\cos x=x\cos x$

94. $y=\sin x-x\cos x$ $\quad y'=x\sin x$

95. $y=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x$ $\quad y'=\sin x$

96. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$ $\quad y=\cos x$

97. $y=\log_e \sin x$ $\quad y'=\cot x$

98. $y=\tan x-x$ $\quad y'=\tan^2 x$

99. $y=\sin x\cos x$ $\quad y'=(3-4\sin^2 x)\sin^2 x$

100. $y=a\sin\frac{a}{x}$ $\quad y=-\frac{\quad}{x^2}\cdot\cos\frac{\quad}{x}$

101. $y=a\cos\frac{1}{x}$ $\quad y=\frac{a}{x^2}\cdot\sin\frac{1}{x}$

102. $y=\cot x+\frac{1}{3}\cot^3 x$ $\quad y'=\frac{-1}{\sin x}$

103. $y=\log_e\sqrt{\sin x}+\log_e\sqrt{\cos x}$
$y'=\cot 2x$

104. $y=e^x\cos x$ $\quad y'=(\cos x-\sin x)e^x$

105. $y=x\cdot e^{\cos x}$ $\quad y'=(1-x\sin x)e^{\cos x}$

106. 設一正切電流表* 量電流之強.問表針所指在何位置.則所得結果.其差最少.

電流之强 i 與表針偏離角 ϕ 之正切為正比.命 c 為所用電流表之恆數** 則 $i=c\tan\phi$ 設角 ϕ 有差 $=\Delta\phi$ 則所得結果 i 亦有差 $=\Delta i$.

(*) 正切電流表 Tangent Galvanometer

(**) $i=\frac{H\cdot\gamma}{2\pi}.\tan\phi$ 式中 H 為地球磁性之平衡分力、γ 為電流綫匝(Coil)之半徑、$\frac{H\cdot\gamma}{2\pi}=c$. 故 $i=c.\tan\phi$

今求其微商

$$i=c\tan\phi\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$i+\Delta i=c\tan(\phi+\Delta\phi)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

$$\Delta i=c\tan(\phi+\Delta\phi)-c\tan\phi$$

$$\frac{\Delta i}{\Delta\phi}=c\frac{\tan(\phi+\Delta\phi)-\tan\phi}{\Delta\phi}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

式之右端為$\tan\phi$較之商.

設ϕ之差為甚小.則轉為極限值.

$$\frac{di}{d\phi}=c\frac{1}{\cos^2\phi}$$

$d\phi$為所察偏離角之差.則

$$di=c\frac{1}{\cos^2\phi}.d\phi$$

為所得結果之差.

以$i=c\tan\phi$除上方程式.則

$$\frac{di}{i}=\frac{d\phi}{\cos^2\phi\cdot\tan\phi}=\frac{d\phi}{\cos\phi\sin\phi}$$

按三角定理$\sin\phi\cos\phi=\frac{\sin2\phi}{2}$故

$$\frac{di}{i}=\frac{2d\phi}{\sin2\phi}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

此式中$\frac{di}{i}$名曰所得結果之比較差.與偏離倍角之正弦為反比.假設全表上之$d\phi$可作一律視之.則$\sin2\phi=1$卽$2\phi=90°$或$\phi=45°$時.所得結果之比較差.乃為極小.故量電流時.可加入一已知之副導圈於所量導圈內.使針之所指.常近乎45°則所得結果其差為最微.

§ 12. 弧函數之微商

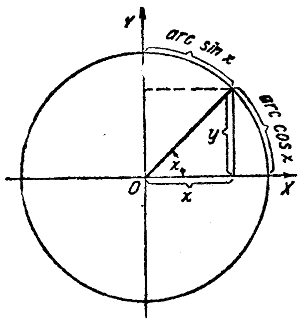


Fig. 25.

弧函數為三角函數之反函數.故其微商亦可由三角函數反而求之.

在此但須於三角函數式中倒換自變數為因變數因變數為自變數.故

$x=\sin y$ 反之則為

$y=\operatorname{arc}\sin x$

$x=\cos y$ 反之則為

$y=\operatorname{arc}\cos x$

$y=\operatorname{arc}\sin x$ 之義.卽指一弧.其正弦 $=x$ 者也.(視 Fig 25)

變數之彼此關繫.若作圖以明之.更為明瞭,今欲先論明此關繫.再言定其微商之法.

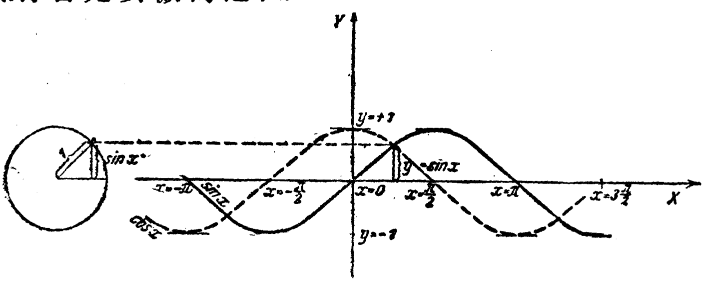


Fig. 26.

作 sine (正弦)及 cosine(餘弦)之圖法.以一圓周展為一直線而度之於 X 軸上.而於周上每一點.作垂直線而以其點相當之正弦值或餘弦值度其上.

以此法卽得上 Fig. 26. 圓之半徑為 1. 直線為正弦曲線虛線為餘弦曲線.由此圖若倒換其因變數為自變數.自變數為因變數.則得 $y=\operatorname{arc}\sin x$ 及 $y=\operatorname{arc}\cos x$ 之圖.如 Fig. 27. 實線為

$arc\ sin\ x$ 曲線. 虛線爲 $arc\ cos\ x$ 圖. *Fig.* 27 之曲線與 *Fig.* 26. 之曲線. 無毫異. 惟倒其位置耳. *sine* 曲線及 *cosine* 曲線爲在一平衡帶內其寬爲 2. 而 *Arc sine* 及 *Arc cosine* 曲線. 則在一垂直帶內. 其寬亦爲 2. 由兩圖比較觀之. 已可知 $sin\ x$ (或 $cos\ x$) 在自變數爲任值時. 皆爲一定之值. 卽 $sin\ x$ 爲一解的. 但 $y=arc\ sin\ x$ 則反是. 乃爲無限數多解之函數. x 之值在 -1 及 $+1$ 之間時. 函數之值爲實數. 而其值之數. 則可爲無窮多. 蓋如於 P 點作一垂直線. 則此垂直線向上向下. 與曲線相交之點 P_1, P_2, P_3 ………… 可無窮多也. (弧函數在積分算術中尤關切要).

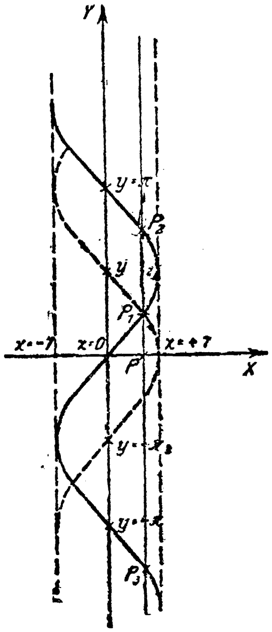


Fig. 27.

學者可依此法作 $tan\ x, cot\ x, arc\ tan\ x$ 及 $arc\ cot\ x$ 之曲線.

既明乎此. 則求其微商. 無難事矣.

1. $y=arc\ sin\ x.$

先反此函數令 $x=sin\ y$ 而求其導數 $\frac{dx}{dy}=cos\ y$ 則其反函數之導數必 $=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{cos\ x}=\frac{1}{\pm\sqrt{1-sin^2y}}.$$

但 $sin^2y=x^2$. 故

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

爲正負不定之導數.

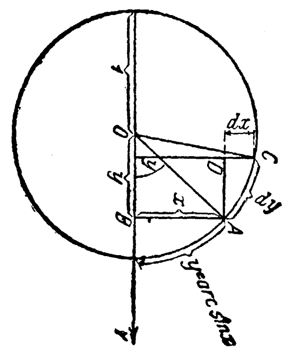


Fig. 28.

用幾何證之.可知此式之非謬.以1為半徑作圓如 *Fig.* 28. 取兩角.一為y一為$y+dy$.由圖上可見三角形OAB與ACD相似.因AC弧甚小故可以直線目之也.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{OA}{OB},\text{因 } OA=1,\ OB^2=1^2-x^2.$$

故 $OB=\pm\sqrt{1-x^2}$. 如是則 $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 於是 $y=arc\sin x$ 因圖中AB命為x也.

若將經緯軸按尋常法列之.令X軸順平衡方向.則$OB=x$而y為$arc\cos x$.故由幾何法求得$arc\cos x$之導數亦同.

2. $y=arc\cos x.$

由反函數$x=\cos y$算出

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y.\ \text{故}\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{-\sin y}$$

$$=\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

亦為正負不定之導數.其所以不定之故.由於$y=arc\sin x$及$y=arc\cos x$之有多解也.

今更作圖以明此正負不定之故.如 *Fig.* 29 及 *Fig.* 30. 以$arc\sin x$及$arc\cos x$兩曲線並立.圖中 1, 2, 3, 4……等數字.表各曲線點.(於圖周未展為直線以前)所在之象限.

x在-1及$+1$間之每一值.皆有無數之y值與之相當.

如$x=x_1$則y之值.可為y_1, y_1', y_1''……其相當之各曲線點.在圖上以P_1, P_2, P_3……表之.

在是各點上.各作曲線之切線.則可見P_1, P_2, P_3等無數曲

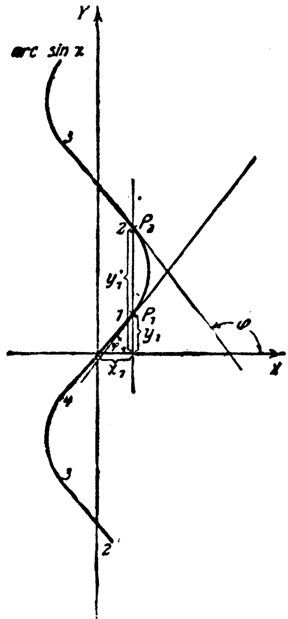


Fig. 29.

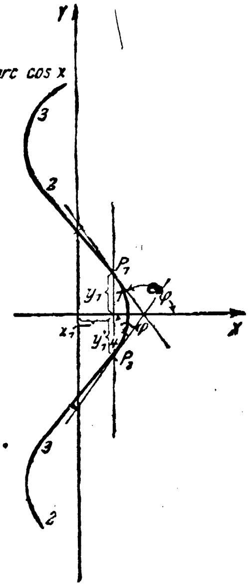


Fig. 30.

線點.只有兩不同切線方向.常相間而至.其一與X軸交成銳角.其一與 X 軸交成鈍角(ϕ).成銳角者其$\tan\phi=\dfrac{dy}{dx}$ 爲正值.成鈍角者.則爲負值.故微商之符號有二也.上理可總括言之曰函數$arc\sin x$之導數$=+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$或$=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$各視所取曲線點之在第一與第四象限或在第二與第三象限.函數$arc\cos x$之導數$=+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$或$=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.各視所取曲線點之在第三與第四象限或第一與第二象限.

3. $y=arc\tan x$

由其反函數 $x=\tan y$ 得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}.$$

倒此式即得

$$\frac{dy}{dx}=cos^2y=\frac{1}{1+tan^2y}$$ (因 $\frac{1}{cos^2y}=1+tan^2y$ 故也.見後所附公式表 No. 7.)

但因 $tan^2y=x^2$ 故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}.$$

4. $y=arc\ cot\ x.$ $x=cot\ y$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{sin^2x}=-(1+cot^2y)=-(1+x^2),$$

(參照後附公式表 No. 6.)

故 $$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

以上所求得諸微商公式.又列表於下.以便記憶.

y	$arc\ sin\ x$	$arc\ cos\ x$	$arc\ tan\ x$	$arc\ cot\ x$
$\frac{dy}{dx}$	$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$+\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

表中 $arc\ sin\ x$ 及 $arc\ cos\ x$ 之符號.爲在第一象限所有者.

§ 12a. 練習題

107. $y=arc\ sin\,(bx)$ $\qquad y=\frac{b}{\sqrt{1-b^2x^2}}$

108. $y=arc\ sin\frac{b^2-x^2}{b^2+x^2}$ $\qquad y'=\frac{-2b}{b^2+x^2}$

109. $y=arc\ sin\ \frac{1}{x}$ $\qquad y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

110. $y=arc\ sin\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\qquad y=\frac{1}{1+x}$

解釋.

$$dy=\frac{d\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}dx}{\sqrt{\dfrac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1}}=\frac{1}{1+x^2}.$$

以下各題.亦依此解之.

111. $y=arc\cos\frac{a\cos x+b}{b\cos x+a}$ 　　 $y=\frac{a^2-b^2}{(b\cos x+a)\sqrt{a^2-b^2}}$

112. $y=arc\tan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 　　 $y=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$

113. $y=arc\cot\frac{}{\sqrt{1-x^2}}$ 　　 $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

114. $y=arc\cot\frac{1}{\sqrt{x}}$ 　　 $y'=\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$

115. $y=a.arc\sin\sqrt{\frac{2ax-x^2}{a}}-\sqrt{2ax-x^2}$

$y'=\frac{}{\sqrt{2ax-x^2}}$

116. $y=log_e(x+\sqrt{1+x^2})$ 　　 $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

117. $y=\frac{1}{2}log_e\frac{1+x}{1-x}$ 　　 $y=\frac{1}{1-x^2}$

118. $y=log_e\sin x$ 　　 $y'=\cot x$

119. $y=log_e\cos x$ 　　 $y'=-\tan x$

120. $y=log_e\tan\frac{x}{2}$ 　　 $y'=\frac{1}{\sin x}$

121. $y=log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ 　　 $y=\frac{1}{\cos x}$

由116至121之題.所解得之式.皆爲極簡者.此種式於積分算術中.頗有用處.

由116至121題之解法附之於下.

116. $y=log_e(x+\sqrt{1+x^2})$.　　命 $x+\sqrt{1+x^2}=u$

$$y=log_e u \qquad dy=\frac{du}{u}=\frac{d(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

又命 $\sqrt{1+x^2}=\sqrt{v}$

$$dy=\frac{d(x+\sqrt{v})}{x+\sqrt{v}}=\frac{dx+\frac{dv}{2\sqrt{v}}}{x+\sqrt{v}}=\frac{dx+\frac{dv}{2\sqrt{v}}}{x+\sqrt{v}}$$

但　　$dv=d(1+x^2)=2xdx$　　以此值代入.則

$$dy=\frac{dx+\frac{2xdx}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=dx\frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{dx(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

117. $y=\frac{1}{2}log_e\frac{1+x}{1-x}$.　　$\frac{1+x}{1-x}=u$　　$y=\frac{1}{2}log_e u$

$$dy=\frac{1}{2}\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\frac{(1-x)dx-(1+x)(-dx)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$dy=\frac{1}{2}\frac{dx-xdx+dx+xdx}{(1-x)(1+x)}=\frac{dx}{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x^2}.$$

此方程式亦可如下法解之.

$$y=\frac{1}{2}\left[log_e(1+x)-log_e(1-x)\right]$$

$$dy=\frac{1}{2}\left[\frac{d(1+x)}{1+x}-\frac{d(1-x)}{1-x}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{1+x}-\frac{dx}{1-x}\right)$$

$$dy=\frac{dx}{2}\ \frac{1-x+1+x}{1-x^2}=\frac{dx}{1-x^2}\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x^2}.$$

此方程式之右端.與 § 12 *No.* 3 所得 $arc\tan x$ 之導數相異者.但爲 x^2 之符號.由是知 $arc\tan x$ 與 $\frac{1}{2}\,log_e\frac{1+x}{1-x}$ 之間.必有一定之關係焉.試於 $\frac{1}{2}\,log_e\frac{1+x}{1-x}$ 中以 ix 代 x.($i=\sqrt{-1}$)即 $y=\frac{1}{2}log_e\frac{1+ix}{1-ix}$ 則 $dy=\frac{d(ix)}{2}\ \frac{1-ix+1+ix}{1-i^2x^2}$. 但 $i^2=-1$ 故 $dy=\frac{idx}{1+x^2}$,而 $\frac{dy}{dx}=\frac{i}{1+x^2}$.此式之右端.除因數 i 外皆與 $arc\tan x$ 之導數方程式相合.由是可知

$$arc\tan x=\frac{1}{2i}\,log_e\frac{1+ix}{1-ix}.$$

118. $y=log_e\sin x\quad \sin x=u\quad y=log_e u$

$$dy=\frac{du}{u}=\frac{d\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x\,dx}{\sin x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\cot x.$$

119. $y=log_e\cos x\qquad dy=\frac{d\cos x}{\cos x}=-\frac{\sin x\,dx}{\cos x}$

$$\frac{dy}{dx}=-\tan x.$$

120. $y=\log_e \tan\frac{x}{2}$ $\quad dy=\dfrac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{\dfrac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}}=\dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}}$

但因 $\cos x\cdot\tan x=\sin x$, 故

$$dy=\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$ (參照後附三角函數公式表 No. 16.)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin x}$$

121. $y=\log_e \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$$dy=\frac{d\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}=\frac{\dfrac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}}$$

$$=\frac{dx}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}$$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\dfrac{1}{\cos x}$. 因 $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x$ 故也.

