13 縦ヲ $x\,m$, 横ヲ $y\,m$ トスレバ x ト y トノ關係ハドウカ。

$$\left|\begin{array}{l} x-y=39 \\ x+y=209 \end{array}\right.$$

縦 124 m
横 85 m

答 面積 5270平方米

14 甲ロヲ x 圓, 乙ロヲ y 圓トスレバ利息ノ1.53圓及ビ183圓ハ x, y ヲツカツテドウ表ハスコトガ出來ルカ。

$$\left|\begin{array}{l} 0.042x+0.05y=153\cdots\cdots(1) \\ 0.05x+0.06y=183\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$$

$(1)\times 6-(2)\times 5$

$0.002x=3$

$x=1500$

$y=1800$

答 甲ロ1500圓
乙ロ1800圓

(13) 賛成者ヲ x 人, 不賛成者ヲ y 人トスレバ x, y ノ關係如何。

$$\left|\begin{array}{l} x-y=9 \\ x+y=45 \end{array}\right.$$

答 賛成者27人
不賛成者18人

(14) 初メノ所有金甲ハ x 圓, 乙ハ y 圓トスレバ初メノトキト後ノトキトノ所有金ノ關係ハドウカ。

$$\left|\begin{array}{l} x=3y\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+50=1\frac{2}{3}(y+70)\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$$

(1)ヲ(2)ヘ代入

$3y+50=\frac{5}{3}y+\frac{350}{3}$

$9y+150=5y+350$

$4y=200$

$y=50$

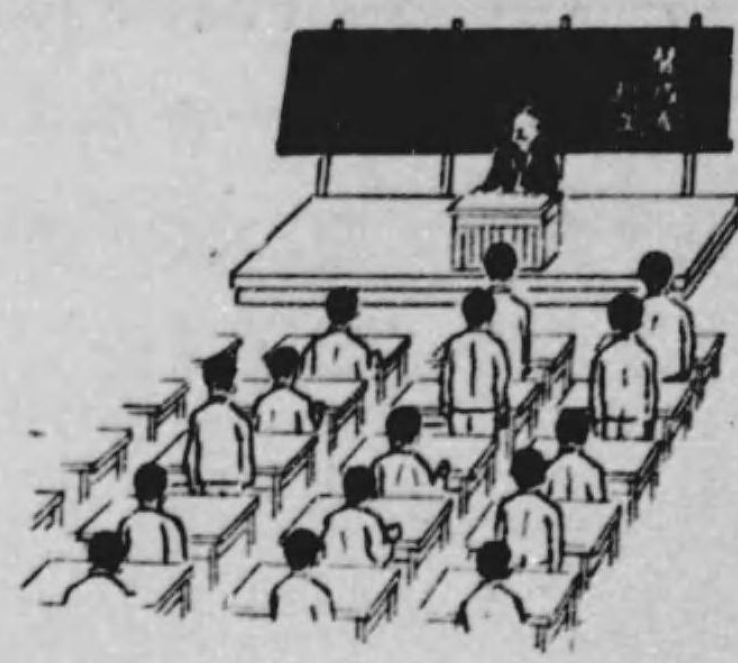
$x=150$

答 甲150圓
乙 50圓

13 周圍ガ 418 m ノ矩形ノ土地ノ縦ハ横ヨリモ39 m 長イトイフ。面積ハ何程デアルカ。

14 或ル人ガ所有金ヲ甲乙二口ニ分ケ,甲ロヲ年4分2厘,乙ロヲ年5分ノ利率デ預ケ,一ケ年ノ終リニ總計153圓ノ利息ヲ得タ。若シ甲ロヲ年5分,乙ロヲ年6分デ預ケタノデアツタラ,利息總計ハ183圓デアツタトイフ。此ノ人ノ所有金ハ何程カ。

備考 $\begin{cases} 0.042x+0.05y=153 \\ 0.05x+0.06y=183 \end{cases}$



(13) 45人カラ成ル或ル學級デ級誌ヲ發刊スルコトニツイテ賛否ヲ調ベタガ,賛成者ノ方ガ9人多カツタ。賛否各幾人デアツタカ。

(14) 初メ甲ノ所有金ハ乙ノ所有金ノ3倍デアツタ。其ノ後甲ハ50圓ヲ,乙ハ70圓ヲ得タノデ,甲ノ所有金ハ乙ノ所有金ノ $1\frac{2}{3}$ 倍トナツタトイフ。兩人ノ初メノ所有金ハ各何程デアツタカ。

13 縦ヲ $x\,m$, 横ヲ $y\,m$ トスレバ x ト y トノ關係ハドウカ。

$$\begin{cases} x-y=39 \\ x+y=209 \end{cases}$$

縦 124 m
横 85 m

答 面積 5270平方米

14 甲ロヲ x 圓, 乙ロヲ y 圓トスレバ利息ノ153圓及ビ183圓ハ x, y ヲツカツテドウ表ハスコトガ出來ルカ。

$$\begin{cases} 0.042x+0.05y=153 \cdots(1) \\ 0.05x+0.06y=183 \cdots(2) \end{cases}$$

$(1)\times 6-(2)\times 5$

$0.002x=3$

$x=1500$

$y=1800$

答 甲ロ1500圓
乙ロ1800圓

(13) 賛成者ヲ x 人, 不賛成者ヲ y 人トスレバ x, y ノ關係如何。

$$\begin{cases} x-y=9 \\ x+y=45 \end{cases}$$

答 賛成者27人
不賛成者18人

(14) 初メノ所有金甲ハ x 圓, 乙ハ y 圓トスレバ初メノトキト後ノトキトノ所有金ノ關係ハドウカ。

$$\begin{cases} x=3y \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+50=1\frac{2}{3}(y+70) \cdots(2) \end{cases}$$

(1)ヲ(2)ヘ代入

$3y+50=\frac{5}{3}y+\frac{350}{3}$

$9y+150=5y+350$

$4y=200$

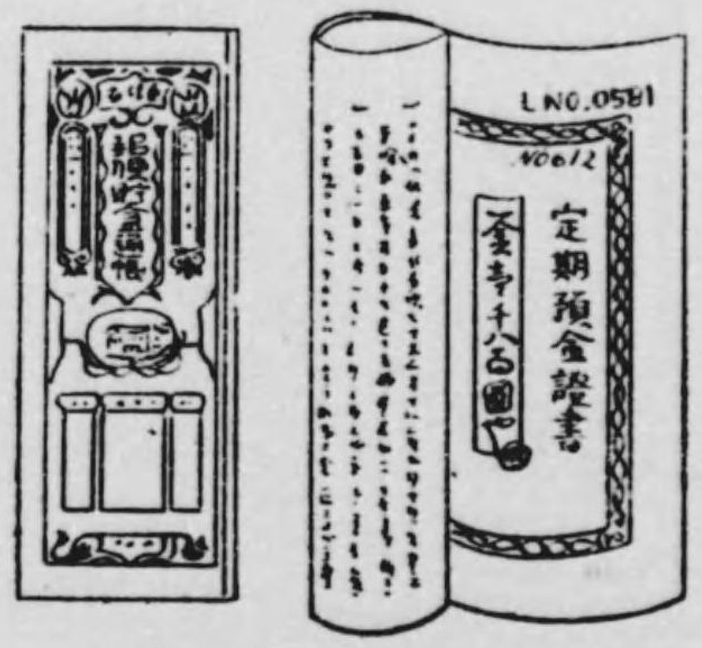
$y=50$

$x=150$

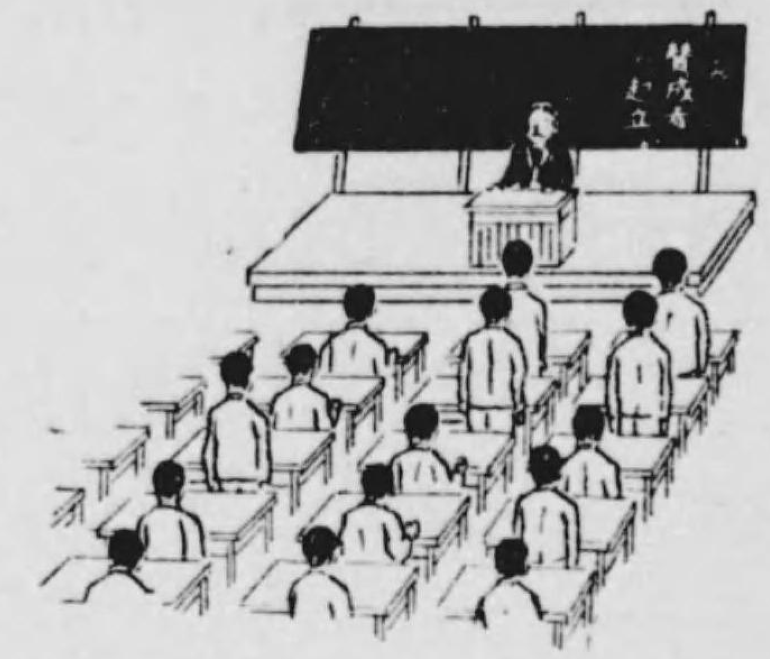
答 甲150圓
乙 50圓

13 周圍ガ 418 m ノ矩形ノ土地ノ縦ハ横ヨリモ39 m 長イトイフ。面積ハ何程デアルカ。

14 或ル人ガ所有金ヲ甲乙二ロニ分ケ,甲ロヲ年4分2厘,乙ロヲ年5分ノ利率デ預ケ,一ケ年ノ終リニ總計153圓ノ利息ヲ得タ。若シ甲ロヲ年5分,乙ロヲ年6分デ預ケタノデアツタラ,利息總計ハ183圓デアツタトイフ。此ノ人ノ所有金ハ何程カ。



備考 $\begin{cases} 0.042x+0.05y=153 \\ 0.05\,x+0.06y=183 \end{cases}$

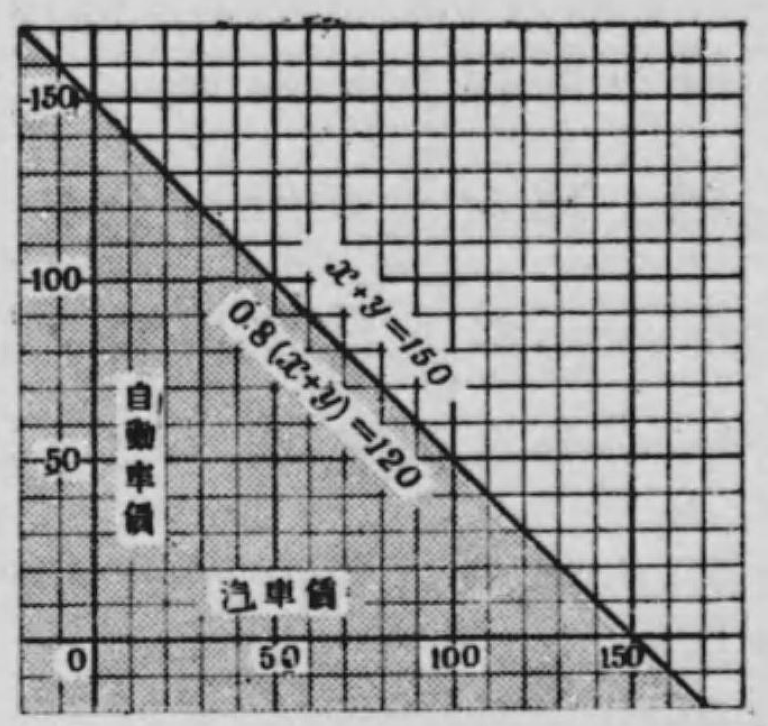


(13) 45人カラ成ル或ル學級デ級誌ヲ發刊スルコトニツイテ賛否ヲ調ベタガ,賛成者ノ方ガ9人多カツタ。賛否各幾人デアツタカ。

(14) 初メ甲ノ所有金ハ乙ノ所有金ノ3倍デアツタ。其ノ後甲ハ50圓ヲ,乙ハ70圓ヲ得タノデ,甲ノ所有金ハ乙ノ所有金ノ $1\frac{2}{3}$ 倍トナツタトイフ。兩人ノ初メノ所有金ハ各何程デアツタカ。

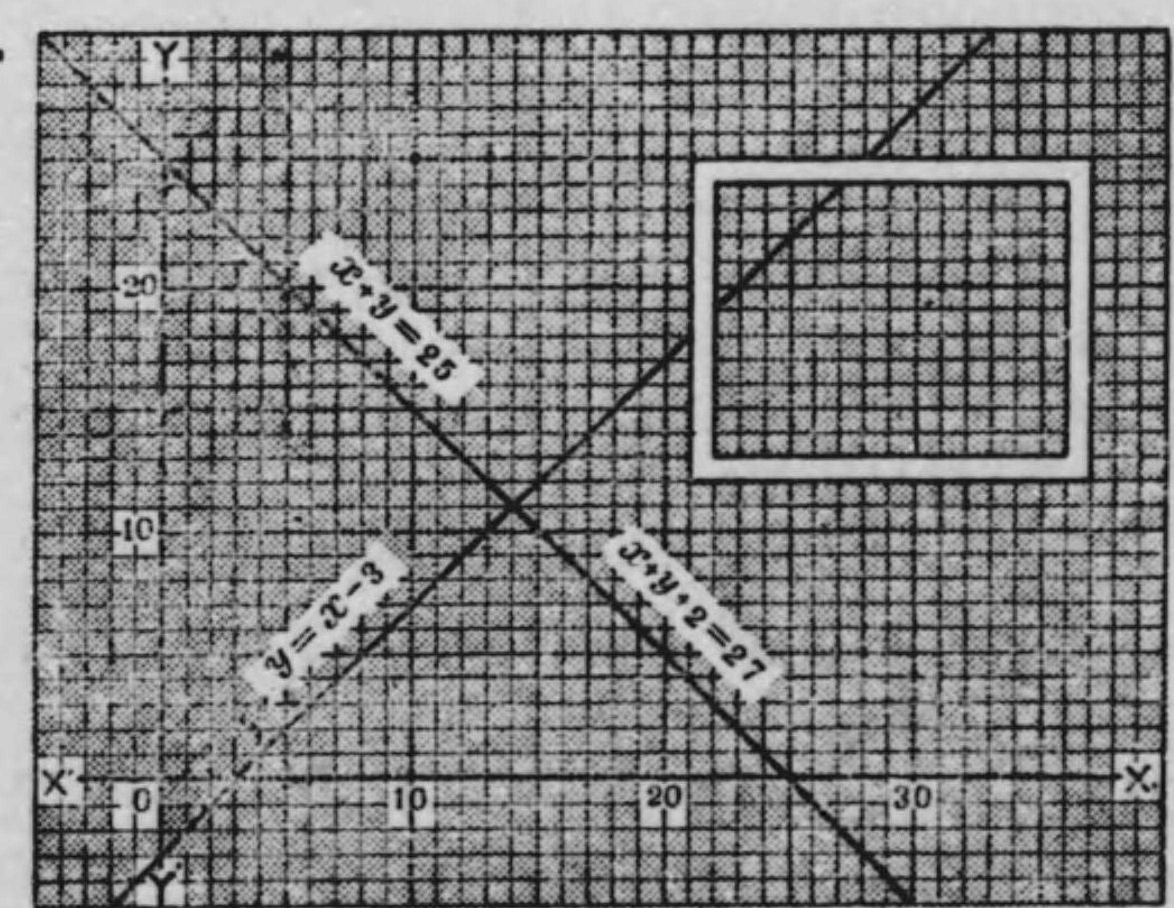
15 或ル人ガ汽車ト自動車ニ連絡シテ乘リ,全體デ賃金1圓50錢ヲ拂ツタ。又或ル時同樣ニ乘ツタノニ,此ノ時ハ汽車賃ダケ2割引トナツタタメ全體デ1圓34錢ヲ拂ツタ。汽車,自動車ノ賃金各何程カ。

(15) 問題**15**ノ後ノ部分ヲ「共ニ2割引トナツタ爲1圓20錢ヲ拂ツタ」トスレバ如何。



注意 問題(15)ヨリ二ツノ式ヲ得ルガ同一ノ式トナツテソノ答ガ決メニクイ。圖ヲ參照セヨ。

16 周圍50mノ矩形ノ畑ノ周リニ1m幅ノ道路ガアル。ソノ道路ノ總面積ハ54平方mトナルトイフ。畑ノ縱横ハ各何mデアルカ。



(16) 問題**16**ニ於テ,縱ヲ横ヨリモ3m廣イトスレバドウナルカ。

15 汽車賃ヲx圓,自動車賃ヲy圓トスレバ1.5圓,1.34圓ハ何デ表ハサレルカ。

$$\begin{cases} x+y=1.5\cdots\cdots\cdots(1) \\ 0.8x+y=1.34\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$$0.2x=0.16$$
$$x=0.8$$
$$y=0.7$$

答 汽車賃80錢 自動車賃70錢

16 縱ヲ$x\,m$,横ヲ$y\,m$トスレバ周圍ハ如何ニ表ハスカ。

$$2(x+y)=50\cdots\cdots\cdots(1)$$

道路ノ總面積ヲx,yデ表ハシタナラバドウカ。

$$2(x+1+y+1)=54\cdots(2)$$

(1) $x+y=25$

(2) $x+y=25$

(1),(2)ノ式ハ同一デアル。

$x+y=25$ダケデx,yノ値ガ定メラレルカ。

(15) 汽車賃ヲx錢,自動車賃ヲy錢トスレバ150錢,120錢ハ如何ニ表ハスコトガ出來ルカ。

$$\begin{cases} x+y=150\cdots\cdots\cdots(1) \\ 0.8(x+y)=120\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2)ノ兩邊ヲ0.8デ割ルトドウナルカ。$x+y=150$ダケデx,yガ定マルカ。

(16) 問題**16**ニ於テ,縱ヲ横ヨリ3m廣イトスレバ他ニドンナ式ガ得ラレルカ。

(1) $x+y=25$

(2) $x-y=3$

$$x=14$$
$$y=11$$

答 縱14m 横11m

方程式ノ不定不能ニツイテ

方程式ノ不定不能ノ理論ハ文字方程式ヲ學習シナクテハワカラナイコトデアリ,且相當ムツカシイコトデアルノデココデハ唯實例ニヨツテ説明スルダケニ止メル。問題(15)デイヘバ

$$\begin{cases} x+y=150\cdots\cdots\cdots(1) \\ 0.8(x+y)=120\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

ハ見カケ上ニ於テハ二ツノ方程式ガアルガ，(2)ノ式ハ兩邊ヲ 0.8 デ割ルコトニヨツテ(1)ノ式トスルコトガ出來ル。ツマリ二ツノ未知數ヲ含ム式ガ唯一ツアルダケデアル。161頁ニ示シタヤウニ二元一次ノ方程式唯一ツナラバ之ヲ滿足スル無數ノ x, y ノ値ノ組ガアル。卽チ唯一組ト決定出來ナイ。ソレ故ソノ方程式ハ不定デアル。今(1)(2)ヲ同一ノ式ニ改メテ邊々ヲ引キ合ツタナラバ

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & x+y=150\\(2) & x+y=150\end{array}\right\}\ \mathbf{0=0}\ \text{ノ形トナル。}$$

一元一次方程式例ヘバ

$2x-3-x=x-5+2$　ノヤウナ式ヲ整頓スレバ

$\mathbf{0x=0}$　卽チ　$0=0$　トナル。

方程式ヲ整頓シ又ハ聯立方程式ヲ組合セテ $0=0$ ノ形トナルヤウナ方程式ハ不定方程式デアル。

二元一次聯立方程式ガ不定ナル場合ニ於テハソノグラフハ同一ノ直線トナル。ツマリ一ツノ直線ダケデハソノ上ノ點ヲ決定スルコトハ出來ナイ。

$$\text{尙}\ \left.\begin{array}{l}2x+3y=5\cdots\cdots\cdots(1)\\6x+9y=15\cdots\cdots(2)\end{array}\right\}\ \text{トハ不定聯立方程式デアル。卽チ(2)}$$

ノ兩邊ヲ3デ割レバ(1)トナル。

摘　要

◎今マデニ用ヒタ重要ナ語句

正數,負數・・・・絶對値

代數式・・・・項,單項式,多項式,同類項・・・・簡約

代數式ノ數値・・・・代入

恒等式,方程式・・・・未知數,既知數,根(正負),滿足

一元方程式,二元聯立方程式

消去・・・・加減法,代入法

◎方程式ノ解法

(1) 原理

$$X=Y\cdots\cdots\left\{\begin{array}{ll}(A) & X\pm N=Y\pm N\cdots\cdots\text{移項}\\ (B) & \left\{\begin{array}{l}mX=mY\\ \dfrac{X}{m}=\dfrac{Y}{m}\end{array}\right.\ \left(\begin{array}{l}\text{但シ}m\text{ガ}0\\\text{デナイコト}\end{array}\right)\end{array}\right.$$

(2) 一元方程式ノ解法

移項, 簡約→ 係數×x=既知項→ $x=\dfrac{\text{既知項}}{\text{係數}}$

(3) 二元聯立方程式ノ解法

二元聯立方程式 $\xrightarrow[\text{(代入法)}]{\text{(加減法)}}$ 一元方程式

グラフニ依ル解法・・・・二直線ノ交點。

雜　題

1　$x=-3,\ y=+7$ ノトキ,次ノ式ノ値ハ如何。

$6x-(5y-9x)-13x$

2　次ノ二式ヲ何レモ滿足スル x, y ノ値如何。

$$\frac{3x}{2}-2y=7$$

$$2x-\frac{3y}{2}=7$$

3　$x=5,\ y=4,\ z=3$ ノトキ,次ノ三式ノ値ハ夫夫何程トナルカ。

$x+y-z,\quad x-y+z,\quad -x+y+z$

4　次ノ方程式ヲ解ケ。

$6(3x-8)=7(5x-19)$

(1)　$a=-2,\ b=-6$ ノトキ,次ノ式ノ値如何。

$3a-\{4a-(5a-6b)\}$

(2)　次ノ式ヲ簡單ニシ,其ノ値ヲ0ナラシメル x ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{3x-4}{4}-\frac{2x-5}{5}+\frac{7x-3}{6}$$

(3)　$x=2,\ y=3,\ z=1$ ノトキ,次ノ三式ノ値ハ夫々何程カ。

$x+y+z-6,$

$x-y+2z-1,$

$x+y-z-4$

(4)　次ノ方程式ヲ解ケ。

$13x-2(4x-5)=66-3x$

次ノ二元聯立方程式ヲ解ケ。

5　$\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-y=2 \\ x-\dfrac{3}{4}y=6 \end{cases}$

(5)　$\begin{cases} 5x-2(x+y)=16 \\ 4y-\dfrac{1}{2}(x-y)-14=0 \end{cases}$

二元一次聯立方程式ガ不定ナル場合ニハ兩式ノ係數ハ比例ヲナス。

$$\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{5}{15}$$ デアル。

方程式ノ不能ノ場合ハ二式ヲ組合セテ既知數ガ0卽 $a=0$ トナル不合理ヲ來ス場合デ，二元一次ノ二方程式ハソノグラフガ平行トナリ，未知數ヲ含ム同一ノ式ガ異ナル數値ヲ持ツ〔171頁 6,(6)〕三ツノ二元一次方程式ハソノ各グラフガ一點ニ於テ交ハラナイ。三點デ交ハルカ，二點デ交ハルカ，何レモ平行デ一點デモ交ハラナイ場合デアル。尙一般的ノ說明ハ後ニ讓ルコトトスル。

摘要ニツイテ

本書ニ於テハ諸處ニ摘要ヲ設ケテ既授ノ事項ノ大要ヲ總括シ復習スルヤウニシテ居ル。コノ摘要ヲ見テ既習ノ事項ノ要點ヲ思ヒ出スヤウデナクテハ學習ガ徹底シテ居ルトハイヘナイ。教授者ハコノ摘要ニヨツテ問答ヲシ，モシ忘レテ居ルモノガアツタナラバ本文中ニ探シ求メテ更ニ記憶ヲ確實ニスルヤウニ取計ラハレタイ。併シ語句ナドニツイテハ必ズシモ定義ヲ一々正確ニ記憶スル必要ハナイ。適當ナ例ガアゲラレルナラバソレデ理解シテ居ルト思ハナクテハナラナイ。

雜　題

1　$6x-(5y-9x)-13x$

$=6x-5y+9x-13x$

$=2x-5y$

$x=-3,\ y=+7$ トスレバ

$2\times(-3)-5\times7=-6-35$

$=-41$

(1)　$3a-\{4a-(5a-6b)\}$

$=3a-4a+(5a-6b)$

$=-a+5a-6b=4a-6b$

$a=-2,\ b=-6$ トスレバ

$4\times(-2)-6\times(-6)$

$=-8+36=28$

注意　代數式ノ數値計算ハ必ズ式ヲ整頓簡約シテカラソノ値ヲ代入スベキデアル。

2 (1) $3x-4y=14$
(2) $4x-3y=14$

$(1)\times3-(2)\times(4)$
$-7x=-14$

答 $x=2$, $y=-2$

注意 $\{(1)+(2)\}\div7$, $x-y=4$ トシテ他ト組合セテモヨイ。

3 $x+y-z=5+4-3=6$
$x-y+z=5-4+3=4$
$-x+y+z=-5+4+3=2$

4 $6(3x-8)=7(5x-19)$
$18x-48=35x-133$
$-17x=-85$　答 $x=5$

5 $\frac{2}{3}x-y=2\cdot\cdot2x-3y=6\cdots(1)$
$x-\frac{3}{4}y=6\cdot\cdot4x-3y=24\cdot\cdot(2)$

(1)−(2)　$-2x=-18$
$x=9,\ y=4$　答 $x=9$, $y=4$

6 三式ハ一點ニ於テ交ハラナイ。又(1),(2)ヨリ $x=2, y=3$ トナル。コノ値ヲ(3)式ニ代入スルト
$8+3=1$ トイフヤウナ不合理ナ式トナル。

7 二直線ハ交ハラナイ。平行デアル。又
(1)ハ　$x-2y=4$
(2)ハ　$x-2y=\frac{5}{3}$
左邊ノ同一ノ式ガ4トナリ $\frac{5}{3}$ トナルノハ不合理デアル。

8 (8)ハ書中ニグラフガアルカラ説明ヲ省ク。

(2) $\frac{3x-4}{4}-\frac{2x-5}{5}+\frac{7x-3}{6}=0$
$15(3x-4)-12(2x-5)+10(7x-3)=0$
$45x-60-24x+60+70x-30=0$
$91x=30$　答 $x=\frac{30}{91}$

(3) $x+y+z-6=2+3+1-6=0$
$x-y+2z-1=2-3+2-1=0$
$x+y-z-4=2+3-1-4=0$

(4) $13x-2(4x-5)=66-3x$
$13x-8x+10=66-3x$
$8x=56$
$x=7$　答 $x=7$

(5) $5x-2(x+y)=16\cdots\cdots$
$3x-2y=16\cdots\cdots(1)$
$4y-\frac{1}{2}(x-y)-14=0\cdot\cdot$
$-x+9y=28\cdots\cdots(2)$

$(1)+(2)\times3$　$25y=100$
$y=4$
$x=8$　答 $x=8$, $y=4$

(6) 三直線ハ一點ニ於テ交ハラナイ。
又 (1), (2)カラ得タx, yノ値ヲ(3)ニ入レテミヨ。

(7) 二直線ハ交ハラナイ。平行デアル。
(1)ノ式ハ　$x-y=0$
(2)ノ式ハ　$x-y=-3$
トナツテ左邊ハ等シイノニ右邊ガ違フカラ不合理デアル。

次ノ三ツノ方程式 **6**, **(6)** 又ハ二ツノ方程式 **7**, **(7)** ハ聯立シナイコトヲグラフデ示セ。

6 $x+2y=8$
$y-x=1$
$4x+y=1$

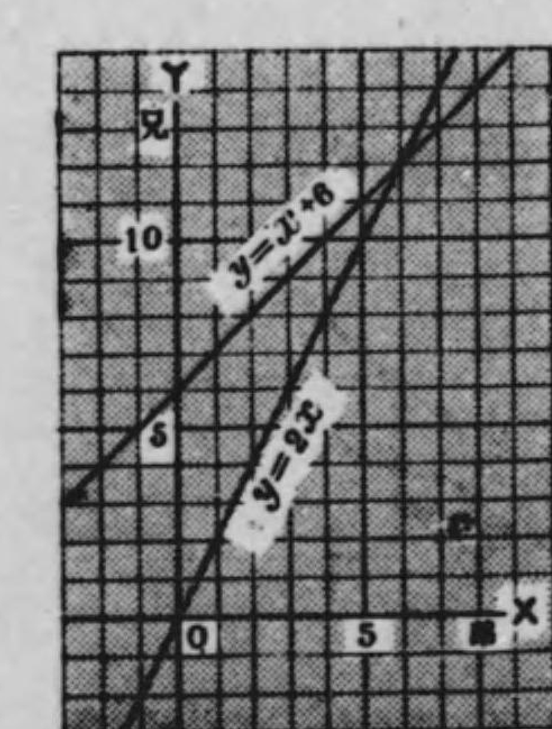
7 $x-2y=4$
$3x-6y=5$

(6) $4x+y=16$
$4y+x=9$
$x+y=3$

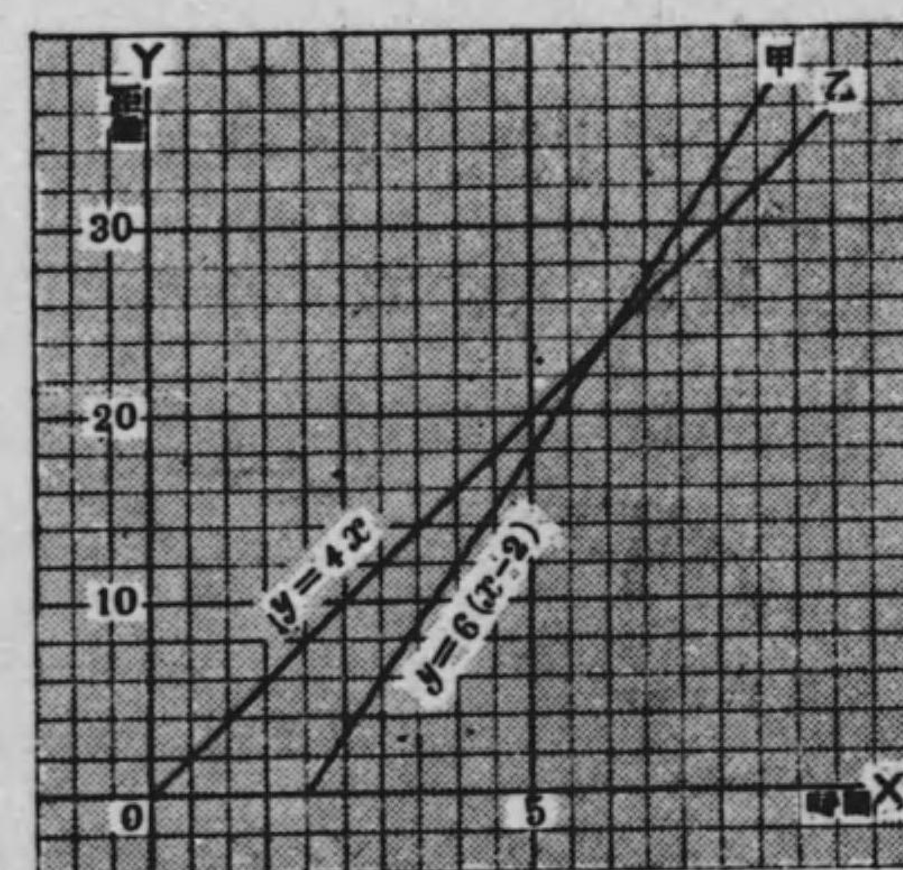
(7) $x=y$
$2x-2y=-6$

グラフデ次ノ問題ヲ解ケ。

8 兄ハ弟ヨリモ6圓ダケ貯金ガ多イ。兄弟共毎月1圓宛貯金シテ，丁度兄ノ貯金ガ弟ノ貯金ノ2倍トナツタトキノ兩人ノ貯金高ヲ求メヨ。



(8) 乙ハ或ル地ヲ出發シテ毎時 4 km ノ速サデ進ミ，甲ハ 2 時間後ニ同所ヲ出發シテ毎時 6 km ノ速サデ進ンデ行クト何時何處デ甲ハ乙ニ追付クカ。



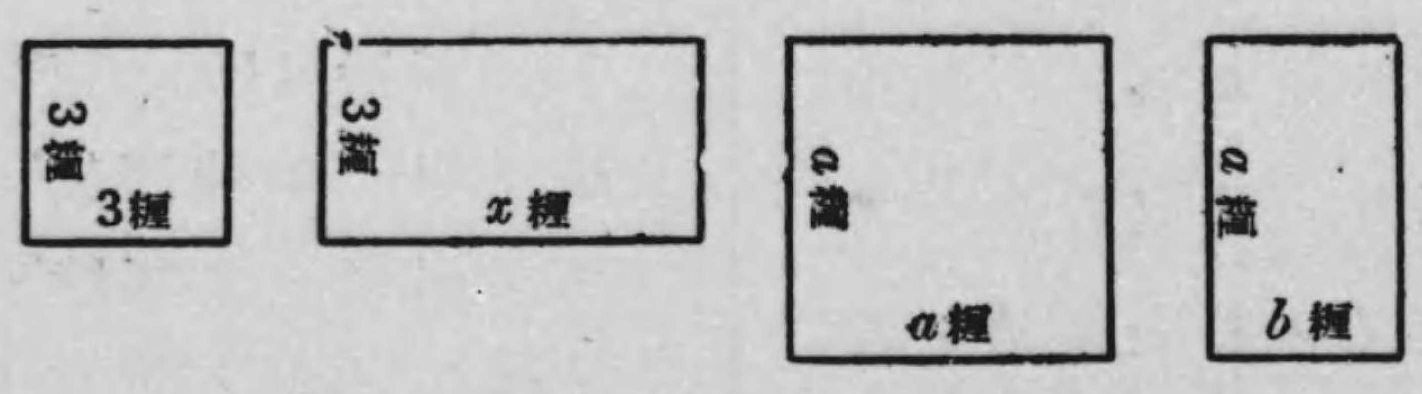
第 四 篇

二次方程式

第一章 整式ノ乘除

32. 冪及單項式ノ乘除

問 1 次ノ正方形及ビ矩形ノ面積如何.

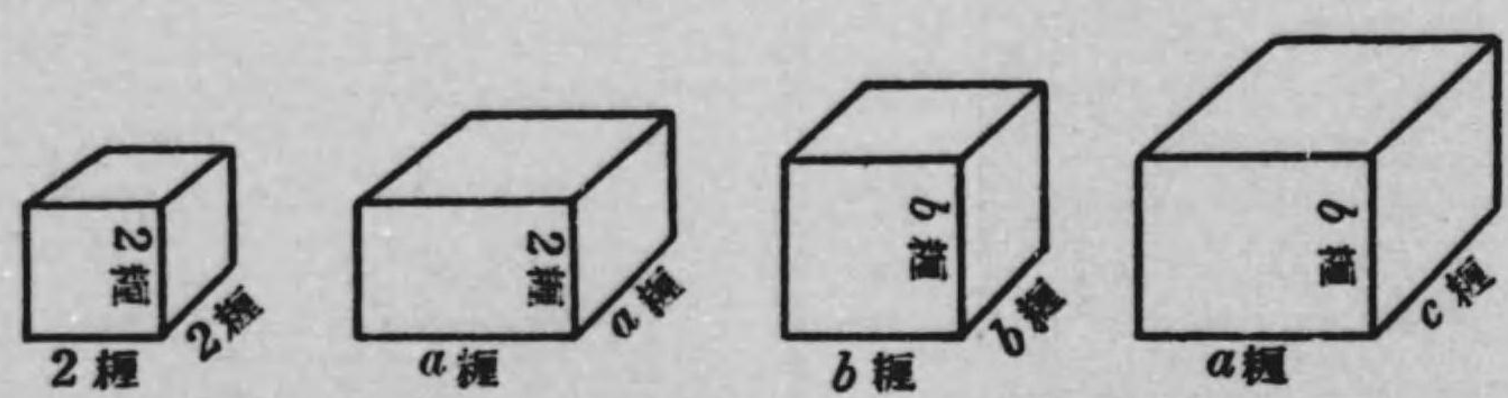


3×3 平方糎, $3\times x$ 平方糎, $a\times a$ 平方糎, $a\times b$ 平方糎

コレヲ夫々次ノヤウニ書ク.

3^2 平方糎, $3x$ 平方糎, a^2 平方糎, ab 平方糎

問 2 次ノ立方體及ビ直方體ノ體積如何.



$2\times2\times2\,cc$, $2\times a\times a\,cc$, $b\times b\times b\,cc$, $a\times b\times c\,cc$

第 四 篇

二次方程式

第一章 整式ノ乘除

32. 冪及單項式ノ乘除

整式ノ加法及ビ減法ニツイテハ既ニ第三篇ニ述ベタ所デアルガ，ソコデハ整式ノ乘法及ビ除法ニツイテハ述ベナカツタ。惟フニ從來代數學教授ノ方法トシテ一般ニ用ヒラレテキル方法ハ，文字ノ使用ヲ終レバ直チニ整式ノ四則ニ移ルノデアル。卽チ

- 文字ノ使用
- 整式ノ加法 ⎫
- 整式ノ減法 ⎭ 括弧ノ用法
- 整式ノ乘法
- 整式ノ除法

ノ順ニ導クノデアル。トコロガ二元一次聯立方程式ヲ終ルマデハ全ク一次式ノミノ取扱ヒデアツテ，整式ノ乘法及ビ除法ハソノ必要ガナイノミカ，却ツテ整式ノ乘法及除法ヲ挿ムコトニヨツテ生徒ノ學習ガ圓滑ニ行カナイデ教授ヲ阻害スルキラヒガアルト思ヒ，第四篇ニナツテ整式ノ乘法及ビ除法ヲ教授スルコトニシタ。第四篇卽チ第二學年デハ二次方程式ガ教授ノ一大眼目デアルカラ冪ノ計算モ少シハ必要デアル。故ニ之ハ最モ適宜ノ取扱ヒデアルト信ズル。

整式ノ乘法及ビ除法デハ從來所謂型ニ捉ハレ過ギテキタ。卽チ

$$(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn},\qquad (-5x^3y^2z)\times(2xyz^2)^3$$

等ノヤウニ全ク必要ノナイ，計算ノタメノ計算ニ沒頭スルノガ例デ

アツタヤウデアル。本書ハソレニ一大改革ヲ斷行シテ，全ク中學校初學年ニモ適スルヤウニシタ。

本節デ取扱フ冪及ビ單項式ノ乘除ハ之ヲ一括スレバ

數ト文字因數トノ積	$7\times xy=7xy$
異ナル文字因數ノ積	$a\times b=ab$
同ジ文字因數ノ積	$a\times a\times a=a^3$
係數ガ1デナイ單項式ノ積	$4a\times 5b=20ab$
指數ノ法則 ………………	$a^3\times a^4=a^{3+4}=a^7$ $a^5\div a^2=a^{5-2}=a^3$ $(a^2b^3)^2=a^4b^6$

等デアルガ，指數ノ法則トイツテモ從來見ルヤウニ

$$a^ma^n=a^{m+n},\qquad a^m\div a^n=a^{m-n}$$

$$(abc)^n=a^nb^nc^n,\qquad (a^m)^n=a^{mn}$$

トイツタ一般性ヲ帶ビタモノハ之ヲ全ク省イテ取リ扱ハナイコトニシタ。

乘法ヲスルノニ

交換ノ法則	The Commutative Law
結合ノ法則	The Associative Law
配分ノ法則	The Distributive Law

等ヲ要スルコトハ勿論デアルガ，ソノ法則ナドノ名稱ハ授ケルニ及バナイ。交換ノ法則ナドコトゴトシク名稱ヲ授ケルヨリモ，掛算デハ積ハソノ因數ノ順序ニハ關係シナイコトヲ內容的ニヨク理解サセレバヨイ。結合ノ法則ハ$(ab)c=a(bc)$ノヤウニ積ノ中ノ何レヲ組合セテモ積ニハ變リガナイコトヲ示スモノデアル。カクテ實際上カラハ直六面體ニ於テ何レヲ底ト考ヘルカニヨツテ，ソノ體積ハ173頁

コレヲ夫々次ノヤウニ書ク。

$2^3\,cc,\qquad 2a^2\,cc,\qquad b^3\,cc,\qquad abc\,cc$

今迄デモ數ト文字，又ハ文字ト文字トノ間ノ乘號ハ省イテ來タノデアルガ，更ニ

同一ノ文字ノ積ハ其ノ文字ノ右肩ニ掛合ハセル文字因數ノ數（カズ）ヲ書イタモノデ表ハス。之ヲ其ノ文字ノ冪ト言ヒ，肩ニ書ク數ヲ指數ト言フ。

例ヘバaaハa^2ト書イテ「a二乘*（又ハaノ平方）」ト讀ミ，bbbハb^3ト書イテ「b三乘（又ハbノ立方）」ト讀ム。2,3ハa,bノ指數デアル。

項ノ持ツ文字因數ノ數（カズ）ニヨツテ項ノ次數ヲ定メル。

例ヘバ　$3a$ハ一次，abハ二次，abcハ三次，$8lm^2n$，$5x^2y^2$等ハ四次ノ項デアルト言フ。

文字ヲ全ク含マナイ項，即チ既知數ダケノ項ハ既知項（130頁參照）又ハ絕對項ト言フ。

又問2ノ直方體ノ體積カラモ分ルヤウニ，

$$abc=acb=bac=bca=cab=cba$$

* 二乘ヲ自乘ト書クコトガアル。

卽チ積ノ値ハ其ノ因數ノ順序ニハ關係シナイ。

併シ數因數卽チ數係數ハ項ノ初メニ書キ，文字因數ハ普通「アルファベット」ノ順ニ書ク習慣ニナッテキル。

注意 次數ヲイフニハ普通「大キイ」ト言フ代リニ「高イ」，「小サイ」ト言フ代リニ「低イ」トイフ。

多項式デハ其ノ多項式中ノ最高次ノ項ノ次數ヲ以テ其ノ式ノ次數トスル。

例ヘバ $5a^2-8a^3-6a^5+3$ ハ五次式，$4a^2x-5ax^2+6a^3$ ハ三次(ノ同次)式デアル。

又時ニハ特ニ或ル文字ニダケ目ヲツケテ整式ノ次數ヲ言フコトガアル。

例ヘバ $5a^3-6ax-7a^4x^2$ ハ總テノ文字ニツイテハ六次式デアルガ，a ニツイテハ四次式デ，x ニツイテハ二次式デアル。

問3 次ノ項ノ中，x ニツイテ高次ノモノカラ順ニ言ヘ。 $5x^2y$, $-1\frac{1}{2}a^2x^4$, $6ax^3$, $-0.5xy^3$, $\frac{3}{8}z^5$

ノ下ニアルヤウニ

$$abc=acb=bac=bca=cab=cba$$

ガ導カレルガ，又形式的ニハ乘法ノ交換及ビ結合ノ法則ニヨッテ上ノコトガ導カレルノデアル。

卽チ

$$\underline{abc}\underset{\text{結合}}{=}a(bc)\underset{\text{交換}}{=}a(cb)\underset{\text{結合}}{=}\underline{acb}$$

$$\underline{abc}\underset{\text{結合}}{=}(ab)c\underset{\text{交換}}{=}(ba)c\underset{\text{結合}}{=}\underline{bac}\underset{\text{結合}}{=}b(ac)\underset{\text{交換}}{=}b(ca)\underset{\text{結合}}{=}\underline{bca}$$

$$\underline{abc}=\underline{acb}=(ac)b\underset{\text{交換}}{=}(ca)b=\underline{cab}$$

$$\underline{abc}=\underline{cab}\underset{\text{結合}}{=}c(ab)\underset{\text{交換}}{=}c(ba)\underset{\text{結合}}{=}\underline{cba}$$

斯樣ニ形式的ニ純數學的ニ導ケルケレドモ，コンナ亂暴ナコトヲ中等程度デヤッテハナラナイ。飽クマデ內容ヲ伴ツタモノデナケレバナラナイ。

a^2 ノ讀ミ方ニ就イテ

a^2 ハ a ノ二乘，a ノ自乘，a ノ平方 或ハ a ノ二冪等色々ニ讀マレルガ，日本中等教育數學會ノ決議ニ從ツテ本書デハ總テ a^2 ヲ a ノ二乘（又ハ a 二乘）トイフコトニシタ。a^2 ヲ a ノ平方ト讀ムノハ數學會デモ認メテキルカラ差支ヘナイ。

問3 $-1\frac{1}{2}a^2x^4$, $6ax^3$, $5x^2y$, $-0.5xy^3$, $\frac{3}{8}z^5$

問題

1 $2x^5-4x^4-2ax$

ソノ他色々作ラセルガヨイ。

2 縱 a m, 横 b m ノ矩形ノ土地ノ面積ハ ab 平方米デアル。1平方米ノ地代ハ5圓デアルカラ求メル地代ハ $5ab$ 圓‥答

3 一稜 a cm ノ立方體ノ體積ハ何立方糎カヲ考ヘヨ。ソレガ5箇デハ如何。

答 $5a^3$ 立方糎

4 三角形ノ面積ハドウシテ求メラレルカ。

答 $\frac{1}{2}ah$ cm^2

（1） $5x^2y-3xy^3+xy^2-6$

ソノ他色々ニ作ラセルガヨイ。

（2） 一邊 l m ノ正方形ノ面積ハ何平方米カ。

又一平方米ノ地代如何。

答 al^2 圓

（3） 一稜ガ x cm ノ立方體10箇ヲ接イデ一本ノ角柱トシタトキ，底面及ビ高サハ何程カ。

底面積 $2x^2cm^2$

側面積 $10x^2cm^2$

答 $12x^2cm^2$

（4） 直圓壔ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

答 πr^2h cm^2

補充問題 若シ必要ガアルナラバ，次ノ補充問題ヲ課セラレタイ。

（1） x, y ニツイテ五次ノ同次式ヲ作レ。

（2） 高サガ h 米，二ツノ底邊ガ夫々 a 米，b 米ノ梯形ノ面積ハ何平方米カヲ表ハス式ヲ作レ。

（3） 底面ノ半徑ガ r cm, 高サガ h cm ノ直圓錐ノ體積ハ幾立方糎カ。但シ直圓錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ デアル。

補充問題ノ答

（1） $3x^5-2x^4y+6x^2y^3+2xy^4-5y^5$ 等

（2） $\frac{h(a+b)}{2}$ 平方米　（3） $\frac{1}{3}\pi r^2h$ cc

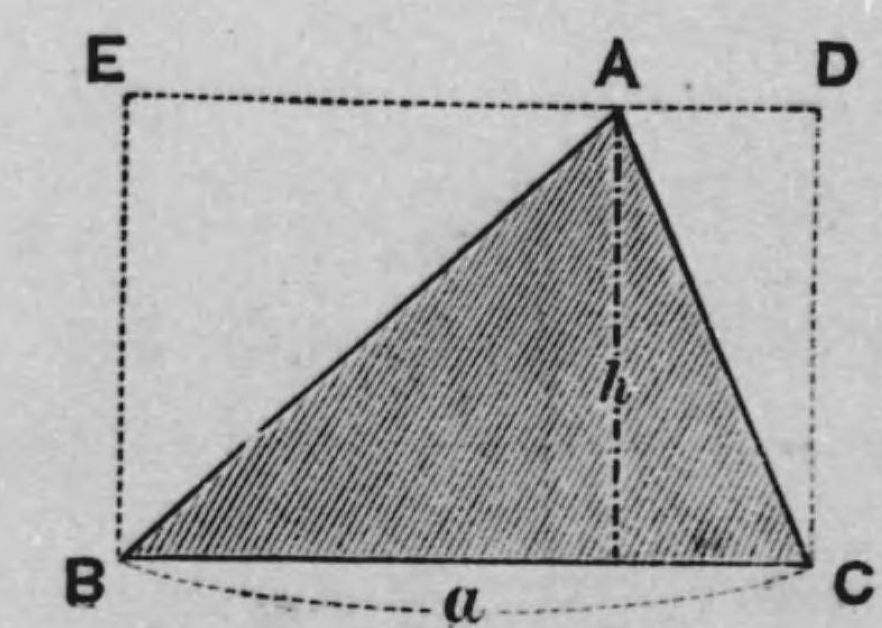
問題

1 x ニツイテ五次ノ三項式ヲ作レ。

2 廣サ1平方米ノ土地ノ値ガ5圓ナラバ，縱 a m, 横 b m ノ矩形ノ土地ノ値ハ何程デアルカ。

3 一稜ガ a cm ノ立方體5箇ノ體積ハ全部デ何程カ。

4 底邊ガ a cm デ，高サガ h cm ノ三角形ノ面積ハ幾平方糎カ。

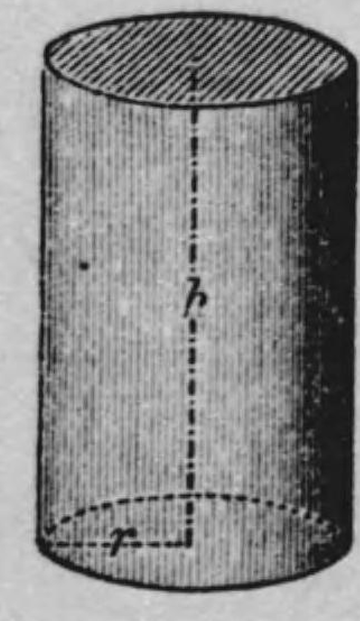


(1) x ニツイテハ二次デ，y ニツイテハ三次ノ四項式ヲ作レ。

(2) 1平方米ガ a 圓デアルトキ，一邊ガ l m ノ正方形ノ土地ノ値ハ何程デアルカ。

(3) 一稜ガ x cm ノ立方體10箇ヲ接イデ一本ノ角柱トシタトキノ表面積ハ何程カ。

(4) 底面ノ半徑ガ r cm, 高サガ h cm ノ直圓壔ノ體積ハ幾平方糎デアルカ。



問　題

1 $2x^5-4x^4-2ax$
ソノ他色々作ラセルガヨイ。

2 縱 $a\,m$, 横 $b\,m$ ノ矩形ノ土地ノ面積ハ ab 平方米デアル。
1平方米ノ地代ハ5圓デアルカラ求メル地代ハ $\underline{5ab}$ 圓‥答

3 一稜 a cm ノ立方體ノ體積ハ何立方糎カヲ考ヘヨ。
ソレガ5箇デハ如何。

答 $\underline{5a^3}$ 立方糎

4 三角形ノ面積ハドウシテ求メラレルカ。

答 $\underline{\frac{1}{2}ah\ cm^2}$

(1) $5x^2y-3xy^3+xy^2-6$
ソノ他色々ニ作ラセルガヨイ。

(2) 一邊 l m ノ正方形ノ面積ハ何平方米カ。
又一平方米ノ地代如何。

答 $\underline{al^2}$ 圓

(3) 一稜ガ x cm ノ立方體10箇ヲ接イデ一本ノ角柱トシタトキ, 底面及ビ高サハ何程カ。
底面積 $2x^2cm^2$
側面積 $10x^2cm^2$

答 $\underline{12x^2cm^2}$

(4) 直圓壔ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シイ。

答 $\underline{\pi r^2h\ cm^2}$

補充問題 若シ必要ガアルナラバ, 次ノ補充問題ヲ課セラレタイ。

(1) x, y ニツイテ五次ノ同次式ヲ作レ。

(2) 高サガ h 米, 二ツノ底邊ガ夫々 a 米, b 米ノ梯形ノ面積ハ何平方米カヲ表ハス式ヲ作レ。

(3) 底面ノ半徑ガ r cm, 高サガ h cm ノ直圓錐ノ體積ハ幾立方糎カ。但シ直圓錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ノ $\frac{1}{3}$ デアル。

補充問題ノ答

(1) $3x^5-2x^4y+6x^2y^3+2xy^4-5y^5$ 等

(2) $\frac{h(a+b)}{2}$ 平方米　　**(3)** $\frac{1}{3}\pi r^2h$ cc

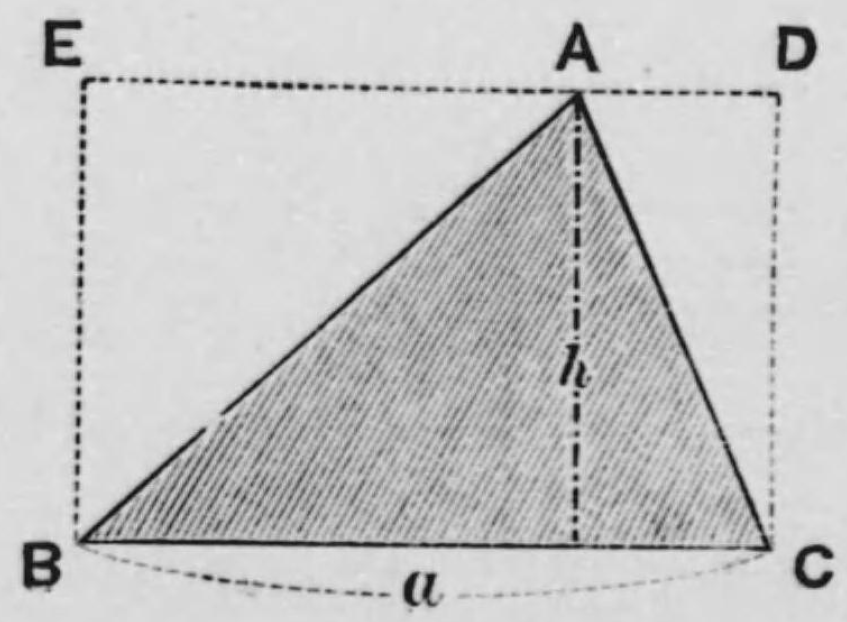
問　題

1 x ニツイテ五次ノ三項式ヲ作レ。

2 廣サ1平方米ノ土地ノ値ガ5圓ナラバ,縱 a m, 横 b m ノ矩形ノ土地ノ値ハ何程デアルカ。

3 一稜ガ a cm ノ立方體5箇ノ體積ハ全部デ何程カ。

4 底邊ガ a cm デ,高サガ h cm ノ三角形ノ面積ハ幾平方糎カ。

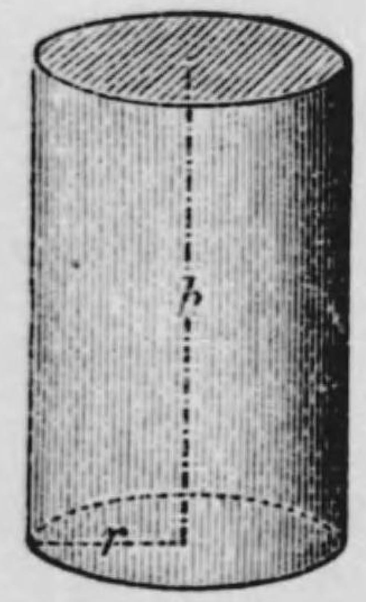


(1) x ニツイテハ二次デ,y ニツイテハ三次ノ四項式ヲ作レ。

(2) 1平方米ガ a 圓デアルトキ,一邊ガ l m ノ正方形ノ土地ノ値ハ何程デアルカ。

(3) 一稜ガ x cm ノ立方體10箇ヲ接イデ一本ノ角柱トシタトキノ表面積ハ何程カ。

(4) 底面ノ半徑ガ r cm, 高サガ h cm ノ直圓壔ノ體積ハ幾平方糎デアルカ。



問 4　$a^2\times a^3,\ a^2\times a^4\times a^5$ ハ夫々 a ヲ幾ツ掛合ハセルコトカ。

$$a^2a^3=\overbrace{aa}^{2}\times\overbrace{aaa}^{3}=a^{2+3}=a^5$$

$$a^2a^4a^5=\overbrace{aa}^{2}\times\overbrace{aaaa}^{4}\times\overbrace{aaaaa}^{5}=a^{2+4+5}=a^{11}$$

或ル文字ノ冪ノ積ハ其ノ文字ニ各冪ノ指數ノ和ヲ指數トシテ附ケタモノデアル。

例一　$-4x^3$ ト $-5x^4$ トノ積ヲ求メヨ。

解　$(-4x^3)\times(-5x^4)=(-4)\times(-5)x^3x^4=\underline{20x^7}$

例二　$(-abc)(-\frac{1}{2}a^2bc^2)(-3a^3b^2c)$ ヲ計算セヨ。

解　$(-abc)(-\frac{1}{2}a^2bc^2)(-3a^3b^2c)$

$$=(-1)\times(-\frac{1}{2})\times(-3)abc\,a^2bc^2\,a^3b^2c$$

$$=-\frac{3}{2}aa^2a^3\,bbb^2cc^2c=\underline{-1\frac{1}{2}a^6b^4c^4}$$

幾ツカノ單項式ノ積ヲ作ルニハソノ各項ノ文字因數ノ積ニソノ係數ノ積ヲ掛ケヨ。

問 5　$a^2\times a^3=a^5$ カラ $a^5\div a^2$，即チ $\frac{a^5}{a^2}$ ノ答ヲ言ヘ。

$$a^5\div a^2=\frac{a^5}{a^2}=a^{5-2}=a^3$$

問 4　$a^2a^3=a^5$　　$a^2a^4a^5=a^{11}$

ヲ考ヘサセルノデアルガ，一般ノ法則トシテ，

$$a^ma^n=a^{m+n},\qquad a^ma^na^p=a^{m+n+p}$$

ハ擧ゲナカツタ。故ニ是非公式化スルコトノ必要ヲ認メラレル教授者ハ，適宜之ヲ授ケラレテモヨロシイ。併シ所謂指數ノ法則ハヨクソノ意味ヲ知ラセナケレバナラナイ。

例一，例二

共ニ問 4 ノ結果ノ應用デアル。即チ

$$(-4x^3)\times(-5x^4)=(-4)\times(-5)\times x^3x^4=20x^7$$

$$(-abc)\times(-\frac{1}{2}a^2bc^2)\times(-3a^3b^2c)$$

$$=(-1)\times(-\frac{1}{2})\times(-3)abca^2bc^2a^3b^2c=-1\frac{1}{2}a^6b^4c^4$$

ノヤウニ係數ノ積ト文字因數トノ積ヲ作レバヨイノデアル。特ニソノ文字因數ガ例一デハ同ジ文字因數デアリ，例二デハ色々ノ文字因數ヲ含ンデキル。

注意　生徒ノ中ニハ往々ニシテ次ノヤウナ誤ヲ起スモノガアル。

$$x^3\times x^5=x^{15}$$

$$x^2+x^2=2x^4$$

ヨクソノ意味ヲ合ハセ考ヘルコトニヨツテ指導スルヲ要スル。

問 5　同ジ文字ノ冪ノ割算デアルガ，特ニ $a^m\div a^n$ ノヤウナ一般的ナモノヲ考ヘナイデ，$a^5\div a^2$ ヲ考ヘタノデアル。

$$\frac{a^5}{a^2}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}=a\cdot a\cdot a=a^3$$

ヲ考ヘルコトニヨツテ a^{5-2} ヲ導クノデアル。

一般ニハ勿論 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ $(m>n)$ デアル。

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ ニ於テハ勿論今ノ所 $m>n$ ノ場合ダケデアルガ, $m=n$, $m<n$ ノ場合ハ形式的ニ a^{m-n} ヲ導クコトハマダ出來ナイ。

問 6 ノヤウニ $a^4 \div a^4$, 一般ハ $a^m \div a^m$ ハ a^{4-4} 或ハ a^{m-m} ニ導カナイデ, 或ル數(式)ヲソレト等シイ數(式)デ割ルノデアルカラソノ結果ハ1デアルトスルノデアル。

又若シ $a^2 \div a^5$ ノヤウナ場合ハ

$$\frac{a^2}{a^5}=\frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}=\frac{1}{a \cdot a \cdot a}=\frac{1}{a^3}$$

トスベキデアル。

例三 ハ單項式ヲ單項式デ割ルノデアル。

$$\frac{-30x^7}{5x^4}=\frac{-30}{5}\times\frac{x^7}{x^4}=-6\times x^3=-6x^3$$

ノヤウニ, 係數ノ商ニ文字因數ノ商ヲ掛ケレバヨイ。

問　　題

5	$\underline{60a^2b^3c}$	(5)	$\underline{12ab^4c^3}$
6	$\underline{\frac{1}{3}a^3x^4y}$	(6)	$\underline{-\frac{1}{8}x^3y^2z}$
7	$\underline{\frac{2}{5}a^3b^3}$	(7)	$\underline{-4a^3xy}$
8	$a^{8-3}=\underline{a^5}$	(8)	$b^{10-7}=\underline{b^3}$
9	$\underline{2xy}$	(9)	$\underline{2ab^2}$
10	$\underline{-xy}$	(10)	$\underline{-20r^3}$
11	$\underline{10p^2q}$	(11)	$\underline{-100mn^2}$

或ル文字ノ冪ヲ,指數ガソレヨリ小サイ同文字ノ冪デ割ツテ得ル商ハ,其ノ文字ニ各冪ノ指數ノ差ヲ指數トシテ附ケタモノデアル。

問 6　$a^4 \div a^4$ ノ答ヲ言ヘ。

例三　$(-30x^7)\div 5x^4$　ヲ計算セヨ。

解　$(-30x^7)\div 5x^4=(\frac{-30}{5})(\frac{x^7}{x^4})=\underline{-6x^3}$

單項式ヲ單項式デ割ルニハソノ係數ノ商ニ文字因數ノ商ヲ掛ケヨ。

問　　題

次ノ式ヲ計算セヨ。(暗算) 5—(11)

5	$(-2ab)(-5b)(6abc)$	(5)	$(-3ab^2)(bc^2)(-4bc)$
6	$\frac{1}{2}ax(\frac{2}{3}a^2x^3y)$	(6)	$\frac{3}{4}xyz(-\frac{x^2y}{6})$
7	$(0.2a^2)(\frac{b^2}{5})(10ab)$	(7)	$4a^2(-7y)(\frac{1}{7}ax)$
8	$a^8 \div a^3$	(8)	$b^{10} \div b^7$
9	$20x^3y \div 10x^2$	(9)	$8a^2b^3 \div 4ab$
10	$-x^2y^2z \div xyz$	(10)	$16r^5 \div (-\frac{4}{5}r^2)$
11	$12p^4q^3 \div 1.2p^2q^2$	(11)	$(-13m^2n^5)\div(0.13mn^3$

