$$\therefore \quad \frac{x}{a}=k$$

$$\therefore \quad x=a\times k$$

148. 定理 3. 比の兩項に同數を掛けても比は變らず.

即チ $\quad nA:nB=A:B \quad (n\neq 0)$

ナルベシ.

證明 同ジ單位ニテ A, B ヲ表ス數ヲ夫夫 a, b トスレバ nA, nB ヲ表ス數ハ夫夫 na, nb ナリ (定理2).

$$\therefore \quad \frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{nA}{nB}=\frac{na}{nb}$$

然ルニ
$$\frac{na}{nb}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad \frac{nA}{nB}=\frac{A}{B}$$

149. 定義 A と B とが同種類の量, C と D とが亦同種類の量にして A:B が C:D に等しきとき A, B は C, D に比例すといふ.

而シテ A, B ガ C, D ニ比例スルコトヲ書キ表ス等式,即チ

$$A:B=C:D \quad 又ハ \quad \frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

ヲ比例式又ハ比例トイフ.

A, B, C, D ヲ總稱シテ比例ノ項トイヒ, A ト D トヲ其**外項**, B ト C トヲ其**内項**, D ヲ A, B, C ノ**第四比例項**トイフ.

又此比例式ニ於テ A ト C ト, B ト D トヲ夫夫**對應する項**トイフ.

注意 1. A, B ガ C, D ニ比例スルコトヲ A, B, C, D が**比例をなす**トモイフ.

注意 2. A:B=C:D ナル比例式ニ於テ

$A \gtreqless B$ ナレバ $C \gtreqless D$ ナリ.

注意 3. A:B=C:D ニ於テ前ノ二項ト後ノ二項トハ必ズシモ同種類ノ量ナラズ. 例ヘバ A, B ハ何レモ面積ニシテ, C, D ハ何レモ長サナルコトモアルベク, 又 A, B, C, D ガ何レモ長サナルコトモアルベシ

150. 定義 同種類ノ三ツノ量 A, B, C ア

リテ其間ニ $A:B=B:C$ ナル比例式ガ成リ立ツトキハ此等ノ三量は比例をなすトイフ.

而シテ B ヲ A ト C トノ**比例中項**トイヒ, C ヲ A, B ノ**第三比例項**トイフ.

151. 定理 4. 同種類の四量が比例をなすときは,其内項又は外項を交換しても比例は成り立つ.

A, B, C, D ハ同種類ノ量ニシテ $A:B=C:D$ ナレバ $A:C=B:D$, $D:B=C:A$ ナルベシ.

證明 此四量ヲ同ジ單位ニテ表ス數ヲ a, b, c, d トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d}\qquad\text{(定理 1)}$$

然ルニ
$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}\qquad\text{(假設)}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

此等式ノ兩邊ニ $\frac{b}{c}$ ヲ掛クレバ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

然ルニ
$$\frac{a}{c}=\frac{A}{C},\quad \frac{b}{d}=\frac{B}{D}\qquad\text{(定理 1)}$$

$$\therefore\quad \frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

同樣ニシテ
$$\frac{D}{B}=\frac{C}{A}$$

ナルコトヲ證明シ得.

152. 定理 5. 二つの比が相等しきときは各の比の前項と後項との和若くは差の後項に對する比も亦相等し.

$A:B=C:D$ ナレバ

$$A+B:B=C+D:D$$

又
$$A\sim B:B=C\sim D:D$$

ナルベシ.

證明 A, B ヲ同ジ單位 T ニテ表ス數ヲ夫夫 a, b トシ, C, D ヲ同ジ單位 T′ ニテ表ス數ヲ夫夫 c, d トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d}\qquad\text{(定理 1)}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

即チ
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

サテ
$$aT=A,\quad bT=B$$

∴ $(a+b)\mathrm{T}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$

∴ $$\frac{a+b}{b}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{B}}$$

同様ニ $$\frac{c+d}{d}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{D}}$$

∴ $$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{D}}$$

同様ニシテ $$\frac{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}{\mathrm{D}}$$

ヲ證明スルコトヲ得.

153. 定理 6. 二つの比が相等しきときは各の比の前項と後項との和の其前項と後項との差に對する比も亦相等し.

$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ ナレバ $\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}$ ナルベシ.

證明 AB ヲ同ジ單位 T ニテ表ス數ヲ夫夫 a, b トシ, C, D ヲ同ジ單位 T′ ニテ表ス數ヲ夫夫 c, d トスレバ

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{a}{b},\quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=\frac{c}{d} \qquad (\text{理定}1)$$

然ルニ $$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} \qquad (\text{假設})$$

∴ $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

∴ $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

又 $$\frac{a\sim b}{b}=\frac{c\sim d}{d}$$

∴ $$\frac{a+b}{a\sim b}=\frac{c+d}{c\sim d}$$

然ルニ $\mathrm{A}+\mathrm{B}=(a+b)\mathrm{T}$

$\mathrm{A}\sim\mathrm{B}=(a\sim b)\mathrm{T}$

∴ $$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}=\frac{a+b}{a-b}$$

同様ニ $$\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}=\frac{c+d}{c\sim d}$$

∴ $$\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\mathrm{A}\sim\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}+\mathrm{D}}{\mathrm{C}\sim\mathrm{D}}$$

154. 定理 7. 幾つかの比の總ての項が皆同種類の量にして且つ此等の比が相等しきときは,其各の前項の和の後項の和に對する比は元の比に等し.

例へバ A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 ガ總テ同種類ノ

量ニシテ且ツ $\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{A_3}{B_3}$ ナリトセヨ.

然ルトキハ $\dfrac{A_1+A_2+A_3}{B_1+B_2+B_3}=\dfrac{A_1}{B_1}$ ナルベシ.

證明 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ ヲ同ジ單位 T ニテ表ス數ヲ夫夫 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ トスレバ

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \quad \text{(定理 1)}$$

今 $\dfrac{a_1}{b_1}=r$ トオケバ

$$\frac{a_2}{b_2}=r, \quad \frac{a_3}{b_3}=r.$$

$$\therefore \quad a_1=b_1r, \quad a_2=b_2r, \quad a_3=b_3r$$

$$\therefore \quad a_1+a_2+a_3=(b_1+b_2+b_3)r$$

$$\therefore \quad \frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}=r=\frac{a_1}{b_1}$$

然ルニ $A_1+A_2+A_3=(a_1+a_2+a_3)T$

又 $B_1+B_2+B_3=(b_1+b_2+b_3)T$

$$\therefore \quad \frac{A_1+A_2+A_3}{B_1+B_2+B_3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}$$

$$\therefore \quad \frac{A_1+A_2+A_3}{B_1+B_2+B_3}=\frac{A_1}{B_1}$$

系 A_1, A_2, B_1, B_2 が總て同種類の量にして且つ $\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_2}{B_2}$ なるときは

$\dfrac{A_1\sim A_2}{B_1\sim B_2}=\dfrac{A_1}{B_1}$ なり.

155. 定理 8. 同種類の三つの量ありて,第一量と第二量との比及第二量と第三量との比の積は第一量と第三量との比に等し.

例ヘバ A, B, C ヲ同種類ノ三ツノ量トスレバ

$$\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{A}{C} \quad \text{ナルベシ.}$$

證明 A, B, C ヲ同ジ單位ニテ表ス數ヲ夫夫 a, b, c トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}, \quad \frac{B}{C}=\frac{b}{c}, \quad \frac{A}{C}=\frac{a}{c}$$

然ルニ $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{c}$

$$\therefore \quad \frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{A}{C}$$

156. 定義 一組ノ同種類ノ量 $A_1, A_2, A_3,$

……ト之ト同數ノ他ノ一組ノ同種類ノ量 B_1, B_2, B_3,……トガアリテ第一ノ組ノ任意ノ二量(例ヘバ A_1, A_3)ノ比ガ第二ノ組ノ之ニ對應スル二量(B_1, B_3)ノ比ニ等シキトキ**第一の組の量は第二の組の量に比例す**或ハ**此二組の量は互に比例す**トイフ. 而シテ之ヲ

$$A_1 : A_2 : A_3 : \cdots\cdots = B_1 : B_2 : B_3 : \cdots\cdots$$

ト書クコトアリ.

157. 定理 9. 二組の同數の同種類の量が互に比例するときは其相對應する二量の比は相等し.

例ヘバ A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4 ガ總テ同種類ノ量ニシテ

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = B_1 : B_2 : B_3 : B_4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナレバ
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4}$$

ナルベシ.

證明
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{(前節)}$$

$$\therefore \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \quad \text{(定理 4)}$$

同樣ニ
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_3}{B_3}$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_4}{B_4}$$

$$\therefore \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

注意 逆ニ(2)ヨリ(1)ヲ導クコトヲ得. 因テ同種類ノ二組ノ量ガ互ニ比例スルコトヲ(1)或ハ(2)ノ何レカ一ツニテ表スコトヲ得.

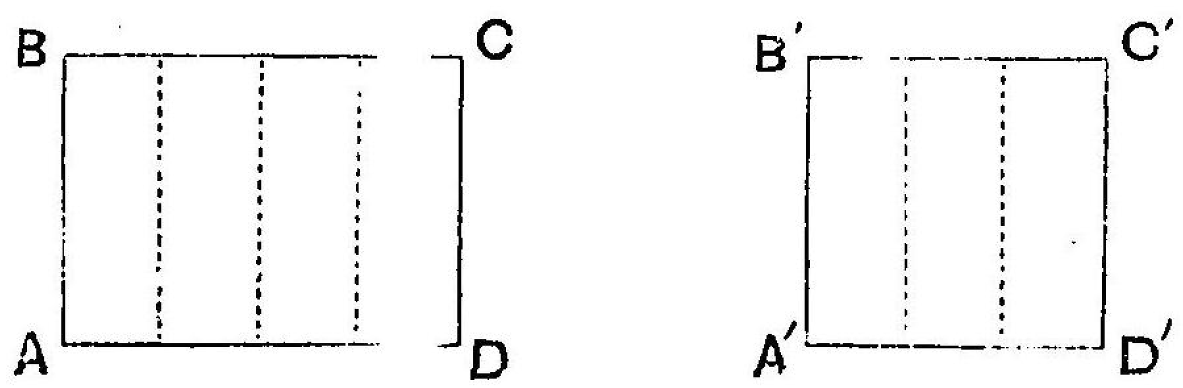
面積ノ續キ

158. 定理 10. 相等しき一邊を有する二つの矩形の面積は,之に隣れる邊の長さに比例す.

二ツノ矩形 ABCD ト A′B′C′D′ トニ於テ,邊 AB ト邊 A′B′ トガ相等シトセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB.AD}{A'B'.A'D'} = \frac{AD}{A'D'}$$ ナルベシ.

證明 (第一) AD ト A′D′ トガ公度ヲ有スル場合.



ABガ公度ノm倍ニ等シク,A′D′ガ公度ノn倍ニ等シトスレバ $\frac{AD}{A'D'}=\frac{m}{n}$ ナリ (定理 1).

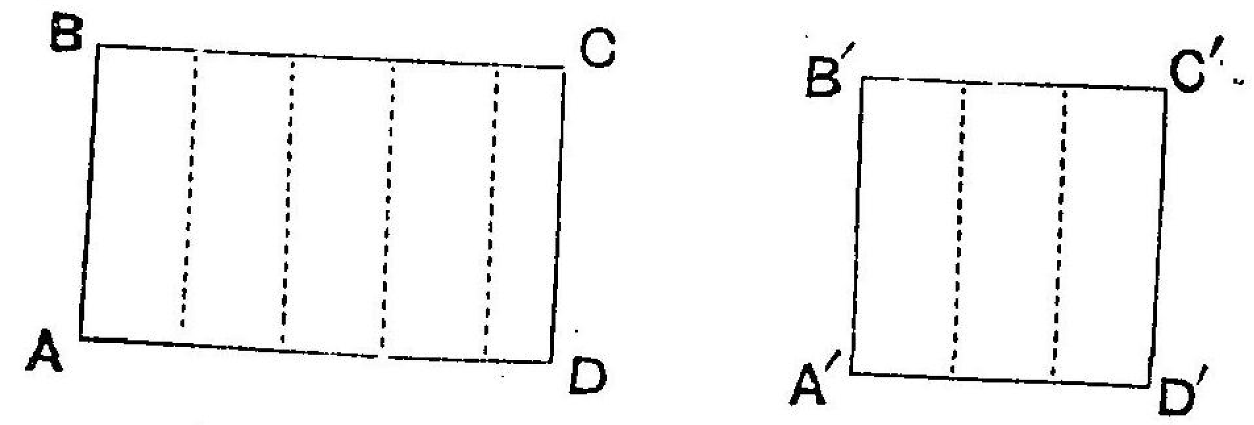
ソコデ ADヲm箇ニ等分シ,其各分點ヨリ ABニ平行ナル直線ヲ引ケバ,矩形 ABCDハm箇ノ相等シキ矩形ニ分タル. 又 A′D′ヲn箇ニ等分シ,其各分點ヨリ A′B′ニ平行ナル直線ヲ引ケバ,矩形 A′B′C′D′ハn箇ノ相等シキ矩形ニ分タル.

而シテ箇樣ニ分タレタル二ツノ矩形ノ各部分ハ相等シキ矩形ナリ. 因テ AB.ADハ其矩形ノ面積ノm倍ニ等シク, A′B′.A′D′ハ其n倍ニ等シ.

$$\therefore\quad \frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\frac{m}{n}\qquad\text{(定理 1)}$$

$$\therefore\quad \frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\frac{AD}{A'D'}$$

(第二) AD ト A′D′トガ公度ヲ有セザル場合.
A′D′ヲn等分シ,其一部分ニ等シキ者ヲ ADノ



中ヨリ取レルダケ取レバm箇ダケ取レテ,之ニ足ラザル殘リガアルトセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{m}{n}<\frac{AD}{A'D'}<\frac{m+1}{n}$$

ソコデ A′D′ノ各分點ヲ通リテ A′B′ニ平行ナル直線ヲ引ケバ矩形 A′B′C′D′ハn箇ノ相等シキ矩形ニ分タル. 又 ADノ各分點ヲ通リ ABニ平行ナル直線ヲ引ケバ矩形 ABCDハ矩形A′B′C′D′ノn分ノ一ニ等シキ者m箇ト之ニ足ラザル者トニ分タル.

$$\therefore\quad \frac{m}{n}<\frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}<\frac{m+1}{n}$$

因テnガ如何ナル整數ニテモ $\frac{AD}{A'D'}$ ト $\frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}$ トハ何レモ同ジ二組ノ數 $\frac{m}{n}$ ト $\frac{m+1}{n}$ トノ間ニ夾マレ,且ツ此二數ノ差卽チ $\frac{1}{n}$ ハnヲ大キクスレバスル程,如何樣ニモ小サクナル.

$$\therefore \quad \frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\frac{AD}{A'D'} \qquad \text{(第141節)}$$

系 1. 相等しき高さ(或は底邊)を有する二つの平行四邊形の面積は,其底邊(或は高さ)に比例す.

系 2. 相等しき高さ(或は底邊)を有する二つの三角形の面積は,其底邊(或は高さ)に比例す.

問題 1. 三角形 ABC ノ内心 O ヲ各頂點ニ結付クルトキ出來ル三ツノ三角形 AOB, BOC, COA ノ面積ハ三邊 AB, BC, CA ノ長サニ比例ス.

問題 2. 三角形 ABC 內ノ一點 O ヲ通ル半直線 AO, BO, CO ヲ各頂點ヨリ引キ, AO ト邊 BC トノ交點ヲ D トスレバ,二ツノ三角形 AOB, AOC ノ面積ノ比ハ BD, CD ノ比ニ等シ.

159. 定理 11. 四つの線分が比例をなすときは,其外項の積は其内項の積

に等し.

L, M, N, P ガ四ツノ線分ニシテ $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナリトセヨ. 然ルトキハ L.P=M.N ナルベシ.

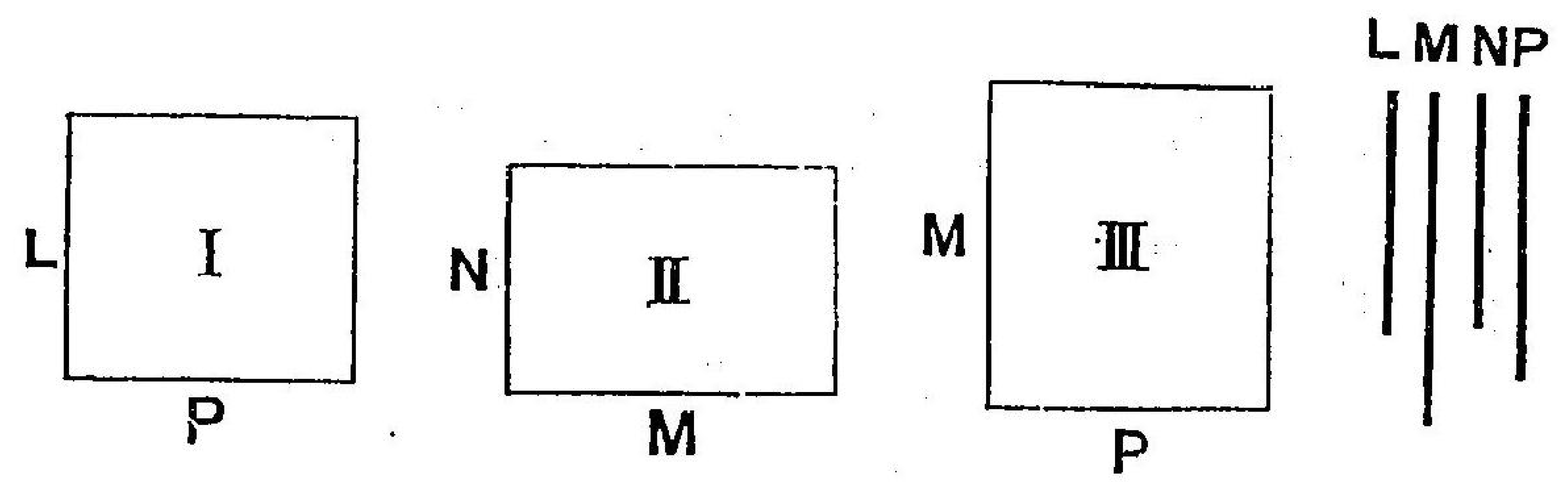
證明 矩形 I ノ相隣レル二邊ガ夫夫 L, P ニ等シク,矩形 II ノ相隣レル二邊ガ夫夫 M, N ニ等シトセヨ. ソコデ其相隣レル二邊ガ夫夫 M, P ニ等シキ矩形 III ヲ作レ. 然ルトキハ

$$\frac{L.P}{M.P}=\frac{L}{M} \quad \text{又} \quad \frac{M.N}{M.P}=\frac{N}{P} \qquad \text{(前節定理)}$$

然ルニ $$\frac{L}{M}=\frac{N}{P} \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{L.P}{M.P}=\frac{M.N}{M.P}$$

$$\therefore \quad L.P=M.N$$



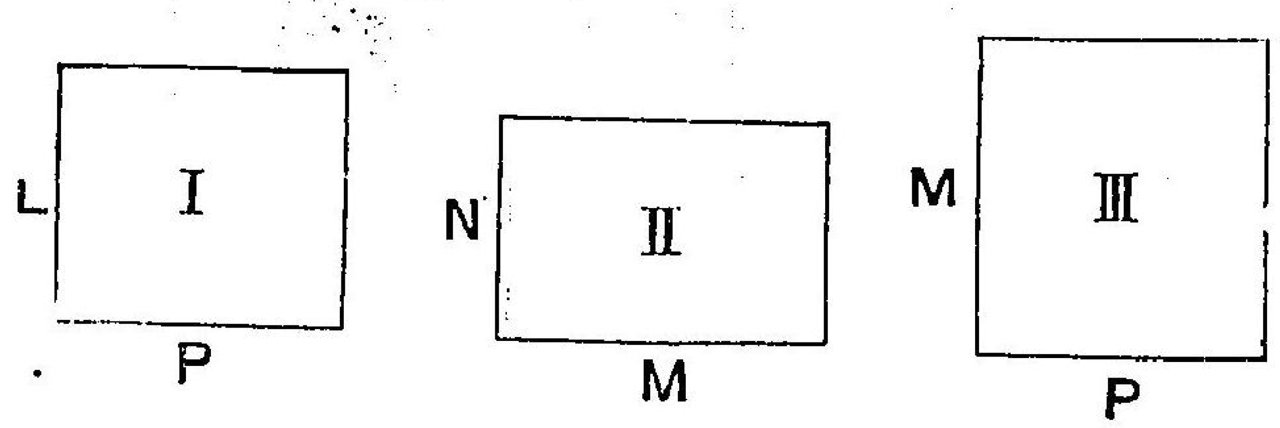
系 一つの線分が他の二つの線分の比例中項なるときは,第一の線分の

平方は他の二つの線分の積に等し.

160. 定理 12. 二つの矩形が等積なるときは,一つの矩形の相隣れる二邊が外項,他の矩形の相隣れる二邊が内項なる比例が成り立つ.

相隣レル二邊ガ L, P ニ等シキ矩形ト相隣レル二邊ガ M, N ニ等シキ矩形トガ等積ナリトセヨ.

然ルトキハ $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナルベシ.



證明 相隣レル一邊ガ夫夫 M, P ニ等シキ第三ノ矩形ヲ作ランニ

$$L.P=M.N \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \frac{L.P}{M.P}=\frac{M.N}{M.P}$$

然ルニ $\frac{L.P}{M.P}=\frac{L}{M}$, $\frac{M.N}{M.P}=\frac{N}{P}$ (定理 1)

$$\therefore \frac{L}{M}=\frac{N}{P}$$

系 一つの正方形と一つの矩形とが等積なれば正方形の一邊は矩形の相隣れる二邊の比例中項なり.

問題 3. 一ツノ三角形ニ於テ其二邊ノ比ハ之ニ對應スル高サノ反比ニ等シ.

161. 定理 13. 一つの矩形の面積の他の矩形の面積に對する比は,其底邊の比と其高さの比との積に等し.

第一ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ M, N トシ,第二ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ P, Q トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{M.N}{P.Q}=\frac{M}{P}\times\frac{N}{Q}$$

ナルベシ.

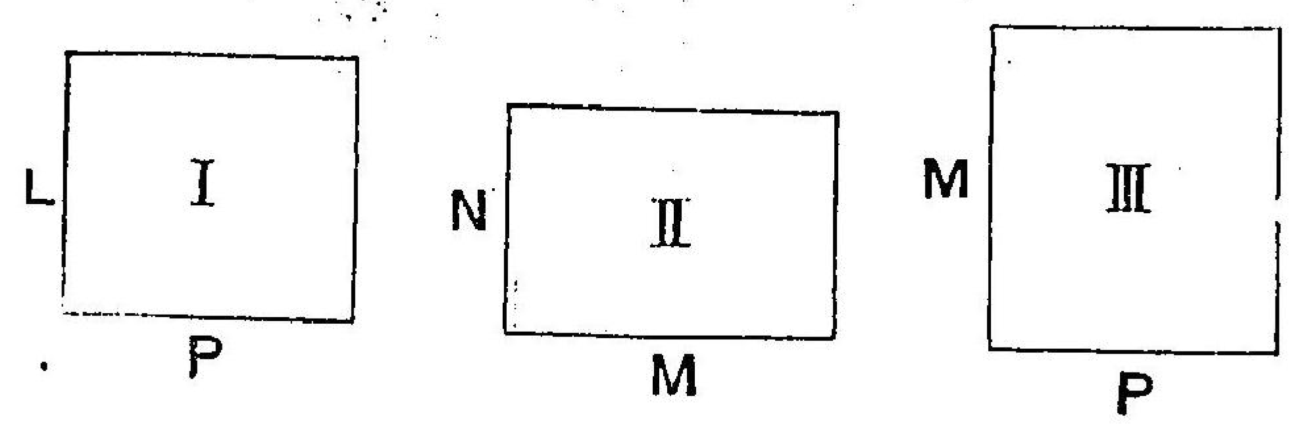
證明 マヅ其相隣レル二邊ガ夫夫 P, N ニ等シキ第三ノ矩形ヲ作レ. 然ルトキハ

平方は他の二つの線分の積に等し.

160. 定理 12. 二つの矩形が等積なるときは,一つの矩形の相隣れる二邊が外項,他の矩形の相隣れる二邊が内項なる比例が成り立つ.

相隣レル二邊ガ L, P ニ等シキ矩形ト相隣レル二邊ガ M, N ニ等シキ矩形トガ等積ナリトセヨ.

然ルトキハ $\frac{L}{M}=\frac{N}{P}$ ナルベシ.



證明 相隣レル一邊ガ夫夫 M, P ニ等シキ第三ノ矩形ヲ作ランニ

$$L.P=M.N \qquad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{L.P}{M.P}=\frac{M.N}{M.P}$$

然ルニ $\frac{L.P}{M.P}=\frac{L}{M}$, $\frac{M.N}{M.P}=\frac{N}{P}$ (定理 1)

$$\therefore \quad \frac{L}{M}=\frac{N}{P}$$

系 一つの正方形と一つの矩形とが等積なれば正方形の一邊は矩形の相隣れる二邊の比例中項なり.

問題 3. 一ツノ三角形ニ於テ其二邊ノ比ハ之ニ對應スル高サノ反比ニ等シ.

161. 定理 13. 一つの矩形の面積の他の矩形の面積に對する比は,其底邊の比と其高さの比との積に等し.

