技工教科書

應用力學

技工訓練處發行

中華民國三十二年五月初版（一六〇〇冊）

（技工叢書教科書）應用力學

編著者　王世模

發行人　呂持平

印刷所　兵工署第十一技工學校印刷所

發行所　技工訓練處

目　錄

編輯大意

本書爲衛技理化大意之教本，適合於普通及特別技工訓練班第二學年教學之用，凡屬於力學上之定理及公式，曾於理化大意教本中已加解釋者，概從簡略，藉以節省教學之時數。學者如於上述之定理及公式等，有已[illegible]或未能完全了解者，希以理化大意複習之，則於本書之教學進程，本[illegible]生困難矣。

本書對於每一問題，於說明之外，必附以例題以示範；每章之末，亦附以習題；學者能將每章習題，勤加演習，則於力學上諸定理及公式之應用，不難悟解矣。

本書取材，關於固體靜力學之部份，則採用美國技術學會土木工程叢書第二冊，沈智璣顧世楫兩先生合譯本；關於固體動力學及流體動力學之部份，則取材於薛征鎬先生之應用力學大意。草草成書，疵謬必多，祈海內方家，有以正之。

三十一年六月，　　編者

一 緒論

力：乃推引一切物體之作用也，每力均有量；表示一已知力之量，常稱之爲大於某標準力若干倍，力學採用重量之標準爲力之標準，是爲重力單位制，以其取用甚便也。所謂一力等於100公斤者，即一力等於100公斤之重量也。

矢量：力必有方向；所謂力之作某方向推拉者，言此物體若僅受此一力之作用，即將依此方向而發生移動。力必有一施力點，即物體上力所作用之地點也。通過物體之施力點，沿力之方向，引一直線，是爲力之作用線。代表一力之方法，以作矢量爲之。以一點代表力之施力點；自施力點引一直線，線之長度，依照某種比例尺度，以代表力之大小；於直線之一端，作一矢頭，直線之方向及其矢頭均代表力之施力方向。

比例尺及符號：以直線之長度代表力之大小，常以比例尺爲之。例如有某力等於200公斤，若用長度1公分等於100公斤之比例尺，則長度2公分

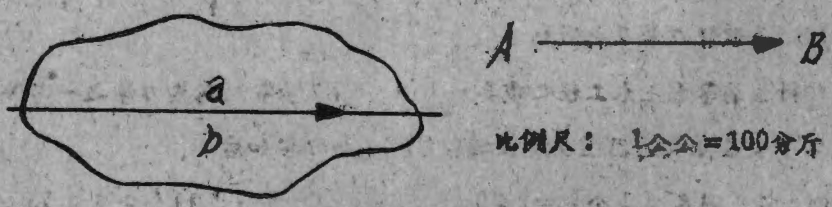


圖1

即代表此量。繪圖時所使用之比例尺，須視圖之大小及所繪物體之尺寸而定。圖之示力所作用之物體及其作用線者，謂之地位圖。圖之示矢量及比例尺度者，謂之力圖。代表一力之符號，力圖常於矢量之兩端，作二大寫字母爲之，如力AB；地位圖則於作用線之上下兩側各作一小寫字母代表之，如力ab；公式中所用之符號，則以字母F爲之。

力之作用：力學研究力與力間之相對作用，及力對於物體所發生之作用。任意力對於物體所發生之作用，可有次列之種：

(1)力能使物體變更其運動情狀：物體運動時或靜止時受有外力，若此外力非互相平衡，則物體必變動其情狀，靜者動，動者加劇，或漸漸靜止，或改變運動方向，是為發生動變。

(2)力能使物體變更其形狀：物體本具有某種形狀，若加以外力，則必變其形狀，是為發生形變。

力學分類：依照變動情形之種類，可分力學為靜力學，動力學，及材料強弱學三種。研究力與力間平衡關係之學問，謂之靜力學；研究力與動變之關係之學問，謂之動力學；研究力與形變之關係之學問，是為材料強弱學。

物體有三態；依照物體之形態，靜力學及動力學又可分為三大類：

(1)固體靜力學及固體動力學。

(2)液體靜力學及液體動力學。

(3)氣體靜力學及氣體動力學。

材料強弱學為土木工程之重要科目，氣體力學常列為熱力學之一部份；故不贅；茲僅次述固體及液體之靜力學及動力學如后。

例：設比例尺為1公分=200公斤，問1.20公分，2.11公分及0.75公分諸長度代表力若干？

解：將各長度用200乘之，即

$1.20\times200=240$公斤

$2.11\times200=422$公斤；

$0.75\times200=150$公斤。

習　　題

（1）比例尺為1公分＝50公斤，設代表1250，675，及900公斤諸力，問各需長度若干？

（2）比例尺為1公分＝80公斤，問1.25，1.60，及2.55公分諸長度所代表之力為何值？

二 固体静力學

a. 會聚力之綜合及分解

會聚力及不會聚力：多數力之作用線交於一點，稱為會聚力，或稱同點力；相交之點，稱為力之會聚點。若多數力之作用線不交於一點，則稱為不會聚力，或稱不同點力。不會聚力又可分為平行力及不平行力二類，視其作用線之平行或不平行而定。

本文所討論之力，其作用線均限於在一平面之內，是為同平面力。但有時吾人所遭遇之問題，其力之作用線並不在同一平面之內，是為非同平面力。非同平面力之問題，亦可引用本文之理論解答之。

平衡及平衡力：一靜止物體，受許多力作用時，每一力均有移動此物體之傾向，但結果此諸力有時可互相抵消，是為平衡。在一平衡系中，任何一力對於其他諸力均為平衡。一力能對於諸力平衡者，稱為諸力之平衡力。

合力及綜合：任何一力，能發生與一羣力同樣之作用者，該力名為此一羣力之合力。故一羣力之合力與其平衡力之量及作用線均相同，而方向則相反。構成一羣力之合力之方法，名為力之綜合。

分力及分解：任意數力，其合併作用與一力之作用相同者，此數力名為此一力之分力。構成一力之分力之方法，名為力之分解。分解之最重要者，為以一力分解成兩個分力。

兩會聚力綜合之圖解法：設有兩會聚力ab及bc如圖；作力圖，引矢量AB及BC表示兩力之量及方向；引AC線完成一三角形，則AC即表示其合力之量及方向；此名三角形定律。合力之作用線，為與AC平行，而通過已知兩力之交點，故ac即合力之作用線也。

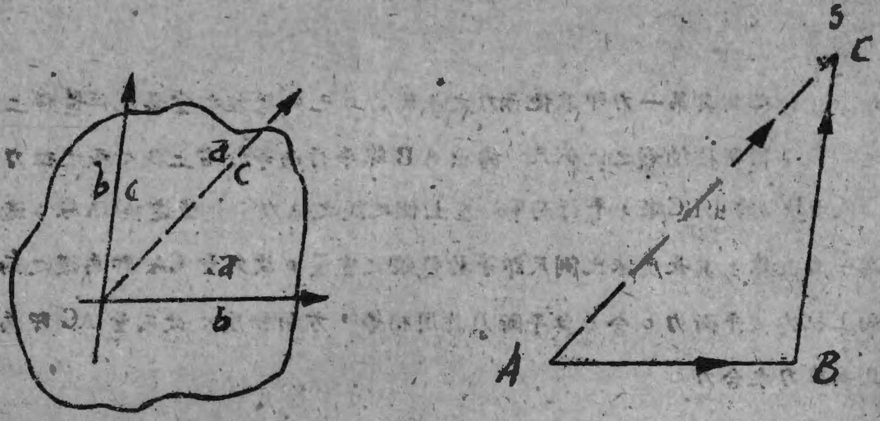


圖2

此定律可用實驗證明之；用兩個彈簧秤，一塊圖畫板，及幾根線，作成圖3之裝置，先將圖板直立，兩彈簧秤即懸於板上之鐵釘上。再將兩秤用線牽連於一小環S，另將一件重體懸於環上。S環於三力作用下呈平衡狀態，即向下一力等於懸體之重量；上斜兩力即兩線之張力，其量可於彈簧

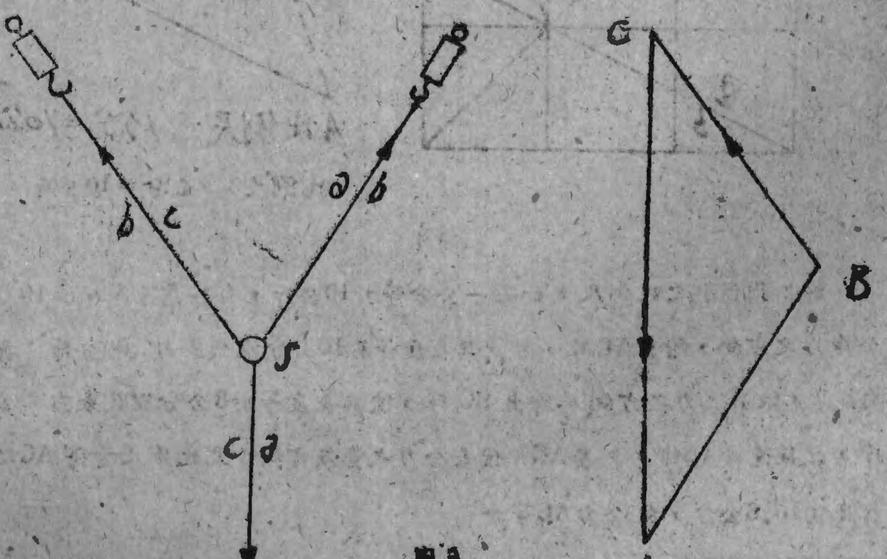
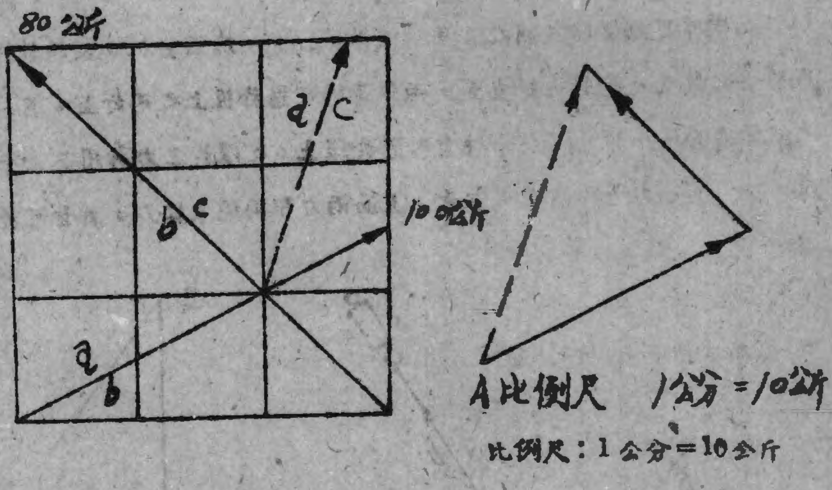


圖3

梯上讀得之，其第一力即其他兩力之平衡力。已知懸體之重量及彈簧秤上之讀數；用某種便利之比例尺，繪出AB線平行而等於右上側之繩之拉力，又由B點繪出BC線，平行而等於左上側之繩之拉力；最後連接CA線，適為一垂直線，其長度依比例尺即等於懸體之重量。故矢量CA即為環之兩向上拉力之平衡力。合力與平衡力作用相等，方向相反，故矢量AC即為此兩拉力之合力。

例：圖4表示一板，板上示二作用力，一為100公斤，一為80公斤。試求二力之合力。



比例尺：1公分=10公斤

圖 4

解：用便利之比例尺，如每一公分等於10公斤，自任意點A，依100公斤力之方向，繪出AB線，並使其長度等於10公分以代表力100公斤；再自B點，依第二力之方向，繪出BC線，使其長度等於8公分以代表力80公斤，最後連接AB線，矢量AC即代表合力之量及方向，用比例尺量得AC之長度為10.6公分，故合力AC等於

$$10.6\times100=106\text{公斤}$$

合力之作用線為ac係與AC平行，而經過ab及bc兩力之交點。

兩會聚力綜合之代數法：兩會聚力作用線間之角，若非90度，則其代數法並不簡單，可應用圖解法。若其角適為90度，則代數法較為簡單，茲述其方法如次。

圖5表示一物體，有K_1及K_2兩力，同經過物體內之某點，而其夾角適成90度。作力圖，矢量AB及BC各代表力K_1及K_2之量及方向；依照三角

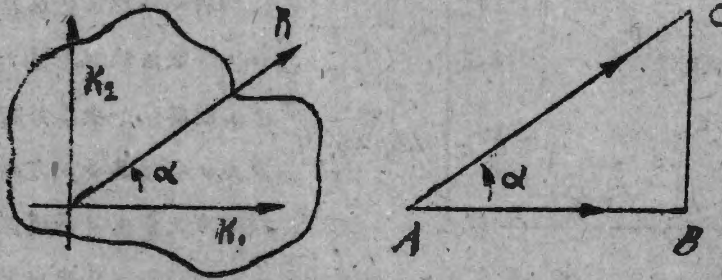


圖5

形定律，矢量AC代表合力之量及方向，而與AC相平行之R線即代表此合力之作用線，因△ABC為一直角三角形，故

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2, \qquad (1)$$

$$tg\angle CAB = \frac{BC}{AB} \qquad (2)$$

命R代表合力AC，K_1及K_2代表AB及BC二力，α代表作用線R與K_1所成之斜角，則(1)(2)二式可作：

$$R^2 = K_1^2 + K_2^2, \qquad 3$$

$$tg\,\alpha = \frac{K_2}{K_1} \qquad 4$$

例：設有120公斤及160公斤二力，互相正交，試求其合力。

解：命K_1代表為160公斤，K_2代表為120公斤，R代表其合力，α代表作用線R與K_1所成之斜角，則

$$R=\sqrt{160^2+120^2}=\sqrt{25600+14400}$$

$$=\sqrt{40000}=200\text{公斤}$$

$$tg\,\alpha=\frac{120}{160}=0.75,\quad \alpha=36°52'.$$

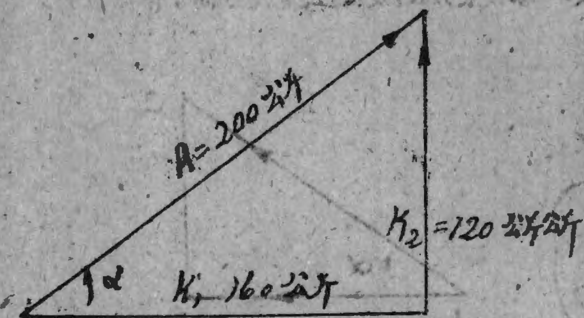


圖 6

兩個以上會聚力之綜合：關於兩個以上會聚力之綜合，代數法較為繁複，故僅述其圖解法如次：若將任意數力，各依其量與方向，連續繪成矢量，其箭頭係循同一路線進行，此圖形名為力之多邊形；若多邊形為一不閉合形，則其閉合線即為合力；若多邊形為一閉合形，則此任意數力之合力為零。茲為便利起見，將圖解綜合法之規則，列示如下：

(1) 先將已知之力，繪成矢量，作力之多邊形。

(2) 連接此多邊形之閉合線，置一箭頭於此閉合線上，其方向須自多邊形之始點指向其終點，此閉合線即代表合力之量及方向。

(3) 再於地位圖，由諸力之會聚點引一直線與多邊形之閉合線相平行則此線即為合力之作用線。

例：設有四力會聚於次圖之P點，求其合力。

解：以1公分等於10公斤為比例尺度，自任意點引矢量AB，長度為7公分以代表力F_1等於70公斤。順次引矢量BC長度為8公分，CD長度為9公

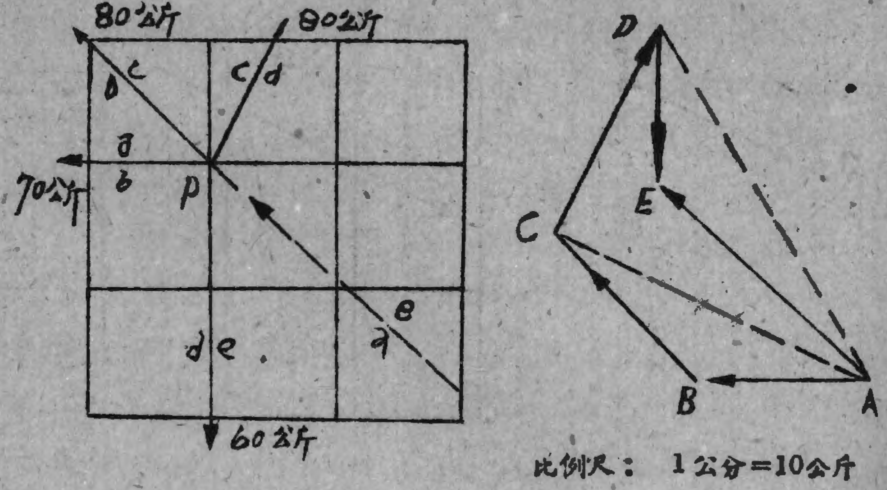


圖7

分，及DE長度爲6公分，以代表力bc等於80公斤，cd等的90公斤，及de等於60公斤。引一閉合線AE，以完成多邊形ABCDE，置一箭頭於AE線上，使自A點指向E點，矢量AE即代表合力之量及方向。量得AE之長度爲11.6公分，故合力等於

$$11.6\times10=116\text{公斤}。$$

再經過力之會聚點，於地位圖引ae線，與AE平行，ae線即代表合力之作用線。

證明之法，可應用三角形定律。引AC及AD二線，由△ABC，AC爲AB及BC之合力；由△ACD，AD爲AC及CD之合力；故由△ADE，AE爲AD及DE之合力，亦即AB，BC，CD，及DE之合力。

一力分解爲兩會聚分力之圖解法：分解一任意力爲二分力之法，先於地位圖作ab線代表此力之作用線。引矢量AB以表示其量及方向。自矢量之兩端，引二直線AC及CB相交於C點。於AC線上置一箭頭自A點指向C點，於CB線上置一箭頭自C點指向B點。矢量AC及CB即爲AB之二分力。再於

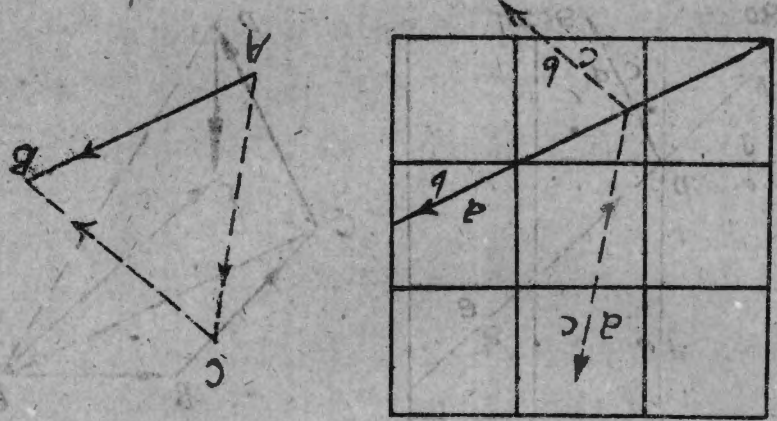


圖 8

地位圖，引二直線ac及cb各與AC及CB相平行，而會聚於ab線上之一點。ac及cb即代表二分力之作用線。

上項分解法係以一力分解為任意方向之二分力，茲再舉一例，示將一力分解為某特定方向之二分力之方法。

例：試將圖內力ab分解為沿MN及MP方向之二分力。

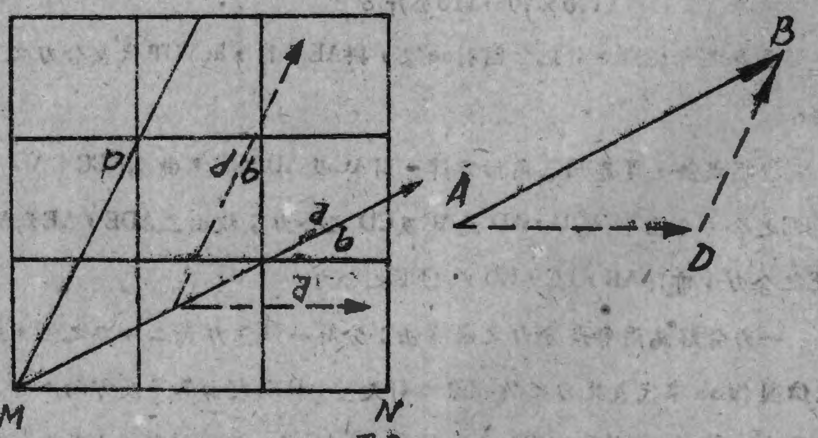


圖 9

解：用便利之比例尺度，引矢量AB代表力ab之量及方向，由A點引

AD線平行於MN，由B點引DB線平行於MP，使相交於D點。於AD線上置一箭頭；自A點指向D點；而DB線上置一箭頭，自D點指向B點。矢量AD及DB即為所求之分力。再於地位圖，引ad及db二線與AD及DB相平行而會聚於ab線之任意點，ab及db即代表二分力之作用線。

一力分解為兩會聚分力之代數法：兩分力之作用線之相交之角，若非90度，則其代數法，並不簡單，可仍用圖解法；若其角適為90度，則應用代數法，較為簡易。

設欲將力K分解為沿OX及OY兩直線之二分力，先作矢量AB以代表力K之量及方向，自矢量AB之兩端，各引一直線，與OX及OY相平行，相交於C點。矢量AC及CB依圖上所繪箭頭之方向，即代表所求兩分力之量及方向

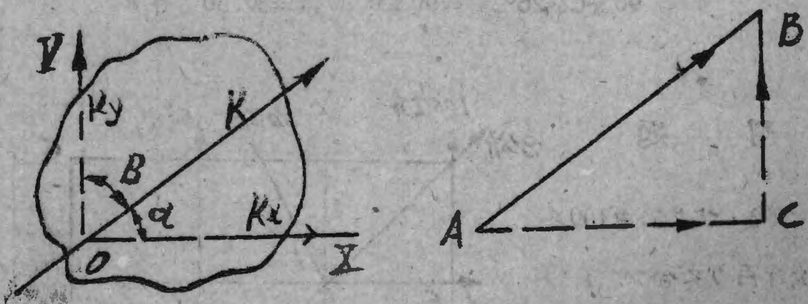


圖10

命K_x及K_y代表分力AC及CB，即沿OX及OY之分力，α代表K與K_x間之夾角，β代表K與K_y間之夾角，即得

$$K_x = K\cos\alpha, \qquad (5)$$

$$K_y = K\cos\beta. \qquad (6)$$

凡一力所分解之二分力，互成直角者，此分力名為直角分力。以上述二方程式即表示一力沿任何直線之直角分力，即等於此力與其夾角之餘弦之

乘積。

例一： 一力等於120公斤，與水平線成22度角。問其沿水平線之分力爲何？

解： $\cos 22° = 0.927$，故分力爲

$$120 \times 0.927 = 111.24\text{公斤}。$$

例二： 一力等於90公斤，方向如圖，問沿垂直線之分力爲何？

解： 因 $\operatorname{tg}\angle EAG = \dfrac{EG}{AG} = 0.5$，故 $\angle EAG = 26°34'$。由(5)式，所求之分力等於

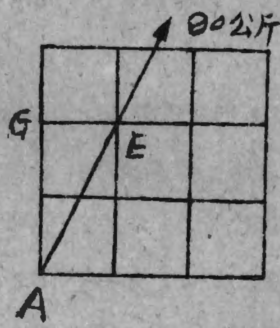


圖11

$$90 \times \cos 26°34' = 90 \times 0.8944 = 80.50\text{公斤}。$$

習　　題

（1） 試求圖中100及120公斤兩力之合力（應用圖解法）。

（2） 試求圖中120及160公斤兩力之合力（應用圖解法）。

（3） 試求圖中50及70公斤兩力之合力（應用代數法）。

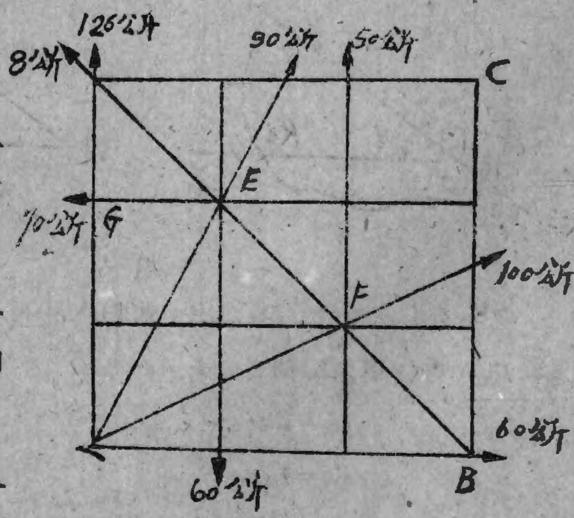


圖12

(4) 試求圖中60 及70 公斤兩力之合力（應用代數法）。

(5) 試就圖中A點之四會聚力，求其合力。

(6) 試就圖中F點之四會聚力，求其合力。

(7) 試將圖中160公斤之力，分解爲沿AF及AE之兩分力（應用圖解法）。

(8) 試將圖中50 公斤之力，分解爲沿FA及FB之兩分力（應用圖解法）。

(9) 試求圖中50 公斤力之垂直及水平分力，及其方向（應用代數法）。

(10) 試求圖中70 公斤力沿FA線之分力及其方向（應用代數法）。

(11) 一力爲80 公斤，與水平線成60 度角，試求其垂直及水平兩分力。

b. 會聚力之平衡

平衡條件：所謂一羣力之平衡條件者，即為一種關係；欲得力之平衡，必須滿足此種關係；或有此關係時，諸力即得平衡也。

若一羣力已得平衡，則力與力互相平衡，故其平衡力及諸力之合力必等於零。此合力等於零之必要條件，實為平衡之通用條件。在特種力羣，尚有特種條件，其中數項，當於下文述之。

會聚力平衡之圖解條件：一羣會聚力平衡之圖解條件，即其力之多邊形，必須閉合。因多邊形若為閉合，則其合力必等於零，應用此條件，凡與呈平衡狀態之會聚力有關之問題，均可解之。下述之例題，為最普通而重要者。

例一： 圖13表示一物體在斜面上，有繩繫之，得靜止不動。若物體重 120 公斤，而斜面為完全平滑，試求繩之拉力，及物體對於斜面之壓力各若干（假設斜面之斜角為30度）？

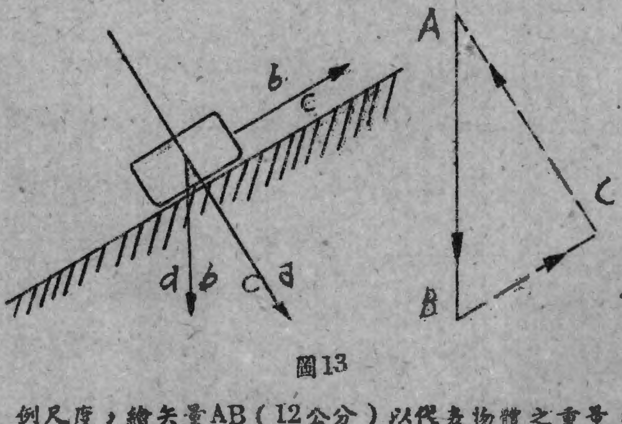


圖13

解： 作用於此物體共有三力，即向下之重量，繩之拉力，及斜面之壓力。拉力之方向與斜面相平行，壓力之方向與斜面相正交，以 1 公分等於10公斤為比例尺度，繪矢量AB（12公分）以代表物體之重量（120公斤）及其方向。自矢量AB之兩端，引BC線平行於斜面，引 CA線平行於斜面之垂直線，相交於C點，於BC線上置一箭頭，自 B 點指向C點；於 CA線上置一箭頭，自

C點指向A點。於△ABC中，矢量AB，BC，及CA之箭頭，順同一路線進行，△ABC爲一閉合多邊形，故三力互相平衡。矢量BC代表繩之拉力之量及方向，矢量CA代表斜面之壓力之量及方向。