§ 13. 二次微商 極大值與極小值 轉向點

$2x^4$ 之導數爲 $8x^3$ 而 $8x^3$ 之導數又爲 $24x^2$.凡導數之導數名曰原函數之二次導數或二次微商.

設 $f(x)$ 爲原函數.則

$f'(x)$ 爲其一次微商或曰一次導數

$f''(x)$,, ,, 二 ,, ,, ,, ,, ,, 二 ,, ,, ,,

因 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ 故二次導數.可書作

$$f''(x)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}.$$

此爲最習慣書法.dx^2 固爲 dx 之平方.讀曰"dx 方"而 d^2y 則非 dy 之平方.不宜與 dy^2 相混也. d^2y 讀曰."d二y".

在§7.曾論及速率之定義.爲路按時之導數.今命此導數爲一次導數.而窮二次導數與一次導數之相異何在.卽可知一次導數以表速率.及曲線切線之傾斜.二次導數.則表急率*及曲線之屈率者也.

今又舉§7.墜體之定律爲例.墜體經過之路爲 $s=\frac{1}{2}gt^2$.其在定時之速率.可由此方程式之微商

$$\frac{ds}{dt}=gt \quad\text{……………………………………}(\mathrm{I})$$

而得之.此式按 t 再微分之.則得二次導數:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \text{ 或因 } \frac{ds}{dt}=v.$$

則
$$\frac{dv}{dt}=g \quad\text{……………………………………}(\mathrm{II})$$

卽墜體速率按時 t 之一次導數爲急率也.

故急率者非他.卽最小之速率 dv 與其相當最小之時分 dt

* 急率＝加速率 *Acceleration*.

之比也. dv 者非他.卽速率之增(或減)而 $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ 爲其急率. 急率之延闊 (*Dimension*) 按 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 爲長與時之平方之比 $=[l\cdot t^{-2}]$ 或以 C. G. S. System 計之 $=(cm/sec^2)$.

• 但速率之增.必有一力加於物體以致之.否則不能也.墜體速率之增. 由地球引力致之也. 因兩次微分而得墜體之急率(加速率) g. 故由微分算術亦可反證. $s=1/2\cdot gt^2$ 之合乎事實焉.

在 § 8. 已證導數 $\frac{dy}{dt}$ 爲 τ 角之正切. 而 τ 角者則在 $P(x,y)$ 點曲線之切線與 X 軸所交成者也.

簡言之則一次導數表曲線於 P 點之傾斜. 因 $\tan\tau=\frac{dy}{dx}$ 也.

若更求其二次導數.則得 $\frac{d^2y}{dx^2}$.但 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之在曲線何義?(*Fig.* 31).

使 x 增加 dx. 則 $DD_1=dy$.使 x 再增加 dx.則 y 亦更增 $FF_1=dy_1$. 如是則 $FG=d^2y$. 蓋因 FG 爲 dy 之變更.由 x 再增 dx 所致也. $FG=d^2y=dy_1-dy=FF_1-GF_1$. 因按圖 (*Fig.* 31) $GF_1=DD_1$ 也.

故 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 爲最小段 d^2y 與最小段 dx 之平方之比.

其延闊 (*Dimension*) 爲長與長之平方之比 $=[l^{-1}]$ 或以 C.G.S. system 計之 $=\left[\frac{1}{cm}\right]$.

但二次微商之幾何關係.究爲若何?因 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之式亦可書之爲

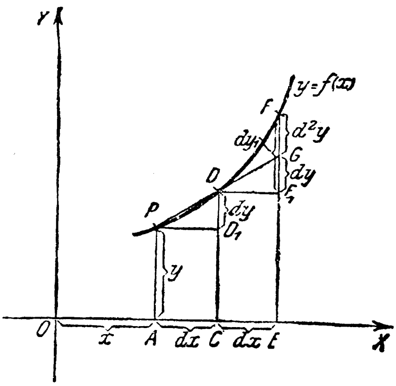


Fig. 31.

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\tan\tau}{dx}.$$

其義非他.卽謂x若增dx.則傾斜角τ之正切增加$d\tan\tau$也.此義非他.卽謂曲線於P點之傾斜如何變更也.故$\frac{d^2y}{dx^2}$者卽曲線傾斜之率也.亦名曰曲線於P點之曲率.

曲線之曲率.可分爲三端.

1. 若d^2y爲正.卽$dy_1>dy$.則F高於P點.如$Fig.$ 31所示.曲線凹而向上.

2. 若$d^2y=0$卽$dy_1=dy$曲線在是點爲直線.

3. 若d^2y爲負卽$dy_1<dy$則F點低於G點曲線凹而向下.

故由二次微商之符號.可以定曲線之向上爲凹或爲凸.

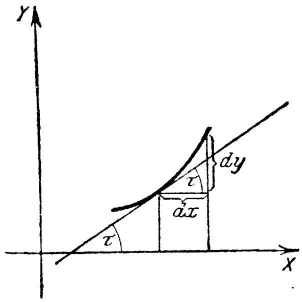


Fig. 32.

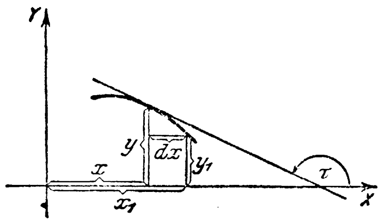


Fig. 33.

至一次微商之符號則何義?其於曲線之形式亦關緊要否?

$$\frac{dy}{dx}=\tan\tau.$$

1. 若$\frac{dy}{dx}$爲正.因x增dx而y亦增dy.則dx爲正者.dy亦必爲正.dy若爲增,是曲線昇而上也.切線與X軸卽交成一銳角τ. ($Fig.$ 32).

2. 若$\frac{dy}{dx}$為負.則dy為減.是曲線降而下也.由(*Fig.* 33).

$$x_1-x=+dx$$

$$y_1-y=-dy.$$

切線與X軸相交為鈍角.

3. 若曲線由昇轉而為降.或由降轉而為昇.則微商之符號必由正經0而變為負.或由負經0而變為正.在$\frac{dy}{dx}=0$之處.切線與X軸平行(*Fig.* 34).蓋$\frac{dy}{dx}=0$即$\tan\tau=0$.即$\tau=0°$或$=180°$

曲線上一點其經坐標為最大者.即是點較左右兩隣點俱高者.名曰極大值(*Maxima*).反是若其經坐標較兩隣俱低者.名曰極小值(*Minima*) x之值無論若何.但合乎曲線之極大或極小值者.其一次微商皆$=0$

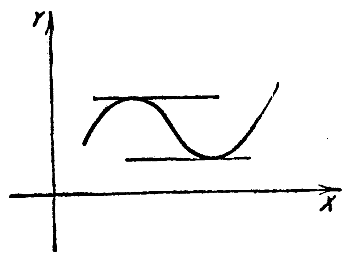


Fig. 34.

令$\frac{dy}{dx}=0$.則亦可反而求曲線之極大或極小值.其法微分曲線之方程式令其導數$=0$.而因以求x之值.

但由一次微分祇能決定曲線之有極大或極小值.然不決定其究為極大.抑屬極小.

然由$\frac{d^2y}{dx^2}$之為正或為負.則可斷定曲線之為凹而向上或向下(第1及3兩端.見上).由此即可以斷定其為極大或極小.

曲線在極大值凹而向下(*Fig.* 34).其$\frac{d^2y}{dx^2}$為負.

在極小值凹而向上(*Fig.* 34).其$\frac{d^2y}{dx^2}$為正.

故 x 之值.在曲線上之極大值點者其一次微商必爲 0.其二次微商必爲負.

x 之值,在曲線上之極小值點者.其一次微商必爲 0.其二次微商必爲正.

若曲線上一處.一部分凹而向上.一部分凹而向下.則是處必爲過渡處.其中有一點名曰轉向點 (W).由曲線之極大值處過此點而向極小值處.其二次微商先爲負.至 W 而等於 0.過此則又爲正.

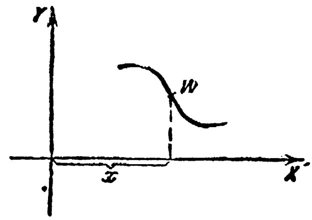


Fig. 35.

故轉向點之標誌.爲 $\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

二次微商.亦可定其義爲較之商之極限值.不必一定由一次微商求之也.

其法先列較之商.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

在此方程式中.於 $x+\Delta x$ 及 x 更各加以 Δx.成一新商.而以原商減之.再以 Δx 除之.則得

$$\frac{\dfrac{f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x)}{\Delta x}-\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

由是得

$$\frac{f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)}{\Delta x^2}=\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

此式左端之分子.名曰二次較而以 $\Delta^2 y$ 代之.

在此二次較之商中.令Δx近於其極限值0.則得$\frac{d^2y}{dx^2}$.

練習題

122. 設有曲線之方程式.求定其形態方程式爲

$$\frac{y}{b}=\frac{3x^2}{l^2}-\frac{2x^3}{l^3}.$$

微分之.再微分之.得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6b}{l}\left(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6b}{l^2}\left(1-\frac{2x}{l}\right).$$

欲定此曲線之極大極小值.命$\frac{dy}{dx}=0$.而求x之值.

$\frac{dy}{dx}=0$.必x爲0及x爲l.

再定$x=0$及$x=l$時二次微商之符號.

1. $x=0$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6b}{l^2}$,

爲正.卽在軸系元點$x=0$處.曲線爲極小值也.

2. $x=l$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6b}{l^2}(1-2)=-\frac{6b}{l^2}$

爲負.卽在$x=l$處曲線爲極大值也.

欲求轉向點.則令$\frac{d^2y}{dx^2}=0$ 卽$\frac{6b}{l^2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)=0$.得$x=\frac{l}{2}$.

卽曲線於$x=\frac{l}{2}$處有一轉向點也.

欲畫此曲線再求與x各值相當之各y值.

在第一方程式中命x之值爲0, l, $\frac{l}{2}$.則得

x	y
0	0
l	b
$\frac{l}{2}$	$\frac{b}{2}$

其中 $x=0$ 當極小值.

$x=\frac{l}{2}$ 當轉向點.

$x=l$ 當極大值.

曲線之形態按此表畫之如 *Fig.* 36.

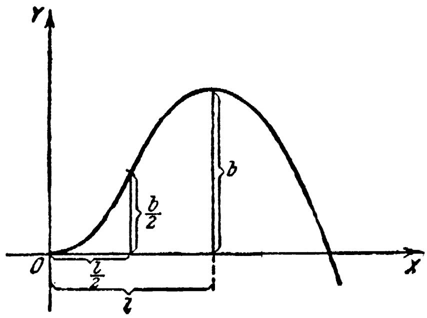


Fig. 36.

123. 在彈性學(*)欲求彈性線(**)之微分方程式須定其曲率半徑 (*Radius of Curvature*). 其法論之於下.

求彎屈半徑 δ 之法.

Fig. 37 示一任意曲線. 經過 A, B 及 C 三點. 設 AB 及 BC 最小二弧分. 經過 A, B 二點可作無數之圓. 其中心點俱同在 AB 之中點直交線 DM 上. 但兼. 經過 C 點者. 則惟有一圓. 其中心點爲 AB 之中點直交線與 BC 之中點直交線相交之點 M. 此圓與曲線共同三密近之點 A, B 與 C. 故其附着於曲線. 較餘一切圓. 俱爲密. 曲線之屈率. 卽可以此圓定之. 名之曰曲率圓. 其半徑名曰曲率半徑. 以 δ 代之. 其中心點. 名曰曲率中心點.

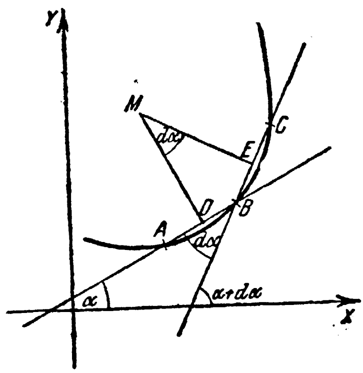


Fig. 37.

(*) 彈性學亦名堅性學 *Strength of Materials*

(**) 彈性線 *Elastic Lines*

曲率半徑δ之定法如下:AB間之弧分命為ds為無限小量.故A, B二點.與MD中點直交線之脚點.可思為極近.幾與之合而為一.由是AB弦即可作在D點曲率圓上之切線視之.此切線與X軸相交以α角.同理BC弦亦可作在E點曲率圓上之切線視之.其與X軸相交之角為$\alpha+d\alpha$.兩切線彼此相交之角.即等於$d\alpha$.而兩中點直交線之交角(中心角)亦為α.視$Fig.$ 37.

中心角$d\alpha$所屬之弧可以$\frac{ds}{2}+\frac{ds}{2}=ds$代之.因$ABC$弧不啻一直線也.

因$ds=\delta\, d\alpha$ 故

$$\delta=\frac{ds}{d\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

由$Fig.$ 38 得

$ds^2=dx^2+dy^2$ 即 $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ 或

$$ds=\pm dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

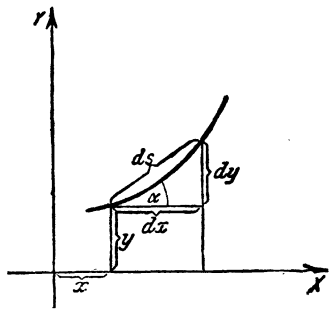


Fig. 38.

又 $\tan\alpha=\frac{dy}{dx}$

此式再微分之.即得

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}=d\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}$ 等於 $1+\tan^2\alpha=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$$d\alpha=d\left(\frac{dy}{dx}\right).\cos\alpha=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(III)}$$

以(II)及(III)式中ds及da之值.代入(I)式則得

$$\delta=\frac{\pm dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

以dx除上式之分母分子.則分母變爲$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$而分子中則$dx$消去.故得

$$\delta=\frac{\pm\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

練習題

以下各題求極大極小值其解法如下

先求得所設方程式之微商.命等於0.由其中求得x之值.再求二次微商.而以所求得x之值代入.視其爲正.或爲負.爲正者.所求得爲極小值.爲負者所求得爲極大值.

124. 設有方程式$f(x)=x+\frac{1}{}$求x之值如何.則可得極大或極小值.

由函數式已可見$x=+1$得極小值.$x=-1$得極大值.按微分法求之:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}\text{ 及 }f''(x)=\frac{2}{{}^3}.$$

命$1-\frac{1}{x^2}=0$,則$x=\pm1$.命$x=+1$則$f''(1)=+2$.命$x=-1$,則$f''(-1)=\frac{2}{-1^3}=-2$.

125.　$y=x^2(a-x)^2$　　$\begin{cases}極大值 & x=\frac{}{2}\\ 極小值 & x=a\end{cases}$

126.　$y=(a+x)\sqrt{a^2+x^2}$　　極大值　$x=\frac{}{2}$

127.　$y=xe^{\frac{}{x}}$　　極小值　$x=1$

128.　$y=x$　　極小值　$x=\frac{1}{}$

129.　$y=x^{\frac{}{x}}$　　極大值　$x=e$

130.　$y=\frac{}{\sin x}$　　$\begin{cases}極小值 & x=\frac{}{4}\\ 極大值 & x=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$

131.　設有一三角形.內容一直方形.其底邊即在三角形之底邊上而其兩隅.在三角形之兩腰上.如 *Fig.* 39. 問直方形之面積.如何則爲最大.

三角形之底邊命爲a.其高爲h.方形之底邊爲y其高爲x.如是.則直方形之面積S爲$x\cdot y$.其中y爲x之函數.由 *Fig.* 39 得

$$\frac{y}{a}=\frac{h-x}{h},\quad 卽\ y=\frac{a}{h}(h-x).$$

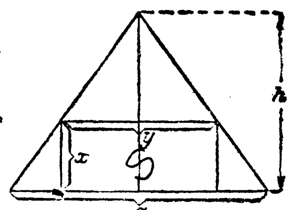


Fig. 39.

直方形之面積爲

$$s=\frac{a}{h}(h-x)\cdot x=\frac{a}{h}(hx-x^2).$$

因欲命此面積爲極大.故命

$$\frac{ds}{dx}=\frac{}{h}(h-2x)=0.\ 卽\ x=\frac{h}{2},$$

蓋$\frac{a}{h}$爲不變數.則必$h-2x=0$也.再求其二次導數.則得-2.故得$x=\frac{h}{2}$時爲極大值.卽直方形之高必等於三角形之半高.其

面積始爲極大也.其底邊$y=\frac{a}{h}(h-x)$之相當值爲$\frac{a}{2}$.

132. 一方形之桿.其一端A,活轉定之(謂桿固定於A而可繞一軸而轉)距A點$a\,cm$繫一重$Q\,kg$之物,此重以在桿之他端垂直向上一力$P\,kg$勝之.桿之自重(本身之重)每一單位長爲$q\,kg$.即每$1\,cm$重$q\,kg$.桿之長爲x.故其全自重爲$q\cdot x\,kg$也.此重可設想爲全集於桿之重心點者.

問桿之長x若何.則所效之力P.乃爲極小?

