緒言

此講義錄ノ材料ハ本院平日ノ課業及ヒ臨時ノ講習ニ於テ講師ガ學生ニ授クル所ノ講義ト殆ント同様ノモノナリ而シテ其目的ハ中學校卒業生ノ数學科補習或ハ師中兩校教員数學檢定試驗等ノ參考ニ充ツルニ在リ．

且ツ從來我邦ニ於テハ数學ノ諸學科ヲ連貫シテ記載セル数學書ニ乏シキカ故ニ他ノ專門學科ニ從事スル者ガ往々数學ヲ獨修セントスルニ當リ不便ヲ生スルコ少ナカラス故ニ此講義錄ハ前ノ目的ノ他ニ此等ヲ便利ニ供センコヲ圖リテ編纂セシモノトス．

依テ算術代数學幾何學ヲ最初ノ三卷トシ漸次ニ高等数學ニ及ホシ以テ諸學科ヲ連貫セル数學書ノ講義錄トナサンコヲ期セリ

而シテ此最初ノ三卷ニ於テ算術ハ全體ヲ講述シ代數學ハ此例ノ終迄及ヒ幾何學ハ平面全體ヲ記載セリ今ヤ此三卷ヲ出版スルニ當リ此ニ一言ス.

東京數學院ニ於テ

上 野 清

平面幾何學目次

第叁編──比例

(目次終)

平面幾何學講義

緒　論

1. 点(*Point*) トハ位置アリテ大サナキモノヲイフ.

点ハ○ヲ以テ顯ハシ其傍ラニ羅馬字ヲ置キテA点,B点等ト呼ブ.

2. 線(*line*) トハ位置,長サアリテ厚サ及ビ巾ナキモノヲイフ.

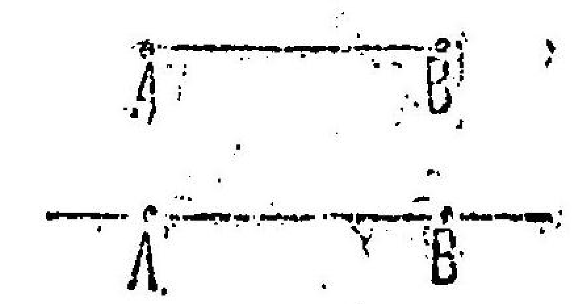
線ノ端及ビ二線ノ交處ハ点ナリ,何トナレバ線ハ厚サ及ビ巾ナキヲ以テ壹線ノ端及ビ二線ノ交處ハ位置アレ𪜈大サナケレバナリ.

直線(*Straight line*) 壹線上ノ任意ノ二点ヲ固定スレバ其線ノ位置又從ツテ固定スルトキ其線ヲ直線トイフ.

例ヘバ土瓶ノ鉉ノ如ク二点ヲ固定スルモ其線ノ位置固定セザルモノハ直線ニアラズ.

直線ハ其長サ無限ナリ,而シテ直線ノ一部分ハ有限直線トイフ.

有限直線ヲ示スニハ其兩端ヲ示セル二文字ヲ以テシ無限直線ヲ示スニハ其上ノ任意ノ二文字ヲ以テス. 例ヘバ次ノ圖ノ直線ハAB直線トイフ.



曲線(*Curved line*) 壹線ノ何レノ部分モ直線ナラザルトキ其線ヲ曲線トイフ.

3. 表面或ハ**面**(*Surface*) トハ位置,長サ巾ヲ有スレ圧厚サナキモノヲイフ.

面ノ界及ビ貳面ノ交リハ線ナリ.

平面(*Plane*) トハ面ノ壹種ニシテ其上ノ何レノ二点ヲ過グル直線モ恒ニ其面ニ密着スルモノヲイフ.

曲面(*curved Surface*) トハ面ノ壹種ニシテ何レノ部分モ平面ナラザルモノヲイフ.

4. 立体(*Solid*) トハ位置,長サ巾厚サヲ有スルモノヲイフ.

立体ノ界ハ面ナリ.

5. 圖形 トハ点,線,面,立体若クハ其聚リヲイフ.

平面圖形 トハ平面上ニアル点,線若クハ其聚リヲイフ.

6. 幾何學(*Geometry*) ハ數學ノ壹科ニシテ圖形ノ性質ヲ研究スル學科ナリ,而シテ平面圖形ノ性質ヲ論ズルモノヲ平面幾何學(*Plane Geometry*)トイヒ初等平面幾何學ニ於テハ,点直線及ビ圓形ニノミ關スル性質ヲ論ズ,而シテ平面圖形以外ノ諸圖形ヲ論ズルモノハ之レヲ立体幾何學(*Solid Geometry*)トイフ.

幾何學ニ於テハ吾人ガ平生ノ經驗ニヨリテ眞ナリト認メタル事柄(之レハ公理トイヘルモノニシテ次ノ 9. 章ニ明カナリ)及ビ定義(之レハ次ノ 8. 章ニ明カナリ)ヲ基礎トシ夫レヨリ次第ニ推理シテ他ノ眞理ヲ發見スルナリ.

其推理ノ方法ハ勿論正確嚴正ナラザルベカラズ故ニ幾何學ヲ修習スルニハ少シク論理學ニ用ユル言語等ヲ知ルヲ要ス,次ニ之レヲ示サン,但シ 14. 章ヨリ 21. 章マデハ第壹編第壹節ヲ讀ミシ後ヲ熟讀スルモ可ナリ.

7. 設題(*Proposition*) トハ壹事項ノ陳述ヲイフ.

例ヘバ「幾何學ハ圖形ノ性質ヲ論ズル學問ナリ」「東京ハ日本ノ

首府ナリ」等ハ設題ナリ.

設題ヲ分チテ定義,公理,定理,推論,公法,問題,ノ六種トナス,次ニ之レヲ示ス.

8. 定義(*Definition*) 或ル語ノ定義トハ其語ノ意義ヲ定ムル所ノ設題ヲイフ.

例ヘバ幾何學ハ圖形ノ性質ヲ研究スル學科ナリトイヘル設題ハ幾何學ナル語ノ意義ヲ定ムルモノニシテ即チ幾何學ナル語ノ定義ナリ.

9. 公理(*Axiom*) トハ吾人ガ平生ノ經驗ニヨリテ眞ナリト認メタル設題ヲイフ.

公理ヲ分チテ貳トナス幾何公理及ビ普通公理之レナリ但シ幾何公理ハ幾何學ニノミ關スル公理ニシテ普通公理ハ如何ナル量ニモ適合スル公理ナリ.

幾何學ニ於テ屢々用ユル公理ヲ次ニ示ス

(*a*) 全量ハ其部分ヨリ大ナリ.

例ヘバ b, c, d 等ガ a ノ部分ナレバ $a>b,\ a>c,\ a>d$ ナリ.

(*b*) 全量ハ其部分ノ和ニ等シ.

例ヘバ b, c, d ガ a ノ部分ナレバ $a=b+c+d$ ナリ.

(*c*) 壹ツノ量ニ等シキ所ノ貳量ハ相等シ.

例ヘバ $a=c,\ b=c$ ナレバ $a=b$ ナリ.

(*d*) 相等シキ貳量ノ各ニ他ノ等シキ量ヲ加フレバ其和ハ相等シ

例ヘバ $a=b,\ c=d$ ナレバ $a+c=b+d$ ナリ.

(*e*) 相等シキ貳量ノ各ヨリ他ノ相等シキ量ヲ減ズレバ其差ハ相等シ.

例ヘバ $a=b,\ c=d$ ナレバ $a-c=b-d$ ナリ.

(*f*) 相等シカラザル貳量ノ各ニ相等シキ量ヲ加フレバ其和ハ等シカラズ,而シテ大ナル方ヘ加ヘタル和ハ他ノモノヨリ大ナリ

例ヘバ $a>b,\ c=d$ ナレバ $a+c>b+d$ ナリ.

(g) 等シカラザル二量ノ各ヨリ相等シキ量ヲ減ズレバ其差ハ等シカラズ,而シテ大ナル方ヨリ減セシ差ハ他ノモノヨリ大ナリ.

例ヘバ $a>b$, $c=d$ ナレバ $a-c>b-d$ ナリ.

(h) 相等シキ量ノ各ヲ某數丈ケ倍セシモノハ相等シ.

例ヘバ $a=b$ ナレバ $a\times m=b\times m$ ナリ,但シ m ハ任意ノ整數若クハ分數ナリ.

10. 定理(*Theorem*) トハ已ニ眞ナリト決定セル所ノ設題ニヨリテ証明シ得タル第二ノ設題ナリ.

11. 推論(*Corollary*) 即チ或ル定理ノ推論トハ其定理ヨリ容易ニ推究シ得ベキ設題ヲイフ.

12. 公法(*Posturate*) トハ作法自ラ明カナル所ノ作圖題ナリ.

18. 問題(*Probrem*) トハ所要ノ圖ヲ作ルベキ幾何學上ノ方法ヲ求ムル設題ナリ.

14. 定理之二部分 凡ヘテノ定理ハ假設及ビ終決ノ貳部分ヨリ成ル.

假設(*Hypotheses*) トハ已知ノモノトシテ假定シタルモノヲイフ.

終決(*Conclusion*) トハ假設ヨリ起リ成ルベキ事實ナリ.

(本章ノコトハ尙次ノ章ト參照シテ理會スベシ).

15. 定理之摸範(*Typical Theorem*) 定理ハ凡ヘテ次ノ(1)ノ形式ニ歸セシムルヿヲ得ルナリ.

例ヘバ甲ヲ「壹直線」トシ乙ヲ「他ノ壹直線ノ上ニ立ツ」トシ,丙ヲ「其二直線ガナス貳隣角ノ和」トシ,丁ヲ「貳直角ニ等シキモノ」トスレバ(1)ハ「壹直線ガ他ノ壹直線ノ上ニ立ツナラバ其二直線ガナス貳隣角ノ和ハ貳直角ニ等シキモノナリ」トナリテ即チ34.章定理トナルガ如シ.

而シテ(1)ナル定理ニ聯關シテ他ノ三個ノ定理アリ即チ(2),(3),(4)

之レナリ但シ「甲ガ乙ナレバ」「丙ガ丁ナラザレバ」等ハ假設ニシテ「丙ハ丁ナリ」「甲ハ乙ナラズ」等ハ終決ナリ.

甲ガ乙ナレハ　丙ハ丁ナリ　(1)

甲ガ乙ナラザレバ　丙ハ丁ナラズ　(2)

丙ガ丁ナレバ　甲ハ乙ナリ　(3)

丙ガ丁ナラザレバ　甲ハ乙ナラズ　(4)

16. 對定理(*Contrapositive*) 甲乙定理アリテ甲ノ假設ノ裏[但シ或語ノ裏トハ其語ヲ打チ消シタルモノニシテ例ヘハ「東京ヘ行ク」ノ裏ハ「東京ヘ行カヌ」ニシテ「甲ガ乙ナリ」ノ裏ハ「甲ガ乙ナラズ」又「甲ガ乙ナラズ」ノ裏ハ「甲ガ乙ナリ」ナルガ如シ]ヲ乙ノ終決トシ,甲ノ終決ノ裏ヲ乙ノ假設トセル片此貳定理ハ互ヒニ對定理ヲナストイフ.

故ニ前章ノ(1),(4)両定理ハ互ヒニ對定理ヲナス即チ(1)ハ(4)ノ,(4)ハ(1)ノ對定理ナリ,又(2)(3)両定理モ亦互ヒニ對定理ヲナス.

對定理之眞否 壹ノ定理ガ眞ナレバ其對定理モ眞ナリ.

例ヲ設ケテ之レヲ説明セン,例ヘバ

砂糖ナル物ハ.(假設)其味甘シ.(終決)　(甲)

ナル定理ガ眞ナリトスル片ハ味ガ甘クナキモノハ果シテ何物ナルヤハ判然セザレ圧兎ニ角砂糖ニアラザルヿ明カナリ,故ニ

味ガ甘クナキ物ハ.(假設)砂糖ナラズ.(終決)　(乙)

ナル定理ハ眞ナリ,而シテ此(乙)ナル定理ハ甲ナル定理ノ對定理ナリ.

故ニ壹ツノ定理ガ眞ナレバ其對定理ハ眞ナリトイフヿヲ得ルナリ.

17. 逆定理(*Convers*) 甲乙二個ノ定理アリテ甲ノ終決ハ乙ノ假設ニシテ,甲ノ假設カ乙ノ終決ナル片ハ此貳定理ハ互ヒニ逆定理ヲナストイフ.

故ニ 15. ノ(1)ト(3)ハ互ヒニ逆定理ヲナス即チ(1)ハ(3)ノ(3)ハ(1)ノ逆定理ナリ,又(2)ト(4)モ亦互ヒニ逆定理ヲナス.

逆定理之眞否. 壹定理カ眞ナルモ其逆定理ハ眞ナラザルヿアリ,例ヘハ

砂糖ナル物,(假設)ハ其味甘シ.(終決)　(一)

ナル定理カ眞ナルモ其逆定理カ即チ

味カ甘キ物ハ,(假設)砂糖ナリ.(終決)

ハ眞ナラズ但シ甘キ物ハ砂糖ノミニ限ラザレバナリ.

斯ノ如ク壹定理カ眞ナルモ其逆定理カ眞ナラザルヿアリ,故ニ逆定理ノ眞ナルヤ否ヤハ別ニ講究セザルベカラズ.

18. 裏定理.(*Obvers*) 甲乙二個ノ定理アリテ甲ノ假設ノ裏ヲ乙ノ假設トシ,甲ノ終決ノ裏ヲ乙ノ終決トセルヰ,此貳定理ハ互ヒニ裏定理ナリトイフ.

故ニ 15. ノ(1)(2)ナル両定理ハ互ヒニ裏定理ヲナシ,又(3)(4)両定理亦互ヒニ裏定理ヲナス.

19. 複假設. 時トシテハ定理ノ假設ハ複雜ナルヿアリ,此ノ如キモノハ次ノ形式ニ變セシムルヿヲ得ルナリ

$\left.\begin{array}{l}\text{甲カ乙}\\\text{丙カ丁}\end{array}\right\}$ ナレバ戊ハ己ナリ.

上ノ如キ定理ノ逆定理ハ假設ノ壹個ト終決トヲ交換セルモノニシテ,即チ次ノ貳定理ハ孰レモ上ノ定理ノ逆ナリ,

$\left.\begin{array}{l}\text{甲カ乙}\\\text{戊カ己}\end{array}\right\}$ ナレバ丙ハ丁ナリ.

$\left.\begin{array}{l}\text{戊カ己}\\\text{丙カ丁}\end{array}\right\}$ ナレバ甲ハ乙ナリ.

而シテ此ノヰニ於テ互ヒニ逆定理ヲナス所ノ二定理ノ眞否ノ關係ハ 17. ニ於テ論セシモノト異ナルヿナシ.

20. 轉換法(*Rule of conversion*) トハ次ノ如シ,
證明ヲ經タル壹部ノ定理アリテ,其假設ハ起リ得ベキ凡ヘテノ場合ヲ盡シ,其終決ハ相異ナルヰハ,其定理ノ逆ハ凡ヘテ眞ナリ

例ヲ設ケテ之レヲ說明セン,例ヘバ

$a>b$ ナレハ $c=d$ ナリ.　(1)

$a=b$ ナレバ $c<d$ ナリ.　(2)

$a<b$ ナレバ $c>d$ ナリ.　(3)

ナル三個ノ定理ハ已ニ其眞ナルヿヲ證明シ得タルモノニシテ其假設ハ起リ得ベキ凡テノ場合ヲ盡セリ即チ a ト b トヲ比較スルヿニ就テハ $a>b$ カ,$a=b$ カ,$a<b$ カノ中ニシテ此ノ外ニ起リ得ヘキヿナシ,又終決ハ相異ナリ居ルナリ.

此ノヰハ上ノ三定理ノ各ノ逆ハ凡ヘテ眞ナリ.

今試ミニ(1)ノ逆カ眞ナルヿヲ次ニ證セントス,

若シ $a>b$ ナラザレハ,$a=b$ トナルカ然ラザレハ $a<b$ トナル,而シテ $c<d$ トナルカ然ラザレハ $c>d$ トナリ,決シテ $c=d$ トナラズ,故ニ

$a>b$ ナラザレバ $c=d$ ナラズ.

ハ眞ナリ,故ニ此終リノ定理ノ對定理即チ

$c=d$ ナレハ $a>b$ ナリ.

ハ眞ナリ,而シ之レハ(1)ノ逆ナリ.即チ(1)ノ逆定理ハ眞ナリ.

同シ法ニテ(2)(3)ノ各ノ逆モ眞ナルヿヲ知リ得ル.

21. 同壹法(*Rule of Identity*) ハ次ノ如シ.

茲ニ唯壹ツノ甲,及ビ唯壹ツノ乙アリテ,「甲ハ乙ナリ」トイヘル定理ガ眞ナルヰハ,其逆定理即チ「乙ハ甲ナリ」トイヘル定理ハ眞ナリ.

例ヘハ日本首府トイヘルヿハ世界中唯一ツ,又東京トイヘル場所モ世界中只一ツニシテ「日本ノ首府東京ナリ」ナル事實ガ眞ナレバ「東京ハ日本ノ首府ナリ」トイフヿハ間違ナキヿナルガ如シ,

〔注意〕 轉換法及ビ同壹法ハ或ル壹ツノ定理ノ逆ヲ證セントスルヰニ當リテ必用ナルモノナリ.故ニ再三熟讀スルヲ要ス.

第　壹　編

直　　線

幾何公理

22. 公理　(1)　全ク重子合ハシ得ベキ量ハ相等シ.

(2)　二点ヲ過ギテ直線ヲ引クコトヲ得,而シテ其只壹個ニ限ル.而シテ又有限直線ハ双方ニ引長スルヲ得.

公論(2)ヨリ容易ニ次ノ如ク推理スルヲ得.

(a)　壹直線ヲ他ノ壹直線上ニ重子初ノ直線上ノ壹点ヲ,後ノ直線上ノ任意ノ壹点ノ上ニ置クコトヲ得.

(b)　相交ル貮直線ハ唯一個ノ交点ヲ有スルノミ.

何トナレハ其二直線ガ若シ貮個ノ交点ヲ有スルトスレバ,二点ヲ過ギテ貮直線ヲ引キ得ルコトナル,而シテ之レハ理ニ合ハズ,故ニ相交二直線ハ只一個ノ交点ヲ有スルノミ.

第　壹　節—壹点上之角.

定　　義

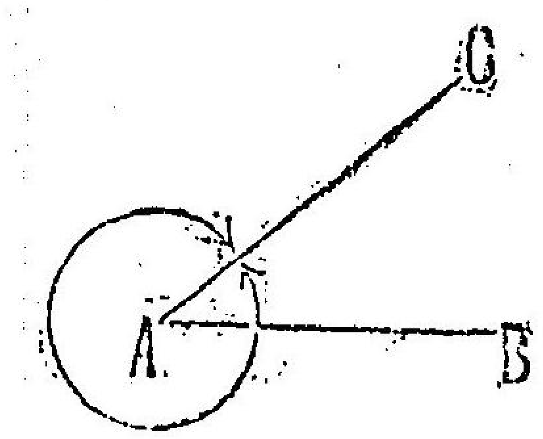
23. 角(*Angle*)　同壹ノ点ヨリ引キタル貮直線ハ角ヲナストイヒ,其貮直線ヲ角ノ二邊(*Sides*)トイフ,其点ヲ角頂(*Vertex*)トイフ.

角之指示　二邊ノ各ノ上ニ任意ニ壹点宛ヲ取リ此点ヲ示セル二文字ノ間ニ角頂ヲ示セル文字ヲ置キテ角ヲ示ス.

但シ示サントスル所ノ角ガ單獨ニシテ他ノ諸角ト混雑スルノ虞ナキ時其角ヲ示スニハ單ニ角頂ヲ示セル文字ノミヲ用フ.

例ヘハ左圖ニ於テ AB, AC ハ角ノ二邊ニシテ, A ハ角頂ナリ.

而シテ此角ヲ指示スルニハ $\angle A$ 若クハ $\angle CAB$ 及 $\angle BAC$ ニ以テス.



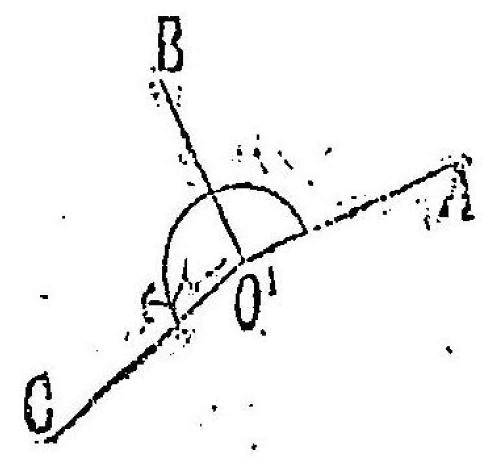
上ノ圖ニ於テ角頂 A ヲ過ギテ直線ヲ引キ A ヲ心トシテ此直線ヲ旋轉セシメ AB ノ位置ヨリ AC ノ位置ニ到ラシム,而シテ此直線ノ旋轉ノ量ハ即チ角ノ大小ナリ,故ニ角ノ大小ハ邊ノ長短ニ關セザルナリ.

而シテ其旋轉セル直線ガ,AB ノ位置ヨリ CA ノ位置ニ至ルニハ,左旋ト右旋ノ二方法アリ,(圖ニ於テ矢ニテ示スガ如シ)故ニ壹点ヨリ引キタル貮直線ハ貮個ノ角ヲナス,此二角ヲ稱シテ相局角(*Conjugate angle*)トイヒ大ナル方ヲ優角,小ナル方ヲ劣角トイフ,

但シ單ニ「二直線ガ成ス角」等トイフ時ハ劣角ヲ示スコト知ルベシ.

24. 隣角(*Adjacent angle*) 壹点ヨリ三直線ヲ引クヰ其中ノ壹個ヲ他ノ二個ノ中間ニアルト考フルヰ此中間ノ線ガ他ノ二直線ノ各トニテ成セル二角ハ隣角ヲナストイフ.

例ヘハ壹点Oヨリ三直線 OA OB OC ヲ引クヰ若シ OB ヲ OA, OC ノ間ニアリトスレバ ∠AOB, ∠BOC 互ヒニ隣角ヲナシ.又 OC ガ. OA, OB ノ間ニアリトスレバ ∠AOC ∠BOC ハ互ヒニ隣角ヲナストイフ.

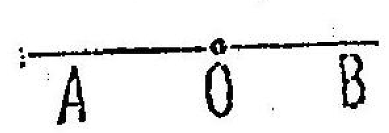


而シテ矢ヲ以テ示セル角 ∠AOC ハ ∠AOB, ∠BOC ノ和ナリ.

25. 等分線(*Bisector*) 即チ角ノ等分線トハ,其角ヲ等シキ二角ニ分ツ所ノ直線ヲイフ.

26. 直線角(*Straight angle*) 角ノ邊ガ他ノ一邊ノ引長線ナルヰ,其角ヲ直線角トイフ.

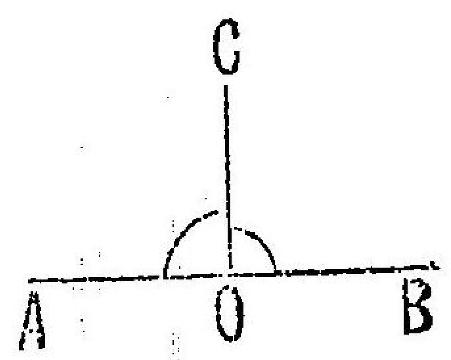
例ヘバ左圖ニ於テ AO, OB 壹直線ヲナスヰ ∠AOB ハ直線角ナリ.



27. 直角(*Right angle*) 壹直角ガ他ノ壹直線ノ上ニ立ヲテ成ル二隣角ガ相等シキヰ,其各角ヲ直角トイフ.

故ニ直角ハ直線角ノ半ナリ.

例ヘバ壹直線 CO ガ他ノ壹直線 AB ノ上ニ立チ隣角 AOC, BOC ヲナシ而シテ此二角ガ相等シキヰハ ∠AOC, 及ビ ∠BOC ハ直角ナリ.



28. 垂線(*Perpendicular*) 即チ壹直線ノ垂線トハ其直線ト直角ヲナス所ノ直線ナリ

例ヘバ上ノ圖ニ於テ CO ハ AB ノ垂線ニシテ AO 若シクハ BO ハ CO ノ垂線ナリ.

垂線之記號 ハ ⊥ ヲ用ヒ CO, AB ガ互ヒニ垂線ヲナスヲ示スニハ CO⊥AB ヲ以テス

29. 鋭角(*Acute angle*) トハ壹直角ヨリ小ナル角ヲイフ.

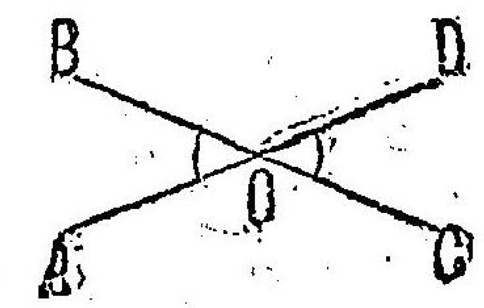
30. 鈍角(*Obtuse angle*) トハ壹直角ヨリ大ニシテ二直角ヨリ小ナル角ヲイフ.

31. 餘角(*Complement angle*) 二角ノ和ガ一直角ニ等シキヰ其二角ハ互ヒニ余角ヲナストイフ.

32. 補角(*Supplement angle*) 二角ノ和ガ二直角ニ等シキヰ其二角ハ互ヒニ補角ヲナストイフ.

33. 對頂角(*Vertically opposite angle*) 一角ノ二邊ガ他ノ壹角ノ二邊ノ引長線ナルヰ其二角ハ對頂角ヲナストイフ.

例ヘハ OD ハ AO ノ引長線ニシテ, OC ハ OB ノ引長線ナルトキハ ∠AOB, ∠COD 對頂角ヲナストイフ.

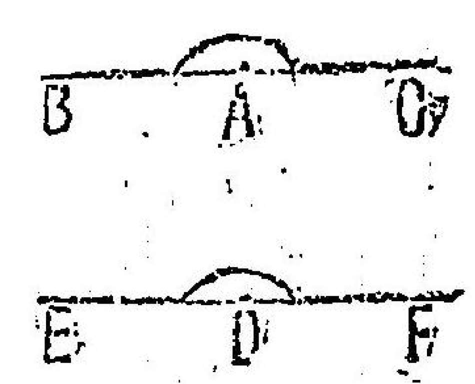


定理壹

34. 定理 直線角ハ凡ヘテ相等シ.

Aヲ直線角ノ角頂トシ AB, AC ヲ其二邊トシ,又Dヲ他ノ直線角ノ角頂トシ DE, DF ヲ其二邊トス,

然ルヰハ AB, AC ニテナル直線角ハ DE, DF ニテ成ル直線角ト相等シ.



(証) AB, AC ニテ成ス角ハ直線角ナリ,故ニ AB, AC ハ壹直線ナリ. (26. 定義)

同理ニヨリ DE, DF モ亦壹直線ナリ.

故ニD点ノ上ニA点ヲ置キテ BAC 直線ヲ EDF 直線ノ上ニ合セシムルコトヲ得. (22. 公理2)

故ニ直線角BACハ直線角EDFト全ク重ヲ合スヿヲ得,

故ニ　公理1ニヨリ直線角BAC, EDFハ相等シ.

35. 推論壹　直角ハ凡ヘテ相等シ.

(証)　直角ハ直線角ノ半ナリ,　(27. 定義)

而シテ直線角ハ凡ヘテ相等シ,　(34. 定理)

故ニ直角ハ凡ヘテ相等シ,　(9. 公理)

36. 推論貳　等角ノ余角ハ相等シ.

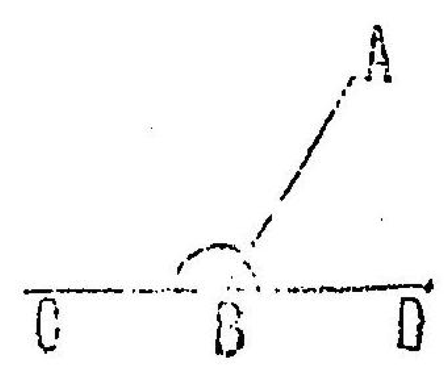
(証)　等角ヲa, bトス, 然ル𪜈ハ直角ハ凡ヘテ等シキヲ以テ9公理e直角$-a=$直角$-b$ナリ, 即チa, bノ余角ハ相等シ.

37. 推論三　等角ノ補角ハ相等シ.

(証)　等角ヲa, bトス, 然ル𪜈ハ直線角ハ凡ヘテ等シキヲ以テ9.公理eニヨリ直線角$-a=$直線角$-b$, 即チa, bノ補角ハ等シ.

定　理　貳

38.　壹直線ガ他ノ壹直線ノ上ニ立ツ𪜈ハ其二直線ニテ成ス二隣角ノ和ハ貳直角ナリ.



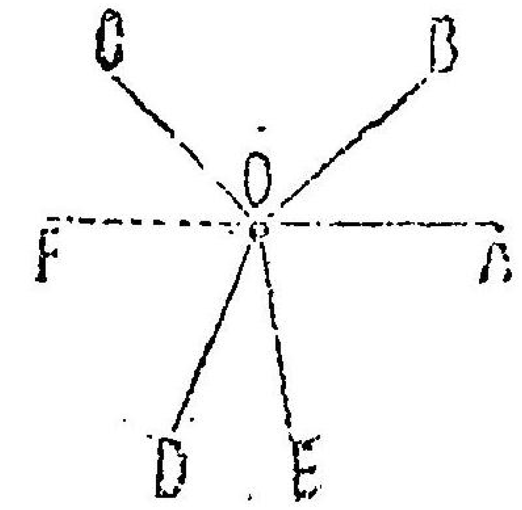
壹直線ABガ他ノ壹直線CDノ上ニ立ツ𪜈, 二隣角ABD, ABCノ和ハ二直角ナリ.

(証)　二隣角ABD, ABCノ和ハBD, BCニテ成ス角ニ等シ.

而シテBD, BCハ壹直線ナルヲ以テ, BD, BCガナス角ハ直線角ニシテ即チ二直角ナリ

故ニ二隣角ABC, ABDノ和ハ二直角ニ等シ.

39. 推論　壹点ヨリ数個ノ直線ヲ引ク𪜈ハ各直線ガ其次ノ直線トニテ成ス凡ヘテノ角ノ和ハ四直角ニ等シ



壹点OヨリOA, OB, OC, OEナル直線ヲ引ク𪜈ハ$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOA$ハ四直角ニ等シ.

(証)　AOヲF迄引張ス,

然ル𪜈ハ$\angle AOB+\angle BOC+\angle COF$ハOA, OFガナス角ニ等シク,即チ二直角ナリ.

即　$\angle AOB+\angle BOC+\angle COF=2$直角.

同理ニヨリ$\angle FOD+\angle DOE+\angle EOA=2$直角.

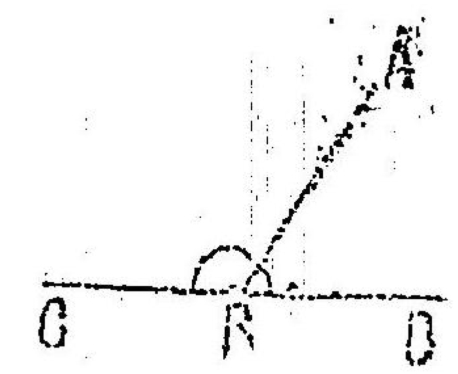
此二式ヲ加フル𪜈ハ9.公理dニヨリ

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOA=4$直角.

即チ証ヲ得タリ.

定　理　三

40. 定理　二隣角ノ和ガ貳直角ニ等シキ𪜈ハ共通ナラザル邊ハ壹直線ヲナス,



二隣角ABC, ABDノ和ガ貳直角ヲナストス,

然ル𪜈ハ共通ナラザル二邊BD, BCハ一直線ヲナス.

(証)　二隣角ABD, ABCノ和ハBD, BCニテナス角ニ等シ.

然ルニ$\angle ABD+\angle ABC=2$直角.　(假設)

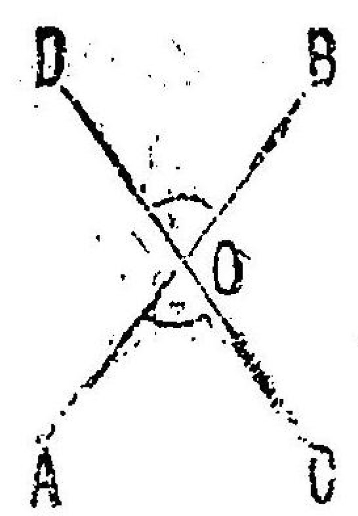
故ニBD, BCニテナス角ハ貳直角ニ等シク即チ直線角ナリ.

故ニBC, BDハ壹直線ヲナス.

(注意)　此定理ハ前ノ定理ノ逆ナリ.

定理四

41. 二直線ガ相交ル片其對頂角ハ相等シ.



相交ル二直線ヲ AB, DC トシ其交点ヲ O トス,

然ル片ハ對頂角 AOC, BOD ハ相等シ.

(証) 直線 DO ハ直線 AOB 上ニ立ツ,

故ニ $\angle AOD + \angle DOB = 2$ 直角. (38. 定理)

同理ニヨリ $\angle AOD + \angle AOC = 2$ 直角.

故ニ $\angle AOD + \angle DOB = \angle AOD + \angle AOC$, (9, 公理 c)

双方ヨリ $\angle AOD$ ヲ減ズレバ

$\angle AOC = \angle DOB$. (9. 公理 c)

第壹節之例題

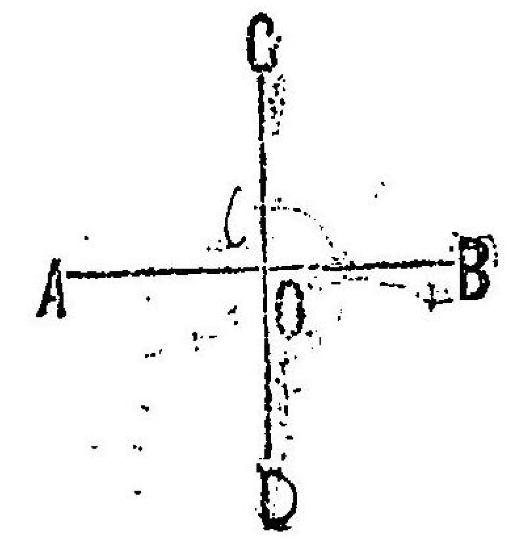
學者之注意 例題ヲ解クニハ先ツ圖ニ就テ其題意ヲ操返シ,(34. 38 章等ノ定理ノ解法ニ於ケル如ク)然ル後証明ヲナスベシ. 尤モ次ノ例題 2. 3. ノ如ク圖ニ就テノ例題ハ直チニ証明ヲナスベシ.

幾何學ハ前ニモ言ヘル如ク推理的ノ學科ニシテ,單ニ幾何學其物ガ利益ナルノミナラズ,兼テ推理法ノ練習トナルモノナリ故ニ例題ヲ解クニハ其証明ハ最モ嚴正ニシテ,壹言壹句モ定義公理,定理及ビ其題ノ假設ヲ基礎トシ決シテ根據ナキノ言ヲナスナキヲ要ス.

又定義,定理ハ最モ親密ニ諳記スルヲ要ス,然ラザレバ例題ヲ解クニ當リ應用不充分ナレバナリ.

必用ノ例題ニハ番號ノ傍ラニ＊ヲ附ス.

1. 貳直線ガ相交ハリテ成ル四個ノ角ノ中壹個ガ直角ナレバ他ノ三個亦直角ナリ.



(解) 相交ル貳直線ヲ AB, CD トシ其交点ヲ O トス. 且 $\angle BOC$ ヲ直角トス然ルトキハ $\angle AOC$, $\angle AOD$, $\angle DOB$ ハ凡ヘテ直角ナリ.

(証) 直線 CO ハ直線 AOB 上ニ立ツ

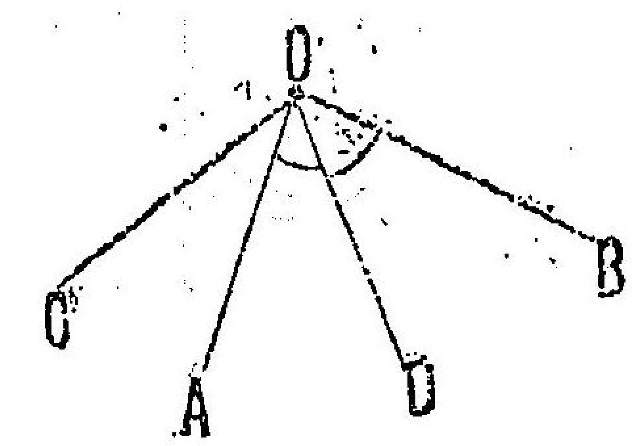
$\therefore\ \angle AOC + \angle BOC = 2$ 直角 (38. 定理)

然ルニ $\angle BOC =$ 直角 (假設)

$\therefore\ \angle AOC +$ 直角 $= 2$ 直角 $\therefore\ \angle AOC =$ 直角

又 $\angle AOC =$ 直角ヲ用ヒテ $\angle AOD =$ 直角ヲ証シ得ベク從ツテ $\angle DOB =$ 直角ヲ証シ得.

2. 相等シキ貳角 AOB, COD アリテ DO ガ BOA 角ヲ貳等分スルトキハ AO ハ $\angle COD$ ヲ等分ス.



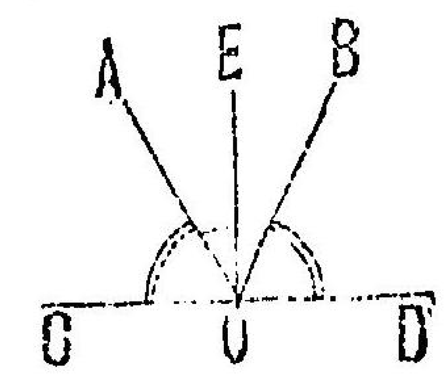
(証) $\angle COD = \angle AOB$, (假設)

双方ヨリ $\angle AOD$ ヲ減ズレバ 9 條公理ニヨリテ $\angle COA = \angle DOB$.

然ルニ OD ハ $\angle AOB$ ヲ等分ス(假設)ルヲ以テ $\angle DOB = \angle AOD$,

$\therefore \angle COA = \angle AOD$, 即チ OA ハ $\angle COD$ ヲ等分ス.

3. 直線 CD ノ上ノ壹点 O ヨリ二直線 OA, OB ヲ引クトキ若シ $\angle AOB$ ノ等分線ガ CD ニ垂線ヲナストキハ $\angle AOC = \angle BOD$ ナリ.



(証) $\angle AOB$ ノ等分線ヲ OE トス.

$OE \perp CD$,(假設) $\therefore\ \angle COE = \angle EOD$.

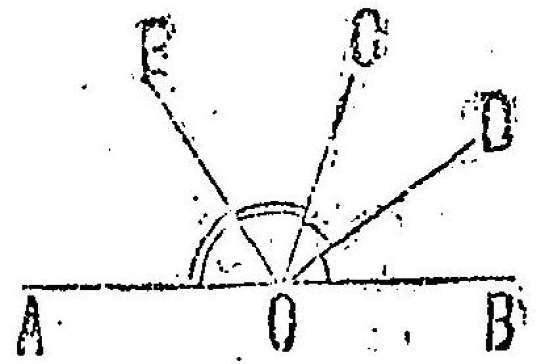
又 $\angle AOE = \angle EOB$.

故ニ 9. 公理 c ニヨリ

$\angle COE - \angle AOE = \angle EOD - \angle EOB$,

即 $\angle AOC = \angle BOD$.

4. 壹直線ガ他ノ壹直線ノ上ニ立チテ成ル二隣角ノ各等分線ハ直角ヲナス.



(解) 直線COガ直線ノAOB上ニ立チテ成ル二隣角AOC, BOCノ各等分線EO, DOハ直角ヲナス, 即チ∠EOD=∠直ナリ.

(證) ODハ∠COBヲ等分ス,　(假設)

∴　2∠COD=∠COB,

同理ニテ　2∠COE=∠COA,

加ヘテ　2∠DOE=∠COB+∠COA.

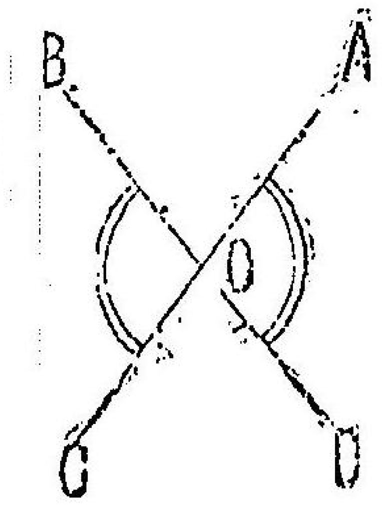
=2直角.　(38. 定理)

∴　∠DOE=直角.

5. 貳隣角ガ互ヒニ餘角ヲナス時ハ其各角ノ等分線カナス角ハ直角ノ半ニ等シ.

解法2題ト略々等シ學者自ラ試ムベシ.

6. 壹点Oヨリ四直線OA, OB, OC, ODヲ引ク時若シ∠AOB=∠COD, 及ビ∠BOC=∠AODナル時ハAO, OCハ壹直線ヲナシBO, ODモ壹直線ヲナス.



(證)　39章推論ニヨリ

∠AOB+∠COD+∠BOC+∠AOD=4直角,

然ルニ　∠AOB=∠COD, ∠BOC=∠AOD　(假設)

∴　2∠AOB+2∠BOC=4直角,

∴　∠AOB+∠BOC=2直角,

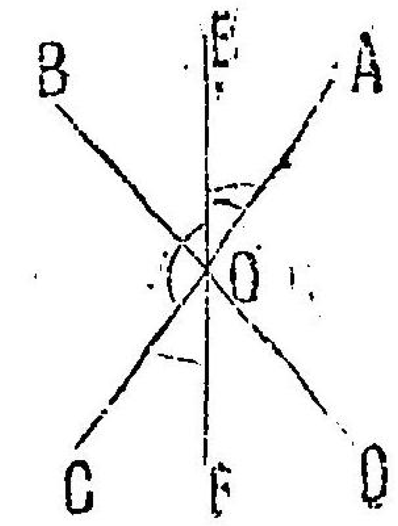
故ニ　AO, OCハ壹直線ナリ.　(40. 定理)

同理ニヨリBO, ODモ亦壹直線ヲナス.

7. 對頂角ヲナス貳角ノ各等分線ハ壹直線ヲナス

對頂角ヲAOB, CODトシ∠AOBノ等分線ヲOEトシ∠CODノ等分線ヲOFトス,

然ル時ハOE, OFハ壹直線ヲナス.



(證)　∠AOB, ∠CODハ對頂角ヲナス故ニAO, OCハ壹直線ヲナス,　(33. 定義)

∴　∠EOC+∠AOE=2直角　(38. 定理)

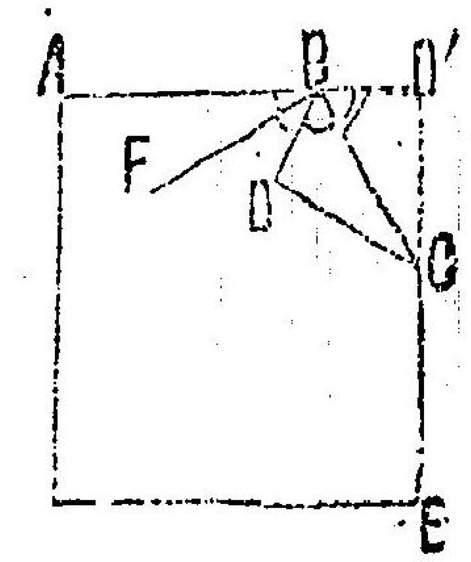
然ルニ　∠AOB=∠COD

∴　$\frac{1}{2}$∠AOB=$\frac{1}{2}$∠COD　即　∠AOE=∠COF

∴　∠EOC+∠COF=2直角

故ニEO, OFハ壹直線ヲナス.　(40. 定理)

8. 書籍ノ紙ノ壹隅ヲ折リ返ス時貳ツニ折レタル紙端ニテナス角ノ等分線ハ折レ目ニ垂線ヲナス.



(解)　折レ目ヲBCトシ折リタル部分ヲBDCトシ, BD′CヲBDCノ原ノ位置トス然ル時ハ貳ツニ折レタル紙端ノナス角ABDノ等分線BFハ折レ目BCニ垂線ヲナス

(證)　折レタル部分BDCヲ原トニ折リ直ス時ハBDCハBD′Cト合ス; 故ニBCハDBD′角ヲ等分ス,

又假設ニヨリBFハ∠ABDヲ等分ス,

而シテAB, BD′ハ壹直線ナリ,

故ニ例題4ニヨリ　BF⊥BC.

第貳節—三角形

定義

42. 平面形(*Plane Figure*) トハ壹個ノ曲線若クハ數個ノ線(曲線或ハ直線)ニテ圍マレタル平面ノ部分ヲイフ.

43. 全等(*Identically Equal*) 兩圖形ヲ相重ヌルトキ全ク符合スレバ其兩圖形ハ全等ナリトイフ.

全等ノ記號ハ≡ヲ用ユ, 即チ兩圖形A,Bガ全等ナルヲ示スニハA≡Bヲ以テス.

44. 平面直線形(*Plane Rectilineal Figure*) トハ數個ノ直線ニテ圍ミタル平面形ヲイフ.

平面直線形ハ多角形(*Polygon*)トモイフ.

邊(*Side*) 即チ多角形ノ邊トハ此多角形ヲ圍ミタル直線ノ各交点間ノ部分ヲイフ.

周(*Perimeter*) 即チ多角形ノ周トハ其各邊ノ長サノ和ヲイフ.

內角(*Interior angle*) 即チ多角形ノ內角トハ隣接貳邊ガナス形內ノ角ヲイフ.

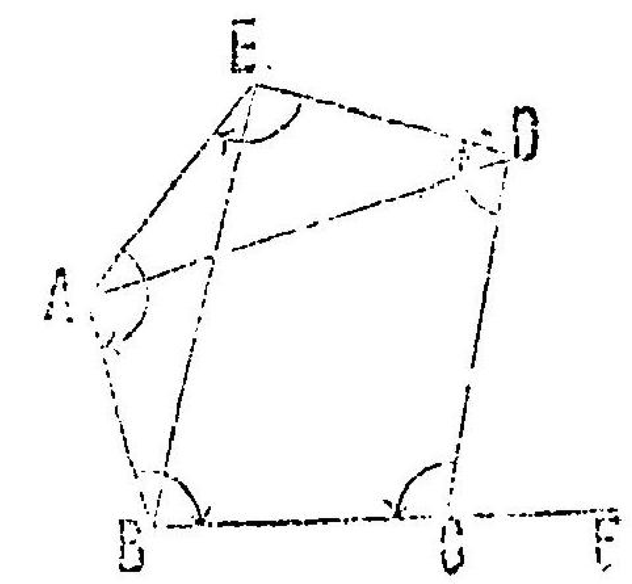
內角ノヿヲ單ニ角トイフヿアリ.

外角(*Exterior angle*) 即チ多角形ノ外角トハ壹邊ノ引張線ト其隣邊トニテ成ス形外ノ角ヲイフ,

對角線(*Diagonal*) 即チ多角形ノ對角線トハ隣接セザル二內角ノ頂ヲ兩端トセル直線ヲイフ.

角形ハ其各內角ノ頂ヲ示セル文字ヲ連記シテ之ヲ表ハス

例ヘバ次ニ示セル多角形ハABCDEヲ以テ之レヲ表ハス,而シテAB, BC等ノ有限直線ハ邊ナリ,又矢ヲ以テ示セル角ABC, BCD等ハ此多角形ノ內角ニシテ壹邊ノ引張線ト其隣邊トニテ成ス形外ノ角DCFハ外角ナリ,而シテ隣接セザル二角頂ヲ兩端トセル直線BE, AD等ハ對角線ナリ.



45. 凸多角形(*Convex Polygon*) 多角形ノ各角ガ總ベテ劣角ナルトキハ之レヲ凸多角形トイフ.

46. 凹多角形(*Concave Polygon*) 多角形ノ內角ノ中,壹個ニテモ凹角アルトキハ之レヲ凹多角形トイフ.

47. 正多角形(*Regular Polygon*) 多角形ノ各邊相等シク且ツ其各角相等シキトキ之レヲ正多角形トイフ.

48. 多角形之區別 多角形ハ其內角ノ個數ニ從ツテ之レヲ區別ス, 即チ三個ノ角ヲ有スルモノハ三角形(*Triangle*) 四個ノ角ヲ有スルモノハ四角形(*Quadrilateral*)ナリ,以下之ニ準ズ.

49. 三角形之區別 三角形ニ五種アリ,次ノ如シ

(第壹)**鋭角三角形**(*Acute-angled triangle*) トハ各內角ガ總ベテ鋭角ナル三角形ヲイフ.

(第貳)**直角三角形**(*Right-angled triangle*) トハ壹內角ガ直角ナル三角形ヲイフ.

而シテ直角ニ對スル邊ハ斜邊(*Hypotenuse*)ト稱シ,他ノ二邊ヲ直角邊ト稱ス.

(第三)**鈍角三角形**(*Obtuse-angled triangle*) トハ壹內角ガ鈍角ナル三角形ヲイフ.

(第四)**等脚三角形**(*Isosceles triangle*) トハ等シキ二邊ヲ有スル三角形ヲイフ.

42.6.9.

(第五)等邊三角形(*Equilateral triangle*) トハ三邊相等シキ三角形ナイフ

50. 底(*Base*), **高**(*Altitude*), **頂角**(*Vertical angle*) 三角形ノ任意ノ壹邊(等脚三角形ニ在テハ不等邊)ヲ底ト稱スルヿヲ得,然ルトキハ其邊ニ對スル角ヲ頂角トイヒ,頂角ノ頂ヨリ底ニ至ル垂線ノ長サヲ高サトイフ. 但シ三邊中ノドノ邊ヲ底ト考フルモ可ナレド,已ニ或ル壹邊ヲ底ト考フルトキハ最早ヤ他ノ邊ハ底ト考フルヿヲ得ザルハ勿論ナリ.

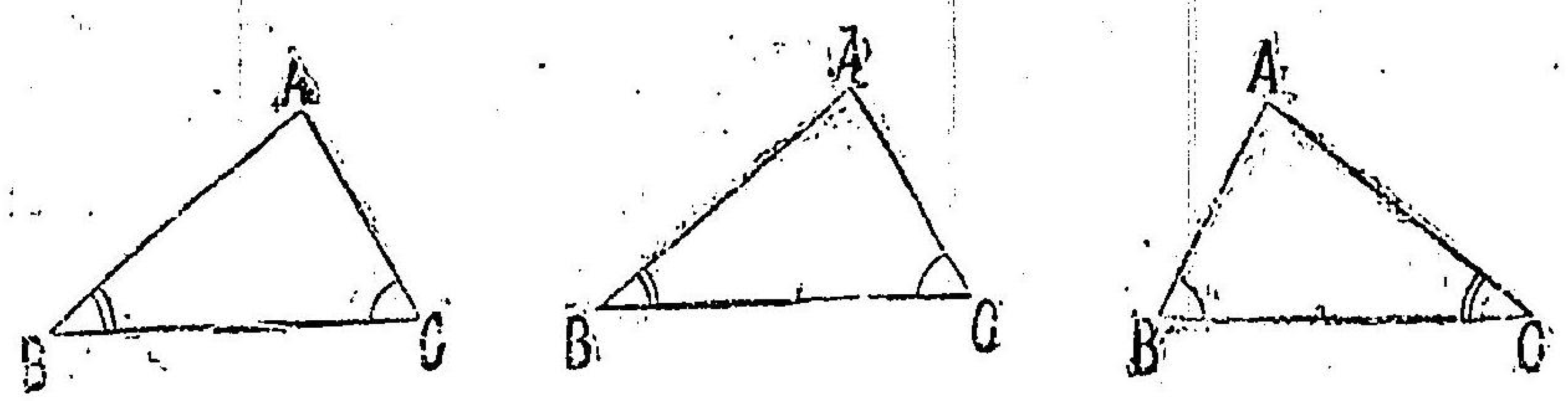
51. 記法 三角形ヲ示スニ $\triangle$ ナル記號ヲ以テスルヿアリ,例ヘバ $\triangle ABC$ トイフガ如シ

52. 内對角(*Opposite interior angle*) 三角形ノ壹外角ニ隣接セザル内角ノ各ヲ其外角ノ内對角ト稱ス.

53. 距離(*Distance*) 直線外ノ壹点ヨリ其直線ニ到ル垂線ノ長サヲ其点ト直線トノ距離ト稱ス.

定理五

54. 壹個ノ三角形ノ二角及ビ其夾邊ガ他ノ三角形ノ二角及ビ其夾邊ト相等シキトキハ其兩三角形ハ全等ナリ,而シテ等シキ邊ハ等シキ角ト相對ス.



兩三角形 ABC, $A'B'C'$ ニ於テ $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $BC=B'C'$ ナレバ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ニシテ等角 C, C' ニ對スル邊 AB, $A'B'$ ハ相等シク,同樣ニ AC, $A'C'$ ハ相等シク,又等邊 BC, $B'C'$ ニ對スル角 A, A' ハ相等シ.

(證) 三角形 ABC ヲ三角形 $A'B'C'$ ノ上ニ置キ,C ヲ C' ノ上ニ BC ヲ $B'C'$ ノ上ニ置キ A ト A' トヲ $B'C'$ ノ同側ニアラシム.

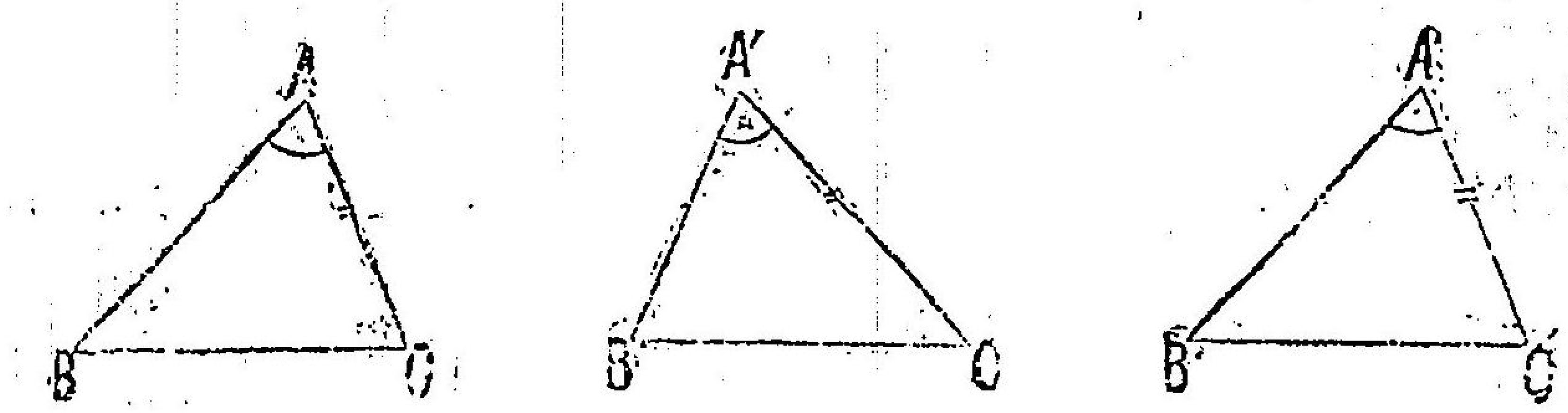
然ルトキハ假設ニヨリ $BC=B'C'$ ナルヲ以テ B ハ B' ノ上ニ落ツ,

又假設ニヨリ $\angle C=\angle C'$, $\angle B=\angle B'$ ナルヲ以テ CA ハ $C'A'$ ノ上ニ,BA ハ $B'A'$ ノ上ニ落ツ,故ニ A ハ A' ノ上ニ落ツ,

故ニ兩三角形 ABC, $A'B'C'$ ハ全ク符合シ,即チ此兩三角形ハ全等ナリ,而シテ $AC=A'C'$, $BA=B'A'$, $\angle A=\angle A'$ ナリ.

定理六

55. 壹個ノ三角形ノ二邊及ビ其夾角ガ他ノ三角形ノ二邊及ビ其夾角ト互ヒニ相等シキトキハ其兩三角形ハ全等ナリ,而シテ等シキ邊ト等シキ角ト相對ス.



兩三角形 ABC, $A'B'C'$ ニ於テ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A=\angle A'$ ナルトキハ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ニシテ $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$ $\angle C=\angle C'$ ナリ.

(證) 三角形 ABC ヲ三角形 $A'B'C'$ ノ上ニ置キ,A ヲ A' ノ上ニ AB ヲ $A'B'$ ノ上ニ置キ,C 及ビ C' ヲ $A'B'$ ノ同側ニ置ク,

然ルトキハ假設ニヨリ $AB=A'B'$ ナルヲ以テ B ハ B' ノ上ニ落ツ,

又假設ニヨリ $\angle A=\angle A'$ ナルヲ以テ AC ハ $A'C'$ ノ上ニ落チ,而シテ $AC=A'C'$(假設)ナルヲ以テ C ハ C' ノ上ニ落ツ.

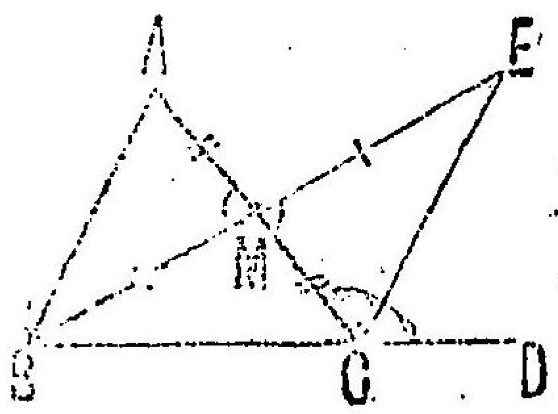
即チ B ハ B' ノ上ニ,C ハ C' ノ上ニ落ツルヲ以テ BC ハ全ク $B'C'$ ト符合ス, (22. 公理)

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ニシテ $BC=B'C'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$

ナリ.

定理七

56. 三角形ノ壹外角ハ何レノ内對角ヨリモ大ナリ.



三角形ABCニ於テ壹外角ACDハ内對角ABC, $B\hat{A}C$ ノ何レヨリ大ナリ.

(証) AC邊ノ中央点ヲMトシ, BMヲ結ビ, 之レヲE点マデ引張シMEヲBMト等長ナラシム,

然ルトキハ両三角形AMB, MECニ於テ

$AM=MC$ (作法)

$BM=ME$ (")

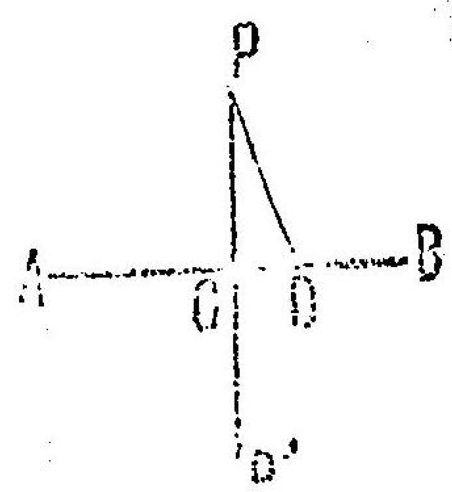
$\angle AMB=\angle EMC$ (對頂角) $\therefore$ $\triangle AMB\equiv\triangle EMC$, (55.定理)

$\therefore$ $\angle A=\angle MCE$,

然ルニ $\angle MCE<\angle ACD$ $\therefore$ $\angle A<\angle ACD$.

同様ニ $\angle ABC<\angle ACD$.

57. 推論壹 直線外ノ壹点ヨリ其直線ニ垂線ヲ引クヿヲ得,而シテ只壹個ニ限ル.



直線ヲABトシ其外方ノ点ヲPトス,

(解) ABニ沿フテ平面ヲ折リ重ネ,Pガ落ツル位置ヲP′トス,

然ル後ヲ折リシ部分ヲ開展シPP′直線ヲ作リABトノ交点ヲCトス,

今ABニ沿フテ再ビ平面ヲ折ルトキハCPハCP′ノ上ニ落ツ.

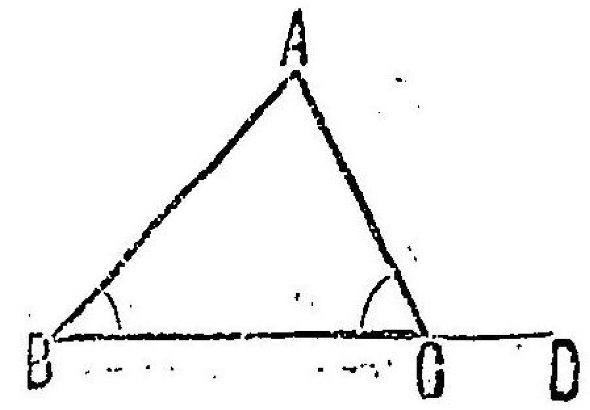
$\therefore$ $\angle PCA=\angle P'CA$, $\therefore$ $\angle PCA=$ 直角(27) $\therefore$ $PC\perp AB$.

即チPヨリABニ垂線ヲ引クヿヲ得.

今垂線PCノ外ニ任意ノ直線PDヲ引クトキハPDB角ハ三角形PCDノ外角ナリ, $\therefore$ $\angle PDB>\angle PCD$ (前定理), 即 $\angle PDB>$直角,

故ニPDハ垂線ナラズ, 即チPヨリABニ作レル垂線ハPCノミナリ.

58. 推論貳 三角形ノ任意ノ貳内角ノ和ハ貳直角ヨリモ小ナリ.



三角形ABCニ於テ任意ノ貳内角B, Cノ和ハ貳直角ヨリモ小ナリ.

(証) BCヲDマデ引張ス,

然ルトキハ $\angle B<\angle ACD$ (56.定理)

$\therefore$ $\angle ACB+\angle B<\angle ACD+\angle ACB$

然ルニBC, CDハ壹直線ナリ,故ニ $\angle ACD+\angle ACB=$貳直角(38.定理)

$\therefore$ $\angle ACB+\angle B<$貳直角.

59. 推論三 三角形ノ壹角ガ直角若クハ鈍角ナルトキハ他ノ二角ノ各ハ鋭角ナリ.

(証) 前章ノ圖ニ於テ$\angle ACB$ガ若シ直角或ハ鈍角ナルトキハ其隣角ACDハ直角若クハ鋭角ナリ,

而シテ56.定理ニヨリ$\angle A$及ビ$\angle B$ハ何レモ$\angle ACD$ヨリ小ナリ.

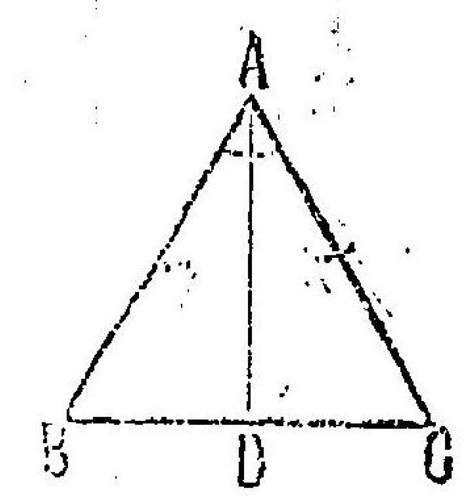
故ニ$\angle A$及$\angle B$ハ鋭角ナリ.

定理八

60. 壹個ノ三角形ニ於テ

〔第壹〕 貳邊ガ相等シキトキハ其對角ハ相等シ.

〔第貳〕 貳邊ガ不等ナルトキハ大邊ニ對スル角ハ小邊ニ對スル角ヨリ大ナリ.



〔第壹〕 三角形ABCニ於テ$AB=AC$ナルトキハ$\angle C=\angle B$ナリ.

(証) A角ノ等分線ヲ引キBCトノ交点ヲDトス, $\triangle ADC$, $\triangle ABD$ニ於テ

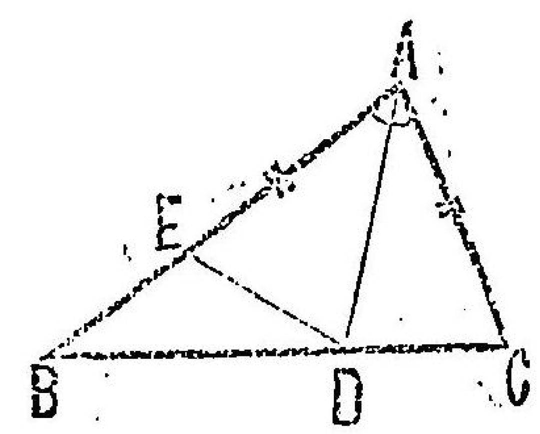
$AC=AB$ (仮設)

ADハ共通

$\angle CAD=\angle DAB$ (作法) $\therefore$ $\triangle ACD\equiv\triangle ADB$ (55定理) $\therefore$ $\angle C=\angle B$

〔第貳〕三角形ABCニ於テ$AB>AC$ナレバ$\angle C>\angle B$ナリ.

(證) A角ノ等分線ヲ引キBC邊トノ交点ヲDトシ,又AB上ニE点ヲ取リAEヲACト等長ナラシム,



然ルトキハ両三角形ADC, ADEニ於テ

$AC=AE$　(作法)

ADハ共通邊

$\angle DAC=\angle DAE$ (作法)　$\therefore\ \triangle ADC\equiv\triangle ADE,$　(55.定理)

$\therefore\ \angle C=\angle AED.$

然ルニ$\triangle BED$ニ於テ$\angle AED$ハ外角ナリ.

$\therefore\ \angle AED>\angle B,$　(56.定理)

即　$\angle C>\angle B.$

61. 推論 等邊三角形ノ各角ハ相等シ.

$\triangle ABC$ニ於テ$AB=BC=CA$ナレバ$\angle A=\angle B=\angle C$ナリ.

(證) 60.章第壹ノ圖ニ於テ

$AB=BC,$ (假設)　$\therefore\ \angle C=\angle A,$ (60第壹)

又　$BC=CA,$ (")　$\therefore\ \angle A=\angle B,$ (")

$\therefore\ \angle A=\angle B=\angle C.$

定理九 (前定理之逆)

62. 壹個ノ三角形ニ於テ

〔第壹〕貳角相等シキトキハ其對邊相等シ.

〔第貳〕貳角不等ナルトキハ大角ノ對邊ハ小角ノ對邊ヨリモ大ナリ.

三角形ABCニ於テ$\angle C=\angle B$ナレバ$AB=AC$ニシテ,$\angle C>\angle B$ナレバ$AB>AC$ナリ.(60.ノ圖ヲ見ヨ).

(證) 60.定理ニヨリ

$AB=AC$ナレバ$\angle C=\angle B$ナリ,

$AB>AC$ナレバ$\angle C>\angle B$ナリ,

$AB<AC$ナレバ$\angle C<\angle B$ナリ.

上ノ三定理ノ假設ハABトACトヲ比較スルヿニ就テ起リ得ベキ總ベテノ場合ヲ盡シ,終決ハ相異ル.

故ニ轉換法ニヨリ此三定理ノ逆ハ眞ナリ,　(20.)

即チ　$\angle C=\angle B$ナレバ$AB=AC$ナリ,

$\angle C>\angle B$ナレバ$AB>AC$ナリ.

63. 推論 三角形ノ各角相等シキトキハ其各邊ハ相等シ.

(證) 三角形ABCニ於テ

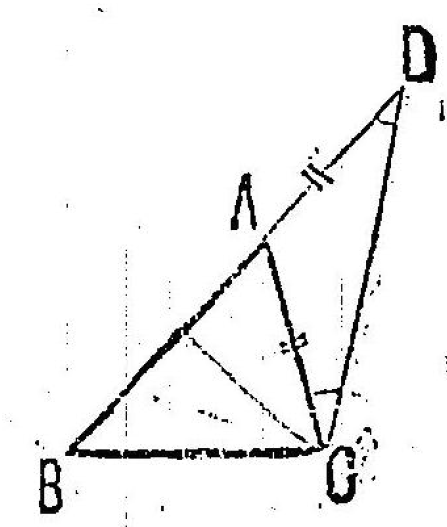
$\angle B=\angle C,$　$\therefore\ AC=AB,$　(前定理)

又　$\angle B=\angle A,$　$\therefore\ AC=BC,$　(")　$\therefore\ AB=AC=BC.$

定理拾

64. 三角形ノ任意ノ貳邊ノ和ハ他ノ壹邊ヨリ大ナリ.

三角形ABCニ於テ任意ノ貳邊AB, ACノ和ハ他ノ邊CBヨリ大ナリ.



(證) BA邊ヲD点マデ引張シADヲACト等長ナラシメCDヲ結ブ,

$AD=AC$　$\therefore\ \angle D=\angle ACD,$　(60.定理)

$\therefore\ \angle D<\angle BCD,$

$\therefore\ BD>BC,$　(前定理)

即　$AB+AC>BC.$

65. 推論 三角形ノ貳邊ノ差ハ他ノ壹邊ヨリ小ナリ.

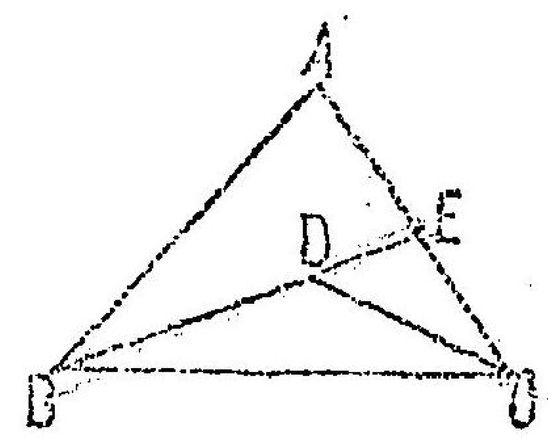
(證) 前定理ニヨリ　$AB+AC>BC,$

雙方ヨリACヲ減ズルトキハ

$AB>BC-AC.$

定理拾壹

66. 三角形ノ壹邊ノ兩端ヨリ形内ノ壹点ニ到ル貳直線ノ和ハ他ノ貳邊ノ和ヨリ小ナリ，而シテ其貳直線ガナス角ハ其貳邊ノ夾角ヨリ大ナリ。



三角形ABCノ壹邊BCノ兩端ヨリ形内ノ壹点Dニマデ貳直線ヲ引クトキハ

第一 $BD+DC<AB+AC$,

第二 $\angle BDC>\angle BAC$.

(証) BDヲ引設シテACト交ラシメ其交点ヲEトス

三角形ABEニ於テ $AB+AE>BE$, (64.定理)

三角形DECニ於テ $DE+EC>DC$, (")

上ノ貳不等式ヲ加フルトキハ

$$AB+AC+DE>BD+DC+DE,$$

双方ヨリDEヲ減ズレバ

$$AB+AC>BD+DC,$$ (第一之証)

又三角形ABEニ於テ $\angle BEC$ ハ其外角ナリ,

$$\angle BEC>\angle A,$$ (56.定理)

然ルニBDC角ハ三角形DECノ外角ナルヲ以テ

$$\angle BEC<\angle BDC,$$ (56.定理)

$$\therefore \angle BDC>\angle A.$$ (第貳之証)

定理拾貳

67. 定直線外ノ壹定点ヨリ其直線ニ垂線及ビ數個ノ斜線ヲ

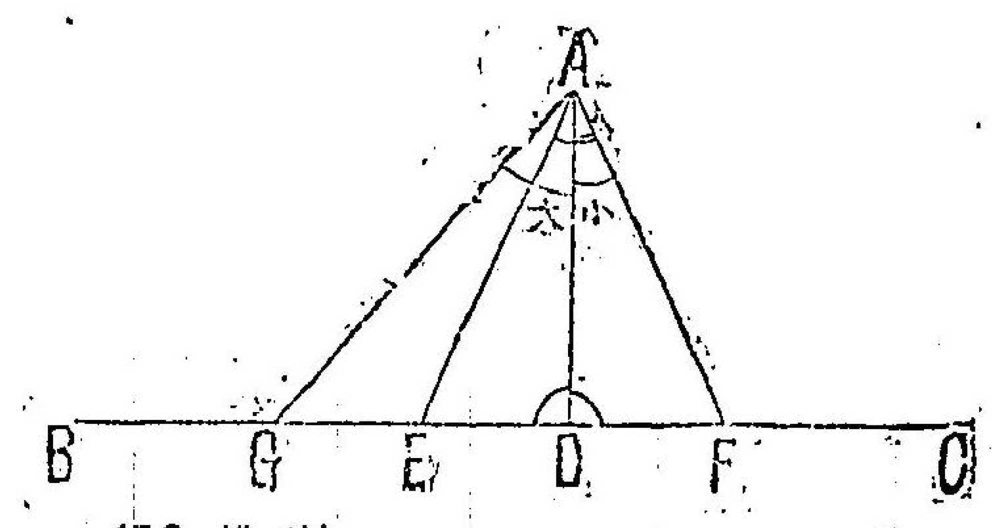
引クトキハ

〔第壹〕垂線ハ最モ短シ.

〔第貳〕垂線ト等角ヲナス貳斜線ハ其長サ相等シ.

〔第三〕垂線ト大ナル角ヲナス斜線ハ小ナル角ヲナス斜線ヨリ大ナリ.

定直線ヲBCトシ,其定直線外ノ定点ヲAトシAヨリBCニ垂線AD及ビ斜線AF, AE, AGヲ引ク,然ルトキハ



〔第壹〕 $AD<AF$.

(証) 三角形ADFニ於テ $\angle D$ ハ直角

故ニ $\angle AFD$ ハ鋭角ナリ. (59.推論)

$\therefore \angle AFD<\angle D$,

$\therefore AD<AF$. (62.定理)

〔第貳〕 $\angle EAD=\angle DAF$ ナレバ $AE=AF$ ナリ.

(証) $\triangle ADE$, $\triangle ADF$ ニ於テ

$\angle ADF=\angle ADE=$ 直角,

$\angle DAE=\angle DAF$, (作法)

ADハ共通邊 $\therefore \triangle ADE\equiv\triangle ADF$, (54.定理)

$\therefore AE=AF$.

〔第三〕 $\angle GAD>\angle DAF$ ナレバ $AG>AF$ ナリ.

(証) 斜線AEヲ引キDAE角ヲFAD角ニ等シカラシム.

$\triangle ADE$ ニ於テ $\angle ADE$ ハ直角,故ニ $\angle AED$ ハ鋭角ナリ,(59.定理)

故ニ $\angle AEG$ ハ鈍角ナリ, 故ニ $\angle AGE$ ハ鋭角ナリ, (59.定理)

$\therefore \angle AEG>\angle AGE$ $\therefore AG>AE$, (62.定理)

然ルニ $\angle EAD=\angle DAF$ (作法) $\therefore AE=AF$, (本定理第二)

$\therefore AG>AF$.

68. 推論 定直線外ノ壹点ヨリ其直線ニマデ等長ノ貳

斜線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯貳個ニ限ル.

(證) 定直線ヲBCトシ,其外方ノ定点ヲAトス.(前章ノ圖ヲ見ヨ)

AヨリBCニ垂線ADヲ引キADト等角ヲナスベキ任意ノ貳直線AE, AFヲ引ク,然ルトキハ前章定理第貳ニヨリ　$AE=AF$,

即チA点ヨリBCニマデ等長ノ二斜線ヲ引クコトヲ得.