次ノ式ヲ計算セヨ。12—(14)

12　$(a^2b^3)^2$

注意　$(a^2b^3)^2=a^2b^3\times a^2b^3$

13　$-(3ab^2c)^2$

14　$-3a^2b(-x)^3$

(12)　$(xyz^3)^3$

(13)　$(-2ab^2c^3)^3$

(14)　$(-a)^2(-\frac{1}{2}xy)^3$

次ノ式ノ數値ハ $x=-3$ ノトキト $x=-5$ ノトキト何レガドレダケ大デアルカ。

15　x^2+3x-1

(15)　x^3-2x

$a=3, b=-5$ トシテ次ノ式ノ數値ヲ計算セヨ。12—(13)

16　$a^2-2ab+b^2$

17　$2a^4-3a^2b+b^3$

18　次ノ方眼内ノ各ノ横ノ列ノ三數ノ積ヲ言ヘ。

19　各ノ横ノ列ニ於テ,指數ノ最大ナモノト最小ナモノトノ積ヲ中間ノ指數ノモノデ割レ。

(16)　$a^2+2ab+b^2$

(17)　$-a^3+5a^2b-b^2$

(18)　次ノ方眼内ノ各ノ縦ノ行ノ三數ノ積ヲ言ヘ。

(19)　各ノ縦ノ行ノ中デ,指數ノ最大ナモノト最小ナモノトノ積ヲ中間ノ指數ノモノデ割レ。

a^2	a^9	a^4
a^7	a^5	a^3
a^6	a	a^8

12　$(a^2b^3)^2=a^2b^3\times a^2b^3=\underline{a^4b^6}$

13　$-(3ab^2c)^2=\underline{-9a^2b^4c^2}$

14　$-3a^2b(-x)^3=(-3a^2b)(-x^3)$
$\underline{=3a^2bx^3}$

15　$x=-3$ ノトキ
$x^2+3x-1=9-9-1=-1$
$x=-5$ ノトキ
$x^2+3x-1=25-15-1=9$

答　<u>$x=-5$ノトキガ10ダケ大</u>

16　$a^2-2ab+b^2$
$=3^2-2\times3\times(-5)+(-5)^2$
$=9+30+25=\underline{64}$

17　$2a^4-3a^2b+b^3=2\times3^4$
$-3\times3^3\times(-5)+(-5)^3$
$=162+135-125=\underline{172}$

(12)　$(xyz^3)^3=xyz^3\times xyz^3\times xyz^3$
$=\underline{x^3y^3z^9}$

(13)　$(-2ab^2c^3)^3=\underline{-8a^3b^6c^9}$

(14)　$(-a)^2(-\frac{1}{2}xy)^3$
$=a^2\times(-\frac{1}{8}x^3y^3)$
$=\underline{-\frac{1}{8}a^2x^3y^3}$

(15)　$x=-3$ ノトキ
$x^3-2x=-27+6=-21$
$x=-5$ ノトキ
$x^3-2x=-125+10=-115$

答　<u>$x=-3$ノトキガ94ダケ大</u>

(16)　$a^2+2ab+b^2=3^2$
$+2\times3\times(-5)+(-5)^2=\underline{4}$

(17)　$-a^3+5a^2b-b^2$
$=-3^3+5\times3^2\times(-5)-(-5)^2$
$=-27-225+125=\underline{-127}$

注意　數値ヲ文字ニ代入シテソノ計算ヲサセルコトハ,生徒ニハ割合ニ誤ヲ起シ易イヤウデアル。相當ニ大切ニ取扱フベキデアル。

18　$a^2\times a^9\times a^4=a^{15}$
$a^7\times a^5\times a^3=a^{15}$
$a^6\times a\times a^8=a^{15}$

19　$a^2\times a^9\div a^4=a^7$
$a^7\times a^3\div a^5=a^5$
$a^8\times a\div a^6=a^3$

a^2	a^9	a^4
a^7	a^5	a^3
a^6	a	a^8

(18)　$a^2\times a^7\times a^6=a^{15}$
$a^9+a^5\times a=a^{15}$
$a^4\times a^3\times a^8=a^{15}$

(19)　$a^2\times a^7\div a^6=a^3$
$a^9\times a\div a^5=a^5$
$a^3\times a^8\div a^4=a^7$

注意　冪指數ハ三方陣ヲ作ツテキルコトヲ見ヨ。

例四 二次ノ多項式ノ加減ノ計算ニ於テ同類項ヲ簡約スル例デアル。

問　　題

20 $5x^2-6x^2+7x^2-x^2$
$=(5-6+7-1)x^2=\underline{5x^2}$

21 $a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$
$=\underline{4ab}$

22 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=\underline{2a^3+6ab^2}$

23 $x^2+2xy+5y^2-(3x^2-2xy-3y^2)$
$=x^2+2xy+5y^2-3x^2+2xy+3y^2$
$=\underline{-2x^2+4xy+8y^2}$

(20) $10a^2+14a^2-23a^2-a^2$
$=(10+14-23-1)a^2=0\times a^2=\underline{0}$

(21) $a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2$
$=\underline{2a^2+2b^2}$

(22) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=\underline{6a^2b+2b^3}$

(23) $5x^2-3x+2+(-7x^2+5x-6)=5x^2-3x+2-7x^2+5x-6$
$=\underline{-2x^2+2x-4}$

24 $(8x^2-4xy)+(-3x^2+xy)-(-3x^2+5xy)$
$=8x^2-4xy-3x^2+xy+3x^2-5xy=8x^2-3x^2+3x^2-4xy+xy-5xy$
$=\underline{8x^2-8xy}$ …………答

(24) $(3x^3-z^3)-(2y^3-3xyz)-(8z^3-4xyz)$
$=3x^3-z^3-2y^3+3xyz-8z^3+4xyz=3x^3-2y^3-z^3-8z^3+3xyz$
$+4xyz=\underline{3x^3-2y^3-9z^3+7xyz}$ …………答

補充問題

(1) $3x^2-2y^3-z^3+3xyz$ カラ何ヲ引クト，殘リガ $8z^3+4xyz$ トナルカ。

(2) x^2+x+1 ニ加ヘテ0トナル式ハドンナ式カ。

(3) $5x^2-6x+7$ カラ $4x^2+6x-10$ ヲ引イタ殘リカラ $x^2-6x+16$ ヲ引ケ。

補充問題ノ答

(1) $3x^2-2y^3-9z^3-xyz$　**(2)** $-x^2-x-1$　**(3)** $-6x+1$

例四 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$8ab+(-10a^2-7ab+6b^2)-(-5a^2+ab-4b^2)$$

解 $8ab+(-10a^2-7ab+6b^2)-(-5a^2+ab-4b^2)$

$$=8ab-10a^2-7ab+6b^2+5a^2-ab+4b^2$$
$$=\underbrace{8ab-7ab-ab}\underbrace{-10a^2+5a^2}_{-5a^2}\underbrace{+6b^2+4b^2}_{+10b^2}$$
$=$

答 $\underline{-5a^2+10b^2}$

問　　題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。**20—(21)**

20 $5x^2-6x^2+7x^2-x^2$

21 $a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$

22 $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ニ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ヲ加ヘヨ。

23 $x^2+2xy+5y^2$ カラ $3x^2-2xy-3y^2$ ヲ引ケ。

24 $(8x^2-4xy)+(-3x^2+xy)$ カラ $(-3x^2+5xy)$ ヲ引ケ。

(20) $10a^2+14a^2-23a^2-a^2$

(21) $a^2-2ab+b^2+a^2+2ab+b^2$

(22) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ カラ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ヲ引ケ。

(23) $5x^2-3x+2$ ニ $-7x^2+5x-6$ ヲ加ヘヨ。

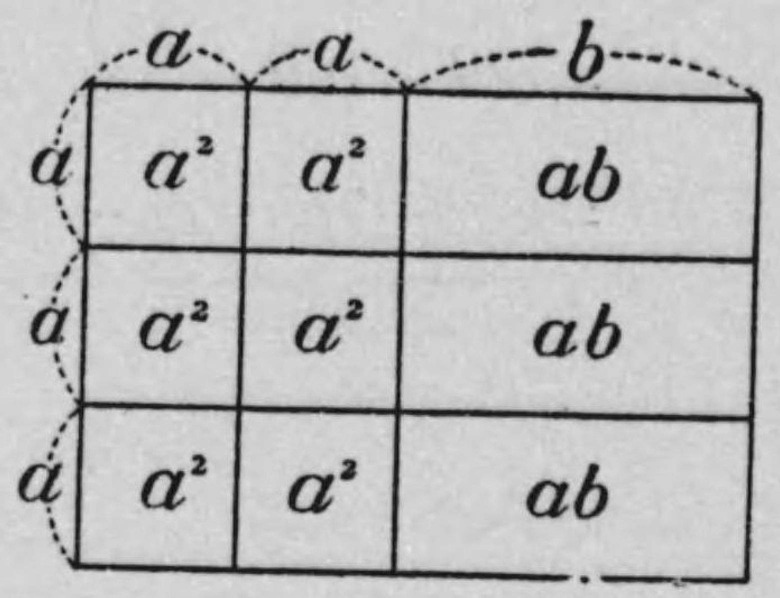
(24) $(3x^3-z^3)-(2y^3-3xyz)$ カラ $8z^3-4xyz$ ヲ引ケ。

33. 多項式ノ乘法

例一 $2a+b$ ト $3a$ トノ積ヲ求メヨ。

解 $2a$ ト $3a$ トノ積ハ何カ。

b ト $3a$ トノ積ハ何カ。



$$(2a+b)\times 3a$$
$$=2a\times 3a+b\times 3a$$
$$=6a^2+3ab$$

答 $\underline{6a^2+3ab}$

多項式ニ單項式ヲ掛ケルニハ多項式ノ各項ニ單項式ヲ掛ケヨ。

問題

暗算デ次ノ積ヲ言ヘ。25—(27)

25 $5(3m+4n)$

26 $2xy(x-y)$

27 $3(x^2-3x+2)x^2$

(25) $8(10a-3b)$

(26) $(p+q)(-5pq)$

(27) $m(x-y+z)xyz$

次ノヤウナ長サト幅ヲ持ツタ矩形ノ面積如何。

28

長サ	$a+b$	$2x-y$
幅	$3a$	$5x$

(28)

長サ	$2a-5b$	$p-3q$
幅	$10y$	$2r$

33. 多項式ノ乘法

多項式ノ乘法トイツテモ本節デハ

$$\left.\begin{array}{r}\text{單項式}\times\text{多項式}\\ \text{多項式}\times\text{多項式}\end{array}\right\}\text{トヲ取扱フ。}$$

例一 $(2a+b)\times 3a$

コレハ數學的ニハ配分（又ハ分配）ノ法則ニ從フトイハレルモノデアルガ，ソレヲ實際ニ圖ニ示シテ計算ト對應スルヤウニシタ。

問題

25 $5(3m+4n)=\underline{15m+20n}$

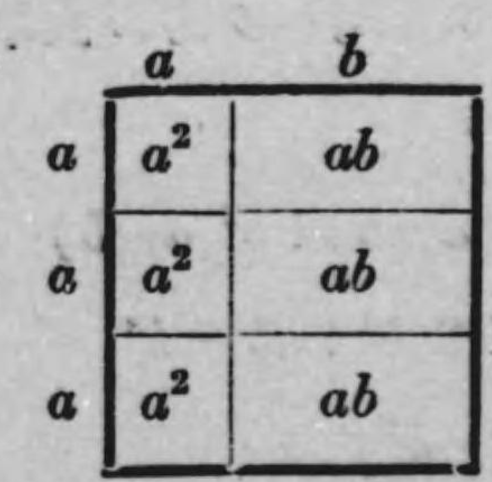
26 $2xy(x-y)=\underline{2x^2y-2xy^2}$

27 $3(x^2-3x+2)x^2$

$=3x^2(x^2-3x+2)$

$=\underline{3x^4-9x^3+6x^2}$

28



$3a(a+b)=\underline{3a^2+3ab}$

$5x(2x-y)=\underline{10x^2-5xy}$

(25) $8(10a-3b)=\underline{80a-24b}$

(26) $(p+q)(-5pq)$

$=\underline{-5p^2q-5pq^2}$

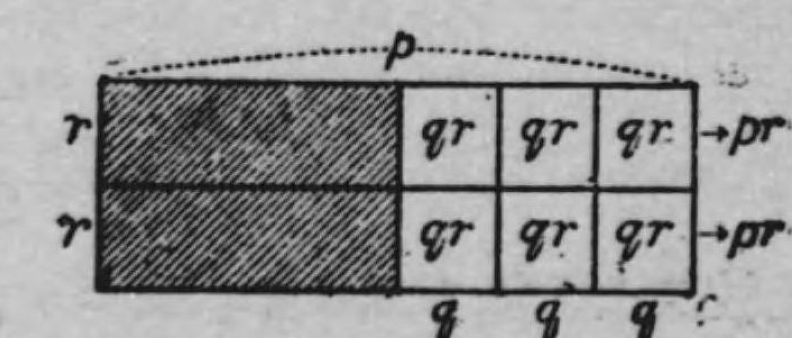
(27) $m(x-y+z)xyz$

$=mxyz(x-y+z)$

$=\underline{mx^2yz-mxy^2z+mxyz^2}$

(28) $10y(2a-5b)$

$=\underline{20ay-50by}$



$2r(p-3q)=\underline{2pr-6qr}$

例二 多項式ト多項式トノ積ノ例デアル。$(3x+5)(2x+3)$ハ幾何學的ニハ $3x+5$ 及ビ $2x+3$ ヲ二邊ニ持ツ矩形ノ面積ヲ表ハスモノデアルカラ，ソレト對應サセテ代數計算ヲ進メルコトトシタ。

代數的ニハ $(3x+5)(2x+3)$ ノ計算ハ $(3x+5)$ ヲ單項式ト考ヘテ計算スルノデアル。卽チ

$$\begin{aligned}(\underline{3x+5})(2x+3)&=2x(\underline{3x+5})+3(\underline{3x+5})\\&=6x^2+10x+9x+15\\&=\underline{6x^2+19x+15}\end{aligned}$$

又コノ計算ニ於テハ $(2x+3)$ ヲ單項式ノヤウニ考ヘテモヨイ。

$$\begin{aligned}(3x+5)(\underline{2x+3})&=3x(\underline{2x+3})+5(\underline{2x+3})\\&=6x^2+9x+10x+15\\&=\underline{6x^2+19x+15}\end{aligned}$$

何レニシテモヨク圖ト對應サレンコトヲ希望スル。又上ノ計算ヲ

$$\begin{array}{r}3x+5\\ 2x+3\\ \hline 6x^2+10x\\ 9x+15\\ \hline 6x^2+19x+15\end{array}\cdots\cdot 答$$

ノヤウニシテモヨイ。

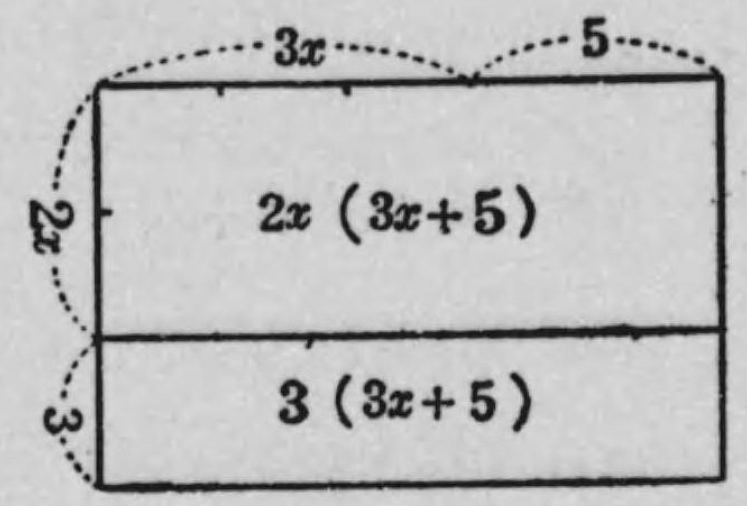
例三 $(a^2-2ab+b^2)(a-b)$ ハ一ツガ三項式，他ノ式ガ二項式デアルカラ，三項式 $a^2-2ab+b^2$ ヲ單項式ノヤウニ考ヘタ方ガ簡單デアル。故ニ教科書ノヤウニスレバヨイ。コレヲ

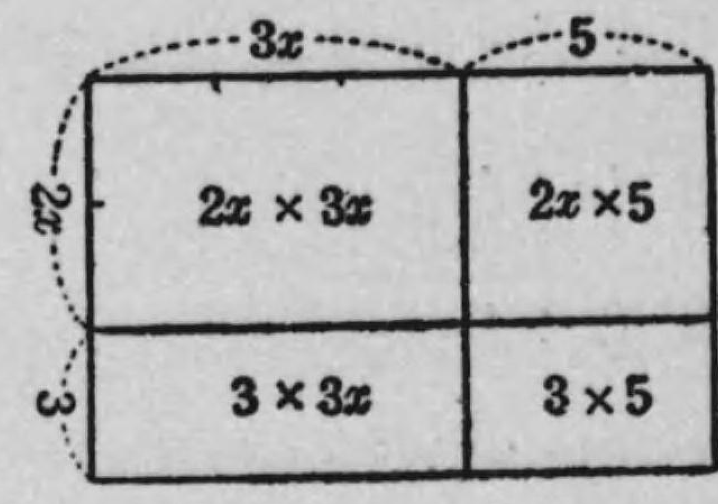
$$\begin{aligned}(a^2-2ab+b^2)(a-b)&=a^2(a-b)-2ab(a-b)+b^2(a-b)\\&=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3\\&=\underline{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}\end{aligned}$$

ト比較サセテミルガヨイ。又コノ例ノヤウナノハ縱ニ並ベテ計算シタ方ガ簡單デアル。

例二 $3x+5$ ニ $2x+3$ ヲ掛ケヨ。

解 (第 1 圖) (第 2 圖)





$$\begin{aligned}(3x+5)(2x+3)&=2x(3x+5)+3(3x+5) &&(第\ 1\ 圖)\\&=6x^2+10x+9x+15 &&(第\ 2\ 圖)\\&=\underline{6x^2+19x+15}\cdots\cdots 答\end{aligned}$$

例三 $a^2-2ab+b^2$ ニ $a-b$ ヲ掛ケヨ。

解 $(a^2-2ab+b^2)(a-b)$

$$\begin{aligned}&=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)\\&=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3\\&=\underline{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}\cdots\cdots 答\end{aligned}$$

例三ノ答ノ a ノ指數ハ左カラ順次ニ 3,2,1

b ノ指數ハ左カラ順次ニ 1,2,3

或ル文字ノ指數ガ左カラ順次ニ小(又ハ大)トナツテキル式ハ其ノ文字ニツイテ降冪(又ハ昇冪)ノ順ニ並ベテアルトイフ.

問 題

次ノ各式ヲ計算セヨ。29—(35)

29 $(a+b)(a-b)$

30 $(x+4)(x-5)$

31 $(2x+1)(3x+1)$

32 $(x^2+x+1)(x-1)$

33 $(5y^2+3-y)(3y-5)$

(29) $(a+b)(a+b)$

(30) $(a+7)(a+3)$

(31) $(7x-2)(6x-1)$

(32) $(x^2-x+1)(x+1)$

(33) $(n-5+2n^2)(n-1)$

注意 掛算ヲスル前ニ被乘數,乘數共ニ降冪ノ順ニ並ベテ置イテ計算スル方ガヨイ。答ハ降冪ノ順ニ並ベテ置ク習慣ニナツテキル。

34 $(3x^2-2-5x)(7+2x)$ | **(34)** $(3+x)(2-3x+x^2)$

35 $(x+4y)(x-3y)+(x-10y)(x+9y$

(35) $(a-b)^2-(a+c)^2+(b+c)^2$

次ノ方程式ヲ解ケ。36—(38)

36 $(x+7)(x+3)=x(x-11)$ | **(36)** $(x+4)(x-5)=x(x+1)$

37 $(x-9)(x-2)=(x-12)(x+7)$

(37) $(x-3)(x-12)=(x-6)(x-11)$

38 $(x-3)^2-(x-4)^2=3$ | **(38)** $(x-3)^2-(x-5)^2=24$

問 題

29 $(a+b)(a-b)=\underline{a^2-b^2}$

30 $(x+4)(x-5)=x(x+4)$
$-5(x+4)=x^2+4x-5x-20$
$=\underline{x^2-x-20}$

31 $(2x+1)(3x+1)$
$=2x(3x+1)+(3x+1)$
$=\underline{6x^2+5x+1}$

32 $(x^2+x+1)(x-1)$
$=x(x^2+x+1)-(x^2+x+1)$
$=x^3+x^2+x-x^2-x-1$
$=\underline{x^3-1}$

33 $(5y^2+3-y)(3y-5)$
$=(5y^2-y+3)(3y-5)$
$=15y^3-3y^2+9y-25y^2+5y-15$
$=\underline{15y^3-28y^2+14y-15}$

34 整頓セヨ。
$(3x^2-5x-2)(2x+7)$
$=6x^3-10x^2-4x+21x^2-35x-14$
$=\underline{6x^3+11x^2-39x-14}$

35 $(x+4y)(x-3y)$
$+(x-10y)(x+9y)$
$=x^2+xy-12y^2+x^2-xy-90y^2$
$=\underline{2x^2-102y^2}$

(29) $(a+b)(a+b)=\underline{a^2+2ab+b^2}$

(30) $(a+7)(a+3)=a(a+3)$
$+7(a+3)=a^2+3a+7a$
$+21=\underline{a^2+10a+21}$

(31) $(7x-2)(6x-1)$
$=7x(6x-1)-2(6x-1)$
$=\underline{42x^2-19x+2}$

(32) $(x^2-x+1)(x+1)$
$=x(x^2-x+1)+(x^2-x+1)$
$=x^3-x^2+x+x^2-x+1$
$=\underline{x^3+1}$

(33) $(n-5+2n^2)(n-1)$
$=(2n^2+n-5)(n-1)$
$=2n^3+n^2-5n-2n^2-n+5$
$=\underline{2n^3-n^2-6n+5}$

(34) 降冪ニ整頓セヨ。
$(x+3)(x^2-3x+2)$
$=x^3-3x^2+2x+3x^2-9x+6$
$=\underline{x^3-7x+6}$

(35) $(a-b)^2-(a+c)^2+(b+c)^2$
$=a^2-2ab+b^2-(a^2+2ac+c^2)$
$+b^2+2bc+c^2$
$=a^2-2ab+b^2-a^2-2ac-c^2$
$+b^2+2bc+c^2$
$=\underline{2b^2-2ab+2bc-2ac}$

36 $(x+7)(x+3)=x(x-11)$

$$x^2+10x+21=x^2-11x$$
$$21x=-21$$
$$\therefore\ x=-1 \quad \text{答}\ \underline{-1}$$

37 $(x-9)(x-2)=(x-12)(x+7)$

$$x^2-11x+18=x^2-5x-84$$
$$-6x=-102$$
$$\therefore\ x=17 \quad \text{答}\ \underline{17}$$

38 $(x-3)^2-(x-4)^2=3$

$$x^2-6x+9-x^2+8x-16=3$$
$$2x=10$$
$$x=5 \quad \text{答}\ \underline{5}$$

(36) $(x+4)(x-5)=x(x+1)$

$$x^2-x-20=x^2+x$$
$$-2x=20$$
$$\therefore\ x=-10 \quad \text{答}\ \underline{-10}$$

(37) $(x-3)(x-12)$

$$=(x-6)(x-11)$$
$$x^2-15x+36=x^2-17x+66$$
$$2x=30$$
$$\therefore\ x=15 \quad \text{答}\ \underline{15}$$

(38) $(x-3)^2-(x-5)^2=24$

$$x^2-6x+9-x^2+10x-25=24$$
$$4x=40$$
$$x=10 \quad \text{答}\ \underline{10}$$

34. 多項式ノ除法

單項式ヲ單項式デ割ルコトハ既ニ述ベタ。本節デハ

多項式÷單項式
多項式÷多項式

ヲ取扱フノデアル。

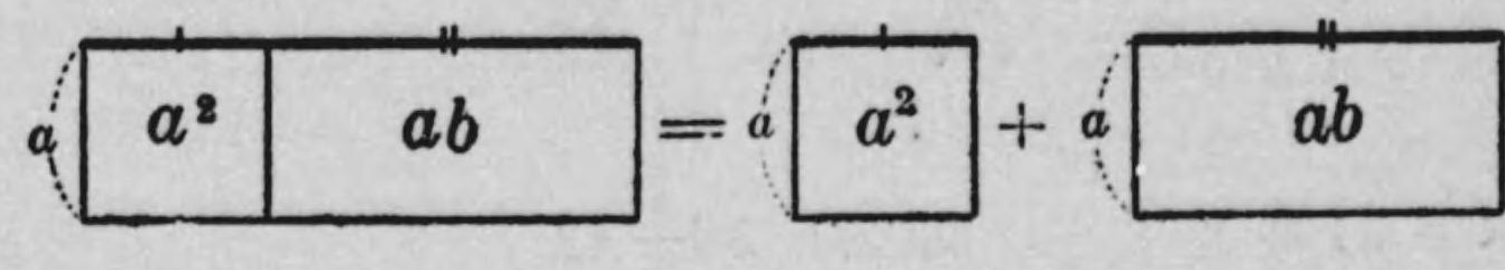
多項式ヲ單項式デ割ルニハソノ多項式ノ各項ヲソノ單項式デ割ルノデアルガ，ソレヲ導クノニ，

問 1 デハ矩形ノ面積ト一邊トカラ他ノ邊ヲ求メルコトヲ考ヘタ。コレハ非常ニワカリガヨイ方法ト思フ。

問 2 ハ掛算ノ逆トシテ形式的ニ割算ヲ取扱フノデアル。

34. 多項式ノ除法

問 1　一邊ガ a 糎,面積ガ (a^2+ab) 平方糎ノ矩形ノ他ノ一邊ノ長サヲ求メヨ。(次ノ圖ヲ見ヨ)



問 2　$(3ab^2-5a^2b)\times(-4a^3b^2)=-12a^4b^4+20a^5b^3$ ヨリ $(-12a^4b^4+20a^5b^3)\div(-4a^3b^2)$ ノ答ヲ言へ。

例一　$4x^3-2x^2+x$ ヲ $2x$ デ割レ。

解　$(4x^3-2x^2+x)\div(2x)$

$$=\frac{4x^3-2x^2+x}{2x}$$

$$=\frac{4x^3}{2x}-\frac{2x^2}{2x}+\frac{x}{2x}$$

$$=\underline{2x^2-x+\frac{1}{2}}\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

割算ノ式ハ分數ノ形ニ書イテモヨイ。

多項式ヲ單項式デ割ルニハ其ノ多項式ノ各項ヲ其ノ單項式デ割レ。

例二　$4a^2x^5-5a^3x^3$ ヲ $-3a^2x^2$ デ割レ。

解　$(4a^2x^5-5a^3x^3)\div(-3a^2x^2)$

$$=\underline{-\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{3}ax}\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

問　　題

次ノ割算ヲナセ。(暗算)　39—(42)

39　$(4a-2)\div2$	**(39)**　$(6x-3y)\div3$
40　$(6n-18n^2)\div6n$	**(40)**　$(10a^2+25a)\div(+5a)$
41　$(2x^3y^2+5x^2y^3)\div(-x^2y)$	**(41)**　$(-12a^3b^2+18a^2b^2)\div6a^2b^2$
42　$\dfrac{6bh-8b^2h-12bh^2}{-6bh}$	**(42)**　$\dfrac{-10x^3y+6x^2y^2-2xy^3}{-2xy}$

$-a^3b^2-5a^3b^5+8a^4b^2+9a^5b^3$ ヲ次式デ割レ。43—(44)

43　$-2a^3$	**(43)**　$5ab^2$
44　$-3a^2b$	**(44)**　$-a^3b$

多項式ヲ多項式デ割ル方法ハ,掛算ヲ逆ニ考ヘレバワカリガヨイ。

$$(3x+4)(x+2)=x(3x+4)+2(3x+4)$$
$$=3x^2+4x+6x+8$$
$$=\underline{3x^2\ \ +10x\ +8}$$

39　$\underline{2a-1}$

40　$\underline{1-3n}$

41　$\underline{-2xy-5y^2}$

42　$-1+\frac{4}{3}b+2h$

$=\underline{-1+1\frac{1}{3}b+2h}$

43　$(-a^3b^2-5a^3b^5+8a^4b^2+9a^5b^3)\div(-2a^3)$

$=\frac{1}{2}b^2+\frac{5}{2}b^5-4ab^2-\frac{9}{2}a^2b^3$

$=\underline{\frac{1}{2}b^2+2\frac{1}{2}b^5-4ab^2-4\frac{1}{2}a^2b^3}$

44　$\dfrac{-a^3b^2-5a^3b^5+8a^4b^2+9a^5b^3}{-3a^2b}$

$=\frac{1}{3}ab+\frac{5}{3}ab^4-\frac{8}{3}a^2b-3a^3b^2$

$=\underline{\frac{1}{3}ab+1\frac{2}{3}ab^4-2\frac{2}{3}a^2b-3a^3b^2}$

(39)　$\underline{2x-y}$

(40)　$\underline{2a+5}$

(41)　$\underline{-2a+3}$

(42)　$\underline{5x^2-3xy+y^2}$

(43)　$(-a^3b^2-5a^3b^5+8a^4b^2+9a^5b^3)\div5ab^2$

$=-\frac{1}{5}a^2-a^2b^3+\frac{8}{5}a^3+\frac{9}{5}a^4b$

$=\underline{-\frac{1}{5}a^2-a^2b^3+1\frac{3}{5}a^3+1\frac{4}{5}a^4b}$

(44)　$\dfrac{-a^3b^2-5a^3b^5+8a^4b^2+9a^5b^3}{-a^3b}$

$=\underline{b+5b^4-8ab-9a^2b^2}$

注意　上ノ問題 43, (43), 44, (44) ハ算術ノ短除法ノヤウニ計算スルコトガ出來ル。例ヘバ (44) ニ於テ

$$-a^3b\,\overline{)\,-a^3b^2-5a^3b^5+8a^4b^2+9a^5b^3}$$
$$b+5b^4\ \ -8ab\ \ -9a^2b^2$$

併シ强ヒテコノ方法ヲ取ルニハ及バナイ。

生徒ノ中ニハ次ノヤウナ誤リヲスルモノガアル。例ヘバ

$\dfrac{4a^3b-b^2}{2a^2}$ ニ於テ, $2a^2$ デ $4a^3b$ ヲ割ッテ $2ab$ ヲ得タダケデ, $-b^2$ ノ方ハソノママトシテ, $\dfrac{4a^3b-b^2}{2a^2}=2ab-b^2$ ノヤウニスルノデアル。總テノ項ヲ割ルノデアルコトヲ注意セラレタイ。

多項式ヲ多項式デ割ルコト

多項式ヲ多項式デ割ルトキニハ先ヅ商ノ第一項ヲ定メネバナラナイ。ソノタメニ $(3x+4)(x+2)$ ナル掛算ヲ考ヘテ見ルト

$$(3x+4)(x+2)=x(3x+4)+2(3x+4)$$
$$=\underline{3x^2+4x}+\underline{6x+8}=3x^2+10x+8$$

デアルカラ, $3x^2+10x+8$ ヲ $3x+4$ デ割ルニハ上ノ計算ヲ逆ニ考ヘテ $3x^2+10x+8=\underline{3x^2+4x}+\underline{6x+8}$ ノヤウニ考ヘネバナラナイ。ソシテ $\underline{3x^2+4x}+\underline{6x+8}$ ノヤウニ分ケルコトハ實ハ $3x^2$ ト $3x+4$ ノ $3x$ ト比較シテ見レバ分ルコトデアルシ, 又 $3x^2+4x$ ガ定マレバ後ノ $6x+8$ ハ容易ニ定メルコトガ出來ル。

コノコトノ意義ヲ幾何學的ニ定メルト教科書ノヤウニナル。

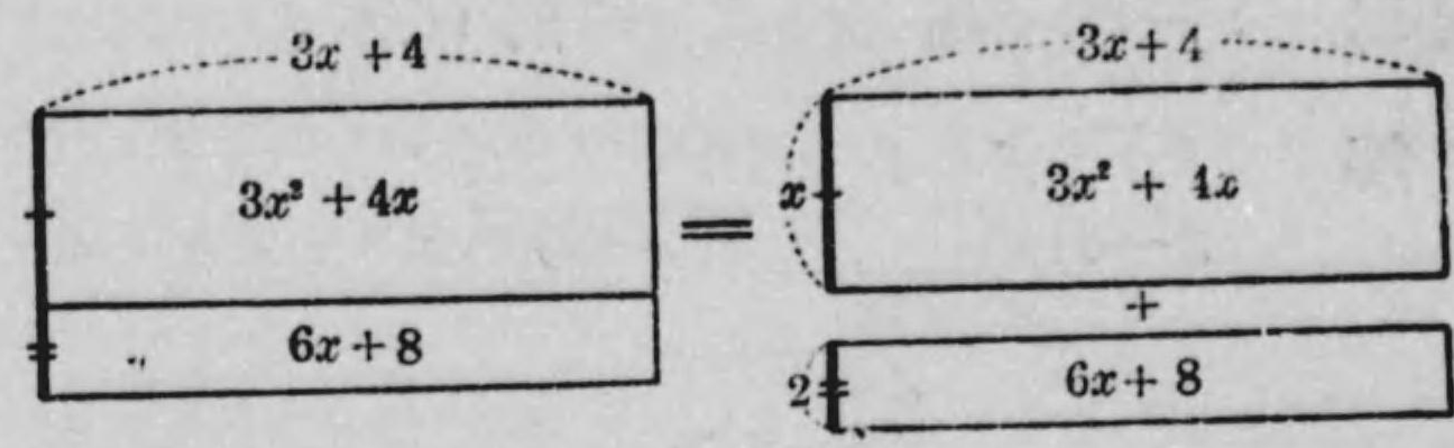
多項式ヲ多項式デ割ル實際ノ計算トシテ通常用フル方法ハ長除法 long division ノ方法デアルガ, コノ方法ト算術ニ於ケル方法ノ異同トヲ比較對照シテ教授サレタイ。

除法ニ於テハ被除數及ビ除數ヲ共ニ**一ツノ文字ノ降冪又ハ昇冪ニ整頓シテ**後ニ計算スルノデアルガ, 今ノ程度トシテハ, 被除數モ除數モ共ニ一ツノ文字ノ**降冪順ニ排列**シテ計算スルコトトシタ。蓋シ割算ニ於テ昇冪順ニ排列シテ後ニ計算スル必要ハ中等程度トシテハ全ク絶無トイツテモ敢ヘテ過言デハナイカラデアツテ, 若シ强ヒテ之ヲ求メルナラバ,

$$\frac{1}{1-x} \quad 即チ \quad 1\div(1-x)$$

ノ計算ナドニ見ルコトガ出來ル位デ, ソレモ殆ド必要ガナイ。

ソレ故ココデハ降冪順ニ排列シテ後割算ヲ行フコトニ定メタ。割算ヲ行フ順序ハ教科書ニ示シタ通リデアル。



實際ニハ次ノヤウニ計算スル。

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x+2 \\
3x+4\,\big) & 3x^2+10x+8 \\
 & 3x^2+\ \ 4x \\ \hline
 & \qquad 6x+8 \\
 & \qquad 6x+8 \\ \hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

答 $\underline{x+2}$

多項式ヲ多項式デ割ルニハ

(1) 被除數,除數ヲ共ニ同ジ文字ニツイテ降冪ノ順ニ並ベ,(其ノ際被除數ニ缺ケタ冪ガアレバ其ノ場所ヲアケテ置クト都合ガヨイ。次ノ例三ヲ見ヨ。)

(2) (被除數ノ初項)÷(除數ノ初項)ヲ商ノ初項トシ,

(3) 被除數−{除數×(商ノ初項)}ヲ第一剩餘トスル。

(4) 次ニ此ノ剩餘ヲ新タナ被除數ト考ヘ, (2),(3) ト同様ニシテ商ノ第二項ト第二剩餘トヲ求メ,以下順次ニ此ノ事ヲ繰返シ,剩餘ガ0又ハ除數ノ次數ヨリ低クナッタトキニ計算ノ終トスル。

例三　x^3-50 ヲ $x-4$ デ割レ。

解

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+4x+16 \\
\hline
x-4) & x^3 \boxed{} \boxed{} -50 \\
 & x^3-4x^2 \\
\hline
 & 4x^2 \\
 & 4x^2-16x \\
\hline
 & 16x-50 \\
 & 16x-64 \\
\hline
 & 14
\end{array}$$

答 $\begin{cases} \text{商} & x^2+4x+16 \\ \text{剰餘} & 14 \end{cases}$

被除數,除數,商,剰餘ノ關係ヲ式デ表ハスト,

(1)　$x^3-50=(x^2+4x+16)(x-4)+14$

又ハ

(2)　$\dfrac{x^3-50}{x-4}=x^2+4x+16+\dfrac{14}{x-4}$

問 3　(1)及ビ(2)ニ於テ, $x=5$ デアルトキノ兩邊ノ數値ヲ計算シテ見ヨ。

注意　此ノ計算ハ割算ノ驗トモナル。

又此ノ計算デ x ノ値ハ除數ヲ0ニシナイ數ナラバ(此ノ例デハ4以外ノ數)何デアッテモヨイ。

唯一ツノ文字シカ含ンデヰナイ多項式ノ割算ノ方法ニ, 初等的デハナイガ**組立除法**(Synthetic division)トイフノガアル。今參考ノ爲長除法ト組立除法トヲ並ベ示サウ。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+8x+28 \\
\hline
x-3) & x^3+5x^2+4x-23 \\
 & x^3-3x^2 \\
\hline
 & 8x^2+4x \\
 & 8x^2-24x \\
\hline
 & 28x-23 \\
 & 28x-84 \\
\hline
 & 61
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +5 & +4 & -23 & 3 \\
 & +3 & +24 & +84 & \\
\hline
1 & +8 & +28 & +61 & \\
\multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{1\quad+8\quad+28}}_{\text{商ノ係數}}} & \underset{\text{剰餘}}{\downarrow} &
\end{array}$$

コノ組立除法ハ勿論中等ノ程度デハナイ。

例三　被除數ニ缺ケタ冪ノアル場合デ, ソノトキハソレニ相當スル項ヲ空ケテオクコトヲ注意サレタイ。被除數, 除數, 商及ビ剰餘ノ關係ハ

$$\begin{array}{lccccccc}
 & \text{被除數} & = & \text{除數} & \times & \text{商} & + & \text{剰餘} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(1)\cdots\cdot & A & = & B & \times & Q & + & R
\end{array}$$

デコノ式ハ非常ニ大切ナ式デアル。上ノ式ハ又

$$(2)\cdots\cdot\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$ ノヤウニモ書キ換ヘラレル。

問 3　(1) 及ビ (2) ヲ數値ヲ代入スルコトニヨツテ驗シテ見ルノデアルガ, コノ計算ハ又割算ノ驗トシテモヨイ。一般ニ

割算ノ驗　トシテハ

(1)　除數×商＋剰餘　ガ果シテ元ノ被除數トナツテヰルカ,

(2)　數値代入ニヨツテ驗ヲスルカ

デアルガ, 數値代入ニ當ツテハ. 除數ヲ0トスル値ハ入レテハナラナイ。

問題

45 $\underline{a+2}$ 46 $\underline{b+8}$

47 $\underline{2x-3}$

48 $\underline{x^2-xy+y^2}$

49
$$\begin{array}{r} p^2+5p+25 \\ p-5\,\overline{)\,p^3 \qquad\qquad -125} \\ \underline{p^3-5p^2} \qquad\qquad \\ 5p^2 \qquad\qquad \\ \underline{5p^2-25p} \qquad \\ 25p-125 \\ \underline{25p-125} \\ 0 \end{array}$$

50
$$\begin{array}{r} a+6 \\ a^2-2\,\overline{)\,a^3+6a^2-2a-12} \\ \underline{a^3 \qquad -2a} \qquad\quad \\ 6a^2 \qquad -12 \\ \underline{6a^2 \qquad -12} \\ 0 \end{array}$$

51
$$\begin{array}{r} x-5 \\ x-2\,\overline{)\,x^2-7x+11} \\ \underline{x^2-2x} \qquad \\ -5x+11 \\ \underline{-5x+10} \\ 1 \end{array}$$

52
$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ x^2-x+1\,\overline{)\,x^4 \qquad +x^2+x+1} \\ \underline{x^4-x^3+x^2} \qquad\qquad \\ x^3 \qquad +x \qquad \\ \underline{x^3-x^2+x} \qquad \\ x^2 \qquad +1 \\ \underline{x^2-x+1} \\ x \end{array}$$

53 $\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=x-2$

$\therefore\ x-2=0 \qquad \therefore\ \underline{x=2}$

54 $\dfrac{2x^2-14x+24}{2x-6}=x-4$

$\therefore\ x-4=0 \qquad \therefore\ \underline{x=4}$

(45) $\underline{x-3}$ (46) $\underline{y+2}$

(47) $\underline{3d-1}$

(48) $\underline{a^2+ab+b^2}$

(49)
$$\begin{array}{r} 9m^2-3m+1 \\ 3m+1\,\overline{)\,27m^3 \qquad\qquad\qquad +1} \\ \underline{27m^3+9m^2} \qquad\qquad\quad \\ -9m^2 \qquad\qquad\quad \\ \underline{-9m^2-3m} \qquad \\ 3m+1 \\ \underline{3m+1} \\ 0 \end{array}$$

(50)
$$\begin{array}{r} p-4 \\ p^2+3\,\overline{)\,p^3-4p^2+3p-12} \\ \underline{p^3 \qquad +3p} \qquad\quad \\ -4p^2 \qquad -12 \\ \underline{-4p^2 \qquad -12} \\ 0 \end{array}$$

(51)
$$\begin{array}{r} 3x+17 \\ x-4\,\overline{)\,3x^2+5x-9} \\ \underline{3x^2-12x} \qquad \\ 17x-9 \\ \underline{17x-68} \\ 59 \end{array}$$

(52)
$$\begin{array}{r} y+2 \\ y^2-3y+2\,\overline{)\,y^3-y^2-5y-4} \\ \underline{y^3-3y^2+2y} \qquad \\ 2y^2-7y-4 \\ \underline{2y^2-6y+4} \\ -y-8 \end{array}$$

(53) $\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=x-5$

$\therefore\ x-5=0 \qquad \therefore\ \underline{x=5}$

(54) $\dfrac{6x^2+9x-6}{2x-1}=3x+6$

$3x+6=0 \qquad \therefore\ \underline{x=-2}$

問題

次ノ第一式ヲ第二式デ割レ。45—(52)

45 $a^2+5a+6,\ \ a+3$

46 $b^2+6b-16,\ \ b-2$

47 $8x^2-22x+15,$ $4x-5$

48 $x^3+y^3,\ \ x+y$

49 $p^3-125,\ \ p-5$

50 $a^3+6a^2-2a-12,$ a^2-2

51 $x^2-7x+11,\ \ x-2$

52 $x^4+x^2+x+1,$ x^2-x+1

(45) $x^2-12x+27,\ \ x-9$

(46) $y^2-3y-10,\ \ y-5$

(47) $20d-8+12d^2,$ $8+4d$

(48) $a^3-b^3,\ \ a-b$

(49) $27m^3+1,\ \ 3m+1$

(50) $p^3-4p^2+3p-12,$ p^2+3

(51) $3x^2+5x-9,\ \ x-4$

(52) $y^3-y^2-5y-4,$ y^2-3y+2

次ノ方程式ヲ解ケ。53—(54)

53 $\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=0$

54 $\dfrac{2x^2-14x+24}{2x-6}=0$

(53) $\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=0$

(54) $\dfrac{6x^2+9x-6}{2x-1}=0$

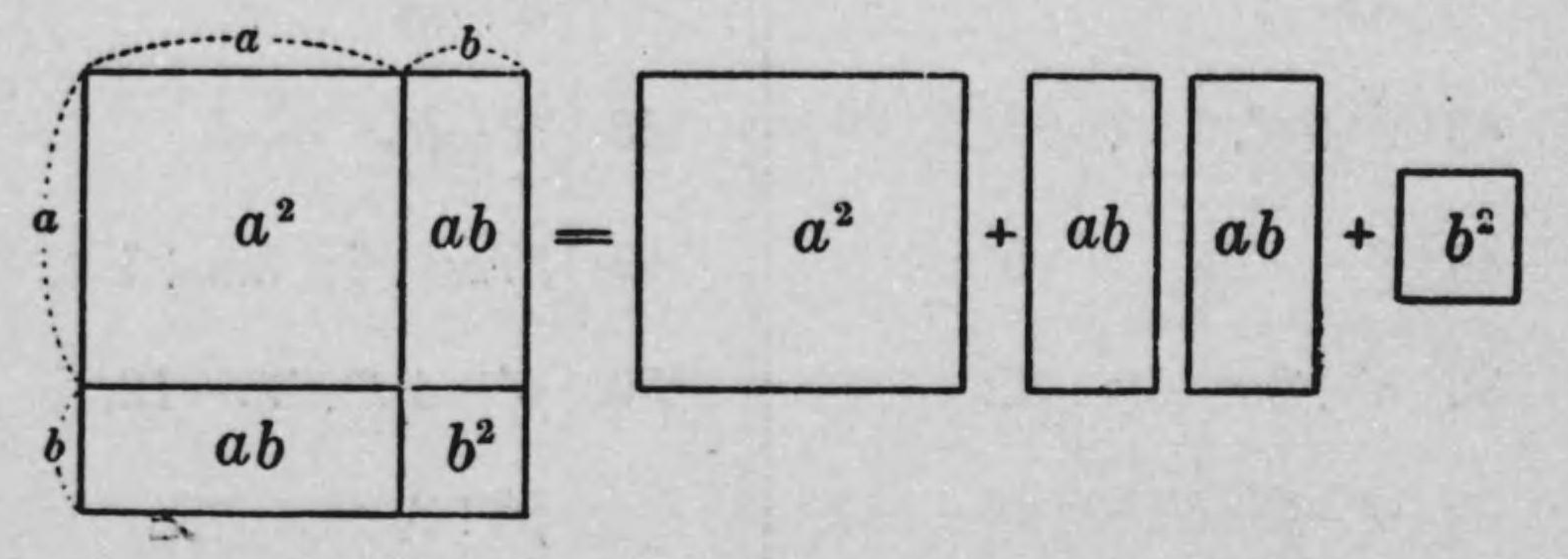
第二章　乗法公式及因數分解

35. 二數ノ和ノ二乗

二數ヲ夫々 a, b トスレバ

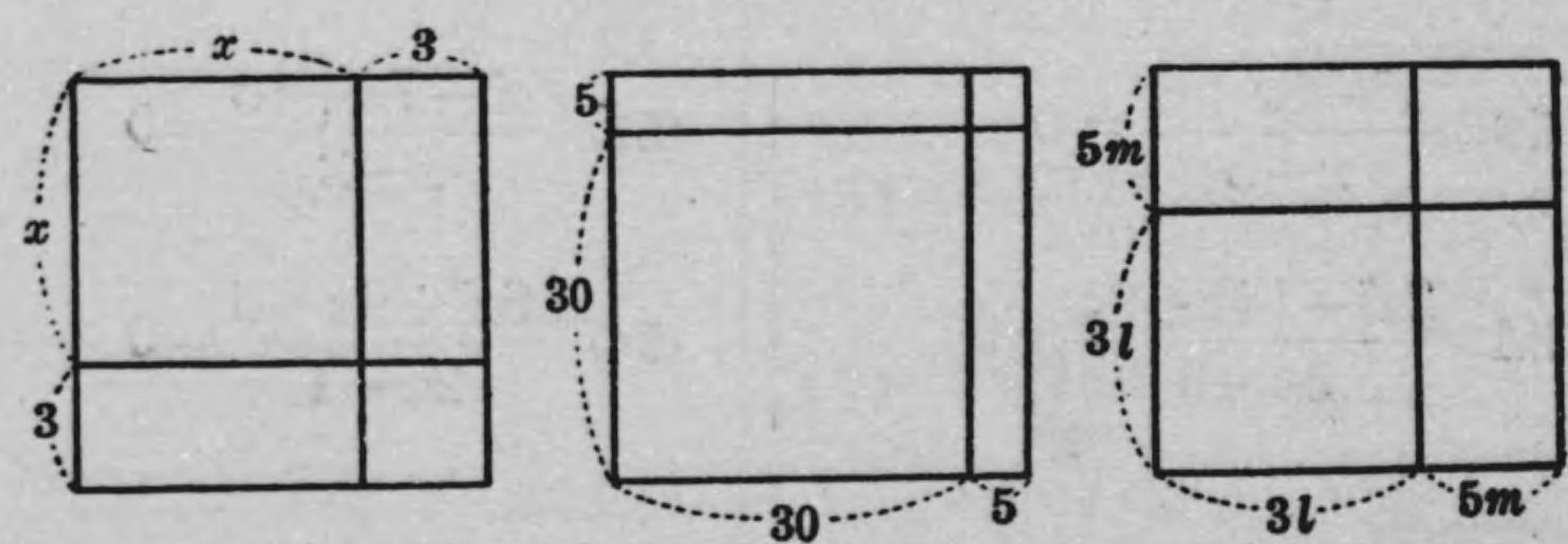
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

問 1　$(a+b)^2$ ヲ計算シ上式ノ正シイ事ヲ示セ。又下ノ圖ニヨツテ之ヲ說明セヨ。



如何ナル二數デモソノ和ノ二乗ハ,二數ノ二乗ノ和ニ二數ノ積ノ2倍ヲ加ヘタモノニ等シイ。

問 2　次ノ圖ノ各區切内ニ適當ナ數(式)ヲ入レヨ。



第二章　乗法公式及因數分解

乗法公式　乗法ニツイテハ生徒ハ既ニ知ツテヰルガ，特ニ茲ニ公式トシテ掲ゲルノハ

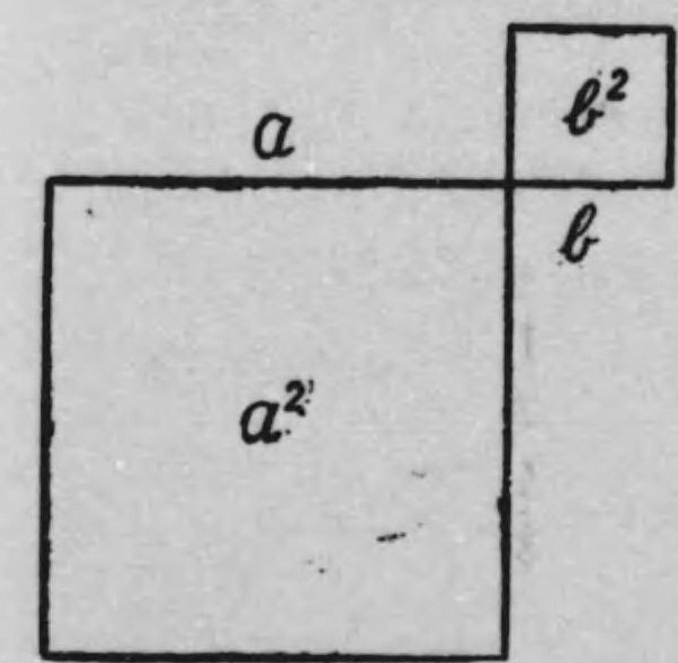
(1)計算ヲ簡略ニスル。
(2)因數分解ノ豫備トスル。
}コノ二ツノ目的ガアルカラデアル。

公式ノ數　ソレデアルカラ公式モ數多ク知ツテオレバソレダケ便利ナコトハ爭ハレナイガ，サリトテ稀ニシカ用事ノナイ公式ニ骨ヲ折ルノハ，其ノ價値極メテ尠ク，生徒ノ學習ノ効果ヲ殺グコトハ莫大ナモノデアラウ。本書デ採ツタ公式ハ極メテ普通ナモノデ，コレヲ縱横ニ活用スル方ガ却ツテ効果ガ多イコトト思フ。

35. 二數ノ和ノ二乗

此ノ公式ハ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ デアルガコレカラ b ノ代リニ $-b$ トオケバ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ヲ得ルケレドモ，此ノ二ツハ常ニ別々ニ適用サレルカラ，別々ニ授ケルコトトシタ。

生徒ノ中ニハ $(a+b)^2=a^2+b^2$ ト誤ルモノガ非常ニ多イ。



コレナドハ數値ヲ代入シテ比較サセテ見ルコトモ一ツノ方法デアルガ，又圖ノヤウニ示シテ何ガ足リナイカヲ考ヘサセルコトモ良イ方法デアル。

此ノ公式ヲ敎授シタナラバ,25^2 ノヤウニ末位ガ5デ終ル數ノ二乗ノ計算法ノ理由ヲ敎授スル必要ガアル。一般ニ末位ガ5ノ數ヲ $(10a+5)$ トスレバ

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25$$
$$=\underline{100}\times\underline{a(a+1)}+25$$

即チ a ト $(a+1)$ トノ積ノ100倍ト25トノ和トシテ求メラレル。

問 3

$(a+b)^2$	a^2	$2ab$	b^2
$(m+6)^2$	m^2	$12m$	36
$(2a+5)^2$	$4a^2$	$20a$	25
$(4m+3n)^2$	$16m^2$	$24mn$	$9n^2$
$(10x+y)^2$	$100x^2$	$20xy$	y^2
25^2	400	200	25

注意 器械的ナ公式ノ練習デハ特ニ暗算ヲ課セラレルコトヲ希望スル。中學校デハ概シテ暗算ガ少イヤウデアル。

問　　題

1 $21^2=(20+1)^2$
$=400+40+1=\underline{441}$
$116^2=(115+1)^2=\underline{13456}$
$61^2=\underline{3721}$

2 1225, 4225, 72.25

3 30.25, $39\frac{1}{16}$, 72.25

4 $(3x+2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$

5 $(5p+1)^2=25p^2+10p+1$

6 $(ab+c)^2=a^2b^2+2abc+c^2$

7 $(a^2+11)^2=a^4+22a^2+121$

8 $(m^2+\frac{1}{2})^2=m^4+m^2+\frac{1}{4}$

9 $(m+\frac{2n}{3})^2=m^2+\frac{4}{3}mn+\frac{4}{9}n^2$

10 $(2a+b)^2+(a+2b)^2$
$=4a^2+4ab+b^2+a^2+4ab+4b^2$
$=\underline{5a^2+8ab+5b^2}$

(1) $31^2=\underline{961}$
$17^2=(15+2)^2=\underline{289}$
$71^2=\underline{5041}$

(2) 5625, 30.25, 110.25

(3) 42.25, $52\frac{9}{16}$, 90.25

(4) $(5p+4q)^2=25p^2+40pq+16q^2$

(5) $(q+8r)^2=q^2+16qr+64r^2$

(6) $(cd+7)^2=c^2d^2+14cd+49$

(7) $(x^2+y)^2=x^4+2x^2y+y^2$

(8) $(3n^2+\frac{1}{2})^2=9n^4+3n^2+\frac{1}{4}$

(9) $(5m+\frac{b}{3})^2=25m^2+\frac{10}{3}bm+\frac{b^2}{9}$

(10) $(x+2y)^2-(2x+y)^2$
$=x^2+4xy+4y^2-(4x^2+4xy+y^2)=\underline{-3x^2+3y^2}$

問 3 次ノ空欄ヲ第一列ニ倣ツテ充クセ。

$(a+b)^2$	a^2	$2ab$	b^2
$(m+6)^2$			
$(2a+5)^2$			
$(4m+3n)^2$			

問 4 25^2 ヲ簡便ニ計算セヨ。(45頁參照)

問　　題

次ノ數ノ二乘ヲ公式(A)ヲ應用シテ出セ。1—(3)

1 21, 116, 61

2 35, 65, 8.5

3 $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, 8.5

(1) 31, 17, 71

(2) 75, 5.5, 10.5

(3) $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{4}$, 9.5

次ノ式ヲ公式ヲ用ヒテ計算セヨ。4—(10)

4 $(3x+2y)^2$

5 $(5p+1)^2$

6 $(ab+c)^2$

7 $(a^2+11)^2$

8 $(m^2+\frac{1}{2})^2$

9 $(m+\frac{2n}{3})^2$

10 $(2a+b)^2+(a+2b)^2$

(4) $(5p+4q)^2$

(5) $(q+8r)^2$

(6) $(cd+7)^2$

(7) $(x^2+y)^2$

(8) $(3n^2+\frac{1}{2})^2$

(9) $(5m+\frac{b}{3})^2$

(10) $(x+2y)^2-(2x+y)^2$

11 一邊ガ a cm ノ正方形ヲ一邊ガ之ヨリ 4 cm 增シタ正方形トスルト面積ハドレダケ增スカ。

(11) 半徑 r cm ノ圓ト,半徑ガコレヨリモ 6 cm 大キイ圓トデ,面積ガドレダケ違フカ。

例 x^2+6x+9 ハ如何ナル式ノ二乘カ。

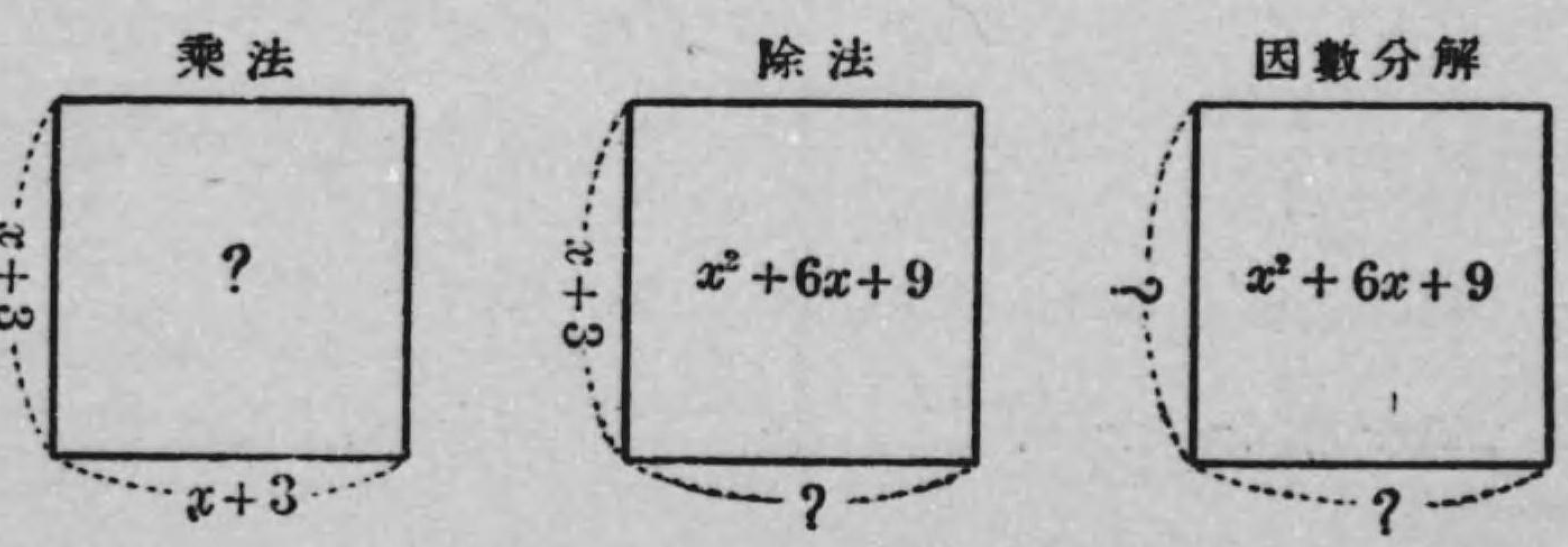
解 x^2+6x+9

$=x^2+2\times x\times 3+3^2$

$=(x+3)^2$　　答 $\underline{x+3\text{ ノ二乘}}$

即チ此式ニ於テ x^2 ガ a^2 ニ當リ,9 ガ b^2 ニ當ルト考ヘテ調ベテ見ルト,$6x$ ハ丁度 $2ab$ ニ當ツテキルカラ,$x+3$ ガ $a+b$ ニ相當スルコトガ知ラレル。

此ノ例ノヤウニ,多項式ヲ幾ツカノ式ノ積ノ形ニ直スコトヲ其ノ式ヲ**因數ニ分解スル**トイフ。



11 $(a+4)^2-a^2$ ヲ計算セヨ。

$a^2+8a+16-a^2=8a+16$

答 $\underline{(8a+16)}$ 平方糎增ス

(11) 半徑 r cm ノ圓ノ面積如何。

$\pi(r+6)^2-\pi r^2=\pi(12r+36)$

答 $\underline{\pi(12r+36)}$ 平方糎增ス

乘法公式ト因數分解ニツイテ

因數分解ハ從來其ノ必要以上ニ過重視サレテキタヤウデアル。卽チ中等程度ノ數學ニハ勿論實用上ニモ應用上ニモ全ク必要ノナイ因數分解ガ多カツタ。爲メニ生徒ハ數學ヲ嫌惡スルヤウニナリ，又識者ヲシテ數學ハ何ノタメニナルカトイフ議論ヲ生ゼシメルノデアル。故ニ本書デハ二次三項式ノ因數分解ニ止メ，$x^3\pm y^3$ ノ因數分解サヘモ省イタ。

又因數分解ハ乘法公式ヲ終ヘテ後ニ之ヲ課スルノト，乘法公式ト平行シテ之ヲ課スルノト，其ノ方法ニ二種類アツテ何レモ一長一短デアル。併シ乍ラ乘法公式ノ理解ト因數分解ノ徹底ヲ期スル爲メ，本書デハ平行主義ヲトルコトニシタ。蓋シ

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ヲ知ツタナラバ，$(a+\square)^2=a^2+\square+b^2$ ノ空イタ所ヲ補ハセ,次ニ $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ ニ進ンダ方ガヨイ。

$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ ヲ知レバ，$(x+\square)(\square+3)=x^2+\square+6$ ノ空イタ所ヲ補ハセルコトニヨツテ，乘法公式ノ理解ガ深マリ，同時ニ因數分解ノ入門ニナルノデアル。故ニ乘法公式ト因數分解トヲ平行シテ課スルコトトシタ。