欲算x.須立一轉冪方程式(*)即以A爲轉點.而求P力以若干長之槓桿臂(**)向上而轉也.物重Q及自重qx之轉冪.則與P之轉冪相反.重直向下.轉冪方程式爲

$$P\cdot x=Q\cdot a+qx\cdot\frac{x}{2}$$

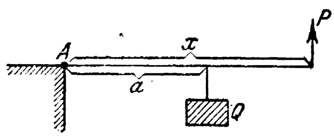


Fig. 40.

$$P=\frac{Q\cdot a}{x}+\frac{qx}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

其微商爲

$$\frac{dP}{dx}=-\frac{Q\cdot a}{x^2}+\frac{q}{2}.$$

命等於0: $$-\frac{Qa}{x^2}+\frac{q}{2}=0$$

$$x=\sqrt{\frac{2Qa}{q}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

其二次微商爲

$$-Q\cdot a\left(\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{2Q\cdot a}{x^3}.$$

(*) 轉冪方程式 *Equation of Moment.*

(**) 槓桿臂 *Arm of Lever.*

以x之值代入(II)式.則得正.故x爲此值時.P之值爲極小值.

故以x之值.代入(I)式.則得

$$P_{Min}=\frac{Q\cdot a}{\sqrt{\frac{2Qa}{q}}}+\frac{q}{2}\sqrt{\frac{2Qa}{q}}=\sqrt{\frac{Q\cdot q\cdot a}{2}}+\sqrt{\frac{Q\cdot q\cdot a}{2}}.$$

$$P_{Min}=\frac{q}{\sqrt{2Q\cdot q\cdot a}}.$$

133. 設有一樹幹.其剖面爲正圓.直徑等於d.欲由此幹截出一直方形之梁.令其載力爲最大者.

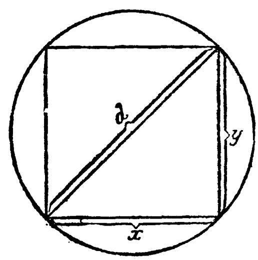


Fig. 41.

梁之載力關繫於阻力冪(*)按堅性學.阻力冪W在直方形之剖面爲$\frac{xy}{6}$.其中x及y爲梁之二邊(*Fig.* 41).

按題意 $W=\frac{xy^2}{6}$應爲極大值.y之值.關繫於x.因按*Fig.* 41 $y^2=d^2-x^2$也.故

$$W=\frac{1}{6}(d^2x-x^3).$$

此式之一次導數爲$\frac{1}{6}(d^2-3x^2)$.令$=0$則$x^2-\frac{d^2}{3}=0$.故$x=\frac{d}{\sqrt{3}}$.其二次導數爲$-6x$.以x之值代入.得$-\frac{6d}{\sqrt{3}}$爲負.故x爲此值時得函數之極大值.因$y=\sqrt{d^2-x^2}=\sqrt{d^2-\frac{d^2}{3}}$.故$x=\frac{d}{\sqrt{3}}$則$y=d\sqrt{\frac{2}{3}}$.而梁之載力爲最大.梁之剖面兩邊之比爲$\frac{x}{y}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=0.7.$

(*) 阻力冪 *Moment of Resistance*

梁之兩邊相比如5:7時.其載力最佳.因$\frac{5}{7}$約等於0.7也.

134. 有兩地.性質各不相同.以直線 $A'B'$ 界之.設行於地I.速率爲v_1.行於地II.速率爲v_2.問由A點至B點以何路爲最捷.A, B之比較位置以a, b及c等距離定之.(*Fig*.42).在I之路命爲AC.在II之路命爲CB.

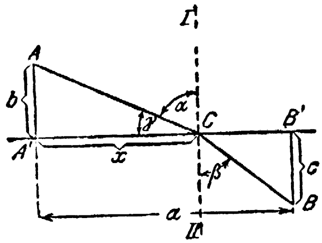


Fig. 42.

按力學公式 $v=\frac{s}{t}$ 或 $t=\frac{s}{v}$.則兩地合計

$$t=\frac{AC}{v_1}+\frac{CB}{v_2}.$$

按圖: $AC=\sqrt{b^2+x^2}$

$$CB=\sqrt{(a-x)^2+c^2}$$

按題意: $t=\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(a-x)^2+c^2}}{v_2}$ 應爲極小值.今求其一次微商.

$$t'=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{b^2+x^2}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{-2(a-x)}{2\sqrt{(a-x)^2+c^2}}=0.$$

由 *Fig* 42 得

$$\frac{}{\sqrt{b^2+x^2}}=\frac{A'C}{AC}=\cos\gamma=\sin\alpha \text{ 及 } \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+c^2}}=\frac{B'C}{BC}=\sin\beta.$$

故 $\frac{1}{v_1}\sin\alpha-\frac{1}{v}\sin\beta=0$ 而得: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$

此題之結果.與光之屈折定律相同.光之由一媒體一點

達於他媒體一點.其所取之道.常爲最捷之道.蓋按物理實驗.光之屈折率n.卽爲入射線正弦與屈折線正弦之比.而等於光於兩媒體中速率之比也.卽

$$\frac{V_1}{V_2}=n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

135. 製一圓筒形之鐵器其壁之厚設爲一定.今欲令器內能容1 *Liter* (讀立脫爾.容量名 = 100 □ *cm*).問如何可使材料之費極儉.

命x爲圓筒底面之半徑.y爲其高.則底面積$=x^2\pi$而其周面積爲$2\pi xy$.器之容積卽爲$x^2\pi y=1$.而$y=\frac{1}{x^2\pi}$.器之周面積.卽

$$=2x\cdot\pi\frac{1}{x^2\pi}=\frac{2}{\ }.$$

器所需之材料等於底面積加周面積.卽

$$x^2\pi+\frac{2}{\ }\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

此值應爲極小.故令其一次導數$=0$.卽

$$2x\pi-\frac{2}{x^2}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

由此得 $x=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$

再求得其二次導數.$2\pi+\frac{4}{x^3}$.以x之值代入得$2\pi+\frac{4}{\frac{1}{\pi}}=6\pi$.爲正.

故製器時欲省材料.則令器之底面半徑等於$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$.而其高等於$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$.因$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}.\pi.\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}=1$.如題所求.

§ 14. 高級微商

由函數$y=f(x)$求得一次微商$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$又由$f'(x)$再微分之.則得二次微商$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$又由此依同法再微分之.則得三次微商$\dfrac{d^3y}{dx^3}=f'''(x)$如是例推以至四次五次等等.普通論之.經$n$過次微分.則得$n$次微商$f^n(x)$(參閱練習題64及65).

依以前理論.約舉數種函數之微商於下

1. $y=x^n$; $y'=nx^{n-1}$; $y''=n(n-1)x^{n-2}$;…………$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)$……n次以後之微分.皆等於0. 例如

$y=x^4$; $y'=4x^3$; $y''=12x^2$; $y'''=24x$; $y''''=24$; $y'''''=0$.

2. $y=e^x$; $y=e^x$. $y''=e^x$. $y'''=e^x$………以下皆然

3. $y=log\ x$; $y'=\dfrac{1}{x}$, $y''=-\dfrac{1}{x^2}$; $y'''=1\cdot2\cdot x^{-3}=\dfrac{1\cdot2}{x^3}$,

$y''''=-1\cdot2\cdot3\cdot x^{-4}=-\dfrac{1\cdot2\cdot3}{x^4}$………

4. $y=sin\ x$; $y=cos\ x$; $y''=-sin\ x$; $y'''=-cos\ x$;

$y''''=sin\ x$. 各次導數皆參互遞變.

練習題

試求以下之高級微商.

136. $y=cos\ x$ y'……? y''……?……

137. $y=x$ y……? y''……?……

138. $y=arc\ sin\ x$ y……? y''……?……

§15. 偏微商

以上所論諸微商.但屬於含一變數之函數.今再論含二變數之函數.以Z代之.命

$$Z=f(x, y)$$

以表各變數之關繫.

試舉一例.帆船之速率.可作爲風力及帆面與風力方向交角之函數.是爲二變數之函數也.

又如氣體壓力p.關繫於溫度t及容積v.故可書$p=f(v, t)$.由此式可知.或溫度變,或容積變.其影響皆能使壓力p變也.但變之之類.可分爲多端.令氣體之溫度不變.則但由容積之變.可以致壓力之變.反之亦然.亦可令氣體之容積不變.則但由溫度之變.可以致壓力之變.壓力p如斯變法.名曰偏變.

今欲令$Z=f(x, y)$受如是之偏變.則先令y爲定值而以x爲變數.而以Z但爲x之函數.其微分及微商仍如前法定其義.其求法仍用較之商爲助如前.命Z按x之增爲ΔZ_x而以y爲不變數.命Z按y之增爲ΔZ_y而以x爲不變數.得各方程式如前法.

$$Z=f(x, y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

$$Z+\Delta Z=f(x+\Delta x, y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$

由(II)減(I)得

$$\Delta Z_x=f(x+\Delta x, y)-f(x, y) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(III)}$$

依同法得 $\Delta Z_y=f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$ ························ (IV)

以 Δx 除 (III) 以 Δy 除 (IV) 則得偏較之商

$$\frac{\Delta Z_x}{\Delta x} \text{及} \frac{\Delta Z_y}{\Delta y}$$

令 Δx 及 Δy 轉爲極小值.則達於極限而得偏微商.欲別之於尋常微商.以 $\frac{\partial Z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial Z}{\partial y}$ 表之.以是得方程式.

$$lim\ \frac{\Delta Z_x}{\Delta x}=lim\ \frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=\frac{\partial Z}{\partial x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(V)}$$

$$lim\ \frac{\Delta Z_y}{\Delta y}=lim\ \frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}=\frac{\partial Z}{\partial y} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(VI)}$$

偏微商之算法.與尋常微商相同.但於 $f(x, y)$ 之方程式中,所不欲變之數.直視作恆數.卽以求恆數之微商法施之.

練習題

139. $Z=f(x, y)=3ax^3+4bxy+2cy^2.$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=9ax^2+4b\cdot y+0 \qquad (y\text{ 不變})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=0+4bx+4cy \qquad (x\text{ 不變})$$

140. $Z=f(x, y)=sin\ x+cos\ y.$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=cox+0 \qquad (y\text{ 不變})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=0+(-sin\ y) \qquad (x\text{ 不變})$$

設於 $Z=f(x, y)$ 方程式中.令 x 及 y 同時俱變.x 增 Δx, y 增 Δy 則 Z 亦變.而增 ΔZ.此變名曰全變.

由方程式.

(*) ∂Z 可讀作圖代爾達 Z

$$Z=f(x,y)\cdots\cdots(1)$$

$$Z+\Delta Z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)\cdots\cdots(2)$$

得

$$\Delta Z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\cdots\cdots(3)$$

在方程式(3)之右端減$f(x,y+\Delta y)$又加$f(x,y+\Delta y)$.

則得

$$\Delta Z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y+\Delta y)-f(x,y).$$

此式亦可書之爲

$$\Delta Z=\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}\cdot\Delta x$$

$$+\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\cdot\Delta y\cdots\cdots(4)$$

令此方程式中Δx及Δy同時密近其極限0,則式之左端變爲dZ.名之曰全微分(*Total Differential*).

$$dZ=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}\cdot\Delta x$$

$$+\lim_{\Delta y=0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\cdot\Delta y\cdots\cdots(5)$$

式之右端第二項與方程式(IV)比較知其卽爲部分微分dZ_y.蓋由方程式IV得

$$\lim\Delta Z_y=dZ_y=\lim\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\cdot\Delta y=\frac{\partial Z}{\partial y}dy\cdots\cdots(\mathrm{VI'})$$

同理由V得

$$\lim\Delta Z_x=dZ_x=\lim\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\cdot\Delta x=\frac{\partial Z}{\partial x}dx\cdots\cdots(\mathrm{V'})$$

又以方程式(5)右端第一項與(V')比較.則見(5)式之所異於(V')者惟以$y+\Delta y$代Δy耳.其餘則全相合.命$y+\Delta y=y_1$則可曰:

方程式(V')爲函數$Z=f(x,y)$之偏導數假設y爲不變者也.方程式(5)右端第一項.爲函數$f(x,y_1)$之部分導數假設y_1爲不變者也.

函數$f(x,y)$及$f(x,y_1)$相差甚微.因y_1爲y增甚小值Δy而得者也.故若於偏導數中以不變數y_1代不變數y.則所得之差亦甚微.

故(5)式可書之爲

$$dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

卽謂其全微分函數含多數之等於偏微分之和.

若$dZ=0$.則由方程式6.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial Z}{\partial x}\Big/\frac{\partial Z}{\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

139及140題之全微分.依上理卽得

$$dZ=(9ax^2+4by)dx+(4bx+4cy)dy$$

$$dZ=\cos x\,dx-\sin y\,dy.$$

若Z爲含任意多自變數之函數.求微分法.與上同.命$Z=f(x,y,u,v,w,\cdots\cdots)$.則

$$dZ=\frac{\partial Z}{\partial x}dx+\frac{\partial Z}{\partial y}dy+\frac{\partial Z}{\partial u}du+\frac{\partial Z}{\partial v}dv+\frac{\partial Z}{\partial w}dw\cdots\cdots$$

含多個自變數之函數.亦可求其極大極小值.如含一自變數之函數同.

含一自變數之函數式 $y=f(x)$ 亦可書作 $f(x,y)=0$. 其式表平面上一曲線. x 及 y 爲曲線點之坐標. 含多自變數之函數如 $Z=\psi(x,y)$ 亦可書之爲 $\psi(Z,x,y)=0$. 其式則表立空中一曲面. x, y, Z 爲曲面點之坐標. *Fig.* 43. 即示一曲面.

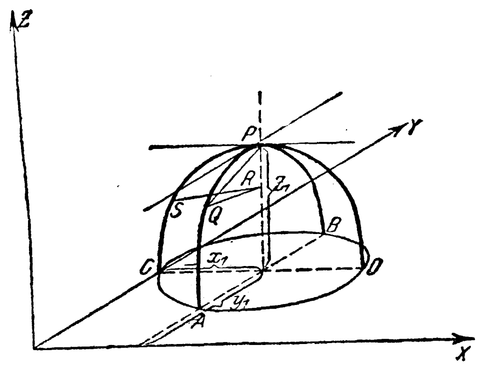


Fig. 43.

經過 P 點. 作二平面. 俱直交於 $X-Y-$ 平面. 其一平行於 $X-$ 軸. 切曲面於 CPD 曲線. 其一平行於 Y 軸. 切曲面於 APB 曲線. P 點之坐標爲 (x_1, y_1, Z_1) 於 APB 曲線上取一點 Q. 而 Q 點自亦爲曲面上之點. 其坐標命爲 (x, y, Z). 則按前理論 P 之坐標亦可書爲 $(x, y+\Delta y, Z+\Delta Z)$ 因 P 與 Q 相距甚小也. 徑坐標 x. 仍前不變. 因由 Q 至 P 行於曲線上. 然平行於 $\gamma-$ 軸也. 今設想 APB 平面由 *Fig.* 43 取出. 置於 *Fig.* 44 中. 作弦聯 P 及 Q 二點. 弦與 $Y-$ 軸之交角爲 σ. 則由圖得:

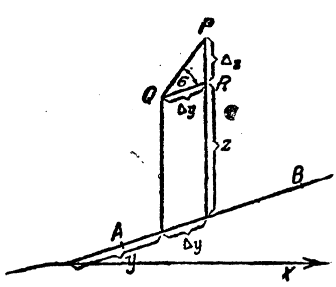


Fig. 44.

$$tan\,\sigma = \frac{\Delta Z}{\Delta y}.$$

在此可以 §8 同一之法馭之. 命 Q 漸移至 P. Δy 及 ΔZ 達於其極限 0. 則 PQ 弦漸轉而爲切線. 故得

$$\tan \tau = \frac{dZ}{dy}.$$

但Z亦可按x而微分之.故改書$\frac{\partial Z}{\partial y}$.蓋若於$CPD$曲線上取一點$S$(參閱*Fig* 43).而令漸移與$P$點相密近.則$PS$弦亦轉爲切線而得偏微商$\frac{\partial Z}{\partial x}$

故偏微商$\frac{\partial Z}{\partial y}$及$\frac{\partial Z}{\partial x}$之義.亦可定爲等於在$P$點$APB$及$CPD$二曲線之正切.至全微分$dZ=\frac{\partial Z}{\partial y}dy+\frac{\partial Z}{\partial x}dx$.可目之爲經過$P$點之一平面.而二切線即在該平面內.

今擇P點.令在是點之兩正切皆等於0.

如是.則二偏微商亦等於0.而其全微分亦等於0.

故在P點有函數$Z=f(x, y)$之極大或極小值.因在P其微商等於0.由圖觀之.知其爲曲面之最大值.

練習題

141. 設在一電話局中.有三個複式移接橱(所以移接電話線者)其相距爲$5m$及$8m$.每一橱列有500白熱電燈.每燈需電流0.08 *Amper*.距第一橱列$10m$處有一積電池.具24 *Volt*之電動力.所以供電燈之電流者也.分電導線之長爲l_1, l_2, l_3.求分電導線之剖面如何.則可以令銅料之費極省.而張力之降落至最末橱列.不能過標準電池張力之2%.

解: 命分電導線之各剖面.爲q_1, q_2, q_3.則銅料之費等於其容積.