第一ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ M, N トシ,第二ノ矩形ノ相隣レル二邊ヲ P, Q トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{M.N}{P.Q}=\frac{M}{P}\times\frac{N}{Q}$$

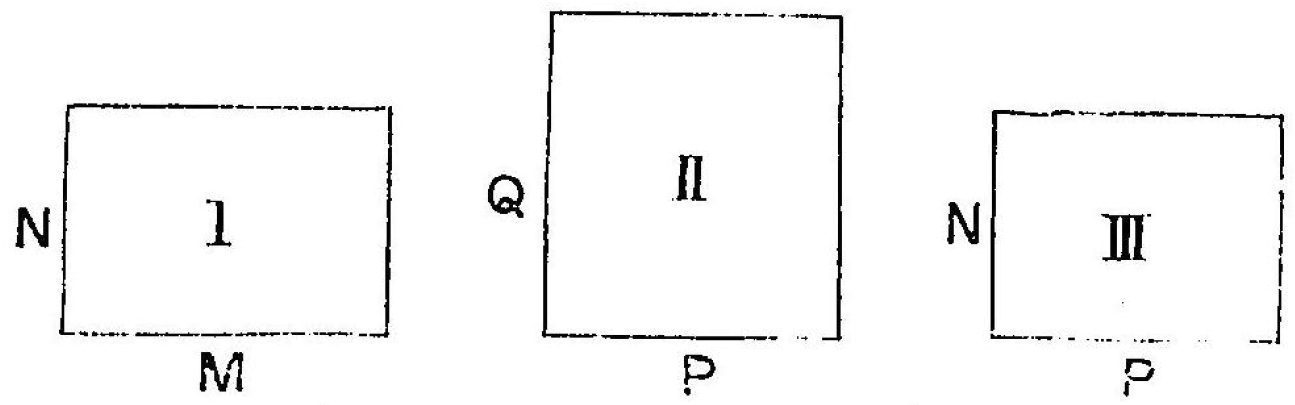
ナルベシ.

證明 マヅ其相隣レル二邊ガ夫夫 P, N ニ等シキ第三ノ矩形ヲ作レ. 然ルトキハ

$$\frac{M.N}{P.N}=\frac{M}{P} \qquad \frac{P.N}{P.Q}=\frac{N}{Q} \qquad \text{(定理 1)}$$

然ルニ
$$\frac{M.N}{P.N}\times\frac{P.N}{P.Q}=\frac{M.N}{P.Q} \qquad \text{(定理 8)}$$

$$\therefore \quad \frac{M.N}{P.Q}=\frac{M}{P}\times\frac{N}{Q}.$$



系 1. 二つの正方形の面積の比は其邊の比の平方に等し.

系 2. 二つの平行四邊形の面積の比は其高さの比と其底邊の比との積に等し.

系 3. 二つの三角形の面積の比は其高さの比と其底邊の比との積に等し.

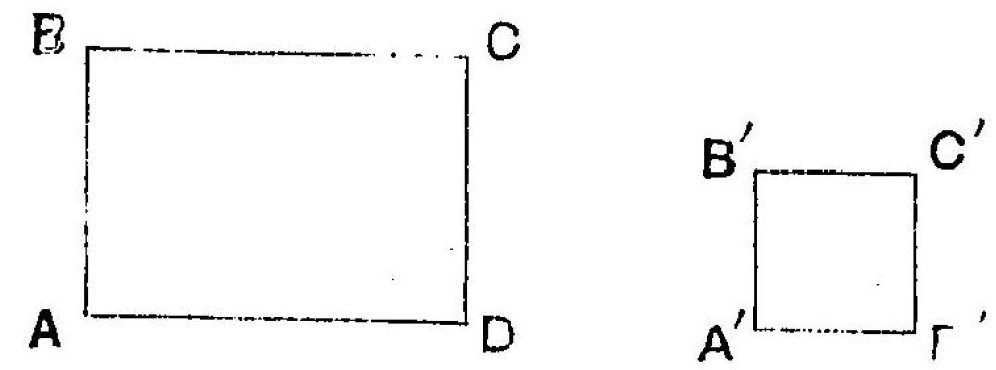
162. 定理 14. 其各の邊の長さが長

さの單位に等しき正方形の面積を面積の單位とすれば,矩形の面積を表す數は其底邊の長さを表す數と其高さを表す數との積に等し.

A'B'C'D' ヲ長サノ單位ニ等シキ一邊ヲ有スル正方形トシ,其面積ヲ面積ノ單位トスルトキ,矩形 ABCD ノ面積ヲ表ス數ヲ m; AB, AD ヲ表ス數ヲ夫夫 a, b トスレバ

$$m=ab$$

ナルベシ.



證明 $m=\frac{AB.AD}{A'B'.A'D'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AD}{A'D'}$ (前節定理)

然ルニ A'B', A'D' ハ長サノ單位ニ等シク, AB, AD ヲ表ス數ハ夫夫 a, b ナリ (假設). 卽チ

$$\frac{AB}{A'B'}=a, \qquad \frac{AD}{A'D'}=b$$

$$\therefore \quad m=ab$$

系 1. 正方形の面積を表す數は其一邊を表す數の平方に等し.

系 2. 平行四邊形の面積を表す數は其底邊を表す數と高さを表す數との積に等し.

系 3. 三角形の面積を表す數は其底邊を表す數と其高さを表す數との積の半分に等し.

注意 1. 凡テ面積ノ單位ハ必ズ長サノ單位ヲ邊トスル正方形ノ面積ナリトイフコトニ定ム. 而シテ長サノ單位ノ名ノ上ニ平方トイフ語ヲ冠ラセテ之ヲ面積ノ單位ノ名トス. 因テ是ヨリ後ハ本定理ノ系ニ於ケルガ如ク此規約ヲ明言スルコトヲ省略スル者トス.

注意 2. AB ト CD トノ比例中項ヲ $\sqrt{AB.CD}$ ニテ表シ, 矩形ノ面積ガ Q^2 ニ等シク一邊ノ長サガ P ナルトキ其隣レル邊ヲ $\frac{Q^2}{P}$ ニテ表スコトア

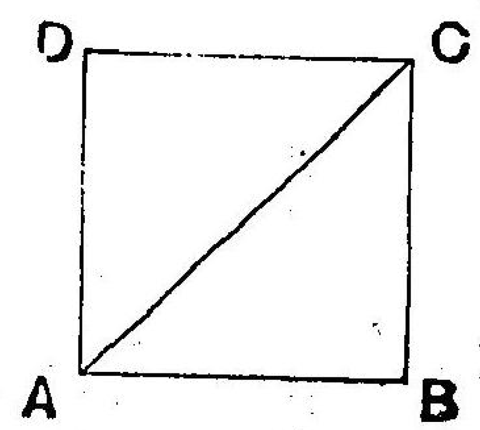
リ.

163. 定理 15. 正方形の對角線の一邊に對する比は $\sqrt{2}$ に等し.

ABCD ヲ正方形トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$$

ナルベシ.



證明 $AC^2=AB^2+BC^2$

$=2.AB^2$ (第四編定理8)

$$\therefore \quad \frac{AC^2}{AB^2}=2$$

然ルニ $\frac{AC^2}{AB^2}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$ (定理13系1)

$$\therefore \quad \left(\frac{AC}{AB}\right)^2=2$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$$

164. 定理 16. 四つの線分が比例をなすときは,其各の平方も亦比例をなす. 逆に,四つの線分の各の平方が比例をなすときは,此等の線分も亦比例をなす.

L, M, N, P ヲ四ツノ線分トセヨ．然ルトキハ

(第一) $\dfrac{L}{M}=\dfrac{N}{P}$ ナラバ $\dfrac{L^2}{M^2}=\dfrac{N^2}{P^2}$ ナルベク

(第二) $\dfrac{L^2}{M^2}=\dfrac{N^2}{P^2}$ ナラバ $\dfrac{L}{M}=\dfrac{N}{P}$ ナルベシ．

第一の證明　$\dfrac{L}{M}=\dfrac{N}{P}$　(假設)

$\therefore\quad \left(\dfrac{L}{M}\right)^2=\left(\dfrac{N}{P}\right)^2$

然ルニ　$\dfrac{L^2}{M^2}=\left(\dfrac{L}{M}\right)^2$　(定理13系1)

$\dfrac{N^2}{P^2}=\left(\dfrac{N}{P}\right)^2$　(同上)

$\therefore\quad \dfrac{L^2}{M^2}=\dfrac{N^2}{P^2}$

第二の證明　$\dfrac{L^2}{M^2}=\dfrac{N^2}{P^2}$　(假設)

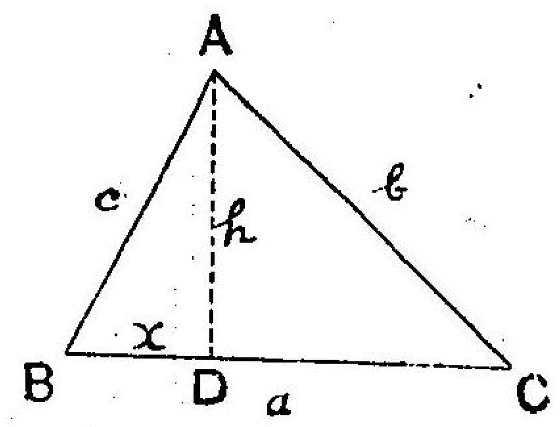
然ルニ　$\dfrac{L^2}{M^2}=\left(\dfrac{L}{M}\right)^2$　(定理13系1)

$\dfrac{N^2}{P^2}=\left(\dfrac{N}{P}\right)^2$　(同上)

$\therefore\quad \left(\dfrac{L}{M}\right)^2=\left(\dfrac{N}{P}\right)^2$

$\therefore\quad \dfrac{L}{M}=\dfrac{N}{P}$

165. 定理 17.　三角形の三邊を表す數を a, b, c とし,周の半分を表す數を s とすれば三角形の面積を表す數は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ なり。



證明　△ABC ニ於テ三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ表ス數ヲ夫夫 a, b, c トセヨ．A ヨリ BC ニ引キタル垂線ヲ AD トシ,其長サヲ表ス數ヲ h トスレバ

$$S=\frac{1}{2}ah \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ．ソコデ BD ヲ表ス數ヲ x トスレバ CD 即チ BC−BD ヲ表ス數ハ $a-x$ ナリ．

$\therefore\quad c^2-x^2=h^2$

又　$b^2-(a-x)^2=h^2$

$\therefore\quad c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$

$\therefore\quad x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

$$\therefore\quad h^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$$

$$\therefore\quad 4a^2h^2=(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)$$

$$=[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$$

$$=(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$$

$$=16s(s-a)(s-b)(s-c)\qquad [\because\ a+b+c=2s]$$

$$\therefore\quad h^2=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\therefore\quad h=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

之ヲ (1) ニ代用スレバ

$$S=\frac{1}{2}a.\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

注意　D ガ BC ノ延長上ニアル場合ニハ CD ヲ $a+x$ ニテ表シテ上ト同樣ニ演算スレバ同一ノ結果ヲ得.

又 D ガ B ト一致スル場合卽チ △ABC ノ ∠B ガ ∠R ナルトキハ $a^2+c^2=b^2$ 卽チ $a^2+c^2-b^2=0$

$$\therefore\quad 4a^2h^2=4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2$$

因テ此場合ニ於テモ上ト同一ノ結果ヲ得ベシ.

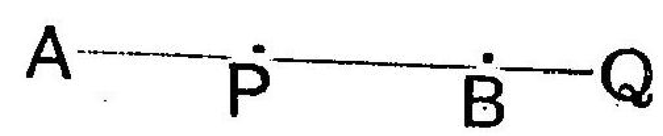
問題 4.　三角形アリ,其三邊ノ長サハ夫夫 10 米, 8 米, 12 米ナリ. 12 米ナル邊ヲ底邊トセル高サヲ求メヨ.

問題 5.　梯形ノ二ツノ底ヲ表ス數ガ夫夫 a, b ニシテ他ノ二邊ヲ表ス數ガ各 c ナルトキ其面積ヲ求メヨ. 又 $a=32$, $b=20$, $c=10$ (長サノ單位ガ寸)ナラバ其面積幾何.

問題 6.　三邊ノ長サガ夫夫 6 寸, 5 寸, 4 寸ナル三角形ノ內接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

比例線

166.　定義　有限直線(AB)ノ上ニ任意ノ一點(P)ヲ取ルトキニ生ズル二ツノ線分(PA, PB)ヲ此有限直線ノ內分トイヒ, 此點(P)ヲ此有限直線(AB)ノ內分點トイフ. 又有限直線(AB)ノ延長ノ上ニ任意點ノ(Q)ヲ取ルトキ,ソレト有限直線(AB)ノ各ノ端トヲ兩端



トスル二ツノ線分 (AQ, BQ) ヲ此有限直線(AB)ノ**外分**トイヒ,此點(Q)ヲ此有限直線(AB)ノ**外分點**トイフ.

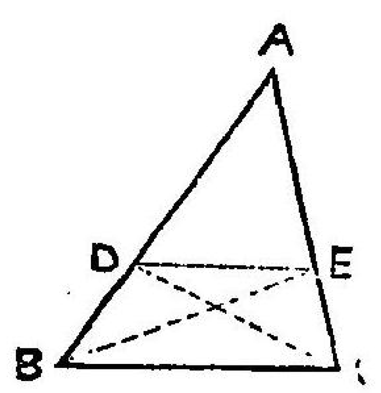
內分,外分ヲ總稱シテ**分**トイフ. 有限直線ノ內分(若クハ外分)ノ比ガ,與ヘラレタル比ニ等シキトキハ,此內分點(若クハ外分點)ガ此有限直線ヲ與ヘラレタル比ニ**內分(若クハ外分)する**トイフ.

167. 定理 18. 三角形の一邊に平行なる直線は,他の二邊を同じ比に內分若くは外分す.

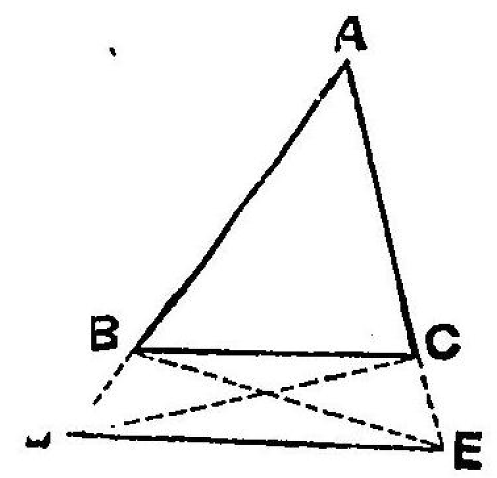
△ABCノ一邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,他ノ二邊(若クハ其延長)ト夫夫D,Eニテ交ラシメヨ.

然ルトキハ $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{EA}{EC}$ ナルベシ.

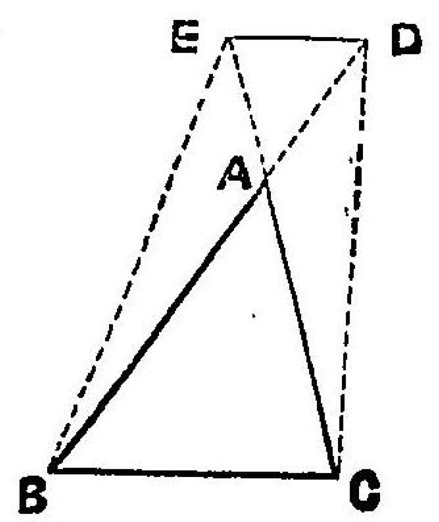
(甲圖)



(乙圖)



(丙圖)



證明 BトEト;CトDトヲ結付ケヨ. 然ルトキハ

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle BDE}=\frac{DA}{DB} \qquad \text{(定理10系2)}$$

又 $$\frac{\triangle ADE}{\triangle CDE}=\frac{EA}{EC} \qquad \text{(同上)}$$

然ルニ $\triangle BDE=\triangle CDE \qquad (\because DE \parallel BC)$

$$\therefore \quad \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$$

注意 例ヘバ點Pガ線分ABヲM:Nニ內分(若クハ外分)スルトハ, PA:PB=M:Nナル樣ニABヲ分ツコトニシテPAハMニ對應シ,PBハNニ對應ス. 若シ PB:PA=M:N ナルトキハ P ハ線分 BA ヲ M:N ノ比ニ分ツトイフ.

系 1. $$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC} \qquad \text{(定理 5)}$$

$$\frac{AB}{DA}=\frac{AC}{EA} \qquad \text{(逆比及定理 5)}$$

系 2. $$\frac{DA}{AB}=\frac{DE}{BC}$$

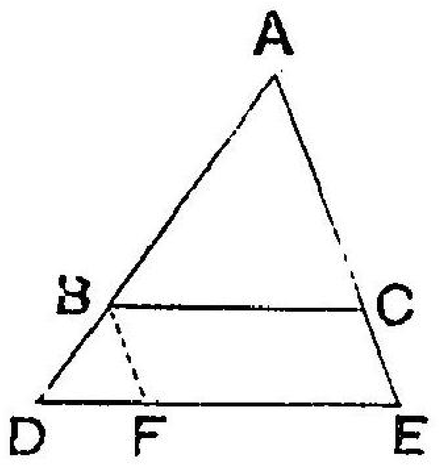
證明 BヨリAEニ平行ナル直線ヲ引キ, DE又ハ其延長トFニ於テ交ラシムレバ

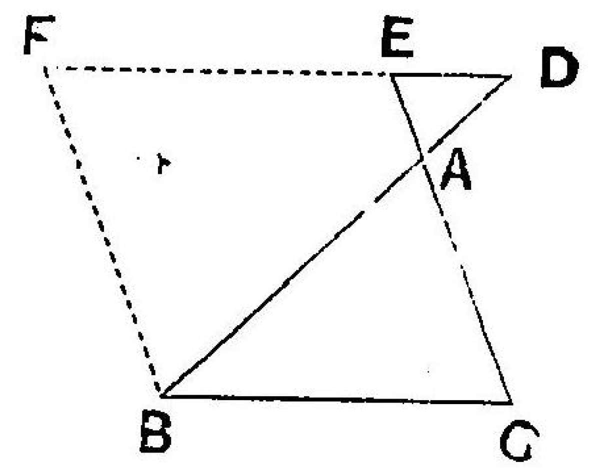
$$\frac{DB}{AB}=\frac{DF}{EF}$$

$$\therefore \quad \frac{DA}{AB}=\frac{DE}{EF} \qquad \text{(系1)}$$

然ルニ $EF=BC$

$$\therefore \quad \frac{DA}{AB}=\frac{DE}{BC}$$





系 3. 互に平行なる直線が一つの直線の上に截り取る線分は,此等の平行直線が他の一つの直線の上に截り取る線分に比例す.

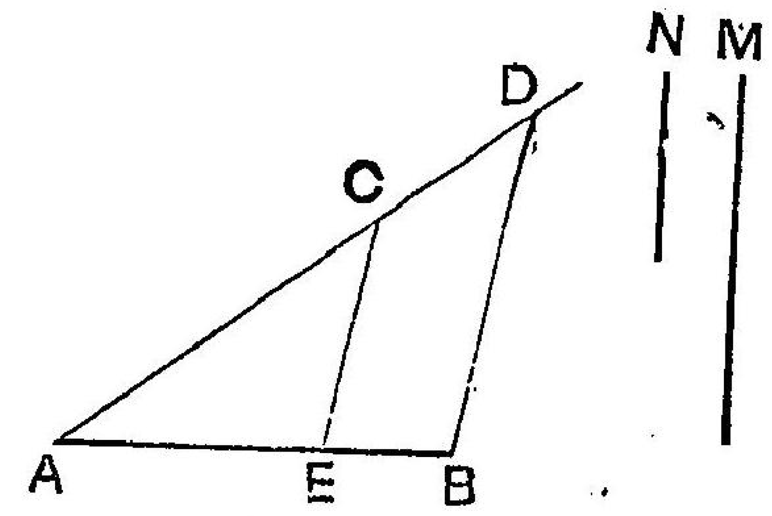
168. 定理 19. 定線分を與へられたる比に内分することを得, 又1に等しからざる與へられたる比に外分することを得,而して各の場合に於て分點は唯一つに限る.

AB ヲ定線分, M:N ヲ與ヘラレタル比トス.

内分の場合 AB ノ一端ヨリ任意ノ半直線 AC ヲ引キ其上ニ $AC=M$, $CD=N$ ヲ取リ, B ト D トヲ結付ケヨ. C ヨリ DB ニ平行ナル直線ヲ引キ AD トノ交點ヲ E トスレバ E ハ AB ヲ M:N ニ内分スベシ.

證明 $CE \parallel BD$

$$\therefore \quad \frac{EA}{EB}=\frac{CA}{CD} \quad \text{(前節)}$$



$$\therefore \quad \frac{EA}{EB}=\frac{M}{N}$$

次ニ E′ ガ AB ノ内分點ニシテ

$$\frac{E'A}{E'B}=\frac{M}{N}$$

ナリトスレバ

$$\frac{E'A}{E'B}=\frac{EA}{EB}$$

$$\therefore \quad \frac{E'A+E'B}{E'B}=\frac{EA+EB}{EB} \quad \text{(定理5)}$$

即チ
$$\frac{AB}{E'B}=\frac{AB}{EB}$$

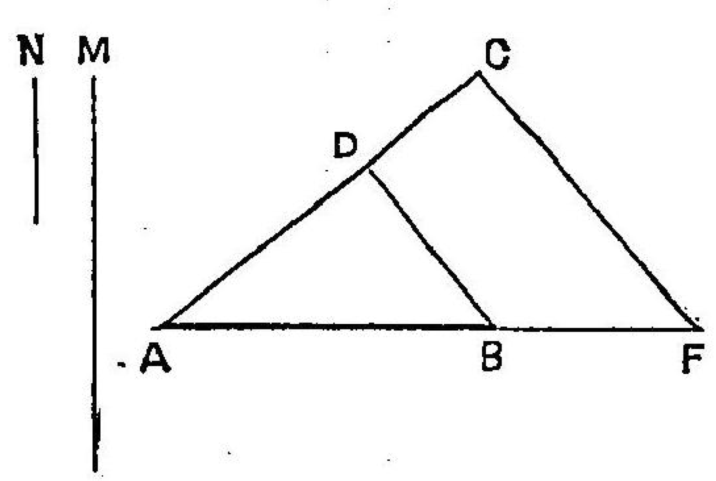
$$\therefore \quad E'B=EB$$

故ニ E′ ト E トハ相一致ス.

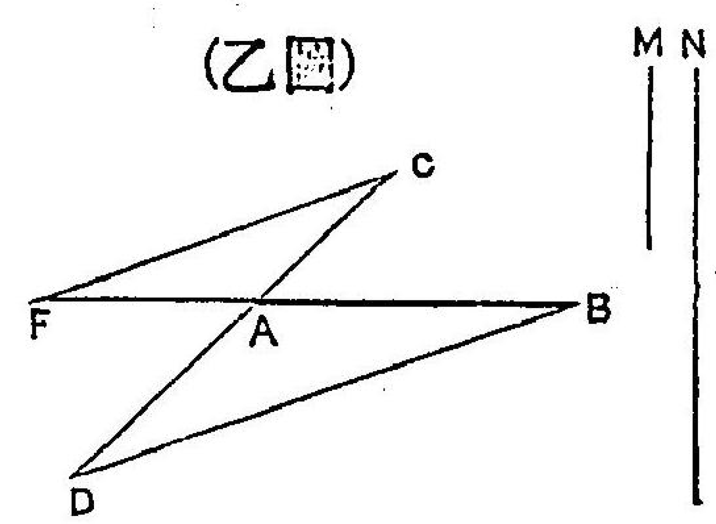
故ニ AB ヲ M:N ニ內分スル點ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

外分の場合 此場合ニハ CA 或ハ CA ヲ A ノ方ヘ延長シタル部分ノ上ニ N ニ等シク CD′ ヲ取リテ D′ ト B トヲ結付ケヨ. C ヨリ D′B ニ平行ナル直線ヲ引キ, AB ヲ B 或ハ A ノ方ヘ延長シタル者ト F ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ內分ノ場合ト同樣ニシテ F ガ AB ヲ M:N ニ外分スル唯一ツノ點ナルコトヲ知ル.

(甲圖)



(乙圖)



注意 外分ノ場合ニハ其二ツノ分ハ常ニ相等シカラズ. 故ニ AB ヲ相等シキ比(卽チ等比)ニ外分スルコト能ハズ.

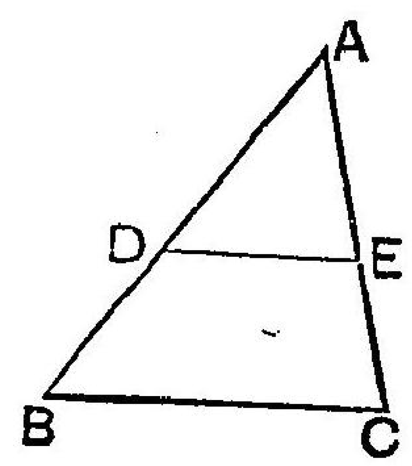
169. 定理 20. 三角形の二邊を,其共有の端を一端とせる分が相對應して比例を爲す樣に分つ直線は第三邊に平行なり.

