大學叢書

解析幾何

何衍璿
袁武烈 著

商務印書館發行

大學叢書

解析幾何

何衍璿
袁武烈 著

商務印書館發行

中華民國二十三年七月初版
中華民國二十四年六月三版

(5242l精)

大學叢書
(教本)解析幾何一冊
每冊定價大洋叁元貳角
外埠酌加運費匯費

著作者　何衍璿　袁武烈
發行人　王雲五　上海河南路
印刷所　商務印書館　上海河南路
發行所　商務印書館　上海及各埠

(本書校對者楊靜盦　胡達聰)

大學叢書委員會

委　員

弁 言

我國文化落後,科學著述之不振,蓋無可諱言,就數學出版而論,關於普通應用之解析幾何,尚不多覯.求其專為數學上純理之討論者,更如鳳毛麟角矣.鄙人與袁武烈教授因本校數學天文學系初級教材之需求,爰編解析幾何講義.日積月累,彙成本書上下兩卷.上卷論各種位標制及曲線曲面之大綱,廣設例題以明平曲線之繪畫法.作圖務求簡便,討論務求精嚴.意欲學者領會函數之變值,而引起其研究之興味也.下卷述二次曲線曲面之分類與其特性,并及中心,直徑,徑面,極點,極線,極面,軸,焦點,準線等.分項推究,且注意於次序之整理.惟倉卒付梓,舛誤深恐不免,願海內明達有以教之.

民國二十年夏

何衍璿識於中山大學

目　錄

上　卷

目　　錄

下　　卷

第一篇　二次曲線

第二篇　二次曲面

解析幾何

上卷

第一章

位標

1. 解析幾何之目的,在應用代數之分析,以研究幾何圖形(線或面)之性質. 圖形成於點. 故當先定一點在空間之位置. 法人 Descartes 所創之位標制, 爲定位置之最常用者.

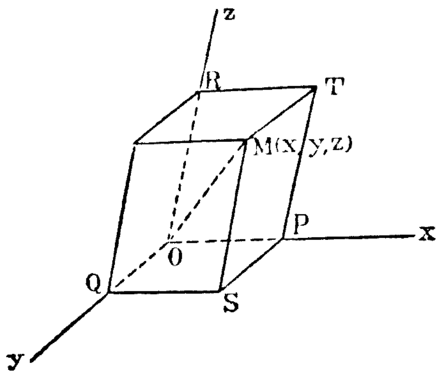


圖 1

任取不同在一平面上而相交於 O 點之三軸 Ox, Oy, Oz. 令 M 爲空間之任一點. 作 PMT, SMQ, RMT 三平面與位標面 (Coördinate planes. 見初等解析幾何)平行, 割位標軸 (Axes of coördinates) Ox, Oy, Oz, 於 P, Q, R, 則 $\overline{OP}$ 爲 M 點之 x 値, $\overline{OQ}$ 爲

M 點之 y 值, $\overline{OR}$ 爲 M 點之 z 值, 此三值稱爲 M 點之位標 (Coördinates). 換言之, M 點之位標爲動徑 (Vector) OM 投射於位標軸之影值也.(投射於 Ox 軸之光線與 yz 位標面平行……).

反言之, 已與 x, y, z 三值即可定一點 M. 學者曾習初等解析幾何, 當慣用正交位標軸 (Rectangular axes). 茲所論者, 不僅限於正交位標軸耳.

若 M 點在 xy 位標面上(例如 S 點), 則 M 點之 z 值爲零. 平行六面體 $QSPT$ 化爲平行四邊形 $QSPO$. 故由 S 點作直線平行於位標軸, 即得 S 點在平面 xOy 之位標.

位標軸有兩種, 以各軸相對之位置而別, 如下列兩圖所示. 兩組之位標軸如同爲圖 2 或圖 3 所示者, 則以同佈置之兩組位標軸名之, 否則名爲不同佈置之兩組位標軸.

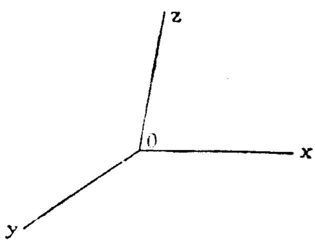


圖 2

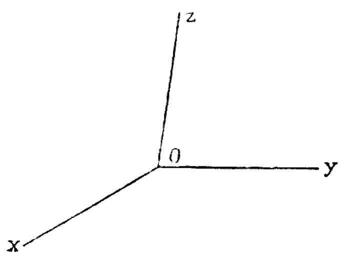


圖 3

2. 兩點之距離——欲求兩點 M 與 M' 之距離, 宜先知兩動徑之幾何積 (Geometrical product of two vectors). 兩動徑 AB 與 CD 之幾何積云者, 乃其長之乘積再乘其交角之餘弦也.

茲以方程式表示於下.

$$(AB)(CD)=AB\cdot CD\cdot\cos(AB,CD).$$

上式又表 AB 正投於方向 $\overline{CD}$ 之影乘 CD 之長,或 CD 正投於方向 $\overline{AB}$ 之影乘 AB 之長.

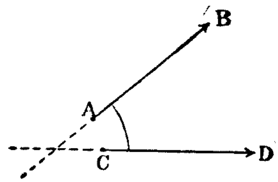


圖 4

設有動徑 σ 爲 α,β,γ 諸動徑之幾何和 (Geometrical sum),動徑 σ' 爲 α',β' 諸動徑之幾何和:

$$(\sigma)=(\alpha)+(\beta)+(\gamma),$$

$$(\sigma')=(\alpha')+(\beta').$$

今證

(1) $$(\sigma)(\sigma')=(\alpha)(\alpha')+(\alpha)(\beta')+(\beta)(\alpha')+(\beta)(\beta')+(\gamma)(\alpha')+(\gamma)(\beta').$$

蓋將動徑 σ 正投射於動徑 σ',則依投影定理得

$$\mathrm{pr}\,\sigma=\mathrm{pr}\,\alpha+\mathrm{pr}\,\beta+\mathrm{pr}\,\gamma.$$

以 σ' 之長徧乘上式之兩邊,則依上所論得

(2) $$(\sigma)(\sigma')=(\alpha)(\sigma')+(\beta)(\sigma')+(\gamma)(\sigma').$$

同理得 $$(\alpha)(\sigma')=(\alpha)(\alpha')+(\alpha)(\beta'),$$

$$(\beta)(\sigma')=(\beta)(\alpha')+(\beta)(\beta'),$$

$$(\gamma)(\sigma')=(\gamma)(\alpha')+(\gamma)(\beta').$$

以 $(\alpha)(\sigma')$, $(\beta)(\sigma')$, $(\gamma)(\sigma')$ 之値代入 (2) 式,則 (2) 式變爲 (1) 式.

今應用上述之結果以求 M 與 M' 兩點之距離.

設 $(Oy,Oz)=\lambda$, $(Oz,Ox)=\mu$, $(Ox,Oy)=\nu$. λ,μ,ν 爲大於零而小於 π 之角.

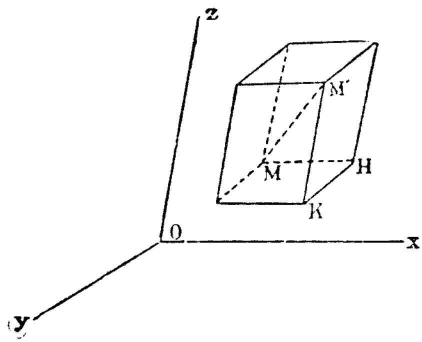


圖 5

令 M 之位標為 x, y, z, M' 之位標為 x', y', z'. 試以 M, M' 之位標及 λ, μ, ν 諸數表 MM' 之距離. 過 M 或 M' 作平面平行於位標面, 得一平行六面體. 以 MM' 為其一對角線, 六面體之邊皆與位標軸平行.

若察 MH, HK, KM' 三邊, 則易知

$$\overline{MH}=x'-x, \quad HK=y'-y, \quad \overline{KM}'=z'-z.$$

又動徑 MM' 為動徑 MH, HK, KM' 之幾何和, 故

$$(MM')=(MH)+(HK)+(KM').$$

如求動徑 MM' 與其本身之幾何積, 則得

$$(MM')(MM')=(MH)(MH)+(HK)(HK)+(KM')(KM')$$
$$+2(HK)(KM')+2(KM')(MH)+2(MH)(HK).$$

但 $$(MM')(MM')=MM'\cdot MM'\cos(MM', MM')=MM'^2,$$

$$(MH)(MH)=\overline{MH}^2=(x'-x)^2,$$

$$(HK)(HK)=(y'-y)^2, \quad (KM')(KM')=(z'-z)^2,$$

且

$$(HK)(KM')=HK\cdot KM'\cos(Oy,Oz)=(y'-y)(z'-z)\cos\lambda$$

$$(KM')(MH)=KM'\cdot MH\cos(Oz,Ox)=(z'-z)(x'-x)\cos\mu$$

$$(MH)(HK)=MH\cdot HK\cos(Ox,Oy)=(x'-x)(y'-y)\cos\nu$$

故令 d 爲 M 與 M' 之距離,則

$$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2+2(y'-y)(z'-z)\cos\lambda$$
$$+2(z'-z)(x'-x)\cos\mu+2(x'-x)(y'-y)\cos\nu.$$

若位標軸爲正交,則 $\lambda=\mu=\nu=\frac{\pi}{2}$, $\cos\lambda=\cos\mu=\cos\nu=0.$

而
$$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2.$$

若 M, M' 同在 xy 平面上則 $z=z'=0.$

而
$$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-x)(y'-y)\cos\nu.$$

更設位標軸爲正交,則

$$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2.$$

3. 已與 $A(x_1, y_1, z_1)$ 及 $B(x_2, y_2, z_2)$ 兩點. M 爲 AB 直線上一點適合於 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$ (k 爲定數)之關係者. 試以 A, B 之位標及 k 表示 M 點之位標.

令 x, y, z 爲 M 點之位標. 將周圍 OMA 投於任一軸上,則有

(1) $\mathrm{pr}\ MA=\mathrm{pr}\ MO+\mathrm{pr}\ OA$

$\qquad =\mathrm{pr}\ OA-\mathrm{pr}\ OM.$

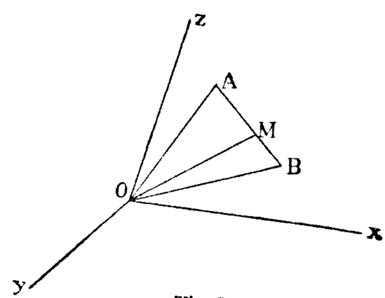


圖 6

同理

(2) $$\text{pr}\, MB = \text{pr}\, OB - \text{pr}\, OM.$$

將(2)式之左右邊除(1)式之左右邊,得

$$\frac{\text{pr}\, MA}{\text{pr}\, MB} = \frac{\text{pr}\, OA - \text{pr}\, OM}{\text{pr}\, OB - \text{pr}\, OM},$$

但 $$\frac{\text{pr}\, MA}{\text{pr}\, MB} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k,$$

故 $$\frac{\text{pr}\, OA - \text{pr}\, OM}{\text{pr}\, OB - \text{pr}\, OM} = k,$$

即 $$\text{pr}\, OM = \frac{\text{pr}\, OA - k\, \text{pr}\, OB}{1-k}.$$

如將周圍 OMA 投於 Ox 軸上,遂得

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1-k}.$$

同樣 $$y = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}, \quad z = \frac{z_1 - kz_2}{1-k}.$$

特端——如 M 爲 A, B 之中點,則 $k = -1$,

而 $$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

由此易知三角形面積之重心之位標爲

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

就中 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) 爲三角形三頂點之位標.

茲再求四面體 $ABCD$ 體積之重心 G 之位標. 設 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) 爲頂點 A, B, C, D 之位標,則由普通力學,得知 G 在 DI 直線上(I 爲三角形 ABC 之面積之重心),且

$$\frac{\overline{GI}}{\overline{GD}}=-\frac{1}{3}.$$

但I之x值為$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, 故G之x值為

$$\frac{\frac{x_1+x_2+x_3}{3}+\frac{x_4}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

依同法以求G之y值及z值.遂得G之位標如下:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\quad z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}.$$

4. 有動徑AB在直線D上.由O點引動徑OP平行於D.且令OP之向(Sense)與AB之向同,$\overline{OP}=1$.試求P點之位標與AB之方向餘弦(Direction cosines)之關係.

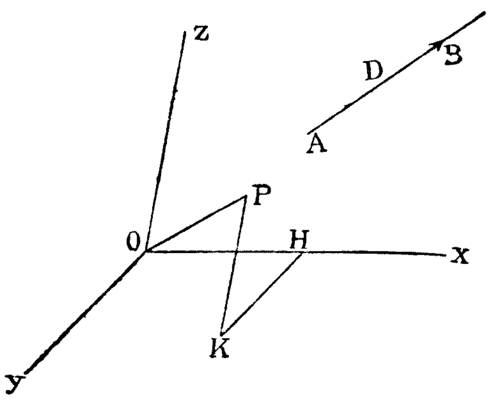


圖 7

令$\alpha=(Ox,OP)$, $\beta=(Oy,OP)$, $\gamma=(Oz,OP)$. α,β,γ表大於零而小於π之角.又設(a,b,c)為P點之位標,位標軸之交角為λ,

μ, ν 如第 2 節所述. 乃投 P 點於位標面 xy, 得 K 點(投射於 xy 之光線與 z 軸平行). 於 Ox 軸上, 取 H 點, 令 $\overline{OH}=a$. 又聯結 HK, KP, 將 $OHKP$ 投於任一軸上, 則有 $\mathrm{pr}\,OH+\mathrm{pr}\,HK+\mathrm{pr}\,KP=\mathrm{pr}\,OP$.

若將 $OHKP$ 正投於 Ox, Oy, Oz, OP 諸軸, 卽得

$$
(1) \qquad \begin{cases} a+b\cos\nu+c\cos\mu=\cos\alpha \\ a\cos\nu+b+c\cos\lambda=\cos\beta \\ a\cos\mu+b\cos\lambda+c=\cos\gamma \\ a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=1. \end{cases}
$$

上式可以解決下列問題:

I. 已與 P 點之位標, 求 AB 之方向餘弦.

(1) 之首三式表此問題之解.

II. 已與 AB 之方向餘弦, 求 P 點之位標.

依一次方程式組之解法, 由 (1) 之首三式可求出 a, b, c 之值. 因未知數之係數之行列式異於零故也.

令 Ω 爲此行列式, 則

$$
\Omega=\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},
$$

展之得

$$
\Omega=1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.
$$

如視上式之右邊爲 $\cos\lambda$ 之二次三項式, 則上式可書爲

$$\Omega=-\cos^2\lambda+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu+1-\cos^2\mu-\cos^2\nu.$$

此式之根爲

$$\cos\mu\cos\nu\pm\sqrt{\cos^2\mu\cos^2\nu+1-\cos^2\mu-\cos^2\nu}$$

$$=\cos\mu\cos\nu\pm\sqrt{(1-\cos^2\mu)(1-\cos^2\nu)}$$

$$=\cos\mu\cos\nu\pm\sin\mu\sin\nu=\cos(\mu\mp\nu)$$

故 $$\Omega=-[\cos\lambda-\cos(\mu+\nu)][\cos\lambda-\cos(\mu-\nu)].$$

應用餘弦之差之公式,得

$$\Omega=4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\cdot\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\cdot\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\cdot\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

但 λ, μ, ν 爲三面角 (Trihedral angle) 之面角 (Face angle), 而兩面角之和大於其他之面角. 又各面角之和小於 2π, 故 $\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu-\lambda}{2}, \cdots\cdots$ 之值均在 o 與 π 之間, 而其正弦爲正. 是即 Ω 爲正也.

Ω 既不爲零, 於是 (1) 之首三式爲獨解 (Unique solution, 參閱何魯段子燮合著之行列式詳論).

III. 求 AB 之方向餘弦之關係.

由 (1) 之首三式求出 a, b, c. 將其值代入 (1) 之末式, 得

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=0.$$

IV. 求 a, b, c 之關係.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 之值已見於(1)中首三式之左邊.茲將其值代入(1)中第四式,則得 a, b, c 之關係如下:

$$a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu=1.$$

5. 位標軸之變換.

第一情形——新軸與舊軸平行且同向.

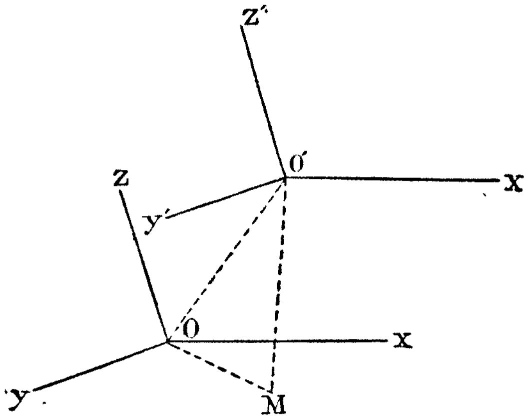


圖 8

設 Ox, Oy, Oz 爲舊軸. $O'x', O'y, O'z$ 爲新軸. O' 點對於舊軸之位標爲 p, q, r, 又 M 爲空間之一點,其舊位標爲 x, y, z, 新位標爲 x', y', z'.

聯結 OO', OM, MO' 將周圍 OMO' 投射於 Ox 軸上(投射於 Ox 軸之光線與 yz 位標面平行),則有

$$\text{pr}\, OM=\text{pr}\, OO'+\text{pr}\, O'M,$$

即 $$x=p+x'.$$

同理得
$$y=q+y',$$
$$z=r+z'.$$

第二情形——原點不變,但各新位標軸之位向爲任意.

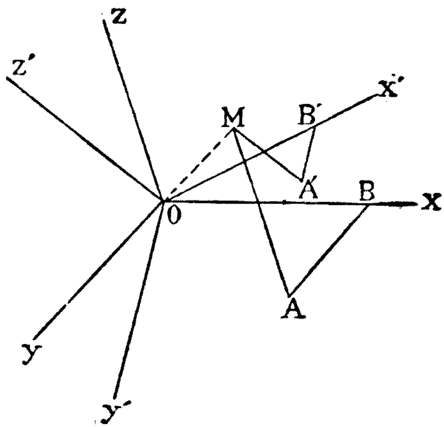


圖 9

於新位標軸 Ox', Oy', Oz' 上,各取與 O 距離等於 1 之點共得三點. 令 (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ 爲此三點對於舊軸 $Oxyz$ 之位標. 第一點 (α, β, γ) 在 Ox' 軸上, 第二點 $(\alpha', \beta', \gamma')$ 在 Oy' 軸上, 第三點 $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ 在 Oz' 軸上.

設 x, y, z 爲 M 點之舊位標, x', y', z' 爲 M 點之新位標, A' 爲 M 點在位標面 $x'y'$ 之投影(投射於 $x'y'$ 之光線與 Oz' 平行).

在 Ox' 軸上, 取 $OB'=x'$. 聯結 $B'A'$, $A'M$, 則 $OB'A'MO$ 成一周圍, 此周圍稱爲 M 點之位標圈. 將 M 點之位標圈投射於 Ox 軸上, 則

$$\operatorname{pr} OM = \operatorname{pr} OB' + \operatorname{pr} B'A' + \operatorname{pr} A'M,$$

即
$$x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z'.$$

同樣得
$$y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$

$$z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'.$$

普通情形——新軸爲任意之位置.

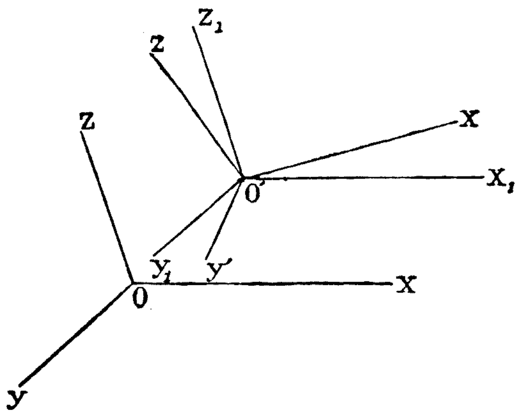


圖 10

令 $O'x_1y_1z_1$ 爲與 $Oxyz$ 平行且同向之位標軸,則由第一情形得

$$(1)\qquad \begin{cases} x = p + x_1 \\ y = q + y_1 \\ z = r + z_1, \end{cases}$$

由第二情形得

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\ y_1 = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\ z_1 = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'. \end{cases}$$

合(1)及(2)計之,得

$$(3)\qquad \begin{cases} x=p+\alpha x'+\alpha' y'+\alpha'' z' \\ y=q+\beta x'+\beta' y'+\beta'' z' \\ z=r+\gamma x'+\gamma' y'+\gamma'' z'. \end{cases}$$

(3)式爲位標軸變換之通式.

又曲面之次數不因位標軸之改變而異,此證委諸讀者.

6. 特端——設 $Oxyz$ 及 $O'x'y'z'$ 皆爲正交之位標軸,則此 (α,β,γ), (α',β',γ'), $(\alpha'',\beta'',\gamma'')$ 依次代表 Ox', Oy', Oz' 之方向餘弦,或記爲

	Ox	Oy	Oz
$O'x'$	α	β	γ
$O'y'$	α'	β'	γ'
$O'z'$	α''	β''	γ''

下列二定理表此九值之關係.

定理一.

$$\delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}=\pm 1$$

因位標軸爲正交,故有

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1 \\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1 \end{cases}$$

及

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0 \\ \alpha''\alpha\ +\beta''\beta\ +\gamma''\gamma\ =0 \\ \alpha\ \alpha'\ +\beta\ \beta'\ +\gamma\ \gamma'\ =0, \end{cases}$$

由(2)之後二式求出 α, β, γ 之值得

$$(3)\qquad \begin{cases} \alpha=\lambda(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'') \\ \beta=\lambda(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'') \\ \gamma=\lambda(\alpha'\beta''-\beta'\alpha''), \end{cases}$$

就中 λ 爲待定常數.

將(3)中各式之兩邊自乘而加之,則有

$$(4)\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\lambda^2[(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2 \\ +(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2+(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')^2]$$

依 Lagrange 之公式

$$(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2+(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2+(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')^2$$
$$=(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)-(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''^2)$$

並參照(1),(2).於是(4)式化爲

$$\lambda^2=1,$$

故
$$\lambda=\pm 1.$$

λ 之值既定,乃以 α 乘(3)之第一式,β 乘(3)之第二式,γ 乘(3)之第三式而加之,則

$$1=\lambda[\alpha(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+\beta(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')+\gamma(\alpha'\beta''-\beta'\lambda'')]$$

λ 之系數與 δ 之展式同,故

$$\delta=\frac{1}{\lambda}.$$

即 $$\delta=\pm 1.$$

備考——命 $a, b, \cdots\cdots c''$ 依次爲 δ 之展式中 $\alpha, \beta, \cdots\cdots\gamma''$ 之系數，則 (3) 可書爲

$$\alpha=\frac{a}{\delta},\qquad \beta=\frac{b}{\delta},\qquad \gamma=\frac{c}{\delta}.$$

同理 $$\alpha'=\frac{a'}{\delta},\qquad \beta'=\frac{b'}{\delta},\qquad \gamma'=\frac{c'}{\delta}.$$

$$\alpha''=\frac{a''}{\delta},\qquad \beta''=\frac{b''}{\delta},\qquad \gamma''=\frac{c''}{\delta}.$$

定理二. δ 爲 $+1$ 或 -1，視 $Oxyz$, $Ox'y'z'$ 兩組位標軸爲同佈置或不同佈置而定.

蓋設 $Oxyz$, $O'x'y'z'$ 兩組位標軸爲同佈置，則當其相重時(即 O 與 O' 合，$\overline{Ox}$ 與 $\overline{O'x'}$ 合，$\overline{Oy}$ 與 $\overline{O'y'}$ 合，$\overline{Oz}$ 與 $\overline{O'z'}$ 合)，得

$$\delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1.$$

乃將位標軸 $O'x'y'z'$ 移動至任意之位置. 在移動時，$\alpha, \beta, \cdots\cdots\gamma''$ 連續而變，故 δ 亦連續而變.

但 δ 祇有 $+1$ 及 -1 兩值，由是 δ 常爲 $+1$. 依同理，如 $Oxyz$, $O'x'y'z'$ 兩組位標軸不同佈置，則 $\delta=-1$.

7. Euler 之公式.

設有兩組同佈置之正交位標軸 $Oxyz$ 及 $O'x'y'z'$，如圖 11 所示.

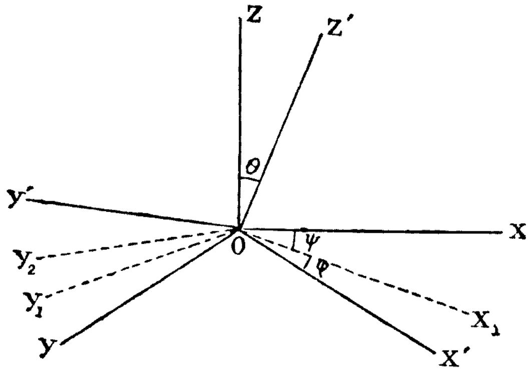


圖 11

先定 $(Oz, Oz')=\theta$, θ 表在零與 π 間之角. 乃察 xOy 及 $x'Oy'$ 兩平面相交之直線. 直線有二向, 其一向 $\overline{Ox_1}$ 爲吾人所採定者. 採定之法爲使位標軸 $Oxyz$ 與位標軸 $Ozz'x_1$ 同佈置.

今依下列三轉動, 可將位標軸 $Oxyz$ 之位置移至位標軸 $Ox'y'z'$ 之位置.

I. 將 $Oxyz$ 繞 Oz 向右轉至 Ox 重合於 Ox_1 爲止. 此時 Oy 落在 Oy_1 上. 所轉之角以 ψ 記之 $(0<\psi<2\pi)$.

II. 將 Ox_1y_1z 繞 Ox_1 向右轉, 至 Oz 重合於 Oz' 爲止. 此時 Oy_1 落在 Oy_2 上. 所轉之角爲 $\theta=(Oz, Oz')$.

III. 將 Ox_1y_2z' 繞 Oz' 向右轉, 至 Ox_1 重合於 Ox' 爲止. 而 Oy_2 適落在 Oy' 上, 蓋以 $Oxyz$ 及 $Ox'y'z'$ 爲同佈置之位標軸故也. 所轉之角爲 $\phi(0<\phi<2\pi)$.

由上可見 $Ox'y'z'$ 之位置視 ψ, θ, ϕ 三值以爲衡. Euler 以此三值表位標之變換.

設 M 點對於各組位標軸之位標如下表所示.

位標軸	$Oxyz$	Ox_1y_1z	Ox_1y_2z'	$Ox'y'z'$
M點之位標	x, y, z	x_1, y_1, z	x_1, y_2, z'	x', y', z'

由 I 得
$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi$$

由 II 得
$$y_1 = y_2 \cos\theta - z' \sin\theta$$
$$z = y_2 \sin\theta + z' \cos\theta$$

由 III 得
$$x_1 = x' \cos\theta - y' \sin\phi$$
$$y_2 = x' \sin\phi + y' \cos\phi$$

合以上六式消去 x_1, y_1, y_2, 得

$$x = x'(\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\cos\theta)$$
$$- y'(\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\psi\cos\theta) + z'\sin\theta\sin\psi$$
$$y = x'(\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi\cos\theta)$$
$$- y'(\sin\phi\sin\psi - \cos\phi\cos\psi\cos\theta) - z'\sin\theta\cos\psi$$
$$z = x'\sin\phi\sin\theta + y'\cos\phi\sin\theta + z'\cos\theta$$

上三式名爲 Euler 之公式.

8. 球面三角之基本公式.

有球面三角 ABC. a, b, c 依次爲 A, B, C 三角所對應之邊. 因球面三角共有六元素(Element), 故知其中三元素, 則可以求其他三元素. 今應用兩組位標軸之關係以求其基本公式.

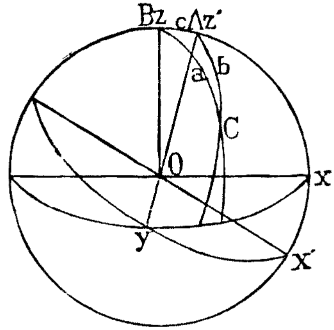


圖 12

設球之半徑為 1. $Oxyz$ 為第一組之正交位標軸,其選定之法合下列各條件:

(a) 原點與球心相重.

(b) xz 平面與 OAB 平面相重.

(c) 以 OB 為 Oz 軸.

(d) 由 Oz 至 Ox 之向與由 B 至 A 同 (Ox 之選定法).

(e) 由 Ox 至 Oy 之向與由 BA 至 BC 同 (Oy 之選定法).

又作第二組之正交位標軸 $Ox'y'z'$, 其原點仍為 O. Oy' 與 Oy 同, Oz' 經過 A. 若將位標軸 Ozx 繞 Oy 轉 c 角, 即達 $Oz'x'$ 之位置.

設用第一組之位標軸, C 點之位標為 x, y, z. 用第二組之位標軸, C 點之位標為 x', y', z'. 則依 Ozx 及 $Oz'x'$ 兩組位標軸之變換,得

$$(1)\qquad \begin{cases} y = y' \\ z = z'\cos c - x'\sin c \\ x = z'\sin c + x'\cos c. \end{cases}$$

依第一組之位標軸, C 點之極位標 (Polar coördinates 見初等解析幾何) 為

$$\rho = 1,\ \theta = a,\ \psi = B.$$

(C' 為 C 在 xy 平面之正投影)

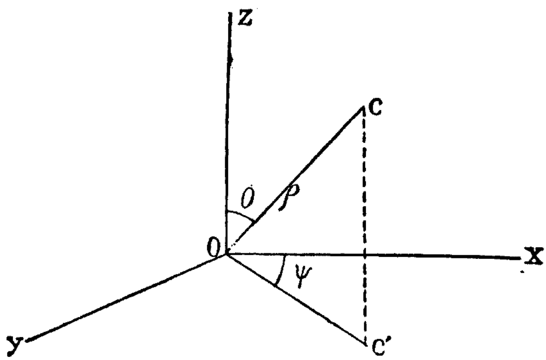


圖 13

故有

$$(2)\qquad \begin{cases} x=\sin a\cos B, \quad y=\sin a\sin B, \\ z=\cos a \end{cases}$$

依第二組之位標軸, C 點之極位標爲

$$\rho=1,\ \theta=b,\ \psi=\pi-A.$$

故有

$$(3)\qquad \begin{cases} x'=-\sin b\cos A, \quad y'=\sin b\sin A, \\ z'=\cos b. \end{cases}$$

由 (1), (2), (3) 式消去 x, y, z, x', y', z'. 得

$$(4)\qquad \begin{cases} \sin a\sin B=\sin b\sin A \\ \qquad \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \\ \sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A. \end{cases}$$

(4) 中之第一式爲正弦之比例式. 如知二邊及其所夾之角,則由第二式可求對此角之邊.第三式含有五元素. 如欲化

為四元素,由第一式抽出 $\sin a$ 之值代入第三式,而將方程式之兩邊徧除以 $\sin b$ 可也.故由 (4) 式得

$$(5)\qquad\begin{cases}\dfrac{\sin a}{\sin A}=\dfrac{\sin b}{\sin B}=\dfrac{\sin c}{\sin C}\\[2ex] \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\[2ex] \sin A\cot B=\sin c\cot b-\cos c\cos A.\end{cases}$$

欲得其他公式,宜察 ABC 之極三角形 (Polar triangle 見立體幾何或球面三角).如將(5)之 a, b, c, A, B, C 易以 $\pi-A, \pi-B$ $\pi-C, \pi-a, \pi-b, \pi-c$, 則 (5) 之第一式不變,第二式變為

$$(6)\qquad \cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a.$$

第三式之 a, A 依次變為 c, C. (5), (6) 為球面三角之基本公式.其他公式均可由之推出.

9. 齊次位標 (Homogeneous coördinates).

令 x, y, z 為 M 點之位標 X, Y, Z, T 非全為零之四數而合於下列關係

$$\frac{X}{T}=x,\qquad \frac{Y}{T}=y,\qquad \frac{Z}{T}=z,$$

則此四數稱為 M 點之齊次位標.

一點有無限組之齊次位標,蓋可任以一因子徧乘 X, Y, Z, T 四數故也.如令 $T=1$, 復得通常所用之位標.

齊次量可以輔助方程式理論之申說:設如有歸於二次式 $Ax^2+Bx+C=0$ 之問題.就中 A, B, C 為已與件之函數.在普通情形時,上式有二根.但如已與件變易,至使 A 為零,則二次式

降為一次,祇有一根而已.若視此為普通情形之特端,而謂一根為無窮;則試問一次式 $Bx+C=0$ 有一根為無窮乎?謂二次式有一根為無窮則可,謂任何一次式有一根為無窮則非也.欲破疑難,應借用齊次量.其法以 $\frac{x}{z}$ 易 x 而變二次式為

$$Ax^2+Bxz+Cz^2=0.$$

當 A 為零時,二次式化為

$$z(Bx+Cz)=0,$$

此亦二次式也.與一次式 $Bx+Cz=0$ 有別,不因 A 為零而失去其根.復以解代數方程組喻之.在幾何學上解方程組

$$(S)\qquad \begin{cases} ax+by+c=0 \\ f(x,y)=0 \end{cases}$$

為求直線與曲線之交點.設 m 為 $f(x,y)$ 之次數, $ax+by+c$ 非 $f(x,y)$ 之因子,則就普通情形而言,(S)有 m 組之解,或虛或實,或不等或相重.但有時解答之組數可以減少,甚至化為無有,如下列兩方程組,即其例也.

$$(1)\qquad \begin{cases} x=0 \\ x^3+axy+bx+y+d=0, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x=0 \\ xy-2=0 \end{cases}$$

若視此為普通情形之極限,視數組之 y 值為無窮,實強辭耳.用齊次量則常得 m 組之解.

以 $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ 依次易 (S) 之 x, y, 使 (S) 化為

$$(S')\qquad \begin{cases} aX+bY+cZ=0 \\ F(X,\ Y,\ Z)=0. \end{cases}$$

而上述之命題,可換為求合於 (S') 之 X, Y, Z 之比值.

由 (S') 消去 Z, 即得 X, Y 之 m 次齊次式.如令 $\alpha X+\beta Y$ 為此式之一因子,則本題之一解為

$$\frac{X}{-c\beta}=\frac{Y}{c\alpha}=\frac{Z}{a\beta-b\alpha},$$

故本題常有 m 組之解.

習題一

1. 已與兩點 $M_1(0{\cdot}7,\ -4{\cdot}6,\ 2{\cdot}8)$ 及 $M_2(-3{\cdot}6,\ -5{\cdot}8,\ 1{\cdot}4)$, 試求 M 點之位標其與 M_1M_2 之關係為 $\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}=-1{\cdot}65$ 者.

2. 已知三角形之重心及兩頂點之位標, 求第三頂點之位標. 並推廣至四面體.

3. 設位標軸 $Oxyz$ 為正交,已與一線向 $O\lambda$ 及一動徑 $\overline{A_1A_2}$ 與之正交.在 $O\lambda$ 之正交平面上將 A_1A_2 繞 A_1 點轉 ν 角, A_2 達於 A_3 之位置. 若 A_1, A_2 之位標及 $O\lambda$ 之方向餘弦 a, b, c 為已知, 試求 A_3 之位標.

4. 設位標軸 $Oxyz$ 為正交,在 xOy 平面上有 $A_1(x_1,\ y_1,\ 0)$, $A_2(x_2,\ y_2,\ 0)$ 兩點. 以 A_1A_2 為邊.作等邊三角形 $A_1A_2A_3$. A_3 之選定,在使環繞周界 $A_1A_2A_3$ 之向與 Ox 至 Oy 之向相同. 乃將此三角形繞動徑 A_1A_2 轉 θ 角, A_3 達於 A_3' 之位置. 又以 $A_1A_2A_3'$ 為底作正四面體 $A_1A_2A_3'A_4$. A_4 之選定, 使位標軸 $A_1A_2A_3'A_4$ (A_1 視為原點)與位標軸 $Oxyz$ 同佈置.試以 x_1, y_1, x_2, y_2, θ 表 A_3, A_3', A_4 之位標.

第 二 章

平面上之直線

10. 直線之方程式——直線爲一次方程式.蓋如取直線爲x軸,則方程式爲 $y=0$. 又方程式之次不因位標軸之變換而異.故在平面上直線之普通方程式爲

(1) $$Ax+By+C=0.$$

反言之,一次方程式代表直線.

取 (1) 式而論,令 M_0 及 M_1 爲合於 (1) 式之兩點.乃將位標軸變換.以 M_0 爲原點,新軸 M_0x' 過 M_1,則 (1) 式轉換爲

(2) $$A'x'+B'y'+C'=0.$$

但 M_0 點之位標 (o, o) 合於 (2) 式,故 $C'=0$. 又 M_1 異於 M_0,而其位標合於 (2) 式,故其 x' 值不爲零.惟以其在 x' 軸上,故其 y' 值爲零.於是欲 (2) 式成立,非 A' 爲零不可. (2) 式遂化爲 $y'=0$. 是即代表直線 M_0x' 也.

11. 兩方程式代表同一直線之必須及充足條件爲:兩方程式之係數成比例.

此條件爲充足,實顯然可見.玆證其爲必須:

設 (1) $Ax+By+C=0$, (2) $A'x+B'y+C'=0$ 爲兩直線之方程式.

如 $A \neq o$, 則由 (1) 式抽出 $x=-\frac{By+C}{A}$ 代入 (2) 式得

$$-\frac{A'(By+C)}{A}+B'y+C'=0.$$

即
$$\left(-\frac{A'B}{A}+B'\right)y-\frac{A'C}{A}+C'=0.$$

欲 (1) 式之任何解為 (2) 式之解, 必也

$$-\frac{A'B}{A}+B'=0 \text{ 及 } -\frac{A'C}{A}+C'=0.$$

令
$$\frac{A'}{A}=\lambda, \text{ 遂得}$$

$$A'=\lambda A,\ B'=\lambda B,\ C'=\lambda C$$

如 $A=0$ 時, 可設 $B \neq 0$. 依上法仍得相同之結果.

如 $A=0$, $B=0$, 則 (1) 式代表無窮遠處之直線, 將於下章論之.

12. 兩直線方程式代表平行二直線之必須及充足條件為: 兩式之 x 與 y 之對應係數成比例.

設　(1)　$Ax+By+C=0$,　(2)　$A'x+B'y+C'=0$

為兩直線之方程式. 謂此二直線平行, 謂其在有限距離處無相交之點可也.

設 $A \neq 0$. 由 (1) 式抽出 $x=-\frac{By+C}{A}$ 代入 (2) 式得

$$\left(-\frac{A'B}{A}+B'\right)y-\frac{A'C}{A}+C'=0.$$

欲上式無解, 必也

$$-\frac{A'B}{A}+B'=0, \qquad -\frac{A'C}{A}+C'\neq 0.$$

故 $$A'=\lambda A, \qquad B'=\lambda B, \qquad C'=\lambda C.$$

備考: 如將直線方程式(1)書為

(1′) $$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

則 $-\dfrac{A}{B}$ 稱為直線(1)之角係數 (Angular coefficient).

由此可見直線(1)平行於直線

(3) $$y=-\frac{A}{B}x.$$

(3)式可書為 $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{A}{B}$,

故直線(3)之角係數為直線上任一點之 y 值與 x 值之比. 兩直線平行與否, 視其角係數相等與否而定.

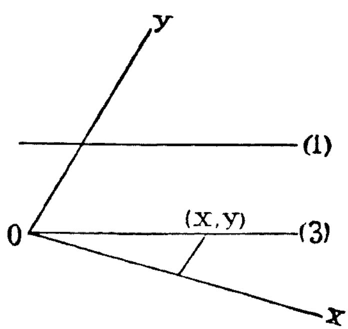


圖 14

13. 已知直線 D 之角係數, 求 $\tan(Ox, D)$ 之值.

由上節之備考, 可設 D 過原點, 其方程式為 $y=mx$, m 為 D 之角係數, 在 D 上可任取一點 $A(x_0, y_0)$, 令 $\alpha=(Ox, OD)$, $\theta=(Ox, Oy)$.

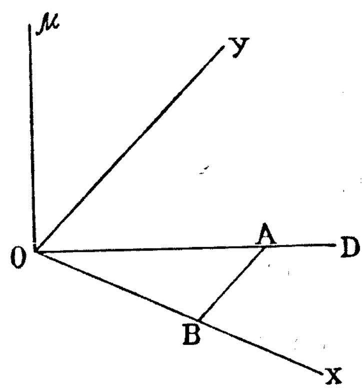


圖 15

過 A 點作 $AB \parallel Oy$, 過 O 點作 $O\mu \perp OD$, $(OA, O\mu)=\frac{\pi}{2}$. 將周圍 OAB 正投於 $O\mu$ 上,則有

(1) $$\text{pr } OB = -\text{pr } BA + \text{pr } OA.$$

惟
$$\begin{aligned}\text{pr } OB &= \overline{OB}\cos(Ox, O\mu)\\ &= x_0 \cos[(Ox, OA)+(OA, O\mu)]\\ &= x_0\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -x_0 \sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{pr } BA &= \overline{BA}\cos(Oy, O\mu)\\ &= y_0\cos[(Oy, Ox)+(Ox, O\mu)]\\ &= y_0\cos\left(-\theta+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\\ &= y_0\sin(\theta-\alpha),\end{aligned}$$

又 $$\text{pr } OA = 0,$$

故 (1) 式變爲

$$-x_0\sin\alpha + y_0\sin(\theta-\alpha)=0.$$

即 $$\frac{y_0}{x_0}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

但 $$\frac{y_0}{x_0}=m,$$

故有 (2) $$m=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

(2) 式可書爲

$$m(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)=\sin\alpha,$$

或 $$\sin\alpha(1+m\cos\theta)=m\sin\theta\cos\alpha,$$

即 (3) $$\tan\alpha=\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta}.$$

備考:——

在(2)式中,如與α以$\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{2}+\theta$兩值,則得垂直於Ox或Oy之直線之角係數.由是知過原點而垂直於Ox之直線爲

$$x+y\cos\theta=0.$$

過原點而垂直於Oy之直線爲

$$y+x\cos\theta=0.$$

14. 已與直線D及D'之方程式,求$\tan(D, D')$.

設m爲D之角係數,m'爲D'之角係數.

令 $$(Ox, D)=\alpha,$$
$$(Ox, D')=\alpha',$$

則得 $$\tan\alpha=\frac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta},\ \tan\alpha'=\frac{m'\sin\theta}{1+m'\cos\theta}.$$

就中$\theta=(Ox, Oy)$如前節所述.

又因 $$(D, D')=(D, Ox)+(Ox, D'),$$

而此等式之兩邊與$\alpha'-\alpha$相差不過π之倍數,故

$$\tan(D, D')=\tan(\alpha'-\alpha)=\frac{\dfrac{m'\sin\theta}{1+m'\cos\theta}-\dfrac{m\sin\theta}{1+m\cos\theta}}{1+\dfrac{mm'\sin^2\theta}{(1+m'\cos\theta)(1+m\cos\theta)}},$$

即 $$\tan(D, D')=\frac{(m'-m)\sin\theta}{1+mm'+(m+m')\cos\theta}.$$

如 D 及 D' 之方程式爲

$$Ax+By+C=0,$$

$$A'x+B'y+C'=0,$$

則 $$m=-\frac{A}{B},\qquad m'=-\frac{A'}{B'},$$

故又得

$$\tan(D,D')=\frac{(AB'-BA')\sin\theta}{AA'+BB'-(AB'+BA')\cos\theta}.$$

由此可知 D 及 D' 兩直線正交之條件爲:

$$1+mm'+(m+m')\cos\theta=0,$$

或 $$AA'+BB'-(AB'+BA')\cos\theta=0.$$

15. 由一點至一直線之距離.

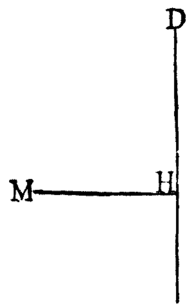


圖 16

設 M 之位標爲 x',y', 直線 D 之方程式爲

$$Ax+By+C=0.$$

過 M 作直線 MH 垂直於 D, 令 H 爲垂線之足, 試求 $d=MH$.

令直線 MH 之方程式爲

$$y-y'=m'(x-x').$$

m' 表待定之角係數.

因 $MH\perp D$, 故依前節得

$$1+\left(-\frac{A}{B}\right)m'+\left(-\frac{A}{B}+m'\right)\cos\theta=0,$$

即 $$m'=\frac{B-A\cos\theta}{A-B\cos\theta}.$$

直線 MH 之方程式又可書爲

$$\frac{x-x'}{A-B\cos\theta}=\frac{y-y'}{B-A\cos\theta}=\rho$$

由此推出

$$(1)\qquad \begin{cases} x-x'=\rho(A-B\cos\theta) \\ y-y'=\rho(B-A\cos\theta) \end{cases}$$

(1) 式藉參數 (Parameter 或作助量數) ρ 以表示直線 MH 上任一點之位標.

但 H 爲 MH 與 D 之交點, 故 H 之位標合於 $Ax+By+C=0$.

即 $$A[x'+\rho(A-B\cos\theta)]+B[y'+\rho(B-A\cos\theta)]+C=0.$$

化出 ρ 之值得

$$\rho=-\frac{Ax'+By'+C'}{A^2+B^2-2AB\cos\theta}.$$

以 ρ 之值代入 (1) 式, 又令 x_H, y_H 爲 H 點之位標, 得

$$x_H-x'=-\frac{Ax'+By'+C'}{A^2+B^2-2AB\cos\theta}(A-B\cos\theta),$$

$$y_H-y'=-\frac{Ax'+By'+C'}{A^2+B^2-2AB\cos\theta}(B-A\cos\theta).$$

依第 2 節,

$$d^2=\overline{MH}^2=(x_H-x')^2+(y_H-y')^2+2(x_H-x')(y_H-y')\cos\theta$$

即 $$d^2=\frac{(Ax'+By'+C')^2\sin^2\theta}{A^2+B^2-2AB\cos\theta}.$$

16. 虛直線——虛直線方程式之形爲

$$(A+A'i)x+(B+B'i)y+C+C'i=0.$$

虛直線經過無限數之虛點.但祇過一實點其位標以下二式定之

$$Ax+By+C=0,\quad A'x+B'y+C'=0.$$

設有兩方程式各代表一虛直線.如第一式之系數爲第二式之系數之相配虛數 (Conjugate imaginary), 則兩虛直線名爲相配虛直線.

例如 $$(A+A'i)x+(B+B'i)y+C+C'i=0'$$

及 $$(A-A'i)x+(B-B'i)y+C+C'i=0$$

爲相配虛直線.

若某點位標爲他點位標之相配虛數,則此兩點名爲相配虛點.過兩相配虛點之直線爲實直線.

蓋令 $(a+bi,\ c+di)$ 及 $(a-bi,\ c-di)$ 爲兩相配虛點之位標,則過此二點之直線之方程式爲

$$\frac{y-(c+di)}{x-(a+bi)}=\frac{(c-di)-(c+di)}{(a-bi)-(a+bi)}.$$

即 $$\frac{y-c-di}{x-a-bi}=\frac{d}{b},$$

$$b(y-c)-d(x-a)=0.$$

故曰,過兩相配虛點之直線爲實直線也.

17. 無窮遠處之直線——設有一直線,其齊次方程式爲

$$Ax+By+Cz=0.$$

此直線割 Ox 軸於一點,其橫量爲 $-\frac{C}{A}$. 割 Oy 軸於一點,其縱

量為$-\frac{C}{B}$. 設將C之值固定,而令A及B同時趨近於零,則直線離遠至無窮處.而上式之限為

$$z=0,$$

此無窮遠點之位標也.由是吾人承認無窮遠處之點同在一直線上,此直線名為無窮遠處之直線.

任一直線$(D)\ Ax+By+Cz=0$經過無窮遠處之一點,其位標為

$$z=0,\quad Ax+By=0.$$

即

$$z=0,\ \frac{y}{x}=-\frac{A}{B}=(D)\text{之角系數}.$$

故平行兩直線相交於無窮遠處之一點.

18. 問題——已與兩曲線$f(x, y)=0$及$\phi(x, y)=0$. 求過其交點及原點之直線之方程式.

設f之次為m, ϕ之次為n, 則f及ϕ有mn交點.將各交點與原點相連,得mn直線.此組同過一點之直線名為線束(Pencil of lines).

欲M點在線束之一直線上,則OM直線應過兩曲線之交點.令x, y為M點之位標,則OM直線上任一點P之位置為$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$.

又P為兩曲線之交點.

故

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0,\quad \phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0.$$

由上二式消去z,得一齊次式

$$F(x, y)=0.$$

上式為所求線束之方程式,其次為mn.

習題二

1. 試求由 $(t, -1)$ 點至直線

$$2tx+(t^2-1)y+t^2+1=0$$

之距離.

2. 已與兩直線

$$mx+(2m-1)y+3=0, \quad (4m-7)x-(m+2)y-8=0.$$

(a) 試定 m 之值,俾此兩直線正交,並求其交點.

(b) 試定 m 之值,俾此兩直線平行,並求其距離.

3. Céva 之定理: 設有三角形 $A_1A_2A_3$. 於 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 三邊,依次取 a_1, a_2, a_3 點. 則 A_1a_1, A_2a_2, A_3a_3 三直線相會之必須及充足條件爲

$$\frac{a_1A_2}{a_1A_3}\cdot\frac{a_2A_3}{a_2A_1}\cdot\frac{a_3A_1}{a_3A_2}=-1.$$

4. Ménélaüs 之定理: 仍取前題之記號,證明 a_1, a_2, a_3 同在一直線上之必須及充足條件爲

$$\frac{a_1A_2}{a_1A_3}\cdot\frac{a_2A_3}{a_2A_1}\cdot\frac{a_3A_1}{a_3A_2}=1.$$

5. 設有直線 (D), 其方程式爲

$$x+3y-14=0.$$

以 (D) 爲底邊作二等邊三角形. 令其頂角等於 2θ, 且其重心在 $G(1, 1)$ 點. 試求此二等邊之方程式.

第　三　章

平　面　及　直　線

19. 含 x, y, z 之一次方程式爲平面之方程式.

含 x, y, z 之一次方程式之形爲

$$(1) \qquad Ax+By+Cz+D=0.$$

若(1)式代表曲面,則此曲面盡含過其上任何兩點之直線.是亦平面耳.試明之於下:

設 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 爲合於(1)式之任何兩點之位標,則有

$$(2) \qquad Ax_1+Bx_1+Cz_1+D=0,$$

$$(3) \qquad Ax_2+By_2+Cz_2+D=0.$$

將(3)式之兩邊各乘以 $-k$ 而與(2)式相加得

$$A(x_1-kx_2)+B(y_1-ky_2)+C(z_1-kz_2)+D(1-k)=0,$$

即
$$A\frac{x_1-kx_2}{1-k}+B\frac{y_1-ky_2}{1-k}+C\frac{z_1-kz_2}{1-k}+ \quad =0.$$

但
$$\frac{x_1-kx_2}{1-k}, \qquad \frac{y_1-ky_2}{1-k}, \qquad \frac{z_1-kz_2}{1-k}$$

爲直線 M_1M_2 上任一點之位標(見第3節).故直線 M_1M_2 上任一點之位標均合於(1)式也.

反言之,平面之方程式爲一次.

蓋如以平面爲 $x'y'$ 位標面，則其方程式爲 $z'=0$，但方程式之次不因位標軸之變換而異，故平面之通式爲(1).

又以別法證之.由 O 點作直線 OL 垂直於平面 F，

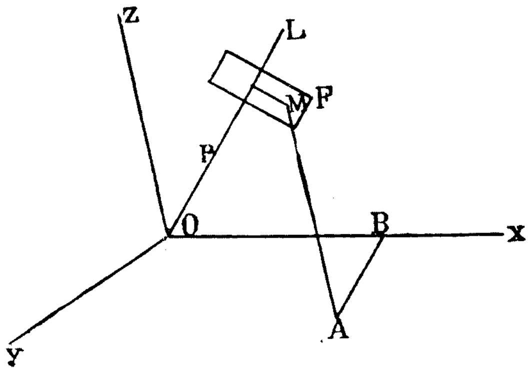


圖 17

令 α, β, γ 爲 OL 與位標軸之交角，p 爲 O 與平面 F 之距離.

如一點 M 在平面 F 上，則 OM 在 OL 上之正投影等於 p. 反言之，如 OM 在 OL 上之正投影等於 p，則 M 在平面 F 上.

將 M 點之位標圈(見第5節)正投於 OL 上，則

$$\mathrm{pr}\, OM = \mathrm{pr}\, OB + \mathrm{pr}\, BA + \mathrm{pr}\, AM,$$

$$\mathrm{pr}\, OB = \overline{OB}\cos(Ox, OL) = x\cos\alpha,$$

$$\mathrm{pr}\, BA = \overline{BA}\cos(Oy, OL) = y\cos\beta,$$

$$\mathrm{pr}\, AM = \overline{AM}\cos(Oz, OL) = z\cos\gamma,$$

故
$$\mathrm{pr}\, OM = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

如 M 在平面 F 上，則有

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

故平面之方程式爲一次.

仿第11,第12兩節之推理,即知兩平面相重之條件爲兩平面方程式之對應係數成比例.兩平面平行之條件爲兩平面方程式之x,y,z之對應係數成比例.

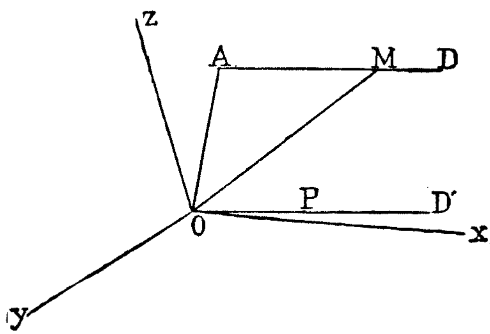


圖 18

20. 直線之參數方程式.

設D爲任一直線,D'爲過原點而平行於D之直線.

直線D可由其任一點$A(p,q,r)$及直線D'之任一點$P(\alpha,\beta,\gamma)$而定之.但P須與原點異.

令M爲D上之任一點.將周圍OAM投於任一軸上,則有

(1)　$$\text{pr}\,OM=\text{pr}\,OA+\text{pr}\,AM.$$

但　$$\frac{\text{pr}\,AM}{\text{pr}\,OP}=\frac{\overline{AM}}{\overline{OP}}=\rho,$$

故　$$\text{pr}\,AM=\rho\,\text{pr}\,OP.$$

如投OAM於Ox軸上(投射之光線平行於yz面),則得

$$x=p+\alpha\rho.$$

同樣得
$$y=q+\beta\rho,$$
$$z=r+\gamma\rho.$$

此直線之參數方程式也.上列三式又可書爲

$$\frac{x-p}{\alpha}=\frac{y-q}{\beta}=\frac{z-r}{\gamma}=\rho.$$

21. 兩直線相交之條件.

設兩直線之方程式爲:

(1)
$$\frac{x-p}{\alpha}=\frac{y-q}{\beta}=\frac{z-r}{\gamma}=\rho,$$

(2)
$$\frac{x-p'}{\alpha'}=\frac{y-q'}{\beta'}=\frac{z-r'}{\gamma'}=\rho'.$$

兩直線之相交與否,視有無同時合於(1),(2)之x, y, z值以爲斷.故若兩直線相交,則有

$$p+\alpha\rho=p'+\alpha'\rho'$$
$$q+\beta\rho=q'+\beta'\rho'$$
$$r+\gamma\rho=r'+\gamma'\rho'.$$

即
$$\alpha\rho-\alpha'\rho'+p-p'=0$$
$$\beta\rho-\beta'\rho'+q-q'=0$$
$$\gamma\rho-\gamma'\rho'+r-r'=0.$$

消去ρ及ρ',得

$$\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' & p-p'\\ \beta & \beta' & q-q'\\ \gamma & \gamma' & r-r'\end{vmatrix}=0$$

上式表(1),(2)兩直線相交之條件(但交點可在無窮遠處)

〔注意〕 本章自第22節至第26節之位標軸均設爲正交

22. 一點與一平面之距離.

玆應用第19節以求一點與一平面之距離.

設平面之方程式爲

$$Az+By+Cz+D=0,$$

由$M(x', y', z')$作直線MH垂直於平面.令H爲垂線之足,則垂線上任一點之位標爲

$$(1)\qquad x=x'+A\rho,\quad y=y+B\rho,\quad z=z'+C\rho.$$

如垂線上之點爲H,則ρ之值應合於下式

$$A(x'+A\rho)+B(y'+B\rho)+C(z'+C\rho)+D=0.$$

故

$$(2)\qquad \rho=-\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{A^2+B^2+C^2}.$$

由(1)與(2)得

$$\begin{aligned}\overline{MH}^2&=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\\&=(A^2+B^2+C^2)\rho^2\\&=\frac{(Ax'+By'+Cz'+D)^2}{A^2+B^2+C^2}.\end{aligned}$$

23. 一點與一直線之距離.

設有直線D,其參數方程式爲

$$(D)\qquad \frac{x-p}{\alpha}=\frac{y-q}{\beta}=\frac{x-r}{\gamma}.$$

$M(x', y', z')$爲空間之一點.試求M與D之距離.

過M作平面P垂直於D,則P之方程式爲

$$\alpha(x-x')+\beta(y-y')+\gamma(z-z')=0.$$

平面P交D於H點,MH即爲所求之距離.

欲求MH之長,可令A爲D上之一點,其位標爲p, q, r者.由正三角形AHM各邊之關係得

$$\overline{MH}^2=\overline{AM}^2-\overline{AH}^2.$$

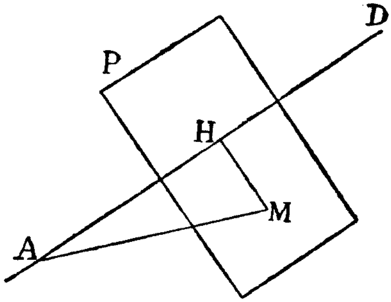


圖 19

但
$$\overline{AM}^2=(x'-p)^2+(y'-p)^2+(z'-r)^2,$$

$$\overline{AH}^2=\frac{[\alpha(p+x')+\beta(q-y')+\gamma(r-z')]^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

故
$$\overline{MH}^2=(x'-p)^2+(y'-q)^2+(z'-r)^2$$
$$-\frac{[\alpha(x'-p)+\beta(y'-q)+r(z'-r)]^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

依 Lagrange 之恆等式,則上式可書爲

$$MH^2=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

就中
$$X=\beta(z'-r)-\gamma(y'-q),$$
$$Y=\gamma(x'-p)-\alpha(x'-r),$$
$$Z=\alpha(y'-q)-\beta(z'-p).$$

例——求$M(x', y', z')$點與直線

(D) $$z-h=0,\quad y=ax+b$$

之距離.

過原點而平行於(D)之直線之方程式爲

$$z=0,\quad y=ax,$$

此直線經過一點,其位標爲 $x=1$, $y=a$, $z=0$ 者.

故(D)之方程式可書爲

$$\frac{x}{1}=\frac{y-b}{a}=\frac{z-h}{0}.$$

又以(D)含有 $A(0, b, h)$ 點,故得

$$X=a(z'-h),\quad Y=-(z'-h),$$

$$Z=y'-ax'-b.$$

若令 d 爲所求之距離,

則 $$d^2=\frac{a^2(z'-h)^2+(z'-h)^2+(y'-ax'-b)^2}{a^2+1}.$$

再令 M' 爲 M 在 xy 平面之正投影,Δ 代表直線 $z=0$, $y=ax+d$,

則 $$d^2=(z'-h)^2+\frac{(y'-ax'-b)^2}{a^2+1}$$

$$=(M\text{ 與平面 }z-h=0\text{ 之距離})^2+(M'\text{ 與 }\Delta\text{ 之距離})^2.$$

此結果不待推算而自明.

24. 兩直線之公垂線.

令 P 爲平行於直線 Δ 及 Δ' 之一平面.試作兩平面,其一包含 Δ 而垂直於 P,其一包含 Δ' 而垂直於 P.則此兩平面之交即線爲 Δ 及 Δ' 之公垂線.

設Δ及Δ'之方程式爲

$$(\Delta)\qquad \frac{x-p}{\alpha}=\frac{y-q}{\beta}=\frac{z-r}{\gamma},$$

$$(\Delta')\qquad \frac{x-p'}{\alpha'}=\frac{y-q'}{\beta'}=\frac{z-r'}{\gamma'}.$$

如平面$Ax+By+Cz=0$平行於此兩直線,則

$$\frac{A}{\beta\gamma'-\gamma\beta'}=\frac{B}{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}=\frac{C}{\alpha\beta'-\beta\alpha'}.$$

故平面P之方程式爲

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta')x+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')y+(\alpha\beta'-\beta\alpha')z=0.$$

今進求包含Δ而垂直於P之平面之方程式.

此方程式之形爲

$$A'(x-p)+B'(y-q)+C'(z-r)=0.$$

就中A', B', C'合於下列關係

$$A'\alpha+B'\beta+C'\gamma=0,$$

$$A'(\beta\gamma'-\gamma\beta')+B'(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')+C'(\alpha\beta'-\beta\alpha')=0.$$

消去A', B', C'得

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x-p & y-q & z-r \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta\gamma'-\gamma\beta' & \gamma\alpha'-\alpha\gamma' & \alpha\beta'-\beta\alpha' \end{vmatrix}=0.$$

依同理,包含Δ'而垂直於P之平面之方程式爲

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x-p' & y-q' & z-r' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \beta\gamma'-\gamma\beta' & \gamma\alpha'-\alpha\gamma' & \alpha\beta'-\beta\alpha' \end{vmatrix}=0.$$

(1), (2) 爲 Δ 與 Δ' 之公垂線之方程式.

25. 兩直線之最短距離.

兩直線 Δ, Δ' 之最短距離者, 即其公垂線爲其所限之線段之長也.

作平面包含 Δ 而平行於 Δ', 則由 Δ' 之任一點至此平面之距離, 即等於兩直線之最短距離.

包含 Δ 而平行於 Δ' 之平面之方程式爲

$$A(x-p)+B(y-q)+C(z-r)=0$$

就中 A, B, C 受下列之限制

$$A\alpha+B\beta+C\gamma=0$$

$$A\alpha'+B\beta'+{}'\,\gamma'=0.$$

故所求平面之方程式爲

$$\begin{vmatrix} x-p & y-q & z-r \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}=0.$$

展之得

$$(\beta\gamma'-\gamma\beta')(x-p)+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')(y-q)+(\alpha\beta'-\beta\alpha')(z-r)=0.$$

今由 Δ' 上取一點 (p', q', r'). 此點與上式所表示之平面之距離爲

$$\frac{(\beta\gamma'-\gamma\beta')(p'-p)+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')(q'-q)+(\alpha\beta'-\beta\alpha')(r'-r)}{\pm\sqrt{(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2}},$$

此即 Δ 及 Δ' 之最短距離也.

如將上式之分子書為零,則復得兩直線相交之條件(見第20節).

26. 例——求下列兩直線之公垂線及最短距離:

$$(\Delta)\begin{cases} z=0 \\ y=ax+b, \end{cases} \qquad (\Delta')\begin{cases} y=0 \\ z=cx+d. \end{cases}$$

I. 公垂線.

包含(Δ)之平面之方程式為

$$y-ax-b+\lambda z=0,$$

將上式與(Δ')消去y, z得

$$-(ax+b)+\lambda(cx+d)=0.$$

如包含(Δ)之平面平行於(Δ'),則$\lambda=\frac{a}{c}$. 而此平面之方程式為

$$c(y-ax-b)+az=0,$$

即

$$(P) \qquad -acx+cy+az-bc=0$$

今進求包含(Δ)而垂直於(P)之平面之方程式.設此式之形為

$$y-ax-b+\mu z=0,$$

因下式所代表之平面垂直於(P),故

$$a^2c+c+a\mu=0, \text{ 即 } \mu=-\frac{c(a^2+1)}{a}.$$

更求包含(Δ')而垂直於(P)之平面之方程式.設此式之形

爲
$$z-cx-d-\nu y=0.$$
因上式所代表之平面垂直於(P),故
$$a^2c+a+\nu c=0,\ 即\ \nu=-\frac{a(c^2+1)}{c}.$$
遂得公垂線之方程式如下:
$$y-ax-b-\frac{c(a^2+1)}{c}z=0,$$
$$z-cx-d-\frac{a(c^2+1)}{c}z=0.$$

II　最短距離.

此距離等於(Δ')上一點$(0, 0, d)$與(P)之距離.

故(Δ)及(Δ')之最短距離$=\dfrac{ad-bc}{\pm\sqrt{a^2c^2+a^2+c^2}}$.

27. 無窮遠處之平面.

設有一平面,其齊次方程式爲
$$Ax+By+Cz+Dt=0,$$
此平面割Ox軸於一點,其橫量爲$-\dfrac{D}{A}$.割Oy軸於一點,其縱量爲$-\dfrac{D}{B}$.割Oz軸於一點,其高爲$-\dfrac{D}{C}$.

設D之值異於零.今將D之值固定而使A, B, C之值同時趨近於零,則平面離至無窮遠處.上式之限爲
$$t=0.$$
即無窮遠點之齊次位標應合之條件也.故吾人承認無窮遠

點同在平面 $t=0$ 上. 此平面以無窮遠處之平面名之.

28. 設 $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$, 及 $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 爲兩定點. 試求 AB 直線上任一點 M 之齊次位標.

依第3節, M 點之位標爲

$$\frac{\frac{x_1}{t_1}-k\frac{x_2}{t_2}}{1-k}, \qquad \frac{\frac{y_1}{t_1}-k\frac{y_2}{t_2}}{1-k}, \qquad \frac{\frac{z_1}{t_1}-k\frac{z_2}{t_2}}{1-k}.$$

就中
$$k=\frac{MA}{MB}.$$

又 M 點之位標可書爲

$$\frac{x_1-k\frac{t_1}{t_2}x_2}{t_1-kt_1}, \qquad \frac{y_1-k\frac{t_1}{t_2}y_2}{t_1-kt_1}, \qquad \frac{z_1-k\frac{t_1}{t_2}z_2}{t_1-kt_1}.$$

令 $-k\frac{t_1}{t_2}=\lambda$, 則上列之量變爲

$$\frac{x_1+\lambda x_2}{t_1+\lambda t_2}, \qquad \frac{y_1+\lambda y_2}{t_1+\lambda t_2}, \qquad \frac{z_1+\lambda z_2}{t_1+\lambda t_2},$$

故 M 點之齊次位標爲

$$x_1+\lambda x_2, \quad y_1+\lambda y_2, \quad z_1+\lambda z_2, \quad t_1+\lambda t_2.$$

當 λ 變時, M 點在直線 AB 上移動, λ 之值與 $\frac{MA}{MB}$ 之比爲常數.

29. 虛元素——一點之位標含虛數者則此點名爲虛點. 如某點之位標爲他點位標之相配虛數, 則此兩點名爲相配虛點. 例如 $(a+a'i, b+b'i, c+c'i)$ 及 $(a-a'i, b-b'i, c-c\ i)$ 兩點爲相配虛點.

含虛系數之一次方程式所代表之軌跡名爲虛平面.

虛平面之通式爲

$$(A+A'i)x+(B+B'i)y+(C+C'i)z+(D+D'i)=0,$$

或書爲　$$P+P'i=0,$$

就中　$P\equiv Ax+By+Cz+D,\ P'\equiv A'x+B'y+C'z+D'.$

虛平面經過一實直線,此實直線以下列二式代表之.

$$P=0,\quad P'=0.$$

設有甲乙兩平面.如甲平面方程式之係數爲乙平面方程式之係數之相配虛數,則甲乙二平面名爲相配虛平面.

例如 $P+P'i=0$ 及 $P-P'i=0$ 所代表之兩平面爲相配虛平面.

相配虛平面相交於一實直線,此直線以下列二式代表之.

$$P=0,\quad P'=0.$$

經過兩相配虛點之直線爲一實直線.

令 $(a+a'i,\ b+b'i,\ c+c'i)$ 及 $(a-a'i,\ b-b'i,\ c-c'i)$ 爲兩相配虛點,則經過此兩點之直線之方程式爲

$$\frac{x-a-a'i}{-2a'i}=\frac{y-b-b'i}{-2b'i}=\frac{z-c-c'i}{-2c'i}.$$

即　$$\frac{x-a}{a'}=\frac{y-b}{b'}=\frac{z-c}{c'}.$$

習題三

1. 設有平面 P　　$x+2y-z+4=0.$

試求其與位標面所成之角,其與原點之距離,其與$(6, -3, -1)$點之距離,及其與平面P'

$$2x-y+4z-1=0.$$

所成之角.

2. 求過$M_1(2, 1, -1)$, $M_2(-3, 0, 2)$兩點之平面之通式.並定其中平面與M_1M_2在xoy平面之投影成正交者.

3. 已知四邊形$A_1A_2A_3A_4$頂點之位標,試用解析法證明各邊中點之正交面相會於一點.

4. 設有直線

$$x+8y-3z+2=0, \quad -6x+2y+z+14=0.$$

(*a*) 求其方向餘弦.

(*b*) 求其與$M(-2, 5, -1)$點之距離MM',及直線MM'之方程式.

5. 設四面體有兩對相對邊正交,試證第三對相對邊亦正交,且四正交線相會於一點.

第 四 章

非調和複比—二平直之變換互應

I. 非調和複比 (Anharmonic Rotio).

30. 同在一直線上之四點之非調和複比.

設 M_1, M_2, M_3, M_4 爲同在一定向直線 OX 上之四點. 所謂定向直線者, 卽將直線定一正向, 視此直線上線段 $\overline{M_\alpha M_\beta}$ 之向與正向同否, 以定 $\overline{M_\alpha M_\beta}$ 之代數值爲正負也. 下式代表 M_1, M_2, M_3, M_4 四點之非調和複比.

$$(1) \qquad (M_1\ M_2\ M_3\ M_4)=\frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}}:\frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}},$$

同様得 $M_\alpha, M_\beta, M_\gamma, M_\delta$ 四點之非調和複比如下

$$(M_\alpha\ M_\beta\ M_\gamma\ M_\delta)=\frac{\overline{M_\alpha M_\gamma}}{\overline{M_\beta M_\gamma}}:\frac{\overline{M_\alpha M_\delta}}{\overline{M_\beta M_\delta}}.$$

四點排列不同之法有 24 種. 依任一種之排列次序, 卽有非調和複比之一值與之對應. 但此種比值非無相同者. 如令 λ 爲其中之一值, 則易知其他值爲

$$1-\lambda, \frac{-\lambda}{1-\lambda}, \frac{1-\lambda}{-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{1}{\lambda}.$$

例如 (1) $(M_1\ M_2\ M_3\ M_4)=\dfrac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}}:\dfrac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}}=\lambda,$

則 $$\lambda=\frac{\overline{M_2M_4}}{\overline{M_1M_4}}:\frac{\overline{M_2M_3}}{\overline{M_1M_3}}=(M_2\ M_1\ M_4\ M_3)\cdots\cdots\begin{cases}\text{即將(1)之 } M_1M_2\\ \text{互換, } M_3M_4 \text{ 互換.}\end{cases}$$

$$=\frac{\overline{M_3M_1}}{\overline{M_4M_1}}:\frac{\overline{M_3M_2}}{\overline{M_4M_2}}=(M_3\ M_4\ M_1\ M_2)\cdots\cdots\begin{cases}\text{即將(1)之 } M_1M_3\\ \text{互換, } M_2M_4 \text{ 互換.}\end{cases}$$

$$=\frac{\overline{M_4M_2}}{\overline{M_3M_2}}:\frac{\overline{M_4M_1}}{\overline{M_3M_1}}=(M_4\ M_3\ M_2\ M_1)\cdots\cdots\begin{cases}\text{即將(1)之 } M_1M_4\\ \text{互換, } M_2M_3 \text{ 互換.}\end{cases}$$

故 $(M_1M_2M_3M_4)=(M_2M_1M_4M_3)=(M_3M_4M_1M_2)=(M_4M_3M_2M_1)$.

又 $$1-\lambda=\frac{-\overline{M_2M_3}\cdot\overline{M_1M_4}+\overline{M_1M_3}\cdot\overline{M_2M_4}}{-\overline{M_2M_3}\cdot\overline{M_1M_4}}$$

$$=\frac{-\overline{M_2M_3}(\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_4})+(\overline{M_1M_2}+\overline{M_2M_3})\overline{M_2M_4}}{-\overline{M_2M_3}\cdot\overline{M_1M_4}}$$

$$=\frac{\overline{M_1M_2}(\overline{M_2M_4}-\overline{M_2M_3})}{\overline{M_3M_2}\cdot\overline{M_1M_4}}=\frac{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_3M_4}}{\overline{M_3M_2}\cdot\overline{M_1M_4}}$$

$$=(M_1M_3M_2M_4)=(M_3M_1M_4M_2)=(M_2M_4M_1M_3)$$

$$=(M_4M_2M_3M_1).$$

同樣可得 $\frac{-\lambda}{1-\lambda}$, $\frac{1-\lambda}{-\lambda}$, $\frac{1}{1-\lambda}$, $\frac{1}{\lambda}$ 諸比值，由此易知四點之 24 種排列可分成 6 組. 每組含有 4 種排列，同在一組中，四點之非調和複比值相等.

31. 問題——O 爲定向直線 OX 之原點. 在 OX 上有 A, B, C, D 四點. 令 $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$, $\overline{OD}=d$. 試以 a, b, c, d 表示 $(ABCD)$.

依定義，$$(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

但
$$\overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}=-a+c$$
$$\overline{BC}=\overline{BO}+\overline{OC}=-b+c$$
$$\overline{AD}=\overline{AO}+\overline{OD}=-a+d$$
$$\overline{BD}=\overline{BO}+\overline{OD}=-b+d,$$

故
$$(ABCD)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}.$$

32. 四直線線束之非調和複比.

欲解此問題,宜先知下項補題.

補題——已與兩點 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2,)$ 及一直線 $P\equiv Ax+By+C=0$. 此直線割直線 AB 於 M 點. 試求比值 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$.

令 k 爲所求之比值,則 M 之位標爲

$$\frac{x_1-kx_2}{1-k}, \qquad \frac{y_1-ky_2}{1-k},$$

但 M 點在直線 $P=0$ 上,故有

$$A\frac{x_1-kx_2}{1-k}+B\frac{y_1-ky_2}{1-k}+C=0.$$

即
$$k=\frac{Ax_1+By_1+C}{Ax_2+By_2+C}.$$

如令 P_i 代表 $P\equiv Ax_i+By_i+C$,

則上式可書爲
$$k=\frac{P_1}{P_2}.$$

33. 定理——$O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ 爲同過 O 點之四直線. 如以截線 L 割此四直線於 A, B, C, D, 則非調和複比 $(ABCD)$ 之值爲

常數.不因截線之位置而變.

令 $P=0$ 及 $Q=0$ 爲經過 O 點之任何二直線之方程式,則 $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ 四直線方程式之形如下:

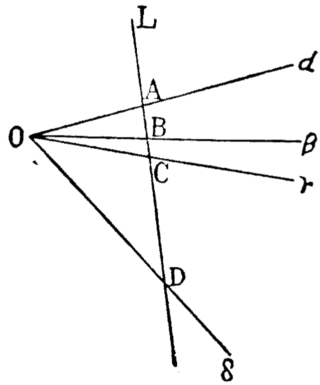


圖 20

$$(O\alpha)\qquad P+aQ=0,$$

$$(O\beta)\qquad P+bQ=0,$$

$$(O\gamma)\qquad P+cQ=0,$$

$$(O\delta)\qquad P+dQ=0,$$

又令 (x_1, y_1) 爲 A 點之位標,(x_2, y_2) 爲 B 點之位標,依前節之補題得

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{P_1+cQ_1}{P_2+cQ_2},$$

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{P_1+dQ_1}{P_2+dQ_2}.$$

故 $$(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{P_1+cQ_1}{P_2+cQ_2}:\frac{P_1+dQ_1}{P_2+dQ_2}.$$

但 A 點在直線 $O\alpha$ 上,B 點在直線 $O\beta$ 上,

故有 $$P_1+aQ_1=0,\quad P_2+bQ_2=0.$$

由此化出 $$P_1=-aQ_1,\quad P_2=-bQ_2.$$

於是 $$(ABCD)=\frac{(c-a)Q_1}{(c-b)Q_2}:\frac{(d-a)Q_1}{(d-b)Q_2}$$

$$=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}.$$

可見$(ABCD)$之值不因截線之改變而異.此值與第31節所載之比值相等,名為 $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$ 四直線線束之非調和複比.又名為 a, b, c, d 四數之非調和複比.但四直線或四數之先後次序不容紊亂.

特例. 如直線 $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$ 之方程式為

$$(O\alpha)\quad P=0,\qquad\qquad (O\beta)\quad Q=0,$$

$$(O\gamma)\quad P+cQ=0,\qquad\qquad (O\delta)\quad P+dQ=0.$$

則 $(ABCD)$ 之值為

$$(ABCD)=\frac{P_1+cQ_1}{P_2+cQ_2}:\frac{P_1+dQ_1}{P_2+dQ_2}=\frac{cQ_1}{P_2}:\frac{dQ_1}{P_2}=\frac{c}{d}.$$

34. 四平面面束之非調和複比.

同過一直線之各平面名為面束.

定理——$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為同過一直線之四平面.如以截線 L 割此四平面於 A, B, C, D,則$(ABCD)$之值為常數,不因截線之位置而變.

證法同前節,故從略.

如令$(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$四平面之方程式為

$$(\alpha)\qquad P+aQ=0,$$

$$(\beta)\qquad P+bQ=0,$$

$$(\gamma)\qquad P+cQ=0,$$

$$(\delta)\qquad P+dQ=0.$$

A, B, C, D 為任一直線與此四平面之交點,則有

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}.$$

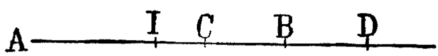
35. 特端.

已與二定點 A, B. 在直線 AB 上, 任取一點 C, 又取一點 D 與之對應便有下式關係

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=-\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}, \tag{1}$$

則謂 C, D 兩點對於 A, B 兩點爲調和相配 (Harmonically conjugate 以後簡稱相配). 若將 C, D 互換, (1) 式之關係仍存. 故有可謂 D, C 兩點對於 A, B 兩點爲相配. 或謂 C, D 兩點調和分 AB 線段.

(1) 式可書爲
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}=-1,$$
卽
$$(ABCD)=-1.$$



令 I 爲 AB 之中點則易知 C, D 兩點常在 I 之同側, 如 C, D 兩點有一點相重於 I, 則他一點在無窮遠處.

(1) 式有可書爲

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{DA}}=-\frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}, \tag{2}$$

由 (1), (2) 兩式比較, 卽得結果如下:

若 C, D 兩點對於 A, B 兩點爲相配, 則 A, B 兩點對於 C, D 兩點爲相配.

此理之逆亦爲眞確.

問題——在經過 A, B, C, D 四點之直線上,任取一點 O. 命 $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$, $\overline{OD}=d$. 若設 C, D 調和分線段 AB, 問 a, b, c, d 四數之關係如何

題設 $(ABCD)=-1$,

故
$$(ABCD)=\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=-1.$$

即
$$\frac{c-a}{c-b}+\frac{d-a}{d-b}=0.$$

(3)
$$2(ab+cd)-(a+b)(c+d)=0.$$

如依下列各法以選 O 點,則(3)式可化爲簡單之形.

I. 取 A 爲原點,則 a 爲零.而(3)式變爲

$$2cd-b(c+d)=0.$$

即
$$\frac{2}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}.$$

可見動徑 $\overline{AB}$ 之倒數爲動徑 $\overline{AC}$ 之倒數及動徑 $\overline{AD}$ 之倒數之算術中項.換言之,動徑 $\overline{AB}$ 爲動徑 $\overline{AC}$ 及 $\overline{AD}$ 之調和中項也.

II. 取 AB 之中點 I 爲原點,則 $b=-a$, 而(3)變爲

$$cd-a^2=0.$$

即
$$\overline{IC}\cdot\overline{ID}=\overline{IA}^2.$$

故動徑 $\overline{IA}$ 為動徑 $\overline{IC}$ 及 $\overline{ID}$ 之比例中項. 且 C, D 兩點在 I 之同側.

36. 調和線束, 調和面束.

設 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為同過一點之四直線(或同過一直線之四平面). 此四直線成一線束(或此四平面成一面束). 令直線 L 割 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 於 A, B, C, D 四點. 如有下式關係

$$(ABCD) = -1,$$

則 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 名為調和線束(或面束), 或謂 γ, δ 對於 α, β 為相配.

若第 33, 34 兩節所述之線束面束為調和, 則

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} ; \frac{d-a}{d-b} = -1.$$

下列定理祇就線束而言, 惟不難推至於面束.

37. 設有同在一平面上而過 O 點之四直線 $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$. 欲 $O\gamma$ 及 $O\delta$ 對於 $O\alpha$ 及 $O\beta$ 為調和相配, 則其必須有充分之條件如下:

作直線 AB 平行於 $O\delta$. 令 $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ 依次與 AB 之交點為 A, B, C. 則 C 為 AB 之中點.

