代數難問四百題解

最新實用

蕭永盛編

群益書社印行

CHUN YIH BOOK CO.

SHANGHAI, CHINA

代數

難問四百題解

蕭永盛編

第一版

上海

群益書社印行

Chun Yih Book Company.

Shanghai, China.

1948

洋裝全一册

代數難問四百題解

定價

編輯者　蕭永盛

印刷者　羣益書社

發行者　羣益書社

總發行所

上海

福州路中市

羣益書社

緒　　言

大多數學生對於代數是一門最繁難的功課，因爲牠需要將最呆板的公式與以最靈活的運用。公式記憶不熟的人不能解演代數問題，同時公式記憶很熟而不能運用靈活的人也不能解演代數問題。怎樣纔能運用靈活呢？唯一的答案是一個「熟」字，「熟能生巧」這是一定的道理。

熟於解演平易的問題不是高強的本領，要熟於解演繁難的問題纔是高強的本領，而這種本領的獲得祇能由於多多解演繁難的問題。編者的編著這本書的目的是要幫助學生們獲得這種本領，所收羅的問題皆是比較繁難的，而所用的解法力求其平易，對於因子分解問題證明問題及方程式應用問題等特別注意，因爲這是最繁難的所在。學生們於研讀本書之後，倘能增強幾分解演問題的能力，那就是編者所最引爲榮幸的。

編者識

目　次

第一章	因子分解	22題	1—12頁
第二章	聯立一次方程式	7題	13—16頁
第三章	公倍式及公因式	14題	17—23頁
第四章	分式	7題	24—26頁
第五章	一元二次方程式	47題	27—53頁
第六章	餘式定理	14題	54—61頁
第七章	未定係數	6題	62—67頁
第八章	有理式之值	8題	68—70頁
第九章	證明問題	24題	71—89頁
第十章	不等式	16題	90—101頁
第十一章	分數方程式	8題	102—106頁
第十二章	高次方程式	6題	107—110頁
第十三章	根號方程式	7題	111—114頁
第十四章	聯立方程式	37題	115—140頁
第十五章	消去法	3題	141—142頁
第十六章	方程式應用問題	42題	143—171頁
第十七章	無理式	25題	172—186頁
第十八章	比及比例	18題	187—200頁
第十九章	級數	62題	201—242頁
第二十章	對數	24題	243—257頁
第二十一章	複利法	6題	258—261頁

代數難問四百題解

第一章

因子分解

因子分解公式十種

1. $ma+mb+mc+\cdots\cdots=m(a+b+c\cdots\cdots)$

例如 $x+p(y+z)=a\cdots\cdots(1)$ $y+p(z+x)=b\cdots\cdots(2)$

$z+p(x+y)=c\cdots\cdots(3)$ 求 $x+y+z$ 之值

解 $(x+y+z)+p(y+z)+p(z+x)+p(x+y)=a+b+c$

$(x+y+z)+p(2x+2y+2z)=a+b+c$

$(x+y+z)+2p(x+y+z)=a+b+c$

$(x+y+z)(1+2p)=a+b+c$

$x+y+z=\dfrac{a+b+c}{1+2p}$

2. $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$

3. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

4. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

例如 將 $a^4+a^2b^2+b^4$ 分解成因子.

解 $a^4+a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$

$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

又例 將 $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$ 分解成因子

解 $(1-a^2)(1-b^2)-4ab=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$=1+a^2b^2-2ab-a^2-b^2-2ab$

$=(1-2ab+a^2b^2)-(a^2+2ab+b^2)$

$=(1-ab)^2-(a+b)^2$

$=(1-ab+a+b)(1-ab-a-b)$

5. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$

例如 將 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ 分解成因子.

解 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

$=(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2+2c^2a^2)-4c^2a^2$

$=(a^2-b^2+c^2)^2-(2ca)^2$

$=(a^2-b^2+c^2+2ca)(a^2-b^2+c^2-2ca)$

$=\{(a+c)^2-b^2\}\{(a-c)^2-b^2\}$

$=(a+c+b)(a+c-b)(a-c+b)(a-c-b)$

6. (甲) $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

(乙) $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

例一 將 $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$ 分解成因子.

解 在上列式中 x^2+3x 為共通所有, 現在將 x^2+3x 作為等於 y.

$(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$

$=(y-2)(y+4)-16$

$=y^2+2y-8-16$

$=y^2+2y-24$

$=(y+6)(y-4)$

依此則

$(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$

$=(x^2+3x+6)(x^2+3x-4)$

$=(x^2+3x+6)(x+4)(x-1)$

例二 將 $2x^2-5xy+2y^2-5(x+y)-25$ 分解成因子.

$$2x^2-5xy+2y^2-5(x+y)-25$$
$$=2x^2-5xy+2y^2-5x-5y-25$$
$$=2x^2-(5y+5)x+(2y^2-5y-25)$$
$$=2x^2-(5y+5)x+(2y+5)(y-5)$$

ac aa bc b a

$$=(x-2y-5)(2x-y+5)$$

7. $$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

證明於下

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$
$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

8. $$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

例一 將 x^6-a^6 分解成因子.

解 $$x^6-a^6=(x^2)^3-(a^2)^3=(x^2-a^2)\{(x^2)^2+a^2x^2+(a^2)^2\}$$
$$=(x+a)(x-a)(x^4+a^2x^2+a^4)$$
$$=(x+a)(x-a)(x^4+2a^2x^2+a^4-a^2x^2)$$
$$=(x+a)(x-a)(x^2+a^2)^2-(ax)^2$$
$$=(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$$

例二 將 $a^3-b^3-b(a^2-b^2)+b(a-b)^2$ 分解成因子.

解 $$a^3-b^3-b(a^2-b^2)+b(a-b)^2$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2)-b(a+b)(a-b)+b(a-b)^2$$

$=(a-b)\{a^2+ab+b^2-b(a+b)+b(a-b)\}$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab-b^2+ab-b^2)$

$=(a-b)(a^2+ab-b^2)$

9.　(甲)　$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$

(乙)　$a^3\pm 3ab(a\pm b)\pm b^3=(a\pm b)^3$

例如

$$X=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

求 X^3+pX+q 之值

解　假定 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=A$, $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=B$

則　$X^3=(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$

$$A^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$$B^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

$A^3+B^3=-q$　　　　(1)

$$AB=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\times\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}$$

$$=\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}$$

$$=-\frac{p}{3}$$

$A+B=X$　　　　(3)

因此　$3AB(A+B)=3\left(-\frac{p}{3}\right)X=-pX$　　(2)

由　(1)與(2)　　$X^3=-q-pX$

$\therefore$　$X^3+pX+q=-q-pX+pX+q$

$=0$

10. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

例如 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$

故 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)-3abc$

作 $a+b+c=s$

則 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=s^3-3(s-a)(s-b)(s-c)-3abc$

$=s^3-3s^3+3s^2(a+b+c)-3s(bc+ca+ab)+3abc-3abc$

$=s^3-3s^3+3s^3-3s(bc+ca+ab)$

$=s\{s^2-3(bc+ca+ab)\}$

$=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(bc+ca+ab)\}$

$=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-3(bc+ca+ab)\}$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

問　　題

1. 將 $a^3-b^3-a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$ 分解成因子.

提示 由於4,8兩公式知$(a-b)$是(a^3-b^3),(a^2-b^2)的共通因子.

解 $a^3-b^3-a(a^2-b^2)+b(a-b)^2$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)-a(a-b)(a+b)+b(a-b)(a-b)$

$=(a-b)[(a^2+ab+b^2)-a(a+b)+b(a-b)]$

$=(a-b)[a^2+ab+b^2-a^2-ab+ab-b^2]$

$=(a-b)ab=ab(a-b)$……………………………**答**

2. 將 $4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$ 分解成因子.

提示 由於$(\quad)^2-(\quad)^2$之形式而推定可以運用公式4.

解 原式$=[2(ad+bc)]^2-[a^2+d^2-b^2-c^2]^2$

$=[2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)][2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)]$

$=[2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2][2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2]$

$=[a^2+2ad+d^2-b^2+2bc-c^2][b^2+2bc+c^2-a^2+2ad-d^2]$

$$=[(a^2+2ad+d^2)-(b^2-2bc+c^2)][(b^2+2bc+c^2)-(a^2-2ad+d^2)]$$

$$=[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]\cdots\cdots(\text{由公式}2)$$

$$=[(a+d)+(b-c)][(a+d)-(b-c)]\times[(b+c)+(a-d)][(b+c)-(a-d)]$$

$$=(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a+b+c-d)(-a+b+c+d)\text{答}$$

3. 將 $(1-a^2)(1-b^2)-4ab$ 分解成因子.

注意 先將括弧取去而整頓之.

解 $(1-a^2)(1-b^2)-4ab=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$$=1-2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2$$

$$=(1-2ab+a^2b^2)-(a^2+2ab+b^2)$$

$$=(1-ab)^2-(a+b)^2$$

$$=[(1-ab)+(a+b)][(1-ab)-(a+b)]$$

$$=(1-ab+a+b)(1-ab-a-b)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

4. 將 $x^4+x^2y^2+y^4$ 分解成因子.

注意 將 x^2y^2 變成 $2x^2y^2$ 即可運用公式2.

解 $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$

$$=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

5. 將 $x^4-27x^2y^2+y^4$ 分解成因子.

注意 將 $-27x^2y^2$ 分開使成 $-2x^2y^2-25x^2y^2$

解 $x^4-27x^2y^2+y^4=x^4-2x^2y^2+y^4-25x^2y^2$

$$=(x^2-y^2)^2-(5xy)^2$$

$$=(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

6. 將 $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$ 分解成因子.

注意 將 x^2+4x 作爲 y, 於是算式成爲 $y^2-2y-15$, 然後推求其積爲 -15 而其和爲 -2 之兩數.

解　$(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$

$=y^2-2y-15$

$=y^2+(-5+3)y+(-5)\times3$

$=(y+3)(y-5)$

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)$

$=[x^2+(1+3)x+1\times3][x^2+(-1+5)x+(-1)\times5]$

$=(x+1)(x+3)(x-1)(x+5)$ ……………………… 答

7. 將$(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$分解成因子.

注意　將x^2+3x+4作成$(x^2+3x-2)+6$,然後以y代x^2+3x-2,再或用y以代x^2+3x亦可.

解　原式$=(x^2+3x-2)[(x^2+3x-2)+6]-16$

$=y(y+6)-16=y^2+6y-16$

$=(y+8)(y-2)$

$=(\underline{x^2+3x-2}+8)(\underline{x^2+3x-2}-2)$

$=(x^2+3x+6)(x^2+3x-4)$

$=(x^2+3x+6)(x-1)(x+4)$ ……………………… 答

8. 將$(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)+b^4$分解成因子.

解　原式$=[(a+b)(a+4b)][(a+2b)(a+3b)]+b^4$

$=[a^2+5ab+4b^2][a^2+5ab+6b^2]+b^4$

$a^2+5ab+4b^2=y$

$=y(y+2b^2)+b^4=y^2+2b^2y+b^4$

$=(y+b^2)^2$

$=[(a^2+5ab+4b^2)+b^2]^2$

$=(a^2+5ab+5b^2)^2$ ……………………… 答

9. 將$4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$分解成因子.

解　原式$=4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2$

$=4(x^2+17x+60)(x^2+16x+60)-3x^2$　[作$x^2+16x+60=y$]

$=4(y+x)y-3x^2$

$=4y^2+4xy-3x^2$

$=(2y+3x)(2y-x)$　　[仍置 $y=x^2+16x+6$

$=[2(x^2+16x+60)+3x][2(x^2+16x+60)-x]$

$=[2x^2+35x+120][2x^2+31x+120]$

$=(2x^2+35x+120)(2x+15)(x+8)$ ……………………………………

10. 將 $7x^2+39x-18$ 分解成因子.

[解] $7x^2$ 爲 x 與 $7x$ 之積，而 18 可以爲 1×18, 2×9, 3×6 三者之積，竟何者爲是，可用下列方法推斷之.

(A)
$$\begin{array}{ll} 7x & 1\cdots\cdots1\times x=x \\ x & 18\cdots\cdots7x\times18=126x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 7x & 18\cdots\cdots18\times x=18x \\ x & 1\cdots\cdots7x\times1=7x \end{array}$$

此兩者之和與差皆非 $39x$，所以不是.

(B)
$$\begin{array}{ll} 7x & 2\cdots\cdots2\times x=2x \\ x & 9\cdots\cdots7x\times9=63x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 7x & 9\cdots\cdots x\times9=9x \\ x & 2\cdots\cdots7x\times2=14x \end{array}$$

此兩者之和與差皆非 $39x$，所以不是.

(C)
$$\begin{array}{ll} 7x & 3\cdots\cdots3\times x=3x \\ x & 6\cdots\cdots7x\times6=42x \end{array}$$

此兩者之差雖爲 39，然 $3x-42x=-39x$，在原式中爲 $+39x$，非 $-39x$，所以不是.

$$\begin{array}{lll} 7x & -3\cdots\cdots x\times(-3)= & -3x \\ x & +6\cdots\cdots7x\times6 = & 42x \\ \hline 7x\times x=7x^2, & -3\times+6=-18 & 39x \end{array}$$

[答] $7x^2+39x-18=(7x-3)(x+6)$ ……………………………………答

11. 將 $(a^2-b^2)x^2+4abx-(a^2-b^2)$ 分解成因子.

[解]
$$\begin{array}{lll} (a+b)x & -(a-b)\cdots\cdots-(a-b)^2x= & -[a^2-2ab+b^2]x \\ (a-b)x & +(a+b)\cdots\cdots(a+b)^2x= & [a^2+2ab+b^2]x \\ & & + \\ \hline & & 4abx \end{array}$$

$\therefore\ (a^2-b^2)x^2+4abx-(a^2-b^2)$

$=(a+b)(a-b)x^2+4abx-(a+b)(a-b)$

$=[(a+b)x-(a-b)][(a-b)x+(a+b)]$ ………………………… 答

但是照下列寫來要好一點.

$(a^2-b^2)x^2+4abx-(a^2-b^2)$

$=(a+b)(a-b)x^2+[a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2]x-(a+b)(a-b)$

$=(a+b)(a-b)x^2+[(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)]x$
$\qquad -(a+b)(a-b)$

$=[(a+b)x-(a-b)][(a-b)x+(a+b)]$

12. 將 ax^2+bx+c 分解成因子.

注意 將x^2之係數,去除各項,再變完全平方式,然後用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 之公式.

解 $ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right\}$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$=a\left\{x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

若以 α 代 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ β 代 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

則成 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

13. 將 $15x^2+53x+27$ 分解成因子.

注意 將原式作爲等於零,然後求其根.

解 $15x^2+53x+27=0$ 今求其根

$$x=\frac{-53\pm\sqrt{53^2-4\times15\times27}}{2\times15}=\frac{-53\pm\sqrt{1189}}{30}$$

$\therefore\quad 15x^2+53x+27$

$$=15\left(x-\frac{-53+\sqrt{1189}}{30}\right)\left(x-\frac{-53-\sqrt{1189}}{30}\right)$$

$$=15\left(\frac{30x+53-\sqrt{1189}}{30}\right)\left(\frac{30x+53+\sqrt{1189}}{30}\right)$$

$$=\frac{1}{60}\left(30x+53-\sqrt{1189}\right)\left(30x+53+\sqrt{1189}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots$$

14. 將 $x^4+x^2-2ax+1-a^2$ 分解成因子.

注意 將 a 整頓，然後按前例之方法分解之.

解 將原式寫成 $-\{a^2+2ax-(x^4+x^2+1)\}$

再寫作 $a^2+2ax-(x^4+x^2+1)=0$，於是作成 a 之二次方程式而求其

$$a=\frac{-2x\pm\sqrt{(2x)^2+4(x^4+x^2+1)}}{2}$$

$$=-x\pm\sqrt{x^4+2x^2+1}=-x\pm\sqrt{(x^2+1)}$$

$$=-x\pm(x^2+1)$$

$\therefore\quad a=-x+(x^2+1)=(x^2-x+1)$ 又或

$a=-x-(x^2+1)=-(x^2+x+1)$

$\therefore\quad$ 原式 $=-(a-x^2+x-1)(a+x^2+x+1)$

$=(x^2-x+1-a)(x^2+x+1+a).$

再有一種解法就是將 x^2 加減之，使成完全平方.

原式 $=x^4+2x^2+1-x^2-2ax-a^2$

$=(x^4+2x^2+1)-(x^2+2ax+a^2)$

$=(x^2+1)^2-(x+a)^2$

$=[(x^2+1)+(x+a)][(x^2+1)-(x+a)]$

$=(x^2+x+1+a)(x^2-x+1-a)$

15. 將 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$ 分解成因子.

注意 將 a^2 作爲 y 於是做14題，寫成 y 之二次方程式.

解 作 $a^2=y$ 則

原式 $=y^2+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2y-2b^2y$

$=y^2-2(b^2+c^2)y+(b^4-2b^2c^2+c^4)$ ……………………………… (A)

作 $y^2-2(b^2+c^2)y+(b^4-2b^2c^2+c^4)=0$

$$y=\frac{2(b^2+c^2)\pm\sqrt{[-2(b^2+c^2)]^2-4\times1\times(b^4-2b^2c^2+c^4)}}{2}$$

$$=\frac{2(b^2+c^2)\pm\sqrt{4b^4+8b^2c^2+4c^2-4b^4+8b^2c^2-4c^4}}{2}$$

$$=\frac{2(b^2+c^2)\pm\sqrt{16b^2c^2}}{2}=(b^2+c^2)\pm2bc$$

$\therefore\ y=b^2+2bc+c^2\ \ (b+c)^2$ 及 $y=b^2-2bc+c^2=(b-c)^2$

$\therefore$ 原式 $=y^2-2(b^2+c^2)y+(b^4-2b^2c^2+c^4)$

$=[y-(b+c)^2][y-(b-c)^2]$ ……………………[換 $a^2=y$]

$=[a^2-(b+c)^2][a^2-(b-c)^2]$ ………[用 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 之公式]

$=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)\ (a-b+c)$ ……………………… 答

16. K應有如何之值，始可將 $x^2-y^2+3x-7y+K$ 分解成兩個一次因數.

解 求 $x^2+3x-(y^2+7y-K)=0$ 之根.

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+4(y^2+7y-K)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{4y^2+28y+9-4K}}{2}$$

然在一次式中不能用如 $\sqrt{4y^2+28y+9-4k}$ 之無理數，須要 $4y^2+28y+9-4k$ 之完全平方數，故 $4y^2+28y+9-4k$

$$=4\left(y^2+7y+\frac{9-4k}{4}\right)$$

$$=4\left\{y^2+7y+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{9-4k}{4}\right\}$$

$$=4\left\{\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{-49+9-4k}{4}\right\}$$

$$=4\left\{\left(y+\frac{7}{2}\right)^2-k-10\right\}$$

欲使成完全平方數，非作$-k-10=0$不可.

$\therefore\ k=-10$　　　　答　$k=-10$

17. 將 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 分解成因子.

注意　將a,b,c依二次式整頓之.

解　原式$=(b-c)a^2-b^2a+c^2a+b^2c-bc^2=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$ 於此式中可見$(b-c)$為共通因子，故將其括出.

$=(b-c)[a^2-(b+c)a+bc]$

$=(b-c)[(a-b)(a-c)]=-(a-b)(b-c)(c-a)$………答

18. 將 $1-(a-b)^6$ 分解成因子.

注意　此問題為二項，故推定可用公式 3, 5；如用此兩公式則須變換形式成 $1^2-[(a-b)^3]^2$ 及 $1^3-[(a-b)^2]^3$.

解　$1-(a-b)^6=1^2-[(a-b)^3]^2$

$=[1+(a-b)^3][1-(a-b)^3]$

$=[1^3+(a-b)^3][1^3-(a-b)^3]$　　（用公式4, 5）

$=[1+(a-b)][1^2-(a-b)+(a-b)^2]$

$\times[1-(a-b)][1+(a-b)+(a-b)^2]$

$=(1+a-b)(1-a+b+a^2-2ab+b^2)$

$\times(1-a+b)(1+a-b+a^2-2ab+b^2)$……答

注意　原式亦可$=1^2-[(a-b)^2]^3=[1-(a-b)^2][1+(a-b)^2+(a-b)^4]$，不過第二括弧中之$1+(a-b)^2+(a-b)^4$分解頗為困難，故不用；以後如遇$A^2-B^2$, A^3-B^3兩公式皆可應用之，以用A^2-B^2為好.

第二章

聯立一次方程式

1. 未知數的個數與相異之方程式的個數相等，則未知數的值能彀確定，若應用問題中有二個未知數x與y，而此二數作成兩個不同的方程式，則x與y的值不能確定.

2. 若未知數的個數多於方程式的個數則祇能知曉未知數間之關系(未知數間之比)，不能求得其值.

3. 若未知數的個數少於方程式的個數則引起消去法或不能.

問　　題

1. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$　(1)

$lx+my+nz=s$　(2)　求其解.

解　令 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$

$$k=\frac{lx}{la}=\frac{my}{mb}=\frac{nz}{nc}=\frac{lx+my+nz}{la+mb+nc}=\frac{s}{la+mb+nc}$$

$$\therefore\ \frac{x}{a}=\frac{s}{la+mb+nc},\quad \frac{y}{b}=\frac{s}{la+mb+nc},\quad \frac{z}{c}=\frac{s}{la+mb+nc}$$

$$\therefore\ x=\frac{as}{la+mb+nc}\qquad y=\frac{bs}{la+mb+nc}\qquad z=\frac{cs}{la+mb+nc}$$ 答

2. x, y 爲未知數.

$mx-6y=5m-3$　(1)

$2x+(m-7)y=-7m+29$　(2)

$x=y$ 則m之值爲如何，又x與y之值爲如何.

解　若(1)式×$(m-7)$+(2)式×6 則得

$(m^2-7m+12)x=5(m^2-16m+39)$

$\therefore\ (m-3)(m-4)x-5(m-3)(m-13)=0$

$\therefore\ (m-3)[(m-4)x-5(m-13)]=0$

若 $m-3=0$ 則x成不定,

$m-3\neq0$ 則 $(m-4)x-5(m-13)=0$　(A)

再若　(1)式×2−(2)式×m 則得

$-(m^2-7m+12)y=7m^2-19m-6$

$\therefore\ (m-3)(m-4)y+(7m+2)(m-3)=0$

$\therefore\ (m-3)[(m-4)y+(7m+2)]=0$

若 $m-3=0$ 則 y 成不定

$m-3\neq 0$ 則 $(m-4)y+(7m+2)=0$　　(B)

由於(A)式，(B)式，作 $m-4\neq 0$. 則

$x=\dfrac{5(m-13)}{m-4}$,　　$y=\dfrac{-(7m+2)}{m-4}$　因 $x=y$, 故

$\dfrac{5(m-13)}{m-4}=\dfrac{-(7m+2)}{m-4}$　既定 $m-4\neq 0$, 於是得

$5(m-13)=-(7m+2)$ 故 $m=\dfrac{21}{4}$

現在說明 $m-3=0$ 所以成不定，今 $m-3=0$ 即

$m=3$ 則 (1)式得 $3x-6y=12$ ······ $x-2y=4$　(3)

(2)式得 $2x-4y=8$ ······ $x-2y=4$　(4)

$x=y$ 將其代入得 $y=-4$　　$\therefore$ $x=y=-4$

答 若 $m=\dfrac{21}{4}$ 則 $x=y=-31$　若 $m=3$ 則 $x=y=-4$

3. $(a+1)x+y+z=p$, $(b+1)y+x+z=q$, $(c+1)z+y+x=r$ 求 x, y, z 之值之和.

解 將各式之括弧解除. 作 $x+y+z=X$ 將其代入

$ax+X=p$ (1)　$by+X=q$ (2),　$cz+X=r$ (3)

更 (1)式$\times bc$+(2)式$\times ac$+(3)式$\times ab$

得　$abcx+abcy+abcz+bcX+acX+abX=bcp+acq+abr$

$\therefore$ $abc(x+y+z)+(ab+bc+ca)X=bcp+caq+abr$

$\therefore$ $(abc+ab+bc+ca)X=bcp+caq+abr$

$\therefore$　　$X=\dfrac{bcp+caq+abr}{abc+ab+bc+ca}$ ························答

4. 在 $y=mx+b$ 之方程式中有 $x=0$, $y=5$; $x=3$, $y=7$ 二組根，求 x 與 y 的關係；再 $x=9$ 之時求 y 的值.

解 $x=0, y=5$　　則 $5=m\times 0+b$　　$\therefore$ $b=5$

$x=3$, $y=7$　　則 $7=m\times 3+5$　　$\therefore$ $m=\dfrac{2}{3}$

因 $y=mx+b$ 故 $y=\frac{2}{3}x+5$　此爲 x 與 y 之關係,

再 $x=9$ 則 $y=\frac{2}{3}9+5=11$.

$y=\frac{2}{3}x+5,\ y=11$ ……………………………………答

5. $x+2y-3z=0$ …… (1)

$5x-6y+7z=0$ …… (2)　求 $x:y:z$

注意　作 x, y 爲未知數, z 爲既知數, 將 x 及 y 之値用 z 表之.

解　由 (1) $x+2y=3z$ ……×3…… $3x+6y=9z$

由 (2)　$5x-6y=-7z$

$8x\quad=2z$ …… $x=\frac{1}{4}z$

又由 (1) 得　$y=\frac{11}{8}z$

$\therefore\ x:y:z=\frac{1}{4}z:\frac{11}{8}z:z=2:11:8$ ………答

6. $x=cy+b$　(1), $y=a+cx$　(2), $bx+ay=1$　(3) 證明

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$.

解　將 (2) 式代入 (3) 式得 $bx+a(a+cx)=1$ $\therefore (b+ac)x=1-a^2$ (A)

因爲是聯立故根存在. 因爲根存在故由 (A) 式得 $b+ac\neq 0$

$b+ac\neq 0$　從而 $x=\frac{1-a^2}{b+ac}$　將其代入 (3) 式得

$b\times\frac{1-a^2}{b+ac}+ay=1$

$b-a^2b+(ab+a^2c)y=b+ac$　　$\therefore a(b+ac)y-a(ab+c)=0$

即 $a\{(b+ac)y-(ab+c)\}=0$

若 $a=0$ 且 $(b+ac)y-(ab+c)=0$ 然須 $a\neq 0$ 始成聯立, 若 $a=0$ 則 y 成不定, 此與成立聯立條件相反, 而且上面有 $b+ac\neq 0$. 故

$y=\frac{ab+c}{b+ac}$, 此是滿足 (2)式及(3)式之値.

$x=\frac{1-a^2}{b+ac}$, $y=\frac{ab+c}{b+ac}$ 代入(1)式

$\frac{1-a^2}{b+ac}=c\times\frac{ab+c}{b+ac}+b$ $\qquad\therefore a^2+b^2+c^2+2abc=1$

第三章

公倍式(L.C.M.)及公因式(H.C.F.或G.C.M.)

公式 1. A,B兩個有理整式，A除B剩餘R，A與B的H.C.F.等於B與R的H.C.F.

公式 2. 求兩個有理整式A,B的H.C.F.，將B除A剩餘R，再R除B剩餘R'，如是依次除去，除至最後除盡之時，此除數爲H.C.F.

公式 3. 求A,B,C三式的H.C.F法，先求任何兩式的H.C.F.再求此H.C.F.與他一式的H.C.F.

求A.B.C.三式的L.C.M.法，先求任何兩式的L.C.M.再求此L.C.M.與他一式的L.C.M.

公式 4. A,B兩個有理整式，用H.代表其H.C.F.，又用L代表其L.C.M.得下列公式 (甲) $\frac{A}{H}\times B=L$

(乙) $\frac{B}{H}\times A=L$

(丙) $A\times B=H\times L$

問題

1. 兩個正數，其和為128400，其H.C.F為8025，如此的兩數有多少對.

解 作兩個正數為A,B., $A=8025m$, $B=8025n$

$A+B=128400$ 即 $8025m+8025n=128400$

$128400\div 8025=16$ $\therefore$ $m+n=16$

今 $m=1$ 則 $n=15$ 即 $A=8025$ $B=120375$

$m=3$ 則 $n=13$ 即 $A=8025\times 3$ $B=8025\times 13$

$m=5$ 則 $n=11$ 即 $A=8025\times 5$ $B=8025\times 11$

$m=7$ 則 $n=9$ 即 $A=8025\times 7$ $B=8025\times 9$

以上皆係素數，再將各數掉轉如 $m=15$ $n=1$ 等亦可.

答 $\begin{cases}8025\\120375\end{cases}$ $\begin{cases}24075\\104325\end{cases}$ $\begin{cases}40125\\88275\end{cases}$ $\begin{cases}56175\\72225\end{cases}$

2. 兩數的H.C.F與L.C.M.之積等於兩數的積，試證明之.

解 作兩數為A, B, 其H. C. F. 為H, 其L. C. M. 為L

$A=mH$, $B=nH$ 則$L=mnH$

於是 $L\times H=mnH\times H$

即 $L\times H=(mH)\times(nH)=A\times B$

3. $2x^3+ax^2+bx+8$與x^3-bx^2+ax+4的 H.C.F.是$x-2$，求 a,b 之值，然後求此兩式的L.C.M.

解 $x-2$為H.C.F. $\therefore$ $x=2$，將其代入兩式中，而作之等於零，得

$2\times 2^3+a\times 2^2+b\times 2+8=0$ ······$2a+b+12=0$

$2^3-b\times 2^2+a\times 2+4=0$ ············$2a-4b+12=0$

$$\begin{array}{r} -) \\ \hline 5b=0 \end{array}$$ $\therefore$ $b=0$

由$2a+0+12=0$ $\therefore$ $a=-6$

$\therefore$ $2x^3+ax^2+bx+8=2x^3-6x^2+8=2(x-2)^2(x+1)$

$x^3-bx^2+ax+4=x^3-6x+4=(x-2)(x^2-2x-2)$

故兩式的 L. C. M. 如下.

$2(x-2)^2(x+1)(x^2-2x-2)$

$=2x^5-2x^4-16x^3+20x^2+16x-16$ ………………… 答

4. 有兩個項數相等的整式，其H.C.F.是$2x+3$，其 L.C.M. 是 $24x^3-26x^2-53x+60$，求此兩式.

注意 由第二題可知 $L\div H=m\times n$，因此而推求之.

解 作兩整式爲A與B.

$A=m(2x+3)$,　　$B=n(2x+3)$,

列式成 $mn(2x+3)=24x^3-26x^2-53x+60$

$\therefore\quad mn=\dfrac{24x^3-26x^2-53x+60}{2x+3}$

$\therefore\quad mn=12x^2-31x+20=(3x-4)(4x-5)$…………………(1)

因此 $m=3x-4$,　　$n=4x-5$

$\therefore\quad A=(2x+3)(3x-4)$　　$B=(2x+3)(4x-5)$

$=6x^2+x-12$　　$=8x^2+2x-15$

答 $6x^2+x-12$,　$8x^2+2x-15$.

5. ax^2+bx+c 與 cx^2+bx+a 有一項式之 H.C.F. 時則 $a\pm b+c=0$，試證明之，但 $a\neq0$，$c\neq0$

解 作一項H.C.F.爲$mx+n$.則

$ax^2+bx+c=(mx+n)Q$……………(1)

$cx^2+bx+a=(mx+n)Q'$ ………… (2)

今用 $x=-\dfrac{n}{m}$ 代入兩式，且使之等於零.

由(1)式得$a\left(-\dfrac{n}{m}\right)^2+b\left(-\dfrac{n}{m}\right)+c=0$……(3),

由(2)式得$c\left(-\dfrac{n}{m}\right)^2+b\left(-\dfrac{n}{m}\right)+a=0$……(4),

兩式相減得 $(a-c)\left(\frac{n}{m}\right)^2+(c-a)=0$

故 $(a-c)\left\{\left(\frac{n}{m}\right)^2-1\right\}=0$

由此得 $a-c=0$ 及 $\left(\frac{n}{m}\right)^2-1=0$

即 $a=c$ 及 $\frac{n}{m}=\pm1$

若 $a=c$ 則 ax^2+bx+c 等於 cx^2+bx+a, 而 ax^2+bx+c 爲其 H.C.F.

且 $a=c\neq0$ 則 ax^2+bx+c 爲二項式, 與命題相反, 故祇能是 $\frac{n}{m}=\pm1$ 將其代入 (3) 式得 $a\pm b+c=0$

6. x^3+ax^2+bx+c 及 x^2+bx+c 兩式, 其 H.C.F. 爲 $x-k$ 時, 則 $(a-1)^2-b(a-1)+c=0$, 試證明之, 但 a 等於 1, c 等於零.

解 $x-k$ 爲原式的因子, 作 $x=k$ 且將原式等於零, 即

x^3+ax^2+bx+c …… $k^3+ak^2+bk+c=0$……………(1)

x^2+bx+c ……………………$k^2+bk+c=0$……………(2)

求能滿足(1)(2)兩式之K的值.

(1)式—(2)式: $k^3+ak^2-k^2=0$ $\therefore$ $k^2(k+a-1)=0$

故 $k^2=0$ 又 $k+a-1=0$

若 $k=0$, 則由於(1)得 $c=0$, 此與題意相反, 故 $k=0$ 爲不能.

由 $k+a-1=0$ 而 $a\pm1$, 於是 $k\pm0$. 故 $k=1-a$ 能滿足題意.

將其代入(2)式, 得 $(a-1)^2-b(a-1)+c=0$

7. x^3+bx^2+cx+1 及 x^3+cx^2+bx+1 兩式須 $b=c$, 又 $b+c+2=0$ 始能有公因子, 試證明之.

注意 A, B兩式之公因子爲(A—B)式之因子.

解 作 x^3+bx^2+cx+1 爲(A), x^3+cx^2+bx+1 爲(B). P爲公因子, P爲兩式之差的因子, 即 $(b-c)x^2-(b-c)x$ 或 $(b-c)x(x-1)$ 之因子, $b-c=0$, 則 A—B$=0$, 而A式等於B式, 因此兩式中任何一個皆可爲公因子. 若

$b-c\neq0$ 則公因子包含在 $x(x-1)$ 之中，且爲 $x(x-1)$ 之因子，但是 x 或是 $x-1$ 或還是兩者之積呢？ x 不能整除 (A) 式，所以不是公因子，由此可以斷定 $x-1$ 是公因子．若 $x-1$ 是公因子 則 $x^3+bx^2+cx+1=(x-1)Q$ $x=1$ 則 $1^3+b\times1^2+c\times1+1=0$，卽 $b+c+2=0$，故A B兩式如有公因子則 $b=c$，$b+c+2=0$

8. x^2+ax+b，x^2+px+q 之 H.C.F. 爲 $x+c$，則 L.C.M 爲 $x^3+(a+p-c)x^2+(ap-c^2)x+c(a-c)(p-c)$，試證明之．

解 假定 $x+c$ 爲公因子，則

$x^2+ax+b=(x+c)(x+M)\cdots x$ 之係數 $a=M+c$　$\therefore M=a-c$

$x^2+px+q=(x+c)(x+N)\cdots x$ 之係數 $p=N+c$　$\therefore N=p-c$

又 $L.C.M=(x+c)(x+M)(x+N)=x^3+(c+M+N)x^2+$

$(cM+MN+cN)x+cMN$

將上式中之M，N換轉，

$$L.C.M.=x^3+(c+a-c+p-c)x^2$$
$$+[c(a-c)+(a-c)(p-c)+c(p-c)]x+c(a-c)(p-c)$$
$$=x^3+(a+p-c)x^2+(ap-c^2)x+c(a-c)(p-c)$$

9. $2x^3-x^2+x-6$ 與 $6x^3-9x^2+10x-15$ 同時等於零，試求 x 之值．

注意 將兩式之公因子作爲零，方能求得 x 之值．

解 求兩式之 H.C.F.

	$2x^3-x^2+x-6$	$6x^3-9x^2+10x-15$	3
	$\times\quad 3$	$6x^3-3x^2+3x-18$	
	$6x^3-3x^2+3x-18$	$\div\ \mid -6x^2+7x+3$	
x	$6x^3-7x^2-3x$	$6x^2-7x-3$	
	$2\ \mid 4x^2+x-18$	$6x^2+9x-27$	3
	$2x^2+3x-9$	$-\ \mid -16x+4$	
x	$2x^2-3x$	$2x-3$	
	$6x-9$	H. C. F.	
3	$6x-9$		

故 $2x^3-x^2+x-6=(2x-3)(x^2+x+2)$

$6x^3-9x^2+10x-15=(2x-3)(3x^2+5)$

將兩式各作爲零，於是公因子 $2x-3$ 亦等於零.

$2x-3=0 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$ ……………………………………………………答

10. $6x^3-7x^2-16x+12$ 等於零則 $3x^3-5x^2-4x+4$ 不等於零，試求x之值.

解 用互除法求得 H.C.F. 爲$3x^2-8x+4$，以之相除則$6x^3-7x^2-16x+12$ $=(3x^2-8x+4)(2x+3)$，而$2x+3$爲$3x^2-8x+4$與$3x^3-5x^2-4x+4$之因子，作$2x+3=0$，則$x=-\frac{3}{2}$，故 $6x^3-7x^2-16x+12$ 等於零則 $3x^3-5x^2-4x+4$ 不等於零. 答 $x=-\frac{3}{2}$

11. 五位的整數，其數字之和可用9除盡，試證明此五位的整數是9的倍數.

解 用 a, b, c, d, e 代表數字，五位的整數爲

$10000a \quad 1000b, \ 100c \quad 10d, \ e$

$10000a+1000b+100c+10d+e$

$=(9999+1)a+(999+1)b+(99+1)c+(9+1)d+e$

$=9999a+a+999b+b+99c+c+9d+d+e$

$=9999a+999b+99c+9d+a+b+c+d+e$

$=9(1111a+111b+11c+d)+(a+b+c+d+e)$

由命題$a+b+c+d+e$爲9的倍數，又

$9(1111a+111b+11c+d)$ 爲9的倍數，於是

$9(1111a+111b+11c+d)+(a+b+c+d+e)$是9的倍數

即 $10000a+1000b+100c+10d+e$ 是9的倍數.

12. n是正整數時則$9\times(81)^n+1$可被10除盡，試證明之.

證明 9, 1, 10三數，10爲9+1，故$9\times(81)^n+1$有$(9+1)$之因子.

$9\times(81)^n+1=9\times(9^2)^n+1$

$=9\times9^{2n}+1$

$=9^{2n+1}+1$

於是作 $9^{2n+1}+1=(9+1)Q$，今作 $9=x$，則可直寫成 $x^{2n+1}+1=(x+1)Q$，現在祇要證明 $x^{2n+1}+1$ 可被 $x+1$ 整除.

解 $x^{2n+1}+1$ 被 $x+1$ 除得商Q，剩餘爲R（R中不含x）.

$x^{2n+1}+1\equiv(x+1)Q+R$，作$x=-1$，將其代入，得

$(-1)^{2n+1}+1\equiv(-1+1)Q+R$，由此得 $-1+1\equiv R$ 即 $R=0$，於是可知 $x^{2n+1}+1$ 可被 $x+1$ 除盡，即 $x^{2n+1}+1\equiv(x+1)Q$，$x=9$ 則 $9^{2n+1}+1=(9+1)Q$，即 $9\times(81)^n+1\equiv(9+1)Q\equiv10.Q$，由此知 $9\times(81)^n+1$ 是 10 的倍數.

13. a 及 b 爲比 1 大之整數時則 a^3b-ab^3 可被 3 除盡，試證明之

解 $a^3b-ab^3=a^3b-ab+ab-ab^3$………$ab$ 加減之

$=ab(a^2-1)+ab(1-b^2)$

$=ab(a+1)(a-1)+ab(1+b)(1-b)$

$=b(a-1)a(a+1)-a(b-1)b(b+1)$………$(A)$

今 a, b 皆爲大於 1 之整數，$a-1$, a, $a+1$，及 $b-1$, b, $b+1$ 任何連續三個整數之積，皆爲 3 之倍數，故 (A) 式可被 3 除盡.

14. 三個連續奇數之平方之和加 1 所得之數常可用 12 除盡，而不能用 24 除盡，試證明之.

解 用 $2m-1$, $2m+1$, $2m+3$ 表三個連續奇數，但m爲整數.

$(2m-1)^2+(2m+1)^2+(2m+3)^2+1=12m^2+12m+12$

$=12(m^2+m+1)$

於此可見其爲 12 的倍數，而$m^2+m+1=m(m+1)+1$，其中m不論爲偶數爲奇數，如 $m(m+1)$ 爲偶數則 $m(m+1)+1$ 爲奇數，故 m^2+m+1 非 2 之倍數，而 $12(m^2+m+1)$ 非 24 之倍數，因此不能被24除盡.

15. $5^{2n}-1$ 是 24 的倍數，試證明之．但 n 是正整數.

注意 作 $5=a$ 則 $5^{2n}-1$ 爲 $a^{2n}-1$，又 $24=(5+1)(5-1)$，令$5=a$，即可寫作 $(a+1)(a-1)$，而 $(a+1)(a-1)$ 爲 a^2-1 的因子.

解 $a^{2n}-1$ 被 a^2-1 除時其商爲 M，剩餘爲 R，故

$a^{2n}-1\equiv(a^2-1)M+R$，而 $a^2=1$，$a^{2n}=(a^2)^n$，由此得

$(1)^n-1=(1-1)M+R$ $\therefore 0=0+R$ $\therefore R=0$ 即無剩餘

故 $a^{2n}-1\equiv(a+1)(a-1)M$, 今 $a=5$, 即可成 $5^{2n}-1\equiv(5+1)(5-1)M$

$\therefore$ $5^{2n}-1=6\times4M=24M$. 故 $5^{2n}-1$ 爲 24 的倍數.

第四章

分式

1. 化 $\dfrac{2x^4-3x^3-3x^2+4}{2x^4-x^3-9x^2+4x+4}$ 成最簡單分式.

注意 因爲分母和分子不易分解成因子, 所以要先求其最大公約數.

解 先求其最大公約數.

$$
\begin{array}{r|r|l|l}
2x^2 & 2x^4-3x^3-3x^2\qquad+4 & 2x^4-x^3-9x^2+4x+4 & 1 \\
 & 2x^4-6x^3+4x^2\qquad\quad & 2x^4-3x^3-3x^2\qquad+4 & \\
\hline
3x & 3x^3-7x^2\qquad+4 & 2x\ \big|\ 2x^3-6x^2+4x & \\
 & 3x^3-9x^2+6x & \quad x^2-3x+2 & \\
\hline
2 & 2x^2-6x+4 & \quad \text{H. C. F.} & \\
 & 2x^2-6x+4 & & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
$$

即最大公約數爲 x^2-3x+2, 以之除分母和分子而求其商.

原式 $=\dfrac{(x^2-3x+2)(2x^2+3x+2)}{(x^2-3x+2)(2x^2+5x+2)}=\dfrac{2x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$……………………**答**

2. 化 $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{2a}{x^2+a^2}-\dfrac{4a^3}{x^4+a^4}$ 成最簡單分式.

注意 每兩個分成一組計算之較爲得策.

解 $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{2a}{x^2+a^2}-\dfrac{4a^3}{x^4+a^4}$

$=\dfrac{x+a-(x-a)}{(x-a)(x+a)}-\dfrac{2a}{x^2+a^2}-\dfrac{4a^3}{x^4+a^4}$

$$=\frac{2a}{x^2-a^2}-\frac{2a}{x^2+a^2}-\frac{4a^3}{x^4+a^4}$$

$$=\frac{2a(x^2+a^2)-2a(x^2-a^2)}{(x^2-a^2)(x^2+a^2)}-\frac{4a^3}{x^4+a^4}=\frac{4a^3}{x^4-a^4}-\frac{4a^3}{x^4+a^4}$$

$$=\frac{4a^3(x^4+a^4)-4a^3(x^4-a^4)}{(x^4-a^4)(x^4+a^4)}=\frac{8a^7}{x^8-a^8}$$ ……………………………………答

3. 化$\dfrac{a+2}{a}-\dfrac{a+3}{a+1}-\dfrac{a-6}{a-4}+\dfrac{a-7}{a-5}$成最簡分式.

注意 將各項分別簡單之，如

$$\frac{a+2}{a}=\frac{a}{a}+\frac{2}{a}=1+\frac{2}{a},\quad \frac{a+3}{a+1}=\frac{a+1+2}{a+1}=\frac{a+1}{a+1}+\frac{2}{a+1},\text{等.}$$

解 原式$=\dfrac{a+2}{a}-\dfrac{(a+1)+2}{a+1}-\dfrac{(a-4)-2}{a-4}+\dfrac{(a-5)-2}{a-5}$

$$=\left(\frac{a}{a}+\frac{2}{a}\right)-\left(\frac{a+1}{a+1}+\frac{2}{a+1}\right)-\left(\frac{a-4}{a-4}-\frac{2}{a-4}\right)+\left(\frac{a-5}{a-5}-\frac{2}{a-5}\right)$$

$$=1+\frac{2}{a}-1-\frac{2}{a+1}-1+\frac{2}{a-4}+1-\frac{2}{a-5}$$

$$=\frac{2}{a}-\frac{2}{a+1}+\frac{2}{a-4}-\frac{2}{a-5}$$

$$=2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-4}-\frac{1}{a-5}\right)$$

$$=2\left(\frac{(a+1)-a}{a(a+1)}+\frac{(a-5)-(a-4)}{(a-4)(a-5)}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{a(a+1)}+\frac{-1}{(a-4)(a-5)}\right)$$

$$=2\left(\frac{(a-4)(a-5)-a(a+1)}{a(a+1)(a-4)(a-5)}\right)$$

$$=-\frac{20(a-2)}{a(a+1)(a-4)(a-5)}$$ ……………………………………答

4. 化下式成最簡單分式.

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-xyz\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$$

解　原式 $=y+\frac{yz}{x}+z+x+z+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}+y+z$

$$-\frac{yz}{x}-\frac{xz}{y}-\frac{xy}{z}$$

$=2x+2y+2z=2(x+y+z)$ ……………………………… 答

5. 化 $\dfrac{b^2-c^2+2ca-a^2}{b^2-c^2-2ab+a^2}\times\dfrac{c^2+2ca+a^2-b^2}{c^2-2ab-a^2-b^2}$ 成最簡單分式.

注意　將分母分子各分解成因子.

解　$b^2-c^2+2ca-a^2=b^2-(c-a)^2=(b+c-a)(b-c+a)$

$b^2-c^2-2ab+a^2=(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)$

$c^2+2ca+a^2-b^2=(c+a)^2-b^2=(c+a+b)(c+a-b)$

$c^2-2ab-a^2-b^2=c^2-(a+b)^2=(c+a+b)(c-a-b)$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{(b+c-a)(b-c+a)}{(a-b+c)(a-b-c)}\times\dfrac{(c+a+b)(c+a-b)}{(c+a+b)(c-a-b)}$

$=\dfrac{-(b-c+a)}{(a-b+c)}\times\dfrac{(c+a-b)}{(c-a-b)}=1$ …………… 答

6. 化 $\dfrac{\left(x+1+\dfrac{1}{x-1}\right)\left(x-1+\dfrac{1}{x+1}\right)}{\left(x+1-\dfrac{1}{x-1}\right)\left(x-1-\dfrac{1}{x+1}\right)}$ 成最簡單分式.

解　原式 $=\dfrac{\{(x^2-1)+1\}\{(x^2-1)+1\}}{\{(x^2-1)-1\}\{(x^2-1)-1\}}=\dfrac{x^4}{(x^2-2)^2}$ ……… 答

7. 化 $\dfrac{x^3-ax(x-1)-a^2}{x^2-a^2}\div\dfrac{x^4-ax^3+bx-ab}{x^4+ax^3+bx+ab}$ 成最簡單分式.

注意　將各分母分子分解成因子.

解　$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

$x^3-ax(x-1)-a^2=x^3-ax^2+ax-a^2=x^2(x-a)+a(x-a)$

$=(x-a)(x^2+a)$

$$x^4+ax^3+bx+ab=x^3(x+a)+b(x+a)$$
$$=(x+a)(x^3+b)$$
$$x^4-cx^3+bx-bc=x^3(x-c)+b(x-c)$$
$$=(x-c)(x^3+b)$$

$$\therefore\ 原式=\frac{(x-a)(x^2+a)}{(x-a)(x+a)}\div\frac{(x-c)(x^3+b)}{(x+a)(x^3+b)}$$
$$=\frac{x^2+a}{x+a}\times\frac{x+a}{x-c}=\frac{x^2+a}{x-c}$$ ……答

第五章

一元二次方程式

I. 二次方程式解法

公式 1. $ax^2+bx+c=0$ 但$a\neq 0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

公式 2. 若x之係數爲偶數，$ax^2+2b'x+c=0$

$$x=\frac{b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

問　　題

1. 解 $\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-\frac{12}{5}x=8\frac{1}{5}$

解 兩邊各減$\frac{16}{5}$得

$$\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-\frac{12}{5}x-\frac{16}{5}=8\frac{1}{5}-\frac{16}{5}$$

$$\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-4\left(\frac{3x+4}{5}\right)=5$$ 　作 $\frac{3x+4}{5}=s$

即成 $s^2-4s-5=0$ 　$\therefore\ (s+1)(s-5)=0$

$\therefore\quad s+1=0\cdots\cdots s=-1$

$\therefore\quad \dfrac{3x+4}{5}=-1$

$3x+4=-5$

$x=-3$

$s-5=0\cdots\cdots s=5$

$\therefore\quad \dfrac{3x+4}{5}=5$

$3x+4=25$

$\therefore\quad x=7$

答　$x=-3,\ 7$

2. 二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 之根爲 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$ 試證明之.

解　用 a 除原式得

$$x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

更變成 $x^2+2\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{c}{a}=0$

$\therefore\quad \left(x+\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{b^2-ac}{a^2}=0\qquad \therefore\quad x+\dfrac{b}{a}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$\therefore\quad x=-\dfrac{b}{a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-ac}}{a}\qquad$ 即　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

3. 解　$(\sqrt{5}-2)x^2-2x+4=0$

注意　作 $a=\sqrt{5}-2,\quad b=-2,\quad c=4$, 將其代入公式中.

解　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times(\sqrt{5}-2)\times 4}}{2(\sqrt{5}-2)}$

$=\dfrac{2\pm\sqrt{4(9-4\sqrt{5})}}{2(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{1\pm\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-2}$

作 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, 使成平方得

$9-4\sqrt{5}=a-2\sqrt{ab}+b$

$\therefore\quad \left.\begin{matrix}a+b=9\\ 2\sqrt{ab}=4\sqrt{5}\end{matrix}\right\}$　因而　$\left.\begin{matrix}a+b=9\\ ab=20\end{matrix}\right\}\quad\therefore\quad \begin{cases}a=4\\ b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5\\ b=4\end{cases}$

然 $9=\sqrt{81}\qquad 4\sqrt{5}=\sqrt{80}$

故　$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{5}-\sqrt{4}=\sqrt{5}-2$

$\therefore\quad \sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$

由此則 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-2}=\dfrac{1\pm(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}-2}$

$$\therefore\ \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2}\times\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{5-4}=3+\sqrt{5} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\times\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{5-4}=1+\sqrt{5} \end{cases} \quad\cdots\cdots\text{答}$$

II 根之研究

根有三種，爲實根、等根及虛數，而一個數應看牠的值去定牠屬於那一類，譬如公式 1 中之 b^2-4ac.

$b^2-4ac>0$ 爲實根

$b^2-4ac=0$ 爲等根

$b^2-4ac<0$ 爲虛數

此須加以判別之根常用 D 表之.

問題

1. 試判別下列方程式之根之種類

$$36x^2+12(5m-1)x+m(25m-12)=0$$

題意 要判定 m 是正是零還是負.

解 用 D 代原方程式之判別式

$$\begin{aligned} D&=\{6(5m-1)\}^2-36\{m(25m-12)\} \\ &=36(25m^2-10m+1)-36(25m^2-12m) \\ &=36(25m^2-10m+1-25m^2+12m) \\ &=36(2m+1) \end{aligned}$$

如 $D>O$

$36(2m+1)>O$

$\therefore\ 2m+1>O$

$2m>-1$

$\therefore\ m>-\frac{1}{2}$

如 $D=O$

$36(2m+1)=O$

$\therefore\ 2m+1=O$

$2m=-1$

$\therefore\ m=-\frac{1}{2}$

如 $D<O$

$36(2m+1)<O$

$\therefore\ 2m+1<O$

$2m<-1$

$\therefore\ m<-\frac{1}{2}$

如 $m>-\frac{1}{2}$, 則 $D>O$, 故原方程式有二個相異的實根.

如 $m=-\frac{1}{2}$, 則 $D=O$, 故原方程式有二個等根.

如 $m<-\frac{1}{2}$, 則 $D<O$, 故原方程式有二個虛數.

實根 $[b^2-4ac\geqq 0$ 又 $b^2-4ac \nless 0]$

1. a, b, c 爲等差級數則二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 之根爲實根, 試證明之.

解 a, b, c 爲等差級數故 $b-a=c-b$, 即 $2b=a+c\cdots\cdots(1)$

由公式 2 得 $(2b)^2-4ac$　將 (1) 式代入之

$=(a+c)^2-4ac=a^2-2ac+c^2=(a-c)^2$

a, c 爲實數, 故 $(a-c)^2$ 決不至爲負數, 而 $4(b^2-4ac)$ 亦非負數, 因此是實根.

2. 方程式 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ 中之 a, b, c 及 x 皆爲實數, a, b, c 三數以 x 爲公比則成等比級數, 試證明之.

解 依公式 1 b^2-4ac 作之, 得

$[-2b(a+c)]^2-4(a^2+b^2)(b^2+c^2)=-4[b^4-2ab^2c+a^2c^2]=-[2(b^2-ac)]^2$　a, b, c 爲實數, 故 $[2(b^2-ac)]^2$ 總是正數或零, 因而 $-[2(b^2-ac)]^2$ 爲負數或零, 然爲滿足 x 是實數之假定, $-[2(b^2-ac)]^2$ 祇能是 O, 即等根是也.

故　$b^2-ac=O$,　$b^2=ac$,　將其代入原方程式

$(a^2+ac)x^2-2b(a+c)x+ac+c^2=0$

$a(a+c)x^2-2b(a+c)x+c(a+c)=0$

$\therefore$　$(a+c)(ax^2-2bx+c)=0$

作 $a+c=0$ 還是 $ax^2-2bx+c=0$ 呢. 若 $a+c=0$, 則 $a=-c$, 而 $b^2=ac=$ 負數, 因此 b^2 不能爲正數, b 不能爲實數, 此與所假定相反, 故祇能是 $ax^2-2bx+c=0$

$$\therefore x=\frac{2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$$ 將$b^2=ac$代入，則

$=\frac{b}{a}$ 故 $x=\frac{b}{a}$ 又$b^2=ac$

故 $x=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$

因此 a, b, c 以 x 爲公比則是等差級數.

別解 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$

$a^2x^2-2abx+b^2+b^2x^2-2bcx+c^2=0$

$(ax-b)^2+(bx-c)^2=0$

a, b, c, x 爲實數，故 $(ax-b)^2$ 及 $(bx-c)^2$應爲正數或零，然求本式之成立，各項應是零，卽 $ax-b=0$, $bx-c=0$, 故

$x=\frac{b}{a}$, $x=\frac{c}{b}$ $\therefore$ $x=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$

卽 a, b, c 以 x 爲公比則成等比級數.

3. 方程式 $x^2+2m(x+1)+15=0$ 如有實根，m之値應在如何界限內.

解 依公式 1 得 $(2m)^2-4(2m+15)$ 等於或大於零之實根，卽 $4(m^2-2m-15)=0$ 及 $4(m^2-2m-15)>0$

[I] 若 $4(m^2-2m-15)=0$ 則 $(m+3)(m-5)=0$

於是 $m=-3$ 又 $m=5$

[II] 若 $4(m^2-2m-15)>0$ 則 $4(m+3)(m-5)>0$,

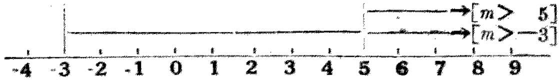
爲使本式能成立則兩因子應是同符號

卽 (正數×正數) | (負數×負數)

故 $\begin{cases} m+3>0 \ldots\ldots m>-3 \\ m-5>0 \ldots\ldots m>5 \end{cases}$ | $\begin{cases} m+3<0 \ldots\ldots m<-3 \\ m-5<0 \ldots\ldots m<5 \end{cases}$

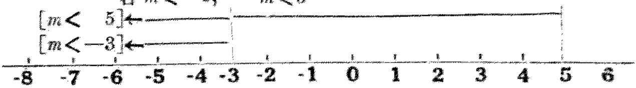
爲求容易明瞭起見作圖如下

若$m>-3$, $m>5$



兩箭共同部份爲 $m\geqq 5$

若 $m<-3$, $m<5$



兩箭共同部份爲 $m\leqq -3$

由兩者總括言之則m之值應在$-3<m<5$之界限內.

答 應在$-3<m<5$界限內.

聯立方程式 $x+y=a$, $x^2+y^2=5$ 若有實根, a 之範圍如何.

解 由 (1) 式得 $x=a-y$, 將其代入 (2) 式

$(a-y)^2+y^2=5$ 即 $2y^2-2ay+a^2-5=0$

此方程式中之 y 爲實根, 故

$(-2a)^2-4\times 2(a^2-5)\geqq 0$ $\therefore$ $-a^2+10\geqq 0$

$\therefore$ $a^2-10\leqq 0$ 即 $(a+\sqrt{10})(a-\sqrt{10})\leqq 0$

因 $(a+\sqrt{10})(a-\sqrt{10})=0$ 故 $a=\pm\sqrt{10}$

若 $(a+\sqrt{10})(a-\sqrt{10})<0$, 則兩因子之符號應不相同.

(正數×負數)	(負數×正數)
$\begin{cases} a+\sqrt{10}>0 \;\ldots\; a>-\sqrt{10} \\ a-\sqrt{10}<0 \;\ldots\; a<\sqrt{10} \end{cases}$	$a+\sqrt{10}<0 \;\ldots\; a<-\sqrt{10}$ $a-\sqrt{10}>0 \;\ldots\; a>\sqrt{10}$
此兩者能並立, 即 $-\sqrt{10}<a<\sqrt{10}$	此兩者不能並立, 故不成立.

答 $a=\pm\sqrt{10}$ 及 $-\sqrt{10}<a<\sqrt{10}$

等 根 $[b^2-4ac=0]$

1. $(l^2+m^2)x^2-2(lp+mq)x+(p^2+q^2)=0$ 須 $mp=lq$ 方能有等根, 試證明之.

解 依公式 b^2-4ac 作之得

$$[2(lp+mq)]^2-4(l^2+m^2)(p^2+q^2)=0$$

即 $4[(lp+mq)^2-(l^2+m^2)(p^2+q^2)]=0$

化簡之 $-(l^2q^2-2lmpq+m^2p^2)=0$

從而 $$(mp-lq)^2=0$$

$\therefore$ $$mp=lq$$

2. $\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$ 若有等根

則 $p^2=4q$，試證明之.

注意 欲證明 $p^2=4q$ 只需證明 $p^2-4q=0$ 就爲得計.

解 依公式 I 作之得

$$[p(1+q)]^2-4\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)\left[q(q-1)+\frac{p^2}{2}\right]=0$$

$$p^2(1+q)^2-\{2(1-q)+p^2\}\{2q(q-1)+p^2\}=0$$

$$p^2(1+q)^2-[-4q(q-1)^2+\{2(1-q)+2q(q-1)\}p^2+p^4]=0$$

$\therefore$ $$-p^4+[(1+q)^2-\{2(1-q)+2q(q-1)\}]p^2+4q(q-1)^2=0$$

$$p^4+(q^2-6q+1)p^2-4q(q-1)^2=0$$

將 p^2-4q 分解成因子

$$p^4+(q^2-2q+1-4q)p^2-4q(q-1)^2=0$$

$$p^4-4qp^2+(q-1)^2p^2-4q(q-1)^2=0$$

$\therefore$ $$p^2(p^2-4q)+(q-1)^2(p^2-4q)=0$$

$\therefore$ $$(p^2-4q)\{p^2+(q-1)^2\}=0$$

於此要研究是 $p^2-4q=0$ 還是 $p^2+(q-1)^2=0$

先來研究 $p^2-4q=0$ 能不能成立，p, q 爲實數，

故 $p^2\geqq 0$ 且 $(q-1)^2\geqq 0$，除非 $p=0$，$q-1=0$，不然則 $p^2+(q-1)^2>0$，

如 $p=0$，$q-1=0$ 則 $p^2+(q-1)^2=0$ 能成立，

然若 $p=0$，$q-1=0$ 則原方程式中 x^2 之係數 $\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)$ 等於零，

於是原方程式不成二次方程式，此與題意相反，故不能是 $p=0$，

$q-1=0$，因此 $p^2+(q-1)^2=0$ 爲不可能.