一ツノ直線ガ△ABC ノ二邊 AB, AC ノ各ヲ夫夫 D, E ニ於テ內分若クハ外分スルトキ

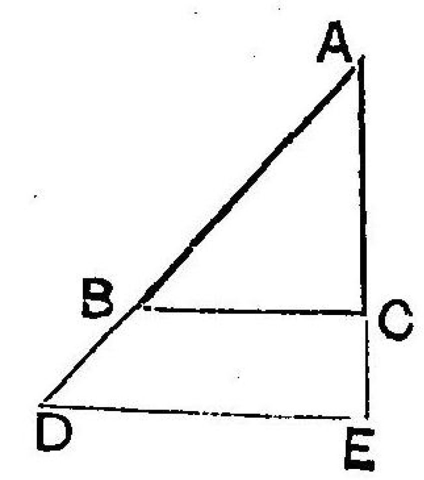
$$DA:DB=EA:EC$$

ナリトセヨ. 然ルトキハ $DE \parallel BC$ ナルベシ.

(甲圖)



(乙圖)



證明 D ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ヲ作リ AC ト E′ ニ於テ交ラシムレバ E′ ト D トハ夫夫 AC, AB ヲ同ジ比ニ內分若クハ外分ス(定理18), 然ルニ點 E モ AC ヲ同樣ニ分ツ.

故ニ E ト E′ トハ相合ス(前節定理).

故ニ DE ハ DE′ ト相合ス. 卽チ $DE \parallel BC$ ナリ.

問題 7. 同ジ底邊ヲ有スル二ツノ三角形 ABC,

ABD アリテ其底邊上ノ任意ノ一點 E ヨリ AC, AD ト同方向ヲ有スル二直線ヲ引キ,夫夫 BC, BD ト F, G ニ於テ交ラシムレバ CD, FG ハ互ニ平行ナリ.

問題 8. 二ツノ線分 AC, A′C′ ハ平行ニシテ B, B′ ハ夫夫 AC, A′C′ ヲ 1 ニ等シカラザル同ジ比ニ內分(若クハ共ニ外分)スルトキハ三ツノ直線 AA′, BB′, CC′ ハ同一點ヲ通ル.

170. 作圖題 1. 與へられたる三つの線分の第四比例項を求むること.

M, N, P ヲ與ヘラレタル三ツノ線分トシ,

$\frac{M}{N}=\frac{P}{X}$ ニ適スル線分 X ヲ求ム.

作圖法 一點 O ヨリ任意ニ二ツノ半直線 OX ト OY トヲ引キ, OX ノ上ニ於テ OA, AB ヲ夫夫 M, N ニ等シク取リ,次ニ OY ノ上ニ於テ OC ヲ P ニ等シク取リ, A ト C トヲ結付ケ, B ヨリ AC ニ平行ナル直線ヲ引キ, OY ト D ニ於テ交ラシメヨ.

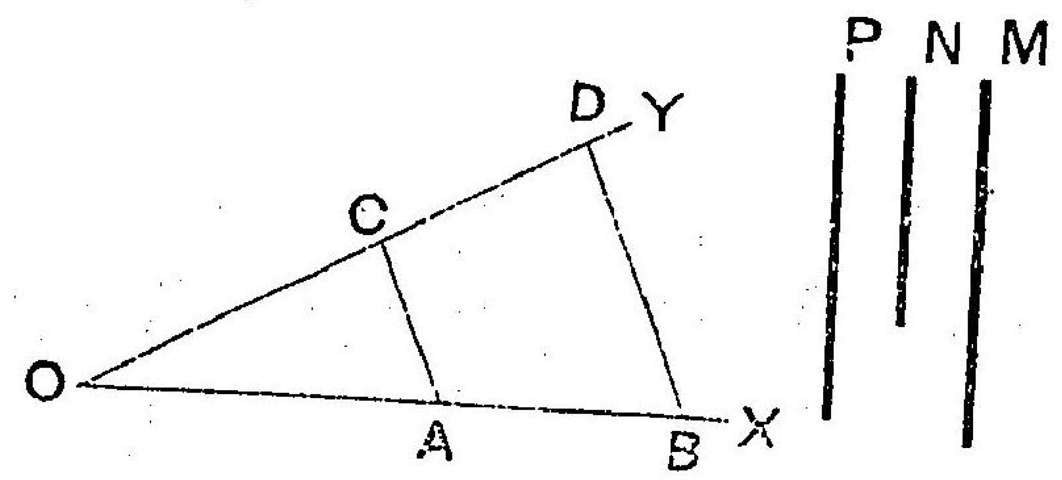
然ルトキハ CD ガ求ムル所ノ第四比例項ナリ.

證明 AC ∥ BD

∴ $\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}$

即チ $\frac{M}{N}=\frac{P}{CD}$ (定理 9)

∴ CD=X



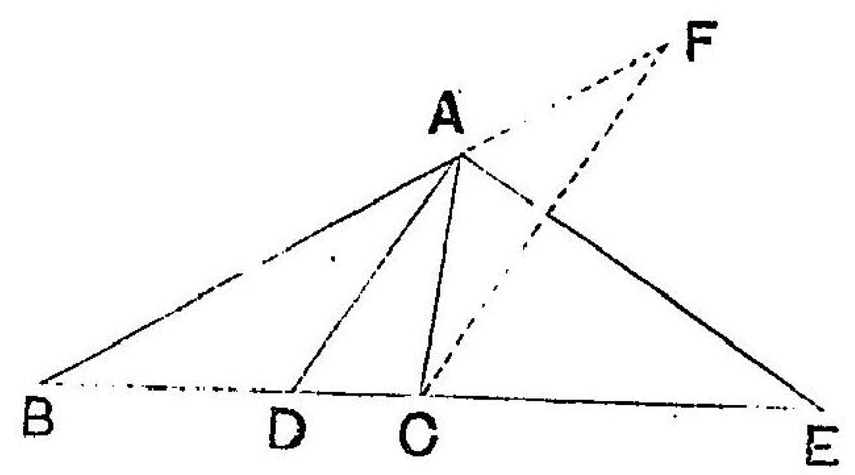
注意 若シ P=N ナレバ,問題ハ與ヘラレタル線分 M, N ノ第三比例項ヲ求ムルコトニナル. 然レドモ其作圖法ハ今述ベタルノト毫モ異ナルコトナシ.

171. 定理 21. 三角形の頂角及之に接する外角の二等分線は,夫夫底邊を他の二邊の比に內分及外分す.

△ABC ノ頂角 A 及之ニ接スル外角ノ二等分線ガ底邊 BC 及其延長ニ交ル點ヲ夫夫 D, E トセヨ.

然ルトキハ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC},\quad \frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}$$ ナルベシ.



證明 C ヨリ AD ニ平行ナル直線ヲ引キ, BA ノ延長ト F ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AF}$$

$$\angle BAD=\angle AFC$$

又 $$\angle DAC=\angle ACF$$

然ルニ $$\angle BAD=\angle DAC \quad (假設)$$

$$\therefore \quad \angle AFC=\angle ACF$$

$$\therefore \quad AC=AF$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$$

同様ニ, C ヨリ AE ニ平行ナル直線ヲ引キ,

$$\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}$$

ナルコトヲ證明スルヲ得.

注意 △ABC ガ二等邊三角形ニシテ AB=AC ナレバ AE∥BC ナリ, 故ニ此場合ニハ外分點ヲ求ムルヲ得ズ.

問題 9. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點ヲ D トシ,角 ADC, 角 ADB ノ各ノ二等分線ガ夫夫 AC, AB ト交ル點ヲ E, F トスレバ,直線 EF ハ BC ニ平行ナリ.

172. 定理 22. 三角形の底邊を他の二邊の比に內分若くは外分する點と頂點とを結付くる線分は,夫夫頂角及之に接する外角を二等分す.

△ABC ノ底邊 BC ヲ $\frac{AB}{AC}$ ナル比ニ內分及外分スル點ヲ夫夫 D, E トセヨ. 然ルトキハ線分 AD ハ頂角 A ヲ二等分シ, 線分 AE ハ頂角 A ニ接スル外角ヲ二等線分スベシ.

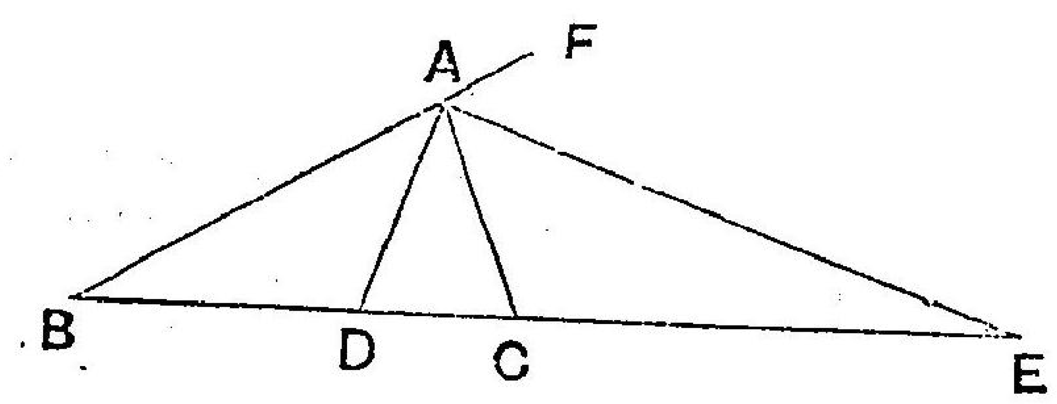
證明 角 A ノ二等分線ヲ引キ,夫レガ BC ト D′ ニテ交ルトセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC} \qquad \text{(前節定理)}$$

然ルニ
$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \qquad \text{(假設)}$$

故ニ D モ D′ モ BC ヲ $\frac{AB}{AC}$ ニ內分スル點ナルベキニヨリ,此二點ハ相一致ス(定理19). 故ニ AD ハ角 A ノ二等分線ナリ.

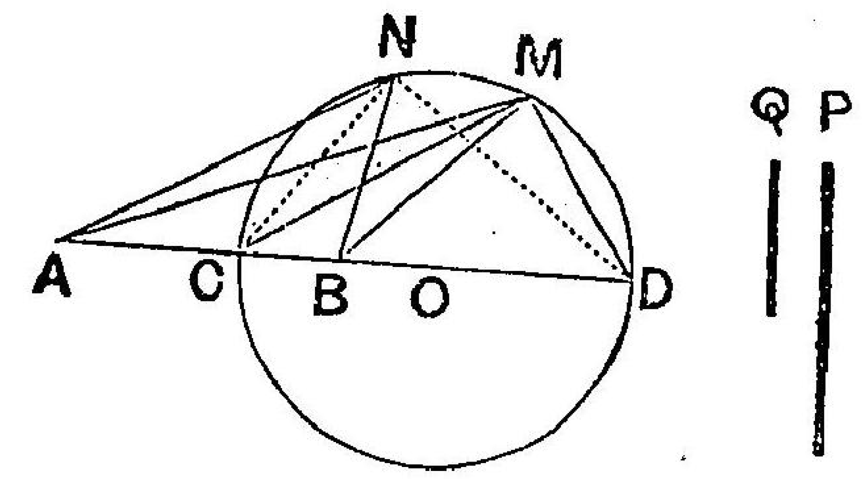
同樣ニシテ, AE ハ角 A ニ接スル外角 CAF ノ二等分線ナルコトヲ證明シ得.



問題 10. 四邊形 ABCD ノ二角 A 及 C ノ二等分線ガ對角線 BD ノ上ニ於テ相交レバ,他ノ二角 B 及 D ノ二等分線モ對角線 AC ノ上ニ於テ相交ル.

173. 軌跡題 二定點よりの距離の比が,與へられたる比に等しき點の軌跡を求むること.

A, B ヲ二定點, P, Q ヲ與ヘラレタル二ツノ線分トシ, A, B ヨリノ距離ノ比ガ $\frac{P}{Q}$ ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム.



解　マヅ線分 AB ヲ $\frac{P}{Q}$ ニ內分及外分シタル點ヲ夫夫 C 及 D トスレバ,此二點ハ與ヘラレタル性質ヲ有スル點ナリ.

今與ヘラレタル性質ヲ有スル任意ノ一點ヲ M トシ,之ト A, B, C, D ノ各トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ

$$\frac{MA}{MB}=\frac{P}{Q}=\frac{AC}{BC}$$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{P}{Q}=\frac{AD}{BD}$$

ナルユエ, MC ハ三角形 AMB ノ角 M ノ二等分線ニシテ, MD ハ角 M ニ接スル外角ノ二等分線ナリ(前節定理).

$$\therefore \angle CMD=\angle R$$

故ニ與ヘラレタル性質ヲ有スル點ハ CD ヲ直徑トスル圓周上ニアリ.

次ニ此圓周上ニ任意ノ點 N ヲ取リ,之ト A, C, B, D ノ各トヲ結付ケ, NC ト角 ANC ニ等シキ角ヲナス直線ヲ, AN トハ反對ノ側ニ引キ, CD ニ B′ ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ CN ハ角 ANB′ ノ二等分線ナリ.

$$\therefore \quad \frac{AN}{B'N}=\frac{AC}{B'C}$$

又 CN⊥ND ナルユエ, ND ハ三角形 ANB′ ノ N ニ於ケル外角ノ二等分線ナリ.

$$\therefore \quad \frac{AN}{B'N}=\frac{AD}{B'D}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{B'C}=\frac{AD}{B'D}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{AD}=\frac{B'C}{B'D}$$

然ルニ $$\frac{AC}{AC}=\frac{AD}{BD}$$

$$\therefore \quad \frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$$

$$\therefore \quad \frac{B'C}{B'D}=\frac{BC}{BD}$$

故ニ B モ B′ モ線分 CD ヲ同ジ比ニ內分スル點ナリ. 因テ B ト B′ トハ同一ノ點ナラザルベカラズ.

故ニ NC ハ角 ANB ノ二等分線ナリ.

故ニ N ハ與ヘラレタル性質ヲ有ス. 因テ

二定點よりの距離の比が與へられたる比に等しき點の軌跡は,此二定點を結付くる線分を此比に內分及外分する二點を兩端とする線分を直徑として畫きたる圓周なり.

注意 P=Q ナレバ A, B ヨリノ距離ガ相等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコトトナル,而シテ第三編軌跡題1ニ於テ既ニ之ヲ述ベオキタリ.

問題 11. 三ツノ點 A, B, C ガ同一直線上ニ此順ニ並ブトキ,二ツノ線分 AB ト BC トヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

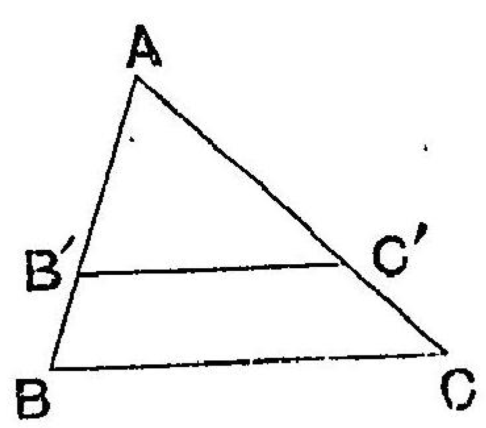
問題 12. 頂角ト底邊ト其他ノ二邊ノ比トヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

相似多角形

174. 定義 一ツノ多角形ノ(順ニ取リタル)角ガ夫夫他ノ多角形ノ(順ニ取リタル)角ニ等シキトキハ此兩多角形ハ**互に等角なり**トイフ,而シテ一ツノ多角形ノ各ノ角ヲ他ノ多角形ノ之ニ等シキ角ニ**對應する**トイヒ,相對應スル角ノ頂點ノ間ニアル邊ヲ**對應邊**トイフ.

175. 定理 23. 三角形の一邊に平行なる直線を作るときに生ずる三角形と,原三角形とは等角にして,且つ其對應邊は比例をなす.

證明 △ABCノ邊BCニ平行ナル直線ヲ引キ,他ノ二邊AB, ACト夫夫B′, C′ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ三角形ABCト三角形AB′C′トニ於テ,角Aハ共通ニシテ,角Bト角B′トハ相



等シク,角Cト角C′トハ相等シ.

次ニ $BC \parallel B'C'$.

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'} \qquad (\text{定理}18)$$

$$\text{又} \quad \frac{AB}{AB'}=\frac{BC}{B'C'} \qquad (\text{定理}18\text{及系}2)$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'}$$

176. 定義 二つの三角形が等角にして,對應邊が比例を爲すときは,此二つの三角形は**互に相似なり**といふ.

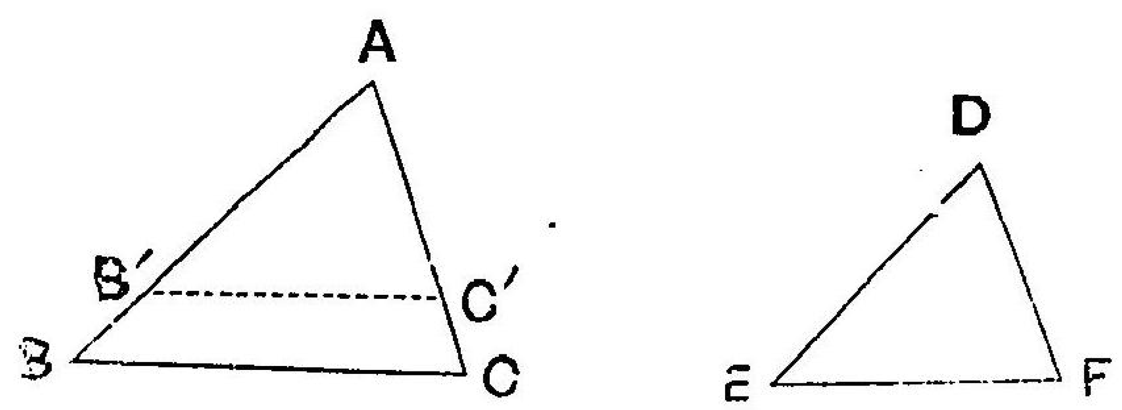
例ヘバ前節ノ定理ニ於ケル三角形ABCト三角形AB′C′トハ互ニ相似ナリ. 故ニ前節ノ定理ハ亦次ノ如クニ言ヒ表スコトヲ得.

定理 24. 三角形の一邊に平行なる直線を作るときに生ずる三角形と原三角形とは互に相似なり.

注意 「三角形ABCト三角形DEFトガ互ニ相似ナリ」トイフコトヲ書キ表スニ △ABC∽△DEF ナル記號ヲ用フルコトアリ.

177. 定理 25. 二つの角が夫夫相等しき二つの三角形は互に相似なり.

△ABC, △DEF ニ於テ ∠A=∠D, ∠B=∠E トセヨ. 然ルトキハ △ABC∽△DEF ナルベシ.



證明 AB ノ上ニ, DE ニ等シク AB′ ヲ取リ B′ ヨリ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC ト C′ ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

△ABC∽△AB′C′ (前節定理)

サテ △AB′C′ ト △DEF トニ於テ

AB′=DE (作圖)

∠B′=∠B=∠E (假設)

∴ △AB′C′≡△DEF

∴ △ABC∽△DEF

系 1. 一つの鋭角が相等しき二つの直角三角形は互に相似なり.

系 2. 二つの相似三角形の對應邊の比は,此等の邊を底邊と看做したるときの三角形の高さの比に等し.

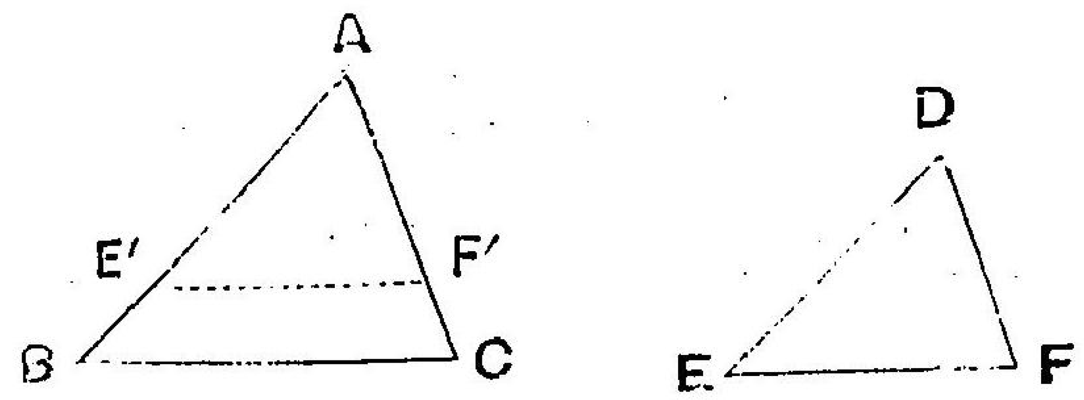
系 3. 三邊が夫夫互に平行なるか若くは互に垂直なる二つの三角形は互に相似なり.

問題 13. 一點 A ヨリ,一ツノ圓ニ切線ト割線トヲ引キ,此切線ノ切點ヲ B トシ,此割線ト圓周トノ交點ヲ C 及 D トスルトキハ,三角形 ABC ト三角形 ABD トハ互ニ相似ナリ.

問題 14. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 B ヨリ AC ニ垂線 BD ヲ下ストキハ $BC^2=2.AC.CD$ ナリ.

178. 定理 26. 二邊の比及其二邊の夾角が夫夫相等しき二つの三角形は互に相似なり.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DE}{DF}$ 及 $\angle A=\angle D$ ナリトセヨ. 然ルトキハ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ナルベシ.



證明　$\angle D$ ガ之ニ等シキ $\angle A$ ノ上ニ重ナリ,邊 DE, DF ガ夫夫邊 AB, AC ノ上ニ重ナル樣ニ $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ移シ,點 E, F ノ落ツル點ヲ夫夫 E′, F′ トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF} \quad \text{(假設)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AE'}=\frac{AC}{AF'}$$

$$\therefore \quad E'F' \parallel BC \quad \text{(定理20)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle AE'F'$$

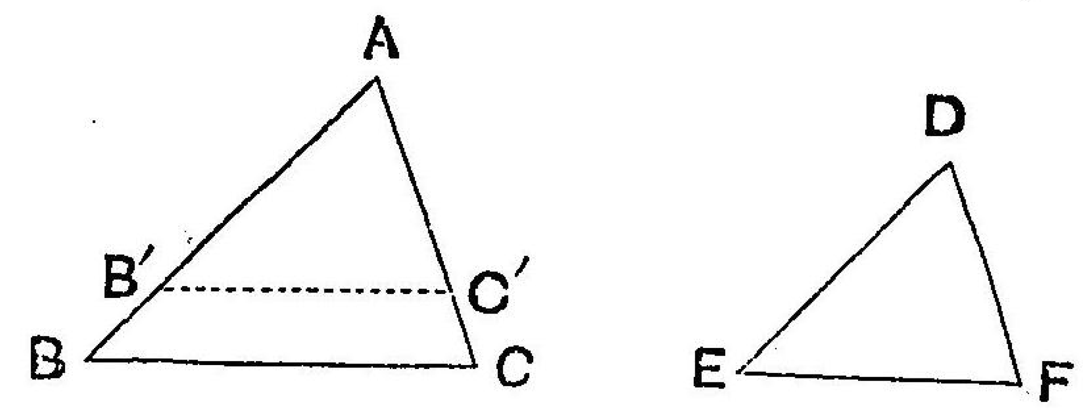
$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

系　頂角が相等しき二つの二等邊三角形は互に相似なり.

問題 15.　三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引キタル垂線ガ三角形ノ内ニアリテ,且ツ其足ニテ生ズル底邊ノ二ツノ分ノ比例中項ナルトキハ,此三角形ハ直角三角形ナリ.

179. 定理 27. 三邊が夫夫比例を成す二つの三角形は互に相似なり.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}$ ナリトセヨ. 然ルトキハ $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ナルベシ.



證明　AB ノ上ニ, DE ニ等シク AB′ ヲ取リ, B′ ヨリ BC ニ平行ナル直線ヲ引キ AC ト C′ ニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{BC}{B'C'} \quad \text{(定理23)}$$

然ルニ　$AB'=DE$　(作圖)

$$\therefore \quad \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{AC'}$$

而シテ $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ (假設)

$$\therefore \quad \frac{AC}{AC'}=\frac{AC}{DF}$$

$$\therefore \quad AC'=DF$$

同樣ニ $B'C'=EF$

$$\therefore \quad \triangle AB'C' \equiv \triangle DEF$$

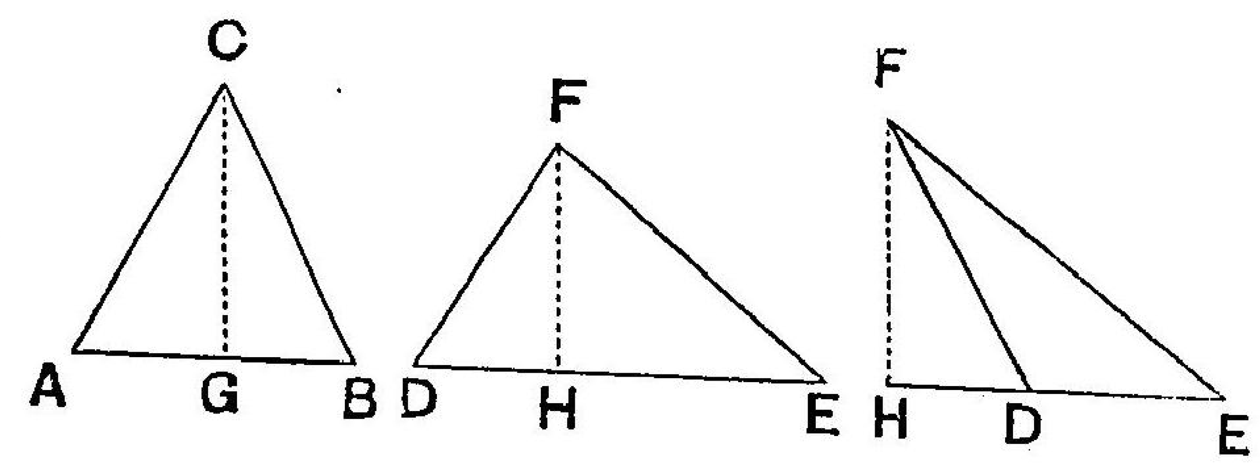
然ルニ $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$ (定理24)

$$\therefore \quad \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

180. 定理 28. 一つの三角形の一つの角と他の三角形の一つの角とが相等しきか,若くは互に補角をなすときは,此二つの三角形の面積の比は此角を夾む二邊の積の比に等し.