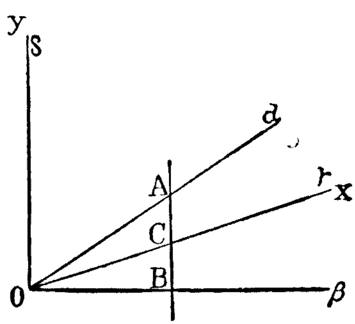


圖 21

證明. 取 $O\gamma$ 為 x 軸, $O\delta$ 為 y 軸. 令 $y+\lambda x=0$ 為 $O\alpha$ 之方程式, $y+\mu x=0$ 為 $O\beta$ 之方程式, $x=h$ 為 AB 之方程式.

由 $O\alpha$ 之方程式得 $\overline{CA} = -\lambda h$.

由 $O\beta$ 之方程式得 $\overline{CB} = -\mu h$.

如 C 爲 AB 之中點，則 $\overline{CA}+\overline{CB}=0$，故 $\lambda+\mu=0$，即 $\dfrac{\lambda}{\mu}=-1$.
由是 $O\gamma$ 及 $O\delta$ 對於 $O\alpha$ 及 $O\beta$ 爲調和相配（見第33節之末）.

反言之，如線束 $O\alpha\beta\gamma\delta$（即含四直線 $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ 之線束）爲調和，則 $\dfrac{\lambda}{\mu}=-1$，而 $\overline{CA}+\overline{CB}=0$，故 C 爲 AB 之中點.

依上所述，易得調和線束之作法.

38. 角之內外二等分線對於夾角之二邊爲調和相配.

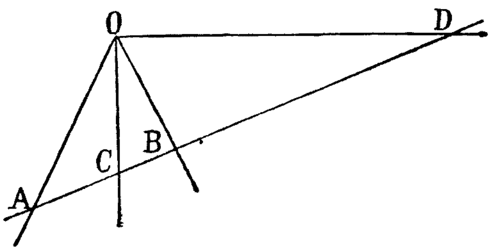


圖 22

設有三角形 OAB，角 O 之內外二等分線交直線 AB 於 C 及 D. 則 $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ 與 $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ 等值而異號.

異號實顯然可見，試究其絕對值.

因
$$\frac{CA}{OA}=\frac{\sin A\hat{O}C}{\sin O\hat{C}B}=\frac{\sin A\hat{O}C}{\sin O\hat{C}B},$$

$$\frac{CB}{CB}=\frac{\sin B\hat{O}C}{\sin O\hat{C}B}=\frac{\sin A\hat{O}C}{\sin O\hat{C}B},$$

故
$$\frac{CA}{CB}=\frac{OA}{OB}.$$

依同理
$$\frac{DA}{DB}=\frac{OA}{OB},$$

故
$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=-1.$$

反言之,若線束 $O\alpha\beta\gamma\delta$ 爲調和,且調和相配之二直線 $O\gamma$, $O\delta$ 成正交,則 $O\gamma$, $O\delta$ 爲角 $\alpha O\beta$ 之內外二等分線.

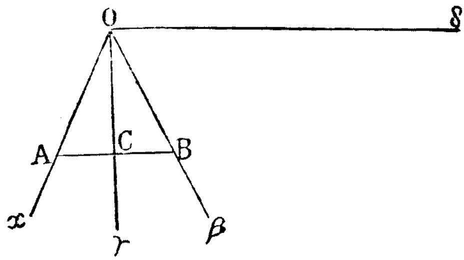


圖 23

作直線 AB 平行於 $O\delta$, 命 A, B, C 爲直線 AB 依次與 $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ 之交點. 題設 $O\alpha\beta\gamma\delta$ 爲調和線束. 故依第37節, C 爲 AB 之中點.

又依題設得 $OC\perp AB$, 故 ACO 及 BCO 兩三角形爲全等,而 $A\hat{O}C=B\hat{O}C$.

39. 一點對於一角之極線 (Polar).

已與一角 xOy 及一點 P. 過 P 作直線,交夾角之二邊於 A 及 B. 在直線 PAB 上取一點 M. 使 M, P 對於 A, B 爲調和相配. 則當截線 PAB 繞 P 轉動時, M 畫過 O 之一直線. 此直線名曰 P 點對於 xOy 角之極線.

蓋命 M' 爲 M 之任一位置,則 OM' 及 OP 對於 Ox 及 Oy 爲調和相配. 又因 OP 爲定直線,故 OM' 亦爲定直線. 是即命題之

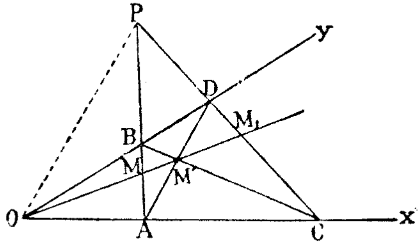


圖 24

證也.

試究極線之作法.由 P 任引二直線,令 A, C 爲其與 Ox 之交點. B, D 爲其與 Oy 之交點.聯結 AD 與 BC,得一交點 M',則 OM' 爲所求之極線.

蓋令 M 與 P 相配於 A, B, M_1 與 P 相配於 C, D.則 M 及 M_1 應在 P 點對於 xOy 角之極線上,又在 P 點對於 $AM'B$ 角之極線上.故直線 MM_1 過 M' 也.

依上所述卽得調和線束之作法矣.

40. 完全四邊形 (Complete quadrilateral) 之調和性質.

四邊形 $ABCD$ 對邊之延長線相交於 E 及 F.圖形 $ABCDEF$ 名爲完全四邊形.

AC, BD, EF 名爲完全四邊形之對角線.如令 G 及 K 爲對角線 BD 與他二對角線之交點,則 G 及 K 調和分 BD.蓋 K 點對於 $D\hat{A}B$ 之極線爲 AC.(見前節).故 G 及 K 調和分 BD 也.

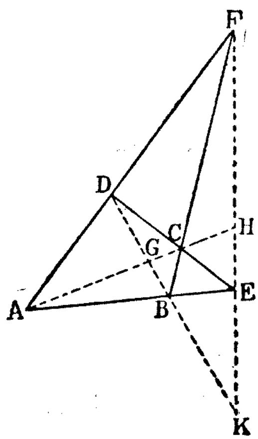


圖 25

依同理，K 及 H 調和分 EF. H 及 G 調和分 AC.

II. 二平直之關係 (Bilinear or homographic relation).

41. 如二變數 x 及 x' 合於下列三條件，則謂此二數爲二平直之對應.

(a) 任與 x 一值，則 x' 有一值與之對應，但以一值爲限.

(b) 任與 x' 一值，則 x 有一值與之對應，但以一值爲限.

(c) x 及 x' 爲代數的關係.

此三關係可以方程式表之於下:

$$Axx'+Bx+Cx'+D=0 \tag{1}$$

就中 A, B, C, D 爲定數.

若知三對之對應值，則 (1) 式可完全決定.

蓋設 (a, a'), (b, b'), (c, c') 爲三對之對應值，則有

$$\begin{cases} Aaa'+Ba+Ca'+D=0 \\ Abb'+Bb+Cb'+D=0 \\ Acc'+Bc+Cc'+D=0. \end{cases} \tag{2}$$

(2) 之未知系數表爲

$$\begin{vmatrix} aa' & a & a' & 1 \\ bb' & b & b' & 1 \\ cc' & c & c' & 1 \end{vmatrix}.$$

表內包含四個三次之行列式，余謂此中行列式至少有一異於零.

蓋令

$$\Delta=\begin{vmatrix} aa' & a & 1 \\ bb' & b & 1 \\ cc' & c & 1 \end{vmatrix}=aa'(b-c)+bb'(c-a)+cc'(a-b),$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a & a' & 1 \\ b & b' & 1 \\ c & c' & 1 \end{vmatrix}=-a'(b-c)-b'(c-a)-c'(a-b),$$

則有

$$\Delta+a\Delta_1=b'(c-a)(b-a)+c'(a-b)(c-a)=(c-a)(b-a)(b'-c').$$

令 $c-a$, $b-a$, $b'-c'$ 均非零. 若使 $c=a$, 則必 $a'=c'$. 而 (a, a'), (c, c') 兩對之對應合爲一對, 非所設者也. 故 Δ 與 Δ_1 不同時爲零.

設 $\Delta_1\neq 0$, 由 (2) 式化出 B, C, D 之值代入 (1) 式. 乃以 A 徧除方程式之兩邊, 即得二平直之關係

$$\begin{vmatrix} xx' & x & x' & 1 \\ aa' & a & a' & 1 \\ bb' & b & b' & 1 \\ cc' & c & c' & 1 \end{vmatrix}=0,$$

其系數爲定數.

42. 定理——設 x, x', x'' 爲三變數, 如 x 與 x' 爲二平直之對應, 又 x 與 x'' 爲二平直之對應, 則 x' 與 x'' 亦爲二平直之對應.

蓋任與 x' 一值, 則 x 有一值與之對應. 又 x'' 有一值對應於

x之一值，故任與x'一值，則x''有一值與之對應．此逆理亦爲眞．且x對於x'及x對於x''皆爲代數關係，故x'與x''亦爲代數關係也．

玆更以解析方法證之．

依題設
$$A_1xx'+B_1x+C_1x'+D_1=0,$$
$$A_2xx''+B_2x+C_2x''+D_2=0.$$

消去x得
$$\frac{A_1x'+B_1}{A_2x''+B_2}=\frac{C_1x'+D_1}{C_2x''+D_2},$$

即
$$(A_1C_2-C_1A_2)xx''+(A_1D_2-C_1B_2)x'$$
$$+(B_1C_1-D_1A_2)x''+B_1D_2-D_1B_2=0.$$

43. 基本定理——設x與x'爲二平直之關係．令x之四值a_1, a_2, a_3, a_4依次對應於x'之四值b_1, b_2, b_3, b_4．

則
$$\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}=\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2}:\frac{b_4-b_1}{b_4-b_2}.$$

換言之，a_1, a_2, a_3, a_4四數之非調和複比與其對應四數之非調和複比相等．

令$x'=\dfrac{\lambda x+l}{\lambda' x+l'}$（卽$x$與$x'$爲二平直之關係），

則
$$b_i=\frac{\lambda a_i+l}{\lambda' a_i+l'}\qquad (i=1, 2, 3, 4),$$

$$b_3-b_1=\frac{\lambda a_3+l}{\lambda' a_3+l'}-\frac{\lambda a_1+l}{\lambda' a_1+l'}=\frac{(\lambda l'-\lambda' l)(a_3-a_1)}{(\lambda' a_3+l')(\lambda' a_1+l')}.$$

同樣，
$$b_3-b_2=\frac{(\lambda l'-\lambda' l)(a_3-a_2)}{(\lambda' a_3+l')(\lambda' a_2+l')},\quad b_4-b_1=\frac{(\lambda l'-\lambda' l)(a_4-a_1)}{(\lambda' a_4+l')(\lambda' a_1+l')},$$

$$b_4-b_2=\frac{(\lambda l'-\lambda' l)(a_4-a_2)}{(\lambda' a_4+l')(\lambda' a_2+l')}.$$

故
$$\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2}:\frac{b_4-b_1}{b_4-b_2}=\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}:\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}.$$

反言之,凡保留非調和複比之對應必爲二平直之對應.

蓋令x_i爲對應於x之值,

且令
$$\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}:\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{x_3'-x_1'}{x_3'-x_2'}:\frac{x'-x_1'}{x'-x_2'},$$

則有
$$k\frac{x-x_2}{x-x_1}=k'\frac{x'-x_2'}{x'-x_1'},$$

就中
$$k=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2},\quad k'=\frac{x_3'-x_1'}{x_3'-x_2'}.$$

即
$$k(x-x_2)(x'-x_1')-k'(x-x_1)(x'-x_2')=0,$$

此乃$Axx'+Bx+Cx'+D=0$之形也.

故若視x_1, x_2, x_3及其對應之值爲定數,則當x變時,其對應之值x'與之俱變,此對應之關係爲二平直之關係.

44. 取定向二直線(O及O'爲原點)Ox及$O'x'$. 設橫量x及x'爲二平直之對應,則任與Ox上之一點M可得$O'x'$上之相當一點M'與之對應,反之亦然. 且此對應關係爲代數關係,故可以第41節之(1)式記之.

如M, M'同在一直線Ox上,則其二平直對應名爲同底之二平直分割.

任取二點O及O'. 設過O之直線之角係數m與過O'之直線之m'爲二平直對應,則m與m'之關係可以下式表之:

$$Amm'+Bm+Cm'+D=0.$$

任與過O之一線束，即有過O'之一線束與之對應．反之亦然．此對應之線束名爲二平直之線束．

如O與O'相重，則此對應之線束名爲同頂之二平直線束．

試察二平直之關係 $Axx'+Bx+Cx'+D=0$ （或 $Amm'+Bm+Cm'+D=0$）．如某點（或線）與其對應之點（或線）相重，則此點（或線）名爲重點（或重線）．其橫量（或角係數）合於下式

$$Ax^2+(B+C)x+D=0\ [\text{或 } Am^2+(B+C)m+D=0].$$

上式代表二次式．故同底之二平直分割（或同頂之二平直線束）有二點爲重點（或線）者．

45. 設有同底之二平直分割．命A及B爲此分割之重點，(C, C')及(M, M')爲任意兩對之對應點，則

$$(ABCC')=(ABMM')=\text{常數}.$$

依第43節，得 $$(ABCM)=(ABC'M').$$

即 $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}:\frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}}.$$

又即 $$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}:\frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}}$$

故 $$(ABCC')=(ABMM')=\text{常數}.$$

46. 設在$O'x'$直線上之M'點離至無窮遠處，則其橫量x'爲無窮，而x之限爲$-\dfrac{C}{A}$.

首設$A\neq 0$，則$O'x'$上無窮遠處之點與Ox上有限距離之

一點 I 對應. 同樣, Ox 上無窮遠處之點與 $O'x'$ 上有限距離之一點 J 對應, J 之橫量為 $-\frac{B}{A}$.

如取 I 及 J 為原點, 則 $C=B=0$, 而二平直關係變為

$$xx'=k=\text{常數}.$$

即
$$\overline{IM}\cdot\overline{JM'}=k.$$

次設 $A=0$, 則二平直關係為一次式. 如 x, x' 二者之一為無窮, 則其他亦為無窮. 故 Ox 與 $O'x'$ 之無窮遠點互相對應.

如取 Ox 及 $O'x'$ 上對應之點為原點, 則 x 及 x' 同時為零. 故 $D=0$, 而二平直之關係變為

$$x=kx' \quad (k=\text{常數}).$$

上式表示 M 及 M' 所畫之圖形為相似,故有謂二平直變換為等畫變換 (Homographic Transformation) 者, 實由於此

III. 互應 (Involution).

47. 試究同底之二平直分割

$$Axx'+Bx+Cx'+D=0.$$

如 x 之值為 α, 則 x' 之值為 α'. 但如 x 之值為 α' 時, 則 x' 之值未必為 α. 此二平直對應之普通情形也. 若必使 x' 之值為 α, 當有下列之關係

$$A\alpha\alpha'+B\alpha+C\alpha'+D=0,$$

$$A\alpha'\alpha+B\alpha'+C\alpha+D=0.$$

由上二式相減, 得

$$(B-C)(\alpha-\alpha')=0.$$

但a不常與a'相等，

故
$$B-C=0.$$

於是
$$Axx'+B(x+x')+D=0.$$

此爲二平直對應之特別情形，名之曰互應．蓋取互相對應之意也．

若知兩對之對應值，則$Axx'+B(x+x')+D=0$之係數可完全定出．證法同前(見第41節)．

取第44節與本節相較，即知同底互應及同頂互應之種種名稱．

48. 設M與M'爲對應之點．如此二點之一離至無窮遠處，則其對應點之橫量以$-\frac{B}{A}$爲限．此對應點各爲互應之中心點 (Central point of involution).

以互應之中心點爲原點，則$B=0$，而互應關係之形爲
$$xx'=k \quad (k\text{爲常數}).$$

令m及m'爲任何對應之二點，O爲互應之中心點．則
$$\overline{Om}\cdot\overline{Om}'=k.$$

而重點之方程式變爲
$$x^2=k.\quad \text{即 } x=\pm\sqrt{k}.$$

故
$$x^2=\overline{Om}\cdot\overline{Om}'.$$

由是m與m'兩點對於兩重點爲調和相配(見第35節之末)．

49. 定理——已與一圓，圓周上之一定點O，及非圓周上之一定點P．由P點任引截線，交圓周於a, a'兩點．則Oa與Oa'

爲互應線束之對應直線.

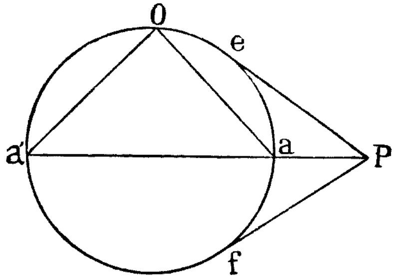


圖 26

因直線 Oa 除與圓周相交於 O 外,另有一交點 a. 直線 Pa 除與圓周相交於 a 點外,另有一交點 a'. 故任與一直線 Oa, 當有一直線 Oa' 與之對應,且以一對應之直線爲限.反言之,任與一直線 Oa', 當有一直線 Oa 與之對應,且以一對應之直線爲限.又如 Oa 變爲 Oa' 時,則 Oa' 變爲 Oa. 反之亦然.

更因圓爲代數之曲線,故 Oa 與 Oa' 之角係數關係爲代數關係.即可視 Oa 爲一線束中之直線, Oa' 爲他一線束中之直線.此二線束爲同頂之互應線束(見第 44, 49 兩節).

互應線束之重直線爲 Oe 則 Of. e, f 乃由 P 點引圓之切線之切點也.如 P 在圓外,則重直線爲實,在圓內則重直線爲虛.

50. Frégier 之定理.——本定理爲前節定理之逆.

過同頂之兩互應線束之頂點 O 作一圓.令 m, m' 爲對應二直線 Om, Om' 與圓相交之點,則當此二直線變動時,直線 mm' 常過一定點 P

設 $(Oa, Oa'), (Ob, Ob')$ 爲兩對之對應直線. a, a', b, b' 爲其與圓之交點.令 P 爲 aa', bb' 二直線之交點,今證 mm' 過 P 點.

令 (γ) 代表同以 O 爲頂之兩互應線束之互應關係.

試由 P 點引圓之弦線，又由弦線與圓之交點作直線過 O，即得互應之二直線．若使過 P 之弦線變動，則此二直線產生同以 O 爲頂之兩互應線束，其互應之關係記爲 (γ')．兹因 (γ) 與 (γ') 有公共

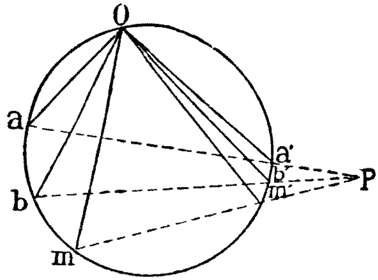


圖 27

兩對之對應直線 (Oa, Oa'), (Ob, Ob')．故 (γ) 與 (γ') 相同（見第 47 節），即 mm' 常過一定點 P．

51. 已與二次曲線 (c), (c) 之一切線 T，及一割線 Δ．由 Δ 上之任一點 M，作 (c) 之切線 Ma 及 Ma'，交 T 於 a 及 a'．則在 T 上，a, a' 爲互應之點．

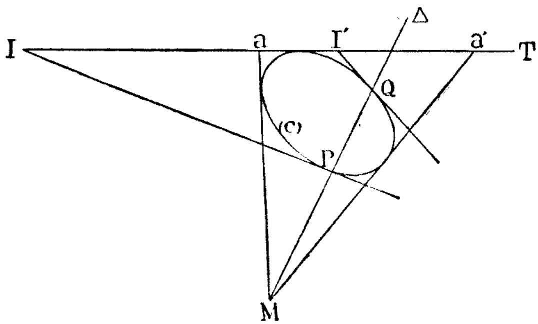


圖 28

任由 T 上之一點 a 作 (c) 之切線．除 T 外，祇能作一切線 Ma．令 M 爲 aM 與 Δ 之交點．又由 M 作 (c) 之切線．除 Ma 外，祇能作一切線 Ma'．令 a' 爲 Ma' 與 T 之交點．

由此觀之，已與 T 上之任一點 a，即有一點 a' 與之對應．但祇以一點爲限．反言之，已與 T 上之任一點 a'．亦有一點 a 與之對應，但祇以一點爲限．且 a, a' 之位置可互換，而 (c) 爲代數曲線，即 a 與 a' 之橫量有代數之關係存焉．故在 T 上，a, a' 爲互應之點明矣．

令 P, Q 爲 Δ 與 (c) 之交點．由 P 作 (c) 之切線 PI，交 T 於 I．又由 Q 作 (c) 之切線 QI' 交 T 於 I'，則在 T 上 I, I' 爲互應之重點．

52. 反言之，任取 T 上之互應對應點 a 及 a'．由 a 及 a' 作 (c) 之切線 Ma 及 Ma'．則此二切線之交點 M 之軌跡爲一直線．

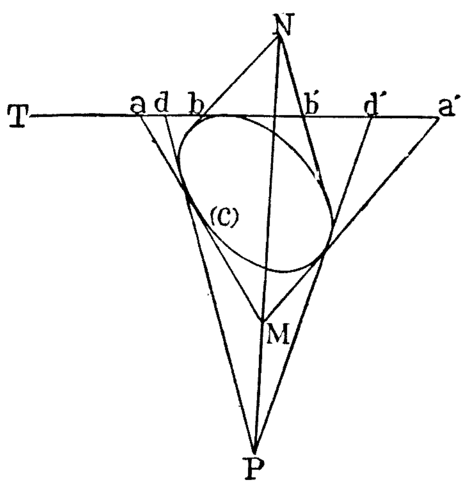


圖 29

設 (a, a'), (b, b') 爲在 T 上兩對之對應點，令其互應關係爲 (γ)．由 a 及 a' 作 (c) 之切線 Ma 及 Ma' 得一交點 M．又由 b 及 b'

作 (c) 之切線 Nb 及 Nb', 得一交點 N. 欲知逆理之爲眞, 可再由 (γ) 之任一對之對應點 (d, d') 作 (c) 之切線 Pd, Pd', 而證 Pd, Pd' 之交點 P 在直線 MN 上足矣.

試經過直線 MN 上之任一點作 (c) 之二切線, 令此二切線與 T 之交點爲 α, α'. 則在 T 上, α 與 α' 爲互應之點(見前節). 其互應關係以 (γ') 記之. 玆因 (γ) 與 (γ') 有兩對之公共對應點 (a, a'), (b, b'), 是互應之關係相同也. 故 P 在直線 MN 上.

習題四

1. 在一定直線上, 已與三定點 A, B, C 及一動點 M, 試究非調和複比 $(ABCM)$ 之變值.

2. 三點 α, β, γ 同在一直線上之必須及充足條件爲

$$P(Q\alpha\beta\gamma)=Q(P\alpha\beta\gamma),$$

P, Q 表平面上之任意點, 但直線 PQ 不過 $\alpha\beta\gamma$ 中之任一點者.

3. 設有同在一直線上之兩線段 AB 及 $A'B'$, AB 之中點爲 I, $A'B'$ 之中點爲 I'. 試證兩線段成調和分配之條件爲

$$\overline{AB}\cdot\overline{AI'}=\overline{AA'}\cdot\overline{AB'} \text{ 或 } \overline{AB}^2+\overline{A'B'}^2=4\overline{II'}^2.$$

4. 用非調和複比證明 Ménélaüs 及 Céva 之定理(見習題二之 3, 4 兩題).

5. 設有三角形 ABC 及其平面上之一點 O. 於 BC 邊上取 A' 點, CA 邊上取 B' 點, AB 邊上取 C' 點. 則 A', B', C' 三點同在一直線上之必須及充足條件爲 (OA, OA'), (OB, OB'), (OC, OC') 三對直線屬同一互應關係.

第　五　章

三平直位標及四面位標

53. 三平直位標 (Trilinear coördinates).

在一平面上，設 M 點之 Descartes 位標為 ξ, η，其齊次位標為 X, Y, T，則有

$$(1)\qquad \xi=\frac{X}{T}, \qquad \eta=\frac{Y}{T}.$$

任以平直置換施諸 X, Y, T，如

$$(2)\qquad \begin{cases} X=ax+by+ct \\ Y=a'x+b'y+c't \\ T=a''x+b''y+c''t, \end{cases}$$

就中 $a, b, \cdots\cdots c''$ 受下列之限制

$$(3)\qquad m=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

則由 (2) 式化出 x, y, t，得

$$(4)\qquad \begin{cases} x=\frac{A}{m}X+\frac{A'}{m}Y+\frac{A''}{m}T \\ y=\frac{B}{m}X+\frac{B'}{m}Y+\frac{B''}{m}T \\ t=\frac{C}{m}X+\frac{C'}{m}Y+\frac{C''}{m}T, \end{cases}$$

$A, B, \cdots\cdots C''$ 依次代表 m 中之 $a, b, \cdots\cdots c''$ 之係數. 或將(4)式之形簡書爲

$$(4') \qquad \begin{cases} x=\alpha X+\beta Y+\gamma T \\ y=\alpha' X+\beta' Y+\gamma' T \\ t=\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' T. \end{cases}$$

若 M 爲已與之點, 卽知 X, Y, T 三數之比值, 故亦知 x, y, t 三數之比值. x, y, t 三數名爲 M 點之三平直位標.

若知一點之三平直位標, 則可得通常之 Descartes 位標. 蓋計及(1)與(2)得

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi=\dfrac{ax+by+ct}{a''x+b''y+c''t} \\ \eta=\dfrac{a'x+b'y+c't}{a''x+b''y+c''t}, \end{cases}$$

即所求之位標也.

由(5)式觀之, 如以 $\lambda x, \lambda y, \lambda t$ 替代 x, y, t, 則 ξ, η 仍不變.

54. 參考三角形 (Triangle of reference).

三平直位標之義可釋之如下.

試察 $\qquad x=0, \quad y=0, \quad t=0$

依次代表之三直標 (a), (b), (c). 則知其不同交於一點, 以有下列關係存也.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \frac{1}{m^3} \begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} = \frac{1}{m^3} m^2 = \frac{1}{m} \neq 0.$$

由是(a), (b), (c)三直線成一個三角形,特以參考三角形名之.

然參考三角形未必如初等幾何所限定者.若(a), (b), (c)中有平行之二直線$\left(例如\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}\right)$, 則三角形之一頂點將在無窮遠處.又三角形之一邊,可與無窮遠處之直線相重(例如$\alpha''=\beta''=0$).惟無論如何,三角形之全部均以ABC表之.

頂點A對(a)邊$(x=0)$.頂點B對(b)邊$(y=0)$.頂點C對(c)邊$(t=0)$.

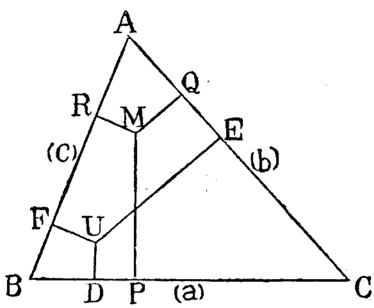


圖 30

又A為(b)與(c)之交點,故其三平直位標為$(x, 0, 0)$.就中x為任何數,但不為零.蓋若x為零,則A點之齊次位標X, Y, T盡為零.非所設者也.同樣可知B, C之位標為$(0, y, 0)$, $(0, 0, t)$,而y與t均異於零.

(4′)式可書為

$$x=T(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma)$$
$$y=T(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma')$$
$$t=T(\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma'').$$

茲取$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma$為例而察之.即知其值與$M$點至$(a)$之距離之比為常數(見第15節).故$x$, y, z依次與M點至(a), (b), (c)之距離之比皆為常數.

欲得準確之解釋,可取一點U其三平直位標為$x=y=t$者.

由 U, M 各點作 (a), (b), (c) 三邊之垂線. 令 P, Q, R 及 D, E, F 爲垂線之足,則 M 點之三平直位標之形爲

$$(6)\qquad \begin{cases} x=\lambda\varepsilon\overline{MP}, & y=\lambda\varepsilon'\overline{MQ}, \\ t=\lambda\varepsilon''\overline{MR}, \end{cases}$$

就中 $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ 爲定數, λ 表異於零之任何數. 又 U 點之位標爲

$$(7)\qquad \begin{cases} x'=\lambda'\varepsilon\overline{UD}, & x'=\lambda'\varepsilon'\overline{UE}, \\ x'=\lambda'\varepsilon''\overline{UF}, \end{cases}$$

故如將 (7) 中各式之兩邊依次除 (6) 中各式之兩邊, 且令 $\rho=\dfrac{\lambda x'}{\lambda'}$, 則得

$$(8)\qquad \begin{cases} x=\rho\dfrac{\overline{MP}}{\overline{UD}}, & y=\rho\dfrac{\overline{MQ}}{\overline{UE}}, \\ t=\rho\dfrac{\overline{MR}}{\overline{UF}}. \end{cases}$$

由此觀之,若參考三角形與 U 點爲已知,則任一點之三平直位標遂定。

設 U_1 爲不在三角形邊上之任何點. 過此點作 (a), (b), (c) 三邊之垂線, 令 D_1, E_1, F_1 爲垂線之足, 且使

$$\varepsilon\overline{U_1D_1}=\varepsilon'\overline{U_1E_1}=\varepsilon''\overline{U_1F_1}$$

以定 $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ 之值(此值均異於零), 則 U_1 點與 U 點重合. 即 U 點可任取也. 但 U 點不能在三角形之邊上, 否則 x, y, t 三值中必有無窮者〔見(8)式〕. 不合於原設矣.

55. 各種方程式.

凡 n 次之代數曲線,可以 n 次之齊次方程式表之.設將方程式施以平直置換(2),則得 m 次之齊次方程式

$$f(x,\ y,\ t)=0.$$

x, y, t 乃曲線上任一點之三平直位標也.

如曲線化爲直線,則其方程式爲

$$P\equiv Ax+By+Ct=0. \tag{9}$$

無窮遠處直線之方程式爲 $T=0$. 經(2)轉換後,得

$$a''x+b''y+c''t=0.$$

若直線經過 $P=0$, $Q=0$ 二直線之交點,則其方程式爲

$$\lambda P+\mu Q=0,$$

λ, μ 代表不同時爲零之兩數.

例如經過 A 點之直線之方程式爲

$$B_1y+C_1t=0.$$

反言之, $B_1y+C_1t=0$ 代表過 A 點之直線. 依同理,經過 B(或 C)之直線之方程式,以不含 y(或 t)爲其特徵.

凡含 y 及 t 之 n 次齊次代數方程式,皆表過 A 點之線束. 此線束含直線 n 條.

已與兩代數之曲線

$$f(x,\ y,\ t)=0, \quad g(x,\ y,\ t)=0.$$

欲得過 A 點及兩曲線任一交點之直線所成之線束,由上列兩式消去 x 可也. 其證法與第18節同. 故從略.

三直線同交於一點之條件或聯結兩點之直線之方程式,皆由解一次方程式組而得.故無論用齊次坐標或三平直位標,所得之結果實無異也.

已與 $M_1(x_1, y_1, t_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, t_2)$ 兩點.令 M 點之位標為

$$(10)\qquad x=\lambda x_1+\mu x_2,\quad y=\lambda y_1+\mu y_2,\quad t=\lambda t_1+\mu t_2,$$

就中 λ, μ 代表不同時為零之數,則當 λ 與 μ 之比值變時,M 點畫直線 M_1M_2.

蓋設直線 M_1M_2 之方程式為(9),則

$$Ax_1+By_1+Ct_1=0,\quad Ax_2+By_2+Ct_2=0.$$

故無論 λ 與 μ 之比為何值,當有

$$A(\lambda x_1+\mu x_2)+\beta(\lambda y_1+\mu y_2)+C(\gamma t_1+\mu t_2)=0.$$

即 M 點之位標(10)合於直線方程式(9)也.如將(10)式中 x, y, t 之值代入(5)式得

$$\xi=\frac{\lambda(ax_1+by_1+ct_1)+\mu(ax_2+by_2+ct_2)}{\lambda(a''x_1+b''y_1+c''t_1)+\mu(a''x_2+b''y_2+c''t_2)},$$

$$\eta=\frac{\lambda(a'x_1+b'y_1+c't_1)+\mu(a'x_2+b'y_2+c't_2)}{\lambda(a''x_1+b''y_1+c''t_1)+\mu(a''x_2+b''y_2+c''t_2)}.$$

其形為

$$(11)\qquad \xi=\frac{\alpha_1-k\alpha_2}{1-k},\quad \eta=\frac{\beta_1-k\beta_2}{1-k}.\qquad \left[k\text{ 與 }\frac{\mu}{\lambda}\text{ 之比為常數}\right],$$

可見(11)表直線 M_1M_2 上任一點之位標,此直線之參數方程式也(見第3節).又以(11)為二平直關係,故令 M_1, M_2, M_3, M_4 為直線 M_1M_2 上之四點,則由第43節得

$$(M_1M_2M_3M_4)=(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)=(\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4)=(k_1k_2k_3k_4).$$

就中(ξ_i,η_i)爲M_i點之位標，k_i爲對應於M_i點之參數k之值.

若令對應於M_4點之參數$k_4=1$.

則因對應於M_1點之參數$k_1=0$，對應於M_2點之參數$k_2=\infty$〔見(10)及(11)式〕. 故有

$$(M_1M_2M\,M_4)=(0\ \infty\ k_3\ 1)=(k_3\ 1\ 0\ \infty)=k_3.$$

如以M易M_3，k易k_3，更有

$$k=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{M_2M}}:\frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}}=k'\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}\qquad\left(k'=\frac{\overline{M_2M_4}}{\overline{M_1M_4}}=\text{常數}\right),$$

即k與$\dfrac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_2}}$之比爲常數.

56. 特端——當U點之位置變移，則得種種之三平直位標. 試究下列二者：

I. 重心位標.

取三角形之重心G爲U點(見第54節)，則

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{GD}}=\frac{\text{面積 }MBC}{\text{面積 }GBC},$$

但面積$GBC=\dfrac{1}{3}$面積$ABC=\dfrac{S}{3}$.

S代表三角形ABC之面積.

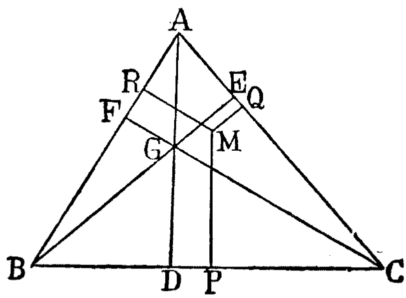


圖 31

故　$$\frac{\overline{MP}}{\overline{GD}}=\frac{3}{S}\cdot\text{面積 }MBC,$$

同理得 $$\frac{\overline{MQ}}{\overline{GE}}=\frac{3}{S}\cdot\text{面積 }MCA,$$

$$\frac{\overline{MR}}{\overline{GF}}=\frac{3}{S}\cdot\text{面積 }MAB,$$

將上列各式與(6)式比較,卽知位標x, y, t與面積MBC, MCA, MAB之代數值成比例.此種位標名爲重心位標.

茲以力學釋重心位標之義如下:

設 $A(\xi_1, \eta_1)$, $B(\xi_2, \eta_2)$, $C(\xi_3, \eta_3)$ 三點之質量依次爲 x, y, z. 則此三點之重心位標爲

$$(12)\qquad \begin{cases} \xi=\dfrac{x\xi_1+y\xi_2+t\xi_3}{x+y+t}, \\ \eta=\dfrac{x\eta_1+y\eta_2+t\eta_3}{x+y+t}. \end{cases}$$

復取(5)式而察之,如令$a''=b''=c''$,則此式化爲

$$(13)\qquad \begin{cases} \xi=\dfrac{\dfrac{a}{a''}x+\dfrac{b}{b''}y+\dfrac{c}{c''}t}{x+y+t}, \\ \eta=\dfrac{\dfrac{a'}{a''}x+\dfrac{b'}{b''}y+\dfrac{c'}{c''}t}{x+y+t}. \end{cases}$$

但A, B, C之位標依次爲 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, t)$. 卽 $\xi_1=\frac{a}{a''}$, $\xi_2=\frac{b}{b''}$,........, $\eta_3=\frac{c'}{c''}$, 故(12)式與(13)式無異也.

故當$a''=b''=c''$時, M點之位標爲(12)式所限定,且以ABC爲參考三角形.而$U(x, x, x)$點重合於G 此乃重心位標制也.

由 (12) 式得無窮遠處直線之方程式如下:

$$x+y+t=0.$$

II. 模範位標 (Normal coördinates).

取三角形之內切圓心或傍切圓心爲 U 點. 乃選定 U 點至三角形各邊距離之號. 使 $\overline{UD}$, $\overline{UE}$, $\overline{UF}$ 均爲正,則有下列關係

$$\overline{UD}=\overline{UE}=\overline{UF}.$$

據 (8) 式即知位標 x, y, t 與代數值 $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ 成比例,

上法所定之位標名爲模範位標.

假定 U 爲內切圓心,令 a, b, c 爲三角形各邊之長,則

$$2\cdot\text{面積 } MBC=a\cdot\overline{PM},\qquad 2\cdot\text{面積 } MCA=b\cdot\overline{QM},$$

$$2\cdot\text{面積 } MAB=c\cdot\overline{RM}.$$

又 $2\cdot$面積 $MBC+2\cdot$面積 $MCA+2\cdot$面積 $MAB=2\cdot$面積 $ABC=2S$,

故
$$a\cdot\overline{PM}+b\cdot\overline{QM}+c\cdot\overline{RM}=2S.$$

如令 (14) $x=\rho\overline{PM}$, $y=\rho\overline{QM}$, $t=\rho\overline{RM}$, 則得

(15)
$$ax+by+ct=2\rho S.$$

因 x, y, t 爲有限之值. 故當 M 離至無窮遠處時, (14) 式表示 ρ 趨近於零. 由是無窮遠處直線之方程式, 可令 (15) 式之右邊等於零而得之. 此式爲

$$ax+by+ct=0.$$

〔注意〕若設 $b=c=a'=c'=a''=b''=o$, $a=b'=c''\neq0$. 則 (2) 式所定之三平直位標與齊次位標同. 故齊次位標實三平直位標之特端也.

57. 四邊位標 (Tetrahedral coördinates).

設空間一點 M 之 Descartes 位標為 ξ, η, ζ. 其齊次位標為 X, Y, Z, T. 卽有

$$\xi=\frac{X}{T}, \quad \eta=\frac{Y}{T}, \quad \zeta=\frac{Z}{T}. \tag{15}$$

任以平直置換施諸 X, Y, Z, T. 如

$$\begin{cases} X=ax+by+cz+et \\ Y=a'x+b'y+c'z+e't \\ Z=a''x+b''y+c''z+e''t \\ T=a'''x+b'''y+c'''z+e'''t, \end{cases} \tag{16}$$

但 x, y, z, t 之係數之行列式須異於零, 則由上式化出 x, y, z, t 之值如下:

$$\begin{cases} x=\alpha X+\beta Y+\gamma Z+\varepsilon T \\ y=\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z+\varepsilon' T \\ z=\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z+\varepsilon'' T \\ t=\alpha''' X+\beta''' Y+\gamma''' Z+\varepsilon''' T. \end{cases} \tag{17}$$

其右邊之係數之行列式不為零.

如 M 為已知之點, 則 X, Y, Z, T 之比値為已知. 而 x, y, z, t 之比値遂定. 所謂 M 點之四面位標者, 卽此四數 x, y, z, t 也.

如 M 點之四面位標為已知, 則其 Descartes 位標 ξ, η, ζ 可由下列方程式得出.

$$
(18)\quad \begin{cases} \xi=\dfrac{ax+by+cz+et}{a'''x+b'''y+c'''z+e'''t}, \\ \eta=\dfrac{a'x+b'y+c'z+e't}{a'''x+b'''y+c'''z+e'''t}, \\ \zeta=\dfrac{a''x+b''y+c''z+e''t}{a'''x+b'''y+c'''z+e'''t}. \end{cases}
$$

今取 (17) 式而察之. 當見 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$ 代表不同交於一點之四平面. 蓋以其右邊係數之行列式異於零故也. 此四平面成一個四面體, 特以參考四面體 (Tetrahedron of reference) 名之. 令 $ABCD$ 代表參考四面體. A 點之對面爲 $x=0$, B 點之對面爲 $y=0$, C 點之對面爲 $z=0$, D 點之對面爲 $t=0$. 則 A, B, C, D 各點之四面位標依次爲 $(x, 0, 0, 0)$, $(0, y, 0, 0)$, $(0, 0, z, 0)$, $(0, 0, 0, t)$.

仿第54節之推理, 將見 M 點之四面位標 (x, y, z, t) 與 $\delta\overline{MP}$, $\delta'\overline{MQ}$, $\delta''\overline{MR}$, $\delta'''\overline{MS}$ 成比例. 就中 $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ 爲定數, $\overline{MP}, \overline{MQ}, \overline{MR}, \overline{MS}$ 爲 M 點至平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$ 之距離.

令 U 點之位標爲 $x=y=z=t$, 則

$$
x=\rho\frac{\overline{MP}}{\overline{UD}},\quad y=\rho\frac{\overline{MQ}}{\overline{UE}},\quad z=\rho\frac{\overline{MR}}{\overline{UF}},\quad t=\rho\frac{\overline{MS}}{\overline{UG}}.
$$

就中 $\overline{UD}, \overline{UE}, \overline{UF}, \overline{UG}$ 代表 U 點至平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$ 之距離.

如用四面位標制, 則 m 次代數曲面之方程式爲含 x, y, z, t 之 m 次齊次式. 若曲面化成平面, 其方程式應爲一次如下

式所示

$$P \equiv Ax+By+Cz+Dt=0.$$

無窮遠處平面之方程式爲 $T=0$,

即 $$a'''x+b'''y+c'''z+e'''t=0.$$

經過 $P=0$, $Q=0$, $R=0$ 三平面之交點之平面,以下方程式表之

$$\lambda P+\mu Q+\nu R=0.$$

平面之過 A 點者,以不含 x 爲其特徵.過 B, C 或 D 之平面各以不含 y, z, 或 t 爲其特徵.

四平面同交於一點之條件或經過三點之平面之方程式,皆由解一次方程式組而得.故無論用齊次位標或四面位標,所得之結果,實無異也.

一直線爲兩個一次方程式所限定.如四面體之一邊 BD 之方程式爲 $x=0$, $z=0$, 即其例也.

若平面經過 BD, 則其方程式之形爲

$$Ax+Cz=0.$$

已與 $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2, z_2, t_2)$ 兩點.令 M 點之位標爲

$$\begin{cases} x=\lambda x_1+\mu x_2, & y=\lambda y_1+\mu y_2, \\ z=\lambda z_1+\mu z_2, & t=\lambda t_1+\mu t_2 \end{cases}$$

就中 λ, μ 代表不同時爲零之兩數.則當 λ 與 μ 之比值變時,M 點畫直線 M_1M_2. 又此直線上四點之非調和複比與 $\frac{\mu}{\gamma}$ 對

應於此四點之四值之非調和複比相等.其證法可仿第55節.

仿第56節之推論,可以力學或幾何學釋四面位標之特端之義.此特端者,即所謂重心位標與模範位標也.

習題五

1. 連參考三角形 ABC 之各頂點及一點 P 之直線與 BC, CA, AB 相交於 $A'B'C'$. Δ 及 Δ' 直線與此三邊相交於 α, β, γ 及 α', β', γ'.

(a) 求 $(B, C, A', \alpha)=(C, B, A', \alpha')$, $(C, A, B', \beta)=(A, C, B', \alpha')$, $(A, B, C', \gamma)=(B, A, C', \gamma')$ 之條件.

(b) 設 Δ 及 Δ' 已合 (a) 之條件, 則如 Δ 之方程式爲 $lx+my+nt=0$, 試證 Δ' 之方程式爲 $\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{t}{n}=0$.

2. 以兩直線 abc, $a'b'c'$ 割三角形 ABC (a 及 a' 在 BC 邊, b 及 b' 在 CA 邊, c 及 c' 在 AB 邊), 試證

$$(BCaa')(CAbb')(ABcc')=1.$$

3. 設有三角形 ABC 及其平面上一點 K. 取 BK 對於 CBA 角之調和相配直線, 又取 CK 對於 ACB 角之調和相配直線. 試證此兩直線相交於 AK 直線上(取 K 爲 U 點).

第六章

圓環點及迷向直線

58. 圓之方程式

依第2節,立得圓之方程式

$$(1)\qquad (x-a)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta+(y-b)^2-R^2=0.$$

就中(a,b)爲圓心之位標,R爲半徑之長,θ爲位標軸之交角.

59. 二次方程式表圓之必須及充足條件.

設有二次方程式

$$(2)\qquad f(x,y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

欲(2)式代表之曲線與(1)式同,則(1),(2)兩式對應之係數成比例.而此亦爲充足之條件(將於第七章明之).故有

$$(3)\qquad \begin{cases} A=\lambda \\ B=\lambda\cos\theta \\ C=\lambda \\ D=-\lambda(a+b\cos\theta) \\ E=-\lambda(a\cos\theta+b) \\ F=\lambda(a^2+2ab\cos\theta+b^2-R^2), \end{cases}$$

λ表異於零之值.

由上列之首三式,得必須之條件

$$A=C=\frac{B}{\cos\theta}. \tag{4}$$

設 (2) 式合於 (4) 式之條件. 則以 A 之值代 λ $(\lambda=A\neq 0)$ 得

$$\begin{cases} a+b\cos\theta+\dfrac{D}{A}=0 \\ a\cos\theta+b+\dfrac{E}{A}=0 \\ R^2-(a^2+2ab\cos\theta+b^2)+\dfrac{F}{A}=0. \end{cases} \tag{5}$$

(5) 之首二式, 可定 a 與 b. 蓋以 a, b 之係數之行列式爲 $1-\cos^2\theta=\sin^2\theta\neq 0$ 故也. 乃將求得 a, b 之值代入 (5) 之末式, 則 R 遂定. 由是圓心之位標及半徑均可求出, 而 (4) 又爲充足之條件明矣.

試求 R 之值. 將 (5) 之第一式之兩邊乘以 a, 第二式之兩邊乘以 b, 第三式之兩邊乘以 1 而加之. 得

$$R^2=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \dfrac{D}{A} \\ \cos\theta & 1 & \dfrac{E}{A} \\ \dfrac{D}{A} & \dfrac{E}{A} & \dfrac{F}{A} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{vmatrix}}.$$

計及 (4) 式,

$$R^2=-\frac{1}{A^3\sin^2\theta}\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}=-\frac{\Delta}{A^3\sin^2\theta}.$$

就中 $\Delta=\begin{vmatrix}A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}$，$\Delta$ 稱爲 $f(x,y)$ 之判別式(Discriminant).

欲(2)式表實圓,必也 $R^2>0$. 即 $\Delta A<0$. 如 $A\Delta>0$, 則無論何組之實值 x,y 均不能合(2)式. 因(2)式可書爲

$$(x-a)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta+(y-b)^2+k^2=0.$$

就中 $k^2=\dfrac{\Delta}{A^3\sin^2\theta}>0$, 故當 x 與 y 爲實值時,不能使

$$[x-a+(y-b)\cos\theta]^2+(y-b)^2\sin^2\theta+k^2=0$$

今設 $\Delta=0$. (2)式可書爲

$$[x-a+(y-b)\cos\theta]^2+(y-b)^2\sin^2\theta=0. \tag{2'}$$

除 $x=a, y=b$ 之一點外,其他實點均不能合(2′)式. 故可謂其代表半徑爲零之圓.若令 P, Q 代表平直之一次式,則(2′)之形爲

$$P^2+Q^2=0,$$

即

$$(P+Qi)(P-Qi)=0.$$

是亦代表同過 (a,b) 點之兩相配虛直線也(見第16節).

60. 直線與圓之相交.

任取圓之正交二直徑爲位標軸.則圓之方程式爲

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

又令直線之方程式爲

$$ux+vy+w=0,$$

今求直線與圓之交點.

設 $u\neq 0$, 則由上二式消去 x 得

$$y^2(u^2+v^2)+2vwy+w^2-R^2u^2=0.$$

分別下列三情形:

其一, $v^2w^2-(u^2+v^2)(w^2-R^2u^2)>0$, 即 $R^2(u^2+v^2)-w^2>0$. 直線與圓相交於不同之兩點.

其二, $R^2(u^2+v^2)-w^2<0$. 直線與圓之兩交點爲虛.

其三, $R^2(u^2+v^2)-w^2=0$. 直線與圓之兩交點重合, 即直線爲圓之切線也.此時直線之方程式名爲圓之切線方程式 (Tangential equation 參閱第十二章直線位標).

若設 $v\neq 0$, 則所得之結果,仍與前同.

61. 兩圓之相交.

無論位標軸之位置如何,下列兩式各表一圓.

$$f(x,y)\equiv A(x^2+2xy\cos\theta+y^2)+2Dx+2Ey+F=0,$$

$$f_1(x,y)\equiv A_1(x^2+2xy\cos\theta+y^2)+2D_1x+2E_1y+F_1=0.$$

而其同解方程式組爲

$$f(x,y)=0,\quad \frac{f(x,y)}{A}-\frac{f_1(x,y)}{A_1}=0.$$

就中第一式仍與前同,第二式代表直線,此直線與第一式所代表之圓相交於兩點.或虛或實,或相重.故兩圓有兩公點.聯

結兩公點之直線,即兩圓之公弦也.

取正交二位標軸,大圓之心爲原點,圓心之聯結線爲 x 軸,其向與大圓心至小圓心之向同,則兩圓之方程式爲

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2-R'^2=0 \\ (x-d)^2+y^2-R'^2=0, \end{cases}$$

就中 $R \geqslant R'$, $d>0$.

(1) 之同解方程式組爲

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2+y^2-R^2=0 \\ 2dx-d^2-R^2+R'^2=0. \end{cases}$$

由 (2) 之第二式化出 x 得

$$x=\frac{d^2+R^2-R'^2}{2d},$$

此兩圓之公弦之方程式也.

將 x 之值代入 (2) 之第一式得

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{4R^2d^2-(d^2+R^2-R'^2)^2}{4d^2} \\ &= \frac{(2Rd+d^2+R^2-R'^2)(2Rd-d^2-R^2+R'^2)}{4d^2} \\ &= \frac{[(d+R)^2-R'^2][R'^2-(d-R)^2]}{4d^2} \\ &= \frac{(d+R+R')(d+R-R')(R'+d-R)(R'-d+R)}{4d^2}. \end{aligned}$$

欲交點爲實,必也

$$(R'+d-R)(R'-d+R)\geqslant 0,$$

即　$$R-R'\leqslant d\leqslant R+R'.$$

62. 定理.——在一平面上,任由一點 P 引圓之割線,交圓於 M' 及 M'' 兩點.乘積 $\overline{PM'}\times\overline{PM''}$ 爲常數,不因割線之位置而變.

此常數名曰 P 點對於圓之乘冪(Power).

設圓之方程式爲

$$f(x, y)\equiv A(x^2+2xy\cos\theta+y^2)+2Dx+2Ey+F=0,$$

P 點之位標爲 (x_0, y_0), 過 P 點之割線上任一點 M 之位標爲

$$x=x_0+\alpha\rho,\ y=y_0+\beta\rho,$$

就中 α, β 合於 $\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2=1$. ρ 等於 $\overline{PM}$(見第19節). 當 M 爲 M' 或 M'', 則 ρ 之值合於

$$f(x_0+\alpha\rho, y_0+\beta\rho)=0.$$

依 Taylor 公式展之,得

$$f(x_0, y_0)+\rho(\alpha f_{x_0}+\beta f'_{y_0})+\rho^2\phi(\alpha, \beta)=0.$$

而　$$\phi(\alpha, \beta)=A(\alpha^2+2\alpha\beta\cos\theta+\beta^2)=A.$$

故 $f(x_0, y_0)+\rho(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})+A\rho^2=0$ 之根,實 $\overline{PM'}$ 與 $\overline{PM''}$ 之値也.

由是　$$\overline{PM'}\cdot\overline{PM''}=\frac{f(x_0, y_0)}{A}.$$

上式右邊之值與過 P 點之割線之位置無關.故如定理云.

系一. 動點對於兩圓有相等乘冪之軌跡爲垂直於圓心聯結線之直線.

此直線名曰兩圓之根軸(Radical axis).

系二. 任與三圓 C_1, C_2, C_3. 若令 C_2 與 C_3 之根軸爲 Δ_1, C_3

與 C_1 之根軸爲 Δ_2, C_1 與 C_2 之根軸爲 Δ_3, 則 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 同交於一點.

63. 環點 (Circular points at infinity).

設位標軸爲正交,則圓之方程式爲

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0.$$

將上式易以齊次位標 X, Y, T 而令 $T=0$,

得 $$X^2+Y^2=0.$$

即 $$Y=iX. \text{ 及 } Y=-iX.$$

故圓必過無窮遠處之兩點,其齊次位標爲 $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$. 特以 I, J 依次表之,此二點爲相配虛點並有環點之名.

如位標軸爲斜交,則環點之方程式爲

$$X^2+Y^2+2XY\cos\theta=0.$$

定理——二次曲線過環點,乃其爲圓之必須及充足條件.

此條件之爲必須,不待贅論而自明.玆證其爲充足.

蓋設位標軸爲正交(位標軸之位置與曲線之次數無關),則二次曲線之形爲

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

如以無窮遠處之直線割之,則其交點合於方程式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0.$$

惟以曲線過環點,故上式與 $x^2+y^2=0$ 無異,於是

$$B=0, \qquad A=C.$$

故曲線爲圓.

64. 迷向直線 (Isotrpic lines).

設位標軸爲正交,則 $x^2+y^2=0$ 表過環點之二直線,此二直線之角係數爲 $i, -i$. 過環點之直線,稱爲迷向直線.

平面上任一點 P 爲兩迷向直線之交點. 令 (α, β) 爲 P 點之位標,則過 P 點之兩迷向直線之方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0.$$

上式又表半徑爲零之圓.如 P 爲實點,則此二直線爲相配虛直線.

若設位標軸爲斜交,則過 P 點之兩迷向直線之方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta=0.$$

65. 關於環點及迷向直線之定理.

定理一.——迷向直線線段之長爲零.

用正交之位標軸,令 $M_1(x_1, y_1)$ 及 $M_2(x_2, y_2)$ 爲迷向直線上之兩點,則有

$$y_2-y_1=\pm i(x_2-x_1).$$

故
$$\overline{M_1M_2}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$=(x_2-x_1)^2(1+i^2)=0.$$

反言之,如 M_1, M_2 兩點之距離爲零,則此兩點同在一迷向直線上.其證明之手續適與上相反.惟以 M_2 在半徑爲零之圓上,以 M_1 爲心者.故逆理之爲眞,於此可見矣.

定理二.——迷向直線與其本身之交角呈無定形式.

令 V 表此交角,則

$$\tan V=\frac{0}{1+i^2}=\frac{0}{0},$$

故 V 呈無定形式.

反言之,若某直線 D 與其本身之交角非零,則 D 爲迷向直線.

蓋令 m 表 D 之角係數,則 $m^2+1=0$,卽 $m=\pm i$. 此迷向直線之角係數之特徵也.

系.——設有一角,其量爲已定,若將此角繞其角頂旋轉,則夾角之二邊畫同頂之二平直線束,其重直線爲過角頂之兩迷向直線.

令 O 爲角頂,$O\lambda$. $O\lambda'$ 爲夾角之二邊,$(O\lambda, O\lambda')=$ 常數 V,任與 $O\lambda$,可由 $O\lambda$ 繞 O 點轉 V 角而得 $O\lambda'$. 反言之,任與 $O\lambda'$,可由 $O\lambda$,繞 O 點轉 $-V$ 角而得 $O\lambda$. 又 $O\lambda$ 及 $O\lambda'$ 之角係數爲代數之關係,故 $O\lambda$ 及 $O\lambda'$ 畫同頂之二平直線束.

欲 $O\lambda$ 與 $O\lambda'$ 相重,而 $O\lambda$ 與 $O\lambda'$ 之交角仍爲 V,則 $O\lambda$ 及 $O\lambda'$ 非兩迷向直線不可(見定理二之逆).

特端.——如 $V=\frac{\pi}{2}$,則二平直線束變爲互應線束. 反言之,如 $O\lambda$ 及 $O\lambda'$ 畫互應線束,則 $V=\frac{\pi}{2}$. 故由第48節之末,更得定理如下:

定理三.——若兩直線成正交,則此兩直線對於過其交點之兩迷向直線爲調和相配.本定理之逆亦爲眞確.

如以無窮遠處之直線割此兩直線,則得

定理四.——若無窮遠處之兩點在正交之方向上,則此兩點對於兩環點爲調和相配,本定理之逆亦爲眞確.

定理五.——迷向直線與任一直線之交角爲常數.

令 m 爲直線之角係數,則

$$\tan V=\frac{m-i}{1+mi}=\frac{1}{i}\,\frac{im-i^2}{1+mi}=-i\frac{im+1}{1+im}=-i=\text{常數}.$$

定理六.——設 $O\lambda$ 及 $O\lambda'$ 爲任與兩直線. 令 ρ 爲 $O(IJ\lambda\lambda')$ 之非調和複比,則有

$$V=(O\lambda,\ O\lambda')=\frac{i}{2}\log\rho.$$

此式名爲 Laguerre 公式.

證明:——

令 m, m' 依次爲 $O\lambda$, $O\lambda'$ 之角係數,

則
$$\rho=\frac{m-i}{m+i}:\frac{m'-i}{m'+i}=\frac{mm'+1-i(m'-m)}{mm'+1+i(m'-m)}$$

$$=\frac{1-i\dfrac{m'-m}{1+mm'}}{1+i\dfrac{m'-m}{1+mm'}}=\frac{1-i\tan V}{1+i\tan V}$$

$$=\frac{\cos V-i\sin V}{\cos V+i\sin V}=\frac{e^{-iV}}{e^{iV}}=e^{-2iV}$$

故
$$2iV=-\log\rho,$$

卽
$$V=\frac{i}{2}\log\rho,$$

特端.——設 $V=\frac{\pi}{2}$, 則 $\rho=e^{-i\pi}=\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)=-1.$

而 $O(IJ\lambda\lambda')$ 爲調和線束.反言之,如 $\rho=-1$, 則

$$\cos 2V - i\sin 2V = -1.$$

即
$$V = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(k 表整數),而定理三於此益彰矣.

迷向直線性質奇異,爲用甚妙,願學者加意之.

習題六

1. 一點對於三定圓之乘冪爲一常數係數之齊次平直關係.試求此點之軌跡.

2. 求證 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 兩動徑之幾何積等於 O 點對於以 AB 爲直徑之圓之乘冪.

3. 已知 M_1, M_2 點之位標,試求以 M_1M_2 爲直徑之圓之方程式.

4. 九點圓: 設有三角形 ABC, 由 ABC 三頂點各向其對邊作垂線,令 A', B', C' 表垂線之足,則 AA', BB', CC' 各垂線同過一點 H. 又令 A'', B'', C'' 依次表 BC, CA, AB 之中點, A''', B''', C''' 依次表 AH, BH, CH 之中點,求證 A', B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''' 九點在同一圓上.

5. 設有兩正交軸 Ox, Oy, 在 Ox 軸上有兩點 A 及 A', 在 Oy 軸上有一點 B.

(a) M 爲 Ox 軸上之任一點,求三角形 ABM 及 $A'BM$ 之外接圓之方程式.

(b) 求外接圓心 C 及 C' 之位標並計算半徑 R, R' 及 CC' 之距離.

(c) 當 M 在 Ox 軸上移動時,求證 C 及 C' 各畫一直線,且 R 與 R' 之比爲常數.

(d) 求直線族 CC' 之方程式後,乃證明過平面上一點 P 可作此族之兩直線.如此兩直線正交,求 P 之軌跡.

6. 設有一圓及其正交兩直徑 AA', BB'. 過 B 作任意割線與圓相交於 C, 與 AA' 相交於 D. 令 M 爲 C 點之切線與由 D 作 AA' 之垂線之交點,試求 M 之軌跡.

7. 設 M 爲圓 $x^2+y^2-R^2=0$ 之一點, x 軸與 OM 成 θ 角,令 $\tan\frac{\theta}{2}=t$.

(a) 試以 t 表 M 之位標.

(b) 設圓上有兩點 M_1, M_2, 其對應之 t 值依次爲 t_1t_2, 試求直線 M_1M_2 之方程式.

8. 三角形 ABC 之 A 及 B 爲定點, C 點在過 A 及 B 之圓上移動,試求 ABC 三角形之內切圓及外接圓中心之軌跡.

第七章

能以橫量表縱量之曲線

66. 設 $f(x)$ 爲連續函數(或在某間隔內爲連續函數),則 $y=f(x)$ 代表一曲線.在此曲線上,任一點之縱量 y 爲其橫量 x 之函數,故曰能以橫量表縱量之曲線也.

同樣,設 $\phi(y)$ 在某間隔內爲連續函數,則 $x=\phi(y)$ 爲能以縱量表橫量之曲線之方程式.

於初等微分書中,已載有函數之變值及切線法線之方程式.切線之方程式不因位標軸之交角而變形.但法線之方程式不然.令 θ 表位標軸之交角,則 (x_0, y_0) 點之法線之方程式爲

$$y-y_0=-\frac{1+f'(x_0)\cos\theta}{f'(x_0)+\cos\theta}(x-x_0).$$

若 $\theta=\frac{\pi}{2}$,上式遂化爲

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

67. 兩代數方程式代表同一曲線之必須及充足條件如下:

兩方程式爲同次,且其對應項之係數成比例.

此條件爲充足,實顯然可見.試證其爲必須.

無論曲線能以橫量表縱量與否,其方程式均可書爲$f(x, y)=0$. 設$f(x, y)=0$及$\phi(x, y)=0$代表同一曲線.如以直線$x=x_0$割之,則其交點之縱量應合於方程式$f(x_0, y)=0$及$\phi(x_0, y)=0$.但此二式爲含一未知數之方程式.欲其有同根,必其對應係數成比例.故

$$f(x_0, y)\equiv\lambda\phi(x_0, y),$$

就中λ與y無關.又以x_0爲任意之值,故上式可書爲

$$f(x, y)\equiv\lambda\phi(x, y),$$

依同理,如以$y=y_0$割曲線,則有

$$f(x, y)\equiv\mu\phi(x, y).$$

就中μ與x無關.由是

$$\lambda\equiv\mu.$$

而λ與x, y無關,此常數也.

68. 設x由正向增變y之引數y'爲正時,y即向上增加.y'爲負時,y卽向下減少.若順次推之,則y'之引數y''爲正時,y'爲增函數;y''爲負時,y'必爲減函數.然y'爲曲線之切線之角係數,故當y''爲正時,曲線向上環抱.當y''爲負時,曲線向上環抱.在此換向之間,曲線所經過之點名爲反曲點(Point of inflection).此已見於初等微分書中.無論位標軸爲正交或斜交,其結果皆然也.

例——試究曲線

$$y=\frac{1}{Lx}\ (Lx\text{ 與 }\log_e x\text{ 同}).$$

此函數以x之正值爲限.除$x=1$時y變爲無窮外,$y=\frac{1}{Lx}$恆爲有限值之函數.又Lx爲增函數,故其倒數爲減函數,玆以表明之於下:

x	0	$1-\varepsilon$	$1+\varepsilon$	$+\infty$
y	$0\searrow$	$-\infty$	$+\infty\searrow$	0

向下之箭矢,示函數遞減.反是,如箭矢向上,示函數遞增也.又ε代表甚微之正值.

試求原點之切線*.因y之引數爲

$$y'=-\frac{1}{x(Lx)^2},$$

故當$x=0$, $x(Lx)^2$呈未定形0∞.令$lx=-z$,則$x=e^{-z}$,而$y'=-\frac{e^z}{z^2}$,若將e^z展成級數,當見z趨近於正無窮時,y'爲無窮.由是原點之切線與y軸相重.

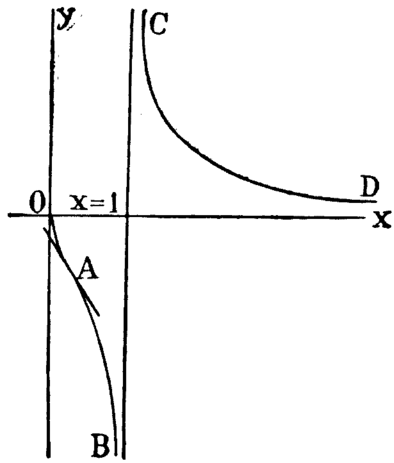


圖 32

次究曲線之彎曲.求y'之引數得

$$y''=\frac{Lx(Lx+2)}{x^2(Lx)^4}.$$

可見y''之號與乘積$Lx\cdot(Lx+2)$之號同.當x經過數值1與

$\frac{1}{e^2}$ 時,此乘積變號.茲以表明之於下:

x	0	$\frac{1}{e^2}$	1	$+\infty$
$Lx(Lx+2)$	$+$	$-$	$+$	

故曲線有一反曲點 A, 其位標爲 $x=\frac{1}{e^2}$, $y=-\frac{1}{2}$. 曲線由 0 至 A 向上環抱,由 A 至 B 向下環抱,由 C 至 D 再向上環抱.

*〔注意〕 設曲線過原點,欲求原點之切線,可求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x}$ 之值,此值爲原點之切線之角係數.

69. 漸近線 (Asymptote).

設曲線 (C) 有一無窮遠之枝. 令 MP 表枝上之一點 M 與定直線 Δ 之距離. 若 M 在枝上趨於無窮遠處, MP 趨近於零,則謂 Δ 爲此無窮遠枝之漸近線.

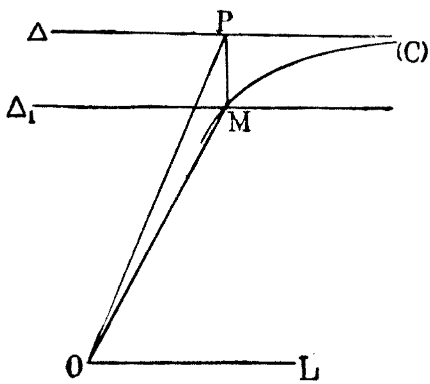


圖 33

設 Δ 爲 (C) 之漸近線. 於包含曲線之平面上,取一定點 O. 並聯結 MO 及 OP 兩線段.若察三角形 OMP, 得

$$\frac{\sin P\hat{O}M}{\sin O\hat{P}M}=\frac{MP}{OM}.$$

即
$$\sin P\hat{O}M=\frac{MP}{OM}\sin O\hat{P}M.$$

當 M 任 (C) 上趨於無窮遠處時, MP 之限爲零, OM 爲無窮,而 $\sin O\hat{P}M$ 爲有限之值.故 $\sin P\hat{O}M$ 爲零,即 OM 與 OP 相重也. 但 OP 之限爲平行於 Δ 之直線 OL, 由是 OM 亦以 OL 爲限,此所謂漸近方向也 (Asymptotic direction).

令 M 之位標爲 (x, y). 如 x 爲無窮時, y 之限爲常數 y_0, 則 $y=y_0$ 爲曲線之漸近線.如 x 爲常數 x_0 時, y 爲無窮,則 $x=x_0$ 爲曲線之漸近線. 如 x 及 y 同時爲無窮,則應求 $\frac{y}{x}$ 之限.玆分三種情形而論之.

I. 如 $\frac{y}{x}$ 之值爲無窮,則漸近方向平行於 Oy 軸,而漸近線不見於平面上之有限距離處.此漸近方向名爲平行於 Oy 軸之拋物方向 (Parbolic direction), 以其與拋物線 $x^2=2py$ 之漸近方向相同也.

II. 如 $\frac{y}{x}$ 之限爲零,則漸近方向平行於 Ox 軸,而漸近線不見於平面上之有限距離處.此漸近方向名爲平行於 Ox 軸之拋物方向.

III. 如 $\frac{y}{x}$ 之限爲異於零之常數 c, 則漸近方向之角係數爲 c. 玆取 O 爲原點,令 Δ_1 爲過 M 而平行於 OL 之直線,則 OL 之方程式爲 $y=cx$, 而 Δ_1 之方程式爲

$$Y-y=c(X-x).$$

即

$$Y-cX-(y-cx)=0.$$

欲求 Δ_1 之限,求 $y-cx$ 之限足矣.

設 $y-cx$ 爲無窮,則 Δ_1 離至無窮遠處,而 c 爲曲線之拋物

方向.

設 $y-cx$ 之限爲 d, 則 Δ_1 之限爲漸近線 Δ, 其方程式爲

$$Y=cX+d.$$

欲究曲線對於漸近線之位置,可任作直線平行於 Oy. 令 $X=x$ 爲其方程式. M, N 依次表其與曲線及漸近線之交點.更令 y 爲 M 之縱量, Y 爲 N 之縱量,則

$$Y=cx+d,$$

而 $$y-Y=y-cx-d.$$

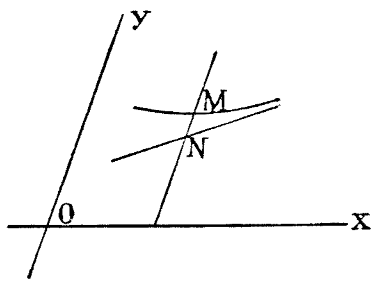


圖 34

當 x 趨近於無窮, $y-cx$ 之限爲 d. 故上式右邊爲無窮小.

如 $y-cx-d$ 爲正,則 $y-Y$ 爲正,而曲線在漸近線之上. 如 $y-cx-d$ 爲負,則 $y-Y$ 爲負,而曲線在漸近線之下

70. 玆設兩例以明漸近線之斷定法.

例一——研究 $y=\dfrac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^2-x-1}$ 之漸近線.

x 之有限值能使 y 變爲無窮者有二. 此二值即爲方程式 $2x^2-x-1=0$ 之根,即 x 之值爲 1 及 $-\dfrac{1}{2}$ 也. 故曲線之漸近線平行於 Oy 軸者有二,其方程式爲 $x=1$ 及 $x=-\dfrac{1}{2}$.

當 x 趨近於無窮, y 亦趨近於無窮.而比值

$$\frac{y}{x}=\frac{2x^3-5x^2+4x+1}{x(2x^2-x-1)} \text{ 之限爲 } 1$$

故漸近方向之角係數爲 1. 又以

$$y-x=\frac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^2-x-1}-x,$$

簡之得
$$y-x=\frac{-4x^2+5x+1}{2x^2-x-1},$$

其限爲 -2. 故曲線有漸近線,其方程式爲

$$Y=X-2.$$

欲知曲線對於漸近線之位置,可令 $X=x$ 而定 $y-Y$ 之號.

因 $y-Y=y-x+2=\dfrac{-4x^2+5x+1}{2x^2-x-1}+2=\dfrac{3x-4}{2x^2-x-1}$.

故當 x 趨近於無窮,上式右邊之分母爲正無窮,而分子之號與 x 之號同.如 x 爲正無窮時,$y-Y$ 爲正無窮小,曲線在漸近線之上.如 x 爲負無窮時,$y-Y$ 爲負無窮小,曲線在漸近線之下.如圖 35 所示.

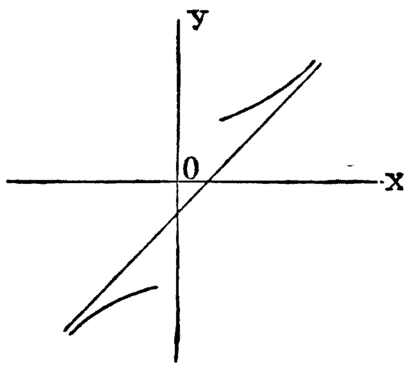


圖 35

例二——研究 $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ 之漸近線.

當 x 趨近於無窮時,$e^{\frac{1}{x}}$ 之限爲 1,故 y 爲無窮.

又
$$\frac{y}{x}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

故其限爲 $\frac{1}{2}$.

而 $$y-\frac{1}{2}x=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\frac{x}{2}=\frac{x(1-e^{\frac{1}{x}})}{2(1+e^{\frac{1}{x}})}.$$

欲求上式之限,可令 $\frac{1}{x}=z$, 則

$$y-\frac{1}{2}x=\frac{1-e^z}{2z(1-e^z)}.$$

今因 x 趨近於無窮,故 z 之限爲零.依 Mac-Laurin 公式得

(1) $$e^z=1+z+\lambda z^2$$

就中 λ 爲 z 之函數,其値爲有限者.於是

$$y-\frac{1}{2}x=\frac{-1-\lambda z}{2(2+z+\lambda z^2)}\text{ 之限爲 }-\frac{1}{4}.$$

而 $$Y=\frac{X}{2}-\frac{1}{4}\text{ 爲所求漸近線方程式.}$$

欲比較漸近線與曲線之位置,可令 $X=x$ 而求當 x 趨近於無窮時,無窮小 $y-Y$ 之號.由(1)式得

(2) $$y-Y=y-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-1-\lambda z}{2(2+z+\lambda z^2)}+\frac{1}{4}=\frac{z-2\lambda z+\lambda z^2}{4(2+z+\lambda z^2)}.$$

就中 $z=\frac{1}{x}$, λ 爲有限之値.故知用(1)式未足以定 $y-Y$ 之號,則宜將 e^z 多展兩項.但不必再行計算,祇以 $1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{6}+\lambda' z^4$ 易 $1+z+\lambda z^2$, 即以 $\frac{1}{2}+\frac{z}{6}+\lambda' z^2$ 換(2)式分子之 λ 可也(λ' 爲有限之値).於是

$$y-Y=\frac{\frac{z^2}{6}+\lambda'' z^3}{4(2+z+\lambda z^2)}\qquad(\lambda''\text{ 爲有限之値}),$$

無論 x 趨近於正無窮或負無窮，$y-Y$ 之號恆爲正.而曲線在漸近線之上,如圖 36 所示.

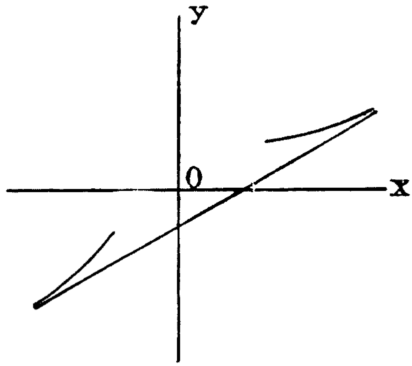


圖 36

71. 應用——若曲線之方程式之形爲

$$y=ax+b+\phi(x),$$

就中 $\phi(x)$ 代表 x 之函數.當 x 趨近於無窮,其限爲零者.則 $Y=aX+b$ 爲曲線之漸近線.

蓋令直線 $X=x$ 割曲線於 M 點,割 $Y=aX+b$ 於 N, 則 $\overline{NM}=y-Y=\phi(x)$. 當 x 趨近於無窮, $\phi(x)$ 趨近於零.

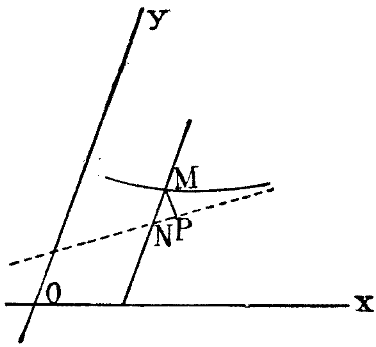


圖 37

又以 $P\hat{N}M$ 異於零,故當 $\overline{MP}$ 與 $\overline{MN}$ 同時趨近於零. 即 $Y=aX+b$ 爲曲線之漸近線也. 如取上節例一之曲線而察之,則因

$$y=\frac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^2-x-1},$$

而 $2x^3-5x^2+4x+1=(2x^2-x-1)(x-2)+3x-1$, 故曲線之方程式可書爲

$$y=x-2+\frac{3x-1}{2x^2-x-1},$$

當 x 趨近於無窮時, $\frac{3x-1}{2x^2-x-1}$ 之限爲零.遂得漸近線之方程式如下:

$$Y=X-2.$$

72. 曲線繪畫法舉例.

下列兩曲線之位標軸均設爲正交.

例一:——作曲線 $y=\frac{2(x-1)^2}{+\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

若察函數 y 之變值,則知在根號內之量恆爲正.蓋以三項式之根爲虛,而 x^3 之係數爲正故也.由是 x 之值可任變,自負無窮以至於正無窮.

求 y 之引數得

$$y'=\frac{2(x-1)(4x^2+7x+3)}{(4x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2(x-1)(x+1)(4x+3)}{(4x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}},$$

由是 y' 之號與 y 之變向,可表列於下.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{8}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	$\frac{7\sqrt{7}}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
			極小		極大		極小		

當 x 趨近於無窮時,欲知 y 之值爲何,可將曲線之方程式書爲

$$y=\frac{2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{\sqrt{\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}}$$

而求 y 之限.故無論 x 趨近於正負無窮, y 之値恆趨近於正無窮.

由上所論,曲線之大概可以見矣.在曲線上有 A, B, C 三點,其切線與 Ox 軸平行,其橫量合於方程式 $y'=0$. 故其位標爲

$$A\left(-1, \frac{8}{\sqrt{3}}\right),\ B\left(-\frac{3}{4}, \frac{7\sqrt{7}}{4}\right),\ C\left(1, 0\right).$$

今進而論曲線之彎向如何.求 y' 之引數得

$$y''=\frac{2(47x^2+46x+5)}{(4x^2+2x+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

上式分子之二根 α, β 皆爲負數. $\left(-1<\alpha<-\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}<\beta<0\right)$. 此二根者,反曲點 P, Q 之橫量是也.當 x 在於間隔 $(-\infty, \alpha)$ 及 $(\beta, +\infty)$ 增變,曲線向上環抱.當 x 在間隔 (α, β) 增變,曲線向下環抱.

上論之所未及者,祇漸近線之斷定耳.試定之於下.

求 $\frac{y}{x}$ 之限,得

$$\frac{y}{x}=\frac{2(x-1)^2}{x\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$

如 $x>0$, 則

$$\sqrt{4x^2+2x+1}=x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

如 $x<0$, 則

$$\sqrt{4x^2+2x+1}=-x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

故有下列二情形:

I. $x>0$, 則比值 $\frac{y}{x}$ 可書爲

$$\frac{y}{x}=\frac{2(x-1)^2}{x^2\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}.$$

當 x 趨近於正無窮時, $\frac{y}{x}$ 之限爲1, 此漸近方向之角係數也

又 $$y-x=\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}-x=\frac{2(x-1)^2-x\sqrt{4x^2+2x+1}}{\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$

以 $2(x-1)^2+x\sqrt{4x^2+2x+1}$ 偏乘上式右邊之分子分母,得

$$y-x=\frac{4(x-1)^4-x^2(4x^2+2x+1)}{\sqrt{4x^2+2x+1}\,[2(x-1)^2+x\sqrt{4x^2+2x+1}]}.$$

即 $$y-x=\frac{-18x^3+23x^2-16x+4}{x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\left[2(x-1)^2+x^2\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}$$

更以 x^3 偏除上式右邊之分子分母,得

$$y-x=\frac{-18+\frac{23}{x}-\frac{16}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\left[2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}.$$

故 $y-x$ 之限爲 $\dfrac{-18}{\sqrt{4}(2+\sqrt{4})}=-\dfrac{9}{4}$ 而漸近線之方程式爲

$$Y=X-\frac{9}{4}.$$

II. $x<0$, 則

$$\frac{y}{x}=-\frac{2(x-1)^2}{x^2\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=-\frac{2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}.$$

當 x 趨近於負無窮時, $\dfrac{y}{x}$ 之限爲 -1.

又 $$y+x=\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}+x=\frac{2(x-1)^2+x\sqrt{4x^2+2x+1}}{\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$

以 $2(x-1)^2-x\sqrt{4x^2+2x+1}$ 徧乘上式右邊之分子分母,得

$$y+x=\frac{4(x-1)^4-x^2(4x^2+2x+1)}{\sqrt{4x^2+2x+1}\,[2(x-1)^2-x\sqrt{4x^2+2x+1}]}.$$

即 $$y+x=\frac{-18x^3+23x^2-16x+4}{-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\left[2(x-1)^2+x^2\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right]}$$

$$=\frac{-18+\dfrac{23}{x}-\dfrac{16}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}{-\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\left[2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)+\sqrt{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right]}.$$

故 $y+x$ 之限爲 $+\dfrac{9}{4}$ 而漸近線之方程式爲

$$Y=-X+\frac{9}{4}.$$

由 I, II 所得出之漸近線共有兩條,與 Ox 軸對稱者.然曲線

對于漸近線之位置如何,尙未可決.若依下法以定漸近線,則無此未決之問題.特再分別 I, II 兩情形而論之.

I,　$x>0$,

$$y=2(x-1)^2(4x^2+2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{(x-1)^2}{x}\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

依 Mac-laurin 公式展無理函數 $\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

又令 $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}=\alpha$. 則當 x 趨近於正無窮,

$$\left(1+\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{\alpha}{2}+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}\alpha^2+\lambda\alpha^3$$

就中 λ 表有限之值.

故 $\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^2+\lambda\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^3$,

即 $\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{4x}-\frac{1}{32x^2}+\frac{\lambda'}{x^3}$($\lambda'$ 表有限之值).

由是
$$y=\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{4x}-\frac{1}{32x^2}+\frac{\lambda'}{x^3}\right)$$
$$=x-\frac{9}{4}+\frac{47}{32x}+\frac{\lambda''}{x^2}$$
(λ'' 表有限之值),

故漸近線之方程式爲

$$Y=X-\frac{9}{4}$$
(見第 71 節).