由此可知是 $p^2-4q=0$，　即　$p^2=4q$

3. 下列方程式如有等根，則m之値若何.

$$x^2-\frac{m^2-6}{m}x+\frac{m^2-6}{m}+\frac{5}{4}=0$$

解　將分母解除之得

$4mx^2-4(m^2-6)x+4(m^2-6)+5m=0$

依公式作之得

$[-4(m^2-6)]^2-4\times 4m\times[4(m^2-6)+5m]=0$

$\therefore\quad (m^2-6)^2-4m(m^2-6)-5m^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

$\therefore\quad \{(m^2-6)-5m\}\{(m^2-6)+m\}=0$

因此　$m^2-5m-6=0$　及　$m^2+m-6=0$

$\therefore\quad (m+1)(m-6)=0$　|　$(m-2)(m+3)=0$

$\therefore\quad m=-1,\ 6$　|　$\therefore\quad m=2,\ -3$

答　$m=2,\ 6,\ -1,\ -3\cdots\cdots\cdots\cdots$答

4. 方程式 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ 如有等根則 a, b, c 成等差級數，試證明之.

解　依公式作之得

$(c-a)^2-4(b-c)(a-b)=0$

$\therefore\quad c^2-2ac+a^2-4ab+4ac+4b^2-4bc=0$

$\therefore\quad a^2+2ac+c^2-4ab-4bc+4b^2=0$

$\therefore\quad (a+c)^2-4b(a+c)+4b^2=0$

$\therefore\quad [(a+c)-2b]^2=0\qquad \therefore\quad a+c-2b=0$

$\therefore\quad a-b=b-c$　即　$b-a=c-b$

故 a, b, c 成等差級數.

5. $x^2+y^2-2ax-2by-c^2=0$ 之方程式中，若 x 之二根相等，x 及 y 之值爲如何.

解 整頓之得 $x^2-2ax+y^2-2by-c^2=0$，因 x 之二根相等依公式作之

$$(-2a)^2-4(y^2-2by-c^2)=0$$

$$\therefore \quad y^2-2by-a^2-c^2=0$$

$$y^2-2by+b^2=a^2+b^2+c^2$$

$$(y-b)^2=a^2+b^2+c^2$$

$$\therefore \quad y-b=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\therefore \quad y=b\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

使成等根則公式成 $x=\dfrac{-b}{2a}$

故 $x=\dfrac{-(-2a)}{2}=a$

答 $x=a,\quad y=b\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

6. 關於 x, y 之聯立方程式

$$mx+y=5,\quad x^2+2y+3m=0$$

若兩組之根相等 m 之值爲如何.

解 由(1)式得 $y=5-mx$，將其代入(2)式

$x^2+2(5-mx)+3m=0$ 整頓之得

$x^2-2mx+3m+10=0$ ………(A)

爲使二組之根相等，(A)式中 x 之值爲等根，依公式作之得

$(-2m)^2-4(3m+10)=0$ ………$m^2-3m-10=0$

$(m+2)(m-5)=0$ $\therefore \quad m=-2$ 或 5 ………………答

7. 聯立方程式 $ax+by=1$ ……(1) $cx^2+dy^2=1$ ……(2)

兩式之根相等則與作成 $\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{d}=1$ ……(3) 有關，且其根爲 $x=\dfrac{a}{c}$，$y=\dfrac{b}{d}$，試證明之，但 a, b, c, d 皆不等於零.

解 由(1)式得 $x=\dfrac{1-by}{a}$，將其代入(2)式

$$c\left(\frac{1-by}{a}\right)^2+dy^2=1 \qquad \therefore\ c\times\frac{1-2by+b^2y^2}{a^2}+dy^2=1$$

$\therefore\ (b^2c+a^2d)y^2-2bcy+c-a^2=0\cdots\cdots\cdots(A)$　使成等根因依公式作之得　$(-2bc)^2-4(b^2c+a^2d)(c-a^2)=0$

即　$4b^2c^2-4(b^2c^2+a^2dc-a^2b^2c-a^4d)=0$

$\therefore\ 4[a^2dc-a^2b^2c-a^4d]=0\cdots\cdots 4a^2(dc-b^2c-a^2d)=0$

由於這裏 $a\neq0$ 故應 $dc-b^2c-a^2d=0\cdots\cdots(4)$

將(3)式之分母解除之得

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1\cdots\cdots\times cd$$

$$a^2d+b^2c=cd\cdots\cdots\cdots(5)$$

由(4)式 $dc-b^2c-a^2d=0$ 亦得 $a^2d+b^2c=cd$. 以 cd 除之得

$$\frac{a^2d}{cd}+\frac{b^2c}{cd}=\frac{cd}{cd}\cdots\cdots\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1$$

再將(5)式代入(A)式得 $cdy^2-2bcy+c-a^2=0$

爲使 y 成等根而用　$b^2c+a^2d=cd$，則其根亦應爲等根，若爲等根則根之公式爲　$x=\dfrac{-b}{2a}$

由此則　$y=\dfrac{2bc}{2cd}=\dfrac{b}{d}$　於是(1)式成 $ax+b\times\dfrac{b}{d}=1$　$\therefore\ x=\dfrac{d-b^2}{ad}$

爲使成等根於是(4)式變化爲　$c(d-b^2)=a^2d$　即 $d-b^2=\dfrac{a^2d}{c}$

將其代入得　$x=\dfrac{\frac{a^2d}{c}}{ad}=\dfrac{a}{c}$

虛　數　$(b^2-4ac<0)$

1. p, q 爲不相同之實數則下列方程式之根常爲虛數，試證明之.

$$2x^2+p^2+q^2=2(p+q)x$$

解 依公式作之得根為

$[-2(p+q)]^2-4\times 2(p^2+q^2)$

$=4[-p^2+2pq-q^2]=4(p-q)^2$

p, q 為實數, 故 $(p-q)^2$ 為正數或零, 然 p 與 q 不相同, 故 $p-q$ 不等於零, 由是 $(p-q)^2$ 常為正數. 而 $-4(p-q)^2$ 常為負數故其根為虛數.

2. 方程式 $x^2+(2p+1)x-p=0$ 若有虛數則 p 之值應在如何界限內.

解 求有虛數故依公式所作成之式應為負數, 即

$(2p+1)^2-4\times(-p)<0 \ldots\ldots 4p^2+8p+1<0$

變式成 $4p^2+8p+4-3<0$

$\therefore$ $(2p+2)^2-3<0 \ldots\ldots (2p+2-\sqrt{3})(2p+2+\sqrt{3})<0$

本式須兩因子之符號相異始能成立.

(正數×負數)

$$\therefore\begin{cases} 2p+2-\sqrt{3}>0 \\ \qquad 故 \quad p>\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1 \\ 2p+2+\sqrt{3}<0 \\ \qquad 故 \quad p<-\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 此不能兩立. \end{cases}$$

(負數×正數)

$$\therefore\begin{cases} 2p+2-\sqrt{3}<0 \\ \qquad 故 \quad p<\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1 \\ 2p+2+\sqrt{3}>0 \\ \qquad p>-\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 此可以兩立. \end{cases}$$

答 $-\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)>p>-\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. 二次方程式 $ax^2+b(2x+1)=0$ 若有虛數則下列二次方程式之根為如何性質. $bx^2+(b-c)x=c+a-b$

解 第一方程式既有虛數則依公式所作之式為負數, 即

$(2b)^2-4ab<0$ 因而 $4(b^2-ab)<0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

第二方程式依公式作之得

$$(b-c)^2+4b(a-b+c)=b^2-2bc+c^2+4ab-4b^2+4bc$$
$$=b^2+2bc+c^2-4b^2+4ab$$
$$=(b+c)^2-4(b^2-ab)$$

$(b+c)$ 中之 b, c 爲實數故 $(b+c)$ 祇能是正數或零，且由 (1) 式 $4(b^2-ab)<0$ 故 $-4(b^2-ab)>0$，於是 $(b+c)^2-4(b^2-ab)$ 常是正數，而其依公式所作之式爲正數，因此是有不等實根.

答　不等實根

4. 聯立方程式

$$\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}=3\ldots\ldots\ldots(1)\quad ,\quad x^2+y^2+1=2x\ldots\ldots\ldots(2)$$

其 x, y 有滿足此兩式之實數值否，試證明之，然後再解此方程式.

解　由 (2) 式得 $x^2-2x+1+y^2=0$ $\quad\therefore\quad (x-1)^2+y^2=0$

x、y 爲實數則 $(x-1)^2$, y^2 須是正數或零方能滿足本式，而 x, y 之實數值爲 $(x-1)=0$, $y=0$ 卽 $x=1$, $y=0$.

然 $x=1$, $y=0$ 不能滿足 (1) 式，是與命題相反，故不能採用，因此 x, y 無滿足兩方程式之實數值.

解此方程式須先將 (1) 式之分母除去.

$x^2-3xy+2y^2=0$ $\quad\therefore\quad (x-y)(x-2y)=0$

$\therefore\quad x-y=0\cdots\cdots x=y$ 　又　$x-2y=0\cdots\cdots x=2y$

若 $x=y$

由(2)式得

$$y^2-2y+1=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{2}$$

因 $x=y$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{2}$$

若 $x=2y$

由(2)式得

$$5y^2-4y+1=0$$

$$\therefore\quad y=\frac{2\pm\sqrt{-1}}{5}$$

因 $x=2y$

$$x=\frac{4\pm2\sqrt{-1}}{5}$$

答 $\left\{x=y=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{2}\right\}$, $\left\{x=\frac{4+2\sqrt{-1}}{5},\ y=\frac{2+\sqrt{-1}}{5}\right\}$,

$\left\{x=\frac{4-2\sqrt{-1}}{5},\ y=\frac{2-\sqrt{-1}}{5}\right\}$,

根與係數

解 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 得 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

令此方程式根用 α, β 名之，則

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

又 $\alpha\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-b^2-4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

由此得兩公式

(A) 二根之和 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

(B) 二根之積 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

問題

1. $px^2+qx+r=0$ 之二根爲 α, β, 求下列各式之值.

(A) $\alpha^2+\beta^2$ (B) $(\alpha-\beta)^2$

(C) $\alpha^3+\beta^3$ (D) $\alpha^5\beta^2+\alpha^2\beta^5$ (E) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(F) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$ (G) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$ (H) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$

(I) $\alpha^4+\beta^4$ (J) $\alpha^5+\beta^5$ (K) $\alpha^4-\beta^4$

解 由公式 $\alpha+\beta=-\dfrac{q}{p}\cdots\cdots(1)$ $\alpha\beta=\dfrac{r}{p}\cdots\cdots(2)$

(A) $\alpha^2+\beta^2=\underline{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ 將(1)、(2)代入

$$=\left(-\frac{q}{p}\right)^2-2\times\frac{r}{p}=\frac{q^2}{p^2}-\frac{2r}{p}=\frac{q^2-2pr}{p^2}$$

(B) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+\underline{2\alpha\beta}+\beta^2-\underline{4\alpha\beta}=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=\left(-\frac{q}{p}\right)^2-4\times\frac{r}{p}=\frac{q^2-4pr}{p^2}$$

(C) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\cdots\cdots\cdots$(因子分解之公式)

$$=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\underline{2\alpha\beta}+\beta^2-\underline{3\alpha\beta})=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$$

$$=\left(\frac{-q}{p}\right)\left\{\left(\frac{-q}{p}\right)^2-3\times\frac{r}{p}\right\}=\frac{-q}{p}\left\{\frac{q^2-3pr}{p^2}\right\}$$

$$=\frac{3pqr-q^3}{p^3}$$

別解 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$\therefore$ $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ 將左右項移動

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=\left(-\frac{q}{p}\right)^3-3\times\frac{r}{p}\times\left(-\frac{q}{p}\right)=\frac{-q^3}{p^3}+\frac{3qr}{p^2}=\frac{3pqr-q^3}{p^3}$$

(D) $\alpha^5\beta^2+\alpha^2\beta^5=\alpha^2\beta^2(\alpha^3+\beta^3)=\left(\dfrac{r}{p}\right)^2\times\dfrac{3pqr-q^3}{p^3}=\dfrac{3pqr^3-q^3r^2}{p^5}$

(E) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=(\alpha+\beta)\div\alpha\beta=-\dfrac{q}{p}\div\dfrac{r}{p}=-\dfrac{p}{r}$

(F) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=(\alpha^2+\beta^2)\div\alpha^2\beta^2=\dfrac{q^2-2pr}{p^2}\div\dfrac{r^2}{p^2}=\dfrac{q^2-2pr}{r^2}$

(G) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}=\dfrac{\beta^3+\alpha^3}{\alpha^3\beta^3}=(\alpha^3+\beta^3)\div\alpha^3\beta^3=\dfrac{3pqr-q^3}{p^3}\div\dfrac{r^3}{p^3}=\dfrac{3pqr-q^3}{r^3}$

(H) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=(\alpha^3+\beta^3)\div\alpha\beta=\dfrac{3pqr-q^3}{p^3}\div\dfrac{r}{p}=\dfrac{3pqr-q^3}{p^2r}$

(I)　$\alpha^4+\beta^4=\underline{\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4}-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$

$$=\left(\frac{q^2-2pr}{p^2}\right)^2-2\left(\frac{r}{p}\right)^2=\frac{(q^2-2pr)^2-2p^2r^2}{p^4}$$

$$=\frac{q^4-4pq^2r+2p^2r^2}{p^4}$$

(J)　$\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)$……………………整頓之

$$=(\alpha+\beta)(\alpha^4+\beta^4-\alpha^3\beta-\alpha\beta^3+\alpha^2\beta^2)$$

$$=(\alpha+\beta)\{(\alpha^4+\beta^4)-\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2\}$$

$$=\frac{-q}{p}\left\{\frac{q^4-4pq^2r+2p^2r^2}{p^4}-\frac{r}{p}\times\frac{q^2-2pr}{p^2}+\frac{r^2}{p^2}\right\}$$

$$=\frac{-q}{p}\left\{\frac{q^4-5pq^2r+5p^2r^2}{p^4}\right\}=-\frac{q^5-5pq^3r+5p^2qr^2}{p^5}$$

(K)　$\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$$=\frac{q^2-2pr}{p^2}\times\frac{-q}{p}\times\frac{\pm\sqrt{q^2-4pr}}{p}$$

$$=\mp\frac{(q^3-2pqr)\sqrt{q^2-4pr}}{p^4}$$

[但$\alpha>\beta$須用[—]符，$\alpha<\beta$則用[+]符]

2.　$2x^2+3x+4=0$之二根作爲α,β，求$(\alpha^2+2\beta+1)(\beta^2-2\alpha+1)$之值．

解　由公式得$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{2}$……(1)，　$\alpha\beta=2$……(2)

得$(\alpha^2-2\beta+1)(\beta^2-2\alpha+1)$

$=\alpha^2\beta^2-2(\alpha^3+\beta^3)+\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

$=(\alpha\beta)^2-2(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}+(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$

[於此適用(1)式，(2)式]

$$=4-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\left\{\frac{9}{4}-3\times2\right\}+\frac{9}{4}+4-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)+1$$

$=4+3\times\dfrac{-15}{3}+\dfrac{9}{4}+4+3+1=3$……………答

3. 方程式 $5x^2-(3a+4)x=a+3$, 已知其一根爲 3, 求其他一根之數值.

解 作其他一根爲 α, 由根與係數之關係得

$$\begin{cases} \alpha+3=\dfrac{3a+4}{5}\cdots\cdots\alpha=\dfrac{3a-11}{5} \\ 3\alpha=-\dfrac{(a+3)}{5}\cdots\cdots\alpha=\dfrac{-(a+3)}{15} \end{cases}$$

$$\therefore\quad \frac{3a-11}{5}=\frac{-(a+3)}{15}\qquad\qquad \therefore\quad a=3$$

故 $\alpha=\dfrac{3a-11}{5}=\dfrac{3\times8-11}{5}=-\dfrac{2}{5}$　**答** $-\dfrac{2}{5}$

4. 二次方程式 $abx^2-(2b+9a)x+12b-15a=0$ 之二根, 其和爲 4, 其積爲 1, 求二根 a 及 b 之值.

解 由根與係數之關係得下列各式

$$\frac{2b+9a}{ab}=4\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{2}{a}+\frac{9}{b}=4\cdots\cdots(1)\cdots\cdots(\text{二根之和})$$

$$\frac{12b-15a}{ab}=1\cdots\cdots\cdots\frac{12}{a}-\frac{15}{b}=1\cdots\cdots(2)\cdots\cdots(\text{二根之積})$$

將 (1) 式乘 6, 減去 (2) 式得 $\dfrac{69}{b}=23$　　$\therefore\quad b=3$

於是 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{9}{3}=4\cdots\cdots a=2$　　**答** $a=2,\ b=3$

5. $4x^2+12x+d=0$ 之二根之差爲 2, 求此二根及 d 之值.

解 作一根爲 α, 其他一根爲 β, 由根與係數之關係得

$$\alpha+\beta=-3\cdots\cdots(1),\qquad \alpha\beta=\frac{d}{4}\cdots\cdots(2)$$

得命題得　$\alpha-\beta=\pm2$,　故

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-3\cdots(1)\\ \alpha\beta=\dfrac{d}{4}\cdots(2)\\ \alpha-\beta=2\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$$ 之時

由 (1)式+(3)式得

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 從(1)得

$\beta=-2\dfrac{1}{2}$ 於是由(2)式

得 $d=5$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-3\cdots(4)\\ \alpha\beta=\dfrac{d}{4}\cdots(5)\\ \alpha-\beta=-2\cdots(6)\end{array}\right\}$$ 之時

由 (4)式+(6)式得

$\alpha=-2\dfrac{1}{2}$ 從(4)式得

$\beta=-\dfrac{1}{2}$ 於是由(5)式

得 $d=5$.

答 二根……$-\dfrac{1}{2}$, $-2\dfrac{1}{2}$; $d=5$

6. 方程式 $x^2-px+15=0$ 之二根，其差之平方爲 4，求 p 之値.

解 作二根爲 α, β, 由公式得

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=15$ 　　又由題意 $(\alpha-\beta)^2=4$

故 $$\begin{cases}\alpha+\beta=p\cdots\cdots(1)\\ \alpha\beta=15\cdots\cdots(2)\\ (\alpha-\beta)^2=4\cdots(3)\end{cases}$$

此三個聯立方程式之未知數爲 α, β, p, 須將 α, β 消去，方能求得 p 之値.

由(3)式得 $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4$ 即 $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$ 將其代入(1), (2)

$p^2-4\times15=4$ 　$\therefore\ p^2=64$ 　$\therefore\ p=\pm8$……**答**

7. 求方程式 $(1+\sqrt{2})x^2+(1-\sqrt{2})x=4$ 二根之差之平方，至小數點下三位爲止.

解 作二根爲 α, β, 由公式得

$\alpha+\beta=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\cdots\cdots\cdots(1)$, 　　$\alpha\beta=\dfrac{-4}{\sqrt{2}+1}\cdots\cdots\cdots(2)$

求其根之差之平方如下,

$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 　將(1), (2)用入

$$=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2-4\times\frac{-4}{\sqrt{2}+1}$$ 將分母有理化計算之

$$=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2-4\times\frac{-4}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\left(\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}\right)^2+\frac{16(\sqrt{2}-1)}{2-1}=(3-2\sqrt{2})^2+16(\sqrt{2}-1)$$

$$=9-12\sqrt{2}+4\times2+16\sqrt{2}-16=1+4\sqrt{2}=6.656$$ ……………………答

8. $x^2+px+q=0$之一根若等於他根之平方,則$p^3=q(3p-1)-q^2$,試證明之.

解 作一根爲 a, 則其他一根爲 a^2, 由公式得

$a+a^2=-p$　　$a\times a^2=q$　　將其用入下式

$$p^3-q(3p-1)+q^2=[-(a+a^2)]^3-a^3[3\{-(a+a^2)\}-1]+(a^3)^2$$

$$=-(a^3+3a^4+3a^5+a^6)-3a^4+3a^5+a^3+a^6=0$$

$\therefore$ $p^3-q(3p-1)+q^2=0$　即　$p^3=q(3p-1)-q^2$

9. 方程式 $x^2+(4m-2)x+3m^2+5=0$ 之二根之中,若其一根等於其他一根之兩倍則m之值爲如何

解 作一根爲 a, 則其他一根爲 $2a$, 由其根與係數之關係得下式,

$$a+2a=-(4m-2)\cdots\cdots a=\frac{-(4m-2)}{3}\cdots\cdots(1)\cdots\cdots[\text{二根之和}]$$

$$a\times2a=3m^2+5\cdots\cdots a^2=\frac{3m^2+5}{2}\cdots\cdots(2)\cdots\cdots[\text{二根之積}]$$

將 (1) 式代入 (2) 式得

$$\left\{\frac{-(4m-2)}{3}\right\}^2=\frac{3m^2+5}{2}$$

將其化成簡式而整頓之

$5m^2-32m-37=0$　　$\therefore$　$m=\frac{37}{5}$ 又 -1 ……………………答

10. 若 $ax^2+bx+c=0$ 之一根爲其他一根之 n 倍, 則 $nb^2=ac(n+1)^2$, 試證明之.

解 作一根爲 a, 則其他一根爲 na, 由公式得

$$a+na=-\frac{b}{a}\Big\} \cdots\cdots a(1+n)=-\frac{b}{a} \quad a^2=\frac{b^2}{(1+n)^2a^2}\cdots\cdots(1)$$

$$a\cdot na=\frac{c}{a}\Big\} \cdots\cdots na^2=\frac{c}{a} \cdots\; a^2=\frac{c}{na} \cdots\cdots\cdots (2)$$

於是 $\dfrac{b^2}{(1+n)^2a^2}=\dfrac{c}{na}$

將分母解去，而用 a 除兩邊. [但 $a \neq 0$]

得 $nb^2=(1+n)^2ac$, 卽所求之關係.

11. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 p 與 q, 若 $p=2q+1$, 則係數 a, b, c, 間之關係爲如何.

解 由公式得 $p+q=-\dfrac{b}{a}$, $pq=\dfrac{c}{a}$

於是 $p+q=-\dfrac{b}{a}\cdots\cdots(1)$

$pq=\dfrac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$p=2q+1\cdots\cdots\cdots(3)$

從而 將 p, q 消去得 a, b, c 之關係.

將 (3) 代入 (1) 式

$2q+1+q=-\dfrac{b}{a}$

$q=\dfrac{-(a+b)}{3a}\cdots\cdots\cdots(4)$

又將 (3) 式代入 (2) 式得 $(2q+1)q=\dfrac{c}{a}$, 將 (4) 式代入之得

$$\left\{2\times\frac{-(a+b)}{3a}+1\right\}\times\frac{-(a+b)}{3a}=\frac{c}{a}$$

$$\therefore\ (a+b)(2b-a)=9ac \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

二個方程式之問題

1. 方程式 $x^2+ax+1=0$, $x^2+bx-1=0$ 之各式之二根爲 α, β 及 γ, δ, 將下式用 a, b 之最簡單形式表之.

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}$$

解 $x^2+ax+1=0$ 之二根作爲 α,β

由公式得

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=-a\\ \alpha\beta&=1\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(-a)^2-2\times1}{1^2}=a^2-2$$

$x^2+bx-1=0$ 之二根作爲 γ,δ

由公式得

$$\left.\begin{aligned}\gamma+\delta&=-b\\ \gamma\delta&=-1\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}=\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma^2\delta^2}=\frac{(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta}{\gamma^2\delta^2}=\frac{(-b)^2-2\times(-1)}{(-1)^2}=b^2+2$$

故 $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}=a^2-2+b^2+2=a^2+b^2$……………………證

8. 在若何要件之下，$px^2+qx+r=0$ 之根與 $4x^2+8x+1=0$ 之根之平方相等.

解 作 $4x^2+8x+1=0$ 之二根爲 α,β, 則由命題 $px^2+qx+r=0$ 之二根爲 α^2,β^2, 故由公式得

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=-2\\ \alpha\beta&=\frac{1}{4}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)\qquad 及\qquad \left.\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=-\frac{q}{p}\\ \alpha^2\beta^2&=\frac{r}{p}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

於是將 (1) 式用入 (2) 式，使 α,β, 消去.

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\times\frac{1}{4}=\frac{7}{2}$$

由 (2) 式 $-\frac{q}{p}=\frac{7}{2}$　$\therefore\ -2q=7p$　$\therefore\ 7p+2q=0\cdots\cdots(A)$

由 (1) 式 (2) 式　$\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{r}{p}$　$p=16r\cdots\cdots\cdots(B)$

(A) (B) 兩式之成立足以滿足命題，故此即是所求之要件，兩式連結之

得　$p=-\frac{2}{7}q=16r.$　　$\therefore\ 7p=-2q=112r$……答

3. $px^2+2qx+r=0$ 之二根為 α,β, $ax^2+2bx+c=0$ 之二根為 $\alpha+k,\beta+k$, 則發生下列之關係式

$$\frac{q^2-pr}{p^2}=\frac{b^2-ca}{a^2}$$ 試證明之.

解 由公式得

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta=-\frac{2q}{p}\cdots\cdots(1)\\ \alpha\beta=\frac{r}{p}\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}\ 及\ \left.\begin{aligned}(\alpha+k)+(\beta+k)=-\frac{2b}{a}\cdots(3)\\ (\alpha+k)(\beta+k)=\frac{c}{a}\ \cdots\cdots(4)\end{aligned}\right\}$$

由此四式將 α,β,k 消去則得 a,b,c,p,q,r 之關係式.

由 (3) 式得 $\alpha+\beta+2k=\frac{-2b}{a}$　將其代入 (1) 式,

得　$-\frac{2q}{p}+2k=\frac{-2b}{a}$　$\therefore\ k=\frac{aq-bp}{ap}$………(5)

又由 (4) 式得 $\alpha\beta+k(\alpha+\beta)+k^2=\frac{c}{a}$

將 (1) (2) (5) 式代入之成 $\frac{r}{p}+\frac{aq-bp}{ap}\times\frac{-2q}{p}+\left(\frac{aq-bp}{ap}\right)^2=\frac{c}{a}$

解去分母而簡單之得 $a^2pr-a^2q^2+b^2p^2=acp^2$…………(A)

由 (A) 式得 $-a^2q^2+a^2pr=-b^2p^2+acp^2$, 用 $-a^2p^2$ 除兩邊得

(但　$ap\neq0$)　$\frac{q^2-pr}{p^2}=\frac{b^2-ac}{a^2}$

共　通　根

1. $ax^2+bx+c=0$, $lx^2+mx+n=0$ 有共通根則其係數之間有如下之關係, 試證明之.

$$(an-cl)^2=(bl-am)(cm-bn)$$

解　作 α 為共通根，而 α 能滿足兩式，即

$$\left.\begin{aligned}&a\alpha^2+b\alpha+c=0\cdots\cdots\times l\cdots\cdots\cdots al\alpha^2+bl\alpha+cl=0\\&l\alpha^2+m\alpha+n=0\cdots\cdots\times a\cdots\cdots al\alpha^2+am\alpha+an=0\end{aligned}\right\}\text{ 併算之}$$

$$(bl-am)\alpha+cl-an=0$$

$$\therefore\qquad \alpha=\frac{an-cl}{bl-am}$$

將此值用入 $ax^2+bx+c=0$

$$a\left(\frac{an-cl}{bl-am}\right)^2+b\left(\frac{al-cl}{bl-am}\right)+c=0$$

$$\frac{a(an-cl)^2+b(an-cl)(bl-am)+c(bl-am)^2}{(bl-am)^2}=0$$

$$a(an-cl)^2+(bl-am)\,a\,(bn-cm)=0\cdots\cdots\cdots\div a$$

$$\therefore\quad (an-cl)^2-(bl-am)(cm-bn)=0$$

$$\therefore\qquad (an-cl)^2=(cl-am)(cm-bn)$$

2. 下列兩方程式僅有一個共通根，而不共通之根之和等於－1，試證明之。

$$x^2+px+q=0\qquad x^2+qx+p=0$$

解　作 $x^2+px+q=0$ 之二根為 α 及 β，$x^2+qx+p=0$ 之二根為 β，及 γ β 為共通根，於是根與係數之關係如下

$$\begin{array}{l|l}\alpha+\beta=-p\cdots\cdots\cdots\cdots(1) & \beta+\gamma=-q\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ \alpha\beta=q\cdots\cdots\cdots\cdots(2) & \beta\gamma=q\cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{array}$$

由命題須證明 $\alpha+\gamma=-1$，故將 (1) 式 (2) 式 (3) 式 (4) 式中之 β 消去，即現出 α 與 γ 之關係式。

(1) 式減 (2) 式　得 $\alpha-\gamma=-p+q\cdots\cdots\cdots(5)$

由 (2) 式 (4) 式得　$\dfrac{q}{\alpha}=\dfrac{p}{\gamma}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$　(6)　［但 $p\neq0$，$q\neq0$］

由 (6) 式得 $\alpha=\dfrac{q}{p}\gamma$.　　將其代入(5)式

得 $\frac{q}{p}\gamma-\gamma=-p+q$ $\therefore q\gamma-p\gamma=p(q-p)$ $\therefore (q-p)(\gamma-p)=0$

是 $q-p=0$ 還是 $\gamma-p=0$ 呢，若 $q-p=0$，則 $q=p$，而卽是兩方程式相同，此與命題僅有一個共通根相反，故不可能，因此應是 $\gamma-p=0$，卽 $\gamma=p$，由 (5) 式得 $\alpha=q$，將其用入 (2) 得 $\beta=1$，於是共通根爲 1，用之於原方程式成 $1^2+p\times1+q=0$ $\therefore$ $\boxed{p+q=-1}$

於是 $\alpha=p$，$\gamma=p$，$p+q=-1$ 故 $\boxed{\alpha+\gamma}=p+q=-1$

$\alpha+\gamma=-1$ 因如題言。

關於根之符號

$[b^2-4ac>0,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}]$

1. 二次方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根 α 及 β $(\alpha>\beta)$；γ 爲 α 與 β 之間任意一數，試定 $\gamma^2+p\gamma+q$ 之正負.

解 虛數無大小，今 $\alpha>\beta$ 則可知 α 及 β 皆爲實數，由根與係數之關係得 $\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$，將其代入下式，

$$\begin{aligned}&\gamma^2+p\gamma+q\\&=\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\\&=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\\&=(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\end{aligned}$$

假定 $\alpha>\gamma>\beta>0$，則 $\alpha>\gamma$，而 $\alpha-\gamma>0$，又 $\gamma>\beta$ 而 $\beta-\gamma<0$

因此成爲 $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)>0$

$\therefore$ $\gamma^2+p\gamma+q<0$

[但 $p^2-4q\geqq0$]

2. 下列二次方程式之二根之絕對值相等，若其根之符號相異則 m 之値爲如何，且求其根.

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=0$ $$

註 絕對值爲實數之絕對值，卽可作爲實根

解 將方程式整頓之成

$$3x^2+(m^2-3m-10)x+3m=0\cdots\cdots(A)$$

用 α 表一根，而由命題知可用 $-\alpha$ 表其他一根.

故 $a+(-a)=-\frac{1}{3}(m^2-3m-10)$

即 $m^2-3m-10=0\cdots\cdots(m-5)(m+2)=0$

因此 $m=5$ 又 $m=-2$

若 $m=5$ 則(A)式成

$3x^2+15=0$

$\therefore\ x=\pm i\sqrt{5}$

然 $i\sqrt{5}$ 非規定之絕對值,故不能用.

若 $m=-2$ 則(A)式成

$3x^2+16=0$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{2}$

此x爲實根能滿足命題.

答 $m=-2$, $x=\pm\sqrt{2}$.

3. 二次方程式$x^2+kx+9=0$之二根爲正實數則k之值若何.

注意 本問將實根之關係及根與係數之關係同時成立,然後可求得k之值.

解 實根

爲實根則依公式成

$k^2-4\times1\times9\geqq0$

故欲

$(k-6)(k+6)\geqq0$ 能滿足本式則於

$\boxed{(+)\times(+)}$

須 $\begin{cases}k-6>0\cdots\cdots k>6\\k+6>0\cdots\cdots k>-6\end{cases}$

於 $\boxed{(-)\times(-)}$

須 $\begin{cases}k-6<0\cdots\cdots k<6\\k+6<0\cdots\cdots k<-6\end{cases}$

而 $k>6$, $k>-6$ 能滿足之則 $k>6$; 如 $k<6$, $k<-6$能滿足之則$k<-6$

$\therefore\ k\geqq6$, 或 $k\leqq-6$

兩根正數

作二根爲 α, β, 由公式得

$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=-k\\ \alpha\beta=9\end{array}\right\}$

α, β 爲正數則

$\alpha+\beta=$ 正數

故

$\alpha+\beta=-k=$正數

因$-k$ 爲正數則

k 自身不能爲負數

故所求之 k 之值爲

$k<0$, 及 $k\geqq6$, 或 $k<0$

及 $k\leqq-6$, 惟能滿足命題祇有

$k\leqq-6$ ……………………………… 答

4. 方程式 $x^2+px-q=0$ 中之 p 爲實數，q 爲正實數，則此式之二根爲一正根一負根，試證明之.

解題　虛數無正負，故本問不可着手.明二根爲實數，須得證明二根之積爲負數，於是始可解決本問.

解　由公式作之得 $p^2-4(-q)=p^2+4q$，p 爲實數，q 爲正實數.故 p^2 爲正數或零，因此 p^2+4q 常是正數，即 $p^2+4q>0$ 爲不等實根.

再作一根爲 α，其他一根爲 β，由根與係數之關係得 $\alpha\beta$ 指 $-q$，q 爲正實數故 $-q$ 爲負數，今二根之積既爲負數，則必定一根是正根，其他一根是負根.

方程式作法

解 $x^2-(m+n)x+mn=0$ 得 $(x-m)(x-n)=0$，於是 $x=m$，$x=n$ 故以 m,n 爲根之方程式不可作 $(x-m)(x-n)=0$ 之形式，須作 $x^2-(m+n)x+mn=0$ 之形式，即 x^2-(二根之和)$x+$(二根之積)$=0$

問　題

1. $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α 及 β，試作成以 $(\alpha-1)^2$ 及 $(\beta-1)^2$ 爲根之方程式.

解　由根與係數之關係得 $\alpha+\beta=-p\cdots\cdots(1)$　$\alpha\beta=q\cdots\cdots(2)$

$\boxed{\text{二根之和}}=(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2=\alpha^2+\beta^2-2(\alpha+\beta)+2$

[將(1).(2)代入]　$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+2$

$=p^2-2q+2p+2$

$\boxed{\text{二根之積}}=(\alpha-1)^2\times(\beta-1)^2=[(\alpha-1)(\beta-1)]^2$

[(1).(2)代入]　$=[\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1]^2$

$=(q+p+1)^2$

公式爲 x^2-(二根之和)$x+$(二根之積)$=0$

故所求之方程式爲 $x^2-(p^2+2p-2q+2)x+(p+q+1)^2=0$

2. 方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 $a\pm\sqrt{\beta}$，試作以 $\frac{1}{a}\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ 爲二根之方程式.

解 由根與係數之關係得.

$$(a+\sqrt{\beta})+(a-\sqrt{\beta})=-p\cdots\cdots a=-\frac{p}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$(a+\sqrt{\beta})(a-\sqrt{\beta})=q\cdots\cdots a^2-\beta=q$　將 (1) 代入之

$$\beta=\frac{p^2-4q}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\boxed{\text{二根之和}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=\frac{2}{a}$　將(1)代入之

$$=-\frac{4}{p}$$

$\boxed{\text{二根之積}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\beta}$　將(1).(2)

代入 $=\frac{4}{p^2}-\frac{4}{p^2-4q}=\frac{-16q}{p^2(p^2-4q)}$

公式爲 x^2-(二根之和)$x+$(二根之積)$=0$

故所求之方程式爲 $x^2-\left(-\frac{4}{p}\right)x+\frac{-16q}{p^2(p^2-4q)}=0$

即 $p^2(p^2-4q)x^2+4p(p^2-4q)x-16q=0.$

3. 有實根之二次方程式，其二根之差爲 1，而其三乘之差爲 19，求此方程式.

解 作小根爲 a，則大根爲 $a+1$

由命題則 $(a+1)^3-a^3=19\cdots\cdots a^2+a-6=0$

$\therefore$ $(a-2)(a+3)=0$　　故得 $a=2$ 又 -3

以 $a=2$, 於是他根為 3, 從而求得方程式

$x^2-(2+3)x+2\times3=0$ 　即　 $x^2-5x+6=0$

同樣 $a=-3$ 得 $x^2+5x+6=0$. 　　答　$x^2\pm5x+6=0$

4. 甲乙二人同算一個一元二次方程式, 甲將 x 之係數寫錯, 乙將常數項寫錯, 故甲所得之根為 4 及 5, 乙所得之根為 -13 及 4, 今求其正根.

解

甲

以 4, 5 為根所得之二次方程式

$x^2-[4+5]x+4\times5=0$

$\therefore\quad x^2-9x+20=0$

乙

以 -13 及 4 為根所得之二次方程式

$x^2-(4-13)x+4\times(-13)=0$

$\therefore\quad x^2+9x-52=0$

由命題知甲所得之式中不含 x 之項不錯, 即 $+2$) 為不錯, 再由命題知乙所得之式中 x 之係數不錯, 即 9 為不錯, 因此正確之一元二次方程式是 $x^2+9x+20=0$.

將其解之得 $(x+4)(x+5)=0$, $x=-4, -5$ ………………………… 答

5. $x^2+ax+bc=0$ 及 $x^2+bx+ca=0$ 祇有一個共通根, 其不共通之二根即 $x^2+cx+ab=0$ 之根, 試證明之.

解　僅有之一個共通根當是 $(x^2+ax+bc)-(x^2+bx+ca)=0$ 之根.

即 $(a-b)x+bc-ca=0$ 　　故 $(a-b)(x-c)=0$

現在要問是 $a-b=0$, 還是 $x-c=0$

[I]　$a-b=0$ 即 $a=b$, 於是兩個方程式相同, 此與命題祇有一個共通根之語相反, 故 $a\neq b$.

[II]　因此祇能是 $x-c=0$, 即 $x=c$, 此為共通根, 今作第一方程式之其他一根為 α, 又作第二方程式之其他一根為 γ, 由公式得

$$\left.\begin{aligned} \alpha+c&=-a\cdots\cdots(1)\\ \alpha c&=bc\ \cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}\quad 及\quad \left.\begin{aligned} \gamma+c&=-b\cdots\cdots(3)\\ \gamma c&=ca\ \cdots\cdots(4)\end{aligned}\right\}$$

今 (1)+(3)式得 $\alpha+\gamma=-a-b-2c$ ……………………(5)

(1)式×(3)式得 $\alpha\gamma=-(a+c)\times[-(b+c)]$

$=ab+ac+bc+c^2$ ……………(6)

以 α, γ 爲根所得之方程式如下

$x^2-(\alpha+\gamma)x+\alpha\gamma=0$　將(5)式(6)式代入之得

$x^2+(a+b+2c)x+(ab+ac+bc+c^2)=0$ …………(7)

c 爲共通根則能滿足第一方程式,

即　$c^2+ac+bc=0$ ……………………………(8)

變形成　$c(c+a+b)=0$ ……………………………(9)

將(8)式代入(7)式得.

$x^2+(a+b+2c)x+ab=0$ ……………………………(10)

再於(9)式, 其中是 $c=0$ 還是 $c+a+b=0$

今將其代入(10)式

若 $c=0$	若 $c+a+b=0$
$x^2+(a+b)x+ab=0$	$x^2+cx+ab=0$

於是知本問祇能求得 $c \neq 0$, 不能求得其他.

注意 作 $c=0$, $a=3$, $b=5$ 則第一方程式成 $x^2+3x=0$, 第二方程式成 $x^2+5x=0$, 第三方程式成 $x^2+3\times5=0$, 於此則共通根爲零, 其他二根爲 $x=-3$, $x=-5$. 而用 -3 及 -5 兩根所作成之方程式爲 $x^2+8x+15=0$, 一目瞭然而知與 $x^2+15=0$ 之根不相同.

第六章

餘式定理

[說明] x之有理整式 $2x^4+3x^3+5x^2+4x+7$ 用 $x-3$除之, 實算的結果得商 $2x^3+9x^2+32x+100$, 剩餘307, 於是成立下列之恆等式.

$2x^4+3x^3+5x^2+4x+7=(x-3)(2x^3+9x^2+32x+100)$
$+307\ldots(A)$

今作 $2x^4+3x^3+5x^2+4x+7$ 爲 P, $2x^3+9x^2+32x+100$ 爲 Q, 307 爲 R 則 (A) 式如下列.

$$P=(x-3)Q+R\quad[\text{但 } R \text{ 不含 } x]$$

於是 (A) 式中等號左邊可適用 $x=3$ 之數值(卽式 P 之値)與右邊可適用 $x=3$ 之數值(卽 $(x-3)Q+R$ 之値)相等.

通常 x 之有理整式 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+px+q$ 用 $x-l$ 除之得商 Q 及剩餘(不含 x) R, 則列式於下.

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots+px+q=(x-l)Q+R$

今作 $x=l$, 用之於兩邊,則上式等號右邊之第一項 $(x-l)Q=(l-l)Q=0\times Q=0$, 因此上式成

$al^n+bl^{n-1}+cl^{n-2}+\cdots\cdots+pl+q=0+R$

[定理]　1.　x 之有理整式 P 被 $x-l$ 所除剩餘 R, P 式中之 x 與能代換彼之 l 相等.

P 式被 $(x-l)$ 除盡,則 $R=0$, 可書寫成

$al^n+bl^{n-1}+cl^{n-2}+\cdots\cdots+pl+q=R=0$

[定理]　2.　欲 P 式能被 $(x-l)$ 整除,則 P 式之 x 須能由 l 替換,而結果等於零.

此際 $P=(x-l)Q$, 卽 P 式中有 $(x-l)$ 之因子.

[定理]　3.　P 式中若將 $x=l$, $x=m$ 代入之而結果等於零,則 P 式含有 $(x-l)(x-m)$ 二因子(但 $m\neq l$).

問　　題

1.　x^3-4x^2+6 以 $x-2$ 除之剩餘幾何.

解　x^3-4x^2+6 被 $x-2$ 除得商 Q 及剩餘 R, 於是成立下列恆等式

$x^3-4x^2+6\equiv(x-2)Q+R$　以$x=2$則

$2^3-4\times2^2+6=(2-2)Q+R$　　$\therefore$　$R=-2$ ……………………… 答

2. $2x^3-m^2x^2+nx-3$ 被$x-1$整除，$2mx^2-3nx-36$ 被$x+3$整除，求m，n之值．

解　$2x^3-m^2x^2+nx-3$ 被 $x-1$整除，以 $x=1$，將其代入 $2x^3-m^2x^2+nx-3$ 而作之等於零。

即 $2\times1^3-m^2\times1^2+n\times1-3=0$

$\therefore$　　$m^2-n+1=0$ ………(1)

同樣 $2mx^2-3nx-36$式中作$x=-3$將其代入而作之等於零．

即 $2m\times(-3)^2-3n\times(-3)-36=0$………$\div9$

$\therefore$　　$2m+n-4=0$………(2)

於是由(1)(2)兩式決定m，n之值，兩式相加得 $m^2+2m-3=0$ 分解因子成 $(m-1)(m+3)=0$，因得$m=1$或 $m=-3$；作$m=1$則由(2)式得$n=2$，又作$m=-3$則由(2)式得$n=10$．

答　$(m=1,\ n=2)$或$(m=-3,\ n=10)$

3. x^3+4x^2+px+q之多項式可被$(x-1)(x+3)$整除，求 p，q之值．

解　x^3+4x^2+px+q 被 $(x-1)(x+3)$ 整除，故本式可用 $x=1$ 及 $x=-3$ 代入而作之等零．

若 $x=1$	若 $x=-3$
$p+q+5=0$………(1)	$-3p+q+9=0$………(2)

由(1)(2)而決定 p，q 之值．

(1)式$-$(2)式得 $4p-4=0$ 即$p=1$．再由(1)式得 $q=-6$

答　$p=1$，$q=-6$

4. Ax^4+Bx^3+1可被$(x-1)^2$整除，求 A，B 之值．

解　將$(x-1)^2=0$，於是作$x=1$，以之代入式中得 $A+B+1=0$………(1)

然不能就此式求得 A，B 之值，於是將(1)變形而代入式中，由(1)得 $B=-(A+1)$

從而 $Ax^4+Bx^3+1=Ax^4-(A+1)x^3+1$

$$=Ax^4-Ax^3-x^3+1$$
$$=Ax^3(x-1)-(x-1)(x^2+x+1)$$
$$=(x-1)(Ax^3-x^2-x-1)$$

Ax^3-x^2-x-1 可被 $x-1$ 除盡，故作 $x=1$，將其代入 Ax^3-x^2-x-1 且使之等於零.

$A\times1^3-1^2-1-1=0$　　$\therefore\ A-3=0$　　$\therefore\ A=3$

於是 $A+B+1=0$　　成 $3+B+1=0$　　$\therefore\ B=-4$

[illegible]　x 之四次式被 x 之二次式除之，所得之商為 x 之二次式，從而得下列恆等式.

$Ax^4+Bx^3+1\equiv(x-1)^2(ax^2+bx+c)$……整頓之

$$\equiv ax^4+(b-2a)x^3+(a-2b+c)x^2+(b-2c)x+c$$

成恆等式則等號兩邊 x 之等冪係數須得相等

	左邊　右邊	
(x^4 之係數)	$A=a$	……(1)
(x^3 之係數)	$B=b-2a$	……(2)
(x^2 之係數)	$0=a-2b+c$	……(3)
(x 之係數)	$0=b-2c$	……(4)
(既知項)	$1=c$	……(5)

將 (5) 式適用於 (4) 式得 $b=2$，又將 (5) 式適用於 (3) 式得 $a=3$，再將 a, b 之值適用於 (1), (2) 得 $A=3$，$B=-4$.

[illegible]　方程式與恆等式之區別

方程式中之文字須有特定之數值，其式始能成立，如 $x+3=7$，$x^2+3x+2=0$，則前式中 $x=4$，後式中 $x=-1$　$x=-2$.

恆等式中不論文字有如何數值，其式皆能成立，如

(I)　$x^2+2x+1=(x+1)^2$，　$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

(II).　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$;

(III).　$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

(IIII).　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$
$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bz)^2$$

各式中之 x, y, z, a, b, c 不論爲如何數值，其式常能成立．恆等式之符號爲 $\equiv$

5. $x^4+3x^3+mx^2+nx+p$ 可被 $(x^2+1)(x+2)$ 整除，求 m, n, p 之值．

解 $(x^2+1)(x+2)=(x^3+2x^2+x+2)$，以之除原式得商爲 $x+l$ 形之 x 之一次式（l 不含 x），故

$$x^4+3x^3+mx^2+nx+p\equiv(x^2+1)(x+2)(x+l)\cdots\cdots \text{整頓之}$$
$$\equiv x^4+(l+2)x^3+(2l+1)x^2+(2+l)x+2l$$

此作成恆等式則等號兩邊 x 之等羃係數相等，即

（x^3 之係數）　$3=l+2\cdots\cdots(1)$　　（x^2 之係數）　$m=2l+1\cdots\cdots(2)$

（x 之係數）　$n=2+l\cdots\cdots(3)$　　（既知項）　$p=2l\cdots\cdots(4)$

由 (1) 得 $l=1$．由 (2) 得 $m=3$，由 (3) 得 $n=3$，

由 (4) 得 $p=2$　　**答**　$m=3,\ n=3,\ p=2$

6. x^2+px+q 被 $x-1$ 除之剩餘 7，被 $x+1$ 除之剩餘 3，求 p 及 q 之值．

解 由命題而依餘式定理得式如下

$x^2+px+q=(x-1)Q+7$

作 $x=1$ 用之於上式得

$1^2+p\times1+q=(1-1)Q+7$

$\therefore\quad p+q=6\ \cdots\cdots\cdots(1)$

又 $x^2+px+q=(x+1)Q+3$

作 $x=-1$ 用之於上式得

$(-1)^2+p\times(-1)+q=(-1+1)Q+3$

即 $1-p+q=3$

$\therefore\quad -p+q=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1) 式 + (2) 式成 $2q=8$　　$\therefore\ q=4$

用之於 (1) 式得 $p+4=6$　　$\therefore\ p=2$　　**答**　$p=2,\ q=4$

7 有 x 之三次式，用 $2x-3$ 除之則剩 -3，用 $2x^2-5x+3$ 除之得商爲 $3x+4$，而剩餘中不含 x，求此三次式．

解 作此三次式爲P，由命題則

$P=(2x-3)Q+(-3)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$P=(2x^2-5x+3)(3x+4)+R\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

但Q是x之二次有理整式，R之中不含x.

於是由(1)，(2)得

$$(2x-3)Q-3=(2x^2-5x+3)(3x+4)+R$$

今將$x=\frac{3}{2}$ 代入之

$$\left(2\times\frac{3}{2}-3\right)Q-3=\left(2\times\frac{9}{4}-5\times\frac{3}{2}+3\right)\left(3\times\frac{3}{2}+4\right)+R$$

$\therefore$ $-3=R$ 再由(2)得

$P=(2x^2-5x+3)(3x+4)-3$

$=6x^3-7x^2-11x+9$……………………………………………………**答**

別解 所求之三次式依通常書寫之式

$Ax^3+Bx^2+Cx+D\equiv(2x-3)Q-3$…………………(1)

$Ax^3+Bx^2+cx+D\equiv(2x^2-5x+3)(3x+4)+R$…(2)

將(2)從右邊整頓而作x之等羃係數並等置之得 $A=6$，$B=-7$，

$C=-11$，$D=12+R$ 以此代(1)式之x 則 $x=\frac{3}{2}$

整頓之則等式成

$27A+18B+1C+8D=-24$ 於是求得 $D=9$

8. 有x之整式，用$x-1$除之得剩餘4，其商更用$x-2$除之得剩餘3，今求此整式用$x-2$及$(x-1)(x-2)$除之所得之剩餘.

解 作x之整式爲P，而用$x-1$除之所得之商爲Q，更作此Q被 $x-2$ 除所得之商爲Q'，於是由命題得下列兩個恆等式

$P\equiv(x-1)Q+4$……………………(1)

$Q\equiv(x-2)Q'+3$………………(2)

將(2)式代入(1)式

$P\equiv(x-1)\{(x-2)Q'+3\}+4$

$\equiv(x-1)(x-2)Q'+3(x-1)+4$

$\therefore$ $P\equiv(x-1)(x-2)Q'+3x+1.$

因求P被$x-2$所除時之剩餘

$$\frac{P}{x-2}\equiv\frac{(x-1)(x-2)Q'}{x-2}+\frac{3x+1}{x-2}\qquad\left(3x+1=3(x-2)+7\right)$$

$$\equiv (x-1)Q'+\frac{3(x-2)+7}{x-2}$$

$$\equiv (x-1)Q'+3+\frac{7}{x-2}$$ 於是剩餘爲 7, 同樣

$$\frac{P}{(x-1)(x-2)}\equiv\frac{(x-1)(x-2)Q'}{(x-1)(x-2)}+\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)}$$

$$\equiv Q'+\frac{3x+1}{(x-1)(x-2)}$$ 於是

剩餘爲 $3x+1$　　　　答 7 及 $3x+1$

9. $x^3-3b^2x+2c^3$ 被 $x-a$, $x-b$ 整除, 則 $a=b=c$, 又 $a=-2b=-2c$, 試證明之, 但 a, b, c 爲實數.

解 原式能被 $x-a$, $x-b$ 整除, 故將 $x=a$, $x=b$ 代入原式而使之成零, 即

$x=a$　得 $a^3-3ab^2+2c^3=0$ ……………………(1)

$x=b$　得 $b^3-3b^3+2c^3=0$　　　簡單之

$-2b^3+2c^3=0$　　$\therefore\ b^3=c^3$

$\therefore\ b=c,\ b=c\omega,\ b=c\omega^2$

而 a, b, c 爲實數, 故

單用 $b=c$, 將其用入 (1) 式

$a^3-3ab^2+2b^3=0$　　　　變形成

$a^3-ab^2-2ab^2+2b^3=0$　　$\therefore$　$a(a^2-b^2)-2b^2(a-b)=0$

$\therefore\ a(a+b)(a-b)-2b^2(a-b)=0$ ……$(a-b)\{a(a+b)-2b^2\}=0$

$\therefore\ (a-b)(a^2+ab-2b^2)=0$ …………$(a-b)(a-b)(a+2b)=0$

於是 $a-b=0$, 又 $(a+2b)=0$ 故 $a=b$, 又 $a=-2b$

此與 $b=c$ 相結合得 $a=b=c$, 又 $a=-2b=-2c$

10. x^3+px^2+qx+r 能被 ax^2+bx+c 除盡則 $\dfrac{ap-b}{a}=\dfrac{aq-c}{b}=\dfrac{ar}{c}$, 試證明之. [但 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$]

解 $x^3+px^2+qx+r\equiv(ax^2+bx+c)(lx+m)$

$$\equiv alx^3+(bl+am)x^2+(cl+bm)x+cm$$

於是作等幕係數等置之

(x^3之係數) $1=al$…………(1) (x^2之係數) $p=bl+am$……(2)
(x之係數) $q=cl+bm$……(3) (旣知項) $r=cm$…………(4)
因爲 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, 於是

由(1)得$l=\dfrac{1}{a}$, 由(4)得$m=\dfrac{r}{c}$, 將此 l, m 之値代入(2),(3)

由(2)得$p=\dfrac{b}{a}+\dfrac{ar}{c}$ $\therefore\ \dfrac{ap-b}{a}=\dfrac{ar}{c}$…… (5)

由(3)得$q=\dfrac{c}{a}+\dfrac{br}{c}$ $\therefore\ \dfrac{aq-c}{a}=\dfrac{br}{c}$……$\times\dfrac{a}{b}$

因此 $\dfrac{aq-c}{b}=\dfrac{ar}{c}$…… (6)

從而由(5),(6)得$\dfrac{ap-b}{a}=\dfrac{aq-c}{b}=\dfrac{ar}{c}$

用餘式定理分解因子

1. 將 $x^3+10x^2+29x+20$ 分解成因子.

解 將原式作爲零, 而探求 x 之值須從餘式定理 II 決定因子, 原式末項 20 之因子爲 ± 1, ± 2, ± 5, ± 10, ± 20, 將其中一數作爲 x 之值, 代入原式驗其是否成零; 今作 $x=-1$而代入之

原式$=(-1)^3+10\times(-1)^2+29\times(-1)+20$

$=-1+10-29+20=0$

從而知有 $x+1$ 之因子, 於是於原式中括出之.

$x^3+10x^2+29x+20$

$=x^3+x^2+9x^2+9x+20x+20$

$=x^2(x+1)+9x(x+1)+20(x+1)$

$=(x+1)(x^2+9x+20)=(x+1)(x+4)(x+5)$

2. 將 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 分解成因子.

解 將式依 a 整頓之成 $a^3-3bca+b^3+c^3$, 作此式等於零而求 a 之値, b^3+c^3 可分解因子爲 $(b+c)(b^2-bc+c^2)$, 於是 $a=\pm(b+c)$, 以之代入原式而作之爲零.

今作 $a=-(b+c)$ 則

原式 $=[-(b+c)]^3+b^3+c^3-3[-(b+c)]bc$

$=-(b+c)^3+b^3+c^3+3bc(b+c)=-(b+c)^3+\underline{b^3+c^3+3b^2c+3bc^2}=-(b+c)^3+(b+c)^3=0$

依餘式定理原式可被 $a+b+c$ 整除.

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)Q\cdots\cdots\cdots\cdots\div(a+b+c)$

$\therefore\quad Q=\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$ 實際除之

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$

3. $(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$ 之 n 爲奇數則有 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 之因子; 試證明之.

解 $x+y=0$ 即 $x=-y$, 將此用入原式而使之等於零, 於是

$(x+y+z)^n-x^n-y^n-z^n$

$=(-y+y+z)^n-(-y)^n-y^n-z^n$

$=z^n-(-y)^n-y^n-z^n$

$=-(-y)^n-y^n$[n 爲奇數則 $(-y)^n$ 成 $-y^n$]

$=-(-y^n)-y^n=y^n-y^n=0$ 由餘式定理 $x+y$ 爲原式之一因子, 同樣 $y=-z$, $z=-x$, 將其用入原式可使之成零, 故 $(y+z)$, $(z+x)$ 皆是因子.

故原式有 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 之因子.

第 七 章

未 定 係 數

定恆等式之未知係數(A, B, C)之値之法則謂之未定係數法, 其方法有二, 一曰數値代入法, 一曰等羃係數比較法; 下舉第一題其解法爲數値代入法, 第二題則爲等羃係數比較法.

問　題

1. $\dfrac{x^2+2}{x(x+1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x+2}$ 式中 A, B, C 為係數,求其值.

解　將分母解除得 $x^2+2=A(x+1)(x+2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)\cdots\cdots$ (D)則令作 $x=1$

$1^2+2=A(1+1)(1-2)+B\times1\times(1-2)+C\times1\times(1+1)$

∴　$3=-2A-B+2C$

即　$2A+B-2C=-3\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

同樣作 $x=3$　$4A+3B+12C=11\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

同樣作 $x=4$　$5A+4B+10C=9\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

解聯立方程式 (1), (2), (3) 而求 A, B, C 之值.

由 (1)式×2—(2) 式得　$A-9C=-10\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由 (1)式×4—(3) 式得　$A-6C=-7\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

由 (4)式—(5)式得 $-3C=-3$　∴ $C=1$ 將其用入　(4) 式

得 $A=-1$　從而　$B=1$　　　答　$A=-1, B=C=1.$

別解　將 x 作如何值而使(D)式中之某項消去,其法亦好,x 之值則視計算便利而定,故 $x=0$ 則 $2=-2A$,得 $A=-1$; $x=2$ 則 $c=1$; $x=-1$ 則 $3=3B$ 即 $B=1$.

2. $y^2+5xy+mx^2+x+y-2$ 分解成兩個一次二因子,則 m 之值為如何.

解　$y^2+5xy+mx^2+x+y-2$

$\equiv(y+ax+b)(y+cx+d)$

$\equiv y^2+(a+c)xy+(b+d)y+acx^2+(bc+ad)x+bd$

作成恆等式則等羃係數相等,即

$5=a+c\cdots\cdots(1)\cdots\cdots(xy$ 之係數$)$

$m=ac\cdots\cdots(2)\cdots\cdots(x^2$ 之係數$)$

$1=bc+ad\cdots\cdots(3)\cdots\cdots(x$ 之係數$)$

$1=b+d\cdots\cdots(4)\cdots\cdots(y$ 之係數$)$

$-2=bd\cdots\cdots(5)\cdots\cdots($既知項$)$

於是由 (4) 得 $b=1-d$, 將其代入 (5) 而整頓之,

$d^2-d-2=0\cdots\cdots(d-2)(d+1)=0\quad\therefore\ d=2$. 又 -1

$d=2$ 則 $b=-1$

將其用入 (3)

$\begin{cases}2a-c=1\\ a+c=5\end{cases}$ 此與(1)共同得

$\therefore\ a=2,\ c=3$

$d=-1$ 則 $b=2$

將其用入 (3)

$\begin{cases}2c-a=1\\ c+a=5\end{cases}$ 此與 (1) 共同得

$\therefore\ c=2,\ a=3.$

從而將 $a, c,$ 之值用入 (2) 得 $m=6$　　**答** $m=6$

別解 原式 $=y^2+(5x+1)y+(mx^2+x-2)$ [y 之二次式]

$=(y-\alpha)(y-\beta)$

將此 $y^2+(5x+1)y+(mx^2+x-2)=0$ 分解之

$$y=\frac{-(5x+1)\pm\sqrt{(5x+1)^2-4(mx^2+x-2)}}{2}$$

$$=\frac{-(5x+1)\pm\sqrt{(25-4m)x^2+6x+9}}{2}$$

要分解 x, y 之一次二因子須作成 x, y 之整式, 而根號內之 x 須爲完全平方數, 故作

$(25-4m)x^2+6x+9=(kx+l)^2$

$=k^2x^2+2klx+l^2$　於是等冪係數相等

$\therefore\ \left.\begin{array}{r}25-4m=k^2\\ 6=2kl\\ 9=l^2\end{array}\right\}$ 從而 $\left\{\begin{array}{l}\text{求得 } l, k, m \text{ 之值}\\ \therefore\ l=\pm3\qquad\therefore\ k=\pm1\\ \therefore\ 25-4m=1\cdots\cdots4m=24\quad\therefore\ m=6\end{array}\right.$

完全平方式與完全立方式

1. $x^4+6x^3+7x^2+ax+b$ 作成完全平方數求 a, b 之值.

