Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 16

Übungsaufgaben

Aufgabe 16.1. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Aufgabe 16.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2 \cdot \exp\left(x^3 - 4x\right).$$

Aufgabe 16.3. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 16.4.*

Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion über ihre Potenzreihen (Satz 16.1).

Aufgabe 16.5. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 16.6. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin(\cos x)\,.$$

Aufgabe 16.7. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto (\sin x)(\cos x).$$

Aufgabe 16.8. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto (\sin x)^n.$$

Aufgabe 16.9. Es sei $\sum_{n=0}^\infty c_n(x-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 16.10.*

Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

streng wachsend ist.

Aufgabe 16.11.*

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgabe 16.12. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgabe 16.13. Zeige, dass die reelle Tangensfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$$

und die reelle Kotangensfunktion eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

induziert.

Aufgabe 16.14. Es sei

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion und

$$g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion.

a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ wieder periodisch ist.

b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ nicht periodisch sein muss.

Aufgabe 16.15. Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige periodische Funktion. Zeige, dass f beschränkt ist.

Aufgabe 16.16. Bestimme die Ableitungen von Arkussinus und Arkuskosinus.

Aufgabe 16.17.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 16.18.*

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x) = \pi^x + x^e.$$

Aufgabe 16.19.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

a) Untersuche das Monotonieverhalten dieser Funktion.

b) Zeige, dass diese Funktion injektiv ist.

c) Bestimme das Bild von f.

d) Man gebe die Umkehrfunktion auf dem Bild zu dieser Funktion an.

e) Skizziere den Funktionsgraphen von f.

Aufgabe 16.20.*

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 16.21. Diskutiere den Funktionsverlauf von

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}.$$

Bestimme insbesondere das Monotonieverhalten, Extrema von f, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und ebenso für die Ableitung f'.

Aufgabe 16.22. Skizziere die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin \frac{1}{x}.$$

Aufgabe 16.23. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist. Ist der Graph dieser Funktion „zeichenbar“?

Aufgabe 16.24. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 16.25. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 16.26.*

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} := \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 16.27. Zeige, dass die Folge

$$x_n := \sin n$$

nicht konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.28. (3 Punkte)

Bestimme die linearen Funktionen, die tangential zur Exponentialfunktion sind.

Aufgabe 16.29. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x.$$

Aufgabe 16.30. (4 Punkte)

Es seien

$$f_1, f_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2. Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

Die folgende Aufgabe soll ohne Bezug auf die zweite Ableitung gelöst werden.
Aufgabe 16.31. (4 Punkte)

Bestimme die Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin x + \cos x.$$

Aufgabe 16.32. (5 Punkte)

Wir möchten $\pi/2$ möglichst genau als kleinste Nullstelle des Kosinus mit Hilfe der Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

und der Intervallhalbierung des Zwischenwertsatzes (im Sinne von Verfahren 11.3) bestimmen. Dabei haben wir das Problem, dass der Kosinus numerisch nicht exakt berechnet werden kann, da er ja unendlich viele Summanden besitzt. Deshalb verwenden wir die Idee, als n-te Approximation y_n für $\pi/2$ die untere Intervallgrenze der n-ten Intervallhalbierung (des Ausgangsintervalls $[1,2]$) für die Nullstelle der abgeschnittenen Kosinusreihe $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ zu verwenden (man macht also eine zunehmend feinere Intervallschachtelung einer zunehmend besseren Approximation der Kosinusfunktion)

Man entwerfe ein Computer-Programm (Pseudocode), das die Folgenglieder y_n berechnet und nacheinander ausdruckt.

• Der Computer besitzt beliebig viele Speicher, die rationale Zahlen enthalten können.

• Die natürlichen Zahlen liegen in einer Datenbank bereit (diese müssen also nicht erzeugt werden).

• Er kann einen Speicherinhalt in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann die rationalen Rechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division durch eine Zahl $\neq 0$) ausführen und das Ergebnis in einen weiteren Speicher schreiben.

• Er kann Speicherinhalte der Größe nach vergleichen und davon abhängig zu Programmzeilen springen.

• Er kann Speicherinhalte und vorgegebene Texte ausdrucken.

(Wir behaupten nicht, dass diese Methode eine gegen $\pi/2$ konvergente Folge liefert).

Aufgabe 16.33. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7