又
$$y-Y=\frac{47}{32x}(1+\varepsilon),$$
(ε 表無窮小).

因 x 之值為正，故當 x 趨近於正無窮時，$y-Y$ 為正無窮小，而曲線在漸近線之上.

II　$Y<0$,

$$y=-\frac{(x-1)^2}{x}\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

仿 I 之計算，得

$$y=-x+\frac{9}{4}=\frac{47}{32x}(1+\varepsilon)\qquad(\varepsilon\text{ 表無窮小})$$

故漸近線之方程式為

$$Y=-X+\frac{9}{4}$$

又

$$y-Y=-\frac{47}{32x}(1+\varepsilon).$$

故當 x 趨近於負無窮時，$y-Y$ 為正無窮小，而曲線在漸近線之上.

綜上所述，得曲線之形狀如次：

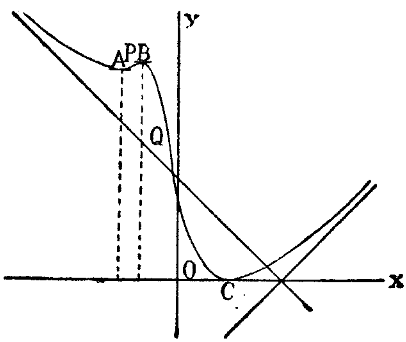


圖 38

例二.——作曲線 $$x(y^2-x^2)+x^2-2y^2=0.$$

化出 $$y^2=\frac{x^2(x-1)}{x-2},$$

即 $$y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}.$$

任與 x 一值, y 有絕對值同而號異之兩值. 故曲線對稱於 Ox 軸. 欲窺其全豹,察曲線 $y=x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ 足矣.

如 y 爲實數,必 $\frac{x-1}{x-2}\geqslant 0$. 即 x 在間隔 $(1, 2)$ 之外.故令 x 從 $-\infty$ 增變至 1, 復從 2 增變至 $+\infty$.

y 之引數爲 $$y'=\frac{2x-7x+4}{2(x-2)^2\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}},$$

其號與二次三項式 $2x^2-7x+4$ 之號相同.該式之根爲

$$x'=\frac{7-\sqrt{17}}{4}=0{\cdot}72\cdots\cdots,$$

$$x''=\frac{7+\sqrt{17}}{4}=2{\cdot}78\cdots\cdots,$$

前者小於 1, 後者大於 2. 在間隔 (x', x'') 內, y' 之號爲負.在間隔 (x', x'') 外, y' 之號爲正.茲將 y 之變值列表明之:

x	$-\infty$		0		x'		1		2		x''		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0.33…… 極大	$\searrow$	0		$+\infty$	$\searrow$	41…… 極小	$\nearrow$	$+\infty$

由上所述,得曲線 $y=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ 之形狀如下:

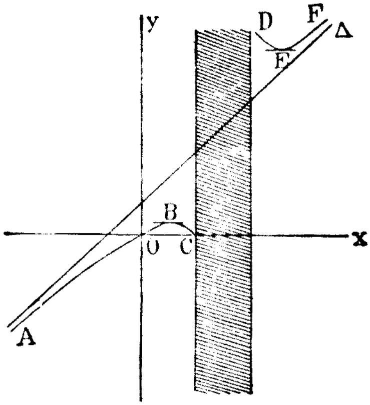


圖 39

原點之切線之角係數為 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, C 點之切線與 Oy 軸平行.

試察無窮遠之枝 OA 及 EF 有漸近線與否.當 x 趨近於無窮時, $\dfrac{y}{x}=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ 之限為1.故漸近方向之角係數為1.欲得漸近線之方程式,宜先知 $y-x$ 之根.

因
$$y-x=x\left[\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1\right],$$

故將 $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}+1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}+1}$ 乘上式之右邊,則得

$$y-x=x\frac{\frac{x-1}{x-2}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+1}=\frac{x}{x-2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+1}.$$

當 x 趨近於無窮時, $y-x$ 之限爲 $\frac{1}{2}$. 於是漸近線 Δ 之方程式爲

$$y=x+\frac{1}{2}.$$

曲線之方程式爲三次.故在有限距離處, Δ 祗交曲線於一點 I, 此點在 ABC 之對稱枝 $A'B'C$ 上.由此可知曲線對于漸近線之位置矣.曲線對稱於 Ox 軸,其全形如圖 40 所示.

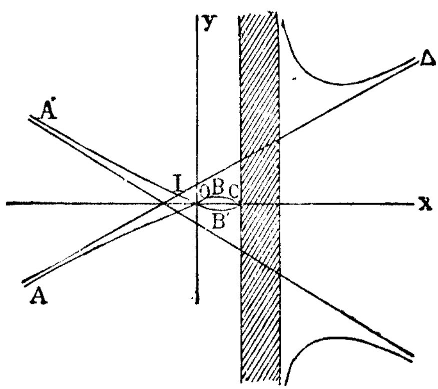


圖 40

73. 二次曲線(又稱錐線)之繪畫法.

二次通式之形爲

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

解出 y 得

$$(1)\qquad y=ax+b\pm\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}.$$

令 $$(2)\qquad y=f_1(x)=ax+b,$$

$$(3)\qquad Y=f_2(x)=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma},$$

則繪畫曲線(1)之命題,可化為繪畫曲線(2),(3)之命題.茲設一例以明之.

例.——作曲線 $3x^2+4xy-4y^2-18x+4y+11=0$.

解出 y 得

$$(1)\qquad y=\frac{x+1}{2}\pm\sqrt{x^2-4x+3}.$$

作直線 L,其方程式為 $y=\frac{x+1}{2}$. 取 L 上之任一點 $P(x,y)$ 將其縱量增減以 $Y=\sqrt{x^2-4x+3}$, 得 M 及 M_1 二點.此兩點卽在曲線(1)上.由此觀之,欲知(1)之軌跡,察 P 點在 L 上移動時,$\overline{PM}=Y=\sqrt{x^2-4x+3}$ 之變值可也.

函數 $Y=\sqrt{x^2-4x+3}$ 之增減向視函數 x^2-4x+3 之增減向而定.欲 Y 為實函數,必 $x^2-4x+3\geqslant 0$, 即 x 在間隔 $(1,3)$ 之外. 茲列表以示 Y 之變值於下:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

設 A 與 B 為在 L 上之二點,其橫量為 1 與 3 者. 令 P 點在 L

上自左至右移動,由極左至於 A, 則 PM 由正無窮遞減以至於零;繪 M, M_1 兩點之軌跡,遂得無窮遠之枝 AH 及 AH_1. P 點由 B 至於極右,則 PM 由零遞增以至於無窮;繪 M, M_1 之軌跡,遂得無窮遠之枝 BK 及 BK_1.

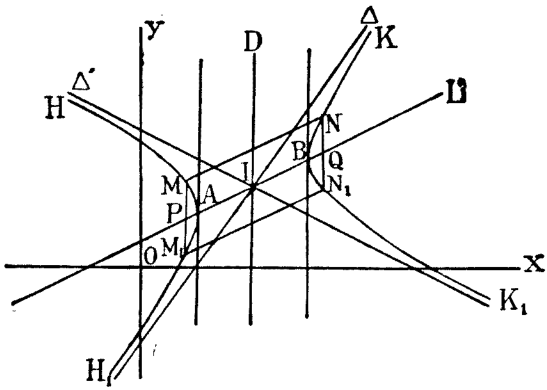


圖 41

欲定曲線上任一點之切線,可求 y 之引數,其值爲

$$y'=\frac{1}{2}\pm\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

當 $x=1$ 或 $x=3$ 時, y' 爲無窮,故 A, B 兩點之切線平行於 Oy 軸.

直線 L 等分平行於 Oy 軸之弦.此直線名爲相配於方向 Oy 之直徑(詳論於本書之下卷).

令 I 爲 AB 之中點,此點橫量等於 2. 如將 2 增減以 λ 代入三項式 x^2-4x+3 之 x, 則所得結果同爲 λ^2-1, 蓋以 $x^2-4x+3\equiv(x-2)^2-1$ 故也.在直線 L 上,由對稱於 I 之二點 P, Q 作 Oy

之平行線.令 M, M_1, N, N_1 爲此平行線與曲線之交點,則有

$$PM=PM_1=QN=QN_1,$$

即 M, M_1, N, N_1 爲平行四邊形之頂點也.如由 I 點作 Oy 之平行線 ID,則 ID 等分平行於 L 之弦.故 ID 名爲相配方向 L 之直徑.而 ID 與 L 二者稱相配直徑(Conjugate diameters),I 稱曲線之中心(Center).

今進而求曲線之漸近線.如 x 爲正,則

$$\sqrt{x^2-4x+3}=x\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

設 x 趨近於正無窮,則依 Mac-laurin 公式得

$$\sqrt{x^2-4x+3}$$

$$=x\left[1+\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^2+\lambda\left(-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^3\right],$$

λ 代表 x 之函數.當 x 趨近於無窮時,其值爲有限者.上式又可書爲

$$(\alpha)\qquad \sqrt{x^2-4x+3}=x\left[1-\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{\mu}{x^3}\right]=x-2-\frac{1}{2x}+\frac{\mu}{x^2},$$

μ 與 λ 同義.依同理,如 x 趨近於負無窮,則

$$(\beta)\qquad \sqrt{x^2-4x+3}=-x\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}=-x+2+\frac{1}{2x}+\frac{\mu}{x^2}.$$

試察曲線之枝 BK,其方程式爲

$$y=\frac{x+1}{2}+\sqrt{x^2-4x+3}.$$

計及(α)式得

$$y=\frac{x+1}{2}+x-2-\frac{1}{2x}+\frac{\mu}{x^2},$$

即 $$y=\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{\mu}{x^2}.$$

故 BK 之漸近線 Δ 之方程式爲

$$Y=\frac{3X}{2}-\frac{3}{2}.$$

又 $$y-Y=-\frac{1}{2x}+\frac{\mu}{x^2}=-\frac{1}{2x}(1+\varepsilon).$$

當 x 趨近於正無窮時，ε 之限爲零，而 $y-Y$ 之號與 $-\frac{1}{2x}$ 之號同爲負，由是 BK 在漸近線之下.

次察曲線之枝 AH，其方程式仍爲

$$y=\frac{x+1}{2}+\sqrt{x^2-4x+3}.$$

計及(β)式得

$$y=\frac{x+2}{2}-x+2+\frac{1}{2x}+\frac{\mu'}{x^2}\quad(\mu' \text{ 與 } \mu, \lambda \text{ 同義}),$$

即 $$y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}+\frac{1}{2x}+\frac{\mu'}{x^2}.$$

故 AH 之漸近線 Δ' 之方程式爲

$$Y=-\frac{X}{2}+\frac{5}{2},$$

而 AH 在漸近線之下.

更察曲線之枝 BK_1, 其方程式爲

$$y=\frac{x+1}{2}-\sqrt{x^2-4x+3}.$$

計及(α)式得

$$y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}+\frac{1}{2x}-\frac{\mu}{x^2}.$$

故 BK_1 以 Δ' 爲漸近線, 而在 Δ' 之上. 末察曲線之枝 AH_1, 易知其漸近線爲 Δ, 而 AH_1 在 Δ 之上.

綜言之,曲線有二漸近線 Δ 及 Δ', 其方程式爲

$$Y=\frac{X+1}{2}\pm(X-2).$$

此二直線相交於 I 點.所究之曲線名爲雙曲線(Hyperbola).

習題七

1. 曲線 $y=\frac{(x+2)^2(x-1)(x-2)^3(x-4)^2}{(x+3)(x+1)^3x^2(x-3)^4}$ 之大概形狀如何.

2. 繪畫曲線

(a) $y^2=\frac{x^3}{x-a}$ (b) $y=\operatorname{arc}\sin(3x-4x^3)$

(c) $x^2-2xy-y^2+8x-6=0.$ (d) $y=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$

(e) $y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ (f) $y=\pm x\sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}}$

3. 繪畫曲線 $y=\frac{x}{x^2-2x+m}$.

(a) 當 m 變時, 試究曲線之形狀.

(b) 平行於 Ox 軸之直線 (D) 與曲線相交於 M', M'' 兩點. 設已知 (D)

與 Oy 軸交點 P 之縱量，試求 M', M'' 之中點 M 之橫量，及 P 對於 M', M'' 之調和相配點 R 之橫量.

(c) 當 P 在 Oy 軸移動，求作 M 及 R 所畫之曲線.

4. 繪畫曲線 $y=x+1\pm\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

第八章

藉參數以表位標之曲線

74. 若某曲線上任一點之位標能以參數 t 表出,則此曲線名為藉參數以表位標之曲線.其方程式之形為

$$x=f(t),\ y=\phi(t). \tag{1}$$

如 $f(t)$ 及 $\phi(t)$ 為 t 之有理函數,則(1)式表代數曲線.蓋將(1)式之 t 消去,即得含 x 與 y 之代數式也.

欲知曲線之次,不必行消去法.可任取一直線 $Ax+By+C=0$ 與曲線相交,而求其交點之數,此數卽曲線之次也.

例如
$$x=\frac{at^2+bt+c}{a''t^2+b''t+c''},\quad y=\frac{a't^2+b't+c'}{a''t^2+b''t+c''}$$

代表二次曲線.蓋以直線 $Ax+By+C=0$ 與之相交,其交點合下式

$$A(at^2+bt+c)+B(a't^2+b't+c')+C(a''t^2+b''t+c'')=0$$

故有二交點也.

曲線上一點 M_0 之切線之角係數為

$$\frac{\phi(t_0+h)-\phi(t_0)}{f(t_0+h)-f(t_0)}.$$

就中 t_0 代表 M_0 點之參數 h 趨近於零.上式之限為 $\frac{\phi'(t_0)}{f'(t_0)}$. 如分

子爲零,分母不爲零,則切線平行於 Ox 軸.如分子不爲零,分母爲零,則切線平行於 Oy 軸.如分子分母同爲零,可再求 $\dfrac{\phi''(t_0)}{f''(t_0)}$ 之值,此即 $\dfrac{\phi'(t_0)}{f'(t_0)}$ 之限也.

75. 依第69節以討論曲線之漸近線,得結果如下:

I. 當 $t=t_0$ 時, $f(t)$ 爲無窮,而 $\phi(t)$ 爲有限值 $\phi(t_0)$, 則直線 $y=\phi(t_0)$ 爲曲線之漸近線.曲線對於此漸近線之位置,可由 $\phi(t)-\phi(t_0)$ 之號而得之.

如 $\phi(t)$ 爲 t 之有理函數,則 $\phi(t)-\phi(t_0)\equiv(t-t_0)^p\,g(t)$, 就中 p 表正整數, $g(t)$ 爲 t 之有理函數.當 t 趨近於 t_0 時,其值爲有限而異於零者.故若 t 趨近於 t_0, $\phi(t)-\phi(t_0)$ 之號與 $(t-t_0)^p\,g(t_0)$ 之號同.令 t_i 爲 $g(t)=0$ 之一根,則得曲線與漸近線之一交點,其位標爲 $x=\phi(t_i), y=\phi(t_i)$.

依同理,可求平行 Oy 軸之漸近線.

II. 當 $t=t_0$ 時, $f(t)$ 及 $\phi(t)$ 均爲無窮,則求 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{\phi(t)}{f(t)}$ 之比值,玆分究下列三情形:

(a) 如 $\dfrac{y}{x}$ 趨近於無窮,則曲線以 Oy 軸爲抛物方向.

(b) 如 $\dfrac{y}{x}$ 趨近於零,則曲線以 Ox 軸爲抛物方向.

(c) 如 $\dfrac{y}{x}$ 之限爲 c, 此限不爲零亦非無窮,更求當 $t=t_0$ 時, $y-cx=\phi(t)-cf(t)$ 之限.

如 $y-cx$ 趨近於無窮,則角係數 c 之方向爲曲線之拋物方向.

如 $y-cx$ 之限爲常數 d, 則直線 $Y=cX+d$ 爲曲線之漸近線.

欲知曲線對於漸近線之位置,使 $X=x$, 而定 $y-Y=y-cx-d$ 之號,其結果與第69節所載者相同.

76. 畫曲線時,宜先察下列數點:

(1) 如任與參數一值 t, 可得一值 t_1 與之對應而有

$$f(t)=-f(t_1),\ \phi(t)=-\phi(t_1),$$

則曲線對稱於原點.

(2) 如對應值 t, t_1 合於

$$f(t)=-f(t_1),\ \phi(t)=\phi(t_1),$$

則曲線對稱於 Oy 軸(位標軸設爲正交).

(3) 如對應值 t, t_1 合於

$$f(t)=f(t_1),\ \phi(t)=-\phi(t_1),$$

則曲線對稱於 Ox 軸(位標軸設爲正交).

(4) 如有 $$f(t)=\phi(t_1),\ \phi(t)=f(t_1),$$

則曲線對稱於二等分位標角線 $x-y=0$.

蓋任與曲線上之一點 $M(x, y)$, 可得一點 $M_1(x_1, y_1)$ 與之對應,而有 $x=y_1$, $y=x_1$ 之關係.故直線 MM_1 之角係數爲 $\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x-y}{y-x}=-1$, 卽 MM_1 與二等分位標角線 $x+y=0$ 平行,是與 $x-y=0$ 正交也.又 $\left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$ 爲 MM_1 之中點之位標,此位標與

$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{y+x}{2}\right)$ 無異.可見 MM_1 之中點在 $x-y=0$ 上,而 M 與 M_1 對稱於 $x-y=0$ 明矣.

(5) 如有 $f(t)=-\phi(t_1)$, $\phi(t)=-f(t_1)$,

則曲線對稱於二等分角線 $x+y=0$, 其證法如前.

上述各條件足使 t 之間隔減半,先作曲線之半段,然後依對稱於某點或某線以完成曲線之全部.

77. 曲線繪畫法舉例.

例一.——作曲線

$$x=\frac{t^3}{(t-1)(t+2)},\quad y=\frac{t^2-2t}{t-1}.$$

上列方程式代表三次曲線.欲作此曲線,可察 t 由 $-\infty$ 增變至 $+\infty$ 時, x 及 y 之變值.

除 $t=1$, $t=-2$ 外, x 爲連續函數.除 $t=1$ 外, y 爲連續函數.

求 x 及 y 之引數,得

$$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2(t^2+2t-6)}{(t-1)^2(t+2)^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t^2-2t+2}{(t-1)^2}.$$

無論 t 爲何值, $\frac{dy}{dt}$ 常爲正,故 y 爲增函數.當 $t_1=-3,6$ 及 $t_2=1,6$ $\left(\text{錯誤小於 } \frac{1}{10}\right)$, $\frac{dx}{dt}$ 爲零.故 $\frac{dx}{dt}$ 在間隔 (t_1, t_2) 之外爲正,在間隔 (t_1, t_2) 之內爲負.

依上所論,得表如次:

t	$-\infty$		t_1		-2		0		1		t_2		2		$+\infty$
x	$-\infty$	↗ $-$	極大	↘ $-$	$-\infty$ | $+\infty$	↘ $+$	0	↘ $-$	$-\infty$ | $+\infty$	↘ $+$	極小	↗ $+$	2	↗ $+$	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-$	↗	$-\frac{8}{3}$	$-$ ↗	0	$+$ ↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	$-$	↗	0	$+$ ↗	$+\infty$

切線之角係數爲 $m=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{(t^2-2t+2)(t+2)^2}{(t^2+2t-6)t^2}$.

原點,(t_1)點,與(t_2)點之切線均與 Oy 軸平行.

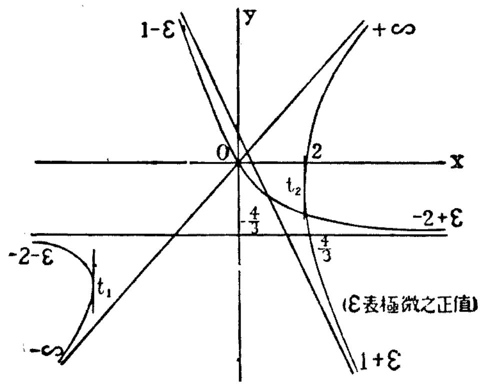


圖 42

綜上所述,曲線之大概可以見矣(如上圖).茲分論曲線之漸近線及曲線兩枝之交點於下.

漸近線:——

I. 當 $t=-2$, x 爲無窮,而 $y=-\frac{8}{3}$, 故 $y=-\frac{8}{3}$ 爲曲線之

漸近線. 欲定曲線對於漸近線之位置, 應察 t 趨近於 -2 時 $y-\left(-\frac{8}{3}\right)=y+\frac{8}{3}$ 之號.

$$y+\frac{8}{3}=\frac{t^2-2t}{t-1}+\frac{8}{3}=\frac{(t+2)(3t-4)}{3(t-1)}.$$

當 t 趨近於 -2, 分數 $\frac{3t-4}{3(t-1)}$ 常爲正, 由是 $y+\frac{8}{3}$ 與 $t+2$ 同號. 故若 t 由小於 -2 而趨近 -2, 則 $y<-\frac{8}{3}$, t 由大於 -2 而趨近 -2, 則 $y>-\frac{8}{3}$. 此結果可預見, 因 y 爲增函數也. 又當 $t=\frac{4}{3}$, $y+\frac{8}{3}$ 爲零. 故在有限距離處, 漸近線交曲線於一點, 其參數 $t=\frac{4}{3}$.

II. 當 $t=\pm\infty$, x 及 y 同爲無窮, 而 $\frac{y}{x}=\frac{t^2-4}{t^2}$ 之限爲 1. 故漸近線之角係數爲1.

又
$$y-x=\frac{t^2-2t}{t-1}-\frac{t^2}{(t-1)(t+2)}=\frac{-4t}{(t-1)(t+2)}.$$

當 $t=\pm\infty$, $y-x$ 之限爲零, 故漸近線之方程式爲 $Y-X=0$.

欲知曲線對於漸近線之位置, 可令 $X=x$ 而求 $y-Y=y-X=\frac{-4t}{(t-1)(t+2)}$ 之號. 如 $t=-\infty$, 則 $y-Y>0$. 故曲線在於近線之上. 如 $t=+\infty$, 則 $y-Y<0$, 故曲線在漸近線之下.

III. 當 $t=1$, x 及 y 同爲無窮, 而 $\frac{y}{x}$ 之限爲 -3 又 $y+3x$

$=\frac{t^2-2t}{t-1}+\frac{3t}{(t-1)(t+2)}=\frac{4t(t+1)}{t+2}$ 之限爲 $\frac{8}{3}$，故漸近線之方程式

爲 $Y+3X=\frac{8}{3}$.

但 $y+3x=\frac{4t(t+1)}{t+2}$，故令 $X=x$，

則
$$y-Y=\frac{4t(t+1)}{t+2}-\frac{8}{3}=(t-1)\frac{4(3t+4)}{3(t+2)}.$$

當 t 趨近於 1，$y-Y$ 之號與 $t-1$ 同.由此立知曲線對於漸近線之位置矣.又在有限距離處，漸近線交曲線於一點，其參數 $t=-\frac{4}{3}$.

曲線兩枝之交點:——

令 t 及 t_1 爲參數 t 之兩值，此兩值不相等且合於下列二式

$$(1)\qquad \frac{t^3}{t^2+t-2}=\frac{t_1^3}{t_1^2+t_1-2},$$

$$(2)\qquad \frac{t^2-2t}{t-1}=\frac{t_1^2-2t_1}{t_1-1}.$$

又令 $M(x, y)$ 爲對應於參數 t 之點，$M_1(x_1, y_1)$ 爲對應於參數 t_1 點，則 $x=x_1$，$y=y_1$. 故 M 點與 M_1 點相重，即所謂曲線之重點 (Double point) 也.將於下章復見之.

(1) 式可書爲 $t^3(t_1^2+t_1-2)-t_1^3(t^2+t-2)=0$.

欲將上式括出因數 $(t-t_1)$，可書之爲

$$t^2t_1^2(t-t_1)+tt_1(t^2-t_1^2)-2(t^3-t_1^3)=0.$$

因 $t-t_1$ 異於零，故此式化爲

(3) $$t^2t_1^2+tt_1(t+t_1)-2(t^2+t_1^2+tt_1)=0.$$

同樣，(2)式可書爲

(4) $$tt_1-(t+t_1)+2=0.$$

如令 $tt_1=p,\ t+t_1=S$，則上二式變爲

$p^2+pS-2(S^2-p)=0,\ p-S+2=0$，解之得 $p=-2, S=0$.

故 t 及 t_1 爲方程式 $t^2-2=0$ 之二根，$t=\sqrt{2}, t_1=-\sqrt{2}$，而重點 M 之位標爲 $x=2, y=-2$.

例二.——作曲線

(1) $$\begin{cases} x=\cos\phi(\sqrt{2}\cos\phi+1) \\ y=\sin\phi(\sqrt{2}\cos\phi-1). \end{cases}$$

如令 $\tan\frac{\phi}{2}=t$，以 t 表示 x 及 y. 將見 x 及 y 爲 t 之有理函數，而(1)爲四次曲線. 惟此題以保留變數 ϕ 爲便. 蓋若以 $\phi+2\pi$ 易 ϕ，則 x 及 y 之值不變，故察 ϕ 在幅員 2π 之任一間隔內增變即足. 如由 $-\pi$ 增變至 $+\pi$ 是也. 但如以 $-\phi$ 易 ϕ，則 x 不變而 y 變號，故任與絕對值同而號異之兩值 ϕ 及 $-\phi$ 有對稱於 Ox 軸之兩點與之相應. 於是幅員 2π 之間隔可減半，祇就 ϕ 由 0 增變至 π 作曲線之半段，更依對稱於 Ox 軸以完成其全部.

求 x 及 y 對於 ϕ 之引數，得

$$x'=-\sin\phi(2\sqrt{2}\cos\phi+1),$$

$$y'=2\sqrt{2}\cos^2\phi-\cos\phi-\sqrt{2}.$$

試察(1)式，當知 $\phi=\frac{\pi}{2}$ 及 $\phi=\frac{3\pi}{4}$ 時，x 之值爲零. $\phi=0, \phi=\pi$,

及 $\phi=\frac{\pi}{4}$ 時,y 之值爲零.

次察 x 及 y 之引數.又知 ϕ 等於鈍角 $\alpha\left(\cos\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ 時,x' 之值爲零.此角在 $\frac{\pi}{2}$ 與 $\frac{3\pi}{4}$ 之間.能使 y' 爲零之值 ϕ 合於三項式

$$2\sqrt{2}\cos^2\phi-\cos\phi-\sqrt{2}=0.$$

如以 $-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,$ 先後代入上式之 $\cos\phi$, 則上式左邊之號依次爲

$$+\quad+\quad-\quad-\quad-\quad+,$$

故三項式有二根. 一在 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 與 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 之間,一在 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 與1之間. 第一根爲鈍角 β 之餘弦, $\alpha<\beta<\frac{3\pi}{4}$. 第二根爲銳角 γ 之餘弦, $0<\gamma<\frac{\pi}{4}$.

依上所述,得表如次:

ϕ	0	γ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	α	β	$\frac{3\pi}{4}$	π
x	$1+\sqrt{2}\searrow$		$\sqrt{2}\searrow$	$0\searrow$	$\frac{-1}{4\sqrt{2}}$ (極小) $\nearrow$		$0\nearrow$	$\sqrt{2}-1$
y	$0\nearrow$	(極大)	$0\searrow$	$-1\searrow$		(極小) $\nearrow$	$-\sqrt{2}\nearrow$	0

曲線上任一點之切線之角係數爲 $\frac{y'}{x'}$. 下圖之連續線示 ϕ 由 0 至 π 時,函數 x 及 y 之變值,間斷線乃表 ϕ 由 $-\pi$ 至 0 時, x 及 y 之變值,與連續線對稱於 Ox 軸者也.

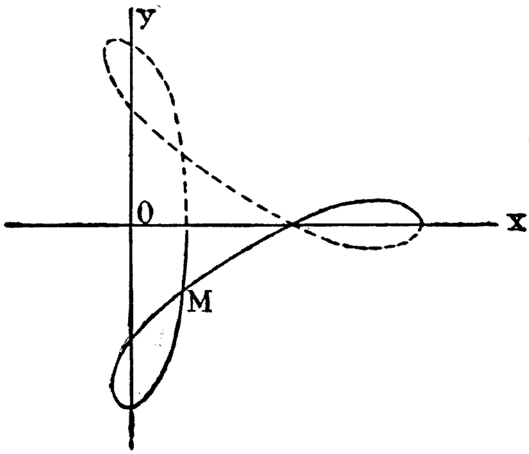


圖 43

M 表曲線之重點,其位標合於下式

$$(2)\qquad \begin{cases}\cos\phi(\sqrt{2}\cos\phi+1)=\cos\phi_1(\sqrt{2}\operatorname{css}\phi_1+1)\\ \sin\phi(\sqrt{2}\cos\phi-1)=\sin\phi_1(\sqrt{2}\cos\phi_1-1).\end{cases}$$

第一式可書爲

$$\sqrt{2}(\cos^2\phi-\cos^2\phi_1)+\cos\phi-\cos\phi_1=0.$$

但 $\cos\phi-\cos\phi_1$ 異於零(見例一),故

$$\sqrt{2}(\cos\phi+\cos\phi_1)+1=0.$$

即 (3)
$$2\sqrt{2}\cos\frac{\phi+\phi_1}{2}\cos\frac{\phi-\phi_1}{2}+1=0.$$

(2) 之第二式可書爲

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\phi-\sin 2\phi_1)-(\sin\phi-\sin\phi_1)=0.$$

即
$$\sqrt{2}\sin(\phi-\phi_1)\cos(\phi+\phi_1)-2\sin\frac{\phi-\phi_1}{2}\cos\frac{\phi+\phi_1}{2}=0.$$

又因 $2\sin\frac{\phi-\phi_1}{2}$ 不爲零,故以之偏除上式之兩邊得

$$(4)\qquad \sqrt{2}\cos\frac{\phi-\phi_1}{2}\cos(\phi+\phi_1)-\cos\frac{\phi+\phi_1}{2}=0.$$

由(3)式化出

$$\cos\frac{\phi-\phi_1}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}\cos\frac{\phi+\phi_1}{2}},$$

代入(4)式得

$$\cos(\phi+\phi_1)+2\cos^2\frac{\phi+\phi_1}{2}=0.$$

即 $$4\cos^2\frac{\phi+\phi_1}{2}-1=0.$$

$$\cos\frac{\phi+\phi_1}{2}=\pm\frac{1}{2}.$$

因 ϕ 及 ϕ_1 爲不相等之兩值.故設 $\phi>\phi_1$, 則 $\phi-\phi_1$ 小於 π, 即

$$\frac{\phi-\phi_1}{2}<\frac{\pi}{2}, \text{ 而 } \cos\frac{\phi-\phi_1}{2}>0.$$

由(3)式可斷 $\cos\frac{\phi+\phi_1}{2}$ 之值應爲負,且

$$\cos\frac{\phi+\phi_1}{2}=-\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\phi+\phi_1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

惟以 ϕ,ϕ_1 均在 0 與 π 之間,故有

$$\frac{\phi+\phi_1}{2}=\frac{2\pi}{3},\quad \frac{\phi-\phi_1}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

於是得出 $$\phi=\frac{11}{12}\pi,\quad \phi_1=\frac{5\pi}{12}.$$

M點之位標爲　$x=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$

曲線既與Ox軸對稱,故其他重點可立得.曲線重點之數有三,其一在Ox軸上.又曲線對稱於直線$y=\pm\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,此證委諸讀者.

78. 定理.

二次曲線之方程式可表示如下

$$x=f(t),\ y=\phi(t),$$

就中$f(t)$及$\phi(t)$爲t之有理函數.

蓋在曲線上任取一定點A.由A任引直線Δ,割直線於A及他一點M,則直線Δ之方程式含有一次之參數t.故由Δ與曲線之方程式消去M之縱量y,得一含參數t之x之二次方程式.此式以A點之橫量a爲其一根,其他一根x爲參數t之有理函數,即M之橫量也.又以M在Δ上,故y亦爲參數t之有理函數.

習題八

1. 繪畫曲線

(a) $x=\frac{t^2+1}{t},\quad y=\frac{2t-1}{t^2}.$

(b) $x=\frac{t^3+2}{t},\quad y=\frac{t^3-2t^2+2}{t-2}.$

(c) $x=\frac{3t+4}{t^2+1},\quad y=\frac{2t+1}{t^2+2}.$

2. 繪畫曲線

(a) $x=\frac{5t^2-2t}{4t^2-1}$, $y=\frac{4t^3-7t^2+8t+4}{2t+1}$.

(b) $x=\sin 2t$, $y=\tan 2t\cos t$.

3. 位標軸 Ox, Oy 設為正交. 有圓與 Oy 軸相切於 O 點. 圓上動點 A 之切線與 Oy 軸相交於 B 點. 試求三角形 AOB 之內切圓及外接圓中心之軌跡, 並作軌跡之圖.

第　九　章

不能解出縱橫量之曲線

79. 設曲線之方程式爲 $f(x, y)=0$. 但不能將 x 或 y 化出. 欲究 $f(x, y)=0$ 所代表之曲線,宜先知下列定理,其證法見於 Yoursat 著之數學分析第一卷第二章陰函數 (Implecit function). 或其他高等微積教本.

定理.——設 $x=x_0$, $y=y_0$ 爲 x,y 之一組之值,合於 $f(x,y)=0$ 者. 又設 x, y 趨近於此組之值時,函數 f 及其第一級引數均爲連續函數. 若 $x=x_0$, $y=y_0$ 時,引數 f_y' 不爲零,則有以 x 爲自變數之連續函數,合於 $f(x, y)=0$ 者. 此函數僅有一個. 當 x 變爲 x_0, 函數之值爲 y_0.

80. 試求曲線之切線. 令 $M(x_0, y_0)$ 爲曲線 $f(x, y)=0$ 上之一點,則有 $f(x_0, y_0)=0$. 而 M 點之切線之角係數爲

$$y_0'=-\frac{f_x'(x_0, y_0)}{f_y'(x_0, y_0)},$$

故 M 點之切線之方程式爲

$$(1)\qquad (x-x_0)f'_{x0}+(y-y_0)f'_{y0}=0.$$

就中 f'_{x0}, f'_{y0} 依次代表 $f_x'(x_0, y_0)$, $f_y'(x_0, y_0)$.

如 $f'_{x0}=0$, $f'_{y0}\neq 0$, 則切線平行於 Ox 軸. 如 $f'_{x0}\neq 0$. $f'_{y0}=0$,

則切線平行於 Oy 軸. 如 f'_{x0} 與 f'_{y0} 同時爲零, 將於第 83 節論之.

設曲線之方程式能書爲下形

$$\phi(P, Q, R, \cdots\cdots\cdots\cdots)=0$$

就中 P, Q, R 代表 x, y 之平直函數,

$$P\equiv a\,x+b\,y+c, \qquad Q\equiv a'\,x+b'\,y+c',$$

$R\equiv a''\,x+b''\,y+c''\cdots\cdots\cdots\cdots$, 此時切線之方程式爲形甚簡.試明之於下,

令 $\qquad f(x, y)\equiv\phi(P, Q, R,\cdots\cdots\cdots\cdots)$, 求此式之偏引數得

$$f_x'\equiv P_x'\,\phi_P'+Q_x'\,\phi_Q'+R_x'\,\phi_R'+\cdots\cdots,$$

卽 $$f_x'\equiv a\phi_P'+a'\phi_Q'+a''\phi_R'+\cdots\cdots.$$

同樣 $$f_y'\equiv b\phi_P'+b'\phi_Q'+b''\phi_R'+\cdots\cdots.$$

將 M 點之位標 x_0, y_0 代入此二全等式之 x, y, 且令 $P_0, Q_0,\cdots\cdots$ 表 x_0, y_0 代入 $P, Q,\cdots\cdots\cdots$ 中之 x, y 所得之結果則

$$f'_{x0}=a\phi'_{P0}+a'\phi'_{Q0}+a''\phi'_{R0}+\cdots\cdots,$$

$$f'_{y0}=b\phi'_{P0}+b'\phi'_{Q0}+b''\phi'_{R0}+\cdots\cdots,$$

故切線之方程式(1)可書爲

$$(1')\quad [a(x-x_0)+b(y-y_0)]\phi'_{P0}+[a'(x-x_0)+b'(y-y_0)]\phi'_{Q0}+\cdots\cdots=0$$

但 $$a(x-x_0)+b(y-y_0)=P-P_0,$$

$$a'(x-x_0)+b'(y-y_0)=Q-Q_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由是(1')式之形簡書爲

$$(P-P_0)\phi'_{P0}+(Q-Q_0)\phi'_{Q0}+(R-R_0)\phi'_{R0}+\cdots\cdots=0.$$

如曲線為代數曲線,則 $f(x, y)=0$ 代表 m 次之多項式,而由(1)式得

$$xf'_{x0}-yf'_{y0}-(x_0f'_{x0}+y_0f'_{y0})=0,$$

其中 $x_0f'_{x0}+y_0f'_{x0}$ 可化為簡單之形.蓋以 $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ 依次易 $f(x, y)$ 之 x, y, 乃將 $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ 乘以 z^m, 則得含 x, y, z 之 m 次齊次多項式

$$\phi(x, y, z)\equiv z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

故無論 k 為任何常數,當有

$$\phi(kx, ky, kz)\equiv k^m\phi(x, y, z),$$

求上式對於 k 之引數得

$$x\phi'_{kx}+y\phi'_{ky}+z\phi'_{kz}\equiv mk^{m-1}\phi(x, y, z).$$

當 $k=1$, 上式化為

$$x\phi_x'+y\phi_y'+z\phi_z'\equiv m\phi(x, y, z).$$

此所謂 Euler 公式也.

當 $z=1$, $\phi(x, y, z)$ 變成 $f(x, y)$, 而 ϕ_x', ϕ_y' 依次變成 f_x', f_y', ϕ_z' 則為含 x, y 之多項式,特以 $f_z'(x, y)$ 或 f_z' 記之.故 Euler 之公式可書為

$$xf_x'+yf_y'+f_z'\equiv mf(x, y).$$

今以 x_0, y_0 易 x, y, 並令 $z_0=1$, 則

$$x_0f'_{x0}+y_0f'_{y0}+f'_{z0}=mf(x_0, y_0)=0.$$

因 $M(x_0, y_0)$ 在 $f(x, y)=0$ 上故也.於是

$$x_0 f'_{x0} + y_0 f'_{y0} = -f'_{z0},$$

而 M 之切線之方程式爲

(2) $$x f'_{x0} + y f'_{y0} + f'_{z0} = 0.$$

欲求 f'_{z0}, 可將 $f(x, y)$ 變成 x, y, z 之齊次多項式,乃求此式對於 z 之引數.更在所得之引數中,以 $x_0, y_0, 1$ 依次易 x, y, z, 卽爲所求之 f'_{z0} 矣.

81. 例題.

設有一圓其方程式爲:

$$f(x, y) \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0.$$

試求圓上一點 $M(x_0, y_0)$ 之切線之方程式.

題解:——先求 $f_x' \equiv 2(x-a)$, $\quad f_y' \equiv 2(y-b)$.

乃將 $f(x, y)$ 變爲齊次式,而以 z^2 乘 $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ 得

$$\phi(x, y, z) \equiv (x-az)^2 + (y-bz)^2 - R^2 z^2 = 0,$$

偏引數 $$\phi_z' \equiv -2a(x-az) - 2b(y-bz) - 2R^2 z.$$

令 $z=1$, 則有

$$f_z' \equiv -2a(x-a) - 2b(y-b) - 2R^2.$$

故 $$\frac{1}{2} f'_{x0} = x_0 - a, \quad \frac{1}{2} f'_{y0} = y_0 - b$$

$$\frac{1}{2} f'_{z0} = -a(x_0 - a) - b(y_0 - b) - R^2,$$

所求之切線之方程式爲

$$x(x_0 - a) + y(y_0 - b) - a(x_0 - a) - b(y_0 - b) - R^2 = 0.$$

82. 如令 $z = z_0 = 1$, 則 (2) 式變成對稱之形.

$$(3)\qquad xf'_{x0}+yf'_{y0}+zf'_{z0}=0.$$

若曲線爲二次,則

$$xf'_{x0}+yf'_{y0}+zf'_{z0}\equiv x_0f_x'+y_0f_y'+z_0f_z',$$

而切線之方程式爲

$$x_0f_x'+y_0f_y'+z_0f_x'=0.$$

計及 $z_0=1$, 則上式變爲

$$(4)\qquad x_0f_x'+y_0f_y'+f_z'=0.$$

玆應用 (3) 或 (4) 式以求二次曲線上任一點 $M(x_0, y_0)$ 之切線,二次曲線之通式爲

$$f(x, y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

依前所述得 $M(x_0, y_0)$ 之切線之方程式如下:

$$Ax\,x_0+B(xy_0+yx_0)+Cy\,y_0+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0.$$

83. 重點 (Double point).

設 $M(x_0, y_0)$ 爲代數曲線 $f(x, y)=0$ 上之一點.若此點之位標能使 $f_x'=f_y'=0$, 則第 80 節之 (1) 式不存在.而 M 名爲曲線之重點.在曲線上,取 M 之隣點 $M'(x_0+h, y_0+k)$. 令 $\frac{k}{h}=t$, 則依 Taylor 公式之推廣得

$$\frac{1}{2}\Big(f''_{x0}{}^2+2tf''_{x0y0}+t^2f''_{y0}{}^2\Big)+\frac{h}{3!}\Big(f'_{x0}+tf'_{y0}\Big)_3+\cdots=0.$$

就中 $(f'_{x0}+tf'_{y0})_3$ 從 $(f'_{x0}+tf'_{y0})^3$ 之展式得出,乃以 $f^{(n)}$ 易展之式 $(f')^n$ 所得之結果也.

當 h 趨近於零,上式化爲

(1) $$f''_{x_0^2}+2tf''_{x_0y_0}+t^2f''_{y_0^2}=0.$$

分別下列三情形:

I. 如 $f''^2_{x_0y_0}-f''_{x_0^2}f''_{y_0^2}>0$, 則 (1) 式有不等之實根 t_1, t_2. 而 M 點之切線之角係數爲

$\dfrac{y_0+k-y_0}{x_0+h-x_0}=\dfrac{k}{h}=t$. 今因 t 有二値, 故曲線有二枝相交於 M. 其切線爲 MT_1, MT_2., 如圖 44 所示.

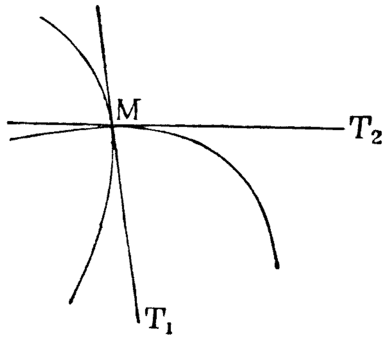


圖 44

此二直線之方程式爲

$$y-y_0=t_1(x-x_0), \qquad y-y_0=t_2(x-x_0),$$

其合併之方程式爲

$$(y-y_0)^2f''_{y_0^2}+2(y-y_0)(x-x_0)f''_{x_0y_0}+(x-x_0)^2f''_{x_0^2}=0.$$

或依前法記爲

$$[(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}]_2=0.$$

II. 如 $f''^2_{x_0y_0}-f''_{x_0^2}f''_{y_0^2}<0$. 則 (1) 式無實根.而曲線無實點與 M 爲隣,故 M 有孤立點 (Isolated point) 之名.

III. 如 $f''^2_{x_0y_0}-f''_{x_0^2}f''_{y_0^2}=0$, 則 (1) 式之兩根相等, $t_1=t_2$. 而 MT_1 與 MT_2 相重, 此時 M 有逆點 (Cusp) 之名, 上列圖 45 所示之逆點稱爲第一類之逆點.圖 46. 所示之逆點稱爲第二類之逆點.

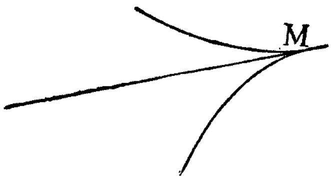


圖 45

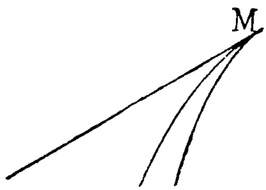


圖 46

有時逆點之隣近得如圖 47 所示.

若將位標軸之原點遷至 M, 使 Ox 軸與 M 點之切線相重, 卽得曲線之二枝對於其公切線 Ox 之位置矣.

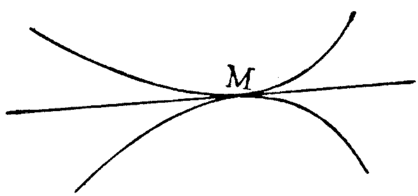


圖 47

84 多重點 (Multiple point).

設曲線之方程式 $f(x, y)=0$ 爲 m 次之多項式, $M(x_0, y_0)$ 爲曲線上之一點, 則 $f(x_0, y_0)=0$. 由 M 點任引直線 D, 其參數方程式爲

$$x=x_0+\alpha\rho, \qquad y=y_0+\beta\rho,$$

對應於 D 與曲線之交點之 ρ 值適合

$$f(x_0+\alpha\rho,\ y_0+\beta\rho)=0.$$

依 Taylor 公式之推廣, 上式可書爲

$$(1)\quad f(x_0, y_0)+\rho(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})+\frac{\rho^2}{2!}(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})_2+\cdots\cdots$$
$$+\cdots\cdots\cdots+\frac{\rho^m}{m!}(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})_m=0.$$

(1) 式含根之個數, 乃 D 與曲線之交點之數也. 故 (1) 式零

根之數爲相重於 M 之交點之數.惟以 $f(x_0, y_0)$ 等於零,可見(1)式必有零根.

I. 首設 f'_{x_0} 與 f'_{y_0} 不同時爲零,則在普通情形時,ρ 之係數不爲零,故(1)式祇有一零根,卽在 M 處,D 與曲線祇有一交點而已.

欲 D 與曲線在 M 處不祇一交點,必也 α 及 β 合於下式

$$(2)\qquad \alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0}=0.$$

故 D 之角係數爲 $\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{f'_{x_0}}{f'_{y_0}}$,卽 D 與 M 之切線相重,此切線爲唯一之直線,其與曲線之交點不祇有一點在 M 處者.

如 α 及 β 合於(2)式,但不能使 ρ^2 之係數爲零,則在 M 處 D 與曲線有二交點相重.若更能使 ρ^2 之係數爲零而不能使 ρ^3 之係數爲零,則在 M 處 D 與曲線有三交點相重.以是類推.

II. 次設 $f'_{x_0}=0$, $f'_{y_0}=0$, 但 $f''_{x_0{}^2}$, $f''_{x_0y_0}$, $f''_{y_0{}^2}$ 不同時爲零,則無論 α, β 爲何値,ρ 之係數常爲零.又在普通情形時,ρ^2 之係數 $\frac{1}{2}(\alpha^2 f''_{x_0{}^2}+2\alpha\beta f''_{x_0y_0}+\beta^2 f''_{y_0{}^2})$ 異於零,故(1)式有二零根,卽在 M 處 D 與曲線有二交點.

欲 D 與曲線在 M 處不祇有二交點,必也 α 及 β 合於下式

$$(3)\qquad (\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})_2=0.$$

故合於此條件者,祇有二直線存在,其合併之方程式爲

$$[(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}]_2=0$$

此二直線爲 M 之切線.

III. 廣言之,欲過 M 之任一直線與曲線有 p 交點相重於 M, 則其必須及充足之條件爲

$\alpha f'_{x0}+\beta f'_{y0}\equiv 0$, $(\alpha f'_{x0}+\beta f'_{y0})_2\equiv 0,\cdots\cdots,(\alpha f'_{x0}+\beta f'_{y0})_{p-1}\equiv 0$ 就中 α 及 β 表任意值.故當 $x=x_0$, $y=y_0$ 時,f 之引數自第一級至第 $p-1$ 級皆爲零,此時 M 名爲 p 重點,其切線之方程式爲

$$[(x-x_0)f'_{x0}+(y-y_0)f'_{y0}]_p=0.$$

如 $p=1$, 則 M 爲通常之點亦稱單點. $p=2$, 則 M 爲二重點或簡稱重點. $p=3$, 則 M 爲三重點.餘類推.

〔注意〕 重點爲 $f(x, y)=0$, $f_x'=0$, $f_y'=0$ 三式之公解.故在普通情形時,曲線無重點,更無 p 重點明矣.

85. 關於多重點之定理.

定理一——如曲線過原點 O, 則曲線方程式最低次項之次數卽爲 O 之重點倍數.又將曲線方程式之最低次各項之和書爲零,卽得原點之切線之方程式.

令最低次項之次數爲 $p\,(p\geqslant 1)$, 曲線之方程式爲

$$\phi_p(x, y)+\phi_{p+1}(x, y)+\cdots\cdots\phi_m(x, y)=0.$$

就中 ϕ_i 代表 i 次各項之和.

由原點任引直線 $x=\alpha\rho$, $y=\beta\rho$. 對應於直線與曲線之交點之 ρ 值適合

$$\rho^p\,\phi_p(\alpha, \beta)+\rho^{p+1}\,\phi_{p+1}(\alpha, \beta)+\cdots\cdots+\rho^m\phi_m(\alpha, \beta)=0.$$

上式有零根 p 個,故原點爲 p 重點(如 $p=1$, 則原點爲通常之點). 又原點之切線之角係數合於 $\phi_p(\alpha, \beta)=0$, 故原點之切線

之方程式爲

$$\phi_p(x, y)=0.$$

定理二——凡三次曲線不祇有一點重點者,必分解爲較低次之曲線.

設曲線有兩點重點 A, B, 則直線 AB 與曲線有四交點.其中相重於 A 者有二點,相重於 B 者亦有二點.但除直線 AB 屬於曲線之一部外,此實不可能以曲線爲三次之曲線也.故曲線必分解爲直線 AB 及過 A, B 兩點之二次曲線.

定理三——凡三次曲線有一點重點者,其位標必能以參數 t 之有理函數表之.

蓋由重點 A 任引直線 Δ,則 Δ 與曲線有三交點,其中有二點相重於 A.故依第78節,可以參數 t 之有理函數表其他一點 M 之位標.

若 A 在原點處,則三次曲線可書成下形:

$$\phi_3(x, y)+\phi_2(x, y)=0 \qquad \text{(見定理一)}$$

以直線 $y=tx$ 割之,得

$$x^3\phi_3(1, t)+x^2\phi_2(1, t)=0.$$

上式爲零之重根,重點之橫量也.其他一根, M 點之橫量也.其值爲

$$x=-\frac{\phi_2(1, t)}{\phi_3(1, t)}.$$

故 M 點之縱量爲

$$y=-\frac{t\phi_2(1,t)}{\phi_3(1,t)}.$$

86. 應用——試作下列著名之二曲線.

I. 蝶狀曲線 (Strophoid).

已與二直線 Ox, Oy, 及 Ox 上之一點 A. 由 A 點任引直線割 Oy 於 B 點. 在直線 AB 上, B 點之兩側, 取 M, M' 點使 $BM=BM'=OB$, 則 M, M' 點之軌跡名爲蝶狀曲線.

令 a 爲 A 點之橫位標, λ 爲 B 點之縱位標. 因 $BM=BM'=OB$, 故 M 及 M' 不特在 AB 上, 且在一圓 OMM' 上, 此圓以 B 爲心, 以 OB 爲半徑. 直線 AB 之方程式爲

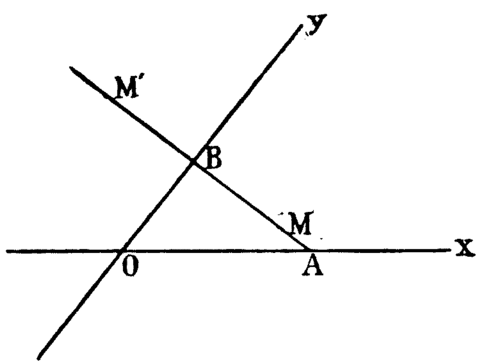


圖 48

(1) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda}-1=0,$$

OMM' 圓之方程式爲

(2) $$x^2+2xy\cos\theta+y^2-2\lambda(x\cos\theta+y)=0.$$

就中 θ 表位標軸之交角.

由 (1) 與 (2) 消去 λ, 得 M 及 M' 之軌跡之方程式

(3) $$(x^2+2xy\cos\theta+y^2)x-a(x^2-y^2)=0,$$

上式代表三次曲線. 依前節, 原點爲此曲線之重點. 原點之切

線之方程式爲 $x^2-y^2=0$, 即二等分位標角之直線也.

令 $y=tx$ 代入 (3) 式,即可依次求出

$$x=\frac{a(1-t^2)}{1+2t\cos\theta+t^2},\qquad y=\frac{at(1-t^2)}{1+2t\cos\theta+t^2}.$$

x, y 之引數雖易求得,然其號頗難斷定.故不必究 x 及 y 之變向,祇知 x 及 y 之號及其特著值,即得曲線之大略矣.

三項式 $1+2t\cos\theta+t^2$ 無實根,故其號常爲正.由是無論 t 爲何值, x 及 y 均爲連續之函數.當 $t=\pm1$ 時, x 之值爲零.又 x 之號因 t 經過此二值而變.當 $t=0$, $t=\pm1$, y 之值爲零.又 y 之號因 t 經過此三值而變.

由上所述,得變值表及曲線圖如次:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$-a$	$-$	0	$+$	a	$+$	0	$-$	$-a$
y	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$

原點 O 之切線爲 $x\pm y=0$. 但除原點外,曲線與切線不相交.由此可見曲線對於 $x\pm y=0$ 之位置矣.

由作法知 $x=-a$ 爲曲線之漸近線.欲得曲線對於漸近線之位置,可令 t 趨近於無窮,而求 $x+a$ 之根.

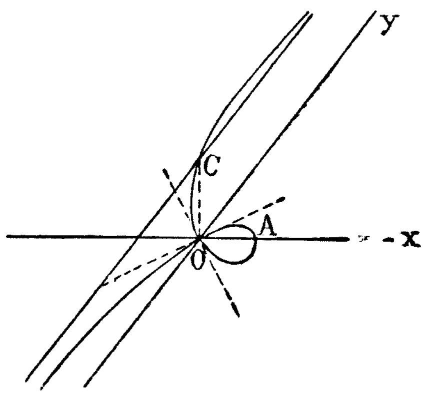


圖 49

$$x+a=\frac{a(1-t^2)}{1+2t\cos\theta+t^2}+a=\frac{2a(1+t\cos\theta)}{1+2t\cos\theta+t^2}.$$

上圖設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，故當 $t=-\infty$，則 $x+a<0$，而曲線在漸近線之左.當 $t=+\infty$，則 $x+a>0$，而曲線在漸近線之右.

在有限距離處,曲線與漸近線相交於一點 C.此點在直線 $y=-\frac{1}{\cos\theta}x$ 上,即在過 O 點而垂直於 Ox 軸之直線上也(見第 13 節).

特端——如 $\theta=\frac{\pi}{2}$，則曲線之方程式化為

$$(x^2+y^2)x-a(x^2-y^2)=0.$$

此式表正蝶狀曲線.對稱於 Ox 軸,其形如下:

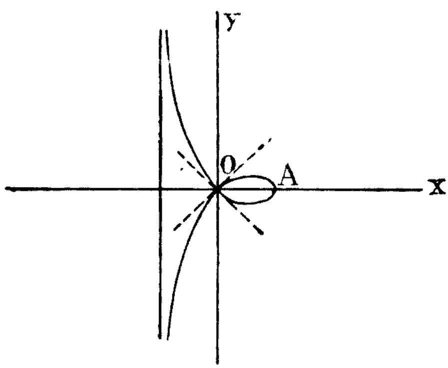


圖 50

備考——蝶狀曲線方程式之三次項以 $x^2+2xy\cos\theta+y^2$ 為其一因子,故曲線過環點.

反言之,凡過環點之三次曲線而有正交切線之重點者,必為蝶狀曲線.

欲證此逆理,可將原點移至曲線之重點,更選定位標軸之方向,使曲線之方程式化爲基本之形.

$$(x^2+2xy\cos\theta+y^2)x-a(x^2-y^2)=0.$$

II. 剪狀曲線 (Cissoid).

已與一圓,圓上之二點 O, A 及切線 AT, 由 O 點位引直線,交圓於 B, 交 AT 於 C. 在此變動之直線 OBC 上,取動徑 $\overline{OM}$, 使與動徑 $\overline{BC}$ 等長,則 M 點之軌跡名爲剪狀曲線.

取 OA 爲 Ox 軸,過 O 點而平行於 AT 之直線爲 Oy 軸. 命 a 爲 A 點之橫位標,則任過 O, A 二點之圓之方程式爲

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2-ax-\lambda y=0.$$

就中 λ 爲待定之值. 今試定之,使 AT 平行於 Oy. 因圓爲二次曲線,故切線 AT 之方程式爲

$$a f_x'+f_z'=0 \qquad \text{(見第 82 節)}.$$

卽

$$a[2x+2y\cos\theta-a]-ax-\lambda y=0.$$

$$a(x-a)+y(2a\cos\theta-\lambda)=0.$$

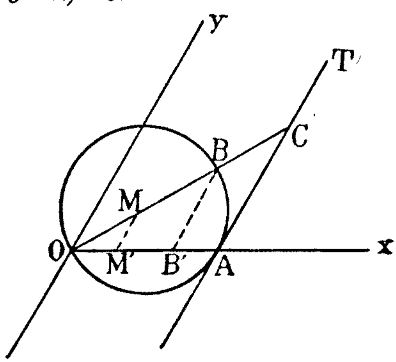


圖 51

欲此切線與 Oy 平行,必也 $\lambda=2a\cos\theta$. 故已與圓之方程式爲

$$x^2+2xy\cos\theta+y^2$$
$$-a(x+2y\cos\theta)=0.$$

又動徑 $\overline{OM}$ 及 $\overline{BC}$ 同在一直線上,而此二動徑等長,故

$$\overline{OM'}=\overline{BA}$$

就中 M' 表平行於 Oy 之直線 MM' 與 Ox 之交點. B' 表平行於 Oy 之直線 BB' 與 Ox 之交點.上式可書爲

$$\overline{OM'}=\overline{OA}-\overline{OB'}.$$

設直線 OBC 之方程式爲

(α) $$y=tx.$$

則 $$\overline{OB'}=\frac{a(1+2t\cos\theta)}{1+2t\cos\theta+t^2}.$$

而 M 點之橫位標爲

$$x=a-\frac{a(1+2t\cos\theta)}{1+2t\cos\theta+t^2}.$$

即 (β) $$x=\frac{a\,t^2}{1+2t\cos\theta+t^2}.$$

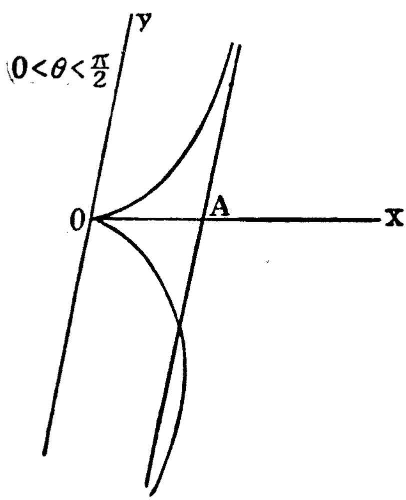


圖 52

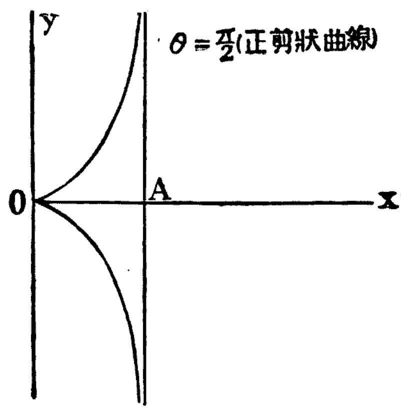


圖 53

由 (α) 及 (β) 二式消去 t 得

$$x(x^2+2xy\cos\theta+y^2)-a\,y^2=0,$$

此乃 M 點之軌跡之方程式也.

剪狀曲線可以圖 52, 53 表之,其一設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 其一設 $\theta=\frac{\pi}{2}$, θ 爲位標軸之交角. 曲線之逆點在原點處,其切線之方程式爲 $y^2=0$.

由剪狀曲線之方程式觀之,當見此曲線過環點.反言之,凡過環點而有逆點之三次曲線.必爲剪狀曲線.此證委諸讀者.

87. 定理.

如 m 次之代數曲線有一點爲 $m-1$ 重點,則可以參數 t 之有理函數表此曲線上任一點之位標.

蓋取 $m-1$ 重點爲原點,則曲線之方程式爲

$$\phi_m(x,\,y)+\phi_{m-1}(x,\,y)=0.$$

ϕ_m 代表 x, y 之 m 次齊次多項式.若以過原點之任一直線 $y=tx$ 割之,即得 m 交點.除 $m-1$ 交點與原點相重外,其餘一交點之位標爲

$$x=-\frac{\phi_{m-1}(1,\,t)}{\phi_m(1,\,t)},\qquad y=-\frac{t\phi_{m-1}(1,\,t)}{\phi_m(1,\,t)},$$

故如定理云.

例. 曲線 $x^3(x-2y)-y(x^2-y^2)=0$ 有一點爲三重點.此點與原點相重.今以直線 $y=tx$ 割此曲線.則有

$$x=\frac{t(t^2-1)}{2t-1},\qquad y=\frac{t^2(t^2-1)}{2t-1}.$$

上式爲曲線之參數方程式.

88. 漸近線.

依代數方程式無窮大根之理論,即得平行於位標軸之漸近線(參閱第69節).故祇究不平行於位標軸之漸近線足矣.設將 m 次曲線之方程式書爲

$$\phi_m(x, y)+\phi_{m-1}(x, y)+\phi_{m-2}(x, y)+\cdots\cdots\cdots=0.$$

就中 ϕ_i 代表 x, y 之 m 次齊次多項式,以 $\frac{y}{x}=\mu$ 轉換之,則

$$\phi_m(x, \mu x)+\phi_{m-1}(x, \mu x)+\phi_{m-2}(x, \mu x)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0,$$

即 $$x^m\phi_m(1, \mu)+x^{m-1}\phi_{m-1}(1, \mu)+x^{m-2}\phi_{m-2}(1,\mu)+\cdots\cdots=0.$$

將 x^m 偏除上式之兩邊,得

$$(1)\qquad \phi_m(1, \mu)+\frac{1}{x}\phi_{m-1}(1, \mu)+\frac{1}{x^2}\phi_{m-2}(1,\mu)+\cdots\cdots\cdots\cdots=0.$$

(1) 式示 μ 因 x 而變當 x 趨近於無窮,此式遂化爲 $\phi_m(1,\mu)=0$. 令 c 爲 $\phi_m(1, \mu)=0$ 之一實根,則當 x 趨近於無窮,(1) 式有一根 μ 趨近於 c.

今進而求 $y-cx$ 之限.令 $y-cx=\lambda$ 轉換曲線之方程式,則該式之形可書爲

$$(2)\qquad x^q g(\lambda)+x^{q-1}g_1(\lambda)+x^{q-2}g_2(\lambda)+\cdots\cdots\cdots\cdots=0.$$

以 x^p 偏除之,得

$$g(\lambda)+\frac{1}{x}g_1(\lambda)+\frac{1}{x^2}g_2(\lambda)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0.$$

故當 x 趨近於無窮,上式化爲 $g(\lambda)=0$.

設 d 爲 $g(\lambda)=0$ 之一實根,則直線 $Y=cX+d$ 爲曲線之漸近

線.當 x 由實值趨近於無窮,$\lambda=y-cx$ 至少有一值趨近於 d. 如 λ 亦由實值趨近於 d, 則 y 常爲實值,而 $Y=cX+d$ 爲曲線實枝之漸近線.若使 λ 由虛值趨近於 d, 則 y 之值將爲虛,而 $Y=cX+d$ 爲曲線虛枝之漸近線矣.

當 d 爲 $g(\lambda)=0$ 之單根 (Simple root) 也, λ 非 x 之實函數不可.故如 x 由實值趨近於無窮, λ 即由實值趨近於 d. 而 $y=cx+\lambda$ 常爲實值.則 $Y=cX+d$ 爲曲線實枝之漸近線,自不待言.

更由 (2) 式觀之.如 $g(\lambda)$ 化爲異於零之常數,則 x 趨近於無窮時, $g(\lambda)=0$ 之根皆爲無窮, c 變成拋物方向之角係數.

89. 代數曲線之無窮遠點.

多重點之定義,可由有限距離推廣至於無窮遠處(參閱第 84 節). 任取代數曲線上之一點 M. 其齊次位標(參閱第 9 節)爲 x_0, y_0, z_0. 無論 M 在有限距離處或在無窮遠處,均可照下法以定其爲單點或幾重點.

設代數曲線之齊次方程式爲 $f(x, y, z)=0$, 由 $M(x_0, y_0, z_0)$ 點任引直線 Δ, 取 Δ 上之一定點 $P(x_1, y_1, z_1)$, 則 Δ 上任一點之位標爲 $x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1$ (見第 28 節). 對應於 Δ 與曲線之交點之 λ 值適合

$$f(x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1)=0.$$

依 Taylor 公式之推廣,上式可書爲

$$(1)\qquad f(x_0, y_0, z_0)+\lambda(x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0})$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}(x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0})_2+\cdots\cdots\cdots\cdots=0$$

(1)式含根之個數,乃Δ與曲線之交點之數也.故(1)式零根之數爲相重於M之交點之數.惟以$f(x_0, y_0, z_0)$等於零(M在曲線上),可見(1)式必有零根.

I. 首設$f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0}$不同時爲零,則在普通情形時$\lambda$之係數不爲零,故(1)式祇有一零根,即在$M$處,$\Delta$與曲線祇有一交點而已.

欲Δ與曲線在M處不祇有一交點,必也x_1, y_1, z_1合於下式

(2) $$x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0}=0.$$

換言之,Δ與M之切線$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0$相重.此切線爲唯一之直線,其與曲線之交點不祇有一點在M處者.

如x_1, y_1, z_1合於(2)式,但不能使λ^2之係數爲零,則在M處,Δ與曲線有二交點相重.若更能使λ^2之係數爲零,而不能使λ^3之係數爲零,則在M處,Δ與曲線有三交點相重,以是類推.

II 次設$f'_{x_0}=0, f'_{y_0}=0, f'_{z_0}=0$,但當$x=x_0, y=y_0, z=z_0$, $f(x, y, z)$之第二級引數不全爲零,則無論x_1, y_1, z_1爲何值,λ之係數常爲零.又在普通情形時λ^2之係數$\frac{1}{2}(x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0})_2$異於零,故(1)式有二零根,即在$M$處,$\Delta$與曲線有二交點.

欲Δ與曲線在M處不祇有二交點,必也x_1, y_1, z_1合於

(3) $$(x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0})_2=0.$$

上式代表分解爲二直線之二次曲線.蓋若$P(x_1, y_1, z_1)$點在其

上,則凡直線 PM 上之點必在其上也.

III. 廣言之,欲過 M 之任一直線與曲線有 P 交點相重於 M,則其必須及充分之條件為

$$x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0}\equiv 0, \qquad (x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0})_2\equiv 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \qquad (x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0})_{p-1}\equiv 0,$$

就中 x_1, y_1, z_1 表任意值.故當 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 時,f 之引數自第一級至第 $p-1$ 級皆為零.此時 M 名為 p 重點(在有限距離處或無窮遠處),其切線之方程式為

$$(x f'_{x_0}+y f'_{y_0}+z f'_{z_0})_p=0.$$

如 $p=1$, 則 M 為單點. $p=2$, 則 M 為二重點或簡稱重點.餘類推.

90. 無窮遠點之切線.

若無窮遠點之方向為已知,則其切線不難斷定,依 z 之升冪以書曲線之方程式,得

$$f(x, y, z)\equiv\phi_m(x, y)+z\phi_{m-1}(x, y)+z^2\phi_{m-2}(x, y)+\cdots\cdots=0.$$

知 $\phi_m(x, y)$ 之一因子,即得曲線之一無窮遠點.令 $\alpha x+\beta y$ 為 $\phi_m(x, y)$ 之一因子,則無窮遠點之齊次位標為 $x_0=\beta$, $y_0=-\alpha$, $z=0$.

但
$$\frac{\partial f}{\partial x}\equiv\frac{\partial\phi_m}{\partial x}+z\frac{\partial\phi_{m-1}}{\partial x}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\equiv\frac{\partial\phi_m}{\partial y}+z\frac{\partial\phi_{m-1}}{\partial y}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}\equiv\phi_{m-1}+2z\phi_{m-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

將 x_0, y_0, z_0 易 x, y, z 得

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}=\frac{\partial\phi_m}{\partial x_0},\ \frac{\partial f}{\partial y_0}=\frac{\partial\phi_m}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z_0}=\phi_{m-1}(x_0, y_0).$$

茲分論下列二情形:

I. 若 $\alpha x+\beta y$ 爲 ϕ_m 之單因子而不能同時除盡 $\frac{\partial\phi_m}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial\phi_m}{\partial y}$ 者,則 $\frac{\partial\phi_m}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial\phi_m}{\partial y_0}$ 不同時爲零.故 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 爲曲線之單點,而此點之切線之方程式爲

$$x\frac{\partial\phi_m}{\partial x_0}+y\frac{\partial\phi_m}{\partial y_0}+z\phi_{m-1}(x_0, y_0)=0,$$

此切線在有限距離處,乃曲線之漸近線也.

II. 若 $\alpha x+\beta y$ 爲 ϕ_m 之重因子,則 $\frac{\partial\phi_m}{\partial x_0}=\frac{\partial\phi_m}{\partial y_0}=0$. 設 $\alpha x+\beta y$ 不能除盡 ϕ_{m-1},則 $\phi_{m-1}(x_0, y_0)$ 不爲零,故 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 仍爲曲線之單點.然此切線 $z\phi_{m-1}(x_0, y_0)=0$〔即 $z=0$〕變爲無窮遠處之直線矣.

綜上所述,得結果如次;

I. 已知 ϕ_m 之單因子,則可斷定無窮遠處之單點及一漸近線.

II. 已知 ϕ_m 之重因子,不能除盡 ϕ_{m-1} 者,則可斷定無窮遠處之一單點及一拋物方向.

91. 曲線繪畫法舉例.

例一. 作曲線$2x^3-3x^2y+y^3+3xy-2x=0$.

此式爲三次式,原點爲單點,原點之切線爲Oy軸.依y之降冪以書方程式,則得

$$y^3-3x(x-1)y+2x(x^2-1)=0.$$

任與一值x,則y有三值與之對應.欲y之三值均爲實數,必也

$$-x\ (x-1)^3+x^2(x^2-1)^2\leqslant 0,$$

卽
$$x^2(x-1)^2(3x+1)\leqslant 0.$$

故必
$$x\leqslant -\frac{1}{3}.$$

當x由$-\infty$增變至$-\frac{1}{3}$,方程式有三實根;當$x=-\frac{1}{3}$,方程式有二重根$y=\frac{2}{3}$,及單根$y=-\frac{4}{3}$;當x由$-\frac{1}{3}$增變至$+\infty$方程式祇有一實根.方程式之根之號視係數$-3x(x-1)$及$2x(x^2-1)$之號而變,卽視x對于$-1, 0, +1$諸值之位置而變.

由上所述,得x之特著值如次:

$$-\infty \qquad -1 \qquad -\frac{1}{3} \qquad 0 \qquad +1 \qquad +\infty$$

當x由$-\infty$增變至-1,方程式係數之號爲$+, -, -$,故方程式有一正根及二負根,

今試定$x=-\infty$時,y之值爲何.將方程式之兩邊徧除以x^3,

得
$$\frac{y^3}{x^3}-\frac{3}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)y+2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

當x趨近於無窮,上式y^3及y之係數同爲零,故y之三根均爲無窮大.

當 $x=-1$, 方程式化爲 $y^3-6y=0$, 故其根爲 0 及 $\pm\sqrt{6}$.

當 x 由 -1 增變至 $-\frac{1}{3}$, 方程式係數之號爲 $+,-,+$, 故方程式有二正根及一負根.如 $x=-\frac{1}{3}$, 則方程式有二重根 $y=\frac{2}{3}$ 及一單根 $-\frac{4}{3}$.

當 x 由 $-\frac{1}{3}$ 增變,方程式祇有一實根 y_1. 若察係數之號,則知當 x 在間隔 $(-\frac{1}{3},0)$ 內, y_1 爲負.當 $x=0$, y_1 爲零.當 x 在間隔 $(0,1)$ 內, y_1 爲正.當 $x=1$, y_1 復爲零.又當 x 在間隔 $(1,+\infty)$ 內, y_1 爲負.當 $x=+\infty$, y_1 爲負無窮.茲列表明之於下:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
y_1	$-\infty$	$-$	$-\sqrt{6}$	$-$	$-\frac{4}{3}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
y_2	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\frac{2}{3}$						
y_3	$+\infty$	$+$	$+\sqrt{6}$	$+$	$\frac{2}{3}$						

曲線之形狀如下頁之圖:

曲線上一點 (x,y) 之切線之角係數爲

$$-\frac{f_x'}{f_y'}=\frac{6x^2-6xy+3y-2}{-3x^2+3y^2+3x}.$$

$A(-1,0)$ 點之切線之角係數爲 $\frac{2}{3}$, 易證 A 點之切線交曲線於三點與 A 相重,故 A 爲反曲線. $B\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ 點之切線之角

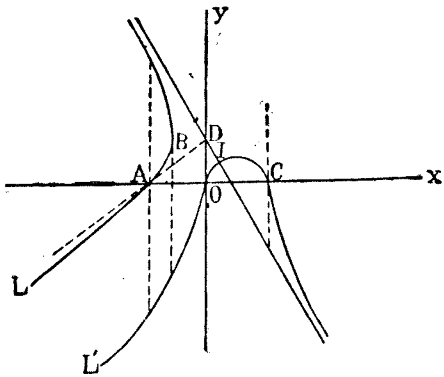


圖 54

係數爲無窮,故切線平行於 Oy 軸. $C(1,0)$ 點及原點之切線均與 Oy 軸平行,可見 C 及原點同爲曲線之反曲線.

今進求曲線之漸近線.漸近方向 $\frac{y}{x}$ 合於

$$2x^3-3x^2y+y^3=0,$$

上式可分解爲 $(y-x)^2(y+2x)=0$. 故漸近方向 $\frac{y}{x}$ 爲 $\frac{y}{x}=1$ 及 $\frac{y}{x}=-2$.

試求對應於方向 $\frac{y}{x}=1$ 之漸近線.茲爲便利起見,將曲線之方程式書爲

$$(1)\qquad (y-x)^2(y+2x)+3xy-2x=0.$$

乃以 $x+\lambda$ 易上式之 y, 得

$$\lambda^2(3x+\lambda)+3x(x+\lambda)-2x=0.$$

卽
$$3x^2+x(3\lambda^2+3\lambda-2)+\lambda^3=0$$

因 x^2 之係數不爲零,故無漸近線對應於方向 $\frac{y}{x}=1$. 而此方向

爲曲線 AL 及 OL' 兩枝之拋物方向(見第87節).此結果可預見.蓋以 $y-x$ 爲(1)式中三次各項之二重因子,而不能除盡二次各項故也(見上節之末).

更求對應於方向 $\frac{y}{x}=-2$ 之漸近線.將 $-2x+\lambda$ 易曲線方程式之 y,得

$$(2)\qquad 3x^2(3\lambda-2)-x(6\lambda^2-3\lambda+2)+\lambda^3=0.$$

當 $\lambda=\frac{2}{3}$, x^2 之係數爲零,故對應於方向 $\frac{y}{x}=-2$ 之漸近線爲

$$y=-2x+\frac{2}{3}.$$

直線 $y=-2x+\lambda$ 與曲線之交點之橫位標可由(2)式得出.當 $\lambda=\frac{2}{3}$, 此交點 I 在漸近線之上,其橫位標爲 $x=\frac{1}{9}$. 因曲線之方程式爲三次.故在有限距離處,漸近線與曲線祇有一交點.由此可知漸近線對於曲線之位置矣.

例二. 作曲線

$$(1)\qquad (x^2-1)^2+(y^2-1)^2-a^2=0.$$

令 $x^2=X$, $y^2=Y$, 則(1)式變爲

$$(X-1)^2+(Y-1)^2-a^2=0.$$

上式代表一圓 (C), 圓心爲 $\omega(1,1)$, 半徑之長爲 a. 任與 (C) 上之一點 M, 如其位標 X, Y 均爲正者,則得曲線(1)之四點.其中任二點或對稱於位標軸,或對稱於原點.故祇究其中之一點 $m(+\sqrt{X}, +\sqrt{Y})$, 即足以概其餘.

當 M 畫 (C) 圓時, m 畫一曲線 (c). 此曲線之形狀不難知,蓋

以 M, m 兩點有對應之關係 $x=+\sqrt{X}$, $y=+\sqrt{Y}$, x, y 之變向與 X, Y 之變向同,而 $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}\sqrt{\frac{X}{Y}}$ 故也.茲分別下列情形而究之:

其一, $a<1$.

此時 (C) 圓上各點之位標均爲正,故當 M 畫 (C) 圓時, m 畫一卵狀曲線 (c). 在 (C) 上有切線平行於位標軸之點,在 (c) 上有對應點,其切線亦平行於位標軸.又 (C) 對稱於二等分位標角線 $Y=X$,並且與之成正交,由 $x=+\sqrt{X}$, $y=+\sqrt{Y}$ 及 $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}\sqrt{\frac{X}{Y}}$ 諸式觀之, (c) 亦同有此性質.故所求之曲線(1)可表於下:

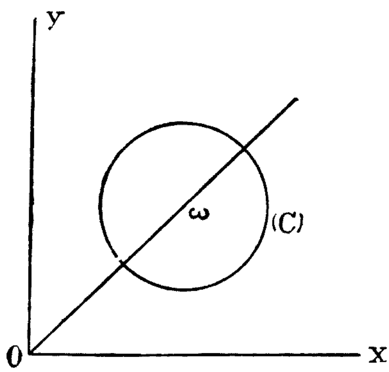


圖 55

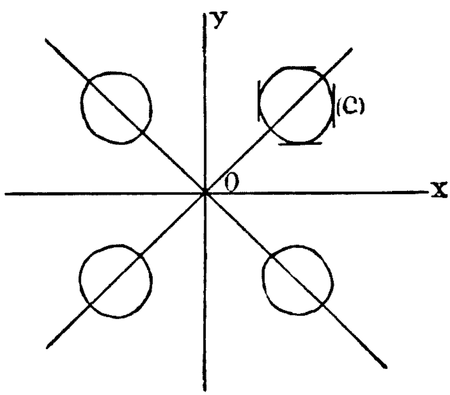


圖 56

曲線(1)對稱於位標軸,原點,及二等分位標角線.此結果可由曲線之方程式得出(參閱第76節).

其二, $1<a<\sqrt{2}$.

此時(C)圓交 Ox 軸於 A, A' 兩點,其橫位標均爲正,交 Oy 軸於 B, B' 兩點,其縱位標均爲正.欲M點之縱橫位標均爲正,則 M 點應在 $A'B'$ 弧或 ADB 弧內.上圖以連續線表之.當 M 點畫 $A'B'$ 弧,m 點畫 $a'b'$ 弧.當 M 點畫 ADB 弧,m 點畫 adb 弧.

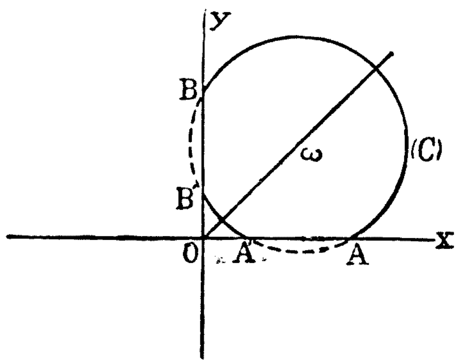


圖 57

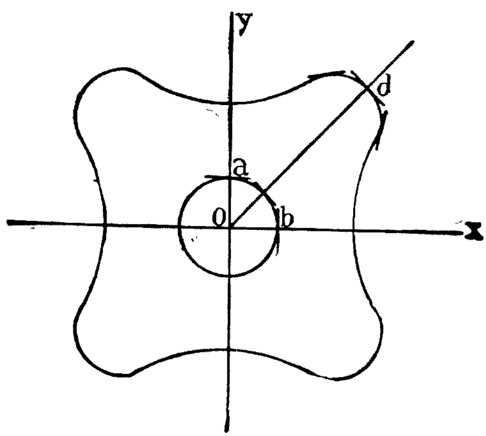


圖 58

又 a, a' 兩點之切線與 Oy 軸平行, b, b' 兩點之切線與 Ox 軸平行.

其三, $$a > \sqrt{2}.$$

此時 M 點祇畫 AB 弧,而 m 點畫 ab 弧與之對應.