解 $x^4+6x^3+7x^2+ax+b$

$\equiv(x^2+mx+l)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (展開而整頓之)

$\equiv x^4+2mx^3+(m^2+2l)x^2+2mlx+l^2$

此是恆等式，其等號之左邊及右邊完全同一，故x之等冪係數相等。

$\therefore$ $6=2m$ ……………(1)………………(x^3之係數)

$7=m^2+2l$ …………(2)………………(x^2之係數)

$a=2ml$ ……………(3)………………(x 之係數)

$b=l^2$ ……………(4)………………(既知項)

由 (1) 得 $m=3$ 由 (2) 得 $l=-1$

用 $m=3, l=-1$ 入 (3), (4) 得

$a=2\times3\times(-1)=-6,\ b=(-1)^2=1$， **答** $a=-6,\ b=1.$

別解 求實際平方根亦可.

$$\sqrt{x^4+6x^3+7x^2+ax+b}=x^2+3x-1$$

$$x^4$$

$$\underline{-\qquad\qquad\qquad}$$

$$6x^3+7x^2+ax+b$$

$(2x^2+3x)\times3x$ … $6x^3+9x^2$

$$\underline{-\qquad\qquad\qquad}$$

$$-2x^2+ax+b$$

$(2x^2+6x-1)\times(-1)$ $\quad -2x^2-6x+1$

$$\underline{-\qquad\qquad\qquad}$$

$$(a+6)x+(b-1)$$

作成完全平方數得剩餘 $(a+6)x+(b-1)$，不論 x 之值爲如何，常使之成零，從而 $a+6=0$ ……… $a=-6$

$b-1=0$ ……… $b=1$

2. 若 $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$ 式中關於x及y可用一次平方式表之則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲級數，試證明之.

解 由題意則原式成 $(mx+ny)^2$ 之形式，但 m, n 不含 x, y

即 $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2\equiv(mx+ny)^2$

$$\equiv m^2x^2+2mnxy+n^2y^2$$

而此成恆等式故等冪係數相等。

$\therefore\quad a(b-c)=m^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

於是 (2) 成平方將 (1), (3)

$b(c-a)=2mn\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

代入之而將 m, n 消去

$c(a-b)=n^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$$b^2(c-a)^2=4m^2n^2=4a(b-c)c(a-b)$$

$$\therefore\quad b^2(c-a)^2=4ac(ab-ac-b^2+bc)$$

$$\therefore\quad b^2(c-a)^2=4ac\{-b^2+(a+c)b-ac\}$$

$$b^2(c-a)^2+4acb^2-4ac(a+c)b+4a^2c^2=0$$

$$b^2\{(c-a)^2+4ac\}-4ac(a+c)b+4a^2c^2=0$$

$$b^2(c+a)^2-4ac(a+c)b+4a^2c^2=0$$

$$[b(c+a)]^2-2[b(a+c)][2ac]+[2ac]^2=0$$

$$\therefore\quad [b(c+a)-2ac]^2=0 \qquad \therefore\quad b(c+a)=2ac$$

$\therefore\quad 2ac=(c+a)b$ ［此與 A 式相同］作各項爲零

用 abc 除之 $\quad \dfrac{2ac}{abc}=\dfrac{bc}{abc}+\dfrac{ab}{abc}$

即 $\quad \dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c} \quad \therefore\quad \dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}$

從而 $\quad \dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{c}$ 是等差級數.

5. $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$ 作成 x 之一次式之平方，則 $a=b=c$，試證明之，但 a, b, c 爲實數.

解 $(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)$ 去括弧而整頓之

$$=3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ca.$$

將本式作成 x 之二次式則變形如下，

$3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=(px+q)^2=p^2x^2+2pqx+q^2$

故作 x 之等冪係數相等

$$\left.\begin{array}{l} p^2=3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ pq=(a+b+c)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ q^2=(ab+bc+ca)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}\text{因此}\left\{\begin{array}{l}\text{將 } p, q \text{ 除去得}\\ a, b, c \text{ 之關係}\\ \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\text{式}\times(3)\text{式得} & p^2q^2=3(ab+bc+ca)\\ (2)\text{式成平方得} & p^2q^2=(a+b+c)^2\end{array}\right\}\ \text{兩式相等}$$

於是 $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$

去括弧而整頓之

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=3ab+3bc+3ca$

即 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ 2倍之

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$ 適當移動各項

$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$

∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ $a,\ b,\ c$ 爲實數

三個平方式之和爲零則各項 $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ 自當是零.

故 $(a-b)^2=0\cdots\cdots a=b$, $(b-c)^2=0\cdots\cdots b=c$,

$(c-a)^2=0\cdots\cdots c=a$ ∴ $a=b=c$

別解 將原式作成完全平方數而使之等於零, 則方程式有等根, 故

$(x+a)(x+b)+(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)=0$

即 $[2(a+b+c)]^2-4\times3\times(ab+bc+ca)=0$

∴ $4(a+b+c)^2-4\times3\times(ab+bc+ca)=0\cdots\cdots\cdots\div4$

∴ $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$ [以下解同前]

4. $ax^3+3bx^2+3cx+d$ 可被 $ax^2+2bx+c$ 整除, 則前者爲完全立方, 後者爲完全平方, 試證明之. [但 $a\neq0$]

解 由命題則 ax^2 除 ax^3 得商爲 x, 從而可作成

$ax^3+3bx^2+3cx+d\equiv(ax^2+2bx+c)(x+m)$

$\equiv ax^3+(2b+am)x^2+(c+2bm)x+mc$

$$\therefore\ \begin{array}{l}3b=2b+am\\ 3c=c+2bm\\ d=mc\end{array}\left\{\begin{array}{l}\cdots\cdots b=am\\ \cdots\cdots c=bm=(am)m=am^2\\ \cdots\cdots d=cm=(am^2)m=am^3\end{array}\right.$$

∴ $b=am$, $c=am^2$, $d=am^3$ 將其代入原式.

$ax^3+3bx^2+3cx+d=ax^3+3amx^2+3am^2x+am^3$

$=a(x^3+3mx^2+3m^2x+m^3)$

$=a(x+m)^3$

$=[\sqrt[3]{a}(x+m)]^3$

又 $$ax^2+2bx+c=ax^2+2amx+am^2$$
$$=a(x^2+2mx+m^2)$$
$$=a(x+m)^2$$
$$=[\sqrt{a}(x+m)]^2$$

全如命題。

第八章

有理式之值

1. 有關於x之二次式，其式中 $x=1$，$x=2$，$x=3$ 則其式之值爲 4，3，5，若$x=6$則其式之值爲幾何.

解 關於 x 之二次式通常形體作 ax^2+bx+c. 今 $x=1$ 則其式之值爲 4，因得下列各式。

$a+b+c=4$ ……………… (1)

$4a+2b+c=3$ ……………… (2)　　($x=2$ 之時)

$9a+3b+c=5$ ……………… (3)　　($x=3$ 之時)

由上列三個方程式求得 a, b, c 之值，

由 (2)－(1)得　$3a+b=-1$ …… (4)　　由 (5)－(4) 得 $a=\frac{3}{2}$

由 (3)－(2) 得　$5a+b=2$ ……… (5)　　從而 $b=-\frac{11}{2}$, $c=8$

故二次式成　$\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x+8$

於是 $x=6$ 之時則式之值爲 $\frac{3}{2}\times 6^2-\frac{11}{2}\times 6+8=29$.　**答** 29.

2. $x^2+x=\frac{1}{3}$　求 $6x^4+15x^3+10x^2$ 之值.

解 $6x^4+15x^3+10x^2=6x^4+6x^3+9x^3+9x^2+x^2$

(於此將 $x^2+x=\frac{1}{3}$ 代入)

$$=6x^2(x^2+x)+9x(x^2+x)+x^2$$
$$=6x^2\times\frac{1}{3}+9x\times\frac{1}{3}+x^2$$
$$=2x^2+3x+x^2$$
$$=3(x^2+x)$$
$$=3\times\frac{1}{3}=1$$ …………………………答

3. $x+\frac{1}{x}=1$ 求 $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$ 之值.

解[I] $x+\frac{1}{x}=1$ 成平方得 $x^2+2x\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1$

∴ $x^2+2+\frac{1}{x^2}=1$ ∴ $x^2+\frac{1}{x^2}=-1$ …………………………答

[II] $x+\frac{1}{x}=1$ 成立方得 $x^3+3x^2\times\frac{1}{x}+3x\times\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=1$

∴ $x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=1$ 於此用入 $x+\frac{1}{x}=1$

$x^3+3\times1+\frac{1}{x^3}=1$ ∴ $x^3+\frac{1}{x^3}=-2$ …………………………答

4. $x+y+z=\frac{14}{3}x=\frac{7}{2}y$ 求 $\frac{x+y+z}{z}$ 之值.

解 由 $\frac{14}{3}x=\frac{7}{2}y$ 得 $y=\frac{14}{3}\times\frac{2}{7}x=\frac{4}{3}x$ 將其用入次式

$x+y+z=\frac{14}{3}x$ 成 $x+\frac{4}{3}x+z=\frac{14}{3}x$ 從而 $z=\frac{7}{3}x$

在 $\frac{x+y+z}{z}$ 中 $x+y+z=\frac{14}{3}x$, $z=\frac{7}{3}x$

故 $\frac{x+y+z}{z}=\frac{\frac{14}{3}x}{\frac{7}{3}x}=\frac{14}{3}\times\frac{3}{7}=2$ …………………………答

5. $6x^2+4y^2=11xy$ 求 $\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}$ 之值.

解 由 $6x^2+4y^2=11xy$ 得 $6x^2-11xy+4y^2=0$

分解成因子　　$(3x-4y)(2x-y)=0$

故　$3x-4y=0$　　又　$2x-y=0$

從而　$x=\dfrac{4}{3}y$　　又　$y=2x$

$x=\dfrac{4}{3}y$　之時

$$\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=\frac{\left(\frac{4}{3}y\right)^2+3\left(\frac{4}{3}y\right)y+y^2}{\left(\frac{4}{3}y\right)^2-3\left(\frac{4}{3}y\right)y+y^2}=\frac{\frac{61}{9}y^2}{-\frac{11}{9}y^2}=-\frac{61}{11}$$

$y=2x$　之時

$$\frac{x^2+3xy+y^2}{x^2-3xy+y^2}=\frac{x^2+3x\times 2x+4x^2}{x^2-3x\times 2x+4x^2}=\frac{11x^2}{-x^2}=-11$$

答　為 $-\dfrac{61}{11}$ 或 -11

6.　$a+c=2b$, 求 $\dfrac{a^3+4b^3+c^3}{b(a^2+c^2)}$ 之值.

解　$a+c=2b$……成平方　$a^2+2ac+c^2=4b^2$

$\therefore\ a^2+c^2=4b^2-2ac$……………(1)

$a+c=2b$……成立方　$a^3+3a^2c+3ac^2+c^3=8b^3$

$\therefore\ a^3+c^3=8b^3-3ac(a+c)$

將 $a+c=2b$ 代入之　$a^3+c^3=8b^3-3ac\times 2b$

$\therefore\ a^3+c^3=8b^3-6abc$……………(2)

將(1), (2)代入原式.

$$\therefore\ \frac{a^3+4b^3+c^3}{b(a^2+c^2)}=\frac{8b^3-6abc+4b^3}{b(4b^2-2ac)}=\frac{12b^3-6abc}{2b(2b^2-ac)}$$

$$=\frac{6b(2b^2-ac)}{2b(2b^2-ac)}=3$$……答

7.　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{d}{a}$, 求 $\dfrac{a+b+c+d}{a+b+c-d}$ 之值

解 作$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=k$ 將分母消去，得

$a=bk\cdots\cdots(1)$　$b=ck\cdots\cdots(2)$　$c=dk\cdots\cdots(3)$　$d=ak\cdots\cdots(4)$

將(4)代入(3)　$c=(ak)k=ak^2$　將此代入(2)　$b=(ak^2)\times k=ak^3$

更將此代入(1)　得 $a=(ak^3)\times k=ak^4$

即　$a=ak^4$於是$ak^4-a=0$　　$\therefore\ a(k^2+1)(k+1)(k-1)=0$

a 不等於零，因問題中標明$\frac{d}{a}$是分數，

然則是 $k^2+1=0,\ k+1=0,\ k-1=0$

故 $k^2=-1,\ k=-1,\ k=1$

若 $k^2=-1$

$$\frac{a+b+c+d}{a+b+c-d}=\frac{a+ak^3+ak^2+ak}{a+ak^3+ak^2-ak}=\frac{a(k^3+k^2+k+1)}{a(k^3+k^2-k+1)}$$

$$=\frac{k^3-1+k+1}{k^3-1-k+1}=\frac{k(k^2+1)}{k(k^2-1)}=\frac{-1+1}{-1-1}=\frac{0}{-2}=0$$

同樣若 $k=-1$，則原式之值為 0，若 $k=1$ 則原式之值為2，**答** 0 又 2.

8. $yz+zx+xy=0,\ x(b-c)=y(c-a)=z(a-b)$ 求 $(b-c)^2x+(c-a)^2y+(a-b)^2z$ 之值.

解 作$x(b-c)=y(c-a)=z(a-b)=k$ 則

$$(b-c)=\frac{k}{x},\quad (c-a)=\frac{k}{y},\quad (a-b)=\frac{k}{z}$$

於是$(b-c)^2x+(c-a)^2y+(a-b)^2z$

$$=\frac{k^2}{x^2}\times x+\frac{k^2}{y^2}\times y+\frac{k^2}{z^2}\times z=\frac{k^2}{x}+\frac{k^2}{y}+\frac{k^2}{z}$$

$$=\frac{k^2(yz+zx+xy)}{xyz}$$

將 $yz+zx+xy=0$ 代入之　$=\frac{k^2\times 0}{xyz}=0$　　　**答** 0.

第九章

證明問題

證明問題之解答有種種方法，玆分類之於下.

I. 假定式變作終結式.

II. 假定式變形而代入終結式.

III. 終結式變形而代入假定式.

IV. 假定式變形而代入終結式所變之形式中.

V. 假定式作 $A=B=C\cdots\cdots$ 之形式使之等於 K.

VI. 將某文字消去.

VII. 假定中有不等.

VIII. 假定中有實數.

IX. 由終結式考察之.

X. 須特別注意之問題.

I. 假定式變作終結式

1. 假定中有 $a+b+c=0$，通常用兩種方法.

(甲) 使用 $a+b=-c$ 或 $a=-(b+c)$

(乙) 從他式將 $a+b+c$ 因子括出，然後將 $a+b+c=0$ 代入.

2. 將假定式整頓後集於一邊，又將終結式整頓集於一邊，比較之，觀其是否是同一.

問　　題

1. $a+b+c\quad 0$ 則$a^3+b^3+c^3=3abc$，試證明之.

解 由$a+b+c=0$ 得 $a+b=-c\cdots\cdots(1)$ 以三乘之得

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3$ 移動各項

$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$ 將 (1) 代入之

$=-3ab\times(-c)=3abc$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

別解 分解 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
適用 $a+b+c=0$ 得 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ 即
$a^3+b^3+c^3=3abc$

2. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$ 則 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,$ 試證明之.

解 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0\cdots\cdots\times xyz\cdots\cdots ayz+bzx+cxy=0\cdots\cdots(A)$

今將 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 作成平方

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+2\times\left(\dfrac{xy}{ab}+\dfrac{yz}{bc}+\dfrac{zx}{ca}\right)=1$ 即

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}+2\times\dfrac{cxy+ayz+bzx}{abc}=1$ 將(A)式代入之

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\times\frac{0}{abc}=1$$

$$\therefore\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

3. $\dfrac{a-b}{1+ab}=\dfrac{c-d}{1+cd}$ 則 $\dfrac{a+d}{1-ad}=\dfrac{b+c}{1-bc}$,試證明之.

解 $\dfrac{a-b}{1+ab}=\dfrac{c-d}{1+cd}$ 解去分母而成

$a-b+acd-bcd=c-d+abc-abd$ 移動各項

$a+a-abc-bcd=b+c-abd-acd$

$\therefore\quad (a+d)-bc(a+d)=(b+c)-ad(b+c)$

$\therefore\quad (a+d)(1-bc)=(b+c)(1-ad)\cdots\cdots\div\cdots\cdots(1-ad)(1-bc)$

$\therefore\quad \dfrac{a+d}{1-ad}=\dfrac{b+c}{1-bc}$　　[但　$1-ad\neq 0,\ 1-bc\neq 0$]

4. $\dfrac{b+c+d}{a+c+d}=\dfrac{d+a+b}{c+a+b}$ 則 $\dfrac{a^3-d^3}{b^3-c^3}=\dfrac{a-d}{b-c}$，試證明之.

解　$\dfrac{b+c+d}{a+c+d}=\dfrac{d+a+b}{c+a+b}$　兩邊各減 1

$$\frac{b+c+d}{a+c+d}-1=\frac{d+a+b}{c+a+b}-1$$

$$\frac{b+c+d-(a+c+d)}{a+c+d}=\frac{d+a+b-(c+a+b)}{c+a+b}$$

$$\frac{b-a}{a+c+d}=\frac{d-c}{c+a+b}$$

$(b-a)(c+a+b)=(d-c)(a+c+d)$ 去括弧

$c(b-a)+(b-a)(a+b)=a(d-c)+(d-c)(c+d)$

$\therefore\quad bc-ac+b^2-a^2=ad-ac+d^2-c^2$

$\therefore\quad b^2+bc+c^2=a^2+ad+d^2\cdots\cdots\times(b-c)(a-d)$

$\therefore\quad (b^3-c^3)(a-d)=(b-c)(a^3-d^3)\cdots\cdots\div(b^3-c^3)(b-c)$

$\dfrac{a-d}{b-c}=\dfrac{a^3-d^3}{b^3-c^3}$　[但　$b^3-c^3\neq 0$]

II　假定式變形而代入終結式

1. $a+b+c=2s$，試證明 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=8(s-a)(s-b)(s-c)$

解　將 $a+b+c=2s$ 之兩邊各減 $2c$ 成 $a+b-c=2(s-c)$　同樣行之得

$b+c-a=2(s-a)\quad c+a-b=2(s-b)$

於是 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$=2(s-c)\times 2(s-a)\times 2(s-b)$

$=8(s-a)(s-b)(s-c)$

$\therefore\quad (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)=8(s-a)(s-b)(s-c).$

2. $a+b+c=0$, 試證明

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)=$$

解 由$a+b+c=0$　得$b+c=-a\cdots\cdots(1)$, 更作成平方

$b^2+2bc+c^2=a^2$　移動各項得 $b^2+c^2-a^2=-2bc\cdots\cdots(2)$

於$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)$ 將 (1), (2) 代入之

$$=\frac{-a}{bc}\times(-2bc)=2a$$

同樣$\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)=\frac{-b}{ca}\times(-2ca)=2b$

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)=\frac{-c}{ab}\times(-2ab)=2c$$

於是$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c\times a}{ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2+$

$=2a+2b+2c$

$=2(a+b+c)$　　　　將假定代入之,

$=2\times0=0$　　　　此即須證明者.

3. $n=a^2-x^2=b^2-y^2=c^2-(x+y)^2$, 試證明 $(n-a^2-b^2+c$

$=4(n-a^2)(n-b^2)$

解 由假定得　$n=a^2-x^2$　　$\therefore$　$n-a^2=-x^2$

$n=b^2-y^2$　　$\therefore$　$n-b^2=-y^2$

及　$b^2-y^2=c^2-(x+y)^2$　　$\therefore$　$-b^2+c^2=x^2+xy$

將其代入下列式中

$(n-a^2-b^2+c^2)^2-4(n-a^2)(n-b^2)$

$=(-x^2+x^2+2xy)^2-4(-x^2)(-y^2)$

$=4x^2y^2-4x^2y^2=0$

$\therefore$　$(n-a^2-b^2+c^2)^2-4(n-a^2)(n-b^2)=0$

即　$(n-a^2-b^2+c^2)=4(n-a^2)(n-b^2)$

III 終結式變形代入假定式

1. $b^2=ac$ 試證明 $(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)=a^4+b^4+c^4$.

解 $(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$

$=[(a+c)+b][(a+c)-b](a^2-b^2+c^2)$

$=[(a+c)^2-b^2](a^2-b^2+c^2)$

$=(a^2+2ac+c^2-b^2)(a^2-b^2+c^2)$

$=(a^2+2b^2+c^2-b^2)(a^2-b^2+c^2)$ [將 $b^2=ac$ 用入]

$=[(a^2+c^2)+b^2][(a^2+c^2)-b^2]$

$=(a^2+c^2)^2-b^4=a^4+2a^2c^2+c^4-b^4$ [將 $b^2=ac$ 用入]

$=a^4+2b^4+c^4-b^4=a^4+b^4+c^4$

2. $a+b+c=0$, 試證明 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$

解 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$

$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3$

$=\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$

$=\frac{1}{a}(a+b+c)+\frac{1}{b}(b+a+c)+\frac{1}{c}(c+a+b)$

$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ [將 $a+b+c=0$ 用入]

$=0\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

$\therefore\ a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$

別解 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3$

$=a\times\frac{c+b}{bc}+b\times\frac{a+c}{ac}+c\times\frac{b+a}{ab}+3.$

由 $a+b+c=0$ 得 $c+b=-a,\ a+c=-b,\ b+a=-c$ 適用於上式,

$$=a\times\frac{-a}{bc}+b\times\frac{-b}{ca}+c\times\frac{-c}{ab}+3$$

$$=\frac{-a^2}{bc}+\frac{-b^2}{ca}+\frac{-c^2}{ab}+3$$

$$=\frac{-(a^3+b^3+c^3)+3abc}{abc}$$

$$=-\frac{(a^3+b^3+c^3-3abc)}{abc}\quad[\text{分解成因子}]$$

$$=-\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc}$$

$$=-\frac{0\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{abc}=0\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

【別解】 左邊$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3$

$$=\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+3$$

$$=\frac{1}{b}(a+c)+\frac{1}{c}(a+b)+\frac{1}{a}(b+c)+3$$

$$=\frac{1}{b}(-b)+\frac{1}{c}(-c)+\frac{1}{a}(-a)+3$$

$$=-1-1-1+3=0.$$

（由 $a+b+c=0$ 得 $a+b=-c$, $a+c=-b$, $b+c=-a$）

IV 假定式變形後代入終結式之變形中

1. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$, 試證明 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$

解 將 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ 之分母解去得

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(a+b+c)^3=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\}$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+2\underline{(a+b+c)}\,\underline{(ab+bc+ca)}$$

將 (1) 代入之

$$=a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=a^3+b^3+c^3+\{a^2(b+c)+abc\}+\{b^2(a+c)+abc\}$$
$$+\{c^2(a+b)+abc\}-abc$$
$$=a^3+b^3+c^3+a(ab+ac+bc)+b(ab+bc+ac)$$
$$+c(ac+bc+ab)-abc$$
$$=a^3+b^3+c^3+(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$$

將(1)代入之 $=a^3+b^3+c^3+abc-abc$

$$=a^3+b^3+c^3$$

$\therefore\ (a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$

2 $\dfrac{b-c}{y-z}+\dfrac{c-a}{z-x}+\dfrac{a-b}{x-y}=0$，試證明 $(b-c)(y-z)^2+(c-a)(z-x)^2+(a-b)(x-y)^2=0$

圖 作 $y-z=P$, $z-x=Q$, $x-y=R$ 於是假定式成 $\dfrac{b-c}{P}+\dfrac{c-a}{Q}+\dfrac{a-b}{R}=0$ 將分母解去得 $(b-c)QR+(c-a)RP+(a-b)PQ=0\cdots\cdots(A)$ 三式相加得新假定式 $P+Q+R=0\cdots\cdots(B)$

又作成終結式 $(b-c)P^2+(c-a)Q^2+(a-b)R^2=0\cdots\cdots(C)$

將 (c) 式之括弧解除得

$$(b-c)P^2+(c-a)Q^2+(a-b)R^2$$
$$=-b(R^2-P^2)-c(P^2-Q^2)-a(Q^2-R^2)$$
$$=-b(R+P)(R-P)-c(P+Q)(P-Q)-a(Q+R)(Q-R)$$

將 $P+Q+R=0$ 變形成 $R+P=-Q$, $P+Q=-R$

$Q+R=-P$ 而代入之

$$=bQ(\underline{R}-P)+cR(\underline{P}-\underline{Q})+aP(Q-\underline{R})$$ 將括弧解除

$$=(b-c)QR+(c-a)RP+(a-b)PQ\cdots\cdots\text{將}(A)\text{式代入}$$
$$=0$$

$\therefore\ (b-c)(y-z)^2+(c-a)(z-x)^2+(a-b)(x-y)^2=0$

V 將假定式作成A＝B＝c…之形式使之等於 K

1. 例如將 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 之假定式作爲等於 k，卽 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$，由此得 $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$，以之代入終結式．

2. 例如使 $a(y-z)=b(z-x)=c(x-y)$ 等於 k，然後求 x,y,z 之值，而將其代入終結式．

問　　題

1. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$，試證明 $\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$

解 作 $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)=k$ 則

$$y+z=\frac{k}{a}\cdots\cdots(1),\qquad z+x=\frac{k}{b}\cdots\cdots(2),\qquad x+y=\frac{k}{c}\cdots\cdots(3)$$

由 (3)式－(2)式 得

$$y-z=\frac{k}{c}-\frac{k}{b}$$

$$\therefore\ y-z=\frac{(b-c)k}{bc}$$

$$\therefore\ \frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{k}{abc}$$

由 (1)式－(3)式 得

$$z-x=\frac{k}{a}-\frac{k}{c}$$

$$\therefore\ z-x=\frac{(c-a)k}{ac}$$

$$\therefore\ \frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{k}{abc}$$

由 (2)式－(1)式 得

$$x-y=\frac{k}{b}-\frac{k}{a}$$

$$\therefore\ x-y=\frac{(a-b)k}{ab}$$

$$\therefore\ \frac{x-y}{c(a-b)}=\frac{k}{abc}$$

故 $$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}$$

2. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$，試證明 $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

解 作 $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}=k$ 而將分母解去

$x=(b+c-a)k\cdots\cdots\times(b-c)$ 得 $(b-c)x=(b^2-c^2-ab+ac)k$

$y=(c+a-b)k\cdots\cdots\times(c-a)$ 得 $(c-a)y=(c^2-a^2-bc+ab)k$

$z=(a+b-c)k\cdots\cdots\times(a-b)$ 得 $(a-b)z=(a^2-b^2-ac+bc)k$

$+$

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0\times k=0.$$

3. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$, 則 $\dfrac{a}{d}$ 等於 $\sqrt{\dfrac{a^5+b^2c^2+a^3c^3}{b^4c+d^4+b^2c^2d^2}}$, 試證明之.

解 作 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}=k$ 因得 $a=dk^3$, $b=dk^2$, $c=dk$

將其代入下式,

$$\frac{a}{d}-\sqrt{\frac{a^5+b^2c^2+a^3c^3}{b^4c+d^4+b^2c^2d^2}}=\frac{dk^3}{d}-\sqrt{\frac{d^5k^{15}+d^2k^4d^2k^2+d^3k^9d^3k^3}{d^4k^8dk+d^4+d^2k^4d^2k^2d^2}}$$

$$=k^3-\sqrt{\frac{d^5k^{15}+d^4k^6+d^6k^{12}}{d^5k^9+d^4+d^6k^6}}$$

$$=k^3-\sqrt{\frac{d^4k^6(dk^9+1+d^2k^6)}{d^4(dk^9+1+d^2k^6)}}$$

$$=k^3-\sqrt{k^6}=k^3-k^3=0$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a^5+b^2c^2+a^3c^3}{b^4c+d^4+b^2c^2d^2}}=0$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}=\sqrt{\frac{a^5+b^2c^2+a^3c^3}{b^4c+d^4+b^2c^2d^2}}$$

[要項] $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$ 則 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}=\dfrac{A\pm C}{B\pm D}$ …………(1)

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}=\dfrac{mA\pm nC}{mB\pm nD}$ ………(2)

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}=\sqrt[n]{\dfrac{mA^n\pm nC^n}{mB^n\pm nD^n}}$ …(3)

VI 將某文字消去

1. $x=by+cz\ \ldots\ldots(1)$, $y=cz+ax\ \ldots\ldots(2)$ $z=ax+by\ \ldots\ldots(3)$

試證明

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$$

解 將 (1) 式代入 (2) 式 (3) 式而將 x 消去

由 (2) 式……$y=cz+a(by+cz)$ 得 $(1-ab)y=c(1+a)z$ ……(4)

由 (3) 式……$z=a(by+cz)+by$ 得 $(1-ac)z=b(1+a)y$……(5)

(4) 式 × (5) 式得

$(1-ab)(1-ac)yz=bc(1+a)^2yz$ ……$\div yz$……(但 $yz\neq0$)

$\therefore$ $(1-ab)(1-ac)=bc(1+a)^2$ 將括弧解去

$1-ab-ac+a^2bc=bc+2abc+a^2bc$

$\therefore$ $1-ab-ac-bc-2abc=0$……(6)

現在將終結式變化之

$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=1$……………………(7)

$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}-1=0$ …………(8)

$\dfrac{a+b+2ab}{(1+a)(1+b)}+\dfrac{-1}{1+c}=0$……(9)……$\times(1+a)(1+b)(1+c)$

$(a+b+2ab)(1+c)-(1+a)(1+b)=0$ …………………(10)

$\therefore$ $a+b+2ab+ac+bc+2abc-1-a-b-ab=0$ ……(11)

$\therefore$ $2abc+ab+ac+bc-1=0$ …………………(12)……$\times(-1)$

即 $1-ab-ac-bc-2abc=0$ 此與 (6) 式相同，故證明如本問題.

別解 (1) 式$-$(2) 式得 $x-y=by-ax$

$\therefore$ $(1+a)x=(1+b)y$ 同樣 (2) 式$-$(3) 式得

$(1+b)y=(1+c)z$

$\therefore$ $(1+a)x=(1+b)y=(1+c)z$ 將此作爲等於 k

$$(1+a)x=k\cdots\cdots(4)\cdots\cdots\frac{a}{1+a}=\frac{ax}{k}$$
$$(1+b)y=k\cdots\cdots(5)\cdots\cdots\frac{b}{1+b}=\frac{by}{k}$$
$$(1+c)z=k\cdots\cdots(6)\cdots\cdots\frac{c}{1+c}=\frac{cz}{k}$$

[但 $1+a\neq0,\ 1+b\neq0,\ 1+c\neq0$] 各邊相加得

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=\frac{1}{k}(ax+by+cz)\cdots\cdots(A)$$

(1)式+(2)式+(3)式 得

$$x+y+z=2ax+2by+2cz\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

又 (4)式+(5)式+(6)式 得

$(1+a)x+(1+b)y+(1+c)z=3k$ 即

$$x+y+z+ax+by+cz=3k\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

由 (B),(C) 得 $2ax+2by+2cz+ax+by+cz=3k$

∴ $ax+by+cz=k$ 此代入(A)得

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=\frac{1}{k}\times k=1$$

2. $\dfrac{x+y}{a^2}=\dfrac{y+z}{b^2}=\dfrac{z+x}{c^2}$, $xy+yz+zx=0$, 試證明 $a\pm b\pm c=0$.

解 作 $\dfrac{x+y}{a^2}=\dfrac{y+z}{b^2}=\dfrac{z+x}{c^2}=k$ 而將分母解除得

$x+y=a^2k\cdots\cdots(1)$, $y+z=b^2k\cdots\cdots(2)$, $z+x=c^2k\cdots\cdots(3)$

此三式相加而用2分之,再由此分別減去(1),(2),(3)式而求得 z, x, y 之值,

$$z=\frac{k}{2}(b^2+c^2-a^2),\quad x=\frac{k}{2}(a^2+c^2-b^2),\quad y=\frac{k}{2}(a^2+b^2-c^2),$$

將其代入 $xy+yz+zx=0$ 而得式如下,

$$\frac{k^2}{4}\{(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$$
$$+(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)\}=0$$

∴ $(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2+b^2+c^2-a^2)$ [但 $k\neq0$]

$$+[c^2-(a^2-b^2)][c^2+(a^2-b^2)]=0$$

$\therefore\quad (a^2+b^2-c^2)\times 2c^2+c^4-(a^2-b^2)^2=0$

$2a^2c^2+2b^2c^2-2c^4+c^4-a^4+2a^2b^2-b^4=0$

$\therefore\quad a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2-4a^2b^2=0$

即　$(a^2+b^2-c^2)^2-4a^2b^2=0$

$\therefore\quad (a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)=0$　更分解之

$(a+b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a-b-c)=0$

$\therefore\quad a+b-c=0,\ a+b+c=0,\ a-b+c=0,\ a-b-c=0$

於是 $a\pm b\pm c=0$

3. $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)$

且 $a+b+c=0$ 則 $x+y+z=0$ 試證明之.

[但 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$]

解作 $a(by+cz-ax)=b(cz+ax-by)=c(ax+by-cz)=2abck$ 得

$by+cz-ax=2bck\cdots\cdots(1)$,　　$cz+ax-by=2ack\cdots\cdots(2)$

$ax+by-cz=2abk\cdots\cdots(3)$　　此三式相加得

$ax+by+cz=2(ab+bc+ac)k$.　於此順次減去 (1) 式, (2) 式 (3) 式得

$x=(b+c)k,\ y=(a+c)k,\ z=(a+b)k$　此三者相加

$x+y+z=2(a+b+c)k$　將 $a+b+c=0$ 代入之得

$=2\times 0\times k=0$

$\therefore\quad x+y+z=0$

XII　假定式中有不等

1. 假定中有 $a\neq o$, $a\neq b$, 或 $a+b+c\neq o$ 則於他式中須將 a, $a-b$, 或 $a+b+c$ 之因子括出.

2. 假定中有 $a\neq o$, $a\neq b$, $a+b+c\neq o$ 則某式可被 a, $a-b$, $a+b+c$ 除之.

3. 定 a, b, c 是相異或不等須 $a-b\neq o$, $b-c\neq o$, $c-a\neq o$.

問　　題

1. $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}+2=0$ 則 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$,

試證明之，但 $x+y+z \neq 0$

解 $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}+2=0$　　兩邊加1 而變形

$$\left(\frac{y+z}{x}+1\right)+\left(\frac{z+x}{y}+1\right)+\left(\frac{x+y}{z}+1\right)=1$$

$\therefore$ $$\frac{x+y+z}{x}+\frac{z+x+y}{y}+\frac{x+y+z}{z}=1$$

即 $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=1$　　因 $x+y+z \neq 0$

$\therefore$ $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x+y+z}$$

2. $\dfrac{x+y}{cx+ay}=\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{bz+cx}$ 則各分數式等於 $\dfrac{3}{a+b+c}$

試證明之. 但 $a+b+c \neq 0$

解 作 $\dfrac{x+y}{cx+ay}=\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{bz+cx}=k$.　將分母解除然後將 x, y, z 消去.

$x+y=k(cx+ay)\cdots\cdots(1-ck)x=-(1-ak)y\cdots\cdots\cdots(1)$

$y+z=k(ay+bz)\cdots\cdots(1-ak)y=-(1-bk)z\cdots\cdots\cdots(2)$

$z+x=k(bz+cx)\cdots\cdots(1-bk)z=-(1-ck)x\cdots\cdots\cdots(3)$

(1), (2), (3) 相等故

$(1-ck)x=-(1-ak)y=(1-bk)z=-(1-ck)x$

$\therefore$ $$(1-ck)x=-(1-ck)x$$

$\therefore$ $$2(1-ck)x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots A$$

故由 (A) 式得 $x \neq 0$, 因而是 $1-ck=0$　同樣

$1-ak=0$, $1-bk=0$　　以上三式相加得　$3-(a+b+c)k=0$

$\therefore$ $k=\dfrac{3}{a+b+c}$　　　結果如題言.

別解 用 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{E}{F}=\cdots\cdots\frac{A\pm C\pm E\pm\cdots\cdots}{B\pm D\pm F\pm\cdots\cdots}$

之分數論則

$$\frac{x+y}{cx+ay}=\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{z+x}{bz+cx}=\frac{(x+y)+(y+z)-(z+x)}{(cx+ay)+(ay+bz)-(bz+cx)}$$

$$=\frac{2y}{2ay}=\frac{1}{a}$$

同樣各分數等於 $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, 故

$$\text{各分數}=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{3}{a+b+c}$$

3. $x+\frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$ 式中 x 與 y 相交換而其值不變，若 $x+y+z=1$，則此式之值等於 0，試證明之．(但 x 不等於 y)

解 因 x 與 y 相交換而其值不變，故得

$$x+\frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}=y+\frac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2},\qquad \text{移動各項}$$

$$(x-y)+\frac{-z(x-y)-(x^2-y^2)}{x^2+y^2+z^2}=0\qquad \text{將}(x-y)\text{括出}$$

$$\therefore\ (x-y)\left(1-\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}\right)=0\qquad \text{而}\quad x-y\neq 0\quad \text{則}$$

$$1-\frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}=0\qquad \text{此中用入}\qquad x+y+z=1\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$1-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=0\qquad \therefore\qquad x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 $(1)^2-(2)$ 得 $xy+yz+zx=0\cdots\cdots\cdots(3)$

於是 $x+\frac{yz-x^2}{x^2+y^2+z^2}$ 此中用 (2)

$=x+yz-x^2$

$=x(1-x)+yz$ 此中將由 (1) 得來 $y+z=1-x$ 代入

$=x(y+z)+yz$

$=xy+zx+yz$ 此中將 (3) 代入

$=0.$

XIII　假定中有實數

1. 假定中有實數則十成之八九是平方形之和，即可變成 $(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2=0$ 之形者，且由實數之條件而得 $(\quad)^2=0$ 之結論.

2. 假定中有不成零之實數則平方形之和不成零.

問　題

1. $(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab)$ 中 a, b, c 爲實數，則 $a=b=c$ 而 $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$，試證明之.

解 $(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab)$ 去括弧而整頓之.

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\therefore\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$

因 a, b, c 爲實數故 $(a-b)$ 爲零或實數，$(a-b)^2$ 爲 0 或正數，同樣 $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ 爲零或正數；再 a, b, c 爲實數則 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 之值爲零或正數，若 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ 等於零，則式中之各項非等於零不可，即 $(a-b)^2=0$, $(b-c)^2=0$, $(c-a)^2=0$，故得 $a=b=c$.

$$\text{從而}\quad \left.\begin{aligned} a^2-bc&=a^2-a\times a=0\\ b^2-ca&=b^2-b\times b=0\\ c^2-ab&=c^2-c\times c=0\end{aligned}\right\}\text{由此得}$$

$\therefore\ a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$

2. $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ 式中 a, b, c, d 是正實數則 $a=b=c=d$，試證明之.

解 從 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ 之兩邊減去 $2a^2b^2$, $2c^2d^2$ 得

$\underline{a^4-2a^2b^2+b^4}+\underline{c^4-2c^2d^2+d^4}=-2a^2b^2+4abcd-2c^2d^2$

$\therefore\quad (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2=-2(ab-cd)^2$

$\therefore\ (a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

因 a, b, c 爲實數則 $(a^2-b^2)^2, (c^2-d^2)^2, (ab-cd)^2$ 是 0 或正數，故 (A) 式之成立須各項等於零，

從而 $(a^2-b^2)^2=0,\quad (c^2-d^2)^2=0,\quad (ab-cd)^2=0$

$\therefore\quad a^2-b^2=0\quad c^2-d^2=0\quad ab-cd=0$

即 $a=\pm b,\quad c=\pm d,\quad ab=cd$

假定中指明爲正實數，故 $a=-b,\ c=-d$ 爲不合理，故不用之.

$\therefore\quad a=b,\quad c=d$ 用入 $ab=dc$ 得 $b\times b=c\times c$

$\therefore\quad b^2=c^2\quad \therefore\quad b=\pm c$ 不用負值 故 $b=c$ 從而得 $a=b=c=d$

3. a, b, c, x, y, z 皆是實數，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ 則 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}$，試證明之.

㊙ 將 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ 簡單之

$$a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2+a^2z^2+b^2z^2+c^2z^2$$
$$=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz$$

$\therefore\quad b^2x^2+c^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+a^2z^2+b^2z^2-2abxy-2acxz-2bcyz=0$

$\therefore\quad a^2y^2-2abxy+b^2x^2+a^2z^2-2acxz+c^2x^2+c^2y^2-2bcyz+b^2z^2=0$

$\therefore\quad (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(cy-bz)^2=0\cdots\cdots(A)$

a, b, c, x, y, z 爲實數，故 $(ay-bx)^2, (az-cx)^2, (cy-bz)^2$ 皆是零或正數，然使 (A) 式能成立，各項須是零，即 $cy-bx=0,\ az-cx=0,\ cy-bz=0$ 從而 $ay=bx\cdots\cdots$ 用 xy 除之得 [但 $xy\neq0$]

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}\quad 同樣得\ \frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$$

4. a, b, c 爲不成零之實數，若 $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ 則 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$，試證明之.

解 作 $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=k$

$$\left.\begin{aligned}ay-bx&=ck\cdots\cdots\times c\cdots\cdots acy-bcx=c^2k\\cx-az&=bk\cdots\cdots\times b\cdots\cdots bcx-abz=b^2k\\bz-cy&=ak\cdots\cdots\times a\cdots\cdots abz-acy=a^2k\end{aligned}\right\}\text{相加得}$$

$$0=(a^2+b^2+c^2)k.$$

a, b, c 爲不成零之實數，故 a^2, b^2, c^2 皆是正數，而 $a^2+b^2+c^2$ 亦不至於成零，因此求能滿足 $(a^2+b^2+c^2)k=0$，則祇能是 $k=0$，於是由 $ay-bx=ck$ 得

$ay-bx=0$ 卽 $ay=bx\cdots\cdots\div ab\cdots\cdots$（但 $a\neq0$，$b\neq0$）

$\therefore\ \frac{y}{b}=\frac{x}{a}$ 同樣可求得 $\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

$\therefore\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

IX 由終結式考察之

終結者指其歸結成 A 或成 B 是也

問 題

1. $b^2-4ac=(a-c)^2$ 則 $c^2-4ab=(a-b)^2$ 又 $c^2+4ab=(a+b)^2$，試證明之.

解 將 $b^2-4ac=(a-c)^2$ 之括弧解除而整頓之.

$b^2-4ac=a^2-2ac+c^2$ $\therefore\ b^2-(a^2+2ac+c^2)=0$

$\therefore\ b^2-(a+c)^2=0$ $\therefore\ (b+a+c)(b-a-c)=0$

因得 $a+b+c=0$ 又 $b-a-c=0$ 卽 $a+c-b=0$

$c^2-4ab-(a-b)^2$	$c^2+4ab-(a+b)^2$
$=c^2-(a+b)^2$	$=c^2-(a-b)^2$
$=\underline{(c+a+b)}(c-a-b)$	$=\underline{(c+a-b)}(c-a+b)$
此中將 $a+b+c=0$ 代入	此中將 $b-a-c=0$ 代入
$=0\times(c-a-b)=0$	$=0\times(c-a+b)=0$
$\therefore\ c^2-4ab-(a-b)^2=0$	$\therefore\ c^2+4ab-(a+b)^2=0$
$\therefore\ c^2-4ab=(a-b)^2$	$\therefore\ c^2+4ab=(a+b)^2$

2. $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1$ 則 a, b, c 任何二個之和等於零，試證明之.

解 將 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1$ 之分母除去

$(bc+ca+ab)(a+b+c)=abc$…… 將 $(b+c)$ 括出

$[bc+a(b+c)][a+(b+c)]=abc$

$abc+a^2(b+c)+bc(b+c)+a(b+c)^2=abc$

$\therefore \quad (b+c)[a^2+bc+a(b+c)]=0$

$\therefore \quad (b+c)(a^2+bc+ab+ac)=0$

$(b+c)[a(a+c)+b(c+a)]=0$

$\therefore \quad (b+c)(c+a)(a+b)=0$ 從而 $b+c=0$

$a+b=0$, $c+a=0$, 如題所言.

3. $x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 則 x, y, z 中任何一個皆等於1，試證明之.

解 由 $x+y+z=1$ 得 $x+y+z-1=0$…………………(1)

由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 得 $yz+zx+xy=xyz$

即 $xyz-(yz+zx+xy)=0$………(2)

故由 (1), (2) 得 $\underline{xy}z-(\underline{\underline{y}}z+zx+x\underline{y})+x+\underline{\underline{y}}+z-1=0$ 此中將

$z-1$ 因子括出且移動各項

$xyz-xy-yz+y-zx+x+z-1=0$

$xy(z-1)-y(z-1)-x(z-1)+(z-1)=0$

$\therefore \quad (z-1)[xy-y-x+1]=0$……$(z-1)[y(x-1)-(x-1)]=0$

$\therefore \quad (z-1)(x-1)(y-1)=0$ 故 $z-1=0$, $x-1=0$,

$y-1=0$, 即 $z=1$, $x=1$, $y=1$, 因如題所言.

X 可注意的問題

1. 試證明下列三式能同時成立.

$$x+y+z=a.$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},$$

$$(y+z)(z+x)(x+y)=0$$

但 x, y, z 及 a 是不成 0 之任意數.

圖 參照上列兩問題之解法, 依次解決下列三項

[I] 由 $x+y+z=a,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$

而證明 $(y+z)(z+x)(x+y)=0$

[II] 由 $x+y+z=a,\ (y+z)(z+x)(x+y)=0$

而證明 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$

[III] 由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a},\ (y+z)(z+x)(x+y)=0$

而證明 $x+y+z=a$

三項證明之後, 即可斷定三式能同時成立.

第十章

不等式

不等式是附有$>$或$<$符號的關係式

公式 *1.* 不等式之兩邊用同數加減, 則不等號之方向不變.

如. $a>b$ 則 $a\pm x>b\pm x$.

2. 不等式之兩邊用同一正數乘除之，其不等號之方向不變．如 $a>b$ 則 $am>bm$，$a>b$ 則 $\frac{a}{m}>\frac{b}{m}$．

3. 不等式之兩邊用同一負數乘除之，其不等號之方向須變更．如 $a>b$ 以 $c<o$ 乘除之則 $ac<bc$，$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$．

4. 不等式之兩邊不能用正負不明之數乘除之．

5. 不等式之兩邊如變平方則須十分留意，
如 $8>5$ 成平方爲 $64>25$（不等號之方向不變）
$-2>-7$ 成平方爲 $4<49$（不等號之方向須變更）

6. 不等式中可以任意移動各項．
如 $a>b$ 成 $a-b>0$

不等式之種類

不等式分兩類，一曰絕對的不等式，一曰附條件的不等式．

絕對的不等式 乃不論式中之文字作如何值恆能成立之不等式．例如 $x^2+1>0$，此中 x^2+1 常是正數，故本式爲絕對的不等式．

公式 1. $a-b>0$ 則 $a>b$
$a-b=0$ 則 $a=b$
$a-b<0$ 則 $a<b$
$(a\pm b)^2\geqq 0$

2. 兩個不同之正數相加之平均數較其相乘之平均數爲大．

附條件的不等式乃式中文字之值須在一定界限之內該式始能成立之不等式．

公式 1. $\frac{a}{b}>0$ 則 $\begin{cases} a>0 \text{ 同時 } b>0 \\ a<0 \text{ 同時 } b<0 \end{cases}$

2. $\frac{a}{b}<0$ 則 $\begin{cases} a>0 \text{ 同時 } b<0 \\ a<0 \text{ 同時 } b>0 \end{cases}$

$a\times b \gtrless 0$ 亦相同.

二次不等式通常解法之公式

$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ 之二根作爲 α,β $(\alpha<\beta)$

(1) 解 $\underline{ax^2+bx+c>0.}$

$a(x-\alpha)(x-\beta)>0.$

(i) $x-\alpha>0$ 同時 $x-\beta>0,$

$x>\alpha$ 同時 $x>\beta$ $\therefore$ $x>\beta$

(ii) $x-\alpha<0,$ 同時 $x-\beta<0,$

$x<\alpha,$同時 $x<\beta,$ $\therefore$ $x<\alpha.$

卽 $x<\alpha$ 又 $x>\beta.$

<u>卽 x之界限在二根之內比大者大又比小者小.</u>

(2) 解 $\underline{ax^2+bx+c<0.}$

$a(x-\alpha)(x-\beta)<0.$

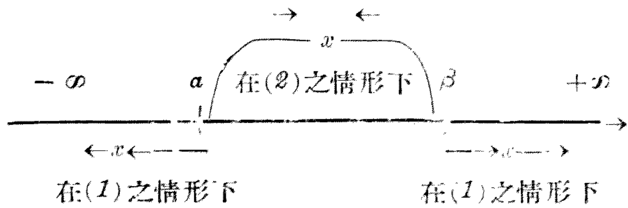
(i) $x-\alpha>0$ 同時 $x-\beta>0,$

$x>\alpha$ 同時 $x<\beta.$ $\therefore$ $\alpha<x<\beta.$

(ii) $x-\alpha<0$ 同時 $x-\beta>0,$

$x<\alpha$ 同時 $x>\beta.$ $\therefore$ 不能

<u>卽, x 之界限在二根之內比大者小, 又比小者大.</u>



問　　題

1. a, b 爲不相同之實數，試證明 $a^2+b^2>2ab$.

解 $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ 而 a, b 爲不相同之實數，於是 $(a-b)^2$ 常是正數

故 $(a-b)^2>0$　∴ $a^2-2ab+b^2>0$　∴ $a^2+b^2>2ab$

2. a, b, c, d 爲互異的正實數，若 $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$ 則 $ac+bd<1$，試證明之.

解 a, b, c, d 是不相同的正實數故 $(a-c)^2>0$, $(b-d)^2>0$

∴ $(a-c)^2+(b-d)^2>0$　即　$a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2>0$

即　$a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)>0$

由命題得　$1+1-2(ac+bd)>0$

∴ $2-2(ac+bd)>0$ ······ $-2(ac+bd)>-2$　乜用 -2 除之而不等號之方向不變..　即　$(ac+bd)<1$

3. a, b, c 是表某三角形之三邊的長度，三項式 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ 之值不論 x 之值爲如何恆是正數，試證明之.

解 $b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ [作之成完全平方形須用 x^2 之係數除 x 之係數更用 2 除其平方而加減之]

$$=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2+c^2$$

$$=\left(bx+\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2+c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}$$

$$=\left(bx+\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)+\frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2}$$

a, b, c 爲三角形之三邊故是正數，且其二邊之和較其他一邊爲大．卽 $a+b-c,\ a-b+c,\ b+c-a$，爲正數．從而上式之第一項成完全平方數對於 x 之實數值常是正數，至於第二項不論分母分子，若是正數則該項爲正，卽原式中 x 之實數值常是正數。

4. $x^2+px+\dfrac{p}{2}$ 不問 x 之值爲如何，常是正數，求 p 之值之界限．

解 $x^2+px+\dfrac{p}{2}=x^2+px+\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{p^2}{4}+\dfrac{p}{2}=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2-2p}{4}$

於此 $\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2$ 爲完全平方數，x 與 p 祇能是實數，且常是正數或零。

因求滿足命題 $-\dfrac{p^2-2p}{4}$ 爲正數．

$\therefore\quad -\dfrac{p^2-2p}{4}>0$ ……………… $\times(-4)$ （不等號之方向變更）

$p^2-2p<0$　　　　$\therefore\quad p(p-2)<0$

因　(正數)×(負數)	(負數)×(正數)
$\begin{cases} p>0 \\ p-2<0 \cdots\cdots p<2 \end{cases}$	$\begin{cases} p<0 \\ p-2>0 \cdots\cdots p>2 \end{cases}$
$\therefore\quad 2>p>0$	不成立

答 $2>p>0$

5. 分子比分母大且皆是正數，若分數之兩項加以同一之正數則分數之值減少，試證明之．

解 作分子爲 a，分母爲 b，由命題 $a>b>0$，及 $x>0$

於此分數 $\dfrac{a}{b}$ 之分母，分子同加以正數 x 則成 $\dfrac{a+x}{b+x}$

於是 $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{a(b+x)-b(a+x)}{b(b+x)}=\dfrac{(a-b)x}{b(b+x)}$

而由假定知 $a>b>0,\ x>0$，故 $(a-b)>0,\ x>0,\ b>0,\ b+x>0$。

因是此等正數之結合 $\dfrac{(a-b)x}{b(b+x)}$ 亦是正數。

故　$\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+x}{b+x}=\dfrac{(a-b)x}{b(b+x)}=$ 正數

從而　$\dfrac{a}{b}-\dfrac{a+x}{b+x}>0$　　$\therefore\ \dfrac{a}{b}>\dfrac{a+x}{b+x}$

即　$\dfrac{a+x}{b+x}$ 比 $\dfrac{a}{b}$ 小，因如題言

6. x 爲實數則 $1+2x^4$ 比 x^2+2x^3 爲大，試證明之.

解　$1+2x^4-(x^2+2x^3)=1-x^2-2x^3+2x^4=(1+x)(1-x)-2x^3(1-x)$

$$=(1-x)(1+x-2x^3)=(1-x)(1-x^3+x-x^3)$$

$$=(1-x)[(1-x)(1+x+x^2)+x(1+x)(1-x)]$$

$$=(1-x)(1-x)(1+x+x^2+x+x^2)$$

$$=(1-x)^2(2x^2+2x+1)=(1-x)^2 2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2(1-x)^2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

於是 $(1-x)^2$, $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$ 爲平方數則對於 x 之實數值常是正數或零，因此(A)式是正數或零（若 $x=1$）得如命題.

不等式之解法

1. 求能滿足下列兩個不等式之 x 之值.

$$9x-5>2x+23,\quad 2x+7>5x-8$$

解　$9x-5>2x+23$

移動各項

$9x-2x>23+5$

$\therefore\ 7x>28\cdots\cdots\cdots\cdots\div 7$

$x>4$

$2x+7>5x-8$

移動各項

$2x-5x>-8-7$

$\therefore\ -3x>-15\cdots\cdots\cdots\div -3$

$x<5$

滿足兩式之 x 之值須比4大比5小，故 $5>x>4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

2. 解下列之不等式

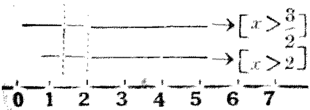
(a)　$2x^2+6>7x$　　　(b)　$3x^2+11x<5$

解 【a】 移動各項得 $2x^2-7x+6>0$

分解因子得 $(2x-3)(x-2)>0$ 二因子之積大於零，即是正數，故兩因子須同符號.

即 $\begin{cases} 2x-3>0 \\ x-2>0 \end{cases}$

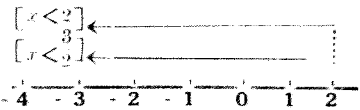
$\therefore\ x>\dfrac{3}{2},\ x>2$ 此兩者適當之值爲



此箭之共同部分. $\therefore\ x>2$

$\begin{cases} 2x-3<0 \\ x-2<0 \end{cases}$

$\therefore\ x<\dfrac{3}{2},\ x<2$ 此兩者適當之值爲



此箭之共同部分. $\therefore\ x<\dfrac{3}{2}$

答 $x>2$ 又 $x<\dfrac{3}{2}$

【b】 移動各項得 $3x^2+11x-5<0$ 作之成完全平方數,

$$3\left(x^2+\frac{11}{3}x-\frac{5}{3}\right)<0\cdots\cdots3\left[x^2+\frac{11}{3}x+\left(\frac{11}{2\times3}\right)^2-\left(\frac{11}{2\times3}\right)^2-\frac{5}{3}\right]<0$$

$$3\left[\left(x+\frac{11}{6}\right)^2-\frac{181}{36}\right]<0\cdots\cdots3\left[\left(x+\frac{11}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{181}}{6}\right)^2\right]<0$$

$$\therefore\ 3\left(x+\frac{11}{6}+\frac{\sqrt{181}}{6}\right)\left(x+\frac{11}{6}-\frac{\sqrt{181}}{6}\right)<0$$

$$\therefore\ 3\left(x+\frac{11+\sqrt{181}}{6}\right)\left(x+\frac{11-\sqrt{181}}{6}\right)<0$$

因兩因子之積爲負故須異符號.

即

$$\begin{cases} x+\dfrac{11+\sqrt{181}}{6}>0 \\ x+\dfrac{11-\sqrt{181}}{6}<0 \end{cases}\qquad\qquad \begin{cases} x+\dfrac{11+\sqrt{181}}{6}<0 \\ x+\dfrac{11-\sqrt{181}}{6}>0 \end{cases}$$

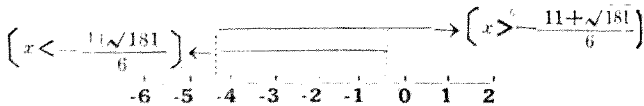
$$\therefore\ \begin{cases} x>-\dfrac{11+\sqrt{181}}{6} \\ x<-\dfrac{11-\sqrt{181}}{6} \end{cases} \qquad\qquad \therefore\ \begin{cases} x<-\dfrac{11+\sqrt{181}}{6} \\ x>-\dfrac{11-\sqrt{181}}{6} \end{cases}$$

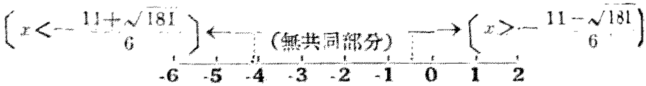
$$\therefore\ -\frac{11-\sqrt{181}}{6}>x>-\frac{11+\sqrt{181}}{6}$$

此明知不成立

答 $-\dfrac{11-\sqrt{181}}{6}>x>-\dfrac{11+\sqrt{181}}{6}$

註 $-\dfrac{11-\sqrt{181}}{6}=-0.409$ 弱　$-\dfrac{11+\sqrt{181}}{6}=-4.08$弱，以圖示之





極 大 極 小

極大極小之意義　$2x^2+7$ 之式中，x 可以有種種值，x 之值愈大則此式之值亦愈大，x 可以大至無限量，所以此式無極大可言；不過此式的小却有限度，作 $x=1$ 當然比 $x=2$ 小；而作 $x=0$ 又比 $x=1$ 小，但是 x 之值小至 0 爲止，因爲 $x=-1$ 或 -2 等等，則 x^2 之值反比 $x=0$ 爲大，所以 $x=0$ 是極小；再看 $7-2x^2$ 之式中，x 的值愈大則此式的值愈小（就是 x 等於負數亦是一樣），祇所以此式無極小可言；不過此式的大却有限度，這個限度就是，$x=0$ 祇有 $x=0$ 時此式的值最大，所以 $x=0$ 是極大.

論到極大極小的數祇限於實數.

證明之方針

1. 將含變數 (x) 之部份作成完全平方數，以適當之數加減之，而使與式變形.

2. 將與式作成等於 y 之二次方程式，因而求 x 成實數之條件，再由此求 y 之極大極小.

問　題

1. 求 $2x^2-7x+11$ 極小值.

解 $2x^2-7x+11=2\left(x^2-\frac{7}{2}x+\frac{11}{2}\right)$ [用x之係數之半分的平方加減之]

$$=2\left\{x^2-\frac{7}{2}x+\left(-\frac{7}{2\times2}\right)^2-\left(-\frac{7}{2\times2}\right)^2+\frac{11}{2}\right\}$$

$=2\left\{\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right\}$ 故本式中不論 x 較 $\frac{7}{4}$ 大或較小，而 $\left(x-\frac{7}{4}\right)^2$ 常是正數增大，故知本式以 $x-\frac{7}{4}=0$ 時爲極小值，

由 $x-\frac{7}{4}=0$ 得 $x=\frac{7}{4}$，因此本式之極小值爲

$$2\left\{\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{39}{16}\right\}=2\times\frac{39}{16}=\frac{39}{8}$$

答 $\frac{39}{8}$

別解 作 $2x^2-7x+11=s$. 於是論到極大極小之數之範圍祇限於實數故上式之 x 之值爲實數.

故依公式 b^2-4ac 作之須爲零或大於零. 即

$(-7)^2-4\times2\times(11-s)\geqq0$ $\therefore$ $-39+8s\geqq0$

$\therefore$ $8s\geqq39$ $\therefore$ $s\geqq\frac{39}{8}$ 　因此 s 常較 $\frac{39}{8}$ 爲大.

即 s 之最小值爲等於 $\frac{39}{8}$.

因 $s=2x^2-7x+11$ 　故上式之極小值爲 $\frac{39}{8}$.

2. 求 $(3-2x)(5+x)$ 之極大值.

解 $(3-2x)(5+x)=15-7x-2x^2$ 作本式等於 s 而依公式作之,

$15-7x-2x^2=s$ $\qquad\therefore\quad 2x^2+7x+s-15=0$

$\therefore\quad 7^2-4\times2\times(s-15)\geqq0$ $\qquad\therefore\quad 169-8s\geqq0$

$\therefore\quad 169\geqq8s$ $\qquad\therefore\quad s\leqq\dfrac{169}{8}$ 　即 s 常較 $\dfrac{169}{8}$ 爲小.

其最大時爲 $\quad s=\dfrac{169}{8}$. 　　　　**答** $\dfrac{169}{8}$

3. ax^2+bx+c 之數值, 如 $x=1, 2, 3$, 則該式 $=4, 2, 12$, 其極小值爲如何.

解 $x=1$ 　則

$a\times1^2+b\times1+c=4$ $\qquad\therefore\quad a+b+c=4$ ………………(1)

$x=2$ 　則

$a\times2^2+b\times2+c=2$ $\qquad\therefore\quad 4a+2b+c=2$ ……………(2)

$x=3$ 　則

$a\times3^2+b\times3+c=12$ $\qquad\therefore\quad 9a+3b+c=12$ …… ……(3)

求 a, b, c 法如下, (2)式—(1)式得 $3a+b=-2$ ……(4)

(3)式—(1)式得 $8a+2b=8$ 即 $4a+b=4$ ……(5)

故 (5)式—(4)式得 $a=6$ 將此用入(5)式得 $b=-20$,

於 (1)式用入 a, b 之值 得 $c=18$. 因此所求極小值之式如下.

$$6x^2-20x+18=6\left(x^2-\frac{10}{3}x+3\right)$$

$$=6\left[x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2+3\right]$$

$$=6\left[\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right]$$

因本式以 $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)^2$ 等於零時爲極小, 故

極小值 $=6\left(0+\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{4}{3}$ 　　　　**答** $\dfrac{4}{3}$

4. $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ 式中之x，其實數值在1與$-\dfrac{1}{11}$之間，試證明之.