今Aヨリ他ノ任意ノ斜線AGヲ引ク,然ルトキハ

$$\angle GAD \neq \angle DAF,$$

$\therefore$　$AG \neq AF$,　(67 定理第三)

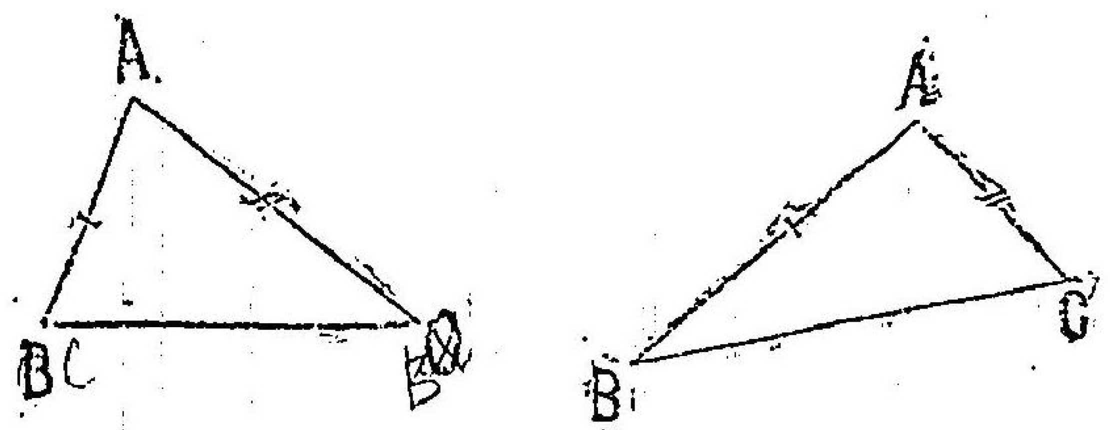
即チAE, AFノ他ノ斜線ハAE, AFト等長ナラズ,

故ニAヨリBCニマデ引キ得ベキ等長ノ斜線ハ唯貳個ノミナリ.

定理拾三

69. 壹個ノ三角形ノ貳邊ガ他ノ三角形ノ貳邊ト互ニ相等シク,其夾角ガ不等ナルトキハ大角ノ對邊ハ小角ノ對邊ヨリ大ナリ.

兩三角形 ABC, $A'B'C'$ ニ於テ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle A<\angle A'$ トス,



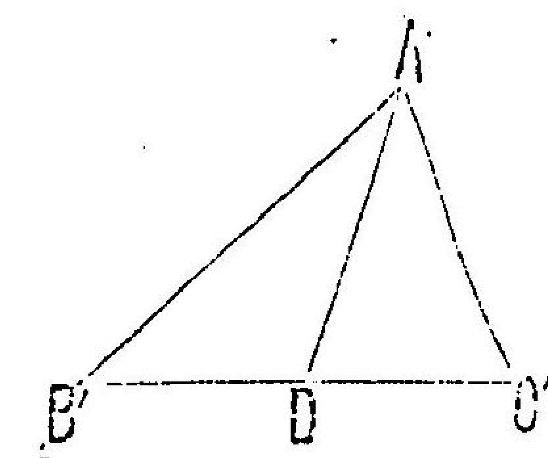
然ルトキハ　$BC<B'C'$　ナリ.

(證) 三角形 ABC, ヲ三角形 $A'B'C'$ ノ上ニ載セ,AヲA'ノ上ニ置キ,ABヲA'B'ニ沿フテ置キC, C'ヲA'B'ノ同側ニ在ラシム.

然ルトキハ $AB=A'B'$ ナルヲ以テBハB'ノニ落ツ,而シテCノ落ツル点ヲDトス

然ルトキハ次ノ貳個ノ場合アリ,

〔第壹〕 DガB'C'上ニアル場合.



此ノトキハ $\angle BAC<\angle B'A'C'$ ナルヲ以テ

ACハA'B'トA'C'トノ間ニ落ツ,

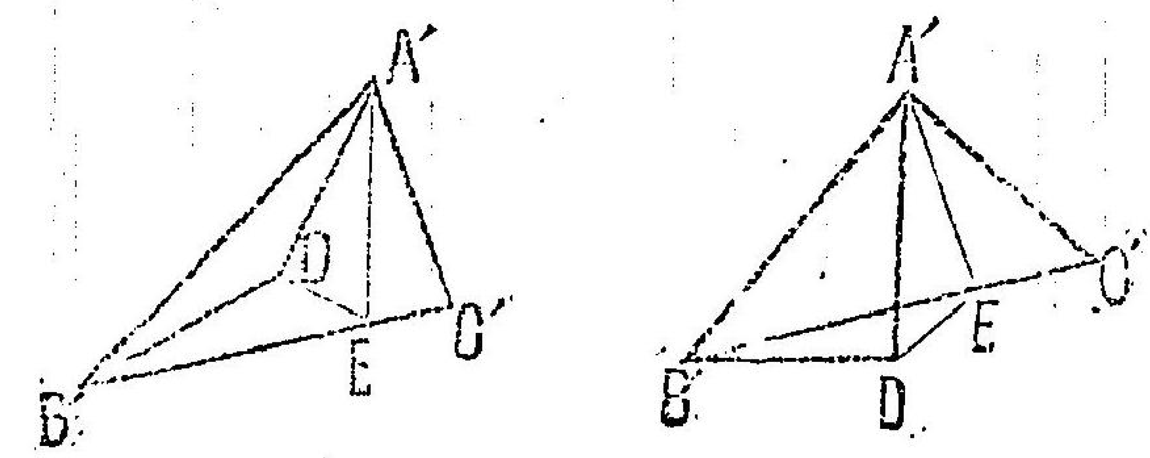
故ニDハB'トC'トノ間ニアリ

故ニ　$B'D<B'C'$

然ルニDハC点ノ落チシ位置ナルヲ以テ $B'D=BC$ ナリ,

故ニ　$BC<B'C'$.

〔第貳〕 DガB'C'ノ上ニアラザル場合即チ次ノ圖ニ示セル如クDガ三角形A'B'C'ノ内方或ハ外方ニアル場合.



上ノ貳圖ノ孰レニ就テモ,$\angle DA'C'$ ノ等分線ヲ作リ此等分線トB'C'トノ交点ヲEトシ,EDヲ結ブ,

然ルトキハ $\triangle A'ED$, $\triangle A'EC'$ ニ於テ

$A'D$ (即 AC) $=A'C'$,　(作法)

AE ハ共通邊,

$\angle EA'D=\angle EA'C'$,　(作法)　$\therefore$　$\triangle A'DE\equiv\triangle A'EC'$,　(55 定理)

$\therefore$　$DE=EC'$.

然ルニ $\triangle B'DE$ ニ於テ　$DE+B'E>B'D$,　(64 定理

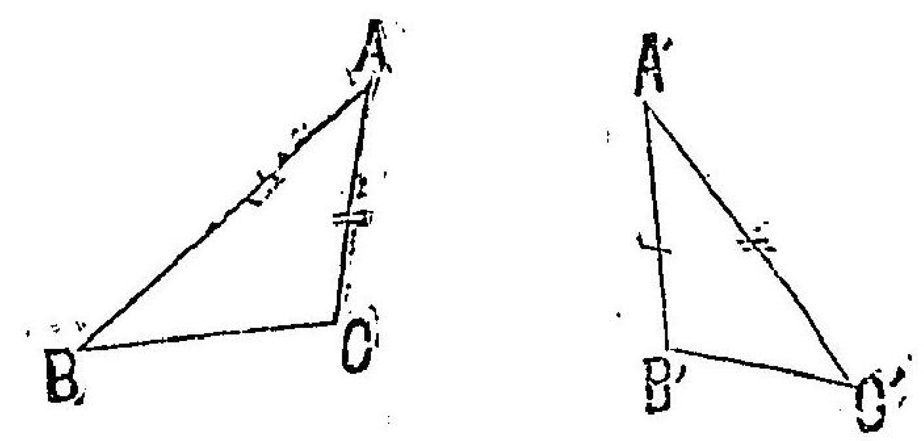
即　$EC'+B'E>BC$,

即　$B'C'>BC$.

定理拾四(前定理之逆)

70. 壹個ノ三角形ノ貳邊ガ他ノ三角形ノ貳邊ト互ヒニ相等シク,第三邊ガ不等ナルトキハ大邊ノ對角ハ小邊ノ對角ヨリ大ナリ.

兩三角形 ABC, $A'B'C'$ ニ於テ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ トス.



然ルトキハ $BC>B'C'$ ナレバ $\angle A>\angle A'$ ナリ.

(証) $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ ナルトキハ,

$\angle A=\angle A'$ ナレバ, $BC=B'C'$.　(55. 定理)

$\angle A>\angle A'$ ナレバ, $BC>B'C'$.　(69. 定理)

$\angle A<\angle A'$ ナレバ, $BC<B'C'$.　(　”　)

上ノ三定理ニ於テ假設ハ $\angle A$ ト $\angle A'$ トノ大小ヲ比較スルヿニ就テ起リ得ベキ總ヘテノ場合ヲ盡シ,終決ハ相異ナル,

故ニ轉換法ニヨリ上ノ三定理ノ右ノ逆ハ眞ナリ　(20)

故ニ上ノ三定理ノ中ノ第二番目ノ逆ハ眞ニシテ

即チ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ ニシテ且ツ $BC>B'C'$ ナレバ

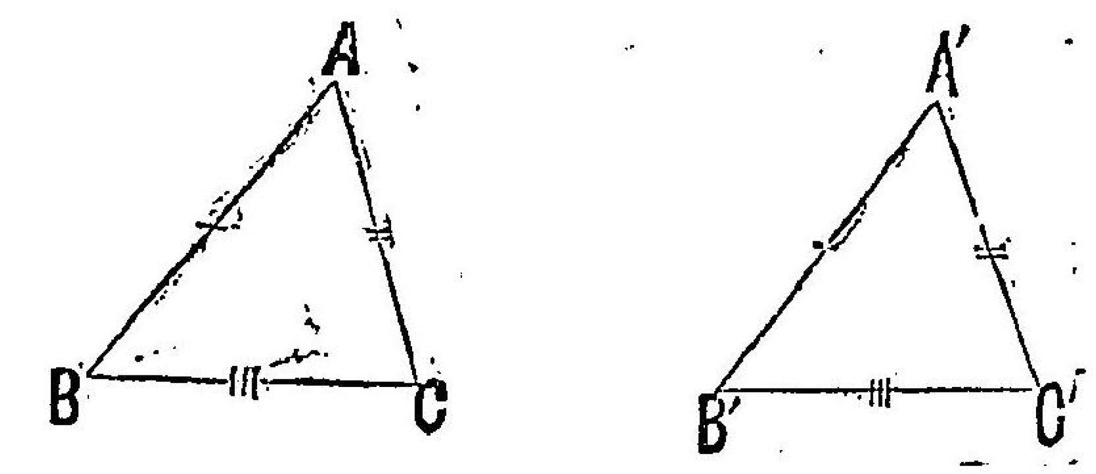
$\angle A>\angle A'$ ナリ.

定理拾五

71. 壹個ノ三角形ノ各邊ガ他ノ三角形ノ各邊ト互ヒニ相等シキトキハ此兩三角形ハ全等ナリ,而シテ等邊ト等角ト相對ス,

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$ トス,

然ルトキハ $\triangle A'B'C'\equiv\triangle ABC$ ナリ.



(第壹証) $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ ナルトキハ,

$\angle A=\angle A'$ ナレバ, $BC=B'C'$ ナリ　(55. 定理)

$\angle A>\angle A'$ ナレバ, $BC>B'C'$ ナリ.　(69. 定理)

$\angle A<\angle A'$ ナレバ, $BC<B'C'$ ナリ,　(　”　)

上ノ三定理ニ於テ假設ハ $\angle A$ ト $\angle A'$ トノ大小ヲ比較スルヿニ就テ起リ得ベキ總ヘテノ場合ヲ盡シ,終決ハ相異ル,

故ニ轉換法ニヨリ上ノ三定理ノ各ノ逆ハ眞ナリ,　(20)

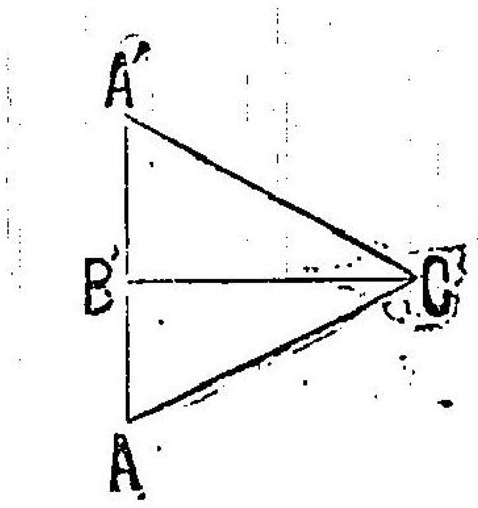
故ニ上ノ三定理中ノ初メノ定理ノ逆ハ眞ニシテ

$AB=A'B'$ $AC=A'C'$ ニシテ $BC=B'C'$ ナレバ $\angle A=\angle A'$ ナリ.

故ニ 55 章定理ニヨリ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

而シテ等邊 AB, $A'B'$ ノ對角 C 及ビ C' ハ相等シク,又他ノ等邊ノ對角ハ相等シ.

(第貳証) 三角形 ABC ヲ三角形 $A'B'C'$ ノ上ニ載セ, B ヲ B' ノ上ニ置キ, BC ヲ $B'C'$ ニ沿フテ置キ, A ト A' トヲ $B'C'$ ノ異側ニ在ラシム,然ルトキハ若シ $A'B'$ AB' ガ壹直線ヲナストキハ $A'AC'$ ハ壹個ノ三角形ヲナス,



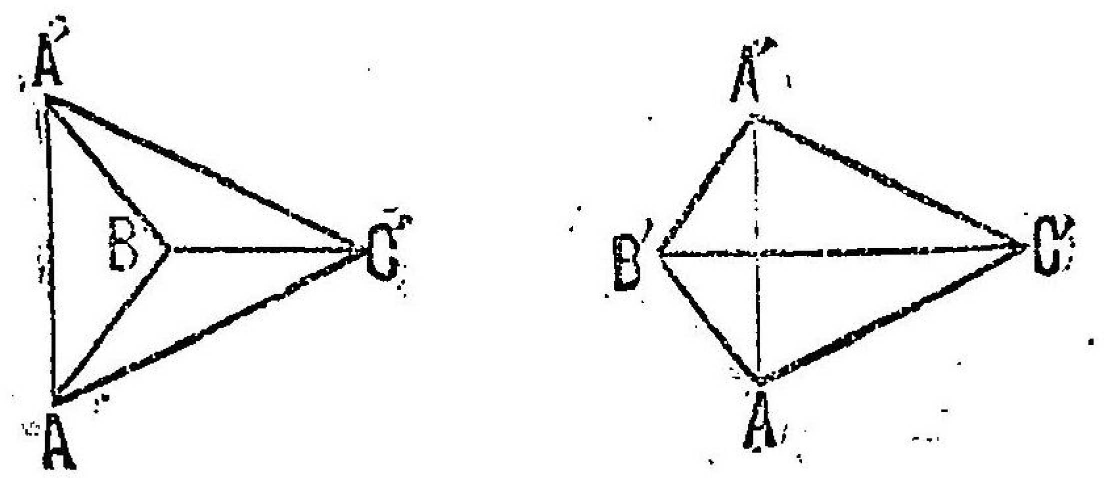
而シテ AC' ハ AC ニ等シク,而シテ AC ハ又 $A'C'$ ニ等シキヲ以テ

$AC'=A'C'$,

$\therefore$ $\angle A=\angle A'$ (60. 定理) $\therefore$ $\triangle AB'C'\equiv\triangle A'B'C'$, (55. 定理)

即チ $AB'=A'B'$, $AC'=A'C'$, $\angle A=\angle A'$, 即チ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$

又若シ次ノ頁ノ二圖孰レカノ如ク $A'B'$, $B'A$ ガ壹直線ヲナサ



ザルトキハAA'ヲ結ブ,然ルトキハ孰レノ圖ニ於テモ$AC'=A'C'$ナリ,

$$\therefore\quad \angle A'AC'=\angle AA'C. \qquad \text{(60. 定理)}$$

同理ニヨリ　$\angle A'AB'=\angle AA'B'$

而シテ右方ノ圖ノ場合ニ於テ上ノ二式ヲ加ヘ,左方ノ圖ノ場合ニ於テハ上式ヨリ下式ヲ減ズルトキハ

$$\angle B'AC=\angle B'A'C',$$

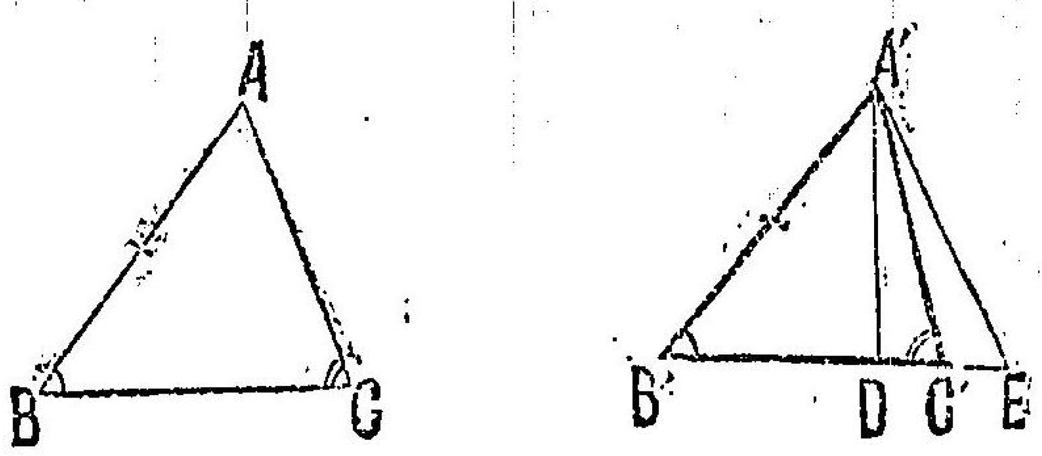
而シテ　$AB'=A'B'$, $AC'=A'C'$,　$\therefore$　$\triangle AB'C'\equiv\triangle A'B'C'$,　(55. 定理)

即チ　$\triangle ABC\equiv A'B'C'$,

定理拾六

72. 三角形ノ貳角ガ他ノ三角形ノ貳角ニ等シク,且ツ其壹双ノ等角ノ對邊ガ相等シキトキハ,其兩三角形ハ全等ナリ而シテ等邊ト等角ト相對ス.

兩三角形ABC, $A'B'C'$ニ於テ$\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$ニシテ,壹双ノ等角C, C'ノ對邊AB, $A'B'$ハ相等シトス,



然ルトキハ$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$ニシテ等邊ト等角相對ス.

(証) 三角形ABCヲ三角形$A'B'C'$ノ上ニ載セAヲA'ノ上ニ置キAB

ヲ$A'B'$ニ沿フテ置キ,C及ビC'ヲ$A'B'$ノ同側ニ在ラシム.

然ルトキハ$AB=A'B'$ナルヲ以テBハB'ノ上ニ落ツ,

而シテ$\angle B=\angle B'$ナルヲ以テBCハ$B'C'$ノ上ニ落ツ.

而シテCガ若シB'トC'トノ間ニ落ツルトシ其位置ヲDトスレバACガ落ツル位置ハ$A'D$トナル,

然ルトキハ$\angle A'DB'$ハ三角形$AC'D$ノ外角トナルヲ以テ

$$\angle A'DB'>\angle A'C'B', \qquad \text{(56. 定理)}$$

即　$\angle ACB>\angle A'C'B'$,

是レ不合理ナリ,

故ニCハB'トC'トノ間ニ落ツルヿナシ.

又Cガ$B'C'$ノ引張線上ニ落ツルトシ,其位置ヲEトスレバACカ落ツル位置ハ$A'E$ナリ,

然ルトキ$\angle A'C'B'$ハ三角形$A'EC'$ノ外角トナルヲ以テ

$$\angle E<\angle A'C'B' \qquad \text{(56. 定理)}$$

即　$\angle ACB<\angle A'C'B'$

是レ不合理ナリ,

故ニCハ$B'C'$ノ引張線上ニ落ツルヿナシ,

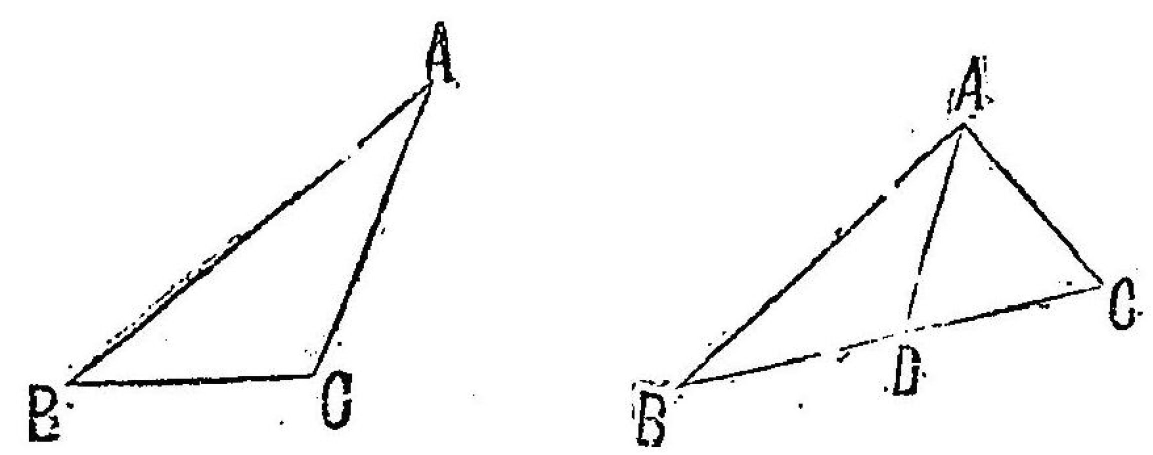
斯ノ如クCハB'トC'トノ間ニモ落ツルヿナク,又$B'C'$ノ引張線上ニモ落ツヿナシ,故ニCハC'ノ上ニ落ツルナリ

從ツテ$A'C'$ハ全クACノ上ニ落チ即チ三角形ABCハ三角形$A'B'C'$ト全等ナリ.而シテ等邊ト等角ト相對ス.

定理拾七

73. 壹個ノ三角形ノ二邊ガ他ノ三角形ノ二邊ト相等シク,其壹邊ノ等邊ニ對スル角相等シキトキハ他ノ壹双ノ等邊ニ對スル角ハ相等シキカ,或ハ補角ヲナス,而シテ初メノ場合ニ於テハ此兩三角形ハ全等ヲナス.

兩三角形 ABC, $A'B'C'$ ニ於テ $AB=A'B'$, $AC=A'C'$ ニシテ且ツ其壹双ノ等邊 AC, $A'C'$ ノ對角 B 及ヒ B' ガ相等シキ片ハ他ノ等邊 AB, $A'B'$ ニ對スル角 ACB, $A'C'B'$ ハ相等シキカ或ハ補角チナス而シテ此二角ガ相等シキ片ハ此兩三角形ハ全等形ナス。



（證） 三角形 ABC チ三角形 $A'B'C'$ ノ上ニ載セ, A チ A' ノ上ニ置キ, AB チ $A'B'$ ニ沿フテ置キ C, C' チ $A'B'$ ノ同側ニ置ク,

然ル片ハ $AB=A'B'$ ナルチ以テ B ハ B' ノ上ニ落ツ.

而シテ $\angle ABC=\angle A'B'C'$ ナルチ以テ BC ハ $B'C'$ ノ上ニ落ツ.

然ル片 C 若シ C' ノ上ニ落ツル片ハ AC ハ $A'C'$ ノ下ニ落チ, $\angle ACB=\angle A'C'B'$ トナル, 而シテ此ノ片ハ兩三角形 ABC, $A'B'C'$ ハ全等ナリ.

又 C ガ若シ C' ノ上ニ落チザルトキハ其位置チ D トス（但シ D ハ $B'C'$ ノ引張線上ニ落ツルモ可ナリ）然ル片ハ AC ノ落ツル位置ハ $A'D$ トナル,

而シテ $AC=A'C'$ ナルチ以テ從ツテ $A'D=A'C'$ ナリ,

$\therefore\quad \angle A'C'D=\angle A'DC'$, （60. 定理）

$\therefore\quad \angle A'DB'+A'C'B=2$ 直角,

即 $\angle ACB+\angle A'C'B'=2$ 直角.

74. 推論 壹個ノ三角形ノ二邊 AB, AC ガ他ノ三角形ノ貳邊 $A'B'$, $A'C'$ ト互ヒニ相等シク且ツ其ニ双ノ等邊 AC, $A'C'$ ニ對スル角 B, B' ガ相等シキ片ハ此兩三角形ハ次ノ各場合ノ片全等形ナトル, （前章ノ圖チ見ヨ）

（第壹） 相等シキ兩角 B, B' ガ直角或ハ鈍角ナル片.

（第貳） 他ノ壹双ノ對邊 AB, $A'B'$ ニ對スル角 C 及ヒ C' ガ双ヒ鋭角ナルカ, 或ハ双方鈍角ナルカ或ハ何レカ壹個直角ナル片

（第三） 等角 B, B' ノ對邊 AC, $A'C'$ ガ他ノ等邊 AB, $A'B'$ ヨリ小ナラザル片.

（證） （第壹） $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle B=\angle B'$ ナルチ以テ $\angle C+\angle C'=2$ 直角ナルカ, 然ラザレバ $\angle C=\angle C'$ ナリ（前章ノ圖チ見ヨ） （73 定理）

然ルニ今 B, B' ナル貳角ハ双方直角或ハ双方鈍角ナルチ以テ, C 及ヒ C' ナル兩角ノ各ハ鋭角ナリ（59.）故ニ $\angle C+\angle C'=2$ 直角ナラズ $\therefore\quad \angle C=\angle C'$

而シテ $\angle B=\angle B'$, $AB=A'B'$（假設） $\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$ （54. 定理）

（第貳） $\angle C+\angle C'=2$ 直角ナルカ, 然ラザレバ $\angle C=\angle C'$ ナリ

而シテ若シ C 及ヒ C' ナル貳角ガ双方鋭角ナルカ, 或ハ双方鈍角ナル片ハ $\angle C+\angle C'=2$ 直角トナラズ, $\therefore\quad \angle C=\angle C'$.

又若シ兩角 C, C' ノ中ノ壹個例ヘバ C ガ直角ナルキハ,

$\angle C+\angle C'=2$ 直角及ヒ $\angle C=\angle C'$ ナル關係ノ何レニ就テモ C' ハ直角トナル. $\therefore\quad \angle C=\angle C'$.

斯クノ如ク C 及ヒ C' ガ双方鋭角ナルモ, 或ハ双方鈍角ナルモ, 或ハ壹個直角ナルモ, 恒ニ $\angle C=\angle C'$ ナリ.

而シテ $\angle B=\angle B'$, $AB=A'B'$,（假設） $\therefore$ $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$. （54. 定理）

（第三） $AC<AB$ ナラズトハ $AC=AB$ ナルカ, 或ハ $AC>AB$ ナルカチイフ. $AC=AB$ トスレバ $\angle C=\angle B$, （60. 定理）

而シテ $\angle C+\angle B<2$ 直角, （58 推論）

$\therefore\quad 2\angle C<2$ 直角, $\therefore\quad \angle C<$ 直角.

又 $AC>AB$ トスレバ $\angle B>\angle C$, （60. 定理）

而シテ $\angle B+\angle C<2$ 直角, （58. 推論）

$\therefore\quad 2\angle C<2$ 直角 $\therefore\quad \angle C<$ 直角

上ノ如ク $AC=AB$, 及ビ $AC>AB$ ノ何レニ於テモ $\angle C$ ハ直角ヨリ小ニシテ即チ鋭角ナリ.

同理ニヨリ $\angle C'$ モ亦鋭角ナルヲ知ル,

故ニ $\angle C+\angle C'=2$ 直角ナラズ, $\therefore\ \angle C=\angle C'$.

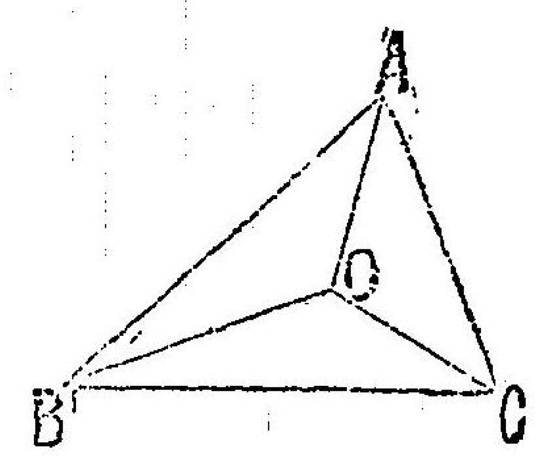
而シテ $\angle B=\angle B'$, $AB=A'B'$ ナリ, $\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$. (54.定理)

第貳節之例題

(必要ノ例題ハ番號ノ肩ニ＊ヲ冠ス)

1. 三角形ノ形內ノ任意ノ壹點ヨリ各角頂ニ至ル距離ノ和ハ周邊ヨリ小ニシテ半周ヨリ大ナリ.

三角形ヲ ABC トシ形內ノ任意ノ壹點ヲ O トス,



然ルトキハ $OA+OB+OC<AB+BC+CA$,

$OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

(證) $OB+OC<AB+AC$, (65.定理)

$OC+OA<BC+AB$, (")

$OA+OB<AC+BC$. (")

$$+)\ \overline{2(OA+OB+OC)<2(AB+BC+CA)},$$

$\therefore\ OA+OB+OC<AB+BC+CA$,

又 $\triangle AOC$ ニ於テ $OA+OC>AC$, (64.定理)

$\triangle BOC$ ニ於テ $OC+OB>BC$, (")

$\triangle AOB$ ニ於テ $OB+OA>AB$, (")

$$+)\ \overline{2(OA+OB+OC)>AB+BC+CA},$$

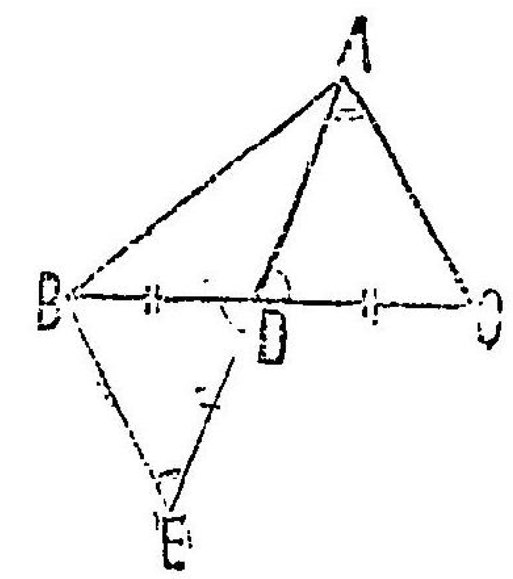
$\therefore\ OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$,

2. 三角形ノ頂點ヨリ底邊ノ中央ニ至ル直線ハ二邊ノ和ト底邊トノ差ノ半ヨリ大ニシテ二邊ノ和ノ半ヨリ小ナリ.

(注意 三角形ノ壹角頂ヨリ其對邊ノ中央ニ至ル直線ヲ中

線トイフ)

三角形ヲ ABC トシ, 底邊 BC ノ中央ヲ D トス. 然ルトキハ



(i) $AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$,

(ii) $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

(證) $\triangle ADC$ ニ於テ $AD+DC>AC$,

$\triangle ABD$ ニ於テ $AD+BD>AB$

加フレバ $2AD+BC>AB+AC$,

$\therefore\ 2AD>AB+AC-BC$,

$\therefore\ AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$. [(i) ノ證]

次ギニ(ii)ヲ證セン爲メ, AD ヲ E マデ引長シ $DE=AD$ トシ BE ヲ結ブ, 然ルトキハ $\triangle ABE$ ニ於テ

$AE<AB+BE$, (64.定理)

即 $2AD<AB+BE$ ……(a)

然ルニ $\triangle BDE$, $\triangle ADC$ ニ於テ

$ED=DA$, (作法) $DB=DC$, (假設)

$\angle BDE=\angle ADC$, (對頂角)

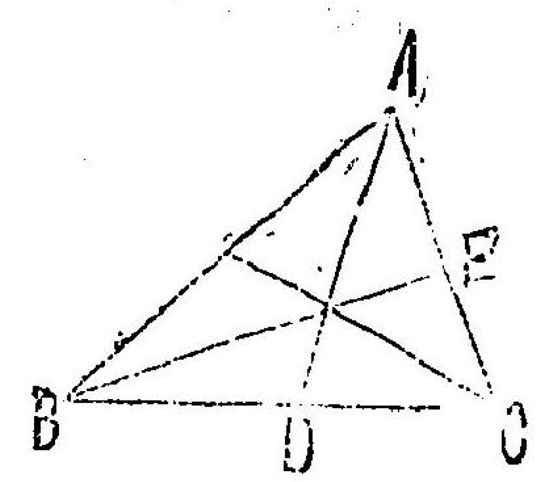
$\therefore\ \triangle BDE\equiv\triangle ADC$, (55.定理)

$\therefore\ BE=AC$,

$\therefore$ (a)ヨリ $2AD<AB+AC$, $\therefore\ AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$

3. 三角形ノ三個ノ中線ノ和ハ其三角形ノ半周ヨリ大ニシテ周ヨリハ小ナリ.

三角形ヲ ABC トシ三個ノ中線ヲ AD, BE, CF トス. 然ルトキハ



(i) $AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$,

(ii) $AD+BE+CF<AB+BC+CA$.

(證) 前例題ノ(i)ニヨリ $AD>\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

同理ニヨリ $BE>\frac{1}{2}(AB+BC-AC)$,

" $CF>\frac{1}{2}(BC+CA-AB)$.

上ノ三式ヲ加フレバ $AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$. 〔(i) ノ証〕

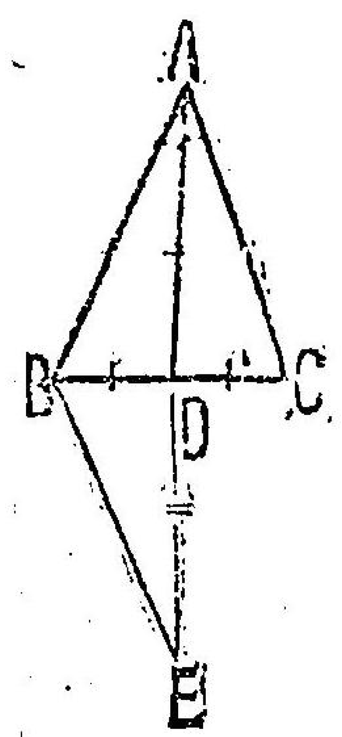
又前例題 (ii) ニヨリ $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$,

同理ニヨリ $BE<\frac{1}{2}(AB+BC)$,

〃 $CF<\frac{1}{2}(AC+BC)$.

加フレバ $AD+BE+CF<AB+BC+CA$. 〔(ii) ノ証〕

4. 三角形ノ壹角ノ等分線ガ其對邊ノ中央ヲ過グルトキハ其三角形ハ〃脚三角形ナリ.



三角形ヲ ABC トシ, 壹角 A ノ等分線ガ對邊 BC ノ中央点 D ヲ過グルトス,

然ルトキハ ABC ハ等脚三角形ナリ.

(証) AD ヲ E マデ引張シ DE ヲ AD ト等長ニシ BE ヲ結ブ,

然ルトキハ $\triangle ADC$, $\triangle BDE$ ニ於テ

$AD=DE$, (作法)

$DC=BD$, (假設)

$\angle ADC=\angle BDE$, (對頂角) ∴ $\triangle ADC\equiv\triangle BDE$, (55. 定理)

∴ $AC=BE$, ……………(a)

及 $\angle DAC=\angle E$.

然ルニ $\angle DAC=\angle BAD$ (假設) ∴ $\angle BAD=\angle E$

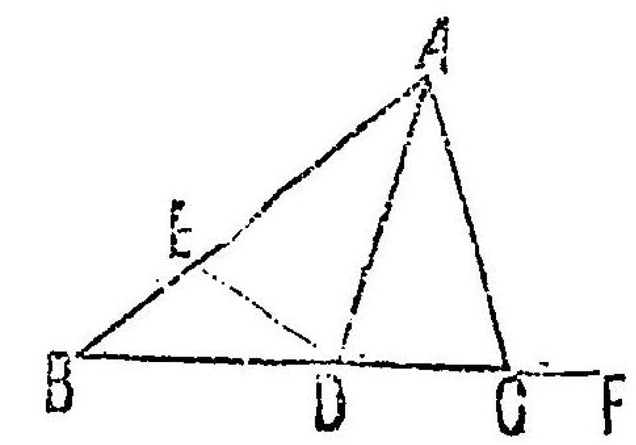
∴ $BE=AB$ (62. 定理)

∴ (a) ヨリ $AC=AB$.

故ニ $\triangle ABC$ ハ等脚三角形ナリ

(注意) 學生誤ツテ $BD=DC$, AD ハ共通邊, $\angle DAB=\angle DAC$ ニシテ即兩三角形 ABD, ALC ハ二邊壹角相等シキヲ以テ全等形トナリ, 從ツテ $AB=AC$ ト解スルナラン. 此レ正當ノ解ニアラズ, 73 章定理ヲ見ルベシ.

5. 三角形 ABC ニ於テ A 角ノ等分線ト BC トノ交点ヲ D トス, 然ルトキ若シ $AB<AC$ ナレバ $BD>DC$ ナリ.



(証) 小邊 AC ト等長ナル部分ヲ大邊 AB 上ニ取リ, 之レヲ AE トス, 故ニ E ハ A ト B トノ間ニアリ.

今 DE ヲ結ベバ $\triangle ADE$, $\triangle ADC$ ニ於テ

$AE=AC$ (作法)

AD ハ共通

$\angle DAE=\angle DAC$ (假設) ∴ $\triangle ADE\equiv\triangle ADC$, (55 定理)

∴ $DE=DC$……………(a)

及 $\angle AED=\angle ACB$.

故ニ今 BC ヲ F マデ引張セバ $\angle BED=\angle ACF$, (37. 推論)

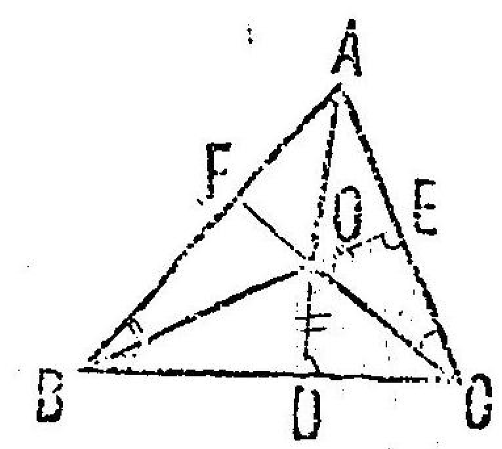
而シテ $\angle B<\angle ACF$, (56. 定理)

∴ $\angle B<\angle BED$.

∴ $ED<BD$. (62. 定理)

∴ (a) ヨリ $DC<BD$.

6.* 三角形ノ各角ノ等分線ハ各邊ヨリ等距ナル壹点ニ相會ス, 三角形ヲ ABC トス,



然ルトキハ各角ノ等分線ハ各邊ヨリ等距ナル一点ニ於テ會ス

(証) 二角 B, C ノ等分線ヲ作リ, 其交点ヲ O トシ AO ヲ結ビ, O ヨリ各邊ヘ垂線 OD, OE, OF ヲ引ク,

$\triangle ODC$, $\triangle OEC$ ニ於テ

$\angle D=\angle E=$ 直角

$\angle OCD=\angle OCE$, (假設)

OE ハ共通, ∴ $\triangle ODC\equiv\triangle OCE$, (72. 定理)

∴ $OD=OE$,

同理ニヨリ $\angle OBD\equiv\triangle OBF$ ∴ $OD=OF$,

∴ $OE=OF$.

$\triangle AOE$, $\triangle AOF$ ニ於テ

$OE = OF$,

AO ハ共通,

$\angle E = \angle F =$ 直角, $\therefore$ $\triangle AOE \equiv \triangle AOF$, (**74.** 推論)

$\therefore$ $\angle EAO = \angle FAO$,

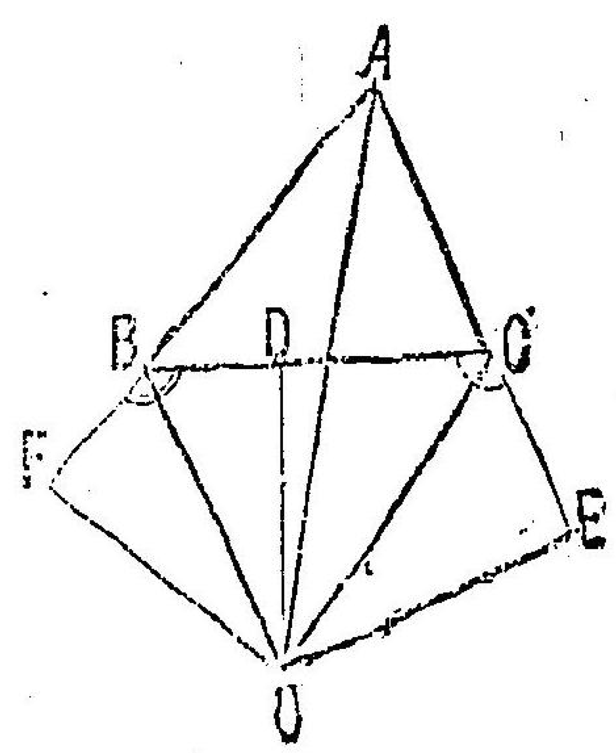
故ニ BAC 角ノ等分線ハ AO ト壹致シ,即チ O ヲ過グ,詳シク言ヘハ各角ノ等分線ハ O ニ於テ相會ス.

而シテ前ニ証セシ如ク $OD = OE = OF$ ナルヲ以テ O ハ各邊ヨリ等距ナリ

(注意) 三角形ノ各角ノ等分線ノ交点ヲ其三角形ノ内心 (*in-centre*) トイフ.

7.* 三角形ノ壹角ノ等分線ト此角ニ隣接セザル貮外角ノ等分線トハ壹点ニ相交ル,而シテ此交点ハ各邊ヨリ等距ナリ.

三角形ヲ ABC トス 然ル時ハ B, C ニ於ケル貮外角及ヒ A 角ノ各等分線ハ壹点ニ相交ル,而シテ此交点ハ各角ヨリ等距ナリ.



(証) B, C ニ於ケル貮外角ノ各等分線ノ交点ヲ O トシ, AO ヲ結ヒ, O ヨリ AB, AC ノ引張線及ヒ BC ヘ垂線 OF, OE, OD ヲ引ク.

然ル時ハ前題ト同理ニヨリ

$\triangle ODC \equiv \triangle OCE$, $\therefore$ $OD = OE$,

又 $\triangle ODB \equiv \triangle OBF$, $\therefore$ $OD = OF$,

$\therefore$ $OE = OF$,

之レニ由テ $\triangle AOE \equiv \triangle AOF$, $\therefore$ $\angle OAE = \angle OAF$

故ニ A 角ノ等分線ハ AO ト壹致シ即チ O ヲ過グ.

(注意) 三角形ノ壹角ノ等分線ト此角ニ隣接セザル貮外角ノ各等分線トノ交点ヲ傍心 (*ex-centre*) トイフ.

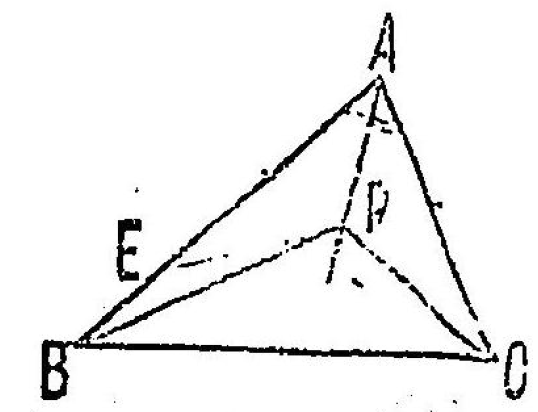
8. 三角形ノ壹角ノ等分線上ノ任意ノ壹点ヨリ其對邊ノ兩端ニ到ル距離ノ差ハ貮邊ノ差ヨリ小ナリ.

三角形ヲ ABC トシ A 角ノ等分線上ノ任意ノ壹点ヲ P トス.

然ルトキハ $PB \sim PC < AB \sim AC$ ナリ.

(但シ $\sim$ ハ二量ノ差ヲ示ス符号ニシテ例ヘバ $a \sim b$ ニ於テハ $a > b$ ナレバ $a - b$ ヲ示シ, $a < b$ ナレバ $b - a$ ヲ示ス)

(証) AB 上ニ壹点 E ヲ取リ, AE ヲ AC ト等長ナラシム,但シ E ハ AB ノ引張線上ニアルモ可ナリ,



PE ヲ結ベハ $\triangle APE$, $\triangle APC$ ニ於テ

$AC = AE$, (作法)

AP ハ共通

$\angle PAC = \angle PAB$, (假設) $\therefore$ $\triangle APE \equiv \triangle APC$, (**55.** 定理)

$\therefore$ $PE = PC \cdots\cdots(a)$

而シテ $\triangle PEB$ ニ於テ $PB \sim PE < BE$, (**65** 推論)

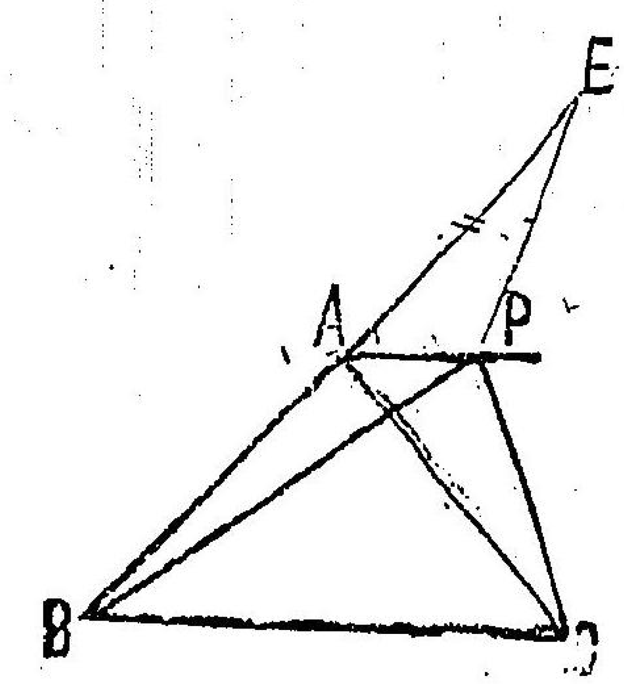
$\therefore$ (a) ヨリ $PB \sim PC < BE$,

然ルニ $BE = AB \sim AC$ $\therefore$ $PB \sim PC < AB \sim AC$,

9. 三角形ノ外角ノ等分線上ノ任意ノ壹点ヨリ對邊ノ兩端ニ到ル距離ノ和ハ他ノ貮邊ノ和ヨリ大ナリ.

三角形 ABC ノ A ニ於ケル外角ノ等分線上ノ任意ノ点ヲ P トス,

然ル時ハ $PB + PC > AB + AC$.



(証) BA ノ引張線上ニ E ヲ取リ AE ヲ AC ト等長ナラシメ, EP ヲ結ブ, $\triangle APE$, $\triangle APC$ ニ於テ

$AE = AC$, (作法)

AP ハ共通

$\angle EAP = \angle CAP$ (假設) $\therefore$ $\triangle APE \equiv \triangle APC$ (**55.** 定理)

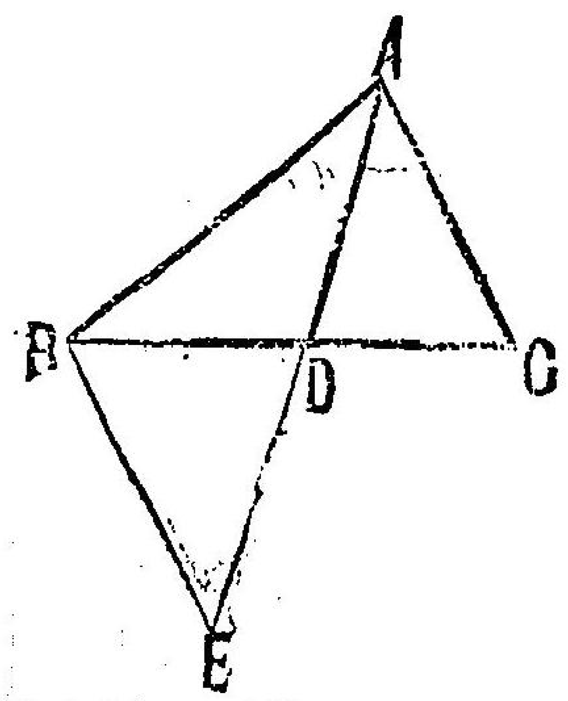
$\therefore \quad PE = PC$

然ルニ $\triangle BPE$ ニ於テ $BP+PE>BE$, (64. 定理)

即 $BP+PC>AB+AC$.

10.* 三角形ABCニ於テ$AB>AC$トシ, BCノ中央点ヲDトスレバ $\angle BAD<\angle CAD$ ナリ.

(証) ADヲEマデ引張シ,DEヲADト等長ナラシメBEヲ結ブ,



$\triangle ADC$, $\triangle BDE$ ニ於テ

$AD = DE$, (作法)

$DC = BD$, (假設)

$\angle ADC = \angle BDE$, (對頂角)

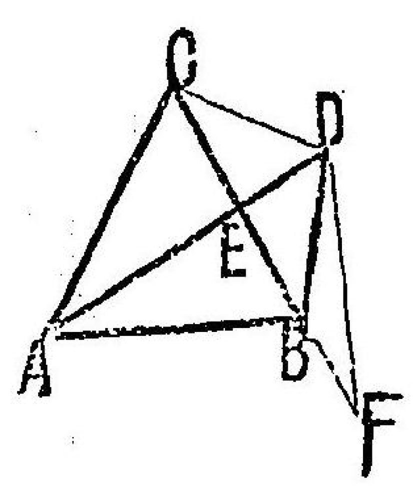
$\therefore \quad \triangle ADC \equiv \triangle BDE$, (55 定理)

$\therefore \quad AC = BE$, 及 $\angle DAC = \angle E$,

而シテ $AB > AC$ (假設) $\therefore \quad AB > BE$

$\therefore \quad \angle E > \angle BAD \quad \therefore \quad \angle DAC > \angle BAD$.

11. 同底ABノ同側ニ頂角ヲ有スル両三角形ABC, ABDニ於テ $AC = BC = \frac{1}{2}(AD+BD)$ トシ AD, BCノ交点ヲEトスレバECハEDヨリ大ナリ.



(証) $\angle CAB = \angle CBA \quad \therefore \quad CA = CB$

$\angle DBA > \angle DAB$

$\therefore \quad AD > DB$ (62. 定理)

$\therefore \quad AD > \frac{1}{2}(AD+DB)$

而シテ $AC = BC = \frac{1}{2}(AD+DB)$

$\therefore \quad AD > BC$

故ニ今CB上ニ於テF点ヲ取リCFヲADト等長ナラシムルトキハFハCBノ引張線上ニアリ, 而シテDF, CDヲ結ブ

今AC, 及ビBCノ各ハAD+DBノ半ナルヲ以テ

$AD+DB = AC+BC \quad \therefore \quad CF+BD = AC+BC$.

前式ノ双方ヨリBCヲ減ズルトキハ

$DB + BF = AC$,

然ルニ $\triangle BDF$ ニ於テ $DB + BF > DF$, $\therefore \quad AC > DF$,

故ニ両三角形ACD, DCF, ニ於テ

$AD = CF$, (假設)

CDハ共通,

$AC > DF$, $\therefore \quad \angle CDA > \angle DCF$, (60 定理)

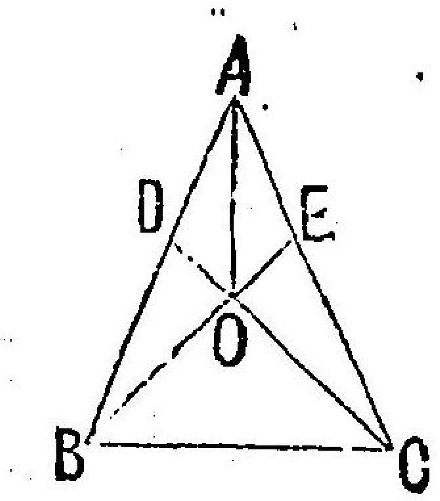
$\therefore \quad CE > ED$. (62, 定理)

12. AB, ACハ等脚三角形ノ等邊ナリトシ, AB上ニD点ヲAC上ニE点ヲ取リ, $AD = AE$ナラシメ, CD, BEヲ結ブトキハ其交点Oハ頂角BACノ等分線上ニアリ.

(証) AOヲ結ブ.

假設ニヨリ $AB = AC$ 及ビ $AD = AE$, $\therefore \quad BD = EC$.

故ニ両三角形BDC, BECニ於テ



$BD = EC$,

BCハ共通,

$\angle DBC = \angle ECB$, (60. 定理)

$\therefore \quad \triangle BDC \equiv \triangle BEC$,

$\therefore \quad \angle DCB = \angle EBC$,

$\therefore \quad OB = OC$ (62. 定理)

故ニ両三角形AOB, AOCニ於テ

$OB = OC$,

AOハ共通,

$AB = AC$, $\therefore \quad \triangle AOB \equiv \triangle AOC$

$\therefore \quad \angle BAO = \angle OAC$

故ニAOハ頂角BACヲ等分ス.

故ニCD, BEノ交点Oハ頂角BACノ等分線上ニアリ.

第三節—平行線

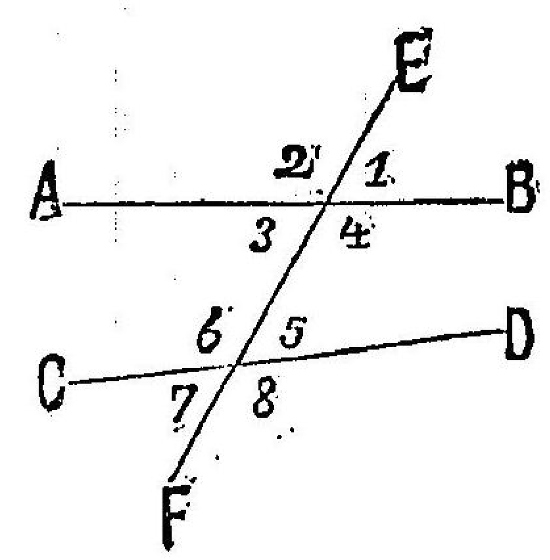
定義

75. 平行直線(***Parallel Straight Lines***) 同壹ノ平面上ニアル數個ノ直線チ双方ニ如何ニ引張スルモ決シテ相交ラサル𬼂,此諸直線ハ平行ストイヒ,或ハ平行線ナリトモイフ.

故ニ同シ平面上ニアラザル諸直線ハ假令相交ラザルモ,之レチ平行線トイフチ得ザルナリ.

平行之記號 二直線ガ平行ナルチ示スニハ // ナル記號チ以テス.即チ二直線AB, CDガ平行ナルチ示スニハ AB // CD チ以テス.

76. 交線之角 壹直線EFガ他ノ二直線ニ交ル𬼂ハ其交点ニ於テ八個ノ角チナス,即チ1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8ノ八角ノ如シ而シテ此八個ノ角ニハ次ノ如キ特別ノ名稱チ附ス.



1, 2, 7, 8ナル四個ノ角チ外角(***Exterior angles***)ト稱ス.

3, 4, 5, 6ナル四個ノ角チ内角(***Interior angles***)ト稱ス.

4, 6ノ二角,及ビ3, 5ノ二角チ錯角(***Alternate angles***)トイフ.

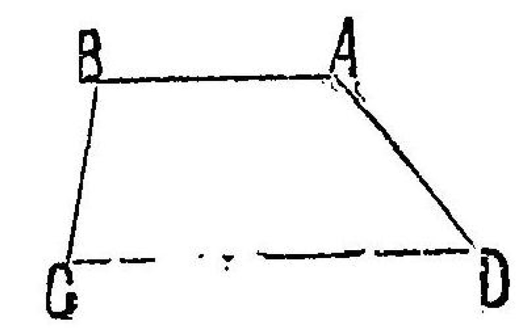
1, 5ノ二角; 4, 8ノ二角; 2, 6ノ二角; 及ビ3, 7ノ二角チ應角(***Corresponding angles***)ト稱ス.

77. 四角形ノ區別チ示ス

(第壹) 不平行四角形(***Trapezium***)トハ各邊ガ平行セザル四角形チイフ.

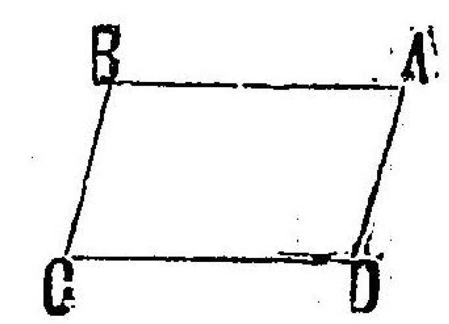
不平行四角形ハ單ニ四角形ト略稱スルチ通例トス.

(第貳) 梯形(***Trapezoid***)トハ平行セル貳邊チ有スル四角形チイフ



例ヘバ四角形ニ於テ對邊AB, CDハ相平行シ他ノ對邊BC, ADハ平行セザル𬼂,此四角形チ梯形トイフ.

(第三) 平行四角形(***Parallelogram***)トハ各邊ガ貳個ツツ平行セル四角形チイフ.



例ヘバ四角形ABCDニ於テAB // CD, BC // ADナレバ此四角形ハ平行四角形ナリ.

78. 梯形之區別

(第壹) 等斜梯形 梯形ノ不平行貳邊ガ等長ナル𬼂之レチ等斜梯形トイフ.

例ヘバ前章ノ初ノ圖ニ於テ若シ BC = AD ナレバ ABCD ハ等斜梯形ナリ.

(第貳) 直梯形 梯形ノ壹角ガ直角ナル𬼂之レチ直梯形トイフ.

前章ノ初ノ圖ニ於テ任意ノ壹角例ヘバCガ直角ナル𬼂ABCDチ直梯形トイフ.

而シテ等斜梯形及ビ直梯形ナラザルモノハ單ニ梯形ト稱ス.

79. 平行四角形之區別

(第壹) 菱形(***Rhombus***) 各邊ガ等長ナル平行四角形ノ菱形トイフ.

例ヘバ77.章ノ後ノ圖ニ於テ若シAB=BC=CD=ADナル𬼂ハ

ABCD ヲ菱形トイフ.

(第貳) 矩形(*Rectangle*)　平行四角形ノ壹角ガ直角ナルヰ此四角形ヲ矩形トイノ

矩形ハ時トシテハ直方形トモイフ.

(第三) 正方形(*Square*)　矩形ノ各邊ガ等長ナルヰ之ヲ正方形トイフ.

(第四) 不正平行四角形(*Rhomboid*)　菱形,矩形及ビ正方形ナラザル平行四角形ヲ不正平行四角形トイフ.

不正平行四角形ハ單ニ平行四角形ト略稱スルヲ通例トス.

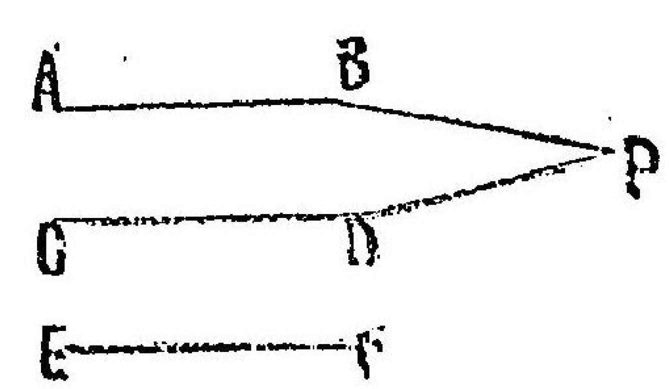
80. 正射影(*Orthogonal Projection*)　同平面上ニ甲乙二直線アリテ(但シ甲ハ有限直線ニシテ乙ハ無限直線ナリ)甲線ノ兩端ヨリ乙線ヘ垂線ヲ引クヰ,此二垂線ノ間ニ夾マレタル乙線ノ部分ヲ稱シテ乙線上ニ於ケル甲線ノ正射影トイフ.

幾何公理

81. 公理(3)　壹点ヲ過ギ且ツ壹定直線ニ平行スル直線ヲ引クコヲ得,而シテ唯壹個ニ限ル.

定理拾八

82. 貳直線ノ各ガ他ノ壹直線ニ平行スルヰ其二直線ハ平行ス.



貳直線ヲ AB, CD トシ,他ノ壹直線ヲ EF トス.

然ルヰハ若シ AB//EF, CD//EF ナレバ AB//CD ナリ.

(証) AB, CD ガ平行ナラスト假定ス,

然ルヰハ AB, CD ヲ引張スレバ相交ルベシ,而シテ其交点ヲ P トス.

然ルヰハ P 点ヲ過ギテ且ツ壹直線 EF ニ平行セル貳個ノ直線ヲ引キ得ルコトナル,但シ假設ニヨリ AB, CD ハ平行ナレバナリ是レ不合理ナリ.　(81 公理)

故ニ AB, CD ハ相交ラズ,

故ニ AB, CD ハ平行ス.　(75 定義)

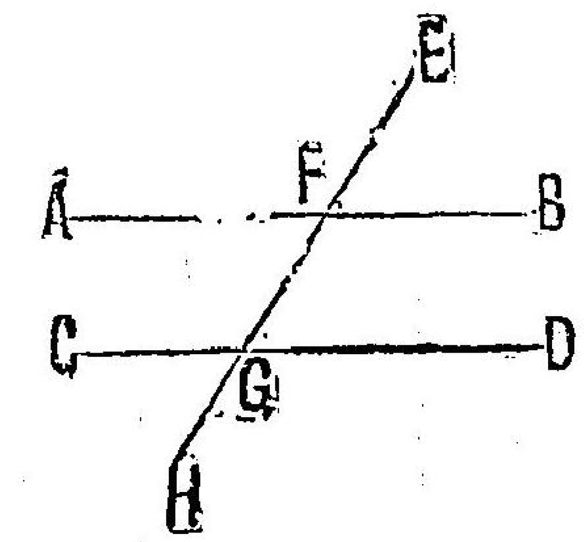
定理拾九

83. 壹直線ガ他ノ二直線ヲ截ルヰ次ノ三個ノ條件ノ何レカニ適合スレバ其貳直線ハ平行ス,

(第壹) 錯角相等シ.

(第貳) 應角相等シ.

(第三) 同方ノ兩内角ガ補角ヲナス(但シ同方ノ内角トハ截リシ線ノ同側ニ在ル兩角ヲイフ)



壹直線 EH ガ二直線 AB, CD ヲ截ルトシ,其交点ヲ F, G トスレバ

(第壹) 錯角 AFG, FGD 相等シケレバ AB, CD ハ平行ス.

(第貳) 應角 EFB, FGD 相等シキヰハ AB, CD ハ平行ス.

(第三) 同方ノ兩内角 BFG, FGD ガ補角ヲナセバ AB, CD ハ平行ス

(証) (第壹) AB, CD ハ平行ナラズト假定スルヰハ此貳直線ハ EH ノ左側カ,右側カニ於テ相交ルベシ,

今 AB, CD ハ EF ノ右側ニ於テ交ルトシ,其交点ヲ P トスレバ AFG 角ハ三角形 FPG ノ外角トナル,

故ニ　$\angle AFG > \angle FGD$　ナリ　　(56. 定理)

是レ不合理ナリ，何トナレバ此貳角ハ假設ニヨリ相等シケレバナリ，

故ニ　AB, CD ハ EH ノ右側ニ於テ交ラズ.

同理ニヨリ AB, CD ハ EH ノ左側ニ於テモ交ラザルヲ知ル.

故ニ AB, CD ハ平行ス.

(第貳)　$\angle EFB = \angle EGD$　(假設)

又　$\angle EFB = \angle AFG$　(對頂角)

∴　$\angle EGD = \angle AFG$　　∴　$AB // CD$　(第壹)

(第三)　$\angle BFG + \angle FGD = 2$ 直角　(假設)

又　$\angle BFG + \angle AFG = 2$ 直角　(38. 定理)

∴　$\angle FGD = \angle AFG$　∴　$AB // CD$　(第壹)

定理貳拾(前定理之逆)

84. 壹直線ガ平行二直線ヲ截ルトキハ

(第壹) 錯角相等シ.

(第貳) 應角相等シ.

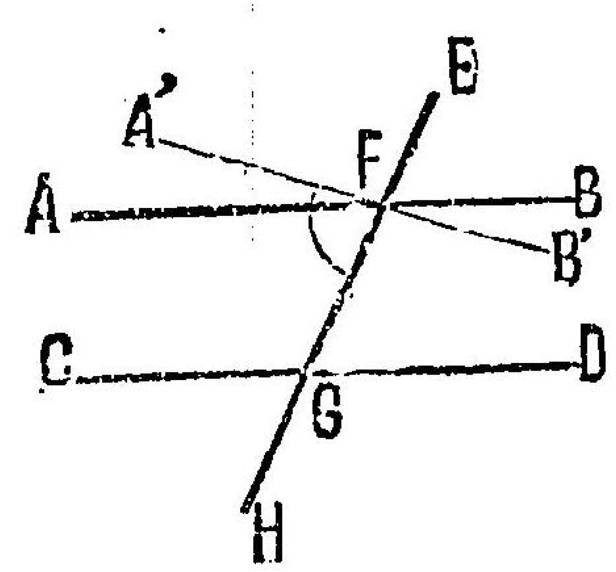
(第三) 同方ノ内角ハ補角ヲナス.

平行二直線ヲ AB, CD トシ，之レニ交ル直線ヲ EH トシ，其交点ヲ F, G トス

(第壹)　$\angle AFG = \angle FGD$,

(第貳)　$\angle EFB = \angle EGD$,

(第三)　$\angle BFG + \angle FGD = 2$ 直角



(證)　(第壹)　F点ヲ過ギテ直線 $A'B'$ ヲ引キテ，$\angle A'FG$ ヲシテ $\angle FGD$ ニ等シカラシム.

然ルトキハ　$A'FB' // CD$　(83. 定理第壹)

又　$AB // CD$　(假設)

故ニ $A'FB'$ ハ AB ト壹致ス何トナレバ壹点ヲ過ギテ CD ニ平行セル直線ハ唯壹個ノミニ限レバナリ，　(8. 公理)

從ッテ $\angle A'FG$ ハ $\angle AFG$ ト壹致シ即チ相等シ，

然ルニ作法ニヨリ $\angle A'FG$ ハ $\angle FGD$ ト等シ，∴ $\angle AFG = \angle FGD$.

(第貳)　$\angle EFB = \angle AFG$,　(對頂角)

然ルニ　$\angle AFG = \angle FGD$,　(第壹)

∴　$\angle EFB = \angle FGD$.

(第三)　$\angle BFG + \angle AFG = 2$ 直角，(38. 定理)

然ルトキ　$\angle AFG = \angle FGD$　(第壹)

∴　$\angle BFG + \angle FGD = 2$ 直角.

85. 推論　平行貳直線ノ壹個ニ直交スル直線ハ他ノ壹個ニモ直交ス(但シ壹直線甲ガ壹直線乙ニ垂線ナリトスヿヲ，甲ハ乙ニ直交ストイヒ或ハ甲ハ乙ニ直立ストイフ)

平行貳直線ヲ AB, CD トス，然ルトキハ CD ニ直交スル直線ハ AB ニモ直交ス.(前條ノ圖ヲ見ヨ)

(證)　EH 若シ CD ニ直交スト假定スレバ

$\angle EGD =$ 直角,

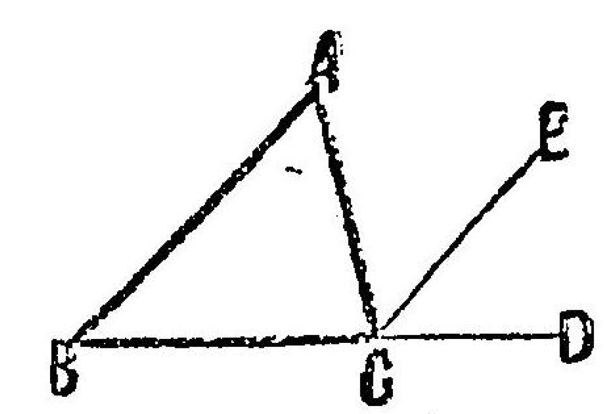
然ルニ　$\angle EGD = \angle AFG$,　(84. 定理第壹)

∴　$\angle AFG =$ 直角,　∴　$EH \perp AB$.

定理貳拾壹

86. 三角形ノ壹外角ハ貳個ノ内對角ノ和ニ等シ，而シテ三個ノ内角ノ和ハ貳直角ニ等シ.

三角形ヲ ABC トシ其壹邊 BC ヲ D マデ引張ス，然ルトキハ



(第一)　$\angle ACD = \angle A + \angle B$,

(第二)　$\angle A + \angle B + \angle ACB = 2$ 直角

(証) (第壹) C ヨリ AB ニ平行線 CE ヲ作ル,

然ルトキハ $\angle ACE = \angle A$ (錯角)

$\angle ECD = \angle B$ (應角)

加ヘテ $\angle ACD = \angle A + \angle B$.

(第貳) 第壹ヨリ $\angle A + \angle B = \angle ACD$,

上式ノ双方ヘ $\angle ACB$ ヲ加フルトキハ

$$\angle A + \angle B + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB,$$

然ルニ $\angle ACD + \angle ACB = 2$ 直角, (38. 定理)

$\therefore \quad \angle A + \angle B + \angle ACB = 2$ 直角.

87. 推論 直三角形ノ貳鋭角ハ餘角ヲナス.

直三角形ヲ ABC トシ $\angle A$ ヲ直角トス, (前章ノ圖ヲ見ヨ)

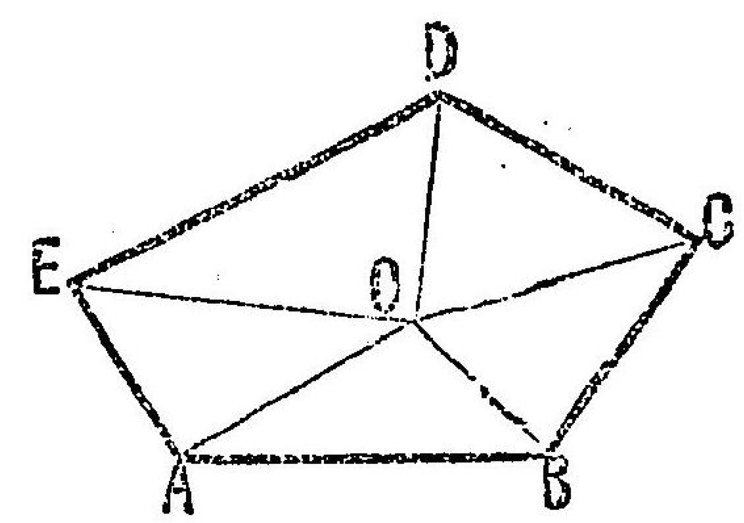
然ルトキハ $\angle B + \angle C =$ 直角.

(証) $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ 直角,

然ルニ $\angle A =$ 直角, (假設) $\therefore \quad \angle B + \angle C =$ 直角.

定理貳拾貳

88. 凸多角形ノ内角ノ和ハ其邊數ヨリ2個ヲ減セシ數丈ケ貳直角ヲ倍セシモノニ等シ.



ABCDE ヲ凸多角形トシ,其邊數ヲ n トシ,内角ノ和ヲ S トスレバ $S = 2$ 直角 $\times (n-2)$.

(証) 形内ニ任意ノ壹点 O ヲ取リ各角頂ト O トヲ連結ス,

然ルトキハ ABCDE ハ OAB, COB 等ナル諸三角形ニ分タル,而シテ此三角形ノ個數ハ邊ノ個數ト等シク即チ n ナリ,

而シテ各三角形ノ内角ノ和ハ貳直角ニ等シ,

故ニ OAB, OBC, OCD 等ナル n 個ノ三角形ノ内角ノ總和ハ二直角 $\times n$ ナリ,

然ルニ OAB, OBC, OCD 等ナル n 個ノ三角形ノ内角ノ總和ハ凸多角形 ABCDE ノ内角ノ和ト, O 点ノ週リノ角 (即チ四直角) トノ和ニ等シク即チ S + 4 直角ナリ.

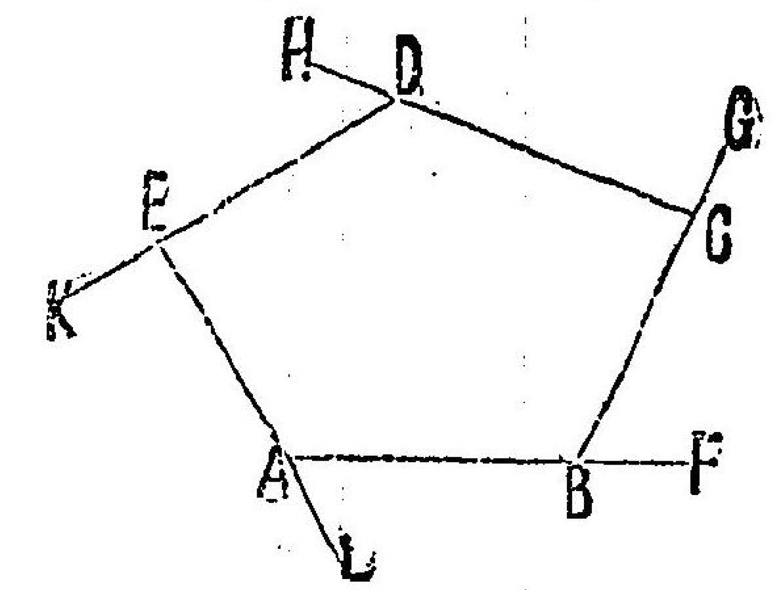
$\therefore \quad S + 4$ 直角 $= 2$ 直角 $\times n$

$\therefore \quad S = 2$ 直角 $\times n - 4$ 直角

$= 2$ 直角 $\times (n-2)$.

定理貳拾三

89. 凸多角形ノ各邊ヲ同方向ニ引張シテ生スル總外角ノ和ハ四直角ニ等シ.



多角形ヲ ABCDE トス.然ルトキハ其各邊ヲ同方向ニ引張シテ成ル總外角ノ和ハ四直角ニ等シ.

(証) AB, BF ハ壹直線ヲナス故ニ B ニ於ケル内角ト外角トノ和ハ貳直角ニ等シ. (38 定理)

同樣ニ他ノ各角頂ニ於ケル内外兩角ノ和ハ恒ニ貳直角ニ等シ.

故ニ内角ト外角トノ總和ハ,二直角ヲ角頂ノ數,即チ邊數丈ケ倍セシモノニ等シ,故ニ邊數ヲ n トスレバ

(外角ノ和) + (内角ノ和) $= 2$ 直角 $\times n$,

然ルニ 内角ノ和 $= 2$ 直角 $\times (n-2)$

$= 2$ 直角 $\times n - 4$ 直角,

$\therefore$ (外角ノ和) $+ 2$ 直角 $\times n - 4$ 直角 $= 2$ 直角 $\times n$

$\therefore$ 外角ノ和 $= 4$ 直角.

定理貳拾四

90 平行四角形ニ於テ

(第壹) 對角線ハ本形ヲ全等ナル兩三角形ニ分ツ.

