SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ZWÖLFTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI W. BRAUMÜLLER, BUCHHÄNDLER DES K. K. HOFES UND DER K. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1854.

— 1376 —

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

12

ZWÖLFTER BAND.

JAHRGANG 1854. HEFT I — V.

(Mit 57 Tafeln.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI W. BRAUMÜLLER, BUCHHÄNDLER DES K. K. HOFES UND DER K. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1854.

Ergänzungen zur Histoire céleste française *und einigen andern Sternkatalogen.*

Von **W. Oeltzen,**

Assistenten an der k. k. Sternwarte zu Wien.

(Vorgelegt von dem w. M., Herrn Director von Littrow.)

Die erste grosse Beobachtungsreihe über kleine Sterne, welche noch jetzt der beobachtenden Astronomie wichtige Dienste leistet, ist die in den Jahren 1789 bis 1801 unter dem Namen der *Histoire céleste française* bekannte, auf der *École militaire* in Paris von J. und M. L. Lalande ausgeführte Arbeit. Sie folgte der jetzt nur in seltenen Fällen benutzten *Historia coelestis britannica* von Flamstead genau ein Jahrhundert. Lalande publicirte aus wichtigen Gründen die Beobachtungen, und nicht deren Resultate. So lange die *Histoire céleste* die Haupt- und fast einzige Quelle war für die Örter der Fixsterne, mit denen die Planeten und Kometen verglichen wurden, durfte es der Beobachter nicht scheuen, die zeitraubende Reduction eines einzelnen Sternortes aus den Originalbeobachtungen vorzunehmen. Nach dem Erscheinen des neuen Piazzischen Katalogcs aber war ein Mittel gegeben diese Reduction bedeutend abzukürzen durch Berechnung von Tafeln für die einzelnen Zonen, wie dies Bessel (Astronom. Nachr. Nr. 2) zuerst vorgeschlagen hat. Nach den daselbst gegebenen Vorschriften sind die Reductionstafeln bald darauf wirklich berechnet, und auf deren Grundlage in neuerer Zeit die Beobachtungen selbst höchst sorgfältig reducirt und in einen Katalog gebracht, der sich in den Händen jedes Astronomen befindet. Dieser Katalog beruht ganz auf den erwähnten Tafeln und enthält daher nur diejenigen Zonen reducirt, für welche sich Tafeln zur Reduction auf das Jahr 1800 vorfinden. Es fehlen aber für einige nördliche Zonen die Tafeln ganz, indem sich nicht genug Piazzische Sterne als Anhaltspunkte fanden; für andere nördliche Zonen gelten die Tafeln für den Anfang des Jahres 1790 statt 1800, indem die letzte Epoche so weit von der Beobachtungszeit lag, dass die Benutzung der Tafeln nicht mehr die hinreichende Genauigkeit gewährte. Für einige Zonen sind Reductionstafeln für beide

Epochen vorhanden. Diese sind in dem Kataloge von Baily aufgenommen.

Mit Reductionstafel auf 1790 allein, sind die folgenden Zonen,

1790 August,	11.	H. C.	p. 366	62	Sterne	Z. D.	56°	Declination	74°
1790 „	18.	„	366	14	„	„	49	„	81
1791 Jänner,	24.	„	381	19	„	„	51	„	80
1791 März,	3.	„	383	18	„	„	31	„	80
1791 „	13.	„	384	62	„	„	50	„	81
1791 April,	3.	„	385	18	„	„	31	„	80
			Summe	193					

Ganz ohne Reductionstafel sind:

1790 August,	10.	H. C.	p. 365	7	Sterne	Z. D.	57°	Declination	73°
1790 „	15.	„	366	23	„	„	55	„	75
1790 „	20.	„	367	45	„	„	53 u. 30	„	78
1790 „	22.	„	367	20	„	„	37 u. 49	„	86 u. 82
1790 „	28.	„	367	13	„	„	44	„	87
1790 „	30.	„	368	5	„	„	48	„	83
1791 März,	10.	„	384	4	„	„	36	„	85
1791 „	15.	„	385	11	„	„	36	„	85
1791 „	25.	„	385	11	„	„	36	„	85
			Summe	139					

Für die vier ersten Zonen ist jedesmal nur ein Fundamentalstern benutzt, für die fünfte 8, für die sechste 2. Die Benutzung nur eines Fundalmentalsterns kommt auch in den Tafeln, welche für 1800 gelten, einigemal vor, und macht jedenfalls die Örter unsicher. Der ganze Fehler oder auch ein wirklicher Irrthum einer einzelnen Beobachtung geht auf alle anderen über. So ist bei der kleinen Zone p. 366, 12. August 1790, der letzte Stern als Fundamentalstern genommen. Die Lal. Declination dieses Sternes stimmt also mit der Declination aus andern Quellen überein. Die Declination der übrigen Sterne aber, weichen sämmtlich nicht unerheblich von anderen Bestimmungen ab, so dass in der Z. D. jenes Sternes ein Fehler enthalten sein muss.

Als Vervollständigung des Kataloges der *Histoire céleste* habe ich die obigen 6 Zonen auf 1790 reducirt, und dazu zunächst die ungeänderten Reductionstafeln benutzt, dann einige in anderen Quellen vorkommende Sterne auf 1790 reducirt, und durch die sich zeigenden Unterschiede die Tafeln verbessert. Diese Correctionen sind in Rectascension und Declination

Für 1790 August,	11.	—1ˢ5	+3ʺ0
„ 1790 „	18.	0·0	0·0
„ 1791 Jänner,	24.	0·0	+2·0
„ 1791 März,	3.	0·0	—2·6
„ 1791 „	13.	0·0	0·0
„ 1791 April,	3.	0·0	0·0

Für die zweite Zone fanden sich keine neuen Fundamentalsterne vor. Die fünfte beruht schon auf 8. Die angebrachten Correctionen, namentlich die in Rectascension, sind kleiner als man erwarten sollte; nichts desto weniger sind die Rectascensionen, wie überhaupt aller nördlichen Sterne bei Lalande, nicht sehr zuverlässig. Die Abweichung der optischen Axe vom Meridian war schon an sich nicht unbeträchtlich, so dass die Grenzen, innerhalb deren man eine der Z. D. proportionale Änderung annehmen kann, nahe zusammenrücken. Die Ausdehnung der nördlichen Zonen im Sinne der Declination ist viel zu gross, als dass eine solche Annahme nicht beträchtliche Fehler erzeugen müsste. Die genaue Bestimmung der Fehler des Instrumentes für die verschiedenen Z. D. einer nördlichen Zone dürfte aber in den meisten, wenn nicht in allen Fällen mit Schwierigkeiten verbunden sein, wegen des Mangels an gleichzeitigen guten Rectascensions-Bestimmungen von Zonensternen. Ich habe es desshalb auch vorläufig nicht versucht, Reductionstafeln für die Zonen herzustellen, für welche solche noch nicht vorhanden sind; wahrscheinlich würde auch eine directe Berechnung der einzelnen Beobachtungen schneller zum Ziele führen und jedenfalls genauere Resultate liefern, wenn sich nur eben der Instrumentalfehler besser bestimmen liesse.

Die *Histoire céleste* enthält bekanntlich viele Fehler, die zum Theile während des Niederschreibens der Beobachtungen selbst, zum Theile durch den Druck derselben entstanden sind. Solche Fehler sind von allen Denen, die diese Beobachtungen benutzt haben, aufgefunden. Die Gewissheit, dass alle aufgezeichneten Sternörter sich auch wirklich am Himmel befinden, lässt sich nur durch eine neue Vergleichung mit dem Himmel erhalten, welche aber viel Mühe und Zeit in Anspruch nehmen würde, wollte man jeden Stern wieder einzeln aufsuchen. Man gelangt schneller zum Ziele, und verbindet neue Vortheile damit, wenn man Zonenbeobachtungen in denselben Gegenden des Himmels wiederholt.

