

## Mathematik für Anwender II

### Arbeitsblatt 38

#### Übungsaufgaben

AUFGABE 38.1. Seien  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Bestimme die Länge der affin-linearen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto tv + w.$$

AUFGABE 38.2. Sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und  $c \in [a, b]$ . Zeige, dass  $f$  genau dann rektifizierbar ist, wenn die beiden Einschränkungen von  $f$  auf  $[a, c]$  und auf  $[c, b]$  rektifizierbar sind, und dass in diesem Fall

$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f)$$

gilt.

AUFGABE 38.3. Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$$

von  $-5$  nach  $5$ .



AUFGABE 38.4.\*

Bestimme die Länge der durch

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für  $t$  zwischen  $0$  und  $b$ , wobei  $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

AUFGABE 38.5.\*

Berechne die Länge der archimedischen Spirale

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t \cos t, t \sin t),$$

für die Umdrehung zwischen  $t = 0$  und  $t = 2\pi$ .

AUFGABE 38.6. Bestimme die Länge der Neilschen Parabel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t^2, t^3),$$

von 0 bis  $b$ , wobei  $b \in \mathbb{R}_{>0}$ .

AUFGABE 38.7. Bestimme die Länge des Graphen des cosinus hyperbolicus  $\cosh t$  von  $a$  nach  $b$ .

AUFGABE 38.8.\*

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

AUFGABE 38.9.\*

Wir betrachten die differenzierbare Kurve

$$f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto (t, \sin t).$$

- Skizziere das Bild dieser Kurve und den Streckenzug, der sich ergibt, wenn man das Definitionsintervall in vier gleichlange Teilintervalle unterteilt.
- Berechne die Gesamtlänge des in a) beschriebenen Streckenzugs.
- Zeige, dass für die Länge  $L$  dieser Kurve die Abschätzung

$$L \leq \sqrt{2}\pi 3$$

gilt.

AUFGABE 38.10.\*

Wir betrachten die reelle Ebene  $\mathbb{R}^2$  ohne den offenen Kreis mit Mittelpunkt  $M = (0, 0)$  und Radius 3, also

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \geq 3 \right\}.$$

Eine Person befindet sich im Punkt  $A = (5, 0)$  und möchte zum Punkt  $B = (-5, 0)$ , wobei sie sich nur in  $T$  bewegen darf.

- Zeige, dass die Person von  $A$  nach  $B$  entlang von zwei geraden Strecken kommen kann, deren Gesamtlänge 12,5 ist.
- Zeige, dass die Person von  $A$  nach  $B$  entlang eines stetigen Weges kommen kann, dessen Gesamtlänge maximal 11,9 ist.

AUFGABE 38.11.\*

Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve und sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit

$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma).$$

AUFGABE 38.12. Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall und

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zeige, dass  $f$  genau dann rektifizierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

AUFGABE 38.13.\*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R},$$

die rektifizierbar ist, deren Länge aber  $> 1$  ist.

AUFGABE 38.14.\*

Man gebe ein Beispiel einer bijektiven Abbildung

$$\varphi: [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \subseteq \mathbb{R},$$

die nicht rektifizierbar ist.

Die folgenden Aufgaben diskutieren, inwiefern höherdimensional ein „Mittelwertsatz“ gelten kann.

AUFGABE 38.15. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \neq 0$ , gilt.

AUFGABE 38.16. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  derart geben muss, dass

$$f'(c) = s \cdot (f(b) - f(a))$$

mit einem  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 0$ , gilt.

AUFGABE 38.17. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$  und mit  $f(a) \neq f(b)$ . Zeige, dass es kein  $c \in [a, b]$  derart geben muss, dass  $f'(c)$  und  $f(b) - f(a)$  linear abhängig sind.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 38.18. (4 Punkte)

Ein Massenteil werde zum Zeitpunkt 0 von einem Berggipfel (der als Nullpunkt der Ebene angesetzt wird) mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit  $v$  abgeschossen und bewege sich danach luftwiderstandsfrei unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde. Berechne die Bahnkurve  $f(t)$  des Körpers und die zurückgelegte Strecke  $s(t)$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .

AUFGABE 38.19. (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 4x + 11,$$

zwischen 2 und 9.

AUFGABE 38.20. (3 Punkte)

Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, t \longmapsto \left( \frac{t^3}{3}, \frac{4t^5}{5}, \frac{8t^7}{7} \right),$$

von  $a$  nach  $b$ .

AUFGABE 38.21. (5 Punkte)

Bestimme die Länge des Graphen der Exponentialfunktion  $\exp t$  von  $a$  nach  $b$ .

AUFGABE 38.22. (5 (3+2) Punkte)

Person  $A$  befindet sich im Punkt  $(0, -5)$  und will nach  $(0, 5)$ . Im Punkt  $(0, 0)$  befindet sich eine weitere unbewegliche Person  $B$ . Da die Abstandsregel von 2 einzuhalten ist, muss  $A$  um  $B$  herumlaufen.

- (1) Was ist die minimale Länge eines Weges, mit dem  $A$  an ihr Ziel gelangt?
- (2) Man gebe eine Parametrisierung dieses kürzesten Weges an, wobei die Geschwindigkeit konstant gleich 1 sein soll.

AUFGABE 38.23. (8 Punkte)

Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

eine stetig differenzierbare Kurve mit  $f'(t) \neq 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Zeige, dass es ein  $c \in [a, b]$  derart gibt, dass  $f'(c)$  und  $f(b) - f(a)$  linear abhängig sind.

## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Helix2.png , Autor = Benutzer Siebrand auf nl Wikipedia,  
Lizenz = CC-by-sa 3.0 1
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 5
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5