特端. $$a = 1.$$

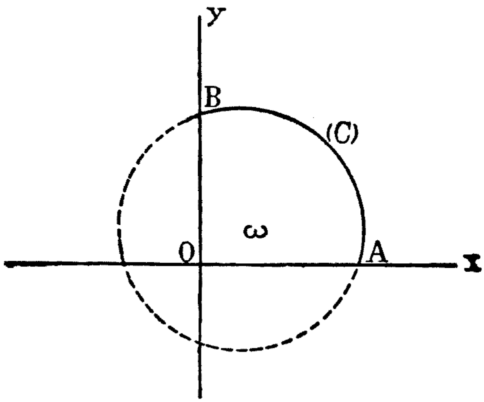


圖 59

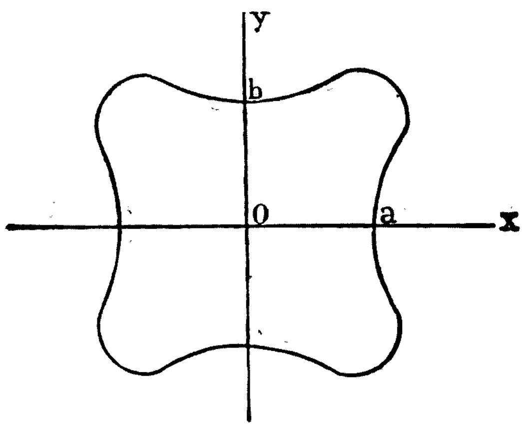


圖 60

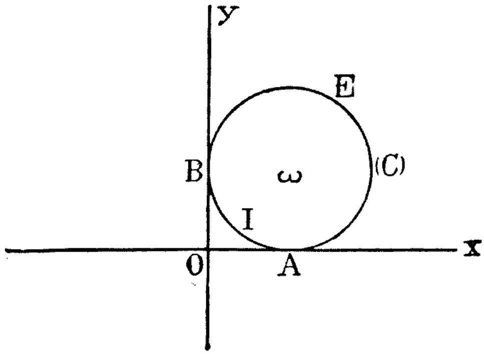


圖 61

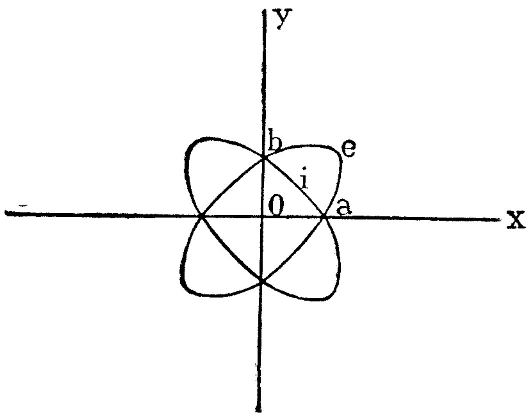


圖 62

此時 (C) 圓切於 Ox 及 Oy 軸.其接觸點為 A, B. 但以 $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}\sqrt{\frac{X}{Y}}$, 而 A 點之縱位標及切線之角係數同為零.故其對應 a 點之切線之角係數呈未定之形式.茲試定之.

由方程式 $(X-1)^2+(Y-1)^2=1$.

得 $$X=1+\varepsilon\sqrt{2Y-Y^2}. \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

$$dX=\varepsilon\frac{1-Y}{\sqrt{2Y-Y^2}}dY,$$

$$\frac{dy}{dx}=\varepsilon\frac{\sqrt{2Y-Y^2}}{1-Y}\sqrt{\frac{1+\varepsilon\sqrt{2Y-Y^2}}{Y}}$$

$$=\varepsilon\frac{\sqrt{2-Y}}{1-Y}\sqrt{1+\varepsilon\sqrt{2Y-Y^2}}.$$

故當 $Y=0$, 則 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{2}$. 於是曲線(1)之 a 點有二切線,其角係數爲 $\pm\sqrt{2}$. 而 a 爲(1)之重點.當 M 點畫 AIB 弧, m 點畫 aib 弧.當 M 點畫 AEB 弧, m 點畫 aeb 弧.可見 b 亦爲(1)之重點.依對稱於位標軸以完成曲線之全部,則知曲線重點之數有四,惟曲線之方程式爲四次,故曲線分解爲兩個二次曲線,此可由下列定理見之.

定理——若 n 次曲線不分解,則其重點之數不得超過於 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

假令 n 次曲線 C_n 重點之數有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$, 今證其非分解不可.因 $n-2$ 次曲線之通式含有 $\frac{1}{2}(n-1)n$ 個係數,若使諸係數受 $\frac{1}{2}(n-1)n-1$ 個方程式之限制,由諸係數之一次齊次關係而成者,必有合此條件之 $n-2$ 次方程式存在,故經過 C_n 之各重點及 C_n 之 $n-3$ 任意點可作 $n-2$ 次曲線 C_{n-2} 此曲線與 C_n 相交之點有 $n(n-2)+1$ (重點作兩點計). 可見 C_{n-2} 屬於 C_n 之一部份.即 C_n 分解爲低於 n 次之曲線也.

曲線(1)之分解爲兩二次曲線更可由分解因子而徵之.如

將曲線之方程式書爲

$$x^4+y^4-2(x^2+y^2)+1=0,$$

卽
$$(x^2+y^2-1)^2-2x^2y^2=0,$$

$$(x^2+y^2+xy\sqrt{2}-1)(x^2+y^2-xy\sqrt{2}-1)=0,$$

則知(1)爲兩橢圓所成,其軸爲二等分位標角線.

備考——如將曲線(1)之方程式書

$$x^2=1+a\cos t$$

$$y^2=1+a\sin t.$$

則可視(1)爲藉參數以表位標之曲線.

92. 區域方法.

曲線可見於平面之某段而不見於平面之他段,故就曲線存在與否以區分平面,則曲線經過之地得以限定,而繪圖之工作省矣.茲先述定理於下,以便引用.

定理——令 $f(x, y)=0$ 爲代數曲線, $P(x_1, y_1)$ 及 $Q(x_2, y_2)$ 爲平面上之二點.如 $f(x_1, y_1)$ 與 $f(x_2, y_2)$ 同號,則在 P, Q 之間,直線 PQ 與曲線之實交點之數爲偶(零作爲偶數),如 $f(x_1, y_1)$ 與 $f(x_2, y_2)$ 異號,則在 PQ 之間,直線 PQ 與曲線之實交點之數爲奇.

設直線 PQ 之方程式爲

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\rho,$$

PQ 上任一點之位標爲

$$x_1+\rho(x_2-x_1), \qquad y_1+\rho(y_2-y_1).$$

對應於直線及曲線之交點之ρ值適合

$$\phi(\rho)\equiv f[x_1+\rho(x_2-x_1),\ y_1+\rho(y_2-y_1)]=0.$$

對應於P及Q二點之ρ值爲0及1，故在PQ間，曲線與直線實交點之數，卽上式在$(0, 1)$間實根之數也，但$\phi(0)=f(x_1, y_1)$，$\phi(1)=f(x_2, y_2)$，故如定理云.

應用——設曲線之方程式能書爲下形

(1) $$A.\ B.\ C\cdots\cdots\cdots\cdots=A'.\ B'.\ C'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

就中$A, B, C,\cdots\cdots\cdots\cdots A',\cdots\cdots\cdots\cdots$代表$xy$之多項式.若已作曲線$A=0$, $B=0,\cdots\cdots\cdots A'=0,\cdots\cdots\cdots$，而將(1)式兩邊不同號之區域繪以陰影線，則曲線(1)必不過此區域.蓋如(1)式之兩邊相等其號應同也.又曲線(1)經過曲線$A=0, B=0,\cdots\cdots$與任一曲線$A'=0$, $B'=0$. $C'=0,\cdots\cdots\cdots$之交點.於此可見曲線(1)經行之地矣.

例. 作曲線$(x^2+y^2-1)(y+2)=y(2x+2y-1)$.

先作$x^2+y^2-1=0$, $y+2=0$, $y=0$及$2x+2y-1=0$諸線.第一線爲圓，餘均爲直線.如視諸線爲區域之境界，卽有十區域.今取一點$M_0\,(x_0>1,\ y_0>1)$，而以$f(x, y)$, $g(x, y)$表曲線方程式之兩邊，則知$f(x_0, y_0)$與$g(x_0, y_0)$同號. $M_0(x_0>1, y_0>1)$所屬之區域以(I)記之.依本節之定理，無論M_0爲區域(I)之任何點，$f(x_0, y_0)$必與$g(x_0, y_0)$同號.若$f(x_1, y_1)$, $g(x_1, y_1)$不同號，則$M_1\,(x_1, y_1)$點所屬之區域以陰影線記之.有陰影線之區域，曲線不經行者也.

曲線之形狀如下圖:

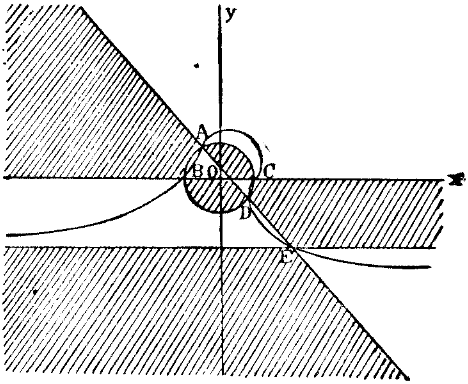


圖 63

又曲線經過區域境界之 A, B, C, D, E 五點,其漸近線之方程式爲 $y+2=0$.

習題九

1. 繪畫曲線

(a) $4x^2y^2-4xy(2x-y)+4(x^2-2y^2)-7x+8y-2=0$.

(b) $y^2(x^2-y^2)-3y^3+2x=0$.

2. 繪畫曲線

(a) $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2-c^4=0$. $(b<a)$.

(b) $x^4-y^4-2x^3+y^2+y-1=0$.

3. 用區域方法,繪畫曲線

(a) $(x^2-1)(x^3-y^3)=(y-1)(x^2+y^2-3)$.

(b) $(x^2-y^2)(x+2y)+x(x+y-1)=0$.

(c) $x^3+y^3+y^2-x-1=0$.

第　十　章

特著之曲面 曲面之切面 及曲線之密切面

93. 定理.

兩代數方程式代表同一曲面之必須及充足條件如下:

兩方程式爲同次,且對應項之係數成比例.

此條件爲充足,實顯然可見,試證其爲必須.

設 $f(x, y, z)=0$ 及 $\phi(x, y, z)=0$ 兩方程式代表同一曲面.如將平行於 Oz 軸之直線 $x=x_0, y=y_0$ 割曲線,則交點之高 z 合於 $f(x_0, y_0, z)=0$ 及 $\phi(x_0, y_0, z)=0$.此二式有相同之根 z.故必

$$f(x_0, y_0, z)\equiv\lambda\phi(x_0, y_0, z),$$

λ 表與 z 無關之數.但 x_0 及 y_0 可任意,由是

$$f(x, y, z)\equiv\lambda\phi(x, y, z).$$

同樣,如以平行於 Ox 或 Oy 之直線割曲面,則知 λ 與 x, y 均無關,卽 λ 爲常數.故如定理云.

94. 球面.

設位標軸爲正交,球心之位標爲 (a, b, c),球之半徑等於 R.則球面之方程式爲

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{1}$$

若比較(1)式與下式

(2)
$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

即知(2)式代表球面之條件爲

$$A=A'=A''$$

$$B=B'=B''=0$$

此條件可將(1),(2)兩式比較而知之.

平面與球面之截痕爲圓.蓋取平面爲 xy 位標面, Oz 軸過球心,則球面之方程式爲

$$x^2+y^2+(z-d)^2-R^2=0.$$

截痕之方程式爲

$$z=0,$$

$$x^2+y^2=R^2-d^2.$$

上二式代表一圓.此圓爲虛圓,實圓或化爲點,視 R^2-d^2 小於,大於或等於零而定.

兩球面之截痕爲圓.蓋令兩球面之方程式爲

$$f(x, y, z)\equiv A(x^2+y^2+z^2)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

$$f_1(x, y, z)\equiv A_1(x^2+y^2+z^2)+2C_1x+2C_1'y+2C_1''z-D_1=0,$$

則其同解之方程組爲

$$f(x, y, z)=0,$$

$$\frac{f(x, y, z)}{A}-\frac{f_1(x, y, z)}{A_1}=0.$$

第一式代表球面,第二式代表平面,故兩球面之截痕爲圓也.

仿第62節定理之證法,可得定理如下:

定理. 由空間之任一點P,引割線交球面於M及M',則乘積$\overline{PM}\cdot\overline{PM'}$爲常數,不因割線之位置而變.

此常數名曰P點對於球之乘冪(Power). 如令

$$f(x, y, z)\equiv A(x^2+y^2+z^2)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

爲球面之方程式,x_0, y_0, z_0爲P點之位標,則有

$$\overline{PM}\cdot\overline{PM'}=\frac{f(x_0, y_0, z_0)}{A}.$$

系一. 動點對於兩球面有相等乘冪之軌跡爲垂直於球心聯結線之平面.

此平面名爲兩球面之根面(Radical plane)

系二. 任與S_1, S_2, S_3三球面. 令P_1爲S_2, S_3之根面, P_2爲S_3, S_1之根面, P_3爲S_1, S_2之根面,則P_1, P_2, P_3有一公直線.

依同理,一點對於四球有相等乘冪之軌跡爲一點,以下列方程式定之:

$$\frac{f_1}{A_1}=\frac{f_2}{A_2}=\frac{f_3}{A_3}=\frac{f_4}{A_4}.$$

就中$f_i\equiv A_i(x^2+y^2+z^2)+2C_ix+2C_i'y+2C_i''z+D_i=0$代表各球面之方程式.

95. 柱面(Cylinder).

一直線Δ在空間移動,若常與一定直線平行且受他一條件之限制者,則所產出之曲面名爲柱面.

直線Δ名爲柱面之直母線 (Straight generator). 定直線名爲柱面之軸

令 D 表柱面之軸,其方程式爲

$$P\equiv ax+by+cz+d=0,$$

$$Q\equiv a'x+b'y+c'z+d'=0,$$

平行於 D 之任一直線之方程式爲

$$P=\lambda,\quad Q=\mu. \tag{1}$$

欲直線(1)產生曲面,則 λ 與 μ 應受一條件之限制

$$\phi(\lambda,\mu)=0. \tag{2}$$

由(1)及(2)消去 λ,μ 得柱面之方程式

$$\phi(P,Q)=0.$$

反言之,凡方程式之形爲 $\phi(P,Q)=0$, 就中 P,Q 爲 x,y 之平直關係者,則方程式代表柱面. 蓋可視此式代表之曲面由直線(1)所產成,而 λ 及 μ 受條件(2)之限制故也.

此逆定理之證,更可由位標軸之變換得出. 如令 $P=0$ 爲 $y'z'$ 位標面, $Q=0$ 爲 $z'x'$ 位標面,則 P,Q 依次變爲 $\alpha x',\beta y'$(α 及 β 同表常數),而 $\phi(P,Q)=0$ 變爲 $\phi(\alpha x',\beta y')=0$. 此乃平行於 z' 軸之直線所產成之柱面也.

廣言之,若使平行直線經過定曲線,則平行直線產成柱面. 此定曲線名曰柱面之準線 (Directrix of the cylinder).

設平行直線之方程式爲

$$P=\lambda,\quad Q=\mu,$$

準線之方程式爲

$$f(x, y, z)=0, \quad f_1(x, y, z)=0.$$

欲得限制平行直線之條件,可將上四式消去 x, y, z, 卽得

$$\phi(\lambda, \mu)=0.$$

故柱面之方程式爲

$$\phi(P, Q)=0.$$

過原點作直線 L 平行於柱面之軸. 令 α, β, γ 爲 L 上之一點之位標, $f(x, y, z)=0$, $f_1(x, y, z)=0$ 爲準線之方程式. 如一點 (x, y, z) 屬於柱面,則過此點而平行於柱面之軸之直線必過準線. 此直線之方程式爲

$$X=x+\alpha\rho, \quad Y=y+\beta\rho, \quad Z=z+\gamma\rho,$$

故有

$$f(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)=0,$$

$$f_1(x+\alpha\rho, y+\beta\rho, z+\gamma\rho)=0.$$

由上二式消去 ρ, 卽得柱面之方程式.

例. 設準線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0.$$

若由 $\frac{(x+\alpha\rho)^2}{a^2}+\frac{(y+\beta\rho)^2}{b^2}-1=0$, $z+\gamma\rho=0$ 消去 ρ, 則得柱面之方程式如下:

$$\frac{(\gamma x-\alpha z)^2}{a^2}+\frac{(\gamma y-\beta z)^2}{d^2}-\gamma^2=0.$$

96. 錐面 (Cone).

一直線在空間移動,若常過一定點且受他一條件之限制者,則直線所產出之曲面名爲錐面.此定點名爲錐面之頂點(Vertex),動直線名爲錐面之直母線(Straight generator).

過定點(x_0, y_0, z_0)之直線之方程式爲

(1) $$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}.$$

若使直線受一幾何條件之限制,則得含λ, μ, ν之方程式

(2) $$\psi(\lambda, \mu, \nu)=0.$$

此式爲齊次.蓋將$\lambda t, \mu t, \nu t$依次易λ, μ, ν, (1)式不因之而變.故如λ, μ, ν爲(2)式之解,則$\lambda t, \mu t, \nu t$亦爲(2)式之解也.由(1),(2)消去λ, μ, ν,即得錐面之方程式

$$\psi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0.$$

故錐面之方程式爲含$x-x_0, y-y_0, z-z_0$之齊次方程式.

反言之,凡含$x-x_0, y-y_0, z-z_0$之齊次方程式代表錐面,以(x_0, y_0, z_0)爲頂點.

蓋設使λ, μ, ν受諸$\psi(\lambda, \mu, \nu)=0$之限制,則可視曲面$\phi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0$,由直線$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}$所產成故也.

若令$M(x_1, y_1, z_1)$爲曲面$\phi=0$上之一點,則易知過M點及(x_0, y_0, z_0)點之直線在此曲面上.逆定理之證,於斯復見矣.

廣言之,若使同過一定點之直線L與定曲線r相交,則L產成錐面.定曲線r名爲錐面之準線.茲分別下列二情形而論之.

其一. 設定點之位標爲x_0, y_0, z_0,定曲線之方程式爲

(3) $$f(x, y, z)=0, \quad f_1(x, y, z)=0.$$

L之方程式爲

(1) $$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}.$$

如(1)與(3)相交,則(1),(3)應有公根x, y, z.換言之,

$$f(x_0+\lambda\rho, y_0+\mu\rho, z_0+\nu\rho)=0,$$

$$f_1(x_0+\lambda\rho, y_0+\mu\rho, z_0+\nu\rho)=0.$$

兩式有公解ρ也.故由此二式消去ρ,得λ, μ, ν之齊次關係

$$\phi(\lambda, \mu, \nu)=0.$$

更由上式及(1)式消去λ, μ, ν,遂得錐面之方程式

$$\phi(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0.$$

其二. 設定點爲$P=0, Q=0, R=0$三平面之交點,L之方程式爲 $$P=\lambda R, \quad Q=\mu R.$$

欲L產成錐面,則λ及μ應受一關係限制,令此關係爲$f(\lambda, \mu)=0$,即得錐面之方程式$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right)=0$.故錐面之方程式含$P, Q, R$之齊次關係.

反言之,凡含平直函數P, Q, R之齊次方程式代表錐面,以$P=0, Q=0, R=0$三平面之交點爲頂點.讀者可自證之.

〔備考〕此逆理之爲眞,祇就三平面相交於有限距離處之一點而言.若設平面$R=0$平行於$P=0, Q=0$之交線,則R爲P, Q之平直函數;而$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right)=0$變爲柱面之方程式矣(見

前節).

97. 代數曲面之漸近方向之錐面.

m 次曲面之齊次方程式可書爲

$$\phi_m(x, y, z)+t\phi_{m-1}(x, y, z)+t^2\phi_{m-2}(x, y, z)+\cdots\cdots=0.$$

就中 ϕ_i 代表 x, y, z 之 i 爲齊次多項式.

曲面上之無窮遠點爲 $t=0, \phi_m(x, y, z)=0$ 兩式所限定. 第一式表無窮遠處之平面,第二式表錐面,其頂點爲原點. 故曲面之無窮遠點,同在無窮遠處之平面及錐面 $\phi_m(x, y, z)=0$ 上. 此錐面名爲漸近方向之錐面.

98. 旋轉面 (Surface of revolution).

若曲線繞定軸旋轉,則其產成之曲面名曰旋轉面,定軸名曰旋轉軸. 垂直於旋轉軸之平面與旋轉面之截痕爲圓,此圓名曰旋轉面之平行線 (Parallel line). 過旋轉軸之平面名曰旋轉面之子午面 (Meridian plane).

設位標軸爲正交,旋轉軸之方程式爲

$$\frac{x-p}{\alpha}=\frac{y-q}{\beta}=\frac{z-r}{\gamma},$$

若視平行線爲平面與球面之截痕,則其方程式爲

$$(1)\qquad \begin{cases}(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=\lambda,\\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\mu.\end{cases}$$

欲閆產出旋轉面,λ 及 μ 必受一關係之限制,令此關係爲

$$(2)\qquad f(\lambda, \mu)=0.$$

則由(1),(2)消去λ, μ.即得旋轉面之方程式

$$f[(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2, \alpha x+\beta y+\gamma z]=0.$$

反言之,若令 $\Sigma=0$ 表球面之方程式,$P=0$ 表平面之方程式,則凡方程式之形爲$f(\Sigma, P)=0$者,必爲旋轉面之方程式.又旋轉軸過球心而垂直於平面$P=0$.

蓋使 λ, μ 合於 $f(\lambda, \mu)=0$, 則可視曲線 $f(\Sigma, P)=0$ 爲平行面 $\Sigma=\lambda$, $P=\mu$ 所產成故也.又 $\Sigma=\lambda$ 代表球面,其心與球面 $\Sigma=0$ 之心相同,而 $P=\mu$ 代表平面,與平面 $P=0$ 平行.故曰旋轉軸過球心而垂直於平面 $P=0$ 也.

例. 設直線Δ與一軸不同在平面上,若將Δ繞軸旋轉,試求旋轉面之方程式.

取旋轉軸爲Oz軸,Δ及Oz之公垂線爲Ox軸,則Δ之方程式爲

$$x-a=0, \quad y-mz=0,$$

平行線之方程式爲

$$x^2+y^2=\lambda, \quad z=\mu, \tag{c}$$

欲平行線與Δ相交,必上列四式有同解,故

$$x=a, \quad z=\mu, \quad y=m\mu$$

及

$$a^2+m^2\mu^2=\lambda$$

最後之式定λ與μ之關係,由此式與(c)式消去λ, μ,遂得

$$x^2+y^2-m^2z^2-a^2=0.$$

即所求旋轉面之方程式也.

99. 切面及法線.

設曲面(S)之方程式爲

(1) $$x=f(u, v),\quad y=\phi(u, v),\quad z=\psi(u, v).$$

在(S)上,任取過M點之曲線(c). 令u, v爲M點之參數,MT爲(c)上之M點之切線,則MT之方程式爲

$$\frac{X-x}{\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv}=\frac{Y-y}{\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv}=\frac{Z-z}{\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv}=\rho.$$

故
$$X-x=\rho\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right),$$

$$Y-y=\rho\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

$$Z-z=\rho\left(\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\right),$$

消去ρdu及ρdv得

(2) $$\begin{vmatrix} X-x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ Y-y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ Z-z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0.$$

(2)式代表平面,此所謂M點之切面也.

若以$f(x, y, z)=0$表曲面(S)之方程式,則切線MT之方程式爲
$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.$$

但(c)既在(S)面上,無論其爲過M點之任何曲線,應有

$f_x'dx+f_y'dy+f_z'dz=0$ 之關係，由此關係與 MT 之方程式消去 dx, dy, dz，即得 M 點之切面之方程式

$$(3)\qquad (X-x)f_x'+(Y-y)f_y'+(Z-z)f_z'=0.$$

上設 f_x', f_y', f_z' 不同時爲零. 如 $f_x'=f_y'=f_z'=0$, 則 M 點名爲曲面上之歧點 (Singular point)，可仿第 83 第 84 兩節討論之.

設 $f(x, y, z)=0$ 表代數之曲面. 依第 80 節之分析，將 $f(x, y, z)$ 變成 x, y, z, t 之齊次多項式. 乃求此式對於 t 之引數，而以 $x_0, y_0, z_0, 1$ 依次易此引數之 x, y, z, t. 更以 f'_{t0} 表所得之結果，則 $f(x, y, z)$ 之切面之方程式爲

$$xf'_{x0}+yf'_{y0}+zf'_{z0}+tf'_{t0}=0.$$

若曲面之方程式之形爲

$$\phi(P, Q, \cdots\cdots)=0$$

就中 $P, Q, \cdots\cdots$ 代表 x, y, z 之平直函數，則曲面上 $M(x_0, y_0, z_0)$ 點之切面之方程式爲

$$(P-P_0)\phi'_{P0}+(Q-Q_0)\phi'_{Q0}+\cdots\cdots=0.$$

切面之方程式不因位標軸之交角而變形. 但法線之方程式不然. 後者以用正交之位標軸爲便. 因法線垂直於切面，故用正交之位標軸，則曲面 (1) 上 $M(x, y, z)$ 點之法線之方程式爲

$$(4)\qquad \frac{X-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}. \qquad \text{〔見 (2) 式〕}$$

若曲面之方程式爲 $f(x, y, z)=0$, 則曲面上 $M(x, y, z)$ 點之法線之方程式爲

$$(5)\qquad \frac{X-x}{f_x'}=\frac{Y-y}{f_y'}=\frac{Z-z}{f_z'}. \qquad \text{〔見 (3) 式〕}$$

100. 數種特著曲面之切面.

I. 柱面之切面.

同在一直母線上之點有相同之切面.

設柱面之方程式爲 $f(P,Q)=0$ (P 及 Q 爲平直函數見第95節), 直母線 Δ 之方程式爲 $P=\lambda$, $Q=\mu$, 就中 λ, μ 合於 $f(\lambda, \mu)=0$ 之關係. 令 x_0, y_0, z_0 爲 Δ 上之一點之位標, 則有 $P_0=\lambda$, $Q_0=\mu$, 而此點之切面之方程式爲

$$(P-P_0)f'_{P0}+(Q-Q_0)f'_{Q0}=0, \qquad \text{(見前節)}$$

即
$$(P-\lambda)f_\lambda'(\lambda, \mu)+(Q-\mu)f_\mu'(\lambda, \mu)=0.$$

此式與 $x_0\, y_0\, z_0$ 無關, 故無論 Δ 上之任何點均有相同之切面. 切面之方程式祇含一參數.

II. 錐面之切面.

同在一直母線上之點有相同之切面.

設錐面之方程式爲 $f(P, Q, R)=0$. 直母線 Δ 之方程式爲

$$\frac{P}{\alpha}=\frac{Q}{\beta}=\frac{R}{\gamma},$$

就中 α, β, γ 合於 $f(\alpha, \beta, \gamma)=0$ (見第96節). 令 x_0, y_0, z_0 爲 Δ 上之一點之位標, 則有

$$\frac{P_0}{\alpha}=\frac{Q_0}{\beta}=\frac{R_0}{\gamma},$$

而此點之切面之方程式爲

$$Pf'_{P0}+Qf'_{Q0}+Rf'_{R0}=0.$$

因 $f'_{P0}, f'_{Q0}, f'_{R0}$ 爲 P_0, Q_0, R_0 之齊次函數,故上式可書爲

$$Pf_\alpha'(\alpha, \beta, \gamma)+Qf_\beta'(\alpha, \beta, \gamma)+Rf_\gamma'(\alpha, \beta, \gamma)=0.$$

此式與 x_0, y_0, z_0 無關.故同在 Δ 上之點均有相同之切面.切面之方程式祇含一參數.

III. 旋轉面之切面.

定理一. 旋轉面上一點之切面與過該點之子午面成正交.

取正交之位標軸,Oz 軸與旋轉軸相重,則旋轉面之方程式可書爲

$$f(x, y, z)\equiv\phi(u, z)=0$$

就中 $u=x^2+y^2$, 而 $M(x_0, y_0, z_0)$ 點之切面之方程式爲

$$(1)\qquad (x-x_0)f'_{x0}+(y-y_0)f'_{y0}+(z-z_0)f'_{z0}=0.$$

但 $f_x'\equiv2x\phi_u'$, $f_y'\equiv2y\phi_u'$, $f_z'\equiv\phi_z'$, 故 $f'_{x0}=2x_0\phi'_{u0}$, $f'_{y0}=2y_0\phi'_{u0}$, $f'_{z0}=\phi'_{z0}$, 由是 (1) 式變爲

$$2(x-x_0)x_0\phi'_{u0}+2(y-y_0)y_0\phi'_{u0}+(z-z_0)\phi'_{z0}=0.$$

即 $$2xx_0\phi'_{u0}+2yy_0\phi'_{u0}+z\phi'_{z0}-2u_0\phi'_{u0}-z_0\phi'_{z0}=0.$$

故 M 點之切面與過 $M(x_0, y_0, z_0)$ 之子午面 $xy_0-yx_0=0$ 正交.

定理二. 同在一平行線上各點之切面,相會於旋轉軸上之一點.

令 $u\equiv x^2+y^2=\lambda$, $z=\mu$ 爲平行線之方程式. x_0, y_0, z_0 爲此線上之一點之位標, 則 $u_0\equiv x_0{}^2+y_0{}^2=\lambda$, $z_0=\mu$, 而此點之切面之方程式爲

$$2(xx_0+yy_0)\phi'_{u0}+z\phi'_{z0}-2u_0\phi'_{u0}-z_0\phi'_{z0}=0.$$

切面與 Oz 軸之交點之高(即 z 值)爲

$$\frac{2u_0\phi'_{u0}+z_0\phi'_{z0}}{\phi'_{z0}}=\frac{2\lambda\phi_\lambda'(\lambda,\ \mu)+\mu\phi_\mu'(\lambda,\ \mu)}{\phi_\mu'(\lambda,\ \mu)},$$

交點之高與 x_0, y_0, z_0 無關. 故如定理云. 同樣可證定理如下:

定理三. 同在一平行線上之點之法線相會於旋轉軸上之一點.

101. 展面 (Developable surfare) 及其切面.

展面爲平面之包面 Envelope of a familly of planes), 平面之方程式爲含一參數者.

平面上之包線, 已載於普通初等微積教本. 然包面或未說及. 茲先明包面之理論, 用以究展面之切面.

設一羣曲面之通式爲

(1)　$$f(x,\ y,\ z,\ a)=0,$$

a 表參數. 令 a 及 $a+h$ 爲對應於曲面 (S_a) 及 (S_{a+h}) 之參數之值, 則當 h 趨近於零時, (S_a) 與 (S_{a+h}) 之截痕以曲線 (C_a) 爲限. 此曲線名爲特有曲線 (Characteristic curve), 其方程式爲 (1) 及

(2)　$$f(x,\ y,\ z,\ a+h)=0.$$

此二式之同解方程式爲 (1) 及

$$f(x, y, z, \alpha+h)-f(x, y, z, \alpha)=0,$$

後者可換爲

(3) $$f_\alpha'(x, y, z, \alpha)=0.$$

包面爲特有曲線所產成,即由 (1) 及 (3) 消去 α 後所得之結果也.

任一曲線 (S_α) 含一特有曲線 (C_α) 無論在 (C_α) 上之任何點,(S_α) 常與包面相切.

蓋令 $M(x, y, z)$ 爲 (C_α) 上之任一點,則 (S_α) 之 M 點之切面爲

(4) $$(X-x)f_x'+(Y-y)f_y'+(Z-z)f_z'=0.$$

乃由 (3) 式將 α 之值化出,以之代入 $f(x, y, z, \alpha)$,並以 $F(x, y, z)$ 表此結果,則得包面之方程式

$$F(x, y, z)=0.$$

包面之 M 點之切面爲

(5) $$(X-x)F_x'+(Y-y)F_y'+(Z-z)F_z'=0$$

依複函數 (Composite function) 之理論得

(6) $$\begin{cases} F_x'\equiv f_x'+f_\alpha'\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, \\ F_y'\equiv f_y'+f_\alpha'\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}, \\ F_z'\equiv f_z'+f_\alpha'\dfrac{\partial\alpha}{\partial z}. \end{cases}$$

但 M 點在特有曲線 (C_α) 上,故其位標合於 (3) 式. 而 (6) 之各式化爲 $$F_x'=f_x',\quad F_y'=f_y',\quad F_z'=f_z',$$

故 (4) 式與 (5) 式相同. 無論在 (C_α) 上之任何點, (S_α) 常與包面相切.

茲進而論展面之切面. 展面爲一羣之平面所產成,其方程式含有一參數 α, 如下式所示

$$f(x, y, z, \alpha) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$(A, B, C, D$ 表參數 α 之函數). 求 f 對于 α 之引數得

$$f_\alpha' \equiv A'x + B'y + C'z + D,$$

故 $f=0$ 與 $f_\alpha'=0$ 各代表一平面, 此二平面之截痕爲一直線,即特有曲線也.由是展轉爲直線所產成.同一直線上之任何點,均有相同之切面.

展面爲規則面 (Ruled surface) 之一種. 所謂規則面者, 以直線產成之曲面也. 由第 100 節觀之,即知柱面及錐面均爲展面.

102. 曲線之密切面 (Osculating plane).

設 MT 表空間曲線之 M 點之切線, M' 表曲線上 M 之鄰點. 當 M' 趨近於 M, 則平面 MTM' 之限名爲曲線之密切面. 令曲線之方程式爲

$$x = f(t), \quad y = \phi(t), \quad z = \psi(t),$$

t 表對應於 M 點之參數. 則過 M 點之平面之通式爲

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0 \tag{1}$$

今試定 A, B, C 之値俾 (1) 表 M 點之密切面. 因密切面經過 MT, 而 MT 之方程式爲

$$\frac{X-x}{f'(t)}=\frac{Y-y}{\phi'(t)}=\frac{Z-z}{\psi'(t)}=\rho.$$

故平面(1)經過$[x+f'(t), y+\phi'(t), z+\psi'(t)]$點,即有下式之關係

$$(2)\qquad Af'(t)+B\phi'(t)+C\psi'(t)=0.$$

令$t+h$表對應於M'點之參數.因平面(1)過M',故

$$(3)\qquad A[f(t+h)-f(t)]+B[\phi(t+h)-\phi(t)]+C[\psi(t+h)-\psi(t)]=0.$$

由 Taylor 之公式得

$$\left.\begin{aligned}f(t+h)-f(t)&=hf'(t)+\frac{h^2}{2}f''(t+\theta h)\\ \phi(t+h)-\phi(t)&=h\phi'(t)+\frac{h^2}{2}\phi''(t+\theta_1 h)\\ \psi(t+h)-\psi(t)&=h\psi'(t)+\frac{h^2}{2}\psi''(t+\theta_2 h)\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&0<\theta<1\\ &0<\theta_1<1\\ &0<\theta_2<1.\end{aligned}$$

於是(3)式可書爲

$$h[Af'(t)+B\phi'(t)+C\psi'(t)]$$
$$+\frac{h^2}{2}[Af''(t+\theta h)+B\phi''(t+\theta_1 h)+C\psi''(t+\theta_2 h)]=0.$$

計及(2)式得

$$(3')\qquad Af''(t+\theta h)+B\phi''(t+\theta_1 h)+C\psi''(t+\theta_2 h)=0.$$

可見A, B, C應合(1),(2)及(3')三式.由此三式消去之,得密切面MTM'之方程式

$$\begin{vmatrix}X-x & Y-y & Z-z\\ f'(t) & \phi'(t) & \psi'(t)\\ f''(t) & \phi''(t) & \psi''(t)\end{vmatrix}=0.$$

即 (4)
$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0.$$

無論位標軸爲正交或爲斜交,密切面均與(4)式同形.又此密切面垂直於 $M(x, y, z)$ 點之法面.所謂法面者,乃過 M 點而垂直於 MT 之平面也.如用正交之位標軸,則法面之方程式爲

(5) $$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0.$$

103. 密切面之別種定義(本節所用之符號與前節同).

M 點之密切面爲過切線 MT 及 M' 點之平面,已如上述.故可謂 M 點之密切面者,經過相重於 M 之三點之平面也.茲再定其義於下:

作平面包含 MT 而平行於 M' 點之切線,當 M' 趨近於 M,則此平面之限與前節之平面 MTM' 同.

蓋因所作之平面包含 MT,故其方程式爲

(1) $$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

就中 A, B, C 合於

(2) $$Af'(t)+B\phi'(t)+C\psi'(t)=0.$$

又以所作之平面與 $M'(t+h)$ 點之切線平行,故有

$$Af'(t+h)+B\phi'(t+h)+C\psi'(t+h)=0.$$

此式可書爲

$$A[f'(t)+hf''(t+\theta h)]+B[\phi'(t)+h\phi''(t+\theta_1 h)]$$
$$+C[\psi'(t)+h\psi'(t+\theta_2 h)]=0.$$

計及(2)式,上式遂與前節之(3′)式同.故由(1),(2),(3′)三式消去A,B,C,則復得前節之(4)式.

若以M爲原點,則其密切面之方程式化爲

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{dz^2}{dt^2} \end{vmatrix}=0.$$

故M點之密切面包含M點之速率動徑及加速率動徑.密切面在運動學之義如此.

104. 定理——經過M點之切線之平面能間分曲線者,祇有密切面而已.

蓋依第102節,得

(1) $$A[X-f(t)]+B[Y-\phi(t)]+C[Z-\psi(t)]=0,$$

(2) $$Af'(t)+B\phi'(t)+C\psi'(t)=0.$$

乃將M'點之位標$f(t+h)$, $\phi(t+h)$, $\psi(t+h)$代入(1)式之X, Y, Z,又令ω爲所得之結果,則

$$\omega=A[f(t+h)-f(t)]+B[\phi(t+h)-\phi(t)]+C[\psi(t+h)-\psi(t)].$$

依Taylor公式展之,得

$$\omega=\frac{h^2}{2}[Af''(t)+B\phi''(t)+C\psi''(t)+\varepsilon],$$

ε隨h而趨近於零.茲分論下列各情形:

I. 設$Af''(t)+B\phi''(t)+C\psi''(t)\neq 0$,則平面(1)非密切面,

而 M 之鄰點同在平面之一側.蓋當 h 趨近於零,ω 之號與 $Af''(t)+B\phi''(t)+C\psi''(t)$ 之號相同故也.

II. 設 $Af''(t)+B\phi''(t)+C\psi''(t)=0$, 則平面 (1) 爲密切面,而此面間分曲線,因

$$\omega=\frac{h^3}{3!}[Af'''(t)+B\phi'''(t)+C\psi'''(t)+\varepsilon_1],$$

ε_1 隨 h 而趨近於零.故就普通情形而言,ω 之號隨 h 之號俱變.但如 $Af'''(t)+B\phi'''(t)+C\psi'''(t)=0$, 則所述之結果未必爲眞,此時平面 (1) 名曰停留密切面 (Stationary osculating plane).

習題十

1. 求過 (1, 2, −1), (3, −1, 0), (2, 1, 1), (0, 3, 1) 四點之球面方程式.球心及半徑.求過前三點之圓方程式.圓心及半徑.圓軸方程式(過圓心而垂直於圓面之直線).圓之參數方程式(取動半徑與過第一點之半徑所成之角爲參數).

2. 求與 Ox 及 Oy 相切之球面通式.設此種球適合下列之一條件,試求其球心之軌跡.

(a) 與一定圓正交, (b) 與一定直線相切, (c) 與一定平面相切.

3. 求錐面之方程式,其頂點爲 (α, β, γ), 其準線爲 $x=\frac{a^2\alpha}{t+a^2}$, $y=\frac{b^2\beta}{t+b^2}$, $z=\frac{c^2\gamma}{t+c^2}$ 者.

4. 求過橢圓之旋轉錐面之頂點之軌跡.證明此軌跡爲一虛橢圓及一雙曲線 (H). 如 S 爲 (H) 上之點,試證過橢圓而以 S 爲頂點之旋轉錐面之軸與 (H) 相切於 S.

5. 設有曲面,其參數方程式爲

$$x=u^2,\quad y=uv,\quad z=v^2+2u.$$

(a) 證明此曲面爲四次代數曲面.

(b) 證明所有切面與曲面相交成兩拋物線.

第十一章

平面上之極位標

105. 平面上之極位標(Polar coördinates)者,乃平面上之一點O及一定向直線Ox所限定之位標也.O點名爲極點(Pole),Ox名爲極軸(Polar axis).

設M爲平面上之任一點,作直線OM.在OM上,任定一正向OL.令$\rho=\overline{O\quad}$,$\overline{OM}$表代數值,此值之爲正負視OM與OL是否同向而定.又作Oy軸垂直於Ox軸,以Ox至Oy之向爲角之正向.更令$\theta=(Ox, OL)$,則ρ,θ名爲M點之極位標.ρ名爲半徑動徑(Radius vector),θ名爲極角(Polar angle).

由此觀之,M點有無限組之極位標.蓋有極角θ有2π之倍數之差,而直線OM之正向可任定.倘將此向更換,則θ亦有π之奇倍數之差故也.令α表OM與Ox之任一交角,r表OM之長度,則M點之位標爲

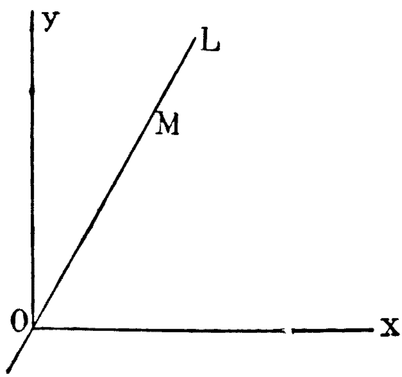


圖 64

$$\begin{cases}\rho=r\\ \theta=\alpha+2k\pi\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}\rho=-r\\ \theta=\alpha+(2k+1)\pi\end{cases}$$

k 表任意整數. 但如 ρ 及 θ 之值爲已知, 則 $\theta=(Ox, OL)$, $\rho=\overline{OM}$ (正向 OL) 兩式祇決定一點 M.

在初級解析幾何書中, 已載極位標與 Descartes 位標之關係, 及極位標制之錐線 (Conics) 之方程式. 而初級微積分教本, 又已明極切線, 極法線, 極次切線 (Polar subtangent), 極次法線 (Polar subnormal) 之義, 及斷定切線與半徑動徑之交角. 玆不贅述. 特由直線之方程式說起, 應用經過兩點之直線之方程式以斷定曲線之切線及法線之方程式. 乃究曲線之漸近線及曲線之繪畫法. 而於三角函數中, 自變數之間隔之選定, 則尤三致意焉.

106. 直線.

經過極點之直線之方程式爲 $\theta=c$ (c 爲常數). 如直線 Δ 不過極點, 則其方程式可依下法求之.

作直線 OP 垂直於 Δ, 將 OP 任定一正向 OA. 令 P 爲 OP 與 Δ 之交點, $\alpha=(Ox, OA)$, $p=\overline{OP}$ (正向 OA), 則 α 及 p 二值足以定 Δ 之位置.

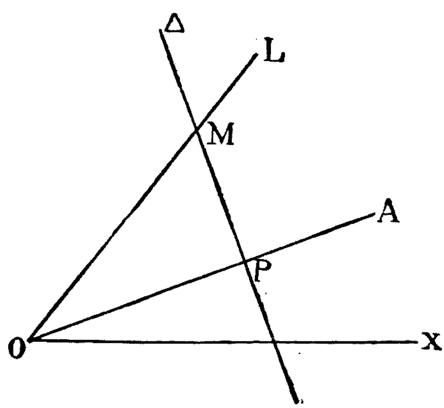


圖 65

設 ρ, θ 爲 Δ 上之任一點 M 之位標,則 $\theta=(Ox, OL)$. $\rho=\overline{OM}$, 其正向 OL 爲任意選定者. 欲 M 點在 Δ 上,則動徑 OM 正射於 OA 之代數影值應爲 p. 而此亦爲充足之條件. 因

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}OM &= \rho\cos(OA, OL) \\ &= \rho\cos[(OA, Ox)+(Ox, OL)] \\ &= \rho\cos(\theta-\alpha) \end{aligned}$$

(ρ 表代數値). 故有

$$\rho\cos(\theta-\alpha)=p.$$

此 Δ 之極位標之方程式也.

上式可書爲

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho}=\frac{\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha}{p},$$

其形爲

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho}=a\cos\theta+b\sin\theta.$$

反言之,凡方程式之形爲(2)者代表不經過極點之直線,蓋將(2)式與(1)式比較,即得

$$\frac{\cos\alpha}{p}=a, \qquad \frac{\sin\alpha}{p}=b.$$

故 $p=\dfrac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\alpha=\dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha=\dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},$

上列方程式之根號同爲正或同爲負,無論採用何號所得之直線實無異也.

如將(2)式書爲

$$a\rho\cos\theta+b\rho\sin\theta=1,$$

卽
$$ax+by=1.$$

逆定理之證,於此又可見之.

今進而求經過兩點之直線之方程式.設 (r,α) 及 (r_1,α_1) 爲兩點之位標.如 $\alpha_1-\alpha$ 爲 π 之倍數,則 $\sin(\alpha_1-\alpha)=0$. 故聯結此兩點之直線必過極點,其方程式爲 $\theta=\alpha$.

設 $\sin(\alpha_1-\alpha)\neq 0$, 則直線不過極點.其方程式之形爲(2), a 及 b 合於下二式

$$\frac{1}{r}=a\cos\alpha+b\sin\alpha$$

$$\frac{1}{r_1}=a\cos\alpha_1+b\sin\alpha_1$$

與(2)式消去 a, b, 得

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{1}{r} & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \frac{1}{r_1} & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \end{vmatrix}=0$$

(3)式爲所求直線之方程式.

107. 切線之方程式及法線之方程式.

今應用(3)式以定曲線之切線及法線之方程式.

令 $M(r,\alpha)$ 及 $M'(r+\Delta r,\alpha+\Delta\alpha)$ 爲曲線 $\rho=f(\theta)$ 之兩鄰點.則

過 M 及 M' 兩點之直線之方程式爲

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho} & \cos\theta & \sin\theta \\ \dfrac{1}{r} & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \dfrac{1}{r+\Delta r} & \cos(\alpha+\Delta\alpha) & \sin(\alpha+\Delta\alpha) \end{vmatrix}=0.$$

將行列式第三列之各元減去第二列之各元成第三列，乃以 $\Delta\alpha$ 徧除方程式之兩邊，即得

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho} & \cos\theta & \sin\theta \\ \dfrac{1}{r} & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \dfrac{\dfrac{1}{r-\Delta r}-\dfrac{1}{r}}{\Delta\alpha} & \dfrac{\cos(\alpha+\Delta\alpha)-\cos\alpha}{\Delta\alpha} & \dfrac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)-\sin\alpha}{\Delta\alpha} \end{vmatrix}=0.$$

當 M' 趨近於 M，則 $\Delta\alpha$ 趨近於零，而上式變爲

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\rho} & \cos\theta & \sin\theta \\ \dfrac{1}{r} & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \left(\dfrac{1}{r}\right)' & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}=0.$$

$\left(\dfrac{1}{r}\right)'$ 代表 $\theta=\alpha$ 時 $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$ 之值，依第一行展行列式，得

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\cos(\theta-\alpha)+\left(\frac{1}{r}\right)'\sin(\theta-\alpha),$$

此乃M點之切線之方程式也.

欲定M點之法線,知法線上之二點足矣,今$M(r,\alpha)$點一爲已知,試再定其他一點.

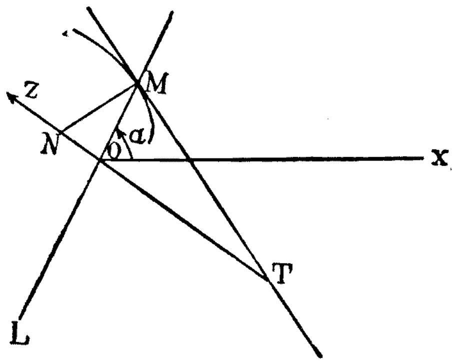


圖 66

過O點作直線NT垂直於OM,交M點之切線於T,交M點之法線於N.直線NT有二向,其一向之極角爲$\alpha+\frac{\pi}{2}$,其一向之極角爲$\alpha-\frac{\pi}{2}$.圖中表示$(Ox,Oz)=\alpha+\frac{\pi}{2}$, $r<0$.茲以Oz爲直線NT之正向,則代數值$\overline{OT}$名爲M點之極次切線.代數值$\overline{ON}$名爲M點之極次法線.又切線MT之方程式爲

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\cos(\theta-\alpha)+\left(\frac{1}{r}\right)'\sin(\theta-\alpha).$$

以$\alpha+\frac{\pi}{2}$易θ,得

$$\frac{1}{\rho}=\left(\frac{1}{r}\right)'=-\frac{f'(\alpha)}{[f(\alpha)]^2}.$$

即
$$\overline{OT}=\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)'}=-\frac{[f(\alpha)]^2}{f'(\alpha)}=-\frac{r^2}{r'}.$$

更察三角形 MNT, 則知 $\overline{ON}$ 之號與 $\overline{OT}$ 之號異.而

$$\overline{ON}\cdot\overline{OT}=-r^2,$$

故
$$\overline{ON}=-\frac{r^2}{\overline{OT}}=r'=f'(\alpha).$$

由是得法線上一點 N 之位標 $f'(\alpha)$, $\alpha+\frac{\pi}{2}$, 及 M 點之法線之方程式

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{1}{r} & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \frac{1}{r'} & \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix}=0.$$

依第一行展之,得

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}\cos(\theta-\alpha)+\frac{1}{r'}\sin(\theta-\alpha).$$

故欲得 M 點之法線,將 M 點之切線方程式中,以 $\frac{1}{r'}$ 易 $\left(\frac{1}{r}\right)'$ 可也.

108. 漸近線.

如曲線 $\rho=f(\theta)$ 有無窮遠之枝,則 θ 之值應能使 ρ 爲無窮.設 $\theta=\alpha$ 時, ρ 爲無窮.令 M 點之位標爲

$$\theta=(Ox,\ OL),\qquad \rho=\overline{OM}.\qquad (\text{正向 } OL),$$

則當θ趨近於α, M點畫無窮遠之枝.試定此枝有無漸近線.求漸近線之步驟與第69節同.

首求M離至無窮遠處時,直線OM之限.當θ趨近於α, OL之限爲直線之一向Ou, $(Ox, Ou)=\alpha$如上圖所示,故OM之限爲漸近方向Ou.

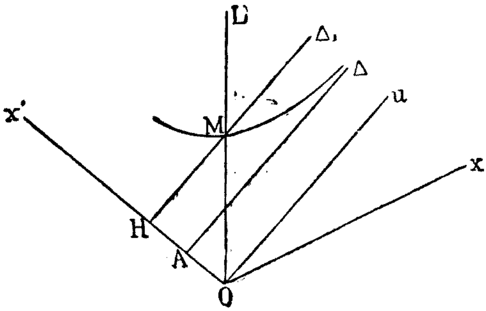


圖 67

次過M點作直線Δ_1平行於Ou,而求此直線之限.將Ou繞O點依Ox至Oy之向轉$+\frac{\pi}{2}$角,則Ou落在Ox'上, $(Ox, Ox')=\alpha+\frac{\pi}{2}$.令$H$爲$\Delta_1$與$Ox'$之交點.當$M$點離至無窮遠處, Δ_1之移動常與Ou平行.而H點畫直線Ox'欲得Δ_1之限,知動徑$\overline{OH}$之限足矣(Ox'爲此動徑之正向).如$\overline{OH}$爲無窮,則曲線無漸近線,而無窮遠之枝爲拋物枝.如$\overline{OH}$之限等於d,則H之限爲A點, $\overline{OA}=d$(正向Ox'),而直線Δ_1以Δ爲限, Δ乃過A點而平行於Ou之直線也.

令$\overline{OH}$表OM在Ox'軸之代數影值,則

$$\overline{OH}=\rho\cos(Ox', OL).$$

但 $$(Ox', OL)=(Ox', Ox)+(Ox, OL)=-\alpha-\frac{\pi}{2}+\theta,$$

故 $$\overline{OH}=\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right)=\rho\sin(\theta-\alpha).$$

其形爲 $\infty\cdot 0$ 本題遂化爲求未定形之限.欲得曲線對於漸近線之位置,求無窮小 $\rho\sin(\theta-\alpha)-d=\overline{OH}-\overline{OA}$ (正向 Ox') 之號可也.

〔備考〕. 令 $$\phi(\theta)=\frac{1}{f(\theta)}=\frac{1}{\rho},$$

則 $$\rho\sin(\theta-\alpha)=\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\phi(\theta)}.$$

當 $\theta=\alpha$, 上式之形爲 $\frac{0}{0}$.

而 $$\rho\sin(\theta-\alpha)=\frac{1}{\phi'(\alpha)},$$

即 $$\rho\sin(\theta-\alpha)=\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)'}=d=\text{極次切線}.$$

遂得漸近線之方程式

$$\frac{1}{\rho}=\left(\frac{1}{r}\right)'\sin(\theta-\alpha).$$

如於前節之切線 MT 之方程式中,以零易 $\frac{1}{r}$,則復得上式.故漸近線爲無窮遠點之切線而見於有限距離處者.

109. 曲線之繪畫法.

設 $\rho=f(\theta)$ 爲曲線之方程式,就中 $f(\theta)$ 祇含 θ 之三角線

(Trigonometric lines) 及 θ 之倍角之三角線. 所謂 θ 之三角線者, 即 θ 之正餘弦, 正餘切, 正餘割是也(尙有正餘矢).

如以 $2\pi+\theta$ 易 θ, 則 ρ 不變. 故可取幅員 2π 之任一間隔使 θ 增變於其內以作曲線足矣. 但在某種情形時, 間隔之幅員可續次減半. 茲詳論之於下:

其一. 若以 $\pi+\theta$ 易 θ, 則 $f(\theta)$ 之變易有三種情形可達到.

I. $f(\theta)$ 之絕對值不變而號變. 任與 θ 以相差爲 π 之兩值 α 及 $\alpha+\pi$, 則得 ρ 之兩對應值 r 及 $-r$. 然 (r, α) 及 $(-r, \alpha+\pi)$ 同表一點, 故將 θ 增變於幅員 π 之任一間隔內足矣.

II. $f(\theta)$ 不變. 任與 θ 以相差爲 π 之兩值, 則得對稱於極點之兩點. 故可將 θ 增變於幅員 π 之任一間隔內以作曲線之一段. 然後依對稱於極點以完成曲線之全部.

III. $f(\theta)$ 變易. 間隔之幅員能否減半, 須待下項之觀察而定.

其二. 若以 $-\theta$ 易 θ, 則得結果如下:

設 $f(\theta)$ 不變, 則曲線對稱於極軸. 設 $f(\theta)$ 之絕對值不變而號變, 則曲線對稱於 Oy 軸. 在此二情形中, 間隔之幅員均可減半. 惟新間隔不能任取. 此爲吾人所當注意者.

首設間隔之幅員爲 2π, 例如由 $-\pi$ 至 $+\pi$. 將間隔 $(-\pi, +\pi)$ 分爲 $(-\pi, 0)$, $(0, +\pi)$ 兩間隔. 試取間隔 $(-\pi, 0)$ 之一值 $-\alpha$, 則間隔 $(0, +\pi)$ 有一值 $+\alpha$ 與之對應. 今因對應於 $-\alpha$ 及 $+\alpha$ 兩值之點爲對稱於 Ox 或 Oy 軸. 故可使 θ 增變於其中一間隔以

作曲線之一段,然後依對稱於 Ox 或 Oy 軸以完成曲線之全部.此時間隔之幅員由 2π 化爲 π. 惟幅員 π 之間隔不能任取.蓋若將幅員 2π 之間隔分爲 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right)$ 兩間隔.而取其第一間隔.則當 θ 變號,第一間隔之點仍變爲第一間隔之點,不能概曲線之全部分.

次設計及他種情形,取幅員 π 之任一間隔已足.例如取間隔 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$, 則依上所論,可將間隔分爲 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(0, +\frac{\pi}{2}\right)$ 兩間隔,使 θ 增變於其中一間隔以作曲線之一段,然後依對稱於 Ox 或 Oy 軸以完成曲線之全部.

其三. 若以 $\pi-\theta$ 易 θ, 則得結果如下:

設 $f(\theta)$ 不變,則曲線對稱於 Oy 軸.設 $f(\theta)$ 之絕對值不變而號變,則曲線對稱於 Ox 軸.在此二情形中,間隔之幅員均可減半,惟新間隔仍不能任取.

首設間隔之幅員爲 2π 將間隔分爲等幅員之兩間隔,使與一間隔內之任一值 α 而他間隔有一值 $\pi-\alpha$ 與之對應.茲取間隔 $\left(\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}+\pi\right)$ 爲例而言之.此間隔應分爲 $\left(\frac{\pi}{2}-\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\pi\right)$ 兩間隔.第一間隔內之任一值 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\theta(0<\theta<\pi)$ 與第二間隔內之一值 $\pi-\alpha=\frac{\pi}{2}+\theta$ 對應,又對應於此二值之點爲對稱於 Ox 或 Oy 軸,故任取其中一間隔即足以概其他間隔.爲利便起見,取間隔 $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ 可也.

次設計及他種情形,取幅員 π 之間隔已足.茲取間隔 $(0, \pi)$

以爲例.此間隔應分爲 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 兩間隔.任取其一,即足以概其餘.

110. 例一. Pascal 之蝸狀線 (Limacon)

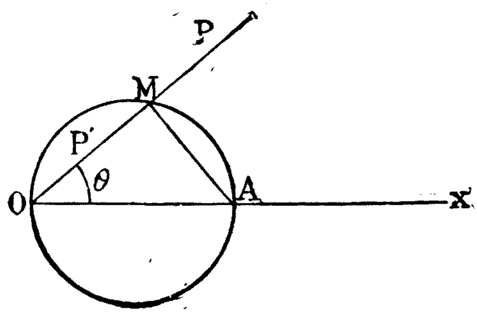


圖 68

已與一曲線 (c) 及一定點 O, 聯結 O 及 (c) 上之任一點 M, 在直線 OM 上取 P 與 P' 對稱於 M. 令 MP 與 MP' 等於既定之長. 則當 M 點畫 (c) 時, P 及 P' 所畫之曲線名爲 (c) 對於 O 點之延線 (Conchoid). 所謂 Pascal 之蝸狀線者, 一圓對於其上之一點 O 之延線也.

取 O 爲極點, 極軸過圓心. 令 R 爲圓之半徑, 則圓之方程式爲

$$\rho = 2R\cos\theta.$$

而蝸狀線之方程式爲

$$\rho = 2R\cos\theta \pm a \qquad (a = MP = MP'),$$

故蝸狀線爲 $\rho = 2R\cos\theta + a$ 及 $\rho = 2R\cos\theta - a$ 兩曲線所成. 然若以 $\theta + \pi$ 易 θ, $-\rho$ 易 ρ, 則兩曲線之方程式互換, 故表同一曲線. 茲就 $\rho = 2R\cos\theta + a$ 而言之, θ 增變間隔之幅員爲 2π, 但以

$-\theta$ 易 θ, 而 ρ 不變, 故曲線對稱於 Ox 軸, 即取間隔 $(0, \pi)$ 可也.

當 θ 由 0 增變至 π, ρ 由 $2R+a$ 遞減至 $-2R+a$, 欲 ρ 爲零, 應有

$$\cos\theta = -\frac{a}{2R}.$$

如 $a<2R$, 則上式有一根 α 在 $\frac{\pi}{2}$ 與 π 之間. 如 $a=2R$, 則上式之根爲 $\theta=\pi$, 如 $a>2R$, 則上式無解. 特分論於下:

I. $a<2R$.

ρ 之變值, 如下表所示:

θ	0	$\nearrow$	α	$\nearrow$	π
ρ	$2R+a$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-(2R-a)$

$P(\rho, \theta)$ 點之變跡, 如下圖所示:

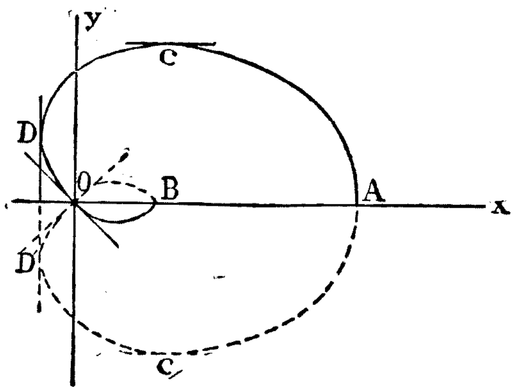


圖 69

當 θ 在間隔 $(0, \pi)$ 內增變, $P(\rho, \theta)$ 點之變跡以連續線表之

當 θ 在間隔 $(\pi, 2\pi)$ 內增變, $P(\rho, \theta)$ 點之變跡以間斷線表之.

又連續線與間斷線對稱於Ox軸.

試求圖中A點及B點之切線.令V爲半徑動徑與切線之交角,則

$$\tan V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{2R\cos\theta + a}{-2R\sin\theta}.$$

當$\theta=0$及$\theta=\pi$, $\sin\theta$爲零.故A點及B點之切線均垂直於Ox軸.

由曲線之形狀觀之.除A, B兩點外,倘有D, D'兩點其切線爲垂直於Ox軸者.欲定D點(或D'點),可令DH爲其切線.則除π之倍數不計外,當有

$$\begin{aligned}(Ox, DH) &= \frac{\pi}{2} \\ &= (Ox, OD) + (OD, DH) \\ &= \theta + V.\end{aligned}$$

故$V = \frac{\pi}{2} - \theta$,而$\tan V = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.計及$\tan V = \frac{\rho}{\rho'}$,得$\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta = 0$以定$\theta$之值.今因$\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta$爲$x = \rho\cos\theta$對於$\theta$之引數.故藉極大極小之理論,即可立得此結果.

將x對於θ之引數書爲零,則

$$(4R\cos\theta + a)\sin\theta = 0.$$

惟$\sin\theta = 0$之根乃對於A, B兩點之θ值.故將因子$\sin\theta$除去之,得$4R\cos\theta + a = 0$.其解爲$\cos\theta = +\frac{a}{4R}$.

同樣可求切線平行於Ox軸之點(如c, c').

極點爲曲線之重點,此點有不相同之二切線.

II. $a=2R$.

當 θ 由零增變至 π, ρ 由 $2R+a$ 遞減至零, O 點之切線與 Ox 軸相重, D 點之極角爲 $\frac{2\pi}{3}$, 此時曲線名爲心狀線 (Cardioid). 其形如下:

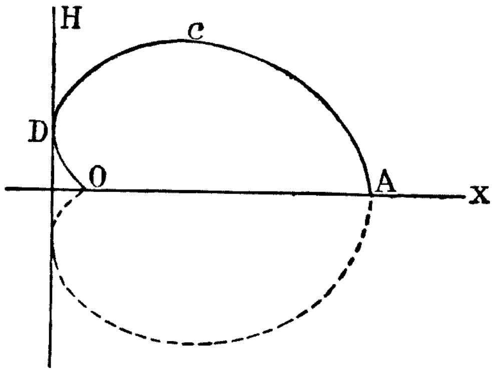


圖 70

III. $a>2R$.

此時 ρ 之值常爲正. 當 θ 由零增變至 π, ρ 由 $2R+a$ 遞減至 $a-2R$. 如 $a<4R$, 則 D 點常存在而曲線有二反曲點. 如 $a>4R$, 則反曲點消失.

在此二情形中, 極點爲曲線之孤立點 (Isolated point) 可由曲線之極位標方程式化爲 Descartes 位標方程式而知之. 如以 $\frac{x}{\rho}$ 易 $\cos\theta$, 則曲線之方程式變爲

$$\rho^2-2Rx=a\rho,$$

計及 $\rho^2=x^2+y^2$, 得

$$(x^2+y^2-2Rx)^2=a^2(x^2+y^2).$$

即
$$(x^2+y^2)^2+4Rx(x^2+y^2)+x^2(4R^2-a)-a^2y^2=0.$$

故原點(即極點)之切線之方程式爲

$$x^2(4R^2-a^2)-a^2y^2=0.$$

曲線之形狀,如下圖所示:

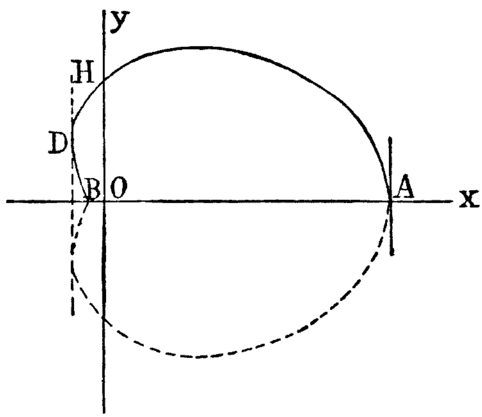


圖 71

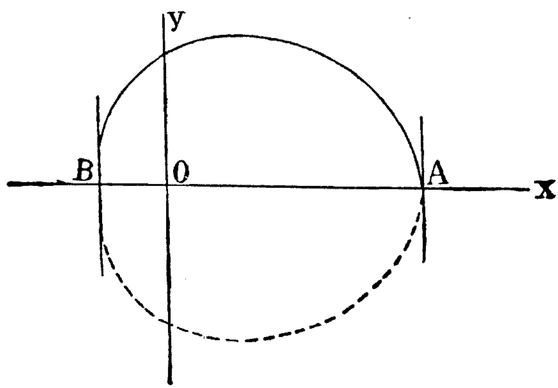


圖 72

蝸狀線上任一點之切線不難畫出,蓋由圓或蝸狀線之方程式求 ρ 對於 θ 之引數.則知無論由何式求出,均有相同之結果.故在此二曲線上之點,如 θ 之值爲相同者,則極次法線之值亦相同.換言之,圓上之 M 點之法線與蝸線之 P 點及 P' 點之法線同交於一點 N, 在過 O 而垂直於 OM 之直線上.

今圓上 M 點之法線爲圓之直徑 MN, 故蝸狀線之 P 點及 P' 點之法線爲 PN 及 $P'N$.

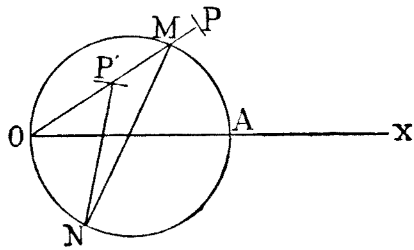


圖 73

依同理,如知任一曲線 (c) 之切線,則可作 (c) 之延線之法線.

又蝸狀線爲一圓 (c') 對於 O 點之足線 (Pedal curve). (c') 之心爲 A, 半徑等於 MP. 足線之定義如下:

由一定點 O 作曲線 (c) 之切線之垂線,則垂線足之軌跡名爲 (c) 對於 O 點之足線.

欲明此理,可過 P 點(或 P' 點)作 OP 之垂線,則此垂線與 (c') 相切.

111. 例二. 作曲線 $\rho=\dfrac{\tan\theta}{1-2\sin\theta}$, 當 θ 增變於幅員 2π 之任一間隔內, $M(\rho,\theta)$ 點畫曲線之全部.但如以 θ 易 $\pi-\theta$, 則 ρ 之絕對值不變而號變,故曲線對稱於 Ox 軸.應將 θ 增變於間

隔$\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$內以作曲線之一段，然後依對稱於$Ox$軸以完成之(見第109節).

若θ等於$-\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{2}$，函數ρ爲間斷.求ρ之引數，

得
$$\rho' = \frac{1-2\sin^3\theta}{(1-2\sin\theta)^2\cos^2\theta}.$$

令α爲在0與$\frac{\pi}{2}$內之角,其正弦爲$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$者.當θ增變經過α，引數之號由正而變負.茲將ρ之變値表列如次:

θ	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$			α		$+\frac{\pi}{2}$
ρ'		$+$		$+$			$+$	0	$-$	
ρ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$

曲線之形狀，如下圖所示:

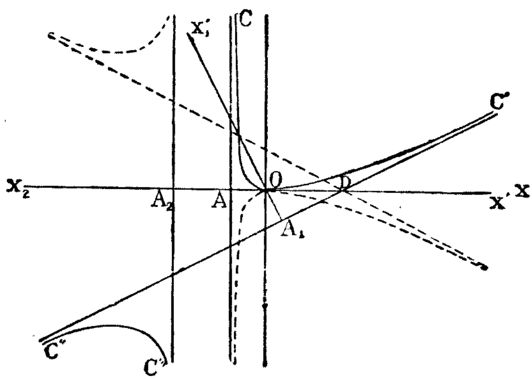


圖 74

當θ在間隔$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$增變，$(\rho, \theta)$點之變跡以連續線表之.

當θ在間隔$\left(+\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$增變,$(\rho, \theta)$點之變跡以間斷線表之.又連續線與間斷線對稱於$Ox$軸.

今進而求曲線之漸近線.

I. 對應於$\theta=-\frac{\pi}{2}$者.

依照第108節之符號,則

$$\overline{OH}=\rho \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\rho \cos\theta=\frac{\sin\theta}{1-2\sin\theta}.$$

當θ趨近於$-\frac{\pi}{2}$,$\overline{OH}$之限為$-\frac{1}{3}$.但

$$(Ox,\ Ox')=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0,$$

故Ox'與Ox軸相同.由Ox軸上取一點$A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$作直線垂直於$Ox$,即為所求之漸近線.

欲求曲線對於漸近線之位置,可定$\overline{OH}-\left(-\frac{1}{3}\right)$之號.

$$\overline{OH}+\frac{1}{3}=\frac{\sin\theta}{1-2\sin\theta}+\frac{1}{3}=\frac{1+\sin\theta}{3(1-3\sin\theta)};$$

當θ趨近於$-\frac{\pi}{2}$,上式右邊之號為正.故曲線之C段在其漸近線之右,如上圖所示.

II. 對應於$\theta=\frac{\pi}{6}$者.

下文以A_1, H_1, x_1'依次代表第108節之A, H, x'.

$$(Ox,\ Ox_1')=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2},$$

$$\overline{OH}_1=\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin\theta}=\frac{\tan\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)}{2(\sin\frac{\pi}{6}-\sin\theta)}$$

$$=\frac{2\tan\theta\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\theta}{2}\right)}=-\frac{\tan\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

當 $\theta=\frac{\pi}{6}$, $\overline{OH}_1$ 之限爲 $-\dfrac{\tan\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{\pi}{6}}=-\dfrac{1}{3}=\overline{OA}_1$ (正向 Ox_1'), 故由

Ox_1' 軸上之 A_1 點作直線垂直於 Ox_1', 卽爲所求之漸近線.

欲求曲線對於漸近線之位置,可定 $\overline{OH}_1-\left(-\frac{1}{3}\right)$ 之號.

$$\overline{OH}_1+\frac{1}{3}=-\frac{\tan\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{3\tan\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{12}\right)+2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}{6\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}.$$

當 θ 趨近於 $\frac{\pi}{6}$, 上式右邊之分母之號爲正, 故定分子之號足矣. 令 $\theta=\frac{\pi}{6}+\omega$, 依 Taylor 公式以展分子, 得

$$-3\tan\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)\cos\frac{\omega}{2}+2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\omega}{2}\right)$$

$$=-3\left(\tan\frac{\pi}{6}+\omega\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6}}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{\omega^2}{8}+\cdots\cdots\right)$$

$$+2\left(\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\omega}{2}\sin\frac{\pi}{6}+\cdots\cdots\right)$$

$$=-\omega\left(\frac{3}{\cos^2\frac{\pi}{6}}+\sin\frac{\pi}{6}\right)+\lambda\theta^2,$$

λ 爲 ω 之函數，當 ω 趨近於零時，其限爲零者．故當 θ 趨近於 $\frac{\pi}{6}$，ω 爲無窮小，而 $\overline{OH}_1+\frac{1}{3}$ 之號與 ω 之號異．若 $\theta<\frac{\pi}{6}$，則 $\overline{OH}_1+\frac{1}{3}>0$．而曲線之 C' 段在其漸近線之上．若 $\theta>\frac{\pi}{6}$，則 $\overline{OH}_1+\frac{1}{3}<0$．而曲線之 C'' 段在其漸近線之下．

III．對應於 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 者．

下文以 A_2, H_2, x_2' 依次代表第 108 節之 A, H, x'．

$$(Ox,\ Ox_2')=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

$$\overline{OH}_2=\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sin\theta}{1-2\sin\theta}.$$

當 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\overline{OH}_2$ 之限爲 $1=\overline{OA}_2$（正向 Ox_2'）．故由 Ox_2' 軸上之 A_2 點作直線垂直於 Ox_2'，卽爲所求之漸近線．

又 $$\overline{OH}_2-1=-\frac{\sin\theta}{1-2\sin\theta}-1=-\frac{1-\sin\theta}{1-2\sin\theta}.$$

可見 θ 趨近於 $\frac{\pi}{2}$ 時，$\overline{OH}_2-1$ 之號爲正．而曲線之 C''' 段在其漸近線之左．

112. 設曲線之方程式爲 $\rho=f(\theta)$，$f(\theta)$ 祇表三角線之函數，其中所含之角爲 θ 之倍角或分角不等．則可選定一正數 k

俾 θ 變爲 $\theta+2k\pi$ 時, $f(\theta)$ 之值不變. 茲試明之於下.

令 $\frac{a}{b}\theta, \frac{a'}{b'}\theta,\cdots\cdots$ 爲 $f(\theta)$ 所含之角. 就中 $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'},\cdots\cdots$ 表不可約之分數. 若角 $\frac{a}{b}(\theta+2k\pi)$ 之三角線等於角 $\frac{a}{b}\theta$ 之三角線. 角 $\frac{a'}{b'}(\theta+2k\pi)$ 之三角線等於 $\frac{a'}{b'}\theta$ 之三角線$\cdots\cdots$, 則 $\frac{2ak\pi}{b'}, \frac{2a'k\pi}{b'},\cdots$ 各爲 2π 之倍數. 換言之, $\frac{ak}{b}, \frac{a'k}{b'},\cdots\cdots$ 皆爲整數也. 此條件又爲充足. 但 a 與 b 爲不可約, 故 b 應能整除 k. 如令 k 爲 $b, b',\cdots\cdots$ 各數之最小公倍數, 則當 θ 變爲 $\theta+2k\pi$, $f(\theta)$ 之值不變. 故欲究 $f(\theta)$ 之變值, 使 θ 增變於幅員 $2k\pi$ 之任一間隔內足矣. 在特別情形時, 間隔之幅員可以減縮. 特設數例以明之.

I. 設曲線之方程式爲 $\rho=\cos\frac{\theta}{3}$. 依上所論, 可取幅員 6π 之任一間隔. 但以 $3\pi+\theta$ 易 θ, ρ 之絕對值不變而號變, 且 (r, ω), $(-r, \omega+\pi)$ 同表一點之位標, 故取幅員 3π 之任一間隔已足. 若以 $-\theta$ 易 θ, ρ 之值不變, 故曲線對稱於 Ox 軸, 取間隔 $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ 可也.

II. 設曲線之方程式爲 $\rho=\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{3}}{\sin\frac{\theta}{2}}$. 依上所論, 可取幅員 12π 之任一間隔. 但以 $6\pi+\theta$ 易 θ, ρ 之絕對值不變而號變, 故曲線對稱於原點, 又以 $-\theta$ 易 θ, 得同樣結果, 故曲線對稱於 Oy 軸, 取間隔 $(0, 3\pi)$ 可也.

當 θ 由 0 增變至 3π, $M(\rho,\theta)$ 點畫曲線之一部份 C. 作 C' 令與 C 對稱於 Oy 軸. 又作 C'' 令與 C, C' 對稱於極點, 卽得曲線之全部.

III. 設曲線之方程式爲 $\rho=\dfrac{\cos^2\dfrac{\theta}{3}}{1-3\sin\dfrac{\theta}{2}}$. 依上所論, 可取幅員 12π 之任一間隔. 但以 $6\pi-\theta$ 易 θ, ρ 之值不變, 故曲線對稱於 Ox 軸, 而間隔之幅員化爲 6π. 乃將幅員 12π 之間隔分爲幅員相等之兩間隔. 使其中一間隔內之任一值 α. 對應於其他間隔內之一值 $6\pi-\alpha$. 因 $(-3\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 9\pi)$ 兩間隔合於所求之條件, 始取其中之一間隔 $(-3\pi, 3\pi)$ 可也.

〔備考〕. 設 $f(\theta)$ 不祇爲三角線之函數, 則在普通情形時, 須將 θ 由 $-\infty$ 增變至 $+\infty$. 若 θ 變爲 $-\theta$ 時, ρ 之值不變, 則曲線對稱於 Ox 軸, 祇將 θ 由 0 增變至 $+\infty$ 足矣.

習題十一

1. 繪畫曲線

(a) $\rho=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta-1}$.　　(b) $\rho=k\dfrac{b^2\cos^2\theta-a^2\sin^2\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}$.

2. 繪畫曲線

(a) $\rho=\dfrac{\tan\theta}{1+2\cos 2\theta}$.　　(b) $\rho=\sin\dfrac{2\theta}{3}+2\cos\dfrac{\theta}{3}$.

3. 令平面 $z=0, 0{\cdot}2, 0{\cdot}4, 0{\cdot}6, 0{\cdot}8, 1, y=0, x=0$ 割曲面

$$(x^2+y^2+z^2)^2-6x^2-2y^2+2z^2+1=0,$$

試繪其交線.

第十二章

平面上之直線位標

113. 無論位標軸 Oxy 爲正交或斜交,方程式

(1) $$ux+vy+w=0$$

常表一直線 D, 其係數 u, v, w 名曰 D 之齊次位標.設 D 之方程式爲已知,則式中係數之比値立定.如 x 軸之齊次位標爲 $(0, v, 0)$, y 軸之齊次位標爲 $(u, 0, 0)$, 無窮遠處直線之齊次位標爲 $(0, 0, w)$, 卽其例也.直線之平行於 Ox 軸者,以 $u=0$ 爲其特徵.平行於 Oy 軸者,以 $v=0$ 爲其特徵.至於迷向直線,則以 $u+vi=0$ 或 $u-vi=0$ 爲其必須與充足之條件(設位標軸爲正交).

上述之定義,亦可用於三平面位標(見第五章).今採此位標制,而設直線 D 之方程式爲

(2) $$ux+vy+wz=0,$$

卽 u, v, w 名爲 D 之三平直位標.參考三角形各邊之三平直位標爲 $(u, 0, 0)$, $(0, v, 0)$, $(0, 0, w)$. 直線之過頂點 $A(1, 0, 0)$ 者,以 $u=0$ 爲其特徵.餘類推.

114. 曲線之切線方程式 (Tangential equation of a curve).

凡含 u, v, w 之方程式必爲齊次.蓋直線之齊次位標 u, v, w

可換爲 $\lambda u, \lambda v, \lambda w$ (λ 表異於零之任意數). 故若 $u, v\ w$ 合於某方程式,則 $\lambda u, \lambda v, \lambda w$ 亦合之也.設前節(1)式之位標 u, v, w 合於

(3) $$f(n, v, w)=0.$$

因(1),(3)兩式皆爲 u, v, w 之齊次關係,故可視 w 爲常數,於是(1)式代表含一參數之直線族.此直線族有一包線(Envelope),以(1)爲其切線者.欲得包線之方程式,知(3)式足矣.(3)式者,直線族之齊次位標之關係也.故(3)式名爲曲線之切線方程式.試取以前各章曲線之方程式而比較之,曲點位標 x, y, z 與直線位標 u, v, w 之別自彰矣.以前各章曲線之方程式名爲曲線之點方程式(Point equation of a curve).茲分究兩個問題於下:

I. 由曲線之點方程式以求其切線方程式.

II. 由曲線之切線方程式以求其點方程式.

115. 設曲線之點方程式爲

(1) $$f(X, Y, Z)=0,$$

$f(X, Y, Z)$ 表 m 次之齊次方程式.任一直線之齊次方程式爲

(2) $$uX+vY+wZ=0.$$

今試定 u, v, w 之關係,俾直線(2)爲曲線(1)之切線.

令 $M(x, y, z)$ 爲曲線上之通常點,其切線之方程式爲

(3) $$Xf_x'+Yf_y'+Zf_z'=0.$$

欲(2),(3)兩式表同一之直線,則有

(4) $$f_x'=\lambda u, f_y'=\lambda v, f_z'=\lambda w, f(x, y, z)=0,$$

就中λ爲異於零之數.惟依 Euler 之公式(見第80節)得

$$mf(x,y,z)\equiv xf_x'+yf_y'+zf_z'\equiv\lambda(ux+vy+wz).$$

故(4)之最後一式,可易爲 $ux+vy+wz=0$. 而(4)之相當組爲

$$(5)\qquad \begin{cases} f_x'-\lambda u=0\\ f_y'-\lambda v=0\\ f_z'-\lambda w=0\\ ux+vy+wz=0\end{cases}\qquad 或\begin{cases}\dfrac{f_x'}{u}=\dfrac{f_y'}{v}=\dfrac{f_z'}{w}\\ ux+vy+wz=0\end{cases}$$

由(5)消去 x, y, z, λ. 所得之結式(Resultant),乃曲線(1)之切線方程式也.又此結式爲 u, v, w 之齊次方程式(見第114節).

例. 已與錐線其齊次方程式爲

$$f(X,Y,Z)=AX^2+2BXY+CY^2+2DXZ+2EYZ+FZ^2=0.$$

試求其切線方程式.