例 ハ $a^2+2ab+b^2$ カラ $(a+b)^2$ ヲ導ク例デアルガ，此ノ例デハ a^2 ト b^2 トハ常ニ正デ或ル數ノ二乘ニナツテキルコト，$2ab$ ノ項ハ積ノ二倍ニナツテキルコトヲ十分見究メサセルガヨイ。

問題

12 $(x+y)^2$

13 $(a+5)^2$

14 $(2a+b)^2$

15 $(p+qr)^2$

16 $(10+b)^2$

17 $a^2+16ab+(64b^2)=(a+8b)^2$

18 $a^2+(6ab)+9b^2=(a+3b)^2$

19 $(625a^2)+50ab+b^2=(25a+b)^2$

20 $x^4+(x^2)+\frac{1}{4}=(x^2+\frac{1}{2})^2$

21 $a^2b^2+abc+(\frac{c^2}{4})=(ab+\frac{c}{2})^2$

22 $2b^2$ ヲ移項セヨ。

$x^2=(a+b)^2$

23 $x^2-3=13+8m+m^2$

$x^2=16+8m+m^2$

$=(4+m)^2$

24 $x^2-2a^2=4+4a-a^2$

$x^2=4+4a+a^2$

$=(2+a)^2$

25 $x^2+20a=25a^2+50a+9$

$x^2=25a^2+30a+9$

$x^2=(5a+3)^2$

(12) $(x+2)^2$

(13) $(l+6m)^2$

(14) $(3m+x)^2$

(15) $(p+4qr)^2$

(16) $(y+100)^2$

(17) $x^2+30xy+(225y^2)$

$=(x+15y)^2$

(18) $m^2+(20mn)+100n^2$

$=(m+10n)^2$

(19) $(1225)+70x+x^2=(35+x)^2$

(20) $x^4+(8x^2y^2)+16y^4=(x^2+4y^2)^2$

(21) $x^2y^2z^2+xyz+(\frac{1}{4})$

$=(xyz+\frac{1}{2})^2$

(22) $x^2+6=a^2+6a+15$

$x^2=a^2+6a+9$

$=(a+3)^2$

(23) $x^2-10=p^2+10p+15$

$x^2=(p+5)^2$

(24) $x^2-5c^2=a^2+2ac-4c^2$

$x^2=a^2+2ac+c^2$

$=(a+c)^2$

(25) $x^2+15m=100m^2+35m+1$

$x^2=100m^2+20m+1$

$=(10m+1)^2$

問題

次ノ式ヲ因數分解セヨ。(暗算) 12—(16)

12 $x^2+2xy+y^2$

13 $a^2+10a+25$

14 $4a^2+4ab+b^2$

15 $p^2+2pqr+q^2r^2$

16 $100+20b+b^2$

(12) x^2+4x+4

(13) $l^2+12lm+36m^2$

(14) $9m^2+6mx+x^2$

(15) $p^2+8pqr+16q^2r^2$

(16) $y^2+200y+10000$

次ノ(　)内ニ適當ナ數ヲ入レテ丁度或ル式ノ二乘ノ形ニナルヤウニシテ後コレヲ因數分解セヨ。

17 $a^2+16ab+(\quad)$

18 $a^2+(\quad)+9b^2$

19 $(\quad)+50ab+b^2$

20 $x^4+(\quad)+\frac{1}{4}$

21 $a^2b^2+abc+(\quad)$

(17) $x^2+30xy+(\quad)$

(18) $m^2+(\quad)+100n^2$

(19) $(\quad)+70x+x^2$

(20) $x^4+(\quad)+16y^4$

(21) $x^2y^2z^2+xyz+(\quad)$

次ノ式ヲ適當ニ移項シテ右邊ヲ二乘ノ式ニ化セ。

22 $x^2+2b^2=a^2+2ab+3b^2$

23 $x^2-3=13+8m+m^2$

24 $x^2-2a^2=4+4a-a^2$

25 $x^2+20a=25a^2+50a+9$

(22) $x^2+6=a^2+6a+15$

(23) $x^2-10=p^2+10p+15$

(24) $x^2-5c^2=a^2+2ac-4c^2$

(25) x^2+15m

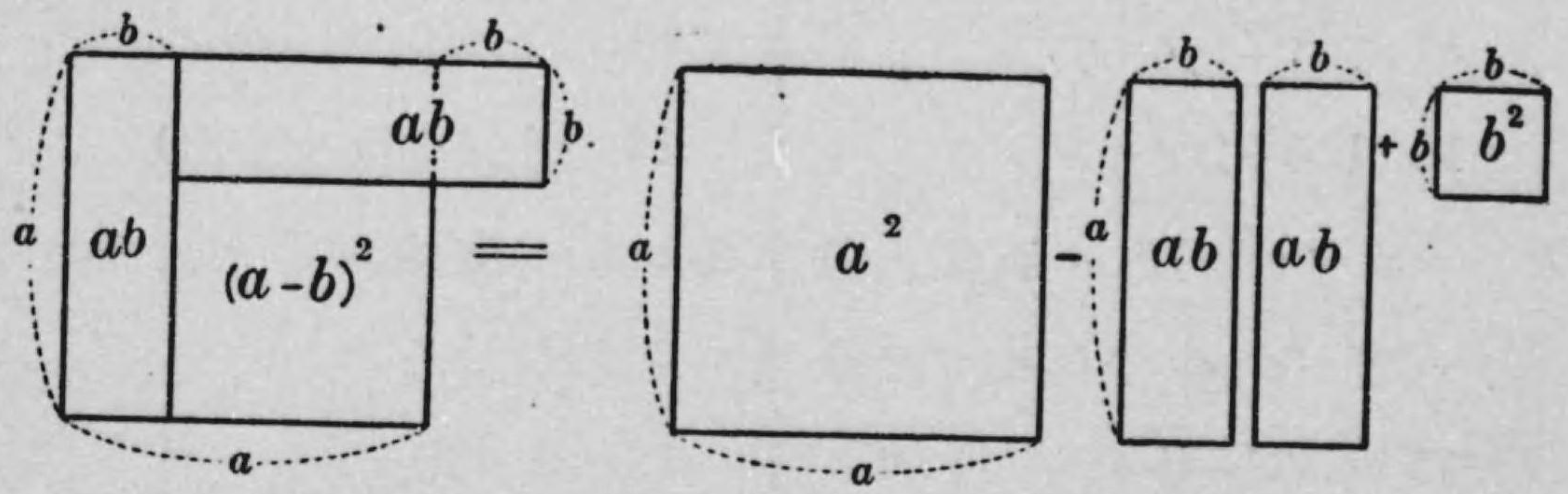
$=100m^2+35m+1$

36. 二數ノ差ノ二乘

二數ヲ夫々 a, b デ表ハスト

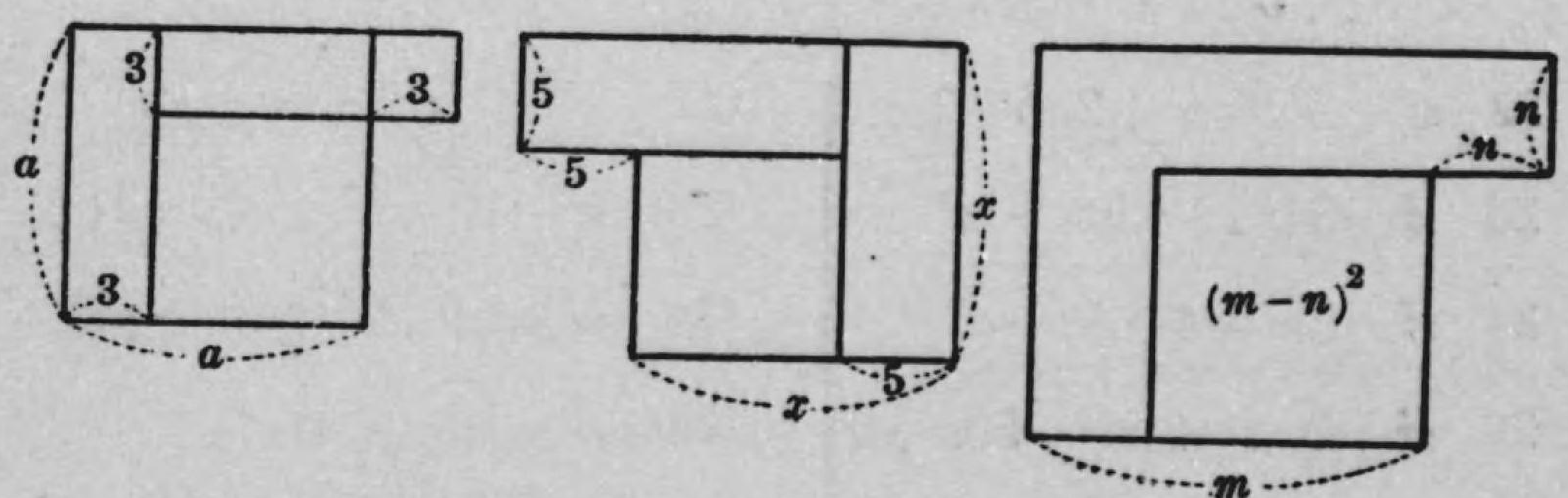
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

問 1 實際掛算ニヨリ,又次ノ圖ニヨツテ上ノ式ノ正シイコトヲ示セ。



如何ナル二數デモソノ二數ノ差ノ二乘ハ,**各數ノ二乘ノ和**カラ**二數ノ積**ノ2倍ヲ引イタモノニ等シイ。

問 2 次ノ圖ノ各區劃ノ中ニ適當ナ數ヲ書ケ。



36. 二數ノ差ノ二乘

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ノ公式デアル。此ノ公式ハ前ノ公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ニ於テ b ノ代リニ $-b$ トシテ導クコトガ出來ルノデアルガ，形式的ニ導クノハ生徒ニハ非常ニワカリニクイ。從ツテ記憶ニモ困難デアル。故ニ別々ニ之ヲ導イタ。

$(a-b)^2$ ト $(a+b)^2$ トノ比較ヲサセテ，

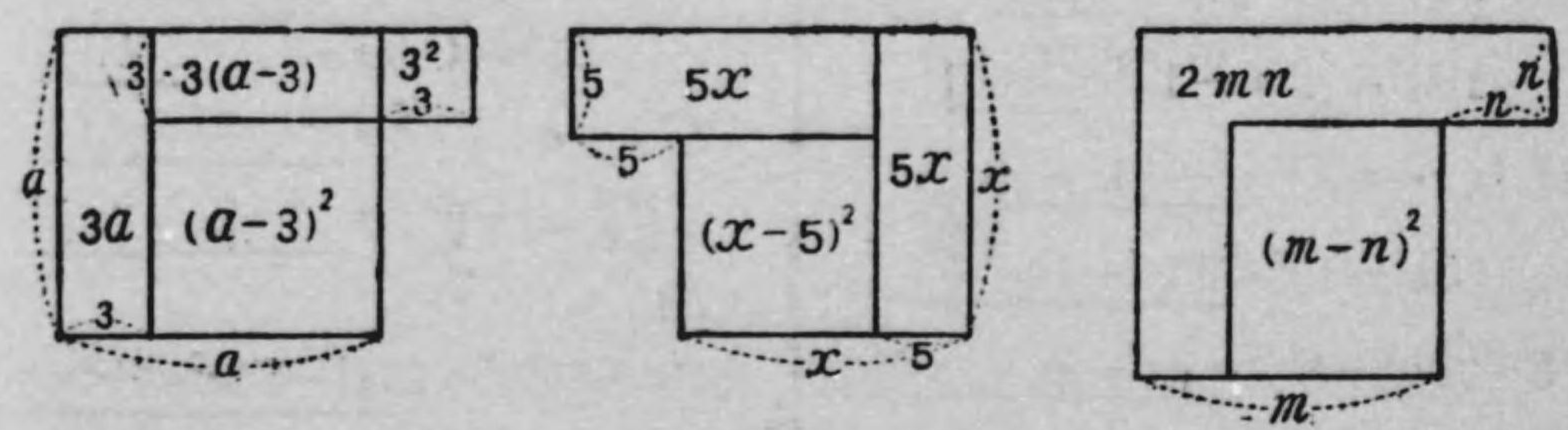
㋑ 共ニ a^2 ト b^2 トハ正デアルコト。

㋺ $2ab$ ノ符號ダケガ違フコト。

等ヲハツキリサセタイト思フ。

又唯單ニ式ノミノ計算デナク，面積ニヨル方法ニヨツテモソノ異同ヲ比較サレタイ。正方形ヤ矩形ノ板（又ハブリキ）ヲ用意シテ敎授者自ラ製作シテ示スト，圖ニ畫イタ靜的ナモノデナクテ，動的ニ說明ガ出來ルカラ非常ニ有効デアル。

問 2



コレハ左カラ順次ニ

$$(a-3)^2=a^2-3a-3(a-3)=a^2-6a+9$$

$$(x-5)^2=x^2+5^2-5x-5x=x^2-10x+25$$

$$(m-n)^2=m^2+n^2-2mn$$ ヲ示スノデアル。

問 3

$(a-b)^2$	a^2	$-2ab$	b^2
$(2a-b)^2$	$4a^2$	$-4ab$	b^2
$(x-2y)^2$	x^2	$-4xy$	$4y^2$
$(b-5a)^2$	b^2	$-10ab$	$25a^2$
$(2x-3y)^2$	$4x^2$	$-12xy$	$9y^2$

問 4

$(a-3)^2$ ———— a^2+9-6a

$(a-3b)^2$ ———— $a^2-6ab+9b^2$

$(3a-4b)^2$ ———— $9a^2-24ab+16b^2$

$(3a-b)^2$ ———— $b^2-6ab+9a^2$

$(4a-3b)^2$ ———— $16a^2-24ab+9b^2$

問　　題

26 $29^2=(30-1)^2=\underline{841}$

$38^2=(40-2)^2=\underline{1444}$

$199^2=(200-1)^2=\underline{39601}$

27 $(x-8)^2=\underline{x^2-16x+64}$

$(5x^2-1)^2=\underline{25x^4-10x^2+1}$

28 $(3a^2-b^2)^2=\underline{9a^4-6a^2b^2+b^4}$

$(p-5q)^2=\underline{p^2-10pq+25q^2}$

29 $(x-\frac{1}{2})^2=\underline{x^2-x+\frac{1}{4}}$

$(2y-\frac{z}{2})^2=\underline{4y^2-2yz+\frac{z^2}{4}}$

(26) $49^2=(50-1)^2=\underline{2401}$

$27^2=(30-3)^2=\underline{729}$

$298=(300-2)^2=\underline{88804}$

(27) $(a-10)^2=\underline{a^2-20a+100}$

$(x^2-y^2)^2=\underline{x^4-2x^2y^2+y^4}$

(28) $(4x^2-3y^2)^2=\underline{16x^4-24x^2y^2+9y^4}$

$(8x-5y)^2=\underline{64x^2-80xy+25y^2}$

(29) $(3a-\frac{1}{3})^2=\underline{9a^2-2a+\frac{1}{9}}$

$(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})^2=\underline{\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}}$

問 3　次ノ空欄ヲ第一列ニ倣ツテ充セ。

$(a-b)^2$	a^2	$-2ab$	b^2
$(2a-b)^2$			
$(x-2y)^2$			
$(b-5a)^2$			
$(2x-3y)^2$			

問 4　次ノ式ノ中デ互ニ等シイモノヲ線デ結ビ附ケヨ。

$(a-3)^2$　　　$b^2-6ab+9a^2$

$(a-3b)^2$　　　$9a^2-24ab+16b^2$

$(3a-4b)^2$　　　$16a^2-24ab+9b^2$

$(3a-b)^2$　　　a^2+9-6a

$(4a-3b)^2$　　　$a^2-6ab+9b^2$

問　　題

公式ヲ用ヒテ,暗算デ次ノ冪ヲ計算セヨ。**26—(29)**

26 29^2, 38^2, 199^2

27 $(x-8)^2$, $(5x^2-1)^2$

28 $(3a^2-b^2)^2$, $(p-5q)^2$

29 $(x-\frac{1}{2})^2$, $(2y-\frac{z}{2})^2$

(26) 49^2, 27^2, 298^2

(27) $(a-10)^2$, $(x^2-y^2)^2$

(28) $(4x^2-3y^2)^2$, $(8x-5y)^2$

(29) $(3a-\frac{1}{3})^2$, $(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})^2$

例 $25x^2-30xy+9y^2$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解 $25x^2-30xy+9y^2$

$=(5x)^2-2\times(5x)(3y)+(3y)^2$

$=\underline{(5x-3y)^2}$ ········答

問題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。30—(32)

30 $4x^2-12xy+9y^2$

31 $49a^2-70ab+25b^2$

32 $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$

(30) $y^2-22y+121$

(31) $16a^2-24ax+9x^2$

(32) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

次式中因數分解シ得ルモノヲ選ンデ分解セヨ。

33 $a^2-2ab-1$

34 $y^2-26yz+169z^2$

35 $9a^2-7ab+b^2$

(33) $4b^2-4b+1$

(34) $0.25a^2-a+1$

(35) $64r^2+48r+9$

次式ノ(　)內ヲ補ツテ其ノ式ヲ或ル式ノ平方ニ化セ。36—(37)

36 $y^2-6y+(\quad)$

37 $16z^2+(\quad)+x^2$

(36) $(\quad)-10y^2+25$

(37) $9x^2+(\quad)+4y^2$

注意 37, (37) ニハ二通リノ答ガアル。

次ノ式ヲ適當ニ移項シテ兩邊ヲ二乘ノ式ニ化セ。

38 $x^2+14=c^2-8c+30$

(38) $x^2-10=16r^2-24r-1$

例 $a^2-2ab+b^2$ ヲ因數ニ分解スル例デアル。此ノ公式ニヨル因數分解デハ或ル數 (a) ノ二乘ト他ノ數 (b) ノ二乘ノ和ガ先ヅ明ラカニナツタ上, 更ニ其ノ二數ノ積ノ2倍ノ符號ヲカヘタモノガアルコトヲ知ラネバナラナイ。

問題

30 $4x^2-12xy+9y^2=\underline{(2x-3y)^2}$

31 $49a^2-70ab+25b^2=\underline{(7a-5b)^2}$

32 $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=\underline{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}$

33 -1 ガ $+b^2$ デナケレバ因數分解出來ナイ。

34 $y^2-26yz+169z^2=\underline{(y-13z)^2}$

35 $-7ab$ ガ $-6ab$ デナケレバナラナイ。

36 $y^2-6y+(9)=\underline{(y-3)^2}$

37 $16z^2+(\pm 8zx)+x^2$

$=\underline{(4z\pm x)^2}$

38 $x^2+14=c^2-8c+30$

$x^2=c^2-8c+16$

$=\underline{(c-4)^2}$

(30) $y^2-22y+121=\underline{(y-11)^2}$

(31) $16a^2-24ax+9x^2=\underline{(4a-3x)^2}$

(32) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\underline{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}$

(33) $4b^2-4b+1=\underline{(2b-1)^2}$

(34) $0.25a^2-a+1=\underline{\left(\frac{a}{2}-1\right)^2}$

(35) $64r^2+48r+9=\underline{(8r+3)^2}$

(36) $(y^4)-10y^2+25=\underline{(y^2-5)^2}$

(37) $9x^2+(\pm 12xy)+4y^2$

$=\underline{(3x\pm 2y)^2}$

(38) $x^2-10=16r^2-24r^2-1$

$x^2=16r^2-24r+9$

$=\underline{(4r-3)^2}$

補充問題

(1) $(\quad)-4xy+y^2$ ノ(　)ノ中ヲ補ツテ二乘ノ形ニセヨ。

(2) $(\quad)-6ab+(\quad)$ ノ(　)ノ中ヲ補ツテ二乘ノ形ニセヨ。

但シ係數ハ整數トスル。

補充問題ノ答 (1) $4x^2$; $(2x-y)^2$ (2) $(3a-b)^2$ 又ハ $(a-3b)^2$ ヲ導ケ。

37. 二數ノ和ト差トノ積

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ デ公式トシテハ非常ニ簡單デアルガ，生徒ノ中ニハ a^2-b^2 ノ冪指數ノ2ヲ誤ツテ

$a^2-b^2=(a-b)^2$ ノヤウニ考ヘルモノガアル。

問 1 圖ニヨツテ $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ヲ說明スルモノデアル。

問 2 左カラ夫々

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$,　　$a^2-5^2=(a+5)(a-5)$,

$34^2-26^2=(34+26)\times(34-26)$

注意 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ヲ授ケタラ，二数ノ和ト差トノ積ハ，二數ノ平方(二乘)ノ差ニ等シイ，トイフヤウニ言葉デ發表スルヤウニシタイ。又 a, b ハ唯單ニ一ツノ文字ノミデナクー ツノ式ヲモ表ハスモノデアル。

生徒ノ中ニハ此ノ公式ノ適用ヲ誤ツテ

$(x+3)(x-2)=x^2-6$ トスルモノガアル。二數ノ和ト差トノ積デアルカ，否カ，卽チ公式ニアテハマツテヰルカ否カヲ見究メサセタ上デ公式ヲ適用サセタイ。其ノタメニ次ノヤウナ問題ヲ課シテ見ルノモ一案デアラウ。

補充問題 次ノ等式ガ成立スルヤウニ空イタ所ヲ補ヘ。

(1) $(2x-3y)(2x\qquad)=4x^2-9y^2$

(2) $(\frac{1}{2}p\qquad)(\qquad-2q)=\frac{1}{4}p^2-4q^2$

(3) $(5a+6b)(\qquad\qquad)=25a^2-36b^2$

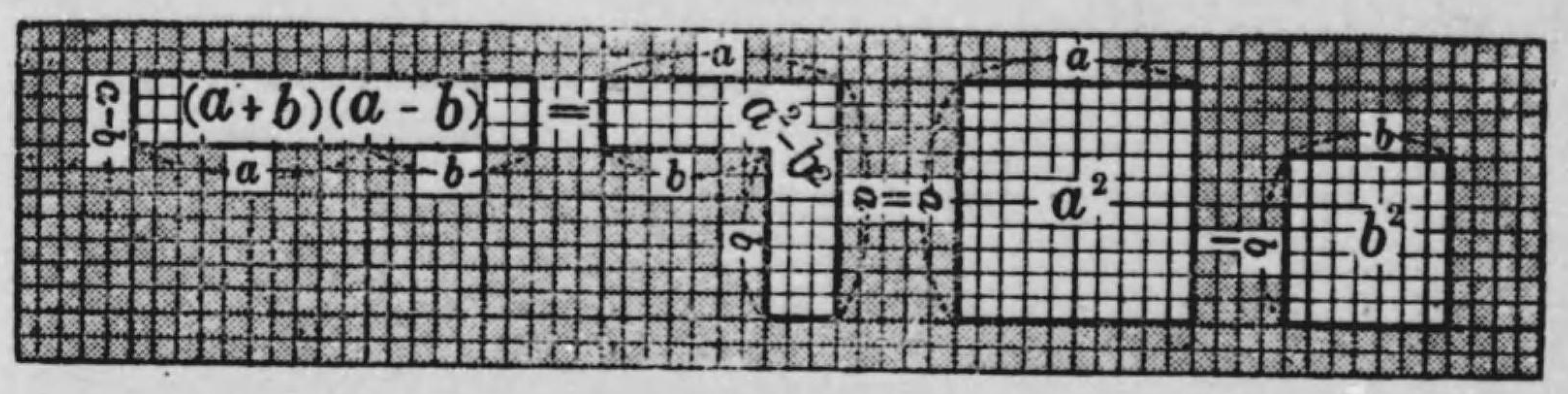
(4) $80=81-1=(9\qquad)(9\qquad)$

37. 二數ノ和ト差トノ積

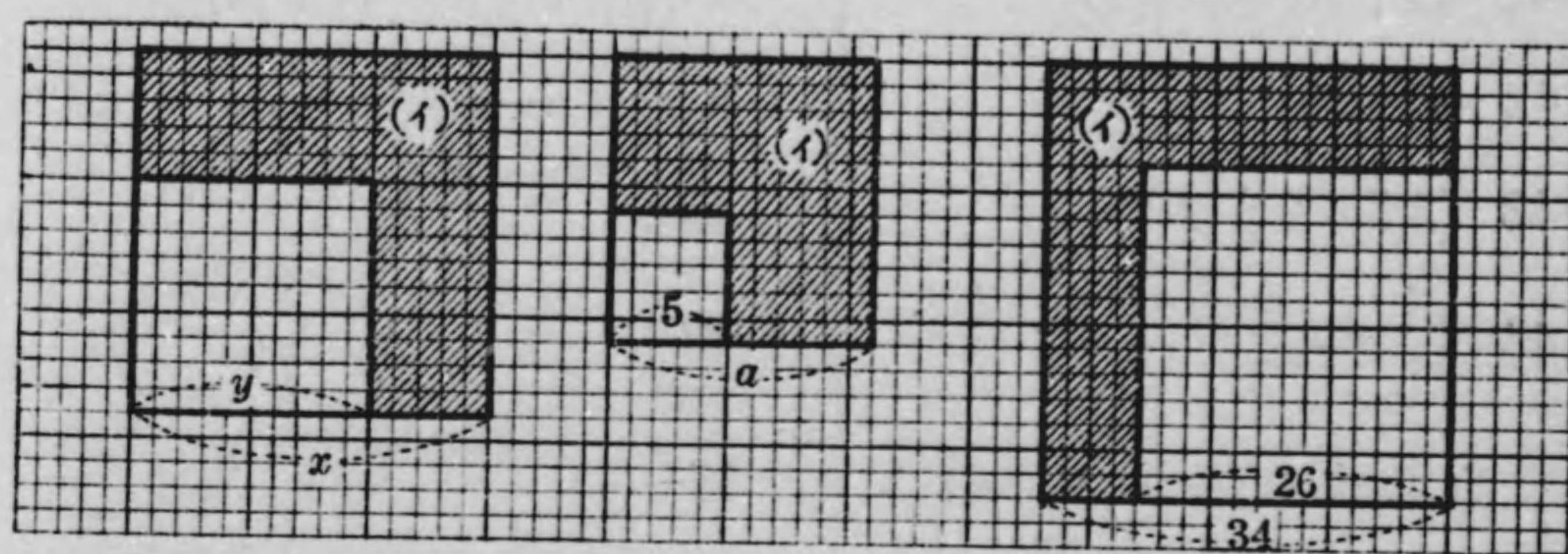
二數ヲ夫々 a, b トスレバ

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \cdots\cdots\cdots \text{(C)}$$

問 1 コノ式ノ正シイコトヲ實際ニ掛算ヲシテ驗セ。又次ノ圖ニヨツテ示セ。



問 2 次ノ圖ノ(イ)ノ面積ヲ表ハス式ヲ二通リ書ケ。



如何ナル二數モ其ノ和ト差トノ積ハ其ノ二數ノ二乘ノ差ニ等シイ。

問 3 次ノ空欄ヲ適當ナ數又ハ式デ補ヘ.

a	b	$a+b$	$a-b$	a^2-b^2
37	33			
105	95			
62	58			
$2x$	1			
ab	c			

問　　題

次ノ式ヲ公式(C)ヲ用ヒテ計算セヨ. **39—(44)**

39 $31\times29,\quad 62\times58$

40 $23\times17,\quad 205\times195$

41 $(d+10)(d-10)$

42 $(4r-3s)(4r+3s)$

43 $(2.5+2x)(2.5-2x)$

44 $(\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}y)(\frac{1}{3}y+\frac{1}{5}x)$

(39) $63\times57,\quad 84\times96$

(40) $37\times23,\quad 75\times45$

(41) $(6h-m)(6h+m)$

(42) $(15-w)(15+w)$

(43) $(\frac{1}{2}a-11)(\frac{1}{2}a+11)$

(44) $(\frac{2}{5}p+\frac{2}{3}q)(\frac{2}{3}q-\frac{2}{5}p)$

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ. **45—(47)**

45 $a^2m^2-n^2,\quad 16a^2-49b^2$

46 $\frac{1}{4}-a^2b^2c^2,\ 1.21d^2-0.09$

47 $100^2-99^2,\quad (3\frac{1}{3})^2-\frac{1}{9}$

(45) $x^4-a^4,\ 9p^2-81q^2r^2$

(46) $\frac{4}{9}m^2-\frac{9}{25}n^2,\ 9a^2-0.16$

(47) $51^2-49^2,\ (8\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$

問 3

a	b	$a+b$	$a-b$	a^2-b^2
37	33	70	4	37^2-33^2
105	95	200	10	105^2-95^2
62	58	120	4	62^2-58^2
$2x$	1	$2x+1$	$2x-1$	$4x-1$
ab	c	$ab+c$	$ab-c$	$a^2b^2-c^2$

問　　題

39 $31\times29=(30+1)(30-1)=\underline{899}$

$62\times58=(60+2)(60-2)=\underline{3596}$

40 $23\times17=(20+3)(20-3)=\underline{391}$

$205\times195=(200+5)$

$\times(200-5)=\underline{39975}$

41 $(d+10)(d-10)=\underline{d^2-100}$

42 $(4r-3s)(4r+3s)=\underline{16r^2-9s^2}$

43 $(2.5+2x)(2.5-2x)=\underline{6.25-4x^2}$

44 $\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{5}x\right)$

$=\underline{\frac{1}{25}x^2-\frac{1}{9}y^2}$

45 $a^2m^2-n^2=(am+n)(am-n)$

$16a^2-49b^2=(4a+7b)(4a-7b)$

46 $\frac{1}{4}-a^2b^2c^2$

$=\underline{\left(\frac{1}{2}-abc\right)\times\left(\frac{1}{2}+abc\right)}$

$1.21d^2-0.09$

$=(1.1d+0.3)\times(1.1d-0.3)$

47 $100^2-99^2=\underline{199}$

$\left(3\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}=\left(3\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$

$\times\left(3\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\underline{11}$

(39) $63\times57=(60+3)(60-3)$

$=\underline{3591}$

$84\times96=(90-6)(90+6)$

$=\underline{8064}$

(40) $37\times23=(30+7)(30-7)$

$=\underline{851}$

$75\times45=(60+15)(60-15)$

$=\underline{3375}$

(41) $(6h-m)(6h+m)=\underline{36h^2-m^2}$

(42) $(15-w)(15+w)=\underline{225-w^2}$

(43) $\left(\frac{1}{2}a-11\right)\left(\frac{1}{2}a+11\right)$

$=\underline{\frac{1}{4}a^2-121}$

(44) $\left(\frac{2}{5}p+\frac{2}{3}q\right)\left(\frac{2}{3}q-\frac{2}{5}p\right)$

$=\underline{\frac{4}{9}q^2-\frac{4}{25}p^2}$

(45) $x^4-a^4=\underline{(x+a)(x-a)(x^2+a^2)}$

$9p^2-81q^2r^2=(3p+9qr)(3p-9qr)$

又ハ $=\underline{9(p+3qr)(p-3qr)}$

(46) $\frac{4}{9}m^2-\frac{9}{25}n^2$

$=\underline{\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{5}n\right)\left(\frac{2}{3}m-\frac{3}{5}n\right)}$

$9a^2-0.16=\underline{(3a+0.4)(3a-0.4)}$

(47) $51^2-49^2=\underline{200},\ (8\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2=\underline{72}$

38. $x+a$ ト $x+b$ トノ積

次節ノ $(ax+b)(cx+d)$ ノ a ト c トガ1ノ場合デアルカラ，一般ノ場合ガ徹底スレバ本節ノ場合ハ自然ニナシ得ルノデアルガ，本節ノ場合モ亦重要デアルシ，又考ヘ方ニヨレバ今マデノ公式 $(a\pm b)^2$，$(a+b)(a-b)$ ハ何レモ本節ノ $(x+a)(x+b)$ ノ特別ノ場合ト考ヘラレルカラ別ニ一項ヲ設ケテ課スルノデアル。

問1 14×17 ノヤウニ二位ノ二數ノ積ハ一數（例ヘバ14）ト他ノ一數ノ第一位（即チ7）トノ和ノ10倍ニ，ソレラ二數ノ第一位同士ノ積(4×7)ヲ加フレバヨイ。

コレハ勿論本節ノ公式 $(x+a)(x+b)$ ニヨツタモノデ，本節ノ公式ニヨツテコレヲ證明スレバ，

$$(10+a)(10+b)=10^2+(a+b)\times10+ab$$
$$=10(\underline{10+a}+b)+ab$$ デアル。

圖ハ 14×17 ヲ説明スルノデアルガ，圖ノ $10^2+(4+7)\times10+4\times7$ ハ即チ本節ノ公式デアル。

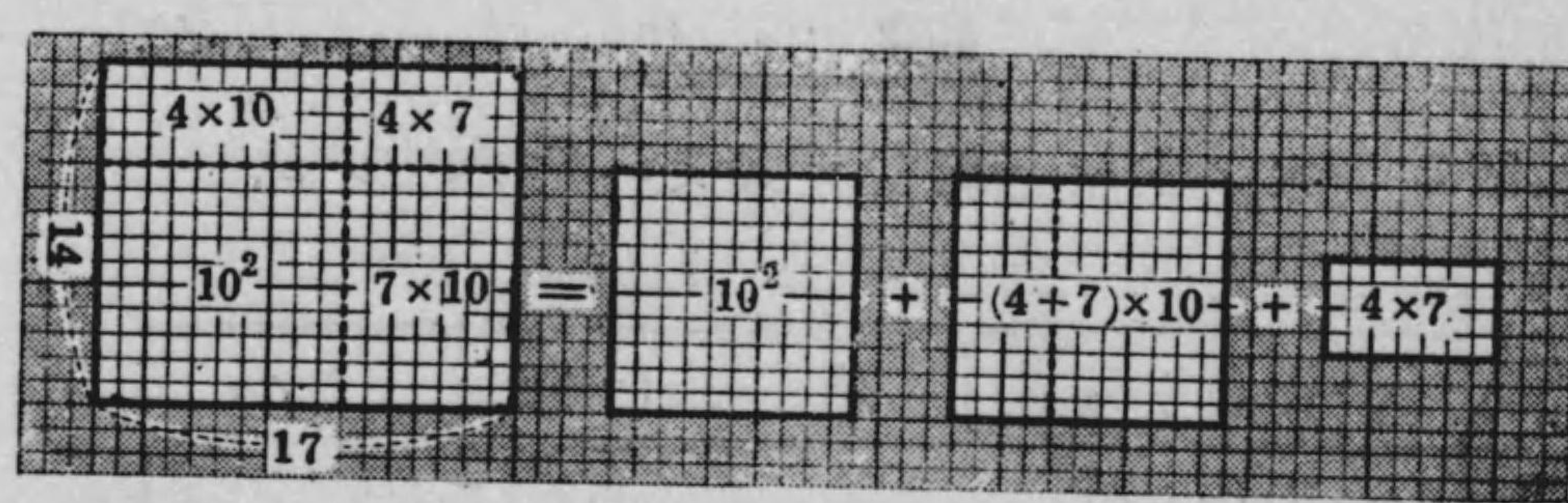
問2 上段左カラ　270,　221,　304,　168

下段左カラ　240,　342,　225,　324

問3 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ ニ於テ x ノ係數ハ a ト b トノ和デ，既知項（常數項）ハ a ト b トノ積ニナツテキルコトヲ徹底サセネバナラナイ。本節ノ公式ハ敢テ言葉デ述ベサセナクテモヨイ。本節ノ公式ヲ徹底サセルニハ前ニモ述ベタ通リ $x^2+\square-6=(x-3)(x\quad)$ ノ空イタ所ヲ補ハセルヤウナ問題ヲ取扱フガヨイ。サウスルト因數分解モワケナク出來ルヤウニナル。

38. $x+a$ ト $x+b$ トノ積

問1 $14\times17=10^2+(4+7)\times10+4\times7$ デアルコトヲ次ノ圖ニヨツテ説明セヨ。〔45頁參照〕



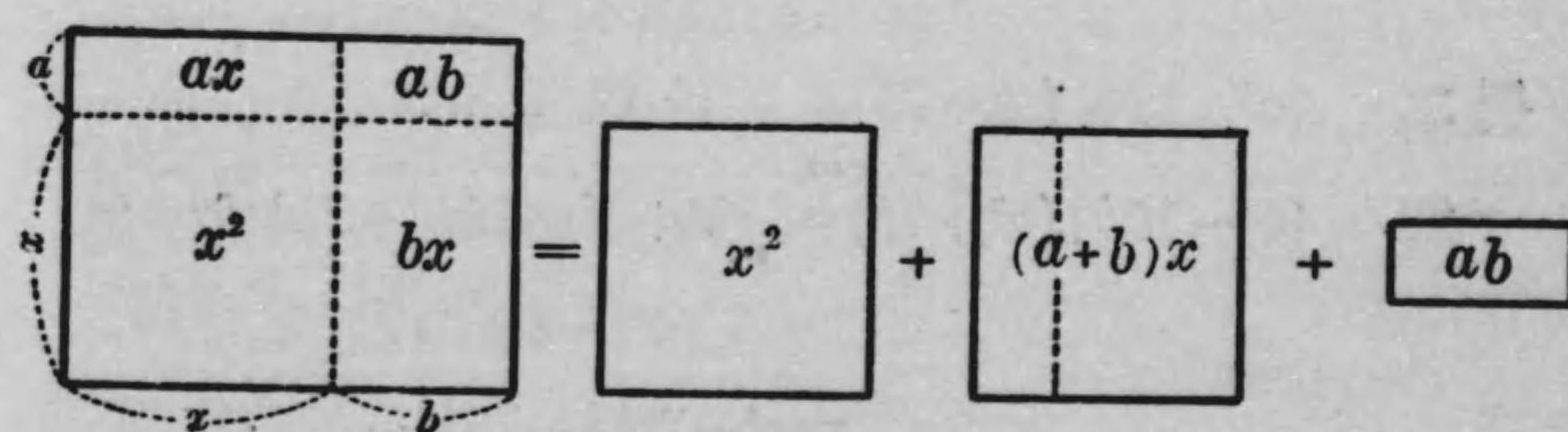
問2 上ノ方法デ次ノ掛算ヲナセ。(暗算)

15×18,　13×17,　19×16,　14×12

16×15,　19×18,　15×15,　18×18,

問3 次ノ式ノ正シイコトヲ實際ノ掛算ト圖トデ示セ。

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab\cdots\cdots(D)$$



例一　$(x-8)(x+5)$ ヲ公式ヲ用ヒテ計算セヨ。

解　$x-8=x+(-8)$ デアルカラ，公式(D)ニ於テ $a=-8$, $b=5$ ト考ヘテ

$$(x-8)(x+5)=x^2+\{(-8)+5\}x+(-8)\times 5$$
$$=\underline{x^2-3x-40}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 答$$

問 4　次ノ空欄ニ適當ナ式又ハ數ヲ入レヨ。

$(x+a)(x+b)$	x^2	$(a+b)x$	ab
$(x+3)(x+4)$			
$(x+2a)(x+3a)$			
$(y+l)(y+5l)$			
	x^2	$7x$	10
	x^2	$10x$	24
$(x+5)(x-3)$			
$(x-5)(x+3)$			
	x^2	$-8x$	15

例二　$(a^2-10b)(a^2+7b)$ ヲ計算セヨ。

解　$(a^2-10b)(a^2+7b)=(a^2)^2+\{(-10b)+7b\}a^2$
$$+(-10b)(7b)$$
$$=\underline{a^4-3a^2b-70b^2}\cdots\cdots 答$$

例一　公式（D）ノ練習デアル。特ニ $(x+a)(x+b)$ ニ於テ a, b ハ負デモヨイコトヲ理解サセル。

問 4

$(x+a)(x+b)$	x^2	$(a+b)x$	ab
$(x+3)(x+4)$	x^2	$7x$	12
$(x+2a)(x+3a)$	x^2	$5ax$	$6a^2$
$(y+l)(y+5l)$	y^2	$6ly$	$5l^2$
$(x+2)(x+5)$	x^2	$7x$	10
$(x+4)(x+6)$	x^2	$10x$	24
$(x+5)(x-3)$	x^2	$2x$	-15
$(x-5)(x+3)$	x^2	$-2x$	-15
$(x-5)(x-3)$	x^2	$-8x$	15

例二　$(x+a)(x+b)$ ノ x^2 ガ $2x$ トナツタ場合デアル。此ノ x ハ唯單ニ一ツノ文字ヲ表ハスノミデナク，一ツノ式デモアラハスコトガアル。此ノ例ヲ取扱フコトニヨツテ，

$$(2x-1)(2x+5)=4x^2+8x-5$$
$$(5a-2b)(5a+7b)=25a^2+25ab-14b^2$$

ノヤウナ計算モ出來ルシ，又

$(a+b-1)(a+b+2)$　ノ計算モコレニ導クコトガ出來ル。

即チ　$(a+b-1)(a+b+2)=\{(a+b)-1\}\{(a+b)+2\}$
$$=(a+b)^2+(a+b)-2$$
$=a^2+2ab+b^2+a+b-2$ ノヤウニ求メルコトガ出來ル。

補充問題　次ノ等式ヲ完全セヨ。

（1）$(x\qquad)(x-7)=x^2-4x-\square$

（2）$(x+6)(\qquad)=x^2+\square+42$

（3）$(5x-7y)(5x\qquad)=25x^2-20xy+\square$

問　題

48 $(x+2)(x-3)=x^2-x-6$

49 $(x-3y)(x+4y)=x^2+xy-12y^2$

50 $(ab-3c)(ab+4c)$
$=a^2b^2+abc-12c^2$

51 $(2a-5)(2a-3)=4a^2-16a+15$

52 $(4xy-2)(4xy+3)$
$=16x^2y^2+4xy-6$

(48) $(m-5)(m-7)=m^2-12m+35$

(49) $(mn+10)(mn-6)$
$=m^2n^2+4mn-60$

(50) $(x+5b)(x-8b)=x^2-3bx-40b^2$

(51) $(3x-1)(3x-2)=9x^2-9x+2$

(52) $(a^2-7)(a^2+11)$
$=a^4+4a^2-77$

例三 $x^2+(a+b)x+ab$ ノ因數分解ノ例デアル。此ノ種ノ因數分解デハ，先ヅ各因數ノ初メノ項ハ共ニ x デアルコトハワカルガ，第二項ヲ決定スルコトガ仲々困難デ，又ソレガコノ場合ノ主要部分デアル。即チ此ノ例ノ $x^2-5x-14$ デハ，コレガ因數分解サレルナラバ $(x\quad)(x\quad)$デ，-14 ハ二數ノ積，-5 ハソノ二數ノ和デナケレバナラナイ。實際ノ計算ニ當ツテハ -14 ヲ二數ノ積ニ直シテ，ソノ二數ノ中，和ガ -5 ニナルモノヲトルノデアル。和ガ -5 ニナルモノヲ先ニ考ヘルノハ極メテ拙劣デアル。一般ニ二次三項式 x^2+px+q ニ於テ q ガ正ナラバ二數ハ同符號デ，ソノ符號ハ p ノ正負デ定マリ，q ガ負ナラバ二數ハ異符號デ，何レガ正デ何レガ負デアルカ，ソノ二數ノ代數和ガ p ニ等シイヤウニ定メル。

53 $x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$

54 $a^2-2a-8=(a-4)(a+2)$

55 $y^2+12y-28=(y-2)(y+14)$

56 $a^2b^2+10ab-24$
$=(ab-2)(ab+12)$

57 $p^2-104pr+400r^2$
$=(p-100r)(p-4r)$

58 $x^2y^2-4xyz-12z^2$
$=(xy-6z)(xy+2z)$

(53) $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

(54) $x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

(55) $m^2+5m-36=(m+9)(m-4)$

(56) $a^2x^2-7ax-30$
$=(ax-10)(ax+3)$

(57) $x^2+30xy+200y^2$
$=(x+10y)(x+20y)$

(58) $x^6-8x^3y^2-9y^4$
$=(x^3-9y^2)(x^3+y^2)$

問　題

次ノ掛算ノ答ヲ公式ヲ應用シテ暗算デ言ヘ。

48 $(x+2)(x-3)$

49 $(x-3y)(x+4y)$

50 $(ab-3c)(ab+4c)$

51 $(2a-5)(2a-3)$

52 $(4xy-2)(4xy+3)$

(48) $(m-5)(m-7)$

(49) $(mn+10)(mn-6)$

(50) $(x+5b)(x-8b)$

(51) $(3x-1)(3x-2)$

(52) $(a^2-7)(a^2+11)$

例三　$x^2-5x-14$ ヲ因數分解セヨ。

解　此ノ式ガ因數分解シ得ラレルナラバ $(x\quad)(x\quad)$ トナル筈デアルカラ，積ガ -14 デ和ガ -5 ノ二數ヲ見ツケレバヨイト考ヘルト丁度 2 ト -7 トガアル。ソレ故

$x^2-5x-14=(x-7)(x+2)$ ……答

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。53—(58)

53 x^2+6x+8

54 a^2-2a-8

55 $y^2+12y-28$

56 $a^2b^2+10ab-24$

57 $p^2-104pr+400r^2$

58 $x^2y^2-4xyz-12z^2$

(53) x^2-6x+8

(54) x^2+2x-8

(55) $m^2+5m-36$

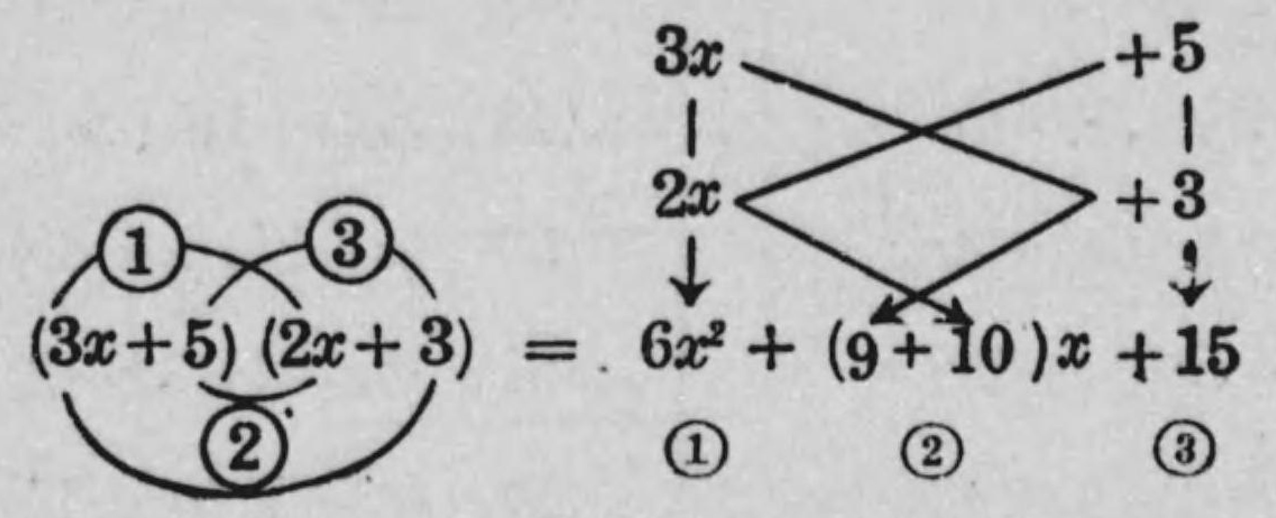
(56) $a^2x^2-7ax-30$

(57) $x^2+30xy+200y^2$

(58) $x^6-8x^3y^2-9y^4$

39. $(ax+b)(cx+d)$ ノ形ノ積

問 1　$(3x+5)(2x+3)$ ヲ計算セヨ。（181頁ヲ見ヨ）



例.　$(3x-4)(5x+2)$ ヲ上ニ倣ッテ計算セヨ。

解　先ヅ $3x$ ト $5x$ トノ積ヲ $15x^2$ トシ,次イデ 3 ト 2 トノ積 6 ヘ -4 ト 5 トノ積 -20 ヲ加ヘタモノヘ x ヲツケテ $-14x$ トシ,次ニ -4 ト 2 トノ積ヲ -8 トシテ次ノヤウニ書ケバヨイ。

$$(3x-4)(5x+2)=\underline{15x^2-14x-8}\cdots\cdots\text{答}$$

問 2　次ノ式ノ缺ケタ所ヲ補ヘ。

(1)　$(2x+5)(3x+4)=6x^2\quad\ \ x+20$

(2)　$(2x-5)(3x-4)=\quad x^2\quad\ \ x$

(3)　$(2x+5)(3x-4)=\quad x^2\quad\ \ x$

(4)　$(2x-5)(3x+4)=\quad x^2\quad\ \ x$

(5)　$(2x-5)(\qquad)=4x^2-16x+15$

(6)　$(\qquad)(3x-1)=6x^2+13x-5$

39. $(ax+b)(cx+d)$ ノ形ノ積

二ツノ二項式ノ積ノ最モ一般ナ形デ，ソノ積モ亦二次三項式ノ一般ノ形トナル。唯單ニ $(a+b)(c+d)$ ナラバ四項式トナルノデアルガ，x トイフ共通ノ文字ガアルカラ三項式トナルノデアル。

此ノ公式ハ可ナリ複雜デ言葉デ發表スルヨリモ寧ロ**十字乘法**ニヨル算出法ニヨツテ記憶サセルガヨイ。

$\left\{\begin{array}{l}x^2\text{ ノ係數ハ各因數ノ } x \text{ ノ係數ノ積。}\\ x\text{ ノ係數ハ各因數ノ } x \text{ ノ係數ト } x \text{ ヲ含マナイ項トノ積ノ代數和}\\ x\text{ヲ含マナイ項　ハ二ツノ因數ノ } x \text{ ヲ含マナイ項ノ積}\end{array}\right.$

デアル。

問 1　ハ181頁ノ方法ニヨツテ實際ニ掛算サセテ本節ノ公式ノ豫備トスル。

例　ハ $(3x-4)(5x+2)$ ヲ x^2 ノ係數，x ノ係數，x ヲ含マヌ項ヲ求メルコトニヨツテ計算スルノデアル。

問 2　(1)　$(2x+5)(3x+4)=6x^2+23x+20$

(2)　$(2x-5)(3x-4)=6x^2-23x+20$

(3)　$(2x+5)(3x-4)=6x^2+7x-20$

(4)　$(2x-5)(3x+4)=6x^2-7x-20$

(5)　$(2x-5)(2x-3)=4x^2-16x+15$

(6)　$(2x+5)(3x-1)=6x^2+13x-5$

補充問題　次ノ等式ノ空イタ所ヲ適當ニ補ヘ。

(1)　$(3x\quad)(\quad-3)=12x^2-x-6$

(2)　$(7x-1)(2x\qquad)=(\ )x^2-23x+(\qquad)$

(3)　$(5x+3)(\qquad)=(\ )x^2-3x-9$

問　　　題

59 $(2x+1)(x+2)=\underline{2x^2+5x+2}$

60 $(2x+3)(3x-1)=\underline{6x^2+7x-3}$

61 $(2x+y)(x+2y)=\underline{2x^2+5xy+2y^2}$

62 $(3x-2y)(2x+5y)$
$=\underline{6x^2+11xy-10y^2}$

63 $(5x^2-3)(6x^2+5)$
$=\underline{30x^4+7x^2-15}$

64 $4x^2+16x+15=\underline{(2x+3)(2x+5)}$

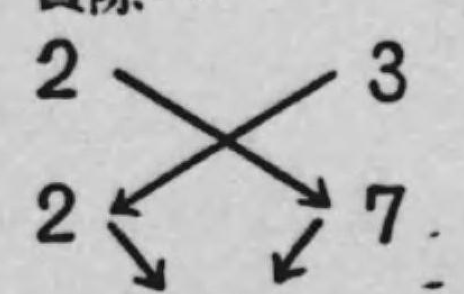
65 $6x^2+x-12=\underline{(3x-4)(2x+3)}$

66 $9y^2-6y-8=\underline{(3y+2)(3y-4)}$

67 $12x^2-7xy-12y^2$
$=\underline{(3x-4y)(4x+3y)}$

68 $4x^2+20x+21=\underline{(2x+3)(2x+7)}$

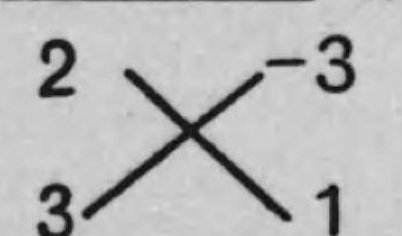
注意　此ノ因數分解ハ x ノ係數 4 ヲ二ツ＝分ケルト 1×4, 2×2 デ 21 ハ 1×21, 3×7 デアルカラコレラヲ組合ハセルノデアルガ，實際ハ



$6+14=20$　〔x ノ係數〕

ノヤウニスル。

69 $6a^2-7ab-3b^2$
$=\underline{(2a-3b)(3a+b)}$



70 $7a^2+4ab-3b^2=\underline{(a+b)(7a-3b)}$

(59) $(3x-2)(2x-9)=\underline{6x^2-31x+18}$

(60) $(5x-4)(2x+3)=\underline{10x^2+7x-12}$

(61) $(2x-y)(x+2y)$
$=\underline{2x^2+3xy-2y^2}$

(62) $(5a+3b)(2a-5b)$
$=\underline{10a^2-19ab-15b^2}$

(63) $(2a^2-7)(3a^2+8)$
$=\underline{6a^4-5a^2-56}$

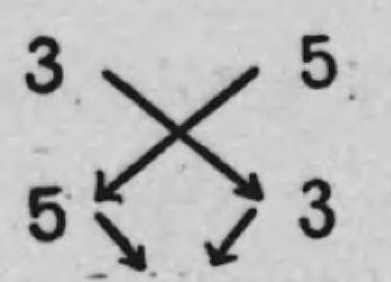
(64) $2x^2+15x-8=\underline{(2x-1)(x+8)}$

(65) $6a^2+5a-6=\underline{(2a+3)(3a-2)}$

(66) $8x^2-2xy-3y^2$
$=\underline{(2x+y)(4x-3y)}$

(67) $10a^2-29ab+10b^2$
$=\underline{(5a-2b)(2a-5b)}$

(68)



$25+9=34$（x ノ係數）

$15x^2+34x+15=\underline{(3x+5)(5x+3)}$

(69) $3a^2-5ab-2b^2$

答　$\underline{(a-2b)(3a+b)}$

(70) $3y^2+17yz-6z^2$

答　$\underline{(y+6z)(3y-z)}$

問　　　題

次ノ式ヲ計算セヨ。59―(63)

59 $(2x+1)(x+2)$

60 $(2x+3)(3x-1)$

61 $(2x+y)(x+2y)$

62 $(3x-2y)(2x+5y)$

63 $(5x^2-3)(6x^2+5)$

(59) $(3x-2)(2x-9)$

(60) $(5x-4)(2x+3)$

(61) $(2x-y)(x+2y)$

(62) $(5a+3b)(2a-5b)$

(63) $(2a^2-7)(3a^2+8)$

次ノ式ヲ因數分解セヨ。64―(70)

64 $4x^2+16x+15=(2x\qquad)(\qquad+5)$

(64) $2x^2+15x-8=(2x\qquad)(\qquad+8)$

65 $6x^2+x-12=(\qquad-4)(2x\qquad)$

(65) $6a^2+5a-6=(2a\qquad)(\qquad-2)$

66 $9y^2-6y-8=(3y+2)(\qquad)$

(66) $8x^2-2xy-3y^2=(2x\qquad)(\qquad)$

67 $12x^2-7xy-12y^2=(\qquad)(\qquad+3y)$

(67) $10a^2-29ab+10b^2=(\qquad-2b)(\qquad)$

68 $4x^2+20x+21$

69 $6a^2-7ab-3b^2$

70 $7a^2+4ab-3b^2$

(68) $15x^2+34x+15$

(69) $3a^2-5ab-2b^2$

(70) $3y^2+17yz-6z^2$

雜　　題

例一　$8a^3+24a^2b+18ab^2$　ヲ因數分解セヨ。

解　此ノ式ニハ各項ニ$2a$トイフ共通ナ因數ガアルカラ全體ガ$2a$デ割レル。故ニ

$$8a^3+24a^2b+18ab^2=2a(4a^2+12ab+9b^2)$$

$$=\underline{2a(2a+3b)^2}\cdots\cdots\text{答}$$

或ル式ヲ因數ニ分解スルトキ，

其ノ各項ニ共通ナ因數ガアレバ,先ヅコレヲ括リ出スガヨイ。式デ示スト

$$ax+bx-cx=(a+b-c)x$$

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。1―(8)

1　$5x^3+50x^2+45x$	(1)　$3ax^2+3ax-60a$
2　$x^2y^2-7xy^3+12y^4$	(2)　$a^2b-6ab+8b$
3　$6r^3+8r^2+2r$	(3)　$24h-72h^2+30h^3$
4　$na^2+7na+6n$	(4)　$6n^3a+2n^2a-48na$
5　$7a^3b-7ab^3$	(5)　$27a^2x^2-12a^2$
6　$-ab^2c^2+2a^2bc-a^3$	(6)　$5x^3y-50x^2y^2+125xy^3$
7　a^4-x^4	(7)　x^4-16
8　$a^4-2a^2b^2+b^4$	(8)　$a^4+a^2b^2-2b^4$

雜　　題

今マデ各乘法公式ニ關聯シテ因數分解ヲ取扱ツテ來タノデ各ニツイテハ十分ヨク了解サレテ來タデアラウガ，ソレラノ各因數分解相互ヲ十分了解サセルタメニ此ノ雜題ヲオクノデアル。今マデ取扱ツタ因數分解(乘法)ノ諸公式ハ

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

デアツタ。此ノ外ニ總テノ場合ニ通ジテ最モ基本的ナモノニ**共通因數デ括ル**コトガアル。**例一**ハ主トシテソレヲ示スタメニ出シタノデアル。

1　$5x(x^2+10x+9)$ $=\underline{5x(x+1)(x+9)}$	(1)　$3a(x^2+x-20)$ $=\underline{3a(x+5)(x-4)}$
2　$y^2(x^2-7xy+12y^2)$ $=\underline{y^2(x-3y)(x-4y)}$	(2)　$b(a^2-6a+8)$ $=\underline{b(a-2)(a-4)}$
3　$2r(3r^2+4r+1)$ $=\underline{2r(3r+1)(r+1)}$	(3)　$6h(4-12h+5h^2)$ $=\underline{6h(2-h)(2-5h)}$
4　$n(a^2+7a+6)$ $=\underline{n(a+1)(a+6)}$	(4)　$2na(3n^2+n-24)$ $=\underline{2na(n+3)(3n-8)}$
5　$7ab(a^2-b^2)$ $=\underline{7ab(a+b)(a-b)}$	(5)　$3a^2(9x^2-4)=\underline{3a^2(3x+2)(3x-4)}$
6　$-a(b^2c^2-2abc+a^2)$ $=\underline{-a(bc-a)^2}$	(6)　$5xy(x^2-10xy+25y^2)$ $=\underline{5xy(x-5y)^2}$
7　$\underline{(a-x)(a+x)(a^2+x^2)}$	(7)　$\underline{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$
8　$(a^2-b^2)^2=\underline{(a+b)^2(a-b)^2}$	(8)　$(a^2-b^2)(a^2+2b^2)$ $=\underline{(a+b)(a-b)(a^2+2b^2)}$

第三章　最大公約數及最小公倍數

40. 最大公約數及最小公倍數

本書デハ最大公約數ト最小公倍數ハ極メテ簡單ニ取扱ツタ。即チ唯ニ二次三項式ノ因數分解ニヨツテ求メル所マデデ之ヲ細別スレバ

（イ）單項式ノ最大公約數及最小公倍數

（ロ）單項式ト見做サレル代數式ノ最大公約數及最小公倍數

（ハ）因數分解ニヨツテ（ロ）ニ導キ得ルモノ

ダケヲ取扱ツタ。而モ因數分解ニヨルモノデモ極メテ容易ニ求メ得ルモノノバカリニシタ。

最大公約數ト最小公倍數トハ分數式ノ所ニ必要ナダケデ，ソレ以外ニハ殆ド其ノ必要ガナイ。ソシテ現今ハ分數式ノ計算ガ非常ニ簡單ニナツタノデ，徒ニ困難ナ最大公約數及ビ最小公倍數ノ問題ヲ取扱フコトハ全ク其ノ意義ガナイ。故ニ互除法等ノヤウナ一般ノ方法ハコレヲトリ扱ハナイコトニシタ。

問 1　算術ニ於ケル最大公約數及ビ最小公倍數ノ復習デアル。

G. C. M.（左カラ）12, 5　　L. C. M. 120, 600

問 2　單項式ノ公約數及ビ最大公約數ヲ考ヘサセル。

G. C. M. ハ Greatest Common Measure ノ略デ，最大公約數ノ義デアルガ，代數デハ最大公約數トハ幾ツカノ整式ニ共通ナ最高次ノ因數ヲイフノデアルカラ，**最高共通因數**（因子）Highest Common Factor トイフベキデアル。併シ現在デハ**最高共通因數**トハイハナイデ，**最大公約數**トイツテキルカラソノ略號モ G. C. M. ヲトツタ。

問 3　最小公倍數ヲ考ヘサセルタメデアル。

第三章　最大公約數及最小公倍數

40. 最大公約數及最小公倍數

問 1　次ノ各組ノ數ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ言へ.

$$(24,\ 60),\qquad (15,\ 40,\ 75)$$

問 2　次ノ三式ヲ同時ニ割切ル式ヲ求メヨ.

$$a^3bc^2,\qquad a^2b^3,\qquad a^2b^2c^2$$

上ノ三式ヲ同時ニ割切ル式ハ

$a,\ a^2,\ b,\ ab,\ a^2b$　デアツテ,此ノ中デ次數ノ最モ高イノハ a^2b デアル.

二ツ以上ノ整式ヲ同時ニ割切ル整式ヲソレ等ノ整式ノ公約數トイヒ,公約數ノ中デ次數ノ最モ高イモノヲ最大公約數(G.C.M.)トイフ.