以比例尺量得矢量BC之長度爲6公分，矢量CA之長度爲10.4公分；故繩之拉力爲60公斤，斜面之壓力爲104公斤。

例二： 圖14表示一物體，重200公斤，懸於一小環，其上用兩繩懸繫之。試求此兩繩之拉力（假設兩繩之斜角爲30°及45°）。

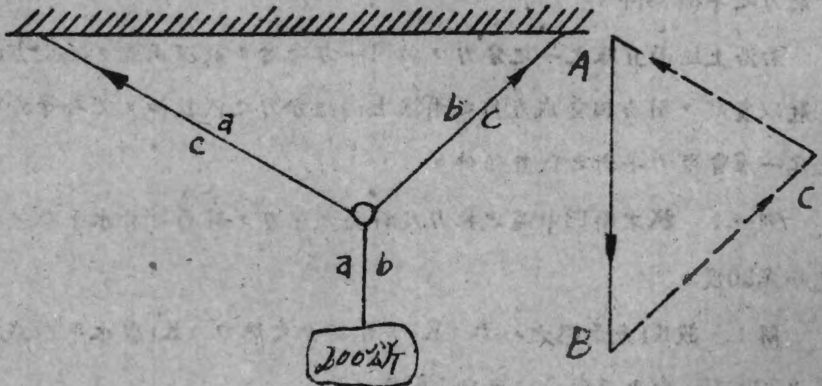


圖14

解： 作用於小環，計有三力，即向下一力，等於物體之重量，及兩繩之拉力。小環既在靜止狀態，此三力即得平衡，故其力圖必爲一閉合多邊形。以1公分等於20公斤爲比例尺度，繪矢量AB(10公分)以代表物體之重量（200公斤）及其方向。自矢量AB之兩端，引BC及CA二線，平行於二繩之方向，相交於C點。於BC線上置一箭頭，自B點指向C點；於CA線上置一箭頭，自C點指向A點。於△ABC中，矢量AB，BC，及CA之箭頭，順同一路線進行，故△ABC爲一閉合多邊形。矢量BC代表bc繩之拉力之量及方向，矢量CA代表ca繩之拉力之量及方向。

以比例尺量得矢量BC之長度爲8.95公分，矢量CA之長度爲 7.25 公分；故bc繩之拉力爲179公斤，ca繩之拉力爲145公斤。

會聚力平衡之代數條件：設有一羣會聚力呈平衡狀態，每一力各以其沿相交成直角之兩線之分力代替之，則分力之全部必仍呈平衡狀態；因所有分力必沿兩線之一，故沿每一線之所有分力，亦必呈平衡狀態，蓋若有一組分力不平衡，則物體即沿此分力線而移動矣。是以將一羣會聚力分解爲沿相交成直角之任何二線之兩組分力，每組分力之合力必等於零，是爲會聚力之平衡條件。

若沿上述兩直線之一之分力，向同一方向者，冠以正號，向反方向者，冠以負號，則沿相交成直角之兩線上兩組分力之代數和，必各等於零，是爲一羣會聚力平衡之代數條件。

例一： 試求圖13中繩之拉力及斜面之壓力，斜面對於水平之傾斜，已知爲30度。

解： 設K_1表示繩之拉力，K_2表示斜面之壓力。K_1與水平所成之角度爲30°，K_2與水平所成之角度爲60°，故

K_1之水平分力$=K_1\times\cos30°=0.866K_1$，

K_2之水平分力$=K_2\times\cos60°=0.500K_2$，

重量之水平分力$=0$。

K_1與垂直線所成之角度爲60°，K_2與垂直線所成之角度爲30°，故

K_1之垂直分力$=K_1\times\cos60°=0.500K_1$，

K_2之垂直分力$=K_2\times\cos30°=0.866K_2$，

重量之垂直分力$=120$公斤。

三力既呈平衡狀態，則水平及垂直分力亦必各呈平衡，故

$$0.866K_1=0.500K_2,$$

$$0.500K_1+0.866K_2=120。$$

解上列二方程式；自第一式，

$$K_2=\frac{0.866}{0.5}K_1=1.732K_1,$$

代入第二式，

$$0.500K_1+0.866\times1.732K_1=120,$$

$$0.5K_1+1.5K_1=120,$$

$$2K_1=120,$$

$$K_1=60\text{公斤}。$$

$$K_2=1.732K_1=1.732\times60=103.92\text{公斤}。$$

例二： 試用代數法以求圖14内兩繩之拉力。左繩及右繩與頂板所成之角度，各爲30°及70°，及物體重量爲100公斤。

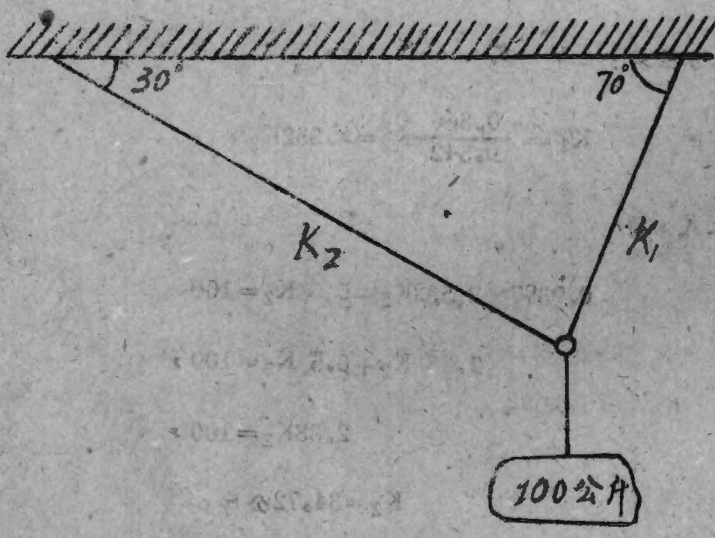


圖14a

解：設K_1代表右繩之拉力，K_2代表左繩之拉力，則

K_1之水平分力$=K_1\times\cos70°=0.342K_1$，

K_2之水平分力$=K_2\times\cos30°=0.866K_2$，

重量之水平分力$=0$。

又K_1與垂直線之夾角爲$20°$，K_2與垂直線之夾角爲$60°$，故

K_1之垂直分力$=K_1\times\cos20°=0.9397K_1$，

K_2之垂直分力$=K_2\times\cos60°=0.500K_2$，

重量之垂直分力$=100$公斤。

三力旣呈平衡狀態，則水平及垂直分力，必各成平衡；故

$$0.342\ K_1=0.866K_2,$$

$$0.9397K_1+0.500K_2=100。$$

解上列二方程式；自第一式，

$$K_1=\frac{0.866}{0.342}K_2=2.532K_2,$$

代入第二式，得

$$0.9397\times2.532K_2+0.5\ K_2=100,$$

$$2.38\ K_2+0.5\ K_2=100,$$

$$2.88K_2=100,$$

$$K_2=34.72\text{公斤}。$$

$$K_1=2.532\times34.72=87.91\text{公斤}。$$

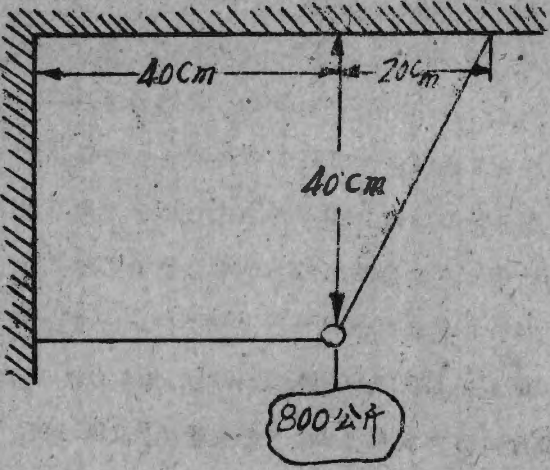


圖15

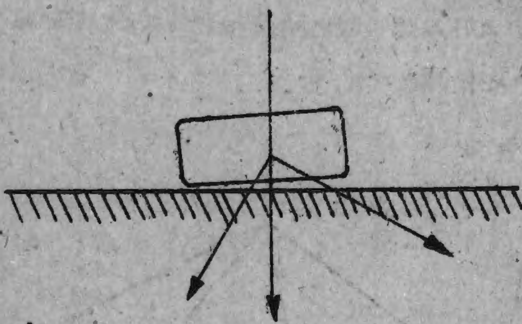


圖16

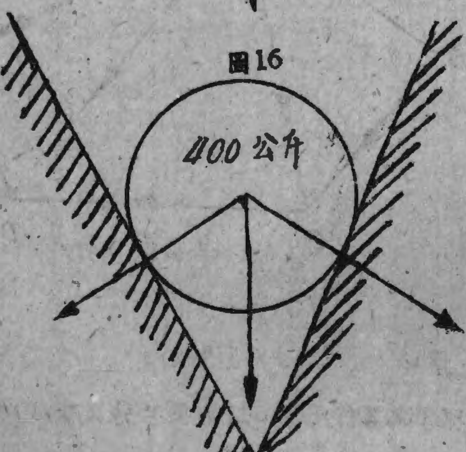


圖17

習　題

（1）圖15表示一物體重800公斤，繫於一小環，其上用兩繩懸繫之。試以圖解法求此兩繩之拉力。

（2）試以代數法計算此兩繩之拉力（先求斜繩與水平所成之角度，當得63° 26）。

（3）假定在圖16中，維繫物體之繩為水平，斜面對於水平所成之角為30度，物體之重量為100公斤，試以圖解法求繩之拉力及斜面之壓力。

（4）試用代數法解習題(3)。

（5）一球重400公斤置於V形槽內，槽之側面與水平各成60度角。試求槽之側面對於球之壓力（應用圖解法）。

（6）試用代數法解習題(5)。

五、不會聚力之綜合

不會聚力綜合之圖解法：設有一羣不會聚力作用於一物體，其綜合之法，先依照會聚力之綜合法，應用三角形定律，將其中之任何二力設法綜合之，求得此二力之合力，再與第三力綜合；再將此三力之合力與第四力綜合，直至所有之力合併成一個合力為止。惟實際之圖解法，並不能如會聚力之簡單，觀下列實例，即可明瞭。

例： 試就圖18之四力（100,80,120,及60公斤），以求其合力。

解： 先取100公斤及80公斤二力，就任意點A，繪矢量AB及BC以代表此二力之量及方向。依三角形定律，矢量AC即代表其合力之量及方向。命ab及bc為100公斤及80公斤二力之作用線；經過ab及bc線之交點，引ac線與矢量AC相平行，ac線即為合力之作用線。

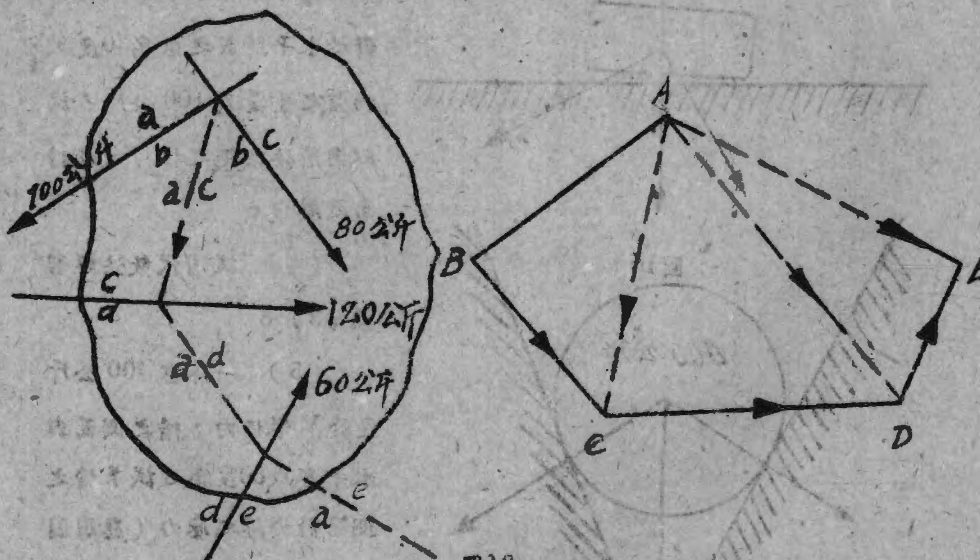


圖18

再取120公斤力作為第三力，以cd為其作用線。於力圖繪引矢量CD以代表此力之量及方向，依同理，矢量AD即代表矢量AC與CD之合力之量及

方向。經過ac與cd線之交點，引ad線與矢量AD相平行，ad線即爲合力之作用線。

最後取60公斤力作爲第四力，以de爲其作用線。於力圖續引矢量DE以代表此力之量及方向。依同理，矢量AE即代表矢量AD與DE之合力之量及方向。經過ad與de線之交點，引ae線與矢量AE相平行，ae線即爲合力之作用線。

由此可見求不會聚力之量及方向，與會聚力所用之方法完全相同，惟必須另外作圖，以求得其作用線。

諸力互相平行或近於平行：若諸力係互相平行，或近於平行，則上述之綜合方法，必須精加改變，因最初兩力，即不能相交，致無從求得其合力之作用線。

欲使諸力仍可求得交點，可先將諸力中之任何一力，分解爲兩個分力，假想原有之力，即以此分力代表之。然後仍依前節之

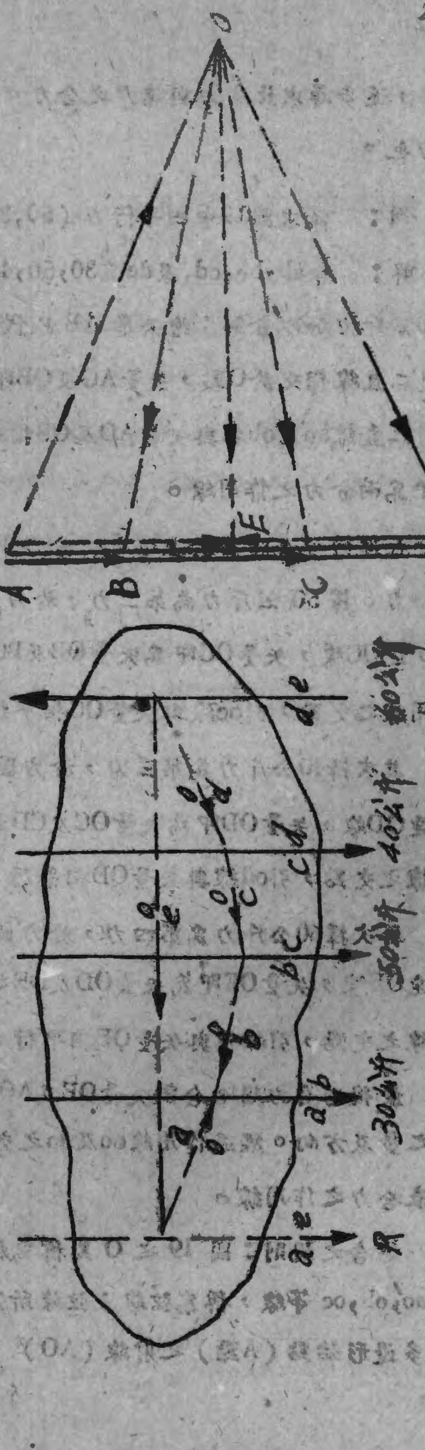


圖19

方法，逐步尋求此分力與諸力之合力。其最後合力，即顯然為原有諸力之合力也。

例： 試求圖19中四平行力（50，30，40，及60公斤）之合力。

解： 令ab，bc，cd，及de為30，50，40，及60公斤四力之作用線，假設先擇30公斤力加以分解；繪矢量 AB 以代表此力之量及方向。自矢量AB之兩端引二直線相交於O點，矢量AO及OB即為 30 公斤力之兩分力之量及方向，引二直線ao及ob各與矢量AO及OB相平行，而會聚於 ab 線之一點。ao及ob即為兩分力之作用線。

在進行綜合時，於上述之二分力中，以分力ob為第一力，分力ao為最末一力。擇50 公斤力為第二力，於力圖續引矢量 BC以代表此力之量及方向，連OC線，矢量OC即為矢量OB及BC之合力之量及方向；經過ob及bc兩作用線之交點，引oc線與矢量OC相平行，是為其作用線。

其次擇40公斤力為第三力，於力圖續繪矢量CD以代表此力之量及方向。連OD線，矢量OD即為矢量OC及CD之合力之量及方向；經過oc及cd兩作用線之交點，引od線與矢量OD相平行，是為其作用線。

再次擇60公斤力為第四力，於力圖續繪矢量DE以代表此力之量及方向，連OE線，矢量OE即為矢量OD及DE之合力之量及方向；經過od及de兩作用線之交點，引oe線與矢量OE相平行，是為其作用線。

最後乃自力圖內合併矢量OE及AO，得矢量AE。AE即代表此四力之合力之量及方向。經過作用線oe及ao之交點，引ae線與矢量AE相平行，ae即代表合力之作用線。

綜合之規則：圖 19 之 O 點稱為極點；自極點所作之直線，稱為射線。ao，ob，oc 等線，稱為弦線；弦線所完成之多邊形謂之弦線多邊形。與力之多邊形始點（A點）之射線（AO） 相平行之弦（ao），稱為始弦；與力

之多邊形終點(E點)之射線(OE)相平行之弦(oe),稱爲終弦,茲再伸述圖解法之規則如次:

(1) 先就已知之力,作成力之多邊形,自多邊形始點連接終點之閉合線,即代表合力之量及方向。

(2) 選擇極點,作射線及弦線,完成弦線多邊形,經過初弦與終弦之交點,引與合力之方向相平行之直線,是爲合力之作用線。

力之力矩:某力之力矩,即言此力對於某一定點之旋動傾向也。此傾向當然視力之大小,及其作用線至該定點之垂直距離而異,力及垂直距離大者,則此旋動傾向亦大;故一力對於某定點之力矩,即等於此力與該點達此力之垂直距離之乘積。

如一力或多力對某一定點計算力矩,此點即稱爲力矩之原點,自原點達各力作用線之垂直距離,即稱各力對此原點之臂距。設有K_1及K_2二力,對於O'點之臂距各爲a_1'及a_2',故其力矩各爲K_1a_1'及K_2a_2',對於O"點之臂距各爲a_1''及a_2'',故其力矩各爲K_1a_1''及K_2a_2''。若力以公斤計,臂距以公尺計,則力矩之單位爲公尺公斤。若力以公斤計,而臂距以公分計,則力矩之單位爲公分公斤。

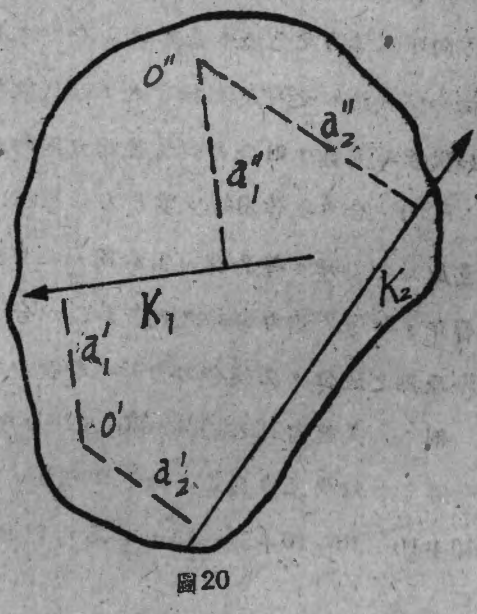


圖20

一力對於某點發生力矩時,即有將該物體旋轉之傾向。爲便利起見,力矩常冠以正負符號,以示其旋轉傾向之區別。凡旋轉傾向之與時鐘指針

旋轉方向相同者，則力矩為正；相反者，力矩為負。如圖20，K_1之力矩對於O'點為負，對於O''點為正；K2之力矩對於O'點為負，對於O''點亦為負。

力矩原理：一單力有適當之量及適當之作用線時，可與一任意力羣相平衡，此單力即名為此力羣之平衡力。能與此平衡力相抵消之另一單力，名為此力羣之合力。故所謂合力者，卽為能與一力羣發生同樣效果之一單力。於此可證明一任意力羣對於某一定點之力矩之代數和即等於其合力對於同點之力矩，是為力矩原理。

代數法之綜合：代數法之綜合，對於平行力最為適用，茲述其綜合法如次：

(1) 若於一方向之力冠以正號，反方向之力冠以負號，則合力之量及方向即以諸力之代數和表示之；合力之量等於諸力代數和之值，合力之方向即係代數和之符號。換言之，如代數和為正，則合力與正號諸力同向；如代數和為負，則合力與負號諸力同向。

(2) 合力之作用線，當用力矩原理求之，一任意力羣之合力對於一任意原點之力矩，等於諸力對於同點之力矩之代數和。故合力對於原點之臂距，即等於諸力力矩之代數和除以合力而得之商數；惟合力之作用線對於原點之地位，必使合力力矩之符號與諸力力矩之代數和之符號相同。

例：試就圖21之40，10，30，及20公斤諸力，求其合力。

解：以向上力為正，向下力為負，則諸力之代數和為

$-40+10-30-20+50-15=-45$，即其合力為45公斤，而作用向下也。

擇O點作為力矩之原點，自左至右各力對於此點之力矩如次：

$-40\times5=-200$，　$+10\times4=+40$，　$-30\times3=-90$，

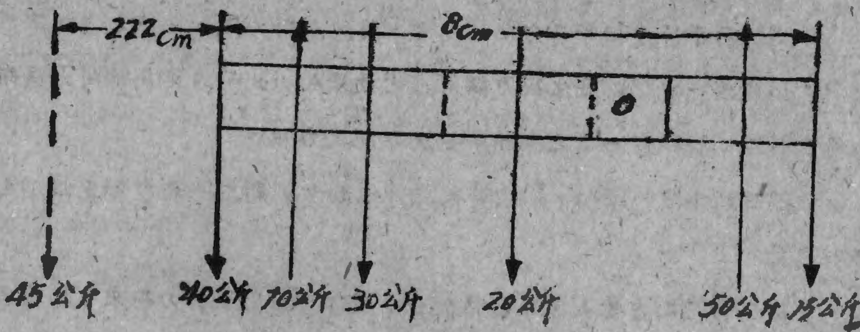


圖21

$$-20\times1=-20\ ,\qquad -50\times2=-100\ ,\qquad +15\times3=+45\ 。$$

故其代數和等於

$$-200+40-90-20-100+45=-325\text{公分公斤}。$$

即合力45公斤對於O點之力矩亦等於 -325 公分公斤。以合力除力矩之代數和，得合力與O點之距離為

$$\frac{325}{45}=7.22\text{公分}。$$

因力矩之代數和為負，故合力之作用線必在O點之左方。

兩平行力之綜合：同方向之兩平行力固可依上述方法，加以綜合，但有時可用一簡便方法如次：(1)合力等於兩力之和，而與兩力同向；(2)合力之作用線在兩力之間，與兩力之距離與其量之大小，適成反比例。例如圖 22，K_1 及 K_2 為二平行力，R 為合力，a 及 b 為R與 K_1 及 K_2 之距離，則

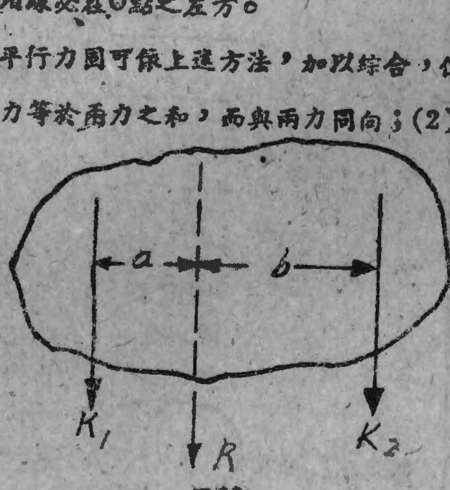


圖22

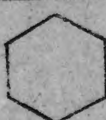
$$R=K_1+K_2\ ,$$

$$a:b=K_2:K_1\ 。$$

力偶：兩平行力相等而方向相反者，稱為一對力偶，力偶之力，不可合併，因決無一力可以發生與力偶同樣之效果也，此兩力作用線間之垂距，稱為臂距，臂距與一力之乘積，稱為力偶之力矩。

力偶旋轉物體之傾向，如與時鐘指針同向者，則力偶之力矩為正；反之則為負。

重心：物體之重量，係因地球對於物體各部份之吸引力而來；物體各部份所受之引力皆與地面相正交，故可視為一平行力羣。此平行力羣之合力即為全部物體之重量，其施力點謂之重心，次列一表示若干正規幾何形體之重心。

幾何形體			重心
正圓形		半徑r	圓心
正方形		邊長a	對角線之交點
長方形		邊長a,b	對角線之交點
平行四邊形		邊長a,b	對角線之交點
三角形		長邊a,b,c	三中線之交點
正多邊形		邊長l	內切圓之圓心
橢圓形		長徑a,短徑b	兩直徑之交點

任意物體之重心：設有一任意物體，其各部份之重量為W_1，W_2，及W_3，其全部重量為W，換言之，地球對於物體各部份之引力為W_1，W_2，及W_3，對於全部物體之引力為W。W卽為平行力羣之合力，

$$W=W_1+W_2+W_3。$$

引長方軸線OX及OY。假設W_1，W_2及W_3之重心之坐標為(X_1Y_1)，(X_2Y_2)及(X_3Y_3)；全部物體之重心之坐標為(X,Y)。平行力羣對於O點之力矩之代數和，卽為合力之力矩。故由圖23，

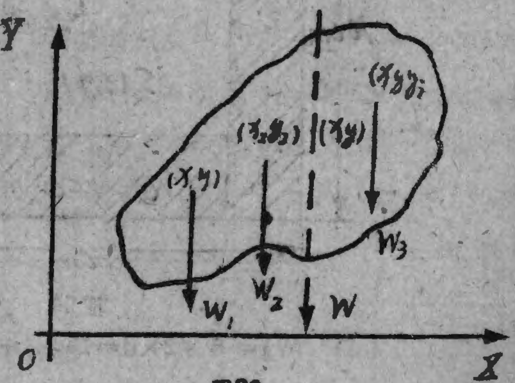


圖23

$$Wx=W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3,$$

$$x=\frac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3}{W}。\qquad (3)$$

旋轉坐標軸90°，以同法求力矩和，得

$$Wy=W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3,$$

$$y=\frac{W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3}{W}。\qquad (4)$$

