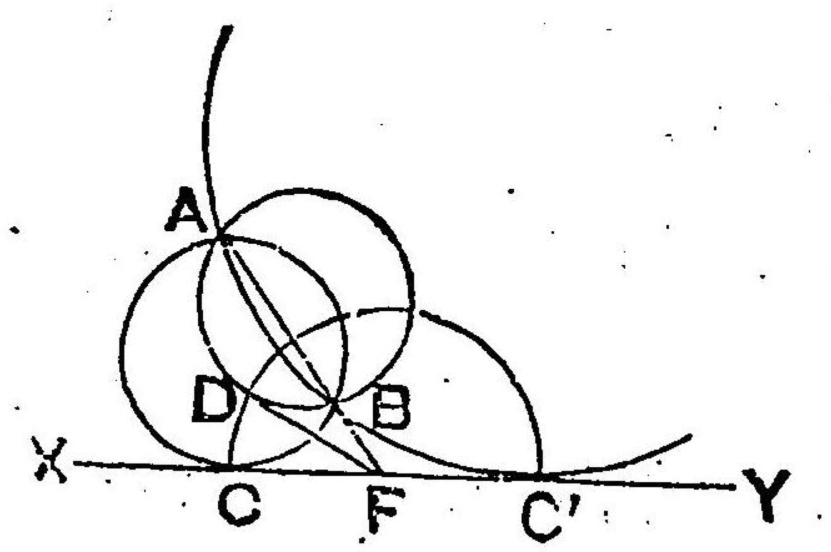



F ヲ中心トシ, FD ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, XY トノ二ツノ交點ヲ C, C′ トスレバ A, B, C 或ハ A, B, C′ ヲ過ル二ツノ圓ハ所要ノ圓ナリ.

如何トナレバ作圖ニ依リテ

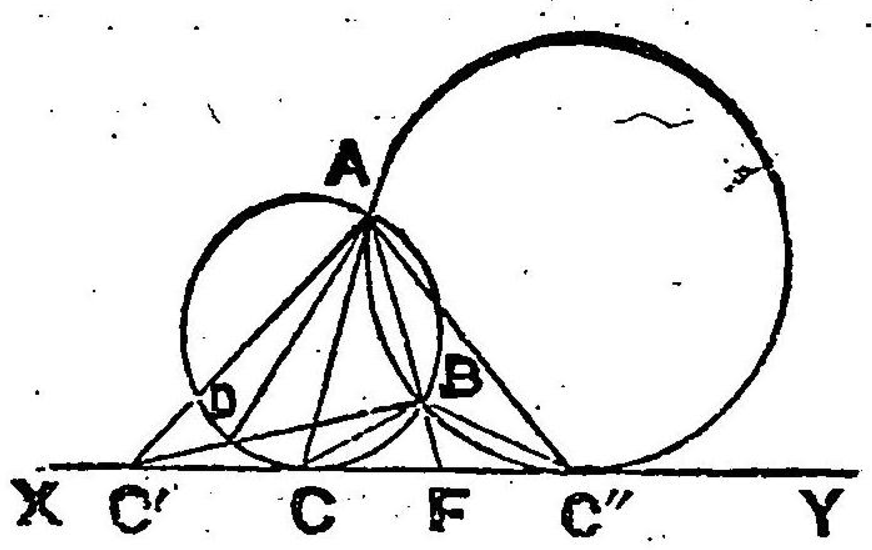
$$FA.FB=\overline{FD}^2=\overline{FC}^2=\overline{FC'}^2.$$

故ニ圓 ABC, 圓 ABC′ ハソレゾレ C, C′ ニ於テ直線 XY ニ切ス.

**89.** 與ヘラレタル一ツノ直線ノ同ジ側ニ與ヘラレタル二ツノ點 A, B アリ, 今其ノ直線上ニ一ツノ點 C ヲ求メ角 ACB ヲ最大ナラシメヨ.

[35. 農. 大. 實., 35. 大. 高. 工., 37. 一高.]

**解** 先ヅ與ヘラレタル直線ヲ XY トシ, AB ヲ結ビ付クル直線ガ XY ニ平行ナラザルモノトス.




故ニ AB ヲ引キ延バシテ XY ト點 F ニ於テ交ラ



シム.

然ルトキハ A, B ヲ過リ FX ニ切スル圓ノ切點 C ハ所要ノ點ナルベシ.

**證** FX 上ニ C ノ外ナル任意ノ一點 C′ ヲ取リ, C′A, C′B ヲ結ビ付ケ, 此ノ直線ノ中, 一ツ, 例ヘバ C′B ガ圓周 ABC ト交ル點ヲ D トシ, DA ヲ結ビ付ケヨ.

$\widehat{ADB}$ ハ三角形 ADC′ ノ D ニ於ケル外角ナルユエ內對角ノ一ツ $\widehat{AC'B}$ ヨリハ大ニシテ, 且 $\widehat{ADB}$ ハ弧AB上ニ立ツ角ナルユエ $\widehat{ACB}$ ニ等シ.

故ニ $\widehat{ACB}$ ハ $\widehat{AC'B}$ ヨリ大ナリ.

即チ FX 上ノ總テノ點ニ就キテ點 C ハ $\widehat{ACB}$ ヲシテ最大ナラシム.

**吟味** AB ガ XY ニ平行ナラザルトキハ A, B ヲ過リ XY ニ切スル圓ハ二ツアリ, 故ニ所要ノ點ハ二ツアリテ F ノ兩側ニアルベシ.

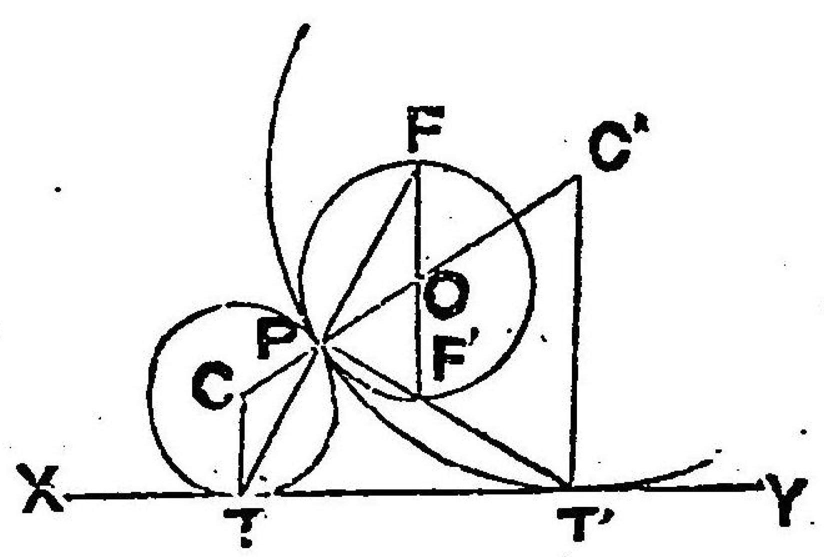
若シ AB ガ XY ニ平行ナルトキハ AB ヲ過リ XY ニ切スル圓ハ唯一ツアルノミ. 故ニ此ノ場合ニハ其ノ切點ガ所要ノ點ナルコト明カナリ.

又 AB ガ XY ニ垂直ナルトキハ AB ヲ過リ XY ニ切スル圓ハ二ツアリテ且相等シ.

故ニ此ノ場合ニハ其ノ二ツノ切點ニ於テABノ含ム角ハ相等シクシテ他ノ何レノ角ヨリモ大ナリ.

**90.** 定點ニ於テ定圓ニ切シ, 且定直線ニ切スル圓ヲ畫ケ. [34. 商船.]

定圓ノ中心ヲO, 其ノ周上ノ定點ヲP, 定直線ヲXYトシ, Pニ於テ圓Oニ切シ且XYニ切スル圓ヲ畫カントス.




**解析** 今圓OニPニ於テ外切スル圓ヲ畫キ得タリトシ, 其ノXYトノ切點ヲT, 中心ヲCトセヨ.

而シテXYニ垂直ナル圓ノ徑FOF′ヲ引キ, PヲF, O, T, Cニ結ビ付ケ, 又CTヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハOPCハ一直線ヲナシ, CTハXYニ垂直ニシテFOモ亦作圖ニ依リテXYニ垂直ナルユヱCTトFOトハ相平行ス.

故ニ錯角トシテ $F\hat{O}P=T\hat{C}P$.

然ルニ二ツノ三角形FOP, TCPニ於テ



OF=OP [=圓Oノ半徑],

CT=CP [=圓Cノ半徑],

即チ各二等邊三角形ナリ.

依リテ其ノ頂角FOP, TCPガ相等シケレバ其ノ底角モ亦相等シカラザルベカラズ.

故ニ $F\hat{P}O=T\hat{P}C$.

而シテOPCハ一直線ナルユヱ, FPTモ亦一直線ナリ. 即チ切點Tヲ求ムルコトヲ得ベク, 從ヒテ中心Cヲ決定スルコトヲ得ベシ.

**作圖** XYニ垂直ナル圓Oノ徑FOF′ヲ引キ, FPヲ結ビ付ケ, 之ヲ引キ延バシテXYトノ交點ヲTトシ, Tニ於テXYニ垂線TCヲ作リ, OPノ延線トノ交點ヲCトスレバCヲ中心トシ, CPヲ半徑トスル圓ハ所要ノ圓ノ一ツナルベシ.

**證** 作圖ニ依リテCT, FOハXYニ垂直ナルユヱ相平行ス, 而シテOPC, FPTハ各一直線ナリ.

故ニ $C\hat{T}P=O\hat{F}P=O\hat{P}F=C\hat{P}T$.

依リテ三角形CPTニ於テ

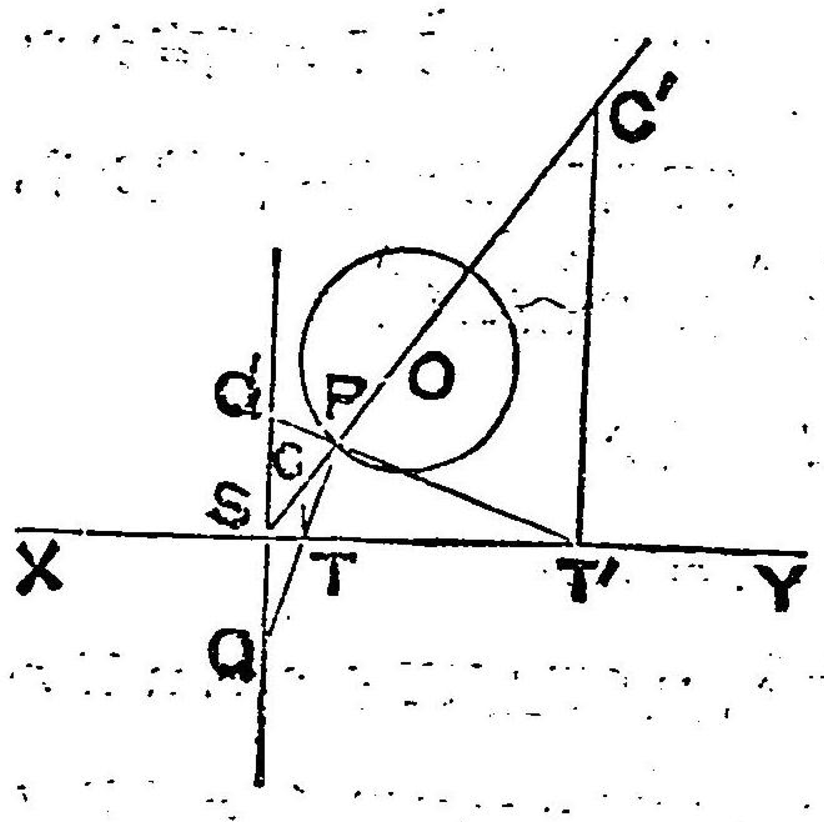
$$CP=CT.$$

故ニ圓CハTヲ過リ, 且CT⊥XYナルユヱTハ圓Cト直線XYトノ切點ニシテ又CハOPノ

延線上ニアルユヱPハ圓Cト圓Oトノ切點ナリ．即チ圓CハPニ於テ圓Oニ切シ，且直線XYニ切ス．同樣ニシテPF′ノ延線トXYトノ交點ヲT′トシ，XYニ垂線T′C′ヲ引キ，POノ延線トC′ニ於テ交ラシムレバC′ヲ中心トシ，C′Pヲ半徑トスル圓モ亦所題ノ要件ニ適スルコトヲ證シ得ベシ．

**吟味** 一般ニ二ツノ解アリ．

若シPF或ハPF′ガXYニ平行ナルトキ，即チPガF或ハF′ト一致スルトキハF或ハF′ガ直線XYノ外ニアルカ，又ハ上ニアルカニ從ヒテ唯一ツノ解アルカ，又ハ無數ノ解アルベシ．PガF或ハF′ト一致セズシテXYノ上ニアルトキ，即チ圓OガPニ於テ直線XYト交ルトキハ解ナシ．




**注意** OPヲ結ビ付クル直線ガXYト交ル點ヲSトシ，Sヲ過リXYニ垂直ナル直線ヲ作リ，其ノ上ニSノ兩側ニ$SQ=SQ'$



$=SP$ナル點Q, Q′ヲ取リ；QP, Q′Pヲ結ビ付クル直線ガXYト交ル點ヲソレゾレT, T′トシ；T, T′ヲ過リXYニ垂直ナル直線ガOPト交ル點ヲC, C′トスレバC, C′ハ所要ノ圓ノ中心ニシテT, T′ハ其ノ圓トXYトノ切點ナリ．

**證** 及ビ **吟味** 略ス．

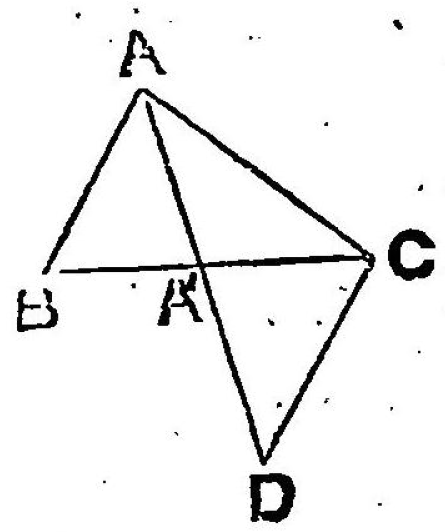
91．次ノ要件ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ．

(1) 二邊ト第三邊ヘノ中線．

(2) 一邊ト其ノ他ノ二邊ヘノ中線．

[32. 陸. 士., 37. 商船.]

(1) **解析** 二邊AB, AC及ビ邊BCヘノ中線AA′ヲ知リテ所要ノ三角形ABCヲ作リ得タリトシ，AA′ヲDニ引キ延バシテ$A'D=AA'$ナラシメ，CDヲ結ビ付クレバ$\triangle CA'D \equiv \triangle BA'A$［二邊ト夾角］．




故ニ　$CD=AB,\ A'D=AA'$.

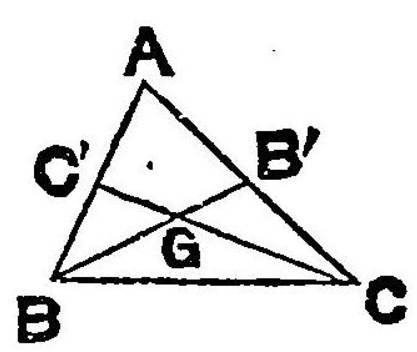
依リテ三角形CADノ三邊ハ$CA,\ CD=AB,\ AD=2AA'$ニシテ既知ノ量ナルユヱ三角形CADヲ作ルコトヲ得．

然ルトキハBCハ三角形CADノ中線CA′ノ2倍

ナルユヱ亦既知ノ量トナル, 即チ三角形ABCノ三邊ヲ既知スルユヱ容易ニ之ヲ作リ得ベシ.

**吟味** 三角形ABCガ作圖シ得ラルベキ爲ニハ三角形ACDヲ作圖シ得ルコトヲ要ス. 依リテAC, CDノ和ハADヨリ大ニシテ, 差ハADヨリ小ナラザルベカラズ, 即チ與ヘラレタル二邊ノ和ハ中線ノ2倍ヨリ大ニシテ差ハ中線ノ2倍ヨリ小ナルコトヲ要ス.

(2) **解析** 一邊BC, 他ノ二邊AC, ABヘノ中線BB′, CC′ヲ知リテ所要ノ三角形ABCヲ作リ得タリトシ, BB′, CC′ノ交點ヲGトスレバ




$$GB=\frac{2}{3}BB',$$

$$GC=\frac{2}{3}CC'.$$

故ニ三角形GBCノ三邊ハ既知ノ量ナリ.

依リテ先ヅ三ツノ邊ガ$\frac{2}{3}BB'$, $\frac{2}{3}CC'$, BCナル三角形GBCヲ作リ, BGヲB′ニ, CGヲC′ニ引キ延バシテ$GB'=\frac{1}{3}BB'$, $GC'=\frac{1}{3}CC'$ナラシメ, BC′, CB′ヲ結ビ付ケ, 各ヲ引キ延バシテ其ノ交點ヲAトスレバ三角形ABCハ所要ノ三角形ナリ.

**吟味** 三角形ABCノ作圖シ得ラルベキ爲ニハ

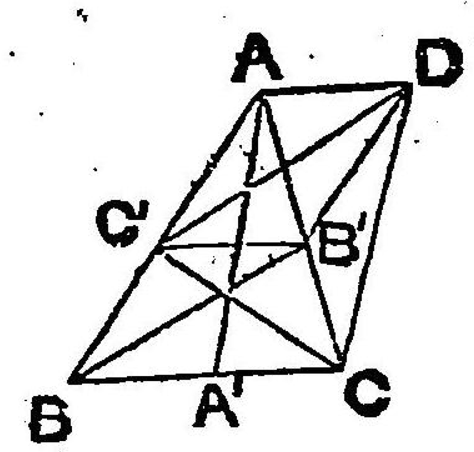


三角形GBCヲ作圖シ得ザルベカラズ, 之ガ爲ニハ與ヘラレタル二ツノ中線ノ和ノ三分ノ二ハ一邊ヨリ大ニシテ, 差ノ三分ノ二ハ一邊ヨリ小ナルコトヲ要ス.

**92.** 三ツノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

[30. 一高., 33. 外.語., 33. 東.高.商., 39. 京.醫.專.]

**解析 I.** 所要ノ三角形ABCヲ作リ得タリトシ, 三ツノ中線AA′, BB′, CC′ヲ引ケ, 而シテAヲ過リBCニ平行ナル直線トB′ヲ過リBAニ平行ナル直線トノ交點ヲDトシ; DC′, DCヲ結ビ付ケヨ.




然ルトキハ四邊形AC′B′Dニ於テB′C′ハ三角形ABCノ二邊AB, ACノ中點ヲ結ビ付クル直線ナルユヱ第三邊BCニ平行シ, 又作圖ニ依リテADモ亦BCニ平行ニシテ, B′DハAC′ニ平行ナリ.

故ニ四邊形AC′B′Dハ平行四邊形ナリ.

依リテB′DトAC′, 從ヒテB′DトBC′トハ平行ニシテ且相等シ.

故ニBB′DC′モ亦平行四邊形ニシテC′D=BB′ナリ.

又 AD 及ビ A'C ハ共ニ B'C' ニ平行シ，且之ニ等シキユエ互ニ平行ニシテ且相等シ．

故ニ四邊形 ADCA' モ亦平行四邊形ニシテ $DC = AA'$ ナリ．

是ニ依リテ先ヅ三角形 DC'C ノ三邊 DC, C'C, CD ハ三角形 ABC ノ三ツノ中線 BB', CC', AA' ヨリ成ルコトヲ知ル．

而シテ前ニ云ヘル如ク ADB'C' ハ平行四邊形ナルユエ B'A 或ハ CB' ノ延線ハ C'D ノ中點ヲ過ル．又三角形 CAD ニ於テ B' ハ AC ノ中點, C'B' ハ AD ニ平行ナルユエ C'B' ヲ引キ延バストキハ CD ノ中點ヲ過ル．

依リテ三角形 CDC' ニ於テ B' ハ二ツノ中線ノ交點ナルユエ本形ノ重心ナリ．

故ニ DB', C'B', CB' ハソレゾレ三角形 DC'C ノ三ツノ中線ノ三分ノ二ニ等シ．

是ニ於テ

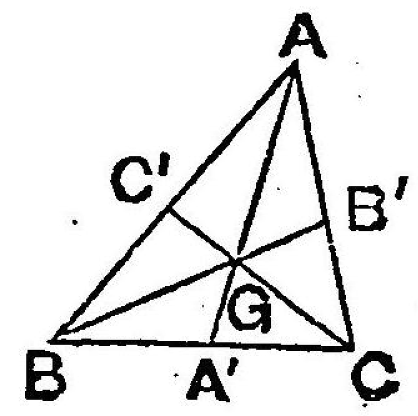
$$AB = 2AC' = 2DB',$$
$$BC = 2C'B',$$
$$CA = 2CB'$$

ナルユエ三角形 ABC ノ三邊ハ既知ノ量トナル．

故ニ容易ニ三角形 ABC ヲ作ルコトヲ得ベシ．



**解析 II.** 三ツノ中線ノ交點ヲ G トスレバ




$$GB = \frac{2}{3}BB',$$
$$GA' = \frac{1}{3}AA',$$
$$GC = \frac{2}{3}CC'.$$

然ルニ BB', AA', CC' ハ既知ナルユエ三角形 GBC ニ於テ二邊 GB, GC 及ビ中線 GA' ヲ知ルコトトナル．

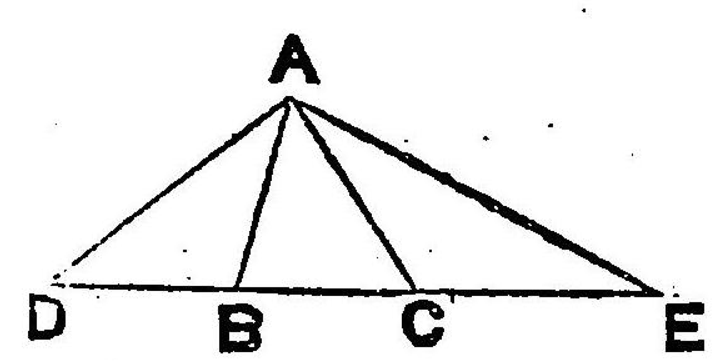
故ニ 91 題 (1) ニ歸ス．

**吟味** 何レノ解ニ就キテモ三角形ABC ノ作圖シ得ラルベキ要件ハ三ツノ中線ノ中,二ツノ和ガ他ノ一ツヨリ大ニシテ，差ガ他ノ一ツヨリ小ナルヲ要スルコト明カナリ．

**93.** 三邊ノ和ト二角トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ．　[36. 商船., 38. 各高等., 40. 盛. 高. 農.]

三邊ノ和 $2s$, 二角 $\beta, \gamma$ ヲ知リテ三角形 ABC ヲ作ラントス．

**作圖** 任意ノ直線 DE ヲ引キ，之ヲ $2s$ ニ等シク取リ,D及ビ E ニ於テ




$$ED\hat{A} = \frac{1}{2}\beta,\ D\hat{E}A = \frac{1}{2}\gamma$$

ヲナス直線 DA 及ビ EA ヲ DE ニ關シテ同ジ側ニ引キ，其ノ交點ヲ A トシ，A ニ於テ $D\hat{A}B=\hat{D}$, $E\hat{A}C=\hat{E}$ ヲナス直線 AB, AC ヲソレゾレ AD, AE ニ關シテ DE ト同ジ側ニ引キ DE トノ交點ヲソレゾレ B, C トスレバ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

**證** 作圖ニ依リテ三角形 BAD ノ底 AD ニ於ケル角ハ相等シク，又三角形 CAE ノ底 AE ニ於ケル角ハ相等シキユヱ

$$AB=DB,\quad AC=CE.$$

故ニ
$$AB+BC+CA=DB+BC+CE$$
$$=DE=2s.$$

而シテ
$$A\hat{B}C=B\hat{A}D+B\hat{D}A$$
$$=2B\hat{D}A=2\left(\frac{1}{2}\beta\right)=\beta.$$

同樣ニ
$$A\hat{C}B=\gamma.$$

故ニ三角形 ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

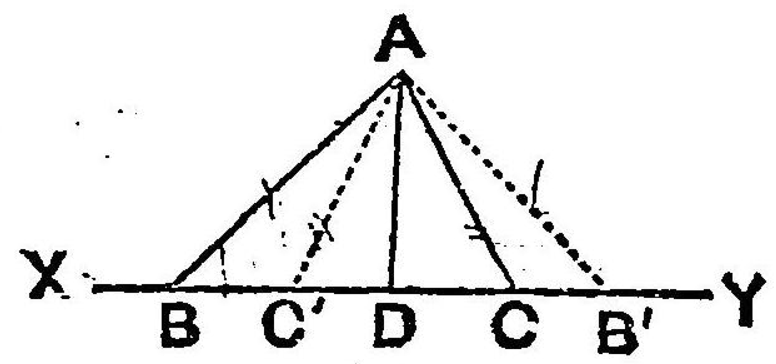
**吟味** 三角形ABCノ作圖シ得ラルベキ爲ニハ $\beta+\gamma<2\hat{R}$ ナルコト明カナリ.

**94.** 二邊ト其ノ二邊ノ夾ム角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線トヲ與ヘテ三角形ヲ作ル方法ヲ記シ且其ノ理由ヲ述ベヨ. [42. 女. 高. 師.]

二邊 $b, c$ ト其ノ夾角ノ頂點ヨリ對邊ヘ引ケル



垂線 $h_a$ トヲ知リテ三角形 ABC ヲ作ラントス.




**作圖** 任意ノ直線 AD ヲ引キ，之ヲ $h_a$ ニ等シク取リ，D ニ於テ AD ニ垂線 XY ヲ引キ，次ニ A ヲ中心トシ; $b, c$ ヲ半徑トスル二ツノ圓ヲ畫キソレゾレ XY トノ交點ヲ C, C′; B, B′ トスレバ四ツノ三角形ABC, ABC′, AB′C′, AB′C ハ何レモ所要ノ三角形ナルベシ.

**證** 是等ノ三角形ハ何レモ其ノ二邊ハ $b, c$ ニ等シク，其ノ二邊ノ交點ヨリ對邊ニ引ケル垂線ハ AD ナルユヱ，即チ $h_a$ ニ等シケレバナリ.

**吟味** AB=AB′, 及ビ AC=AC′ ナルユヱ BD=B′D 及ビ C′D=CD.

依リテ上ノ四ツノ三角形ハ二ツヅツ全等ナリ，

即チ
$$\triangle ABC\equiv\triangle AB'C',$$
$$\triangle ABC'\equiv\triangle AB'C.$$

而シテ所要ノ三角形ノ作圖シ得ラルベキ爲ニハ Aヲ中心トシ $b, c$ ヲ半徑トスル二ツノ圓ノ中，一ツハXY ト少ナクモ一點ヲ共有シ，他ノ一ツハ二點ヲ共有スルコトナリ，換言スレバ $b, c$ ハ何レモ

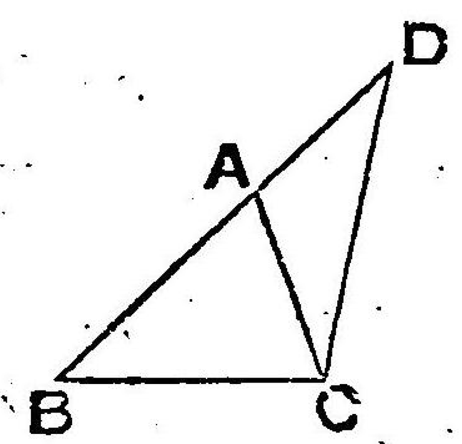
$h_c$, ハ $h_a$ ヨリ小ナラズ, 且 $b, c$ ノ中, 何レカ一ツハ $h_a$ ヨリ大ナルコトナリ.

**95.** 三角形ノ一角ト之ニ接スル一邊及ビ他ノ二邊ノ和トヲ知リテ三角形ヲ作レ.

[33. 東. 高. 師., 33. 海. 兵.]

一角 $\beta$, 之ニ接スル一邊 $a$ 及ビ他ノ二邊ノ和 $b+c$ ヲ知リテ三角形 ABC ヲ作ラントス.

**作圖** 任意ノ直線 BC ヲ引キ之ヲ與ヘラレタル一邊 $a$ ニ等シクシ, B ニ於テ與ヘラレタル角 $\beta$ ニ等シク $C\hat{B}D$ ヲ作リ, BD$=b+c$ ナラシメ, DC ヲ結ビ付ケ, $B\hat{D}C$ ニ等シク $D\hat{C}A$ ヲ DC ニ關シテ $B\hat{D}C$ ト同ジ側ニ作リ, CA ト BD トノ交點ヲ A トスレバ三角形 ABC ハ所要ノ三角形ナルベシ.




**證** 作圖ニ依リテ BC ハ與ヘラレタル一邊 $a$ ニ等シク, $\hat{B}$ ハ此ノ邊ニ接シ與ヘラレタル角 $\beta$ ニ等シク, 而シテ $A\hat{D}C=A\hat{C}D$ ナルユエ AD=AC,

故ニ $\quad AB+AC=AB+AD=BD=b+c$

ナレバナリ.

**吟味** 始ヨリ明カナル如ク三角形 ABC ノ作



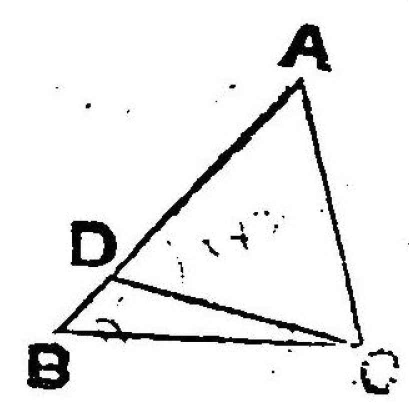
圖シ得ラルベキ爲ニハ $\beta<2\hat{R}$, $b+c>a$ ナルコト明カナリ.

**96.** 三角形ノ二邊ノ差, 二ツノ底角ノ差, 及ビ底邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ.

[31. 東. 高. 商., 39. 商船.]

二邊 AB, AC ノ差 $d$, 兩底角 C, B ノ差 $\delta$, 及ビ底邊 $a$ ヲ知リテ三角形 ABC ヲ作ラントス.

**解析** 今所要ノ三角形 ABC ヲ作リ得タリトシ, AB 上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ, CD ヲ結ビ付ケヨ.




然ルトキハ

$$BD=AB-AD$$
$$=AB-AC=d.$$
$$B\hat{C}D=A\hat{C}B-A\hat{C}D$$
$$=A\hat{C}B-A\hat{D}C$$
$$=A\hat{C}B-(B\hat{C}D+A\hat{B}C).$$

故ニ $\quad B\hat{C}D=\frac{1}{2}(A\hat{C}B-A\hat{B}C)=\frac{1}{2}\delta.$

而シテ $\quad BC=a,$

即チ三角形 CBD ニ於テ二邊及ビ其ノ一邊ニ對スル角ヲ既知ス, 故ニ之ヲ作圖シ得ベク, 從ヒテ次ノ作圖法ヲ得ベシ.

**作圖** 任意ノ直線 BC ヲ引キ之ヲ $a$ ニ等シクシ，B ニ於テ一直線 BD ヲ $\widehat{DBC}=\frac{1}{2}\delta$ ナル樣ニ引キ，又 B ヲ中心トシ $d$ ヲ半徑トスル圓ガ此ノ直線 CD ト交ル點ヲ D トセヨ． DC ノ垂直二等分線ガ CD ノ延線ト交ル點ヲ A トスレバ ABC ハ所要ノ三角形ナリ．

**吟味** 三角形 CBD ニ於テ二邊及ビ其ノ一邊ニ對スル角ヲ知ルユエ其ノ解ノ一ツナルコトアリ，或ハ二ツナルコトアリ；然レドモ $\widehat{ADB}$ ハ二等邊三角形ノ一底角ナルユエ銳角ナラザルベカラズ，從ヒテ $\widehat{CDB}$ ハ必ズ鈍角ナリ． 依リテ B ヲ中心トシ，$d$ ヲ半徑トスル圓ガ CD ト二點ニ於テ交ルトキハ $\widehat{BDC}$ ヲシテ鈍角ナラシムル點 D ノミ用フルコトヲ得，而シテ此ノ圓ガ CD ニ切スルカ或ハ交ラザルトキハ作圖ハ不能ナリ．

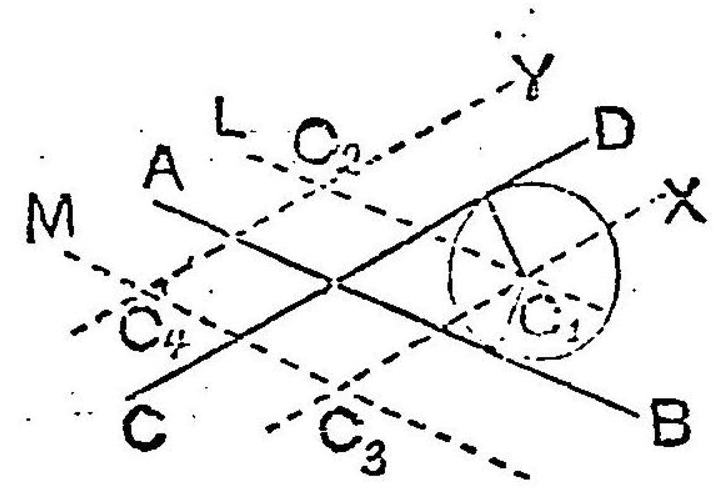
**97.** 與ヘラレタル二ツノ直線ニ切シテ與ヘラレタル半徑ヲ有ツ圓ヲ畫ケ． [42. 安. 高. 師.]

**解** 與ヘラレタル二ツノ直線ヲ AB, CD, 與ヘラレタル半徑ヲ $r$ トス．

I. AB, CD ガ相交ルトキ．

所要ノ圓ハ AB ニ切スルユヱ其ノ中心ハ AB






ヨリ $r$ ナル距離ニアリ．

故ニ其ノ中心ハ AB ヨリ $r$ ナル距離ニアル點ノ軌跡ナル二直線 L 或ハ M ノ上ニアリ．

同樣ニ所要ノ圓ノ中心ハ CD ヨリ $r$ ナル距離ニアル點ノ軌跡ナル二直線 X 或ハ Y ノ上ニアリ．

依リテ所要ノ圓ノ中心ハ L ト X, 或ハ L ト Y, 又ハ M ト X, 若シクハ M ト Y トニ共通ナル點，即チ其ノ交點ナラザルベカラズ．

然ルニ假設ニ依リテ AB, CD ハ相交ル二直線ナルユエソレゾレ AB, CD ニ平行ナル各他ノ二直線モ亦必ズ相交ル．

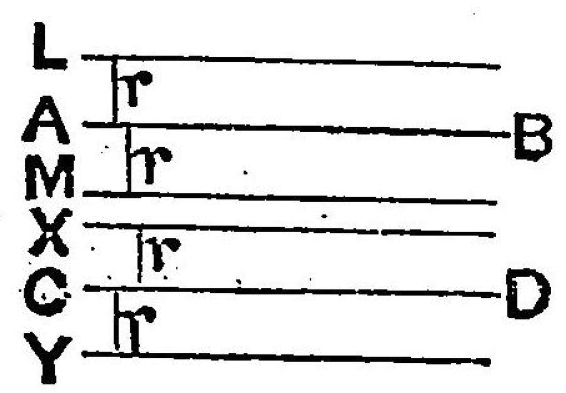
故ニ順次ニ四ツノ交點 $C_1, C_2, C_3, C_4$ ヲ與フ．

即チ此ノ四ツノ點ヲ各中心トシ，$r$ ヲ半徑トスル圓ハ所要ノ圓ナルコト明カナリ．

II. AB, CD ガ相平行スルトキ．

AB, CD ガ相平行スルユエ此ノ何レカ一ツニ平行ナル四ツノ直線 L, M, X, Y ハ此ノ各ニ平行ナリ．

即チ是等ノ直線ハ皆相平行ス.



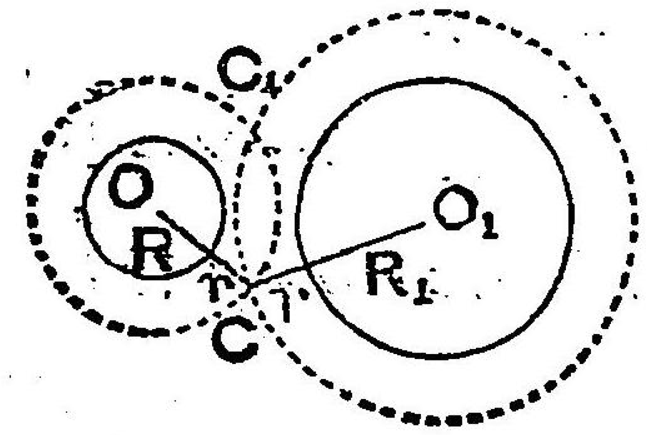

依リテ何レノ二ツヲ取ルモ相交ルコトナク，所要ノ圓ノ中心ヲ求ムルコト能ハズ.

然レドモ此ノ場合ニ於テ特ニ AB ト CD トノ間ノ距離ガ $r+r=2r$ ナルトキハ AB ト CD トノ間ニアリテ AB ヨリ $r$ ナル距離ニアル點ノ軌跡ナル直線 M ト CD ヨリ $r$ ナル距離ニアル點ノ軌跡ナル直線 X トハ相一致シテ同一ノ直線ヲナスベク，此ノ直線上ノ任意ノ一點ヲ中心トシ $r$ ヲ半徑トスル圓ハ AB, CD ニ切スベシ.

98. 與ヘラレタル長サノ直線ヲ半徑トシ與ヘラレタル二圓ニ外切スル圓ヲ畫ケ.

[33. 海.兵.]

**解** 與ヘラレタル長サノ直線 $r$ ヲ半徑トシ，中心 O [半徑 R] ナル圓ト中心 $O_1$ [半徑 $R_1$] ナル圓トニ外切スル圓ヲ畫カントス.






所要ノ圓ハ圓 O ニ外切スルユヱ其ノ中心ハ O ヨリ $R+r$ ナル距離ニアリ，又圓 $O_1$ ニ外切スルユヱ其ノ中心ハ $O_1$ ヨリ $R_1+r$ ナル距離ニアリ. 故ニ所要ノ圓ノ中心ハ O ヨリ $R+r$ ナル距離ニアル點ノ軌跡上ニアリ，且 $O_1$ ヨリ $R_1+r$ ナル距離ニアル點ノ軌跡上ニアリ. 依リテ所要ノ圓ノ中心ハ是等ノ二ツノ軌跡ノ交リナラザルベカラズ，即チ O ヲ中心トシ $R+r$ ヲ半徑トスル圓ト $O_1$ ヲ中心トシ $R_1+r$ ヲ半徑トスル圓トヲ畫キ，其ノ交點ヲ C トスレバ C ハ所要ノ圓ノ中心ニシテ，C ヲ中心トシ $r$ ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバ，コレ所要ノ圓ナリ.

**吟味** $R+r+R_1+r$, 即チ $R+R_1+2r>OO'$, 且 $R+r\sim(R_1+r)$, 即チ $R\sim R_1<OO'$ ナルトキハ所要ノ圓ノ中心ノ軌跡ナル二ツノ圓ハ二點ニ於テ相交ル，故ニ此ノ場合ニハ二ツノ解アリ.

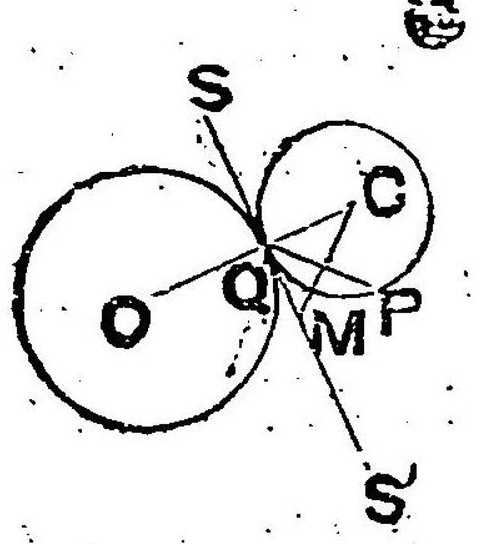
$R+R_1+2r=OO'$ ナルトキハ軌跡ナル二ツノ圓ハ外切スルユヱ唯一ツノ解アリ.

$R+R_1+2r<OO'$ ナルトキハ軌跡ナル二ツノ圓ハ相交ラズ，故ニ解ナシ.

99. 圓外ノ一定點ヲ過リテ圓周上ノ一定點

ニ切スル圓ヲ畫ケ.　[33. 農. 大. 實.]

中心 O ナル圓外ノ一定點 P ヲ過リテ圓 O ノ周上ノ一定點 Q ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫カントス.




**作圖**　PQ ヲ結ビ付ケ,其ノ垂直二等分線 MC ヲ作リ,又 OQ ヲ引キ延バシテ MC ト C ニ於テ交ラシムレバ C ヲ中心トシ CQ ヲ半徑トスル圓ハ所要ノ圓ナルベシ.

**證**　圓 C ト圓 O トノ中心線 OC ハ二ツノ圓周ニ共通ナル點 Q ヲ過ル,故ニ此ノ二ツノ圓ハ Q ニ於テ相切ス. 而シテ C ハ PQ ノ垂直二等分線上ニアルユヱ CP=CQ,故ニ圓 C ハ P ヲ過ル.

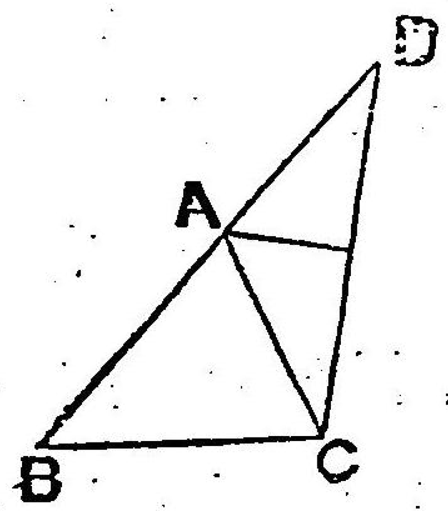
**吟味**　所要ノ圓ヲ畫キ得ベキ爲ニハ MC ト OQ トガ相交ルコトナリ. 今 Q ニ於テ圓 O ノ切線 SQS' ヲ引クトキハ OQ⊥SQS' ナリ. 依リテ MC ト OQ トガ相交ル爲ニハ點 P ガ SQS' ノ上ニアラザルコトヲ要ス. 而シテ點 P ガ SQS' ニ關シテ O ト反對ノ側ニアルトキハ C ハ OQ ノ延線上ニアルユヱ二圓ハ互ニ外切シ,O ト同ジ側ニアルトキハ C ハ QO ノ延線上ニアルユヱ二圓



ハ互ニ內切スベシ.

**100.** 三角形ノ底邊ト頂角及ビ他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ本形ヲ作レ. [39. 海. 機., 39. 專. 入. 檢.]

底邊 $a$, 頂角 $\alpha$, 及ビ他ノ二邊ノ和 $b+c$ ヲ知リテ三角形 ABC ヲ作ラントス.




**解 I.**　今所要ノ三角形 ABC ヲ作リ得タリトシ, BA ヲ D ニ引キ延バシテ AD ヲ AC ニ等シク取レバ

$$BD=BA+AC=c+b.$$

又 AC=AD ナルユヱ $\hat{D}=\frac{1}{2}B\hat{A}C=\frac{1}{2}\alpha$,

而シテ A ハ DC ノ垂直二等分線上ニアリ.

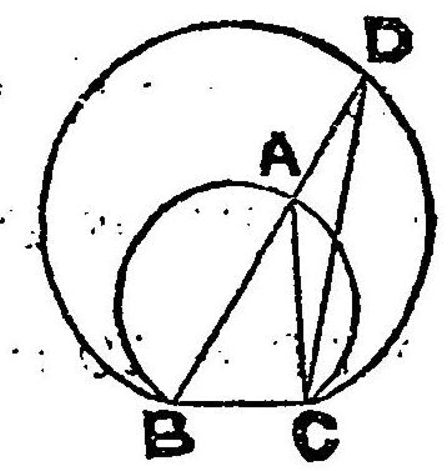
故ニ先ヅ三角形 DBC ニ於テ二邊 BC, BD 及ビ其ノ一邊ニ對スル角 D ヲ既知スルユヱ之ヲ作リ得ベシ. 依リテ任意ノ直線 BD ヲ引キ,之ヲ $b+c$ ニ等シクシ, D ニ於テ $B\hat{D}C=\frac{1}{2}\alpha$ ナル如キ直線 DC ヲ引キ, B ヲ中心トシ $a$ ヲ半徑トスル圓ト C ニ於テ交ラシメヨ. 而シテ DC ノ垂直二等分線ト BD トノ交點ヲ A トスレバ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

**吟味**　B ヲ中心トシ $a$ ヲ半徑トスル圓ガ直線

DC ト相交ルトキハ二ツノ解アリ，相切スルトキハ唯一ツノ解アリ，交ラザルトキハ解ナシ．

又 $b+c>a$ ナルコトヲ要スルハ勿論ナリ．

**解 II.** 任意ノ直線 BC ヲ引キ，之ヲ $a$ ニ等シクシ，BC ノ上ニ同ジ側ニ $\alpha$ 及ビ $\frac{1}{2}\alpha$ ヲ含ム二ツノ弧 BAC，及ビ BDC ヲ畫キ，又 B ヲ中心トシ $b+c$ ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ，弧 BDC トノ交點ヲ D トシ，DB ヲ結ビ付ケ，弧 BAC ト A ニ於テ交ラシムレバ ABC ハ所要ノ三角形ナリ．




如何トナレバ AC ヲ結ビ付ケヨ．

然ルトキハ作圖ニ依リテ

$$B\hat{A}C=A\hat{D}C+A\hat{C}D=2A\hat{D}C,$$

故ニ　$A\hat{C}D=A\hat{D}C,$

從ヒテ　$AC=AD.$

$$BA+AC=BA+AD=BD=b+c.$$

而シテ　$BC=a,\ B\hat{A}C=\alpha$

ナレバナリ．

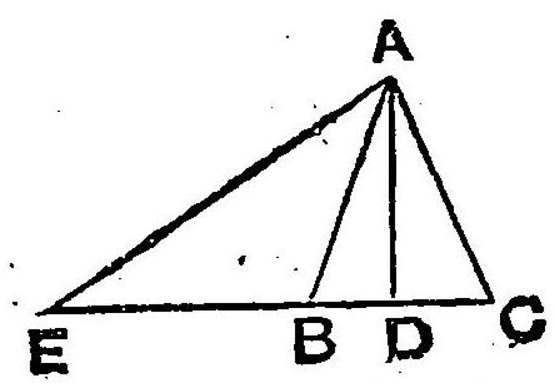
**吟味** B ヲ中心トシ $b+c$ ヲ半徑トスル圓ガ弧 BDC ト二ツノ點 D, D′ ニ於テ交ルトキ D′B ト



弧 BAC トノ交點ヲ A′ トスレバ三角形 A′BC モ亦所要ノモノニシテ此ノ場合ニハ二ツノ解アリ．又此ノ圓ガ弧 BDC ニ切スレバ唯一ツノ解アリ，交ラザレバ解ナシ．又勿論 $b+c>a$ ナルコトヲ要ス．

**101.** 二等邊三角形ノ周及ビ高サヲ與ヘテ之ヲ作レ．　[38. 商船]

**解** 與ヘラレタル周ヲ $2s$，與ヘラレタル高サヲ $h$ トス．




**作圖** 直線 AD ヲ引キ，之ヲ $h$ ニ等シク取リ D ニ於テ之ニ垂線 DE ヲ作リ，且 $DE=s$ ナラシメ，AE ヲ結ビ付ケヨ．而シテ $A\hat{E}B$ ニ等シキ $E\hat{A}B$ ヲ作リ AB ト DE トノ交點ヲ B トス．直線 DE 或ハ其ノ延線上ニ於テ AD ニ對シテ B ト反對ノ側ニ $DC=DB$ ナル如キ一點 C ヲ取レバ △ABC ハ所要ノ三角形ナリ．

**證** B ヲ頂點トスル三角形 ABE ノ兩底角ハ作圖ニ依リテ相等シク，從ヒテ $AB=EB$,

故ニ　$AB+BD=EB+BD=s,$

又 △ABC ニ於テ $AD\perp BC,\ BD=DC$ [作圖] ナ

ルユヱ此ハ二等邊ニシテ

$$AC+CD=AB+BD,$$

依リテ $\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\text{ ノ周}=2(AB+BD)=2s\\ \text{其ノ高サ }AD=h\end{array}\right\},$

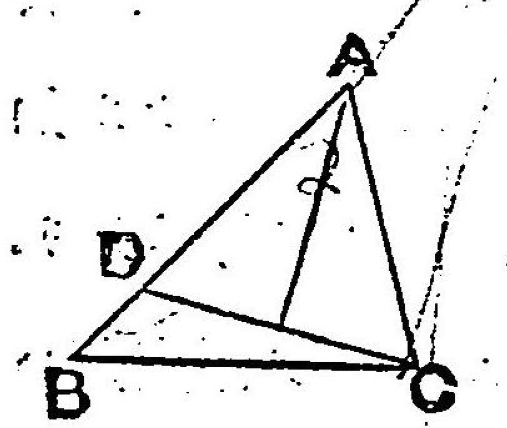
即チ △ABC ハ所題ノ要件ニ適スル三角形ナリ.

**吟味** △ABC ノ作圖シ得ラルル爲ニ必要ニシテ且十分ナル要件ハ △ABD ノ作圖シ得ラルルコトニシテ,即チ AB+BD>AD 或ハ $s>h$ ナルコトナリ.

**102.** 底邊ト頂角トニ邊ノ差トヲ知リテ三角形ヲ作レ. [33. 陸士.]

**解** 底邊 $a$, 頂角 $\alpha$, 二邊ノ差 $d$ ヲ知リテ三角形 ABC ヲ作ランドス [AB>AC トス].

所要ノ三角形 ABC ヲ作リ得タリトシ, AB ノ上ニ AC ニ等シク, AD ヲ取リ, CD ヲ結ビ付ケヨ.




然ルトキハ三角形 ADC ハ AD=AC ナル二等邊三角形ナルユヱ

$$A\hat{D}C=A\hat{C}D,$$

而シテ $$A\hat{D}C+A\hat{C}D+\hat{A}=2\hat{R},$$

故ニ $$2A\hat{D}C=2\hat{R}-\alpha,$$



即チ $$A\hat{D}C=2\hat{R}-\tfrac{1}{2}\alpha.$$

依リテ $$B\hat{D}C=2\hat{R}-A\hat{D}C=\hat{R}+\tfrac{1}{2}\alpha,$$

又 $$BD=AB-AD=AB-AC=d.$$

$$BC=a.$$

故ニ三角形 BDC ニ於テ二邊 BC, BD 及ビ其ノ一邊 BC ニ對スル角 BDC ヲ既知スルユヱ,先ヅ之ヲ作リ得ベク,而シテ A ハ DC ノ垂直二等分線上ニアリ.

依リテ任意ノ直線 BD ヲ引キ,之ヲ $d$ ニ等シク取リ, D ニ於テ $B\hat{D}C=\hat{R}+\frac{1}{2}\alpha$ ナル如キ直線 DC ヲ引キ又 B ヲ中心トシ $a$ ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, DC ト C ニ於テ交ラシメ, DC ノ垂直二等分線ト BD ノ延線トノ交點ヲ A トスレバ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

**吟味** $\alpha<2\hat{R}$. $d$[即チ二邊ノ差]$<a$ ナルコトヲ要スルハ始ヨリ明カナルコトナリ.

又 $B\hat{D}C=\hat{R}+\frac{1}{2}a$ ナルユヱ B ヲ中心トシ $a$ ヲ半徑トスル圓ガ DC ト交ル二點ノ中 BDC ヲシテ鈍角ナラシムベキ點 C ノミ用フルコトヲ得.

# C. 面積

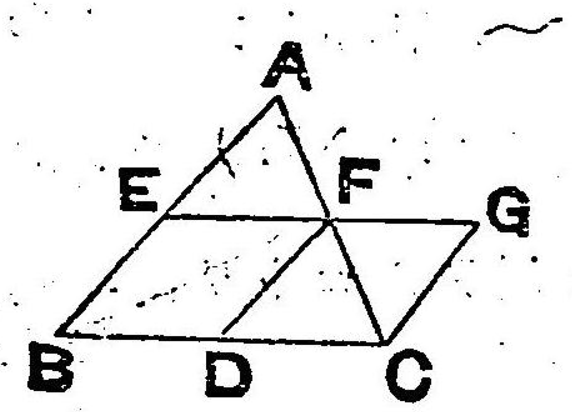
**1.** 等底等高ナル平行四邊形ノ面積ハ相等シキコトヲ證セヨ. [33. 農. 大. 實.]

**證** 平行四邊形ノ面積ハ之ト等シキ底及ビ等シキ高サヲ有ツ矩形ノ面積ニ等シ.
依リテ等底等高ナル平行四邊形ノ面積ハ等底等高ナル矩形ノ面積ニ等シ.
然ルニ等底等高ナル矩形ハ皆相等シ.
故ニ等底等高ナル平行四邊形ノ面積ハ相等シ.

**2.** 三角形 ABC ニ於テ二邊 AB, AC ノ中點 E, F ヲ結ビ付クルトキハ梯形ヲ生ジ其ノ面積ハ三角形 AEF ノ面積ノ三倍ナルコトヲ證セヨ.

[32. 海. 機., 38. 盛. 高. 農.]

**證** EF ヲ G ニ引キ延バシテ FG=EF ナラシメ, CG ヲ結ビ付ケヨ,




然ルトキハ二ツノ三角形 AEF, CGF ニ於テ

AF=CF [假設]

EF=GF [作圖]



$A\hat{F}E = C\hat{F}G$, [對頂角]

故ニ $\triangle AEF \equiv \triangle CGF$

ニシテ $E\hat{A}F = F\hat{C}G$,

故ニ AE, 即チ AB ∥ GC.

又 BE=AE=CG.

即チ四邊形 EBCG ニ於テ相對スル邊 EB, GC ハ互ニ平行ニシテ且相等シキユヱ, 此ハ平行四邊形ナリ. 故ニ EG ト BC, 或ハ EF ト BC トハ平行ナルユヱ EBCF ハ EF ∥ BC ナル梯形ナリ.

次ニ AB ニ平行ニ FD ヲ引キ, BC トノ交點ヲ D トスレバ EBDF, FDCG モ亦平行四邊形ニシテ, EF=FG ナルユヱ二ツノ平行四邊形ハ相等シ.

依リテ 梯形 $EBCF = \square ED + \triangle FDC$

$= \square DG + \triangle FDC = 2\triangle FCG + \triangle FGC$

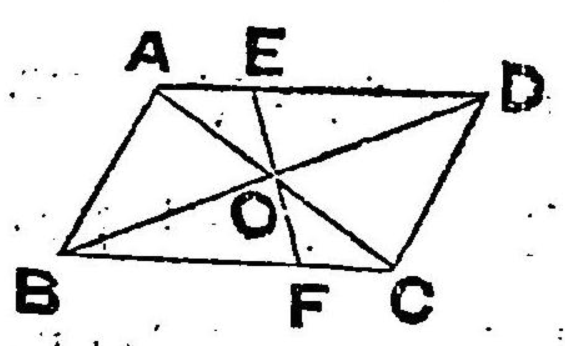
$= 3\triangle FCG = 3\triangle AEF$.