問 3　次ノ二式デ同時ニ割切ルコトノ出來ル式ヲ言へ.

$$2x^2y^3,\qquad 3x^3y^3$$

二ツ以上ノ式デ,同時ニ割切ルコトノ出來ル式ヲソレ等ノ式ノ**公倍數**トイヒ,公倍數ノ中デ次數ノ最モ低イモノヲ**最小公倍數**(L.C.M.)トイフ。

例一　$5x^2y^3z^4$, $-15xy^2$, $10x^3y^3z^2$　ノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メヨ。

解　$5x^2y^3z^4$, $-15xy^2$, $10x^3y^3z^2$ ノ數係數ト各文字因數ノ G.C.M., L.C.M. ヲ求メルト

		G.C.M.	L.C.M.
數係數		5	30
文字因數	x	x	x^3
	y	y^2	y^3
	z		z^4
三式ヲ通ジテ		$5xy^2$	$30x^3y^3z^4$

答　G.C.M. $5xy^2$; L.C.M. $30x^3y^3z^4$

注意　代數式ノ最大公約數及ビ最小公倍數ハ係數ニハ無關係デアルガ,普通與式ノ數係數ノ絕對値ノ最大公約數又ハ最小公倍數ヲ以テソノ係數トスル。

最小公倍數モ代數デハ**最低共通因數**(因子) Lowest Common Factor トイフベキデアルガ,算術ノヤウニ**最小公倍數** Least Common Multiple トイフコトニシタ。併シ略號ハ共ニ **L. C. M.** デアル。

例一　單項式ノ場合ニ於ケル G. C. M. 及ビ L. C. M. ノ求メ方デアル。

最大公約數ヤ最小公倍數ヲ求メル基礎ニナルカラ,コノ例ハ十分徹底的ニ取扱ハレタイ。卽チ幾ツカノ單項式ノ最大公約數及ビ最小公倍數ヲ求メルニハ,

	最大公約數	最小公倍數
係　數	係數ノ G. C. M.	係數ノ L. C. M.
文字因數	共通ナ文字因數ヲ選ンデ,ソノ最低次ヲトル。	各文字因數ヲ網羅シ,共通因數ニツイテハ最高次ノモノダケヲトル。

例一ハ又算術ノヤウニシテモ求メルコトガ出來ル。

$$\begin{array}{r|rrr|l}
5x & 5x^2y^3z^4 & -15xy^2 & 10x^3y^3z^2 & \\
\cline{2-4}
y^2 & xy^3z^4 & -3y^2 & 2x^2y^3z^2 & \text{G.C.M. } \underline{5xy^2} \\
\hline
xyz^2 & xyz^4 & -3 & 2x^2yz^2 & \\
\cline{2-4}
 & z^2 & -3 & 2x & \text{L.C.M.} 30x^3y^3z^4
\end{array}$$

注意(一)　代數ノ整除トハ整式ノ商ヲ得テ剩餘ノナイコトデアル。ソシテ整式ノ係數ハ整數トハ限ラナイカラ G. C. M 及ビ L. C. M. ハ文字因數ダケニツイテイフコトデ,ソノ數係數ト符號トニハ關係シナイ。故ニ例一ノ G. C. M. モ $5xy^2$ デモヨイシ,$-5xy^2$ デモ,又 $-xy^2$ デモヨイガ,普通ハ與式ノ數係數ノ絕對値ノ G. C. M. (L. C. M.) ヲ以テ共ノ係數トスル。

注意(二)　代數式ノ G. C. M. ヤ L. C. M. ノ數値ト,與ヘラレタ代數式ノ數値ノ G. C. M. ヤ L. C. M. トハ必ズシモ一致シナイ。例ヘバ a^2b ト ab^2 トノ G. C. M. ハ ab デアツテ,$a=2$, $b=6$ ノトキノ G. C. M. ノ數値ハ 12 デアルガ,$2^2\times6$ ト 2×6^2 トノ G. C. M. ハ24デアル。

例二 因數分解スルコトノ出來タ多項式ノ例デアツテ，總テノ多項式モ此ノ例ノヤウナ形ニ導クコトガ出來タナラバ，ソノ G. C. M. ヤ L. C. M. ハ容易ニ例一ノヤウニシテ求メルコトガ出來ル。

問　題

1 G. C. M. bc
L. C. M. $a^2b^2c^2d$
2 G. C. M. $3ax^2$
L. C. M. $126a^3bx^4y$
3 G. C. M. $(x+y)(x-y)$
$=x^2-y^2$
L. C. M. $(x+y)^2(x-y)^2$
4 G. C. M. $6y(a-b)$
L. C. M. $60y^2(a-b)^2$
5 G. C. M. $6a^2b^2c(a-c)^2$
L. C. M. $72a^3b^3c^2(a-c)^4$

(1) G. C. M. xy
L. C. M. x^2y^2z
(2) G. C. M. $5a^6b^6$
L. C. M. $100a^8b^{10}c^6$
(3) G. C. M. $(a-b)^2(a+b)^3$
L. C. M. $(a-b)^3(a+b)^4$
(4) G. C. M. $a^2b^2(a+1)$
L. C. M. $a^3b^4(a+1)^3(a+2)$
$\times(a-2)^3$
(5) G. C. M. $2ax$
L. C. M. $24a^4x^3(a-b)$
$\times(b-c)(c-a)$

補充問題

(1) $6a^2b^2$, $9ab^2c$ ノ公約數ヲ悉ク求メヨ。

(2) $(a-b)(a-c)$, $(b-c)(b-a)$, $(c-a)(c-b)$ ノ G. C. M. 及ビ L. C. M. ヲ求メヨ。

(3) $(a-b)^2(b-c)(c-a)$, $(a-c)(c-b)^2(b-a)$, $(a-b)(a-c)^2(b-c)$ ノ G. C. M. 及ビ L. C. M. ヲ求メヨ。

注意 上ノ補充問題ノ(2)ニハ共通因數ハナイ。卽チ最大公約數ハ存在シナイ。

例二 $(x-1)^2(x-2)$,　$(x-2)^2(x-1)$, $(x-1)(x-2)(x-3)$ ノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メヨ。

解 $(x-1)^2(x-2)$, $(x-2)^2(x-1)$, $(x-1)(x-2)(x-3)$ ノ各式ノ括弧內ノ式ヲ一ツノモノト見レバ例一ト同樣ニシテ，ソノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メルコトガ出來ル。

卽チ　G.C.M.　$\underline{(x-1)(x-2)}$

L.C.M.　$\underline{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)}$

問　題

次ノ各式ノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メヨ。1—(5)

1 abc,　bcd,　$a^2b^2c^2$
2 $6a^2bx^4$,　$21ax^3$,　$18a^3x^2y$
3 $(x+y)^2(x-y)$,
$(x+y)(x-y)^2$,
4 $12y^2(a-b)$,
$30y(a-b)^2$
5 $12a^3b^2c(a-c)^3$,
$18a^2b^3c^2(a-c)^2$,
$24a^2b^2c^3(a-c)^4$

(1) x^2y,　xy^2,　xyz
(2) $20a^8b^{10}$,　$25a^6b^6c^6$
(3) $(a-b)^2(a+b)^3$,
$(a-b)^3(a+b)^4$
(4) $a^2b^2(a+1)(a-2)^3$,
$a^3b^4(a+1)^3(a+2)$
(5) $2ax(a-b)$,
$6a^3x^2(b-c)$,
$8a^4x^3(c-a)$

例三 $x^2-3x+2,\ x^2-5x+6,\ x^2-4x+4$ ノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メヨ。

解 各式ヲ因數ニ分解スルト

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$
$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

故ニ G.C.M. $\underline{(x-2)}$

L.C.M. $\underline{(x-1)(x-2)^2(x-3)}$

次ノ各組ノ G.C.M. 及ビ L.C.M. ヲ求メヨ。6—(8)

6 x^2-x, x^2-2x+1

7 $x^2y^2-xy^3-42y^4$, $6x^3y+18x^2y^2-108xy^3$

8 $a^4-a^2b^2$, $a^2b^2-b^4$, $a^4+2a^3b+a^2b^2$

(6) $a^2+ab-30b^2$, $a^2-2ab-15b^2$

(7) $x^2-3x-40$, $x^2+3x-10$, x^2-x-30

(8) $2a^2-4a-6$, $a^2b^2+2ab^2-15b^2$, a^2-6a+9

例三 容易ニ因數ニ分解シ得ラレル式ノ G. C. M. ト L. C. M. ヲ求メル方法デアル。

6 $x^2-x=x(x-1)$

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

G. C. M. $\underline{x-1}$

L. C. M. $\underline{x(x-1)^2}$

7 $x^2y^2-xy^3-42y^4$

$=y^2(x^2-xy-42y^2)$

$=y^2(x+6y)(x-7y)$

$6x^3y+18x^2y^2-108xy^3$

$=6xy(x^2+3xy-18y^2)$

$=6xy(x-3y)(x+6y)$

G. C. M. $\underline{y(x+6y)}$

L. C. M.

$\underline{6xy^2(x+6y)(x-3y)(x-7y)}$

8 $a^4-a^2b^2=a^2(a-b)(a+b)$

$a^2b^2-b^4=b^2(a-b)(a+b)$

$a^4+2a^3b+a^2b^2=a^2(a+b)^2$

G. C. M. $\underline{a+b}$

L. C. M.

$\underline{a^2b^2(a-b)(a+b)^2}$

(6) $a^2+ab-30b^2$

$=(a-5b)(a+6b)$

$a^2-2ab-15b^2$

$=(a+3b)(a-5b)$

G. C. M. $\underline{a-5b}$

L. C. M.

$\underline{(a+3b)(a-5b)(a+6b)}$

(7) $x^2-3x-40=(x-8)(x+5)$

$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$

$x^2-x-30=(x-6)(x+5)$

G. C. M. $\underline{x+5}$

L. C. M.

$\underline{(x+5)(x-2)(x-6)(x-8)}$

(8) $2a^2-4a-6=2(a-3)(a+1)$

$a^2b^2+2ab^2-15b^2$

$=b^2(a-3)(a+5)$

$a^2-6a+9=(a-3)^2$

G. C. M. $\underline{a-3}$

L. C. M,

$\underline{2b^2(a-3)^2(a+1)(a+5)}$

補充問題

(1) x^2-1 ト x^2-3x+2 トヲ同時ニ零トスル x ノ値如何。又 x^2-1 ハ 0 トスルガ, x^2-3x+2 ヲ 0 トシナイ x ノ値如何。

(2) x^2-x ガ 2 ノトキ, $x+x^2$ ガ 6 トナルヤウナ x ノ値ヲ見出セ。

注意 x^2-x-2 ト x^2+x-6 トノ G. C. M. ヲ考ヘヨ。

第四章　二次方程式

41. 二次方程式

例 因數分解ニヨル二次方程式ノ解法デアル。

因數分解ニヨツテ二次方程式ヲ解クニハ,

(イ) 總テノ項ヲ左邊ニ集メ, 右邊ヲ0トスル。

(ロ) 左邊ヲ因數ニ分解スル。

(ハ) 各因數.(xヲ含ム) ヲ 0 ニ等シトオイタ一次方程式ヲ解ケバヨイノデアル。故ニ因數分解シタ結果 $4(x-1)(x-5)=0$ ノヤウニナレバ4ハ0デナイカラ $x-1=0$ 叉ハ $x-5=0$ デナケレバナラナイ。故ニ $x-1=0$ ト $x-5=0$ ノ二ツノ一次方程式ヲ解ケバヨイ。

因數分解ヲ方程式解法ニ適用スルコトハ興味ノアルコトデアリ, 又因數分解ノ價値ヲ深クスル。特殊ナ三次方程式ナドハ因數分解ニヨツテ簡單ニ解キ得ルモノモアルガ, 本書デハ因數分解ヲ唯單ニ演算ノ基礎トシテノミノ取扱ヒトシタノデ, 三次方程式ハ一切抜キニシタ。

1 $x^2-9x+14=0$
$(x-2)(x-7)=0$ 答 $\underline{2, 7}$

2 $x^2-4=0$
$(x-2)(x+2)=0$
答 $\underline{2, -2}$

3 $y^2-4y-12=0$
$(y-6)(y+2)=0$
答 $\underline{6, -2}$

4 $x^2-3x-40=0$
$(x-8)(x+5)=0$
答 $\underline{8, -5}$

(1) $x^2-6x+8=0$
$(x-2)(x-4)=0$
答 $\underline{2, 4}$

(2) $x^2-1=0$ 答 $\underline{1, -1}$

(3) $n^2-3n-10=0$
$(n-5)(n+2)=0$
答 $\underline{5, -2}$

(4) $y^2-15y-54=0$
$(y-18)(y+3)=0$
答 $\underline{18, -3}$

第四章　二次方程式

41. 二次方程式

例 $x^2-5x+4=0$ ヲ解ケ。

解 $$x^2-5x+4=0$$

此ノ左邊ヲ因數ニ分解スルト

$$(x-1)(x-4)=0$$

ソレ故 $x-1=0$ カ $x-4=0$ カデアル。

從ツテ $x=1$ 又ハ $x=4$　　答 $\underline{1, 4}$

驗 $x=1$ ナラバ $x^2-5x+4=1^2-5\times1+4=0$

$x=4$ ナラバ $x^2-5x+4=4^2-5\times4+4=0$

方程式ノ總テノ項ヲ左邊ニ集メタ式ガ未知數ニツイテ二次式トナルヤウナ方程式ヲ**二次方程式**トイフ。

本例ハ一元ナル故**一元二次方程式**デアル。

因數分解ニヨツテ次ノ一元二次方程式ヲ解ケ。

1 $x^2-9x+14=0$

2 $x^2-4=0$

3 $y^2-4y-12=0$

4 $x^2-3x=40$

(1) $x^2-6x+8=0$

(2) $x^2=1$

(3) $n^2-3n-10=0$

(4) $y^2-15y=54$

ニュートン (1642—1727)

$(a+b)^2$ トカ $(a+b)^3$ ノヤウナ簡單ナ計算ハ既ニ紀元前ニ知ラレタコトデアルガ,二項式ノ何乘デモコレヲ展開スルコトガ出來テ如何ナル式トナルカトイフヤウナ定理ハニュートンノ發見シタモノデアル。

ニュートンハ英國リンコルンシャー州ノ一寒村ノ農夫ノ子デアル。幼時ハ虚弱デアリ臆病デアツタノデ,小學校ノ時代ニハ餘リ成績モ振ハナカツタガ,20歳ノ時,ケンブリッヂ大學ニ入ルニ到ツテソノ才能ヲ現ハシ,殊ニ數學ニ於テソノ天才ヲ發揮シ,當時有名ナ數學者デカルト,ヴィータ,ワリス等ノ著書ヲ悉ク了解シタトイフコトデアル。二項定理ヤ微分學積分學ヲ發見シ,方程式論ヲ著シテ忽チ世界ノ大數學者トナリ,又物理學ニ於ケル萬有引力ノ法則ヲ發見シテ,當時世界第一ノ科學者ト仰ガレルニ到ツタ。

ニュートン Sir Isaac Newton 傳

ニュートンハ1642年12月25日リンコルンシヤーノウールスソルプトイフ片田舍ノ農家ノ子トシテ生マレ,1727年3月20日ロンドンデ死ンダ。

彼ハグランサムノ小學校ニ通學シテヰタガ,其ノ頃ハ餘リ成績モ振ハナカツタ。或ル時ニュートンヨリ成績ノヨイ生徒ノタメニ腹ヲ蹴ラレテ,ソレカラ發奮遂ニ首席トナツタトイフ。併シ乍ラ彼ガ其ノ天分ヲ發揮シタノハ1660年ケンブリツヂノトリニティー大學ニ入學シテカラデアル。ニュートンハ生マレル少シ前ニ父ヲ失ヒ,タメニ小學校卒業後ハ家業ノ手傳ヲスル筈デアツタガ,ニュートンガ餘リニ學問ニ熱心デアルノヲ見タ母ハ遂ニ叔父ノ助力ヲ得テケンブリツヂヘト通ハセタノデアルガ,彼ハ大學デハ免費生トナツタ。

ニュートンハ偉大ナ直覺力ヲ持ツテヰテ,ユークリッドノエレメンツナドハ一讀シテ其ノ全部ヲ了解シタトイフコトデアル。デカルトノ解析幾何ヤケプレルノ光學ナドニハ特ニ興味ヲ以テ之ヲ讀破シタトイフ。彼ノ獨創的研究ハ1664年頃カラ開始サレ,直チニ二項定理ヲ發見シタ。時ハ年僅カニ23歳デアツタトイフ。

彼ノ研究ハ頗ル多方面ニ渉ツテヰタガ,就中

微積分學ノ發見(彼ノ死後9年ヲ經テ發表サレタ)
萬有引力ノ法則ノ發見(有名ナプリンシピヤノ中ニアル)
級數論
方程式論

ガ有名デアル。又二元一次方程式ノ代入法ニヨル解法モ指數ニ一般ノ文字ヲ使用シタノモニュートンノ發見デアルトイハレテヰル。彼ハ又大ノ謙遜家デ(自分自ラヲ省ミレバ丁度海岸デ,ソコココカラ比較的滑カナ又美シイ小石ヤ貝殼ヲ探シテ遊ンデヰル子供ノヤウナモノデ,眞理ノ大海ガ何モ發見サレナイデ,私ノ前ニ積ツテヰル。)ト云ツタトイフ。

ニユートン (1642—1727)

$(a+b)^2$トカ$(a+b)^3$ノヤウナ簡單ナ計算ハ既ニ紀元前ニ知ラレタコトデアルガ,二項式ノ何乘デモコレヲ展開スルコトガ出來テ如何ナル式トナルカトイフヤウナ定理ハニユートンノ發見シタモノデアル。

ニユートンハ英國リンコルンシャー州ノ一寒村ノ農夫ノ子デアル。幼時ハ虚弱デアリ臆病デアツタノデ,小學校ノ時代ニハ餘リ成績モ振ハナカツタガ,20歲ノ時,ケンブリッヂ大學ニ入ルニ到ツテソノ才能ヲ現ハシ,殊ニ數學ニ於テソノ天才ヲ發揮シ,當時有名ナ數學者デカルト,ヴィータ,ワリス等ノ著書ヲ悉ク了解シタトイフコトデアル。二項定理ヤ微分學積分學ヲ發見シ,方程式論ヲ著シテ忽チ世界ノ大數學者トナリ,又物理學ニ於ケル萬有引力ノ法則ヲ發見シテ,當時世界第一ノ科學者ト仰ガレルニ到ツタ。

ニユートン Sir Isaac Newton 傳

ニユートンハ1642年12月25日リンコルンシヤーノウールスソルプトイフ片田舍ノ農家ノ子トシテ生マレ,1727年3月20日ロンドンデ死ンダ。

彼ハグランサムノ小學校ニ通學シテキタガ，共ノ頃ハ餘リ成績モ振ハナカツタ。或ル時ニユートンヨリ成績ノヨイ生徒ノタメニ腹ヲ蹴ラレテ，ソレカラ發奮遂ニ首席トナツタトイフ。併シ乍ラ彼ガ其ノ天分ヲ發揮シタノハ1660年ケンブリツヂノトリニティー大學ニ入學シテカラデアル。ニユートンハ生マレル少シ前ニ父ヲ失ヒ，タメニ小學校卒業後ハ家業ノ手傳ヲスル筈デアツタガ，ニユートンガ餘リニ學問ニ熱心デアルノヲ見タ母ハ遂ニ叔父ノ助力ヲ得テケンブリツヂヘト通ハセタノデアルガ，彼ハ大學デハ免費生トナツタ。

ニユートンハ偉大ナ直覺力ヲ持ツテキテ，ユークリッドノエレメンツナドハ一讀シテ共ノ全部ヲ了解シタトイフコトデアル。デカルトノ解析幾何ヤケプレルノ光學ナドニハ特ニ興味ヲ以テ之ヲ讀破シタトイフ。彼ノ獨創的研究ハ1664年頃カラ開始サレ，直チニ二項定理ヲ發見シタ。時ハ年僅カニ23歲デアツタトイフ。

彼ノ研究ハ頗ル多方面ニ涉ツテキタガ，就中

微積分學ノ發見（彼ノ死後9年ヲ經テ發表サレタ）

萬有引力ノ法則ノ發見（有名ナプリンシピヤノ中ニアル）

級數論

方程式論

ガ有名デアル。又二元一次方程式ノ代入法ニヨル解法モ指數ニ一般ノ文字ヲ使用シタノモニユートンノ發見デアルトイハレテキル。彼ハ又大ノ謙遜家デ（自分自ラヲ省ミレバ丁度海岸デ，ソコココカラ比較的滑カナ又美シイ小石ヤ貝殼ヲ探シテ遊ンデキル子供ノヤウナモノデ，眞理ノ大海ガ何モ發見サレナイデ，私ノ前ニ積ツテキル。）ト云ツタトイフ。

二次方程式 Quadratic equation ハ第二學年ニ於ケル教材ノ中デ，最モ重要ナモノノ一ツデアル。今マデ二次方程式ノ解法ヲ導クタメニ，根數及ビ根式ノ計算法モ相當ニ課シタノデアルガ，ソノ中ニハ不必要ナモノモアリ又困難ナモノモアツタ。ソコデ二次方程式解法ニ必要ナ平方根ダケヲ授ケ，三乘根，四乘根等ハ一切授ケナイコトトシタ。ソシテ平方根ニツイテモ，ソノ複雜ナ計算ハ悉ク下卷ノ基本教材ノ復習及ビ補充ニ讓ルコトトシタ。

42. 純二次方程式ト數ノ平方根

二次方程式ノ中デ簡單ニ因數ニ分解サレルモノハ，207頁デ述ベタ。ソコデ因數分解ニヨラナイ一般ノ解法ヲ導クタメニ本書デハ

（1） 純二次方程式 Pure Quadratic Equation $ax^2=c$ ノ解法ニヨツテ平方根ヲ導キ平方根ノ計算法ヲ授ケ，次デ

（2） 完全平方ヲ作ルコトニヨツテ解ク法ヲ授ケテ，

（3） 根ノ公式

ヘト導クコトニシタ。從ツテ極メテ圓滑ニ敎授シ得ルモノト信ズル。

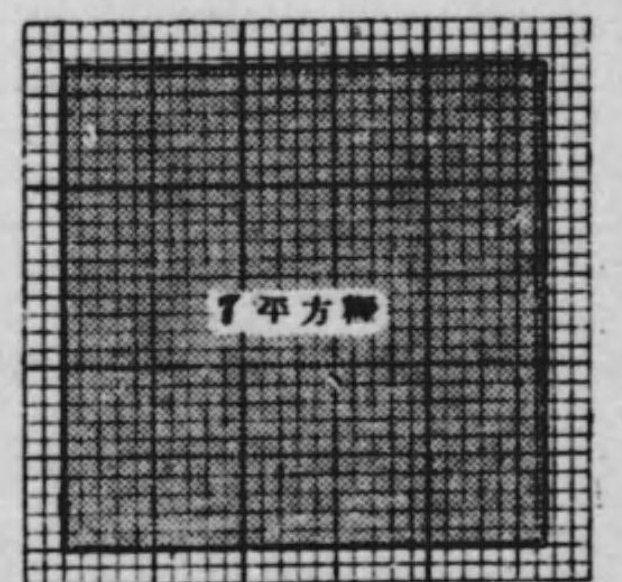
二次方程式ノ歷史ニツイテ

二次方程式ヲ最初ニ取扱ツタノハ現在殘ツテキルモノカラ考ヘテ，大古埃及ニ於テデアル。埃及デハ，書物ハ沼地ニ繁ル植物「パピルス」ノ葉ヲ用ヒテ書イテキタタメ，現在種々ノ「パピルス」ニ書カレタ書物ガ殘ツテキル。數學ノ書物デ最モ有名ナノハアーメス Armes ノ

42. 純二次方程式ト數ノ平方根

問 1 面積ガ100平方米ノ正方形ノ土地ノ一邊ノ長サハ何米カ。

問 2 廣サガ$\frac{4}{9}$平方米ノ正方形ノ布ヲ作ルニハ一邊ノ長サヲ何程ニスレバヨイカ。



問 3 面積ガ7平方糎ノ正方形ノ一邊ノ長サハ何程カ。

問1,問2デハ一邊ノ長サヲ$x\,m$，問3デハ$x\,cm$トスレバ正方形ノ面積ヲ表ハス數ハ何レモx^2デアルカラ,夫々次ノ方程式ガ出來ル。

$$\text{(一)}\ x^2=100,\qquad \text{(二)}\ x^2=\frac{4}{9},\qquad \text{(三)}\ x^2=7$$

此等ハ何レモ一次ノ項ノナイ二次方程式デアルカラコレヲ**純二次方程式**トイフ。

問1, 問2ノ答ハ夫々整數ト分數トデ正確ニ表ハサレルガ,問3ノ答ハ今マデニ知ツテキル整數,小數,分數等デハ正確ニ表ハスコト

ガ出來ナイ。ソレ故其ノ値ヲ知ラウトスルニハ小數ノ或ル桁マデヲ近似値トシテ取ルヨリ他ニ仕方ガナイ。此ノ値ノ小數第三位マデノ近似値ハ或ル方法デ求メルト2.646 *cm* デアル。卽チ

$(2.646)^2$ ハ略7ニ等シイ。

問 4　$(-10)^2$, $(-\frac{2}{3})^2$, $(-2.646)^2$ ハ夫々何程カ。

前頁ノ問デハ一邊ノ長サハ正數デアルカラ答ハ各唯一通リシカ得ラレナイガ(一),(二)(三)ノ方程式ノ根,卽チ二乘スレバ,100, $\frac{4}{9}$, 7 トナル數ハ夫々10ト-10, $\frac{2}{3}$ト$-\frac{2}{3}$, 約2.646ト-2.646ノ二ツ宛アル。

二乘スレバ或ル正數トナル數ハ常ニ二ツアッテ,其ノ二數ハ絶對値等シク符號ガ反對デアル。

此ノ二數ヲ其ノ正數ノ**平方根**トイフ。

例ヘバ100ノ平方根ハ10ト-10, $\frac{4}{9}$ノ平方根ハ$\frac{2}{3}$ト$-\frac{2}{3}$, 7ノ平方根ノ近似値ハ 2.646ト-2.646トデアル。

書イタトイハレルリンド・パピルス Rhind Papyrus デアルガ,其ノ他ニモ例ヘバベルリン・パピルス Berlin Papyrus ナドモアル。其ノベルリン・パピルスノ中ニハ次ノヤウナ問題ガアツテ,コレガ世界デ最初ノ二次方程式（聯立）デアルマイカトイハレテヰル。

"To divide 100 square cubits into two squares the sides of which are in the ratio $1:\frac{3}{4}$."

"100平方「キユービツト」ヲ二ツノ正方形ニ分チ,其ノ二ツノ正方形ノ一邊ノ比ヲシテ $1:\frac{3}{4}$ ナラシメヨ。"

デ,コレヲ方程式デ示スト

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=100\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x:y=1:\frac{3}{4}\cdots\cdot\text{又ハ}\,y=\frac{3}{4}x\cdots\cdot(2) \end{array}\right.$$

此ノ解法ガ又極メテ面白イモノデアル。卽チ

$x=1$ ト假定スレバ,(2) カラ $y=\frac{3}{4}$

故ニ $x^2+y^2=\frac{25}{16}$　然ルニ $x^2+y^2=100$ デアルカラ $\frac{25}{16}$ ヲ100ニスルタメニハソノ64倍ヲシナケレバナラナイ。故ニ眞ノ x, y ノ値ハ夫々 $1, \frac{3}{4}$ ノ8倍デナケレバナラナイ。　答 $x=8,\ y=6$

次ニピタゴラス Pythagoras ナドハ二ツノ平方數ノ和ガ又一ツノ平方數トナルヤウナ不定方程式 $x^2+y^2=z^2$ ヲ取扱フコトニヨツテ,

$$n^2+\left\{\frac{1}{2}(n^2-1)\right\}^2=\left\{\frac{1}{2}(n^2+1)\right\}^2$$
$$(2n)^2+(n^2-1)^2=(n^2+1)^2$$

ナル公式ヲ得タノデアル。

アルキメデス Archimedes ニ至ツテハ $t^2-4729494u^2=1$ トイフペル Pell ノ不定方程式ヲ解イタトイフコトデアル。

一元二次方程式 $ax^2+bx=c$ (a, b, c ハ悉ク正) ヲ解イタ最初ノ人

ハ恐ラクヘロン Heron デアルマイカト云ハレテキル。ヘロンハ凡ソ紀元50年頃活動シタ人デ，正方形ノ面積ト周トノ和ヲ與ヘテ正方形ノ一邊ヲ求メタノデアル。$x^2+4x=896$ ヲ解イテ更ニ後ニ一般ニ

$ax^2+bx=c$（a, b, c ハ悉ク正）ヲ解イテ

$$x=\frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}$$

ヲ得タ。

然ルニギリシヤ代數學ノ修辭的代數學 Rhetric algebra ヲ打破シテ記號的代數學 Symbolic algebra ヘト方向ノ轉換ヲ圖ツタ代數學ノ鼻祖トモイフベキ，彼ノディオファンタス Diophantus ハ

$$mx^2+px=q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$mx^2=px+q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$mx^2+q=px \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ノ三種ノ方程式ヲ解イテ夫々次ノ根ヲ得タ。

(1) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}p^2+mq}-\frac{1}{2}p}{m}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}p^2+mq}+\frac{1}{2}p}{m}$

(3) $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}p^2-mq}+\frac{1}{2}p}{m}$

上ノ (1), (2), (3) ノ方程式ハ今日ノ $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ a ハ常ニ正ト假定シテソノ一般性ハ保タレルカラ，b, c, ガ正負ノ場合ヲ考フレバ，a, b, c 悉ク正ナル場合ガナイダケデ後ハ總テノ場合ヲ盡シテキル。蓋シ當時ハ未ダ負根ヲ認メナイ時代デアルカラ $ax^2+bx+c=0$ ニ於テ，a, b, c 總テガ正ノトキハ，正根ヲ有シナイ爲，初メカラ考ヘナカツタモノデハアルマイカ。シテ見ルトディオファンタス ハ當時ニ於ケルアラユル場合ヲ網羅シテ解イタモノトイフベキデアル。彼ハ

$$325x^2=3x+18 \quad カラ \quad x=\frac{78}{325}=\frac{6}{25}$$

$$84x^2+7x=7 \quad カラ \quad x=\frac{1}{4}$$

ヲ得タ。

何レニシテモ根ハ唯一ツダケシカ考ヘテハキナイ。

注意　二乘シテ負數トナルヤウナ數ハ正數,負數ノ範圍内ニハナイ。

一ツノ正數 a ノ平方根ノ中ノ正數ノ方ヲ $\sqrt{a}$ デ表ハシテ**平方根 a** ト讀ミ,負數ノ方ハ $-\sqrt{a}$ デ表ハシテ**マイナス平方根 a** ト讀ム。又 $\sqrt{}$ ヲ**根號**トイフ。

例ヘバ 100 ノ平方根ノ中,正數ノ方ハ 10 デアルカラ $\sqrt{100}=10$　故ニ　$-\sqrt{100}=-10$

同様ニ $\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2}{3}$　　$-\sqrt{\dfrac{4}{9}}=-\dfrac{2}{3}$

$\sqrt{7}\ =2.646$　　$-\sqrt{7}\ =-2.646$

注意「100ノ平方根」ト言ヘバ 10 ト -10 トヲ指シ,$\sqrt{100}$ ハ 100 ノ二ツノ平方根ノ中ノ正數ノ方卽チ 10 ダケヲ表ハス。

從ツテ a ガ或ル正數ヲ表ハストキ,方程式

$$x^2=a$$

ノ正根ハ $\sqrt{a}$ デ,負根ハ $-\sqrt{a}$ デアル。

コレヲ複(符)號ヲ用ヒテ「此ノ方程式ノ根ハ $\pm\sqrt{a}$ デアル」ト言ツテモヨイ。

問 5　次ノ各方程式ノ根ヲ複號ヲ用ヒテ言ヘ。

$$x^2=9,\qquad x^2-400=0,\qquad x^2=2\frac{14}{25}$$

數ノ平方根ノ中ノ正ノ方ヲ求メルコトヲ其ノ數ヲ**平方ニ開ク**トイヒ，ソノタメニ行フ計算ヲ**開平**トイフ。

平方根ガ整數，小數，分數等デ正確ニ表ハサレル數ハ**平方ニ開キ切レル**トイヒ，サウデナイモノハ**開キ切レナイ**トイフ。

25，$\frac{4}{9}$ 等ハ平方ニ開キ切レ，17 ハ平方ニ開キ切レナイ。一般ノ正數ノ開平法ハ 219 頁以後デ述ベル。本書ニハ卷末ニ列數字ノ桁數ガ餘リ多クナイ正ノ整數ノ正ノ平方根(開キ切レナイ數ニ對シテハ小數第三位マデノ近似値)ノ表ガ附ケテアル。

例一　$\sqrt{545}$ ノ値ヲ卷末ノ表ニヨッテ求メヨ。

解　表中，數ノ行ノ所デ 545 ヲ求メ，ソノ列デ平方根ノ行ノ所ヲ見テ 23.345 ヲ得ル。

答　23.345

注意　[545 ノ平方根]ヲ求メルノデアルナラバ ±23.345 ト答ヘナケレバナラヌ。

平方根號 $\sqrt{}$ ニツイテ

正ノ數 a ノ平方根ニハ正ト負トノ二ツガアツテ，ソレヲ表ハスニハ夫々 $+\sqrt{a}$ 及ビ $-\sqrt{a}$ ヲ以テスル。併シ $+\sqrt{a}$ ノ前ノ ＋ ハ通常省イテ唯單ニ $\sqrt{a}$ デ表ハシコレヲ平方根 a（又ハルート a 等）トイツテ，a ノ平方根トハイハナイ。a ノ平方根ノ中，正ノミヲ表ハスモノトスル。謂ハバ算術的平方根ヲ表ハスモノデアル。

一般ニ $\sqrt[n]{a}$ ハ a ノ算術的 n 乘根ヲ表ハス規約デアル。

コレニ對シテ我ガ國ノ數學者ノ中ニハ $\sqrt{}$ ハ總テノ平方根ヲ表シ，上ノ規約ハ撤廢シタ方ガヨイトイフ人モアルガ，コレハ實際教授ニ當ルト非常ニ困ルコトデアル。高木博士ノ高等教育代數學170頁ニ於テ $x+\sqrt{x-4}=6$ ヲ解イテ $x=5$，$x=8$ トニツヲ共ニ採用サレテ，附加シテ

「元來 $\sqrt{x-4}$ ハ $x-4$ ノ平方根ノ二ツノ値ノ中，必ズ正ナルモノヲ表ハスト限ラレタルニ非ズシテ，平方シテ始メテ $x-4$ トナルモノヲ表ハセルナリ」ト。

例一　卷末ノ表ノ使用ノ例デアル。

卷末ニハ二種類ノ表ガアル。即チ表ノ第一頁ノ平方，立方，平方根，立方根ノ表（コレヲ第一表ト名附ケル）ト，第二頁カラ第五頁マデ（平方根表 1,2,3,4）ノ平方根表（コレヲ第二表ト名附ケル）トデアル。

第一表ハ 1 カラ 100 マデノ數ニツイテノ平方，立方，平方根，立方根ノ表デ．簡單デハアルガ相當ニ活用サレル表デアル。

第二表ハ 101 カラ1100マデノ數ノ平方根ダケノ表デ，第一表，第二表ヲ通ジテ 1 カラ1100マデノ數ノ平方根ガ小數第三位マデ求メテアル。例一ノ $\sqrt{545}$ ハ勿論第二表ニアル。

表ノ使用ニツイテ

表ノ使用ニ慣レルトイフコトハ我等ノ日常生活ニ最モ必要ナコトデアル。學校數學ガ徒ニ受驗數學ニ沒頭シテ，數學ノ持ツ大キナ使命ヲ忘レテハナラナイ。我々ハ器械的計算ヲ次ノヤウニ分類シテ考ヘル。

1. 暗算
2. 筆算
3. 器械ニヨル計算（計算尺，算盤等）
4. 表ニヨル計算（平方，立方，平方根，立方根ノ表，複利表，對數表等）
5. 圖表ニヨル計算

例二 方程式ノ無理根ニツイテ，

方程式ヲ解イテソノ結果無理數トナツタトキ，多クノ人ハソノママヲ以テ答トシテキル。併シ $\sqrt{a}$ ノヤウニ根號内ガ文字ナラバ止ムヲ得ナイガ，サモナケレバ近似値ヲ以テ答ヘルベキデアル。無理數ノママノ答デハ根ノ實感ガ湧カナイシ，又非實用的デアル。尤モ無理方程式ノ根ノ檢査ナドノ時ハ無理數ノママ檢査シ，然ル後無緣根ヲ除イタモノニツイテ近似値デ答ヘルノデアル。

問　題

5 $\sqrt{91}=\underline{9.539}$
$\sqrt{200}=\underline{14.142}$

6 $\sqrt{1023}=\underline{31.984}$
$\sqrt{389}=\underline{19.723}$

7 $x^2-15=0$
$\sqrt{15}=\underline{3.872}$

8 $x^2=3$
$\sqrt{3}=\underline{1.732}$

9 $x^2-123=0$
$\sqrt{123}=\underline{11.091}$

10 $y^2-577=0$
$\sqrt{577}=\underline{24.021}$

(5) $\sqrt{679}=\underline{26.058}$
$\sqrt{13}=\underline{3.605}$

(6) $\sqrt{254}=\underline{15.937}$
$\sqrt{425}=\underline{20.616}$

(7) $x^2-19=0$
$\sqrt{19}=\underline{4.358}$

(8) $x^2=431$
$\sqrt{431}=\underline{20.761}$

(9) $x^2-700=0$
$\sqrt{700}=\underline{26.458}$

(10) $y-101=0$
$\sqrt{101}=\underline{10.050}$

例二 方程式 $x^2-331=0$ ヲ解ケ。

解

$$x^2-331=0$$
$$x^2=331$$
$$x=\pm\sqrt{331}$$

計算ヲ此處デ止メテ此ノ方程式ノ根ハ$\pm\sqrt{331}$デアルト答ヘルコトモアルガ,コノママデハソノ實際ノ値ヲ知ルコトガムヅカシイカラ,例一ノヤウニ卷末ノ表カラソノ近似値ヲ求メテ±18.193ヲ答トスル方ガヨイ。

答 $\underline{\pm18.193}$

問　題

次ノ數ノ値ヲ卷末ノ表ニヨツテ求メヨ。5—(6)

5 $\sqrt{91}$,　$\sqrt{200}$
6 $\sqrt{1023}$,　$\sqrt{389}$

(5) $\sqrt{679}$,　$\sqrt{13}$
(6) $\sqrt{254}$,　$\sqrt{425}$

次ノ方程式ヲ解イテ,根ノ近似値ヲ求メヨ。7—(10)

7 $x^2-15=0$
8 $x^2=3$
9 $x^2-123=0$
10 $y^2-577=0$

(7) $x^2-19=0$
(8) $x^2=431$
(9) $x^2-700=0$
(10) $y^2-101=0$

問6 次ノ數ノ値ヲ言へ。

$\sqrt{4}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{40000}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{2500}$, $\sqrt{0.25}$;

$\sqrt{7}=2.646$, $\sqrt{700}$, $\sqrt{70000}$, $\sqrt{0.07}$;

$\sqrt{95}=9.747$, $\sqrt{9500}$, $\sqrt{950000}$, $\sqrt{0.95}$, $\sqrt{0.0095}$

上ノ問デ分ルヤウニ數ガ100倍,10000倍トナレバ平方根(正)ハ10倍,100倍トナリ,數ガ$\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$トナレバ平方根ハ$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$トナル。卽チ

列數字ガ同一デ小數點ノ位置ガ偶數桁ダケ異ナル數ノ平方根ハ唯小數點ノ位置ガ異ナルダケデ列數字ハ皆同一デアル。

例三 $\sqrt{4.58}$ ノ近似値ヲ求メヨ。

解 4.58ハ表ノ數ノ中ニハナイ。

併シ4.58ハ458ノ$\frac{1}{100}$デアルカラ

$\sqrt{4.58}$ハ$\sqrt{458}$ノ$\frac{1}{10}$デアル。

表ニヨリ $\sqrt{458}=21.401$

ソレ故 $\sqrt{4.58}=\underline{2.1401}$……答

表中ニナイ數ノ平方根(正)ヲ表ニヨツテ求メルコト。

表ノ中ノ數カラ直チニ得ラレル平方根ハ容易ニ讀ミ得ルノデアルガ,表中ニナイ數ノ平方根ハ如何ニシテ求メルカ。コレガ實ハ表ヲ活用スルニ重要ナコトデアル。例三ハソノ意味デ出シタノデアル。表中ニナイ數ノ平方根ヲ讀ムニハ茲ニ二ツノ階段ニ分ケテ教授スルヲ要スル。

(1) 或ル數ト其ノ平方根ノ位取ノ關係

(2) 比例部分ノ法則

トガ卽チソレデアル。

或ル數ト其ノ平方根ノ關係ハ問6ヲ取扱フコトニヨツテ發見的ニ導クコトガ出來テ其ノ結果ニヨツテ例三ヲ課スルノデアル。

比例部分ノ理ハ次頁デ說明シ,ソノ實際ノ方法ハ更ニ其ノ次ノ頁デ說明スルノデアルガ,此ノ比例部分ノ理ハ,對數表,三角函數ノ眞數表,逆數表等殆ド總テノ表ニ通ジテ用ヒラレル方法デ極メテ便利ナモノデアル。

比例部分ノ理

215頁ノ圖ハx軸上ニ$\sqrt{N}$ヲ取リy軸上ニNヲトツタモノデ,コレヲ方程式デ示スト$\sqrt{y}=x$トナル。

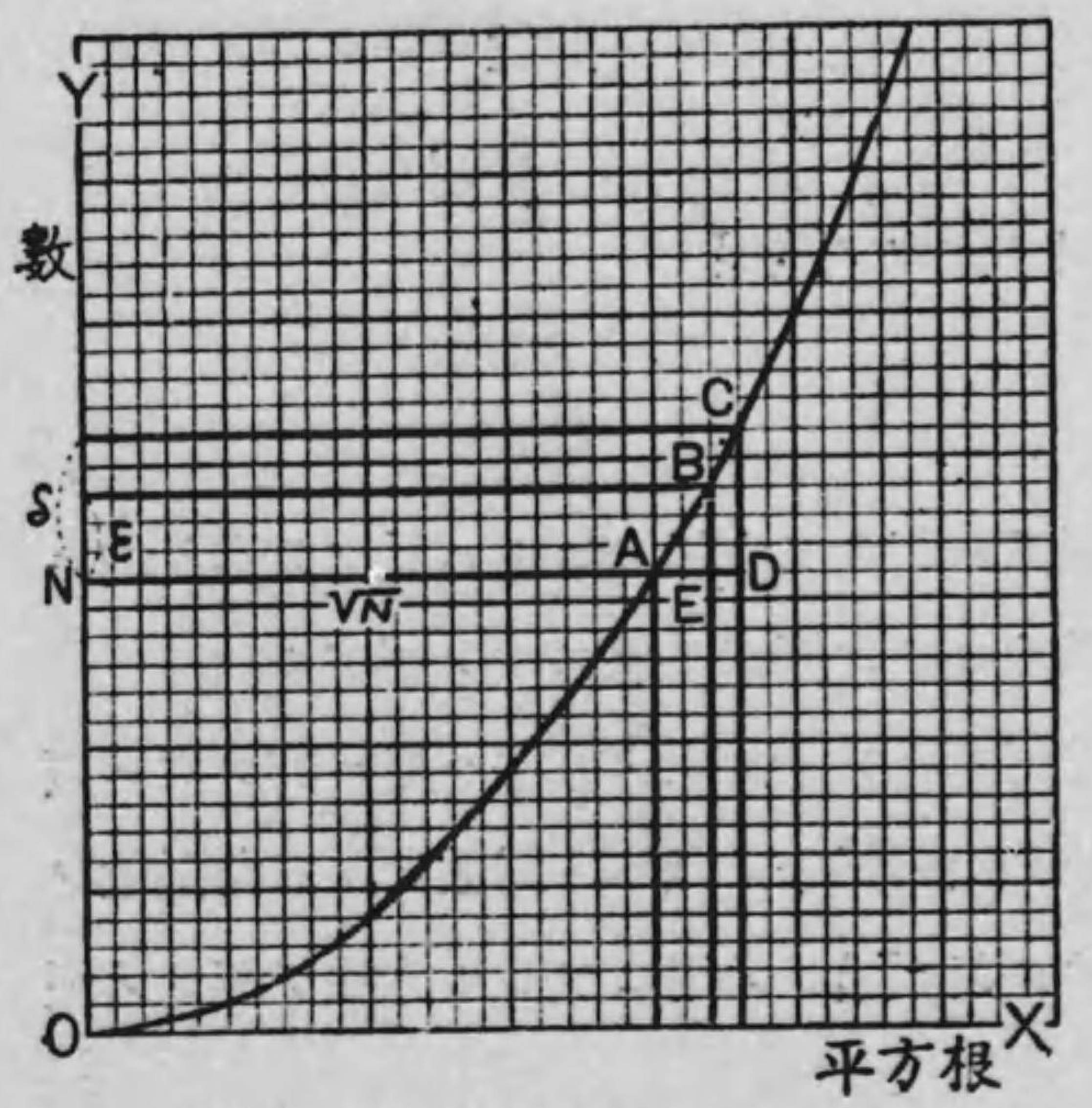
茲ニx, yヲ共ニ正ノ數ト限定シテ上ノ方程式ヲ$y=x^2$ノヤウニ變形スレバコレハ標準拋物線ヲ示スモノデアルガ,勿論與ヘラレタ條件カラグラフハ第一象限内ノミニシカナイ。

故ニ勿論コノグラフハ曲線デアツテ直線デハナイガ,其ノ一小部分ハ直線デアルト見做スノデアル。コレガ比例部分ノ法則デアツテ,コレヲ式ヲ用ヒテ證明スルコトハ相當ニ困難ナコトデ,勿論初等數學ノ範圍ヲ超エタコトデアルガ,今參考ノタメニ述ベヨウ。

今三ツノ數ヲトリコレヲ $N, N+\varepsilon, N+\delta$ トスル。玆ニ ε ヤ δ ハ N ニ比シテ小サイ數トスル。ソレラノ三ツノ數ノ平方根ハ夫々 $\sqrt{N}, \sqrt{N+\varepsilon}, \sqrt{N+\delta}$ デアツテ，吾々ハ

$$\frac{\varepsilon}{\delta}=\frac{\sqrt{N+\varepsilon}-\sqrt{N}}{\sqrt{N+\delta}-\sqrt{N}}$$

ヲ證明スレバヨイノデアル。



ソノ幾何學的意義ハ次ノ通リデアル。

$$AD=\sqrt{N+\delta}-\sqrt{N}$$

$$AE=\sqrt{N+\varepsilon}-\sqrt{N}$$

曲線 ABC ヲ直線ト見テ

$$\triangle AEB \backsim \triangle ADC$$

$$\therefore\ \frac{BE}{CD}=\frac{AE}{AD}$$ デアル。

コレヲ代數式ノ變化デ示スト，

$$\frac{\sqrt{N+\varepsilon}-\sqrt{N}}{\sqrt{N+\delta}-\sqrt{N}}=\frac{\sqrt{N}\left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{N}}{\sqrt{N}\left(1+\frac{\delta}{N}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{N}}=\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(1+\frac{\delta}{N}\right)^{\frac{1}{2}}-1}$$

然ルニ

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{N}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\varepsilon^2}{N^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{\varepsilon^3}{N^3}-\cdots\cdots$$

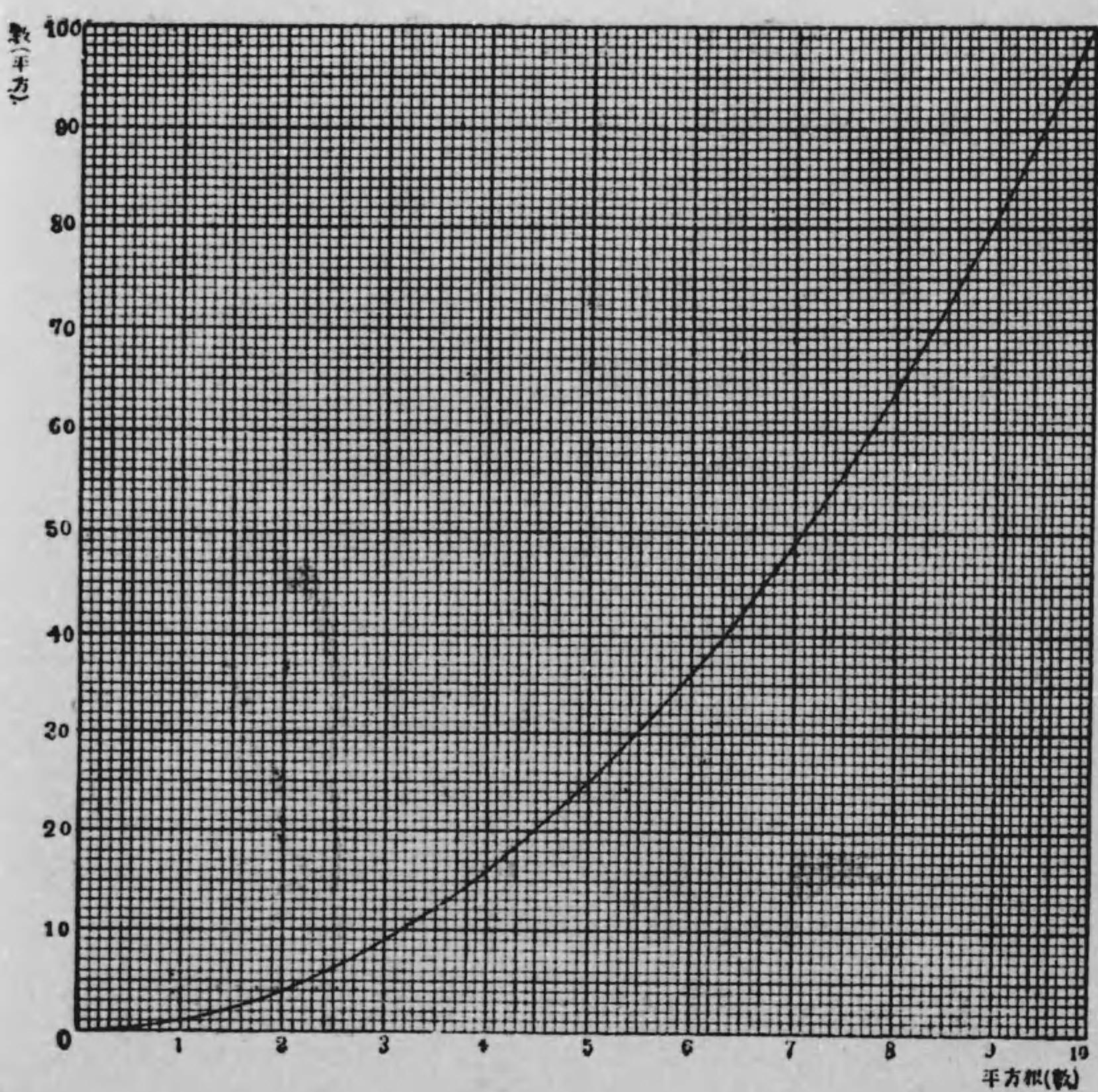
$$\left(1+\frac{\delta}{N}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{N}-\frac{1}{8}\cdot\frac{\delta^2}{N^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{\delta^3}{N^3}-\cdots\cdots$$

玆ニ $\frac{\varepsilon}{N}$ ハ1ヨリ小デ $\left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^2$ ハ1ニ比シテ著シク小デアル。故ニ $\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^2$ 以下ノ項ハ省イテモ實用計算ニハ差支ヘナイ。卽チ

$$\left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{N}\qquad 同樣ニ\quad \left(1+\frac{\delta}{N}\right)^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{N}$$

下ノ圖ハ數ト其ノ平方根(正)トノ關係ヲ示スグラフデアル。ソノ小部分ヲトツテ見ルト何處モ大體直線ト考ヘラレルカラ，

二數ノ差ガ小サイトキハ,其ノ差ノ割合ト其ノ二數ノ正ノ平方根ノ差ノ割合トハ等シイ。



前頁ノコトヲ應用シテ次ノ數ノ近似値ヲ表ニヨッテ求メルコトガ出來ル。

例四　$\sqrt{45.8}$ ノ近似値ヲ求メヨ。

解　45.8 モコレト小數點ノ位置ガ二桁違フ 4580 モ表ノ數ノ中ニナイ。45.8 ト 458 トハ小數點ノ位置ガ一桁(奇數桁)違ッテキルカラ $\sqrt{45.8}$ ト $\sqrt{458}$ トノ列數字ハ違フ。ソコデコノ場合ハ次ノヤウニスル。

$$45 < 45.8 < 46$$

$$\sqrt{45} < \sqrt{45.8} < \sqrt{46}$$

表ニヨリ $\sqrt{46}=6.782$

$\sqrt{45}=6.708$

即チ數ノ差 1 ニ對スル平方根ノ差ハ 0.074

今 $\sqrt{45}$ ト $\sqrt{45.8}$ トノ差ヲ x トシ,

數ノ差 0.8 ニ對スル平方根ノ差 x ヲ求メルニ,

$$x=0.074\times0.8$$
$$=0.0592$$
$$\sqrt{45.8}=\sqrt{45}+0.0592$$
$$=6.708+0.0592=\underline{6.767}\cdots\cdots\cdots$$ 答

從ッテ $$\frac{\left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(1+\frac{\delta}{N}\right)^{\frac{1}{2}}-1}=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{N}-1}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{N}-1}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{N}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{N}}=\frac{\varepsilon}{\delta}$$

故ニ $$\frac{\varepsilon}{\delta}=\frac{\sqrt{N+\varepsilon}-\sqrt{N}}{\sqrt{N+\delta}-\sqrt{N}}$$ デアル。

倘例四ニツイテ此ノ比例部分ノ理ヲ驗シテ見ヨウ。

例四デハ $N=45,\ \varepsilon=0.8,\ \delta=1$ ノ場合ト見ルコトガ出來ル。卷末ノ表デハ δ ハ常ニ 1 デアル。

$$\frac{\varepsilon}{\delta}=\frac{0.8}{1}=0.8$$

$$\frac{\sqrt{N+\varepsilon}-\sqrt{N}}{\sqrt{N+\delta}-\sqrt{N}}=\frac{\sqrt{45.8}-\sqrt{45}}{\sqrt{46}-\sqrt{45}}=\frac{\left(1+\frac{0.8}{45}\right)^{\frac{1}{2}}-1}{\left(1+\frac{1}{45}\right)^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$\left(1+\frac{0.8}{45}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\times\frac{0.8}{45}-\frac{1}{8}\times\left(\frac{0.8}{45}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{0.8}{45}\right)^3-\cdots\cdots$$
$$=1+0.00\dot{8}-0.00004+0.00000035-\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=1.00885\text{弱}$$

トナツテ $\left(\frac{\varepsilon}{N}\right)^2$ ノ項ハ小數第 5 位ニ影響ガアルダケデアル。

$$\left(1+\frac{1}{45}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{45}-\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{45}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{45}\right)^3-\cdots\cdots$$
$$=1+0.0111\dot{1}-0.00006+\cdots\cdots\cdots$$
$$=1.01105\text{强}$$

トナツテ $\left(\frac{\delta}{N}\right)^2$ ノ項ハ小數第 5 位ニ影響ガアルダケデアル。

$$\frac{\sqrt{N+\varepsilon}-\sqrt{N}}{\sqrt{N+\delta}-\sqrt{N}}=\frac{0.00885}{0.01105}\fallingdotseq\frac{0.00\dot{8}}{0.0\dot{1}}=\frac{0.\dot{8}}{1.\dot{1}}\fallingdotseq\frac{8}{10}=0.8$$

根號$\sqrt{\ }$ノ歴史

根號ハ餘程以前カラ用ヒラレテヰタモノラシク Kahun ニヨツテ發見サレタ埃及ノ「パピルス」ノ中ニ平方根號トシテ 『 ガ既ニ用ヒラレテアル。此ノ太古埃及ノ時代カラズツト降ツテ，アラビヤカラ歐洲ニ數學ガ擴マツタトキ卽チ年代デハ第12世紀ニナルガ，ソノ頃カラ根號モ色々ナ形デ使ハレテヰタ。卽チ

R(radix),　　l(latus),　　$\sqrt{\ }$,　　分數指數

ノヤウニ色々ニ變化シタノデアル。latus ハ正方形ノ一邊ノ義デアル。尤モ詳細ニ研究スレバ根號トシテ $\sqrt{\ }$ ヲ用ヒルマデニハ色色ノ記號ヲ用ヒタノデアツテ，或ル人ハ點（・）ヲ以テ $\sqrt{\ }$，點（・・）デ $\sqrt{\sqrt{\ }}$，點（・・・）デ $\sqrt[3]{\ }$ ヲ表シ，又或ル人ハ R, $r\sqrt{\ }$ ノヤウナ記號ヲ用ヒテヰタ。$\sqrt{\ }$ ハ radix ノ r ヲ取ツテ變化シタモノデアルトイフノハオイレル Euler ノ說デ最近マデハ非常ニ有力ナ說デアツタガ，$\sqrt{\ }$ ハ必ズシモサウデナイラシイ。抑々 $\sqrt{\ }$ ノ記號ヲ用ヒタノハ獨逸デアルガ，獨逸ニアル古イ寫本ト古イ印刷本トノ比較研究カラ，點ガ段々變化サレテ行ツタモノデアルラシイ。

不盡根數ニツイテ

根數ノ中デ開キキレナイモノガ卽チ不盡根數デアル。不盡根數ハ無理數ノ一種デアル。換言スレバ整數デモ，分數デモ表ハシ得ナイ數デアル。コレヲ小數ニ直スト不循環無限小數トナルノデアル。卽チ

- 有理數
  - 整數
  - 分數
    - 有限小數・・・・・・・・・・・・・(分母ガ2ト5ノミノ合成數)
    - 循環小數
      - 純循環小數・・(分母ニハ2,5ノ因數ヲ含マヌ)
      - 混循環小數・・(分母ガ2又ハ5及ビ他ノ數トノ合成數)
- 無理數
  - π, e
  - 不盡根數
  - $\log a$, $\sin A$等

  ・・・・不循環無限小數

$\sqrt{2}$ ガ無理數デアルコトノ證明

$\sqrt{2}$ ガ無理數デアルコトヲ證明スルニハ，$\sqrt{2}$ ハ有理數中ニハ存在シナイコトヲ云ヘバヨイ。今コレヲ證明スルニ

$1^2=1$,　　$2^2=4$ デ，$(\sqrt{2})^2=2$ デアルカラ

$\sqrt{2}\fallingdotseq 1$,　　$\sqrt{2}\fallingdotseq 2$,　　且　$2>\sqrt{2}>1$

デアツテ，$\sqrt{2}$ ハ整數デハナイコトガワカル。ソコデ $\sqrt{2}$ ガ分數デナイコトヲイヘバヨイコトニナル。ソノタメニ間接法デ證明シテ見ヨウ。　　$\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$　　$\left(\dfrac{q}{p}\text{ハ既約分數トスル。}\right)$

トスレバ　　$2=\dfrac{q^2}{p^2}$　　卽チ　　$2p^2=q^2$

左邊ハ $2p^2$ デアルカラ2デ整除サレル。故ニ右邊モ2デ整除サレネバナラナイ。故ニ $q=2r$ トスレバ

$2p^2=4r^2$　　　$\therefore\ p^2=2r^2$

故ニ p ハ又2デ整除サレル。コレハ p ト q トガ互ニ素デアルトイフ假定ニ反スル。卽チ $\sqrt{2}$ ハ分數デハナイ。

故ニ $\sqrt{2}$ ハ有理數デハナクテ無理數デアル。

10以下ノ整數ノ平方根

10以下ノ整數ノ平方根ハ表ヲ見ルマデモナク記憶サセルガヨイ。

$\sqrt{1}=1$

$\sqrt{2}=1.41421356$
ひと夜一夜に人見ごろ
人よ人よ

$\sqrt{3}=1.7320508$
ひとなみにおごれや
人なみに

$\sqrt{4}=2$

$\sqrt{5}=2.236068$
似(た)に見られむは

$\sqrt{6}=2.44949$
似(た)よよくよく

$\sqrt{7}=2.64575$
菜に虫居ない

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{9}=3$

$\sqrt{10}=3.162(27)$（3）
十分見(て)とらう見さん

無理數ノ歴史

無理數ハ量ヲ測ル上ニ共ノ必要上カラ起ツタモノデアル。負數ヤ虚數ハ共ニ共ノ起源ハ代數方程式ノ解法ニアルガ，無理數ハサウデハナイ。正方形ノ一邊デ對角線ノ長サヲ測ルトキ，又ハ直徑デ圓ノ周ヲ測ルトキノヤウニ，量ヲ測ルノニ整數ヤ分數ノミデハ不足スルヤウニナツタノデ生マレタノガ無理數デアル。

Incommensurable quantities（不可通約量）ノ考ヘハ Euclid（ユークリッド）及ビソレ以前ノ學者ニモアツタ。特ニユークリッドノ比例論ノ如キハ所謂今日ノ無理數論ノ先驅ヲナスモノデエレメンツ，Elements 中最モ理論整然トシテヰルトイハレテヰル。併シソレハ未ダ數トシテハ考ヘラレナカツタ。歐洲デ無理數ヲ數ト考ヘルヤウニナツタノハ16世紀ノ頃デ，ミカエル・スティフェル Michael Stifel ハ「無理數ハ有理數ノヤウニ大イサノ順序ニ排列サレタ數列ノ中デ，一意的ニ定マツタ場所ヲ有スルモノデアル。」トイツタガ，ソノ頃ノ無理數ハ $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 等ノヤウナ簡單ナ不盡根數デアツタ。デカルトノ解析幾何(1637)，ニユートン及ビライプニッツノ微積分學（前者1684，後者1687）ノ創設ニヨツテ無理數ハ非常ニ開拓サレタ。16世紀ノ頃カラ無理數ハ近似的ニ小數デアラハサレ，1613年ニハピートロ・カタルディ Pietro Cataldi ハ平方根ノ計算ニ無限連分數ヲ用ヒ，オイレル Euler ハ無理數ハ無限連分數トナルコトヲ證明シ，e，e^2 ノ無理數デアルコトヲ證明シタ。後連分數ノ助ヲ藉ツテ ラムベルト Heinrich Lambert ハ π，e^x，$\log a$，$\tan a$ 等ガ無理數デアルコトヲ證明シ，ルジヤンドル Legendre ハ π^2 ガ無理數デアルコトヲ證明シタ。

遂ニ ワィヤーストラス Weierstrass（1815−1897），デデキンド Dedekind，カントール Cantor 等ニヨツテ無理數ハ有理數ノ截斷ニヨツテ定義サレルヤウニナツタ。