例： 已知每平方公分之重量為d公斤，求圖24之平板之重心。

解： 分解平板為五部份，得五長方形，此五部份之重量及重心之坐標為

$$W_1=10\times2\times d=20d\text{公斤}，(X_1Y_1)=(1,5)；$$

$$W_2=4\times2\times d=8d\text{公斤}，(X_2Y_2)=(4,9)；$$

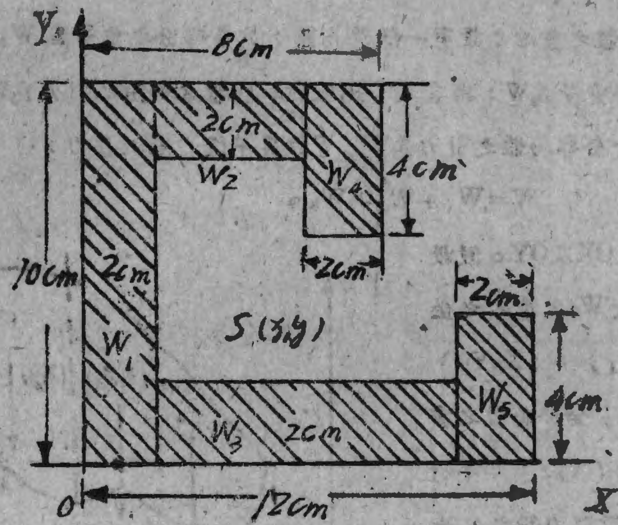


圖24

$W_3 = 8 \times 2 \times d = 16d$公斤，$(X_3 Y_3) = (6, 1)$；

$W_4 = 2 \times 4 \times d = 8d$公斤，$(X_4 Y_4) = (7, 8)$；

$W_5 = 2 \times 4 \times d = 8d$公斤，$(X_5 Y_5) = (11, 2)$。

全部平板之重量即爲五部份重量之和。

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5$$

$$= 20d + 8d + 16d + 8d + 8d = 60d \text{公斤。}$$

令S表全部平板之重心，(X,Y)爲其坐標；根據力矩原理，

$$Wx = 20d \times 1 + 8d \times 4 + 16d \times 6 + 8d \times 7 + 8d \times 11,$$

$$60dX = 20d + 32d + 96d + 56d + 88d,$$

$$X = \frac{292d}{60d} = 4.87 \text{公分。}$$

旋轉坐標軸90°，依同法，

$$y = \frac{20d \times 5 + 8d \times 9 + 16d \times 1 + 8d \times 8 + 8d \times 2}{60d}$$

$$= \frac{268d}{60d} = 4.47 \text{公分。}$$

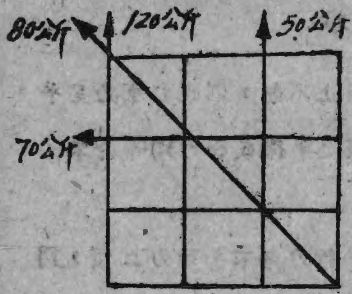


圖25

習　　題

（1）試就圖25內，求50，70，80，及120公斤四力之合力（應用圖解法）。

（2）試就圖25內，求120，及50公斤二力之合力（應用代數法）。

（3）試就圖26內，求80，40，20，50，100及60公斤之合力（應用圖解法）。

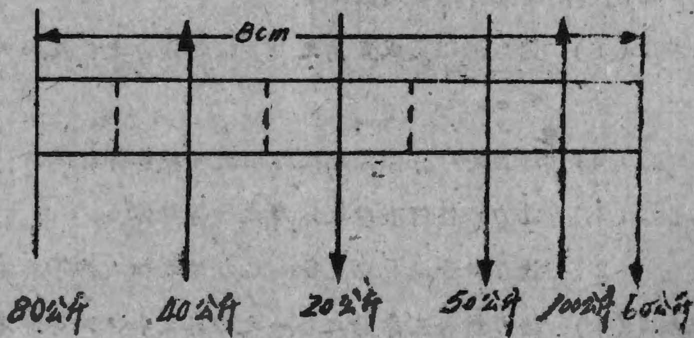


圖26

（4）試就圖26內，求80，40，20，50，100及60公斤之合力（應用代數法）。

（5）試求圖27內平板之重心。

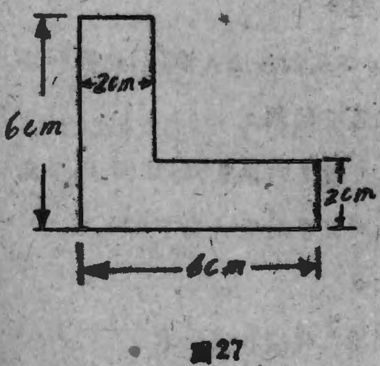


圖27

d. 不會聚力之平衡

力之平衡：一物體存受諸力體之作用，而靜止不動，則此力羣必呈平衡狀態，因更無須其他外力以平衡之，故此力羣之平衡或合力均等於零，諸力對於任意原點之力矩之代數和亦等於零。

不會聚不平行力之平衡條件：不會聚力有平行力與不平行力二類，關於不平行力之平衡，可舉數例題以示範；茲為解答之便利起見，依照例題之性質，而分別其平衡條件為下列四組：

第一組：(1) 諸力沿相交成直角之兩直線之分力之代數和，各等於零。

(2) 諸力對於任何原點之力矩之代數和等於零。

第二組：(1) 諸力沿任何直線之分力之和等於零。

(2) 諸力對於兩原點之各一之力矩之和，均等於零。

第三組：(1) 諸力對於三原點之各一之力矩之和，均等於零。

第四組：(1) 諸力對於某原點之力矩之代數和等於零。

(2) 諸力之力之多邊形為閉合。

前三組條件均適用於代數法；第四組之(1)亦為代數法，惟(2)為圖解法。凡此條件，亦可用以解答會聚力在平衡狀態之問題。

平行力之平衡條件：關於平行力羣之平衡，亦舉數例題以示例；為解答習題之便利起見，亦依照其性質，而分別其平衡條件為下列二組：

第一組：(1) 諸力之代數和等於零。

(2) 諸力對於某原點之力矩之代數和等於零。

第二組：(1) 諸力對於兩原點之各一之力矩之代數和等於零。

例一：以兩繩懸繫細桿AB，使適得水平；已知AB桿長50公分，C點

之懸重為100公斤，A繩之斜角爲60度。試求兩繩之張力及B繩之傾斜角。

解：命兩繩之張力爲K'及K''沿水平及垂直方向，分解K'及K''爲K'_x,

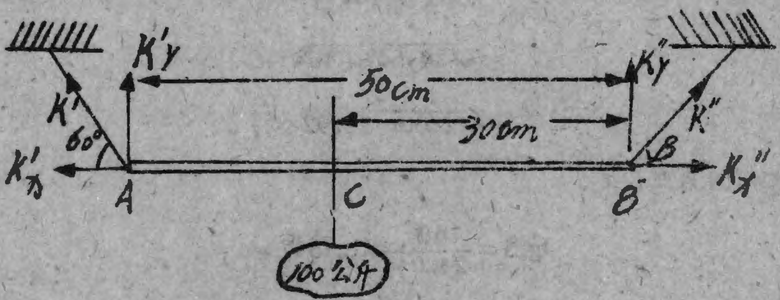


圖28

K'_y,K''_x,及K''_y四分力。應用不平行力之平衡條件第一組，(1)諸力沿相交成直角之兩直線之分力之代數和，各等於零，

$$K_x' = K_x''. \qquad (1)$$

$$K_y' + K_y'' = 100. \qquad (2)$$

(2)諸力對於任何原點之力矩之代數和等於零。以B點為原點，則

$$K_y' \times 50 = 100 \times 30, \qquad (3)$$

$$k_y' = 60\text{公斤}.$$

代入(2)式，得

$$K_y'' = 40\text{公斤}.$$

因A繩之傾斜角爲60°，與垂線之夾角爲30°，故

$$K_y' = K'\cos 30°,$$

$$K' = \frac{60}{0.866} = 69.28\text{公斤}.$$

$$K_x' = K'\cos 60° = 34.64\text{公斤}.$$

代入(1)式，得

$$K_x'' = 34.64\text{公斤}.$$

合併K_x''及K_y''得B繩之張力為

$$K''=\sqrt{K_x''^2+K''^2_y}$$

$$=\sqrt{34.64^2+40^2}$$

$$=\sqrt{2800}=52.92\text{公斤。}$$

B繩之傾斜角為β，

$$tg\beta=\frac{40}{24.64}=1.1547\text{，}$$

$$\beta=49°7'\text{。}$$

例二：有細棒AB斜倚壁上，棒之中點，懸重100公斤如圖29，試求AB兩點之支力（已知A點支力之垂直分力為水平分力之三倍）。

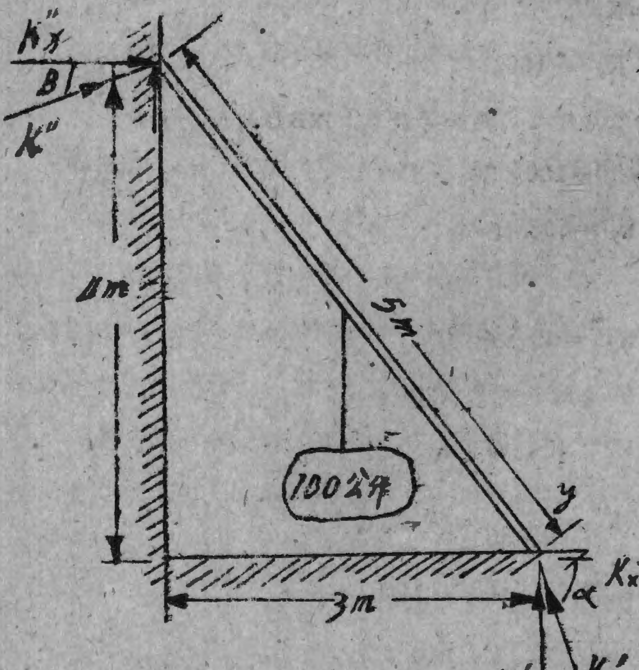


圖29

解：命AB兩點之支力為K'及K''。沿水平及垂直方向，分解K'及K''為K_x', K_y', K_x''及K_y''四分力。應用不平行力之平衡條件第二組，(1)諸力沿任何直線之分力之和等於零，

$$K_x'=K_x''\text{。} \qquad (1)$$

(2)諸力對於兩原點之各一之力矩之和，均等於零。以A點為原點，諸力對於A點之力

矩爲$4K_x''+3K_y''=100\times1.5$；

以B點爲原點，諸力對於B點之力矩爲

$$4K_x'+100\times1.5=3K_y'$$ 。

已知A點支力之垂直分力爲其水平分力之三倍，即$K_y'=3K_x'$；代入(3)式，

$$4K_x'+150=9K_x'$$，

$$5K_y'=150$$

$$K_x'=30公斤$$ 。

$$K_y'=3K_x'=90公斤$$ 。

由(1)式，

$$K_x''=K_x'=30公斤$$ 。

代入(2)式，

$$4\times30+3K_y''=150$$；

$$3K_y''=150-120=30$$，

$$K_y''=10公斤$$ 。

合併K_x'及K_y'，得A點之支力爲

$$K'=\sqrt{K_x'^2+K_y'^2}\sqrt{30^2+90^2}$$

$$=\sqrt{9000}=94.87公斤$$ 。

命α爲K'與水平線之夾角，

$$tg\alpha=\frac{90}{30}=3$$，

$$\alpha=71^\circ34'$$ 。

合併K_x''及K_y''，得B點之支力爲，

$$K''=\sqrt{K_x''^2+K_y''^2}=\sqrt{10^2+30^2}$$

$$=\sqrt{1000}=31.62公斤$$ 。

命β爲K''與水平線之夾角，

$$\text{tg}\,\beta=\frac{10}{30}=0.3333,$$

$$\beta=18°26'。$$

例三：以細橫桿AB之一端固繫於壁上，他端以繩懸繫之於壁上如圖30。試求A點之支力及繩中之張力。

解：命A點之支力爲K',B點繩之張力爲K''。沿水平及垂直方向，分解K'及K''爲K_x',K_y',K_x'',及K_y''四分力。應用不平行之平衡條件第三組，諸力對於三原點之各一之力矩之和，均等於零。以A點爲原點，諸力對於A點之力矩爲

$$500\times2=K_y''\times4, \qquad (1)$$

$$K_y''=250\text{公斤}。$$

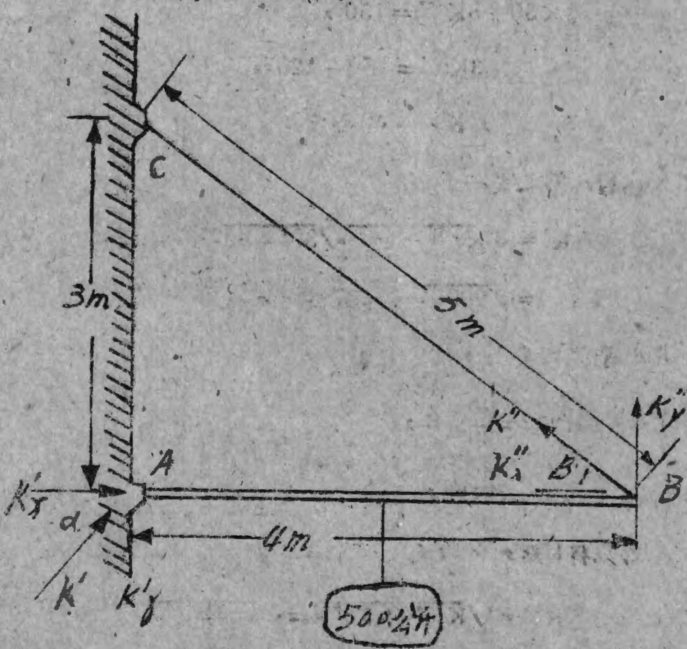


圖30

以B點為原點，諸力對於B點之力矩為

$$K_y' \times 4 = 500 \times 2, \qquad (2)$$

$$K_y' = 250\text{公斤}。$$

以C點為原點，諸力對於C點之力矩為

$$500 \times 2 = K_x' \times 3, \qquad (3)$$

$$K_x' = 333.33\text{公斤}。$$

因$K_x'' = K_x'$，故

$$K_x'' = 333.33\text{公斤}。$$

合併K_x'及K_y'，得A點之支力為

$$K' = \sqrt{K_x'^2 + K_y'^2} = \sqrt{333.33^2 + 250^2}$$

$$= 416.66\text{公斤}。$$

令α為K'與水平線間之夾角，

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{250}{333.33} = 0.75,$$

$$\alpha = 36°52'。$$

合併K_x''及K_y''，得B點繩之張力為

$$K'' = \sqrt{K_x''^2 + K_y''^2} = \sqrt{333.33^2 + 250^2}$$

$$= 416.66\text{公斤}。$$

令β為K''與水平線間之夾角，

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{250}{333.33} = 0.75;$$

$$\beta = 36°52'。$$

例四：以細橫桿AB之一端固繫於天花板上，他端以繩亦懸繫之於天花板，使繩與橫桿適相正交如圖31。試求A之支力，及繩中之張力。

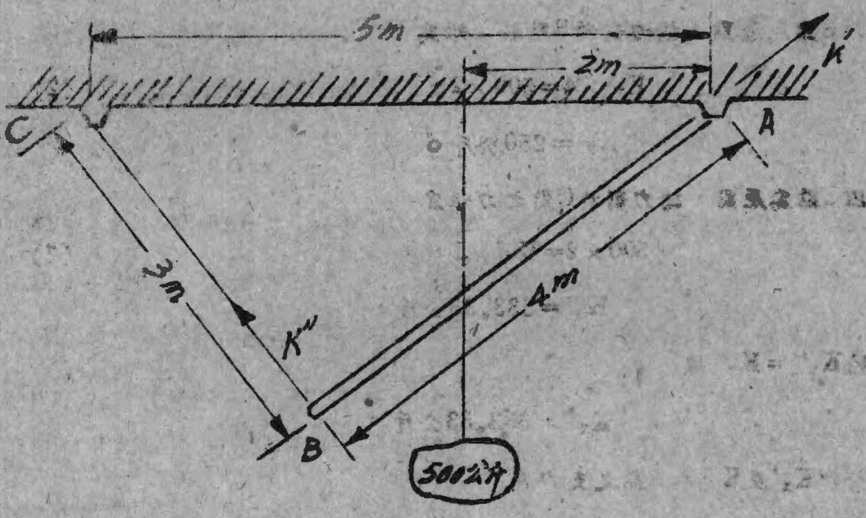


圖31

解：命A點之支力為K',B點繩之張力為K''。應用不平行力之平衡條件第四組，(1)諸力對於某原點之力矩之代數和等於零。命A點為原點，諸力對於A點之力矩為

$$K'' \times 4 = 500 \times 2,$$

$$K'' = 250\text{公斤}。$$

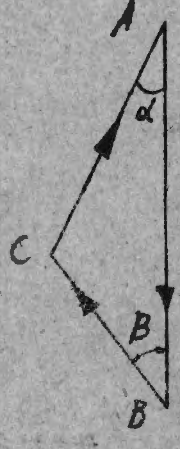


圖32

(2)諸力之力之多邊形為閉合。以便利之比例尺度，1公分等於100公斤，引矢量AB長5公分，代表物體之重量500公斤。自B點續引矢量BC長2.5公分，方向與繩相平行，以代表繩之張力250公斤。連接CA線，矢量CA即代表A點之支力。

以比例尺量矢量CA之長度，得3.33公分；故A點之支力為

$$K_1 = 3.35 \times 100 = 335\text{公斤}。$$

量[illegible]角形之內角，得α為30°，β為39.9°。故繩之張力與垂線間之夾角為36.9°；A點之支力與垂線間之夾角為30°。

例五：圖33之構架支托於AB兩端，負担垂直重荷1800及600公斤。試求兩端之支力。

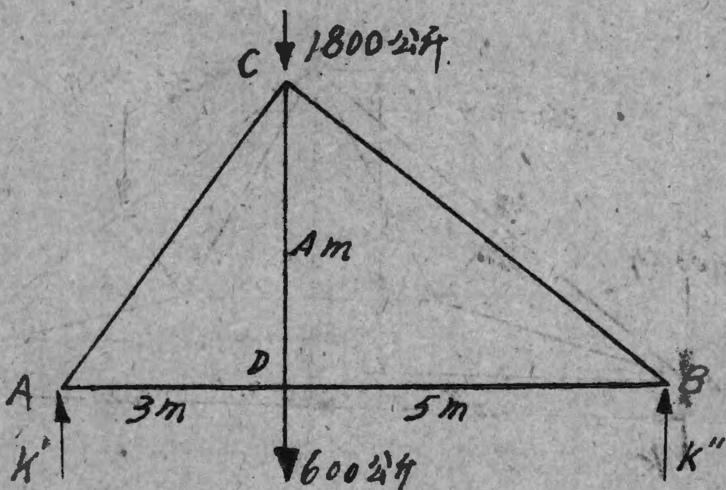


圖33

解：令K'及K''為AB兩端之支力。此平衡系統係屬於平行力羣。應用平行力之平衡條件第一組，(1)諸力之代數和等於零，

$$K' + K'' = 1800 + 600 = 2400。 \tag{1}$$

(1)諸力對於某原點之力矩之代數和等於零；以A點為原點，諸力對於A點之力矩為

$$1800 \times 3 + 600 \times 3 = K'' \times 8， \tag{2}$$

$$8K'' = 5400 + 1800 = 7200。$$

$$K'' = 900公斤。$$

代入(1)式，得

$$K' = 2400 - 900 = 1500公斤。$$

例六：圖34之構架撐力於AB兩端，負担垂直重荷1800公斤，3600公斤，3600公斤，3600公斤，及1800公斤。試求兩端之支力。

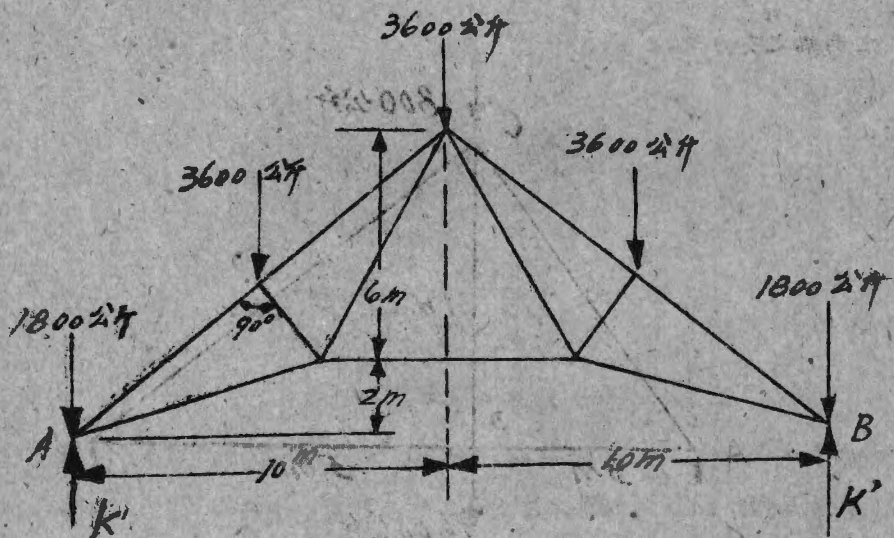


圖34

解：命K'及K''爲AB兩端之支力。此平衡系統係一平行力羣。應用平行力之平衡條件第二組，諸力對於兩原點之各一之力矩之代數和，均等於零，命A點爲原點，諸力對於A點之力矩爲

$$3600\times5+3600+10+3600\times15+1800\times20=K''\times20, \qquad (1)$$

$$20K''=18000+36000+54000+36000=144000,$$

$$K''=7200\text{公斤}。$$

命B點爲原點，諸力對於B點之力矩爲

$$20K'=3600\times5+3600\times10+3600\times15+1800\times20 \qquad (2)$$

$$=18000+36000+54000+36000=144000,$$

$$K'=7200\text{公斤}。$$

習　　題

(1) 圖53之構架支托於AB兩端，負担重荷8000公斤及12000公斤。試求兩端之支力。

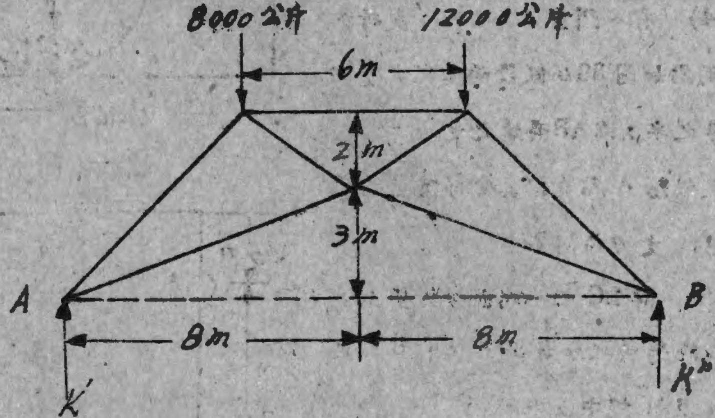


圖35

(2) 圖36之構架支托於AB兩端，負担重荷2000公斤，試求兩端之支力。

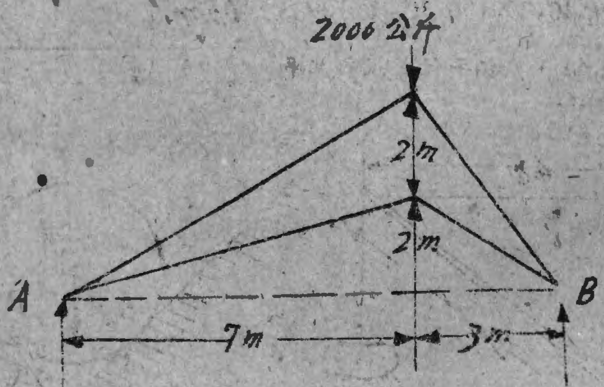


圖36

(3) 大球直徑爲40公分，重10公斤；小球直徑30公分，重5公斤。二球貯於盒中如圖37，求A,B,C,及D四點之支力。

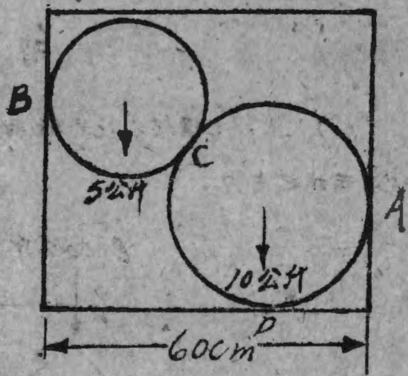


圖37

(4) 有一門重30公斤，支持於A,B兩點如圖38。假設兩支點各負担其重量之半，求AB兩端之支力。

又假想A點負担其全部重量，問AB兩點之支力爲何？

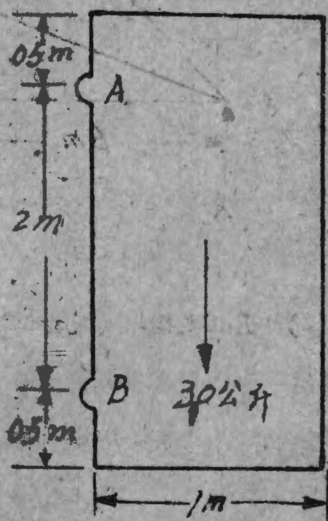


圖38

(5) 桿BC之一端固繫於壁上，他端以繩懸繫之如圖39。試求B點之支力，及AC繩中張力。

(6) 一球直徑爲30公分，置於V形槽內如圖40。試求AB兩切點之支力。

(7) 有40,80,100,30,及100公斤五力如圖41，互相平行。試求其平衡力及其支點。

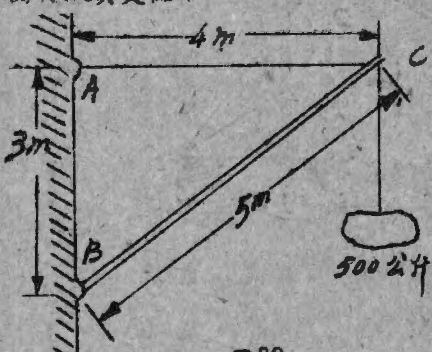


圖39

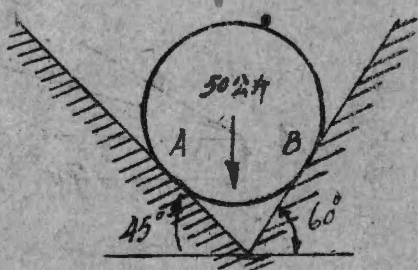


圖40

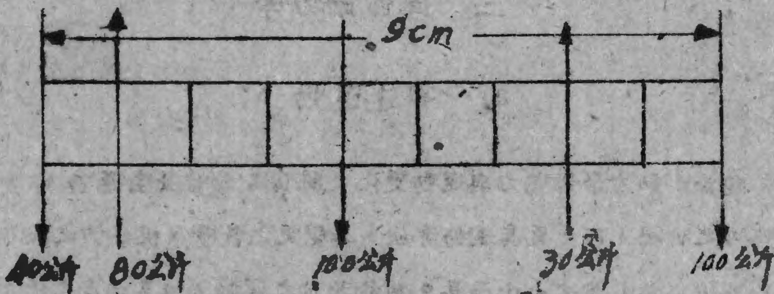


圖41

(8) 有細棒AB斜倚壁上如圖42。於C點(AC=2m)懸重50公斤，試於AC兩點之支力。(已知A點支力之垂直分力爲水平分力之二倍)。

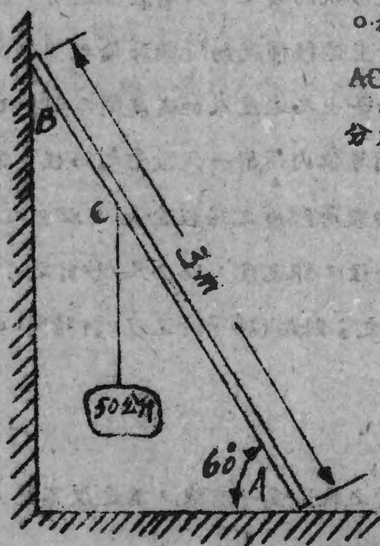


圖42

三　固體動力學

a. 等速運動

總論：動力學研究力與運動變化之關係；物體發生運動時，時常能受外力之作用，而變更其運動情狀，其變更之數量，視外力之大小及物體對於外力之抵抗性之大小而異。關於物體之運動，依其速度之情形而言之，可分別爲等速運動及不等速運動二種。不等速運動又可分爲等加速及不等加速二種運動。依其運動軌道之形狀而言之，又有直線運動，圓周運動，及其他曲線運動之別。吾人對於上述種種運動所欲討論之問題，即爲求得運動變位，時間，及由此二量而導出之速度及加速度間之關係。

等速運動：若物體在每一時間單位內運行一定數量之路程，則該物體之運動爲一等速運動。設以S表物體所經歷之路程全長，以公尺計之；v表每一時間單位內物體所運行之路程，即速度，以公尺/秒計之；t表物體運行S段路程所需之時間，以秒計之；則路程S等於速度v與時間t之乘積，即

$$S=vt\text{。} \tag{1}$$

直線等速運動：若物體所運行之軌道爲一直線，其速度不變，則此運動稱爲直線等速運動。

例一：有某物體作直線等速運動，每秒鐘行4公尺，問在一小時內行若干公尺？

解：　　$S=vt=4\times3600=14400$ 公尺 $=14.4$ 公里。

例二：有某物體作直線等速運動，在10分鐘內行120公尺，問其速度爲何？

解：　　$V=\frac{S}{t}=\frac{120}{10\times60}=\frac{120}{600}=0.2$公尺/秒。

圓周等速運動：若物體所運行之軌道為一正圓形之圓周，其速度不變，則此運動稱為圓周等速運動。設圓之直徑為D公尺，物體於圓周每分鐘行n轉，則一分鐘内所運行之路程為

$$S=D\cdot\pi\cdot n\text{公尺},$$

即每秒鐘之速度為

$$v=\frac{S}{t}=\frac{D\pi n}{60}\text{公尺/秒} \tag{2}$$

此速度稱為周圍速度。

例一：有一圓輪，直徑4公尺，每分鐘轉240轉，問其周圍速度為何？

解：　　$v=\frac{S}{t}=\frac{D\pi n}{60}=\frac{4\times\pi\times240}{60}=50.26$公尺/秒。

例二：皮帶之速度為須25公尺/秒，若皮帶輪每分鐘轉180轉，問輪之直徑D應為若干？

解：應用(2)式，$v=\frac{D\pi n}{60}$，得

$$D=\frac{60\ v}{\pi n}=\frac{60\times25}{\pi\times180}=2.65\text{公尺}。$$

角速度：有一物體，於半徑等於一單位長度(例如一公尺)之圓周，作圓周運動，則其周圍之速度為$\frac{2\pi n}{60}$。此數量亦稱為角速度，普通以ω表之，