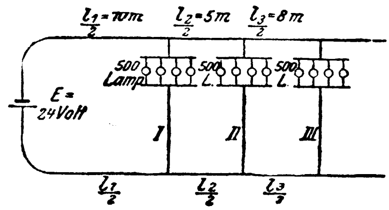


Fig. 45.

$$V=q_1 l_1+q_2 l_2+q_3 l_3 \quad (I)$$

先按 *Ohm* 定律. $E=I.W=I.\frac{1}{q}\delta$. 算張力之降落.式中 q 爲剖面積. δ 爲比較阻力在銅爲 $\frac{1}{60}$. 在各導線分 l_1, l_2 及 l_3 所流電流之強.命爲 i_1, i_2 及 i_3 故代 $I.W$ 可書爲

$$\frac{i_1 l_1}{q_1}\delta+\frac{i_2 l_2}{q_2}\delta+\frac{i_3 l_3}{q_3}\delta$$

此值應等於24 *Volt* 之2%. 卽 $=\frac{2.24}{100}=0{,}48$. 其方程式爲

$$\delta\left(\frac{i_1 l_1}{q_1}+\frac{i_2 l_2}{q_2}+\frac{i_3 l_3}{q_3}\right)=0{,}48 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (II)$$

按題意方程式(*I*)之容積 V 應爲極小值.故 V 之一次微商當令 $=0$. 但 V 乃三變數 q_1, q_2 及 q_3 之函數.故應以 V 按三變數部分微分之.而得其全部微分爲

$$dV=\frac{\partial V}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial V}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial V}{\partial q_3}dq_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (III)$$

此式等於0.必各部分微商 $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$ 及 $\frac{\partial V}{\partial q_3}$ 各等於0. 因 dq_1, dq_2, 及 dq_3 雖爲甚小之量.然究不同於0也.設三變數 q_1, q_2 及 q_3 彼此各不相關繫.則可,令每項各等於0.但在本題中.三變數乃互有關繫者.蓋有方程式(*II*)之相牽繫也.於此須用一附助量入算式中以表三變數之關繫.

方程式(*II*)書之爲

$$\phi=\delta\left(\frac{l_1 i_1}{q_1}+\frac{l_2 i_2}{q_2}+\frac{l_3 i_3}{q_3}\right)-0{,}48=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (IV)$$

函數量$\phi=0$.以λ乘之.不變其值.得新函數$\lambda\phi$.其中λ爲關繫於q_1,q_2及q_3之因數.尚須求以定之.以$\lambda\phi$加於V.亦不變其值.得又一新函數

$$V+\lambda\phi$$

命等於F.因$\phi=0$.故

$$dF=dV.$$

方程式(III)即可改書爲

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial F}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial F}{\partial q_3}dq_3$$

$$=\frac{\partial V+\lambda\partial\phi}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial V+\lambda\partial\phi}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial V+\lambda\partial\phi}{\partial q_3}dq_3=0\cdots\cdots\cdots(V)$$

如是.則三部分微商.可令各等於0.

$$\frac{\partial V+\lambda\partial\phi}{\partial q_1}=0;\quad \frac{\partial V+\lambda\partial\phi}{\partial q_2}=0;\quad \frac{\partial V+\lambda\partial\phi}{\partial q_3}=0.$$

以方程式(I)按q_1部分微分之而暫以q_2, q_3爲不變數.則得$\frac{\partial V}{\partial q_1}=l_1$.由同方程式用同法得$\frac{\partial V}{\partial q_2}=l_2$及$\frac{\partial V}{\partial q_3}=l_3$.

再以與λ相乘所得之方乘式(IV)按q_1部分微分之.而暫以q_2及q_3爲不變數.則得

$$\frac{\lambda\partial\phi}{\partial q_1}=-\lambda\delta\frac{l_1 i_1}{q_1^2}.$$

同理

$$\frac{\lambda\partial\phi}{\partial q_2}=-\lambda\delta\frac{l_2 i_2}{q_2^2}\text{ 及 }\frac{\lambda\partial\phi}{\partial q_3}=-\lambda\delta\frac{l_3 i_3}{q_3^2}$$

三部分微商即可書爲

$$l_1-\lambda\delta\frac{l_1 i_1}{q_1^2}=0;\quad l_2-\lambda\delta\frac{l_2 i_2}{q_2^2}=0;\quad l_3-\lambda\delta\frac{l_3 i_3}{q_3^2}=0.$$

由是得

$$q_1=\sqrt{\lambda\delta i_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(VI)$$

$$q_2=\sqrt{\lambda\delta i_2}\cdots\cdots\cdots\cdots(VII)$$

$$q_3=\sqrt{\lambda\delta\lambda_3}\cdots\cdots\cdots\cdots(VIII)$$

此爲三方程式而有四未知數.再加以方程式.

$$\delta\left(\frac{l_1 i_1}{q_1}+\frac{l_2 i_2}{q_2}+\frac{l_3 i_3}{q_3}\right)-0,48=0\cdots\cdots\cdots(IX)$$

於方程式(VI)至$(VIII)$消去$\sqrt{\lambda}$.法由方程式(VI)以q_1,δ及i_1代表λ得

$$\lambda=\frac{q_1^2}{\delta i_1}.$$

以此值代入(VII)及$(VIII$ 得

$$q_2=q_1\sqrt{\frac{i_2}{i_1}}\text{及 } q_3=q_1\sqrt{\frac{i_3}{i_1}}.$$

此值代入方程IX.而變其式得

$$q_1=\frac{\delta}{0,48}\sqrt{i_1}(l_1\sqrt{i_1}+l_2\sqrt{i_2}+l_3\sqrt{i_3})$$

$$q_2=q_1\sqrt{\frac{i_2}{i_1}}=\frac{\delta}{0,48}\sqrt{i_2}(l_1\sqrt{i_1}+l_2\sqrt{i_2}+l_3\sqrt{i_3})$$

$$q_3=q_1\sqrt{\frac{i_3}{i_1}}=\frac{\delta}{0,48}\sqrt{i_3}(l_1\sqrt{i_1}+l_2\sqrt{i_2}+l_3\sqrt{i_3}).$$

若算出其數則得

$$q_1=\frac{1}{60\cdot 0,48}\sqrt{1500\cdot 0,08}\times$$

$$\underbrace{(20\sqrt{1500\cdot 0,08}+10\sqrt{1000\cdot 0,08}+16\sqrt{500\cdot 0,08})}_{(=409,78)}=156mm^2.$$

$$q_2=\frac{1}{60\cdot 0{,}48}\sqrt{1000\cdot 0{,}08}\times$$

$$(\text{— — — — — —})=127mm^2.$$

$$q_3=\frac{1}{60\cdot 0{,}48}\sqrt{500\cdot 0{,}08}\times$$

$$(\text{— — — — — —})=90mm^2.$$

故銅料容積之最小值.爲

$$V=2000\cdot 1{,}56+1000.\ 1{,}27+1600\cdot 0{,}9=5830cm^3.$$

因銅之比重爲8.9故得

$$51887\ g=51{,}887\ kg.$$

爲所費銅料最省之值.

卷三

積分算法

§16. 基本定義

微分術中所學者.以所設函數$f(x)$而求其導數$f'(x)$也.函數之導數.仍爲x之函數.今欲以所設微分反而求其原函數.是則積分術之所事也.

例如§7. *Fig.* 21.以一面分作任意.多條.多條積之.其和卽等於全面積.每條之面.皆作直方形視之.其高爲h寬爲ds故每條之面積爲$h.ds.$今以此爲所設微分.而求其原函數.卽積多條之甚小面分而成全面積.其算術非他.卽所謂積分算法也.其詳論之於後.

由是觀之積分術者.與微分術相反之算術也.如求方根法之於乘方法也.

設有微分$f(x)dx.$求其原函數$F(x)$.所謂原函數$F(x)$者卽一函數.微分之.得$f(x)dx$者也.故$f(x)$卽爲$F(x)$之導數以後皆以$f(x)$普通代$F(x)$之導數$f'(x)$, $f''(x)$等.函數$y=x^2$已由微分法知其微分爲$2xdx$.如所設者爲微分$2xdx$.反而求其原函數.則用積分算法.其式書之爲$\int 2xdx.$(*)而其解爲已知者.故可逕書爲$\int 2xdx=x^2$因$d(x^2)=2xdx$也.

(*) $\int$ 爲積分號出臘丁(和)之第一字母S而來.

但此解非甚完全.其證如下:設原函數爲 $y=x^2+5$. 則微分之.亦得 $2xdx$. 凡 x^2 加以一不變數者.其微分皆爲 $2xdx$. 因不變數之微分常爲 0 也. 故 $\int 2xdx$ 之解非僅有一解 x^2 乃常帶一恆數 C. 卽 $\int 2xdx=x^2+C$.

普通書之爲 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$. 釋曰.一微分求其積分.可得無數結果.而其相差別.則但在其恆數.因 C 爲不定數.故所得之積分 $F(x)+C$. 亦爲不定値.名之曰不定積分 *Indefinite Integral* 或曰普通積分.

欲知所設微分函數.以積分術算其原函數所得結果是否相合.則可以所得結果再微分之.卽可證之. 又微分術中定理.亦可用之於積分術.而積分算法.則可以基本公式推求之.

§17. 基本公式

由 §16 之推究.可逕得二定理.

1. $\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx.$

積分號內之恆數.可推而置之積分號前.欲證之.則微分其右端.得

$$d\left(a\int f(x)\,dx\right)=a.d\int f(x)\,dx$$

並參照 § 9. *No.* 3.

在此解中.微分號及積分號.並立.卽以 $f(x)\,dx$ 微分之又積分之也.按積分之定義.爲微分之反.故

微分號與積分號並立如 $d\int$ 式者.則彼此相消.

以是可令　$ad\int f(x)\,dx=af(x)\,dx$. 如定理所云.

2.　$\int\left\{f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)\cdots\right\}dx$

$$=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\int f_3(x)\,dx.$$

和之積分.等於各項加數積分之代數和.

證. 微分上式之右端.

$$d\int f_1(x)\,dx+d\int f_2(x)\,dx+d\int f_3(x)\,dx.$$

$$=f_1(x)\,dx+f_2(x)\,dx+f_3(x)\,dx.$$

較之積分.同此定理.

§ 18. 基本積分

由微分式

$$dx^{m+1}=(m+1)\,x^m dx$$

積分之.卽得

$$x^{m+1}=\int(m+1)\,x^m dx$$

或推 $(m+1)$之恆數於積分號之前

$$x^{m+1}=(m+1)\int x^m dx \quad \text{由此得}$$

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C.$$

乘方之積分爲:原指數加1之新乘方而除以原指數加1.

同理

(1)　$$\int ax^m dx=a\int x^m\,dx=\frac{ax^{m+1}}{m+1}+C.$$

但若$m=-1$.則此式不能用.因$x^{-1}\,dx$之積分爲$\frac{x^0}{0}$卽得

$\infty+C$ 也.

故 x^{-1} 可書爲 $\frac{1}{x}$ 而得.

(2) $\int\frac{dx}{x}=\log x+C$. 因 $\log_e x+C$ 之微分爲 $\frac{dx}{x}$ 也. 又可普通書之爲 $\int\frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\log_e f(x)+C$

以下各積分式.學者可微分其右端以證其合否.算時可用後附微分式表以爲助.

(3) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C,\ \int\frac{f'(x)}{\sqrt{f'(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+C.$

(4) $\int\frac{dx}{1+x^2}=\arc\tan x+C.$

(5) $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+x}{1-x}+C.$

(6) $\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\log_e(x+\sqrt{a+x^2})+C.$

因 $d\left[\log_e(x+\sqrt{a+x^2})\right]$

$$=\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{a+x^2}}}{x+\sqrt{a+x^2}}=\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$$

(7) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}+C.$

蓋 $d(a^x)=a^x\log_e a\,dx$. 故 $a^x=\int a^x\log_e a\,dx=\log_e a\int a^x dx.$

由是得 $\int a^x dx=\frac{}{\log_e a}+C.$

若 $a=e$. 因 $\log_e=1$ 故得

(8) $\int e^x dx=e^x+C$

(9) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

(10) $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

(11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

(12) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

(13) $\int \tan x\, dx = -\log_e \cos x +$ 因

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = \int -\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos x}.$$

在積分號內分子爲分母之微分.

用公式 2. 按 $\int \frac{dx}{x} = \log_e x + C$ 得

$$\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \log_e \cos x + C.$$

(14) $\int \cot x\, dx = \log_e \sin x + C.$ 因

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \log_e \sin x + C \text{ 也}.$$

(15) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log_e \tan \frac{x}{2} + C.$ 因

$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ 以此代入. 則

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dx/\cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} / \cos \frac{x}{2}}$$

又以 $2d\frac{x}{2}$ 代 dx. 則得

$$\int \frac{d\frac{x}{2}/\cos^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}}$$

式中分子爲分母之微分.故 $=\log_e \tan\frac{x}{2}+C.$

(16) $\int\frac{dx}{\cos x}=\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$ 蓋 $\int\frac{dx}{\cos x}$

$$=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}_{*}=\int\frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C.$$

(按公式15)

以上基本公式.多半由微分之基本公式反之而成.

設有任意一函數求其積分.則可變其式令與基本公式相類.而按基本公式解之. 變式法無一定通例.須試驗得之.

玆先設數練習題.即可按基本公式逕解之.

142. $\int dx=x+C.$

143. $\int tdt=\frac{t^2}{2}+C.$

144. $\int w^2dw=\frac{w^3}{3}+C.$

145. $\int 5x^4dx=x^5+C.$

146. $\int\cos x\,dx=\sin x+C.$

147 $\int e^z dz=e^z+C.$

148. $\int 6ax^5dx=ax^6+C.$

149. $\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2x^2}+C.$

(*) 參照後附三角函數公式表 No. 26.

150. $\int\sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.$

151. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$

152. $\int\frac{15x^2}{\quad}dx=\frac{5x^3}{\quad}+C.$

153. $\int\frac{18ax^3}{5b}dx=\frac{9ax^4}{10b}+C.$

154. $\int\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\sqrt{y}+C.$

155. $\int\sqrt{ay}\,dy=\frac{2}{3}y\sqrt{ay}+C.$

156 $\int\frac{4a}{x^5}dx=-\frac{a}{x^4}+C.$

157 $\int\left(6x^5-8x^3+x-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^5}\right)dx$

$$=x^6-2x^4+\frac{x^2}{2}-\log_e x-\frac{1}{x^4}+C.$$

158. $\int(m\cos x-n\sin x)\,dx=m\sin x+n\cos x+C.$

159. $\int\left(\frac{dx}{x}-\frac{3dx}{\cos^2 x}\right)=\log_e x-3\tan x+C.$

160. $\int\cos\phi\cos\psi\,d\phi=\cos\psi\sin\phi+C.$

161. $\int\frac{\sin x}{\cos^2 a}dx=-\frac{\cos x}{\cos^2 a}+C.$

162. $\int\frac{\sin a}{\cos^2 x}dx=\sin a\tan x+C.$

若函數之式不若上練習題之簡.則必變化其式.以求能用基本公式.變化之法.其切便於用而著要者.舉之如下.

§ 19. I. 分解法

是法以所設函數分爲各函數之和或較.凡整函之求積分.皆可用此法.

例 1. $\int(5x^3+2x^2-3x+6)\,dx$

$$=\int 5x^3dx+\int 2x^2dx-\int 3x\,dx+\int 6dx.$$

$$=5\int x^3dx+2\int x^2dx-3\int x\,dx+6\int dx.$$

$$=\frac{5x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+6x+C.$$

各項積分所帶恆數.可總爲一恆數.故但書一 C.

2 $\int\frac{dx}{sin^2x\,cos^2x}=\int\frac{(sin^2x+cos^2x)dx}{sin^2x\,cos^2x}$

$$=\int\left(\frac{1}{cos^2x}+\frac{1}{sin^2x}\right)dx=\int\frac{dx}{cos^2x}+\int\frac{dx}{sin^2x}$$

$=tan\,x-cot\,x+C$ {按公式 (11) 及 (12)}

此變法合理.因 $sin^2x+cos^2x=1$ 也.

§ 20. II. 代替法

函數之中用一新變數代替.成單簡之式.

1 $\int\frac{dx}{a+bx}$. 命 $a+bx=y$, 則 $y-a=b\,x$ 或 $x=\frac{y-a}{b}$ 而

$$dx=\frac{1}{b}.\,dy.$$

故得

$$\int\frac{\frac{1}{b}\,dy}{y}=\frac{1}{b}\int\frac{dy}{y}=\frac{1}{b}log_e\,y+C=\frac{1}{b}log_e(a+bx)+C.$$

2. $\int \sqrt[m]{(ax+b)^n}dx.$ $\qquad ax+b=y,\ adx=dy\ \ dx=\frac{1}{a}dy.$

$$=\int y^{\frac{n}{m}}\cdot\frac{1}{a}dy=\frac{1}{a}\int y^{\frac{n}{m}}dy.$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{y^{\frac{n}{m}+1}}{\frac{n}{m}+1}+C.=\frac{1}{a}\cdot\frac{\sqrt[m]{(ax+b)^{n+m}}}{\frac{n}{m}+1}+C.$$

3. $\int \sin(ax+b)\,dx$ $\qquad ax+b=y \qquad dx=\frac{dy}{a}$

$$=\frac{1}{a}\int \sin y\,dy=\frac{1}{a}\cdot(-\cos y)+C=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

積分式 $\int \sin(ax+b)\,dx$ 與可以逕求積分之積分式 $\int \sin(ax+b)\,d(ax+b)$ 所相異者.不過積分號內以 x 代 $(ax+b)$ 耳.但 dx 可以 $d\frac{(ax+b)}{a}$ 代之.因 $dx=\frac{dy}{a}=\frac{d(ax+b)}{a}$.由是得

$$\int \sin(ax+b)\,\frac{d(ax+b)}{a}=\frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\,d(ax+b)$$

$$=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C.$$

有題亦可不用代入新變數而求其積分.