$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ,角 A ト角 D トガ相等シキカ,若クハ互ニ補角ヲナストセヨ.

然ルトキハ $\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB.AC}{DE.DF}$ ナルベシ.



證明 三角形 ABC ノ邊 AB ヲ底邊トスルトキノ高サヲ CG トシ,三角形 DEF ノ邊 DE ヲ底邊トスルトキノ高サヲ FH トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{CG}{FH} \qquad \text{(定理13系3)}$$

然ルニ $\triangle ACG \backsim \triangle DFH$ (定理25系1)

$$\therefore \quad \frac{CG}{FH}=\frac{AC}{DF}$$

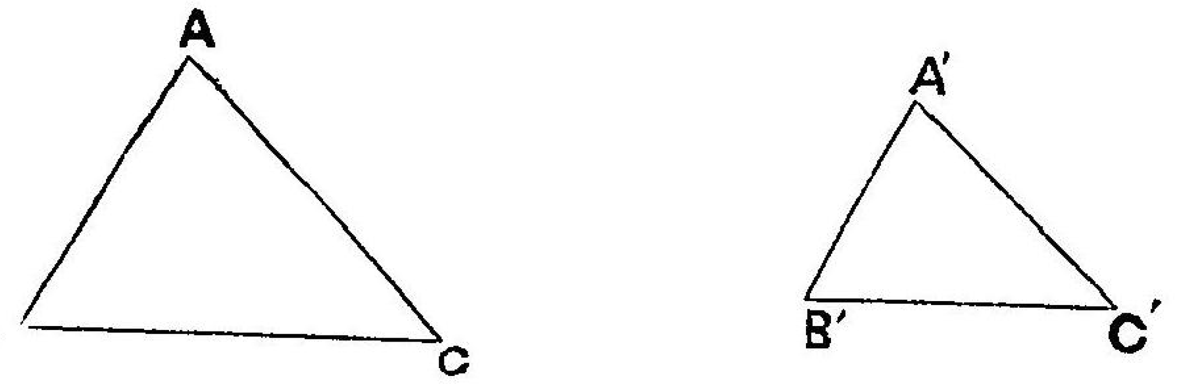
$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{AB}{DE}\times\frac{AC}{DF}=\frac{AB.AC}{DE.DF} \qquad \text{(定理13)}$$

系 相等しき一つの角を有する二つの平行四邊形の面積の比は其相隣れる二邊の積の比に等し.

181. 定理 29. 互に相似なる二つの三角形の面積の比は其對應邊の平方の比に等し.

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ ナリトスレバ $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

ナルベシ.



證明　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C$

$\therefore$　$\angle A=\angle A'$

$\therefore$　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}\times\dfrac{AC}{A'C'}$　(前節定理)

然ルニ　$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$

$\therefore$　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\left(\dfrac{AB}{A'B'}\right)^2=\dfrac{AB^2}{A'B'^2}$

問題 16.　相似三角形ノ面積ハ其内接圓若クハ其外接圓ノ半徑ノ平方ニ比例ス.

182. 定理 30.　直角三角形に於て

(第一)　直角を夾む邊の各は,斜邊の

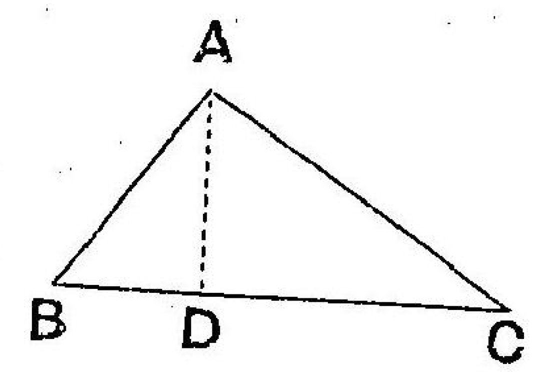
上に於ける夫れの直射影と斜邊との比例中項なり.

(第二)　直角の頂點より斜邊へ引きたる垂線は,其足にて生ずる斜邊の二つの分の比例中項なり.

直角三角形ABCノ直角ノ頂點Aヨリ斜邊BCニ下シタル垂線ノ足ヲDトセヨ. 然ルトキハ

(第一)　ABハBDトBCトノ比例中項ナルベク,

(第二)　ADハBDトCDトノ比例中項ナルベシ.



第一の證明　△ABCト△ABDトハ何レモ直角三角形ニシテ,鋭角Bヲ共有ス.

$\therefore$　$\triangle ABC \backsim \triangle ABD$　(定理25系1)

$\therefore$　$\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AB}{BD}$

即チABハBCトBDトノ比例中項ナリ.

第二の證明　二ツノ直角三角形ABDトACDトニ於テ

$\angle B=\angle CAD$　($\because$ $\angle BAD$ ノ餘角)

$$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle ACD \quad \text{(定理25系1)}$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{CD}$$

卽チ AD ハ BD ト CD トノ比例中項ナリ.

系 1. 圓の弦の平方は,其一端を通る直徑の上に於ける夫れの直射影と直徑との積に等し.

系 2. 圓周上の一點より一つの直徑へ下したる垂線の平方は,其足にて生ずる此直徑の二つの分の積に等し.

系 3. 直角三角形の直角を夾む二邊の平方の比は斜邊の上に於ける夫等の直射影の比に等し.

問題 17. 圓ノ互ニ平行ナル二ツノ切線ガ,點 A ニ於テ同ジ圓ニ切スル第三ノ切線ト P, Q ニ於テ交ルトキ,此圓ノ半徑ハ AP ト AQ トノ比例中項ナリ.

問題 18. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ,次ニ角 B ノ二等分線ヲ引キ, AC, AD ト夫夫 E, F ニテ交ラシムレバ

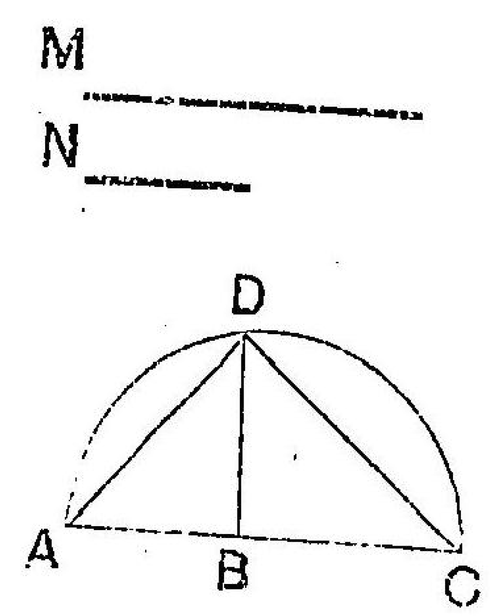
$$\frac{DF}{AF} = \frac{AE}{CE} \quad \text{ナリ.}$$

183. 作圖題 2. 與へられたる二つの線分の比例中項を求むること.

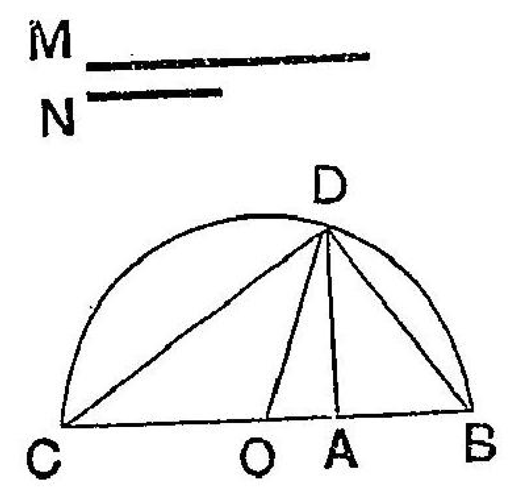
M, N ヲ與ヘラレタル二ツノ線分トシ, M ト N トノ比例中項ヲ求ム.

作圖法第一 $M>N$ ナリト假定セン.

點 A ヨリ任意ニ半直線ヲ引キ,其上ニ於テ其原點 A ヨリ, AB ヲ N ニ等シク, AC ヲ M ニ等シク取リ, AC ヲ直徑トスル半圓周ヲ畫ケ. 次ニ B ヨリ AC ニ垂線ヲ引キ,此半圓周ト點 D ニ於テ交ラシメ, A ト D トヲ結付ケヨ. AD ガ卽チ求ムル所ノ長サナリ(前節定理系1).



作圖法第二　任意ニ直線ヲ引キ,其上ノ一點Aヨリ反對ノ側ニABガNニ等シク,ACガMニ等シキ樣ニ點BトCトヲ其上ニ取リ,BCヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫ケ.次ニAヨリBCニ垂線ヲ引キ,此半圓周トDニ於テ交ラシムレバ,ADガ卽チ求ムル所ノ長サナリ(前節定理系2).



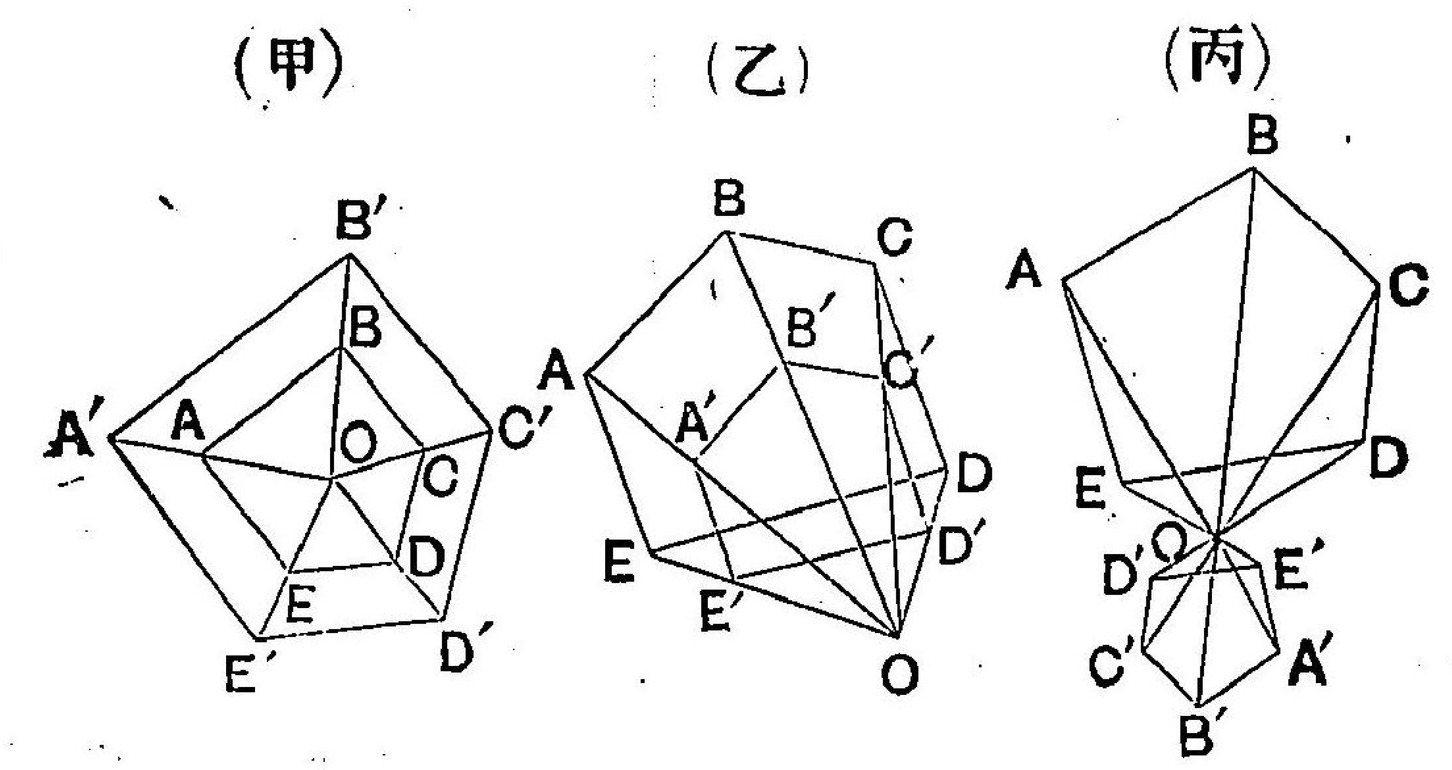
系　相等しからざる二つの線分の比例中項は,其等差中項,卽ち其和の半分より小なり.

問題 19.　與ヘラレタル正方形ト等積ニシテ且ツ與ヘラレタル線分ニ等シキ一邊ヲ有スル矩形ヲ作ルコト.

問題 20.　與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作ルコト.

184. 定理 31.　多角形の各頂點を一つの點に結付けたる線分を同じ比に內分,若くは外分し,其各分點と其次の分點とを結付けて得る所の多角形は原多角形と等角にして且つ其對應邊は比例をなす.

多角形ABCDEノ各頂點A, B, C, D, Eヲ一ツノ點Oニ結付クル線分ヲ同ジ比ニ內分若クハ外分スル點ヲ夫夫A′, B′, C′, D′, E′トセヨ.然ルトキハ多角形A′B′C′D′E′ト多角形ABCDEトハ等角ニシテ其對應邊ハ互ニ比例ヲナスベシ.



證明 $\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$ (定理26)

$\triangle OBC \backsim \triangle OB'C'$

$\therefore \angle ABO = \angle A'B'O$

$\angle OBC = \angle OB'C'$

$\therefore \angle ABC = \angle A'B'C'$

同樣ニ角 C, 角 E 等ハ夫夫角 C′, 角 E′ 等ニ等シキコトヲ知ル.

次ニ $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{OB}{OB'}$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

同樣ニ $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'}$ 等ナリ.

注意 ココニ論ジタル二ツノ多角形ノ邊ハ二ツ宛互ニ平行ナルコト明カナリ.

185. 定義 二つの多角形が等角にして對應邊が比例をなすときは,此二つの多角形は**互に相似なり**といふ.

對應邊ノ比ヲ名ヅケテ相似比トイフ.

例ヘバ前節ニ示シタル二ツノ五邊形 ABCDE

ト A′B′C′D′E′ トハ互ニ相似ナル多角形ニシテ,其對應邊ガ夫夫平行ナル特別ノ位置ニオカレタルモノナリ. 而シテ OB : OB′ 卽チ AB : A′B′ ガ其相似比ナリ.

注意 1. 相似三角形ハ相似多角形ノ最モ簡單ナル場合ナリ.

注意 2. 相等シキ多角形ハ相似多角形ノ特別ナル場合ニシテ其相似比ガ 1 ニ等シキ者ナリ.

問題 21. 一ツノ四邊形 ABCD ノ三ツノ角 A, B, C ガ夫夫他ノ四邊形 EFGH ノ三ツノ角 E, F, G ニ等シク,其中ノ一ツノ角,例ヘバ角 A ノ二邊 AB, AD ガ夫レニ等シキ角 E ノ二邊 EF, EH ニ比例スルトキハ,此二ツノ四邊形ハ互ニ相似ナリ.

186. 定理 32. 互に相似なる二つの多角形の周の比は其相似比に等し.

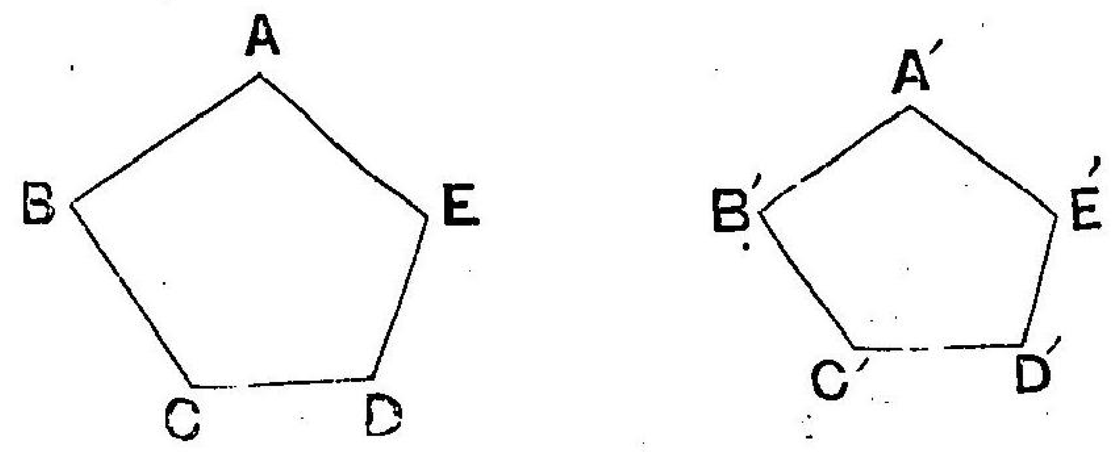
證明 ABCDE, A′B′C′D′E′ ヲ互ニ相似ナル二ツノ多角形トセヨ. 然ルトキハ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \quad \text{(假設)}$$

然ルニ此等ノ相等シキ比ト

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}$$

トハ相等シ（定理7）.



187. 定理 33. 互に相似なる二つの多角形は同數の互に相似なる三角形に分たる.

證明 例ヘバ ABCDE, A′B′C′D′E′ ヲ互ニ相似ナル二ツノ五邊形トセヨ. マヅ ABCDE ノ一ツノ頂點 A ヲ各頂點ニ結付ケ,次ニ A′B′C′D′E′ ノ A ニ對應スル頂點 A′ ト各頂點トヲ結付ケヨ.

然ルトキハ ABCDE ハ三角形 ABC, ACD, ADE ニ分タレ, A′B′C′D′E′ ハ同數ノ三角形 A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ ニ分タル.

サテ $\angle B=\angle B'$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ （定理26）

∴ $\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$

然ルニ $\frac{CD}{BC}=\frac{C'D'}{B'C'}$ （假設）

∴ $\frac{CD}{AC}=\frac{C'D'}{A'C'}$ （定理8）

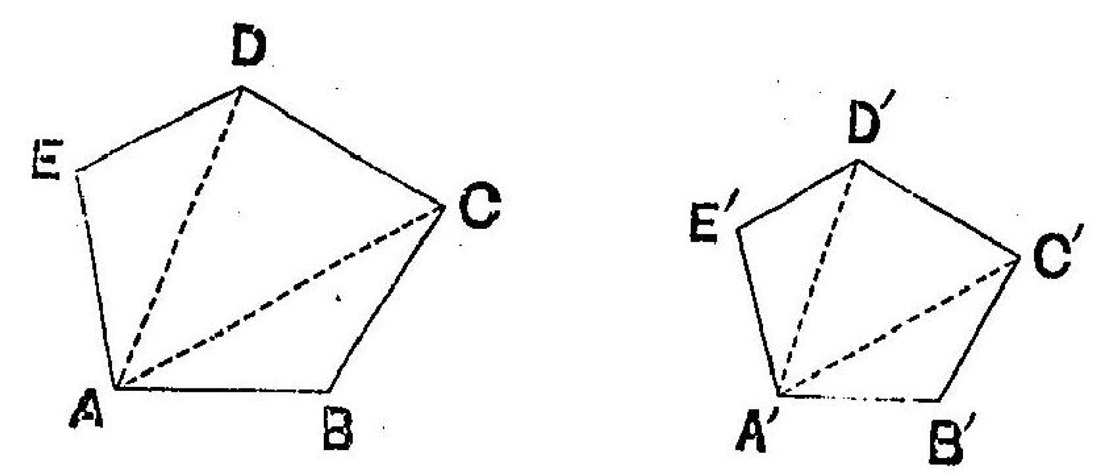
又 $\angle BCA=\angle B'C'A'$

然ルニ $\angle BCD=\angle B'C'D'$

∴ $\angle ACD=\angle A'C'D'$

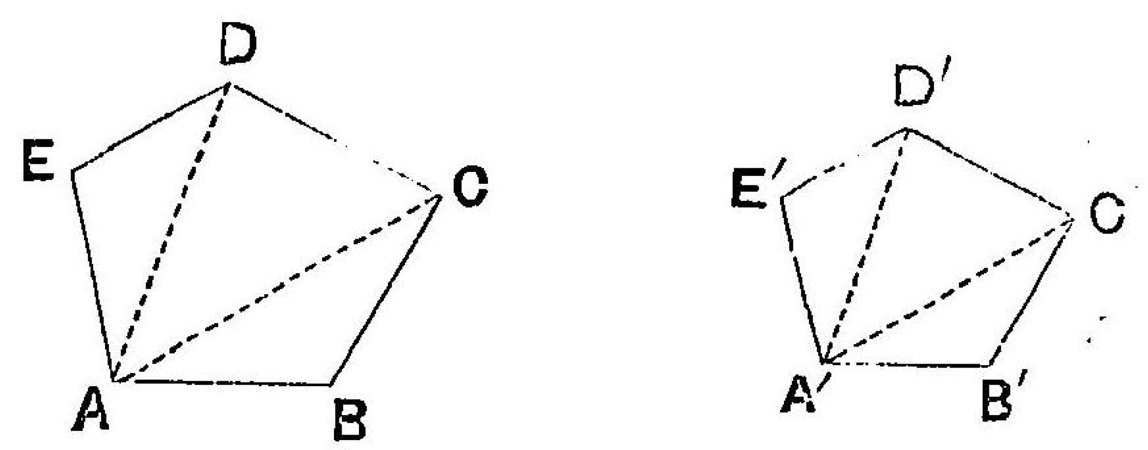
∴ $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$ （定理26）

同樣ニ $\triangle ADE \backsim \triangle A'D'E'$



188. 定理 34. 相似多角形の面積は其對應邊の平方に比例す.

ABCDE, A'B'C'D'E' ヲ二ツノ相似多角形トセヨ。然ルトキハ其面積ノ比ハ對應邊 AB, A'B' ノ平方ノ比ニ等シカルベシ。



證明 A, A' ヨリ各頂點ヘ對角線ヲ引ケ。

然ルトキハ △ABC, △ACD, △ADE ハ夫夫 △A'B'C', △A'C'D', △A'D'E' ニ相似ナリ（前節定理）

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad \text{(定理29)}$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\frac{CD^2}{C'D'^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad \text{(同上)}$$

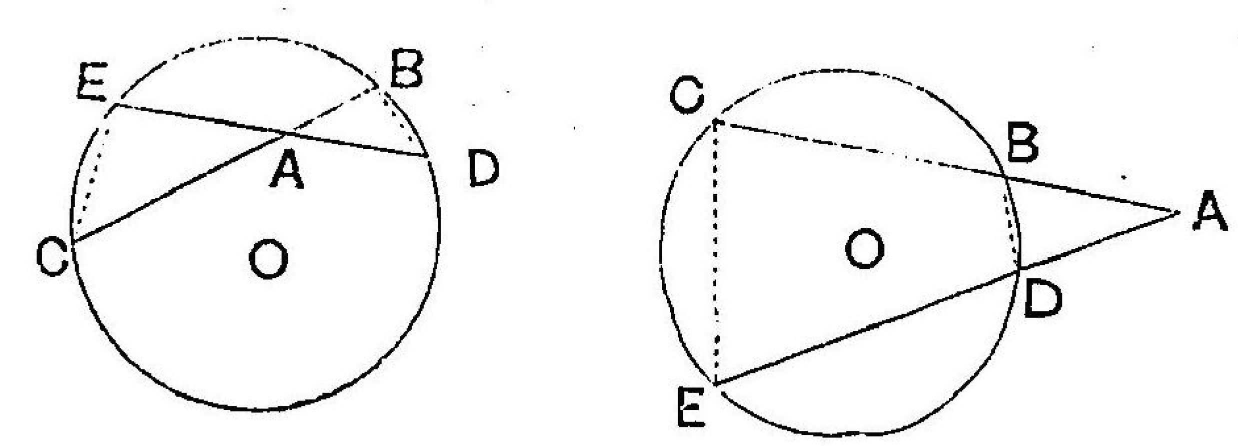
$$\frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'}=\frac{DE^2}{D'E'^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2} \qquad \text{(同上)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE}{\triangle A'B'C'+\triangle A'C'D'+\triangle A'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

卽チ
$$\frac{\text{多角形 } ABCDE}{\text{多角形 } A'B'C'D'E'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$$

189. 定理 35. 圓の弦或は其延長が圓內若くは圓外の一定點を通るとき其點に於て生ずる二つの內分若くは外分の積は何れの弦にても皆相等し。

二ツノ弦 BC, DE 或ハ其延長ガ一定點 A ヲ通ルトキハ AB.AC=AD.AE ナルベシ。



證明 B ト D ト; C ト E トヲ結付クレバ二ツノ三角形 ABD, ACE ニ於テ

$$\angle BAD=\angle CAE$$

$$\angle ABD=\angle AEC \qquad \text{(第三編定理17系1)}$$

$$\therefore \quad \triangle ABD \backsim \triangle AEC \qquad \text{(定理25)}$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$$

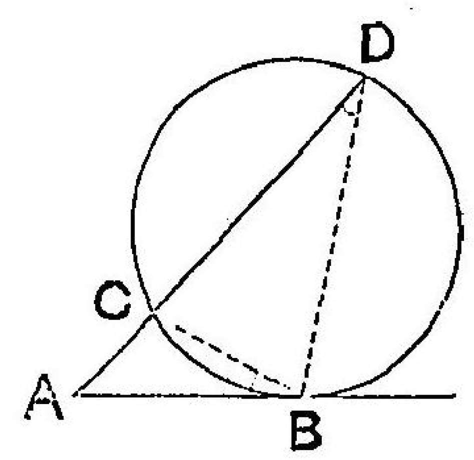
$$\therefore \quad AB.AC=AD.AE$$

系　二つの線分若くは其等の延長が相交り,其交點にて生ずる各線分の二つの分の積が相等しければ此二線分の端點は同一圓周上にあり.

