Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 19

Übungsaufgaben

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Aufgabe 19.1.*

Gibt es eine reelle Zahl, die in ihrer vierten Potenz, vermindert um das Doppelte ihrer dritten Potenz, gleich dem Negativen der Quadratwurzel von 42 ist?

Aufgabe 19.2. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade}, \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade}, \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 19.3. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3, 3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Durchschnittssteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 19.4. Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt und es gelte

$$f(a) = g(a) \text{ und } f'(x) = g'(x) \text{ für alle } x\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) = g(x) \text{ für alle } x \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 19.5.*

Es seien

$$f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 19.6.*

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion, die mit der Diagonalen zwei Schnittpunkte $P \neq Q$ besitze. Zeige, dass der Graph der Ableitung f' einen Schnittpunkt mit der durch $y = 1$ definierten Geraden besitzt.

Aufgabe 19.7.*

Es sei

$$f(x) \,=\, x^3 + x - 1.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im reellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 19.8. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine auf einem offenen Intervall definierte stetig differenzierbare Funktion und sei $a \in I$ ein Punkt mit $f'(a) \neq 0$. Zeige, dass es offene Intervalle $J \subseteq I$ mit $a \in J$ und $J' \subseteq \mathbb{R}$ derart gibt, dass die eingeschränkte Funktion $f\colon J \to J'$ bijektiv ist.

Aufgabe 19.9.*

Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ lokale Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Intervalle unterteilen lassen, auf denen abwechselnd f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 19.10.*

Es sei I ein reelles Intervall,

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte $f'(a) = 0$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $f''(a) > 0$ ist, so besitzt f in a ein isoliertes lokales Minimum.
(2) Wenn $f''(a) < 0$ ist, so besitzt f in a ein isoliertes lokales Maximum.

Aufgabe 19.11.*

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 19.12. Die Stadt $S = (0,0)$ soll mit den beiden Städten $T = (a,b)$ und $U = (a,-b)$ mit $a \geq 0, b > 0$ durch Schienen verbunden werden. Dabei sollen die Schienen zunächst entlang der x-Achse verlaufen und sich dann in die beiden Richtungen verzweigen. Bestimme den Verzweigungspunkt, wenn möglichst wenig Schienen verlegt werden sollen.

Aufgabe 19.13. An einen geradlinigen Fluss soll ein rechteckiges Areal der Fläche $1000 m^2$ angelegt werden, dessen eine Seite der Fluss ist. Für die drei anderen Seiten braucht man einen Zaun. Mit welcher Zaunlänge kann man minimal auskommen?

Aufgabe 19.14. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{2x-3}{5x^2-3x+4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 19.15.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine n-fach stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die n-te Ableitung überall positiv ist. Zeige, dass f maximal n Nullstellen besitzt.

Aufgabe 19.16. Führe die Details im Beweis zu Satz 19.8 aus.

Aufgabe 19.17. Begründe den Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Aufgabe 19.18. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I,\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I,\mathbb{R}) \longrightarrow \text{Abb}\,(I,\mathbb{R}),\, f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

Aufgabe 19.19. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^3-4x^2+x+6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 19.10).

Aufgabe 19.20. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{x^2+x}$$

im Punkt -1.

Aufgabe 19.21.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 19.22. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}} .$$

Aufgabe 19.23.*

Beweise die Regel von l'Hospital unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Nennerfunktion überall differenzierbar und die Ableitung keine Nullstelle besitzt, mit Hilfe der linearen Approximierbarkeit.

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

Aufgabe 19.24. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.25. (3 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f\colon [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

Aufgabe 19.26. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f\colon\ D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraphen.

Aufgabe 19.27. (4 Punkte)

Es sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m - n| = 1$ ist.

Aufgabe 19.28. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 19.29. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt 1.

Aufgabe 19.30. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 19.24 entspricht (die natürlichen Zahlen sind dabei als endliche Ziffernfolgen im Zehnersystem zu verstehen).

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Die Weihnachtsaufgabe

Aufgabe 19.31. (10 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 19.24 entspricht. Unter einem *Zykel* von f der Länge n verstehen wir ein $x \in \mathbb{N}$ derart, dass $f^n(x) = x$ (f^n bezeichnet die n-te Hintereinanderschaltung von f mit sich selbst) und $f^i(x) \neq x$ ist für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Besitzt f Zykel der Länge $n \geq 2$?

Abbildungsverzeichnis