4. $\int e^{mx}dx=\int e^{mx}\frac{d(mx)}{m}=\frac{1}{m}\int e^{mx}\,d(mx)=\frac{1}{m}e^{mx}+C.$

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$ $\qquad$ 命 $\ xdx=\frac{1}{2}2x\,dx \qquad 2xdx=d(a^2+x^2)$

$\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2+x^2}+C=\sqrt{a^2+x^2}+C.$ $\left(視\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}\right)$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}$ $\qquad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$

$$\sin^2x\cos^2x=\frac{(\sin 2x)^2}{4}=\frac{\sin^2(2x)}{4}$$

$$\int \frac{dx}{\frac{\sin^2(2x)}{4}} = 2\int \frac{d2x}{\sin^2(2x)} = -2\cot(2x) + C.$$
(視公式 11.)

參照 § 19. 例 2. 兩次結果不必一定相合. 因有恆數 C 可以別之也. 但此處所得結果則與前 § 19. 例 2 相合. 因

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \quad 故$$

$$\cot(2x) = \frac{1-\tan^2 x}{2\tan x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{tin^2 x}{\tan x}\right) = \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$$

或 $$2\cot(2x) = \cot x - \tan x$$

而 $$-2\cot(2x) = \tan x - \cot x.$$

163. $\int (a+bx)^m dx$ $\qquad a+bx=y,\ dx=\frac{dy}{b}$

$$\int y^m \frac{dy}{b} = \frac{1}{b}\int y^m dy = \frac{y^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

$$= \frac{(a+bx)^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

164. $\int \sqrt{1+4x}\, dx = \frac{1}{6}\sqrt{(1+4x)^3} + C.$

165. $\int \frac{dx}{\sqrt{5+2x}} = \sqrt{5+2x} + C.$

166. $\int \frac{20dx}{5x-8} = 4\log_e(5x-8) + C.$

167. $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C.$

168. $\int \sqrt{e^x}\, dx = 2\sqrt{e^x} + C.$

169. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x}} = -\frac{3}{\sqrt[3]{e^x}} + C.$

§21. III. 部分積分法

設 u 及 v 爲 x 之二函數. 則由微分術知

$$d(u.v)=udv+vdu.$$

積分之. 則得

$$u.v=\int udv+\int vdu$$

或

$$\int udv=u.v-\int vdu$$

以所設函數分作兩因數之積(每一函數皆能視之爲因數之積)其一命等於 u. 其他命等於 dv 而求 v 及 du. 則此函數可以上方程式馭之.

若 dv 及 vdu 可以積分之. 則全函數卽可以此法解之. 舉數例如下.

1. $\int x\sin x\,dx \qquad u=x \qquad du=dx \qquad dv=\sin x\,dx \qquad v=-\cos x$

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

$$=\sin x-x\cos x+C.$$

2. $\int x\cos x\,dx=\cos x+x\sin x+C.$

3. $\int \log_e x\,dx \qquad \log_e x=u \qquad du=\frac{1}{x}dx \qquad dx=dv \qquad v=x$

$$=x\log_e x-\int\frac{xdx}{x}$$

$$\int log_e x\, dx = x\, log_e x - x + C = x(log_e x - 1) + C.$$

4. $\int xe^x dx \qquad x = u \qquad du = dx \qquad e^x dx = dv \qquad v = e$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

5. $\int x^2 e^x dx \qquad x = u \qquad du = 2xdx \qquad e^x dx = dv \qquad v = e$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$$

上式右端之積分式.又用部分積分法求之(視例4).

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

§22. 定積分

以上所論不定積分常含一恆數C.但積分算法之於實用必求得一定之解.故必化不定爲有定.顧積分之所以不定.以C不定故也.故定積分.須先求C之值.

玆設一例.庶易了然.在§7. *Fig.* 17. 鐵道汽車所行之路.以一面積表之. 故反之.求得該面之積.則可以知汽車所行之路.車行若爲等速.則該面爲一直方形.其面積易於以底乘高得之.但若爲不等律之減速.如§7. *Fig.* 19 所示.則算其面積非易.蓋其面爲一曲線及X軸與兩經坐標V_0及V_6所界成也.

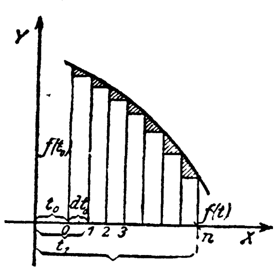


Fig. 46.

設想該面分爲甚狹之條.每條皆可以直方形目之.各直方形面積之和.即與所求之全面積相近.其所差者.不過多數小三角

形面積之和如 *Fig.* 19. 以陰畫所示.所分之條數愈多則近值與眞値之差愈微.若令各條之寬近於其極限 0. 則其差亦近於其極限 0.

經坐標之所表.爲當時之速率.可命爲時 t 之函數. 故 v_0, v_1, $_2$……等速率可命爲 $f(t_0)$, $f(t_1)$, $f(t_2)$……

曲線爲汽車速率之曲線.書之爲方程式. 卽 $v=f(t)$. *Fig.* 46. 經坐標之數. 設爲 $n+1$. 其脚點爲 $0, 1, 2$……至 n. 各點之緯坐標自爲 t_0, t_1, t_2……至 t. 所求之面積 S 卽爲.

$$S=f(t_0)(t_1-t_0)+f(t_1)(t_2-t_1)+\cdots\cdots+f(f_{n-1})(t-t_{n-})\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

欲得面積之眞值. 則各較 t_1-t_0, t_2-t_1…… 須令近於其極限 0. 故可書之爲微分

$$t_1-t_0=dt_0;\quad t_2-t_1=dt_1\cdots\cdots\cdots\cdots t_n-t_{n-1}=dt_{n-1}.$$

由方程式(I)得

$$S=f(t_0).dt_0+f(t_1).dt_1+\cdots\cdots\cdots+f(t_{n-1})dt_{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

上式之右端爲各項之和.其式普通爲 $f(t)dt$ 其中 t 有由 t_0 至 t_{n-1} 之各值. 其和爲

$$S=\sum_{t}^{t_{n-1}}f(t).dt$$

此和非他. 由 *Fig.* 46 視之. 卽所求之面積也. 此面左右以 $f(t)$ 及 $f(t_0)$ 兩經坐標爲界.其所屬之緯坐標 t 及 t_0. 名爲變數 t 所及之兩界. 以積分號 $\int$ 代和數號 Σ. 則有達於極限之義. 書之爲

$$S=\int_{t}^{t} f(t)\,dt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{III})$$

此和名曰定積分(*Definite Integral*)因在其內t之值以t_0及t爲界.故不能有多解也.在茲所舉例中.所求定積分.卽爲汽車由t_0至t時愈行愈緩所經之路.

定積分之微分亦爲$f(t)dt$設時t增dt則面積S亦增dS. dS爲無窮小之面分.可作直方形視之.其面積$=f(t)\,dt$.

故
$$dS=f(t)\,dt$$

若求此方程式之積分.則所得者非定值.而爲無數之解.但以恆數C爲分別.但無數解之一.必爲所求之定積分.欲求定積分.先須知其恆數C.

按定義可列方程式

$$S=\int_{t}^{t} f(t)\,dt=F(t)+C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{IV})$$

式中$F(t)$爲所求之原函數.但C之值如何定法. C之值.可由極限定約得之.蓋令t之值愈小以至近其極限t_0.則面積亦將等於0.因汽車所行之路由t_0時量起也.故函數S必因$t=t_0$而爲0.卽得

$$S=F(t_0)+C=0$$

則
$$C=-F(t_0)$$

以此值代入方程式(IV)卽得

$$S=\int_{t}^{t} f(t)\,dt=F(t)-F(t_0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{V})$$

凡用積分算法.其初所得者.皆爲不定積分.於此可不必書其恆數 C.而於所求得原函數 $F(t)$ 之前畫一垂直線.名曰分界線.線之下端書低界 t_0 其上端書高界 t.如是則知所求之 $F(t)$ 當以其高界 t 書之.而由其內減 $F(t_0)$.即變數＝其低界 t_0 之函數也.

定積分之式可書之爲

$$S=\int_{t}^{t} f(t)\,dt = \Big|_{t_0}^{t} F(t) = F(t) - F(t_0) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(VI)}$$

凡不定積分中各定則.在定積分中.亦用以求原函數與前相同.惟須按題意以兩界之值代入.如上法.

§23. 平面圖之面積定法

練習題 170. 求三角形 ABC 之面積.其底爲 a 高爲 h.設想三角形以平行於底之直線.分作無數横條.其高命爲 dy 其寬命爲 x.各條相加即得三角形面積 S.變數 y 之值.由 0 以及 h.故積分之界爲 0 及 h.而得

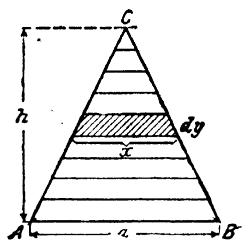


Fig. 47.

$$S=\int_0^h x\,dy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

在此方程式中 x 自亦爲變數.而爲 y 之函數.距 C 點爲 y 之底線 $DE=x$.由相似三角形 CDE 及 CAB ($Fig.$ 48).

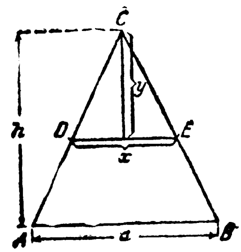


Fig. 48.

$x:a=y:h$. 故 $x=\frac{a}{h}y$ 以此值代入得

$$S=\int_0^h \frac{a}{h}y\,dy=\frac{a}{h}\int_0^h y\,dy \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$

積分之.得

$$S=\frac{a}{h}\Big|_0^h\frac{y^2}{2}=\frac{a}{2h}(h^2-0).$$

故三角形之面積爲 $S=\frac{ah}{2}$ ……………………………(III)

設有曲線求其所界之面

練習題171. 定一曲線及X軸與兩經坐標所界之面.名曰求面法(*Quadratur*).

以所求之面設想分作無數狹條.狹條之一.距軸系元點0爲x.其寬爲dx.其所屬之經坐標爲y.

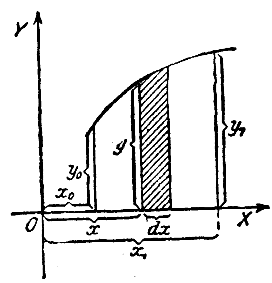


Fig. 49.

狹條之面積爲ydx.所求之面積S.爲各條之和.由x_0至x_1.因x_0爲屬於y_0之緯坐標.x_1爲屬於y_1之緯坐標而y_0及y_1爲面之兩界也.故

$$S=\int^{x_1}f(x)\,dx=\int^{x_1}y\,dx$$

在此方程式y之值.以x達出之.若反之欲令dx之值以y達出.則可以y_0及y_1爲界.所得結果自與上無異.

設有曲線及曲線上二點求二點間之曲線弧長

練習題172. AB弧設想分無數小弧分ds.弧分之一.其

端點 C 及 D.有緯坐標爲 x 及 $x+dx$.

由直角三角形CED.得

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

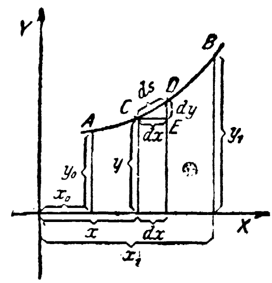


Fig. 50.

$\frac{dy}{dx}$ 可由曲線之方程式 $y=f(x)$ 算得.方程式(I)若求其積分.則得弧長 s.

$$s=\int ds=\int_{x_0}^{x_1}dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

設在(I)式中方根之前非 dx 而爲 dy 卽 $ds=dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ 則變其積分之界爲 y_0 及 y_1.卽

$$s=\int_{y_0}^{y_1}dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II}'\text{)}$$

(II),(II′)兩式.但擇其較便於用者用之.

拋物線求面法

練習題 173. 設有拋物線.其方程式以其上一點 P 之坐標 a 及 b 定之.求曲線及 X 軸與經坐標 b 所界之面.

拋物線之方程式.爲 $y^2=2px$(§3).P 點旣在拋物線上.故

$b^2=2pa$.　　由此式.得

$$\frac{b^2}{y^2}=\frac{a}{x}\text{ 卽 }y^2=\frac{b^2}{a}x\text{ 而 }y=\sqrt{\frac{b^2}{a}\cdot x}.$$

圖中有陰畫處.設想爲無限小之一面分.其距軸系元點 0 爲 x. 其面積爲 ydx. 由是得所求面積 S 之方程式.

$$S=\int_{x=0}^{x=a} y\cdot dx=\int_{0} ydx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

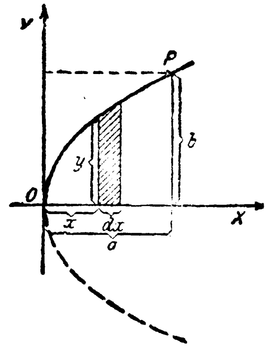


Fig. 51.

以上所算得 y 之值代入.則得

$$S=\int_{0} b\sqrt{\frac{x}{a}}dx=\frac{b}{\sqrt{a}}\int_{0} x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{b}{\sqrt{a}}\Big|_{0} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\cdots(\mathrm{II})$$

以界之值代入.則

$$S=\frac{b}{a}\left(\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-0\right)=\frac{b.a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}.\frac{2}{3}=\frac{-}{3}\ a.b \quad S=\frac{2}{3}a\cdot b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

故知拋物線之面積.爲以 a 及 b 爲二邊直方形面積之 $\frac{2}{3}$.此直方形名曰拋物線之外貼直方形.

若令 x 之值以 y 達出.所得結果亦同.拋物線之方程式.於此可書爲

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{2px}{2pa}=\frac{x}{a}.$$

微分之.得

$$\frac{2ydy}{b^2}=\frac{dx}{a}.\ 故\ dx=\frac{2a}{b^2}ydy.$$

以此值代 dx 於方程式(I)中.而變其界爲 b 及 0. 則得

$$S=\int_0^b y\frac{2a}{b^2}ydy=\frac{2a}{b^2}\int_0^b y^2dy=\frac{2a}{b^2}\Big|_0^b \frac{y^3}{3}.$$

代入界之值.得

$$S=\frac{2a}{b^2}\left(\frac{b^3}{3}-0\right)$$

$$S=\frac{2}{3}a\cdot b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

§24. 旋轉體之表面及其體面

175. 設一曲線.其方程式爲 $y=f(x)$.繞 Y 軸而轉一周.則成一旋轉體.求算其表面.

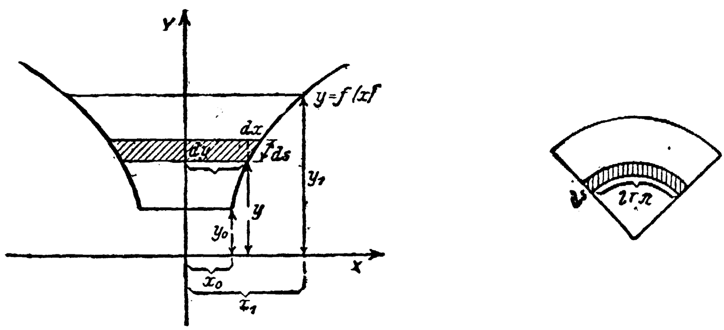


Fig. 52.

設想於旋轉體之表面.切出一無限狹細之環帶.直交於 Y 軸.(*Fig.* 52 中有陰畫之面)環帶之寬命爲 ds 長之弧分.弧分起點之坐標.命爲 x 及 y.環帶本體.可視作一尖錐截體目之.因 ds 可視爲直線也.

設將環帶切下.而展之於平面上.則成一玦形(不完全之環)其寬爲 ds.此玦形可作兩圓心角形之差觀之.其弧長爲 $2\pi x$ 命 ds 爲無限小.則玦形可用算直方形法算之.其面積命爲 ds.則 $ds=2\pi xds$.旋轉體之全表面.即可用積分法.得

$$S=\int 2\pi x ds.$$

ds 之值.可按練習題172.用 x 及 y 達出.

$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \text{ 或 } =dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

則得 $$S=2\pi\int x dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

至算其體積之法.亦與上相類.

Fig. 52 圓錐截體上下二界面.皆爲圓.下者其半徑爲 x.上者其半徑爲 $x+dx$.圓錐截體之高.爲 dy.其體積命爲 dv.

dv.必大於 $x^2\pi dy$ 但

小於 $(x+dx)^2\pi dy$

詳之.則得

$dv<x^2\pi dy+2\pi x dx dy+\pi dx^2 dy.$

上式右端第一項爲第一級無限小量.第二項爲第二級無限小量.第三項爲第三級無限小量.因各項爲相加數.故按§6.第二第三兩項.可對於第一項而略視之.由此得

$$dv=x^2\pi dy.$$

若以 y_0 及 y_1 爲界.則旋轉體之全體積爲

$$V=\int_{y_0}^{y_1} x^2\pi dy.$$

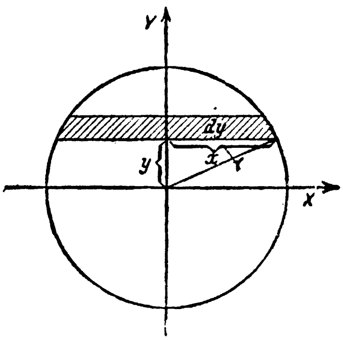


Fig. 53.