問題 22.　相交ル二ツノ圓ノ共有弦ノ上ニアル一點Cヲ通リテ一ツノ直線ヲ引キ,一ツノ圓周トノ交點ヲA及Dトシ,他ノ圓周トノ交點ヲB及Eトスレバ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{CD}$ ナリ.

問題 23.　圓周上ノ一點Aヨリ半直線ヲ引キ,此點ヲ通ル直徑ニ垂直ナル直徑トCニ於テ交ラシメ,圓周トDニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ AC.AD ハ此圓ノ半徑ノ平方ノ二倍ニ等シ.

190. 定理 36.　圓外の一點より引きたる切線の長さは,同じ點より引きたる割線上の弦が此點にて分たれて生ずる外分の比例中項なり.



圓外ノ一點Aヨリ引キタル切線ノ切點ヲBトシ, Aヨリ引キタル割線ガ圓周ト交ル點ヲC, Dトセヨ. 然ルトキハ $AB^2=AC.AD$ ナルベシ.

證明　BヲC, Dノ各ニ結付ケヨ. 然ルトキハ二ツノ三角形ABD, BCAニ於テ

$\angle A$ ハ共通

$\angle ADB=\angle ABC$　(第三編定理20)

$\therefore\ \triangle ABD \backsim \triangle BCA$　(定理25)

$\therefore\ \frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$

$\therefore\ AB^2=AC.AD$

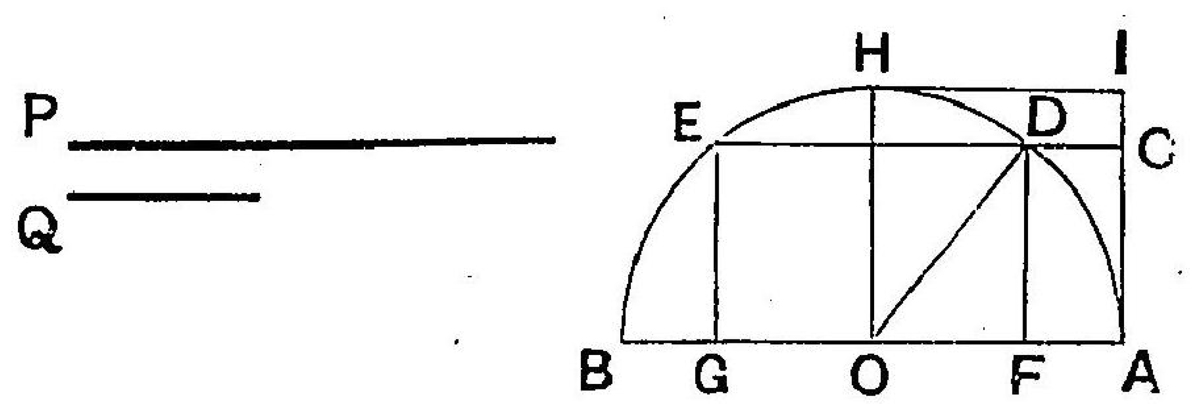
系　圓外の一點を通る割線が此點にて分たれて生ずる二つの分の積と,同じ點を圓周上の一點に結付けたる線分の平方とが相等しければ此線分は圓に切す.

問題 24. 二ツノ定點ヲ結付クル線分ノ延長ノ上ニアル一點ヨリ,此二點ヲ通ル總テノ圓ヘ引キタル切線ノ長サハ相等シ.

問題 25. 圓外ノ一點ヨリ此圓ニ切線ト割線トヲ引キ,又同ジ點ヨリ今引キタル切線ト等長ナル線分ヲ任意ノ方向ニ引ケバ,此線分ハ其端ト前ニ引キタル割線ト圓周トノ交點ノ各トヲ通ル二直線ガ再ビ圓周ト交ル二點ヲ結付クル線分ニ平行ナリ.

191. 作圖題 3. 二つの線分の和と積とを知りて,其各線分を求むること.

Pヲ二ツノ線分ノ和, Q^2ヲ其積トシ,其線分ノ各ヲ求ム.



解 此問題ハPニ等シキ線分ヲ内分シ,其積ヲQ^2ニ等シクナスニアリ. サテ,マヅ$AB=P$トシ,

AF, BFヲ求ムル所ノ線分トセヨ. ABヲ直徑トスル半圓周ヲ畫キ, FヨリABニ垂線ヲ引キ,半圓周トDニ於テ交ラシメヨ. 然ルトキハ

$$DF^2=AF.BF$$

ナルユヱ,

$$DF=Q$$

ナラザルベカラズ. 因テDヨリABニ平行ナル直線ヲ引キ, Aニ於ケル圓ノ切線トCニ於テ交ラシムレバ

$$AC=DF=Q$$

ナルベシ. 故ニ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 Pニ等シキ線分ABヲ直徑トシテ半圓周ヲ畫キ, Aニ於ケル切線上ニ於テ半圓周ト同ジ側ニ, $AC=Q$ナル樣ニ點Cヲ取リ, CヨリABニ平行ナル直線ヲ引キ,半圓周トDトEトニテ交ラシメ, D及EヨリABヘ夫夫垂線DF, EGヲ引クトキニ生ズル内分AFトBFト又ハAGトBGトガ求ムル所ノ者ナリ.

吟味 OHヲABニ垂直ナル圓ノ半徑トスレバCヨリABニ平行ニ引キタル直線ト半圓周トニ共有點ガアル爲ニハACガOHヨリ大ナラザルコトヲ要ス.

故ニ問題ガ出來ル爲ニハ

$$Q \geqq \tfrac{1}{2}P$$

ナラザルベカラズ　ソコデ

(第一)　$Q<\frac{1}{2}P$ ナルトキハ,二ツノ交點 D, E ヲ得,然レドモ E ニヨリテ得ル所ノ二ツノ線分 AG, BG ハ夫夫 BF, AF ニ等シ.

(第二)　$Q=\frac{1}{2}P$ ナルトキハ, OA 即チ $\frac{1}{2}P$ ガ求ムル所ノ者ナリ.

(第三)　$Q<\frac{1}{2}P$ ナルトキハ,問題ハ不可能ナリ.

故ニ其和が與へられたる線分に等しき二つの線分の積は,各が相等しきとき最大なり.

注意 1.　AF, BF ノ長サハ次ノ如クシテ求メラル.

$$AF=OA-OF$$

$$BF=OB+OF=OA+OF$$

而シテ　$OA=\frac{1}{2}P=OD$

又直角三角形 OFD ヨリ

$$OF^2=OD^2-DF^2=\tfrac{1}{4}P^2-Q^2$$

$$\therefore \quad OF=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2-Q^2}$$

$$\therefore \quad AF=\tfrac{1}{2}P-\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2-Q^2}$$

$$BF=\tfrac{1}{2}P+\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2-Q^2}$$

注意 2.　本問題ハ代數學ニ於ケル

$$x+y=P$$

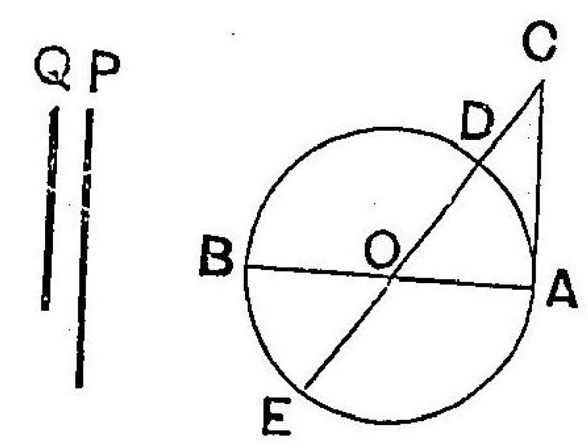
$$xy=Q^2$$

ナル聯立方程式,從テ $z^2-Pz+Q^2=0$ ナル一元二次方程式ノ根ヲ求ムルコトニ對應スルモノナリ.

192. 作圖題 4.　二つの線分の差と積とを知りて其各線分を求むること.

P ヲ二線分ノ差, Q^2 ヲ其積トシ,其各ヲ求ム.

作圖法　P ニ等シキ長サノ線分 AB ヲ直徑トシテ圓 O ヲ畫キ, A ニ於ケル切線上ニ, AC=Q ナル樣ニ C ヲ取リ, C ト O トヲ通ル直線ヲ引キ,圓 O ノ周ト D, E ニ於テ交ラシメヨ. CE ト CD トガ即チ求ムル所ノ者ナリ.



證明　$CE-CD=DE=AB=P$

$$CD.CE=AC^2=Q^2 \quad \text{(定理23)}$$

而シテ此問題ハ常ニ成リ立ツ.

注意 1. 次ノ如クニシテ CD ト CE トノ長サヲ計算スルヲ得.

$$CE=CO+OA$$

$$CD=CO-OA$$

$$OA=\tfrac{1}{2}P$$

直角三角形 OAC ヨリ

$$OC^2=OA^2+AC^2$$

$$\therefore \quad OC=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2+Q^2}$$

$$\therefore \quad CE=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2+Q^2}+\tfrac{1}{2}P$$

$$CD=\sqrt{\tfrac{1}{4}P^2+Q^2}-\tfrac{1}{2}P$$

注意 2. 本問題ハ代數學ニ於ケル

$$x-y=P$$

$$xy=Q^2$$

ナル聯立方程式從テ $z^2-Pz-Q^2=0$ ナル一元二次方程式ノ根ヲ求ムル問題ニ對應スル者ナリ.

193. 定義 定線分ヲ,其一ツノ分ガ他ノ分ト全線分トノ比例中項トナル樣ニ二ツノ分ニ分ツコトヲ此線分ヲ**中末比に分つ**トイフ.

194. 作圖題 5. 定線分を中末比に分つこと.

解　定線分ヲ AB トシ, AB ヲ中末比ニ分ツ外分點ヲ C, 內分點ヲ D トシ,其位置ガ見出サレタル者トスレバ C ハ AB ヲ A ノ方ヘ延長シタル者ノ上ニアラザルベカラズ. 何トナレバ若シ C ガ AB ヲ B ノ方ヘ延長シタル者ノ上ニアリトスレバ AC ハ AB, BC ノ何レヨリモ大トナルヲ以テ其比例中項ニ等シキコト能ハザレバナリ.

マヅ C ト D トノ位置ガ見出サレタル者ト假定シ,ソレト A, B トノ位置ノ間ニ如何ナル關係アルカヲ研究セントス.

$$\therefore \quad \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$$

$$\therefore \quad AC^2=AB.BC$$

$$\text{又} \quad \frac{BD}{AD}=\frac{AD}{AB}$$

$\therefore \quad AD^2 = AB.BD$

$\therefore \quad AC^2 - AD^2 = AB.(BC - BD)$

$\therefore \quad (AC + AD).(AC - AD) = AB.DC$

然ルニ $\quad AC + AD = DC$

$\therefore \quad AC - AD = AB$

又 $\quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AC}$

$\therefore \quad \dfrac{AC - AB}{AB} = \dfrac{BC - AC}{AC}$

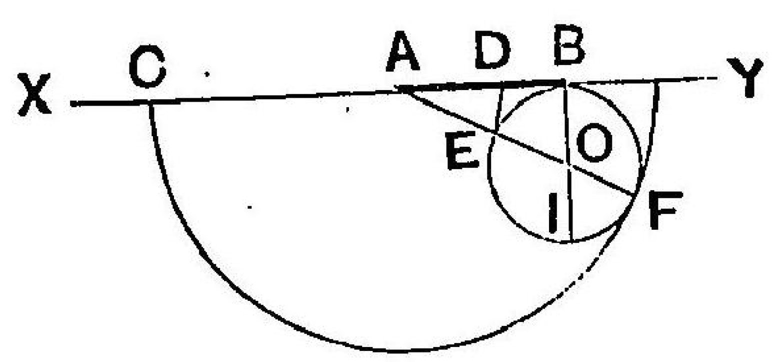
$\therefore \quad \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore \quad AC.AD = AB^2$

故ニ今求メントスル點C, Dハ其Aヨリノ距離ノ差ガABニ等シク,其積ガAB^2ニ等シキ者ナリ.

因テ前節ノ作圖題ニヨリ,次ノ作圖法ヲ得.

作圖法　BヨリABニ垂線ヲ引キ其上ニ於テBI=ABナル様ニIヲ取リ, BIヲ直徑トシテ圓Oヲ畫キ, AトOトヲ通ル直線ヲ



引キ,圓Oノ周トE及Fニ於テ交ラシメAD=AE, AC=AFナル様ニD, CヲXYノ上ニ取レバ是ガ求ムル所ノ點ナリ.

注意　前節ノ注意1ニ於テ求メオキタル結果ノ右邊ノP, Qノ各ニABヲ代用シタル者ガAC, ADノ長サナリ. 故ニ

$$AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AB$$

$$AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$$

195. 作圖題6. 定直線に切し其上にあらざる二定點を通る圓を畫くこと.

XYヲ定直線, A, BヲXY上ニ在ラザル二定點トシ, A, Bヲ通リXYニ切スル圓ヲ畫クコトヲ求ム.

解　マヅ問題ハ解カレタル者トシ,圓Oヲ求ムル所ノ圓ト假定シ,ソレトXYトノ切點ヲCトセヨ.

AトBトガXYノ兩側ニ一ツヅツアレバA, Bヲ通ル圓周ハ總テXYト交ルユヱ,問題ハ不可能

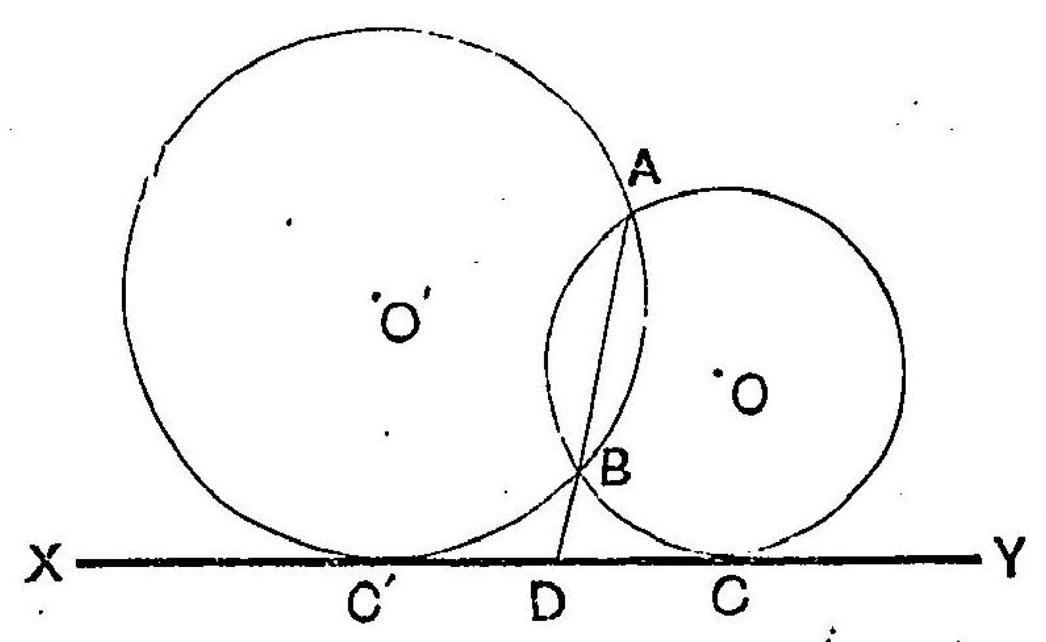
ナリ. 故ニ A, B ハ XY ノ同ジ側ニアリトス.

(第一) 線分 AB ガ XY ニ平行ナラザレバ AB ノ延長ト XY トノ交點ヲ D トセヨ. 然ルトキハ D ハ定マレル點ニシテ

$$AD.BD=CD^2$$ (定理23系)

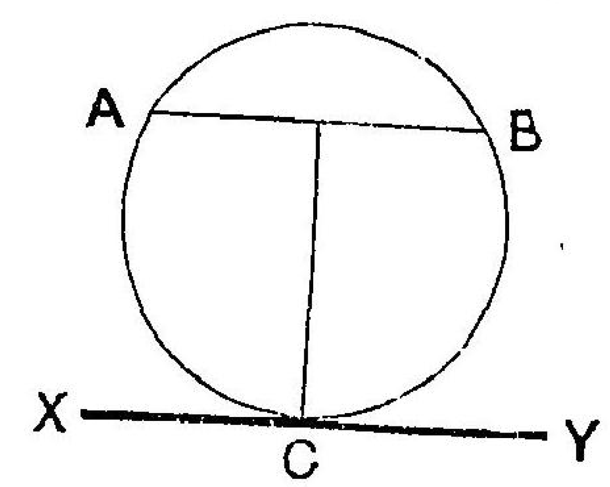
故ニ CD ノ長サハ定マル. 因テ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 A, B ヲ通ル直線ト XY トノ交點 D ヲ求メ, AD ト BD トノ比例中項ヲ求メ,之ヲ半徑トシ, D ヲ中心トシテ圓周ヲ畫キ, XY ト C 及 C′ ニ於テ交ラシム. A, B, C ヲ通ル圓ト A, B, C′ ヲ通ル圓トハ何レモ求ムル所ノ者ナリ. (定理23系)



(第二) 線分 AB ガ XY ニ平行ナルトキハ AB ヲ垂直ニ二等分スル直線ハ XY ニ垂直ナリ. 故

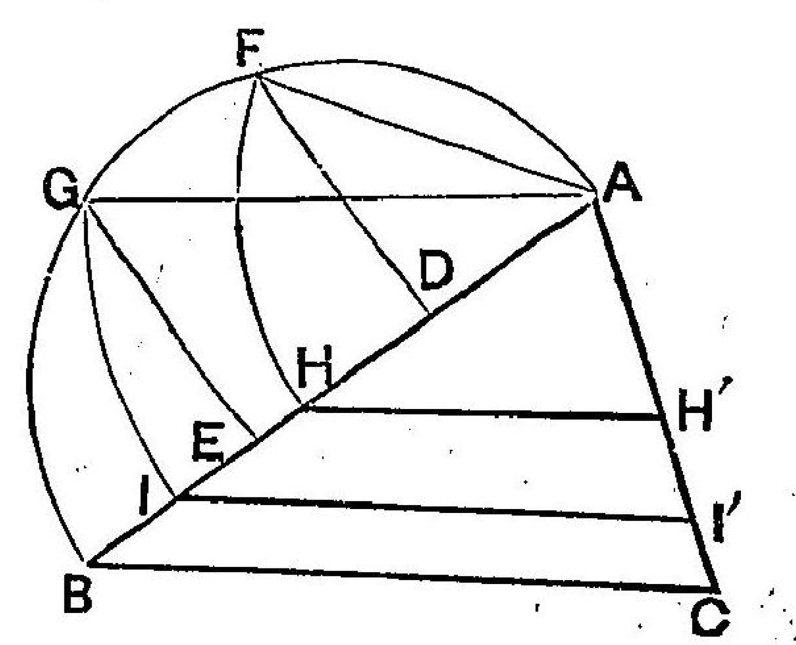
ニ夫レト XY トノ交點 C ト A 及 B トヲ通ル圓周ヲ畫ケバ,是ガ求ムル所ノ者ニシテ唯一ツノ解アリ.



問題 26. 定直線上ノ一點ト其上ニアラザル二定點ノ各トヲ結付クル二ツノ線分ノナス角ガ最大ナル樣ニスルコト.

196. 作圖題 7. 與へられたる三角形を其一邊に平行なる直線によりて n 個の等積なる部分に分つこと.

△ABC ヲ與ヘラレタル三角形トシ之ヲ BC ニ平行ナル直線ニヨリテ例ヘバ三ツノ等積ナル部分ニ分タントス.



作圖法 AB ヲ D, E ニ於テ三等分シ(第三編作圖題10 各分點ヨリ AB ニ垂線ヲ作リ, AB ヲ直徑トスル圓周ト此垂線トノ交點ヲ夫夫 F, G トス. AB 上ニ AH=AF, AI=AG ナル樣ニ H, I ヲ取リ, 之ヲ通リテ BC ニ平行ナル直線 HH′, II′ ヲ引ケバ是ガ △ABC ヲ三ツノ等積ナル部分, AHH′, HII′H′, IBCI′ ニ分ツ直線ナリ.

證明 $\triangle AHH' \backsim \triangle ABC$

$$\therefore \quad \frac{\triangle AHH'}{\triangle ABC}=\frac{AH^2}{AB^2} \qquad \text{(定理20)}$$

$$=\frac{AF^2}{AB^2} \qquad \text{(作圖)}$$

$$=\frac{AD.AB}{AB^2} \qquad \text{(定理21系1)}$$

$$=\frac{AD}{AB} \qquad \text{(定理 1)}$$

$$=\frac{1}{3}$$

同樣ニ $\dfrac{\triangle AII'}{\triangle ABC}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2}{3}$

故ニ △ABC ノ面積ヲ單位トスレバ △AHH′, △AII′ ハ夫夫 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ ニテ表サル.

然ルニ四邊形 HII′H′ ハ △AII′−△AHH′ ナリ. 故ニ此面積ヲ表ス數ハ $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ニシテ, 從テ殘レル部分ノ面積ヲ表ス數モ亦 $\frac{1}{3}$ ナリ.

故ニ HH′, II′ ニヨリテ分タレタル三ツノ部分ハ等積ナリ.

問題 27. 與ヘラレタル三角形ヲ其一邊ニ平行ナル直線ニテ與ヘラレタル比ニ分ツコト.

練習第六

問題 28. 一ツノ三角形ノ三邊ガ夫夫他ノ三角形ノ三邊ニ平行ナレバ對應スル頂點ヲ通ル三ツノ直線ハ同一點ヲ通ルカ若クハ互ニ平行ナリ.

問題 29. 互ニ外切スル二ツノ圓ノ外公切線ノ切點間ノ線分ハ此二ツノ圓ノ直徑ノ比例中項ナリ.

問題 30. 直角三角形 ABC ノ直角 A ノ二等分線ガ斜邊及外接圓周ニ交ル點ヲ夫夫 D, E ト

スレバ AD.AE ハ △ABC ノ面積ノ二倍ニ等シ.

問題 31. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ト D ニ於テ交レバ

$$AB.AC = AD^2 + BD.CD$$ ナリ.

問題 32. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC ノ上ニ任意ノ一點 P ヲ取レバ

$$PA^2 = PB.PC + BC^2$$ ナリ.

問題 33. 鋭角三角形 ABC ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ,邊 AB ノ上ニ A ヨリ此圓ニ引キタル切線ノ長サニ等シキ線分 AD ヲ取リ, D ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ,邊 AC ノ延長ト E ニ於テ交ラシムルトキハ三角形 ABC ト三角形 ADE トハ等積ナリ.

問題 34. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 A ヨリ斜邊 BC ヘ垂線 AP ヲ引キ, P ヨリ二邊 AB, AC ヘ夫夫垂線 PX, PY ヲ引ケバ $\frac{BX}{CY}$ ハ $\left(\frac{AB}{AC}\right)^3$ ニ等シ.

問題 35. P ハ定圓周上ノ一定點ナリ. 弦 PQ 或ハ其延長ノ上ノ一點ヲ Q′ トシ, PQ ト PQ′ トノ積ガ與ヘラレタル正方形ノ面積ニ等シキトキ Q′ ノ軌跡ヲ求メヨ.

問題 36. OX, OY ヲ一點 O ヨリ引キタル二ツノ定マレル半直線トス,正方形ノ一邊ガ OX ノ上ニアリテ其一ツノ頂點ガ OY ノ上ニアルトキ殘リノ頂點ノ軌跡ヲ求メヨ.

問題 37. 定點 O ヨリ定直線ト P ニ於テ交ル任意ノ半直線ヲ引キ,其上ニ OP : OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點 Q ヲ取レバ, Q ノ軌跡如何.

若シ此問題ニ於テ「定直線」トアルヲ「定圓周」トスレバ, Q ノ軌跡如何.

問題 38. 二ツノ圓ノ中心ヲ結付クル線分ヲ兩圓ノ半徑ノ比ニ內分或ハ外分スル點ヲ通ル直線ヨリ各圓周ガ截リ取ル弦ノ比ハ半徑ノ比ニ等シ.

定義 此內分點及外分點ヲ夫夫二ツノ圓ノ相似の內心及外心トイフ.

問題 39. 二ツノ圓ヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ム.

註 一點ニ於テ一ツノ圓ヲ見込ム角トハ此點ヨリノ二ツノ切線ノナス角ノコトナリ.