**注意** 若シ A. 43 題ノ定理ヲ借リ來レバ EBCF ノ梯形ナルコトハ直チニ明カニシテ, 又 BC ノ中點ヲ D トシ; DE, DF ヲ結ビ付クルトキハ斯クシテ生ゼル四ツノ三角形ハ三邊ガソレゾレ相等シキコトニ依リテ全等ナルコト明カナリ, 故ニ EBCF ノ面積ハ △AEF ノ面積ノ 3 倍

ニ等シ.

3. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ過ル任意ノ直線ハ之ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコトヲ證セヨ.　[37. 女. 高. 師.]

平行四邊形ヲ ABCD トシ, 其ノ對角線ノ交點 O ヲ過ル任意ノ直線ヲ引キ, 例ヘバ AD ト E ニ於テ, BC ト F ニ於テ交ラシムレバ




∴ 四邊形 EABF＝四邊形 FCDE

ナルベシ.

證 I. O ハ平行四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ交點ナルユヱ兩對角線ノ共通ナル中點ナリ.

故ニ二ツノ三角形 AOE, COF ニ於テ

$$\begin{cases} AO=CO \\ A\hat{O}E=C\hat{O}F & \text{[對頂角]} \\ O\hat{A}E=O\hat{C}F & [\because AD \parallel BC] \end{cases}$$

依リテ　$\triangle AOE \equiv \triangle COF$,

同樣ニ　$\triangle BOF \equiv \triangle DOE$,

又　$\triangle AOB \equiv \triangle COD$　[二邊ト夾角]

ナルコト明カナリ.



故ニ　$\triangle AOE+\triangle BOF+\triangle AOB$

$=\triangle COF+\triangle DOE+\triangle COD$,

即チ　四邊形 EABF＝四邊形 FCDE.

證 II. 平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ハ四ツノ邊ニ關シテ對稱ノ中心ナリ.

依リテ　EO＝OF.

而シテ AF, EC ヲ結ビ付クレバ,

四邊形 AECF ハ對角線ガ互ニ二等分セラルルユヱ平行四邊形ナリ.

依リテ　AE＝FC,

從ヒテ　BF＝ED,

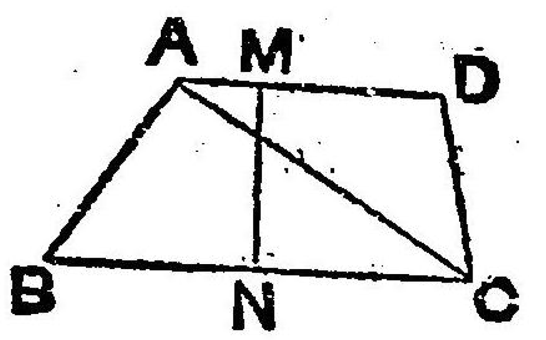
故ニ二ツノ四邊形 ABFE, CDEF ニ於テ各邊ハ順次ニ相等シク, 相對應スル各角モ亦順次ニ相等シキコトヲ知ル.

故ニ全等形ナリ. 即チ等積ナリ.

4. 梯形ハ其ノ平行ナル二邊ノ和ノ半分ニ等シキ底邊及ビ其ノ二邊ノ距離ニ等シキ高サノ矩形ニ等シ, 之ヲ證セヨ.

[31. 海. 兵., 35. 女. 高. 師., 39. 海. 機.]

ABCD ヲ AD ∥ BC ナル梯形トシ, AD＝$a$, BC＝$b$, AD ト BC トノ距離ヲ MN＝$h$,




梯形ノ面積ヲ S トスレバ $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ ナルベシ.

證 I. 對角線 AC ヲ引ク.

然ルトキハ二ツノ三角形 ACD, ABC ニ於テ高サハ何レモ $h$ ニ等シク, 其ノ底ハソレゾレ $a, b$ ナルユヱ第一ノ面積ハ $\frac{1}{2}ah$ ニシテ第二ノ面積ハ $\frac{1}{2}bh$ ナリ.

故ニ是等ノ三角形ノ和ナル梯形ニ就キテハ

$$S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

證 II. AB ノ中點 E ヲ過リ DC ニ平行ナル直線 A′DB′ ヲ引キ AD, BC 或ハ其ノ延線ト交ル點ヲソレゾレ A′, B′ トスレバ三角形 EAA′, EBB′ ハ各角及ビ一邊ガ相等シキユヱ全等形ナリ.

故ニ $$AA'=BB',$$

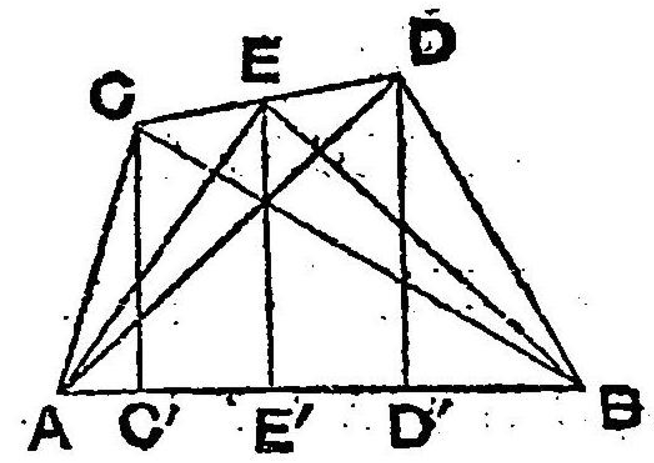
依リテ平行四邊形 A′DCB′ ハ梯形 ABCD ニ等シク A′D ハ $\frac{a+b}{2}$ [A. 80 題] ナルコト明カナリ.

故ニ $$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

5. AB ノ上ニ立ツ二ツノ三角形 ABC, ABD ノ頂點 C, D ヲ結ビ付ケ, 其ノ中點ヲ E トスレバ三角形 ABE ハ ABC, ABD ノ和ノ半分, 若シクハ差ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ. [37. 商船.]



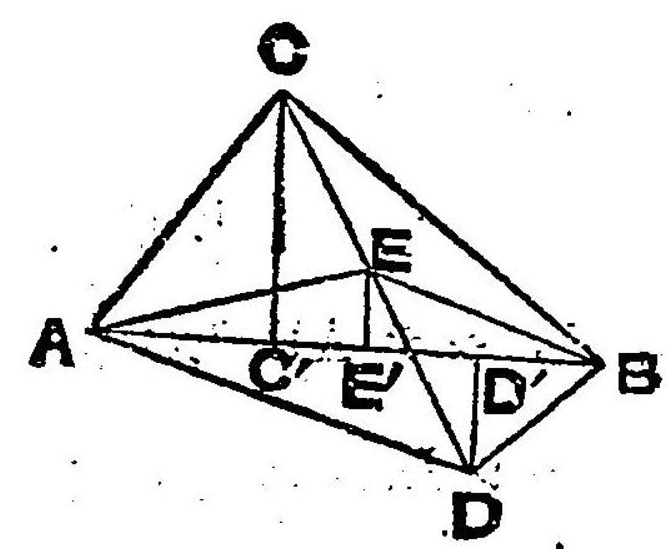
證 AB ニ垂線 CC′, EE′, DD′ ヲ引ク.




而シテ △ABC, △ABD ガ AB ニ關シテ同ジ側ニアルカ或ハ異ナル側ニアルカニ從ヒテ

$$2EE'=CC'\pm DD' \qquad \text{[A. 80 題]}$$

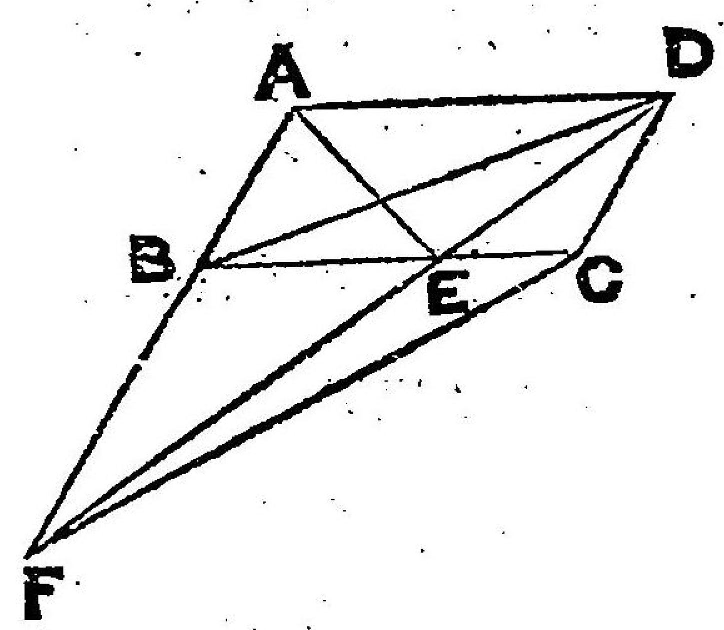
ナルコトニ注意スレバ




$$2\triangle ABE=EE'.AB$$
$$=\tfrac{1}{2}(CC'\pm DD').AB$$
$$=\tfrac{1}{2}CC'.AB\pm\tfrac{1}{2}DD'.AB$$
$$=\triangle ABC\pm\triangle ABD,$$

卽チ $$\triangle ABE=\tfrac{1}{2}(\triangle ABC\pm\triangle ABD).$$

6. 平行四邊形 ABCD ノ一ツノ角頂 D ヲ過リ直線ヲ引キ邊 BC ト點 E ニ於テ, 又邊 AB ノ延線ト點 F ニ於テ交ラシムレバ三角形 ABE ト三角形 CEF トハ等積ナ



ルコトヲ證明セヨ. [42. 名.高.工.]

證 AD ∥ BC, ABF ∥ CD

ナルニヨ $\triangle ABE=\triangle DBE=\triangle DBC-\triangle DEC$

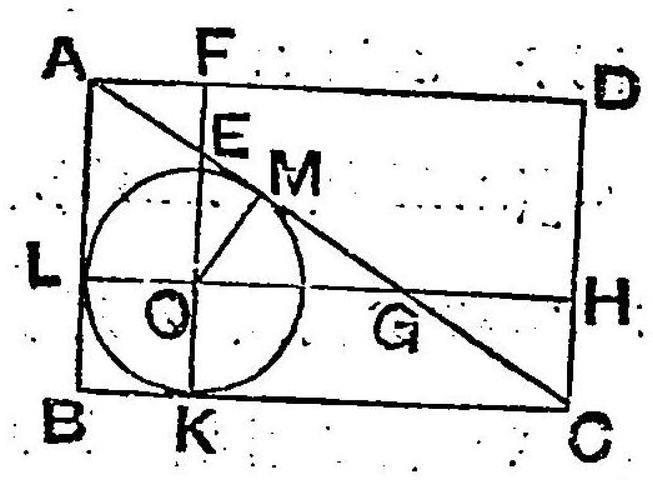
$=\triangle DFC-\triangle DEC=\triangle CEF.$

7. 矩形 ABCD ノ半分ナル三角形 ABC ニ內切セル圓ノ中心ヲ O トシ, O ヨリ AB, BC ニ平行シテ二ツノ直線ヲ引キ AB ノ平行線ガ AC, AD ニ交ル點ヲソレゾレ E, F トシ, BC ノ平行線ガ AC, CD ニ交ル點ヲソレゾレ G, H トセバ

$\triangle OEG=\triangle AEF+\triangle CGH$

ナルコトヲ證セヨ. [41. 商船.]

證 HGO, FEO ヲ引キ延バシテ AB, BC トソレゾレ L, K ニ於テ交ラシメ, 又 AC ニ垂線 OM ヲ引ケバ K, L, M ニ於ケル角ハ皆直角ナルニヨリ K, L, M ハ三角形 ABC ノ內切圓ノ切點ナリ.




故ニ OL, OM, OK ハ圓 O ノ半徑ニシテ皆相等シク ALOF, OKCH ハ矩形ナルヲ以テ

$AF[=LO]=OM[=OK]=CH.$

依リテ直角三角形 AEF ト OEM, CGH ト OGM



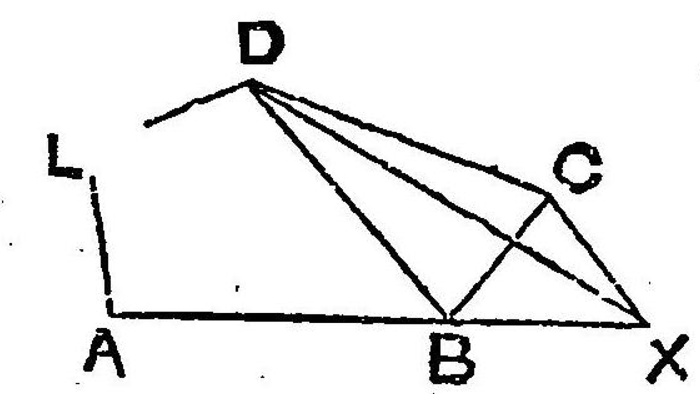
トハ各一邊ト他ノ一角相等シキニヨ全等ナリ.

故ニ $\triangle AEF+\triangle CGH=\triangle OEM+\triangle OGM$

$=\triangle OEG.$

8. 與ヘラレタル多角形ト同一ノ面積ヲ有スル三角形ヲ作レ. [38, 39. 農.大.實.]

解 與ヘラレタル $n$ 邊ノ多角形ヲ ABCD....L トス.




BD ニ平行ニ CX ヲ引キ, AB ノ延線ト X ニ於テ交ラシメ, DX ヲ結ビ付クルトキハ

$\triangle DCB=\triangle DXB.$

故ニ $n$ 邊ノ多角形 ABCD.........L

$=(n-1)$ 邊ノ多角形 AXD.........L.

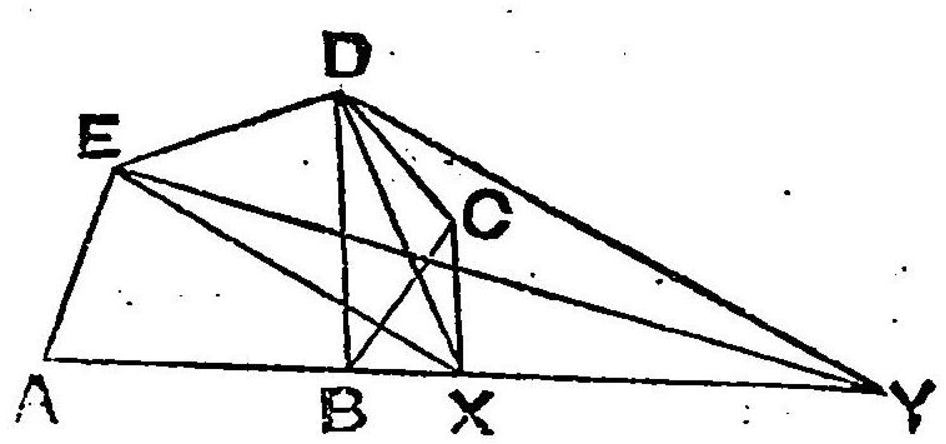
同樣ノコトヲ $(n-3)$ 度續クレバ所要ノ三角形 AYL ヲ得ベシ.

例ヘバ五角形 ABCDE ヲ等積ナル三角形ニ變ズルニハ上ニ言ヘル如ク

四邊形 AXDE＝五角形 ABCDE

ナル如キ直線 CX ヲ引キタル後ハ EX ヲ結ビ付ケヨ.

而シテ DY∥EX ヲ引キ AB ノ延線トノ交點ヲ Y




トスレバ　△XEY＝△XED,

故ニ　△AYE＝四邊形 AXDE

＝五邊形 ABCDE.

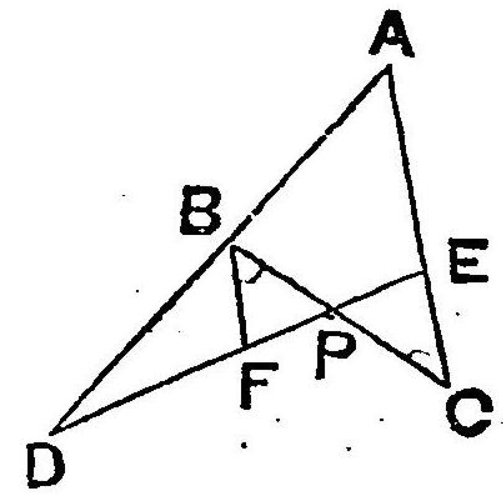
**注意** 上ノ例ニ於テ X, Y, 等ノ如ク變ズル角頂ハ AB ノ延線上ニアル如キ作圖法ヲ行ヒタレドモ此ハ AB ノ延線上ニ X ヲ BA ノ延線上ニ Y ヲ置ク如クナスモ差支ナキハ勿論ノコトニシテ,又 AB ヲ底ト見做スモ他ノ任意ノ邊ヲ底ト見做スモ作圖ハ全ク同様ナルコトニ注意スベシ.

**9.** 二ツノ相交ル定直線及ビ一ツノ定點アリ此ノ點ヲ過ル直線ヲ引キ定直線ト交ラシメテ得ル所ノ三角形ノ中, 此ノ點ニテ二等分セラルル直線ノナス三角形ガ面積最小ナルコトヲ證セヨ.

[34. 東. 高. 工.]

二ツノ相交ル定直線ヲ AB, AC トシ, 一ツノ定點ヲ P トス. 今 P ヲ過リ二直線ノ間ニ直線






BC ヲ引キ BP＝PC ナラシメ, 又 P ヲ過リ AB, AC ノ間ニ夾マルル任意ノ直線ヲ DE トスレバ恒ニ

△ABC＜△ADE

ナルベシ.

**證** 例ヘバ D ハ AB ノ延線上ニ, E ハ AC ノ上ニアリトシ, B ヲ過リ AC ニ平行ナル直線 BF ヲ BC ニ關シテ CA ト反對ノ方向ニ引ケ.

然ルトキハ　$\widehat{CBF}=\widehat{ACB}<\widehat{CBD}$.

故ニ BF ハ $\widehat{CBD}$ 内ヲ過リ, PD ト交ル, 其ノ交點ヲ F トセヨ.

又假設ニ依リテ　CP＝BP

ナルユエ　△CPE≡△BPF.

此ノ双方ニ四邊形 ABPE ヲ加フレバ

△ABC＝四邊形 ABFE.

然ルニ　四邊形 ABFE＜四邊形 ABFE＋△BDF,

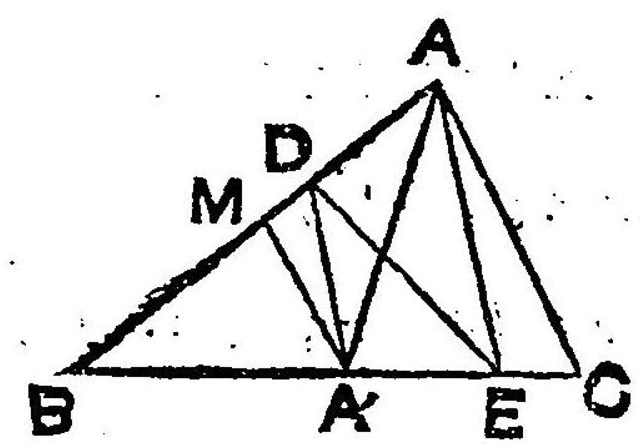
即チ　△ADE.

故ニ　△ABC＜△ADE.

**10.** 三角形ノ一邊上ノ與ヘラレタル點ヲ過リテ此ノ三角形ヲ二等分スル直線ヲ引ケ.

[32., 33. 商船., 37. 農.大.實., 38. 一高., 39. 仙.醫.專.]

三角形 ABC ノ一邊 AB 上ニアル一點 D ヲ過ル直線ニテ本形ヲ二等分セントス.




解 今 AB ノ中點ヲ M トシ; A, B ノ中, M ニ對シテ D ト同ジ側ニアルモノヲ A トス. BC ノ中點ヲ A′ トシ; AA′, DA′, MA′ ヲ結ビ付ケ, AE ∥ DA′ ヲ引クトキハ

$$A\hat{D}A' + D\hat{A}E = 2\hat{R}.$$

又 M, A′ ハソレゾレ AB, BC ノ中點ナルユヱ

$$MA' \parallel AC$$

ニシテ $A\hat{M}A' + M\hat{A}C = 2\hat{R}$,

然ルニ D ハ A ト M トノ間ニアルユヱ

$$A\hat{D}A' > A\hat{M}A',$$

故ニ $D\hat{A}E < M\hat{A}C$,

依リテ AE ハ角 BAC 内ヲ過リ, 邊 BC ト交ル, 其ノ交點ヲ E トスレバ

$$\triangle EDA' = \triangle ADA',$$

此ノ双方ニ △BDA′ ヲ加フレバ



$$\triangle EDB = \triangle ABA' = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

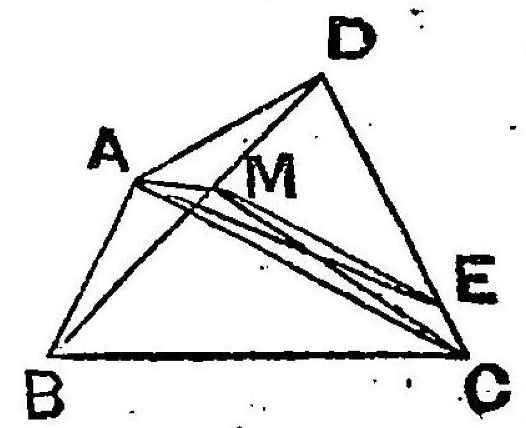
故ニ DE ハ本形ヲ二等分ス.

即チ所要ノ直線ハ DE ナリ.

吟味 D ガ M ト合スルトキハ E ハ C ト合スベシ, 即チ此ノ場合ニハ MC ハ所要ノ直線ナルコト勿論ナリ. 又 D ガ他ノ邊上ニアルトモ上ニ示セル方法ハ全ク同様ニシテ所要ノ直線ヲ引キ得ベキコト明カナリ.

11. 四邊形ノ一角頂ヨリ一直線ヲ引キテ本形ヲ二等分セヨ. [36. 陸.士.]

四邊形ヲ ABCD トシ, 一ツノ頂點 A ヨリ引ケル一直線ニテ本形ヲ二等分セントス.




解 今 AC ヲ結ビ付ケ, 又 BD ノ中點ヲ M トシ, 且 M ハ AC ニ對シテ, 例ヘバ D ト同ジ側ニアリトセン. 然ルトキハ M ハ △ADC 内ノ一點ナルユヱ M ヲ過リ邊 AC ニ平行ニ引ケル直線 ME ト邊 CD トハ必ズ相交ル. 其ノ交點ヲ E トシ, AE ヲ結ビ付クレバ, コレ所要ノ直線ナリ. 如何トナレバ

$$\text{四邊形 } AECB = \triangle ABC + \triangle EAC$$

$=\triangle ABC+\triangle MAC=$四邊形 ABCM.

然ルニ　四邊形 ABCM $=\triangle ABM+\triangle CBM$

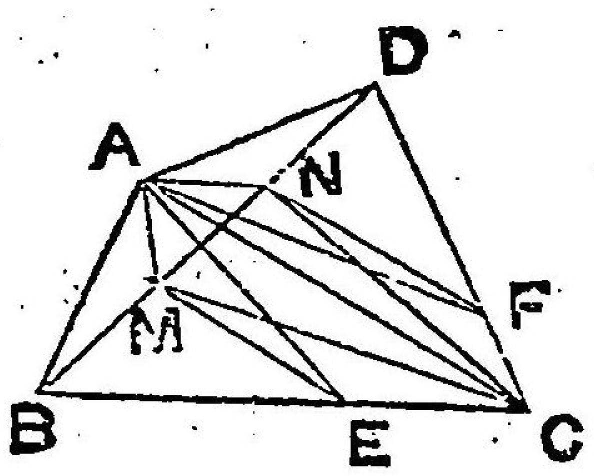
$=\frac{1}{2}\triangle ABD+\frac{1}{2}\triangle CBD=\frac{1}{2}$(四邊形 ABCD)

ナレバナリ. 而シテ M ガ AC ニ對シテ B ト同ジ側ニアルトキモ亦同樣ニシテ點 E ハ BC 上ニアルベシ. 又特ニ M ガ AC 上ニアル場合ニハ所要ノ直線ハ AC ナルコト明カナリ.

12. 一ノ角頂ヨリ引ケル二ツノ直線ヲ以テ四邊形ヲ三等分セヨ.　[41. 商船.]

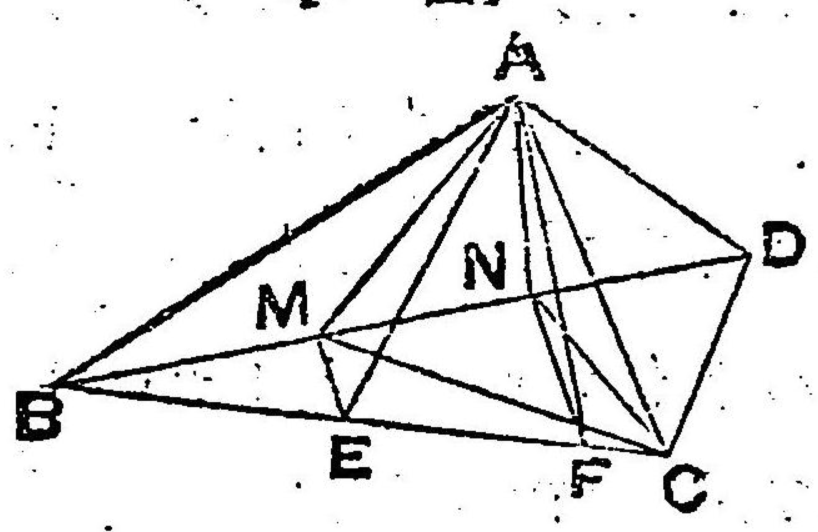
四邊形ヲ ABCD トシ, 角頂 A ヨリ引ケル二ツノ直線ヲ以テ本形ヲ三等分セントス.

[1 圖]



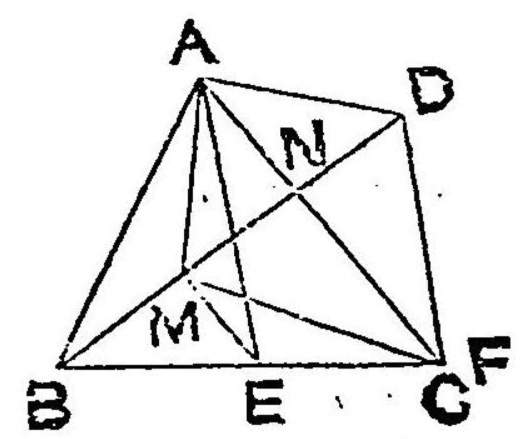

**作圖**　對角線 BD ヲ M, N ニ於テ三等分シ; M, N ヲ過リテ AC ニ平行スル二ツノ直線ヲ引キ, BC 或ハ CD トノ交點ヲ E, F トスレバ AE, AF ヲ結ビ付クル直線ハ所要ノモノナルベシ.

[2 圖]






[3 圖]




**證**　M ト N トガ AC ニ關シテ互ニ反對ノ側ニアルトキハ E ハ BC ノ上ニ, F ハ CD ノ上ニアリ [1 圖].

M ト N トガ AC ニ關シテ互ニ同ジ側ニアルトキ, 例ヘバ B ト同ジ側ニアルトキハ E, F ハ BC 上ニアリ [2 圖].

M ト N トノ中, 一ツ, 例ヘバ N ガ AC 上ニアルトキハ F ハ C ト一致シ, E ハ BC 上ニアリ [3 圖].

何レニモセヨ, 作圖ニ依リテ $BM=\frac{1}{3}BD$ ナルユヱ

$\triangle ABM=\frac{1}{3}\triangle ABD,$

及ビ　$\triangle CBM=\frac{1}{3}\triangle CBD.$

邊々相加ヘテ

四邊形 ABCM $=\frac{1}{3}$(四邊形 ABCD).

然ルニ　四邊形 ABCM $=$ 四邊形 ABEM $+\triangle CEM$

$=$ 四邊形 ABEM $+\triangle AEM$

$[\because ME \parallel AC]$

$=\triangle ABE.$

故ニ　$\triangle ABE=\frac{1}{3}$(四邊形 ABCD).

同樣ニシテ 1 圖, 及ビ 3 圖ニ於テハ

$$\triangle ADF=\frac{1}{3}(\text{四邊形}\ ABCD).$$

2圖ニ於テハ

$$\text{四邊形}\ ADCF=\frac{1}{3}(\text{四邊形}\ ABCD).$$

從ヒテ 1 圖ニ於テハ

$$\text{四邊形}\ AECF=\frac{1}{3}(\text{四邊形}\ ABCD).$$

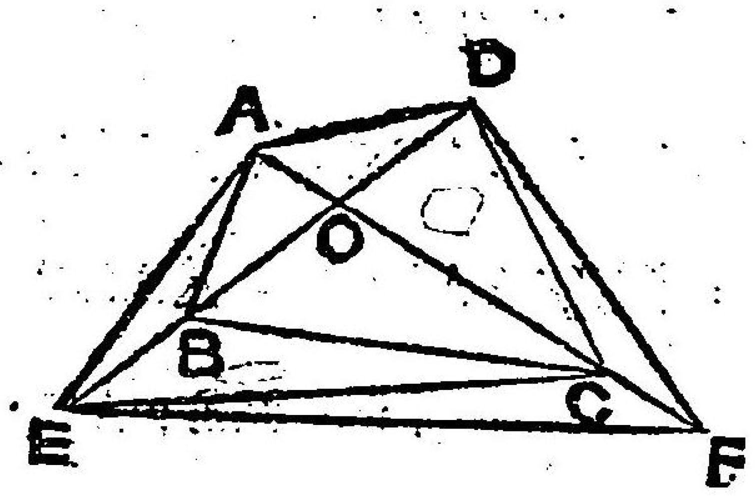
2 圖及ビ 3 圖ニ於テハ

$$\triangle AEF=\frac{1}{3}(\text{四邊形}\ ABCD).$$

即チ何レノ場合ニ於テモ AE, AF ハ本形ヲ三等分ス.

**13.** 四邊形ノ面積ハ其ノ對角線ヲ二邊トシ, 對角線ノ夾ム角ヲ夾角トスル三角形ノ面積ニ等シキコトヲ證セヨ. [38. 仙. 醫. 專.]

**證 I.** 四邊形ヲ ABCD, 其ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トス. サテ AC, DB ノ延線上ニソレゾレ




$CF=AO$, $BE=DO$ ヲ取レ.

然ルトキハ $\triangle OEF$ ハ四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ヲ二邊トシ, 其ノ夾角ヲ夾角トスル三角形ナ



リ. 而シテ AE, EC, FD ヲ結ビ付クルトキハ

$$\triangle DAB=\triangle OAE \quad [\because DB=OE]$$
$$=\triangle CEF, \quad [\because AO=CF]$$
$$\triangle DOC=\triangle CBE. \quad [\because DO=BE]$$

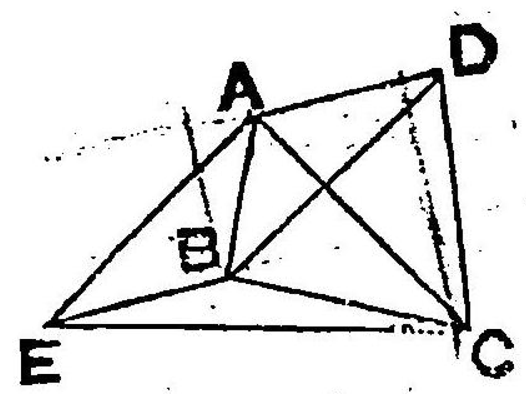
故ニ $\triangle DAB+\triangle DOC=\triangle CEF+\triangle CBE$,

此ノ双方ニ $\triangle BOC$ ヲ加フレバ

$$\text{四邊形}\ ABCD=\triangle OEF$$

ヲ得.

**證 II.** 四邊形 ABCD ノ對角線ヲ AC, BD トシ, A ヨリ DB ニ平行ニシテ且 DB ニ等シキ直線 AE ヲ引キ EC ヲ結ビ付クレバ $\triangle AEC$ ノ二邊ハ AC, DB ニ等シク且其ノ夾角ト等シキ角ヲ夾ム.




而シテ EB ヲ結ビ付クレバ ADBE ハ平行四邊形ニシテ $AD=EB$, $\triangle AEB=\triangle ADB$,

故ニ E ガ BC ニ對シテ A ト同ジ側ニアルカ或ハ反對ノ側ニアルカニ從ヒテ

$$\triangle AEC=\triangle ABC+\triangle ABE\mp\triangle BEC$$
$$=\triangle ABC+\triangle ADB\mp\triangle BEC,$$

又 $\triangle ADC$, $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ ニ於テ C ヨリ AD

ヘノ距離ハ B ヨリ AD ヘノ距離ト C ヨリ EB ヘノ距離トノ差或ハ和ニ等シ.

依リテ　$\triangle ADC=\triangle ADB\mp\triangle BEC$,

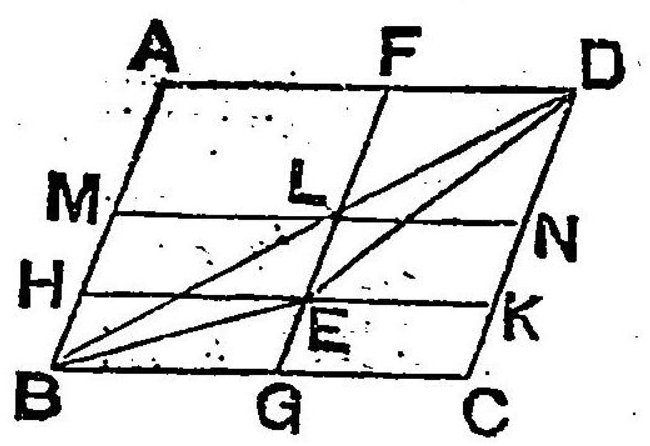
故ニ　$\triangle AEC=\triangle ABC+\triangle ADC$

$=$四邊形 ABCD.

**注意**　E ガ CB ノ上ニアルトキハ △BEC ハ零トナリテ此ノ場合ニモ亦眞ナリ.

**14.**　平行四邊形 ABCD ノ形内ニアル一點 E ヲ過リテ二邊ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ二ツノ平行四邊形 AE, EC ノ差ハ E ヲ頂點トシ對角線 BD ヲ底トセル三角形 BDE ノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ.　[35. 商船.]

**證**　E ヲ過リテ AB, AD ニ平行ナル直線ヲ FEG, HEK トス.




又對角線 BD ト FEG トノ交點 L ヲ過リ, AD ニ平行ナル直線 MLN ヲ引ケ.

サテ E ヲ △BCD ノ内ニアリトスレバ

▱AE－▱EC

＝(▱AL＋▱ME)－(▱LC－▱LK)



＝▱ME＋▱LK

[如何トナレバ ▱AL, ▱LC ハ對角線 BD ニ沿フ平行四邊形ノ餘形ナレバナリ].

$=2\triangle LEB+2\triangle LED=2\triangle BDE.$

又 E ガ △ABD ノ内ニアルトキハ前ト同樣ニシテ　▱EC－▱AE＝2△BDE

ナルコトヲ證シ得ベシ.

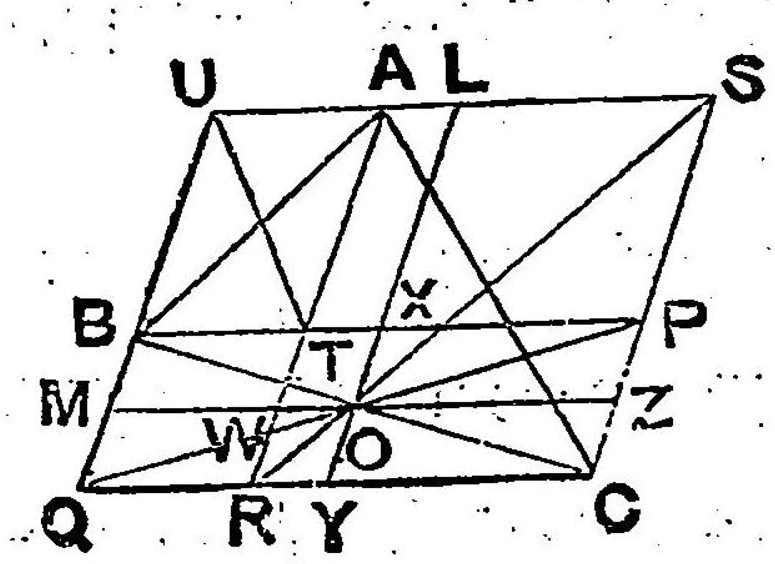
故ニ　▱AE∼▱EC＝2△BDE.

但 E ガ BD ノ上ニアルトキハ △BDE ハ消失シテ　▱AE＝▱EC

トナルベシ.

**15.**　三角形ノ各邊ヲ對角線トシテ與ヘラレタル二直線ニ平行ナル邊ヲ有スル三ツノ平行四邊形ヲ作ルトキハ是等ノ四邊形ノ他ノ對角線ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ. [42. 陸士.]

三角形ヲ ABC トシ, 所題ノ三ツノ平行四邊形ヲ BPCQ, CRAS,




ATBU トスレバ PQ, RS, TU, 或ハ其ノ延線ハ一點ニ於テ相交ルベシ

證　PQ, RS ノ交點ヲ O トシ, O ヲ過リテ與ヘラレタル直線ニ平行スル二直線 XOY, ZOW ヲ引キ, BTP ト X ニ於テ, SPC ト Z ニ於テ交ラシメ, XY ト UAS トノ交點ヲ L, ZW ト UBQ トノ交點ヲ M トセヨ.

然ルトキハ O ハ平行四邊形 BPCQ ノ對角線 DQ 上ニアルユエ　▱OB＝▱OC.

又 O ハ RS ノ上ニアルユエ

▱OC＝▱OA,

故ニ　▱OB＝▱OA,

或ハ　▱TM＝▱TL.

依リテ T ハ平行四邊形 OLUM ノ對角線 OU ノ上ニアリ, 即チ UT モ亦 O ヲ過ル.

**注意**　若シ三角形ノ邊ノ中, 與ヘラレタル直線ニ平行ナルモノアレバ所題ノ平行四邊形ノ一ツ或ハ二ツハ消失スベシ. 此ノ場合ニハ他ノ二ツ或ハ一ツノ對角線ハ三角形ノ一邊上ニ相交ルカ, 或ハ角頂ヲ過ル.

**16.**　三角形 ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線ガ邊 AB, AC ト交ル點ヲソレゾレ D, E トシ BE, DC ノ交點ヲ O トスルトキハ三角形 AOE, AOD ハ等積ナルコトヲ證セヨ.　[39. 陸.士.]



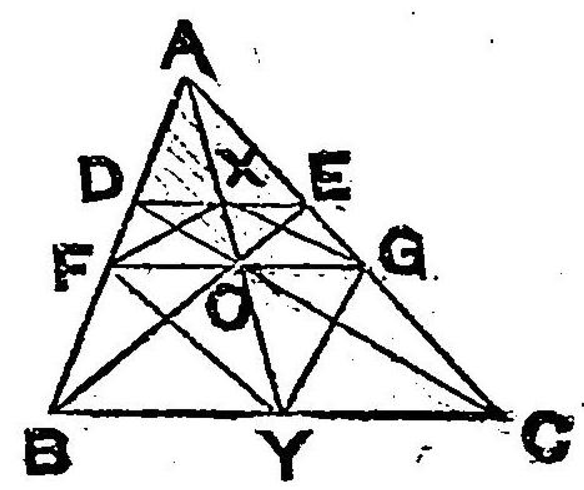
證　AB, AC ノ間ニ BC ニ平行ナル直線 FOG ヲ引キ; XF, XG, YF, YG ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　DE ∥ BC

ナルユエ　△DBC＝△EBC.

共通ナル △OBC ヲ減ズレバ

△DOB＝△EOC,




然ルニ　△DOB

＝△DFO＋△BFO

＝△XFO＋△YFO

[∵ DE ∥ FOG ∥ BC]

＝△XFY.

同様ニ　△EOC＝△XGY.

故ニ　△XFY＝△XGY.

故ニ　FO＝GO,　[5 題注意]

依リテ　△AOF＝△AOG,

及ビ　△FDO＝△GEO.

故ニ　△AOF－△FOD＝△AOG－△GEO,

即チ　△AOD＝△AOE.

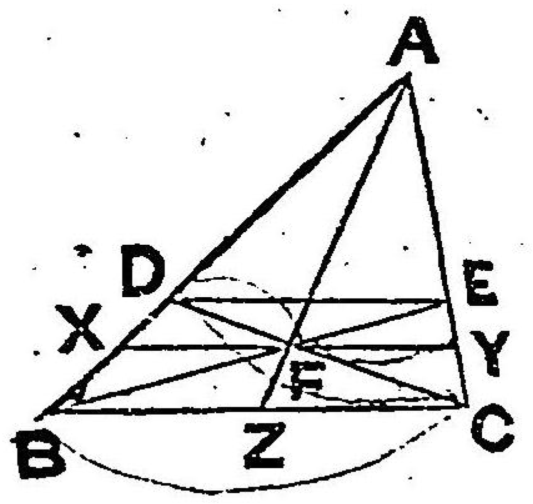
**17.**　三角形 ABC ノ底 BC ニ平行ニ直線ヲ引キ二邊 AB, AC ヲソレゾレ D, E ニ於テ截ラ

シムレバ直線 BE, CD ノ交點 F ト頂點 A トヲ結ビ付クル直線ノ延線ハ底 BC ヲ二等分スルコトヲ證セヨ。　[40. 東.高.工.]

證　今 AB, AC ノ間ニ F ヲ過リテ BC ニ平行ナル直線 XFY ヲ引クトキハ 16 題ノ證ニ依リテ

$$XF=FY.$$

然ルニ DE ハ AB, AC ノ間ニ BC ニ平行ニ引ケル任意ノ直線ナルユエ如何程ニテモ BC ニ接近セシメテ之ヲ引クコトヲ得ベシ.




然ルトキハ DE ト BC トノ間ニアル直線 XY モ亦如何程ニテモ BC ニ接近スベシ.

而シテ F ハ恒ニ XY ノ中點ナリ.

故ニ DE ノ極限ノ位置トシテ之ヲ BC ニ一致セシムレバ XY モ亦 BC ニ一致シ F ハ BC ノ中點トナル.

依リテ AF ハ BC ヲ二等分スベシ.

別證　前ノ圖ニ於テ AF ノ延線ト BC トノ交點ヲ Z トスレバ相似三角形ニ依リテ



$$XF : BC = DF : DC$$
$$= EY : EC$$
$$= FY : BC,$$

故ニ　$XF=FY.$

而シテ　$BZ : XF = AZ : AF$
$$= ZC : FY.$$

今 XF=FY ナルユエ

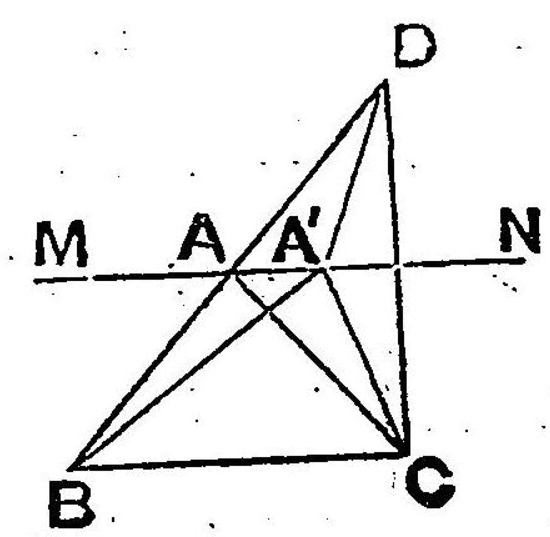
$$BZ=ZC.$$

依リテ題言ノ如シ.

118. 同底等積ノ三角形ノ周圍ハ二等邊ナルモノガ最小ナルコトヲ證セヨ.

[32. 陸.士., 40. 海.機.]

ABC ヲ AB=AC ナル二等邊三角形トシ, A′BC ヲ之ト等積ナル任意ノ三角形トスレバ




$$AB+AC<A'B+A'C$$

ナルベシ.

證　是等ノ三角形ハ等積ナルユエ其ノ高サ相等シク, 從ヒテ兩形ヲ BC ニ關シテ同ジ側ニ置クトキハ頂點 A, A′ ハ BC ニ平行ナル一直線 MN ノ上ニアラザルベ

カラズ.

今 MN ニ垂線 CND ヲ引キ BA ノ延線ト D ニ於テ交ラシメ, A'D ヲ結ビ付クルトキハ

$$N\hat{A}C=A\hat{C}B=A\hat{B}C=D\hat{A}N.$$

故ニ二ツノ直角三角形 ACN, ADN ハ全等ニシテ

$$CN=DN.$$

依リテ AN ハ CD ノ垂直二等分線ナリ.

故ニ $A'D=A'C.$

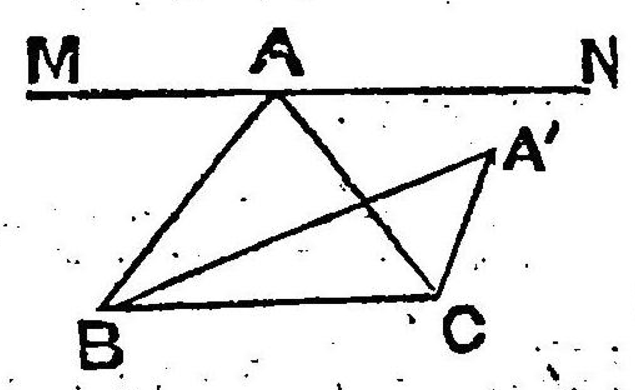
又 $AD=AC.$

然ルニ $BD<A'B+A'D,$

即チ $AB+AC<A'B+A'C.$

**19.** 與ヘラレタル底ヲ有シ與ヘラレタル周ノ三角形ノ中ニテ二等邊三角形ハ最大面積ヲ有スルコトヲ證セヨ. [38. 農.大.實., 40. 東.高.商.]

證 I. 與ヘラレタル底 BC ノ上ニ立チ, 與ヘラレタル周ヲ有ツ二等邊三角形ヲ ABC トシ, 之ト同ジ底及ビ相等シキ周ヲ有ツ任意ノ三角形ヲ A'BC トスレバ




$$\triangle ABC>\triangle A'BC$$



ナルベシ.

如何トナレバ先ヅ是等ノ三角形ヲ BC ニ關シテ同ジ側ニアラシメヨ.

然ルトキハ A' ハ BC ト A ヲ過リテ BC ニ平行ニ引ケル MN トノ間ニアラザルベカラズ, 若シ MN ノ上ニアリトスレバ 18 題ニ依リテ

$$A'B+A'C>AB+AC,$$

又若シ A' ガ MN ヲ超エタル位置ニアリトスレバ尙更 $A'B+A'C>AB+AC,$

從ヒテ △A'BC ノ周>△ABC ノ周

ナレバナリ.

即チ三角形 ABC ノ高サハ三角形 A'BC ノ高サヨリ大ナルコト明カナリ.

故ニ同ジ底ヲ有スル二ツノ三角形ノ面積ノ關係トシテ $\triangle ABC>\triangle A'BC.$

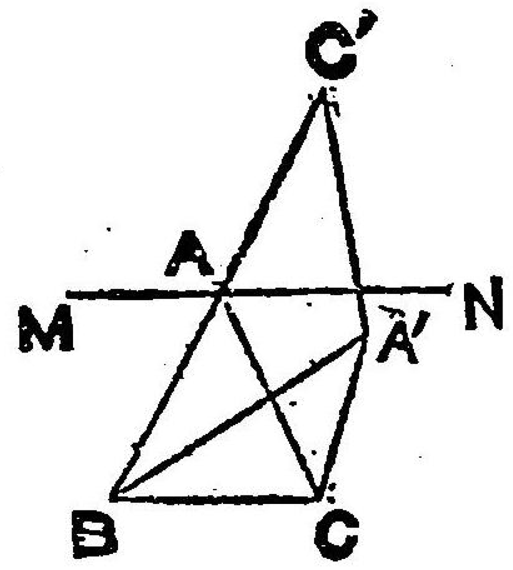
注意 一般ニ同ジ邊數ト相等シキ周圍トヲモツ多角形ニ就キテ正多角形ハ其ノ面積最大ナリ.

證 II. BA ノ延線上ニ $AC'=AC$ ヲ取リ A'C' ヲ結ビ付クレバ △A'BC' ニ於テ

$$BA'+A'C'>BC'.$$

又 $BC'=BA+AC=BA'+A'C$

故ニ　　$B'A+A'C'>BA'+A'C$,



即チ　　$A'C'>A'C$,

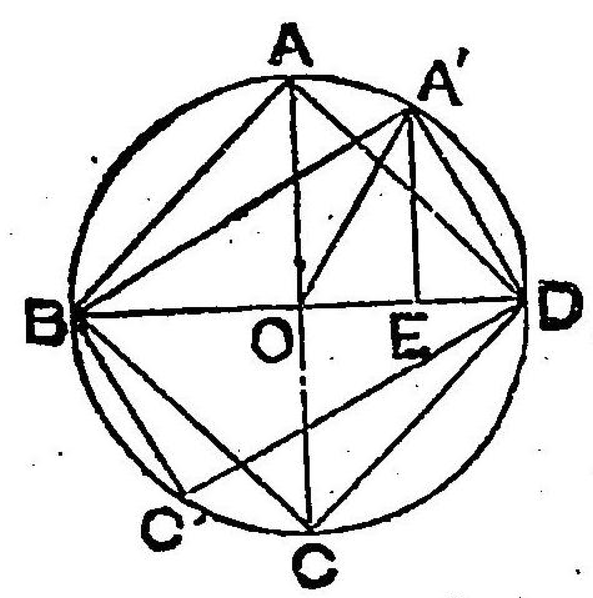
然ルニ MN ノ上ノ點ハ C, C′ ヨリ等距離ニアルコトヲ容易ニ知リ得ベシ.

故ニ A′ ハ MN ト BC トノ間ニアリ.

依リテ　　$\triangle ABC>\triangle A'BC$.

20. 與ヘラレタル圓ニ內接スル矩形ノ中, 其ノ面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ.　[41. 海機.]

解　圓ノ中心ヲ O トシ, 互ニ直角ニ交ル徑 AOC, BOD ヲ作ルトキハ ABCD ハ正方形ヲ成ス. 而シテ此ハ圓 O ニ內接シ得ベキ矩形ノ最大ナルモノナルベシ.



如何トナレバ圓ニ內接スル矩形ノ二ツノ相對スル角頂ヲ結ビ付クル直線ハ徑ナルユヱ, 圓 O ニ內接スル他ノ任意ノ矩形ヲ A′BC′D トシ, OA′ ヲ結ビ付ケ, 又 A′ ヨリ BD ニ垂線 A′E ヲ引ケ.



然ルトキハ　$\square ABCD=BD.AO=BD.A'O$,

$\square A'BC'D=BD.A'E$.

然ルニ AO ト一致セザル A′O ハ BD ニ斜線ニシテ, A′E ハ之ニ垂線ナリ.

故ニ　　$A'O>A'E$,

從ヒテ　　$\square ABCD>\square A'BC'D$.

解 II. 圓ニ內接スル矩形ノ對角線ハ何レモ徑ニ等シクシテ, 一定ナリ.

而シテ四邊形ノ面積ハ其ノ對角線ヲ二邊トシ, 其ノ夾角ヲ夾ム三角形ニ等シ [13 題].

然ルニ二邊ガ一定ナル三角形ハ其ノ夾角ガ直角ナルトキ最大ナリ.

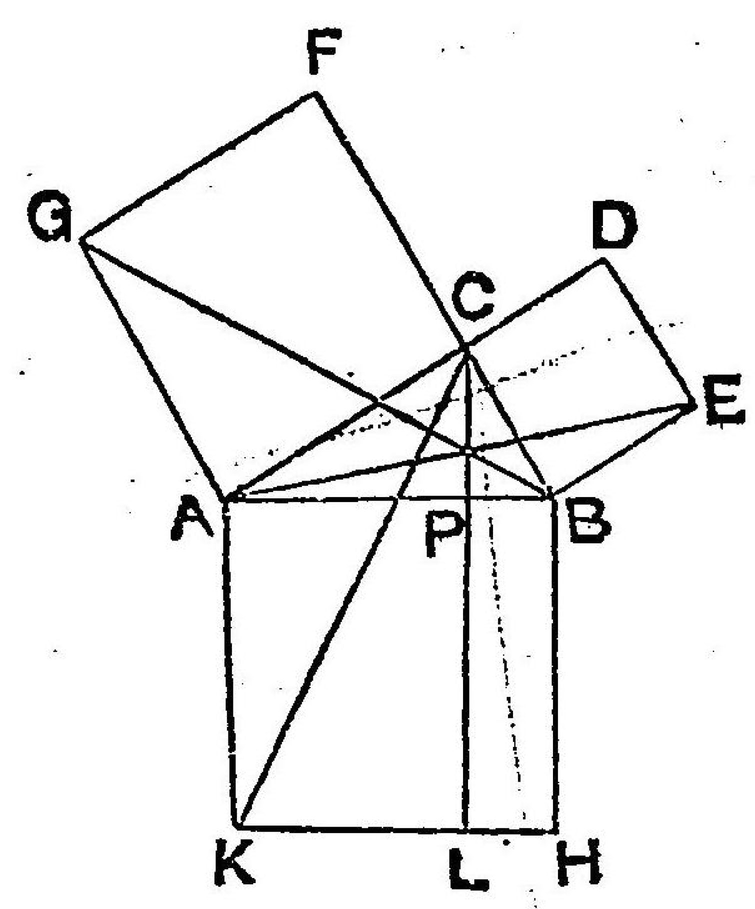
依リテ圓ニ內接スル矩形ハ互ニ直角ニ交ル徑ヲ對角線トスルトキ, 即チ正方形トナルトキ最大ナリ.

21. 直角三角形ノ斜邊上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ.

[38. 商船.]

ABC ヲ C ガ直角ナル直角三角形トスレバ斜邊 AB ノ上ニ畫ケル正方形 ABHK ハ他ノ二邊 AC, BC ノ上ニ畫ケル正方形 ACFG, BCDE

ノ和ニ等シカルベシ.




證　C ヨリ AB ニ垂線 CP ヲ下シ, 之ヲ引キ延バシテ KH ト H ニ於テ交ラシメ, 而シテ CK, BG ヲ結ビ付ケヨ.

サテ $A\hat{C}F$ ハ正方形ノ一角ナルユエ直角ニシテ, 又 $A\hat{C}B$ モ直角ナリ, 故ニ $A\hat{C}F$ ト $A\hat{C}B$ トノ和ハ 2 直角ニ等シク, 從ヒテ FC, CB ハ一直線ヲナス [**A. 1 題**].

同理ニ依リテ AC, CD モ亦一直線ヲナスベシ.

今二ツノ三角形 CAK, GAB ヲ比較スルニ AK ト AB トハ同ジ正方形 [AH] ノ邊ナルユエ相等シク, 同理ニ依リテ AC ト AG トモ亦相等シ. 而シテ $C\hat{A}K$ ハ正方形ノ一角 [BAK], 即チ直角ニ $C\hat{A}B$ ヲ加ヘタルモノニ等シク, $G\hat{A}B$ モ亦正方形ノ一角 [GAC], 即チ直角ニ $C\hat{A}B$ ヲ加ヘタルモノニ等シ, 故ニ $C\hat{A}K$ ト $G\hat{A}B$ トハ相等シ.