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30}\,1/\text{秒} \tag{3}$$

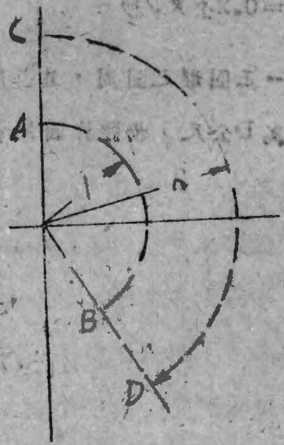


圖43

祇照圖43所示，物體沿半徑爲一單位長度之圓周，自A點運動至B點；或沿半徑爲R之圓周，自C點運動至D點；皆需時間1秒鐘。則 ω 爲物體沿半徑一單位長度之圓周運動之周圍速度，亦即等於 ω；$\widehat{CD}$ 爲物體沿半徑R之圓周運動之周圍速度，以V表之。故

$\widehat{CD}:\widehat{AB}=R:1$，

$v:\ \omega=R:1$，

$V=R\omega$。

故周圍速度即等於角速度與半徑之乘積。

例一：有一輪，每分鐘轉300轉，問其角速度爲何？

解：　　$\omega=\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi\times300}{30}=31.4\quad 1/秒$

例二：若此輪之半徑R爲2公尺，問其周圍速度爲何？

解：　　$v=R\omega=2\times31.4=62.8$ 公尺/秒。

等速運動之圖解：由等速運動之公式，$S=vt$，若已知式中之二量，則第三量卽可應用此式演算而出。茲再述其圖解法如次：

(1)　以S爲縱標，t爲橫標，繪圖，得一傾斜之直線，是爲 S—t 圖。此傾斜直線之斜率，即爲物體之運動速度。

(2)　以v爲縱標，t爲橫標，繪圖，得一水平之直線，是爲 v—t 圖。v—t圖所包圍之面積，即爲運動物體之變位。

例一：設有AB兩物體，由靜止開始作等速運動；A物體於10秒鐘行15公尺，B物體於10秒鐘行7.5公尺。試求兩物體之運動速度。

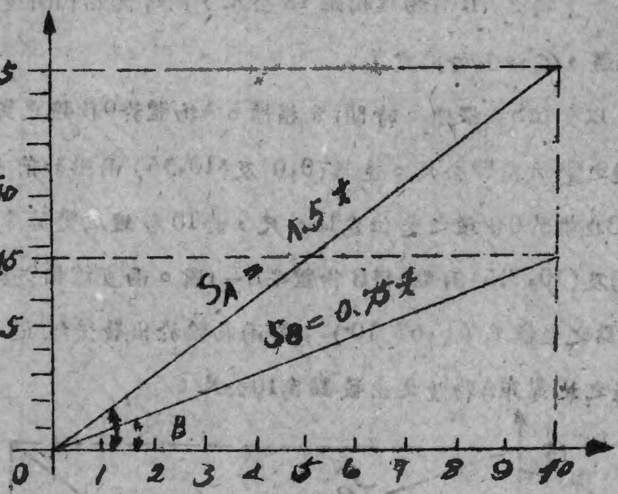


圖44

解：以變位S爲縱標，時間t爲橫標。A物體於0秒鐘之變位爲0公尺，於10秒鐘之變位爲15公尺；故連接(0,0)及(10,15)兩點，得一傾斜之直線，是爲A物體之S－t圖。命α表此直線之斜角，其斜率爲

$$tg\alpha=\frac{15}{10}=1.5,$$

故A物體之運動速度爲

$$V_A=1.5\text{公尺/秒}。$$

依同法，B物體於0秒鐘之變位爲0公尺，於10秒鐘之變位爲7.5公尺；故連接(0,0)及(10,7.5)兩點，得一傾斜之直線，是爲B物體之S－t圖。命β表此直線之斜角，則其斜率爲

$$tg\beta\frac{7.5}{10}0.75,$$

故B物體之運動速度爲

$$V_B=0.75\text{公尺/秒}。$$

例二：上題之AB兩物體相距15公尺，同時開始相向運動，問經過幾秒鐘後相遇，及相遇於何處？

解：以變位S為縱標，時間t為橫標。A物體於0秒鐘之變位為0公尺，於10秒鐘之變位為15公尺。連接(0,0)及(10,15)兩點如前，得A物體之S—t圖。B物體於0秒鐘之變位為15公尺，於10秒鐘之變位為7.5公尺。連接(0,15)及(10,7.5)兩點，得B物體之S—t圖。兩直線相交於P點。由圖45，讀得P點之坐標為(6,67.10)；即兩物體於出發後經過6.67秒鐘即相遇，相遇之地點距A物體之出發點為10公尺。

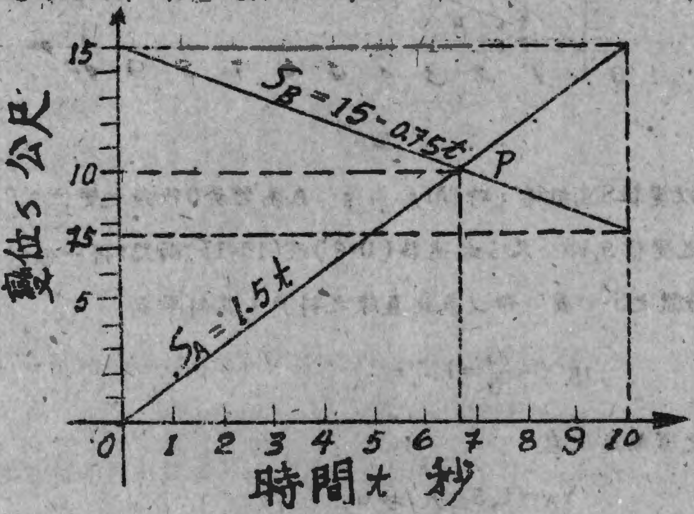


圖45

例三：有一物體，以每秒鐘0.45公尺之速度，作等速運動，問經歷16秒鐘後之變位為何？

解：以速度v為縱標，時間t為橫標。因物體作等速運動，於縱軸0.45公尺/秒之處，引直線與橫軸平行，是為v—t圖。

於橫軸t=16秒之處，引直線與縱軸相平行，得一矩形。此矩形之面積，即等於該物體於16秒鐘內之變位。即

$S=vt=0.45\times16=7.2$公尺。

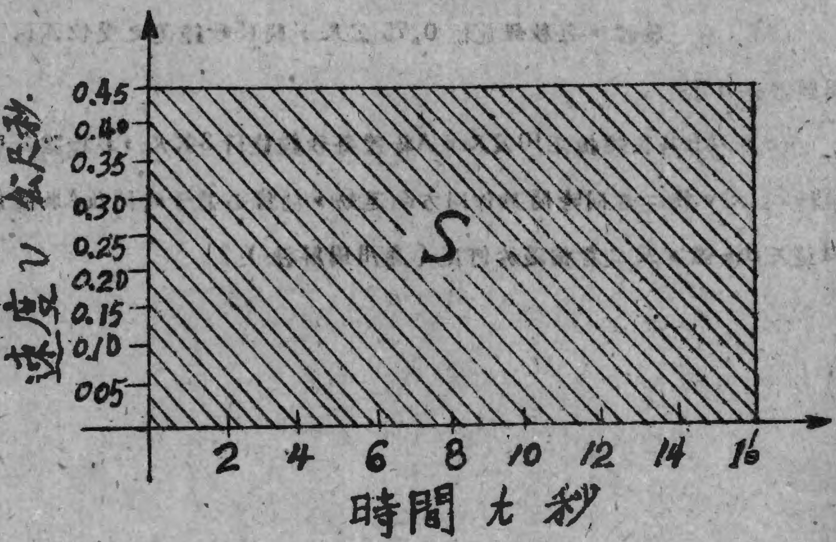


圖46

習　　題

(1)　有一輪，每分鐘轉1200轉，問其角度爲何？若輪之半徑R爲1.5公尺，問其周圍速度爲何？

(2)　有一物體，沿一直線作等速運動，於一小時內行15公里，問其速度爲何？

(3)　列車之速度爲每小時60公里，問二小時半能行路程若干？

(4)　有一圓輪，直徑3公尺，每分鐘轉150轉，問其周圍速度爲何？

(5)　已知某輪之周圍速度爲30公尺/秒。若該輪每分鐘轉240轉，問輪之直徑應爲若干？

(6)　AB兩物體相距50公尺，A物體每秒鐘能行5公尺，B物體每秒鐘能行3公尺，設二者同時開始相向運動，問經過若干時間後相遇，及相遇於

何處（應用圖解法）？

(7) 有一物體，每秒鐘能行0.75公尺，問15秒鐘後之變位爲何（應用圖解法）？

(8) AB兩物體相距10公尺。A物體每秒鐘能行3公尺，B物體每秒鐘能行2公尺。設二者同時開始作同方向運動，問經過若干時間後A物體能自後追及B物體，及二者相遇於何處（應用圖解法）？

b. 不等速運動

加速度：若物體於每一單位時間内所運行之路程爲一不定數，則物體隨時變更其速度，此種運動謂之不等速運動。物體於每秒鐘變更其速度時，若速度逐漸增大者，是爲加速運動。若速度逐漸減小者，是爲減速運動。每秒鐘内速度增大或減小之數值，謂之加速度或減速度。

圖47表示一作不等速運動之物體之v—t圖。物體於t＝0時有初速度v_0

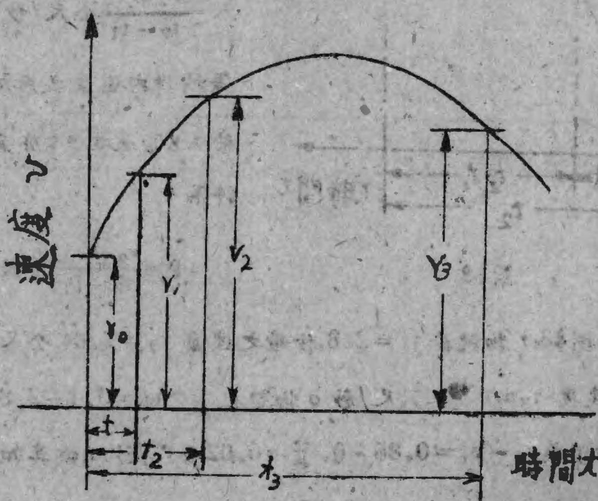


圖47

，至t_1時之速度爲v_1，至t_2時之速度爲v_2，曲線漸次上昇，速度逐漸增加，此時物體之運動逐漸加速。曲線達最高峯時，速度亦達到最大值。此後曲線漸呈下降，至t_3時，速度減少爲v_3，故物體之運動亦逐漸減速。

若已知v—t圖之曲線，欲測知某點之加速度之方法，可應用圖48以示例。於曲線上取任意點A，經A點，作切線MN。在A線之兩測，於切線上取MN兩點。當MN兩點之範圍較小時，線段MN與曲線相近似，故可以切線之線段替代曲線。

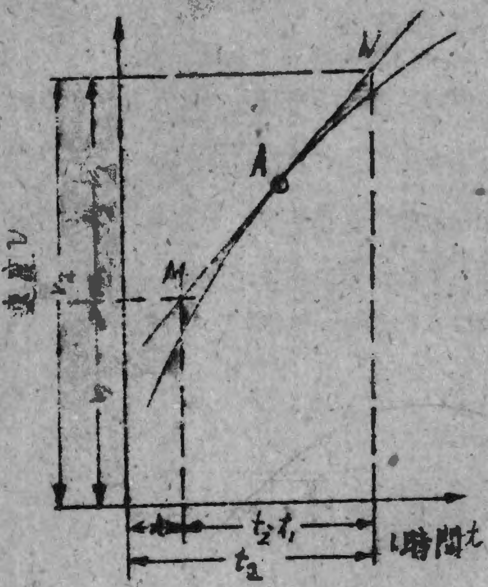


圖48

假設物體於時間t_1秒鐘時之速度為v_1公尺/秒，於時間t_2秒鐘時之速度為v_2公尺/秒。物體於t_2-t_1秒鐘內之速度增加值為v_2-v_1公尺/秒，故每秒鐘之速度增加值為

$$\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\text{公尺/秒}^2。$$

每秒鐘內速度之增加值謂之加速度，以p表之。p亦為切線MN之斜率，

$$p=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\text{公尺/秒}^2。\qquad (1)$$

假設由圖48，物體於$t_1=2.8$秒鐘之速度$v_1=0.84$公尺/秒；於$t_2=3.1$秒鐘之速度$v_2=0.86$公尺/秒。物體於$t_2-t_1=3.1-2.8=0.3$秒鐘內之速度增加值為$v_2-v_1=0.86-0.84=0.02$公尺/秒。故其加速度為

$$p=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{0.02}{0.3}=0.067\text{公尺/秒}^2。$$

如圖48曲線A點之速度$v_a=0.85$公尺/秒，則在此後之一秒鐘內之速度應為

$$v_{a+1}=0.85+0.067=0.917\text{公尺/秒}^2。$$

直線等加速運動：若各秒鐘內，加速度之數值均相等，是為等加速運動。命$\pm p$為每秒鐘內之加速度或減速度，觀察物體運動之結果，得其速度為v_0。命v_t為物體運動經過t秒鐘之速度，由圖49，

$$v_t=v_0\pm pt。\qquad (2)$$

因v−t圖所包圍之面積即為物體於t秒鐘所運行之路程，故

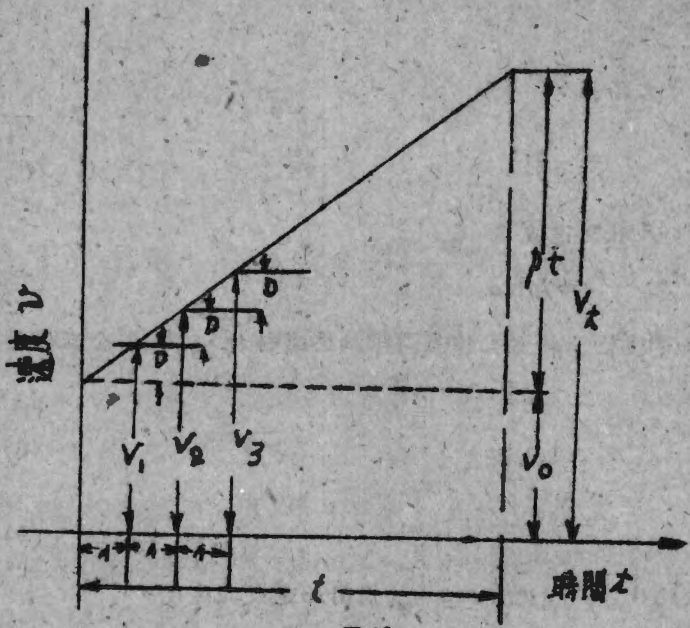


圖49

$$S=\frac{v_0+v_t}{2}\cdot t。$$

代入(2)式 $v_t=v_0\pm pt$，得

$$S=\frac{v_0+v_0\pm pt}{2}t，$$

$$S=v_0t\pm\frac{1}{2}pt^2。 \quad (3)$$

由（2）（3）兩式，

$$v_t^2=v_0^2\pm 2pS。 \quad (4)$$

（2），（3），（4）三式即為物體作等加速或等減速運動之運動公式。

自由墜體：物體於真空內因受地心引力而下墜，亦為等加速運動之一種。於空氣中之自由墜體為一近似之等加速運動，其加速度約等於9.81公尺/秒²，普通以g表之。物體開始下墜時，其初速度通常為零，故由(2)式，

$$v_t=gt。 \quad (5)$$

命h為物體下墜之路程，

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \tag{6}$$

物體於下墜h公尺後之速度為

$$v_t^2=2gh。 \tag{7}$$

圓周等加速運動：物體之作圓周等加速運動者，其運動公式仍應用上述之基本公式，

$$v_t=v_0\pm pt， \tag{8}$$

$$S=\frac{v_0+v_t}{2}t。 \tag{9}$$

但此時v_0及v_t均代表周圍速度，p為其周圍加速或減速度，

計算旋轉運動之時，吾人常應用角速度ω及角加速度ε。命圓周之半徑為R，初速度為每分鐘行n_o轉，經過t秒鐘之速度為每分鐘行n轉。由(8)式

$$v_t=v_0\pm pt，$$

$$\frac{v_t}{R}=\frac{v_0}{R}\pm\frac{p}{R}t；$$

代入 $v_t=\frac{D\pi n}{60}$，　$V_o=\frac{D\pi n_o}{60}$，

$$\frac{D\pi n}{60R}=\frac{D\pi n_o}{60R}\pm\frac{p}{R}t，$$

$$\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi n_o}{30}\pm\frac{p}{R}\cdot t。$$

命$\frac{\pi n}{30}$為ω_t為物體運動經過t秒鐘之角速度；$\frac{\pi n_o}{30}$為ω_o物體開始運動時之初角速度；故

$$\omega_t=\omega_0\pm\frac{p}{R}t，$$

$$\pm\frac{p}{R}=\frac{\omega_t-\omega_0}{t}。$$

$\omega_t-\omega_0$為角速度之增大值或減少值；$\frac{\omega_t-\omega_0}{t}$為每秒鐘角速度之增大值，或減少值。每秒鐘角速度之增大值，是為角加速度，＋ε表之；每秒鐘角速度之減少值，是為角減速度，以－ε表之；故得

$$\omega_t=\omega_0\pm\varepsilon t。\qquad(10)$$

角加速度與角減速度以〔1/秒²〕為單位。

例一：有一輪直徑4公尺，初速度n_0為分鐘120轉，經過10秒鐘後，加速至每分鐘180轉。問周圍加速度p為何？

解：

$$V_t=\frac{D\pi n}{60}=\frac{4\times\pi\times180}{60}=12\pi\text{公尺/秒，}$$

$$V_0=\frac{D\pi n_0}{60}=\frac{4\times\pi\times120}{60}=8\pi\text{公尺/秒，}$$

$$p=\frac{V_t-V_0}{t}=\frac{12\pi-8\pi}{10}=0.4\pi\text{公尺/秒}^2。$$

例二：有一輪。直徑4公尺。初速度為n_0為每分鐘240轉。若此後其角加速度為$2\,1/秒^2$。問過10秒鐘後，每分鐘能轉若干轉？

解： 應用（10）式，

$$\omega_t=\omega_0+\varepsilon t$$

$$=\frac{\pi n_0}{30}+2\times10$$

$$=\frac{\pi\times240}{30}+20$$

$$=8\pi+20$$

$$=25.13+20=45.13^{1}/\text{秒}。$$

令10秒後每分鐘之轉數爲n，

$$45.13=\frac{\pi n}{30}$$

$$n=\frac{30\times 45.13}{\pi}=430.6\text{轉}。$$

令Vt爲10秒後之周圍速度，

$$Vt=R\omega t=2\times 45.13$$

$$=90.26\ \text{公尺/秒}。$$

例三： 有一輪，直徑5公尺，初速度n_o爲每分鐘轉120轉。過10秒鐘後，其速度n增加至每分鐘150轉。問在此10秒鐘內，輪週之一點，曾轉過若干路程？

解： 應用公式（9），

$$S=\frac{V_o+Vt}{2}\cdot t,$$

代入 $V_o=\frac{D\pi n_o}{60}$，$Vt=\frac{D\pi n}{60}$，

$$S=\frac{\frac{D\pi n_o}{60}+\frac{D\pi n}{60}}{2}\times 10$$

$$=\frac{\frac{5\pi\times 120}{60}\times\frac{5\pi\times 150}{60}}{2}\times 10$$

$$=\frac{5\pi\times 10}{120}(120+150)=\frac{5\pi\times 10}{120}\times 270$$

$$=353.57\text{公尺}。$$

令i表該輪在此10秒鐘內之轉數，

$$i=\frac{n_0\times n}{2\times 60}\times 10=\frac{10(120\times 150)}{120}$$

$$=\frac{2700}{120}=22.5\text{轉。}$$

例四：　有一小圓輪A作等加速運動，於5秒鐘內能行路程50公厘如圖50所示；已知其初速度V_0為零，故其加速度為$p=\frac{2s}{t^2}=\frac{2\times 50}{25}=4$公厘/秒^2。圖51為其V—t曲線，圖52為其S—t曲線，若用一偏輪a推動此小圓輪；設a在每分鐘內轉4轉，同時須能使小圓輪中心之運動情形，與圖52所示者相吻合，試作此偏輪之外形。

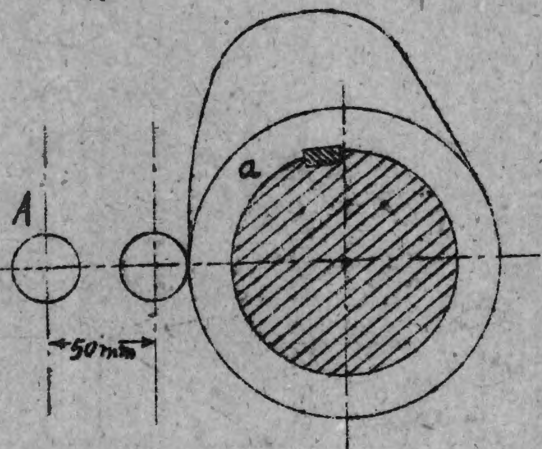


圖50

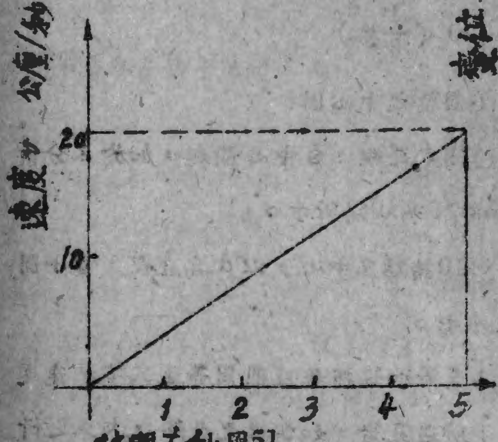


圖51

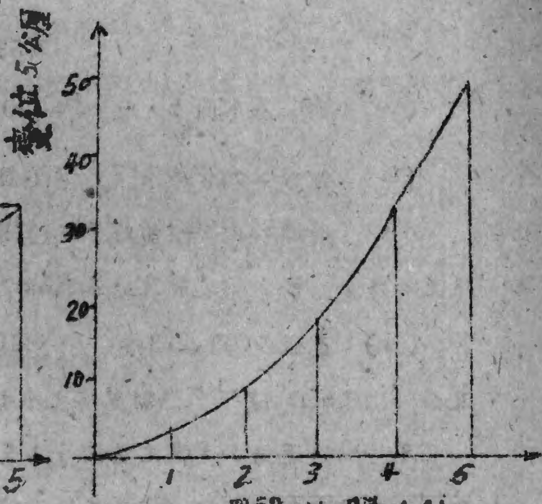


圖52

解： a在1分鐘內轉4轉：則5秒鐘內轉$\frac{4\times5}{60}=\frac{1}{3}$轉。畫偏輪 a 之外形之步驟如次

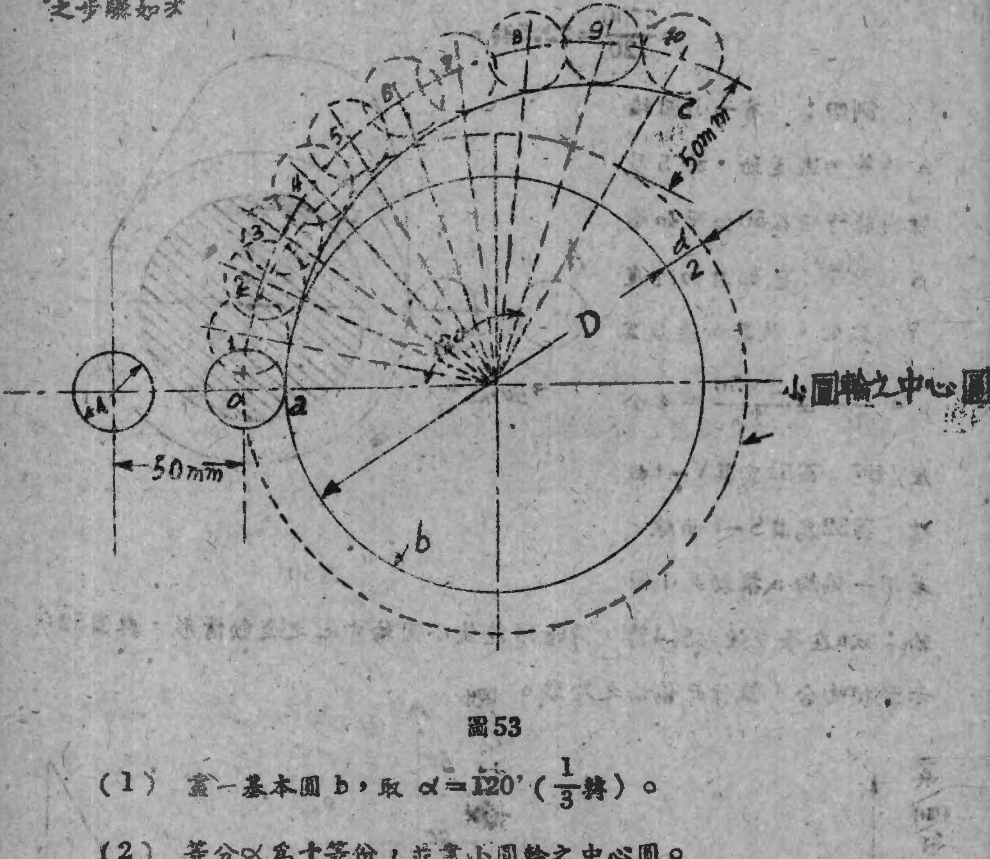


圖53

（1） 畫一基本圓 b，取 $\alpha=120^{\circ}$（$\frac{1}{3}$轉）。

（2） 等分∝為十等份，並畫小圓輪之中心圓。

（3） 將圖52內S—t曲線中各時間之路程，自中心圓起，加於各分角線上，得小圓輪中心之軌跡，如圖53中0—10線所示。

（4） 最後以0,1,2,3,4,……10諸點為中心，以 d 為直徑，畫小圓及公共切線ac。ac線即為偏輪應有之外形。

不等加速運動：上述之直線等速或等加速運動及圓周等速或等加速運動，均為有規則之運動，然吾人日常所遇見者，如電梯之升降，火車之行

駛等，多爲不規則之運動，其速度時生變化。就常例言之，物體於開始運動時，漸漸加速，及後加速愈劇，及將達目的地時，則速度漸漸減少，而至於停止，圖54示一不等加速運動之速度與時間之關係，爲一不規則線。

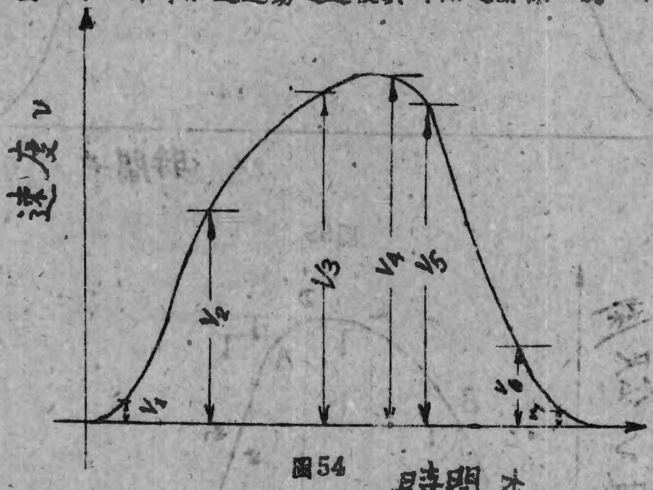


圖54

物體開始運動後，其速度由0增至V_1，V_2，V_3及V_4；既後其漸漸減小至V_5，V_6，V_7，以至於停止；故運動之前半段爲加速運動，後半段爲減速運動。例如有一列車，由A車站開至B車站，始而逐漸加速，及得到最大速度時，即須減速，以便到B車站時可以停住；若減速稍遲，則列車將有已到B車站而不能停住之虞。