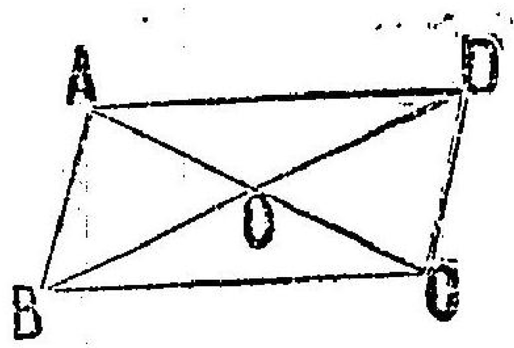
(第貳) 相對スル邊ハ相等シ.

(第三) 相對スル角ハ相等シ.

(第四) 各對角線ハ互ヒニ等分セラル.

平行四角形ヲ ABCD トシ, 兩對角線ノ交点ヲ O トス.

然ルトキハ



(第壹) $\triangle ABC \equiv \triangle ACD$ 及 $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$.

(第貳) $AD = BC$, 及 $AB = CD$.

(第三) $\angle ABC = \angle ADC$, 及 $\angle BAD = \angle DCB$.

(第四) AC ハ BD ヲ等分シ, BD ハ AC ヲ等分ス, 即チ $AO = OC$ 及ヒ $OD = OB$ ナリ.

(証) (第壹) $AB \parallel CD$ $\therefore$ $\angle BAC = \angle ACD$ (錯角).

又 $AD \parallel BC$ $\therefore$ $\angle ACB = \angle CAD$

故ニ兩三角形 ABC, ACD ニ於テ

$\angle BAC = \angle ACD$,

$\angle ACB = \angle CAD$,

AC ハ共通, $\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle ACD$. (54. 定理)

同理ニヨリ $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$.

(第貳) $\triangle ABC \equiv \triangle ACD$ (第壹) $\therefore$ $AB = CD$, 及 $BC = AD$.

(第三) $\triangle ABC \equiv \triangle ACD$ (第壹) $\therefore$ $\angle ABC = \angle ADC$.

又 $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$ (") $\therefore$ $\angle BAD = \angle BCD$.

(第四) 兩三角形 AOD, BOC ニ於テ

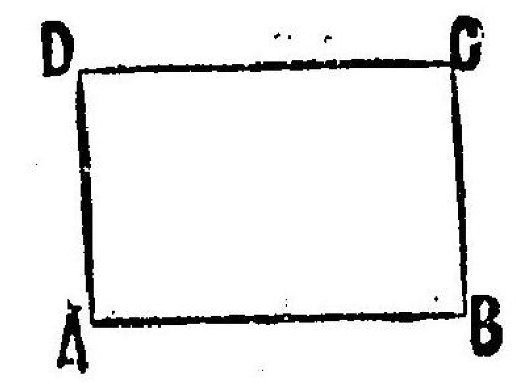
$\angle OAD = \angle OCB$, (錯角)

$\angle ODA = \angle OBC$, (")

$AD = BC$, (第二) $\therefore$ $\triangle AOD \equiv \triangle OBC$. (54. 定理)

$\therefore$ $AO = OC$, 及 $OD = OB$.

91. 推論壹 平行四角形ニ於テ壹角ガ直角ナレバ他ノ三個ノ角モ直角ナリ.



平行四角形ヲ ABCD トシ其壹角 A ヲ直角トス, 然ルトキハ他ノ三角 B, C, D ノ各ハ直角ナリ,

(証) ABCD ハ平行四角形ナリ,

$\therefore$ $\angle C = \angle A$, (90. 定理)

然ルニ $\angle A =$ 直角, $\therefore$ $\angle C =$ 直角.

又 $DC \parallel AB$ $\therefore$ $\angle D + \angle A = 2$ 直角, (84. 定理)

然ルニ $\angle A =$ 直角, $\therefore$ $\angle D =$ 直角.

同理ニヨリ $\angle B =$ 直角.

92. 推論貳 平行四角形ニ於テ隣接二邊ガ等長ナレバ此四角形ノ各邊ハ其長サ相等シ

平行四角形ヲ ABCD トシ $AB = BC$ トス,

然ルトキハ各邊相等シク即チ $AB = BC = CD = DA$ ナリ. (91. ノ圖)

(証) ABCD ハ平行四角形ナリ, $\therefore$ $AB = DC$, $BC = AD$ (90. 定理)

然ルニ $AB = BC$ $\therefore$ $AB = BC = DC = AD$.

定理貳拾五

93. 次ノ條件ノ何レカニ適合スル四角形ハ平行四角形ナリ

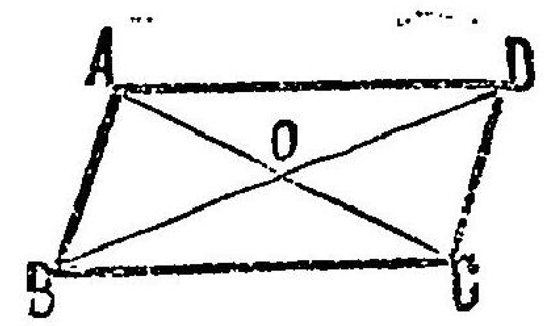
(第壹) 各對邊相等シ.

(第貳) 各對角相等シ.

(第三) 相對スル二邊ガ等長ニシテ且ツ平行ス.

(第四) 各對角線ガ互ヒニ等分セラル.

四角形ヲ ABCD トス，然ルトキハ



（第壹） AB = CD, AD = BC ナレバ ABCD ハ平行四角形ナリ.

（第貳） $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAD = \angle BCD$ ナレバ ABCD ハ平行四角形ナリ.

（第三） AD = BC, AD // BC ナレバ ABCD ハ平行四角形ナリ.

（第四） 各對角線 AC, BD ノ交点ヲ O トス然ルトキハ若 AO = CO, BO = DO ナレバ ABCD ハ平行四角形ナリ.

（証） （第壹） 兩三角形 ABD, BCD ニ於テ

AB = CD, （假設）

AD = BC, （ " ）

BD ハ共通　∴ $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$　（71. 定理）

∴ $\angle ABD = \angle BDC$, 及 $\angle ADB = \angle DBC$,

∴ AB // DC, 及 AD // BC, （83. 定理）

故ニ ABCD ハ平行四角形ナリ.

（第貳） ABCD ノ四内角ノ和ハ 4 直角ニ等シ.　（88. 定理）

然ルニ此四角ノ中相對スルモノハ貳個ツヽ相等シ.（假設）

∴ $\angle BAD + \angle ABC = 2$ 直角,

∴ AD // BC.　（83. 定理）

同理ニヨリ　AB // DC.

故ニ ABCD ハ平行四角形ナリ.

（第三） 兩三角形 ABD, BCD ニ於テ

AD = BC, （假設）

BD ハ共通,

$\angle ADB = \angle DBC$, （錯角）　∴ $\triangle ABD \equiv \triangle BCD$,　（55. 定理）

∴ $\angle ABD = \angle BDC$,

∴ AB // DC　（83. 定理）

又 AD // BC（假設）

故ニ ABCD ハ平行四角形ナリ.

（第四） 兩三角形 AOD, BOC ニ於テ

AO = OC, （假設）

BO = OD, （ " ）

$\angle AOD = \angle BOC$, （對頂角）　∴ $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$　（55. 定理）

∴ $\angle OAD = \angle OCB$

∴ AD // BC

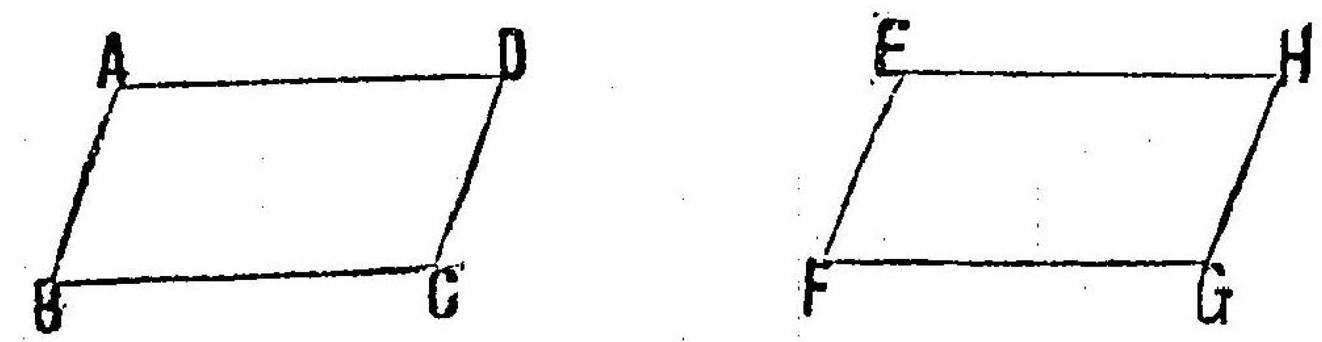
又同理ニヨリ　AB // CD

故ニ ABCD ハ平行四角形ナリ.

定理貳拾六

94. 壹個ノ平行四角形ノ隣接貳邊及ビ其夾角ガ他ノ平行四角形ノ隣接貳邊及ビ其夾角ト各相等シキトキハ此兩平行四角形ハ全等形ナリ.

兩平行四角形 ABCD, EFGH ニ於テ AB = EF, BC = FG 及ビ $\angle B = \angle F$ トス,



然ルトキハ此兩平行四角形ハ全等形ヲナス.

（証） ABCD ヲ EFGH ノ上ニ置キ, B ヲ F ノ上ニ, BC ヲ FG ノ上ニアラシメ, A, E ヲシテ FG ノ同側ニ在ラシム.

然ルトキハ BC = FG ナルヲ以テ C ハ G ノ上ニ落ツ.

而シテ AB // CD ナルヲ以テ $\angle C$ ハ $\angle B$ ノ補角ナリ.　（84. 定理）

又同理ニヨリ $\angle G$ ハ $\angle F$ ノ補角ナリ.

然ルニ $\angle B = \angle F$, 假設，　∴ $\angle C = \angle G$.

故ニ CD ハ GH ノ上ニ落ツ.

而シテ $CD = AB$, $HG = EF$ (90 定理) ニシテ $AB = EF$ (假設) ナリ

故ニ $CD = GH$ ナリ,

故ニ D ハ H ノ上ニ落ツ.

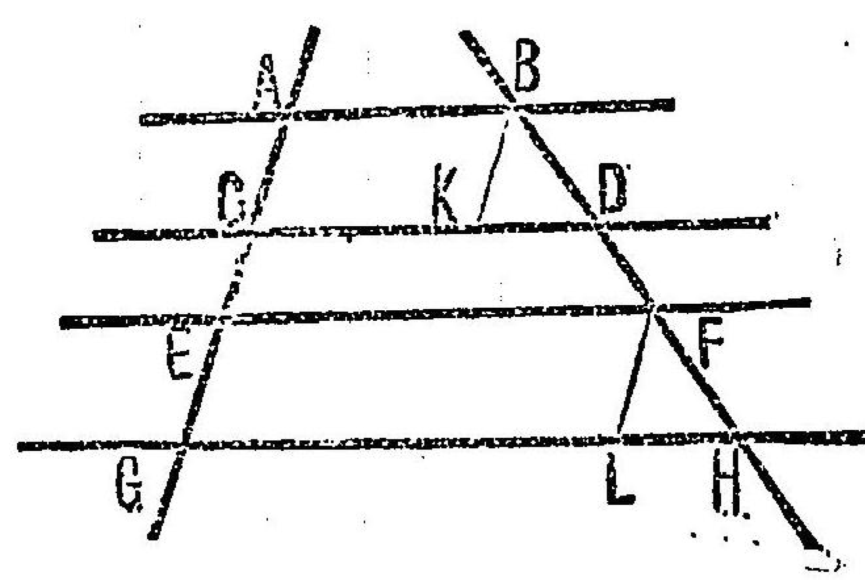
又 BC ハ全ク FG ノ上ニアリテ, $\angle B = \angle F$ ナリ, 故ニ BA ハ FE ノ上ニ落チ, 而シテ $AB = EF$ (假設) ナルヲ以テ A ハ E ノ上ニ落ツ,

上ノ如ク D ハ H ノ上ニ, A ハ E ノ上ニ落ツ, 故ニ AD ハ全ク EH ト壹致ス, [22 定理(2)]

故ニ □ABCD ハ □EFGH ト全ク壹致シ即チ全等形ナリ.

定理貳拾七

95. 凡ヘテ平行ナル貳組ミノ平行線ガ他ノ壹直線上ニ於テ等シキ部分ヲ截リ取ルトキハ, 任意ノ他ノ直線ガ其貳組ミノ平行線ニテ截リ取ラルヽ部分ハ亦相等シ.



平行直線ヲ AB, CD, EF, GH トシ直線ヲ AG トス, 而シテ AB, CD ガ AG 上ニ截リ取ル部分 AC ト EF, GH ガ AG 上ニ截リ取ル部分 EG トガ相等シトス

然ルトキハ AB, CD ガ他ノ直線 BH 上ニ截リ取ル部分 BD ト, EF, GH ガ BH 上ニ截リ取ル部分 FH トハ相等シ.

(証) B ヨリ AC ニ平行ナル直線ヲ引キ CD トノ交点ヲ K トス,

又 F ヨリ AG ニ平行ナル直線ヲ引キ GH トノ交点ヲ L トス,

今 ABKC, EFLG ハ共ニ平行四角形ナリ, ∴ $BK = AC$ 及 $FL = EG$,

然ルニ假設ニヨリ $AC = EG$　∴　$BK = FL$.

又 $BK \parallel AG$ 及 $FL \parallel EG$ ∴ $BK \parallel FL$ (83 定理) ∴ $\angle KBD = \angle LFH$

故ニ兩三角形 BKD, FLH ニ於テ

$BK = FL$,

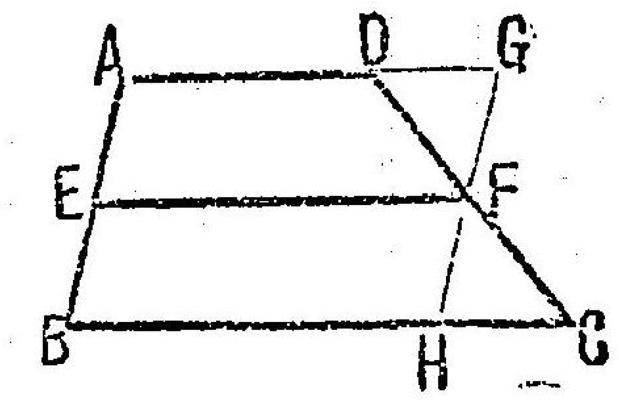
$\angle KBD = \angle LFH$,

$\angle BDK = \angle FHL$ (應角) ∴ $\triangle BKD \equiv \triangle FLH$, (54 定理)

∴ $BD = FH$.

定理貳拾八

96. 梯形ノ不平行貳邊ノ壹個ノ中央点ヨリ, 平行二邊ニ平行ナル直線ヲ其對邊ニマテ引クトキハ, 此直線ハ其對邊ノ中央ヲ過ギ, 且ツ其長サハ平行二邊ノ和半ニ等シ.



梯形ヲ ABCD トス

不平行貳邊ノ壹個 AB ノ中央点 E ヨリ平行貳邊 AD, BC ニ平行ナル直線ヲ引キ, 此直線ト DC トノ交点ヲ F トス, 然ルトキハ

(第一) $DF = FC$,　(第二) $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

(証) F ヨリ AB ニ平行線 GH ヲ引キ, GH ト平行二邊トノ交点ヲ G, H トス,

AEFG, EBHF ハ共ニ平行四角形ナリ, (90 定理)

∴ $FG = AE$,

及 $FH = EB$,

然ルニ $AE = EB$, (假設) ∴ $FG = FH$.

故ニ兩三角形 DGF, FHC ニ於テ

$FG = FH$,

$\angle G = \angle FHC$ (錯角)

$\angle GFD = \angle HFC$ (對頂角) ∴ $\triangle DFG \equiv \triangle FHC$, (54 定理)

∴ $DF = FC$. [第一ノ証]

又 AGHD, AGFE ハ共ニ平行四角形ナリ,

$\therefore \quad EF = AG,$

及 $AG = BH$ 　　$\therefore \quad EF = \frac{1}{2}(AG + BH)$

$= \frac{1}{2}(AD + DG + BH).$

然ルニ $\triangle DFG \equiv \triangle FHG,$ 　$\therefore \quad DG = HC,$

$\therefore \quad EF = \frac{1}{2}(AD + HC + BH) \quad = \frac{1}{2}(AD + BC)$ [第二ノ證]

97. 推論 梯形ノ不平行二邊ノ各中央点ヲ連結セル直線ハ平行二邊ニ平行シ,且ツ其長サハ平行二邊ノ和半ニ等シ

梯形 ABCD ノ平行貳邊 BC, AD ノ各中央点 E, F ヲ連結ス,

然ルトキハ EF ハ AD, BC ニ平行シ,且ツ其長サハ $\frac{1}{2}$(AD+BC) ニ等シ. (96. ノ圖ヲ見ヨ)

(證 AB ノ中央点 E ヨリ AD, BC ニ平行セル直線ヲ引クトキハ,此直線ハ BC ノ中央点 F ヲ過ギ,即チ EF ト一致ス,

即チ EF ハ AD, CB ニ平行ス.

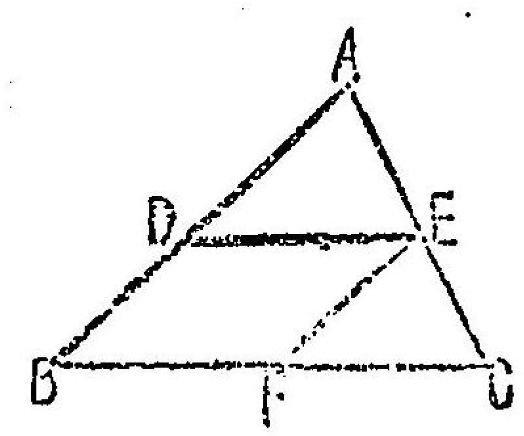
從ツテ $EF = \frac{1}{2}(AD + CB)$ ナリ　　(96. 定理)

定理貳拾九

98 三角形ノ壹邊ノ中央点ヨリ底邊ニ平行ナル直線ヲ第三邊ニマデ引クトキハ,此直線ハ其第三邊ノ中央点ヲ過ギ且ツ其長ハ底ノ半ナリ.

三角形ヲ ABC トシ,其壹邊 AB ノ中央点 D ヨリ底ニ BC ニ平行線 DE ヲ引キ AC トノ交点ヲ E トス,然ルトキハ

$AE = EC$, 及ビ $DE = \frac{1}{2}BC.$



(證) E ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ BC トノ交点ヲ F トス.

DEFB ハ平行四角形ナリ, 　$\therefore \quad EF = BD,$

然ルニ假設ニヨリ 　$BD = AD.$

故ニ兩三角形 ADE, EFC ニ於テ

$AD = EF,$

$\angle A = \angle FEC$ (應角)

$\angle AED = \angle C$ (〃) 　$\therefore \quad \triangle ADE \equiv \triangle EFC \quad \therefore \quad AE = EC$

又 DBFE ハ平行四角形ナリ 　$\therefore \quad DE = FC, \quad \therefore \quad DE = \frac{1}{2}BC.$

99. 推論 三角形ノ二邊ノ各中央ヲ連結セル直線ハ底ニ平行シ,且ツ其長サハ底ノ長サノ半ナリ.

三角形ヲ ABC トシ,二邊 AB, AC ノ各中央ヲ D, E トシ, DE ヲ連結ス.

然ルトキハ DE ハ BC ニ平行シ且ツ $DE = \frac{1}{2}BC$ ナリ. (前章ノ圖)

(證) E ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ此ノ直線ト BC トノ交点ヲ F トス.

然ルトキハ $EF = \frac{1}{2}AB$ 　　(98. 定理)

$= BD.$

又 $EF \parallel BD$, (作法)

故ニ BDEF ハ平行四角形ナリ. 　　(93. 定理)

$\therefore \quad DE \parallel BC.$ 　　[始メノ證]

又 BDEF ハ平行四角形ナルヲ以テ

$DE = BF,$

然ルニ E ハ AC ノ中央ニシテ EF ハ AB ニ平行ス (作法)

故ニ F ハ BC ノ中央ナリ, 　　(98. 定理)

即 $BF = \frac{1}{2}BC,$

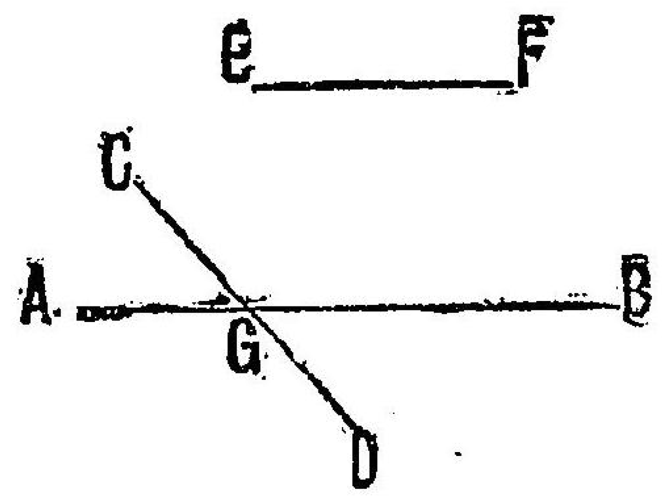
$\therefore \quad DE = \frac{1}{2}BC$ 　　[終リノ證]

第三節之例題

*1. 平行貳直線ノ壹個ニ交ル直線ハ他ノ壹直線ニモ交ル

平行貳直線ヲAB, EFトス,

然ルキハABニ交ル直線CDハEFニモ交ル.



(証) CDトABトノ交点ヲGトス,

直線CDガEFニ交ラズトスレバ

CDトEFトハ平行ス

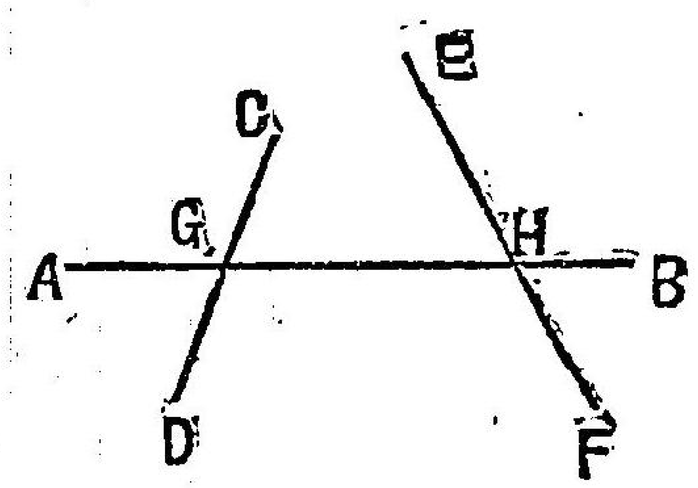
然ルキハ壹点Gヨリ壹直線EFニ平行シテ貳個ノ直線AB, CDヲ引キ得ルコトナル.

此レ不合理ナリ.　(61. 公理)

故ニCDハEFト交ル

*2. 壹直線ガ貳直線ニ交ルキ其同方内角ノ和ガ貳直角ニ等シカラザレバ其貳直線ハ相交ル.

直線ABガ貳直線CD, EFニG, Hニ於テ交リ,而シテ同方貳内角CGB, EHAノ和ガ貳直角ニ等シカラズトス.



然ルキハCD, EFハ相交ル.

(証) CD, EFガ平行ナリトス,

然ルキハ $\angle CGB + \angle EHA = 2$ 直角トナル,　(64. 定理)

此レ不合理ナリ,

故ニCD, EFハ平行ナラズ,

故ニCD, EFハ相交ル.

*3. AB, CDハOニ於テ相交ル貳直線ナリ,然ルキハCDニ直交スル直線EFトノABニ直交スル直線GHトハ相交ル.

(証) GH, EFガ交ラズトスレバ

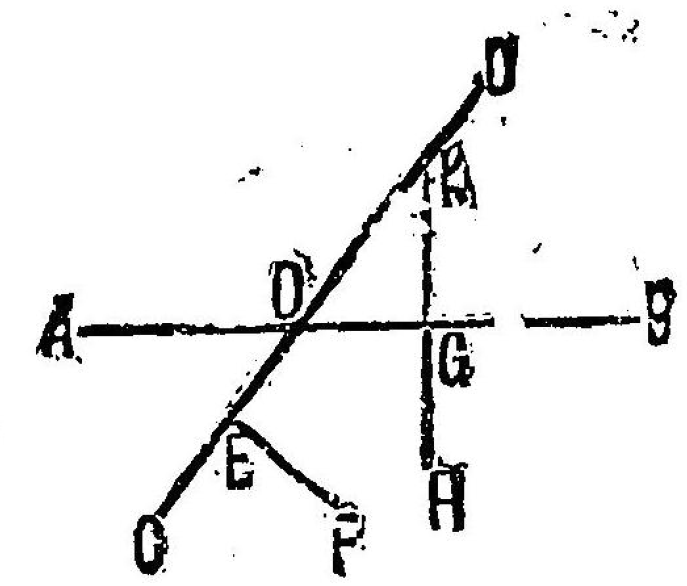
$GH \parallel EF$.

而シテ　$CD \perp EF$.　(假設)

$\therefore$　$CD \perp GH$,　(85. 推論)

又　$AB \perp GH$,　(假設)

故ニ壹点Oヨリ壹直線GHニ貳個ノ垂線ヲ引キ得ルコトナル, 57 推論)



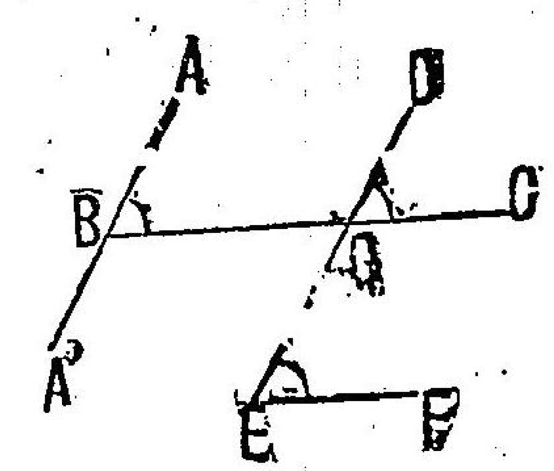
此レ不合理ナリ.

故ニEF, GHハ相交ル.

*4. 第壹 貳角ノ各邊ガ貳個ツヽ同方向ニ平行ナルキハ其貳角ハ相等シ.(但シ平行貳邊ガ兩角頂ノ連結線ノ同側ニアルキハ同方向ニ平行ストイフ)

第貳 壹角ノ壹邊ガ他ノ壹　ノ壹邊ト同方向ニ平行シ,他ノ貳邊ハ反對ノ方向ニ平行ナルキハ其貳角ハ補角ヲナス.

第壹 貳角ヲABC, DEFトシ, BA, EDハ同方向ニ平行シ, BC, EFモ亦同方向ニ平行ナリトス.



然ルキハ $\angle ABC = \angle DEF$ ナリ.

(証). AB, DEハ平行ス,故ニBCハ亦DEニ交ル,　(本例題1.)

而シテ其交点ヲGトス

然ルキハ　$DE \parallel AB$　$\therefore$　$\angle ABC = \angle DGC$,　(應角)

又　$BC \parallel EF$　$\therefore$　$\angle E = \angle DGC$,　(")

$\therefore$　$\angle ABC = \angle E$.

第貳 貳角ヲA'BC, DEFトシ, BA', EDハ反對ノ方向ニ平行シBC, EFハ同方向ニ平行ナリトス,

然ルトキハ兩角A'BC, DEFハ補角ヲナス.

(証) A'BヲAマデ引張ス,

然ルトキハ $\angle ABC = \angle DEF$, (本題第壹)

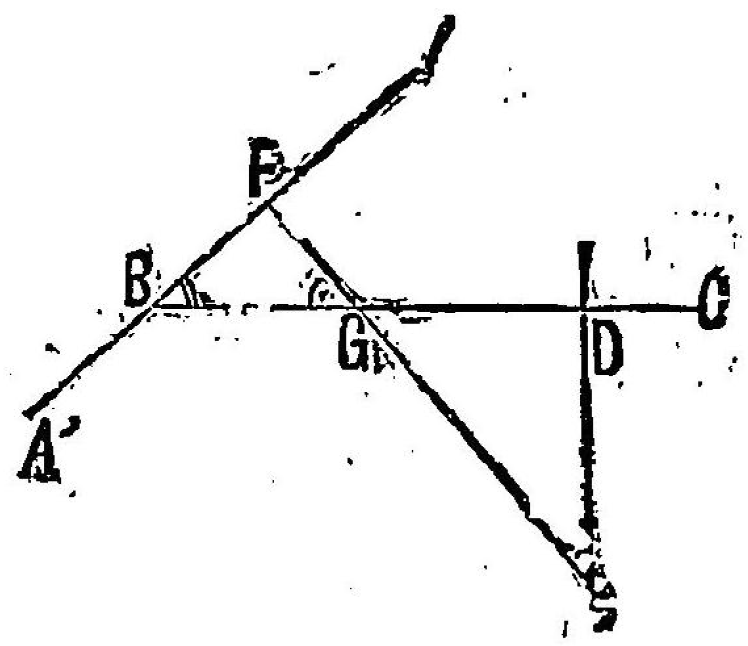
然ルニ $\angle ABC + \angle A'BC = 2$ 直角,

∴ $\angle DEF + \angle A'BC = 2$ 直角,

故ニ両角 A'BC, DEF ハ補角ヲナス.

(注意) 貳角ノ各邊ガ貳個ツヽ反對ノ方向ニ平行ナルトキハ其貳角ハ相等シキナリ, 學者試ミニ自ラ之レヲ解ケ.

*5. 貳ノ各邊ガ貳個ツヽ直交スルトキハ其貳角ハ相等シキカ, 或ハ補角ヲナス.



(第壹) 貳角共ニ鋭角ナル場合

貳角ヲ ABC, DEF トシ, $AB \perp EF$, $BC \perp DE$ トス,

然ルトキハ $\angle ABC = \angle DEF$.

(證) $\angle FDE + \angle DEF \neq 2$ 直角,

故ニ CB, EF ハ相交ル. (本例題 2)

而テシ其交点ヲ G トス,

$\triangle FGB$ ニ於テ $\angle F =$ 直角, ∴ $\angle ABC + \angle FGB =$ 直角 87. 推論)

$\triangle GDE$ ニ於テ $\angle D =$ 直角, ∴ $\angle DGE + \angle DEF =$ 直角 ( )

∴ $\angle ABC + \angle FGB = \angle DGE + \angle DEF$,

然ルニ $\angle FGB = \angle DGE$, (對頂角)

∴ $\angle ABC = \angle DEF$.

(第貳) 壹角ハ鋭角ニシテ他ノ壹角ハ鈍角ナル場合.

貳角ヲ A'BC, DEF トシ, A'BC ハ鈍角, DEF ハ鋭角ニシテ且ツ $EF \perp A'B$, $DE \perp BC$ トス,

然ルトキハ $\angle A'BC + \angle DEF = 2$ 直角.

(證) A'B ヲ A マデ引張ス

然ルトキハ $\angle ABC = \angle DEF$, (本題第壹)

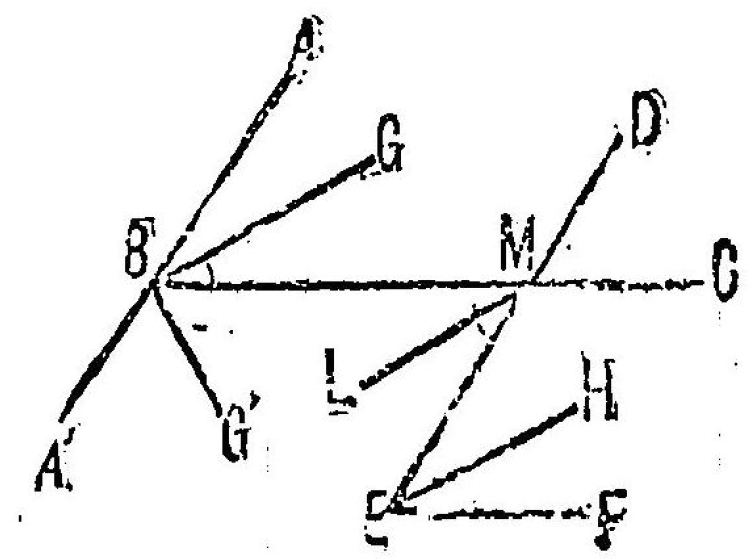
然ルニ $\angle ABC + \angle A'BC = 2$ 直角,

∴ $\angle DEF + \angle A'BC = 2$ 直角.

(注意) 貳角ガ共ニ鈍角ナル場合及ビ共ニ直角ナル場合ハ容易ニ解シ得ベキニツキ之レヲ畧ス. 學者自ラ試ミニ之レヲ解ケ

6. 貳角ノ各邊ガ貳個ツヽ平行ナルトキハ其各角ノ等分線ハ平行ナルカ或ハ直交ス.

(第壹) 貳角ノ各邊ガ同方向ニ平行ナル場合.



貳角ヲ ABC, DEF トシ, BA, ED ハ同方向ニ平行シ, BC, EF モ亦同方向ニ平行ナリトシ, ABC 角ノ等分線ヲ AG, DEF 角ノ等分線ヲ EH トス,

然ルトキハ BG // EH ナリ.

(證) AB, DE ハ平行ス, 故ニ BC ハ DE ニ交ル, (本例題 1.)

而シテ其交点ヲ M トシ, BME 角ノ等分線 ML ヲ作ル,

BC // EF ∴ $\angle DEF = \angle BME$, (錯角)

∴ $\frac{1}{2}\angle DEF = \frac{1}{2}\angle BME$,

即 $\angle DEH = \angle LME$, ∴ EH // LM. (83 定理)

又 AB // DE ∴ $\angle ABM = \angle BME$, (錯角)

∴ $\frac{1}{2}\angle ABM = \frac{1}{2}\angle BME$,

即 $\angle GBM = \angle BML$. ∴ BG // LM. (83. 定理)

∴ EH // BG. (82. 定理)

(第貳) 壹角ノ壹邊ガ他ノ壹角ノ壹邊ニ同方向ニ平行シ, 他ノ二邊ハ反對ノ方向ニ平行ナル場合.

貳角ヲ A'BC, DEF トシ, 貳邊 BA', ED ハ反對ノ方向ニ平行シ, 他ノ貳邊 BC, EF ハ同方向ニ平行ナリトシ, $\angle A'BC$ ノ等分線ヲ BG' トシ, $\angle DEF$ ノ等分線ヲ EH トス,

然ルトキハ $BG' \perp EH$ ナリ.

(證) $A'B$ ヲ A マデ引張シ $\angle ABD$ ノ等分線 BG ヲ作ル,

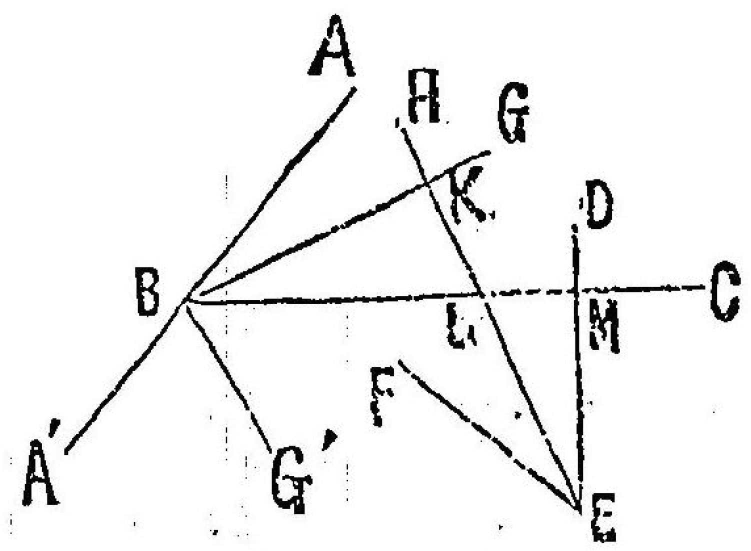
然ルトキハ　$BG /\!/ EH$　(本題第壹)

又　$BG' \perp BG$　(第壹節例題)

$\therefore$　$BG' \perp EH$　(85. 推論)

(注意) 貳角ノ各邊ガ貳個ヅヽ反對ノ方向ニ平行ナル場合ハ之レヲ畧ス.

7. 貳角ノ各邊ガ貳個ヅヽ直立スルトキハ此貳角ノ各等分線ハ直立スルカ或ハ平行ス.



(第壹) 貳角ガ共ニ鋭角ナル場合.

貳角ヲ ABC, DEF トシ此貳角ハ共ニ鋭角ニシテ $AB \perp EF$, $BC \perp FD$ トシ, $\angle ABC$ ノ等分線ヲ BG, $\angle DEF$ ノ等分線ヲ EH トス

然ルトキハ BG, EH ハ直立ス.

(證) BC ト DE トノ交点ヲ M トス

$DE \perp BC$　$\therefore$　$\angle BME =$ 直角ナリ, 又 $\angle HEM =$ 鋭角ナリ,

$\therefore$　$\angle BME + \angle HEM \neq 2$ 直角,

故ニ EH ト BC トハ相交ル, (本例題2) 而シテ其交点ヲ L トス,

又 $DE \perp BC$, 故ニ $EL \perp BC$ ナラズ,　(57. 推論)

故ニ $\angle ELM$ ハ鋭角ナリ, 從ツテ $\angle HLB$ ハ鋭角ナリ,

又 $\angle GBL$ モ亦鋭角ナリ,

$\therefore$　$\angle HLB + \angle GBC \neq 2$ 直角,

故ニ LH, BG ハ相交ル (本例題2), 而シテ其交点ヲ K トス.

今両三角形 LME, LKB ニ於テ

$\angle MEL = \angle KBL$　(等角ノ半)

$\angle MLE = \angle BLK$　(對頂角)

而シテ　$\triangle LME$ ノ各角ノ和ハ $\triangle LKB$ ノ各角ノ和ニ等シ

$\therefore$　$\angle LKB = \angle LME =$ 直角.

即チ BG, EH ハ直立ス.

(第貳) 壹角ハ鋭角ニシテ他ノ壹角ハ鈍角ナル場合.

二角ヲ $A'BC$, DEF トシ $\angle A'BC$ ハ鈍角, $\angle DEF$ ハ鋭角ナリトシ此二角ノ等分線ヲ BG', EH トス,

然ルトキハ BG', EH ハ平行ス.

(證) $A'B$ ヲ A マデ引張シ $\angle ABC$ ノ等分線ヲ BG トス,

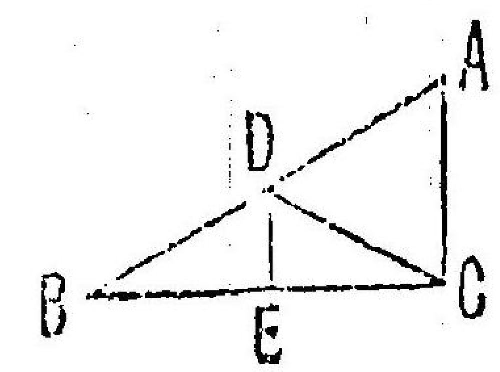
然ルトキハ　$EH \perp BG$　(本題第壹)

$\therefore$　$BG' \perp BG$　(第壹節之例題

$\therefore$　$\angle G'BG + \angle GKE = 2$ 直角　$\therefore$　$BG' /\!/ EH$　(83 定理)

(注意) 貳角ガ共ニ鈍角ナル場合及ヒ共ニ直角ナル場合ハ之レヲ畧ス, 學者自ラ之レヲ解ケ.

***8.** 直三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ノ中央ニ到ル線ハ斜邊ノ半ニ等シ.



直三角形ヲ ABC トシ, C ヲ直角トシ斜邊 AB ノ中央ヲ D トシ, DC ヲ連結ス.

然ルトキハ $DC = \frac{1}{2}AB$ ナリ.

(證) D ヨリ BC ニ垂線 DE ヲ下シ BC トノ交点ヲ E トス.

然ルトキハ $\angle DEB = \angle ACB =$ 直角　$\therefore$　$DE /\!/ AC$　(83. 定理)

又　$AD = DB$　(假設)

$\therefore$　$BE = EC$　(98. 定理)

三角形　DEB, DEC ニ於テ

$BE = EC$

DE ハ共通

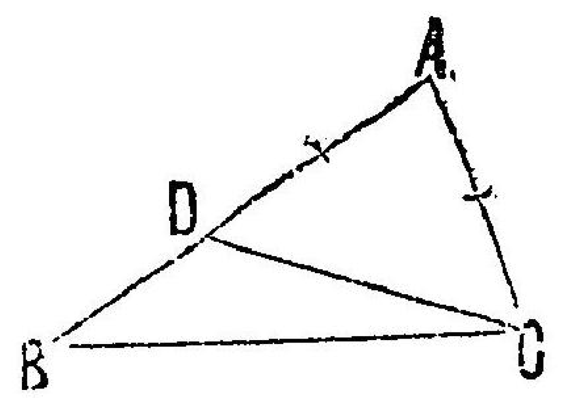
$\angle DEB = \angle DEC$　$\therefore$　$\triangle DBE \equiv \triangle DEC$

$\therefore$　$DC = BD$

$= \frac{1}{2}AB.$

*9. 三角形 ABC ニ於テ AB > AC トシ, AB 上ニ壹点 D ヲ取リ AD = AC ナラシメ, DC ヲ連結スルトキハ ∠BCD ハ ∠ACB ト ∠B トノ差半ニ等シ.

(証) △BDC ニ於テ



$\angle DCB + \angle B = \angle ADC$ (86 定理)

$\therefore \quad \angle DCB = \angle ADC - \angle B$

$= \angle ACD - \angle B$ (62. 定理)

双方ヘ ∠DCB 加フレバ

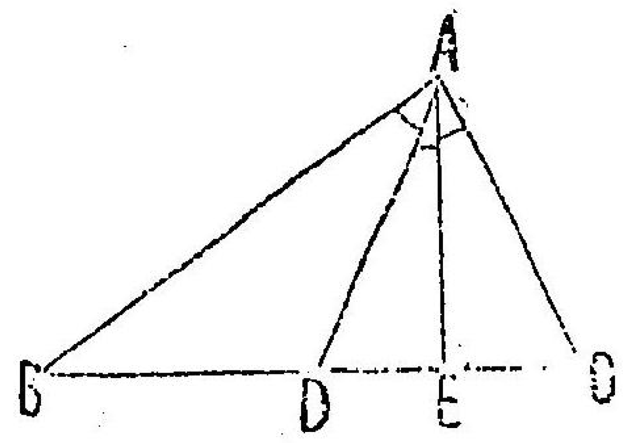
$2\angle DCB = \angle ACB - \angle B \qquad \therefore \quad \angle DCB = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle B).$

*10. 三角形ノ壹角頂ヨリ其對邊ニ下セル垂線ト其角ノ等分線トノ交角ハ他ノ弐角ノ差半ニ等シ.

三角形ヲ ABC トシ, A 角頂ヨリ對邊 BC ニ下セル垂線ヲ AE トシ, 頂角 A ノ等分線ヲ AD トス,

然ルトキハ $\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$. ナル但シ ∠B < ∠C トス.

(証) △AEB ニ於テ ∠AEB = 直角



∴ ∠EAB + ∠B = 直角 (7 定理) (1)

又 △AEC ニ於テモ同理ニヨリ

∠CAE + ∠C = 直角, (2)

(1) 及ビ (2) ニヨリ

$\angle EAB + \angle B = \angle CAE + \angle C$

$\therefore \quad \angle EAB - \angle CAE = \angle C - \angle B$

$\therefore \quad \angle DAE + \angle DAB - \angle CAE = \angle C - \angle B$

$\therefore \quad \angle DAE + \angle DAC - \angle CAE = \angle C - \angle B$

$\therefore \quad \angle DAE + \angle DAE = \angle C - \angle B$

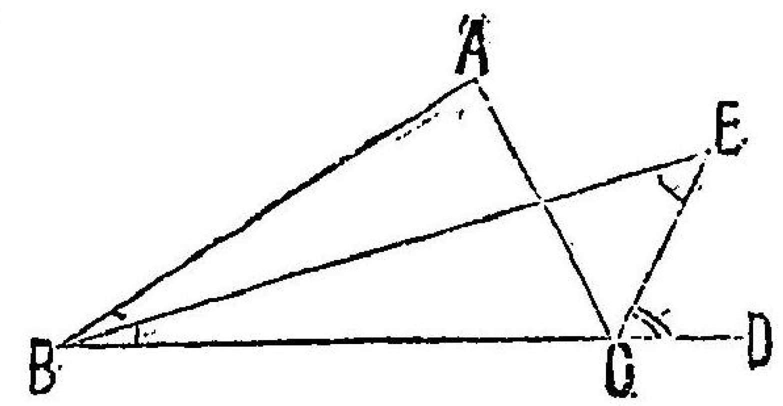
$\therefore \quad \angle DAE = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B).$

*11. 三角形ノ壹外角ノ等分線ト他ノ壹角ノ等分線トノ交角ハ殘リノ壹角ノ半ニ等シ.

三角形 ABC ニ於テ壹外角 ACD ノ等分線ト ABC 角ノ等分線

トノ交角 BEC ハ殘リノ壹角 BAC ノ半ニ等シ

(証) 三角形 BEC ニ於テ



$\angle E + \angle EBC = \angle ECD$ (6. 定理)

$\therefore \quad \angle E = \angle ECD - \angle EBC$ (1)

又三角形 ABC ニ於テ

$\angle A + \angle ABC = \angle ACD$

$\therefore \quad \angle A = \angle ACD - \angle ABC$

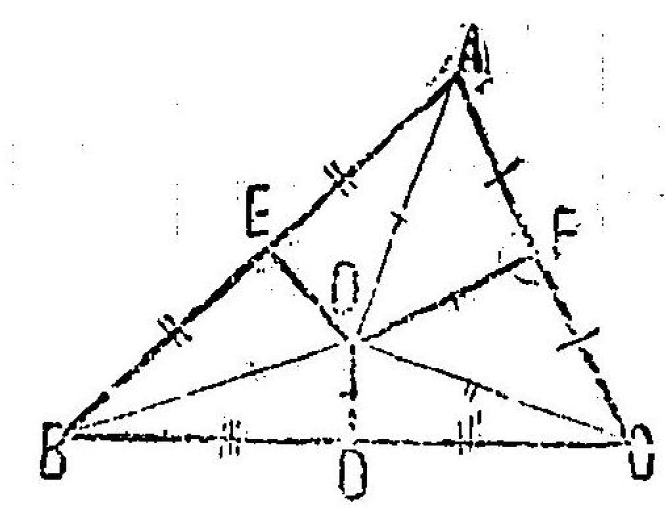
$\therefore \quad \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle ABD - \frac{1}{2}\angle ABC \quad \therefore \quad \frac{1}{2}\angle A = \angle ECD - \angle EBC$ (2)

C

(1) 及ビ (2) ニヨリ $\angle E = \frac{1}{2}\angle A.$

*12. 三角形ノ各邊ノ中央ニ於テ各邊ニ作レル垂線ハ各角頂ヨリ等距ナル壹点ニ於テ相交ル.

三角形ニ ABC 於テ各邊ノ中央ヲ D, E, F トス, 然ルトキハ D, E, F ニ於テ各邊ニ作レル垂線ハ各角頂ヨリ等距ナル壹点ニ於テ相會ル.



(証) E ニ於テ AB ニ作レル垂線ト, F ニ於テ AC ニ作レル垂線トハ壹点ニ於テ相交ル(本例題3 而シテ其交点ヲ O トシ, OA, OB, OC, OD ヲ連結ス,

△AOF, △OFC ニ於テ

AF = FC　　OF ハ共通

∠AFO = ∠CFO = 直角　∴ △AOF ≡ △OFC　∴ AO = OC (1)

又同理ニヨリテ　△AOE ≡ △OEB　∴ AO = OB (2)

∴ OC = OB

△ODB, △ODC ニ於テ

OB = OC　　OD ハ共通

DB = CD　　∴ △ODB ≡ △ODC (74. 推論)

∴ ∠ODB = ∠ODC = 直角.

故ニODハBCニ直立ス，

故ニDニ於テBCニ作レル垂線ハDOト壹致シ即チOヲ過グ，

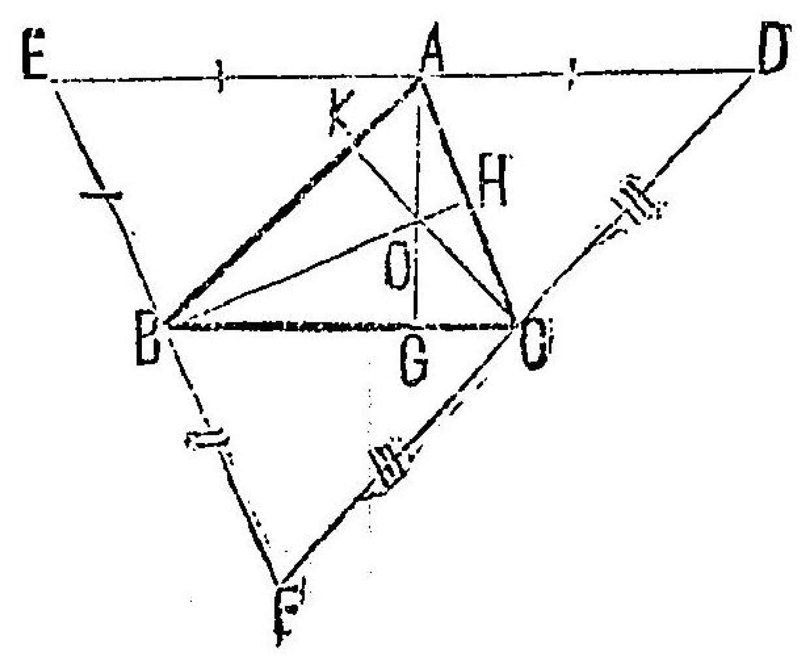
故ニD, E, Fニ於テ各邊ニ作レル垂線ハ壹点ニ於テ交ル．

而シテ(1) (2)ニヨリ　$AO = BO = CO$

故ニOハ各角頂ヨリ等距ナリ

（注意）各邊ノ中央ニ於テ其各邊ニ作レル三個ノ垂線ノ交点ハ外心(*Ex-centre*)トイフ．

13. 三角形ノ各角頂ヨリ其各對邊ニ下セル垂線ハ壹点ニ交ル．



三角形ヲABCノ各角頂ヨリ其對邊ニ下セル垂線ハ壹点ニ交ル．

（証）三角形ABCノ各角頂ヨリ其對邊ニ平行線ED, EF, FDヲ作リ其交点ヲE, F, Dトス．

今 $AE \parallel BC$, $EB \parallel AC$（作法）$\therefore$ AEBCハ平行四角形ナリ，

$\therefore AE = BC.$

同理ニヨリABCDハ平行四角形ナリ．$\therefore AD = BC.$

$\therefore AE = AD.$

即チAハEDノ中央ナリ．

同理ニヨリBハEFノ中央ニシテ，CハDEノ中央ナリ．

故ニAニ於テEDニ垂線AGヲ作リ，Bニ於テEFニ垂線BHヲ作リ，Cニ於テFDニ垂線CKヲ作ルトキハ此三垂線ハ壹点ニ於テ交リ（前題），而シテ此交点ヲOトス．

而シテ $ED \parallel BC$, $AG \perp ED$　$\therefore AG \perp BC$　(85. 推論)

故ニAヨリBCニ下セル垂線ハAGト壹致ス．

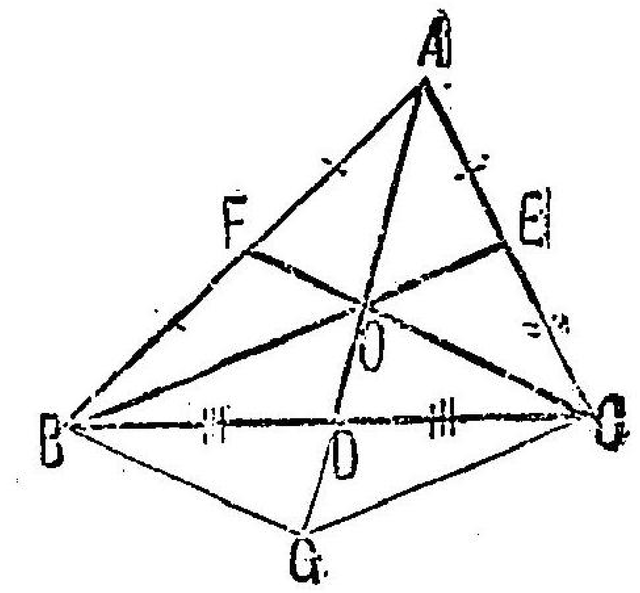
同様ニBヨリACニ下セル垂線ハBHト壹致シ，CヨリABニ

下セル垂線ハCKト壹致ス．

故ニ各角頂ヨリ其對邊ニ下セル垂線ハ壹点Oニ交ル．

（注意）三角形ノ各角頂ヨリ其對邊ニ下セル三個ノ垂線ノ交点ヲ垂心ト稱ス

14. 三角形ノ各中央線ハ壹点ニ於テ相交ル，而シテ其交点ト任意ノ壹角頂トノ距離ハ其角頂ヨリ引キタル中央線ノ三分ノ弐ニ等シ．



三角形ヲABCトス，

然ルトキハ此三角形ノ各中央線ハ壹点ニ交ル．

又其交点ト任意ノ壹角頂トノ距離ハ其角頂ヨリ引キタル中央線ノ三分ノ弐ニ等シ．

（証）AB, ACノ各中央点ヲF, Eトシ，CF, BEヲ連結シ，CF, BEノ交点ヲOトス，

AOヲ連結シ，AOノ引張線トBCトノ交点ヲDトシ，AD上ニ壹点GヲDリOGヲAOト長等ナラシメ，BG, GCヲ連結ス，

$\triangle AGC$ニ於テ $AE = EC$, $AO = OG$　$\therefore OE \parallel GC$,　(99. 推論)

又$\triangle ABG$ニ於テ $AF = FB$, $AO = OG$　$\therefore OF \parallel BG$,　（　〃　）

故ニOBGCハ平行四角形ナリ，故ニ　$BD = DC$,　(90. 定理)

故ニDハBCノ中央ナリ，

故ニAヨリ引キタル中央線ハADト壹致ス，即チOヲ過グ．

故ニ各中央線ハOニ於テ相交ル

又OBGCハ平行四角形ナリ，　$\therefore OD = DG$　(90. 定理)

$\therefore 2OD = OG$

然ル $OG = AO$（作法）　$\therefore AO = 2OD$

又三角形AGCニ於テ

$AE = EC,\quad AO = OG \qquad \therefore\ 2OE = CG,$ (99. 推論)

然ルニOBGCハ平行四角形 $\therefore\ CG = BO,$ (90. 定理)

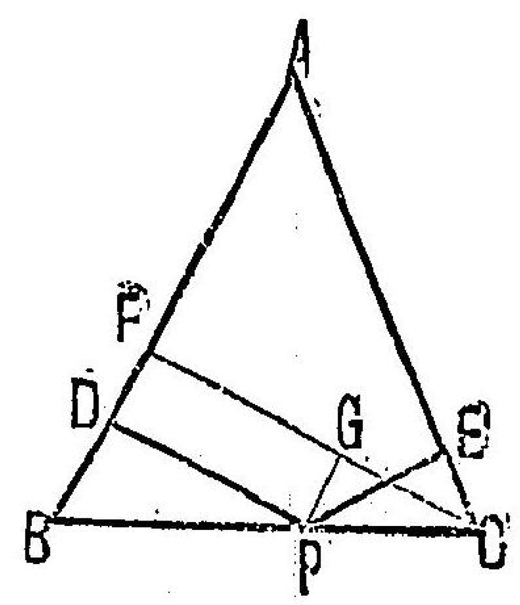
$\therefore\ 2OE = BO,\ \therefore\ BO = \frac{2}{3}BE.$

同理ニヨリテ $CO = \frac{2}{3}CF$

(注意) 三角形ノ中央線ノ交点ヲ其三角形ノ重心トイフ.

15. 等脚三角形ノ底邊上ノ諸点ヨリ兩等邊ニ到ル距離ノ和ハ不變ナリ.

等脚三角形ABCノ底邊BC上ノ諸点ヨリ兩等邊AB, ACニ到ル距離ノ和ハ不變ナリ.



(証) 底邊BC上ニ任意ノ一点Pヲ取リ, PヨリAB, ACニ垂線PD, PEヲ引キ, 又Cヨリ對邊ABニ垂線CFヲ下シ, PヨリCFニ垂線PGヲ下ス,

今 $\angle PGC = \angle GFB =$ 直角 (作法) $\therefore\ PG /\!/ FB$ (84. 定理)

又 $\angle PDF = \angle GFA =$ 直角 (") $\therefore\ PD /\!/ FG$ (")

故ニGFDPハ平行四角形ナリ $\therefore\ PD = FG$ ……(1)

又 $PG /\!/ BF \quad \therefore\ \angle GPC = \angle B$ (應角)

然ルニ $AB = AC \quad \therefore\ \angle B = \angle ECP$ (60. 定理)

$\therefore\ \angle GPC = \angle ECP$

故ニ兩三角形PEC, GPCニ於テ

$\angle E = \angle G =$ 直角

$\angle ECP = \angle GPC$

PCハ共通邊 $\therefore\ \triangle PEC \equiv \triangle GPC \quad \therefore\ PE = CG$ ……(2)

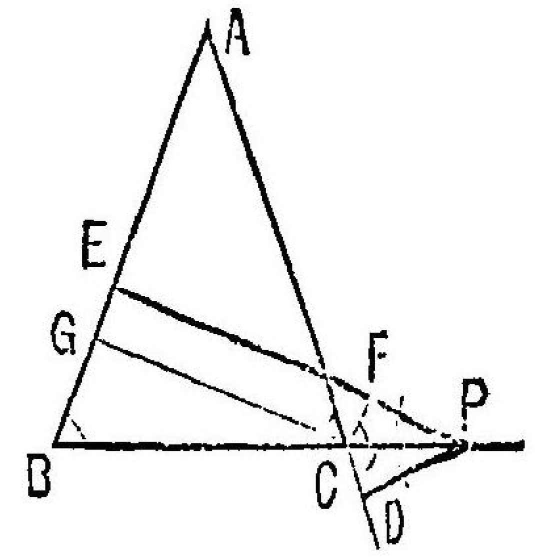
(1) (2) ヲ加フレハ $\therefore\ PD + PE = CF$

同理ニヨリBC上ノ諸点ヨリAB, ACニ到ル距離ノ和ハ常ニCFニ等シク即チ不變ナリ

16. 等脚三角形ノ底邊ノ引長線上ノ運動点ヨリ両等邊ニ到ル距離ノ差ハ不變ナリ.

等脚三角形ヲABCトス

然ルトキハ底邊BCノ引長線上ノ運動点PヨリAB, ACニ到ル距離ノ差ハ不變ナリ.



(証) PヨリAB, ACニ垂線PE, PDヲ引キ, 又CヨリPE, ABニ垂線CF, CG引ク. 然ルトキハ $\angle CFP = \angle BFP =$ 直角,

$\therefore\ CF /\!/ AB,$ (83. 定理)

$\therefore\ \angle FCP = \angle B$ (應角)

$= \angle ACB\ (\because\ AB = AC)$ (60. 定理)

$= \angle PCD.$ (對頂角)

故ニ $\triangle PCF,\ \triangle PCD$ ニ於テ

$\angle FCP = \angle PCD,$

$\angle CFP = \angle D =$ 直角,

CPハ共通邊, $\therefore\ \triangle CFP \equiv \triangle CDP,$ (72. 定理)

$\therefore\ PF = PD,$

$\therefore\ PE - PD = EF,$

然ルニEFCGハ矩形ナリ $\therefore\ EF = CG,$

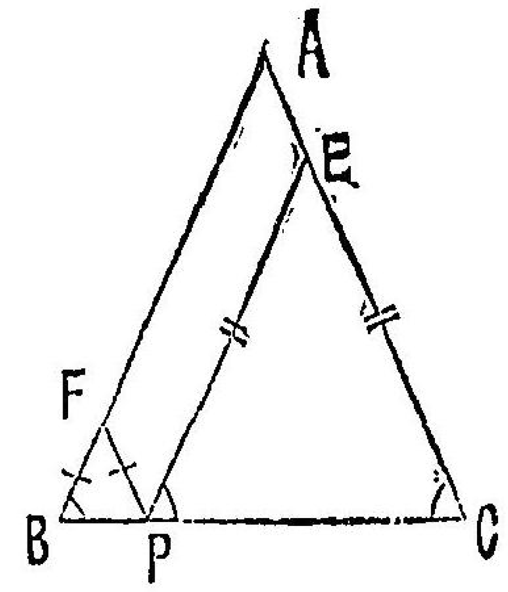
$\therefore\ PE - PD = CG,$

同理ニヨリテP点カBC上ニ如何ニ運動スルモ, PヨリAB, ACニ到ル距離ノ差ハ恒ニCGニ等シク, 即チ不變ナリ.

17. 等脚三角形ABCノ底邊BC上ノ運動点ヨリ等邊ノ各ニ平行ナル二直線ヲ引クトキ, 此ノ二直線ト等邊トニテ成ス平行四角形ノ周ハ不變ナリ.

(証) 底邊BC上ニ任意ノ点Pヲ取リ, Pヨリ等邊ABニ平行線PEヲ引キACトノ交点ヲEトシ, 又PヨリACニ平行線PFヲ引

キ AB トノ交点ヲ F トス,



$PE \parallel AB$, ∴ $\angle EPC = \angle B$, (應角)

又 $AB = AC$, ∴ $\angle C = \angle B$, (60. 定理)

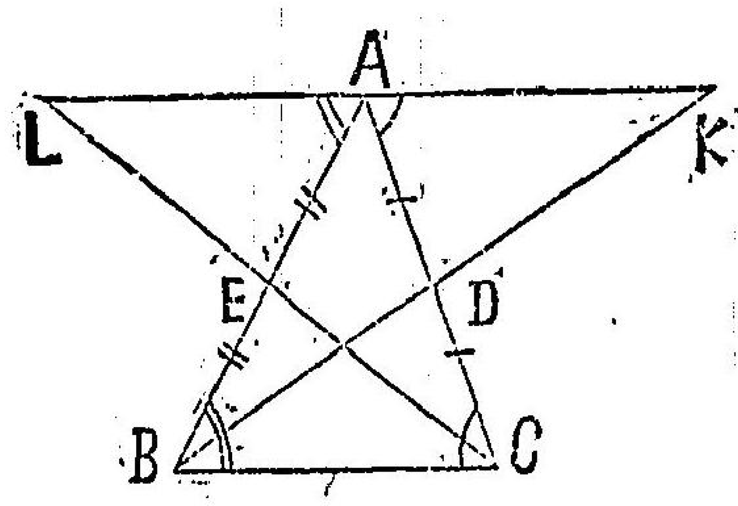
∴ $EP = EC$, (62 定理)

同理ニヨリ $FP = FB$,

故ニ平行四角形 AEPF ノ周ハ $AB + AC$ ニ等シ.

同理ニヨリテ, P 点ガ BC 上ニ如何ヲ動クモ, 平行四角形 AEPF ノ周ハ, 恒ニ $AB + AC$ ニ等シク, 即チ不變ナリ.

18. 三角形 ABC ニ於テ B, C ヨリ引キタル中央線 BD, CE ヲ各 K, L マデ引張シ $DK = BD$, $EL = CE$ ナラシム, 然ルトキハ K, A, L ハ壹直線上ニアリ.



(証) AK, AL ヲ結ブ

△ADK, △BDC ニ於テ

$AD = DC$, (作法)

$KD = BD$, (作法)

$\angle ADK = \angle BDC$,

∴ $\triangle ADK \equiv \triangle BDC$, ∴ $\angle DAK = \angle ACB$,

又前ト同理ニテ $\triangle AEL \equiv \triangle BEC$,

∴ $\angle EAL = \angle ABC$.

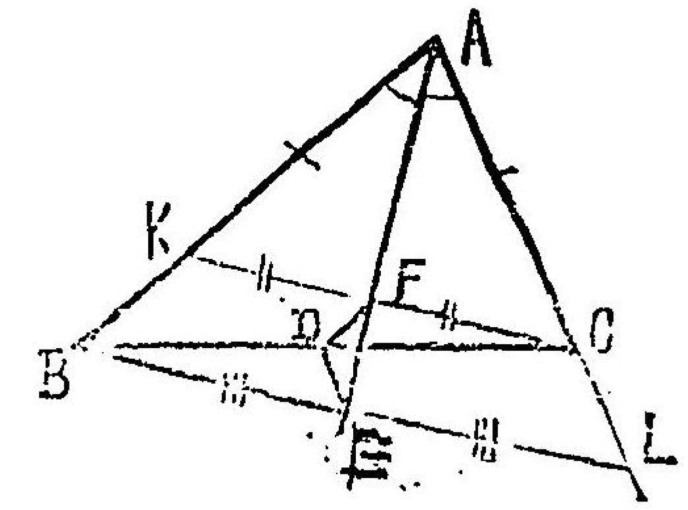
故ニ $\angle DAK + \angle CAB + \angle EAL$ ハ △ABC ノ内角ノ和ニ等シク, 即チ貳直角ナリ,

故ニ AK, AL ハ同一ノ直線ナリ,

故ニ K, A, L ハ壹直線上ニアリ.

19. 三角形 ABC ノ壹角 A ノ等分線ニ B, C ヨリ垂線 BE, CF ヲ下シ, BC ノ中央点ヲ D トス. 然ルトキハ $DE=DF=\frac{1}{2}(AB-AC)$ ナリ. 但シ $AB>AC$ トス

(証) CF ノ引張線ト AB トノ交点ヲ K トシ, BE ノ引張線ト AC トノ交点ヲ L トス



然ルトキハ △AFC, △AKF ニ於テ

$\angle AFC = \angle AFK =$ 直角

$\angle FAC = \angle FAK$, (假設)

AF ハ共通邊,

∴ $\triangle AFC \equiv \triangle AFK$,

∴ $FC = KF$ 及 $AC = AK$.

故ニ △BKC ニ於テ

$BD = DC$

$KF = FC$ ∴ $DF = \frac{1}{2}BK$ (99. 推論)

$= \frac{1}{2}(AB - AK)$

$= \frac{1}{2}(AB - AC)$.

又前ト同理ニヨリ $\triangle ABE \equiv \triangle AEL$

∴ $BE = EL$, 及 $AL = AB$,

故ニ △BCL ニ於テ

$BD = DC$,

$BE = EL$, ∴ $DE = \frac{1}{2}CL$ (99 推論)

$= \frac{1}{2}(AL - AC)$

$= \frac{1}{2}(AB - AC)$,

∴ $DF = DE = \frac{1}{2}(AB - AC)$.

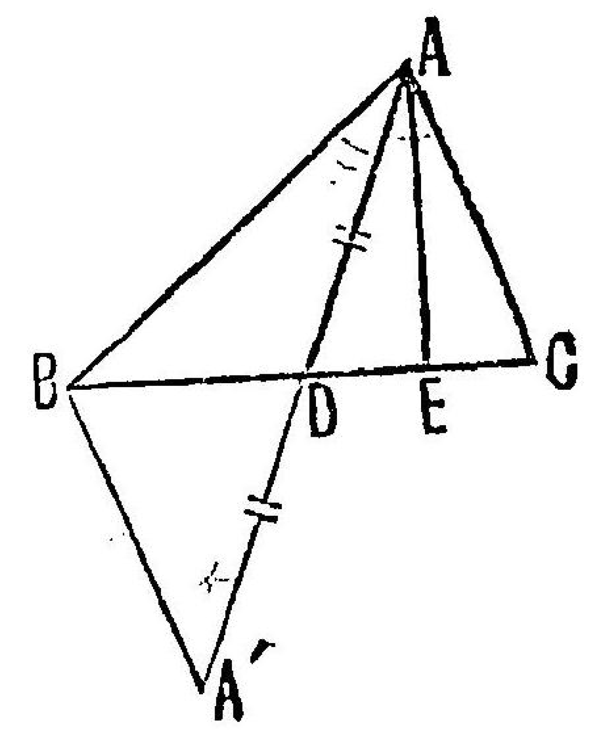
20. 三角形 ABC ニ於テ A ノ外角ノ等分線ヘ B, C ヨリ垂線 BE, CF ヲ下シ, BC ノ中央ヲ D トスルトキハ $DE = DF = \frac{1}{2}(AB + AC)$ ナリ.

本題ハ前題ト殆ント同様ナル方法ニテ解シ得ラルベシ, 故ニ詳ヲ省畧ス, 讀者練習ノ為ノ試ミニ自ラ之レヲ解ケ.

21. 不等邊三角形ABCノ頂角Aノ等分線ハAヨリBCニ引キタル垂線ト中央線トノ間ニアリ。

(證) $AB>AC$トシ，AヨリBCニ引キタル垂線及ビ中央線ヲAE, ADトス，

ADヲA′マデ引張シDA′ヲADト等長ナラシメ，A′Bヲ結ブ，



然ルトキハ$\triangle ADC$, $\triangle A'DB$ニ於テ

$AD=A'D$ （作法）

$BD=DC$ （假設）

$\angle ADC=\angle BDA'$ (對頂角) $\therefore$ $\triangle ADC\equiv\triangle A'DB$

$\therefore$ $\angle DAC=\angle A'$ 及 $AC=BA'$

然ルニ $AB>AC$ $\therefore$ $AB>A'B$

$\therefore$ $\angle A'>\angle BAD$ (62. 定理)

$\therefore$ $\angle DAC>\angle BAD$

$\therefore$ $\angle DAC>\frac{1}{2}\angle BAC$

故ニ$\angle BAC$ノ等分線ハADトACトノ間ニアリ (1).

又$\triangle AEC$ニ於テ$\angle AEC=$直角，$\therefore$ $\angle C+\angle EAC=$直角，

又$\triangle AEB$ニ於テ$\angle AEB=$直角 $\therefore$ $\angle ABE+\angle BAE=$直角，

$\therefore$ $\angle C+\angle EAC=\angle ABE+\angle BAE$,

然ルニ$AB>AC$, $\therefore$ $\angle C>\angle ABE$, (62. 定理)

$\therefore$ $\angle EAC<\angle BAE$,

$\therefore$ $\angle EAC<\frac{1}{2}\angle BAC$,

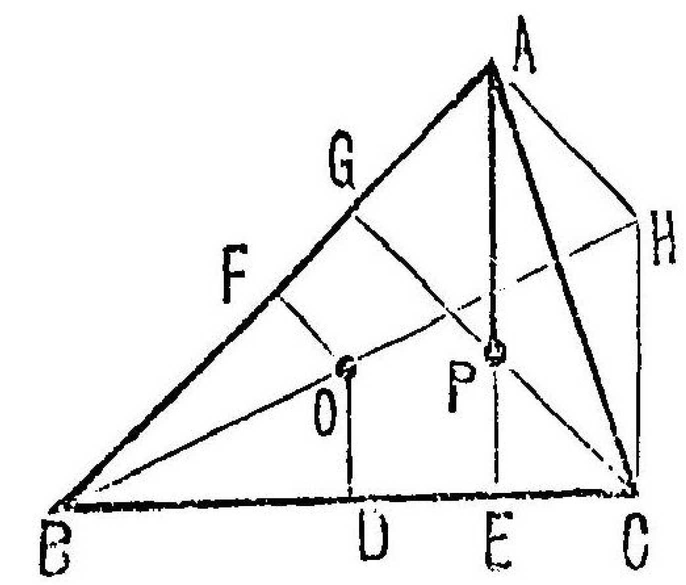
故ニ$\angle BAC$ノ等分線ハAEトACトノ間ニナシ， (2)

(1)及ビ(2)ニヨリ$\angle BAC$ノ等分線ハADトAEトノ間ニアリ。

22. 三角形ABCノ垂心ヲPトシ，外心ヲOトシAPヲ結ビ，OヨリBCニ垂線ODヲ下ス，然ルトキハ$AP=2OD$ナリ。

(證) OヨリABヘ垂線OFヲ下シ，CPヲ結ビ，CPトABトノ交点ヲGトシ，APトBCトノ交点ヲEトス，

BOヲ結ビ之レヲHマデ引張シOHヲシテBOト等長ナラシメHC, HAヲ結ブ。



Oハ外心ニシテ且ツODハBCニ直立ス， $\therefore$ $BD=DC$. (本例題12)

故ニ$\triangle BCH$ニ於テ$BO=OH$, $BD=DC$, $\therefore$ $HC\parallel OD$,

又Pハ垂心 $\therefore$ $AE\perp BC$ $\therefore$ $AE\parallel OD$,

$\therefore$ $HC\parallel AE$.

又$CG\perp AB$故ニ同理ニヨリテ $HA\parallel CG$

故ニ□APCHハ平行四角形ナリ $\therefore$ $AP=HC$.

然ルニ$\triangle BCH$ニ於テ

$OB=OH$

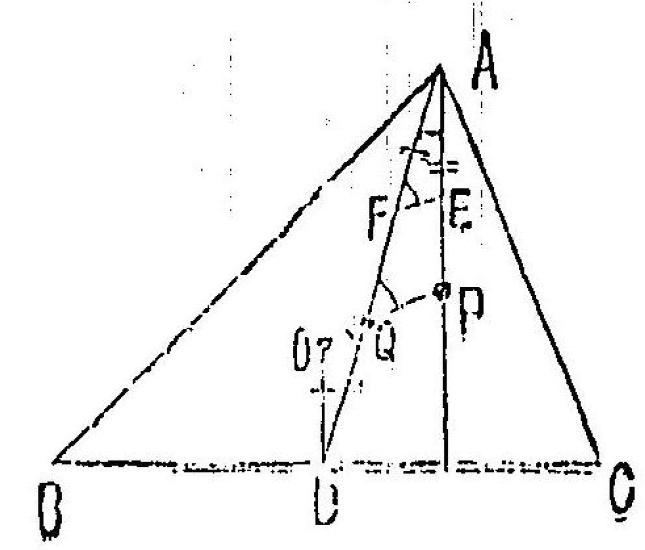
$BD=DC$ $\therefore$ $HC=2OD$ (99. 推論) $\therefore$ $AP=2OD$.

23. 三角形ABCノ垂心ヲP，重心ヲQ，外心ヲOトスレバ

第壹 三点O, Q, Pハ一直線上ニアリ。

第貳 $2OQ=PQ$.