依リテ是等ノ三角形ハ二邊ト夾角トガソレゾレ



相等シキユエ全ク相等シ.

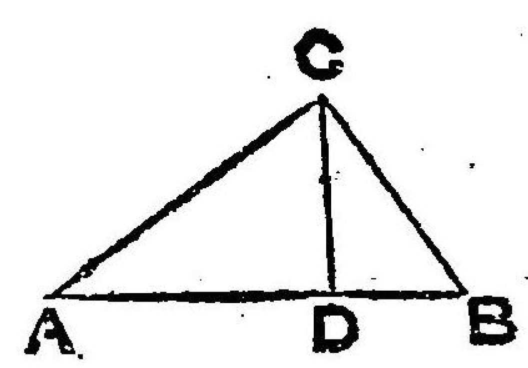
次ニ三角形 CAK ト矩形 AL トハ同ジ底 AK ノ上ニ立チ, 且二ツノ平行線 AK, CPL ノ間ニアルユエ三角形 CAK ハ矩形 AL ノ半分ニ等シク, 三角形 GAB ト正方形 AF トハ同ジ底 AG ノ上ニ立チ, 且二ツノ平行線 GA, FCB ノ間ニアルユエ三角形 GAB ハ正方形 AF ノ半分ニ等シ.

然ルニ前ニ云ヘルコトニ依リテ三角形 CAK, GAB ハ相等シ, 故ニ各ノ 2 倍ナル矩形 AL ト正方形 AF トモ亦相等シ.

同樣ニシテ矩形 BL ト正方形 BD トハ相等シキコトヲ證シ得ベシ.

依リテ矩形 AL ト BL トノ和, 即チ正方形 AH ハ正方形 AF ト BD トノ和ニ等シ.

別證　C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ下ストキハ二ツノ三角形 ACB, ADC ニ於テ $\hat{A}$ ハ共通ニシテ, $A\hat{C}B$, $A\hat{D}C$ ハ直角ニシテ相等シキユエ二ツノ三角形ハ相似ナリ.




故ニ　　AB : AC = AC : AD,

或ハ $AB.AD=AC.AC$,

即チ $AB.AD=\overline{AC}^2$.

同樣ニシテ二ツノ三角形 ACB, CDB モ亦相似ナルユヱ $AB.BD=\overline{BC}^2$.

之ヲ上ニ得タル式ト邊々相加フレバ

$$AB(AD+BD)=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2,$$

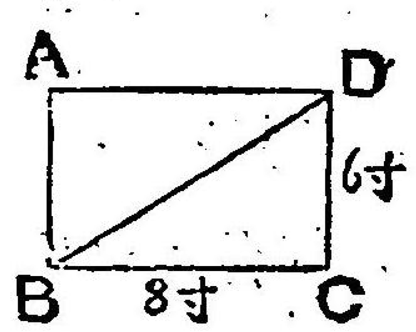
即チ $AB.AB=\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$.

故ニ題言ノ如シ.

注意 本定理ハ謂ハユルぴたごらすノ定理ニシテ其ノ證明法ニ就キテハ種々アリ. 而シテ本定理ノ逆モ亦眞ナリ.

22. 矩形ノ相隣レル二邊ノ長サガ 6 寸ト 8 寸トナルトキハ其ノ對角線ノ長サハ幾何ナルカ. [38. 音樂.]

解 矩形ニ於テハ各角ガ直角ニシテ其ノ二ツノ對角線ハ相等シ.




故ニ 矩形 ABCD ニ於テ $BC=8$寸, $CD=6$寸 トスレバ $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$

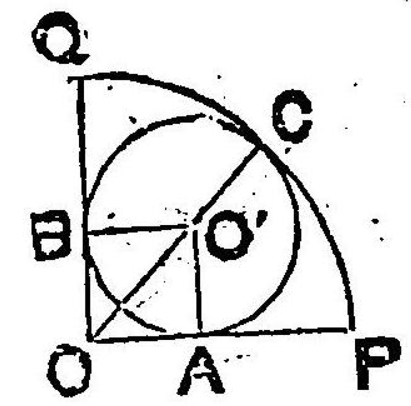
$$=8^2+6^2=100=10^2,$$

故ニ $BD=10$, 即チ 1尺ナリ.



23. 半徑 $r$ ナル四分圓ニ内接スベキ圓ノ半徑ヲ表ハス式ヲ作レ. [42. 商船.]

解 半徑 $r$ ナル四分圓ヲ POQ, 之ニ内切スル圓ノ中心ヲ O′, 圓 O′ ト OP, OQ, 弧 PQ トノ切點ヲ順次ニ A, B, C トスレバ OO′C ハ一直線上ニアリ; 又 O′A, O′B ハソレゾレ OP, OQ ニ垂直ニシテ O′A=O′B ナルユヱ O′BOA ハ正方形ナルコト明カナリ.




依リテ $O'A=O'B=O'C=x$ トスレバ

$$\sqrt{(\overline{O'A}^2+\overline{O'B}^2)}=OO'=OC-O'C,$$

或ハ $\sqrt{(x^2+x^2)}=r-x$, ∴ $x\sqrt{2}=r-x$,

即チ $(\sqrt{2}+1)x=r$,

故ニ $x=\dfrac{r}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)r.$

別解 C ヨリ OP ニ垂線 CC′ ヲ下セバ

$$OC:CC'=OO':O'A=OC-O'A:O'A,$$

故ニ $OC+CC':CC'=OC:O'A$,

然ルニ $CC'=OC'$,

故ニ $CC'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}OC$,

依リテ $\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)OC:\dfrac{1}{\sqrt{2}}OC=OC:O'A$,

即チ　$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}x=\frac{1}{\sqrt{2}}r,$$

故ニ　$$x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}r=(\sqrt{2}-1)r.$$

**24.** 直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ニ垂線ヲ引キ之ヲ二ツノ部分ニ分ツトキハ其ノ部分ノ一ツト斜邊トノ包ム矩形ハ此ノ部分ニ隣ル邊ノ上ノ正方形ニ等シキコトヲ證セヨ.

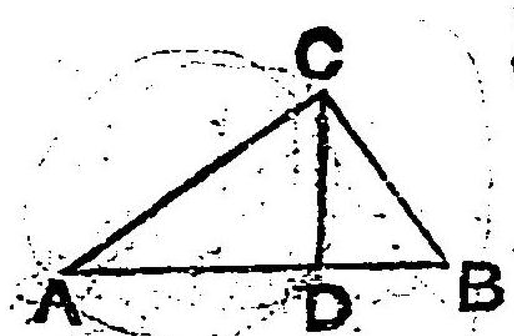
[36. 農.大.實., 39. 千.醫.專.]

**證**　21 題ノ證明中ニ述ベタル如ク矩形 AL ハ AP ト AK トノ包ム矩形, 即チ AP ト AB トノ包ム矩形ニ等シ.

然ルニ又矩形 AL ハ AC ノ上ノ正方形ニ等シ.

故ニ AP ト AB トノ包ム矩形ハ AC ノ上ノ正方形ニ等シ. 同樣ニ BP ト BA トノ包ム矩形ハ BC ノ上ノ正方形ニ等シキコトヲ證シ得ベシ.

**別證**　三角形 ABC ニ於テ C ヲ直角トシ, C ヨリ斜邊 AB ニ下セル垂線ノ趾ヲ D トスレバ




$$AD.AB=\overline{AC}^2,$$

及ビ　$$BD.BA=\overline{BC}^2$$

ナルベシ.



如何トナレバ二ツノ直角三角形 ADC, ACB ニ於テ $\hat{A}$ ハ共通ナルユエ是等ノ三角形ハ互ニ相似ナリ.

故ニ對應邊ノ關係トシテ

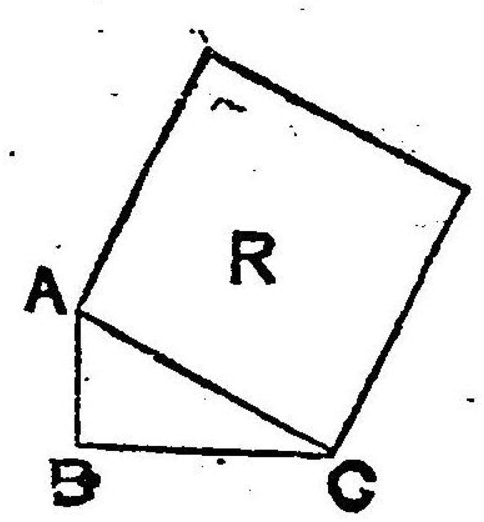
$$AD : AC = AC : AB,$$

或ハ　$$AD.AB=\overline{AC}^2.$$

同理ニ依リテ $BD.BA=\overline{BC}^2$ ナルコトヲ證シ得ベシ.

**25.** 二ツノ正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作レ.　[36. 農.大.實.]

二ツノ正方形ヲ P, Q トシ ; P, Q ノ和ニ等シキ正方形ヲ作ラントス.




**作圖**　B ニ於テ直角ニ交ル二直線 AB, BC ヲ引キ且 AB ヲ P ノ一邊ニ, BC ヲ Q ノ一邊ニ等シク取レ, 而シテ AC ヲ結ビ付ケ, AC ノ上ニ之ヲ一邊トシテ正方形 R ヲ畫ケバ R ハ所要ノ正方形ナリ.

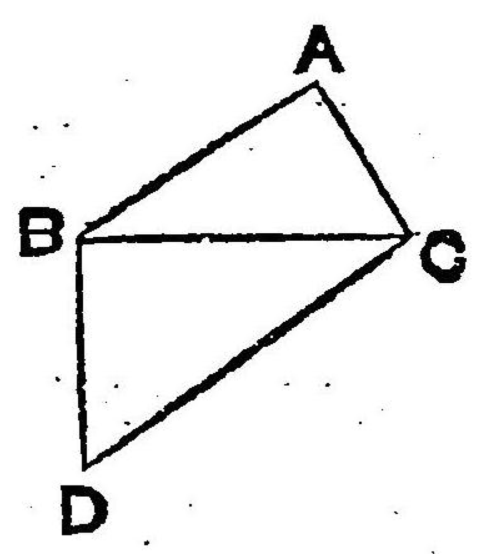
**證**　ABC ハ B ヲ直角トスル直角三角形ナルユエぴたごらすノ定理 [21 題] ニ依リテ

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2,$$

即チ $P+Q=R.$

26. 與ヘラレタル三ツノ正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作レ. [34. 東. 高. 商.]

與ヘラレタル三ツノ正方形ヲ X, Y, Z トシ, X+Y+Z ニ等シキ正方形 W ヲ作ラントス.



**作圖** 直角 BAC ヲ作リ, 其ノ二邊上ニ AB, AC ヲソレゾレ正方形 X, Y ノ一邊ニ等シク取リ, BC ヲ結ビ付ケヨ.

次ニ B ニ於テ BC ニ垂線 BD ヲ引キ, 之ヲ正方形 Z ノ一邊ニ等シクシ, CD ヲ結ビ付クレバ CD ヲ一邊トスル正方形ハ所要ノモノナリ.

證 $\hat{DBC}=\hat{R}$

ナルユヱ $\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2.$

尙 $\hat{BAC}=\hat{R}$

ナルユヱ $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2,$

故ニ $\overline{CD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BD}^2,$

即チ作圖ニ依リテ

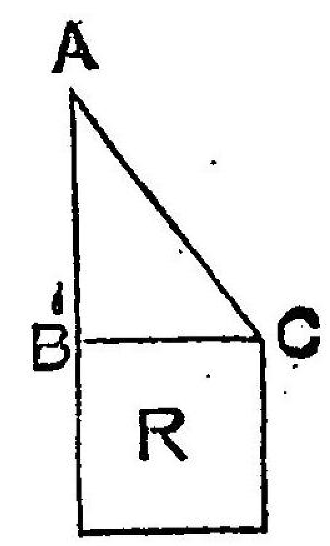
$$=X+Y+Z.$$



故ニ $\overline{CD}^2$ ハ所要ノ正方形 W ナリ.

27. 與ヘラレタル二ツノ正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作レ. [40. 盛. 高. 農.]

與ヘラレタル二ツノ正方形ヲ P, Q [P>Q トス] トシ, P−Q ニ等シキ正方形ヲ作ラントス.



**作圖** B ニ於テ互ニ直角ニ交ル二直線 AB, BC ヲ引キ, 且 AB ヲ Q ノ一邊ニ等シク取リ, A ヲ中心トシ P ノ一邊ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ, BC トノ交點ヲ C トシ, BC ヲ一邊トシテ正方形 R ヲ畫ケバ R ハ所要ノ正方形ナリ.

證 先ヅ P>Q ナルユヱ P ノ一邊ハ Q ノ一邊ヨリ大ナリ, 依リテ A ヲ中心トシ P ノ一邊ヲ半徑トスル圓ハ必ズ BC ト交ル, 即チ其ノ交點ノ一ツハ C ナリ.

而シテ ABC ハ B ヲ直角トスル直角三角形ナルユヱぴたごらすノ定理 [21 題] ニ依リテ

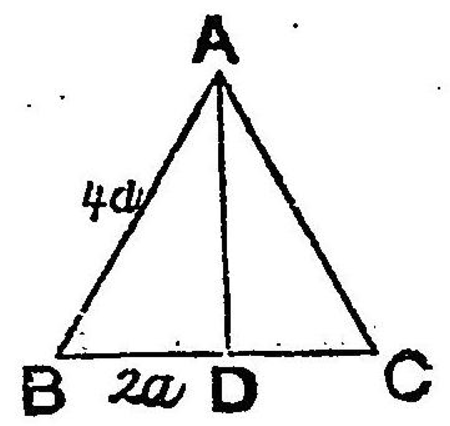
$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2,$$

即チ $Q+R=P,$

或ハ $R=P-Q.$

28. 正三角形ト正方形トアリ，其ノ周圍相等シキトキハ何レノ面積ガ大ナルカ. [37. 海. 機.]

解 I. 與ヘラレタル周圍ヲ $4\times 3a$, 即チ $12a$ トスレバ正方形ノ一邊ハ $3a$ ニシテ正三角形ノ一邊ハ $4a$ ナリ.




而シテ正三角形ノ高サハ

$\sqrt{(4a)^2-(2a)^2}=2a\sqrt{3}.$

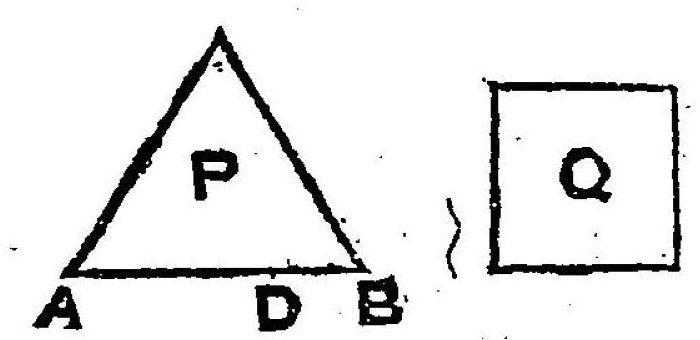
サテ　正方形ノ面積$=(3a)^2=9a^2$,

正三角形ノ面積$=2a.2a\sqrt{3}$

$$=4\sqrt{3}a^2=9a^2\times\frac{4\sqrt{3}}{9}=9a^2\times\sqrt{\frac{16}{27}},$$

即チ正三角形ノ面積ハ正方形ノ面積ニ 1 ヨリ小ナル數 $\sqrt{\frac{16}{27}}$ ヲ乘ジタルモノナルユエ正方形ノ面積ヨリ小ナリ. 即チ正方形ノ方ガ大ナリ.

解 II. 相等シキ周圍ヲ有ツ正三角形ト正方形トヲソレゾレ P,Q トシ; P,Q ノ大イサヲ比較セントス.




今 P ニ於テ任意ノ一邊 AB 上ニ任意ノ一點 D ヲ取ルトキハ, P ハ二邊 AD, DB ノ交角 D ガ 2 直角ナル如キ不等邊ノ四邊形ト見做スコトヲ得ベシ.

然ルトキハ 19 題注意ニ依リテ等邊ナル四邊形 Q ハ不等邊ナル四邊形 P ヨリ大ナリ.

即チ正方形ハ正三角形ヨリ大ナリ.



29. 一邊ノ長サ 1 尺ノ正方形ニ外接スル圓ト一邊ノ長サ 2 尺 4 寸ノ等邊三角形ニ內切スル圓トハ何レガ大ナルカ. [39. 海. 機.]

解　一邊ノ長サガ 1 尺ナル正方形ノ對角線ノ長サハ $\sqrt{(1^2+1^2)}$, 即チ $\sqrt{2}$ 尺ニシテ, 此ハ之ニ外接スル圓ノ徑ノ長サナリ.

次ニ一邊ノ長サガ 2 尺 4 寸ナル等邊三角形ノ角頂ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ長サハ $\sqrt{24^2-12^2}$, 即チ $12\sqrt{3}$ 尺ニシテ, 等邊三角形ニ於テハ內心ト重心トガ一致スルユエ, 其ノ內切圓ノ徑ハ $12\sqrt{3}\times\frac{2}{3}$, 即チ $8\sqrt{3}$ 尺ナリ.

而シテ二ツノ圓ノ大小ヲ見ルニハ相互ノ徑ヲ比較スレバ可ナリ.

然ルニ　$8\sqrt{3}>\sqrt{2}$

ナルコト明カナリ.

故ニ等邊三角形ノ內接圓ノ方ガ他ヨリ大ナリ.

30. 與ヘラレタル若干尺ノ綱アリ，之ヲ周邊

トシテ正方形ヲ作レバ其ノ面積324平方尺ナリ，然ラバ之ヲ周邊トシテ正六邊形ヲ作レバ其ノ面積幾何ナルカ． [39. 海.兵.]

**解** 所題ノ正方形ノ一邊ハ $\sqrt{324}=18$，即チ18尺．故ニ綱ノ長サハ $18\times4=72$，即チ72尺．依リテ正六邊形ノ一邊ノ長サハ

$$72\text{尺}\div6=12\text{尺},$$

又其ノ邊心距ハ

$$12\text{尺}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\text{尺}.$$

故ニ所要ノ面積ハ平方尺ヲ單位トシテ

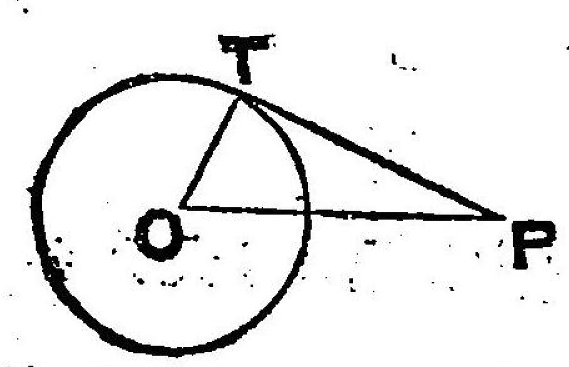
$$12\times6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times6=216\sqrt{3}$$

$$\fallingdotseq216\times1.7320508$$

$$\fallingdotseq374.123,$$ 即チ 374平方尺.123.

**31.** 或點ヨリ與ヘラレタル圓ニ引キタル切線ノ長サガ圓ノ徑ニ等シト云フ，此ノ點ノ軌跡ヲ求メヨ． [42. 東.高.師.]

**解** 圓ノ中心ヲO，一點Pヨリノ切線ヲPTトシ，PTヲ圓Oノ徑ニ等シトセヨ．




然ルトキハ $\hat{OTP}=\hat{R}$ ナルユエ $\overline{OP}^2=\overline{OT}^2+\overline{PT}^2$，



茲ニOT，PTハ定長ナレバOPモ亦定長ナラザルベカラズ．

依リテ點PハOヲ中心トシ，OPヲ半徑トスル圓周上ニアリ．

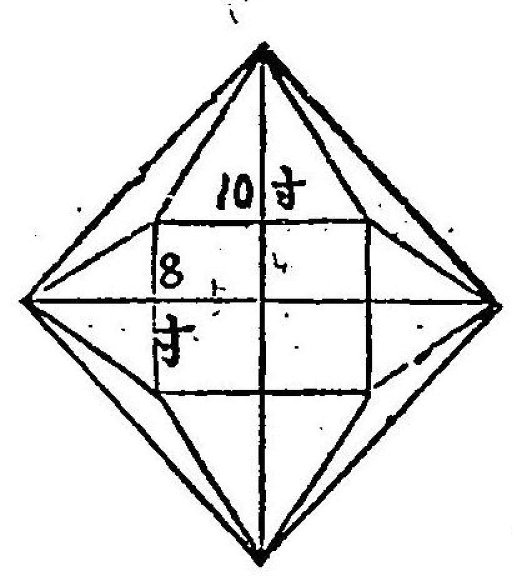
逆ニ此ノ圓周上ノ任意ノ點ハ所題ノ要件ニ適スルコトヲ容易ニ證シ得ベシ．

故ニ點Pノ軌跡ハOヲ中心トシ，OP［即チ與ヘラレタル圓ノ半徑及ビ徑ヲ二邊トスル直角三角形ノ斜邊］ヲ半徑トスル圓周ナリ．

**別解** 三角形OTPニ於テ二邊OT，TPハソレゾレ圓Oノ半徑，徑ニシテ $\hat{OTP}$ ハ直角ナルユエ，△OTPハ恒ニ一定ノ三角形ニ全等ナリ，依リテOPノ長サハ一定ナリ，云々．

**32.** 二邊ノ長サガ10寸及ビ8寸ナル矩形アリ，今此ノ矩形ノ四邊ヲ底トシテ形外ニ四ツノ等邊三角形ヲ作リ，是等ノ角頂ヲ順次ニ結ビ付ケヨ，然ルトキハ作リ得タル四邊形ノ面積ハ幾平方寸ナルカ． [42. 海.機.]

**解** 作リ得タル四邊形ノ各邊ハ相等シク，從ヒテ本形ハ菱形ニシテ，又其ノ對角線ハ互ニ直交スルコトヲ容易ニ證シ得ベシ．




而シテ矩形ノ8寸ノ邊ノ上ニ作リタル等邊三角形ノ角頂チ結ビ付クル直線ノ長サハ寸チ單位トシテ

$$10+2\sqrt{8^2-4^2}=10+8\sqrt{3}.$$

10 寸ノ邊ノ上ニ作リタル等邊三角形ノ角頂チ結ビ付クル直線ノ長サハ

$$8+2\sqrt{10^2-5^2}=8+10\sqrt{3}.$$

故ニ本形ノ面積ハ平方寸チ單位トシテ

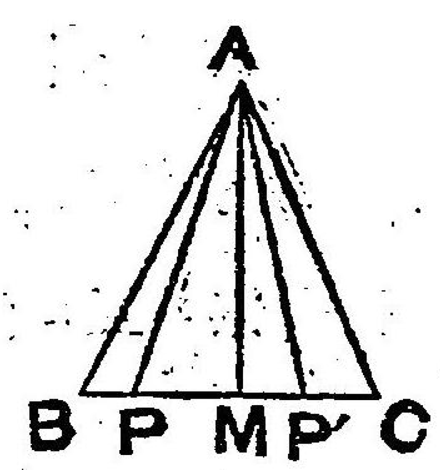
$$\frac{1}{2}(10+8\sqrt{3})(8+10\sqrt{3})=160+82\sqrt{3}$$

$$\fallingdotseq 160+82\times 1.73205=302.0281,$$

卽チ 302平方寸.03 [約] ナリ.

**33.** 二等邊三角形ABCノ底邊BC上ノ任意ノ點チ P トスルトキ, AB 上ノ正方形ト AP 上ノ正方形トノ差ハ CP ト BP トニテ包ム矩形ニ等シキコトチ證セヨ. [40. 山. 高. 商.]

**證** BC ノ中點チ M トシ, AM チ結ビ付クレバ假設ニ依リテ AB＝AC ナルユエ AM ハ BC ニ垂直ナリ




依リテ $\overline{AB}^2-\overline{AP}^2$

$$=(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)-(\overline{AM}^2+\overline{MP}^2)$$



$$=\overline{BM}^2-\overline{MP}^2$$

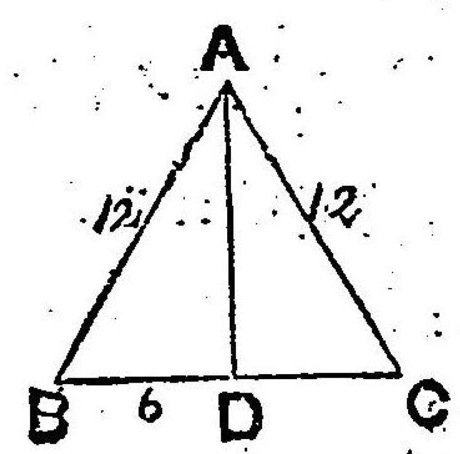
$$=(BM\pm MP)(BM\mp MP)=BP.CP.$$

**注意** 同樣ニシテ P ガ BC ノ延線上ニアルトキハ $\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=BP.CP.$

故ニ一般ニ $\overline{AB}^2\sim\overline{AP}^2=BP.CP.$

**34.** 各邊 12 間ナル正三角形ノ地面アリ, 其ノ面積幾坪ナルカ, 坪ノ小數第二位マデ求メヨ. [42. 女. 高. 師.]

**解** 各邊ガ 12 間ナル正三角形ノ地面チ ABC トシ, A ヨリ對邊ヘ引ケル垂線チ AD トセヨ.




然ルトキハ $BD=\frac{1}{2}BC=6,$

卽チ 6 間.

$$AD=\sqrt{(\overline{AB}^2-\overline{BD}^2)}$$

$$=\sqrt{(12^2-6^2)}$$

$$=6\sqrt{3},$$ 卽チ $6\sqrt{3}$ 間.

故ニ所要ノ面積ハ

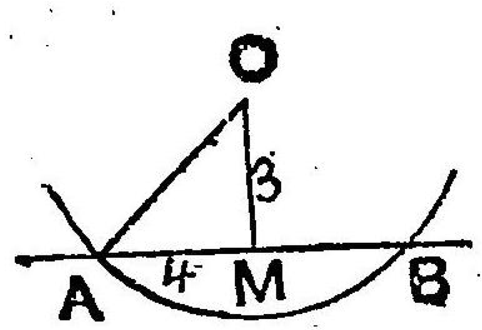
$$AD.BD=6\sqrt{3}\times 6\fallingdotseq 36\times 1.73205\fallingdotseq 62.35,$$

卽チ 62坪.35.

**35.** 一ツノ定點ト一ツノ定直線トアリ, 其ノ距離3寸ナリ, 今此ノ定點チ中心トシテ畫キタル圓ガ定直線ヨリ截リ取ル弦ノ長サチ8寸トナサ

シニハ圓ノ半徑ヲ如何ニスベキカ. [32. 海. 機.]

**解** 定點Oヲ中心トシ, 所要ノ圓ヲ畫キ得タリトシ, 定直線トノ交點ヲA, BトスレバAB=8寸ナリ.




今OヨリABニ垂線ヲ下シ, 其ノ趾ヲMトセン, 然ルトキハAMハABノ半分, 即チ4寸ニシテ, OMハ3寸ナリ.

即チ直角三角形OAMニ於テ二邊OM, AMヲ知リテ斜邊OAヲ求ムルコトニ歸ス.

故ニ $OA=\sqrt{(\overline{OM}^2+\overline{AM}^2)}$

$=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$, 即チ5寸.

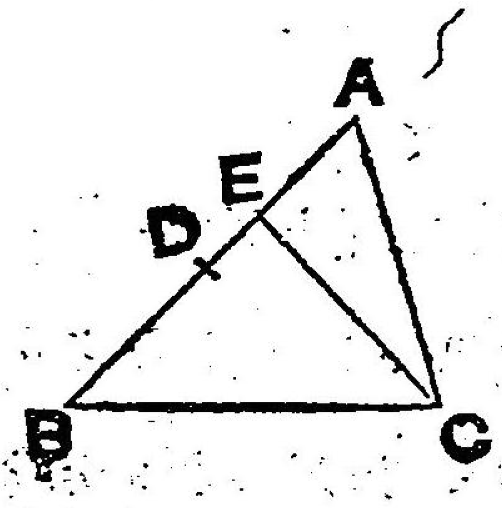
**36.** 三角形ABCニ於テ角Bガ直角ノ半分ナルトキ邊ABノ中點ヲDトシ, 角頂CヨリABニ下シタル垂線ノ趾ヲEトセバ

$$\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)$$

ナリ, 之ヲ證セヨ. [42. 東. 高. 師.]

**證** 三角形EBCニ於テ $B\hat{E}C=\hat{R}$,

$E\hat{B}C=\frac{1}{2}\hat{R}$.




故ニ $E\hat{C}B=\hat{R}-E\hat{B}C=\frac{1}{2}\hat{R}$

即チ $E\hat{B}C=E\hat{C}B$

ナルユエ CE=BE.



依リテ $\overline{AC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$

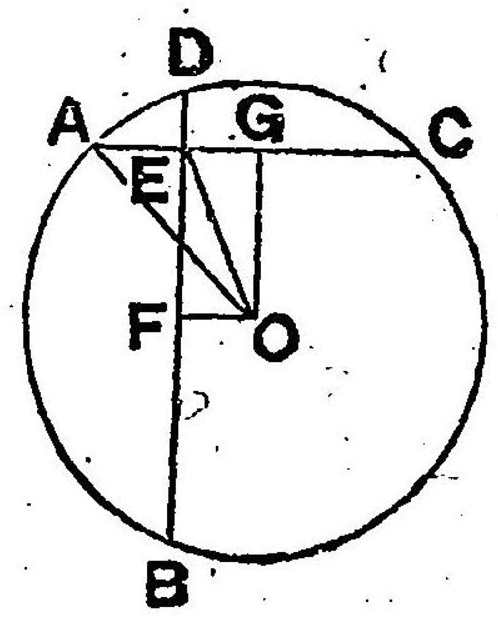
$=(AD\mp DE)^2+(AD\pm DE)^2$

$=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)$.

**37.** 圓內ニ於テ直角ニ相交ル二ツノ弦AC, BDノ上ニ作リタル正方形ノ和ハ半徑ノ上ニ作ラレタル正方形ノ8倍ヨリ中心Oト二ツノ弦ノ交點Eトノ距離OEノ上ニ作リタル正方形ノ4倍ヲ減ジタルモノニ等シキコトヲ證セヨ.

[30. 一高.]

**證** OヨリAC, BDニ垂線ヲ引キ其ノ趾ヲソレゾレG, Fトシ; 圓ノ半徑ヲrトス. OAヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハG, FハソレゾレAC, BDノ中點ナルコト明カナリ.




故ニ $\overline{AC}^2=4\overline{AG}^2=4(\overline{OA}^2-\overline{OG}^2)$,

即チ $\overline{AC}^2=4(r^2-\overline{OG}^2)$,

同樣ニ $\overline{BD}^2=4(r^2-\overline{OF}^2)$.

是ニ依リテ $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=8r^2-4(\overline{OG}^2+\overline{OF}^2)$

$=8r^2-4(\overline{EF}^2+\overline{OF}^2)=8r^2-4\overline{OE}^2$.

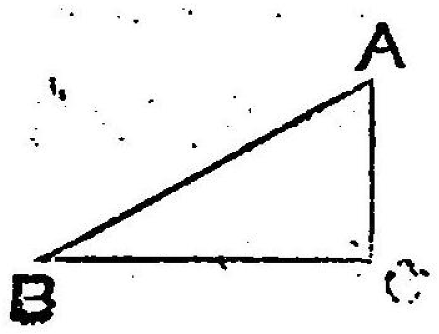
**38.** 直角三角形ノ直角ノ一邊上ノ正方形ハ

他ノ二邊ノ和ト差トノ包ム矩形ニ等シキコトヲ證セヨ。 [33. 陸. 士.]

三角形 ABC ニ於テ $\hat{C}=\hat{R}$ トスレバ

$$\overline{AC}^2=(AB+BC)(AB-BC)$$

ナルベシ。




證 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$, [21 題]

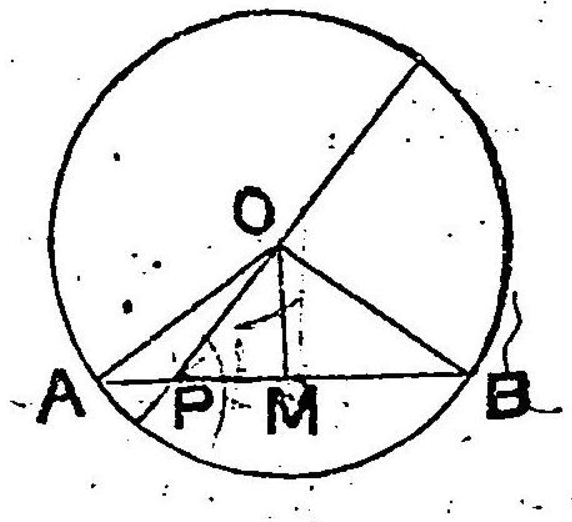
故ニ $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$

$$=(AB+BC)(AB-BC)$$

ナレバナリ。

**39.** 圓ノ弦 AB ガ P ニ於テ與ヘラレタル其ノ圓ノ徑ト半直角ヲ以テ交ルトキハ AP, PB 上ノ平方ノ和ハ弦ノ位置ニ係ハラズ恒ニ半徑ノ平方ノ2倍ニ等シキコトヲ證セヨ。 [38. 商船.]

證 中心 O ヨリ弦 AB ニ垂線ヲ下シ其ノ趾ヲ M トスレバ AM=MB.




又 $\hat{OPM}=\frac{1}{2}\hat{R}$, [假設]

$\hat{PMO}=\hat{R}$ [作圖]

ナルユヱ $\hat{POM}$ モ亦 $\frac{1}{2}\hat{R}$ ナルベク, 從ヒテ PM=OM.

依リテ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=(AM-PM)^2+(BM+PM)^2$

$$=(AM-OM)^2+(AM+OM)^2$$



$$=2(\overline{AM}^2+\overline{OM}^2)=2\overline{AO}^2.$$

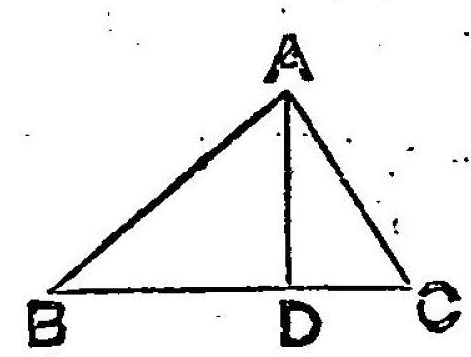
**40.** 三角形ニ於テ鋭角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ此ノ二邊ノ中ノ一邊ト其ノ上ニ於ケル他ノ一邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ2倍ヲ減ジタルモノニ等シキコトヲ證セヨ。 [30. 商船.]

三角形 ABC ニ於テ B ヲ鋭角トシ, A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ下ストキハ [即チ BD ハ BC 上ニ於ケル AB ノ正射影ナリ],

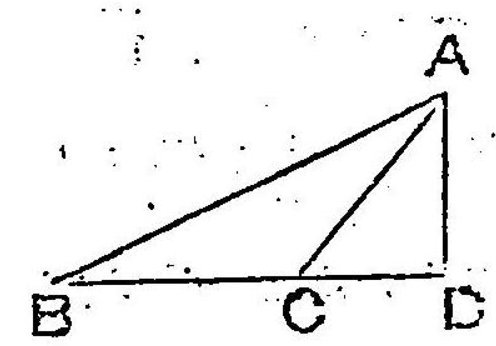
$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC.BD$$

ナルベシ。

[1 圖]

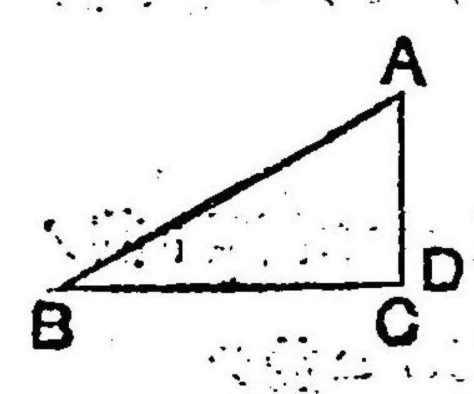



[2 圖]




證 先ヅ $\hat{ACB}\leqq\hat{R}$ ナルニ從ヒテ D ハ BC ノ上ニ, 或ハ BC ノ延線上ニアルユヱ [1 圖, 2 圖] 直角三角形 ACD ヨリ $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$.

[3 圖]




尙直角三角形 ABD ヨリ

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2,$$

故ニ $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2-\overline{BD}^2$ ... ... (1)

然ルニ CD ハ始ノ場合ニ於テハ BC−BD ニ等シク，後ノ場合ニ於テハ BD−BC ニ等シク，何レニシテモ　$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2BC.BD$,

即チ此ノ $\overline{CD}^2$ ヲ (1) ニ置キ換フルコトニ依リテ

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC.BD$$

ヲ得.

次ニ $A\hat{C}B=\hat{R}$ ナルトキハ [3 圖] D ハ C ト一致シ，BC=BD ナルユヱ

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{BC}^2$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2BC.BD$$

ナルコト明カナリ.

即チ總テノ場合ニ就キテ本題ノ定理ノ眞ナルコトヲ證シ得タリ.

**注意 I.**　尚本題ト關聯スル定理トシテ同樣ナル方法ニ依リ[三角形ニ於テ鈍角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ此ノ二邊ノ中ノ一邊ト其ノ上ニ於ケル他ノ一邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ 2 倍ヲ加ヘタルモノニ等シ]ヲ證明シ得ベシ.

**注意 II.**　ぴたごらすノ定理及ビ本題ト其ノ注意 I トニ依リテ“三角形 ABC ニ於テ



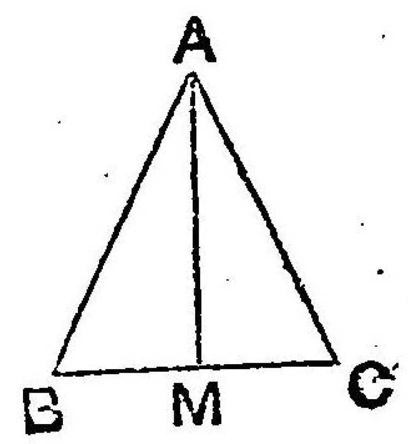
$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2<=>\overline{BC}^2$$

ナルニ從ヒテ $\hat{A}<=>\hat{R}$ ナリ” ヲ推定ス.

**41.**　三角形 ABC ニ於テ BC ノ中點ヲ M トスレバ二邊 AB, AC ノ上ノ正方形ノ和ハ AM, MC ノ上ノ正方形ノ和ノ 2 倍ナルコトヲ證セヨ.

[31. 海. 機.]

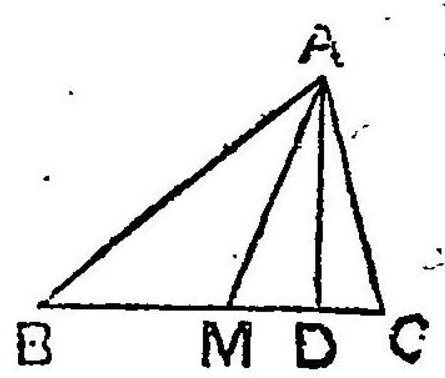
**證**　先ヅ AM ガ BC ニ垂直ナルトキ，即チ三角形 ABC ガ AB=AC ナル二等邊三角形ナルトキハ




$$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2,$$

及ビ　$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2$.

然ルニ假設ニ依リテ BM=CM, 從ヒテ $\overline{BM}^2=\overline{CM}^2$ ナルコトニ注意シ邊々相加フレバ




$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{CM}^2.$$

次ニ AM ガ BC ニ垂直ナラザルトキ，例ヘバ $A\hat{M}B$ ヲ鈍角ナリトスレバ $A\hat{M}C$ ハ銳角ナルユヱ 40 題及ビ其ノ注意 I ニ云ヘルコトニ依リテ

$$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{BM}^2+2BM.MD,$$

及ビ　$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2-2CM.MD$.

故ニ　BM=CM ナルコトニ注意シ邊々相加フレ

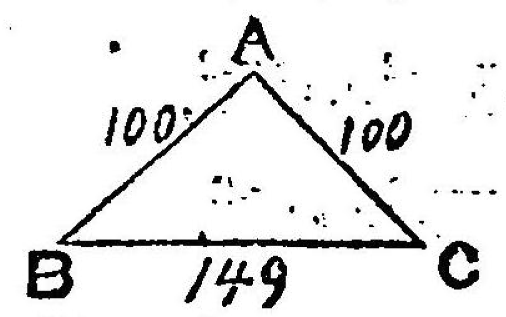
ハ矢張リ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{CM}^2$

ヲ得.

卽チ何レノ場合ニ於テモ本題ノ定理ノ眞ナルコトヲ證シ得タリ.

42. 二等邊三角形ニ於テ一邊ト底邊トノ比ハ100ト149トノ如シ. 然ラバ頂角ハ銳角ナルカ鈍角ナルカ. [34. 海. 機.]

解 三角形ABCニ於テ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2 <=> \overline{BC}^2$ ナルニ從ヒテ $\hat{A} <=> \hat{R}$ ナルコトハ既ニ知ル所ノ定理[40題注意II]ナリ.




サテ ABC ヲ AB=AC ナル二等邊三角形トシ, 且 AB:BC=100:149 ナリトセン. 然ルトキハ AB ノ $\frac{1}{100}$ ニ等シキ長サノ直線ヲ以テ測度ノ單位トスレバ

AB=AC=100, BC=149.

而シテ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\times100^2=20000$,

[illegible] $\overline{BC}^2=149^2=22201$,

卽チ $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2<\overline{BC}^2$.

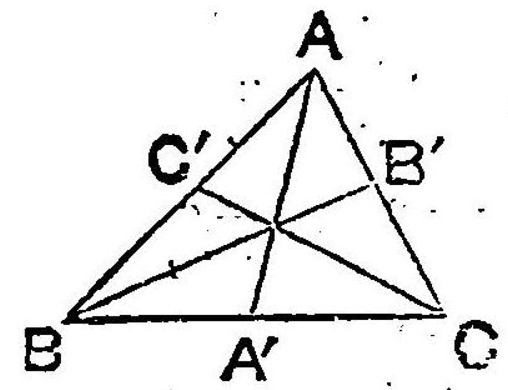
故ニ頂角Aハ鈍角ナリ.

43. 三角形ノ各ノ邊上ノ正方形ノ和ノ3倍



ハ中線上ノ正方形ノ和ノ4倍ニ等シキコトヲ證セヨ. [34. 商船.]

證 三角形ABCノ邊BC, CA, ABノ中點ヲソレゾレ A′, B′, C′ トスレバ定理[41題]ニ依リテ




$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AA'}^2+2\overline{BA'}^2$.

此ノ双方ヲ2倍シ, 且

$4\overline{BA'}^2=\overline{BC}^2$ ナルコトニ注意スレバ

$2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=4\overline{AA'}^2+\overline{BC}^2$.

同樣ニ $2\overline{BC}^2+2\overline{AB}^2=4\overline{BB'}^2+\overline{CA}^2$,

及ビ $2\overline{CA}^2+2\overline{CB}^2=4\overline{CC'}^2+\overline{AB}^2$.

邊々相加ヘテ $\Sigma\overline{BC}^2$ ヲ兩邊ヨリ減ズレバ

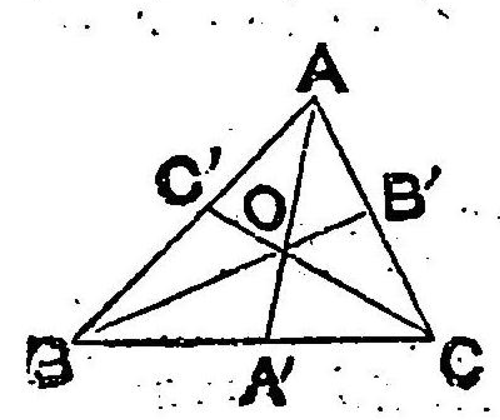
$3\Sigma\overline{AB}^2=4\Sigma\overline{AA'}^2$.

44. 三角形ABCノ重心ヲOトスレバ

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=3(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)$

ナルコトヲ證セヨ. [33. 海. 機.]

證 三ツノ中線ヲ AA′, BB′, CC′ トスレバ其ノ交點ハ重心Oニシテ,




AO=2OA′,等ノ關係アルコトハ既ニ知ル所ナリ. 而シテ

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AA'}^2+2\overline{BA'}^2$,

故ニ　　$2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2$

$=4\overline{AA'}^2+4\overline{BA'}^2=4\,.\,\overline{\tfrac{3}{2}OA}^2+\overline{BC}^2,$

即チ　　$2\overline{AB}^2+2\overline{AC}^2=9\overline{OA}^2+\overline{BC}^2.$

同様ニシテ　$2\overline{BC}^2+2\overline{BA}^2=9\overline{OB}^2+\overline{CA}^2,$

及ビ　　$2\overline{CA}^2+2\overline{CB}^2=9\overline{OC}^2+\overline{AB}^2.$

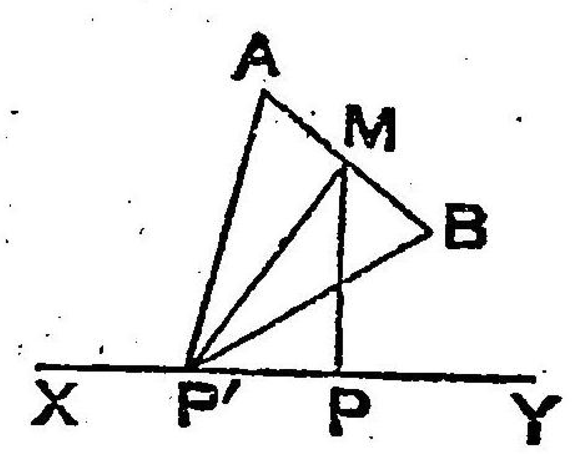
邊々相加フレバ　$4\Sigma\overline{BC}^2=9\Sigma\overline{OA}^2+\Sigma\overline{BC}^2,$

即チ　　$3\Sigma\overline{BC}^2=9\Sigma\overline{OA}^2,$

或ハ　　$\Sigma\overline{BC}^2=3\Sigma\overline{OA}^2.$

**45.** 與ヘラレタル直線ノ上ニ與ヘラレタル二ツノ點ヨリノ距離ノ上ノ正方形ノ和ガ最小ナル點ヲ求ム.　[36. 千. 醫. 專.]

與ヘラレタル直線ヲ XY, 與ヘラレタル二點ヲ A, B トシ, XY 上ニ一點 P ヲ求メ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ ヲシテ最小ナラシメントス.




**解** 今任意ノ位置ニ點 P′ ヲ取リ P′A, P′B 及ビ AB ノ中點 M ト P′ トヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　$\overline{AP'}^2+\overline{BP'}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{MP'}^2.$

此ノ右邊ノ量ニ就キテ $2\overline{AM}^2$ ハ定量ナルユヱ

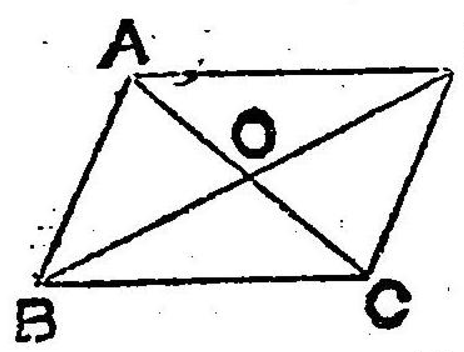


$\overline{AP'}^2+\overline{BP'}^2$ ヲ最小ナラシメンニハ $2\overline{MP'}^2$ ヲ, 從ヒテ MP′ ヲ最小ナラシムレバ可ナリ.

之ガ爲ニハ P′ ハ M ヨリ XY ニ引ケル垂線ノ趾ナルコトヲ要ス, 即チ AB ノ中點 M ヨリ XY ニ垂線ヲ下シ, 其ノ趾ヲ P トスレバ P ハ所要ノ點ナリ.

**46.** 平行四邊形ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ兩對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シキコトヲ證セヨ.　[35. 大. 高. 工.]

**證** 平行四邊形ヲ ABCD トシ, 兩對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トス.




平行四邊形ニ於テハ二双ノ對邊ハ各相等シク, 又兩對角線ハ互ニ二等分セラルルユヱ △ABC ヨリ

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{BO}^2+2\overline{AO}^2,$$

△ADC ヨリ $\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=2\overline{DO}^2+2\overline{AO}^2.$

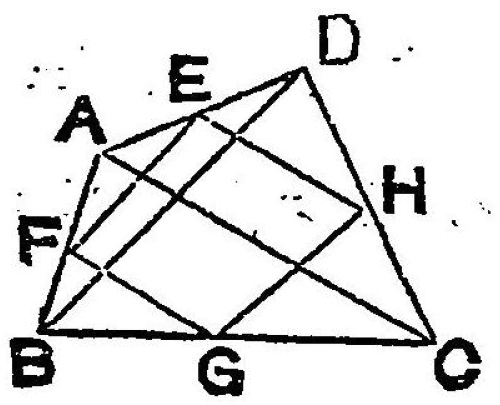
邊々相加フレバ $\Sigma\overline{AB}^2=4\overline{BO}^2+4\overline{AO}^2$

$$=\overline{BD}^2+\overline{AC}^2.$$

**47.** 四邊形ノ對角線上ノ正方形ノ和ハ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線上ノ正方形ノ和ノ2倍

ニ等シキコトヲ證セヨ. [42. 各高等., 42. 商船.]

**證**　四邊形ヲ ABCD; DA, AB, BC, CD ノ中點ヲソレゾレ E, F, G, H トス.




EFGH ハ平行四邊形ニシテ其ノ二隣邊ハソレゾレ AC, BD ノ半分ナリ.

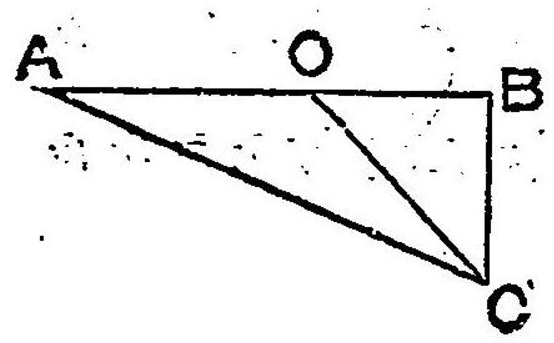
故ニ　$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$

$=2(\square EFGH$ ノ各邊上ノ正方形)

$=2(\overline{EG}^2+\overline{FH}^2)$.

**48.**　定長ノ直線ヲ二ツノ線分ノ上ノ正方形ノ差ガ定正方形ニ等シキ様ニ分テ. [31. 海. 機.]

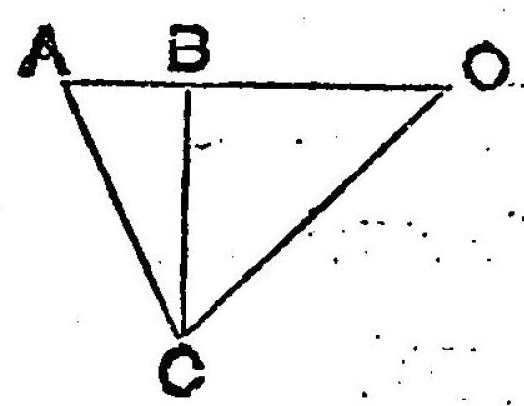
定長ノ直線ヲ AB, 定正方形ノ一邊ヲ $d$ トシ,




AB 或ハ其ノ延線上ニ一點 O ヲ求メ

$$\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=d^2$$

ナラシメントス.




**解析**　所要ノ點 O ヲ求メ得タリトシ, B ニ於テ AB ニ垂線 BC ヲ引キ, 之ヲ $d$ ニ等シク取リ AC, OC ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ直角三角形 COB ニ於テ



$$\overline{OC}^2-\overline{OB}^2=\overline{BC}^2=d^2.$$

然ルニ假定ニ依リテ $\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=d^2$.

故ニ　OC=OA.

依リテ次ノ作圖法ヲ得.

**作圖**　B ニ於テ AB ニ垂線 BC ヲ作リ, 之ヲ $d$ ニ等シクシ, CA ヲ結ビ付ケ $A\hat{C}O=C\hat{A}B$ ナル如キ直線 CO ヲ AC ニ關シテ AB ト同ジ側ニ引ケ. 而シテ CO ト AB トノ交點ヲ O トスレバ O ハ所要ノ點ナルベシ.

**證**　直角三角形 COB ニ於テ

$$\overline{OC}^2-\overline{OB}^2=\overline{BC}^2=d^2.$$

然ルニ作圖ニ依リテ OC=OA.

故ニ　$\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=d^2$.

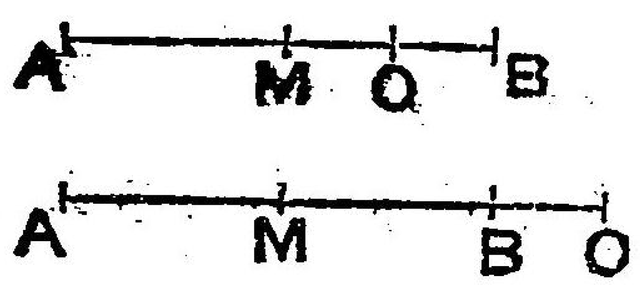
即チ O ハ所要ノ點ナリ.

**吟味**　點 O ヲ求メ得ル爲ニ必要ニシテ且十分ナル要件ハ CO ガ AB ト交ルコトニシテ此ハ $A\hat{C}O$ ニ等シキ $\hat{A}$ ガ B ヲ直角トスル直角三角形 CAB ノ一鋭角ナルコトヨリ恒ニ滿足セラル. 故ニ所要ノ點ハ必ズ一ツアリ, 而シテ唯一ツニ限ル. 尚 $d<AB$ ナルトキハ $\hat{A}<A\hat{C}B$ ナルユエ O ハ AB ノ上ニアリ.

$d=AB$ ナルトキハ $\hat{A}=A\hat{C}B$ ナルユヱ O ハ B ト一致ス.

$d>AB$ ナルトキハ $\hat{A}>A\hat{C}B$ ナルユヱ O ハ AB ノ延線上ニアリ.

**別解**　**解析**　所要ノ點 O ヲ求メ得タリトシ, AB ノ中點ヲ M トス. 然ルトキハ



$$\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=d^2 \ldots (1)$$

然ルニ

$$\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=(OA+OB)(OA-OB)=2AB.OM.$$

故ニ　$2AB.OM=d^2$ ... ... ... ... ... (2)

即チ OM ハ 2AB ト $d$ トノ比例第三項ナリ.

逆ニ 2AB ト $d$ トノ比例第三項ニ等シク, OM ヲ定ムレバ (2) ガ成立シ, 從ヒテ (1) モ亦成立ス.

然ルニ 2AB ト $d$ トノ比例第三項ハ必ズ一ツハ得ラルベク, 而シテ唯一ツニ限ル.

故ニ所題ノ點ハ恒ニ一ツアリ, 而シテ唯一ツニ限ル.

**吟味**　$d<AB$ ナルトキハ

(2) ヨリ　　$2OM<d$,

故ニ尙更　　$2OM<AB$,



即チ　　$OM<BM$.

依リテ O ハ BM ノ上ニアリ.

$d=AB$ ナルトキハ前ノ如クシテ $OM=BM$ ナルユヱ O ハ B ト一致ス.