若二車站間距離較遠，則列車自A車站開出時，於得到最大速度之後，可以此速度繼續行駛；至到達相近B車站之處，然後逐漸減速，最後至B車站乃完全停住。圖55即示此種運動之 v—t 曲線。於曲線中段，列車以最大速度行駛，不再加速，故v—t線與橫軸平行。

不等加速運動之加速度：任意點之加速度之測定，仍應用前法，經過該點，作一切線。因切線之線段與曲線相近似，故切線之斜率即爲該點之加速度。

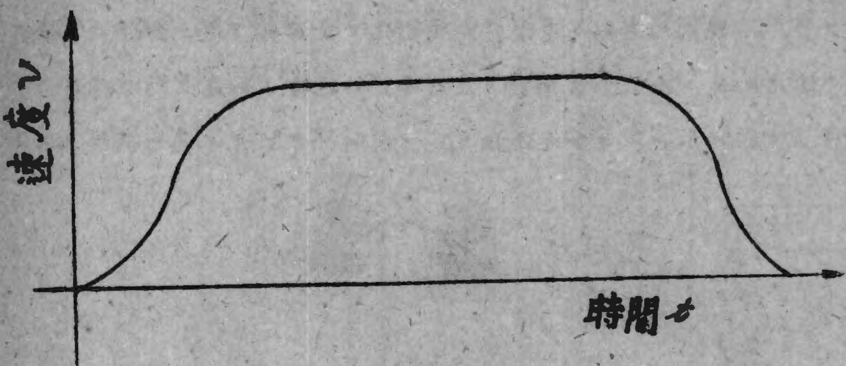


圖55

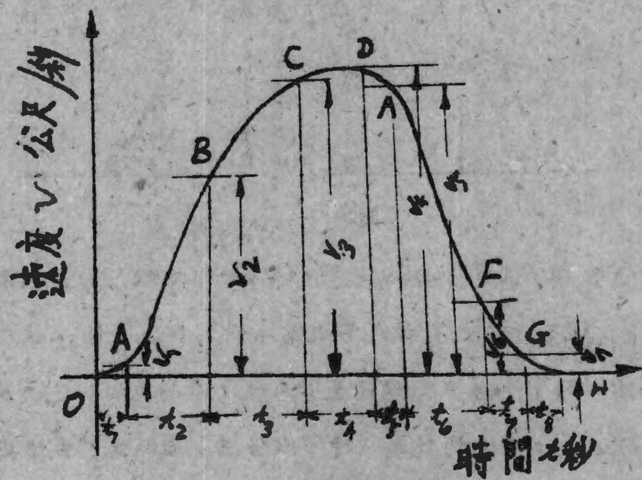


圖56

於圖18之曲線，取A,B,C,D,E,F,G,H諸點，分割v—t曲線爲八線段。由圖中之比例尺度，量得

$t_1=3$ 秒， $V_1=0.4$ 公尺/秒；

$t_2=5.7$ 秒， $V_2=5.85$ 公尺/秒；

$t_3=7.5$ 秒， $V_3=8.6$ 公尺/秒；

$t_4=5$ 秒， $V_4=8.8$ 公尺/秒；

$t_5=2.3$ 秒， $V_5=8.3$ 公尺/秒；

$t_6=6.9$秒，　　$V_6=2.1$ 公尺/秒；

$t_7=3.8$秒，　　$V_7=0.35$公尺/秒；

$t_8=2.8$秒，　　$V_8=0$ 公尺/秒。

命p_1為O與A兩點間之加速度，

$$p_1=\frac{V_1-0}{t_1}=\frac{0.4-0}{3}=0.133\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_2為A與B兩點間之加速度，

$$p_2=\frac{V_2-V_1}{t_2}=\frac{5.85-0.4}{5.7}=0.956\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_3為B與C兩點間之加速度，

$$p_3=\frac{V_3-V_2}{t_3}=\frac{8.6-5.85}{7.5}=0.368\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_4為C與D兩點間之加速度，

$$p_4=\frac{V_4-V_3}{t_4}=\frac{8.8-8.6}{5}=0.04\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_5為D與E兩點間之加速度，

$$p_5=\frac{V_5-V_4}{t_5}=\frac{8.3-8.8}{2.3}=-0.217\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_6為E與F兩點間之加速度，

$$p_6=\frac{V_6-V_5}{t_6}=\frac{2.1-8.3}{6.9}=-0.898\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_7為F與G兩點間之加速度，

$$p_7=\frac{V_7-V_6}{t_7}=\frac{0.35-2.1}{3.8}=-0.461\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_8為G與H兩點間之加速度，

$$p_8=\frac{0-V_7}{t_8}=\frac{0.-0.35}{2.8}=-0.125\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

若以加速度 p 爲縱標，每兩點間之平均時間爲橫標，作圖，得一曲線如圖57所示，是爲p－t曲線。p－t曲線示加速度與時間之關係。

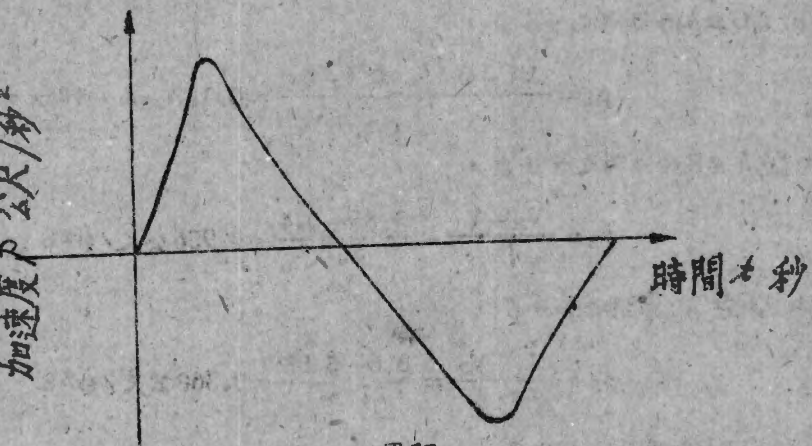


圖57

習　　題

（1）　某物體作直線等加速運動，已知第三秒之速度爲8公尺/秒，第九秒之速度爲26公尺/秒，問其加速度爲何？

（2）　某物體作直線等減速運動，已知時間$t_1=2.6$秒之速度$V_1=8.83$ 公尺/秒，時間 $t_2=5.4$ 秒之速度 $V_2=2.25$ 公尺/秒，問其減速度爲何？

（3）　有一輪直徑3公尺，初速度n_0爲每分鐘300轉，經過10秒鐘後，減速至每分鐘180轉，問周圍減速度爲何？

（4）　有一輪，直徑 2.5 公尺，初速度 n_0 爲每分鐘 180 轉，若此後其角加速度爲$1.5^{1}/秒^{2}$，問過10秒鐘後，每分鐘能轉幾轉？

（5）　有一輪，直徑2.4公尺，初速度 n_0 爲每分鐘120 轉，過8秒鐘後

，分速度B增加至每分鐘180轉，問在此八秒鐘内，輪週之一點，曾轉過若干路程？又問該輪在此八秒鐘内之轉數爲何？

（6） 有一小圓輪作等加速運動，於6秒内能行路程 36 公厘。若用一偏輪a推動之使小圓輪之運動情形如條件所示；設a於每分鐘轉 5 轉，試作其外形。

C. 功與能

力與質：支配一物體之運動情狀之要素有二，一為運動方向，二為運動速度。能變更物體之運動情狀者，謂之力；故任意一力作用於一物體之結果，能使物體變更其運動方向，或變更其運動速度，或同時變更其運動方向及運動速度。

計量一力之大小之法，以其所發生之每一時間單位內之速度變更值為之；換言之，力與其所發生之加速度成正比。若力K以公斤為單位，加速度p以公尺/秒^{2}為單位，m為比例常數，則

$$K=mp。\qquad (1)$$

在無論何時何地，力與其所發生之加速度之比，必等於常數m。力學上稱m為物體之質量，以「公斤秒^2/公尺」為其單位，地心引力即為物體之重量（G），能使物體下墜作等加速運動，其加速度為g，故可得

$$G=mg。\qquad (2)$$

由（1）（2）兩式，得

$$\frac{K}{G}=\frac{mp}{mg},$$

$$p=\frac{Kg}{G}。\qquad (3)$$

例： 電車重8公噸，由靜止情狀開始運動，均勻加速，過6秒鐘後，得速度為3公尺/秒，問電車之推動力為何？

解： 電車之質量為

$$m=\frac{G}{g}=\frac{8000}{9.81}=815.5\text{公斤秒}^2/\text{公尺}。$$

因V=pt，故電車所得之加速度為

$$p=\frac{V}{t}=\frac{3}{6}=0.5公尺/秒^2。$$

應用（1）式，電車所受之推動力爲

$$K=mp=815.5\times0.5=407.7公斤。$$

功：力作用於一物體，使之發生運動，於是有某量之功完成。力所作之功，等於力及於力之方向上所移動之路程之相乘積，命K代表作用力，A代表力所作之功，S代表與力之作用線相平行之路程，則

$$A=K\cdot S公斤公尺。\quad(4)$$

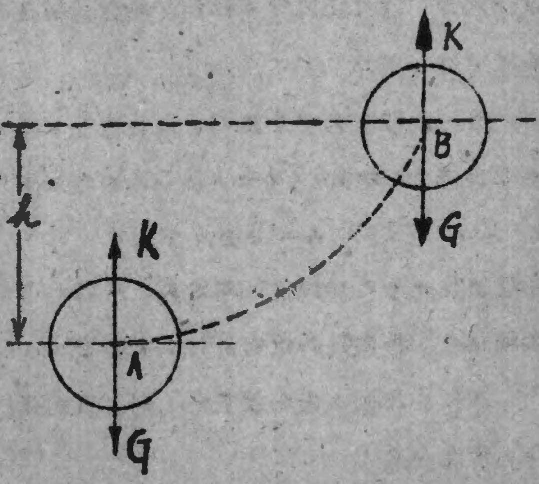


圖58

計算功時，必須以在力之作用方向内之路程S，代入A=K S公式。例如有一物體，重量爲G由A點吊至B點，經過路線如圖58虛線所示。此物體在AB路上對於運動所生之惟一阻力爲其重量G，作用於力之方向，此外無其他阻力；故作用力K即等於G。若物體由A點移動至B點，上升h公尺，則不問其上升時之路線形狀如何，所需之功必爲

$$A=Kh=Gh公斤公尺。\quad(5)$$

例一：起重機吊2噸重之物體昇起5公尺，問所作之功爲何？

解：由公式，

$$A=K\cdot S$$

$=2000\times5=10{,}000$公斤公尺。

例二： 有一抽水機，運輸2立方公尺水量至40公尺高度，問該機所作之功為何？

解： 2立方公尺水之重量為2000公斤，故所作之功為

$$A=Gh=2000\times40=80{,}000\text{公斤公尺。}$$

能： 吾人對某物體作功之結果，物體能消耗功而貯藏之於體內為能，物體之貯有能量者又能向外發洩之而供給功。物體以其位置上之便利而能供給功者，謂之物體貯有位能，物體以其運動之速度而能供給功者，謂之物體貯有動能。

有一物體，其重量為G，本在地上，今以力舉起之，置於桌之一隅，其高度為h，如圖59所示，則吾人對該物體所作之功為

$$A=Gh\text{公斤公尺。}$$

物體消耗此量之功以後，即貯藏之於體內為能；此種能量，稱為該物體對於地面之位能。

若抽去桌板，使物體下墜，則當其到達地面時，有速度為

$$V=\sqrt{2gh},$$

$$V^2=2gh,$$

代入 $G=mg$， $g=\frac{G}{m}$，

$$V^2=\frac{2G}{m}h,$$

$$\frac{1}{2}mv^2=Gh。$$

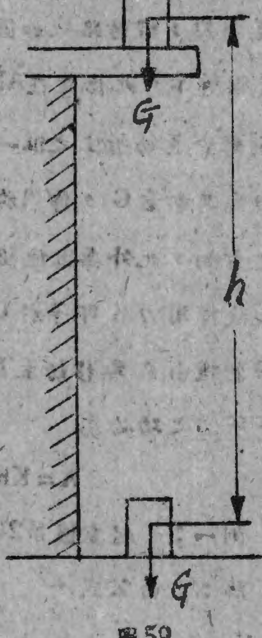


圖59

Gh即為物體原有之位能，當物體到達地面時，其位能為0，貯藏於體內之原有位能Gh悉數變為 $\frac{mv^2}{2}$，此 $\frac{mv^2}{2}$ 即為物體於運動時貯藏於其體內之能，稱為動能。

由上例，物體開始下墜時，全部位能為Gh公斤公尺。墜至中途時，動能適等於位能，即位能之一半變化為動能。愈下墜則位能愈少，動能愈大，及至地面，則位能等於零，動能等於 $Gh=\frac{1}{2}mv^2$ 公斤公尺，即全部位能變為動能。此為動能與位能相變換之一例也。

例一： 機器鎚之鎚體重200公斤，速度6公尺/秒，問鎚體之動能若干？

解： $$A=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2g}\times200(6)^2=\frac{200\times36}{2g}$$

=367公斤公尺。

例二． 鎚體打在工件上，若工件之變形為S=0.005公尺；問工件表面所受之力為何？

解： $$K=\frac{A}{S}=\frac{367}{0.005}=73.400\text{公斤。}$$

例三： 有一飛輪，輪壳重4噸，周圍速度30公尺/秒，問貯於其體內之動能為何？

解： $$A=\frac{mv^2}{2}=\frac{4000\times30^2}{2\times9.81}=\frac{4000\times900}{2\times9.81}$$

=183500公斤公尺。

例四： 有一物體，重30公斤，自240公尺高處下墜。開始下墜時之初速度為零，問該物體下墜至120公尺高處時，其所有位能A為何，動能

A_2為何？

解：$A1 - Gh = 30 \times 120 = 3600$ 公斤公尺。

下墜120公尺以後，

$$V^2 = 2gh = 2 \times 9.81 \times 120 = 2354.4,$$

$$A_2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{30 \times 2354.4}{2 \times 9.81} = 3600 \text{ 公斤公尺。}$$

例五：吊車以速度v向右行動，掛於鏈上之重量Q亦以速度v向右移動，所貯藏之動能為$\frac{Qv^2}{2g}$。若吊車驟然停止，則重量仍能向前運動（如圖60），因重量吊於一點上，故其路程為一圓弧，結果乃自行上升h公尺，此時動能逐漸變為位能。問h為幾公尺？

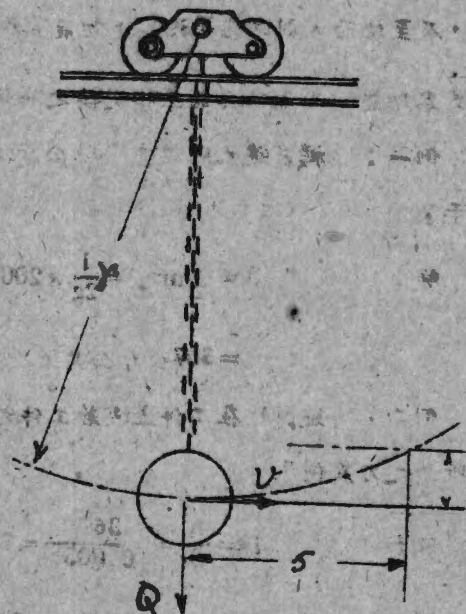


圖60

解：當全部動能變為位能時，重量Q乃不復上升，此時

$$\frac{Qv^2}{2g} = Qh,$$

$$h = \frac{V^2}{2g}。$$

若l＝8公尺，V＝2公尺/秒，則重量Q之升程為

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{4}{2 \times 9.81} = 0.2 \text{ 公尺。}$$

例六：於例三之捲揚軸上，裝一索鼓（繞索之鼓形圓筒），索下繫

一重量G=5000公斤，欲藉飛輪內貯藏之動能 A=183500 公斤公尺以升起之，如圖61所示。問於飛輪用盡其動能而停止時，重量G之升程h=？

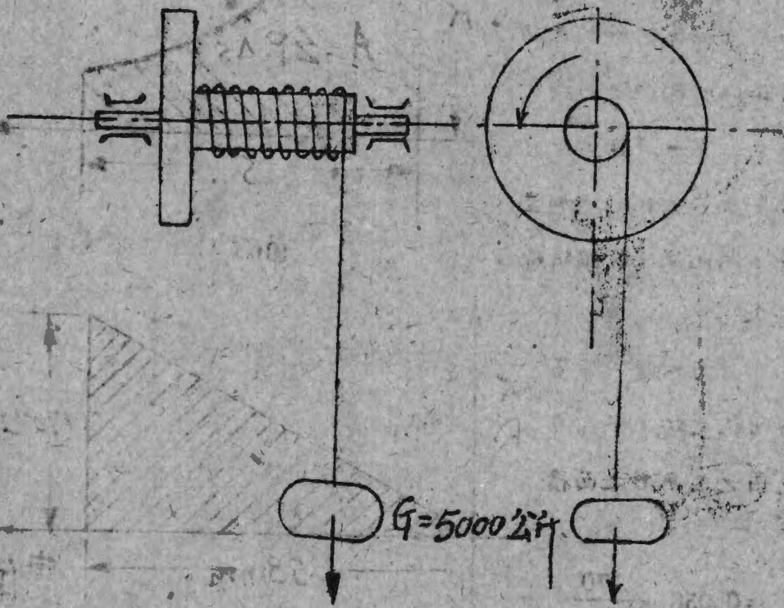


圖61

解：
$$A = 183500 = Gh$$
$$h = \frac{183500}{5000} = 36.7 \text{公尺。}$$

力路圖：以上所述之力，在其作用路程上，不變更其大小，故稱不變力。圖62示一不變力K之力路圖，其在路程S上所作之功，可以KS矩形面積表示之。但在機械工程上所有之力，普通多為變數，例如

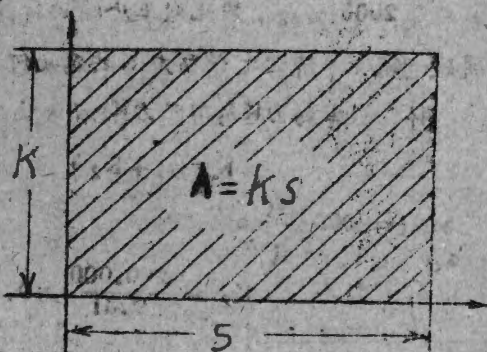


圖62

彈簧之彈力，蒸汽缸內之蒸汽膨力等，在其作用路程上，隨時變更其數量。圖63示一變更力之力路圖，變更力所作之功，亦為力路圖所包圍之面積。

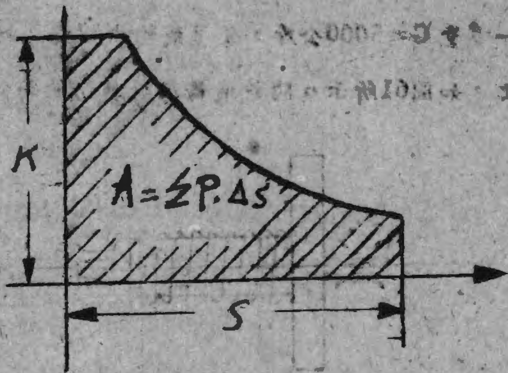


圖63

例一： 有一彈簧，受力時縮短58公厘，力自零增加至170公斤，問此彈簧於縮短時耗功幾何？

解： 作力路圖，彈簧於縮短時所耗之功，即為力路圖所包圍之三角形之面積，故

$$A = 0.058 \times \frac{170}{2}$$

$$= 4.93\text{公斤公尺。}$$

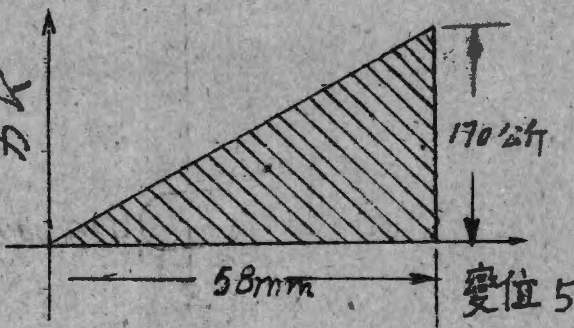


圖64 圖

例二： 有一列車，總重200噸，其行駛阻力（摩擦阻力，風阻力等）共為2000公斤；若此列車於開始行駛時，每秒鐘加速0.15公尺/秒，問開始行駛時，所需之牽動力K共為幾何？

解： 牽動力K為總阻力K_1及加速力K_2之總和，故

$$K = K_1 + K_2,$$

已知$K_1 = 2000$公斤。

$$K_2 = \frac{200.000}{9.81} \times 0.15 = 3058\text{公斤}$$

$$K = 2000 + 3058 = 5058\text{公斤。}$$

例三： 若此列車係均等加速前進，問駛過3公里後之速度爲何？

解： 假設駛過3公里後之速度爲v，則列車貯藏之動能爲

$$A_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{200000}{2\times 9.81}\times v^2\text{公斤公尺。}$$

又在此3公里上，而拉列車用以加速之力爲 $K_2=3058$ 公斤，故其所作之功爲。

$$K_2S=3058\times 3000\text{公斤公尺。}$$

因加速力所作之功，即爲列車所貯藏之內能，故

$$A_k=K_2S,$$

$$\frac{20,000}{2\times 9.81}\times v^2=3058\times 3000,$$

$$v^2=900,$$

$$v=30\text{公尺/秒。}$$

例四： 有一列車，總重40,000公斤，開始行駛，其速度在 $t_1=24$ 秒鐘內均等加速至 $v=12$ 公尺/秒；嗣後以等速度前進，歷時30秒鐘；最後乃漸漸減速，經過 $t_3=16$ 秒鐘而停止。若其行駛阻力爲2100公斤，問其行駛時隨時所需之力各爲若干？

解： 開始行駛時之加速度

$$p_1=\frac{v}{t_1}=\frac{12}{24}=0.5\text{公尺/秒}^2,$$

故開始行駛時加速所需之力爲

$$K_1=mp_1=0.5\times\frac{40.000}{9.81}=2039\text{公斤},$$

開始行駛時所需之總力K爲行駛阻力與加速力之總和，故

$$K=2100+2039=4139\text{公斤。}$$

在等速行駛時，因加速為零，故加速力亦等於零。此時所需之力祇等於行駛阻力2100公斤。

當列車作減速運動時，其減速度為

$$-P_3=\frac{-v}{t_3}=\frac{-12}{16}=-0.75\text{公尺/秒}^2,$$

故其減速力為

$$K_3=-0.75\times\frac{40,000}{9.81}=-3058\text{公斤}。$$

此時由於列車慣性所生之力，大於行駛阻力，因

$$K_3-2100=958\text{公斤},$$

故不但無須加力於列車，且須用制動器以制止其行動。

功效： 在單位時間內所作之功，稱為功效，以L表之，

$$L=\frac{A}{t}\text{公斤公尺/秒}。\qquad (7)$$

在工業應用上，公斤公尺/秒單位太小，普通採較大之單位，即馬力是。一馬力為75公斤公尺/秒。以N代表馬力數，

$$N=\frac{L}{75}=\frac{KS}{75t}\text{馬力}。\qquad (8)$$

英美國家以550呎磅/秒為一馬力，約等於76公斤公尺/秒，以H.P.為符號，德人以P.S為馬力之符號。有時亦以仟瓦（K.W）為功效之單位，德人以1馬力等於0.736仟瓦，英美則以1馬力為0.746仟瓦。

由 $N=\frac{PS}{75t}=\frac{P}{75}\cdot\frac{S}{t}$，因 $\frac{S}{t}=v$，故得

$$N=\frac{PV}{75}\text{馬力}。\qquad (9)$$

例一： 有一重體，重1500公斤，今欲以速度 V=2公尺/秒舉之上昇

，問需馬力若干匹？

解：
$$N=\frac{Pv}{75}=\frac{1500\times 2}{75}=40\text{馬力。}$$

例二： 有一唧筒，於一分鐘內，運輸1立方尺水量至 50 公尺高處，問此唧筒需以幾匹馬力發動之？

解： 水1立方尺重1000公斤，故

$$N=\frac{PS}{75t}=\frac{1000\times 50}{75\times 60}$$

$$=\frac{50.000}{4500}=11.1\text{馬力。}$$

例三： 有一總管，內直徑 200 公厘，用唧水筒在其內運升水量，水流之速度為V=4公尺/秒。問該唧筒需以幾匹馬力發動之？

解： 唧筒每秒鐘能運輸之水量為

$$\frac{\pi D^2}{4}\times 4=\frac{\pi\ (0.2)^2}{4}\times 4=0.04\pi\text{立方公尺，}$$

其重量為

$$0.04\pi\times 1000=40\pi=125.66\text{公斤。}$$

$$N=\frac{Pv}{75}=\frac{125.66\times 4}{75}=6.7\text{馬力。}$$

例四： 圖 65 示一礦井之起重設備；A 為原動機，B 為一空桶，重 3000公斤，C為一滿桶，共重 5000 公斤。故應運升之重量為Q=5000−3000=2000 公斤。若全部設備應行加速之質量為$\frac{G}{g}$=2000公斤秒²/公尺；又此全部起重設備之速度與時間之關係圖，即v−t圖，適如圖56所示問起重時隨所需之馬力為何？

