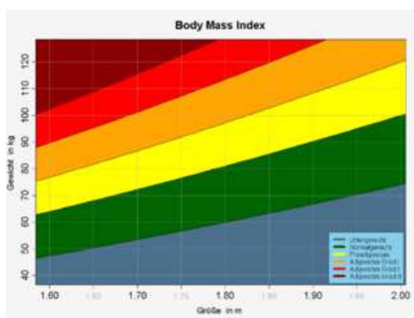
Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 57

Übungsaufgaben

Aufgabe 57.1. Skizziere die Höhenlinien und das Gradientenfeld zur Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2(x-3)^2 + 3(y-1)^2.$$



Aufgabe 57.2. Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, (m,l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei m für die Masse und l für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

(1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
(2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.
(3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?
(4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?
(5) Berechne die Hesse-Matrix von φ und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.
(6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf $[30, 300] \times [1, 2]$ einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?

(7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge T ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.

Aufgabe 57.3. Es sei $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt zu h. Wie sieht die Lösung des Anfangswertproblems

$$v(0) = P$$

zum zugehörigen Gradientenfeld Grad $h(P)$ aus?

Aufgabe 57.4.*

Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit $v(0) = w$ ($w \in \mathbb{R}^2$) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe 57.5. Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit $v(0) = w$ ($w \in \mathbb{R}^3$) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 - y^2 + 3yz.$$

Aufgabe 57.6. Berechne die ersten drei Iterationen der Picard-Lindelöf-Iteration zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v) \text{ und } v(0) = (3,\, 2)$$

zu

$$h(x, y) = x^3 - xy^2 + y^2.$$

Aufgabe 57.7.*

Es sei $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld und sei $\varphi\colon\ J \to \mathbb{R}^n$ ($J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = G(v)$. Es gelte $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 57.8.*

Es sei $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \text{Grad } h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung, die eine Faser F zu h zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_0 < t_1$ trifft. Zeige, dass $\varphi|_{[t_0,t_1]}$ konstant ist.

Aufgabe 57.9.*

Es sei $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \text{Grad } h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung und es sei $t \in \mathbb{R}$ ein Zeitpunkt mit

$$\varphi'(t) = 0.$$

a) Es sei h zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass φ konstant ist.

b) Zeige durch ein Beispiel, dass ohne die Voraussetzung aus a) φ nicht konstant sein muss.

Die Himmelsscheibe von Nebra. Ist die Mondsichel darauf sternförmig?

Aufgabe 57.10. Betrachte zu $r, s \in \mathbb{R}_+$ mit $r + s > 1$ und $s < r + 1$ die „sichelförmige“ Menge

$$M_{r,s} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq r,\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq s \right\}.$$

Für welche r, s ist diese Menge sternförmig?

Aufgabe 57.11. Zeige, dass eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 57.12. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann ein (nichtleeres) Intervall ist, wenn T sternförmig ist.

Aufgabe 57.13. Es seien $P_1, \ldots, P_k$ $(k \geq 1)$ endlich viele Punkte im $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \ldots, P_k\}$ nicht sternförmig ist.

Aufgabe 57.14. Man gebe ein Beispiel für eine sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

Aufgabe 57.15. Man gebe ein Beispiel für eine offene, sternförmige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ an, die nur bezüglich eines einzigen Punktes sternförmig ist.

Aufgabe 57.16. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2+2y^4}{\left(x^2+y^4\right)^2},\ \frac{8xy^3}{\left(x^2+y^4\right)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

Aufgabe 57.17. Überprüfe, ob das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{-2x^2+2y^4}{\left(x^3+y^3\right)^2},\ \frac{8xy^3}{\left(x^3+y^3\right)^2} \right),$$

die Integrabilitätsbedingung erfüllt oder nicht.

Aufgabe 57.18. Zeige, dass das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (2x - y\cos x,\ -\sin x)\,,$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Ob ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^2$ die Integrabilitätsbedingung erfüllt lässt sich äquivalent mit der sogenannten Rotation ausdrücken.

Zu einem partiell differenzierbaren Vektorfeld $G\colon U \to \mathbb{R}^3$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ nennt man

$$\operatorname{rot}(G)(P) := \begin{pmatrix} \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(P) - \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(P) \\ \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(P) - \frac{\partial G_3}{\partial x_1}(P) \\ \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(P) - \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(P) \end{pmatrix}$$

die *Rotation* von G.

Die Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld.

Aufgabe 57.19. Es sei $G\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Zeige, dass G genau dann die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wenn $\operatorname{rot}(G) = 0$ ist.

Aufgabe 57.20. Berechne zum Vektorfeld

$$G\colon \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \neq 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(x^3 - z^2,\ \frac{xy}{z},\ \frac{z}{x^2y} \right)$$

die Rotation.

Aufgabe 57.21.*

Wir betrachten das Vektorfeld $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$G(x,y) = (y, -x^3)$$

Zeige auf zweifache Weise, dass G kein Gradientenfeld ist.

(1) Mit der Integrabilitätsbedingung.
(2) Mit Wegintegralen.

Aufgabe 57.22.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (x,y,z) \longmapsto (y - \cos(x+z)\,,\, x,\, 2z - \cos(x+z))\,.$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G.

Aufgabe 57.23.*

Wir betrachten das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, (x,y,z) \longmapsto \left(ye^{xy} + \ln z,\, xe^{xy} - 2yz,\, \frac{x}{z} - y^2 \right).$$

a) Zeige mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung, dass G ein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Potential zu G.

Aufgabe 57.24.*

Es sei $F\colon G \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und es sei

$$\rho(P) := \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(P).$$

Zeige

$$\rho(P) = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\gamma_\epsilon} F,$$

wobei γ_ϵ den einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufenen Kreisweg um P mit Radius ϵ bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 57.25. (3 Punkte)

Es sei $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

Aufgabe 57.26. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

Aufgabe 57.27. (3 Punkte)

Welche linearen Vektorfelder

$$G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

Aufgabe 57.28. (3 Punkte)

Bestimme, ob zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

der Subgraph und ob der Epigraph sternförmig ist.

Aufgabe 57.29. (6 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige Teilmenge. Zeige, dass auch der Abschluss $\overline{T}$ sternförmig ist.

Aufgabe 57.30. (3 Punkte)

Zeige, dass das Vektorfeld

$$G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(ye^z - 3x^2z,\ xe^z + 2yz,\ xye^z + y^2 - x^3\right),$$

ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential dazu.

Aufgabe 57.31. (3 Punkte)

Berechne zum Vektorfeld

$$G\colon \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \neq 0,\ z > 0\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \longmapsto \left(\frac{e^{3x}-z}{y},\ \frac{\cos x}{z^2},\ \frac{\ln z}{xy}\right)$$

die Rotation.

Abbildungsverzeichnis