據(5)式得

$$(5')\qquad \begin{cases} AX+BY+DZ-\lambda u=0\\ BX+CY+EZ-\lambda v=0\\ DX+EY+FZ-\lambda w=0\\ ux+vy+wz=0.\end{cases}$$

設行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}\neq 0$(卽設錐線不分解爲兩直線.錐線分解之條件見下卷). 由(5′)之前三式解出 x, y, z 之値,並以之代入(5′)之第四式,則得含 u, v, w 之二次齊次式

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & w \\ u & v & w & o \end{vmatrix}=0.$$

即所求之切線方程式也.今將其形變換如下.

於 Δ 之展式中,令 $a, b, c, \cdots\cdots f$ 依次代表 $A, B, C, \cdots\cdots F$ 之係數.乃以 a, b, d 依次乘(5')之第一第二第三式之兩邊而加之,即知

$$\Delta x=\lambda(au+bv+dw).$$

依同理,

$$\Delta y=\lambda(bu+cv+ew),$$

$$\Delta z=\lambda(du+ev+fw).$$

將 x, y, z 之值代入(5')之第四式,遂得

$$F(u, v, w)\equiv au^2+2buv+cv^2+2buw+2evw+fw^2=0.$$

故欲求錐線之切線方程式,取 Δ 展式之 $a, b, c, \cdots\cdots f$ 依次易點方程式之係數 $A, B, C\cdots\cdots F$. 更將 x, y, z 依次換爲 u, v, w 可也.

[備考]. 由錐線之切線方程式觀之, x, y, z 與 F_u', F_v', F_w' 成比例.

116. 方程式之切線方程式爲

(1) $$f(u, w, w)=0,$$

$f(u, v, w)$ 表 m 次之齊次式,直線之齊次方程式爲

(2) $$ux+vy+wz=0.$$

其係數 v, v, w 合於(1)式之關係者.今試定(2)之包線.

如視 w 為常數(見第 114 節),則直線(2)含有兩參數 u, v 而受(1)式之限制.故由(1),(2)兩式及

$$(3)\qquad \frac{f_u'}{x}=\frac{f_v'}{y}$$

消去 u, v, w 所得之結式,乃包線之點方程式也.

依下列之手續,則計算化簡,且得對應之形式.

因(3)式之比值等於 $\frac{uf_u'+vf_v'}{ux+vy}$,而由 Euler 公式及(2)式得

$$uf_u'+vf_v'+wf_w'\equiv mf(u, v, w)=0.$$

故
$$\frac{uf_u'+vf_v'}{ux+vy}=\frac{-wf_w'}{-w}=f_w'.$$

可見(1),(2),(3)三式產生

$$(4)\qquad \frac{f_u'}{x}=\frac{f_v'}{y}=\frac{f_w'}{1}.$$

反言之,設 f_u', f_v', f_w' 不全為零[即設直線(1)非多重切線見第 119 節之備考].如(4)式成立,則(1),(2)兩式中之任一式必產生其他一式.蓋(4)之最後比率之分母為 1,而 f_u', f_v', f_w' 不全為零,故(4)之公比值

$$\frac{uf_u'+vf_v'+wf_w'}{ux+vy+w}=\frac{mf(u, v, w)}{ux+vy+w}$$

不為零,亦不為無窮.若 $f(u, v, w)$, $ux+vy+w$ 二者中之一為零,其他必為零也.由此觀之,欲得(1)之點方程式,由(4)與(1)或由(4)與(2)消去 u, v, w 可也.後者所得之結式,較前者為簡.如

引用齊次位標(或三平直位標) x, y, z, 則(4)與(1)可書爲

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{f_u'}{x}=\dfrac{f_v'}{y}=\dfrac{f_w'}{z} \\ ux+vy+wz=0. \end{cases}$$

由(5)消去 u, v, w. 所得之結式,乃(1)之點方程式也.

取(5)中之前諸式而察之,當見直線(2)與其包線之接觸點之位標爲 (f_u', f_v', f_w'). 若求曲線 $\phi(x, y, z)=0$ 與(2)之包線之交點,可解方程組

$$(6)\qquad \begin{cases} f(u, v, w)=0 \\ \phi(f_u', f_v', f_w')=0. \end{cases}$$

合於(6)之值 u_i, v_i, w_i 卽爲過所求交點之直線(1)之位標. 故所求交點之位標爲 $(f'_{ui}, f'_{vi}, f'_{wi})$.

117. 代數曲線之類別.

由前兩節之(5)式觀之,代數曲線之切線方程式必爲代數方程式. 反言之,如曲線之切線方程式 $f(u, v, w)=0$ 爲代數方程式,則 $f(u, v, w)=0$ 表代數曲線.所謂代數曲線之類(Class)之次第者,卽其切線方程式之次數,亦卽由平面上任一點能作曲線之切線之數也.

118. 一點之切線方程式.

第一類曲線之切線方程式之形爲

$$(P)\qquad Au+Bv+Cw=0.$$

此式表經過一點 $P(A,B,C)$ 之直線. 故其包線化爲 P 點. 遂得定

理如下:

定理——凡一次之切線方程式代表一點.即第一類曲線爲一點.反言之,凡經過P點之直線之位標合於(P)式.故一點之切線方程式爲一次.

玆將平面各重要點之切線方程式臚列於下.以便引用.

平面上之點	切線方程式
原點	$w=0$
在方向$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$上之無窮遠點	$au+bv=0$
在Ox軸上之無窮遠點	$u=0$
在Oy軸上之無窮遠點	$v=0$
環點(位標軸設爲正交)	$u\pm iv=0$ 或 $u^2+v^2=0$

119. 定理.

I. 如兩曲線之類爲m與p,則其公切線之數爲mp.

蓋以其切線方程式m次與p次,故有mp組之公解也.

如$p=1$.則復得由一點能引切線之數(見第117節).

II. 若f_u',f_v',f_w'三偏引數不同時爲零,則第m類曲線$f(u,v,w)=0$之次數爲$m(m-1)$.

蓋以$Af_u'+Bf_v'+Cf_w'=0$與$f(u,v,w)=0$二式有$m(m-1)$組之公解,故直線$Ax+By+Cz=0$與曲線有$m(m-1)$交點也(見第116節).

[備考]. 如u,v,w之值能使$f_u'=f_v'=f_w'=0$,則直線(u,v,w)名

爲曲線之多重切線(Multiple tangent). 可依多重點(見第84節)及相對之原則(見下節)討論之.因 u, v, w 之値使直線與曲線之交點之位標 (f_u', f_v', f_w') 全爲零,故此組之解應略去,而交點之數少於 $m(m-1)$.

120. 對偶之原則(Principle of duality).

取第115,第116兩節而比較之,卽知求點方程式與求切線方程式之手續無異.若將 x, y, z 與 u, v, w 依次互換,則此兩節之(5)式對調,足見點位標與切線位標相關之密切.

又直線之點方程式爲一次,而點之切線方程式亦爲一次.今取一直線 $D(u, v, w)$ 與一點 $M(x, y, z)$ 對應,使合於 $x=u, y=v, z=w$ 之關係,則當 M 畫直線 $D_0(u_0, v_0, w_0)$, 卽有 $u_0x+v_0y+w_0z=0$. 計及 D 與 M 對應之關係,得 $x_0u+y_0v+z_0w=0$. 故 D 繞一定點 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 而轉, M_0 乃對應於直線 D_0 之點也.

若取同在 D_0 上之四點 M_1, M_2, M_3, M_4, 則其位標爲 $(x+\lambda_i x', y+\lambda_i y', z+\lambda_i z')$, $(\lambda=1, 2, 3, 4)$, 而其對應直線 D_1, D_2, D_3, D_4 之位標爲 $(u+\lambda_i u', v+\lambda_i v', w+\lambda_i w')$, 故

$$(M_1\,M_2\,M_3\,M_4)=(D_1\,D_2\,D_3\,D_4)=(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4).$$

設 M 畫曲線 (C), 則 D 包有曲線 (E), 且 M 之切線爲 D 與 (E) 之接觸點之對應直線.蓋令 M' 爲在 (C) 上相鄰於 M 之點,其對應之直線爲 (E) 之切線 D', 又令 D 與 D' 之交點爲 P. 則依上所論,直線 MM' 對應於 P. 當 M' 趨近於 M 時, MM' 將成 (C) 之切線,而 D' 趨近於 D, 故 P 終爲 D 與 (E) 之接觸點也.玆以計

算題之.設(C)之點方程式爲

$$f(x, y, z)=0,$$

則(E)之切線方程式爲

$$f(u, v, w)=0.$$

(C)上M點之切線之位標爲(f_x', f_y', f_z'),而D與(E)之接觸點之位標爲(f_u', f_v', f_w')(見第116節).換言之,M之切線對應於D與(E)之接觸點也.

由此觀之,如$\phi(u, v, w)=0$爲(C)之切線方程式,則$\phi(x, y, z)=0$,當爲(E)之點方程式.如此二曲線爲代數曲線,則其中一曲線之次,必爲其他曲線之類.設關於點位標(x, y, z)之定理爲已知,則將u, v, w依次易x, y, z,卽可譯成關於切線位標(u, v, w)之定理,其逆理無不確.此所謂對偶之原則也.

幾何學之成因,有以點爲元素,有以切線爲元素,前者曰點幾何學,後者曰切線幾何學.知其一卽知其二,得相依以闡發,對偶原則之用妙矣.

題習十二

1. 設三角形之三項點畫相會於一點之三直線,而三角形之兩邊各過一定點,求證此三角形之第三邊亦過一定點,而與前兩定點同在一直線上.

2. 設有A, A', A''三點在一直線上,又有B, B', B''三點在他一直線上.茲以C表$A'B''$及$A''B'$之交點,C'表$A''B$及AB''之交點,C''表AB',及$A'B$之交點.試證C, C', C''同在一直線上.

3. 已知曲線之切線方程式爲

(a)　$v^2(u+w)-w^3=0$,

(b)　$u^3+vw(u+v)=0$,

(c)　$u^3+v(wv+w^2)=0$,

試求其點方程式.

4. 設有曲線(C), 其切線方程爲

$$u^3+v^3+uw^2=0.$$

(a)　求其點方程式.

(b)　任意直線(D)與(C)相交於六點.在此六交點之切線同切於二次曲線.如二次曲線爲圓,求D之曲線.

(c)　求(C)之逆點.

(d)　求(C)之漸近線.

解析幾何

下卷

何衍璿著

解析幾何

下卷

第一編　二次曲線

第一章

二次通式表兩直線之條件

1. 判別式及輔行列式(Discriminant and adjoint determinant) 含 x 及 y 二變數之最普通二次方程式爲

$$(1)\qquad f(x, y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

此式代表兩直線之充分及必須之條件爲$f(x, y)$可分解爲兩個一次式

$$(2)\qquad f(x, y)\equiv(ux+vy+w)(u'x+v'y+w').$$

令方程式(1)爲齊次式,則得

$$F(x, y, z)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0;$$

此時(2)式變爲

$$F(x, y, z)\equiv(ux+vy+wz)(u'x+v'y+w'z).$$

取 $F(x, y, z)$ 函數之第一級偏引數

$$\frac{1}{2}F'x=Ax+By+Dz,$$

$$\frac{1}{2}F'y = Bx + Cy + Ez,$$

$$\frac{1}{2}F'z = Dx + Ey + Fz;$$

此三式之係數所成之行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

謂之方式 $F(x, y, z)$ 或多項式 $f(x, y)$ 之判別式.

在 Δ 之展開式中,用小字母 a, b, c, d, e, f 表相應大字母之係數,則

$$a = CF - E^2, \qquad b = ED - BF, \qquad c = AF - D^2,$$

$$d = BE - CD, \qquad e = BD - AE, \qquad f = AC - B^2.$$

就絕對值言之,此等值爲判別式 Δ 之第一級子行列式; a, c, f 謂之<u>主子行列式</u> (Principal minors).

行列式

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

謂之 Δ 之輔行列式. Δ 及 Δ' 兩行列式之元,有下之關係:

$$(3) \qquad \begin{cases} cf - e^2 = A\Delta, & ed - bf = B\Delta, & af - d^2 = C\Delta, \\ be - cd = D\Delta, & bd - ae = E\Delta, & ac - b^2 = F\Delta; \end{cases}$$

此等關係可用計算法直接證明之. 設 $\Delta = 0$, 則由公式(3)而

知 Δ 之子行列式均爲零;就中

$$cf-e^2=0, \qquad af-d^2=0, \qquad ac-b^2=0.$$

故如 Δ 及其主子行列式 a, c, f 均爲零, 則 b, d, e 亦各爲零. 反之,如 Δ 爲零,而 Δ 之子行列式非均爲零,則必有一主子行列式異於零.

2. 二次式之偏引數方程式 此等方程式在前節已見

$$\frac{1}{2}F'_x \equiv Ax+By+Dz=0,$$

$$\frac{1}{2}F'_y \equiv Bx+Cy+Ez=0,$$

$$\frac{1}{2}F'_z \equiv Dx+Ey+Fz=0.$$

欲解此方程組,可分爲下列三種情形討論之:

1° $\Delta \neq 0$, 方程組祇有一解答, $x=y=z=0$.

2° $\Delta=0$, 至少有一第一級子行列式異於零,例如

$$f=AC-B^2 \neq 0.$$

在此情形,第一第二兩方程式之解答,可合第三方程式.假如已由前兩方程式得

$$x=mz, \qquad y=nz,$$

則

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{1}.$$

設 α, β, γ 爲方程組之解答,則 $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$ 亦爲方程組之解答. 但此兩組解答, 實表平面上之同一點 (齊次坐標). 故除 $x=y=z=0$ 之解答外,視方程組僅許有一組之解答可也.

3° Δ 之第一級子行列式均爲零.

在此情形,三方程式合而爲一.

3. 方程式 $F(x, y, z)=0$ 表相異兩直線之條件 條件爲 $F(x, y, z)$ 之判別式爲零,至少有一第一級子行列式異於零.

1° 條件爲必須的.——設

$$F(x, y, z)\equiv(ux+vy+wz)(u'x+v'y+w'z)\equiv PP',$$

則

$$F'_x\equiv u'P+uP',$$

$$F'_y\equiv v'P+vP',$$

$$F'_z\equiv w'P+wP'.$$

如 (α, β, γ) 爲 $P=0$ 及 $P'=0$ 之公共解答,則 (α, β, γ) 亦爲 $F'_x=0$, $F'_y=0$, $F'_z=0$ 之公共解答. 但 (α, β, γ) 爲 $P=0$ 與 $P'=0$ 兩直線之交點,故 (α, β, γ) 非均爲零.方程組 $F'_x=0$, $F'_y=0$, $F'_z=0$ 既有非均爲零之公共解答 (α, β, γ), 故 $\Delta=0$ (參觀前節).

$P=0$ 及 $P'=0$ 既爲相異之兩直線,故三行列式

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u & w \\ u' & w' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}$$

中至少有一行列式異於零,例如 $\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \neq 0$. 在此情形,除 $P=0$, $P'=0$ 之公共解答外, $F'_x=0$, $F'_y=0$ 無其他解答.但 $P=0$, $P'=0$ 除 $x=y=z=0$ 外祇有一組之解答(題設), 故 $F'_x=0$, $F'_y=0$ 祇有一組之解答,即言 Δ 之子行列式非均爲零(因 Δ 之子行列式如均爲零, 則 $F'_x=0$, $F'_y=0$, $F'_z=0$ 有無限數的解答〔參觀前節 3°〕).

2° 條件爲充分的.——設 $\Delta=0$, 第一級子行列式之一異於零.由第一節而知主子行列式之一異於零,例如 $f=AC-B^2\neq 0$. $F(x, y, z)$ 爲齊次式,其次數爲二,易證恆等式

$$F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)\equiv$$

$$F(x, y, z)+xF'_{\alpha}+yF'_{\beta}+zF'_{\gamma}+F(\alpha, \beta, \gamma).$$

如 α, β, γ 合下列方程組

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}F'_{\alpha}\equiv A\alpha+B\beta+D\gamma=0, \\ \frac{1}{2}F'_{\beta}\equiv B\alpha+C\beta+E\gamma=0, \\ \frac{1}{2}F'_{\gamma}\equiv D\alpha+E\beta+F\gamma=0, \end{cases}$$

則由 Euler 公式 (1)

$$2F(\alpha, \beta, \gamma)\equiv\alpha F'_{\alpha}+\beta F'_{\beta}+\gamma F'_{\gamma}=0,$$

而恆等式變爲

$$(5)\qquad F(x, y, z)\equiv F(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma).$$

題設 $\Delta=0$, $AC-B^2\neq 0$, 故方程組 (4) 之解答爲 $\alpha=m\gamma$, $\beta=n\gamma$,

---

(1) Euler 公式之證明——因 $F(\alpha, \beta, \gamma)$ 爲齊次式,故

$$F(t\alpha, t\beta, t\gamma)\equiv t^2F(\alpha, \beta, \gamma).$$

取其對於 t 之引數

$$\alpha F'_{\alpha}(t\alpha, t\beta, t\gamma)+\beta F'_{\beta}(t\alpha, t\beta, t\gamma)+\gamma F'_{\gamma}(t\alpha, t\beta, t\gamma)\equiv 2tF(\alpha, \beta, \gamma).$$

令 $t=1$, 則得 Euler 公式

$$\alpha F'_{\alpha}+\beta F'_{\beta}+\gamma F'_{\gamma}\equiv 2F(\alpha, \beta, \gamma).$$

γ 可取任意值.以此等值代入恆等式(5)

$$F(x, y, z) \equiv F(x+m\gamma, y+n\gamma, z+\gamma).$$

且令 $\gamma=-z$, 則

$$F(x, y, z) \equiv F(x-mz, y-nz, 0)$$

$$\equiv A(x-mz)^2+2B(x-mz)(y-nz)+C(y-nz)^2.$$

因題設 $AC-B^2 \neq 0$, 故方程式 $At^2+2Bt+C=0$ 有相異之兩根 λ, μ, 於是方式 $F(x, y, z)$ 可分解為兩個一次式

$$F(x, y, z) \equiv A[(x-mz)-\lambda(y-nz)][(x-mz)-\mu(y-nz)].$$

換言之, $F(x, y, z)=0$ 代表 $(x-mz)-\lambda(y-nz)=0$ 及 $(x-mz)-\mu(y-nz)=0$ 之相異兩直線.

〔註〕 若 $AC-B^2<0$, 則 λ, μ 為實數,故兩直線為實線.若 $AC-B^2>0$, 則 λ, μ 為虛數,故兩直線為虛線.

4. 方程式 $F(x, y, z)=0$ 表兩平行直線之條件 條件為 $\Delta=0$, $AC-B^2=0$, $AF-D^2$, 或 $CF-E^2$ 異於零.

1° 條件為必須的.——由前節之結果,如 $F(x, y, z)=0$ 表兩相異直線,則 $\Delta=0$, Δ 之子行列式非均為零.故除 $AC-B^2$ 由下文證明其須為零外, $AF-D^2$ 及 $CF-E^2$ 兩主子行列式中,必有一異於零.

又 $F(x, y, z)=0$ 既表兩平行直線,則

$$F(x, y, z) \equiv (ux+vy+wz)(ux+vy+w'z)$$

$$\equiv (ux+vy)^2+ww'z^2+(w+w')z(ux+vy),$$

其中 $$Ax^2+2Bxy+Cy^2 \equiv (ux+vy)^2,$$

故 $$B^2-AC=0.$$

2° 條件爲充分的.——設 $\Delta=0$, $AC-B^2=0$, $AF-D^2\neq 0$. 在此情形, $e=BD-AE=0$〔因 $cf-e^2=A\Delta$, 而 f 及 Δ 均題設爲零〕. 試解前節之方程組(4). 於首尾兩方程式中可視 α, γ 爲未知數, β 取任意値;但 γ 必爲零, 否則首尾兩方程式將發生抵觸(因 $BD-AE=0$, 而 $AF-D^2\neq 0$ 之故); 於是 $\alpha=m\beta$, $\gamma=0$. 此時

$$F(x, y, z)\equiv F(x+m\beta, y+\beta, z).$$

令 $\beta=-y$, 則

$$F(x, y, z)\equiv F(x-my, 0, z)$$
$$\equiv A(x-my)^2+2D(x-my)z+Fz^2.$$

題設 $AF-D^2\neq 0$, 故如 λ, μ 爲方程式 $At^2+2Dt+F=0$ 之根, 則

$$F(x, y, z)\equiv A(x-my-\lambda z)(x-my-\mu z).$$

換言之, $F(x, y, z)=0$ 代表 $x-my-\lambda z=0$ 及 $x-my-\mu z=0$ 兩平行直線

〔註〕 若 $AF-D^2<0$, 則 λ, μ 爲實數, 故兩平行直線爲實線. 若 $AF-D^2>0$, 則 λ, μ 爲虛數,故兩平行直線爲虛線.

5. 方程式 $F(x, y, z)=0$ 表兩相重直線之條件 條件爲 $F(x, y, z)$ 之判別式之第一級子行列式均爲零.

1° 條件爲必須的.——設

$$F(x, y, z)\equiv\lambda(ux+vy+wz)^2;$$

則 $$\frac{1}{2}F'_x\equiv\lambda u(ux+vy+wz),$$

$$\frac{1}{2}F'_y\equiv\lambda v(ux+vy+wz),$$

$$\frac{1}{2}F'_z\equiv\lambda w(ux+vy+wz);$$

F'_x, F'_y, F'_z之係數互成比例,故Δ之第一級子行列式應為零.

2° 條件為充分的.——若Δ之子行列式均為零,則F'_x, F'_y, F'_z之係數互成比例

$$F'_x\equiv\alpha P,\quad F'_y\equiv\beta P,\quad F'_z\equiv\gamma P,$$

P為一次式,例如$ux+vy+wz$. 應用 Euler 公式,可得

$$2F(x, y, z)\equiv xF'_x+yF'_y+zF'_z\equiv(\alpha x+\beta y+\gamma z)P,$$

即

$$2F(x, y, z)=PQ\ [Q=\alpha x+\beta y+\gamma z]. \tag{6}$$

取(6)式之偏引數 $$2F'_x\equiv uQ+\alpha P,$$

但 $$F'_x\equiv\alpha P,$$

故 $$\alpha P\equiv uQ,\qquad Q=\frac{\alpha}{u}P.$$

以Q值代入(6)式

$$2F(x, y, z)\equiv\frac{\alpha}{u}P^2,$$

此式證明定理.

上之證明,假設$u\neq0$. 如$u=0$, 則由(6)式取其對於y或對於z之偏引數.

習題一

1. 判別下列兩方程式所代表之曲線:

(a) $7x^2+32xy+15y^2-16x+34y-15=0$,

(b) $x^2+10xy+25y^2-2x-10y-3=0$.

2. 試定 h 之值,俾方程式

$$x^2+ay^2+(a+1)xy+(1-a)y+h=0$$

表兩直線.

第　二　章

二次曲線之作圖

6. 總說 欲作二次式

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

之圖,先設 A 或 C 異於零.假如 $C \neq 0$, 則二次式可視 y 爲未知數而分解之

$$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{T},$$

此處

$$T \equiv (Bx+E)^2 - C(Ax^2+2Dx+F)$$

$$\equiv (B^2-AC)x^2 + 2(BE-CD)x + E^2 - CF$$

欲研究三項式 T 之性質,當先研究

$$(BE-CD)^2 - (B^2-AC)(E^2-CF)$$

之符號.由第一章公式(3)得

$$(BE-CD)^2 - (B^2-AC)(E^2-CF) = -C\Delta.$$

因 $f = AC - B^2$ 符號之不同,可分爲下列三類:

7. 橢圓類, $f>0$　欲適合此情形, A 與 C 須同符號且皆異於零.

(*a*)　$C\Delta<0$. 方程式 $T=0$ 之兩根爲相異之實數;設 x', x'' 爲兩根, $x'<x''$, 則

$$T = -f(x-x')(x-x'') = f(x-x')(x''-x).$$

令 $$Y = \frac{1}{C}\sqrt{f(x-x')(x''-x)},$$

此時 $$y = -\frac{Bx+E}{C} \pm |Y|.$$

欲 y 爲實數, Y 須爲實數,卽 x 值須在 x' 與 x'' 之間.

當 x 由 x' 增至 $\frac{x'+x''}{2}$ 時, T 由 0 增至極大值 $\frac{f(x''-x')^2}{4}$; x 由 $\frac{x'+x''}{2}$ 增至 x'', T 由極大值減至 0; 故在同情形, $|Y|$ 由 0 增至極大值,復漸減而爲 0. 試作 AB 直線,其方程式爲

$$y = -\frac{Bx+E}{C};$$

在 Ox 軸上取 C 及 D 點,令 $\overline{OC}=x'$, $\overline{OD}=x''$; 從 C 及 D 作 Oy 之平行線,此線與 AB 相交於 C' 及 D' 點.由上之結果而知曲線在 CC' 及 DD' 兩平行直線之內. 又從 (x', x'') 間隔內之每一 x 值可得兩 y 值,卽以 AB 直線之縱位標 $-\frac{Bx+E}{C}$ 加或減 $|Y|$ 是也.故如平行於 Oy 之直線與曲線相交於 M, M' 兩點,則 AB 平分 $\overline{M'M}$. 如圖所示曲線爲閉口形.

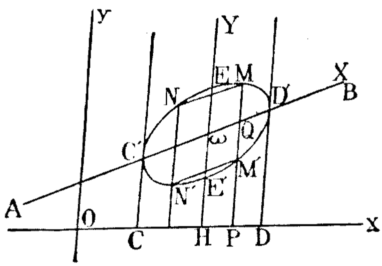


圖 1

試變換位標軸,以 $C'D'$ 之中點 ω 爲原點, AB 爲 X 軸, Y 軸與 y 軸平行,則

$$X=\overline{\omega Q}, \qquad Y=\overline{QM},$$

Q 爲 $M'M$ 之中點.令

$$x=\frac{x'+x''}{2}=\xi \quad (\xi=\overline{HP}),$$

因 $\overline{HP}$ 爲 $\overline{\omega Q}$ 在 Ox 軸上之射影(其投射之方向與 Oy 平行),

故
$$\overline{HP}=kX.$$

$$x=\frac{x'+x''}{2}+kX.$$

令
$$x''-x'=2h,$$

於是
$$Y=\overline{QM}=\frac{1}{C}\sqrt{f(x-x')(x''-x)}$$

$$=\frac{1}{C}\sqrt{f(h^2-k^2X^2)}.$$

故曲線對於新位標之方程式爲

$$\frac{k^2}{h^2}X^2+\frac{C^2}{fh^2}Y^2=1;$$

令
$$\frac{h^2}{k^2}=a^2, \qquad \frac{fh^2}{C^2}=b^2,$$

方程式變爲

(1)
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

由此方程式作圖極易.設 M 爲線線之一點,作 NM 與 ωX 平行,令 NM 之中點在 Y 軸上,則 N 點亦在曲線上;又 M 對於 ω 之對稱點 N', N 對於 ω 之對稱點 M', 亦均在曲線上.

令 $X=0$, 得 E, E' 兩點, 故 $b=\overline{\omega E}$.

令 $Y=0$, 得 C', D' 兩點, 故 $a=\overline{\omega D'}$.

由方程式(1)得

$$YY'_x=-\frac{b^2}{a^2}X,$$

故在 C', D' 兩點之切線與 Y 軸平行,在 E, E' 兩點之切線與 X 軸平行.

此種曲線名之曰<u>橢圓</u>(Ellipse).

(b)　$\Delta=0$. 三項式 T 爲完全平方. $x'=x''$,

$$y=-\frac{Ax+E}{C}\pm\frac{x-x'}{C}\sqrt{-f},$$

故方程式表兩虛線.

(c)　$C\Delta>0$. 方程式 $T=0$ 之根爲虛數,而三項式 T 之 x^2 項之係數爲負;故無論 x 取何值, y 常爲虛數. 此種曲線名之曰虛橢圓.照(a)法令位標軸變換,則得虛橢圓之最簡單方程式

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+1=0.$$

8. 雙曲線類, $f<0$

(a)　$C\Delta<0$. 方程式 $T=0$ 之兩根 x', x'' 爲相異之實數, 設 $x'<x''$. 因

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{|C|}\sqrt{T}$$

$$[T\equiv-fx^2+2(BE-CD)x+E^2-CF\equiv-f(x-x'')(x-x')].$$

故欲 y 爲實數, x 須 $<x'$, 或 $>x''$. 換言之, 在 $x=x', x-x''$ 兩直線之間,並無曲線. 但 x 之絕對值可任意增大,故曲線有在無

窮遠之點.

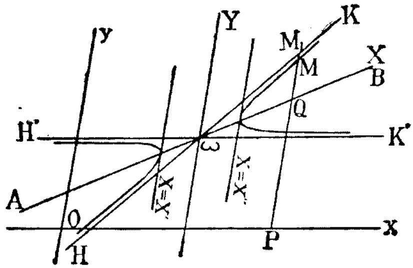


圖 2

如以 P 代 $BE-CD$, 以 Q 代 E^2-CF, 則三項式 T 可書爲

$$-fx^2+2Px+Q,$$

但
$$Q+\frac{P^2}{f}=\frac{P^2+fQ}{f}=-\frac{C\Delta}{f},$$

故三項式又可寫爲

$$T\equiv\left[a\sqrt{-f}+\frac{P}{\sqrt{-f}}\right]^2-\frac{C\Delta}{f}.$$

與 x 以大於 x'' 之值,則 $x>\frac{x'+x''}{2}$, 即 $x>\frac{P}{f}$, 因此

$$x\sqrt{-f}+\frac{P}{\sqrt{-f}}>0.$$

作 HK 直線,其方程式爲

$$y_1=-\frac{Bx+E}{C}+\frac{1}{|C|}\left[x\sqrt{-f}+\frac{P}{\sqrt{-f}}\right].$$

欲作圖之曲線,其方程式之一爲

$$y=-\frac{Bx+E}{C}+\frac{1}{|C|}\sqrt{-fx^2+2Px+Q}.$$

若橫位標相同,則此曲線與 HK 直線縱位標之差爲

$$y-y_1=\frac{1}{|C|}\left[\sqrt{-fx^2+2Px+Q}-\left(x\sqrt{-f}+\frac{P}{\sqrt{-f}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{|C|}\frac{-\frac{C\Delta}{f}}{\sqrt{-fx^2+2Px+Q}+\left(x\sqrt{-f}+\frac{P}{\sqrt{-f}}\right)}.$$

由此式觀之,當 x 無限增大時, $y-y_1$ 以零爲極限,其符號與 $-\frac{C\Delta}{f}$ 同(即言 $y-y_1$ 爲負).

由上之結果,若已作 AB 及 HK 兩直線,則與 x 以大於 $\frac{x'+x''}{2}$ 值時, HK 之縱位標應大於 AB 之縱位標;換言之,在 AB, HK 相交點 ω (ω 之橫位標爲 $x=-\frac{P}{f}$)之右, ωK 在 ωB 之上.在 x 軸上取一點 P, 令 $OP>x''$, 由 P 作 y 軸之平行線與 AB 及 HK 相交於 Q 及 M_1 點

$$\overline{QM_1}=\frac{1}{|C|}\left[x\sqrt{-f}+\frac{P}{\sqrt{-f}}\right].$$

又在 PM_1 上取 M 點,命

$$\overline{QM}=\frac{1}{|C|}\sqrt{-fx^2+2Px+Q},$$

則 M 應爲所求曲線之點.但 $y-y_1<0$, 故 M 在 M_1 之下.又 $y-y_1$ 以零爲極限,故 M 及 M_1 之距離,當 P 在無窮遠時,亦以零爲極限. HK 謂之曲線之漸近線.

依同法可證明當 x 取小於 x' 值時, HK 爲曲線

$$y=-\frac{Bx+E}{C}-\frac{1}{|C|}\sqrt{-fx^2+2Px+Q}$$

之漸近線.又作 $H'K'$ 直線,其方程式為

$$y_2=-\frac{Bx+E}{C}-\frac{1}{|C|}\left[x\sqrt{-f}+\frac{P}{\sqrt{-f}}\right],$$

此線與 AB 相交於 ω 點,亦為曲線

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{|C|}\sqrt{-fx^2+2Px+Q}$$

之漸近線.

若以 ωB 為 X 軸,以經 ω 而與 y 軸平行之線為 Y 軸,則可得較簡單之方程式.方法如下.

三項式可寫為

$$T=-f(x-x'')(x-x'),$$

而
$$Y=\frac{1}{C}\sqrt{-f(x-x'')(x-x')}.$$

令
$$x=\frac{x'+x''}{2}+\xi,$$

此處 ξ 與 X 正比,

故
$$x=\frac{x'+x''}{2}+kX;$$

又令
$$x''-x'=2h,$$

則
$$Y^2C^2=-f(k^2X^2-h^2);$$

再令
$$\frac{h^2}{k^2}=a^2,\ -\frac{fh^2}{C^2}=b^2,$$

則方程式變爲

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

此種曲線謂之雙曲線.

(b)　$\Delta=0$. 在此情形, $x'=x''$,

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{\sqrt{-f}}{C}(x-x'),$$

此方程式表兩直線.

(c)　$C\Delta=>0$. 方程式 $T=0$ 之根爲虛數, 故 $|Y|$ 常爲實數; 若 x 值由 $-\infty$ 增至 $+\infty$, 三項式 T 先由 $+\infty$ 漸減至一極小值(此時 $x=\frac{P}{f}$), 再由此極小值增至 $+\infty$. 故曲線有在無窮之點.變換二次式之係數 F 之值(其他係數不變), 先令 $C\Delta$ 爲負,後令爲正,此時 HK 及 $H'K'$ 兩漸近線不變,但 $y-y_1$ 則由負而爲正,故曲線由 $K\omega K'$ 角而至 ωK 角.

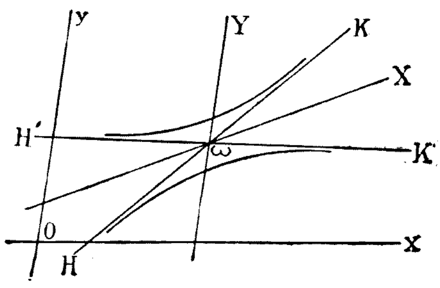


圖 3

照 (a) 法令位標軸變換,可得曲線之較簡單方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

此種曲線,亦名之曰雙曲線.

9. 抛物線類,$f=0$ 在此情形,三項式T變為二項一次式

$$T=2Px+Q=2P(x-a) \qquad \left[a=-\frac{Q}{2P}\right],$$

且
$$C\Delta=-P^2.$$

設$P>0$,則欲y為實數,x須$\geqslant a$,即言曲線在$x=a$直線之右.當x由a值增至$+\infty$時,$|y|$由O增至$+\infty$.若以AB為X軸,$x=a$為Y軸,則方程式較為簡單.計算如下:

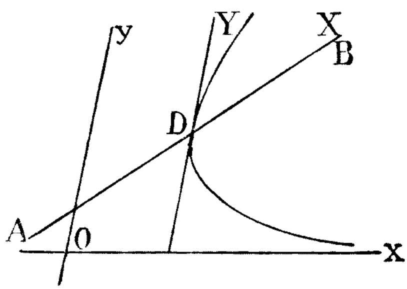


圖 4

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{|C|}\sqrt{2P(x-a)}$$

$$=-\frac{Bx+E}{C}+Y;$$

$$Y=\pm\frac{1}{|C|}\sqrt{2PkX},$$

即
$$Y^2C^2=2PkX.$$

令$Pk=pC^2$,即得曲線之新方程式

$$Y^2=2pX.$$

設$P<0$,則欲y為實數,x須$\leqslant a$,曲線在$x=a$直線之左.

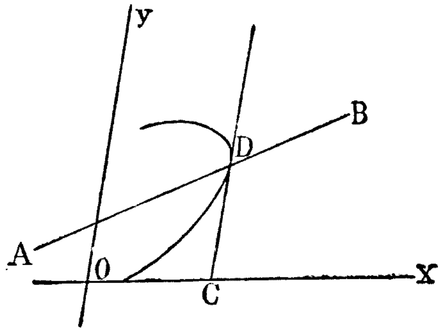


圖 5

設 $P=0$, 即言 $\Delta=0$. 在此情形,二次式變爲

$$y=-\frac{Bx+E}{C}\pm\frac{1}{C}\sqrt{E^2-CF},$$

兩式表兩直線,各與 AB 平行,且離 AB 等遠. 此兩直線是否爲兩實線,兩虛線,或相重兩直線,視 E^2-CF 爲正,爲負,或爲零而定.

10. 餘論　上之作圖,假設 $C\neq 0$. 若 $C=0$ 而 $A\neq 0$, 則以 y 爲自變數,x 爲變數,可照上法作圖,故其結果相同.若 $A=C=0$, 則上法不適用,但此時 B 必異於零,否則二次式將變爲一次式.

設 $$A=C=0,\qquad B\neq 0;$$

則 $$f=-B^2,\qquad \Delta=2BDE-B^2F.$$

二次式爲

(1) $$2Bxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

即 $$y=-\frac{2Dx+F}{2(Bx+E)}.$$

以右段之分母除分子,得

$$y=-\frac{D}{B}+\frac{1}{2(Bx+E)}\left(\frac{2DE-BF}{B}\right),$$

即

(2)
$$y=-\frac{D}{B}+\frac{1}{2(Bx+E)}\cdot\frac{\Delta}{B^2}.$$

因 $f=-B^2$, 故 f 爲負,而本節之結果應與第八節相同,即曲線爲雙曲線 ($\Delta\neq 0$) 或兩相交直線 ($\Delta=0$) 是也.

欲作方程式(2)之圖,先作 $AB\left(y=-\frac{D}{B}\right)$ 及 $CD\left(x=-\frac{E}{B}\right)$ 兩直線,曲線以此兩直線爲漸近線.

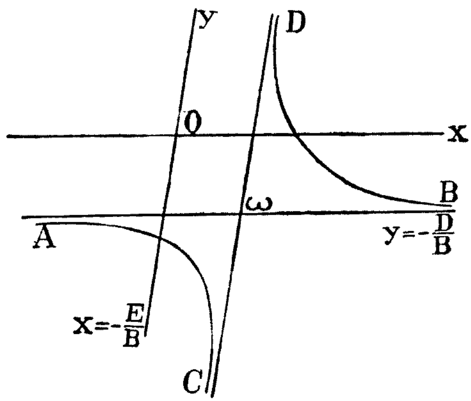


圖 6

若 $\Delta>0$, 則曲線在 $D\omega B$, 及 $A\omega C$ 兩角內; 若 $\Delta<0$, 則曲線在 $A\omega D$ 及 $B\omega C$ 兩角內. 設 $\Delta=0$, 此時 $2DE=BF$, 方程式(1)變爲

$$2Bxy+2Dx+2Ey+\frac{2DE}{B}=0,$$

即
$$(Bx+E)(By+D)=0.$$

此式表兩漸近線.

11. 結論　總括以上所述,已與二次式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

令

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},\quad \begin{array}{l} a=CF-E^2, \\ c=AF-D^2, \\ f=AC-B^2, \end{array}$$

則其所表之曲線可列為下表:

$$f>0\begin{cases} C\Delta<0 \text{ 或 } A\Delta<0, & \text{橢圓.} \\ \Delta=0, & \text{兩虛線,一實點.} \\ C\Delta>0 \text{ 或 } A\Delta>0, & \text{虛橢圓.} \end{cases}$$

$$f<0\begin{cases} \Delta\neq 0, & \text{雙曲線.} \\ \Delta=0, & \text{兩直線相遇於一點.} \end{cases}$$

$$f=0\begin{cases} \Delta\neq 0, & \text{拋物線.} \\ \Delta=0, & \text{兩平行直線}\begin{cases} a<0 \quad C<0 & \text{兩相異直線.} \\ a=0 \text{ 或 } C=0 & \text{兩相重直線} \\ a>0 \quad C>0 & \text{兩虛線.} \end{cases} \end{cases}$$

習題二

試繪下列二次曲線之圖形:

1. $5x^2-4xy+y^2+2x-y=0.$

2. $3x^2-4xy+y^2+2x-y=0.$

3. $3x^2-4xy+y^2+15x-6y+7=0.$

4. $4x^2-12xy+9y^2+4x-5y+3=0.$

第 三 章

二次曲線之分類

12. 平直方式　含數變數之多項式,一次且無常數項者,謂之平直方式.

例如 $$a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n,$$

設有含n變數之方式p個

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1\equiv a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n, \\ u_2\equiv b_1x_1+b_2x_2+\cdots\cdots+b_nx_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_p\equiv l_1x_1+l_2x_2+\cdots\cdots+l_nx_n; \end{cases}$$

如$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots\lambda_p$除各取零值外無其他之值能令

$$(2)\qquad \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots\cdots+\lambda_pu_p\equiv 0,$$

則$u_1, u_2, \cdots\cdots u_p$諸方式謂之彼此殊異.

適合恆等式(2)之充分及必須之條件爲

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1\lambda_1+b_1\lambda_2+\cdots\cdots+l_1\lambda_p=0, \\ a_2\lambda_1+b_2\lambda_2+\cdots\cdots+l_2\lambda_p=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n\lambda_1+b\ \lambda_2+\cdots\cdots+l_n\lambda_p=0. \end{cases}$$

故諸方式(1)彼此殊異之充分及必須之條件爲方程式(3)(視

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots\cdots\lambda_p$ 爲未知數)除 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_p=0$ 外無他解答.試解方程式組(3),主行列式(1)之級數應等於或小於 p 及 n 之較小值.

若主行列式之級數爲 p,則 p 必 $\leqq n$,方程組除 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots\cdots\lambda_p=0$ 外無他解答.

若主行列式之級數小於 p,則 λ 中有可取任意值者,故方程組除 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots=\lambda_p=0$ 外有解答.

故方程組除 $\lambda_1=\cdots\cdots=\lambda_p=0$ 外無他解答之充分及必須之條件爲主行列式之級數爲 P. 又方程組(3)之係數與方程(1)同,故有下之定理:

諸方式(1)彼此殊異之充分及必須之條件爲係數之主行列式爲第 p 級.

13. 殊異函數　設有含 n 個變數之平直函數 p 個

---

(1) 主行列式之定義在下表中

$$\begin{array}{c} a_1^1, a_2^1, \cdots\cdots\cdots\cdots a_n^1 \\ a_1^2, a_2^2, \cdots\cdots\cdots\cdots a_n^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^m, a_2^m, \cdots\cdots\cdots a_n^m \end{array}$$

如最高級而不爲零之行列式爲第 p 級,則此第 p 級行列式謂之主行列式.

$$f_1=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots\cdots+a_nx_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f_p=l_0+l_1x_1+l_2x_2+\cdots\cdots+l_nx_p;$$

若棄去其常數項,則得含n個變數之平直方式p個.若p個方式彼此殊異,則p個函數謂之彼此殊異.故由前節之結果,如函數數p小於或等於變數數n,且由諸變數之係數所成之表中可得一異於零之第p級行列式,則p個函數彼此殊異.

14. 二次式之分解 凡二次式均可分解爲諸平直函數平方之代數和,加(或不加)一平直函數分解法如下:

第一法.——設二次式f含某自變數x之二次項,則f可寫如下式:

$$f\equiv ax^2+P_1x+Q_2,$$

$a\neq O$, P_1爲一次式,Q_2爲二次式,P_1及Q_2均不含x.令含x之項爲完全平方

$$f\equiv\frac{1}{a}\left(ax+\frac{P_1}{2}\right)^2+Q_2-\frac{P_1^2}{4a},$$

即
$$f\equiv\frac{1}{a}\left(ax+\frac{P_1}{2}\right)^2+\phi,$$

ϕ表二次式,其所含變數之數,較f所含變數之數少一.

若ϕ含某自變數之二次項,則依同法分解之,直至二次式不含自變數之二次項止.

第二法.——若二次式不含自變數之二次項,而含兩自變數相乘之項,如yz,則二次式可寫爲

$$\psi \equiv ayz+P_1y+Q_1z+R_2,$$

$a \neq 0$, P_1, Q_1, R_2 均不含 y 及 z, 指數表各函數之次數. ψ 可分解如下式

$$\psi \equiv \frac{1}{a}(ay+Q_1)(az+P_1)+R_2-\frac{P_1Q_1}{a}.$$

應用公式

$$\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2,$$

則 $$\psi \equiv \frac{1}{a}\left(\frac{ay+az+P_1+Q_1}{2}\right)^2-\frac{1}{a}\left(\frac{ay-az+Q_1-P_1}{2}\right)^2+R_2-\frac{P_1Q_1}{a}.$$

$R_2-\frac{P_1Q_1}{a}$ 爲二次式,其所含變數之數,較 ψ 所含變數之數少二.

如此進行,直至所餘之函數爲一次式,分解乃止.

依上法分解,所得函數之數應等於或少於二次式所含自變數之數.

15. 分解所得之函數 此等函數彼此殊異. 設分解所得函數之數爲 p, 則欲證此, 須證諸函數係數之主行列式爲第 p 級.

如分解時均用前節之第一法,則每次所得之函數,其未知數數較前次所得者少一. 設二次式含 x, y, z, t 四變數, 由分解而得下列三函數

$$ax+by+cz+dt+e \qquad (a \neq 0),$$

$$b'y+c'z+d't+e' \qquad (b' \neq 0),$$

$$c''z+d''t+e'' \qquad (c'' \neq 0),$$

行列式

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 0, & b', & c' \\ 0, & 0, & c'' \end{vmatrix} ab'c''\neq 0,$$

故三函數彼此殊異.

若分解時參用第二法,仍設二次式含 x, y, z, t 四變數,由分解而得下列四函數

$$\begin{aligned} &ax+by+cz+dt+e &&(a\neq 0),\\ &b'y+b'z+d't+e' &&(b'\neq 0),\\ &b'y-b'z+d''t+e'' &&(d'''\neq 0),\\ &d'''t+e''' && \end{aligned}$$

行列式

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ 0, & b', & b', & d' \\ 0, & b', -b', & & d'' \\ 0, & 0, & 0, & d''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a, & b, & c, & d \\ 0, & b', & b', & d' \\ 0, & 0, & -2b', & d''-d' \\ 0, & 0, & 0, & d''' \end{vmatrix} = -2ab'^2d'''\neq 0,$$

故四函數彼此殊異.

16. 圓錐曲線 二次式所表之曲線,總名圓錐曲線,因古時幾何學家已研究得此等曲線爲平面與圓錐相交之線也.

欲將二次曲線

$$f(x,y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

分類,可取方程式之左段,照第十四節法分解之.此處僅含兩自變數.兩平直函數 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 彼此殊異之充分及必須之條件爲 $P=0$ 與 $Q=0$ 兩直線相交於一點.因 $f=AC-B^2$ 符號之不同,分解之法可分爲下列三類:

17. 橢圓類, $f>O$　$AC-B^2$ 既爲正,則 A 異於零,二次式可分解如下:

$$\frac{1}{A}(Ax+By+D)^2-\frac{(By+D)^2}{A}+Cy^2+2Ey+F=0,$$

即　$(Ax+By+D)^2+(AC-B^2)y^2+2(AE-BD)y+AF-D^2=0,$

或用第一節之記法

$$(Ax+By+D)^2+fy^2-2ey+c=0.$$

將其他含 y 之項寫爲完全平方式,得

$$(Ax+By+D)^2+\frac{1}{f}(fy-e)^2-\frac{e^2}{f}+c=0 \qquad (f\neq 0),$$

即

$$(1)\qquad (Ax+By+D)^2+\frac{1}{f}(fy-e)^2+\frac{A\Delta}{f}=0 \qquad (cf-e^2=A\Delta).$$

$Ax+By+D$ 及 $fy-e$ 兩函數彼此殊異,即言

$$Ax+By+D=0, \qquad fy-c=0$$

兩直線相交於一點也.

(*a*)　$A\Delta<0$. 此兩直線既相交,即以 $fy-e=0$ 爲新 x 軸, $Ax+By+D=0$ 爲新 y 軸.任意點 $P(x,y)$ 與 $Ax+By+D=0$ 之距離

爲 $k(Ax+By+D)$ (k 表常數). 若 x', y' 爲 P 點之新位標, 則 $x' = k'(Ax+By+D)$ (k' 表常數). 依同理, y' 與 $fy-e$ 正比. 令

$$\alpha x' = Ax+By+D, \quad \beta y' = fy-e,$$

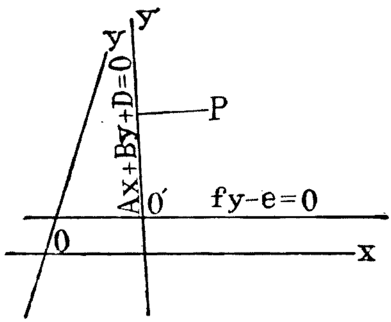


圖 7

則二次式變爲

$$\alpha^2 x'^2 + \frac{\beta^2}{f} y'^2 + \frac{A\Delta}{f} = 0.$$

因 f 與 $A\Delta$ 異號, 故可令

$$-\frac{A\Delta}{f\alpha^2} = a^2, \quad -\frac{A\Delta}{\beta^2} = b^2;$$

二次式變爲

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

除去 ($'$), 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

此方程式所表之曲線，如圖 8 所云，對於 O 爲對稱，O 謂之曲線之中心。此點卽

$Ax+By+D=0$ 及 $fy-e=0$

兩直線之交點也。

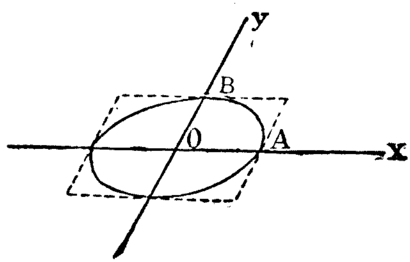


圖 8

此種曲線謂之實橢圓。

(b)　$A\Delta>0$. 無論 (x,y) 爲何値皆不能合方程式(1)，故此種曲線並無實點，謂之虛橢圓。

(c)　$A\Delta=0$，方程式(1)變爲

$$(Ax+By+D)^2+\frac{1}{f}(fy-e)^2=0.$$

此式僅表 $Ax+By+D=0$ 及 $fy-e=0$ 兩直線相交之點，謂之點橢圓。

此式亦可寫爲

$$\left[Ax+By+D+\frac{i}{\sqrt{f}}(fy-e)\right]\left[Ax+By+D-\frac{i}{\sqrt{f}}(fy-e)\right]=0.$$

故方程式表二虛線。

18.　雙曲線類，$f<0$

1°　$A\neq0$. 可照前節法，令二次式變爲

(1)　$$(Ax+By+D)^2+\frac{1}{f}(fy-e)^2+\frac{A\Delta}{f}=0.$$

視 Δ 是否爲零，又可分爲下列二種：

(a) $\Delta \neq 0$. 照前節法轉換位標軸，方程式變爲

$$\alpha^2 x'^2 + \frac{\beta^2 y'^2}{f} + \frac{A\Delta}{f} = 0.$$

此處 f 爲負. 設 $A\Delta > 0$, 可令 $-\frac{A\Delta}{f\alpha^2} = a^2$, $+\frac{A\Delta}{\beta^2} = b^2$, 除去 $'$ 號後，方程式變爲

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

現設 $A\Delta < 0$; 取 $Ax + By + D = 0$ 爲 x' 軸，$fy - e = 0$ 爲 y' 軸，方程式變爲

$$\frac{\beta^2 x'^2}{f} + \alpha^2 y'^2 + \frac{A\Delta}{f} = 0;$$

令 $-\frac{A\Delta}{\beta^2} = a^2$, $\frac{A\Delta}{f\alpha^2} = b^2$, 方程式仍爲

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

此方程式所表之曲線，如圖9所示. 曲線以 $Y = \pm\frac{b}{a}x$ 兩直線爲漸近線，因曲線之縱位標爲

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

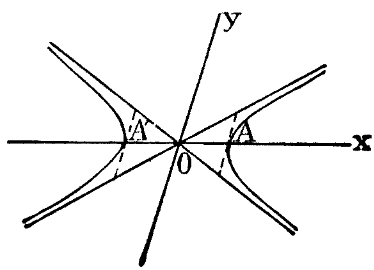


圖 9

若於兩方程式均取正號而比較之

$$y-Y=\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\frac{b}{a}\times\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x},$$

則當 x 無窮增加時, y 以 Y 爲極限故也. 曲線對於 O 點爲對稱. O 謂之曲線之中心.

此種曲線謂之雙曲線. 若 $a=b$, 則得等腰雙曲線(Equilateral hyperbola).

(b) $\Delta=0.$ 方程式變爲

$$(Ax+By+D)^2+\frac{1}{f}(fy-e)^2=0.$$

此式亦可寫爲

$$\left[Ax+By+D+\frac{fy-e}{\sqrt{-f}}\right]\left[Ax+By+D-\frac{fy-e}{\sqrt{-f}}\right]=0.$$

故方程式表兩直線.

2° $A=0, C\neq 0.$ 在此情形, 可視 y 爲 x, 仍照前法分解, 所得之結果相同.

3° $A=0, C=0, B\neq 0.$ 二次式爲

$$2\,Bxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

用第二法分解

$$\frac{2}{B}(Bx+E)(By+D)-\frac{2ED}{B}+F=0,$$

此處　$\Delta=2BDE-B^2F,$

故二次式變爲

$$2(Bx+E)(By+D)-\frac{\Delta}{B}=0,$$

即 $(Bx+E+By+D)^2-(Bx+E-By-D)^2-\frac{2\Delta}{B}=0.$

(a) $\Delta \neq 0$. 以

$$Bx+E+By+D=0,\ Bx+E-By-D=0.$$

兩直線爲位標軸,方程式變爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

此爲拋物線.

(b) $\Delta=0$. 方程式變爲

$$(Bx+E)(By+D)=0,$$

此爲兩直線. 總括本節三種情形,無論 A,C 之值如何,其結果相同.

19. 拋物線類, $f=0$ 在此情形, A,C 不能同時爲零,否則 B 必爲零,二次式變爲一次式.

設 $A\neq 0$,照第十七節法分解得

$$(Ax+By+D)^2-2ey+c=0.$$

公式 $cf-e^2=A\Delta$ 在此處爲 $-e^2=A\Delta$, 故如 $\Delta=0$, 則 $e=0$.

(a) $\Delta\neq 0$. 變換位標軸,令 $Ax+By+D=0$ 爲 x' 軸, $-2ey+c=0$ 爲 y' 軸,方程式變爲

$$y'^2-2px'=0;$$

選擇 x' 軸之方向,可令係數 p 爲正. 此式所表之曲線,如圖 10 所示,謂之拋物線.

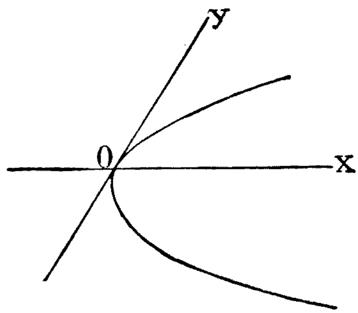


圖 10

(b) $\Delta=0$. 此處 $e=0$, 二次式變爲

$$(Ax+By+D)^2+c=0.$$

若 $c<0$, 則方程式可寫爲

$$(Ax+By+D\sqrt{-c})(Ax+By+D-\sqrt{-c})=0,$$

此式表兩平行直線.

若 $c>0$, 則方程式可寫爲

$$(Ax+By+D+i\sqrt{c})(Ax+By+D-i\sqrt{c})=0,$$

此式表兩平行虛線.

若 $c=0$, 則方程式爲

$$(Ax+By+D)^2=0,$$

此式表兩相重直線.

〔註〕 若 $A=0$, 則 $c\neq0$, 此時可視 y 爲 x, 照上法分解之, 其結果相同.

20. 結論　總括本節所論, 其結果可列爲下表: P 及 Q 爲兩殊異平直函數, 二次式爲

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},\ a=CF-E^2,\quad c=AF-D^2,\quad f=AC-B^2.$$

係數之關係		所表曲數	分解所得
$f>0$	$A\Delta$ 或 $C\Delta<0$	實橢圓	P^2+Q^2-1
	$\Delta=0$	兩虛線,一實點	P^2+Q^2
	$A\Delta$ 或 $C\Delta>0$	虛橢圓	P^2+Q^2+1
$f<0$	$\Delta\neq0$	雙曲線	P^2-Q^2-1
	$\Delta=0$	兩直線相遇於一點	P^2-Q^2
$f=0$	$\Delta\neq0$	拋物線	P^2+Q
	$\Delta=0$, $a<0$ $c<0$	兩平行直線	P^2-1
	$\Delta=0$, $a=0$ 或 $c=0$	兩相重直線	P^2
	$\Delta=0$, $a>0$ $c>0$	兩平行虛數	P^2+1

〔註〕 由此表觀之,二次通式表兩直線之充分及必須之條件為$\Delta=0$.

習題三

1. 試就λ之值,以判別下列二次曲線之種類:

(a) $\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+3=0$.

(b) $x^2+2\lambda xy+\lambda y^2+2\lambda x+2y+\lambda+1=0$.

(c) $\lambda x^2+2xy+\lambda y^2-2(\lambda+1)x+2y+2=0$.

2. 判別下列二次曲線之種類:

(a) $\alpha x^2+2\beta xy-(\alpha-2)y^2+2x+2y+2=0$.

(b) $x^2+2xy-y^2(\beta^2-\alpha-1)-2(\alpha-\beta)y-1=0$.

α, β 表平面上動點之位標.

3. 已與一圓及圓上兩點 A,B. 令 P 爲不在圓上之點. 由 P 作任意直線與圓相交於 C 及 D. 連 AC 及 BD 兩直線,此兩直線相交於 M. 試求 M 之軌跡.

此軌跡爲過 A,B 兩點之二次曲線. 試就 P 之變動以判別二次曲線之種類.

又問所得之二次曲線能否爲圓.

4. 設有方程式

$$f(t)=t^2+at+b=0.$$

a,b 表平面上 M 點之位標. 試就 M 之位置而定方程式之根與 $-1, +1$ 兩數大小之次序.

5. 設位標軸爲正交, 在 Ox 軸上有點 A 其橫量爲 a, 在 Oy 軸上有點 B 其縱量爲 b. 在 Ox 軸上取動點 P, 又在 Oy 軸上取動點 Q, 令 $\overline{AP}\cdot\overline{BQ}=$ 已與之常數 k.

(a) 用 t 用 P 點之橫量. 并求直線 PQ 之方程式, 內含參數 t 者.

(b) 過平面上一點 M 可得兩條 PQ 直線. 設此兩直線均爲實線, 試定 M 之位置.

(c) 設此兩 PQ 直線成正交, 試求 M 之軌跡.

第　四　章

圓錐曲線之中心

21. 定義　經過一定點作諸直線,與圓錐曲線相交於兩點;若無論直線之方向如何,兩交點對於定點常爲對稱,則定點謂之圓錐曲線之中心.

先證下之定理,以爲搜尋中心之用:

定理.——原點與圓錐曲線之中心相重之充分及必須之條件爲曲線方程式不含一次項.

經原點之直線 $y=mx$, 與圓錐曲線

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

相交之點,其橫位標合方程式

$$x^2(A+2Bm+Cm^2)+2x(D+Em)+F=0.$$

若原點與心合而爲一,則此方程式之根,爲絕對值相同而符號相反之兩數,故

$$D+Em=0.$$

但 m 爲任意值,故所求之條件爲

$$D=0,\quad E=0.$$

22. 中心之搜尋　由前節之結果,(x_0,y_0)點爲圓錐曲線

$$f(x,y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

之心之充分及必須之條件如下:將原點移至該點,所得新方程式不含一次項.新方程式

$$f(x+x_0, y+y_0)=0$$

亦可寫爲　$f(x_0,y_0)+xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+\phi(x,y)=0,$

$\phi(x,y)$ 表原方程式之諸二次項

$$\phi(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2.$$

由此得 (x_0, y_0) 爲曲線之中心之條件:

$$f_{x_0}=0, \quad f'_{y_0}=0;$$

換言之,曲線之心爲方程組

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_x \equiv Ax+By+D=0 \\ \frac{1}{2}f'_y \equiv Bx+Cy+E=0 \end{cases}$$

之解答.欲討論此方程組,應分爲下列兩類:

第一款.——$AC-B^2\neq 0$. 曲線爲橢圓類或雙曲線類.方程組(1)之解答爲

$$x=\frac{BE-CD}{AC-B^2}=\frac{d}{f}, y=\frac{BD-AE}{AC-B^2}=\frac{e}{f}.$$

故此類曲線有唯一之中心.

第二款.——$AC-B^2=0$.曲線爲拋物線類.

A 及 C 不能同時爲零.設 $A\neq 0$, 則方程組(1)之有無解答,視 $AE-BD$(卽 $-e$)是否爲零而定,但 $-e^2=A\Delta$, 故如

1° $\Delta\neq 0$, 方程組無解答;換言之,拋物線爲無心曲線.

2° $\Delta=0$, 方程組之兩方程式合而爲一, 故有無窮數之解答; 換言之, 兩平行直線有無窮數之中心, 此等中心均在 $Ax+By+D=0$ 直線上.

總括以上所述,橢圓類或雙曲線類曲線有唯一之中心,拋物線無中心,兩平行直線則有無限數之中心.

23. 以曲線之中心爲原點之新方程式 設二次曲線之方程式爲

$$f(x,y)\equiv\phi(x,y)+2Dx+2Ey+F=0,$$

$\phi(x,y)$ 之意義與前節同.若以中心(x_0,y_0)爲原點,則得新方程式

$$f(x+x_0,\ y+y_0)\equiv f(x_0,\ y_0)+xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+\phi(x,\ y)=0;$$

由前節, $f'_{x_0}=f'_{y_0}=0$, 故新方程式爲

$$f(x_0,\ y_0)+\phi(x,\ y)=0.$$

茲計算 $(fx_0,\ y_0)$之值. 應用 Euler 公式(第三節註)

$$2f(x_0,y_0,\ z_0)=x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}=z_0f'_{z_0},$$

此處 $$f(x,\ y,\ z)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxz+2Eyz+F^2z.$$

命 $z_0=1$, 則

$$f(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2}f'_{z_0}=Dx_0+Ey_0+F,$$

故新方程式可寫爲

$$\phi(x,\ y)+F_1=0 \quad [F_1=Dx_0+Ey_0+F].$$

1° 設曲線屬橢圓類或雙曲線類. $x_0,\ y_0$ 應合方程組(1), 故在方程組

$$\begin{cases} Ax+By+\ \ 0+D=0 \\ Bx+Cy+\ \ 0+E=0 \\ Dx+Ey-F_1+F=0 \end{cases}$$

中,若視 x, y, F_1 爲三未知數,則

$$F_1=\frac{\begin{vmatrix} A, & B, & D \\ B, & C, & E \\ D, & E, & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A, & B \\ B, & C \end{vmatrix}}=\frac{\Delta}{f}.$$

而所求之新方程式爲

$$\phi(x,y)+\frac{\Delta}{f}=0.$$

2° 設曲線爲兩平行直線.在此情形 $\Delta=f=0$, 由是 $AE-BD=-e=-\sqrt{A\Delta}=0$. 曲線之中心爲 $Ax+By+D=0$ 直線之各點,故 $Ax_0+By_0+D=0$. 設 $A\neq 0$.

$$x_0=-\frac{By_0+D}{A},$$

以此值代入 F_1 式,並注意 $AE-BD=0$ 式

$$F_1=-\frac{D(By_0+D)}{A}+Ey_0+F=\frac{AF-D^2}{A}=\frac{c}{A},$$

故所求之新方程式爲

$$\phi(x,y)+\frac{c}{A}=0.$$

習題四

1. 設有三角形 ABC, 求其外接等腰雙曲線之通式. 證明此等雙曲線均過 ABC 之垂心, 而其中心之軌跡為 ABC 之九點圓 (上卷習題六第 4 題).

2. 設有直角三角形 OAB, $A\hat{O}B$ 為直角. 過此三角形之三頂點作圓錐曲線,令其在 O 點之法線過 AB 之中點.

(a) 求適合上述條件之錐線(卽圓錐曲線) 之通式.

(b) 求錐線中心之軌跡.

(c) 將軌跡劃分界限, 指明何部份為橢圓中心, 何部份為雙曲線中心.

3. 設位標軸 Ox, Oy 正交,在 Ox 軸上有 $A(a,0)$, $B(-a,0)$ 兩點, 就中 a 為正數. 又有直線 Δ, 其方程式為 $y-a=0$. 若令錐線過 AB 兩點,而與 Δ 相切,且與 Oy 軸之交點 P,Q 適合關係 $OP\cdot OQ=-a^2$.

(a) 求適合此等條件錐線之通式.

(b) 求錐線中心之軌跡.

(c) 將軌跡劃分界限, 指明何部份為橢圓中心,何部份為雙曲線中心.

4. 設有兩拋物線

$$x^2\cos^2\alpha-4a(x\cos\alpha-y\sin\alpha)=0.$$

$$y^2\sin^2\alpha+4a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)=0.$$

證明兩拋物線同與直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=0$ 相切於原點,除此切線外尚有其他公切線, 試求其方程式及公切線之兩切點. 又證明連原點與兩切點之直線成正交.

第五章

圓錐曲線之直徑

24. 定義及其方程式 已與一圓錐曲線及直線之方向 L,與 L 平行之諸弦,其中點之軌跡爲一直線,謂之與 L 方向相配之直徑.

設圓錐曲線之方程式爲

$$f(X,Y)\equiv\phi(X,Y)+2DX+2EY+F=0,$$

L 之方向參數爲(α,β). 經 $M(x,y)$ 點作 L 之平行線,此線上各點之位標爲

$$X=x+\alpha\rho, \qquad Y=y+\beta\rho,$$

ρ 與 $M(x,y)$ 及 (X,Y) 兩點之距離爲正比. 若此直線與曲線相交於 A, B 兩點,則其相當之 ρ 値應合下方程式.

$$f(x+\alpha\rho,\ y+\beta\rho)\equiv f(x,y)+\rho(\alpha f'_x+\beta f'_y)+\rho^2\phi(\alpha,\beta)=0.$$

如 M 爲軌跡之點,則由此方程式所得兩 ρ 値,應爲絕對値相同而符號相反之數,由是

$$\alpha f'_x+\beta f'_y=0.$$

此爲軌跡之方程式,其次數係一次,故軌跡爲一直線.

又從 $$f'_x=\phi'_x+2D, \qquad f'_y=\phi'_y+2E,$$

得 $$\alpha f'_x+\beta f'_y=\alpha\phi'_x+\beta\phi'_y+2(D\alpha+E\beta);$$

但
$$\alpha\phi'_x+\beta\phi'_y=x\phi'\alpha+y\phi'\beta,$$
故直徑之方程式可寫爲
$$x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+2(D\alpha+E\beta)=0.$$

25. 奇異直徑(Singular diameter) 前節假設與L平行之直徑,與曲線相交之兩點,均在有限之距離;此L直線之方向必非漸近方向,換言之,$\phi(\alpha,\beta)\neq 0$. 若$\phi(\alpha,\beta)=0$, 則諸平行弦與曲線相交於無窮遠點,ρ方程式變爲
$$f(x,y)+\rho(\alpha f'_x+\beta f'_y)=0$$
試問方程式

(1) $\alpha f'_x+\beta f'_y=0$, 卽 $x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+2(D\alpha+E\beta)=0$

有何意義?

橢圓之漸近方向爲虛值.故欲答此問,僅有下列兩種情形:

1° 圓錐曲線屬雙曲線類.
$$\frac{1}{2}\phi'_\alpha=A\alpha+B\beta,\ \frac{1}{2}\phi'_\beta=B\alpha+C\beta;$$
因$AC-B^2$異於零,故$\phi'\alpha$及$\phi'\beta$不能同時爲零.方程式(1)表一直線Δ,經過Δ各點而與L平行之直線,與曲線相交於無窮遠點.因ρ方程式爲
$$f(x,y)+\rho^2\phi(\alpha,\beta)=0,$$
而ρ^2之係數$\phi(\alpha,\beta)$爲零故也.

Δ直線之方向參數爲$\phi'_\beta,-\phi'_\alpha$, 此方向卽$L$之方向,因用Euler公式

$$\alpha\phi'_\alpha+\beta\phi'_\beta=2\phi(\alpha,\beta)=0,$$

可得
$$-\frac{\phi'_\beta}{\phi'_\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}$$

故也.由此,Δ 爲與 L 平行,而與曲線相遇僅在無窮遠兩點之直線,此直線卽曲線之漸近線.

若 M 點之位標同時合兩方程式 $\alpha f'_x+\beta f'_y=0,\quad f(x,y)=0,$ 則 ρ 方程式變爲恆等式,ρ 取任意値,卽言經 M 作 L 之平行線,與曲線之點相合.但此平行線卽 Δ,故在此情形,曲線爲兩直線,其一與 Δ 合.

2° 圓錐方程式爲抛物線類.二次項爲平方式

$$\phi(x,y)\equiv(ux+vy)^2;$$

題設
$$\phi(\alpha,\beta)=0,$$

故
$$u\alpha+v\beta=0.$$

因 $\frac{1}{2}\phi'\alpha=u(u\alpha+v\beta)=0,\frac{1}{2}\phi'\beta=v(u\alpha+v\beta)=0,$ ρ 方程式變爲

$$f(x,y)+2\rho(D\alpha+E\beta)=0.$$

在二次式
$$(ux+vy)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

中,如
$$Dx+Ey\not\equiv\lambda(ux+vy),$$

則曲線表抛物線,此時 $D\alpha+E\beta\neq\lambda(u\alpha+v\beta)=0,$

故方程式(1)無意義.

若
$$Dx+Ey\equiv\lambda(ux+vy),$$

則曲線表二平行直線,此時 $D\alpha+E\beta=\lambda(u\alpha+v\beta)=0,$

故方程式(1)爲不定.

26. 直徑之定理　定理一：有心圓錐曲線之直徑爲經過中心之直線；反之，經過中心之直線爲曲線之直徑.

因中心之位標(x_0, y_0)爲$f'_x=0$, $f'_y=0$之解答，故(x_0, y_0)能適合直徑方程式$\alpha f'_x+\beta f'_y=0$.

反之，中心爲$f'_x=0$, $f'_y=0$兩直線之交點，經此點之直線之方程式爲

$$\lambda f'_x+\mu f'_y=0,$$

此卽與方向(λ, μ)相配之直徑也.

定理二：在拋物線，凡直徑均與漸近方向平行；反之，凡與漸近方向平行之直線均爲直徑.

此處　$$\phi(x,y)\equiv(ux+vy)^2;$$

故　$$f(x, y)\equiv(ux+qy)^2+2Dx+2Ey+F;$$

由此得

$$\alpha f_x'+\beta f'_y\equiv2\alpha[u(ux+vy)+D]+2\beta[v(ux+vy)+E],$$

而與(α, β)方向配之直徑方程式爲

(2)　$$(u\alpha+v\beta)(ux+vy)+D\alpha+E\beta=0,$$

此直線與漸近方向平行.

反之，設$ux+vy+\lambda=0$爲與漸近方向平行之直線，如用下之關係定α及β值，則此方程式與(2)式無異：

$$\frac{D\alpha+E\beta}{u\alpha+v\beta}=\lambda,\ 卽\ \alpha(u\lambda-D)+\beta(y\lambda-E)=0,$$

此處α與β之比值爲確定，因$u\lambda-D$及$v\lambda-E$不能同時爲零

故也〔卽言 $Dx+Ey \neq \lambda(ux+vy)$〕.

27. 直徑之性質 性質一: 已與一圓錐曲線及 L 直線,與 L 平行之直線與圓錐曲線相切之點, 卽此圓錐曲線與 L 方向相配之直徑之交點.

此性質爲直徑定義之結果,因直徑爲與 L 平行諸弦中點之軌跡,而切點爲諸中點之一故耳.

如用解析法證之,切於 (x, y) 點之切線方程式爲

$$Xf'_x+Yf'_y+f'_z=0,$$

此線與 (α, β) 平行,故

$$\alpha f'_x+\beta f'_y=0$$

此爲與 L 方向相配之直徑方程式.

性質二: 由 P 點作圓錐曲線之切線; 如切點爲 M 及 M', 則與 MM' 方向相配之直徑經過 P 點.

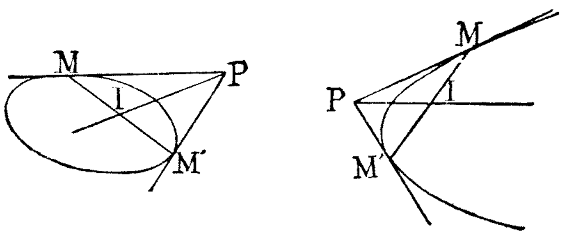


圖 11

設 P 點之齊次位標爲 (x_0, y_0, z_0), M 點之齊次位標爲 (x, y, z). M 點之切線方程式爲

$$Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z=0.$$

因此線經過P點,故

$$x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z=0,$$

此方程式又可寫爲

(3) $$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0.$$

從方程式(3)及及曲線方程式

$$f(x,y,z)=0$$

可得M及M'點之位標.但方程式(3)爲一次式.可知(3)表MM'直線.此直線之方向參數爲$(f'_{y_0},-f'_{x_0})$,故與此方向相配之直徑方程式爲

$$f'_{y_0}f'_x-f'_{x_0}f'_y=0.$$

由此式觀之,直徑經過(x_0,y_0)點也明矣.

由上之結果,若曲線有中心,則連P及MM'之中點I之直線經過曲線之中心;若曲線爲拋物線,則PI直線與漸近方向平行.

23. 相配直徑 (Conjugate diameters) 與方向L相配之直徑如與方向L'平行,則與L'相配之直徑必與L平行.

設(α,β)及(α',β')爲L及L'之方向參數,與L相配之直徑方程式爲

$$x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+2(D\alpha+F\beta)=0.$$

此線既與L'平行,則

$$\alpha'\phi'_\alpha+\beta'\phi'_\beta=0,$$

此式又可寫爲

$$\alpha\phi'_{\alpha'}+\beta\phi'_{\beta'}=0.$$

故與L'相配之直徑

$$x\phi'_{\alpha'}+y\phi'_{\beta'}+2(D\alpha'+E\beta')=0$$

與$L(\alpha,\beta)$平行.

L, L'既有上之關係,謂之相配方向.

兩直徑之方向為相配,謂之相配直徑.

由上之結果,兩相配直徑之一平分與他直徑平行諸弦.

兩相配直徑之方向參數(α,β)及(α',β')有下之關係

$$\alpha'\phi'_{\alpha}+\beta'\phi'_{\beta}=0,\text{ 即 }\alpha\phi'_{\alpha'}+\beta\phi'_{\beta'}=0,$$

即
$$A\alpha\alpha'+B(\alpha\beta'+\beta\alpha')+C\beta\beta'=0.$$

若兩相配直徑之角度係數為m及m',則

$$\alpha=\alpha'=1,\quad \beta=m,\quad \beta'=m',$$

m,m'之關係為

$$A+B(m+m')+Cmm'=0.$$

〔註〕 本節所論,專就橢圓及雙曲線言之,因拋物線之直徑均與漸近方向平行,故無相配直徑.

習題五

1. 設有斜交軸Ox, Oy. 在Ox軸上有點$A(a, 0)$, 在Oy軸上有點$B(0, b)$.

(a) 求過A點而與Oy軸相切於B之拋物線之通式.

(b) 求A點之切線與過O點之直徑相交點之軌跡.

(c) 求A點之法線與過O點之直徑相交點之軌跡. 此軌跡為錐線(Γ).

(d) a 值變時,求 (Γ) 之中心軌跡,并分別何部份之點爲楕圓之中心,何部份爲雙曲線之中心.

2. 求楕圓之等長相配直徑.

3. 設 A 爲有心錐線之一定點.此點之切線與任意兩相配直徑交於 M, M'.求證 $\overline{AM}$ 與 $\overline{AM'}$ 之積爲常數,其值與 OA 之相配直徑半長之平方等.

第六章

圓錐曲線之軸

本章所論,設位標軸爲正交.

29. 軸及主向(Principal directions) 圓錐曲線之直徑若平分與其垂直諸弦,此直徑謂之圓錐曲線之軸.與軸垂直諸弦之方向,謂之主向.由前章之結果,兩相配方向之角度係數m, m'有下之關係

$$m'=-\frac{A+Bm}{B+Cm}.$$

若此兩方向向爲垂直,則$mm'+1=0$,故主向爲下方程式之根

$$Bm^2+(A-C)m-B=0. \tag{1}$$

設此方程式之一根爲m_1,則軸之方程式爲(觀第二十四節)

$$f'_x+m_1f'_y=0.$$

因方程式(1)之首尾兩項係數之積爲負,故(1)之兩根爲實數;又兩根之積爲-1,故兩主向正交.

設M爲漸近方向之角度係數,則

$$A+2BM+CM^2=0. \tag{2}$$

以M_1, M_2表此方程式之兩根,以V_1表M_1與m所成之角,V_2表m與M_2所成之角,則

$$\tan V_1=\frac{m-M_1}{1+mM_1},\quad \tan V_2=\frac{M_2-m}{1+mM_2},$$

$$\tan V_1-\tan V_2=\frac{-(M_1+M_2)+2m(1-M_1M_2)+m^2(M_1+M_2)}{(1+mM_1)(1+mM_2)},$$

但 $$M_1+M_2=-\frac{2B}{C},\quad M_1M_2=\frac{A}{C},$$

故 $$\tan V_1-\tan V_2=\frac{2B+2m(C-A)-2Bm^2}{C(1+mM_1)(1+mM_2)}=0.$$

由此證明主向平分兩漸近方向所成之角.

30. 橢圓及雙曲線之軸 方程式(1)有兩根,故橢圓及雙曲線有兩主向互相垂直.由是橢圓及雙曲線之兩軸,爲互相垂直之兩相配直徑,又雙曲線之軸爲兩漸近線之分角線.

設 m_1, m_2 爲方程式(1)之兩根,則兩軸之方程式爲

$$f'_x+m_1f'_x=0,\qquad f'_x+m_2f'_y=0.$$

或以一方程式表之

(3) $$(f'_x+m_1f'_y)(f'_x+m_2f'_y)=0,$$

但 m_1, m_2 合方程式

(1) $$Bm^2+(A-C)m-B=0,$$

卽 $$(m-m_1)(m-m_2)=0.$$

若代此方程式之 m 以 $-\frac{f'_x}{f'_y}$, 則得方程式(3),故於(1)式中代 m 以 $-\frac{f'_x}{f'_y}$ 卽得兩軸方程式

$$Bf'^2_x-(A-C)f'_xf'_y-Bf'^2_y=0.$$

如能知圓錐曲線之中心(x_0, y_0)，則代m以$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$於方程式(1)，卽得兩軸之方程式

$$B(y-y_0)^2+(A-C)(y-y_0)(x-x_0)-B(x-x_0)^2=0.$$

若中心與原點相合，則方程式爲

$$By^2+(A-C)xy-Bx^2=0.$$

31. 拋物線之軸　拋物線之兩漸近方向合而爲一，故其分角線之一與此方向平行，其他與此方向垂直．與漸近方向平行之方向，謂之奇異主向．作與此方向平行之直線，與曲線祇相交於一點，故此方向並無相應之軸．反之，與漸近方向垂直之方向，則與一軸相應．可知拋物線祇有一軸．

設　$$f(x,y)\equiv(ux+vy)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

表拋物線方程式，其漸近方向之角度係數爲$-\dfrac{u}{v}$，其垂直之方向爲$\dfrac{v}{u}$，故軸之方程式如下

$$f'_x+\frac{v}{u}f'_y=0.$$

卽　$$ux+vy+\frac{Du+Ev}{u^2+v^2}=0$$

若拋物線之方程式爲

$$f(x, y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

設　$$A\neq 0.$$

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2\equiv\frac{1}{A}(Ax+By)^2,$$

則軸之方程式爲

$$Af'_x+Bf'_y=0.$$

〔註〕 如 $B=0, A=C$, 則方程式(1)爲不定;換言之,圓以任意之方向爲主向.

32. 頂點(Vertices) 軸與圓錐直線相交之點謂之頂點.第二十七節性質一之 L 直線如與圓錐曲線之軸垂直,則切點卽頂點.故頂點之切線與經過此點之軸垂直.

習題六

1. 求下列二次曲線之軸及頂點.

(a) $x^2+4xy+5y^2+3x-2y+\lambda=0$,

(b) $4x^2-12xy+9y^2+6x-9y+\lambda=0$.

2. 位標軸爲正交,設有二次曲線

$$[(x-a)^2+(y-b)^2-c^2](1+m^2)-(y-mx)^2=0,$$

a, b, c 爲常數, m 表變數.求證此式所表拋物線之軸過一定點.

第七章

焦點及準線 (Focus and Directrix)

本章所論,仍設位標軸爲正交.

33. 定義 一定點 F 與圓錐曲線上一點 M 之距離如爲 M 點之位標之平直函數者,則 F 點之圓錐曲線之焦點:

$$MF=|lx+my+h|; \tag{1}$$

x, y 爲 M 點之位標, l, m, h 表常數.

此定義與位標軸無關.因令位標軸變換,則 x,y 爲 x',y' 之平直函數,而 MF 仍爲 x',y' 之平直函數.

若以 (α,β) 表 F 點之位標,則等式(1)可寫爲

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=|lx+my+h|,$$

將兩邊自乘得

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(lx+my+h)^2.$$

由定義,圓錐曲線之無論何點均合此方程式,故此方程式可視爲圓錐曲線方程式.又此方程式爲二次,故僅圓錐曲線始許有此種之焦點定義.

令表 MF 距離之平直函數爲零:

$$lx+my+h=0,$$

則得一直線方程式,此直線謂之與 F 焦點相應之準線.