解： 由圖56之v−t 曲線，取 A,B,C,D,E,F,G,H 諸點如昔，分割v−t曲線為八線段，以此例尺量得

$t_1=3$ 秒， $v_1=0.4$ 公尺/秒；

$t_2=5.7$ 秒， $v_2=5.85$ 公尺/秒；

$t_3=7.5$ 秒， $v_3=8.6$ 公尺/秒；

$t_4=5$ 秒， $v_4=8.8$ 公尺/秒；

$t_5=2.3$ 秒， $v_5=8.3$ 公尺/秒；

$t_6=6.9$ 秒， $v_6=2.1$ 公尺/秒；

$t_7=3.8$ 秒， $v_7=0.35$ 公尺/秒；

$t_8=2.8$ 秒， $v_8=0$ 公尺/秒。

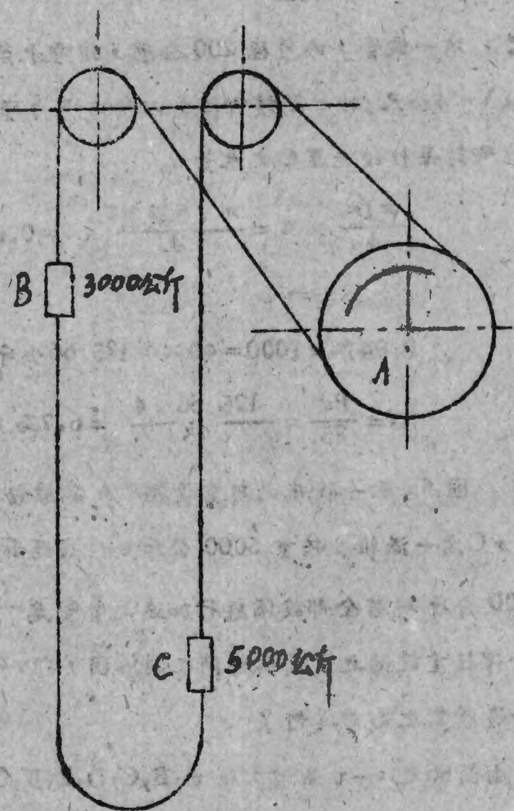


圖65

命p_1爲O與A兩點間之加速度，

$$p_1=\frac{0.4-0}{3}=0.133\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_2爲A與B兩點間之加速度，

$$p_2=\frac{5.85-0.4}{5.7}=0.956\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_3爲B與C兩點間之加速度，

$$p_3=\frac{8.6-5.85}{7.5}=0.366\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_4爲C與D兩點間之加速度，

$$p_4=\frac{8.8-8.6}{5}=0.04\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_5爲D與E兩點間之加速度，

$$p_5=\frac{8.3-8.8}{2.3}=-0.217\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_6爲E與F兩點間之加速度，

$$p_6=\frac{2.1-8.3}{6.9}=-0.898\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_7爲F與G兩點間之加速度，

$$p_7=\frac{0.35-2.1}{3.8}=-0.461\text{公尺/秒}^2\text{。}$$

命p_8爲G與H兩點間之加速度，

$$p_8=\frac{0-0.35}{2.8}=-0.125\text{公尺/秒}^2$$

以m=2000公斤秒²/公尺乘p_1至p_8，則得各時間所需之加速力：

$$K_1=mp_1=2000\times0.133=266\text{ 公斤；}$$

$$K_2=mp_2=2000\times0.956=1912\text{公斤，}$$

$K_3 = mp_3 = 2000 \times 0.368 = 736$ 公斤；

$K_4 = mp_4 = 2000 \times 0.04 = 80$ 公斤；

$K_5 = mp_5 = 2000 \times (-0.217) = -434$ 公斤；

$K_6 = mp_6 = 2000 \times (-0.898) = -1796$ 公斤；

$K_7 = mp_7 = 2000 \times (-0.461) = -922$ 公斤；

$K_8 = mp_8 = 2000 \times (-0.125) = -250$ 公斤。

加$Q=2000$公斤於K_1至K_8，則得各時間所需之力之總量：

$K_1' = K_1 + Q = 266 + 2000 = 2266$公斤；

$K_2' = K_2 + Q = 1912 + 2000 = 3912$公斤；

$K_3' = K_3 + Q = 736 + 2000 = 2736$公斤；

$K_4' = K_4 + Q = 80 + 2000 = 2080$公斤；

$K_5' = K_5 + Q = -434 + 2000 = 1566$公斤；

$K_6' = K_6 + Q = -1796 + 2000 = 204$ 公斤；

$K_7' = K_7 + Q = -922 + 2000 = 1078$公斤；

$K_8' = K_8 + Q = -250 + 2000 = 1750$公斤。

以K'為縱標，兩點間之平均時間為橫標，作圖，得圖66之K－t曲線，表示各時間之作用力之變化。應用公式

$$N = \frac{Kv}{75},$$

代入各時間之作用力K'及速度v，求得各時間所需之馬力，以

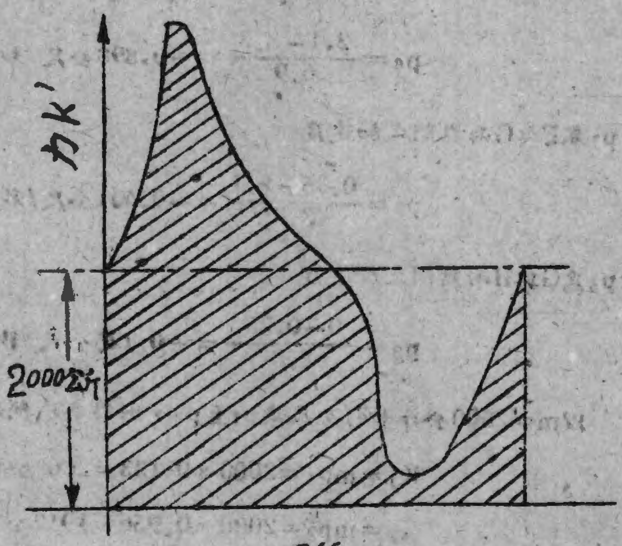


圖66

馬力N為縱標，以時間t為橫標，作圖，得圖67之N－t曲線，表示時間t與所需之馬力N之關係。

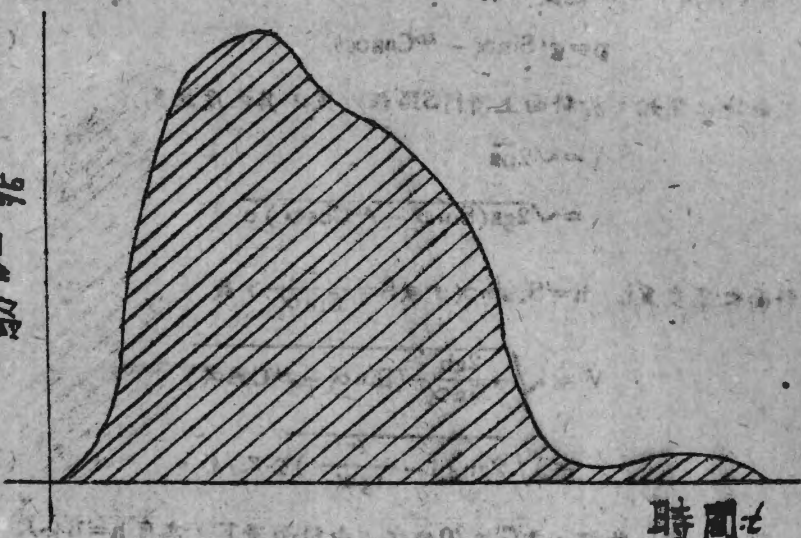


圖67

斜面運動：有一物體，重G公斤，置於斜面之上，設斜面之傾斜角為α如圖68所示，該物體垂直作用於斜面上之力為G $\cos\alpha$，平行作用於斜面上之力為G $\sin\alpha$。若物體沿斜面滑下，則在運動方向內作用之力為

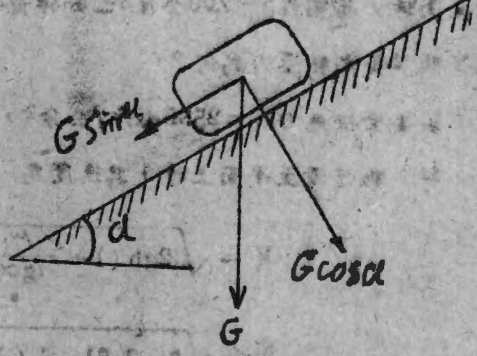


圖68

（1） G $\sin\alpha$，使物體滑下；

（2） μG $\cos\alpha$，對於物體滑下運動，發生阻礙，μ為滑動摩擦係數。

令K為幫助物體滑下之力，

$$K = G\sin\alpha - \mu G\cos\alpha = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad (10)$$

設p為物體滑下之加速度，則

$$p = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \quad (11)$$

物體由靜止開始，於斜面上滑行S路程以後，其速度為

$$V = \sqrt{2ps}$$

$$= \sqrt{2gs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

令斜面之高度為h，$h = S \cdot \sin\alpha$，故$S = \frac{h}{\sin\alpha}$，故

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{\sin\alpha}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

$$= \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{tg\alpha}\right)} \text{公尺/秒} \quad (12)$$

例：有一物體，重G＝20公斤，由斜面滑下，高度h＝8公尺，α＝35°，摩擦係數μ＝0.08。於其滑至平面時，用緩衝彈簧擋住之。若彈簧受緩衝時，其縮程S＝200公厘。已知彈簧之終壓力P_E為其初壓力P_A之1.5倍，問彈簧之終壓力為何？

若彈簧金屬應力為k＝2550公斤/公分²，問彈簧應粗若干？

解：物體滑至平面上時，其速度為

$$V = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{tg\alpha}\right)}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.81 \times 8\left(1 - \frac{0.08}{0.700}\right)}$$

$$= \sqrt{156.96(1 - 0.1143)}$$

$$= \sqrt{156.96 \times 0.8857}$$

$=\sqrt{139}=11.8$ 公尺/秒。

故物體貯藏之動能為

$$A=\frac{1}{2}mv^2=\frac{20\times11.8^2}{2\times9.81}=\frac{20\times139}{2\times9.81}=142\text{ 公斤公尺。}$$

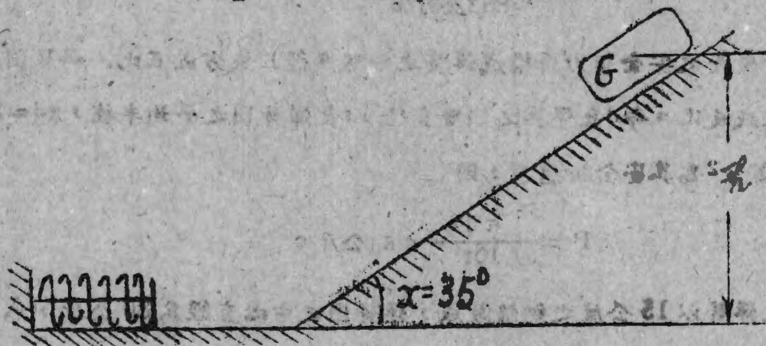


圖69

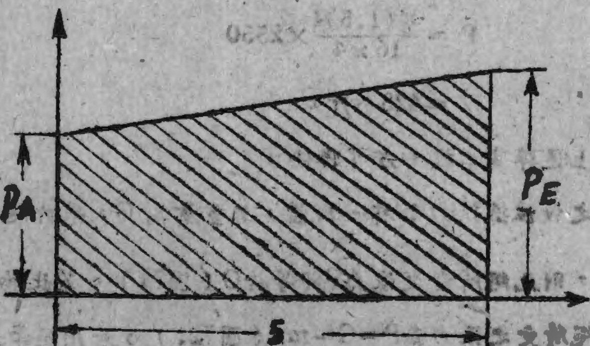


圖70

彈簧縮短時在縮程S上所消耗之功適如力線圖70所示之面積；故

$$A'=\frac{P_A+P_E}{2}\times S=\frac{2.5P_E}{1.5\times2}\times S$$

$$=\frac{2.5}{3}\times P_E\times S\text{。}$$

A'應等於A，則彈簧方能擋住滑下之物體；故

$$\frac{2.5}{3}\times P_E \times S = 142,$$

$$P_E = \frac{3\times 142}{2.5\times 5} = \frac{426}{2.5\times 0.2} = \frac{426}{0.5}$$

$$= 852\text{公斤。}$$

彈簧所受之安全壓力與構成彈簧之鋼絲直徑三乘方成正比，彈簧圈之平均半徑成反比。命d表彈簧之鋼絲直徑，r表彈簧圈之平均半徑，$k_d = 2550$公斤/公分^{2}為其安全扭應力，則

$$P = \frac{\pi d^3}{16r}\cdot k_d\text{公斤。}$$

假設彈簧以15公厘之鋼絲做成，彈簧圈之中心直徑為80公厘，代入前式，得

$$P = \frac{\pi(1.5)^3}{16\times 4}\times 2550$$

$$= 423\text{公斤。}$$

故須使用上述彈簧二枚，方可勝任。

物體之惰性抵抗力：有一物體，其重量為G，懸於繩之一端。若物體完全靜止，則此繩所受之張力P即等於G（圖71）。若此物體以加速度p下墜，則此繩所受之張力為$P=G-mp$（圖72.）。若用繩牽此物體，以加速

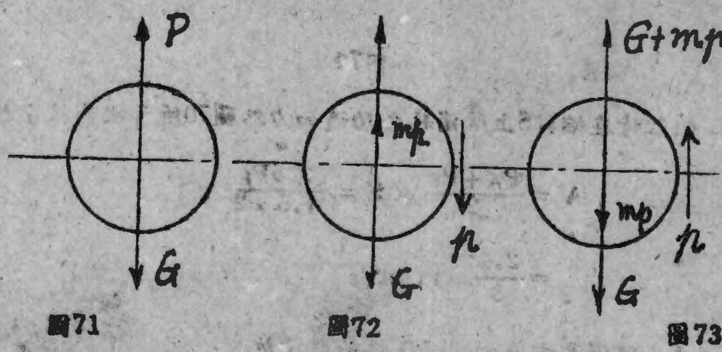


圖71　　圖72　　圖73

度p上升，則繩所受之張力為$P=G+mp$（圖73.）。蓋物體有惰性，恆反抗力之作用；此惰性抵抗力（mp）之方向，常與運動之方向相反，一如摩擦阻力。

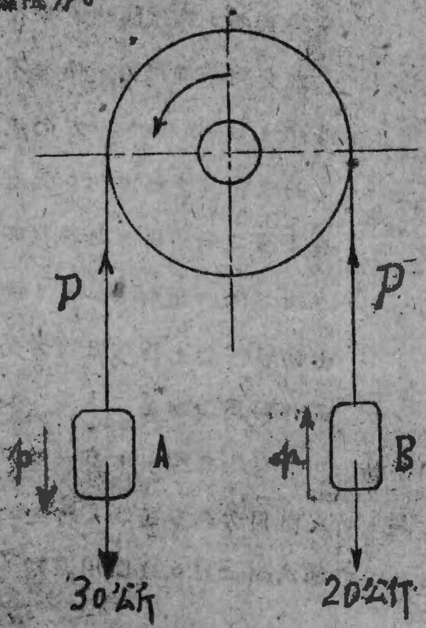


圖 74

例：如圖74所示，於圓輪之索之兩端，各掛一重量；A重30公斤，B重20公斤；若不計索與輪之質量，問A下墜之加速度p為何？

解：命P表索中之張力，p表質量系之運動加速度。由重體A之運動，

$$P=30-M_{A}p,$$

$$=30-\frac{30}{9.81}p。$$

由重體B之運動，

$$P=20+M_{B}p,$$

$$=20+\frac{20}{9.81}p。$$

$$30-\frac{30}{9.81}p=20+\frac{20}{9.81}p,$$

$$\left(\frac{30}{9.81}+\frac{20}{9.81}\right)p=30-20,$$

$$p=\frac{10}{50}\times 9.81$$

$$=1.96\text{公尺/秒}^2。$$

圓周運動：物體作圓周運動時，須隨時變更其運動方向，如圖75所示。物體在圓周上1點時，運動方向為a—a；在2點時為b—b；換言之，物體隨時在半徑方向內受到一作用力，使其不能沿切線 a—a，b—b 方向飛去，而改變其運動方向。既有力在半徑方向作用，則物體亦必在此方向內向中心加速，使可由切線方向，折入圓周方向，而作圓周運動。

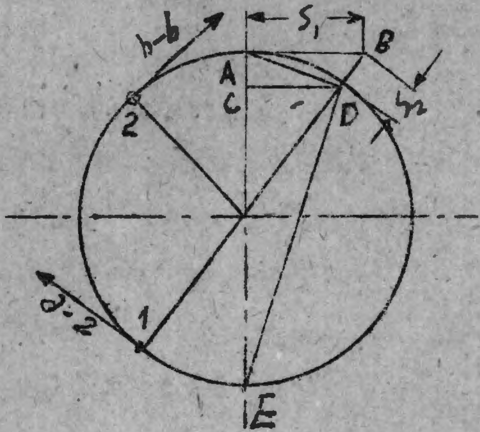


圖75

向心力及離心力：若物體作圓周運動，則繫物之線中，有一張力；此張力即能迫使物體，隨時由切線方向，折入圓周方向。若物體作等速旋轉，則繫物體之線之張力為一常數。此力亦稱為向心力。故圓周運動可分析為二種運動：

（1） 在切線方向內之運動（切線運動），

（2） 在半徑方向內之運動（向心運動）。

物體之作等速圓周運動者，其向心力為一常數，故知物體在半徑方向內之運動係一等加速運動。假設物體之周圍速度為 V 公尺/秒，在半徑方向內之加速度為p公尺/秒^2，則依圖75，

$$S_1=\overline{AB}=Vt\cong CD \text{（在極短時間t內）},$$

$$S_2=\overline{BD}=\frac{pt^2}{2}\cong AB \text{（在極短時間t內）。}$$

由△ADE，

$$\overline{CD}^2=\overline{AG}\cdot\overline{CE}。$$

$$(Vt)^2=\frac{pt^2}{2}\left(2r-\frac{pt^2}{2}\right)=2r\times\frac{pt^2}{2}-\left(\frac{pt^2}{2}\right)^2。$$

因 t 爲微小值，故$\left(\frac{pt^2}{2}\right)^2$亦爲微小值，可略而不計，故得：

$$(Vt)^2=2r\times\frac{pt^2}{2},$$

$$V^2=rp,$$

向心加速度爲

$$p'=\frac{V^2}{r}。\tag{13}$$

因角速度$\omega=\frac{V}{r}$，代入(13)式，得

$$p=r\omega^2。\tag{14}$$

故向心力或離心力爲

$$K=mp=mr\omega^2=\frac{mv^2}{r}\text{公斤}。\tag{15}$$

例一：有一物體，重15公斤，作圓周運動；已知圓周直徑爲4公尺，周圍速度V=12公尺/秒，問離心力爲何？

解：$$K=\frac{mv^2}{r}=\frac{15\times12^2}{9.81\times2}=110\text{公斤}。$$

例二：有一繞環軌如圖77，r=2公尺。今有一球自 h 公尺高處滾下，欲使球循環軌而行，至其最高處亦不墜下，問h應爲若干公尺？

解：由公式

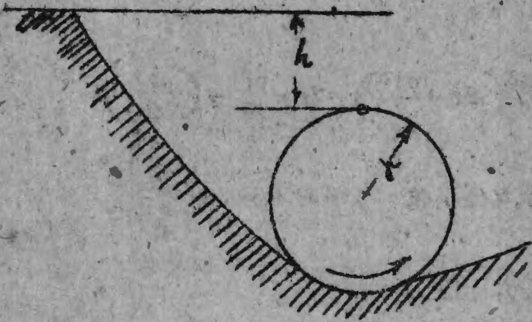


圖76

$V^2=2gh$，

若欲使球不墜下，則離心力K應大於重量G，

$$\frac{mv^2}{r}\geqq mg，$$

$$\frac{m\times 2gh}{r}\geqq mg，$$

$$h\geqq\frac{r}{2}。$$

例三：轉桶淨鐵機利用鑄件及摩擦物轉至最高處時自上墜下，使互相摩擦，以發生潔淨作用。若桶之半徑爲r公尺，問該桶之轉數應爲若干？

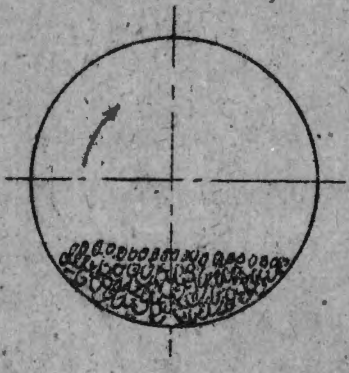


圖77

解：因 $V=\frac{D\pi n}{60}=\frac{r\pi n}{30}$ 由離心力公式，

$$P=\frac{mv^2}{r}=\frac{m}{r}\left(\frac{r\pi n}{30}\right)^2，$$

假設轉鑄件及摩擦物之重量爲 $G=mg$，

$$\frac{m}{r}\cdot\left(\frac{\pi^2 r^2 n^2}{30^2}\right)\geqq mg$$

$$n\geqq\frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{r}}。$$

1公尺，則

$$n\geqq\frac{30}{\pi}\sqrt{9.81}$$

$$\geqq 30。$$

即該桶在每分鐘內之轉數，不得大於30次。

習　題

(1) 列車重10噸，由靜止情狀開始運動，均勻加速，過5秒鐘後，速度爲2.8公尺/秒。問加速時需力若干？

(2) 起重機吊5噸重之物體，升起4公尺，問需作功若干？

(3) 有一抽水機，運輸3立方公尺水量至25公尺高度，問該機所作之功爲何？

(4) 機器鎚之鎚體重300公斤，速度爲8公尺/秒，問鎚體之動能爲何？

(5) 鎚體打於工件上，若工件之變形爲S＝0 003公尺，問工件表面所受之力爲何？

(6) 有一飛輪，輪壳重3.5噸，周圍速度爲25公尺/秒。問貯藏於其體內之動能爲何？

(7) 有一物體，重85公斤，自280公尺高處落下，開始落下時速度爲零，問該物體落至125公尺高處時，其所有位能 A_1 爲何？動能 A_2 爲何？

(8) 圖60之吊車以速度v向右行動，掛在鈎上之重體Q亦以速度v向右移動，所貯藏之動能爲$\frac{Qv^2}{2g}$。若吊車驟然停止，則重體尚欲向前運動；因吊在一點上，故其路程爲一圓周，重量乃自行升高h公尺？；若r＝7.5公尺，v＝3公尺/秒，問能升高幾公尺？

(9) 於習題(6)之飛輪軸上，裝一索鼓如圖61，索下繫一重量G

一[illegible]公斤，今欲藉飛輪貯藏之動能以升起之，問於飛輪用盡其動能而停止時，重量能升高幾公尺？

(10) 有一彈簧，受力時縮短85公厘，力自零增加至180公斤如圖64所示，問此彈簧於縮短時耗功幾何？

(11) 有一列車，總重為250噸，其行駛阻力共為2400公斤。若此列車於開始行駛時，每秒鐘加速0.16公尺，問開始行駛時所需之力K共為幾公斤？

(12) 若此列車[illegible]等加速，問駛過4.5公里後之速度為何？

(13) 有一列車，總重為50噸，由靜止開始行駛。設$t_1=25$秒鐘內其速度均等加速至18公尺/秒；厥後30秒鐘內，以等速前進；最後$t_3=20$秒鐘內，漸漸減速，至完全靜止。若其行駛阻力為2500公斤，問其行駛時隨時所需之力為何？

(14) 有一起重機，能於3分鐘內升起1噸重量至20公尺之高度，問其功效為何？

(15) 有一重量，重2000公斤，若其上升之速度為$v=1.8$公尺/秒問需馬力若干匹？

(16) 有一唧筒，於1分鐘內，能運輸0.8立方公尺水量至55公尺高處，問需馬力若干匹？

(17) 有一縱管，內直徑340公厘。用唧水筒在其內運升水量，水流之速度為$v=3$公尺/秒，問該機需馬力若干匹？

(18) 有一物體，重$G=15$公斤，由斜面滑下，高度$h=10$公尺，$\alpha=45°$，摩擦係數為0.08。問滑至平面時，其速度為何？其貯藏之動能為何？

(19) 如圖74所示，於圓輪之索之兩端，各掛 重量；A重350公斤

，B重230公斤；若不計索與輪之質量，問昇重桑之運動加速度爲何？

(20) 有一物體重30公斤，作圓周運動，已知直徑爲5公尺，周圍速度v＝24公尺/秒，問離心力爲何？

(21) 有一物體，重25公斤，作圓周運動，角速度ω＝20π，r＝20公分，問離心力爲何？

(22) 有一縱環軌如圖76所示，已知r＝1.5公尺，今有一球自h公尺高處滾下；欲使球循環軌而行，至其最高處亦不墜下；問h應爲若干公尺？

d、轉動力矩及質量惰性

質量惰性：物體作旋轉運動時，其外力亦爲一轉動之作用力，其作用可以轉動力矩表示之。物體於外力使其旋轉時，其惰性能發生與相當之抵抗作用；此惰性之抵抗作用之方向與運動之方向相反，故與轉動之方向亦相反。

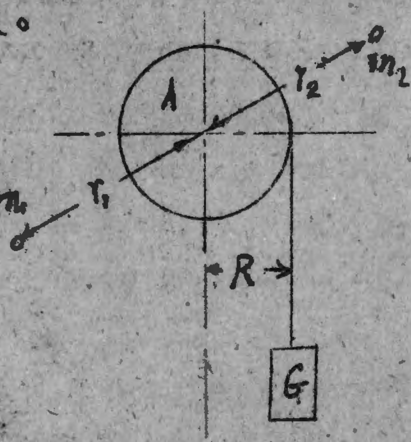


圖78

由圖78，A軸之半徑爲R，於其上繞以一繩，繩端繫一重體G，以發生轉動力矩Md，設不計A軸之質量，則

$$Md = GR \text{公尺公斤。}$$

當重體下沉時，A軸必以加速度順時鐘指針方向轉動。若於半徑 r_1 及 r_2 之處，各連繫一質量 m_1 及 m_2，則此二質量亦必以加速度順時鐘指針方向轉動。假設其加速度爲 p_1 及 p_2，則加速所需之力爲

$$P_1 = mp_1,$$

$$P_2 = mp_2\text{。}$$

令Md' 爲其惰性之抵抗作用，因惰性之抵抗力等於加速所需之力，故

$$Md = m_1p_1r_1 + m_2p_2r_2 \text{公尺公斤。}$$

A軸必須於 Md>Md' 之條件之下，始能加速旋轉，否則必將漸漸靜止。設以角加速度ξ代替上式內之周圍速度；因 $p_1 = r_1ξ$，$p_2 = r_2ξ$，故

$$md' = m_1r_1^2ξ + m_2r_2^2ξ \text{公尺公斤，}$$

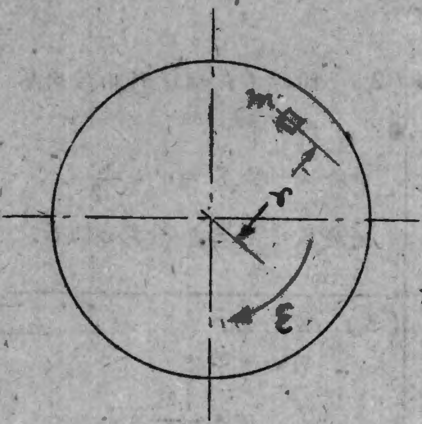


圖79

$=(m_1r_1^2+m_2r_2^2)\ \varepsilon$ 公尺公斤。

今有一圓輪，如圖79所示，若其旋轉之角加速度爲ε，m表其質點之質量，r表質點中心至圓輪中心之距離，則加速度所需之轉動力矩，亦即惰性之抵抗作用爲

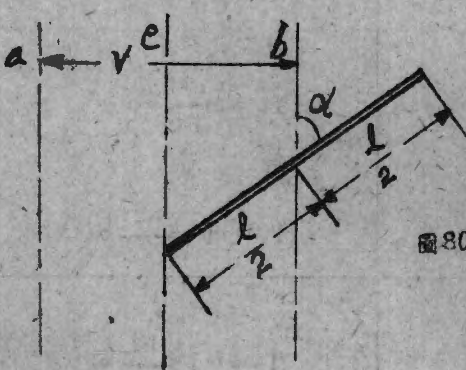
$$Md=\varepsilon(\Sigma mr^2)\text{ 公尺公斤，}$$

Σmr^2即代表$m_1r_1^2$，$m_2r_2^2$，$m_3r_3^2$，……$m_nr_n^2$之總和，動力學稱Σmr^2爲一物體之質量惰矩，以T表之，故

$$Md=\varepsilon T\text{ 公尺公斤。}\qquad(1)$$

關於各種物體之質量惰矩之計算方法，因較繁複，故從略。次列一表，示各種正規幾何形體之質量惰矩公式，以備參攷。

正規幾何形體之質量惰矩公式

 圖80	(1) 直線（凡直棒形物體均屬之）。 對於A軸： $T_a=m\{r^2+\frac{(l\sin\alpha)^2}{12}\}$， 對於b軸 $T_b=m\cdot\frac{(l\sin\alpha)^2}{12}$ 對於c軸： $T_c=m\cdot\frac{(l\sin\alpha)^2}{3}$。 對於d軸： $T_d=m\cdot\frac{l^2}{12}$。