(證) 〔第壹〕 BCノ中央点ヲDトシ，OQ, PQ, AP, ODヲ結ブ



今Qハ重心ニシテDハBCノ中央点ナリ，故ニ三点A, Q, Dハ一直線上ニアリ。(本例題14)

而シテAP, AQノ各中央点ヲE, FトシEFヲ結ブ。

今 $2AE=AP$ (作法)

又 $2OD=AP$ (前題) $\therefore$ $2AE=2OD$ 即 $AE=OD$ (1)

又 Q ハ重心 $\therefore$ $2QD = AQ$ （本例題14）

又作法ニヨリ $2AF = AQ$ $\therefore$ $2QD = 2AF$ $\therefore$ $QD = AF$ (2)

又 OD, AP ハ共ニ BC ニ直立ス，

$\therefore$ $OD \parallel AP$ $\therefore$ $\angle OFQ = \angle FAE$ (3)

(1) (2) (3) ニヨリテ $\triangle OQD \equiv \triangle AFE$ $\therefore$ $\angle OQD = \angle AFE$

然ルニ $\triangle AQP$ ニ於テ

$AF = FQ$

$AE = EP$ $\therefore$ $EF \parallel PQ$ $\therefore$ $\angle AFE = \angle AQP$

$\therefore$ $\angle OQD = \angle AQP$

然ルニ AQD ハ壹直線 $\therefore$ $\angle CQD + \angle AQD = 2$ 直角，

$\therefore$ $\angle AQP + \angle AQO = 2$ 直角，

故ニ OQ, PQ ハ壹直線ナリ，即チ三点 O, Q, P ハ壹直線上ニアリ．

〔第貳〕 $\triangle OQD \equiv \triangle AEF$ $\therefore$ $OQ = EF$

然ルニ $\triangle APQ$ ニ於テ

$AF = FQ$

$AE = EP$ $\therefore$ $2EF = PQ$ $\therefore$ $2OQ = PQ$

24. 多角形ノ内角ノ和ガ26直ナルトキ其多角形ノ邊如何

(解) 所求ノ邊數チ x トス

然ルトキハ其多角形ノ和ハ $(2x-4)$ 直角ナリ， (84. 定理)

$\therefore$ $2x - 4 = 26$ $\therefore$ $2x = 30$ $\therefore$ $x = 15.$

25. 貳個ノ多角形アリ，第壹ノ邊數ハ第貳ノ邊數ノ貳倍ナリ．而シテ其内角ノ和，第壹ハ第貳ヨリ10直角多シトイフ各邊數如何

(解) 第貳ノ多角形ノ邊數チ x トスレバ第壹ノ多角形ノ邊數ハ $2x$ ナリ，

而シテ第壹ノ多角形ノ内角ノ和ハ $2 \times 2x - 4$ 直角ニシテ

第貳ノ多角形ノ内角ノ和ハ $2 \times x - 4$ 直角ナリ，

故ニ $(2 \times 2x - 4) - (2 \times x - 4) = 10$

$\therefore$ $2x = 10$ $\therefore$ $x = 5.$

26. 凸多角形ノ内角ハ三個ヨリ多クノ鋭角チ有セズ．

(証) 多角形ニ於テ壹個ノ内角ガ鋭角ナルトキハ其角ニ隣接スル外角ハ鈍角ナリ，

故ニ若シ内角ニ於テ三個ノ以上ノ鋭角アルトキハ外角ニ於テ三個以上ノ鈍角チ生シ即チ外角ノ和ハ四直角以上トナル，

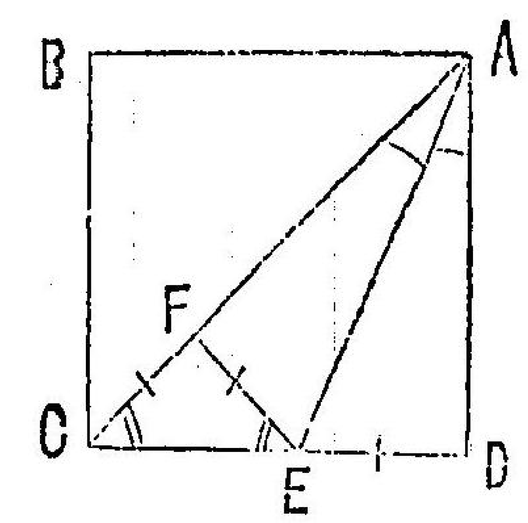
是レ不合理ナリ， (89. 定理)

故ニ内角ニ於テ三個以上ノ鋭角アルコトナシ．

27. 正方形 ABCD ノ對角線 AC チ引キ $\angle CAD$ ノ等分線ト CD トノ交点チ E トシ，E ヨリ AC ニ垂線 EF チ引クトキハ

$CF = EF = ED = AC - AD.$

(証) $\triangle AEF$, $\triangle AED$ ニ於テ



$\angle EAF = \angle EAD$ (假設)

$\angle AFE = \angle D =$ 直角

AE ハ共通 $\therefore$ $\triangle AEF \equiv \triangle AED$

$\therefore$ $EF = ED$ (1)

及 $AF = AD$ (2)

又 $\triangle ADC$ ニ於テ $AD = DC$ $\therefore$ $\angle ACD = \angle CAD$ (60 定理)

又 $\triangle ADC$ ニ於テ $\angle D =$ 直角 $\therefore$ $\angle ACD + \angle CAD =$ 直角 (87. 推論)

$\therefore$ $\angle ACD = \frac{1}{2}$ 直角

而シテ $\triangle CEF$ ニ於テ $\angle F =$ 直角， $\therefore$ $\angle ACD + \angle CEF =$ 直角 (87. 推論)

$\therefore$ $\angle CEF = \frac{1}{2}$ 直角 $\therefore$ $\angle CEF = \angle ACD = \frac{1}{2}$ 直角

$\therefore$ $CF = EF$ (60. 定理)

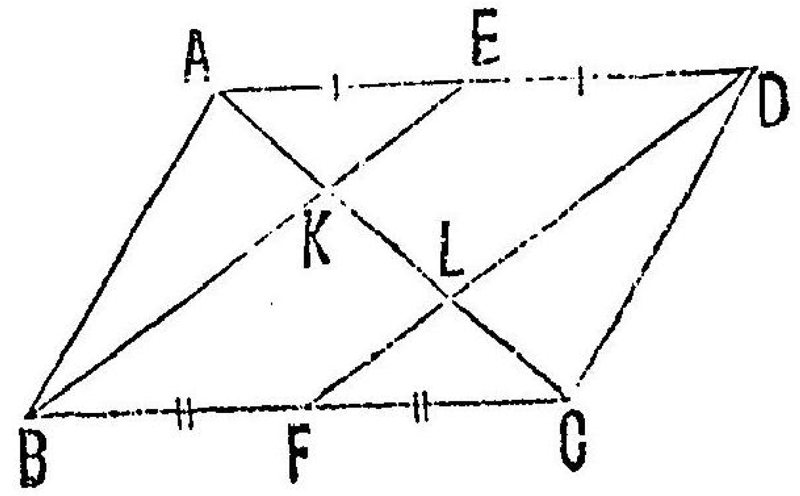
故ニ (1) ニヨリ $CF = EF = ED$

然ルニ (2) ニヨリ $AF = AD$ $\therefore$ $CF = AC - AF = AC - AD$

$\therefore$ $CF = EF = ED = AC - AD$

28. 平行四角形 ABCD ニ於テ對邊 AD, BC ノ中央点チ順次ニ E, F トシ BE, DF, AC チ結ベバ AC ハ BE, FD ニヨリテ三等分セラル．

(證 AC ガ BE, FD ニ交ル点ヲ順次ニ K, L トス,



今 $ABCD$ ハ平行四角形ナリ,

$\therefore\ AD = BC$,

$\therefore\ \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$,

即 $ED = BF$,

又 $ED \parallel BF$

故ニ $BEDF$ ハ平行四角形ナリ (93.定理) $\therefore\ BE \parallel FD$.

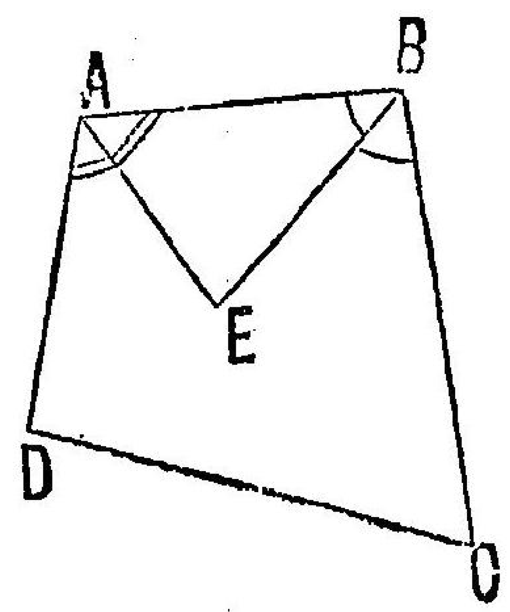
$\triangle BKC$ ニ於テ $BF = FC$,

$FL \parallel BK$, $\therefore\ CL = KL$ (98.定理)

$\triangle ALD$ ニ於テモ同理ニヨリテ $AK = KL$

$\therefore\ AK = CL = KL$.

29. 四角形 $ABCD$ ニ於テ任意ノ隣接式角 A, B ノ各ノ等分線ノ交点ヲ E トスレバ



$\angle AEB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

(證) $\triangle AEB$ ニ於テ 86.定理ニヨリ

$\angle AEB + \angle EAB + \angle EBA = 2$ 直角. (1)

又 $\square ABCD$ ニ於テ 88.定理ニヨリ

$\angle DAB + \angle ABC + \angle C + \angle D = 4$ 直角,

$\therefore\ \frac{1}{2}\angle DAB + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = 2$ 直角,

即 $\angle EAB + \angle EBA + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = 2$ 直角 (2)

(1) 及ビ (2) ニヨリテ

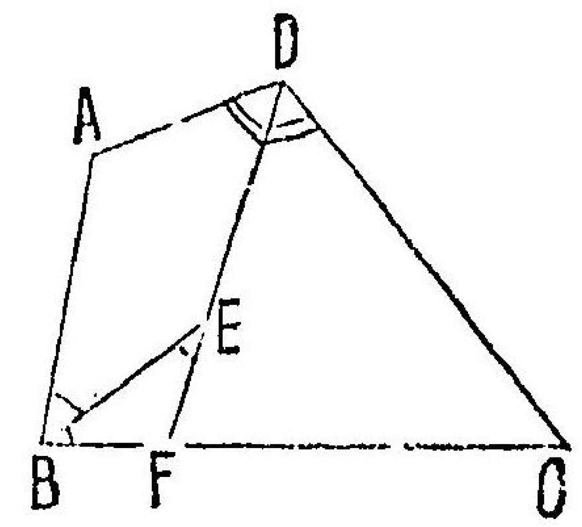
$\angle AEB + \angle EAB + \angle EBA = \angle EAB + \angle EBA + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

$\therefore\ \angle AEB = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$

$= \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

30. 四角形 $ABCD$ ニ於テ任意ノ對角 B, D ノ各等分線ガ交ルトキ其交點ヲ E トスレバ DE ノ引張線ト BE トニテ成ス角ハ他ノ貳對角 A, C ノ差半ニ等シ.

(證) $\square ABCD$ ノ周ト DE ノ引張線トノ交点ヲ F トス



$\triangle BEF$ ニ於テ 86.定理ニヨリ

$\angle BEF = \angle DFC - \angle EBC$ (1)

然ルニ $\triangle DFC$ ニ於テ

$\angle DFC + \angle C + \angle FDC = 2$ 直角 (86定理)

$\therefore\ \angle DFC = 2$ 直角 $- \angle C - \angle FDC$

故ニ (1) ヨリ

$\angle BEF = 2$ 直角 $- \angle C - \angle FDC - \angle EBC$ (2)

然ルニ $\square ABCD$ ニ於テ

$\angle A + \angle ABC + \angle ADC + \angle C = 4$ 直角, (88.定理)

$\therefore\ \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ADC + \frac{1}{2}\angle C = 2$ 直角,

$\therefore\ \frac{1}{2}\angle A + \angle EBF + \angle FDC + \frac{1}{2}\angle C = 2$ 直角

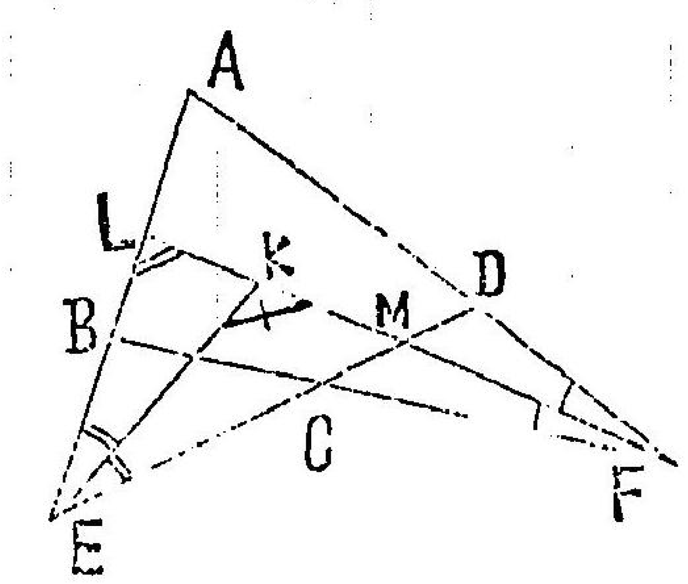
故ニ (2) 式ノ 2 直角ノ代リニ上式ノ左邊ヲ置クトキハ

$\angle BEF = \frac{1}{2}\angle A + \angle EBF + \angle FDC + \frac{1}{2}\angle C - \angle C - \angle FDC - \angle EBC$

$= \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C$

$= \frac{1}{2}(\angle A - \angle C)$.

31. 四角形 $ABCD$ ニ於テ對邊 BC, AD ノ交点ヲ F トシ, 又他ノ對邊 AB, DC ノ交点ヲ E トシ, $\angle AFB$, $\angle AED$ ノ各二等分線ノ交点ヲ K トスレバ



$\angle EKF = \frac{1}{2}(\angle A + \angle BCD)$

(證) FK ガ CD, AB ニ交ル点ヲ順次ニ M, L トス,

$\triangle LKE$ ニ於テ

$\angle EKF = \angle KLE + \angle LEK$ (86.定理)

然ルニ $\triangle ALF$ ニ於テ

$\angle KLE = \angle AFL + \angle A$ (86.定理)

$\therefore\ \angle EKF = \angle AFL + \angle A + \angle LEK$ (1)

又△EKMニ於テ

$$\angle EKF = \angle EMF - \angle KEM \qquad \text{(86. 定理)}$$

然ルニ△CMFニ於テ

$$\angle EMF = \angle BCD - \angle KFC \qquad \text{(86. 定理)}$$

$$\therefore \quad \angle EKF = \angle BCD - \angle KFC - \angle KEM \qquad (2)$$

然ルニ $\angle KFC = \angle AFL$, $\angle KEM = \angle LEK$ ナルヲ以テ (1) (2) ヲ加フルトキハ

$$2\angle EKF = \angle BCD + \angle A$$

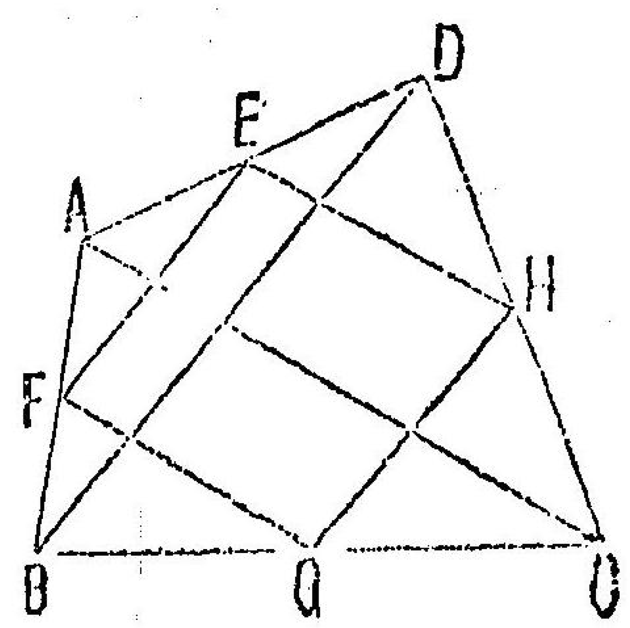
$$\therefore \quad \angle EKF = \tfrac{1}{2}(\angle BCD + \angle A).$$

32. 四角形ノ各隣邊ノ中央点ヲ結ヒ合シテナル四角形ハ平行四角形ニシテ其周邊ハ原四角形ノ對　線ノ和ニ等シ.

四角形ヲABCDトシ各　ノ中央点ヲE, F, G, HトシEF, FG, GH, HEヲ結ブ, 然ルトキハ

第壹　四角形FFGHハ平行四角形ナリ.

第貳　□EFGHノ周ハ□ABCDノ對角線AC, BDノ和ニ等シ,



(證)〔第壹〕△ABDニ於テ

$AE = ED$

$AF = FB$　$\therefore$ $EF \parallel BD$　99. 推論

又△BCDニ於テモ同理ニヨリ　$HG \parallel BD$　(同　理)

$\therefore$ $EF \parallel HG$　(82 定理)

又同理ニヨリテ　$EH \parallel FG$

故ニEFGHハ平行四角形ナリ.

〔第貳〕△ABDニ於テ　$AE = ED$,

$AF = FB$,　$\therefore$ $EF = \frac{1}{2}BD$　(99 推論)

又△BDCニ於テモ同理ニヨリ　$HG = \frac{1}{2}BD$

$\therefore$ $EF + HG = BD.$

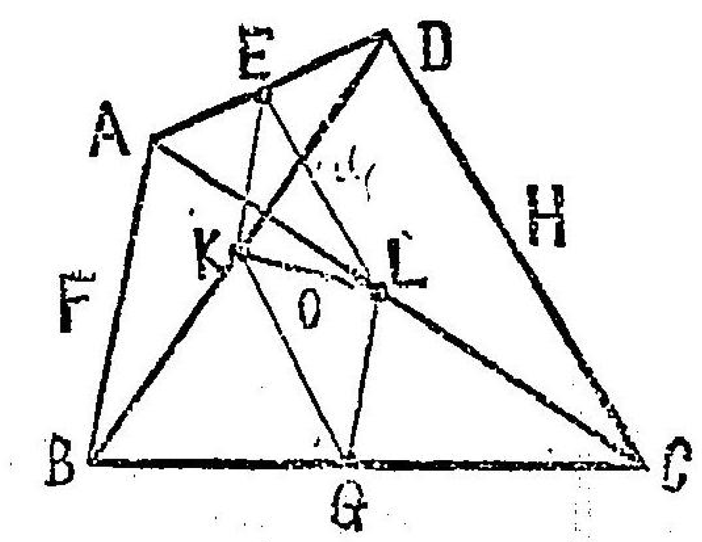
又之ト同理ニヨリテ　$EH + FG = AC$

$$\therefore \quad EF + HG + EH + FG = BD + AC,$$

即チ□EFGHノ周ハ□ABCDノ對角線BD, ACノ和ニ等シ.

33. 四角形ノ各對邊ノ中央ヲ連結セル貳直線ト各對角線ノ中央点ヲ連結セル直線トハ壹点ニ相交リ且ツ互ヒニ等分セラル

四角形ヲABCDトシ各邊ノ中央点及ビ各對角線ノ中央点ヲ順次ニE, F, G, H. K, Lトス.



然ルトキハ三直線EG, FH, KLハ壹点ニ相交リ,且ツ互ヒニ等分セラル.

(證) EK, KG GL, ELヲ連結ス, 然ルトキハ△ADBニ於テ

$AE = ED$

$DK = KB$　$\therefore$ $EK \parallel AB$,　(99. 推論)

又△ABCニ於テモ同理ニヨリ　$LG \parallel AB$,

$\therefore$ $EK \parallel LG$.　(82. 定理)

同理ニヨリ　$EL \parallel KG$,

故ニ□EKGLハ平行四角形ナリ,

故ニ90.ニヨリ直線EGハKLノ中央点Oヲ過キ且ツOニテ等分セラル.

今又FK, FL, LH, HKヲ連結スルトキハ前ト同理ニヨリテKHLFハ平行四角形ナリ,

故ニ直線FHハKLノ中央点Oヲ過ギ且ツOニ於テ等分セラル

故ニ三直線EG, FH, KLハ壹点Oニ於テ相交リ,而シテOハ其三直線ノ中央ナリ 即チ其三直線ハ互ヒニ等分セラル.

34. 平行四角形ABCDノ各角ノ等分線ノ交点ヲE, F, G, Hトス然ルトキハ四角形EFGHハ矩形ナリ,而シテEFGHノ對角線

ハ ABCD ノ邊ニ平行ス.

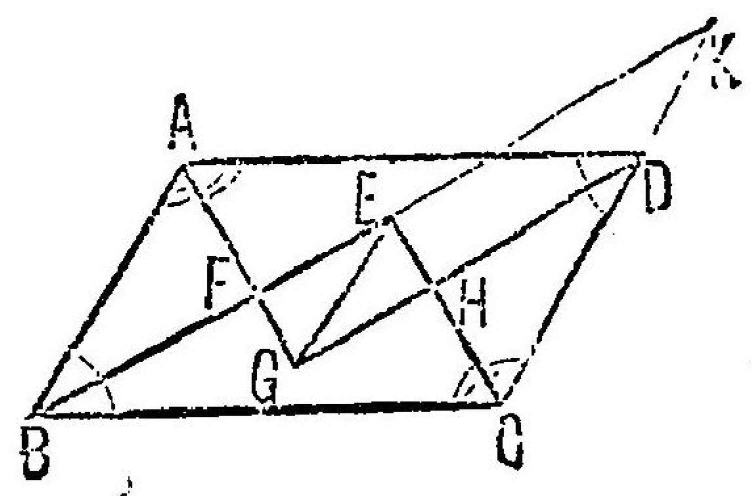
(證) ABCD ハ平行□ ∴ $AB \parallel CD$,

∴ $\angle ABC + \angle DCB = 2$ 直角,

∴ $\frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle DCB =$ 直角,

∴ $\angle EBC + \angle ECB =$ 直角,

∴ $\angle BEC =$ 直角, (86. 定理)



又 $\triangle AGD$ ニ於テ

$\angle AGD =$ 直角, (同　理)

又 $\triangle DHC$ ニ於テ $\angle DHC =$ 直角, 即 $\angle EGH =$ 直角.

又 $\triangle AFB$ ニ於テ $\angle AFB =$ 直角, 即 $\angle EFG =$ 直角.

故ニ □EFGH ハ各角總ヘテ直角ニシテ即矩形ナリ.

次ギニ □EFGH ノ對角線 EG ガ ABCD ノ一邊 DC ニ平行ナルコトヲ證セントス.

$BA \parallel DC$ 故ニ BE ハ DC ト交ル,

而シテ其交点ヲ K トス, (本例題 I)

$\triangle BEC$, $\triangle CKE$ ニ於テ

$\angle BCE = \angle DCE$, (假設)

$\angle BEC = \angle KEC =$ 直角,

EC ハ共通 ∴ $\triangle BEC \equiv \triangle CEK$

∴ $BE = EK$ (1)

然ル $\triangle BEC$, $\triangle AGD$ ニ於テ

$AD = CB$,

$\angle ADG = \angle EBC$ (∵ 等角 ADC, ABC ノ半)

$\angle DAG = \angle ECB$, (∵ 等角 BAD, BCD ノ半)

∴ $\triangle BEC \equiv \triangle AGD$ ∴ $BE = GD$. (2)

(1) 及 (2) ヨリ $EK = GD$,

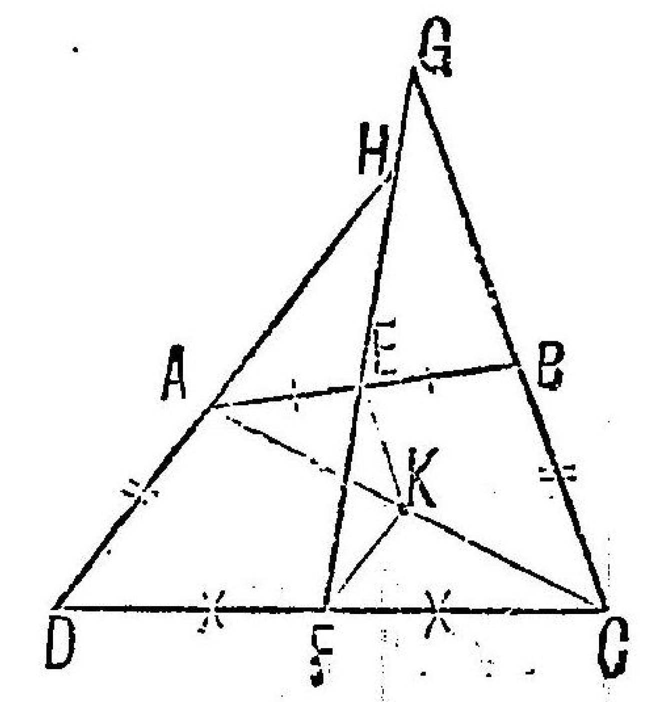
而シテ □FEHG ハ矩形 ∴ $EK \parallel GD$,

故ニ EKDG ハ平行四邊形ナリ ∴ $EG \parallel KD$, (93. 定理)

85. 四角形 ABCD ニ於テ對邊 AD, BC ハ等長ナリトシ, AB, CD ノ各中点ヲ順次ニ E, F トシ, EF ヲ連結スル直線ガ AD, BC ニ交ル点ヲ順次ニ H, G トス,

然ル時ハ $\angle DHF = \angle FGC$ ナリ.

(證) 對角線 AC ヲ引キ, AC ノ中央点ヲ K トシ, KE, KF ヲ連結ス.



$\triangle ADC$ ニ於テ

$AK = KC$, $DF = FC$

∴ $KF \parallel AD$ (1)

及 $KF = \frac{1}{2}AD$. (2)

又 $\triangle ABC$ ニ於テモ同理ニヨリテ

$EK \parallel BC$, (3)

$EK = \frac{1}{2}BC$, (4)

而シテ假設ニヨリ $AD = BC$

故ニ (2) (4) ヨリ $KF = EK$ ∴ $\angle KEF = \angle KFE$; (5)

然ルニ (1) ニヨリ $KF \parallel AD$ ∴ $\angle KFE = \angle H$,

又 (3) ニヨリ $KE \parallel BC$ ∴ $\angle KEF = \angle G$,

∴ (5) ヨリ $\angle H = \angle G$.

第四節—軌跡

定義

99. 軌跡(*Locus*) 壹線(直線或ハ曲線)或ハ其部分,或ハ線(直線或ハ曲線)ノ壹群アリ,之ヲXヲ以テ表ハシ,又壹個ノ條件アリ,之ヲAヲ以テ表ハス,

而シテXノ上ノ点ハ孰レモAナル條件ニ適合シ,且ツXノ外ノ点ハ孰レモAナル條件ニ適合セザルキ,Xヲ稱シテAナル條件ニ適スル点ノ軌跡トイフ.

例ヘバ壹直線ABアリ,(是レXニ當ル)又「貳定点C, Dヨリ等距ナリ」トイヘル條件アリ,(是レ條件Aニ當ル)

而シテAB上ノ点ハ孰レモC, Dヨリ等距ニシテABノ外ノ点ハ孰レモC, Dヨリ不等距ナルキハABハC, Dヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ.

又丸キ馬場ノ中央ニ旗杆Aアリテ,其馬場ノ周上ノ点ハ孰レモAヲ距ルヿ五町ニシテ,且其馬場ノ周ノ外ノ点ハ孰レモAヲ距ルヿ五町ナラズトイフ.

然ルキハ其馬場ノ周ハ,Aヲ距ルヿ五町ナル点ノ軌跡ナリ,但シ其馬場ノ周ハXニ當リ.又「Aヲ距ルヿ五町ナリ」トイヘル條件ハ條件Aニ當ル.

100. 証明之方法 Xガ,Aナル條件ニ適合スル点ノ軌跡ナルヿヲ証明スルニハ,前章ノ定義ニヨリ次ノ貳件ヲ証明スルヲ要ス.

Xノ上ノ点ハ孰レモAナル條件ニ適合ス, (1)

Xノ外ノ点ハ孰レモAナル條件ニ適合セズ, (2)

又時トシテハ(1)ノ代リニ次ニ記セル(3)ヲ証シ,(2)ノ代リニ(4)ヲ証スルヲ便トスルヿアリ,但シ(1)ト(3),及ビ(2)ト(4)ハ互ヒニ對定理ヲナスヲ以テ(3)ガ眞ナレバ従ツテ(1)モ眞ニシテ,(4)ガ眞ナレバ(2)モ従ツテ眞ナレバナリ.

Aナル條件ニ適合セザル点ハ孰レモXノ上ニアラズ, (3)

Aナル條件ニ適合スル点ハ孰レモXノ上ニアリ. (4)

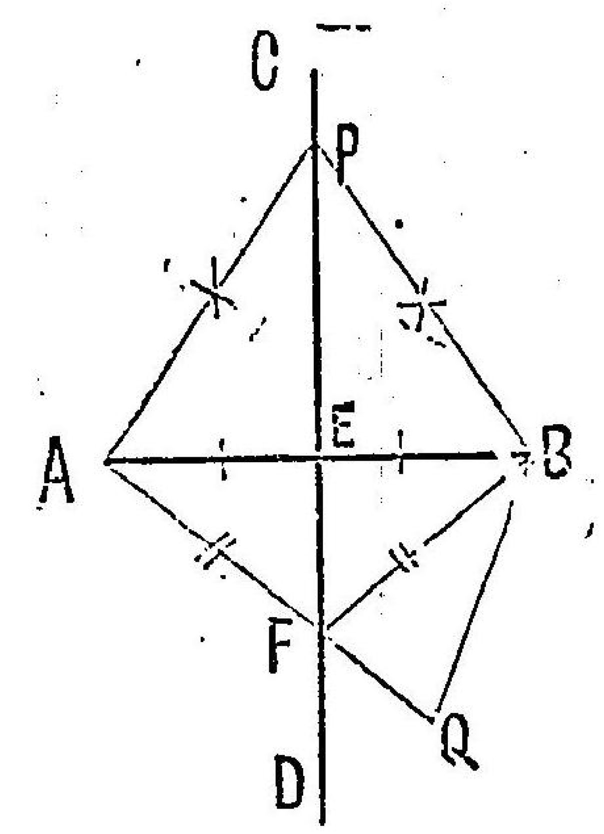
要スルニXガAナル條件ニ適合スル点ノ軌跡ナルヲ証スルニハ(1) (2)ノ中ノ孰レカ壹個ト,(2)^{3} (4)ノ中ノ孰レカ壹個トヲ証スレバ可ナリ.

定理三拾

101. 貳定点ヨリ等距ナル点ノ軌跡ハ,其貳定点ノ連結線ヲ直角ニ貳等分スル直線ナリ.

貳定点A, Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ハ直線ABヲ直角ニ貳等分スル直線CDナリ.

但シABヲ直角ニ貳等分スル直線トハ,ABノ中央線Eニ於テABニ直立スル直線ノヿナリ.



(証) CD上ニ壹点Pヲ取リPA, PBヲ結ブ.△AEP, △PEBニ於テ

AE = EB, (假設)

PEハ共通邊,

∠AEP = ∠PEB = 直角,

∴ △AEP ≡ △PEB ∴ PA = PB.

同様ニCD上ノ点ハ孰レモA, Bヨリ等距ナリ............(1)

〔是レ100.ノ(1)ニ當ル〕

又 CD 外ニ任意ノ点 Q ヲ取リ QA, QB ヲ結ビ QA ト CD トノ交点ヲ F トシ FB ヲ結ブ,

然ルトキハ (a) ニヨリ　　$AF = FB$

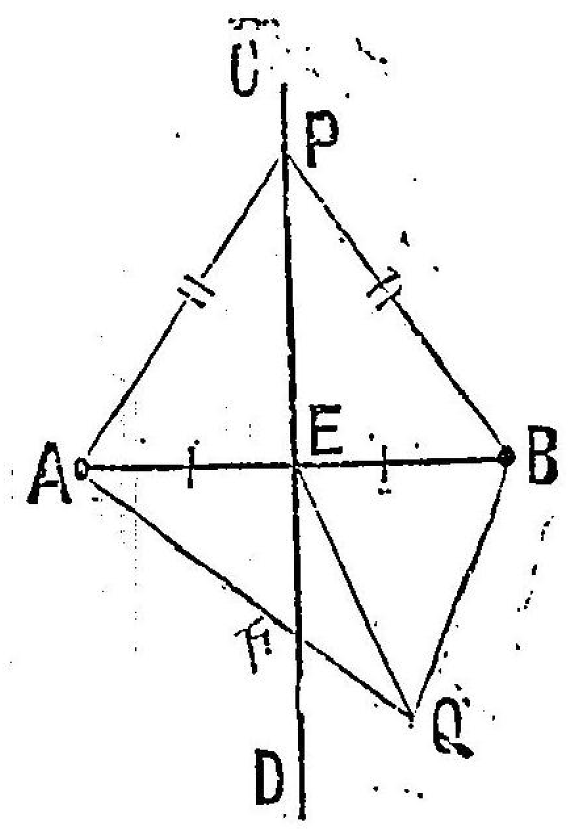
$$\therefore \quad AQ = AF + FQ = BF + FQ$$

然ルニ $\triangle QFB$ ニ於テ　$BF + FQ > BQ$,　　$\therefore \quad AQ > BQ$.

同様ニ CD ノ外ノ点ハ孰レモ A, B ヨリ等距ナラズ　　(b)

故ニ (a) (b) ニヨリ CD ハ A, B ヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ.

〔別証〕 P ヲ A, B ヨリ等距ナル点トシ, AB ノ中央点ヲ E トシ EP ヲ結ブ, 然ルトキハ



$AP = PB$, （假設）

$AE = EB$, （〃）

EP ハ共通邊,　$\therefore \quad \triangle AEP \equiv \triangle PEB$

$\therefore \quad \angle AEP = \angle PEB$

$\therefore \quad PE \perp AB$

故ニ A, B ヨリ等距ナル点 P ハ, AB ヲ直角ニ等分スル直線 CD ノ上ニアリ,

同様ニ A, B 等距ナル点ハ孰レモ CD ノ上ニアリ　　(a')

〔是レ 100 ノ (4) ニ當ル〕

又 A, B ヨリ不等距ナル壹点ヲ Q トシ QA, QE, QB ヲ結ブ

$\triangle AEQ$,　$\triangle EQB$ ニ於テ

$AE = EB$

EQ ハ共通邊

$AQ > QB$　　$\therefore \quad \angle AEQ > \angle QEB$　　（70. 定理）

故ニ $\angle AEQ$ ハ直角ナラズ從ツテ Q 点ハ CD 上ニアラズ,

同様ニ A, B ヨリ不等距ノ点ハ孰レモ CD 上ニアラズ.　(b')

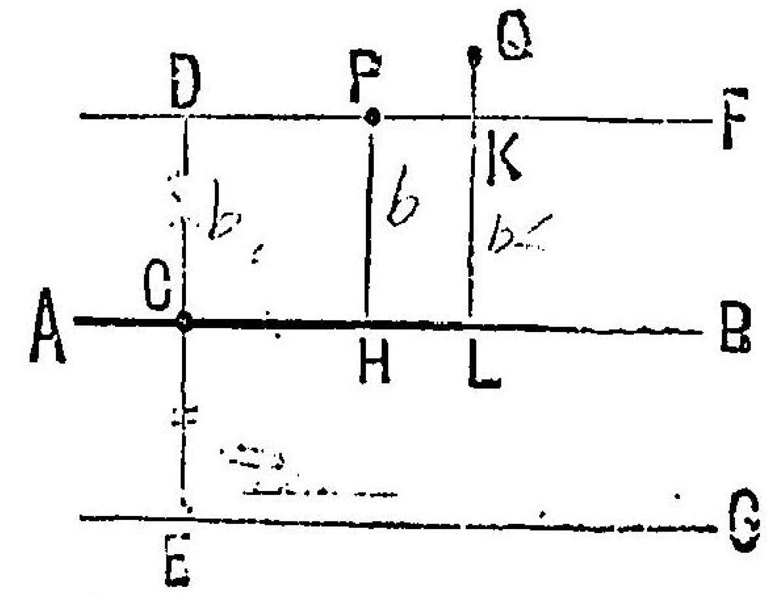
〔是レ 100 ノ (3) ニ當ル〕

(a') (b') ニヨリ CD ハ A, B ヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ

定理三拾壹

112. 壹定直線ヨリ定距離ニアル点ノ軌跡ハ, 其定直線ニ平行セル弐線ナリ. 但シ此二直線ノ各ト定直線トノ距離ハ其定距離ニ等シ.

定直線ヲ AB, 定距離ヲ b トス, 而シテ AB ニ平行シ且ツ AB トノ距離ガ b ニ等シキ弐直線ヲ DF, EG トス（但シ平行弐直線ノ距離トハ其二直線ノ各ニ直立スル直線ノ長ニシテ即チ AB 上ノ任意ノ壹点 C ニ於テ AB ニ垂線 ⊥CE ヲ引キ此垂線ト DF, EG トノ交点ヲ順次ニ D, E トスルトキハ DE ハ DF, EG ニ直立シ, 即チ CD ハ AB, DF ノ距離ニシテ CE ハ AB, EG ノ距離ナリ, 故ニ $CD = CE = b$ ナリ但シ EG, DF ノ各ト AB トノ距離ハ b ニ等シト假定シタレバナリ）



然ルトキハ AB トノ距離ガ b ニ等シキ点ノ軌跡ハ DF, EG ナリ,

（証） DF 若クハ EG 上ニ任意ノ壹点 P ヲ取リ P ヨリ AB ニ垂線 PH ヲ引ク, 然ルトキハ明カニ PHCD ハ矩形ナリ

$$\therefore \quad PH = DC$$
$$= b$$

同理ニヨリ DF, EG 上ノ諸点ヨリ AB ニ到ル距離ハ孰レモ b ニ等シ. 是レ 100, ノ (1) ニ當ル）

又 DF, 及ビ EG ノ外ノ壹点 Q ヲ取リ Q ヨリ AB ニ垂線 QL ヲ下シ, DF 若クハ EG ト QL トノ交点ヲ K トス

然ルトキハ (a) ニヨリ　　$KL = b$

$$\therefore \quad QL > b$$

同様ニ DF, EG ノ外ノ諸点ヨリ AB ニ到ル距離ハ孰レモ b ニ等

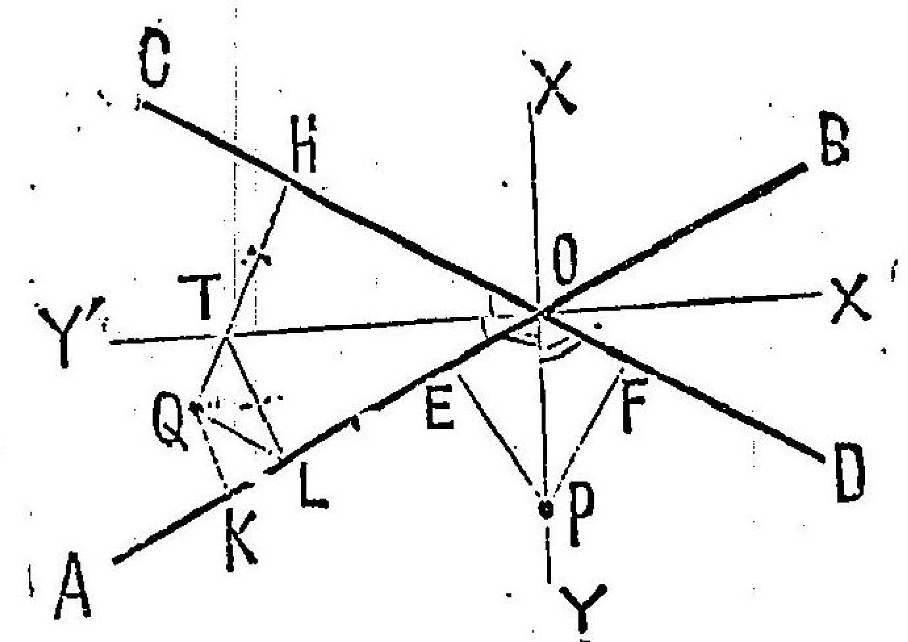
シカラズ.［是レ100.ノ(2)ニ當ル］ (b)

(a) (b) ニヨリ,ABトノ距離ガbニ等シキ点ノ軌跡ハDF, EGナル貳直線ナリ.

定理三拾貳

103. 相交ル貳直線ヨリ等距ナル点ノ軌跡ハ,其貳直線ノ交角ヲ等分スル貳直線ナリ.

貳直線ヲAB, CDトシ其交点ヲOトシ,AB, CDノ交角ノ等分線ヲXY, X′Y′トス,



然ルトキハAB, CDヨリ等距ナル点ノ軌跡ハXY, X′Y′ナリ.

(証) XY若クハX′Y′上ニ任意ノ壹點Pヲ取リ,PヨリAB及ビCDニ垂線PE, PFヲ下ス;

$\triangle POE$, $\triangle POF$ ニ於テ

OPハ共通邊

$\angle E = \angle F =$ 直角

$\angle EOP = \angle FOP$ (假設) $\therefore$ $\triangle POE \equiv \triangle POF$

同様ニXY, X′Y′上ノ各點ヨリ,貳直線AB, CDニ到ル距離ハ相等シ［是レ100ノ(1)ニ當ル］ (a)

又XY及ビX′Y′ノ外ニ壹點Qヲ取リ,QヨリAB, CDニ垂線QH, QKヲ下シ,XY若クハX′Y′トQHトノ交點ヲTトシTヨリ

ABニ垂線TLヲ下シQLヲ結ブ

然ルトキハ(a)ニヨリ $TH = TL$

$\therefore$ $QH = QT + TL$

然ルニ$\triangle QTL$ニ於テ $QT + TL > QL$

$\therefore$ $QH = QL$

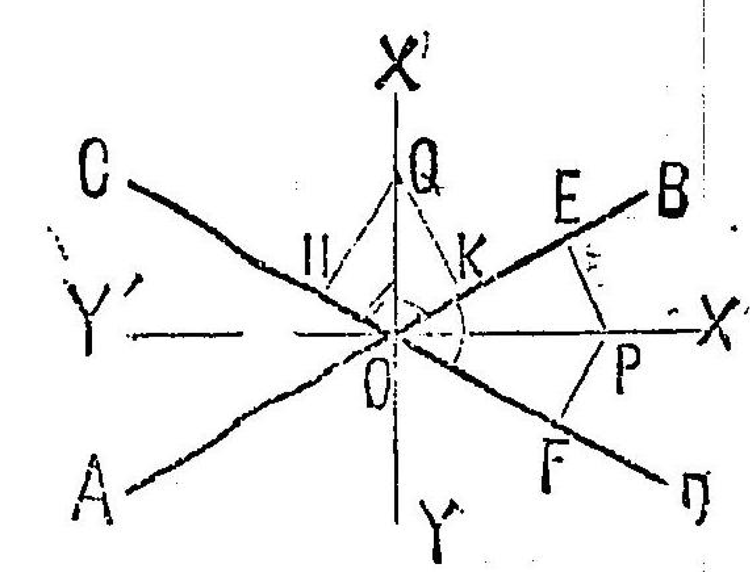
然ルニ $QK \perp AB$ $\therefore$ $QL > QK$ (67.定理)

$\therefore$ $QH > QK.$

同様ニXY,及ビX′Y′ノ外ノ點ヨリAB, CDニ到ル距離ハ等シカラズ(是レ100.ノ(2)ニ當ル),

(a) (b) ニヨリXY, X′Y′ハAB, CDヨリ等距ナル點ノ軌跡ナリ.

(別証) AB, CDヨリ等距ナル壹點ヲPトス,即チPヨリAB, CDニ垂線PE, PFヲ下スキハPE＝PFナリトシPOヲ結ブ,



$\triangle POE$, $\triangle POF$ ニ於テ

OPハ共通邊

$PE = PF$ (假設)

$\angle E = \angle F =$ 直角 $\therefore$ $\triangle POE \equiv \triangle POF$ (74.推論)

$\therefore$ $\angle POE = \angle POF$

即チPハAB, CDノ交角ノ等分線上ニアリ.

同様ニAB, CDヨリ等距ナル諸點ハ孰レモ,AB, CDノ交角ノ等分線XY, X′Y′上ニアリ［是レ100.ノ(2)ニ當ル］ (a')

又 XY 若クハ X′Y′ ノ上ニ任意ノ點 Q ヲ取リ Q ヨリ AB, CD ニ垂線 QK, QH ヲ引ク,

$\triangle$QOK, $\triangle$QOH ニ於テ

$\angle QOK = \angle QOH,$

$\angle K = \angle H =$ 直角,

QO ハ共通邊, $\therefore\ \triangle QOK \equiv \triangle QOH,$

$\therefore\ QK = QH.$

即チ Q ハ AB, CD ヨリ等距ナリ,

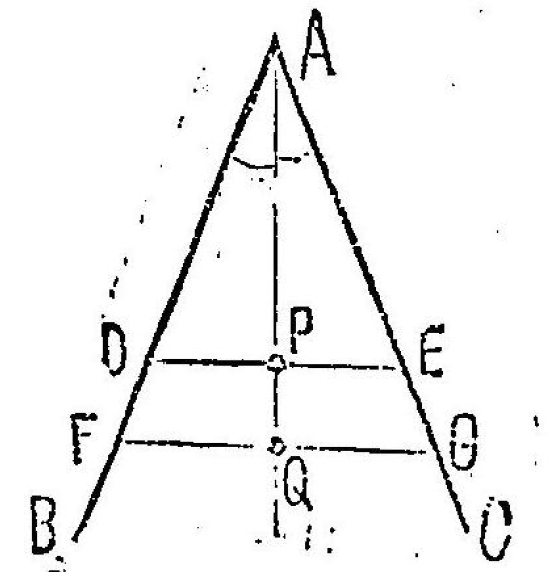
同様ニ XY, X′Y′ ノ上ノ點ハ AB, CD ヨリ等距ナリ. (b')

[是レ 100. (1) ニ當ル]

$(a'), (b')$ ニヨリ XY, X′Y′ ハ AB, CD ヨリ等距ナル點ノ軌跡ナリ.

例　題

1. 定角ヲ共通ノ頂角トセル等脚三角形ノ底邊ノ中央點ノ軌跡ハ其定角ノ等分線ナリ.



定角ヲ BAC トス然ルキハ BAC ヲ頂角トセル諸等脚三角形ノ底ノ中央點ノ軌跡ハ BAC 角ノ等分線ナリ.

(證) BAC ヲ頂角トセル等脚三角形ヲ DAE トシ其底ノ中央點 P ト A トヲ結ブ, $\triangle$ADP, $\triangle$APE ニ於テ

$AD = AE$

$DP = PE$

AP ハ共通邊 $\therefore\ \triangle ADP \equiv \triangle APE\ \therefore\ \angle DAP = \angle PAE$

故ニ P ハ $\angle$BAC ノ等分線ニアリ,

同様ニ $\angle$BAC ヲ頂角トセル諸等脚三角形ノ底邊ノ中央點ハ $\angle$BAC ノ等分線上ニアリ [是レ 100 ノ (4) ニ當ル] (a)

又 $\angle$BAC ノ等分線 AQ 上ニ任意ノ點 Q ヲ取リ Q ニ於テ AQ ニ垂線ヲ引キ此垂線ト AB, AC トノ交點ヲ順次ニ F, G トス,

$\triangle$AQF, $\triangle$AQG ニ於テ

$\angle AQF = \angle AQG =$ 直角

$\angle FAQ = \angle GAQ$

AQ ハ共通邊 $\therefore\ \triangle AQF \equiv \triangle AQG$

$\therefore\ AF = AG$ 及 $FQ = QG$

即チ $\triangle$AFG ハ等脚三角形ニシテ且ツ其底 FG ノ中央ハ Q ナリ,

譯言スレバ $\angle$BAC ノ等分線上ノ點ハ $\angle$BAC ヲ頂角トセル等脚三角形 AFG ノ底ノ中央點ナリ.

同様ニ $\angle$BAC ノ等分線上ノ諸點ハ $\angle$BAC ヲ頂角トセル等脚三角形ノ底ノ中央點ナリ [是レ 100. ノ (1) ニ當ル] (b)

(a) (b) ニヨリ $\angle$BAC ノ等分線 AQ ハ $\angle$BAC ヲ頂角トセル等脚三角形ノ底ノ中央ノ軌跡ナリ.

2. 平行貮直線 AB, CD ヨリ等距ナル點ノ軌跡ハ如何

(解) AB, 及ビ CD ニ直立スル直線 EF ヲ作リ EF ト AB, CD ノ交點ヲ順次ニ E, F トス.

然ルキハ EF ノ中央ヲ過ギ且ツ AB 及ビ CD ニ平行ナル直線 XY ハ所求ノ軌跡ナリ.

之レヲ證スルニハ, XY 上ノ點ハ AB, CD ヨリ等距ナルヿ[是レ 100 ノ (1) ニ當ル]及ビ XY ノ外ノ點ハ AB, CD ヨリ不等距ナルヿ [是レ 100 ノ (2) ニ當ル]ヲ證スレバ可ナリ,

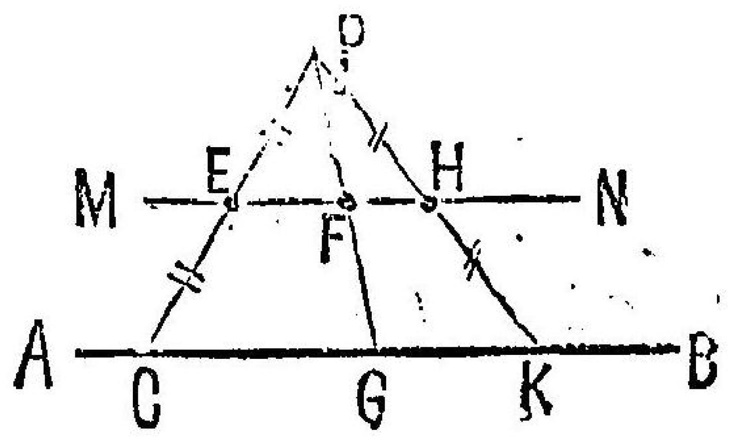
讀者試ミニ自ラ之レヲ證セヨ.

3. 定直線外ノ定點ヨリ其定線ニ到ル諸直線ノ中央線ノ軌跡ハ其定點ヨリ其定直線ニ到ル任意ノ直線ノ中央點ヲ過ギ且ツ其定直線ニ平行ナル直線ナリ.

(證) P ヲ定點トシ AB ヲ定直線トス

然ルキハ P ヨリ AB ニ到ル諸直線ノ中央點ノ軌跡ハ P ヨリ AB

ニ到ル任意ノ直線PCノ中央點Eヲ過ギテABニ平行ナル直線ナリ。



(證) PヨリABニマデ任意ノ直線PGヲ引キPGノ中央點ヲFトシEFヲ結プ

然ルキハ$\triangle PCG$ニ於テ

$PE = EC,$

$PF = FG,\quad \therefore\ EF \parallel CG,$ (99 推論)

故ニPGノ中央點ハEヲ過ギ且ツABニ平行ナル直線上ニアリ

同様ニP點ヨリABニ到ル諸直線ノ中央點ハ孰レモEヲ過ギテABニ平行セル直線MN上ニアリ[是レ100ノ(4)ニ當ル] (a)

又MNノ上ニ任意ノ點Hヲ取リPHヲ結ビ之レヲ引張シテABニ交ラシメ其交點ヲKトス

$\triangle PCK$ニ於テ $PE = EC$

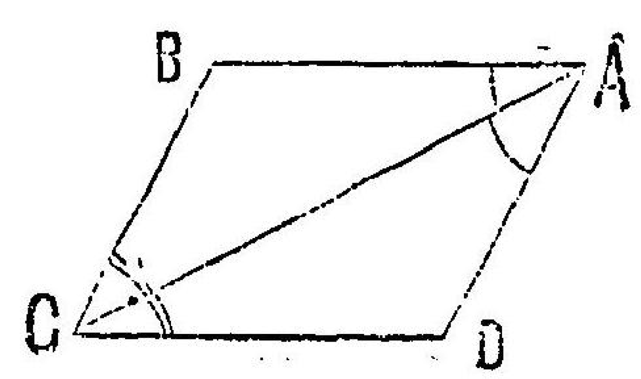
$EH \parallel CK \quad \therefore\ PH = HK.$ (98. 定理)

即チMN上ノ壹點HハPヨリABニ到ル直線PKノ中央ナリ。

同様ニMN上ノ點ハPヨリABニ到ル諸直線ノ中央ナリ,[是レ100.ノ(1)ニ當ル]

(a) (b) ニヨリ,PヨリABニ到ル諸直線ノ中央點ノ軌跡ハMNナリ,

4. 平行四角形ABCDニ於テ對角線ACハBAD角ノ二邊ヨリ等距ナル點ノ軌跡ナルキハABCDハ菱形ナリ。



(證) ACハ$\angle BAD$ノ二邊AB, ADヨリ等距ナル點ノ軌跡ナリ,

故ニACハ$\angle BAD$ヲ等分ス(103.定理)

即 $\angle DAC = \angle CAB$

然ルニ $\angle DAC = BCA$ (錯角)

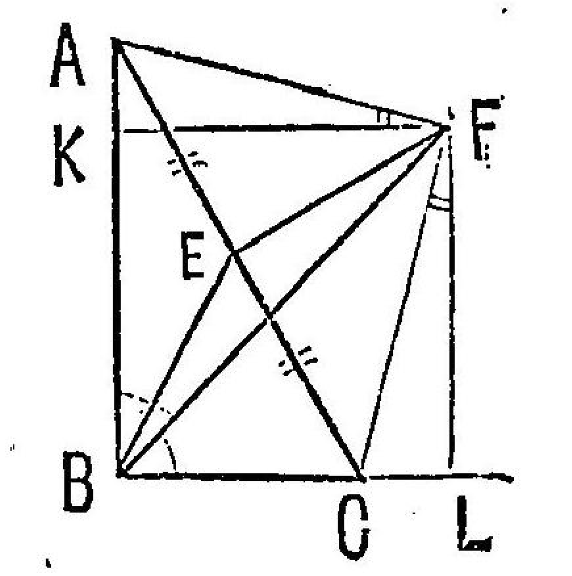
$\therefore\ \angle CAB = \angle BCA \quad \therefore\ AB = DC$

然ルニABCDハ平行四邊形ナリ $\therefore\ AB = DC$ 及 $BC = AD$

$\therefore\quad AB = BC = DC = AD$

故ニABCDハ菱形ナリ。

5. 直三角形ABCノ斜邊ACノ中央ヲEトシ,EニAC於テニ直立セル直線ト直角Bノ等分線トノ交點ヲFトシBEヲ結ベバ$\triangle EFB$ハ等脚三角形ナリ。



(證) FA, FCヲ結ビ,FヨリAB, BCニ下セル垂線ヲ順次ニFK, FLトス,

BFハAB, ACヨリ等距ノル點ノ軌跡ナリ, (103 定理)

$\therefore\quad FK = FL$

又FEハ弐点A, Cヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ, (101 定理)

$\therefore\quad AF = FC.$

故ニ$\triangle AKF$, $\triangle FCL$ニ於テ

$AF = FC$

$FK = FL$

$\angle K = \angle L =$ 直角 $\quad \therefore\ \triangle AKF \equiv \triangle FCL,$ (74 推論)

$\therefore\ \angle AFK = \angle CFL,$

此式ノ兩邊ヘ$\angle KFC$ヲ加フレバ $\angle AFC = \angle KFL,$

然ルニ$FL \parallel AB$ナルヲ以テ $\angle KFL = \angle AKF =$ 直角(錯角)

$\therefore\ \angle AFC =$ 直角,

故ニ$\triangle AFC$ハ直角三角形ナリ,而シテEハ斜邊ACノ中央点ナリ,

故ニ第三節例題8.ニヨリ $EF = \frac{1}{2}AC;$

又直角$\triangle ABC$ニ於テモ同理ニヨリ $EB = \frac{1}{2}AC,$

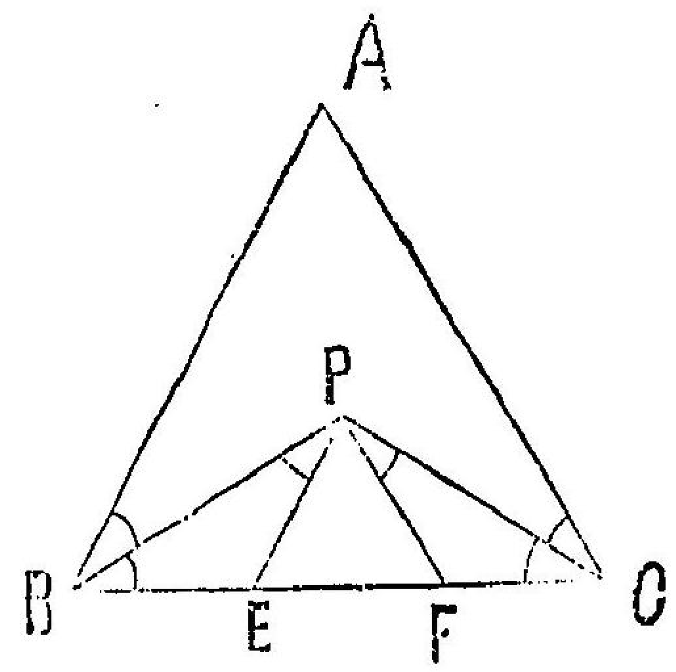
$\therefore\quad EF = EB,$

即$\triangle EBF$ハ等脚三角形ナリ。

第壹編雜題

1. 等邊三角形ABCノ底角B, Cノ等分線ノ交点ヲPトシ, PヨリAB, ACニ平行セル直線PF, PEヲ引キ, PF, PEトBCトノ交点ヲ順次ニF, Eトス 然ルトキハ

$BE = EF = FC.$



(證) $PE /\!/ AB$ ナルヲ以テ

$\angle BPE = \angle PBA$ (錯角)

然ルニ $\angle PBA = \angle PBE$ (假設)

$\therefore \angle BPE = \angle PBE$

$\therefore PE = BE$ (1)

同理ニヨリ $PF = FC$ (2)

又 $PE /\!/ AB,\ PF /\!/ AC,\ \therefore \angle EPF = \angle A$ (第三節例題4)

又 $\angle PEF = \angle ABC$ (應角)

及 $\angle PFE = \angle ACB$ (")

然ルニ△ABCハ等邊△ナリ $\therefore \angle A = \angle ABC = \angle ACB$

$\therefore \angle EPF = \angle PEF = \angle PFE$

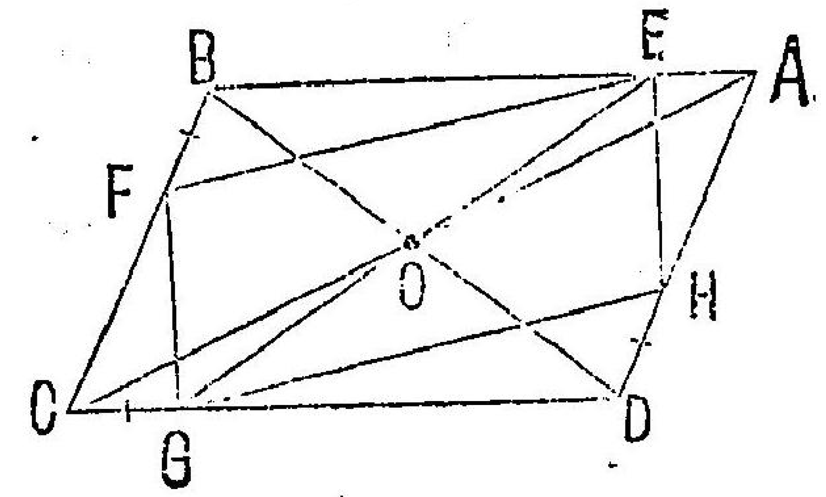
$\therefore PE = EF = PF$ (62. 定理)

故ニ(1)(2)ニヨリ $BE = EF = FC.$

2. 平行四角形ABCDノ各邊上ニ點E, F, G, Hヲ取リ $AE = BF = CG = DH$ ナラシメ EF, FG, GH, HEヲ結ブ, 然ルトキハ

第壹 EFGHハ平行四角形ナリ

第貳 ABCD, ノ對角線ノ交點トEFGHノ對角線ノ交點トハ一致ス.



(證) (第壹) $AD = BC$ (90. 定理)

又 $HD = BF$

$\therefore AH = FC$

故ニ△AEH, △FCGニ於テ

$AH = CF$

$AE = CG$ (假設)

$\angle EAH = \angle FCG$ (90. 定理) $\therefore \triangle AEH \equiv \triangle FCG$

$\therefore EH = FG$

同様ニ $\triangle BFE \equiv \triangle DGH$ $\therefore EF = HG$

故ニEFGHハ平行四邊形ナリ. (93. 定理)

〔第貳〕ABCDノ對角線ノ交点ヲOトシ, EO, OGヲ結ブ

△AOE, △CGOニ於テ

$AO = OC$ (9[illegible]. 定理第三)

$AE = CG$ (假設)

$\angle EAO = \angle OCG$ (錯角) $\therefore \triangle AOE \equiv \triangle OCG,$

$\therefore \angle EOA = \angle COG,$

然ルニAOCハ壹直線 $\therefore \angle EOA + \angle EOC = 2$ 直角, 38. 定理)

$\therefore \angle COG + \angle EOC = 2$ 直角,

故ニEO, OGハ壹直線ナリ. (4[illegible]. 定理)

同様ニFO, OHヲ結ベバFOHハ壹直線ヲナス,

故ニOハ□EFGHノ對角線ノ交点ナリ.

即チ四角形ABCDノ對角線ノ交点ト□EFGHノ對角線ノ交点トハ壹致ス.

3. 三角形ABCノ各邊上ニ等邊三角形ACD, ABE, BCFヲ畫キ, BトDトヲACノ異側ニ, EトCトヲABノ異側ニ置キ, 又EトAトヲBCノ同側ニ置ク, 而シテFE, EA, AD, DFヲ結ベバ四角形EFDAハ平行四角形ナリ. (次ノ頁ノ圖ヲ見ヨ)

(證) 等邊三角形ノ各角ハ相等シク, (51. 推論)且ツ其各角ノ和ハ貳直角ナリ 86. 定理)

故ニ等邊三角形ノ壹角ハ貳直角ノ三分ノ一ニ等シク即チ$\frac{2}{3}$直角

故ニ　$\angle ACD = \angle FCB$

上式ノ兩邊ヨリ $\angle FCA$ 減ズレバ

$\angle FCD = \angle ACB,$

故ニ $\triangle FCD, \triangle ACB$ ニ於テ

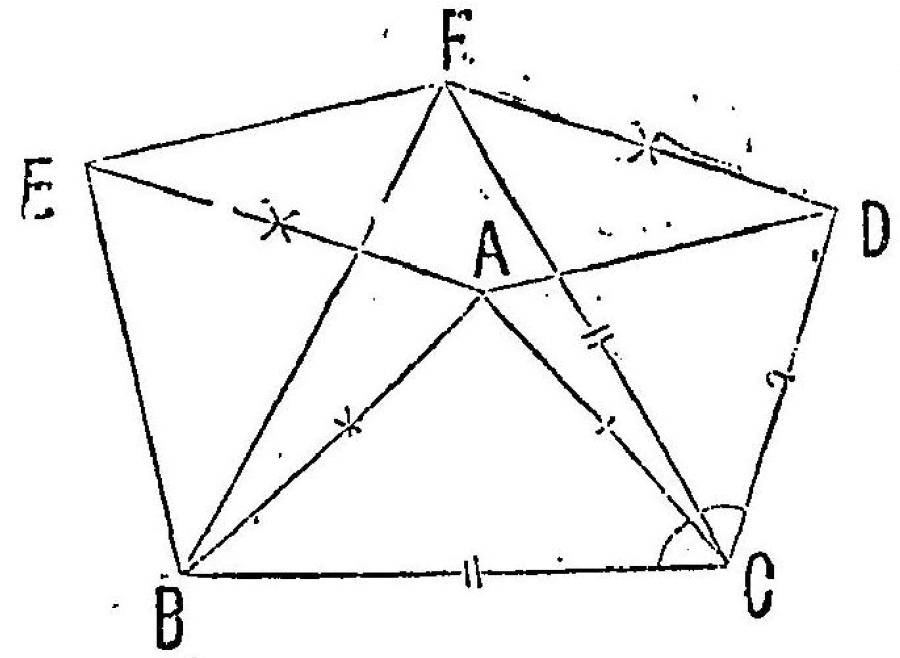
$\angle FCD = \angle ACB$

$DC = AC$

$FC = BC$

$\therefore \quad \triangle FCD \equiv \triangle ACB$

$\therefore \quad FD = AB$



然ルニABEハ等邊△　$AB = AE$　　$\therefore \quad FD = AE$

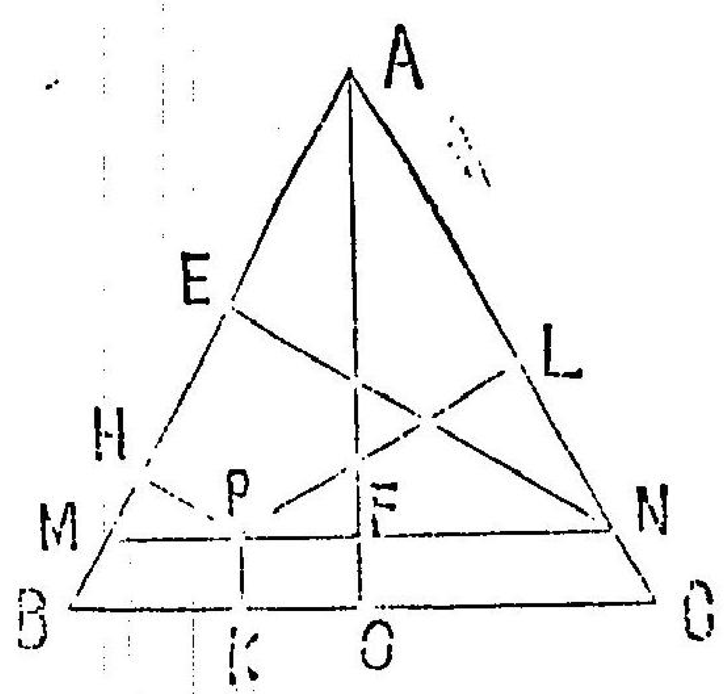
又 $\triangle BFE \equiv \triangle ABC$ (前ト同理ナルヿヨリ)　　$EF = AD$

故ニEFDAハ平行四角形ナリ。　(3. 定理

4. 等邊三角形内ノ諸点ヨリ各邊ニ到ル距離ノ和ハ不變ナリ。

等邊三角形ヲABCトス。

然ルキハABC内ノ諸点ヨリAB, AC, BCニ到ル距離ノ和ハ不變ナリ。



(證) 形内ニ任意ノ壹点Pヲ取リPヨリ各邊ニ垂線PH, PK, PLヲ引キPヲ過ギテBCニ平行線MNヲ引キMNトAB, ACトノ交点ヲ順次ニM, NトシNヨリABニ垂線ENヲ下シ, 又AヨリBCニ垂線AGヲ下シ, AGトMNトノ交点ヲFトス。

今四角形PFGKハ　ニ矩形ナリ,　$\therefore \quad PK = FG \qquad (a)$

又 $MN \parallel BC \quad \therefore \quad \angle AMN = \angle B$　([illegible])

及　$\angle ANM = \angle C$　(")

然ルニABCハ等邊△　$\therefore \quad \angle B = \angle C$　(61. 推論)

$\therefore \quad \angle AMN = \angle ANM$

$\therefore \quad AM = AN$　(62. 定理)

故ニ $\triangle AMN$ ハ等脚三角形ト答フルヿヲ得

$\therefore \quad PH + PL = NE$　(第三節 15)

此式ト (a) 式トヲ加フルキハ

$$PH + PL + PK = NE + FG \qquad (b)$$

然ルニ前ノ証明ニヨレバ

$\angle AMN = \angle ANM = \angle B$

然ルニ　$\angle BAC = \angle B$　(61. 定理)

$\therefore \quad \angle AMN = \angle ANM = \angle BAC$

$\therefore \quad AM = MN = AN$

故ニ $\triangle ANF\ \triangle EMN$ ニ於テ

$AN = MN$

$\angle F = \angle E =$ 直角

$\angle ANF = \angle EMN \quad \therefore \quad \triangle ANF \equiv \triangle EMN$

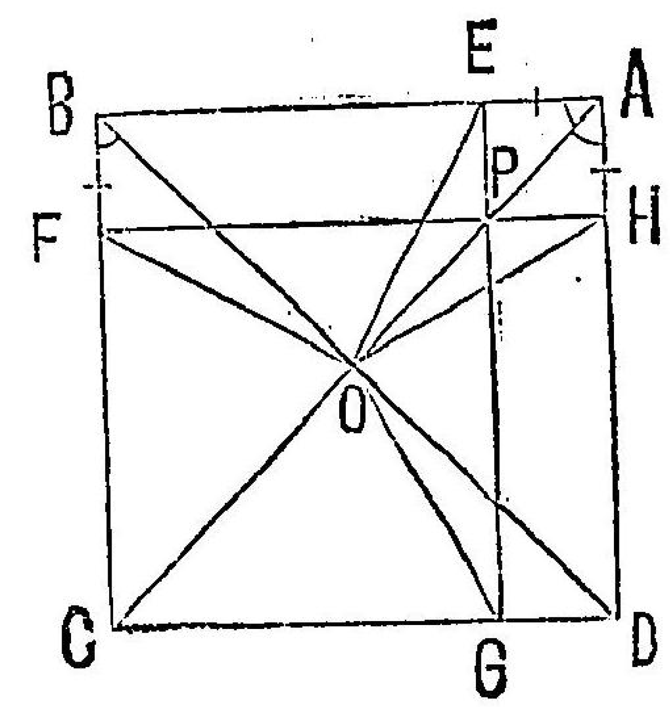
$\therefore \quad AF = EN$

故ニ (b) ニヨリ　$PH + PL + PK = AF + FG = AG.$

同様ニ $\triangle ABC$ 内ノ他ノ諸点ヨリ各邊ニ到ル距離ノ和ハ孰レモAGニ等シ.

故ニ $\triangle ABC$ 内ノ諸点ヨリ各邊ニ到ル距離ノ和ハ不變ナリ

5. 正方形ABCDノ對角線AC上ノ任意ノ壹点Pヨリ各邊ニ平行ナル式直線EG, FHヲ引キ, 此二直線ト周トノ交点ヲE, F, G, Hトシ, 又ABCDノ對角線ノ交点ヲOトス, 然ルキハE, F, G, HハOヨリ等距ナリ。



(証)　OE, OF, OG, OH ヲ結ブ

$AD = DC \quad \therefore \quad \angle CAD = \angle ACD$

又　$\angle ADC =$ 直角

$\therefore \quad \angle CAD + \angle ACD =$ 直角

$\therefore \quad \angle CAD = \angle ACD = \frac{1}{2}$ 直角

同様ニ　$\angle OAE = \frac{1}{2}$ 直角

$\therefore \quad \angle CAD = \angle OAE \quad (1)$

又　$\angle EAP = \angle EPA$

$EP = EA$

然ルニ明カニ　$EP = AH$　$\therefore$　$EA = AH$　(2)

故ニ $\triangle AOH$, $\triangle AOE$ ニ於テ

$\angle OAH = \angle OAE$　〔(1) ヨリ〕

$AH = AE$　〔(2) ヨリ〕

AO ハ共通邊　$\therefore$　$\triangle AOH \equiv \triangle AOE$

$\therefore$　$OH = OE \ldots\ldots (a)$

又前ト同樣ニ　$\triangle OCG \equiv \triangle OCF$　$\therefore$　$OG = OF$　(b)

$\triangle AOE$, $\triangle OBF$ ニ於テ

$\angle OAE = \angle OBF = \frac{1}{2}$直角

$AO = OB$ ($\because$ $\angle OAE = \angle OBA$)　(62. 定理)

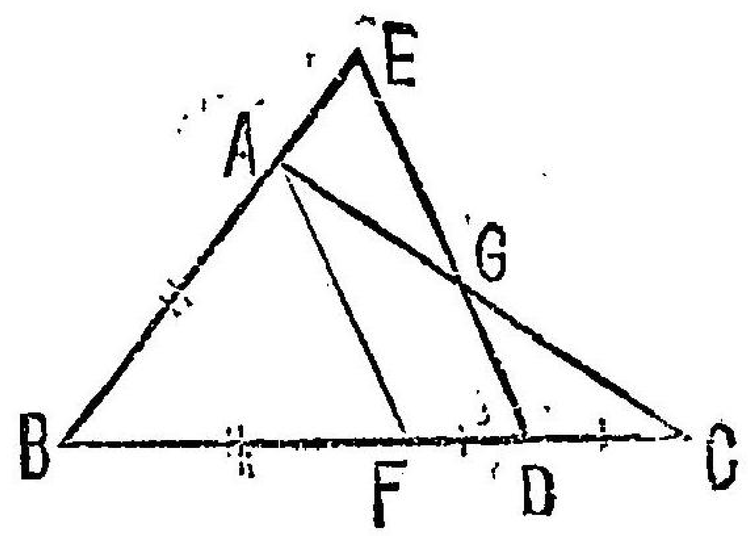
$AE = BF$ ($\because$ 共ニ EP ニ等シ)

$\therefore$　$\triangle AOE \equiv \triangle OBF$　$\therefore$　$OE = OF$

$\therefore$　(a) (b) ヨリ　$OH = OE = OF = OG$

即チ E, F, G, H ハ O ヨリ等距ナリ.

6.　三角形 ABC ニ於テ $AB < AC$ トシ, BC 上ニ D ヲ BA ノ引張線上ニ E ヲ取リ $BD = BE = \frac{1}{2}(AB+BC)$ トシ ED ヲ結ビ, ED ト AC トノ交点ヲ G トス, 然ルトキハ G ハ AC ノ中央ナリ.



(証)　A ヨリ ED ニ平行線ヲ引キ BC トノ交点ヲ F トス然ルトキハ

$\angle BAF = \angle E$　(同位角)

$\angle AFB = \angle EDB$　(〃)

然ルニ $\angle E = \angle EDB$ ($\because$ $BE = BD$)

$\therefore$　$AB = BF$

而シテ $BE = BD$　$\therefore$　$AE = FD$.　(1)

又　$BD + BE = AB + BC$　(假設)

兩邊ヨリ $AB + BD$ ヲ減ズルトキハ $AE = DC$　(2)

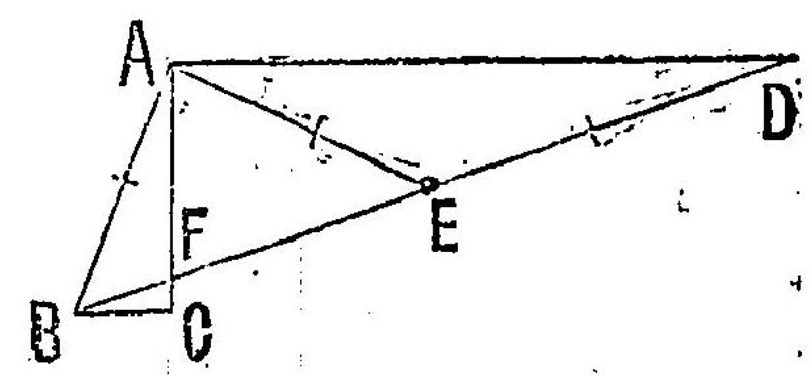
(1) 及ビ (2) ニヨリ　$FD = DC$

故ニ $\triangle AFC$ ニ於テ

$FD = DC$

$AF \parallel GD$　$\therefore$　$AG = GC$.

7.　直三角形 ABC (C ヲ直角トス) ノ鋭角頂 A ヨリ BC ニ平行線 AD ヲ引キ, 又 B ヲ過ギテ且ツ AC ニ F ニ, AD ニ D ニ於テ交ル直線ヲ引ク, 然ルトキハ FD 若シ AB ノ貳倍ナレバ DBC 角ハ ABC 角ノ三分ノ一ナリ.



(証)　FD ノ中央點ヲ E トシ AE ヲ結ブトキハ

$\angle DAC = \angle ACB$　(錯角)

$=$ 直角,

故ニ第三節例題 8. ニヨリ

$AE = ED = \frac{1}{2}FD$,　$\therefore$　$\angle D = \angle EAD$,　(60. 定理)、

又 $\angle AEB$ ハ $\triangle AED$ ノ外角ナリ $\therefore$ $\angle D + \angle EAD = \angle AEB$ (86. 定理).