34. 定理　圓錐曲線上之任意點與焦點之距離,比此任意點與相應準線之距離,其一值為常數.

設 $M(x, y)$ 為圓錐曲線上之任意點,F 為焦點,則

$$MF=|lx+my+h|.$$

又 M 點準線之距離 MP 為

$$MP=\frac{|lx+my+h|}{\sqrt{l^2+m^2}}.$$

故
$$\frac{MF}{MP}=\sqrt{l^2+m^2},$$

即言兩距離之比值為常數.

此比值謂之離心率 (Excentricity).

35. 逆定理　點與定點 F 之距離與定直線 D 之距離,其值如為常數,則點之軌跡為圓錐曲線,此圓錐曲線以 F 為焦點,以 D 為準線.

先定位標軸.以 F 為原點,y 軸與 D 直線平行,x 軸與 y 軸正交,則 D 之方程式為 $x-a=0$.

若以 e 表 $M(x, y)$ 點與 F 之距離比 M 與 D 之距離之值,則

$$x^2+y^2=e^2(x-a)^2,$$

此為圓錐曲線方程式.因

$$\sqrt{x^2+y^2}=e|x-a|,\text{ 即 } mF=e(x-a);$$

故 F 為焦點,D 為準線,e 為離心率.

此圓錐曲線方程式

$$x^2(1-e^2)+y^2+2ae^2x-a^2e^2=0$$

之判別式爲

$$\begin{vmatrix} 1-e^2, & 0, & ae^2 \\ 0, & 1, & 0 \\ ae^2, & 0, & -a^2e^2 \end{vmatrix} = -a^2e^2,$$

故若 $a \neq 0$, 卽言 D 不經 F 點, 則曲線爲眞圓錐曲線(卽言非兩直線). 又此處 $AC-B^2=1-e^2$, 故曲線爲橢圓, 雙曲線或拋物線, 視 e 之值小於, 大於或等於一而定.

由此定理, 可得焦點之新定義:

如一點 F 至曲線上任意點 M 之距離與 M 至一定直線 D 之距離之比値爲常數, 則 F 爲曲線之焦點.

36. 焦點之搜尋　圓錐曲線之普通方程式爲

$$f(x, y) \equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \tag{1}$$

若其焦點在 (α, β) 點, 則曲線之方程式亦可寫爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+h)^2=0. \tag{2}$$

此兩方程式既表同曲線, 則其相應之係數爲正比, 故可得五方程式以定五未知數 α, β, l, m, h. 但解此等方程式, 計算常覺困難, 若應用下之定理, 則較簡便:

(α, β) 點爲圓錐曲線 $f(x, y)=0$ 之焦點之充分及必須之條件乃有 λ 値存在, 能令

$$\frac{f(x, y)}{\lambda}+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$

爲x,y平直函數之平方.

1° 條件爲必須的. 若(α,β)爲$f(x,y)=0$之焦點,則(1),(2)兩方程式表同曲線,故

$$f(x,y)\equiv-\lambda[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(lx+my+h)^2],$$

即 $$f(x,y)+\lambda[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]\equiv\lambda(lx+my+h)^2,$$

亦即 $$\frac{f(x,y)}{\lambda}+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\equiv(lx+my+h)^2.$$

2° 條件爲充分的. 若

$$\frac{f(x,y)}{\lambda}+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\equiv(ux+vy+w)^2,$$

則 $$f(x,y)\equiv\lambda\{(ux+vy+w)^2-[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]\},$$

而曲線之方程式爲

$$(ux+vy+w)^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2,$$

此式表(α,β)點爲曲線之焦點.

既證明此定理,即可求得焦點.已知

$$\frac{f(x,y)}{\lambda}+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$

爲x,y平直函數之平方,將此式依x之遞降次序寫爲

$$ax^2+b_1(y)x+c_2(y)$$

(a爲常數,b_1爲y之一次函數,c_2爲y之二次函數)得

$$[b_1(y)]^2-4ac_2(y)\equiv0.$$

此式既恆等於零,故y^2與y之係數及不含y之項均爲零,由是可得三方程式以定λ,α,β之值.

既得λ, α, β之値，則

$$\frac{f(x,y)}{\lambda}+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2\equiv(ux+vy+w)^2.$$

曲線之方程式爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(ux+vy+w)^2$$

卽言$ux+vy+w=0$直線爲曲線之準線.

若將曲線方程式寫爲

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(u^2+v^2)\frac{(ux+vy+w)^2}{u^2+v^2},$$

則得離心率

$$e=\sqrt{u^2+v^2}$$

習題七

1. 求下列二次曲線之焦點及準線:

(a) $2xy+4x-1=0.$

(b) $x^2+7y^2+8xy+2x-1=0.$

2. 設位標軸ox, oy爲正交，在ox軸上有點$A(a, 0)$. 在xoy平面上，有雙曲線以oy軸爲漸近線而切ox軸於A者. 試求其焦點之軌跡，及準線之包線.

3. 設位標軸爲正交；在ox軸上有點$A(a,0)$. 在xoy平面上有拋物線過A點而切oy軸於原點.

(a) 求拋物線焦點之軌跡.

(b) 求拋物線頂點之軌跡.

(c) 求拋物線準線之包線.

第八章

二次式之簡約

37. 位標軸之選擇 欲研究二次曲線之性質,當選擇位標軸,令曲線之方程式愈簡愈妙.

(a) 橢圓及雙曲線.——若以中心為原點,則方程式不含一次項(見第二十一節).再以兩相配直徑為 x 及 y 軸,則每一 x 值,應由曲線方程式得相同而符號相反之兩 y 值與之相應,因 ox 平分與 oy 軸平行諸弦故也.由此,方程式應不含 xy 項.故有圓錐曲線,若以任意兩相配直徑為位標軸,則其方程式為

(1) $$Ax^2+Cy^2+F=0$$

曲線之兩軸為互相垂直之兩相配直徑,故曲線若以其兩軸為位標軸,則方程式亦如(1)式.

由此,若已知曲線之兩相配直徑為 $P=0$, $Q=0$, 則曲線之方程式為

$$\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma=0.$$

如曲線為雙曲線,則以兩漸近線為位標軸,方程式應不含 x^2 及 y^2 項,否則 $x=\infty$, $y=0$ 不能合方程式.又原點為中心,故方程式應不含一次項.由是雙曲線若以兩漸近線為位標軸,則

其方程式如下

$$2Bxy+F=0.$$

(b) 拋物線.——拋物線之方程式爲

$$(ux+vy)^2+2Dx+2Ey+E=0;$$

其漸近方向以方程式

$$ux+vy=0$$

定之.若令新x軸與此方向平行,即言以拋物線之任意直徑爲新x軸,則方程式變爲

$$C_1y^2+2D_1x+2E_1b+F_1=0.$$

新x軸與拋物線相交於一點.若以此點之切線爲y軸,則方程式更簡,因切線與曲線相遇於雙點,故從上之方程式,令$x=0$,應得y之兩根均爲零,由是$E_1=0$, $F_1=0$,而曲線之方程式爲

$$C_1y^2+2D_1x=0.$$

拋物線之軸與頂點切線互相垂直,若拋物線以此兩曲線爲位標軸,則其方程式亦如(2)式.

由此.如已知拋物線之一直徑爲$P=0$,此直徑與曲線相遇點之切線爲$Q=0$,則以此兩直線爲位標軸之拋物線方程式如下:

$$P^2+kQ=0,$$

k表常數.

38. 橢圓及雙曲線方程式之簡約　欲計算簡約後方程

式各項之係數,假設新舊位標軸均爲正交.故在橢圓及雙曲線,以兩軸爲新位標軸;在拋物線,以過頂點之軸及頂點切線爲新位標軸.

設橢圓或雙曲線方程式爲

$$f(x, y)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

先移原點於曲線之中心 ω 點,而軸之方向不變,則由第二十三節之結果,得

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+\frac{\Delta}{f}=0.$$

再以曲線之軸爲 x' 及 y' 軸,若 ωx 與 $\omega x'$ 成 α 角,則變換位標方程式爲

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha;$$

曲線方程式變爲

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)$$
$$+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+\frac{\Delta}{f}=0.$$

令 $$A_1=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha,$$

$$B_1=-A\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+C\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$C_1=A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha,$$

則方程式簡寫如下:

$$A_1x'^2+2B_1x'y'+C_1y'^2+\frac{\Delta}{f}=0.$$

因 x' 及 y' 爲曲線之軸,故 B_1 爲零,由是

$$-A\cos\alpha\sin\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+C\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

即
$$(C-A)\sin 2\alpha+2B\cos 2\alpha=0,$$

故

(1)
$$\tan 2\alpha=\frac{2B}{A-C}.$$

如曲線爲圓,則 $B=0$, $A-C=0$, 此方程式爲不定.除此情形外,方程式(1)有解答.設 θ 角之絕對值少於或等於 $\frac{\pi}{2}$, 且其切線爲 $\frac{2B}{A-C}$, 則(1)之普通解答爲

$$2\alpha=\alpha+k\pi,\text{ 即 }\alpha=\frac{\theta}{2}+\frac{k\pi}{2},$$

k 表整數.由是 α 如取下列四值之一:

$$\alpha=\frac{\theta}{2},\ \alpha=\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2},\ \alpha=\frac{\theta}{2}+\pi,\ \ \alpha=\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2},$$

則曲線方程式變爲

$$A_1x'^2+C_1y'^2+\frac{\Delta}{f}=0.$$

此處

$$A_1=A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha\sin\alpha+C\sin^2\alpha,$$

$$C_1=A\sin^2\alpha-2B\cos\alpha\sin\alpha+C\cos^2\alpha.$$

由最後兩式得

$$A_1+C_1=A+C,$$

$$A_1-C_1=(A-C)\cos 2\alpha+2B\sin 2\alpha.$$

由方程式(1)得

$$\cos 2\alpha=\frac{A-C}{\varepsilon\sqrt{(A-C)^2+4B^2}},\quad \sin 2\alpha=\frac{2B}{\varepsilon\sqrt{(A-C)^2+4B^2}},$$

$\varepsilon=\pm 1$; 故

$$A_1-C_1=\varepsilon\sqrt{(A-C)^2+4B^2}$$

既知 A_1+C_1 及 A_1-C_1 則

$$\begin{aligned}4A_1C_1&=(A_1+C_1)^2-(A_1-C_1)^2\\&=(A+C)^2-[(A-C)^2+4B^2],\end{aligned}$$

故 $$A_1C_1=(AC-B^2).$$

由是知 A_1 及 C_1 爲方程式

(2) $$S^2-(A+C)S+AC-B^2=0$$

之根.

總括上述,橢圓及雙曲線以其軸爲位標軸之方程式如下

$$S_1x^2+S_2y^2+\frac{\Delta}{f}=0.$$

S_1 及 S_2 爲方程式(2)之根.

1° 橢圓. $AC-B^2>0$, 卽 $f>0$. S_1 及 S_2 同符號.

若 Δ 與 S_1 或 S_2 同符號,則曲線爲虛橢圓.

若 $\Delta=0$, 則爲點橢圓.

若 Δ 與 S_1 或 S_2 異號,則曲線爲實橢圓. x 軸與曲線相遇於 A, A' 點,其橫位標爲 $x^2=-\frac{\Delta}{fS_1}$; y 軸與曲線相遇於 B, B' 點,其縱位標爲 $y^2=-\frac{\Delta}{fS_2}$. 故橢圓之四頂點爲實點.

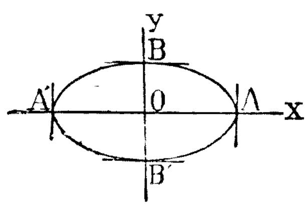


圖 12

令
$$-\frac{\Delta}{fS_1}=a^2,\qquad -\frac{\Delta}{fS_2}=b^2.$$

則橢圓方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

$AA'=2a$, $BB'=2b$ 謂之兩軸之長.

2° 雙曲線. $AC-B^2<0$, 卽 $f<0$, S_1 及 S_2 異號.

若 $\Delta=0$, 則曲線為兩直線.

若 $\Delta\neq0$, 則曲線為雙曲線, 設 Δ 與 S_1 同符號,則 x 軸與曲線相交於兩實點 A 及 A', 但 y 軸與曲線相交於兩虛點.故雙曲線之二頂點為實點,其他二頂點為虛點. 令

$$-\frac{\Delta}{fS_1}=a^2,\quad -\frac{\Delta}{fS_2}=-b^2,$$

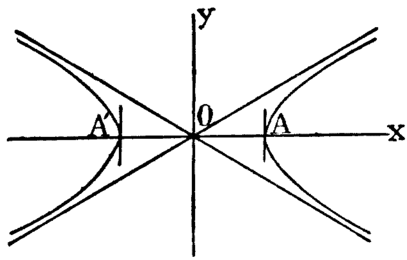


圖 13

則雙曲線方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

x 軸謂之實軸或貫軸, y 軸謂之虛軸或非貫軸. $2a$ 及 $2b$ 謂之兩軸之長.

39. 拋物線方程式之簡約　設 $A\neq0$, 則拋物線方程式為

$$\frac{1}{A}(Ax+By)^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

先變換軸之方向,令漸近方向為 x' 軸方向, y' 軸與之垂直, 但

原點不變. 以α表(Ox, Ox')角, 則變換位標方程式爲

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha,$$

以此等值代入曲線方程式

(1) $$\frac{1}{A}[\,(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + B(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)]^2$$

$$+2D(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 2E(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + F = 0.$$

x'軸旣與漸近方向平行, 則此軸對於舊位標之方程式爲 $Ax + By = 0$. 一點(x, y)與此軸之距離爲$\frac{Ax+By}{\sqrt{A^2+B^2}}$, 同點$(x', y')$與此軸之距離爲$|y'|$, 故

$$(Ax + By)^2 = (A^2 + B^2)y'^2,$$

即言位標軸變換後, 方程式之x'^2及$x'y'$項爲零. 欲合此情形, 方程式(1)方括弧內x'之係數應爲零:

(2) $$A\cos\alpha + B\sin\alpha = 0.$$

由是方程式(1)變爲

(3) $$C_1y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F = 0,$$

此處

$$C_1 = \frac{(B\cos\alpha - A\sin\alpha)^2}{A},\ D_1 = D\cos\alpha + E\sin\alpha,$$

$$E_1 = -D\sin\alpha + E\cos\alpha.$$

方程式(2)之解答爲

$$\tan\alpha = -\frac{A}{B},$$

此值定Ox'之方向.由此方程式可得

$$\sin\alpha=-\frac{A}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}},\qquad \cos\alpha=\frac{-B}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}\ (\varepsilon=\pm1);$$

於是

$$C_1=\frac{A^2+B^2}{A},\ D_1=\frac{AE-BD}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2}}.$$

因 $ef-e^2=A\Delta$, 而 $f=0$, 故 $e=\pm\sqrt{-A\Delta}$, 卽 $AE-BD=\mp\sqrt{-A\Delta}$; 再以AC代B^2, 則得

$$C_1=A+C,\quad D_1=\pm\sqrt{-\frac{\Delta}{A+C}}$$

此處$\Delta\neq0$, 故$D_1\neq0$; 又A與C同號,故$C_1\neq0$.

現令原點移至(x_0, y_0)點,而軸之方向不變,則曲線之方程式爲

$$C_1(y+y_0)^2+2D_1(x+x_0)+2E_1(y+y_0)+F=0.$$

卽

$$C_1y^2+2D_1x+2y(C_1y_0+E_1)+C_1y_0^2+2D_1x_0+2E_1y_0+F=0.$$

吾人定x_0及y_0值令方程式中y之係數及常數項爲零:

$$C_1y+E_1=0,$$

$$C_1y_0^2+2D_1x_0+2E_1y_0+F=0.$$

C_1既異於零,故第一方程式定y_0值. 故$D_1\neq0$,第二方程式定x_0值.由此得拋物線以軸及頂點切線爲位標軸之方程式

$$C_1y^2+2D_1x=0,$$

卽
$$y^2=2px=0\quad\left(p=-\frac{D_1}{C_1}\right).$$

p之絕對值謂之拋物線之參數,其值為 $\sqrt{-\frac{\Delta}{(A+C)^3}}$.

習題八

簡約下列各方程式:

1. $(ax+by+c)^2\pm(a'x+b'y+c')^2=1$.

2. $(x-a)^2+(y-b)^2=(lx+my+h)^2$.

3. $x^2+4xy^2-2x+1=0$, $\left(\text{位標軸之交角設為}\ \frac{\pi}{3}\right)$.

4. $(2x+y+1)^2=x-2y$ $\left(\text{位標軸之交角設為}\ \frac{\pi}{2}\ \text{或}\ \frac{\pi}{3}\right)$.

第九章

橢圓

40. 圓之射影 橢圓以其軸爲位標軸之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

設 $a>b$, A, A' 爲 Ox 與橢圓之交點, B, B' 爲 Oy 與橢圓之交點, 則 $AA'=2a$ 謂之大軸, $BB'=2b$ 謂之小軸.

以大軸爲直徑作圓,其方程式爲

$$x^2+y^2-a^2=0.$$

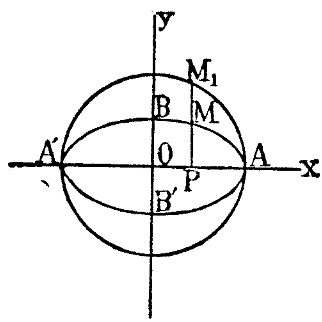


圖 14

於橢圓上取 M 點, 作 $MP \parallel Oy$, 此直線與圓相交於 M_1 (M 及 M_1 點在 x 軸之同邊). 如以 (x, y) 表 M 點之位標, (x_1, y_1) 表 M_1 點之位標, 則

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y_1=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

因 M 及 M_1 在 x 軸之同邊, 故

$$\frac{y}{y_1}=\frac{b}{a}, \quad 即 \quad \frac{PM}{PM_1}=\frac{b}{a}.$$

現設含橢圓之平面不變, 而含圓之平面繞 Ox 軸而轉, 則 MPM_1 成 V 角.

令
$$\cos V=\frac{b}{a},$$

此時M_1點投射於含橢圓之平面之影爲M,因

$$PM=\frac{b}{a}PM_1,$$

卽
$$PM=PM_1\cos V$$

故也.但M爲橢圓之任意點,故橢圓可視爲圓之射影.

41. 切線 曲線$f(x,y,z)=0$之切線方程式爲

$$Xf'_x+Yf'_y+f'_z=0.$$

若應用於橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z^2=0.$$

則得切線方程式

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-z=0;$$

轉用尋常位標

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0.$$

x及y應合橢圓方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

如令

(1)
$$\frac{x}{a}=\cos\phi,\qquad \frac{y}{b}=\sin\phi,$$

則x及y仍合橢圓方程式,而切線方程式可寫爲

$$\frac{X\cos\phi}{a}+\frac{Y\sin\phi}{b}-1=0.$$

方程式(1),或

$$x=a\cos\phi,\qquad y=b\sin\phi,$$

謂之橢圓之參數方程式.

42. 橢圓之直徑　已與橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

與方向(α,β)相配之直徑方程式爲

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=0,$$

此直線經過橢圓之心.

反之,凡經過心之直線$ux+vy=0$均爲直徑,與方向(a^2u,b^2v)相配.

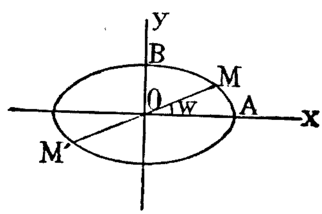


圖 15

直徑與橢圓相交於兩實點M,M'. MM'謂之直徑之長.欲研究直徑之長,可研究M在橢圓上由A至B時OM之變化.

以ω表AOM角,ρ表OM之長,則

$$x=\rho\cos\omega,\qquad y=\rho\sin\omega,$$

而橢圓之方程式爲

$$\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}\right)-1=0.$$

故

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}+\sin^2\omega\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right).$$

由此式觀之,當 ω 由 0 至 $\frac{\pi}{2}$ 時, $\frac{1}{\rho^2}$ 由 $\frac{1}{a^2}$ 增至 $\frac{1}{b^2}$, 卽言 ρ 由 a 減至 b.

43. 兩正交直徑所張之弦 設 OM_1 與 OM 兩直徑彼此垂直,以 ρ_1 表 OM_1 之長,則

$$\frac{1}{{\rho_1}^2}=\frac{\cos^2\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}{a^2}+\frac{\sin^2\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)}{b^2}$$

$$(2)\qquad =\frac{\sin^2\omega}{a^2}+\frac{\cos^2\omega}{b^2}.$$

(1),(2) 兩式相加,得

$$\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{{\rho_1}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

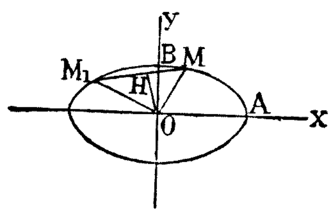


圖 16

作 $OH\perp MM_1$, 則

$$\overline{OM}^2\,\overline{OM_1}^2=\overline{OH}^2\,\overline{MM_1}^2;$$

(等式之每邊爲 OMM_1 三角形面積之兩倍之平方)由此式得

$$\frac{1}{\overline{OH}^2}=\frac{\overline{MM_1}^2}{\overline{OM}^2\,\overline{OM_1}^2}=\frac{1}{\overline{OM}^2}+\frac{1}{\overline{OM_1}^2}$$

故 OH 之長爲定值.由是得下之結果:

橢圓之弦若由心觀之爲直角,則與一與橢圓同心之圓相切.

44. 相配直徑　兩相配直徑 D, D' 之角度係數 m, m' 有下之關係(見第二十八節)

$$mm' = -\frac{b^2}{a^2}.$$

設 M 爲橢圓上一點; OM 之相配直徑與橢圓相交於兩點, 設其一爲 M'. 試以 M 之位標 (x, y) 表 M' 之位標 (x', y').

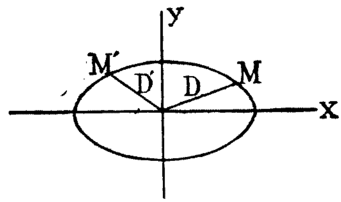


圖 17

M, M' 均在橢圓上, 故

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

M' 點在 OM 之相配直徑上, 故

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0.$$

由最後之等式, 得

$$\frac{\frac{x'}{a}}{\frac{y}{b}}=\frac{\frac{y'}{b}}{-\frac{x}{a}}=\pm\frac{\sqrt{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}}}{\sqrt{\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}}}=\pm 1;$$

故 $$x'=\pm\frac{ay}{b}, \quad y'=\mp\frac{bx}{a}.$$

設 M, M' 兩點之位置如圖 17 所示, 則

$$x'=-\frac{ay}{b}, \quad y'=\frac{bx}{a}.$$

玆證 Apollonius 定理:

1° 兩相配直徑之長平方和爲常數.

2° 兩相配直徑所成之平行四邊形之面積爲常數.

定理一之證明:

$$\overline{OM}^2+\overline{OM'}^2=x^2+y^2+x'^2+y'^2,$$

$$x^2+x'^2=x^2+\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=a^2,$$

$$y^2+y'^2=y^2+\frac{b^2x^2}{a^2}=b^2\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)=b^2,$$

$$\therefore\quad \overline{OM}^2+\overline{OM'}^2=a^2+b^2.$$

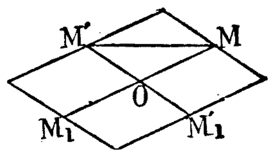


圖 18

定理二之證明: 兩相配直徑 MM_1 及 $M'M'_1$ 所成之平行四邊形,其面積爲 OMM' 三角形面積之八倍. 試求 OMM' 之面積. MM' 直線之方程式爲

$$(y-y')(X-x)-(x-x')(Y-y)=0;$$

故由 O 至 MM' 之距爲

$$\left|\frac{y(x-x')-x(y-y')}{\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}}\right|$$

但 $\overline{MM'}$ 之長爲 $\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}$, 故

$$\text{二倍 } OMM' \text{ 之面積}=|y(x-x')-x(y-y')|=|xy'-yx'|$$

$$=\frac{bx^2}{a}+\frac{ay^2}{b}=ab$$

由此,若以 a', b' 表兩相配直徑之長之半, θ 爲此兩直徑所成之角,則 Apollonius 之定理爲

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2,$$

$$a'b'\sin\theta=ab.$$

45. 焦點 橢圓之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \qquad (a>b).$$

欲求焦點,當求三未知數α, β, λ,令

$$(E) \qquad \frac{x^2}{\lambda a^2}+\frac{y^2}{\lambda b^2}-\frac{1}{\lambda}+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$

爲平直函數之平方(見第三十六節).(E)式可寫爲

$$(E) \qquad x^2\left(1+\frac{1}{\lambda a^2}\right)+y^2\left(1+\frac{1}{\lambda b^2}\right)-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-\frac{1}{\lambda};$$

此式不含xy項,故平直函數或不含x項,或不含y項.

1° 設平直函數不含x項,則(E)之x^2及x項應爲零.故

$$1+\frac{1}{\lambda a^2}=0, \qquad 2\alpha=0,$$

即

$$\lambda=-\frac{1}{a^2}, \qquad \alpha=0.$$

此時多項式(E)爲

$$y^2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)-2\beta y+\beta^2+a^2;$$

此式應爲平方,故

$$\beta^2-\left(\beta^2+a^2\right)\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)=0.$$

即

$$\beta^2=b^2-a^2.$$

由是知焦點爲兩虛點: $\alpha=0, \beta=\pm\sqrt{b^2-a^2}=\pm ci(c^2=a^2-b^2)$.

2° 設平直函數不含y項,則(E)之y^2及y項應為零,故

$$1+\frac{1}{\lambda b^2}=0, \qquad 2\beta=0,$$

即
$$\gamma=-\frac{1}{b^2}, \qquad \beta=0.$$

此時多項式為

$$(E_1) \qquad x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2ax+a^2+b^2;$$

此式應為平方,故

$$a^2-\left(a^2+b^2\right)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=0.$$

即
$$a^2=a^2-b^2.$$

由是知焦點為兩實點: $\alpha=\pm c, \beta=0.$

46. 準線及離心率 試求關於焦點$(+c, 0)$之準線及離心率.在多項式(E)及(E_1)中,令$\alpha=c, \beta=0, \lambda=-\frac{1}{b^2}$,則

$$(E)=-b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+(x-c)^2+y^2;$$

$$\begin{aligned}(E_1)&=x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2cx+c^2+b^2\\&=x^2\frac{c^2}{a^2}-2cx+a^2\\&=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2.\end{aligned}$$

但(E)及(E_1)為恆等,故

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\equiv\frac{1}{b^2}\left[(x-c)^2+y^2-\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2\right],$$

而橢圓之方程式爲

(1) $$(x-c)^2+y^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2.$$

由此式可知關於焦點$(c,0)$之準線爲$\frac{c}{a}x-a=0$,離心率爲

$\sqrt{l^2+m^2}=\frac{c}{a}$(見第三十四節).

關於焦點$(-c,0)$之準線及離心率,可照前法計算,得恆等

式 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\equiv\frac{1}{b^2}\left[(x+c)^2+y^2-\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2\right],$$

則橢圓之方程式爲

(2) $$(x+c)^2+y^2=\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2,$$

故準線爲$\frac{c}{a}x+a=0$,離心率爲$\sqrt{l^2+m^2}=\frac{c}{a}$.

兩焦點之離心率相同,故總稱$\frac{c}{a}$爲橢圓之離心率,其值小於一.

47. 焦點及準線之作圖 設$ABA'B'$爲橢圓.以橢圓之心O爲心,OA(卽a)爲半徑作圓.

以B爲心,a爲半徑,作弧.此弧與AA'相交於F及F'.

$$\overline{OF}^2=\overline{BF}^2-\overline{OB}^2=a^2-b^2=c^2.$$

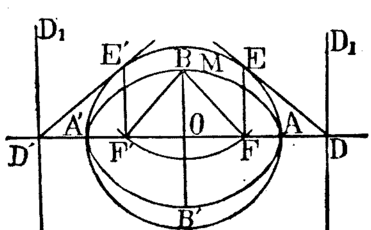


圖 19

可知F爲焦點.同理F'亦爲焦點.經F及F'作OB之平行線,與圓相交於E及E'點.於E及E'點作圓之切線,與AA'之延長線相交於D及D'點.經D及D'作OB之平行線DD_1及$D'D'_1$因

$$\overline{OD}=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OF}}=\frac{a^2}{c},$$

故 DD_1 之方程式爲

$$x-\frac{a^2}{c}=0,\quad 卽\quad \frac{c}{a}x-a=0,$$

可知 DD_1 爲準線.依同理 $D'D'_1$ 亦爲準線.

48. 焦點定理　橢圓上任意點至兩焦點之距離和爲常數,其值等於大軸之長.

設 $M(x, y)$ 爲橢圓上之一點,由第四十六節 (1),(2) 兩式得

$$\overline{MF}=\left|\frac{c}{a}x-a\right|,\quad \overline{MF'}=\left|\frac{c}{a}x+a\right|,$$

但 $\overline{MF}$ 及 $\overline{MF'}$ 應取正值,故

$$\overline{MF}=a-\frac{c}{a}x,\quad \overline{MF'}=a+\frac{c}{a}x;$$

相加得

$$\overline{MF}+\overline{MF'}=2a.$$

逆定理.——如 $M(x,y)$ 點與橢圓之兩焦點 F 及 F' 之距離和爲 $2a$,則 M 點在橢圓上.

令　$u=MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ v=MF'=\sqrt{(x-c)^2+y^2};$

題設

$$u+v-2a=0. \tag{1}$$

但此方程式爲無理式;欲令其爲有理式,當以下列三因數

$$-u-v-2a,\quad u-v-2a,\quad -u+v-2a$$

之積乘方程式之左段,得

(2) $$(u+v-2a)(-u-v-2a)(u-v-2a)(-u+v-2a)=0.$$

(1),(2) 兩方程式相同,因 $-u-v-2a$ 之值常爲負;又因 $|MF-MF'|<FF'$,故 $|u-v|<2a$,而 $u-v-2a$ 及 $-u+v-2a$ 亦均爲負

方程式(2)可連續書之如下:

$$[4a^2-(u+v)^2][4a^2-(u-v)^2]=0,$$

$$(4a^2-u^2-v^2-2uv)(4a^2-u^2-v^2+2uv)=0,$$

$$(4a^2-u^2-v^2)^2-4u^2v^2=0,$$

$$(u^2-v^2)^2-8a^2(u^2+v^2)+16a^4=0.$$

但 $$u^2=(x-c)^2+y^2,\quad v^2=(x+c)^2+y^2,$$

故 $u^2+v^2=2(x^2+y^2+c^2)$, $u^2-v^2=-4cx$, 下之方程式變爲

$$16(c^2-a^2)a^2\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}-1\right]=0.$$

卽 $$-16a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0.$$

此式證明 M 點在橢圓上.

總括本節所述,可得下之定理:

若一點與兩定點之距離和爲常數,則點之軌跡爲橢圓,此橢圓以兩定點爲兩焦點,以已與之常數爲大軸之長.

49. 切線對於焦點之數定理

定理一:設有以 F 及 F' 爲焦點之橢圓,在此橢圓上任意點 M 之切線,平分三角形 MFF' 在 M 點之外角.

玆先證明:橢圓之兩焦點在橢圓上任意點之切線之同邊.因以 F 及 F' 之位標代入切線方程式

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-1=0$$

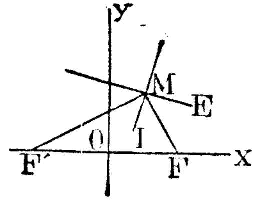


圖 20

之左段,得 $\frac{cx}{a^2}-1$ 及 $-\frac{cx}{a^2}-1$, 此兩值之積爲 $1-\frac{c^2x^2}{a^4}$, 但在橢圓, $x^2\leqslant a^2, c^2<a^2$, 故 $1-\frac{c^2x^2}{a^4}>0$, 即言 F 及 F' 在切線之同邊.

試求 MF 及 MF' 兩線之分角線 D 之角係數. 設 MF, MF' 及 D 之角係數爲 m, m', μ. 因 D 平分 MF 及 MF' 所成之角, 故

$$\tan(MF,D)=\tan(D,MF'),$$

即
$$\tan(MF,D)+\tan(MF',D)=0,$$

亦即

$$\frac{\mu-m}{1+\mu m}+\frac{\mu-m'}{1+\mu m'}=0. \tag{1}$$

由此方程式可求得 μ 之值.

欲證明本定理,須證 M 點之切線之角係數合方程式(1).此處 MF 之方程式爲 $\frac{X-c}{x-c}=\frac{Y}{y}$, 故 $m=\frac{y}{x-c}$; MF' 之方程式爲 $\frac{X+c}{x+c}=\frac{Y}{y}$, 故 $m'=\frac{y}{x-c}$. M 點之切線之角係數爲 $-\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2}$. 試以此角係數代 μ 於(1)式,其第一項爲

$$\frac{\mu-m}{1+\mu m}=\frac{-\frac{b^2x}{a^2y}-\frac{y}{x-c}}{1-\frac{b^2xy}{a^2y(x-c)}}=\frac{-b^2x(x-c)-a^2y^2}{a^2y(x-c)-b^2xy};$$

但 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, $a^2-b^2=c^2$, 故

$$\frac{\mu-m}{1+\mu m}=\frac{b^2(cx-a^2)}{cy(cx-a^2)}=\frac{b^2}{cy}.$$

欲計算(1)式之第二項,可照上法令 c 爲 $-c$, 得

$$\frac{\mu-m'}{1+\mu m'}=-\frac{b^2}{cy};$$

故

$$\frac{\mu-m}{1+\mu m}+\frac{\mu-m'}{1+\mu m'}=0.$$

已知 F 及 F' 在切線之同邊,故切線平分三角形 MFF' 在 M 點之外角.

定理二: 1° 橢圓之焦點關於切線之對稱點之軌跡爲圓,此圓以其他焦點爲心,大軸爲半徑.

2° 橢圓之焦點投射於切線之影之軌跡爲圓,此圓以大軸爲直徑.

由 F 點作切線 ME 之垂線,與 MF' 相遇於 G 點, G 爲 F 關於 ME 之對稱點,因 ME 平分 GMF 角故也.由是 $MG=MF$, 而

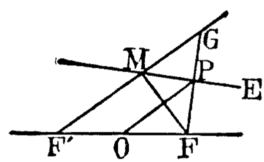


圖 21

$$F'G=MF'+MF=2a.$$

可知 G 之軌跡爲以 F' 爲心以 $2a$ 爲半徑之圓.連 O 及 F 投射於 ME 之影 P 之線與 $F'G$ 平行,故 $OP=\frac{1}{2}F'G=a$, 即言 P 之軌跡爲以大軸爲直徑之圓.

定理三: PM 及 PM' 爲由一點 P 至橢圓之兩切線 F 及 F' 爲橢圓之兩焦點, PM, PF 所成之角等於 PM', PF' 所成之角.

欲證明此定理,須證 PM, PM' 兩直線之分角線與 PF, PF' 兩直線之分角線相合.

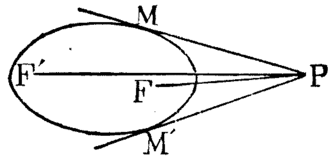


圖 22

先求兩直線之角係數 m, m',與其分角線之角係數 M, M' 之關係.設

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=0$$

表兩直線 $y=mx, y=m'x$; 分角線上任意點至此兩直線之距離相等,

$$\frac{y-mx}{\sqrt{1+m^2}}=\pm\frac{y-m'x}{\sqrt{1+m'^2}},$$

故
$$\frac{(y-mx)^2}{1+m^2}=\frac{(y-m'x)^2}{1+m'^2}$$

爲兩分角線方程式.此方程式可寫爲

$$y^2(m+m')+2xy(1-mm')-x^2(m+m')=0,$$

但 $m+m'=\frac{-2B}{C}$, $mm'=\frac{A}{C}$,故方程式可寫爲

$$By^2+(A-C)xy-Bx^2=0.$$

由此,如 m, m' 爲方程式

$$Cm^2+2Bm+A=0,$$

之根,則 M, M' 應合方程式

$$BM^2+(A-C)M-B=0,$$

即
$$M^2+\frac{A-C}{B}M-1=0.$$

欲證點本定理,可證明 $\frac{A-C}{B}$ 之值,在 PM, PM' 兩直線與在 PF, PF' 兩直線相同.

試求 PM, PM' 兩切線之方程式.橢圓之方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

設 (x, y) 為經過 $P(\alpha, \beta)$ 點之直線上之任意點,則此直線與橢圓相交點之位標

$$X=\alpha+\lambda(x-\alpha), \qquad Y=\beta+\lambda(y-\beta)$$

應合方程式

$$\frac{[\alpha+\lambda(x-\alpha)]^2}{a^2}+\frac{[\beta+\lambda(y-\beta)]^2}{b^2}-1=0.$$

即

$$\lambda^2[b^2(x-\alpha)^2+a^2(y-\beta)^2]+2\lambda[b^2\alpha(x-\alpha)+a^2\beta(y-\beta)]$$
$$+b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2\beta^2-a^2b^2=0.$$

若直線為切線,則此方程式應有雙根,故

$$(b^2-\beta^2)(x-\alpha)^2+2\,\alpha\beta(x-\alpha)(y-\beta)+(a^2-\alpha^2)(y-\beta)^2=0$$

為 PM, PM' 兩切線之方程式.可知 PM, PM' 之角係數為方程式

$$(a^2-\alpha^2)^2m^2+2m\,\alpha\,\beta+b^2-\beta^2=0$$

之根,此處

$$\frac{A-C}{B}=\frac{b^2-a^2+\alpha^2-\beta^2}{\alpha\,\beta}=\frac{\alpha^2-\beta^2-c^2}{\alpha\,\beta}.$$

又 MF, MF' 兩直線之角係數之方程式為

$$\left(m-\frac{\beta}{\alpha-c}\right)\left(m-\frac{\beta}{\alpha+c}\right)=0,$$

即
$$(\alpha^2-c^2)m^2-2\alpha\beta m+\beta^2=0,$$

此處

$$\frac{A-C}{B}=\frac{\beta^2-\alpha^2+c^2}{-\alpha\beta}=\frac{\alpha^2-\beta^2-c^2}{\alpha\beta}.$$

兩 $\frac{A-C}{B}$ 值相同,故定理云云.

50. 參數 經過焦點而與含焦點之軸垂直之弦,其長之半謂之橢圓之參數.在橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, 令 $x=c$, 得 y 之值

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2},\quad \text{即 } y=\pm\frac{b^2}{a}.$$

故橢圓之參數為 $\frac{b^2}{a}$.

習題九

1. 已知橢圓之相配兩直徑,求作橢圓之兩軸.

2. 求橢圓內接三等邊三角形中心之軌跡.

3. 已與一橢圓及其平面上之兩點 P, P'. 過此兩點作橢圓之平行弦 $AB, A'B'$. 當弦之方向變時,求證以 AB 及 $A'B'$ 為直徑之兩圓其根軸過一定點.

4. 設有兩橢圓

$$(E)\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}-1=0,\qquad (E')\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

5. 從錐線上一定點 M 作正交兩弦 MP, MQ. 求證連 PQ 之直線常過一定點 N, 且 N 在 M 點之法線上.當 M 在錐線上移動時,求 N 之軌跡.

第　十　章

雙　曲　線

51. 相配雙曲線　雙曲線以其軸爲位標軸之方程式如下：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

$2a$ 爲實軸 AA' 之長，$32b$ 爲虛軸 BB' 之長.

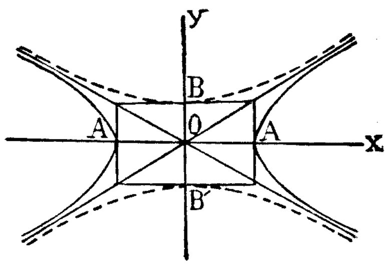


圖 23

經過 A, A', B, B' 四點可作長方形，其對角線之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$; 此兩直線爲雙曲線之漸近線.

若兩曲線之心相同，軸之方向及長相同，但一雙曲線之實軸則爲他雙曲線之虛軸，兩雙曲線謂之相配. 如圖 33 所示，虛線所表之雙曲線，以 BB' 爲實軸，其長爲 $2b$，以 AA' 爲虛軸，其長爲 $2a$. 此雙曲線與實線所表之雙曲線相配，其方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0.$$

兩相配雙曲線同以兩直線爲漸近線.

52, 切線 照橢圓章所載之法,可得雙曲線之切線方程式

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0.$$

x 及 y 應合雙曲線方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

令 $$\frac{x}{a}=\frac{1}{\cos\phi},\quad \frac{y}{b}=\tan\phi,$$

x 及 y 仍能適合雙曲線方程式.再令 $\tan\frac{\phi}{2}=t.$

則 $$\tan\phi=\frac{2t}{1-t^2},\qquad \cos\phi=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\phi}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

此處 $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ 式之前不用加 $\pm$ 雙號,因各變數之變化可列爲下表:

$\frac{\phi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
$\cos\phi$	-1	0	1	0	-1
ϕ	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π

故當 t 由 $-\infty$ 變至 $+\infty$ 時,可盡得 ϕ 角之變化.此時

$$(1)\qquad x=\frac{a(1+t^2)}{1-t^2},\qquad y=\frac{2bt}{1-t^2},$$

x 及 y 仍合雙曲線方程式,而切線方程式可寫爲

$$\frac{X(1+t^2)}{a}-\frac{2tY}{b}-(1-t^2)=0.$$

方程式(1)謂之雙曲線之參數方程式.

53. 雙曲線之直徑 與非漸近方向相配之直徑爲經過曲線之心之直線.反之,除漸近線外,凡經過心之直線,均爲與某定方向相配之直徑.

設α, β爲直徑之參數,則直徑上一點之位標爲

$$x=\alpha\rho; \qquad y=\beta\rho;$$

在直徑與雙曲線相遇之點,ρ之値爲方程式

$$\frac{\alpha^2\rho^2}{a^2}-\frac{\beta^2\rho^2}{b^2}-1=0$$

之根,故

$$\rho^2=\frac{1}{\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}}.$$

1° 如$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}>0$,則$(\alpha,\beta)$點在漸近線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$之正域,卽言直徑在漸近線含曲線之角內.此時直徑與曲線相交於兩實點M, M',

$$OM=OM'=\frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}}}.$$

2° 如$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}<0$,則直徑在漸近線不含曲線之角內.此時直徑不與曲線相交於實點.

欲研究OM在漸近線含曲線之角內之變化,設OL爲漸近線,ϕ爲AOL角,則$\tan\phi=\frac{b}{a}$, $\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

令$OM=\rho$, $\widehat{AOM}=\omega$, 則M點之位標爲$\rho\cos\omega, \rho\sin\omega$;由雙曲線方程式得

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\cos^2\omega}{a^2}-\frac{\sin^2\omega}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\sin^2\omega\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

當ω由O增至ϕ時,$\frac{1}{\rho}$由$\frac{1}{a}$減至0,即言ρ由a增至∞.故實軸爲直徑之最小者.

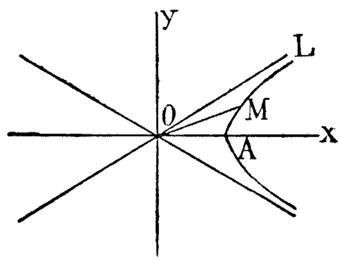


圖 24

54. 相配直徑　兩相配直徑D, D'之角度係數m, m'有下之關係

$$m\,m'=\frac{b^2}{a^2}.$$

由此式觀之,m及m'爲同符號,設兩者俱爲正;若$m<\frac{b}{a}$則$m'>\frac{b}{a}$, 即言D直徑在xOL角內,而D'則在yOL角內.當m由0增至$\frac{b}{a}$時,m'由

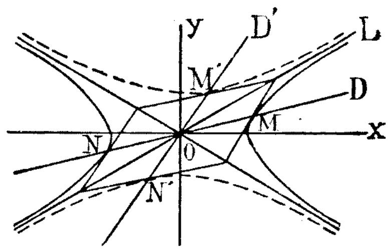


圖 25

$+\infty$減至$\frac{b}{a}$, OD, OD'兩直徑漸與漸近線OL接近,DOD'角漸

等於零.

D直徑與雙曲線相遇於兩實點M, N,在此兩點切線之方向與D'平行.D'直徑與相配雙曲線相遇於兩實點M', N',在此兩點切線之方向與D平行,因D, D'兩直線在相配雙曲線上亦爲相配兩直徑故也.四切線成一平行四邊形.

茲證明此平行四邊形之對角線與雙曲線之漸近線相合.因若以OD及OD'爲位標軸,令$OM=a'$,$OM'=b'$,則雙曲線及其相配雙曲線之方程式爲(見第三十七節)

$$\frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}-1=0,\quad \frac{x'^2}{a'^2}-\frac{y'^2}{b'^2}+1=0;$$

M及M'點之切線方程式爲

$$x'-a'=0,\qquad y'-b'=0,$$

此兩切線相遇於漸近線$\frac{x'}{a'}-\frac{y'}{b'}=0$之一點.

茲證明 Apollonius 定理: 1° 兩相配直徑之長之平方差爲常數.

2° 兩相配直徑所成之平行四邊形之面積爲常數.

如圖 25,設M點之位標爲(x, y),M'點之位標爲(x', y'),試以x, y表x'及y'之值.因M及M'點在兩相配之雙曲線上,故

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0,\qquad \frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}+1=0;$$

又M'點在OM之相配直徑上,故

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=0.$$

由最後之等式,得

$$\frac{\frac{x'}{a}}{\frac{y}{b}}=\frac{\frac{y'}{b}}{\frac{x}{a}}=\pm\frac{\sqrt{\frac{y'^2}{b^2}-\frac{x'^2}{a^2}}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}=\pm 1$$

故 $$x'=\pm\frac{ay}{b},\qquad y'=\pm\frac{bx}{a}.$$

設 M, M' 點之位置如圖所示,則

$$x'=\frac{ay}{b},\qquad y'=\frac{bx}{a}.$$

定理一之證明:

$$\overline{OM}^2-\overline{OM'}^2=x^2+y^2-x'^2-y'^2,$$

$$x^2-x'^2=x^2-\frac{a^2y^2}{b^2}=a^2\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=a^2,$$

$$y^2-y'^2=y^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=-b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=-b^2,$$

$$\therefore\quad \overline{OM}^2-\overline{OM'}^2=a^2-b^2.$$

定理二之證明: 兩相配直徑 MN 及 $M'N'$ 所成之平行四邊形之面積爲 OMM' 三角形面積之八倍,試求 OMM' 之面積.此面積之計算,可用第四十四節法,得

二倍 OMM' 之面積 $=|xy'-yx'|=\left|\frac{bx^2}{a}-\frac{ay^2}{b}\right|=ab$, 故定理云云.

55. 以漸近線爲位標軸之雙曲線方程式　在第三十七節已言,如以漸近線爲位標軸,則雙曲線之方程式爲

$$x'y'=\lambda,$$

試以a,b表λ之值.

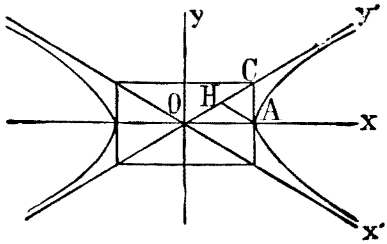


圖 26

先求A點對於x',y'軸之位標.由A作AH與Ox'平行,H爲OC之中點,故A點之位標爲

$$x'=y'=\frac{OC}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}=\frac{c}{2}.$$

由是知$\lambda=\frac{c^2}{4}$,故雙曲線之方程式爲

$$4x'y'=c^2$$

56. 漸近線定理　一直線與雙曲線及其漸近線相交;在此直線上,曲線與漸近線所割之兩線段相等.

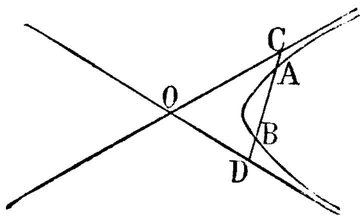


圖 27

如圖$AC=BD$,因AB直線對於雙曲線以某直線爲相配直徑,其對於兩漸近線亦以同直線爲相配直徑,故AB之中點即CD之中點.

57. 等邊雙曲線　雙曲線之兩漸近線如彼此正交,則得等邊雙曲線.$AA'BB'$長方形以漸近線爲對角線,故在等邊雙曲線,此長方形變爲正方形.由是$a=b$而雙曲線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}-1=0.$$

58. **焦點,準線及離心率**　以兩軸爲位標軸之雙曲線方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

故焦點之計算法同橢圓,但須令 b^2 爲 $-b^2$. 如此可得兩虛焦點

$$〔\alpha=0,\beta=\pm ci\,(c=\sqrt{a^2+b^2}).〕$$

及兩實焦點$(\alpha=c\pm,\beta=0)$.

雙曲線方程式可寫爲

$$(x-c)^2+y^2=\left(\frac{c}{a}x-a\right)^2,$$

或
$$(x+c)^2+y^2=\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2,$$

故關於焦點$(c,0)$及$(-c,0)$之準線方程式爲

$$\frac{c}{a}x-a=0,\qquad \frac{c}{a}x+a=0.$$

離心率同爲$\frac{c}{a}$,總稱爲雙曲線之離心率,其値大於一.

59. 焦點及準線之作圖　作長方形 $AA'\,BB'$ 之作接圓,此圓與實軸相交於焦點 F, F', 其故因

$$\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2=a^2+b^2=c^2.$$

欲求準線,於 F 作漸近線之垂線,與之相交於 E. 由 E 作 x 軸之垂線 ED, 試證 ED 爲準

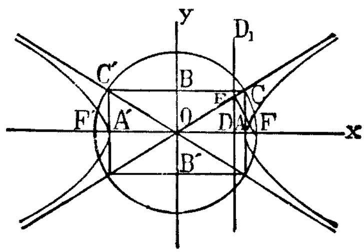


圖 28

線.因 $OF=OC$,故兩直角三角形 OAC, OEF 相等,而 $OE=OA=a$. 在直角三角形 OEF 內, $\overline{OE}^2=OD\cdot OF$, 卽 $OD=\frac{a^2}{c}$. 對於 F' 點之準線,可依同法求得.

60. 焦點定理　設 $M(x, y)$ 爲雙曲線上之任一點,則

$$MF=\left|\frac{c}{a}x-a\right|, \qquad MF'=\left|\frac{c}{a}x+a\right|.$$

先設 M 爲在右邊曲線之點,則

$$MF=\frac{c}{a}x-a, \qquad MF'=\frac{c}{a}x+a, \qquad MF'-MF=2a.$$

如 M 爲在左邊曲線之點,則

$$MF=a-\frac{c}{a}x, \qquad MF'=-a-\frac{c}{a}x, \qquad MF-MF'=2a.$$

故無論如何, $\qquad |MF-MF'|=2a.$

定理爲: 雙曲線上任意點至兩焦點之距離之差爲常數,其值等於實軸之長.

逆定理.——若 $M(x, y)$ 點與雙曲線之兩焦點 F 及 F' 之距離差爲 $2a$, 則 M 點在雙曲線上.

令 $\qquad u=MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \qquad v=MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2};$

題設 $$|u-v|=2a,$$

卽

(1) $$(u-v-2a)(-u+v-2a)=0.$$

此爲無理方程式,可以有理方程式

(2) $$(u-v-2a)(-u+v-2a)(u+v-2a)(-u-v-2a)=0$$

代之.(1),(2)兩方程式相同,因 $-u-v-2a$ 之值常爲負;又在三角形 MFF', $MF+MF'>FF'$,故 $u+v>2a$ 而 $u+v-2a$ 之值常爲正.

方程式(2)與第四十八節之方程式(2)同,故此方程式可寫爲

$$16(c^2-a^2)a^2\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}-1\right]=0.$$

或以 a^2+b^2 代 c^2

$$16\,a^2b^2\left[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1\right]=0.$$

故 M 點在雙曲線上.

總括本節所述,可得下之定理:

若一點與兩定點之距離之差爲常數,則點之軌跡爲雙曲線,此雙曲線以兩定點爲兩焦點,以已與之常數爲實軸之長.

61. 切線對於焦點之數定理

定理一: 設 F 及 F' 爲雙曲線之兩焦點,在雙曲線上任意點 M 之切線,平分三角形 MFF' 在點之內角.

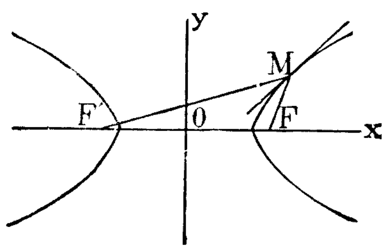


圖 29

茲先證明: 雙曲線之兩焦點在雙曲線上任意點之切線之兩邊.因以 F 及 F' 之位標代入切線方程式

$$\frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0.$$

之左段,得 $\frac{cx}{a^2}-1$ 及 $-\frac{cx}{a^2}-1$,此兩值之積爲 $1-\frac{c^2x^2}{a^4}$,但在雙曲線,$x^2 \geqslant a,^2c^2 > a^2$,故 $1-\frac{c^2x^2}{a^4}<0$,即言 F 及 F' 在切線之兩邊.

餘之證法,與第四十九節同,但須以 $-b^2$ 代 b^2.

定理二: 1° 雙曲線之焦點關於切線之對稱點之軌跡爲圓,此圓以其他焦點爲心,實軸爲半徑.

2° 雙曲線之焦點投射於切線之影之軌跡爲圓,此圓以實軸爲直徑.

如圖 30, MI 爲雙曲線之切線, H 爲焦點 F 關於此切線之對稱點. 因 $\widehat{HMI}=\widehat{FMI}$, 故 $HM=FM$; $F'H=F'M-FM=2a$. 故 H 之軌跡爲以 F' 爲心以 $2a$ 爲半徑之圓.

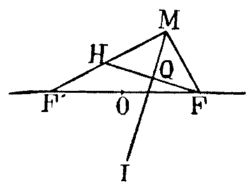


圖 30

Q 爲 F 在切線 MI 上之射影, 因 Q 爲 FH 之中點, 故 $OQ//F'H$, 又 $OQ=a$, 故 Q 之軌跡爲以實軸爲直徑之圓.

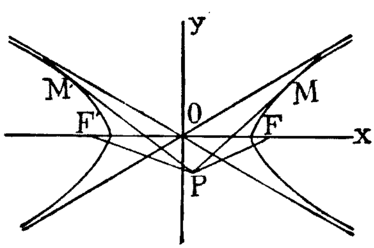


圖 31

定理三: PM 及 PM' 爲由一點 P 至雙曲線之兩切線, F 及 F' 爲雙曲線之兩焦點, PM, PF 所成之角等於 PM' PF' 所成之角.

證法同第四十九節定理三,但須以 $-b^2$ 代 b^2.

62. **參數** 雙曲線之參數定義與橢圓同.故在雙曲線方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

令 $x=c$, 即得參數之值.

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2}{a^2}-1=\frac{b^2}{a^2},\ 故\ y=\pm\frac{b^2}{a}:$$

此處參數之值與橢圓同.

習題十

1. 有心錐線在 M 點之法線交曲線之兩軸於 A 及 B. 當 M 變時. 求證比值 $\frac{MA}{MB}$ 不變.

2. 已知雙曲線之兩漸近線及一點,求作貫軸.

3. 連雙曲線之一點 M 於焦點 F 及 F'. MF, MF' 直線依次與雙曲線相交於 H, H'. 當 M 在雙曲線移動時, 求 H, H' 直線之包線.

4. 設有等腰雙曲線之內接三角形, 求證三角形之垂心在雙曲線上.

第十一章

抛物線

63. 抛物線之作圖 抛物線如以其軸及頂點切線爲位標軸,則其方程式爲

$$y^2-2px=0,$$

y 常取正值(否則可倒轉 x 軸之方向令 p 爲正),謂之參數.

抛物線上任意點 M 之縱位標爲其橫位標及參數之二倍之比例中項,此可於抛物線方程式見之.假如已知 M 點之橫位標爲 OP. 則欲作 M 點,在 x 軸上 Ox' 之方向,取 $OA=2p$, 以 AP 爲直徑作圓,此圓與 y 軸相交於 N 點,則 ON 爲 M 點之縱位標,因

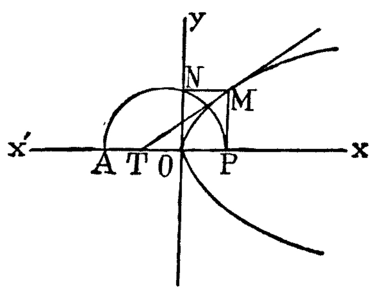


圖 32

$$\overline{ON}^2=OP\times OA$$

故也. M 點爲 OP, ON 長方形之第四頂點.

64. 切線 抛物線在 $M(x,y)$ 點之切線方程式爲

$$Yy-p(X+x)=0,$$

x 及 y 應合方程式 $y^2-2px=0$. 由切線方程式而知切線與 x 軸相交點 T 之橫位標爲 $-x$, 故欲作 M 點之切線, 連 MT 便得.

令 $y=\lambda$, 則由拋物線方程式得 $x=\frac{\lambda^2}{2p}$, 故切線之參數方程式爲

$$\lambda Y-p\left(X+\frac{\lambda^2}{2p}\right)=0,$$

即

$$2pX-2\lambda Y+\lambda^2=0,$$

λ 表切點之縱位標.

65. 直徑 與方向 (α,β) 相配之直徑方程式爲

$$-\alpha p+\beta y=0,$$

若 $\beta=0$, 卽言 (α,β) 之方向與拋物線之軸平行, 則此直徑在無窮遠.

由直徑之方程式而知直徑與軸平行. 反之, 凡平行於軸之直線均爲直徑.

若以直徑 $O'x'$ 及切線 $O'y'$ 爲位標軸, 則拋物線之方程式爲(見第三十七節)

$$y'^2-2p'x'=0,$$

試以 p 及 $x'O'y'=\theta$ 角表 p' 之值.

作 OA 與 $O'y'$ 平行, O 點對於新軸之位標爲

$$x'=O'A,\quad y'=-OA,$$

此點在拋物線上, 故

$$\overline{OA}^2-2p'\overline{O'A}=0,$$

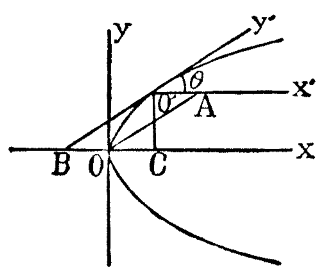


圖 33

即
$$p'=\frac{\overline{OA}^2}{2\overline{O'A}}.$$

再由圖觀之,

$$OA=O'B=\frac{O'C}{\sin\theta},\quad O'A=OB=OC,$$

故
$$p'=\frac{\overline{O'C}^2}{2OC\sin^2\theta}.$$

但 $OC, O'C$ 爲 O' 點對於舊軸之位標,故

$$\overline{O'C}^2-2p\overline{OC}=0,\quad 即\ p=\frac{\overline{O'C}^2}{2\overline{OC}}.$$

由此得 p' 之值

$$p'=\frac{p}{\sin^2\theta}.$$

66. 焦點及準線　設拋物線之方程式爲

$$y^2-2px=0.$$

欲求焦點,須定 λ, α, β 之值,令多項式

$$\frac{y^2-2px}{\lambda}+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2, \tag{E}$$

即
$$\frac{1}{\lambda}[\lambda x^2+y^2(1+\lambda)-2x(p+\alpha\lambda)-2\lambda\beta y+\lambda(\alpha^2+\beta^2)]$$

爲 x 及 y 平直函數之平方. 此多項式不含 xy 項,故平直函數應不含 y 項,或不含 x 項. 但多項式 x^2 項之係數異於零,由是

$$1+\lambda=0,\quad \lambda\beta=0,$$

即
$$\lambda=-1,\quad \beta=0.$$

此時多項式(E)變爲

$$(E_1)\qquad x^2+2x(p-\alpha)+\alpha^2.$$

此式爲平方之條件乃$\alpha=\frac{p}{2}$.故拋物線僅有一焦點,其位標爲

$$\alpha=\frac{p}{2},\quad \beta=0.$$

代α,β,λ以其值於(E)及(E_1)兩式.因(E)及(E_1)爲恆等,故

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2-(y^2-2px)\equiv\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

即
$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2-\left(x+\frac{p}{2}\right)^2\equiv y^2-2px.$$

由此,拋物線方程式可寫爲

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2.$$

故準線之方程式爲 $x+\frac{p}{2}=0$, 離心率 $e=1$.

由上之性質,可得拋物線之新定義:與定點及定直線(定點不在定直線上)等距離之點之軌跡爲拋物線,此拋物線以定點爲焦點,定直線爲準線.

67. 切線對於焦點之數定理

定理一: 在拋物線上M點之切線平分GMF角,F表焦點,G則M點在準線上之影也.

以 m 及 μ 表 MF 及切線 MT 之角係數. MG 之角係數爲零. 如 MT 平分 GMF 角, 則

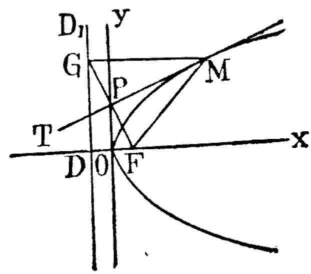


圖 34

$$\frac{\mu-m}{1+\mu m}+\mu=0.$$

故欲證明本定理, 須證 μ 合此方程式.

以 (x, y) 表 M 點之位標, 則 MF 及 MT 之方程式爲

$$y(X-x)-\left(x-\frac{p}{2}\right)(Y-y)=0,$$

卽
$$Yy-p(X+x)=0.$$

故
$$m=\frac{y}{x-\frac{p}{2}}, \quad \mu=\frac{p}{y},$$

$$\frac{\mu-m}{1+\mu m}=\frac{px-y^2-\frac{p^2}{2}}{y\left(x+\frac{p}{2}\right)}=\frac{px-2px-\frac{p^2}{2}}{y\left(x+\frac{p}{2}\right)}=-\frac{p}{y}=-\mu.$$

此式證明定理.

因 $MF=MG$, 故 FG 與切線垂直, 而 $PG=PF$. 可知 P 點在頂點切線上. 由此等結果, 推得下之定理.

定理二: 在拋物線, 焦點對於切線之對稱點之軌跡爲準線; 焦點在切線上之射影之軌跡爲頂點切線.

定理三: PM 及 PM′ 爲由一點 P 至拋物線之兩切線, F 爲焦點, PL 與拋物線之軸平行, 則 PL, PM 所成之角等於 PF, PM′ 所成之角.

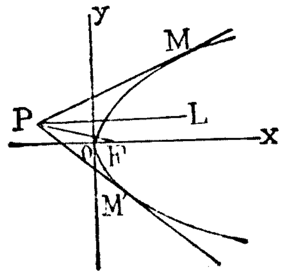


圖 35

用第四十九節法,欲證明本定理,須證 $\frac{A-C}{B}$ 之值在 PM, PM′ 兩直線與在 PF, PL 兩直線相同.

設 (x, y) 爲經過 $P(\alpha, \beta)$ 點之直線上之任意點,則此直線與拋物線相交點之位標

$$X=\alpha+\lambda(x-\alpha), \quad Y=\beta+\lambda(y-\beta),$$

應合方程式

$$[\beta+\lambda(y-\beta)]^2-2p[\alpha+\lambda(x-\alpha)]=0,$$

即 $$\lambda^2(y-\beta)^2+2\lambda[\beta(y-\beta)-p(x-\alpha)]+\beta^2-2p\alpha=0.$$

若直線爲切線,則此方程式應有雙根. 故

$$2\alpha(y-\beta)^2-2\beta(y-\beta)(x-\alpha)+p(x-\alpha)^2=0$$

爲 PM, PM′ 兩切線方程式.

可知 PM, PM′ 之角係數爲方程式

$$2\alpha m^2-2\beta m+p=0$$

之根,此處

$$\frac{A-C}{B}=\frac{p-2\alpha}{-\beta}.$$

又 MF, ML 兩直線之角係數應合方程式

$$m\left(m-\frac{\beta}{\alpha-\frac{p}{2}}\right)=0,$$

卽
$$m^2(2\alpha-p)-2m\beta=0,$$

此處
$$\frac{A-C}{B}=\frac{p-2\alpha}{-\beta}.$$

兩 $\frac{A-C}{B}$ 值相同,故定理云云.

68. 參數　已知拋物線

$$y^2-2px=0$$

之參數爲 p, 但此 p 值等於經過焦點而與軸垂直之弦長之半,故拋物線之參數定義與橢圓及雙曲線同.

習題十一

1. 拋物線上 A, B, C 三點之法線相會於一點之必須及充足條件爲三角形 ABC 之重心在拋物線之軸上.如重心不變,求三法線相會點之軌跡.

2. 設有拋物線之外切三角形,求證三角形之垂心在拋物線之準線上.

3. 過拋物線 $y^2-2px=0$ 之頂點 o 作任意直線與拋物線相交於 M, 作 x 軸之垂線 MN 及 OM 對於 MN 之對稱直線 Δ. 除 M 點外, Δ 與拋物線另交於 P 點.

(a) 求直線 Δ 之方程式,內含 OM 之角系數 t 者.

(b) 過平面之一點 $A(x_0, y_0)$ 可得 Δ 之兩直線.此兩直線與拋物線相交於 M', P' 及 M'', P'', 求 $M'M''$, 及 $P'P''$ 兩直線之方程式,及此兩直線之交點 B 之位標.

(c) A, B 之關係如上所述,故可視 B 爲 A 之對應點.試證 A 爲 B 之對應點.

第十二章

極點及極線 (Poles and Polars)

69. 一點之極線 已與一圓錐曲線及一點 P, 由此點作任意割線與圓錐曲線相交於 A, B 兩點, 在割線上取 M 點, 令 M 爲 P 點對於 A, B 兩點之調和相配點. M點之軌跡爲一直線, 謂之P點對於圓錐曲線之極線.

此定理當圓錐曲線爲兩直線時甚易證明. 設 $O\alpha, O\beta$ 爲兩與直線, 由 P 作任意直線與 $O\alpha, O\beta$ 相交於 A, B 兩點, 在 AB 直線上取 P 點對 A, B 之調和相配點 M, 則 $O\alpha, O\beta, OP, OM$ 四直線成調和線束, 而 M 點之軌跡即 OM 直線.

現欲證明此定理於一般圓錐曲線. 設 $f(X, Y, Z)=0$ 爲圓錐曲線之齊次方程式, (x_0, y_0, z_0) 爲 P 點之齊次位標, (x, y, z) 爲 M 點之齊次位標. PM 直線上任意點 R 之齊次位標爲

$$x_0+\lambda x, \quad y_0+\lambda y, \quad z_0+\lambda z,$$

λ 與 $\dfrac{\overline{RP}}{\overline{RM}}$ 爲正比. 在 PM 直線與圓錐曲線相交之 A, B 兩點 λ 之值應合方程式

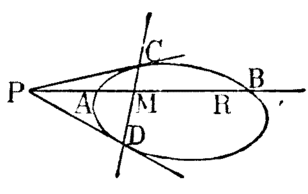


圖 36

$$f(x_0+\lambda x, y_0+\lambda y, z_0+\lambda z)=0,$$

即 $f(x_0, y_0, z_0)+\lambda(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})+\lambda^2 f(x, y, z)=0.$

又在此兩點λ之值與$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AM}}$及$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BM}}$爲正比. P及M對於A, B兩點成調和相配之條件爲

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}+\frac{\overline{BP}}{\overline{BM}}=0.$$

故令λ方程式兩根之和爲零,即得M點之軌跡

(1) $$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0,$$

或寫爲

(2) $$x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z=0.$$

由P作圓錐曲線之切線,得C, D兩切點, (2)爲CD直線之方程式(見第二十七節性質二之證法),故M之軌跡爲連兩切點C, D之直線.

若P點在圓錐曲線上,則其極線爲在P點之切線,因此時C, D兩點與P點相合故也.

〔註一〕 若$f'_{x_0}=f'_{y_0}=f'_{z_0}=0$,則極線方程式爲不定.此情形當$P$爲圓錐曲線之雙點(即言$P$爲兩直線之交點)時見之.

〔註二〕 若$f'_{x_0}=f'_{y_0}=0$,即言P點爲圓錐曲線之中心,則P點之極線在無窮遠.

70. 一直線之極點 若一點以已與之直線爲極線,則此點謂之與直線之極點.

已與直線 $$ux+vy+wz=0$$

及圓錐曲線

$$f(x, y, z)\equiv Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dxy+2Eyz+Fz^2=0,$$

一點 (x_0, y_0, z_0) 對於此圓錐曲線之極線方程式爲

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}=0;$$

此直線與直線相合之條件爲

$$\frac{f'_{x_0}}{u}=\frac{f'_{y_0}}{v}=\frac{f'_{z_0}}{w}.$$

由此方程組可得極點 (x_0, y_0, z_0).

欲討論此方程組,除去指數 0, 並加入新未知數 λ, 則方程組爲

$$\frac{f_x'}{u}=\frac{f_y'}{v}=\frac{f_z'}{w}=2\lambda,$$

或分寫爲

$$Ax+By+Dz-\lambda u=0,$$

$$Bx+Cy+Ez-\lambda v=0,$$

$$Dx+Ey+Fz-\lambda w=0$$

假設 $f(x, y, z)=0$ 非表兩直線,此時 $\Delta\neq 0$, 則方程組之解答爲

$$x=\frac{\lambda}{\Delta}(au+bv+dw),$$

$$y=\frac{\lambda}{\Delta}(bu+cv+ew),$$

$$z=\frac{\lambda}{\Delta}(du+ev+fw),$$

a, b……爲在 Δ 展開式中 A, B……之係數.故一直線祇有一極點.

〔註一〕 如極點在無窮遠,則

$$du+ev+fw=0.$$

設 $f\neq 0$, 卽言圓錐曲線爲橢圓或雙曲線,此條件表直線經過曲線之心 $\left(\frac{d}{f}, \frac{e}{f}\right)$.

設 $f=0$ 卽言圓錐曲線爲拋物線,此條件變爲

$$du+ev=0;$$

此式表與直線與方向 (d, e) 平行. 但 (d, e) 方向爲拋物線之漸近方向,因 $\frac{e}{d}=-\frac{A}{B}$, 而 $(-B, A)$ 爲拋物線之漸近方向故也.

此等結果可用幾何解釋之,因極點爲直線與圓錐曲線相交點之切線之交點故也.

〔註二〕 令

$$F(u,v,w)\equiv au^2+2buv+cv^2+2duw+2evw+fw^2,$$

則 $ux+vy+wz=0$ 直線之極點爲

$$x=\mu F'u, \quad y=\mu F'v, \quad z=\mu F'w$$

μ 表任意常數.

71. 相配點 (Conjugate points) 如 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 點之極線經過 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 點,則 P_2 點之極線必經過 P_1 點.

因 P_1 點之極線方程式爲

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=0;$$

若此直線經過 P_2 點,則

$$x_2f'_{x_1}+y_2f'y_1+z_2f'_{z_1}=0,$$

此式又可寫爲　$x_1f'_{x_2}+y_1f'_{y_2}+z_1f'_{z_2}=0,$

故 P_2 點之極線

$$xf'_{x_2}+yf'_{y_2}+zf'_{z_2}=0$$

經過 P_1 點.

P_1, P_2 兩點謂之對於圓錐曲線之相配點,此兩點位標之關係爲

$$x_1f'_{x_2}+y_1f'_{y_2}+z_1f'_{z_2}=0,\ 或\ x_2f'_{x_1}+y_2f'_{y_1}+z_2f'_{z_1}=0.$$

對於圓錐曲線之兩相配點 P_1, P_2 之別一定義爲:連 P_1, P_2 之直線與圓錐曲線相交於兩點,此兩點對於 P_1, P_2 爲調和相配.

72. 相配直線 若 D_1 直線 $(u_1x+v_1y+w_1z=0)$ 經過 D_2 直線 $(u_2x+v_2y+w_2z=0)$ 之極點,則 D_2 直線必經過 D_1 之極點.

此爲前節之結果,因若以 P_1, P_2 表 D_1, D_2 之極點,則由題設, P_1 點之極線 D_1 經過 P_2 點,故 P_2 點之極線 D_2 經過 P_1 點

吾人亦可用解析法證明之.D_1 直線之極點之位標與 $F'u_1$, $F'v_1$, $F'w_1$ 爲正比(見第七十節註二);若 D_2 直線經過此點,則

$$u_2F'_{u_1}+v_2F'_{v_1}+w_2F'_{w_1}=0,$$

此式亦可寫爲 $$u_1F'_{u_2}+v_1F'_{v_2}+w_1F'_{w_2}=0,$$

即言 D_1 直線經過 D_2 之極點.

D_1, D_2 兩直線謂之對於圓錐曲線之相配直線,此兩直線係數之關係爲

(1) $$u_1F'_{u_2}+v_1F'_{v_2}+w_1F'_{w_2}=0,$$

或 $$u_2F'_{u_1}+v_2F'_{v_1}+w_2F'_{w_1}=0.$$

關係(1)可用行列式表之. D_1 直線 $(u_1x+v_1y+w_1z=0)$ 之極點之位標 (x, y, z) 合方程組(見第七十節)

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax+By+Dz-\lambda u_1=0, \\ Bx+Cy+Ez-\lambda v_1=0, \\ Dx+Ey+Fz-\lambda w_1=0. \end{cases}$$

又因 D_2 直線 $(u_2x+v_2y+w_2z=0)$ 經過此點, 故

$$(3)\qquad u_2x+v_2y+w_2z=0,$$

x, y, z 並合 (2), (3) 四方程式之條件爲

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u_1 \\ B & C & E & v_1 \\ D & E & F & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

此件條表 D_1, D_2 爲相配兩直線.

73. 相配極線定理　一圓錐曲線之兩相配直線, 對於由此兩直線之交點所作之兩切線爲調和相配.

設 D 直線之極點爲 P, 由 P 作任意直線 D' 與 D 相交於 O 點, D 及 D' 爲兩相配直線. 設 A, B 爲由 O 所作切線之切點, 現須證明 D, D' 兩直線對於 OA, OB 爲調和相配.

AB 爲 O 點之極線, 應經過 P 點, 因題設 P 點之極線 D 經過 O 點故. 由此, AB 及 D 之交點 M 爲 P 點對於 A, B 之調和相配點, 故 $ABMP$ 四點成調和分配, 而定理云云.

74. 極點極線相關定理 (*a*) 一直線上各點之極線,經過此直線之極點.

(*b*) 經過一定點各直線之極點,在此定點之極線上.

此 (*a*), (*b*) 兩定理為第七十一,七十二兩節之結果.

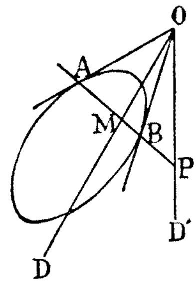


圖 37

75. 相配三角形 若三角形之每頂點為其對邊對於一圓錐曲線之極點,則此三角形謂之相配三角形.

設 A 為在圓錐曲線平面上之任意點, Δ 為其極線.在 Δ 直線上取任意點 B, B 點之極線經過 A 點而與 Δ 相交於 C. ABC 為相配三角形.

因由作圖, A 為 BC 之極點, B 為 AC 之極點,故 C 之極線經過 A, B 兩點,即言 C 為 AB 之極點.

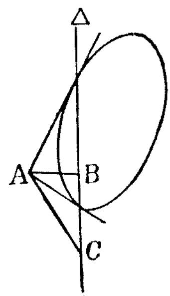


圖 38

76. 極線之作圖 已與一圓錐曲線及一定點 P,由 P 點作兩割線 PAB, PCD,連 AD 及 BC 相交於 M 點,又連 AC 及 BD 相交於 N 點; MN 直線為 P 點對於圓錐曲線之極線.證之如下:

在 AB 及 CD 直線上取 H 及 K 點,令 $(PHAB)$ 及 $(PKCD)$ 成調和分配,則 PN, HN, AN, BN 成調和線束,又 PN, KN, CN, DN 亦成調和線束,故 KN 及 HN 應在同直線上.再從他方面觀

之，PM，HM，AM，BM 四直線及 PM，KM，CM，DM 四直線均成調和線束，故 HM 及 KM 應在同直線上．可知 KN，HN，HM，KM 四直線相合為一．由作圖，H 及 K 為 P 點對於 AB 及對於 CD 之調和分配點，故 HK 卽 NM 為 P 點對於圓錐曲面之極線．

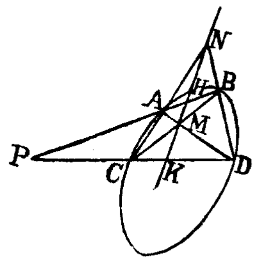


圖 39

〔註一〕 若割線 PCD 漸與 PAB 直線接近，則 AC，BD 兩直線之極限為在 A 點及在 B 點之切線．此時 N 點之極限為兩切線之交點 H，故 P 點之極線經過 H 點．此為第七十一節之結果，因 H 之極線經過 P 點，故 P 點之極線經過 H 點．

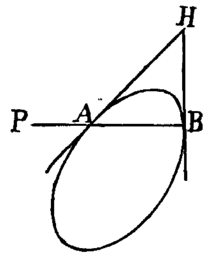


圖 40

〔註二〕 已知 P 點之極線為 MN，則可推得 N 點之極線為 PM，因 P 之於 $ABCD$，猶 N 之於 $ACBD$ 故也．既知 P 以 MN 為極線，N 以 PM 為極線，則 PMN 三角形成相配三角形．

77. 配極變換　已與一定準圓錐曲線 (Δ)，則在其平面上一點 a 與其極線 A' 相對應，一直線 A 與其極點 a' 相對應．諸直線與諸點所成之圖形 F，及諸點與諸直線所成之圖形 F' 相對應；反之，F' 之諸線及諸直線亦與 F 之諸直線及諸點對應．F 及 F' 謂之對於圓錐曲線 (Δ) 之配極圖形；換言之，此圖為彼圖之配極變換形．

由極點及極線之性質,可得下之結果:

(a) A, B 兩直線相交之點與連 A 之對應點 a' 及 B 之對應線 b' 之點相對應;反之,連 a, b 兩點之直線與 a 之對應線 A' 及 b 之對應線 B' 兩直線之交點相對應.

(b) D 直線上之諸點與經過 D 之對應點 d' 諸直線相對應;反之,經過一點之諸直線與同在一直線上之諸點相對應.

78. 配極曲線 S 為任意曲線,在此曲線上諸切線對於圓錐曲線(Δ)之極點之軌跡為一曲線S';反之,S 為 S' 曲線上諸切線之極點之軌跡.證明如下:

設 A, B 為 S 之兩切線,a, b 為其切點.設 a', b' 為 A, B 對於圓

圖 41

錐曲線(Δ)之極點,必兩點應在 S' 曲線上,而連 a', b' 之直線應為 A, B 交點 i 之極線.若 B 與 A 接近,則 i 點之極限為 a;由他方面觀之,b' 與 a' 接近,$a'b'$ 之極限為 S' 曲線在 a' 點之切線 A'. 由此 A' 為 a 點之極線,故 S 為 S' 諸切線之極點之軌跡.S, S' 兩曲線謂之配極曲線.

定理: 若 S 及 S' 為兩配極曲線,則一曲線之次數等於他曲線之族(由不在曲線上一點所能作諸切線之數謂之曲線之族).

因任意直線 D 與 S 相遇之點，與經過 D 之極點 d' 而與 S' 相切之切線相對應.故切線之數(卽 S' 之族)等於 D 與 S 相交之點數(卽 S 之次數).

因圓錐曲線爲二次,故其配極曲線之族爲二;換言之,圓錐曲線之配極曲線亦爲圓錐曲線.

79. 配極曲線之應用 有諸點及諸直線所成之圖形 F，吾人欲於此圖形證明某種性質.任取定準圓錐曲線 (Δ)，用配極法變換圖形 F，假如 F' 爲其配極圖形;則所欲證明之性質,與 F' 圖形上之某性質相對應.故如能證明此性質,則彼性質亦同時證明.

例. 玆先述完全四邊形及完全四角形之定義:

四邊形之三邊不經過同一點,其兩邊不平行,則四邊形爲完全.每兩邊相交之點謂之四邊形之頂點,完全四邊形共有六頂點.連兩邊之交點及其他兩邊之交線之線謂之對角線,完全四邊形共有三對角線.

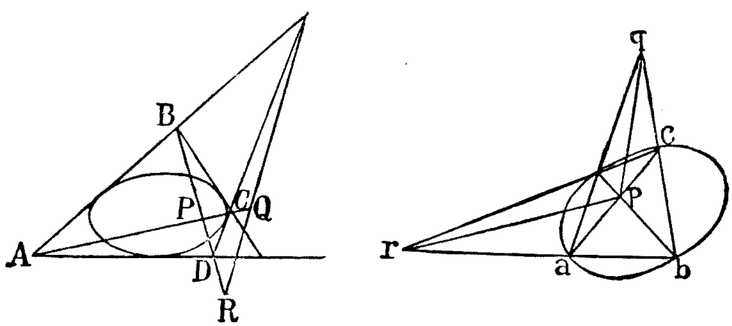


圖 42

四點所成之形,若其三點不同在一直線上,則謂之完全四角形.連任意兩點之直線與其他兩點之直線相交之點謂之對角線,完全四邊形共有三對角線.

由此定義,可知完全四角形爲完全四邊形之配極變換形;此形之對角線與彼形之對角線相對應.