Der Theil des Himmels, den die *Histoire céleste* umfasst, ist nun bereits von Bessel und Argelander wieder durchbeobachtet, und da wir uns ausserdem in dem Besitze mehrerer neuer umfangreicher Sternkataloge befinden, so schien es mir nicht ohne Nutzen zu sein, eine Vergleichung der *Histoire céleste* mit diesen Beobachtungen vorzunehmen, zum Theil in der Absicht, dieselbe von den meisten grösseren Fehlern und eigentlichen Irrthümern zu reinigen. Die Vergleichung, deren Resultate im Folgenden enthalten sind, erstreckt sich aber nur auf den Theil des nördlichen Himmels, über welche Argelander seine Zonenbeobachtungen ausgedehnt hat. Für die Zone von — 15° bis + 15° Declination ist eine solche durch die Berliner Stern-Charten schon fast vollständig ausgeführt, und für den Theil von + 15° bis + 45° muss ich mir die Resultate für eine andere Gelegenheit vorbehalten. Der Katalog der *Histoire céleste* wurde innerhalb jener Grenzen auf 1842 reducirt, als der Epoche des Kataloges der Argel. Zonen, eine Reihe anderer Kataloge ebenfalls, und dadurch die Richtigkeit der meisten Sternörter festgestellt. In Fällen, wo sich Unterschiede zeigten, die der Wahrscheinlichkeit nach von einem Fehler herrührten, wurden die Sterne am Himmel selbst aufgesucht, und so der Zweifel gehoben, wenn nicht andere Kataloge dazu schon hinreichend waren. Da die Reduction nur beiläufig geschah, so liessen sich Sterne mit eigener Bewegung nur erkennen, wenn die letztere schon einigermassen beträchtlich war. Die Fehler, die sich bei dieser Gelegenheit in den übrigen Katalogen ergaben, sind ebenfalls weiter unten zusammengestellt. Es finden sich nur noch etwa 1300 Sternörter, welche allein bei Lalande vorkommen, so dass eine mässige auf der Wiener Sternwarte bereits in Angriff genommene Arbeit genügen wird, um jede einzelne Beobachtung der *Histoire céleste* innerhalb jenes Raumes durch eine neue Beobachtung verificirt und den Nachweis geliefert zu haben, ob sich alle von Lalande gesehenen Sterne noch wirklich am Himmel befinden oder nicht.

Katalog.

Nr.	Grösse	Rectascension 1790			Präc.	Nördliche Declination 1790			Präc.	H. C. pag.
1	8	6ʰ	6ᵐ	56ˢ0	+11ˢ8	81°	17′	7″1	— 0″6	366
2	8½		12	41·4	13·5	82	40	13·2	1·1	366
3	9		13	58·0	7·77	74	11	20·5	1·3	365
4	8½		15	53·7	13·2	82	27	13·1	1·4	366
5	9		21	39·6	7·39	72	54	0·3	1·8	365
6	9		21	44·6	14·3	83	14	58·8	1·9	366
7	9½		22	16·6	7·65	73	47	12·3	1·9	365
8	8		24	29·9	14·3	83	14	29·1	2·1	366
9	9		25	57·5	7·81	74	20	12·9	2·3	365
10	9		28	46·2	7·58	73	36	34·6	2·5	365
11	9		30	10·7	8·17	75	25	28·4	2·6	365
12	7½		30	19·2	13·5	82	42	38·6	2·6	366
13	9		31	46·1	14 3	83	46	40·4	2·8	366
14	8½		32	5·7	8·26	75	39	25·2	2·8	365
15	8½		32	55·4	8·08	75	10	56·7	2·8	365
16	7½		35	45·1	8·24	75	39	55·2	3·1	365
17	7½		35	51·7	8·18	75	29	40·6	3·1	365
18	10		35	53·3	8·18	75	29	59·7	3·1	365
19	9		40	19·0	7·90	74	43	47·2	3·5	365
20	9		41	28·0	11·6	81	10	40·3	3·6	366
21	8		43	38·5	17·	84	33	41 8	3·8	366
22	8		44	53·0	12·0	81	35	22·7	3·9	366
23	6½		45	56·4	13·5	82	45	32·6	4·0	366
24	8		47	13·9	7·36	72	59	9·6	4·1	365
25	8		50	6·4	7·52	73	38	26·6	4·3	365
26	7		54	5·0	8·07	75	26	1·4	4·7	365
27	9		55	28·5	13·8	83	3	32·5	4·8	366
28	7½		55	47·2	11·5	81	16	35·9	4·8	366
29	8½	6	56	14·3	7·75	74	28	31·3	4·9	365
30	8½	6	59	40·0	7·65	74	13	3·5	5·1	365
31	8½	7	0	10·5	14·4	83	29	30·1	5·2	366
32	8½	7	1	4·4	7·42	73	27	6·0	5·3	365
33	9	7	1	11·9	7·42	73	27	16·0	5·3	365
34	9	8	8	30·0	6·79	72	57	45·0	10·7	365
35	8		8	37·7	6·86	73	21	49·3	10·7	365
36	9		11	2·9	7·04	74	9	33·7	10·8	365
37	9½		14	49·7	7·03	74	20	49·1	11·1	365
38	7		15	57·8	7·02	74	20	16·1	11·2	365
39	8		19	37·8	6·86	73	53	10·4	11·5	365
40	8		22	45·3	6·86	74	1	13·8	11·7	365
41	8		24	46·8	6·63	73	7	22·8	11·9	365
42	9		27	38·4	6·93	74	30	12·1	12·0	365
43	10		32	9·0	7·07	75	10	27·0	12·4	365
44	9		36	30·2	6·66	73	51	42·6	12·7	365
45	9½		39	8·4	6·89	75	2	10·2	12·8	365
46	9½		46	34·3	6·78	74	53	57·5	13·3	365
47	8½		47	45·4	6·41	73	7	45·7	13·4	365
48	9½		49	22·4	6·30	73	4	52·5	13·5	365
49	6		54	24·2	6·39	73	47	41·5	13·8	365
50	9		57	10·0	6·20	73	2	46·1	14·0	365
51	7	8	57	46·9	6·58	74	52	43·8	14·0	365

Nr.	Grösse	Rectascension 1790			Präc.	Nördliche Declination 1790			Präc.	H. C. pag.
52	9	9h	31m	43s.4	+6s.15	75°	23'	22".4	—16".0	365
53	10		33	55·8	6·12	75	23	1·3	16·1	365
54	9		39	20·8	6·41	77	2	12·1	16·4	365
55	8		41	49·3	6·05	75	45	10·9	16·5	365
56	9½		46	40·9	5·90	75	18	57·3	16·8	365
57	9		52	29·8	5·69	74	54	40·6	17·0	365
58	10		52	55·5	5·70	75	3	20·9	17·0	365
59	9		56	57·8	5·90	76	28	30·2	17·2	365
60	9	9	57	50·0	5·82	76	13	45·4	17·3	365
61	9½	10	3	30·2	5·82	76	40	20·4	17·5	365
62	8½		5	36·4	5·79	76	44	4·4	17·6	365
63	9		6	5·9	5·60	75	49	22·5	17·6	365
64	8		14	14·0	5·27	74	50	50·8	17·9	365
65	5½		16	42·9	5·56	76	47	9·5	18·1	365
66	8		16	47·0	5·22	74	54	19·8	18·1	365
67	9½		22	54·6	5·27	75	59	6·7	18·3	365
68	9		30	38·6	5·05	75	37	35·8	18·6	365 1)
69	8		34	11·6	5·22	77	5	57·2	18·7	365
70	9		41	26·0	4·81	75	27	6·5	18·9	365
71	8½		42	41·7	4·96	76	50	22·8	18·9	365
72	9		44	24·7	4·78	75	54	27·7	19·0	365
73	8	10	47	29·5	4·80	76	33	56·5	19·1	365
74	8	11	2	16·1	4·45	76	29	51·1	19·4	366
75	8	11	2	47·3	4·35	75	28	47·9	19·4	366
76	8½	11	4	46·8	4·36	76	13	54·1	19·5	366
77	9	13	6	3·4	1·10	79	8	39·0	19·2	385
78	8		9	58·8	0·60	80	45	56·3	19·1	385
79	8		12	7·0	0·77	79	48	36·0	19·1	385
80	.		25	21·3	+0·40	79	43	48 0	18·7	385
81	8		36	45·4	+0·21	78	57	25·8	18·2	385 2)
82	8		36	51·0	—0·18	80	25	13·8	18·2	385
83	8		41	57·8	+0·07	79	7	0·0	18·1	385
84	7		50	51·3	—0·43	79	54	55·0	17·7	385 3)
85	8		51	12·6	0·84	80	57	32·5	17·7	385 4)
86	7		55	46·4	0·40	79	25	35·4	17·5	385
87	7		56	2·8	0·61	80	0	6·2	17·5	385
88	8	13	57	2·0	0·53	79	42	54·6	17·5	385
89	5½	14	9	53·8	0·47	78	32	2·8	16·9	385
90	8½		20	29·7	1·42	80	18	3·1	16·4	385
91	7		30	26·9	1·29	79	25	38·1	15·9	381
92	7½		30	28·2	1·30	79	25	37·6	15·9	385
93	.		39	57·9	2·11	80	33	41·9	15·4	385
94	6½		40	0·9	2·10	80	33	46·1	15·4	381
95	8		45	50·5	2·32	80	40	36·9	15·0	385
96	8		45	52·8	2·23	80	40	36·7	15·0	383
97	7½		45	55·8	2·23	80	40	36·8	15·0	381
98	6		58	22·3	1·76	79	1	21·1	14·3	381
99	.		58	23·7	1·76	79	1	7·1	14·3	385
100	7	14	58	24·4	1·76	79	1	11·8	14·3	383
101	9	15	1	52·5	2·54	80	21	56·4	14·1	383
102	9		12	34·8	2·14	79	12	0·9	13·4	383
103	9		16	12·9	3·16	80	48	20·0	13·2	383
104	9		19	26·2	3·38	80	58	58·0	12·9	383