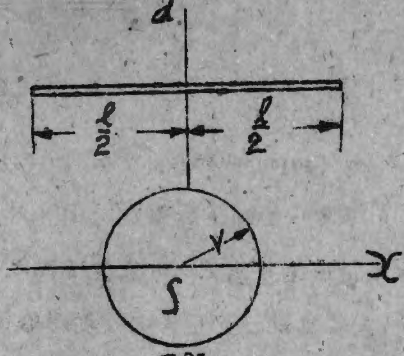


圖81

（2） 圓線（凡細環形物體均屬之）。

對於 x 軸：$T_x = m \cdot \frac{r^2}{2}$

對於與紙面垂直之重心軸 S

$T_s' = mr^2$。

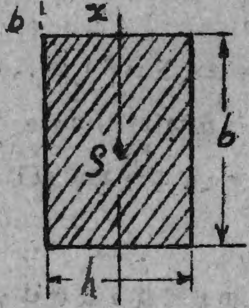


圖82

（3） 距形面。

對於 x 軸：

$T_x = m \cdot \frac{h^2}{12}$。

對於 b 軸：

$T_b = m \cdot \frac{h^2}{3}$。

對於與紙面垂直之重心軸

S：$T_s' = m\frac{b^2+h^2}{12}$。

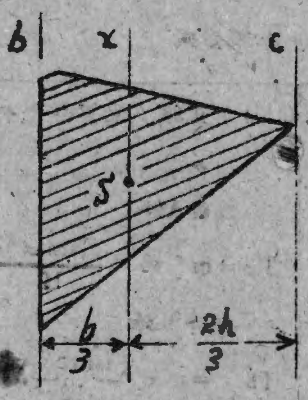


圖83

（4） 三角面。

對於 x 軸：

$T_x = m \cdot \frac{h^2}{18}$。

對於 b 軸：

$T_b = m\frac{h^2}{6}$。

對於 c 軸：

$T_c = m \cdot \frac{h^2}{2}$。

圖84

（5） 圓面。

對於 x 軸：

$T_x = m \cdot \frac{r^2}{4}$。

對於與紙面垂直之重心軸 S：$T'_s = m \cdot \frac{r^2}{2}$。

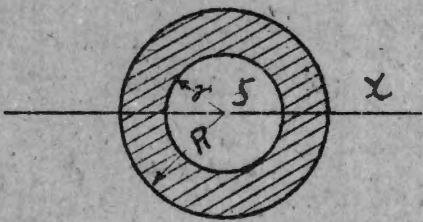


圖85

(6) 圓環面：

對於 x 軸：

$$T_x = m\frac{R^2+r^2}{4}$$。

對於與紙面垂直之重心軸 S：$T_s = m\frac{R^2+r^2}{2}$。

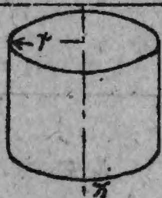


圖86

(7) 正圓柱體。

對於 x 軸：

$$T_x = m\cdot\frac{r^2}{2}$$。

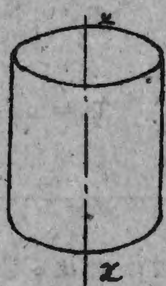


圖87

(8) 薄空心之正圓柱體。

對於 x 軸：$T_x = mr^2$。

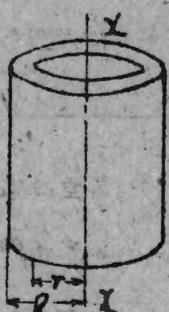


圖88

(9) 厚空心圓柱體。

對於 x 軸：

$$T_x = m\cdot\frac{R^2+r^2}{2}$$。

圖89

(10) 正圓錐體。

對於X軸：

$$T_x=m\cdot\frac{3r^2}{10}。$$

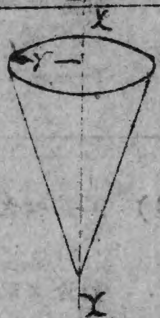


圖90

(11) 薄空心之正圓錐體。

對於X軸：

$$T_x=m\cdot\frac{r^2}{2}。$$

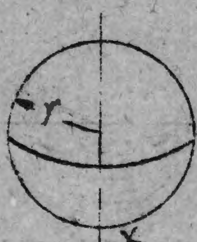


圖91

(12) 圓球。

對於X軸：

$$T_x=m\cdot\frac{2r^2}{5}。$$

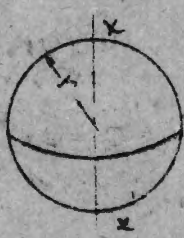


圖92

(13) 薄空心球。

對於X軸：

$$T_x=m\cdot\frac{2r^2}{3}。$$

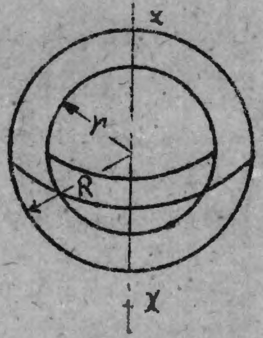


圖93

(14) 厚空心球。

對於x軸：

$$T_x = m \cdot \frac{2}{5}\left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right)。$$

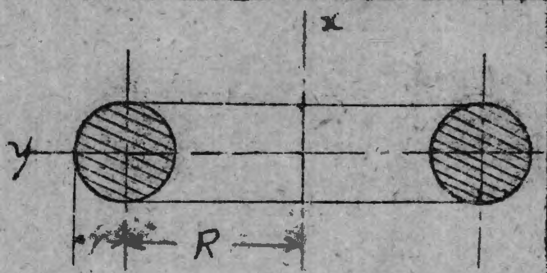


圖64

(15) 圓形斷面之圓環體。

對於x軸：

$$T_x = m\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)。$$

對於y軸：

$$T_y = m\left(\frac{R^2}{2} + \frac{5}{8}r^2\right)。$$

例一：有一實心圓片，直徑4公尺，厚20公分，比重=3，問其質量惰矩等於若干？

解：圓片之體積爲

$$V = \frac{40^2 \pi}{4} \times 2 = 2512\text{公升}。$$

圓片之重量爲

$$G = 2512 \times 3 = 7536\text{公斤}。$$

故其質量爲

$$m = \frac{G}{g} = \frac{7536}{9.81} = 768.2\text{公斤秒}^2/\text{公尺}。$$

應用前表中公式（5），質量惰矩爲

$$Tx=\frac{1}{4}mr^2=\frac{768.2\times 2^2}{4}=768.2\text{公尺公斤秒}^2。$$

$$Ts'=\frac{1}{2}mr^2=\frac{768.2\times 2^2}{2}=1536.4\text{公尺公斤秒}^2。$$

例二：若欲使此圓片於3秒鐘內加速至每分鐘20轉，問轉動力矩Md若干？

解：應用公式

$$Md=\varepsilon T。$$

欲於三秒鐘內加速至每分鐘20轉，則角加速度

$$\varepsilon=\frac{\omega}{3}=\frac{\pi\times 20}{3\times 30}=\frac{20\pi}{90}=0.7\ 1/\text{秒}^2。$$

所需之轉動力矩為

$$Md=\varepsilon T=0.7\times 1536.4=1075\text{公尺公斤}。$$

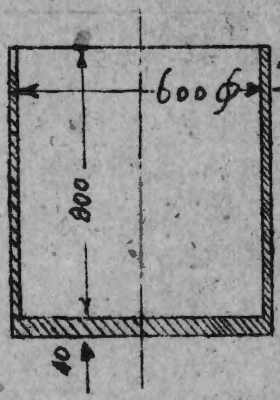


圖95

例三：有一洗衣離水器（應用離心力以祛水），盛衣之圓筒直徑為60公分，用高80公分，用鐵皮做成，鐵皮厚4公厘及1公分如圖95所示。若欲於10秒鐘內加速至每分鐘400轉，問所需之轉動力矩Md應為若干？

解：假設溼衣之比重r=1.2，則筒內溼衣共重

$$G_1=\frac{\pi D^2}{4}\cdot h\cdot r=\frac{\pi(6)^2}{4}\times 8\times 1.2=272\text{公斤}。$$

$$m_1=\frac{G}{g}=\frac{272}{9.81}=27.7\text{公斤秒}^2/\text{公尺}。$$

$$T_1 = m\cdot\frac{r^2}{2}27.7\times\frac{0.32}{2} = 1.25\text{公尺公斤秒}^2。$$

假設鐵之比重為7.8，筒之周圍鐵売重。

$$G^2 = \left(\frac{\pi D_1^2}{4} - \frac{\pi D_2^2}{4}\right)hr = \left[\frac{\pi(6.08)^2}{4} - \frac{\pi(6)^2}{4}\right]\times 8\times 7\ 8$$

$$= \left[(6.08)^2 - (6)^2\right]\times\frac{8\times 7.8\times\pi}{4} = 47.4\text{公斤}。$$

$$m_2 = \frac{G}{g} = \frac{47.4}{981} = 4.84\text{公斤秒}^2/\text{公尺}。$$

$$T_2 = mr^2 = 4.84\times\left(\frac{0\ 604}{2}\right)^2 = 0.441\text{公尺公斤秒}^2。$$

筒底之重量為

$$G_3 = \frac{\pi D^2}{4}\cdot s\cdot r = \frac{\pi\times(6)^2}{4}\times 0.1\times 7.8 = 24.2\text{公斤}$$

$$m_3 = \frac{G}{g} = \frac{24\ 2}{9\ 81} = 2.47\text{公斤秒}^2/\text{公尺}。$$

$$T_3 = m\frac{r^2}{2} = 2.47\times\frac{(0.3)^2}{2} = 0.111\text{公尺公斤秒}^2。$$

試衣筒之質量惰矩總量為

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 1.802\text{公尺公斤秒}^2。$$

若欲於10秒鐘內加速至每分鐘400轉，則其角加速度為

$$\varepsilon = \frac{\omega}{10} = \frac{\pi\times 400}{10\times 30} = 4\ 19\ 1/\text{秒}^2。$$

所需之轉動力矩為

$$Md = \varepsilon T = 4.19\times 1.802 = 7.55\text{公尺公斤}。$$

旋轉軸之移動：由上述數例，已可明瞭質量惰矩之應用及其計算方法

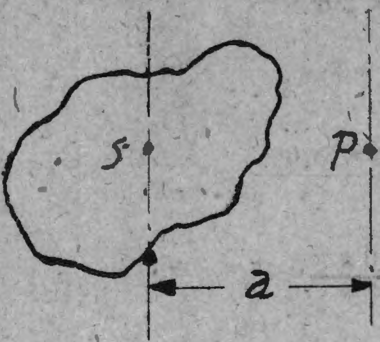


圖96

。前表所示質量惰矩公式中之T，均為物體以在公式內所註明之軸為旋轉軸時所有之惰性。若物體以他軸為旋轉軸，如圖96所示，物體繞P軸旋轉，則其對於P軸之質量惰矩為

$$T_P = T_S + ma^2\text{。} \qquad (2)$$

式內之T_S為物體以重心軸S自轉時之質量惰矩，P為與S平行之軸線，m為物體之質量，a為S軸與P軸間之距離。

轉動惰矩：在實用上質量惰矩T應用較少，普通均使用轉動惰矩GD^2，以計算轉動力矩。因$G=mg$，$D=2r$，$T=mr^2$，故

$$GD^2 = 4g\cdot T\ \text{公斤公尺}^2\text{。} \qquad (3)$$

例如關於電動機之轉子，製造者在說明表內，常註出其GD^2之數值。於計算時除以4g，即得T之值。

惰矩半徑　若已知GD^2之數值，除以G，並開方，即得D或$r=\frac{D}{2}$；此r稱為惰矩半徑。例如有一飛輪，其重量為G，其轉動惰矩為GD^2，則其惰矩半徑r等於$\frac{D}{2}$；換言之，若以重量G集中裝置於離旋轉軸為r之一點上，則其質量惰矩與飛輪原有者相等。

旋轉輪之轉動能：圓輪旋轉時，亦貯藏動能；一如作直線運動之物體貯藏有動能$A=\frac{1}{2}mV^2$。令旋輪各部份之質量為m_1，m_2，m_3，……，其

周圍速度為V_1，V_2，V_3，……，其半徑為r_1，r_2，r_3……，其角速度為ω，則其貯藏之動能之總量為

$$A=\frac{m_1V_1^2}{2}+\frac{m_2V_2^2}{2}+\frac{m_3V_3^2}{2}+\cdots\cdots,$$

以$r_1\omega$代替V_1，$r_2\omega$代替V_2，$r_3\omega$代替V_3……，則得

$$A=\frac{m_1\omega^2r_1^2}{2}+\frac{m_2\omega^2r_2^2}{2}+\frac{m_3\omega^2r_3^2}{2}+\cdots\cdots,$$

$$A=\frac{\omega^2}{2}(m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\cdots\cdots),$$

因$m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\cdots\cdots=T$，為物體對於旋轉軸之質量惰矩，

則

$$A=\frac{1}{2}T\omega^2\text{公尺公斤。}\qquad(4)$$

例一：有一飛輪，其質量惰矩T＝180，每分鐘轉100轉，問貯藏動能為何？

解：由$\omega=\frac{\pi n}{30}$，

$$\omega=\frac{\pi\times100}{30}=10.47 1/\text{秒}$$

$$A=\frac{1}{2}Tw^2$$

$$=\frac{1}{2}\times180\times(10.47)^2$$

$$=9840\text{公斤公尺。}$$

例二：有一圓片，直徑4公尺，厚20公分，比重為$\gamma=3$，其質量惯矩為1507.2公尺公斤秒²，今欲使之於20秒鐘內加速至每分鐘50轉，問在其軸上需幾匹馬力轉動之？

解一：由T＝1507.2公尺公斤秒²，在20秒鐘內貯蔵於圓片內之能為

$$A=\frac{1}{2}T\omega^2=\frac{1}{2}T\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2$$

$$=\frac{1507.2}{2}\times\left(\frac{\pi\times 50}{30}\right)^2$$

$$=753.6\times 5.236^2$$

$$=27.6\times 754=20800\text{公斤公尺。}$$

在一秒鐘內由原動機發出之功為

$$A'=\frac{20800}{20}=1040\text{公斤公尺/秒。}$$

故原動機應有馬力為

$$N=\frac{A'}{75}=\frac{1040}{75}=14\text{馬力。}$$

解二：在20秒鐘內加速至50轉，則其角加速度為

$$\varepsilon=\frac{\omega}{t}=\frac{\frac{\pi\times 50}{30}}{20}=\frac{50\times\pi}{20\times 30}=0.262\ 1/\text{秒}^2\text{。}$$

所需之轉動力矩為

$$Md=\varepsilon T=0.262\times 1507.2=397\text{公尺公斤。}$$

又該輪於20秒鐘內加速至50轉，故其平均速度爲25轉。轉動力矩與平均角速度之乘積，即為功效，故

$$N=\frac{Mb\omega}{75}=\frac{Mb\times\frac{\pi n}{30}}{75}$$

$$=\frac{25\pi Mb}{75\times 30}=\frac{25Mb}{716}$$

$$=\frac{25\times 397}{716}=14\text{馬力。}$$

例三：有轉動軸一組，其質量惰矩$T=3$公尺公斤秒^2。今欲用摩擦聯合器轉動之至每分鐘100轉，摩擦力$P=450$公斤，作用於半徑$r=200$公厘上，問加速度需時若干？

解：加於軸組之轉動力矩為

$$Mb=P\cdot r=450\times 0.2=90\text{公尺公斤。}$$

此90公尺公斤之轉動力矩能使軸組得加速度

$$\varepsilon=\frac{Mb}{T}=\frac{Pr}{T}=\frac{90}{3}=30\,1/\text{秒}^2\text{。}$$

今欲使軸組加速至每分鐘100轉，

$$\omega=\frac{100\times\pi}{30}=10.47\,1/\text{秒。}$$

故加速所需之時間為

$$t=\frac{\omega}{\varepsilon}=\frac{10.47}{30}=0.35\text{秒。}$$

例四：有一飛輪，其質量惰矩$T=10$公尺公斤秒^2，每分鐘轉50轉，設此輪上加以制動力矩$Md=30$公尺公斤，問經3秒鐘後，此輪之轉數等於若干？

解：原有角速度 $\omega_0=\frac{\pi n_0}{30}$，代入 $n_0=50$，

$$\omega_0=\frac{\pi\times 50}{30}=5.25\ 1/秒。$$

因 $Md=\varepsilon T$，代入 $\varepsilon=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$，$\Delta\omega$ 為 Δt 秒鐘內增加之角速度，

$$Md=\varepsilon T=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}T，$$

$$\Delta\omega=\frac{Md\cdot\Delta t}{T}=\frac{30\times 3}{10}=9\ 1/秒。$$

故知三秒鐘後，該輪之角速度為

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega=5.25+9=14.25\ 1/秒。$$

其轉數為

$$n=\frac{30\omega}{\pi}=\frac{30\times 14.25}{\pi}=136\ 轉/分。$$

例五：若欲使圖97所示之重體 $G=2000$ 公斤，於5秒鐘內，加速上升至 $V=$

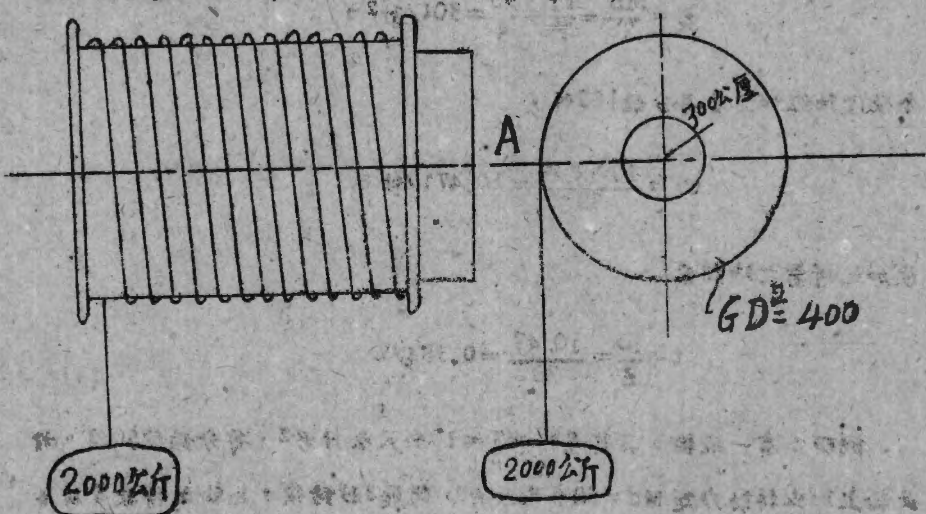


圖97

8公尺/秒。問A軸上需轉動力矩Md若干？

解：重量G加速上升時，索上所受之張力P為重量G及加速力P_1之總和，

$$P_1=mp=\frac{2000}{9.81}\times\frac{8}{5}=204\times1.6=326\text{公斤。}$$

$$P=G+P_1=2326\text{公斤。}$$

此力對於軸上所生之轉動力矩為

$$Md_1=2326\times0.3=698\text{公尺公斤。}$$

索鼓開始轉動時，其角加速度ε

$$\varepsilon=\frac{V}{T\cdot r}=\frac{8}{5\times0.3}=\frac{8}{1.5}=5.33\ 1/\text{秒}^2\text{。}$$

對於此加速之轉動，須用轉動力矩

$$Md_2=\varepsilon I=5.33\times\frac{GD^2}{4g}=5.33\times\frac{400}{4\times9.81}$$

$$=54.3\text{公尺公斤。}$$

故總共所需之轉動力矩為

$$Md=Md_1=Md_2=698+54.3$$

$$=752.3\text{公尺公斤。}$$

在等速上升時，P_1為O，Md_2亦為O，故

$$Md=2000\times0.3=600\text{公尺公斤。}$$

例六：若使上題之重量G加速度下墜，其加速度為5.33 1/秒²，問在輪之周圍上所需之制動力矩若干？

解：索上所受之張力為重量G及加速力P_1之較，

$$P=G-P_1，$$

故制動力矩為

$$M_B = G\times R - P_1\times R - \varepsilon T$$

$$= 2000\times 0.3 - 326\times 0.3 - 5.33\times \frac{400}{4\times 9.81}$$

$$= 600 - 98 - 54.3$$

$$= 447.7 \text{公尺公斤。}$$

轉動力矩換軸計算法：計算轉動力矩之換軸，有下列之三定理：

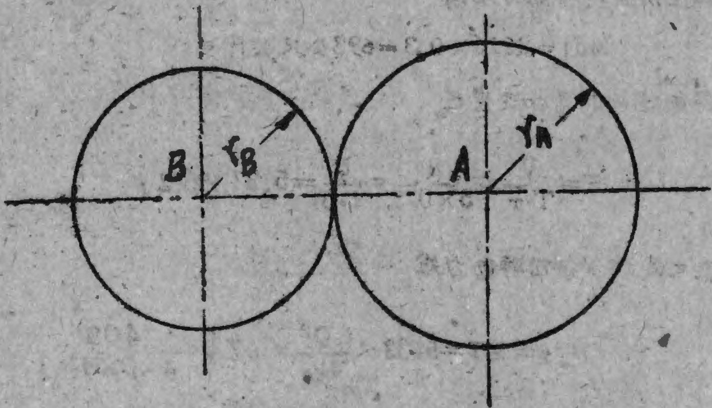


圖98

(1)：二軸以齒輪或皮帶相聯者，其角速度及角加速度與齒輪或皮帶輪之半徑成反比例，

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{r_B}{r_A},\ \frac{\varepsilon_A}{\varepsilon_B} = \frac{r_B}{r_A}\text{。}$$

(2)：二軸以齒輪或皮帶輪相聯者，其轉動力矩與齒輪或皮帶輪之半徑成正比例，

$$Md_A : Md_B = r_A : r_B\text{。}$$

(3)：二軸以任何方式相聯，其周力均相等。

以上三定理均不計摩擦阻力及其他阻力等。

例：有一起重設備如圖99所示，試求A軸之轉動力矩。

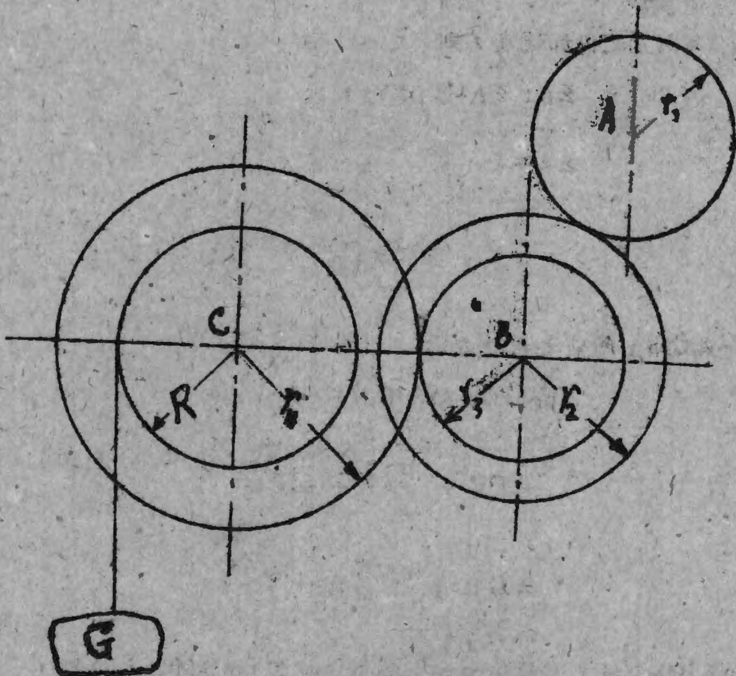


圖99

解：設在C軸上輪體之質量慣矩之總量為T_C；在B軸上輪體之質量慣矩之總量為T_B；在A軸上輪體之質量慣矩之總量為T_A。命p為重體G之上升加速度，則在C軸上之角加速度為

$$\varepsilon_C=\frac{p}{R}.$$

命ε_B為B軸上之角加速度，應用定理(1)，

$$\varepsilon_C:\varepsilon_R=r_3:r_4,$$

$$\varepsilon_B=\varepsilon_C\frac{r_4}{r_3}$$

$$=\frac{p}{R}\cdot\frac{r_4}{r_3}。$$

命ε_A為A軸上之角加速度，則

$$\varepsilon_B:\varepsilon_A=r_1:r_2，$$

$$\varepsilon_A=\varepsilon_B\frac{r_2}{r_1}$$

$$=\frac{p}{R}\cdot\frac{r_4}{r_3}\cdot\frac{r_2}{r_1}。$$

命Md_C為C軸上所需之轉動力矩

$$Md_C=GR+mpR+\varepsilon_C T_C$$

$$=GR+\frac{G}{g}pR+\frac{p}{R}T_C$$

$$=GR+\frac{p}{R}\left(\frac{G}{g}R^2+T_C\right)。$$

命Md_B為B軸上所需之轉動力矩，應用定理(2)計算Md_C之換軸，

$$Md_C:Md_B'=r_4:r_3，$$

$$Md_B'=Md_C\frac{r_3}{r_4}，$$

$$Md_B=Md_B'+\varepsilon_B T_B$$

$$=Md_C\frac{r_3}{r_4}+\frac{p}{R}\cdot\frac{r_4}{r_3}\cdot T_B。$$

命Md_A為A軸上之轉動力矩，應用定理(2)計算Md_B之換軸，

$$Md_B:Md_A'=r_2:r_1，$$

$$Md_B'=Md_B\frac{r_1}{r_2}。$$

$$Md_A = Md_A + \varepsilon_A T_A$$

$$= Md_B \frac{r_1}{r_2} + \frac{P}{R} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot T_A$$

$$= \left(Md_C \cdot \frac{r_3}{r_4} + \frac{P}{R} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot T_P \right) \frac{r_4}{r_3} + \frac{P}{R} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot T_A \circ$$

$$\therefore Md_A = \left\{ \left[GR + \frac{P}{R} \left(\frac{G}{g} R^2 + T_C \right) \right] \frac{r_2}{r_4} + \frac{P}{R} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot T_A \right\}$$

$$\frac{r_1}{r_1} + \frac{P}{R} \cdot \frac{r_4}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot I_A \circ$$

在業經加速以後，重量G以等速度上升，故$mp_B = 0$，$\varepsilon_C = 0$，$\varepsilon_B T_B = 0$，$\varepsilon_A T_A = 0$，在A軸上所需之轉動力矩為

$$Md_A' = GB \cdot \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{r_1}{r_4} \circ$$

習　題

(1) 有一實心圓鐵片，直徑5公尺，厚40公分，比重$\gamma = 7.8$，問其質量惰矩等於若干？

(2) 若欲使圓片於5秒鐘內加速至每分鐘50轉，問需轉動力矩若干？

(3) 有一飛輪，其質量惰矩$T = 250$，每分鐘轉150轉，問貯藏之動能為何？

(4) 有一實心圓鐵片，直徑3公尺，厚25公分，比重$\gamma = 7.8$，今欲使之於30秒鐘內加速至每分鐘60轉，問在其軸上需馬力若干匹？

(5) 試求習題(1)及習題(4)兩圓片之惰矩半徑及轉動惰矩。

(6) 有一飛輪，每分鐘轉350轉，其質量情矩等於1800。若在10秒鐘內減速至340轉，問在此10秒鐘內發出馬力若干匹？

(7) 有轉動軸一組，其質量情矩T＝5公尺公斤秒^2。今欲用摩擦聯合器轉動之至每分鐘100轉，摩擦力P＝500公斤，作用於半徑 r＝250公厘上，問加速度需時若干？

(8) 有一飛輪，其質量情矩T＝15公尺公斤秒^2，每分鐘轉60轉；於此輪上加以轉動力矩MJ＝25公尺公斤，問歷3秒鐘後，此輪之轉數等於若干？

(9) 欲使圖97所示之重量G＝2500公斤於5秒鐘內加速上升至V＝6公尺/秒，問在A軸上需轉動力矩若干？

(10) 若前題之重體G於5秒鐘後以等速度上升，問在A軸上需轉動力矩若干？

(11) 若習題(10)之重體G加速下墜，其加速度爲2.4^{l}/秒^2，問在車輪之周圍上所需之制動力矩M_B爲何？

(12) 有一飛輪如圖100所示，若其比重r＝7.3，問此飛輪之質量情矩爲何？

(13) 問習題(12)之飛輪之轉動情矩爲何？又問其情矩半徑爲何？

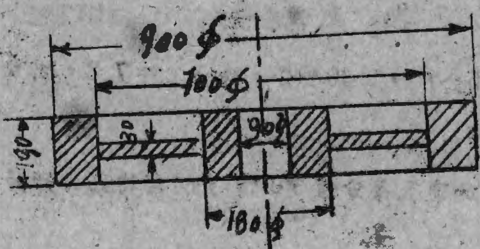


圖100

(14) 習題(12)之飛輪每分鐘轉500轉，若在2秒鐘內減速至400轉，若在減速時間內能供應馬力若干匹？

四　液體靜力學

液體力學：液體力學亦分為液體靜力學及液體動力學二部。液體在不變更其運動情狀時，研究其力之平衡問題者，謂之液體靜力學。液體在變更其運動情狀時，研究其力之作用問題者，謂之液體動力學。茲擇液體靜力學中問題之重要者，討論之如次。

壓力之傳播：　有一瓶，內盛液體，於頸部裝一活塞K如圖101，於其上加力Q。若活塞直徑為D，則單位面積上所受之壓力為

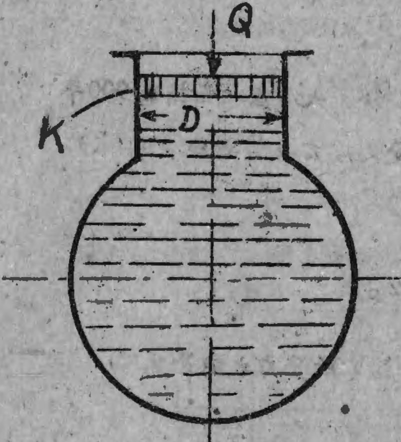


圖101

$$P=\frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}}\ \text{公斤/釐分}^2。\qquad (1)$$