普通ノ數ト他ノ開キ切レナイ數ノ平方根トノ積，例ヘバ，2 ト $\sqrt{5}$ トノ積ハ $2\sqrt{5}$ ト書イテ，**2平方根5**(又ハ 2倍ノ平方根5)ト讀ミ，$\dfrac{2}{5}$ ト $\sqrt{7}$ トノ積ハ $\dfrac{2}{5}\sqrt{7}$ 又ハ $\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$ ト書イテ **$\dfrac{2}{5}$平方根7** ト讀ム。

$\sqrt{3}$，$-\dfrac{3}{5}\sqrt{7}$ ノヤウニ根號ヲ持ツ數ヲ**根數**ト言ヒ，ソレ等ノ中，根號及ビ其ノ根號內ノ數トガ全ク同一デアルモノヲ**同類根數**トイフ。

例ヘバ $5\sqrt{7}$ ト $-3\sqrt{7}$，$\dfrac{2}{5}\sqrt{17}$ ト $-1\dfrac{1}{6}\sqrt{17}$ トハ各同類根數デアル。

問 7　$5\sqrt{3}+2\sqrt{3}$ 及ビ $8\sqrt{5}-2\sqrt{5}$ ヲ簡單ニセヨ。

同類根數ヲ加減スルコトハ代數式デ同類項ヲ加減スルノト全ク同樣デアル。

例五　$2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$ カラ $5\sqrt{2}-4\sqrt{5}$ ヲ引ケ。

解　$(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})-(5\sqrt{2}-4\sqrt{5})$

$=2\sqrt{5}-3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{5}$

$=\underline{6\sqrt{5}-8\sqrt{2}}$ ……答

或ル式ノ數値ノ近似値ヲ求メル場合ニハ，其ノ式ノ中ニ同類根數ガアレバ先ヅ簡約シテ後計算スルガヨイ。

問　　題

次ノ數ノ近似値ヲ表ニヨッテ求メヨ。11—(12)

11　$\sqrt{6}$，　$\sqrt{10}$

(11)　$\sqrt{60}$，　$\sqrt{85}$

12　$\sqrt{235}$，　$\sqrt{2.35}$

(12)　$\sqrt{683}$，　$\sqrt{6.83}$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。13—(20)

13　$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}$

(13)　$6\sqrt{5}-3\sqrt{5}$

14　$\sqrt{13}-3\sqrt{13}+8\sqrt{13}$

(14)　$4\sqrt{7}+10\sqrt{7}-18\sqrt{7}$

15　$\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

(15)　$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

16　$\sqrt{3}+3\sqrt{2}-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

(16)　$6\sqrt{5}+12\sqrt{7}+4\sqrt{5}-2\sqrt{7}$

17　$(5\sqrt{5}-3\sqrt{7})+(-2\sqrt{7}+3\sqrt{5})$

(17)　$(4\sqrt{3}-8\sqrt{10})-(7\sqrt{10}-10\sqrt{3})$

18　$\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$

(18)　$\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$

注意　$\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$，$(\sqrt{5})^2=5$

19　$3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

(19)　$2\sqrt{6}\times10\sqrt{6}\times\sqrt{6}$

20　$(\sqrt{7})^4$

(20)　$(\sqrt{10})^6$

問　　題

11　$\sqrt{6}=2.449$，$\sqrt{10}=3.162$

12　$\sqrt{235}=15.330$

$\sqrt{2.35}=1.533$

13　$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

$=7\times1.732=\underline{12.124}$

14　$\sqrt{13}-3\sqrt{13}+8\sqrt{13}$

$=6\sqrt{13}=6\times3.605=\underline{21.630}$

15　$\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{5}=\dfrac{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{15}$

$\doteqdot\dfrac{2}{15}\sqrt{2}=\dfrac{2}{15}\times1.414$

$=\dfrac{5.656}{30}=\underline{0.1885}$

16　$\sqrt{3}+3\sqrt{2}-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}-6\sqrt{3}$

$=11.312-10.392=\underline{0.920}$

17　$(5\sqrt{5}-3\sqrt{7})$

$+(-2\sqrt{7}+3\sqrt{5})$

$=8\sqrt{5}-5\sqrt{7}$

$=8\times2.236-5\times2.645=\underline{4.663}$

18　$\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$=3\times1.732=\underline{5.196}$

19　$3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}\times\sqrt{2}=30\sqrt{2}$

$=30\times1.414=\underline{42.42}$

20　$(\sqrt{7})^4=[(\sqrt{7})^2]^2=7^2$

$=\underline{49}$

(11)　$\sqrt{60}=7.745$，$\sqrt{85}=9.219$

(12)　$\sqrt{683}=26.134$

$\sqrt{6.83}=2.613$

(13)　$6\sqrt{5}-3\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

$=3\times2.236=\underline{6.708}$

(14)　$4\sqrt{7}+10\sqrt{7}-18\sqrt{7}$

$=-4\sqrt{7}=-4\times2.645$

$=\underline{-10.580}$

(15)　$\dfrac{3\sqrt{6}}{4}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}=\dfrac{3\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{2.449}{4}=\underline{0.612}$

(16)　$6\sqrt{5}+12\sqrt{7}+4\sqrt{5}-2\sqrt{7}$

$=10\sqrt{5}+10\sqrt{7}$

$=22.36+26.45=\underline{48.81}$

(17)　$(4\sqrt{3}-8\sqrt{10})-(7\sqrt{10}$

$-10\sqrt{3})=14\sqrt{3}-15\sqrt{10}$

$=14\times1.732-15\times3.162$

$=24.248-47.430=\underline{-23.182}$

(18)　$\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$

$=5\times5\times\sqrt{5}=25\sqrt{5}$

$=25\times2.236=\underline{55.9}$

(19)　$2\sqrt{6}\times10\sqrt{6}\times\sqrt{6}$

$=120\sqrt{6}=120\times2.449$

$=\underline{273.880}$

(20)　$(\sqrt{10})^6=[(\sqrt{10})^2]^3=10^3$

$=\underline{1000}$

43. 數ノ開平

或ル數ノ平方根ノ近似値ハ卷末ノ表ヲ見レバ直チニ得ラレルガ，併シ然ラバソレハドウシテ出來タモノデアルカ，或ハ表以上ニ精密ナ近似値ヲ知リタイトキ等ニハ開平ノ計算ヲスル。トコロガ平方根ハ此ノ開平ノ外ニモ連分數ニ直シテソノ近似値ヲ求メルコトガ出來ル。今參考ノタメニ次ニ述ベヨウ。

$\sqrt{3}$ ハ1ヨリ大キクテ2ヨリ小サイカラ

$$\sqrt{3}=1+(\sqrt{3}-1)=1+\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}=\frac{2+\sqrt{3}-1}{2}=1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}=1+\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)}=1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\sqrt{3}+1=2+(\sqrt{3}-1)=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

故ニ

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{3}+1}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}}=\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{2}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{1}\,\frac{}{+}\,\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

此ノ方法ハ勿論中學校デ課スルノデハナイ。

開平ニ於ケル位取リハ開平計算デ最モ大切ナモノデアル。ソレ故

問1 ニヨツテ整數ト其ノ二乘トノ桁數ノ關係ヲ發見サセル。

$0<N<10$	ナルトキ	N^2 ノ桁數ハ	1又ハ2
$10\leqq N<100$	〃	〃	3又ハ4
$100\leqq N<1000$	〃	〃	5又ハ6

問2 デハ問1ノ逆ヲ考ヘサセテ，或ル數ヲ與ヘテ其ノ平方根ノ位取リト最初ノ一桁ノ數ヲ言ハセルノデアル。

43. 數ノ開平

如何ナル數ノ平方根デモ其ノ最上位ノ一桁ハ直チニ見出スコトガ出來ル。

例ヘバ

$\sqrt{1369}$ ハ $\sqrt{900}$ ヨリハ大キク $\sqrt{1600}$ ヨリハ小サイ。卽チ　$30<\sqrt{1369}<40$

ソレ故 $\sqrt{1369}$ ノ値ノ最上位ノ桁ハ十ノ位デ，其ノ數字ハ3デアル。

問1　1カラ9マデノ整數ノ二乘ハ幾桁カ。
10カラ99マデノ整數ノ二乘ハ幾桁カ。
100カラ999マデノ整數ノ二乘ハ幾桁カ。

問2　次ノ平方根ノ最上位ノ一桁ヲ言ヘ。

$\sqrt{441}$，　$\sqrt{1849}$，　$\sqrt{6889}$，　$\sqrt{11025}$，

$\sqrt{283024}$，$\sqrt{1000}$，　$\sqrt{39.69}$，　$\sqrt{4710.41}$

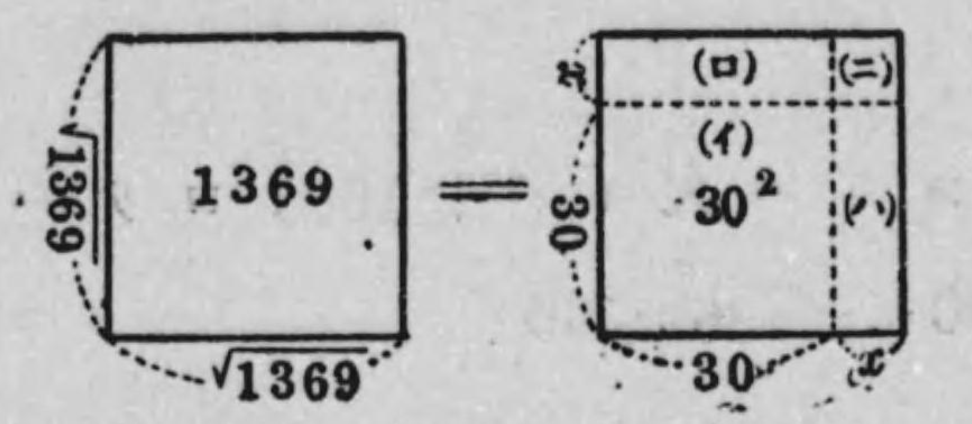
問1,問2カラ考ヘテ正ノ整數ト其ノ正ノ平方根ノ整數部トノ位取リノ關係ヲ示スト

數	..	..	六位	五位	四位	三位	二位	一位
平方根	.	.	三位		二位		一位	

例 $\sqrt{5|67|89}$ ノ整數部ハ三桁デアル。

次ニ $\sqrt{1369}$ ノ値ヲ求メルコトヲ考ヘヨウ。

$\sqrt{1369}$ ノ整數部ハ二桁デ，ソノ十ノ位ハ 3 デアル。故ニ $\sqrt{1369}=30+$或數．　今コノ或ル數ヲ x デ表ハスト $1369=(\sqrt{1369})^2=(30+x)^2$ トナル。コレヲ圖ニ示スト左圖ノ上方ノヤウニナル。



コノ x ヲ求メル爲ニ左圖ノ下方ノ樣ニ(ロ)，(ハ)，(ニ)ノ部分ヲ繼合セテ見ルト，其ノ面積ハ

$1369-30^2=469$　從ッテ $x(30\times2+x)=469\cdots\cdots(1)$

コノ x ハ 30 ニ比ベテ可ナリ小サイ數デアルカラ $30\times2+x$ ヲ大體 30×2 ト見テ 469 ヲ割ルト x ノ値ノ大體ノ見當ガ知ラレル。

$$469\div(30\times2)=7\cdots\cdots\cdots\text{餘リ}49$$

ソコデ $x=7$ トシテ見ルト(1)ノ左邊ハ丁度 $7(30\times2+7)=469$ トナリ都合ガヨイ。

ソレ故

$$\sqrt{1369}=30+7=\underline{37}$$

上ノコトヲ基トシテ實際ニハ次ノ頁ノヤウニ書イテ計算スル。

ピタゴラスハ既ニ無理數ノ存在ヲ知リ，ユークリッド又エレメンツノ中ニ無理數論ヲ上ゲ，而シテ又アルキメデスハ π ノ近似値ノ計算ニ於テ

$$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}$$

ヲ得タノデアルガ，ソノ方法ハ何ニヨツタノカ明瞭デハナイ。開平ノ算法ヲ明瞭ニ示シタノハテオン Theon(300年頃ノ人)デアル。トレミー Ptolemy モ亦開平ノ方法ヲ與ヘタガ，トレミーノ開平ノ計算ハ實ハ60進法デアルカラ參考ニハナラナイ。テオンノ方法モ次ノ印度ノ方法ト殆ド大差ハナイ。

印度ノアリアバタ Aryabhata (510年頃) ノ開平ノ方法ハ面白イノデソレヲ參考ノタメニ述ベヨウ。

例　15129 ノ平方根ヲ求ム。

```
                        1
                    √15129
                        1
2=1×2・・・・        2)05    (2
                        4
                       11
商2ノ二乘・・・・・・      4
2×12・・・・・・・・    24)72  (3
                        72
                        09
商3ノ二乘・・・・・・・・・・  9
                         0
```

注意　15129 ノヤウニ數ノ上ニ○ヤーヲ以テ開平ノ位取ヲ示シタノデアル。

又計算方法ハ今日ノヨリ迂遠デアリ且複雜デアル。

答　$\underline{123}$

アリアバタヤブラーマグプタナドハ同樣ナ形式ノモトニ開立ノ計算ヲモ行ツタノデアルガ，開立ノ算法ハ複雜デアルカラ之ヲ省ク。

我ガ國ニ於ケル開平ノ算法

コレハ相當ニ古イモノデアル。文武天皇ノ頃所謂九章算術ガ非常ニ盛ニナツタノデアルガ，其ノ九章算術ノ中ノ少廣章ノ中デ論ゼラレタノガ，恐ラク我ガ國ニ於ケル開平算法ノ最初デハナカラウカト思フ。勿論九章算術ハ支那カラ傳ハツタノデアルカラ，支那ニハソ

レ以前ニ行ハレテキタモノト見テヨイ。

併シ時代ハ降ツテ德川時代デ（寛永四年，1627年）吉田光由ノ書イタ塵劫記ノ中ニ開平，開立ガ記シテアル。吉田光由以後ノ人々ハ誰デモ開平，開立ニ觸レナイ人ハナイト言ツテモヨカラウ。今村知商ノ竪亥錄(1639年)ノ中ニモ亦開平，開立ガ見エル。

今，後世算術書ノ龜鑑トモイハレタ塵劫記ノ開平ニツイテ述ベヨウ。塵劫記デハ終リノ方ニ開平法，開平圖法及ビ開立法ガ述ベテアル。

塵劫記ノ開平法

坪數一萬五千百廿九坪アルヲ四方ニナシテ，一方ハ何程アルゾト云フ時ニ，百廿三間四方トイフ。

法ニ云フ。實ニ一萬五千百廿九坪ト置キテ，先ヅ實ニテ位ヲ見ル。一十百，一十百ト，斯クノ如クニ數ヘテ上ガリ見ル時，眞中ヲ百トイフハ，百ノ位ト定メテ，商ニ百ト置キテ，此ノ通リノ下方ニテ，一十百ト數ヘテ上ガリテ百ト置キ，サテ法ニテ下方ノ百ノ上ノ通リニテ，商ノ百ト下方ノ百ト，九々ニ呼ブ時,「一一ノ一萬坪」ト法ニ置キテ，是ヲ實ニテ引クナリ。

殘リテ五千百廿九坪アリ。

法ニ云フ。商ノ百ノ續キニ二十ト置キテ，サテ下方ヲバ一位下ゲテ，百ヲ一倍ニ二百ト成シテ，此ノ下ニ二十ト置ク。此ノ二十ハ商ニ今立ツルニ從ヒテ置クナリ。サテ法ニテ下方ノ二百ニ商ノ廿ヲ呼ブ。「二二ノ四千」ト法ニ置キテ又下方ノ廿ニ商ノ廿ヲ呼ブ。「二二ノ四百」ト法ニ置キテ，是レヲ實ニテ引クナリ。

殘リテ七百廿九坪アリ。

法ニ云フ。商ニ二十ノ次ニ三ト置キテ，下法ニハ一位下ゲテ，二

	3 7
3	$\sqrt{13\ 69}$
3	9
67	4 69
7	4 69
	0

答 37

計算說明

(A) 先ヅ與ヘラレタ數1369ヲ一ノ位カラ二桁宛ニ區切リ，

(B) ソノ最左端ノ區劃內ノ數13ヲ超エナイ平方數ノ中ノ最大ナモノ9ヲ目ノ子デ見ツケテ13ノ直下ニ書キ,13トノ差4ヲ求メル。又同時ニ其ノ9ノ平方根(正)3ヲ上欄ニ書ク。

(C) 次ニ差4ノ右ニ次ノ區劃內ノ數69ヲ書並ベテ469トスル。

(D) 別ニ左方ノ適當ナ場所ニ上ノ平方根3ヲ二ツ縱ニ書キソレヲ加ヘテ6トシ,其ノ6ノ右ニ0ガアルモノト考ヘ,コレデ(C)ノ469ヲ割リ,

(E) 其ノ商7ヲ6ノ右ニ書添ヘテ67トシ,コレニ商7ヲ掛ケテ469カラ引ク。

問3 上ニ倣ツテ次ノ數ノ値ヲ求メヨ。

$\sqrt{961}$，$\sqrt{625}$，$\sqrt{1296}$，$\sqrt{2401}$，$\sqrt{2916}$

次ニ小數ノ平方根ノ位取リヲ考ヘルト

$0.9^2=0.81,\ 0.09^2=0.0081,\ 0.009^2=0.000081, \cdots\cdots$

$0.1^2=0.01,\ 0.01^2=0.0001,\ 0.001^2=0.000001, \cdots\cdots$

デアルカラ,小數ノ最初ノ有効數字ノ位ト,其ノ平方根ノ最初ノ有効數字ノ位トノ關係ヲ示スト,

	一位	二位	三位	....
√	一位 二位	三位 四位	五位 六位	....

即チ小數點カラ二桁宛右ヘ區切ルトソノ區切リノ數ガ平方根ノ小數點以下ノ桁數ヲ表ハス。

例一　0.7921ノ平方根(正)ヲ求メヨ。

解

$$\begin{array}{r l}
 & 0.\ 8\ \ 9 \\
8 & \sqrt{0.79|21} \\
8 & 64 \\ \hline
169 & 15\ 21 \\
9 & 15\ 21 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 0.89

問　　題

次ノ數ノ平方根(正)ヲ求メヨ。21—(22)

21　289,　8.41　|　(21)　676,　9.61

22　92.16,　313600　|　(22)　73.96,　592900

十ヲ一倍ニシテ四十ト成シテ，此ノ下ニ三ト置キテ，此ノ三ハ商ニヤク法ト云ウテ，今立ツルニ從ヒテ置クナリ。サテ又法ニ居テ，下方ノ二百ニ商ノ三ヲ呼ブ。「三四ノ百廿」ト法ニ置キテ，又下方ノ三ニ商ノ三ヲ呼ブナリ。「三三ノ九坪」ト法ニ置キテ七百二十九坪ニ成ルナリ。是ヲ實ニテ引キ拂フ時ニ,

百二十三間四方ニ成ルナリ。

問　　題

21

$$\begin{array}{r l}
 & 1\ 7 \\
1 & \sqrt{2|89} \\
1 & 1 \\ \hline
27 & 189 \\
7 & 189 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 17

$$\begin{array}{r l}
 & 2.\ 9 \\
2 & \sqrt{8.41} \\
2 & 4 \\ \hline
49 & 441 \\
9 & 441 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 2.9

22

$$\begin{array}{r l}
 & 9.\ 6 \\
9 & \sqrt{92.16} \\
9 & 81 \\ \hline
186 & 11\ 16 \\
6 & 11\ 16 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 9.6

$$\begin{array}{r l}
 & 5\ 6\ 0 \\
5 & \sqrt{31|36|00} \\
5 & 25 \\ \hline
106 & 636 \\
6 & 636 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 560

(21)

$$\begin{array}{r l}
 & 2\ 6 \\
2 & \sqrt{6|76} \\
2 & 4 \\ \hline
46 & 276 \\
6 & 276 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 26

$$\begin{array}{r l}
 & 3.\ 1 \\
3 & \sqrt{9.61} \\
3 & 9 \\ \hline
61 & 61 \\
1 & 61 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 3.1

(22)

$$\begin{array}{r l}
 & 8.\ 6 \\
8 & \sqrt{73.96} \\
8 & 64 \\ \hline
166 & 9\ 96 \\
6 & 9\ 96 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 8.6

$$\begin{array}{r l}
 & 7\ 7\ 0 \\
7 & \sqrt{59|29|00} \\
7 & 49 \\ \hline
147 & 10\ 29 \\
7 & 10\ 29 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

答 770

例二 開平商ノ有効數字ガ三桁以上ノ場合デアル。

問 題

23

```
          5  7  4
  5     √32|94|76
  5      25
 107      794
   7      749
 1144      4576
    4      4576
              0    答 574
```

```
          1  5  4
  1     √2|37|16
  1      1
  25     137
   5     125
 304      1216
   4      1216
             0    答 154
```

(23)

```
          4  7  4
  4     √22|46|76
  4      16
  87      646
   7      609
 944       3776
   4       3776
              0    答 474
```

```
          2  7  5
  2     √7|56|25
  2      4
  47     356
   7     329
 545      2725
   5      2725
             0    答 275
```

24

```
          1  3  4
  1     √1|79|56
  1      1
  23      79
   3      69
 264      1056
   4      1056
             0    答 134
```

```
          3  7. 9
  3     √14|36.41
  3      9
  67     536
   7     469
 749      67 41
   9      67 41
              0    答 37.9
```

(24)

```
          8. 8  8
  8     √78.85|44
  8      64
 168     14 85
   8     13 44
 1768     1 41 44
    8     1 41 44
                0    答 8.88
```

```
          3. 1  6
  3     √9.98|56
  3      9
  61      98
   1      61
 626      37 56
   6      37 56
              0    答 3.16
```


例二 $\sqrt{797449}$ ヲ計算セヨ。

解 先ヅハジメノ

二桁ヲ求メルニ

```
          8   9
  8     √79|74|49
  8      64
 169     15 74
   9     15 21
            53
```

次ニ一ノ位ノ數ヲ求メルコトヲ考ヘル。

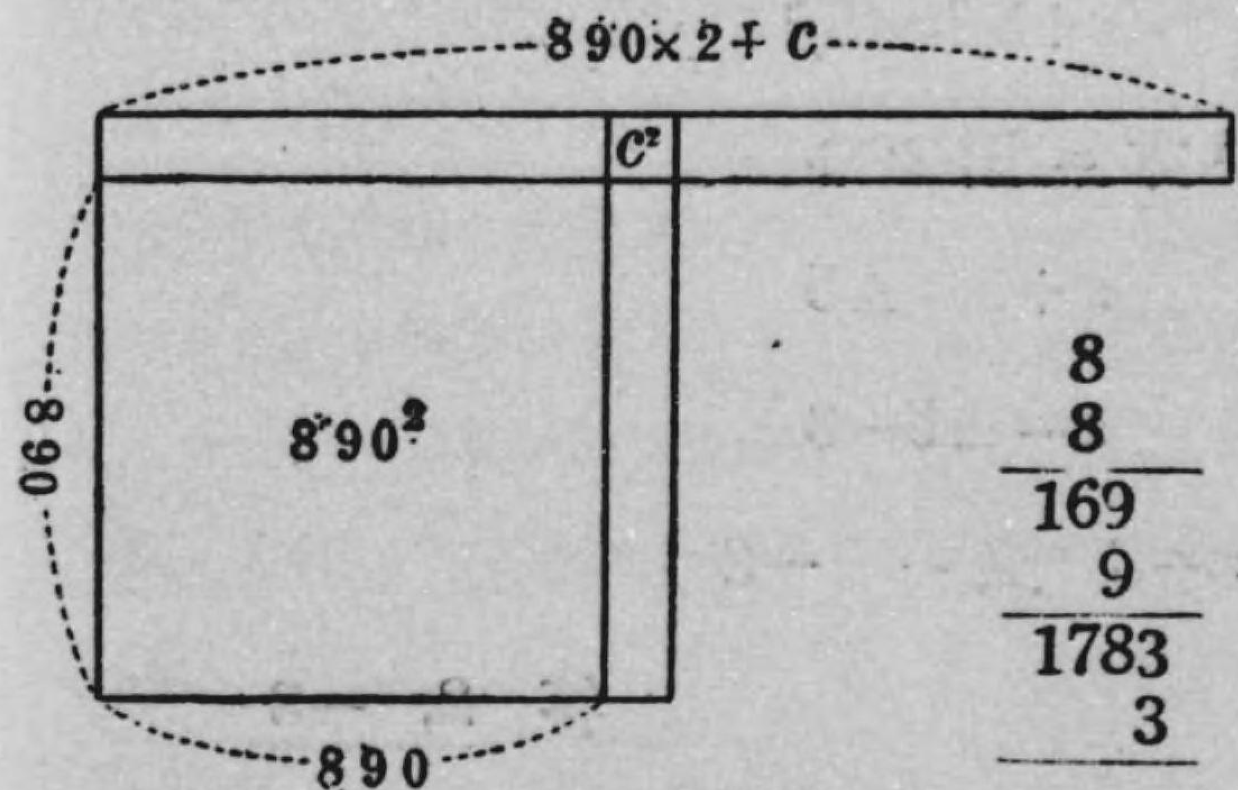
$797449-890^2$

$=5349$

$=(890\times2+c)\times c$

故ニ $5349\div(890\times2)=3$ ……餘 9

3 ガ大體 c ニ相當スルコトガワカル。



故ニ此ノ計算ハ次ノヤウニスル。

```
           8   9   3
   8     √79|74|49
   8      64
  169     15 74
    9     15 21
 1783        53 49
    3        53 49
                 0
```

問 題

次ノ數ノ平方根(正)ヲ求メヨ。23—(24)

23	329476,	23716	(23)	224676,	75625
24	17956,	1436.41	(24)	78.8544,	9.9856

44. 一般ノ二次方程式ノ解法

(a) 完全平方式ヲ作ツテ解クコト

一元二次方程式ヲ因數分解ニヨツテ解クコトハ既ニ207頁デ學ンダカラ,ココデハ他ノ方法ヲ研究ショウ。

例一 $x^2+6x+9=25$ ヲ解ケ。

解 $x^2+6x+9=25$ ノ兩邊トモ二乘ノ形ニスルコトガ出來ル。即チ

$$(x+3)^2=(5)^2$$

コノ兩邊ヲ平方ニ開クト

$$x+3=\pm 5$$

$$x=\pm 5-3$$

$$x=2 \quad 又ハ \quad -8$$

答 $\underline{2,\ -8}$

注意 $(x+3)^2=5^2$ ノ兩邊ヲ平方ニ開ケバ兩邊トモ複號±ガツク筈デアル。

即チ　　$\pm(x+3)=\pm 5$

併シコレハ結局上ノ二通リニナルカラ既知項ノ方ニ±ヲツケルダケデヨイ。

44. 一般ノ二次方程式ノ解法

一元二次方程式ノ解法ノウチ

$\begin{cases} \text{純二次方程式} \quad ax^2=b \\ \text{因數分解ニヨル法} \end{cases}$

トハ既ニ知ツテキルコトデアルガ，完全二次方程式ノ因數ニ分解サレナイ場合ニツイテハソノ解法ヲ知ラナイ。故ニ先ヅ完全二次方程式ノ未知項ヲ含ムモノヲ全部完全平方ニナルヤウニ導イテ，之ヲ純二次方程式ノ解法ニ歸ショウトスルノデアル。

(a) 完全平方式ヲ作ツテ解クコト

コレハ後ノ根ノ公式ノ基礎トナルノデアルカラヨク理解サセタイ。即チ各問題毎ニ根ノ公式ヲ作ツテ行クノト同様デアル。

例一 兩邊共ニソノママデ完全平方トナツテキル場合デアル。

完全平方ヲ作ツテ解クニモヘロン Heron ガ行ツタヤウナ方法モアルカラ，今參考ノタメヘロンガ解イタ方法ヲ揭ゲヨウ。茲ニ擧ゲタノハヘロンノ著 Geometrica ノ中カラトツタモノデアル。

“圓ノ直徑ト周ト面積トノ和ガ212デアルトキ共ノ各ヲ求メヨ。但シ $\pi=3\frac{1}{7}$ トスル。”

今直徑ヲ d トスレバソノ方程式ハ

$$d+\frac{22}{7}d+\frac{11}{14}d^2=212$$

即チ　　$\frac{11}{14}d^2+\frac{29}{7}d=212$

此ノ兩邊ニ　$14\times 11=154$　ヲ掛ケルト

$$11^2d^2+58\times 11d=212\times 154$$

左邊ヲ完全平方トスルタメニ 29^2 ヲ加フレバ

$$(11d+29)^2=33489$$

然ルニ $33489=183^2$ デアルカラ

$$11d+29=183$$

$$\therefore\ 11d=154 \qquad \therefore\ d=14$$

即チ直徑ハ14トナル。從ツテ圓ノ周及ビ面積ハ夫々44及ビ154トナル。

此ノヘロンノ方法ト現今ノ方法ト異ナル所ハ, d^2 ノ係數ヲ11^2トスルカ, 1トスルカニアル。11^2トシテモ理論的ニハ誤リハナイガ, 中學生ニハ計算ヲ誤リ易イカラ此ノ方法ハトラナイ。又ヘロンハ負根ハワケモナク捨テテ仕舞ツタ。

問　題

25 $(x-3)^2=5^2$

$x-3=\pm5$　答 8, -2

26 $(x-1)^2=6^2$

$(x-1)=\pm6$　答 7, -5

27 $(y+11)^2=8^2$

$y+11=\pm8$

答 -3, -19

28 (　)ノ中ニハ$\left(\frac{8}{2}\right)^2=16$ヲ入レル。

$(x-4)^2=1^2$

$x-4=\pm1$　答 5, 3

29 (　)ノ中ニハ$\left(\frac{14}{2}\right)^2=49$ヲ入レル。

$(y+7)^2=9^2$

$y+7=\pm9$　答 2, -16

(25) $(x-2)^2=3^2$

$x-2=\pm3$　答 5, -1

(26) $(y-5)^2=2^2$

$y-5=\pm2$　答 7, 3

(27) $(y+9)^2=7^2$

$y+9=\pm7$

答 -2, -16

(28) (　)ノ中ニハ$\left(\frac{20}{2}\right)^2=100$ヲ入レル。

$(y-10)^2=10^2$

$y-10=\pm10$　答 20, 0

(29) (　)ノ中ニハ$\left(\frac{12}{2}\right)^2=36$ヲ入レル。

$(x-6)^2=11^2$

$x-6=\pm11$

答 17, -5

問　題

次ノ方程式ヲ例一ノヤウナ方法デ解ケ。25—(27)

25 $x^2-6x+9=25$

26 $x^2-2x+1=36$

27 $y^2+22y+121=64$

(25) $x^2-4x+4=9$

(26) $y^2-10y+25=4$

(27) $y^2+18y+81=49$

次ノ方程式ノ(　)内ニ適當ナ數ヲ入レテ例一ノヤウニシテ後コレヲ解ケ。28—(29)

28 $x^2-8x+(\quad)=1$

29 $y^2+14y+(\quad)=81$

(28) $y^2-20y+(\quad)=100$

(29) $x^2-12x+(\quad)=121$

例二　$x^2-6x+4=0$ ヲ解ケ。

解　コノ左邊ハ既知項ガ9ナラバ丁度二乘ノ形(完全平方式)トナルカラ,先ヅ

4ヲ移項シテ　$x^2-6x=-4$

兩邊ニ9ヲ加ヘテ　$x^2-6x+9=-4+9$

$$(x-3)^2=5$$

$$x-3=\pm\sqrt{5}$$

$$x=3\pm\sqrt{5}\doteqdot3\pm2.236$$

$$=5.236 \text{　又ハ　} 0.764$$

答 5.236, 0.764

問題

例二ニ倣ツテ次ノ方程式ヲ解ケ。30—(32)

30 $x^2-6x+2=0$

31 $x^2-8x+10=0$

32 $y^2+12y+29=0$

(30) $x^2-6x-2=0$

(31) $x^2-10x+22=0$

(32) $y^2+14y+2=0$

例三 $3x^2-14x+15=0$ ヲ解ケ。

解 $3x^2-14x+15=0$

x^2ノ係數ガ1デアレバ例二ノヤウニシテ解クコトガ出來ル。ソレ故兩邊ヲ3デ割ッテ

$$x^2-\frac{14}{3}x+5=0$$

$$x^2-\frac{14}{3}x=-5$$

コノ兩邊ニxノ係數$-\frac{14}{3}$ノ半分ノ二乘ヲ加ヘテ(左邊ヲ完全平方式ニスル方法)

$$x^2-\frac{14}{3}x+(\frac{7}{3})^2=-5+(\frac{7}{3})^2$$

$$(x-\frac{7}{3})^2=\frac{4}{9}$$

$$x-\frac{7}{3}=\pm\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{7}{3}\pm\frac{2}{3}$$

$x=3$ 又ハ $1\frac{2}{3}$ 答 $3,\ 1\frac{2}{3}$

問題

30 $x^2-6x+2=0$

$x^2-6x=-2$

$x^2-6x+9=7$

$(x-3)^2=7$

$\therefore\ x-3=\pm\sqrt{7}$

$x=3\pm\sqrt{7}=3\pm2.645$

答 5.645, 0.355

31 $x^2-8x+10=0$

$x^2-8x=-10$

$x^2-8x+16=-10+16$

$(x-4)^2=6$

$x-4=\pm\sqrt{6}$

$x=4\pm\sqrt{6}=4\pm2.449$

答 6.449, 1.551

32 $y^2+12y+29=0$

$y^2+12y=-29$

$y^2+12y+36=36-29$

$(y+6)^2=7$

$y+6=\pm\sqrt{7}$

$y=-6\pm\sqrt{7}=-6\pm2.645$

答 -3.355, -8.645

(30) $x^2-6x-2=0$

$x^2-6x=2$

$x^2-6x+9=9+2$

$(x-3)^2=11$

$x-3=\pm\sqrt{11}$

$x=3\pm\sqrt{11}=3\pm3.316$

答 6.316, -0.316

(31) $x^2-10x+22=0$

$x^2-10x=-22$

$x^2-10x+25=25-22$

$(x-5)^2=3$

$x-5=\pm\sqrt{3}$

$x=5\pm\sqrt{3}=5\pm1.732$

答 6.732, 3.268

(32) $y^2+14y+2=0$

$y^2+14y=-2$

$y^2+14y+49=49-2$

$(y+7)^2=47$

$y+7=\pm\sqrt{47}$

$y=-7\pm\sqrt{47}=-7\pm6.855$

答 -0.145, -13.855

例三ノ別解 トシテヘロン Heron ノ解イタト同様ナ方法ヲ用ヒテ見ヨウ。即チ　$3x^2-14x+15=0$　ニ於テ

$3x^2-14x=-15$　此ノ兩邊ヲ3倍シテ

$9x^2-2\times3\times7x=-45$

左邊ヲ完全平方ニ導クタメニ兩邊ニ　$7^2=49$　ヲ加ヘルト

$$9x^2-2\times3\times7x+49=49-45$$

$$\therefore\ (3x-7)^2=4$$

$$3x-7=\pm2$$

$$3x=7\pm2$$

故ニ　$3x=9$　又ハ　$3x=5$

コレカラ　$x=3$　又ハ　$x=1\frac{2}{3}$　ヲ得ル。

此ノ方法ハ係數ガ分數トナラナイカラ便利ナヤウデアルガ，左邊ヲ完全平方ニスル際ニ誤リ易イカラトラナイコトニシタ。從ツテ教科書ニ取ツタ方法ハ **x^2 ノ係數ガ常ニ $+1$ ニナルヤウニ導クノガ**其ノ主要ナ所デアル。

斯クシテ得タ根ハ常ニ二ツアル。併シ二次方程式ニハ常ニ二根アルトイフコトヲ認メルヤウニナツタノハ餘程ノ年月ヲ要シタノデアル。彼ノカルダン Cardan サヘモ三次方程式ニハ三ツノ根ガアルコトヲ知ツテオリナガラ，虚根ガ出テクルト此等ハ無意味ナモノトシテ捨テテ仕舞ツタ。虚根モ亦正シイ根トシテ採用出來ルト考ヘタノハアルベール・ジラール Albert Girard (1629) デ，方程式ノ根ニ實根トカ虚根トカトイフ名ヲ與ヘタノハデカルト Descartes デアルトイフ。

虚數ハ其ノ後 Euler（オイレル）, Cauchy（コーシー）, Gauss（ガウス）, Neumann（ノイマン） 等ニヨツテ研究セラレテ，數學上ニ極メテ重大ナ意義ヲ有スルヤウニナツタ。併シ何レモ初等的デナイカラ，本書デハ勿論虚數ニ深入リシナイ。

〔**比較**〕 例三ノ左邊ヲ因數分解スルト

$$3x^2-14x+15=(x-3)(3x-5)$$

ソレ故　$(x-3)(3x-5)=0$

$x-3=0$　又ハ　$3x-5=0$

$x=3$	$3x=5$
	$x=1\frac{2}{3}$

答　$3,\ 1\frac{2}{3}$

完全平方式ヲ作ツテ一元二次方程式ヲ解クニハ

(1)　既知項ヲ右邊ニ未知項ヲ左邊ニ集メ，且未知項ハ降冪ノ順ニスル。

(2)　x^2 ノ係數デ兩邊ヲ割ル。

(3)　x ノ係數ノ半分ノ平方ヲ兩邊ニ加ヘル。

(4)　左邊ヲ一次式ノ二乘ノ形(**完全平方式**)トシテ後兩邊ヲ平方ニ開キ，右邊ニダケ複號±ヲ附ケル。

(5)　左邊ノ既知項ヲ右邊ニ移シ，複號ノ＋ノトキトーノトキトノ値ヲ計算シテ二ツノ根ヲ求メル。

問題

完全平方式ヲ作ルコトニヨツテ次ノ方程式ヲ解キ，根ガ根數ヲ含ムトキハ其ノ小數第三位マデノ近似値ヲ求メヨ。33—(37)

33 $x^2-3x+1=0$

34 $x^2+4x=12$

35 $x^2-8x-9=0$

36 $3x^2-10x+3=0$

37 $4x^2-15x=-9$

(33) $x^2-6x+4=0$

(34) $y^2-6y=16$

(35) $x^2-14x=15$

(36) $2x^2+17x+21=0$

(37) $6x^2+13x=5$

(b) 根ノ公式ニヨル一元二次方程式ノ解法

例四 $ax^2+bx=-c$ ヲ解ケ。(但シ $a \neq 0$)

解 $ax^2+bx=-c$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b}{4a^2}=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

問題

33 $x^2-3x+1=0$

$x^2-3x=-1$

$x^2-3x+\frac{9}{4}=\frac{5}{4}$

$\therefore\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$\therefore\ x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

$x=\frac{3}{2}\pm\frac{2.236}{2}$

答 $\underline{2.618,\ 0.382}$

34 $x^2+4x=12$

$x^2+4x+4=16$

$(x+2)^2=4^2$

$\therefore\ x+2=\pm4$ 答 $\underline{2,\ -6}$

35 $x^2-8x-9=0$

$x^2-8x+16=16+9$

$(x-4)^2=25$ $x-4=\pm5$

答 $\underline{9,\ -1}$

36 $3x^2-10x+3=0$

$x^2-\frac{10}{3}x=-1$

$x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}=\frac{25}{9}-1$

$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

$x-\frac{5}{3}=\pm\frac{4}{3}$ 答 $\underline{3,\ \frac{1}{3}}$

37 $4x^2-15x=-9$

$x^2-\frac{15}{4}x+\frac{225}{64}=\frac{225}{64}-\frac{9}{4}$

$\left(x-\frac{15}{8}\right)^2=\frac{81}{64}$

$\therefore\ x-\frac{15}{8}=\pm\frac{9}{8}$

答 $\underline{3,\ \frac{3}{4}}$

(33) $x^2-6x+4=0$

$x^2-6x=-4$ $x^2-6x+9=5$

$(x-3)^2=5$ $x-3=\pm\sqrt{5}$

$x=3\pm2.236$ 答 $\underline{5.236,\ 0.764}$

(34) $y^2-6y=16$

$y^2-6y+9=16+9$

$(y-3)^2=25,\ y-3=\pm5$

答 $\underline{8,\ -2}$

(35) $x^2-14x=15$

$x^2-14x+49=49+15$

$(x-7)^2=64,\ x-7=\pm8$

答 $\underline{15,\ -1}$

(36) $2x^2+17x+21=0$

$x^2+\frac{17}{2}x=-\frac{21}{2}$

$x^2+\frac{17}{2}x+\left(\frac{17}{4}\right)^2=\left(\frac{17}{4}\right)^2-\frac{21}{2}$

$\left(x+\frac{17}{4}\right)^2=\frac{121}{16}$

$x+\frac{17}{4}=\pm\frac{11}{4},\ x=-\frac{17}{4}\pm\frac{11}{4}$

答 $\underline{-\frac{3}{2},\ -7}$

(37) $6x^2+13x=5$

$x^2+\frac{13}{6}x+\left(\frac{13}{12}\right)^2$

$=\left(\frac{13}{12}\right)^2+\frac{5}{6}$

$\left(x+\frac{13}{12}\right)^2=\frac{289}{144},\ x+\frac{13}{12}=\pm\frac{17}{12}$

$x=-\frac{13}{12}\pm\frac{17}{12}$

答 $\underline{\frac{1}{3},\ -\frac{5}{2}}$

(b) 根ノ公式ニヨル一元二次方程式ノ解法

一元二次方程式 Quadratic equation ノヘロン Heron ノ解法ハ既ニ述ベタ。併シ更ニ古クベルリンノパピルスニハ

$$\left|\begin{aligned} &x^2+y^2=100 \\ &y=\frac{3}{4}x \end{aligned}\right.$$

ノ解法ガ載セテアリ，又ユークリッドナドモ $ax^2 \pm bx \pm c=0$ ナドノ幾何學的ナ解法ハ取扱ツタ。又アルキメデスニ至ツテハ $t^2-472949u^2=1$ トイフ「ペルノ不定方程式」ノ解法ヲ考ヘタノデアルガ，併シ純粋ノ二次方程式ヲ今日我々ガ考ヘテキルヤウナ解法ヲ試ミタノハ實ニヘロンデアツタ。ケレドモヘロンハ $ax^2+bx=c$ ニ於テ a, b, c ガ唯正ノ數ノトキニ限ツタノデアル。

次デ ディオファンタス Diophantus (270年頃) ハ次ノヤウナ三種ノ一元二次方程式ヲ解イタ。

(1) $mx^2+px=q$　(2) $mx^2=px+q$　(3) $mx^2+q=px$

茲ニ m, p, q ハ總テ正ノ數トスル。(1), (2), (3) ヲ解イテ夫々次ノヤウナ根ヲ得タ。〔教授書(61)Aヲ見ヨ。〕

$$(1)\quad \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2+mq\right)}-\frac{1}{2}p}{m}$$

$$(2)\quad \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2+mq\right)}+\frac{1}{2}p}{m}$$

$$(3)\quad \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}p^2-mq\right)}+\frac{1}{2}p}{m}$$

ディオファンタス ノ解法ハヘロンノヤウニ m デ兩邊ヲ割ル代リニ，m ヲ兩邊ニ掛ケタノデアル。降ツテ印度デハブラーマグプタ Brahmagupta (630年頃) ガ二次方程式ヲ解イタ。三次方程式ハタルタリヤ Taltaglia ガ之ヲ解キ，四次方程式ハ フェラリー Ferrari ガ之ヲ解イタ。

即チ　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

一元二次方程式ハ一般ニ

(1) x^2 ノ項，(2) x ノ項，(3) 既知項

ノ三ツカラ出來テキル。ソレ故

$$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots(1)$$

ハ何レノ一元二次方程式デモ代表スル**一元二次方程式ノ一般ノ形**ト見ルコトガ出來ル。從ツテ(1)ノ根ハ一元二次方程式ノ**根ノ公式**デアル。

問　前頁ノ問題ハ(1)ノ式ノ a, b, c ガ夫々何デアル場合カ。

例五　公式ニヨツテ $3x^2-14x+15=0$ ヲ解ケ。

解　コノ方程式ハ(1)ノ $a=3,\ b=-14,\ c=15$ ノ場合デアルカラ

$$x=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\times3\times15}}{2\times3}$$

$$=\frac{14\pm\sqrt{196-180}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{16}}{6}$$

$$=\frac{14\pm4}{6}=3\ \text{又ハ}\ \frac{5}{3}\ \text{即チ}\ 1\frac{2}{3}$$

答 $3,\ 1\frac{2}{3}$　(例三ト同ジ。)

問　　題

根ノ公式ニヨツテ次ノ方程式ヲ解ケ。38—(44)

但シ根ガ根數ヲ含ムトキハ,其ノ値ハ小數第三位ヲ四捨五入シテ小數第二位マデ求メヨ。

38　$2x^2-5x+2=0$

39　$5x^2+6x+1=0$

40　$-x^2-2x+15=0$

(38)　$3x^2+10x+3=0$

(39)　$2x^2-7x+3=0$

(40)　$-x^2+9x+22=0$

注意　兩邊ニ -1 ヲ掛ケ x^2 ノ係數ヲ正トシテ後公式ニ當テハメルガヨイ。

41　$3n(n-5)=14$

42　$0.2x^2-0.5x=0.3$

43　$2x^2-6x-3=0$

44　$x^2+\dfrac{2}{3}x=40$

45　二數ガアツテソノ和ハ15,積ハ56デアルト,其ノ二數如何。

46　或ル數ノ$\dfrac{1}{3}$ト$\dfrac{1}{5}$トノ積ハ60デアルト,或ル數トハ如何ナル數カ。

(41)　$2x(x-12)+35=0$

(42)　$0.75x^2+8=5x$

(43)　$3x^2+8x=2$

(44)　$y^2+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}y$

(45)　或ル數トコレヨリ4多イ數トノ積ハ117デアルト,或ル數如何。

(46)　或ル數ノ$\dfrac{1}{4}$ト$\dfrac{1}{6}$トノ積カラ4ヲ引クト2ガ殘ルト,或ル數如何。

併シ乍ラ五次以上ノ方程式ハ一般ニ代數的ニハ解ケナイコトガ證明サレテキル。諾威ノ若イ天才數學者アーベル Abel (1802—1829)ハ遂ニ一般ニ五次以上ノ方程式ハ代數的ニ解ケナイコトヲ證明シタノデアル。

問　　題

38　$2x^2-5x+2=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}$$

答　$\underline{2,\ \frac{1}{2}}$

39　$5x^2+6x+1=0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{10}=\frac{-6\pm4}{10}$$

答　$\underline{-\frac{1}{5},\ -1}$

40　$-x^2-2x+15=0$

$$x^2+2x-15=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm8}{2}$$

答　$\underline{3,\ -5}$

41　$3n(n-5)=14$

$$3n^2-15n-14=0$$

$$n=\frac{15\pm\sqrt{225+168}}{6}$$

$$=\frac{15\pm19.824}{6}$$

答　5.80強, −0.80強

42　$0.2x^2-0.5x=0.3$

$$\therefore\ 2x^2-5x-3=0$$

$$\therefore\ x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm7}{4}$$

答　$\underline{3,\ -\frac{1}{2}}$

(38)　$3x^2+10x+3=0$

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100-36}}{6}$$

$$=\frac{-10\pm8}{6}$$

答　$\underline{-3,\ -\frac{1}{3}}$

(39)　$2x^2-7x+3=0$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm5}{4}$$

答　$\underline{3,\ \frac{1}{2}}$

(40)　$-x^2+9x+22=0$

$$x^2-9x-22=0$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81+88}}{2}=\frac{9\pm13}{2}$$

答　$\underline{11,\ -2}$

(41)　$2x(x-12)+35=0$

$$2x^2-24x+35=0$$

$$x=\frac{24\pm\sqrt{576-280}}{4}$$

$$=\frac{24\pm17.205}{4}$$

答　10.30強, 1.69強

(42)　$0.75x^2+8=5x$　　4倍シテ

$$3x^2-20x+32=0$$

$$x=\frac{20\pm\sqrt{400-384}}{6}=\frac{20\pm4}{6}$$

答　$\underline{4,\ \frac{8}{3}}$

43 $2x^2-6x-3=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36+24}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{60}}{4}$$

$$=\frac{6\pm7.745}{4}$$

答　3.44弱, -0.44弱

44 $x^2+\frac{2}{3}x=40$

$3x^2+2x-120=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+1440}}{6}$$

$$=\frac{-2\pm38}{6}$$ 答　$6,\ -\frac{20}{3}$

45 一ツノ數ヲxトセヨ。

$x(15-x)=56$

$x^2-15x+56=0$　答　7, 8

46 或ル數ヲxトセヨ。

$\frac{1}{3}x\times\frac{1}{5}x=60$

$x^2=900$　$\therefore$　$x=\pm30$

答　±30

(43) $3x^2+8x=2$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64+24}}{6}$$

$$=\frac{-8\pm\sqrt{88}}{6}=\frac{-8\pm9.380}{6}$$

答　-2.90弱, 0.23强

(44) $y^2+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}y$

$\therefore$　$6y^2-5y+1=0$

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12}$$

答　$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

(45) 或ル數ヲxトセヨ。

$x(x+4)=117$

$x^2+4x-117=0$

コレカラ $x=-13$又ハ9・・・答

(46) 或ル數ヲxトセヨ。

$\frac{1}{4}x\times\frac{1}{6}x-4=2$

$x^2=144$　$\therefore$　$x=\pm12$

答　±12

45. 一元二次方程式ノ根ト係數トノ關係

問　　題

47 二根ハ2ト5デアル。

48 二根ハ共ニ3デアル。

49 二根ハ2ト-5トデアル。

50 $5+(-7)=-2$

$5\times(-7)=-35$

故ニ　$x^2+2x-35=0$

同樣ニ　12, 0 ヲ二根トスル方程式ハ　$x^2-12x=0$

(47) 二根ハ10ト20トデアル。

(48) 二根ハ共ニ5デアル。

(49) 二根ハ-5ト9トデアル。

(50) 和 2, 積 -48

故ニ　$x^2-2x-48=0$

同樣ニ　-3, 3 ヲ二根トスル方程式ハ　$x^2-9=0$

45. 一元二次方程式ノ根ト係數トノ關係

例一　$x^2-7x+12=0$ ノ根ヲ求メ,ソレト係數トノ關係ヲ調ベヨ。

解　$x^2-7x+12=0$ ノ根ハ 3 ト 4 トデアル。

コノ根ノ 3 ト 4 ト方程式ノ係數 -7 ト 12 トノ關係ヲ考ヘルト

$$x^2-(3+4)x+3\times4=0$$

卽チ x^2 ノ係數ガ 1 ノ一元二次方程式デハ二根ノ和ハ x ノ係數ノ符號ヲ變ヘタモノ, 二根ノ積ハ絕對項ニ等シイ。

問　　題

次ノ方程式ノ二根ヲ求メ,ソノ積ト和トヲ方程式ノ係數ト比較セヨ。47—(49)

47 $x^2-7x+10=0$

48 $x^2-6x+9=0$

49 $x^2+3x-10=0$

(47) $x^2-30x+200=0$

(48) $x^2-10x+25=0$

(49) $x^2-4x-45=0$

次ノ各二根ヲ有スル方程式ヲ作レ。50—(50)

50 5, -7;　12, 0

(50) 8, -6;　-3, 3

一元二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

ノ二根ノ一方ヲ α, 他方ヲ β トスルト

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

故ニ

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}$$

即チ一元二次方程式ニ於テハ

二根ノ和ハ x^2 ノ係數デ x ノ係數ヲ割ツタモノノ符號ヲ變ヘタモノデ,二根ノ積ハ x^2 ノ係數デ絶對項ヲ割ツタモノニ等シイ.

例二 $3x^2+5x+1=0$ ノ根ヲ求メナイデ二根ノ和ト積トヲ求メヨ。

解 二根ヲ α, β トスレバ

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\quad \alpha\beta=\frac{1}{3}$$

$ax^2+bx+c=0$ ノ根ト係數トノ關係

此ノ方程式ノ二根ヲ α, β トスレバ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ デアルガ, 方程式ノ根ノ性質ヲ其ノ係數カラ研究スルコトガ出來テ, 敎授者ニハ興味アル所デアラウガ, 生徒ハ何故 α, β ナドノ文字ヲ用ヒルカトイフ所ニモ疑問ヲ持チ奇異ノ感ニ打タレル。α, β ハ半未知數ノ意味デ用ヒラレテキルノデハナイカト思フ。

方程式ノ根ノ性質ヲ研究スルノニ判別式 Discriminant ニヨル方法モアルガ, 方程式ノ根ノ性質ヲ餘リ深ク研究スルコトハ初等的デモナク, 又學校數學ノ上カラ見テモ適當デナイト考ヘテ基本敎材トシテハ判別式ハ取扱ハナイ。一體方程式論ガ非常ニ發達シタノハ何ノタメデアルカヲ考ヘテ見ルト, 色々ノ原因モアラウガ, 五次方程式ヲ解カンガタメデアルトイフノガ其ノ最大ナモノデアラウ。ラグランジユ Lagrange ナドモ五次方程式ヲ解カウトシテ Lagrangean Resolvent ヲ作リ, 又彼ハ五次方程式ノ解法ニハ失敗シタガ, 遂ニ群論ノ基礎ヲ作ツタトイハレル。方程式ノ研究ニ群論 (特ニ置換群 Substitution Group) ガ如何ナル役目ヲモツテキルカハ冗言ヲ要シナイデアラウ。其ノ置換群ハ實ニ根ト係數トノ研究ニ始マルト極言シテモヨイ。

根ノ冪ニ關スルニユートン Newton ノ公式トイフモノガアル。ソレハ方程式ノ根 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots\cdots$ ノ同ジ冪ノ和ノ間ニ存在スルモノデ, 二次方程式ヨリモ高次ノ方程式ノ場合卽チ一般ノ場合ニツイテノ研究デアルガ, 斯様ニ根ト係數トノ關係ハ方程式ノ研究ニハ必要缺クベカラザルモノデアル。

方程式ノ理論ニツイテハ上ニ述ベタニユートン, ラグランジユ, アーベル等ノ他ニデカルト, スチユルム Sturm ガロア Galois, ガウス Gauss 等ノ人々ノ功績モ亦逸シテハナラナイ。特ニガウスノ n 次方程式ハ常ニ n 個ノ根ヲ有スルトイフ證明ト, ガロアノ代數方程

式ガ代數的ニ解ケルタメノ條件ニ關スル研究ハ注目ニ値スル。

注意 五次ヨリ高次ノ代數方程式ハ代數的ニハ解ケナイガ，コレハ絶對ニ解キ得ナイトイフノデハナイ。適當ナ超越函數ヲ用フレバ解ケル。例ヘバ エルミツト Hermite (1858) ヤ クロネッケル Kroneckel (1858) ハ橢圓函數ヲ使用シテ之ヲ解イタトイフ。

例三 此ノ例ハ二根ヲ與ヘテ方程式ヲ作ルノデアル。二根ガα, β デアルヤウナ方程式ハ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ デナケレバナラナイ。

即チ $$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

從ツテ二次方程式ヲ作ルニハ與ヘラレタ二根ノ和ト積トヲ求メナケレバナラナイ。茲ニxノ係數ニハ二根ノ和ノ符號ヲ變ヘタモノヲモツテ行クコトヲ忘レテハナラナイ。

問題

51 $2x^2-4x+1=0$

和 2, 積 $\frac{1}{2}$

52 $9x^2+bx+4=0$ ノ二根ヲ共ニαトセヨ。

$$\left|\begin{array}{l} 2\alpha=-\frac{b}{9} \\ \alpha^2=\frac{4}{9} \end{array}\right.$$

コレカラ $\alpha=\pm\frac{2}{3}$ 從ツテ

$b=\pm12$ 答 $\underline{\pm12}$

53 和 $1\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}=5$

積 $1\frac{1}{2}\times3\frac{1}{2}=\frac{21}{4}$

故ニ $x^2-5x+\frac{21}{4}=0$

即チ $\underline{4x^2-20x+21=0}$・・・答

(51) $9x^2-3x-2=0$

和 $\frac{1}{3}$, 積 $-\frac{2}{9}$

(52) $3x^2-4x+c=0$ ノ二根ヲ共ニαトセヨ。

$$\left|\begin{array}{l} 2\alpha=\frac{4}{3} \\ \alpha^2=\frac{c}{3} \end{array}\right.$$

コレカラ $\alpha=\frac{2}{3}$

故ニ $c=\frac{4}{3}$ 答 $\underline{\frac{4}{3}}$

(53) $(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=2$

$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=-4$

故ニ求ムル方程式ハ

$\underline{x^2-2x-4=0}$……答

例三 二根ガ$\frac{2}{3}$ト$\frac{1}{2}$トノ一元二次方程式ヲ作レ。

解 二根ノ和ハ $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$

二根ノ積ハ $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

故ニ求メル方程式ハ

$$x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0 \quad \text{即チ} \quad \underline{6x^2-7x+2=0}$$

又ハ求メル方程式ハ

$(x-\frac{2}{3})(x-\frac{1}{2})=0$ コノ括弧ヲ解イテ

$x^2-\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}=0$ 即チ $\underline{6x^2-7x+2=0}$・・・・答

問題

51 方程式 $2x^2-4x+1=0$ ノ二根ノ和ト積トヲ言ヘ。

52 $9x^2+bx+4=0$ ノ二根ガ等シクナルヤウニbノ値ヲ定メヨ。

53 次ノ二根ヲ有スル一元二次方程式ヲ作レ。

$1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$

(51) 方程式 $9x^2-3x-2=0$ ノ二根ノ和ト積トヲ言ヘ。

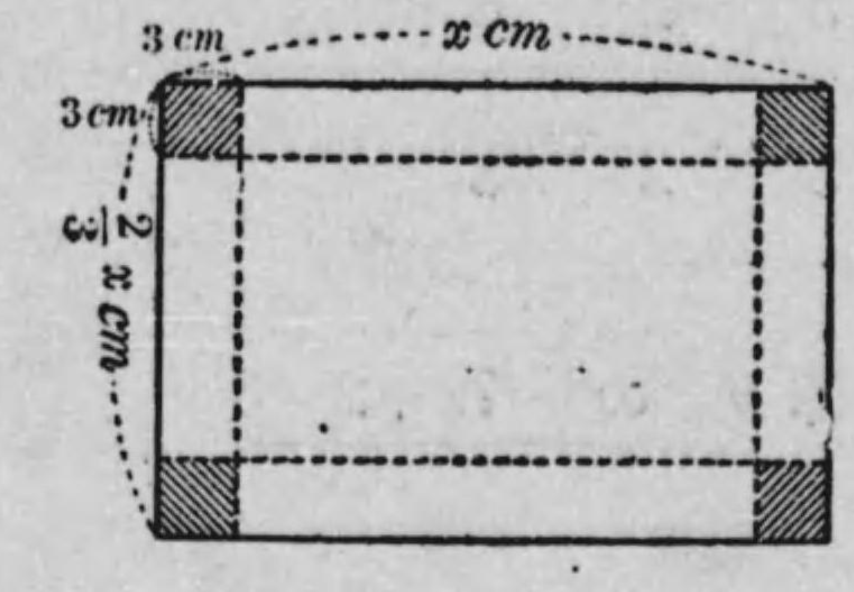
(52) $3x^2-4x+c=0$ ノ二根ガ等シクナルヤウニcノ値ヲ定メヨ。

(53) 次ノ二根ヲ有スル一元二次方程式ヲ作レ。

$1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$

46. 一元二次方程式ノ應用問題

例一　或ル人ガ圖ノヤウナ縦ノ長サガ横ノ長サノ$\frac{2}{3}$ノ矩形ノ「ブリキ」板ヲ用ヒ,ソノ四隅カラ1邊ガ3cmノ正方形ヲ截リ落シ,其ノ殘リヲ點線ニ沿ウテ折リ曲ゲ,直方體ノ箱ヲ作リ,其ノ容積ガ756立方糎アルヤウニショウトシタ。縦横ガ各何糎ノ板ヲ用ヒレバヨイカ。



解　横ノ長サヲx cmトスルト,縦ノ長サハ$\frac{2}{3}x$ cmデアルカラ,箱ノ底面ノ縦横ノ長サハ夫々$(x-6)$ cm, $\left(\frac{2}{3}x-6\right)$ cmデ,深サハ3cmトナル。トコロガ容積ガ756 ccデアルカラ

$$3(x-6)\left(\frac{2}{3}x-6\right)=756$$

兩邊ヲ3デ割ッテ　$(x-6)\left(\frac{2}{3}x-6\right)=252$

括弧ヲ取去ッテ　$\frac{2}{3}x^2-10x+36=252$

移項シテ　$\frac{2}{3}x^2-10x-216=0$

分母ヲ拂ッテ　$2x^2-30x-648=0$

46. 一元二次方程式ノ應用問題

方程式ノ應用問題ヲ解ク上ニツイテノ注意ハ既ニ一元一次方程式ノ應用問題ノ所デ述ベタガ，二次方程式ニハ又特ニ注意ヲ要スル箇所モアルノデ，再ビ應用問題ノ注意ヲ述ベヨウ。

(1) 題意ヲヨク了解スルコト。

(2) 適當ナ未知數ヲ選ビ，問題ニ與ヘテアル數量間ノ關係ヲ明ラカニシテ，題意ニ適スル方程式ヲ立テルコト。

(3) 此ノ方程式ノ根ヲ求メルコト。

(4) 最後ニ此ノ根ガ題意ニ適スルカ否カヲ決定シテ，適スルモノノミヲ採用スルコト。

一元一次方程式ノ時デサヘ方程式ノ根ガ題意ニ適スルカ否カヲ吟味ノ上デ採否ヲ決定シタ。況ンヤ二次方程式ノ根ハ正根，負根ハ勿論，更ニ根ガ分數トナルコトアリ，無理數トナルコトアリ，虚數トサヘナルコトモアルカラ，益〻其ノ必要ガアル。

尚茲ニ注意スベキコトハ，作ツタ方程式ガ分數方程式或ハ無理方程式トナツタトキデアル。此ノ場合ハ求メタ未知數ノ値ガ果シテ其ノ方程式ノ根デアルカ否カノ檢査ヲ行ツタ上デ，上ノ(4)即チ題意ニ適スルカ否カヲ定メルノデアル。ツマリ完全ニ其ノ分數方程式又ハ無理方程式ヲ解イテ，然ル後妥當ナル答ヲ得ルタメニ根ヲ題意ニツイテ驗シテ見ナケレバナラナイ。