解 作 $\dfrac{x}{x^2-5x+9}=s$ $\therefore\ x=s(x^2-5x+9)$ 整頓之.

$sx^2-(5s+1)x+9s=0$ 本式之 x 爲實數故,

$[-(5s+1)]^2-4s\times 9s\geqq 0$ $\therefore\ -11s^2+10s+1\geqq 0$

$\therefore\ -(s-1)(11s+1)\geqq 0$ 滿足本式者是

$-(s-1)(11s+1)>0$ 還是 $-(s-1)(11s+1)=0$ 呢?

求滿足 $-(s-1)(11s+1)>0$ 則兩因子之符號須得相異,

即

$$\begin{cases} s-1>0\cdots\cdots s>1 \\ 11s+1<0\cdots s<-\dfrac{1}{11} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} s-1<0\cdots\cdots s<1 \\ 11s+1>0\cdots s>-\dfrac{1}{11} \end{cases}$$

然 $s>1,\ s<-\dfrac{1}{11}$ 不成立，於是由 $s<1,\ s>-\dfrac{1}{11}$ 得 $1>s>-\dfrac{1}{11}$

又由 $-(s-1)(11s+1)=0$ 得 $s=1$ 及 $s=-\dfrac{1}{11}$.

綜合以上結果 得 $1\geqq s\geqq -\dfrac{1}{11}$

5. 知兩正數之和，問兩數應在如何條件之下，則其積爲最大.

解 作一正數爲 x，其和爲 s，於是其他一數爲 $s-x$，而兩數之積 p 爲 $x(s-x)$. 故

$P=x(s-x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$[求本式之極大]

$=sx-x^2=\left(\dfrac{s}{2}\right)^2-\left(\dfrac{s}{2}\right)^2+sx-x^2$

$=\left(\dfrac{s}{2}\right)^2-\left(\dfrac{s^2}{4}-sx+x^2\right)$

$=\left(\dfrac{s}{2}\right)^2-\left(\dfrac{s}{2}-x\right)$ 本式之極大爲 $\dfrac{s}{2}-x=0$

令 $\frac{s}{2}-x=0$ $\therefore$ $x=\frac{s}{2}$ 因他數爲 $s-x$

故 $s-x=s-\frac{s}{2}=\frac{s}{2}$

由此知兩數相等時其積最大.

6. 有電車公司其拾分的車票每日平均發賣數爲 n 張, 今將票價漲上 p 成, 結果發賣數減少 $\frac{1}{20}pn$ 張, 問該公司之收入額以在如何票價時爲最多.

解 漲上 p 成之票價爲 $10\left(1+\frac{p}{10}\right)$分, 此時車票之發賣數爲 $\left(n-\frac{1}{20}pn\right)$ 張, 於是其時之收入額爲$10\left(1+\frac{p}{10}\right)\left(n-\frac{1}{20}pn\right)$ 分, 由此可以求得本式之極大值.

$$10\left(1+\frac{p}{10}\right)\left(n-\frac{1}{20}pn\right)=(10+p)\,n\left(1-\frac{1}{20}p\right)$$

$$=\frac{n}{20}(200+10p-p^2)$$

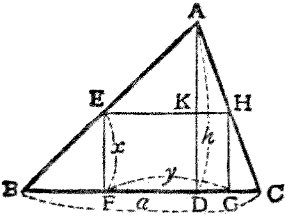
$$=\frac{n}{20}\left\{200-(p^2-10p+25-25)\right\}$$

$$=\frac{n}{20}\left\{225-(p-5)^2\right\}$$

於是本式之極大值爲 $\{225-(p-5)^2\}$, 由此可以作 $(p-5)^2=0$, 則 $p=5$, 而每張票價爲 $10(1+0.5)$ 分 $=15$ 分.

答 15分

7. 有三角形其底邊爲 a 尺, 其高爲 h 尺, 於其中作一矩形, 而矩形之一邊在三角形之底邊, 求此矩形之面積最大時其各邊之長度.



解 作矩形之面積爲 s 平方尺，矩形之兩邊爲 x 尺與 y 尺，是於

$S=xy$…………(1)

因 EH 與 BC 平行

故 △AEH 與 △ABC 相似，

從而 EH : BC = AK : AD

即　$y:a=h-x:h$　　$\therefore\ y=\dfrac{a(h-x)}{h}$　此中將 (1) 代入

$S=xy=x\times\dfrac{a(h-x)}{h}$　　$\therefore\ S=\dfrac{ax(h-x)}{h}$……(2)　解去分母

整頓之得 $ax^2-ahx+hs=0$…………(A)

因 x 爲實數故上列方程式有實根.

故　$(-ah)^2-4ahs\geqq 0$　　[用正值 $4ah$ 除之]

$\dfrac{ah}{4}-s\geqq 0$　　從而 S 之最大值爲 $\dfrac{ah}{4}$

將 $S=\dfrac{ah}{4}$ 代入 (A) 式

$ax^2-ahx+h\times\dfrac{ah}{4}=0$　　$\therefore\ a(4x^2-4hx+h^2)=0$

$\therefore\ a(2x-h)^2=0$　　$\therefore\ x=\dfrac{h}{2}$　將此用入 (1) 式得

$\dfrac{ah}{4}=\dfrac{h}{2}y$　　$\therefore\ y=\dfrac{a}{2}$

答　$\dfrac{h}{2}$尺，$\dfrac{a}{2}$尺

第十一章

分數方程式

解分數方程式之公式

1. 將各項悉集於一邊而使之等於零，用通分法使成一個分數，再行約分，然後將分子作爲等於零以求 x 之值.

2. 用分母之最小公倍數乘兩邊，解所得之整方程式；取其使根內分母成零之數，若各個分母皆成零則用 (1) 法解之.

分數方程式解法之種類有四.

1. 普通法
2. 代用法
3. 組合法
4. 變形法

問　題

I. 普　通　法

1. 解 $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}+2=0$

解 化成同分母　$\dfrac{x^2-3x+(x+1)+2(x^2-1)}{x^2-1}=0$

簡單之　$\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=0$

分解成因子　$\dfrac{(3x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=0$

約分　$\dfrac{3x+1}{x+1}=0$

將分子作爲 0　$3x+1=0$　$\therefore\ x=-\dfrac{1}{3}$ …………**答**

2. 解 $\dfrac{2x^2}{x^2-4}-\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{x}{x+2}+1$

解 化成同分母得　$\dfrac{2x^2+x(x+2)-x(x-2)-(x+2)(-2)}{(x+2)(x-2)}=0$

整頓之　$\dfrac{x^2+4x+4}{(x+2)(x-2)}=0$……$\dfrac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}=0$

$\therefore \quad \frac{x+2}{x-2}=0\cdots\cdots(A)$ $x+2$ 爲滿足(A)式之根

即 $x=-2$ 　　　　答 $x=-2$

3. 解 $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{2x}{x^2-4}=\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

解 用$(x+1)(x+2)(x-2)$將分母消去，得

$(x-2)+2x(x+1)=3(x+2)\cdots\cdots\cdots 2x^2=8 \qquad \therefore x=\pm 2.$

然 $x=\pm 2$ 不能使原分數之分母成零故此種解法無效.

正解 將同分母集於一邊得

$$\frac{(x-2)+2x(x+1)-3(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}=0$$

$$\frac{2x^2-8}{(x+1)(x+2)(x-2)}=0\cdots\cdots\frac{2(x+2)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}=0$$

約分得 $\frac{2}{x+1}=0$ 將分子等於零得

$2=0$, 此不可能. 　　　　答 不能

II. 代用法

1. 解 $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$

解 作 $\frac{x}{x^2+1}=y$ 則 $\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{y}$ 於是原式用 y 表之得

$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$ 解去分母

$2y^2-5y+2=0\cdots\cdots(2y-1)(y-2)=0$

$\therefore \quad 2y-1=0$ 又 $y-2=0$

從而　$y=\frac{1}{2}$　得

$$\frac{x}{x^2+2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0$$

$$\therefore\quad x=1$$

又　$y=2$　得　$\frac{x}{x^2+1}=2$

$$\therefore\ 2x^2-x+2=0$$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times2\times2}}{2\times2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{-15}}{4}$$

驗算之知兩個　能滿足原式。

答　1 及 $\frac{1}{4}\left(1\pm\sqrt{-15}\right)$

III　組　合　法

1.　解　$\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-10a}=\dfrac{1}{x-4a}+\dfrac{1}{x-7a}$

解　通分得　$\dfrac{(x-10a)+(x-a)}{(x-a)(x-10a)}=\dfrac{(x-7a)+(x-4a)}{(x-4a)(x-7a)}$

即　$\dfrac{2x-11a}{(x-a)(x-10a)}=\dfrac{2x-11a}{(x-4a)(x-7a)}$ ……………(4)

$$\therefore\ (2x-11a)\left\{\frac{1}{(x-a)(x-10a)}-\frac{1}{(x-4a)(x-7a)}\right\}=0$$

$$\therefore\ \begin{cases} 2x-11a=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)\\ \dfrac{1}{(x-a)(x-10a)}-\dfrac{1}{(x-4a)(x-7a)}=0 \cdots\cdots (2)\end{cases}$$

由 (1) 式得　$x=\frac{11}{2}a$

由 (2) 式得　$\dfrac{(x-4a)(x-7a)-(x-a)(x-10a)}{(x-a)(x-10a)(x-4a)(x-7a)}=0$

即　$\dfrac{x^2-11ax+28a^2-(x^2-11ax+10a^2)}{(x-a)(x-10a)(x-4a)(x-7a)}=0$

$$\therefore\quad \frac{18a^2}{(x-a)(x-10a)(x-4a)(x-7a)}=0$$

$$\therefore\quad 18a^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots a=0$$

若 $a=0$ 則原式成 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$.　　$\frac{2}{x}-\frac{2}{x}=0$

卽 $0=0$ 此成不定，又驗算之結果知 $x=\frac{11}{2}a$ 能滿足

原式.　　答 $x=\frac{11}{2}a$　若 $a=0$ 則成不定.

2. 解 $\frac{1}{x-a-b}=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

解 移動各項得 $\frac{1}{x-a-b}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

$\therefore\ \frac{x-(x-a-b)}{x(x-a-b)}=-\frac{b+a}{ab}$　$\therefore\ (a+b)\left\{\frac{1}{x(x-a-b)}+\frac{1}{ab}\right\}=0$

$\therefore\ a+b=0$　又 $\frac{1}{x(x-a-b)}+\frac{1}{ab}=0\cdots\cdots(A)$

由 (A) 得 $ab+x(x-a-b)=0$　$\therefore\ x^2-(a+b)x+ab=0$

$\therefore\ (x-a)(x-b)=0$　$\therefore\ x=a$ 及 $x=b$

若 $a+b=0$ 則原式成 $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ 是以不定，

又 $x=a$, $x=b$ 驗算之結果能滿足原式.

答 $x=a$ 及 b　若 $a+b=0$ 則成不定.

IV　變形法

1. 解 $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+3}{x+5}$

解 從各項減 1，等號之左右邊所減之數相同.

$$\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)+\left(\frac{x+5}{x+7}-1\right)=\left(\frac{x+1}{x+3}-1\right)+\left(\frac{x+3}{x+5}-1\right)$$

$$\therefore \quad \frac{x-1-(x+1)}{x+1}+\frac{x+5-(x+7)}{x+7}=\frac{x+1-(x+3)}{x+3}+\frac{x+3-(x+5)}{x+5}$$

$$\therefore \quad \frac{-2}{x+1}+\frac{-2}{x+7}=\frac{-2}{x+3}+\frac{-2}{x+5} \cdots\cdots\cdots\cdots \div(-2)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}$$

適當移動之,

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)=\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+5)(x+7)}$$

今等號兩邊之分數之分子皆是 2 則可知分母是相等.

即 $(x+1)(x+3)=(x+5)(x+7)$ $\therefore$ $x=-4$

此能滿足原方程式. 答 $x=-4$

2. 解 $\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{b+x}{b-x}+\dfrac{c+x}{c-x}=3$

解 $a+x$ 被 $a-x$ 除之得商 1, 剩餘 $2x$.

$\therefore$ $\dfrac{a+x}{a-x}=1+\dfrac{2x}{a-x}$, 同樣 $\dfrac{b+x}{b-x}=1+\dfrac{2x}{b-x}$, $\dfrac{c+x}{c-x}=1+\dfrac{2x}{c-x}$

因此原方程式如下.

$$\left(1+\frac{2x}{a-x}\right)+\left(1+\frac{2x}{b-x}\right)+\left(1+\frac{2x}{c-x}\right)=3$$

$$\therefore \quad 2x\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}+\frac{1}{c-x}\right)=0 \qquad \therefore \quad 2x=0 \cdots\cdots x=0$$

及 $\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{1}{b-x}+\dfrac{1}{c-x}=0$

解去分母得 $(b-x)(c-x)+(a-x)(c-x)+(a-x)(b-x)=0$ 去括弧

整頓之 $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$

$$\therefore \quad x=\frac{2(a+b+c)\pm\sqrt{[-2(a+b+c)]^2-4\times3\times(ab+bc+ca)}}{2\times3}$$

$$=\frac{1}{3}\left[a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\right]$$

答 $x=0$ 及 $\dfrac{1}{3}\left[a+b+c\pm\sqrt{(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}\right]$

第十二章

高次方程式

因數分解

[I] 關於 i 及 ω

關於 i $\sqrt{-5}=\sqrt{-1}\times\sqrt{5}$, 此 $\sqrt{-1}$ 通例以 i 表之; 1 是表數的單位, i 是表虛數 (*Imaginary*) 的單位, 因此 $\sqrt{-5}=i\sqrt{5}$, 而 i 二乘得 -1.

關於 ω　1 之立方根有三, 卽 1, $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$　$\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ 是也, 而表之之方法亦有三, 用 ω 以表 $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, 用 ω^2 以表 $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, 用 ω^3 以表 1.

問　題

1. 解　$x^3=1$

[解]　移項 $x^3-1=0$　　$\therefore\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ x-1=0\cdots\cdots x=1$,　及　$x^2+x+1=0$　將此解之

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

答 1 及 $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$

2. 解 $x^3-2x^2+3=0$

[解]　$x^3-2x^2+3=x^3+x^2-3x^2+3$

$$=x^2(x+1)-3(x^2-1)$$

$$=x^2(x+1)-3(x+1)(x-1)$$

$=(x+1)\{x^2-3(x-1)\}$

$=(x+1)(x^2-3x+3)$

$\therefore\quad x^3-2x^2+3=0$　變形成

$(x+1)(x^2-3x+3)=0$　故

$x+1=0\cdots\cdots(1)$　又 $x^2-3x+3=0\cdots\cdots(2)$

由 (1) 式得 $x=-1$

由 (2) 式得 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\times3}}{2}=\dfrac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$

答 $-1,\ \dfrac{3\pm\sqrt{-3}}{2}$

II 代用法

1. 解 $(x^2+4x+5)^2-12(x^2+4x)-40=0$

解 作 $x^2+4x=y$　則原式成

$(y+5)^2-12y-40=0$　即　$y^2-2y-15=0$

$\therefore\quad (y+3)(y-5)=0$　$\therefore\quad y=-3$ 及 5

$y=-3$	$y=5$
$x^2+4x=-3$	$x^2+4x=5$
$x^2+4x+3=0$	$x^2+4x-5=0$
$(x+1)(x+3)=0$	$(x-1)(x+5)=0$
$\therefore\ x=-1,\ -3$	$\therefore\ x=1,\ -5$

答 $\pm1,\ -3\ -5$

2. 求 $x^4-22x^2+81=0$ 之根至小數第三位爲止.

解 作 $x^2=y$　得　$y^2-22y+81=0$

此用二次方程式之公式解之, 得

$$y=\frac{22\pm\sqrt{(-22)^2-4\times81}}{2}=\frac{22\pm\sqrt{160}}{2}$$

$$=\frac{22\pm4\sqrt{10}}{2}=11\pm2\sqrt{10}\qquad[但\ x^2=y]$$

$x^2=11\pm2\sqrt{10}$　$\therefore\quad x=\pm\sqrt{11\pm2\sqrt{10}}$

將下列二重根號簡單之

$$11\pm2\sqrt{10}=10\pm2\sqrt{10}+1=(\sqrt{10})^2\pm2\times\sqrt{10}\times1+1^2$$

$$=(\sqrt{10}\pm1)^2$$

$\therefore\quad \sqrt{(11\pm2\sqrt{10})}=\sqrt{(\sqrt{10}\pm1)^2}=(\sqrt{10}\pm1)$

$\therefore\quad x=\pm(\sqrt{10}\pm1)=\pm(3.162\pm1)$

答 $x=\pm4.162$ 及 ±2.162

9. 解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24=0$

解 將原式寫成 $[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-24=0$

即 $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24=0$

作 $x^2+5x+4=y$ 而代入上式

$y(y+2)-24=0\cdots\cdots y^2+2y-24=0\qquad\therefore\quad(y-4)(y+6)=0$

$\therefore\quad y=4$ 及 $y=-6$

$y=4$ 得

$x^2+5x+4=4$

$\therefore\quad x(x+5)=0$ 因此

$x=0$ 及 $x=-5$

$y=-6$ 得

$x^2+5x+4=-6$

$x^2+5x+10=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-5\pm\sqrt{25-40}}{2}$$

$$=\frac{-5\pm\sqrt{-15}}{2}$$

答 $0,\ -5,\ \frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{-15})$

III 逆數方程式

逆數方程式（又稱反商方程式或相反方程式）乃就 x 整頓之後，其方程式之係數從右端見之與從左端見之相同。

問題

1. 解 $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$

圖 移項得 $(2x^4+2)+(x^3+x)-6x^2=0$　求 $x=0$ 能滿足原方程式，用 x^2 除各項得

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})+(x+\frac{1}{x})-6=0\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

於是用下列方法作之成二次方程式

$x+\frac{1}{x}=y$　成平方得　$x^2+2x\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=y^2$

$\therefore$ $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$　將 (A) 式用 y 書寫之得

$$2(y^2-2)+y-6=0\cdots\cdots2y^2+y-10=0$$

$\therefore$ $(2y+5)(y-2)=0$　$\therefore$ $y=-\frac{5}{2}$ 及 2

$y=-\frac{5}{2}$

由 $x+\frac{1}{x}=y$ 得

$x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ 卽

$2x^2+5x+2=0$

$(2x+1)(x+2)=0$

$\therefore$ $x=-\frac{1}{2}$ 及 -2

$y=2$

由 $x+\frac{1}{x}=y$ 得

$x+\frac{1}{x}=2$ 卽

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore$ $x=1$

答 $1,\ -\frac{1}{2},\ -2.$

第十三章

根號方程式

1. 解 $3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$

解　將原式寫成 $(3x^2-4x+5)-15+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$

作 $y=\sqrt{3x^2-4x+5}$　將其代入本式得

$y^2-15+2y=0$　　卽　$(y-3)(y+5)=0$

∴　$y=3$　及　$y=-5$.

因規定 $\sqrt{3x^2-4x+5}$ 所表爲正數，故 y 非是正數不可，

所以不能用 $y=-5$.

若　$y=3$　則　$\sqrt{3x^2-4x+5}=3$　　兩邊成平方得 $3x^2-4x+5=9$

∴　$3x^2-4x-4=0\cdots\cdots(3x+2)(x-2)=0$　∴　$x=-\frac{2}{3}$ 及2.

檢算　$x=-\frac{2}{3}$　　則　$3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}$

$$=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)-10+2\sqrt{\left[3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)+5\right]}=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-10+2\sqrt{\left(\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+5\right)}=-6+2\sqrt{9}=0$$

故　$x=-\frac{2}{3}$　爲能滿足原方程式之根.

　　$x=2$　則　$3\times2^2-4\times2-10+2\sqrt{[3\times2^2-4\times2+5]}$

$=12-8-10+2\sqrt{12-8+5}=-6+6=0$

故　$x=2$　爲能滿足原方程式之根.　　　　**答**　$2,\ -\frac{2}{3}$

2.　解　$\sqrt{x-3}-\sqrt{x+6}=1$.

解　移動各項得　$\sqrt{x-2}=1+\sqrt{x+6}$

平方之　　$x-3=1+2\sqrt{x+6}+x+6$

簡單之得　　$\sqrt{x+6}=-5$.　然規定　$\sqrt{x+6}$　爲正數.

今得者爲負數 -5，故不能解之.

答　不能

3.　解　$\sqrt{(x^2+ax+b^2)}-\sqrt{(x^2-ax+b^2)}=2a$

解　原式移項得 $\sqrt{(x^2+ax+b^2)}=2a+\sqrt{(x^2-ax+b^2)}$

平方之 $x^2+ax+b^2=4a^2+4a\sqrt{(x^2-ax+b^2)}+x^2-ax+b^2$

$\therefore\qquad 2ax-4a^2-4a\sqrt{(x^2-ax+b^2)}=0$

$\therefore\qquad 2a[x-2a-2\sqrt{(x^2-ax+b^2)}]=0$

$\therefore\qquad 2a=0$ 及 $x-2a-2\sqrt{(x^2-ax+b^2)}=0\cdots\cdots(A)$

因此得 $a=0$. $a=0$ 則 原方程式成 $\sqrt{(x^2+b^2)}-\sqrt{(x^2+b^2)}=0$ 是以不定. 次由 (A) 得 $x-2a=2\sqrt{(x^2-ax+b^2)}$

平方之 $\qquad x^2-4ax+4a^2=4(x^2-ax+b^2)$

$\therefore\quad 3x^2=4a^2-4b^2 \qquad \therefore\quad x=\pm2\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{3}} \qquad [$但 $a^2-b^2>0]$

檢算 $\sqrt{(x^2+ax+b^2)}-\sqrt{(x^2-ax+b^2)}$

$$=\sqrt{\left(\frac{4(a^2-b^2)}{3}+2a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{3}}+b^2\right)}-\sqrt{\left(\frac{4(a^2-b^2)}{3}-2a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{3}}+b^2\right)}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{4a^2-b^2+2a\sqrt{3(a^2-b^2)}}{3}\right\}}-\sqrt{\left\{\frac{4a^2-b^2-2a\sqrt{3(a^2-b^2)}}{3}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{a^2-b^2+2\sqrt{3}a\sqrt{a^2-b^2}+3a^2}{3}\right\}}-\sqrt{\left\{\frac{a^2-b^2-2\sqrt{3}a\sqrt{a^2-b^2}+3a^2}{3}\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{(\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{3}a)^2}{3}\right\}}-\sqrt{\left\{\frac{(\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{3}a)^2}{3}\right\}}\cdots\cdots\cdots(B)$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{3}a-(\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{3}a)}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{3}}=2a$$ 故根爲

$x=2\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{3}}$, 同樣 $x=-2\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{3}}$ 則爲 $-2a$.

答 $a=0$ 是不定; $a\neq0$ 則 $x=2\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{3}}$

4. 解 $\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{12x+1}$

解 平方之得 $x+5+2\sqrt{x+5}\sqrt{3x+4}+3x+4=12x+1$

簡單之 $\qquad \sqrt{x+5}\sqrt{3x+4}=4x-4$

平方之 $\qquad (x+5)(3x+4)=(4x-4)^2$

簡單之 $\qquad 13x^2\quad5\quad x-4=0$

$\therefore \quad (13x+1)(x-4)=0 \qquad \therefore \quad x=-\dfrac{1}{13}$ 及 $4.$

檢算 $x=-\dfrac{1}{13}$ 則

左邊 $=\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}$

$=\sqrt{\dfrac{-1}{13}+5}+\sqrt{3\times\dfrac{-1}{13}+4}$

$=\sqrt{\dfrac{64}{13}}+\sqrt{\dfrac{49}{13}}$

$=\dfrac{8}{\sqrt{13}}+\dfrac{7}{\sqrt{13}}$

$=\dfrac{15}{\sqrt{13}}$

右邊 $=\sqrt{12x+1}$

$=\sqrt{12\times\dfrac{-1}{13}+1}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{13}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

故不能滿足

$x=4$ 則

左邊 $=\sqrt{4+5}+\sqrt{3\times4+4}$

$=3+4=7$

右邊 $=\sqrt{12\times4+1}$

$=7.$

故 $x=4$ 爲能滿足原方程式之根. 答 4

5. 解 $\sqrt{x+\sqrt{2x+4}-1}=\sqrt{x-1}$

解 移項得 $\sqrt{x+\sqrt{2x+4}}=\sqrt{x-1}+1$ 成平方

$x+\sqrt{2x+4}=x-1+2\sqrt{x-1}+1 \qquad \therefore \quad \sqrt{2x+4}=2\sqrt{x-1}$

平方之得 $2x+4=4(x-1) \qquad \therefore \quad x=4$ ………………………答

檢算 左邊 $=\sqrt{4+\sqrt{2\times4+4}-1}=\sqrt{4+\sqrt{12}-1}$ ………見[註]

$=\sqrt{3}+1-1=\sqrt{3}$

右邊 $=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ 故是根。

【註】 $\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 作成平方

$4+\sqrt{12}=x+2\sqrt{xy}+y \qquad \therefore \quad x+y=4$ 及

$2\sqrt{xy}=\sqrt{12}$ 成平方　$4xy=12$　故　$xy=3$

將 $x+y=4,\ xy=3$ 解之得 $(x=3,\ y=1)$

及 $(x=1,\ y=3)$

從而　$\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$

6. 解　$\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$

解 兩邊三乘之

$(\sqrt[3]{37+x})^3-3(\sqrt[3]{37+x})^2\sqrt[3]{x}+3(\sqrt[3]{37+x})(\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[3]{x})^3=1$

$\therefore\ 37+x-3\sqrt[3]{37+x}\sqrt[3]{x}[\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}]-x=1$

$\therefore\ 3\sqrt[3]{37+x}\sqrt[3]{x}[\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}]=36$　此中代入

原方程式　$\sqrt[3]{37+x}-\sqrt[3]{x}=1$　後用3除之

得　$\sqrt[3]{37+x}\sqrt[3]{x}=12$　三乘之

$(37+x)x=12^3\cdots\cdots x^2+37x-27\times64=0$

$\therefore\ (x+64)(x-27)=0$　$\therefore\ x=-64$ 及 27

答 $27,\ -64.$

7. 解　$\sqrt[3]{(1+x)^2}+4\sqrt[3]{(1-x)^2}=5\sqrt[3]{(1-x^2)}$

解 不能三乘故寫　$\sqrt[3]{1+x}=y,\ \sqrt[3]{1-x}=z$

而原式成　$y^2+4z^2=5yz$　即

$y^2-5yz+4z^2=0\cdots\cdots(y-4z)(y-z)=0$

$\therefore\ y=4z$　及　$y=z$

$y=4z$ 則	$y=z$ 則
$\sqrt[3]{1+x}=4\sqrt[3]{1-x}$	$\sqrt[3]{1+x}=\sqrt[3]{1-x}$
$\therefore\ 1+x=64(1-x)$	$\therefore\ 1+x=1-x$
$65x=63$	$2x=0$
$\therefore\ =\frac{63}{65}$	$\therefore\ x=0$

答 $0,\ \frac{63}{65}$

第十四章

聯立方程式[二次及二次以上]

解法之種類　二次及二次以上之聯立方程式之解法有種種，而大略可分成下列幾類.

1. 代入法　將第一式中之一個表其他未知數之未知數代入第二式.

2. 消去法　將某個未知數消去後再用代入法.

3. 公式用法　用公式以引起既知方法.

4. 特種法　用特種變形法.

問題

[A] 一次式與二次式 【代入法】

1. 解 $2x-3y+9=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2-xy+y^2+6x-6y-7=0\cdots(2)$

解 由 (1) 式得 $x=\dfrac{3y-9}{2}$ 將其代入 (2) 式

$$\left(\frac{3y-9}{2}\right)^2-\frac{3y-9}{2}\times y+y^2+6\times\frac{3y-9}{2}-6y-7=0$$

$$\frac{9y^2-54y+81}{4}-\frac{3y^2-9y}{2}+y^2+9y-27-6y-7=0$$

$\therefore$ $7y^2-24y-55=0\cdots\cdots\cdots(7y+11)(y-5)=0$

$\therefore$ $7y+11=0$ 又 $y-5=0$

得 $y=-\frac{11}{7}$ 則

$x=\frac{3y-9}{2}$ 即

$x=\frac{1}{2}\left\{3\times\left(-\frac{11}{7}\right)-9\right\}$

$=-\frac{48}{7}$

$y=5$ 則

$x=\frac{3y-9}{2}$ 即

$x=\frac{1}{2}\left\{3\times5-9\right\}$

$=3$

答 $\left(x=-6\frac{6}{7},\ y=-1\frac{4}{7}\right)$; $(x=3,\ y=5)$

[B] 將 xy 消去（消去法）

1. 解 $xy+x-y=5$ ……(1)

$2xy+x-y=5$ ……(2)

解 $\left.\begin{array}{l}(1)\text{ 式}\times2\cdots\cdots 2xy+2x-2y=10\\(2)\text{ 式}\cdots\cdots\cdots 2xy+x-y=5\end{array}\right\}$ 相減

$x-y=5$　∴ $x=5+y$……(3)

將其代入 (1) 式　$(5+y)y+(5+y)-y=5$

∴ $y(y+5)=0$

∴ $y=0$, 及 $y+5=0$……$y=-5$

$y=0$ 則由 (3) 式得 $x=5$

$y=-5$ 則由 (3) 式得 $x=0$

答 $\begin{cases}x=0\\y=-5\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=0\end{cases}$

[C] 將 x^2 及 y^2 項消去（消去法）

1. 解 $3x^2+5x-8y=36$ ……(1)

$2x^2-3x-4y=3$ ……(2)

解 $\left.\begin{array}{l}(1)\text{ 式}\times2\quad\text{得}\quad 6x^2+10x-16y=72\\(2)\text{ 式}\times3\quad\text{得}\quad 6x^2-9x-12y=9\end{array}\right\}$ 相減

$19x-4y=63$……$y=\frac{19x-63}{4}$……(3)

將其代入 (1) 式 $3x^2+5x-8\times\frac{19x-63}{4}=36$ 卽

$3x^2-33x+90=0$ ∴ $3(x-5)(x-6)=0$ ∴ $x=5$, 及 $x=6$

適用於 (3) 式, 若 $x=5$ 則 $y=8$,

$x=6$ 則 $y=\frac{51}{4}$ 答 $\begin{cases}x=5\\y=8\end{cases}$ $\begin{cases}x=6\\y=\frac{51}{4}\end{cases}$

[D] 由一式引出一次式【因子分解去】

1. 解 $2x^2-3xy+5y-5=0$ .....(1)

$xy-x-2y+2=0$ ....(2)

解 由 (2) 式得 $x(y-1)-2(y-1)=0$ ∴ $(y-1)(x-2)=0$

從而 $y-1=0$, $x-2=0$

∴ $y=1$ 又 $x=2$ 將其用入 (2) 式

$y=1$ 則 $2x^2-3x=0$ 卽 $x(2x-3)=0$

因得 $x=0$. $x=\frac{3}{2}$

$x=2$ 則 $2\times2^2-3\times2y+5y-5=0$ 因得 $y=3$

答 $(x=0,\ y=1)$; $(x=\frac{3}{2},\ y=1)$; $(x=2,\ y=3)$

[E] 總兩式之未知項成二次式【既知項消去】

注意 1. 將同次之未知項 (含 x, y 之項) 集於一邊

2. 將其集於一邊後, 察其是否可以分解成因子, 如可分解成因子務必分解之.

1. 解 $6x^2-xy-2y^2=20$...(1)

$18x^2-27xy+10y^2=28$...(2)

解 由 (1) 式得 $(3x-2y)(2x+y)=20$, 再由此式知

$3x-2y\neq0$, $2x+y\neq0$.

由(1)式得$(3x-2y)(2x+y)=20\cdots\cdots 7(3x-2y)(2x+y)=140$

由(2)式得$(3x-2y)(6x-5y)=28\cdots\cdots 5(3x-2y)(6x-5y)=140$

兩式相減 $7(3x-2y)(2x+y)-5(3x-2y)(6x-5y)=0$

$\therefore\ (3x-2y)\{7(2x+y)-5(6x-5y)\}=0\quad\therefore\ 16(3x-2y)(2y-x)=0$

然 $3x-2y\neq 0$，故祇能是 $2y-x=0$

由此得 $x=2y$ 將其代入(1)式

$6\times(2y)^2-(2y)y-2y^2=20$ 於是 $y=\pm 1$. 從而 $x=\pm 2$.

答 $(x=2,\ y=1)$; $(x=-2,\ y=-1)$

易誤的解法 因子之分解須留意

由(1)式×7−(2)式×5 $\quad 42x^2-7xy-14y^2=140$

$$\begin{array}{r} -)\ \ 90x^2-135xy+50y^2=140 \\ \hline -48x^2+128xy-64y^2=0\cdots\cdots\div(-16) \end{array}$$

$\therefore\quad 3x^2-8xy+4y^2=0\cdots\cdots(3x-2y)(x-2y)=0$

$\therefore\quad 3x-2y=0$ 及 $x-2y=0$

若 $3x-2y=0$ 則 $x=\frac{2}{3}y$, 將其代入(1)得

$$6\times\left(\frac{2}{3}y\right)^2-\left(\frac{2}{3}y\right)y-2y^2=20$$

$$\frac{8}{3}y^2-\frac{2}{3}y^2-2y^2=20\cdots\cdots\times 3\cdots\cdots 8y^2-2y^2-6y^2=60$$

即 $0=60$，此不可能，從而 $3x-2y=0$ 爲不可能.

次 $x-2y=0$ 則 $x=2y$ 將其代入(1)成

$24y^2-2y^2-2y^2=20$ 因得 $y=\pm 1$ 及 $x=\pm 2$.

用此方法須將 $3x-2y=0$ 實際代入(1)式後始知 $3x-2y=0$ 爲不可能，故顯笨拙.

【相除去】 (1)式÷(2)式得$\dfrac{6x^2-xy-2y^2}{18x^2-27xy+10y^2}=\dfrac{20}{28}=\dfrac{5}{7}$

$\therefore\quad 7(6x^2-xy-2y^2)=5(18x^2-27xy+10y^2)\cdots\cdots$簡單之

$3x^2-8xy+4y^2=0\quad\therefore\ (3x-2y)(x-2y)=0$

即與上述笨拙方法相同.

今用少許工夫先分解成因子

$$\frac{(3x-2y)(2x+y)}{(3x-2y)(6x-5y)}=\frac{20}{28} \quad \therefore \quad \frac{2x+y}{6x-5y}=\frac{5}{7}$$

$\therefore \quad 7(2x+y)=5(6x-5y)$ 而 $16x=32y$ 即 $x=2y$

此法頗為優良，然而約分有失根之事，須加注意.

別解 作 $x=my$ 而代入兩式

由(1)式 得 $6m^2y^2-my^2-2y^2=20\cdots\cdots y^2(3m-2)(2m+1)=20$

由(2) 得 $18m^2y^2-27my^2+10y^2=28\cdots\cdots y^2(3m-2)(6m-5)=28$

$$\therefore \quad \frac{y^2(3m-2)(2m+1)}{y^2(3m-2)(6m-5)}=\frac{20}{28} \quad \therefore \quad \frac{2m+1}{6m-5}=\frac{5}{7}$$

即 $7(2m+1)=5(6m-5)$ $\therefore \quad m=2$; 因 $x=my$, 故 $=2y$

將其代入 (1) 式得

$24y^2-2y^2-2y^2=20\cdots\cdots y=\pm1$ 又 $m=2$ 則

$6m^2y^2-my^2-2y^2=20$ 即 $y^2(6m^2-m-2)=20$ 成

$y^2(6\times4-2-2)=20$ 因得 $y=\pm1$

本解稍費手續，故亦不好.

2. 解 $2x^2-xy-y^2=2y\cdots\cdots\cdots(1)$

$2x^2+xy=5y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解 由(1)式 得 $(2x+y)(x-y)=2y\cdots\cdots5(2x+y)(x-y)=10y$

由(2)式 得 $x(2x+y)=5y\cdots\cdots\cdots\cdots2x(2x+y)=10y$

兩式相減 $5(2x+y)(x-y)-2x(2x+y)=0$

$\therefore \quad (2x+y)\{5(x-y)-2x\}=0\cdots\cdots(2x+y)(3x-5y)=0$

$\therefore \quad 2x+y=0, \quad 3x-5y=0.$

若 $2x+y=0$ 則

$y=-2x$

將其代入(2)式

$2x^2-2x^2=5y$

$\therefore \quad 0=5y$

即 $y=0$

從而 $x=0$

若 $3x-5y=0$ 則

$x=\frac{5}{3}y$, 將其代入(2)式

$$2\times\left(\frac{5}{3}y\right)^2+\left(\frac{5}{3}y\right)y=5y$$

$$5y(13y-9)=0$$

$\therefore \quad y=0, \quad x=0$ | $y=\frac{9}{13}, \quad x=\frac{5}{3}\times\frac{9}{13}=\frac{15}{13}$

答 $(x=0,\ y=0)$; $\left(x=\frac{15}{13},\quad y=\frac{9}{13}\right)$

3. 解 $x^3+1=9y\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+x=6y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解 由(1)式 得 $(x+1)(x^2-x+1)=9y\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)式 得 $x(x+1)=6y\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)式×2−(4)式×3 得 $2(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$

$\therefore \quad (x+1)\{2x^2-5x+2\}=0\cdots\cdots(x+1)(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore \quad x=-1, \quad x=\frac{1}{2}, \quad x=2.$

於(1)式中若 $x=-1$ 則 $y=0$, $x=\frac{1}{2}$ 則 $y=\frac{1}{8}$, $x=2$ 則 $y=1$

答 $(x=-1,\ y=0)$; $\left(x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{8}\right)$; $(x=2,\ y=1)$

【注意事項】用相除法不能解此問題

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\frac{9y}{6y} \qquad \therefore \quad 2(x^2-x+1)=3x$$

從而　$2x^2-5x+2=0\cdots\cdots(2x-1)(x-2)=0$　$\therefore$　$x=\frac{1}{2}$，2

於是失去前解中 $x=-1$ 之根，

若用因子分解法則成

$\frac{x^3+1}{x^2+x}=\frac{9y}{6y}$　去分母得 $2x^3+2=3x^2+3x$

即　$2(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=0$

$\therefore$　$(x+1)(2x^2-5x+2)=0\cdots\cdots(x+1)(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore$　$x=-1$，　$x=\frac{1}{2}$，　$x=2$　不至失根

4. 解　$x^2+xy-4y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^3-4xy-y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

答　由 (1) 式得 $x^2-4y=-xy\cdots\cdots(3)$．又 (2)式變形成

$x(x^2-4y)-y^2=0$　將此用入 (3) 式　$x(-xy)-y^2=0$

$\therefore$　$x^2y+y^2=0$　$\therefore$　$y(x^2+y)=0$

$\therefore$　$y=0$　及　$x^2+y=0$

$\left.\begin{array}{r}y=0\\ x^2+xy-4y=0\end{array}\right\}$ 相合併．

$y=0$，用入第二式得

$x^2+x\times0-4\times0=0$

$\therefore$　$x=0$

$\therefore$　$x=y=0$

$\left.\begin{array}{r}x^2+y=0\\ x^2+xy-4y=0\end{array}\right\}$ 相合併．

由第一式得 $y=-x^2$，用入第二式

$x^2+x(-x^2)-4(-x^2)=0$

$\therefore$　$-x^3+5x^2=0$

$-x^2(x-5)=0$

$\therefore$　$x=0$，　$x=5$．

從而　$y=-x^2$ 故 $x=0$ 則

$y=0$；而 $x=5$ 則 $y=-25$

答　$(x=y=0)$，$(x=5,\ y=-25)$

注意 (1) 式 $\times x-$(2) 式得 $x^2y+y^2=0$ ∴ $y(x^2+y)=0$

∴ $y=0$ 及 $x^2+y=0$ 用此法可解此題.

又由 (1) 式得 $x^2-4y=-xy$ 由 (2) 式得 $x(x^2-4y)=y^2$

∴ $\dfrac{x(x^2-4y)}{x^2-4y}=\dfrac{y^2}{-xy}$ ∴ $-x^2=y$ 用此法解之亦可.

(作出兩式之和與差)

1 解 $x(1+x)=y(4+y)\cdots(1)$

$x+4y=(x+y)^2\cdots\cdots(2)$

解 由(1)式得 $x+x^2-4y-y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2)式得 $x+4y-x^2-2xy-y^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)式+(4)式得 $2x-2xy-2y^2=0\cdots\cdots x=y(x+y)\cdots\cdots(5)$

(3)式−(4)式得 $2x^2-8y+2xy=0\cdots\cdots x(x+y)=4y\cdots(6)$

(5)式×4+(6)式得 $(x+y)(x+4y)=4(x+y)$

∴ $(x+y)(x+4y-4)=0$ ∴ $x+y=0$ 及 $(x+4y-4)=0$

若 $x+y=0$ 則 $x=-y$ 將其代入(3)式

$-y+y^2-4y-y^2=0$ 因得 $y=0$, ∴ $x=0$

若 $x+4y-4=0$ 則 $x=4-4y$ 將其代入(3)式得 $3y^2-8y+4=0$

$(3y-2)(y-2)=0$ ∴ $3y-2=0$ 及 $y-2=0$. 若 $3y-2=0$

則 $y=\dfrac{2}{3}$ 從而 $x=\dfrac{4}{3}$ 若 $y-2=0$ 則 $y=2$ 從而 $x=-4$

答 $(x=y=0)$; $\left(x=\dfrac{4}{3},\ y=\dfrac{2}{3}\right)$; $(x=-4,\ y=2)$.

注意 (5)×(6) 得 $x^2(x+y)=4y^2(x+y)$ ∴ $(x+y)(x^2-4y^2)=0$

從而 $x+y=0$ 又 $x^2-4y^2=0$ 此種解法不相宜.

引起 $x+y=a$, $x-y=b$ 之解法

1. 解 $(x+y)(x+y+1)=56\cdots(1)$

$(x-y)(x-y-1)=12\cdots(2)$

解　由(1)式得 $(x+y)^2+(x+y)-56=0$　更分解成因子

$[(x+y)-7][(x+y)+8]=0$　$\therefore\ x+y=7,\ x+y=-8$

同樣由(2)式得 $(x-y)^2-(x-y)-12=0$

$\therefore$　$[(x-y)+3][(x-y)-4]=0$　$\therefore\ x-y=-3,\ x-y=4$

合併之得四組

$$\begin{array}{r}x+y=7\\ x-y=-3\\ \hline 2x=4\end{array}\ (+ \qquad \therefore\begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}x+y=7\\ x-y=4\\ \hline 2x=11\end{array}\ (+ \qquad \therefore\begin{cases}x=\dfrac{11}{2}\\ y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}x+y=-8\\ x-y=-3\\ \hline 2x=-11\end{array}\ (+ \qquad \begin{cases}x=-\dfrac{11}{2}\\ y=-\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}x+y=-8\\ x-y=4\\ \hline 2x=-4\end{array}\ (+ \qquad \begin{array}{l}x=-2\\ y=-6\end{array}$$

答　$(x=2,\ y=5),\ (x=-2,\ y=-6),\ (x=\frac{11}{2},\ y=\frac{3}{2}),$

$(x=-\frac{11}{2},\ y=-\frac{5}{2})$

引起　$xy=a,\ x\pm y=b$　之解法

1. 解　$x^2+y^2=25\cdots\cdots\cdots(1)$

$xy=12\cdots\cdots\cdots(2)$

解　(1)式+(2)式得　$x^2+2xy+y^2=49\cdots\cdots(x+y)^2=49$

將其開平方得　$x+y=\pm7$

又　(1)式−(2)式得　$x-y=\pm1$

將其結合得下列四組

$\begin{cases}x+y=7\\ x-y=1\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=7\\ x-y=-1\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-7\\ x-y=1\end{cases}$　$\begin{cases}x+y=-7\\ x-y=-1\end{cases}$　得

$(x=4,\ y=3),\ (x=3,\ y=4),\ (x=-3,\ y=-4)\ (x=-4,\ y=-3)$

2. 解 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ ....(1)

$xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$ ....(2)

解 (2)式—(1)式得 $xy=6$..........(3) 次將 (1) 式之分母掃去得

$y+x=2xy$, 將其代入(3)式得 $x+y=12$.......(4)

(4)式—(3)式×4 得 $x^2+2xy+y^2-4xy=144-6\times4$

即 $(x^2-2xy+y^2)=120$ ∴ $(x-y)^2=120$ 將其開平方

$x-y=\pm\sqrt{120}=\pm2\sqrt{30}$

因 $\begin{cases}x+y=12\\x-y=2\sqrt{30}\end{cases}$ 及 $\begin{cases}x+y=12\\x-y=-2\sqrt{30}\end{cases}$ 乃得

$(x=6+\sqrt{30},\ y=6-\sqrt{30})$, $(x=6-\sqrt{30},\ y=6+\sqrt{30})$

3. 解 $(x+y)^2+4(x-y)=37$ ....(1)

$xy+4(x-y)=16$ ....(2)

解 (1)式變形成 $(x-y)^2+4xy+4(x-y)=37$

今寫 $x-y=X$, $xy=Y$ 得 $X^2+4Y+4X=37$..........(3)

又由(2)式得 $Y+4X=16$.........(4)

(3)式—(4)式×4 得 $X^2-12X=-27$........$(X-3)(X-9)=0$

∴ $X-3=0$........$X=3$ 及 $X-9=0$........$X=9$

$X=3$ 則由(4)式得

$Y=4$ 故

$\begin{cases}x-y=3\\xy=4\end{cases}$ 將此解之得

$\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-4\end{cases}$

$X=9$ 則由(4)式得

$Y=-20$ 故

$\begin{cases}x-y=9\\xy=-20\end{cases}$ 將此解之得

$\begin{cases}x=4\\y=-5\end{cases}$ $\begin{cases}x=5\\y=-4\end{cases}$

答 $(x=4,\ y=1)$; $(x=-1,\ y=-4)$, $(x=4,\ y=-5)$ $(x=5\ y=-4)$

4\. 解 $x^2+xy+y^2=19\cdots(1)$

$x^2-xy+y^2=7\ \ \dots(2)$

答 (1)式－(2)式得 $2xy=12$ $\quad\therefore\quad xy=6\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)式＋(3)式得

$x^2+2xy+y^2=19+6$

$\therefore\quad (x+y)^2=25$

$\therefore\quad x+y=\pm5\cdots\cdots\cdots(4)$

(2)式－(3)式得

$x^2-2xy+y^2=7-6$

$\therefore\quad (x-y)^2=1$

$\therefore\quad x-y=\pm1\cdots\cdots(5)$

因(4)式,(5)式之合併得下列四組.

$x+y=5$	$x+y=5$	$x+y=-5$	$x+y=-5$
$x-y=1$	$x-y=-1$	$x-y=1$	$x-y=-1$
$2x=6$	$2x=4$	$2x=-4$	$2x=-6$
答 $\therefore\ \left.\begin{array}{l}x=3\\y=2\end{array}\right)$	$\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right)$	$\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-3\end{array}\right)$	$\left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-2\end{array}\right)$

5\. 解. $x+y=7\cdots\cdots(1)$

$x^3+y^3=91\cdots(2)$

答 由(2)式得 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=91$ 將(1)式代入之

$$7(x^2-xy+y^2)=91$$

$\therefore\quad x^2-xy+y^2=13\cdots\cdots\cdots(3)$

$x+y=7\ \cdots\cdots\cdots(1)$

(1)式變平方 $x^2+2xy+y^2=49$ } 相減

(3)式$\cdots\cdots\cdots\cdots x^2-xy+y^2=13$ }

$$3xy=36\qquad\therefore\quad xy=12$$

將此從(3)式減去之 $x^2-2xy+y^2=13-12$

$\therefore\quad (x-y)^2=1\qquad\therefore\quad x-y=\pm1$

$\therefore$ 由 $x+y=7$, $\quad x-y=1$ 得 $x=4,\ y=3$

由 $x+y=7$, $\quad x-y=-1$ 得 $x=3,\ y=4$

答 $(x=4,\ y=3)$; $(x=3,\ y=4)$

別解 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]$

故 (2) 式可寫作 $(x+y)[(x+y)^2-3xy]=91$ 此中將 (1) 式代入 $7[7^2-3xy]=91$ $\therefore$ $xy=12$ 此與(1)式相合併而解之

別解 由 (1) 式得 $x=7-y$，將其代入 (2) 式得 $(7-y)^3+y^3=91$

$\cdots\cdots[(7-y)+y][(7-y)^2-(7-y)y+y^2]=91$

即 $7(3y^2-21y+49)=91\cdots\cdots y^2-7y+12=0\cdots(y-3)(y-4)=0$

從而得 $y=3,\ y=4$

別解 (1) 式三乘而將 (1) 式, (2) 式代入之，亦一解法.

6. 解 $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12\cdots\cdots(1)$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}\cdots\cdots(2)$

解 將原式之分母解去，

(1) 式得 $x^3+y^3=12xy\cdots\cdots(x+y)(x^2-xy+y^2)=12xy\cdots\cdots(3)$

(2) 式得 $x+y=\dfrac{1}{3}xy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

將 (3) 式代入 (4) 式得 $\dfrac{1}{3}xy(x^2-xy+y^2)-12xy=0.$

$\therefore$ $\dfrac{1}{3}xy[x^2-xy+y^2-36]=0\cdots\cdots\cdots$ 因 $x\neq0,\ y\neq0$ 故非是

$x^2-xy+y^2-36=0$ 不可，更變形成

$(x+y)^2-3xy-36=0$ 將 (4) 式代入之

$\left(\dfrac{1}{3}xy\right)^2-3xy-36=0\cdots\cdots\cdots\cdots x^2y^2-27xy-36\times9=0$

$\therefore$ $(xy-36)(xy+9)=0$ $\therefore$ $xy=36$ 及 $xy=-9$

$\therefore$ 由 $\begin{cases} xy=36 \\ x+y=\dfrac{1}{3}xy \end{cases}$ 得 $\begin{cases} xy=36 \\ x+y=12 \end{cases}$ 將此解之則 $x=6,\ y=6$

又由 $\begin{cases} xy=-9 \\ x+y=\frac{1}{3}xy \end{cases}$ 得 $\begin{cases} xy=-9 \\ x+y=-3 \end{cases}$ 將此解之則 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2},\ y=\dfrac{-3\mp3\sqrt{5}}{2}$

答 $(x=y=6)$, $\left(x=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2},\ y=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right)$,

$\left(x=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2},\ y=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$.

7. 解 $x+y=3\cdots\cdots(1)$

$x^4+y^4=17\cdots\cdots(2)$

解 (2) 式變形成 $[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=17$ 此中代入 (1) 式得

$[3^2-2xy]^2-2x^2y^2=17$ 去括弧整頓之 $x^2y^2-18xy+32=0$

$\therefore\ (xy-2)(xy-16)=0$ $\therefore\ xy=2$, 及 $xy=16$

$\therefore\ \left.\begin{matrix} xy=2 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\}$ 合併之

$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right)$ $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right)$

$\therefore\ \left.\begin{matrix} xy=16 \\ x+y=3 \end{matrix}\right\}$ 合併之

$x=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-55})$

$y=\frac{1}{2}(3\mp\sqrt{-55})$

答 $(x=1,\ y=2)$, $(x=2,\ y=1)$,

$\left(x=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-55}),\ y=\frac{1}{2}(3\mp\sqrt{-55})\right)$

8. 解 $x^2+xy+y^2=13\cdots\cdots(1)$

$x^4+x^2y^2+y^4=91\cdots\cdots(2)$

解 $x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$

故第二式可寫作 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=91$

第一式代入之得 $13(x^2-xy+y^2)=91$ 卽 $x^2-xy+y^2=7$

將 $\left.\begin{matrix} x^2+xy+y^2=13 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{matrix}\right\}$ 兩式合併之

以下依第四問方法解之。

答 $(x=1,\ y=3);\ (x=3\ \ y=1);$

$(x=-1,\ y=-3);\ (x=-3,\ y=1)$

9. 解 $\dfrac{x^3}{y}-\dfrac{y^3}{x}=\dfrac{15}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

解 由(1)式得 $x^4-y^4=\dfrac{15}{2}xy$ $\quad\therefore\ (x^2+y^2)(x^2-y^2)=\dfrac{15}{2}xy\cdots(3)$

由(2)式得 $\qquad x^2-y^2=\dfrac{3}{2}xy\cdots(4)$

於(3)式之左邊用入(4)式

$(x^2\ \ y^2)\times\dfrac{3}{2}xy=\dfrac{15}{2}xy$

而 $xy\neq0$ 於是兩邊用 xy 除之得 $x^2+y^2=5$

故 $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ x^2-y^2=\dfrac{3}{2}xy\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\end{array}\right\}$ 合併解之。

由(5)式得 $2x^2-3xy-2y^2=0\cdots\cdots(2x+y)(x-2y)=0$

$\therefore\ \left.\begin{array}{l} 2x+y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(6) \\ x^2+y^2=5\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\end{array}\right\}$ 及 $\left.\begin{array}{l} x-2y=0\cdots\cdots\cdots\cdots(7) \\ x^2+y^2=5\cdots\cdots\cdots\cdots(5)\end{array}\right\}$

由(6)式得 $y=-2x$

將其代入(5)式

$x^2+(-2x)^2=5$

$\therefore\qquad x=\pm1$

從而 $\qquad y=\mp2$

由(7)式得 $x=2y$

將其代入(5)式

$(2y)^2+y^2=5$

$\therefore\qquad y=\pm1$

從而 $\qquad x=\pm2$

答 $(x=1,\ y=-2),\ (x=-1,\ y=2),$

$(x=2,\ y=1),\ (x=-2,\ y=-1)$

10. 解 $x+y=5$

$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=455$

[解] 第二式變形成 $[(x+y)^2-2xy][(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}]=455$

將第一式用入之得 $(5^2-2xy)[5(5^2-3xy)]=455$ 整頓之

$6x^2y^2-125xy+534=0$ $\therefore$ $(xy-6)(6xy-89)=0$

$\therefore$ 由 $\left.\begin{array}{l} xy=6 \\ x+y=5 \end{array}\right\}$ 得

$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right)$

及由 $\left.\begin{array}{l} xy=\dfrac{89}{6} \\ x+y=5 \end{array}\right\}$ 得

$$x=\frac{15\pm\sqrt{-309}}{6},$$

$$y=\frac{15\mp\sqrt{-309}}{6}$$

[答] $(x=2,\ y=3)$, $(x=3,\ y=2)$

$$\left(x=\frac{15\pm\sqrt{-309}}{6},\ y=\frac{15\mp\sqrt{-309}}{6}\right)$$

三元聯立方程式

問題

1. 解 $\dfrac{x}{y+z+a}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{z}{x+y-a}=x+y+z$

[解] 作 $\dfrac{x}{y+z+a}=\dfrac{y}{z+x}=\dfrac{z}{x+y-a}=x+y+z=k\cdots(A)$ 將分母解去

得 $x=k(y+z+a)\cdots\cdots(1)$, $y=k(z+x)\cdots\cdots(2)$,

$z=k(x+y-a)\cdots\cdots(3)$ 及 $x+y+z=k\cdots\cdots(4)$

(1)式+(2)式+(3)式得 $x+y+z=k(2x+2y+2z)$ 將(4)式代入之則 $k=k\times 2k$ $\therefore k(2k-1)=0$ $\therefore k=0$ 又 $k=\frac{1}{2}$ 若 $k=0$ 則由(4)式得 $x=y=z=0$，而 $\frac{y}{z+x}=k$ 則 $z+x\neq 0$，從而 $x=y=0$ 爲不合理. 故 $k=0$ 爲不可能. 因此祇限於 $k=\frac{1}{2}$.

若 $k=\frac{1}{2}$ 則得

$$\frac{x}{y+z+a}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y-a}=x+y+z=\frac{1}{2}$$ 從而

$\frac{x}{y+z+a}=\frac{1}{2}$ 因此 $2x-y-z=a\cdots\cdots(5)$

$\frac{y}{z+x}=\frac{1}{2}$ 因此 $2y-x-z=0\cdots\cdots(6)$

及 $x+y+z=\frac{1}{2}\cdots\cdots(7)$

合併解之

(5)+(7) 得 $x=\frac{1}{6}(2a+1)$

(6)+(7) 得 $y=\frac{1}{6}$

將 x, y 之值代入(7)得 $z=\frac{1}{6}(1-2a)$

答 $x=\frac{1}{6}(2a+1)$, $y=\frac{1}{6}$, $z=\frac{1}{6}(1-2a)$

2. 解

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=3\cdots\cdots(1)\\ x^2+y^2+z^2&=5\cdots\cdots(2)\\ xy&=2\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

解 由(1)式得 $x+y=3-z\cdots\cdots(4)$ 將(2)式變化之

$(x+y)^2-2xy+z^2=5$ 此中代入(1)式, (3)式

$(3-z)^2-2\times 2+z^2=5$ 即 $2z^2-6z=0$

$\therefore$ $2z(z-3)=0$ $\therefore$ $z=0$ 又 $z=3$

$z=0$則

由(1)式得$x+y=3$

由(3)式得 $xy=2$

解此兩式得

$(x=1,\ y=2),\ (x=2,\ y=1)$

$z=3$則

由(1)式得$x+y=0$

由(3)式得 $xy=2$

解此兩式得

$(x=\sqrt{-2},\ y=-\sqrt{-2})$

$(x=-\sqrt{-2},\ y=\sqrt{-2})$

答 $(x=1,\ y=2,\ z=0),\ (2,\ 1,\ 0),$

$(\sqrt{-2},\ -\sqrt{-2},\ 3),\ (-\sqrt{-2},\ \sqrt{-2},\ 3)$

3. 解
$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=19 \cdots\cdots(1)\\ x^2+y^2+z^2&=133 \cdots\cdots(2)\\ xz&=y^2 \cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

解 由(1)式得 $x+z=19-y$ 將其平方之

$x^2+z^2+2xz=361-38y+y^2\cdots\cdots(A)$

(2)式變形成 $x^2+z^2=133-y^2$ 將(3)式用入(A)式

而消去$x,\ z$ $133-y^2+2y^2=361-38y+y^2$

$\therefore$ $38y=228$ $\therefore$ $y=6$ 從而由(1)式得 $x+z=13,$

將 $\boxed{x+z=13,\ xz=36}$ 合併解之得 $x=4,\ z=9$

及 $x=9,\ z=4$

答 $(x=4,\ y=6,\ z=9),\ (x=9,\ y=6,\ z=4)$

4. 解
$$\left.\begin{aligned} y^2+yz+z^2&=19 \cdots\cdots(1)\\ z^2+zx+x^2&=13 \cdots\cdots(2)\\ x^2+xy+y^2&=7 \cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

解 (1)式$-$(2)式 $y^2+yz-zx-x^2=6\cdots(x+y+z)(y-x)=6\cdots\cdots(4)$

(2)式$-$(3)式 $z^2+zx-xy-y^2=6\cdots(x+y+z)(z-y)=6\cdots\cdots(5)$

將既知項消去 $(x+y+z)(y-x)-(x+y+z)(z-y)=0$

$\therefore$ $(x+y+z)(y-x-z+y)=0$

$\therefore$ $x+y+z=0$ 又 $2y=x+z$

若 $\qquad x+y+z=0$

將其代入 (4) 式

$0\times(y-x)=6$

$\therefore \qquad 0=6$

此是不能

故 $\quad x+y+z=0$ 爲

不可能

卽須得 $x+y+z\neq0$.