Nr.	Grösse	Rectascension 1790			Präc.	Nördliche Declination 1790			Präc.	H. C. pag.
105	9	15h	19m	28:0	— 2:28	79°	9'	33"3	—12"9	383
106	7½		25	38·7	2·37	79	8	23·8	12·5	383 [5]
107	7		42	2·6	3·9	81	7	56·3	11·4	383
108	8		42	12·8	3·9	81	7	53·9	11·3	381 [6]
109	8		42	14·6	3·9	81	7	59·3	11·4	383 [7]
110	8		42	25·9	3·9	81	7	57·9	11·3	381 [8]
111	6½		43	22·1	4·3	81	27	20·7	11·3	383
112	7½		43	31·2	4·3	81	27	22·6	11·3	381
113	6		50	24·0	4·2	81	16	5·8	10·7	383
114	7		50	32·8	4·2	81	16	8·1	10·7	381
115	7		51	48·3	3·80	80	37	46·2	10·6	381
116	8		55	40·8	3·97	80	45	14·4	10·3	383
117	8	15	55	43·7	4·00	80	45	16·1	10·4	381
118	7	16	32	51·5	12·	85	21	16·3	7·4	383 [9]
119	5		37	46·6	3·61	79	23	49·0	7·0	383
120	5		37	47·0	3·61	79	23	53·9	7·1	381
121	8		38	28·8	4·69	80	47	35·0	7·0	383
122	9		38	36·7	4·69	80	47	48·4	7·0	381
123	8		45	16·6	4·27	80	12	9·4	6·4	383
124	7½		45	17·8	4·27	80	12	17·7	6·4	381
125	8½		48	40·8	3·87	79	35	51·7	6·2	381
126	6½		50	5·8	3·68	79	17	52·8	6·0	381 [10]
127	6½	16	50	7·5	3·68	79	17	49·5	6·0	383
128	8	17	1	31·4	4·14	79	50	7·2	5·1	381
129	8	17	32	59·2	4·45	79	58	49·2	4·9	381 [11]
130	6½	17	35	43·2	4·71	80	18	3·6	2·2	381
131	8	17	51	23·6	4 00	79	17	29·1	— 0·7	381
132	8	20	3	59·9	3·44	80	0	53·3	+10·3	384
133	8	20	8	15·4	4·8	81	52	14·9	+10·6	384
134	8		10	18·3	2·70	78	56	35·3	10·8	384
135	7		12	56·5	2·72	79	3	43·2	11·0	384
136	7½		15	13·7	1·81	77	11	26·1	11·1	384 [12]
137	4½		16	6·7	1·77	77	4	11·7	11·2	384 [13]
138	8		20	47·5	5·5	82	47	4·5	11·5	384
139	7		23	8·4	2·51	78	59	27·7	11·7	384
140	7		23	40·7	2·91	79	47	55·6	11·8	384
141	8		23	43·0	4·2	81	33	46·1	11·8	384
142	6½		25	52·5	2·96	79	51	44·5	11·9	384
143	8½		26	11·2	2·97	79	54	7·6	11·9	384
144	8		35	34·0	2·55	79	30	16·3	12·6	384
145	7½		36	31·0	4·0	81	39	45·6	12·7	384
146	5½		39	22·1	3·10	80	42	29·8	12·9	384
147	5½		40	39·9	3·17	80	41	26·7	12·9	384
148	7½		40	55·2	2·95	80	20	40·8	13·0	384
149	7		43	20·2	4·5	82	27	4·5	13·1	384
150	7½		48	10·4	3·3	81	15	0·1	13·4	384
151	6		48	39·3	4·8	82	52	38·0	13·5	384
152	5		56	36·7	2·24	79	45	15·4	14·0	384
153	5½	20	56	44·7	3·6	81	44	21·4	14·0	384
154	9	21	2	44·3	4·4	82	55	48·6	14·3	384
155	8		7	52·7	4·5	83	6	40·3	14·7	384
156	7		12	22·6	2·15	80	18	12·9	14·9	384
157	7½		15	5·8	2·00	80	9	11·2	15·1	384

Nr.	Grösse	Rectascension 1790			Präc.	Nördliche Declination 1790			Präc.	H. C. pag.
158	7½	21^h	20^m	17^s3	-1^s76	79°	55′	7″1	+15″4	384
159	6½		21	24·5	1·95	80	20	32·0	15·4	384
160	8		24	22·8	1·44	79	26	47·4	15·6	384
161	8		25	57·5	2·10	80	51	29·8	15·7	384
162	8		27	11·4	2·2	81	6	48·3	15·8	384
163	8½		28	0·4	2·5	81	36	26·4	15·8	384
164	6½		30	33·3	1·35	79	36	16·2	15·9	384
165	9		34	21·8	1·82	80	48	19·8	16·1	384
166	9		35	41·1	2·7	82	21	16·4	16·2	384
167	9		36	57·6	3·0	82	38	24·0	16·3	384
168	9		37	50·0	2·8	82	29	59·5	16·3	384
169	9		41	24·7	3·0	82	54	6·1	16·5	384
170	8½		45	30·7	2·9	82	59	35·9	16·7	384
171	9		51	53·5	0·83	79	40	51·1	17·0	384
172	9		52	59·3	2·0	82	5	38·9	17·0	384
173	6		54	55·9	0·60	79	18	33·9	17·1	384
174	7½	21	55	38·9	2·6	83	3	4·9	17·2	384
175	9	22	0	20·7	2·3	83	2	12·4	17·4	384
176	8		4	53·6	1·4	81	51	16·1	17·6	384
177	8½		5	0·8	0·9	81	1	21·1	17·6	384[14])
178	8½		5	11·0	1·8	82	28	35·6	17·6	384
179	8½		11	3·5	1·1	81	37	30·0	17·8	384[15])
180	7		24	24·7	−0·29	80	52	1·9	18·3	384
181	7		26	2·5	+0·10	79	37	36·8	18·4	384
182	6½		38	40·7	0·36	80	17	32·2	18·8	384
183	7		42	3·3	0·70	79	19	55·6	18·9	384
184	7		47	0·2	0·86	79	15	15·0	19·0	384
185	.		47	18·3	0·1	82	9	51·1	19·1	384
186	4½		47	49·1	0·1	82	2	17·8	19·1	384
187	8		50	46·0	1·00	79	7	12·3	19·1	384
188	9		52	25·3	+0·82	80	10	17·8	19·2	384
189	4½		55	27·4	0·1	83	13	21·9	19·3	384
190	7		55	28·8	+1·11	79	12	57·3	19·3	384
191	7	22	57	36·7	1·10	79	39	4·1	19·3	385
192	8	23	2	58·1	1·29	79	30	0·4	19·4	385
193	7½	23	3	11·4	+1·31	79	26	5·2	+19·4	385

Bemerknngen zu dem vorstehenden Kataloge.

1) H. C. p. 365 22^h 29^m 47^s5. Faden 1 gibt die Zeit 1^m grösser als Faden 2. Der letztere ist als richtig angenommen.