中ニハドウセ最後ニ於テ根ノ採否ヲ決定スルタメニ，題意ニ合フカ否カヲ定メル檢査ヲスルノデアルカラ，假令分數方程式ヤ無理方程式ノ場合デモ根ノ檢査ヲ省イテモヨイト云フ人モアル。併シソレデハ方程式ノ根デナイモノニツイテ題意ニ適スルカ否カヲ檢査スルコトヲ含ムコトトナリ，全ク縁ノナイモノニツイテ採否ヲ考ヘルコ

トトナツテ，穩當デナイト思フ。

問題

54 底邊ノ長サヲ x cm トセヨ。高サハ何 cm カ。

又三角形ノ面積ハ如何。

$$\frac{x(x+2)}{2}=84$$

コレカラ $x^2+2x-168=0$

コレヲ解イテ

$x=12,\ x=-14$

-14ハ題意ニ適シナイ。

答 高サ14 cm, 底邊12 cm

55 池ノ半徑ヲ x m トセヨ。池ノ面積ハ如何。又道路ノ面積ハ如何ニナルカ。

$$\pi(x+1)^2-\pi x^2=\frac{7}{9}\pi x^2$$

兩邊ヲπデ約スト

$$(x+1)^2-x^2=\frac{7}{9}x^2$$

$$2x+1=\frac{7}{9}x^2$$

$$\therefore\ 7x^2-18x-9=0$$

$$(x-3)(7x+3)=0$$

コレカラ $x=3$ 又ハ $-\frac{3}{7}$

負ヲ捨テテ 答 3 m

(54) 縦ノ長サヲ x m トスレバ，横ノ長サハ何 m カ。

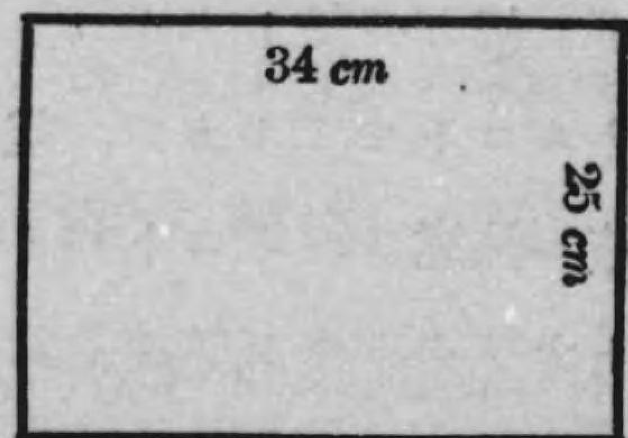
$$x(x+9)=850$$

$$x^2+9x-850=0$$

コレヲ解イテ

$x=25$ 又ハ -34

-34ハ題意ニ適シナイ故ニ此ノ矩形ノ縦横ハ夫々 25 m, 34 m デアル。從ツテ其ノ縮圖ハ次ノ通リデアル。



(55) 歩道ノ幅ヲ x m トセヨ。

$$(100+2x)(60+2x)-100\times 60=\frac{1}{3}\times 100\times 60$$

$$\therefore\ 4x^2+320x-2000=0$$

$$\therefore\ x^2+80x-500=0$$

$$x=\frac{-80\pm\sqrt{6400+2000}}{2}$$

負ヲ捨テテ

$$x=-40+10\sqrt{21}=5.82$$

答 5.8 m強

兩邊ヲ2デ割ッテ $x^2-15x-324=0$

根ノ公式ニヨリ $x=\frac{15\pm\sqrt{225+1296}}{2}$

$=\frac{15\pm 39}{2}=27$ 又ハ -12

矩形ノ一邊ノ長サニ負ノ値ハ無イカラ正ノ値ヲ採ッテ，横ハ 27 cm, 從ッテ縦ハ

$27\,m\times\frac{2}{3}=18\,cm$ デアル。 答 縦18 cm, 横27 cm

問題

54 三角形ガアッテ，ソノ高サハ底邊ヨリモ2 cm長ク，面積ハ84平方糎アルトイフ。高サト底邊トハ各幾糎カ。

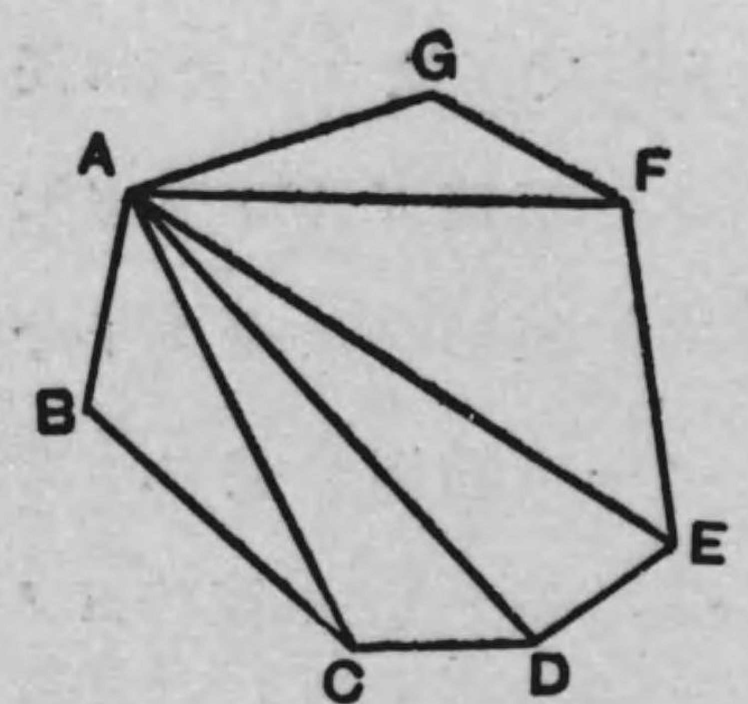
55 圓形ノ池ノ周圍ニ幅1米ノ路ガアッテ，ソノ道路ノ總面積ハ池ノ面積ノ$\frac{7}{9}$デアルト。池ノ半徑ハ幾米カ。

(54) 横ガ縦ヨリモ9 m長クテ，面積ガ850平方米アル矩形ノ土地ヲ千分ノ一ノ縮圖デ畫ケ。

(55) 長サ100 m,幅60 m ノ矩形ノ運動場ノ外側ニ幅ノ一樣ナ歩道ヲ作ッテ歩道ノ全面積ヲ運動場ノ面積ノ$\frac{1}{3}$ニシタイ。歩道ノ幅ヲ何程トスベキカ。mノ小數第一位マデ求メヨ。

56　金2400圓ヲ2年間同ジ利率デ預ケテ置クト,單利ト複利トデハ元利合計ガ6圓ダケ違フトイフ。年利率ハ何程デアルカ。

57　對角線ノ總數ガ14本デアル多角形ハ何邊形デアルカ。



注意　n邊形ノ一頂點カラ引クコトノ出來ル對角線ノ總數ハ$(n-3)$本デアル。

(56)　初メニ1000圓ヲ預ケ,一ケ年後ニ更ニ450圓ヲ加ヘテ前ト同ジ利率デ尙一ケ年預ケテ元利合計1575圓ヲ得タトイフ。年利率ハ何程カ。

(57)　何レノ三點モ同一直線上ニナイ幾ツカノ點ガアツテ,ソノ二點宛ヲ結ブ直線ノ總數ガ55本デアルトイフ。點ノ總數ハ何程デアルカ。

注意　點ノ總數ヲnトシ,問題**57**ト同ジヤウニ,n個ノ中ノ任意ノ一點ト他ノ總テノ點トヲ結ブ直線ガ幾本アルカヲ考ヘヨ。

56　年利率ヲxトセヨ。2年間ノ元利合計ハ單利ト,複利トデハ如何ニナルカ。

$$2400(1+x)^2-2400(1+2x)=6$$
$$400(1+2x+x^2)-400(1+2x)=1$$
$$\therefore\quad 400x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{400}$$

故ニ　$x=\pm\frac{1}{20}$

負ヲ捨テテ　　答　年5分

57　n邊形ノ一頂點カラ引クコトノ出來ル對角線ノ總數ハ$(n-3)$本,從ツテ總ベテノ頂點カラ引ケル對角線ハ$n(n-3)$本デアルガ,コレハ全部二度數ヘテアル。故ニn邊形ノ對角線ノ總數ハ

$$\frac{n(n-3)}{2}\text{ 本デアル。}$$
$$\frac{n(n-3)}{2}=14$$
$$\therefore\quad n^2-3n-28=0$$
$$(n-7)(n+4)=0$$
$$n=7\quad\text{又ハ}\quad -4$$

負ハ題意ニ適スルカ。

答　7邊形

(56) 年利率ヲxトセヨ。最初ノ一年後ノ元利合計ハ

$$1000(1+x)\text{圓}$$
$$\{1000(1+x)+450\}(1+x)=1575$$
$$1000(1+x)^2+450(1+x)-1575=0$$
$$\therefore\quad 40(1+x)^2+18(1+x)-63=0$$

コレカラ

$$40x^2+98x-5=0$$
$$(20x-1)(2x+5)=0$$

即チ　$x=\frac{1}{20}$　又ハ　$-\frac{5}{2}$

負ヲ捨テテ　　答　0.05

(57) 點ノ數ヲnトセヨ。n個ノ點ヲ二ツ宛結ブ直線ノ數ハ問題57ト同樣ニ考ヘテ

$$\frac{n(n-1)}{2}\text{ 本デアル。}$$

故ニ次ノ方程式ヲ得ル。

$$\frac{n(n-1)}{2}=55$$

コレヲ解ケバ

$$n^2-n-110=0$$
$$(n-11)(n+10)=0$$
$$n=11\quad\text{又ハ}\quad -10$$

負ヲ捨テテ

答　11個

ピタゴラス Pythagoras (B. C. 569—500) ノ定理ハ非常ニ有名ナ定理デアルガ，ソノ理論的ノ研究ハ幾何學デ學ブコトニスル。教科書ノ圖ハ b ノ上ノ正方形ヲ其ノ對角線ノ交點カラ斜邊 c ニ垂直ナ直線ト平行ナ直線トデ切ッテ，ソレヲ夫々①, ②, ③, ④ト名ヅケ，ソレト a ノ上ノ正方形⑤トヲ接合スルト c ノ上ノ正方形トナルコトヲ示シタモノデ，生徒ニ是非實驗サセタイ。ピタゴラス定理ノ證明ニハ此ノ外種々ノ方法モアリ，又諸種ノ器具モアルガ，此等ノ器具ハ大阪市西區阿波座一番町一番地加藤數物製作所デ販賣シテキル。

58 斜邊ノ長サヲ x cm トセヨ。

$$20^2+21^2=x^2$$

即チ　$x^2=841$

$\therefore$　$x=\pm 29$

負ハ如何。　答 29 cm

59 求ムル正三角形ノ高サヲ x cm トセヨ。

$$5^2+x^2=10^2$$

$$x^2=100-25$$

$$x^2=75$$

$$x=\pm\sqrt{75}$$

負ハ題意ニ適シナイ。

故ニ　$x=\sqrt{75}=8.660$

答 8.7 cm弱

(**58**) 直角ヲ夾ム他ノ一邊ノ長サヲ x cm トスレバ

$$65^2=33^2+x^2$$

$\therefore$　$x^2=3136$

$x=\pm 56$　答 56 cm

(**59**) 二等邊三角形ノ底邊ノ半分ノ長サヲ x cm トセヨ。

$$x^2+7^2=9^2$$

$$x^2=81-49$$

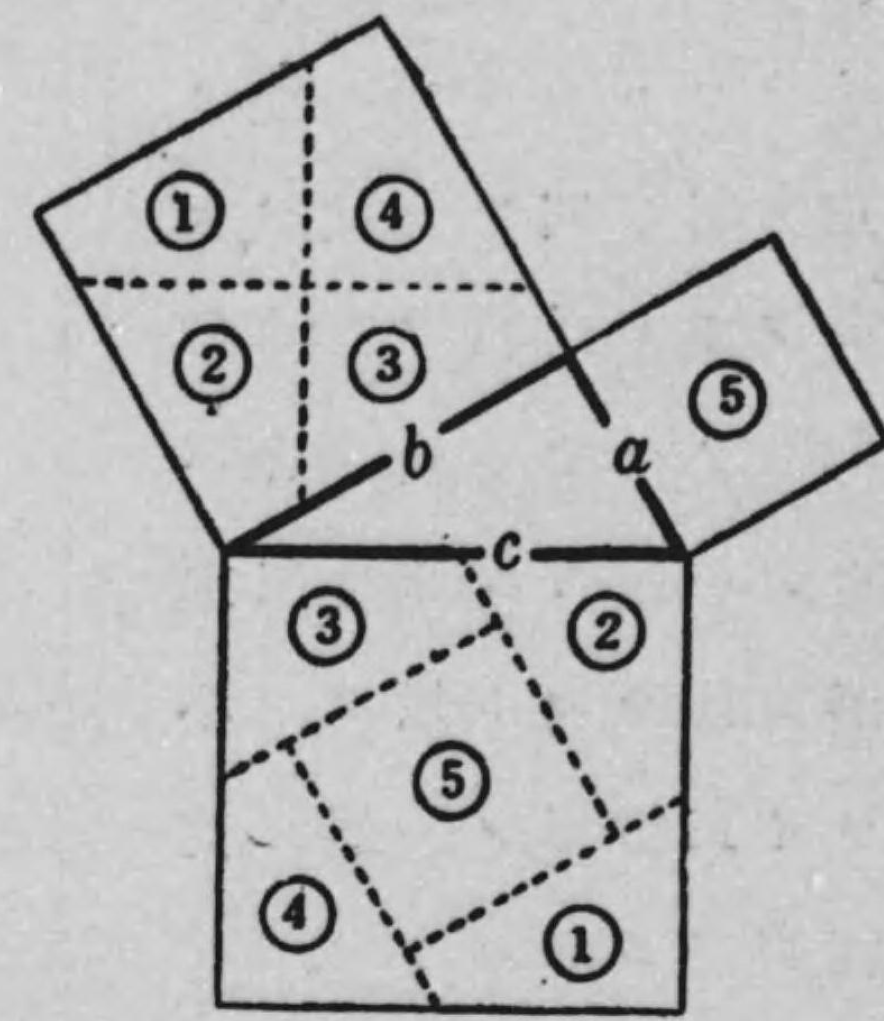
$$x^2=32$$

$$x=\pm\sqrt{32}$$

負ハ如何。

$x=\sqrt{32}=5.656$

答 5.7 cm弱



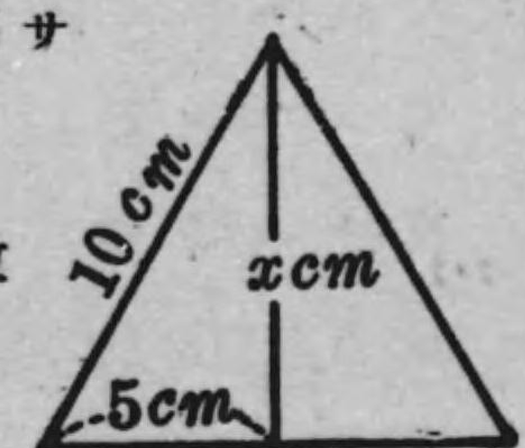
直角三角形デハ常ニ「斜邊ヲ一邊トスル正方形ノ面積ハ他ノ二邊ヲ夫々一邊トスル正方形ノ面積ノ和ニ等シイ」トイフコトガアツテ，コレハピタゴラスガ考ヘ出シタト言ハレテキル幾何學ノ最モ重要ナ定理デアル。即チ斜邊ガ c 糎，他ノ二邊ガ夫々 a 糎，b 糎ノ直角三角形デハ

$$a^2+b^2=c^2$$

デアル。

58 直角ヲ夾ム二邊ガ夫々 20 cm, 21 cm ノ直角三角形ノ斜邊ノ長サハ何程デアルカ。

59 一邊ガ 10 cm ノ正三角形ノ高サ如何，但シ糎ノ小數第一位マデ答ヘヨ。

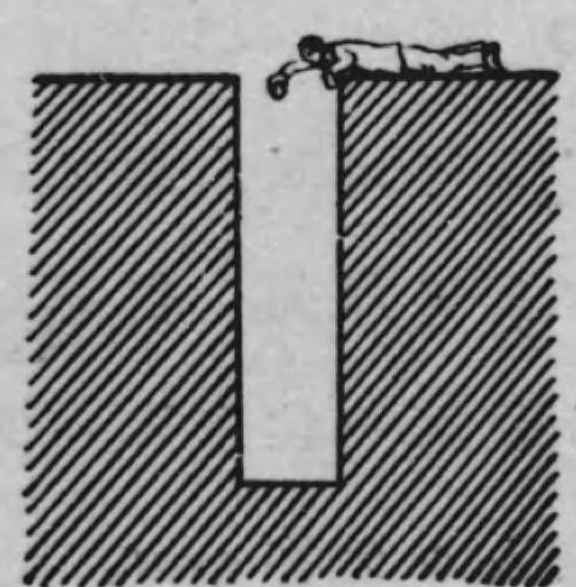


(**58**) 直角三角形ノ斜邊ノ長サガ 65 cm，直角ヲ夾ム一邊ガ 33 cm デアルト，他ノ一邊ノ長サハ如何。

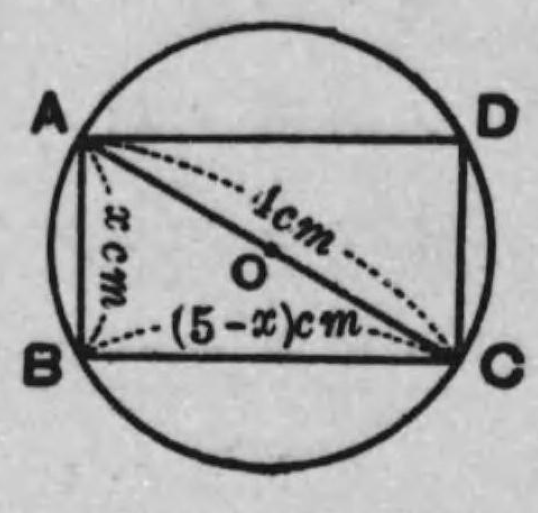
(**59**) 高サ 7 cm，等邊ガ 9 cm ノ二等邊三角形ノ底邊ノ長サ如何。但シ糎ノ小數第一位未滿ハ四捨五入シテ答ヘヨ。

60　一ツノ正方形ト,一邊ガソレヨリ16*cm*長イ正方形ヲ四ツニ截ツタモノトヲ前頁ノ①,②,③,④,⑤ノヤウニ接ギ合ハセテ一邊ガ80*cm*ノ正方形ヲ作ラウト思フ。小サイ正方形ノ一邊ガ何程デアレバヨイカ。

61　物ヲ自然ニ落スト落チ初メテカラt秒間ニ$4.9t^2$米ダケ落チル。今深サ35米ノ穴ノ緣ノ所デ握ツテキル石ヲ放スト,此ノ石ハ何秒デ穴ノ底ニトドクカ。



(60)　直徑ガ4*cm*ノ圓ニ周圍ガ10*cm*ノ矩形ヲ內接サセルト,其ノ各邊ノ長サハ何程ニナルカ。糎ノ小數第二位マデ計算セヨ。



(61)　毎秒v米ノ速サデ眞上ニ拋ゲ上ゲタ物體ハ拋ゲ始メテカラt秒後ニハ$(vt-4.9t^2)$米ノ高サノ所ニアル。

毎秒721米ノ速サデ直上ニ射チ出サレタ小銃彈ハ何秒後ニ1000米ノ高サノ所ニアルカ。

60　小サイ正方形ノ一邊ヲx *cm*トセヨ。何ト何トガ直角三角形ヲ作レバヨイカヲ考ヘヨ。

$$x^2+(x+16)^2=80^2$$
$$2x^2+32x+256=6400$$
$$x^2+16x-3072=0$$
$$x=\frac{-16\pm\sqrt{256+12288}}{2}$$
$$=\frac{-16\pm\sqrt{12544}}{2}$$
$$=\frac{-16\pm112}{2}$$

負ヲ捨テテ　　答　<u>48 *cm*</u>

61　t秒後ニ穴ノ底ニトドクトスルト

$$4.9t^2=35$$
$$\therefore\quad t^2=\frac{35}{4.9}=\frac{350}{49}$$
$$t=\pm\frac{\sqrt{350}}{7}$$

負ヲ捨テテ

$$t=\frac{\sqrt{350}}{7}=\frac{18.708}{7}$$
$$=2.672\cdots\cdots$$

答　<u>約 2.7秒</u>

注意　t秒間ニ物ガ自然ニ落下スル距離ハ$\frac{1}{2}gt^2$デアル。

(60)　求ムル矩形ノ一邊ヲx *cm*トセヨ。矩形ノ他ノ邊ハ何*cm*カ。

$$x^2+(5-x)^2=4^2$$
$$2x^2-10x+25=16$$
$$2x^2-10x+9=0$$
$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-72}}{4}$$
$$=\frac{10\pm\sqrt{28}}{4}$$
$$=\frac{10\pm2\sqrt{7}}{4}=\frac{10\pm2\times2.645}{4}$$
$$=\frac{5\pm2.645}{2}$$

$x=3.822$　又ハ　1.177

他ノ邊ハ如何。

答　<u>3.82 *cm* ト 1.18 *cm*</u>

(61)　t秒後ニ1000*m*ノ高サニ在ルトスルト

$$1000=721t-4.9t^2$$
$$\therefore\quad 4.9t^2-721t+1000=0$$

即チ　$49t^2-7210t+10000=0$

$$t=\frac{7210\pm\sqrt{7210^2-1960000}}{98}$$
$$=\frac{7210\pm\sqrt{50024100}}{98}$$
$$=\frac{7210\pm7072.7}{98}$$
$$=\frac{14282.7}{98}\quad 又ハ\quad \frac{137.3}{98}$$
$$=145.7\quad 又ハ\quad 1.4$$

答　<u>2分25.7秒，1.4秒</u>

第五章　函數及グラフ

47. 函　數

吾々ガ日常ノ生活ニ於テハ數量間ノ關係ガ非常ニ大切ナ役割ヲ演ズルモノデアル。例ヘバ

汽車賃ハ乘車粁程ニヨツテ增減シ,
税金ハ各自ノ收入ト關係ガアリ,
生活費ハ家族ノ人數ト關係ガアリ,
封書ヤ小包ノ料金ナドハ其ノ目方ニヨツテ定マリ,
或ル物ヲ買フニモ其ノ價格ハ其ノ個數ニ關係ガアリ,
電燈料ヤガス料金等ハ其ノ使用量ニ關係スル。

等數ヘ上ゲルト仲々澤山アル。

故ニ吾々ガ此ノ世デ生活スルタメニハ，ドウシテモソレ等ノ數量間ノ關係ヲ明ラカニシナクテハナラナイ。又ソレ等ノ數量間ノ變化ノ樣子ヲ知ラナクテハナラナイ。上ニ擧ゲタ例ハ何レモ卑近ナモノバカリデアルガ更ニ眼ヲ大キク開イテ我ガ國ノ經濟狀態ハドウカ，對外關係ハドウナリツツアルカ，景氣ノ變動ハ如何ナル經路ヲ辿リツツアルカトイフヤウナコトヲ考ヘルト，吾々ガ活社會ニ立ツテ活動シ，又生徒ガ他日社會ニ乘出シテ活動スルタメニハ，ドウシテモソレラ數量間ノ關係ヲ明瞭ニシナケレバナラナイ。

近時數學教育ノ目的ノ一ツノ大キナ眼目トシテ

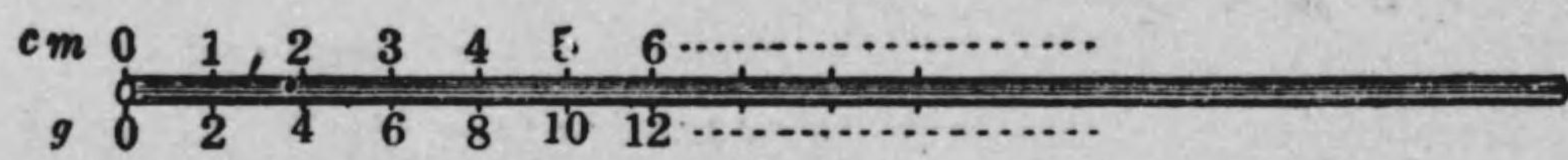
函數概念ノ養成

トイフコトガ，各方面デ叫バレ，又着々ト實施サレツツアルノハコノ爲デアルト考ヘル。函數概念ノ養成ハ如上ノコトモ確カニソノ一因デアルガ，更ニ數學ソノモノカラ見テモ極メテ重大ナモノデアルノハ論ヲ俟ツマデモナイ。

第五章　函數及グラフ

47. 函　數

ココニ太サノ一樣ナ銅線ガアツテ,ソノ長サ1cmノ重サヲ2gトシ,此ノ銅線ノ長サト重サトノ關係ヲ圖ニ示スト



デアツテ,長サト重サトハ互ニ比例シテヰル。

今此ノ銅線 l cm ノ重サヲ m g トスルト

$$m=2l \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

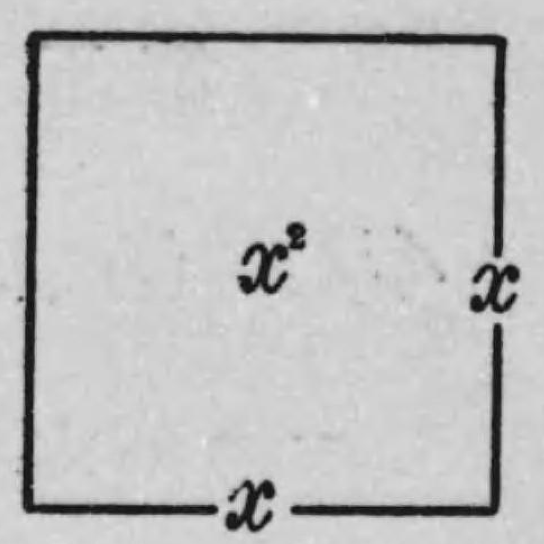
コレガ銅線ノ長サト重サトノ關係ヲ表ハス式デアル。

吾々ガ日常出會フ事柄ノ間ニモ幾ツカノ量ガ相伴ツテ變化スルトイフ場合ガ隨分多イ。

例ヘバ1日ノ晝ノ時間ト夜ノ時間トハ相伴ツテ變ハル。今1日ノ中ノ晝ノ時間ヲ x 時間,夜ノ時間ヲ y 時間トスルト

$$y=24-x \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

問　正方形ノ一邊ノ長サヲx糎，ソノ面積ヲy平方糎デ表ハスト，xトyトノ間ニハドンナ關係式ガ成立ツカ。又ソノ關係ヲグラフデ表ハシテ見ヨ。



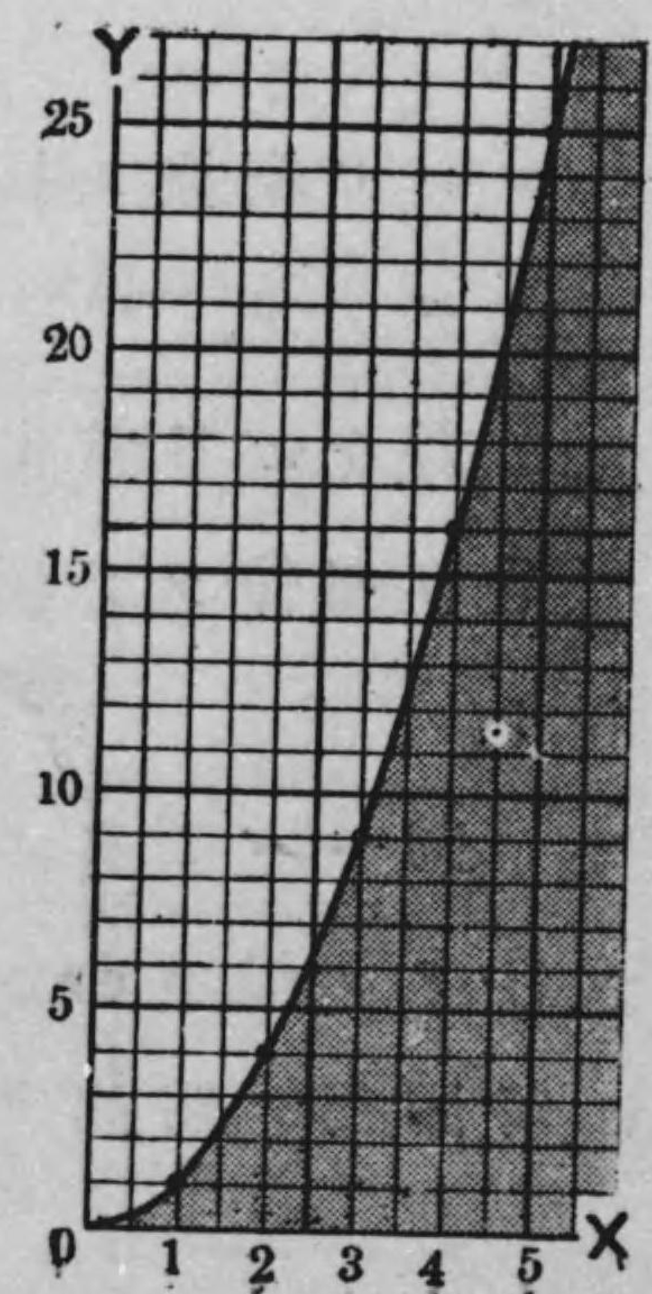
正方形ノ面積ハ一邊ノ長サヲ二乘シテ得ラレルカラ

$$y=x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

コノ式ノxニ色々ナ値ヲ與ヘテ，ソレニ對應スルyノ値ヲ求メテ表ニシテ見ルト，

x	1	2	3	4	5	....
y	1	4	9	16	25	....

コノxトyトノ關係ヲグラフニ表ハスト右ノヤウニナル。コノ場合ハ相對應スルxトyノ値デ點ヲ作ッテ見ルト，一直線ニハ並バナイカラ此等ノ點ヲ出來ルダケ滑カナ曲線デ結ブノデアル。



函數トイフ言葉ハ獨逸人ライブニッツ Leibniz ノ使用シタノニ始マルトイフコトデアルガ，**函數**トイフノハ一體ドウイフモノデアラウカ。教科書所載ノ例ヲ列擧シテ見ルト

$$m=2l\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$
$$y=24-x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$
$$y=x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$
$$h=vt-4.9t^2\cdots\cdots\cdots\cdots(D)$$

デアルガマダ此ノ外

圓ノ面積……$S=\pi r^2$ ……………(1)

球ノ體積……$v=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ ……………(2)

攝氏ト華氏ノ温度ノ讀ミノ關係

$$f=\frac{9}{5}c+32\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

等列擧ニ遑ノナイ程アルガ，要スルニ上ノ各式ノ左右兩邊ヲ見ルト　2, 24, v, 4.9, π, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{5}$, 32　等ハ變化シナイ所謂常數デアル。同ジ常數ノ中デモ　2, 24, 4.9, π, 32　等ハ任意性ヲ帶ビナイデ如何ナル場合デモ變化シナイ數デ，特ニ**絕對常數**トイフコトガアル。然ルニvハ一ツノ問題ノ研究中ハ一定デアルガ，他ノ場合ニハ又他ノ異ナル値ヲ取リ得ルモノデ，コレヲ**任意常數**トイッテ絕對常數ト區別スルコトガアル。常數ニ對シテ變化スル數ガアル。コレヲ**變數**トイフノデアルガ，此ノ變數ニモ二種類アル。卽チ他ノ變數ニ無關係ニ自由ニ其ノ値ヲ變ズルモノデコレヲ**自變數**又ハ**獨立變數**トイフ。又自變數ノ變化ニヨッテ定マル變數ヲ**從屬變數**又ハ其ノ**自變數ノ函數**トイフノデアル。自變數ト函數トノ關係ハ式デ示サレルモノモアルガ（上ノ各種ノ例ノヤウニ），併シ全ク式デ示サレナイモノモアル。

例ヘバ收入ヲ獨立變數（又ハ單ニ變數トモイフ）ト考ヘ，所得稅ヲ其ノ函數ト考ヘルト其ノ二量間ノ關係ヲ式デ示スノハ困難デアル。併シ乍ラ其ノ收入金額ガ定マルト所得稅額ハ定マル。

yガxノ函數デアルトキ，コレヲ $y=f(x)$ ノヤウニ表ハス。即チ$f(x)$ハxノ或ル一ツノ函數ヲ示シテヰルモノデ，同ジ問題中ニxヲ自變數トスル二ツヅツ異ナル函數ガアツタナラバ，$f(x)$, $F(x)$ ノヤウニ表ハサネバナラナイ。自變數ガ二ツアルトキハ $z=f(x,y)$ ノヤウニ書ク。ソレ以上アルトキモ同樣デアル。

自變數トイヒ，函數トイフモ相互的デアル。例ヘバ晝ノ時間xト夜ノ時間yトノ函數關係ヲ $y=24-x$ ノヤウニ書イテ，yハxノ函數デアルト考ヘテモヨイガ，又 $x=24-y$ ノヤウニ書イテxハyノ函數デアルト考ヘテモヨイ。

併シコレハ逆ガ常ニ式ヲ以テ示サレルトハ限ラナイ。例ヘバ

$$y=2x-x^6,\quad y=x^2-x^4+x^5,\quad y=3x^2-\tan x$$

等ハソノ例デアル。

函數ガ變數ノ一ツノ値ニ對シテ一ツ而モ唯一ツ對應スルトキ之ヲ一價函數（一値函數）トイヒ，二ツ以上ガ對應スルトキハ多價（多値）函數ナドトイフケレドモ茲デハソンナ必要ハナイ。

又中學校ノ程度デ出テクル函數ヲ表示スレバ次ノヤウデアル。

- 函數
  - 代數函數
    - 有理函數
      - 整函數
        - 一次函數
        - 二次函數
        - ………
      - 分數函數
    - 無理函數
  - 超越函數
    - 三角函數
    - 對數函數
    - 指數函數
    - 等

又或ル一定ノ速サv秒米デ,物體ヲ眞上ニ抛ゲ上ゲタトキ,t秒後ノ此ノ物體ノ高サヲh米トスルト,hトv,tトノ關係ハ

$$h=vt-4.9t^2.\cdots\cdots\cdots(D)$$

デ表ハサレル。〔238頁(57)〕

(A)式ノlトm,(B)式ヤ(C)式ノxトy,(D)式ノhトt等ハ色々ナ値ヲ取リ得ル數デアルカラコレヲ變數トイフ。變數ニ對シテ普通ノ數ヤ,又ハ文字デアッテモ少ナクトモ其ノ問題ノ中デハ一定ノ値ヲ持ッテヰルモノヲ常數トイフ。

(A)式ノ2,(B)式ノ24,(D)式ノ4.9及ビv等ハ常數デアル。

二ツノ變數x, yガアツテ,xノ或ル値ニ對シテ他ノ變數yノ或ル値ガ對應スルヤウナ關係ガアルトキハ,「變數yハ變數xノ函數デアル」トイフ。

上ノ例デm,y,hハ夫々l,x,tノ函數デアル。

又反對ニl,x,tハ夫々m,y,hノ函數デアルト考ヘテモヨイ。

問　題

1　底邊ノ長サガ一定($a\,cm$)ノ三角形ノ面積ハ何ノ函數デアルカ。此ノトキノ變數ト函數トノ關係ヲ式デ書表ハセ。

2　物體ガ自然ニ落下スルトキ,落チ初メテカラt秒間ニ降ル距離ヲS米トスルト $S=4.9t^2$ デアル。此ノ關係式カラ何ガ何ノ函數デアルカヲ言ヘ。又此ノトキノ常數ハ何カ。〔238頁61〕

3　圓周率ヲπ(パイ),圓ノ半徑ヲ$r\,cm$,面積ヲA平方糎トスルト $A=\pi r^2$ デアル。圓ノ面積ハ何ノ函數デアルカ。

(1)　圓ノ半徑ト周トノ關係ヲ式デ表ハセ。圓ノ周ハ何ノ函數デアルカ。又其ノトキノ常數ハ何カ。

(2)　一定ノ速サデ走ル汽車ガ通過スル距離ハ何ノ函數カ。又毎時 $80\,km$ ノ速サデ走ル汽車ノ通過スル距離トコレニ要スル時間トノ關係式ヲ書ケ。又此ノ時,何ガ何ノ函數デアルカ。

(3)　球ノ半徑ヲr,圓周率ヲπデ表ハストソノ體積Vハ$\frac{4}{3}\pi r^3$ デ表ハサレル。常數,變數,函數ハ夫々何カ。

問　題

1　底邊ガ一定ノトキノ三角形ノ面積ハ高サノ函數デアル。

今高サヲ $x\,cm$, 面積ヲ y 平方糎トスレバ

$$y=\frac{1}{2}ax$$

デ, a ハ常數デアル。

2　$S=4.9t^2$ ニ於テハ時間tガ定マレバ, ソレニ應ジテ距離Sガ定マル。故ニSハtノ函數デアル。又上ノ式ヲ

$$t=\sqrt{\frac{S}{4.9}}\ \text{(負ハ捨テル)}$$

ト書クト, t ハ S ヲ變數トスル函數ト考ヘラレル。

3　圓ノ面積Aハ共ノ半徑rノ函數デアル。

(1)　圓ノ半徑ヲr, 共ノ周ヲpトスレバ $p=2\pi r$ デアル。

從ツテpハrノ函數デアル。又2トπトハ何レモ常數デアル。

(2)　一定ノ速サデ走ル汽車ノ通過スル距離ハ時間ニヨツテ定マル。

故ニ時間ノ函數デアル。

又毎時 $80\,km$ ノ速サデ走ル汽車ノ通過スル距離ヲSトシ, コレニ要スル時間ヲtトスレバ

$$S=80t$$

故ニSハtノ函數デアル。

又 $t=\frac{S}{80}$ トモ考ヘラレルノデtハSノ函數デアル。

(3) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

故ニVハrノ函數デアツテ, $\frac{4}{3}$トπトハ共ニ常數デアル。

補充問題　(1) 高サ一定ナル直圓壔ノ體積ヲ表ハス式ヲ書ケ。ソノ式ニ於テ體積ハ何ノ函數デアルカ。($V=\pi r^2h$ 故ニ Vハrノ函數)又高サhモ變ルモノトスレバ, Vハ何ト何トノ函數デアルカ。

(2) 二邊ノ一定ナ三角形ノ第三邊ハ何ノ函數カ。又此ノ三角形ノ面積ハ何ノ函數カ。

(共ニ其ノ二邊ノ夾角ノ函數デアルガ, 其ノ函數關係ヲ示ス式ハ今ノ所示サナイ方ガヨイ。)

48. 二次函數ノグラフ及極大極小

x ノ二次函數ハ一般＝ ax^2+bx+c デアツテ，コレヲ y トスレバ

$$y=ax^2+bx+c \quad 又ハ \quad y-ax^2-bx-c=0$$

所ガ往々＝シテ $ax^2+by^2=c$ ノヤウナモノサヘモ y ハ x ノ二次函數カノヤウ＝考ヘル人ガアルガ，コレハ誤リデアル。

$$ax^2+by^2=c$$

ハコレヲ變形スレバ $y=\pm\sqrt{\dfrac{c-ax^2}{b}}$ トナツテ，x ノ無理函數デアル。而モ二價函數トナルノデアル。

三次函數ハ同様＝ $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ノヤウナモノヲイフノデアルガ，要スル＝二次函數，三次函數，四次函數等ハ何レモ有理整函數ヲ變數ノ次數＝ヨツテ分類シタモノデアル。

扨，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ ハ x ノ變化＝ツレテ如何ナル變化ヲナスカトイフノガ本節ノ研究題目デアル。變化ノ樣子ヲ最モ明瞭＝示スモノハグラフデアルカラ．二次函數ノ變化ヲ圖示スル例トシテ教科書デハ $y=x^2-8$ ヲトツタノデアル。

一般＝ $y=x^2$，$y=ax^2$ $(a \fallingdotseq 0)$
ノグラフハ y 軸＝關シテ對稱デアル。ソレハ x ノ絶對値ノ等シイ正負ノ値＝對シテ y ハ同ジ値ヲ持ツカラデアル。

又 $$y=x^2-8$$
＝ツイテ考ヘテミル＝，x^2 ハ x ノ正負＝關シテ同ジ値ヲ有スル。故＝ x^2-8 モ亦 x ノ正負＝關シテ同ジ値ヲ有ス。即チソノグラフハ y 軸＝關シテ對稱デアル。生徒＝ハ實際＝ x ＝種々ノ値ヲ代入シ，ソレ＝應ズル y ノ値ヲ比較サセテミルガヨイ。

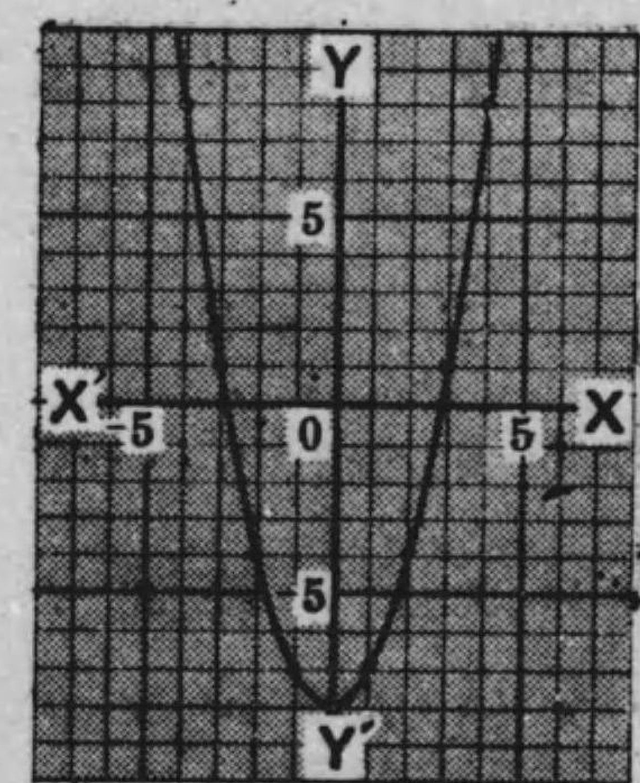
一般＝二次函數 $y=ax^2+bx+c$ ノグラフハ拋物線 Parabola トイハレル。コレハ拋物體ノ軌跡ガ力學上丁度二次函數トナルカラ，

48. 二次函數ノグラフ及極大極小

或ル變數ノ函數ガ其ノ變數＝ツイテノ二次式デ表ハサレルナラバ，コノ函數ヲ**二次函數**トイフ。

例一 x ノ函數 x^2-8 ノグラフヲ描ケ。

解 $y=x^2-8$ ト置キ，變數 x ノ變化＝伴フ函數 y ノ値ノ變化ヲ考ヘ，ソノ對應スル値ヲ求メテ見ルト



x	・・	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	・・・・
y	・・	8	1	-4	-7	-8	-7	-4	1	8	・・・・

尙コノ際，x ガ負カラ順次＝增大シテ 0 トナルト，y ハ順次＝減少シテ -8 トナリ，x ガ更＝增大スルト，y ハ却ツテ -8 カラ增大スルコトガワカル。

ソレ故對應スル x，y ノ値ヲ座標トスル點ハ點 $(0, -8)$ カラ下＝ハナイカラ，上ノ表ノ各組ノ値＝ヨツテ點ヲ打チ此等ノ點ヲ順次＝滑カ＝連結スルト，圖ノヤウナ曲線ノグラフガ得ラレル。

コノ曲線ハ拋物線ト呼バレル。

問 例一ノ圖上ニコレト同ジ軸ヲ用ヒテ
$y=x^2$, $y=x^2+5$, $y=x^2-10$ ノグラフヲ描ケ。

上ノ問及ビ例一ノグラフハ何レモ $y=x^2$ ノグラフヲ上下ニ移動シタモノニ過ギナイ。$y=x^2$ ノグラフヲ**標準拋物線**トイフ。例一ノ $y=x^2-8$ ノグラフハ又

$x^2=y+8$ 又ハ

$x=\pm\sqrt{y+8}$ ノグラフトイフコトモ出來ル。今 y ノ値ヲ種々ニトリ,之ニ對應スル x ノ値ヲ考ヘルト

y……	8,	1,	0,	-1,	-2,	-3…	-8
x……	±4,	±3,	$\pm2\sqrt{2}$,	$\pm\sqrt{7}$,	$\pm\sqrt{6}$,	$\pm\sqrt{5}$…	0

ノヤウニ y ノ一ツノ値ニ對シテ x ノ符號ガ反對デ絶對値ノ等シイ二ツノ値ガアルコトガワカル。ソレガ y ガ -8 ノトキハ唯一ツノ値トナリ,グラフ上ノ點モ唯一ツデアルコトガ知ラレル。

尙 y ノ値ヲ減ジテ行クト

y	-9,	-10,	-11,	……
x	$\pm\sqrt{-1}$,	$\pm\sqrt{-2}$,	$\pm\sqrt{-3}$,	……

トナリ,y ノ -8 ヨリ小サイ値ニ對シテハ數ノ

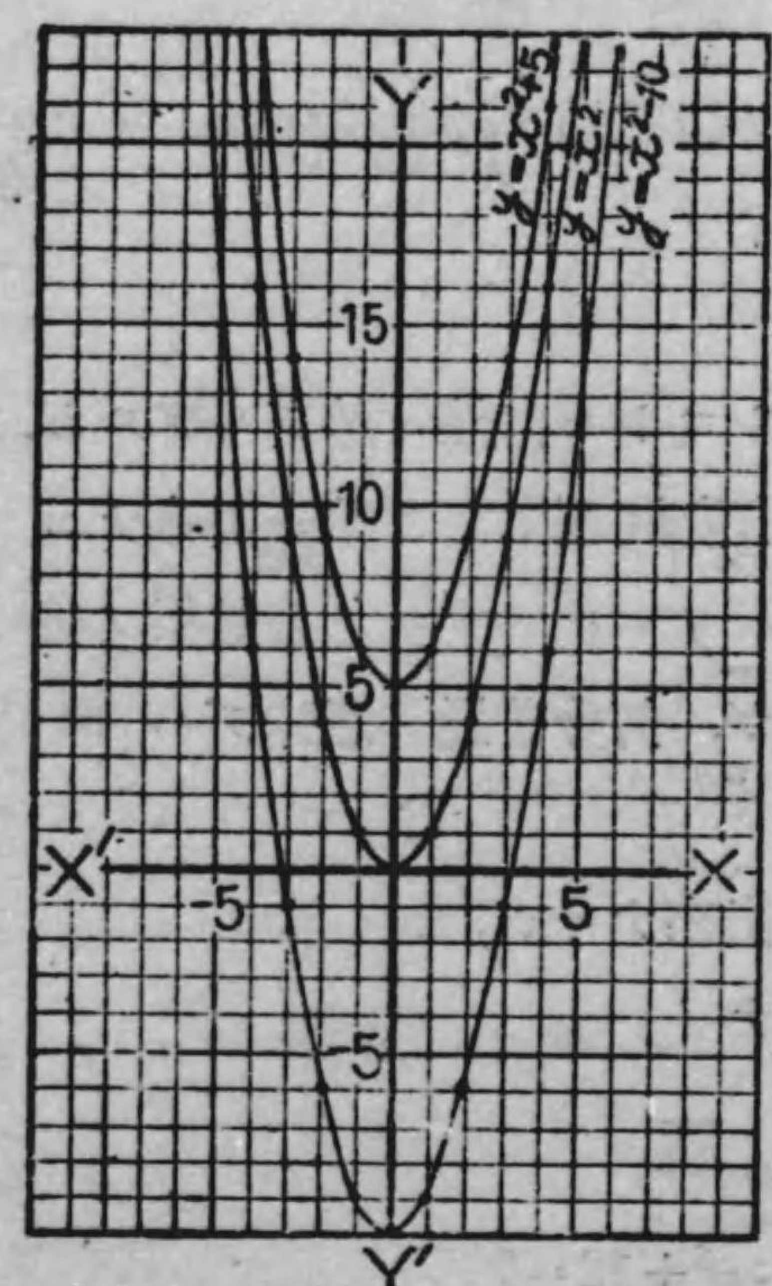
二次函數ノグラフガ拋物線ト稱ヘラレルノデアル。

拋物體ノ運動ノ式ヲ參考ノタメニ書イテ見ルト

$$y=\frac{v_0}{u_0}x+\frac{g}{2u_0^2}x^2$$

但シ質點ノ初速度ノ中 x 軸上ノ分速度ヲ u_0, y 軸上ノ分速度ヲ v_0 トスル。從ツテ時間 t ヲ媒介變數トシテ拋物體ノ運動ヲ示スナラバ

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}gt^2+v_0t\\ x&=u_0t\end{aligned}\right\}$$



問 $y=x^2$, $y=x^2+5$, $y=x^2-10$ 何レモソノグラフハ y 軸ヲ對稱軸トスル拋物線デアツテ, ソノグラフヲ示スト左ノ通リデアル。

又 x 軸ノ目盛ト y 軸ノ目盛ヲ變ヘル。例ヘバ, y 軸ノ目盛ハ左圖ノヤウニシ, x 軸ノ目盛ハ二ツヲ1ト考ヘルトカ, 三ツヲ1ト考ヘルトカイフヤウニスレバ形ノヨイ拋物線ガ得ラレル。

左ノ $y=x^2$ ノグラフモ, $y=x^2+5$ ノグラフモ, $y=x^2-10$ ノグラフモ, 又前頁ノ $y=x^2-8$ ノグラフモ合同デアルガ, 更ニ $y=x^2-bx+c$ ノグラフモ亦 $y=x^2$ ノグラフト合同デアルカラ $y=x^2$ ノグラフヲ**標準拋物線**トイフノデアル。

一般ニ $y=ax^2+bx+c$ ニ於テ, a ガ正ナラバソノグラフハ上向キノ拋物線デ, a ガ負ナラバ下向キノ拋物線トナル。又 a ノ絶對値ハ拋物線ノ形ヲ決定スルモノデ, a ノ絶對値ガ大ニナレバ拋物線ハ細長クナリ, 其ノ絶對値ガ小サクナレバ太ツタ形トナル。

b, c ノ値ハ拋物線ノ位置ヲ決定スル。其ノ中 c ハ拋物線ガ y 軸ヲ截ル截片ノ値ヲ與ヘルモノデアル。ソレハ $y=ax^2+bx+c$ ニ於テ x ヲ 0 トスレバ $y=c$ トナルコトカラワカル。恰モ $y=ax+b$ ノ b ト同樣デアル。

上記ノコトカラ **a ノ値ノ同一ナ拋物線ハ合同デアル**コトガイヘルノデアルガ，玆デハ勿論ソノ理論的ナ證明ハスル必要ハナイ。

拋物線ヲ描クニハ方程式ニ適スル x, y ノ値ヲ數組定メ，ソレヲ座標トスル點ヲ定メテ，ソレラノ點ヲ滑カニ結ベバヨイ。決シテ線分ヲ以テ結ンデハナラナイ。

拋物線ニハ必ズ對稱軸ガアツテ，ソノ對稱軸ヲ拋物線ノ**軸**トイヒ，軸ト拋物線トノ交點ヲ拋物線ノ**頂點**トイフ。

虛數ニツイテ

二次方程式解法ニ伴ツテ虛數ノ生ズルコトハ自然ノ勢デハアルガ，虛數ヲ中學校教科書ニ取入レルコトハ實際問題トシテ隨分困難ナコトガ多イノデ，本書デハ唯單ニ名目ヲ示スニ止メタ。勿論數學ノ研究ニハ必要缺クベカラザルモノデアルガ，何分普通ノ意味デハ

(a) 大小ノ比較ガ出來ナイ，

(b) 具體的ニ其ノ量ヲ示スコトガ出來ナイシ，

(c) 正負ノ別ヲ定メルコトガ出來ナイ。

問　題

4 $x^2+25=0$

$\therefore\ x^2=-25$　答 $\underline{\pm5\sqrt{-1}}$

5 $x^2+2x+4=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$$
$$=-1\pm\sqrt{-3}\cdots\text{答}$$

4 $y^2+12=0$

$y^2=-12$　答 $\underline{\pm\sqrt{-12}}$

5 $x^2-x+3=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}$$
$$=\underline{\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}}\cdots\text{答}$$

上デハ根號內ニ負數ガ現ハレルガ，グラフノ上デハ之ニ應ズル點ハナイ。コレハ

平方根ノ根號內ニ負數ヲ持ツ數ハ吾々ノ實際生活ニハ表ハレナイ數デアルコトヲ示ス。コノヤウナ數ヲ**虛數**ト名ヅケ，二乘スレバ負數トナル數ト規約スル。虛數ニ對シテ今マデ學ンデ來タ數ヲ**實數**トイフ。

例ヘバ $(\sqrt{-3})^2=-3,\quad -(\sqrt{-5})^2=-(-5)=5$

例二 $x^2+9=0$ ヲ解ケ。

解

$$x^2+9=0$$
$$x^2=-9$$
$$x=\pm\sqrt{-9}\quad x=\pm3\sqrt{-1}\qquad \text{答}\ \pm3\sqrt{-1}$$
$$\sqrt{-9}=\sqrt{-1\times9}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=3\sqrt{-1}$$

虛數ハ $\sqrt{-1}$ ヲ單位トスル數デアル。

問　題

次ノ方程式ヲ解ケ。(4—6)

4 $x^2+25=0$

5 $x^2+2x+4=0$

6 $y^2-5y+5=0$

(4) $y^2+12=0$

(5) $x^2-x+3=0$

(6) $5x^2+6x+2=0$

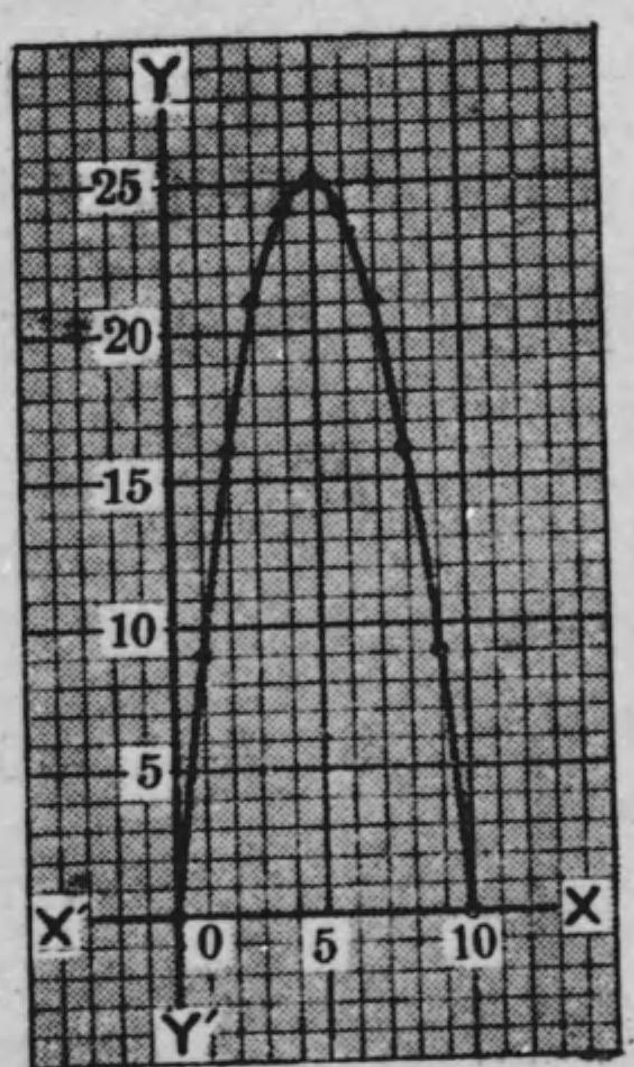
例三　周圍ガ20米ノ矩形ノ中デ面積ノ最大ナモノハ何カ。コレヲグラフデ解ケ。

解　矩形ノ周圍ガ20米デアルカラ,縱ト横トノ長サノ和ハ10米デアル。ソレ故縱ノ長サヲx米デ表ハスト,横ノ長サハ$(10-x)$米デ,ソノ矩形ノ面積ヲy平方米トスルト

$$y=x(10-x)$$　ノ式ガ得ラレル。

今xガ順々ニ0ト10トノ間ノ値ヲ取ル場合,コレニ對應スルyノ値ヲ求メテ表ニシテ見ルト,

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	9	16	21	24	25	24	21	16	9	0



此等ノ各組ノ値ニヨツテ順次ニ點ヲ描キ,滑カニ連結スルト圖ノヤウニナル。

6　$y^2-5y+5=0$

$$y=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\cdots\cdots\cdots 答$$

(6)　$5x^2+6x+2=0$

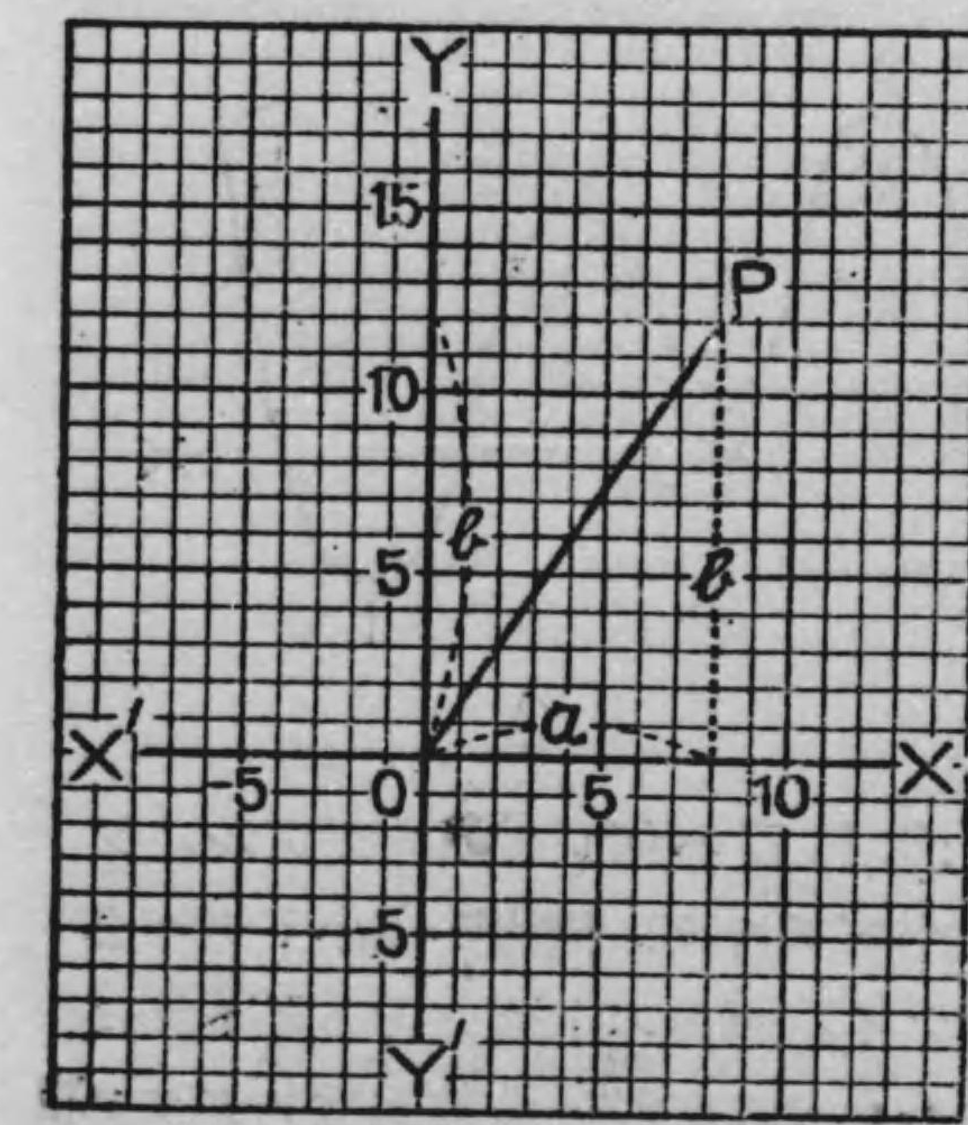
$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36-40}}{10}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{10}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{-1}}{5}\cdots\cdots 答$$

注意　1.　虚數ノ計算ニ於テ例ヘバ$\sqrt{-12}$ノヤウナノハコレヲ$\sqrt{12}\sqrt{-1}$卽チ$2\sqrt{3}\sqrt{-1}$又ハ$2\sqrt{-3}$ト直シテモヨイガ,12ガ完全平方デナイカラコンナノハ,成ルベクソノママ$\sqrt{-12}$トスルコトヲ希望スル。

注意　2.　虚數從ツテ複素數ノ大小ハ特別ノ定義ヲ要シ而モソレハ餘程高等ノ數學ニノミ必要デアルカラ,通常ノ意味デハ虚數ニハ大小ナシトシテヨロシイ。



注意　3.　複素數ノ幾何學的ノ表示ハGauss（ガウス）, Neumann（ノイマン）, Argand（アルガン）等ニヨツテ成サレタ。例ヘバ$a+b\sqrt{-1}$ヲ表ハスニハ次ノヤウニスル。