此壓力能不改變其大小，而傳播之於瓶壁之各處。故巴斯克之原理有言：在理想液體內，各處單位面積之壓力均相等，且此壓力之方向與接觸之壁面正交。

水壓機之構造，即以巴斯克原理為根據。用力P_1壓下活塞a，則在大活塞D上，可得力P_2二力數值之比如其直徑

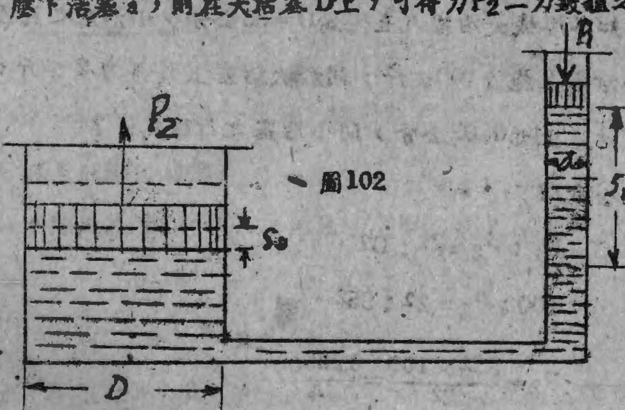


圖102

平方之正比，即

$$P_1 : P_2 = d^2 : D^2。 \quad (2)$$

令S_1爲活塞d之行程，S_2爲活塞D之行程，則二行程之比適相其直徑平方之反比，即

$$S_1 : S_2 = D^2 : d^2。 \quad (3)$$

由(2)(3)兩式，得

$$P_1 s_1 = P_2 s_2 \quad (4)$$

即在同一時間內，兩方之功均相等也。

例一：設水壓機小活塞之面積爲15平方公分，大活塞之面積爲900平方公分。若小活塞上受力100公斤，大活塞所受之壓力及力之總量爲何？

解：小活塞所受之壓力爲

$$p = \frac{100}{15} = 6.67 公斤/公分^2。$$

故大活塞所受之壓力亦爲6.67公斤/公分^2。大活塞所受力之總量爲

$$P_2 = 6.67 \times 900$$

$$= 6000 公斤。$$

例二：已知水壓機大活塞之直徑爲D＝35公分，小活塞之直徑爲d＝2公分。今於小活塞上施力100公斤，問於大活塞上可得力幾公斤。

又問如大活塞上升0.02公分，問小活塞之行程爲何？

解：應用公式(2)，

$$P_1 : P_2 = P^2 : D^2 .$$

$$100 : P_2 = 2^2 : 35^2 .$$

$$P_2 = \frac{35^2 \times 100}{2^2} = \frac{122500}{4}$$

$$=30600\text{公斤}。$$

應用公式(3) $S_1 : S_2 = D^2 : d^2$，

$$S_1 : 0.02 = 35^2 : 2^2，$$

$$S_1 = \frac{0.02\times 35^2}{2^2} = \frac{0.02\times 1225}{4}$$

$$= \frac{24.5}{4} = 6.13\text{公分}。$$

底壓：在上述之水壓機內，因水壓甚大，水之重量不影響及計算之結果。若水壓頗小時，則水之重量不能加以計算，水之重量施於容器底面之壓力，是爲底壓。

例如有一水桶，在h公尺深度，置一面積爲f之平面，與液面相平行。面上所受之力，即爲水柱ABCD之重量；即

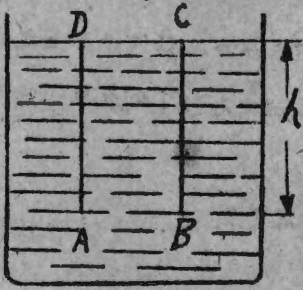


圖103

$$G = f\cdot h\cdot r，$$

r代表水之比重。命p表f面之底壓，

$$p = \frac{G}{D} = h\cdot r。 \qquad (5)$$

由(2)式，可知底壓與水之深度成正比。任意液體中之底壓，亦可以同法求得之。惟任意液體之底壓，祇與液體之深度成正比，與對盛液體之容器之形狀，則毫無關係。

例一：海水比重r=1.01，問海水深30公尺之處之底壓爲何？

解： $p = 300\times 1.01 = 303$公斤/公寸^2

$= 3.03$公尺/公分

例二：水銀柱高760公厘，r=13.6，問所表之大氣壓爲何？

$$p=7.6\times13.6=103.3\text{公斤/公寸}^2$$

$$=1.033\text{公斤/公分}^2。$$

連通管：有二直水桶，中以一管連通之，如圖104所示；則管之左端與其右端之底壓相等。換言之，各該桶內液體之深度與其比重之相乘積亦相等，

$$h_1\gamma_1=h_2\gamma_2。\qquad(6)$$

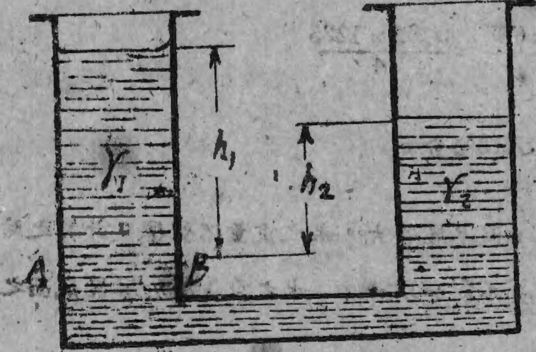


圖104

若二桶內所貯之液體爲同質，$\gamma_1=\gamma_2$，故

$$h_1=h_2，$$

即在二桶內之液體表面在同一高度上。若在二桶內之液體爲不同質，則

$$h_1:h_2=\gamma_2:\gamma_1。\qquad(7)$$

作用於任意平面上之壓力：作用於沉入水中之任何平面上之壓力，等於其重心所在處之壓力；命h_0表平面之重心之深度，則其平均壓力p爲

$$p=\gamma h_0\text{公斤/公分}^2。\qquad(8)$$

命F表平面之總面積，則平面所受之力之總量爲

$$P=F\gamma h_0\text{公斤}。\qquad(9)$$

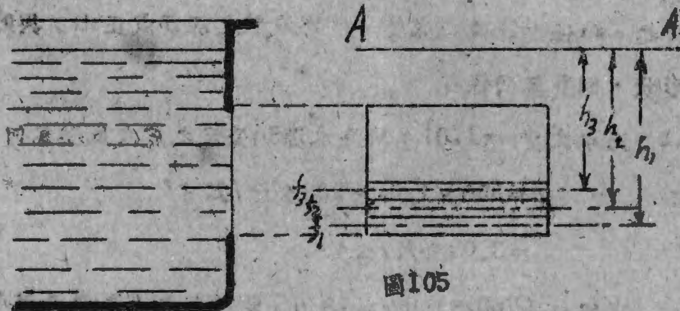


圖105

此力之作用方向與平面必相正交；此力於平面上之作用點，謂之壓力中心點。

壓力中心點：在水箱之壁上，有矩形洞一，如圖105所示，A—A為液體之表面。假設其部份面積為f_1，f_2，f_3，……；各部份面積之重心點之深度為h_1，h_2，h_3，……；其總面積為F；其總面積之重心點之深度為h_0。對於各部份面積之局部壓力為

$$P_1=rf_1h_1,$$

$$P_2=rf_2h_2,$$

$$P_3=rf_3h_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

對於以液面為標準之力矩為

$$P_1h_1=rf_1h_1^2,$$

$$P_2h_2=rf_2h_2^2,$$

$$P_3h_3=rf_3h_3^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

命M為力矩之總和，T_A為矩形面以A—A為旋轉軸之質量惰矩，

$$M=\sum rfh^2=rT_A。$$

命P為施於矩形面上之力之總量，

$$P=rFh_0,$$

命x_0為壓力中心點至液面A—A之距離，則P以A—A為標準之力矩為

$$M_1=Px_0=rFh_0x_0。$$

因$M=M_1$，故

$$rFh_0x_0=rT_A,$$

$$x_o=\frac{T_A}{Fh_o},$$

代入$T_A=T_S+Fh_o^2$，

$$x_o=\frac{T_S+Fh_o^2}{Fh_o}$$

$$x_o=h_o+\frac{T_S}{Fh}。\qquad(10)$$

故壓力中心點之位置，必在平面重心點下側。

例一：有一矩形平面，垂直置於水中，平面之面積爲30×40公分，上緣離水面50公分間平面上所受之平均壓力，力之總量爲何？其壓力中心點爲何？

解：命p爲平均壓力，h_o爲平面重心至液面之距離，P表力之總量，

$$h_o=50+20=70\text{公分}。$$

$$P=rFh_o=3\times4\times7=84\text{公斤}。$$

$$p=rh_o=7\text{公斤}/\text{公寸}^2=0.07\text{公斤}/\text{公分}^2。$$

矩形板之質量惰矩 $T_S=F\cdot\frac{h^2}{12}=\frac{bh^3}{12}$，

$$T_S=\frac{30\times40^3}{12}=160000\text{公分}^4,$$

$$x_o=h_o+\frac{T_S}{Fh_o}$$

$$=70+\frac{160000}{30\times40\times70}$$

$$=70+1.9=71.9\text{公分}。$$

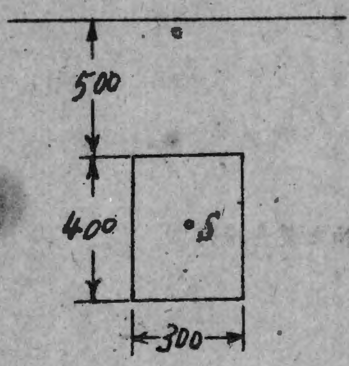


圖106

例二：有一圓板，直徑40公分，垂直浸入水中，其中心距水面30公分，問平面所受之平均壓力，力之總量，及其壓力中心點爲何？

解：命p表平均壓力，P表力之總量如前，

$$Pr=Fh_o=\frac{\pi D^2}{4}\times h_o$$

$$=\frac{\pi\times 4^2}{4}\times 3=37.7\text{公斤}。$$

$$p=rh_o=3\text{公斤}/\text{公寸}^2=0.03\text{公斤}/\text{公分}^2。$$

圓板之質量慣矩 $Tx=F\cdot\frac{r4}{4}=\frac{\pi r^4}{4}$，

$$Tx=\frac{\pi\times 20^4}{4}=\frac{\pi\times 160000}{4}=40000\pi$$

$$=125700\text{公分}^4。$$

$$x_o=\frac{Tx}{F\cdot h_o}+h_o$$

$$=\frac{125700}{\pi\times 20^2\times 30}+30$$

$$=\frac{125700}{37700}+30$$

$$=3.33+30=33.33\text{公分}。$$

浮力：在靜止流體之內，任意一點上各方向之壓力均相等。底壓為由於重量所發生之壓力，即為下壓。施於與液面相正交之平面上之壓力，是為側壓力。與下壓力相平衡之壓力，是為上壓力。沒入水中之物體之底面上所受之壓力不是平衡。物體底面上所受之下壓力大於上壓力者，物體下沉。反之若上壓力大於下壓力者，則物體必上浮。上壓力與下壓力之差，是為浮力。物體之下沉者，於水中之重量，較輕於空氣中之重量，其重量之差，即等於物體與同體積之水重，凡物體之上浮者，重體之物量即等於物體所排除之水重。

一物體之比重，等於該物體之重量與其同體積水重之比。欲求物體比重之法，先在空氣內秤之，得其重量爲G_1，然後再在水中秤之，其得重量爲G_2，命S爲比重，

$$S=\frac{G_1}{G_1-G_2}\text{公斤/公升。} \qquad (11)$$

鮑美氏浮秤：測定液比重之法，常使用浮秤爲之，鮑美氏浮秤爲最常用之一種，其製法以一細玻璃管，中貯定量之液體，然後圍封之即成。以玻璃管浸入淨水內，於玻璃管與水面相切之處，刻一細線，是爲0度。再以之浸入85%淨水及15%食鹽之溶液中，於玻璃管液面相切之處，刻一細線則爲15度。等分兩刻間之長度爲15等份，每份謂之一度。此種浮秤用以測量較密之液體之比重。

用於較稀薄之液體之比重測定，另以同形之玻璃管刻製之。以玻璃管浸入淨水之中，於玻璃管與水面相切之處，刻一標記，是爲10度。再以之浸入90%淨水及10%食鹽之溶液中，於玻璃管與液面相切之處，刻一標記是爲0度。等分兩刻線間之長度爲10等份，每份謂之一度。

例：有一木塊，高40公分，厚20公分，長L公分，比重等於0.7，平浮水面，問浸入若干？

解：設浸入x公寸，則物體之重量爲

$$2\times4\times L\times0.7\text{公斤，}$$

物體所排除之水重爲

$$x\times4\times L\times1\text{公斤。}$$

浮體之重量等於物體所排除之水重，

$$2\times4\times L\times0.7=x\times4\times L,$$

$$x=2\times0.7=1.4\text{公寸}=14\text{公分。}$$

習　題

（1） 有一水壓機，d＝5公分，D＝40公分，若加600公斤之力於活塞d之上面，問在D活塞上能發生壓力若干？D活塞上發生之力之總量若干？

（2） 若欲使D活塞升起S_2＝120公厘，問d活塞之行程S_1應為若干？

（3） 若海水之比重為r＝1.03，問深150公尺處之水壓為何？

（4） 汞之比重為r＝13.6，問汞柱高740公厘所代表之大氣壓為何？

（5） 水箱中垂直浸入一矩形平面，面積為80×50公分，平面上緣距水面60公分，問施於平面上之平均壓力，力之總量，及其壓力中心點為何？

（6） 有一正圓形板，直徑為3公尺，垂直浸沒水中，圓板中心在水下250公分，問施於板上之壓力，力之總量，及其壓力中心點為何？

（7） 有一木塊，高30公分，厚15公分，長80公分，比重為0.73，浮水面，問浸入若干？

（8） 某物體於空氣中衡之，重50公斤，於水中衡之，重20公斤，試求其比重。

五　液體動力學

液流情形：液體於管內或溝內流動時，鄰接管壁或溝壁之分子受有較大之摩擦阻力，在中央之分子，則祇感受極小之摩擦阻力。故液體中央之流動速度較大，液體邊緣之流動速度較小。若壁邊有不平滑處，則更能發生旋渦運動，如圖 107 所示。此種阻力，無法計算；故於計算之時，僅能以液體流動速度之平均值為準。假設有一圓管，其內圓面積為F，流動之平均速度為V，則在各單位時間內流經該管之液量為

圖107

$$Q=FV。\tag{1}$$

流阻高度與流阻速度：固體有位能，有動能，液體亦然。例如圖 108 所示，液體在 M點對於N點之高度為 h_1 在M點之流動速度為 V_1；則若以 N 點為準，在M點處之G公斤液體內貯有之能量為

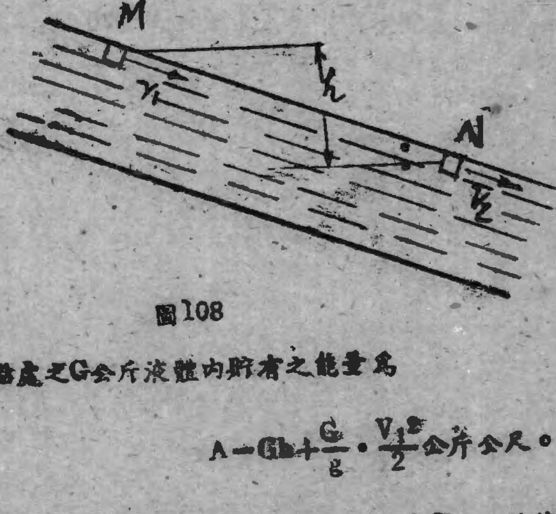


圖108

$$A=Gh+\frac{G}{g}\cdot\frac{V_1^2}{2}\text{公斤公尺}。$$

迨此G公斤液體至 N點時，速度增為 V_2；則若仍以N點為準，該液體之完

全消耗其位能，而僅有動能$\frac{G}{g}\cdot\frac{V_2^2}{2}$，故 (2)

$$A=Gh+\frac{G}{g}\cdot\frac{V_1^2}{2}=\frac{G}{g}\cdot\frac{V_2^2}{2}。 \quad (2)$$

液體於流動時亦受有阻力，假設消耗於克復阻力之能量爲A_R，則(2)則(2)式中能量之變換，應如次式，

$$A=Gh+\frac{G}{g}\cdot\frac{V_1^2}{2}-A_R=\frac{G}{g}\cdot\frac{V_2'^2}{2}。 \quad (3)$$

此V_2'應小於V_2。若$V_1=V_2'$，則液流並不加速，M點所有之位能Gh完全消耗於克復摩擦阻力，即

$$A_R=Gh \quad (4)$$

換言之，欲使液體等速流下，則必須有位能 Gh，或位差h，以抵消摩擦阻力之消耗。此位差h稱爲流阻高度。

又因位能與動能，能互相變換。假設無摩擦阻力之消損，液體有位能Gh，或位差h者，能變換之爲動能$\frac{1}{2}mV^2$而得流速V，故由

$$Gh=\frac{1}{2}mV^2=\frac{G}{g}\cdot\frac{V^2}{2},$$

$$h=\frac{V^2}{2g}。 \quad (5)$$

此位差h稱爲流速高度。

例：設有抽水機之出水管一條，長300公尺，直徑100公厘，內有普通90°之彎頭20只，每小時出水28.3立方公尺，已知直管內之流阻高度爲$h_1=$1.3公尺水柱（每100公尺）；彎頭內之流阻高度$h_2=1$公尺水柱（每100彎頭）；水流速度爲1公尺/秒 問此出水管對於水流之流阻高度共若干？又問流速高度爲何？

解：命H為流阻高度，

$$H=8h_1+\frac{20}{100}h_2=3\times1.3+0.2\times1$$

$$=3.9+0.2=4.1\text{公尺水柱。}$$

換言之，抽水機處另加4.1公尺水柱之水壓以抵消摩擦阻力。又令H′為流速高度，

$$H'=\frac{v^2}{2g}=\frac{1}{2\times9.81}=0.052\text{公尺}=5.2\text{公分。}$$

靜壓與流壓：水在一個大氣壓力之下，在其內貯藏之能量，適與高10公尺水柱之位能相等。若開放水管，使其流動，則其位能之一部或全部可變換為動能。此時水內原有之貯藏能量，即位能與動能之總和，為

$$A=Gh+\frac{mv^2}{2}\text{。}$$

由此公式，設水內貯藏之能量為一定，則水流急處，水壓必低；水流緩處，水壓必較高。圖109示流體在一管中流動之情形。A，B，C為管中之三部份，A處管內之斷面積最小，故液流最急，即V_A為最大，h_A為最小。C處之管內斷面積最大，故流速最緩，即V_C最小，h_C為最大。

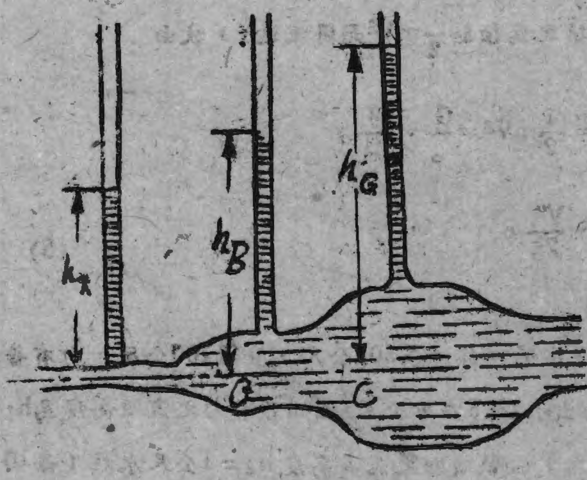


圖109

水在靜止時之水壓，稱為靜壓。在流動時之水壓，稱為流壓。靜壓恆

大於流壓，靜壓與流壓之差，適相當於動能部份之數值。

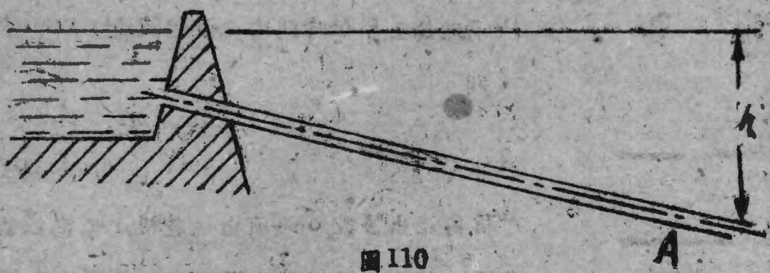


圖110

導水力機之管如圖110所示，若排管不開，則裝在A處之水壓表所示之水位高度為h。若開放水管，則水在A處之速度爲V，此時水壓表所示之水壓，不復爲h，而爲$h-\frac{V^2}{2g}$。

底洞之流量：若底洞離水面h公尺，則流出之速度爲，

$$V=\sqrt{2gh}\text{公尺/秒}。$$

若洞之面積爲f公尺²，則每秒鐘流出之水量爲

$$Q=fV=f\sqrt{2gh}。\tag{6}$$

水之實際流出速度，非爲$V=f\sqrt{2gh}$，而小於此數，因位能Gh之一部份爲摩擦阻力之耗損也。此實際速度約爲理論速度$V=\sqrt{2gh}$之0.67至0.99倍。此比數稱爲速度比數φ。

又水流之斷面積f'與底洞面積f亦不能完全相等，前者常小於後者，其比數稱爲縮數，以α表之，

$$\alpha=\frac{f'}{f}。\tag{7}$$

α之值視水位之高低，洞之位置及形狀而異。圖111示四種底洞之形狀，a之屬於圖111a，b者頗小；屬於圖111c，d者，近似於1。實際底洞流出之

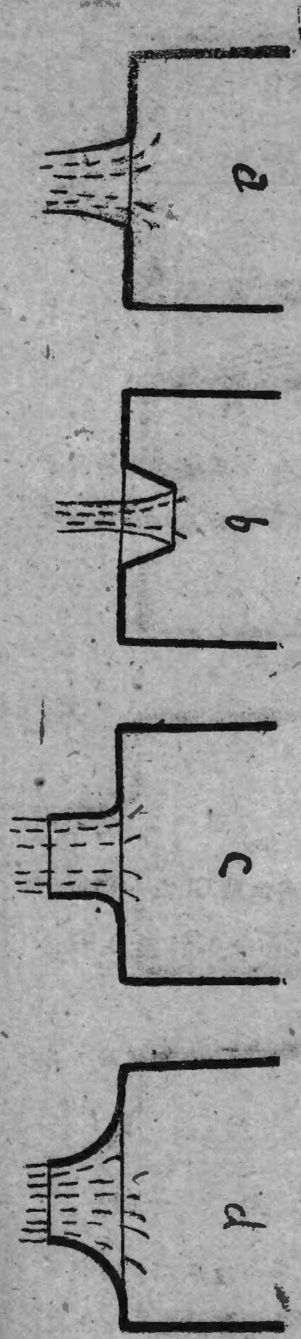


圖111

水量為

$$Q=\alpha f\cdot\varphi V=\alpha\varphi fV=\mu fV\text{。}\qquad(8)$$

fV為理論上單位時間內之液體流量，以Qo表之，則

$$\frac{Q}{Q_0}=\mu,\qquad(9)$$

μ稱為流出係數。此流出係數視水之高位低，底洞之形狀，及洞之位置而定，實際上須用試驗測定之。

例：有一貯水器，水位高2公尺，底洞為正圓形，如圖111 a 所示。已知洞之直徑為5公分，若每分鐘實際流出之水量為 $Q=0.67$ 公尺^3，問流出係數μ為何？

解：

$$V=2gh=\sqrt{2\times9.81\times2}$$

$$=6.26\text{公尺/秒。}$$

$$f=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{\pi\times0.05^2}{4}=0.001864\text{公尺}^2\text{。}$$

故每分鐘內應能流出Qo公尺^{3}水量，

$$Q_0=60Vf=60\times6.26\times0.001864$$

$$=0.7\text{公尺}^3\text{。}$$

$$\mu=\frac{Q}{Q_0}=\frac{0.67}{0.7}=0.957\text{。}$$

壁洞之流量：若液體係由壁洞流出，則於計算時應注意及洞口高度h之大小。若洞在縱

方向甚狹，即h甚小而水位甚高，如112a，液體由洞口流出之速度，可視爲

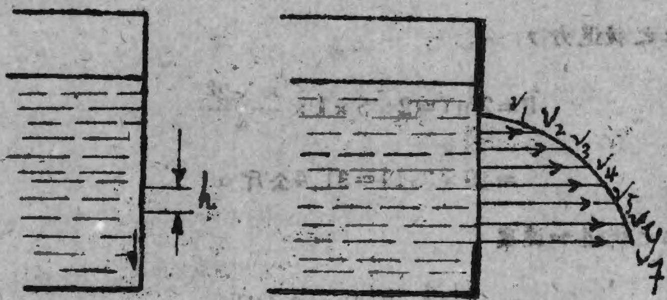


圖112

各部份相等。若水位不高，而h又甚大，如圖112b所示，則上下部份水流之速度不相等。速度於愈上處愈小，愈低處愈大，故液流成一拋物線形。

若壁洞爲一矩形，其上緣之水位爲h_1其下緣之水位爲h_2，洞寬爲b，則於每秒鐘液體流量爲

$$Q_0=\frac{2}{3}\cdot(\sqrt{2gh_2^3}-\sqrt{2gh_1^3})\text{ 公尺}^3。\qquad(10)$$

液體自壁洞流出時之反應力：圖113示一盛液體之貯器，壁上有一洞，面積爲f。若以貯器吊於繩端，液體自壁洞向右流出，則貯器必向左斜退。設f面之重心在液面之下h公分，液體比重爲r則使此貯器向左後退之力爲

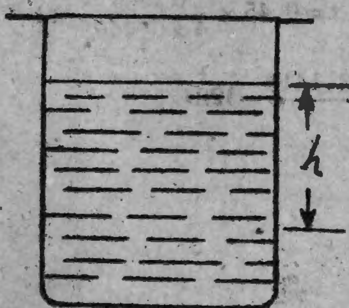


圖113

$$P=2hrf\text{ 公斤}。\qquad(11)$$

即此反應力等於液體壓力之二倍。

例：有一水箱，裝於一車上，水及箱之總重爲100公斤；箱壁有圓洞，直徑爲20公分，其中心在水面之下50公分。若不計一切阻力，則此車能以若干加速度向後退行？

解：　　$m=\frac{100}{g}=10.2$ 公斤秒²/公尺。

命P為車之後退力，

$$P=2\pi r f=2\times5\times1\times\frac{\pi\times2^2}{4}$$

$$=10\times3.14=31.4\text{ 公斤。}$$

命p為車之後退加速度，

$$p=\frac{31.4}{10.2}=3.07\text{ 公尺/秒}^2\text{。}$$

流體自底洞流罄所需之理論的時間：命有一桶，貯水至滿，底洞之面積為f公尺²；已知液面高度為h，桶之內直徑為D，如圖114所示，則流罄所需之時間為

$$t=0.45\times\frac{\pi D^2}{4f}\sqrt{h}\text{ 秒。} \tag{12}$$

例：　已知D＝0.5公尺，f＝0.0007公尺²，h＝1公尺，求流罄所需之時間。

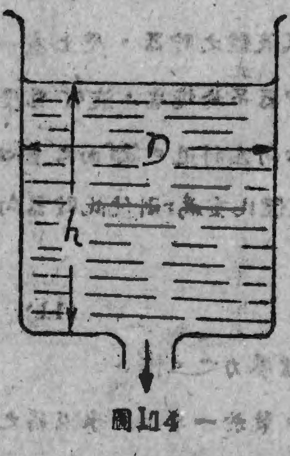


圖114

解：　　$t=0.45\times\frac{0.5^2\pi}{4\times0.0007}\times1$

$$=\frac{0.45\times0.25\times3.1416}{0.0028}=122\text{ 秒}$$

$=2$ 分 2 秒。

習　　題

（1）設有抽水機之出水管一條，長450公尺，直徑100公厘，中間有普通90°彎頭2只，每小時出水28.3立方公尺；已知水流速度V＝1公尺/秒，直管內之流阻高度h＝1.3公尺水柱（每10

0公尺），彎頭內之流阻高度$h_1=1$公尺水柱（每100彎頭）。問此出水管對於水流之流阻高度為何？又問其流速高度為何？

（2） 有一貯水器，水位高4公尺，洞為圓形，洞之直徑為[illegible]公尺，若每分鐘實際流出之水量為$Q=0.98$公尺^3，問流出係數μ為何？

（3） 有一水箱，裝於一車上，水及箱總重200公斤。箱壁有一圓洞，直徑為25公分，其中心在水面之下80公分。若不計一切阻力，則此車能以若干加速度向後運行？

（4） 設有一水桶，內直徑為0.8公尺，液面高1.5公尺，底洞為正圓形，直徑40公分，問流罄之時間為何？

齊光東同志贈