$\therefore$　$2\angle D = \angle AEB$.　(1)

而シテ $AE = \frac{1}{2}FD$

$AB = \frac{1}{2}FD$ (假設)　$\therefore$　$AE = AB$,

$\therefore$ $\angle AEB = \angle ABE$　(60 定理)

故ニ (1) ニヨリ　$2\angle D = \angle ABE$,

然ルニ $AD \parallel BC$ ナルヲ以テ　$\angle D = \angle FBC$,

$\therefore$　$2\angle FBC = \angle ABE$,

$\therefore$　$3\angle FBC = \angle ABC$,

$\therefore$　$\angle FBC = \frac{1}{3}\angle ABC$,

8.　三角形 ABC ノ二角頂 B, C ヨリ其各對邊ニ到ル垂線ヲ BD, CE トス, 然ルトキハ若シ $BD = CE$ ナレバ ABC ハ等脚三角形ナリ. (次ノ頁ノ圖ヲ見ヨ)

(證) 兩三角形 AEC, ABD ニ於テ

$\angle AEC = \angle ADB =$ 直角,

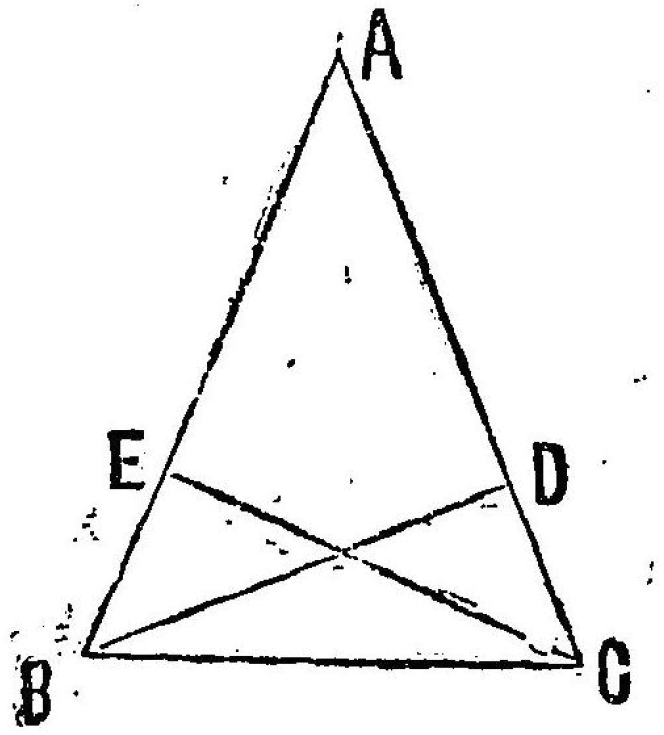
$\angle A =$ 共通,

$EC = BD$, (假設)

$\therefore \triangle AEC \equiv \triangle ABD$ (54. 定理)

$\therefore AC = AB$

故ニ $\triangle ABC$ ハ等脚三角形ナリ。



9. 三角形 ABC ノ兩角頂 B, C ヨリ引キタル中央線ヲ BD, CE トス, 然ルトキハ若シ BD=CE ナレバ ABC ハ等脚三角形ナリ。

(證) CE, BD ノ交點ヲ O トス,

然ルトキハ

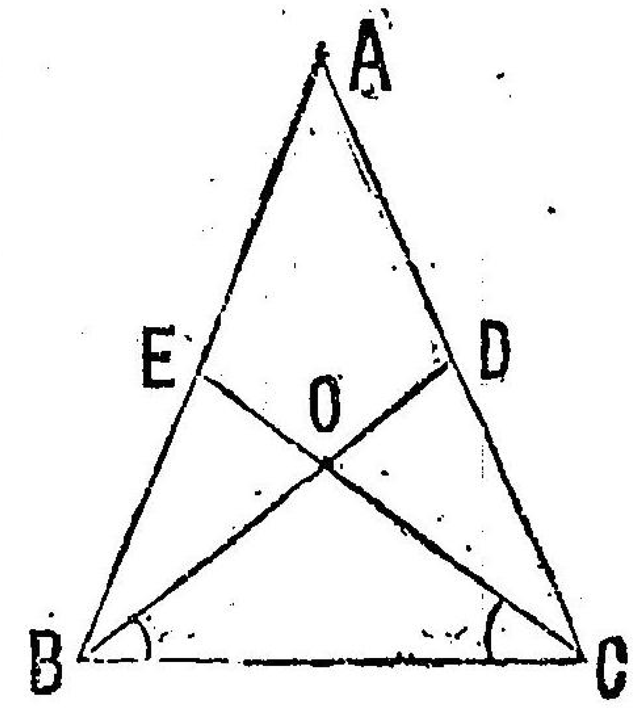
$CO = \frac{2}{3}CE$, (第三節例題 14)

$BO = \frac{2}{3}BD$, (〃)

然ルニ $CE = BD$, (假設)

$\therefore CO = BO$,

$\therefore \angle OBC = \angle OCB$. (60. 定理)



故ニ兩三角形 BDC, BEC ニ於テ

$BD = CE$, (假設)

BC ハ共通邊,

$\angle OBC = \angle OCB$ $\therefore \triangle BDC \equiv \triangle BEC$, (55. 定理)

$\therefore \angle DCB = \angle EBC$,

$\therefore AB = AC$, (62. 定理)

故ニ ABC ハ等脚三角形ナリ。

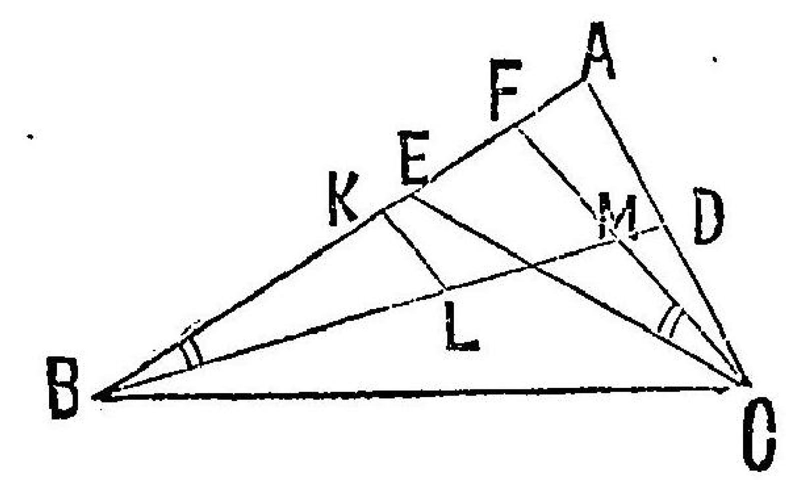
10. 三角形 ABC ノ兩角 B, C ノ二等分線ヲ BD, CE トス, 然ルトキハ若シ BD = CE ナレバ ABC ハ等脚三角形ナリ。

(證) AB, AC ハ不等ナリトシ $AB > AC$ トス。

然ルトキハ $\angle ACB > \angle ABC$, (62. 定理)

$\therefore \frac{1}{2}\angle ACB > \frac{1}{2}\angle ABC$, (a)

$\therefore \angle ACE > \angle ABD$,



故ニ CA ト CE トノ間ニ CF ナル直線ヲ引キ $\angle FCE$ ヲシテ $\angle ABD$ ト等シカラシムルコヲ得

而シテ CF ト AB トノ交點ヲ F トス

$\angle FCE = \angle FBD$ (作法)

$\angle ECB > \angle DBC$ 〔(a) ニヨリ〕

上ノ二式ヲ加フルトキハ

$\angle FCB > \angle FBC$ $\therefore FB > FC$ (62. 定理)

故ニ今 AB 上ニ一點 K ヲ取リ BK ヲシテ FC ト等長ナラシムルトキハ K ハ B ト F トノ間ニアリ。

故ニ K ヨリ FC ニ平行ニ引キタル直線ト BD トノ交點ヲ L トスレバ L ハ FC ト B トノ間ニアリ,

而シテ FC ハ AC ト CE トノ間ニアルヲ以テ

$BL < BD$. (b)

而シテ兩三角形 FEC, KBL ニ於テ

$CF = BK$, (作法)

$\angle KBL = \angle FCE$ (作法)

$\angle BKL = \angle EFC$ (應角) $\therefore \triangle CFE \equiv \triangle BKL$

$\therefore BL = CE$

故ニ (b) ニヨリ $CE < BD$.

是レ不合理ナリ; 但假設ニヨレバ $CE = BD$ ナレバナリ。

故ニ $AB > AC$ ナルコナシ。

同理ニヨリテ $AB < AC$ ナルコナシ。

故ニ $AB = AC$ ナリ

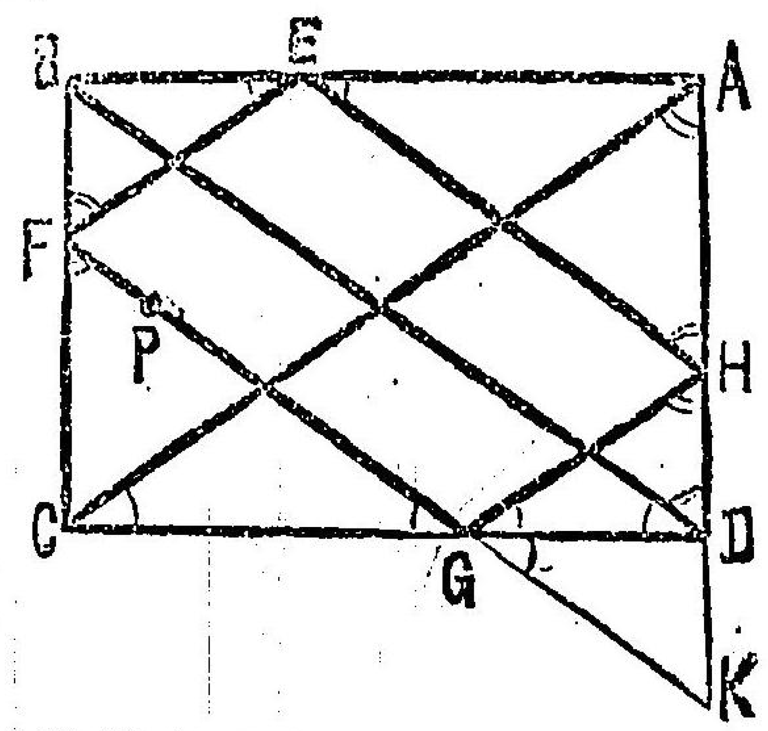
故ニ $\triangle ABC$ ハ等脚三角形ナリ

11. AC, BD ハ矩形 ABCD ノ對角線ナリ, 然ルトキハ

(第壹) 各邊ガ AC, BD ニ平行スヘキ四角形ヲ ABCD ニ内接セシムルコヲ得. 注意 甲ナル多角形ノ各角頂ガ乙ナル多角形ノ各邊上ニアルトキハ甲ハ乙ニ内接ストイヒ, 又乙ハ甲ニ外接ストイフ)

(第貳) 其内接四角形ノ周邊ハ $AC + BD$ ニ等シ.

(証) (第壹) $FG \parallel BD$ ナラシメ,



FG ト BC, CD トノ交點ヲ順次ニ F, G トス

F 及ビ G ヨリ AC ニ平行線 FE, GH ヲ引キ, FE ト AB トノ交點ヲ E, GH ト AD トノ交點ヲ H トシ EH ヲ結ブ.

然ルトキハ EH ハ BD ニ平行スヘシ其証次ノ如シ

FG, AD ノ各引張線ノ交點ヲ K トス

今 $FG \parallel BD$ ∴ $\angle FGC = \angle BDC$ (錯角)

$HG \parallel AC$ ∴ $\angle HGD = \angle ACD$ (")

然ルニ $\angle BDC = \angle ACD \ (\because \triangle BCD \equiv \triangle ACD)$

∴ $\angle FGC = \angle HGD$

然ルニ $\angle FGC = \angle DGK$ ∴ $\angle HGD = \angle DGK$

故ニ兩三角形 DGH, DGK ニ於テ

$\angle HGD = \angle DGK$

$\angle HDG = \angle GDK =$ 直角

DG ハ共通邊 ∴ $\triangle DGH \equiv \triangle DGK$

∴ $HD = DK$

然ルニ BFKD ハ平行□ ∴ $BF = DK$

∴ $HD = BF$ (1)

又 $HG \parallel AC$ (作法)

$EF \parallel AC$ (") ∴ $GH \parallel EF$ (82. 定理)

又 $GD \parallel EB$

∴ $\angle HGD = \angle BEF$ (第三節例題6) (2)

又 $\angle HDG = \angle EBF =$ 直角 (3)

(1), (2), (3) ニヨリ $\triangle HDG \equiv \triangle EBF$

∴ $EF = HG$

而シテ $EF \parallel HG$

故ニ EFGH ハ平行四角形ナリ. (93. 定理)

∴ $EH \parallel FG$

又 $BD \parallel FG$ ∴ $EH \parallel BD$ (82. 定理)

故ニ内接四角形 EFGH ノ各邊ハ ABCD ノ對角線ニ平行ス

故ニ題意ノ如シ.

(第二) $\triangle GDH \equiv \triangle GDK$ ∴ $HG = GK$

∴ $FG + HG = FK$

然ルニ □BFKD ハ平行□ ∴ $FK = BD$

∴ $FG + HG = BD$

然ルニ □EFGH ハ平行四角形ナルヲ以テ $EH = FG,\ EF = HG$

∴ □EFGH ノ周邊 $= 2(FG + HG) = 2BD$

然ルニ $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ ∴ $BD = AC$ ∴ $BD + AC = 2BD$,

∴ □EFGH ノ周邊 $= BD + AC$.

(注意) ABCD ヲ球突臺ト考ヘ, P ヲ小球ト考フ. (前ノ圖)

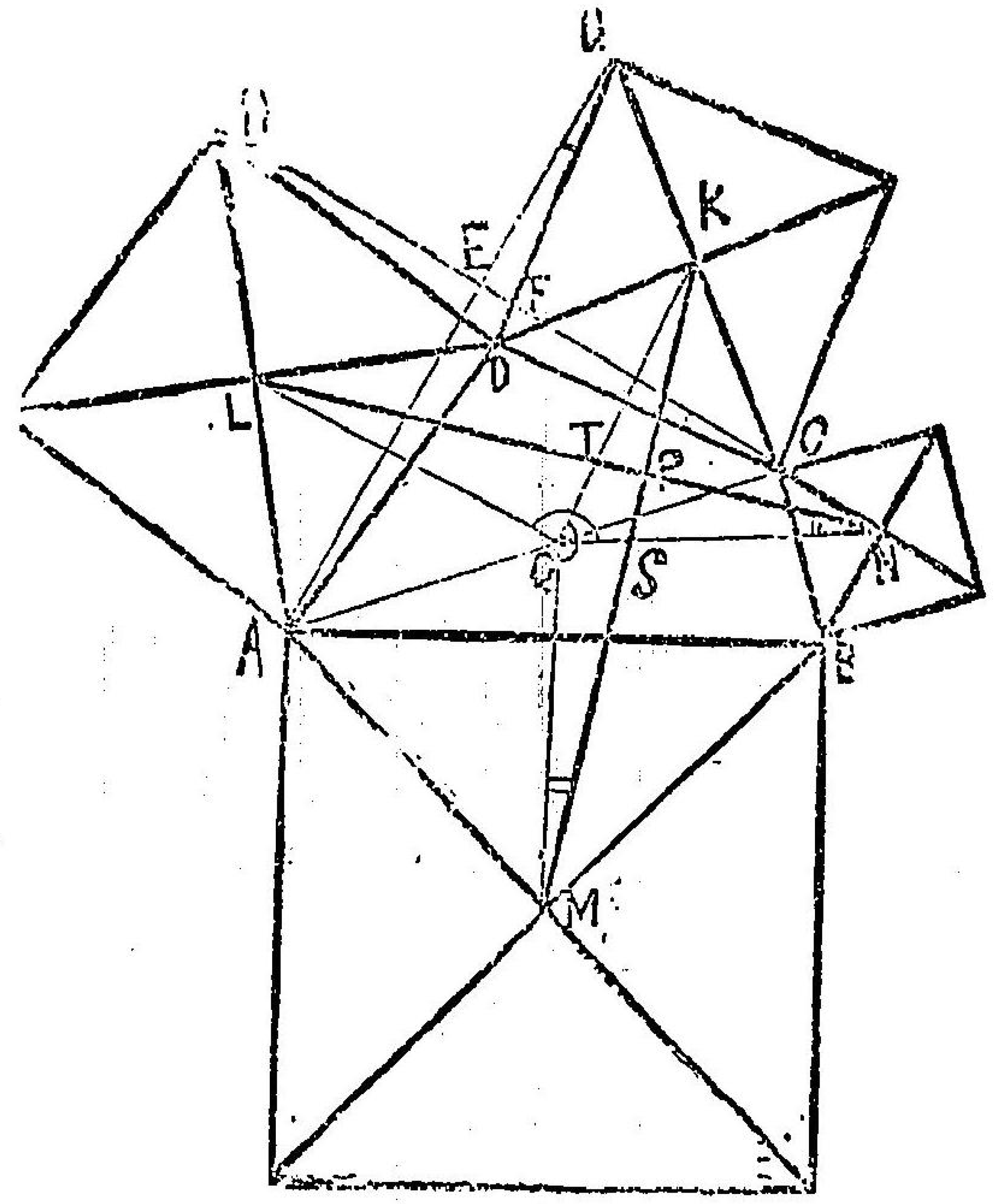
今小球 P ヲ臺上ニ滑走セシメ臺ノ一邊例ヘバ CD ヲ打タシムルトキハ小球 P ガ走過スル徑路ハ物理學ノ法則ニヨリ CD ト等角ヲナスナリ.

而シテ前題ニ於テ証セシガ如ク $\angle FGC = \angle HGD$,

又同理ニヨリ $\angle GHD = \angle EHA,\ \angle HEA = \angle BEF,\ \angle BFE = \angle CFG$ ナリ.

故ニ小球PヲFGノ方向(即チ對角線BD)ニ平行ナル方向)ニ滑走セシムルトキハ球ハ GH, HE, EF, FP ヲ經テ再ビ原ノ位置ニ歸着スルナリ.

12. 四邊形ABCDノ外方ニ於テ AB, BC, CD, DA ノ上ニ畫ケル正方形ノ對角線ノ交點ヲ順次ニ M, N, K, L トシ KM, NL ヲ結ブ, 然ルトキハ KM, LN ハ等長ニシテ且ツ直交ス.



(証) KM, LN ノ交點ヲPトシ, 對角線 AC ノ中央點ヲQトシ QK, QL, QM, QN ヲ結ビ QN ト KM トノ交點ヲS, QK ト NL トノ交點ヲTトス,

又圖ノ如ク GA, HC ナル直線ヲ引キ GA ト HC トノ交點ヲEトシ, 又 HC ト GD トノ交點ヲFトス

然ルトキハ ∠HDA 及ビ ∠GDC ハ共ニ直角ニシテ相等シ, 故ニ此兩角ヘ ∠HDG ヲ加フレバ ∠GDA = ∠HDC, 故ニ兩三角形 GDA, HDC ニ於テ

$$\mathrm{GD} = \mathrm{DC}$$

$$\mathrm{AD} = \mathrm{DH}$$

$$\angle \mathrm{GDA} = \angle \mathrm{HDC} \qquad \therefore \quad \triangle \mathrm{GDA} \equiv \triangle \mathrm{HDC}$$

$$\therefore \quad \mathrm{GA} = \mathrm{HC} \qquad (1)$$

及 $\angle \mathrm{AGD} = \angle \mathrm{HCD}$

故ニ △EFG, △DFC ニ於テ

$$\angle \mathrm{EGF} = \angle \mathrm{FCD}$$

$\angle \mathrm{EFG} = \angle \mathrm{DFC}$ (對頂角) $\therefore$ $\angle \mathrm{GEF} = \angle \mathrm{FDC}$ (86.定理)

= 直角 (2)

又 △CGA ニ於テ CK = GK, CQ = AQ

$\therefore$ $\mathrm{QK} = \frac{1}{2}\mathrm{AG}$, 及 QK // AG

又 △HAC ニ於テモ同理ニヨリ $\mathrm{LQ} = \frac{1}{2}\mathrm{H}$, 及 LQ // HC

然ルニ (1) ニヨリ AG = HC $\therefore$ QK = LQ (3)

又 QK // AG, LQ // HC $\therefore$ ∠LQK = ∠ EC (第三節 題4)

= 直角〔(2) ヨリ〕

同理ニヨリテ QN = QM, (4)

∠MQN = 直角,

∠LQK, ∠MQN ハ共ニ直角ナルヲ以テ此二角ノ各ニ ∠KQN ヲ加フレバ ∠LQN = ∠KQM ナリ,

故ニ (3) (4) ニヨリ $\triangle \mathrm{LQN} \equiv \triangle \mathrm{KQM}$

$$\therefore \quad \mathrm{LN} = \mathrm{KM} \qquad (a)$$

及 $\angle \mathrm{TNQ} = \angle \mathrm{QMS}$

故ニ兩三角形 SPN, QSM ニ於テ

$$\angle \mathrm{PNS} = \angle \mathrm{QMS}$$

$$\angle \mathrm{PSN} = \angle \mathrm{QSM} \qquad \therefore \quad \angle \mathrm{SPN} = \mathrm{MQS}$$

= 直角

$$\therefore \quad \mathrm{KM} \perp \mathrm{LN} \qquad (b)$$

(a) (b) ハ本題ヲ証スルモノナリ.

第貳編

圓

定義

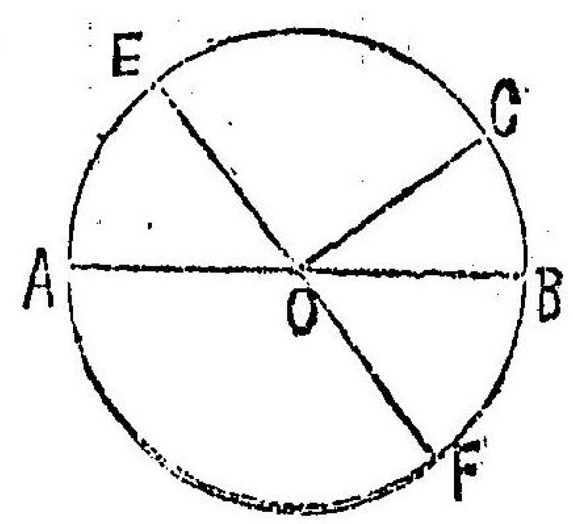
104. 圓(*Circle*) トハ圓周ト名ヅル壹曲線ニテ圍マレタル平面圖形ヲイフ.而シテ圓周(*Circumference*)トハ壹ノ閉圍セル曲線ニシテ其上ノ各點ハ孰レモ其内方ノ壹定點ヨリ等距ナルモノナリ.而シテ其壹定點ヲ圓ノ中心(*Centre*)トイフ.

半徑(*Radius*) トハ圓ノ中心ヨリ圓周上ノ諸點ニ到ル直線ヲイフ.

故ニ半徑ハ總ヘテ等長ナリ.

直徑(*Diametre*) トハ圓ノ中心ヲ過ギテ圓周ニ界セラルヽ直線ナリ.

故ニ直徑ハ半徑ノ貳倍ニシテ總ヘテノ直徑ハ等長ナリ.



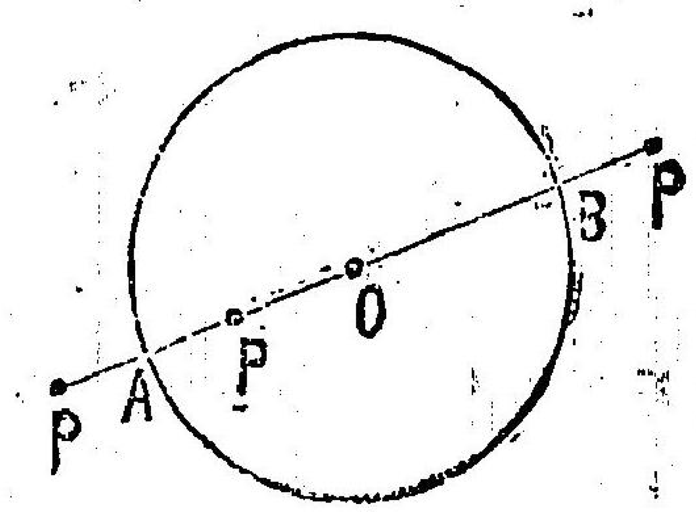
圖ニ於テハ曲線ACBFハ圓周ナリ.而シテ圓周ACBニテ圍マレタル圖形ハ圓ナリ,又Oハ中心,OC, OB等ハ半徑,ACB, EOF等ハ直徑ナリ,而シ半徑OC, OB等ハ等長ニシテ直徑AB, EF等モ亦等長ナリ.

第壹節—根原之性質

定理壹

105. 圓ノ中心ヨリ壹点マデノ距離ハ其点ガ圓内ニアルカ圓周上ニアルカ,或ハ圓外ニアルニ從ツテ,半徑ヨリ小,或ハ半徑ニ等シク,或ハ半徑ヨリ大ナリ.

Oヲ圓ノ中心トシ,Pヲ他ノ点トス.



然ルキハPガ圓内ニアルカ,圓周上ニアルカ,圓外ニアルカニ從ツテOPハ半徑ヨリ小ナリ或ハ半徑ニ等シ,或ハ半徑ヨリ大ナリ,

(証) O, Pヲ過クル直線ヲ引ク然ルキハO点トノ距離ガ半徑ニ等シキ点ハOP上ニ貳個アリ,而シテ此貳点ヲA, Bトス,故ニA, Bハ圓周上ニアリ.

又OP上ニ於テA, Bノ外ノ点ハ,Oトノ距離ガ半徑ニ等シカラザルヲ以テ圓周上ニアルヿナシ,

故ニ直線OPト圓周トハ貳点A, Bノミニ於テ交ル

而シテPガOトA,若クハOトBトノ間ニ在ルキ,即チPガ圓周内ニ在ルキハOPハOA若クハOBヨリ小ニシテ即半徑ヨリ小ナリ

又PガA若クハBト壹致スルキ,即チPガ圓周上ニアルキハOPハOA若クハOBニ等シク即チ半徑ニ等シ

又PガOA,若クハOBノ引張線上ニアルキ,即チPガ圓外ニアルキハOPハOA若クハOBヨリ大ニシテ即チ半徑ヨリ大ナリ.

定理貳(前定理之逆)

106. 壹点ト圓ノ中心トノ距離ガ半徑ヨリ小ナルカ,或ハ等シキカ或ハ大ナルカニ從ヒ,其点ハ,圓内ニ在ルカ,或ハ圓周上ニアルカ,或ハ圓外ニアリ.

壹点ヲPトシ,中心ヲOトシ半徑ヲrトス,

然ルキハ$OP<r$ナルカ,$OP=r$ナルカ,或ハ$OP>r$ナルカニ從ヒ,Pハ圓內,或ハ圓周上,或ハ圓外ニアリ.

(證) 前定理ニヨリ次ノ三定理ハ眞ナリ,

Pガ圓内アレバ,　$OP<r$ナリ.

Pガ圓周上ニアレバ　$OP=r$ナリ.

Pガ圓外ニアレバ　$OP>r$ナリ.

而シテ上ノ三定理ニ於テ,假設ハ起リ得ベキ總ベテノ場合ヲ羅シ,終決ハ相異ナル,

故ニ轉換法ニヨリ上ノ三定理ノ各ノ逆ハ眞ナリ.　(20)

即チ　$OP<r$ナレバ,　Pハ圓内ニアリ.

$OP=r$ナレバ,　Pハ圓周上ニアリ.

$OP>r$ナレバ,　Pハ圓外ニアリ.

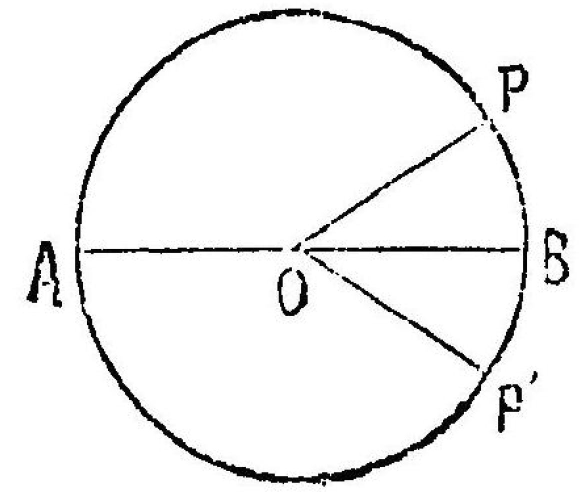
即チ證ヲ得タリ.

定理三

107. 圓ノ任意ノ直徑ハ其圓ヲ全等ノ貳部分ニ分ツ.

圓ノ中心ヲOトシ,任意ノ直徑ヲAOBトス,而シテAOBハ此圓ヲAPB, AP′Bナル貳部分ニ分ツトス

然ルトキハAPB, AP′Bハ全等形ナリ.



(證) APB上ニ任意ノ壹点Pヲ取リPOヲ結ブ,

又AP′Bナル部分ニ於テ半徑OP′ヲ引キ∠BOP′ヲ∠BOPニ等シカラシム,

是ニ於テ此圖形ヲABニ沿フテ折リAPBヲAP′Bノ上ニ置リ,

然ルトキハ∠BOP′=∠BOPナルヲ以テOPハOP′ノ上ニ落チ,

而シテOP′=OPナルヲ以テPハP′ノ上ニ落ツ.

同樣ニAPB上ノ各点ハ総ヘテAP′Bノ上ニ落ツ.

又此圖形ヲABニ沿フテ折リAP′BヲAPBノ上ニ置クトキハ前ト同理ニヨリ,AP′B上ノ各点ハAPBノ上ニ落ツルナリ.

故ニAPB, AP′Bハ全ク相重ナリテ即全等ナリ.

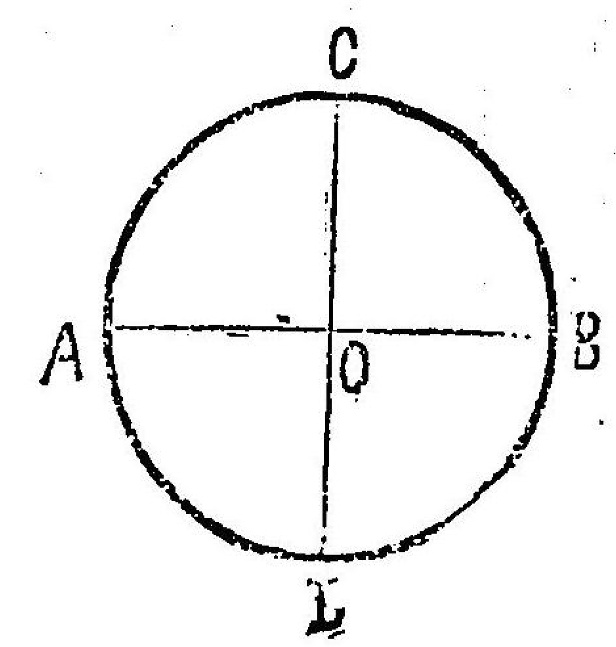
(注意) 甲ノ圖形上ノ各点ガ乙ノ圖形ノ上ニ落ツルトイフ丈ケニテハ未ダ甲ハ乙ト全等形ナリトイフヲ得ザルナリ.但シ甲ハ乙ノ壹部分ナルカモ計ラレザレバナリ故ニ更ニ乙ノ上ノ各点ハ甲ノ上ニ落ツルコヲ證シ始メテ甲ハ乙ト全等形ナルコ明瞭トナルナリ,

即チ前ノ證明ニ於テAPB, AP′Bガ全等ナルヲ證スル爲メニ先ヅAPB上ノ各点ハAP′Bノ上ニ落ツルヲ證シ,次ニAP′B上ノ各点ハAPB上ニ落ツルヲ證シタルガ如シ

108. 推論　直交スル貳個ノ直徑ハ其圓ヲ四等分ス.

直交スル直徑ヲAB, CDトス,

然ルトキハAB, CDハ圓ヲ四等分ス.



(證) ABニ沿フテ折リACBヲADBノ上ニ置ケバACBハADBノ上ニ落ツ

而シテ∠AOC=∠AOD=直角ナルヲ以テOCハODノ上ニ落ツ,故ニACハADノ上ニBCハBDノ上ニ落ツ.

同様ニ CD ニ沿フテ折リ CAD ヲ BBC ノ上ニ置ケバ AC ハ BC ノ上ニ, AD ハ BD ノ上ニ落ツ.

故ニ AB, CD ハ圓ヲ四等分ス.

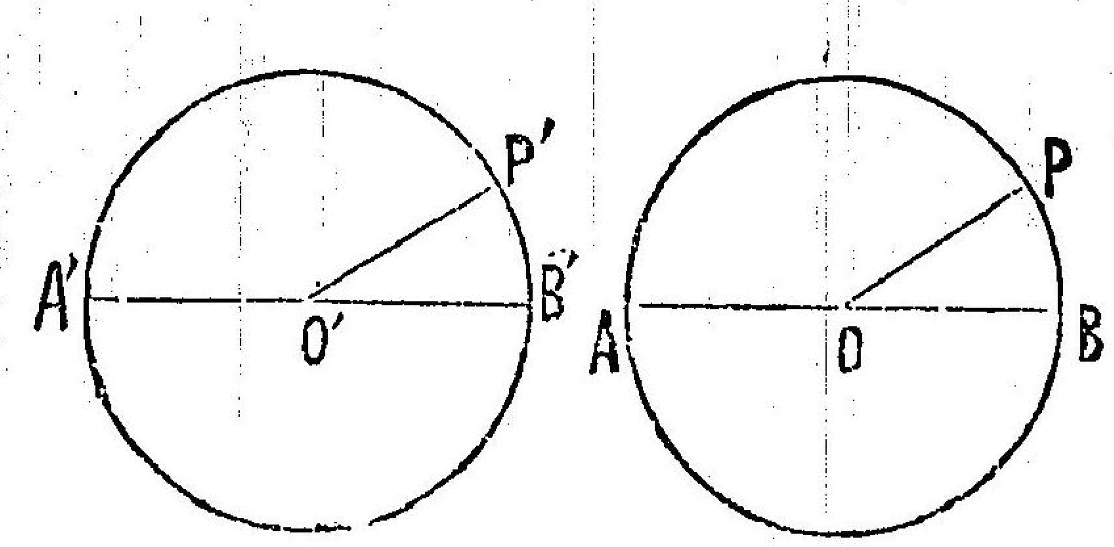
(註) 圓ノ二分ノ一ヲ半圓(*emi–circle*)トイヒ, 圓ノ四分ノ一ヲ四分圓(***Quadrant***)トイフ. 四分圓ハ象限トモイフ.

又圓周ノ半ヲ半圓周トイフ.

定理四

109. 兩圓ノ半徑ガ相等シケレバ其兩圓ハ全等形ナリ

兩圓 APB, A'P'B' ノ半徑ハ相等シトス,



然ルトキハ此兩圓ハ全等形ナリ.

(証) 兩圓 APB, A'P'B' ノ各中心ヲ O, O' トシ任意ノ直徑 AOB, A'O'B' ヲ引ク,

圓周 APB ノ上ニ任意ノ壹点 P ヲ取リ PO ヲ結ブ,

而ル后チ A'P'B' 圓ノ半徑 O'P' ヲ引キ B'O'P' 角ヲ BOP 角ト等シカラシム.

是ニ於テ APB 圓ヲ A'P'B' 圓ノ上ニ置キ, O ヲ O' ノ上ニ, OB ヲ O'B' ノ上ニ置ク,

然ルトキハ $\angle BOP = \angle B'O'P'$ ナルヲ以テ OP ハ O'P' ノ上ニ落チ而シテ $OP = O'P'$ ナルヲ以テ P ハ P' ノ上ニ落ツ

同様ニ APB 圓周上ノ点ハ孰レモ A'P'B' 圓周上ニ落ツ.

又 A'P'B' 圓ヲ APB ノ上ニ置クトキハ前ト同理ニヨリ A'P'B' 圓周上ノ点ハ APB 圓周上ニ落ツ.

故ニ兩圓 APB, A'P'B' ハ全等ナリ.

(注意) 前ノ証明ト同法ニヨリテ A'P'B' 圓ノ任意ノ直徑(直徑 A'B' ノ外ノ)ノ上ニ AB ヲ置キ以テ APB 圓ヲ A'P'B' 圓ノ上ニ置クトキハ此兩圓ハ全ク相合ス

故ニ APB 圓ヲ A'P'B' ノ上ニ置キ, O ヲ O' ト合致セシメ然ル后チ O ヲ中心トシテ APB 圓ヲ旋轉セシムルトキハ APB 圓ハ恒ニ A'P'B' 圓ト相合ス.

110. 推論壹 共心圓周ハ相交ラズ.

但シ貳眠若クハ貳個以上ノ不等ノ圓ガ同シ中心ヲ有スルトキ, 其諸圓ヲ共心圓トイフ

(証) 其共心圓ガ相交ルト假定シ, 其交点ヲ A トス.

共通ノ中心ヲ O トシ OA ヲ結合スルトキハ OA ハ其諸圓ノ半徑トナリ, 從ツテ其諸圓ハ相等シ,

是レ不合理ナリ, 但共心圓ナルモノハ原來不等ノモノナレバナリ. 故ニ其諸圓周ハ交ルコトナシ.

111. 推論貳 相交ル諸圓ハ共心圓ナラズ.

(証) 共心圓周ハ相交ルコトナシ. (前章)

故ニ此對定理ハ眞ニシテ即チ次ノ如シ.

相交ル諸圓ハ共心圓ナラズ.

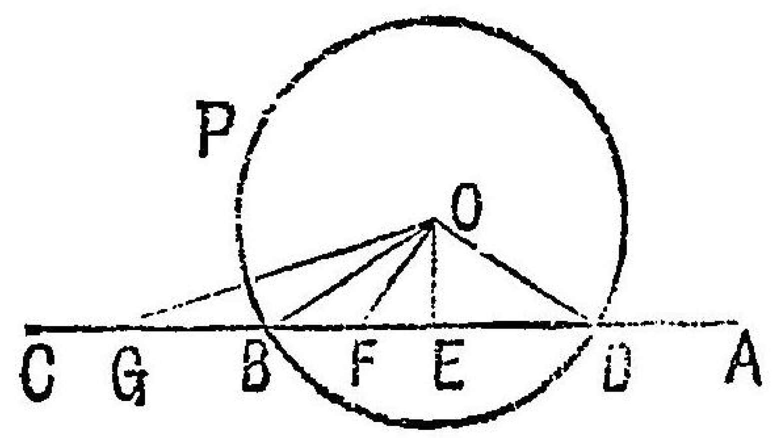
即チ証ヲ得タリ.

定理五

112. 圓周上ノ貳点ヲ過グル直線ハ再ビ其圓周ニ交ラズ.

圓周上ノ二点ヲ B, D トス,

然ルトキハB, Dヲ過グル直線CAハB, Dノ外ノ点ニ於テ其圓周ニ交ルコトナシ.



(證) 圓ノ中心ヲO, BDノ中央点ヲEトシOE, OB ODヲ結ブ.

△ODE, △OBEニ於テ

OD = OB,

DE = BE, (作法)

OEハ共通邊 ∴ △ODE ≡ △OBE

∴ ∠OED = ∠OEB = 直角 (27. 定義)

∴ OE ⊥ DB (28 定義)

∴ OE < OB. (67. 定理)

故ニEハ圓内ニ在リ. (106. 定理)

又CA上ニ於テBトEトノ間ニ任意ノ点Fヲ取リOFヲ結ブトキハ

∠FOE < ∠BOE,

∴ OF < OB (68. 定理)

故ニFハ圓内ノ点ニシテ即チ圓周上ニアルコトナシ. (106. 定理)

同理ニヨリCA上ニ於テEトDトノ間ノ点ハ圓内ノ点ニシテ即チ圓周上ニアルコトナシ.

又DBノ引張線上ニ於テ任意ノ点Gヲ取リOGヲ結べバ

∠GOE > ∠BOE,

∴ OG > OB (68. 定理)

故ニGハ圓外ノ点ナリ. (105. 定理)

故ニDBノ引張線上ノ諸點ハ圓外ノ点ニシテ即チ圓周上ニアルコトナシ.

故ニCA上ニ於テD, Bノ外ノ点ハ総テ圓周上ニアルコトナシ

故ニCAハ二点B, Dニ於テ圓周ニ交ルノミニシテ他ノ点ニ於テ再ビ圓周ニ交ルコトナシ.

(注意) 本題ヲ換言スレバ次ノ如シ.

直線ト圓周トノ交点ハ貳個ヨリ多キコトナシ.

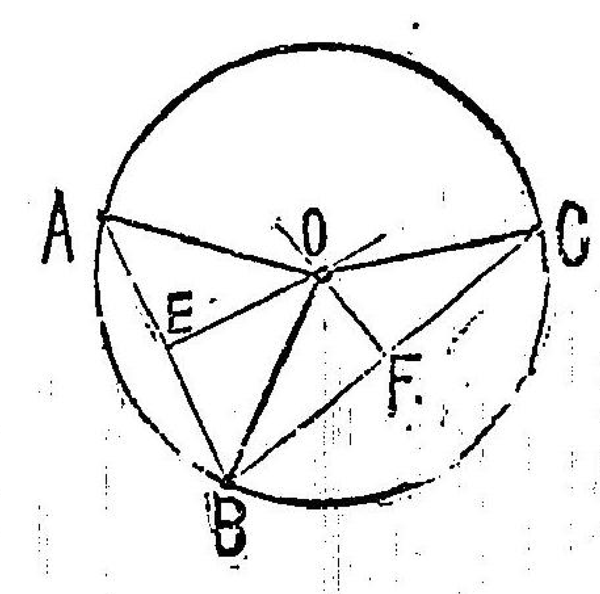
定理六

113. 壹直線上ニアラザル三点ヲ過グル圓周アリ, 而シテ唯壹個ノミナリ.

壹直線上ニアラザル三点ヲA, B, Cトス,

然ルトキハA, B, Cヲ過グル圓周アリ

而シテ唯壹個ノミナリ.



(證) AB, BCヲ結ブ

AB, BCヲ直角ニ貳等分スル直線ヲ順次ニOE, OFトス, 然ルトキハOE, OFハ相交ル, (第三節例題3)

而シテ其交点ヲOトシ, OA, OB, OCヲ結ブ

今OEハABヲ直角ニ貳等分スル直線ナリ, 故ニOEハA, Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ, (101. 定理)

∴ OA = OB,

同理ニヨリ OB = OC,

∴ OA = OB = OC

故ニOヲ中心トシOAヲ半径トセル圓周ハB, Cヲ過グ,

即チA, B, Cヲ過グル圓周アリ.

又OEハA, Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ナルヲ以テOEノ外ノ点ハ孰レモA, Bヨリ等距ナラズ,

又同理ニヨリOFノ外ノ点ハB, Cヨリ等距ナラズ,

故ニOノ外ノ點ハA, B, Cヨリ等距ナラズ,

故ニOノ外ノ任意ノ点ヲ中心トシ, 且ツ其点トAトノ距離ヲ半径トスル圓周ハB, Cヲ過グルコトナシ

故ニ A, B, C ヲ過グル圓周ハ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓周ノミナリ.

114. 推論 兩圓周ガ共通ノ三点ヲ有スル𪜈ハ其兩圓ハ全ク相合ス.

(證) 若シ其兩圓ガ全ク相合セザル𪜈ハ,壹直線上ニアラザル三点ヲ過グル相異ノ圓ガ貳個アルヿトナリテ不合理ナリ.

故ニ其兩圓ハ相合セザルベカラズ.

例　題

1. 壹定点ヨリ定距離ニアル点ノ軌跡ハ其定点ヲ中心トシ其定距離ヲ半徑トスル圓周ナリ.

定点ヲ O トシ定距離ヲ l トス,

然ル𪜈ハ O 點トノ距離ガ l ニ等シキ点ノ軌跡ハ, O ヲ中心トシ l ヲ半徑トセル圓周ナリ.

(證) **105.** 定理ニヨリ次ノ二件ハ眞ナリ,

(第一) 其圓周上ノ諸点ヨリ O ニ到ル距離ハ l ニ等シ,

[是レ **100.** ノ (1) ニ當ル]

(第二) 其圓周上ニアラザル諸点ヨリ O ニ到ル距離ハ l ニ等シカラズ

[是レ **100.** ノ (2) ニ當ル]

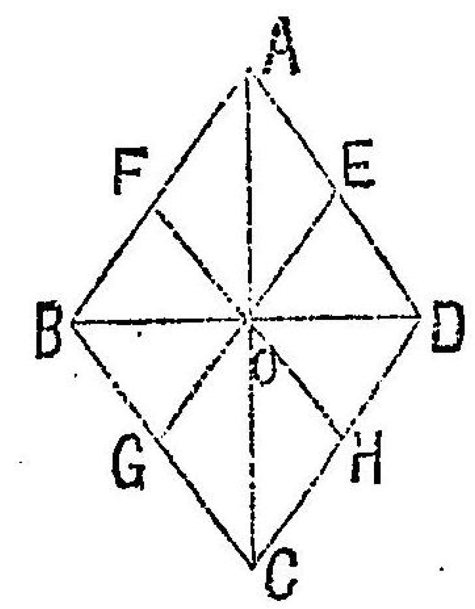
上ノ第壹,第貳ニヨリ其圓周ハ, O 点トノ距離ガ l ニ等シキ点ノ軌跡ナリ.

2. 菱形ノ各邊ノ中央点ハ其菱形ノ對角線ノ交点ヲ中心トセル圓周上ニアリ.

菱形ヲ $ABCD$ トシ,各邊ノ中央点ヲ E, F, G, H トシ,又對角線 AC, BD ノ交点ヲ O トス.

然ル𪜈ハ E, F, G, H ハ O ヲ中心トスル圓周上ニアリ

(證) EO, FO, GO, HO ヲ結ブ,



菱形 $ABCD$ ハ平行四邊形ト考フルヿヲ得, **(79 定義)**

故ニ O ハ AC, 及ビ BD ノ中央点ナリ, **(90 定理)**

故ニ $\triangle BDC$ ニ於テ

$$DO = BO,$$

$$DH = HC, \quad \therefore \quad OH = \tfrac{1}{2}BC$$

同理ニヨリ $\quad OG = \tfrac{1}{2}DC$

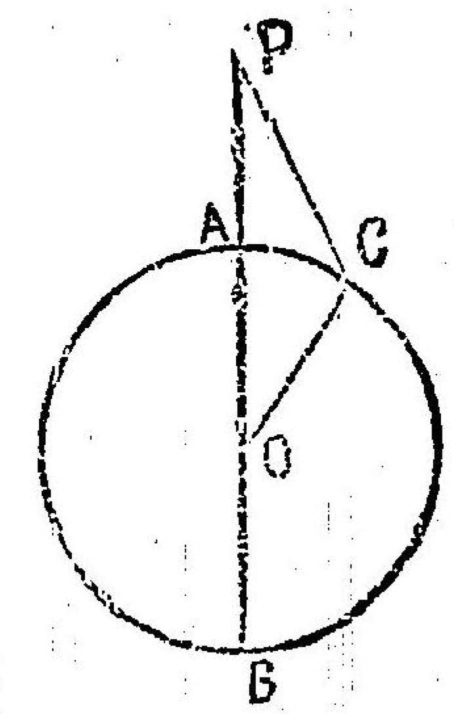
然ルニ $BC = CD \quad \therefore \quad OH = OG$,

同理ニヨリ $\quad OG = OF$ 及 $OF = OE$

$$\therefore \quad OH = OG = OF = OE$$

故ニ E, F, G, H ハ O ヲ中心トセル圓周上ニアリ. **(106. 定理)**

***3.** 圓ノ平面上ノ壹点 P ト中心 O トヲ過グル直線ガ其圓周ニ交ル点ヲ A, B トシ $PA < PB$ トス; 然ル𪜈ハ P ヨリ圓周ニ到ル諸直線ノ中ニテ PA ハ最短ニシテ PB ハ最長ナリ.



(證) P ヨリ圓周ニマデ任意ノ直線 PC ヲ引キ OC ヲ結ブ. $\triangle POC$ ニ於テ

$$OP - OC < PC \quad \textbf{(65 推論)}$$

然ルニ $\quad OC = OA$

$$\therefore \quad OP - OA < PC \quad \therefore \quad PA < PC,$$

故ニ PA ハ P ヨリ圓周ニ到ル諸直線中ノ最短ナルモノナリ.

又 $\triangle POC$ ニ於テ $PO + OC > PC$ **(64. 定理)**

然ルニ $OC = OB \quad \therefore \quad PO + OB > PC \quad \therefore \quad PB > PC$

故ニ PB ハ P ヨリ圓周ニ到ル諸直線中ノ最長ナルモノナリ.

(注意) 本解ニ於テハ P ハ円周外ニ在リトシテ之レヲ證セリ. P ガ円周内ニ在ル𪜈モ同様ニ證明シ得,故ニ之レヲ省略セリ

(註) 壹点ヨリ壹円周ニ到ル最短線ヲ称シテ其点ト其円周トノ距離トイフ

第貳節—弧弦及中心角

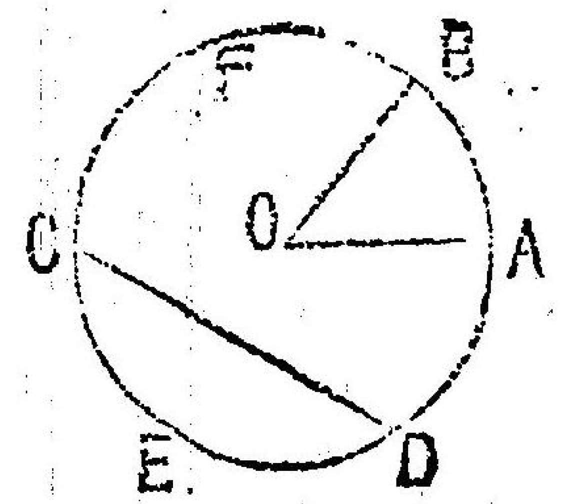
定義

115. 弧(*Arc*) トハ円周ノ壹部分ヲイフ.

兩弧ノ和ガ全円周ニ等シキ片,其二弧ヲ互ニ相屬弧(*Conjugate-Arc*)ナリトイヒ,大ナル弧ヲ優弧,小ナル弧ヲ劣弧トイフ,

單ニ弧ト呼ビテ特ニ其優弧ナルカ劣弧ナルカヲ明示セザル片ハ劣弧ヲ指示スルモノト知ルベシ.

例ヘバ圖ニ於テ円周ノ壹部CED, CFB等ハ弧ナリ,



而シテCED, CFDナル貳弧 互ニ相屬弧ナリトイフ,即チ弧CEDハ弧CFDノ相屬弧ニシテ,弧CFDハ弧CEDノ相屬弧ナリ,而シテ小弧CEDヲ劣弧,大弧CFDヲ優弧トイフ.

單ニCD弧トイフ片ハ劣弧CEDヲ指示スルモノト知ルベシ.

弦(*Chord*) トハ弧ノ兩端ヲ結合スル直線ナリ.

而シテ其弧ト弦トハ互ニ相對ストイフ

壹ツノ弦ニ對スル弧ハ貳個アリ,而シテ此兩形ハ互ニ相屬弧ヲナス.

例ヘバ上ノ圖ニ於テ弧CEDノ兩端ヲ結合スル直線CDハ弦ナリ.

而シテ弧CEDト弦CDトハ互ニ相對ストイフ,即チ弧CEDハ弦CDニ對シ,又弦CDハ弧 EDニ對ストイフ.

弦CDニ對スル弧ハ貳個アリ即チCE ,CFD弧是レナリ

中心角(*Angle at the Centre*) トハ二個ノ半徑ガナス角ナリ

例ヘバAOB角ハ中心角ナリ.

扇形(*Sector*) トハ弧ト其弧ノ兩端ヲ過グル半徑トニテ圍マレタル圖形ナリ.而シテ其弧ニ對スル中心角ヲ扇形ノ角トイフ.

例ヘバ前ノ圖ニ於テ兩半徑OA, OBト劣弧ABトニテ圍メル圖形ハ扇形ナリ,而シテ劣角AOBハ此扇形ノ角ナリ.

又兩半徑OA, OBト優弧AEBトニテナス圖形モ亦扇形ナリ.

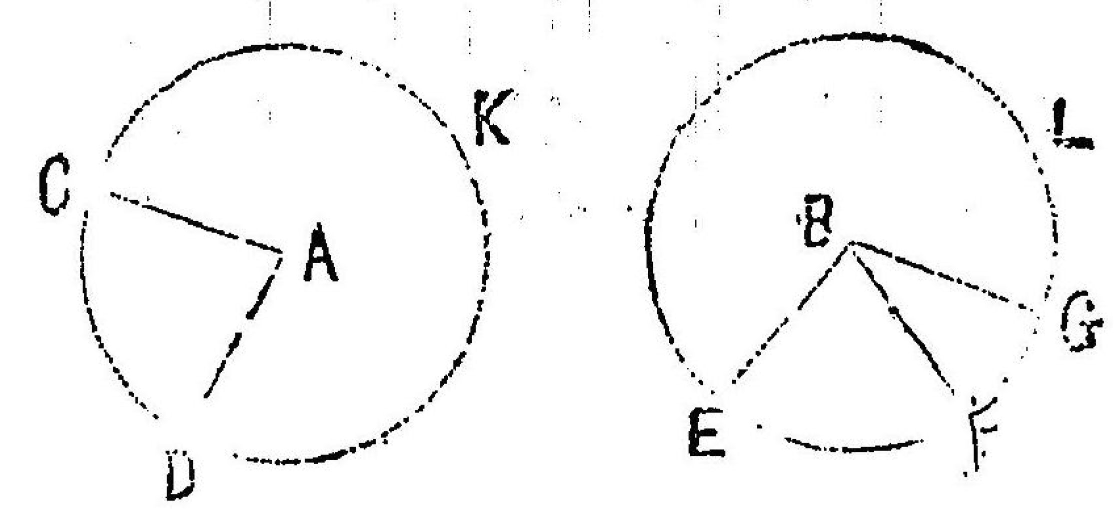
弓形(*Segment*) トハ壹ツノ弦ト其弦ニ對スル弧トニテ圍メル圖形ナリ.

前ノ圖ニ於テ弦CDトCE弧トニテ圍メル圖形ハ弓形ニシテ又弦CDト弧CBDトニテ成ス圖形モ亦弓形ナリ.

定理七

16. 同円或ハ 円ニ於テ(但シ同円トハ壹個ノ同ジ円ノコトニシテ,等円トハ貳個以上ノ等シキ円ノコトナリ)中心角ガ相等シキ片ハ其夾弧ハ相等シク又中心角ガ不等ナル片ハ大角ノ夾弧ハ小角ノ夾弧ヨリ大ナリ.

等円ヲCDK, EFLトシ其中心ヲ順次ニA及ビBトス.



然ル片ハ(第一) $\angle EBF = \angle CAD$ ナレバ弧EF＝弧CDナリ.

(第二) $\angle EBG > \angle CAD$ ナレバ弧EGハ弧CDヨリ大ナリ.

（証）（第一）A ヲ B ノ上ニ，AC ヲ BE ノ上ニ置キ以テ CDK 円ヲ EFL 円ノ上ニ置クトキハ C ハ E ト壹致シ且ツ此両円ハ全ク相合ス.

而シテ ∠CAD = ∠EBF ナルヲ以テ AD ハ BF ノ上ニ落チ従ツテ D ハ F ノ上ニ落ツ，

故ニ CD 弧ハ全ク EF 弧ト壹致シ即チ相等シ.

（第貳）前ノ如ク A ヲ B ノ上ニ，AC ヲ BE ノ上ニ置キ以テ CDK 円ヲ EFL 円ノ上ニ置クトキハ C ハ E ノ上ニ落チ，CDK 円ハ EFL 円ト全ク相合ス. 而シテ AD ガ落チシ位置ヲ BF トノ，

今 ∠EBG > ∠CAD ナルヲ以テ BF ハ BE ト LG トノ間ニ在リ，従ツテ F ハ E ト G トノ間ニ在リ，

故ニ弧 EF ハ弧 EG ヨリ小ナリ，

然ルニ弧 EF ハ弧 CD ニ等シ，

故ニ弧 CD ハ弧 EG ヨリ小ナリ，

117. 推論　同円或ハ等円ニ於テ等角ヲ有ツ扇形ハ相等シク又不等ノ角ヲ有ツ扇形ニ於テハ大角ヲ有ツ扇形ハ他ノ扇形ヨリ大ナリ.

（証）前ノ証明ト全ク同ジ故ニ省畧ス.

（注意）等円ニ就テ証明シタレ𪜈同円ノトキモ同様ニ証明シ得ルナリ故ニ之レ省畧セリ. 以下ノ諸定理ニ於テモ之レニ倣フ.

定　理　八（前定理之逆）

118.　同円或ハ等円ニ於テ二弧相等シキトキハ等弧ニ對スル中心角ハ相等シク，貳弧不等ナルトキハ大弧ニ對スル中心角ハ小弧ニ對スル中心角ヨリ大ナリ.

同円或ハ等円ニ於テ貳弧ヲ a, a' トシ，其弧ニ對スル中心角ヲ順次ニ A, A′ トス然ルトキハ

$a = a'$ ナレバ　A = A′ ナリ.

$a > a'$ ナレバ　A > A′ ナリ.

（証）前ノ定理ニヨリ次ノ三定理ハ眞ナリ

A = A′ ナレバ　$a = a'$ ナリ，　(a)

A > A′ ナレバ　$a > a'$ ナリ，　(b)

A < A′ ナレバ　$a < a'$ ナリ

而シテ上ノ三定理ニ於テ假設ハ起リ得ベキ総ヘテノ場合ヲ盡シ，終決ハ相異ナル，

故　轉換法ニヨリ上ノ三定理ノ各ノ逆ハ眞ナリ　20.）

故ニ　$a = a'$ ナレバ　A = A′ ナリ.　〔(a) ノ逆〕

$a > a'$ ナレバ　A > A′ ナリ.　〔(b) ノ逆〕

是レ本定理ヲ証スルモノナリ.

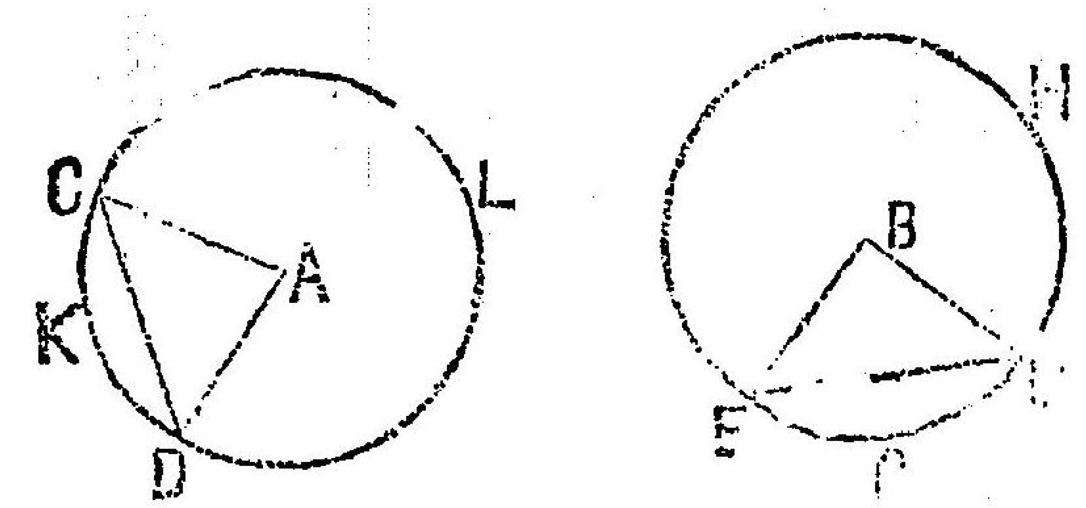
119. 推論　同円或ハ等円ニ於テ等シキ扇形ハ等シキ角ヲ有シ，又不等ノ扇形ニ於テハ大ナルモノガ大ナル角ヲ有ス.

（証）117. 推論ヨリ轉換法ニヨリテ容易ニ証明シ得.

定　理　九

120.　同円或ハ等円ニ於テ貳弧若シ等シキトキハ其貳弧ニ對スル弦ハ相等シク，又貳劣弧若シ不等ナルトキハ大弧ニ對スル弦ハ小弧ニ對スル弦ヨリ大ナリ.

貳個ノ等円ヲ CLD, EHF トス



然ルトキハ（第壹）弧 CKD = 弧 EGF ナレバ弦 CD = 弦 EF ナリ.

（第二）劣弧 CKD > 劣弧 EGF ナレバ弦 CD > 弦 EF ナリ.

(証) 等圓 CLD, EHF ノ中心ヲ順次ニ A, B トシ AC, AD, BE, BF ヲ結ブ

(第一) 弧 CKD ＝ 弧 EGF $\therefore$ $\angle CAD = \angle EBF$, (118 定理)
故ニ両三角形 CAD, BEF ニ於テ

$$CA = BE$$
$$AD = BF$$
$$\angle CAD = \angle EBF \quad \therefore \quad \triangle CAD \equiv \triangle BEF$$
$$\therefore \quad CD = EF$$

即チ証ヲ得タリ。

(第二) 劣弧 CKD $>$ 劣弧 EGF $\therefore$ $\angle CAD > \angle EBF$ (118 定理)
故ニ両三角形 CAD, BEF ニ於テ

$$CA = BE$$
$$AD = BF$$
$$\angle CAD > \angle EBF \quad \therefore \quad CD > EF \qquad (69\ 定理)$$

即チ証ヲ得タリ。

121. 推論 貳個ノ優弧若シ不等ナルトキハ大弧ニ對スル弦ハ小弧ニ對スル弦ヨリ小ナリ.

(証) 前章定理ヨリ容易ニ推究シ得ベキニ付省畧ス.

定理拾

122. 同圓或ハ等圓ニ於テ貳弦若シ相等シキ片ハ之レニ對スル劣弧ハ相等シク,又貳弦若シ不等ナル片ハ大弦ニ對スル劣弧ハ小弦ニ對スル劣弧ヨリ大ナリ.

同圓或ハ等圓ニ於テ貳個ノ弦ヲ C, C′ トシ之レニ對スル劣弧ヲ順次ニ a, a' トス, 然ル片ハ

(第一) $C = C'$ ナレバ $a = a'$ ナリ

(第二) $C > C'$ ナレバ $a > a'$ ナリ

(証) 前章ノ定理ニヨリ次ノ三定理ハ眞ナリ,

$$a = a' \text{ ナレバ } C = C' \text{ ナリ,} \qquad (a)$$
$$a > a' \text{ ナレバ } C > C' \text{ ナリ,} \qquad (b)$$
$$a < a' \text{ ナレバ } C < C' \text{ ナリ.}$$

而シテ上ノ三定理ニ於テ假設ハ起リ得ベキ總ヘテノ場合ヲ盡シ,終決ハ相異ル, 故ニ轉換法ニヨリテ上ノ三定理ノ各ノ逆ハ眞ナリ. (20)

$$\therefore \quad C = C' \text{ ナレバ } a = a' \text{ ナリ,} \qquad [(a) \text{ ノ逆}]$$
$$C > C' \text{ ナレバ } a > a' \text{ ナリ.} \qquad [(b) \text{ ノ逆}]$$

即チ証ヲ得タリ

123. 推論 貳個ノ弦不等ナル片ハ大弦ニ對スル優弧ハ小弦ニ對スル優弧ヨリ小ナリ.

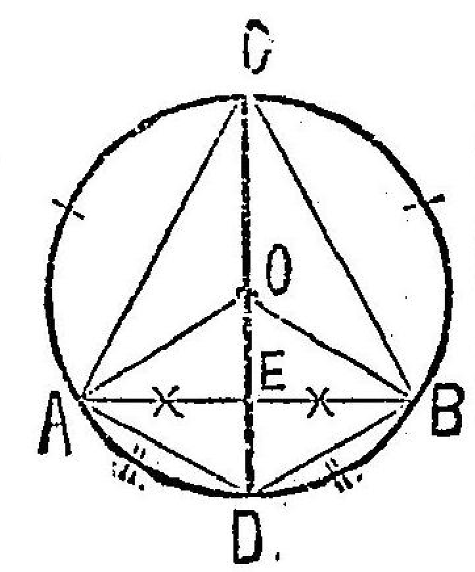
(証) 省略ス.

定理拾壹

124. 壹個ノ圓ニ於テ弦ノ中央点,及ビ此弦ニ對スル貳弧ノ中央点,併ヒニ其圓ノ中心ハ其弦ニ直立ナル壹直線上ニアリ.

O ヲ中心トスル圓ニ於テ弦 AB ノ中央点ヲ E トシ, AB 弦ニ對スル貳弧ノ中央点ヲ C, D トス,

然ル片ハ E, O, C, D ノ四点ハ AB ニ直立セル壹直線ノ上ニアリ.



(証) CA, CB, OA, OB, AD, BD ヲ連結ス.

弧 AC ＝ 弧 CB (作法) $\therefore$ 弦 AC ＝ 弦 CB

故ニ C ハ貳点 A, B ヨリ等距ナリ.

同理ニヨリ D モ亦 A, B ヨリ等距ナリ,

而シテ O 及ビ E ハ亦 A B ヨリ等距ナリ,

故ニ四点 C, O, E, D ハ孰レモ貳点 A, B ヨリ等距ナリ

故ニ四点C, O, E, DハA, Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ノ上ニアリ,
然ルニA, Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ハ直線ABヲ直角ニ貳分スル直線ナリ,

故ニ四点C, O, E, DハABニ直立ナル直線上ニアリ

125. 推論壹 次ニ掲グル四個ノ点ノ中ノ任意ノ貳個ヲ過グル直線ハ他ノ貳個ヲ過ギ且ツ圓ノ定弦ニ直立ス,

其定弦ノ中央点, 其定弦ニ對スル貳弧ノ各中央点, 中心,

定弦ヲABトシ, ABノ中央点ヲE, AB弦ニ對スル貳弦ノ各中央点ヲC, Dトシ, 中心ヲOトス(前章ノ圖ヲ見ヨ)

然ル片ハC, O, E, Dノ中ノ任意ノ貳点ヲ過グル直線ハ他ノ貳点ヲ過ギ, 且ツABニ直立ス.

(証) 四点C, O, E, DハABニ直立ナル壹直線(此直線ヲlト命ス)ノ上ニアリ (124. 定理)
然ルニ貳点ヲ過グル直線ハ唯壹個ノミナルヲ以テC, O, E, Dノ中ノ任意ノ貳点ヲ過グル直線ハlト合シ, 從ツテ他ノ貳点ヲ過ギ且ツABニ直立ス.

126. 推論貳 次ニ掲グル四点ノ中ノ任意ノ壹個ヲ過ギ且ツ圓ノ定弦ニ直立スル直線ハ他ノ三点ヲ過グ

其定弦ノ中央点, 其弦ニ對スル貳弧ノ各中央点 中心,

定弦ヲABトシ, ABノ中央点ヲE, AB弦ニ對スル貳弧ノ各中央点ヲC Dトシ, 中心ヲOトス,

然ル片ハC, O, E, Dノ中ノ任意ノ壹点ヲ過ギテABニ直立ナル直線ハ他ノ三点ヲ過グ.(124.ノ圖)

(証) C, O, E, Dナル四点ハABニ直立ナル直線(之ヲlト命ス)ノ上ニアリ (124. 定理)
然ルニ壹点ヲ過ギテ壹直線ニ直立ナル直線ハ唯壹個ノミナリ.
故ニC, O, E, Dノ中ノ壹個ヲ過ギテABニ直立スル直線ハlト合シ, 從ツテ他ノ三点ヲ過グ

定理拾貳

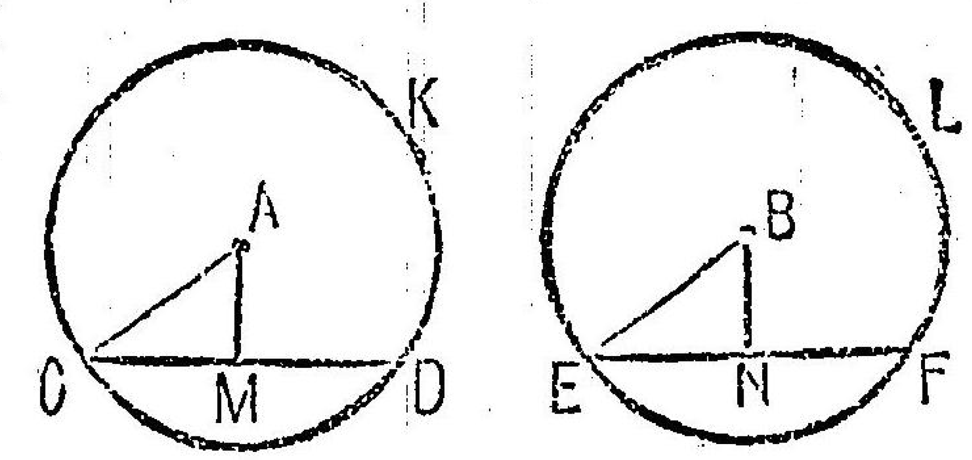
127. 同圓或ハ等圓ニ於テ等弦ハ中心ヨリ等距離ナリ, 又不等ノ貳弦ニ於テハ大弦ハ小弦ヨリ中心ニ接近ス.

等圓ヲCDK, EFLトシ其中心ヲ順次ニA, Bトス
又考フル所ノ貳弦ヲCD, EFトシAヨリCDニ到ル距離(即垂線)ヲAMトシ, BヨリEFニ到ル距離ヲBNトス, 然ル片ハ

(第壹) 弦CD＝弦EFナレバ AM＝BNナリ,

(第貳) 弦CD＞弦EFナレバ AM＜BNナリ.

(証) (第壹) AC, BEヲ結ブ,



今 AM ⊥ CD (假設) ∴ $CM=\frac{1}{2}CD$, (126. 推論)

同理ニヨリテ $EN=\frac{1}{2}EF$,

然ルニ $CD=EF$, (假設)

∴ $CM=EN$

故ニ両三角形AMC, BENニ於テ

$AC=BE$

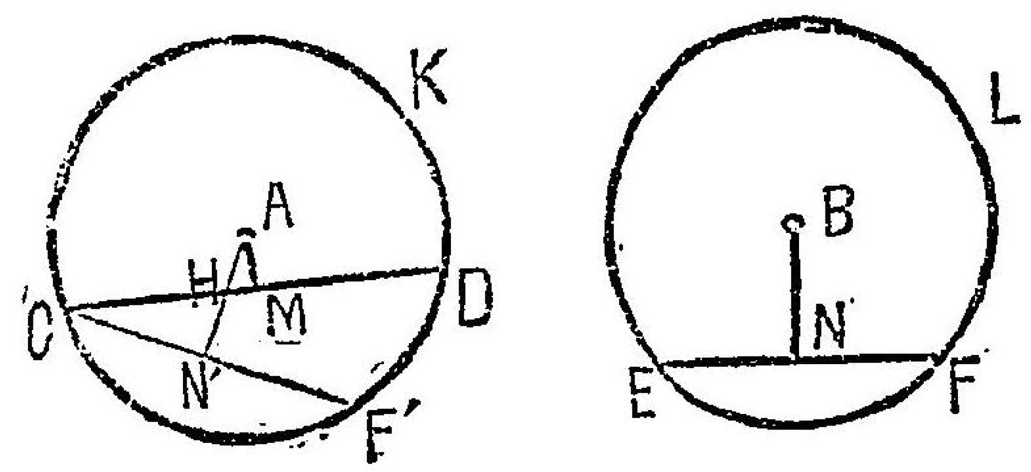
$CM=EN$

$\angle AMC=\angle BNE=$直角, ∴ $\triangle AMC\equiv\triangle BEN$

∴ $AM=BN$

即チ証ヲ得タリ.

（第二） EFL 圓ヲ CDK 圓ノ上ニ載セ, B ヲ A ノ上ニ, E ヲ C ノ上ニ置キ, 且ツ劣弧 EF ヲ劣弧 CD ニ沿フテ置ク,



而シテ EF ガ落ツル位置ヲ CF' トシ, BN ガ落ツル位置ヲ AN' トス,

今 弦 EF $<$ 弦 CD（假設） $\therefore$ 劣弧 EF $<$ 劣弧 CD（122. 定理）

即 劣弧 CF' $<$ 劣弧 CD

故ニ F' ハ劣弧 CD ノ上ニアリ,

故ニ弦 CF' ト中心 A トハ弦 CD ノ兩側ニアリ,

故ニ AN' ト CD トノ交点ヲ H トスレバ H ハ A ト N' トノ間ニアリ

$\therefore$ $AH < AN'$

然ルニ $AM \perp CD$ $\therefore$ $AH > AM$ （67. 定理）

$\therefore$ $AN' > AM$

即 $BN > AM$

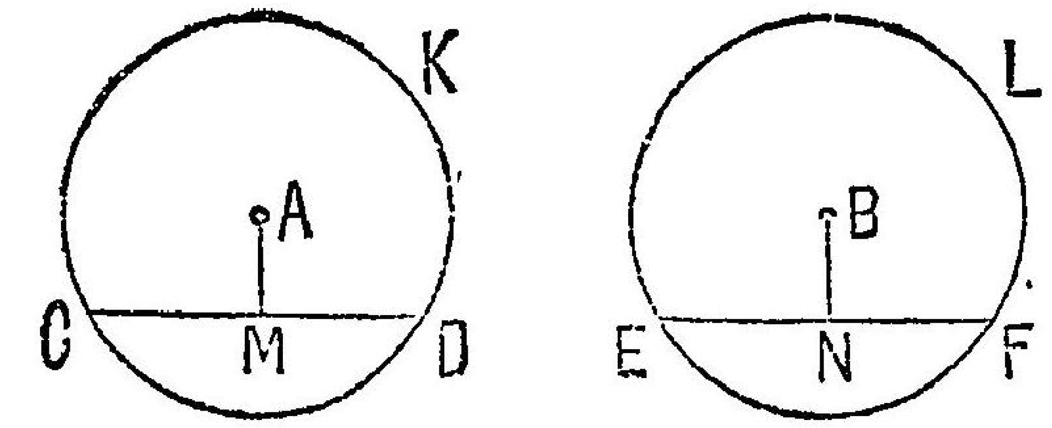
即チ証ヲ得タリ.

定理拾三

128. 同圓或ハ等圓ニ於テ中心ヨリ等距ノ貳弦ハ等長ナリ, 又中心ヨリ不等距ノ貳弦ニ於テハ中心ニ近キモノハ他ノ弦ヨリ大ナリ.

等圓ヲ CDK, EFL トシ其中心ヲ順次ニ A, B トス,

而シテ考フル所ノ貳弦ヲ CD, EF トシ, A ヨリ CD ニ到ル距離ヲ AM トシ, B ヨリ EF ニ到ル距離ヲ BN トス



然ルトキハ（第一） $AM = BN$ ナレバ 弦 CD $=$ 弦 EF ナリ,

（第二） $AM > BN$ ナレバ 弦 CD $<$ 弦 EF ナリ.

（証） 前章ノ定理ニヨレバ次ノ三定理ハ眞ナリ,

弦 CD $=$ 弦 EF ナレバ, $AM = BN$ ナリ, (a)

弦 CD $<$ 弦 EF ナレバ, $AM > BN$ ナリ, (b)

弦 CD $>$ 弦 EF ナレバ, $AM < BN$ ナリ.

而シテ上ノ三定理ニ於テ假設ハ起リ得ベキ總ベテノ場合ヲ盡シ終決ハ相異ル,

故ニ轉換法ニヨリ上ノ三定理ノ各ノ逆ハ眞ナリ, (20)

故ニ $AM = BN$ ナレバ弦 CD $=$ 弦 EF ナリ, [是レ (a) ノ逆]

$AM > BN$ ナレバ弦 CD $<$ 弦 EF ナリ. [是レ (b) ノ逆]

即チ証ヲ得タリ.