卽チ圖ニ於テX軸ハ實軸トイツテ,實數部分aノ値ヲ取ル。Y軸ハ虚軸トイツテ虚數部分bノ値ヲトル。

$P(a,\ b)$ヲ求ムレバ點Pハ$a+bi$ニ對應スル點デアル。

此ノ表示法ハ三角法トノ連絡モアリ,又**ベクトル** Vector トモ密接ナ關係ガアルガ勿論初等的デハナイ。

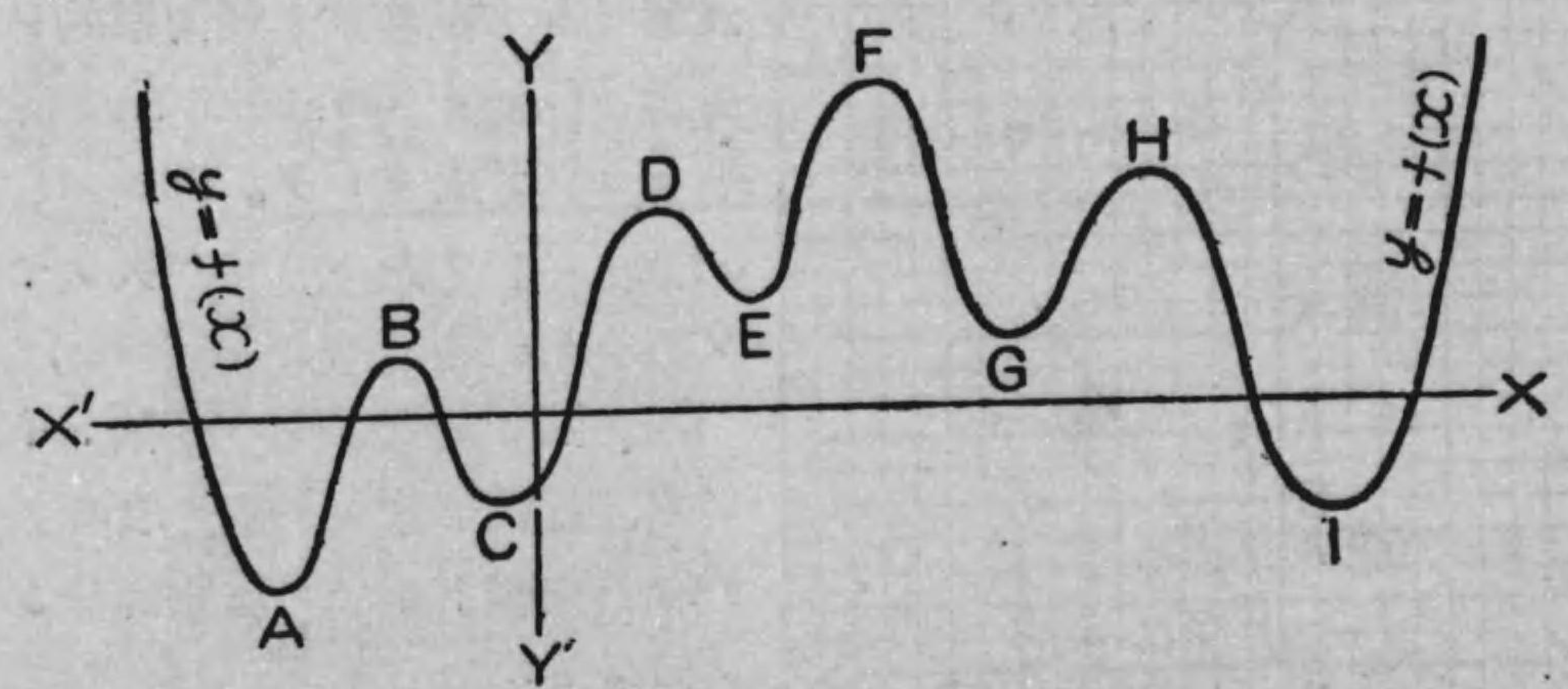
例三　$y=ax^2+bx+c$ ニ於テaガ負デcガ0ノ場合ノ例デアル。而モ實際問題デアルタメニ「カーブ」ハ或ル所デ切レテ仕舞ツテキ

ルノデアル。aが負ノトキハ何故ニ下ヲ向クカトカ，ソノグラフノ彎曲ノ樣子ハドウカ等ノ理論的ナコトハ微分學ノ助ヲ藉ラネバワカラナイガ，實例デ圖ヲ描カセテ見テ，aガ負ノトキハxノ絕對値ノ增大スルニツレテソノ函數ノ値ハ如何程デモ減少シテ行クコトヲ考ヘサセルト，左程ノ困難モナクワカルコトデアル。尙此ノ例デハグラフノ上デ最大ノ場合ヲ研究サセルノデアル。卽チ $y=x(10-x)$ デハ $x=5$ ノトキニソノ函數ハ最大トナツテ，其ノ最大値ハ25デアル。

(a) 極大及極小 Maximum and Minimum

極大ト極小トノ研究モ微分學ニヨレバ理論的ニ美麗デアルガ，併シ函數概念ノ養成カラハ，極大，極小ヲ初等的ニ扱フコトハ極メテ肝要ノコトデアルカラ少クトモ其ノ概念ダケハ與ヘルコトニスル。

極大ト最大，極小ト最小トハ全然意義ヲ異ニスル。此ノ區別ハ之ヲ判斷シテオク必要ガアル。今xノ或ル函數 $y=f(x)$ ノグラフガ次ノ圖ノヤウニナツタトスレバ



A, C, E, G, I ハ何レモ極小デ，B, D, F, H ハ何レモ極大デアル。ソノ中デAハ極小デアルト同時ニ最小デアルガ，極大ト極小トデハ必ズシモ極小ノ方ガ小サイトハ限ラナイ。例ヘバ上圖ノBトEトヲミルトBハ極大デアルガ極小Eヨリハ小サイ。特ニ分數函數ノグラフヲ描クト明瞭ニナル。併シ中等ノ程度デハ取扱フ函數ガ二次函數及ビ簡單ナ無理函數及ビ分數函數ヲ出ナイタメ，概ネ極大ト最大，極小ト最小トガ一致スルコトガ多イノデ生徒ハ特ニ混同シ易イ。

コレモ拋物線デアッテ,例一ノ拋物線ト異ナル點ハ其ノ向キト,軸ニ對スル位置等デアル。

(a) 今コノ拋物線上ノ點ノ座標ヲ檢ベテ見ルニ,xガ0カラ順次ニ增スニ從ッテyモ增シ,$x=5$ノトキ$y=25$トナリ,xガ更ニ增スニツレテyハ却ッテ減ルコトガワカル。

卽チyノ取リ得ル値ノ中デ最モ大キイモノハ25デ,其ノトキノxノ値ハ5デアル。

ソレ故周圍ガ20米ノ矩形ノ中デ面積ノ最大ナモノハ縦ガ5米,從ッテ横モ5米ノ正方形デ,ソノ面積ハ25平方米デアル。

式カラ上ノ結果ヲ出スニハ次ノヤウニスル。

$$
\begin{aligned}
y&=x(10-x)=10x-x^2\\
&=-(-10x+x^2)\\
&=-(x-5)^2+25
\end{aligned}
$$

コノ式ノ中ノ $-(x-5)^2$ ハ0以外ノトキハ常ニ負デ,決シテ正トナルコトハナイ。從ッテハ $-(x-5)^2=0$ 卽チ $x=5$ ノトキ最大デ,其ノ値ハ25デアル。

(b)　例三ノ曲線ガ x 軸ト出會フノハ $y=0$ ノトキデアルカラ,其ノ交點ノ x ノ値(卽チ横座標)ガ方程式 $x(10-x)=0$ ノ根トナル。コレハ 0 ト 10 トデアッテ計算デ求メルモノト一致シテキル。

或ル函數ノ値ガ其ノ變數ノ値ノ變化ニツレテ次第ニ增シ,遂ニ增大ノ極點ニ達シ,其ノ後ハ却テ減ルナラバ,其ノ增大ノ極點ノ函數ノ値ヲ其ノ**極大値**トイフ。

例三ノ函數 $x(10-x)$ ノ極大値ハ 25 デアル。

或ル函數ノ値ガ其ノ變數ノ値ノ變化ニツレテ次第ニ減リ,遂ニ減少ノ極點ニ達シ,其ノ後ハ却テ增スナラバ,其ノ減少ノ極點ノ函數ノ値ヲ其ノ**極小値**トイフ。

例一ノ函數 x^2-8 ノ極小値ハ -8 デアル。

問　　　題

7　$y=x^2-2x+1$ ノグラフヲ描イテ標準拋物線ト重ネ合セテ見ヨ。

(7)　$y=x^2-2x-3$ 及ビ $y=x^2-2x+5$ ノグラフヲ描ケ。

x ニ關スル一般ノ二次函數 ax^2+bx+c ヲトツテ考フルニ

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}\cdots\cdots\cdots\cdots[A]$$

x ノ値ハ實數デアルカラ, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ決シテ負トナルコトハナイ。卽チ　$\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geqq 0$

故ニ ax^2+bx+c ハ $x+\dfrac{b}{2a}=0$ ノトキニ極大又ハ極小トナリ,其ノ値ハ $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ デアル。故ニ與函數 ax^2+bx+c ガ極大ヲ持ツカ極小ヲ持ツカハ一ツニ a ノ正負ニヨツテ定マル。卽チ

(1) $a>0$ ノトキ

今 $a=p^2$ トオケバ〔A〕$=(px+\alpha)^2-\beta$ トナルカラ $x=-\dfrac{\alpha}{p}$ ノトキ極小トナル。卽チ函數ハ極小値ヲ有スル。コレハグラフガ上向キデアルコトニヨツテモワカル。

(2) $a<0$ ノトキ

今 $a=-p^2$ トオケバ〔A〕$=-(px+\alpha)^2-\beta$ トナルカラ $x=-\dfrac{\alpha}{p}$ ノトキ極大トナル。卽チ函數ハ極大値ヲ有スル。コレモ亦グラフガ下向デアルコトニヨツテ得ル結果ト一致シテキル。

教科書デハ上ノ(1),(2)ノ例トシテ $y=x^2-8$ ト $y=10x-x^2$ トヲ取扱ツタ。

計算ニヨツテ極大,極小ヲ求メルニハ上ノ〔A〕式ヲ導イタヤウニ x ヲ含ム項全部ヲ完全平方ニスルヤウニ考ヘルガヨイ。此ノ他ニ判別式ニヨル方法モアルガ本書デハ判別式ハ取扱ハナイカラ之ヲ省ク。

(b)　グラフニヨル方程式ノ解法

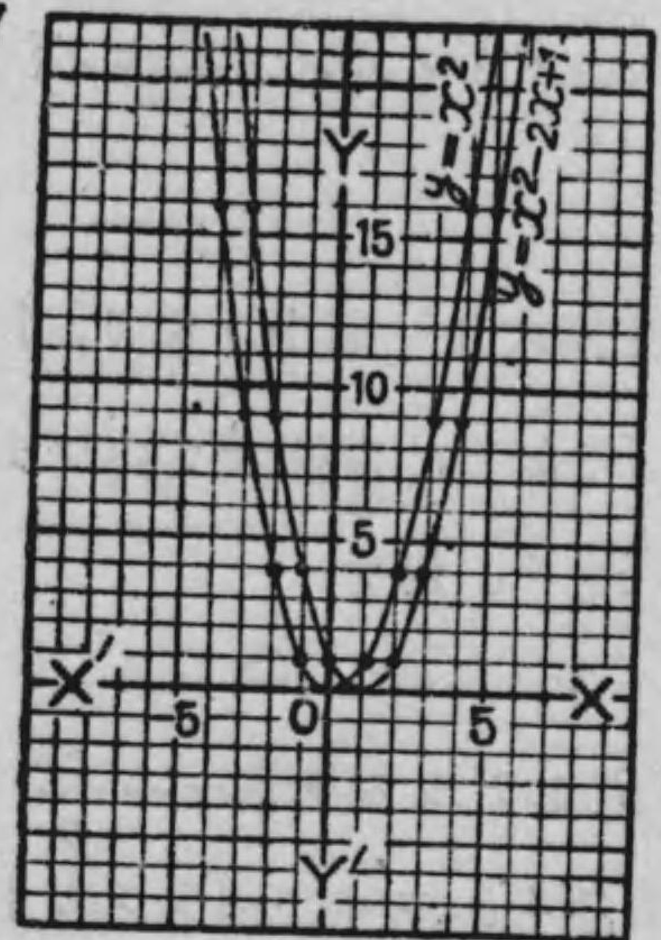
(a) デハグラフニヨル極大極小ノ意味ヲ考ヘタ。グラフデハ此ノ外方程式ヲ解クコトガ出來ル。ソレハ $y=x(10-x)$ ノグラフガ x

軸トノ交點ヲ求メルノデアルガ，コレハ式ノ上デハ次ノ聯立方程式ヲ解クコトニナルノデアル。

$$\left|\begin{array}{l} y=x(10-x)\\ y=0\end{array}\right.$$

問　題

7



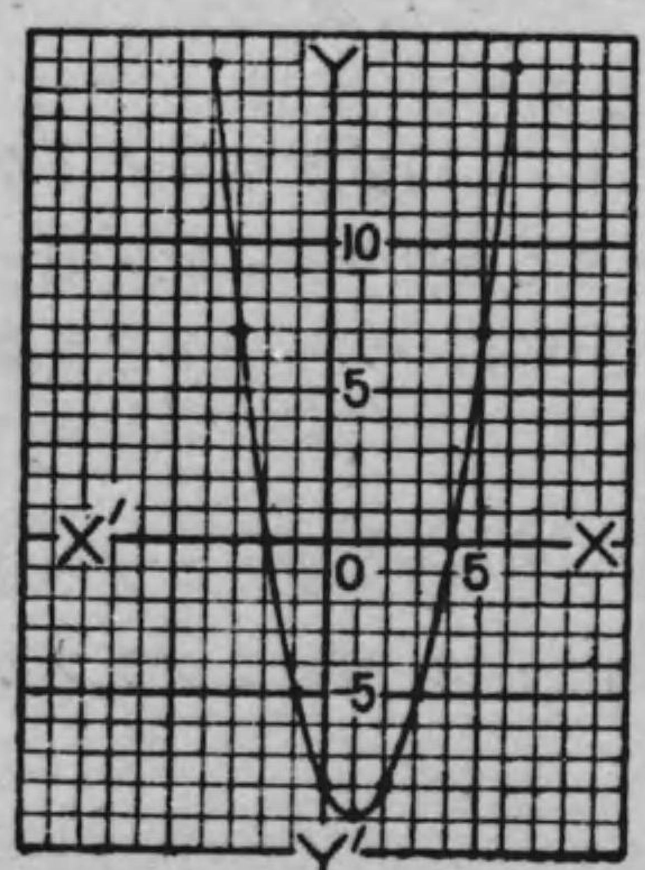
8　教科書ノ圖ヲ見ヨ。

答　5, −1

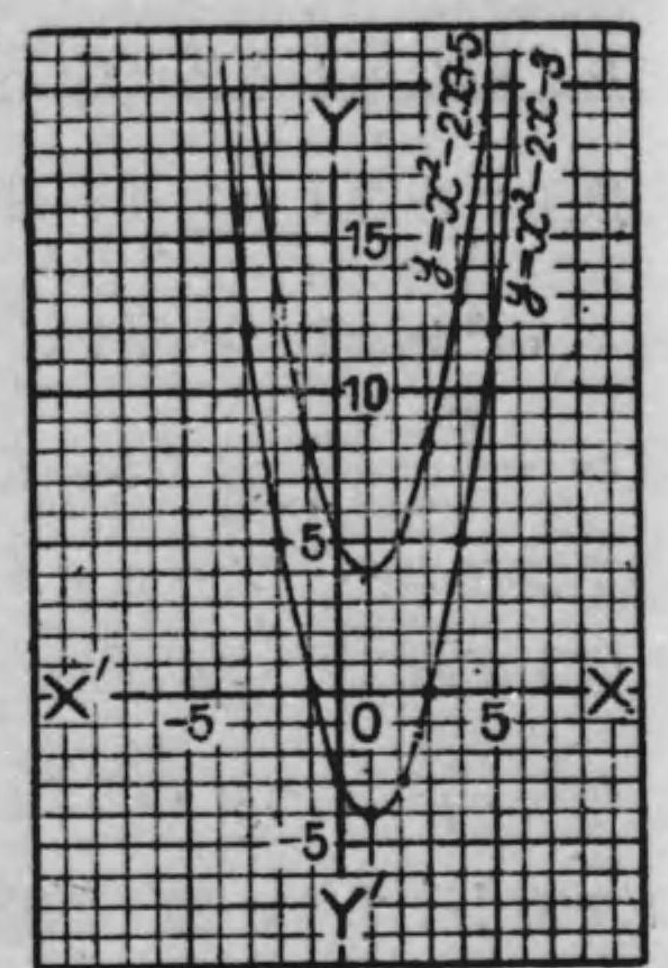
9　計算　$(x-4)(x+2)=0$

故ニ　$x=4$　又ハ　-2

尙圖デハ次ノ通リ。



(7)

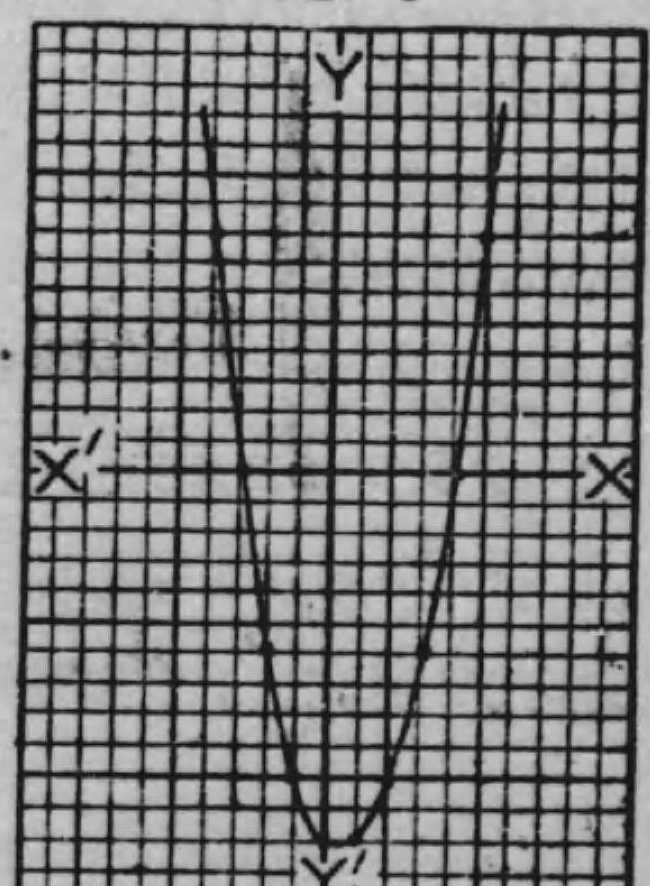


(8) グラフガ x 軸ト交ラナイコトハ x^2-4x+5 ヲ0トスル x ノ實數値ノナイコトヲ示ス。卽チ根ハ虛數トナル。

(9) 計算　$(x-4)(x+3)=0$

故ニ　$x=4$　又ハ　-3

尙圖デハ次ノ通リ。



次ノ一元二次方程式ヲグラフデ解キ,計算ニヨル結果ト比較セヨ。

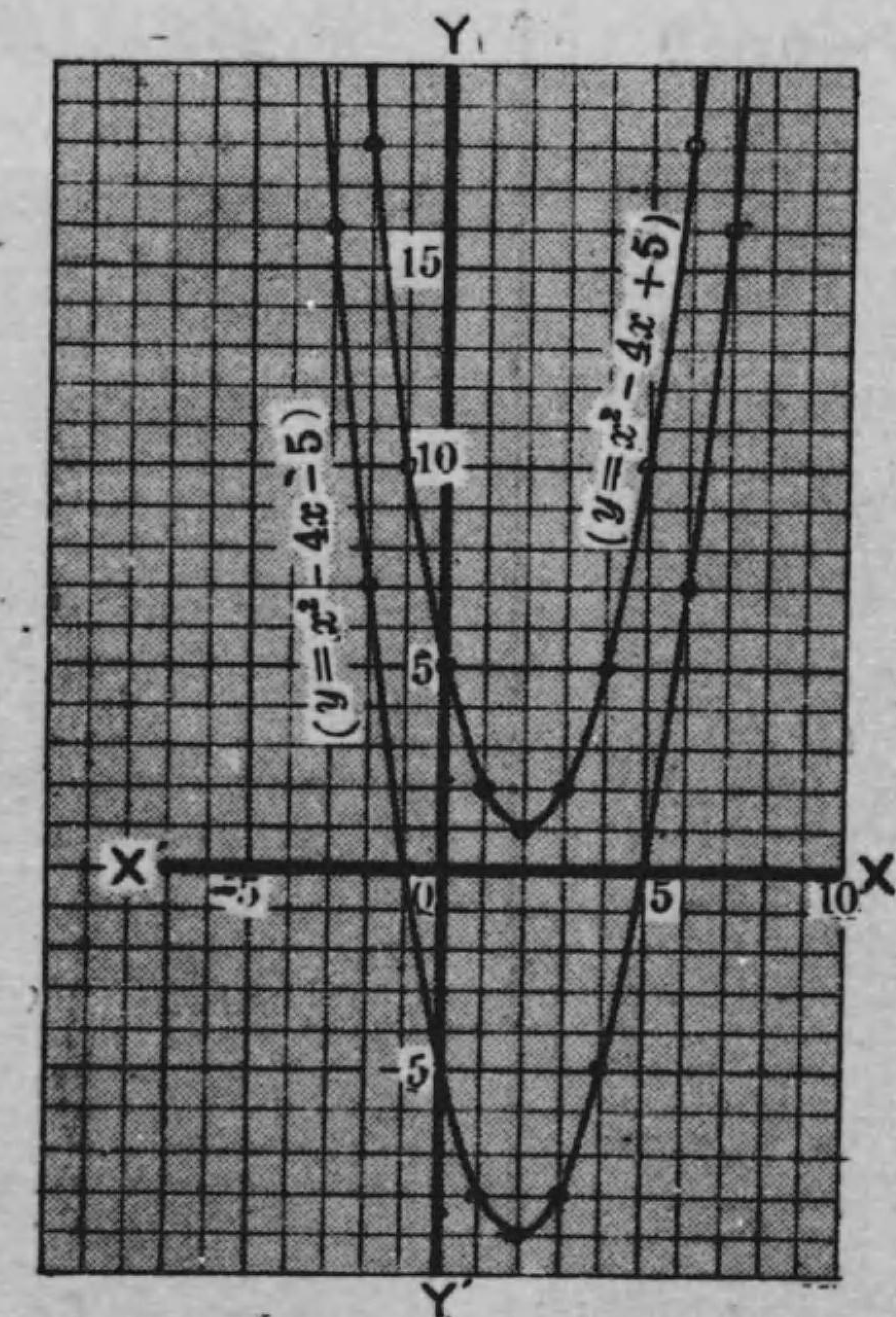
8　$x^2-4x-5=0$

注意　$y=x^2-4x-5$ ノグラフヲ描ケ。

コノグラフガ x 軸ト交ハル點ヲ考ヘヨ。

(8)　$x^2-4x+5=0$

注意　$y=x^2-4x+5$ ノグラフヲ描ケ。



コノグラフガ x 軸ト交ハラナイコトハ如何ナルコトヲ示スカ。

計算デ求メルト

$x=2\pm\sqrt{-1}$

トナル。

9　$x^2-2x-8=0$　ヲグラフト計算トノ兩方デ解ケ。

(9)　$x^2-x-12=0$　ヲグラフト計算トノ兩方デ解ケ。

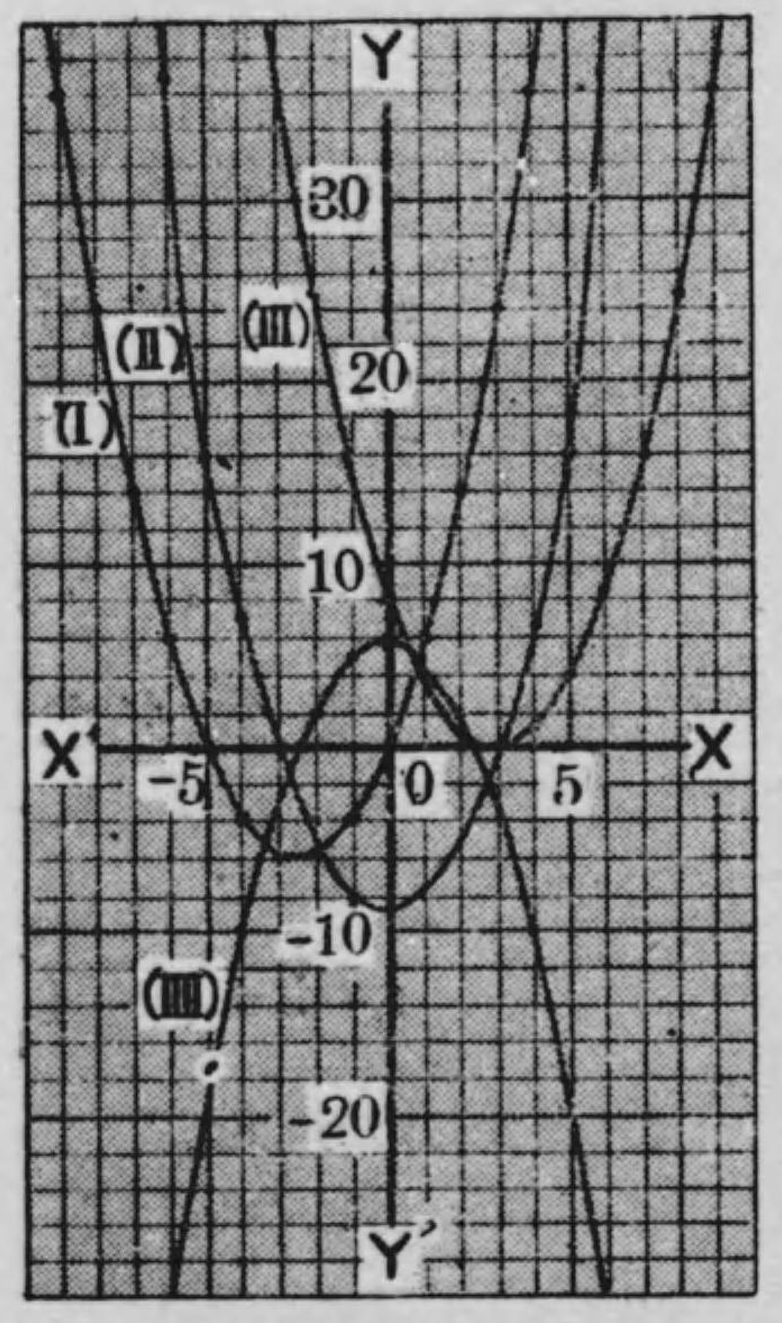
次ノ圖ハ下ノ各式ノグラフデアル。ドノ式ガドノグラフニ當ツテキルカヲ言へ。

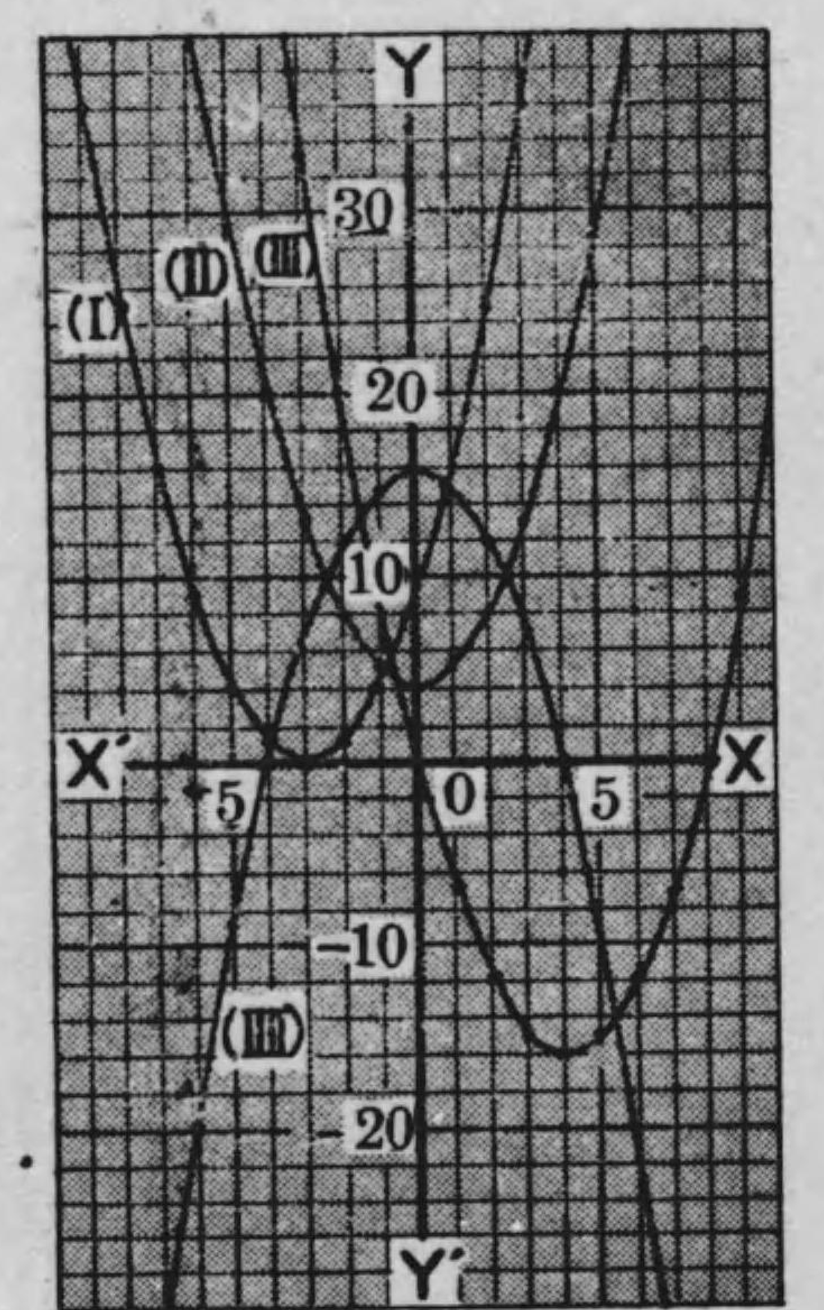
10　イ　$y=x^2-9$　　(10)　(イ)　$y=x^2+4$

　　ロ　$y=6-x^2$　　　(ロ)　$y=-x^2+16$

　　ハ　$y=x^2+5x$　　　(ハ)　$y=x^2-8x$

　　ニ　$y=x^2-6x+9$　　　(ニ)　$y=x^2+6x+9$





注意　$y=ax^2+bx+c$ ノグラフト x 軸トノ交點ノ横座標ガ $ax^2+bx+c=0$ ノ根デアル事ヲ利用スルト上ノ答ヲ得ルノニ都合ガヨイ。

10　イ　$y=x^2-9$ ノグラフハ(Ⅱ)デアル。

理由ニハ色々アルガ,

(1)　$x^2-9=0$ ノ根ガ ±3 デアルカラ x 軸ノ截片ノ値ヲ見レバヨイ。

(2)　y 軸ガ拋物線ノ軸トナツテキル。

(3)　y 軸ノ截片ガ -9 デアル。

等色々アゲラレル。

ロ　$y=6-x^2$ ノグラフハ(Ⅲ)デアル。何トナレバ,

(1)　グラフガ下向キニナツテキル。

(2)　y 軸ノ截片ガ 6 デアル。

ハ　$y=x^2+5x$　ノグラフハ(Ⅰ)デアル。何トナレバ

(1)　原點ヲ通ツテキル。

(2)　x 軸ノ截片ガ $x^2+5x=0$ ノ根デアル。

ニ　$y=x^2-6x+9$ ノグラフハ(Ⅱ)デアル。何トナレバ

(1)　y 軸ノ截片ガ 9

(2)　グラフガ x 軸ノ $+3$ ノ所デ x 軸ニ切シテキル。

(10)　(イ)　$y=x^2+4$ ノグラフハ(Ⅱ)デアル。

理由

(1)　拋物線ノ軸ハ y 軸トナツテキル。

(2)　y 軸ノ截片ガ $+4$

(3)　$x^2+4=0$ ノ根ハ $\pm2\sqrt{-1}$ 卽チ, グラフガ x 軸ト交ハツテキナイ。

(ロ)　$y=-x^2+16$ ノグラフハ(Ⅲ)デアル。

理由

(1)　グラフガ下向キ

(2)　y 軸ノ截片ガ16

(3)　拋物線ノ軸ハ y 軸デアル。

(ハ)　$y=x^2-8x$ ノグラフハ(Ⅱ)デアル。

理由

(1)　原點ヲ通ル。

(2)　$x^2-8x=0$ ノ根ガ 0 ト 8

(ニ)　$y=x^2+6x+9$ ノグラフハ(Ⅰ)デアル。何トナレバ,

(1)　y 軸ノ截片ガ 9

(2)　グラフガ x 軸ノ -3 ノ所デ x 軸ニ切シテキル。

49. 二元二次方程式ノグラフ

前節ノ二次函數 $y=ax^2+bx+c$ モ亦二元二次方程式デアルガ，本節デハ二次函數以外ノ二元二次方程式ノグラフヲ研究シ，併セテ二元二次方程式ヲ總括セントスルノデアル。

二元二次方程式ノ一般ノ形ハ

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

デアルガ，コノ一般ノ形カラノ研究ハ中等ノ程度デハナイ。併シ此ノ一般ノ形モ解析幾何學ノ敎ヘル所ニヨレバ，適當ニ座標軸ヲ變換スルコトニヨツテ次ノ標準ノ形ニ歸スルコトガ出來ル。

(1)　$x^2+y^2=r^2$　　(圓)

(2)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　(楕圓)

(3)　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad xy=k$　　(雙曲線)

(4)　$y=ax^2+bx+c,\quad y^2=px$　　(抛物線)

(5)　$ax^2+bxy+cy^2=0$

　　卽チ　$(lx+my)(l'x+m'y)=0$　(相交ル二直線)

(6)　$l^2x^2+m^2y^2=0$

　　卽チ　$x=0,\quad y=0$　　(原點卽チ點圓)

上ノ(5)ト(6)トハ極メテ特別デアリ，(4)ハ既ニ前節デ研究シタノデ，本節デハ(1)，(2)，(3)ノ研究ヲスル。

例一　$x^2+y^2=r^2$　(特ニ $r=5$ ノ場合) ノグラフデアル。

此ノグラフハ $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ トシテ，x ニ色々ノ値ヲ代入シテソレニ應ズル y ノ値ヲトリ，ソレラノ諸點ヲ滑ラカニ結ンデソノ曲線ガ圓ニナルコトヲ直觀サセ，後，圓ニナル理由ヲ考ヘサセルガヨイ。卽チ $x^2+y^2=r^2$ ヲ滿足スル一點ヲ $P(x',y')$ トスレバ

$$OP^2=x'^2+y'^2=r^2$$

故ニ　　$OP=r$　デ P ハ常ニ原點カラノ距離ニアル。

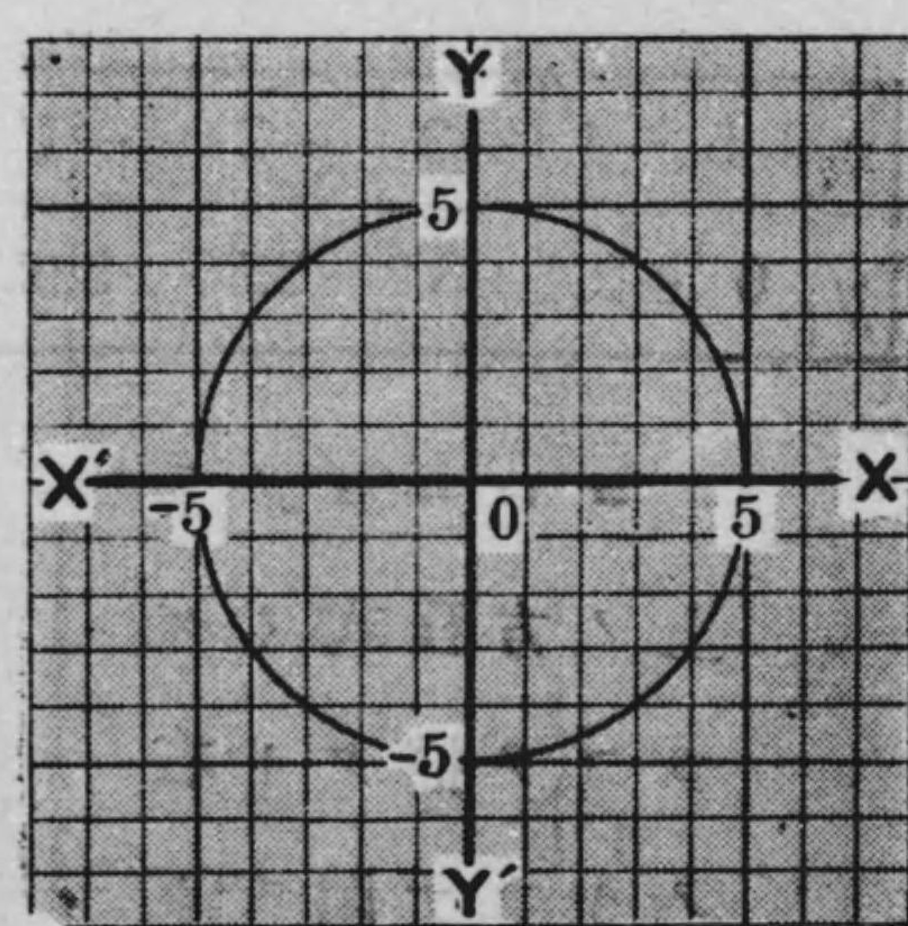
49. 二元二次方程式ノグラフ

例一　$x^2+y^2=25$ ノグラフヲ描ケ。

解　$x^2+y^2=25$ ノ y ヲ變數 x ノ函數トシテ表ハスト $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ デアル。コノ式カラ對應スル x，y ノ値ヲ求メテ見ルト

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	±3	±4	±4.58	±4.90	±5	±4.90	±4.58	±4	±3	0

コレニヨツテ上ノ方程式ノグラフヲ描クト次ノヤウナ圖トナル。



此ノ圓ノ半徑ハ $\sqrt{25}=5$ デ，中心ハ原點デアル。

注意

$y=\pm\sqrt{25-x^2}$ デアルカラ $x>5$ ヤ $x<-5$ ノヤウナ x ノ値ニ對スル y ノ値ハナイ。又 $x=\pm\sqrt{25-y^2}$ デアルカラ $y>5$ ヤ $y<-5$ ヤウノナ y ノ値ニ對スル x ノ値モナイ。

例二 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ ノグラフヲ求メヨ。

解 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ ヲ變化スルト

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$ トナルカラ

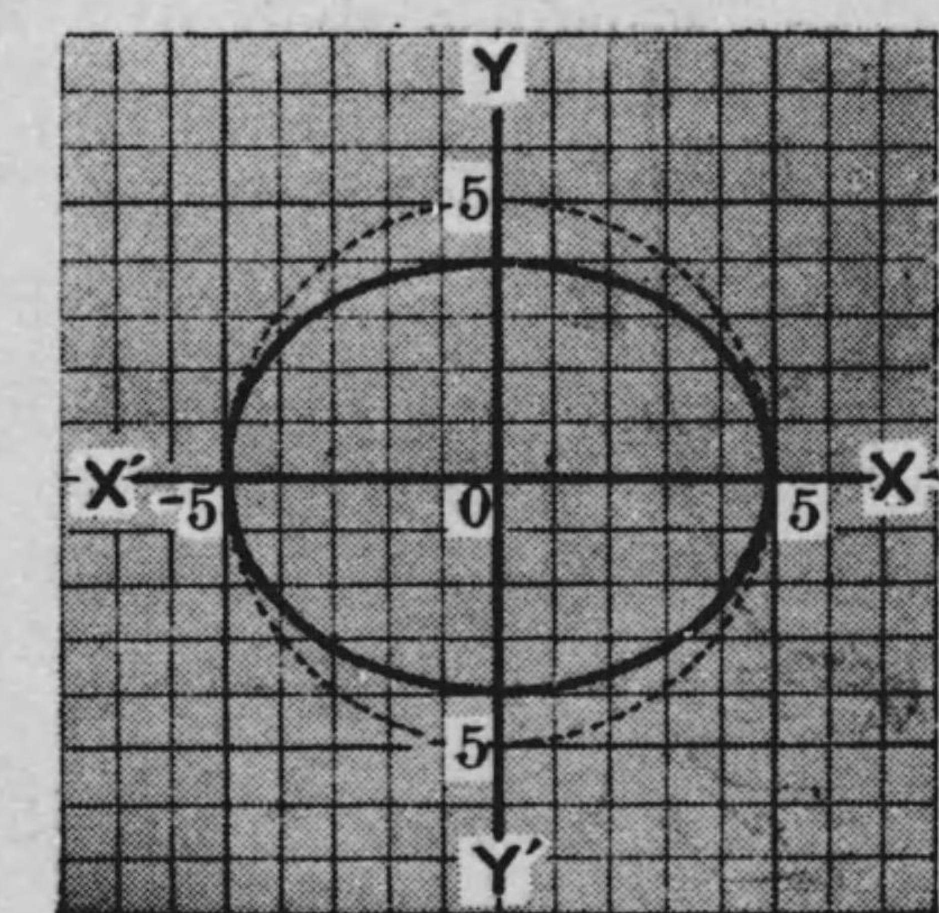
x ノ値ニ對應スル y ノ値ハ丁度例一ノ場合ノ値ノ $\dfrac{4}{5}$ デアル。ソレ故例一ノ圓ノ縦ガ $\dfrac{4}{5}$ ニ縮ンダ形ガ得ラレル筈デアル。

x, y ノ對應スル値ヲ求メテ見ルト

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	± 2.4	± 3.2	± 3.66	± 3.92	± 4	± 3.92	± 3.66	± 3.2	± 2.4	0

コレニヨツテ上ノ方程式ノグラフヲ描クト右ノヤウナ閉ヂタ曲線ガ得ラレル。

此ノ曲線ハ楕圓ト呼バレル。



從ツテ $x^2+y^2=r^2$ ノグラフヲ描クニハ一々値ヲ求メナクトモ，原點ヲ中心トシ，r ヲ半徑トシテ圓ヲ描ケバヨイコトヲ注意スルガヨイ。

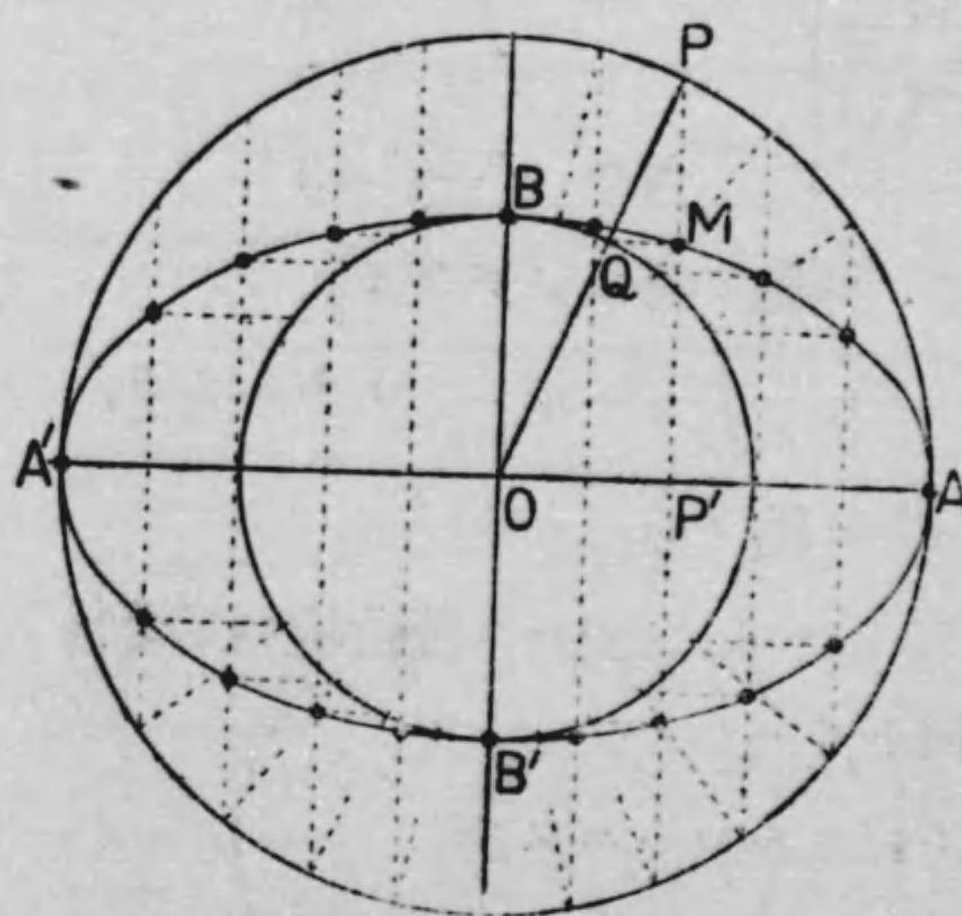
注意 1. $x^2+y^2=r^2$ ハ x, y ノ一次ノ項ヲ含マナイカラ，x 軸及ビ y 軸ヲ對稱軸トスル曲線トナル。

注意 2. $x^2+y^2=r^2$ ハ教科書ノ注意ノヤウニ x, y 共ニソノ絶對値ハ r ノ絶對値ヨリ大キナ値ハ取リ得ナイ。

例二 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 一般ニ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ハ原點ヲ中心トスル楕圓ヲ示ス。$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ヲ x ノ陽函數トシテ表ハセバ

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレハ圓ノ方程式 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ ノ縦ヲ $\dfrac{b}{a}$ ニ縮メタ形デアルカラ(1)ノ形ハ次ノヤウニシテ定規ト「コンパス」トデ描イテモヨイ。



即チ二ツノ圓（$a>b$ トスル）

$$x^2+y^2=a^2\cdots\cdots(2)$$

$$x^2+y^2=b^2\cdots\cdots(3)$$

ヲ描キ，AA' ヲ n 等分シテ各分點カラ BB' ニ平行線ヲ引キ(2)ノ圓ト交ラシメル．ソノ一ツ例ヘバ P ト O トヲ結ビ PO ト(3)トノ交點ヲ Q トシ，Q カラ AA' ニ平行ニ引キ PP' トノ交點ヲ M トスレバ

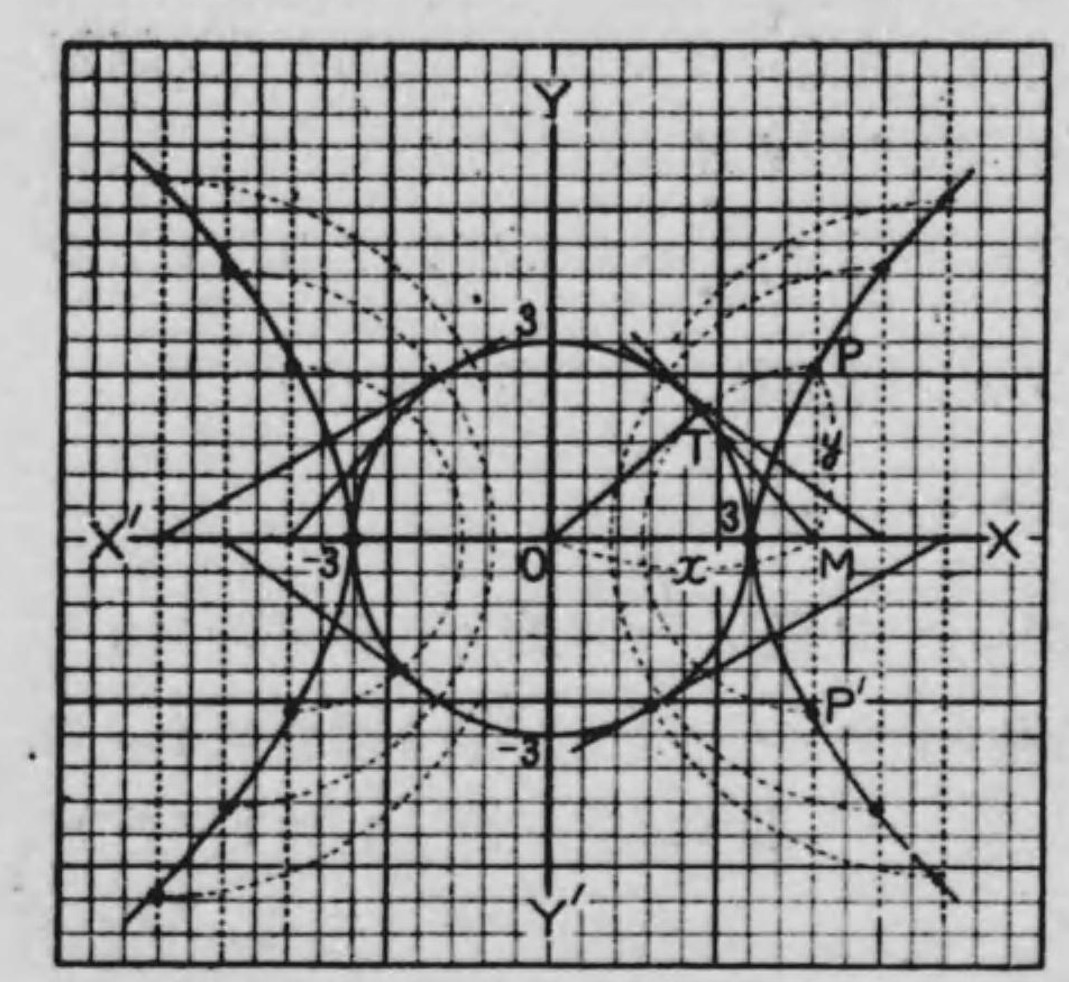
$PP':MP'$ $PO:QO=a:b$ 而モ P ハ $\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 上ニ在ルカラ M ハ $\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 即チ楕圓ヲ描ク。

茲ニ a ヲ長半徑，b ヲ短半徑トイヒ，AA' ヲ長軸，BB' ヲ短軸トイフ。又圓(2)ヲ補助圓トイフ。尙楕圓ノ性質ハ後ニ述ベルコトニスル。

例三 $x^2-y^2=9$ 一般ニ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ハ原點ヲ中心トスル雙曲線トナル。$x^2-y^2=9$ ヲ幾何學的ニ描クニハ先ヅ

$y^2=9-x^2$ ∴ $y=\pm\sqrt{9-x^2}$ ノグラフヲ描ク。

卽チ原點ヲ中心トシ半徑3ノ圓ヲ描ク。



次ニ圖ノヤウニX軸上ニ圓外ノ部分ニ於テX軸ニ垂線 PMP' 等ヲ作ル。Mヨリコノ圓ニ切線 MT ヲ引ケバ $MT^2=OM^2-OT^2$ 故ニ $MT=MP=MP'$ ナルヤウニ P 及ビ P' ヲ定ムレバ，圖ニ於テ

$$y^2=x^2-9$$

卽チ $x^2-y^2=9$

故ニ此等ノ多クノ點ヲ結ベバ所要ノ曲線ヲ得ルノデアル。

又一般ニ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ハ $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ トナルカラ，$y=\pm\sqrt{x^2-a^2}$ ノグラフノ縦ヲ $\frac{b}{a}$ ニ縮メレバヨイ。

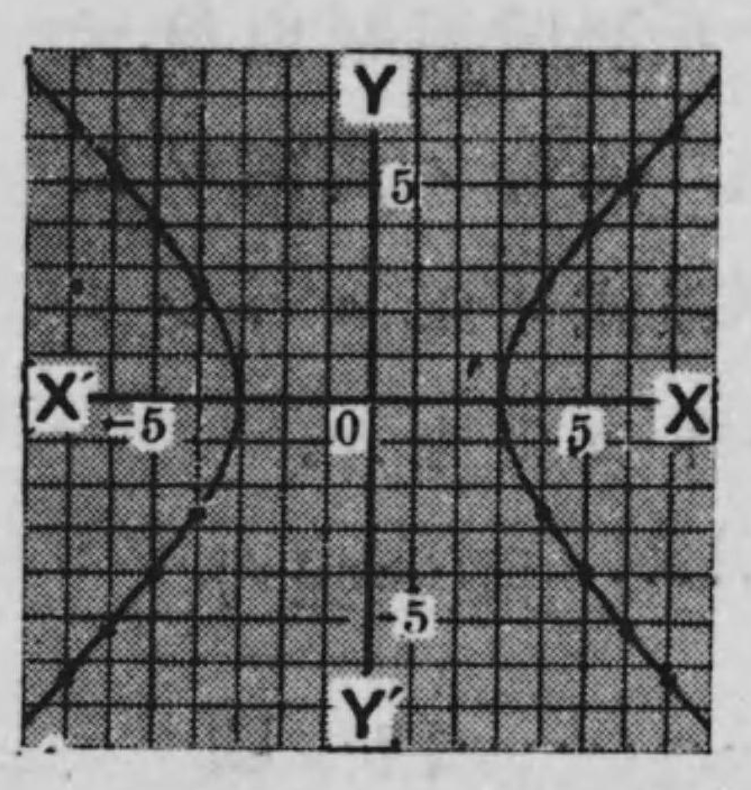
雙曲線ノ中特ニ $a=b$ 卽チ $x^2-y^2=r^2$ ノ表ハス雙曲線ハ正雙曲線又ハ直角雙曲線或ハ等邊雙曲線トイハレル。

其ノ他ノ雙曲線ノ性質ハ後ニ研究スルコトニスル。

例四 $xy=6$ 一般ニ $xy=k$ ノグラフ。

コレモ亦正雙曲線デアル。コレハ $x^2-y^2=r^2$ ノ軸ニ45°ダケ廻轉シテ得ラレルノデアルガ，中學校デモ雙曲線ノ例トシテ反比例ノグラフトシテ屢〻出ルコトデアルシ，ソノグラフノ描キ方モ簡單デアルカラ別ニ課スルノデアル。

例三 $x^2-y^2=9$ ノグラフヲ求メヨ。



解 $x^2-y^2=9$ カラ

$$y=\pm\sqrt{x^2-9}$$

x	±3	±4	±5	±6	±7
y	0	±2.65	±4	±5.20	±6.32

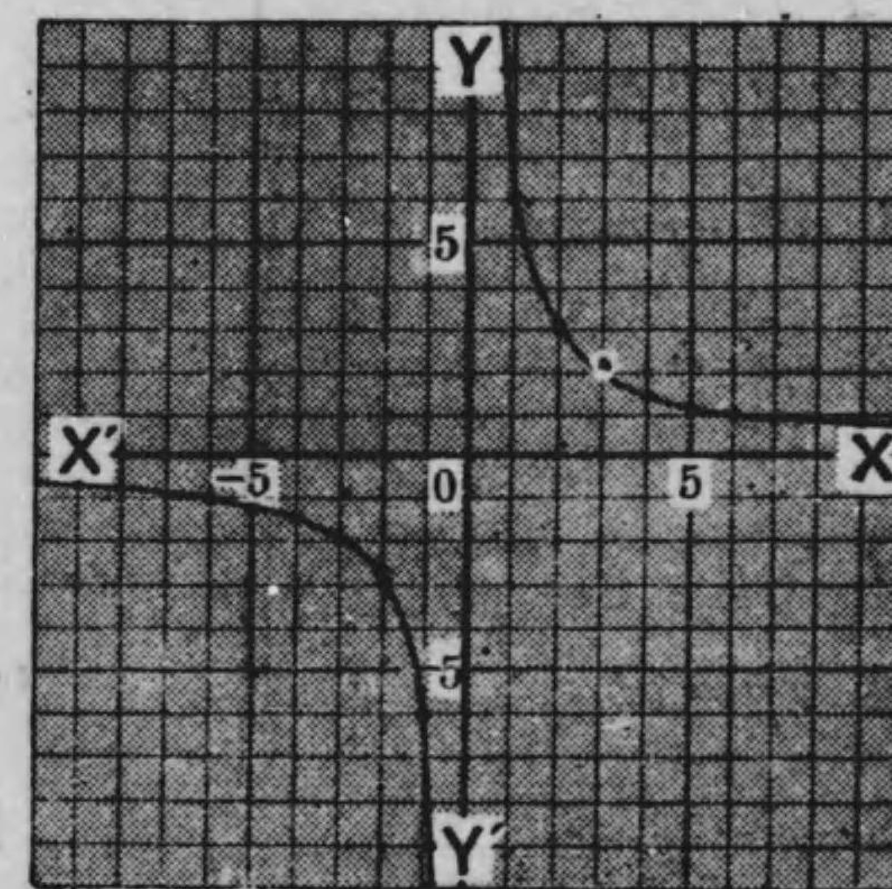
コレニヨツテ上ノ方程式ノグラフヲ描クト上ノヤウナ雙曲線ガ得ラレル。

例四 $xy=6$ ノグラフヲ求メヨ。

解

x	‥	−6	−5	−4	−3	−2	−1	‥	1	2	3	4	5	6	‥
y	‥	−1	−1.2	−1.5	−2	−3	−6	‥	6	3	2	1.5	1.2	1	‥

コレニヨツテグラフヲ描クト右ノヤウナ曲線トナル。コレモヤハリ雙曲線デハアルガ，例三ノモノトハ軸ニ對スル位置ガ異ナツテキル。



或ル特別ノ場合ノ外ハ, x ト y ニツイテノ二元二次方程式ノグラフハ, 圓, 楕圓, 雙曲線, 又ハ拋物線ノ何レカニナル。此等ノ曲線ヲ**二次曲線**トイフ。ソシテ方程式ノ形ニヨツテ其ノ表ハス曲線ヲ知ルコトガ出來ル。

(1)　$x^2+y^2=r^2$ ………………圓(半徑 r)

(2)　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ……………楕　圓

(3)　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,　$xy=c$ ………雙曲線

(4)　$y=ax^2+bx+c$,　$y^2=px$ ……拋物線

問　　題

次ノ方程式ノグラフヲ描ケ. 11—(15)

11　$x^2+y^2=64$

12　$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

13　$\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{81}=1$

14　$xy=12$

15　$x^2-y^2=0$

(11)　$y^2=4x$

(12)　$y^2=\dfrac{16}{25}(36-x^2)$

(13)　$y^2=\dfrac{25}{64}(x^2-64)$

(14)　$y^2-x^2=36$

(15)　$xy=8$

二元二次方程式ノグラフハ以上デ一通リ終ヘタノデソノ總括ヲスル必要ガアル。教科書ニ擧ゲテアルモノノ外ニ, 相交ル二直線ニナルモノト, 點圓ニナルモノトガアルガ, ソレラハ何レモ特別ナ場合デアルカラ玆デハ述ベナイ。解析幾何學デハ二次曲線ヲ次ノヤウニ分類シテヰル。玆ニ二元二次方程式ノ形トシテハ

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$　ヲトルモノトスル。

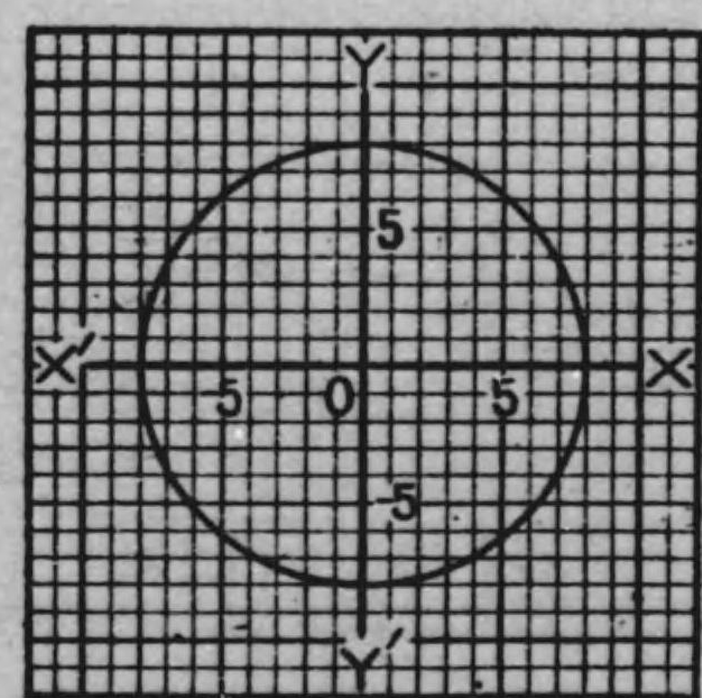
(***A***)　$h^2-ab\neq 0$ 有心二次曲線 $\begin{cases}(a)\ \ h^2-ab<0 & \text{楕圓} \\ \quad \text{特ニ}\ h=0,\ a=b\ \text{ナラバ圓} & \\ (b)\ \ h^2-ab>0 & \text{雙曲線}\end{cases}$

(***B***)　$h^2-ab=0$ 無心二次曲線 ………… 拋物線

問　　題

11　$x^2+y^2=64$

原點ヲ中心トシ, 8ヲ半徑トスル圓トナル。

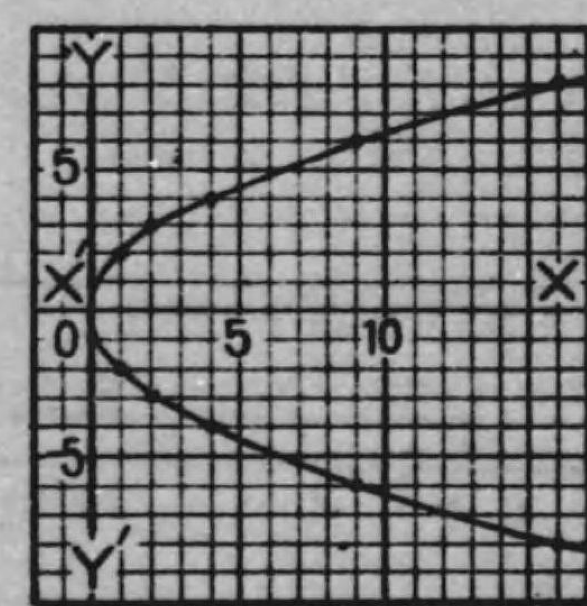


(**11**)　$y^2=4x$　∴　$y=\pm 2\sqrt{x}$

x	0	1	2	3	4	5
y	0	±2	±2.82	±3.46	±4	±4.47

6	7	8	9	10
±4.89	±5.29	±5.65	±6	±6.32

原點ヲ頂點トシ, x 軸ヲ軸トスル拋物線。

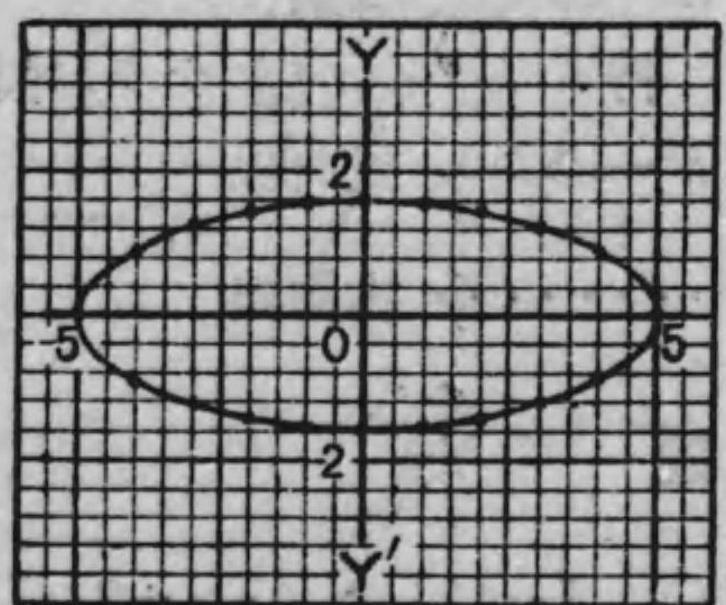


12 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

$$y=\pm\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±2	±1.96	±1.83	±1.6	±1.2	0