176. 設球之半徑爲 r.求其體積.

按 175.

$$dv=\pi x^2dy$$

半球之體積命爲 $\frac{v}{2}$. 其積分以 0 及 r 爲界. 則得

$$\frac{v}{2}=\int_0 \pi x^2dy$$

因 $x^2=r^2-y^2$ 故

$$\frac{v}{2}=\pi\int_0^r (r^2-y^2)\,dy=\pi\Big|_0\left(r^2y-\frac{y^3}{3}\right).$$

代入界之值

$$\frac{v}{2}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}-0+0\right)=\pi.\frac{2r^3}{3}.$$

故球之體積爲

$$V=\frac{4}{3}r^3\pi.$$

拋物線旋轉體體積之算法

(a) 令一拋物線繞一軸而轉. 則成一拋物線旋轉體 (*Fig.* 54) 體之底面半徑命等於 r. 其高爲 h.

設想由旋轉體直交於 X. 軸切下一無限狹之圓盤. 則其體積爲

$$dv=\pi y^2dx \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

x 爲所欲求其積分之變數. 其積分

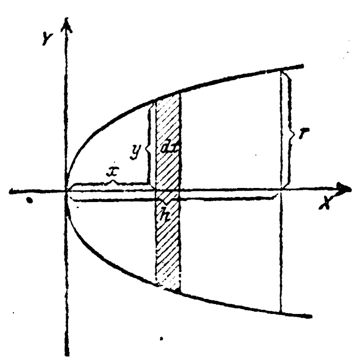


Fig. 54.

之界.應由0至h.故拋物線旋轉體之全體積爲

$$V=\int_0^h \pi y^2 dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

拋物線之方程式爲$y^2=2px$.由上圖得

$$y^2:r^2=x:h \text{ 故 } y^2=\frac{r^2}{h}\cdot x.$$

由是得

$$V=\int_0^h \frac{\pi r^2}{h}\cdot x dx=\frac{\pi r^2}{h}\Big|_0^h \frac{x^2}{2}$$

$$V=\frac{\pi r^2}{h}\left(\frac{h^2}{2}-0\right)=\frac{\pi r^2 h}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{III})$$

可知拋物線旋轉體之體積.爲其外貼圓柱體之半.

(b) 令拋物線非繞X軸.乃繞Y軸而轉.則成一漏斗形之體.其端面之半徑爲r.其高爲h ($Fig.$ 55).

依前題.以二變數x及y相換易.得

$$dv=\pi x^2.dy \cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{I})$$

及 $$V=\int_0^h \pi x^2 dy \cdots\cdots\cdots (\mathrm{II})$$

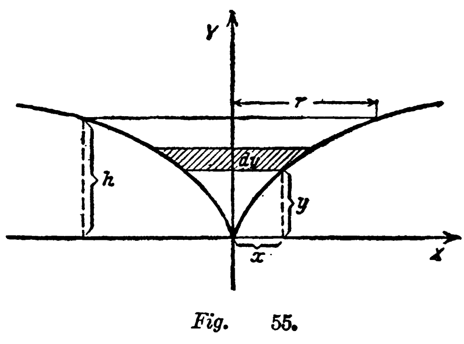


Fig. 55.

由拋物線方程式.得

$\frac{y^2}{h^2}=\frac{x}{r}$.自乘之得$\frac{y^4}{h^4}\cdot r^2=x^2$.以此值代入.則得

$$V=\int_0^h \pi \frac{y^4}{h^4}\cdot r^2 dy=\frac{\pi\cdot r^2}{h^4}\int_0^h y^4 dy.$$

解此積分方程式.而以界之值代入.則得

$$V=\frac{\pi r^2}{h^4}\Big|_0^h \cdot \frac{y^5}{5}=\frac{\pi r^2 . h}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(III)}$$

§ 25. 重心點定法

凡物體重心點.可按以下力學定理定之.

一物體之靜力羃.(*Statical Moment*).等於其體分靜力羃之和.

設有一面 S.求定其重心點 P. 上所述定理.無論力羃所關之軸若何.皆可.故其軸或爲 X.或爲 Y.皆相等也.重心點與二軸之距離.常以 n 及 ξ 代之.今試求重心點 P.與 X 軸之距離 n.設想 S 面任分作多分.如 S_1, S_2 及 S_3.各體分之重心點.命爲 P_1, P_2 及 P_3.其與 X 軸之距離設爲已知數 a, b 及 c.每一面之靜力羃等於面乘其重心點距離.故由上定理.以求 n 得方程式.

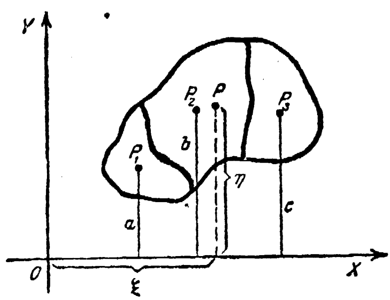


Fig. 56.

$$S.n=S_1a+S_2b+S_3.c$$

練習題 177. 求以上所述之法.定 *Fig.* 57 所示面之重心點.

此面可分爲二直方形.每直方形之重心點.皆在其兩對角線之交點.又可作一對稱軸分面作左右二等分.則所求之重心

點.亦必在此軸上.其與 X 軸之距離命爲 n. 兩直方形之各邊爲 b_1 與 h_1 及 b_2 與 h_2.

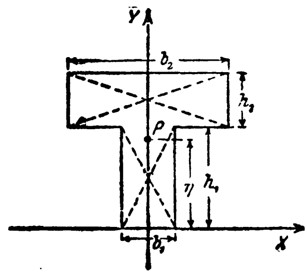


Fig. 57.

關乎 X 軸之力冪方程式如下.

$$(b_1.h_1+b_2.h_2)n=(b_1.h_1)\frac{h_1}{2}+(b_2h_2)\left(h_1+\frac{h_2}{2}\right).$$

此題簡易.可以不用積分算之.若以下各題.則非用積分算法不可.

拋物線形截面重心點之定法

練習題 178. 如 *Fiy.* 58 一拋物線形截面.其終端之半徑爲 b. 高爲 a. 其重心點爲 P. 求定 P 之坐標 n 及 ξ. 設想此面分作無限細之條.如圖有陰畫處所示.

每一條皆可目之爲直方形.其面積等於 ydx. 有陰畫之條.其重心點距 Y 軸爲 $x+\frac{dx}{2}$. 全拋物線形面.按練習題 173 方程式 III. $S=\frac{2}{3}a.b$. 故其關乎 Y 軸之力冪方程式.爲

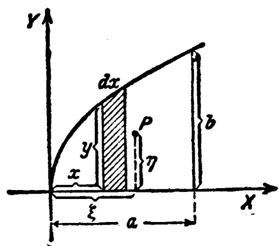


Fig. 58.

$$\frac{2}{3}a.b.\xi=\int_0 ydx\left(x+\frac{dx}{2}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

因 ξ 爲所求重心點 P 之距離.而算變數 x 之積分由 0 至 a. 則所以令各條面分俱相加也.

由方程式(I).去其括弧,則積分號下爲$x.y.dx+y\cdot\frac{dx^2}{2}$.第二項爲第二級無限小量.故可對於第一項之第一級無限小量而略視之.則得

$$\frac{2}{3}a.b.\xi=\int_0 x.\,y.\,xd \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{II})$$

以練習題 173 所已知之值 $y=b\sqrt{\frac{x}{a}}$ 代入(II)則得

$$\frac{2}{3}a.\,b.\,\xi=\int_0\frac{b.x^{\frac{1}{2}}.dx}{a^{\frac{1}{2}}}=\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}\int_0 x^{\frac{3}{2}}.dx=\frac{b}{a^{\frac{1}{2}}}\Big|_0\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}.$$

代入界之值.得

$$\frac{2}{3}.\,a.\,b\,\xi=\frac{b.a^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}.\frac{2}{5}.$$

由是得

$$\xi=\frac{3}{5}a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})$$

同例.若用關乎 X 軸之力冪方程式則可求得重心點 P 之經坐標 2.

$$\frac{2}{3}.\,a.\,b.\,n=\int_0 ydx\frac{y}{2}.$$

按練習題 173 $\quad y=\frac{b^2}{a}x$ 故

$$\frac{2}{3}a.\,b.\,n=\frac{1}{2}\int_0\frac{b^2}{a}x\,dx=\frac{b^2}{2a}\Big|_0\frac{x^2}{2}=\frac{b^2a}{4}.$$

由是得

$$n=\frac{b^2.a.3}{8.a.b}=\frac{3}{8}b.$$

抛物線形全面之重心點.

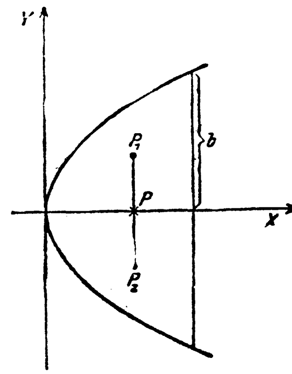


Fig. 59.

抛物線形全面.爲上所論截面相等二個相合而成.故其重心點(1)必在二截面之對稱軸上.(2)必在二截面重心點P_1及P_2之聯線上.(Fig 59).但二截面之對稱軸.卽抛物線之軸.故所求全面之重心點P.卽爲抛物線軸與P_1P_2聯線之交點.

半圓形之重心點

練習題 179. 半圓形有一對稱軸.半圓之重心點必在是軸上.故但求n卽可以定其重心點之所在矣.於此又將半圓分作無數條.直交於Y軸.其寬命爲$2x$其高爲dy.按力羃定理.得

$$\frac{\pi r^2}{2}.n=\int_0^r 2xdy.\,y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

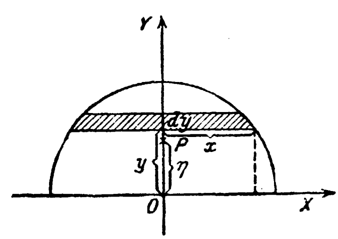


Fig. 60.

因 $x^2+y^2=r^2$.微分之得

$2xdx+2ydy=0$.卽 $ydy=-xdx$ 以此代入(I).則得

$$\frac{\pi r^2}{2}\cdot n=\int_r^0 -2x^2dx.$$

所以顚倒二界者.因x在X軸上爲$=r$最大值.若順Y軸爲

向上.則x之值愈減以至於0.但若於此.變負號爲正號而又換易其二界.則積分之值仍無所變.故

$$\frac{\pi r}{2}\cdot n=2\int_0 x^2dx=2\Big|_0\frac{x^3}{3}=\frac{2}{3}r\,.$$

由是得 $n=\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{4}$ 爲重心點與 X 軸之距離.

§26. 惰性冪之定法

設想任意形之面分作無數面分.則惰性冪(*Moment of Inertia*)之關乎任一軸 AB.卽爲各面分 ds 與其與軸之距離平方相乘之和.每一面分與其與軸之距離平方相乘 $=Z^2ds$.卽可命爲該面分之惰性冪.全面之惰性冪 J 以積分術算之.卽

$$J=\int z^2dS$$

惰性冪之延闊爲 $[cm^4]$

命一形面之最外緣與軸(中立線)之距離爲 e_{max}.則 $\frac{J}{e_{max}}$ 名爲該形面之阻力冪(*Moment of resitance* 英 *Widerstandsmoment* 德)其延闊爲 $[cm^3]$

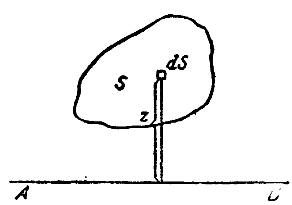


Fig. 61.

惰性冪可按以下定理算之.設面 S 關乎重心軸(卽重心所經過之軸)之惰性冪 $=J_s$ 而關乎平行於重心軸而相距以 e 之軸者 $=J$ 則必 $J=J_s+e^2S$ (*Fig.* 62).

證 面分 dS 與重心軸之距離命爲 z.與他軸之距離命爲 Z_1.則 $J_s=\int z^2dS$ 又 $J=\int z_1{}^2dS$.

但 $z_1=e+z$　但 $z_1=e+z$ 則

$$J=\int(e+z)^2dS$$

$$J=\int e^2dS+\int 2ez\,dS+\int z^2dS$$

$$=e^2\int dS+2e\int z\,dS+\int z^2dS$$

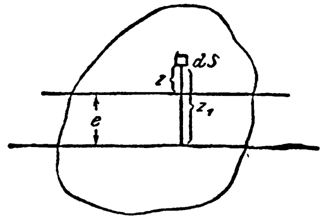


Fig. 62.

因 $e^2\int dS=e^2S$ 故 $\int z^2dS=J_s$　$2e\int z\,dS=0$. 因 $\int z\,dS$ 非他.乃面之惰性冪關乎重心軸者也.重心點之距重心軸自 $=0$.

直方形關乎重心軸之惰性冪

練習題 180. 今於面上取平行於重心軸無限細之條爲面分.所以如是者.因每如是條又分作無數小面分.其與重心軸之距離.同爲 y 也.因 y 在每一條上爲不變數.故每一條之惰性冪.即爲各小面分惰性冪之和.而其因數 y^2 可推而置之於積分號之前.而得 $y^2\int dS=y^2S$. 式中 S 爲每條之面.全直方形之惰性冪.即爲

$$J_s=\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}y^2.b.dy=b\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}y^2dy=b\left|\frac{y^3}{3}\right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}}$$

$$J_s=\frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3-\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]=$$

$$\frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{3}+\frac{h^3}{8}\right)=\frac{bh^3}{12}$$

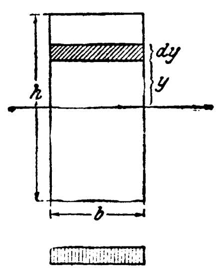


Fig. 63.

直方形之阻力冪 $W=\frac{J_s}{y_{max}}$ 式中 y_{max} 爲距重心軸之最外距

離.在此即 $=\frac{h}{2}$. 故 $W=\frac{bh^2}{6}$.

若求直方形關乎底線之惰性冪.則得

$$J=J_s+S.\left(\frac{h}{2}\right)^2=\frac{bh^3}{12}+b.\,h.\,\frac{h^2}{4}=\frac{bh^3}{3}.$$

設 $b=14cm$ 而 $h=30cm$. 則 $J_s=31500\,cm^4$ 而 $W=2100\,cm^3$.

三角形之惰性冪

練習題 181. 關乎過三角形之尖點而平行於其底之一軸. AA' ($Fig.$ 64.)

分三角形爲無限細條.平行於其底.條之一如圖中陰畫所示者.其長爲 x. 寬爲 dy.

每條之惰性冪爲

$$y^2x\,dy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

由是得三角形之惰性冪爲

$$J=\int_0^h y^2x\,dy \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$

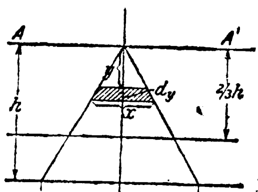


Fig. 64.

由 $Fig.$ 64. 得 $\frac{x}{a}=\frac{y}{h}$ 或 $x=\frac{}{h}y$. 故得

$$J=\int_0^h y^2\frac{a}{h}.\,y.\,dy=\frac{a}{h}\int_0^h y^3\,dy$$

$$J=\frac{a}{h}\int_0^h\frac{y^4}{4}=\frac{ah^4}{h.4}$$

故關乎AA'軸得 $J=\frac{ah^3}{4}$.

若關乎重心軸.則命

$$J_s=J-e^2S$$

其中 $$e=\frac{2}{3}h,\ S=\frac{ah}{2}.$$

代入式內.則得

$$J_s=\frac{ah^3}{4}-\frac{4}{9}h^2.\frac{ah}{2}=\frac{1}{36}ah^3.$$

又關乎三角形之底a.則

$$J=J_s+e^2S=J_s+\left(\frac{h}{3}\right)^2.S$$

$$J=\frac{1}{36}a\,h^3+\frac{h^2}{9}.\frac{ah}{2}=\frac{1}{12}ah^3.$$

附　卷

前§§1至26.於微積術要事.已盡之矣.玆附卷所錄.或爲法理.或屬命題.皆與前兩卷所論者.彼此關連.惟其非最要而不可缺之學識.然學者於讀竟前二卷後.且兼讀之.則其裨益.亦非淺.故錄之於附卷.

附§2及§3. 軸系換易法及極軸系

由舊軸系而換一新軸系.有時亦頗屬緊要.蓋軸系雖可任意取用.而每一曲線.則欲令其得最便易之位置也.

玆舉雙曲線之方程式以爲例(參照§3. *Fig* 14): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

今令軸系元點不變.而轉軸系成a角.新軸系之二軸以η及ξ代之以別於前者.

P點之坐標關乎舊軸系者爲x, y.關乎新軸系者爲ξ, η.則按*Fig* 64.

可即得

$$x=\xi\cos a-\eta\sin a$$

$$y=\xi\sin a+\eta\cos a$$

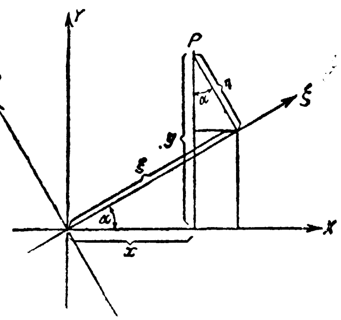


Fig 65.