2) H. C. p. 385 13^h 37^m 13^s7. Nach einer Vergleichung mit dem Himmel und mit Argel. 13916 ist die Zeit um 2^m verringert.

3) und 4) H. C. p. 385 13^h 46^m 44^s5 und 13^h 46^m 47^s5. Der 3. Faden heisst bei beiden Sternen 51^m 46^s7. Diese Zeit passt aber weder zu den beiden ersten Fäden des ersten Sternes, noch zu dem ersten Faden des zweiten Sternes. Der 3. Faden ist daher bei der Reduction nicht berücksichtigt.

5) H. C. p. 383 15^h 21^m 42^s. Faden 1 gibt 4^s weniger als Faden 2 und 3 und ist fortgelassen.

6) und 8) H. C. p. 381 $3^h 42^m 51^s.5$ und $3^h 43^m 5^s.7$. Faden 3 gibt die Zeiten 1^m kleiner als Faden 2. Die Sterne kommen auch vor auf p. 383. Darnach ist Faden 2 richtig, Faden 3 1^m zu klein.

7) H. C. p. 383 $15^h 37^m 30^s.5$. Die 3 Fäden stimmen schlecht.

9) H. C. p. 383 $16^h 30^m 15^s$. Die Z. D. liegt $5'$ von der Mitte der Zone entfernt.

10) H. C. p. 381 $4^h 50^m 41^s.5$, Faden 3 gibt $49^m 49^s.6$. Offenbar aber ist Faden 3 zu lesen 56^s statt $5^s.6$, dann würde die Zeit $50^m 40^s.0$. Diese Correction ist angenommen.

11) H. C. p. 381 $5^h 33^m 44^s$. Faden 2 gibt die Zeit $9^s.7$ grösser als Faden 3. Der letztere ist als richtig angenommen.

12) H. C. p. 384 $8^h 14^m 58^s.7$. Die Rectascension weicht beträchtlich ab von Lal. Kat. 39233 und Piazzi 119. Der Unterschied scheint aber von keinem Fehler herzurühren, sondern nur daher, dass die Z. D. 4^0 von der Mitte der Zone entfernt liegt. Denn die Zeit des unmittelbar darauf beobachteten Sternes weicht eben so viel von Lal. 39264 und P. 126 ab.

13) H. C. p. 384 $8^h 15^m 50^s.8$. Faden 3 gibt die Zeit $10^s.7$ kleiner als Faden 2 und ist ausgeschlossen, da der Zeitunterschied mit dem unmittelbar vorher beobachteten Sterne, nach Faden 2 derselbe ist wie bei Piazzi und Lal. Kat. 39233 und 37264, s. die vorige Bemerkung.

14) H. C. p. 384 $10^h 2^m 37^s$. Die Fäden weichen $3^s.3$ ab.

15) H. C. p. 384 $10^h 11^m 35^s.5$ Faden 3 gibt $9^s.0$ mehr als Faden 2 und ist ausgeschlossen.

Zur bequemeren Benützung des vorstehenden Kataloges folgen hier noch die Numern, welche auch in anderen Quellen vorkommen, und zwar in den Katalogen von Bradley, Piazzi, Lalande, Groombridge, Struve (1830), Rümker und dem der nördlichen Argelander'schen Zonen. Diese verschiedenen Quellen sind im Folgenden bezeichnet mit By., P., Lal., G., Str., R., Arg. und ist ihnen die Numer des betreffenden Kataloges beigefügt.

Nr.		Nr.	
5	Arg. 7069.	38	Arg. 9068. Zweimal. G. 1446.
7	„ 7090.	39	„ 9113.
9	„ 7167.	40	„ 9161.
10	„ 7210.	46	„ 9520.
16	„ 7334.	47	„ 9528.
17	„ 7336. Str. 778.	49	„ 9640. G. 1517.
19	„ 7405.	50	„ 9679.
23	G. 1259. P. 292.	51	G. 1522.
25	Arg. 7559.	52	Arg. 10218. Str. 1147.
26	„ 7624	53	„ 10256.
30	„ 7721.	55	„ 10373. By 1383.
32	„ 7748. By 1035. Str. 838.	56	„ 10439. Zweimal.
33	„ 7749.	57	„ 10539.
37	„ 9047.	58	„ 10545.

Nr.

59 Arg. 10608.
62 „ 10739.
63 „ 10745.
64 „ 10853.
65 „ 10892. G. 1650, P. 78, By 1446.
66 Arg. 10890. Zweimal. Str. 1210.
67 „ 10979.
69 „ 11127. G. 1687.
73 „ 11319. G. 1720, By 1521.
76 „ 11627.
79 „ 13527.
80 „ 13723. P. 133, G. 2012.
81 „ 13916.
82 „ 13913.
83 „ 14003. G. 2035.
86 „ 14191. Str. 1575.
87 „ 14197,
88 „ 14208.
[1]) 89 „ 14421. G. 2094, P. 49, By 1859.
90 Arg. 14556.
91 „ 14693.
92 „ 14693.
95 „ 14882.
98 „ 15047. G. 2184.
99 „ 15047. G. 2184.
100 „ 15047. G. 2184.
102 „ 15247.
105 „ 15329.
106 „ 15404.
107 G. 2275.
108 „ 2275.
109 „ 2276.
110 „ 2276.
115 „ 2292.
117 „ 2298.
119 Arg. 16420. G. 2372, P. 182.
120 „ 16420. G. 2372, P. 182.
128 „ 16741.

Nr.

130 Arg. 17306. G. 2456.
131 Lal. 32982.
134 „ 39038. Zweimal.
135 „ 39147 und 39139.
136 „ 39233. Dreimal. P. 119.
137 R. 218. Lal. 39264. Viermal. G. 3148, P. 126, By 2632, Str. 2462.
139 Lal. 39554. Dreim. Arg. 20518.
140 „ 39585. Arg. 20524.
142 „ 39684. Str. 2485, Arg. 20588.
143 Arg. 20596.
144 „ 20859. Lal. 40071.
146 Lal. 40176. G. 3268, P. 316, By 2701.
147 Arg. 20982. Zweim. Lal. 40321, G. 3276, P. 331, By 2704.
[2]) 148, Lal. 40244. G. 3277, P. 333, By 2705.
[3]) 152 Arg. 21476. R. 8810, Lal. 40867, G. 3373, By 2749.
156 Arg. 21950. Lal. 41510.
157 „ 22019. Lal. 41621.
158 Lal. 41803.
159 „ 41852.
160 „ 41971. G. 3477, Gtr. 2603.
164 Arg. 22490. Lal. 42215. Zweimal, G. 3511.
171 Arg. 23111.
181 G. 3814.
182 Lal. 44629. G. 3887.
183 R. 10678. Lal. 44724, G. 3902. Arg. 24719.
184 R. 10743. Lal. 44881, G. 3922.
187 Lal. 45013. G. 3942.
190 Arg. 25051.
191 Lal. 45245. G. 3980. By 3067.
192 Arg. 25244. Lal. 45432, G. 4008.
193 „ 25250. Lal. 45442, G. 4009.

[1]) 89 ist auch Argel. Pos. mediae, 322.
[2]) 148 ist auch Argel. Pos. mediae, 475.
[3]) 152 ist auch Argel. Pos. mediae, 480.

Bemerkungen zum Kataloge der Histoire céleste française.

(W. M. B. bedeutet: Wiener Meridian-Beobachtung.)

Nr. 2. Die Z. D. ist in der H. C. nur in Minuten gegeben.

„ 66 = H. C. p. 306 0^h 1^m $30^s.5$. Der Stern steht am Himmel 1^m früher. Auch bei dem in der H. C. folgenden Stern ist der 1. Faden 1^m zu gross, im Kataloge aber schon corrigirt.

„ 104 lies 41° 23′ statt 18′. H. C. p. 369 0^h 2^m $2^s.5$ lies 89° 41′.

„ 326 lies 40° 21′ statt 22′. H. C. p. 306 0^h 8^m $58^s.5$ lies 89° 11′.

„ 384 lies 9^m statt 10^m. H. C. p. 306 0^h 10^m 26^s lies 9^m.

„ 550 lies 30° 26′ statt 36′. H. C. p. 372 0^h 14^m $50^s.3$ lies 10° 38′.