129. 推論壹 圓ノ直徑ハ總ヘテノ弦ヨリ大ナリ.

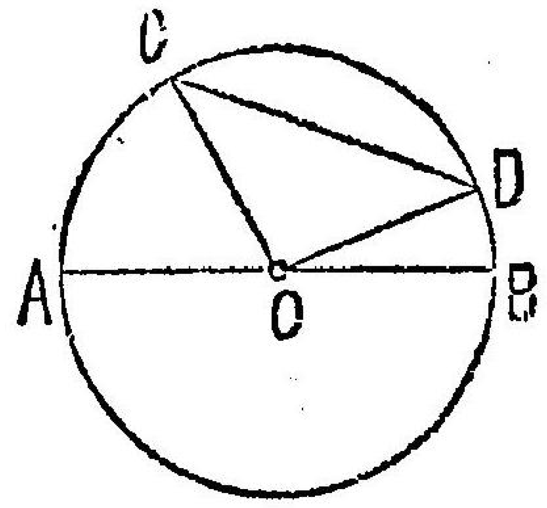
（証） 直徑ト中心トノ距離ハ, 弦ト中心トノ距離ヨリ短シ, 但シ直徑ト中心トノ距離ハ零ナレバナリ.

故ニ直徑ハ弦ヨリ長シ,

〔別証〕ヲ次ニ示ス

O ヲ中心トシ, AOB ヲ直徑トシ, 任意ノ弦ヲ CD トシ OC, OD ヲ結ブ

然ルキハ △OCD ニ於テ



$$OC + OD > CD$$ （64. 定理）

然ルニ　$OC = OA,\quad OD = OB$

$\therefore\quad AO + OB > CD$

$\therefore\quad AB > CD$

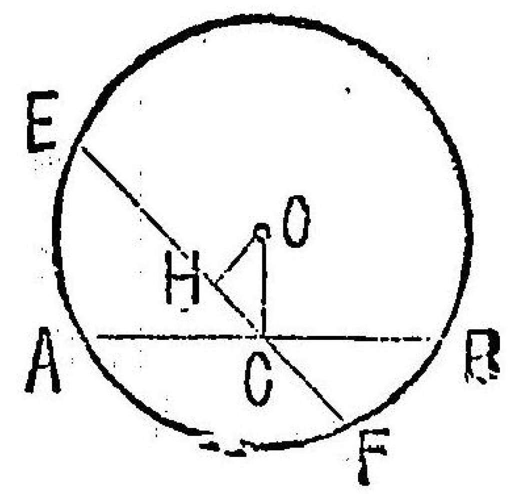
即チ證ヲ得タリ

130. 推論貳　圓內ノ壹定点ヲ過グル諸弦ノ中ニテ，其定点ト中心トノ連結線ニ直立スルモノハ最モ短シ。

圓內ノ壹定点ヲ C トシ，中心ヲ O トス，

而シテ C ニ於テ OC ニ直立スル弦ヲ AB トス

然ルキハ C 点ヲ過グル諸弦ノ中ニテ AB 弦ハ最モ短シ。



（證）C ヲ過キテ弦 EF ヲ引ク，

今 OC ハ AB ニ直立ス．

$\therefore\quad \angle OCA =$ 直角，

$\therefore\quad \angle OCE \neq$ 直角

故ニ OC ハ EF ニ對シテ斜線ナリ，

故ニ今 O ヨリ EF ニ垂線 OH ヲ引クトキハ

$$OH < OC$$ （67. 定理）

即チ中心 O ヨリ EE ニ到ル距離（即チ OH）ハ，O ヨリ AB ニ到ル距離 即チ OC）ヨリ小ナリ，

故ニ AB ハ EF ヨリ短シ。

仝理ニヨリ，AB ハ C ヲ過グル孰レノ弦ヨリモ短シ。

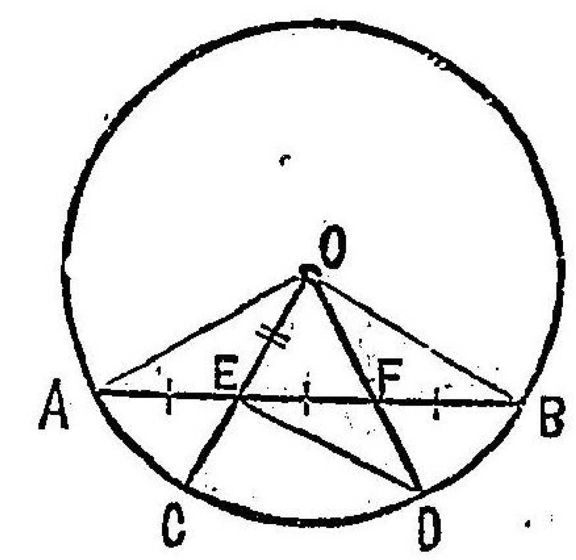
即チ證ヲ得タリ。

第貳節例題

1. 弦ヲ三等分スル半徑ハ其弦ニ對スル弧ヲ三等分セズ

弦ヲ AB トシ，AB ヲ三等分スル半徑ヲ CC, OD トス，

然ルキハ OC, OD ハ弧 AB ヲ三等分スルコナシ。



（證）OC, OD ガ AB ニ交ル点ヲ E, F トシ，OA, OB, DE ヲ結ブ．

△OAB ニ於テ $OA = OB \quad \therefore \quad \angle B = \angle A$ （60. 定理）

故ニ兩三角形 OBF, OAE ニ於テ

$OB = OA$ （半徑）

$FB = AE$ （假設）

$\angle B = \angle A \qquad \therefore\quad \triangle OBF = \triangle OAE$

$\therefore\quad OF = OE$

$\therefore\quad \angle OEF = \angle OFE$ （60. 定理）

然ルニ　$\angle EOF + \angle OEF = \angle EFD$

$\therefore\quad \angle OFE < \angle EFD$

故ニ ∠EFD ハ鈍角ナリ

故ニ △EFD ニ於テ $ED > EF$，從ッテ $ED > FB$

故ニ兩三角形 OFB, OED ニ於テ

$OB = OD$

$OF = OE \qquad \therefore\quad \angle FOB < \angle EOD$ （60. 定理）

$FB < ED \qquad \therefore\quad$ 弧 DB < 弧 CD （11[illegible]. 定理）

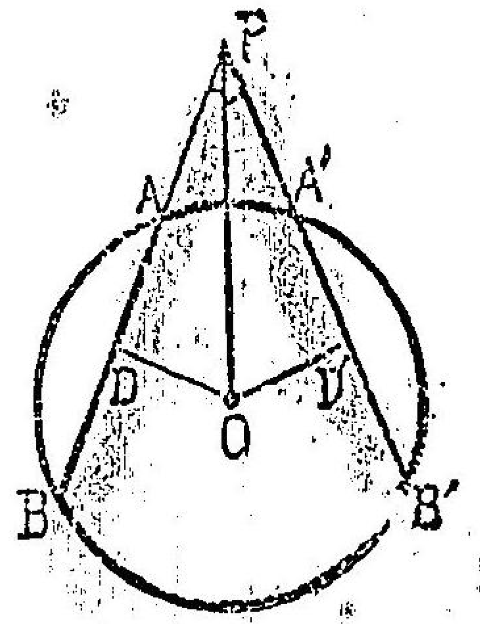
故ニ OC, OD ハ弧 AB ヲ三等分セズ

*2. 不平行貳弦 AB, A′B′ ノ交角 APA′ ノ等分線ガ中心 O ヲ過グルキハ

(第一) 弦 AB ＝ 弦 A′B′ ナリ.

(第二) $PA = PA'$ 及ビ $PB = PB'$ ナリ. 但シ $PA < PB$, $PA' < PB'$ ナリトス.

(証) (第一) $OD \perp AB$, $OD' \perp A'B'$ トス.



兩三角形 POD, POD′ ニ於テ

$\angle OPD = \angle OPD'$, (假設)

$\angle D = \angle D'$, (＝直角)

OP ハ共通邊,

$\therefore \quad \triangle OPD \equiv \triangle OPD'$

$\therefore \quad OD = OD'$

$\therefore$ 弦 AB ＝ 弦 A′B′ (28. 定理)

(第二) $OD \perp AB$, $\therefore \quad AD = DB = \frac{1}{2}AB$, (126. 推論)

又 $OD' \perp A'B'$ $\therefore \quad A'D' = D'B' = \frac{1}{2}A'B'$, (”)

然ルニ(第一)ニヨリ $AB = A'B'$

$\therefore \quad AD = DB = A'D' = D'B'$

又 $\triangle POD \equiv \triangle POD'$ $\therefore \quad PD = PD'$

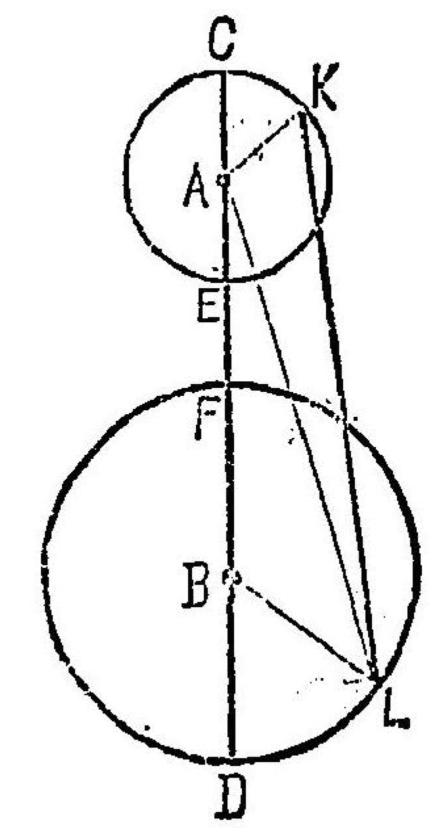
$\therefore \quad PD - AD = PD' - A'D'$ 即 $PA = PA'$

又 $PD + DB = PD' + D'B'$ 即 $PB = PB'$

(注意) P 点ガ圓内若クハ圓周上ニアルキモ同様ニ証明シ得ルナリ. 讀者試ニ自ラ之レヲ証セヨ.

3. 相交ラザル貳圓ノ中心ヲ A, B トシ, A, B ヲ過グル直線ト各圓周トノ交点ヲ C, E, F, D トス, 但シ E, F ハ A, ト B トノ間ニアリトス, 然ルキハ直線 CD ハ兩圓周間ノ最大距離ニシテ直線 EF ハ最小距離ナリ.

(証) 兩圓周間ニ任意ノ直線 KL ヲ引キ, 直線 KA, AL 及ビ BL ヲ引ク.



$\triangle AKL$ ニ於テ $AK + AL > KL$,

$\triangle ALB$ ニ於テ $AB + BL > AL$,

$\therefore \quad AK + AB + BL > KL$,

即 $CA + AB + DB > KL$.

即 $CD > KL$,

即チ CD ノ最大距離ナリ.

又 $\triangle AKL$ ニ於テ $KL > AL - AK$,

$\triangle ABL$ ニ於テ $AL > AB - BL$,

$\therefore \quad KL > AB - BL - AK$,

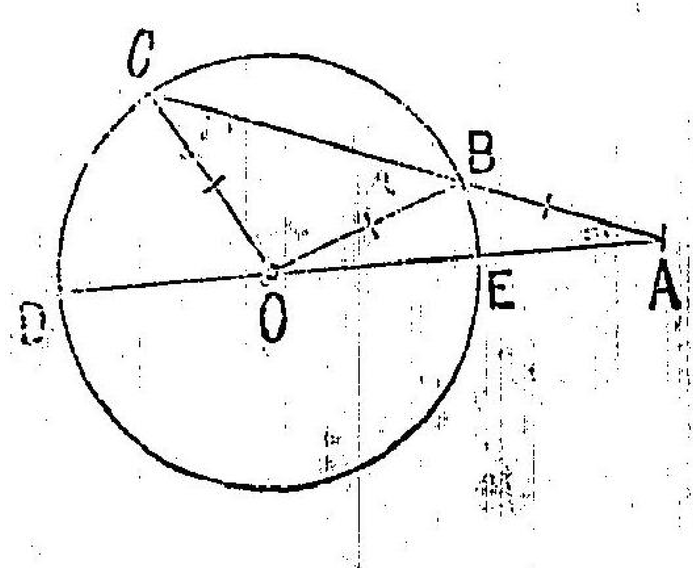
即 $KL > AB - BF - AE$,

即 $KL > EF$.

即チ EF ハ最小距離ナリ.

4. 定角 COD ノ角頂 O ヲ中心トセル圓周ト其各邊トノ交点ヲ C, D トシ C ヲ過ギ且ツ圓周ニ B ニ, DO ノ引張線ニ A ニ於テ交ル所ノ直線ヲ引ク, 然ルトキハ AB ガ若シ圓ノ半徑ニ等シケレバ ∠A ハ ∠COD ノ三分ノ一ナリ.

(証) OB ヲ引ク.



$AB = OB \quad \therefore \quad \angle A = \angle BOA$

又 $\angle A + \angle BOA = \angle CBO$

$\therefore \quad 2\angle A = \angle CBO$

$OB = OC \quad \therefore \quad \angle CBO = \angle OCB$

$\therefore \quad 2\angle A = \angle OCB$

而シテ $\angle A + \angle OCB = \angle COD$

$\therefore \quad \angle A + 2\angle A = \angle COD$

$\therefore \quad 3\angle A = \angle COD$

$\therefore \quad \angle A = \frac{1}{3}\angle OCD$

5. 相交ル等弦 AB, BC ノ交点ヲ P トシ, 又 AB, CD ノ交点ヲ Q トシ, 圓ノ中心ヲ O トスレバ

(第一) $BP = PD$ ナリ,

(第二) Q, P, O ハ一直線上ニアリ.

(証) BD ヲ結ブ

(第一) 弦 AD = 弦 BC (假設)

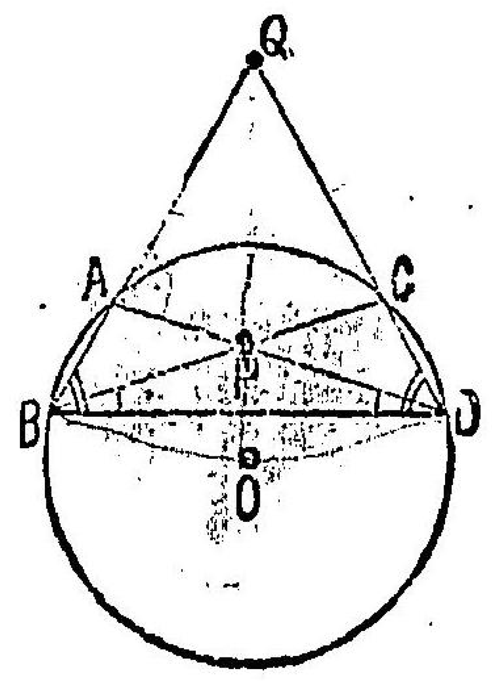
∴ 弧 ACD = 弧 CAB (122. 定理)

此ノ両邊ヨリ共弧 AC ヲ減ズレバ

弧 CD = 弧 AB

∴ 弦 CD = 弦 AB (120. 定理)

故ニ両三角形 ABD, CBD ニ於テ



$AB = CD$

$AD = CB$

BD ハ共通邊 ∴ $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$

∴ $\angle ADB = \angle CBD$

∴ $PB = PD$ (26. 定理)

(第二) 前ニ証セシ如ク $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$

∴ $\angle ABD = \angle CDB$ 及 $\angle ADB = \angle CBD$,

∴ $QD = QB$ 及 $PB = PD$.

故ニ Q, P ハ B, D ヨリ等距ノ点ナリ.

又中心 O モ亦 B, D ヨリ等距ノ点ナリ.

故ニ三点 Q, P, O ハ二点 B, D ヨリ等距ナル点ノ軌跡ノ上ニアリ

故ニ三点 Q, P, O ハ一直線上ニアリ.

6. O ヲ中心トスル圓ニ於テ, 平行諸弦ノ中央点ノ軌跡ハ其弦ニ直立セル直径ナリ.

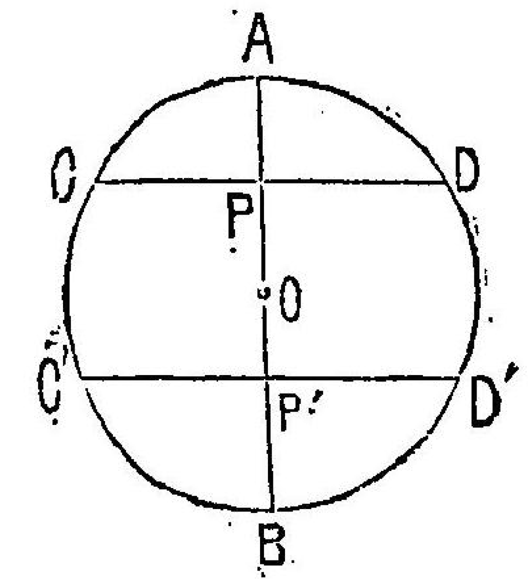
(証) 平行弦ノ任意ノ一個ヲ CD トシ, 其中央点ヲ P トシ, P ヲ過グル直径ヲ AB トス

然ルトキハ $OP \perp CD$ ナリ (115. 推論)

故ニ平行弦ノ中央点ハ之ニ直立セル直径ノ上ニアリ (a)

[是レ 100. ノ (4) ニ當ル]

又 AB 上ニ任意ノ一点 P' ヲ取リ, P' ヨリ CD ニ平行ナル弦 $C'D'$ ヲ引クトキハ



$\angle OP'D' = \angle CPO$ (錯角)

= 直角.

∴ $OP' \perp C'D'$

故ニ P' ハ弦 $C'D'$ ノ中央点ナリ (126. 定理)

故ニ AB 上ノ点ハ平行弦ノ中央ナリ (b)

[是レ 100. ノ (4) ニ當ル]

(a) 及ビ (b) ニヨリ直径 AB ハ平行諸弦ノ中央点ノ軌跡ナリ.

第　三　節—圓周角

定　義

131. 圓周角 トハ圓周上ニ於テ相交ル貳弦ガナス角ナリ. 而シテ圓周角ノ二邊ニテ夾メル弧ヲ「圓周角ノ夾弧」トイヒ, 又其圓周角ヲ「其夾弧ニ對スル圓周角」トイフ.

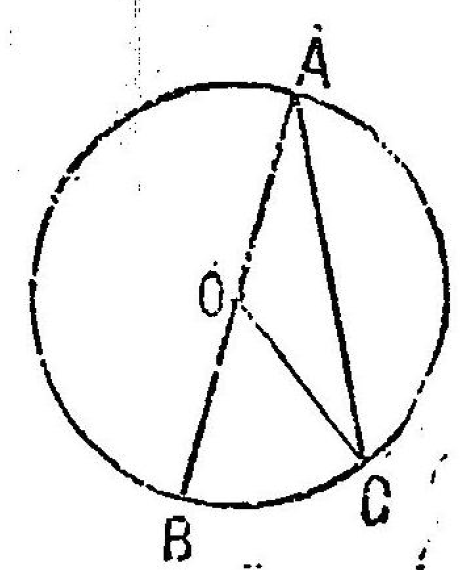
132. 弓形之角 壹角ノ角頂ガ弓形ヲ圍メル弧ノ上ニアリテ其二邊ハ其弧ノ兩端ヲ過グルトキハ其角ヲ「弓形之角」トイフ.

133. 內接.外接 多角形ノ各角頂ガ壹ツノ圓周ノ上ニアルトキハ其多角形ハ其圓ニ內接ストイフ, 又圓ハ其多角形ニ外接ストイフ.

定理拾四

134. 圓周角ハ其夾弧ニ對スル中心角ノ半ナリ.

BAC ヲ圓周角トシ其夾弧 BC ニ對スル中心角ヲ BOC トス, 然ルトキハ $\angle BAC$ ハ $\angle BOC$ ノ半ナリ.



(証) (第一) 中心 O ガ一邊 AB ノ上ニアル場合.

OC ヲ結ブ

$\triangle BOC$ ニ於テ

$$\angle A + \angle OCA = \angle BOC$$

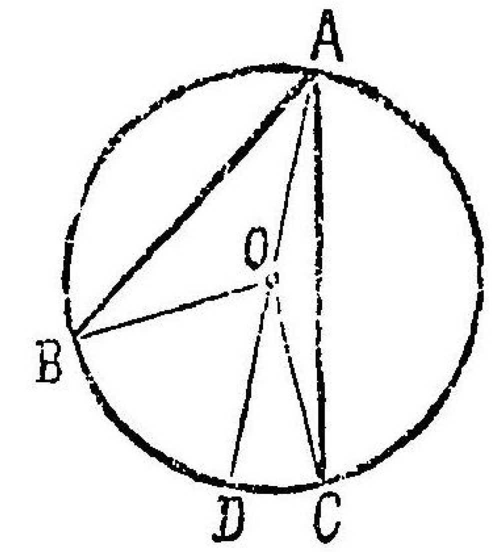
然ルニ $OA = OC$ ナルヲ以テ $\angle A = \angle OCA$

$\therefore \quad \angle A + \angle A = \angle BOC$

$\therefore \quad \angle A = \frac{1}{2}\angle BOC.$

(第二) 中心 O ガ圓周角 BAC ノ內方ニアル場合.

A ヲ過グル直徑 AOD ヲ引キ, BO, CO ヲ結ブ.



$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOO$　　[第一ニヨル]

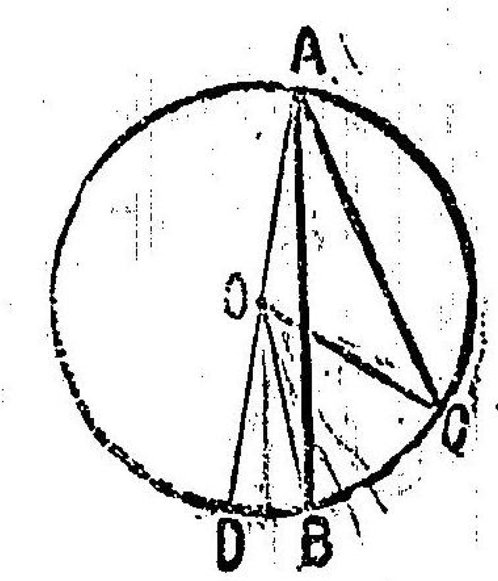
$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle DOC$　　[　〃　]

上ノ貳式ノ各邊ヲ加フレバ

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \tfrac{1}{2}\angle BOD + \tfrac{1}{2}\angle DOC \\ &= \tfrac{1}{2}(\angle BOD + \angle DOC) \\ &= \tfrac{1}{2}\angle BOC\end{aligned}$$

(第三) 中心 O ガ圓周角 BAC ノ外方ニアル場合.

A ヲ過グル直徑 AOD ヲ引キ, BO, CO ヲ結ブ.



$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD$　　[第壹ニヨル]

$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$　　[　〃　]

上式ノ各邊ヨリ下式ノ各邊ヲ減ズレバ

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \tfrac{1}{2}\angle COD - \tfrac{1}{2}\angle BOD \\ &= \tfrac{1}{2}(\angle COD - \angle BOD) \\ &= \tfrac{1}{2}\angle BOC.\end{aligned}$$

135. 推論 壹個ノ弓形ノ諸角ハ總ヘテ相等シ.

(証) 其諸角ハ孰レモ其夾弧ニ對スル中心角ニ等シ. 故ニ其諸角ハ相等シ

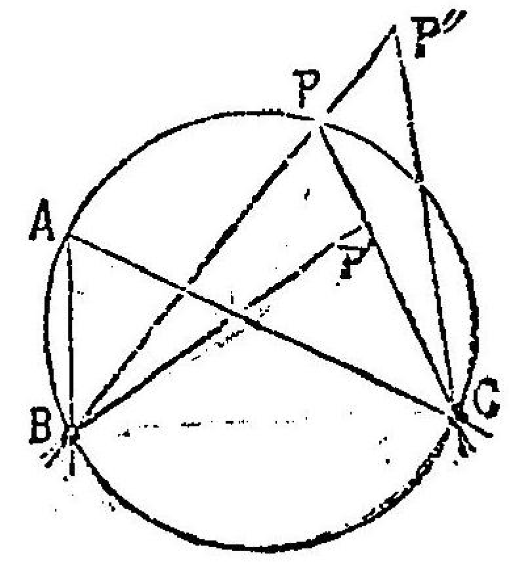
定理拾五

135. 相等シキ諸角ノ各邊ガ二定点ヲ過ギ且其角頂ハ其二

定点ヲ結ベル直線ノ同傍ニ在ルキハ,其諸角ノ頂点ノ軌跡ハ其貳定点ヲ各端トシテ等角ノ壹個ノ角頂ヲ過グル弧ナリ.

二定点ヲB, Cトス,然ルキハ等角ノ二邊ガB, Cヲ過ギ且ツ其角頂ガ直線BCノ同傍ニ在ルキハ其角頂ノ軌跡ハB, Cヲ兩端トシ且ツ等角ノ壹箇BACノ頂角Aヲ過グ弧BACナリ.

(證) 弧BACノ上ニ任意ノ壹点Pヲ取リPB, PCヲ結ブ



然ルキハ135推論ニヨリ

$$\angle BPC = \angle BAC.$$

故ニ弧BAC上ノ点ハ,二邊ガB, Cヲ過ギ且ツ∠BACト等シキ角ノ頂点ナリ　(a)

是レ100,ノ(1)ニ當ル]

又弓形BACノ内方ニ任意ノ点P′ヲ取リP′B, P′Cヲ結ビ,CP′ト弧BACトノ交點ヲPトシBPヲ結ブ

△BPP′ニ於テ　$\angle BP'C > \angle BPC$

然ルニ　$\angle BPC = \angle A$

$\therefore\quad \angle BP'C > \angle A.$　(1)

又弓形BACノ外方ニP″ヲ取リ(但シP″ト弧BACトヲ直線ACノ同傍ニ在ラシム)P″B, P″Cヲ結ビP″Bト弧BACトノ交點ヲPトシPCヲ結ブ

△PP″Cニ於テ　$\angle P'' < \angle BPC$

然ルニ　$\angle BPC = \angle A$

$\therefore\quad \angle P'' < \angle A$　(2)

(1) (2)ニヨレバ二邊ガB, Cヲ過ギ且ツ角頂ガ弧BAC上ニアラザル角ハ等角BACニ等シカラズ　(b)

[是レ100.ノ(2)ニ當ル]

(a) (b)ニヨリ弧BACハ二邊ガB, Cヲ過ギ且頂點ガ直線BCノ同

傍ニアル諸等角ノ頂ノ軌跡ナリ.

定理拾六

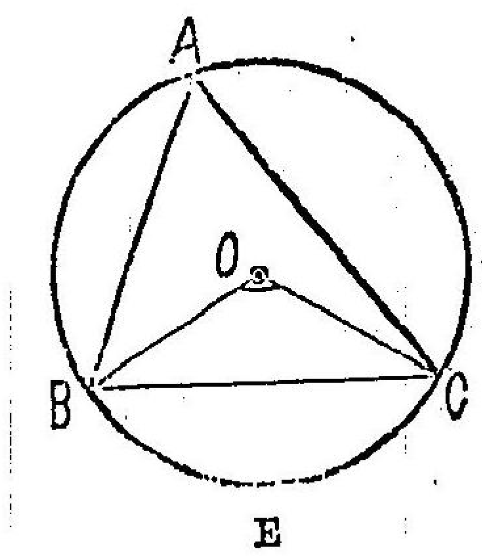
133. 弓形ノ角ハ,其弓形ガ半圓ヨリ大ナルカ,或ハ半圓ニ等シキカ,或ハ半圓ヨリ小ナルカニ從ツテ鋭角ナルカ或ハ直角ナルカ或ハ鈍角ナリ.

角BACヲ弓形BACノ角トス,

然ルキハ弓形BACガ半圓ヨリ大ナルカ,或ハ半圓ニ等シキカ,或ハ半圓ヨリ小ナルカニ從ツテ角BACハ鋭角ナルカ或ハ直角ナルカ或ハ鈍角ナリ.

(證) 中心ヲOトス

(第壹) 弓形BACガ半圓ヨリ大ナル場合.



OB, COヲ結ブ

今弓形BACハ半圓ヨリ大ナリ,

故ニ弧BACハ半圓周ヨリ大ナリ.

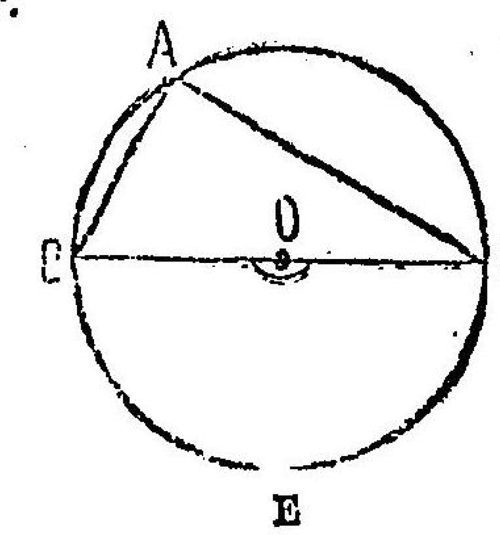
故ニ角BACニ對スル弧BECハ半圓周ヨリ小ナリ,

故ニ弧BECニ對スル中心角BOCハ貳直角ヨリ小ナリ,

而シテ角BACハ弧BECニ對スル中心角BOCノ半ナリ

故ニ角BACハ直角ヨリ小ニシテ即鋭角ナリ.

(第二) 弓形BACガ半圓形ニ等シキ場合.



弓形BACハ半圓形ナルヲ以テBCハ直徑ニシテ即チ中心Oヲ過グ,

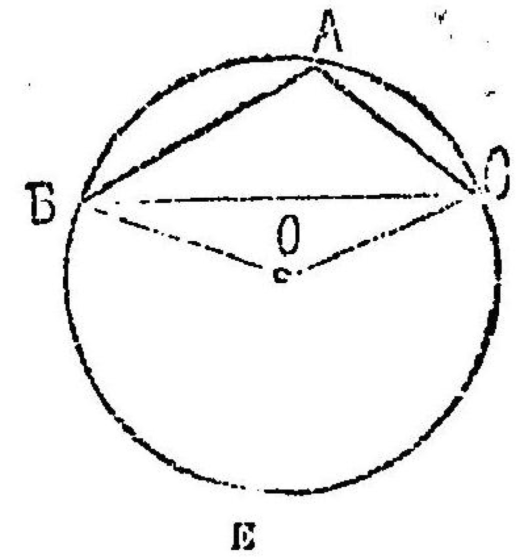
故ニ角BOCハ貳直角ナリ.

而シテ角BACハ角BOCノ半ナリ,

故ニ角BACハ直角ナリ.

（第三）弓形BACガ半圓ヨリ小ナル場合.

OB, OCヲ結ブ



今弓形BACハ半圓ヨリ小ナリ,

故ニ弧BACハ半圓周ヨリ小ナリ,

故ニ角BACノ夾弧BECハ半圓ヨリ大ナリ,

故ニ弧BECニ對スル中心角BOCハ貳直角ヨリ大ナリ,

而シテ角BACハ,弧BECニ對スル中心角BOCノ半ナリ.（132.定理）

故ニ角BACハ直角ヨリ大ニシテ,即チ鈍角ナリ.

定理拾七（前定理之逆）

134. 弓形ノ角ガ鋭角ナルカ,直角ナルカ鈍角ナルカニ從ツテ其弓形ハ半圓ヨリ大ナルカ,或ハ半圓ニ等シキカ,或ハ半圓ヨリ小ナリ.

（證）前章ノ定理ニヨリ次ノ三個ノ定理ハ眞ナリ.

弓形ガ半圓ヨリ大ナレバ其弓形ノ角ハ鋭角ナリ,

弓形ガ半圓ニ等シキトキハ其弓形ノ角ハ直角ナリ,

弓形ガ半圓ヨリ小ナレバ其弓形ノ角ハ鈍角ナリ.

而シテ上ノ三定理ニ於テ假設ハ起リ得ベキ總ベテノ場合ヲ盡シ,而シテ終決ハ相異ナル,

故ニ轉換法ニヨリテ上ノ定理ノ各ノ逆ハ眞ナリ, (20)

即チ次ノ如シ

弓形ノ角ガ鋭角ナレバ其弓形ハ半圓ヨリ大ナリ,

弓形ノ角ガ直角ナレバ其弓形ハ半圓ニ等シ,

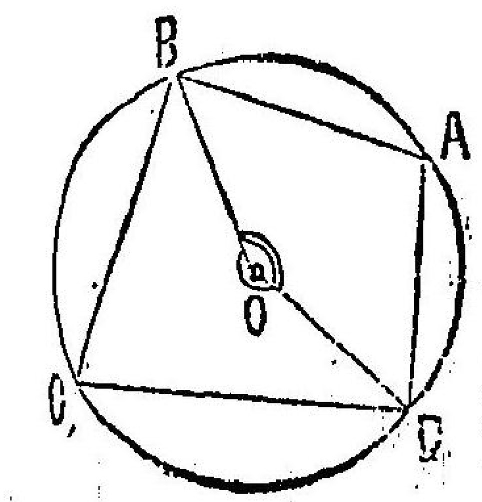
弓形ノ角ガ鈍角ナレバ其弓形ハ半圓ヨリ小ナリ.

定理拾八

135. 內接四角形ノ對角ハ補角ヲナス.

內接四角形ABCDノ對角ハ補角ヲナス.

（證）外接圓ノ中心ヲOトシDO, BOヲ結ブ.



角Cハ弧BADニ對スル中心角ノ半ナリ,

角Aハ弧BCDニ對スル中心角ノ半ナリ,

之レニ由テ

$\angle C + \angle A$ハ,弧BADニ對スル中心角ト,弧BCDニ對スル中心角トノ和（即チ四直角）ノ半ナリ,

故ニ$\angle C + \angle A$ハ貳直角ニ等シ,

故ニ$\angle C$ト$\angle A$トハ補角ヲナス.

同樣ニ$\angle B$ト$\angle D$トハ補角ヲナス.

136. 推論 內接四角形ノ一外角ハ其內對角ニ等シ.

內接四角形ヲABCDトス然ルトキハAニ於ケル外角ハ其內對角Cニ等シ（前章ノ圖ヲ見ヨ）

（證）Aニ於ケル外角ハ$\angle BAD$ノ補角ナリ

而シテ$\angle C$モ亦$\angle BAD$ノ補角ナリ.

故ニAニ於ケル外角ハ$\angle C$ニ等シ.

定理拾九（前定理之逆）

136. 四角形ニ於テ相對セル貳角ガ補角ヲナストキハ其四角形ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

四角形ヲABCDトシ,而シテ其對角A及ビCハ補角ヲナスモノ

トス.(135. ノ圖ヲ見ヨ)

然ルトキハ四角形 ABCD ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

(証) 三點 D, A, B ヲ過ギテ圓ヲ畫キ, 而シテ圓角周 A ノ夾弧ヲ l ト命ズ.

今弧 l ノ上ニ任意ノ壹點 P ヲ取リ PB, PD ヲ結ブトキハ ABPD ハ内切四角形ナルヲ以テ $\angle P = 2$ 直角 $- \angle A$ ナリ, (135. 定理)

故ニ弧 l ハ 2 直角 $- \angle A$ ニ等シキ諸角ノ頂ノ軌跡ナリ, 但シ其諸角ノ各邊ハ貳點 B, D ヲ過ギ且ツ其角頂ト弧 l トハ直線 BD ノ同側ニアルモノトス, (132 定理)

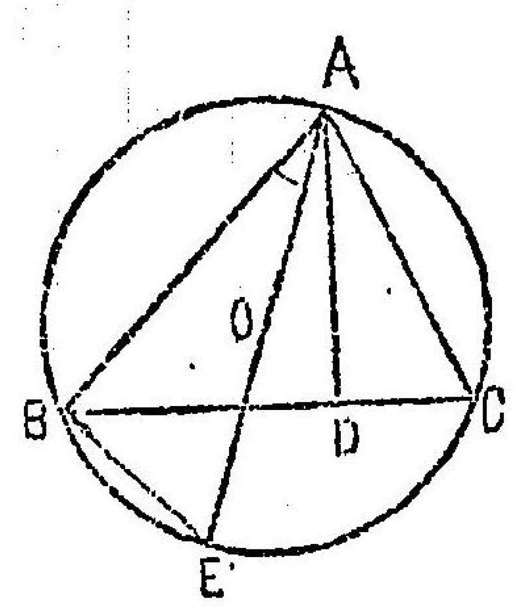
而シテ $\angle C = 2$ 直角 $- \angle A$ ナリ

故ニ C ハ弧 l ノ上ニアリ.

故ニ四角形 ABCD ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

第三節之例題

1. 三角形 ABC ノ壹角頂 A ヨリ其對邊 BC ニ下セル垂線ヲ AD トシ, 而シテ三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ OA ヲ結ブトキハ $\angle BAO = \angle DAC$ ナリ.



(証) AO ト外接圓周トノ交點ヲ E トシ EB ヲ結ブ.

$\angle C$ 及ビ $\angle E$ ハ弓形 ACEB ノ角ナリ, 故ニ $\angle C = \angle E$ ナリ. (135. 推論)

又弓形 ABE ハ半圓形ナリ,

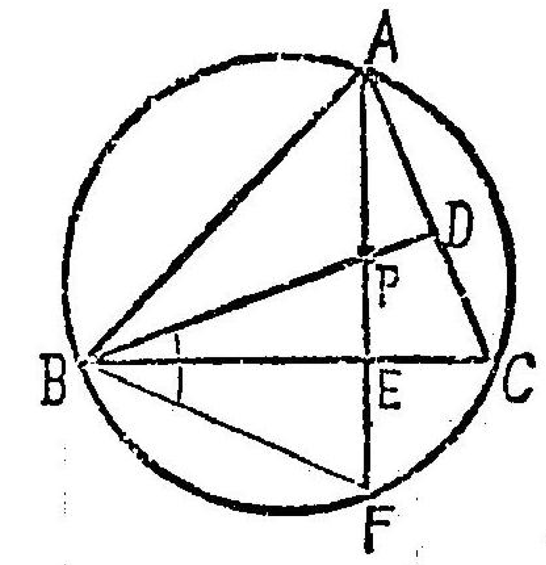
故ニ $\angle ABE =$ 直角ナリ, (133. 定理)

即チ兩三角形 ADC, ABE ニ於テ

$$\angle C = \angle E,$$

$$\angle ADC = \angle ABE, \quad \therefore \quad \angle DAC = \angle BAE. \qquad \text{(87. 定理)}$$

***2.** 三角形 ABC ノ垂心ヲ P トシ, 直線 AP ガ BC 及ビ外接圓周ニ交ル點ヲ順次ニ E, F トス, 然ルトキハ PE = EF ナリ.



(証) BP ヲ結ビ BP ト AC トノ交點ヲ D トス

$\angle FBE$, $\angle FAC$ ハ弓形 CABF ノ角ナリ

$$\therefore \quad \angle FBE = \angle FAC \qquad (1)$$

然ルニ P ハ垂心ナリ, 故ニ直線 AP ハ BC ニ直立シ, BP ハ AC ニ直立ス,

故ニ $\angle BDC$, $\angle AEC$ ハ共ニ直角ナリ

$\therefore \quad \angle FAC + \angle C =$ 直角 (87. 推論)

及 $\quad \angle CBD + \angle C =$ 直角 (")

$\therefore \quad \angle FAC = \angle CBD$ (36. 推論)

故ニ (1) ヨリ $\quad \angle CBD = \angle FBE$

故ニ兩三角形 EFB, EBP ニ於テ

$$\angle FBE = \angle CBD$$

$$\angle BEF = \angle PEB = \text{直角}$$

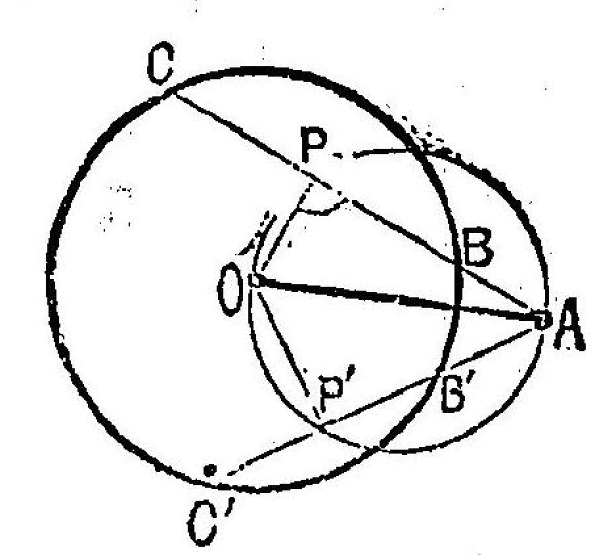
BE ハ共通邊 $\quad \therefore \quad \triangle EFB \equiv \triangle EBP$

$$\therefore \quad PE = EF$$

3. 圓ノ平面上ノ壹定點ヲ過グル諸弦ノ中央點ノ軌跡ハ其定點ト中心トヲ結ベル直線ヲ直徑トセル圓周ナリ.

定點ヲ A, 中心ヲ O トス,

然ルトキハ A ヲ過グル諸弦ノ中央點ノ軌跡ハ直線 AO ヲ直徑トセル圓周ナリ.



(証) A ヲ過グル任意ノ弦ヲ BC トシ BC ノ中央點ヲ P トシ OP ヲ結ブ

然ルトキハ $\quad OP \perp BC \quad$ (125. 推論)

$\therefore \quad \angle OPA =$ 直角.

故ニ O, P, A ヲ過グル圓周ヲ作ルトキハ弓形 OPA ハ半圓ナリ.

言換ヘレバ弦BCノ中央點PハOAヲ直徑トセル圓周上ニアリ

(*a*) 〔是レ100ノ(4)ニ當ル〕

又OAヲ直徑トセル圓周上ニ任意ノ點P′ヲ取リAP′ヲ結ビAP′ガ圓周ニ交ル點ヲB′, C′トス,

然ルトキハ弓形OP′Aハ半圓ナルヲ以テ

$\angle OP'A =$ 直角 (133. 定理)

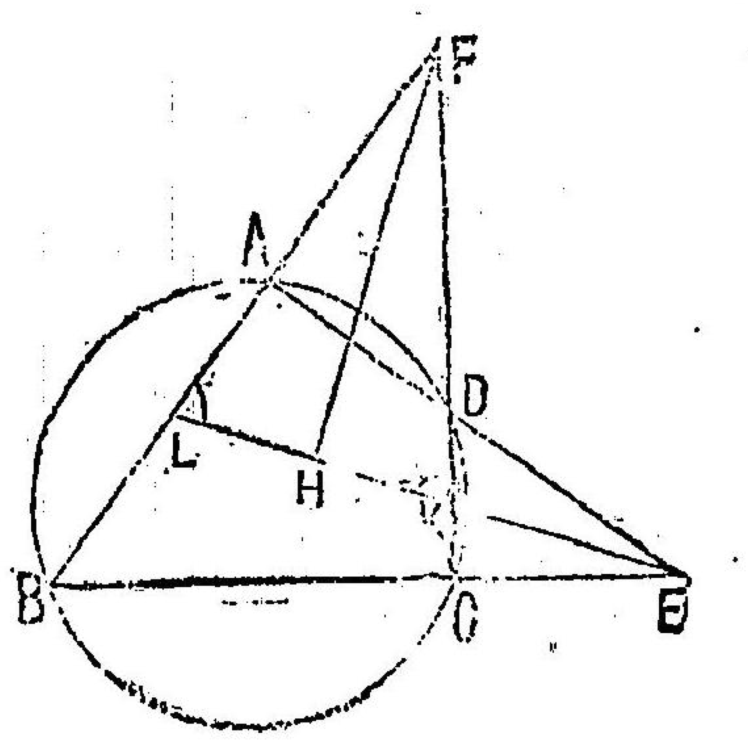
$\therefore$ $OP' \perp B'C'$ $\therefore$ $B'P' = P'C'$ (126. 推論)

故ニOPヲ直徑トセル圓周上ノ點ハ定點Aヲ過グル弦ノ中央點ナリ.〔是レ100ノ(1)ニ當ル〕 (*b*)

(*a*)(*b*)ニヨリ定點Aヲ過グル諸弦ノ中央點ノ軌跡ハOAヲ直徑トセル圓周ナリ.

(注意) 本解ニ於テハ定點Aヲ圓外ニ設ケタリ.然レドモ圓內若クハ圓周上ニ設クルモ同樣ニ證明シ得ルナリ.

4. 內接四角形ABCDニ於テ對邊AD, BCノ交點ヲEトシ,他ノ對邊AB, DCノ交點ヲFトス,然ルトキハ角AEB, 角BFCノ各等分線ハ直交ス,



(證) ∠AEB, ∠BFCノ各等分線ノ交點ヲHトシEHガDC AB,ニ交ル點ヲ順次ニK, Lトス

△BLEニ於テ $\angle FLK = \angle LEB + \angle B$ (86. 定理)

△DKEニ於テ $\angle FKL = \angle DEK + \angle KDE$

然ルニ $\angle LEB = DEK$ (假設)

及ビ $\angle B = \angle KDE$ (136. 推論)

$\therefore$ $\angle FLK = \angle FKL$

$\therefore$ $FK = FL$

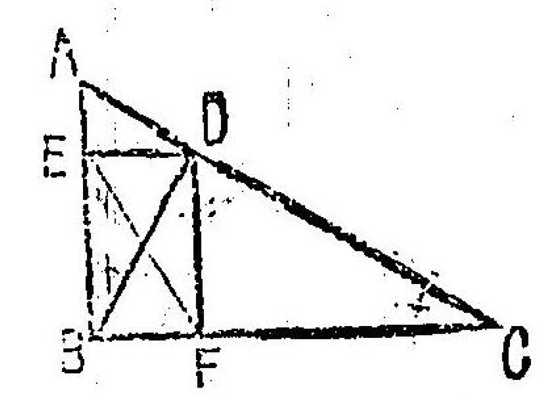
故ニ△FLKハ等脚三角形ナリ,而シテFHハ其頂角ノ等分線ナリ $\therefore$ $FH \perp LK$.

5. 直三角形ABCノ直角頂Bヨリ斜邊ACニ下セル垂線ノ底DヨリAB, BCニ垂線DE, DFヲ下ス,然ルトキハ四點A, E, F, Cハ同一ノ圓周上ニアリ.

(證) EFヲ結ブ,

四角形DEBFハ明カニ矩形ナリ,

$\therefore$ $\angle EFB = \angle DBF$ (1)



然ルニ∠BDCハ直角ナルヲ以テ

∠DBFハ∠Cノ餘角ナリ (87. 推論)

又∠ABCハ直角ナルヲ以テ∠Aモ亦∠Cノ餘角ナリ,

$\therefore$ $\angle DBF = \angle A$ (36. 推論)

故ニ(1)ヨリ $\angle EFB = \angle A$

然ルニ $\angle EFB + \angle EFC = 2$ 直角,

$\therefore$ $\angle A + \angle EFC = 2$ 直角

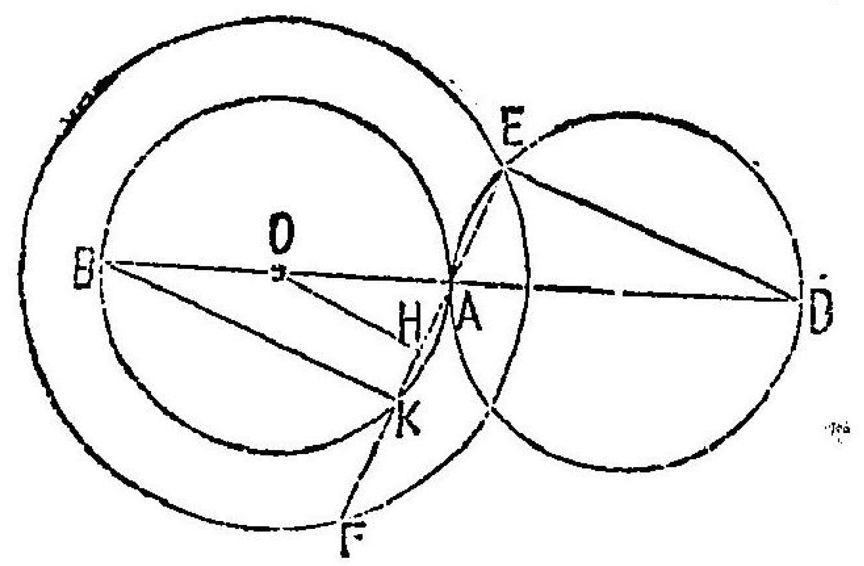
故ニ四角形AEFCハ外接圓ヲ畫クコトヲ得 (136. 定理)

故ニ四點A, E, F, Cハ同一ノ圓周上ニアリ.

6. Oヲ中心トセル圓ノ直徑BAヲDマデ引張シAD = ABナラシメADヲ直徑トシテ圓周ヲ作リ,又Oヲ中心トシテ第三ノ圓ヲ作リ此圓周ト周圓ADトノ交點ヲEトシEAヲ結ビAE

ガ再ビ兩圓周 OA, OE ニ交ル點ヲ順次ニ K, F トス然ルトキハ

$$EA = AK = KF.$$



(証) ED, BK ヲ結ブ,

今弓形 AED ハ半圓ナリ, ∴ $\angle DEA =$ 直角, (133 定理)

又弓形 AKB ハ半圓ナリ ∴ $\angle BKA =$ 直角, (”)

故ニ兩三角形 ADE, ABK ニ於テ

$$\angle AED = \angle AKB, \ (= \text{直角})$$

$$\angle EAD = \angle KAB \ (\text{對頂角})$$

$$AD = AB \quad (\text{假設})$$

$$\therefore \ \triangle AED \equiv \triangle ABK \qquad \therefore \ AE = AK. \qquad (1)$$

今中心 O ヨリ直線 EF ニ垂線ヲ下シ, 之ヲ OH トシ, OH ト EF トノ交點ヲ H トス

$OH \perp EF$ ナルヲ以テ $EH = HF$ (126. 推論)

又 $OH \perp AK$ ナルヲ以テ $AH = HK$ (”)

上式ヨリ下式ヲ減ズルトキハ

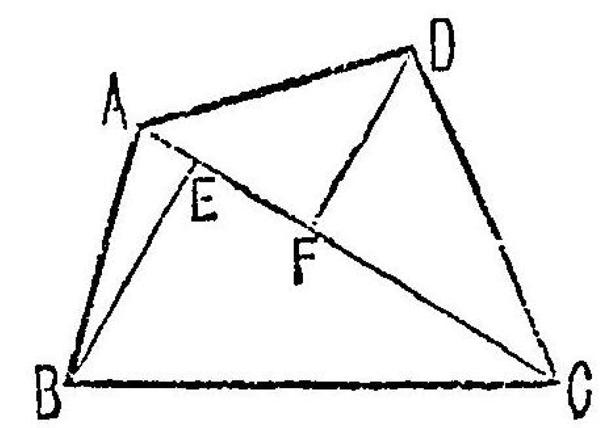
$$AE = KF \qquad (2)$$

(1) 及ビ (2) ニヨリ $AE = AK = KF.$

即チ証ヲ得タリ.

7. 四角形ノ隣接二邊ノ各ヲ直徑トセル兩圓ノ共通ノ弦ト他ノ二邊ヲ直徑トセル兩圓ノ共通ノ弦トハ, 相平行ス.

四角形 ABCD ノ隣接貳邊 AD, DC ヲ直徑トセル兩圓ノ共通ノ弦ト, AB, BC ヲ直徑トセル兩圓ノ共通ノ弦トハ相平行ス.



(証) 對角線 AC ヲ引キ D 及ビ B ヨリ AC ヘ垂線 DF, BE ヲ引ク.

今 $\angle DFC =$ 直角ナルヲ以テ DC ハ三点 D, F, C ヲ過グル圓ノ, 直徑ナリ, (138. 定理)

換言スレバ DC ヲ直徑トセル圓周ハ F 点ヲ過グ,

同様ニ AD ヲ直徑トセル圓周ハ F 点ヲ過グ.

故ニ直線 DF ハ AD, DC ノ各ヲ直徑トセル兩圓ノ共通ノ弦ナリ.

同様ニ直線 BE ハ AB, BC ノ各ヲ直徑トセル兩圓ノ共通ノ弦ナリ.

而シテ DF, BE ハ共ニ AC ニ直立ナルヲ以テ平行ス.

故ニ題意ノ如シ.

8. 四角形 ABCD ノ對角線ガ直交スルトキ, 其交点 P ヨリ各邊ニ下ス垂線ノ底 E, F, G, H ハ同一ノ圓周上ニアリ.

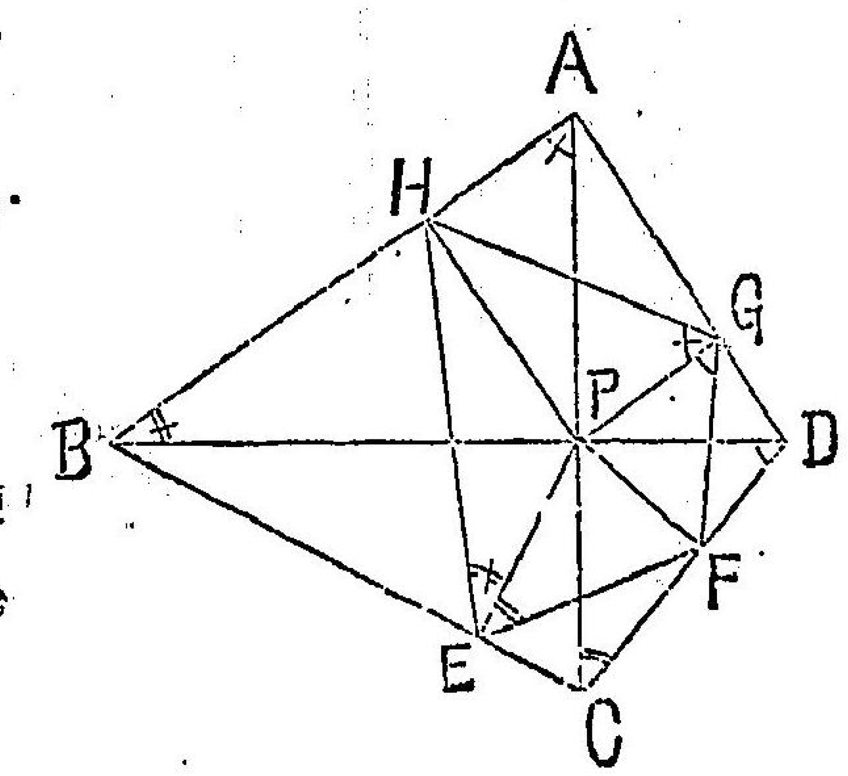
(証) EF, FG, GH, HE ヲ結ブ.

今 $\angle PGD + \angle PFD = 2$ 直角,

故ニ □PFDG ハ内接四角形ナリ

故ニ 135. 推論ニヨリ

$$\therefore \ \angle PGF = \angle PDF \qquad (1)$$



又 □PHAG, □PHBE, □PECF ハ前ト同理ニヨリ内接四角形ナリ故ニ次ノ三式ヲ得.

$\angle PGH = \angle PAH$　　(2)

$\angle PEH = \angle PBH$　　(3)

$\angle PEF = \angle PCD$　　(4)

(1) (2) (3) (4) 式ヲ加フレバ

$\angle FGH + \angle FEH = \angle PDC + \angle PCD + \angle PAH + \angle PBH.$ (a)

然ルニ $\triangle DPC$ ニ於テ　$\angle DPC =$ 直角.　　(假設)

$\therefore$　$\angle PDC + \angle PCD =$ 直角

同様ニ $\triangle APB$ ニ於テ　$\angle PAH + \angle PBH =$ 直角

上ノ二式ヲ加ヘテ　$\angle PDC + \angle PCD + \angle PAH + \angle PBH = 2$ 直角

故ニ (a) 式ヨリ　$\angle FGH + \angle FEH = 2$ 直角

故ニ □EFGH ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得.　　(141. 定理)

9. 内接四角形 ABCD ノ隣接二角頂ヲ過グル四個ノ圓周ガ式個ツヽ相交ルトシ其交点ヲ E, F, G, H トスレバ此四交点ハ同壹ノ圓周上ニアリ.

(証)　EF, FG, GH, HE, CG, DH, AE, BF ヲ結ビ AE ヲ K マデ引張シ CG ヲ L マデ引張ス

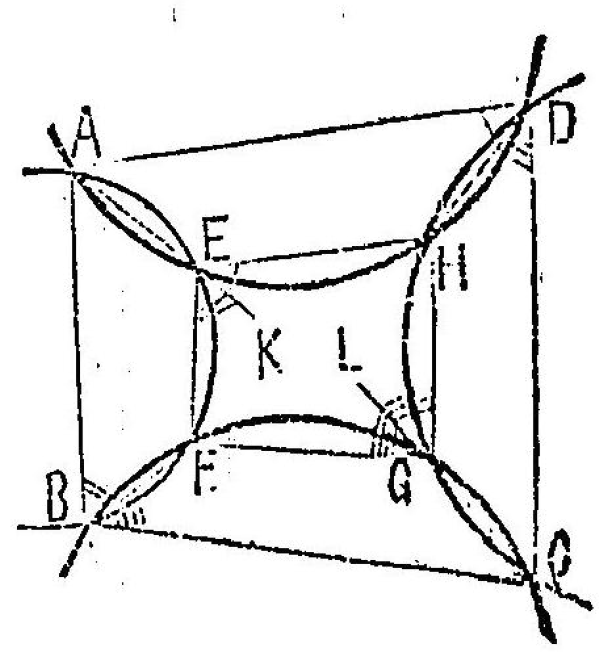
今 □DHGC □DHEA, □AEFB, □BFGC ノ各ハ内接四角形ナル故

$\angle HGL = \angle HDC$　(140. 推論)

$\angle HEK = \angle ADH$　(　"　)

$\angle KEF = \angle FBA$　(　"　)

$\angle LGF = \angle FBC$　(　"　)



上式ヲ加フレバ

$\angle HGF + \angle HEF = \angle ADC + \angle ABC.$

然ルニ □ABCD ハ内接四角形ナルヲ以テ

$\angle ADC + \angle ABC = 2$ 直角 (139. 定理)

故ニ　$\angle HGF + \angle HEF = 2$ 直角

故ニ □EFGH ハ内接四角形ナリ　(141. 定理)

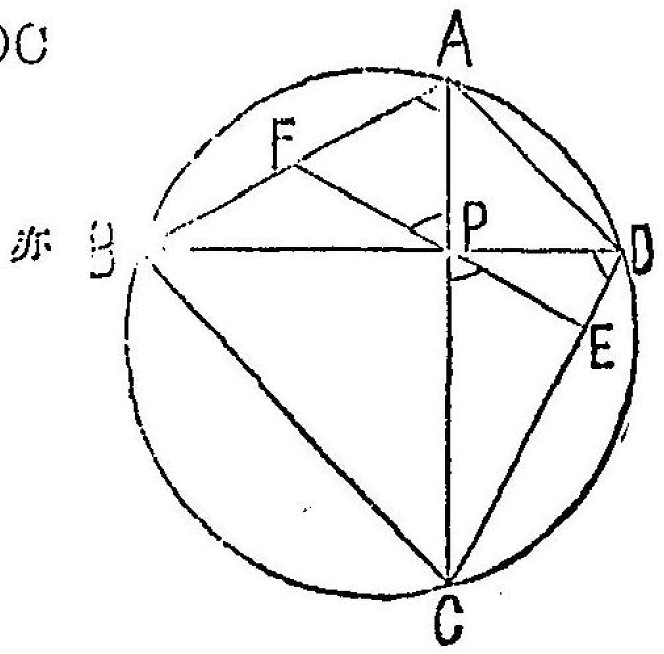
即チ四点 E, F, G, H ハ同一ノ圓周上ニアリ.

10. 内接四角形 ABCD ノ對角線ガ直交スル片, 其交点 P ヨリ任意ノ壹邊 DC ニ下セル垂線 PE ハ其對邊 AB ヲ等分ス.

(証)　$\angle BAP = \angle BDC$ (153 推論)

然ルニ $\angle DPC$ ハ直角ナルヲ以テ $\angle BDC$ ハ $\angle ACD$ ノ余角ナリ,　(135. 推論)

又 $\angle PEC$ ハ直角ナルヲ以テ $\angle CPE$ モ亦 $\angle PCD$ ノ余角ナリ,



$\therefore$　$\angle BDC = \angle CPE$

$\therefore$　$\angle BAP = \angle CPE$

然ルニ　　$\angle CPE = \angle APF$

$\therefore$　$\angle BAP = \angle APF$　　$\therefore$　　$FP = AF$　　(a)

又 $\angle APB$ ハ直角ナルヲ以テ $\angle ABP$ ハ $\angle BAP$ ノ余角ニシテ, $\angle FPB$ ハ $\angle APF$ ノ余角ナリ,

$\therefore$　$\angle FBP = \angle FPB$　　$\therefore$　　$FP = BF$

故ニ (a) 式ニヨリテ　　　$AF = BF$

故ニ垂線 PE ハ AB 邊ヲ等分ス.

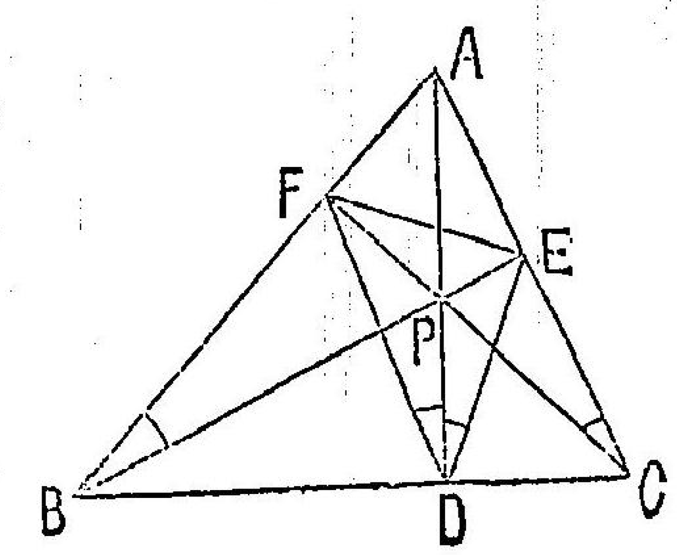
11. 三角形 ABC ノ各角頂ヨリ其各對邊ニ下セル垂線ヲ AD, BE, CF トス, 然ルトキハ此ノ各垂線ハ三角形 DEF ノ各角ノ等分線トナル.

(証)　垂心ヲ P トス.

□PECD ニ於テ

$\angle PEC + PDC = 2$ 直角,

$\therefore$ □PECD ハ内接四角形 (137. 定理)



$\therefore$　$\angle PDE = \angle PCE$　　(1)

又 □PFBD ハ内接四角形ナリ

$\therefore$　$\angle PDF = \angle PBF$　　(2)

然ルニ $\angle BFC = \angle BEC =$ 直角ナルヲ以テ四点 B, F, E, C ハ同一ノ圓周上ニアリ　　(136. 定理)

$\therefore\quad \angle ECF = \angle FBE$

故ニ(1)(2)ニヨリ　$\angle PDE = \angle PDF$

故ニ垂線APハ△DEFノ壹角EDFノ等分線ナリ,

同様ニCFハ∠EFDチBEハ∠FEDチ等分ス.

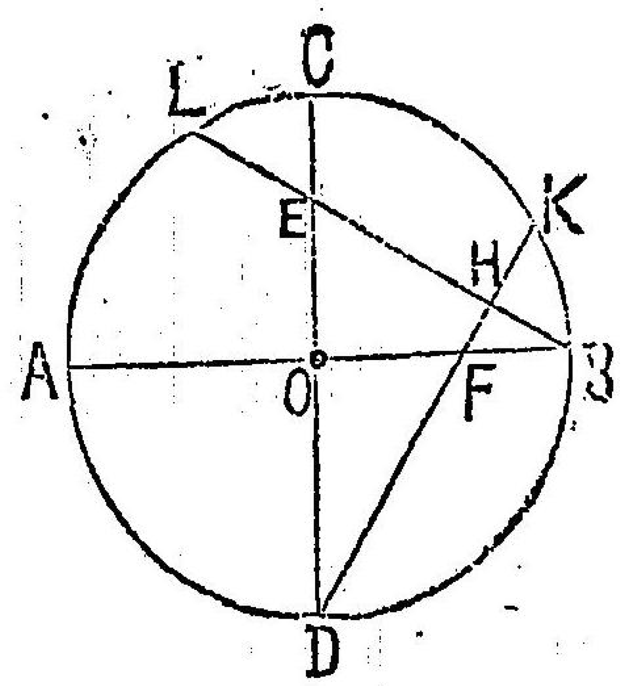
(注意)　△EFDチ△ABCノ垂足三角形ト稱ス

12. Oハ圓ノ中心トシ,AB, CDハ直交スル直徑ナリ,今OC上ニEチOB上ニFチ取リOE＝OFトシBE, DFチ結ビ,DF, BEガ圓周ニ交ル点チ順次ニL, Kトス,然ル時ハ

(第一)　BL, DKハ直交ス.

(第二)　弧LCKハ圓周ノ四分ノ壹ニ等シ.

(證)　BL, DKノ交点チHトス.



(第一)　△OBE,　△ODFニ於テ

$OE = OF$, (假設)

$OB = OD$,

$\angle EOB = \angle FOD =$ 直角,

$\therefore\quad \triangle BOE \equiv \triangle ODF$,

$\therefore\quad \angle HBF = \angle HDO$

故ニ四点B, H, O, Dハ同一ノ圓周上ニアリ　(136. 定理)

$\therefore\quad \angle BHD = \angle BOD =$ 直角　(135. 推論)

故ニDK, BLハ直交ス.

(第二)　∠CDH＝∠HBF (前證)

$\therefore$　夾弧CK＝夾弧AL

此ノ各邊ヘ弧LCチ加フレバ,

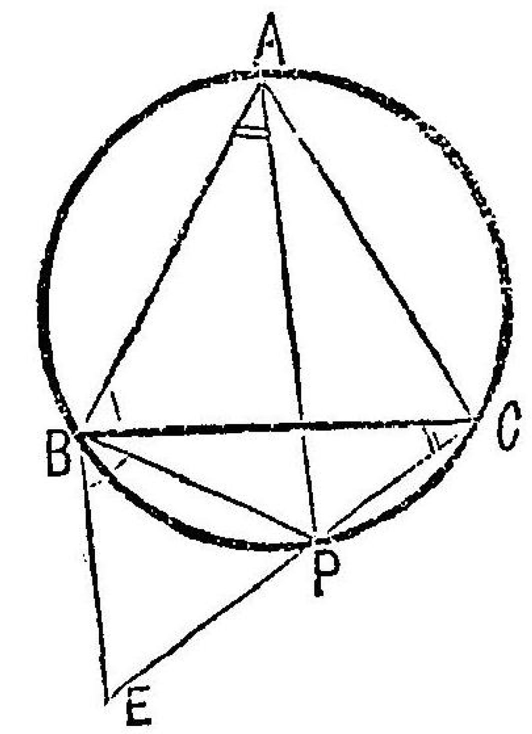
弧KCL＝弧CLA

然ルニ∠COA＝直角ナルチ以テ弧CLAハ圓周ノ四分ノ一ナリ.

故ニ　弧KCLハ圓周ノ四分ノ一ナリ.

13. A, B, Cハ圓周チ三等分スル点ニシテPハ劣弧BC上ヘ任意ノ点ナリ,然ル時ハPA, PB, PCチ結ベバPA＝PB＋PCナリ.

(證)　AB, BC, ACチ結ブ,



然ル時ハ弧AB＝弧BC＝弧CAナルチ

以テAB＝BC＝CAナリ,　(120. 定理)

故ニ△ABCハ等邊三角形ナリ,

今BPノ上ニ等邊三角形チ作リ之チBPEトス.

然ル時ハ∠BPE, ∠BACハ等邊三角形ノ角ナルチ以テ共ニ貳直角ノ三分ノ壹ニ等シ　(16 定理及ビ86. 定理第貳)

$\therefore\quad \angle BPE = \angle BAC$

然ルニ　∠BAC＋∠BPC＝2直角　(139. 定理)

$\therefore$　∠BPE＋∠BPC＝2直角

故ニCP, PEハ壹直線チナス.

又∠PBE, ∠CBAモ等邊三角形ノ角ナルチ以テ相等シ,

故ニ今此ノ等角ノ各ヘ∠PBCチ加フレバ

∠EBC＝∠PBA.

故ニ兩三角形EBC, PBAニ於テ

∠EBC＝∠PBA,

BE＝BP, (等邊△ノ邊ナレバナリ)

BC＝AB, (　　〃　　)

$\therefore\quad \triangle EBC \equiv \triangle PBA.$

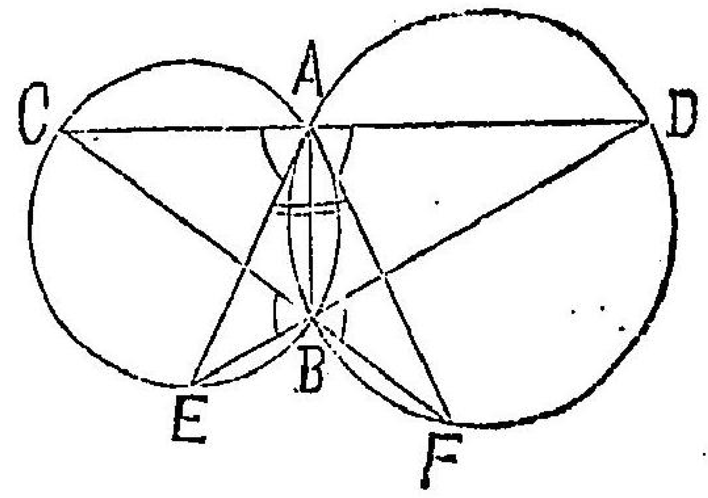
$\therefore\quad AP = EC$

然ルニEP＝BPナルチ以テEC＝CP＋PB,

$\therefore\quad AP = CP + PB.$

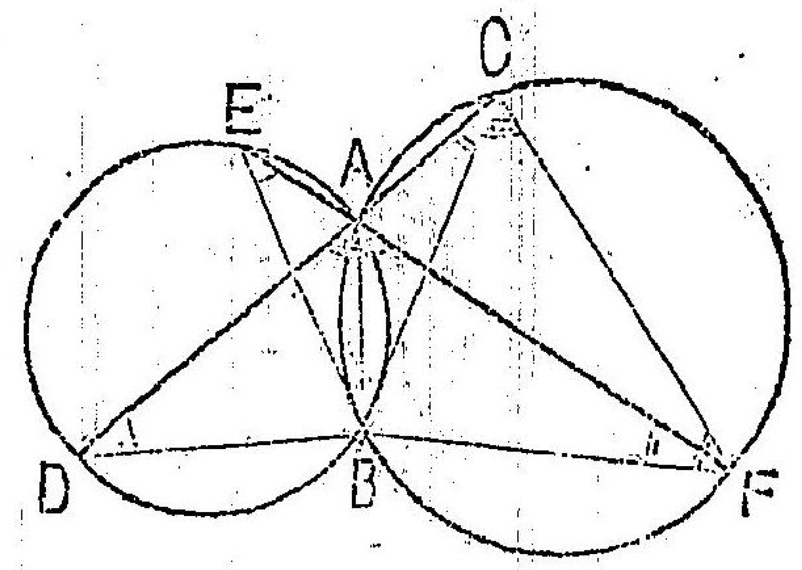
14. ABハ相交ル兩圓ノ共通ノ弦ナリ,今Aニ於テABニ直立スル直線チ作リ,此ノ直線ト各圓周トノ交点チC, DトシCB, DBチ結ビCB, DBガ再ビ各圓周ニ交ル点チ順次ニF, EトシFA, EAチ結ベバABハ∠EAFチ等分ス.(次ノ頁ノ圖チ見ヨ).

(證)　$\angle FAD = \angle FBD$　(135. 推論)
　又　$\angle CAE = \angle CBE$　(　〃　)
然ルニ　$\angle FBD = \angle CBE$　(對頂角)
　∴　$\angle FAD = \angle CAE$
而シテ　$\angle BAD = \angle BAC =$ 直角
　∴　$\angle BAF = BAE$,
故ニ A" ハ $\angle EAF$ ヲ等分ス.



15. AB ハ相交ル兩圓ノ共通ノ弦ナリ, 今 A ヲ過ギ且ツ AB ト等角ヲナスベキ貳直線ヲ引キ, 此ノ各直線ガ圓周ニ交ル点ヲ C, D, E, F トス然ル𪜈ハ CD = EF ナリ.

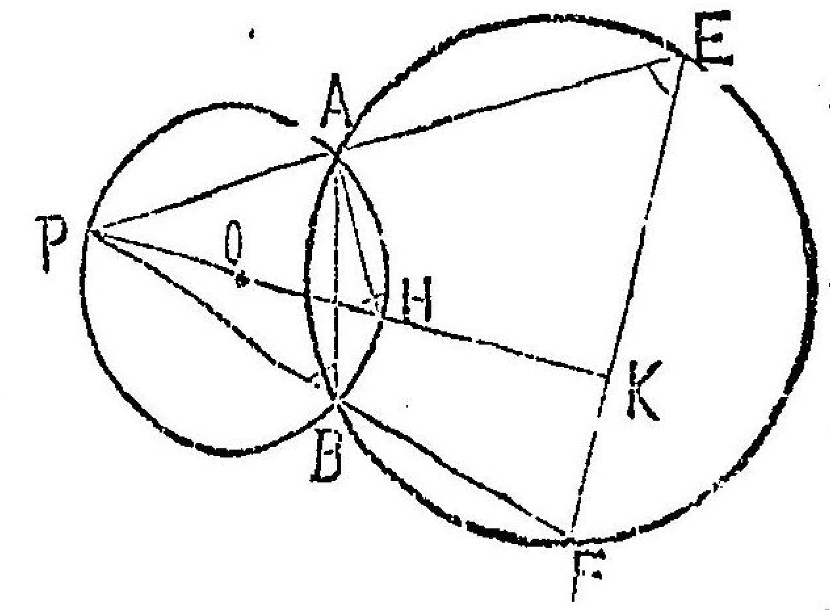
(證) BD, BC, BE, BF, CF ヲ結ブ
□ABFC ハ内接四角形ナリ,
∴ $\angle CFB = \angle BAD$　(141. 推論)
然ルニ　$\angle BAD = BAF$ (假設)
∴ $\angle CFB = \angle BAF$
然ルニ　$\angle BAF = \angle BCF$
∴ $\angle CFB = \angle BCF$　∴　$BC = BF$　(62 定理)
故ニ兩三角形 DBC, EBF ニ於テ
　　$BC = BF$,
　$\angle ACB = \angle AFB$　(135 推論)
　$\angle ADB = \angle AEB$　(　〃　)　∴　$\triangle DBC \equiv \triangle EBF$,
　　　∴　$DC = EF$.



16. A, B ニ於テ相交ル二圓周ノ壹個(此ノ中心ヲ O トス)ノ上ニ任意ノ点 P ヲ取リ, PA, PB ヲ結ビ PA, PB ガ他ノ圓周ニ交ル点ヲ順次ニ E, F トシ EF, PO ヲ結ベバ EF, PO ハ直交ス.
(次ノ頁ノ圖ヲ見ヨ).