若 $\qquad 2y=x+z$

將其代入 (4) 式

$(2y+y)(y-x)=6$

$\therefore \qquad y^2-xy=2\cdots\cdots(7)$

此與 (3) 式 相合併解之得

$(x=1,\ y=2,\ z=3)$

$(-1,\ -2,\ -3)$

$\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-7}{\sqrt{3}}\right)$,

$\left(\dfrac{-5}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{7}{\sqrt{3}}\right)$ 答

5. 解

$$\left.\begin{aligned}(y+z)(x+y+z)&=10\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\(z+x)(x+y+z)&=20\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\(x+y)(x+y+z)&=20\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

解 三式分邊相加

$$(y+z)(x+y+z)+(z+x)(x+y+z)+(x+y)(x+y+z)=50$$

$$\therefore \qquad (x+y+z)(2x+2y+2z)=50$$

$$\therefore \qquad 2(x+y+z)^2=50$$

用 2 除後開平方 $\qquad x+y+z=\pm5.$

$x+y+z=5\cdots\cdots\cdots(4)$ 則

由(1)式 得 $y+z=2\cdots\cdots(5)$

由(2)式 得 $z+x=4\cdots\cdots(6)$

由(3)式 得 $x+y=4\cdots\cdots(7)$

(4)式—(5)式 得 $x=3$

(4)式—(6)式 得 $y=1$

(4)式—(7)式 得 $z=1$

$x+y+z=-5\cdots\cdots(8)$ 則

由(1)式 得 $y+z=-2\cdots(9)$

由(2)式 得 $z+x=-4\cdots(10)$

由(3)式 得 $x+y=-4\cdots(11)$

(8)式—(9)式 得 $x=-3$

(8)式—(10)式 得 $y=-1$

(8)式—(11)式 得 $z=-1$

答 $(x=3,\ y=z=1)$. $(x=-3,\ y=z=-1)$

6. 解 $\left.\begin{aligned} xy&=10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ yz&=35 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ zx&=14 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$

解 三式分邊相乘 $xy\times yz\times zx=10\times 35\times 14$

$\therefore\quad x^2y^2z^2=70^2 \qquad \therefore\quad xyz=\pm 70\cdots\cdots\cdots(4)$

若 $xyz=70\cdots\cdots\cdots(4)$ 則

此中代入 (2) 式 得 $x=2$

(4) 式中以 (3) 式代入之 得 $y=5$

(4) 式中以 (1) 式代入之 得 $z=7$

若 $xyz=-70\cdots\cdots(5)$ 則

此中代入 (2) 式 得 $x=-2$

(5) 式中以 (3) 式代入之 得 $y=-5$

(5) 式中以 (1) 式代入之 得 $z=-7$

答 $(x=2,\ y=5,\ z=7),\ (x=-2,\ y=-5,\ z=-7).$

7. 解 $\left.\begin{aligned} y+z&=\frac{1}{x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ z+x&=\frac{1}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ x+y&=\frac{1}{z}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$

解 (1)式 $\times x$ 得 $xy+xz=1\cdots\cdots\cdots(4)$ 但 $x\neq 0$,

(2)式 $\times y$ 得 $yz+xy=1\cdots\cdots\cdots(5)$ 但 $y\neq 0$,

(3)式 $\times z$ 得 $zx+yz=1\cdots\cdots\cdots(6)$ 但 $z\neq 0$.

$$\frac{+)\qquad\qquad\qquad\qquad}{2(xy+yz+zx)=3}$$

$$\therefore\quad xy+yz+zx=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

因 $\left.\begin{aligned} &(7)\text{式}-(4)\text{式 得 } yz=\frac{1}{2}\\ &(7)\text{式}-(5)\text{式 得 } zx=\frac{1}{2}\\ &(7)\text{式}-(6)\text{式 得 } xy=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}$ 故於此可求得解決.

於是 $(xyz)^2=\dfrac{1}{8}$　　卽　　$xyz=\pm\dfrac{1}{\sqrt{8}}$

$xyz=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$　時　$x\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$　　$\therefore\ x=\dfrac{2}{\sqrt{8}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

同樣求得　　　　$x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$xyz=-\dfrac{1}{\sqrt{8}}$　則　　　$x=y=z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

答　$x=y=z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

8.　解　$\left.\begin{aligned}(x+y)(x+z)&=a^2\cdots\cdots(1)\\(y+z)(y+x)&=b^2\cdots\cdots(2)\\(z+x)(z+y)&=c^2\cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}$

解　三式分邊相乘得

$(x+y)(x+z)\times(y+z)(y+x)\times(z+x)(z+y)=a^2\times b^2\times c^2$

$\therefore\ (x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2=a^2b^2c^2$…………兩邊開平方

$(x+y)(y+z)(z+x)=\pm abc\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$\left.\begin{aligned}&\text{(4) 式中將 (1) 式代入}\quad y+z=\pm\frac{bc}{a}\cdots\cdots(5)\\&\text{(4) 式中將 (2) 式代入}\quad z+x=\pm\frac{ca}{b}\cdots\cdots(6)\\&\text{(4) 式中將 (3) 式代入}\quad x+y=\pm\frac{ab}{c}\cdots\cdots(7)\end{aligned}\right\}$ 此三式分邊相加

$$2(x+y+z)=\pm\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{abc}$$

$$x+y+z=\pm\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2abc}\cdots\cdots(8)$$

(8) 式 − (5) 式 得 $x=\pm\dfrac{a^2b^2-b^2c^2+c^2a^2}{2a^2bc}$

(8) 式 − (6) 式 得 $y=\pm\dfrac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{2ab^2c}$ ……答

(8) 式 − (7) 式 得 $z=\pm\dfrac{-a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{2abc^2}$

9. 解 $\left.\begin{array}{l} xy+x+y+3=0\cdots\cdots(1)\\ yz+y+z+7=0\cdots\cdots(2)\\ zx+z+x-11=0\cdots\cdots(3)\end{array}\right\}$

解 由 (1) 式 得 $(x+1)(y+1)=-2\cdots\cdots(4)$
由 (2) 式 得 $(y+1)(z+1)=-6\cdots\cdots(5)$ ⎬ 三式分邊相乘
由 (3) 式 得 $(z+1)(x+1)=12\cdots\cdots(6)$

$[(x+1)(y+1)(z+1)]^2=144$ 開平方得

$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 12$

若 $(x+1)(y+1)(z+1)=12$ 而將 (5) 式代入之

得 $(x+1)=-2\cdots\cdots x=-3$, 代入 (4) 式得 $y=0$

代入 (6) 式得 $z=-7$.

若 $(x+1)(y+1)(z+1)=-12$ 用同樣方法求得 $x=1,\ y=-2,$

$z=5$ 答 $(x=-3,\ y=0,\ z=-7)$; $(x=1,\ y=-2,\ z=5)$

別解 僅表一個未知數則

由 (1) 式得 $y=-\dfrac{x+3}{x+1}\cdots(A)$ 由 (3) 式得 $z=-\dfrac{x-11}{x+1}\cdots(B)$

將其代入 (2) 式而將 $y,\ z$ 消去

$$\left(-\frac{x+3}{x+1}\right)\left(-\frac{x-11}{x+1}\right)-\frac{x+3}{x+1}-\frac{x-11}{x+1}+7=0$$

$$\therefore\ \frac{(x+3)(x-11)}{(x+1)^2}-\frac{2x-8}{x+1}+7=0 \quad \text{解去分母}$$

$(x+3)(x-11)-2(x-4)(x+1)+7(x+1)^2=0$ 但 $x+1\neq 0$

簡單之 $x^2+2x-3=0$ $\therefore$ $(x+3)(x-1)=0$ $\therefore$ $x=1,\ -3$

以適用於 (A) (B) 而求得 $y,\ z$ 之值.

10. 解 $\left.\begin{array}{l} yz=y+2z \cdots\cdots(1) \\ xz=3z-2x\cdots\cdots(2) \\ xy=4x-5y\cdots\cdots(3) \end{array}\right\}$

解　各項皆含有未知數，故$x=y=z=0$能滿足原方程式［$x=0$則由(2)(3)式得$y=0$，$z=0$］；若$x=y=z\neq0$，則用yz除(1)式，xz除(2)式，xy除(3)式

$$\left.\begin{array}{ll} \text{由 (1) 式得} & \dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{y}=1\cdots\cdots(4) \\ \text{由 (2) 式得} & \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{z}=1\cdots\cdots(5) \\ \text{由 (3) 式得} & \dfrac{4}{y}-\dfrac{5}{x}=1\cdots\cdots(6) \end{array}\right\}\text{由此可得解決}$$

(4) 式×2+(5) 式−(6) 式得　$x=4$,

從而由 (6) 式得　$y=\dfrac{16}{9}$，由 (4) 式得　$z=-8$.

答　$(x=y=z=0)$；$\left(x=4,\ y=\dfrac{16}{9},\ z=-8\right)$

含有根式時

1. $x+y+\sqrt{x+y}-12$ 等於零，而x與y之平方之差為9，求x，y之值.

解　由 $x+y+\sqrt{x+y}-12=0$　得 $(\sqrt{x+y}-3)(\sqrt{x+y}+4)=0$

故　$\sqrt{x+y}=3$　及　$\sqrt{x+y}=-4$　然由於規約

根號所表者是正，$\sqrt{x+y}$　是正數，因此

$\sqrt{x+y}=-4$是不合理，故捨之不用.

由命題知兩數平方之差為9，然 x 比 y 大或小並未說明，故須是

$x^2-y^2=\pm9$，因得

$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x+y}=3\cdots\cdots(1) \\ x^2-y^2=9\ \cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$　及　$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x+y}=3\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=-9\ \cdots(3) \end{array}\right\}$

(1) 式成平方得

$x+y=9$ 將其代入 (2)式分解得之因子中.

$$(x+y)(x-y)=9$$

$$\therefore \quad 9(x-y)=9$$

$$\therefore \quad x-y=1 \text{ 從而}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=9\\x-y=1\end{array}\right\} \text{ 因得 } \left.\begin{array}{l}x=5\\y=4\end{array}\right\}$$

(1) 式成平方得

$x+y=9$ 將其代入 (3) 式分解得之因子中.

$$(x+y)(x-y)=-9$$

$$\therefore \quad 9(x-y)=-9$$

$$\therefore \quad x-y=-1 \text{ 從而}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y=9\\x-y=-1\end{array}\right\} \text{ 因得 } \left.\begin{array}{l}x=4\\y=5\end{array}\right\}$$

答 $(x=5,\ y=4)$; $(x=4,\ y=5)$.

2. 解 $\left.\begin{array}{l}x^2+xy+y^2=133\cdots\cdots(1)\\x-\sqrt{xy}+y=7\cdots\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}$

解 (1) 式可寫成 $(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)=133$

此中將 (2) 式代入之 $(x+\sqrt{xy}+y)\times 7=133$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{r}x+\sqrt{xy}+y=19\\ (2)\text{ 式}\cdots\cdots\cdots\cdots x-\sqrt{xy}+y=7\end{array}\right\} \text{ 相合併}$$

$$-$$

$$2\sqrt{xy}=12$$

$\therefore \quad \sqrt{xy}=6\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$ $\quad\therefore \quad xy=36\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

因而 (2) 式+(3) 式 得 $x+y=13\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

又 (1) 式−(4) 式×3 得 $x^2-2xy+y^2=25$

$\therefore \quad (x-y)^2=5^2$ $\quad\therefore \quad x-y=\pm 5\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

故可將 (5) 式, (6) 式相合併解之

由 $\left(\begin{array}{l}x+y=13\\x-y=5\end{array}\right.$ 得 $\left\{\begin{array}{l}x=9\\y=4\end{array}\right.$ 由 $\left(\begin{array}{l}x+y=13\\x-y=-5\end{array}\right.$ 得 $\left\{\begin{array}{l}x=4\\y=9\end{array}\right.$

答 $(x=9,\ y=4)$, $(x=4,\ y=9)$

3. 解 $\left.\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{13}{6}\cdots(1)\\ x^2+y^2=97\cdots(2)\end{array}\right\}$

解 (1) 式成平方得 $\dfrac{x}{y}+2\sqrt{\dfrac{x}{y}}\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{169}{36}$ $\left(但\sqrt{\dfrac{x}{y}}\sqrt{\dfrac{y}{x}}=1\right)$

整頓之 $\dfrac{x}{y}+2+\dfrac{y}{x}=\dfrac{169}{36}$

即 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{97}{36}$ $\therefore$ $x^2+y^2=\dfrac{97}{36}xy\cdots\cdots(3)$ 此與 (2) 式相等

故 $\dfrac{97}{36}xy=97\cdots\cdots\cdots\cdots\times\dfrac{36}{97}$

得 $xy=36\cdots\cdots(4)$ 與 $x^2+y^2=97$ 相合併而解之

(2) 式 + (4) 式 ×2 得 $(x+y)^2=169\cdots\cdots x+y=\pm13$

$\therefore$ 由 $\left.\begin{array}{l}x+y=13\\ xy=36\end{array}\right\}$ 得 $\begin{cases}x=4\\ y=9\end{cases}$ $\begin{cases}x=9\\ y=4\end{cases}$ 由 $\left.\begin{array}{l}x+y=-13\\ xy=36\end{array}\right\}$ 得 $\begin{cases}x=-4\\ y=-9\end{cases}$ $\begin{cases}x=-9\\ y=-4\end{cases}$

答 $(x=4,\ y=9),\ (x=9,\ y=4)$

$(x=-4,\ y=-9),\ (x=-9,\ y=-4)$

聯立方程式雜問

1. 下列三個關係式能同時成立，求x, y之值

$$\left.\begin{array}{r}x^2-3xy+2y^2=3\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 2x^2+y^2=6\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ 2x^2+6x=xy+3y\cdots(3)\end{array}\right\}$$

解 (1) 式 ×2 − (2) 式得 $3y^2-6xy=0\cdots\cdots3y(y-2x)=0$

$\therefore$ $y=0$ 及 $y=2x$

$y=0$ 則由 (2)式得

$2x^2+0=6$ $\therefore$ $x=\pm\sqrt{3}$

$\therefore$ $y=0,$ $x=\pm\sqrt{3}$

$y=2x$ 則由 (2) 式得

$2x^2+4x^2=6$ $\therefore$ $x=\pm1$

$y=\pm2$

然 $y=0$ $\qquad x=\pm\sqrt{3}$ 用於 (3) 式不能滿足之.

$x=\pm 1,$ $\qquad y=\pm 2$ 用於 (3) 式能滿足之.

答 $(x=1,\ y=2);\ (x=-1,\ y=-2)$

2. 求能滿足下列方程式之 x 及 y 之實數值.

$$\left(3x-\frac{1}{y}-4\right)^2+\left(9x^2+\frac{1}{y^2}-40\right)^2=0$$

解 $x,\ y$ 有實數值則 $(3x-\frac{1}{y}-4)$ 及 $(9x^2+\frac{1}{y^2}-40)$ 非是實數不可, 此兩個實數之平方之和爲零則各項是零,

故 $x,\ y$ 爲下列方程式之根.

$$3x-\frac{1}{y}-4=0\cdots\cdots(1),\qquad 9x^2+\frac{1}{y^2}-40=0\cdots\cdots(2)$$

今作 $3x=\alpha,\ \frac{1}{y}=\beta$ 則

(1) 式成 $\alpha-\beta=4\cdots(3)$, (2) 式成 $\alpha^2+\beta^2=40\cdots\cdots(4)$

將此解之, (4) 式$-$(3式)^2 得 $2\alpha\beta=24$, 將其加入 (4) 式得

$$(\alpha+\beta)^2=64\qquad\therefore\ \alpha+\beta=\pm 8$$

$\therefore$ $\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=8\\ \alpha-\beta&=4\end{aligned}\right\}$ 得

$\alpha=6,\quad \beta=2$

從而

$\left.\begin{aligned}3x=6\cdots\cdots x&=2\\ \frac{1}{y}=2\cdots\cdots y&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\cdots$ 答

$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta&=-8\\ \alpha-\beta&=4\end{aligned}\right\}$ 得

$\alpha=-2,\ \beta=-6$

從而

$\left.\begin{aligned}3x=-2\cdots\cdots x&=-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{y}=-6\cdots\cdots y&=-\frac{1}{6}\end{aligned}\right\}\cdots$ 答

3. 求能合下列方程式之 $x,\ y$ 之實數值.

$$(x^2+1)(y^2+4)-8xy=0$$

解 去括弧得 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$

移項成 $(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2-4xy+y^2)=0$

故 $\qquad (xy-2)^2+(2x-y)^2=0$

能滿足本式之 x, y 之值爲實數值則 $(xy-2)^2$ 及 $(2x-y)^2$ 須是正或零．從而求使本式滿足則各項須是零

故 $xy-2=0\cdots(1)$ 及 $2x-y=0\cdots(2)$

而由 (2) 式得 $y=2x$ 將其代入 (1) 式得

$2x^2-2=0$ $\therefore$ $x=\pm1$ 從而 $x=1$ 則 $y=2$, $x=-1$ 則 $y=-2$,

答 $(x=1, y=2)$; $(x=-1, y=-2)$

第十五章

消去法

於所設方程式中將未知數消去以求係數間之關係，此種法則謂之消去法.

問題

1. 將下列式中之 x 消去.

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0\cdots(1) \\ lx^2+mx+n=0\cdots(2) \end{array}\right\}$$

解 $\left.\begin{array}{l} (1)\text{式}\times l\cdots\cdots alx^2+blx+cl=0 \\ (2)\text{式}\times a\cdots\cdots alx^2+amx+an=0 \end{array}\right\}$ 相減

$$(bl-am)x+(cl-an)=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{an-cl}{bl-am}\cdots\cdots(3)$$

又 $\left.\begin{array}{l} (1)\text{式}\times m\cdots\cdots amx^2+bmx+cm=0 \\ (2)\text{式}\times b\cdots\cdots blx^2+bmx+bn=0 \end{array}\right\}$ 相減

$$(am-bl)x^2+(cm-bn)=0$$

$$\therefore\quad x^2=\frac{bn-cm}{am-bl}\cdots\cdots(4)$$

(3式)^2=(4) 式故 $\left(\frac{an-cl}{bl-am}\right)^2=\frac{bn-cm}{am-bl}$

$$\therefore\quad (an-cl)^2(am-bl)=(bn-cm)(bl-am)^2$$

$$\therefore\quad (an-cl)^2=(bl-am)(cm-bn)$$

若 $bl-am=0$ 則 $\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}$

2. $\frac{x^2(y+z)}{a^3}=\frac{y^2(z+x)}{b^3}=\frac{z^2(x+y)}{c^3}=\frac{xyz}{abc}=1$ 將x,y,z消去

解 由原式得 $\frac{x^2(y+z)}{a^3}=1$. 故 $x^2(y+z)=a^3\cdots\cdots(1)$

同樣得 $y^2(z+x)=b^3\cdots\cdots(2)$, $z^2(x+y)=c^3\cdots\cdots(3)$,

$xyz=abc\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由 (1)式×(2)式×(3)式得

$$x^2y^2z^2(y+z)(z+x)(x+y)=a^3b^3c^3$$

此中用入(4)式 $a^2b^2c^2(y+z)(z+x)(x+y)=a^3b^3c^3$

[但$abc\neq0$]

$\therefore$ $(y+z)(z+x)(x+y)=abc$　去括弧

$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz=abc$

此中用入(1)式, (2)式, (3)式. (4)式

$$a^3+b^3+c^3+2abc=abc$$

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3+abc=0\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

3. 於下式中將 x, y, z 消去.

$$\left.\begin{aligned}x+y+z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\\ \frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)=\frac{c}{z}(z-r)\cdots(3)\end{aligned}\right\}$$

解 作$\frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)=\frac{c}{z}(z-r)=k$ 則

$x-p=k\times\frac{x}{a}$, $y-q=k\times\frac{y}{b}$, $z-r=k\times\frac{z}{c}$ 此三式分邊相加得

$(x+y+z)-(p+q+r)=k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)$ 此中用入(1)式,(2)式

$0-(p+q+r)=k\times 0$

$\therefore\quad p+q+r=0$

第十六章

方程式應用問題

解方程式問題須注意之事項.

1. 將問題細心看幾遍,務須完全明瞭其中意思.
2. 將所要求得之數作成 x, y, z.
3. 表度量衡等之單位須集於一邊,不可將鐘點放於左邊而將分秒放於右邊.
4. 求得之未知數之値須驗其是否與題意適合.
5. 須熟悉方程式之解法.

I. 數及數字問題

1. 有一個三位數,三數字之和爲10,而中央數字等於其他兩數字之和,又原數之數字若逆排則所成之數比原數大 99,求此原數.

解 用x表此數之百位數字,y表十位數字,z表單位數字.故此數爲$100x+10y+z$;又逆排之成$100z+10y+x$,因得下列方程式

$$\begin{cases} x+y+z=10 \cdots\cdots(1) \\ y=x+z \cdots\cdots(2) \\ 100z+10y+x=100x+10y+z+99 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

將(1)式代入(2)式而簡單之　$x+z=5$…………(4).

又由(3)式　得 $z-x=1$………(5)　　因此由(4)式，(5)式 得$2z=6$

$\therefore$　$z=3$　從而　$x=2$，　$y=5$　所求之數爲 $100x+10y+z$　故是

$200+50+3=253$

答　253

2. **有一個一位數後帶有一位小數，兩數字之平方之和爲 *52*，而兩數字掉換地位則所成之數比原數大 *1.8*，求此帶有一位小數之數.**

解　作一位之數字爲 x，一位小數之數字爲 y 則此帶小數之數爲

$\left(x+\dfrac{y}{10}\right)$，　故得下列方程式

$x^2+y^2=52$……(1)，$\left(x+\dfrac{y}{10}\right)-\left(y+\dfrac{x}{10}\right)=\pm1.8$……(2)

由 (2) 式得 $(10x+y)-(10y+x)=\pm18$　　$\therefore$　$x=y\pm2$

若 $x=y+2$ 而用入 (1) 式則	若 $x=y-2$ 用入 (1) 式則
$y=4$　及　-6	$y=6$　及　-4
$y=4$　則　$x=6$　而所求之帶小數之數爲　6.2	$y=6$　則　$x=4$　而所求之帶小數之數爲　4.6
$y=-6$ 則 $x=-4$ $\therefore$ -4.6	$y=-4$　則 $x=-6$　$\therefore$　-6.4

答　±6.4　及　±4.6

3. **有三位之整數，其數之和爲 *18*，而百位之數字比十位之數字之三倍還要大，求能合此條件之最小數.**

解　用 x 表百位之數字．y 表十位之數字，z 表單位之數字．因得下列方程式及不等式

$x+y+z=18$……(1).　　$x>3y$……(2)

x, y z 是基數，即爲 1 至 9 之間之整數；由命題指定求最小數則 (1) 式中之 z 須是最大，因得 $z=9$，故從 (1) 得 $x+y=9$……(3)。

因指定求最小數，則 (3) 式中之 x 須是最小且須滿足 (2) 式；將 (2)

式代入 (3) 式成 $3y+y<9$, 於是求能滿足此式之 y 之最大值; 由 $3y+y=9$, 其能滿足上述條件之 y 之最大整數值祇能是 $y=2$, 於是得 $x=7$, 因此所求之數爲 729　　答 729.

【2】年齡問題

1. 父與子之年齡之和爲 *100* 歲, 而表父子年齡之數字之積比表父之年齡之數字之十倍多 *1800*, 求此父子之年齡.

解　作父之年齡爲 x 歲, 子之年齡爲 y 歲, 得下列方程式.

$x+y=100\cdots\cdots(1)$　　$xy=10x+1800\cdots\cdots(2)$

將其解之, 由 (1) 式得 $y=100-x$　將其代入 (2) 式得

$x(100-x)=10x+1800$

$\therefore\ x^2-90x+1800=0\cdots\cdots(x-60)(x-30)=0$

$\therefore\ x=60$　及　30　從而　$y=100-x$　故

$x=60$　則　$y=40$,　$x=30$　則　$y=70$

而父年 30 歲子年 70 歲爲不合理, 故不用.

答　父 60 歲, 子 40 歲.

【3】速度距離及時間問題

【1】同方向進行

(變更速度)

1. 有火車行 *120* 哩之距離, 若其速度每小時增加 *5* 哩則早到 *20*分鐘, 求火車之速度.

解 作火車所行之速度爲 x 哩，而走 120 哩需 $\frac{120}{x}$ 之時間，增加 5 哩則所費之時間爲 $\frac{120}{x+5}$，於是得下列方程式，

$$\frac{120}{x}=\frac{120}{x+5}+\frac{20}{60}\qquad \text{即}\qquad x^2+5x-1800=0$$

$$\therefore\ (x+45)(x-40)=0\qquad\qquad \therefore\ x=40 \text{ 及 } x=-45$$

而由問題之性質 x 所表者應爲正數，故 -45 不能用.

答 40 哩.

2. 有行路人從 A 地到 B 地須走若干點鐘，若每點鐘快走半哩則祇要五分之四的時間，又若每點鐘慢走半哩則多要二點半鐘，求 A B 間之距離.

解 作 A B 間之距離爲 x 哩，每點鐘之速度爲 y 哩則豫定之鐘點數爲 $\frac{x}{y}$，因得下列方程式.

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y+\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{y}\times\dfrac{4}{5}\cdots\cdots xy-2x=0\cdots\cdots x(y-2)=0\cdots\cdots(1)\\[2ex]\dfrac{x}{y-\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{y}+2\dfrac{1}{2}\cdots\cdots 10y^2-5y-2x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

在 (1) 式中依問題之性質應 $x\neq0$，則 $y-2=0$ 即

$y=2$，將其代入 (2) 式得 $10\times2^2-5\times2-2x=0$

$\therefore\ x=15$　**答** 15哩

【追過】

1. 甲乙丙三人從東向西行，乙比甲後4分鐘出發而在5分鐘後追過甲，丙比乙後7分鐘出發而在7分鐘後追過甲，問還要幾分鐘丙可追過乙.

解 作甲乙丙每分鐘所行之速度爲 x 里，y 里，z 里，而所求之時間爲 t 分鐘，於是甲在 9 分鐘所行之路等於乙在 5分鐘所行之路，故得 $9x=5y$ ………(1)；丙比甲遲 (4+7) 分鐘出發，繼在7分鐘追上甲，故 (4+

$7+7)x=7z$ ……(2). 至於丙的追上乙在丙走 $(7+t)z$ 里而乙走 $(7+7+t)y$ 里之 ，因得 $(14+t)y=(7+t)z$ …… (3).

上列三式中有 x, y, z, t 四個未知數，未知數之數比式多，照規則是不能求得未知數之值，故須將未知數之數減少，於是將 y, z 用 x 表之而代入(3)式.

由 (1) 式得 $y=\frac{9}{5}x$，由 (2) 式得 $z=\frac{18}{7}x$. 將其代入 (3) 式

得 $(14+t)\times\frac{9}{5}x=(7+t)\times\frac{18}{7}x$ 　簡單之

$7(14+t)x=10(7+t)x$ 　$\therefore$ $x(28-3t)=0$ 　然依問題之性質 $x\neq0$，故須是 $28-3t=0$.

即 $3t=28$ …… $t=\frac{28}{3}$ 　即 $\frac{28}{3}$ 分$=9$分20秒.

答 9分20秒

2. 甲乙丙三人同時從A地向相隔6里之B地出發，甲之速度最大，丙最小；出發後2點鐘丙比甲相差1里，其後丙之速度增加2倍，故甲丙同時達到B地；此時乙尚離B地 $1\frac{1}{3}$ 里，問甲乙從A地出發到B地要幾點鐘.

解 作甲，乙，丙之速度為 x 里，y 里，z 里，而甲由出發至達到的時間為 t 點鐘；在 2點鐘之時間甲所行之路為 $2x$ 里，丙為 $2z$ 里，故得 $2x=2z+1$ ………(1)

在此時甲所剩之路程為 $(6-2x)$ 里，丙為 $(6-2z)$ 里，而甲需 $\frac{6-2x}{x}$ 點鐘. 丙需 $\frac{6-2z}{2z}$ 點鐘；由命題此兩者相等，故得

$$\frac{6-2x}{x}=\frac{6-2z}{2z}\cdots\cdots(2) \qquad 及\quad t=\frac{6}{x}\cdots\cdots(3)$$

$x>y>z$。

將此解之. 由 (2) 式得 $2zx+6x-12z=0$ 此中代入由 (1) 式得來之 $2z=2x-1$ 　成 $(2x-1)x+6x-6(2x-1)=0$

即 $2x^2-7x+6=0$ …… $(2x-3)(x-2)=0$ 　$\therefore$ $x=\frac{3}{2}$ 或2.

若 $x=\frac{3}{2}$,

$$z=\frac{1}{2}\left(2\times\frac{3}{2}-1\right)=1$$

由 (3) 式得 $t=6\div\frac{3}{2}=4$ 從而

$$y=\left(6-1\frac{2}{3}\right)\div 4=\frac{13}{12}$$

$$x=\frac{18}{12},\ y=\frac{13}{12},\ z=\frac{12}{12}$$

此能滿足　$x>y>z$

若 $x=2$

$$z=\frac{1}{2}(2\times 2-1)=\frac{3}{2}$$

由 (3) 式得　$t=6\div 2=3$　從而

$$y=\left(6-1\frac{2}{3}\right)\div 3=\frac{13}{9}$$

$$\therefore\quad x=\frac{36}{18},\ y=\frac{26}{18},\ z=\frac{27}{18}$$

此不能滿足　$x>y>z$

6 里 $\div\frac{13}{12}$ 里 $=5\frac{7}{13}$　　答　甲 4 點鐘，乙 $5\frac{7}{13}$ 點鐘

3. 甲乙兩人競走，甲一點鐘所走之路，乙祇要59分42秒，在走了三公里之後，甲要落後多少公尺.

解　59分42秒 $=59\frac{42}{60}$ 分 $=\frac{597}{10}$ 分 $=\frac{597}{10\times 60}$ 點鐘 $=\frac{199}{200}$ 點鐘.　今作甲一點鐘所走之距離爲 x 里，乙所走者爲 y 里則

$x=\frac{199}{200}y$……(1)　作所要求得之距離爲 d 里則甲走 $(3-d)$ 里之時間與乙走 3 里之時間相等，故　$\frac{3-d}{x}=\frac{3}{y}$

即　$dy=3(y-x)$……(2).　此中代入 (1) 式

$dy=3\left(y-\frac{199}{200}y\right)$　　$\therefore$　$200dy-3y=0$……$y(200d-3)=0$，在問題之性質上　$y\neq 0$，故　$200d-3=0$……$d=\frac{3}{200}$，從而

$\frac{3}{200}$ 里 $=\frac{8\times 1000}{200}$ 公尺 $=15$ 公尺

答　15公尺

4. 甲乙兩人競走，甲走 3 步之距離與乙走 4 步之距離相等，而甲走 4 步所需之時間與乙走 5 步之時間相等，令兩人走 80 丈即 160 步之距離，甲先乙 20 步達到，問甲乙一步之長度各若干尺.

解 作甲，乙各一步之距離爲 x 步，y 步則 $3x=4y\cdots\cdots(1)$

而甲走 $4x$ 之時間與乙走 $5y$ 之時間相等；

今乙之 20 步爲 $20y$ 步，於是甲走 160 步之時間與乙走 $(160-20y)$ 步之時間相等，因得

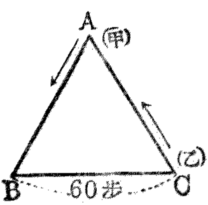
$\dfrac{160}{4x}=\dfrac{160-20y}{5y}\cdots\cdots(2)$　　即　$40y=32x-4xy$ 此中代入

(1) 式　$30x=32x-3x^2$　$\therefore\ 3x^2-2x=0\cdots\cdots x(3x-2)=0$

依問題之性質上 $x\neq0$ 故 $3x-2=0\cdots\cdots x=\dfrac{2}{3}$

從而由 (1) 式得 $y=\dfrac{3}{4}x=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{2}{3}$步$=\dfrac{10}{3}$尺$=3\dfrac{1}{3}$尺，$\dfrac{1}{2}$步$=\dfrac{5}{2}$尺$=2\dfrac{1}{2}$尺　**答** 甲$3\dfrac{1}{3}$尺，乙$2\dfrac{1}{2}$尺.

5. 

如圖之正三角形，ABC 每邊各長 60步，有甲乙兩人依箭頭所示之方向競走，甲每分鐘走65步，乙每分鐘走50步，今甲在頂點A，乙在頂點C，問須幾分鐘後甲乙同在一邊上.

解 欲使甲乙同在一邊，須甲追出乙兩邊，計 60步×2＝120 步，即甲在乙之後方 60步之內. 今作甲進至離乙 60 步所需之時間爲 x 分，則得方程式如下

$$65x-50x=60\qquad\therefore\quad x=4$$

於是甲在4分鐘所走的路爲 65步×4＝260 步；260步÷60步＝$4\frac{1}{3}$，即是甲行至 BC 邊上. 而乙爲 50步×4÷60步＝$3\frac{1}{3}$，即是行至 AC 邊上. 甲於達到 C點時所走之路爲 60步×5＝300步，而乙在此時間所走之路

爲 $50步\times\frac{3000}{60}=\frac{3000}{13}步$，即已行過 $\frac{3000}{13}步\div 60步=3\frac{11}{13}邊$，應是在 AC 邊上．

由此斷者甲在走 300 步達到 C 點時，乙在 AC 邊上，從而所求之時間爲

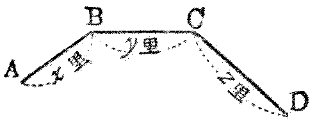
$\frac{300}{65}=4\frac{8}{13}$ 分．

答 $4\frac{8}{13}$ 分．

【路中有斜坡】

1. 甲乙兩地相隔 7 里，有人往來於其間，去時要 5 點 24 分，回來要 6 點鐘，此人上山每點鐘走 $\frac{5}{6}$ 里，下山走 $1\frac{2}{3}$ 里，平地走 $1\frac{1}{3}$ 里，問甲乙兩地之間有平地幾里．

解 由命題知去的路上多向下斜的路，今什 A 爲出發點．AB 爲向上的路，BC 爲平地，CD 爲向下斜的路，AB $=x$ 里，BC $=y$ 里，CD $=z$ 里，於是往路爲



$$\frac{x}{\frac{5}{6}}+\frac{y}{1\frac{1}{3}}+\frac{z}{1\frac{2}{3}}=5\frac{24}{60}\cdots\cdots(1)$$

歸路爲 $\frac{x}{1\frac{2}{3}}+\frac{y}{1\frac{1}{3}}+\frac{z}{\frac{5}{6}}=6$ (2) 又 $x+y+z=7\cdots(3)$

由 (1) 式得 $8x+5y+4z=36\cdots\cdots(4)$ 由 (2) 式得

$4x+5y+8z=40\cdots\cdots(5)$． 其次 (5) 式 ×2 − (4) 式得

$3y+12z=44\cdots\cdots(6)$ 又 (5) 式 − (3) 式 ×4 得

$y+4z=12\cdots\cdots(7)$ 從而 (7) 式 ×3 − (6) 式得

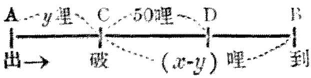
$2y=8 \quad \therefore\ y=4$ 答 平地 4 里．

【中途變更速度】

1. 從某站至他站之汽車，在出發後 *1* 點鐘發生破損致滯留一點鐘，然後用從前之速度之 $\frac{3}{5}$ 前進，達到時較定時遲三點鐘，

若此破損發生於50哩之後則可早到1點20分,問汽車原來之速度,與兩站相隔之距離.

解 作A爲出發點,B爲達到點,C爲發生破損地,CD=50哩,兩站間之距離AB爲x哩,汽車之初速度爲每時y哩,AB間驅走所要之時間爲$\frac{x}{y}$時,由命題每點鐘速度爲



y哩,在BC間所走之速度爲$\frac{3}{5}y$哩 致差2 點鐘. 而 BC 等於$(x-y)$哩,故得下列方程式.

$$\frac{x-y}{\frac{3}{5}y}-\frac{x-y}{y}=2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又50哩之途程用y哩及$\frac{3}{5}y$哩之速度走之, 相差1時點20分, 因得

$$\frac{50}{\frac{3}{5}y}-\frac{50}{y}=1\frac{20}{60}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1) 式得 $\left(\frac{5}{3}-1\right)\frac{x-y}{y}=2\cdots\cdots\cdots\cdots x=4y$

由 (2) 式得 $y=25$ 從而 $x=4y=4\times25=100$

答 原來速度25哩,距離100哩

[相對之方向進行]

1. 甲列車由東地,乙列車由西地同時相對開行,其相會之地在兩車所行之途程相差63哩之點,此後甲車經過四點鐘到達西地,乙車經過9點鐘到達東地,求兩地之距離與兩車之速度.

解　作甲列車及乙列車每點鐘之速度爲 x 哩與 y 哩，由命題從相會點至西地甲車走四點鐘即 $4x$ 哩，此段路程乙車走 $\frac{4x}{y}$ 點鐘；又從相會點至東地

爲 $9y$ 哩，此段路程甲車走 $\frac{9y}{x}$ 點鐘，兩者之時間相等，故得下列方程式。

$$\frac{4x}{y}=\frac{9y}{x}\cdots\cdots 4x^2=9y^2 \qquad \therefore\ 2x=\pm 3y\cdots\cdots(1)$$

而 x y 表速度故應是正．從而 $2x=-3y$ 不能用，因此

$2x=3y$ 即 $x=\frac{3}{2}y$　而 $x>y$，可知相會時甲列車所走之程較多，故得下列方程式．

$9y-4x=63\cdots\cdots(2)$　　將 $x=\frac{3}{2}y$ 代入 (2) 式得 $y=21$.

從而　$x=\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}\times 21=31.5$

又　$9y+4x=9\times 21+4\times 31.5=315$

答　甲列車 31.5 哩，乙列車 21 哩，距離 315哩．

2.　甲乙兩地相隔385哩，A號飛機由甲地出發向乙地，其後一點鐘B號飛機由乙地向甲地出發，在中途相遇之後2點55分A機達到乙地，而B機於三點鐘達到甲地，求兩機之速度．

解

作相會點爲丙，A，B各機每點鐘之速度爲 x 哩與 y 哩．　甲丙間$=3y$ 哩．　丙乙間$=2\frac{55}{60}x$ 哩．

A 在甲丙間行 $\frac{3y}{x}$ 點鐘，B 在乙丙間行 $\frac{2\frac{55}{60}x}{y}$ 點鐘　即 $\frac{35x}{12y}$ 點鐘，故得下列二方程式．

$$\begin{cases} 3y+\dfrac{35}{12}x=385\cdots\cdots 36y+35x=4620\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{3y}{x}-1=\dfrac{35x}{12y}\cdots\cdots 36y^2-12xy-35x^2=0\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由 (2) 式得 $(6y-7x)(6y+5x)=0.$

$\therefore\ 6y-7x=0$ 即 $y=\dfrac{7}{6}x,\quad 6y+5x=0$ 即 $y=-\dfrac{5}{6}x$

然 x, y 爲速度故應是正，從而 $y=-\dfrac{5}{6}x$ 不能用.

因將 $y=\dfrac{7}{6}x$ 代入 (1) 式得 $36\times\dfrac{7}{6}x+35x=4620$

$\therefore\ x=60$ 從而 $y=70$ 答 A 號每點鐘 60 哩; B 號 70 哩.

3. 第一列車以每點鐘 *30* 哩之速度由甲站向乙站出發，遲 *12* 分鐘第二列車以每點鐘 *40* 哩之速度由乙站向甲站出發，在離兩站間之中央地點 $\dfrac{1}{2}$ 哩兩車相遇，問甲乙兩站相隔若干里.

解 本問有兩種情勢，作甲乙間之距離爲 x 哩.

相會點近乙地時	相會點近甲地時
第一列車已行 $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$ 哩	第一列車已行 $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ 哩,
第二列車已行 $\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ 哩.	第二列車已行 $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\right)$ 哩,
故 $\dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}}{30}-\dfrac{12}{60}=\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}}{40}$	故 $\dfrac{\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}}{30}-\dfrac{12}{60}=\dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}}{40}$
$x=41$	$x=55$

答 41 哩或 55 哩.

4. 甲乙二人繞池一周，同時在同一地點相對向出發；甲在出發後6點鐘回到原出發點，乙在與甲相遇後8點鐘回到原出發點，問乙繞池一周要多少時間.

解 作甲乙二人每人每點鐘之速度為x里與y里，甲在6點鐘繞池一周則此池之周圍為$6x$里；現在作乙繞池一周之時間為t點鐘，則乙與甲相遇之時為出發後（$t-8$）點鐘；因得下列兩方程式.

$$(x+y)(t-8)=6x\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$t=\frac{6x}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

不過這兩個方程式中卻有三個未知數，依照普通原則是不能求得解答的，所以要用特別方法由(1)式得 $\frac{(x+y)(t-8)}{x}=6$ ［但 $x\neq0$］

即 $\left(\frac{x+y}{x}\right)(t-8)=6\cdots\cdots\cdots\cdots\left(1+\frac{y}{x}\right)(t-8)=6$

此中代入由(2)式得來之 $\frac{t}{6}=\frac{x}{y}$ 即 $\frac{y}{x}=\frac{6}{t}$，成

$$\left(1+\frac{6}{t}\right)(t-8)=6\cdots\cdots(t+6)(t-8)=6t\cdots\cdots(t-12)(t+4)=0$$

∴ $t=12$或-4，然t應是正數，故-4不能用.

答 12 點鐘.

5 有甲乙二人繞池行走，共朝同一方向走則每隔20分鐘相遇一次；若相背方向行走則每隔4分鐘相遇一次；問甲乙繞池行走各要多少時間.

解 作甲繞池一周所要之時間為x分，乙為y分，池之周圍為p丈；於是甲一分鐘之速度為$\frac{p}{x}$丈，乙為$\frac{p}{y}$丈；故由命題得下列方程式.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{p}{x}\times 4+\frac{p}{y}\times 4=p\cdots\cdots\div 4p\cdots\cdots\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\\ \frac{p}{x}\times 20-\frac{p}{y}\times 20=p\cdots\cdots\div 20p\cdots\cdots\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{20}\end{array}\right\}\text{兩式相加}$$

[但 $p\neq 0$] $\qquad \frac{2}{x}=\frac{6}{20}\cdots\cdots x=\frac{20}{3}$

從而 $y=10$ 　　　　答 甲6分40秒，乙10分.

6. 風速每秒鐘20米，順風之時於看見打樁之動作後隔$1\frac{3}{5}$秒聽見聲音，逆風之時則須隔$1\frac{4}{5}$秒，問無風之時須隔幾秒可以聽見聲音.

解 作音響每秒行x米，樁與人之距離爲d米，順風時目擊後$\frac{d}{x+20}$秒聽見聲音，逆風時$\frac{d}{x-20}$秒後始聽見之，故得下列方程式。

$$\therefore\left\{\begin{array}{l}\frac{d}{x+20}=1\frac{3}{5}\cdots\cdots\therefore\frac{x+20}{d}=\frac{5}{8}\cdots\cdots\frac{x}{d}+\frac{20}{d}=\frac{5}{8}\cdots\cdots(1)\\ \frac{d}{x-20}=1\frac{4}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{x-20}{d}=\frac{5}{9}\cdots\cdots\frac{x}{d}-\frac{20}{d}=\frac{5}{9}\cdots\cdots(2)\end{array}\right.$$

無風時隔$\frac{d}{x}$秒可以傳達到，因求$\frac{d}{x}$之值。

兩式相加得 $\frac{2x}{d}=\frac{85}{72}$ $\qquad\therefore\ \frac{x}{d}=\frac{85}{72\times 2}$

$\therefore\ \frac{d}{x}=\frac{144}{85}$ $\qquad\therefore\ \frac{d}{x}=1\frac{59}{85}$ 　　答 $1\frac{59}{85}$秒

【4】水流問題 ［速之和與差］

1. 住於甲村之人至下游24哩之乙村，一半走路一半坐船，要5點鐘；又回來亦一半走路一半坐船，要7點鐘；若河水是靜水則此旅途需時$5\frac{5}{3}$點鐘；問走路划船與河流之速度各幾何.

解 作徒步每點鐘爲 x 哩，舟在靜水每點鐘行 y 哩，河流速度每點鐘 z 哩，故下水每點鐘行$(y+z)$哩，上水行$(y-z)$哩，於是得下列三方程式.

往時 $\dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{y+z}=5$……………(1)

歸時 $\dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{y-z}=7$……………(2)

靜水中 $\dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{y}=5\dfrac{2}{3}$……………(3)

(2)式−(1)式得 $\dfrac{6}{y-z}-\dfrac{6}{y+z}=1$ 將分母解去

$6(y+z)-6(y-z)=(y-z)(y+z)$ 即

$12z=y^2-z^2$……………(4)

(3)式−(1)式得 $\dfrac{12}{y}-\dfrac{12}{y+z}=\dfrac{2}{3}$…… $6z=\dfrac{1}{3}y(y+z)$，將其代入

(4)式得 $\dfrac{2}{3}y(y+z)=y^2-z^2$，簡單之

$3z^2-2yz-y^2=0$……$(3z-y)(z+y)=0$ ∴ $y=3z$ 及 $y=-z$

依問題之性質 $x, y\ z$ 應是正故不用 $y=-z$. 將 $y=3z$ 代入

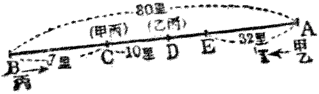
(4)式 $12z=9z^2-z^2$ ∴ $4z(2z-3)=0$ 但 $z\neq 0$ 故

$z=\dfrac{3}{2}$ 從而 $y=3z=\dfrac{9}{2}$，更將 y 之值代入(3)式得 $x=4$.

答 徒步 4 里，划船 4.5 哩，水流 1.5哩

2. 沿河有A,B兩村，B村在A村之下游80里，今甲乙兩人各坐船從A村往B村，又丙坐船由B村往A村，三人同時出發，丙在與甲相遇後上行 10 里與乙相遇；甲到 B 村時丙在 A 村之下流32 里，水速一點鐘 14 里，甲乙兩人在靜水中每點鐘相差24 里，問甲乙丙三人在靜水中各人之速度如何.

解 由命題知甲比乙快，作甲在靜水中每點鐘行 x 里，則乙行$(x-24)$里；又甲走下水每點鐘應是$(x+14)$里，乙則是$(x-24+14)$里，即$(x-10)$里. 令作丙在靜水中每點鐘行 y 里，則走上水每點鐘所行爲$(y-$



14) 里，作甲丙之相遇地爲 C，乙丙之相遇地爲 D，$BC=d$ 里，則丙走上水航行過 BC 之時間爲 $\dfrac{d}{y-14}$，此與甲走下水過 AC 所需之 $\dfrac{80-d}{x+14}$ 時間相等，故

關於甲丙 $\dfrac{d}{y-14}=\dfrac{80-d}{x+14}$ 得 $\dfrac{d}{80-d}=\dfrac{y-14}{x+14}\cdots\cdots(1)$

關於乙丙 $\dfrac{80-(d+10)}{x-10}=\dfrac{d+10}{y-14}$ 得 $\dfrac{70-d}{x-10}=\dfrac{d+10}{y-14}\cdots(2)$

關於甲丙 $\dfrac{80}{x+14}=\dfrac{80-32}{y-14}$ 得 $\dfrac{y-14}{x+14}=\dfrac{3}{5}\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (1) 式與 (3) 式得 $\dfrac{d}{80-d}=\dfrac{3}{5}$　　$\therefore\ d=30$

將其代入 (1) 式，(2) 式，由 (1) 式得

$\dfrac{3}{5}=\dfrac{y-14}{x+14}$　　$\therefore\ 5y-3x=112\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由 (2) 式得 $y-x=4\cdots\cdots(5)$　因而由 (4) 式，(5) 式得 $x=46$，$y=50$

答 甲 46 里，乙 22 里，丙 50 里

【5】協力問題

【關於工作】

1. 甲乙丙三人共作一事，此事如甲一人獨做比三人合做要多 9 日，乙一人獨做要多 $16\frac{1}{2}$ 日，丙一人獨做要多三倍的日子，問三人合做要多少日.

解 作三人合力工作所要的日子爲 x 日，則甲一人獨做所要的日子爲 $(x+9)$ 日，乙爲 $(x+16\frac{1}{2})$ 日，丙爲 $3x$ 日；於是甲一日所做的工作爲 $\dfrac{1}{x+9}$，乙丙亦同樣作之，因得方程式如下

$$\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+16\frac{1}{2}}+\frac{1}{3x}=\frac{1}{x}\quad \text{簡單之}$$

$8x^2+51x-594=0 \quad \therefore \quad (8x+99)(x-6)=0 \quad \therefore \quad x=6$

及 $x=-\frac{99}{8}$ 但x應是正數所以不用負值.

答 6 日

2. 某種工作甲一人作之比乙丙兩人協力作之的日數要多m倍，乙一人作之比甲丙協力作之的日數多n倍，丙一人作之的日數比甲乙協力作之的日數多p倍，試證明m, n, p間有如下的關係.

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$$

解 作甲乙丙每人所要的日數爲x, y, z 於是乙丙兩人一日協力所做的工作爲 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，而做完此工作所要的日數爲

$1\div\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{yz}{y+z}$， 因此 $x=m\times\frac{yz}{y+z}$

卽 $m=\frac{x(y+z)}{yz}$ $\therefore$ $m+1=\frac{xy+xz+yz}{yz}$ 卽

$\frac{1}{m+1}=\frac{yz}{xy+yz+zx}$， 同樣得 $\frac{1}{n+1}=\frac{zx}{xy+yz+zx}$，

$\frac{1}{p+1}=\frac{xy}{xy+yz+zx}$ 從而將此三式分邊相加得

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=\frac{yz}{xy+yz+zx}+\frac{zx}{xy+yz+zx}$$

$$+\frac{xy}{xy+yz+zx}=\frac{yz+zx+xy}{xy+yz+zx}=1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{m+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{p+1}=1$$

【關於給水的問題】

1 有漏底水桶用甲水管灌之兩點鐘可滿，用乙水管灌之要三點鐘，用甲乙兩管則要一點鐘，若此桶不漏，用甲乙兩管灌之要多少時候可滿.

解 作由滿桶水漏至滴水全無所要之時間為x點鐘，於是一點鐘所漏之水為桶之$\frac{1}{x}$分；甲水管在兩點鐘將桶灌滿，而甲水管一面灌時一面有漏去。於是甲管一點鐘所灌的量為桶之$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)$，乙管一點鐘為$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right)$；甲乙兩管同灌則一點鐘留於桶中之水為$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}$；由命題也即桶之滿量，故

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}=1 \qquad \therefore \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{6}$$

因此得甲管一點鐘所灌入之水是桶之$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$分，乙管為$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$分，於是兩管同時所灌之水一點鐘為$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$；若桶不漏則灌滿一桶所要之時間為$1\div\frac{7}{6}=\frac{6}{7}$．

答 $\frac{6}{7}$點鐘

【6】車輪問題

1. 車之前輪的周圍比後輪的周圍小，車前進36尺兩輪的迴轉數差一回，若前輪的周圍增大1尺，則前進60尺時前輪比後輪多轉一回，問前後輪之直徑各幾何．

解 作前輪後輪之周圍為x尺與y尺，則前進36尺各輪迴轉之數為$\frac{36}{x}$，$\frac{36}{y}$回，因得式於下，

$$\frac{36}{x}-\frac{36}{y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \qquad [\text{但} \quad x<y]$$

同樣得 $$\frac{60}{x+1}-\frac{60}{y}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)式×5−(2)式×3　得　$\frac{180}{x}-\frac{180}{x+1}=2$

$\therefore\ x^2+x-90=0$　$\therefore\ (x+10)(x-9)=0$　$\therefore\ x=-10$　及

$x=9$　但問題之性質上 x 應是正，故不用 $x=-10$　之(1)式得　$y=12.$

前輪9尺……直徑＝9尺÷3.1416＝2.8647尺

後輪12尺……直徑＝12尺÷3.1416＝3.8197尺

答　前輪2尺8寸6分5厘，後輪3尺8寸2分

【7】分配問題

1. 某人將錢若干分與甲乙丙三子，甲所得錢之三倍與錢之總額之兩倍相差 *600* 圓，乙所得錢之兩倍與錢之總額之三倍相差 *1200* 圓，丙所得錢之四倍與錢之總額之五倍相加得 *3400*圓，問每人各得幾何.

解　作甲乙丙所得之錢爲x圓，y圓，z圓，因得式於下

$3x-2(x+y+z)=\pm600$……………… $x-2(y+z)=\pm600$………(1)

$2y-3(x+y+z)=\pm1200$……… $-(3x+y+3z)=\pm1200$ ……(2)

$4z+5(x+y+z)=3400$……………… $5x+5y+9z=3400$ ………(3)

(2)式爲複號，依問題之性質應是如下.

$3x+y+3z=1200$………(4)，然於(1)式則不明.

故　$\left.\begin{array}{r}x-2(y+z)=600\\3x+y+3z=1200\\5x+5y+9z=3400\end{array}\right\}$

將此解之得 $x=3800$，$y=7500$，

$z=-5900$，z 是負數故不可能.

$\left.\begin{array}{r}x-2(y+z)=-600\\3x+y+3z=1200\\5x+5y+9z=3400\end{array}\right\}$

將此解之得　$x=200$，$y=300$

$z=100.$

答　甲200圓，乙300圓，丙100圓

【8】交換問題

1. 有甲乙兩工人，各人之工價不同，在某期間內共同作一工作，甲一天不停，乙停六天，期間終了，甲得五十七圓六角，

乙得三十二圓四角；若乙一天不停而甲停六天，則兩人所得之工資相同，問兩人每日所得之工資幾何.

解 作甲每日所得爲x分，乙爲y分；甲所作工日數爲m天，乙爲$(m-6)$天.

故得$mx=5760\cdots\cdots(1)$　及　$(m-6)y=3240\cdots\cdots(2)$

若乙不停，甲停6日則得方程式如下.

$(m-6)x=my\cdots\cdots\cdots(3)$. 將此解之，而依問題之性質 $m\neq0$，於是由

(1)式得 $x=\dfrac{5760}{m}$　由(2)式得 $y=\dfrac{3240}{m-6}$　將其代入(3)式

$$(m-6)\times\frac{5760}{m}=m\times\frac{3240}{m-6}$$

$\therefore\ 16(m-6)^2=9m^2$　$\therefore\ 4(m-6)=\pm3m$

由命題 $m-6$ 及 m 爲正數則祇能採用 $4(m-6)=3m$　因得$m=24$

於是由(1)式得 $x=240$　由(2)式得 $y=180$

答 甲二圓四角；乙一圓八角

2. 有13000圓貸與甲乙二戶，利率不同，一年合計得利息840圓；若以甲戶之數額取乙戶之利率則一年得利息360圓，又以乙戶之數額取甲戶之利率則一年得利息490圓，問利率各幾何.

解 作甲戶之本金爲x圓則乙戶爲$(13000-x)$圓，又作甲之利率爲p，乙爲q，於是得方程式如下.

$px+q(13000-x)=840\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$qx=360\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$　$p(13000-x)=490\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

而 p、q、x、$13000-x$ 依問題之性質不等於零，故由(2)式

得$q=\dfrac{360}{x}$，由(3)式得$p=\dfrac{490}{13000-x}$　將其代入(1)式

$$\frac{490}{13000-x}\times x+\frac{360}{x}\times(13000-x)=840$$

$\therefore\ x^2-12000x+36000000=0$　$\therefore\ (x-6000)^2=0$

$\therefore\ x=6000$　從而由(3)式得$p=0.07$，由(2)式得$q=0.06$

答 甲7厘，乙6厘

3. 有上下兩種貨物，六圓錢之下品貨比六圓錢之上品貨多一個，現在上下兩種各賣出六圓，將上下品拿錯，致損失三角錢，問上下兩種貨物各賣價幾何.

解 上下品貨物拿錯，將一個上品貨當下品貨賣去致損失三角錢，則上下品價格之差是三角錢；作上品一個之價錢爲 x 分，則下品之價爲 $(x-30)$ 分，因得下列方程式.

$$\frac{600}{x-30}-\frac{600}{x}=1\cdots\cdots\cdots\frac{600\times30}{x(x-30)}=1$$

$\therefore\quad x^2-30x-18000=0\cdots\cdots\cdots\cdots(x-150)(x+120)=0$

從而 $x=150$ 及 $x=-120$ 依問題之性質 x 應是正數故負值不能用. **答** 上150分, 下120分

4. 二萬斤以上之煤用若干人從某地搬至某地要 *8* 點鐘，若加 *8* 人而將每人每 *1* 點鐘之搬運量減去 *5* 斤就要 *7* 點鐘；又若減去 *8* 人而將每人每 *1* 點鐘之搬運量增加 *11* 斤就要 *9* 點鐘，問起初使用幾人.

解 作使用的人數爲 x，每人一點鐘所運之煤爲 y 斤則所要搬運之煤爲 $8xy$ 斤，因得方程式如下.

$8xy=7(x+8)(y-5)=9(x-8)(y+11)$

$\therefore\quad 8xy=7xy-35x+56y-280=9xy+99x-72y-792$

$$\therefore\quad\begin{cases}8xy=7xy-35x+56y-280\cdots\cdots xy=-35x+56y-280\cdots\cdots(1)\\ 8xy=9xy+99x-72y-792\cdots\cdots xy=-99x+72y+792\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$$0=64x-16y-1072$$

$\therefore\quad y=4x-67$ 將其用入(1)式

$(4x-67)x=-35x+56(4x-67)-280$

$\therefore\quad x^2-64x+1008=0\cdots\cdots(x-36)(x-28)=0$

$\therefore\quad x=36$ 或 $x=28$

若　$x=36$，則

$y=4x-67=4\times 36-67$

$=77$

從而搬運之煤爲

$8xy=8\times 36\times 77=22176$

若　$x=28$，則

$y=4x-67=4\times 28-67$

$=45$

從而搬運之煤爲

$8xy=8\times 28\times 45=10080$

兩者之中 10080 斤不合命題.

答　36 人

【9】雜問題

1. 三年前買16圓的米比今年要多3斗9升，又現在買4斗米比三年前要貴15圓6角，問今年米價每升幾何.

解　作三年前的米價x分，今年的米價爲y分，因得下列兩方程式.

$$\begin{cases}\dfrac{1600}{x}-\dfrac{1600}{y}=39\cdots\cdots\cdots\cdots y-x=\dfrac{39}{1600}xy\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ 40y-40x=1560\cdots\cdots\cdots\cdots y-x=39\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

於 (1) 式中代入(2)式得　$39=\dfrac{39}{1600}xy$　$\therefore\ xy=1600$

此中將由 (2) 式得來之 $x=(y-39)$ 代入之

$\boxed{y^2-39y-1600=0}\cdots\cdots(y-64)(y+25)=0$

$\therefore\ y=64$　及　$y=-25$　依問題之性質 y 應是正值，故負值不用.

答　64分

2. 有上中下三種蘋菓，買一圓上等的比買中等的少4個，又買三圓下等的比買中等的多20個，而中等1個之價格是上下各一個的平均價，問中等的一圓買幾個.

解　作中等一圓買x個，於是上等一圓買$(x-4)$個，又買中等三圓得$3x$個，下等則買$(3x+20)$個；因此各一個的價格爲上 $\dfrac{1}{x-4}$ 圓，中$\dfrac{1}{x}$ 圓，下 $\dfrac{1}{3x+20}$ 圓；由命題得方程式如下.

$$\frac{1}{x}\times 2=\frac{1}{x-4}+\frac{3}{3x+20}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{x}=\frac{6x+8}{(x-4)(3x+20)}\cdots\cdots(x-4)(3x+20)=(3x+4)x$$

$$\therefore\quad x=20$$

答 20 角

3. 路上有甲乙兩地，其距離爲10里，炭一袋之價甲地比乙地便宜30分，甲地之運炭費爲6里以內每袋炭每里20分，6里以上則於超過部份每里取費10分；乙地之運炭費爲6里以內每袋每里10分，6里以上則於超過部份每里取費5分，此路上有地點往甲乙兩處買炭皆無損益，問此地點離甲地幾里.

解　作甲地一袋炭之價格爲x分，則乙地爲$(x+30)$分，現分別考慮之.

第　一　作地點爲由甲地向乙地 d里.

今　$d<4$　則　$x+20d=(x+30)+6\times10+5(4-d)$

將此解之得　$d=\frac{22}{5}=4\frac{2}{5}$，然　$d<4$，與假定相反，

即由甲往向乙四里以內無適合命題之地點.

第　二　$4<d<6$　　則　$x+20d=(x+30)+10(10-d)$

故　$d=4\frac{1}{3}$，　此能滿足假定 $4<d<6$，即所求者.

第　三　$6<d<10$

$$x+20\times6+10(d-6)=(x+30)+10(10-d)$$

故　$d=3\frac{1}{2}$　　此與 $6<d<10$ 之假定相反.

第　四　$10<d<16$

$$x+20\times6+10(d-6)=(x+30)+10(d-10)$$

故　$130=0$　　此不可能.

第五　$16<d$

$$x+20\times6+10(d-6)=(x+30)+10\times6+5(d-16)$$

故　$d=-10$　　此與假定　$16<d$　相反.

次由甲地向乙地之反對方向求一地點, 作爲 d' 里.

第一　$6>d'$ 則 $x+20d'=(x+30)+6\times10+5(d'+4)$

故　$d'=7\frac{1}{3}$　　此與假定 $6>d'$ 相反.

⊙ 第二　$d'>6$

$$x+6\times20+10(d'-6)=(x+30)+6\times10+5(d'+4)$$

故　$d'=10$　　此能滿足假定　$d'>6$, 故卽所求者.

答　由甲地向乙地 $4\frac{1}{3}$ 里

由甲地向乙地反對方向 10 里

【10】混合問題

1. 桶中有純酒精 3 石 6 斗, 自其中取出若干而將水補入之, 後又從此混合液中取出比前量更多 8 斗 4 升之量, 亦以同量之水補入之, 現在桶中之酒精與水等量. 問最初取出之酒精是多少.