„ 603 lies 18^m statt 17^m. H. C. p. 306 0^h 17^m 26^s lies 18^m. Die Declination folgt ferner etwa 0.′3 grösser, als aus Argel. 396.

„ 748 lies 40° 0′ statt 39° 55′. H. C. p. 306 0^h 21^m $24^s.7$ lies 88° 44′.

„ 874 lies 30° 46′ statt 56′. H. C. p. 368 0^h 23^m 49^s lies 10° 27′.

„ 912 lies 25^m statt 26^m. H. C. p. 306 0^h 25^m 1^s lies 24^m. Der Stern wird dadurch = Nr. 869.

„ 955. Dieser Stern steht H. C. p. 372 und nicht p. 72.

„ 977 lies 41° 44′ statt 34′. H. C. p. 305 0^h 27^m $52^s.5$ lies 34′.

„ 1013 und 1014 einmal 10. Grösse und 5. Grösse. Die Grössen auf p. 369 sind aber überhaupt zu klein angesetzt; ich habe den Stern 8. Grösse geschätzt; die Grössenangabe auf p. 306 scheint auf einem Irrthume zu beruhen.

„ 1103 = H. C. p. 379 0^h 31^m $55^s.7$. Dieser Stern ist nicht am Himmel, ist aber offenbar = Nr. 1102, der 9′ nördlicher steht, so dass in der H. C. 2° 19′ statt 10′ zu lesen ist.

„ 1265 = H. C. p. 351 12^h 37^m $8^s.2$. Aus G r o o m b r i d g e folgt übereinstimmend mit A r g e l. die Declination etwa 0.′4 kleiner, und soll die Z. D. vielleicht 38″ statt 18″ heissen.

„ 1423 und 1453 = H. C. p. 379 0^h 41^m 25^s und 41^m $46^s.5$ Die Z. D. und Grössen sind zu vertauschen.

„ 1582 lies 38° 50′ statt 39° 0′. H. C. p. 305 0^h 45^m $29^s.5$ lies 87° 40′.

„ 1676 = H. C. p. 375 0^h 47^m $46^s.5$. Aus R ü m k e r 2. Folge Nr. 449 folgt die Declination etwa 0.′7 grösser.

„ 1727 und 1728 = H. C. p. 305 0^h 49^m $39^s.5$ 50^m 19^s 0° 21′ 54″
50 21 0 26 20.

Das beobachtete Faden-Intervall des 1. Sternes wäre hiernach $39^s.5$, das berechnete ist $41^s.51$. In einer Note in B a i l y's Katalog wird desshalb bei einem der Fäden ein Fehler von 2^s vermuthet. Offenbar ist aber zu lesen 49^m $39^s.5$ 50^m 21^s
50 19.

Die Sterne sind dann A r g e l. 988 und 996, und ist zu corrigiren Nr. 1727 in 49^m $58^s.92$. Nr. 1728 in 50^m $37^s.44$.

Nr. 1776 und 1805 = H. C. p. 372 0^h 50^m $39^s.5$ und 50^m $50^s.5$. Die Z. D. sind zu vertauschen.

Nr. 1795 lies $0^h\ 52^m\ 33^s.71$, indem in der H. C. p. 373 $0^h\ 51^m\ 26^s$ Fäden 1 und 2 zu lesen ist statt 2 und 3.

„ 1910 = H. C. p. 305 $0^h\ 55^m\ 18^s.5$ $0^\circ\ 1'\ 48''$ südl. Z. D. Dieser Stern 7. Grösse ist nicht am Himmel. Offenbar ist in der H. C. zu lesen $0^\circ\ 20'\ 48''$, alsdann wird der mittlere Ort 1800

$0^h\ 55^m\ 37^s.04 + 48^\circ\ 28'\ 54''.1$

aus Piazzi 285 $\quad 37 \cdot 50 \quad 54 \cdot 2$

aus Groombr 241 $\quad 37 \cdot 22 \quad 54 \cdot 3$

„ 2072 lies $44^\circ\ 53'$ statt 43'. Fehler des Kataloges.

„ 2233 lies $23^\circ\ 14'$ statt 19'. H. C. p. 369 $1^h\ 2^m\ 7^s.5$ lies 49'.

„ 2272. Die Z. D. ist in der H. C. nur in Minuten gegeben.

„ 2367 = H. C. p. 369 $1^h\ 7^m\ 40^s.5$. Die Zeit ist falsch. Der Fehler aber nicht zu ermitteln. Der Stern ist identisch mit Nr. 2354 und 2355.

„ 2378 lies $1^h\ 7^m\ 52^s.88$, indem in der H. C. p. 378 $1^h\ 8^m\ 15^s$ Faden 3 statt 2 zu lesen ist.

„ 2417, 2418, 2454, 2507, 2530. Diese Sterne entsprechen der folgenden Stelle H. C. p. 249.

a)	1^h		$9^m\ 51^s.5$		$2^\circ\ 36'\ 23''$	= Nr. 2417
b)	1			10 31·4	2 59 34	2418
c)	1		11 22·5		2 42 51	2454
d)	1	12 13·5	12 51·5		2 45 47	2507
e)	1	12 54·5	13 33	14 12·7	2 45 52	2530

Die Zeit von *b* ist eine Zeile höher zu rücken, ebenso die von *c* und *d*. Die Z. D. von *d* und *e* rühren von zwei verschiedenen Einstellungen desselben Sternes *e* her. Im Kataloge sind daher folgende Änderungen vorzunehmen: Nr. 2417 lies $10^m\ 7^s.70$. Nr. 2418 ist ganz zu streichen. Nr. 2454 erhält die P. D. von 2418. Nr. 2507 erhält die P. D. von 2454. Nr. 2530 erhält die P. D. $43^\circ\ 55'\ 42''.5$ als Mittel der beiden Ablesungen.

Nr. 2472 = H. C. p. 306 $1^h\ 11^m\ 48^s.5$. Die beiden Fäden weichen nach einer Note im Kataloge um 2^s ab. Aus Groombr. 304 folgt $12^m\ 7^s.26$, eine W. M. B. von 1853 gibt $12^m\ 7^s.44 + 50^\circ\ 7'\ 26''.7$, während Lal. $12^m\ 6^s.29$ hat. Danach ist Faden 2 um $+2^s$ und der Ort des Kataloges um $+1^s$ zu corrigiren.

Nr. 2972 lies $26^\circ\ 40'$ statt 45'. H. C. p. 378 $1^h\ 27^m\ 23^s.5$ lies $14^\circ\ 13'$.

„ 3059 lies $23^\circ\ 27'$ statt 32'. H. C. p. 369 $1^h\ 29^m\ 4^s.8$ lies $17^\circ\ 37'$.

„ 3435 lies $40^\circ\ 41'$ statt 46'. H. C. p. 369 $1^h\ 41^m\ 45^s.5$ lies $0^\circ\ 23'$.

„ 3454 lies $35^\circ\ 30'$ statt 25'. H. C. p. 373 $1^h\ 42^m\ 7^s.5$ lies $5^\circ\ 34'$.

„ 3472 = H. C. p. 372 $1^h\ 41^m\ 30^s.5$. Nach einer Note im Kataloge weichen die Fäden $7^s.07$ ab. Diese Bemerkung ist irrthümlich, sie weichen nur $0^s.91$ ab, und der Ort des Kataloges muss $1^h\ 43^m\ 1^s.28$ heissen. Ein W. M. B. von 1853 gibt $1^h\ 43^m\ 1^s.91$.

„ 3607 und 3630 = H. C. p. 372 $1^h\ 46^m\ 13^s$ und $46^m\ 18^s$. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 3690 lies $25^\circ\ 52'$ statt 47'. H. C. p. 378 $1^h\ 49^m\ 9^s.5$ lies $15^\circ\ 12'$.

„ 3960 lies $24^\circ\ 13'$ statt 18'. H. C. p. 379 $1^h\ 56^m\ 57^s$ lies $16^\circ\ 51'$.

Nr. 3987 = H. C. p. 375 1^h 59^m 46^s. Dieser Stern scheint eine starke eigene Bewegung zu haben.

Der Ort 1800 folgt aus Lal.	1^h 59^m 33^s46	$+66^\circ$ 44′ 39″4	
aus Argel. 2475	37·81	24·8	
aus einer W. M. B. von 1853	38·43	—	

„ 4117 lies 1^s48. Fehler des Kataloges.