$d>AB$ ナルトキハ

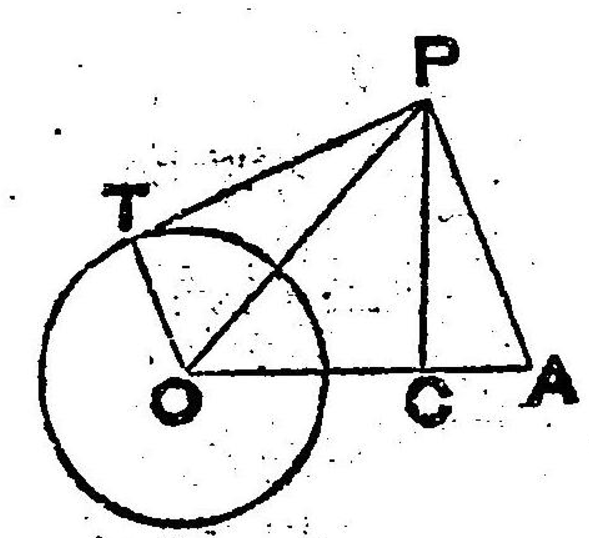
同樣ニ　　$OM>BM$.

依リテ O ハ AB ノ延線上ニアリ.

**49.** 定圓 O ヘノ切線ト定點 A ヘノ距離トガ相等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ.　[32. 陸. 士.]

**解**　軌跡上ノ一點ヲ P トシ, P ヨリ圓ヘ切線 PT ヲ引キ, 又中心 O ヲ P, T ニ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ $\overline{OP}^2=\overline{PT}^2+\overline{OT}^2$,　[∵ $O\hat{T}P=\hat{R}$],



及ビ $\overline{AP}^2=\overline{PT}^2$. [假設]

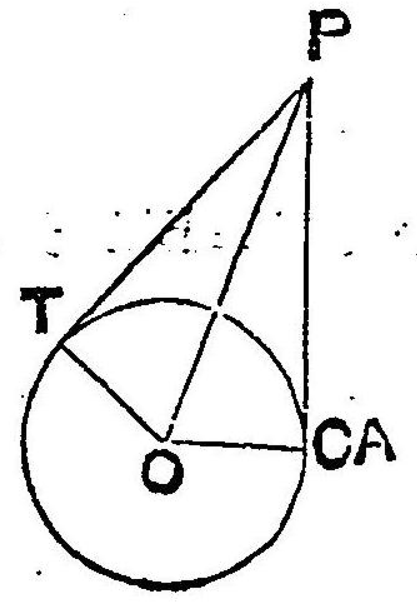
故ニ $\overline{OP}^2-\overline{AP}^2=\overline{OT}^2$.

然ルニ OT ハ圓 O ノ半徑ニシテ定長ナリ.

從ヒテ $\overline{OP}^2-\overline{AP}^2$ ハ定量ナルベク, 依リテ點 P ハ OA ヲ

$$\overline{OC}^2-\overline{CA}^2=(\text{圓 O ノ半徑})^2$$

ナル如ク分ツ點 C ニ於テ OA ニ垂直ナル直線 PC 上ニアリ.

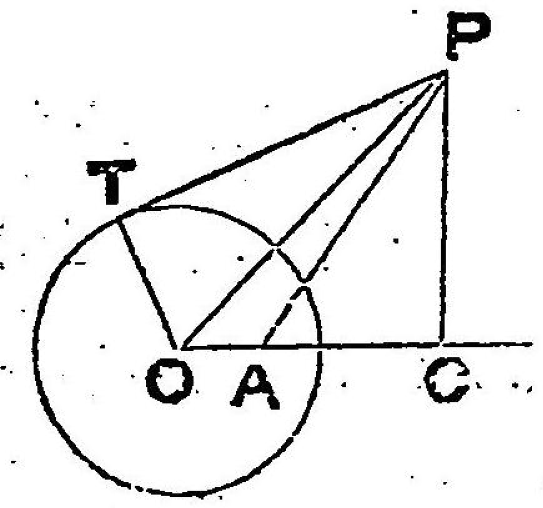



逆ニ PC 上ノ任意ノ一點ヲ P トシ,圓 O ニ切線 PT ヲ引キ,又 OP, OT ヲ結ビ付クレバ

$$\overline{OP}^2-\overline{PT}^2=\overline{OT}^2,$$

然ルニ

$$\overline{OP}^2-\overline{AP}^2=\overline{OC}^2-\overline{CA}^2=(\text{圓 O ノ半徑})^2=\overline{OT}^2.$$

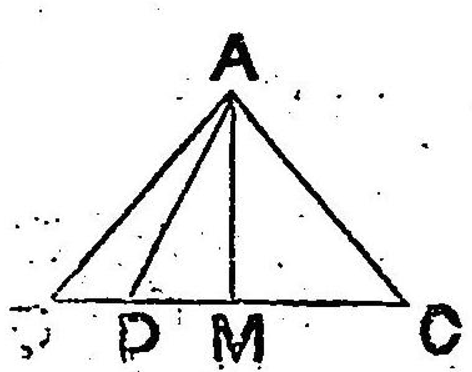



故ニ PT=PA.

即チ直線 PC ハ所要ノ軌跡ナリ.

而シテ直線 PC ヲ求ムル作圖ニ就キテハ前題ヲ見ヨ.

**50.** 三角形 ABC ニ於テ角 BAC ハ直角,邊 AB ハ邊 AC ニ等シク,D ハ邊 BC 上ノ任意ノ一點ナルトキハ $2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$ ナルコトヲ證セヨ. [40. 陸. 士.]




證 A ヨリ BC ニ垂線ヲ引キ其ノ趾ヲ M トスレバ AB=AC ナルユエ M ハ BC ノ中點ナリ.



且又 $B\hat{A}C=\hat{R}$

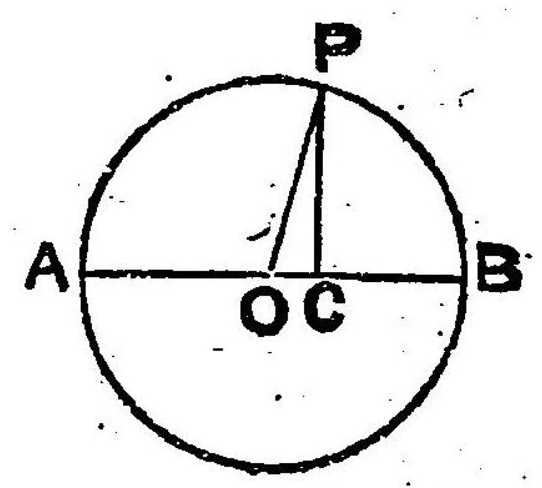
ナルユエ BM=AM=MC.

依リテ

$$\overline{BD}^2+\overline{DC}^2=(BM-MD)^2+(CM+MD)^2$$
$$=(AM-MD)^2+(AM+MD)^2$$
$$=2(\overline{AM}^2+\overline{DM}^2)=2\overline{AD}^2.$$

**51.** 圓周上ノ一點ヨリ徑ヘ引ケル垂線ガ其ノ徑ヲ分ツ所ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ垂線ノ上ノ正方形ニ等シ. [39. 千. 醫. 專.]

圓周上ノ一點 P ヨリ徑 AB ヘ引ケル垂線ノ趾ヲ C トスレバ




$$AC.CB=\overline{PC}^2$$

ナルベシ.

證 圓ノ中心ヲ O トシ, OP ヲ結ビ付ケヨ.

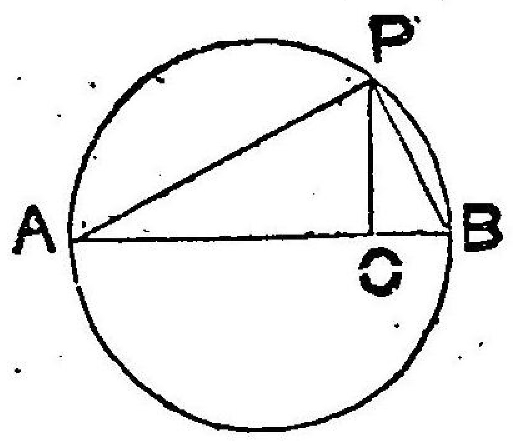
然ルトキハ AO, BO, PO ハ皆圓ノ半徑ニシテ相等シキユエ

$$AC.CB=(AO\pm OC)(BO\mp OC)$$
$$=(PO\pm OC)(PO\mp OC)$$
$$=\overline{PO}^2-\overline{OC}^2,$$

然ルニ三角形 POC ハ C ヲ直角トスル直角三角形ナルヲ以テ $\overline{PO}^2-\overline{OC}^2=\overline{PC}^2$.

依リテ　$AC.CB=\overline{PC}^2$.

別證　AP, BP ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ AB ハ圓ノ徑ナルユエ $A\hat{P}B$ ハ直角ナリ.




又假設ニ依リテ C ニ於ケル角ハ直角ナルユエ二ツノ直角三角形 APC, PBC ニ於テ $P\hat{A}C$, $B\hat{P}C$ ハ何レモ $A\hat{P}C$ ノ餘角ニシテ相等シ.

故ニ　$\triangle APC \backsim \triangle PBC$

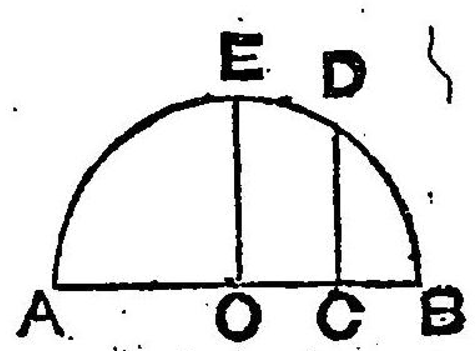
ナリ. 依リテ對應スル邊ノ關係トシテ

$$AC:PC=CP:CB,$$

或ハ　$AC.CB=\overline{CP}^2$.

52. 二邊ノ和ガ定長ナル矩形ノ面積ノ最大ナルハ其ノ邊ノ相等シキトキニアルコトヲ證セヨ. [36. 商船.]

證 I. 二邊ノ和 AB ヲ徑トシテ半圓ヲ畫キ, 其ノ中心ヲ O トシ, O ヨリ AB ニ垂線 OE ヲ, 又 AB 上ノ任意ノ點 C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ引キ, 半圓周トノ交點ヲソレゾレ E, D トス. 然ルトキハ

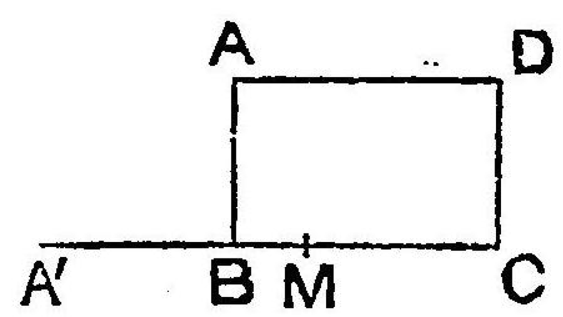





$$AC.CB=\overline{CD}^2 \qquad \text{[51 題]}$$

ナルヲ以テ AB ガ一定ナルトキ $\overline{CD}^2$ ノ最大ナルハ C ガ圓ノ中心 O ト合シタルトキ, 卽チ CD ガ OE ト合シタルトキナリ. 而シテ其ノトキ矩形ハ正方形トナル.

證 II. 矩形 ABCD ニ於テ相隣レル二邊ノ和 $AB+BC=l$ トシ, CB ヲ A′ ニ引キ延バシ, $A'B=AB$ ナラシムレバ




$$A'B+BC=l.$$

而シテ　$\square AC=AB.BC=A'B.BC$,

今 A′C ノ中點ヲ M トシ, 例ヘバ M ヲ BC ノ上ニアリトスレバ

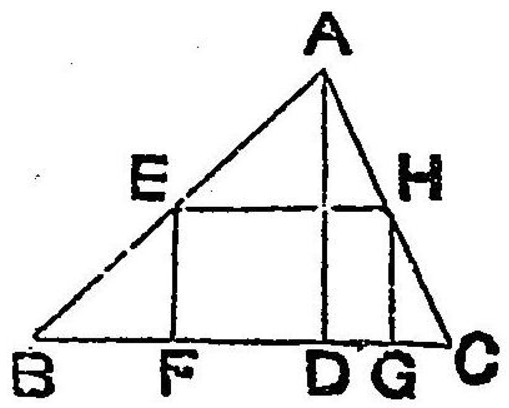
$$A'B.BC=(A'M-BM)(CM+BM)$$
$$=\left(\frac{l}{2}-BM\right)\left(\frac{l}{2}+BM\right)=\frac{l^2}{4}-\overline{BM}^2.$$

是ニ依リテ　$\overline{BM}^2=0$,

卽チ B ト M トガ相合シ $A'B=BC$, 卽チ $AB=BC$ トナルトキハ $A'B.BC$, 卽チ $AB.BC$ ガ最大ナリ.

53. 底邊ノ長サ $a$, 高サ $h$ ナル三角形ニ內接スル矩形ノ最大ナルモノヲ求メヨ. [39. 京.醫.專.]

解　三角形 ABC ニ於テ底邊 $BC=a$, 高サ




AD=$h$ トシ, 之ニ任意ノ矩形 EFGH ヲ內接セヨ.

[圖ニ於テ FG ト BC トヲ相沿ハシム].

然ルトキハ三角形ノ相似ナルコトニ依リテ $\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$.

及ビ $$\frac{EF}{AD}=\frac{BE}{AB}.$$

故ニ $$\frac{EH.EF}{BC.AD}=\frac{AE.BE}{AB.AB},$$

卽チ $$\frac{EF.EH}{ah}=\frac{AE.BE}{\overline{AB}^2},$$

而シテ $ah$, $\overline{AB}^2$ ハ定量ナルユエ EH.EF ノ最大ナルハ AE.BE ノ最大ナルトキナリ.

然ルニ $$AE+EB=AB$$

ニシテ定長ナルユエ AE.EB ノ最大ナルハ

52 題ニ依リ $$AE=EB$$

ナルトキ, 卽チ E ガ AB ノ中點ナルトキナリ.

依リテ EH, EF ガソレゾレ $a$, $h$ ノ半分ナルトキ矩形 EFGH ノ面積ハ最大ニシテ

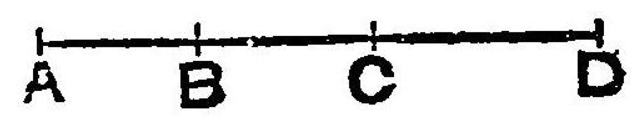
$$\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}\triangle ABC,$$

卽チ三角形 ABC ノ半分ニ等シ.



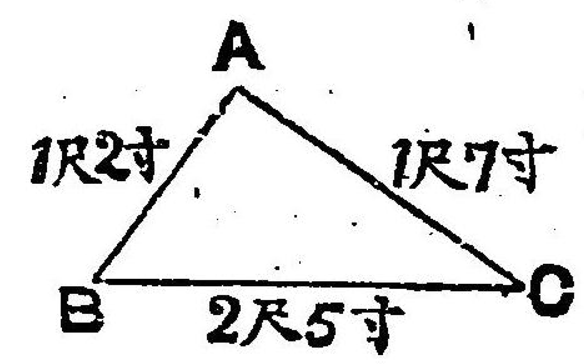
**54.** 一直線上ニ四ツノ點 A, B, C, D ヲ順次ニ存スルトキハ AC, BD ノ包ム矩形ハ AB, CD ノ包ム矩形ト BC, AD ノ包ム矩形トノ和ニ等シキコトヲ證セヨ. [39. 盛. 高. 農.]

證
$$\begin{aligned}AC.BD&=(AB+BC).BD\\&=AB.BD+BC.BD\\&=AB(BC+CD)+BC.BD\\&=AB.BC+AB.CD+BC.BD\\&=AB.CD+BC(AB+BD)\\&=AB.CD+BC.AD.\end{aligned}$$




**55.** 三角形ABCニ於テ三ツノ邊 AB, BC, CA ハソレゾレ1尺2寸, 2尺5寸, 1尺7寸ナル長サヲ有ス. 各ノ角ノ大小ヲ比較シ, 且本形ハ鈍角三角形ナルコトヲ證セヨ. [32. 海. 兵.]

解 三角形ニ於テ大ナル角ハ大ナル邊ニ對ス.




然ルニ BC[=2尺5寸]
>CA[=1尺7寸]
>AB[=1尺2寸]

ナルユエ $\hat{A}>\hat{B}>\hat{C}$

ナル關係アルベシ.

又三角形ニ於テ一邊ノ上ノ正方形ガ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルカ之ニ等シキカ或ハ之ヨリ大ナルカニ從ヒテ前ノ邊ニ對スル角ハ直角ヨリ小ナルカ之ニ等シキカ或ハ之ヨリ大ナリ．

然ルニ　$25^2[=625]>12^2+17^2[=433]$,

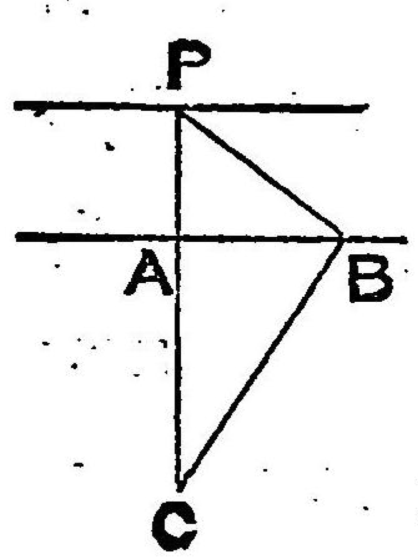
卽チ　$\overline{BC}^2>\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$.

故ニ　$\hat{A}>\hat{R}$.

卽チ ABC ハ A ヲ鈍角トスル鈍角三角形ナリ．

56. 河岸ノ一點 P ニ一樹アリ，正對岸 A ニ立チ，ソレヨリ岸ニ沿ヒテ 40 歩ダケ步ミ點 B ニ止マリ更ニ PB ニ直角ニ 50 步ダケ步メバ線 PA ニ到ルト云フ，此ノ河幅ヲ問フ．但一步ノ長サヲ 75 糎トス．　[38. 海. 兵.]

**解** 題意ニ依リテ河幅ハ PA ノ長サヲ求ムルニアリ．




サテ最後ニ線 PA 上ニ來ル位置ヲ C トス．

然ルトキハ先ヅ三角形 PBC ハ $P\hat{B}C=\hat{R}$ ナル直角三角形ニシテ BA ハ斜邊 PC ニ下シタル垂線ナルコト明カナリ．



故ニ　$PA.AC=\overline{AB}^2$.

然ルニ AB ハ 40 步ニ相當スルユヱ其ノ長サハ

$75^{糎}\times 40=3000^{糎}$,

BC ハ 50 步ニ相當スルユヱ其ノ長サハ

$75^{糎}\times 50=3750^{糎}$,

從ヒテ AC ノ長サハ直角三角形 ABC ヨリ $\sqrt{(\overline{BC}^2-\overline{AB}^2)}$ ナルユヱ

$\sqrt{(3750^2-3000^2)}=\sqrt{5062500}$

$=2250$, 卽チ 2250糎 ナリ．

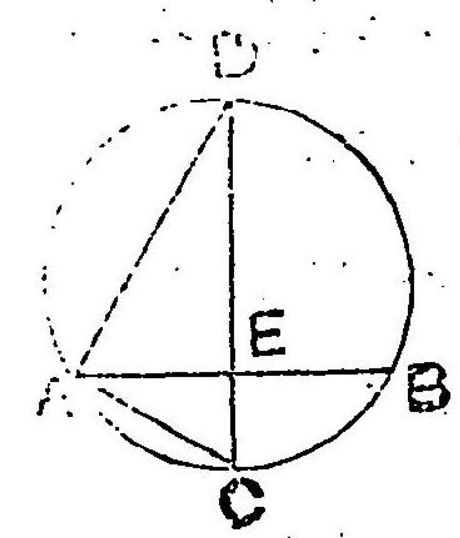
斯ノ如ク求メ得タル AB, AC ノ値ヲ前ノ式ニ代入スレバ　$PA\times 2250=3000^2$,

之ヨリ PA=4000, 卽チ 4000 糎或ハ 40 米ナリ．

**57.** 圓ノ弧アリ，其ノ弦ノ長サ 1尺2寸，矢ノ長サ 2寸ナルトキ其ノ徑ノ長サハ如何．

[34. 海. 機.]

**解** 圓ノ弧 ACB ニ於テ，弦 AB ノ長サ 1尺2寸，矢 CE ノ長サ 2寸ナルトキ徑ノ長サヲ求メントス．




矢 CE ハ弧 AB ノ中點 C ヨリ弦 AB ヘ下セル垂線ナルユヱ之ヲ引キ延バシテ弧 ABC

ノ共軛弧トDニ於テ交ラシムレバCDハ弧ACBガ其ノ部分ナル圓ノ徑ナリ.

而シテ前ニ云ヘル如クAEハCDニ垂直ナルユエ

$$CE.ED=\overline{AE}^2,$$ [51題]

即チ $2\times ED=6^2,$

故ニ $ED=18,$

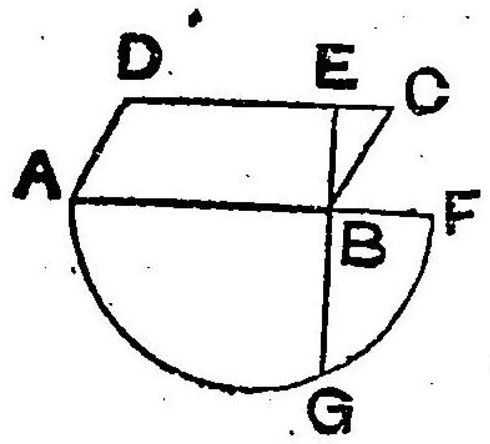
依リテ 所要ノ徑ノ長サ$=CD$

$=CE+ED=2+18$

$=20,$ 即チ2尺ナリ.

58. 與ヘラレタル平行四邊形ト等積ナル正方形ヲ畫ケ. [33. 海.兵.]

與ヘラレタル平行四邊形ヲABCDトシ, 之ト等積ナル正方形ヲ畫カントス.




**作圖** BヨリDCニ垂線BEヲ引キ, ABヲFニ引キ延バシテ, $BF=BE$ナラシメ, AFヲ徑トスル半圓周トEBノ延線トノ交點ヲGトス.

BGヲ一邊トシテ正方形ヲ畫ケバコレ所要ノモノナリ.

**證** $\overline{BG}^2=AB.BF$ [51題]

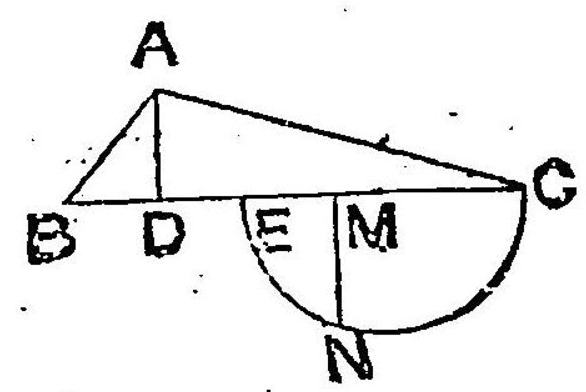


$=AB.BE$ [作圖]

$=▱ABCD.$

59. 與ヘラレタル五邊形ト等積ナル正方形ヲ作ル法ヲ述ベヨ. [42. 盛.高.農.]

**解** 與ヘラレタル五邊形ヲ8題ニ依リテ等積ナル三角形ニ直シタルモノヲABCトセン.




サテ任意ノ一邊, 例ヘバBCヲ取リ, 其ノ中點Mヲ求メ, CMノ延線上ニ點Eヲ取リ, MEヲ三角形ABCノAヨリノ高サADニ等シクシ, CEヲ徑トシテ半圓CNEヲ畫キ, MニテCEニ垂線MNヲ引キ, 半圓周トノ交點ヲNトスレバMNヲ一邊トシテ畫クル正方形ハ所要ノ正方形ナリ.

如何トナレバ $\overline{MN}^2=ME.MC$ [51題]

$$=AD.\frac{1}{2}BC=\triangle ABC$$

ナレバナリ.

**注意** 若シEガBト合スルトキハ

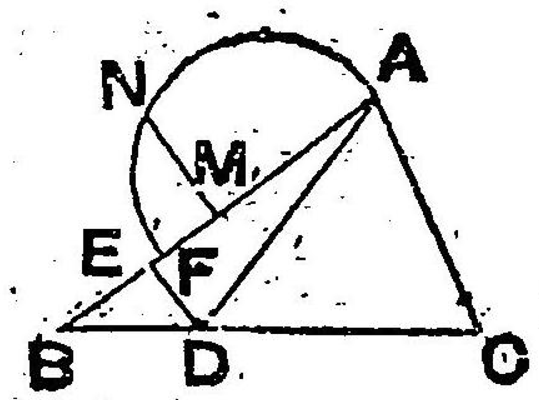
$$CM=ME=MN.$$

故ニ此ノ場合ニハCMノ上ニ正方形ヲ畫ケバ可ナリ.

**60.** 與ヘラレタル三角形ノ面積ノ三分ノ一ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ作レ.

[38. 大.高.工.]

與ヘラレタル三角形ヲABCトシ，其ノ三分ノ一ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ作ラントス.




解 任意ノ一邊，例ヘバBCヲ三等分シ，Bニ近キ分點ヲDトシ，DAヲ結ビ付クレバ三角形ABDハ三角形ABCト同ジ高サヲ有シ，且其ノ底BDハBCノ三分ノ一ニ等シキユエ三角形ABDノ面積ハ三角形ABCノ面積ノ三分ノ一ニ等シ. 依リテ三角形ABDニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ作レバ可ナリ.

サテ三角形ABDニ於ケル任意ノ一邊，例ヘバABヲMニ於テ二等分シ，叉DヨリABヘ垂線ヲ引キ其ノ趾ヲEトセヨ. 然ルトキハDEハ三角形ABDノDヨリノ高サナリ.

次ニAMノ延線上ニ點Fヲ取リ，MF=DEナラシメ，AFヲ徑トシテ半圓周ANFヲ畫ケ.

而シテAFニ垂線MNヲ作リ，半圓周ANFトノ



交點ヲNトスレバMNハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ. 卽チMNヲ一邊トシテ正方形ヲ畫ケバ，コレ所要ノ正方形ナリ.

如何トナレバ $\overline{MN}^2=MF.MA$ [51題]

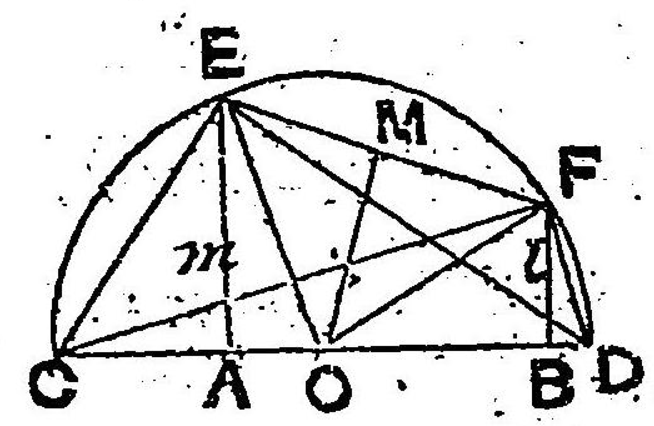
$$=DE.\frac{1}{2}BA$$

$$=\triangle ABD=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

ナレバナリ.

**61.** 與ヘラレタル長サノ直線ABヲ双方ヘ引キ延バシテ直線CABDヲ作リ，矩形CB.BD及ビCA.ADノ面積ヲソレゾレ與ヘラレタル大サニ等シカラシメンニハ點C及ビDノ位置ヲ如何ニ定ムベキカ. [39. 商船]

解析 矩形CB.BD; CA.ADノソレゾレ等シカルベキ大イサノ圖形ヲ正方形ニ直シ其ノ各一邊ノ長サヲ$l$,$m$トス，




今所要ノ點C及ビDノ位置ヲ定メ得タリトシ，CABDニ垂線$BF=l$, $AE=m$ヲ引クトキハ

$$CB.BD=l^2=\overline{BF}^2$$

及ビ $$CA.AD=m^2=\overline{AE}^2.$$

故ニ $\hat{CFD}=\hat{R}=\hat{CED}$

ニシテ F, E ハ CD ヲ徑トスル圓周上ニアリ.

而シテ此ノ圓ノ中心ハ EF ノ垂直二等分線及ビ AB [或ハ其ノ延線] 上ニアリ. 依リテ次ノ作圖法ヲ得.

**作圖** AB ニ垂線 BF$=l$, AE$=m$ ヲ引キ, EF ノ垂直二等分線 MO ト AB [或ハ其ノ延線] トノ交點 O ヲ求メ, O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ AB ノ延線トノ交點ヲ C, D トスレバ, コレ所要ノ點ナリ.

**證** O ハ二點 E, F ヨリ等距離ナル點ノ軌跡 MO 上ニアルユヱ O ヲ中心トシ OE ヲ半徑トスル圓ハ F ヲモ通ルコト明カナリ.

而シテ CE, ED, CF, FD ヲ結ビ付クレバ $\hat{CED}$, $\hat{CFD}$ ハ各半圓ニ於ケル角ニシテ直角ニ等シク, 又 EA, FB ハ作圖ニ依リテ CABD ニ垂直ナリ.

依リテ $CB.BD=\overline{BF}^2=l^2$,

$CA.AD=\overline{AE}^2=m^2$,

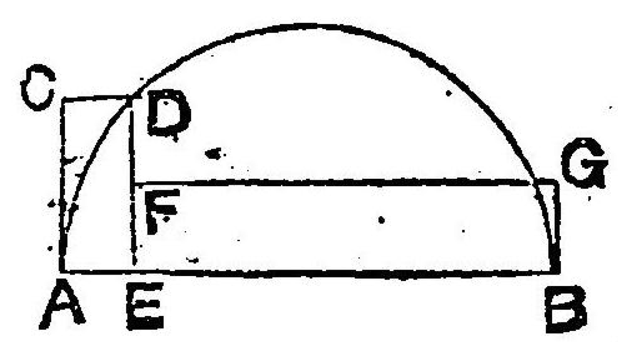
即チ C, D ハ所題ノ要件ニ適スル點ノ位置ナリ.

62. 與ヘラレタル周圍ヲ有シ, 與ヘラレタル正方形ニ等シキ矩形ヲ畫ケ. 且此ノ作圖法ヲ應



用シテ二次方程式 $x^2-10x+16=0$ ノ根ヲ作圖ニ依リテ見出セ. [38. 大. 高. 工.]

與ヘラレタル周圍ヲ $2s$, 與ヘラレタル正方形ノ一邊ヲ $k$ トシ, $2s$ ニ等シキ周圍ヲ有シ, $k^2$ ニ等シキ面積ヲ有スル矩形ヲ畫カントス.




**作圖** 任意ノ直線 AB ヲ引キ之ヲ $s$ ニ等シク取リ, AB ヲ徑トシテ半圓 ADB ヲ畫キ, A ニ於テ之ニ垂線 AC ヲ半圓ト同ジ側ニ立テ, 且 AC ヲ $k$ ニ等シカラシム.

C ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ半圓周トノ交點ノ一ツヲ D トス. 而シテ D ヨリ AB ニ垂線 DE ヲ下シ, ED ノ上ニ EF ヲ AE ニ等シク取リ, 矩形 BEFG ヲ完成スレバ, コレ所要ノモノナルベシ.

**證** 作圖ニ依リテ

$\square FB=EF.EB=AE.EB$

$=\overline{ED}^2=\overline{AC}^2=k^2$,

$\square FB$ ノ周圍$=2(EF+EB)$

$=2(AE+EB)=2AB=2s$,

故ニ矩形 FB ハ所要ノモノナリ.

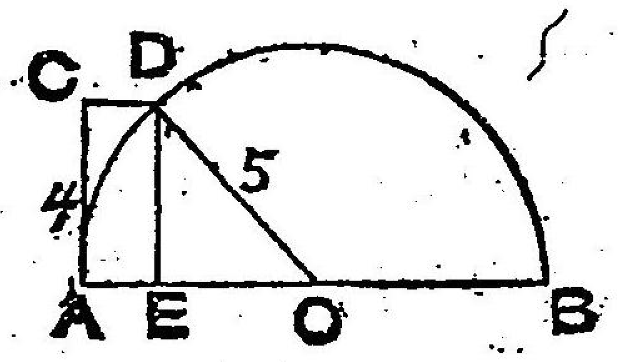
**吟味**　矩形 FB ハ周圍ガ一定ナルコトヨリ $FE=EB$, 或ハ $AE=EB$ ナルトキ其ノ面積ハ最大ニシテ $\frac{1}{4}s^2$ ニ等シ, 故ニ此ノ矩形ヲ作圖シ得ベキ要件ハ $k^2\leqq\frac{1}{4}s^2$, 卽チ $k\leqq\frac{1}{2}s$ ナルコトナリ. 而シテ $k<\frac{1}{2}s$ ナルトキハ上ノ作圖法ニ於テ CD ヲ引キ延バセバ再ビ半圓周ト交リ何レノ交點ヲ取ルモ依リテ得ベキ矩形ノ邊ハソレゾレ相等シク, $k=\frac{1}{2}s$ ナルトキハ CD ハ半圓周ニ切シ, 所要ノ矩形ハ正方形ナルコト明カナリ.

次ニ此ノ作圖法ヲ應用シテ方程式

$$x^2-10x+16=0$$

ノ根ヲ求メントス.

今二次方程式ノ性質ニ依リテ與ヘラレタル方程式ノ二根ノ和ハ 10 ニシテ積ハ 16 ナルコトヲ知ル, 故ニ此ノ二根ヲ矩形ノ二邊ノ長サヲ表ハスモノト見做セバ問題ハ前ニ述ベタルコトニ依ルヲ得ベシ. サテ



$AB=10$, $CA=\sqrt{16}=4$ トシ, 半圓ノ中心 O ヲ D ニ結ビ付ケヨ.



然ルトキハ AE, EB ノ長サヲ表ハス數ハ所要ノ根ニシテ, 今 $OA=OD=OB=10\div2=5$

ナルユエ　$OE=\sqrt{(\overline{OD}^2-\overline{DE}^2)}$

$$=\sqrt{(5^2-4^2)}=3.$$

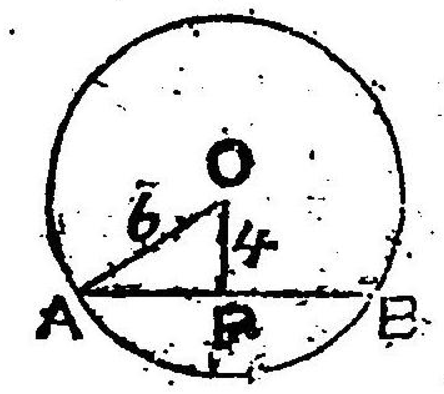
故ニ　$AE=OA-OE=5-3=2.$

$$EB=OE+OB=3+5=8,$$

卽チ所要ノ根ハ 2 及ビ 8 ナリ.

**63.** 半徑 6 寸ノ圓ノ中心ヨリ 4 寸ノ距離ニアル點ヲ過リテ引キタル弦ノ最短ナルモノノ長サ及ビ其ノ點ヲ過リテ任意ニ引キタル弦ノ二分ノ包ム矩形ノ面積ヲ求メヨ.　[41. 商船.]

**解**　圓ノ中心ヲ O, 與ヘラレタル點ヲ P トスレバ OP ハ 4 寸ニシテ半徑ハ 6 寸ナルユエ點 P ハ圓 O ノ內ニアリ.



而シテ P ヲ過リ OP ニ垂直ナル弦ヲ AB トスレバ AB ハ P ヲ過ル弦ノ最短ナルモノナリ. OA ヲ結ビ付タレバ直角三角形 OAP ヨリ　$AP=\sqrt{(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)}$

$$=\sqrt{(6^2-4^2)}=2\sqrt{5},$$

然ルニ OP ハ AB ニ垂直ナルコトヨリ P ハ AB

ノ中點ナリ.

故ニ $\qquad AB=2AP=2\times2\sqrt{5}$

$$=4\sqrt{5}\doteqdot4\times2.236$$

$$=8.944,$$ 卽チ 8寸.944 [約].

次ニ P ヲ過リテ任意ニ引キタル弦ノ二分ノ包ム矩形ハ恒ニ AP.PB ニ等シク, 卽チ

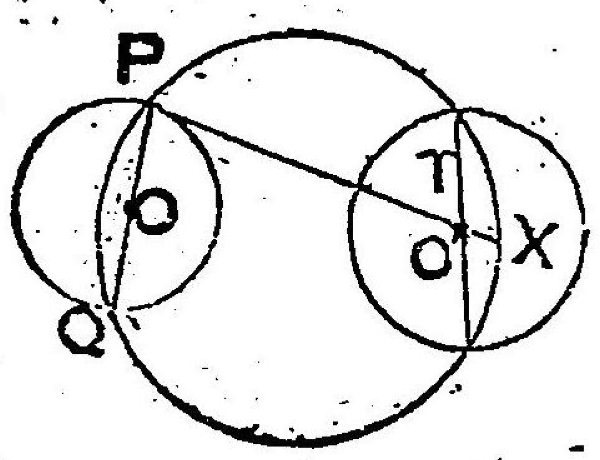
$$AP.PB=2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}$$

$$=20,$$ 卽チ 20平方寸ナリ.

**64.** 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル一點ヲ過リテ此ノ圓周ト他ノ一ツノ與ヘラレタル圓周トヲ共ニ二等分スベキ圓周ヲ作レ.

[40. 農.大.實.]

解 始ノ圓ノ中心ヲ O, 圓周上ノ一點ヲ P; 後ノ圓ノ中心ヲ O′, 其ノ半徑ヲ $r$ トス. 圓 O ノ徑 POQ ヲ引ケ.




所要ノ圓ヲ畫キ得タリトシ, PO′ ヲ引キ延バシテ其ノ周トノ交點ヲ X トスレバ

$$PO'.O'X=r^2.$$

O′P, $r$ ハ既知ナルユエ O′X ノ長サヲ知ルコトヲ



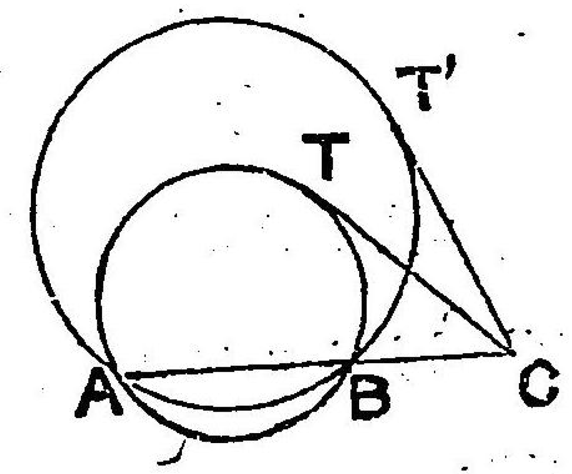
得ベク, 從ヒテ點 X ノ位置ヲ決定シ得ベシ.

而シテ所要ノ圓ハ P, Q, X ヲ過ルモノナルコト明カナリ.

**65.** 一ツノ弦ヲ共有セル圓アリ, 弦ノ延線上ノ一點ヨリ圓ヘノ切線ハ相等シキコトヲ證セヨ.

[36. 千.醫.專.]

證 公弦ヲ AB, 其ノ延線上ノ一點ヲ C, C ヨリ圓ヘノ切線ヲ CT, CT′, ......トスレバ $\overline{CT}^2$, $\overline{CT'}^2$, ......ハ皆 CA.CB ニ等シ.

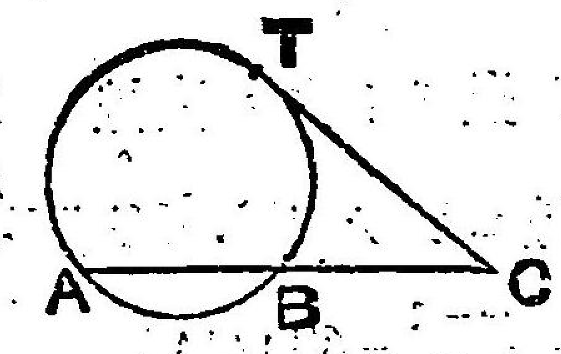



故ニ $\overline{CT}^2$, $\overline{CT'}^2$, ......ハ皆相等シク, 從ヒテ CT, CT′, ......ハ皆相等シカルベシ; 卽チ題言ノ如シ.

**66.** 直線 ABC ノ上ノ二定點 A, B ヲ過ル圓ヘ AB 上ノ定點 C ヨリ引キタル切線ノ切點ノ軌跡ハ C ヲ中心トスル一ツノ圓ナルコトヲ證セヨ.

[42. 仙.高.工.]

證 切點ヲ T トスレバ $\overline{CT}^2=CA.CB$ ナリ.




然ルニ CA, CB ハ定長ナルユエ CB.CA ハ定積

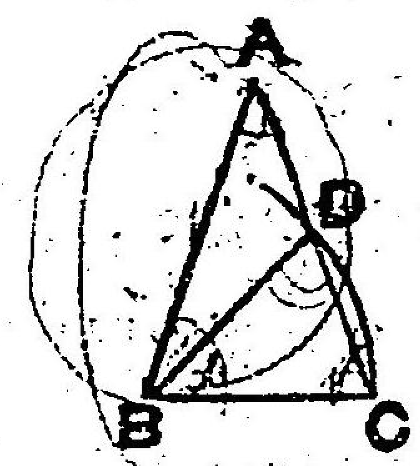
ナル矩形，從ヒテ之ニ等シキ正方形ノ一邊 CT ハ定長ナリ.

故ニ T ノ軌跡ハ C ヲ中心トシ CT ヲ半徑トスル圓周ナリ.

67. 二等邊三角形 ABC[AB=AC] ニ於テ B ヲ中心トシ BC ヲ半徑トシテ畫ケル圓周ガ再ビ邊 AC ニ交ル點ヲ D トスレバ BC 上ノ正方形ハ AC, DC ノ包ム矩形ト等積ナルコトヲ證セヨ.

[39. 金. 醫. 專.]

證 I. 三角形 BCD ハ作圖ニ依リテ BC=BD ナル二等邊三角形ナルユヱ其ノ底角 D, C ハ相等シ.




然ルニ假設ニ依リテ ABC ハ AB=AC ナル二等邊三角形ナルユヱ其ノ底角 C, B ハ相等シ.

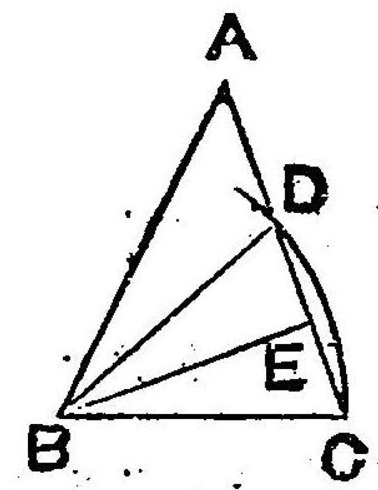
故ニ二ツノ二等邊三角形ノ底角ハ互ニ相等シク，從ヒテ其ノ頂角モ亦相等シカラザルベカラズ.

卽チ $\widehat{CBD}=\widehat{BAC}$.

故ニ今 A, B, D ヲ過ル圓ヲ畫クトキハ直線 CB ハ此ノ圓ニ點 B ニ於テ切線ニシテ [B. 48 題]，CDA ハ割線ナリ. 依リテ $\overline{CB}^2=CD.CA$.



證 II. B ヨリ CD ニ垂線 BE ヲ引ケ.




然ルトキハ作圖ニ依リテ BC=BD ナルユヱ BE ノ趾 E ハ CD ノ中點ナリ.

而シテ $\overline{BC}^2=\overline{BE}^2+\overline{EC}^2$

$=(\overline{AB}^2-\overline{AE}^2)+(AC-AE)^2$

$=\overline{AC}^2-\overline{AE}^2+\overline{AC}^2+\overline{AE}^2-2AC.AE$

$=2\overline{AC}^2-2AC.AE$

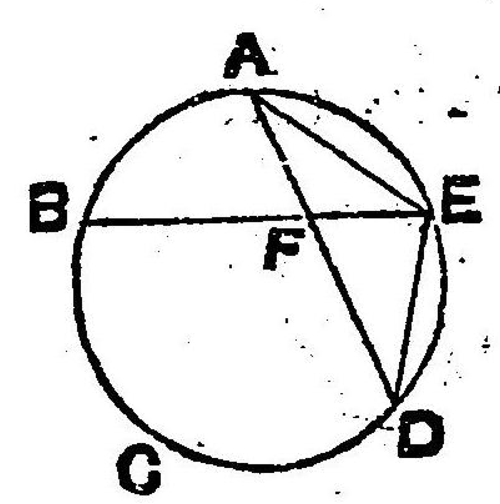
$=2AC(AC-AE)=AC.2EC=AC.DC.$

68. A, B, C, D, E ノ五ツノ點ニテ圓ヲ等分シ AD, BE ヲ點 F ニテ相交ラシムルトキハ $\overline{AE}^2=BE.AF$ ナルコトヲ證セヨ.

[37. 海. 機., 38. 盛. 高. 農.]

證 DE ヲ結ビ付ケヨ. 假設ニ依リテ

弧 AB=弧 AE




ナルユヱ

$\widehat{AEB}=\widehat{ADE}$.

故ニ AE ハ E, F, D ヲ過ル圓ニ切線ナリ.

依リテ $\overline{AE}^2=AD.AF$.

又 弧 AE+弧 ED=弧 AE+弧 AB,

即チ　　弧AED＝弧BAE

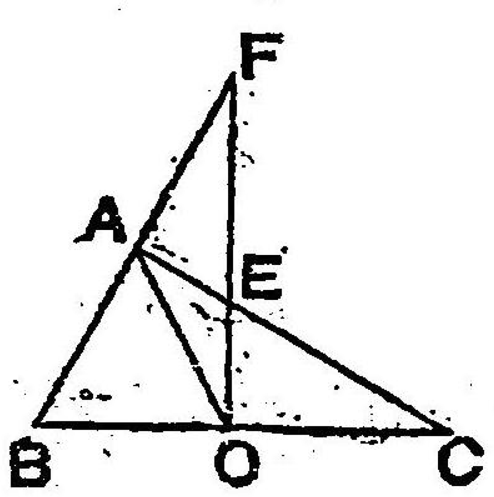
ナルユヱ　　AD＝BE.

故ニ　　$\overline{AE}^2=BE.AF.$

**69.** 直角三角形ABCノ斜邊BCノ中點Oヨリ此ノ邊ノ上ニ垂線ヲ立テ他ノ二邊トソレゾレE,Fニ於テ相交ラシメAOヲ結ビ付クルトキハ　$\overline{AO}^2=OE.OF$

ナルコトヲ證セヨ.　[35. 東.高.師.]

證　Oハ邊BCノ中點ナルユヱOヲ中心トシ, OBヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバCヲモ過リ, 且假設ニ依リテ$B\hat{A}C$ガ直角ナルユヱ亦Aヲモ過ル.




依リテ　　OA＝OB,

從ヒテ　　$O\hat{A}B=O\hat{B}A.$

然ルニ　　$E\hat{A}O=B\hat{A}C-O\hat{A}B=\hat{R}-O\hat{A}B,$

又直角三角形OBFヨリ

$$E\hat{F}A=\hat{R}-O\hat{B}A.$$

故ニ　　$E\hat{A}O=E\hat{F}A,$

是ニ依リテ圓EAFヲ畫ケバAOハ之ニAニ於テ切線トナル. 故ニ　$\overline{AO}^2=OE.OF.$



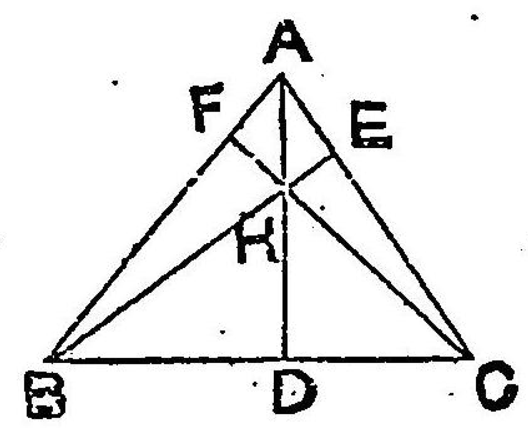
**70.** 三角形ABCノ角頂A,Bヨリ其ノ對邊ニ垂線AD,BEヲ引クトキハ

$$\overline{AB}^2=AC.AE+BC.BD$$

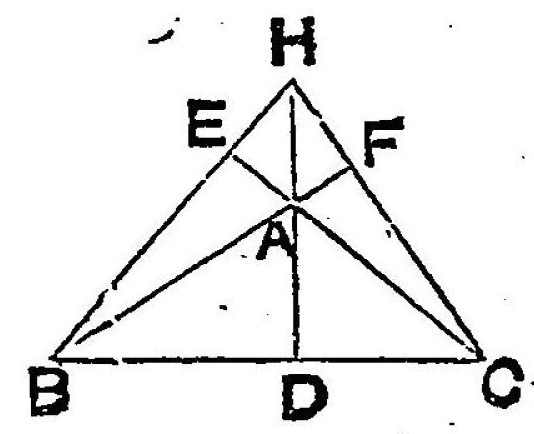
ナルコトヲ證セヨ.　[38. 商船.]

證　AD,BEノ交點ヲHトスレバ,Hハ三角形ABCノ垂心ナルユヱ, CHヲ結ビ付ケ,之ヲ引キ延バシテABトFニ於テ交ラシムレバCFハABニ垂直ナリ.　[A. 75 題]

[1 圖]




[2 圖]




然ルトキハ

$$B\hat{F}C=\hat{R}=B\hat{E}C$$

ナルユヱB,F,E,CハBCヲ徑トスル同一ノ圓周上ニアリ.

故ニ　　AB.AF＝AC.AE,

同樣ニA,F,D,CハACヲ徑トスル同一ノ圓周上ニアルヲ以テ　BA.BF＝BC.BD.

依リテ　AB.AF＋BA.BF＝AC.AE＋BC.BD.

然ルニ　此ノ左邊ノ量＝AB(AF＋BF)

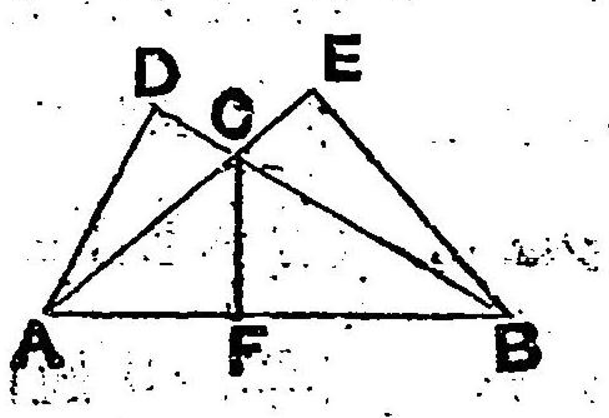
＝AB.AB＝$\overline{AB}^2$.

故ニ　$\overline{AB}^2=AC.AE+BC.BD.$

71. 三角形 ABC ノ角 C ヲ鈍角トシ；A, B ヨリ其ノ對邊ノ延線ヘ下セル垂線ノ趾ヲソレゾレ D, E トシテ次式ヲ證セヨ.

$$\overline{AB}^2=BC.BD+AC.AE.$$ [41. 商船.]

證　C ヨリ AB ニ垂線 CF ヲ下シ, 其ノ趾ヲ F トスレバ




$$C\hat{D}A=\hat{R}=C\hat{F}A$$

ナルユヱ C, D, A, F ハ同一圓周上ニアリ.

依リテ　$BC.BD=BF.BA.$

同様ニ C, E, B, F ハ同一圓周上ニアルユヱ

$$AC.AE=AF.AB.$$

故ニ

$$BC.BD+AC.AE$$
$$=(AF+FB).AB$$
$$=AB.AB=\overline{AB}^2.$$

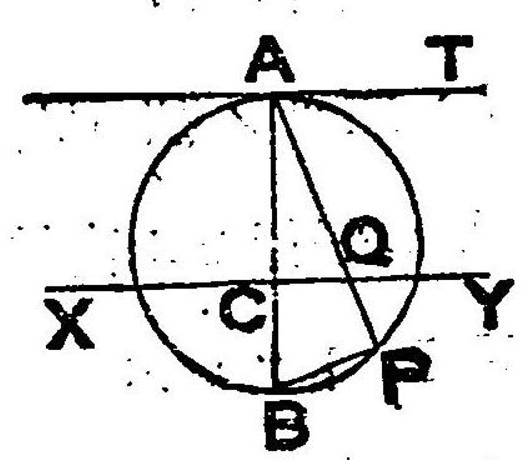
注意　本題ハ 70 題ノ 2 圖ノ場合ニ同ジ.

72. 圓周上ノ一定點 A ヨリ直線 APQ ヲ出シテ圓周ト點 P ニ於テ交ラシメ, 又 A ニ於ケル切線ニ平行ナル定直線ト點 Q ニ於テ交ラシムルトキハ矩形 AP.AQ ハ恒ニ一定ノ面積ヲ有スルコトヲ證セヨ. [40. 商船.]

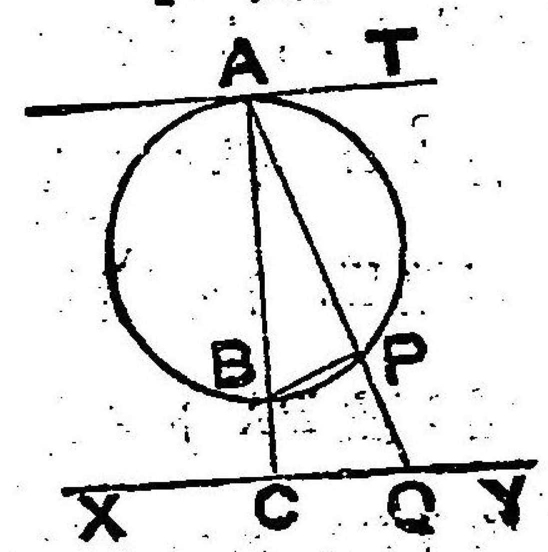


證　切線ヲ AT トシ, 又 A ヲ過リ圓ノ徑 AB ヲ引キ, AB [必要ナラバ其ノ延線] ヲシテ切線 AT ニ平行ナル直線 XY ト點 C ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ何レノ場合ニ於テモ

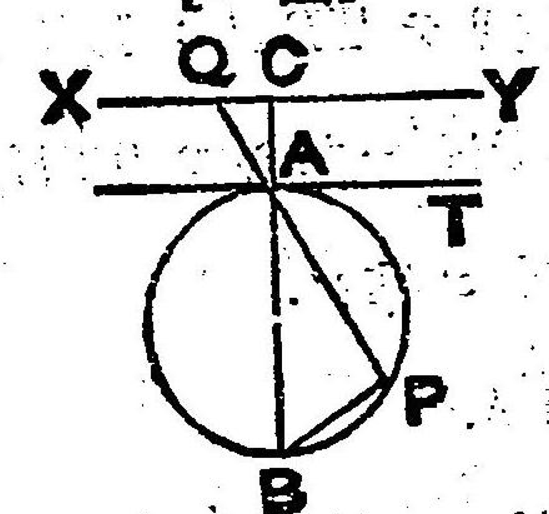
[1 圖]




[2 圖]




[3 圖]




$$B\hat{C}Q[=T\hat{A}C]=\hat{R},$$

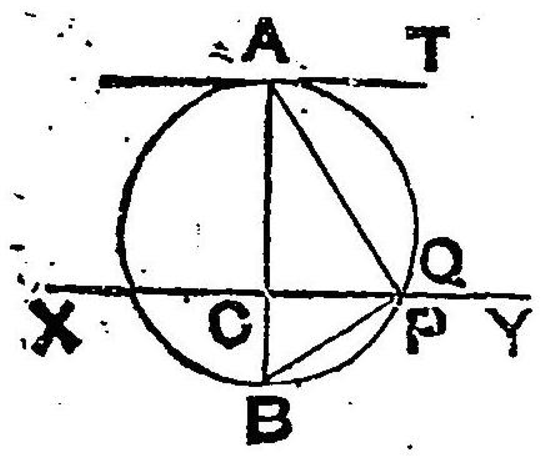
及ビ $B\hat{P}Q[=B\hat{P}A]=\hat{R}$

ナルユヱ P, B, C, Q ハ同一ノ圓周上ニアリ.