設有等邊雙曲線.其漸近線與X軸及Y軸以45°相交.則按上法.可將雙曲線改算之.令其坐標爲關乎漸近線者.命上二公式中$a=45°$.則得

$$x=\xi\sqrt{\frac{1}{2}}-\eta\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$y=\xi\sqrt{\frac{1}{2}}+\eta\sqrt{\frac{1}{2}}$$

由是得: $x+y=2\xi\sqrt{\frac{1}{2}}$ 及 $x-y=-2\eta\sqrt{\frac{1}{2}}$.

按§3.等邊雙曲線之方程式為 $x^2-y^2=a^2$.

即 $(x+y)(x-y)=a^2$. 又 $(x+y)(x-y)=\left(2\xi\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(-2\eta\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-2\xi\eta$ 故 $-2\xi\eta=a^2$.即為等邊雙曲線以漸近線為軸系者之方程式.§2 *Fig* 2.所示之曲線以表 *Mariotte* 定律者.即為此種雙曲線之一部分.蓋命 $\xi=p$. 命 $\eta=v$ 及 $\frac{\quad}{2}=1$.則得 $p\cdot v=1$ 也. *Fig* 65 中之新軸系.若係向右轉而成者.則 $2\xi\eta$ 之符號.變為正.

正交軸系之理.本於兩平行線系.又有他系.與此相類.惟極軸系.則本於同心圓系及直線系由圓心射出者.每一點皆以其與圓心距離 r 及其與 X 軸之交角 ϕ 定之 (*Fig.* 66).故 P_1 點之坐標為 r_1, ϕ_1. P_2 點之坐標為 r_2, ϕ_2 $(\phi_2=1)$.至正交軸[*]系及極軸系之間.則有以下之關係.觀於圖可自明.

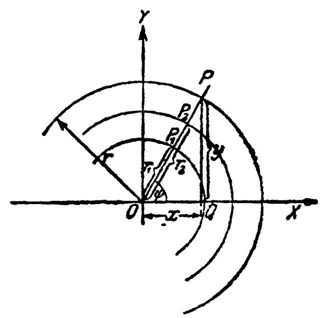


Fig. 66..

1　$x=r\cos\phi$; $y=r\sin\phi$

2.　$x+y^2=r^2$

---

[*] 即經緯軸系

附 §3. 橢圓及雙曲線之公共方程式. 立空軸系

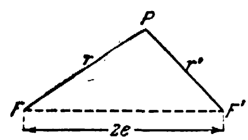
茲設一題.令一點P動.而其與兩定點F及F'距離之和或較.則常不變.求P點所行之曲線.設P點與二定點F及F'之距離.爲r及r'.r與r'雖爲變數.而其和或較則爲恆數.例如$=2a$.但兩距離之較.可爲負數.故$+2a$有時須以$-2a$代之.故合論之.須求得一方程式.可以包括此種定約者.即:$r\pm r'=\pm 2a$.詳論之.則可析爲下四定約方程式.

$$r+r'-2a=0 \qquad (a)$$

$$r-r'-2a=0 \qquad (b)$$

$$r-r'+2a=0 \qquad (c)$$

$$r+r'-2a=0 \qquad (d)$$



$r+r'=2a$.
Fig. 67.

今欲合四方程式之定約而爲一方程式.必此方程式同時可合乎四定約者.欲此方程式合乎四定約.必此四定約同時爲此方程式之解.

上a至d四式若以其左端.彼此相乘.則所得之積.亦常等於0.故四定約之公共方程式爲:

$$(r+r'-2a)(r+r'+2a)(r-r'-2a)(r-r'+2a)=0.$$

由是得:

$$[(r+r')^2-4a^2][(r-r')^2-4a^2]=0.$$

即:

$$(r^2-r'^2)^2-8a^2(r^2+r'^2)+16a^4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

欲設一軸系.其元點在 FF' 之中點.又命 F 與 F' 之距離 $=2e$ 而以坐標達出 r 及 r' 之值.如 *Fig* 68. P 點之坐標爲 x, y. 則

$$r'^2=(x+e)^2+y^2$$

$$r^2=(e-x)^2+y^2$$

由是得:

$$r^2+r'^2=2(x^2+y^2+e^2)$$

$$r^2-r'^2=-4ex$$

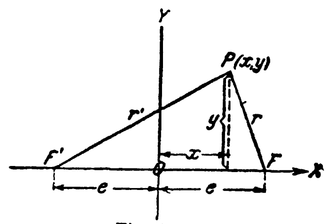


Fig. 68.

以此值代入方程式(1)而變其式.則得:

$$16\left[(a^2-e^2)x^2+a^2y^2-a^2(a^2-e^2)\right]=0.$$

以 $a^2(a^2-e^2)$ 推置於括弧之前.則得:

$$16a^2(a^2-e^2)\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right]=0$$

以 $16a^2(a^2-e^2)$ 除兩端.則

$$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}-1\right]=0.$$

有時 $16a^2(a^2-e^2)$ 亦可 $=0$ (若 $a=e$. 則 $a^2-e^2=0$. 在 *Fig* 67. 遇此情形.則 P 點落於 AB 直線上).但此無關切要.可置不論.以後但假設 a 常大於或小於 e 耳.故得一方程式爲橢圓及雙曲線所公共者.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1.$$

橢圓者.一動點 P 與二定點 F 及 F' 距離之和常相等之軌迹也.雙曲線.一動點 P 與二定點 F 及 F' 距離之較常相等之軌迹也.

橢圓與雙曲線在公共方程式之別.可以三角形之理例之如下:

三角形兩邊之和.常大於第三邊.

即: $$r+r'>2e$$

兩邊之較.常小於第三邊.

即: $$r-r'<2e$$

1. 若$2a>2e$.則$2a$但能爲兩距離之和故得一橢圓:

$$r+r'=2a.$$

$r+r'=-2a$爲不合理.因二邊之和.不能爲負也.

2. 若$2a<2e$.則$2a$但能爲兩距離之較.故得雙曲線:

或 $$\left.\begin{aligned} r-r'&=+2a \\ r-r'&=-2a \end{aligned}\right\}$$

(兩距離之較.可以爲負也.)

以$a^2-e^2=b^2$代入公共方程式.則得橢圓之方程式:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

在雙曲線$e^2>a^2$.故a^2-e^2爲負值.代入.即得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

立空解析幾何略論

欲定一點在空中之位置.則設一軸系於立空中.最便者用正角軸系.　正角軸系.爲三平面以正角相交於三直線.　三直線相交於一點.此點亦即三平面之交點.名曰軸系元點.以0誌

之.

三直線名曰軸.以X, Y及Z別之.三平面名曰交軸面.別之為XY面. YZ面.及XZ面. 欲定空中任一點P之位置.則可設想過P點作三平面.各與一交軸面平行.如是則成一直方體. 直方體之三隅A,B,C各在一軸上. 設A,B,C三點之位置已定.則P點之位置亦定. A, B, C三點之位置.以其與元點之距離x, y, z定之.故P點亦可以此三量定之.

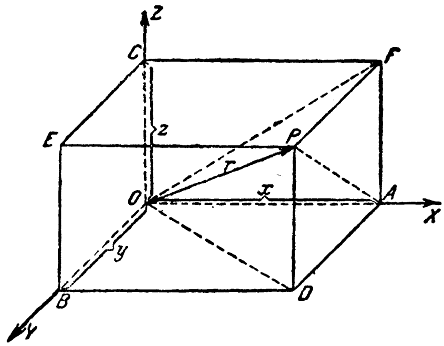


Fig. 69.

x, y, z名曰P之坐標. 欲求其解無二致.則又以正負別其方向.如圖中箭端方向所示. 欲畫P點之位置.不必畫軸系全圖.但先於XY平面上以x, y定D點.乃由D點作一垂線等於z.其端點即所求之點P也. D點亦名P點於XY平面上之投影(*Projection*).又A, B, C亦可名為P點於三軸上之投影.

設有一點P.其坐標x, y, z為已知者.求P點與元點0之距離r.

三角形OAD.於A為直角.故

$$\overline{OD}^2=x^2+y$$

三角形ODP.於D為直角.故

$$r^2=\overline{OD}^2+\overline{OP}^2$$

$DP=z$ 故: $$r^2=x^2+y+z$$

卽　　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

設有一點P.其坐標x,y,z爲已知者.求P點與元點O聯線與三軸之交角.

舉一例如:　$cos\gamma=\pm\sqrt{1-cos^2\alpha-cos^2\beta}$.

附§5. e及e^y級數之展法

§5. 2下所展e之級數.今以與下所列級數.

$$1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1\cdot2}+\frac{y^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{y^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots$$

相較.　此級數之值爲e^y.若命$y=1$.則上級數變爲e之級數.若$y=0$則$e^0=1$.故可知此級數之合乎理.

欲詳證之.則試再舉一他級數.

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot2}+\frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$$

命此級數爲$f(z)$而y之級數爲$f(y)$以二級數式相乘則得

$$f(y)\cdot f(z)=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1\cdot2}+\frac{y^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots(f(y)\text{ 乘以 }1)$$

$$+\frac{z}{1}+\frac{y\cdot z}{1}+\frac{y^2z}{1\cdot2}+\cdots\left(\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\frac{z}{1}\right)$$

$$+\frac{2}{1\cdot2}+\frac{z^2y}{1\cdot2}+\cdots\left(\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\frac{z^2}{1\cdot2}\right)$$

$$+\frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots\left(\text{,,}\quad\text{,,}\quad\text{,,}\quad\frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}\right)$$

$$f(y)\cdot f(z)=1+\frac{y+z}{1}+\frac{y^2+2yz+z^2}{1\cdot2}$$

$$+\frac{y^3+3y^2z+3z^2y+z^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$$

故得

$$f(y)\cdot f(z)=1+\frac{y+z}{1}+\frac{(y+z)^2}{1\cdot 2}+\frac{(y+z)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

與上之級數無所異.惟以$y+z$代y耳.

此結果以方程式達出之.卽:

$$f(y)\cdot f(z)=f(y+z)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)名曰函數方程式.命$z=-y$.則:

$$f(-y)\cdot f(y)=f(-y+y)=f(0)=e^0=1$$

而 $$f(-y)=\frac{1}{f(y)}.$$

命 $y=1$ 而 $z=m-1$. 則

$$f(1)\cdot f(m-1)=ef(m-1)$$

因$f(1)=e$也. $e\cdot f(m-1)$又可代之以$ef(1)\cdot f(m-2)$

則得$e^2f(m-2)$.如是例推.則得:

$$f(m)=e^m\cdot f(m-m)=e^m\cdot f(0)=e^m\cdot 1.$$

反而令$m=y$.則可以證原級數

$$f(y)=e$$

爲不誣.y無論爲正爲負.爲整爲分爲理爲劇.俱合.

附§10.用級數展法求指數函數及對數之微商

函數$y=e^x$之微商茲更用他法求之.

已知:

$$y=e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

(見上附款)

$$y+\Delta y=e^{x+\Delta x}=e^x e^{\Delta x} \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

$e^{\Delta x}$ 之值.以其級數

$$1+\frac{\Delta x}{1}+\frac{(\Delta x)^2}{1\cdot 2}+\frac{(\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots$$

代之.則

$$y+\Delta y=e^x\left[1+\frac{\Delta x}{1}+\frac{(\Delta x)^2}{1\cdot 2}+\frac{(\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\right]\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(II)}$$

由此式減(I)則得

$$\Delta y=e^x\left[\frac{\Delta x}{1}+\frac{(\Delta x)^2}{1\cdot 2}+\frac{(\Delta x)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\right]$$

由是得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=e^x\left[\frac{1}{1}+\frac{\Delta x}{1\cdot 2}+\frac{(\Delta x)^2}{1\cdot 2\cdot 3}\right]\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(III)}$$

令 Δx 爲無限小.則得

$$lim\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=e^x\cdot\frac{1}{1}=e$$

用級數可以作 $y=e^x$ 之曲線. *Fig.* 70.卽示一指數曲線.任取一曲線點 P.其坐標爲 x, y.在此點所作之切線 PB 與 X 軸相交以 ϕ 角.切線及經坐標 y 所截 X 軸一段 S.名曰次切線(*Subtangent*).

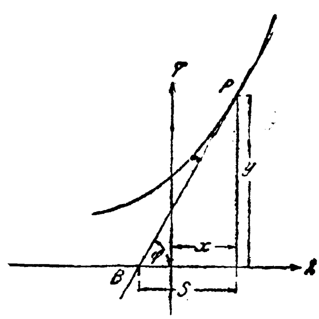


Fig. 70.

由圖中直角三角形.

$$tan\phi=\frac{y}{S}.$$

又按 §8 切線之值.亦爲 $tan\phi=\frac{dy}{dx}$.故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{S}.$$

但指數曲線之方程式爲$y=e^x$.其微商爲

$$\frac{dy}{dx}=e^x=y$$

故 $y=\frac{y}{S}$ 卽次切線 $S=1$. 由是知指數曲線有一特別之性狀.卽其次切線常等於1也.而指數曲線因 x 之增所以甚峻者.亦以此故.

已知$y=log_e x$爲$x=e^y$之反函數.故由此已知$y=log_e x$爲$x=e^y$之反函數.故由此可以逕求對數之導數.若$x=e^y$則按前:

$$\frac{dx}{dy}=e^y=x$$

因微商者非他.卽一商數之極限值也.故

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x}$$

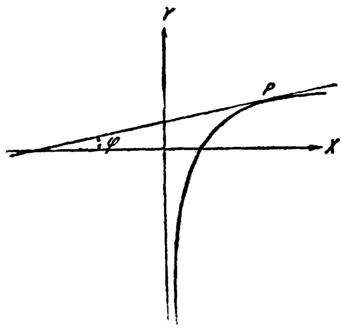


Fig. 71.

解釋之.則如何? 命$x=\infty$.則微商之值爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\infty} \text{ 卽 } =0.$$

此義非他.卽謂 x 愈增 (*Fig.* 71).則對數之曲線愈陞而切線對於X軸之傾斜愈弱.故曲線必漸漸平迤.

今再據§5以研究*Brigg*對數.命$y=logx$.則 $10^y=x$.而 $\frac{dx}{dy}=10^y\, log_e 10\cdot\frac{dx}{dx}=x\, log_e\, 10$.由是得$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\, log_e 10}$(如§10).$\frac{1}{log_e 10}$之值.前已求得$m=\frac{1}{log_e 10}=0{,}43429$. 今借對數表爲助以求較之變轉爲微

商之狀況.

命以下各值.

	550	540	530	520	510	501
爲	$x+\Delta_1 x$	$x+\Delta_2 x$	$x+\Delta_3 x$	$x+\Delta_4 x$	$x+\Delta_5 x$	$x+\Delta_6 x$

其相當之各 y 值爲

$$y+\Delta_1 y \quad y+\Delta_2 y \quad y+\Delta_3 y \quad y+\Delta_4 y \quad y+\Delta_5 y \quad y+\Delta_6 y$$

則得

$y+\Delta_1 y=2,74036$ 爲 550 之對數

及　$y=2,69897$ „ 500 „ „ „

故　$\Delta_1 y=0,04139$ „ 50 „ „ „

$\Delta_2 y, \Delta_3 y$ …… 依同法命 $\Delta_2 x=40, \Delta_3 x=30$ …… 求之.

則得

$$\Delta_1 y=0,04139 \quad \frac{\Delta_1 y}{\Delta_1 x}=\frac{0,04139}{50}=0,00083.$$

$$\Delta_2 y=0,03342 \quad \frac{\Delta_2 y}{\Delta_2 x}=\frac{0,03342}{40}=0,00083.$$

$$\Delta_3 y=0,02531 \quad \frac{\Delta_3 y}{\Delta_3 x}=\frac{0,02531}{30}=0,00084.$$

$$\Delta_4 y=0,01703 \quad \frac{\Delta_4 y}{\Delta_4 x}=\frac{0,01703}{20}=0,00085.$$

$$\Delta_5 y=0,00860 \quad \frac{\Delta_5 y}{\Delta_5 x}=\frac{0,00860}{10}=0,00086.$$

$$\Delta_6 y=0,00087 \quad \frac{\Delta_6 y}{\Delta_6 x}=\frac{0,00087}{1}=0,00087.$$

微商之眞值.由公式算之.亦至小數五位爲止.得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0,43429}{x}=\frac{0,43429}{500}=0,00087.$$

較之商.常漸卽於此值.$\Delta x=1$.則較之商與微商之差已小於 $\frac{5}{10^6}$

學者可更就以下各數

$$x=800, x+\Delta_1 x=890\cdots\cdots 870, 850, 830, 810, 805, 801.$$

而算其微商

其眞值爲 $\frac{dy}{dx}=\frac{0,43429}{800}=0,00054.$

附 § 23. 橢圓及雙曲線中心角形之面積

練習題 182. 求橢圓象限之面積.

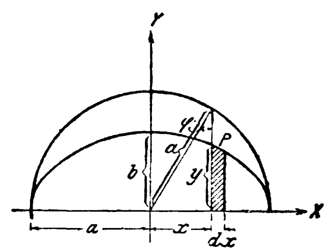


Fig. 72.