„ 4128 lies 26° 30′. H. C. p. 378 2^h 3^m 51^s5 lies 14° 34′.

„ 4190 = H. C. p. 388 2^h 5^m 18^s5 Faden 1 und 3 weichen 1^m ab. Im Kataloge ist fälschlich Faden 1 um 1^m verringert. Faden 3 ist um 1^m zu vergrössern, also im Kataloge 6^m statt 5^m. Dieser Stern 6. Grösse findet sich nur bei Lalande. Nach einer W. M. B. von 1852 folgt der mittlere Ort 1842·0 = 2^h 9^m 4^s36 + 45° 44′ 14″0.

„ 4225 lies 41° 58′ statt 42° 3′. H. C. p. 380 2^h 5^m 13^s7 lies 89° 6′.

„ 4372 lies 40° 54′ statt 53′. H. C. p. 380 2^h 9^m 58^s5 lies 0° 10′.

„ 4416 = H. C. p. 368 2^h 11^m 35^s. Die Fäden weichen 10^s ab. Im Kataloge ist Faden 3 weggelassen. Dieser ist aber richtig und Faden 2 in 11^m 25^s zu corrigiren, so dass der Stern 10^s früher steht.

„ 4535 = H. C. p. 388 2^h 15^m 44^s5. Z. D. lies 3° 44′ statt 49′. Ausserdem weichen die Fäden 3^s16 ab. Im Kataloge ist das Mittel genommen. Faden 2 aber ist falsch; im Kataloge ist dann zu lesen 2^h 16^m 50^s90 44° 52′ 3″1. Aus einer W. M. B. folgt 51^s36 und 7″1.

„ 4591 und 4593 = H. C. p. 371 2^h 17^m 55^s5 und 56^s5. Die Sterne stehen 1^m früher.

„ 4655 = H. C. p. 380 2^h 19^m 12^s5 an 3 Fäden. Der Stern scheint eigene Bewegung zu haben.

Der mittlere Ort 1800 folgt aus Lal.	2^h20^m 25^s40	$+48^\circ$ 37′ 10″3	
aus Argel. Z.	27·69	37 2·2	
aus einer W. M. B. von 1853	28·07	—	

„ 4674 = H. C. p. 377 $2^h20^m23^s$, die Zeit ist im Kataloge 10^s zu klein angesetzt.

„ 4694. Die Z. D. ist nur in Minuten gegeben.

„ 5145. Die Declination weicht etwa 0′5 von Argel. 3226 ab.

„ 5155 = H. C. p. 371 2^h 36^m 26^s. Die Zeit ist 5^s zu gross.

„ 5201 = H. C. p. 43 2^h 37^m 0^s5. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

„ 5243 = H. C. p. 379 2^h 38^m 32^s. Die beiden Fäden weichen 3^s08 ab. Im Kataloge ist das Mittel genommen. Faden 3 ist richtig, welcher den Ort 1800 gibt 17^s62. Eine W. M. B. von 1853 gibt 17^s10. Aus Groombr. 570 folgt 17^s27.

„ 5496 = H. C. p. 378 $2^h46^m23^s$. Die Zeit ist im Kataloge 1^s zu gross angesetzt, und muss 54^s65 heissen. Der Stern ist auch Nr. 5490. Er hat eine bedeutende eigene Bewegung von etwa 0·9 Bogensecunden des grössten Kreises. Es findet sich nämlich:

Der mittlere Ort 1842 aus Lal.	2^h51^m 12^s28	$+61^\circ$ 7′ 0″7	Epoche 1790
aus Argel. 3363	16·98	61 6 27·2	1841·9
aus zwei W. M. B.	18·05	61 6 20·6	1853·9.

Nr. 5525 und 5526 = H. C. p. 378 2^h 47^m 7ˢ5 und p. 379 2^h 48^m 8^s. Die P. D. weichen stark ab. Vielleicht sind bei der zweiten Z. D. 15° 27′ 0″ die Secunden gar nicht abgelesen, und später nur durch eine 0 ersetzt.

„ 5582 = H. C. p. 43 2^h 50^m 1^s. Die Declination folgt aus Argel. 3401 etwa 0″3 kleiner.

„ 5600 lies 33° 19′ statt 25′. H. C. p. 371 2^h 50^m 57ˢ5 lies 7° 46′. Der Stern ist bei Lal. 7. Grösse, bei Argel. 9. Grösse.

„ 5610 = H. C. p. 378 2^h 50^m 10ˢ4. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

„ 5641 lies 26° 28′ statt 33′. H. C. p. 378 2^h 51^m 57ˢ5 lies 14° 36′.

„ 5643 und 5663 = H. C. p. 388 2^h 51^m 38ˢ0 und 52^m 48ˢ5. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 5754 = H. C. p. 368 2^h 55^m 44^s gibt die Declination etwa 0″2 grösser, als Argel. 3505.

„ 5812 = H. C. p. 43 2^h 57^m 37ˢ5. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.

„ 5930 lies 25° 50′ statt 45′. H. C. p. 379 3^h 0^m 50ˢ5 lies 15° 14′.

„ 6024. Die Declination folgt etwa 0″4 kleiner, als aus Argel. 3644. Eine W. M. B. von 1853 gibt 1″5 mehr als Argel.

„ 6110 = H. C. p. 380 3^h 6^m 55^s gibt die Declination 0″5 kleiner als Argel. 3706. Eine W. M. B. von 1853 gibt für 1842 3^h 11^m 15ˢ57 + 60° 58′ 3″7.

„ 6278 = H. C. p. 370 3^h 10^m 58^s. Der Stern steht 15′ nördlicher. Mit dieser Z. D. stimmen auch die Fäden besser.

„ 6335 = H. C. p. 389 3^h 15^m 34ˢ7. Dieser Stern ist nicht am Himmel. Offenbar ist die Zeit eine Zeile höher zu rücken. Die Z. D. 2° 30′ 1″ und 0″ sind aber zwei Einstellungen desselben Sternes. Im Kataloge ist also der Stern zu streichen.

„ 6401 lies 38° 37′ statt 38′. H. C. p. 43 3^h 17^m 2ˢ3 lies 87° 28′.

„ 6536 und 6561 = H. C. p. 371 3^h 21^m 31^s und 3^h 22^m 2ˢ4. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 6787 = H. C. p. 371 3^h 29^m 52ˢ5. Die Declination ist etwa 0″5 zu klein.

„ 6811 = H. C. p. 376 3^h 30^m 54^s. Die Declination folgt etwa 15″ südlicher, als aus Piazzi und Argel.

„ 7036 = H. C. p. 381 3^h 36^m 6ˢ2. Dieser Stern scheint eine eigene Bewegung zu haben.

Der mittl. Ort 1800 folgt aus Lal.	3^h 37^m 56ˢ50	+ 60° 34′ 3″0	Epoche 1791
aus Argel. 4215 und 4216	59·53	60 33 54·0	1843
aus einer W. M. B.	59·91	60 33 51·7	1853

„ 7128 lies 38° 23′ statt 28′. H. C. p. 43 3^h 39^m 51^s lies 87° 14′.

„ 7378 lies 28° statt 29°. Fehler des Kataloges.

„ 7461 lies 12° 27′ statt 17′. H. C. p. 351 3^h 51^m 23ˢ7 lies 53° 34′.

„ 7822 lies 31° 43′ statt 48′. H. C. p. 380 3^h 59^m 57ˢ5 lies 9° 22′.

„ 7852 lies 37° 22′ statt 27′. H. C. p. 43 4^h 1^m 27ˢ5 lies 86° 13′.

„ 8514 = H. C. p. 40 4^h 20^m 31ˢ5. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

Nr. 8572 lies 14° 27′ statt 32′. H. C. p. 352 16^h 20^m 14ˢ5 lies 55° 34′. Die Secunden der Z. D. scheinen aber auch falsch zu sein.

„ 8651 = H. C. p. 315 4^h 22^m 25^s. Im Kataloge ist ganz richtig Faden 1 um 5^s verringert. Die Zeitminute ist aber vom Faden 2 genommen, wo sie um 1 zu gross ist. Der Stern ist auch Nr. 8615.