故ニ　$AP.AQ=AB.AC.$

而シテ A, B, C ハ定點ナルコト明カナルヲ以テ AB.AC, 從ヒテ AP.AQ ハ一定ノ面積ヲ有ツ.

注意　特ニ P, Q ノ一致スル場合ニハ P, Q ガ近追シタル極限ノ位置トシテ上ノ結果ノ中ニ含マルベシ.



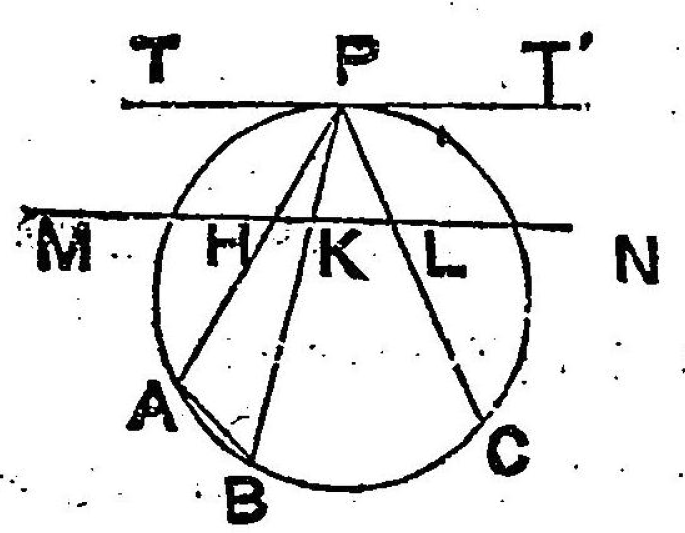

然レドモ此ノ場合ニハ AP, 即チ AQ ノ一定ナルコト，從ヒテ AP.AQ ノ一定ナルコト勿論ナリ．

**73.** 圓周上ノ一點 P ヲ過ル三ツノ弦 PA, PB, PC ト點 P ニ於ケル切線ニ平行セル直線 MN トノ交點ヲソレゾレ H, K, L トスレバ

$$PA.PH=PB.PK=PC.PL$$

ナルコトヲ證セヨ．　[38.° 陸.士.]

**證** P ニ於ケル切線ヲ TPT′ トシ, AB ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ切線 TP ト切點 P ヲ過ル弦 PA トノナス角 TPA ハ此ノ角ノ隣リノ弓形ニ於ケル角 PBA ニ等シ.




又假設ニ依リテ TPT′ ト HKL トハ相平行スルユエ横截線 PH ニ就キテ $T\hat{P}H$, 即チ $T\hat{P}A$ ハ其ノ錯角 $P\hat{H}K$ ニ等シ.

是ニ依リテ　$P\hat{H}K=K\hat{B}A$.

即チ四邊形 HABK ノ H ニ於ケル外角 PHK ガ內對角 KBA ニ等シ.



故ニ HABK ハ圓ニ內接シ得ベキ四邊形ナリ.

依リテ　$PA.PH=PB.PK$,

同樣ニ　$PA.PH=PC.PL$

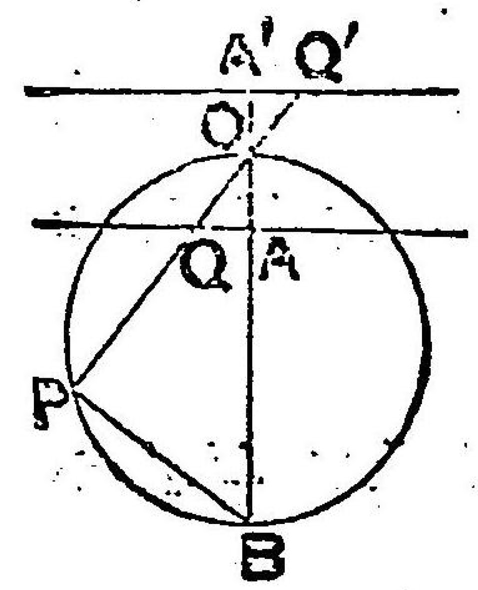
ナルコトヲ證シ得ベシ.

故ニ　$PA.PH=PB.PK=PC.PL$.

**注意** MN ガ三ツノ弦ノ延線ト H, K, L ニ於テ交ル場合モ矢張リ四邊形 HABK, 等ガ圓ニ內接スルコトヨリ同樣ニ證シ得ベシ.

**74.** 或圓周上ノ與ヘラレタル一ツノ點 O ヨリ一ツノ弦 OP ヲ引キ此ノ直線上ニ Q ナル一ツノ點ヲ求メ矩形 OP.OQ ノ面積ヲシテ與ヘラレタル矩形ニ等シカラシムベキ點 Q ノ軌跡如何.　[32. 東.高.工.]

**解** 與ヘラレタル矩形ノ面積ヲ $k^2$ トス.




O ヲ過ル徑 OB, 或ハ其ノ延線上, 及ビ BO ノ延線上ニ點 A 及ビ A′ ヲ

$$OA.OB=k^2,$$
$$OA'.OB=k^2$$

ナル如ク取レ.

然ルトキハ OB 及ビ $k$ ハ一定不易ノ量ナルヲ

以テ OA, OA′ モ亦一定不易ナリ.

而シテ任意ノ弦 OP ヲ引キ OP, 或ハ其ノ延線上, 及ビ PO ノ延線上ニ點 Q, Q′ ヲ

$$OP.OQ = k^2,$$

及ビ
$$OP.OQ' = k^2$$

ナル如ク取レバ前ノ關係ニ依リテ

$$OA.OB = OP.OQ,$$

及ビ
$$OA'.OB = OP.OQ'.$$

故ニ四ツノ點 A, Q, P, B 及ビ A′, Q′, B, P ハソレゾレ同一ノ圓周上ニアリ.

依リテ　$Q\hat{A}B = 2\hat{R} - Q\hat{P}B = \hat{R}.$

及ビ　$Q'\hat{A'}B = Q'\hat{P}B = \hat{R}.$

故ニ要件ニ適スル點ハ定直線 A′OAB 上ノ定點 A, A′ ニ於テ之ニ垂直ナル二直線ノ中, 何レカノ上ニアリ.

逆ニ直線 AQ 及ビ A′Q′ 上ノ任意ノ點ハ要件ニ適スルコトヲ證シ得ベシ[前ノ諸題ニ繰返シタルコトナルユエ此處ニ略ス].

故ニ所要ノ軌跡ハ二ツノ直線 AQ 及ビ A′Q′ ナリ.

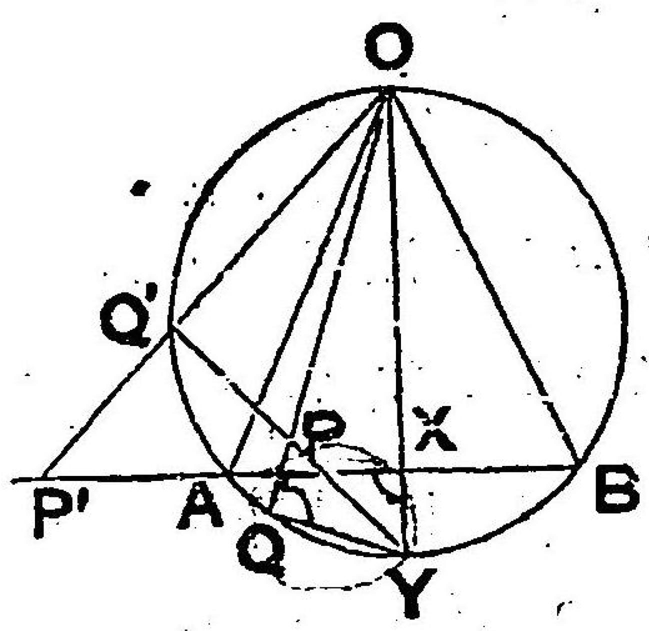
**75.** 二等邊三角形 OAB ノ頂點 O ヨリ任意



ノ直線ヲ引キ底邊 AB ト P ニ於テ交ラシメ外接圓ノ周ト Q ニ於テ交ラシムレバ OP ト OQ トノ包ム矩形ハ恒ニ相等シキコトヲ證セヨ.

[36. 東. 高. 商.]

證　O ヨリ圓ノ徑 OXY ヲ引キ AB トノ交點ヲ X トシ, QY ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ




OA=OB　[假設]

ナルユエ O ハ弧 AOB ノ中點, 從ヒテ Y モ亦弧 AYB ノ中點ニシテ OXY⊥AB ナルコトヲ明カナリ.

即チ　$P\hat{X}Y = \hat{R},$

又　$P\hat{Q}Y = \hat{R}.$

故ニ X, P, Q, Y ハ恒ニ同一圓周上ニアリ.

從ヒテ　$OP.OQ = OX.OY$

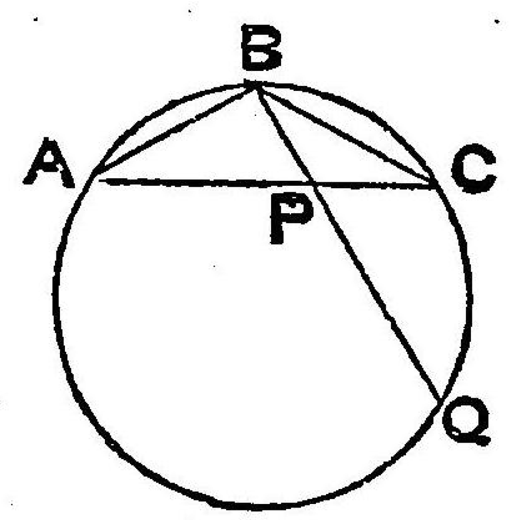
$= \overline{OA}^2$, 即チ一定ノ正方形,

即チ題言ノ如シ.

**注意**　O ニ於テ與ヘラレタル圓ニ切線 OT ヲ作レバ OT ∥ AB ナルユエ 73 題ニ歸ス.

**76.** 圓ノ弧 ABC ノ中點 B ヲ過ル所ノ直線

ガ其ノ弧ノ弦ACト點Pニ於テ交リ同ジ圓周ト點Qニ於テ交ルトセバBP及ビBQノ包ム矩形ハ直線BPQノ何レノ位置ニ於テモ不易ナルコトヲ證セヨ.　[33. 東. 高. 師.]



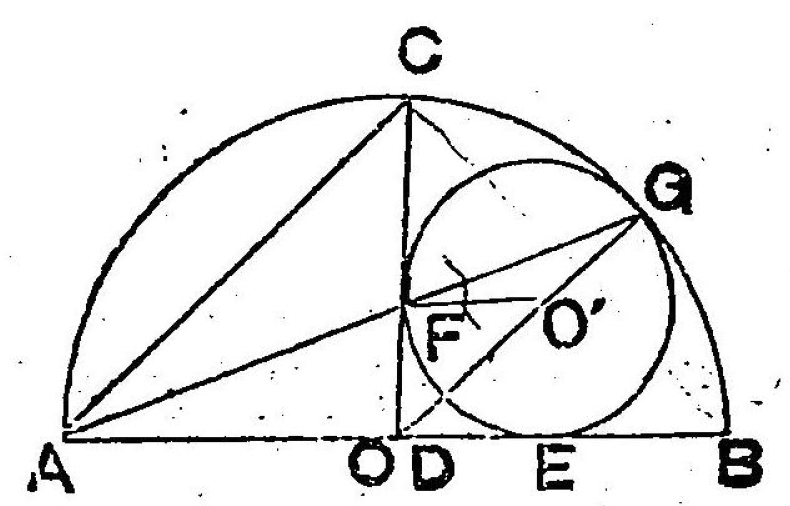

證　弧BA＝弧BCナルユエ

$$BA=BC$$

ナルコトニ注意スレバ全ク75題ニ歸スベシ.

**77.**　半圓周上ノ一點CヨリAB ニ垂線CDヲ引キ, BDト點Eニ於テ, CDト點Fニ於テ, 半圓周ト點Gニ於テ相切スル圓周ヲEFGトスレバ三點A, F, Gハ同一ノ直線上ニアリテ且AE＝ACナルコトヲ證セヨ.　[32. 商船.]

證　先ヅ半圓ACB及ビ圓EFGノ中心ヲソレゾレO, O′トスレバO, O′Gハ同一ノ直線上ニアリ.




依リテAG, FG, 及ビO′Fヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハFハ圓O′ト直線CDトノ切



點ナルユエO′FハCDニ垂直ナリ.

又假設ヨリシテAD, 或ハAOハCDニ垂直ナリ.

故ニAOトFO′トハ相平行ス. 而シテOO′ハCDニ斜線[特ニEトOトガ合スレバ平行], O′Fハ之ニ垂線ナルユエFハO′O上ニアルコト能ハズ, 依リテFハ尙更O′Oヲ超エテBト同ジ側ニアルコトヲ得ズ, 故ニFハO′Oニ關シテBト反對ノ側ニアル點Aト同ジ側ニアリ.

故ニOAトO′Fトハ同ジ方向ヲ有ツ平行線ナルユエ

$$A\hat{O}G=F\hat{O'}G,$$

然ルニ此ノ相等シキ角ハソレゾレ圓O, 及ビ圓O′ノ半徑ヲ二等邊トスル二等邊三角形ノ頂角ナリ. 故ニ其ノ底角ハ彼此皆相等シク, 例ヘバ

$$O\hat{G}A=O'\hat{G}F.$$

且前ニ云ヘルコトヨリ $O\hat{G}A$ ト $O'\hat{G}F$, 卽チ $O\hat{G}F$ トハOO′ニ關シテ同ジ側ニアリ.

從ヒテ二ツノ角ノ他ノ邊GAトGFトハ相一致セザルベカラズ. 卽チA, F, Gハ同一ノ直線上ニアリ. 斯クシテAFGハ圓O′ノ割線, AEハ假設ニ依リテ切線ナルユエ

$$\therefore \overline{AE}^2=AF.AG.$$

GB, CB ヲ結ビ付クレバ $A\hat{G}B$, $A\hat{C}B$ ハ直角ニシテ, D ニ於ケル角モ亦直角ナルコトヨリ

$$AF.AG=AD.AB=\overline{AC}^2,$$

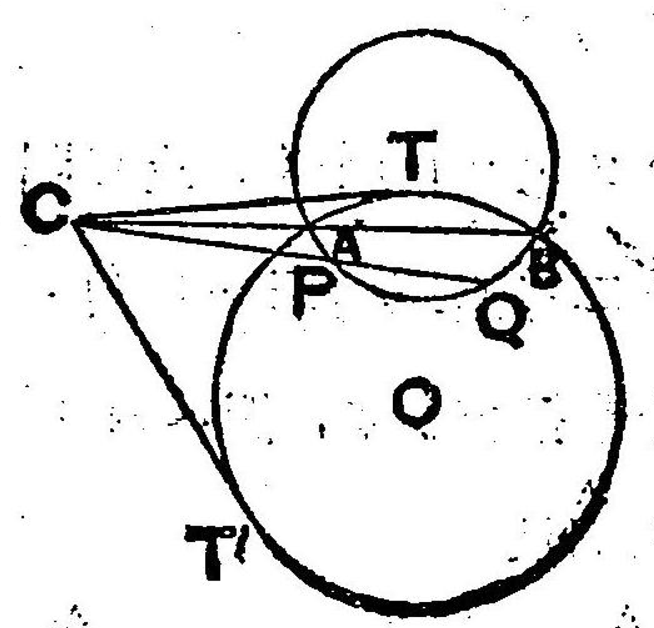
故ニ $\overline{AE}^2=\overline{AC}^2$,

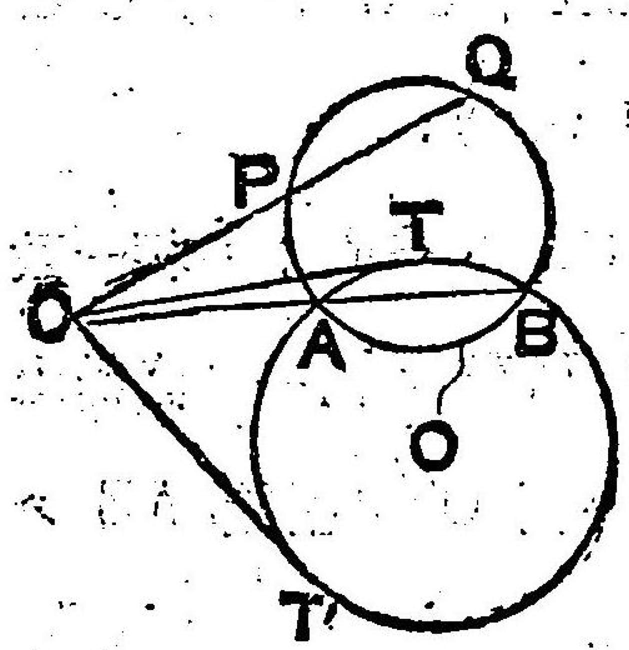
或ハ $AE=AC$.

78. 與ヘラレタル二ツノ點ヲ過リ且與ヘラレタル一ツノ圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

[32. 東. 高. 商.]

解 與ヘラレタル二點ヲ P, Q; 與ヘラレタル圓ヲ O トス. P, Q ガ二ツトモ圓 O ノ內, 或ハ外ニアラザレバ問題ハ不能ナルコト明カナリ. 依リテ P, Q ハ共ニ圓ノ內, 或ハ外ニアルモノトセン.




先ヅ P, Q ヲ過リ任意ノ圓ヲ畫キテ圓 O トノ二ツノ交點 A, B ヲ求メヨ.

然ルトキハ PQ ト AB トノ關係的位置ニ就キテ



次ノ各ノ場合ニ區別スベシ.

場合 I. PQ ト AB トノ延線ガ一點 C ニ於テ交ルトキ.

點 C ヨリ圓 O ニ二ツノ切線 CT, CT' ヲ引キ其ノ切點ヲソレゾレ T, T' トスレバ P, Q, T, 或ハ P, Q, T' ヲ過ル二ツノ圓ハ所要ノ圓ナルベシ.

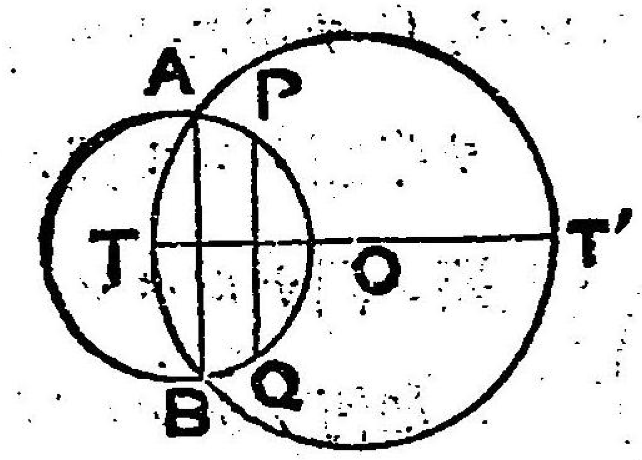
如何トナレバ作圖ニ依リテ

$$CP.CQ=CA.CB=\overline{CT}^2=\overline{CT'}^2.$$

故ニ CT ハ圓 PQT 及ビ圓 ABT ニ點 T ニ於ケル公切線ニシテ, 同ジク CT' ハ兩圓ニ點 T' ニ於ケル公切線ナリ, 故ニ圓 PQT, ABT ハ點 T ニ於テ切シ, 圓 PQT', ABT' ハ點 T' ニ於テ切ス.

但此ノ場合ニ於テ AB ガ圓 O ノ切線ナルトキハ一ツノ圓ハ不能トナル.

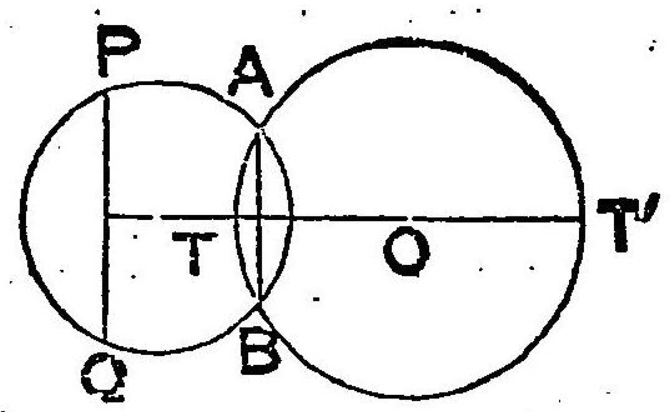
場合 II. AB ガ PQ ニ平行ナルトキ.




PQ ノ垂直二等分線ガ圓周 O ト交ル點ヲ T, T' トスレバ P, Q, T 或ハ P, Q, T' ヲ過ル二ツノ圓ハ所要ノ圓ナルベシ.

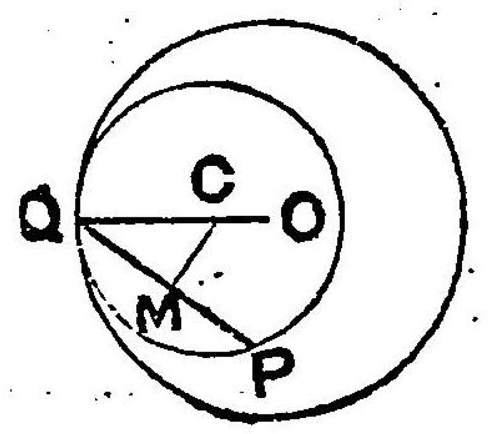
如何トナレバ PQ ト AB トハ圓 PQBA ニ於テ

平行ナル二ツノ弦ナルユヱ PQ ノ垂直二等分線

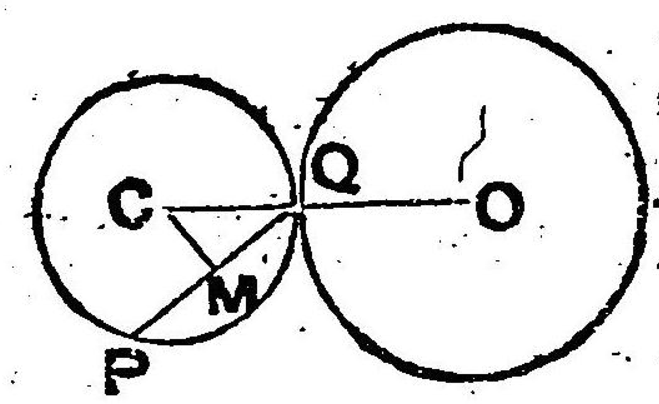



ハ又 AB ノ垂直二等分線ニシテ, PQ ノ垂直二等分線ハ圓PQT, 及ビ圓 PQT′ ノ中心ヲ通リ, AB ノ垂直二等分線ハ圓 O ノ中心ヲ過ル, 依リテ圓 PQT ト圓 O トノ共通點 T, 及ビ圓 PQT′ ト圓 O トノ共通點 T′ ハソレゾレ中心線上ニアリ. 故ニ圓 PQT ト圓 O 及ビ圓 PQT′ ト圓 O トハソレゾレ相切スベシ. 但此ノ場合ニ於テ AB ガ圓 O ノ切線ナルトキハ一ツノ圓ハ不能トナル.

**場合 III.**　二點 P, Q ノ中, 一ツ, 例ヘバ Q ガ圓周 O ノ上ニアルトキ.




OQ 或ハ其ノ延線ト PQ ノ垂直二等分線トノ交點ヲ C トスレバ, C ヲ中心トシ, CQ ヲ半徑トスル圓ハ所要ノ圓ナルベシ.



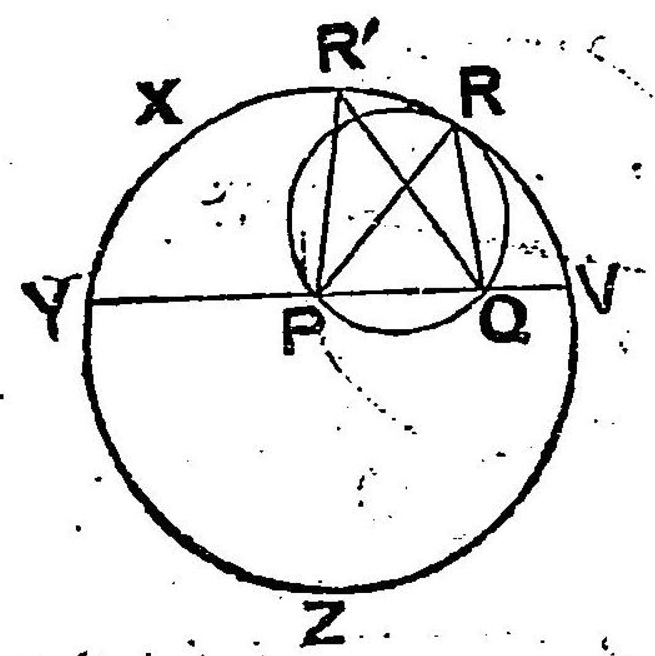

如何トナレバ圓 C ト圓 O トノ中心線 OC ハ二ツノ圓周ニ



共通ナル一點 Q ヲ過ルユヱ二ツノ圓ハ互ニ相切スベク, C ハ PQ ノ垂直二等分線上ノ一點ナルユヱ CP＝CQ ニシテ圓周 C ハ點 P ヲモ過レバナリ. 但此ノ場合ニ於テ PQ ガ OQ ニ垂直ナルトキハ解ナシ.

**79.**　與ヘラレタル圓內ノ二ツノ定點 P, Q ヨリ此ノ圓周上ノ一點 R ニ引ケル二ツノ直線ノナス角 PRQ ガ最大ナルベキ點 R ノ位置ヲ求メヨ.　[34. 東. 高. 工.]

**解**　與ヘラレタル圓ヲ XYZV トシ; P, Q ヲ




結ビ付ケ, 之ヲ双方ニ引キ延バシテ圓周トノ交點ヲ Y, V トス. サテ 78 題ニ依リテ點 P, Q ヲ過リ圓 XYZV ニ切スル圓ハ二ツアリ, 而シテ PQ, 或ハ YV ニ關シテ互ニ反對ノ側ニアリ.

依リテ P, Q ヲ過リ弧 ~~PRQ~~ YXV ニ切スル圓ノ切點 R ハ所要ノ點ノ一ツナルベシ.

如何トナレバ弧 YXV ノ上ニ於テ R ノ他ナル

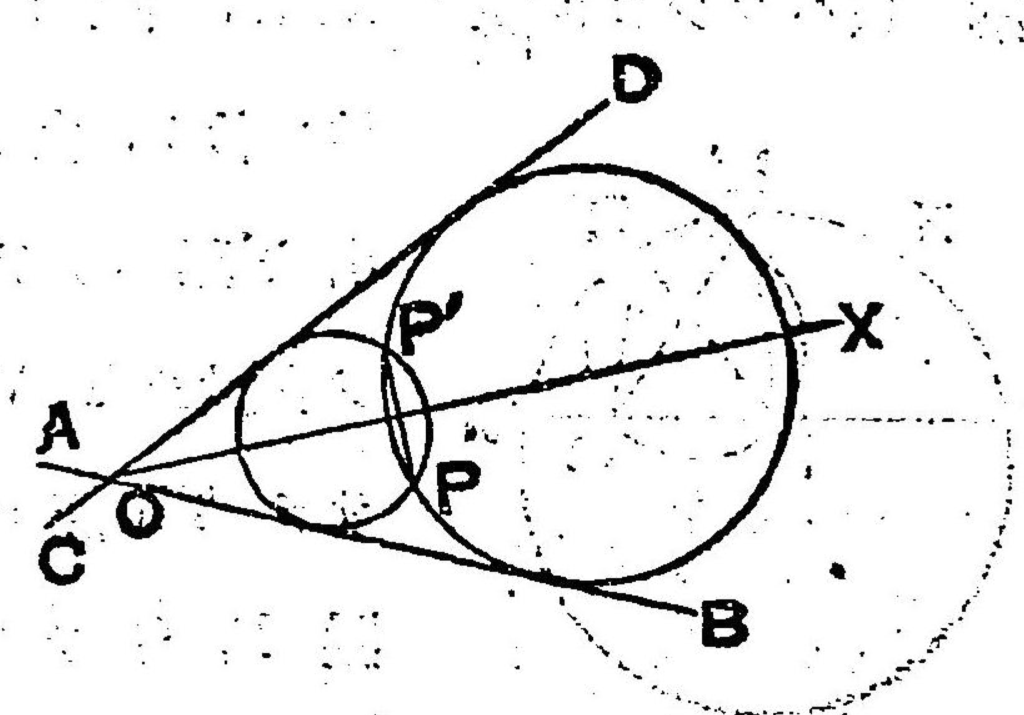
任意ノ點 R′ ハ弓形 PRQ ノ弦 PQ ニ關シテ此ノ弓形ト同ジ側ニ，且其ノ外ニアルユヱ $P\hat{R'}Q$ ハ $P\hat{R}Q$ ヨリ小ナレバナリ．

同様ニ點 P, Q ヲ過リテ弧 YZV ニ切スル圓ノ切點モ亦所要ノ點ノ一ツナルベシ．

**80**、互ニ相交ル二直線ト一點トヲ與ヘテ其ノ點ヲ通過シテ二直線ニ切スル圓ヲ畫ケ．

[39. 商船., 42. 大高工]

**解** 相交ル二直線ヲ AOB, COD; 與ヘラレタ




ル一點ヲ P トス． $B\hat{O}D$ ノ二等分線ヲ OX トスレバ點 P ノ位置ニ依リテ次ノ各場合ヲ生ズベシ．

**場合 I.** P ガ $B\hat{O}D$ 内ニアリテ OX 上ニアラザルトキ．

OX ニ關シテ P ノ對稱點 P′ ヲ求メ; P, P′ ヲ過リ OB 或ハ OD ニ切スル圓ヲ畫ケバ [B. 88 題].



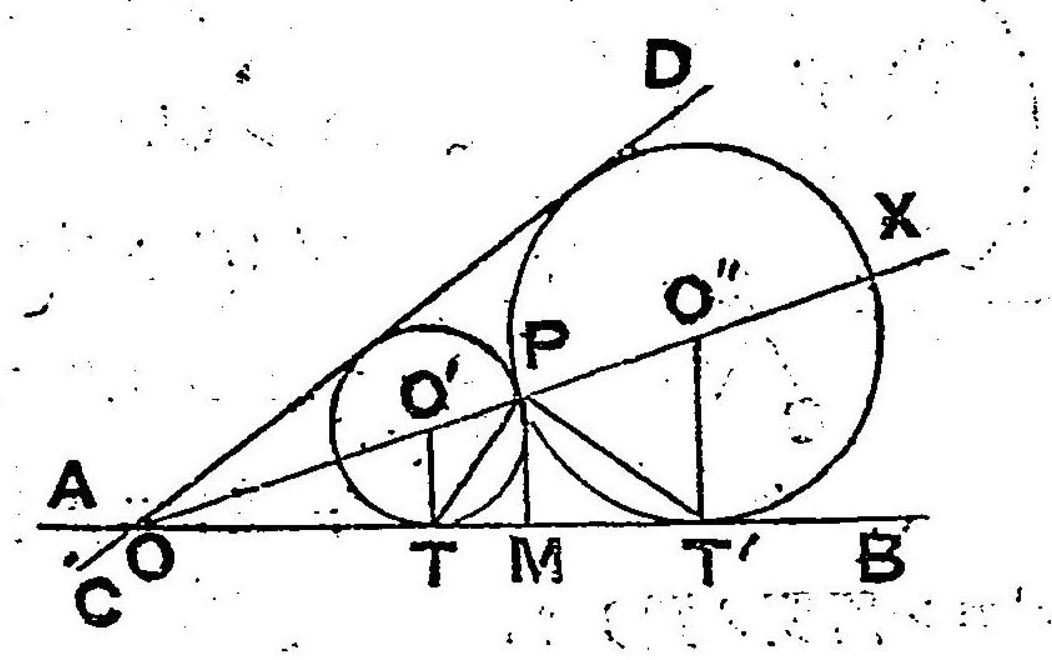
コレ所要ノ圓ナリ．

如何トナレバ作圖ニ依リテ OX ハ PP′ ノ垂直二等分線ナルヲ以テ PP′ ヲ過ル圓ノ中心ハ OX 上ニアリ，而シテ OX ハ二直線 OB, OD ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナレバナリ．

而シテ此ノ場合ニハ二ツノ解アリ．

**場合 II.** P ガ $B\hat{O}D$ ノ二等分線 OX 上ニアルトキ．

OB ニ垂線 PM ヲ引キ，$O\hat{P}M$ ノ二等分線 PT




ト OB トノ交點ヲ T トシ，OB ニ垂線 O′T ヲ立テ，OX トノ交點ヲ O′ トスレバ O′ ハ所要ノ一ツノ圓ノ中心ナリ．

如何トナレバ O′T ∥ PM ナルユヱ

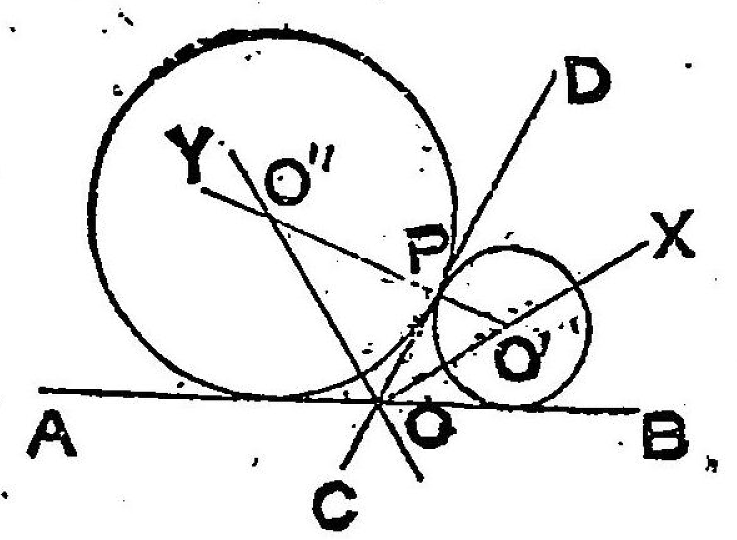
$$\therefore O'\hat{T}P = T\hat{P}M = O'\hat{P}T.$$

故ニ O′ ヲ中心トシ O′T ヲ半徑トスル圓ハ OB ニ切

シ，從ヒテ OD ニ切スベク，且點 P ヲ過レバナリ．又 $O\hat{P}M$ ノ補角ノ二等分線ト OB トノ交點ヲ T′ トシ，OB ニ垂直ナル O″T′ ト XO トノ交點ヲ O″ トスレバ O″ ヲ中心トシ，O″T′ ヲ半徑トスル圓モ亦要件ニ適スルコトハ同理ニ依リテ明カナルベシ．

場合 III．P ガ角ノ一邊，例ヘバ OD 上ニアルトキ．

點 P ニ於テ OD ニ垂線ヲ作リ，$B\hat{O}D$ 及ビ其ノ補角 DOA ノ二等分線トノ交點ヲソレゾレ O′, O″ トスレバ O′, O″ ヲ中心トシソレゾレ O′P, O″P ヲ半徑トスル圓ヲ畫ケバコレ所要ノ圓ナリ．




如何トナレバ O′, O″ ハ二直線 AB, CD ヨリ等距離ナル點ノ軌跡上ノ點ナレバナリ．

場合 IV．P ガ O ト一致スルトキ．

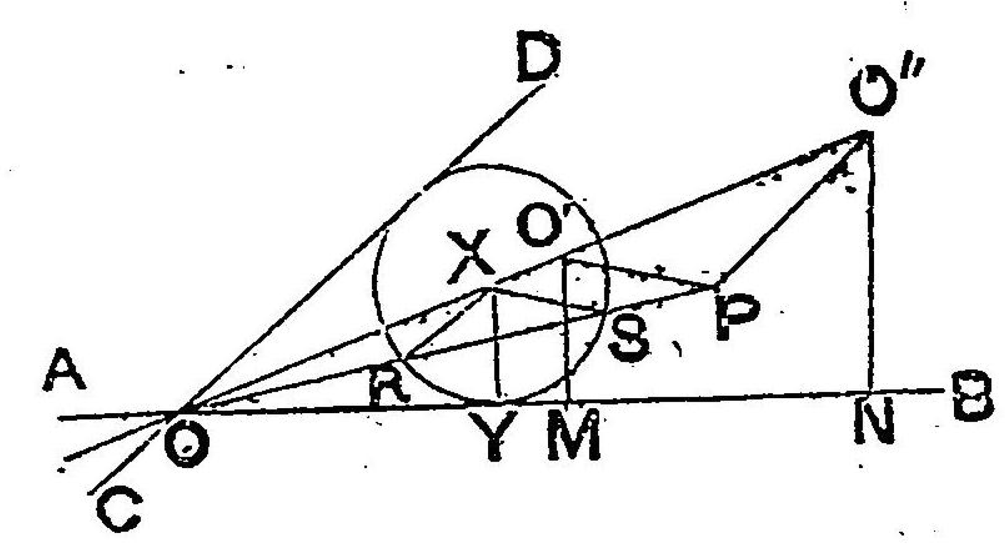
問題ハ不能ナリ．

別解　場合 I ノ別解ヲ次ニ示サン．

AB, CD ニ切スル任意ノ圓ヲ畫ケバ其ノ中心



X ハ OO″ 上ニアリ．サテ OP ヲ結ビ付ケ，其ノ圓




X ニ交ル點ヲ R, S トシ；RX, SX ヲ結ビ付ケ，P ヨリ O′P, PO″ ヲ引キ，ソレゾレ SX, RX ニ平行ナラシムレバ O′ 及ビ O″ ハ所要ノ圓ノ中心ナリ．

如何トナレバ O′ ヨリ OB ニ垂線 O′M ヲ引ケバ

$$O'P : SX = O'O : XO = O'M : XY,$$

故ニ　$O'P : O'M = SX : XY,$

然ルニ　$SX = XY.$

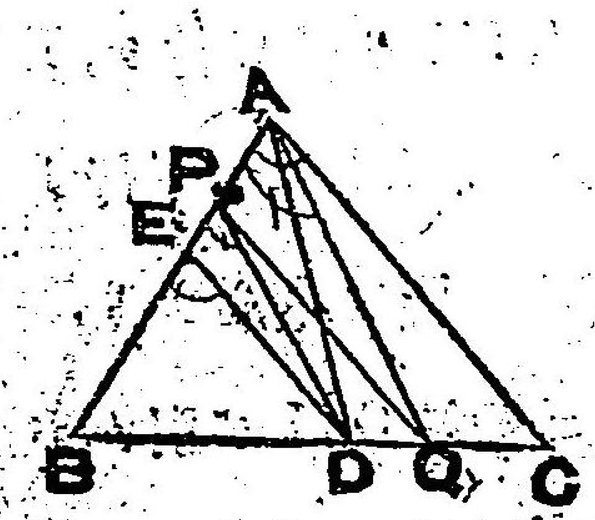
故ニ　$O'P = O'M,$

依リテ O′ ヲ中心トシ，O′P ヲ半徑トスル圓ハ點 M ヲ過ルベク，而シテ O′M ハ AB ニ垂線ナルユエ此ノ圓ハ AB ニ切スベク，從ヒテ亦 CD ニ切スベク，同樣ニ O″ ヲ中心トシ，O″P ヲ半徑トスル圓モ亦 AB ニ切スベク，從ヒテ亦 CD ニモ切スベケレバナリ．

# D. 比例

1. 三角形ノ一邊上ノ與ヘラレタル一點ヲ過リテ直線ヲ引キ此ノ三角形ヲ與ヘラレタル比ニ二分セヨ。 [41. 八高.]

與ヘラレタル三角形ヲ ABC トシ, AB 上ノ一點 P ヲ過ル直線ニ依リテ本形ヲ與ヘラレタル比 $m:n$ ニ二分セントス.




**作圖** BA ヲ E ニ於テ $BE:EA=m:n$ ナル如ク內分シタルトキ P ハ E ト A トノ間ニアルモノト假定ス. BC ヲ D ニ於テ $BD:DC=m:n$ ナル如ク內分シ, PD ヲ結ビ付ケヨ. PD ニ平行ニ AQ ヲ引キ, BC トノ交點ヲ Q トシ, PQ ヲ結ビ付クレバ, コレ所要ノ直線ナルベシ.

**證** 先ヅ點 Q ハ B ト C トノ間ニアルコトヲ證セン. ED 及ビ AD ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ $BE:EA=m:n$

$=BD:DC$ [作圖]



ナルニヨリ ED, AC ハ相平行シ, 又 PD ト AQ トモ互ニ平行ナリ [作圖]

故ニ $B\hat{E}D=B\hat{A}C$,

及ビ $B\hat{P}D=B\hat{A}Q$.

然ルニ $B\hat{E}D$ ハ三角形 PED ノ E ニ於ケル外角ナルニヨリ內對角ノ一ツ $E\hat{P}D$, 卽チ $B\hat{P}D$ ヨリ大ナリ. 從ヒテ $B\hat{A}C > B\hat{A}Q$.

依リテ AQ ハ $B\hat{A}C$ 內ヲ通リ, B ト C トノ間ノ一點 Q ニ於テ BC ト交ル.

サテ $\triangle PBQ$ : 四邊形 APQC

$=\triangle PBD+\triangle PDQ : \triangle APQ+\triangle AQC$

$=\triangle PBD+\triangle APD : \triangle ADQ+\triangle AQC$

[$\because AQ \parallel PD$]

$=\triangle ABD : \triangle ADC$

$=BD:DC=m:n.$

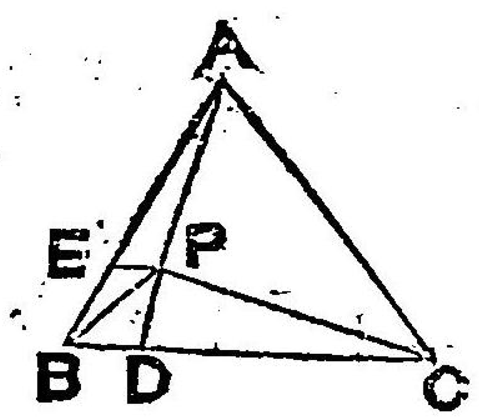
故ニ PQ ハ所要ノ直線ナリ.

**吟味** P ガ E ト一致スルトキ, 卽チ

$BP:PA=m:n$, 或ハ $BP:PA=n:m$ ナルトキ, PC ハ所要ノ直線ナルコト明カナリ. 尙 P ガ他ノ如何ナル位置ニアリトモ始ニ假定シタル如キ注意ヲ要スベシ.

2. 三角形 ABC ノ形內ニ一點 P ヲ求メ, 三ツノ三角形 APB, BPC, CPA ノ面積ノ比ヲ 1, 2, 3 ノ如クナラシメヨ. [41. 商船.]

**作圖** 先ヅ BC ノ上ニ點 D ヲ




$$BD=\frac{1}{1+2+3}BC=\frac{1}{6}BC$$

ナル如ク取リ, 又 BA ノ上ニ點 E ヲ

$$BE=\frac{2}{1+2+3}AB=\frac{2}{6}AB$$

ナル如ク取レ. D, E ヲ過リテソレゾレ AB, BC ニ平行ナル直線ヲ引キ其ノ交點ヲ P トスレバ P ハ卽チ所要ノ點ナルベシ.

證 $$\frac{\triangle APB}{\triangle ABC}=\frac{\text{P ヨリ AB ヘノ垂線}}{\text{C ヨリ AB ヘノ垂線}}$$

$$=\frac{\text{D ヨリ AB ヘノ垂線}}{\text{C ヨリ AB ヘノ垂線}}\ [\because DP \parallel BA]$$

$$=\frac{DB}{CB}=\frac{1}{6}.\qquad [\text{作圖}]$$

故ニ $\triangle APB=\frac{1}{6}\triangle ABC.$

同理ニ依リテ $\triangle BPC=\frac{2}{6}\triangle ABC.$

故ニ $\triangle CPA=\triangle ABC-(\triangle APB+\triangle BPC)$

$$=\triangle ABC-\frac{3}{6}\triangle ABC=\frac{3}{6}\triangle ABC.$$

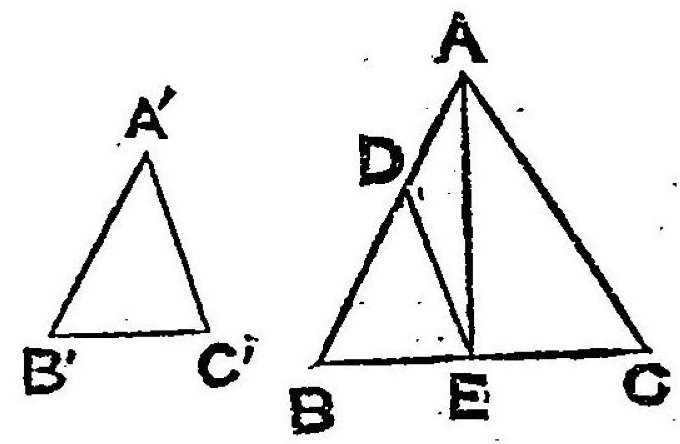
依リテ $\triangle APB:\triangle BPC:\triangle CPA$

$$=\frac{1}{6}:\frac{2}{6}:\frac{3}{6}=1:2:3.$$



3. 一ツノ角ガ相等シキ二ツノ三角形ノ比ハ此ノ角ヲ夾ム二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

二ツノ三角形 ABC, A'B'C' ニ於テ $\hat{B}=\hat{B'}$ ナルトキハ




$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB.BC}{A'B'.B'C'}$$

ナルベシ.

**證** 三角形 A'B'C' ノ角頂 B' ヲ三角形 ABC ノ角頂 B ノ上ニ重ネ, 邊 B'C' ヲ BC ニ沿ハシメ, A' ヲ BC ニ關シテ A ト同ジ側ニ置ケ. 然ルトキハ假設ニ依リテ $\hat{B'}=\hat{B}$ ナルユヱ B'A' ハ BA ニ沿フ. 故ニ C', A' ノ落ツル位置ハソレゾレ BC, BA, 若シクハ其ノ延線上ニアリ.

今各ノ位置ヲ E, D トシ, AE ヲ結ビ付ケヨ.

サテ二ツノ三角形 EAB, EDB ニ於テ E ヲ共通ノ角頂ト見做セバ底邊ハ何レモ直線 AB 上ニアルユヱ其ノ高サ相等シ.

而シテ高サノ相等シキ二ツノ三角形ノ比ハ底ノ比ニ等シ.

依リテ $$\frac{\triangle EAB}{\triangle EDB}=\frac{AB}{DB}.$$

同樣ニ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AEB}=\dfrac{BC}{BE}$.

故ニ $\dfrac{\triangle EAB}{\triangle EDB}\cdot\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AEB}=\dfrac{AB}{DB}\cdot\dfrac{BC}{BE}$,

或ハ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DBE}=\dfrac{AB.BC}{DB.BE}$.

然ルニ前ニ云ヘルコトヨリ

$$\triangle DBE\equiv\triangle A'B'C',$$

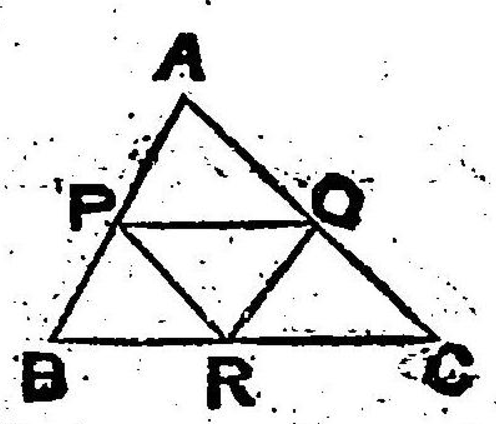
$$DB=A'B',\ BE=B'C'.$$

故ニ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB.BC}{A'B'.B'C'}$.

**4.** 三角形 ABC ノ邊 AB 上ノ一點 P ヨリ邊 BC ト平行ニ直線 PQ ヲ引キテ邊 AC ニ Q ニ於テ交ラシメ, Q ヨリ邊 AB ニ平行ニ直線 QR ヲ引キテ邊 BC ニ R ニ於テ交ラシメ, R ヨリ邊 CA ニ平行ニ直線ヲ引クトキ其ノ直線ガ點 P ヲ過レバ P ハ AB ノ中點ナリ, 其ノ證ヲ問フ.

[42. 商船.]

**證** 假設ニ依リテ PQ ハ BC ニ平行ナルユエ




$$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}.$$

又 QR ハ AB ニ平行ナルユエ $=\dfrac{BR}{RC}$,

尚 RP ハ AC ニ平行ナル



ユエ $=\dfrac{BP}{PA}$.

故ニ $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{BP}{PA}$,

或ハ $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$, 故ニ $AP=BP$.

即チ P ハ AB ノ中點ナリ.

**別證** 作圖ニ依リテ $AP \parallel QR$, $AQ \parallel RP$,

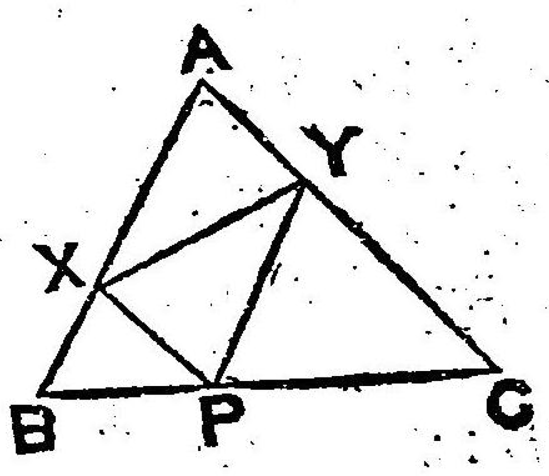
故ニ AQRP ハ平行四邊形ニシテ $AP=QR$,

同樣ニ PQRB ハ平行四邊形ニシテ $PB=QR$,

故ニ $AP=PB$.

**5.** 三角形 ABC ニ於テ底 BC 上ノ一點 P ヨリ AC, AB ニ平行ニ PX, PY ヲ引キテ AB, AC ニソレゾレ X, Y ニ於テ交ラシムルトキハ三角形 AXY ハ三角形 BPX, CPY ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ. [35. 海. 機.]

**解** 三角形 BPX ト AXY トハ AB ノ上ニ底邊ヲ有シ, 假設ニ依リテ AB ニ平行ナル直線 PY ノ上ニ頂點ヲ有ツユエ高サ相等シ. 故ニ




$\triangle BPX:\triangle AXY$

$=BX:AX$ ... (1)

同理ニ依リテ $\triangle AXY:\triangle CPY=AY:CY$ ... (2)

然ルニ PX ハ AC ニ平行ナルコトヨリ

$$BX:AX=BP:CP,$$

倘 PY ハ AB ニ平行ナルコトヨリ

$$BP:CP=AY:CY,$$

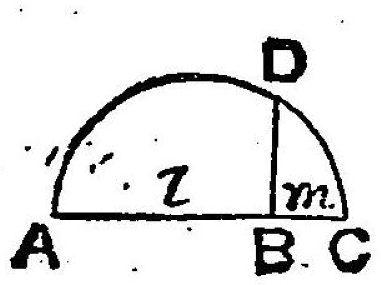
故ニ $$BX:AX=AY:CY,$$

即チ (1), (2) ノ右邊ハ相等シ.

從ヒテ $\triangle BPX:\triangle AXY=\triangle AXY:\triangle CPY.$

6. 與ヘラレタル二ツノ直線ノ間ノ比例中項ナル直線ヲ求メヨ. [31. 東.高.商.]

與ヘラレタル二ツノ直線ヲ $l, m$ トシ, 其ノ比例中項ニ等シキ直線ヲ求メントス.




解 I. 任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ上ニ $AB=l, BC=m$ ナル如ク順次ニ同ジ方向ニ取リ, AC ヲ徑トシテ半圓ヲ畫キ, BC ニ垂線 BD ヲ引キテ半圓周ト D ニ於テ交ラシムレバ BD ハ所要ノ直線ナリ.

證 $AB.BC=\overline{BD}^2$, [C. 51 題]

或ハ作圖ニ依リテ $l.m=\overline{BD}^2$,

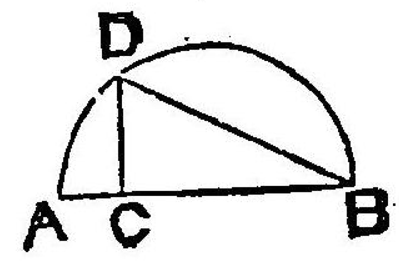
即チ $l:BD=BD:m$.

解 II. $l>m$ ト假定ス.

任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ上ニ $AB=l, BC=m$ ヲ



互ニ反對ノ方向ニ取リ假設ヨリシテ C ハ AB ノ上ニアルコト明カナリ], AB ヲ徑トスル半圓ヲ畫キ, AB ニ垂線 CD ヲ立テ半圓周ト D ニ於テ交ラシメ, BD ヲ結ビ付クレバ BD ハ所要ノ直線ナリ.



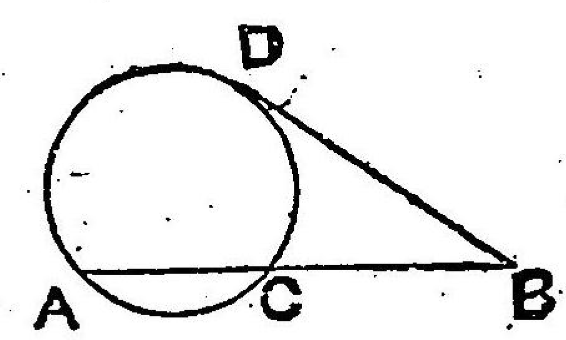

證 $\overline{BD}^2=BA.BC$, [C. 24 題]

或ハ作圖ニ依リテ $\overline{BD}^2=l.m$,

即チ $l:BD=BD:m$.

解 III. $l>m$ ト假定ス.

任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ上ニ $AB=l, BC=m$ ヲ互ニ反對ノ方向ニ取リ, AC ヲ弦トスル任意ノ圓ヲ畫キ B ヨリ之ニ切線ヲ引キ其ノ切點ヲ D トスレバ BD ハ所要ノ直線ナリ.



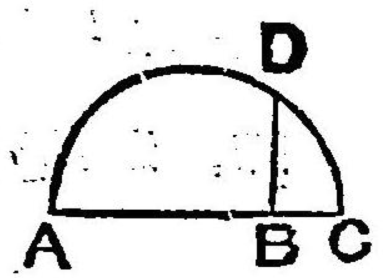

證 定理ニ依リ $\overline{BD}^2=BA.BC$, 或ハ作圖ニ依リテ $\overline{BD}^2=l.m$, 即チ $l:BD=BD:m$.