茲證下之定理:

若一圓錐曲線與完全四邊形之四邊相切,則四邊形之三對角線對於圓錐曲線成相配三角形.

用配極法變換,則完全四邊形變爲完全四角形;切於四邊形之圓錐曲線,變爲經過四角形頂點之圓錐曲線;四邊形對角線所成之三角形,變爲四角形對角線所成之三角形.故欲證明上之定理,須證:

若一圓錐曲線經過完全四角形之四頂點,則四角形之三對角線對於圓錐曲線成相配三角形.

此定理已於第七十六節註二證明.

習題十二

1. 設 A, B, C, D 爲 P 點至一橢圓所作四法線之足.用 (x_1, y_1) (x_2, y_2) 依次表 AB, CD 之極點位標.證明下列公式 (Desboves 公式):

$$x_1x_2 = -a^2, \quad y_1y_2 = -b^2,$$

a, b 表橢圓之兩半軸之長度.

2. 二次曲線之任意弦如在曲線之某與點視之成直角,則此弦交與點之法線於一定點 (Fregier 之定理).

3. 已與三角形及二次曲線,試證連三角形各邊之極點至其相對頂點之直線同交於一點.

4. 已與二次曲線及其平面上一點 P, 設 M 點對於二次曲線之極線與直線 MP 正交, 試定 M 之軌跡.

5. 設二次曲線之方程式爲 $f(x, y)=0$. 從曲線之平面上一點 $M(x_0, y_0)$ 作 M 點極線之垂線 MP. 設 A, B 爲 MP 與兩軸之交點 (B 在橢圓之小軸或雙曲線之虛軸上). 求證

$$f(x_0, y_0)=k\cdot MP\cdot MA=k'\cdot MP\cdot MB,$$

k, k' 表常數.

第十三章

圓錐曲線極位標方程式

80. 普通式 圓錐曲線之普通式,可由 Cartesian 位標之普通式 $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$

中令 $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ 而得

$$\rho^2(A\cos^2\omega+2B\cos\omega\sin\omega+C\sin^2\omega)$$
$$+2\rho(D\cos\omega+E\sin\omega)+F=0.$$

81. 特別式 若以圓錐曲線之一焦點爲原點,含焦點之軸爲極軸,則方程式較簡,此時與焦點相應之準線與 Ox 軸垂直,以 d 表其與 x 軸交點之橫位標;以 e 表離心率.在尋常位標,圓錐曲線之方程式爲

$$x^2+y^2=e^2(x-d)^2,$$

故其極位標之方程式爲

$$\rho^2=e^2(\rho\cos\omega-d)^2$$

即 $$\rho=\pm e(\rho\cos\omega-d).$$

若先取 + 號後 − 號,則得圓錐曲線之兩方程式

$$\rho=\frac{-de}{1-e\cos\omega},\quad \rho=\frac{de}{1+e\cos\omega}.$$

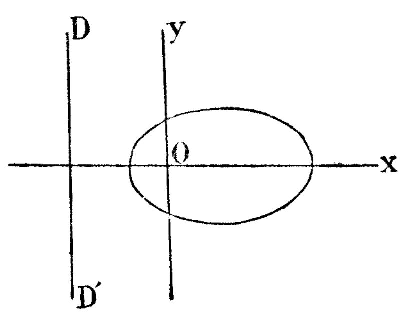


圖 43

此兩方程式實表同一曲線，因若代一方程式之 ω 以 $\pi+\omega$，ρ 以 $-\rho$，則得他方程式故也.於實用上可取第二方程式

$$\rho=\frac{de}{1+e\cos\omega},$$

則較爲易記耳.

令 $\omega=\frac{\pi}{2}$ 則 $|\rho|=|de|$，故 $|de|$ 爲經過焦點而與焦點軸垂直之弦之半長，卽言 $|de|$ 爲圓錐曲線之參數 p. 若以 p 代 $|de|$，則方程式爲

$$\rho=\pm\frac{p}{1+e\cos\omega} \qquad (p\text{ 爲正數}),$$

其雙關符號，視準線與焦點之位置而定.若準線在焦點之左，則符號爲負；否則爲正.

82. 圓錐曲線之軸與極軸成角度時之方程式　焦點仍與原點合.但含焦點之軸 Ox' 與極軸 Ox 成 α 角，$(Ox, Ox')=\alpha$. 對於 Ox' 軸，曲線之方程式爲(吾人可選 Ox' 之方向，令 p 之雙關符號常爲正；換言之，Ox' 以與準線相交之方向爲正)

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\omega'},$$

曲線上一點與 Ox 及 Ox' 所成之 ω 及 ω' 角，其關係爲

$$\omega=\omega'+\alpha,\quad \text{卽}\quad \omega'=\omega-\alpha.$$

故以 Ox 爲極軸之曲線方程式爲

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\omega-\alpha)}.$$

習題十三

1. 用極位標法證明二次曲線兩正交直徑平方之倒數和爲常數

2. 過二次曲線之焦點作一任意割線,證明過割線兩端之半徑動徑之倒數和爲常數.

第二編　二次曲面

第十四章

二次曲面之通性

83, 判別式及輔行列式　二次曲面之普通方程式爲

$$f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

爲便於書寫起見,令 $\phi(x, y, z)$ 表此方程式之二次項

$$\phi(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

ϕ 函數在二次曲面方程式中佔重要位置,故先研究之.

函數 $\phi(x, y, z)$ 爲齊次多項式,其齊次數爲二. 試取其對 $x, y,$ z 之偏引數

$$\frac{1}{2}\phi'_x \equiv Ax + B''y + B'z,$$

$$\frac{1}{2}\phi'_y \equiv B''x + A'y + Bz,$$

$$\frac{1}{2}\phi'_z \equiv B'x + By + A''z;$$

其係數所成之行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2$$

謂之 $\phi(x,y,z)$ 函數之判別式.

以 a, a', a'', b, b', b'' 表 Δ 之展開式中相應大文字之係數,則

$$(1)\quad \begin{cases} a = A'A''-B^2, & b = B'B''-A\,B, \\ a' = AA''-B'^2, & b' = B\,B''-A'B', \\ a'' = AA'-B''^2, & b'' = BB'-A''B''; \end{cases}$$

a, a', a'' 謂之主子行列式.行列式

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix}$$

謂之 Δ 之輔行列式.易證下列六等式

$$(2)\quad \begin{cases} a'a''-b^2 = A\Delta, & b'b''-a\,b = B\Delta, \\ a\,a''-b'^2 = A'\Delta, & b\,b''-a'b' = B'\Delta, \\ a\,a'-b''^2 = A''\Delta, & b\,b'-a''b'' = B''\Delta. \end{cases}$$

由 (1), (2) 兩式所得之結果如下:

(A) 若 $\Delta=0,\ a+a'+a''=0$, 則 Δ 之子行列式均為零.

因如 $\Delta=0$, 則由 (2) 式

$$a'a''-b^2=0,\quad a\,a''-b'^2=0,\quad a\,a'-b''^2=0.$$

又因 $$a+a'+a''=0,$$

故 $$(a+a'+a'')^2 \equiv a^2+a'^2+a''^2+2a'a''+2a''a+2a\,a'=0$$

以 b^2, b'^2, b''^2 代 $a'a'', a\,a'', a\,a'$, 則

$$a^2+a'^2+a''^2+2b^2+2b'^2+2b''^2=0;$$

即言 $$a=a'=a''=b=b'=b''=0.$$

(B) 若Δ之子行列式均爲零,且 $A+A'+A''=0$, 則Δ之各元均爲零.因由(1)式

$$A'A''-B^2=0,\ AA''-B'^2=0;\ AA'-B''^2=0.$$

仿(A)法行之,得

$$A^2+A'^2+A''^2+2B^2+2B'^2+2B''^2=0;$$

卽言
$$A=A'=A''=B=B'=B''=0.$$

84. 關於分解ϕ函數之三定理

定理一 $\phi(x,y,z)$恆等於一次式之平方之必須及充分條件爲Δ之諸子行列式均爲零.

此定理在第五節已證明.

定理二. $\phi(x,y,z)$恆等於兩個殊異一次式之平方和之必須及充分條件爲Δ爲零而子行列式非均爲零.

1° 此條件爲必須的.——假如已得

$$\phi(x,y,z)\equiv aP^2+a'P'^2,$$

P及P'爲兩個殊異一次式;在此恆等式中兩邊各取其對於x,y,z之偏引數,可照第三節法證明Δ之值爲零,但子行列式則非均爲零.

2° 此條件爲充分的,——假設$\Delta=0$,而主子行列式$a=A'A''-B^2$異於零.照第三節法證明$\phi(x,y,z)$函數可分解如下式

$$\phi(x,y,z)\equiv A'u^2+2Buv+A''v^2,$$

此處
$$u\equiv y-mx.\qquad v\equiv z-nx.$$

設 A', A'' 非均爲零；例如 $A' \neq 0$, 則

$$\phi(x, y, z) \equiv \frac{1}{A'}(A'u+Bv)^2 - \frac{B^2v^2}{A'} + A''v^2,$$

即

$$\phi(x, y, z)) \equiv \frac{1}{A'}(A'u+Bv)^2 + \frac{av^2}{A'},$$

易證 $A'u+Bv$ 及 v 爲兩殊異方式.

設 A', A'' 均爲零,則 $B \neq 0$, 於是

$$\phi(x, y, z) \equiv 2Buv \equiv \frac{B}{2}(u+v)^2 - \frac{B}{2}(u-v)^2.$$

定理三 $\phi(x, y, z)$ 恆等於三個殊異一次式之平方和之必須及充分條件爲判別式Δ之值異於零.

1° 此條件爲必須的——假如已得

$$\phi(x, y, z) \equiv aP^2 + a'P'^2 + a''P''^2 \qquad (a\,a'a'' \neq 0).$$

此處

$$P \equiv ux+vy+wz,$$

$$P' \equiv u'x+v'y+w'z,$$

$$P'' \equiv u''x+v''y+w''z,$$

且

$$\delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

取 $\phi(x, y, z)$ 函數對於 x, y, z 之偏引數,則

$$\frac{1}{2}\phi'_x \equiv auP + a'u'P' + a''u''p'',$$

$$\frac{1}{2}\phi'_y \equiv avP + a'v'P' + a''v''P'',$$

$$\frac{1}{2}\phi_z' \equiv awP + a'w'P' + a''w''P''.$$

此等恆等式右段 P, P', P'' 之係數所成之行列式爲 $a\,a'\,a''\,\delta$; 但此值異於零,故方程組

(1) $$\phi'_x = 0,\ \phi'_y = 0,\ \phi'_z = 0$$

之解答,即

(2) $$P = 0,\ P' = 0,\ P'' = 0$$

之解答; 又 δ 之值亦異於零,故 (2) 之解答爲 $x = y = z = 0$. 方程組 (1) 之解答旣與此相同,由此推知 Δ 之值異於零.

2° 此條件爲充分的.——設 $\Delta \neq 0$; 分爲下列二款討論之.

I. 設 A, A', A'' 非均爲零,例如 $A \neq 0$, 則

$$\phi(x, y, z) \equiv \frac{1}{A}(Ax + B''y + B'z)^2 - \frac{(B''y + B'z)^2}{A} + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz.$$

即

(3) $$A\phi(x, y, z) \equiv (Ax + B''y + B'z)^2 + a''y^2 + a'z^2 - 2byz.$$

設 a', a'' 非均爲零,例如 $a'' \neq 0$, 則

$$A\phi(x, y, z) \equiv (Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{a''}(a''y - bz)^2 - \frac{b^2z^2}{a''} + a'z^2,$$

即 $$\phi(x, y, z) \equiv \frac{1}{A}(Ax + B''y + B'z)^2 + \frac{1}{Aa''}(a''y - bz)^2 + \frac{\Delta}{a''}z^2,$$

因 $a'a''-b^2=A\Delta$ 故也.

由是 $\phi(x,y,z)$ 分解爲三個一次式

$$Ax+B''y+B'z,\ a''y-bz,\ z$$

之平方;此三個一次式彼此殊異,因其係數所成之行列式

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ 0 & a' & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

之值 Aa'' 異於零故也.

若 a', a'' 均爲零,則 b 必異於零,否則 $a'a''-b^2=A\Delta=0$, 與假設不合.此時 (3) 式可寫爲

$$\phi(x,y,z)\equiv\frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z)^2-\frac{2b}{A}yz,$$

卽
$$\phi(x,y,z)\equiv\frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z)^2-\frac{b}{2A}(y+z)^2$$
$$+\frac{b}{2A}(y-z)^2,$$

就中三個一次式 $Ax+B''y+B'z, y+z, y-z$ 之係數所成之行列式爲

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2A\neq 0.$$

II. 設 A, A', A'' 均爲零,則

$$\phi(x,y,z)\equiv 2Byz+2B'zx+2B''xy.$$

此時 $\Delta=2BB'B''$, 故 B, B', B'' 三者無一爲零.於是

$$\phi(x, y, z)\equiv\frac{2}{B''}(B''x+Bz)(B''y+B'z)-\frac{2BB'}{B''}z^2,$$

即
$$\phi(x, y, z)\equiv\frac{1}{2B''}\Big[B''x+B''y+(B+B')z\Big]^2$$
$$-\frac{1}{2B''}\Big[B''x-B''y+(B-B')z\Big]^2-\frac{2BB'}{B''}z^2.$$

恆等式之右段諸一次式之係數所成之行列式爲

$$\begin{vmatrix} B'' & B'' & B+B' \\ B'' & -B'' & B-B' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

將第二行之各元減去第一行之各元,則得

$$\begin{vmatrix} B'' & B'' & B+B' \\ 0 & -2B'' & -2B' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2B''^2\neq 0.$$

85. 二次曲面之漸近方向　設二次曲面之方程式爲

$$f(x, y, z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$$

由定義,其漸近方向之錐面 (The cone of asymptotic directions) 方程式爲

$$\phi(x, y, z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0.$$

1° 設 $\Delta\neq 0$. 在此情形, $\phi(x, y, z)$ 可分解如下:

$$\phi(x, y, z)\equiv\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2,$$

α, β, γ 表常數; P, Q, R 表三個殊異一次式, 即言在此三式中, x, y, z 係數所成之行列式之值異於零.由幾何學解釋之, $P=0$ $Q=0$, $R=0$ 三平面僅在原點相交.

如 α, β, γ 爲同號, 則方程式 $\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2=0$ 僅有一解答 $x=y=z=0$. 在此情形,二次曲面並無漸近方向.

如 α, β, γ 非同號,則 $\phi(x, y, z)=0$ 表一實錐面.因令 $P=0$. $Q=0$, $R=0$ 爲新位標面,則錐面之方程式變爲

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0;$$

以 $z'=c$ 平面截此錐面,得橢圓

$$(E) \qquad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1;$$

漸近方向之錐面爲以原點爲頂點,橢圓 (E) 爲準線所成之曲面,故爲實錐面.

2^0 設 Δ 爲零,但第一級子行列式異於零.在此情形, $\phi(x, y, z)$ 可分解如下:

$$\phi(x, y, z) \equiv \alpha P^2+\beta Q^2.$$

若 α 與 β 同號,則 $\phi=0$ 表兩虛平面;否則表兩實平面.在第一情形,二次曲面僅有一漸近方向,即 $P=0, Q=0$ 兩平面交線之方向;在第二情形, $\phi=0$ 所表兩平面之方向均爲二次曲面之漸近方向.

3° 設 Δ 之第一級子行列式均爲零,則 $\phi(x, y, z)$ 爲一次式之平方,漸近方向之錐面爲一雙面 (Double plane). 二次曲面

之漸近方向即此雙面之方向.

86. 二次曲面之切面　二次曲面 $f(x, y, z)=0$ 在 (x_0, y_0, z_0) 點切面之方程式爲

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+f'_{t_0}=0.$$

f'_{t_0} 之計算法,先加入 t 變數令 $f(x, y, z)$ 爲齊次式,取其對於 t 之引數,然後以 x_0, y_0, z_0, 依次代 x,y,z,t 之值卽得.如令 $t=t_0=1$, 則有切面方程式

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{t_0}=0.$$

又因 $f(x, y, z)$ 爲二次式,且已令其變爲齊次式,故切線之方程式又可書爲

$$x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z+t_0f'_t=0,$$

此處 t 及 t_0 之值仍爲一.由此可見將 x, y, z 與 x_0, y_0, z_0 對調,則方程式不變.但此性質僅適用於二次曲面.

總括上述,可知二次曲面

$$f(x, y, z)\equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

在 (x_0, y_0, z_0) 點之切面方程式爲

$$Axx_0+A'yy_0+A''zz_0+B(yz_0+y_0z)+B'(zx_0+z_0x)+B''(xy_0+x_0y)$$
$$+C(x+x_0)+C'(y+y_0)+C''(z+z_0)+D=0.$$

87. 經過不在曲面上一點之切面　設有非表兩平面之二次曲面 (Q), 其齊次方程式爲

$$f(X, Y, Z, T)=0.$$

試求經過此曲面外一點 $S(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 之切面.

切點之位標 x, y, z, t 必合曲面方程式,故

(1) $$f(x, y, z, t)=0;$$

又在 (x, y, z, t) 點之切面 $Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z+Tf'_t=0$ 經過 S 點,故

(2) $$x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z+t_0f'_t=0.$$

(1),(2) 兩方程式定經過 S 點諸切面之切點,其解答數為無限.

若視 x, y, z, t 為動點之位標,則方程式 (1) 表二次曲面 (Q),方程式 (2) 表一平面,謂之 S 點對於二次曲面之極面.

由此可見 (1),(2) 兩面之交線為圓錐曲線 (C),即由 S 點所發出諸切面與二次曲面相切點之軌跡也.

〔註〕 S 點之極面方程式可書為

(2) $$x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z+t_0f'_t=0,$$

或

(2′) $$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{t_0}=0.$$

此與切面方程式無異. 故若 $S(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 點在二次曲面 $f(x, y, z, t)=0$ 上,則方程式 (2) 或 (2′) 表 S 點之切面;若 S 點不在二次曲面上,則方程式 (2) 或 (2′) 表 S 點之極面.

88. 外切錐面 (Circumscribed cone) 以 S 為頂點,以圓錐曲線 (C) 為準線所成之錐面沿曲線 (C) 而與二次曲面相切,證之如下:

設 M 爲圓錐曲線 (C) 之一點，MT 爲 (C) 曲線在此點之切線．二次曲面 (Q) 在 M 點之切面含 MT 直線；又因此切面經過 S 點，故切面並含 MS 直線．從他方面觀之，錐面沿母線 (Generator) SM 之切面，亦含 MT, MS 兩直線．兩切面相合，故錐面與曲面 (Q) 相切．

此錐面謂之以 S 爲頂點外切於曲面 (Q) 之錐面．

此錐面可視爲下列諸直線之軌跡：經 S 點而與二次曲面相遇於雙點；亦即經 S 點所作二次曲面諸切線之軌跡也．

由此定義可得錐面之方程式．設 $M(x, y, z, t)$ 爲錐面之任意點，SM 標線上任意一點之齊次位標爲

$$x_0+\lambda x,\ y_0+\lambda y,\ z_0+\lambda z,\ t_0+\lambda t$$

此直線與二次曲線相交點之 λ 值應合方程式

$$f(x_0+\lambda x, y_0+\lambda y, z_0+\lambda z, t_0+\lambda t)=0,$$

即
$$f(x_0, y_0, z_0, t_0)+\lambda(xf'x_0+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{z_0})$$
$$+\lambda^2 f(x, y, z, t)=0.$$

若相交之點爲雙點，則得所求之圓錐方程式

$$(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{t_0})^2-4f(x, y, z, t)f(x_0, y_0, z_0, t_0)=0.$$

89. 由二次曲面上一點所作直線與二次曲面之交點　試求經過二次曲面上一點 $M(x_0, y_0, z_0, t_0)$ 所作直線與二次曲面之交點．假如 $P(x_1, y_1, z_1, t_1)$ 爲直線上之一定點，則直線上任意

點之齊次位標爲

$$x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1,\ t_0+\lambda t_1.$$

直線與二次曲面相交點λ之值應合方程式

$$f(x_0+\lambda x_1,\ y_0+\lambda y_1,\ z_0+\lambda z_1,\ t_0+\lambda t_1)=0,$$

即
$$f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)+\lambda[x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0}+t_1 f'_{t_0}] +\lambda^2 f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)=0.$$

M點既在二次曲面上,故$f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)=0$,方程式變爲

(1) $$\lambda[x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0}+t_1 f'_{t_0}]+\lambda^2 f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)=0.$$

在普通情形,此方程式有兩根

$$\lambda=0,\qquad \lambda=-\frac{x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0}+t_1 f'_{t_0}}{f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1)}.$$

故MP直線除M點外與二次曲面相交於其他一點.

在特別情形,如

(2) $$x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0}+t_1 f'_{t_0}=0,$$

則方程式(1)之兩根均爲零,此時MP直線與二次曲線相交之兩點均與M點相合.此易解說,由(2)式觀之,可知P點居於二次曲面在M點之切面上.

90. 二次曲面之雙點 在特別情形,如

$$f'_{x_0}=f'_{y_0}=f'_{z_0}=f'_{t_0}=0.$$

則前節方程式(1)之兩根均爲零.此時$M(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)$點謂之二次曲面之雙點.故雙點之方程式爲

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f_x' \equiv Ax+B''y+B'z+Ct=0, \\ \frac{1}{2}f_y' \equiv B''x+A'y+Bz+C't=0, \\ \frac{1}{2}f_z' \equiv B'x+By+A''z+C''t=0, \\ \frac{1}{2}f_t' \equiv Cx+C'y+C''z+Dt=0. \end{cases}$$

此方程組之係數所成之行列式

$$H=\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}$$

謂之 $f(x, y, z, t)$ 函數之判別式.

I. $H \neq 0$.

方程組(1)僅有一解答 $x=y=z=t=0$, 故二次曲面無雙點.

II. $H=0$, 但第一級子行列式非均爲零.

(1) 之四方程式化爲三方程式.由此三方程式,可以一未知數表其他三未知數之值.在此情形,方程式僅有一雙點.二次曲面爲柱面或錐面視此雙點是否在無窮遠而定.

III. 第一級子行列式均爲零,但第二級子行列式非均爲零.

(1) 之四方程式化爲兩方程式,在此兩方程式內,若視 (x, y, z, t) 爲動點之位標,則兩方程式表相異兩平面 P 及 Q.

此兩平直沿直線D相交.

若D在有限遠,則二次曲面爲相交於D之P_1, Q_1兩平面;若D在無窮遠,則二次曲面爲兩平行平面.

IV. 第二級子行列式均爲零.

(1) 之四方程式化爲一方程式.二次曲面之雙點均在此方程式所表之平面上,故二次曲面爲雙面.

習題十四

1. 設有三正交位標軸,在xy面上有圓(c)與Oy軸切於原點,在yz面上有圓(c')亦與Oy軸切於原點.用a表(c)圓中心之x量,b表(c')圓中心之z量,設a, b均爲正且$a>b$.求過此兩圓之二次曲面之通式.

2. 求過不在同平面上兩直線之二次曲面之通式.

第十五章

二次曲面之分類

91. 總說 二次曲線之分類,方法與二次曲線之分類相似.用普通方法.可將曲線方程式之左段分解如下列五式之一.

$$(1)\qquad \alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2+h,$$

$$(2)\qquad \alpha P^2+\beta Q^2+R,$$

$$(3)\qquad \alpha P^2+\beta Q^2+h,$$

$$(4)\qquad \alpha P^2+Q,$$

$$(5)\qquad \alpha P^2+h;$$

α, β, γ 爲異於零之常數, h 值有時爲零, P, Q, R 各爲 x, y, z 之平直函數,且此等函數彼此殊異.

(1), (2) 兩式之 P, Q, R 三函數旣彼此殊異,則此等函數之係數所成之行列式非等於零;於是 $P=0$, $Q=0$, $R=0$ 三平面相交於有限遠之點.

(3), (4) 兩式之 P, Q 兩函數旣互相殊異,則由此兩函數之係數可得一異於零之第二級行列式,於是 $P=0$, $Q=0$ 兩平面沿有限遠之直線相交.

將平直函數 P 之常數項除去,則得一齊次平直函數,以 P'

表之. 例如 $P\equiv ux+vy+wz+\gamma$, 則 $P'\equiv ux+vy+wz$. Q', R' 兩齊次平直函數,可倣此法求得,若 P, Q, R 三函數彼此殊異,則 P',Q', R' 三函數亦然,此結果可由定義求出.

假如二次式 $f(x, y, z)$ 已分解如下式

$$f(x, y, z)\equiv\alpha P'^2+B\, Q'^2+\gamma R'^2.$$

若僅取其二次項,則得

$$\phi(x, y, z)\equiv\alpha P'^2+\beta\, Q'^2+\gamma R'^2,$$

此處 $\phi(x, y, z)$ 函數已分解爲三個殊異一次式之平方,故 Δ 異於零(第八十四節定理三).

若 $f(x, y, z)$ 可分解如 (2) 或 (3) 式,則

$$\phi(x, y, z)\equiv\alpha P'^2+\beta\, Q'^2,$$

P' 及 Q' 爲互相殊異函數,故 $\Delta=0$, 而子行列式之一異於零(第八十四節定理二).

若 $f(x, y, z)$ 可分解如 (4) 或 (5) 式,則

$$\phi(x, y, z)\equiv\alpha P'^2,$$

故 Δ 之諸第一級子行列式均爲零(第八十四節定理一).

92. 第一款: $\Delta\neq0$ $\phi(x, y, z)$ 函數可分解爲三平方之和,漸近方向組成一錐面.

在此情形

$$f(x, y, z)\equiv\alpha P^2+\beta\, Q^2+\gamma R^2+h,$$

α, β, γ 無一爲零,但 h 可爲零.

1° α, β, γ 同符號. 曲面謂之橢圓面 (Ellipsoid).

先設 h 與 α,β,γ 三者異號. 令 $P=0, Q=0, R=0$ 三平面爲新位標面;則 P 變爲 λx, Q 變爲 μy, R 變爲 νz, 而曲面方程式變爲

$$\alpha\,\lambda^2x^2+\beta\,\mu^2y^2+\gamma\,\nu^2z^2+h=0.$$

卽

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \tag{1}$$

此處令

$$a^2=-\frac{h}{\alpha\lambda^2},\quad b^2=-\frac{h}{\beta\mu^2}\quad c^2=-\frac{h}{\gamma\nu^2}.$$

由方程式(1)觀之,每組之 x, y 值,可得符號相反而絕對相同之兩 z 值,故 xy 面平分與 z 軸平行之曲面諸弦.此性質可述之如下: xy 平面謂之關於 Oz 方向之相配直徑面(Diametral conjugate plane). 同理 yz 面爲關於 Ox 方向之相配直徑面. xz 面爲關於 Oy 方向之相配直徑面.故欲研究曲面之形狀,令 x, y, z 均爲正,其他便可推知.

設 a, b, c 均爲正,在 Ox 軸之正向取 $OA=a$, 同法在 Oy 軸取 $OB=b$, 在 Oz 軸取 $OC=c$. 位標面與曲面相交所成之曲線爲橢圓,而以 (OA, OB), (OB, OC), (OC, OA) 爲相配直徑.

與 xy 面平行之平面, $z=\lambda$, 與曲面相交所成之曲線亦爲橢圓

$$z=\lambda.\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{\lambda^2}{c^2}. \tag{2}$$

如 $|\lambda|<c$，則此橢圓有實形．依 Oz 之方向將其投射於 xy 平面上，則得一以 Ox，Oy 爲相配直徑之橢圓．又此橢圓與 CA 橢圓相遇，

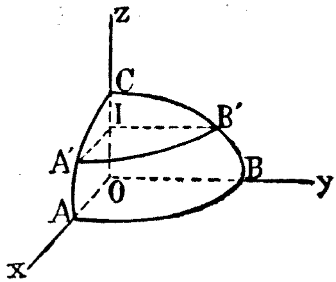


圖 44

因 $y=0,\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0$ 與方程式 (2) 有一公同解答

$$z=\lambda,\ y=0,\ x=\pm\frac{a\sqrt{c^2-\lambda^2}}{c}$$

故也．同理橢圓 (2) 與 CB 橢圓相遇．

根據此等性質，可作橢圓 (2) 之圖．在 z 軸上取 I 點，令其高爲 λ；由 I 作 Ox 及 Oy 之平行線與 CA 及 CB 相遇於 A' 及 B' 點 橢圓 (2) 即以 IA' 及 IB' 爲相配直徑．

當 λ 值由 O 變至 c 時，I 點在 Oz 軸上由 O 點變至 C 點，$A'B'$ 橢圓組成全曲面．此曲面謂之實橢圓面．

現設 h 與 α,β,γ 三者同號，則無論何點之位標均不能適合方程式

$$\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2+h=0;$$

此方程式所表之面謂之點橢圓面．

若 $h=0$，則僅有 $P=0,\ Q=0,\ R=0$ 三平面交點之位標能合方程式

$$\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2=0;$$

此方程式所表之面謂之點橢圓或虛錐面，因方程式之左段爲 P, Q, R 之齊次式故也.

2° α, β, γ 非同號. 曲面謂之雙曲面 (Hyperboloid).

先設 $h=0$, 則方程式表一錐面(第八十五節 I°).

現設 $h \neq 0$. 取 $P=0, Q=0, R=0$ 爲新位標面. 如 α, β 爲同號，而與 γ 異號，則視 h 與 γ 是否同號，曲面方程式可書爲下列二式之一：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0. \tag{4}$$

此兩曲面各以位標面爲關於不在此面內之軸之方向之相配直徑面. 故欲研究曲面之形狀. 祇令 x, y, z 之值均爲正，其他便可推知，

先研究方程式(3)所表之曲面. xy 平面與其相交所成之曲面爲以 $OA=a$, $OB=b$ 爲兩相配直徑之橢圓. xz 平面與其相交所成之曲線爲以 Ox, Oy 爲兩相配直徑之雙曲線，Ox 爲實軸，其長之半等於 OA,

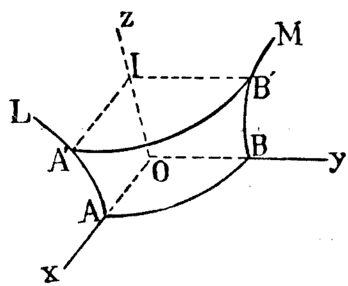


圖 45

yz 平面與其相交所成之曲面爲以 Oy, Oz 爲兩相配直徑之雙曲線，Oy 爲實軸，其長之半等於 OB. 與 xy 面平行之任意面 $z=\lambda$ 與曲面相交所成之曲線常爲實橢圓

$$z=\lambda, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{\lambda^2}{c^2};$$

其中心 I 常在 Oz 軸上,其高(法文 cote)爲 λ,其兩相配直徑 IA', IB' 與 Ox, Oy 平行, A', B' 點則在雙曲線 AL, BM 上. λ 值變時此橢圓組成方程式(3)所表之曲面,名之曰單葉雙曲面(Hyperboloid of one sheet).

現研究方程式(4)所表之曲面. xy 平面不與曲面相遇. xz 平面與其相交所成之曲線爲以 Ox, Oz 爲兩相配直徑之雙曲線 CN. yz 平面與其相交所成之曲線爲以 Oy, Oz 爲兩相配直徑之雙曲線 CK. CN, CK 兩雙曲線均以 Oz 爲實軸,其長之半爲 $OC=c$. $z=\lambda$ 平面與曲線相交成橢圓

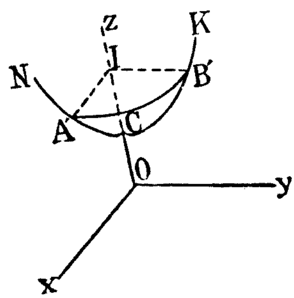


圖 46

$$z=\lambda, \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{\lambda^2}{c^2}-1;$$

此橢圓在 $|\lambda|>c$ 時始有實形. 其兩相配直徑 IA', IB' 爲由 I 點(其高爲 λ 且在 Oz 軸上)所作之 Ox, Oy 之平行線, A', B' 點則在雙曲線 CN, CK 上. 在 $z=c$ 與 $z=-c$ 兩平面之間,曲面並無實點;故曲面分爲上下兩葉,名之曰雙葉雙曲面(Hyperboloid of two sheets).

〔註〕 如 $h\neq 0$, 則

$$\alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2+h=0.$$

曲面並無雙點,證之如下:

令 $P=0$, $Q=0$, $R=0$ 爲新位標面,則方程式變爲

$$lx^2+my^2+nz^2+h=0,$$

或寫爲齊次式

$$F(x, y, z, t)\equiv lx^2+my^2+nz^2+ht^2=0.$$

易證除 $x=y=z=t=0$ 外,無他値能合方程組

$$F'_x=0,\ F'_y=0,\ F'_z=0,\ F'_t=0.$$

反之,如 $h=0$, 則曲面以

$$P=0,\ Q=0,\ R=0$$

三平面之交點爲雙點,但此外無其他雙點.

由此可見如 h 爲零,則 H 亦爲零(第九十節),

93. 第二款: $\Delta=0$, 子行列式之一異於零 $\phi(x, y, z)$ 可分解爲兩平方之和,漸近方向錐面變爲兩平面. $f(x, y, z)$ 可書爲下列二式之一:

$$\alpha P^2+\beta Q^2+R,\ \alpha P^2+\beta Q^2+h.$$

1° 先討論第一式

$$f(x, y, z)\equiv\alpha P^2+\beta Q^2+R.$$

變換位標,令 $P=0$, $Q=0$, $R=0$ 以次爲 zx, xy, yz 面; 方程式變爲

$$\alpha\lambda^2y^2+\beta\mu^2z^2+\nu x=0.$$

如 α 與 β 同號,則選擇 x 軸適宜之正方向,可令方程式變爲

(1)
$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0.$$

p, q 均爲正.如 α 與 β 異號,則方程式可書爲

(2)
$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

p 及 q 仍爲正.

此兩曲面均以 xy, zx 依次爲關於 Oz, Oy 方向之相配直徑面;故欲研究曲面之形狀,祇令 z, y 之值均爲正,其他便可推知.

xy 面與曲面 (1) 相交所成之曲線爲拋物線

(P)
$$z=0, \qquad y^2-2px=0;$$

x 面與之相交成拋物線

(Q)
$$y=0,\ z^2-2qx=0.$$

與 xy 平行之任意平面 $z=\lambda$ 與曲面 (1) 相交成拋物線

(P')
$$z=\lambda, \qquad y^2-2px+\frac{\lambda^2 p}{q}=0.$$

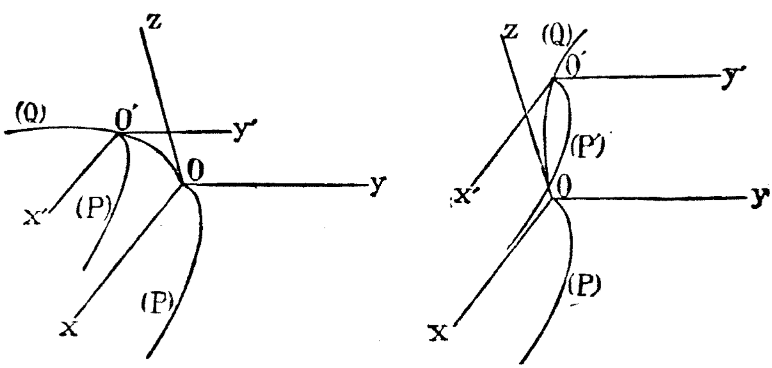


圖 47

此拋物線與拋物線 Q 相遇於一點 O', 其位標爲

$$x=\frac{\lambda^2}{2q},\ y=0,\ z=\lambda.$$

由 O' 點作 $O'x'$ 與 Ox 平行, 作 $O'y'$ 與 Oy 平行, 則 (P') 對於新位標之方程式爲

$$y'^2-2px'=0.$$

(P) 及 (P') 兩拋物線相同. 故欲作曲面 (1), 可將拋物線 (P) 移動, 令其軸及頂點切線常與 Ox, Oy 平行, 且令其頂點 O 作 (Q) 拋物線. 此種曲面名曰橢圓拋物面 (Elliptic paraboloid),

由方程式 (2) 所得之結果與方程式 (1) 相似, 所異者方程式 (2) 之 (Q) 拋物線在 xz 面上之 x 爲負值之半面, 此曲面名曰雙曲拋物面 (Hyperbolic paraboloid),

橢圓拋物面及雙曲拋物面俱無雙點, 於是 $H\neq 0$.

2° 現討論第二式

$$f(x, y, z)\equiv\alpha P^2+\beta Q^2+h.$$

在此情形, 曲面爲柱面, 其母線與 $P=0$, $Q=0$ 兩平面之交線 D 平行. 茲證不與 D 平行之平面與曲面相交所成之曲線爲圓錐曲線, 且此曲線之性質與割面無.

設 $R=0$ 平面不與 D 平行. 變換位標, 令 $R=0$, $P=0$, $Q=0$ 依次爲新 xy, yz, zx 面, 曲面之新方程式爲

$$\alpha\lambda^2x^2+\beta\mu^2y^2+h=0. \tag{3}$$

此方程式表一柱面, 其母線與 z 軸平行, 此方程式並表曲面

與 $R=0$ 面相交所成之曲線.故截口 (Section) 爲何種曲線,視 α, β, h 之符號而定.

先設 α, β 爲同號,則截口爲橢圓族曲線.若 h 與 α, β 同號,則截口爲虛橢圓,曲面爲虛橢圓柱面.若 h 與 α, β 異號,則截口爲實橢圓,曲面爲實橢圓柱面.若 h 爲零,則截口爲點橢圓,曲面爲線橢圓柱面,亦卽兩虛面也.

現設 α, β 爲異號.若 $h\neq 0$,則曲面爲雙曲柱面.若 $h=0$,則曲曲爲兩平面.

94. 第三款:Δ 之子行列式均爲零 $\phi(x, y, z)$ 爲一平直函數之平方,漸近方向錐面爲一雙面.

$f(x, y, z)$ 可書爲下列二式之一:

$$\alpha P^2+Q, \qquad \alpha P^2+h.$$

1° 先討論第一式

$$f(x, y, z)\equiv\alpha P^2+Q.$$

曲面爲一柱面,其母線與 $P=0, Q=0$ 兩平面相交之直線平行.照前節法證明曲面與不與母線平行之面相交成抛物線.故曲面謂之抛物柱面.

2° 現討論第二式

$$f(x, y, z)\equiv\alpha P^2+h.$$

方程式 $f(x, y, z)=0$ 表兩平面,俱與 $P=0$ 面平行.若 h 與 α 同號,則兩平面爲虛面.若 h 與 α 異號,則兩平面爲實面.若 $h=0$,則得雙面.

95. 結論 總括上述,二次曲面之分類可列為下表: P, Q, R 為實數係數且互相殊異之平直函數.

$\Delta \neq 0$	$P^2+Q^2+R^2-1=0$	實橢圓面
	$P^2+Q^2+R^2+1=0$	虛橢圓面
	$P^2+Q^2+R^2=0$	虛錐面
	$P^2+Q^2-R^2-1=0$	單葉雙曲面
	$P^2+Q^2-R^2+1=0$	雙葉雙曲面
	$P^2+Q^2-R^2=0$	實錐面
$\Delta=0$, 子行列式之一異於零	$P^2+Q^2+R=0$	橢圓拋物面
	$P^2-Q^2+R=0$	雙曲拋物面
	$P^2+Q^2-1=0$	實橢圓柱面
	$P^2+Q^2+1=0$	虛橢圓柱面
	$P^2+Q^2=0$	兩虛面
	$P^2-Q^2-1=0$	雙曲柱面
	$P^2-Q^2=0$	兩實面
Δ之子行列式俱為零	$P^2+Q=0$	拋物柱面
	$P^2-1=0$	兩平行實面
	$P^2+1=0$	兩平行虛面
	$P^2=0$	雙面

96. 例 已與數字係數之二次式,欲知其所表之曲面,可用普通方法將其分解為一次式之平方.茲舉例如下:

問方程式 $x^2-2y^2+3z^2+4zx-2xy+2y+\lambda=0$ 表何種曲面?

將方程式連續分解如下:

$$(x-y+2z)^2-(y-2z)^2-2y^2+3z^2+2y+\lambda=0.$$

$$(x-y+2z)^2-3y^2+4yz-z^2+2y+\lambda=0.$$

$$(x-y+2z)^2-\frac{1}{3}(-3y+2z+1)^2+\frac{(2z+1)^2}{3}-z^2+\lambda=0,$$

$$3(x-y+2z)^2-(-3y+2z+1)^2+z^2+4z+1+3\lambda=0.$$

$$3(x-y+2z)^2-(-3y+2z+1)^2+(z+2)^2+3(\lambda-1)=0.$$

檢查前節之表,可知此方程式所表之曲面因 λ 之値而定.如 $\lambda<1$, 則方程式表單葉雙曲面; $\lambda>1$, 則表雙葉雙曲面; $\lambda=1$, 則表實錐面.

方程式已分解爲平直函數之平方後,當考査此等平直函數是否互爲殊異,否則不能直接判定其爲何種曲面.

例如方程式

$$(x+y-1)^2+2(x-y-z-3)^2+3(x-2)^2-1=0$$

表實橢圓面,因 $x+y-1=0$, $x-y-z-3=0$, $x-2=0$ 三平面相交於一點故也.又如方程式

$$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2-1=0$$

之 $y-z$, $z-x$, $x-y$ 三函數並非互爲殊異,因 $y-z=0$, $z-x=0$, $x-y=0$ 三平面經過同一直線故.欲知此方程式所表之曲面,將原式之平方項展開之如下

$$2x^2+2y^2+2z^2-2yz-2zx-2xy-1=0$$

再分解爲其他之平方式

$$\frac{1}{2}(2x-y-z)^2-\frac{(y+z)^2}{2}+2y^2+2z^2-2yz-1=0.$$

即
$$(2x-y-z)^2+3(y-z)^2-2=0,$$

此為橢圓柱面.

習題十五

1. 因 λ 值之變化判別下列二次曲面之種類:

(a) $x^2+(\lambda+1)y^2+\lambda z^2-2yz+2xy+2x+2z+4=0.$

(b) $-x^2+(\lambda-1)z^2+2(\lambda+1)yz-2zx+2xy+2x+2(\lambda-1)y+4z+\lambda=0$

2 指出下列二次曲面之名:

(a) $z=\dfrac{x^2-xy+2y}{y+1}$,　(b) $z=\dfrac{x^2-y^2}{x-y+1}$,

(c) $z=\dfrac{x^2+y^2-1}{x-1}$　(d) $z=\dfrac{x^2+xy-2y^2-x+y-1}{x+2y-1}$.

3. 已與一球面 $(\mathcal{E})$ 及球面上一圓 (c). 從空間一點 P 作任意平面與球面相交於圓 (γ). 過 (c) 及 (γ) 作二次錐面,求錐面頂點之軌跡.

此軌跡為二次曲面.設 $(\mathcal{E})$ 球及 (c) 圓均不變,當 P 點變時判別軌跡之種類.

第十六章

中心 直徑面及直徑

97. 中心之定義　經過一定點作諸直線,每直線與二次曲面相交於兩點,若不論直線之方向如何,兩交點對於定點常爲對稱,則定點謂之二次曲面之中心.

欲得二次曲面之中心,須先證明下之定理:

原點爲二次曲面之中心之必須及充分條件爲曲面方程式不含一次項.

設曲面之方程式爲

$$\phi(x, y, z)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$$

經原點之直線

$$x=\alpha\rho,\quad y=\beta\rho,\quad z=\gamma\rho$$

與曲面相交點之ρ值爲方程式

$$\rho^2\phi(\alpha, \beta, \gamma)+2\rho(C\alpha+C'\beta+C''\gamma)+D=0$$

之根.故原點爲中心之必須及充分條件爲此方程式應有絕對值相同而符號相反之兩根.於是

$$C\alpha+C'\beta+C''\gamma\equiv 0,$$

但此爲恆等式,故

$$C=C'=C''=0.$$

98. 中心之搜尋 由前節之結果,如 (x_0, y_0, z_0) 點為二次曲面之中心,則將原點移至該點,新方程式應不含一次項.但新方程式為

$$f(x+x_0, y+y_0, z+z_0)=0,$$

即 $$f(x_0, y_0, z_0)+xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+\phi(x, y, z)=0,$$

故 $$f'_{x_0}=0, \quad f'_{y_0}=0, \quad f'_{z_0}=0.$$

由此可見中心之位標以下列方程組定之:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_x \equiv Ax+B''y+B'z+C=0, \\ \frac{1}{2}f'_y \equiv B''x+A'y+Bz+C'=0, \\ \frac{1}{2}f'_z \equiv B'x+By+A''z+C''=0. \end{cases}$$

在此方程組中,諸未知數係數所成之行列式,即前章之 Δ;故如 $\Delta \neq 0$,曲面有一中心,而限於一;換言之,橢圓面,雙曲面及錐面俱各有一中心,但限於一.

99. 各曲面之中心 除上列三曲面外,其餘曲面,或無一中心,或有無限數之中心,玆分別討論之.

拋物面:拋物面方程式可書為 $A'y^2+A''z^2+2Cx=0$ (第九十三節).前節之方程組(1)在此處為 $C=0$, $y=0$, $z=0$. 由此可見拋物面無心.

橢圓或雙曲柱面——兩平面:此等曲面之方程式為 $Ax^2+A'y^2+D=0$. 前節之方程組(1)在此處為 $x=0$, $y=0$; 故有

無限數之中心均在一直線上.若曲面爲柱面,此直線與母線平行;若曲面爲兩平面,此直線即兩面之交線.

拋物柱面:方程式爲 $A'y^2+2Cx=0$. 前節之方程組 (1) 在此處爲 $C=0, y=0$, 故曲面無中心.

兩平行面或雙面:方程式爲 $A''z^2+D=0$. 前節之方程組 (1) 在此處爲 $z=0$, 故有無限數之中心均在一平面上.

100. 以中心爲原點之新方程式　設 $f(x, y, z)=0$ 爲曲面方程式, (x_0, y_0, z_0) 爲中心之位標,則將原點移至該點後,方程式變爲

$$f(x+x_0, y+y_0, z+z_0)=0,$$

即

$$f(x_0, y_0, z_0)+xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+\phi(x, y, z)=0.$$

但

$$f'_{x_0}=f'_{y_0}=f'_{z_0}=0,$$

而由 Euler 公式(第三節)

$$2f(x_0, y_0, z_0)=x_0f'_{x_0}+y_0f'_{y_0}+z_0f'_{z_0}+f'_{t_0}=f'_{t_0},$$

即

$$f(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{2}f'_{t_0}=Cx_0+C'y_0+C''z_0+D,$$

故新方程式爲

$$\phi(x, y, z)+D_1=0,$$

此處

$$D_1=Cx_0+C'y_0+C''z_0+D.$$

從他方面觀之, x_0, y_0, z_0 之關係爲

$$Ax_0+B''y_0+B'z_0+C=0,$$

$$B''x_0+A'y_0+Bz_0+C'=0,$$

$$B'x_0+By_0+A''z_0+C''=0.$$

將此等 x_0, y_0, z_0 值代入 D_1 式,得

$$D_1=\frac{\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}}=\frac{H}{\Delta}.$$

故所求之方程式爲

$$\phi(x, y, z)+\frac{H}{\Delta}=0.$$

此方程式適用於單心曲面,即言 $\Delta\neq 0$.

101. 直徑平面定理　已與一二次曲面及一直線 L. 與 L 平行諸弦中點之軌跡爲一平面,謂之與 L 方向相配之直徑平面.

設曲面之方程式爲

$$f(X, Y, Z)\equiv\phi(X, Y, Z)+2CX+2C'Y+2C''Z+D=0;$$

L 之方向參數爲 α, β, γ. 假如 $M(x, y, z)$ 爲軌跡之點,則由 M 作與 L 平行之直線,與曲面相交於兩點對於 M 爲對稱.平行線上任意一點之位標爲

$$X=x+\alpha\rho,\quad Y=y+\beta\rho,\quad Z=z+\gamma\rho.$$

平行線與曲面相交點之 ρ 值應合方程式

$$f(x+\alpha\rho,\quad y+\beta\rho,\quad z+\gamma\rho)=0,$$

即

$$(1)\qquad f(x, y, z)+\rho(\alpha f_x'+\beta f_y'+\lambda f_z')+\rho^2\phi(\alpha, \beta, \gamma)=0$$

故兩交點對於M為對稱之條件如下

$$\alpha f_x'+\beta f_y'+\gamma f_z'=0.$$

此為一次式,故M點之軌跡為一平面,謂之與L方向相配之直徑平面.

因 $f'_x=\phi'_x+2C,\quad f'_y=\phi'_y+2C',\quad f_z'=\phi_z'+2C''$,

故 $\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z\equiv\alpha\phi'_x+\beta\phi'_y+\gamma\phi'_z+2(C\alpha+C'\beta+C''\gamma)$;

又因$\phi(x, y, z)$為齊次式,故

$$\alpha\phi'_x+\beta\phi'_y+\gamma\phi'_z\equiv x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+z\phi'_\gamma.$$

於是直徑平面方程式可書為

$$x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+z\phi'_\gamma+2(C\alpha+C'\beta+C''\gamma)=0.$$

此處假設L之平行線與曲面相交於有限遠之兩點,即言L並非漸近方向,亦即言$\phi(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$. 在此情形,$\phi_\alpha', \phi_\beta', \phi_\gamma'$不能同時為零,否則 $\alpha\phi'_\alpha+\beta\phi'_\beta+\gamma\phi'_\gamma\equiv 2\phi(\alpha, \beta, \gamma)=0$. 故諸非漸近方向各有其相配之直徑平面在有限遠.

〔註〕 單心二次曲面之直徑平面必經過此心,因心之位標能合任意直徑平面方程式$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0$故也.反之,定心之平面$f'_x=0, f'_y=0, f'_z=0$依次為與$Ox, Oy, Oz$方向相配之直徑平面.

102. 奇異直徑平面 (Singular diametral planes) 現設$\phi(\alpha, \beta, \gamma)=0$, 則$L$為漸近方向,$L$之平行線與曲面相遇於無窮遠點. 在此情形,自無直徑平面之存在,然有時方程式

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,$$

即 $$x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+z\phi'_\gamma+2(C\alpha+C'\beta+C''\gamma)=0$$

表一有限遠之平面 P, 此平面謂之奇異直徑平面.

試問此平面在幾何學上有何意義?前節之方程式(1)在此處爲

(2) $$f(x, y, z)+\rho(\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z)=0.$$

無論 $M(x, y, z)$ 爲何點, 此方程式之兩根中必有一根,其值爲無窮大. 若 M 點在 P 平面上,則 ρ 之係數爲零,而方程式(2)兩根之值均爲無窮大.故 P 爲下列諸點之軌跡:經此等點作與 L 平行之直線,與曲面相遇於兩無窮遠點.又 P 平面與 L 平行,因

$$\alpha\phi'_\alpha+\beta\phi'_\beta+\gamma\phi'_\gamma=2\phi(\alpha, \beta, \gamma)=0$$

故.可知 P 平面爲與 L 平行且與曲面相遇於兩無窮遠點諸直線之軌跡.此性質表 P 平面爲關於 L 方向之漸近面,可知奇異直徑平面與漸近面實二而一也.

103. 相配方向　設 L 及 L' 爲兩直線,若與 L 方向相配之直徑面與 L' 平行,則與 L' 方向相配之直徑面必與 L 平行.

設 α, β, γ 及 α', β', γ' 爲 L 及 L' 之方向參數.與 L 相配之直徑面之方程式爲

$$x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+z\phi'_\gamma+2(C\alpha+C'\beta+C''\gamma)=0;$$

若此平面與 L' 平行,則

(1) $$\alpha'\phi'_\alpha+\beta'\phi'_\beta+\gamma'\phi'_\gamma=0.$$

此式亦可寫爲

(2) $$\alpha\phi'_{\alpha'}+\beta\phi'_{\beta'}+\gamma\phi'_{\gamma'}=0;$$

故與L'方向相配之直徑面與L平行.

於是得相配方向之定義:若兩方向之一與他方向相配之直徑面平行,則此兩方向爲相配方向.兩方向相配之條件爲其方向參數合(1)或(2)式.

有兩直徑平面,如任一平面所平分之弦與他平面平行,則兩直徑面謂之相配.

104. **直徑**　未述直徑定義以前,先證下之定理:

二次曲面與諸平行面所成之截口(Plane section)爲諸同位相似圓錐曲線(Homothetic conics).

取與諸平行面平行之面爲xy面,則二次曲面

$$f(x, y, z)\equiv\phi(x, y, z)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

與$z=h$面所成之截口

$$\phi(x, y, h)+2Cx+2C'y+2C''h+D=0$$

爲圓錐曲線;且當h值變時,此方程式之二次項不變,故諸圓錐曲線爲同位相似.

由是如一平面與某二次曲面所成之截口爲有心圓錐曲線,則諸平行面與曲面所成之截口亦爲有心圓錐曲線.

茲證明直徑定理:諸平行面與二次曲面所成截口中心之軌跡爲一直線,謂之與平面方向相配之直徑.

設諸平行面之方向爲

$$(P)\qquad ux+vy+wz=0;$$

$M(x, y, z)$軌跡之一點.由M作平面與(P)平行,此平面與曲面

所成之截口應爲以M爲心之圓錐曲線,故由M所作與(P)平行之直線與曲面相交之兩點應對於M爲對稱.設α, β, γ爲與(P)平行之直線之方向參數,則

$$(1)\qquad u\alpha+v\beta+w\gamma=0.$$

經$M(x, y, z)$點而與(α, β, γ)平行之直線與曲面相交之兩點若對於M爲對稱,則

$$(2)\qquad \alpha f_x'+\beta f_y'+\gamma f_z'=0.$$

故如M爲軌跡之點,則由(1)式所得之α, β, γ值應合方程式(2),換言之,由(1),(2)兩式消去α, β, γ,得

$$\frac{f_x'}{u}=\frac{f_y'}{v}=\frac{f_z'}{w}.$$

此方程式表一直線,謂之與(P)方向相配之直徑.

若u, v, w三值之中有一爲零,則應令其分子爲零.故與平面$ux+vy=0$相配之直徑爲$\dfrac{f_x'}{u}=\dfrac{f_y'}{v}$, $f_z'=0$;與xy面相配之直徑爲$f_x'=0$, $f_y'=0$.

105. 極面與直徑之關係　此兩者之關係見下列定理:

若π爲A點對於二次曲面之極面,則與π面相配之直徑經過A點.設A之位標爲(x_0, y_0, z_0),則π之方程式爲

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{t_0}.$$

與π面相配之直徑方程式爲

$$\frac{f_x'}{f'_{x_0}}=\frac{f_y'}{f'_{y_0}}=\frac{f_z'}{f'_{z_0}},$$

此直徑經過A點.

106 **直徑與直徑面相關之兩定理** 若 L 直線與 P 平面平行,則與 L 方向相配之直徑面經過與 P 方向相配之直徑.

設 L 之方向爲 (α, β, γ), P 平面之垂直方向爲 (u, v, w). 由定理之假設得

(1) $$u\alpha+v\beta+w\gamma=0.$$

與 L 相配之直徑面爲

(2) $$\alpha f_x'+\beta f_y'+\gamma f_z'=0,$$

與 P 相配之直徑爲

(3) $$\frac{f_x'}{u}=\frac{f_y'}{v}=\frac{f_z'}{w}.$$

由(1),(3)兩式消去 u, v, w 卽得(2)式,故定理云云.

若 Q 爲與 L 方向相配之直徑面,則與 Q 相配之直徑與 L 平行.

設 (α, β, γ) 爲 L 之方向,則得 Q 之方程式

$$x\phi'_\alpha+y\phi'_\beta+z\phi'_\gamma+2(C\alpha+C'\beta+C''\gamma)=0,$$

於是與 Q 相配之直徑爲

$$\frac{f'_x}{\phi'_\alpha}=\frac{f'_y}{\phi'_\beta}=\frac{f'_z}{\phi'_\gamma}.$$

經原點作直線與此直徑平行

$$\frac{\phi'_x}{\phi'_\alpha}=\frac{\phi'_y}{\phi'_\beta}=\frac{\phi'_z}{\phi'_\gamma}.$$

$x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 值合此方程式,卽言直徑與 L 平行.

107. 單心二次曲面之相配直徑　設有以原點爲中心之單心二次曲面(橢圓面,雙曲面,錐面); OL 爲經心之任一直線, Q 爲與 OL 相配之直徑面. 由前節之定理,則 OL 爲與 Q 相配之直徑. Q 面與二次曲面相交成二次曲線,此二次曲線亦以原點爲心. 設 OM, ON 爲二次曲線之兩相配直徑,則 OL, OM, ON 三直線中之任一直線爲其他二直徑所定平面之相配直徑. 證之如下:

由前節之定理, OL 爲與 MON 面相配之直徑. 茲更證 OM 爲與 LON 面相配之直徑. 欲證此,可證 LON 爲與 OM 相配之直徑面. 因與 OL 相配之直徑面經 OM 線,故與 OM 相配之直徑面經 OL 線(第一百零三節). 再設 AB 爲二次曲線之弦且與 OM 平行; 因 OM, ON 爲二次曲線之兩相配直徑, 故 AB 之中點 I 必在 ON 線上; 與 OM 相配之直徑面應經 I 點與 O 點,可知中心過 ON 線, 故與 OM 相配之直徑面爲 LON 面. 同理,可證 LOM 爲與 ON 相配之直徑面.

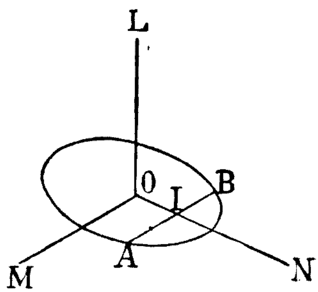


圖 48

OL, ON, OM 三直徑謂之一組之相配直徑. 在一二次曲面內,相配直徑之組數爲無限, 因 OL 既爲任意之方向, 而 OM 及 ON 又爲二次曲線之任意兩相配直徑故也. 三直徑爲相配, 其方向參數 $(\alpha, \beta, \gamma), (\alpha', \beta', \gamma'), (\alpha'', \beta'', \gamma'')$ 有下之關係:

$$\alpha'\phi'_{\alpha''}+\beta'\phi'_{\beta''}+\gamma'\phi'_{\gamma''}=0,$$

$$\alpha''\phi'_{\alpha}+\beta''\phi'_{\beta}+\gamma''\phi'_{\gamma}=0,$$

$$\alpha\phi'_{\alpha'}+\beta\phi'_{\beta'}+\gamma\phi'_{\gamma'}=0.$$

習題十六

1. 判別二次曲面

$$x^2-2y^2+2z^2+4yz-6zx+2xy+8x-4y+2\lambda z+\lambda^2=0$$

之性質.求中心之位標及軌跡.求與平面 $3x+y-z=0$ 相配之直徑及與此面平行之切面上切點軌跡.

2. 求下列二次曲面之中心:

(a) $yz+zx+xy-2x-2y-2z=0,\ 2x-5y+z+1=0.$

(b) $x^2+6y^2+3z^2-8yz-2zx+4xy+x+2y=0,\ x-y-z=0.$

3. 設有二次曲面

$$x^2+y^2+z^2-R^2+\lambda z(x-a+\mu y)=0,$$

λ 及 μ 爲參數.求其中心軌跡,並將軌跡劃分以示何段爲何種曲面之中心.

第十七章

二次面曲之主向

108. 主向之存在　本章所討論諸方程式,其位標軸均爲正交.茲證明:凡二次曲面至少有一組之三個垂直方向,其中每兩方向互爲相配.

設二次曲面之方程式爲

$$f(x, y, z) \equiv \phi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

$\phi(x, y, z)$ 仍表 x, y, z 諸二次項之和

$$\phi(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

若 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ 三方向中每兩方向爲相配,則

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_2 \dfrac{\delta\phi}{\delta\alpha_3} + \beta_2 \dfrac{\delta\phi}{\delta\beta_3} + \gamma_2 \dfrac{\delta\phi}{\delta\gamma_3} = 0, \\ \alpha_3 \dfrac{\delta\phi}{\delta\alpha_1} + \beta_3 \dfrac{\phi\delta}{\delta\beta_1} + \gamma_3 \dfrac{\delta\phi}{\delta\gamma_1} = 0, \\ \alpha_1 \dfrac{\delta\phi}{\delta\alpha_2} + \beta_1 \dfrac{\delta\phi}{\delta\beta_2} + \gamma_1 \dfrac{\delta\phi}{\delta\gamma_2} = 0; \end{cases}$$

又若此三方向中每兩方向爲正交,則

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

故欲證明本定理,可證明有合 (1), (2) 兩方程式之 $\alpha_1\beta_1\cdots\cdots\gamma_3$ 值存在.

未證明之先,當知 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ 不能與 $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 爲正比; 如不然,設 $\alpha_2=\lambda\alpha_3$, $\beta_2=\lambda\beta_3$, $\gamma_2=\lambda\gamma_3$, 則 (2) 之第一式變爲

$$\lambda(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)=0,$$

此式不能成立,因 $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 不能同時爲零故也. 由 (2) 之末二式得

$$\frac{\alpha_1}{\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3}=\frac{\beta_1}{\gamma_2\alpha_3-\alpha_2\gamma_3}=\frac{\gamma_1}{\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3}. \tag{3}$$

(1) 之末二式可書爲

$$\alpha_2\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}+\beta_2\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}+\gamma_2\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=0.$$

$$\alpha_3\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}+\beta_3\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}+\gamma_3\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=0,$$

於是得

$$\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}}{\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}}{\gamma_2\alpha_3-\alpha_2\gamma_3}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}}{\alpha_2\beta_3-\beta_2\alpha_3}. \tag{4}$$

由 (3), (4) 兩式,可得

$$\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}}{\alpha_1}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}}{\beta_1}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}}{\gamma_1},$$

卽言 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 能合方程式

$$\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\alpha}}{\alpha}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\beta}}{\beta}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\gamma}}{\gamma}. \tag{5}$$

因(1),(2)兩方程組爲對稱,故$\alpha=\alpha_2$, $\beta=\beta_2$, $\gamma=\gamma_2$, 或$\alpha=\alpha_3$, $\beta=\beta_3$, $\gamma=\gamma_3$亦能合方程組(5).

由此可見如有互相垂直且互爲相配之三方向存在,其方向參數必合方程組(5).

所謂主向者,卽合方程組(5)之方向也.

109. 主向方程組之討論　欲討論方程組(5),加入一新未知數S,令

$$\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\alpha}}{\alpha}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\beta}}{\beta}=\frac{\frac{\delta\phi}{\delta\gamma}}{\gamma}=2S,$$

則方程組變爲

$$\frac{\delta\phi}{\delta\alpha}-2S\,\alpha=0,\ \frac{\delta\phi}{\delta\beta}-2S\,\beta=0,\ \frac{\delta\phi}{\delta\gamma}-2S\,\gamma=0,$$

卽

$$(6)\qquad \begin{cases}(A-S)\alpha+B''\beta+B'\gamma=0,\\ B''\alpha+(A'-S)\beta+B\gamma=0,\\ B'\alpha+B\beta+(A''-S)\gamma=0.\end{cases}$$

此方程組除α,β,γ之值均爲零外,有其他解答之條件爲方程組之係數所成之行列式等於零

$$\Delta(S)\equiv\begin{vmatrix}A-S & B'' & B'\\ B'' & A'-S & B\\ B,' & B & A''-S\end{vmatrix}=0.$$

此爲S之三次方程式.以此方程式之解答代入方程組(6),可得α,β,γ非均爲零之解答,是爲主向之方向係數.

110. S方程式之討論 將$\Delta(S)$行列式展開之,得

$$\Delta(S)\equiv(A-S)(A'-S)(A''-S)-B^2(A-S)$$
$$-B'^2(A'-S)-B''^2(A''-S)+2BB'B''=0,$$

即 $$\Delta(S)\equiv-S^3+(A+A'+A'')S^2-(a+a'+a'')S+\Delta=0,$$

此處a, a', a''之意義與第八十三節同.

欲證明S方程式常有實根,須先述下列各特別情形:

1° B, B', B''均爲零. S方程式爲

$$\Delta(S)\equiv(A-S)(A'-S)(A''-S)=0;$$

此方程式有三實根A, A', A''. 如其中有兩值相等,則方程式有雙根,如$A=A'=A''$, 則方程式有三重根;在此情形,曲面爲球面.

2° B, B', B''中有兩係數爲零,例如$B'=B''=0, B\neq 0$. S方程式爲 $$(A'-S)[(A'-S)(A''-S)-B^2]=0.$$

此方程式除$S=A$外,尚有其他兩實根,因在三項式$(A'-S)(A''-S)-B^2$中先後以$-\infty$, A', $+\infty$代S, 則其符號爲$+-+$故也.

如A值能合方程式

$$(A'-A)(A''-A)-B^2=0,$$

則S方程式以A爲雙根.

3° B, B', B''中有一係數爲零,例如$B''=0, B\neq 0, B'\neq 0$. S方程式爲

$$\Delta(S)\equiv(A-S)(A'-S)(A''-S)-B^2(A-S)-B'^2(A'-S)=0.$$

先設$A\neq A'$, 例如$A<A'$;以下列諸值先後代入方程式之左段:

$$-\infty,\ A,\ A',\ +\infty;$$

其結果爲

$$+\quad -\quad +\quad -,$$

故方程式有三不同值之實根.

再設 $A=A'$, 則方程式爲

$$(A-S)[(A-S)(A''-S)-B^2-B'^2]=0$$

就中一根爲 A, 其餘兩根亦爲實值, 且三根之值彼此不同.

故無論如何, 方程式常有三不同值之實根.

普通情形, B, B', B'' 無一爲零. S 方程式可書如下:

$$\Delta(S)\equiv(A-S)[(A'-S)(A''-S)-B^2]-B'^2(A'-S)$$
$$-B''^2(A''-S)+2BB'B''=0.$$

方程式
$$(A'-S)(A''-S)-B^2=0$$

有兩不同值之實根 S_1, S_2, 中隔 A' 值. 試以 S_1 代入 S 方程式之左段, 則
$$\Delta(S_1)=-B'^2(A'-S_1)-B''^2(A''-S_1)+2BB'B''.$$

右段爲 B' 之二次式, 其判別式 $B''^2[B^2-(A'-S_1)(A''-S_1)]$ 之值爲零, 故 B'' 之二次式爲完全平方, 可書如下:

$$\Delta(S_1)=-\frac{1}{A'-S_1}[-B'(A'-S_1)+BB'']^2.$$

同理
$$\Delta(S_2)=-\frac{1}{A'-S_2}[-B'(A'-S_2)+BB'']^2.$$

設 $S_1<S_2$, 則 $S_1<A'<S_2$, 於是 $\Delta(S_1)<0$, $\Delta(S_2)>0$. $\Delta(S)$ 函數之變遷可列爲下表:

S	$-\infty$	S_1	S_2	$+\infty$
$\Delta(S)$	$+$	$-$	$+$	$-$

故S方程式有三不同值之實根,中隔S_1及S_2.

若$\Delta(S_1)$及$\Delta(S_1)$同時爲零,則上之理論不適用.但實際無此情形,因S_1, S_2中僅有一值能令$BB''-B'(A'-S)$式爲零故也.設$\Delta(S_1)=0$, $\Delta(S_2)\neq 0$,則S方程式以S_1爲一根,其他根在S_2及$+\infty$之間,其第三根必爲實值或與S_1相合.故無論如何,S方程式常有三實根.

111. S方程式有雙根之條件 S方程式有雙根之必須及充分之條件爲此雙根能令$\Delta(S)$行列式之諸第一級子行列式均爲零.

取$\Delta(S)$之引數

$$\Delta'(S)\equiv-(A'-S)(A''-S)-(A''-S)(A-S)$$
$$-(A-S)(A'-S)+B^2+B'^2+B''^2,$$

或書爲 $$\Delta'(S)\equiv-(a_s+a'_s+a''_s),$$

此處 $$a_s\equiv(A'-S)(A''-S)-B^2,$$
$$a'_s\equiv(A''-S)(A-S)-B'^2,$$
$$a''_s\equiv(A-S)(A'-S)-B''^2,$$

S方程式有雙根之必須及充分之條件爲方程式

$$\Delta(S)=0 \quad 及 \quad a_s+a'_s+a''_s=0$$

有公共之根.第八十三節A述及:如$\Delta(S)$及$a_s+a'_s+a''_s$同時爲零,則$\Delta(S)$之第一級子行列式均爲零.反之,如某S值能令$\Delta(S)$

之子行列式均爲零,則此值亦能令 $\Delta(S)$ 及 $a_s+a'_s+a''_s$ 均爲零.

112. S 方程式有三根之條件 在第一百一十節已見:S 方程式有三重根之條件爲 $B=B'=B''=0$, $A=A'=A''$; 重根之值爲 A, 曲面爲球面.

亦可用下方法證之. $\Delta(S)$ 之第二級引數爲

$$\Delta''(S)\equiv 2(A-S+A'-S+A''-S);$$

$\Delta(S)$ 之三重根須合下列三方程式

$$\Delta(S)=0,\ a_s+a'_s+a''_s=0,$$

$$(A-S)+(A'-S)+(A''-S)=0.$$

參觀第八十三節 B 可知此根應令 $\Delta(S)$ 之各元均爲零,故

$$A-S=0,\ A'-S=0,\ A''-S=0,\ B=0,\ B'=0,\ B'=0,\ B''=0,$$

卽
$$B=B'=B''=0,\qquad S=A=A'=A''$$

113. S 方程式之根與主向之關係 假如已將 S 方程式之根代入主向方程式

$$(6)\qquad \begin{cases} (A-S)\alpha+B''\beta+B'\gamma=0, \\ B''\alpha+(A'-S)\beta+B\gamma=0, \\ B'\alpha+B\beta+(A''-S)\gamma=0. \end{cases}$$

若視 α, β, γ 爲一點之位標,則此三方程式表三平面,三平面相交之公共直線卽主向.

1° S 方程式僅有單根. 每一單根可得一主向且限於一.

因將單根之值代入,$\Delta(S)$ 之子行列式非均爲零,故 (6) 所表之三平面沿一公共直線相交,於是可得一主向.

由S方程式之兩單根所得之兩主向彼此相配且垂直.

設S_1, S_2爲S方程式之兩單根,$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$爲相應兩主向之方向參數.於是

$$\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}=2S_1\alpha_1,\ \frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}=2S_1\beta_1,\ \frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=2S_1\gamma_1,$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_2}=2S_2\alpha_2,\ \frac{\delta\phi}{\delta\beta_2}=2S_2\beta_2,\ \frac{\delta\phi}{\delta\gamma_2}=2S_2\gamma_2.$$

第一行之三式依次以α_2 β_2, γ_2乘之,而取其和

$$\alpha_2\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}+\beta_2\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}+\gamma_2\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=2S_1(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2).$$

同法可得

$$\alpha_1\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_2}+\beta_1\frac{\delta\phi}{\delta\beta_2}+\gamma_1\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_2}=2S_2(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2).$$

將此兩式相減;因兩式之左段相等,故

$$0=2(S_1-S_2)(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2).$$

S_1既與S_2異,則

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0;$$

於是
$$\alpha_1\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_2}+\beta_1\frac{\delta\phi}{\delta\beta_2}+\gamma_1\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_2}=0.$$

最後兩式證明$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$與$(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$兩方向彼此相配且垂直.

故如S方程式有三不同値之根,則其相應之三主向互相垂直且相配.

2° S方程式有雙根.每一雙根可得無數之主向,此等主向

均與一平面平行.

以雙根之值代入方程組(6),則$\Delta(S)$之子行列式均爲零,於是(6)所表之三平面合而爲一,與此面平行之方向均爲主向.

設S方程式以S_1爲雙根,以S_2爲單根;由S_1可得無限數之主向均與一平面P_1平行,由S_2僅得一主向L_2,如以L_1表與P_1平行之任一方向,則可用前法證明L_1與L_2正交且相配.茲更證明在P_1平面內兩垂直方向互爲相配.設$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)(\alpha'_1,\beta'_1,\gamma'_1)$爲由$S_1$所得之兩垂直方向,則

$$\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}=2S_1\alpha_1,\ \frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}=2S_1\beta_1,\ \frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=2S_1\gamma_1;$$

以$\alpha'_1,\beta'_1,\gamma'_1$依次乘各式而取其和

$$\alpha'_1\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}+\beta'_1\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}+\gamma'_1\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=2S_1(\alpha\ \alpha'_1+\beta_1\beta'_1+\gamma_1\gamma'_1).$$

因兩方向爲垂直;故此式之右段爲零,而左段亦必爲零.由此證明兩方向爲相配.

3° S方程式有三重根.若S方程式有三重根,則任何方向均爲主向.

因此時　　$B=B'=B''=0,\qquad A=A'=A''$,

而重根之值爲A,故方程組(6)以任意値α,β,γ爲根,照前法證明每兩垂直之方向必相配.在此情形,曲面爲球面.

114. **結論**

1° 如S方程式有三不同値之根,則可得一組之三方向垂直且相配,此三方向爲由S方程式之根所得之三主向.

2° 如S方程式有一雙根及一單根,則可得無量數組之三方向垂直且相配.此三方向之一由S方程式之單根所得,其餘兩方向與由S方程式之雙根所得之平面平行.

3° 如S方程式有三重根,則任意三垂直方向互爲相配.

方是證明本章開端之定理

習題十七

1. 求下列曲面之主向及主面:

(a) $x^2+3y^2-z^2-4xy+2yz-8\ +4z-11=0.$

(b) $4x^2+7y^2+7z^2+14yz+8zx+8xy+4x+2y+2z=0.$

2. 求曲面$xy=0$之主面.

3. 求曲面$Ax^2+A'y^2+A''z^2+(Bx+B'y+B''z)^2-1=0$之主面.

4. 求曲面

$$\mathcal{E}(ax+a'y+a''z)^2+\mathcal{E}'(bx+b'y+b''z)^2+\mathcal{E}''(cx+c'y+c''z)^2+d=0$$

之S方程式.

第十八章

二次式之簡約

115. 定理 設位標軸爲正交,有二次曲面

$$f(x, y, z) \equiv \phi(x, y, z) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0;$$

若取與S方程式之三根S_1, S_2, S_3相應之三主向OX, OY, OZ爲新位標軸,但不變其原點,則方程式之二次項變爲$S_1X^2 + S^2Y^2 + S_3Z^2$.

設$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, 爲關於$S_1, S_2, S_3$之三主向之方向餘弦,若取此三方向爲$OX, OY, OZ$軸,則得變換位標之公式

$$x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z,$$

$$y = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z,$$

$$z = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z.$$

於是原方程式之二次項變爲

(1) $\phi(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z);$

此爲X, Y, Z之二次式,可書如下

(2) $A_1X^2 + A'_1Y^2 + A''_1Z^2 + 2B_1YZ + 2B'_1ZX + 2B''_1XY,$

$A_1, A'_1 \cdots\cdots B''_1$爲待定之值.

(1)與(2)爲恆等式;令$Z=0$,則

(3) $A_1X^2 + A'_1Y^2 + 2B''_1XY \equiv \phi(\alpha_1 X + \alpha_2 Y, \beta_1 X + \beta_2 Y, \gamma_1 X + \gamma_2 Y).$

再令 $X=1,\ Y=0$, 則 $A_1=\phi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$.

但 $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ 爲關於 S_1 之主向,故

$$\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}=2S_1\alpha_1,\ \frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}=2S_1\beta_1,\ \frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=2S_1\gamma_1;$$

以 $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ 依次乘三式而取其和

$$2\phi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=2S_1(\alpha^2{}_1+\beta^2{}_1+\gamma^2{}_1).$$

因 $\alpha^2{}_1+\beta^2{}_1+\gamma^2{}_1=1$, 故

$$A_1=\phi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=S_1.$$

同理證明　　$A'_1=S_2, A''_1=S_3.$

欲得 B''_1 值,在(3)式中令 $X=Y=1$, 則

$$A_1+A'_1+2B''_1=\phi(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2,\gamma_1+\gamma_2),$$

即

$$A_1+A'_1+2B''_1=\phi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)+\alpha_2\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}+\beta_2\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}+\gamma_2\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}+\phi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2).$$

但　　$\phi(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=A_1,\ \phi(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=A'_1,$

而 $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1),(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ 兩方向相配,故

$$2B''_1=\alpha_2\frac{\delta\phi}{\delta\alpha_1}+\beta_2\frac{\delta\phi}{\delta\beta_1}+\gamma_2\frac{\delta\phi}{\delta\gamma_1}=0.$$

同理 $B_1=0,\ B'_1=0.$

既得 $A_1, A'_1,\cdots\cdots B''_1$ 諸值,則(2)式變爲 $S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2$, 於是證明本定理.

若 S 方程式有雙根,例如 $S_1=S_2$, 則任取兩垂直方向 OX, OY 但須與雙根相應之主向面平行,其 OZ 之方向則與 S_3 根相應.

此時(1)式變爲$S_1(X^2+Y^2)+S_2Z^2$.

若S方程式有三根,則任意之三垂直方向均爲主向,(1)式變爲$A(X^2+Y^2+Z^2)$,即$S_1(X^2+Y^2+Z^2)$.

116. S方程式之零根　已知S方程式可書爲

$$S^3-(A+A'+A'')S^2+(a+a'+a'')S-\Delta=0.$$

1° 如$\Delta\neq 0$,則方程式無零根.在此情形,曲面爲單心曲面.

2° 如$\Delta=0$, $a+a'+a''\neq 0$,則方程式以零爲單根.在此情形Δ之子行列式非均爲零,曲面爲拋物面,或有心柱面,或兩平面.

3° 如$\Delta=0$, $a+a'+a''=0$, $A+A'+A''\neq 0$,則方程式以零爲雙根.在此情形,Δ之子行列式均爲零,曲面爲拋物柱面,或兩平行平面,或兩相重平面.

4° S方程式不能以零爲三重根,否則$\Delta=0$, $a+a'+a''=0$, $A+A'+A''=0$,則Δ之各元均爲零,而曲面非二次曲面.

117. 位標軸變換後之方程式　二次曲面

$$\phi(x, y, z)+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

經第一次位標軸方向之變換,方程式變爲

$$\phi(\alpha_1X+\alpha_2Y+\alpha_3Z, \beta_1X+\beta_2Y+\beta_3Z, \gamma_1X$$
$$+\gamma_2Y+\gamma_3Z)+2C(\alpha_1X+\alpha_2Y+\alpha_3Z)+2C'(\beta_1X$$
$$+\beta_2Y+\beta_3Z)+2C''(\gamma_1X+\gamma_2Y+\gamma_3Z)+D=0;$$

若令　$C_1=C\alpha_1+C'\beta_1+C''\gamma_1$, $C'_1=C\alpha_2+C'\beta_2+C''\gamma_2$,

$C''_1=C\alpha_3+C'\beta_3+C''\gamma_3$.

則得 $S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+2C_1X+2C'_1Y+2C''_1Z+D=0.$

再將原點移至(x_0, y_0, z_0)點,但不變各軸之方向,則新方程式爲

$$S_1(X+x_0)^2+S_2(Y+y_0)^2+S_3(Z+z_0)^2+2C_1(X+x_0)$$
$$+2C'_1(Y+y_0)+2C''_1(Z+z_0)+D=0,$$

即

(1) $S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+2X(S_1x_0+C_1)+2Y(S_2y_0+C'_1)+2Z(S_3z_0$
$+C''_1)+S_1x_0^2+S_2y_0^2+S_3z_0^2+2C_1x_0+2C_1y_0+2C''_1z_0+D=0,$

x_0, y_0, z_0值之定法見下.

118. 第一款: S方程式無零根 曲面爲單心曲面.

令X, Y, Z各項之係數爲零以定x_0, y_0, z_0之值. 此定法爲可能,因S_1, S_2, S_3既無一爲零,則由

$$S_1x_0+C_1=0,\ S_2y_0+C'_1=0,\ S_3z_0+C''_1=0$$

可得

$$x_0=-\frac{C_1}{S_1},\ y_0=-\frac{C'_1}{S_2},\ z_0=-\frac{C''_1}{S_3}.$$

此時方程式(1)變爲

$$S_1X^2+S_2Y^2+S_3Z^2+D_1=0.$$

曲面之性質視S_1, S_2, S_3及D_1之符號而定.

I. S_1, S_2及S_3之符號相同.曲面屬橢圓族.

1° D_1與S_1, S_2, S_3之符號相反,曲面爲實橢圓面.

2° D_1與S_1, S_2, S_3之符號相同,曲面爲虛橢圓面.

3° $D_1=0$曲面爲虛錐面.

II. S_1, S_2, S_3之符號不同,曲面屬雙曲面族.

1° S_1, S_2, S_3, D_1 四值中如有二值為正二值為負,則曲面為單葉雙曲面.

2° S_1, S_2, S_3, D_1 四值中如三值為同號,則曲面為雙葉雙曲面.

3° $D_1=0$,曲面為實錐面.

在特別情形,如 S 方程式有雙根 $S_1=S_2$,則簡約後之方程式為

$$S_1(X^2+Y^2)+S_3Z^2+D_1=0.$$

此方程式所表之曲面為繞 Z 軸之旋轉面.