„ 8667 und 8672 = H. C. p. 44 4^h 24^m 24^s und 24^m 29^s. Die Sterne stehen am Himmel 1^m früher.

„ 8702 = H. C. p. 352 16^h 27^m 46ˢ2. Die Declination folgt etwa 20″ grösser, als aus Argel. 5063.

„ 8834 lies 4^h 30^m 41ˢ52. Fehler des Kataloges.

„ 8884 lies 33^m statt 32^m. Fehler des Kataloges.

„ 8902 lies 44° 53′ statt 54′. H. C. p. 142 4^h 33^m 9^s lies 3° 43′.

„ 8953 = H. C. p. 374 4^h 34^m 42ˢ5 5° 42′ 0″. Die P. D. ist etwa 1′2 zu gross. Vielleicht ist die Z. D. nur in Minuten abgelesen und später erst 0″ hinzugefügt.

„ 9160 lies 42° 27′ statt 32′. H. C. p. 376 4^h 41^m 44^s lies 88° 39′.

„ 9242 = H. C. p. 380 4^h 42^m 36^s an 3 Fäden. Die Zeit scheint 3 Secunden zu klein zu sein.

Der mittlere Ort 1800 folgt aus Lal.	4^h 44^m 54ˢ91	+ 56° 48′ 54″6
aus Argel. 5349	57·79	48 51·8
aus 1 W. M. B. von 1853	57·98	48 51·4

oder der Stern hat eine eigene Bewegung, da ein solcher Fehler an 3 Fäden doch nicht gut anzunehmen ist.

„ 9398 lies 44° 31′ statt 21′. Fehler des Kataloges.

„ 9464 lies 4^h 50^m 59ˢ70, indem in der H. C. p. 376 4^h 51^m 9ˢ8 Faden 3 statt 2 zu lesen ist.

„ 9691 und 9717 = H. C. p. 6 4^h 58^m 36^s und 58^m 39ˢ5. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 9696 = H. C. p. 44 4^h 57^m 33ˢ3. Die Zeit folgt etwa 3^s grösser als aus Argel. 5604. Eine W. M. B. von 1853 gibt 0ˢ38 weniger als Argel.

„ 10249 lies 5^h 17^m 27ˢ14 statt 17ˢ14. Fehler des Kataloges.

„ 10286 = H. C. p. 6 5^h 17^m 53ˢ5. Die Declination scheint 1′ zu gross zu sein

„ 10783 lies 42° 37′ statt 27′. H. C. p. 377 5^h 31^m 58^s lies 88° 29′.

„ 11422 lies 45° 18′ statt 17′. H. C. p. 143 5^h 50^m 54^s lies 4° 8′.

„ 11893 lies 42° 32′ statt 27′. H. C. p. 377 6^h 2^m 56ˢ5 lies 88° 34′.

„ 12466 lies 41° 55′ statt 54′. Fehler des Kataloges.

„ 12782 lies 22° 17′ statt 22′. H. C. p. 376 6^h 27^m 56^s lies 18° 49′.

„ 13537 lies 44° statt 43°. Fehler des Kataloges.

„ 13698 = H. C. p. 381 6^h 53^m 49ˢ5. Der Stern steht am Himmel genau 30^s früher.

„ 13766 = H. C. p. 383 6^h 54^m 49ˢ5. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.

„ 13785 = H. C. p. 383 6^h 54^m 48^s. Die beiden Fäden weichen 4ˢ41 ab. Im Kataloge ist das Mittel genommen. Die Vergleichung mit Argel. 7605 zeigt aber, dass Faden 1 richtig, Faden 2 um 5^s zu klein ist, so dass der Ort des Kataloges 6^h 56^m 37ˢ28 wird.

Nr. 13962 = H. C. p. 384 6^h 59^m 26ˢ5. Die beiden Fäden weichen 22ˢ3 ab. Für den Katalog ist Faden 2 als richtig angenommen. Aus Argel. 7675 folgt aber, dass Faden 1 richtig ist. Ohne Zweifel ist Faden 2 zu lesen 0^m 2ˢ5 statt 0^m 25^s; die Fäden stimmen dann bis auf 0ˢ3 und der Ort des Kataloges wird 1^m 2ˢ35.

„ 14012 = H. C. p. 383 7^h 1^m 29ˢ5. Die Zeit ist 13^s zu klein. Offenbar sind in der H. C. die beiden Zeiten 1^m 29ˢ5 und 1^m 42ˢ5 zu vertauschen, da nur so der erste Stern richtig wird, und bei dem zweiten das Faden-Intervall stimmt. Im Kataloge muss es dann 2^m 53ˢ42 heissen.

„ 14402 = H. C. p. 383 7^h 12^m 10ˢ5. Die Zeit ist 5^s grösser als von Nr. 14400 und ist fehlerhaft.

„ 14432 und 14447 = H. C. p. 383 7^h 14^m 15ˢ5 und 15^m 17ˢ5. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 14486 lies 39° 26′ statt 25′. H. C. p. 383 7^h 15^m 28ˢ5 lies 1° 41′.

„ 14612 lies 40° 44′ statt 49′. H. C. p. 383 7^h 19^m 0ˢ4 lies 0° 14′.

„ 14738 = H. C. p. 377 7^h 22^m 23^s. Die Declination folgt 13″0 nördlicher als aus Argel. 8082.

„ 14843 lies 7^h 25^m 32ˢ60, indem in der H. C. p. 382 7^h 24^m 44^s Faden 2 und 3 statt 1 und 2 zu lesen ist. Der Stern ist auch Nr. 14813.

„ 14889. Die Präcession muss heissen 5ˢ001 statt 5ˢ158.

„ 14922. Die Präcession muss heissen 4ˢ981 statt 5ˢ136.

„ 15100 und 15111 = H. C. p. 54 7^h 34^m 26ˢ5 und 34^m 51^s. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 15923 lies 37° 39′ statt 44′. H. C. p. 564 7^h 59^m 21ˢ0 lies 86° 28′.

„ 15976 = H. C. p. 381 7^h 59^m 10ˢ4. Dieser Stern scheint eine eigene Bewegung zu haben.

Der mittl. Ort 1836 folgt zus L al.	8^h 3^m 1ˢ48	+57° 35′ 49″2	Epoche	1791
aus Rümker 2438	8 2 59·68	37·6		1840·6
2 W. M. B.	8 2 59·28	34·3		1853

Die Epoche der Rümker'schen Beobachtungen ist einer brieflichen Mittheilung des Herrn Directors Rümker entnommen.

Nr. 16085 lies 34° 49′ statt 57′. H. C. p. 384 8^h 2^m 22ˢ5 lies 6° 18′.

„ 16326 lies 34° 50′ statt 45′. H. C. p. 384 8^h 8^m 25ˢ5 lies 6° 18′.

„ 16646 lies 38° 34′ statt 29′. H. C. p. 564 8^h 18^m 23ˢ5 lies 87° 24′.

„ 16698 = H. C. p. 383 8^h 18^m 1ˢ7. Diese Beobachtung enthält 2 Fehler, erstens ist Faden 3 statt 2 zu lesen und zweitens ist die Zeitminute um 1 zu verringern. Der erste Fehler ist schon im Kataloge corrigirt, so dass im Kataloge nur noch 18^m statt 19^m zu lesen ist.

„ 16951 = H. C. p. 54 8^h 25^m 30ˢ5. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.

„ 16958 = H. C. p. 54 8^h 25^m 44^s. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.

„ 17034 lies 31° 45′ statt 50′. H. C. p. 382 8^h 27^m 14^s lies 9° 23′.

„ 17350 = H. C. p. 384 8^h 36^m 47ˢ3.

Die Declination folgt für 1842 =	+55° 31′ 45″3
aus Argel. 9357 folgt	55 32 15·3
aus zwei W. M. B. von 1853	55 32 17·5

Nr. 17458, 17492 und 17506 = H. C. p. 383 8ʰ 40ᵐ 22ˢ5, 40ᵐ 18ˢ5, 40ᵐ 42ˢ5. Diese 3 Sterne stehen am Himmel 1ᵐ früher.

„ 17539 lies 43° 29′ statt 21′. H. C. p. 377 8ʰ 41ᵐ 54ˢ5 lies 87° 40′.

„ 17545 lies 43° 36′ statt 46′. H. C. p. 377 8ʰ 42ᵐ 14ˢ lies 87° 32′.