問題 40. 與ヘラレタル二ツノ正三角形ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル正三角形ヲ作ルコト.

問題 41. 與ヘラレタル二ツノ正三角形ノ面積ノ比ニ等シキ比ヲ有スル二ツノ線分ヲ求メヨ.

問題 42. O ハ一定點ニシテ, P ハ定直線 AB 上ノ定點ナリ. 今 O ヲ中心トシテ圓ヲ畫キ AB ト M, N ニ於テ交ラシメ, PM, PN ノ比例中項ガ與ヘラレタル長サニ等シクナル樣ニスルコト.

問題 43. 一定點 O ヨリ直線ヲ引キ定直線ト P, 定圓周ト Q ニ於テ交ラシメ, OP : OQ ヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシムルコト.

問題 44. B, C ハ線分 AD 上ノ二點ニシテ

$AB : BD = 3 : 7, \quad AC : CD = 5 : 4$ ナルトキ

AB : BC : CD ヲ求メヨ.

問題 45. D, E, F ハ夫夫 △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ニアリテ BD, CE, AF ハ夫夫其邊ノ三分ノ一ニ等シ. △DEF, △ABC ノ面積ノ比ヲ求メヨ.

問題 46. 三角形ノ三ツノ中線ヲ邊トスル三角形ノ面積ノ原三角形ノ面積ニ對スル比如何.

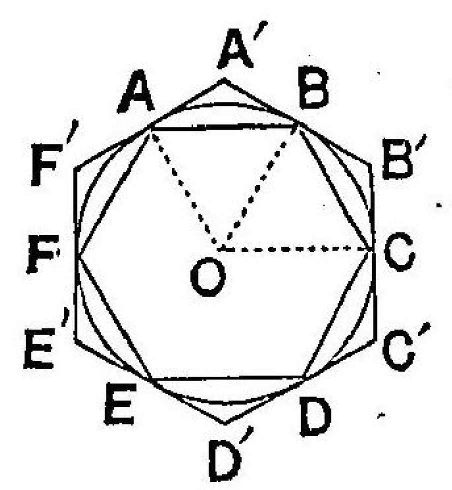
問題 47. △ABC ノ底邊 BC ヲ之ニ等シク延長シテ CD トシ, D ト AC ノ中點 E トヲ結付クル線分ノ延長ト AB トノ交點ヲ F トスレバ EF, ED ノ比如何.

問題 48. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線及其頂點ニ於テ出會フ二邊ノ第四比例項ナリ. 又之ニヨリテ二邊ガ夫夫 4尺, 5尺, 7尺 ナル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

正多角形圓周及圓ノ面積

197. 定理37. 圓周を n 等分したる各分點を順次に結付くれば圓に內接する正 n 邊形を生じ,又各分點に於て圓に切線を引けば圓に外接する正 n 邊形を生ず.

證明 各分點 A, B, C,……ヲ順次ニ結付ケテ作ラレタル多角形ノ各邊ハ相等シ. ソハ何レモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ヲ張ル弦ナレバナリ. 而シテ其各ノ角モ亦相等シ. ソハ何レモ圓周ノ $\frac{n-2}{n}$ ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ナレバナリ.



故ニ此多角形ハ內接正 n 邊形ナリ.

次ニ A, B, C,……ニ於ケル切線ハ外接正 n 邊形ヲナスコトヲ證明セントス.

マヅ其相隣レル分點 A, B ニ於ケル切線ノ交點ヲ A′ トセヨ. 箇樣ニ次ギ次ギノ切線ノ交點ヲ夫夫 B′, C′,……トセヨ. 然ルトキハ此等ノ切線ニテ外接 n 邊形ヲ生ズ.

サテ三角形 AA′B, BB′C ニ於テ邊 AB ト邊 BC トハ上ニ言ヘルコトニヨリテ互ニ相等シク,且ツ角 A′AB, B′BC ハ何レモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シキヲ以テ相等シ. (第三編定理21)

因テ此二ツノ三角形ハ二等邊三角形ニシテ且ツ相等シ.

同樣ニ △B′BC, △C′CD, △D′DE,……ハ皆互ニ相等シ. 故ニ

(1) 多角形 A′B′C′……ノ各ノ角ハ相等シ.

(2) 各邊ノ長サハ AA′ ノ二倍ニ等シ,故ニ互ニ相等シ.

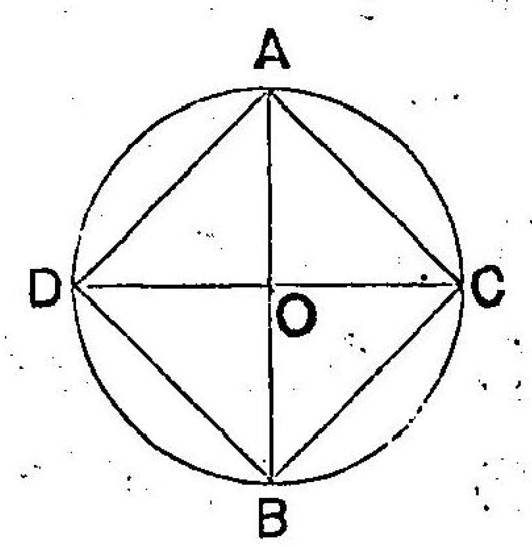
因テ多角形 A′B′C′……ハ外接正 n 邊形ナリ.

系1. 同じ圓に內接する同數の邊を有する正多角形の邊は相等し.

系 2.　圓の內接正 n 邊形の頂點及其各邊が張る弧の中點を順次に結付くれば邊の數が $2n$ なる內接正多角形を生ず．而して此新らしき正多角形の各頂點に於て圓の切線を引けば,邊の數が $2n$ なる外接正多角形を生ず．

198.　作圖題 8.　圓に內接する正方形を畫くこと．

作圖法　圓 O ニ於テ互ニ垂直ナル二ツノ直徑 AB ト CD トヲ引キ,相隣レル端ヲ順次ニ結付ケテ得ル四邊形 ACBD ガ卽チ求ムル所ノ者ナリ．



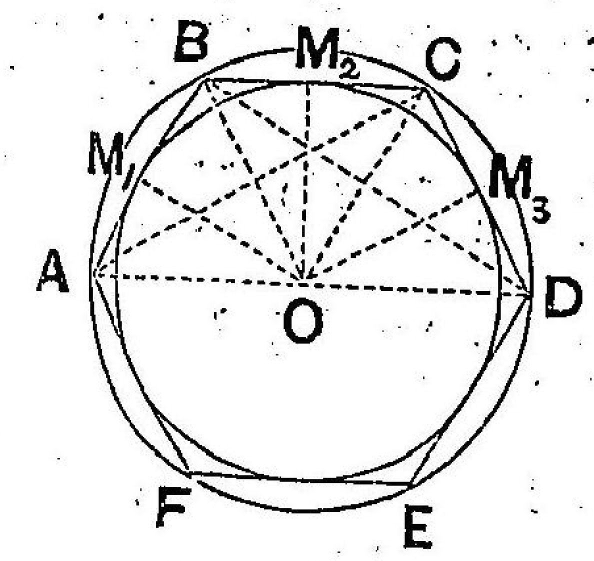
證明　A, C, B, D ハ圓周ヲ四等分スル點ナレバナリ．

系　圓の半徑を R とすれば,其內接正方形の一邊は $\sqrt{2}R$ なり．

199.　定理 38.　正多角形には,夫れに外接する圓と,又夫れに內接する圓とを畫くことを得．

證明　例へバ ABCDEF ヲ正六邊形トセヨ．

マヅ相隣レル三ツノ頂點 A, B, C ヲ通ル圓周ヲ畫キ,A ト C トヲ結付ケ,且ツ C ニ隣レル頂點 D ヲ B ニ結付クレバ



$\triangle ABC \equiv \triangle BCD$

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$

且ツ原形ハ凸多角形ナルユヱ A ト D トハ BC ノ一方ニアリ．故ニ點 D ハ今畫キタル圓周ノ上ニアリ（第三編軌跡題3系2）．

同理ニヨリ D ニ隣レル頂點 E モ B, C, D ヲ通ル圓周,卽チ前ト同ジ圓周ノ上ニアリ．箇樣ニシテ,スベテノ頂點ガ皆同一ノ圓周上ニアルコトヲ知ル．

因テ此正多角形ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得．

次ニ此圓ノ中心OヨリE多角形ノ各邊ニ垂線OM_1, OM_2,……ヲ下セバ,各邊ガ相等シキユヱ,此等ノ垂線ハ相等シ(第三編定理10).

因テOヲ中心トシOM_1ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ,此正多角形ニ內接ス.

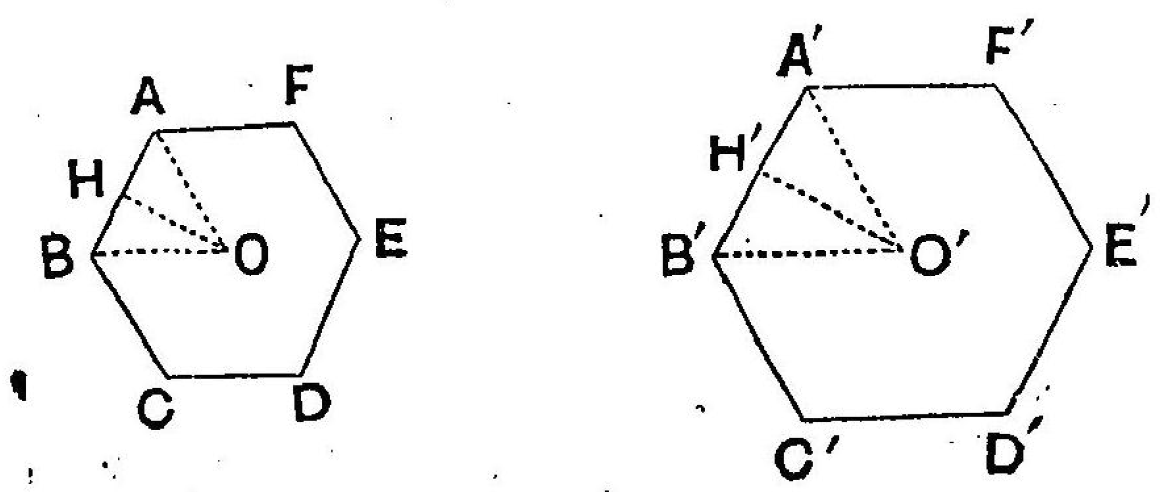
系 正多角形の面積は,其周と其內接圓の半徑との積の半分に等し.

200. 定理 39. 邊の數が同じき二つの正多角形は互に相似にして,其相似比は其各の外接圓(若くは內接圓)の半徑の比に等し.

證明 ABCDEF, A′B′C′D′E′F′ヲ何レモ正六邊形トセヨ. 然ルトキハ其各角ハ互ニ相等シ.

又 $AB=BC=CD=DE=EF=FA$

$$A'B'=B'C'=C'D'=D'E'=E'F'=F'A'$$



$$\therefore \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\cdots\cdots=\frac{FA}{F'A'}$$

故ニ二ツノ多角形ハ互ニ相似ナリ.

今各多角形ノ外接圓ノ中心ヲ夫夫O, O′トスレバ二ツノ二等邊三角形OAB, O′A′B′ニ於テ頂角O, O′ハ何レモ四直角ノ六分ノ一ニシテ相等シ. 故ニ兩三角形ハ相似ナリ(定理26系).

$$\therefore \quad \frac{OA}{O'A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

又兩三角形ノ高サヲOH, OH′トスレバ△OAHト△O′A′H′トニ於テ

$$\angle H=\angle H'=\angle R$$

$$\angle OAH=\angle O'A'H'$$

$$\therefore \quad \triangle OAH \backsim \triangle O'A'H'$$

$$\therefore \quad \frac{OH}{O'H'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

而シテOH, O′H′ハ其內接圓ノ半徑ナリ.

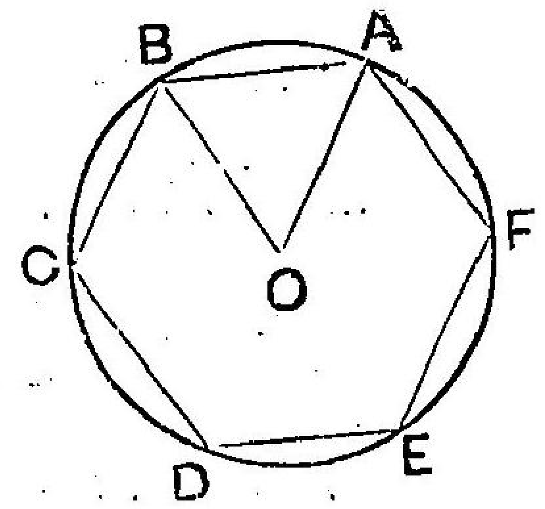
故ニ此二ツノ正多角形ノ相似比ハ其各ノ外接圓若クハ內接圓ノ半徑ノ比ニ等シ.

系 邊の數が同じき二つの正多角形の周の比は其各の外接圓(若くは內

接圓)の半徑の比に等し.

201. 作圖題 9. 圓に內接する正六邊形を畫くこと.

解 マヅ問題ハ解カレタル者トシ,ABCDEFヲ圓Oノ內接正六邊形トセヨ. 中心OトA及Bノ各トヲ結付ケヨ.



然ルトキハ

$$\angle AOB=\frac{4}{6}\angle R=\frac{2}{3}\angle R$$

故ニ三角形AOBハ正三角形ニシテABハ圓Oノ半徑ニ等シキコトヲ知ル. 因テ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 圓周上ノ任意ノ點ヲ中心トシ,圓Oノ半徑ニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ,圓周ト相交ルーツノ點ヲBトスレバ,ABガ求ムル所ノ正六邊形ノ一邊ナリ. 旣ニ此多角形ノ一邊ヲ得レバ此多角形ヲ畫クコトヲ得.

注意 內接正六邊形ノ頂點ヲ一ツオキニ結付クレバ內接正三角形ヲ得.

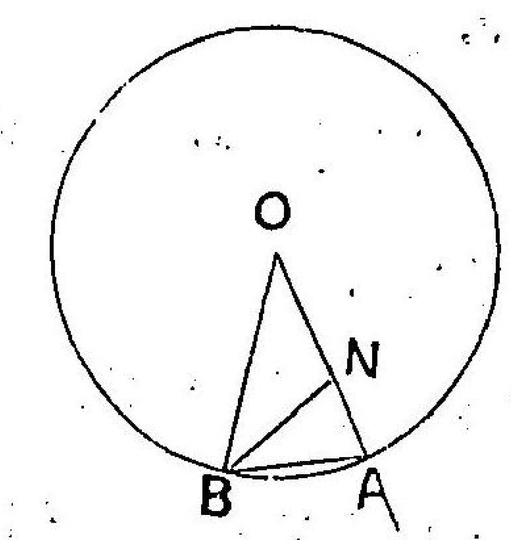
系 2. 圓の半徑をRとすれば,其內接正三角形の一邊は$\sqrt{3}$Rなり.

問題 49. 同ジ圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ト正三角形ノ一邊トノ上ニ畫キタル二ツノ正方形ノ面積ノ比ヲ求メヨ.

問題 50. 一邊ガa寸ナル正三角形ノ內接圓及外接圓ノ半徑ヲ求メヨ.

202. 作圖題 10. 圓に內接する正十邊形を畫くこと.

解 マヅ問題ハ解カレタル者ト假定シ,ABヲ圓Oノ內接正十邊形ノ一邊ナリトセヨ. OトA及Bノ各トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ∠AOBハ4∠Rノ$\frac{1}{10}$即チ$\frac{2}{5}$∠Rナリ.



$\therefore\quad \angle OBA=\angle OAB=\frac{1}{2}(2\angle R-\frac{2}{5}\angle R)=\frac{4}{5}\angle R$

故ニ $\angle OBA$ 及 $\angle OAB$ ハ何レモ $\angle AOB$ ノ二倍ニ等シ. ソコデ $\angle OBA$ ノ二等分線ヲ引キ OA トN ニ於テ交ラシムレバ

$$\angle ABN=\angle AOB$$

$$\therefore\quad \triangle ABN \backsim \triangle AOB$$

$$\therefore\quad \frac{AN}{AB}=\frac{AB}{AO}$$

$$\therefore\quad AB^2=AN.AO$$

然ルニ $\angle OBN=\angle AOB$

$$\therefore\quad \angle BNA=2\angle AOB$$

$$\therefore\quad \angle BNA=\angle NAB$$

$$\therefore\quad AB=BN=NO$$

$$\therefore\quad NO^2=AN.AO$$

因テ點 N ハ OA ヲ中末比ニ分ツ內分點ナルコトヲ知ル.

因テ ON ヲ求メ(作圖題5), 之ヲ一邊トシテ內接正多角形ヲ作レバ求ムル所ノ正十邊形ヲ得.

系 半徑をRとすれば內接正十邊

形の一邊の長さは $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R$ なり.

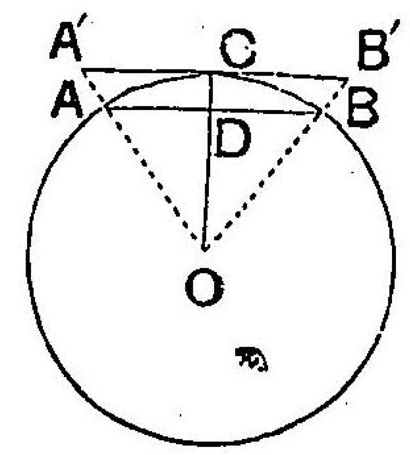
注意 圓ノ內接正十邊形ノ頂點ヲ一ツオキニ結付クレバ內接正五邊形ヲ得.

問題 51. 直角ヲ五等分スルコト.

問題 52. 圓ニ內接スル正十五邊形ヲ書クコト.

203. 定理 40. 半徑Rなる圓に內接する正 n 邊形の一邊の長さの半分をL, 外接正 n 邊形の一邊の半分を L′ とすれば $L'=\frac{R.L}{\sqrt{R^2-L^2}}$ なり.

證明 AB ヲ圓 O ノ內接正 n 邊形ノ一邊トシ, D ヲ其中點トス. 弧 AB ノ中點 C ニ於テ圓 O ニ切線ヲ引キ, OA, OB ノ延長ト夫夫 A′, B′ ニ交ラシムレバ, A′B′ ハ圓 O ノ外接正 n 邊形ノ一邊ナリ.



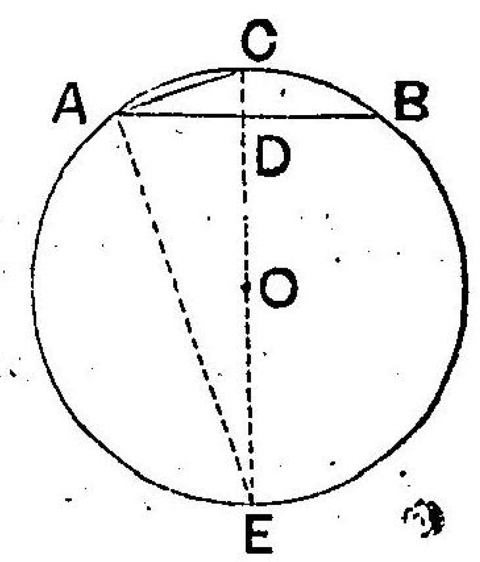
サテ　$A'C : AD = OC : OD$　（定理18系2）

即チ　$L' : L = R : \sqrt{R^2 - L^2}$

$$\therefore \quad L' = \frac{R.L}{\sqrt{R^2 - L^2}}$$

204. 定理41. 半徑 R なる圓の內接正 n 邊形の一邊の長さの半分を L，同じ圓に內接し邊の數が $2n$ なる正多角形の一邊の長さの半分を L_1 とすれば　$L_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})}$　なり.

證明　AB ヲ圓 O ノ內接正 n 邊形ノ一邊トセヨ,弧 AB ノ中點 C ト A トヲ結付クル線分 AC ハ圓 O ニ內接シ,邊ノ數ガ $2n$ ナル正多角形ノ一邊ナリ. ソコデ直徑 CE ヲ引キ,ソレト AB トノ交點卽チ AB ノ中點ヲ D トスレバ



$$CA^2 = CE.CD \quad \text{（定理30）}$$

$$\therefore \quad CA^2 = CE.(CO - DO)$$

$$\therefore \quad CA^2 = 2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})$$

$$\therefore \quad CA = \sqrt{2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})}$$

然ルニ

$$CA = 2L_1$$

$$\therefore \quad L_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2R.(R - \sqrt{R^2 - L^2})}$$

問題53.　弓形 ACB ニ於テ弦 AB=1尺6寸,弧ノ中點 C ヨリ AB ヘノ垂線 CD=4寸ナルトキ半徑ヲ求メヨ.

問題54.　半徑 R ナル圓ニ內接スル正五邊形ノ一邊ヲ張ル弧ノ中點ヨリ其邊ニ下セル垂線ノ長サヲ求メヨ. 之ニヨリテ其五邊形ノ一邊ノ長サヲ求メヨ.

205. 定理42. 圓の內接正 n 邊形の周と同じ圓の外接正 n 邊形の周とは,n を十分に大きくなすとき,同一の或一定の長さに限りなく近寄る,(而して此一定の長さを圓の內接多角形及外接多角形の周の極限といふ).

證明 圓ノ半徑ヲ R トシ,內接正 n 邊形及其外接正 n 邊形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ夫夫 L, L′, 其周ヲ夫夫 P_n, P_n' トスレバ

$$\frac{P_n'}{P_n}=\frac{L'}{L}$$

$$\therefore \quad \frac{P_n'}{P_n}=\frac{R}{\sqrt{R^2-L^2}} \qquad \text{(定理40)}$$

$$\therefore \quad \frac{P_n'-P_n}{P_n}=\frac{R-\sqrt{R^2-L^2}}{\sqrt{R^2-L^2}}=\frac{1-\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}{\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}$$

$$\therefore \quad P_n'-P_n=\frac{1-\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}{\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}}.P_n$$

然ルニ n ヲ十分ニ大キクナセバ L ハ如何樣ニモ小サクナリ,從テ $\sqrt{1-\frac{L^2}{R^2}}$ ハ如何樣ニモ 1 ニ近ヅクユヱ此等式ノ右邊ナル P_n ノ係數ハ n ヲ十分ニ大キクナセバ如何樣ニモ小サクナル,而シテ P_n ハ n ヲ十分ニ大キクナセバ次第ニ或一定ノ大サニ近付キ竟ニ之ト P_n トノ差ガ如何樣ニモ小サクナル者ナリ. 故ニ此等式ノ右邊ハ n ガ十分ニ大キクナレバ如何樣ニモ小サクナル. 故ニ $P_n'-P_n$ ハ n ヲ十分ニ大キクナセバ如何樣ニモ小サクナル.

故ニ P_n' ト P_n トハ同一ノ極限ニ近寄ル.

定義 圓周の長さトハ之ニ內接スル正多角形ト之ニ外接スル正多角形ノ邊ノ數ガ限リ無ク增加スルトキノ兩多角形ノ周ノ長サノ極限ノコトナリ.

206. 定理 43. 圓の周は其半徑に比例す.

證明 二ツノ圓 O, O′ ノ半徑ヲ R, R′ トシ,其周ノ長サヲ P, P′ トシ,此二ツノ圓ニ內接スル正 n 邊形ノ周圍ヲ P_n, P_n' トスレバ

$$\frac{P_n}{P_n'}=\frac{R}{R'} \qquad \text{(定理30)}$$

$$\therefore \quad R'.P_n=R.P_n'$$

故ニ $P_n=P-k,\quad P_n'=P'-k'$ トオケバ

$$R'.(P-k)=R.(P'-k')$$

$$\therefore \quad R'.P\sim R.P'=R'.k\sim R.k'$$

然ルニ前節ニ述ベタル定理ニヨリ,nヲ十分大キクナセバk及k'ハ限リナク小サクナル,從テ$R'.k' \sim R.k'$モ亦然リ. 故ニ

$$R'.P \sim R.P'=0$$

$$\therefore \quad R'.P=R.P'$$

$$\therefore \quad \frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$$

系 1.　圓周の圓の直徑に對する比は,すべての圓に付て同一なり.

定義　圓周ノ圓ノ直徑ニ對スル比ヲ圓周率ト名ヅケ,之ヲπナル文字ニテ表ス.

系 2.　圓周は圓の直徑の長さと圓周率との積に等し.

卽チ　$P=(2R)\pi=2\pi R$

系 3.　半圓周は圓の半徑の長さと圓周率との積に等し.

207.　π の近似値の求め方

半徑ノ長サヲ單位トシタルトキ,半圓周ノ長サ

ヲ表ス數ガ卽チπナリ. ソコデ定理40ノ公式ト定理41ノ公式トニ於テL, L', L_1, Rヲ何レモ長サヲ表ス數ナリト看做シ,$R=1$トオケバ

$$L'=\frac{L}{\sqrt{1-L^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$L_1=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-L^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ソコデ,邊ノ長サガ分カリ居ルカ,若クハ容易ニ求メラルル內接正n邊形ノ一邊ノ長サノ半分Lヲ直接ニ計算スレバ(1)ニヨリテL'ヲ求メ得ベク,且ツ又(2)ニヨリテL_1(卽チ邊ノ數ガ$2n$ナルトキノL)ヲ求メ得ベキガユヱニ,更ニ(1)ニヨリテ邊ノ數ガ$2n$ナルトキノL'ヲ求メ得ベシ. 箇様ニ此二式ヲ繰リ返シ應用シテ其邊ノ數ガ次第ニ多クナル所ノ內接及外接正多角形ノ一邊ノ長サノ半分ヲ求ムルコトヲ得ルガユヱニ,其周ノ半分ヲモ求ムルコトヲ得.