7. 二ツノ正方形ノ比例中項ニ等シキ正方形ヲ作レ. [38. 商船.]

與ヘラレタル二ツノ正方形ヲ X, Y トシ, 他ノ一ツノ正方形 Z ヲ作リテ $X:Z=Z:Y$

ナラシメントス.

**作圖**　任意ノ直線 ABC ヲ引キ, 其ノ上ニ同ジ方向ニ X ノ一邊ニ等シキ分線 AB 及ビ Y ノ一邊ニ等シキ分線 BC ヲ取レ.




而シテ AC ヲ徑トシテ半圓ヲ畫キ, B ニ於テ AC ニ垂線 BD ヲ引キ半圓周トノ交點ヲ D トスレバ BD ヲ一邊トスル正方形ハ所要ノモノナリ.

**證**　$AB : BD = BD : BC$ [6. 題解 I.]

故ニ　$\overline{AB}^2 : \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BC}^2$,

或ハ作圖ニ依リテ　$X : \overline{BD}^2 = \overline{BD}^2 : Y$,

即チ $\overline{BD}^2$ ハ所要ノ正方形ニ相當ス.

**注意**　本題ハ斯クニツノ正方形ノ邊ノ比例中項ナル直線ヲ求ムルコトニ歸スルユヱ他ノ作圖法モ前題ニ述ベタルモノニ同ジ.

**8.**　二ツノ三角形ガ相似ナル場合ノ要件ヲ列擧セヨ.　[34. 大.高.工.]

**解**　二ツノ三角形 ABC, A'B'C' ガ相似ナル場合ノ要件ハ次ノ如シ.

(I)　$\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, [從ヒテ $\hat{C}=\hat{C}'$].

(II)　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.



(III)　$\hat{A}=\hat{A}'$, $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

(IV)　$\hat{A}=\hat{A}'$, $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$ ニシテ且次ノ何レカ一ツニ適合スルコト.

(1)　$BC>AB$ [或ハ $B'C'>A'B'$];

(2)　$\hat{C}>\hat{R}$, $\hat{C}'>\hat{R}$.

(3)　$\hat{C}=\hat{C}'<\hat{R}$.

(4)　$\hat{C}=\hat{C}'=\hat{R}$.

(5)　$\hat{A}\geqq\hat{R}$.

等.

**注意**　本題ハ極メテ漠然タルモノニシテ, 單ニ二ツノ三角形ガ相似ナルベキ要件ハ上ニ列擧シタルモノノミニ止マラズ. 然レドモ二ツノ三角形ガ相似ナルベキ要件ノ最モ普通ニシテ根本的ナルモノハ上ニ述ベタルモノナリ. 故ニ末尾ニ「等」ノ一字ヲ加ヘ置キタリ.

**9.**　相似三角形ノ性質ヲ列擧セヨ. [35.海.兵.]

**解**　二ツノ三角形ガ互ニ相似ナルトキハ先ヅ定義ヨリ來ル必然ノ結果トシテ

(I)　對應スル角ハソレゾレ相等シ.

(II)　對應スル邊ハソレゾレ比例ヲナス.

次ニ又

(III)* 對應スル線ノ比ハ相似ノ比ニ等シ.

(IV) 周ノ比ハ相似ノ比ニ等シ.

(V) 面積ノ比ハ相似ノ比ノ二乘比[換言スレバ對應スル邊ノ上ノ正方形ノ比]ニ等シ.

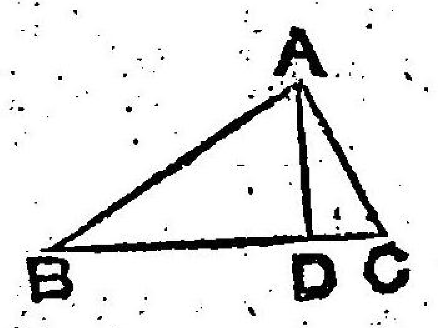
等ノ性質ヲ有ス.

注意 I. 前題ノ注意ヲ參考セヨ.

注意* II. 對應スル線トハ例ヘバ對應スル角頂ヨリ各對邊ヘ引ケル垂線,中線ノ如キモノヲ云フ. 又相似ノ比トハ對應スル邊ノ比ノコトナリ.

**10.** 直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ハ三角形ヲ互ニ相似ナル二ツノ三角形ニ分ツコトヲ證セヨ. [31. 海.兵.]

Aガ直角ナル直角三角形ABCニ於テAヨリ斜邊BCニ引ケル垂線ヲADトスレバ △ABD∽△CAD ナルベシ.




**證** 二ツノ三角形ABD, CADノDニ於ケル角ハ直角ニシテ相等シク,又他ノ一角BAD,即チ $C\hat{A}D$ ノ餘角ハ $A\hat{C}D$ ニ等シ.

故ニ △ABD∽△CAD.

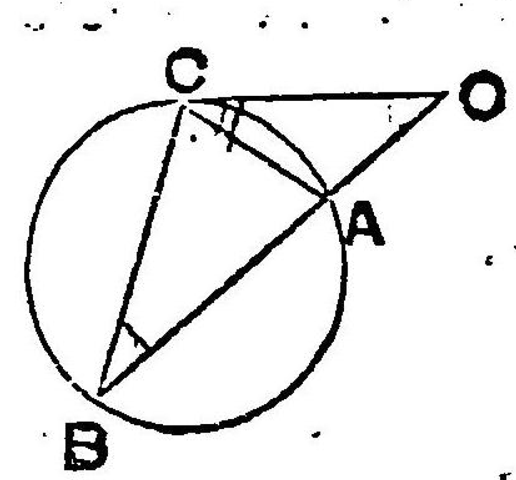
**注意** 尙此ノ二ツノ三角形ハ始ノ三角形ABC



トモ相似ナリ.

**11.** 圓外ノ一點Oヨリ切線OC及ビ割線OABヲ作ルトキハ三角形OBC, OCAハ相似ナルコトヲ證セヨ. [31. 海.兵.]

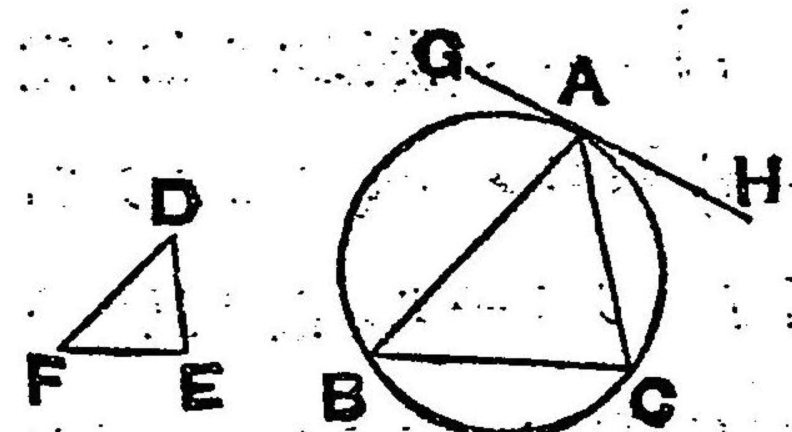
**證** OCハ圓ABCノ切線ナルユエ切線OCト其ノ切點Cヲ過ル弦CAトノナス角OCAハ此ノ角ノ隣リノ弓形ABCニ於ケル角,即チ $A\hat{B}C$ ニ等シ.




依リテ二ツノ三角形OBC, OCAハOニ於ケル角ヲ共有シ,且他ノ一ツノ角OBCハOCAニ等シ. 故ニ此ノ二ツノ三角形ハ相似ナリ.

**12.** 與ヘラレタル圓ニ內接シテ與ヘラレタル三角形ト相似ナル三角形ヲ畫ケ. [33. 海.兵.]

與ヘラレタル圓ヲABC,與ヘラレタル三角形ヲDEFトシ,圓ABCニ內接シテ三角形DEFト相似ナル三角形ヲ畫カントス.




**作圖** 圓周ABC上ノ任意ノ一點Aニ於テ切

線 GAH ヲ引キ, A ヨリ $\widehat{DEF}$ ニ等シキ $\widehat{GAB}$ ヲナス如キ弦 AB ヲ引キ, 又 A ヨリ $\widehat{DFE}$ ニ等シキ $\widehat{HAC}$ ヲナス如キ弦 AC ヲ引キ, BC ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ三角形 ABC ハ所要ノモノナルベシ.

證 $\widehat{GAB}$ ハ切線 AG ト其ノ切點 A ヲ過ル弦 AB トノナス角ナルユエ, 此ノ角ハ隣リノ弓形ニ於ケル角 ACB ニ等シ.

同様ニ $\widehat{HAC}$ ハ $\widehat{ABC}$ ニ等シ.

然ルニ作圖ニ依リテ

$$\widehat{GAB}=\widehat{DEF},$$

及ビ $$\widehat{HAC}=\widehat{DFE}$$

ナルユエ $$\widehat{ACB}=\widehat{DEF},$$

及ビ $$\widehat{ABC}=\widehat{DFE}.$$

即チ三角形 ABC ノ二ツノ角ハソレゾレ三角形 DEF ノ二ツノ角ニ等シ.

依リテ $$\triangle ABC \backsim \triangle DFE.$$

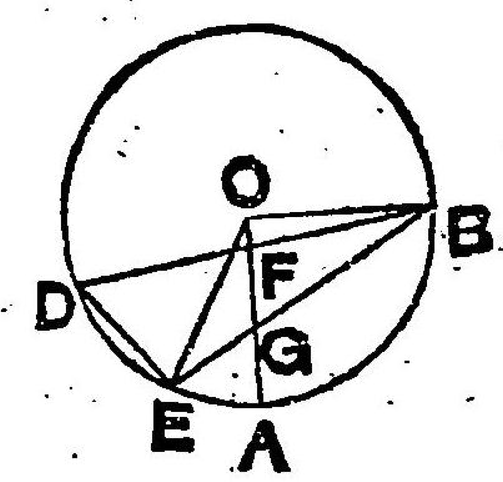
而シテ三角形 ABC ハ圓 ABC ニ內接スル如ク畫カレタリ. 故ニ三角形 ABC ハ所要ノモノナリ.

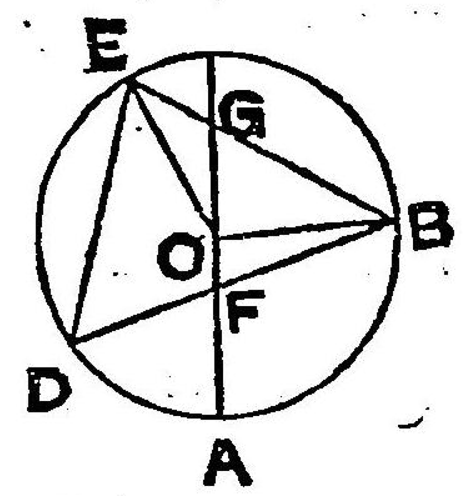
**13.** OA, OB ハ中心 O ナル一ツノ圓ノ互ニ垂直ナル半徑, DE ハ任意ノ弦ナルトキ BD, BE ガ AO トソレゾレ點 F 及ビ G ニ於テ交ハレバ三角形



BFG, BDE ハ相似ナルコトヲ證セヨ.

[42. 各高等]




證 $\widehat{EDB}$ ハ弧 EB ノ上ニ立ツ圓周角ナルユエ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角 EOB ノ半分ニ等シ.

又三角形 EOB ハ OE, OB ガ圓ノ半徑ニシテ相等シク, 即チ O ヲ頂點トスル二等邊三角形ナリ. 故ニ兩底角ハ相等シク, 且三角形ノ內角ノ和ハ 2 直角ニ等シキユエ $\widehat{EOB}$ ハ $2\widehat{R}-2\widehat{OBE}$ ニ等シ, 依リテ其ノ半分ハ $\widehat{R}-\widehat{OBG}$ ニ等シ.

然ルニ三角形 OBG ハ假設ヨリシテ O ヲ直角トスル直角三角形ナルユエ $\widehat{OBG}$ ト $\widehat{OGB}$ トノ和ハ直角ニ等シク, $\widehat{R}-\widehat{OBG}$ ハ $\widehat{OGB}$ ニ等シ.

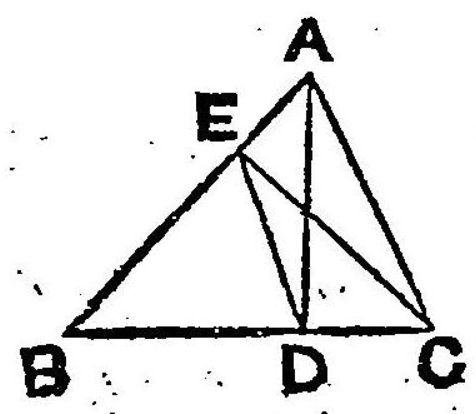
是ニ於テ $\widehat{B}$ ヲ共有スル二ツノ三角形 BFG, BDE ノ他ノ一角 OGB, EDB ハ相等シキコトヲ知ル.

故ニ此ノ二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ.

**14.** 鋭角三角形 ABC ノ角頂 A, C ヨリ對邊ニ引ケル垂線ヲソレゾレ AD, CE トスルトキハ

三角形 DEB ハ元ノ三角形 ABC ニ相似ナルコトヲ證セヨ.　[39. 陸. 士.]

**證**　ABC ハ鋭角三角形ナルユヱ先ヅ D, E ハソレゾレ邊 BC, AB 上ニアリテ其ノ延線上ニハアラザルコト明カナリ. サテ假設ニ依リテ $A\hat{D}C$, $A\hat{E}C$ ハ何レモ直角ニ等シキユヱ; D, E ハ AC ヲ徑トスル圓周上ニアリ.




故ニ DE ヲ結ビ付クレバ DEAC ハ圓ニ內接スル四邊形ナリ.

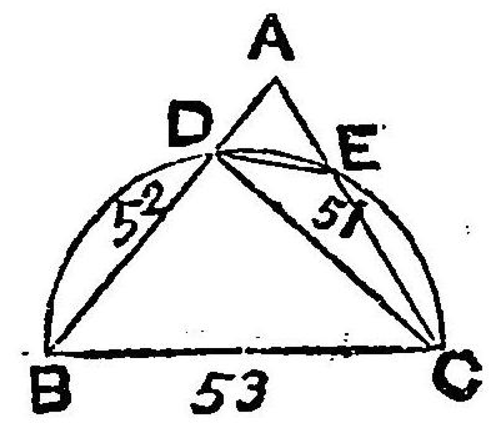
而シテ $B\hat{D}E$, $B\hat{E}D$ ハソレゾレ此ノ四邊形ノ D 及ビ E ニ於ケル外角ナルヲ以テ內對角 A, C ニ等シ. 故ニ $\hat{B}$ ヲ共有スル二ツノ三角形 BED, BCA ハ等角ナリ. 從ヒテ此ノ二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ, 卽チ三角形 DEB ハ三角形 ABC ニ相似ナリ.

**15.**　三角形 ABC ノ邊 AC, AB, BC ノ長サガソレゾレ 51 寸, 52 寸, 53 寸ナルトキ, BC ヲ徑トシテ圓ヲ畫キ; AB, AC トソレゾレ D, E ニ於テ交ラシムルトキハ DB, DC 及ビ DE ノ長サ各如何.　[38. 商船.]

**解**　$51^2=2601$, $52^2=2704$, $53^2=2809$ ハ何レ



ノ二ツノ和モ他ノ一ツヨリ大ナルヲ以テ ABC ハ鋭角三角形ナリ, 依リテ頂點 A ハ半圓周 BDEC ノ外ニアリテ且 D, E ハ BA, CA ノ上ニアリテ其ノ延線上ニハアラザルコト明カナリ. サテ $B\hat{D}C$ ハ半圓ニ於ケル角ナルユヱ直角ニ等シ.




依リテ $\overline{CB}^2-\overline{CA}^2=(\overline{CD}^2+\overline{BD}^2)-(\overline{CD}^2+\overline{AD}^2)$

$=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2=(BD+AD)(BD-AD)$

$=AB(BD-AD)$,

或ハ　$52(BD-AD)=53^2-51^2$.

故ニ　$BD-AD=4$,

又　$BD+AD=52$,

此ノ二式ヨリ　$BD=28$, $AD=24$.

次ニ　$\overline{DC}^2=\overline{CA}^2-\overline{AD}^2=51^2-24^2$,

故ニ　$DC=\sqrt{(51+24)(51-24)}=\sqrt{75\times27}$

$=\sqrt{25\times81}=5\times9=45$.

最後ニ $A\hat{D}E$ ハ內接四邊形 BDEC ノ D ニ於ケル外角ナルユヱ內對角 C ニ等シク, 從ヒテ $\hat{A}$ ヲ共有スル二ツノ三角形 ADE, ACB ハ互ニ相似ナルコトヨリ　DE : CB = AD : AC,

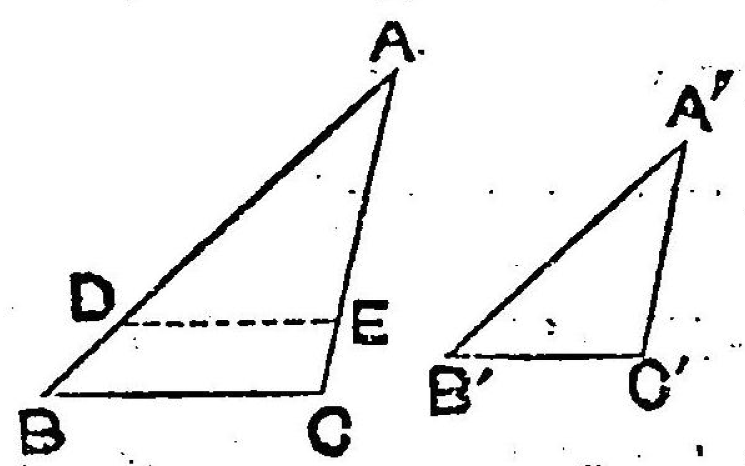
即チ $DE:53=24:51,$

故ニ $DE=53\times\frac{24}{51}=24.9\ldots\ldots,$

依リテ所要ノ長サトシテ $DB=28$寸, $DC=45$寸, $DE=25$寸 [約] ヲ得タリ.

**16.** 三角形ノ三ツノ邊ガ他ノ三角形ノ三ツノ邊トソレゾレ比例ヲナストキハ此ノ二ツノ三角形ハ相似ナルコトヲ證セヨ. [34. 海兵.]

二ツノ三角形 $ABC$, $A'B'C'$ ニ於テ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$ ナル關係アルトキハ是等ノ三角形ハ互ニ相似ナルベシ.




證 $AB$ ノ上ニ $A'B'$ ニ等シク $AD$ ヲ取リ, $BC$ ニ平行ニ $DE$ ヲ引ケ.

然ルトキハ二ツノ三角形 $ADE$, $ABC$ ハ互ニ等角ニシテ, 卽チ相似ナルヲ以テ

$$\frac{AB}{AD},\ \text{或ハ}\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE},$$

今此ノ結果ヲ與ヘラレタル比例ト比較スルニ第一ノ比ハ彼此相等シ.

依リテ双方ニ於ケル第二, 第三ノ比モ亦ソレゾレ相等シ.



然ルニ是等ノ相等シキ比ノ分子ハ各同ジモノナルユヱ其ノ分母ハ相等シカラザルベカラズ.

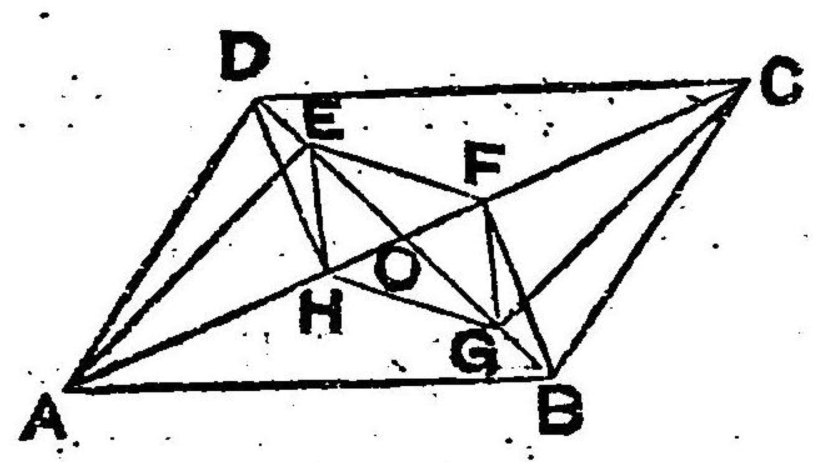
即チ $A'C'=AE,$ 及ビ $B'C'=DE.$

是ニ於テ三邊ガソレゾレ相等シキコトニ依リテ三角形 $A'B'C'$ ハ三角形 $ADE$ ニ全等ナルコトヲ知ル. 而シテ前ニ云ヘル如ク三角形 $ADE$ ハ三角形 $ABC$ ニ相似ナリ.

故ニ三角形 $A'B'C'$ モ亦三角形 $ABC$ ニ相似ナリ.

**17.** 平行四邊形 $ABCD$ ノ角頂 $A, B, C, D$ ヨリ對角線ヘ下セル垂線ノ趾ヲソレゾレ $E, F, G, H$ トスレバ四邊形 $EFGH$ ハ平行四邊形 $ABCD$ ニ相似ナルコトヲ證セヨ. [37. 東. 高. 師.]

證 假設ニ依リテ $A\hat{E}D=\hat{R}=A\hat{H}D$ ナルユヱ四邊形 $AHED$ ハ $AD$ ヲ徑トスル圓ニ內接シ得ベキモノナリ.




故ニ $H\hat{E}G=D\hat{A}H.$

同樣ニ $F\hat{E}G=D\hat{C}F=C\hat{A}B.$

故ニ $H\hat{E}F=B\hat{A}D.$

同理ニ依リテ四邊形 HGFE ノ角ハ EFG, FGH, GHE ハソレゾレ平行四邊形 ABCD ノ角 ADC, DCB, CBA ニ等シキコトヲ知ル.

從ヒテ四邊形 EFGH ハ平行四邊形ナリ.

サテ AC, BD ノ交點ヲ O トスレバ二ツノ三角形 OEH, OAD ハ等角ニシテ, 從ヒテ相似ナルユエ.

$$OH:OD=HE:DA.$$

同樣ニ $$OH:OB=HG:AB.$$

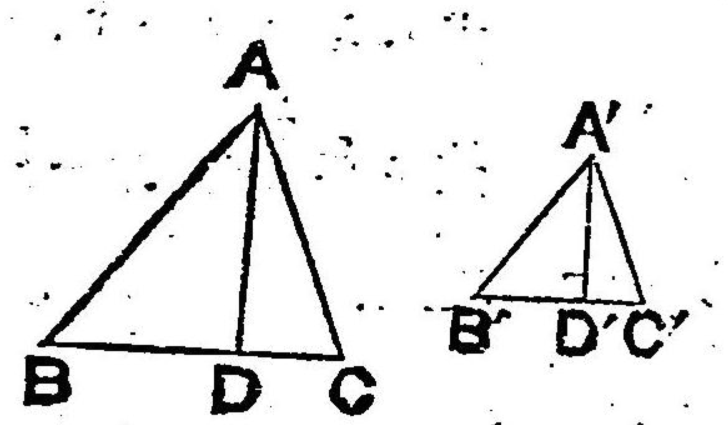
然ルニ OD=OB ナルコトヨリ上ノ二ツノ比例ノ左邊ハ相等シ.

故ニ $$HE:DA=GH:AB.$$

是ニ依リテ二ツノ平行四邊形 EFGH ト ABCD トハ等角ニシテ, 且其ノ對應邊ガ比例ヲナス.

卽チ定義ニ依リテ此ノ二ツノ四邊形ハ互ニ相似ナリ.

18. 相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ比ノ二乘比ニ等シキコトヲ證セヨ. [39. 專.入.檢.]




二ツノ相似三角形ヲ ABC, A′B′C′ トスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$



ナルベシ.

證 I. 如何トナレバ AD, A′D′ ヲ各ノ高サトセヨ. 然ルトキハ三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ半分ニ等シキユエ.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC.AD}{B'C'.A'D'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AD}{A'D'}$$

然ルニ對應線 AD, A′D′ ノ比ハ三角形ノ相似ノ比ニ等シ [9 題].

卽チ $$\frac{AD}{A'D'}=\frac{BC}{B'C'}.$$

依リテ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{BC}{B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

證 II. $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB.BC}{A'B'.B'C'}\ [3\text{ 題}]$$

$$=\frac{BC.BC}{B'C'.B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}.$$

19. 相似三角形ノ面積ハ其ノ高サノ平方ニ比例スルコトヲ證セヨ. [36. 商船.]

證 前題ノ圖及ビ證ニ於テ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{BC.AD}{B'C'.A'D'}=\frac{AD}{A'D'}\cdot\frac{AD}{A'D'}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}.$$

20. 二ツノ相似多角形ノ對應邊ノ比ガ 3:25 ニシテ大ナル方ノ面積ガ一平方尺ナルトキハ小ナル方ノ面積ハ何程ナルカ. [34. 一高.]

**解**　二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シ.

故ニ所題ノ相似多角形ノ小ナルモノノ面積ヲ A, 大ナルモノノ面積ヲ B トスレバ

$$A:B=3^2:25^2,$$

故ニ
$$A=B\times\frac{9}{625},$$

B ハ 1 平方尺ナルユヱ

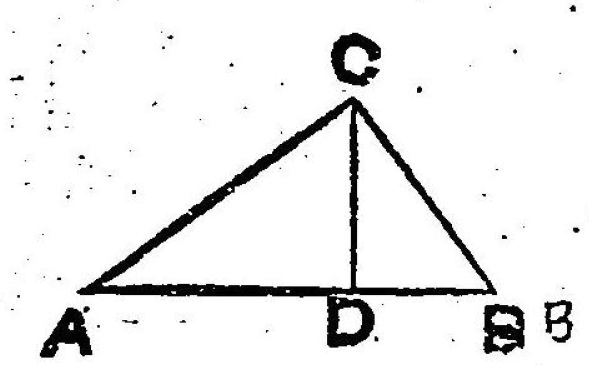
$$A=1^{\text{平方尺}}\times\frac{9}{625},\ \text{即チ}\ \frac{9}{625}\ \text{平方尺}.$$

**21.**　直角三角形ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ニ垂線 CD ヲ引クトキハ

$$\overline{AC}^2:\overline{BC}^2=AD:BD$$

ナルコトヲ證セヨ.　[34. 商船.]

**證 I.**　D ヲ直角トスル直角三角形 ADC ト C ヲ直角トスル直角三角形 ACB トハ $\hat{A}$ ヲ共有スルユヱ互ニ相似ナリ.




故ニ對應邊ノ關係トシテ

$$AC:AD=AB:AC,$$

或ハ
$$\overline{AC}^2=AD.AB.$$

同樣ニ二ツノ直角三角形 BCA, BDC ノ相似ナルコトヨリ
$$\overline{BC}^2=BD.BA.$$



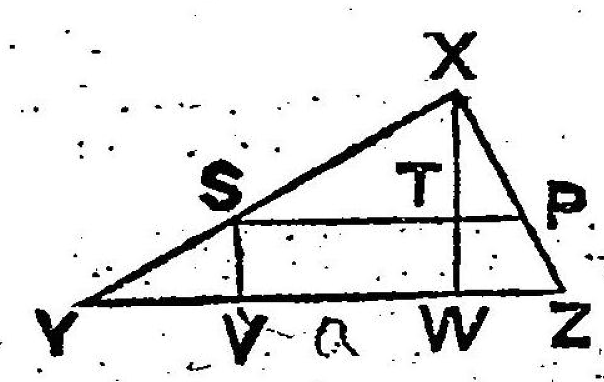
依リテ
$$\overline{AC}^2.\overline{BC}^2=AD.AB:BD.BA$$
$$=AD:BD.$$

**證 II.**
$$\frac{\triangle ADC}{\triangle BCD}=\frac{AD}{BD},\ \text{又}\ \frac{\triangle ACD}{\triangle CBD}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2},$$

故ニ
$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2}=\frac{AD}{BD}.$$

**22.**　一定直線 $a$ ト二ツノ正方形 A, B トアリ, 今一直線 $b$ ヲ求メテ $a:b=A:B$ ナラシメヨ.　[35. 海機.]

**作圖**　X ニ於テ直角ニ相交ル二ツノ直線 XY, XZ ヲ引キ; XY, XZ ヲソレゾレ正方形 A, B ノ一邊ニ等シク取リ, YZ ヲ結ビ付ケヨ.




次ニ YZ ニ垂線 XW ヲ引キ, 其ノ趾ヲ W トシ, WY [必要ナラバ其ノ延線] 上ニ $a$ ニ等シク WY ヲ取リ, WY ニ垂線 VS ヲ引キ, VS ト XY [或ハ其ノ延線] トノ交點ヲ S トス.

S ヲ過リテ YZ ニ平行ナル直線 STP ヲ引キ, XW, XZ [或ハ其ノ延線] トソレゾレ T, P ニ於テ交ラシムレバ TP ハ所要ノ直線 $b$ ナルベシ.

**證**　作圖ニ依リテ $\widehat{YXZ}=\hat{R}$, $XW\perp YZ$ ナル

ユエ $\overline{XY}^2:\overline{XZ}^2=YW:WZ$ [21題]

$=ST:TP$ [∵ STP ∥ YWZ]

$=VW:TP$, [∵ STWV ハ矩形]

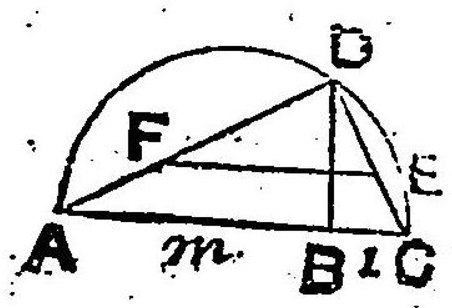
故ニ $A:B=a:TP$,

或ハ $a:TP=A:B$,

即チ TP ハ所要ノ直線 $b$ ナリ.

**23.** 與ヘラレタル正方形ノ $m$ 倍ニ等シキ正方形ヲ作レ. [34. 海.機.]

與ヘラレタル正方形ヲ P トシ, $mP$ ニ等シキ正方形 Q ヲ作ラントス.




**作圖** 任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ上ニ二ツノ相隣ル分線 AB, BC ヲ $AB:BC=m:1$ ナル如ク取リ, AC ヲ徑トシテ半圓周ヲ畫キ, 又 AC ニ垂直ナル直線 BD ヲ引キ半圓周トノ交點ヲ D トス.

DA, DC ヲ結ビ付ケヨ. DC 或ハ其ノ延線上ニ正方形 P ノ一邊ニ等シク DE ヲ取リ, E ヲ過リテ CA ニ平行ニ EF ヲ引キ, AD 或ハ其ノ延線トノ交點ヲ F トスレバ DF ヲ一邊トスル正方形ハ所要ノモノナリ.

**證** 相似三角形ニ依リテ



$\overline{DE}^2:\overline{DF}^2=\overline{DC}^2:\overline{DA}^2$

$=CA.CB:AC.AB$

$=CB:AB=1:m$,

故ニ $\overline{DF}^2\times1=\overline{DE}^2\times m$,

即チ $\overline{DF}^2=m\overline{DE}^2=mP$.

故ニ $\overline{DF}^2$ ハ所要ノ正方形 Q ナリ.

**24.** 與ヘラレタル正方形ノ $m$ 分ノ一ニ等シキ正方形ヲ作レ. [30. 東.高.工., 34. 海.機.]

與ヘラレタル正方形ヲ P トシ $\frac{1}{m}P$ ニ等シキ正方形 Q ヲ作ラントス.

**作圖** 23題ノ如クシテ直線 BD ヲ引キタルトキ, DA 或ハ其ノ延線上ニ P ノ一邊ニ等シク DF ヲ取リ, F ヲ過リテ AC ニ平行ナル直線 FE ヲ引キ DC 或ハ其ノ延線トEニ於テ交ラシムレバ DE ヲ一邊トスル正方形ハ所要ノモノナリ.

**證** 前題ト同様ニシテ

$\overline{DF}^2=m\overline{DE}^2$,

或ハ $\overline{DE}^2=\frac{1}{m}\overline{DF}^2=\frac{1}{m}P$.

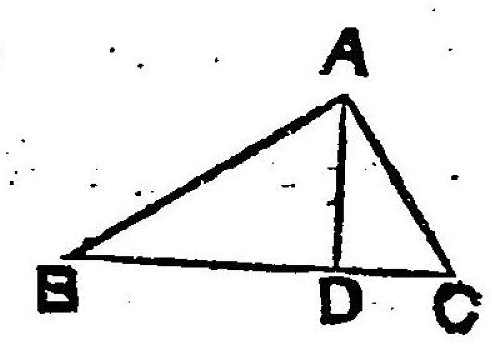
故ニ $\overline{DE}^2$ ハ所要ノ正方形 Q ナリ.

**25.** 與ヘラレタル正方形ノ面積ノ $\frac{1}{5}$ ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ畫ケ. [32. 外.語.]

**解** 前題ニ於ケル $m$ ヲ 5 トスレバ卽チ本題ノ解ナリ.

26. 三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ガ三角形ノ形內ニアリ, 而シテ其ノ垂線ガ分ツ底邊ノ部分ノ比例中項ナルトキハ三角形ハ直角三角ナルコトヲ證セヨ. [36. 專. 入. 檢, 37. 商船.]

三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ底邊 BC ヘ引ケル




垂線 AD ガ形內ニアリ, 卽チ BC ト D ニ於テ交リ, 且 $BD:AD=AD:DC$ ナルトキハ頂角 A ハ直角ナルベシ.

**證 I.** $$BD:AD=AD:DC,$$

故ニ $$\overline{BD}^2:\overline{AD}^2=\overline{AD}^2:\overline{DC}^2,$$

故ニ $$\overline{BD}^2+\overline{AD}^2:\overline{AD}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2:\overline{DC}^2,$$

卽チ $$\overline{AB}^2:\overline{AD}^2=\overline{AC}^2:\overline{DC}^2,$$

故ニ $$AB:AD=AC:DC,$$

而シテ $$B\hat{D}A=\hat{R}=A\hat{D}C.$$

依リテ二ツノ直角三角形 BAD, ACD ハ互ニ相似ナリ. 從ヒテ $A\hat{B}D=C\hat{A}D,$

故ニ $B\hat{A}C=B\hat{A}D+C\hat{A}D=B\hat{A}D+A\hat{B}D=\hat{R},$

卽チ ABC ハ直角三角形ナリ.



**證 II.** 與ヘラレタル關係ヨリ

$$\overline{AD}^2=BD.DC,$$

而シテ直角三角形 ABD ヨリ

$$\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+BD.DC$$
$$=BD(BD+DC)=BD.BC.$$

同樣ニ直角三角形 ACD ヨリ

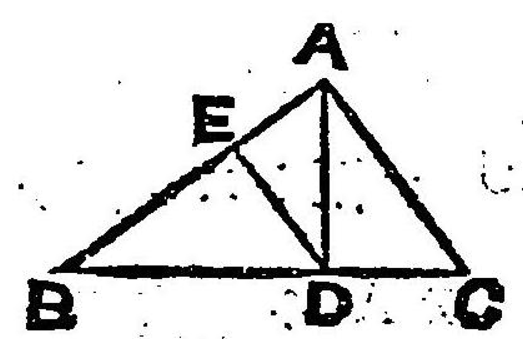
$$\overline{AC}^2=CD.CB.$$

故ニ $$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=BD.BC+CD.CB$$
$$=BC(BD+DC)$$
$$=BC.BC=\overline{BC}^2.$$

依リテ $$\hat{A}=\hat{R}.$$ [C. 21 題注意]

27. 直角三角形 ABC ノ直角頂 A ヨリ斜邊 BC ヘ垂線 AD ヲ引キ, D ヨリ邊 AB ヘ垂線 DE ヲ引クトキハ $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BE:EA$ ナルコトヲ證セヨ. [39. 商船.]

**證** $C\hat{A}B$, $D\hat{E}B$ ハ假設ニ依リテ直角ニ等シキユエ CA, DE ハ互ニ平行ナリ.

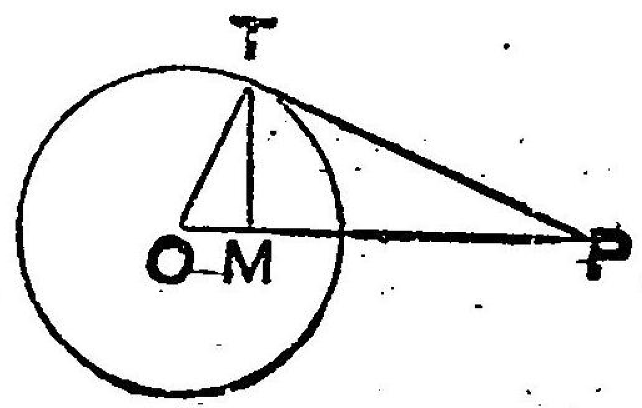



而シテ直角三角形ニ於テ一邊上ノ正方形ハ斜邊ト其ノ上ニ投ズル其ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ニ等シキユエ $\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=BD.BC:CD.BC$

$=BD:DC=BE:EA.$

**28.** 中心Oナル圓外ノ一點PヨリPTヲ引キ，切點Tヨリ徑PO上ニ垂線TMヲ下ストキハ此ノ圓ノ半徑ハOM, OPノ比例中項ナルコトヲ證セヨ．　[36. 海兵.]

證　假設ニ依リテPTハ切線ナルユヱOTヲ結ビ付クレバ $\widehat{OTP}=\widehat{R}$.

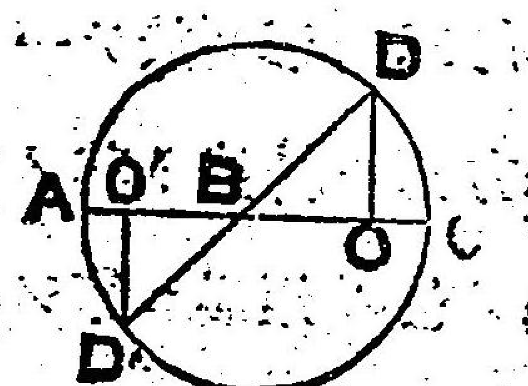



故ニ二ツノ直角三角形OTM, OTPニ於テ他ノ一角OTM, 即チ $\widehat{PTM}$ ノ餘角ハ $\widehat{OPT}$ ニ等シク，從ヒテ此ノ二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ．故ニ對應邊ノ關係トシテ

$$OM:OT=OT:OP.$$

**29.** 一直線上ニ三ツノ點A, B, Cガ此ノ順ニ列ブトキ此ノ直線上ニ他ノ一點Oヲ求メOBヲOA, OCノ比例中項ナラシメヨ．　[31. 海機.]

**場合 I.** Oガ直線ABC內分點ナルトキ．




**作圖**　ACヲ徑トスル圓ヲ畫キ，Bニ於テACト半直角ニ等シキ角ヲナス直線DBD′ヲ作リ，圓周トノ交點ヲD, D′トシ；D, D′ヨリABヘノ垂線ノ趾ヲO, O′トスレバO, O′ハ所要ノ點ナルベシ．



**證**　直角三角形BDOニ於テBニ於ケル角ハ作圖ニ依リテ $\frac{1}{2}\widehat{R}$ ナルユヱ其ノ餘角ナルDニ於ケル角モ亦 $\frac{1}{2}\widehat{R}$ ナリ．

故ニ $\widehat{B}$ ト $\widehat{D}$ トハ相等シク，從ヒテ　$OD=OB.$

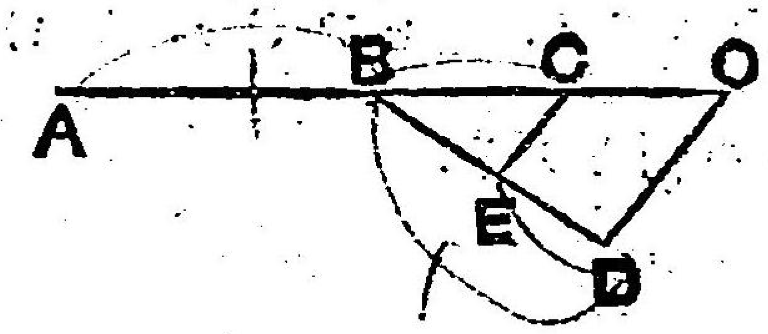
故ニ　$OA.OC=\overline{OD}^2$ [C. 51 題] $=\overline{OB}^2.$

同樣ニ　$O'D'=O'B$

ニシテ　$O'A.O'C=\overline{O'D'}^2=\overline{O'B}^2.$

故ニO, O′ハ何レモ所題ノ要件ヲ滿足スル點ナリ．

**場合 II.** Oガ直線ABCノ外分點ナルトキ．




**解析**　所要ノ點Oヲ求メ得タリトスレバ

$$OA:OB=OB:OC,$$

或ハ　$OA\sim OB:OB=OB\sim OC:OC,$

即チ　$AB:OB=BC:OC,$

或ハ　$OB:OC=AB:BC.$

茲ニ $AB:BC$ ハ定比ニシテBCハ既知ノ直線ナルユヱOハBCヲ定比 $AB:BC$ ニ外分スル點

ナリ.

又最後ノ比例ニ依リテ $AB \gtrless BC$ ナルニ從ヒテ $OB \gtrless OC$ ナルユヱ O ハ ABC 或ハ CBA ノ延線上ニアルコト明カナリ. 卽チ次ノ作圖法ヲ得.

**作圖** $AB>BC$ トス.

B ヲ過ル任意ノ直線 BD ヲ引キ, 之ヲ AB ニ等シクシ, BD ノ上ニ BD ト反對ノ方向ニ DE ヲ BC ニ等シク取リ, EC ヲ結ビ付ケ, D ヲ過リ EC ニ平行ニ DO ヲ引キ, ABC ノ延線トノ交點ヲ O トスレバ O ハ所要ノ點ナルベシ.

[$AB<BC$ ナルモ同樣ノ作圖ヲナスコトヲ得].

**證** $BD=AB>DE=BC$

ナルユヱ E ハ BD 上ニアリ, 從ヒテ O ハ ABC ノ延線上ニアルコトハ明カナリ.

サテ相似三角形ニ依リテ

$OB:OC=DB:DE=AB:BC,$ [作圖]

或ハ $AB:OB=BC:OC,$

或ハ $OB+AB:OB=OC+BC:OC,$

卽チ $OA:OB=OB:OC.$

故ニ O ハ所要ノ點ナリ.

**吟味** $AB=BC$ ナルトキハ E ハ B ト合スル



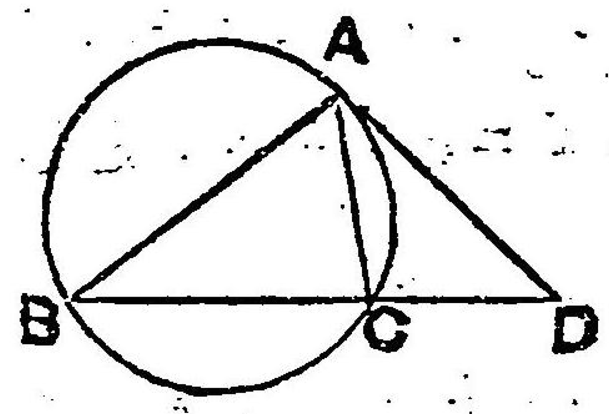
ユヱ外分點ナシ. 而シテ內分點ハ恒ニ二ツアリ. 故ニ所要ノ點 O ノ位置ハ $AB=BC$ ナルトキハ二ツアリ; $AB \neq BC$ ナルトキハ三ツアリ, 其ノ二ツハ內分點ニシテ他ノ一ツハ外分點ナリ.

**30.** 圓ニ內接スル三角形 ABC ノ頂點 A ニ於ケル切線ガ BC ノ延線ト交ル點ヲ D トスレバ

$$CD:BD=\overline{CA}^2:\overline{BA}^2$$

ナルコトヲ證セヨ. [37. 東. 高. 商., 40. 海兵.]

**證** 先ヅ CD, BD ハソレゾレ三角形 CAD, BAD ノ底ナルコトヨリ




$CD:BD=\triangle CAD:\triangle BAD.$

サテ $\triangle CAD$, $\triangle BAD$ ニ於テ D ニ於ケル角ハ共通ニシテ, 圓ノ切線ト弦トノ間ノ角ハ隣リノ弓形ニ於ケル角ニ等シト云フ定理ヨリ $C\hat{A}D=A\hat{B}D.$ 故ニ此ノ二ツノ三角形ハ相似ナリ.

依リテ $\triangle CAD:\triangle BAD=\overline{CA}^2:\overline{BA}^2,$

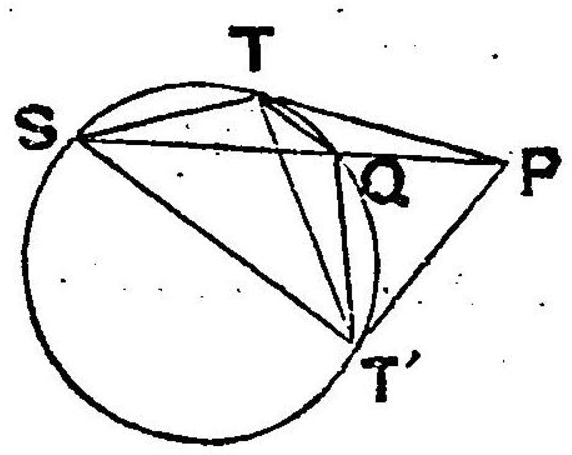
故ニ $CD:BD=\overline{CA}^2:\overline{BA}^2.$

**31.** 圓外ノ一點ヨリ其ノ圓ニ二ツノ切線ト一ツノ割線トヲ引クトキ二ツノ切點ト割線ノ二ツノ交點ト結ビ付ケテ成ル四邊形ニ於テハ二組

ノ兩對邊ノ包ム矩形ハ相等シキコトヲ證セヨ．

[42. 山. 高. 商]

圓外ノ一點ヲ P トシ，P ヨリノ切線及ビ割線ヲ PT, PT′, 及ビ PQR トシ,四邊形 TST′Q ヲ作ルトキハ $TS.T'Q=T'S.TQ$ ナルベシ．




證　二ツノ三角形 PTQ, PST ニ於テ P ニ於ケル角ハ共通ニシテ他ノ一ツノ角 PTQ, 即チ切線 PT ト弦 TQ トノナス角ハ隣リノ弓形ニ於ケル角, 即チ $T\hat{S}Q$, 即チ $P\hat{S}T$ ニ等シキユヱ是等ノ三角形ハ互ニ相似ナリ．

故ニ　$PS : PT=TS : TQ.$

同理ニ依リテ二ツノ三角形 PTQ, $P\hat{S}T'$ モ亦互ニ相似ナルコトヨリ

$$PS : PT'=T'S : T'Q.$$

然ルニ　$PT=PT'$

ナルユヱ上ノ二ツノ比例ノ左邊ハ相等シ．

故ニ　$TS : TQ=T'S : T'Q,$

或ハ　$TS.T'Q=T'S.TQ.$

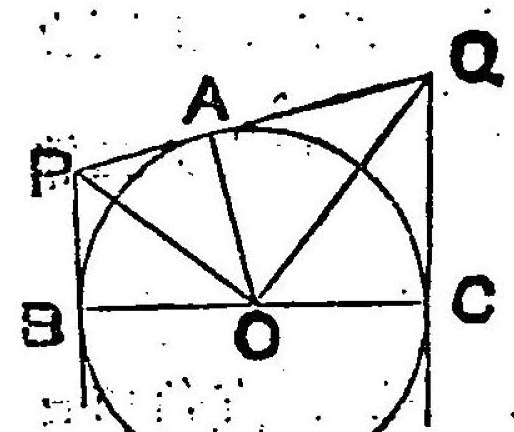
32．圓ノ二ツノ平行ナル切線ガ點 A ニ於テ



切スル第三ノ切線トP, Q ニ於テ交ルトキハ半徑ハ AP, AQ ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ．

[37. 海. 兵., 40. 長. 高. 商., 40. 東. 高. 商.]

證 I．圓ノ中心ヲ O トシ; OA, OP, OQ ヲ結ビ付ケヨ．




又二ツノ平行ナル切線ニ就キテ P ヲ過ルモノノ切點ヲ B, Q ヲ過ルモノノ切點ヲ C トシ; OB, OC ヲ引ケ．

然ルトキハ先ヅ二ツノ三角形 OAP, OBP ニ於テ OP ハ共通; OA, OB ハ圓 O ノ半徑ニシテ相等シク; $O\hat{A}P, O\hat{B}P$ ハソレゾレ切線ト其ノ切點ニ引ケル半徑トノナス角ナルユヱ何レモ直角ニ等シ．

依リテ　$\triangle OAP\equiv\triangle OBP,$

故ニ　$O\hat{P}A=O\hat{P}B=\frac{1}{2}Q\hat{P}B.$

同樣ニ　$\triangle OAQ\equiv\triangle OCQ$

ナルコトヨリ　$O\hat{Q}A=O\hat{Q}C=\frac{1}{2}P\hat{Q}C.$

然ルニ PB ハ QC ニ平行ナルユヱ．

$$Q\hat{P}B+P\hat{Q}C=2\hat{R},$$

故ニ　$O\hat{P}A+O\hat{Q}A=\frac{1}{2}(Q\hat{P}B+P\hat{Q}C)=\hat{R}.$

依リテ A ヲ直角トスル二ツノ直角三角形 OAP,

QAO ニ於テ $\widehat{OPA}$ ハ $\widehat{OQA}$ ノ餘角, 即チ $\widehat{AOQ}$ ニ等シク, 從ヒテ此ノ二ツノ三角形ハ等角ナリ, 故ニ互ニ相似ナリ, 即チ對應邊ノ關係トシテ

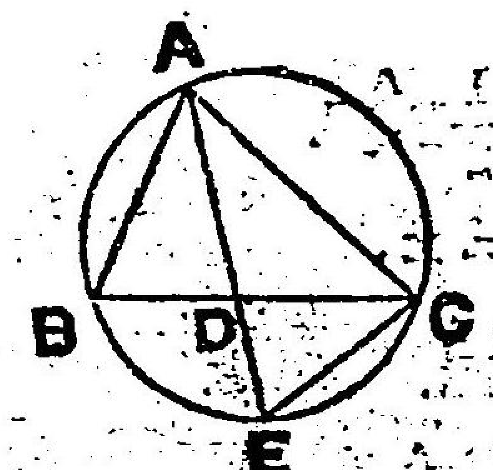
$$AP : OA = OA : AQ.$$

證 II. B, O, C ハ同一直線上ニアルコト明カナリ. 又 OP, OQ ハソレゾレ $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$ ノ二等分線ナルコトハ容易ニ知リ得ベシ.

故ニ POQ ハ直角三角形ニシテ OA ハ直角頂ヨリノ高サナリ.

故ニ $\overline{OA}^2 = AP.AQ.$ [C. 51 題]

**33.** 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ヲ引キ底邊ト D ニ於テ, 外接圓周ト E ニ於テ相交ラシムレバ $AB.AC = AD.AE$ ナルコトヲ證セヨ. [35. 東. 高. 商.]




證 EC ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ二ツノ三角形 ABD, AEC ニ於テ A ニ於ケル角ハ假設ニ依リテ何レモ $\widehat{BAC}$ ノ半分ナルユヱ相等シク; 又 $\widehat{B}, \widehat{E}$ ハ同ジ弧 AC ノ上ニ立ツ角トシテ相等シ.

依リテ $\triangle ABD \backsim \triangle AEC.$

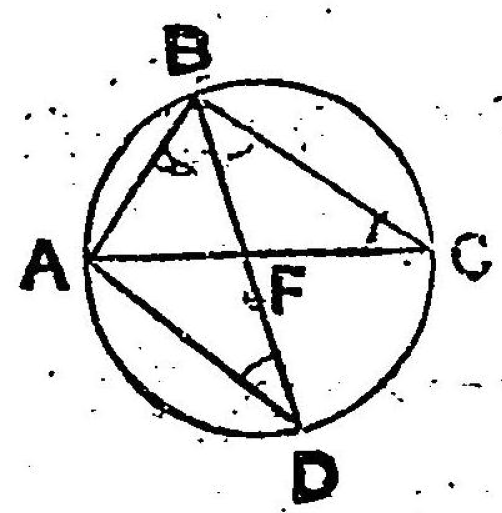


故ニ $AB : AD = AE : AC,$

或ハ $AB.AC = AD.AE.$

**34.** 直角三角形 ABC ノ直角 B ヲ二等分スル直線ガ AC ト F ニ於テ交リ外接圓周ト D ニ於テ交レトキハ矩形 BD.BF ハ三角形 ABC ノ 2 倍ニ等シキコトヲ證セヨ. [37. 商船.]

證 AD ヲ結ビ付クルトキハ二ツノ三角形 ABD, FBC ニ於テ




$$\begin{cases} \widehat{ABD} = \widehat{FBC} & \text{[假設]} \\ \widehat{ADB}[=\widehat{ACB}] = \widehat{FCB} & \text{[同ジ弧上ノ角]} \end{cases}$$

故ニ $\triangle ABD \backsim \triangle FBC.$

依リテ $BD : AB = BC : BF,$

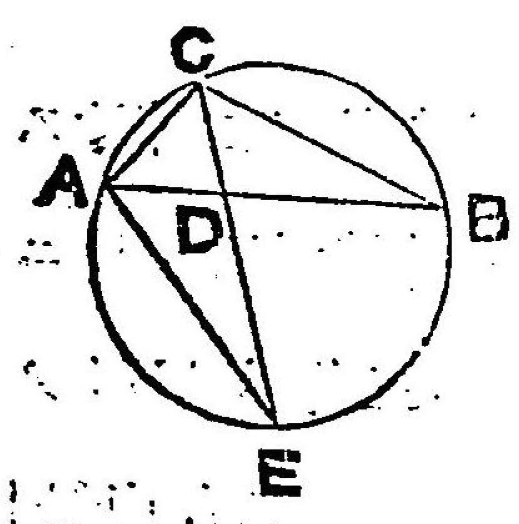
或ハ $BD.BF = AB.BC$

$= 2\triangle ABC \, [\because \widehat{ABC} = \widehat{R}]$

**35.** 三角形 ABC ノ頂角 C ヲ二等分スル所ノ直線 CD ガ底邊 AB ト D ニ於テ交ルトキハ CD 上ノ正方形ト AD, BD ノ包ム矩形トノ和ハ二邊 AC, BC ノ包ム矩形ニ等シキコトヲ證セヨ. [33. 商船., 42. 長. 高. 商.]

證 △ABC ノ外接圓ヲ畫キ, CD ノ延線ガ圓

周ト交ル點ヲ E トシ, EA ヲ結ビ付クレバ, 二ツノ三角形 ACE, DCB ニ於テ




$$\begin{cases}\widehat{ACE}=\widehat{DCB} & \text{[假設]}\\ \widehat{AEC}=\widehat{ABC} & \text{[同弧上ノ角]}\end{cases}$$

ナルユヱ $\triangle ACE \backsim \triangle DCB$.