原點ヲ中心トシ，長半徑ガ5，短半徑ガ2デアルヤウナ楕圓トナル。



13 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{81}=1$

$$y=\pm\frac{9}{8}\sqrt{x^2-64}$$

原點ヲ中心トシ，x軸ヲ軸トスル雙曲線デアルガ，之ヲ描クニハ次ノヤウナ諸點ヲトルガヨイ。

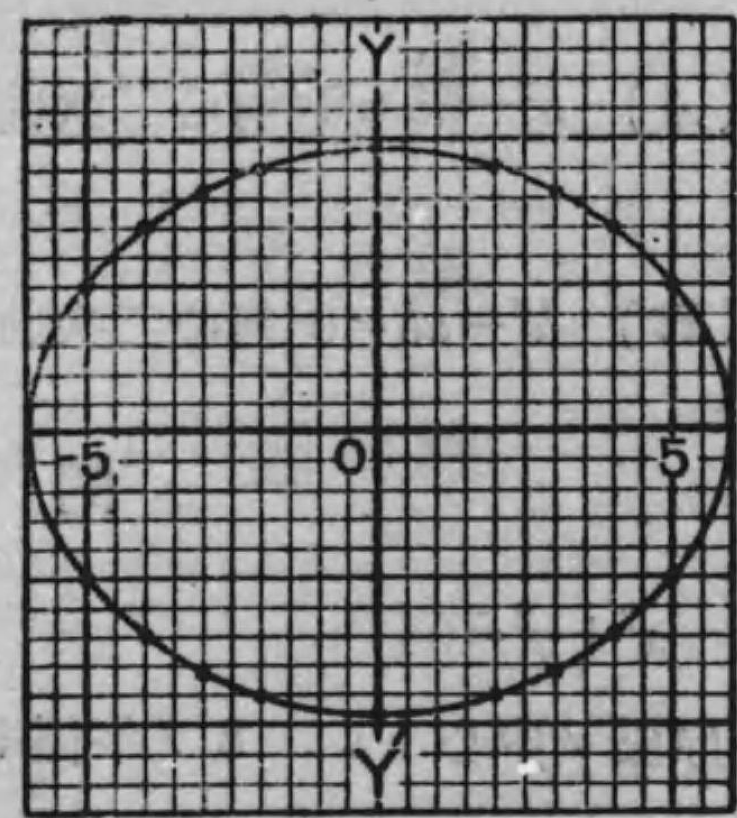
x	±8	±9	±10	±12	±15	±16	±18	±20	±25
y	0	±4 63	±6.75	±10.06	±14.27	±15.58	±18.13	±20.61	±26.6

(12) $y^2=\frac{16}{25}(36-x^2)$

$$y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{36-x^2}$$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
y	±4.8	±4.73	±4.53	±4.16	±3.57	±2.65	0

中心ハ原點，兩半徑ヲ夫々6，4.8トスル楕圓。



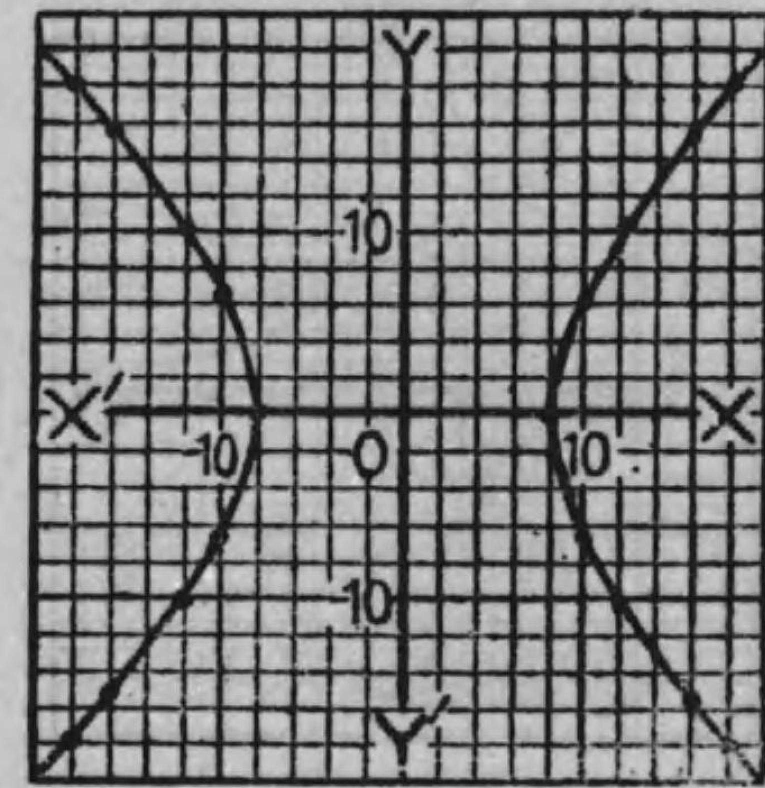
(13) $y^2=\frac{25}{64}(x^2-64)$

$$\therefore\ y=\pm\frac{5}{8}\sqrt{x^2-64},$$

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{25}=1$$

原點ガ中心，x軸ヲ軸トスル雙曲線トナル。次ノヤウナ諸點ヲトツテ之ヲ描ケバヨイ。

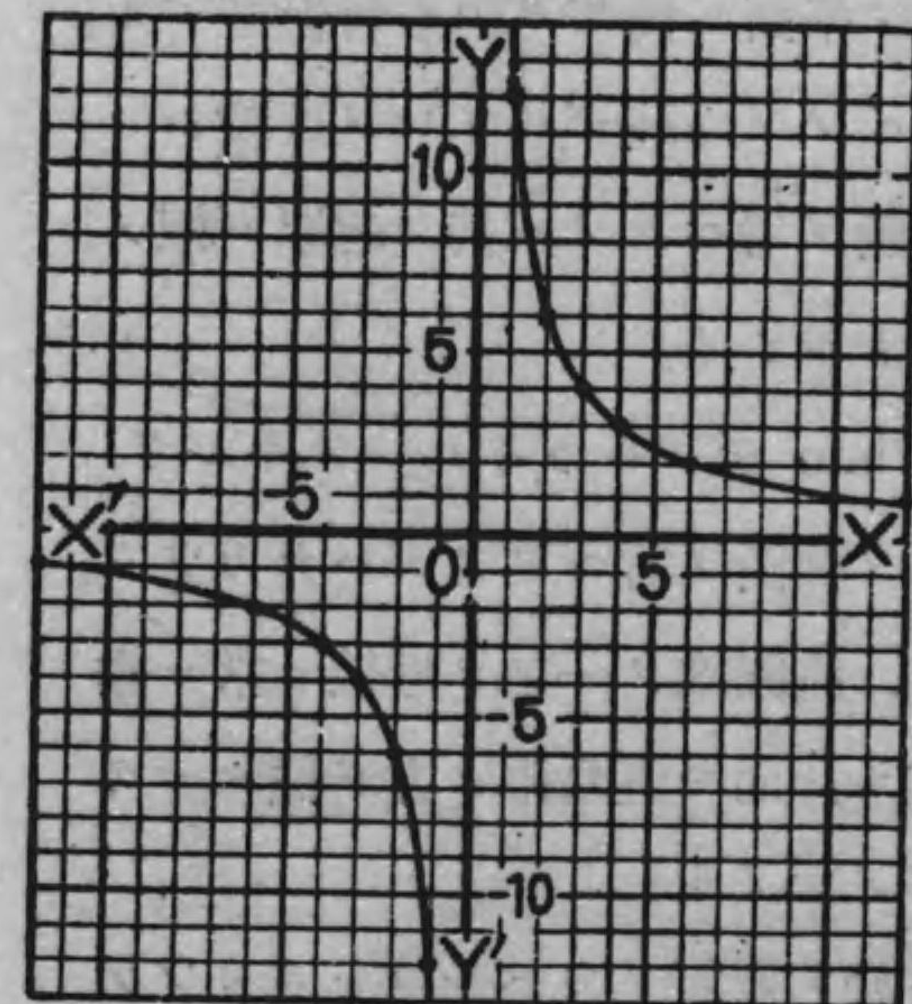
x	±8	±9	±10	±12	±15	±16	±18	±20	±25
y	0	±2.57	±3.75	±5.58	±7.93	±8.66	±10.1	±11.45	±14.8



14 $xy=12$

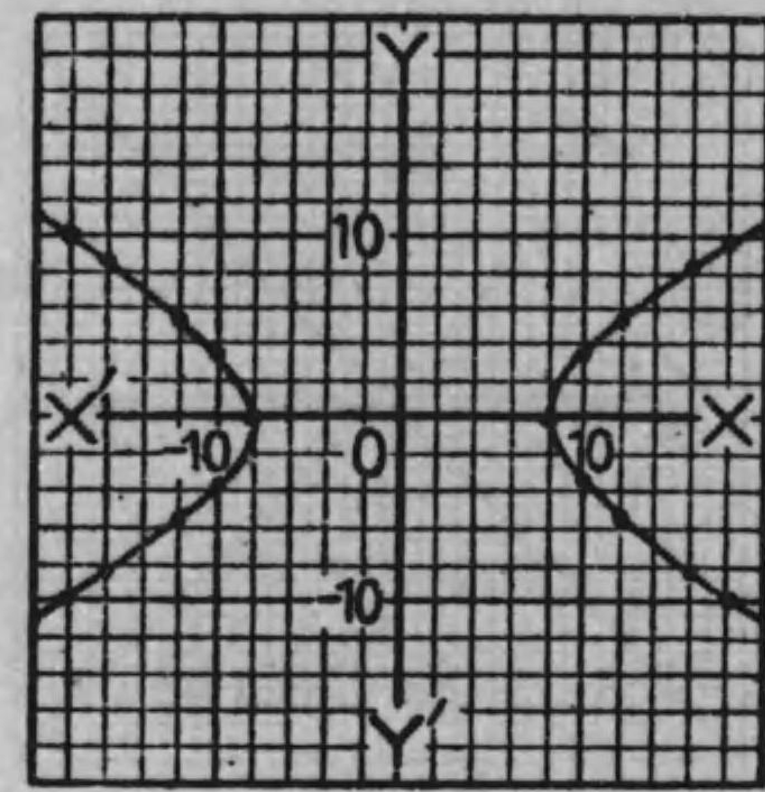
兩座標ヲ漸近線トスル直角雙曲線。

x	±1	±2	±3	±4	±6	±12
y	±12	±6	±4	±3	±2	±1



15 $x^2-y^2=0\quad\therefore\quad y=\pm x$

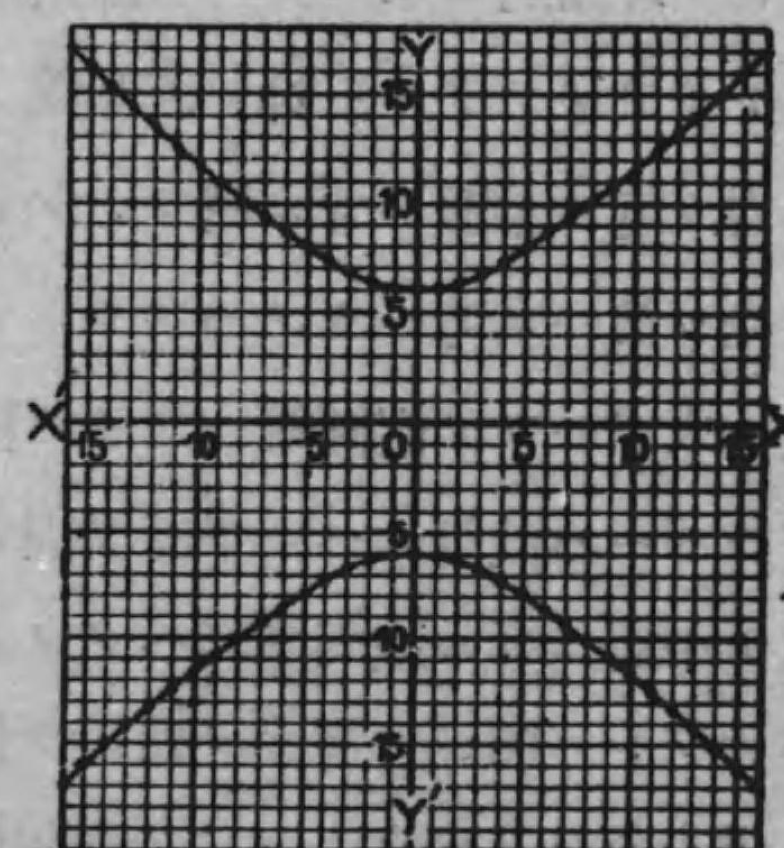
即チ原點ヲ通ル二ツノ直線ヲ表ハス。



(14) $y^2-x^2=36\ \therefore\ y=\pm\sqrt{36+x^2}$

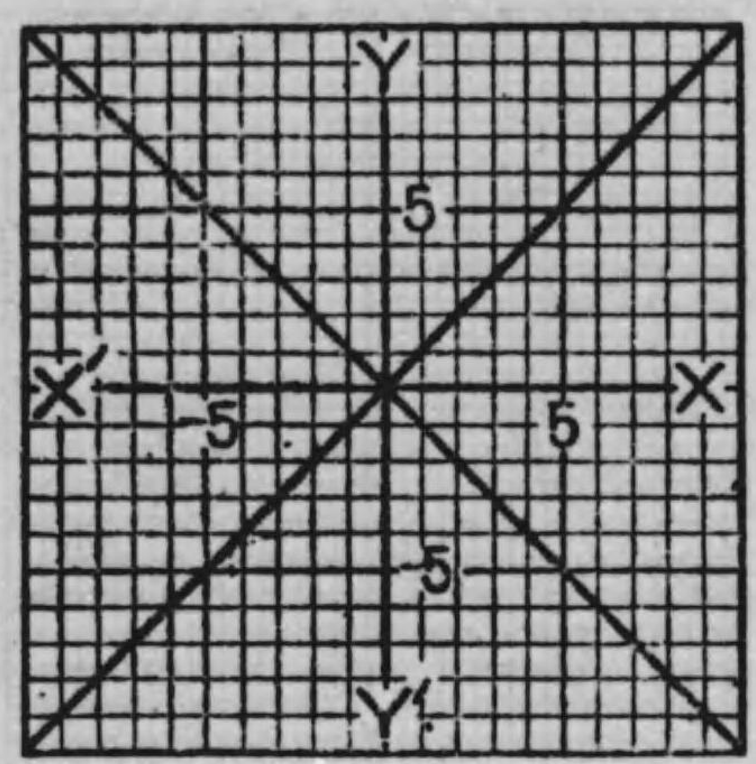
y軸ヲ軸トスル直角雙曲線。

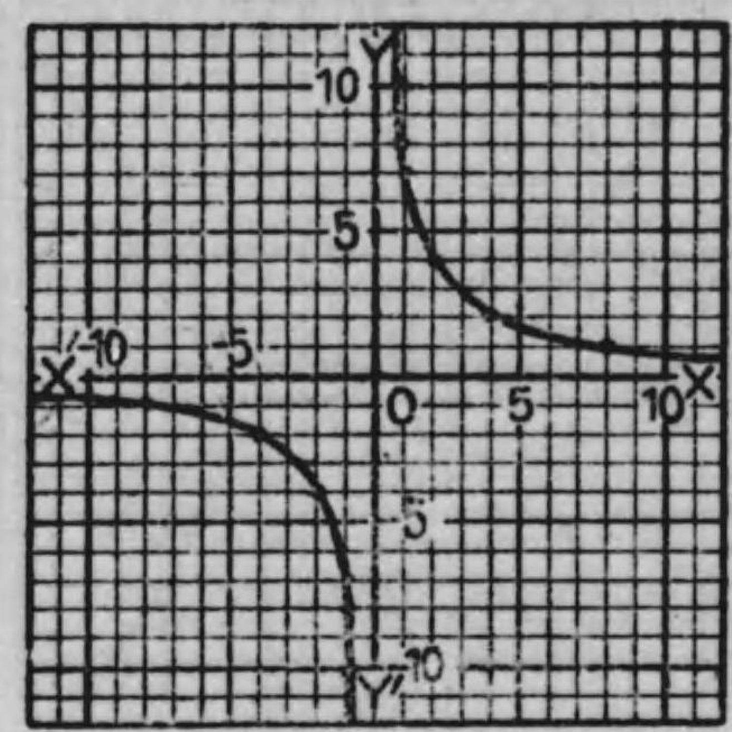
x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9
y	±6	±6.08	±6.32	±6.71	±7.21	±7.81	±8.49	±9.22	±10	±10.82



(15) $xy=8$

問題14ト同様ニ描クコトガ出來ル。直角雙曲線トナル。





圓錐曲線ニツイテ

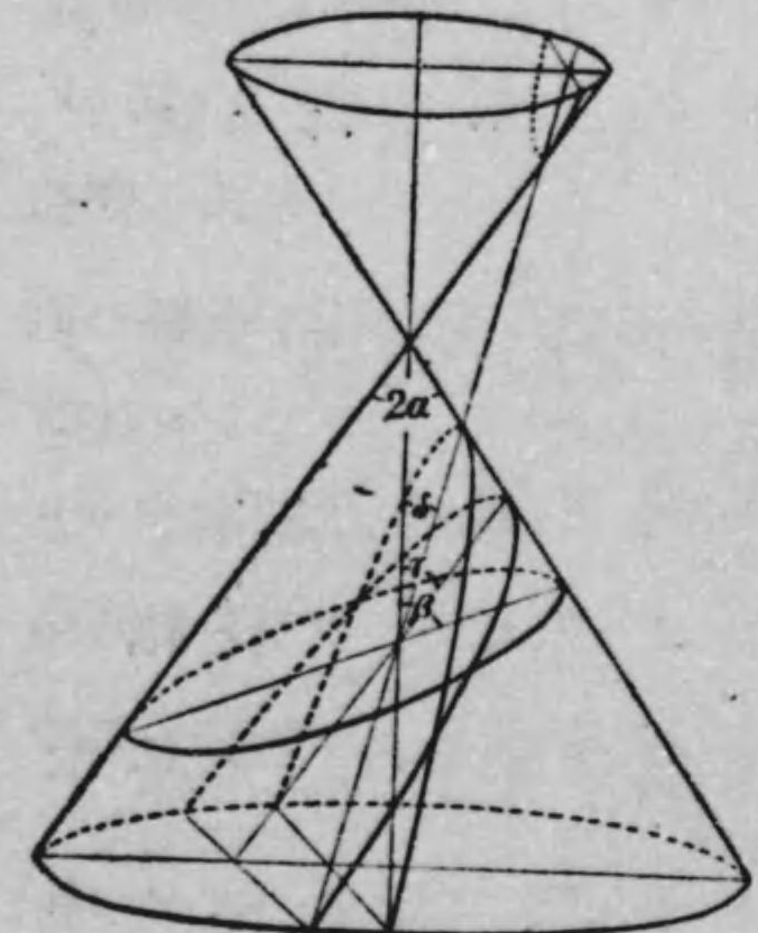
吾々ハ今マデ二元二次方程式ノグラフハ一般ニハ圓，橢圓，雙曲線，拋物線即チ**二次曲線**トナルコトヲ知ツタ。此等四種ノ曲線ハ直圓錐ノ截口トシテ現ハレルノデ，**圓錐曲線**トモ呼バレルノデアル。換言スレバ此等ノ曲線ハ或ル圓ガ他ノ平面ニ投ズル中心射影デアル。ソレヲ理論的ニ示スノハ勿論出來ナイノデ，茲デハソレヲ實驗シヨウトイフノデアル。抑々直圓錐ノ截斷ヲ考ヘタノハ其ノ起原ハ極メテ古ク遠ク希臘ノ昔ニ遡ラナケレバナラナイ。

先ヅ第一ニ考ヘタノハプラトー Plato デアルトイハレテキルガ，彼ハ未ダ一ツノ直圓錐ニツイテ種々ノ截斷ヲ考ヘタノデハナカツタ。プラトーハ截斷スベキ平面ヲ固定シ，直圓錐ノ一ツノ母線ニ常ニ垂直ナ平面ニヨル截面ヲ考ヘタノデアル。而モ直圓錐ノ方ヲ種々ニカヘテソレニ應ジテ種々ノ曲線ヲ得タノデアル。

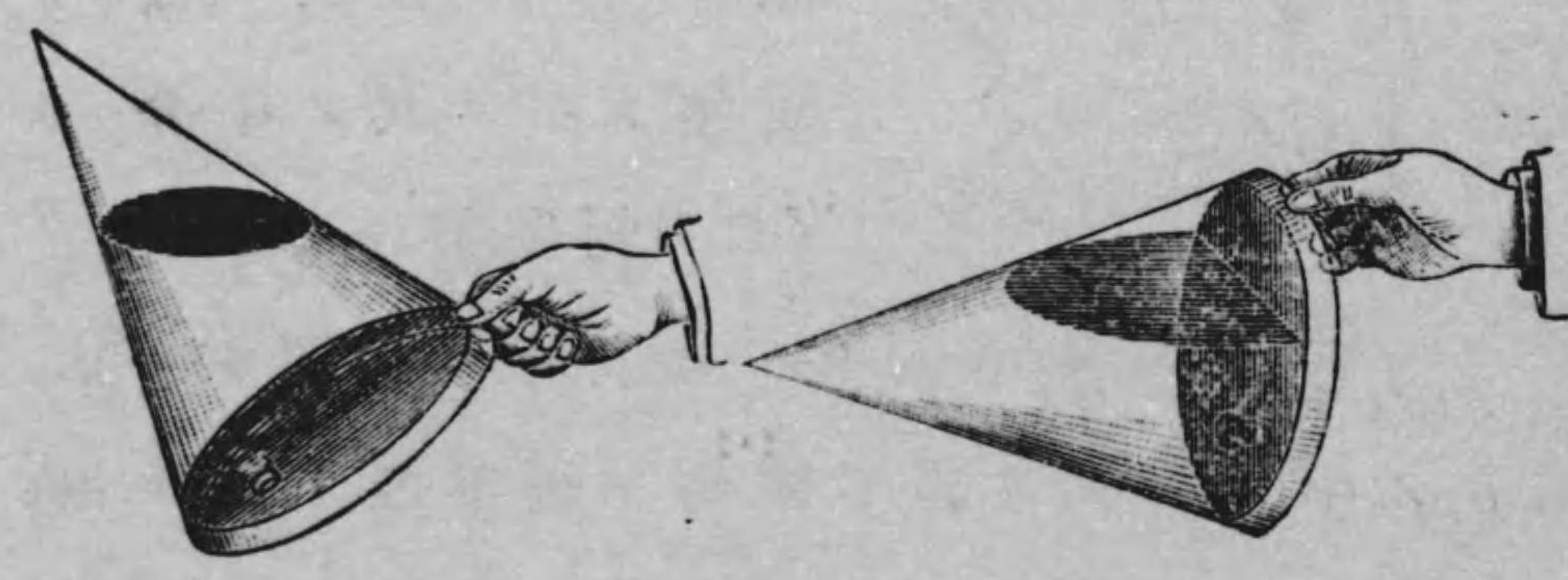
併シ今日ノヤウニ一ツノ直圓錐ニ於テ截面ヲカヘルコトニヨツテ二次曲線ヲ得タノハアポロニアスデアル。教科書ノ圖ノヤウニ直圓錐ノ頂角2αノ截面ガ直圓錐ノ軸トナス角ヲ β, γ, δ 等トスルトキ，

(1) $\angle\beta>\angle\alpha$ ナラバ橢圓，特ニ $\angle\beta=R.\llcorner$ ナラバ圓

前ニ述ベタヤウニ,一ツノ二元二次方程式ヲグラフニ表ハスト特別ノ場合ヲ除ク外ハ總テ圓,橢圓,雙曲線,拋物線ノ中ノ何レカニナル。ソシテ此等ノ四種ノ曲線ハ何レモ直圓錐ヲ平面デ截ツタトキニ其ノ截口トシテ現ハレルモノデアルカラ一名**圓錐曲線**トモ呼バレル。

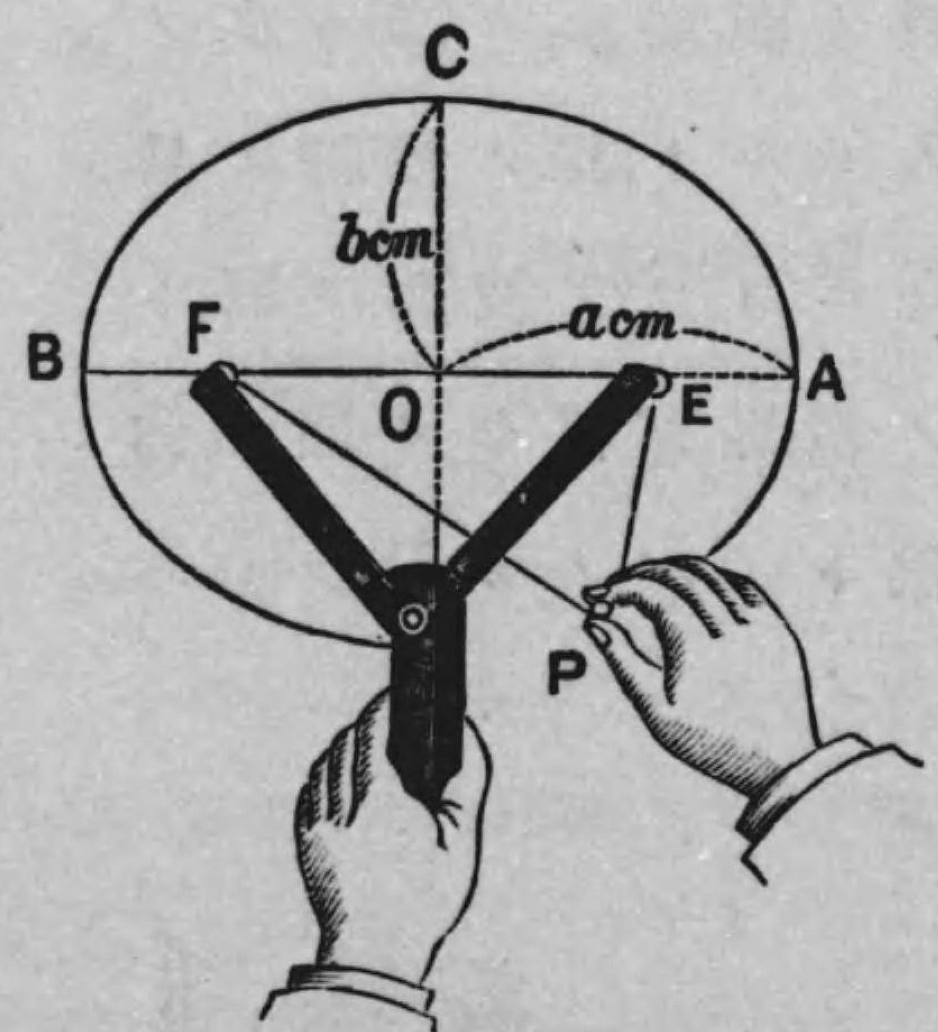


硝子又ハ「セルロイド」製ノ圓錐形ノ器ニ水ヲ入レルト,其ノ傾斜ノ具合ニヨツテ液面ト器トノ境界ガ種々ノ圓錐曲線トナルノガ見ラレル。



圖ハ點ガ一ツノ定點カラ一定ノ距離ニ在ルヤウニ動クトキニ生ズル曲線デアッテ,コムパスヲ以テ容易ニ描クコトガ出來ル。

橢圓ハ二定點(E,F)カラノ距離ノ和ガ變ラナイヤウニ點(P)ガ動クトキニ生ズル曲線デアル。コレヲ描クニハ圖ノヤウニ二定點(E,F)ニ當ルトコロニ或ル長サノ糸ノ兩端ヲ固定シ,其ノ糸ニ鉛筆ヲカケテ,糸ヲ張リ乍ラ一廻轉スレバヨイ。



圖ノABハ橢圓ノ弦ノ中デ最モ長イモノヲ示スモノデ,コレヲ長軸トイヒ,其ノ半分OAヲ長半徑トイフ。又長軸ノ中點デコレニ垂直ナ弦ヲ短軸トイヒ,其ノ半分OCヲ短半徑トイフ。

方程式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ表ハス橢圓デハa, bノ中ノ一ツガ長半徑,他ガ短半徑ノ長サニ等シク,且其ノ面積ハπabデアル。

(2) $\angle\gamma=\angle\alpha$ ナラバ拋物線

(3) $\angle\delta<\angle\alpha$ ナラバ雙曲線

トナルノデアル。直圓錐ノ截斷ヲ示ス器具ニハ種々アルガ,教科書ノ圖ノヤウニ「セルロイド」製ノ圓錐形ノ器具*ガヨイ。コレハ底ニ「コルク」ノ栓ガシテアッテ圓錐ノ中ニ水ガハイルヤウニナツテキル。ソレデ圓錐ノ中ニ水ヲ入レテ赤インキヲ少シ混ゼルト非常ニキレイナ色トナツテ,直圓錐ヲ色々ニ傾ケルコトニヨツテ種々ノ圓錐曲線ガ出來ル。

圓錐曲線ノ性質

(a) 圓ニツイテハ十分知ツテキルコトデアルカラ改メテ玆ニハ述ベナイ。

(b) 橢圓ハ和算家ハ側圓ト稱ヘテ來タトコロデアル。

橢圓ハ二定點カラノ距離ノ和ガ一定ナ點ノ軌跡デアッテ,其ノ二定點ハ卽チ橢圓ノ焦點デアル。地球ノ軌道ハ太陽ヲ焦點ノ一ツトスル橢圓デアル。天體ノ運行ハ多ク橢圓デアル。

今參考ノタメ二定點ヲ E, F トシ, E, F カラノ距離ガ一定$2a$デアルトイフコトカラ,果シテ橢圓トナルカ否カヲ研究ショウ。

Pヲ條件ヲ滿足スル一般點トシ,其ノ座標ヲ (x, y) トスル。

$$PE+PF=r+r'=2a$$

$$EF=2e \quad \text{トオケバ}$$

$$PE=r=\sqrt{(e-x)^2+y^2}, \qquad PF=r'=\sqrt{(e+x)^2+y^2}$$

故ニ
$$\sqrt{(e-x)^2+y^2}+\sqrt{(e+x)^2+y^2}=2a$$

$$\therefore \quad \sqrt{(e+x)^2+y^2}=2a-\sqrt{(e-x)^2+y^2} \quad \text{平方シテ}$$

$$(e+x)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}+(e-x)^2+y^2$$

$$\therefore \quad 4a\sqrt{(e-x)^2+y^2}=4a^2-4ex$$

* 器具販賣店 大阪市西區阿波座一番町一番地 加藤數物製作所

従ツテ $(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$

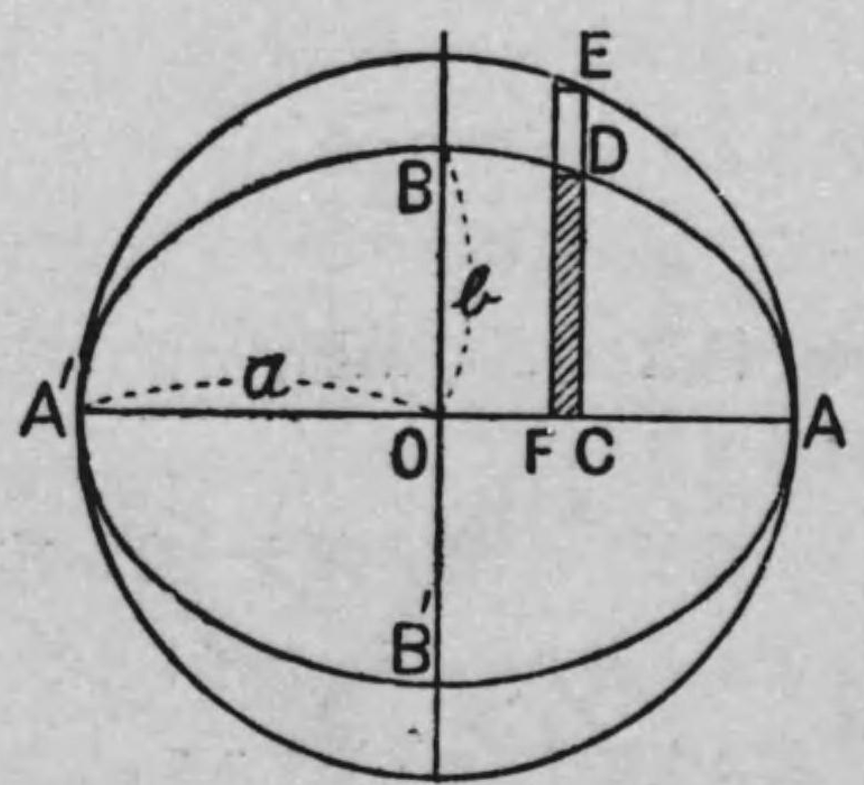
茲ニ $a>e$ デアルカラ $a^2-e^2=b^2$ 卽チ $e^2=a^2-b^2$

コレヲ代入シテ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ コレカラ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{ヲ得ル。}$$

橢圓ヲ描ク器具トシテ**橢圓コンパス**ガアル。コレハ橢圓ノ性質ヲ用ヒタモノデ，開閉自在ノ二脚ヲ有スル圖ノヤウナ器具ト他ニ糸トガアレバヨイ。但シ教科書ニ示シテアル器具ノ脚心ニハ「ゴム」ガアツテ黒板ヲ傷ツケヌヤウ，又辷ラナイヤウニシテアル。

橢圓ノ面積ハ次ノヤウニシテ求メルコトガ出來ル。



與ヘラレタ橢圓ノ長半徑ヲa,短半徑ヲbトシ，補助圓（半徑a）ヲ描ケバ，橢圓ノ縦ハ常ニソレニ應ズル圓ノ縦ヲ$\frac{b}{a}$ノ割ニ縮メタモノデアル。ソコデOAヲn等分シテソノ各分點カラOAニ垂線ヲ引ク。今ソノ一ツヲCDEトシ，圖ノヤウニ二ツノ細長イ矩形FD及ビFEヲ作レバ

$$\square FD:\square FE=CD:CE=b:a$$

然ルニOAヲ次第ニ小サク等分シ，$\square FD$及ビ$\square FE$ノ夫々ノ和ヲ求メルトソレラハ夫々橢圓及ビ圓ノ面積トナル。故ニ

橢圓ノ面積：圓ノ面積$=b:a$

圓ノ面積ハ既ニ知ツテヰルヤウニπa^2デアルカラ

橢圓ノ面積$=\pi a^2\times\frac{b}{a}=\pi ab$

トナル。

(c) **雙曲線**

二定點（焦點）カラノ距離ノ差ガ一定ナ點ノ軌跡ハ雙曲線トナル。

教科書ニハ此ノ性質ニヨツテ雙曲線ヲ描ク器具ノ説明ガシテアルガ，勿論ソレハ一ツノ枝ノミガ描ケルダケデアルカラ，他ノ方ヲ描クニハFトF'トヲ入レカヘテ描カナクテハナラナイ。

參考ノタメ上ノ性質カラ方程式ヲ導イテ見ヨウ（教科書ノ圖參照）

$$PF'-PF=2a$$

$FF'=2e$ トオケバ $e>a$ デアル。

$PF=\sqrt{(x-e)^2+y^2}$, $PF'=\sqrt{(x+e)^2+y^2}$ デアルカラ

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a$$

之ヲ變形スレバ

$$(e^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(e^2-a^2)$$

今 $e^2-a^2=b^2$ トオクトキハ求ムル雙曲線ノ方程式ハ

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

卽チ $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)ノ雙曲線ハy軸トハ決シテ交ラナイ。何トナレバ

(1)ニ於テ $x=0$ トスレバ $y^2=-b^2$ ∴ $y=\pm b\sqrt{-1}$

故ニ(1)ノ雙曲線デy軸ヲ傍軸トイヒ，x軸ヲ主軸トイフ。

又 $$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ハ(1)トヨク似タ形デアルガy軸ガ主軸トナリ，x軸ハ傍軸トナル。(2)ハ(1)ノ共軛雙曲線ト名付ケラレル雙曲線トナルノデアル。

(1)ヲ變形シテ見ルト $y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$

トナルガ，茲ニxガ次第ニ大キクナルト，$\frac{a^2}{x^2}$ハ次第ニ減少シ，遂ニ

共ノ極限＝於テハ0トナル。故＝雙曲線(1)ハxガ增大スレバ直線

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

＝如何程デモ接近スル。故＝上ノ直線ヲ雙曲線(1)ノ漸近線トイフ。雙曲線(2)ノ漸近線モ $y=\pm\frac{b}{a}x$ トナツテ，一ツノ雙曲線ト其ノ共軛雙曲線トハ同ジ漸近線ヲ持ツノデアル。

(*d*) 拋物線

拋物線ハ一定點(焦點)及ビ定直線(準線)＝至ル距離ガ相等シイ點ノ軌跡デアル。

參考ノタメ上ノ性質カラ其ノ方程式ヲ出シテ見ヨウ。

教科書ノ圖＝於テ一定點(焦點)ヲFトシ，定直線(準線)ヲABトスル。今FカラAB＝下シタ垂線ヲx軸＝トリ(y軸トシテモヨイ)，FカラABヘノ垂線ノ中點ヲ原點トシ，FカラABヘノ距離ヲpトセヨ。

$$PF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$$

$$P\text{カラ}AB\text{ヘノ距離}=x+\frac{p}{2}$$

故＝　$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$$

平方シテ根號ヲ去レバ

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

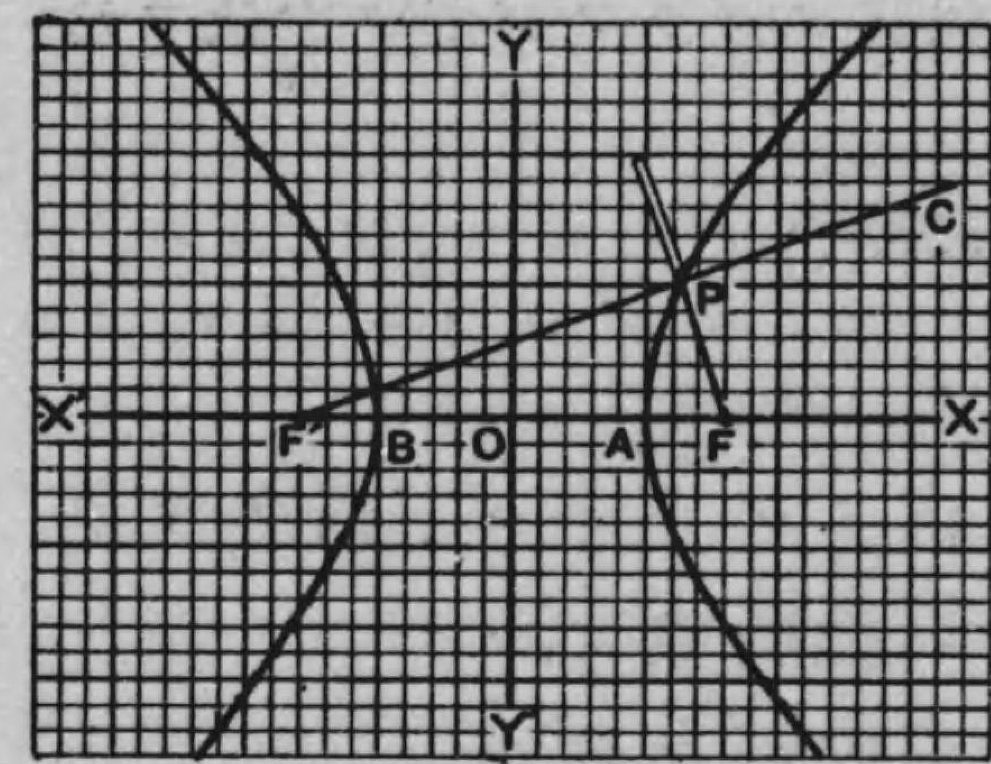
故＝　$$y^2=2px$$

コレハ求ムル拋物線ノ方程式デアル。最初ノ軸ノトリ方＝ヨツテハ

$x^2=2py$　トモナル。

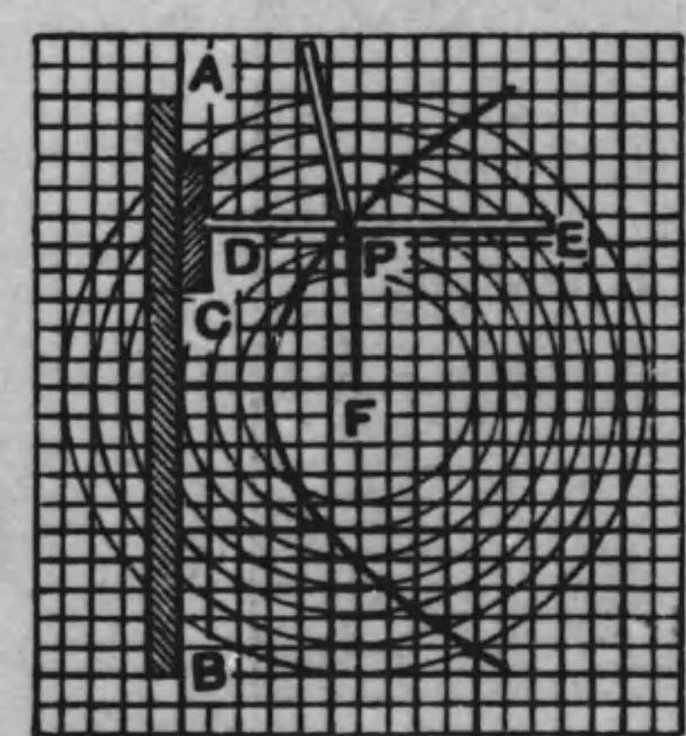
拋物線ハ楕圓ヤ圓ノヤウナ閉曲線デナイガ，雙曲線ノヤウ＝漸近線ヲ持タナイ、拋物線ト楕圓ト雙曲線トハ種々ノ共通ノ性質ヲ有シテヲリ，其ノ研究ハ興味ノアルコトデアルガソレラハ解析幾何學ヤ射影幾何學デ論ゼラレルモノデアル。

雙曲線ハ二定點F,F'カラ一點(P)マデノ距離ノ差ガ一定ナヤウ＝動イタトキ生ズル曲線デアル。



針金ノ一端ヲF'＝於テ自由＝廻轉シ得ルヤウ＝止メ,點F＝一端ヲ固定シタ糸ノ他端ヲ針金ノ他端＝結ビ付ケ,鉛筆ヲ糸＝引ッ掛ケ針金＝沿ウテ動カストキハ雙曲線ヲ描クコトガ出來ル。

拋物線ハ一點(P)ガ一定直線トソノ直線上＝ナイ一定點(F)トカラ等距離＝アルヤウ＝動クトキ生ズル曲線デアル。直角定規(CDE)



ガ固定シタ直線定規AB＝沿ウテ動クトキ,定點F＝糸ノ一端ヲ結ビ,他端ヲ直角定規ノ端＝結ビ付ケ,鉛筆＝糸ヲ掛ケ定規ノ緣DE＝沿ウテ動カスト拋物線ヲ描クコトガ出來ル。

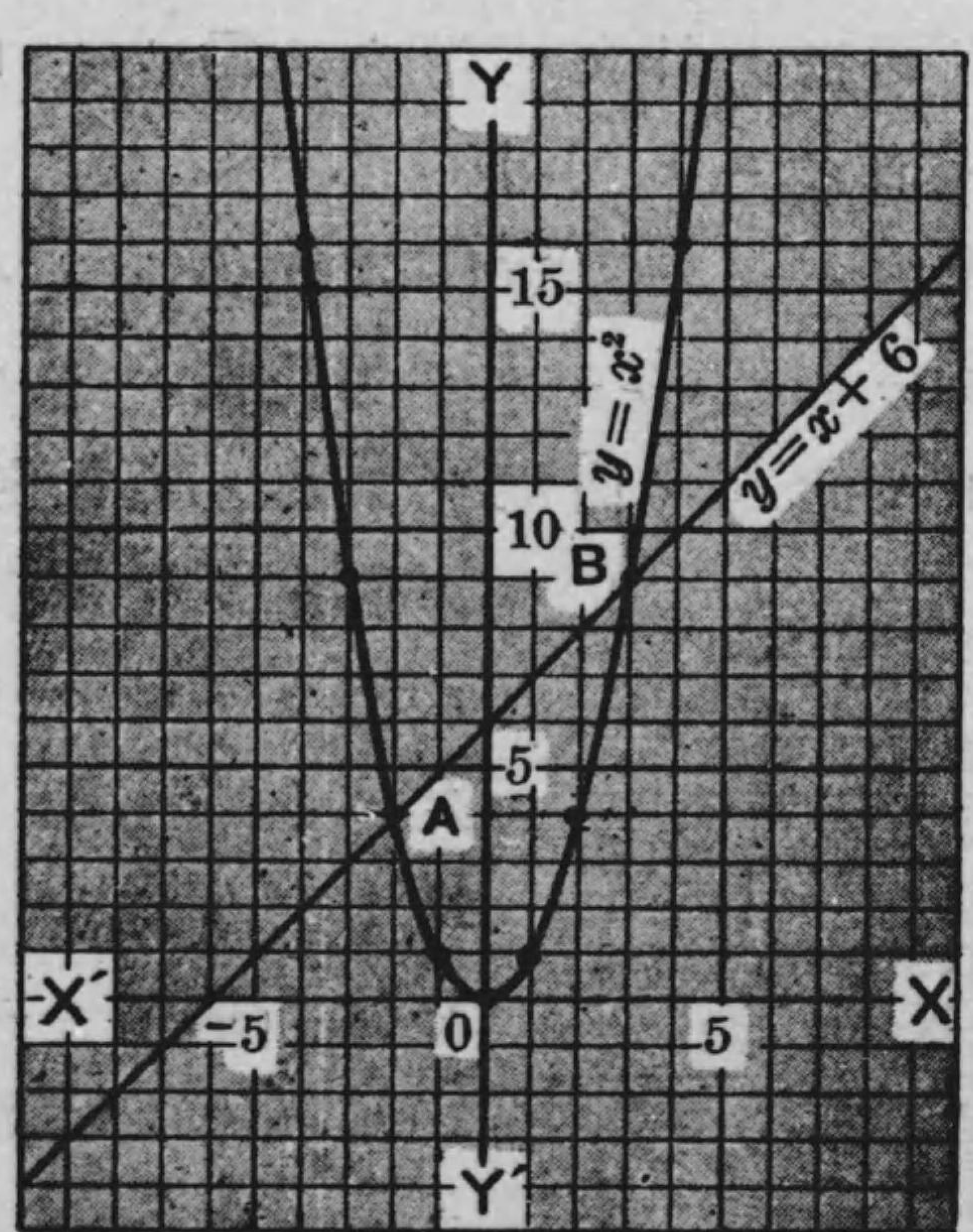
50. 二元二次聯立方程式

問 二元一次聯立方程式ヲグラフデ解ク方法ヲ述ベヨ。

例一 $\left|\begin{array}{l} y=x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y=x+6 \cdots\cdots\cdots(2) \end{array}\right.$ ヲグラフデ解ケ。

解 此等ノ方程式ノグラフハ下圖ノヤウニ $y=x^2$ カラハ抛物線ヲ,

$y=x+6$ カラハ直線ヲ得ル。



ソシテ,此ノ抛物線上ノ點ノ座標ハ總テ

50. 二元二次聯立方程式

前節デ二元二次方程式ノ値ノ變化ヲ研究シタノデ, 本節デハソノ二ツノ二次方程式ヲ組合セタ方程式卽チ聯立方程式ニツイテ其ノ解法ヲ考究ショウトスルノデアル。

聯立方程式ノ解法ハ既ニ二元一次聯立方程式ノ解法ニ於テ明カデアツタヤウニ, 先ヅグラフニヨル解法ヲ行ツタ後ニ計算ニヨル解法ヲ導入シタ方ガ, 其ノ根ノ意義ヲ知ル上ニモ, 又聯立方程式ノ解其ノモノヲ理解スル上ニモ都合ガヨイ。併シ乍ラ二元二次ノ聯立方程式ノグラフニヨル解法ハ二元一次聯立方程式ノグラフニヨル解法ノヤウニ簡單ニハ行カナイ。何トナレバ二元一次方程式ハ其ノ形ノ如何ニ關セズグラフハ常ニ直線デアルカラ, グラフニヨル解法ハ極メテ簡單デアル。ソレニ比シテ二元二次方程式ノグラフハ, 其ノ方程式ノ形ニヨリ或ハ橢圓, 或ハ雙曲線或ハ抛物線トナツテ, グラフヲ描クコトモ直線ノヤウニ唯二點ヲ取レバヨイトイフワケニハ行カナイ。

故ニ二元二次聯立方程式ノグラフニヨル解法ハソレ自身ガ既ニ相當ニ時間ト勞力トヲ要スルコトデモアリ, 又一方, 實ハ二元二次方程式ソノモノノグラフニツイテハ既ニ前節デ十分研究シテキルカラ, 今改メテ別ニ節ヲ設ケテグラフニヨル解法ヲ課スルコトハ, 徒ラニ勞多クシテ益少ナキヲ思フノデ, 本書デハ二元二次聯立方程式ノ各例題ニ於テ, 先ヅグラフニヨル解法ヲ擧ゲテ然ル後計算ニヨル解法ヲ導クヤウニシタ。吾人ハ本書ノヤウナ方法ガ生徒ヲシテ興味ヲ以テ學習サセル所以デアリ, 又理解ヲ深クスル所以デアルト信ズル。

問 二元二次聯立方程式解法ノ豫備トシテ, 二元一次聯立方程式ノ解法ヲ回顧スルノデアル。グラフニヨル解法ト計算ニヨル解法トアツテ, 計算ニヨル解法デハ加減法ト代入法トヲ取扱ツタ。

例一 一次ト二次トノ聯立方程式ノ一例デアル。

方程式(1)カラハ標準拋物線ヲ，(2)カラハ直線ヲ得ルノデアルガ，

(イ) (1)ノ曲線ヲ描クニハ唯單ニ二點ヲ取ツタノデハイケナイ事，即チ前節ノ方法ニ從ツテ描クベキ事。

(ロ) 交點ハ唯一ツニハ限ラナイコト(二次ト一次ナララバ一般ニ二ツアル。)

等ヲ注意スル必要ガアル。又與ヘラレタ方程式

$$\begin{cases} y=x^2 \cdots\cdots\cdots(1) \\ y=x+6 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$ カラ $x^2=x+6$ 即チ $x^2-x-6=0$

故ニ(1),(2)ヲ滿足スルxノ値ハ $x^2-x-6=0$ ノ根デ，換言スレバ(1),(2)ノ圖的解法ハ $x^2-x-6=0$ ノ圖的解法ヲ示シタモノデアル。

一般ニ $ax^2+bx+c=0$ ヲグラフデ解クニハ前節ノヤウニ

$y=ax^2+bx+c$ ノグラフガx軸ト交ハル點ヲ求メテモヨイガ，

又 $\begin{cases} y=x^2 \\ ay+bx+c=0 \end{cases}$ ノグラフノ交點ヲ求メテモヨイ。

次ニ計算ニヨル解法ニ於テ，(1)，(2)カラyヲ消去シテ

$x^2-x-6=0$ 即チ $(x+2)(x-3)=0$

コレカラ $x=-2$ 又ハ $x=3$ ヲ得ルノデアルガ，此ノxノ値ヲ態々複雜ナ二次ノ方即チ $y=x^2$ ニ代入シテyノ値ヲ求メル人モアルマイガ，二次ノ方ニ代入スレバ無緣根ヲ生ズル虞レガアル。

故ニ一次ト二次トノ聯立方程式デハ，先ヅ一ツノ未知數ヲ消去シタ結果，得タ他ノ未知數ノ値ヲ必ズ一次ノ方ニ代入スベキデアル。コレハ二元二次聯立方程式ノ計算ニヨル解法ノ基礎ニナルコトデアルカラ十分理解サセテオキタイト思フ。

$y=x^2$ ヲ滿足シ，直線上ノ點ハ總テ $y=x+6$ ヲ滿足スル。ソシテ此等ノ線以外ニハ方程式ヲ滿足スル點ハナイ。從ツテ此ノ拋物線ト直線トノ交點A,Bノ座標$(-2,4)$，$(3,9)$ハ兩方程式ヲ同時ニ滿足スル。

ソレ故此ノ二組ノ値ガ求メル根デアル。

答

x	-2	3
y	4	9

計算デ(1),(2)ヲ解イテ見ルト

(2)ヲ(1)ニ代入シテ

$$x+6=x^2$$

$$x^2-x-6=0$$

$$(x+2)(x-3)=0$$

$$x+2=0 \quad 又ハ \quad x-3=0$$

$x=-2$

コレヲ(2)ニ代入シテ

$y=-2+6=4$

即チ $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

$x=3$

コレヲ(2)ニ代入シテ

$y=3+6=9$

即チ $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$

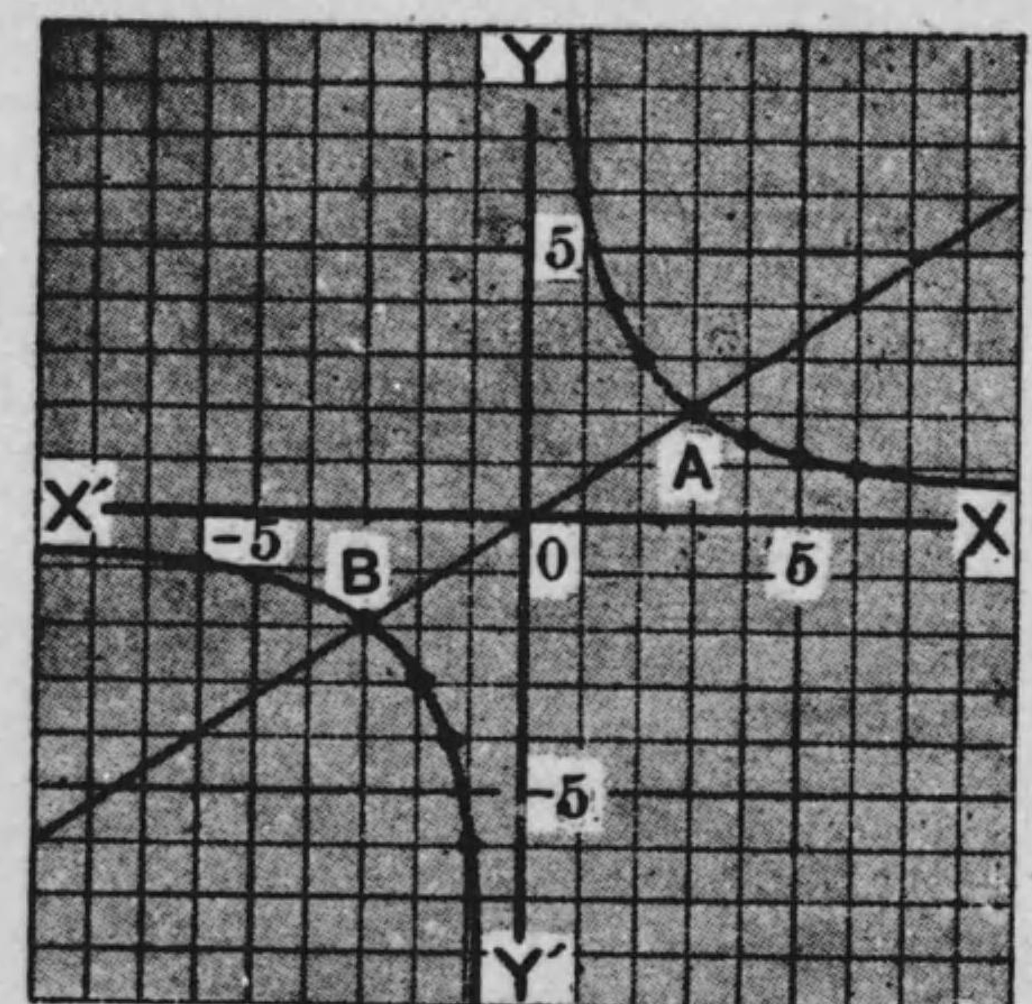
トナリ，グラフニヨル解ト一致スル。

例二 $\begin{cases} xy=6 \cdots\cdots\cdots (1) \\ 2x=3y \cdots\cdots (2) \end{cases}$ ヲグラフ及ビ計算デ解ケ。

解 $xy=6$ カラ

x	1	1.5	2	3	4	5	6
y	6	4	3	2	1.5	1.2	1

ソシテ x ガ負デアルト, y モ亦負トナル.



コノコトカラ(1)ノグラフハ圖ノヤウナ雙曲線トナリ,又(2)ノグラフハ直線デアル。此等二直線ノ交點ノ座標 $A(3,2)$, $B(-3,-2)$ ガ求メル根デアル。

コレヲ計算デ解イテ見ルト

(2)カラ $y=\frac{2}{3}x$ ヲ得テ(1)ニ代入シ,

$$\frac{2}{3}x^2=6 \qquad x^2=9$$

$$x=3 \quad 又ハ \quad x=-3$$

$$y=\frac{2}{3}\times3=2 \quad \Big| \quad y=\frac{2}{3}\times(-3)=-2$$

答

x	3	-3
y	2	-2

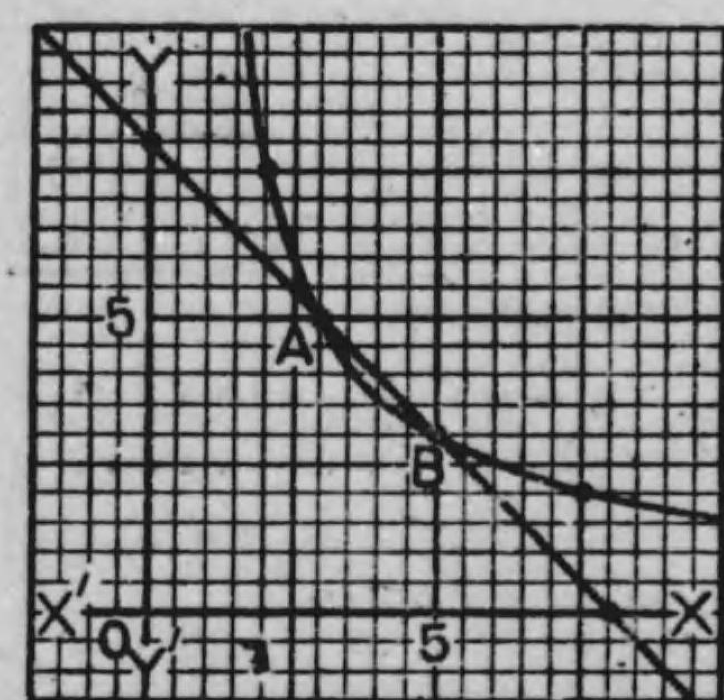
二元二次聯立方程式ニハ種々ノ場合ガアツテ, 如何ナル場合デモ解ケルトハ限ラナイ。併シ一次ト二次ノ場合ハ常ニ解クコトガ出來テ, 而モ此ノ場合ガ二元二次聯立方程式ノ基礎ニナルモノデアルカラ, シツカリト理解サセテオキタイ。ソシテ一次ト二次トノ場合デハ代入法ニヨツテ解クノデアル。

例二 グラフデハ雙曲線ト直線トノ交點ニヨツテ根ヲ求メル場合デアル。

問　　題

16 $\begin{cases} x+y=8 \cdots\cdots\cdots (1) \\ xy=15 \cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$

雙曲線ハ一方ノ枝(branch)ダケヲ描イタ。$A(3,5)$, $B(5,3)$



(1)ノ y ヲ(2)ニ代入セヨ。

$$8x-x^2=15$$
$$x^2-8x+15=0$$
$$\therefore\ x=3 \quad 又ハ \quad 5$$

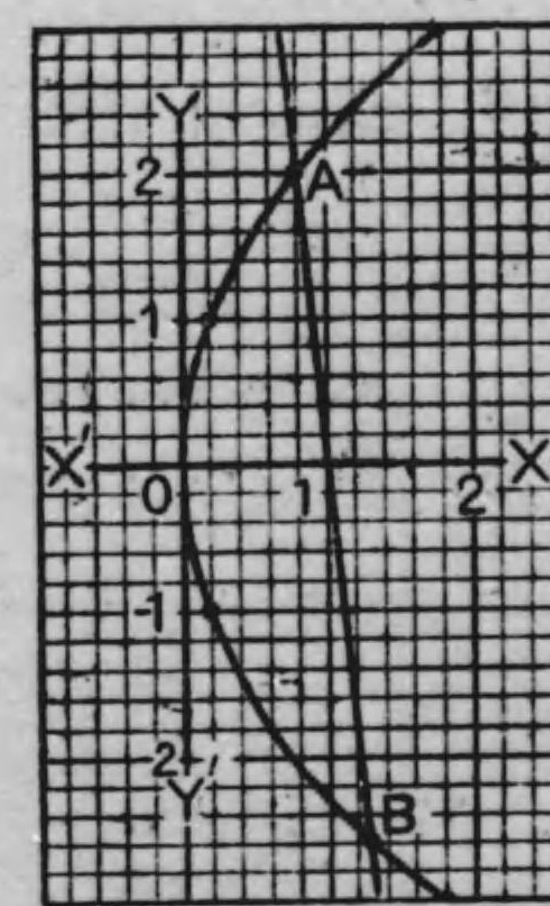
y ノ値如何。

答

x	3	5
y	5	3

(16) $\begin{cases} y^2=5x \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y=10-10x \cdots\cdots (2) \end{cases}$

$A\left(\frac{4}{5},\ 2\right)$, $B\left(\frac{5}{4},\ -\frac{5}{2}\right)$



(2)ノ x ヲ(1)ニ代入セヨ。

$$2y^2+y-10=0$$
$$y=2 \quad 又ハ \quad -2.5$$

x ノ値如何。

答

x	0.8	1.25
y	2	-2.5