箇様ニシテ得ル所ノ二組ノ數ガπヲ挾ム所ノ者卽チπノ不足ナル近似値ト其過剩ナル近似値トナリ.

サテ圓ノ内接正六邊形ノ一邊ハ半徑ニ等シキユヱ, $n=6$ ヨリ始メテ(1)及(2)ニヨリ L及L′ノ値ヲ小數第六位マデ計算スレバ次ノ如シ.

$n=6$ ナルトキ　$\mathrm{L}=0.5$,　$\mathrm{L}'=0.57351$

$n=12$ ナルトキ　$\mathrm{L}=0.258819$, $\mathrm{L}'=0.267949$

....

ソコデ次ニ示ス如キπノ近似値ノ表ヲ得ルナリ.

n	$n\mathrm{L}$	$n\mathrm{L}'$
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187
384	3.14156	3.14166
768	3.14158	3.14161
1536	3.14159	3.14160

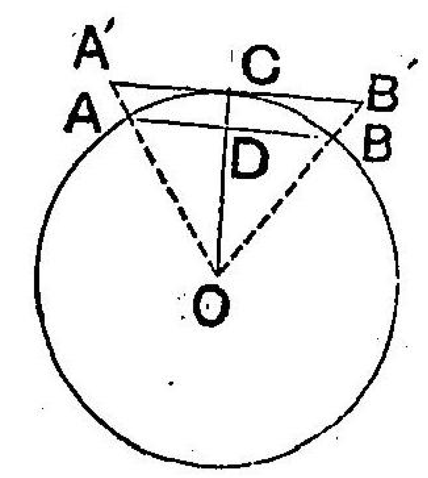
此表ニヨレバ,πハ 3.14159 ト 3.1416 トノ間ニアルコトヲ知ル.

今別ニπノ値ヲ小數點下第十六位迄求メタルモノヲ示セバ次ノ如シ.

$$\pi=3.1415926535897932\ldots\ldots$$

208. 定理44. 圓の内接正n邊形の面積と,同じ圓の外接正n邊形の面積とは,nが限りなく大きくなるとき,何れも限りなく圓の面積に近寄る(而して圓の面積を此圓の内接多角形及外接多角形の面積の極限といふ).

證明　内接正n邊形ノ面積ト外接正n邊形ノ面積トヲ夫夫 S_n, S_n' トシ,圓ノ面積ヲSトスレバ



$$\mathrm{S}_n<\mathrm{S}<\mathrm{S}_n'$$

サテ上圖(卽チ定理40ノ圖ト同圖)ニヨリテ

$$\frac{\mathrm{S}_n'}{\mathrm{S}_n}=\frac{\mathrm{A'B'}^2}{\mathrm{AB}^2}=\frac{\mathrm{OA'}^2}{\mathrm{OA}^2}=\frac{\mathrm{OC}^2}{\mathrm{OD}^2}$$

因テ圓ノ半徑ヲRトシ,内接正n邊形ノ一邊ノ半分ヲLトスレバ

$$\frac{S_n'}{S_n}=\frac{R^2}{R^2-L^2}$$

$$\therefore\quad S_n'-S_n=\frac{L^2}{R^2-L^2}.S_n<\frac{L^2}{R^2-L^2}.S$$

サテnヲ十分ニ大キクナセバLハ如何樣ニモ小サクナル. 故ニ$S_n'-S_n$モ亦如何樣ニモ小サクナル. 故ニ$S_n'-S_n$及$S-S_n$モ亦如何樣ニモ小サクナル. 卽チS_n及S_n'ノ極限ハ何レモSナリ.

209. 定理45. 圓の面積は其半徑の平方に圓周率を掛けたる者に等し.

圓ノ半徑ヲR, 其面積ヲS, 圓ノ外接正n邊形ノ周圍ヲP_n', 其面積ヲS_n'トセヨ. 然ルトキハ

$$S_n'=\tfrac{1}{2}P_n'.R \qquad \text{(定理38系)}$$

然ルニ, nガ無限ニ大キクナリタルトキノP_n'ノ極限ハ圓周卽チ$2\pi R$ニシテ(定理43系2), 其時ノS_n'ノ極限ハ圓ノ面積Sナリ(前節定理).

$$\therefore\quad S=\tfrac{1}{2}(2\pi R).R$$

卽チ $S=\pi R^2$

系. 圓の面積は其半徑の平方に比例す.

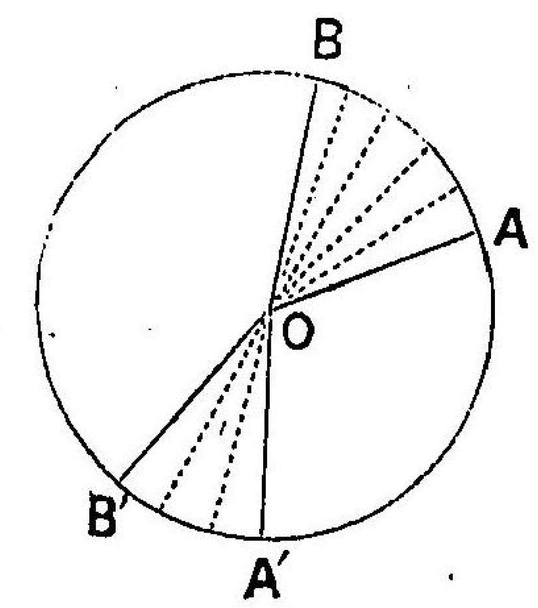
問題 55. 圓周ガ二尺ナル圓ノ面積ヲ計算セヨ.

問題 56. 二ツノ同心圓ノ周ノ間ニアル部分ノ面積ハ其中ノ小ナル圓ノ周ニ切スル,大ナル圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シ.

問題 57. 一ツノ圓ヲ之ト同心ナル圓周ニテ等積ナルn個ノ部分ニ分ツコト.

210. 定理46. 同じ圓若くは相等しき圓の弧は,夫れに對する中心角に比例す.

(第一) $\overset{\frown}{AB}$ト$\overset{\frown}{A'B'}$トガ公度ヲ有スル場合.



證明 弧ABガ公度ノm倍ニ等シク,弧A'B'ガ公度ノn倍ニ等シトスレバ $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{A'B'}}=\dfrac{m}{n}$ ナリ.

ソコデ弧ABヲm箇ニ等分シ,其各分點ト中心

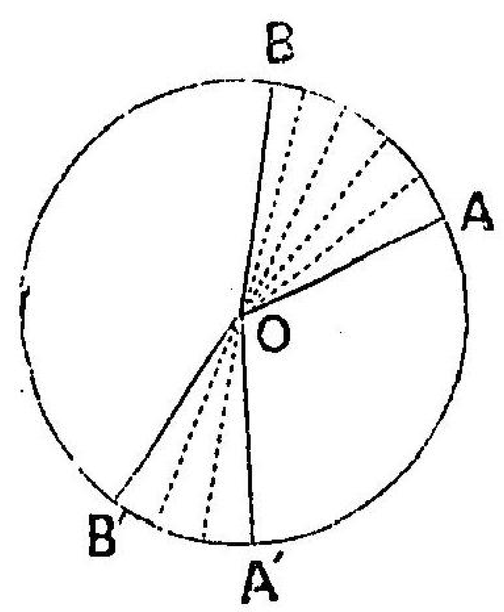
Oトヲ結付クレバ相等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シキユヱ,中心角 AOB ハ m 箇ノ相等シキ角ニ分タル. 又弧 A′B′ ヲ n 箇ニ等分シ,其各分點ト中心トヲ結付クレバ,中心角 A′OB′ ハ n 箇ノ相等シキ角ニ分タレ,而シテ第一ノ中心角ノ各部分ト,第二ノ中心角ノ各部分トハ相等シ. 從テ

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}=\frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}=\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}$$

(第二) $\widehat{AB}$ ト $\widehat{A'B'}$ トガ公度ヲ有セザル場合.

證明 弧 A′B′ ヲ n 等分シ,其一部分ニ等シキ者ヲ弧 AB ノ中ヨリ取レルダケ取レバ m 箇ダケ取レテ,之ニ足ラザル殘リガアルトセヨ. 然ルトキハ



$$\frac{m}{n}<\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}<\frac{m+1}{n}$$

ソコデ A′B′ ノ各分點ト圓ノ中心 O トヲ結付

クレバ,中心角 A′OB′ ハ n 箇ノ相等シキ部分ニ分タル. 又 $\widehat{AB}$ ノ各分點ト中心 O トヲ結付クレバ,角 AOB ハ角 A′OB′ ノ各部分ニ等シキ者 m 箇ト,之ニ足ラザル者トニ分タル.

$$\therefore \quad \frac{m}{n}<\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}<\frac{m+1}{n}$$

因テ n ガ如何ナル整數ニテモ, $\frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}$ ト $\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}$ トハ何レモ同ジ二組ノ數 $\frac{m}{n}$ ト $\frac{m+1}{n}$ トノ間ニ夾マレ,且ツ此二數ノ差,即チ $\frac{1}{n}$ ハ n ヲ大キクスレバスル程,如何樣ニモ小サクナル.

$$\therefore \quad \frac{\widehat{AB}}{\widehat{A'B'}}=\frac{\angle AOB}{\angle A'OB'}$$

定義 圓ノ弧ト其兩端ヲ通ル二ツノ半徑トニテ圍マルル圓ノ一部分ヲ扇形トイヒ,其弧ニ對スル中心角ヲ扇形の角トイフ.

系 扇形の角の度數を k, 其半徑を R とすれば其弧の長さは $\frac{\pi k R}{180}$ なり.

證明 圓周ハ,ツマリ扇形ノ角ガ 360° ナル場合

ト考ヘラルルユヱ,求ムル所ノ弧ノ長サヲxトスレバ上ノ定理ニヨリ

$$\frac{x}{2\pi R}=\frac{k}{360}$$

$$\therefore \qquad x=2\pi R\times\frac{k}{360}=\frac{\pi kR}{180}$$

問題 58. 半徑5尺ノ圓ニ於テ36°ノ圓周角ニ對ズル弧ノ長サヲ求メヨ.

211. 定理 47. 同じ圓若くは相等しき圓の扇形の面積は,扇形の角(或は扇形の弧)に比例す.

證明 同シ圓若クハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ノ兩端ヲ中心ニ結付ケテ得ル扇形ハ重ネ合スルコトヲ得ルユヱ,其面積ハ相等シ.

又扇形ノ弧ガ小ナル者ノ面積ハ,其弧ガ大ナル者ノ面積ヨリモ小ナリ.

ソコデ前節ノ定理ノ證明ト同様ニシテ此定理ヲ證明スルコトヲ得ベシ.

系 1 扇形の面積は其弧の長さと半徑との積の半分に等し.

證明 弧ノ長サヲP,半徑ヲR,求ムル所ノ面積ヲSトスレバ

$$\frac{S}{\pi R^2}=\frac{P}{2\pi R} \qquad \text{(本節定理)}$$

$$\therefore \qquad S=\frac{P.(\pi R^2)}{2\pi R}=\frac{1}{2}P.R$$

系 2. 扇形の角の度數をkとすれば,其面積は$\frac{k\pi R^2}{360}$なり.

問題 59. 半徑2尺ナル圓ニ於テ60°ノ中心角ニ對スル弧ト,ソレヲ張ル弦トニテ生ズル弓形ノ面積ヲ計算セヨ.

練習第七

問題 60. 正五邊形ニ於テ,同一ノ頂點ヲ通ラザル二ツノ對角線ハ互ニ中末比ニ内分セラル.

問題 61. 與ヘラレタル線分ニ等シキ邊ヲ有

スル正五邊形ヲ書クコト.

問題 62. 一邊ガ a 寸ナル正八邊形ニ內接スル圓ノ半徑,外接スル圓ノ半徑及其等ノ者ノ面積ヲ求メヨ.

問題 63. 半徑 r 尺ナル圓ニ內接スル正八邊形及正十二邊形ノ一邊及其等ノ者ノ面積ヲ計算セヨ.

問題 64. 與ヘラレタル二ツノ圓ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ書クコト.

問題 65. 面積ガ 154 平方尺アル圓ノ周ニ等シキ周ヲ有スル正方形及正六邊形ノ面積ヲ求メヨ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トシテ各ヲ平方尺ノ小數第二位迄求メヨ.

補充問題

第一編之部

1. O ヲ △ABC 內ノ任意ノ點トスレバ線分 OA, OB, OC ノ和ハ △ABC ノ周ヨリ小ナリ.

2. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ D トス. AB ガ AC ヨリ大ナレバ BD ハ DC ヨリ大ナリ.

3. 線分ノ兩端ヨリ他ノ直線ヘ下シタル垂線ノ足ハ此線分ノ中點ヨリ相等シキ距離ニアリ.

4. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル二ツノ頂點 A, C ノ各ヨリ對角線 BD ニ下シタル垂線ヲ夫夫 E, F トシ A ト F ト; C ト E トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ四邊形 AECF ハ平行四邊形ナリ.

5. △ABC ノ邊 AB ヲ點 A ノ方ヘ延長シ,其上ニ於テ AB ト等長ナル線分 AB′ ヲ取リ,又邊 AC ヲ A ノ方ヘ延長シ,其上ニ於テ AC ト等長ナル線分 AC′ ヲ取リ, B′ ト C′ トヲ結付ケヨ. 然ルトキハ BC 及 B′C′ ノ各ノ中點ト頂點 A トハ同一直線上ニアリ.

6. 四邊形 ABCD ニ於テ邊 AB ト邊 CD トガ相等シク,邊 BC ト邊 AD トガ相等シケレバ, ∠A ト ∠C トハ相等シク, ∠B ト ∠D トモ亦相等シ.

7. 三角形 ABC ノ二邊 AC, AB ノ中ノ大ナル邊 AC ノ上ニ於テ小ナル邊 AB ト等長ナル線分 AD ヲ取リ, B ト D トヲ結付クレバ角 CBD ハ邊 BC ノ兩端ヲ夫夫其頂點トスル二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シ.

8. 梯形ノ對角線ノ中點ノ間ノ距離ハ其二ツノ底ノ差ノ半分ニ等シ.

9. 正五邊形ノ延長ガ一ツ置キノ邊ノ延長ト交リテ爲ス星形ノ五ツノ頂點ニ於テノ角ノ和ハ 2 直角ナリ.

10. 一ツノ正多角形ノ一ツノ頂點ニ於ケル外角ノ一ツガ正十邊形ノ一ツノ内角ノ $\frac{5}{12}$ ニ等シトイフ,其邊ノ數ヲ求メヨ.

11. 一種ノ正多角形或ハ二種以上ノ正多角形ノ内角ニ等シキ角ヲ幾ツ取リテ加ヘ合スレバ其和ガ四直角ニ等シカルベキカ.

12. 三角形ニ於テ小ナル角ノ二等分線ノ長サハ大ナル角ノ二等分線ノ長サヨリ大ナリ.

13. 二等邊三角形ノ底邊上ニアル點ヨリ其二邊ニ至ル距離ノ和ハ不易ナリ.

若シ其底邊ノ延長ノ上ノ點ナラバ如何.

14. 正三角形内ノ任意ノ一點ヨリ三邊ニ至ル距離ノ和ハ不易ナリ.

若シ正三角形ノ外ニアル點ヨリナラバ如何.

15. 三角形ノ各頂點ヨリ此三角形ノ外ニアル直線ニ下シタル垂線ノ和ハ,其重心ヨリ其直線ニ下シタル垂線ノ長サノ三倍ニ等シ.

16. 四邊形ノ四ツノ頂點ヨリ此四邊形ノ外ニアル一ツノ直線ニ下シタル垂線ノ和ハ其相對スル一組ノ中點ヲ結付クル線分ノ中點ヨリ同ジ直線ニ下シタル垂線ノ四倍ニ等シ.

17. △ABC ノ各邊ヲ一邊トシ,其外側ニ正三角形 ABD, BCE, CAF ヲ畫ケバ三ツノ線分 AE, BF, CD ハ相等シ.

18. 二等邊三角形 ABC ノ頂點ヲ A トシ,邊 AB ヲ延長シ,其上ニ於テ AB ニ等シキ線分 BD ヲ取リ,又 AB ノ中點ヲ E トスレバ CD ハ CE ノ二倍

ニ等シ.

19. 正方形 ABCD ノ對角線 BD 上ニ BC ニ等シキ線分 BE ヲ取リ, E ヨリ之ニ垂線ヲ引キ CD ト F ニ於テ交ラシム,然ルトキハ DE, EF, FC ハ等長ナリ.

20. 直角三角形ノ直角ノ二等分線ハ其頂點ヨリ引ケル垂線ト中線トガナス角ヲ二等分ス.

21. 四邊形ノ一組ノ相對スル角ガ相等シケレバ他ノ一組ノ相對スル角ノ二等分線ハ互ニ平行ナリ.

22. 三角形 ABC ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ノ爲ス三角形ヲ DEF トシ, DEF ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ノ爲ス三角形ヲ A′B′C′ トスレバ ∠A′ ハ ∠A ト $\frac{2}{3}$∠R トノ間ニアリ

23. △ABC ノ二ツノ邊 AB, AC ノ各ヲ四等分シ,其相對應スル分點ヲ結付ケテ BC ニ平行ナル三ツノ線分ヲ作リ;同様ニシテ CA ニ平行ナル三ツノ線分ト, AB ニ平行ナル三ツノ線分トヲ作レバ此等ノ線分ハ元ノ三角形ノ三邊ト共ニ 27 箇ノ三角形ヲ爲ス.

24. 相交ル二直線 X,Y ガ 60° ノ角ヲナストキ X, Y ノ上ニ夫夫一ツノ頂點ヲ有スル正三角形ノ第三ノ頂點ハ常ニ二ツノ定直線ノ何レカノ上ニアリ.

25. 直角ニ交ル二ツノ直線 X, Y ノ上ニ夫夫相對スル二頂點ヲ有スル正方形ノ他ノ二ツノ頂點ハ常ニ二ツノ定直線ノ上ニアリ.

第二編之部

26. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形ナリ.

27. 內接四邊形 ABCD ノ對角線ノ交點ヲ O トシ三角形 AOB ノ外接圓ヲ畫キ, 點 O ニ於テ此圓ニ切線ヲ引ケ. 然ルトキハ此切線ハ此四邊形ノ一ツノ邊ニ平行ナリ.

28. 二ツノ同心圓周ノ中心 O ヨリ引キタル二ツノ半直線 OX, OY ガ小ナル圓周ト夫夫 A, A′; 大ナル圓周ト夫夫 B, B′ ニ於テ交レバ AB′ ト A′B トノ交點 P ト O トヲ結付クル線分 OP ハ ∠XOY ヲ二等分ス.

29. 三角形 ABC ノ外接圓ノ中心ヲ O トシ, A

ヨリ BC ヘノ垂線 AD ノ延長ガ外接圓周ト交ル點ヲ E, 垂心ヲ H トスレバ AH ハ O ヨリ BC マデ引キタル垂線ノ長サノ二倍ニ等シク, 又 DH ト DE トハ相等シ.

30. 三角形ノ垂心 H, 重心 G 及外心 O ハ同一直線上ニアリ, 而シテ GH ハ OG ノ二倍ニ等シ.

31. 圓ニ內接スル等邊直線形ハ又等角ナル直線形ナリ.

32. △ABC ノ內接圓 O ト角 A ノ內ニ在ル傍接圓 O′ トヲ畫キ, 三邊トノ切點ヲ D, E, F; G, H, I トシ, 三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫夫 a, b, c ニテ表シ, 且ツ三角形ノ周ノ半分ヲ p ニテ表セバ次ノ關係アリ.

$$\left.\begin{array}{l}AE=AF=p-a\\BD=BF=p-b\\CD=CE=p-c\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}AH=AI=p\\BG=BI=p-c\\CG=BH=p-b\end{array}\right\}$$

33. 三角形ノ三邊ノ上ニ各正三角形ヲ元ノ三角形ノ外側ニ作リタル各正三角形ニ外接スル圓ハ同一點ヲ通ル.

34. 內接四邊形 ABCD ノ二邊 AB, CD ノ延長ノ交點ヲ E トシ, AD, BC ノ延長ノ交點ヲ F トシ, 二ツノ三角形 BCE, CDF ニ各外接スル圓周ノ交點ヲ G トスレバ E, G, F ハ同一直線上ニアリ.

35. 互ニ內切スル二ツノ圓ノ切點ヲ A トシ, B ニ於テ內ナル圓ニ切スル外ノ圓ノ弦 CD ヲ作レバ AB ハ ∠CAD ヲ二等分ス.

36. ABCD ハ圓ニ內接スル四邊形ナリ. 弧 AB, BC, CD, DA ノ中點ヲ夫夫 E, F, G, H トスレバ二ツノ直線 EG, FH ハ互ニ垂直ナリ.

37. 定角 XOY ノ二等分線上ノ一點ヲ P トス. 二點 O, P ヲ通ル任意ノ圓周ガ角ノ二邊 OX, OY ニ交ル點ヲ夫夫 A, B トスレバ線分 OA, OB ノ和ハ不易ナリ.

38. 定直線ニ平行ナル直線ヲ引キ, 相交ル二定直線ガ, ソレヨリ截リ取ル部分ヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト.

39. 一點 O ニ於テ相交ル三ツノ直線 X, Y, Z アリ. 今此等ノ直線ニ交ル一ツノ直線ヲ引キ其 X ト Y トノ間ノ部分ヲシテ Y ト Z トノ間ノ部分ニ等シカラシムルコト.

40. 二ツノ定圓周ノ上ニ夫夫兩端ヲ有スル與ヘラレタル長サノ線分ヲ引キ且ツ定直線ニ平行ナラシムルコト.

41. 定マレル三角形ノ三ツノ邊或ハ其延長ノ上ニ夫夫三ツノ頂點ヲ有スル正三角形ヲ作ルコト.

42. 圓外ノ一定點ヨリ最大(若クハ最小)ナル距離ニアル點ヲ圓周上ニ求ムルコト.

43. 定直線上ニ於テ,其上ニ在ラザル二定點ヨリノ距離ノ和ガ最小ナル點ヲ求ムルコト.

44. 定直線上ニ於テ,其上ニ在ラザル二定點ヨリノ距離ノ差ガ最大ナルベキ點ヲ求ムルコト.

45. PP′, QQ′ ハ一ツノ圓ノ平行ナル弦ナリ. 今 P, Q ガ各定點ナルトキ PP′, QQ′ ノ和ヲ最大ナラシムルコト.

46. 定角 BAC 内ノ一定點 O ヲ一ツノ頂點トシ,此角ノ二邊ノ上ニ一ツ宛頂點ヲ有スル三角形ノ中,周圍ノ最小ナル者ヲ求ムルコト.

47. A, B ヲ各定角 XOY 内ノ二ツノ定點トス. 今屈線 ACDB ノ頂點 C, D ガ夫夫 OX, OY (或ハ

OY, OX) ノ上ニアリテ其長サ(屈線ノ四ツノ線分ノ和)ノ最小ナルモノヲ求ムルコト.

48. 前題ニ於テ二點 A, B ガ相合スレバ如何.

49. 底邊,高サ及底邊ノ一端ヨリ引ケル中線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

50. 三角形ノ周圍,頂角ノ大サ,並ニ其位置及底邊上ノ一定點ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト.

51. 互ニ内切スル二ツノ圓ノ切點ヲ通リテ弦ヲ引キ,兩圓周ノ間ニ夾マルル部分ガ與ヘラレタル長サニ等シクナル樣ニスルコト.

52. B, C ハ定圓周上ノ二定點トス,今圓周上ニ一點 A ヲ設ケテ平行四邊形 ABDC ノ對角線 AD ヲ最大(或ハ最小)ナラシムルコトヲ求ム.

53. 二定圓周ニ切スル圓周ヲ作リテ其半徑ヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト.

54. 與ヘラレタル長サノ線分 AB ノ兩端ガ夫夫定角 XOY ノ二邊ノ上ニアル樣ニ動クトキ三角形 OAB ノ外心ノ軌跡ヲ求ム.

55. 一定點 P ヲ通ル與ヘラレタル長サノ線分ヲ AB トス. AP, PB ノ上ニ其各ヲ底邊トスル二

ツノ正三角形ヲ其同ジ側ニ作リ其頂點ヲ結付クル線分ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

56. 正三角形ノ一ツノ頂點ハ定點 P ニアリ,他ノ一ツノ頂點ハ定直線X上ニアルトキ第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

又定直線 X ノ代リニ定圓周 O ヲ取レバ如何.

57. 正方形ノ一ツノ頂點ハ定點Pニアリ,之ニ對スル角ノ頂點ハ定直線X上ニアルトキ他ノ二ツノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

58. 定マレル底邊ト,與ヘラレタル角ニ等シキ頂角トヲ有スル三角形ノ內心ノ軌跡ヲ求ムルコト. 又其垂心ノ軌跡ヲ求ムルコト.

第三編之部

59. 四邊形 ABCD 內ノ一點ヲ O トシ,四ツノ三角形 OAB, OBC, OCD, ODA ガ等積ナルトキハ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

60. 直角三角形 ABC ノ直角ヲ夾ム二邊 AB, AC ノ各ノ上ニ一ツ宛其端 D, E ヲ有スル線分ヲ引クトキハ $CD^2+BE^2=DE^2+BC^2$ ナリ.