119. 第二款:S 方程式有一單根為零

例如 $S_1=0$,則方程(1)可書為

$$(2)\qquad S_2Y^2+S_3Z^2+2C_1X+2Y(S_2y_0+C'_1)+2Z(S_3z_0+C''_1)$$
$$+S_2y_0^2+S_2z_0^2+2C_1x_0+2C'_1y_0+2C''_1z_0+D=0.$$

1° 先設 $C_1\neq 0$,則可以下列三方程式定 x_0, y_0, z_0 之值:

$$S_2y_0+C'_1=0,\quad S_3z_0+C''_1=0,$$

$$S_2y_0^2+S_3z_0^2+2C_1x_0+2C'_1y_0+2C''_1z_0+D=0.$$

由第一第二兩方程式可得 y_0, z_0 之值,代入第三方程式,即得 x_0 之值.此時方程式化為

$$S_2Y^2+S_3Z^2+2C_1X=0;$$

如 S_2 與 S_3 同號,方程式表橢圓拋物面;如 S_2 與 S_3 異號,方程式表雙曲拋物面.

2° 現設 $C_1=0$,則方程式(2)變為

$$S_2Y^2+S_3Z^2+2Y(S_2y_0+C'_1)+2Z(S_3z_0+C''_1)+S_2y_0^2$$

$$+S_3z_0^2+2C'_1y_0+2C''_1z_0+D=0.$$

此式不含 x_0,故 x_0 可取任意值,而 y_0 及 z_0 則以下列兩方程式定之

$$S_2y_0+C'_1=0,\quad S_3z_0+C''_1=0.$$

此時所得之方程式表有心柱面

$$S_2Y^2+S_3Z^2+D_1=0.$$

I. S_2 與 S_3 同號.

1° 如 D_1 與 S_2, S_3 異號,則曲面爲實橢圓柱面.

2° 如 D_1 與 S_2, S_3 同號,則曲面爲虛橢圓柱面.

3° 如 $D_1=0$, 則曲面爲兩虛面.

II. S_2 與 S_3 異號.

1° $D_1\neq 0$, 曲面爲雙曲柱面.

2° $D_1=0$, 曲面爲兩平面.

在特別情形,如 $S_2=S_3$, 則曲面或爲拋物面或爲柱面均係繞 X 軸之旋轉面.

120. 第三款: S 方程式有一雙根爲零

例如 $S_1=S_2=0$, $S_3\neq 0$, 方程式(1)變爲

$$S_3Z^2+2C_1X+2C'_1Y+2Z(S_3z_0+C''_1)+S_3z_0^2+2C_1x_0$$
$$+2C'_1y_0+2C''_1z_0+D=0.$$

由 S 方程式之零雙根,可得與(P)平面平行之無量數主向;當第一次變換位標時,OX, OY 爲與(P)面平行之任意兩垂直方向.今選 OY 之方向,令其爲(P)面與 $Cx+C'y+C''z=0$ 面交線之方向,則 $C\alpha_2+C'\beta_2+C''\gamma_2=0$, 卽 $C'_1=0$, 此時方程式變爲

$$S_3Z^2+2C_1X+2Z(S_3z_0+C''_1)+S_3z_0^2+2C_1x_0+2C''_1z_0+D=0.$$

1° 設 $C_1\neq 0$. y_0 取任意值, x_0 及 z_0 則以下列兩方程式定之

$$S_3z_0+C''_1=0,\ S_3z_0^2+2C_1x_0+2C''_1z_0+D=0.$$

此時方程式化爲

$$S_3Z^2+2C_1X=0,$$

是爲抛物柱面.

2° 設 $C_1=0$. 方程式爲

$$S_3Z^2+2Z(S_3z_0+C''_1)+S_3z_0^2+2C''_1z_0+D=0.$$

x_0 及 y_0 可取任意值, z_0 之定法則令 Z 之係數爲零.於是方程式化爲

$$S_3Z^2+D_1=0,$$

如 S_3 與 D_1 同號,方程式表兩虛面;如 S_3 與 D_1 異號,方程式表兩平行面;如 $D_1=0$, 則方程式表雙面.

習題十八

1. 指明下列曲面之性質,並求其中心及簡易方程式.

(a) $3y^2-z^2+2yz+2zx+2xy+4x+6y-2z+\lambda=0.$

(b) $x^2-4z^2+8yz+4xy+2x+10y+8z+\lambda=0.$

2. 求曲面

$$10x^2+5y^2+2z^2-2yz+6zx+4xy+2x+2y+2z+1=0$$

之軸,頂點及簡易方程式.

3. 求抛物面

$$x^2-4z^2+8yz+4xy+2x+10y+8z=0$$

之軸,主面,頂點,頂點切面及簡易方程式.

第十九章

椭圓面

121. 形狀 前章述及關於正交位標軸實楕圓面之方程式

$$S_1x^2+S_2y^2+S_3z^2+D_1=0,$$

S_1, S_2, S_3 爲同號，D_1 之符號則與諸 S 異.以 $-D_1$ 除全式

$$-\frac{S_1x^2}{D_1}-\frac{S_1y^2}{D_1}-\frac{S_3z^2}{D_1}-1=0,$$

令 $$a^2=-\frac{D_1}{S_1},\quad b^2=-\frac{D_1}{S_2},\quad c^2=-\frac{D_1}{S_3},$$

則方程式變爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

a, b, c 三值可設爲正.

在特別情形,如 $S_1=S_2$, 則 $a^2=b^2$, 方程式爲

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

此式表繞 Oz 軸之旋轉面,在 xz 面之子午線爲楕圓: $y=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, 此種曲面謂之旋轉楕圓面,其形狀爲長爲偏視 $a<c$ 或 $a>c$ 而定.

如 $S_1=S_2=S_3$，則得球面.

設 S_1, S_2, S_3 無一相同，於是 a, b, c 亦然，照第九十二節法，可得橢圓面之形狀如下圖.

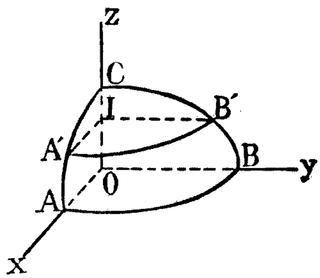


圖 49

曲面對於各位標面均為對稱；此等面謂之橢圓面之主面，主面與曲面相交所成之橢圓謂之主橢圓，或主截 (Principal sections).

曲面對於各位標軸亦為對稱，故此等軸稱為對稱軸．或簡稱橢圓面之軸．此等軸與曲面相交於六點，各謂之頂點.

122. 平截口 (Plane section) 在第九十三節 $2°$ 證明二次柱面與不與母線平行諸平面所成之截口為同類之二次曲線；例如曲面為橢圓柱面，則截口為橢圓．故二次曲線 (C) 依一定方向 L 投射於不與 L 平行之面上之影為與 (C) 同類之二次曲線．於是欲求橢圓面

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

與平面

$$(P) \qquad ux+vy+wz+\gamma=0$$

所成之截口之性質,可求其投射於任一位標面之正射影,但所選之位標面須擇其不與(P)面垂直者.

設$w\neq 0$,則(P)平面不與xy面垂直.試求截口投射於xy面之影.由(1),(P)兩方程式消去z,得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(ux+vy+\gamma)^2}{c^2w^2}-1=0,$$

即
$$x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{u^2}{c^2w^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{v^2}{c^2w^2}\right)+\frac{2uv}{c^2w^2}xy$$
$$+\frac{2u\gamma}{c^2w^2}x+\frac{2v\gamma}{c^2w^2}y+\frac{\gamma^2}{c^2w^2}-1=0.$$

此二次曲線之性質,視下列之值而定

$$AC-B^2=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{u^2}{c^2w^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{v^2}{c^2w^2}\right)-\frac{u^2v^2}{c^4w^4}$$
$$=\frac{1}{a^2b^2}+\frac{u^2}{b^2c^2w^2}+\frac{v^2}{a^2c^2w^2}$$

此值為正,故二次曲線屬橢圓類,於是橢圓面之平截口常為橢圓類之曲線.

試問此曲線為實橢圓,虛橢圓,抑兩虛線?欲答此問,須求Δ之值,

$$\Delta=-AE^2+CD^2+2BDE+F(AC-B^2)$$
$$=-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{u^2}{c^2w^2}\right)\frac{v^2\gamma^2}{c^4w^4}-\left(\frac{1}{b^2}+\frac{v^2}{c^2w^2}\right)\frac{u^2\gamma^2}{c^4w^4}$$
$$+\frac{2u^2v^2\gamma^2}{c^6w^6}+\left(\frac{\gamma^2}{c^2w^2}-1\right)\left[\frac{1}{a^2b^2}+\frac{u^2}{b^2c^2w^2}+\frac{v^2}{a^2c^2w^2}\right],$$

即 $$\Delta=-\frac{1}{a^2b^2c^2w^2}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-\gamma^2).$$

二次式之 x^2 及 y^2 項之係數均爲正,故視 Δ 之值爲負爲正,以定橢圓爲實爲虛.

1° $a^2v^2+b^2v^2+c^2w^2-\gamma^2>0$, 截口爲實橢圓.

2° $a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-\gamma^2<0$, 截口爲虛橢圓.

3° $a^2u^2+b^2w^2+c^2w^2-\gamma^2=0$, 截口爲交於一實點 M 之兩虛線;在此情形,(P) 爲在 M 點之切面.

以上之討論,設 $w\neq 0$. 若 $w=0$, 則 u 及 v 中之一必異於零,照上法討論可得相似之結果.

123. 切面　橢圓面在 (x, y, z) 點之切面方程式爲

(1) $$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1=0,$$

就中 x, y, z 應合方程式

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

易知在各頂點之切面與經此點之軸垂直,故連合六頂點之切面,成一矩形平行六面體 (Rectangular parallelopiped), 其三邊之長爲 $2a, 2b, 2c$.

試求平面

(3) $$uX+vY+wZ+\gamma=0$$

切於橢圓面之條件.若 (3) 爲 (2) 之切面,則 (1), (3) 兩方程式相同,故

$$\frac{x}{a^2u}=\frac{y}{b^2v}=\frac{z}{c^2w}=\frac{-1}{\gamma}.$$

由此式得

(4) $$x=-\frac{a^2u}{\gamma},\ y=-\frac{b^2v}{\gamma},\ z=-\frac{c^2w}{\gamma};$$

代入(2)式

(5) $$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-\gamma^2=0,$$

此爲(3)係(2)之切面之條件.

如u, v, w能合此條件,則由(4)式可得切點之位標,(5)謂之橢圓面之切方程式(Tangential equation).

由(5)式得

$$\gamma=\pm\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2},$$

故切面之普通方程式爲

$$ux+vy+wz\pm\sqrt{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}=0.$$

經過不在橢圓面上一點$S(x_0, y_0, z_0)$,可作無量數之切面,其切點均在一橢圓上,此橢圓爲橢圓面與S點之極面

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0$$

所成之曲線(第八十七節).欲橢圓有實形,須有下之不等式

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0$$

從他方面觀之,橢圓面分空間爲兩域,若S點在橢圓面內,則其位標不能合上之不等式.故欲由S點所作之切面有實形,S點須在橢圓面之外.

124. 法線　橢圓面之法線方程式為

$$\frac{X-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}},$$

就中 x, y, z 應合方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{1}$$

經過不在橢圓面上一點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 試作橢圓面之法線.設 (x, y, z) 為法線與曲面交點之位標,則 (x, y, z) 應合 (1) 式.因法線經過 P 點,故

$$\frac{x_0-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{y_0-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{z_0-z}{\frac{z}{c^2}}=t;$$

於是

$$x=\frac{a^2x_0}{t+a_0},\quad y=\frac{b^2y_0}{t+b^2},\quad z=\frac{c^2z_0}{t+c^2}, \tag{3}$$

代入 (1) 式得

$$\frac{a^2x_0{}^2}{(t+a^2)^2}+\frac{b^2y_0{}^2}{(t+b^2)^2}+\frac{c^2z_0{}^2}{(t+c^2)^2}-1=0. \tag{4}$$

由此方程式之每一根 t', 可得經 P 點之一法線.法線與曲面交點之位標,可由 (3) 式求得,因方程式 (4) 為六次,故經過不在曲面上一點可作六法線.其中至少有二法線具實形,因 $a>b>c$, 而在 $(-\infty, -a^2-\varepsilon)$ 與 $(-c^2+\varepsilon, +\infty)$ 兩間隔中方程式 (4) 均有實根故也.

125. 相配直徑　設 Ox', Oy', Oz' 為橢圓面之三相配直徑,若

以此三直線爲位標軸，則橢圓面之方程式甚簡．因 $x'Oy'$ 爲 Oz' 之相配直徑面，故與 Oz' 平行諸直徑之中點皆在 $x'Oy'$ 面上．由是將每一組之 x', y' 值代入曲面方程式中可得符號相反而絕對值相同之兩 z' 值．故方程式僅含 z' 之二次項．同理方程式含 x' 及 y' 亦僅有二次之項．於是得曲面方程式

$$(1)\qquad A_1x'^2+A'_1y^2A''_1z'^2+D_1=0.$$

在九十二節已見橢圓面之方程式如下

$$(2)\qquad \alpha P^2+\beta Q^2+\gamma R^2+h=0,$$

P, Q, R 爲互相殊異之平直函數；若取 $P=0, Q=0, R=0$ 三平面爲位標面，則得一與(1)式相似之新方程式，故如已將橢圓面之方程式寫如(2)式，則 $P=0$, $Q=0$, $R=0$ 三平面成一組之三相配直徑面，其交線成一組之三相配直徑．

方程式(1)既表橢圓面，則 A_1, A'_1, A''_1 爲同號，但 D_1 之符號與之相異，故(1)式又可書爲

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1=0.$$

於此式可見 Ox', Oy', Oz' 三相配直徑之長依次爲 $2a', 2b', 2c'$.

從一直徑兩端所作之切面，均與其他兩直徑所成之面平行；故此六切面組成一平行六面體，其邊與位標軸平行，其長爲 $2a', 2b', 2c'$.

設 A' 爲 Ox' 之點，其橫位標爲 a'；B' 爲 Oy' 之點，其縱位標爲 b'；c' 爲 Oz' 之點，其高爲 c'；則由三相配直徑所作之平行六面體之體積八倍於由 OA', OB', OC'，所作者．試求由 OA', OB',

OC' 所作平行六面體之體積.以 λ, u, ν 依次表 $y'Oz'$, $z'Ox'$, $x'Oy'$ 角.由 C' 作 $C'I$ 與 $x'Oy'$ 面垂直,則平行六面體之體積為

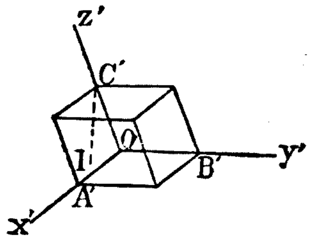


圖 50

$V=a'b'\sin\nu\times C'I=a'b'c'\sin\nu\cos\phi$, ϕ 表 $C'I$ 與 Oz' 所成之銳角.但 $C'I$ 之方向餘弦 $O, O, \cos\phi$ 應合方程式(見上卷第四節)

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & \cos\nu & \cos\mu & 0 \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & 0 \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\phi \\ \hdashline 0 & 0 & \cos\phi & 1 \end{array}\right| = 0;$$

將此行列式依末行之各元展開之,則得

$$\cos^2\phi\,\sin^2\nu-\Omega.=0,$$

Ω 表上行列式中虛線所圍之第三級小行列式;以此 $\cos\phi$ 值代入求 V 之式中,即得

$$V=a'b'c'\sqrt{\Omega}.$$

故知三相配直徑所組成之平行六面體之體積為 $8a'b'c'\sqrt{\Omega}$.

126. Apollonius 定理 1° 三相配直徑之長之平方和為常數,其值等於三軸之長之平方和.

2° 由三相配直徑所作之平行六面體之各面面積之平方和為常數,其值等於由三軸所作之平行六面體之各面面

積之平方和.

3° 由三相配直徑所作之平行六面體之體積爲常數,其值等於由三軸所作之平行六面體之體積.

設橢圓之方程式爲

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

任取三相配直徑 Ox', Oy', Oz', 作新位標軸;因原點不變,故舊位標 x, y, z 各爲新位標 x', y', z' 之齊次平直函數,將此等函數代入方程式(1),其常數項不變,故關於新位標軸之曲面方程式爲

$$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2-1=0.$$

以 a', b', c' 表 Ox', Oy', Oz' 直徑之半長,即 $a'^2=\frac{1}{A}, b'^2=\frac{1}{A'}, c'^2=\frac{1}{A''}$, 於是橢圓面之方程式爲

$$(2)\qquad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}-1=0.$$

由(1),(2)兩式得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2};$$

又 $$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\lambda+2z'x'\cos\mu+2x'y'\cos\nu,$$

因兩段均表由同一點至原點之距離之平方故也.

設 S 爲任意常數,在

$$(E)\qquad S\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+x^2+y^2+z^2$$

式中,如代 x, y, z 各以 x', y', z', 之函數,則得

$$(E')\qquad S\left(\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}\right)+x'^2+y'^2+z'^2+2y'z'\cos\lambda$$
$$+2z'x'\cos\mu+2x'y'\cos\nu.$$

在特別情形,如 (E) 爲含 x, y, z 之兩個一次式之平方和,則 (E') 亦爲 x', y', z' 之兩個一次式之平方和.故 (E) 及 (E') 兩式之判別式,在 S 取某值時應同時爲零(見第八十四節定理二).此兩判別式爲

$$\Delta=\left(\frac{S}{a^2}+1\right)\left(\frac{S}{b^2}+1\right)\left(\frac{S}{c^2}+1\right),$$

$$\Delta'=\left(\frac{S}{a'^2}+1\right)\left(\frac{S}{b'^2}+1\right)\left(\frac{S}{c'^2}+1\right)-\left(\frac{S}{a'^2}+1\right)\cos^2\lambda$$
$$-\left(\frac{S}{b'^2}+1\right)\cos^2\mu-\left(\frac{S}{c'^2}+1\right)\cos^2\nu$$
$$+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

即 $$\Delta=\frac{1}{a^2b^2c'^2}[S^3+(a^2+b^2+c^2)S^2+(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)S+a^2b^2c^2].$$

$$\Delta'=\frac{1}{a'^2b'^2c'^2}[S^3+S^2(a'^2+b'^2+c'^2)+S(b'^2c'^2\sin^2\lambda$$
$$+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu)+a'^2b'^2c'^2\,\Omega].$$

此兩式在 S 爲某值時同時爲零之條件如下

$$a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2,$$

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=b'^2c'^2\sin^2\lambda+c'^2a'^2\sin^2\mu+a'^2b'^2\sin^2\nu,$$

$$a^2b^2c^2=a'^2b'^2c'^2\,\Omega.$$

此三式證明 Apollonius 定理.

127. 圓截口 (Circular section) 凡割橢圓面之平面,令截口爲圓者,謂之圓截口面.第一百零四節證明諸平行面截二次曲面成諸同位相似二次曲線,故若 P 平面截橢圓面成一圓,則與 P 平行之平面亦截橢圓面成圓.所以欲討論圓截口,僅討論圓截口面之方向可矣.

定理: 凡圓截口面均與主面垂直.

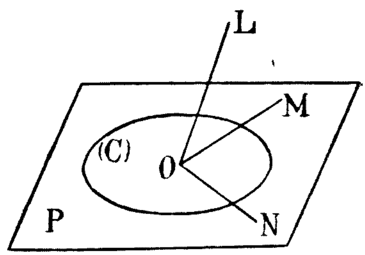


圖 51

設爲 P 經 O 點之平面,且截橢圓面成以 O 爲心之圓 (C). 又設 OL 爲與 P 面相配之直徑,其在 P 面上之正射影爲 OM. 在 P 面上取 ON 與 OM 垂直. 因 OM, ON 爲 (C) 圓之兩相配直徑,故 OL, OM, ON 成一組之三相配直徑,即言 LOM 爲與 ON 方向相配之直徑面.但 ON 與 LOM 垂直,故 LOM 爲主面,即言 P 面與 LOM 主面垂直.

經原點之圓截口面既與主面垂直,則必經三軸之一,故可分三段討論之,先設橢圓面之方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, AB, BC, CA 三橢圓爲三主面之截線,且

$$OA=a>OB=b>OC=c.$$

1° 經 OA 軸之平面. 設有經 OA 軸且與 yz 面相交於 OD 之平面 Q, 因橢圓面對於 Ox 軸及 yz 面均爲對稱,故 Q 面截橢圓面成以 OA, OD 爲軸之橢圓.欲此橢圓爲圓, OA 須等於 OD, 但

$$OC<OD<OB,$$

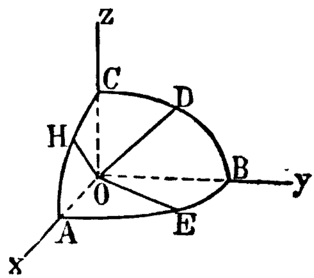


圖 52

而 $OB<OA$, 故 OD 不能與 OA 等. 所以經大軸之平面不能截橢圓面成圓.

2° 經 OC 軸之平面. 與 1° 相似之證法證明經小軸之平面不能截橢圓面成圓.

3° 經 OB 軸之平面. 設經過 OB 軸之平面與 xOz 面相交於 OH. 因 OH 可取由 OC 至 OA 中之任意值,故可令 $OH=OB$. 在 xOz 面作以 O 爲心以 OB 爲半徑之圓,此圓與 AC 橢圓相交於 H, H', H_1, H'_1 四點.但 OH 與 OH_1 同在一直線上, OH' 與 OH'_1 亦然. 故經 OB 軸可得兩圓截口面,其一經 HOH_1 線,其他經 $H'OH'_1$ 線.

試求此兩平面之方程式.因此兩面經 Oy 軸,故其方程式與在 xOz 面內 OH, OH' 直線之方程式同.但 AC 之方程式爲

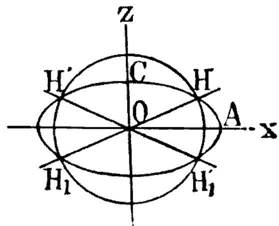


圖 52

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

圓之方程式爲

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0.$$

將兩方程式相減,卽得 OH 及 OH' 之方程式

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2-b^2)-\frac{z^2}{c^2}(b^2-c^2)=0.$$

於是得兩圓截口面之方程式

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}=0.$$

習題十九

1. 已與之點 P 作橢圓面 (E) 之法線,則有無限數之二次曲面經過各垂線之足而與 (E) 同心,試證明之.

2. 過橢圓面三相配直徑之端作橢圓之三切面,用 d, d', d'' 表由中心至三切面之距離.證明 $\frac{1}{d^2}+\frac{1}{d'^2}+\frac{1}{d''^2}=$ 常數.

3. 由 M 點作有心二次面面之三法線,設所作之三法線彼此正交.試定 M 之軌跡.

第二十章

雙曲面

128. 形狀 關於正交位標軸單葉或雙葉雙曲面之方程式爲
$$S_1x^2+S_2y^2+S_3z^2+D_1=0,$$
S_1, S_2, S_3 非皆同號.如 $S_1S_2S_3D_1$ 之積爲正,則曲面爲單葉雙曲面;如此積爲負,則爲雙葉雙曲面,如 $D_1=0$, 則方程式表錐面.故單葉雙曲面之方程式亦可書爲

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

雙葉雙曲面

(2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,$$

而錐面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

此三面均以原點爲中心,且對於位標面及位標軸均爲對稱位標面謂之曲面之主面,Ox, Oy, Oz 謂之曲面之軸.a, b, c 三值均設爲正.

在特別情形如 $a=b$, 則曲面爲繞 Oz 軸之旋轉面.第一曲面爲由雙曲線 $y=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ 繞虛軸旋轉而成,謂之單葉旋轉雙曲面,第二曲面爲由雙曲線 $y=0$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$ 繞實軸旋

轉而成,謂之雙葉旋轉雙曲面.第三曲面爲旋轉錐面.

今設 $a>b$, 試求各曲面之形狀.

1° 單葉雙曲面,其方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

xy 面截曲面成橢圓,其軸爲 $OA=a$ 及 $OB=b$; zx 面截曲面成雙曲線 AL, 其實軸爲 OA; yz 面截曲面成雙曲線 BM, 其實軸爲 OB. 單葉雙曲面有四實頂點, A, B 及其對於 0 之對稱點;兩虛頂點在 z 軸上,其值爲 $\pm ci$. Ox, Oy 均係實軸,其長爲 $2a$, $2b$; Oz 爲虛軸,其代數長爲 $2ci$, 而幾何長則爲 $2c$.

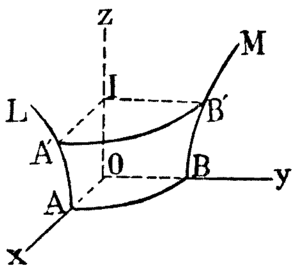


圖 54

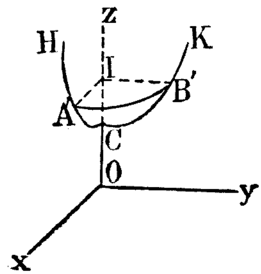


圖 55

2° 雙葉雙曲面,其方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

xy 面截曲面成虛橢圓; zx 面截曲面成雙曲線 CH, 其實軸爲 $OC=c$ yz 面截曲面成雙曲線 CK, 亦以 OC 爲實軸.雙葉雙曲面僅有二實頂點, C 及其對於 O 之對稱點;四虛頂點,其二在 Ox

軸上,以 $\pm ai$ 爲位標,其二在 Oy 軸上,以 $\pm bi$ 爲位標.曲面之實軸在 Ox 線上,其長爲 $2c$; 虛軸在 Ox 及 Oy 線上,其代數長爲 $2ai$, $2bi$, 而幾何長則爲 $2a$, $2b$.

3° 錐面,其方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

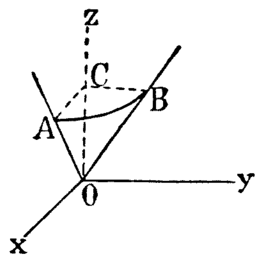


圖 56

$z=c$ 面截曲面成橢圓 (E)

$$(E) \qquad z=c,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

此橢圓之中心在 Oz 軸上,其軸 CA, CB 與 Ox 及 Oy 平行.

129. 漸近錐面　設 Q 爲並無雙點之二次曲面.在八十七節述及經曲面外一點 P 諸切點之切點均在一二次曲線 (C) 上,(C) 爲 P 點之極面截 Q 所成之曲線.諸切面均與以 P 爲頂點,以 (C) 爲準線之錐面相切.此錐面爲外切錐面.

反之,如諸切點均在一平面 π 上.而 π 截曲面成二次曲線 (C), 則諸切面均與一錐面相切,此錐面蓋以 π 之極點爲頂點,以 (C) 爲準線者也.

設有並無雙點之單心二次曲面,試定其漸近面.此爲在無窮遠點相切之切面.此等切面均與一外切錐面相切:卽以無窮遠面之極點(卽曲面之心)爲頂點,以無窮遠面截曲面所成之錐線 (γ) 爲準線之錐面.

此錐面謂之曲面之漸近錐面(Asymptotic cone).

漸近錐面與無窮遠面相遇之點既同曲面與無窮遠面相遇者,則漸近錐面之母線必與漸近方向錐面之母線平行.故漸近錐面與漸近方向錐面平行,且以曲面之中心爲頂點.

如曲面爲橢圓面,則漸近錐面爲虛面,故無漸近面;若爲雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

則無論爲單葉爲雙葉,其漸近錐面同爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

130. 漸近錐面之平截口 兩雙曲面及其漸近錐面在無窮遠之點彼此相同,故一平面截此三曲面所成之錐線在無窮遠之點亦彼此相同;換言之,三截線爲同類之錐線.故欲求雙曲面之平截口,可求其漸近錐面之平截口.

設有平面

$$(P)\qquad ux+vy+wz+\gamma=0;$$

經錐面之頂點作平面(Q)與之平行

$$(Q)\qquad ux+vy+wz=0.$$

(Q)平面截錐面成兩直線,或兩虛線,或一直線.因(P)及(Q)截錐面所成之截口爲同類之曲線,故視(Q)面截錐面成兩直線兩虛線或一直線,以定(P)面截錐面所成之曲線爲雙曲線,橢圓或拋物線.

設$u\neq0$,由錐面及(Q)方程式消去x

$$\frac{(vy+wz)^2}{a^2u^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

即
$$\left(\frac{v^2}{a^2u^2}+\frac{1}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{w^2}{a^2u^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+\frac{2vw}{a^2u^2}yz=0;$$

此爲所討論兩直線投射於yz面之影.故兩直線是否爲實線,視

$$\frac{v^2w^2}{a^4u^4}-\left(\frac{v^2}{a^2u^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{w^2}{a^2u^2}-\frac{1}{c^2}\right)$$

是否爲正而定.於是得下列之結果:

1° $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2>0$, (P)平面截錐面或雙曲面成雙曲線族曲線.

2° $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2<0$, (P)平面截錐面或雙曲面成橢圓族曲線.

3° $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2=0$, (P)平面截錐面或雙曲面成拋物線族曲線.

下節對於單葉及雙葉雙曲面之平截口,更有詳細之討論.

131. 兩雙曲面之平截口　欲觀(P)平面

(P)
$$ux+vy+wz+\gamma=0$$

截雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\varepsilon=0 \quad (\varepsilon=\pm 1)$$

成何種曲線,可設$u\neq 0$.截口投射於yz面之影爲

$$\frac{(vy+wz+\gamma)^2}{a^2u^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\varepsilon=0,$$

即由雙曲面方程式及P消去x之結果也.此方程式亦可書爲

$$(1)\qquad \left(\frac{v^2}{a^2u^2}+\frac{1}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{w^2}{a^2u^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+\frac{2vw}{a^2u^2}yz+\frac{2v\gamma}{a^2u^2}y+\frac{2w\gamma}{a^2u^2}z+\frac{\gamma^2}{a^2u^2}-\varepsilon=0.$$

左段之判別式爲

$$\Delta=\frac{1}{a^2b^2c^2u^2}[\varepsilon(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2)-\gamma^2].$$

1° 單葉雙曲面, $\varepsilon=1$.

$$\Delta=\frac{1}{a^2b^2c^2u^2}(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2-\gamma^2)$$

A. 橢圓類, $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2<0$. Δ 之值爲負,而(1)式 y^2 之係數常爲正,故截口爲實橢圓.

B. 雙曲線類, $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2>0$. 如 $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2-\gamma^2\neq0$, 則截口爲雙曲線.如 $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2-\gamma^2=0$, 則截口爲兩直線.

C. 拋物線類, $a^2u^2+c^2v^2-c^2w^2=0$. 如 $\gamma\neq0$, 即言 (P) 面不經曲面之心,則截口爲拋物線.如 $\lambda=0$, 即言 (P) 面經過曲面之心,則截口爲兩平行直線,因令 $\gamma=0$, (1) 式變爲

$$\left(\frac{u^2}{a^2u^2}+\frac{1}{b^2}\right)y^2+\left(\frac{w^2}{a^2u^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+\frac{2vw}{a^2u^2}yz-1=0,$$

就中含 y, z 之項可書爲平方式

$$(2)\qquad \frac{1}{\dfrac{v^2}{a^2u^2}+\dfrac{1}{b^2}}\left[\left(\frac{v^2}{a^2u^2}+\frac{1}{b^2}\right)y+\frac{vw}{a^2u^2}z\right]^2-1=0.$$

此式表兩平行直線也明矣.

由此等結果,可知單葉雙曲面之平截口均爲實形.

2　雙葉雙曲面，$\varepsilon=-1$.

$$\Delta=-\frac{1}{a^2b^2c^2u^2}(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2+\gamma^2).$$

A. 橢圓類，$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2<0$. 視 $a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2+\gamma^2$ 之值為正，為負，為零，以定截口為實橢圓，為虛橢圓，或為兩虛線.

B. 雙曲線類，$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2>0$. Δ 不能為零，故截口為雙曲線.

C. 拋物線類，$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2=0$. 如 $\gamma\neq 0$，則截口為拋物線，否則為兩平行虛線，因(2)式之 -1 在此處為 $+1$ 故也.

132. 切面　設有雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\varepsilon=0,\quad(\varepsilon=\pm 1);$$

其在 (x, y, z) 點切面之方程式為

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}-\frac{Zz}{c^2}-\varepsilon=0,$$

x, y, z 應合雙曲面方程式.

照橢圓面法推論可得雙曲面之切線方程式

$$\varepsilon(a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2)-\gamma^2=0.$$

設 $P(x_0, y_0, z_0)$ 為不在曲面上之點；經此點之諸切面與曲面相切之點在一錐線上，此錐線即 P 點之極面

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}-\varepsilon=0$$

截曲面所成之曲線，亦即以 P 為頂點之外切錐面之切曲線

(Curve of contact)也.此截線之性質,視$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}$之符號而定(見前節);換言之,視$P$點對於漸近錐面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

之位置而定.

在z軸上一點之位標令錐面方程式之左段爲負,此域名曰錐面之內域;反之,在Ox或Oy軸上之點謂之外域.

設(x', y', z')爲單葉雙曲面之點,則$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}$之值爲1,故凡在單葉雙曲面之點均居錐面之外域.同理,凡在雙葉雙曲面之點,均居錐面之內域.

應用前節之理論,得下列之結果:

1° 單葉雙曲面.如P點在漸近錐面內,錐線爲實橢圓.如P點在錐面外,錐線爲雙曲線.如P點在錐面上,錐線爲拋物線.無論何種情形,外切錐面均有實形.

2° 雙葉雙曲面.如P點在漸近錐面內,錐線爲實橢圓或虛橢圓視$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}+1$之值爲正或負而定;換言之,視$P$點在雙曲面之正域或負域而定.易知中心爲雙曲面之正域,故如P點與中心爲同域,則錐線有實形.

如P點在錐面外,錐線爲雙曲線.如P點在錐面上,錐線爲拋物線.

故欲外切錐面有實形,P點對於雙曲面須與中心爲同域.

133. 圓截口 因一平面截兩曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\mp1=0$$

及其漸近錐面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$成同類之曲線，故此三面有同圓截口面.試取單葉雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

討論之，照第一百二十七節法，可知欲求圓截口面，可就經位標軸之諸面討論之.

先作雙曲面之主截口：在 xy 面爲楕圓 AB，在 yz 及 zx 面爲雙曲線 BM 及 AL.

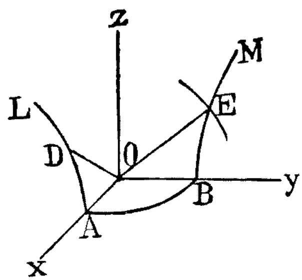


圖 57

設 $OA=a>OB=b$，分三段討論之.

1° 經 z 軸之平面. 此平面截漸近錐面成兩實線，故此平面截雙曲面成雙曲線. 由此可知經 z 軸之平面，不能截雙曲面成圓.

2° 經 y 軸之平面. 欲此平面截雙曲面成楕圓，其在 xz 面之跡(Trace) OD 須與雙曲線 AL 相交，此時截口爲以 OB 及 OD 爲軸之楕圓.但 $OD>OA$. 即 $OD>OB$，故截口不能爲圓.

3° 經 x 軸之平面. 此平面在 yz 面之跡 OE 如與雙曲線 BM 相交. 則截口爲以 OA 及 OE 爲軸之楕圓. 如 $OA=OE$，則截

口爲圓. 在 yz 面上, 以 0 爲心以 OA 爲半徑作圓, 此圓與雙曲線 Bm 相交於 E, E', E_1, E'_1 四點. 但 OE 與 OE'_1 同在一直線上, OE' 與 OE_1 亦然. 故經 OA 軸可得兩圓截口面: 其一經 EOE'_1 線, 其他經 $E'OE_1$ 線.

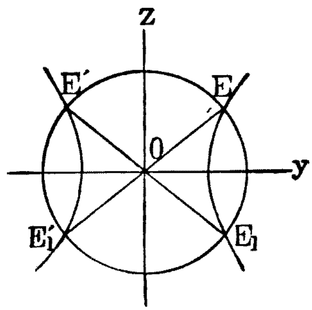


圖 58

此兩平面之方程式與在 yz 面之 OE, OE' 兩直線之方程式同. 但雙曲線 BM 及圓之方程式爲

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,\quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-1=0;$$

將此兩式相減, 即得 OE 及 OE 之方程式

$$\frac{y^2}{b^2}(a^2-b^2)-\frac{z^2}{c^2}(a^2+c^2)=0.$$

於是得兩圓截口面之方程式

$$\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}\pm\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0.$$

134. 代數曲面之直母線 (Straight generator) 以前所研究之曲面, 如橢圓面及雙葉雙曲面, 並無直線在其上; 反之, 在單葉雙曲面上, 則有無限數之直線. 吾人稱在曲面上之直線謂之直母線, 或簡稱曲面之母線. 茲先述代數曲面直母線之定法.

定理: 如直線 D 在代數曲面上, 則漸近方向錐面必有一母線與 D 平行.

設α, β, γ為D直線之方向參數,在此直線上任意一點之位標為

$$x_0+\alpha\rho,\ y_0+\beta\rho,\ z_0+\gamma\rho;$$

如D在曲面$f(x, y, z)=0$上,則無論ρ為何值,常得

$$f(x_0+\alpha\rho,\ y_0+\beta\rho,\ z_0+\gamma\rho)\equiv 0.$$

設曲面為n次,其第n次諸項以$\phi_n(x, y, z)$表之.恆等式左段ρ^n之係數為$\phi_n(\alpha, \beta, \gamma)$.此值應為零

$$\phi_n(\alpha, \beta, \gamma)=0,$$

故漸近方向錐面有一母線與D平行.

此定理之逆未知眞,蓋漸近方向錐面有實母線(Real generator)時,曲面未必有直線在其上也.

欲求曲面$f(x, y, z)=0$之直母線,先視漸近方向錐面有無實母線.如漸近方向錐面無實母線,則曲線亦不含直線.由此可知橢圓面無直母線.

現設漸近方向錐面有實母線,但不與xy面平行;此時曲面上或有不與xy面平行之直線

$$x=lz+\alpha, \qquad y=mz+\beta.$$

欲定l, m, α, β之值,將x, y之值代入曲面方程式

$$f, (lz+\alpha,\ mz+\beta,\ z)=0.$$

如直線在曲面上則此式為恆等式.設曲面為n次,令z各項之係數為零,可得$n+1$方程式,其中有四未知數.故如$n+1>4$(即$n>3$),方程組在普通情形無解答.如$n=3$,方程組有有限數之解答;如$n=2$,方程組有無限數之解答.

試求與xy面平行之直母線(設漸近方向錐面有與xy面平行之母線).與xy面平行之直線方程式為$z=h, y=mx+p$.此直線如在曲面上,則有恆等式

$$f(x, mx+p, h)\equiv 0.$$

令x各項之係數為零,即可定h, m, p之值.

再求與Oy軸平行之直母線.直線$x=p, z=q$如在曲面上,則有恆等式

$$f(p, y, q)\equiv 0.$$

令y各項係數為零,即可定p, q之值.

135. 前節方法之應用 先觀雙葉雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0.$$

其漸近錐面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$無與$xy$面平行之母線,故曲面即有母線亦不與$xy$面平行,而與$xy$面相交於一點.但由曲面方程式證明曲面與$xy$面並無交點,故雙葉雙曲面無直母線.

次觀單葉雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

其漸近錐面既無與xy面平行之母線,故曲面之母線不與xy面平行.設單葉雙曲面之母線為

$$x=lz+\alpha, \qquad y=mz+\beta,$$

於是得恆等式

$$\frac{(lz+\alpha)^2}{a^2}+\frac{(mz+\beta)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

令 z 各項之係數爲零,則

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

$$\frac{l\alpha}{a^2}+\frac{m\beta}{b^2}=0.$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1=0.$$

由第一第三兩式,可令

$$\frac{l}{a}=\frac{\cos\theta}{c},\quad \frac{m}{b}=\frac{\sin\theta}{c},$$

$$\frac{\alpha}{a}=\cos\phi,\quad \frac{\beta}{b}=\sin\phi.$$

將此等 l, m, α, β 值代入第二方程式

$$\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi=0,$$

即 $$\cos(\theta-\phi)=0,$$

故 $$\theta-\phi=2k\pi\pm\frac{\pi}{2},$$

k 爲任意之整數,可爲正亦可爲負.此式表 θ 爲 ϕ 之函數,於是 l, m, α, β 各爲 ϕ 之函數.

1° 先取 $\frac{\pi}{2}$ 前之 + 號. $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\phi$, 則 $\cos\theta=-\sin\phi$, $\sin\theta=\cos\phi$, 故

$$\alpha=a\cos\phi,\quad \beta=b\sin\phi,\quad l=-\frac{a}{c}\sin\phi,\quad m=\frac{b}{c}\cos\phi,$$

而直母線之方程式爲

$$x=-\frac{a}{c}z\sin\phi+a\cos\phi,\quad y=\frac{b}{c}z\cos\phi+b\sin\phi.$$

即

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\cos\phi-\dfrac{z}{c}\sin\phi, \\ \dfrac{y}{b}=\sin\phi+\dfrac{z}{c}\cos\phi. \end{cases}$$

2° 次取$\frac{\pi}{2}$前之一號. $\theta=2k\pi-\frac{\pi}{2}+\phi$, 則$\cos\theta=\sin\phi$, $\sin\theta=-\cos\phi$, 而直母線之方程式爲

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}=\cos\phi+\dfrac{z}{c}\sin\phi, \\ \dfrac{y}{b}=\sin\phi-\dfrac{z}{c}\cos\phi. \end{cases}$$

當ϕ值變時, (I), (II) 各表一組之直母線, 每組之直線數爲無限.

[註] (I)與(II)並視無公共之直線.否則設(I)組之ϕ_1直線(卽令ϕ等於ϕ_1所得之直線)與(II)組之ϕ_2直線相合, 則其在xz面之影亦相合,故

$$\cos\phi_1=\cos\phi_2,\qquad \sin\phi_1=-\sin\phi_2;$$

同理,在yz面之影亦相合

$$\sin\phi_1=\sin\phi_2,\qquad \cos\phi_1=-\cos\phi_2;$$

於是 $$\cos\phi_1=0,\qquad \sin\phi_1=0.$$

此不可能,因$\cos^2\phi_1+\sin^2\phi_1$須等於一也.

136. 求直母線又法 設二次曲面之方程式爲

$$PQ=RS,$$

P, Q, R, S 各為平直函數.方程式

$$P=\lambda R, \quad Q=\frac{S}{\lambda}$$

表在曲面上之直線,λ 為任意常數.令 λ 之值變遷,可得曲面之第一組直母線.同理,方程式

$$P=\mu S, \quad Q=\frac{R}{\mu}$$

表第二組之直母線.

如曲面為單葉雙曲面,則其方程式

$$P^2+Q^2-R^2-1=0, \text{ 即 } Q^2-R^2=1-P^2$$

亦可寫為 $$(Q+R)(Q-R)=(1+P)(1-P);$$

故兩組之直母線為

$$\begin{cases} Q+R=\lambda(1+P), \\ Q-R=\dfrac{1-P}{\lambda}, \end{cases} \quad \begin{cases} Q+R=\mu(1-P) \\ Q-R=\dfrac{1+P}{\mu}. \end{cases}$$

如單葉雙曲面之方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

改書之如下

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

則得兩組之直母線

$$(\lambda) \qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right), \ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$$(\mu)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{x}{a}\right),\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

此兩方程式表單葉雙曲面所有之諸直母線,證法見下節定理五.

在(λ)方程式中,令λ之值漸減而爲零,或漸增而爲無窮大,則得下列兩直線

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\\[2ex] 1-\dfrac{x}{a}=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\\[2ex] 1+\dfrac{x}{a}=0.\end{cases}$$

此兩直線仍在曲面上,當視爲(λ)組直線之一.

同理

$$\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0,\\[2ex] 1+\dfrac{x}{a}=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0,\\[2ex] 1-\dfrac{x}{a}=0,\end{cases}$$

爲當μ值爲零或無窮大時(μ)直線之極限.亦當視爲(μ)組直線之一.

證明下節之定理時,設λ及μ各異於零,亦非無窮大.因在λ或μ爲零或爲無窮大時,定理之性質可不待證而解決也.

137. 關於單葉雙曲面之直母線諸定理

定理一. (λ)及(μ)兩組並無公共之直線.

(λ)直線投射於xy及xz面之影爲

$$\frac{2y}{b}=\lambda+\frac{1}{\lambda}+\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{x}{a},\ \frac{2z}{c}=\lambda-\frac{1}{\lambda}+\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\frac{x}{a};$$

(μ)直線亦有相似之結果

$$\frac{2y}{b}=\mu+\frac{1}{\mu}+\left(\frac{1}{\mu}-\mu\right)\frac{x}{a},\ \frac{2z}{c}=\mu-\frac{1}{\mu}-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\frac{x}{a}.$$

欲兩直線相合爲一,須有下列四等式:

$$\lambda+\frac{1}{\lambda}=\mu+\frac{1}{\mu},\quad \lambda-\frac{1}{\lambda}=-\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right),$$

$$\lambda-\frac{1}{\lambda}=\mu-\frac{1}{\mu},\quad \lambda+\frac{1}{\lambda}=-\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right),$$

第一式與第四式相加,第二式與第三式相加,依次得

$\lambda+\frac{1}{\lambda}=0,\ \lambda-\frac{1}{\lambda}=0,$ 於是 $\lambda=0,\ \frac{1}{\lambda}=0,$ 此不可能.

定理二. 經曲面一點,每組可得一母線.

若母線(λ)經(x',y',z')點,則

$$\frac{y'}{b}+\frac{z'}{c}=\lambda\left(1+\frac{x'}{a}\right),$$

$$\frac{y'}{b}-\frac{z'}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x'}{a}\right).$$

此兩方程式所定之λ值如相同,則有

$$\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1-\frac{x'^2}{a^2}\ \text{即}\ \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}-1=0,$$

此條件可適合,因(x',y',z')點在雙曲面上故也.

對於(μ)母線可用同法證明之.

定理三. 同組之兩母線不在同一平面上.

設(λ)組之兩母線爲

$$(\lambda)\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{x}{a}\right),\\[2ex] \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\end{cases}\qquad (\lambda)\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\lambda'\left(1+\dfrac{x}{a}\right),\\[2ex] \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}+\dfrac{1}{\lambda'}\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\end{cases}$$

就中$\lambda \neq \lambda'$. 經(λ)直線之任意平面爲

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)+k\left[\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]=0.$$

試定k之值,令此平面含(λ')直線.以(λ')方程式之$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}$及$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}$值代入平面方程式,應得含x之恆等式

$$\lambda'\left(1+\frac{x}{a}\right)-\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)+k\left[\frac{1}{\lambda'}\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]\equiv 0.$$

$\lambda'-\lambda$異於零,故以之除上式

$$1+\frac{x}{a}-\frac{k}{\lambda\lambda'}\left(1-\frac{x}{a}\right)\equiv 0;$$

於是
$$1-\frac{k}{\lambda\lambda'}=0,\ 1+\frac{k}{\lambda\lambda'}=0,$$

此不可能.

定理四. 不同組之任意兩母線同在一平面上.

設任意兩母線爲

$$(\lambda)\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{x}{a}\right),\\[2ex] \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\end{cases}\qquad (\mu)\begin{cases}\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\\[2ex] \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{x}{a}\right),\end{cases}$$

方程式

$$(1)\qquad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)+k\left[\frac{y}{b}-\frac{z}{c}-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]=0$$

表經(λ)母線之平面.此平面如含(μ)母線,則

$$\mu\left(1-\frac{x}{a}\right)-\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)+k\left[\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)\right]\equiv 0,$$

於是

$$(\mu-\lambda)\left(1-\frac{k}{\lambda\mu}\right)=0,$$

$$(\mu+\lambda)\left(1-\frac{k}{\lambda\mu}\right)=0.$$

此兩方程式之公共解答爲$k=\lambda\mu$.故以此k值代入(1)式得

$$(2)\qquad (\mu-\lambda)\frac{x}{a}+\frac{y}{b}(1+\lambda\mu)+\frac{z}{c}(1-\lambda\mu)-(\lambda+\mu)=0,$$

卽得含(λ),(μ)兩母線之平面.

此平面與曲面在兩母線相遇之點相切,因(1)式之係數合曲面之切方程式

$$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2-\gamma^2=0$$

故也.切點之位標,可由(λ)及(μ)方程式求得

$$x=\frac{a(\mu-\lambda)}{\mu+\lambda},\quad y=\frac{b(1+\lambda\mu)}{\mu+\lambda},\quad z=-\frac{c(1-\lambda\mu)}{\mu+\lambda}.$$

故單葉雙曲面各點之位標,可用含兩參數之有理函數表之.此等曲面謂之單純面(Unicursal surface).如$\mu=-\lambda$,則兩直線相遇於無窮遠,卽言兩直線平行.含此兩平行母線之平面之方程式,可在(2)式中令$\mu=-\lambda$求得

$$-2\lambda\frac{x}{a}+\frac{y}{b}(1-\lambda^2)+\frac{z}{c}(1+\lambda^2)=0.$$

此爲漸近面,因其係數合漸近錐面之切方程式

$$a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2=0$$

故也.

定理五. 凡曲面上之直線非屬(λ)組卽屬(μ)組.

設Δ直線在曲面上,但旣不屬(λ)組,亦不屬(μ)組.於此直線上任取兩點A, B.由A可得(λ)組之一直線,由B可得(μ)組之一直線.此兩直線應同在一平面內(定理四),且此平面含Δ直線.於是一平面與曲面相交於三直線,此於理不合,因曲面爲二次曲面故也.

定理六. 由中心作與直母線平行諸直線,卽得漸近錐面.

因由中心所作與母線(λ)平行直線之方程式爲

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\lambda\frac{x}{a},\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x}{a};$$

從此兩方程式消去λ,卽得漸近錐面方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

定理七. 同組之三母線不能與一平面平行.

設同組內可得與一平面平行之三母線,由中心作此三線之平行線,則漸近錐面當有同在一平面之三母線,此於理不合.

138. 單葉雙曲面之組織

當λ之値變時,直線

$$(\lambda)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{x}{a}\right) \\ \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{x}{a}\right) \end{cases}$$

組成一單葉雙曲面,因由曲面之每點可得(λ)組之一線故也.

此直線與(μ)組之任意直線相交.但已與(μ)組之三直線,則(λ)直線之運動可定.蓋設D_1, D_2, D_3爲(μ)組之三直線,於D_1任取一點A,過A之λ線爲A與D_2及A與D_3所定平面之交線.故令一直線與D_1, D_2, D_3三定直線相交,單葉雙曲面可視爲由此直線之運動所組成.

反之,已與三定直線A, B, C,其中每兩直線不同在一平面內,且三直線不與同一平面平行,則與此三線相交之直線之軌跡爲單葉雙曲面. 證之如下:

過A直線作兩平面,其一與B平行,其一與C平行.過B直線與C直線用同方法處置.於是得平行六面體,就中A, B, C爲不相鄰之三邊.以此六面體之心爲原點,以其邊之平行線爲位標軸,再設$2a$, $2b$, $2c$爲與Ox, Oy, Oz軸平行之邊之長,於是A, B, C三直線之方程式爲

$$A\begin{cases} y=-b, \\ z=c, \end{cases}\qquad B\begin{cases} x=a, \\ z=-c, \end{cases}\qquad C\begin{cases} y=b, \\ x=-a. \end{cases}$$

與A及B相交之直線可視爲過A之任意平面與過B之任意平面之交線,此兩平面之方程式(亦即直線之方程式)爲

$$(1)\qquad \begin{cases} z-c+m(y+b)=0, \\ z+c+n(x-a)=0. \end{cases}$$

若交線經(c)直線之一點，則(1)及(c)方程式應有x, y, z之公共解答，於是

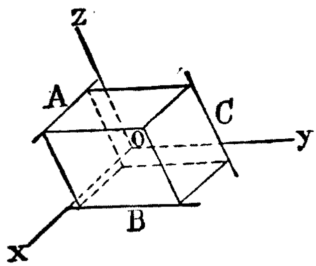


圖 59

$$(2)\qquad mb+na-c=0.$$

直線(1)之軌跡可由(1),(2)兩方程式消去m, n而得.先由(1)式

得
$$m=-\frac{z-c}{y+b},\quad n=-\frac{z+c}{x-a},$$

代入(2)式

$$a(y+b)(z+c)+b(z-c)(x-a)+c(x-a)(y+b)=0,$$

即
$$ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

此方程式表以原點為心之二次曲線.應用第十四節法，將此方程式連續書之如下

$$\frac{1}{a}(ay+bx)(az+cx)-\frac{bcx^2}{a}+abc=0,$$

$$(ay+bx)(az+cx)-bcx^2+a^2bc=0,$$

$$\left[\frac{a(y+z)+(b+c)x}{2}\right]^2-\left[\frac{a(y-z)+(b-c)x}{2}\right]^2-bcx^2+a^2bc=0.$$

故軌跡為單葉雙曲面.

習題二十

1. 設二次曲面在M點之法線與三主面相交於A, B, C.求證比值$\frac{MA}{MC}, \frac{MB}{MC}$均為常數.

2. 設有單頁雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0;$$

從其腰橢圓上大軸之端 A, A' 兩點取同組之兩直母線. 他組之任一直母線與此兩直母線交於 M, M'. 求證

$$\overline{AM}\cdot\overline{A'M'}=b^2+c^2.$$

第二十一章

抛物面

139. 形狀 關於正交位標軸抛物面之普通方程式爲

(1) $$S_2y^2+S_3z^2+2c_1x=0.$$

如 $S_2=S_3$, 則方程式變爲

(2) $$S_2(y^2+z^2)+2c_1x=0:$$

此爲繞 Ox 軸之旋轉面.其在 xy 面之子午線爲以 Ox 軸爲軸之抛物線.故 (2) 式表抛物線繞其軸而旋轉所成之曲面,謂之旋轉抛物面.

現設 $S_2 \neq S_3$. (1) 式所表之曲面對於 zx 及 xy 面均爲對稱,故此兩平面爲曲面之主面,而 Ox 軸爲主軸. Ox 軸與曲面相交於 O 點,爲抛物面之唯一頂點.如 S_2 與 S_3 同號,可選 x 軸之方向,令 (1) 式變爲

(3) $$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0 \qquad (p \text{ 及 } q \text{ 均爲正}),$$

故曲面爲橢圓抛物面.如 S_2 與 S_3 異號,則 (1) 式變爲

(4) $$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0 \qquad (p \text{ 及 } q \text{ 均爲正})$$

故曲面爲雙曲抛物面.因曲面對於 xOy 及 xOz 面爲對稱,故僅作 y 及 z 俱爲正時之形,卽可得曲面之全形.

1° 橢圓抛物面. xy 面截曲面成抛物線

$$(P) \qquad z=0,\ \frac{y^2}{p}-2x=0;$$

而 xz 面截曲面成抛物線

$$(Q) \qquad y=0,\ \frac{z^2}{q}-2x=0;$$

此兩抛物線爲在主面之曲線,謂之主抛物線. 與 xy 面平行之平面截曲面成抛物線 (P'). 易證 (P) 及 (P') 兩抛物線相同,故令 (P') 之頂點 $0'$ 在 (Q) 抛物線上移動,而 (P') 之面常與 xy 面平行,即得橢圓抛物面. 與 yz 面平行之平面 $x-h=0$ 截曲面成橢圓

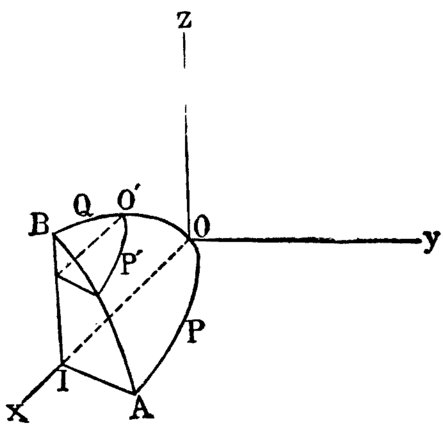


圖 60

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2h=0, \qquad x-h=0.$$

在 h 爲正時,此橢圓有實形,其心 I 在 Ox 軸上,其頂點在 (P) 及 (Q) 抛物線上,曲面亦可視爲由此等橢圓所組成.

2° 雙曲拋物面. xy 面截曲面成拋物線

$$(P)\quad z=0,\ \frac{y^2}{p}-2x=0;$$

而 zx 面截曲面成拋物線

$$(Q)\quad y=0,\ \frac{z^2}{q}+2x=0.$$

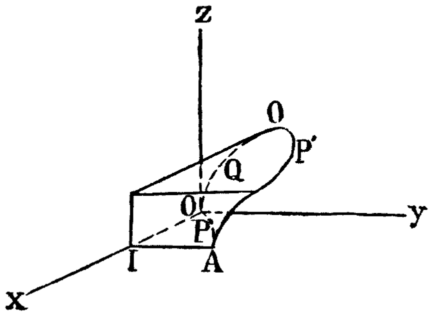


圖 61

此兩曲線謂之主拋物線.與 xy 面平行之平面截曲面成拋物線 (P'). (P) 及 (P') 爲相同之曲線. (P') 拋物線移動時組成雙曲拋物面,方法與 1_0 相似.與 yz 面平行之平面 $x-h=0$ 截曲面成雙曲線

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2h=0,\ x-h=0.$$

此雙曲線之心在 Ox 軸上,其軸與 Oy 及 Oz 平行,若 $h>0$, 其實軸與 Oy 軸平行;若 $h<0$, 其實軸與 Oz 軸平行;若 $h=0$, 則得相交於 O 之兩直線,故 yz 面與曲面相切於 O 點

140. 漸近方向及漸近面

1° 橢圓拋物面.設橢圓拋物面之齊次方程式爲

$$f(x, y, z, t)\equiv\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2tx=0;$$

其漸近方向錐面之方程式爲

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=0;$$

此式表兩虛面.故曲面僅有一漸近方向 $y=0, z=0$, 即曲面之

軸之方向是也.漸近平面爲切曲面於無窮遠點之平面.關於此方向無窮遠點之位標爲$(x=x_0, y=z=t=0)$,故漸近平面之方程式爲$f'_x=0$(見八十六節)即$t=0$,換言之,橢圓抛物面在有限遠並無漸近面.

2° 雙曲抛物面.其齊次方程式爲

$$f(x, y, z, t)\equiv\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2tx=0;$$

其漸近方向錐面爲兩實面

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}\equiv\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)=0.$$

凡與此兩面平行之方向均爲漸近方向.此兩面之交線,與曲面之軸平行,謂之主向.照1°法可得關於此方向之漸近面在無窮遠.

試取與兩平面之一 $\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\varepsilon\sqrt{q}}=0$ $(\varepsilon=\pm1)$ (P)

平行之方向(α, β, γ);因

$$\frac{\beta}{\sqrt{p}}-\frac{\gamma}{\varepsilon\sqrt{q}}=0,$$

故 $$\beta=\lambda\sqrt{p},\quad \gamma=\lambda\varepsilon\sqrt{q}\quad (\lambda\neq0).$$

關於此方向之漸近面方程式爲

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,$$

即 $$-\alpha t+\frac{\beta y}{p}-\frac{\gamma z}{q}=0,$$

代β及γ以其值,代t以1,則

(1) $$\lambda\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\varepsilon\sqrt{q}}\right)-\alpha=0.$$

此面與 (P) 平面平行.

反之,與 (P) 面平行之平面

(2) $$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}-h=0.$$

爲關於 (P) 面方向之漸近面.因令(1),(2)兩式全等,則得 $\alpha=\lambda h$. 故(2)爲關於 $(\alpha=\lambda h,\ \beta=\lambda\sqrt{p},\ \gamma=\lambda\varepsilon\sqrt{q})$ 方向之漸近面.

141. 平截口 不與軸平行之平面截橢圓拋物面成橢圓類曲線,截雙曲拋物面成雙曲線類曲線.

設曲面之方程式爲

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{\varepsilon q}-2x=0 \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

此曲面以 Ox 軸爲軸.平面

$$ux+vy+wz+\gamma=0$$

不與 Ox 軸平行之條件爲 $u \neq 0$. 此平面與曲面所成之曲線在 yz 面之射影爲

(1) $$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{\varepsilon q}+\frac{2(vy+wz+\gamma)}{u}=0.$$

故如曲面爲橢圓拋物面,則 $\varepsilon=1$, 射影爲橢圓族曲線;如曲面爲雙曲拋物面,則射影爲雙曲線族曲線.

再求(1)式左段之判別式 Δ, 得

$$\Delta=-\frac{1}{\varepsilon pqu^2}(pv^2+\varepsilon qw^2-2u\gamma).$$

故如曲面爲橢圓拋物面,則視 $pv^2+qw^2-2u\gamma$ 之值爲正爲負或爲零,以定(1)以表之曲線爲實橢圓,虛橢圓或兩虛線.如曲面爲雙曲拋物面,則視 $pv^2-qw^2-2u\gamma$ 之值是否爲零以定(1)所表之曲線爲雙曲線或兩直線.

與軸平行之平面截橢圓拋物面成拋物線,截雙曲拋物面成拋物線或一直線.

設 $vy+wz+\gamma=0$ 爲與軸平行之平面.若此面與 xy 面平行,則其截曲面之線已知其爲拋物線,故可設 $v\neq 0$. 此平面與曲面所成之曲線在 xz 面之射影爲

$$\frac{(wz+\gamma)^2}{pv^2}+\frac{z^2}{\varepsilon q}-2x=0,$$

卽

$$z^2\left(\frac{w^2}{pv^2}+\frac{1}{\varepsilon q}\right)-2x+\frac{2w\gamma}{pv^2}z+\frac{\gamma^2}{pv^2}=0,$$

若曲面爲橢圓拋物面, $\varepsilon=1$, z^2 之係數異於零,故射影爲拋物線.若曲面爲雙曲拋物面, $\varepsilon=-1$, 設 z^2 之係數異於零,則射影爲拋物線.在特別情形,如

$$pv^2-qw^2=0,$$

則射影爲直線.此時平面爲漸近面(觀前節).

上之結果可列爲下表:——

I　橢圓拋物面

$$u\neq 0\begin{cases} pv^2+qw^2-2u\gamma>0 & \text{實橢圓.}\\ pv^2+qw^2-2u\gamma<0 & \text{虛橢圓.}\\ pv^2+qw^2-2u\gamma=0 & \text{兩虛線(切面).}\end{cases}$$

$u=0$ 抛物線.

II. 雙曲抛物面

$$u\neq 0\begin{cases} pv^2-qw^2-2u\gamma\neq 0 & \text{雙曲線.}\\ pv^2-qw^2-2u\gamma=0 & \text{兩直線(切面).}\end{cases}$$

$$u=0\begin{cases} pv^2-qw^2\neq 0 & \text{抛物線.}\\ pv^2-qw^2=0 & \text{一直線(漸近面).}\end{cases}$$

由此表可知曲面之切方程式爲

$$pv^2+\varepsilon qw^2-2u\gamma=0.$$

142. 切面 曲面在(x, y, z)點之切面之方程式爲

(1) $$\frac{Yy}{p}+\frac{Zz}{\varepsilon q}-(X+x)=0,$$

其中x, y, z應有下之關係

(2) $$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{\varepsilon q}-2x=0.$$

試求平面

3) $$uX+vY+wZ+\gamma=0$$

爲曲面之切面之條件. (3) 旣爲切面,可與 (1) 比較,得

$$\frac{y}{pv}=\frac{z}{\varepsilon qw}=\frac{-1}{u}=\frac{-x}{\gamma},$$

於是

$$x=\frac{\gamma}{u},\ y=-\frac{pv}{u},\ z=-\frac{\varepsilon qw}{u};$$

此爲切點之位標,代入 (2) 式,得

(4) $$pv^2+\varepsilon qw^2-2\gamma u=0$$

爲所求之條件.此條件在前節已有述及.

由(4)式得

$$\gamma=\frac{pv^2+\varepsilon qw^2}{2u},$$

故切線之普通方程式爲

$$ux+vy+wz+\frac{pv^2+\varepsilon qw^2}{2u}=0.$$

由曲面以外一點$P(x_0, y_0, z_0)$所作之諸切面與曲面相切之點均在一二次曲線上,此二次曲線卽P點之極面

$$\frac{yy_0}{p}+\frac{zz_0}{\varepsilon q}-(x+x_0)=0$$

與曲線所成之交線,亦卽以P爲頂點之外切錐面之切點之軌跡也.極面不與軸平行,故如曲面爲雙曲抛物面,二次曲線爲雙曲線,外切錐面常有實形.如曲面爲橢圓抛物面,二次曲線爲橢圓類曲線.此橢圓爲實形或虛形,視(觀前節)

$$\frac{{y_0}^2}{p}+\frac{{z_0}^2}{q}-2x_0,$$

爲正或爲負而定.但橢圓抛物面分空間爲兩域,其含頂點切面之域,謂之外域,在此域內之P點能令$\frac{{y_0}^2}{p}+\frac{{z_0}^2}{q}-2x_0$之值爲正.故欲外切錐面有實形,$P$點須在外域.

無論如何,外切錐面之方程式均爲(見第八十八節)

$$\left[\frac{yy_0}{p}+\frac{zz_0}{\varepsilon q}-(x+x_0)\right]^2-\left(\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{\varepsilon q}-2x\right)$$
$$\times\left(\frac{{y_0}^2}{p}+\frac{{z_0}^2}{\varepsilon q}-2x_0\right)=0,$$

143. 法線 拋物面在(x, y, z)點之法線方程式爲

$$\frac{X-x}{-1}=\frac{Y-y}{\frac{y}{p}}=\frac{Z-z}{\frac{z}{\varepsilon q}},$$

x, y, z應有下之關係

$$(1) \qquad \frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{\varepsilon q}-2x=0.$$

設$P(x_0, y_0, z_0)$爲曲面以外之點,試由P作曲面之法線.設x, y, z爲法線之足之位標,於是先得(1)式,又知此法線經p點,故

$$(2) \qquad \frac{x_0-x}{-1}=\frac{y_0-y}{\frac{y}{p}}=\frac{z_0-z}{\frac{z}{\varepsilon q}}$$

由(1),(2)兩式可得法線之足之位標.

欲算式對稱,令

$$\frac{x_0-x}{-1}=\frac{y_0-y}{\frac{y}{p}}=\frac{z_0-z}{\frac{z}{\varepsilon q}}=t.$$

於是

$$(3) \qquad x=t+x_0,\ y=\frac{py_0}{t+p},\ z=\frac{\varepsilon q z_0}{t+\varepsilon q},$$

代入(1)式得

$$(4) \qquad \frac{py_0^2}{(t+p)^2}+\frac{\varepsilon q z_0^2}{(t+\varepsilon q)^2}-2(t+x_0)=0.$$

由此方程式之一根可得經P點之一法線.法線之足之位標,以方程組(3)定之.但(4)爲五次式,故由曲面以外一點P可

作五法線.

144. 圓截口 因雙曲抛物線之平截口爲雙曲線類或抛物線,故此曲面無圓截口.本節僅討論橢圓抛物面

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0.$$

而求其與主面垂直之圓截口面(觀一百二十七節).

一平面截兩同漸近方向之二次曲面所成之二次曲線有同無窮遠之點,故二次曲線爲同類.於是知同漸近方向之二次曲面有同圓截口面.試以橢圓柱面

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-a=0 \qquad (a>0)$$

代橢圓抛物面而求其圓截口面.此柱面之母線與 Ox 軸平行.yz 面截柱面成 AB 橢圓,此橢圓以 $OA=\sqrt{ap}$ 及 $OB=\sqrt{aq}$ 爲半軸.設 $p>q$,於是 $OA>OB$,由 A 及 B 點作與 Ox 軸平行之直線,此直線爲柱面在 xy 及 xz 面之母線,經 Ox 軸之平面既截柱面成直線,故欲求圓截口面可於過 Oz 軸或過 Oy 軸之平面中求之.

設過 Oz 軸之平面截 xy 面成 OC 直線,C 爲在 AA' 直線上之點.此平面截柱面成以 OB 及 OC 爲半軸之橢圓.因 OAC 爲直角,故 $OC>OA$,於是 $OC>OB$.從而知此橢圓不能爲圓.故過 Oz 軸之面非圓截口面.

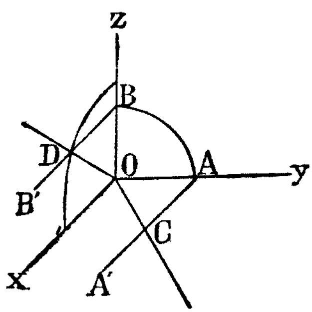


圖 62

設過 Oy 軸之平面截 xz 面成 OD

直線，D 爲在 BB' 直線上之點．因 OD 之値可由 OB 增至 ∞，故可定 D 點令 $OD=OA$．方法以 O 爲心，以 OA 爲半徑，在 xOz 面上作圓，此圓與 BB' 及 B_1B_1'（B_1B_1' 爲柱面在 xz 面之第二母線）相交於 D, D', D_1, D_1' 四點．但 OD 與 OD_1 同在一直線上，OD'，OD_1' 亦然，故過 OA 軸之諸面中可得兩圓截口面：其一過 DOD_1 直線，其他過 $D'OD_1'$ 直線．此兩平面之方程式與在 xz 面之 OD 及 OD' 直線之方程式同．已知圓之方程式

$$\frac{x^2+z^2}{p}-a=0$$

及 BB'，B_1B_1' 之方程式

$$\frac{z^2}{q}-a=0;$$

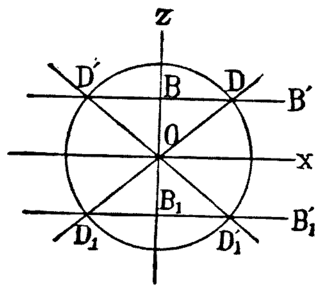


圖 63

將此兩式相減，卽得兩圓截口面方程式

$$\frac{x^2}{p}-z^2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)=0,$$

卽
$$qx^2-z^2(p-q)=0.$$

故圓截口面之普通方程式爲

$$x\sqrt{q}\pm z\sqrt{p-q}+\lambda=0.$$

此處假設 $p>q$．若 $q>p$，則圓截口面之普通方程式爲

$$x\sqrt{p}\pm y\sqrt{q-p}+\lambda=0.$$

145. 雙曲拋物面之直母線　由第一百四十一節之結果知橢圓拋物面無直母線．但雙曲拋物面

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0$$

則不然.此面之漸近方向,卽平面

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=0$$

上各直線之方向;其中祗有一方向與 xy 面平行,卽 Ox 軸之方向.但與此方向平行之直線,與曲面相交於一點,故知直母線不與此方向平行,卽不與 xy 面平行.設有不與 xy 面平行之直線

$$x=lz+\alpha,\qquad y=mz+\beta;$$

如此線爲直母線,則有恆等式

$$\frac{(mz+\beta)^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2(lz+\alpha)\equiv 0.$$

於是

$$\frac{m^2}{p}-\frac{1}{q}=0,\quad \frac{m\beta}{p}-l=0,\quad \frac{\beta^2}{p}-2\alpha=0,$$

卽

$$m=\varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}},\quad l=\frac{\varepsilon\beta}{p}\sqrt{\frac{p}{q}},\quad \alpha=\frac{\beta^2}{2p}(\varepsilon=\pm 1).$$

故直母線之方程式爲

$$x=\frac{\varepsilon\beta}{p}\sqrt{\frac{p}{q}}z+\frac{\beta^2}{2p},\quad y=\varepsilon\sqrt{\frac{p}{q}}z+\beta,$$

β 乃參數;ε 可取 $+1$ 及 -1 値,故有兩組之直母線.

146. 求直母線又法　雙曲抛物面之方程式爲

$$P^2-Q^2+R=0,$$

P, Q, R 表互相殊異之平直函數,此式又可寫爲

$$(P^2+Q)(P-Q)=-R.$$

故兩組之直母線爲

$$\begin{cases} P+Q=\lambda R, \\ P-Q=-\dfrac{1}{\lambda}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} P-Q&=\mu R, \\ P+Q&=-\dfrac{1}{\mu}. \end{aligned}$$

λ 及 μ 取任意值

如雙曲拋物面之方程式爲

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}-2x=0,$$

改書如下

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)=2x.$$

可得兩組之直母線

$$(\lambda)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}}+\dfrac{z}{\sqrt{q}}=2\lambda x, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}}-\dfrac{z}{\sqrt{q}}=\dfrac{1}{\lambda}, \end{cases} \qquad (\mu)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{p}}-\dfrac{z}{\sqrt{q}}=2\mu x, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}}+\dfrac{z}{\sqrt{q}}=\dfrac{1}{\mu}. \end{cases}$$

當 λ 取零值時,(λ) 直線在無窮遠,其方程式爲

$$(\Delta)\qquad \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0, \quad t=0.$$

同理,當 μ 取零值時,(λ) 直線爲

$$(\Delta_1)\qquad \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0, \quad t=0.$$

如 λ 及 μ 值無限加增,則 (λ) 及 (μ) 兩直線之極限線爲

$$(D)\quad \begin{cases} x=0, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}}-\dfrac{z}{\sqrt{q}}=0, \end{cases} \qquad (D_1)\quad \begin{cases} x=0, \\ \dfrac{y}{\sqrt{p}}+\dfrac{z}{\sqrt{q}}=0. \end{cases}$$

Δ 及 D 爲 (λ) 組之直線, Δ_1 及 D_1 爲 (μ) 組之直線.

147. 關於雙曲抛物面之直母線諸定理

定理一. (λ) 及 (μ) 兩組並無公共之直線.

因 (λ) 組之直線與平面 $\dfrac{y}{\sqrt{p}}-\dfrac{z}{\sqrt{q}}=0$ 平行, (μ) 組之直線與平面 $\dfrac{y}{\sqrt{p}}+\dfrac{z}{\sqrt{q}}=0$ 平行. 如 (λ) 組之一直線與 (μ) 組之一直線相合, 則此直線必與此兩面之交線平行, 卽言與曲面之軸平行, 但在第一百四十五節已見直母線無與軸平行者.

定理二. 經曲面一點, 每組可得一母線.

如 (λ) 直線經 (x', y', z') 點, 則

$$\frac{y'}{\sqrt{p}}+\frac{z'}{\sqrt{q}}=2\lambda x',$$

$$\frac{y'}{\sqrt{p}}-\frac{z'}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda}.$$

此兩式所定之 λ 値如相同, 則有 $\dfrac{y'^2}{\sqrt{p}}-\dfrac{z'^2}{\sqrt{q}}-2x'=0$. 此條件可適合, 因 (x', y', z') 點在抛物面上故. 同理證明經過曲面之 (x', y', z') 點可得 (μ) 組之一母線.

經曲面一點之兩母線, 定曲面在此點之切面.

定理三. 同組之兩母線不在同一平面上.

因 (λ) 組之母線在

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{1}{\lambda}$$

平面上,故如兩 λ 之值不同,其相應之兩母線無公共之點.又任何平面截雙曲抛物面不能成兩平行直線.兩母線既不相交,又非平行,其不在同一平面也明矣.

定理四. 不同組之任意兩母線同在一平面上.

過 (λ) 母線之平面之方程式爲

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}-2\lambda x+k\left[\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}-\frac{1}{\lambda}\right]=0.$$

(μ) 母線如在此面內,則有恆等式

$$\frac{1}{\mu}-2\lambda x+k\left(2\mu x-\frac{1}{\lambda}\right)\equiv 0;$$

即
$$\frac{1}{\mu}-\frac{k}{\lambda}=0, \qquad -2\lambda+2k\mu=0.$$

由此兩式所得之 k 值同爲 $\frac{\lambda}{\mu}$ 故 (λ) 及 (μ) 兩母線同在

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}-2\lambda x+\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}-\frac{1}{\lambda}\right)=0$$

平面上.此平面爲曲面在 (λ) 及 (μ) 兩母線相遇點之切面.切點之位標如下

$$x=\frac{1}{2\lambda\mu}, \quad y=\frac{\sqrt{p}}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right), \quad z=\frac{\sqrt{q}}{2}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\lambda}\right).$$

定理五. 凡曲面上之直線非屬 (λ) 組卽屬 (μ) 組.

證法同第一百三十七節定理五.

148. 雙曲抛物面之組織

第一法.第一百三十八節法在(μ)組取三定直線 D_1, D_2, D_3, (λ)組之任意直線與此三直線相交.故雙曲抛物面可視爲直線依 D_1, D_2, D_3 三直線而移動之軌跡,但此處(μ)組之三定直線須同與一平面平行.

反之,已與三定直線 A, B, C, 其中每兩直線不同在一平面內,但三直線均與一平面平行,則與此三直線相交之直線之軌跡爲雙曲抛物面.

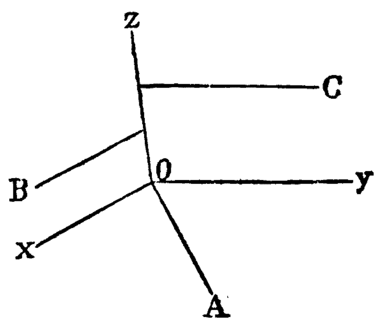


圖 64

任取與 A, B, C 三直線相交之一直線爲 z 軸,取此線與 A 相交之點爲原點,取 Ox 軸與 B 平行, Oy 軸與 C 平行; A, B, C 三直線既與同一平面平行,則 A 在 xy 面內.三直線之方程式爲

$$A\begin{cases} y-mx=0, \\ z=0, \end{cases} \qquad B\begin{cases} z=b, \\ y=0, \end{cases} \qquad C\begin{cases} z=c. \\ x=0. \end{cases}$$

與 B 及 C 相交之直線方程式爲

$$(1)\qquad \begin{cases} hy+z-b=0, \\ kx+z-c=0. \end{cases}$$

此直線如與 A 相交,則

$$(2)\qquad bk-cmh=0.$$

此直線之軌跡可由(1),(2)三式消去 h 及 k 而得

$$z(cmx-by)+bc(y-mx)=0$$

b 既與 c 異，則 z, $cmx-by$, $y-mx$ 三平直函數彼比殊異，故方程式可書為

$$PQ+\lambda R=0,$$

即
$$\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2-\left(\frac{P-Q}{2}\right)^2+\lambda R=0.$$

此式表雙曲拋物面.

第二法. (λ) 組之諸母線與平面

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0$$

平行，故如已知此平面與 (μ) 組之兩母線，則 (λ) 母線與此兩母線相交且與此平面平行.雙曲拋物面可視為 (λ) 線之軌跡.

反之，已與一定平面 P，及不相平行且不與 P 平行之兩定直線 D 及 D'，則與 P 平行且與 D 及 D' 相交之直線之軌跡為雙曲拋物面.

設 P' 為與 P 平行之面，此面與 D 及 D' 相交於 A 及 A' 點.取 AA' 之中點 O；由 O 作 Δ 及 Δ' 直線依次與 D 及 D' 平行. $\Delta O \Delta'$ 平面割 P' 面於 OB 直線.取 OB 對於 Δ 及 Δ' 之調和相配線 OC (Harmonic conjugate). 即以 OA, OB, OC 三直線依次為 Ox, Oy, Oz 軸. 易證在 yOz 面內如 Δ 之方程式為 $y=mz$，則 Δ' 之方程

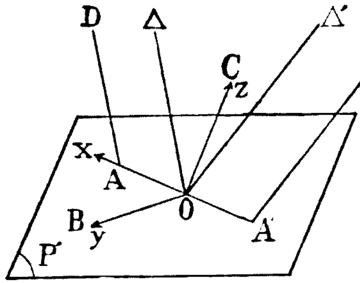


圖 65

式爲 $y=-mz$ (上卷第三十六節).故 D 及 D' 直線之方程式如下

$$D\begin{cases}x=a,\\ y=mz,\end{cases}\qquad\qquad D'\begin{cases}x=-a,\\ y=-mz.\end{cases}$$

與 D 及 D' 直線相交直線之方程式爲

$$(3)\qquad\qquad \begin{cases}x-a+h(y-mz)=0,\\ x+a+k(y+mz)=0.\end{cases}$$

但此直線須與 P 面平行,則 (3) 式所表之兩平面截 xy 面而成兩平行直線,故令 $z=0$, 由方程組 (3) 應不能得 x 及 y 之解答.於是 $h=k$, 而運動直線之軌跡爲

$$\frac{x-a}{x+a'}=\frac{y-mz}{y+mz},$$

即

$$mxz-ay=0.$$

此式表雙曲抛物面.

習題二十一

1. 設 M 爲抛物面之點, MN 爲其法線,除 MN 外過 M 點可另作四法線

令 A, B, C, D 爲法線之足. 求過此四點之球面方程式. 當 M 在拋物面移動時,求球心 I 之軌跡.

2. 已與等腰雙曲拋物面 $xy=kz$, 設拋物面上 M 點之兩直母線之交角爲常數,試求 M 點之軌跡, 證明此軌跡在旋轉雙葉雙曲面上, 而雙曲面之中心卽拋物面之頂點,其軸與拋物面之軸同.

3. 從拋物面

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}-2x=0$$

上三點 A, B, C 所作三法線相會之必須及充足條件爲平面 A, B, C 之極點在曲面

$$x(qy^2+pz^2)+(p-q)(qy^2-pz^2)+\frac{1}{2}pq(p-q^2)=0$$

上, 試證明之. [極點之定義見87節: $xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{t_0}=0$ 爲 (x_0, y_0, z_0, t_0) 點之極面,反言之 (x_0, y_5, z_0, t_0) 爲 $(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{t_0}$ 平面之極點].