解　作最初取出者爲 x 升, 於是桶中所剩之純酒精爲 $(360-x)$升, 此中補入水若干使之依舊成 3 石 6斗, 故純酒精之成分爲 $\frac{360-x}{360}$; 第二次所取出之量爲 $(x+84)$ 升, 其中純酒精爲 $(x+84)\times\frac{360-x}{360}$ 升, 而桶中剩下之純酒精爲 $\left[(360-x)-\frac{(x+84)(360-x)}{360}\right.$ 升, 卽

$$\frac{(360-x)(360-x-84)}{360}$$ 升,

由命題知此即桶之一半, 爲 180 升, 因得方程式如下.

$$\frac{(360-x)(360-x-84)}{360}=180$$

將其解之, 作 $360-x=y$, 則上式可寫成

$$\frac{y(y-84)}{360}=180 \qquad \therefore\ y^2-84y-180\times360=0$$

$$\therefore\ (y+216)(y-300)=0 \qquad \therefore\ y=-216 \text{ 及 } 300$$

$$\text{從而}\begin{cases}360-x=-216\cdots\cdots\cdots\cdots x=576\\360-x=300\cdots\cdots\cdots\cdots x=60\end{cases}$$

然由 3 石 6 斗 取出 5 石 7 斗 6 升 爲不可能.

答 6 斗.

2. 有嵌有寶石之純金指環, 其重爲 *9.1* 兩, 在水中衡之爲 *8.1* 兩; 金之比重爲 *19*, 寶石之比重爲 *2.5*; 求金及寶石之重量.

解 作金之重爲 x 兩, 寶石之重爲 y 兩, 得式如下,

$$x+y=9.1\cdots\cdots(1)$$

而金之比重爲19, 然在水中因爲浮力的緣故, 失去 $\frac{1}{19}$ 的重量, 故金在水中的重量爲 $\frac{18}{19}x$ 兩, 因得方程式如下,

$$\frac{18}{19}x+\frac{1.5}{2.5}y=8.1\cdots\cdots\cdots(2)$$

將此解之; 將 (2) 式之分母解去得 $30x+19y=256.5$

此中減去 (1) 式×30 得 $y=1.5$. 從而 $x=7.6$.

答 金 7.6 兩, 寶石 1.5 兩

【11】 折 扣 問 題

1. 某物漲價兩次, 第二次所漲比第一次少漲一成, 後來跌價一半, 然而比本來價格還要貴五成三, 問各次所漲是幾成.

解 作第一次所漲為 p 成，本來價格為 x 圓，則第一次漲價後之物價為 $x(1+p)$ 圓；第二次所漲為 $(p-0.1)$ 成，而第二次漲價後之物價為 $x(1+p)\times(1+p-0.1)$ 圓；因由命題得方程式如下。

$$\frac{x(1+p)(1+p-0.1)}{2}=x(1+0.53)$$ 將其解之，

作 $1+p=m$，代入式中去分母而整頓之得

$100m^2-10m-306=0\cdots\cdots(10m-18)(10m+17)=0$

依問題之性質 m 是正值，故 $10m+17\neq 0$，因此 $m=1.8$

$1+p=m$ 則

$1+p=1.8$ $\therefore$ $p=0.8$ **答** 第一次八成，第二次七成

2. 一隻錶照定價賣去可賺54圓95分，若將定價減去一成半，賣去6個，其所得利益，與減去一成賣去5個所得利益之 $\frac{3}{4}$ 相等；求此錶之進貨價。

解 作定價為 x 圓，進價為 y 圓，因得方程式如下。

$x-y=54.95\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$6[(1-0.15)x-y]=5[(1-0.1)x-y]\times\frac{3}{4}\cdots\cdots(2)$

由 (2) 式得 $23x=30y$，用之於 (1) 式得 $y=180.55$

答 180圓55分

3. 甲乙兩校各招生三百名，報名的人數比兩校所招的人數的八倍還要多150名；此與去年相比較則兩校相合之數比去年少去10%，然甲校比去年却增加2%，祇是乙校少去20%，問兩校之報名人數各若干名。

解 作甲校報名人數為 x 人，乙校為 y 人，而報名人總數為 $(300\times2\times8+150)$ 人卽 4950，因得方程式如下。

$x+y=4950\cdots\cdots(1)$

又甲校比去年增加2%，則去年人數為

$\dfrac{x}{1+\frac{2}{100}}$ 人卽 $\frac{50}{51}x$ 人，而乙校為 $\dfrac{y}{1-\frac{20}{100}}$ 人 卽 $\frac{5}{4}y$ 人。又對於

總數則去年爲 $\dfrac{4950}{1-\dfrac{10}{100}}$ 人卽 5500 人

因得 $\dfrac{50}{51}x+\dfrac{5}{4}y=5500\cdots\cdots(2)$.

將此解之. 由 (2) 式得 $40x+51y=224400$

此中減去 (1) 式 $\times 40$ 得 $y=2400$, 從而 $x=2550$

答 甲校 2550 人, 乙校 2400 人

【12】 利息問題

1. 款額若干貸出一年後得本利168圓，若本銀多25圓，年息高四厘則可得203圓，問本銀及利率各幾何.

解 作本銀爲x圓, 利率爲p, 因得下列方程式.

$(1+p)x=168\cdots\cdots(1)$. $(1+p+0.04)(x+25)=203\cdots\cdots(2)$

將此解之, 由(1)式 得$1+p=\dfrac{168}{x}$, 將此代入(2)式 得

$$\left(\frac{168}{x}+\frac{4}{100}\right)(x+25)=203 \qquad \text{卽}$$

$x^2-850x+105000=0\cdots\cdots\cdots(x-700)(x-150)=0$

$\therefore$ $x=700$ 及 150. 然本利合計爲 168圓, 故應 $x<168$, 從而 $x=700$ 爲不合理. 次由(1)式 得$(1+p)\times 150=168$ $\therefore$ $p=0.12$

答 本銀 150圓, 利率 1 分 2 厘.

2. 有人貸出2000圓，取年利若干，一年後於本利中支取160圓. 其餘款仍用同一的利率貸出，定期一年，期滿後得本利2057圓25分，問利率幾何.

作所要求得之利率爲p則第一年後之本利合計爲 $2000(1+p)$圓, 第年之本爲$[2000(1+p)-160]$圓, 一年後之本利合計爲$[2000(1+p)-160](1+p)$圓, 因得下列方程式. $[2000(1+p)-160](1+p)=2057.25$

今將其解之, 作$1+p=m$ 則 $(2000m-160)m=2057.25$

$\therefore$ $8000m^2-640m-8229=0$

$$\therefore\quad m=\frac{640\pm\sqrt{(-640)^2+4\times 8000\times 8229}}{2\times 8000}=\frac{640\pm 16240}{2\times 8000}$$

但 $m>0$, 故是 $m=1.055$

即 $1+p=1.055$ $\therefore$ $p=0.055$ 答 5厘5毫

【13】 幾何學應用問題

1. 有直角三角形，其周圍爲36米，其面積爲54平方米，問各邊之長度幾何.

解 將夾直角之兩邊作爲長x米與y米，斜邊則爲z米，於是周圍爲$(x+y+z)$米，而由命題得下列方程式.

$x+y+z=36$………(1)………(周圍)

$\frac{1}{2}xy=54$………(2)………(面積)

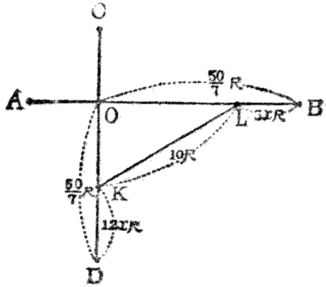
$x^2+y^2=z^2$ ………(3)………(Pythagoras 定理)

由(1)式 得$x+y=36-z$, 平方之成 $(x+y)^2=(36-z)^2$ 即 $x^2+2xy+y^2=(36-z)^2$. 此中代入(2)式與(3)式, 成 $z^2+2\times 108=1296-72z+z^2$ $\therefore$ $z=15$ 再由(1)式 得$x+y=21$ ……(4), 由(2)式得 $xy=108$ ……(5) 因此由(4)式 得$x=21-y$ 將其代入(5)式 $(21-y)y=108$ $\therefore$ $(y-12)(y-9)=0$ $\therefore$ $y=12$, 及 9, 若 $y=12$ 則 $x=9$, 若$y=9$ 則 $x=12$.

答 12米, 9米; 斜邊15米

2. AOB, COD是在O點直交的兩根直線，甲在AB上，由A往B，每分鐘行五尺；乙在CD上，由C向D，每分鐘行十二尺；甲到B時乙到D，OB與OD皆是$\frac{50}{7}$尺，問何時甲與乙相隔十尺.

解 作甲在到 B 前 x 分鐘兩者相隔10尺，卽甲在 L 點，乙在 K 點，於是



$OL=\left(\frac{50}{7}-5x\right)$尺, $OK=\left(\frac{50}{7}-12x\right)$尺，故依 Pythagoras 定理得 $\left(\frac{50}{7}-5x\right)^2+\left(\frac{50}{7}-12x\right)^2=10^2$

$\therefore\ 8281x^2-11900x+100=0$

$\therefore\ (1183x-10)(7x-10)=0$　　$\therefore\ x=\frac{10}{1183}$ 及 $\frac{10}{7}$

答 在甲到 B 時前 $\frac{10}{1183}$分

及 $\frac{10}{7}$分兩次.

3. 有絲一根其長與一正方形之周圍相等，若將絲剪去4尺8寸則所剩者與又一正方形之周圍相等，此正方形之大小等於前述正方形之 $\frac{49}{100}$，求絲之長度.

解 作絲之長度爲 $4x$ 寸，則此所成之正方形之面積爲 x^2 方寸；又剪去 4尺8寸後所成之正方形之面積爲 $\left(\frac{4x-48}{4}\right)^2$ 方寸．卽 $(x-12)^2$ 方寸，故得下列方程式.

$\frac{49}{100}x^2=(x-12)^2$　　$\therefore\ 7x=\pm10(x-12)$

$x=40$ 及 $\frac{120}{17}$，　絲之長爲 $4x$，故爲

$4x=4\times40=160$　及　$4x=4\times\frac{120}{17}=28\frac{4}{17}$，然 $28\frac{4}{17}$ 寸方中不能剪去 4尺 8寸，故不是所求者。　　答 16尺.

4. 有矩形其周圍為32尺，若橫減去$\frac{1}{5}$，縱短1尺，則面積祇有原來之$\frac{2}{3}$，問縱橫各幾何.

解　作縱為x尺，橫為y尺，則其周圍為$2(x+y)$尺，故得

$$2(x+y)=32\cdots\cdots(1)$$

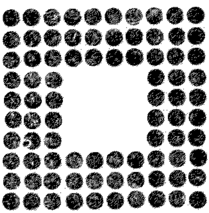
面積為xy方尺，因得下列方程式.

$\left(1-\frac{1}{5}\right)y(x-1)=\frac{2}{3}xy\cdots\cdots 2y(x-6)=0$　　但　$y\neq 0$，故

$x-6=0\cdots\cdots x=6$　　從而由　(1) 式得 $y=10$

答　縱6尺，橫10尺.

5. 有一隊兵排一矩形陣，其長為寬之兩倍，若兵士減去206人則可排成三行之中空方陣，其外邊一列人數與原矩形陣之長邊相等，問此隊兵士有若干人.



解　作寬之一邊為x人則長之一邊為$2x$人，而兵士數為$2x^2$人；今推究中空方陣之人數，其外側一列依命題為$2x$人，而第二列之人數比第一列少二人，第三列比第一列少2×2人，第四列少2×3人；現在中空之方陣是將第三列以後之人空去，故此中空方陣之人數為$(2x)^2-(2x-2\times 3)^2$，即$(2x)^2-(2x-2\times 3)^2=2x^2-206$

將此解之得　$(2x+2x-6)(2x-2x+6)=2x^2-260$　即　$x^2-12x-85=0\cdots\cdots(x-17)(x+5)=0$

∴　$x=17$ 及 -5，而依問題之性質x應是正，故不用-5　兵士人員數為$2x^2$，則 $2x^2=2\times 17^2=578$

答　578 人

6. 有立方體其長闊高增加3寸，則其體積比原來體積大4167立方寸，問原來之立方體高度如何.

解　作所要求得之高為x寸，因得方程式如下.

$(x+3)^3-x^3=4167\cdots\cdots\cdots x^2+3x-460=0\cdots\cdots(x+23)(x-20)=0$

x 應是正，故祇能是 $x=20$.　　答　2 尺

第十七章

無理式

1.【同類不盡根數】

1. 將 $2\sqrt[3]{192}+3\sqrt[3]{375}-3\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{1029}$ 化成簡式.

解　原式 $=2\sqrt[3]{4^3\times3}+3\sqrt[3]{5^3\times3}-3\sqrt[3]{3^3\times3}-2\sqrt[3]{7^3\times3}$

$=2\times4\sqrt[3]{3}+3\times5\sqrt[3]{3}-3\times3\sqrt[3]{3}-2\times7\sqrt[3]{3}$

$=(8+15-9-14)\sqrt[3]{3}=0\times\sqrt[3]{3}=0$ ……………………答

2. a, b 及 n 爲正整數, $a>b$, 試比較

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 與 $\sqrt[n+1]{\dfrac{a}{b}}$ 之大小.

解　$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}}$ | $\sqrt[n+1]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n}}$

根指數相同然後比較根號內之數. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(\dfrac{a}{b}\right)$ 故

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)-1\right]=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\left(\dfrac{a-b}{b}\right)$ ……(A)

$\dfrac{a}{b}$ 是正數, 今 $a>b$ 則 $a-b$ 亦是正數,

從而 (A) 式之右邊是正數, 故

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^n>0$ 　$\therefore$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}>\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

即 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}>\sqrt[n+1]{\dfrac{a}{b}}$ ……………………答

別解　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\times\dfrac{a}{b}$, 今 $a>b$ 則 $\dfrac{a}{b}>1$,

故 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n<\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\times\dfrac{a}{b}$ 又 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}\div\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a}{b}>1$

$\therefore\ \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}\div\left(\frac{a}{b}\right)^{n}>1$ 而 $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$ 是正數，因得

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}>\left(\frac{a}{b}\right)^{n}$$

II. 【分母化成有理式】

1. 將 $\dfrac{3+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}+\sqrt{27}-2\sqrt{8}+\sqrt{50}}$ 化成簡式.

解 $2\sqrt{2}+\sqrt{27}-2\sqrt{8}+\sqrt{50}=2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=3\sqrt{2}+3\sqrt{3}$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3(\sqrt{2}+\sqrt{3})}\times\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

$=\dfrac{(3+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{3[(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2]}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt{3}}{3[2-3]}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}}{-3}$

$=\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{-3}=\dfrac{-\sqrt{3}}{-3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$……答

2. 將 $\dfrac{8}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$ 之分母化成有理式.

解 原式 $=\dfrac{8}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}\times\dfrac{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{5^2}-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}$

$=\dfrac{8[\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}]}{(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt[3]{3})^3}=\dfrac{8[\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}]}{5+3}$

$=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$……………答

III. 【$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ 之變形法】

1. 將 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ 作成簡式.

解 今試作 $5-2\sqrt{6}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 將括弧解去

$5-2\sqrt{6}=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$ 於是作 $5-2\sqrt{6}$

成 $(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$ 之形式.

$2\sqrt{6}=2\sqrt{3}\sqrt{2}$

而 $(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=3-2\sqrt{6}+2$ 即 $5-2\sqrt{6}$

於是 $5-2\sqrt{6}=3-2\sqrt{6}+2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

∴ $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

∴ $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ……答

別解 作 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, 將兩邊成平方

$5-2\sqrt{6}=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2=x-2\sqrt{xy}+y$

∴ $5-2\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}$ 於是因兩邊有理數之同士及含根號之同士者相等, 故

$5=x+y$, $-2\sqrt{6}=-2\sqrt{xy}$, 即

$\begin{cases} x+y=5 \\ \sqrt{xy}=\sqrt{6} \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ 解之得 $x=3$, $y=2$ 得 $x=2$, $y=3$

∴ $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

2. 計算下式之值至小數第四位爲止.

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

解 先使分母成有理式, 將 $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ 變形成

$\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, 而作兩邊成平方得

$3+\sqrt{5}=x+y+2\sqrt{xy}$ ∴ $x+y=3$, $4xy=5$ 因得 $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

$(x>y)$ ∴ $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

同樣得 $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$, 於是

$$原式=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{10\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{18}\sqrt{2}-\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\dfrac{\sqrt{8}\sqrt{2}+\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{10\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{18\times2}-\sqrt{5}-1}-\frac{(\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{8\times2}+\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{20}{6-\sqrt{5}-1}-\frac{2\sqrt{5}+3\times2}{4+\sqrt{5}-1}$$

$$=\frac{20}{5-\sqrt{5}}\times\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}+6}{3+\sqrt{5}}\times\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{100+20\sqrt{5}}{25-5}-\frac{6\sqrt{5}+18-2\times5-6\sqrt{5}}{9-5}$$

$=5+\sqrt{5}-2=3+\sqrt{5}$ [但 $\sqrt{5}=2.2367$]

$=5.2367$

3. 將 $\sqrt{9\sqrt{6}+6\sqrt{12}}+\sqrt{9\sqrt{6}-6\sqrt{12}}$ 化成簡式.

解 $9\sqrt{6}+6\sqrt{12}=3\sqrt{6}(3+2\sqrt{2})$ 故

$\sqrt{9\sqrt{6}+6\sqrt{12}}=\sqrt{3\sqrt{6}(3+2\sqrt{2})}=\sqrt{3\sqrt{6}}\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{54}\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$=\sqrt[4]{54}\sqrt{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+(\sqrt{1})^2}=\sqrt[4]{54}(\sqrt{2}+1)$

同樣得 $\sqrt{9\sqrt{6}-6\sqrt{12}}=\sqrt[4]{54}(\sqrt{2}-1)$

$\therefore$ 原式 $=\sqrt[4]{54}(\sqrt{2}+1)+\sqrt[4]{54}(\sqrt{2}-1)$

$=\sqrt[4]{54}(\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1)=\sqrt[4]{54}\times2\sqrt{2}$

$=3\sqrt[4]{54}\sqrt[4]{2^2}=2\sqrt[4]{54\times4}=2\sqrt[4]{216}$ ……………………**答**

IIII【無理式之値】

1. $x=\dfrac{a+b}{\sqrt{2(a-b)}}$, 將下式化成最簡式.

$$\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

解 $$\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{\{x-\sqrt{x^2-1}\}^2+\{x+\sqrt{x^2-1}\}^2}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\frac{x^2-2x\sqrt{x^2-1}+\{\sqrt{x^2-1}\}^2+x^2+2x\sqrt{x^2-1}+\{\sqrt{x^2-1}\}^2}{x^2-\{\sqrt{x^2-1}\}^2}$$

$$=\frac{4x^2-2}{x^2-x^2+1}=4x^2-2$$

$\therefore\quad \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=4x^2-2\quad$ 令 $x=\dfrac{a+b}{\sqrt{2(a-b)}}$

將其代入之 $\quad =4\left\{\dfrac{a+b}{\sqrt{2(a-b)}}\right\}^2-2$

$$=\frac{8ab}{(a-b)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

2. $\dfrac{1}{2}<x<1$，求下式之值.

$$\frac{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}{1-4x^2}+\sqrt{1-x^2}$$

解 $1-(3x-4x^3)^2=\{1+(3x-4x^3)\}\{1-(3x-4x^3)\}$

$=\{1-x+4x-4x^3\}\{1+x-4x+4x^3\}$

$=\{(1-x)+4x(1+x)(1-x)\}$

$\times\{(1+x)-4x(1+x)(1-x)\}$

$=(1-x)(1+4x+4x^2)(1+x)(1-4x+4x^2)$

$=(1-x)(1+2x)^2(1+x)(1-2x)^2$

$\therefore\ \sqrt{1-(3x-4x^3)^2}=\sqrt{(1-x)(1+x)(1+2x)^2(1-2x)^2}$

由規定 $\sqrt{(1-x)(1+x)(1+2x)^2(1-2x)^2}$ 不能是正值，

然 $\dfrac{1}{2}<x<1$，故 $(1-x)$. $(1+x)(1+2x)$ 是正值，至於 $(1-2x)$ 則

因 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 所以是負值，故 $(1-2x)^2$ 可作之成 $(2x-1)^2$

因此 $\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}=\sqrt{(1-x)(1+x)(1+2x)^2(2x-1)^2}$

$=(1+2x)(2x-1)\sqrt{(1-x)(1+x)}$ 從而

$$\frac{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}{1-4x^2}+\sqrt{1-x^2}=\frac{(1+2x)(2x-1)\sqrt{(1-x)(1+x)}}{(1+2x)(1-2x)}+\sqrt{1-x^2}$$

$\left(\begin{array}{l} 1-x>0,\ 1+x>0 \\ \text{故得} \\ \sqrt{(1-x)(1+x)}=\sqrt{1-x^2} \end{array}\right)$

$$=-\sqrt{(1-x)(1+x)}+\sqrt{1-x^2}$$

$$=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{答}$$

9. $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$, 求 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 之值.

解 $$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\times\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a+x})^2+2\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}+(\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2}$$

$$=\frac{2a+2\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}}{a+x-(a-x)}$$

$$=\frac{a+\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}}{x}$$

然作 $\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}=\sqrt{a^2-x^2}$ 不甚相宜, 變之爲

$$\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}=\sqrt{a+\frac{2ab}{b^2+1}}\sqrt{a-\frac{2ab}{b^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{a(b^2+2b+1)}{b^2+1}}\sqrt{\frac{a(b^2-2b+1)}{b^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}(b+1)^2}\sqrt{\frac{a}{b^2+1}(b-1)^2}$$

而 $(b+1)^2$, $(b-1)^2$ 中之 b 爲實數, 從而此是零或正數, 因得

$$\sqrt{\frac{a}{b^2+1}(b+1)^2}=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}\sqrt{(b+1)^2}$$

於是 $$\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}(b+1)^2}\sqrt{\frac{a}{b^2+1}(b-1)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}\sqrt{(b+1)^2}\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}\sqrt{(b-1)^2}$$

$$=\frac{a}{b^2+1}\sqrt{(b+1)^2}\sqrt{(b+1)^2}$$ 從而

$$\text{原式}=\frac{a+\sqrt{a+x}\sqrt{a-x}}{x}$$

$$=\left\{a+\frac{a}{b^2+1}\sqrt{(b+1)^2}\sqrt{(b-1)^2}\right\}\div\frac{2ab}{b^2+1}$$

將其化簡，b 之值為如何乃發生種種之情勢　[此$\sqrt{\ }$作為是正]

【1】 $b>1$ 則 $b+1$, $b-1$ 皆是正數，故

$\sqrt{(b+1)^2}\sqrt{(b-1)^2}=(b+1)(b-1)$ 因此

$$\text{原式}=\left\{a+\frac{a}{b^2+1}(b+1)(b-1)\right\}\div\frac{2ab}{b^2+1}$$

$$=a\left\{\frac{b^2+1+b^2-1}{b^2+1}\right\}\times\frac{b^2+1}{2ab}=b$$

【2】 $b=1$ 則 原式$=(a+0)\times\frac{b^2+1}{2ab}=\frac{b^2+1}{2b}=1$

【3】 $1>b>-1$ 則 $(b+1)$ 是正數，$(b-1)$ 是負數，

故 $\sqrt{(b+1)^2}\sqrt{(b-1)^2}=\sqrt{(b+1)^2}\sqrt{(1-b)^2}=(b+1)(1+b)$

從而 原式$=\left\{a+\frac{a(b+1)(1-b)}{b^2+1}\right\}\div\frac{2ab}{b^2+1}=\frac{1}{b}$

【4】 $b=-1$ 則 原式$=(a+0)\div\frac{2ab}{b^2+1}=\frac{b^2+1}{2b}=-1$

【5】 $b<-1$ 則 $b+1$, $b-1$ 皆是負數，故

$\sqrt{(b+1)^2}\sqrt{(b-1)^2}=\{-(b+1)\}\{-(b-1)\}$ 從而

$$\text{原式}=\left(a+\frac{a\{-(b+1)\}\{-(b-1)\}}{b^2+1}\right)\div\frac{2ab}{b^2+1}=b$$

答 $\begin{cases} b>1 \text{ 或 } b<-1 \text{ 則等於} b \\ b=1 \text{ 則等於}1,\ b=-1 \text{ 則等於}-1 \\ 1>b>-1 \text{ 則等於 } \frac{1}{b} \end{cases}$

4. $2x=a+\frac{1}{a}$, $2y=b+\frac{1}{b}$，求 $xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$ 之值.

解 $x=\frac{a^2+1}{2a}$ 則 $x^2-1=\frac{a^4+2a^2+1}{4a^2}-1=\frac{(a^2-1)^2}{4a^2}=\frac{1}{4}(a-\frac{1}{a})^2$

$$y=\frac{b^2+1}{2b} \quad 則 \quad y^2-1=\frac{b^4+2b^2+1}{4b^2}-1=\frac{(b^2-1)^2}{4b^2}=\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$$

從而 $xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$

$$=\frac{a^2+1}{2a}\times\frac{b^2+1}{2b}+\sqrt{\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\times\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}$$

$$=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab}+\frac{1}{4}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}$$

於是

【1】 $a-\frac{1}{a}>0,\quad b-\frac{1}{b}>0$ 則 $\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\left(b-\frac{1}{b}\right)^2}$

$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

因此 原式 $=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab}+\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)$

$$=\frac{(a^2+1)(b^2+1)+(a^2-1)(b^2-1)}{4ab}=\frac{a^2b^2+1}{2ab}$$

【2】 $a-\frac{1}{a}>0,\quad b-\frac{1}{b}<0$ 則

原式 $=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab}+\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}-b\right)$

$$=\frac{(a^2+1)(b^2+1)-(a^2-1)(b^2-1)}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

【3】 $a-\frac{1}{a}=0$ 及 $b-\frac{1}{b}=0$ 則

原式 $=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab}+\frac{1}{4}\times 0=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab}$

【4】 $a-\frac{1}{a}<0,\ b-\frac{1}{b}>0$ 則

原式 $=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)$

$$=\frac{(a^2+1)(b^2+1)-(a^2-1)(b^2-1)}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

【5】$a-\frac{1}{a}<0,\ b-\frac{1}{b}<0$ 則

$$原式=\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}-a\right)\left(\frac{1}{b}-b\right)$$

$$=\frac{(a^2+1)(b^2+1)+(a^2-1)(b^2-1)}{4ab}=\frac{a^2b^2+1}{2ab}$$

答 $\begin{cases} a-\frac{1}{a}>0,\ b-\frac{1}{b}>0 \text{ 及 } a-\frac{1}{a}<0,\ b-\frac{1}{b}<0 \text{ 則等於 } \dfrac{a^2b^2+1}{2ab} \\ a-\frac{1}{a}=0 \text{ 及 } b-\frac{1}{b}=0 \text{ 則等於 } \dfrac{(a^2+1)(b^2+1)}{4ab} \\ a-\frac{1}{a}>0,\ b-\frac{1}{b}<0 \text{ 及 } a-\frac{1}{a}<0,\ b-\frac{1}{b}>0 \text{ 則等於 } \dfrac{a^2+b^2}{2ab} \end{cases}$

5. $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$，試證明 $x^3+3bx-2a=0$

解 將指定式作成立方得

$$x^3=\left\{\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}\right\}^3$$

$$=a+\sqrt{a^2+b^3}+3\left\{\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}\right\}^2\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$$

$$+3\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}\left\{\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-b^3}}\right\}^2+a-\sqrt{a^2+b^3}$$

$$=2a+3\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$$

$$\times\left\{\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}\right\}$$

此中用入 $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$

$$=2a+3\sqrt[3]{a^2-(a^2+b^3)}\times x$$

$$=2a+3\sqrt[3]{-b^3}.\ x=2a-3bx$$

$\therefore\quad x^3=2a-3bx \qquad \therefore\quad x^3+3bx-2a=0$

V 【通常指數】

【公式】
1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
3. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　　4. $(a^m)^n = a^{mn}$
5. $a^\circ = 1$　　6. $\boxed{a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

1. 將 $\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}}} \div \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1}}$ 化成簡式.

解 原式 $= a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{3}} \div a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}}$ ………………(公式3之逆用)

$= a^{-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}c^{-\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3})}$ …………(公式2)

$= a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^\circ = a^{-1}b^{\frac{1}{6}}$ ………………………(但 $c^\circ = 1$)

2. 將 $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}} \times \left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}$ 化成簡式.

解 原式 $= x^{\frac{a}{(a-b)(c-a)}} \times x^{\frac{b}{(b-c)(a-b)}} \times x^{\frac{c}{(c-a)(b-c)}}$ …(公式4)

$= x^{\frac{a}{(a-b)(c-a)}+\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(c-a)(b-c)}}$ ………(公式1)

於是x之指數爲 $\dfrac{a}{(a-b)(c-a)}+\dfrac{b}{(b-c)(a-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(b-c)}$

$= \dfrac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \dfrac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \dfrac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$

$\therefore$ 原式 $= x^{\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}} = x^\circ = 1$ ……………………………… ■

3. $x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$ 用 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1}$ 乘之.

解 原式$=\left[(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})+x\right]\left[(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})-x^{-1}\right]$

$$=(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})^2+(x-x^{-1})(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})-xx^{-1}$$

$$=(x^{\frac{1}{3}})^2+2x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+(x^{-\frac{1}{3}})^2+xx^{\frac{1}{3}}+xx^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}x^{-1}-x^{-\frac{1}{3}}x^{-1}-x^0$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+x^{1+\frac{1}{3}}+x^{1-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}-1}-x^{-\frac{1}{3}-1}-1$$

$$=x^{\frac{2}{3}}+2x^0+x^{-\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}-1$$

$$=x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}+1-x^{-\frac{4}{3}}$$ ……………………………………**答**

4. 將 $\dfrac{2x^{\frac{5}{3}}y+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{7}{3}}}{y^{\frac{8}{3}}-y^{\frac{8}{3}}}\div\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}\right)$ 化成簡式.

解 令作 $x^{\frac{1}{3}}=A$　　則　$x^{\frac{2}{3}}=A^2$,　$x^{\frac{5}{3}}=A^5$

又作 $y^{\frac{1}{3}}=B$　　則　$y^{\frac{2}{3}}=B^2$,　$y^{\frac{7}{3}}=B^7$

原式$=\dfrac{2A^5B^3+2AB^7}{A^8-B^8}\div\left(\dfrac{AB}{A^2-B^2}-\dfrac{AB}{A^2+B^2}\right)$

$$=\frac{2AB^3(A^4+B^4)}{(A^4+B^4)(A^4-B^4)}\div\frac{AB(A^2+B^2-A^2+B^2)}{(A^2-B^2)(A^2+B^2)}$$

$$=\frac{2AB^3}{A^4-B^4}\times\frac{A^4-B^4}{2AB^3}=1$$ ……………………………………**答**

5. 將 $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}$ 化成簡式.

解 作 $x^{\frac{1}{3}}=y$　則

原式$=\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{y^2}{y+1}+\dfrac{y^3}{y-1}$

$$=\frac{1}{y+1}-\frac{y^2}{y+1}+\frac{y^3}{y-1}-\frac{1}{y-1}=\frac{1-y^2}{y+1}+\frac{y^3-1}{y-1}$$

$$=\frac{-(y+1)(y-1)}{y+1}+\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{y-1}$$

$$=-(y-1)+(y^2+y+1)$$

$$=y^2+2=(x^{\frac{1}{3}})^2+2=x^{\frac{2}{3}}+2$$ ……………………………………**答**

6. 將 $\left[16+\left\{\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}-2\dfrac{x-a}{x+a}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$

解 原式 $=\left[16+\left\{\dfrac{(x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})^2+(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})^2}{(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})}-\dfrac{2(x-a)}{x+a}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=\left[16+\left\{\frac{2(x+a)}{x-a}-\frac{2(x-a)}{x+a}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[16+\left\{\frac{2(x+a)^2-2(x-a)^2}{(x+a)(x-a)}\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[16+\frac{4\times16a^2x^2}{(x+a)^2(x-a)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{16(x^2-a^2)^2+4\times16a^2x^2}{(x^2-a^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{16(x^4-2a^2x^2+a^4+4a^2x^2)}{(x^2-a^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{16(x^2+a^2)^2}{(x^2-a^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{\frac{(x^2+a^2)^2}{(x^2-a^2)^2}}=4\sqrt{\left(\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\right)^2}$$

從而 $\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}>0$ 　則原式 $=4\times\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=\dfrac{4(x^2+a^2)}{x^2-a^2}$

$\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=0$ 　則原式 $=0$

$\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}<0$ 　則原式 $=4\times\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}=\dfrac{4(a^2+x^2)}{a^2-x^2}$

答 $\begin{cases}\dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}>0 & \text{則等於}\quad \dfrac{4(x^2+a^2)}{x^2-a^2}\\[2ex] \dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}=0 & \text{則等於}\quad 0\\[2ex] \dfrac{x^2+a^2}{x^2-a^2}<0 & \text{則等於}\quad \dfrac{4(a^2+x^2)}{a^2-x^2}\end{cases}$

7. $\left.\begin{array}{l} x^y=y^x\cdots\cdots(1) \\ x^a=y^b\cdots\cdots(2) \end{array}\right\}$　將x及y用a及b表之.

解 由(1)式得 $x=y^{\frac{x}{y}}$　由(2)式得 $x=y^{\frac{b}{a}}$　故

$y^{\frac{x}{y}}=y^{\frac{b}{a}}$，因此其指數是相等. 即

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{b}{a}$　$\therefore\ x=a^{-1}by$　將其代入(2)式

$(a^{-1}by)^a=y^b$　$\therefore\ a^{-a}b^ay^a=y^b$　$\therefore\ \dfrac{y^a}{y^b}=\dfrac{1}{a^{-a}b^a}$

$\therefore\ y^{a-b}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^a$　$\therefore\ y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$　將此用入 $x=y^{\frac{b}{a}}$

$$x=\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\right\}^{\frac{b}{a}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}$$

答 $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}$, $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$

8. $a^p=s+\sqrt{1+s^2}$ 則 $a^{-p}=-s+\sqrt{1+s^2}$, 試證明之.

證 將 $a^p=s+\sqrt{1+s^2}$ 之兩邊用1除之得

$$\frac{1}{a^p}=\frac{1}{s+\sqrt{1+s^2}}=\frac{1}{s+\sqrt{1+s^2}}\times\frac{s-\sqrt{1+s^2}}{s-\sqrt{1+s^2}}$$

$$=\frac{s-\sqrt{1+s^2}}{s^2-(1+s^2)}=-s+\sqrt{1+s^2}$$

$\therefore\ \dfrac{1}{a^p}=-s+\sqrt{1+s^2}$　即　$a^{-p}=-s+\sqrt{1+s^2}$

9. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{y}{b^2}$, 其中$a$及$b$爲實數, 若$a+b=k$則$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ $=k^{\frac{1}{2}}$, 試證明之.

證 作$\dfrac{x}{a^2}=\dfrac{y}{b^2}=m$　則　$x=a^2m$, $y=b^2m$　將其代入

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$　得　$\dfrac{a^2m}{a}+\dfrac{b^2m}{b}=1$　即

$am+bm=1 \qquad \therefore \quad m(a+b)=1$ 此中代入 $a+b=k$

得 $mk=1 \qquad \therefore \qquad m=\dfrac{1}{k}$ 將其代入

$$\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=m \qquad \text{得} \qquad \frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2}=\frac{1}{k}$$

$\therefore \quad x=\dfrac{a^2}{k},\ y=\dfrac{b^2}{k}$ 從而 $x^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{a^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{a}{k^{\frac{1}{2}}}$ 及

$y^{\frac{1}{2}}=\dfrac{b}{k^{\frac{1}{2}}}$，於是得 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=\dfrac{a+b}{k^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{k}{k^{\frac{1}{2}}}=k^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore \qquad x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=k^{\frac{1}{2}}$$

VI 【指數方程式】

1. 將 $x^{-1}+x^{-\frac{1}{2}}=6$ 解之.

解 將原式寫成 $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2+x^{-\frac{1}{2}}-6=0$

$$\therefore \quad \left(x^{-\frac{1}{2}}-2\right)\left(x^{-\frac{1}{2}}+3\right)=0$$

$$\therefore \quad x^{-\frac{1}{2}}=2 \quad \text{及} \quad x^{-\frac{1}{2}}=-3$$

若 $x^{-\frac{1}{2}}=2$ 則

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=2$$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$ 成平方得

$$\frac{1}{x}=4$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{4}$$

若 $x^{-\frac{1}{2}}=-3$ 則

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=-3\cdots\cdots(A)$$

然 $x^{\frac{1}{2}}$ 是正數，故 (A) 式爲不合理.

答 $x=\dfrac{1}{4}$

別解　作$x^{-\frac{1}{2}}=y$，平方之得$(x^{-\frac{1}{2}})^2=y^2$　即　$x^{-1}=y^2$

因此原方程式可寫成　$y^2+y-6=0$，將此解之。

2.　將　$2^{1-x}-33\times2^{-\frac{x}{2}-2}+1=0$　解之.

解　將原式寫之成　$2\times2^{-x}-33\times2^{-\frac{x}{2}}\times2^{-2}+1=0$ ……………(A)

令作$2^{-\frac{x}{2}}=y$，平方之成　$2^{-x}=y^2$，因此(A)式用y表之爲

$2y^2-33y\times\frac{1}{2^2}+1=0$　即　$8y^2-33y+4=0$

$(8y-1)(y-4)=0$　∴　$y=\frac{1}{8}$　及　4

若　$y=\frac{1}{8}$　則

$2^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{8}$　變形成

$2^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2^3}$　即

$2^{-\frac{x}{2}}=2^{-3}$

∴　$-\frac{x}{2}=-3$　∴　$x=6$

若　$y=4$　則

$2^{-\frac{x}{2}}=4$　變形成

$2^{-\frac{x}{2}}=2^2$ ……………(B)

∴　$-\frac{x}{2}=2$

∴　$x=-4$

答　$x=6,\ -4$

3.　將下列聯立方程式解之.

$18y^x-y^{2x}=81$ ……(1)　　$3^x=y^2$ ……(2)

解　作$y^x=A$，則平方之成　$y^{2x}=A^2$，故(1)式可寫成

$18A-A^2=81$ …………………………$A^2-18A+81=0$

∴　$(A-9)^2=0$　從而　$A=9$

因此$y^x=A=9$，而　$y=9^{\frac{1}{x}}$，將其代入(2)式得

$$3^x=(9^{\frac{1}{x}})^2\cdots\cdots\cdots 3^x=[(3^2)^{\frac{1}{x}}]^2 \quad 即 \quad 3^x=3^{2\times\frac{1}{x}\times 2}$$

於此則指數相等，即 $x=2\times\frac{1}{x}\times 2$

$\therefore\ x^2=4\cdots\cdots(x\neq 0$ 於第一式明之$)\quad \therefore\ x=\pm 2$

從而 $x=2$ 則由(2)式得 $3^2=y^2\cdots\cdots y=\pm 3$

$x=-2$ 則由(2)式得 $3^{-2}=y^2\cdots\cdots y=\pm\frac{1}{3}$

答 $(x=2,\ y=3)$，$(x=2,\ y=-3)$；

$(x=-2,\ y=\frac{1}{3})$；$(x=-2,\ y=-\frac{1}{3})$

4. 將下列聯立方程式解之.

$z^x=y^{2x}\ldots(1)$，$8^z=4\times 32^x\ldots(2)$，$x+y+z=11\ldots(3)$

解 由(1)式得 $z=y^2$ 然祇能是 $x\neq 0$.

因若 $x=0$，則 $z^x=z^0=1$ 及 $y^{2x}=y^{2\times 0}=1$，從而 $z^0=1=(y^2)^0$，$\therefore$

$\therefore\ z=y^2$，即是 $z\neq y^2$ 亦可.

$[3^0=1,\quad 5^0=1\quad \therefore\ 3=5^0$ 即 $3=5$，此事不合理$]$

次由(2)式得 $(2^3)^z=2^2\times(2^5)^x\cdots\cdots\cdots 2^{3z}=2^2\times 2^{5x}$ 即

$2^{3z}=2^{5x+2}\qquad \therefore\ 3z=5x+2$ 因此解之如下

$$(A)\left.\begin{array}{l}x=0\\3z=5x+2\\x+y+z=11\end{array}\right\}\qquad 及\ (B)\left.\begin{array}{l}z=y^2\\3z=5x+2\\x+y+z=11\end{array}\right\}$$

(A) 將 $x=0$ 用之於第二式得 $3z=2\quad \therefore\ z=\frac{2}{3}$，從而由

第三式得 $0+y+\frac{2}{3}=11$ 即 $y=10\frac{1}{3}$

(B) 將 $z=y^2$ 代入第二式得 $3y^2=5x+2\quad \therefore\ 5x=3y^2-2$

此與第一式共同代入第三式之5倍得 $3y^2-2+5y+5y^2=55$

即 $8y^2+5y-57=0\quad \therefore\ (y+3)(8y-19)=0\quad \therefore\ y=-3,\ \frac{19}{8}$

於是 $y=-3$ 則 $x=5$, $z=9$, 又若 $y=\frac{19}{8}$ 則 $x=2\frac{63}{64}$,

$z=5\frac{41}{64}$

答$(x=0,\ y=10\frac{1}{3},\ z=\frac{2}{3})$;$(5, -3, 9)$;$(2\frac{63}{64},\ 2\frac{3}{8},\ 5\frac{41}{64})$

第十八章

比及比例

公式 1. $\left.\begin{array}{l} ax+by=0, \\ ax^2+bxy+cy^2=0 \end{array}\right\}$ 則 $\frac{x}{A}=\frac{y}{B}$

公式 2. $\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{array}\right\}$ 則 $\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}$

公式 3. $a:b=c:d$ 則 $ad=bc$

公式 4. $ad=bc$ 則 $ab=c:d$

【附】 (i) $a:b=c:d$ 則 $a:c=b:d$

(ii) $a:b=b:c=c:d=\ldots$,則成$a, b, c, d,\ldots\ldots$之連比例

(iii) $\left\{\begin{array}{l} a:b=b:c \quad 則\ b^2=ac \\ b^2=ac \quad 則\ a:b=b:c \end{array}\right.$

(iv) $a:b=c:d$ 則

$$(A)\qquad \frac{a}{a\pm b}=\frac{c}{c\pm d}$$

$$(B)\qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

(1) 比

1. $x^3-2x^2y-xy^2+2y^3=0$ 則 $2x-3y:3x-2y$ 之值如何.

解 $x^3-2x^2y-xy^2+2y^3=0\cdots\cdots\cdots\cdots x^2(x-2y)-y^2(x-2y)=0$

$\therefore\ (x-2y)(x^2-y^2)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(x-2y)(x+y)(x-y)=0$

$\therefore$ 於此是 $x=2y$, 還是 $x=-y$, 還是 $x=y$ 呢?

若 $x=2y$ 則

$$\frac{2x-3y}{3x-2y}=\frac{2\times2y-3y}{3\times2y-2y}=\frac{y}{4y}=\frac{1}{4}$$

若 $x=-y$ 則

$$\frac{2x-3y}{3x-2y}=\frac{2\times(-y)-3y}{3\times(-y)-2y}=\frac{-5y}{-5y}=1$$

若 $x=y$ 則

$$\frac{2x-3y}{3x-2y}=\frac{2y-3y}{3y-2y}=-1$$

答 $\frac{1}{4}$ 及 ±1.

2. $x+3y+5z=0,\ 2x+4y+7z=0$ 求 $\dfrac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}$ 之值.

解 由第一式得 $2x+6y=-10z\cdots\cdots\cdots$(2倍之)

由第二式得 $2x+4y=-7z$

$-)$

$2y=-3z\quad\therefore\ y=-\frac{3}{2}z\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又由第一式得 $4x+12y=-20z\cdots\cdots\cdots$(4倍之)

由第二式得 $6x+12y=-21z\cdots\cdots\cdots$(3倍之)

$-)$

$-2x=z\quad\therefore\ x=-\frac{1}{2}z\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

從而於 $\dfrac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}$ 將 (1)式, (2)式代入之

$$=\frac{\left(-\frac{1}{2}z\right)^2+3\left(-\frac{3}{2}z\right)^2+5z^2}{2\left(-\frac{1}{2}z\right)^2+4\left(-\frac{3}{2}z\right)^2+7z^2}=\frac{\left(\frac{1}{4}+\frac{27}{4}+5\right)z^2}{\left(\frac{1}{2}+9+7\right)z^2}=\frac{8}{11}\cdots\cdots 答$$

3. 甲乙兩醫院其收容患者人數之比爲 A:B, 入院死亡數之比爲 a:b, 出院數之比爲 c:d, 求各醫院中死亡人數與出院人數之比.

解 作甲醫院之死亡數爲 x 人, 出院者爲 y 人, 乙醫院之死亡數爲 z 人, 出院者爲 w 人, 由命題知甲醫院收容之患者爲 $(x+y)$人, 乙爲$(z+w)$人,

於是得 $x+y:z+w=A:B\cdots\cdots\cdots(1)$ [總人數]

$x:z=a:b\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ [死亡者]

$y:w=c:d\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$ [出院者]

因由此求 $x:y$ 及 $z:w$ 之值.

使 (1) 式盡成 x, y 須將由 (2)式, (3)式得來 z, w 之值代入之,

由 (2) 式得 $z=\dfrac{b}{a}x$, 由 (3) 式得 $w=\dfrac{d}{c}y$, 將其代入 (1) 式

得 $x+y:\dfrac{b}{a}x+\dfrac{d}{c}y=\mathrm{A}:\mathrm{B}$ $\therefore$ $\mathrm{B}(x+y)=\mathrm{A}\left(\dfrac{b}{a}x+\dfrac{d}{c}y\right)$

$\therefore$ $\mathrm{B}x+\mathrm{B}y=\dfrac{b\mathrm{A}}{a}x+\dfrac{d\mathrm{A}}{c}y$ 即 $\left(\mathrm{B}-\dfrac{d\mathrm{A}}{a}\right)x=\left(\dfrac{d\mathrm{A}}{c}-\mathrm{B}\right)y$

$\therefore$ $c(aB-b\mathrm{A})x=a(d\mathrm{A}-cB)y$

$$\therefore\quad \frac{x}{y}=\frac{a(d\mathrm{A}-cB)}{c(aB-bA)}$$

同樣由 (2) 式得 $x=\dfrac{a}{b}z$, 由 (3) 式得 $y=\dfrac{c}{d}w$, 將其代入 (1)

式而化簡之，得 $z:w=b(cB-dA):d(bA-aB)$

答 $\begin{cases}\text{甲…死亡者：出院者}=a(dA-cB):c(aB-bA)\\ \text{乙…死亡者：出院者}=b(cB-dA):d(bA-aB)\end{cases}$

〔2〕比　例

i.〔證明問題〕

1. $x:a=y:b=z:c$ 試證明 $\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$

解 由假定式得 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$

∴ 由 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$ 得 $\dfrac{x^3}{a^2}=\dfrac{(x+y+z)^2x}{(a+b+c)^2}$

由 $\dfrac{y}{b}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$ 得 $\dfrac{y^3}{b^2}=\dfrac{(x+y+z)^2y}{(a+b+c)^2}$

由 $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$ 得 $\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^2z}{(a+b+c)^2}$

因將此三式分邊相加得

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2x+(x+y+z)^2y+(x+y+z)^2z}{(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2(x+y+z)}{(a+b+c)^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

2. $a:b=c:d$ 試證明 $\dfrac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$

解　由假定式作　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$　$\therefore$ $a=bk$,　$c=dk$,　將其代入下式

$$\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=\frac{(bk)^{2n}+b^{2n}+(dk)^{2n}+d^{2n}}{(bk)^{-2n}+b^{-2n}+(dk)^{-2n}+d^{-2n}}$$

$$=\frac{b^{2n}(k^{2n}+1)+d^{2n}(k^{2n}+1)}{b^{-2n}(k^{-2n}+1)+d^{-2n}(k^{-2n}+1)}$$

$$=\frac{(b^{2n}+d^{2n})(k^{2n}+1)}{(b^{-2n}+d^{-2n})(k^{-2n}+1)}$$

$$=\frac{(b^{2n}+d^{2n})(k^{2n}+1)}{\frac{d^{2n}+b^{2n}}{b^{2n}d^{2n}}\times\frac{1+k^{2n}}{k^{2n}}}$$

$$=b^{2n}d^{2n}k^{2n}$$

$$=b^n\cdot b^nk^n\cdot d^n\cdot d^nk^n$$

$$=b^n\cdot a^n\cdot d^n\cdot c^n=(abcd)^n$$

$$\therefore\quad \frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$$

3.　$(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc-sd)$

$$=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$$

試證明 $bc:ad=ps:qr$

解　將假定式稍微變形，相乘得

$$\{(pa+sd)+(qb+rc)\}\{(pa+sd)-(qb+rc)\}$$
$$=\{(pa-sd)-(qb-rc)\}\{(pa-sd)+(qb-rc)\}$$

$\therefore$　$(pa+sd)^2-(qb+rc)^2=(pa-sd)^2-(qb-rc)^2$

$\therefore$　$(pa+sd)^2-(pa-sd)^2=(qb+rc)^2-(qb-rc)^2$

$$\{(pa+sd)+(pa-sd)\}\{(pa+sd)-(pa-sd)\}$$
$$=\{(qb+rc)+(qb-rc)\}\{(qb+rc)-(qb-rc)\}$$

$\therefore$　$(2pa)(2sd)=(2qb)(2rc)$

$\therefore$　$ps:ad=qr:bc$　　將此變成比例式

$ps:qr=bc:ad$　$\therefore$ $bc:ad=ps:qr$

II. 【連比例. 比例中項】

$a, b, c, d, e\cdots\cdots$ 一羣數之間有 $a:b=b:c=c:d=d:e=\cdots\cdots$ 之關係, 此等數謂之成連比例.

a, b, c 三數之間有 $a:b=b:c$ 之關係, a, b, c 不成連比例, 而 b 爲 a 與 c 之比例中項, 從而有 $b^2=ac$ 之關係

【注意】 a, b, c, d 成比例與 a, b, c, d 成連比例兩事不可相混.

a, b, c, d 成比例則 $a:b=c:d$, 卽得 $bc=ad$ 之關係式.

然 a, b, c, d 成連比例則 $a:b=b:c=c:d$, 因得

$b^2=ac$, $c^2=bd$, $bc=ad$ 三個關係式.

連比例與等比級數有同一意義.

1. a, b, c, d 爲連比例, 試證明下式.

$$a^3+b^3+c^3:b^3+c^3+d^3=a:d$$

解 因是連比例故 $a:b=b:c=c:d$ 卽 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$.

將此作爲等於 K 則 $\dfrac{a^3}{b^3}=\dfrac{b^3}{c^3}=\dfrac{c^3}{d^3}=k^3=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$ ………………(1)

$\dfrac{a}{b}=k$, $\dfrac{d}{c}=k$, $\dfrac{c}{d}=k$ 分邊相乘得 $k^3=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{d}$ …………(2)

因此 (1) 式, (2)式相等得 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=k^3=\dfrac{a}{d}$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3:b^3+c^3+d^3=a:d.$

2. a, b 爲有理數, 如 $a+b\sqrt{3}$ 爲 $1+\sqrt{3}$ 與 $10+6\sqrt{3}$ 之比例中項則 a 與 b 之數值爲如何.

解 $a+b\sqrt{3}$ 是 $1+\sqrt{3}$ 與 $10+6\sqrt{3}$ 之比例中項, 故得

$(a+b\sqrt{3})^2=(1+\sqrt{3})(10+6\sqrt{3})$, 將其簡單之

$a^2+2ab\sqrt{3}+3b^2=10+16\sqrt{3}+6\times 3$

∴ $(a^2+3b^2)+2ab\sqrt{3}=28+16\sqrt{3}$ 因 a, b 是有理數故 a^2, b^2 亦是有理數. 於是上式中等號兩邊之有理數同士者及無理數同士者應是相等.

∴ $a^2+3b^2=28$ ……………………(1)

$2ab\sqrt{3}=16\sqrt{3}$ ………………(2) 從而由 (2) 式得 $ab=8$

平方之成 $a^2b^2=64$, 此中將由 (1) 式得來之 $a^2=28-3b^2$ 代入之

$(28-3b^2)b^2=64$ ∴ $3b^4-28b^2+64=0$ …… $(3b^2-16)(b^2-4)=0$

從而 $3b^2-16=0$ 及 $b^2-4=0$

若 $3b^2-16=0$ 則	若 $b^2-4=0$ 則
$b^2=\dfrac{16}{3}$ ∴ $b=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$	$b=\pm 2$ 從而
	$b=2$ 則由 $ab=8$ 得
於此 b 爲無理數與命題意相反,	$a=4$, 又 $b=-2$ 則
故不能用.	$a=-4$

答 $(a=4, b=2)$; $(a=-4, b=-2)$

3. $\dfrac{a}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{c}{b^2+bc+c^2}$ 則 b 常是 a, c 之比例中項,試證明之.

解 將假定式之分母解去得 $a(b^2+bc+c^2)=c(a^2+ab+b^2)$

簡單之 $ab^2+ac^2=a^2c+b^2c$ 適當分組而分解成因子

$ab^2-b^2c-a^2c+ac^2=0$ ∴ $b^2(a-c)-ac(a-c)=0$

∴ $(b^2-ac)(a-c)=0$ 從而 $b^2-ac=0$ 或 $a-c=0$. 即 $b^2=ac$ 或 $a=c$. 若 $a=c$ 必 $b^2=ac$, 從而 b 不能常是 a, c 之比例中項. 祇是 $a\neq c$ 時 b 方是 a, c 之比例中項.

III. 【互比例】

假如鉛筆一枝價爲5分, 二枝爲10分, 三枝爲15分, 而 n 枝爲 $5n$ 分; 枝數與價錢之比爲 $n:5n$, 即 $\dfrac{n}{5n}$ 或 $\dfrac{1}{5}$, 無論枝數與數值如何

增減而其間常維持此種比，此種一定數謂之比例的常數：譬如 $a:b$ 之常數爲 k，則 $\frac{a}{b}=k$ 卽 $a=k.b$；而 a 與 b 之比謂之正比例.

作圓之面積爲 A，半徑 R 之平方爲 R^2，則兩者之比例爲 $A=K.R.^2$

反比例 變化相關連之兩數 a 與 b，a 之數值與 b 之逆數常成一定之比例，此兩數謂之成反比例或逆比例，卽 $a=k.\frac{1}{b}$ 或 $a.b=k$. 譬如物體受光之強弱 L 與光源之距離 D 之平方成反比例，寫之成 $L=K.\frac{1}{D^2}$ 或 $L.D^2=K$.

1. a 爲定數，y 與 $x+a$ 成正比例，今 $x=1$ 則 $y=15$，$x=5$ 則 $y=35$，若 $x=2$ 則 y 之値爲如何.

解 y 與 $x+a$ 成正比例. 故 $y=k(x+a)\cdots\cdots(A)$ 但 k 是常數. 今 $x=1$ 則 $y=15$. 於是由上式得

$15=k(1+a)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$ 又 $x=5$ 則 $y=35$ 故

$35=k(5+a)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$ 因此由 (1) 式，(2) 式求 k，a 之値，

$35-15=k(5+a)-k(1+a)$ $\therefore$ $20=4k$ $\therefore$ $k=5$

從而由 (1) 式得 $a=2$ 而 (A) 式爲 $y=5(x+2)$，

將 $x=2$ 代入之成 $y=5(2+2)$ $\therefore$ $y=20$ **答** $y=20$

2. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 與 $x-y$ 成反比例則 $(x+y)^2$ 與 x^2+y^2 成正比例，試證明之.

證 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ 與 $x-y$ 成反比例則可寫成

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=k.\frac{1}{x-y}$ 卽 $(y-x)(x-y)=kxy$，但 k 爲某常數，更變形成 $x^2-2xy+y^2=-kxy\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

(1) 式之兩邊加 $4xy$ 成 $x^2-2xy+y^2+4xy=4xy-kxy$

即 $(x+y)^2=(4-k)xy$ ……………………(2)

又 (1) 式移項得 $x^2+y^2=(2-k)xy$ ……………(3)

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\frac{(4-k)xy}{(2-k)xy}=\frac{4-k}{2-k} \cdots\cdots(4)$$

因 k 爲常數故 $4-k$, $2-k$ 亦是常數, 從而 $\frac{4-k}{2-k}$ 亦是常數. 即由

(4) 式知 $(x+y)^2$ 與 (x^2+y^2) 之比等於常數 $\frac{4-k}{2-k}$, 故

$(x+y)^2$ 與 x^2+y^2 是正比例.

IIII. 【複比例】

A 與 B 成比例, 又與 C 成比例, 於是 A 與 B, C 之積亦成比例, 此可寫成 $A=K.B.C$

例如三角形之面積爲A,底邊爲a,高爲h,作成比例則$A=K.ah$.

1. $z-30$ 是與t成比例之一數, t^2爲其與之成比例之一數之和, 今 $t=3$則$z=84$, $t=4$則$z=110$, z爲最小時t之實數值爲幾何, 又求 z 之最小值.

解 $z-30$ 爲與 t 成比例之一數, t^2 爲其與之成比例之一數之和, 故

$z-30=k.t+m.t^2$ ……………………(1)

於是將 $t=3$, $z=84$ 代入之得

$84-30=3k+9m$, $\therefore$ $k+3m=18$ ……………(2)

次將 $t=4$, $z=110$ 代入 (1) 式得

$110-30=4k+16m$, $\therefore$ $k+4m=20$ ……(3)

將(2)式, (3)式解之, 求 k, m 之值; (3)式$-$(2)式得 $m=2$, 將其代入(2)式得 $k=12$, 此用入(1)式成 $z-30=12t+2t^2$. 求本式之 z 之最小值則將此式變形成 $z=2(t^2+6t+15)=2(t^2+6t+9+6)$

$=2\{(t+3)^2+6\}$

$z=2\{(t+3)^2+6\}$

t 有實數值 則 $(t+3)^2$ 是正數或零. 使成極小則須 是 $(t+3)^2=0$, 此時得 $z=2(0+6)=12$ 及 $t=-3$. 答 $t=-3$, $z=12$

【3】 應 用 問 題

1. 輪船的燒煤消費量是速度三乘的比例，現在在行16浬之速度時燒煤96噸，求此輪船之速度與煤之消費量間之關係.

答 每小時行 x 浬時煤之消費量作爲 A, 則由命題得

$A=k.x^3$ ············(1) 今將 $A=96$, $x=16$ 代入之,

$96=k.16^3$ $\therefore$ $k=\dfrac{3}{128}$ 從而由 (1)式 得 $A=\dfrac{3}{128}x^3$

答 $A=\dfrac{3}{128}x^3$

2. 火車行駛所要的時間與距離成正比例，與速度成反比例，而走一哩的速度與燒煤量的平方根成正比例，與拖帶的車輛數成反比例. 今有拖帶車輛20輛之火車，一點鐘行36哩之距離用煤900磅，問此部火車若拖帶車輛18輛在45分鐘行80哩之距離時需煤若干.

解 作火車行走所要之時間爲(T), 距離爲(D), 速度爲(V), 時間與距離成正比例, 與速度成反比例, 可寫之成 $T=k.D\times\dfrac{1}{V}$ ············(1)

其次, 行 D 哩 用 X 磅煤, 則行一哩 要 $\dfrac{X}{D}$ 磅煤. 而速度 1 哩與燒煤量之平方根成正比例, 與拖帶車輛數(N)成反比例, 因得

$V=m\sqrt{\dfrac{X}{D}}.\dfrac{1}{N}$, 此中將 (1) 式之變形 $T.V=k.D$ 代入之得

$T.m\sqrt{\dfrac{X}{D}}.\dfrac{1}{N}=k\,D$ $\therefore$ $T.\sqrt{\dfrac{X}{D}}=\dfrac{k}{m}.N.D$

k, m 爲常數而作 $\dfrac{k}{m}=l$, 則

$T.\sqrt{\frac{X}{D}}=l.N.D\cdots\cdots(2)$.　令N=20, D=36, T=1, X=900.