61. 梯形ノ面積ハ,其二ツノ底ノ中點ヲ結付クル線分ニテ二等分セラル.

62. 三角形ノ重心ト各頂點トヲ結付クル線分ノ平方ノ和ノ三倍ハ三邊ノ各ノ平方ノ和ニ等シ.

63. G ヲ △ABC ノ重心, P ヲ任意ノ點トスレバ $AP^2+BP^2+CP^2=AG^2+BG^2+CG^2+3GP^2$ ナリ.

64. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 AB 上ノ一點ヲ P トスレバ $AC^2-PC^2=AP.BP$ ナリ.

若シ點 P ガ底邊 AB ノ延長ノ上ニアラバ如何.

65. 與ヘラレタル面積ヲ有シ且ツ定マレル底邊ヲ有スル三角形ノ中デ二等邊三角形ノ周圍ガ最小ナリ.

66. 平行四邊形 ABCD ノ平面上ニ一點 O ヲ取レバ三角形 OAB ノ面積ト三角形 OAC ノ面積トノ和或ハ差ハ三角形 OAD ノ面積ニ等シ.

67. △ABC ノ各邊ノ上ニ其外側ニ作レル正方形ヲ BCFG, CAIH, ABDE トスレバ三ツノ三角形 AIE, BDG, CFH ハ等積ナリ.

68. 前題ニ於テ $AB^2+BC^2+CA^2$ ノ四倍ハ

$DE^2+DG^2+GF^2+FH^2+HI^2+IE^2$ ニ等シ.

69. AB ハ圓ノ直徑, CD ハ AB ニ平行ナル弦ニシテ, P ハ AB 上ノ任意ノ一點ナリトスレバ

$$CP^2+AP^2+BP^2$$ ナリ.

70. 三角形 ABC ノ邊 BC ヲ D, E ニテ三等分スルトキハ

$$AB^2+AC^2=AD^2+AE^2+BE^2$$ ナリ.

71. 三角形 ABC ノ各邊ノ上ニ其外側ニ正方形 ABDE, BCFG, ACHK ヲ畫キ, D ト G ト, F ト H ト, K ト E トヲ結付ケテ得ル六邊形 EDGFHK ノ各邊ノ平方ノ和ハ三角形 ABC ノ各邊ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ.

72. 二ツノ同心圓周 APB, CQD ノ直徑ヲ夫夫 AB, CD トシ, P, Q ヲソレゾレ圓周上ノ任意ノ點トスレバ　$PC^2+PD^2=QA^2+QB^2$　ナリ.

73. 二ツノ同心圓周アリ,內ナル圓周上ノ一定點 P ヨリ任意ノ弦 PA ヲ引キ, PA ニ垂直ニ外ナル圓ノ弦 BPC ヲ引クトキハ $PA^2+PB^2+PC^2$ 及 $AB^2+BC^2+CA^2$ ハ何レモ不易ナリ.　又 △ABC ノ重心ヲ G トスレバ線分 GP モ不易ナリ.

74. 二定點ニ至ル距離ノ平方ノ差ノ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

75. 與ヘラレタル正方形ノ面積ノ五倍ニ等シキ正方形ヲ作ルコト.

76. 四定點ニ至ル距離ノ平方ノ和ノ最小ナル點ヲ求ムルコト.

77. 一定點ヲ通ル直線ヲ引キ,定マレル平行四邊形ヲ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

78. 四邊形ノ面積ヲ其一邊ノ上ノ定マレル點ヲ通ル一直線ニヨリテ二等分スルコト.

79. 四邊形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ引ケル二ツノ半直線ニテ此四邊形ノ面積ヲ三等分スルコト.

80. 定線分 AB 上ニ一點 C ヲ取リ, AC, BC ノ各ノ平方ノ差ガ與ヘラレタル正方形ノ面積ニ等シクナル樣ニスルコト.

第四編之部

81. 同ジ底邊 BC ヲ有シテ,其同ジ側ニアル等積ナル二ツノ三角形ヲ ABC, DBC トス.　此二ツノ三角形ノ二邊或ハ其延長ノ交點 E, F ヲ通ル直

線ハ底邊ヲ二等分ス.

82. 梯形 ABCD ノ對角線ノ交點 O ヲ通リ,其底 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ,二邊 AB, CD ト夫夫 E, F ニ於テ交ラシムルトキハ, OE ト OF トハ相等シ.

83. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ底邊 BC ノ兩端ニ於ケル角(又ハ其外角)ノ二等分線ヘ垂線 AM, AN ヲ引ケバ MN ハ BC ニ平行ナリ.

84. 圓內ノ一點ヲ通ル弦ノ中デ最小ナル者ノ半分ハ,此點ヲ通ル其他ノ任意ノ弦ノ此點ニテ分タルルトキニ生ズル二ツノ分ノ比例中項ナリ.

85. 圓外ノ一定點ヨリ引キタル任意ノ割線上ノ弦ガ,此點ニテ分タレテ生ズル外分ノ積ハ,此點ト中心トノ距離ノ平方ヨリ半徑ノ平方ヲ引キタル者ニ等シ.

86. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ底邊 BC ニ垂線 AD ヲ引キ,又 A ヨリ引キタル此三角形ノ外接圓ノ直徑ヲ AE トスレバ

$$BA.AC=EA.AD$$

ナリ.

87. 三角形 ABC ノ邊 AB ノ中點 D ヨリ半直線ヲ引キ, AC ト E ニ於テ, BC ノ延長ト F ニ於テ交ラシムルトキハ AE : EC=BF : CF ナリ.

88. O, B, C ハ同一直線上ノ三點ナリ,今 OB, OC ノ中點ヲ夫夫 B′, C′ トシ, BC ヲ $m:n$ ニ內分若クハ外分スル點ヲ M トシ, OM ノ中點ヲ N トスレバ N ハ B′C′ ヲ同ジ比ニ內分若クハ外分ス.

89. 四邊形 ABCD ノ對角線ノ一ツ BD ガ其二邊 AB, BC ノ比例中項ニシテ且ツ此二邊ガナス角ヲ二等分スルトキハ此對角線ガ點 E ニ於テ他ノ對角線 AC ニ交リテ生ズル二ツノ線分 AE ト CE トノ比ハ二邊 AD ト CD トノ比ノ平方(之ヲ AD ト CD トノ比ノ二乘比トモイフ)ニ等シ.

90. BC ハ圓ノ一ツノ直徑, D ハ BC 上ノ任意ノ點, D ニ於テ BC ニ垂直ナル半直線ガ圓周ト G ニ於テ交リ,弦 AB, AC 或ハ其延長ト夫夫 F, E ニ於テ交ルトキハ DG ハ DE ト DF トノ比例中項ナリ.

91. 三角形ノ各頂點ヨリ之ニ對スル邊ニ引キタル三ツノ線分ガ同一ノ點ヲ通リ,此點ニ於テ分

タルル各線分ノ二ツノ分ノ積ガ相等シキトキハ，此交點ハ垂心ナリ．

92. 半直線 OX 上ニ二點 P, Q ヲ取リ，又他ノ半直線 OY 上ニ二點 M, N ヲ取リ，MP, NQ ガ R ニ於テ相交ルトス．若シ $OM:MP=ON:NQ$ ナラバ三角形 PQR ハ二等邊ナリ．

93. 圓周上ノ一點 A ヨリ直徑 AB 及切線 AC ヲ引キ，切線上ノ一點 C ヨリ第二ノ切線ヲ引キ其切點ヲ D トシ，D ヨリ AB ニ垂線 DE ヲ引ケバ DE ハ BC ニヨリテ二等分セラル．

94. 二ツノ圓ニ於テ二ツノ弓形 ABC, A′B′C′ ノ含ム角ガ相等シケレバ二ツノ圓ノ半徑ノ比ハ其弦 AC, A′C′ ノ比ニ等シ．

95. D ヲ三角形 ABC ノ底邊 BC 或ハ其延長上ノ任意ノ點トスレバ二ツノ △ABD, △ACD ニ外接スル圓ノ直徑ノ比ハ AB, AC ノ比ニ等シ．

96. 圓 C ノ外ニアル一點 O ヨリ二ツノ切線 OA, OB ヲ引キ，次ニ O ヨリ割線ヲ引キテ圓周ト P, Q ニ於テ，弦 AB ト R ニ於テ交ラシム．而シテ AB ト OC トノ交點ヲ N トスレバ，NR ハ角 PNQ

ヲ二等分ス．

97. 二ツノ線分 AE, BD ハ互ニ平行ニシテ相等シク；二ツノ三角形 AOE, BOC ガ相似ナルトキハ △DEC モ亦此等ノ三角形ニ相似ナリ．

98. 與ヘラレタル圓周上ノ定マレル弧 AB ノ中點ヲ C トシ，其共軛弧ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ $(AP+BP):PC$ ハ不易ナリ．

若シ △ABC ガ正三角形ナラバ此比ハ如何．

99. 正方形 ABCD ニ外接スル圓周ニ於テ弧 AD 上ノ任意ノ點ヲ P トスレバ $(PC+PA):PB$ 及 $(PC-PA):PD$ ハ何レモ不易ナリ．

100. 三角形 ABC ノ各頂點ヨリ任意ノ一點 O マデ引キタル線分或ハ其延長ガ BC, CA, AB ト交ル點ヲ夫夫 X, Y, Z トスレバ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=1$ ナリ而シテ其逆モ亦眞ナリ（之ヲ Ceva ノ定理ト云フ）．

101. 三角形 ABC ノ三ツノ邊 BC, CA, AB 或ハ其延長ガ任意ノ一直線ト交ル點ヲ夫夫 X, Y, Z トスレバ $\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AZ}{ZB}=-1$ ナリ，而シテ其逆

モ亦眞ナリ(之ヲ Menelaus ノ定理トイフ).

102. △ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ夫夫二點 E, F ヲ取リ BE=2.EA, AF=2.FC ナラシメ, EF ト BC トノ交點ヲ H トスレバ BH:HC 如何.

103. 三角形ノ各頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ガ對邊ト交ル點ヲ夫夫 D, E, F トスレバ D, E, F ハ同一直線上ニアリ.

104. 三角形 ABC ノ内接圓ガ三邊ニ切スル點ヲ夫夫 D, E, F トスレバ三ツノ線分 AD, BE, CF ハ同一點ヲ通ル.

105. 圓周上ノ一點ヨリ之ニ内接スル四邊形ノ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ積ハ相等シ. 其逆モ眞ナリ.

106. 圓ニ内容シ得ル四邊形ノ對線角ノ積ハ相對スル二邊ノ積ノ和ニ等シ. 其逆モ亦眞ナリ. (之ヲ Ptolemy ノ定理トイフ).

107. 内接四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナレバ相對スル邊ノ積ノ和ハ四邊形ノ面積ノ二倍ニ等シ.

108. 正三角形 ABC ニ於テ PA=PB+PC ナル

ベキ點 P ハ △ABC ニ外接スル圓周上ニアリ.

109. 二ツヅツ相交ル三ツノ圓アリ. ソノ二ツ宛ニ共通ナル弦或ハ其延長ハ同一ノ點ヲ通ル.

110. 直角三角形ノ三邊ノ各ヲ直徑トスル半圓周ヲ,斜邊 BC ニ對シ此三角形ガアル側ニ畫クトキニ生ズル二ツノ新月形ノ圖形ノ面積ノ和ハ此直角三角形ノ面積ニ等シ.

111. 線分 AB ヲ中末比ニ内分スル點ヲ C トシ, AC ヲ一邊トスル正方形 ACDE ヲ畫キ,次ニ矩形 CBOD ヲ作ルトキハ, AO ハ DB ニ垂直ナリ.

112. 圓ニ内接スル正八邊形ノ面積ハ同ジ圓ニ内接スル正方形ノ一邊ト其圓ノ外接正方形ノ一邊トニ等シキ相隣レル二邊ヲ有スル矩形ノ面積ニ等シ.

113. 二ツノ圓ノ相似ノ中心ノ一ツヲ O トス. O ヨリ一ツノ割線ヲ引キ一ツノ圓周ト A, A' ニテ交リ,他ノ圓周ト B, B' ニ於テ交ラシムレバ $OA.OB'$ ハ $OA'.OB$ ニ等シク且ツ此積ハ何レノ割線ニ就テモ總テ互ニ相等シ. 但シ A ト B ト,

A′ トB′ トヲ各相對應スル點トス.

114. $\triangle ABC$ ノ邊 AB, AC ノ上ニ夫夫任意ノ點 D, E ヲ取リ; D, E ヲ通ル直線ガ BC ノ延長ト交ル點ヲ F トシ二ツノ平行四邊形 ABGE, ADHC ヲ作レバ三點 G, H, F ハ同一ノ直線上ニアリ.

115. 圓ニ內接スル六邊形ノ相對スル邊ノ延長ノ交點ハ同一直線上ニアリ(之ヲ Pascal ノ定理トイフ).

116. 三角形 ABC ノ三邊ヲ夫夫 a, b, c トシ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ノ內ニアル傍接圓ノ半徑ヲ夫夫 r_1, r_2, r_3, トシ,又內接圓ノ半徑ヲ r トシ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トスレバ

$$sr=(s-a)r_1=(s-b)r_2=(s-c)r_3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$r:s-b=s-c:r_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ.

117. 圓 O ニ於テ其半徑ニ等シキ長サノ弦 AD ヲ引キ, A ヨリ此圓ニ切スル半直線ヲ OA ニ對シテ弦 AD ノアル側ト反對ノ側ニ引キ,其上ニ於テ半徑ニ等シキ線分 AB ヲ取リ, B ヲ D 及 O ノ各ニ結付ケタル線分ガ圓周ト交ル點ヲ夫夫 E, F トセヨ. 然ルトキハ弧 AE ハ圓周ノ $\frac{1}{12}$ ニ等シク, 弧 EF ハ圓周ノ $\frac{1}{24}$ ニ等シ.

118. 四邊形 ABCD ノ面積ヲ求ムル次ノ圖解法ヲ證明セヨ.

B ト D トヲ結付ケ C ヨリ BD ニ平行ナル直線ヲ引キ AB ノ延長トノ交點ヲ E トス. E ヲ中心トシ,長サノ單位ノ 2 倍ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲ書キ,點 A ヨリ之ニ切スル半直線 AX ヲ引キ, D ヲ通リ AB ニ平行ナル直線トノ交點ヲ X トスレバ線分 AX ヲ表ス數ハ ABCD ノ面積ヲ表ス數ニ等シ.

BD=2寸, AB=1.6寸, BC=1.8寸, CD=1.6寸, DA=1.3寸 トシテ計算ニヨリテ面積ヲ求メ之ヲ上ノ方法ニヨリテ求メタル結果ニ比較セヨ.

119. A, B, A′, B′ ハ同一直線上ノ四點ナリ,今同ジ直線上ニ一點 P ヲ取リテ

(1) $AP:PB=A'P:PB'$

(2) $AP:PB=B'P:A'P$

ナル樣ニスルコト.

120. 與ヘラレタル三角形ヲ其底邊ニ垂直ナル直線ニヨリテ等積ナル二ツノ部分ニ分ツコト.

121. 與ヘラレタル圓弧 AB ノ上ニ一點 M ヲ取リテ $AM+MB$ ヲ最大ナラシムルコト.

又 $AM.BM$ ヲ最大ナラシムルコト.

122. 三角形ノ一邊ノ上ニ一ツノ邊ガアル樣ニ與ヘラレタル矩形ト相似ナル矩形ヲ此三角形ニ內容スルコト.

123. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ノ上ニ一點ヲ求メテ之ヨリ他ノ二邊ニ平行ナル二直線ガ他ノ二邊トナス平行四邊形ノ面積ヲ最大ナラシムルコト.

124. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ノ上ニ一ツノ邊ガアル樣ニ此三角形ニ內容スル矩形ヲ作リテ其面積ヲ最大ナラシムルコト.

125. 與ヘラレタル圓外ノ一點ヨリ此圓ニ引キタル二ツノ切線ノ長サノ和ヲ此點ト圓周上ノ點トノ距離ノ中デ最大ナル者ニ等シクナサントス. 此點ノ位置ヲ求メヨ.

126. 二ツノ定直線ニ切シ其何レノ上ニモアラザル一定點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

127. 二定點ヲ通リ且ツ一定圓周ニ切スル圓ヲ作ルコト.

128. 二定圓ニ切シ且ツ一定點ヲ通ル圓周ヲ作ルコト.

129. 四邊形ヲ畫キテ其一組ノ相對スル角ノ二等分線ノ交點ガ他ノ一組ノ相對スル角ノ頂點ヲ結付クル線分ノ上ニアル樣ニスルコト.

130. 一定點ヲ通リ,一定直線及定圓周ニ切スル圓周ヲ畫クコト.

131. 二ツノ定圓ニ相等シキ切線ヲ引キ得ベキ點ノ軌跡ヲ求ム.

132 $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ニ平行ナル一ツノ直線ガ $\triangle ABC$ ノ邊トナス梯形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求ム.

133. 一定點 O ヨリ引キタル二ツノ線分 OP, OQ ノ比ガ一定ニシテ且ツ定マレル角ヲナストキ點 P ノ軌跡ガ直線ナレバ點 Q ノ軌跡如何.

又點 P ノ軌跡ガ圓周ナラバ點 Q ノ軌跡如何.

134 二ツノ圓周ノ交點ノ一ツ A ヲ通ル直線

ヲ引キテ各圓ノ周ニ於テ終ラシメタル線分 CD ヲ,與ヘラレタル比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求ム.

135.　△ABC ニ於テ A ヨリ引キタル中線ヲ AG トシ AB=3寸, AC=4寸, AG=3寸 ナルトキ底邊 BC ノ長サヲ求メヨ.

136.　△ABC ニ於テ AC=2吋, BC=3吋, BC ノ上ニ於ケル AC ノ直射影ヲ 0.5吋トスレバ AB ノ長サ如何.

137.　三ツノ角ガ夫夫 60°, 40°, 80° ナル三角形ニ外接スル圓周ガ 2 呎ナルトキ三角形ノ三邊ニ對スル各圓弧ノ長サヲ求ム.

138.　一邊ガ 1 寸及 2 寸ナル二ツノ正方形ノ面積ノ和ニ等シキ正方形ノ一邊ノ長サ及對角線ノ長サヲ求ム.

139.　二邊ガ 10吋,底邊ガ 7吋ナル二等邊三角形ノ高サ及面積ヲ求メヨ.

140.　互ニ平行ナラザル二邊ガ相等シクシテ各1寸ナル梯形ノ高サ 0.7寸,小ナル底ガ 2 寸ナルトキ其梯形ノ面積ヲ求メヨ.

141.　圓ノ中心ヨリ 4吋ノ距離ニアル點ヨリ

其圓ヘ引キタル切線ノ長サガ 3 吋ナルトキ,圓ノ半徑ヲ求メヨ.

142.　互ニ垂直ナル弦 AB, CD ノ交點ヲ O トシ AO=OB=2吋, CO=1.5吋ナルトキ圓ノ半徑ヲ求ム.

143.　一ツノ圓ノ互ニ平行ナル二ツノ弦ノ長サガ各1吋,其二ツノ弦ノ間ノ距離ガ 1.2吋ナルトキ圓ノ半徑ヲ求メヨ.

144　ABCD ハ一邊ガ 2 吋ナル正方形ニシテ E ハ BC ノ中點ナリ.　A, E, D ヲ通ル圓周ト DC トノ交點ヲ F トシ, DF ノ長サヲ求メヨ.

145.　線分 AB ノ長サヲ 3 吋トシ其上ニ BC ノ長サヲ 0.3 吋ニ等シク取レ.　B, C ヨリ BA ニ垂直ナル二ツノ半直線ヲ AB ノ同ジ側ニ作リ其上ニ於テ夫夫 BX=2.5吋, CY=2.2吋ナル樣ニ X, Y ヲ取リ,直線 XY ガ AB ニ交ル點ヲ Z トシ, AZ ノ長サヲ求メヨ.

146.　ABCD ハ一邊ノ長サガ 5 糎ナル正方形ナリ.　對角線 AC ヲ CB ニ等シク延長シテ CE トシ, E ヨリ AB ノ延長ヘ垂線 EF ヲ作レバ線分 EF, BE ノ長サ各幾何ナルカ.

147. 三角形ABCノ邊BC, CA, AB ヲ夫夫3糎, 4糎, 5糎トス. 今三邊 BC, CA, AB ヨリノ距離ノ比ガ 3:4:5 ナル點 O ノ位置ヲ求ム.

148. △ABC ニ於テ底邊 BC ガ 5寸, AB. AC ガ 8平方寸, ∠A ノ二等分線ガ BC ト交ル點ヲ D トシ, AD ガ 2寸ナルトキハ二邊 AB, AC ノ長サ各幾何ナルカ.

149. 直角三角形ABCノ斜邊BCノ上ニ中心ヲ有シ,他ノ二邊ノ各ニ切スル半圓ノ半徑ヲ計算セヨ. 但シ AB=4寸, AC=5寸 トス.

150. 互ニ外切スル三ツノ圓ノ半徑ヲ夫夫18尺, 8尺トスレバ此二ツノ圓ノ外公切線ノ二ツノ切點間ノ線分ノ長サ如何.

151. 次ノ二ツノ場合ノ各ニ於テ二ツノ圓ノ公切線ノ長サヲ求メヨ.

(1) OO′(中心間ノ距離)=15糎,
半徑ガ夫夫 9糎及 4.5糎

(2) OO′=3.4尺, 半徑ガ夫夫 2.7尺及 1.5尺

152. 次ノ各場合ニ於テ三角形ノ各邊ノ長サ

ヲ求ム.

(1) 正三角形ノ面積 2 平方米ナルトキ.

(2) 三邊ノ比 13:14:15 ニシテ面積ガ 1 平方米ナルトキ.

153. 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫夫 4糎及 4.5糎ナルトキ第三邊ノ長サヲ求ム. 但シ其面積ハ 7 平方糎ナリ.

154. 二ツノ相似三角形ノ面積ガ夫夫 1 平方尺及 110平方寸ナルトキ其相似比ヲ求メヨ.

155. 三邊ガ夫夫 16尺, 24尺, 10尺ナル三角形ノ高サヲ求メヨ. 又其外接圓ノ直徑ヲ求メヨ.

156. 三邊ガ夫夫 3呎, 2.5呎及 2呎ナル三角形ニ於テ其內接圓,外接圓及三ツノ傍接圓ノ半徑ヲ求ム.

157. 半徑ガ夫夫1寸, 1.5寸及2寸ナル三ツノ圓ガ二ツヅツ互ニ外切スル場合ニ於ケル內公切線ノ交點ノ位置ヲ求メヨ.

又此等ノ圓ノ二ツ宛ノ相似ノ外心ノ位置ヲ求メ且ツ此等ノ點ガ同一直線上ニアルコトヲ證明セヨ.

158. 二ツノ圓ノ半徑ガ夫夫1.5糎及0.8糎ニシテ中心間ノ距離ガ3糎ナルトキ之ヲ二ツノ傍接圓トスル三角形ノ各邊ノ長サヲ求メヨ.

159. 三ツノ邊 BC, CA, AB ガ夫夫10米, 12米, 7.2米ナル三角形 ABC ノ頂點 B 及 A ヲ中心トシヲ畫キタル圓ノ半徑ヲ夫夫1.2米及0.8米ナリトセヨ. 圓 B ニ外接シ圓 A ニ内接シ且ツ BC ニ切スル圓ノ半徑ヲ求メヨ.

160. 三邊 BC, CA, AB ガ夫夫6.4寸, 5寸及8寸ナル三角形 ABC ノ頂點 B 及 C ヲ中心トシテ畫キタル圓ノ半徑ガ夫夫2寸及1寸ナリトセヨ. A ヲ通リ且ツ二ツノ圓 B, C ニ切スル第三ノ圓ノ半徑ヲ求メヨ.

161. 圓ニ内接スル四邊形 PQRS ノ PQ, QR, RS, SP ヲ表ス數ヲ夫夫 a, b, c, d トシ,對角線 PR, QS ヲ表ス數ヲ夫夫 x 及 y トシ,二ツノ弧 PQ, RS ノ和ニ等シキ弧ヲ張ル弦ヲ表ス數ヲ z トスレバ

$$xy=ac+bd,\quad zx=ad+bc,\quad yz=ab+cd$$

ナルコトヲ證明シ,之ニヨリテ x, y, z ヲ求メヨ.

162. 圓ニ内接スル四邊形ノ四ツノ邊ガ夫夫2呎, 3呎, 4呎, 5呎ナルトキ二ツノ對角線ノ長サヲ求メヨ.

163. 四邊形 ABCD ニ於テ

$$\angle A=30^\circ,\ AD=AB=2.5\text{尺},\ \angle B=\angle D=\angle R$$

ナルトキ CD, BC 及對角線 BD, AC ノ長サヲ求ム.

發行所 合資會社 冨山房
(振替貯金口座東京五〇一番)
(電話本局一〇三六番、本局四一三〇番)
東京市神田區裏神保町九番地

印刷所 新井電新堂
東京市京橋區木挽町二丁目十三番地

代表者 坂本嘉治馬

印刷者兼發行者
同所 合資會社冨山房社長
合資會社 冨山房
東京市神田區裏神保町九番地

編者 吉田好九郎

編者 寺尾壽

明治四十四年十二月十八日印刷
明治四十四年十二月廿一日發行

定價七拾錢

(中學教科平面幾何)

24

平面幾何（中学教科）

寺尾 寿
吉田 好九郎／編