故ニ $AC : CE = CD : CB$,

或ハ $AC.CB = CD.CE = CD(CD+DE)$

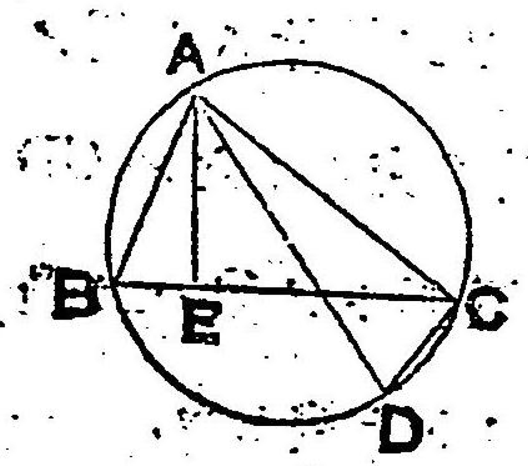
$= \overline{CD}^2 + CD.DE = \overline{CD}^2 + AD.BD$.

**注意** 若シ外角ノ二等分線ナルトキハ和ハ差トナル.

**36.** 三角形ノ外接圓ノ徑ハ一ツノ角頂ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線及ビ其ノ角頂ニ出會フ所ノ二ツノ邊ノ比例第四項ナルコトヲ證セヨ.

[30. 陸士., 38. 專入檢, 37, 40. 東北農大.]

三角形 ABC ノ外接圓ヲ畫キ, A ヨリ徑 AD, 及ビ對邊 BC ニ對線 AE ヲ引クトキハ $AE : AC = AB : AD$ ナルベシ.




**證** CD ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ $\widehat{ACD}$ ハ半圓ニ於ケル角ナルユヱ直角ナリ. 而シテソレゾレ E, C ニ於ケル角ヲ直



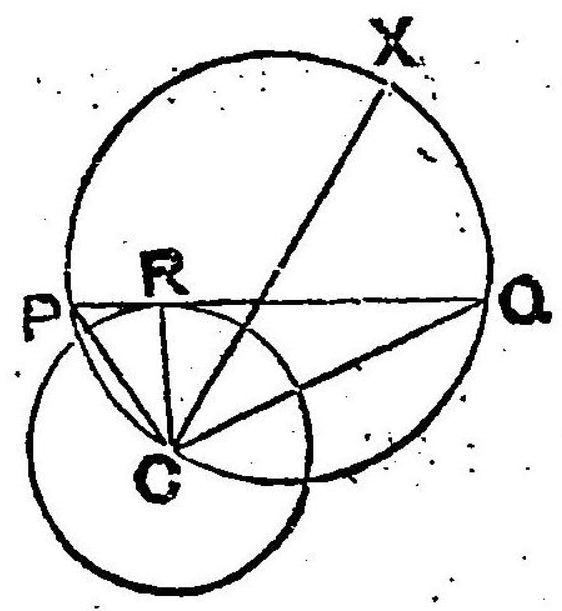
角トスル二ツノ直角三角形 AEB, ACD ニ於テ

尙 $\widehat{ABE}$, 卽チ $\widehat{ABC}$ ト $\widehat{ADC}$ トハ同ジ弧 AC ノ上ニ立ツ角ニシテ相等シ. 依リテ此ノ二ツノ直角三角形ハ相似ナリ.

故ニ $AE : AC = AB : AD$ ヲ得.

**37.** C ハ定圓ノ中心ニシテ此ノ定圓ノ切線ト C ヲ過ル他ノ定圓トノ交點ヲ P, Q トスレバ CP.CQ ハ不易ナルコトヲ證明セヨ. [36. 陸. 士.]

**證** 切點ヲ R トシ; CP, CR, CQ ヲ結ビ付ケ, 又圓 PQ ノ徑 CX ヲ引ケ,




然ルトキハ PRQ ハ圓周 C ニ R ニ於テ切スルユヱ R ニ於ケル角ハ直角ナリ. 故ニ CR ハ三角形 CPQ ノ C ヨリ引ケル高サ, CX ハ外接圓ノ徑ナルヲ以テ

$CP : CR = CX : CQ$, [36 題]

故ニ $CP.CQ = CR.CX$,

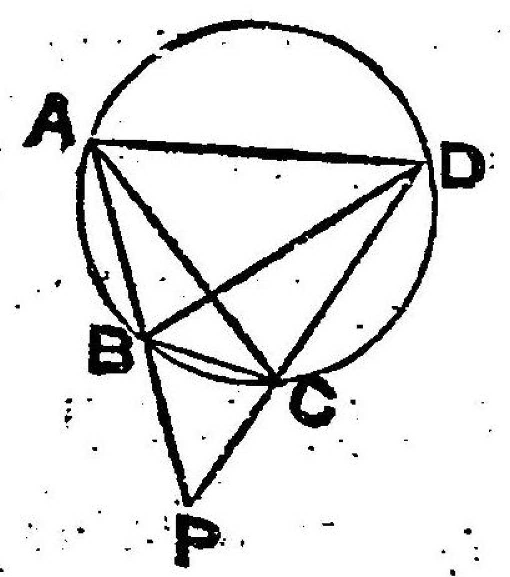
然ルニ CR, CX ハソレゾレ二ツノ定圓ノ半徑及ビ徑ナルユヱ定長ニシテ, 從ヒテ CR.CX ハ定量ナリ.

故ニ CP.CQ モ亦不易ノ量ナルコト明カナリ.

38. 一ツノ圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ相對スル二邊 AB, CD ノ延線ガ一點 P ニ於テ相交ルトキハ　　PB.AC=PC.BD

ナルコトヲ證セヨ.　　[37. 海.兵]

證　BD, CA ヲ結ビ付クレバ $C\hat{D}B$, $C\hat{A}B$ ハ此ノ圓ニ於テ同ジ弧 BC ノ上ニ立ツ角ナルユエ相等シ. 依リテ $\hat{P}$ ヲ共通スル二ツノ三角形 PBD, PBC ニ於テ他ノ一角 D, A ガ相等シキユエ二ツノ三角形ハ相似ナリ.




故ニ其ノ對應邊ノ關係トシテ

$$PB : BD = PC : AC,$$

或ハ

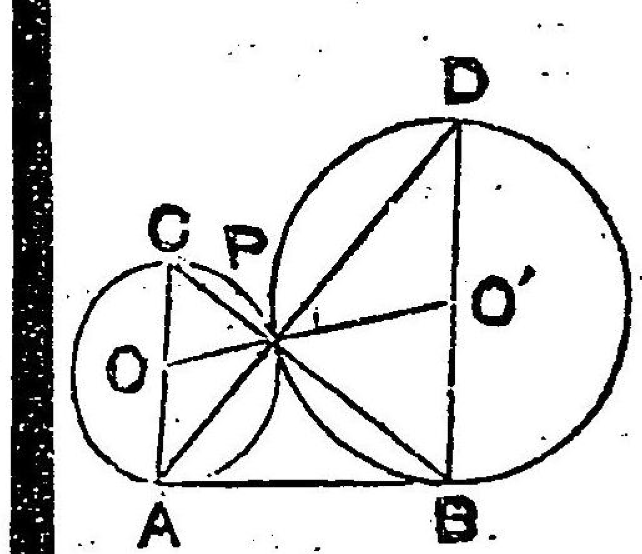
$$PB.AC = PC.BD.$$

39. 相切スル二圓ノ共通外切線 AB ハ二圓ノ徑 AC, BD ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ.

[35. 商船. 38., 長.高.商., 40. 陸.士, 42. 農.大.實.]

證 I. 圓 AC, 圓 BD ノ中心ヲソレゾレ O, O', 其ノ切點ヲ P トスレバ O, P, O' ハ同一ノ直線上ニアリ. 依リテ尙 AP, DP ヲ結ビ付ケヨ.






然ルトキハ假設ニ依リ AB ハ圓 O 及ビ O' ニ點 A, B ニ於テ切線ナルユエ各ノ徑 CA, DB ハ AB ニ垂直, 從ヒテ CA ト DB トハ相平行シ, 截線 OO' ニ就キテ其ノ錯角 AOP, DO'P ヲシテ相等シカラシム. 然ルニ $A\hat{O}P$, $D\hat{O}'P$ ハソレゾレ圓 O, 圓 O' ノ半徑ヲ二等邊トスル二等邊三角形 OPA, O'PD ノ頂角ナリ, 故ニ此ノ頂角ガ相等シケレバ其ノ底角ハ皆相等シク, 卽チ $O\hat{P}A=O'\hat{P}D$. 而シテ前ニ云ヘルコトニ依リテ OPO' ハ一直線ナルユエ APD モ亦一直線ナリ.

同樣ニ CPB モ亦一直線ナルコトヲ證シ得ベシ.

サテ A, B ニ於ケル角ヲ直角トスル二ツノ直角三角形 ABC, BAD ニ於テ $A\hat{B}C$ ハ $A\hat{D}B$ ニ等シク, $A\hat{C}B$ ハ $B\hat{A}D$ ニ等シ.

故ニ此ノ二ツノ三角形ハ等角ニシテ, 從ヒテ互ニ相似ナリ.

依リテ　　$AC : AB = AB : BD.$

證 II. P ニ於ケル共通切線ガ AB ト交ル點

ヲ Q トシ; OQ, O′Q ヲ結ビ付クルトキハ

$$AQ=QP=BQ,$$

又 OQ, O′Q ハソレゾレ $A\hat{Q}P$, $B\hat{Q}P$ ノ二等分線ナルコトヲ容易ニ知リ得ベシ.

故ニ OQO′ ハ直角三角形ニシテ QP ハ其ノ直角頂ヨリノ高サナルコトヲ知リ得ベシ.

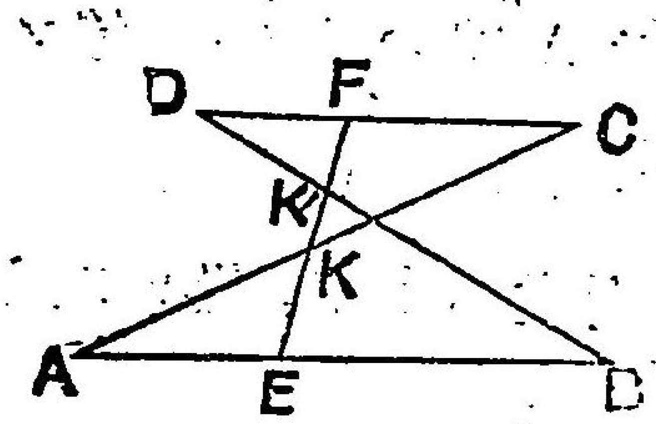
依リテ　$OP : QP = QP : O'P,$

故ニ　$2OP : 2QP = 2QP : 2O'P,$

即チ　$AC : AB = AB : BD.$

**40.** 二ツノ平行線 AB, CD ノ上ニ二點 E, F ヲ取リ; AE, EB ノ比ヲ CF, FD ノ比ニ等シカラシムルトキハ AC, EF, BD [或ハ其ノ延線] ハ共ニ同一ノ點ニ於テ相交ルカ或ハ平行スルコトヲ證セヨ. [35. 商船.]

證　先ヅ AB ト CD トガ反對ノ方向ヲ有ツトキハ AC, EF, BD ノ何レノ二ツヲ取ルモ必ズ相交ルコト明カナリ.

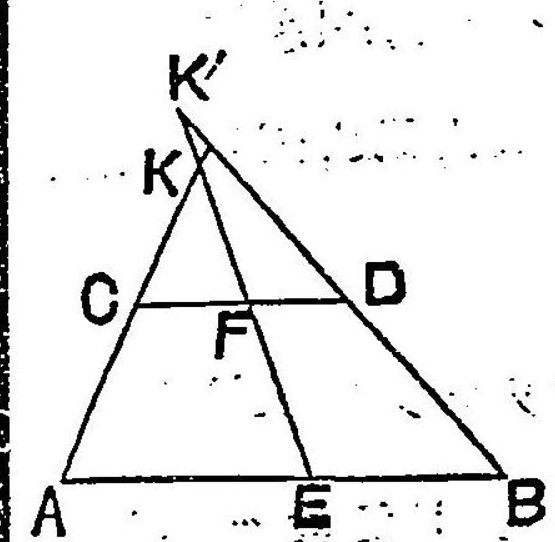



次ニ AB ト CD トガ同ジ方向ヲ有ツトキ, AB ト CD トガ不等ナレバ此ノ各ヲ同ジ比ニ分テル二部モ亦不等ナルニヨ



リ例ヘバ AB>CD トスレバ

$$AE>CF,\ 及ビ\ BE>DF$$




ニシテ AC, EF, BD ヲ引キ延バストキハ何レノ二ツモ必ズ相交ル. 今此ノ二ツノ場合ニ於テ AC ト EF トノ交點ヲ K, EF ト BD トノ交點ヲ K′ ト假定ス.

然ルトキハ相似三角形ニ依リテ

$$KF : KE = CF : AE,$$

及ビ　$K'F : K'E = DF : BE.$

然ルニ假設ニ依リテ

$$CF : DF = AE : BE,$$

或ハ　$CF : AE = DF : BE.$

即チ上ノ二ツノ比例ノ左邊ハ相等シキユエ

$$KF : KE = K'F : K'E.$$

此ハ K ト K′ トガ同一點ニアラザレバ直線 EF ハ相異ナル二點ニ於テ同ジ比ニ共ニ內分,或ハ共ニ外分セラルルコトトナル, 此ハ不合理ナリ.

故ニ K ト K′ トハ同一ノ點ナリ. 換言スレバ AC, EF, BD ハ同一ノ點 K ニ於テ相交ル.

サテ此ノ第二ノ場合ニ於テ若シ AB=CD ナラバ

AE=CF, BE=DF

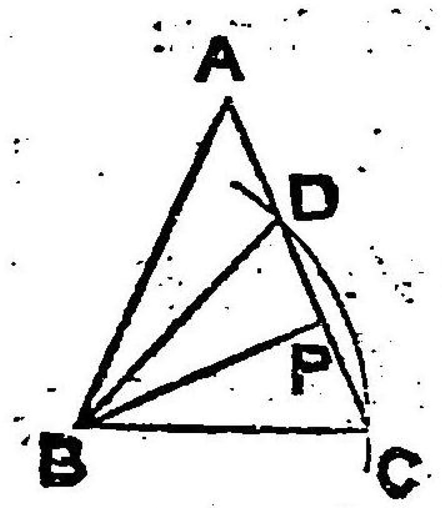
トナルユヱ AEFC, BEFD ハ平行四邊形ニシテ AC ト EF, EF ト BD, 卽チ AC, EF, BD ハ相平行スベシ.

注意 上ノ證明ハ E, F ガソレゾレ AB, CD ノ內分點ナル場合ノミヲ示シタレド又共ニ外分點ナル場合モ亦同樣ニ證シ得ベシ.

41. ABC ハ二等邊三角形ニシテ邊 AB ハ邊 AC ニ等シク, 中心 B 及ビ半徑 BC ヲ以テ圓ヲ畫キ AC ト再ビ點 D ニ於テ交ラシムルトキハ BC ハ AC, CD ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ.

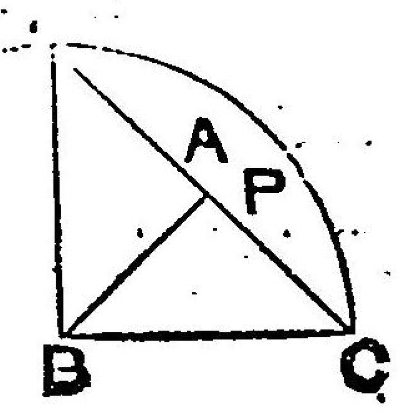
[40. 長. 高. 商.]

證 $A\hat{C}B$ ハ二等邊三角形 ABC ノ一ツノ底角ナルユヱ銳角ナルコト明カナリ. 故ニ今 B ヨリ AC ニ垂線ヲ下シ, 其ノ趾ヲ P トスレバ P ハ $B\hat{A}C$ ガ銳角ナルカ, 直角ナルカ, 或ハ鈍角ナルカニ從ヒテ CA 上ニアルカ, A ト合スルカ, 或ハ CA ノ延線上ニアリ.

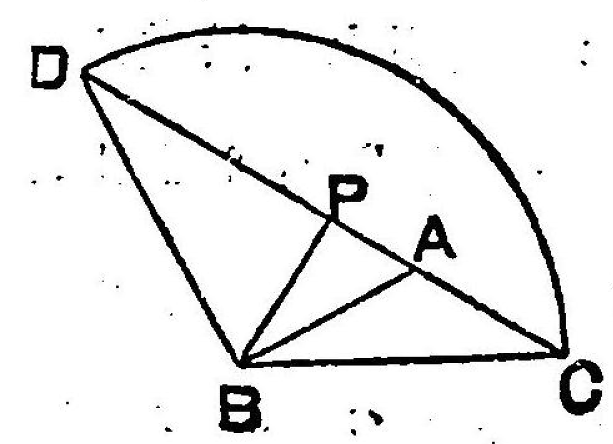





故ニ BD=BC ナル如キ CA 上ノ一點 D ハ P ニ關シテ C ト反對ノ側ニアラザルベカラズ.




是ニ依リテ A ト D トハ BC ニ關シテ同ジ側ニアリ, 卽チ何レノ場合ニ於テモ $A\hat{C}B$ ノ二邊ト $D\hat{C}B$ ノ二邊トハ相一致シ, 從ヒテ二ツノ角ハ相等シ.



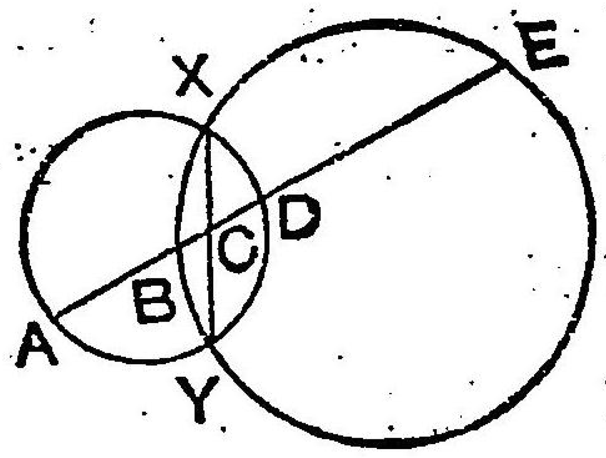

然ルニ是等ノ角ハソレゾレ A, B ヲ頂點トスル二ツノ二等邊三角形 ABC, BCD ニ於ケル一ツノ底角ナリ. 依リテ各ノ底角ハ皆相等シク, 從ヒテ二ツノ三角形ハ等角ニシテ互ニ相似ナリ. 故ニ

AC : BC = BC : CD.

42. 相交ル二ツノ圓ノ共通弦ノ上ニアル一點 C ヲ過リテ一直線 ABCDE ヲ引キ, 一ツノ圓トノ交點ヲ A, D; 他ノ圓トノ交點ヲ B, E トスルトキハ AC : BC = EC : DC

ナルコトヲ證セヨ. [35. 陸. 士.]

證 共通弦ヲ XY トスレバ XY, DA ハ圓 XDYA 內ノ一點 C ニ於テ相交ル弦ナルユヱ




$XC.YC=AC.DC.$

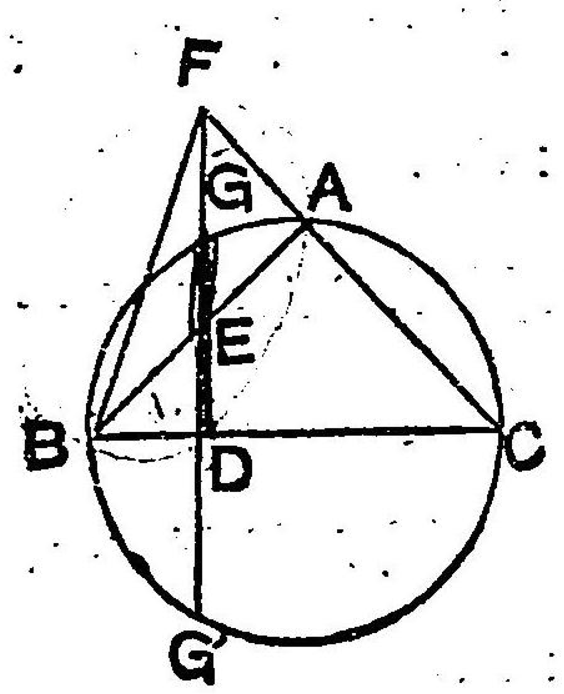
同樣ニ圓 XBYE ニ就キテ $XC.YC=BC.EC.$

故ニ $AC.DC=BC.EC,$

或ハ $AC:BC=EC:DC.$

**43.** A ハ BC ヲ徑トセル圓周上ノ任意ノ一點トス. 今 BC 上ノ任意ノ一點 D ヨリ BC ニ引ケル垂線ガ BA, CA ノ二直線及ビ圓周トソレゾレ E, F 及ビ G ニ於テ交ルトセバ DG ノ長サハ DE 及ビ DF ノ長サノ比例中項ナルコトヲ證セヨ. [33. 東. 高. 師.]

**證 I.** 四邊形 ADBF, AEDC ハ圓ニ內接シ得ベシ, 依リテ順次ニ次ノ如ク變化シ得ベシ.




$$\overline{DG}^2=BD.DC$$
$$=BD.BC-\overline{BD}^2$$
$$=BE.BA-\overline{BD}^2$$
$$=BE.EA+\overline{BE}^2-\overline{BD}^2$$
$$=DE.EF+\overline{DE}^2=DE.DF.$$

**證 II.** $DE.DF=DE(DE+EF)$

$$=\overline{DE}^2+DE.EF \quad \ldots\ldots (1)$$



然ルニ $F\hat{A}B=\hat{R}=F\hat{D}B$

ナルコトヨリ A, F, B, D ハ FB ヲ徑トスル圓周上ニアルユヱ $DE.EF=BE.EA.$

又 GD ヲ引キ延バシテ圓周 ABC ト再ビ G′ ニ於テ交ラシムレバ $BE.EA=GE.EG'$

$$=GE.(DE+DG')$$
$$=GE.(DE+DG)$$
$$=GE.DE+GE.DG.$$

依リテ (1) ハ

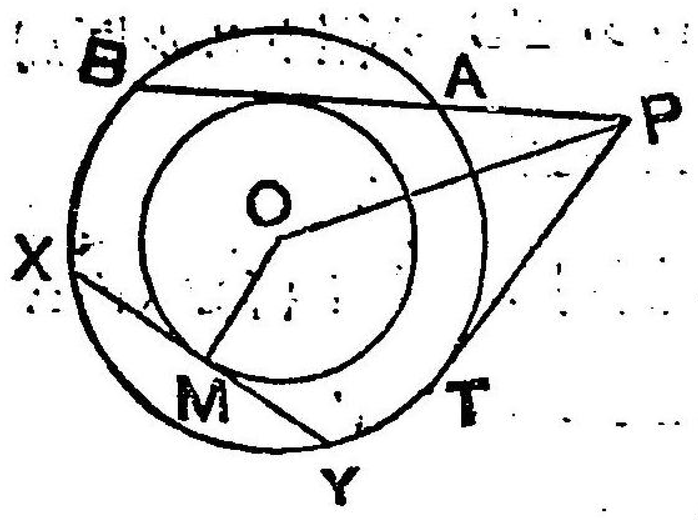
$$DE.DF=\overline{DE}^2+GE.DE+GE.DG$$
$$=DE.(DE+GE)+GE.DG$$
$$=DE.DG+GE.DG$$
$$=DG.(DE+GE)$$
$$=DG.DG.$$

故ニ $DE:DG=DG:DF.$

**44.** 與ヘラレタル圓外ノ一點 P ヲ過リテ其ノ圓ト點 A 及ビ B ニ於テ交ル所ノ割線 PAB ヲ引キ其ノ割線ノ圓內ニアル部分 AB ヲシテ全線 PB ト圓外ノ部分 PA トノ比例中項ニ等シカラシメヨ. [32. 東. 高. 師.]

**解析** 所要ノ割線PABヲ引キ得タリトスレバ

$$PA.PB=\overline{AB}^2,$$




今Pヨリ圓ニ切線PTヲ引クトキハ

$$PA.PB=\overline{PT}^2.$$

故ニ $AB=PT.$

依リテ次ノ作圖法ヲ得.

**作圖** 圓ノ中心ヲOトス. Pヨリ圓Oニ引ケル切線PTニ等シキ弦XYヲ引キ, Oヨリ之ニ垂線OMヲ下シ, OMヲ半徑トスル同心圓ヲ畫キ, Pヨリ之ニ切スル圓Oノ割線PABヲ引ケ, コレ所要ノ割線ノ一ツナルベシ.

**證** 作圖ニ依リテ $AB=XY=PT.$

故ニ $$PA.PB=\overline{PT}^2=\overline{AB}^2.$$

即チPABハ要件ニ適スル割線ナリ.

**吟味** "PT<(圓Oノ徑)"ナルトキハPヨリ圓OMニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得, 從ヒテ二ツノ解アリ. "PT=(圓Oノ徑)"ナルトキハPOヲ過ル割線ハ所要ノモノナリ. 而シテ"PT>(圓Oノ徑)"ナルトキハ解ナシ.

**45.** 三角形ABCニ於テAC>BCナルトキ

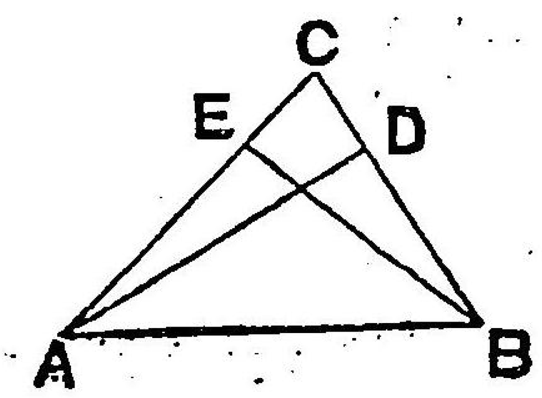


A, Bヨリ其ノ對邊ニ引キタル垂線ヲソレゾレAD, BEトスレバ

(1) $AD>BE.$

(2) $AC+BE>BC+AD.$ [38, 商船]

(1) **證 I.** ADトBCト, 或ハBEトACトノ包ム矩形ハ何レモ三角形ABCノ2倍ニ等シキユヱ相等シ.




即チ $AD.BC=BE.AC.$

或ハ $$\frac{AD}{BE}=\frac{AC}{BC},$$

然ルニ假設ニ依リテ $AC>BC.$

故ニ $AD>BE.$

**證 II.** 二ツノ直角三角形ADC, BECハ互ニ相似ナルコト明カナリ.

故ニ $AC:BC=AD:BE,$

然ルニ $AC>BC,$

故ニ $AD>BE.$

**別證** $A\hat{E}B=\hat{R}=A\hat{D}B$

ナルユヱAEDBハ圓ニ內接スベシ

依リテ $A\hat{B}D>=<E\hat{A}B$

ナルニ從ヒテ $AD>=<BE,$

然ルニ $\triangle ABC$ ニ於テ $AC>BC$

ナルユエ $A\hat{B}D>E\hat{A}B$,

故ニ $AD>BE$.

**注意** (1)ノ別證ニ就キテハ又**A.27**題ヲ見ヨ.

(2) 證 又 $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BE}$

ヨリ $\dfrac{AC-BC}{BC}=\dfrac{AD-BE}{BE}$,

或ハ $\dfrac{AC-BC}{AD-EB}=\dfrac{BC}{BE}$,

然ルニ BC ハ B ヨリ AC ヘノ斜線ニシテ BE ハ垂線ナルユエ $BC>BE$.

故ニ $AC-BC>AD-BE$,

即チ $AC+BE>BC+AD$.

別證 $BE.AC=AD.BC=2\triangle ABC$[=(一定量)],

然ルニ $AC>BC$,

故ニ $BE<AD$,

故ニ $AC-BE>BC-AD$,

依リテ $AC+BE>BC+AD$

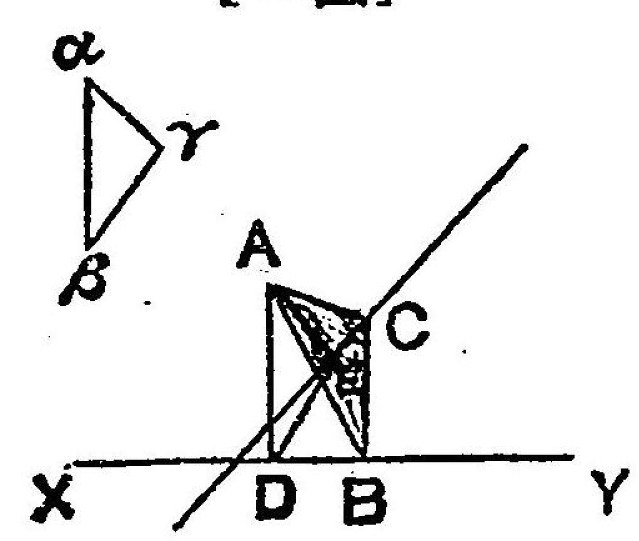
**46.** 與ヘラレタル三角形ニ相似ナル三角形ノ一角頂ハ一定點ニ在リ，他ノ一角頂ハ恒ニ與ヘラレタル一直線上ニアリ．然ルトキハ第三ノ角頂ノ軌跡ハ一ツノ直線ナルコトヲ證セヨ．

[36. 海. 兵.]

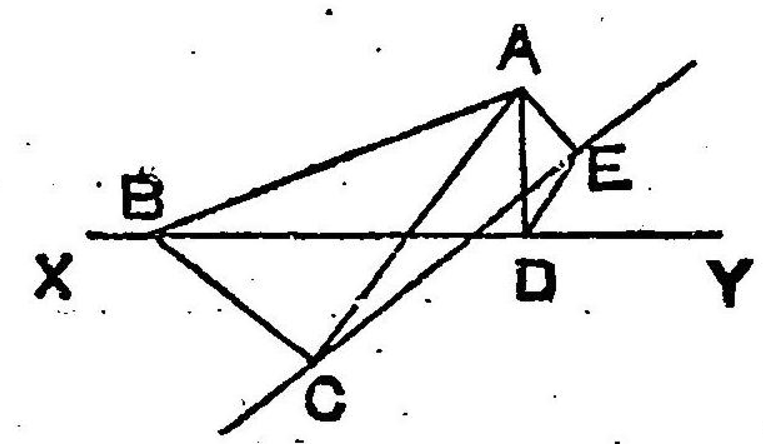


與ヘラレタル三角形ヲ $\alpha\beta\gamma$, 直線ヲ XY, 定點ヲ A トス. 三角形 $\alpha\beta\gamma$ ニ相似ナル三角形ノ $\alpha$ ニ對應スル角頂ハ點Aニ固定シ, $\beta$ ニ對應スル角頂ハ直線 XY ノ上ニアリ, 且 $\gamma$ ニ對應スル角頂ハ其ノ對邊ニ關シテ恒ニ X 若シクハ Y, 例ヘバ Y ト同ジ側ニアルモノトスレバ此ノ第三ノ角頂ノ軌跡ハ一ツノ直線ナルベシ.

[1圖]




[2圖]




證 先ヅ要件ニ適スル一ツノ三角形ヲ ABC トシ, 又 XY ニ垂線 AD ヲ引キ, 尚 AD ノ上ニ要件ニ適スル三角形 ADE ヲ作リ, CE ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ ADE ハ定位置ニシテ定形ナル三角形ニシテ $\triangle ABC \backsim \triangle ADE$.

故ニ $D\hat{A}E=B\hat{A}C$.

依リテ $D\hat{A}C-D\hat{A}E=D\hat{A}C-B\hat{A}C$ [1圖]

或ハ $B\hat{A}E - B\hat{A}C = B\hat{A}E - D\hat{A}E$ [2圖]

何レニシテモ $E\hat{A}C = D\hat{A}B.$

然ルニ $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$

ナルコトヨリ $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AD}{AB},$

故ニ又 $\triangle AEC \backsim \triangle ADB.$

從ヒテ $A\hat{E}C = A\hat{D}B = \hat{R},$

即チ要件ニ適スル點 C ハ定點 E ヲ過リ定直線 AE ニ垂直ナル一定直線上ニアリ.

逆ニ定點 E ヲ過リ定直線 AE ニ垂線ナル直線上ノ任意ノ一點ヲ C トシ, AC ヲ $\alpha\gamma$ ノ對應邊トシテ $\alpha\gamma\beta$ ニ相似ナル三角形 ACB ヲ畫キ, DB ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ前ニ云ヘルコトト全ク同樣ニシテ $A\hat{D}B = A\hat{E}C = \hat{R}$ ナルコトヲ證シ得ベシ.

故ニ點 B ハ直線 XY 上ニアリ, 即チ點 C ハ要件ニ適スル點ナリ.

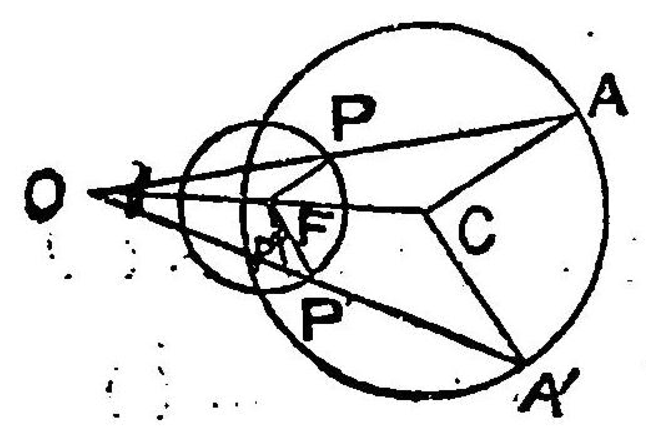
依リテ題言ノ如シ.

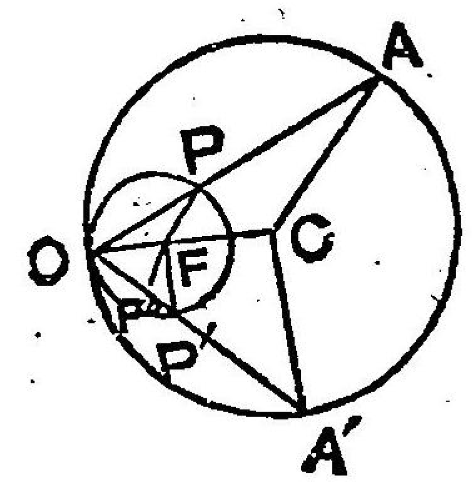
注意 三角形 ABC ト三角形 $\alpha\beta\gamma$ トノ對應如何ノ制限ヲ全ク省クトキハ軌跡ナル直線ハ12本アリ. 願フニ本題ノ如ク題文ガ不完全ナルモノヲ證明スルニハ解者ガ豫メ適當ノ斷リヲ設ケレバ可ナリ.



47. 定點 O ヨリ定圓周上ノ點 A ヘ直線 OA ヲ引キ之ヲ P ニ於テ比 OP : PA ヲ恒ニ與ヘラレタル比ニ等シキ樣ニ分チ, A ガ其ノ圓周上ニ動クトキハ點 P ノ軌跡如何. [40. 名. 高. 工.]

**解** 與ヘラレタル比ヲ $m:n$ トス. 先ヅ P ヲ OA ノ内分點トシ, OC ヲ結ビ付ケ之ヲ F ニ於テ比 $m:n$ ニ内分スレバ F ハ定點ナリ. 今 FP, CA ヲ結ビ付ケヨ. 然ルトキハ



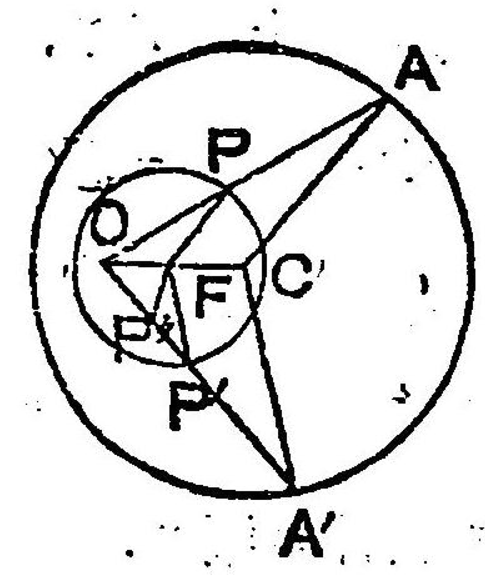




$$OP : PA = m : n = OF : FC.$$

故ニ PF ハ AC ニ平行ス.

依リテ

$$OC : OF = AC : PF \quad \dots (1)$$




而シテ此ノ比例ニ於テ始ノ三項ハ定量ナルユヱ第四項 PF モ亦定量ナラザルベカラズ.

依リテ要件ニ適スル點ハ F ヲ中心トシ; OC, OF, AC ノ比例第四項 FP ヲ半徑トスル圓周上ニア

リ.

逆ニ此ノ圓周上ノ任意ノ點 $P'$ ヲ取リ, $OP'$ ヲ結ビ付ケ, 之ヲ引キ延バシテ圓周 $C$ ト $A'$ ニ於テ交ラシメ $FP'$, $CA'$ ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　$OP':P'A'=m:n$　ナルベシ.

如何トナレバ　$OP':P'A'=m:n$

ナラズトシ, $OA'$ ヲ $P''$ ニ於テ

$$OP'':P''A'=m:n$$

ナル如ク内分スレバ前ニ云ヘル如ク $FP''$ ハ $CA'$ ニ平行シ　$OC:OF=A'C:P''F$ ... (2)

即チ (1), (2) ヲ比較シテ

$$A'C:P''F=AC:PF,$$

茲ニ $A'C$, $AC$ ハ圓 $C$ ノ半徑ニシテ相等シ,

故ニ　$P''F=PF$,

即チ $P''$ ハ $OA'$ 上ニアリ, 且圓周 $FP$ 上ニアリ,

故ニ $P''$ ハ $OA'$ ト圓周 $FP$ トノ交點 $P'$ ト一致セザルベカラズ.

是ニ依リテ　$OP':P'A'=m:n$

ニテシ, 圓周 $FP$ 上ノ任意ノ點ハ要件ニ適ス.

故ニ所要ノ軌跡ハ圓周 $FP$ ナリ.

次ニ $P$ ガ $OA$ ノ外分點ナル場合モ亦同様ニシ

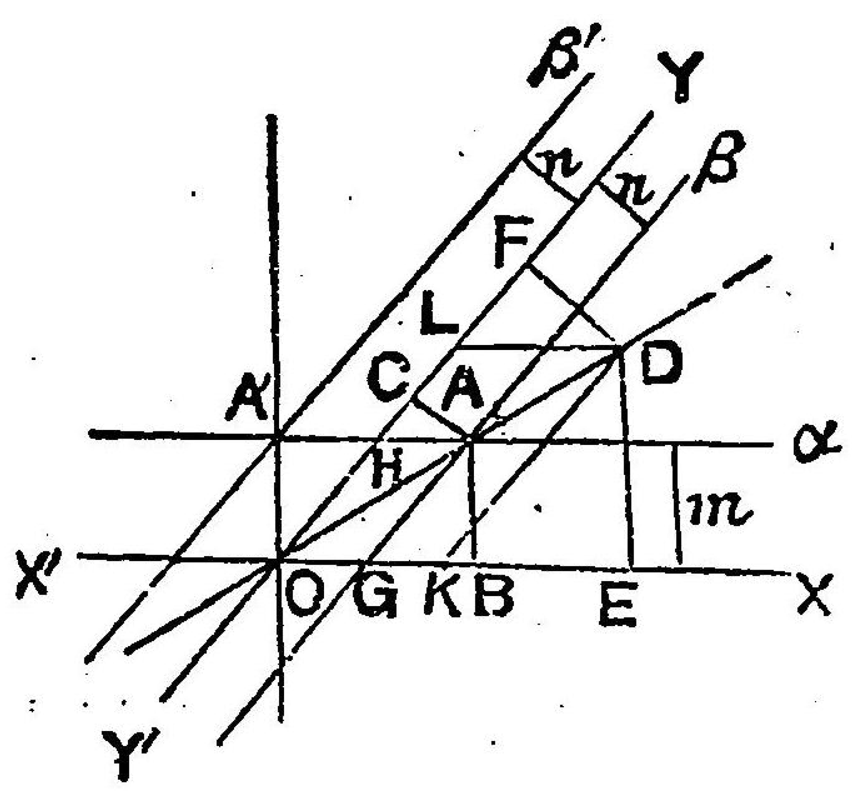


テ其ノ軌跡ハ圓周ナルコトヲ證シ得ベシ.

**48.** 二ツノ定直線ニ至ル距離ガ定比ヲ有スル點ノ軌跡ヲ求メヨ.　[30. 商船.]

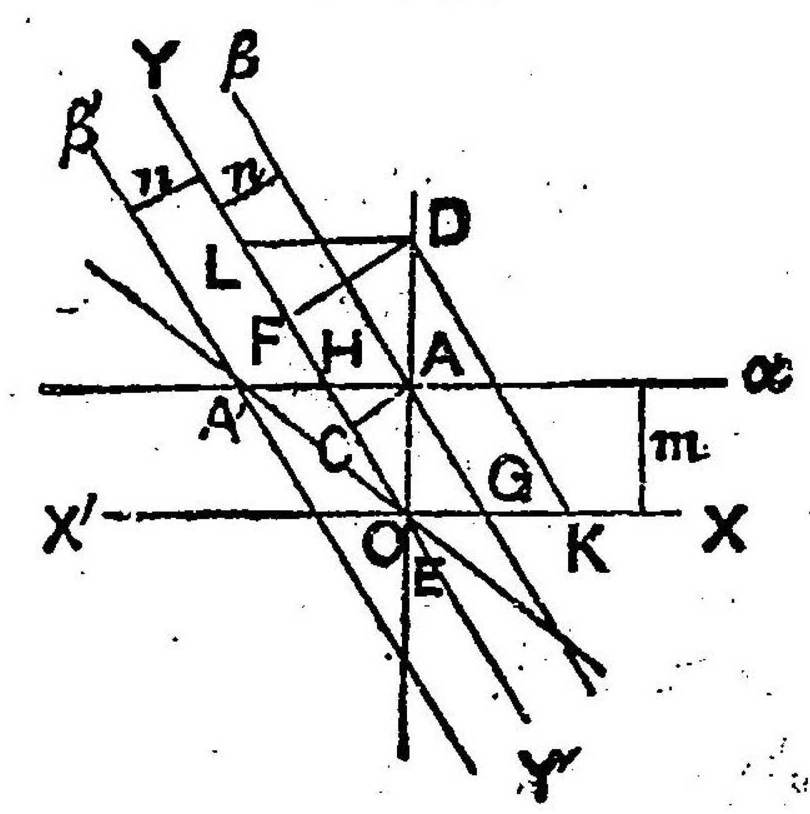
解 (I) 二ツノ定直線ガ相交ルトキ.

[1 圖]




之ヲ $XOX'$, $YOY'$ トス. $XOX'$ ニ至ル距離ト $YOY'$ ニ至ル距離トノ比ガ $m:n$ ナル如キ點ノ軌跡ヲ求メントス.

[2 圖]




$XOX'$ ヨリ $m$ ナル距離[任意ノ長サノ直線ヲ單位トシテ]ニアル點ノ軌跡ナル直線ノ中 $XOX'$ ニ關シテ $Y$ ト同ジ側ニアルモノヲ $\alpha$ ト名ヅケ, $YOY'$ ヨリ $n$ ナル距離[前ト同ジ

直線單位ニ依リ] ニアル點ノ軌跡ナル直線ノ中，YOY′ ニ關シテ X ト同ジ側ニアルモノ ヲ β, X′ ト同ジ側ニアルモノヲ β′ ト名ヅケン.

而シテ α ト β トノ交點ヲ A, α ト β′ トノ交點ヲ A′ トスレバ二ツノ直線 OA 及ビ OA′ ハ所要ノ軌跡ナルベシ.

如何トナレバ先ヅ OA 上ニ O ノ外ナル任意ノ一點 D ヲ取リ OX 及ビ OY ニ垂線 AB, DE 及ビ AC, DF ヲ引ケ，

然ルトキハ OA ガ OX ニ斜線ナルカ垂線ナルカニ從ヒテ B, E ハ OX 上ニ於テ O ノ外ナル相異ナル二點ナルカ或ハ O ト一致シテ一點トナルベシ [2圖ニ於テハ O ヲ又 B ト見ルベシ].

故ニ始ノ場合 [1圖] ニ於テハ

$\triangle AOB \backsim \triangle DOE$,　及ビ　$\triangle AOC \backsim \triangle DOF$.

後ノ場合[2圖]ニ於テハ三角形 AOB ト DOE トハ消失スレド矢張リ第二ノ關係アリ.

依リテ何レノ場合ニ於テモ

$$\frac{DE}{AB}=\frac{OD}{OA}=\frac{DF}{AC},$$

或ハ
$$\frac{DE}{DF}=\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}.$$



卽チ直線 OA 上ノ任意ノ一點ハ要件ニ適ス.

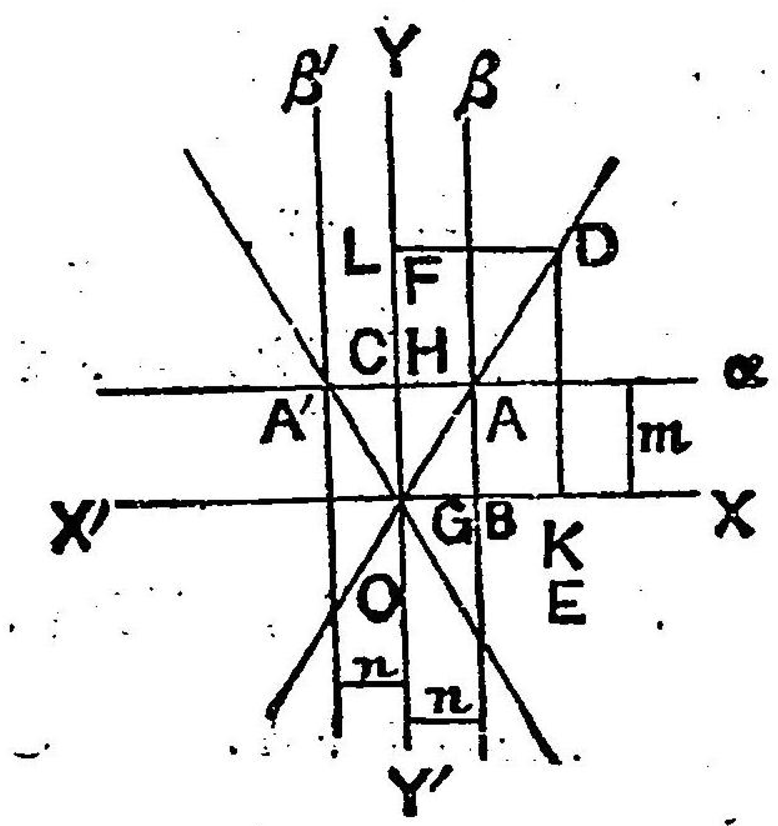
逆ニ $X\hat{O}Y$ 或ハ其ノ對頂角ノ內ニアリテ要件ニ適スル點ヲ D トス，卽チ $\frac{DE}{DF}=\frac{m}{n}$ トス.

OA, OD ヲ結ビ付ケ，D ヲ過リテ XOX′, YOY′ ニ平行ナル二直線ヲ引キ ソレゾレ YOY′, XOX′ トノ交點ヲ L, K トセヨ. 然ルトキハ二角ガソレゾレ相等シキコトニ依リテ $\triangle DKE \backsim \triangle DLF$.

故ニ
$$\frac{DK}{DL}=\frac{DE}{DF}=\frac{m}{n}.$$

但茲ニ注意ヲ要スルハ XOX′, YOY′ ガ互ニ直角ニ相交ルトキニシテ此ノ場合ニハ三角形 DKE, DLF ハ消失ス [3圖].

[3圖]




然レドモ此ノ場合ニハ　DK=DE,
　　DL=DF

トナリテ矢張リ差支ナシ.

サテ何レノ場合ニ於テモ平行四邊形 DKOL ノ相對スル邊トシテ

DL=OK ナルニ因リ　$\frac{DK}{OK}=\frac{m}{n}$　…… …… (1)

尙　$\triangle AGB \backsim \triangle AHC$,　[1圖及ビ2圖]

或ハ AG ト AB, AH ト AC トガ一致スルコトニ依リ [3 圖]　$\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{m}{n}$.

然ルニ　$AH=OG$

ナルユエ　$\dfrac{AG}{OG}=\dfrac{m}{n}$　… … … … (2)

(1), (2) ヲ比較シテ　$\dfrac{DK}{OK}=\dfrac{AG}{OG}$.

而シテ DK ト AG トハ平行ナルユエ

$$O\hat{K}D=O\hat{G}A.$$

故ニ　$\triangle DOK \backsim \triangle AOG$,

依リテ　$D\hat{O}K=A\hat{O}G$.

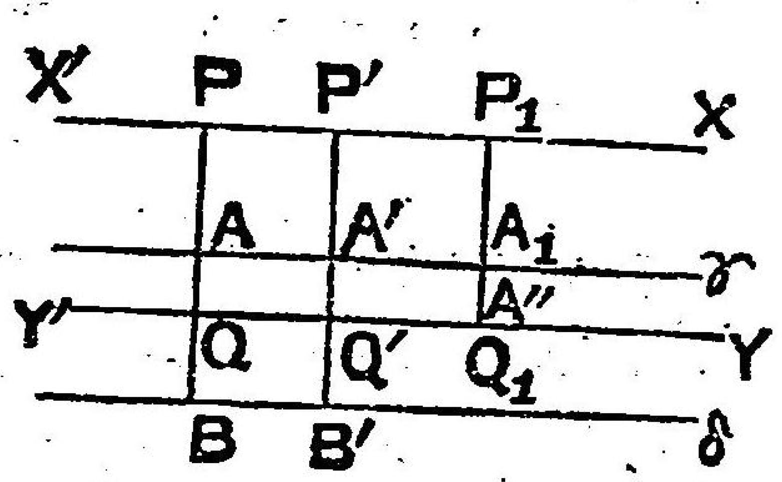
故ニ點 D ハ直線 OA 上ニアリ。

即チ直線 OA ハ所要ノ軌跡ノ一ツナリ。

同樣ニシテ直線 OA′ モ亦所要ノ軌跡ナルコトヲ證シ得ベシ。

故ニ所要ノ全キ軌跡ハ二ツノ直線 OA, OA′ ナリ。

(II)　二ツノ定直線ガ相平行スルトキ。




之ヲ XX′, YY′ トス。XX′ ニ至ル距離ト YY′ ニ至ル距離トノ比ガ $m:n$ ナル如キ點ノ軌跡ヲ求メントス。



XX′, YY′ ニ共通ナル垂線 PQ ヲ引キ, PQ ヲ二點 A, B ニ於テ $m:n$ ニ内分及ビ外分シ; A, B ヲ過リテ XX′ ニ平行ナル直線 $\gamma, \delta$ ヲ作レバ $\gamma, \delta$ ハ所要ノ軌跡ナルベシ。

如何トナレバ $\gamma$ ノ上ニ任意ノ一點 A′ ヲ取リ, A′ ヨリ XX′, YY′ ニソレゾレ垂線 A′P′, A′Q′ ヲ引クトキハ P′A′Q′ ハ一直線ヲナス。

而シテ　$P'A'=PA,\ Q'A'=QA$.

故ニ　$P'A':Q'A'=PA:QA=m:n$.

故ニ $\gamma$ ノ上ノ任意ノ點ハ要件ニ適ス。

同樣ニ $\delta$ ノ上ノ任意ノ點モ亦要件ニ適ス。

又 XX′, YY′ ノ間ニアリテ $\gamma$ ノ上ニアラザル任意ノ一點ヲ $A_1$ トシ $A_1$ ヨリ XX′, YY′ ニソレゾレ垂線 $A_1P_1, A_1Q_1$ ヲ引ケ。然ルトキハ $P_1A_1Q_1$ ハ一直線ヲナシ, XX′ ト YY′ トノ間ニアリテ之ニ平行ナル直線 $\gamma$ ト交ル, 其ノ交點ヲ A″ トセヨ。前ニ云ヘルコトニ依リテ

$$A''P_1:A''Q_1=m:n.$$

而シテ直線 $P_1Q_1$ ハ A″ ノ他ナル點 $A_1$ ニ於テ再ビ同ジ比ニ内分セラルルコトナシ。

故ニ XX′, YY′ ノ間ニアリテ $\gamma$ ノ外ナル點 $A_1$ ハ

要件ニ適セズ.

同樣ニ $XX'$, $YY'$ ノ挿ム平面ノ外ニアリテ $\delta$ ノ上ニアラザル任意ノ點ハ要件ニ適セズ.

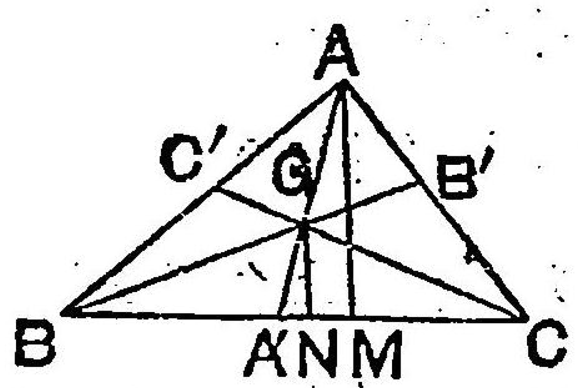
依リテ所要ノ軌跡ハ二ツノ直線 $\gamma$ 及ビ $\delta$ ナリ.

注意 $m:n=1$ ナルトキハ $\delta$ ハ不能ナリ

49. 三角形內ニ一點ヲ求メ其ノ點ヲ各角頂ニ結ビ付ケ其ノ三角形ヲ三等分セヨ.

[33. 名. 高. 商.]

解 I. 三角形ヲ ABC トシ, 三ツノ中線 $AA'$, $BB'$, $CC'$ ノ交點ヲ G トスレバ G ハ所要ノ點ナルベシ.

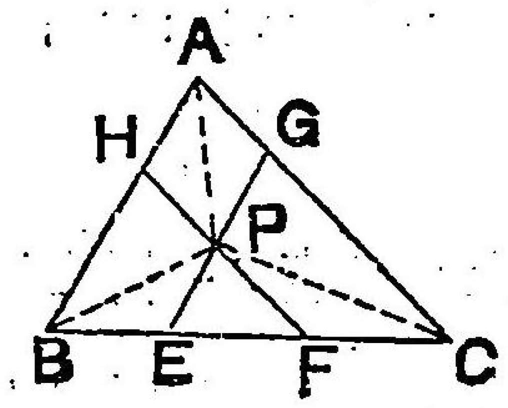



如何トナレバ A, G ヨリ BC ヘソレゾレ垂線 AM, GN ヲ引ケ, 然ルトキハ
$$\frac{\triangle GBC}{\triangle ABC}=\frac{GN}{AM}=\frac{GA'}{AA'}=\frac{1}{3}.$$
卽チ $$\triangle GBC=\frac{1}{3}\triangle ABC.$$
同樣ニ $$\triangle GCA=GAB=\frac{1}{3}\triangle ABC.$$

解 II. $\triangle ABC$ ノ一邊, 例ヘバ BC ヲ E, F ニ於テ三等分シ, 卽チ BE=EF=FC トシ; E, F ヲ通リテソレゾレ AB, AC ニ平行ナル直線 EG, FH ヲ引キ, 其ノ交點ヲ P トスレバ P ハ所要ノ點ナルベシ.