適用之得　$1\times\sqrt{\frac{900}{36}}=l\times20\times36$　$\therefore$　$l=\frac{1}{144}$　將其代入(2)式

得　$T.\sqrt{\frac{X}{D}}=\frac{1}{144}N.D$; 再於此中將N=18, D=30, $T=\frac{45}{60}$

代入之,成 $\frac{45}{60}\sqrt{\frac{X}{30}}=\frac{1}{144}\times18\times30$　$\therefore$　X=750　答　750 磅

3. 黃銅是銅與鋅的合金，今於黃銅中滲入銅80鋅4錫16所成之青銅若干．鎔化之得一種銅74鋅16錫10所成之合金，求黃銅中所含之銅與鋅之成份．

解　作黃銅爲銅a鋅b之合金，黃銅x兩與青銅y兩混合所成之物爲

$$\text{黃銅}\begin{cases}\frac{a}{a+b}x\cdots\cdots\cdots\text{銅}\\ \frac{b}{a+b}x\cdots\cdots\cdots\text{鋅}\end{cases}\qquad\text{青銅}\begin{cases}\frac{80}{80+4+16}y\cdots\cdots\text{銅}\\ \frac{4}{80+4+16}y\cdots\cdots\text{鋅}\\ \frac{16}{80+4+16}y\cdots\cdots\text{錫}\end{cases}$$

$$\text{兩者混合所成之合金}\begin{cases}\frac{74}{74+26+10}(x+y)\cdots\cdots\cdots\text{銅}\\ \frac{16}{74+16+10}(x+y)\cdots\cdots\cdots\text{鋅}\\ \frac{10}{74+16+10}(x+y)\cdots\cdots\cdots\text{錫}\end{cases}$$

從而得下列方程式.

$$\text{銅}\cdots\cdots\cdots\frac{a}{a+b}x+\frac{80}{100}y=\frac{74}{100}(x+y)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\text{鋅}\cdots\cdots\cdots\frac{a}{a+b}x+\frac{4}{100}y=\frac{16}{100}(x+y)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\text{錫}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{16}{100}y=\frac{10}{100}(x+y)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由 (3) 式得　$3y=5x\cdots\cdots y=\frac{5}{3}x$.　　將此代入 (2) 式得

$\frac{b}{a+b}x+\frac{4}{100}\times\frac{5}{3}x=\frac{16}{100}\left(x+\frac{5}{3}x\right)$ 即 $\frac{b}{a+b}x=\frac{9}{25}x$，而 $x\neq 0$ 故

$\frac{b}{a+b}=\frac{9}{25}$　　$\therefore\ 25b=9a+9b$　　$\therefore\ 16b=9a$

$\therefore\ a:b=16:9$，此與 $y=\frac{5}{3}x$ 能滿足 (1) 式.　　答 銅16，錫9.

4. 有含鹽4%之水若干瓩，其後水分蒸發若干遂至含鹽10%，乃又滲入含鹽4%之水300瓩，於是成含鹽6.4%之水，問最初之水有若干瓩.

解 作所求之水爲x瓩，蒸發之水爲a瓩，最初水中所含之鹽爲$\frac{4}{100}x$瓩，

水分蒸發後所剩之水爲 $(x-a)$ 瓩，其中所含之鹽爲 $\frac{10}{100}(x-a)$ 瓩；

而鹽之重量並無變化，故得

$\frac{4}{100}x=\frac{10}{100}(x-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$　　又由命題得

$\frac{10}{100}(x-a)+\frac{4}{100}\times 300=\frac{64}{1000}(x-a+300)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

將由 (1) 式得來之 $a=\frac{3}{5}x$ 代入 (2) 式得 $x=500$

答 500 瓩

5. 有甲乙兩瓶，甲中有水一升，乙中有酒一升，今由甲取一合注入乙，又由乙取一合注入甲，再由甲取一合注入乙，更由乙取一合注入甲，於是兩瓶中之酒與水之比各如何.

解 由甲取一合注入乙時.

甲…………………水9合　　　　乙…………酒10合，水1合

由乙取出之一合其中爲酒$\frac{10}{11}$合，水$\frac{1}{11}$合，將此注入甲則

$$甲\begin{cases}\text{酒}\cdots\cdots\dfrac{10}{11}\text{合}\\ \text{水}\cdots\cdots 9\text{合}+\dfrac{1}{11}\text{合}=\dfrac{100}{11}\text{合}\\ \text{全量}\cdots\left(\dfrac{10}{11}+\dfrac{100}{11}\right)\text{合}=10\text{合}\\ \text{酒}:\text{水}=\dfrac{10}{11}:\dfrac{100}{11}=1:10\end{cases}\qquad 乙\begin{cases}\text{酒}\cdots\cdots 10\text{合}-\dfrac{10}{11}\text{合}=\dfrac{100}{11}\text{合}\\ \text{水}\cdots\cdots 1\text{合}-\dfrac{1}{11}\text{合}=\dfrac{10}{11}\text{合}\\ \text{全量}\cdots\left(\dfrac{10}{11}+\dfrac{100}{11}\right)\text{合}=10\text{合}\end{cases}$$

更由甲取一合，其中所含爲$\left(\text{酒}\dfrac{1}{11}\text{合},\ \text{水}\dfrac{10}{11}\text{合}\right)$，將其注入乙則

$$甲\begin{cases}\text{酒}\cdots\cdots\dfrac{10}{11}\text{合}-\dfrac{1}{11}\text{合}=\dfrac{9}{11}\text{合}\\ \text{水}\cdots\cdots\dfrac{100}{11}\text{合}-\dfrac{10}{11}\text{合}=\dfrac{90}{11}\text{合}\\ \text{全量}\cdots\left(\dfrac{9}{11}+\dfrac{90}{11}\right)\text{合}=9\text{合}\end{cases}\qquad 乙\begin{cases}\text{酒}\cdots\cdots\dfrac{100}{11}\text{合}+\dfrac{1}{11}\text{合}=\dfrac{101}{11}\text{合}\\ \text{水}\cdots\cdots\dfrac{10}{11}\text{合}+\dfrac{10}{11}\text{合}=\dfrac{20}{11}\text{合}\\ \text{全量}\cdots\left(\dfrac{101}{11}+\dfrac{20}{11}\right)\text{合}=11\text{合}\\ \text{酒}:\text{水}=\dfrac{101}{11}:\dfrac{20}{11}=101:20\end{cases}$$

再由乙取一合，其中所含爲$\left(\text{酒}\dfrac{101}{121}\text{合},\ \text{水}\dfrac{20}{121}\text{合}\right)$，將其注入甲則

$$甲\begin{cases}\text{酒}\cdots\cdots\dfrac{9}{11}\text{合}+\dfrac{101}{121}\text{合}=\dfrac{200}{121}\text{合}\\ \text{水}\cdots\cdots\dfrac{90}{11}\text{合}+\dfrac{20}{121}\text{合}=\dfrac{1010}{121}\text{合}\end{cases}\qquad 乙\begin{cases}\text{酒}\cdots\cdots\dfrac{101}{11}\text{合}-\dfrac{101}{121}\text{合}=\dfrac{1010}{121}\text{合}\\ \text{水}\cdots\cdots\dfrac{20}{11}\text{合}-\dfrac{20}{121}\text{合}=\dfrac{200}{121}\text{合}\end{cases}$$

甲…水:酒$=\dfrac{1010}{121}:\dfrac{200}{121}=101:20$，乙…水:酒$=\dfrac{200}{121}:\dfrac{1010}{121}=20:101$ 答

6. 甲桶中有酒8升，乙桶中有水7升，由甲桶中取出若干升移入乙桶，又由乙桶取出同量注入甲桶，再由甲桶取出同量移入乙桶，此時乙桶內之酒與水成$2:3$之比，問每次取出幾升.

解 作每次所取爲x升，由甲桶取x升注入乙桶時則

甲……酒$(8-x)$升 | 乙……酒x升，水7升.

次由乙桶取x升$\left(\text{酒}\dfrac{x^2}{x+7}\text{升},\quad \text{水}\dfrac{7x}{x+7}\text{升}\right)$注入甲桶則

甲 $\begin{cases} 酒\cdots\cdots\left(8-x+\dfrac{x^2}{x+7}\right)升 \\ \qquad\qquad =\dfrac{x+56}{x+7}升 \\ 水\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\dfrac{7x}{x+7}升 \\ 全量\cdots\cdots\cdots\cdots 8升 \\ 酒:水=\dfrac{x+56}{x+7}:\dfrac{7x}{x+7} \\ \qquad =x+56:7x \end{cases}$

乙 $\begin{cases} 酒\cdots\cdots\left(x-\dfrac{x^2}{x+7}\right)升=\dfrac{7x}{x+7}升 \\ 水\cdots\cdots\left(7-\dfrac{7x}{x+7}\right)升=\dfrac{49}{x+7}升 \\ 全量\cdots\cdots\cdots\cdots 7升 \end{cases}$

再由甲桶取x升 $\left\{酒\dfrac{x(x+56)}{x+56+7x}升，水\dfrac{7x^2}{x+56+7x}升\right\}$ 注入乙桶

乙桶 $\begin{cases} 酒\cdots\cdots\left(\dfrac{7x}{x+7}+\dfrac{x(x+56)}{8x+56}\right)升=\dfrac{x(x+112)}{8(x+7)}升 \\ 水\cdots\cdots\left(\dfrac{49}{x+7}+\dfrac{7x^2}{8x+56}\right)升=\dfrac{7(x^2+56)}{8(x+7)}升 \end{cases}$

因由命題得下列比例式

$$\frac{x(x+112)}{8(x+7)}:\frac{7(x^2+56)}{8(x+7)}=2:3 \quad [但\quad x+7\neq 0]$$

$$\therefore\quad 3x(x+112)=14(x^2+56)\cdots\cdots 11x^2-336x+784=0$$

$$\therefore\quad (11x-28)(x-28)=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{28}{11}\quad 及\quad 28$$

然 8 升中不能取 28 升，故不能用． 答 $\dfrac{28}{11}$ 升

第十九章

級數

【1】等差級數

等差級數之初項爲a，項數爲n，末項爲l，公差爲d 則此等差級數如下

初項	第二項	第三項	第四項		第$(n-1)$項	第n項
a,	$(a+d)$,	$(a+2d)$,	$(a+3d)$	$\cdots\cdots$	$[a+(n-2)d]$,	$[a+(n-1)d]$

【要項】 上例中 $\boxed{d\text{ 之係數較項之號數小 }1}$

如作末項爲 l, 則寫之成

初項	第二項	第三項		第$(n-1)$項	第n項
$l-(n-1)d$,	$l-(n-2)d$,	$l-(n-3)d$,	$\cdots\cdots\cdots$	$l-d$,	l

於是第 n 項之 $a+(n-1)d$ 與 l 相等

即　　$l=a+(n-1)d$

公式
1. 第n項$=a+(n-1)d$　　2. $l=a+(n-1)d$
3. $s(\text{總和})=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$　　4. $s=\dfrac{n(a+l)}{2}$

等差中項　a, b, c 成等差級數 則 b 爲等差中項, 生出

$b-a=c-b$ [又 $a-b=b-c$] 或 $2b=a+c$ 之關係.

【要項】 $\boxed{a, b, c\text{ 成等差級數}}$ 須能證明 $b-a=c-b$

或 $2b=a+c$

問　　題

1. a^2, b^2, c^2 是等差級數則

$$\frac{1}{b+c},\quad \frac{1}{c+a},\quad \frac{1}{a+b}$$

亦是等差級數, 試證明之.

解 $\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{c+a}$

$=\dfrac{a-b}{(b+c)(c+a)}$

$\dfrac{1}{c+a}-\dfrac{1}{a+b}$

$=\dfrac{b-c}{(c+a)(a+b)}$

使兩者之分母相同以便比較，於是

$$\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}\cdots\cdots\times\frac{(a+b)}{(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{b-c}{(c+a)(a+b)}\cdots\cdots\times\frac{(b+c)}{(b+c)}=\frac{b^2-c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

由命題 a^2, b^2, c^2 爲等差級數故 $a^2-b^2=b^2-c^2$，因此

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{b^2-c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

從而 $\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}$

即 $\frac{1}{b+c},\quad\frac{1}{c+a},\quad\frac{1}{a+b}$ 是等差級數.

別解 由假定得 $a^2-b^2=b^2-c^2$

兩邊用 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 除之

$$\frac{a^2-b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{b^2-c^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

即 $\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(b+c)(b-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

兩邊化簡 $\frac{a-b}{(b+c)(c+a)}=\frac{b-c}{(a+b)(c+a)}$

即 $\frac{1}{b+c}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b}$

故 $\frac{1}{b+c},\quad\frac{1}{c+a},\quad\frac{1}{a+b}$ 是等差級數.

2. 等差級數之第 p 項爲 x，第 q 項爲 y，第 r 項爲 z，則 $(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0$，試證明之.

解 作初項爲 a，公差爲 d，則由命題得

$$x=a+(p-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=a+(q-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$z=a+(r-1)d\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

於是求 $(p-q)$, $(q-r)$, $(r-p)$,

由 (1)式—(2)式得 $x-y=d(p-q)\cdots\times\frac{z}{d}\cdots(p-q)z=\frac{zx-yz}{d}$

由 (2)式—(3)式得 $y-z=d(q-r)\cdots\times\frac{x}{d}\cdots(q-r)x=\frac{xy-zx}{d}$

由 (3)式—(1)式得 $z-x=d(r-p)\cdots\times\frac{y}{d}\cdots(r-p)y=\frac{yz-xy}{d}$

上列三式分邊相加得

$$(p-q)z+(q-r)x+(r-p)y=\frac{zx-yz+xy-zx+yz-xy}{d}$$

$$\therefore\quad (q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0$$

II 【a, d, n 之方程式】

1. 等差級數第 m 項爲 α, 第 n 項爲 β, 其第 $(m+n)$ 項之最簡單形式爲如何.

解 作初項爲 a, 公差爲 d,因得下列兩個方程式

第 m 項…… $\alpha=a+(m-1)d\cdots\cdots\cdots(1)$

第 n 項…… $\beta=a+(n-1)d\cdots\cdots\cdots(2)$ [a, d, 是未知數]

將此解之, (1)式—(2)式得 $\alpha-\beta=[(m-1)-(n-1)]d$

$\therefore\quad d=\frac{\alpha-\beta}{m-n}\cdots\cdots(3)$ 將其代入 (1)式而求 a

$a=\frac{(m-1)\beta-(n-1)\alpha}{m-n}\cdots\cdots(4)$ 由公式得

第$(m+n)$項$=a+(m+n-1)d$, 此中代入(3)式, (4)式得

$$第(m+n)項=\frac{(m-1)\beta-(n-1)\alpha}{m-n}+(m+n-1)\times\frac{\alpha-\beta}{m-n}$$

$$=\frac{(m-1)\beta-(n-1)\alpha+m\alpha+(n-1)\alpha-(m-1)\beta-n\beta}{m-n}$$

$$=\frac{m\alpha-n\beta}{m-n}$$

答 $\frac{m\alpha-n\beta}{m-n}$

2. 有等差級數其初項爲a，第二項爲b，$\dfrac{a}{a-b}$爲正整數，則級數中有一項等於零，試證明之.

解 作公差爲 d 則 $d=b-a$.

由公式 $a+(n-1)d$ 得

$$\text{第 } n \text{ 項}=a+(n-1)(b-a)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由命題$\dfrac{a}{a-b}=m$, m是正整數. 從而

$a=m(a-b)=-m(b-a)$ 將其用入 (1) 式

第 n 項$=-m(b-a)+(n-1)(b-a)=(n-m-1)(b-a)$

因$\dfrac{a}{a-b}$是正整數, 故 $a-b\neq 0$, 則是 $n-m-1=0$ 卽

$n=m+1$ 時第 n 項等於零, 於是其級數中有等於零之一項存在. 而此項是第 $(m+1)$ 項, 卽第$\left(\dfrac{a}{a-b}+1\right)$項.

3. 有成等差級數之三個數，其和爲315，而第一數與第三數之比爲3:7，求此三數.

解 作此三數爲 $x-d$, x, $x+d$, 於是得

$(x-d)+x+(x+d)=315\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$(x-d):(x+d)=3:7\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由 (1)式得 $3x=315$ 卽 $x=105$ 次由 (2)式得

$3(x+d)=7(x-d)$ 卽$d=\dfrac{2}{5}x$

此中用入x之值得 $d=\dfrac{2}{5}\times 105=42$

因此三數爲 $x-d$, x, $x+d$ 卽是 63, 105, 147.

答 63, 105, 147

4. 直角三角形之三邊成等差級數時，其三邊之比爲如何.

解 三邊是等差級數, 因作之爲 $x-d$, x, $x+d$; $x+d$ 是斜邊,

由 pythogoras 定理[直角三角形之斜邊之平方等於其他二邊平方之和]

得 $(x-d)^2+x^2=(x+d)^2$. 即 $x^2=4dx$ 而 $x\neq0$ 故 $x=4d$.

$\therefore\ x-d:x:x+d=4d-d:4d:4d+d=3:4:5$……………………答

5. 四個成等差級數之整數，其平方之和為 120，第二數與第四數之積比第一數與第三數之積大兩倍尚多 8，求此四個數。

解 作此四數為 $x-3k,\ x-k,\ x+k,\ x+3k$, 其公差為 $2k$. 由命題得

$(x-3k)^2+(x-k)^2+(x+k)^2+(x+3k)^2=120$ ……(1)

$(x-k)(x+3k)=3(x-3k)(x+k)+8$……………… (2)

於是由 (1)式得 $x^2+5k^2=30$………………………… (3)

由 (2)式得 $x^2-6kx-3k^2=-8$……………………… (4)

(3)式×4+(4)式×15 得 $19x^2-90kx-25k^2=0$

$\therefore\ (19x+5k)(x-5k)=0$　　$\therefore\ x=-\frac{5}{19}k$ 或 $5k$

若 $x=-\frac{5}{19}k$ 而

將其代入 (3)式得

$\left(-\frac{5}{19}k\right)^2+5k^2=30$

$\therefore\ k^2=\frac{361}{61}$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{\frac{19}{61}}$ 將此代入

$x=-\frac{5}{19}k$

然所求之四數不成 $\boxed{\text{整數}}$

故不能用.

若 $x=5k$ 而

將其代入 (3)式得

$(5k)^2+5k^2=30$

$\therefore\ k=\pm1$. 從而用於

$x=5k$

$k=1$ 則

$x=5$

於是四數為

$x-3k=2$

$x-k=4$

$x+k=6$

$x+3k=8$

$k=-1$ 則

$x=-5$

於是四數為

$x-3k=-2$

$x-k=-4$

$x+k=-6$

$x+3k=-8$

答 2, 4, 6, 8; −2, −4, −6, −8

III【總和問題】

1. 求 $\dfrac{2a^2-1}{a}$, $4a-\dfrac{3}{a}$, $\dfrac{6a^2-5}{a}$ ……直至第十項之和.

解 $\left(4a-\dfrac{3}{a}\right)-\dfrac{2a^2-1}{a}=\dfrac{2a^2-2}{a}$; $\dfrac{6a^2-5}{a}-\left(4a-\dfrac{3}{a}\right)=\dfrac{2a^2-2}{a}$ 故此爲

等差級數之公差爲 $\dfrac{2a^2-2}{a}$, 而初項爲 $\dfrac{2a^2-1}{a}$, 項數爲 10

則由公式 $s=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ 得

$$\text{所求之和}=\frac{10\left\{2\times\dfrac{2a^2-1}{a}+(10-1)\times\dfrac{2a^2-2}{a}\right\}}{2}$$

$$=5\left\{\frac{4a^2-2}{a}+\frac{18a^2-18}{a}\right\}=\frac{110a^2-100}{a}\text{…………答}$$

2. 求下列等差級數之 n 項之和.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}},\ -1,\ \frac{1}{1-\sqrt{2}},\ \cdots\cdots\cdots$$

解 $a=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, $d=-1-\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=-\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

$$=-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}}=-\sqrt{2},\ n=n,$$

$$\therefore\ s=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n}{2}\left\{2\times\frac{1}{1+\sqrt{2}}+(n-1)\times(-\sqrt{2})\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+(n-1)\times(-\sqrt{2})\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\{(3-n)\sqrt{2}-2\}\text{…………………答}$$

3. 由 1 起始之順次奇數任意取至某項，則該數以前之奇數之和等於項數之平方，試證明之.

解　求 1, 3, 5, 7, 9………………之n項之和.

$$a=1,\ d=2,\ n=n,\ 總和=s$$

$$\therefore\quad s=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\{2\times1+(n-1)\times2\}}{2}=\frac{n\{2+2n-2\}}{2}=n^2$$

即等於項數之平方.

4. 等差級數之第 n 項爲 $\frac{9}{2}-\frac{n}{3}$, 求第 6 項起至第 15 項止之和.

解　於$\frac{9}{2}-\frac{n}{3}$中作 $n=6,\ n=7,\ n=8\cdots\cdots\cdots\cdots n=15$ 之級數則得

$\frac{15}{6},\ \frac{13}{6},\ \frac{11}{6},\ \cdots\cdots\cdots\frac{-3}{6}.$

$$\therefore\quad a=\frac{15}{6}=\frac{5}{2},\quad l=\frac{-3}{6},\quad n=15-5=10$$

$$\therefore\quad s=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{10\left(\frac{5}{2}+\frac{-3}{6}\right)}{2}=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 答$$

5. 某等差級數之最初n項之和等於 $n(16+n)$, 今不問n之值爲如何, 求此級數之第一項及級數之公差.

解　第$(n-1)$ 次止之項之和爲 $n(16+n)$, 其中可用 $n-1$ 以代 n,

第$(n-1)$ 項止之和 $=(n-1)[16+(n-1)]=n^2+14n-15$

從而第n項$=n(16+n)-(n^2+14n-15)=2n+15$

此中應用 $n=1,\ n=2,\ n=3,\ n=4,\ n=5\cdots\cdots\cdots\cdots$則

$$2n+15=17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此　公差$=19-17=2$　　答　初項17, 公差2

6. 求比 200 小, 而能被3及5除盡之各正整數之和.

解　求 3 能除盡之最大數 則 $200\div3=66\frac{2}{3}$　得　$3\times66=198$,

因此作 3 能除盡之數之和爲 S_3 則

$$S_3=3+6+9+12+15\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+198$$

而由 $l=a+(n-1)d$ 故 $198=3+(n-1)\times 3$ $\therefore$ $n=66$ 從而

$$S_3=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{66(3+198)}{2}=6633$$

同樣作 5 能除盡之數之和爲 S_5 則

$$S_5=5+10+15+\cdots\cdots+195=\frac{39(5+195)}{2}=3900$$

於是 $S_3+S_5=6633+3900=10533$, 而 S_3中有 3 與 5 能除盡之數, S_5 中亦有 3 與 5 能除盡之數, 例如 15, 其和作爲 s 則 $s=15+30+\cdots\cdots+195=1365$ 從而所求之數爲 $S_3+S_5-S=10533-1365=9168$ 答 9168

7. 等差級數之第八項起至第二十項止其和爲 *130*, 而第十二項之平方較第九項之*10*倍多*6*, 求此級數.

解 作初項爲a, 公差爲d, 則第八項$=a+7d$, 第二十項$=a+19d$, 而作由初項起第二十項止之和爲 S_{20}. 則

$$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=10\{2a+19d\}$$

作初項起至第七項止之和爲 S_7 則

$$S_7=\frac{7\{2a+(7-1)d\}}{2}=7(a+3d)$$

從而由第八項至第二十項之和$=S_{20}-S_7$

$$=10(2a+19d)-7(a+3d)$$

$$=13a+169d=13(a+13d)$$

由命題

$$13(a+13d)=130\cdots\cdots\cdots a+13d=10\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 第九項$=a+8d$, 第十二項$=a+11d$, 故由命題,

$$(a+11d)^2=10(a+8d)+6\cdots\cdots\cdots(2)$$

將 (1)式, (2)式解之, 由(1)式得 $a=10-13d$, 將其代入 (2)式

$$(10-13d+11d)^2=10(10-13d+8d)+6 \quad \text{即}$$

$$(10-2d)^2=10(10-5d)+6 \quad \therefore \quad 2d^2+5d-3=0$$

$\therefore\ (2d-1)(d+3)=0\quad \therefore\ d=\frac{1}{2}$ 及 -3

$d=\frac{1}{2}$ 則由

$a+13d=10$ 得

$a=3\frac{1}{2}$

故所求之級數爲

$3\frac{1}{2},\ 4,\ 4\frac{1}{2},\ 5,\cdots\cdots$

$d=-3$ 則由

$a+13d=10$ 得

$a=49$

故所求之級數爲

$49,\ 46,\ 43,\ 40\cdots\cdots$

答 $3\frac{1}{2},\ 4,\ 4\frac{1}{2},\ 5\cdots\cdots$; 又 $49,\ 46,\ 43,\ 40\cdots\cdots$

8. **有等差級數，其初 p 項之和與初 q 項之和相等，求由初至第 $p+q$ 項之和.**

解 作初項爲 a, 公差爲 d, 初 p 項之和爲 S_p, 初 q 項之和爲 S_q, 則

$$S_p=\frac{p\{2a+(p-1)d\}}{2},\qquad S_q=\frac{q\{2a+(q-1)d\}}{2}$$

由命題兩者相等，故

$$\frac{p\{2a+(p-1)d\}}{2}=\frac{q\{2a+(q-1)d\}}{2}$$

$\therefore\ 2a(p-q)+(p^2-q^2-p+q)d=0\cdots\cdots 2a(p-q)+(p-q)(p+q-1)d=0$

$\therefore\ (p-q)\{2a+(p+q-1)d\}=0$ 從而 $p-q=0$ 或

$2a+(p+q-1)d=0$, 即 $p=q$ 或 $2a=-(p+q-1)d$

再作由初至第 $p+q$ 項之和爲 S_{p+q} 則

$$S_{p+q}=\frac{(p+q)\{2a+(p+q-1)d\}}{2}\cdots\cdots\cdots(3)$$

令 $p=q$ 將其代入

(3) 式

$$S_{p+q}=\frac{2p\{2a+(2p-1)d\}}{2}$$

$$=p\{2a+(2p-1)d\}$$

又 $2a=-(p+q-1)d$ 將其代入

(3) 式

$$S_{p+q}=\frac{(p+q)\{-(p+q-1)d+(p+q-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{(p+q)\times 0}{2}$$

$$=0$$

答　$p=q$ 則 $(p+q)$項之和爲 $p\{2a+(2p-1)d\}$，$p\neq q$ 則爲0.

9. 有等差級數其第三項爲$\frac{17}{6}$，第八項爲-3，求初項至何項止其和爲$\frac{9}{2}$.

解　作初項爲 a，公差爲 d，因得下列方程式.

$$\left.\begin{array}{l} a+2d=\frac{17}{6}\cdots\cdots\cdots 6a+12d=17 \\ a+7d=-3\ \cdots\cdots 6a+42d=-18 \end{array}\right\}\text{相減}$$

$$-30d=35\quad\therefore\ d=-\frac{7}{6}\quad\text{從而}\quad a=\frac{31}{6}$$

故　$a=\frac{31}{6}$，$d=-\frac{7}{6}$，$s=\frac{9}{2}$，$n=$未知.

由　$s=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$　得　$\frac{9}{2}=\frac{n\left\{2\times\frac{31}{6}+(n-1)\times\frac{-7}{6}\right\}}{2}$

$\therefore\ 7n^2-69n+54=0\cdots\cdots(7n-6)(n-9)=0\quad\therefore\ n=\frac{6}{7}$或 9

然 n 是項數故不能用分數.　　答 9項

10. 有凸多角形，其內角成等差級數，最小之角爲120度，公差爲5度，求其邊數.

解　由幾何學定理多角形之角數與邊數相等，而其內角之和與邊數二倍之正角減四正角相等．今作所求之邊數爲n，內角總和爲 s 而一正角爲90度，故 $s=2n\times90^\circ-4\times90^\circ=(n-2)\times180^\circ\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又用代數的計算.

初項$=120$度，公差$=5$度，項數$=n$（即與邊數相等），故

$$s=\frac{n\{2\times120+(n-1)\times5\}}{2}=\frac{n\{235+5n\}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

作 (1) 式，(2) 式相等　　$180(n-2)=\frac{n(235+5n)}{2}$

$\therefore\ 5n^2-125n+720=0\qquad\therefore\ n^2-25n+144=0$

$(n-9)(n-16)=0\qquad\therefore\ n=9$ 及 16

而　$n=16$ 則由 $l=a+(n-1)d$ 計算之，最大角 $l=195$　即 195度.

然凸多角形之各角不能超過 180 度，故是不合理.　　答 9

11. 有兩個等差級數，至n項止兩者之和之比爲$\frac{7n+2}{5n-2}$，求第十三項之比．

解 作一個級數（甲）爲 $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\cdots\cdots$

其他級數（乙）爲 $\alpha,\ \alpha+\beta,\ \alpha+2\beta,\ \alpha+3\beta\cdots\cdots$

甲級數n項之和 $=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

乙級數n項之和 $=\dfrac{n\{2\alpha+(n-1)\beta\}}{2}$

故其比爲 $\dfrac{\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}}{\dfrac{n\{2\alpha+(n-1)\beta\}}{2}}=\dfrac{2a+(n-1)d}{2\alpha+(n-1)\beta}$ 由命題

$\dfrac{2a+(n-1)d}{2\alpha+(n-1)\beta}=\dfrac{7n+2}{5n-2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

甲級數之第十三項爲 $a+12d$，乙之第十三項爲 $\alpha+12\beta$ 則其比爲

$\dfrac{a+12d}{\alpha+12\beta}$ 即 $\dfrac{2a+24d}{2\alpha+24\beta}$ 於是由此式與（1）式得

$2a+(n-1)d=2a+24d,\quad n=25.$

今於（1）式將 $n=25$ 用入

$\dfrac{2a+(25-1)d}{2a+(25-1)\beta}=\dfrac{7\times25+2}{5\times25-2}\quad\therefore\quad\dfrac{a+12d}{\alpha+12\beta}=\dfrac{177}{123}$

而 $a+12d$ 爲甲級數之第十三項，$\alpha+12\beta$ 爲乙級數之第十三項故比爲

$\dfrac{177}{123}$ 答 $\dfrac{177}{123}$

12. 有$3n$項之等差級數，最初n項之和爲A，次n項之和爲B，最後之n項之和爲C，則

$$B^2-AC=\left(\frac{A-C}{2}\right)^2$$

試證明之．

解 作初項爲a，公差爲d，$2n$項之和爲S_{2n}，$3n$項之和爲S_{3n}，則

$A=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2},\qquad S_{2n}=\dfrac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2}$

$$S_{3n}=\frac{3n\{2a+(3n-1)d\}}{2}$$

$$\therefore\ B=S_{2n}-A=\frac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2}-\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{n\{2a+(3n-1)d\}}{2}$$

$$C=S_{3n}-S_{2n}=\frac{3n\{2a+(3n-1)d\}}{2}-\frac{2n\{2a+(2n-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{n\{2a+(5n-1)d\}}{2}$$

$$\therefore\ B^2-AC=\left(\frac{n\{2a+(3n-1)d\}}{2}\right)^2$$

$$-\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}\times\frac{n\{2a+(5n-1)d\}}{2}$$

$$=n^4d^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $$\left(\frac{A-C}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}\left(\frac{2a+(n-1)d}{2}-\frac{2a+(5n-1)d}{2}\right)^2$$

$$=n^4d^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從而由 (1)式, (2)式得

$$B^2-AC=n^4d^2=\left(\frac{A-C}{2}\right)^2$$

13. 共有n項之兩個等差級數，兩者之初項爲a與b，而兩者之公差爲b與a，且a與b爲方程式$x^2-px+q=0$之根，試證明兩級數之和爲下列方程式之二根.

$$4x^2-2n(n+1)px+n^2[2(n-1)p^2+(n-3)^2q]=0.$$

解 甲級數$\cdots\cdots a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\cdots\cdots$

乙級數$\cdots\cdots b,\ b+a,\ b+2a,\ b+3a,\cdots\cdots$

從而作甲級數n項之和爲 s, 乙級數n項之和爲s' 則

$$s=\frac{n\{2a+(n-1)b\}}{2},\qquad s'=\frac{n\{2b+(n-1)a\}}{2},$$

次由根與係數之關係得

$a+b=p\cdots\cdots(1)\qquad ab=q\cdots\cdots(2)$

今以 s, s' 爲根作成方程式 $(x-s)(x-s')=0$

卽 $x^2-(s+s')x+ss'=0$ ……………………(3)

而 $s+s'=\dfrac{n\{2a+(n-1)b\}}{2}+\dfrac{n\{2b+(n-1)a\}}{2}$

$$=\frac{n}{2}\{2a+2b+nb+na-a-b\}=\frac{n(n+1)(a+b)}{2}$$

$$ss'=\frac{n\{2a+(n-1)b\}}{2}\times\frac{n\{2b+(n-1)a\}}{2}$$

$$=\frac{n^2}{4}\{2(n-1)(a^2+b^2)+ab(n^2-2n+5)\}$$

於以上之結果將 (1)式, (2)式代入而消去 a, b,

$$s+s'=\frac{n(n+1)(a+b)}{2}=\frac{n(n+1)p}{2}$$

$$ss'=\frac{n^2}{4}\{2(n-1)(a^2+b^2)+ab(n^2-2n+5)\}$$

$$=\frac{n^2}{4}\{2(n-1)(p^2-2q)+q(n^2-2n+5)\}$$

$$=\frac{n^2}{4}\{2(n-1)p^2+(n-3)^2q\}$$

從而將 $s+s'$, ss' 之值用於 (3)式

$$x^2-\frac{n(n+1)p}{2}x+\frac{n^2}{4}\{2(n-1)p^2+(n-3)^2q\}=0$$

$\therefore$ $4x^2-2n(n+1)px+n^2[2(n-1)p^2+(n-3)^2q]=0$

因得如命題.

14. 某人有 23 架織機, 每架每一點鐘織布 19.5 尺, 今最初一架於午前九時開動, 隨後每隔 5 分鐘開動一架, 問至午後一點鐘止共織布若干.

解 午前 9時起至午後 1 時止共 4 點鐘, 故最初開動之織機爲工作 4點鐘, 其次爲 $\left(4-\dfrac{5}{60}\right)$ 點鐘, 再次爲 $\left(4-\dfrac{5\times2}{60}\right)$ 點鐘, 以下照推, 從而作各機之轉動時間之總和爲 s, 則

$$s=4+\left(4-\frac{5}{60}\right)+\left(4-\frac{5\times2}{60}\right)+\left(4-\frac{5\times3}{60}\right)+\cdots\cdots$$

$$=4+3\frac{11}{12}+3\frac{10}{12}+3\frac{9}{12}+3\frac{8}{12}+\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{至}23\text{項})$$

於是成公差 $-\frac{1}{12}$ 之等差級數，故

$$s=\frac{23\times\left\{2\times4+(23-1)\times\left(-\frac{1}{12}\right)\right\}}{2}=\frac{851}{12}$$

從而織出之布為 $19.5\text{尺}\times\frac{851}{12}=1382\frac{7}{8}$ 尺.

答 $1382\frac{7}{8}$ 尺

15. 甲乙兩輪船其速力各一點鐘為 *8* 浬與 *7* 浬，今乙輪船開行後一點鐘兩輪船皆增加速力，甲輪每點鐘遞增半浬，乙輪遞增一浬，甲輪先行三點十五分，問何時乙能追及甲.

解 甲在乙出發時已行 $8\text{浬}\times3\frac{15}{60}=26$ 浬，今作乙出發後 x 點鐘追及甲則乙所進之距離為

$$7+8+9+10+11+12+\cdots\cdots(\text{至}x\text{項})=\frac{x\{2\times7+(x-1)\times1\}}{2}$$

$$=\frac{x(x+13)}{2}\cdots\cdots\cdots\text{浬}$$

甲進之距離為

$$\underbrace{26+8+8\frac{1}{2}+9+9\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots}_{x\text{項}}=26+\frac{x\left\{2\times8+(x-1)\times\frac{1}{2}\right\}}{2}$$

$$=26+\frac{x(x+31)}{4}\cdots\cdots\text{浬}$$

此兩者由命題是相等，因得下列方程式.

$$\frac{x(x+13)}{2}=26+\frac{x(x+31)}{4}$$

$\therefore$ $x^2-5x-104=0\cdots\cdots(x+8)(x-13)=0$

$\therefore$ $x=-8$ 及 13，然 x 是正數，故不用負值.

答 3 點鐘

【2】調和級數

a, b, c 之逆數即 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成等差級數時則 a, b, c 爲調和級數，b 爲調和中項.

故 a, b, c 爲調和級數則發生 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$

即 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ 之關係.

通常有 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}=\frac{1}{e}-\frac{1}{d}=\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之關係則

$a, b, c, d, e\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 是調和級數.

1. a, b, c 爲等差級數，b, c, d 爲調和級數則 $a:b=c:d$，試證明之.

[解] a, b, c 爲等差級數故 $2b=a+c\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又 b, c, d 爲調和級數故 $\frac{2}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}\cdots(2)$

求使 (1)式，(2)式相連結乃將 (2)式變形成

$2bd=cd+bc\cdots\cdots\cdots 2b=\frac{cd+bc}{d}$，此中代入(1)式

$$\frac{cd+bc}{d}=a+c \quad \therefore\ cd+bc=ad+cd$$

$\therefore\ bc=ad \quad \therefore\ a:b=c:d.$

2. x, y, z 爲調和級數之第p項，第q項，第r項，試證明下式.

$$(q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy=0$$

[解] 作初項爲 a，公差爲 d 則等差級數成 $a, a+d, a+2d, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$a+(n-1)d$，故

$$\left.\begin{array}{l}\text{第}p\text{項}=a+(p-1)d\\ \text{第}q\text{項}=a+(q-1)d\\ \text{第}r\text{項}=a+(r-1)d\end{array}\right\}\text{因得}\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{a+(p-1)d}\\ y=\dfrac{1}{a+(q-1)d}\\ z=\dfrac{1}{a+(r-1)d}\end{array}\right.$$

$\therefore\quad (q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy$

$$=(q-r)\times\frac{1}{a+(q-1)d}\times\frac{1}{a+(r-1)d}+(r-p)\times\frac{1}{a+(r-1)d}$$

$$\times\frac{1}{a+(p-1)d}+(p-q)\times\frac{1}{a+(p-1)d}\times\frac{1}{a+(q-1)d}$$

$$=\frac{(q-r)\{a+(p-1)d\}+(r-p)\{a+(q-1)d\}+(p-q)\{a+(r-1)d\}}{\{a+(p-1)d\}\{a+(q-1)d\}\{a+(r-1)d\}}$$

$\cdots\cdots(A)$　　　　將上式之分子化簡得

$a\{(q-r)+(r-p)+(p-q)\}+d\{(q-r)(p-1)+$
$(r-p)(q-1)+(p-q)(r-1)\}$

$=a\times0+d\{(q-r)p+(r-p)q+(p-q)r-(q-r)-$
$(r-p)-(p-q)\}$

$=a\times0+d\{pq-pr+qr-pq+pr-qr-q+r-r+p-p+q\}$

$=a\times0+d\times0=0$

從而 (A)式之分子成零，故此分數等於0.

$\therefore\quad (q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy=0.$

【3】等比級數

等比級數之初項爲 a，項數爲 n，末項爲 l，公比爲 r 則此級數如下.

初項	第二項	第三項	第四項		第$(n-1)$項	第n項
a,	ar,	ar^2	ar^3	$\cdots\cdots$	$ar^{(n-2)}$,	ar^{n-1}

【要項】由上例 $\boxed{r\text{之指數較項之號次小}1}$ 末項用 l 寫之則

初 項　第二項　第三項　第四項　第$(n-1)$項 第n項

$lr^{-(n-1)},\ lr^{-(n-2)},\ lr^{-(n-3)},\ lr^{-(n-4)},\ldots\ldots lr^{-1},\quad l$

於是第n項 ar^{n-1} 與 l 相等. 即 $l=ar^{n-1}$

【等比中項】 a, b, c 成等比級數則b為等比中項,因發生 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ 或 $b^2=ac$ 之關係. [與比例中項同意義]

【要項】 a, b, c 是否成等比級數祇要證明 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$ 或 $b^2=ac$ 能不能成立.

【公式】
1. 第n項$=ar^{n-1}$　　2. $l=ar^{n-1}$
3. $s=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$　　4. $s=\dfrac{a}{1-r}$ [無限項]

1【證明問題】

1. x, y, z 是等比級數則 $x^2+y^2,\ xy+yz,\ y^2+z^2$ 亦是等比級數, 試證明之

解 作公比為r則 $y=xr,\ z=xr^2$. 將其用於次式,

$$\frac{xy+yz}{x^2+y^2}=\frac{x\times xr+xr\times xr^2}{x^2+(xr)^2}=\frac{x^2r(1+r^2)}{x^2(1+r^2)}=r$$

$$\frac{y^2+z^2}{xy+yz}=\frac{(xr)^2+(xr^2)^2}{x\times xr+xr\times xr^2}=\frac{x^2r^2(1+r^2)}{x^2r(1+r^2)}=r$$

$$\therefore\ \frac{xy+yz}{x^2+y^2}=\frac{y^2+z^2}{xy+yz}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

故 $x^2+y^2,\ xy+yz,\ y^2+z^2$ 是等比級數.

2. a, b, c, d 是等比級數, 則下式能成立, 試證明之.

$$(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2$$

解 a, b, c, d 為等比級數，其公比為 r，則 $b=ar,\ c=ar^2,\ d=ar^3$，今將其代入.

$$(a+b+c+d)^2=(a+ar+ar^2+ar^3)^2$$
$$=a^2\{(1+r)+r^2(1+r)\}^2$$
$$=a^2(1+r)^2(1+r^2)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
又
$$(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2=(a+ar)^2+(ar^2+ar^3)^2+2(ar+ar^2)^2$$
$$=a^2(1+r)^2+a^2r^4(1+r)^2+2a^2r^2(1+r)^2$$
$$=a^2(1+r)^2(1+r^4+2r^2)$$
$$=a^2(1+r)^2(1+r^2)^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故作 (1)式，(2)式相等.

$$(a+b+c+d)^2=a^2(1+r)^2(1+r^2)^2=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2$$

即 $(a+b+c+d)^2=(a+b)^2+(c+d)^2+2(b+c)^2$

3. x, y, z 是等比級數之第 p 項，第 q 項，第 r 項，試證明下式.

$$x^{q-r}\cdot y^{r-p}\cdot z^{p-q}=1$$

解 作初項為 a，公比為 k，由命題得下式

$$x=ak^{p-1},\ y=ak^{q-1},\ z=ak^{r-1}\cdots\cdots\cdots(A)$$
將其代入
$$x^{q-r}\cdot y^{r-p}\cdot z^{p-q}=(ak^{p-1})^{q-r}\cdot(ak^{q-1})^{r-p}\cdot(ak^{r-1})^{p-q}$$
$$=a^{q-r}k^{(p-1)(q-r)}\cdot a^{r-p}k^{(q-1)(r-p)}\cdot a^{p-q}k^{(r-1)(p-q)}$$
$$=a^{q-r+r-p+p-q}k^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$
$$=a^0k^0=1$$

【註】 $\boxed{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)\ \text{去括弧則成}0}$

$$\therefore\ x^{q-r}\cdot y^{r-p}\cdot z^{p-q}=1$$

4. 三個成等比級數之數，其和為28，各數平方之和為336. 求此三數.

解 作等比級數之三數為 $a,\ ar,\ ar^2$ 則得下列兩個方程式.

$$a+ar+ar^2=28\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$a^2+a^2r^2+a^2r^4=336\cdots(a+ar+ar^2)(a-ar+ar^2)=336\cdots(2)$

(2) 式中將(1) 式代入得 $28(a-ar+ar^2)=336$

即 $a-ar+ar^2=12\cdots\cdots\cdots(3)$ 於是將(1)式,(3)式相合併解之

(3)式×7－(1)式×3 得

$4a-10ar+4ar^2=0\cdots\cdots2a(2-5r+2r^2)=0\cdots2a(2-r)(1-2r)=0$

故得 $a=0$ 或 $2-r=0$ 或 $1-2r=0$, 而$a=0$ 則 a, ar, ar^2皆等於零,於是其和不成 28,因此$a\neq0$.

$2-r=0$ 則 $r=2$	$1-2r=0$ 則 $r=\frac{1}{2}$
此用於 (1)式得	此用於 (1)式得
$a=4$ 從而三數爲4, 8, 16	$a=16$, 從而三數爲16, 8, 4

答 4, 8, 16.

5. 項數有8, 偶數號碼各項之和爲510, 奇數號碼各項之和爲255 求此等比級數.

解 作8項之等比級數爲 $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, ar^6, ar^7$則得下列兩方程式.

$ar+ar^3+ar^5+ar^7=510\cdots r(a+ar^2+ar^4+ar^6)=510\cdots(1)$ [偶數項]

$a+ar^2+ar^4+ar^6=255\cdots(2)$ [奇數項] 今以(1)式代入(2)式得

$255r=510$ $\therefore r=2$ 將此用入(2)式得 $a=3$, 從而知此級數爲

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

答 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

6. 等比級數四項之和爲200, 兩端項數之和爲140, 求此級數.

解 作等比級數之四項爲 a, ar, ar^2, ar^3; 由命題得下列方程式.

$a+ar+ar^2+ar^3=200\cdots\cdots\cdots(1)$ $a+ar^3=140\cdots\cdots\cdots(2)$

將(2)式代入(1)式得 $ar+ar^2=60$ 即 $ar(1+r)=60\cdots\cdots(3)$

又由(2)式得$a(1+r^3)=140$ 即 $a(1+r)(1-r+r^2)=140\cdots(4)$

次於(3)式與(4)式將既知項消去. (4)式×3－(3)式×7 得

$3a(1+r)(1-r+r^2)-7ar(1+r)=0$ $\therefore a(1+r)(3-3r+3r^2-7r)=0$

即 $a(1+r)(3-10r+3r^2)=0$ $\therefore a(1+r)(3-r)(1-3r)=0\cdots(5)$

而由 (3) 式 知$a \neq 0$, $r \neq 0$, $1+r \neq 0$. 故於 (5) 式

得 $3-r=0$ 或 $1-3r=0$.

$3-r=0$ 則

$r=3$ 從而由(3)式得

$a \times 3 \times 4 = 60$ $\therefore a=5$

$\therefore$ 5, 15, 45, 135

$1-3r=0$ 則

$r=\frac{1}{3}$ 從而由(3)式得

$a \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} = 60$ $\therefore a=135$

$\therefore$ 135, 45, 15, 5

答 5, 15, 45, 135

7. 有甲乙丙三人，其年齡成等比級數，甲為十六歲；今有錢若干圓依年齡之比例分配之，然若此款額於四年後亦依年齡比例分配則甲所得多28圓，乙所得多4圓，問分配之款額為多少.

解 甲，乙，丙之年齡成等比級數因作之為 16, $16r$, $16r^2$, 其分配比為 $16:16r:16r^2=1:r:r^2$, 今作所求之款額為x圓則甲所得依比例分配之當為$x \times \frac{1}{1+r+r^2}$圓, 乙為$x \times \frac{r}{1+r+r^2}$圓, 而四年後分配比為 $16+4:16r+4:16r^2+4=5:4r+1:4r^2+1$, 故甲為

$x \times \frac{5}{5+(4r+1)+(4r^2+1)}$圓. 乙為$x \times \frac{(4r+1)}{5+(4r+1)+(4r^2+1)}$圓

因得下列兩方程式

$$\frac{x}{1+r+r^2}+28=\frac{5x}{7+4r+4r^2} \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{rx}{1+r+r^2}+4=\frac{(4r+1)x}{7+4r+4r^2} \cdots\cdots (2)$$

作 $1+r+r^2=p$ 則 $7+4r+4r^2=3+4p$, 若 (1)式, (2)式用p表之

(1)式成 $\frac{x}{p}+28=\frac{5x}{3+4p} \cdots\cdots \frac{5x}{4p+3}-\frac{x}{p}=28 \cdots\cdots (3)$

(2)式成 $\frac{rx}{p}+4=\frac{(4r+1)x}{3+4p} \cdots\cdots \frac{7(4r+1)x}{4p+3}-\frac{7rx}{p}=28 \cdots\cdots (4)$

因此 (3)式, (4)式相等, 用 x 除各項得

$$\frac{5}{4p+3}-\frac{1}{p}=\frac{7(4r+1)}{4p+3}-\frac{7r}{p} \qquad \therefore \frac{7r-1}{p}=\frac{28r+2}{4p+3}$$

$$\therefore (7r-1)(4p+3)=p(28r+2) \qquad \therefore 6p-21r+3=0$$

此中將 $p=1+r+r^2$ 用入

$$6(1+r+r^2)-21r+3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots 6r^2-15r+9=0$$

$$\therefore 3(2r-3)(r-1)=0 \qquad \therefore r=\frac{3}{2} \text{ 或 } 1$$

$r=\frac{3}{2}$ 則

用於 (1) 式得

$x=1672$

$r=1$ 則

用於 (1) 式得

$28=0$, 此是不可能.

答 1672 圓

III.【總和問題】

1. 將 $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{10+6\sqrt{3}}+\cdots\cdots$ 至第四項止之和用最簡式表之, 又將此和計算至小數第二位止.

解 $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}\times\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{-2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　同樣得

$$\frac{1}{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{4+2\sqrt{3}}\times\frac{4-2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2},\quad \frac{1}{10+6\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-5}{4}$$

今作所求之和爲 s, 將分母有理化則

$s=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}-5}{4}+\cdots\cdots$ 此是否成級數當加以判定.

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2}\div\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{3}-5}{4}\div\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-5}{2(2-\sqrt{3})}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

第二項除第一項, 第三項除第二項所得之商皆是 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,

故成等比級數, 其公比爲 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,

$$\therefore \quad a=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\quad r=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\quad n=4$$

$$\therefore \quad s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\left\{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^4\right\}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{4-\sqrt{3}}{2}=0.57$$

答 $\frac{4-\sqrt{3}}{4}$，0.57

2. **瓶中盛滿a合酒精，取出b合而以水補入之，如此n次後，剩餘酒精量爲若干，用式表之.**

解 取出之量		剩餘量
第一次	b	$a-b$
第二次	$\frac{b}{a}\times(a-b)$	$a-b-\frac{b(a-b)}{a}=\frac{(a-b)^2}{a}$
第三次	$\frac{b}{a}\times\frac{(a-b)^2}{a}$	$\frac{(a-b)^2}{a}-\frac{b(a-b)^2}{a^2}=\frac{(a-b)^3}{a^2}$
第四次	$\frac{b}{a}\times\frac{(a-b)^3}{a^2}$	$\frac{(a-b)^3}{a^2}-\frac{b(a-b)^3}{a^3}=\frac{(a-b)^4}{a^3}$

故取出之量 $=b+\frac{b(a-b)}{a}+\frac{b(a-b)^2}{a^2}+\frac{b(a-b)^3}{a^3}+\cdots\cdots$

此是公比爲$\frac{a-b}{a}$，項數爲n之等比級數．故由公式$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$得

$$\text{取出之量}=\frac{b\left\{1-\left(\frac{a-b}{a}\right)^n\right\}}{1-\frac{a-b}{a}}=\frac{a^n-(a-b)^n}{a^{n-1}}$$

剩餘量$=a-\frac{a^n-(a-b)^n}{a^{n-1}}=\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}=a\left(\frac{a-b}{a}\right)^n$ 此於上右方之剩餘量亦推定得.

3. $s=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_n$

$$s'=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}$$

s 爲等比級數之和則 [I] s 亦是等比級數之和而 [II] $\frac{s}{s'}=a_1a_n$，試證明之.

解 [I] $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 成爲等比級數. 故連續之一般項 a_m, a_{m+1}, a_{m+2} 成等比級數, 從而 $[a_{m+1}]^2=a_m\times a_{m+2}$, 將此變化之得

$$\left(\frac{1}{a_{m+1}}\right)^2=\frac{1}{a_m}\times\frac{1}{a_{m+2}},\quad 故\ \frac{1}{a_m},\ \frac{1}{a_{m+1}},\ \frac{1}{a_{n+2}}$$

是等比級數.

[II] 作公比爲 r, $a_1=x$. 則 s. s' 可寫成

$$a_1=x,\ a_2=xr,\ a_3=xr^2,\cdots\cdots\cdots\cdots a_n=xr^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ s=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n&=x+xr+xr^2+\cdots\cdots+xr^{n-1}\\&=x(1+r+r^2+\cdots\cdots+r^{n-1})\\&=x\times\frac{1\times(1-r^n)}{1-r}=\frac{x(1-r^n)}{1-r}\end{aligned}$$

$$s'=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{xr}+\frac{1}{xr^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{xr^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{r^{n-1}}\right)=\frac{1}{x}\times\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$=\frac{1}{x}\times\frac{r^n-1}{r^n}\times\frac{r}{r-1}=\frac{1-r^n}{x(1-r)r^{n-1}}$$

$$\therefore\ \frac{s}{s'}=\frac{\dfrac{x(1-r^n)}{1-r}}{\dfrac{1-r^n}{x(1-r)r^{n-1}}}=\frac{x(1-r^n)}{1-r}\times\frac{x(1-r)r^{n-1}}{1-r^n}$$

$$=x\times xr^{n-1}=a_1\times a_n$$

$$\therefore\ \frac{s}{s'}=a_1a_n$$

4. 有由n項所成之等比級數, P是各項之總積, S是各項之總和, R是各項逆數之總和, 試證明其有下列之關係.

$$\mathrm{P}^2.\mathrm{R}^n=\mathrm{S}^n$$

解　作有n項之等比級數為 $a,\ ar,\ ar^2,\cdots\cdots\cdots\cdots ar^{n-1}$　則

$$P=a\times ar\times ar^2\times\cdots\cdots\cdots\times ar^{n-1}=a^n r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}=a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$R=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{ar^{n-1}}=\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r^n-1}{ar^{n-1}(r-1)}$$

$$\therefore\quad P^2\cdot R^n=\left(a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^2\times\left(\frac{r^n-1}{ar^{n-1}(r-1)}\right)^n$$

$$=a^{2n}r^{n(n-1)}\times\frac{(r^n-1)^n}{a^n r^{n(n-1)}(r-1)^n}=\frac{a^n(r^n-1)^n}{(r-1)^n}$$

$$=\left(\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right)^n=[S]^n$$

$$\therefore\quad P^2\cdot R^n=S^n$$

5.　等比級數之初項至第n項，至第$2n$項，至第$3n$項各項之和為A, B, C, 則 $A^2+B^2=A(B+C)$，試證明之.

解　作初項為a，公比為r，則由命題得

$$A=\frac{a(1-r^n)}{1-r},\quad B=\frac{a(1-r^{2n})}{1-r},\quad C=\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}$$

$$\therefore\quad A^2+B^2=\left(\frac{a(1-r^n)}{1-r}\right)^2+\left(\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a}{1-r}\right)^2(2-2r^n-r^{2n}+r^{4n})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$$A(B+C)=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\left(\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}+\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}\right)$$

$$=\left(\frac{a}{1-r}\right)^2\{(1-r^n)(1-r^{2n})+(1-r^n)(1-r^{3n})\}$$

$$=\left(\frac{a}{1-r}\right)^2(2-2r^n-r^{2n}+r^{4n})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而　(1) 式, (2) 式相同，故　$A^2+B^2=A(B+C)$

6.　某等比級數，其和為65　其最大項為45，今將此級數繼續取之，至項數為前之2倍，而和為1820，求此級數.

解　作初項爲a, 公比爲r, 項數爲n, 則由 $s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 及由命題, 得

$$\frac{a(1-r^n)}{1-r}=65\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=1820\cdots\cdots\frac{a(1-r^n)(1+r)}{1-r}=1820\cdots\cdots(2)$$

於是 (2)式 中代入 (1)式得　$65(1+r^n)=1820$

$\therefore\quad r^n=27\cdots\cdots(3)$　將此代入(1)式 而化簡之

$$a(1-27)=65(1-r)\quad 即\quad a=\frac{5}{2}(r-1)\cdots\cdots(4)$$

若 $a>0$ 則由 (4) 得$r>1$

從而最大項爲　ar^{n-1}

$$\therefore\begin{cases} r^n=27\cdots\cdots(5) \\ ar^{n-1}=45\quad\cdots\cdots(6)\end{cases}$$

(6)式中將 r 變換而代入(5)式

$ar^n=45r\cdots a\times27=45r$

$\therefore\quad 3a=5r$　由此與

(4) 式合併得 $a=\frac{5}{2}(r-1)$

$3a-2a=5\quad\therefore\quad a=5$

從而　$r=3$

$\therefore$ 5, 15, 45, 135, 405, 1215

若 $a<0$ 則由 (4) 得 $r-1<0$

從而 $r<1$, 然 $-1\leqq r<1$

故 $r^n=27$ 不成立.

又 $r<-1$ 則由 $r^n=27$,

n 爲偶數, 故 $n-1$ 爲奇數,

從而各項之絕對值次第增加.

故 $ar^{n-1}>0$. 而此是最大項,

$\therefore\quad ar^{n-1}=45$ 從而與左方爲同

一式, 因得 $r=3$, 然此與假定

$r<-1$ 相反. 故不成立,

而 $a<0$ 爲不可能.

【4】 無限等比級數

1　證明求無限等比級數之和之公式, 且應用之將下列二循環小數作成分數.

$$3.0\dot{1}\dot{5}$$

解　求等比級數之和之公式爲 $s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, 可寫之成

$$s=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

於是 $\frac{ar^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}\times r^n$, 將項數 n 之變化加以考念.

$\frac{a}{1-r}$中不含n, 故n之值爲如何與之無關, 彼有一其定之值.

而 $\frac{ar^n}{1-r}$ 之值則因r^n之值之變化而起變化.

| r 之絕對值較 1 小時 | 則 n 之值增加而

r^n 之值減小.

【註】

若 $r=\frac{2}{3}$ 則 $r=\frac{2}{3}$	$=0.6666\cdots\cdots$	如此則 r 之指數 n 增大而 r 之值漸次變小.
$r^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$	$=0.4444\cdots\cdots$	
$r^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$	$=0.2962\cdots\cdots$	
$r^4=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$	$=0.1975\cdots\cdots$	
…………………………		
…………………………		

從而 n 非常大時 (卽項數非常多時) 則r^n 之值非常小, 乃 $\frac{ar^n}{1-r}$ 近於零, 因此 n 無限大則 $\frac{ar^n}{1-r}$ 無限小, 其極限達零, 故得

$$s=\frac{a}{1-r}-0=\frac{a}{1-r}$$

$3.0\dot{1}\dot{5}=3+0.015151515\cdots\cdots\cdots\cdots$ [將循環部分列開]

$=3+0.015+0.00015+0.0000015+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=3+\frac{15}{1000}+\frac{15}{100000}+\frac{15}{10000000}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=3+15+\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+\cdots\cdots\right)$ 於是括弧內無等比級數

$a=\frac{1}{10^3}$, $r=\frac{1}{10^5}\div\frac{1}{10^3}=\frac{1}{10^2}<1$, $n=$無限

$$=3+15\times\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=3+15\times\frac{1}{990}=3\frac{1}{66}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

2. **有無限等比級數，其和爲4，各項之立方之和爲192，求此級數.**

解 作初項爲 a，公比爲 r，因得下列兩方程式.

$\frac{a}{1-r}=4\cdots\cdots\cdots a=4(1-r)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$a^3+a^3r^3+(ar^2)^3+(ar^3)^3+(ar^4)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots=192\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

而 (2)式成 $a^3(1+r^3+r^6+r^9+r^{12}+\cdots\cdots\cdots\cdots)=192$

由公式得 $\frac{a^3}{1-r^3}=192$ $\therefore$ $a^3+192r^3=192$

此中代入 (1)式得 $[4(1-r)]^3+192r^3=192$

$64(1-r)^3-192(1-r^3)=0\cdots\cdots\cdots(1-r)^3-3(1-r)(1+r+r^2)=0$

$\therefore$ $(1-r)\{(1-r)^2-3(1+r+r^2)\}=0\cdots\cdots\cdots(1-r)(2+r)(1+2r)=0$

$\therefore$ $1-r=0$，或 $2+r=0$，或 $1+2r=0$.

卽 $r=1$，或 $r=-2$，或 $r=-\frac{1}{2}$

然因是無限項 $\boxed{r\ \text{之絕對值須較 1 小}}$

從而採用 $r=-\frac{1}{2}$， 將此代入 (1)式得 $a=6$.

故是 $6,-3,\frac{3}{2},-\frac{3}{4},\frac{3}{8}\cdots\cdots\cdots\cdots$

答 $6,-3,\frac{3}{2},-\frac{3}{4},\cdots\cdots$

3. **等比級數之公比爲較$\frac{1}{2}$小之正數，其各項之絕對值較該項以下之總項之和之絕對值爲大，試證明之.**

解 作等比級數爲 $a, ar, ar^2\ ar^3\ \cdots\cdots\cdots$ 其任意一項爲 ar^p. 判定下式之正負

$$ar^p-(ar^{p+1}+ar^{p+2}+ar^{p+3}+\cdots)=a[r^p-(r^{p+1}+r^{p+2}+r^{p+3}+\cdots)]$$

[但 $r<1$]

$$=a\left(r^p-\frac{r^{p+1}}{1-r}\right)$$

$$=a\times\frac{r^p(1-r)-r^{p+1}}{1-r}$$

$$=a\times\frac{r^p(1-r)-r^p\times r}{1-r}$$

$$=a\times\frac{r^p(1-2r)}{1-r}\cdots\cdots(A)$$

$\frac{1}{2}>r>0$ 故 $\frac{r^p(1-2r)}{1-r}$ 是正數，從而(A)式之正負以a之正負爲定

然考念各項之絕對值之結局知a爲正數．$\left(\text{因}\frac{1}{2}\text{·}r>0\right)$

$\therefore a\times\frac{r^p(1-2r)}{1-r}>0\quad\therefore ar^p-(ar^{p+1}+ar^{p+2}+\cdots\cdots\cdots)>0$

$\therefore ar^p>ar^{p+1}+ar^{p+2}+ar^{p+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

4. 有長a尺之物，其初取去三分之一，再取殘餘部份之三分之一，更取殘餘部份之三分之一，如此不斷取去，問所取去者共長幾尺．

解 將殘餘部份與取去部份分別考慮．

第一回 取去之部分爲 $\frac{1}{3}a$	殘餘$\left(1-\frac{1}{3}\right)a=\frac{2}{3}a$
第二回 爲$\cdots\cdots\cdots\frac{2}{3}a\times\frac{1}{3}$	殘餘$\frac{2}{3}a\left(1-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2a$
第三回 爲$\cdots\cdots\left(\frac{2}{3}\right)^2a\times\frac{1}{3}$	殘餘$\left(\frac{2}{3}\right)^2a\left(1-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3a$
第四回 爲$\cdots\cdots\left(\frac{2}{3}\right)^3a\times\frac{1}{3}$	殘餘$\left(\frac{2}{3}\right)^3a\left(1-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^4a$
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

取去部分之和

$$=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}a\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2a\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3a\times\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$$

此公比乃成較1小之 $\frac{2}{3}$ 之無限等比級數

$$=\frac{\frac{1}{3}a}{1-\frac{2}{3}}=a$$

如此取去n回則殘餘爲

$$\left(\frac{2}{3}\right)^na$$

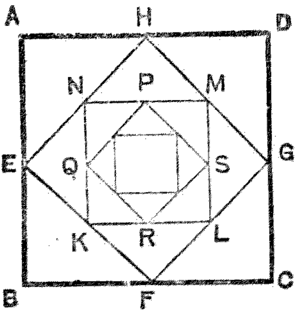
而 n 增大則 $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 漸小,

於是 $\left(\frac{2}{3}\right)^n$之極限成零.