橢圓之二半軸命爲 a 及 b (參照§3)曲線上一點 P 之坐標爲 x, y. 分曲線爲無限狹之條. 每條之面積爲 ydx.

橢圓之方程式爲.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由此得

$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

所求之面積 S 卽爲

$$S=\int_0 ydx=\int_0 b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

由 $Fig. 72$ 得

$$x=a\sin\phi,\ 故\ dx=a\cos\phi d\phi$$

則得

$$S=b\int\sqrt{1-sin^2\phi}\;acos\phi d\phi=ab\int cos^2\phi d\phi.$$

積分號內.既有角之函數.則其界亦須改變. x應由0變至a.若$x=asin\phi$ 則 $sin\phi=\frac{x}{a}$爲變數.

令 $x=0$, 則 $\phi=0$, 令 $x=a$, 則 $sin\phi=\frac{a}{a}=1$. 卽 $\phi=\frac{\pi}{2}$.

故變數ϕ之界爲由0至$\frac{\pi}{2}$.

$$S=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2\phi d\phi=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+cos2\phi}{2}d\phi.$$

$$S=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi+cos2\phi d\phi=\frac{ab}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\phi+\frac{sin2\phi}{2}.$$

$$S=\frac{ab}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{sin\pi}{2}-0-0\right).$$ 因 $sin\pi=sin180°=0$ 故.

$S=ab\frac{\pi}{4}$. (參觀後附三角函數公式表) 橢圓之全面爲其象限之四倍.卽 $E=a\cdot b\cdot\pi$.

練習題 183. 設有等邊雙曲線.其半軸 $OC=1$.求中心角形 OAA'之面積.(*Fig.* 73).

等邊雙曲線之方程式爲 $x^2-y^2=1$ (因 $a^2=1$) 今欲求算式之簡易.故以極坐標代正交軸坐標.(見附 § 2). A 及 A' 二點之坐標.命爲γ與α, 及γ與$-\alpha$.如是則

$y=\gamma\cdot\sin\alpha,\ x=\gamma\cdot\cos\alpha.$

而等邊雙曲線之方程式變爲

$$\gamma^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=1$$

或 $\gamma^2=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$ ………… (I)

(參照三角函數公式表)

命 OAA' 之面積 $=\phi$ (圖中陰畫所示者).即中心角爲 2α 之中心角形面積也.欲求 ϕ 須先任取一曲線而研究其與極坐標所界之面.

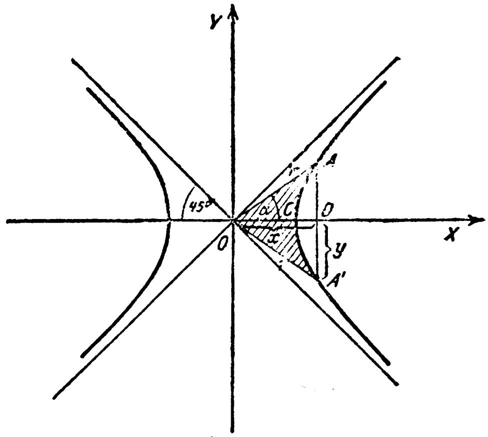


Fig. 73.

Fig. 74. AA_1 爲任取之曲線 A_1 之坐標爲 γ_1,β, A 之坐標爲 γ,α.令 α 增 $d\alpha$.則 γ 增 $d\gamma$.而成一無限小之三角形 OBA.其面積按正弦定律算之爲 $\frac{1}{2}\gamma(\gamma+d\gamma)\cdot\sin(d\alpha)$.若合一切無限小三角形之面積.以 $\alpha=\beta$ 至 $\alpha=\alpha$ 爲界.則其和爲 $OAA_1=\phi$ 之面積.

故

$$\phi=\int_{\alpha=\beta}^{\alpha=\alpha}\frac{1}{2}\gamma(\gamma+d\gamma)\cdot\frac{\sin(d\alpha)}{d\alpha}d\alpha\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

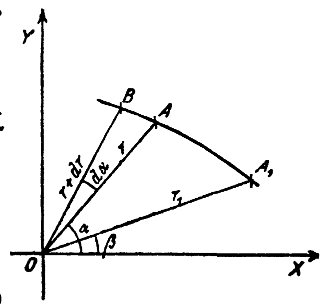


Fig. 74.

因 $d\alpha$ 爲無限小量.故 $d\alpha$ 之正弦代以其弧亦可.即

$$\frac{\sin(d\alpha)}{d\alpha}=\frac{d\alpha}{d\alpha}=1.$$

由是得

$$\phi=\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\gamma\,(\gamma+d\gamma)\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}(\gamma^2.d\alpha+\gamma.d\gamma.d\alpha).$$

上式括弧中爲一第一級無限小量.與第二級無限小量相加者.故第二級無限小量.可對於第一級而略視之.即得

$$\phi=\frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha}\gamma^2.d\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

以此式用之於本題.以算OAA'中心角形之面積$=\phi$.則

$$\phi=\frac{1}{2}\int_{\alpha=-\alpha}^{\alpha=+\alpha}\gamma^2.\,d\alpha=\int_{0}^{\alpha}\gamma^2.\,d\alpha.$$

因以$-\alpha$與$+\alpha$爲界而量其面.與以O與α爲兩次而量其面.所得結果無異也.

因雙曲線之極坐標方程式爲

$$\gamma=\frac{1}{cos2\alpha},$$

故
$$\phi=\int_{0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{cos2\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

但

$$cos2\alpha=sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=2\,sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

(參照三角函數公式表 *No* 26).故得

$$\phi=\int_{0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{2.\,sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$$

上式右端.分母分子俱以 $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+a\right)$ 除之則得

$$\phi=\int_0^{\alpha}\frac{\dfrac{da}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}}{2\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}}=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{\dfrac{d\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}$$

微分號內所以可以加入 $\frac{\pi}{4}$ 者，因恆數之微分常為0.即 $d\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=da$ 也。

$$\phi=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{d\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)},\text{ 因 } d\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=\frac{d\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}\text{ 也。}$$

由是得

$$\phi=\frac{1}{2}\Big|_0^{\alpha}\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

代入界之值.得

$$\phi=\frac{1}{2}\left[\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+0\right)\right]$$

因 $\tan\frac{\pi}{4}=\tan 45^\circ=1$ 而 $\log_e 1=0$. 故

$$\phi=\frac{1}{2}\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{VI})$$

按三角函數公式表 No. 10

$$\tan(45^\circ+a)=\frac{1+\tan a}{1-\tan a}$$

以此值代入(VI)式.而又以 $\tan a=\frac{y}{-}$ (視 Fig. 73)。

$$\phi=\frac{1}{2}log_e\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}=\frac{1}{2}\ log_e\ \frac{x+y}{x-y}.$$

上式分母分子俱以$x+y$乘之.則分母變爲 x^2-y^2 卽 $=1$ 由是得

$$\phi=\frac{1}{2}\ log_e(x+y)^2 \text{ 或}$$

$$\phi=log_e(x+y)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(VII)}$$

若更欲由此式以x及y作爲ϕ之函數算之.則命$x+y=e^\phi$.

附 § 25. 半球體及旋轉拋物線體之重心點

練習題 184. 欲算體之重心點.則立一關乎一平面之靜力冪方程式.

體之靜力冪.爲其容積與其重心點距一平面之長相乘之積.

半球之容積按練習題.176 爲

$$\frac{2}{3}\pi r^3.$$

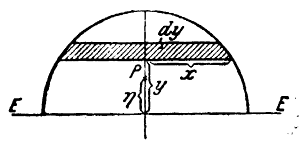


Fig. 75

設想半球體分作無數圓盤.平行於其底面.$Fig.$ 75.有陰畫處示此圓盤之一.其半徑命爲x.其距平面 $E-E$ 爲 y.其厚爲dy.

圓盤之容積 $=\pi\cdot x^2\cdot dy$.故得靜力冪方程式(按力冪定理):

$$\frac{2}{3}\ \pi\ r^3\cdot\eta=\int_0^r\pi\cdot x^2\cdot dy\cdot y$$

式中η爲半球重心點與 $E-E$之距離.又因$x^2=r^2-y^2$.代入.則得

$$\frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \eta = \pi \int_0 (r^2-y^2)\,y\,dy = \pi \Big|_0 \left\{\frac{r^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\right\} = \frac{\pi r^4}{4}.$$

由是得 $\eta = \frac{3}{8}r.$

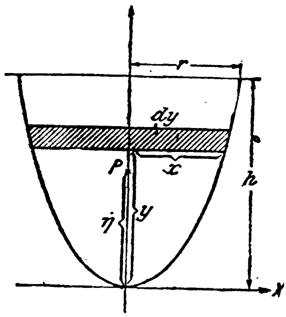


Fig. 76.

練習題185. 按上同一法. 求 *Fig.* 76. 旋轉體之重心點.

旋轉體之容積. 已見 § 24. 得

$$\eta = \frac{2}{3}h.$$

附 § 26. I 字鐵之惰性羃及阻力羃又圓及半圓之惰性羃及阻力羃

練習題186. 已知] 字及 I 字鐵之大小. 求定其惰性羃與阻力羃.

由 *Fig.* 77. 得

$$J_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 a\,dy - \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} y^2 b\,dy = a \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{y^3}{3} - b \Big|_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \frac{y^3}{3}.$$

$$J_s = \frac{ah^3 - bh_1^{\,3}}{12}$$

$$\frac{y^3}{3} - b \Big|_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \frac{y^3}{3}$$

$a = 14\,cm$

$b = 11{,}5cm$ $\qquad$ 得 $\qquad J_s = 16526cm^4$

$h_1 = 25{,}0cm$ $\qquad\qquad W = 1102cm^3$

$h = 30{,}0cm$

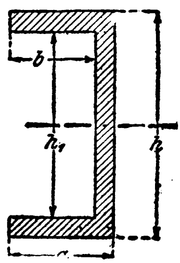


Fig. 77.

由 $Fig.78.$ 得

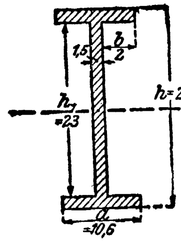


Fig. 78.

$$J_s=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 a dy-2\int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} y^2 \frac{b}{2} dy.$$

得　$J=6300cm^4$

$W=485cm^3$

求 T 字鐵關乎重心線之惰性冪及阻力冪.

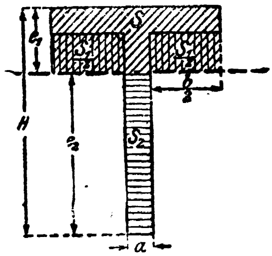


Fig. 79.

由 $Fig.79.$ 得

$$Js=Js-Js_1+Js_2$$

e_2 爲重心與 X 軸之距離. 由 § 25 所述之法求之. 既知 e_2. 則 e_1 及 h 亦可得

$$a=1,5\,cm$$

$$b=13,5\,cm$$

$$d=2,0\,cm$$

$$H=20,0\,cm$$

得　$J=2159cm^4,\quad W=\dfrac{2159}{e_2}cm^3$

練習題. 187. 求定圓及半圓之惰性冪及阻力冪.

$$J_s=\int_{-r}^{+r} y^2 z dy.$$

$$y = r\sin\phi$$

$$dy = r\cos\phi\, d\phi$$

$$z = 2r\cos\phi$$

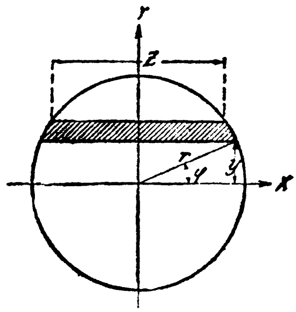


Fig. 80.

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2\phi \cdot 2\cos\phi \cdot r\cos\phi \cdot d\phi$$

$$J = 2r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi \cos^2\phi\, d\phi$$

公式:

1. $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$ $\qquad J = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\phi}{4\cos^2\phi} \cos^2\phi\, d\phi$

$$\sin\phi = \frac{\sin 2\phi}{2\cos\phi}.$$

$$\sin^2\phi = \frac{\sin^2 2\phi}{4\cos^2\phi} \qquad J = r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\phi\, d\phi.$$

---

2. $\sin^2\phi = \frac{1-\cos 2\phi}{2}$

$$\sin^2 2\phi = \frac{1-\cos 4\phi}{2} \qquad J = \frac{r^4}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\phi)\, d\phi.$$

3. $\int \cos 4\phi = \frac{1}{4} \sin 4\phi \quad J = \frac{r^4}{2} \int_0^{\overline{2}} d\phi - \int_0^{\overline{2}} \cos 4\phi d\phi$

$$J = \frac{r^4}{2} \Big|_0^{\overline{2}} \phi - \frac{1}{4} \Big|_0^{\overline{2}} \sin 4\phi$$

$$J = \frac{r^4}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\pi \right).$$ 因 $\sin 2\pi = 0$. 故

$$J = r^4 . \frac{\pi}{4} = d^4 \frac{\pi}{64} = 0{,}0491 d^4$$

$$W = r^4 \frac{\overline{4}}{r} = r^3 . \frac{\pi}{4} = d^3 . \frac{\pi}{32} = 0{,}0982 d^3.$$

若求半圓之惰性冪及阻力冪.則按練習題179.重心點之距離 $\eta = \frac{4}{3} . \frac{r}{\pi}$

$$J_s = \frac{J}{2} - \eta^2 S$$

$$J_s = r^4 \frac{\pi}{8} - \frac{16}{9} \frac{r^2}{\pi^2} . \frac{r^2 \pi}{2}$$

$$= r^4 \frac{\pi}{8} - r^4 \left(\frac{16}{9\pi^2} . \frac{\pi}{2} \right)$$

$$J = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) = 0{,}108 r^4 = 0{,}00675 d^4$$

$$W = \frac{r^4 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{9\pi} \right)}{r - \frac{4r}{3\pi}} = 0{,}0235 d^3$$

公式表

三角函數公式

	0°	90°	$180^\circ=\pi$	270°	$360^\circ=2\pi$
正弦	0	$+1$	± 0	-1	∓ 0
餘弦	$+1$	± 0	-1	∓ 0	$+1$
正切	0	$\pm\infty$	∓ 0	$\pm\infty$	∓ 0
餘切	∞	± 0	$\mp\infty$	± 0	$\mp\infty$

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$

3. $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\tan\alpha}.$

4. $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

5. $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.\qquad 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}.$

6. $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$

7. $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$

8. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta.$

9. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$

10. $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$

11. $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$

12. $\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

13. $\cot\alpha \pm \cot\beta = \dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

14. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

15 $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

16. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

17. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos\alpha = \cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

18. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad \cos\alpha = 1 - 2\sin\dfrac{\ }{2}$.

19. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad \cos\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1$.

20. $\sin\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\cos^2\alpha)}$.

21. $\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}$.

22. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

23. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

24. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

25. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

26. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$.

27. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a.$

28. $\tan\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\cot a$

29. $\cot\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\tan a.$

微分公式

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad u=\frac{du}{dx},$$ 餘例推.

1. $y=u+v-w$	$y'=u'+v'-w'.$
2. $y=C$(恆數)	$y'=0.$
3. $y=Cu$	$y'=Cu'.$
4. $y=u.v$	$y'=vu'+uv'.$
5. $y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{vu-uv}{v^2}.$
6. $y=x$	$y'=n.x^{n-1}$
7. $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}.$
8. $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$y=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$
9. $y=\log_e x$	$y'=\frac{1}{x}$
10. $y=a\log x$	$y'=\frac{1}{x\log_e a}.$
11. $y=a$	$y'=a^x\log_e a.$
12. $y=e$	$y'=e^x.$
13. $y=\sin x$	$y=\cos x.$

14. $y=\cos x$　　$y=-\sin x.$

15. $y=\tan x$　　$y=\dfrac{1}{\cos^2 x}.$

16. $y=\cot x$　　$y=-\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

17. $y=\arc\sin x$　　$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

18. $y=\arc\cos x$　　$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

19. $y=\arc\tan x$　　$y=\dfrac{1}{1+x^2}.$

20. $y=\arc\cot x$　　$y=-\dfrac{1}{1+x^2}.$

21. $y=\log_e(x+\sqrt{1+x^2})$　　$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

22. $y=\dfrac{1}{2}\log_e\dfrac{1+x}{1-x}$　　$y=\dfrac{1}{1-x^2}.$

23. $y=\log_e\sin x$　　$y'=\cot x.$

24. $y=\log_e\cos x$　　$y=-\tan x.$

25. $y=\log_e\tan\dfrac{x}{2}$　　$y=\dfrac{1}{\sin x}.$

26. $y=\log_e\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$　　$y=\dfrac{1}{\cos x}.$

積分公式

1. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \log_e x + C,\quad \int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \log_e (x) + C.$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,\quad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C.$

4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

5. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+x}{1-x} + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \log_e (x + \sqrt{a+x^2}) + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

10. $\int \tan x dx = -\log_e \cos x + C.$

11. $\int \cot x dx = \log_e \sin x + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \log_e \tan \frac{x}{2} + C.$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \log_e \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$

16. $\int e^x dx = e^x + C.$

中華民國十六年三月初版
中華民國二十一年十一月國難後第一版

（三〇一七）

算學叢書 簡要實用微積術一冊
Differential-Und Integralrechnung

每冊定價大洋壹元肆角
外埠酌加運費匯費

原著者 F. Kohlrausch
譯述者 李協
發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

大四一二上