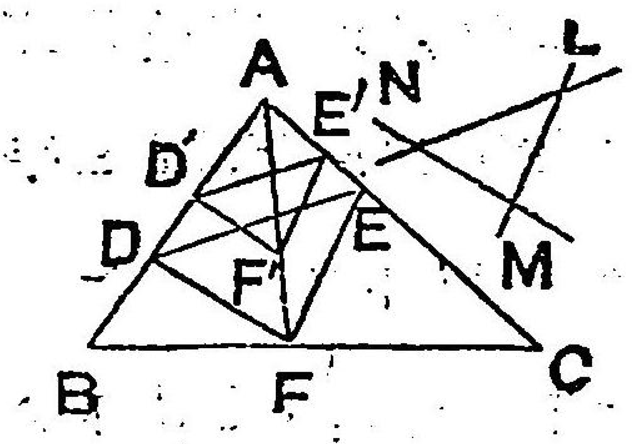
如何トナレバ AB ヲ底トシ, 頂點ヲ EG ノ上ニ有ツ三角形ハ $BE=\frac{1}{3}BC$ ナルコトヨリ $\frac{1}{3}\triangle ABC$ ナリ.




故ニ $$\triangle APB=\frac{1}{3}\triangle ABC,$$
同樣ニ $$\triangle APC=\frac{1}{3}\triangle ABC,$$
從ヒテ $$\triangle BPC=\frac{1}{3}\triangle ABC$$
ナレバナリ.

50. 三ツノ邊ガソレゾレ與ヘラレタル三ツノ直線ニ平行ナル三角形ヲ與ヘラレタル三角形ニ內接スルコト. [30. 東. 高. 工.]

解 I. 三ツノ邊ガソレゾレ與ヘラレタル三ツノ直線 L, M, N ニ平行ナル三角形ヲ與ヘラレタル三角形 ABC ニ內接セシトス.




先ヅ L, M, N ニ平行ナル三ツノ直線ガ二ツヅツ相交リテ三角形ヲナス爲ニハ L, M, N モ亦二ツヅツ相交リテ三角形ヲナス如キ直線ナラザルベカラザルコト明カナリ.

**解析**　所要ノ三角形DEFヲ畫キ得タトリセヨ. 但 D, E, F ハソレゾレ AB, AC, BC ノ上ニアリ, 且 DE ハ L ニ, EF ハ M ニ, FD ハ N ニソレゾレ平行ナルモノトス.

サテ AF ヲ結ビ付ケ, AF ノ上ニ任意ノ一點 F′ ヲ取リ; FD, FE ニ平行ニ F′D′, F′E′ ヲ引キ F′D′ ト AB トノ交點ヲ D′, F′E′ ト AC トノ交點ヲ E′ トシ, D′E′ ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ相似三角形ニ依リテ

$$AD' : AD = AF' : AF = AE' : AE,$$

故ニ D′E′ ハ DE 或ハ L ニ平行ニシテ, 從ヒテ三角形 D′E′F′ ノ三邊モ亦ソレゾレ L, M, N ニ平行スベシ. 依リテ次ノ作圖法ヲ得.

**作圖**　AB, AC ノ間ニ L ニ平行ナル直線 D′E′ ヲ引キ; 又 D′, E′ ヲ過リテソレゾレ N, M ニ平行ナル直線ヲ引キ其ノ交點ヲ F′ トス.

AF′ ヲ結ビ付ケ, AF 或ハ其ノ延線ト BC トノ交點ヲ F トシ, F ヲ過リテ N, M ニ平行ナル直線 FD, FE ヲ引キソレゾレ AB, AC トノ交點ヲ D, E トス. DE ヲ結ビ付クレバ三角形 DEF ハ所要ノモノナルベシ.



**證**　作圖ニ依リテ

$$AD : AD' = AF : AF' = AE : AE',$$

故ニ DE ハ D′E′ ニ平行ス.

即チ三角形 DEF ノ三邊ハ三角形 D′E′F′ ノ三邊ニ平行ス.

然ルニ三角形 D′E′F′ ノ三邊ハソレゾレ L, M, N ニ平行ス.

故ニ三角形 DEF ノ三邊モ亦ソレゾレ L, M, N ニ平行ス.

**解 II.**　三ツノ直線 L, M, N ノナス三角形 LMN ノ角頂 N, M, L ヲ過リ, ソレゾレ AB, BC, AC ニ平行ナル直線ヲ引キテ生ズル三角形ヲ A′B′C′ トシ, AB ニ對應スル邊ヲ A′B′ トス.

次ニ AB ヲ D ニ於テ　$A'N : NB' = AD : DB$ ナル如ク內分シ, D ヲ過リ DE, DF ヲソレゾレ NL, NM ニ平行ニ引キ AB, BC トノ交點ヲ E, F トシ; EF ヲ結ビ付クレバ DEF ハ所要ノ三角形ナリ.

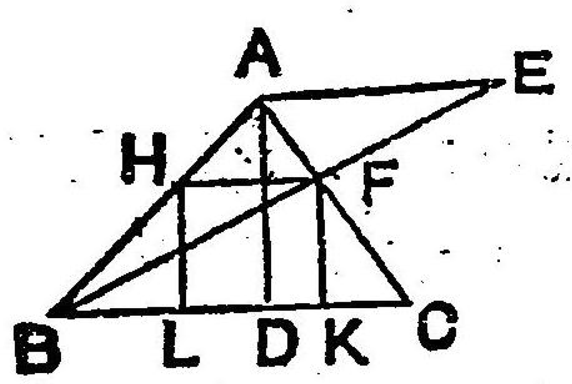
如何トナレバ EF ガ LM ニ平行ナルコトハ容易ニ知リ得ベケレバナリ.

**吟味**　△A′B′C′ ノ各邊ガ L, M, N ノ何レヲ過

ルカニ從ヒテ種々ノ場合ヲ生ズベシ

**51.** 與ヘラレタル三角形內ニ正方形ヲ內接スルコト. [32. 東. 高. 工.]

**解** 與ヘラレタル三角形ヲ ABC トシ, $\hat{B}$ 及ビ $\hat{C}$ ヲ直角ヨリ大ナラザルモノトス. A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ下ストキハ其ノ趾 D ハ BC ノ上ニアリ, 依リテ BC ニ平行ナル AE ヲ引キ, AE ヲ AD ニ等シカラシム. 而シテ BE ヲ結ビ付ケ, AC トノ交點ヲ F トシ, CB ニ平行ニ FH ヲ引キ, AB トノ交點ヲ H トシ; F, H ヨリ BC ニソレゾレ垂線 FK, HL ヲ下セバ二ツノ趾 K, L ハ何レモ BC 上ニアリ. 而シテ FHLK ハ所要ノ正方形ナルベシ.




如何トナレバ先ヅ作圖ニ依リテ四邊形 FHLK ハ三角形 ABC ニ內接シ, FH ト KL トハ互ニ平行, 又 FK ト HL トハ共ニ BC ニ垂直ナルユヱ互ニ平行ニシテ, 且一ツノ角, 例ヘバ $\hat{K}$ ガ直角ニ等シキコトニ依リテ此ハ矩形ナルコト明カナリ.

故ニ此ノ四邊形ガ正方形ナルコトヲ證明スルニハ隣接スル二邊ガ相等シキコトヲ示セバ可ナリ.



然ルニ相似三角形ニ依リテ

$$FK : AD = FC : AC = HB : AB$$

$$= HF : AE = HF : AD. \qquad \text{[作圖]}$$

故ニ $\qquad FK = HF.$

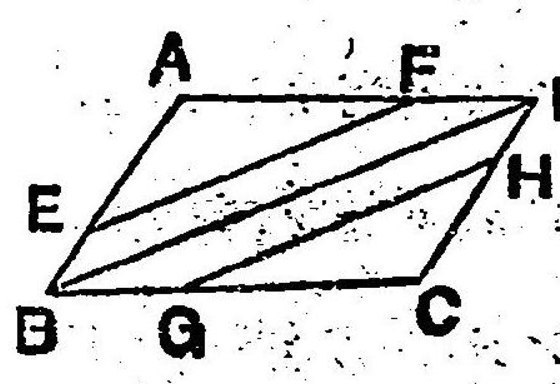
卽チ FHKL ハ所要ノ正方形ナリ.

**吟味** 三角形ノ三ツノ內角ノ和ガ二直角ニ等シキユヱ相隣レル二角ガ何レモ直角ヨリ大ナラザル如ク撰ブハ固ヨリ可能ノコトニシテ, 從ヒテ本題ハ恒ニ作圖シ得ベキ問題ナリ.

而シテ本題ハ恒ニ三ツノ解アレドモ鈍角三角形ニ於テ其ノ二ツハ一ツノ角頂ガ形外ニ出ヅ. 又直角三角形ニ於テハ二ツノ解アリテ其ノ一ツハ三角形ト一ツノ角頂ヲ共有ス.

**52.** 對角線ニ平行セル二ツノ直線ヲ以テ平行四邊形ヲ三等分スルコトヲ求ム. [40. 商船]

**解析** 平行四邊形ヲ ABCD トシ, 其ノ對角線ノ一ツ, 例ヘバ BD ニ平行ナル二ツノ直線 EF, GH ヲ引キテ本形ヲ




$$\triangle AEF = \text{圖形 } EBGHDF = \triangle CGH$$

ナル如ク三等分シ得タリトセン.

然ルトキハ三角形 ABD ハ平行四邊形ノ二分ノ一ニ等シク，三角形 AEF ハ平行四邊形ノ三分ノ一ニ等シ．而シテ二ツノ三角形ハ互ニ相似ナリ．故ニ相似三角形ノ面積ノ關係トシテ

$$\triangle ABD : \triangle AEF = \overline{AB}^2 : \overline{AE}^2,$$

或ハ $\overline{AB}^2 : \overline{AE}^2 = \triangle ABD : \triangle AEF$

$$= \frac{1}{2} \square ABCD : \frac{1}{3} \square ABCD = 3 : 2.$$

同樣ニシテ $\overline{CD}^2 : \overline{CH} = 3 : 2,$

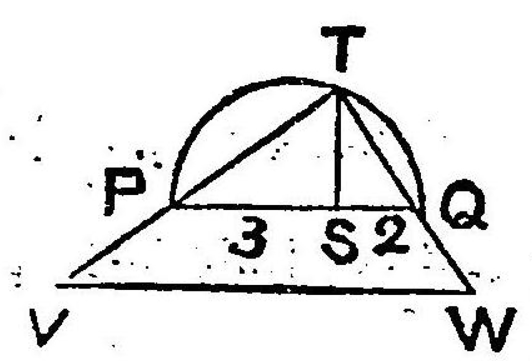
然ルニ $AB = CD,$

故ニ $AE = CH.$

是ニ依リテ次ノ作圖法ヲ得．

**作圖** 任意ノ直線 PQ ヲ引キ，之ヲ S ニ於テ

$PS : QS = 3 : 2$




ナル如ク內分シ，又 PQ ヲ徑トシテ半圓 PTQ ヲ畫キ，PQ ニ垂直ナル直線 ST ヲ作リ，半圓 PTQ ト T ニ於テ交ラシメヨ．次ニ TP, TQ ヲ結ビ付ケ，TP 或ハ其ノ延線上ニ點 V ヲ取リ，TV＝AB ナラシメ，V ヲ過リテ PQ ニ平行ナル直線ヲ引キ，TQ 或ハ其ノ延線ト W ニ於テ交ラシメ，TW ニ等シク AE, CH ヲソレゾ



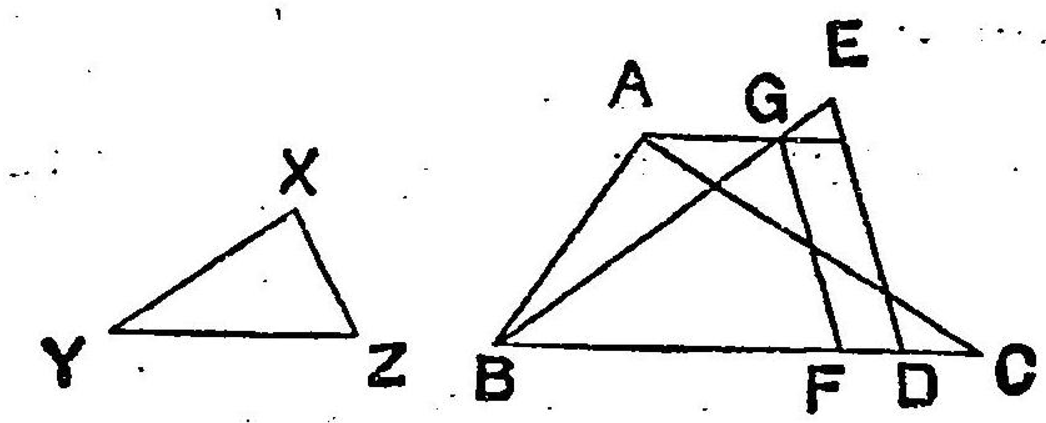
レ與ヘラレタル平行四邊形ノ二邊AB, CD上ニ取リ；E, H ヲ過リテ BD ニ平行ニ EF, HG ヲ引ケバ，コレ所要ノ二直線ナルベシ．

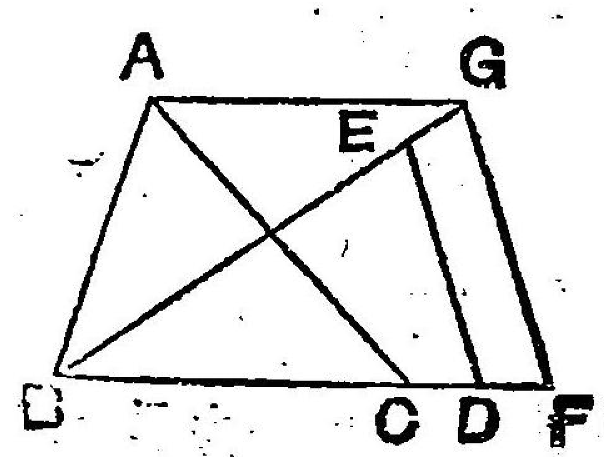
**證** 解析及ビ作圖ニ依リテ明カナルユヱ之ヲ略ス［22 題參照］．

**吟味** 平行四邊形ノ對角線ハ二ツアルユヱ二ツノ解アリ．

53．一ツノ三角形ニ等シク且他ノ三角形ニ相似ナル三角形ヲ作レ．［40．金．醫．專．］

一ツノ三角形ABCニ等シク，且他ノ三角形XYZ




ニ相似ナル三角形ヲ作ラシトス．

**解析** 所要ノ三角形ヲ作リ得タリトシ，三角形XYZノ一邊YZニ對應スル其ノ一邊ヲBCニ沿ハシメ，且Yニ對應スル角頂ヲBト一致セシメ，而シテ全キ圖形ヲBCニ關シテ三角形ABCト同

ジ側ニ置キ;Z, X ニ對應スル角項ノ落チタル位置チソレゾレ D, E トセン.

而シテ A チ過リ BC ニ平行ナル直線 AG チ引キ BE, 或ハ其ノ延線トノ交點チ G トシ, G ヨリ ED ニ平行ナル直線 GF チ引キ BC 或ハ其ノ延線トノ交點チ F トセヨ.

然ルトキハ $\triangle EBD \backsim \triangle GBF$,

故ニ $\triangle EBD : \triangle GBF = \overline{BD}^2 : \overline{BF}^2$.

然ルニ三角形 EBD ハ三角形 ABC ニ等シク, 三角形 ABC ト三角形 GBF トハ高サ相等シキユエ其ノ底ニ比例ス.

故ニ $\triangle EBD : \triangle GBF = \triangle ABC : \triangle GBF$

$= BC : BF$.

依リテ $BC : BF = \overline{BD}^2 : \overline{BF}^2$,

或ハ $BC.BF : \overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BF}^2$.

故ニ $BC.BF = \overline{BD}^2$,

卽チ $BC : BD = BD : BF$.

玆ニ BC ハ既知ノ長サノ直線, 又 BF ハ容易ニ求メ得ベキ長サノ直線ナルユエ其ノ比例中項ナル BD ノ長サハ決定セラレ, 所要ノ三角形 BDE チ作ルコトチ得ベシ. 卽チ次ノ作圖法チ得.



**作圖** $\hat{CBG} = \hat{Y}$ ナル如キ直線 BG チ BC ニ關シテ三角形 ABC ト同ジ側ニ引キ, 又 A チ過リ BC ニ平行ニ AG チ引キ, BG トノ交點チ G トス. 次ニ G ニ於テ $\hat{BGF} = \hat{X}$ ナル如キ直線 GF チ BG ニ關シテ $\hat{CBG}$ ト同ジ側ニ引キ, BC トノ交點チ F トス. サテ BC ト BF トノ比例中項ニ等シキ直線チ作リ, 之ニ等シク BC [必要ナラバ之チ引キ延バシテ] ヨリ BD チ取リ, D チ過リ FG ニ平行ニ DE チ引キ, BG 或ハ其ノ延線ノ交點チ E トスレバ三角形 EBD ハ所要ノ三角形ナルベシ.

**證** 作圖ニ依リテ

$\triangle EBD : \triangle GBF = \overline{BD}^2 : \overline{BF}^2$

$= BC.BF : \overline{BF}^2 = BC : BF$

$= \triangle ABC : \triangle GBF$.

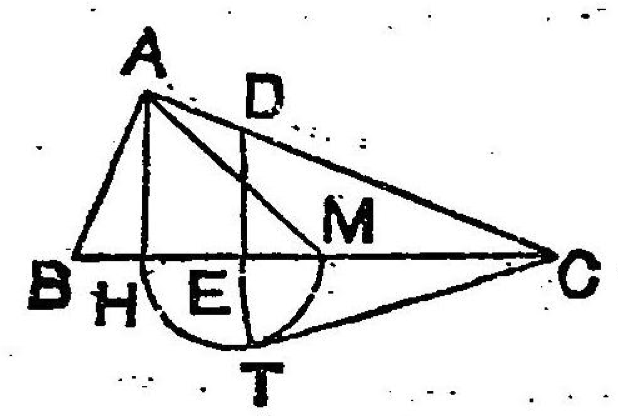
故ニ $\triangle EBD = \triangle ABC$.

而シテ三角形 EBD ハ三角形 GBF ニ相似ニシテ三角形 GBF ハ三角形 XYZ ニ相似ナルユエ三角形 EBD モ亦三角形 XYZ ニ相似ナリ.

54. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ニ垂直ナル直線チ引キテ其ノ面積チ二等分セヨ.

[40. 農. 大. 實]

**解** 與ヘラレタル三角形ヲ ABC トシ, 一邊 BC ニ垂直ナル直線 DE ニ依リテ本形ヲ二等分セントス.




先ヅ AB＝AC ナルトキハ A ヨリ BC ニ下セル垂線ハ本形ヲ二等分スルコト明カナリ. 故ニ $AB \neq AC$ ナルモノトス.

**解析** $AC>AB$ ト假定シ, 所要ノ直線 DE ヲ引キ得タリトセヨ.

今 BC ノ中點 M ト A トヲ結ビ付ケ, 又 A ヨリ BC ヘ垂線 AH ヲ引ク.

然ルトキハ $\triangle CAM=\frac{1}{2}\triangle ABC$,

及ビ $AC>AB$

ナルコトヨリ DE ト AC トノ交點 D ハ A ト C トノ間ニアリ. 又 DE ト BC トノ交點 E ハ M ト H トノ間ニアリ.

サテ二ツノ三角形 CAH, CDE ハ相似ナルユヱ

$$\triangle CAH:\triangle CDE=\overline{CH}^2:\overline{CE}^2;$$

又假定ニ依リテ $\triangle CDE=\frac{1}{2}\triangle ABC$

$$=\triangle CAM.$$



故ニ $\triangle CAH:\triangle CDE=\triangle CAH:\triangle CAM$

$$=CH:CM=\overline{CH}^2:CH.CM.$$

上ニ得タル比例ト比較シテ

$$\overline{CE}^2=CH.CM,$$

卽チ CE ハ二ツノ定マリタル直線 CH, CM ノ比例中項ナルコトヲ知ル. 故ニ次ノ作圖法ヲ得.

**作圖** A ヨリ BC ヘ垂線 AH, 及ビ中線 AM ヲ引キ, MH ヲ徑トシテ半圓ヲ畫キ, C ヨリ之ニ切線 CT ヲ引ケ. CT ニ等シク CE ヲ CB ノ上ニ取リ, E ニ於テ BC ニ垂線 ED ヲ引キ ED ト AC トノ交點ヲ D トスレバ DE ハ所要ノ直線ナリ.

**證** CT ハ圓 MH ノ切線ナルユヱ其ノ長サハ同ジ圓ノ割線 CMH ノ二分 CM ト CH トノ間ニアリ. 故ニ先ヅ E ハ M ト H トノ間ニ, 從ヒテ D ハ A ト C トノ間ニアルコト明カナリ. サテ

$$\triangle AHC:\triangle DEC=\overline{CH}^2:\overline{CE}^2$$

$$=\overline{CH}^2:\overline{CT}^2=\overline{CH}^2:CH.CM$$

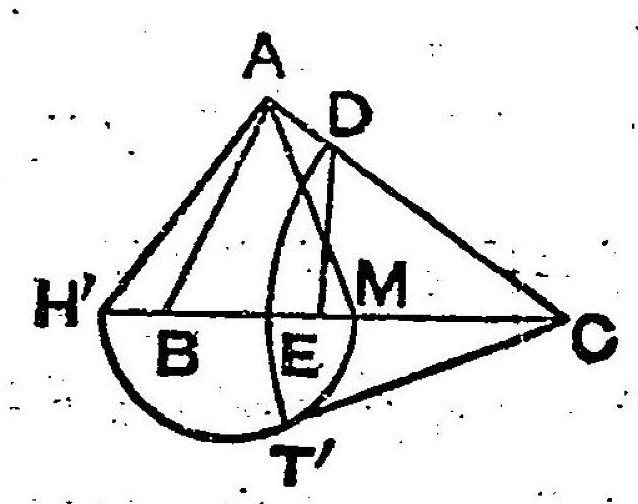
$$=CH:CM=\triangle AHC:\triangle AMC,$$

故ニ $\triangle DEC=\triangle AMC=\frac{1}{2}\triangle ABC.$

依リテ三角形 ABC ヨリ其ノ二分ノ一ニ等シキ三角形 DEC ヲ引キ去リタル殘リノ部分 ADEB モ亦

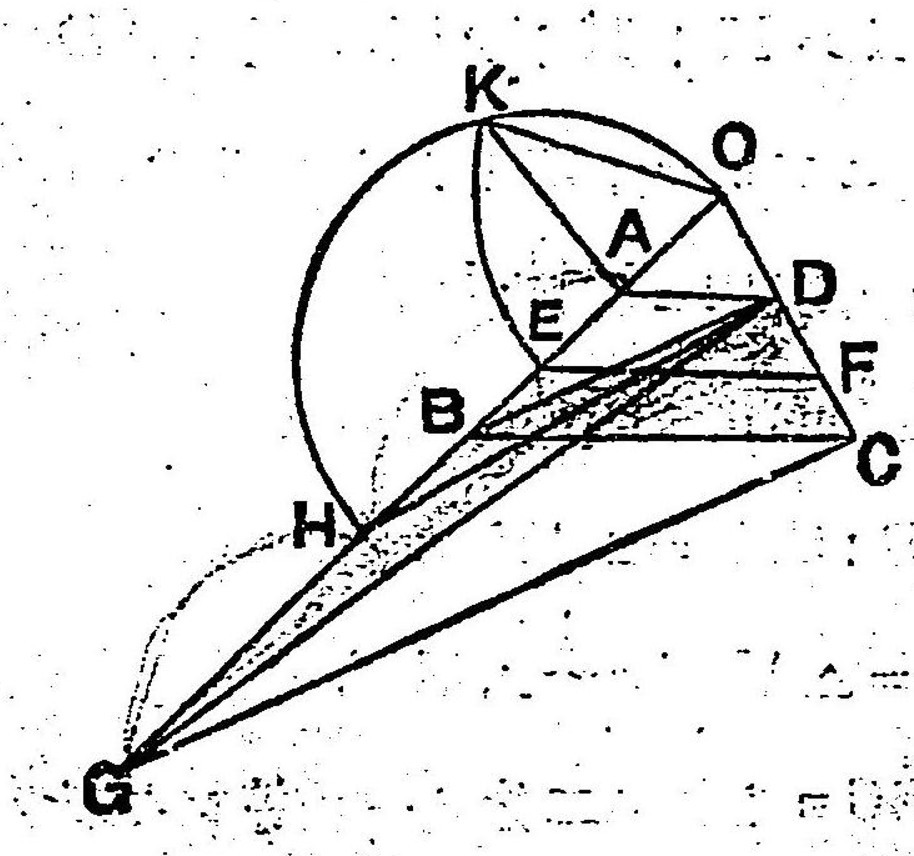
本形ノ二分ノ一ニ等シク，卽チ DE ハ所要ノ直線ナリ．

**注意**　上ノ作圖法ノ代リニ，CA ニ垂線 AH′ ヲ引キ，CB 或ハ其ノ延線ト H′ ニ於テ交ラシメ，MA′ ヲ徑トシテ半圓ヲ畫キ，C ヨリ之ニ切線 CT′ ヲ引キ，CA ノ上ニ CT′ ニ等シク CD ヲ取リ，BC ニ垂線 DE ヲ下スモ亦同樣ナリ．




**55.** 與ヘラレタル梯形ノ底邊ニ平行スル直線ヲ引キ本形ヲ二等分セヨ．　[33. 海. 兵]

ABCD ヲ AD∥BC ナル梯形トシ，AD[或ハBC] ニ平行ナル直線ヲ引キテ本形ヲ二等分セシトス．




先ヅ AD=BC ナルトキハ ABCD ハ平行四邊形ナルユヱ所要ノ直線ハ AB,



CD ノ中點ヲ過ル直線ナルコト明カナリ．

依リテ AD≠BC，例ヘバ AD<BC ナリトス．

**作圖**　BD ヲ結ビ付ケ，C ヲ過リテ BD ニ平行ニ CG ヲ引キ，AB ノ延線トノ交點ヲ G トシ，AG ヲ H ニ於テ二等分セヨ．

次ニ BA ト CD トノ延線ノ交點ヲ O トシ，OH ヲ徑トスル半圓周ヲ畫キ，OH ニ垂直ナル直線 AK トノ交點 K ヲ求メ，O ヲ中心トシ OK ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ OH ヲ E ニ於テ截ラシメ，E ヲ過リテ AD ニ平行ナル直線ヲ引キ CD トノ交點ヲ F トス．EF ハ卽チ所要ノ直線トナルベシ．

**證**　BD ハ CG ニ平行ナルユヱ [作圖]

$$\triangle BDG=\triangle BDC,$$

此ノ双方ニ △ABD ヲ加フレバ

$$\triangle ADG=\text{梯形}ABCD \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

然ルニ $\dfrac{AH}{AG}=\dfrac{1}{2},$　[作圖]

故ニ $\dfrac{\triangle ADH}{\triangle ADG}=\dfrac{1}{2},$

或ハ (1) ニ依リテ

$$\frac{\triangle ADH}{\text{梯形}ABCD}=\frac{1}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

又 $\triangle OEF \backsim \triangle OAD$

ナルユエ $\dfrac{\triangle OEF}{\triangle OAD}=\dfrac{\overline{OE}^2}{\overline{OA}^2}=\dfrac{\overline{OK}^2}{\overline{OA}^2}$

$$=\frac{OA.OH}{OA.OA}=\frac{OH}{OA}=\frac{\triangle OHD}{\triangle OAD}.$$

故ニ $\triangle OEF=\triangle OHD.$

此ノ双方ヨリ △OAD ヲ減ズレバ

$$梯形\ ADFE=\triangle AHD \quad \ldots\ \ldots\ (3)$$

(2), (3) ヨリ $\dfrac{梯形\ ADFE}{梯形\ ABCD}=\dfrac{1}{2}.$

故ニ ABCD ヨリ ADFE ヲ減ジタル殘リノ部分 EFCB モ亦 ABCD ニ對スル比ハ $\frac{1}{2}$ ニシテ，卽チ EF ニ依リテ ABCD ハ二等分セラレタリ.

**注意** 一般ニ本形ヲ比 $m:n$ ニ分ツニハ AH ヲ

$$AG:AH=m+n:m$$

ナル如ク定ムレバ可ナリ. 尙之ヲ擴メテ本形ヲ $l:m:n:\ldots\ldots$ ノ如ク任意ノ數ニ任意ノ比ヲ有ツヤウニ分ツコトヲ得ベシ.

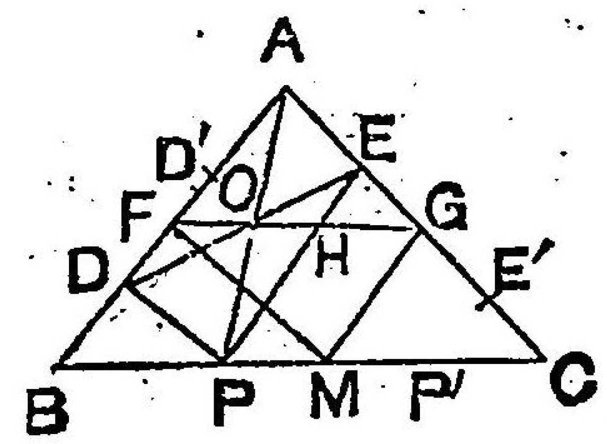
56. 三角形 ABC アリ，一邊 BC 上ニ一點 P ヲ設ケ AB, AC ト其ノ各ニ平行シテ P ヨリ引キタル二直線トニテ圍メル平行四邊形ノ面積ヲシテ ABC ノ $\frac{4}{9}$ ニ等シカラシメントス，點 P ノ位置如何.

[24. 商船.]

**解 I.** 所要ノ點 P ノ位置ヲ求メ得タリトシ，P



ヨリ AB, AC ニ平行ナル二直線ヲ引キ; AC, AB




トソレゾレ E, D ニ於テ交ラシムレバ

$$▱ADPE=\frac{4}{9}\triangle ABC.$$

今二ツノ對角線 AP, DE ノ交點ヲ O トスレバ，O ハ AP, DE ノ共有スル中點ニシテ，O ヲ過ル任意ノ直線ハ平行四邊形 ADPE ヲ等積ナル二部ニ分チ，又 O ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ハ A ヨリ BC ニ至ル總テノ直線ヲ二等分スルコトヲ知ル.

依リテ O ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AB, AC トノ交點ヲソレゾレ F, G トシ．且 * PD, PE ノ一ツ，例ヘバ PE ト H ニ於テ交ラシメヨ.

然ルトキハ　四形邊 $AFHE=\frac{1}{2}▱ADPE$

$$=\frac{2}{9}\triangle ABC.$$

而シテ F, G ハソレゾレ AB, AC ノ中點ナルコトヨリ $\triangle AFG=\frac{1}{4}ABC.$

サテ $\triangle AFG \backsim \triangle EHG$

ナルユエ $\dfrac{\triangle AFG}{\triangle EHG}=\dfrac{\overline{AG}^2}{\overline{EG}^2}.$

或ハ $\dfrac{\overline{AG}^2}{\overline{EG}^2}=\dfrac{\triangle AFG}{\triangle AFG-四邊形\ AFHE}$

$$=\frac{\frac{1}{4}\triangle ABC}{\frac{1}{4}\triangle ABC-\frac{2}{9}\triangle ABC}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\triangle ABC}{\frac{1}{36}\triangle ABC}=\frac{9\triangle ABC}{\triangle ABC}=\frac{9}{1}=\frac{3^2}{1^2}.$$

故ニ　$\frac{AG}{EG}=\frac{3}{1}$,

或ハ　$EG=\frac{1}{3}AG.$

依リテ點Eノ位置ヲ求メ得ベク，從ヒテ點Pノ位置ハ決定セラルベシ．

**作圖**　AC ノ中點 G ヲ求メ，AG ヲ三等分シ，其ノ G ニ近キ分點ヲ E トス．E ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ，BC トノ交點ヲ P トスレバ P ハ所要ノ點ナルベシ．

**證**　P ヲ過リ AC, AB ニ平行ナル直線ヲ引キ AB トノ交點ヲソレゾレ D, E トスレバ

$$\frac{\text{▱}ADPE}{\triangle ABC}=\frac{AE.(\text{P ヨリ AC ヘノ垂線})}{\frac{1}{2}AC.(\text{B ヨリ AC ヘノ垂線})}$$

$$=\frac{AE}{\frac{1}{2}AC}\cdot\frac{\text{P ヨリ AC ヘノ垂線}}{\text{B ヨリ AC ヘノ垂線}}$$

然ルニ作圖ニ依リテ

$$\frac{1}{2}AC=AG=3EG=\frac{3}{2}AE,$$

或ハ　$\frac{AE}{\frac{1}{2}AC}=\frac{2}{3}.$

及ビ　$\frac{\text{P ヨリ AC ヘノ垂線}}{\text{B ヨリ AC ヘノ垂線}}=\frac{PC}{BC}=\frac{EC}{AC}$



$$=\frac{EG+GC}{2AG}=\frac{EG+AG}{2AG}$$

$$=\frac{EG+3EG}{2\times 3EG}=\frac{4EG}{6EG}=\frac{2}{3}.$$

依リテ　$\frac{\text{▱}ADPE}{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}.$

即チ　$\text{▱}ADPE=\frac{4}{9}\triangle ABC.$

**吟味**　BC ノ中點ヲ M トシ；MF, MG ヲ結ビ付クレバ AFMG ハ平行四邊形ニシテ，其ノ面積ハ三角形 ABC ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シ．而シテ此ハ內接シ得ベキ平行四邊形ノ最大ナルモノナリ．今 $\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$ ナルヲ見レバ本問題ハ恒ニ作圖シ得ベキモノナリ．尙點Eノ位置ヲ移動セシメテ漸々Cニ接近セシムルニEガGト合スレバPハMト合シ，又DハFト一致スベシ．此ノ最大ナリト云ヘル平行四邊形ノ域ヲ脫シテ，E ガ更ニ C ニ接近シ，ヤガテ GE′=GE ルナ如キ點 E′ ニ至ルトキ之ニ對應スルP, Dノ位置ヲソレゾレP′, D′トシ，平行四邊形 AD′P′E′ ノ面積ヲ檢スレバ再ビ $\frac{4}{9}\triangle ABC$ ニ等シキコトヲ見ル，即チ P′ モ亦所要ノ位置ナリ．且P トB, P′ トCトノ間ニハ同樣ノ位置ナキコトハ推シテ明カナリ．

*斯ノ如クナルヲ以テ P ニ對應スル E 或ハ P′

ニ對應スル D′ ハ FG ニ關シテ互ニ反對ノ側ニアルベク,解析中ニFGト PE トノ交點ヲHトス,云々,ト云ヘルコトモ不能ノ場合ナク,本題ハ恒ニ二ツノ解アリ.

解 **II.** 所要ノ點 P ハ BC ノ三等分點ナリ,故ニ二ツアリ.

證 BC ノ三等分點ノ一ヲ P トシ,P ヨリ二邊 AB, AC ニ平行ニ引キタル直線ガ AC, AB ニ交ル點ヲE,Dトシ,EDヲ結ビ付クレバADPEハ平行邊形ニシテ△ADEハ其ノ半分ナルコト明カナリ.

而シテ　　BP : PC = BD : DA

= AE : EC = 1 : 2,

故ニ　△ADE : △ABC = AD.AE : AB.AC

= 2.1 : 3.3 = 2 : 9.

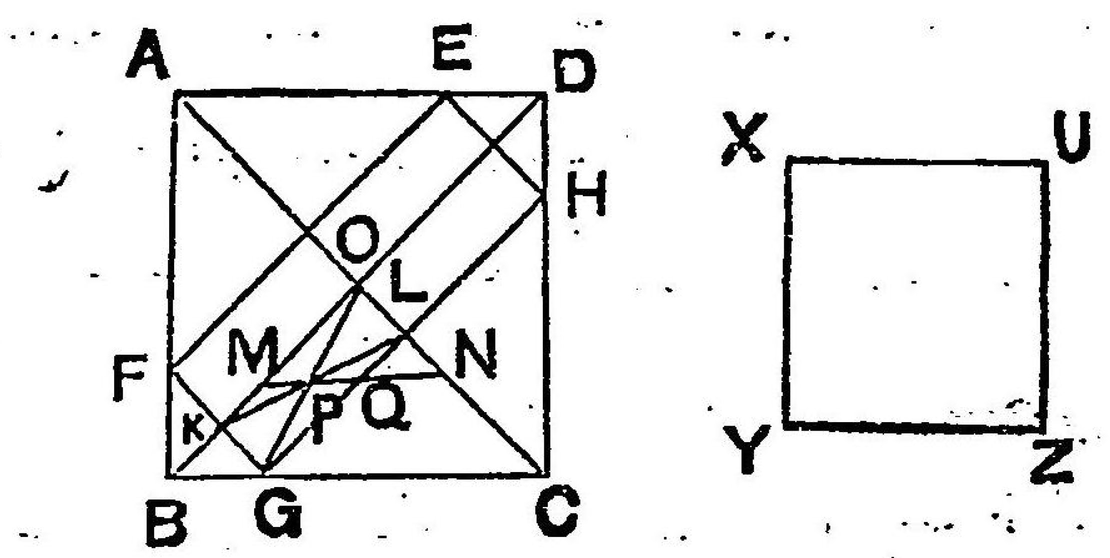
故ニ　　▱AP : △ABC = 4 : 9.

**57.** 與ヘラレタル正方形ニ他ノ與ヘラレタル正方形ト等積ノ矩形ヲ内接セシメヨ.

[33. 東. 高. 師.]

**解 I.** 與ヘラレタル正方形ヲ ABCD [其ノ面積ヲ $l^2$ トス],他ノ與ヘラレタル正方形ヲ XYZU [其ノ面積ヲ $m^2$ トス]トシ,XYZU ト等積ナル矩形ヲ正方形 ABCD ニ内接セシメントス.






[茲ニ其ノ解析法ハ前題ト殆ンド同樣ノモノナルユエ略シテ直チニ作圖法ヨリ述ブベシ.]

**作圖** 先ヅ $\frac{1}{16}l^2$, $\frac{1}{8}m^2$ ニ等シキ正方形 $l'^2$, $m'^2$ ヲ作リ [24 題], 次ニ $l'^2 - m'^2$ ニ等シキ正方形 $d^2$ ヲ作ル. 而シテ正方形 ABCD ノ二ツノ對角線 AC, BD ヲ結ビ付ケ, 其ノ交點ヲ O トシ, OC ノ中點ヲ求メ, 之ヲ N トス.

サテ　　$l'^2 : d^2 = \overline{ON}^2 : \overline{NL}^2$ ……………(1)

或ハ　　$l' : d = NO : NL$

ナル如キ直線 NL ヲ NO ノ上ニ取ル.

L ヲ過リテ BD ニ平行ナル直線ヲ引キ; BC, CD トソレゾレ G, H ニ於テ交ラシメ, BD ニ關シテ G, H ノ對稱點ヲソレゾレ F, E トスレバ, 四邊形 EFGH ハ所要ノ矩形ナルベシ.

**證** ABCD ハ正方形ナルコトヨリ BC ト BA

及ビ DC ト DA トハ BD ニ關シテ互ニ對稱ナルユヱ，BD ニ關シテ BC 上ノ一點 G ノ對稱點ハ AB 上ニ，DC 上ノ一點 H ノ對稱點 E ハ DA 上ニアリ，斯クシテ先ヅ EFGH ハ ABCD ニ內接スル矩形ナルコト明カナリ．

今 GF ト BD トノ交點ヲ K, GH ト AC トノ交點ヲ L トスレバ OKGL モ亦矩形ニシテ KL ト OG トノ交點 P ハ OG ノ中點ナルユヱ OB ノ中點ヲ M トスレバ MPN ハ一直線ニシテ BC ニ平行ス． 而シテ MN ト GL トノ交點ヲ Q トスレバ MQ ハ矩形 OKGL ヲ二等分ス．

サテ相似三角形ニ依リテ

$$\triangle OMN : \triangle LQN = \overline{NO}^2 : \overline{NL}^2.$$

故ニ作圖ニ於ケル關係 (1) ヨリ

$$\triangle OMN : \triangle LQN = l'^2 : d^2.$$

然ルニ三角形 OMN ハ三角形 OBC ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シク，三角形 OBC ハ正方形 ABCD ノ $\frac{1}{4}$ ニ等シキユヱ三角形 OMN ハ正方形 ABCD ノ $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$，即チ $\frac{1}{16}$，即チ $l'^2$ ニ等シ．

故ニ　　$\triangle LQN = d^2,$

然ルニ $d^2$ ハ $l'^2 - m'^2$，即チ $\frac{1}{16}l^2 - \frac{1}{8}m^2$ ニ等シ



是ニ依リテ 四邊形 OMQL $= \triangle OMN - \triangle LQN$

$$= \frac{1}{16}l^2 - \left(\frac{1}{16}l^2 - \frac{1}{8}m^2\right) = \frac{1}{8}m^2.$$

而シテ矩形 EFGH ハ矩形 OKGL ノ 4 倍ニ等シク，矩形 OKGL ハ四邊形 OMQL ノ 2 倍ニ等シ．

故ニ　　$\square EFGH = (OMQL) \times 2 \times 4$

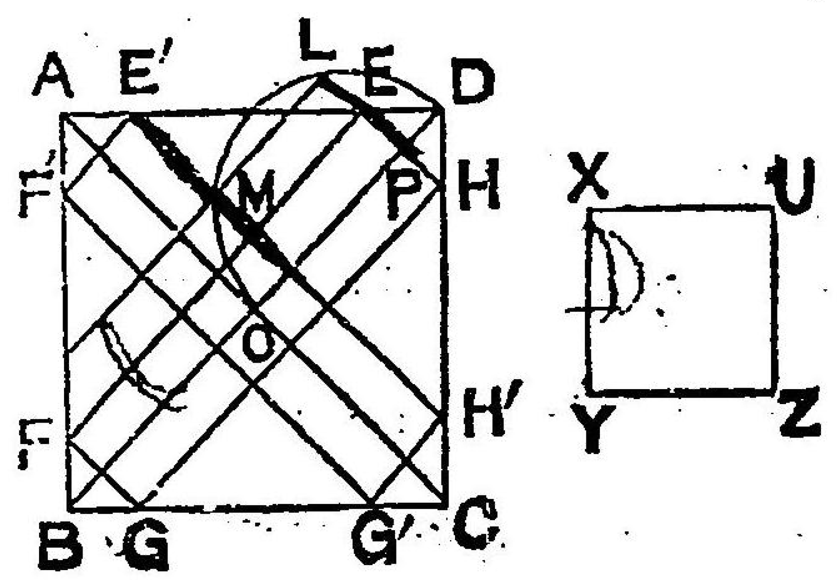
$$= \frac{1}{8}m^2 \times 2 \times 4 = m^2,$$

即チ EFGH ハ與ヘラレタル正方形ノ面積ヲ有ス．

**吟味**　正方形 ABCD ニ內接シ得ベキ矩形ノ面積ノ最大ナルモノハ $\frac{1}{2}l^2$ ニ等シキユヱ所要ノ矩形ヲ作圖シ得ベキ爲ニハ $m^2 \leqq \frac{1}{2}l^2$ ナルコトヲ要ス． 而シテ $m^2 < \frac{1}{2}l^2$ ナレバ二ツノ解アリ．但其ノ一ツハ他ノ一ツヲ O ノ周リニ角直ダケ廻轉セラレタル位置ニアリ，$m^2 = \frac{1}{2}l^2$ ナレバ唯一ツノ解アリ，此ハ正方形ニシテ其ノ各角頂ハ正方形 ABCD ノ四ツノ邊ノ中點ナリ．

**解 II.**　正方形 ABCD ノ對角線 AC, BD ノ交點ヲ O トシ，O ヨリ各角頂ニ至ル直線ノ一ツ，例ヘバ OD ヲ徑トシテ半圓ヲ畫キ，OD ニ對シテ半圓ト同ジ側ニ OD ヨリ正方形 XZ ノ一邊ノ半分ナル距離ニアル平行線 LM ヲ引キ半圓トノ交點ヲ L, M トシ；L, M ヲ過リ OD ニ垂直ナル直線

ヲ引キ, AD トノ交點ヲ E, E′ トシ; E, E′ ヨリ各對角線ニ平行ナル直線 EH, EF 及ビ E′H′, E′F′ ヲ引クトキハ所要ノ矩形ノ相隣ル二邊ヲ得ベシ.




今之ヲ證センニ EH ト OD トノ交點ヲ P トスレバ

$$EP=PD=\frac{1}{2}EH,$$

及ビ

$$OP=\frac{1}{2}EF,\ LP=\frac{1}{2}XY$$

ナルコト明カナリ.

又作圖ニ依リ $\overline{LP}^2=OP.PD,$

故ニ $\frac{1}{4}\overline{YX}^2=\frac{1}{4}EF.EH,$

即チ $\overline{XY}^2=EF.EH.$

次ニ H ヨリ EF ニ平行ニ HG ヲ引キ FG ヲ結ビ付クルトキハ EFGH ハ正方形 AC ニ內接スル矩形ナルコトハ容易ニ知リ得ベシ.

故ニ矩形 EG ハ所要ノモノナリ.

又矩形 E′G′ ニ就キテモ亦同樣ナリ.

**吟味** 直線 LM ト半圓 OD トガ相交ルカ,或



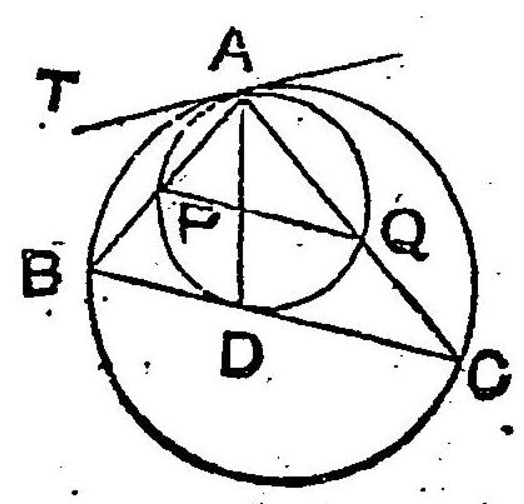
ハ相切スルカ,相交ラザルカニ從ヒテ,卽チ

$$OD>=<XY$$

ニ從ヒテ二ツノ解,一ツノ解アルカ,或ハ解ナシ.

58. A ニ於テ內切スル二ツノ圓アリ,今小圓周上ノ一點 D ニ於テ切スベキ大圓ノ弦 BC ヲ引キ AB, AC ヲ結ビ付ケ AB, AC ガ小圓周ニ交ル點ヲ P, Q トスレバ DC.AP=DB.AQ ナルコトヲ證セヨ. [42. 陸.主.候]

**證** A ニ於ケル公切線ヲ TA [T ト B トハ AD ニ關シテ同ジ側ニ取ル] トスレバ $T\hat{A}B$ ハ圓 ABC ニ就キテ其ノ隣リノ弓形 ACB ニ於ケル角 ACB ニ等シク,又圓 APQ ニ關シテハ $A\hat{Q}P$ ニ等シ.




故ニ

$$A\hat{C}B=A\hat{Q}P.$$

依リテ BC ト PQ トハ相平行スルユエ

$$AQ:AP=AC:AB.$$

然ルニ TA, BD ハ圓 APQ ニソレゾレ A, D ニ於テ切線ニシテ,且 T ト B トハ AD ニ關シテ同ジ側ニアルユエ $T\hat{A}D=B\hat{D}A.$

又前ニ云ヘルコトニ依リテ　$T\hat{A}B=A\hat{C}D$.

故ニ　$T\hat{A}D-T\hat{A}B=B\hat{D}A-A\hat{C}D$,

或ハ　$B\hat{A}D=C\hat{A}D$.

即チ三角形ABCニ於テADハ$\hat{A}$ノ二等分線ナリ.

依リテ　$AC:AB=DC:DB$.

故ニ上ニ得タル比例ヨリ

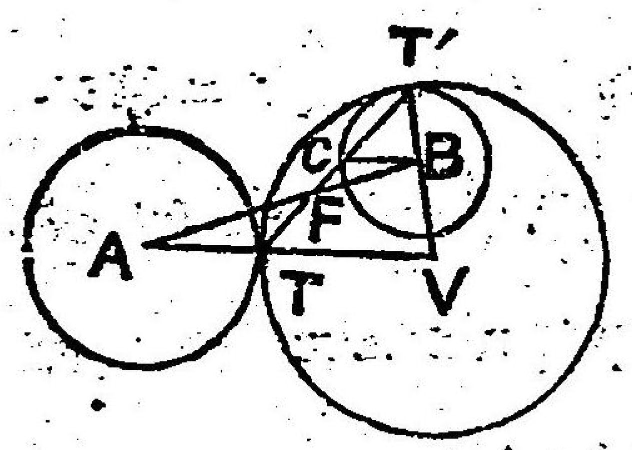
$$AQ:AP=DC:DB,$$

或ハ　$DC.AP=DB.AQ$.

**59.** 相交ラザル二定圓ノ一ツトハ內切シ，他ノ一ツトハ外切スル圓ヲ畫ケバ，其ノ切點ヲ結ビ付クル直線ハ恒ニ一定點ヲ過ルコトヲ證セヨ.

[30 一高]

相交ラザル二定圓ノ中心ヲA, Bトシ，圓AトハTニ於テ外切シ，圓BトハT'ニ於テ內切スル圓ノ中心ヲVトスレバ直線TT'ハVノ位置ニ拘ハラズ恒ニ一定點ヲ過ルベシ.




證　TT'ト圓Bトノ交點ヲCトシ，又AB, BC, TA, TV, BT', VT'ヲ結ビ付ケ，且ABトTT'トノ交點ヲFトセヨ.



然ルトキハTハ圓Aト圓Vトノ切點ナルユヱTA, TVハ一直線ヲナシ，又T'ハ圓Bト圓Vトノ切點ナルユヱBT', VT'ハ一直線ヲナス.

故ニ圓Bノ半徑ヲ二等邊トスル二等邊三角形BT'Cト圓Vノ半徑ヲ二等邊トスル二等邊三角形VTT'トハ一ツノ底角T'ヲ共有ス.

依リテ之ニ等シキ他ノ底角T'CBトT'TVトハ相等シ.

是ニ於テ一直線T'CTガ二直線CB, ATVヲ截リテ其ノ同位角T'CBトT'TVトヲ相等シクナスコトヲ知ル，即チCBトATVトハ相平行セザルベカラズ. 是ニ依リテ二ツノ三角形ATFトBCFトハ等角ニシテ，從ヒテ互ニ相似ナリ.

故ニ對應邊ノ關係トシテ

$$AF:BF=AT:BC$$

$$=(\text{圓A ノ半徑}):(\text{圓B ノ半徑})=(\text{定比}),$$

即チABハFニ於テ定比ニ內分セラル.

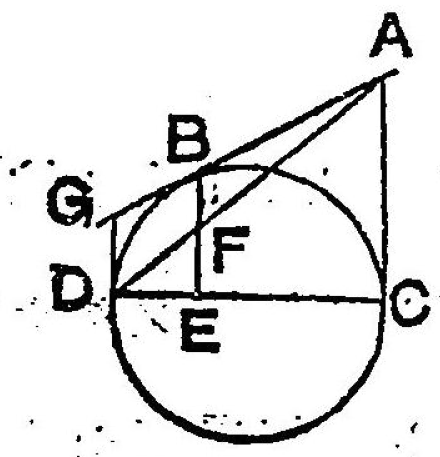
故ニFハ定點ナリ.

而シテ任意ニ取リタルTT'ハ此ノ一定點Fヲ過ル. 故ニTT'ノ如キ直線ハ恒ニ一定點Fヲ過ル.

**注意**　點Fハ二ツノ圓A, Bノ相似ノ內心ナリ.

60. 定點Aヨリ定圓ニ二ツノ切線AB, ACヲ引キ，切點Bヨリ他ノ切點Cヲ過ル徑CDニ垂線BEヲ引キテCDト點Eニ於テ相交ラシムルトキハBEハA, Dヲ結ビ付クル直線ニ依リテ二等分セラルルコトヲ證セヨ．　[42. 商船.]

證 I. ADトBEトノ交點ヲF, Dニ於ケル切線トABトノ交點ヲGトス．




然ルトキハAC, DGハ徑CDニ垂直ニシテ，BEモ亦假設ニ依リテCDニ垂直ナリ．

故ニAC, BE, GDハ皆相平行ス．

故ニ　$BF : GD = AB : AG$,

然ルニ $AB = AC$ ナルユエ　$= AC : AG$,

及ビ　$FE : AC = DF : DA = GB : AG$,

或ハ　$FE : GB = AC : AG$.

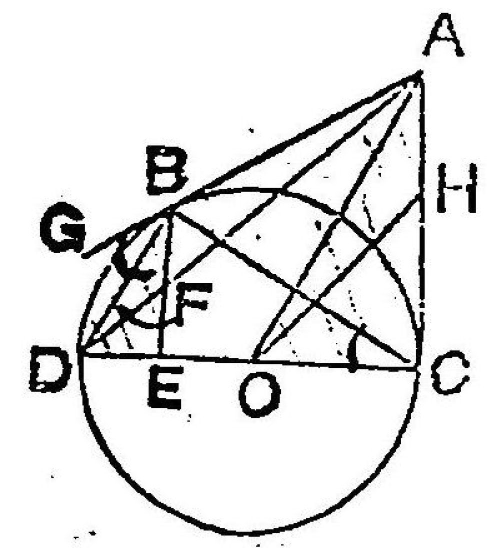
故ニ　$FE : GB = BF : GD$.

然ルニ $GB = GD$ ナルユエ $FE = BF$.

證 II. BC, BD, AO [OハΓ圓ノ中心]ヲ結ビ付クレバ　$G\hat{B}D = B\hat{C}D = D\hat{B}E$,

又AOハ$B\hat{A}C$ヲ二等分スルコト明カナリ．






而シテ　$BE \parallel AC$

ナルヲ以テ

$$G\hat{B}E = B\hat{A}C.$$

依リテ　$BD \parallel AO$,

從ヒテ $\triangle BDE \backsim \triangle AOC$.

今OHヲDAニ平行ニ引キACトノ交點ヲHトスレバ　$\triangle BDF \backsim \triangle AOH$,

然ルニOハDCノ中點ナルユエHハACノ中點ナリ．依リテFハBEノ中點ナリ．

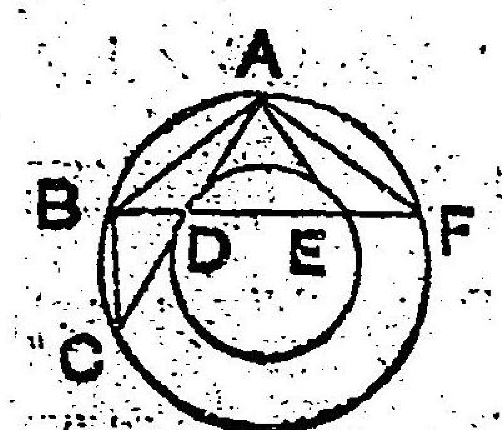
61. 二ツノ同心圓アリ，外圓周上ノ一點Aヨリ內圓ニ切線AD, AEヲ引キ切點D, Eヲ結ビ付ケ；ED, ADヲ引キ延バシテ外圓周トソレゾレB, Cニ於テ交ラシムレバ

(I)　$\triangle AEB \backsim \triangle BCD$,

(II)　$\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = BE : BD$

ナルコトヲ證セヨ．　[38. 商船.]

證 (I) DEヲ引キ延バシテ外圓周ト交ル點ヲFトシ，AFヲ結ビ付クレバ，二ツノ三角形ADB, AEFヲ比較スルニ




$$AD = AE$$