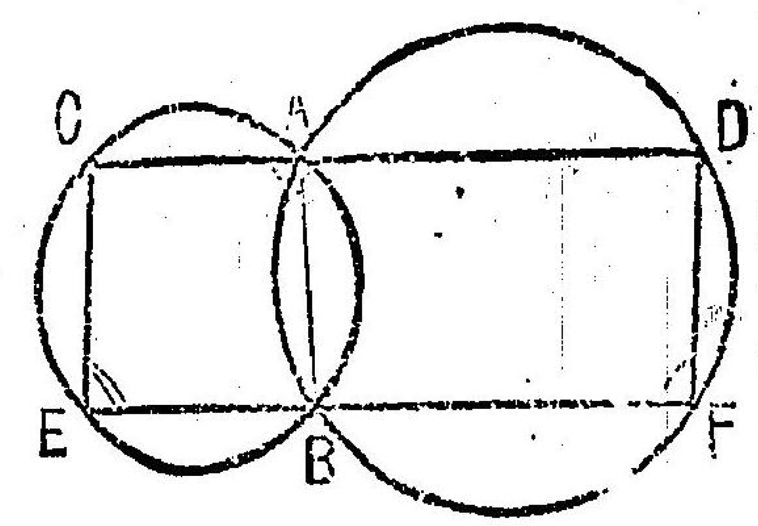
(證)　PO ト EF トノ交点ヲ K トシ, 又 PO ト圓周 PAB トノ交点

ヲ H トシ HA, AB ヲ結ブ,
□ABFE ハ内接四角形ナリ,
∴　$\angle E = \angle ABP$　(140. 推論)
　　$\angle ABP = \angle AHP$
　　　(135. 推論)
∴　$\angle E = \angle AHP$
而シテ $\angle AHP + \angle AHK = 2$ 直角,
∴　$\angle E + \angle AHK = 2$ 直角.
故ニ AHKE ハ内接四角形ナリ　(141 定理)
∴　$\angle EKH = \angle PAH$　(140. 推論)
然ルニ PH ハ直徑ナルヲ以テ, 弓形 PAH ハ半圓ナリ.
　∴　$\angle PAH =$ 直角　(137. 定理)
　∴　$\angle EKH =$ 直角
故ニ EF, PO ハ直交ス.



17. 二圓周ノ交点 A, B ヲ過ギテ平行直線ヲ引キ此各直線ト各圓周トノ交点ヲ C, D, E, F トシ CE, DF ヲ結ブ然ル𪜈ハ四角形 CEFD ハ平行四角形ナリ.

(證)　AB ヲ結ブ.
ABFD ハ内接四角形ナリ,
∴　$\angle F = \angle BAC$ (140. 推論)
同様ニ　$\angle E = \angle BAD$
∴ $\angle E + \angle F = \angle BAC + \angle BAD$
　　$= 2$ 直角
∴　　$EC \parallel FD$
而シテ　　$CD \parallel EF$　(假設)
故ニ □CEFD ハ平行四角形ナリ.



18. 三角形ノ三角頂ト其垂心トノ中ノ孰レカ三個ヲ過グル四個ノ圓周ハ相等シ.

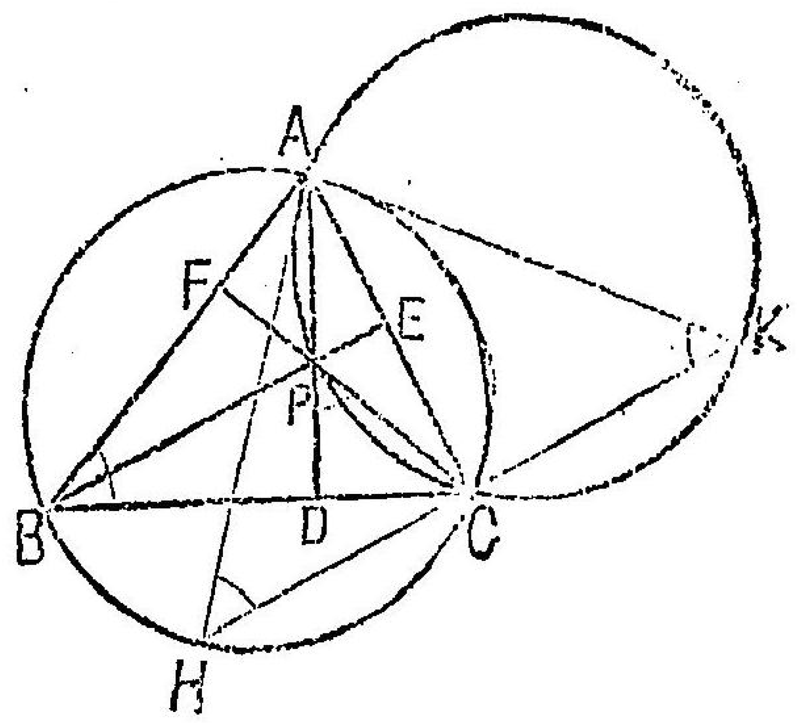
三角形ヲABCトシ其垂心ヲPトス,然ルトキハA, B, C, Pノ中ノ孰レカ三個ヲ過グル圓周ハ相等シ.

(証) AP, BP, CPト各邊トノ交点ヲD, E, Fトス

今A, B, Cヲ過グ圓周及ビA, P, Cヲ過グル圓周ヲ作ル,

而シテ圓周ABCノ直徑ヲAHトシ圓周APCノ直徑ヲAKトシ

HC, CKヲ結ブ,



今弓形ACH, 弓形ACKハ共ニ半圓ナリ

$\therefore \quad \angle ACH = \angle ACK =$ 直角 (137.定理)

故ニCH, CKハ壹直線ヲナス.

又□APCKハ内接四角形ナリ.

$\therefore \quad \angle K = \angle DPC$ (141.推論)

然ルニ□PFBDニ於テ$\angle PFB = \angle PDB =$ 直角ナリ,

故ニ□PFBDハ内接四角形ナリ (141.推論)

$\therefore \quad \angle DPC = \angle FBD$ (140.推論)

$\therefore \quad \angle K = \angle FBD$

然ルニ $\angle FBD = \angle AHC$ (135.推論)

$\therefore \quad \angle K = \angle AHC$

$\therefore \quad AH = AK$

即チ圓周APC及圓周ABCハ其直徑相等シ

故ニ此兩圓周ハ相等シ.

同様ニA, P, Bヲ過グル圓周及ビB, P, Cヲ過グル圓周ハ孰レモA, B, Cヲ過グル圓周ニ等シ.

故ニ題意ノ如シ.

19. 三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ点ヨリ各邊ニ下セル垂線ノ底ハ壹直線上ニアリ

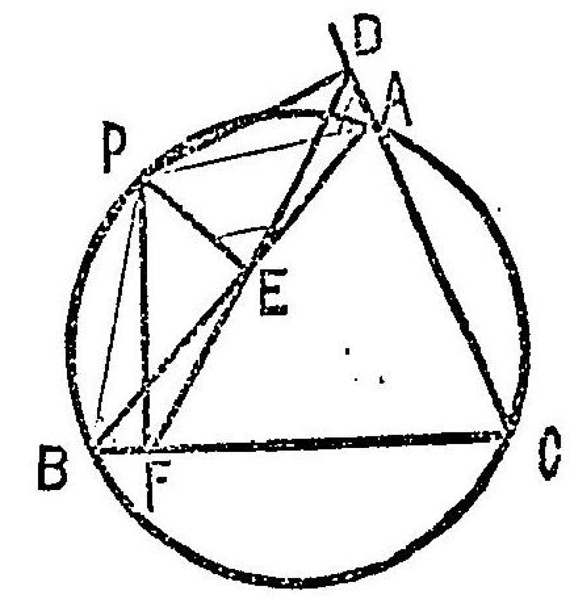
三角形ABCノ外接圓周上ノ任意ノ壹點Pヨリ各邊ニ下セル垂線ノ底D, E, Fハ壹直線上ニアリ.

(證) DE, EFヲ結ビDE, EFハ壹直線ヲナスコトヲ証セントス

PA, PBヲ結ブ

今$\angle PEB = \angle PFB =$ 直角

故ニ四點P, E, F, Bハ同一ノ圓周上ニアリ, (136.定理)



$\therefore \quad \angle PEF + PBF = 2$ 直角 (139.定理)

然ルニ□APECハ内接四角形ナルヲ以テ,

$\therefore \quad \angle PBF = \angle DAP$

$\therefore \quad \angle PEF + \angle DAP = 2$ 直角

而シテ $\angle PDA + \angle PEA = 2$ 直角ナリ,

故ニ□PDAEハ内接四角形ナリ. (141.定理)

$\therefore \quad \angle DAP = \angle PED.$ (135.推論)

$\therefore \quad \angle PEF + \angle PED = 2$ 直角.

故ニ DE, EFハ壹直線ヲナス,

故ニ三點D, E, Fハ壹直線上ニアリ

(注意) 直線DEFヲ「P點ニ於ケル△ABCしむそん線」トイフ.

20. 壹點ヨリ三角形ノ各邊ニ下セル垂線ノ底ガ壹直線上ニアルトキハ其點ハ其三角形ノ外接圓周上ニアリ.

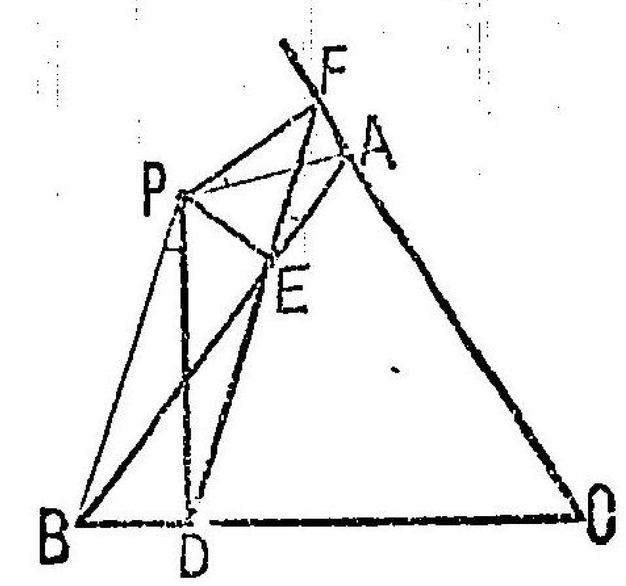
三角形ヲABCトシ壹點ヲPトス,

然ルトキハPヨリBC, AB, CAニ下セル垂線ノ底D, E, Fガ壹直線上ニアレバPハ△ABCノ外接圓周上ニアリ

(證) PA, PBヲ結ブ

$\angle PFA + \angle PEA = 2$ 直角

故ニ□PFAEハ内接四角形ナリ



$\therefore$ $\angle APF = \angle AEF$ (135. 推論) (1)

又 $\angle PEB = \angle PDB =$ 直角ナルヲ以テ四點 P, E, D, B ハ同一ノ圓周上ニアリ, (136. 定理)

$\therefore$ $\angle BPD = \angle BED$ (135. 定理) (2)

然ルニ $\angle BED = \angle AEF$

故ニ(1)(2)ヨリ $\angle BPD = \angle APF$

此等角ノ各ヘ $\angle APD$ ヲ加フレバ

$$\angle APB = \angle DPF$$

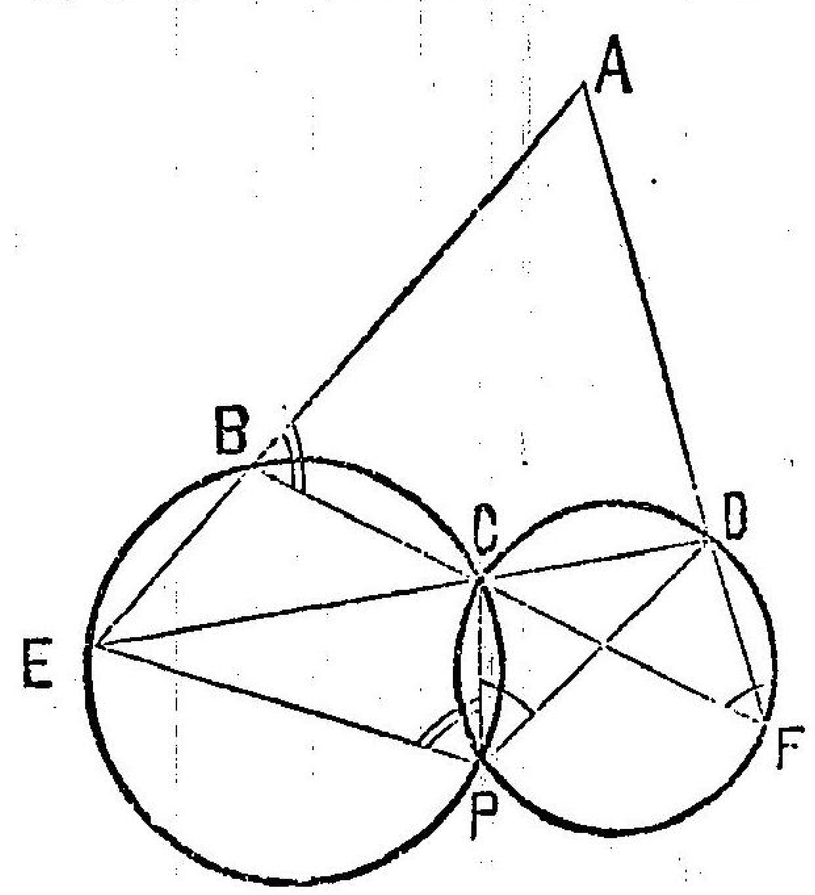
然ルニ $\angle PFC = \angle PDC =$ 直角ナルヲ以テ

$$\angle C + \angle DPF = 2 \text{直角}$$

$$\therefore \quad \angle C + \angle APB = 2 \text{直角}$$

故ニ□APBC ハ内接四角形ナリ. (141. 定理) 即チ題意ノ如シ.

21. 四角形 ABCD ノ各對邊ノ引張線ノ交點ヲ E, F トス, 然ル𪜈ハ四個ノ三角形 AED, ABF, EBC, CDF ノ各外接圓周ハ同壹ノ點ニ於テ交ル.



(證) △EBC, △CDF ノ外接圓ヲ作リ, 此兩圓周ノ交點ヲ P トシ PE, PD, PC ヲ結ブ

今□BCPE ハ内接四角形ナリ,

$\therefore$ $\angle CPE = \angle ABC$ (140. 推論)

又 $\angle CPD = \angle CFD$ (135. 推論)

此二式ヲ加フレバ

$$\angle EPD = \angle ABF + \angle CFD$$

然ルニ $\angle ABF + \angle CFD + \angle A = 2$ 直角 (86. 定理)

$$\therefore \quad \angle EPD + \angle A = 2 \text{直角}$$

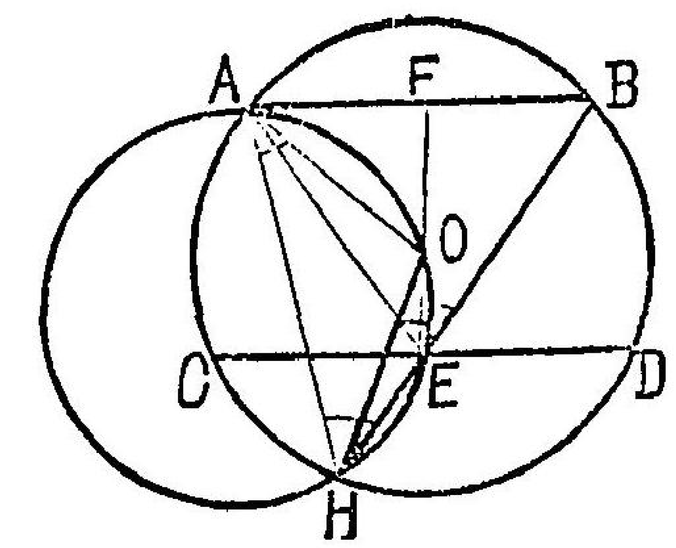
故ニ□ADPE ハ内接四角形ナリ, (141. 定理)

即△AED ノ外接圓周ハ P ヲ過グ

同樣ニ△ABF ノ外接圓周モ P ヲ過グ

故ニ題意ノ如シ

22. O ヲ中心トスル圓ノ平行弦ヲ AB, CD トシ CD ノ中央點ヲ E トス然ル𪜈ハ三點 A, O, E ヲ過グル圓周ト圓周 ABC トノ交點ヲ H トスレバ B, E, H ハ壹直線上ニアリ.



(證) BE, EH ヲ結ビ, BE, EH ハ壹直線ヲナスヲ證セントス

EO, OA, OH, AE, AH ヲ結ビ EO ト AB トノ交點ヲ F トス,

□AOEH ハ内接四角形ナリ,

$\therefore$ $\angle OEH + \angle OAH = 2$ 直角,

然ルニ $AO = OH$ ナルヲ以テ

$$\angle OAH = \angle OHA$$

$\therefore$ $\angle OEH + \angle OHA = 2$ 直角

然ルニ $\angle OHA = \angle AEO$ (135. 推論)

$\therefore$ $\angle OEH + \angle AEO = 2$ 直角 (a)

今 E ハ CD ノ中央點ナリ, 故ニ $OE \perp CD$ ナリ, (125. 推論)

而シテ $AB \parallel CD$ ナルヲ以テ $OF \perp AB$

從ツテ F ハ AB ノ中央點ナリ (126. 推論)

故ニ兩三角形 AFE, FEB ニ於テ

EF ハ共通邊,

$AF = FB$,

$\angle AFE = BFE =$ 直角. $\therefore$ $\triangle AEF \equiv \triangle EFB$

$\therefore$ $\angle AEO = \angle FEB$,

故ニ (a) 式ヨリ $\angle OEH + \angle FEB = 2$ 直角,

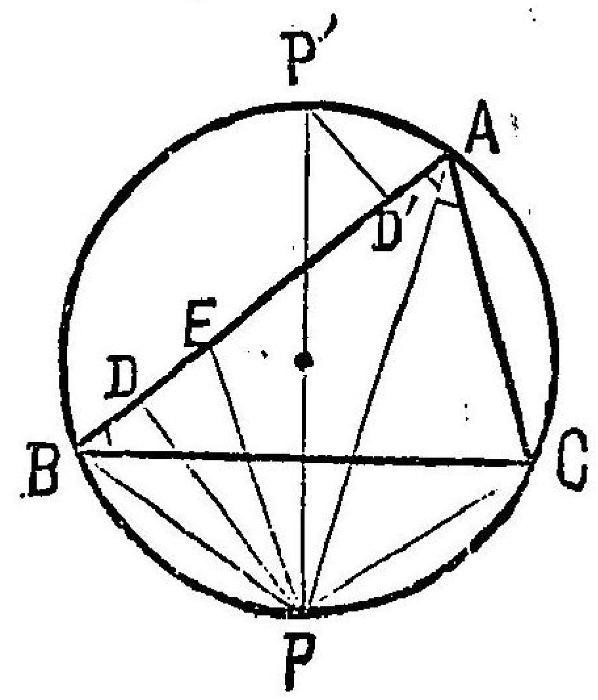
故ニ BE, EH ハ壹直線ヲナス.

23. 三角形 ABC ノ A 角ノ等分線ト其外接圓周トノ交點ヲ P トシ, P ヨリ壹邊 AB ニ垂線 PD ヲ作ル𪜈ハ

$$AD = \tfrac{1}{2}(AB + AC) \quad \text{及} \quad BD = \tfrac{1}{2}(AB - AC).$$

(次ノ頁ノ圖ヲ見ヨ)

（證）PB, PC ヲ結ブ.



AB上ニ壹點 E ヲ取リ AE ヲシテ

AC ト等長ナラシメ PE ヲ結ブ

然ルトキハ兩三角形 APC, APE ニ於テ

AP ハ共通邊

$AC = AE$　（作法）

$\angle PAC = \angle PAE$（假設）

$\therefore\ \triangle APC = \triangle APE,$

$\therefore\ CP = PE.$　(a)

今 $\angle PAC = \angle PAB$ $\therefore$ 弧 PC = 弧 PB

$\therefore$ 弦 PC = 弦 PB

故ニ (a) ニヨリテ　$PE = BP$

故ニ兩三角形 PDE, PDB ニ於テ

PD ハ共通邊

$PE = PB$

$\angle PDE = \angle PDB$　$\therefore$　$\triangle PDE \equiv \triangle PDB,$

$\therefore$　$DE = BD,$　(b)

故ニ　$AB + AC = AD + DB + AC$　（作法）

$= AD + DE + AE$　[(b) ニヨル]

$= 2AD,$

$\therefore$　$AD = \frac{1}{2}(AB + AC).$　[初メノ證]

又　$BD = \frac{1}{2}BE$　[(b) ニヨル]

$= \frac{1}{2}(AB - AE)$

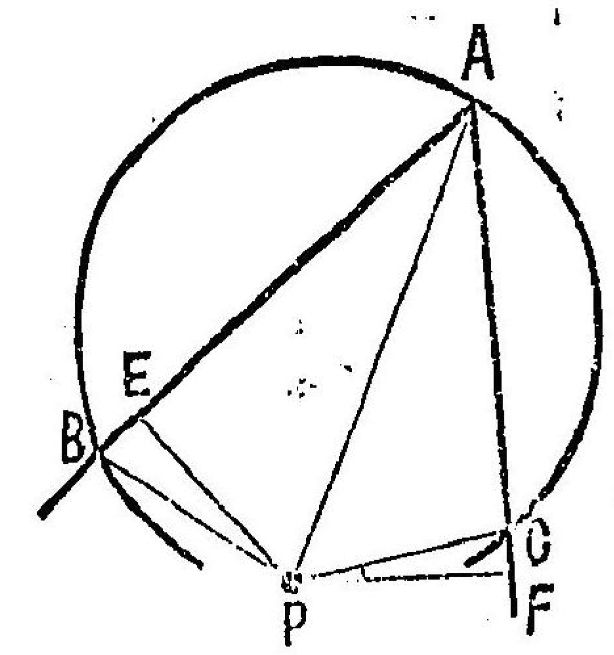
$= \frac{1}{2}(AB - AC)$　[後ノ證]

（注意）P ヲ過グル直徑ノ他ノ壹端 P′ ヨリ AB ニ垂線 P′D′ ヲ下ストキハ $B'D' = \frac{1}{2}(AB + AC)$, 及ビ $AD' = \frac{1}{2}(AB - AC)$ ナリ

之ヲ證スルニハ AB ノ引張線上ニ於テ E′ ヲ取リ AE′ ヲ AC ト等長ナラシメ PB, I′EP′, C ヲ結ビ前ト同樣ナル方法ニヨルナリ.

24. 定角ノ角頂ヲ通過シ且ツ其貳邊ニ B, C ニ於テ交ル所ノ諸圓周ハ壹定點ヲ過グ, 但シ AB + BC ハ恆ニ定長ノ直線ニ等シキモノトス.

（證）定長ノ直線ヲ l トス



諸圓周ノ壹個ヲ BAC トス

即チ $AB + AC = l$ トス.

今定角ノ壹邊上ニ壹點 E ヲ取リ

AE ヲ $\frac{1}{2}l$ ニ等シカラシム.

E ニ於テ AB ニ直交スル直線ト,

A角ノ等分線トノ交點ヲ P トシ, PB

PC ヲ結ビ P ヨリ AC ニ垂線 PF ヲ作ル.

然ルトキハ兩三角形 APE, APF ニ於テ

AP ハ共通邊

$\angle PAF = \angle PAE$

$\angle F = \angle E =$ 直角　$\therefore$　$\triangle PAF \equiv \triangle PAE$

$\therefore$　$AF = AE = \frac{1}{2}l$

$\therefore$　$AF + AE = l$

又　$AB + AC = l$

$\therefore$　$AF + AE = AB + AC$

上式ノ各邊ヨリ AE + AC ヲ減セバ　$CF = BE$

故ニ兩三角形 PCF, PBE ニ於テ

$CF = BE$

$PF = PE$　$\therefore$　$\triangle PAF \equiv \triangle PAE$

$\angle F = \angle E =$ 直角　$\therefore$　$\triangle PFC = \triangle PEB$

$\therefore$　$\angle FPC = \angle EPB$

上式ノ各邊ヘ $\angle CPE$ ヲ加フレバ　$\angle EPF = BPC$

然ルニ $\angle E + \angle F = 2$ 直角. $\therefore \angle BAC + \angle EPF = 2$ 直角.

$\therefore \angle BAC + \angle BPC = 2$ 直角.

故ニ□ABPC ハ內接四角形ナリ,　　(141. 定理)

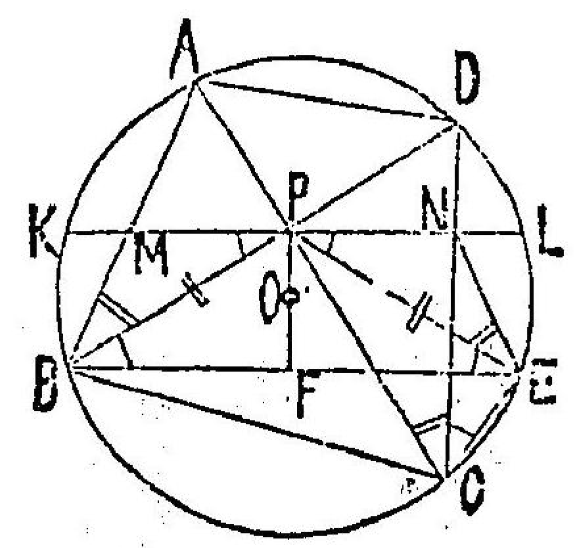
故ニ圓周 BAC ハ P ヲ過グ,

同樣ニ他ノ諸圓周ハ孰レモ P 點ヲ過グ,

故ニ題意ノ如シ.

25. 內接四角形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ P トシ, P ヲ過グル最短弦 KL ガ對邊 AB, CD ニ交ル點ヲ M, N トス, 然ルヰハ PM = PN ナリ.

(證) 四角形 ABCD ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ OP ヲ結ビ, B ヨリ KL ニ平行スル弦 BE ヲ引キ PE, EN, EC ヲ結ビ OP ト BE トノ交點ヲ F トス.



今 KL ハ P ヲ過グル最短ノ弦ナリ,

$\therefore\ OP \perp KL$　　(130. 推論)

而シテ　$BE \parallel KL$　$\therefore\ OP \perp BE$

$\therefore\ BF = FE$　　(126. 定理)

故ニ兩三角形 PFB, PFE ニ於テ

$BF = FE$

PF ハ共通邊

$\angle PFB = \angle PFE =$ 直角　$\therefore\ \triangle PFB \equiv \triangle PFE$

$\therefore\ PB = PE$　　(1)

及　$\angle PBF = \angle PEF$　　(2)

然ルニ $KL \parallel BE$　$\therefore\ \angle MPB = \angle PBF$

及　$\angle NPE = \angle PEF$

故ニ (2) ニヨリテ　$\angle MPB = \angle NPE$　　(3)

又 $\angle NPE = \angle MPB$　[(3) ニヨル]

$= \angle PBE$　(錯角)

$= \angle DCE$　(135 定理)

故ニ四點 N, P, C, E ハ同一ノ圓周上ニアリ

$\therefore\ \angle PEN = \angle PCN$

然ルニ　$\angle PCN = \angle ABD$　　(135. 推論)

$\therefore\ \angle PEN = \angle ABD$　　(4)

(1)(3)(4) ニヨリ　$\triangle PEN \equiv \triangle PBM$

$\therefore\ PN = PM.$

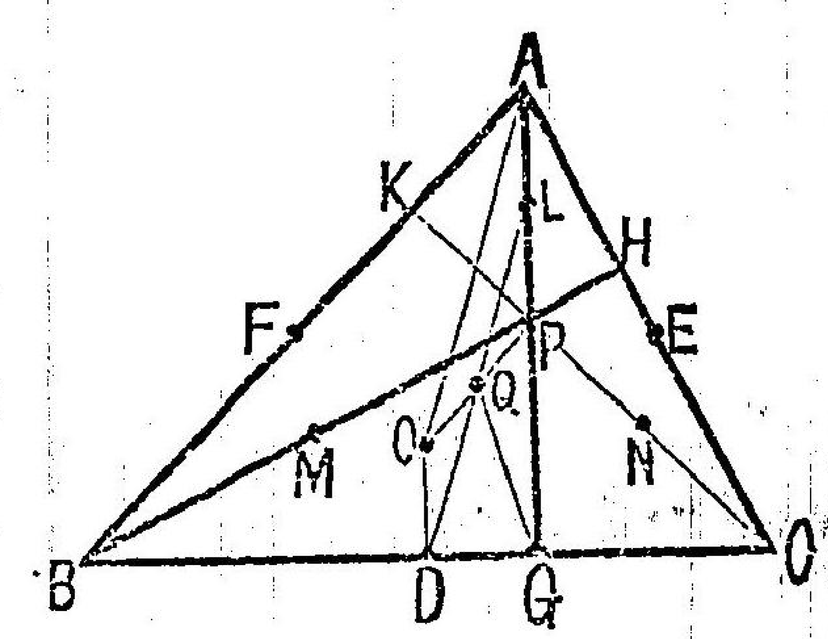
(注意) 弦 KL ノ引張線ガ AD, BC ノ引張線ニ交ル點ヲ N′, M′ トスルヰハ PN′ = PM′ トナルナリ

而シテ其證明ハ殆ンド前ト同樣ナルヲ以テ之ヲ省略ス.

26. 任意ノ三角形ニ於テ, 各邊ノ中央點, 及ビ各角頂ヨリ其對邊ニ下セル垂線ノ底, 併ビニ各角頂ト垂心トノ距離ノ中央點ハ同壹ノ圓周上ニアリ (此圓ヲ其三角形ノ九點圓ト稱ス).

三角形ヲ ABC トシ各邊ノ中央點ヲ D, E, F トシ, 各角頂ヨリ其對邊ニ下セル垂線ノ底ヲ G, H, K トシ, 各角頂ト垂心 P トノ距離ノ中央點ヲ L, M, N トス,

然ルヰハ九點 D, E, F, G, H, K, L, M, N ハ同壹ノ圓周上ニアリ.



(證) 三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ其半徑ヲ R トス, OP, OA, OD ヲ結ビ OP ノ中央點ヲ Q トシ QL, QD, QG ヲ結ブ

今 O ハ △ABC ノ外接圓ノ中心ニシテ D ハ BC ノ中央ナリ,

故ニ $OD \perp BC$ ナリ　　(125. 推論)

$\therefore\ OD = \frac{1}{2}AP$　(第壹編 第三節 例題 22.)

$= LP.$

故ニ兩三角形 OQD, LQP ニ於テ

$OQ = QP$

$\angle QOD = \angle QPL$ (錯角)

$\angle QDO = \angle QLP$ (")　$\therefore$　$\triangle OQD \equiv \triangle LQP$

$\therefore$　$QD = LQ$　(1)

及　$\angle OQD = \angle LQP$

然ルニOQPハ壹直線ナル故　$\angle LQP + \angle OQL = 2$直角

$\therefore$　$\angle OQD + \angle OQL = 2$直角

故ニLQ, QDハ壹直線ナリ.

而シテQハLDノ中央ニシテ[(1)ヲ見ヨ]且ツ$\angle LGD =$直角ナルヲ以テ第壹編第三節例題8.ニヨリ

$$QL = QG = QD$$

然ルニ$\triangle APO$ニ於テ

$AL = LP$

$OQ = PQ$　$\therefore$　$QL = \frac{1}{2}AO$　(99推論)

$= \frac{1}{2}R$

$\therefore$　$QL = QG = QD = \frac{1}{2}R$

即チQヨリ三點L, G, Dニ到ル距離ハ$\frac{1}{2}R$ニ等シ,

同理ニヨリQヨリ三點F, K, N及ビ三點E, H, M,ニ到ル距離ハ孰レモ$\frac{1}{2}R$ニ等シ,

故ニ九點D, E, F, G, H, K, L, M, NハQヲ中心トシ$\frac{1}{2}R$ヲ半徑トセル圓周上ニアリ

(注意, 上ノ解說ニヨリテ次ノ諸件ノ眞ナルヲ知ル

(I)　三角形ノ九點圓ノ半徑ハ其三角形ノ外接圓ノ半徑ノ二分ノ壹ニ等シ.

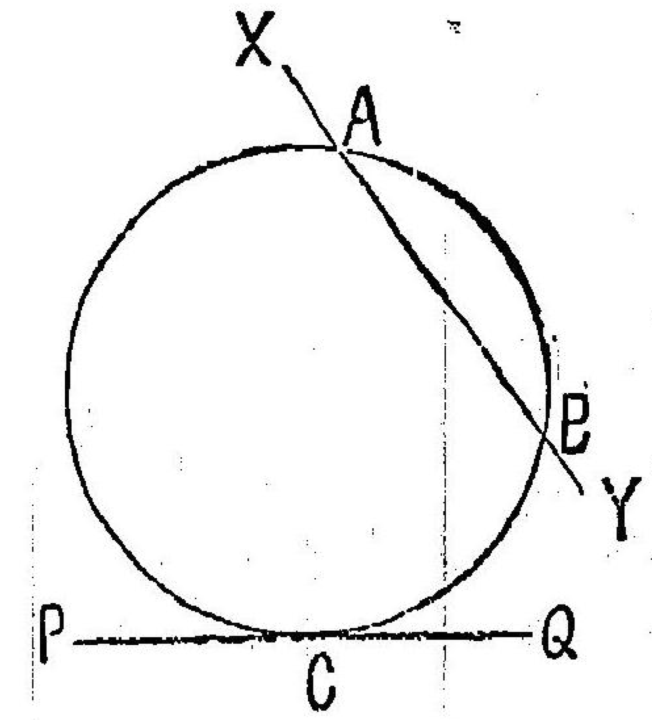
(II)　三角形ノ九點圓ノ中心ハ其三角形ノ垂心ト外心トヲ結ベル直線ノ中央ニアリ.

第四節—切線,割線

定義

142. 割線(*Secant*)　貳点ニ於テ壹圓周ニ交ル無限直線ヲ其圓ノ割線トイフ.

切線(*tangent*)　唯壹点ノミニ於テ壹圓周ニ交ル無限直線ヲ其圓ノ切線トイフ,而シテ其交点ヲ切点トイフ.



例ヘバ左圖ニ於テ貳点A,Bニ於テ圓周ニ交ル直線XYハ其圓ノ割線ナリ.

又圓周トC点ノミニ於テ交ル直線PQハ其圓ノ切線ナリ而シテC点ヲ切点ト稱ス.

場合ニ於テ直線PQハCニ於テ圓ニ切ストイヒ,又圓ハCニ於テ直線PQニ切ストイフコアリ.

定理貳拾

143. 圓周上ノ壹点ヲ過グル諸直線ノ中ニテ,其点ニ到ル半徑ニ直立スルモノハ切線ニシテ,斜交スルモノハ割線ナリ.

圓周OD上ノ壹点ヲAトシ,中心ヲOトシOAヲ結ブ,然ルトキハ

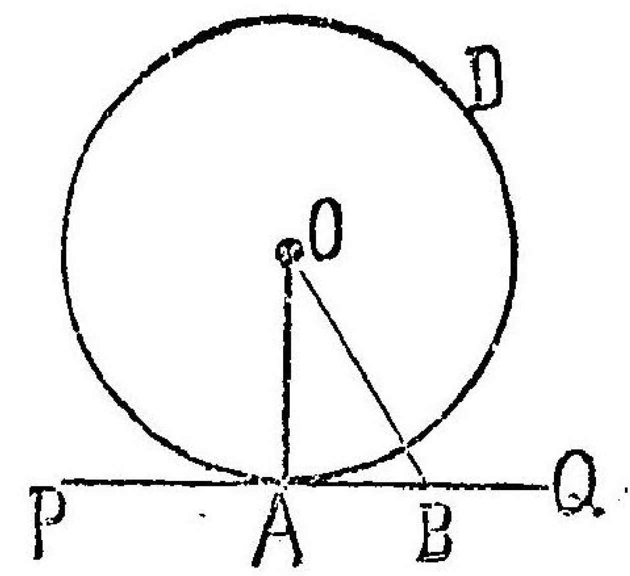
(第壹)　Aニ於テOAニ直立スル直線ハ切線ナリ.

(第貳)　Aニ於テAOニ斜交スル直線ハ割線ナリ.

(証)　Aニ於テOAニ直立スル直線ヲPQトス.

直線PQノ上ニ於テAノ外ニ壹点Bヲ取リ,OBヲ結ブ.

然ルトキハ OA ハ PQ ニ直立ナルヲ以テ OB ハ PQ ニ對シテ斜線ナリ



∴ $OB>OA$　(167. 定理)

即チ OB ハ圓形 OD ノ半徑ヨリ大ナリ

故ニ B 点ハ圓形 OD ノ外方ノ点ナリ。

同様ニ直線 PQ 上ノ諸点(A ノ外ノ)ハ孰レモ圓形 OD ノ外方ニ在リ

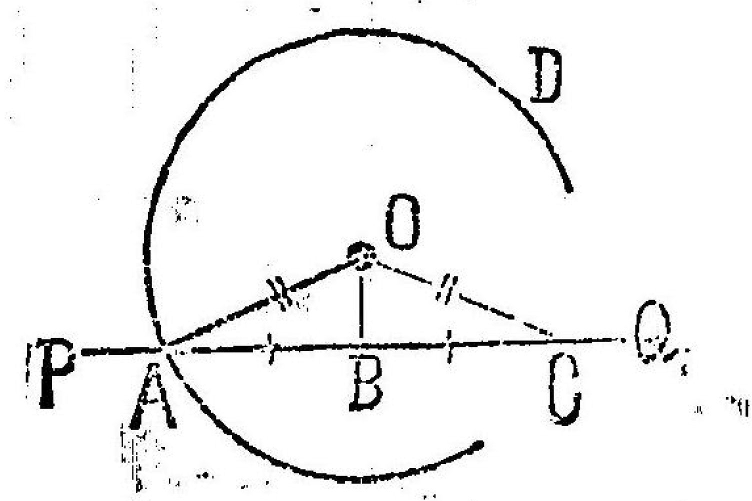
故ニ直線 PQ ハ唯 A 点ノミニ於テ圓周ニ交ル,

故ニ直線 PQ ハ圓形 OD ノ切線ナリ.

(第貳) A ニ於テ OA ニ斜交スル直線ヲ PQ トス,

O ヨリ PQ ニ垂線 OB ヲ引キ,

PQ ノ上ニ於テ壹点 C ヲ取リ A, C トヲ B ノ異側ニアラシメ,且ツ BC ヲ AB ト等長ナラシメ OC ヲ結ブ,



然ルトキハ　$OB\perp AC$,

且　$BC=AB$,

∴　$OC=OA$. (101. 定理)

即チ OC ハ圓形 OD ノ半徑ナリ,

故ニ C ハ圓周 OD 上ノ点ナリ,

故ニ直線 PQ ハ二点 A, C ニ於テ圓周 OD ニ交ル,

故ニ直線 PQ ハ圓形 OD ノ割線ナリ.

144. 推論 圓周上ノ壹点 A ニ於テ唯壹個ノ切線ヲ引クヿヲ得,而シテ唯壹個ニ限ル.

(証) 中心 O ト A トヲ結ビ A ニ於テ OA ニ垂線 PQ ヲ引ク(143. ノ第壹ニ於ケル圖ヲ用ユ).

然ルトキハ直線 PQ ハ A ニ於テ圓形 OD ニ切ス　(143. 定理)

即チ圓周 OD 上ノ壹点 A ニ於テ圓周ニ切線ヲ引クヿヲ得

而シテ A ヲ過グル他ノ諸直線ハ凡ヘテ OA ニ斜交ス

故ニ此等ノ諸直線ハ此圓ノ割線トナル,　(143. 定理)

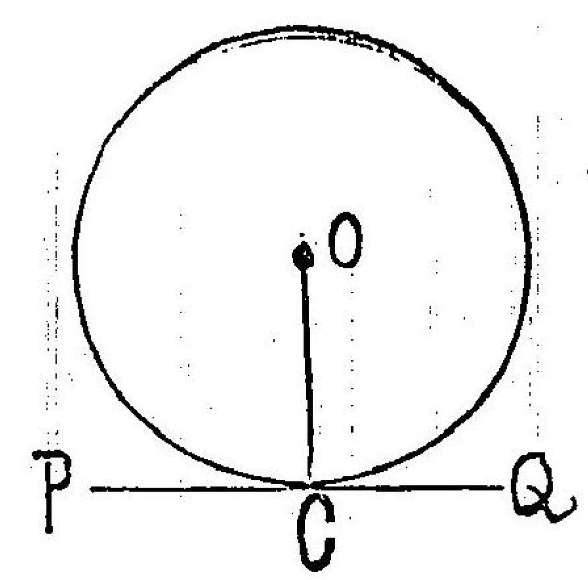
故ニ A ニ於ケル切線ハ單ニ PQ ノミナリ.

定理貳拾壹

145. 壹圓ノ切線ハ切点ニ到ル半徑ニ直立ス.

壹圓 OD (O ハ其中心) ノ切線ヲ PQ トシ,其切点ヲ C トシ, OC ヲ結ブ,

然ルトキハ PQ ハ OC ニ直立ス.　(143. 定理)



(証) PQ 若シ OC ニ斜ナルトキハ PQ ハ C ノ外ノ壹点ニ於テ再ビ圓周ニ交リ,即チ PQ ハ割線トナル,

是レ不合理ナリ,

故ニ PQ ハ C ニ於テ OC ニ斜交セズ.

故ニ PQ ハ C ニ於テ OC ニ直立ス.

定理貳拾貳

146. 圓外ノ壹定点ヨリ其圓ニ唯貳個ノ切線ヲ引クヿヲ得

圓形ヲ OD (O ハ其中心) トシ其外方ノ壹定点ヲ A トス,

然ルトキハ A ヨリ其圓ニ貳個ノ切線ヲ引クヿヲ得,而シテ唯貳個ノミニ限ル.

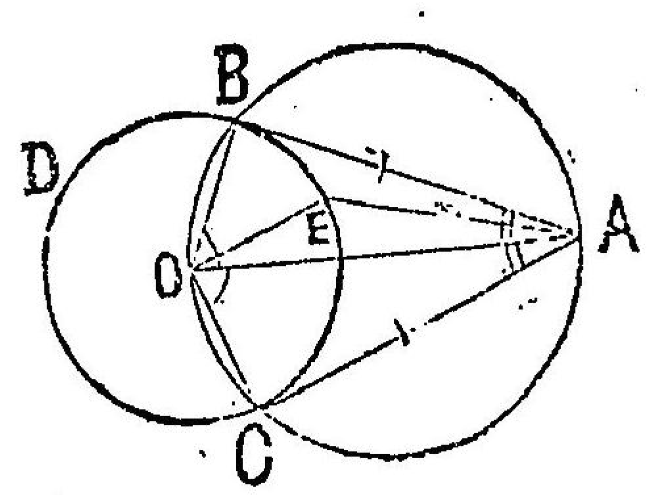
(証) OA ヲ結ビ, OA ヲ直徑トシテ壹個ノ圓ヲ作リ此圓周ト圓周 OD トノ交点ヲ B, C トシ OB, OC ヲ結ブ.

今弓 OBA ハ半圓ナリ,

$\therefore\ \angle OBA =$ 直角,

$\therefore\ OB \perp AB$,

故ニ AB ハ切線ナリ (43 定理)



同樣ニ AC ハ圓 OD ノ切線ナリ,

即チ定点 A ヨリ弐個ノ切線ヲ引クコヲ得.

又 A ヲ過ギテ AB, AC ノ外ニ任意ノ直線 AE ヲ引キ, 圓周 OD トノ交点ヲ E トス.

然ルキハ E ハ弐個ノ半圓周 OBA, OCA ノ外ノ点ナリ,

故ニ $\angle OEA$ ハ直角ナラズ,

故ニ AE ハ OE ニ斜交ス.

故ニ AE ハ切線ナラズ

故ニ A ヨリ圓形 OD ニ畫ケル切線ハ AB, AC ノ弐個ノミニ限ル

147. 推論 圓形 OD ノ外方ノ壹点 A ヨリ其圓ニ引キタル弐切線ヲ AB, AC トシ OB, OC, OA, BC ヲ結ブキハ (前章ノ圖)

(1) $AB = AC$.

(2) 直線 AO ハ $\angle BOC$ 及ビ $\angle BAC$ ヲ弐等分ス.

(3) $\angle ABC = \angle ACB$.

(証) $\triangle ABO$, $\triangle ACO$ ニ於テ

$\angle ABO = \angle ACO =$ 直角,

$OB = OC$,

OA ハ共通邊, $\therefore\ \triangle OBA \equiv \triangle OCA$

$\therefore\ AB = AC$ 〔(1) ノ証〕

且 $\angle AOB = \angle AOC$ 〔(2) ノ証〕

及ビ $\angle BAO = \angle OAC$ 〔 „ 〕

又 $AB = AC$ ナルヲ以テ $\angle ABC = \angle ACB$ 〔(3) ノ証〕

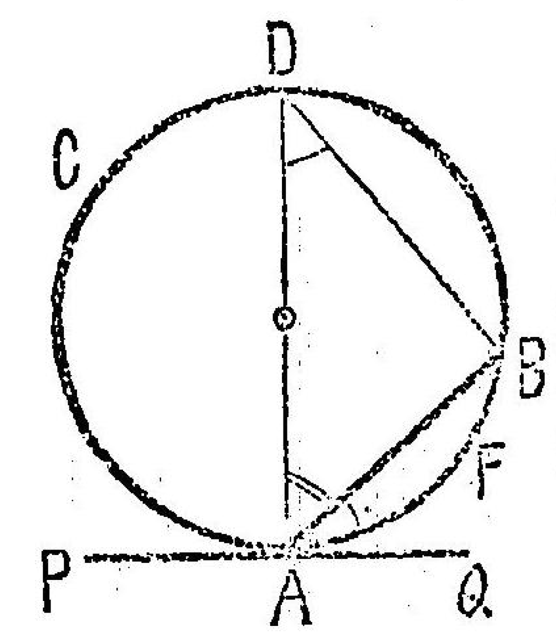
定理貳拾三

148. 壹圓ノ切線ト其切点ヨリ引ク弦トニテ成ル角ハ其角ノ外方ニ於テ其弦ニテ分タレタル弓形内ノ角ニ等シ.

PQ ヲ圓 ACBF ノ切線トシ, 切点ヲ A トシ, A ヨリ引キタル弦ヲ AB トス,

然ルキハ $\angle BAQ$ ハ此角ノ外方ニ於テ AB ニテ分タレタル弓形 ACB 内ノ角ニ等シク, 又角 BAP ハ弓形 AFB 内ノ角ニ等シ,

(証) A ヲ過グル直徑 AD ヲ引キ DB ヲ結ブ,



然ルキハ PQ ハ A ヲ過グル切線ニシテ AD ハ A ヲ過グル直徑ナルヲ以テ $\angle DAQ =$ 直角ナリ,

故ニ $\angle BAQ$ ハ $\angle BAD$ ノ餘角ナリ,

又弓形 DAB ハ半圓ナルヲ以テ $\angle DBA$ ハ直角ナリ,

故ニ $\angle D$ ハ $\angle BAD$ ノ餘角ナリ,

斯ノ如ク $\angle BAQ$, 及ビ $\angle D$ ハ共ニ $\angle BAD$ ノ餘角ナリ;

$$\therefore\ \angle BAQ = \angle D.$$

而シテ弓形 ACB 内ノ諸角ハ凡ヘテ $\angle D$ ニ等シ. (135. 定理)

故ニ $\angle BAQ$ ハ弓形 ACB 内ノ角ニ等シ.

又 $\angle BAP$ ハ $\angle BAQ$ ノ補角ニシテ, 弓形 BFA 内ノ角ハ弓形 ACB 内ノ角ノ補角ナリ,

故ニ $\angle BAP$ ハ弓形 BFA 内ノ角ニ等シ.

149. 推論 圓周上ノ壹点ヲ過グル壹直線ト其点ヨリ引キタル弦トニテ成ス角ガ其角ノ外方ニ於テ其弦ニテ分タル弓形内ノ角ニ等シキハ其直線ハ切線ナリ.

圓周上ノ壹点 A ヲ過ギテ壹直線 PQ 及ビ弦 AB ヲ引ク (前章ノ圖ヲ用ユ)

然ルトキハ $\angle BAQ$ ガ其角ノ外方ニ在ル弓形 ACB 内ノ角ニ等シキトキハ PQ ハ A ニ於ケル切線ナリ.

(証) A ヲ過グル直徑 AD ヲ引キ DB ヲ結ブ,

然ルトキハ $\angle D$ ハ弓形 ACB 内ノ角ニ等シ,

$$\therefore \angle D=\angle BAQ$$

今 AD ハ直徑ナルヲ以テ弓形 DBA ハ半圓形ナリ, 故ニ $\angle B$ ハ直角ナリ.

$$\therefore \angle D+\angle DAB=\text{直角}$$

$$\therefore \angle BAQ+\angle DAB=\text{直角},\quad \therefore AD\perp PQ$$

故ニ PQ ハ A ニ於ケル切線ナリ. (143. 定理)

定理貳拾四

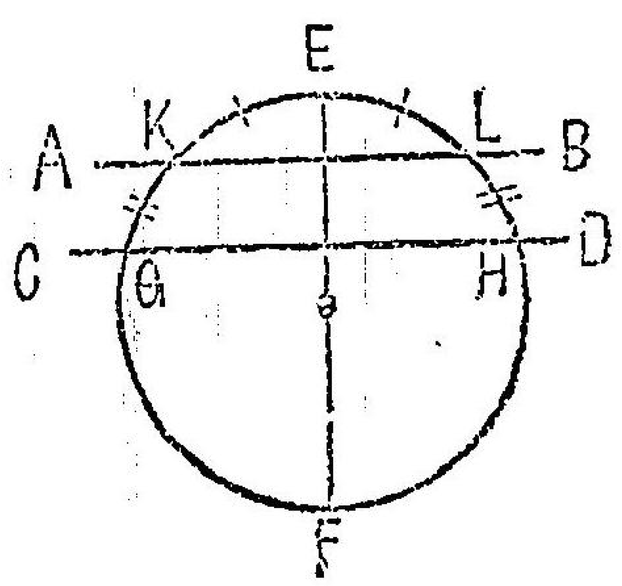
150. 壹圓周ニ交ルベキ平行貳直線ハ其圓周上ニ於テ等長ノ弧ヲ截リ取ル

圓周ニ交ルベキ平行貳直線ヲ AB, CD トス,

然ルトキハ AB, CD ハ圓周ヨリ等長ノ弧ヲ截リ取ル,

(証)〔第壹〕 AB, CD ハ共ニ割線ナル場合.

AB, CD ガ圓周ニ交ル点ヲ K,L,G, H トス,



KL ニ直立ナル直徑 EF ヲ引クトキハ E ハ弧 KEL ノ中央点ナリ,

$\therefore$ 弧 EK=弧 LE, (1)

又 $AB /\!/ CD$ ナルヲ以テ $EF\perp GH$,

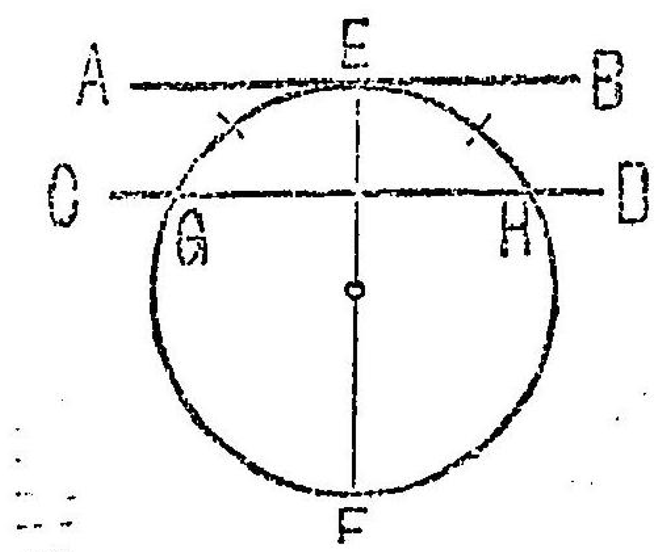
故ニ E ハ弧 GEH ノ中央点ナリ,

$\therefore$ 弧 GE=弧 EH (2)

(2) 式ノ各邊ヨリ (1) 式ノ各邊ヲ減ズレバ 弧 KG=弧 LH,

〔第貳〕 AB, CD ノ壹個例ヘバ AB ハ切線ニシテ他ノ壹個ハ割線ナル場合.

切点ヲ E トシ, E ヲ過グル直徑 EF ヲ引キ CD ト圓周ノ交点ヲ G, H トス, 然ルトキハ



$EF\perp AB$ (145. 定理)

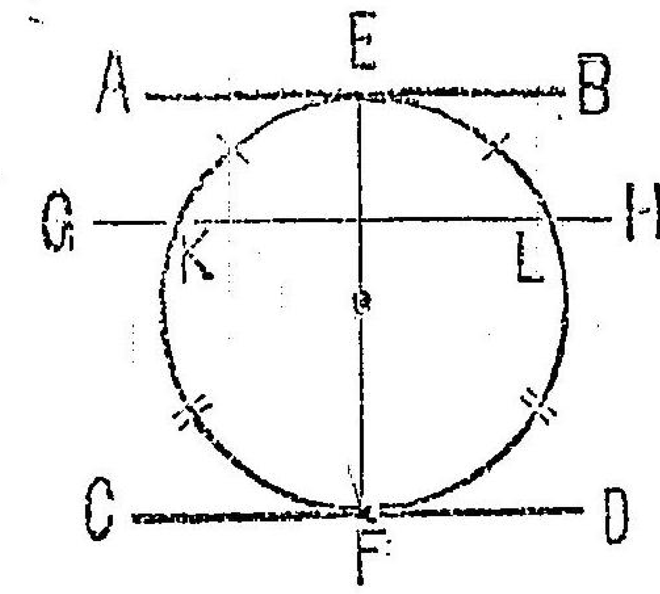
又 $AB /\!/ CD$ (假設)

$\therefore EF\perp CD$

$\therefore$ 弧 GE=弧 EH (126. 定理)

〔第三〕 AB, CD ガ共ニ切線ナル場合.

各切点ヲ E, F トス. 今 AB ニ平行ナル任意ノ割線 GH ヲ引キ GH ト圓周トノ交点ヲ K, L トス,



然ルトキハ $CD /\!/ AB$, (假設)

又 $GH /\!/ AB$, (作法)

$\therefore GH /\!/ CD$, (32. 定理)

$\therefore$ 弧KF=弧LF (第二)

又 弧KE=弧EL ($\because GH /\!/ AB$)

上ノ二式ヲ加フルトキハ

弧 EKF=弧 ELF,

151. 推論壹 貳直線 AB, CD ガ〻個ノ圓周上ニ於テ等長ノ弧ヲ夾ムトキハ此貳直線ハ平行ス, 但シ此貳直線ハ其圓内ニ於テ相交ラザルモノトス,

(証)〔第壹〕 AB, CD ガ共ニ割線ナル場合.

AB, CD ガ圓周ニ交ル点ヲ K, L, G, H トス (前章第壹ノ圖ヲ用ユ)

弧 KL ノ中央点ヲ E トシ E ヲ過グル直徑 EF ヲ引ク,

今 弧 KG=弧 LH (假設)

又 弧 EK=弧 EL (作法)

上ノ二式ヲ加ヘテ 弧 EKG=弧 ELH

$\therefore GH\perp EF$, (125. 定理)

又弧 EK=弧 EL $\therefore KL\perp EF$, (〃)

$GH /\!/ KL$

〔第貳〕 AB, CD ノ中ノ壹個例ヘバ AB ガ切線ニシテ他ノ壹個ハ割線ナル場合.

切点ヲ E トシ E ヲ過グル直徑 EF ヲ引ク(前章第貳ノ圖ヲ用ユ).

今　弧 EG ＝ 弧 EH

∴　$EG \perp GH$,

又 AB ハ切線ナル故　$EF \perp AB$,

∴　GH // AB

〔第三〕 AB, CD 共ニ切線ナル場合.

各切点ヲ E, F トシ EF ヲ結ブ(前章第三ノ圖ヲ用ユ).

今　弧 EKF ＝ 弧 ELF

故ニ弧 EKF ハ半圓周ナリ,

故ニ EF ハ直徑ナリ,

而シテ AB, CD ハ直徑 EF ノ各端ニ於ケル切線ナリ,

故ニ AB, CD ハ共ニ EF ニ直立ス,

故ニ AB, CD ハ平行ス.

152. 推論貳 壹個ノ圓ノ平行貳切線ノ切点ヲ連結セル直線ハ其圓ノ直徑ナリ.

壹個ノ圓ノ平行貳切線ヲ AB, CD トシ,其各切点ヲ E, F トシ EF ヲ結ブ(前章第三ノ圖ヲ用ユ).

然ルトキハ直線 EF ハ直徑ナリ.

(証) 弧 EKF＝弧 ELF,　(假設)

故ニ弧 EKF ハ半圓周ナリ,

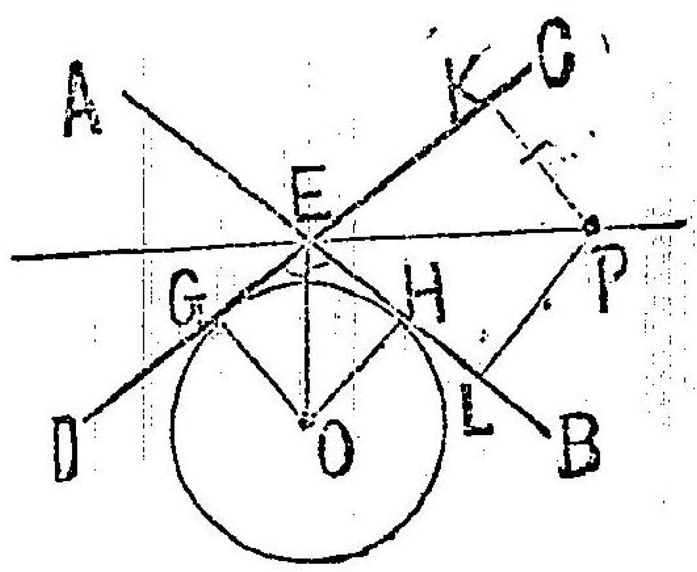
故ニ直線 EF ハ直徑ナリ.

第四節例題

1. 相交ル貳直線ノ各ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ其貳直線ノ交角ノ等分線ナリ.

相交ル貳直線ヲ AB, CD トシ其交点ヲ E トス.

然ルトキハ AB, CD ノ各ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ AB, CD ノ交角ノ等分線ナリ.



(証) AB, CD ノ交角ノ等分線上ニ任意ノ壹点 P ヲ取リ, P ヨリ AB, CD ニ垂線 PK, PL ヲ下ス,

今 AB, CD ノ交角ノ等分線ハ AB, CD ヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ.　(103. 定理)

∴　PK＝PL.

故ニ P ヲ中心トシ PK ヲ半徑トセル圓周ハ L ヲ過グ,

而シテ CD ハ其圓ノ半徑 PK ニ K ニ於テ直立シ,又 AB ハ半徑 PL ニ L ニ於テ直立ス,

故ニ AB, CD ハ其圓ニ切ス,

故ニ P ハ AB, CD ニ切スル圓ノ中心ナリ.

即チ AB, CD ノ交角ノ等分線上ノ点ハ此二直線ニ切スル圓ノ中心ナリ [是レ 100. ノ (1) ニ當ル]　(a)

又 AB, CD ニ切スル壹圓ノ中心ヲ O トシ,切点ヲ G, H トシ OG, OH, OE ヲ結ブ.

然ルトキハ △OEG, △OEH ニ於テ

EG＝EH,　　(147. 定理)

EO ハ共通邊.

∠G＝∠H＝直角.　　∴　△OEG≡△OEH,

∴　∠OEG＝∠OEH,

故ニ中心 O ハ AB, CD ノ交角ノ等分線上ニアリ,

故ニ AB, CD ノ各ニ切スル諸圓ノ中心ハ孰レモ AB, CD ノ交角ノ等分線上ニアリ [是レ 100. ノ (4) ニ當ル]　　(*b*)

(*a*) (*b*) ニヨリ AB, CD ノ各ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ AB, CD ノ交角ノ等分線ナルヿヲ知ル.

2. 圓周上ノ壹点 A ヨリ弍弦 AB, AC ヲ引キ, 又 A ニ於ケル切線ニ平行ナル直線ヲ B ヨリ引キ AC 若クハ其引張線トノ交点ヲ D トス, 然ルトキハ三点 B, D, C ヲ過グル圓周ハ AB ニ切ス.

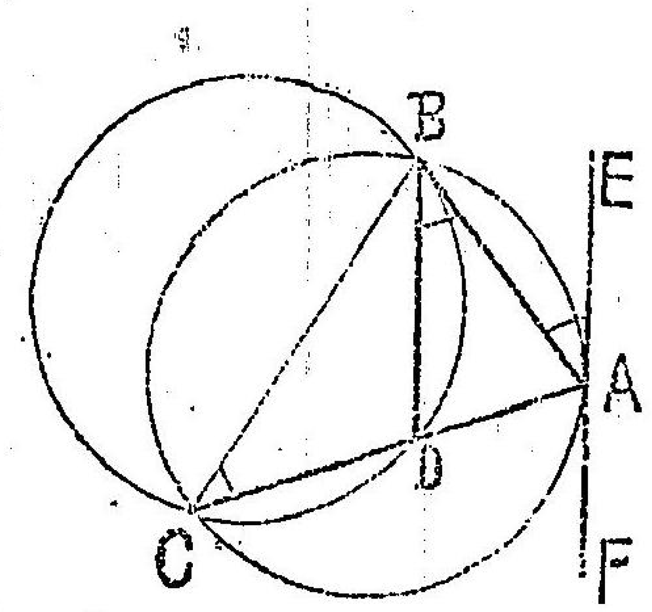
(証) A ニ於ケル切線ヲ EF トシ BC ヲ結ブ,

今　∠C＝∠EAB (148. 定理)

＝∠DBA (錯角)

即チ弓形 DCB 圓ノ角ハ ∠DBA ニ等シ.

故ニ圓形 DCB ハ B ニ於テ直線 AB ニ切ス.　　(149. 定理)



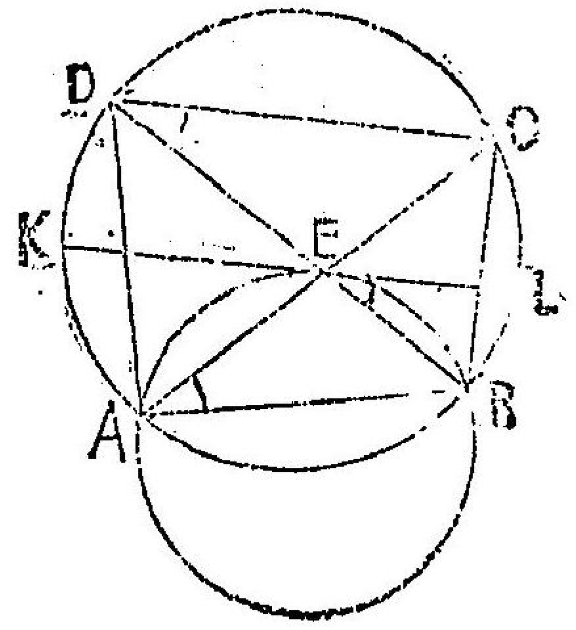
3. 圓ノ内接四角形 ABCD ノ對角線ノ交点ヲ E トス. 然ルトキハ圓 ABE ニ E ニ於テ切スル所ノ直線ハ CD 邊ニ平行ス.

(証) AEB 圓ニ E ニ於テ切スル直線ヲ KL トス

∠LEB＝∠EAB　　(148. 定理)

＝∠CDB　　(135. 定理)

故ニ　KL // DC.



4. 直三角形ノ壹邊ヲ直徑トセル圓周ト斜邊トノ交点ニ於テ其圓ニ切線ヲ引クトキハ此切線ハ第三邊ヲ等分ス.

直三角形ヲ ABC トシ B ヲ直角頂トシ壹邊 BC ヲ直徑トセル圓周ト斜邊 AC トノ交点ヲ D トシ, D ニ於ケル切線ト AB トノ交点ヲ E トス

然ルトキハ E ハ AB ヲ弍等分ス

(証) BD ヲ結ブ

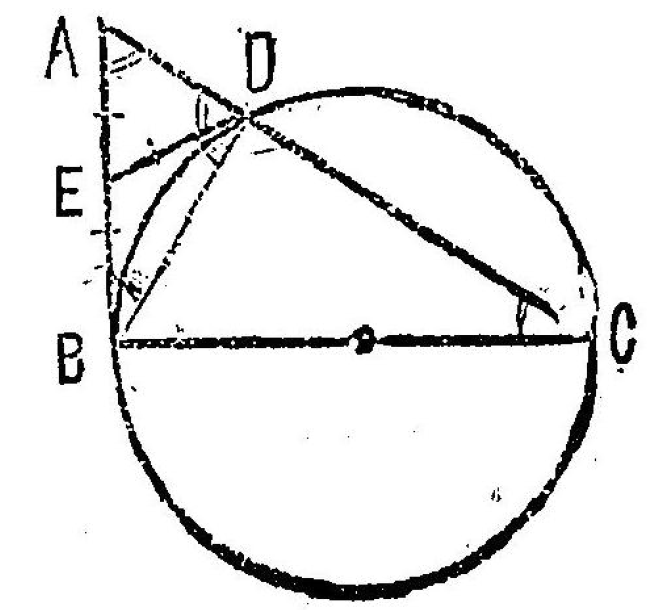
∠ABC＝直角,

∴　AB⊥BC,

∴　AB ハ BDC 圓ニ切ス(134. 定理)

∴　EB＝ED　　(147. 定理)

∴　∠EBD＝∠EDB



然ルニ弧 BDC ハ半圓周ナリ,

∴　∠BDA＝∠BDC＝直角　　故ニ ∠EDA ハ ∠EDB ノ餘角ナリ,

又　∠ABC＝直角,　　故ニ ∠A ハ ∠EBD ノ餘角ナリ,

而シテ　∠EDB＝∠EBD

∴　∠EDA＝∠A

∴　AE＝ED

即　AE＝ED＝EB

故ニ E ハ AB ノ中央点ナリ.

5. 相交ル兩圓周ノ壹交点ヲ過ギテ其兩圓周ニ交ルベキ弍個ノ運動直線ヲ引ク, 然ルトキハ此弍直線ガ各圓周上ニ於テ夾ム弧ノ弦ノ交角ノ大サハ不變ナリ.

相交弍圓周ノ壹交点ヲ E トシ, E ヲ過ギテ運動弍直線 AB CD ヲ引ク,

然ルトキハ AB, CD ガ各圓周上ニ夾ム弧ノ弦 AC, BD ノ交角 P ノ大サハ不變ナリ.

(証) E ニ於テ各圓ニ切線 EF, GH ヲ引ク,

然ルキハ

$\angle EBD=\angle FED$ (146. 定理)

又　$\angle A=\angle GEC$　(　〃　)

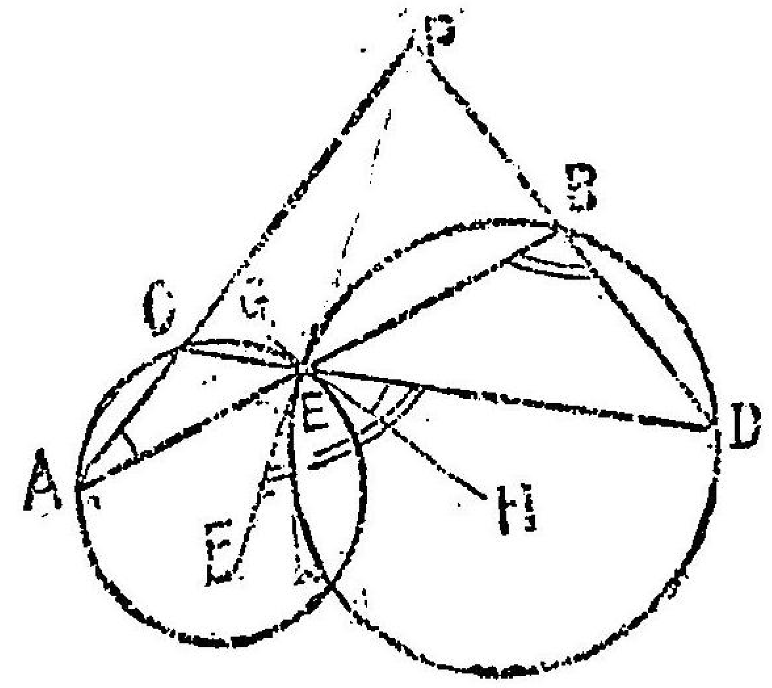
$=\angle DEH$　(對頂角)

$\therefore \angle EBD-\angle A=\angle FED-\angle DEH$

$=\angle FEH.$

今 $\angle EBD-\angle A=\angle P$ (26 定理)

$\therefore\ \angle P=\angle FEH,$



今貳直線 AEB, CED ガ E 点ヲ過ギ且ツ兩圓周ニ交リツヽ如何ニ運動スルモ前ト同理ニヨリ $\angle P$ ハ恒ニ $\angle FEH$ ニ等シ,

而シテ $\angle FEH$ ハ不變ノ角ナリ,

故ニ $\angle P$ ノ大サハ不變ナリ.

6. 相交ル貳圓周ノ壹交点ヲ過ギテ各圓周ニ交ルベキ壹個ノ直線ヲ引ク,然ルキハ其各交点ニ於テ各圓ニ切スル貳直線ガナス角ノ大サハ不變ナリ.

(證) ハ 146. 推論ヲ用ヒ,前題ト同様ナル方法ナリ,故ニ茲ニ之ヲ省畧ス.

7. AM, AN ハ圓外ノ壹点 A ヨリ其圓ニ引キタル定切線ナリ,又 BC ハ AM ニ B ニ, AN ニ C ニ於テ交ルベキ運動切線ナリ,但シ其圓ト A 点トハ BC ノ異側ニ在ルモノトス,然ルキハ

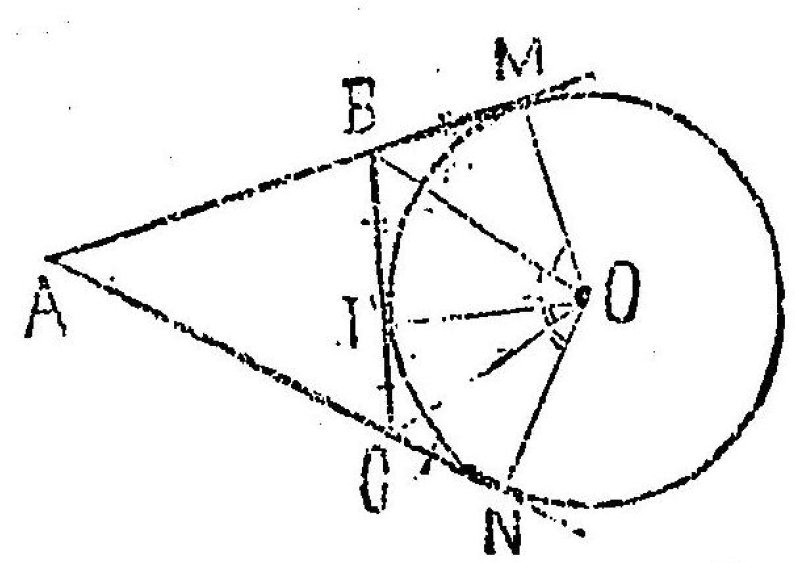
〔第壹〕$\triangle ABC$ ノ周ハ不變ナリ,

〔第貳〕圓ノ中心ヲ O トシ OB, OC ヲ結ブキハ $\angle BOC$ ハ不變ナリ.

(証) 切線 BC ト圓周 OM トノ交点ヲ P トス

(第壹) $BP=BM$　(147 定理)

$PC=CN$　(　〃　)



上ノ二式ヲ加フレバ　$BC=BM+CN$

$\therefore\ AC+AB+BC=AC+AB+BM+CN$

$=AM+AN.$

之ト同理ニヨリ BC ガ圓形 OM ト A 点トノ間ニ於テ其圓ニ切シツヽ如何ニ運動スルモ $\triangle ABC$ ノ周ハ恒ニ $AM+AN$ ナリ,

然ルニ $AM+AN$ ハ不變ナリ,

故ニ $\triangle ABC$ ノ周ハ不變ナリ.

(貳) OM, OP, ON ヲ結ブ

BM, BP ハ圓形 OM ノ切線ナルヲ以テ BO ハ $\angle MOP$ ヲ等分ス,

$\therefore\ \angle BOP=\frac{1}{2}\angle MOP,$

同様ニ　$\angle POC=\frac{1}{2}\angle PON,$

上ノ二式ヲ加ヘテ　$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle MON,$

然ルニ □MONA ニ於テ

$\angle AMO=\angle ANO=$ 直角　(145. 定理)

$\therefore\ \angle A+\angle MON=2$ 直角

然ルニ AM, AN ハ定位置ノ切線ナルヲ以テ其夾角 A ノ大サハ不變ナリ,

從ツテ $\angle MON$ ノ大サハ不變ナリ,

而シテ $\angle BOC$ ハ $\angle MON$ ノ半ナリ,

從ツテ $\angle BOC$ ハ其大サ不變ナリ.

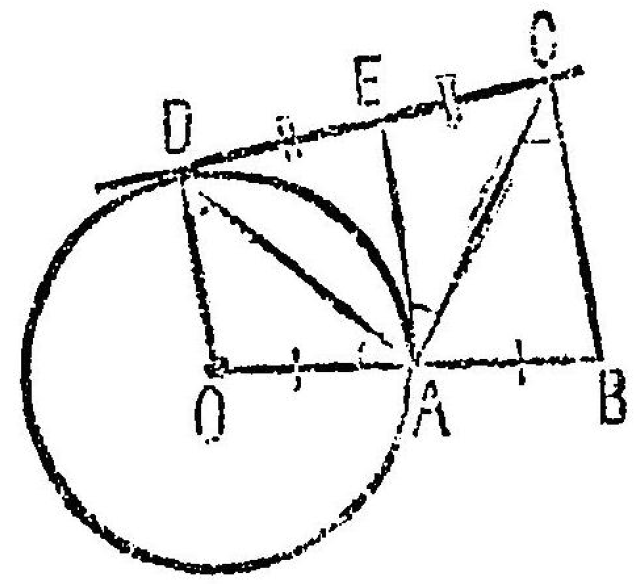
(注意) 運動切線 BC ト A 点トガ圓ノ異側ニアルキハ $AB+AC-BC$ ハ不變ナリ.

又此場合ニ於テハ $\angle BOC$ ハ壹直角ト $\frac{1}{2}\angle A$ トノ和ニ等シク即チ不變ナリ,但シ此レハ本編雜題ニ於テ証明スルコアルベシ.

8. 壹個ノ圓(其中心ヲ O トス)ノ半徑 OA ヲ B マデ引張シ AB ヲ OA ト等長ナラシメ,此圓ノ任意ノ切線ヘ B ヨリ垂線 BC ヲ下シ CA ヲ結ブキハ $\angle ACB=\frac{1}{3}\angle ACO$ ナリ.

(証) 切点ヲ D トシ A ヨリ CD ヘ垂線 AE ヲ下シ, AD, OD ヲ結ブ.