卽無殘餘.

圖 a 尺

5. 有正方形，將相隣兩邊之中點連結作一正方形，又於此新正方形之相隣兩邊之中點作一正方形，如此不斷作去，問此等所作之正方形之面積之總和與原正方形之面積相差幾何.



解　作正方形 ABCD 之面積爲 a, HF 相連結而在 ABFH 之矩形中

$\triangle FEH=\frac{1}{2}\square ABFH$　$\therefore$　$\square EFGH=\frac{1}{2}\square ABCD=\frac{1}{2}a$ 同樣　$\square KLMN=\frac{1}{2}\square EFGH=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a$　以下同樣作之.

$\therefore$　$\square ABCD-(\square EFGH+\square KLMN+\square PQRS+\cdots\cdots\cdots)$

$$=a-\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a+\cdots\cdots\cdots\right)$$

$$=a\left\{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\right)\right\}=a\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=a\times(1-1)=0$$

卽差爲零,換言之是

$\square ABCD=\square EFGH+\square KLMN+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

[5] 三級數混合題

I 【等差級數與等比級數】

1. 三個不同的數，成等差級數，可否同時成等比級數.

解 作 a, b, c 為不同的三數，因得下式.

$2b=a+c$……………(1) ［成等差級數之條件］

$b^2=ac$………………(2) ［成等比級數之條件］

由(1)式得 $b=\frac{1}{2}(a+c)$. 將此用於(2)式得 $\frac{1}{4}(a+c)^2=ac$

$\therefore\ a^2-2ac+c^2=0 \quad \therefore\ (a-c)^2=0 \quad \therefore\ a=c$ 因欲三數為等差級數又同時為等比級數，然令 $a=c$ 卽 $a=b=c$. 則是不能達到所求.

答 不可

2. 等差級數之第p項，第q項，第r項及第s項成等比級數則 $p-q$, $q-r$, $r-s$ 亦是等比級數，試證明之.

解 作初項為 a, 公差為 d 則由公式 $l=a+(n-1)d$ 得

第 p 項$=a+(p-1)d$, 第 q 項$=a+(q-1)d$

第 r 項$=a+(r-1)d$, 第 s 項$=a+(s-1)d$

因是等比級數故得下式,

$$\frac{a+(q-1)d}{a+(p-1)d}=\frac{a+(r-1)d}{a+(q-1)d}=\frac{a+(s-1)d}{a+(r-1)d}$$

將其作為等於 k 而將分母解去,

$a+(q-1)d=[a+(p-1)d]k$…………………(1)

$a+(r-1)d=[a+(q-1)d]k$…………………(2)

$a+(s-1)d=[a+(r-1)d]k$…………………(3)

於是(1)式－(2)式得 $(q-r)d=(p-q)dk$…… $\frac{q-r}{p-q}=k$……(4)

(2)式－(3)式得 $(r-s)d=(q-r)dk$…… $\frac{r-s}{q-r}=k$……(5)

因此(4)式, (5)式可作爲相等得 $\frac{q-r}{p-q}=\frac{r-s}{q-r}$.

即 $p-q$, $q-r$, $r-s$ 是等比級數.

3. 有成等差級數之三個數, 其和爲 36, 各數以 $1, 4, 43$ 分別加之則成等比級數, 求此三數.

解 三數成等差級數故作之爲 $x-d$, x, $x+d$, 因得下列方程式.

$(x-d)+x+(x+d)=36\cdots\cdots 3x=36\cdots\cdots\cdots x=12\cdots\cdots\cdots(1)$ 及

$(x-d+1):(x+4)=(x+4):(x+d+43)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

[成等比級數之條件.

此中將(1)式代入得 $(13-d)(55+d)=16^2$ 即

$d^2+42d-459=0\cdots\cdots(d-9)(d+51)=0 \quad \therefore \quad d=9$ 及 -51

$d=9$ 則 $x=12$ 而三數爲 $3, 12, 21$.

$d=-51$ 則 $x=12$ 而三數爲 $63, 12, -39$.

答 $3, 12, 21$ 及 $63, 12, -39$

4. 6 與 16 之間插入兩數, 於是前三數成等差級數, 而後三數成等比級數, 求此兩數.

解 作插入之二數爲 x, y, 則 6, x, y 成等差級數, 故

$2x=6+y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$ [成等差級數之條件]

又 x, y, 16 成等比級數, 故 $y^2=16x\cdots\cdots\cdots(2)$ [成等比級數之條件]

今由(1)式得 $y=2x-6$, 將其代入(2)式

$(2x-6)^2=16x\cdots\cdots\cdots(x-1)(x-9)=0 \quad \therefore \quad x=1$ 及 9

$x=1$ 則 $y=2x-6=-4$

$x=9$ 則 $y=2x-6=12$

答 $1, -4$ 及 $9, 12$

5. 有公差爲3的等差級數, 又有公比爲2的等比級數, 此兩級數之第一項至第五項之和合計爲148, 又第一項至第十項之和合計爲3254, 問兩級數之第一項各幾何.

解　作等差級數之初項爲a則此級數爲 $a,\ a+3,\ a+6\cdots\cdots$

故 $$\boxed{\text{至第五項止之和}}=\frac{5\{2a+4\times\ \}}{2}=5(a+6)$$

$$\text{第十項止之和}=\frac{10\{2a+9\times3\}}{2}=5(2a+27)$$

次作等比級數之初項爲x則此級數爲 $x,\ 2x,\ 4x\cdots\cdots$

故 $$\boxed{\text{至第五項止之和}}=\frac{x(1-2^5)}{1-2}=31x$$

$$\text{第十項止之和}=\frac{x(1-2^{10})}{1-2}=1023x$$

故由命題

$$5(a+6)+31x=148\cdots\cdots\cdots\cdots5a+31x=118\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$5(2a+27)+1023x=3254\cdots\cdots10a+1023x=3119\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\therefore$ 由(2)式$-$(1)式$\times2$　得　$x=3$　從而　$a=5$　　　答 5, 3

6. 有無限等比級數，其第二項爲$-\frac{3}{2}$，總和爲2，今用此級數之初項爲初項，公差爲4，另作一級數，作至第十二項，求此第十二項之數.

解　作初項爲a，公比爲r則此無限等比級數依公式　$s=\frac{a}{1-r}$　得

$$2=\frac{a}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\quad\text{及}\quad ar=-\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於是由(1)式得　$a=2(1-r)$　將其代入(2)式

$$2(1-r)r=-\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2r+1)(2r-3)=0\qquad\therefore\ r=-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}$$

因是無限等比級數故r之絕對值應比1小，於是棄$\frac{3}{2}$　不用.

$$r=-\frac{1}{2}\qquad\text{則}\qquad a=3.$$

今所求之等差級數之初項爲3，公差爲4，則項數12之數依

公式　$l=a+(n-1)d$　得　$l=3+(12-1)\times4=47.$　　　答 47

7. 有等差級數與等比級數，其初項相等，其第$2n+1$項亦相等，則其第$n+1$項以何者爲大.

解 作初項爲 a，公差爲 d，公比爲 r 則

等差級數 $\begin{cases}(n+1)\text{項}=a+nd\\(2n+1)\text{項}=a+2nd\end{cases}$　　等比級數 $\begin{cases}(n+1)\text{項}=ar^n\\(2n+1)\text{項}=ar^{2n}\end{cases}$

第$(2n+1)$項相等故$ar^{2n}=a+2nd$……………………(1)

今 a 是正故可判定第$(n+1)$項之差

$$a+nd-ar^n=a+n\times\frac{a(r^{2n}-1)}{2n}-ar^n\quad\left(\text{由(1)式 得 } d=\frac{a(r^{2n}-1)}{2n}\right)$$

$$=\frac{2a+ar^{2n}-a-2ar^n}{2}=\frac{a(r^{2n}-2r^n+1)}{2}$$

$$=\frac{a}{2}(r^n-1)^2\quad\text{因}\quad a>0\quad\text{而}$$

r是實數，故$(r^n-1)^2$是正或零，從而 $\frac{a}{2}(r^n-1)^2$ 是正或零，

即　$(a+nd)-ar^n\geqq 0$

從而 $\begin{cases}r^n\neq 1\quad\text{則}\quad a+nd-ar^n>0\cdots\cdots\cdots a+nd>ar^n\\r^n=1\quad\text{則}\quad a+nd-ar^n=0\cdots\cdots\cdots a+nd=ar^n\end{cases}$

因此等差級數之第$(n+1)$項較等比級數之第$(n+1)$項小.

II ［等比級數與調和級數］

1. 三數成等比級數，若各數加以中央數則其和成調和級數，試證明之.

解 作等比級數之三數爲 a，ar，ar^2，而加以中央數之各數爲 $a+ar$，$2ar$，$ar+ar^2$.

$\frac{1}{a+ar}$，$\frac{1}{2ar}$，$\frac{1}{ar+ar^2}$ 爲等差級數，須能證明

$2\times\frac{1}{2ar}=\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}$，而後此三數成調和級數之事實始能成立.

$$\frac{1}{a+ar}+\frac{1}{ar+ar^2}=\frac{1}{a(1+r)}+\frac{1}{ar(1+r)}=\frac{r+1}{ar(1+r)}=\frac{1}{ar}=\frac{2}{2ar}$$

故各數加中央數其和成調和級數.

2. a, b, c 是等差級數; b, c, d 是等比級數; c, d, e 是調和級數; 則 a, c, e 是等比級數, 試證明之.

解 $2b=a+c$ ………(等差級數)……(1)

$c^2=bd$ …………(等比級數)……(2)

$\frac{2}{d}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e}$ ……(調和級數)……(3)

由此將 b, d 除去, 得 a, c, e 之關係, 即 $c^2=ae$

由 (2)式得 $d=\frac{c^2}{b}$, 此中將 (1)式代入而將 b 消去, 則 $d=\frac{2c^2}{a+c}$

將其代入 (3)式而將 d 消去

$$\frac{2}{\frac{2c^2}{a+c}}=\frac{1}{c}+\frac{1}{e} \qquad \therefore \frac{a+c}{c^2}=\frac{e+c}{ce} \qquad \therefore ce(a+c)=c^2(e+c)$$

$c\neq 0$ 則 $e(a+c)=c(e+c)$ $\quad\therefore ae=c^2 \quad\therefore a:c=c:e$

III 【中項問題】

1. 兩個不同的正數, 其等差中項較等比中項大, 試證明之.

解 作二正數為 p 與 q, 等差中項為 A, 等比中項為 G 則

$\mathrm{A}=\frac{p+q}{2}$, $\mathrm{G}=\pm\sqrt{pq}$, 於是證明 $\frac{p+q}{2}-(\pm\sqrt{pq})>0$,

今 $\mathrm{A}-\mathrm{G}=\frac{p+q}{2}-(\pm\sqrt{pq})=\frac{p+q\pm 2\sqrt{pq}}{2}=\frac{(\sqrt{p}\pm\sqrt{q})^2}{2}$

p 與 q 皆是正數, 故 $\frac{(\sqrt{p}\pm\sqrt{q})^2}{2}$ 常是正數或零.

$\therefore \mathrm{A}-\mathrm{G}\geqq 0 \qquad \therefore \mathrm{A}\geqq \mathrm{G}$

但須 $p\neq q$ 則 $\mathrm{A}>\mathrm{G}$.

2. 指定兩數, 其間插入一個等差中項 a, 又兩個等比中項 p, 試證明下式. $\quad p^3+q^3=2apq$

解　作二數為 x, y, 公比為 r, 則　x　a

$$a=\frac{x+y}{2}\cdots\cdots(\text{等差}),\ p=xr,\ q=xr^2,\ y=xr^3\cdots\cdots(\text{等比})$$

$$p^3+q^3=(xr)^3+(xr^2)^3$$
$$=x^3r^6+x^3r^3$$
$$=(1+r^3)x^3r^3$$

$$2apq=2\times\frac{x+y}{2}\times xr\times xr^2$$
$$=(x+xr^3)x^2r^3$$
$$=(1+r^3)x^3r^3$$

$$\therefore\quad p^3+q^3=2apq$$

3. a, b, c 是等比級數, a, b 之等差中項為 x; b, c 之等差中項為 y; 則 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=2$, 試證明之.

解　a, b, c 是等比級數故　$b^2=ac\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

x 是等差中項則　$2x=a+b\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

y 是等差中項則　$2y=b+c\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

今(2)式, (3)式分邊相乘得

$$4xy=(a+b)(b+c)=(a+b)b+(a+b)c$$
$$=ab+b^2+(a+b)c \qquad \text{此中將 (1)式代入之}$$
$$=ab+ac+(a+b)c$$
$$=a(b+c)+(a+b)c \qquad \text{此中將 (2)式, (3)式代入之}$$
$$=a(2y)+(2x)c$$
$$=2ay+2cx$$

$$\therefore\quad 4xy=2ay+2cx \qquad \therefore\quad \frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$$

4. 求 $ax^2+bx+c=0$ 之二根之等差中項及等比中項.

解　作二根為 α β 則由根與係數之關係得

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今作等差中項為 A, 等比中項為 G, 則

等差中項之 $2A=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ ……………………(3) [將(1)式代入]

等比中項之 $G^2=\alpha\beta=\frac{c}{a}$ ……………………(4) [將(2)式代入]

$\therefore\ A=-\frac{b}{2a},\quad G=\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ 　　　答 $-\frac{b}{2a},\ \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

5. 兩數之等比中項是其等差中項與調和中項之比例中項，試證明之.

解 作兩數為 p,q 則　等差中項 $A=\frac{p+q}{2}$,

等比中項 $G=\pm\sqrt{p\cdot q}$, 調和中項 $H=\frac{2pq}{p+q}$

$\left(\frac{1}{p},\ \frac{1}{H},\ \frac{1}{q}\right.$ 是等差級數故 $\frac{2}{H}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\quad\therefore\ \left.H=\frac{2pq}{p+q}\right)$

$\therefore\ A\times H=\frac{p+q}{2}\times\frac{2pq}{p+q}=pq=G^2\qquad\therefore\ A:G=G:H$

【6】雜 級 數

1. 求下列級數之 n 項之和.

$3\frac{1}{3},\ 9\frac{1}{9},\ 27\frac{1}{27}$ …………

解 $3\frac{1}{3}+9\frac{1}{9}+27\frac{1}{27}+$ ……………………

$$=\underbrace{(3+9+27+\cdots\cdots)}_{\text{等比級數}}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\cdots\right)}_{\text{等比級數}}$$

$$=\frac{3(1-3^n)}{1-3}+\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}\cdots\cdots\left[\text{由公式 } s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\text{ 得來}\right]$$

$$=\frac{3(3^n-1)}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\cdots\cdots\text{答}$$

2. 求下列級數至第n項止之和.

$(a-b)+(a^2-2b)+(a^3-3b)+(a^4-4b)+\cdots\cdots$

解 $(a-b)+(a^2-2b)+(a^3-3b)+(a^4-4b)+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=\underbrace{(a+a^2+a^3+a^4+\cdots\cdots\cdots)}_{\cdots\cdots n\text{項之等比級數}\cdots\cdots}-\underbrace{(b+2b+3b+4b+\cdots\cdots\cdots)}_{\cdots\cdots n\text{項之等差級數}\cdots\cdots}$

$=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-\dfrac{n\{2\times b+(n-1)b\}}{2}=\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}-\dfrac{n(n+1)b}{2}\cdots\cdots\cdots$ **答**

3. $a=\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(b^2-\dfrac{1}{b^2}\right)^2+\left(b^3-\dfrac{1}{b^3}\right)^2+\cdots\cdots$

$+\left(b^n-\dfrac{1}{b^n}\right)^2$ 則 $a=\dfrac{b^{2n}-1}{b^2-1}\left(b^2+\dfrac{1}{b^{2n}}\right)-2n$, 試證明之.

解 $a=\left(b^2-2+\dfrac{1}{b^2}\right)+\left(b^4-2+\dfrac{1}{b^4}\right)+\left(b^6-2\times\dfrac{1}{b^6}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\left(b^{2n}-2+\dfrac{1}{b^{2n}}\right)\qquad=(b^2+b^4+b^6+\cdots\cdots+b^{2n})+$

$\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{b^6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{b^{2n}}\right)$

$-(2+2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots)$

於是將 $\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2$, $\left(b^2-\dfrac{1}{b^2}\right)^2,\cdots\cdots\cdots\cdots\left(b^n-\dfrac{1}{b^n}\right)^2$ 之項數作成

$b, b^2, \cdots\cdots b^n$, 則有 n 項, 而 $(b^2+b^4+b^6+\cdots\cdots+b^{2n})$ 之公比爲 b^2,

項數爲 n; $\left(\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{b^4}+\dfrac{1}{b^6}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{b^{2n}}\right)$ 之公比爲 $\dfrac{1}{b^2}$ 項數爲 n, 故成等

比級數. 因用公式 $s=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 得

$$a=\frac{b^2[1-(b^2)^n]}{1-b^2}+\frac{\frac{1}{b^2}\left\{1-\left(\frac{1}{b^2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{b^2}}-2\times n$$

$$=\frac{b^2(b^{2n}-1)}{b^2-1}+\frac{(b^{2n}-1)}{(b^2-1)b^{2n}}-2n$$

$$=\frac{b^{2n}-1}{b^2-1}\left(b^2+\frac{1}{b^{2n}}\right)-2n$$

【暗記的問題】

1. 求下列級數之 n 項之和.

$.3,\ .33,\ .333,\ .3333,\cdots\cdots$

解 $.3+.33+.333+.3333+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{3}(.9+.99+.999+.9999+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{1}{3}[(1-.1)+(1-.01)+(1-.001)+(1-.0001)+\cdots\cdots]$$

$$=\frac{1}{3}\{\underbrace{(1+1+1+1\cdots\cdots)}_{n\text{ 項}}-\underbrace{(.1+.01+.001+.0001+\cdots\cdots)}_{n\text{ 項}}\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{n-\underbrace{\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\cdots\cdots\right)}_{n\text{ 項之等比級數}}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{n-\frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}\right\}=\frac{1}{3}\left\{n-\frac{1}{9}(1-10^{-n})\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{9n-1+10^{-n}}{9}\right\}=\frac{1}{27}(9n-1+10^{-n})$$

2. 求 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ n項之和.

解 項之號次與係數相一致即 $\boxed{\text{第三項}}$ 之係數是 $\boxed{3}$, $\boxed{\text{第四項}}$ 之係數是 $\boxed{4}$, 故 $\boxed{\text{第}n\text{項}}$ 之係數是 $\boxed{n}$; 又 $\boxed{\text{係數}}$

與 x 之 $\boxed{\text{指數}}$ 之關係是相差 1，故 $\boxed{\text{第}n\text{項}}$ 之 x 之係數是 x^{n-1}，

因此 $\boxed{\text{第}n\text{項}}$ 是 $\boxed{nx^{n-1}}$，於是

$$s=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}\qquad[\text{有 } n \text{ 項}]$$
$$xs=\qquad x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

$$\therefore\quad s-xs=\underbrace{1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+x^{n-1}}_{\text{公比}x\text{，項數}n\text{之等比級數}}-nx^n$$

$$\therefore\quad s(1-x)=\frac{1\times(1-x^n)}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore\qquad s=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{答}$$

3. 自 1 起始之連續整數分成多羣如 1, | 2, 3, | 4, 5, 6, | 7, 8, 9, 10, | 11, 12, 13, 14, 15, | ………… | ………… |，則自最初數起至第 p 號羣之總數之和爲 $\frac{1}{2}(p^3+p)$，試證明之．

解 第一羣中之項數有 1 個，　第二羣中之項數有 2 個
第三羣中之項數有 3 個，　第四羣中之項數有 4 個

因此 $\boxed{\text{羣之號次與其羣中之項數相一致}}$

於是第 p 羣中之項數有 p 個．
今求 p 羣之初項．

第二羣之末項 $=3=1+2$　　第三羣之末項 $=6=1+2+3$

第四羣之末項 $=10=1+2+3+4$，第五羣之末項 $=15=1+2+3+4+5$

由上列事項知其羣之末項是 $\boxed{\text{由 1 至該羣號次止之自然數之相加}}$

故第 p 羣之末項是

$$1+2+3+4+5+\cdots\cdots\cdots\cdots+p=\frac{p(p+1)}{2}$$，從而將第 p 羣寫之，

置末項於首位［即逆寫之］成

$$\underbrace{\left|\frac{p(p+1)}{2},\quad \frac{p(p+1)}{2}-1,\ \frac{p(p+1)}{2}-2,\ \frac{p(p+1)}{2}-3,\ \cdots\cdots\right|}_{\text{項數 } p \text{ 之等差級數}}$$

作所求之和爲 s 則 $a=\dfrac{p(p+1)}{2}$, $d=-1$, $n=p$, 而

$$s=\frac{p\left\{2\times\dfrac{p(p+1)}{2}+(p-1)\times(-1)\right\}}{2}=\frac{p}{2}(p^2+1)=\frac{1}{2}(p^3+p)$$

4. 由1起始之自然數區劃如下

| 1, 2 | 3, 4, 5, 6 | 7, 8, 9, 10, 11, 12 | 13, ·· , 20 | .....

則第 n 號區劃之數之和爲幾何.

解 第一羣之項數爲2, 第二羣之項數爲4, 第三羣之項數爲6, 則以後各羣之項數爲其羣之號次之2 , 故第 $(n-1)$ 羣之末項止之項數之總和爲 $2+4+6+\cdots\cdots+2(n-1)=n(n-1)$. 從而第 n 羣之初項 a 是級數 $1, 2, 3, 4, 5\cdots\cdots$ 中第 $[n(n-1)+1]$ 次之項, 故 $a=n(n-1)+1$; 第 n 羣項數爲 $2n$, 公差爲 1, 作其所求之和爲 S_n 則

$$S_n=\frac{2n\{2[n(n-1)+1]+(2n-1)\times1\}}{2}=n(2n^2+1)$$

答 $n(2n^2+1)$

5. 求 $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n-1)}$ 之和.

解

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{1.2}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\\[2ex]
\dfrac{1}{2.3}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\\[2ex]
\dfrac{1}{3.4}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex]
+\quad\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}
\end{array}\right\}\text{相加}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\cdots\cdots$$

6. 求 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$ 之和.

解 用恆等式 $x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$.

將 $x^3-(x-1)^3$ 之括弧解去而計算之得 $3x^2-3x+1$.

$$\therefore\quad x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

於 (A) 式中將 x 之值作爲 1 2, 3,$\cdots\cdots\cdots\cdots$計算之

$$\left.\begin{array}{lll}
x=1 & \text{則} & 1^3-0^3=3\times1^2-3\times1+1\\
x=2 & \text{則} & 2^3-1^3=3\times2^2-3\times2+1\\
x=3 & \text{則} & 3^3-2^3=3\times3^2-3\times3+1\\
x=4 & \text{則} & 4^3-3^3=3\times4^2-3\times2+1\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x=n-1, & & (n-1)^3-(n-2)^3=3\times(n-1)^2-3\times(n-1)+1\\
x=n, & & n^3-(n-1)^3=3\times n^2-3\times n+1\\
 & + &
\end{array}\right\}\text{分邊相加}$$

$$\begin{aligned}
n^3-0^3=&(3\times1^2+3\times2^2+3\times3^2+\cdots\cdots+3\times n^2)\\
&+(-3\times1-3\times2-3\times3-\cdots\cdots-3\times n)\\
&+\underbrace{(1+1+1+\cdots\cdots\cdots)}_{\text{祇有 }n}
\end{aligned}$$

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-3\underbrace{(1+2+3+\cdots\cdots+n)}_{\text{等差}}+n\cdots\cdots(B)$$

$$=3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)-3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$\therefore\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{3}\left\{n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right\}$$

$$=\frac{n(n+1)2n+1)}{6}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\boxed{\text{答}}$$

法 $\frac{1}{3}\left\{n^2+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right\}=\frac{1}{3}\times\frac{2n(n^2-1)+3n(n+1)}{2}$

$$=\frac{1}{6}\{2n(n+1)(n-1)+3n(n+1)\}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}\times[2(n-1)+3]$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

第二十章

對數

【對數之定義】 $a^x=m$ 之中 x 爲指數，a 爲底而是 m 之對數. 換言之關於 m 之 a 的對數是與 m 相等之 a 之乘羃之指數，此寫之成 $\log_a m=x$. 於是 $a^x=m$ 與 $\log_a m=x$ 爲同一事實，祇是兩種寫法. 從而 $a^x=m$ 直可寫作 $\log_a m=x$，

反之 $\log_a m=x$ 可寫作 $a^x=m$.

【要項】 1. a 是底，則 a 之對數是 1.

即 $a^1=a$ $\quad\therefore\quad \log_a a=1$

2. 1 之對數是 0.

$a^0=1$ $\quad\therefore\quad \log_a 1=0$

3. 負數無對數.

【常用對數】 對數之底雖可爲任何數，然於實用上定底爲 10，此謂之常用對數.

而將 $\log_{10} m$ 略去，單寫之爲 $\log m$.

【公式】

1. $a^x=m$ 則 $\log_a m=x$
2. $10^x=m$ 則 $\log m=x$
3. $a^0=1$ 得 $\log_a 1=0$
4. $a^1=a$ 得 $\log_a a=1$
5. $\log_a(m\times n\times p)=\log_a m+\log_a n+\log_a p$
6. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$
7. $\log_a m^r=r.\log_a m$
8. $\log_a\sqrt[r]{m}=\frac{1}{r}.\log m$
9. $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$

【1】證明問題

1. 試證明 $\log(xy)=\log x+\log y$

解 作 $\log x=m,\ \log y=n$ 由公式1(逆用之)得

$10^m=x,\quad 10^n=y$

$\therefore$ $10^m\times10^n=xy$ 即 $10^{m+n}=xy$ 此用對數寫法表之

$\log(xy)=m+n$ 此中用入 m, 之值

$\log(xy)=\log x+\log y$

2. 證明公式 $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$

解 作 $\log_a b=x$, $\log_b c=y$, $\log_c a=z$ 則由公式1得

$a^x=b$………(1), $b^y=c$………(2), $c^z=a$………(3)

(1)式之兩邊用 y 乘之得 $a^{xy}=b^y$，此中用入(2)式得 $a^{xy}=c$. 兩邊用 z 乘之得 $a^{xyz}=c^z$, 此中用入(3)式得 $a^{xyz}=a^1$, 而 a 之指數須得相等, 即 $xyz=1$, 適用前項假定得 $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=1$.

3. 證明 $log_b M = log_a M \times \frac{1}{log_a b}$

解 作 $log_b M = x$, $log_a M = y$, $log_a b = z$, 因得

$b^x = M \cdots\cdots(1)$, $a^y = M \cdots\cdots(2)$, $a^z = b \cdots\cdots(3)$.

(1)式(2)式相等，即 $b^x = a^y$, 將其用入(3)式而將 b 除去得

$(a^z)^x = a^y$ $\therefore$ $a^{zx} = a^y$ $\therefore$ $zx = y$

即 $x = y \times \frac{1}{z}$ 此中將 x, y, z 之値用入得

$$log_b M = log_a M \times \frac{1}{log_a b}$$

別解 作 $log_b M = x$ 則 $b^x = M$. 而以 a 爲底則其兩邊之對數爲

$log_a(b^x) = log_a M$ $\therefore$ $x log_a b = log_a M$

即 $x = log_a M \times \frac{1}{log_a b}$ 此中將 x 之値用入

$log_b M = log_a M \times \frac{1}{log_a b} \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$

4. a, b, c 之對數爲 p, q, r 則 $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$, 試證明之.

解 今作底爲 M 則由命題得 $log_M a = p$, $log_M b = q$, $log_M c = r$

故
$$\left.\begin{aligned} M^p = a \cdots\cdots\cdots M^{p(q-r)} &= a^{q-r} \\ M^q = b \cdots\cdots\cdots M^{q(r-p)} &= b^{r-p} \\ M^r = c \cdots\cdots\cdots M^{r(p-q)} &= c^{p-q} \end{aligned}\right\} \text{分邊相乘}$$

$\times$

$M^{p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)} = a^{q-r} b^{r-q} c^{p-q}$

$\therefore$ $M^0 = a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q}$

即 $1 = a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q}$

5. a, b, c 是等差級數; x, y, z 是等比級數; 試證明 $(b-c) log\ x + (c-a) log\ y + (a-b) log\ z = 0$.

解 a, b, c 是等差級數故得 $a-b = b-c \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又 x, y, z 是等比級數故得 $y^2 = xz \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

於是 $(b-c)\log x+(c-a)\log y+(a-b)\log z$

$=\log x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b}$　　此中將(1)式代入

$=\log x^{a-b}y^{c-a}z^{a-b}$

$=\log (xz)^{a-b}y^{c-a}$　　此中將(2)式代入

$=\log (y^2)^{a-b}y^{c-a}$

$=\log y^{2a-2b+c-a}$

$=\log y^{a-b-b+c}$　　此中將(1)式代入

$=\log y^{b-c-b+c}=\log y^0=0\times\log y=0$

$\therefore\ (b-c)\log x+(c-a)\log y+(a-b)\log z=0$

6.　級數之區分如下，求第n次之括弧內之級數之和.

$(\log x)$, $(\log x^2, \log x^4)$, $(\log x^8, \log x^{16}, \log x^{32})$,

$(\log x^{64}, \log x^{128}, \log x^{256}, \log x^{512})$.........

解　祇寫 x 之指數則各羣之指數爲 [1], [2, 4], [8, 16, 32], [64, 128, 256, 512]........., 並作成初項 1 公比 2 之等比級數，次乃求出第 n 羣之指數；第一羣之項數爲 1，第二羣之項數爲 2，第三羣之項數爲 3，......... 於是其羣之號次與其羣中所有之項數相一致，即第 n 號之羣有 n 項.

次再尋查第一羣起至第 $(n-1)$ 羣止之項數有幾，第一羣有一，第二羣有二，第三羣有三，.........第 $(n-1)$ 羣有$(n-1)$個，故項之總數爲$1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$　從而第 n 項之初項與等比級數 1, 2, 4, 8, 16, 32,............之第$\left(\dfrac{n(n-1)}{2}+1\right)$號次之項相當，因由公式$l=ar^{n-1}$ 得第 n 羣之初項$=1\times 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

作 $\dfrac{n(n-1)}{2}=p$　則第 n 羣之初項$=2^p$

從而第 n 羣之指數爲 $(2^p, 2^{p+1}, 2^{p+2},\cdots\cdots\cdots n$項)，若作第$n$ 羣之和爲 s 則

$$s=\log x^{2^p}+\log x^{2^{p+1}}+\log x^{2^{p+2}}+\cdots\cdots\cdots\cdots(n項)$$

$$=\log x^{2^p}\times x^{2^{p+1}}\times x^{2^{p+2}}\times\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n項)$$

$$=\log x^{[2^p+2^{p+1}+2^{p+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots]}$$

而 $2^p+2^{p+1}+2^{p+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots(n項)$ 是初項 2^p，公比 2，項數 n 之等比級數之和，作之爲 s' 則由公式 $s=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 得.

$$s'=\frac{2^p(1-2^n)}{1-2}=2^p(2^n-1)$$

$$\therefore\quad s=\log x^{2^p(2^n-1)}=2^p(2^n-1)\log x$$

$$=2^{\frac{n(n-1)}{2}}(2^n-1)\log x$$

【II】計算題

於計算題中 $\log 1=0,\quad \log 10=1,\quad \log 100=\log 10^2=2,$
$\log 1000=\log 10^3=3$ 以下類推

又 $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$ 等，最爲緊要.

1. 將下式化簡.

$$\log 100-\log 80+\log 75-\log 1.3+\frac{1}{2}\log 10816-2.\log\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解 原式 $=\log\left(\dfrac{100}{80}\times\dfrac{75}{1.3}\times\dfrac{10816^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$ [但 $\log a^x=x\log a$]

$$=\log\left(\frac{5}{4}\times\frac{750}{13}\times\frac{104\times4}{3}\right)=\log(5\times250\times8)$$

$=\log 10000=\log 10^4=4.\log 10=4$ [$\log 10=\log_{10}10=1$]

答 4

別解　原式$=\log 10^2-\log 2^3\times 10+\log 5^2\times 3-\log\frac{13}{10}$

$+\frac{1}{2}\log 13^2\times 2^6-2(\log\sqrt{3}-\log 2)$

$=2\log 10-(3\log 2+\log 10)+2\log 5+\log 3$

$-(\log 13-\log 10)+\frac{1}{2}(2\log 13+6\log 2)$

$-2\left(\frac{1}{2}\log 3-\log 2\right)$

$=2\log 10-3\log 2-\log 10+2\log 5+\log 3-\log 13$

$+\log 10+\log 13+3\log 2-\log 3+2\log 2$

$=2\log 10+2\log 5+2\log 2$

$=2(\log 2\times 5)+2\log 5+2\log 2$

$=2\log 2+2\log 5+2\log 5+2\log 2$

$=4(\log 2+\log 5)=4(\log 2\times 5)$

$=4\log 10=4.$　　　　[但 $\log 10=\log_{10}10=1$]

知　$\log 2=0.3010,\ \log 3=0.4771$，求 $\log\frac{\sqrt{0.05}\times\sqrt{0.3}}{\sqrt[3]{2}}$

解　原式$=\log\sqrt{0.05}+\log\sqrt{0.3}-\log\sqrt[3]{2}$

$=\frac{1}{2}\log 0.05+\frac{1}{2}\log 0.3-\frac{1}{3}\log 2$

$=\frac{1}{2}\log\frac{5}{100}+\frac{1}{2}\log\frac{3}{10}-\frac{1}{3}\log 2$

$=\frac{1}{2}\log\frac{1}{20}+\frac{1}{2}(\log 3-\log 10)-\frac{1}{3}\log 2$

$=\frac{1}{2}(\log 1-\log 20)+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}\log 10-\frac{1}{3}\log 2$

$=\frac{1}{2}\log 1-\frac{1}{2}(\log 2\times 10)+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}\log 10-\frac{1}{3}\log 2$

$=\frac{1}{2}\log 1-\frac{1}{2}(\log 2+\log 10)+\frac{1}{2}\log 3-\frac{1}{2}\log 10-\frac{1}{3}\log 2$

$$=\frac{1}{2}log1-\frac{1}{2}log2-\frac{1}{2}log10+\frac{1}{2}log3-\frac{1}{2}log10-\frac{1}{3}log\ 2$$

$$=\frac{1}{2}log1-\frac{5}{6}\ log2-log10+\frac{1}{2}log\ 3$$

於是此中將 $log1=0$, $log10=1$, $log2=0.3010$, $log3=0.4771$ 代入

$$=\frac{1}{2}\times 0-\frac{5}{6}\times 0.3010-1+\frac{1}{2}\times 0.4771=-1.012$$

$$=\bar{2}.9878 \text{ ……………………………………}$$

3. $\underline{log_2 3=a}$, $log_3 11=b$, 將 $log_{66}44$ 用 a, b 表之.

解 $log_2 3=a$ 故 $2^a=3$, 而求 a 則以10 爲底作成兩邊之對數, $a\ log2=log3$

即 $a=\frac{log\ 3}{log\ 2}$……(1) 同樣由 $log_3 11=b$ 得 $b=\frac{log 11}{log\ 3}$………(2).

次作 $log_{66}44=m$ 則 $66^m=44$, 今以10爲底作成兩邊之對數

$mlog66=log44$ 即

$$m=\frac{log\ 44}{log\ 66}=\frac{log2^2\times 11}{log2\times 3\times 11}=\frac{2log2+log11}{log2+log3+log11}$$

$$=\frac{\frac{2\ log2}{log\ 3}+\frac{log\ 11}{log\ 3}}{\frac{log\ 2}{log\ 3}+1+\frac{log\ 11}{log\ 3}}$$ [分母、分子用 $log\ 3$ 除之而代入 (1), (2)]

$$=\frac{2\times\frac{1}{a}+b}{\frac{1}{a}+1+b}=\frac{\frac{2+ab}{a}}{\frac{1+a+ab}{a}}=\frac{ab+2}{ab+a+1}$$

$$\therefore\ log_{66}44=m=\boxed{\frac{ab+2}{ab+a+1}}\text{ ……………………答}$$

4. 知 $log\ 2=0.30103$, $log\ 3=0.47712$ 求以 $6\sqrt{2}$ 爲底數之 3456 之對數.

解 作 $log_{6\sqrt{2}}3456=x$ 則由公式得 $(6\sqrt{2})^x=3456$, 今作兩邊之對數

$$x\log\ 6\sqrt{2}=log\ 3456$$

$$\therefore\ xlog2\times 3\times 2^{\frac{1}{2}}=log2^7\times 3^3$$

$$\therefore\ x\{log\ 2+log\ 3+\frac{1}{2}log\ 2\}=7\ log\ 2+3\ log\ 3$$

$\therefore\quad x\{0.30103+0.47712+\frac{1}{2}\times0.30103\}=7\times0.30103+3\times0.47712$

$0.92867x=3.53857 \qquad \therefore\quad x=3.81144$

$\therefore\quad \log_{3\sqrt{2}}3456=3.81144$ ……………………答

5. $27^{13}\div16^{12}$與6^6何者爲大. 但$\log 2=0.30103, \log 3=0.47712$

解 作$x=27^{13}\div16^{12}$ 則

兩邊之對數爲

$\log x=13\log 27-12\log16$

$=13\log 3^3-12\log 2^4$

$=39\log 3-48\log 2$

$=39\times0.47712-48\times0.30103$

$\therefore\quad \log x=4.15824$

作 $y=6^6$ 則

兩邊之對數爲

$\log y=6\log 6$

$=6\log 2\times3$

$=6(\log 2+\log 3)$

$=6(0.30103+0.47712)$

$\therefore\quad \log y=4.66890$

$\therefore\quad \log x<\log y$

$\therefore\quad x<y$ 卽 $27^{13}\div16^{12}<6^6$ ……………………答

2. 【要定位部】

【要項】 (A) 比1大之數之對數定位部較其整數部之位數小1. 整數部之位數爲n則定位部爲$(n-1)$.

例如 $\log 385.37$ 其整數部之位數爲3則定位部爲2.

(B) 反對數之定位部爲m (m是整數), 則該數之整數部份(小數點以上之部份)爲$(m+1)$

(C) 比1小之數之對數定位部爲負數則其絕對值比在小數點與最初有効數字間之零之數大1.

小數點與最初有効數字間之零之數爲n, 則定位部爲$-(n+1)$.

例如 $\log 0.0034$, 其小數點與最初有效數字3之間有2個零, 故其定位部爲-3.

(*D*) 反對數之對數定位部若作之爲負數m，則其
是小數點與最初有効數字間之零之數小1卽(
-1).

問　　題

1. $2^8\times 8^{10}\times 5^{12}$是何位數.(必要時得用 $log2=0.30103$)

解　用 $x=2^8\times 8^{10}\times 5^{12}$ 作兩邊之對數.

$$log\ x=8\ log\ 2+10\ log\ 8+12\ log\ 5$$
$$=8\ log\ 2+10\ log\ 2^3+12\ log\ \frac{10}{2}$$
$$=8\ log\ 2+30\ log\ 2+12(log\ 10-log\ 2)$$
$$=26\ log\ 2+12\ log\ 10$$
$$=26\times 0.30103+12\times 1\qquad [但\ log\ 10=1]$$
$$=19.82678$$

定位部$(n-1)$是19. 因 $n-1=$

故 $n=20$　卽小數點以上20行之數.　　　答 20

2. 求 $\sqrt[5]{\dfrac{2.75}{3576}}$ 之值.

但 $log\ 275=2.43933$,　$log\ 3.576=0.55340$

$log\ 2383=3.37712$, $log\ 2384=3.37731$

解　作$x=\sqrt[5]{\dfrac{2.75}{3576}}$　　而求兩邊之對數,

$$logx=\frac{1}{5}(log2.75-log3576)$$

此中將對數之值代

$$=\frac{1}{5}(0.43933-3.55340)=-0.62281$$

$\therefore$ $logx=-0.62281$　　　$\therefore$ $log\ x=1-0.62281-\bar{1}=1.377$

$\therefore$ $log\ x=\bar{1}.37719$

{ $\sqrt[5]{\dfrac{2.75}{3576}}$ 之對數爲$\bar{1}.37719$ 則查其應得之數 }

指數爲-1則應是緊貼小數點之數.

$$log\ 0.2384-log0.2383=\bar{1}.37731-\bar{1}.37712=0.00019$$

[卽數之差爲 $(0.2384-0.2383=0.0001)$ 則假數之差是 0.00019, 今假數之差爲 $\bar{1}.37719-\bar{1}.37712=0.00007$ 可查出數之差] 由

$0.00019:0.00007=0.0001:y$　得　$y=0.00004$

從而　$\log x=\log(0.2383+0.00004)=\bar{1}.37719.$

$\therefore\quad x=0.23834$……………………………………答

【III】 對數方程式

注意　解對數方程式當熟記下列事項.

$0=\log 1,\quad 1=\log 10,\quad 2=\log 100,\quad 3=\log 1000$

初學者於對數方程式之變形成

$\log\dfrac{x+5}{2x+3}=0$　往往誤作之爲　$\therefore\ \dfrac{x+5}{2x+3}=0$　宜留意

$\log\dfrac{x+5}{2x+3}=0$　非　$\dfrac{x+5}{2x+3}=0$　是　$\dfrac{x+5}{2x+3}=1$

$\log\dfrac{x+5}{x+8}=1$　非　$\dfrac{x+5}{x+8}=1$　是　$\dfrac{x+5}{x+8}=10$

$\log\dfrac{x+5}{x-8}=2$　非　$\dfrac{x+5}{x-8}=2$　是　$\dfrac{x+5}{x-8}=100$

問　　題

1.　解　$\log(x^3+1)-\log(x+1)=1$

解　由 $\log(x^3+1)-\log(x+1)=1$　得　$\log\dfrac{x^3+1}{x+1}=\log 10.$

$\therefore\quad \dfrac{x^3+1}{x+1}=10$…………$x^2-x+1=10$…………$x^2-x-9=0$

$\therefore\quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{37}}{2}$　　而 $x=\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}$ 則

$$\log(x+1)=\log\left(\frac{1-\sqrt{37}}{2}+1\right)=\log\frac{3-\sqrt{37}}{2}$$

然　$3-\sqrt{37}=\sqrt{9}-\sqrt{37}=$負數.

但　$\boxed{\text{負數之對數不能求}}$

故捨棄　$x=\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}$　　　　答　$x=\dfrac{1+\sqrt{73}}{2}$

2.　將下列方程式解之.

$$\frac{1}{2}\log(2x+2)+\log\sqrt{3x+4}=1+\log 2$$

解　由原方程式得　$\log\sqrt{2x+2}+\log\sqrt{3x+4}-\log 2=\log 10$

$\therefore$　$\log\dfrac{\sqrt{2x+2}\times\sqrt{3x+4}}{2}=\log 10$

$\therefore$　$\dfrac{\sqrt{2x+2}\sqrt{3x+4}}{2}=10\cdots\cdots\sqrt{2x+2}\sqrt{3x+4}=20$

平方之　$(2x+2)(3x+4)=400\cdots\cdots 3x^2+7x-196=0$

$\therefore$　$(x-7)(3x+28)=0$　　$\therefore$　$x=7$　或　$-9\frac{1}{3}$

而　$x=-9\frac{1}{3}$　則 2x+2 及 3x+4 成負數，然無負數之對數．故捨棄之.　　　　答　7

3.　將下列聯立方程式解之.

$$\log(x^3-y^3)=2\cdots\cdots(1),\quad \log(x-y)=0\cdots\cdots(2)$$

解　由 (1)式得　$\log(x^3-y^3)=\log 100$　　$\therefore$　$x^3-y^3=100\cdots\cdots(3)$

由 (2)式得　$\log(x-y)=\log 1$　　$\therefore$　$x-y=1\cdots\cdots(4)$

於是可由 (3)式，(4)式求得 x,y.

由 (3)式得　$(x-y)(x^2+xy+y^2)=100$　此中將 (4) 式代入

$x^2+xy+y^2=100$　此中將由 (4) 式得來之

$x=y+1$　代入之成　$(y+1)^2+(y+1)y+y^2=100$

$\therefore\ 3y^2+3y-99=0\cdots\cdots\ y^2+y-33=0$

$\therefore\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-33)}}{2\times1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{133}}{2}$

若　$y=\dfrac{-1+\sqrt{133}}{2}$　則

由　$x=y+1$　得

$x=\dfrac{-1+\sqrt{133}}{2}+1$

$=\dfrac{1+\sqrt{133}}{2}$

若　$y=\dfrac{-1-\sqrt{133}}{2}$　則

由　$x=y+1$　得

$x=\dfrac{-1-\sqrt{133}}{2}+1$

$=\dfrac{1-\sqrt{133}}{2}$

答　$\left(x=\dfrac{1+\sqrt{133}}{2},\ y=\dfrac{-1+\sqrt{133}}{2}\right)$；$\left(x=\dfrac{1-\sqrt{133}}{2},\ y=\dfrac{-1-\sqrt{133}}{2}\right)$

【IIII】指數方程式

1. 解 $6^x=\dfrac{10}{3}-6^{-x}$，求至小數第三位.

但　$\log 2=0.30103$,　$\log 3=0.47712$,

解　作 $6^x=y$　則 $6^{-x}=\dfrac{1}{6^x}=\dfrac{1}{y}$.　故原式用 y 寫之則 $y=\dfrac{10}{3}-\dfrac{1}{y}$ 即

$3y^2-10y+3=0$

$\therefore\ (3y-1)(y-3)=0$　　$\therefore\ y=\dfrac{1}{3},\ 3.$

$y=\dfrac{1}{3}$ 則

$6^x=\dfrac{1}{3}$　　依對數作之

$\therefore\ x\log 6=\log 1-\log 3$

$\therefore\ x=\dfrac{-0.47712}{0.77815}=-0.613$

$y=3$ 則

$6^x=3$

$\therefore\ x\log 6=\log 3$

$\therefore\ x=\dfrac{0.47712}{0.77815}=0.613$

$\boxed{\log 6=\log 2+\log 3=0.30103+0.47712=0.77815}$　答　$x=\pm0.613$

2. 解 $x^{\log x}=1000x^2$

解 作兩邊之對數 $\log(x^{\log x})=\log(1000x^2)$

$\therefore\quad \log x.\log x=\log 1000+\log x^2$

$(\log x)^2=3+2.\log x$

$\therefore\quad (\log x)^2-2.\log x-3=0\cdots\cdots(\log x-3)(\log x+1)=0$

$\therefore\quad \log x-3=0$ 及 $\log x+1=0$

$\therefore\quad \log x=3$ 即

$\log x=\log 10^3$

$\therefore\quad x=10^3$

$x=1000$

$\therefore\quad \log x=-1$

$\therefore\quad \log x=\log 10^{-1}$

$\therefore\quad x=10^{-1}$

$x=\frac{1}{10}$

答 1000 與 $\frac{1}{10}$

3. 解下列聯立方程式.

$2^{x+y}=9\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\qquad 3^{x-y}=4\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

但 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$, 算至小數第三位.

解 作(1)式兩邊之對數得

$(x+y)\log 2=\log 9$

$\therefore\quad (x+y)\log 2=2\log 3$

$\therefore\quad x+y=\frac{2\times0.4771}{0.3010}$

$\therefore\quad x+y=3.171\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

作(2)式兩邊之對數得

$(x-y)\log 3=\log 4$

$\therefore\quad (x-y)\log 3=2\log 2$

$\therefore\quad x-y=\frac{2\log 2}{\log 3}=\frac{2\times0.3010}{0.4771}$

$\therefore\quad x-y=1.261\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3)式+(4)式得 $x=2.216$, 從而 $y=0.955$.

答 $x=2.216,\ y=0.955$

【V】. 指數方程式應用

1. 求 $\log_{0.001}0.000001$

解　從 $\log_{0.001}0.000001 = x$　則　$\log_a m = x$　即　$a^x = m$　因得

$(0.001)^x = 0.000001$　即　$\left(\frac{1}{1000}\right)^x = \frac{1}{1000000}$

∴　$\left(\frac{1}{10^3}\right)^x = \frac{1}{10^6}$　∴　$(10^{-3})^x = 10^{-6}$

∴　$(10^{-3})^x = (10^{-3})^2$　∴　$x = 2$ ……………………………………答

2.　$(1.08)^x$ 之整數部分是四行之數，x 之最大值及最小值為如何數目.

但 x 是整數，$\log 2 = 0.30103$，$\log 3 = 0.47712$

解　$(1.08)^x$ 之整數部分為四行數故此數比 10000 小，但不比 1000小，因得下列不等式：

$1000 \leqq (1.08)^x < 10000$ ……………………………………(1)

於是作出各個之對數 $\log 1000 \leqq \log (1.08)^x < \log 10000$

即　$3 \leqq x \log 1.08 < 4$　除 $\boxed{\text{正數}}$ 之各項

∴　$\frac{3}{\log 1.08} \leqq x < \frac{4}{\log 1.08}$ ……………………………………(2)

而　$\log 1.08 = \log\frac{108}{100} = \log\frac{2^2\times 3^3}{100} = 2\log 2 + 3\log 3 - \log 10^2 = 0.03342$

將此代入 (2) 式 $\frac{3}{0.03342} \leqq x < \frac{4}{0.03342}$

即　$89.7 \leqq x < 119.6$　而由命題 x 是 $\boxed{\text{整數}}$

故欲滿足上列不等式須　$89 < x < 120$.

答　最小 90；最大 119

3.　級數 $1+\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2+\cdots\cdots$ 之和比 396 大則至少須取若干項.

但 $\log 2 = .30103$

解　作出初項 1，公比 $\frac{5}{4}$ 之等比級數而以所求之項數為 n 則

由公式得 $396<\dfrac{1\times\left\{1-\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{5}{4}}$. 化簡之 $\left(\frac{5}{4}\right)^n>100$

今作兩邊之對數

$n\log\frac{5}{4}>\log 100\quad\therefore\quad n\{\log 5-\log 4\}>\log 10^2$

$\therefore\quad n\{\log\frac{10}{2}-\log 2^2\}>2.\log 10$

$\therefore\quad n\{\log 10-\log 2-2\log 2\}>2\log 10$

$\therefore\quad n\{1-3\times0.30103\}>2$............但 $[\log 10=1]$

$\therefore\quad n>\dfrac{2}{0.0961}\quad\therefore\quad n>20.6$ 而 n 是項數故是整數，從而要比396大則須是21項.　　　　**答** 21項

4. $4\times4^2\times4^3\times$............須幾個因子始能超過1000000.

但 $\log 2=0.30103$

解 作所求之因子數為 n 則第 n 次之項為 4^n.

$\therefore\quad 4\times4^2\times4^3\times\cdots\cdots\times4^n=4^{1+2+3+\cdots\cdots+n}$

而 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ 成等差級數則初項1，公差1，故

由公式 $s=\dfrac{n(a+l)}{2}$ 得 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(1+n)}{2}$

因由命題得 $4^{\frac{n(n+1)}{2}}>1000000.$

而以 $\dfrac{n(n+1)}{2}=x$，作出 $4^x>1000000$ 兩邊之對數，

$x\log 4>\log 1000000$ 故 $x\log 2^2>\log 10^6$.........$2x\times\log 2>6$

$\therefore\quad 2x>\dfrac{6}{0.30103}\quad\therefore\quad x>\dfrac{6}{0.60206}\quad\therefore\quad x>9.9$

因 $4x$ 超過 1000000 而 x 是整數則是 $x\geqq10$, n 是項數故是正整數，從而不論 n 是偶數或奇數 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 常是正整數，而 x 是正整數

於是得 $\frac{n(n+1)}{2}\geqq 10$, 故 $n^2+n-20\geqq 0$ $\therefore$ $(n-4)(n+5)\geqq 0$

滿足本式之正整數為 $n\geqq 4$. 答 因子4 ^{n}, 及4個以上

5. 某人一年間之總收入額與總支出額等於其每年初所有之貯金額之$\frac{1}{18}$與$\frac{1}{22}$, 每年末將剩餘之款加入貯金, 問幾年後其貯金額比現在多一倍.

解 作現在之貯金為 x 圓 則其年終為 $\left(x+x\times\frac{1}{18}-x\times\frac{1}{22}\right)$圓

即 $x\times\left(1+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}\right)$圓, 故每年之貯金為其前年之貯金額

$\left(1+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}\right)$倍, 從而第二年末為$x\left(1+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}\right)^2$圓

第三年末 為 $x\left(1+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}\right)^3$圓, ……………………以下類推.

今作所求之年數為 n 則得下列不等式.

$x\left(1+\frac{1}{18}-\frac{1}{22}\right)^n>2x$ $\therefore$ $\left(\frac{200}{198}\right)^n>2$

作兩邊之對數 $n\log\frac{200}{198}>\log 2$

$\therefore$ $n\log\frac{2\times 100}{99\times 2}>\log 2$ $\therefore$ $n\{\log 100-\log 99\}>\log 2$

$\therefore$ $n>\frac{0.30103}{0.00437}$ 將此計算之則是 69 年 5 月强.

答 69 年 6 個月後

第二十一章

複利法

1.【複利法之公式】

作本銀爲 p，年息利率爲 r，用複利計算 n 年後本利合計所得之數爲 s，則

$s=p(1+r)^n$　　卽　$\log s=\log p+n.\log(1+r)$

於是 p, r, n, s 四者之中知其三項，卽可利用此關係求得其他一項.

問　　題

1. 銀1000圓，以年息七厘半之複利貸出，問幾年後可得本利2000圓，但利息每四個月結算一次，併入本銀；且知下値.

$\log 1.025=0.0107$　　$\log 2=0.3010$

解　滿四個月後之本利合計爲 $1000\left(1+\frac{0.075}{3}\right)$ 圓，以所求之年數爲 n，則得下列方程式.

$1000(1+0.025)^{3n}=2000$…………$(1.025)^{3n}=2$

作兩邊之對數　$3n.\log 1.025=\log 2$

卽　$3n\times 0.0107=0.3010$　　$\therefore\ n=9.37$(强)

於是爲 9.37年＝9年5個月(弱).　　答　9年5個月餘

2. 年息6釐，每年複利計算，問幾年後本利超過本銀5倍以上.

但 $\log 2=0.30103$　$\log 106=2.02531$

解 作所求之年數為 n，本銀為 A 則得下列不等式。

$$A(1+0.06)^n>5A\cdots\cdots\cdots(1.06)^n>5$$

作兩邊之對數 $n.\log 1.06>\log 5\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

而 $\log 106=2.02531$ 故得 $\log 1.06=0.02531$

又 $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=0.69897$ 將其代入(1)式

$n\times 0.02531>0.69897$ $\therefore$ $n>27.61$

答 28 年後

II.【每年儲積】

1. 年息利率 r，每年初儲入款額 a，問 n 年後本利合計得幾何，但每年之利息併入本銀.

解 作期間為 n 年，所求之總和為 s。

最 初之 a 圓 n 年間之本利合計 $=a(1+r)^n$

第二年之 a 圓 $(n-1)$ 年間之本利合計 $=a(1+r)^{n-1}$

第三年之 a 圓 $(n-2)$ 年間之本利合計 $=a(1+r)^{n-2}$

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

第 n 年之 a 圓 1 年間之本利合計 $=a(1+r)$.

$\therefore$ $s=a(1+r)^n+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+a(1+r)$.

將此逆寫之.

$s=a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a(1+r)^n$

於是右邊成初項 $a(1+r)$，公比 $(1+r)$，項數 n 之等比級數.

$\therefore$ $s=\dfrac{a(1+r)[1-(1+r)^n]}{1-(1+r)}=\dfrac{a(1+r)[(1+r)^n-1]}{r}$ ……(圓)……**答**

2. 民國 *13* 年*4*月起至民國 *18*年*3*月止每月儲 *10*圓，問至民國 *23*年*3*月底止本利共計幾何，但利率為年息*4*厘*8*毛，而每年 *3* 月底結算利息併入本銀，且存入之款項於該月生利.

$$1.048^{10}=1.59813,\ 1.048^5=1.26417$$

解 將民國14年3月底止每月儲款之本利合計算出.

4 月之儲款生 11 個月利息，故本利合計為

$10\times\left(1+\frac{0.048}{12}\times11\right)$圓, 5 月為 $10\times\left(1+\frac{0.048}{12}\times10\right)$圓

6 月爲 $10\times\left(1+\frac{0.048}{12}\times9\right)$圓…………以下類推

民國14年3月之儲款10圓，本利合計爲10圓.

$$\therefore\ 10\times\left(1+\frac{0.048}{12}\times11\right)+10\times\left(1+\frac{0.048}{12}\times10\right)+10\times\left(1+\frac{0.048}{12}\times9\right)$$

$$+\cdots\cdots+10=10\,(1.044+1.04+1.036+\cdots\cdots+1)$$

括弧內成等差級數故由 公式 $s=\frac{n(a+l)}{2}$

$$=10\times\frac{12(1.044+1)}{2}=122.64$$

因此民國 14 年 3月底之本利合計爲 122.64圓.

此款在民國23 年 3月底本利合計爲 $122.64(1+0.048)^9$圓

同樣民國 14 年 4月起至民國 15 年 3月止每月10圓之儲款在

民國 23 年 3月底爲 $122.64(1+0.048)^8$圓, 以下相同.

民國 15 年 4 月起 16 年 3 月止之儲款爲 $122.64(1+0.048)^7$圓,

民國 16 年 4 月起 17 年 3 月止之儲款爲 $122.64(1+0.048)^6$圓,

民國 17 年 4 月起 18 年 3 月止之儲款爲 $122.64(1+0.048)^5$圓,

因此民國 23 年 3月底之本利合計總數作爲S, 則

$$s=122.64(1+0.048)^9+122.64(1+0.048)^8+122.64(1+0.048)^7$$
$$+122.64(1+0.048)^6+122.64(1+0.048)^5$$

$$=122.64\times1.048^5\{1.048^4+1.048^3+1.048^2+1.048+1\}$$

$$=122.64\times1.048^5\times\frac{1.048^5-1}{1.048-1}$$ [由等比級數公式得來]

$$=122.64\times\frac{1.048^{10}-1.048^5}{0.048}$$

$$=122.64\times\frac{1.59813-1.26417}{0.048}=583.267(強)$$ 答 853圓強

III. [分年償還]

1. 借入款項 A圓，年息利率r，複利計算，每年償還相同之款額若干，n年後本利皆清，問每年還款若干.

解 銀 A圓，年息利率r，每年複利計算，n年間之本利合計為 $A(1+r)^n$圓

次，每年償還款額為 x圓，作之為每年儲欵則此本利合計之總和為

$$x(1+r)^{n-1}+x(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+x$$

即 $\frac{x}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$圓， 故得下列方程式，

$$A(1+r)^n=\frac{x}{r}[(1+r)^n-1]$$

$$\therefore\quad x=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}\cdots\cdots\cdots(\text{圓})\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

IIII. 【年金之本額】

1. 年息利率r，求n年間每年年底支付之年金p之本額.

解 第一年年底之年金本額為$\frac{p}{1+r}$圓.

{令a圓儲款一年末成 $a(1+r)$圓，故一年末 $a(1+r)$圓之本額為a圓.

即 $\frac{a(1+r)}{1+r}$圓　第二年終之年金本額為 $\frac{p}{(1+r)^2}$ 圓，以下類推.}

故作本額為Q則

$$Q=\frac{p}{1+r}+\frac{p}{(1+r)^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{p}{(1+r)^n}$$

$$=p\left\{\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}\right\}=p\times\frac{\frac{1}{1+r}\times\left\{1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{1+r}}$$

$$=\frac{p}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$