貳直線AE, BCハ共ニCDニ直立ス,(作法)故ニAE, BCハ平行ス



∴ $\angle ACB=\angle CAE$ (α)

又CDハ切線ナルヲ以テ直線ODハCDニ直立ス (145. 定理)

∴ $OD \parallel AE \parallel BC$

而シテ $OA=AB$

∴ $DE=EC$ (96. 定理)

即チ直線AEハ直線CDヲ直角ニ貳等分ス,

∴ $\triangle AEC\equiv\triangle AED$

∴ $\angle CAE=\angle EAD$

而シテ $AE \parallel OD$ ∴ $\angle EAD=\angle ADO$

$=\angle DAO$ ($\because$ $OD=OA$)

∴ $\angle CAE=\angle EAD=\angle DAO$

∴ $\angle CAE=\frac{1}{3}\angle CAO,$

故ニ(α)ニヨリ $\angle ACB=\frac{1}{3}\angle CAO.$

第五節—兩圓之關係

定義

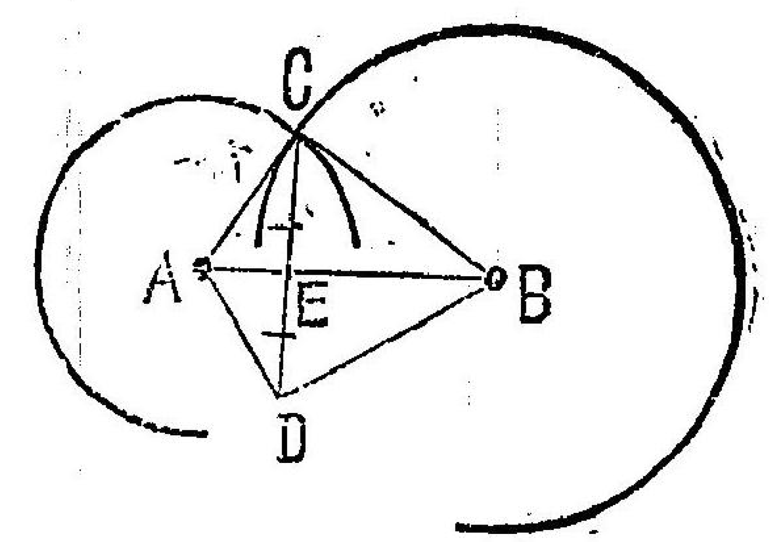
153. 兩圓之相切,相交 貳圓周ガ唯壹個ノ点ノミニ於テ相交ルトキハ其二圓ハ相切ストイフ,而シ其貳圓ノ中ノ各ガ他ノ壹個ノ外方ニアルトキハ外切ストイフ,又壹個ガ他ノ壹個ノ內方ニアルトキハ內切ストイフ.

貳圓周ガ貳個ノ交点ヲ有スルトキハ其貳圓ハ相交ルトイフ.

定理貳拾五

154. 兩圓周ガ其各中心ノ連結線ノ外方ノ壹点ニ於テ相交ルトキハ其兩圓周ハ再ビ他ノ壹点ニ於テ相交ル.

兩圓ノ中心ヲA, Bトシ此兩圓周ハ直線ABノ外方ノ壹点Cニ於テ相交ルモノトス,



然ルトキハ此兩圓周ハ再ビ他ノ壹点ニ於テ相交ル.

(證) Cヨリ直線ABニ垂線CEヲ下シ,之ヲDマデ引張シEDヲCEト等長ナラシメAC,ADヲ結ブ.

今直線ABハ直線CDヲ直角ニ貳等分ス.

∴ $AD=AC$ (101. 定理)

故ニADハAヲ中心トセル圓ノ半徑ナリ,
故ニDハ此圓周上ノ点ナリ.
即チAヲ中心トセル圓周ハD点ヲ過ク.
同様ニBヲ中心トセル圓周モ亦D点ヲ過グ.
故ニ此兩圓周ハ再ビDニ於テ相交ル,

155. 推論 兩圓周ガ貳点C, Dニ於テ相交ル時其交点ヲ連結セル直線ハ兩中心ノ連結線ニヨリテ直角ニ等分セラル.

(証) 前章ノ說明ニヨリテ明瞭ナリ,
然レ圧次ノ如ク証明スルモ可ナリ.
A及ビBハ貳点C, Dヨリ等距ナル点ナリ.
故ニ直線ABハ貳点C, Dヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ.
故ニ直線ABハ直線CDヲ直角ニ貳等分ス.

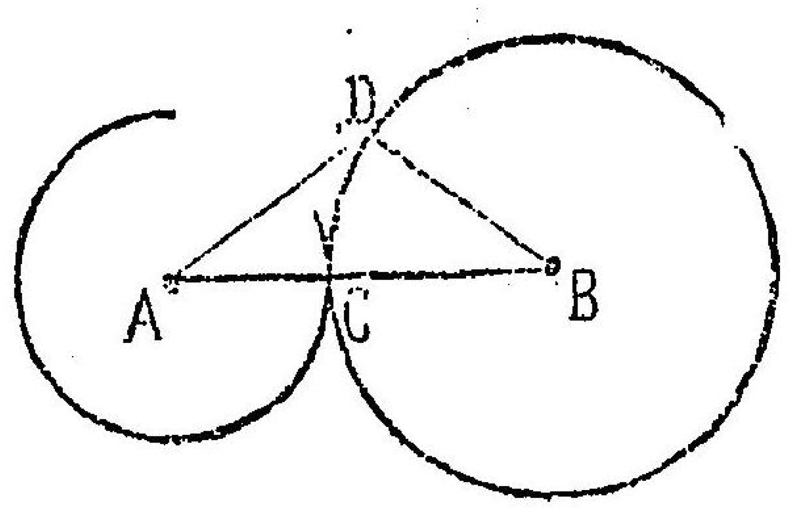
定理貳拾六

156. 兩圓周ガ其各中心ノ連結線上ノ壹点ニ於テ相交ル時ハ其兩圓周ハ再ビ他ノ壹点ニ於テ交ルコトナシ,即チ其兩圓ハ内切若クハ外切ス.

A, Bヲ兩圓ノ中心トス,
此兩圓周ガ直線AB上ノ壹点Cニ於テ交ルトス,
然ル時ハ此兩圓周ハ再ビ相交ラズ即チ此兩圓形ハ相切ス.

(証) 次ノ如キ貳個ノ場合アリ.

(第壹) 交点CガAトBトノ間ニアル場合

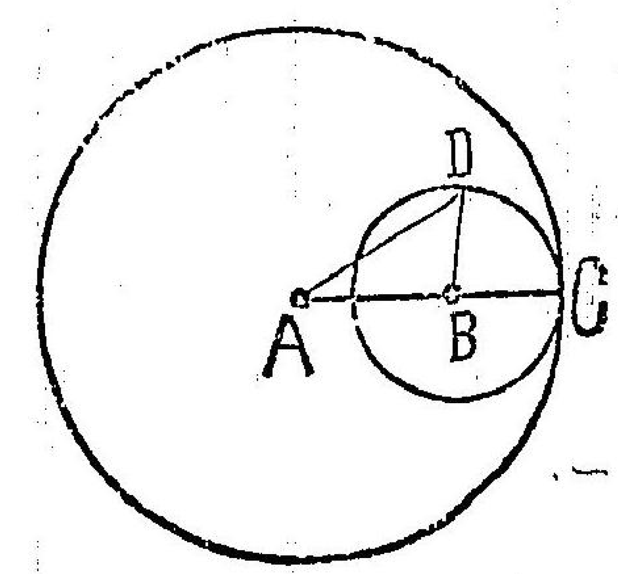


Bヲ中心トセル圓周上ニ於テCノ外ニ壹点Dヲ取リDA, DBヲ結ブ.
然ル時ハ△ABDニ於テ

$$AD+DB>AB$$
然ルニ $DB=BC$
$$\therefore\ AD+BC>AB$$
兩邊ヨリBCヲ減シ $AD>AC$

即チADハAヲ中心トセル圓ノ半徑ヨリ大ナリ.
故ニDハAヲ中心トセル圓外ニアリ,
同様ニBヲ中心トセル圓周上ニ於テCノ外ノ点ハ孰レモAヲ中心トセル圓ノ外方ノ点ナリ,
故ニ此兩圓周ハCノ外ノ点ニ於テ交ルコトナシ,
而シテ此兩圓ノ各ハ他ノ圓ノ外方ニ在リ,
故ニ此兩圓周ハ外切ス.

(第貳) 切点CガAトBトノ間ニアラザル場合.



Bヲ中心トセル圓周上ニ於テCノ外ニ壹点Dヲ取リDA, DBヲ結ブ
△ADBニ於テ
$$AB+DB>AD$$
然ルニ $DB=BC$
$$\therefore\ AB+BC>AD$$
即 $AC>AD$

故ニADハAヲ中心トセル圓ノ半徑ヨリ小ナリ
故ニDハAヲ中心トセル圓周上ニアラズ.
同様ニBヲ中心トセル圓周上ニ於テCノ外ノ点ハ孰レモAヲ中心トセル圓周上ニアラズ.
故ニ此兩圓周ハCノ外ノ点ニ於テ交ルコトナシ.
而シテ壹個ノ圓ハ他ノ圓ノ内方ニアリ,
故ニ此兩圓ハ内切ス.

157. 推論壹 兩圓ガ相切スル時ハ其兩圓ノ中心ノ連結線

ハ其切点ヲ過グ.

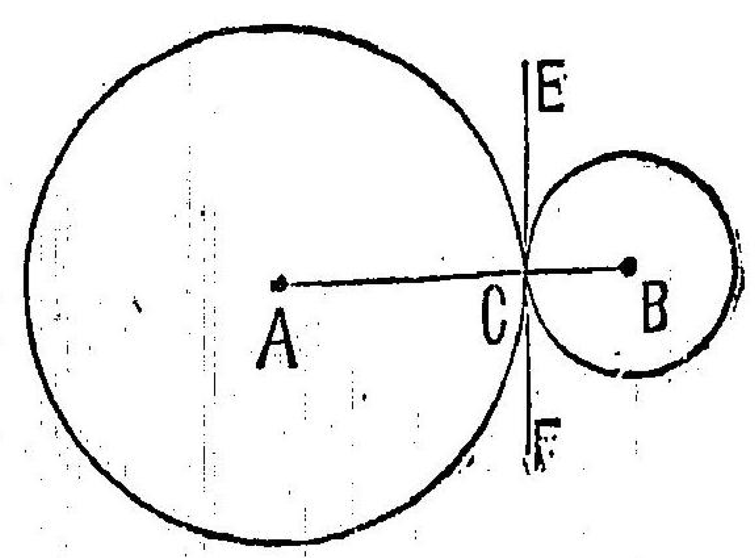
(証) 切点ガ若シ兩中心ノ連結線上アラザルトキハ此兩圓周ハ再ビ其他ノ壹点ニ於テ相交ル, (154. 定理)

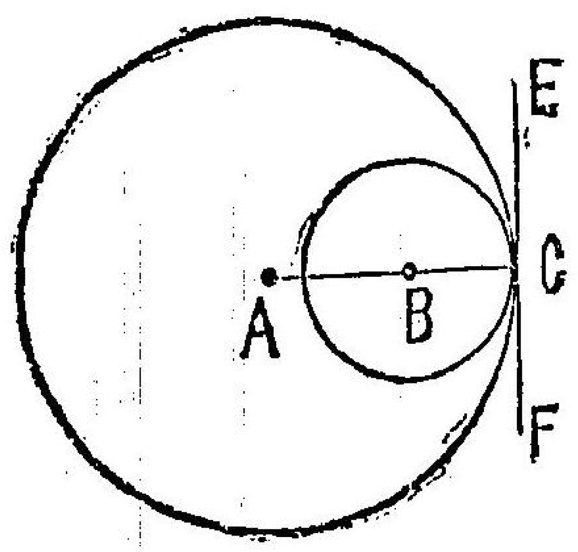
是レ不合理ナリ, 但シ此兩圓ハ相切スルヲ以テ貳点ニ於テ相交ラザレバナリ.

故ニ切点ハ兩中心ノ連結線上ニアリ.

157. 推論貳 兩圓ガ切スルトキハ其切点ニ於テ兩圓ニ共通ナル切線アリ, 而シテ唯壹個ノミニ限ル

兩圓ノ切点ヲCトス,





然ルトキハC ニ於テ兩圓ニ共通ノ切線アリ, 而シテ唯壹個ノミニ限ル.

(証) 兩中心ヲA, Bトシ, ABヲ結ブ,

然ルトキハ切点Cハ直線ABノ上ニアリ, (157. 推論)

今Cニ於テABニ直立スル直線ヲ引キ, 之レヲEFトス

然ルトキハEFハ半徑ACノ壹端ニ於テ之レニ直立スルヲ以テ

EFハCニ於テA圓ニ切ス. (143. 定理)

又同様ニEFハCニ於テB圓ニ切ス.

故ニ切点Cニ於テ兩圓ニ共通ノ切線アリ.

又Cヲ過グルEFノ他ノ諸直線ハ兩半徑AC, CBニ斜交ス, 從ツテ兩圓ノ切線トナラズ. (143. 定理)

故ニCニ於ケル共通ノ切線ハEFノミニ限ル

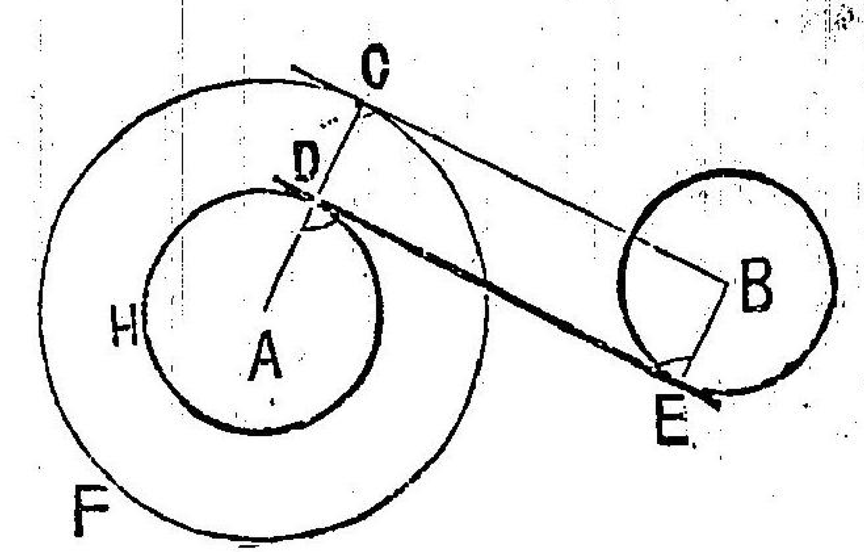
定理貳拾七

159. 外方ニ於テ相離ルヽ兩円ニ唯四個ノ共通切線ヲ引クヿヲ得 (但シ其中ノ貳個ハ其兩円ノ間ニアリ; 之ヲ其兩円ノ内方ノ共通切線ト云ス又他ノ貳個ハ其兩円ノ間ニアラズ之ヲ其兩円ノ外方ノ共通切線ト稱ス)

兩円ノ中心ヲA, B, トス但シ此兩圓ハ外方ニ於テ相離ルヽモノトス, 然ルトキハ

(第一) 此兩圓ノ内方ノ共通切線ヲ引クヿヲ得, 而シテ此ノ如キ切線ハ唯貳個ノミニ限ル

(第二) 此兩圓ノ外方ノ共通切線ヲ引クヿヲ得, 而シテ此ノ如キ切線ハ唯貳個ノミニ限ル



(証) (第一) Aヲ中心トシ, 兩圓ノ半徑ノ和ヲ半徑トシテ圓形ヲ畫キ之ヲAFトス

Bヨリ圓AFヘ切線BCヲ作ル, (146. [illegible])

而シテ其切点ヲCトシACヲ結ビACト圓周AHトノ交点ヲDトシBヨリCAニ平行ナル半徑BEヲ引キBE, CAヲBCノ同側ニアラシメDEヲ結ブ

今ACハ兩圓AH, BEノ半徑ノ和ナリ, 而シテADハ圓形AHノ半徑ナリ, ∴ $DC=BE$

又 $DC /\!/ BE$ (作法)

故ニ□DCBEハ平行四角形ナリ,

∴ $DE /\!/ BC$ ∴ $\angle ADE=\angle C$

然ルニBCハ切線 ∴ $\angle C$ ＝直角

∴ $\angle ADE$＝直角,

故ニ直線 DE ハ円形 AH ノ半徑 AD ノ壹端ニ於テ之ニ直立ス,
故ニ DE ハ AH 円ニ切ス (143. 定理)
又平行四邊形 DCBE ニ於テ $\angle E$ ハ $\angle CDE$ ノ補角ナリ,

$$\therefore \quad \angle E = \text{直角}$$

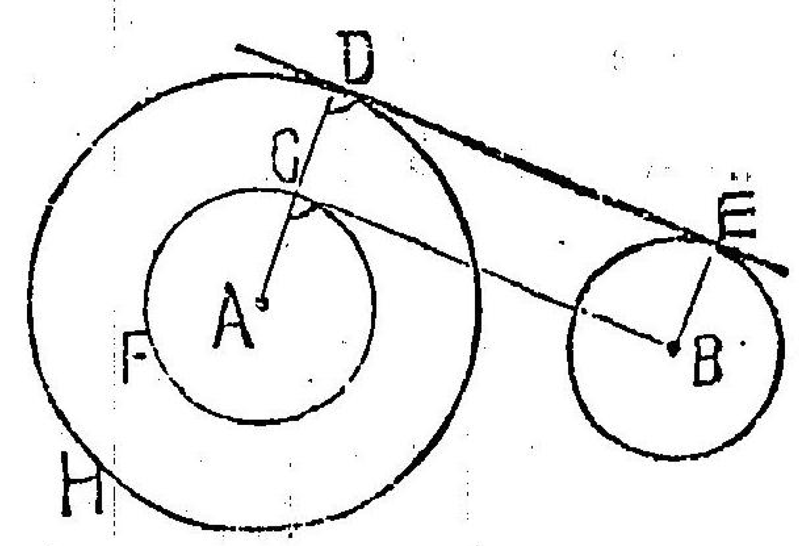
故ニ DE ハ E ニ於テ BE 円ニ切ス. (143. 定理)
而シテ DE ハ兩円ノ間ニアリ
故ニ DE ハ原兩円ノ内方共通切線ナリ.

斯ノ如クニシテ外方ニ於テ相離ルヽ兩円ニ共通切線ヲ引クコヲ得

而シテ B ヨリ AF 円ヘ畫ケル切線ハ BC ノ他ニ尚壹個アリ
故ニ前ト同理ニヨリ DE ノ他ニ尚壹個ノ内方共通切線ヲ作ルコヲ得

而シテ B ヨリ AF 円ニ作レル切線ハ唯貳個アルノミ,
從ツテ内方共通切線ハ亦唯貳個アルノミ

(第二) 大円ノ中心 A ヲ中心トシ兩円 AH, BE ノ半徑ノ差ヲ半徑トシテ円形 AF ヲ畫キ B ヨリ AF 円ヘ切線 BC ヲ引キ AC ヲ結ビ AC ト円周 AH トノ切点ヲ D トシ, B ヨリ AD ニ平行ナル半徑ヲ引キ ED ヲ結ブ



今 AC ハ兩円 AH, BE ノ半徑ノ差ナリ, 而シテ AD ハ AH 円ノ半徑ナリ,
故ニ DC ハ円形 BE ノ半徑ニ等シ

$$\text{即チ} \quad DC = BE$$

$$\text{而シテ} \quad DC \parallel BE$$

故ニ四角形 DCBE ハ平行四角形ナリ

$$\therefore \quad DE \parallel BC \qquad \therefore \quad \angle ADE = \angle ACB$$

然ルニ BC ハ C ニ於テ AF 円ニ切スルヲ以テ

$$\angle ACB = \text{直角}$$

$$\therefore \quad \angle ADE = \text{直角}$$

故ニ DE ハ D ニ於テ AH 円ニ切ス.
又 $BE \parallel CD$ ナルヲ以テ $\angle E$ ハ $\angle ADE$ ノ補角ナリ

$$\therefore \quad \angle E = \text{直角},$$

故ニ DE ハ E ニ於テ BE 円ニ切ス,
斯ノ如ク兩圓 AH, BE ノ外方共通切線アリ,
而シテ B ヨリ AF 円ニ唯貳個ノ共通切線ヲ引キ得ルヲ以テ從ツテ兩円 AH, BE ノ外方共通切線ハ唯貳個アルノミナリ.

160. 推論壹 兩円ガ外切スルトキハ唯三個ノ共通切線ヲ引クコヲ得,

(証) 前章ノ第二ノ説明ハ兩円ガ外切スルトキニモ適合ス,
故ニ兩円ガ外切スルトキハ外方ノ共通切線貳個アリ,
又其切点ニ於テ壹個ノ共通切線アリ.
故ニ總計三個ノ共通切線アリ.

161. 推論貳 兩円ガ相交ルトキハ唯貳個ノ共通切線アリ

(証) 159. 第貳ノ説明ハ此ノ場合ニモ適合ス,
故ニ此場合ニ於テハ外方ノ共通切線貳個アリ,
而シテ其他ニハ共通切線ナシ.

162. 推論參 兩円ガ内切スルトキハ唯壹個ノ共通切線アリ

(証) 切点ニ於テ壹個ノ共通切線アリ,
而シテ此ノ外ニハ共通切線ナシ.

第四節例題

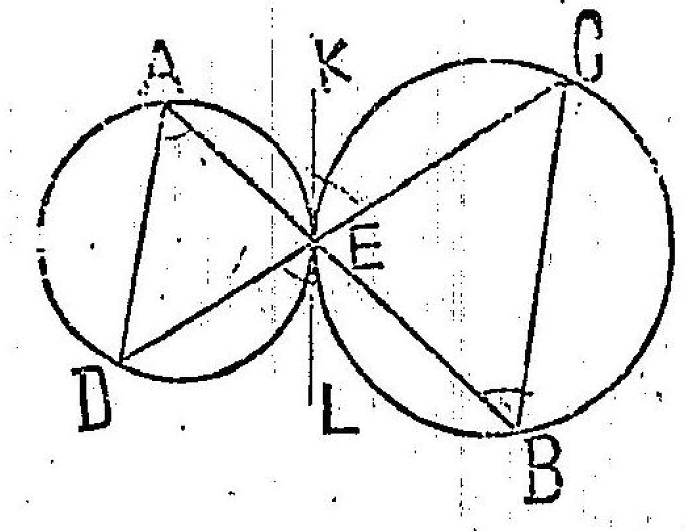
1. 相切スル貳個ノ圓周ヲ過ギテ各圓周ニ交ルベキ貳直線ヲ引クトキ此貳直線ガ各圓周ノ上ニ夾ム弧ノ弦ハ平行ス

相切スル貳個ノ切点ヲEトシ,Eヲ過ギテ各圓周ニ交ルベキ貳直線ヲAB, CDトシ,各圓周トノ交点ヲA, B, C, DトシAD, BCヲ結ブ,

然ルトキハAD, BCハ平行ス。

(証)(第壹)両圓ガ外切スル場合

Eヲ過ギテ貳圓ノ共通切線ヲ引キ之ヲKLトス



$\angle B=\angle KEC$ (148. 定理)

$=\angle DEL$, (對頂角)

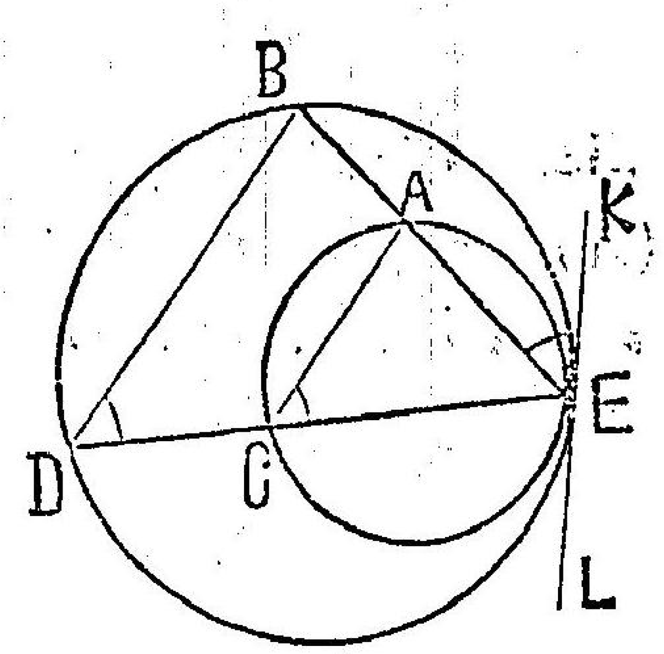
又 $\angle A=\angle DEL$,

∴ $\angle A=\angle B$,

∴ $AD /\!/ BC$.

(第貳) 両圓ガ内切スル場合

Eニ於テ両圓ノ共通切線ヲ引キ之レヲKLトス



$\angle ACE=\angle KEA$ (148. 定理)

又 $\angle BDE=\angle KEA$

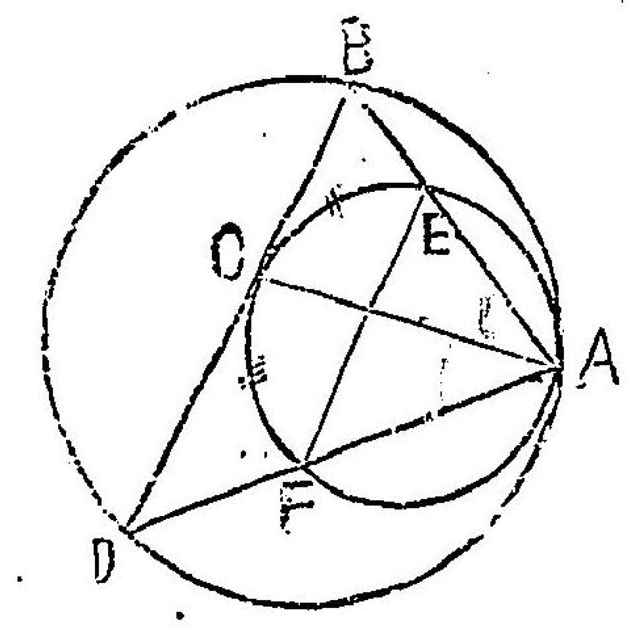
∴ $\angle BDE=\angle ACE$

∴ $AC /\!/ BD$

2. Aニ於テ内切スル貳圓アリ,今内圓ニCニ於テ切スル所ノ外圓ノ弦ヲ引キ之ヲBDトシAB, AC, ADヲ結ブ,然ルトキハAC

ハ$\angle BAD$ヲ等分ス.

(証) AB, ADガ内圓周ニ交ル点ヲE, FトシEFヲ結ブ



然ルトキハ前例題ニヨリ.

$EF /\!/ BD$

∴ 弧EC＝弧CF (150. 定理)

∴ $\angle EAC=\angle CAD$

故ニACハ$\angle BAD$ヲ等分ス.

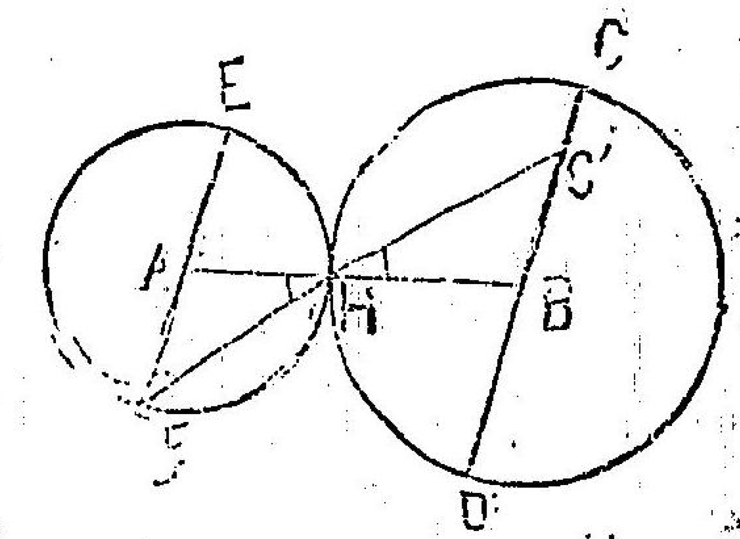
3. 相切スル貳圓ノ各ニ於ケル直徑ガ平行スルトキハ其直徑ノ壹端ト切点トヲ結ベル直線ハ他ノ直徑ノ壹端ヲ過グ

Hニ於テ相切スル貳圓ノ各ニ於ケル平行ナル直徑ヲCD, EFトス,

然ルトキハEFノ壹端FトHトヲ結ベル直線ハ直徑CDノ壹端ヲ過グ.

(証)(第壹) 貳圓ガ外切スル場合.

各圓ノ中心ヲA, BトシFHヲ結ビFHトBCトノ交点ヲC′トシABヲ結ブ.然ルトキハHハAB上ニアリ (157. 推二)



$\angle HC'B=\angle F$ (錯角)

$=\angle AHF$ ($\because AF=AH$)

$=\angle C'HB$ (對頂角)

∴ $BC'=HB$

然ルニ, $HB=BC=$半徑

∴ $BC'=BC$

故ニC′ハCト壹致ス

故ニFHハCDノ壹端Cヲ過グ

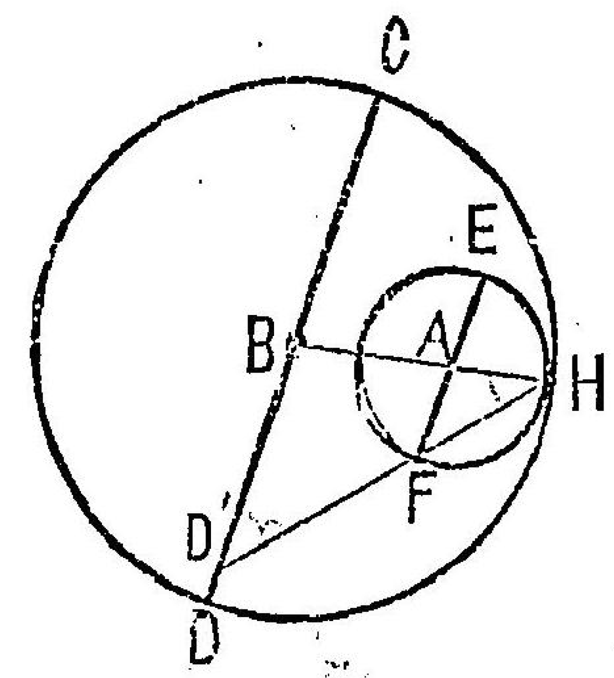
同様ニE, H, Dモ亦壹直線上ニアリ。

(注意) FH, CHヲ結ビ此ノ貳直線ガ壹個ノ直線ナルコヲ証スルモ可ナリ.

（第二）兩圓ガ內切スル場合

兩中心ヲA,BトシABヲ結ブ

然ルトキハABノ引張線ハHヲ過グ



HFヲ結ビHFトCDトノ交点ヲD′トス

EF//BD　∴　∠AFH＝∠BD′H

又AH＝AF　∴　∠AFH＝∠AHF.

∴　∠BD′H＝∠AHF

∴　BD′＝BH,

然ルニ　BH＝BD＝半徑

∴　BD′＝BD

故ニD′ハDト壹致ス,

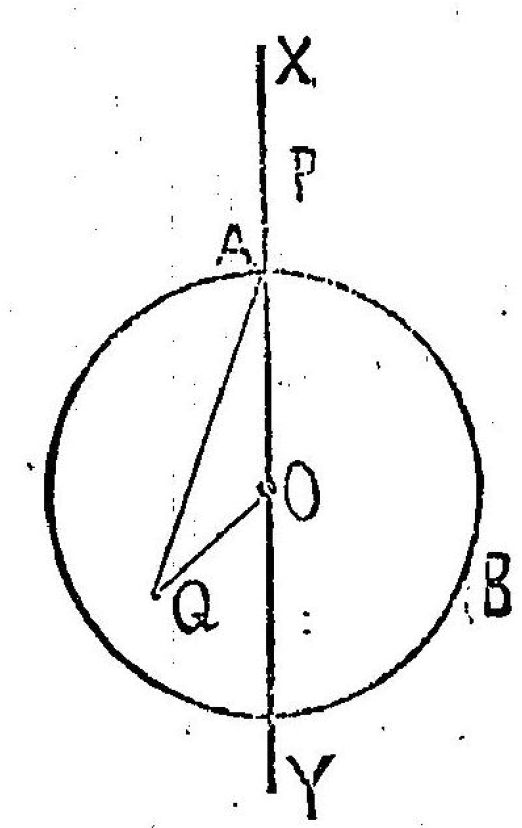
故ニHFノ引張線ハDヲ過グ,

同様ニH, E, Cハ壹直線上ニアリ.

4. 定圓周上ノ定点ニ於テ其定圓周ニ切スベキ諸圓ノ中心ノ軌跡ハ定圓ノ中心ト其定点トヲ過グル直線ナリ.

定圓ノ中心ヲOトシ,其圓周上ノ定点ヲAトス,

然ルトキハAニ於テ此圓周ニ切スル諸圓形ノ中心ノ軌跡ハA, Oヲ過グル直線XYナリ



（証）直線XYノ上ニ任意ノPヲ取ル.

然ルトキハPヲ中心トシPAヲ半徑トスル圓周ハAニ於テ定直線ニ切ス,但シ此兩圓ハ各中心ノ連結線OPノ上ニ於テ相交レバナリ

故ニ直線XY上ノ諸点ハAニ於テ定~~直線~~円周ニ切スベキ諸圓ノ中

心ナリ.[是レ100.ノ(1)ニ當ル]　(*a*)

又直線XYノ外ニ任意ノ壹点Qヲ取リQA, QOヲ結ブ,

然ルトキハQヲ中心トシQAヲ半徑トスル圓周ハ定圓周OBニ交ルベシ,何トナレバ此兩圓周ハ各圓ノ中心ノ連結線OQノ外ニ於テ相交ルヲ以テナリ.

故ニQ点ハAニ於テ定圓周ニ切スベキ圓ノ中心ナラズ.

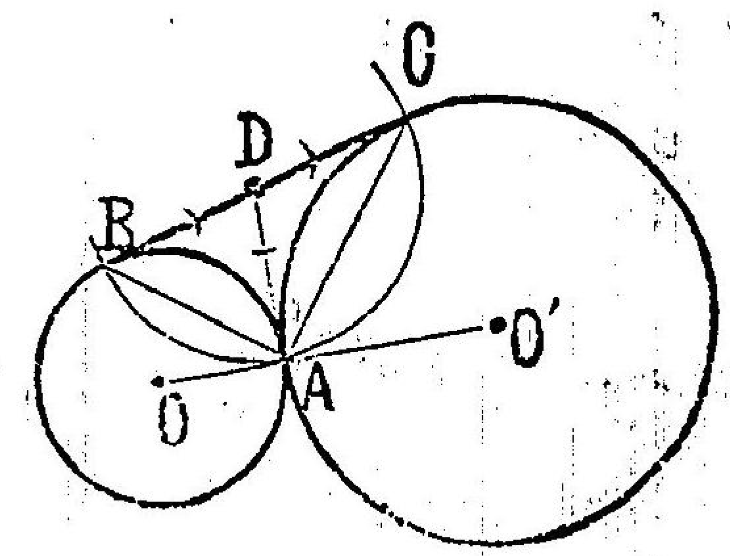
即チ直線XYノ外ノ点ハPニ於テ定圓周ニ切スベキ諸圓ノ中心ナラズ.[是レ100.ノ(2)ニ當ル]　(*b*)

(*a*)(*b*)ニヨリA点ニ於テ定圓周ニ切スベキ諸圓ノ中心ノ軌跡ハO, Aヲ過グル直線XYナリ.

5　Aニ於テ外切スル弐圓ノ外方ノ共通切線ヲBCトシ,其各切点ヲB, Cトス,然ルトキハBCヲ直徑トスル圓周ハAヲ過ギ且ツ各圓ノ中心ノ連結線ニ切ス.

（証）BA, ACヲ結ブ.

Aニ於テ各圓ノ共通切線ヲ引キBCトノ交点ヲDトス.



然ルトキハ

DB＝DA＝DC　(147. 定理)

故ニDヲ中心トシDBヲ半徑トセル圓周ハA,Cヲ過グ,

換言スレバBCヲ直徑トセル圓周ハAヲ過グ.

又各圓ノ中心ヲO,O′トシOO′ヲ結ブ,

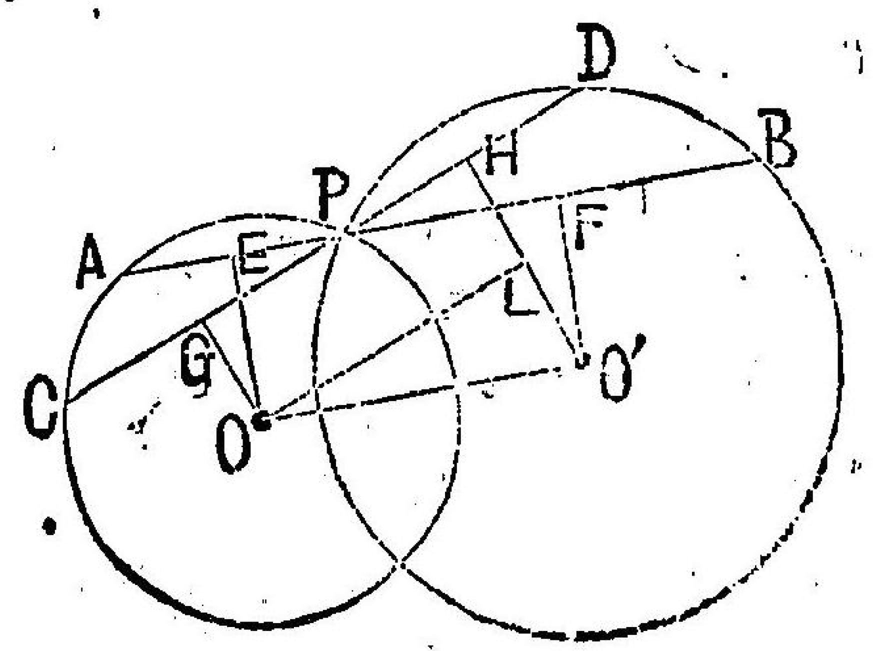
然ルトキハ直線OO′ハAヲ過グ,　(157. 推論)

而シテDAハOO′ニ直立ス,　(1[illegible]5. 定理)

故ニOO′ハAニ於テBAC圓ニ切ス.　(143 推論)

6　相交ル貳圓周ノ壹交点ヲ過ギテ各圓ノ中心 O,C′ ノ連結線ニ平行ナル直線ヲ引キ各圓周トノ交点ヲ A, B トス, 然ルトキハ AB ハ OO′ ノ貳倍ニ等シク, 且 AB ハ A ヲ過キテ各圓周間ニ引キタル諸直線ノ孰レヨリモ大ナリ。

(証)　$OE \perp AP$, $O'F \perp PB$ トス。



然ルトキハ

$EP=AE$　(126. 推論)

∴　$EP=\frac{1}{2}AP$

又　$PF=\frac{1}{2}PB$　(同　　理)

上ノ二式ヲ加ノレバ

$EF=\frac{1}{2}AB$,

然ルニ四角形 OEFO′ ハ明カニ矩形ナリ

∴　$EF=OO'$　　∴　$OO'=\frac{1}{2}AB$　(1)

又 P ヲ過ギテ各圓周間ニ任意ノ直線 CD ヲ引キ各圓周トノ交点ヲ C, D トシ $OG \perp PC$, $O'H \perp PD$, $OL \perp O'H$ トス

然ルトキハ前ト同理ニヨリテ

$GH=\frac{1}{2}CD$,

然ルニ　$GH=OL$,

∴　$OL=\frac{1}{2}CD$,　(2)

然ルニ三角形 OLO′ ニ於テ ∠OLO′ ハ直角ナリ

∴　$OO'>OL$

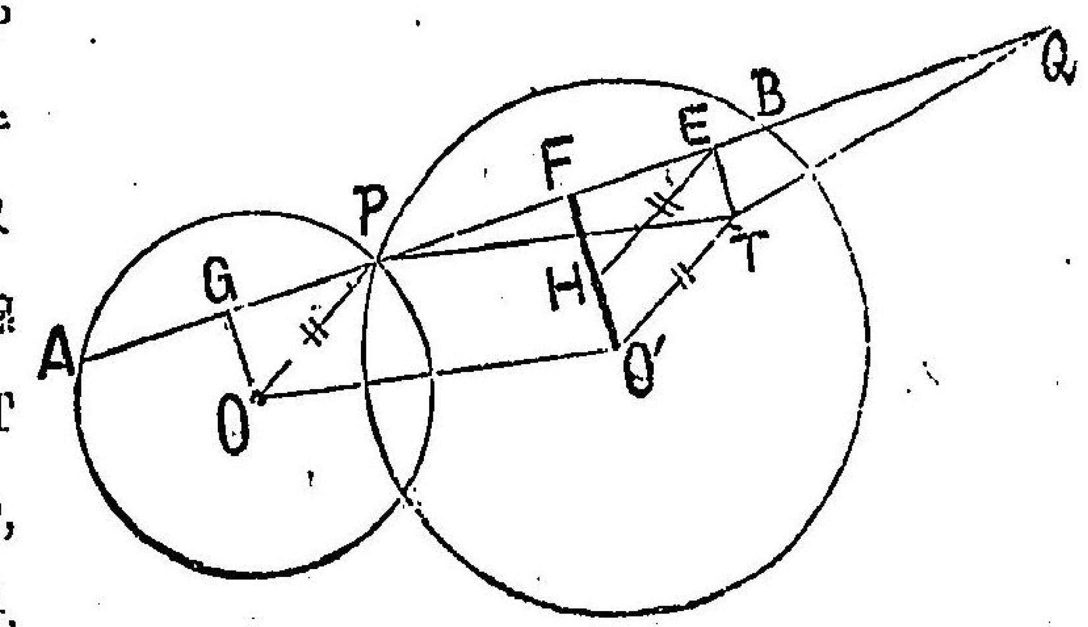
故ニ (1)(2) ニヨリ　$\frac{1}{2}AB>\frac{1}{2}CD$

∴　$AB>CD$.　(3)

(1) ビ及 (3) ハ本題ヲ証スルモノナリ。

7　APB ハ相交貳圓周ノ壹交点ヲ過ギ且其兩圓周ニ A, B ニ於テ交ルベキ運動直線ナリ。今 PB ヲ Q マデ引張シ BQ ヲ AP ト等長ナラシムルトキハ Q ハ壹個ノ圓周ノ上ニアリ。

(証)　兩圓周ノ中心ヲ O,O′ トシ, OO′, OP ヲ結ビ P ヨリ OO′ ニ平行線 PT ヲ引キ, 又 O′ ヨリ OP ニ平行線 O′T ヲ引キ, PT ト O′T トノ交点ヲ T トシ O, O′,T ヨリ AQ ニ垂線 OG, O′F, TE ヲ引キ TQ ヲ結ビ E ヨリ O′T ニ平行線 EH ヲ引ク。



□EHO′T ハ平行四角形ナリ,　∴　$EH=TO'$

又 □OPTO′ ハ平行四角形ナリ,　∴　$OP=TO'$　∴　$EH=OP$.

又 EH, OP ハ共ニ TO′ ニ平行ス,　∴　$EH /\!/ PO$

∴　$\angle OPG=\angle HEF$.

故ニ兩三角形 EHF, OPG ニ於テ

$EH=PO$

$\angle HEF=\angle OPG$

$\angle F=\angle G=$ 直角　∴　$\triangle EHF \equiv \triangle OPG$

∴　$EF=PG$,

此式ノ双方ヘ PF ヲ加フルトキハ　$PE=GF$

然ルニ　$PG=AG$, $PF=FB$ (126. 推論)　∴　$GF=\frac{1}{2}AB$

∴　$PE=\frac{1}{2}AB$

$=\frac{1}{2}PQ$.

即チ E ハ PQ ノ中央ナリ,

故ニ ET ハ PQ ノ中央ニ於テ之ニ直立ス,

∴　$TQ=PT$　(101. 定理)

$=OO'$　(∵　□OPTO′ ハ平行□)

故ニ Q ハ定点 T ヲ中心トシ OO′ ヲ半徑トセル圓周上ニアリ。

五月十六日ヨリ復習ス

第六節—内切,及外切圖形

定義

163. 内切, 外切. 多角形ノ各邊ガ壹個ノ圓ニ切スルトキハ此多角形ハ其圓ニ外切ストイヒ又其圓ハ其多角形ニ内切ストイフ. 而シテ其圓ヲ其多角形ノ内切圓ト稱スルコアリ.

定理貳拾八

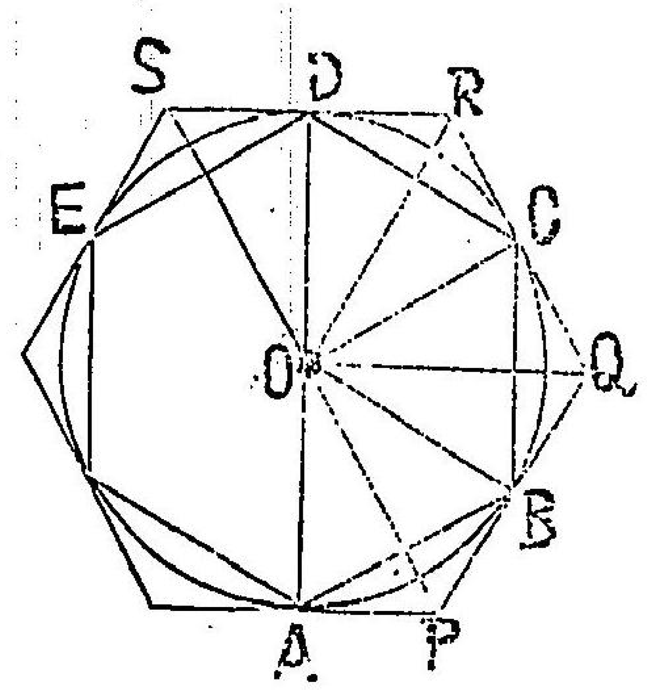
164. 壹個ノ圓周ヲ若干個ニ等分スルトキハ各等弧ノ弦ニテ成ル内接多角形ハ正多角形ナリ.

又各分点ニ於ケル切線ニテ成ル多角形ハ正多角形ナリ.

壹個ノ圓周ヲ A, B, C, D, E 等ニ於テ若干個ニ等分スルトキハ

(第壹) 各等弧ノ弦ニテ成ル多角形 ABCDE……ハ正多角形ナリ.

(第二) 各等分点ニ於ケル切線ニテ成ル多角形 PQRS……ハ亦正多角形ナリ.



(証) (第一) 弧 AB, BC, 等ハ相等シ (假設)

故ニ弦 AB, CD 等ハ等長ナリ (120定理)

故ニ多角形 ABCD……ハ各邊相等シ

又多角形 ABCD……ノ各角ハ等弧 AB, BC, CD 等ノ中ノ隣接セル貳個ヨリ成ル弓形内ノ角ナリ,

故ニ此諸角ハ相等シ.

即チ多角形 ABCD……ハ其各角相等シク, 又其各邊等長ナリ,

故ニ此多角形ハ正多角形ナリ

(第二) 中心ヲ O トシ OA, OB, OC ヲ結ブ

四角形 OAPB ノ各内角ノ和ハ四直角ニ等シ, (88. 定理)

而シテ $\angle OBP=\angle OAP=$直角, (145. 定理)

$\therefore\ \angle AOB+\angle APB=2$直角,

同様ニ $\angle BQC+\angle BOC=2$直角,

$\therefore\ \angle BQC+\angle BOC=\angle AOB+\angle APB,$

然ルニ $\angle BOC=\angle AOB$ ($\because$ 弧 AB = 弧 BC)

$\therefore\ \angle BQC=\angle APB$

同理ニヨリ $\angle BQC$ ハ其次ギノ角 QRS ニ等シク, $\angle QRS$ ハ又其次ノ角ニ等シ,

故ニ多角形 PQRS……ノ各角ハ相等シ,

又 OP, OQ ヲ結ベバ $\angle OPB=\frac{1}{2}\angle APB$ (147 推論)

$\angle OQB=\frac{1}{2}\angle PQR$

然ルニ $\angle APB=\angle PQR$

$\therefore\ \angle OPB=\angle OQB$

$\therefore\ OP=OQ$

$\therefore$ 直$\triangle OBP\equiv$直$\triangle OBQ$

$\therefore\ BP=BQ$

$\therefore\ 2BQ=PQ$

同理ニヨリ $2QC=QR$

然ルニ $BQ=QC$ $\quad\therefore\ PQ=QR$

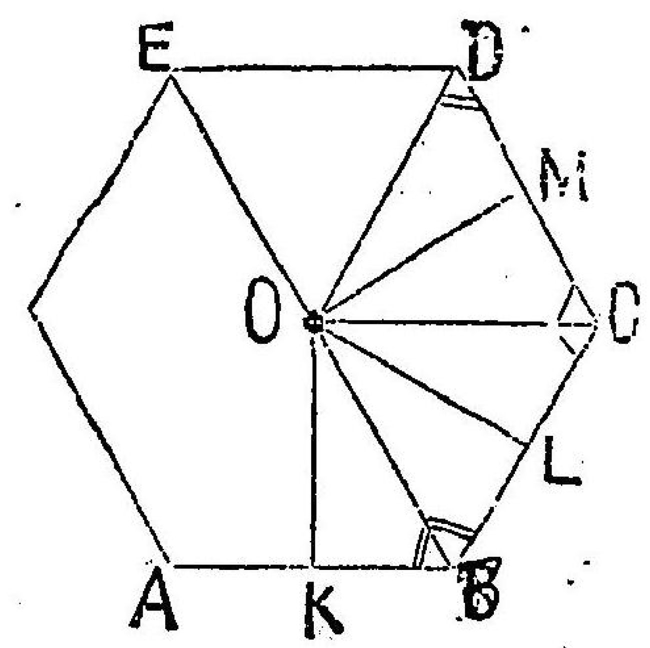
同様ニ QR ハ其次ノ邊 RS ニ等シク, RS ハ又其次ノ邊ニ等シ

故ニ多角形 PQRS……ハ其各角相等シク, 又其各邊等長ナリ.

故ニ多角形 PQR……ハ正多角形ナリ.

定理貳拾九

165. 正多角形ノ各角ノ等分線ハ壹点ニ交ル,而シテ此交点ハ各角頂及ビ各邊ヨリ等距ナリ。



正多角形ヲ ABCDE…………トス

然ルトキハ此多角形ノ各角ノ等分線ハ壹点ニ於テ交ル,而シテ其交点ハ各角頂及ビ各邊ヨリ等距ナリ.

(証) B, 及ビ C 角ノ等分線ノ交点ヲ O トシ OD, OE 等ヲ結ブ, $\triangle OBC$ $\triangle OCD$ ニ於テ

$\angle OCD=\angle OCB$

$CD=CB$

OC ハ共通邊 $\therefore\ \triangle OCD\equiv\triangle OCB$

$\therefore\ \angle ODC=\angle OBC,$

然ルニ $\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC$

$\therefore\ \angle ODC=\frac{1}{2}\angle ABC$

$=\frac{1}{2}\angle CDE,$

即チ OD ハ EDC 角ヲ等分ス,

即チ $\angle EDC$ ノ等分線ハ O. ヲ過グ,

同樣ニ他ノ諸角ノ等分線ハ O ヲ過ギ即チ壹点ニ於テ相交ル。

又 $\angle OBC=\angle OCB$ $\therefore\ OB=OC$

同樣ニ $OC=OD=$…………

故ニ O ハ各角頂ヨリ等距ナリ,

又 O ヨリ各邊ニ到ル垂線ヲ OK, OL, OM…………トスレバ

OB ハ $\angle ABC$ ヲ等分ス $\therefore\ OK\ \ OL$

同理ニヨリ $OL=OM$

故ニ O ハ各邊ヨリ等距ナリ.

166. 推論 正多角形ニ外切圓及ビ內切圓ヲ畫クコヲ得.

(証) 正多角形ヲ ABCDE…………トシ其多角ノ等分線ノ交点ヲ O トス,(前章ノ圖ヲ用ユ).

然ルトキハ O ハ各角頂ヨリ等距ナリ。 (165. 定理)

故ニ各角頂ハ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑セル圓周上ニアリ。

即チ正多角形ニ外切圓ヲ畫クコヲ得.

又 O ヨリ各邊ニ到ル距離ヲ OK, OL, OM…………トス.

然ルトキハ $OK=OL=OM=$…………

故ニ O ヲ中心トシ OK ヲ半徑トセル圓ハ各邊ニ切ス,

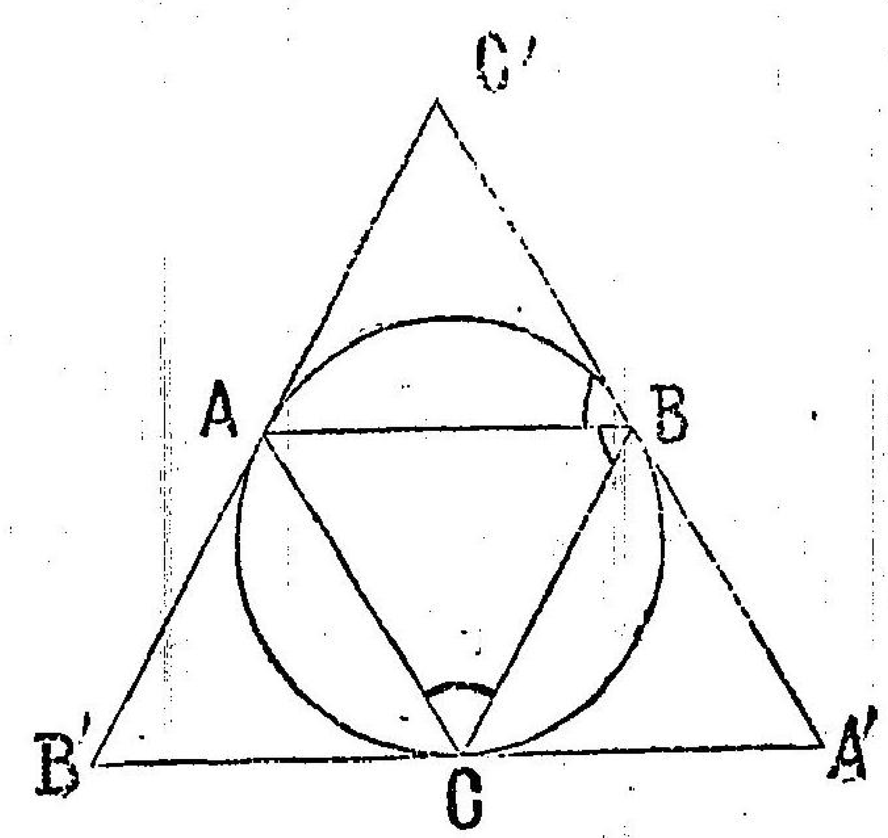
即チ正多角形 ABCD…………ニ內切圓ヲ畫クコヲ得.

167. (注意) 正多角形ノ各角ノ等分線ノ交点 O ハ其正多角形ノ內切圓及ビ外切圓ノ中心ナリ。

而シテ O ヲ正多角形ノ中心ト稱ス.

例題

1. 壹個ノ圓ニ內切スル正三角形 ABC ハ其圓ニ外切スル正三角形ノ四分ノ壹ニ等シ.



(証) A, B, C ニ於ケル切線ニテ成ル三角形 A′B′C′ ハ正多角形ナリ (164. 定理)

而シテ A′BC′ ハ切線ナリ,

$\therefore\ \angle C'BA=\angle BCA$ (148. 定理

$=\frac{2}{3}$ 直角,(85. 定理)

同樣ニ $\angle C'AB=\frac{2}{3}$ 直角

故ニ兩三角形 ABC, ABC′ ニ於テ

$\angle C'BA=\angle CBA=\frac{2}{3}$ 直角

$\angle C'AB=\angle CAB=\frac{2}{3}$ 直角

AB ハ共通邊 $\therefore\ \triangle C'AB\equiv\triangle ABC.$

同様ニ $\triangle A'BC$, $\triangle B'AC$ ハ $\triangle ABC$ ト全等形ナリ。

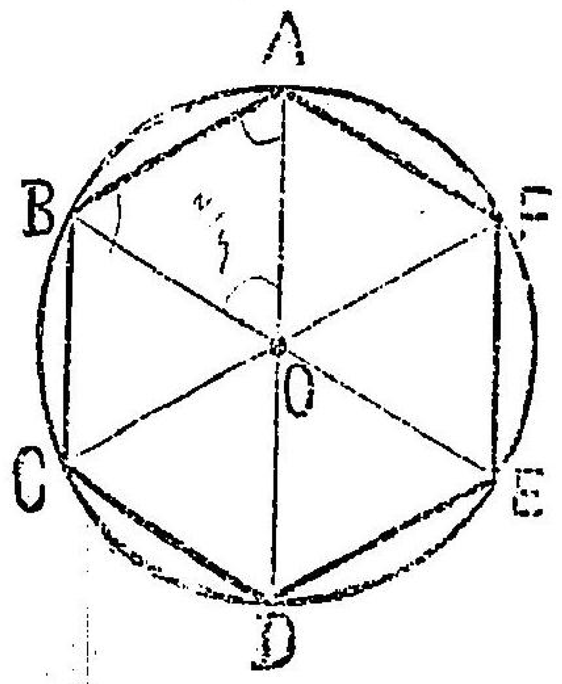
故ニ $\triangle ABC$ ハ $\triangle A'B'C'$ ノ四分ノ壹ナリ。

2　圓ノ內切正六角形ノ壹邊ハ其圓ノ半徑ニ等シ。

圓ノ內切正六角形ヲ ABCDEF トス,

然ルキハ其各邊ハ其圓ノ半徑ニ等シ.

(證) 內切正六角形ヲ ABCDEF トシ, 圓ノ中心ヲ O トシ OA, OB, OC, OD, OE, OF ヲ結ブ



今六個ノ弧 AB, BC, CD 等ハ相等シ,

故ニ是等ノ等弧ヲ夾ム六個ノ中心角 AOB, BOC, COD 等ハ相等シ。

$\therefore \angle AOB = 4$ 直角 $\times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 直角,

$\therefore \angle BAO + \angle ABO = 2$ 直角 $- \angle AOB$ (66. 定理)

$= 2$ 直角 $- \frac{2}{3}$ 直角

$= \frac{4}{3}$ 直角

然ルニ $\angle BAO = \angle ABO$, $\therefore \angle BAO = \angle ABO = \frac{2}{3}$ 直角

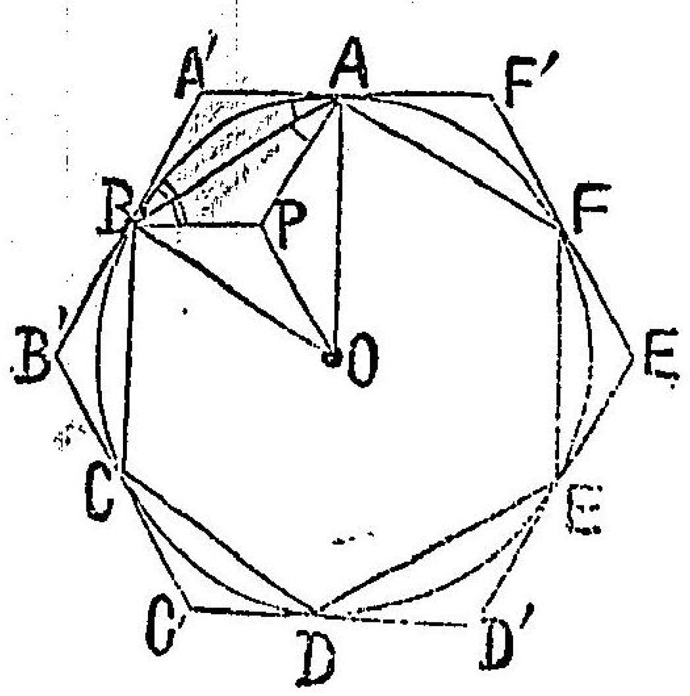
$\therefore \angle BAO = \angle ABO = \angle AOB$

故ニ $\triangle ABO$ ハ等邊三角形ナリ, (63. 推論)

故ニ AB ハ AO (即チ外切圓ノ半徑) ニ等シ。

3　內切正六角形 ABCDEF ハ其線ニ外切セル正六角形ノ四分ノ三ニ等シ。

(證) A, B, C, D, E, F ニ於ケル切線ニテ成ル六角形 $A'B'C'D'E'F'$ ハ正六角形ナリ,



今圓ノ中心ヲ O トシ OA, OB, ヲ結ビ, 三角形 AOB ノ各角ノ等分線ノ交点ヲ P トス,

然ルキハ $\triangle APB$, APO ニ於テ

$AB = AO$ (前例題)

AP ハ共通邊

$\angle PAB = \angle PAO$ (作法) $\therefore \triangle APB \equiv \triangle APO$ (1)

又 $\triangle APB \equiv \triangle BPO$ (同理) (2)

又 $\angle A'AB = \angle A'AO - \angle BAO$

$=$ 直角 $- \frac{2}{3}$ 直角

$= \frac{1}{3}$ 直角,

又 $\angle BAP = \frac{1}{3}$ 直角, $\therefore \angle A'AB = \angle BAP$

同様ニ $\angle A'BA = \angle ABP$

故ニ兩三角形 $AA'B$, ABP ニ於テ

$\angle A'AB = \angle BAP$

$\angle A'BA = \angle ABP$

AB ハ共通邊 $\therefore \triangle ABP \equiv \triangle AA'B$ (3)

(1) (2) (3) ニヨリ $\triangle AOB = \frac{3}{4} \times \square OAA'B$

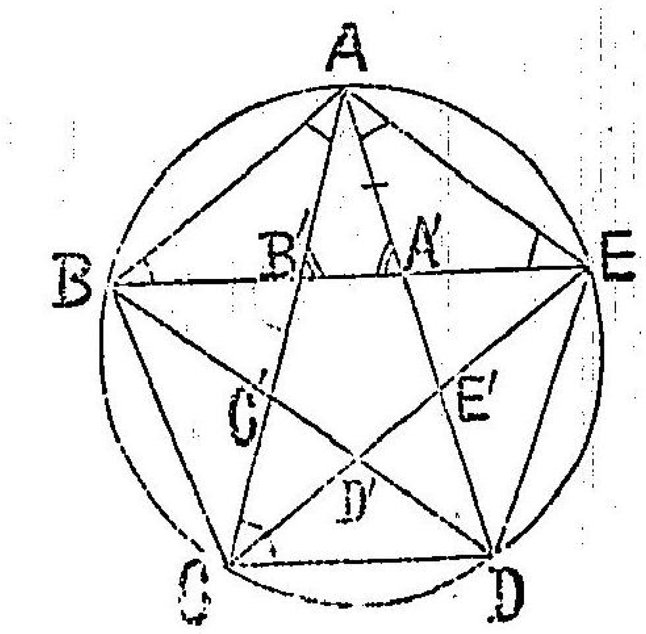
然ルニ ABCDEF ハ $\triangle AOB$ ノ 6 倍ニシテ $A'B'C'D'E'F'$ ハ $\square OAA'B$ ノ 6 倍ナリ,

$\therefore ABCDEF = \frac{3}{4} \times A'B'C'D'E'F'$.

4　正五角形ノ對角線ニテ成ル五角形ハ正多角形ナリ。

正五角形ヲ ABCDE トス,

然ルキハ此多角形ノ對角線ニテ成ル多角形 $A'B'C'D'E'$ ハ正五角形ナリ。



(證) 弧 AB＝弧 AE

$\therefore \angle AEA' = \angle ABE'$

$\angle EAA' = \angle BAB'$ (同理)

加フルキハ

$\angle AEA' + \angle EAA' = \angle ABB' + \angle BAB'$

$\therefore \angle AA'B' = \angle AB'A'$ (86. 定理)

∴ $\angle B'A'E' = \angle A'B'C'$

同樣ニ $\angle A'B'C' = \angle B'C'D' = \angle C'D'E' = \cdots\cdots$

故ニ五角形 $A'B'C'D'E'$ ハ各角相等シ. (1)

又兩三角形 $AA'B'$, $EA'E'$ ニ於テ

$AA' = A'E$ （∵ $\angle A'EA = \angle A'AE$）

$\angle AA'B' = \angle EA'E'$

$\angle AB'A' = \angle EE'A'$ ∴ $\triangle AA'B' \equiv \triangle EA'E'$

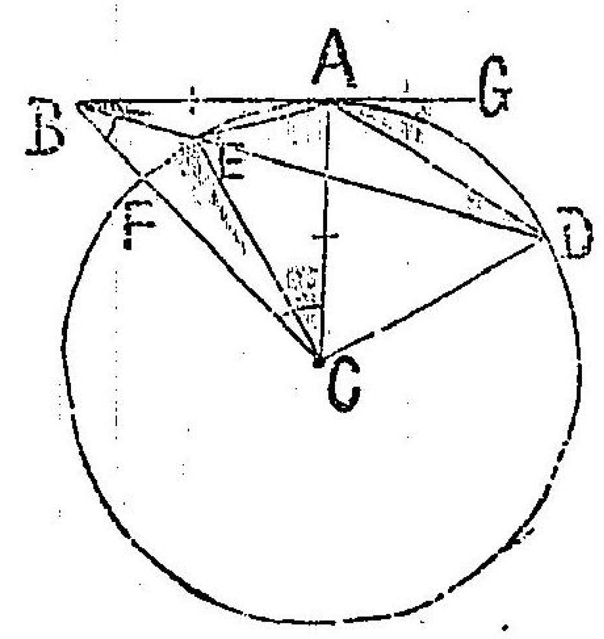
∴ $A'B' = A'E'$

同樣ニ $A'E' = D'E' = \cdots\cdots$

故ニ $A'B'C'D'E'$ ハ各邊相等シ. (2)

(1)(2)ニヨリ $A'B'C'D'E'$ ハ正五角形ナリ.

5 AD ハ C ヲ中心トセル圓ニ内切セル正六角形ノ一邊ナリ又 AB ハ AD ト鈍角ヲナシ且ツ AD ト等長ナル切線ナリ. 今 BD, BC ガ圓周ニ交ル点ヲ E, F トスレバ弦 AE, EF ハ内切正十二角形及ビ内切正貳拾四角形ノ壹邊ナリ.



（証） BA ヲ G マデ引張シ, CD ヲ結ブ

$\angle ACE = 2\angle ADB$ （134. 定理）

又 $\angle GAD = \angle ADB + \angle ABD$

$= \angle ADB + \angle ADB$ ∵ $AD = AB$,

$= 2\angle ADB$

∴ $\angle ACE = \angle GAD$

$= \angle CAG - \angle CAD$

$=$ 直角 $-\frac{2}{3}$ 直角 （∵ 前ノ2ニヨリ $\triangle ACD$ ハ等邊）

$= \frac{1}{3}$ 直角 $= \frac{1}{12} \times 4$ 直角

故ニ弦 AE ハ全圓周ノ $\frac{1}{12}$ ナリ, 故ニ弦 AE ハ正十二角形ノ一邊ナリ.

又 $\angle ECF = \angle ACB - \angle ACE = \frac{1}{2}$ 直角 $-\frac{1}{3}$ 直角 $= \frac{1}{24} \times 4$ 直角,

故ニ弧 EF ハ全圓周ノ $\frac{1}{24}$ ナリ, 故ニ弦 EF ハ正廿四角形ノ壹二

第六節—作圖

168. 作圖器械. 初等幾何學ノ問題（問題ノ定義ハ 13. ニアリ）ニ於テ用ユル器械ハ唯定規ト兩脚器トノミ, 但シ定規ハ直線ヲ引クコニ用ヒ兩脚器ハ圓若クハ弧ヲ畫キ, 又ハ距離ヲ移スコニ用ユルナリ.

公　　法

（公法ノ定義ハ 12. ニアリ）.

169. (1) 任意ノ壹点若クハ任意ノ貳点ヲ過グル直線ヲ引クコヲ得.

(2) 有限直線ヲ任意ノ長サニ引張スルコヲ得.

(2) 任意ノ壹点ヲ中心トシ, 任意ノ長サヲ半徑トシテ圓若クハ弧ヲ畫クコヲ得.

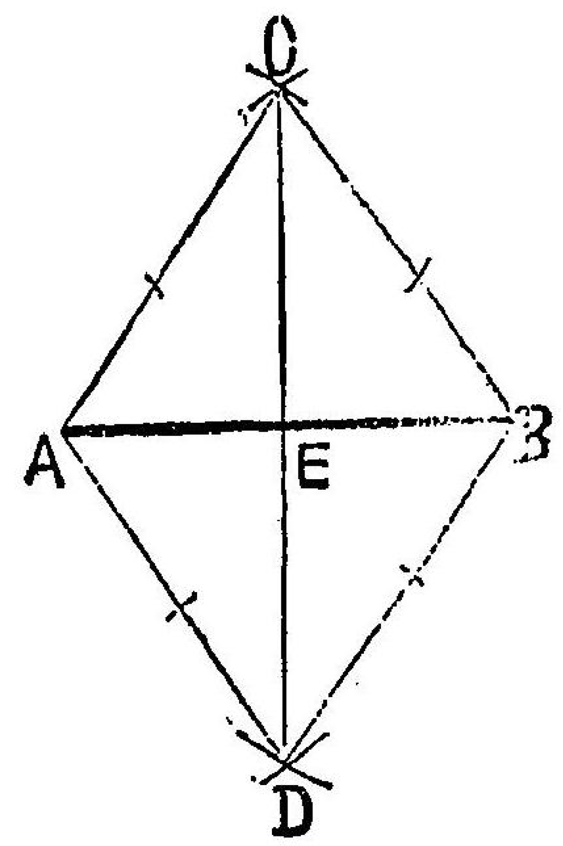
問　題　壹

170. 有限直線ヲ貳等分スルコヲ求ム.

有限直線ヲ AB トシ, 之ヲ貳等分スルコヲ求ム.（次ノ頁ノ圖）

（作圖）. A, 及ビ B ヲ中心トシ AB ヨリ大ナル長サヲ半徑トシテ貳個ノ弧ヲ畫ク,

而シテ此ノ貳弧ノ交点ヲC, Dトシ, CDヲ結ビCDトABトノ交点ヲEトス
然ルヰハEハABヲ貳等分スル点ナリ。

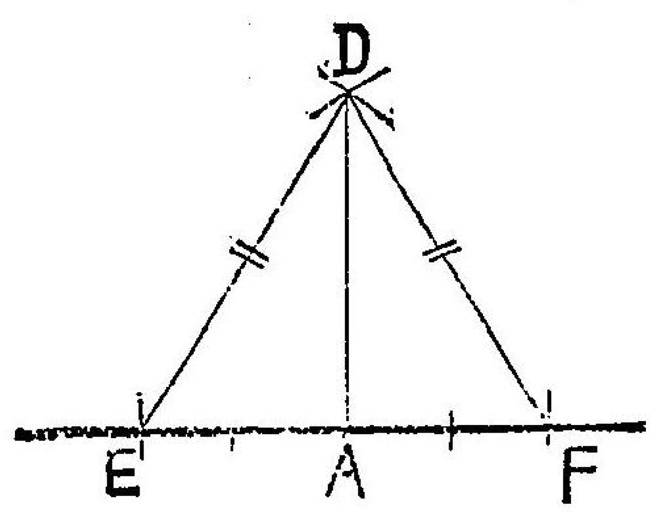


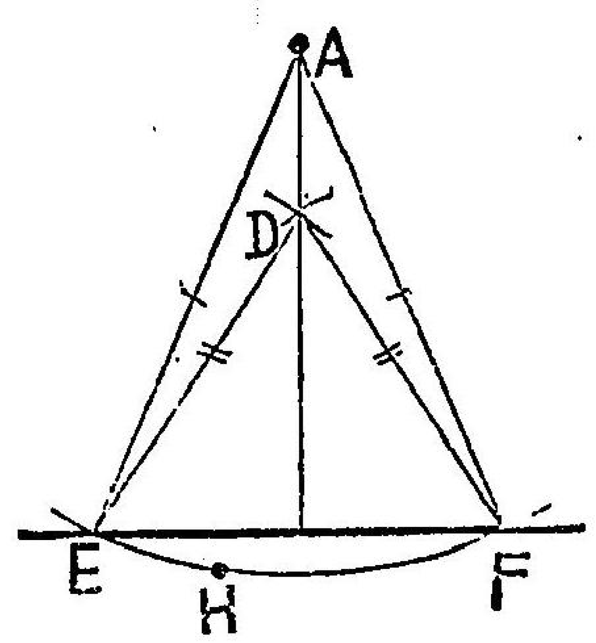
(証) AC, BC, AD, BDヲ結ブ
作法ニヨリAC=BC AD=BD,
故ニC及ビDハA, Bヨリ等距ナル点ナリ,
即チC, DハA,Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ノ上ノ点ナリ。
故ニCDハA,Bヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ,
故ニCDハABヲ直角ニ貳等分ス,　(101. 定理).
即チEハABヲ貳等分スル点ナリ。

171. (注意) 前章ノ作法ハ有限直線ABヲ直角ニ貳等分スル直線ヲ作ル法ナリ.

問題二

172. 壹定点ヨリ壹定直線ニ垂線ヲ引クヿヲ求ム。
壹定点ヲAトシ, 定直線ヲBCトス,





(作圖) AガBC上ニアルヰハAヲ中心トシ任意ノ長サヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キBCトノ交点ヲE, Fトシ,
又AガCノ外ニアルヰハBCノ異側(Aニ對シテ)ニ任意ノ点Hヲ取リAヲ中心トシAHヲ半徑トシテ圓周ヲ畫キBCトノ交点ヲE, Fトス
是ニ於テE及ビFヲ中心トシEFノ半ヨリ大ナル長サヲ半徑トシテ貳等圓ヲ畫キ此貳等圓周ノ交点ヲDトシ, ADヲ結ブ,
然ルヰハADハ所求ノ垂線ナリ。

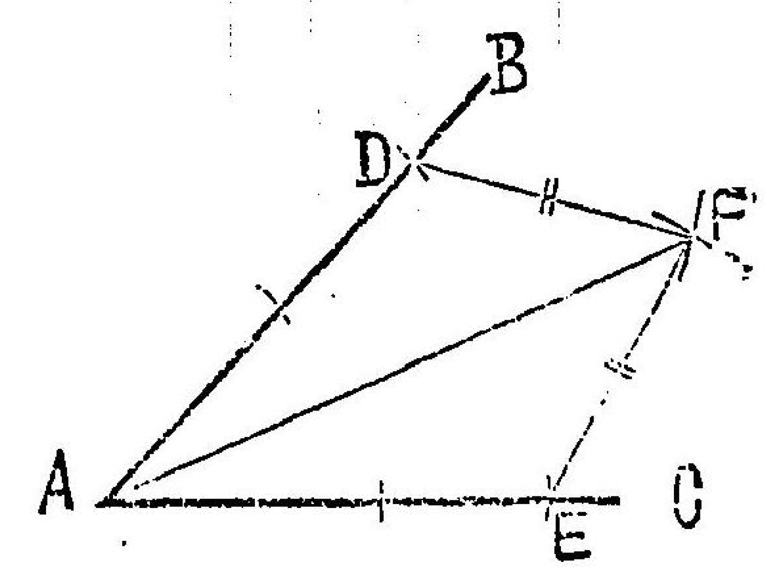
(証) 作法ニヨリA, 及ビDハE, Fヨリ等距ナル点ナリ。
故ニA, DハE, Fヨリ等距ナル点ノ軌跡ノ上ノ点ナリ,
故ニ直線ADハE, Fヨリ等距ナル点ノ軌跡ナリ,
故ニ直線ADハEFヲ直角ニ等分ス,　(101. 定理)
故ニ直線ADハEFノ垂線ナリ

(注意) 本作圖ニ於テ, AガBCノ外方ニ在ルヰ, HヲBCノ異側(Aニ對シテ)ニ取リシハ, Aヲ中心トセル圓周ヲシテ必ズBCニ交ラシメンガ爲ナリ。

又E, Fヲ中心トセル貳等圓ノ半徑ヲシテEFノ半ヨリ大ナラシメシハ此貳等圓周ヲシテ交ラシメンガ爲メナリ。

問題三

173. 定角ヲ貳等分スルヿヲ求ム。
BACヲ定角トシ, 之ヲ貳等分スルヿヲ求ム。



(作圖) Aヲ中心トシ任意ノ長ヲ半徑トシテ壹個ノ圓周ヲ畫キ此圓周ガAB, ACニ交ル点ヲD, EトシD, 及ビEヲ中心トシDEノ