„ 17743 lies 35° 57′ statt 36° 2′. H. C. p. 382 8ʰ 47ᵐ 28ˢ3 lies 5° 2′.

„ 18115 und 18122. Dieser Doppelstern hat eine sehr bedeutende eigene Bewegung von etwa 1·6 Bogensecunden des grössten Kreises, wie aus der Vergleichung von Lalande, Argelander und Struve folgt. Siehe Astr. Nachrichten Nr. 880.

„ 18280 lies 42° 13′ statt 14′. H. C. p. 352 9ʰ 5ᵐ 37ˢ6 lies 88° 56′.

„ 18722 = H. C. p. 352 9ʰ 20ᵐ 23ˢ. Die Declination folgt etwa 25″ kleiner als aus Argel. 10007. Eine W. M. B. von 1853 gibt 1ˢ3 mehr als Argel.

„ 19139 = H. C. p. 382 9ʰ 34ᵐ 0ˢ. Die Zeit folgt etwa 3ˢ grösser als aus Argel. 10230 und einer W. M. B.

„ 19563 lies 42° 40′ statt 30′. H. C. p. 352 9ʰ 49ᵐ 48ˢ lies 88° 29′.

„ 21076 = H. C. p. 7 10ʰ 46ᵐ 44ˢ5. Die Declination folgt etwa 30″ kleiner als aus Argel. 11304 und einer W. M. B.

„ 21087 lies 18° 31′ statt 36′. H. C. p. 366 22ʰ 46ᵐ 13ˢ lies 59° 34′.

„ 21180 lies 44° 35′ statt 30′. H. C. p. 7 10ʰ 50ᵐ 54ˢ lies 3° 22′.

„ 21379 = H. C. p. 366 22ʰ 59ᵐ 18ˢ. Die Declination folgt etwa 30″ grösser als aus Argel. 11534 und einer W. M. B.

„ 21758 = H. C. p. 355 11ʰ 13ᵐ 28ˢ. Die beiden Fäden weichen 10ˢ ab. Im Kataloge ist fälschlich Faden 3 um 10ˢ verringert. Faden 2 ist um 10ˢ zu vergrössern, also im Kataloge 52ˢ26.

„ 22196 = H. C. p. 385 11ʰ 32ᵐ 27ˢ5. Die Declination folgt etwa 30″ grösser als aus Argel. 12032 und einer W. M. B.

„ 22845 = H. C. p. 385 11ʰ 59ᵐ 20ˢ5. Die Zeit scheint fehlerhaft.

Der mittlere Ort 1842 folgt aus Lal.	12ʰ 2ᵐ 43ˢ78	
aus Argel.	2 41·03	
aus 1 W. M. B.	2 41·24	

„ 22885 lies 42° 17′ statt 22′. H. C. p. 385 12ʰ 1ᵐ 40ˢ5 lies 88° 53′.

„ 22943 lies 22° 46′ statt 48′. Fehler des Kataloges.

„ 23776 = H. C. p. 354 12ʰ 35ᵐ 54ˢ2. Die Zeit scheint fehlerhaft.

Der mittlere Ort 1842 folgt aus Lal.	12ʰ 37ᵐ 6ˢ16	+ 52° 38′ 7″9
aus Argel. 12950	3·56	52 37 58·0
aus 1 W. M. B. von 1853	3·64	—

„ 25321 und 25332 = H. C. p. 354 13ʰ 33ᵐ 46ˢ5 und 34ᵐ 45ˢ2. Die Sterne stehen am Himmel 1ᵐ früher.

„ 25355 lies 43° 28′ statt 29′. H. C. p. 352 13ʰ 34ᵐ 40ˢ8 lies 87° 42′.

„ 25933 lies 32° 31′ statt 36′. H. C. p. 355 13ʰ 56ᵐ 54ˢ lies 8° 38′.

„ 26891 = H. C. p. 354 14ʰ 36ᵐ 4ˢ5. Die beiden Fäden weichen 1ᵐ ab. Im Kataloge ist fälschlich Faden 3 um 1ᵐ verringert; es ist der 2. Faden um 1ᵐ zu klein, also im Kataloge 36ᵐ statt 35ᵐ.

„ 27332 = H. C. p. 354 14ʰ 51ᵐ 46ˢ5. Die Declination folgt etwa 0ˢ4 grösser als aus Argel. 14992.

Nr. 27992 = H. C. p. 352 15^h 11^m $6^s.5$. Die Declination ist etwa $0''.5$ zu klein. In der H. C. ist also vielleicht zu lesen 87° 30′ 49″ statt 19″.

„ 28017 = H. C. p. 356 15^h 10^m $33^s.6$. Der Stern scheint eine eigene Bewegung in Declination zu haben.

„ 28143 lies 23° 17′ statt 22′. H. C. p. 386 15^h 15^m 27^s lies 17° 51′.

„ 28736 = H. C. p. 352 15^h 36^m 31^s. Die Declination 1842 folgt + 45° 30′ 49″.0

aus Bessel Z. 419 15^h 37^m $58^s.60$	45	30	15·3
aus einer W. M. B. von 1853	45	30	16·4

Lal. scheint also 30″ falsch zu sein, und muss vielleicht 86° 46′ 43″ heissen statt 47′ 13″.

Nr. 28885 lies 37° 17′ statt 12′. H. C. p. 356 15^h 41^m $8^s.5$ lies 3° 51′.

„ 29033 = H. C. p. 357 15^h 46^m 17^s. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

„ 29181 = H. C. p. 353 15^h 52^m $39^s.8$. Die P. D. ist im Kataloge fehlerhaft und

„ 29197 = H. C. p. 386 15^h 51^m $23^s.3$. Der Stern steht am Himmel 1^m früher, muss 42° 18′ 12″.9 heissen, statt 42° 17′ 22″.9.

„ 29434 lies 37° 18′ statt 23′. H. C. p. 357 15^h 58^m $25^s.5$ lies 3° 50′.

„ 29753 = H. C. p. 165 16^h 9^m $15^s.5$. Die Declination folgt etwa $0''.5$ grösser als aus Bessel Z. 419 und 420 und einer W. M. B. In der H. C. ist also vielleicht 3° 38′ 38″ statt 8″ zu lesen.

„ 29879 = H. C. p. 165 16^h 14^m 9^s. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

„ 29892 = H. C. p. 355 16^h 13^m 51^s. Die Declination ist etwa $0''.8$ zu klein.

„ 30446 und 30451 = H. C. p. 358 16^h 33^m $24^s.5$ und 32^m $0^s.3$. Die Sterne stehen am Himmel 1^m früher. Vom 2. Stern ist aber Faden 1 und 3 richtig, nur Faden 2 ist 1^m zu gross. Im Kataloge sind fälschlich Faden 1 und 2 um 1^m vergrössert.

„ 30699 = H. C. p. 356 16^h 43^m $40^s.5$. Dieser Stern hat eine bedeutende eigene Bewegung. Der mittlere Ort 1842 folgt

aus Lal.	16^h 43^m $2^s.36$	+ 68° 22′ 1″.7	Epoche	1790·5
aus Argel. 16532 und 33	42 59·90	22 26·9		1842·5
2 W. M. B.	42 59·49	22 31·8		1853·5

„ 30797 = H. C. p. 356 16^h 44^m $24^s.2$. Dieser Stern ist nicht am Himmel. Ohne Zweifel ist er identisch mit einem 30′ nördlicher stehenden, so dass in der H. C. zu lesen ist 19° 44′ statt 14′.

„ 30966 = H. C. p. 356 16^h 50^m 6^s. Die Declination folgt etwa 30″ kleiner als aus Argel. 16650 und einer W. M. B.

„ 30981 lies 21° 45′ statt 50′. H. C. p. 356 16^h 50^m 33^s lies 19° 22′.

„ 31132 = H. C. p. 353 16^h 57^m 21^s. Dieser Stern hat eine starke eigene Bewegung in Declination. Der mittlere Ort 1842 folgt nämlich:

aus Lal.	16^h 58^m $8^s.30$	+ 47° 15′ 32″.1	Epoche	1790·3
aus Argel. 16744	58 9·26	16 13·7		1842·5
aus 3 W. M. B.	58 9·08	16 25·0		1853·5

„ 31571 lies 31° 23′ statt 19′. H. C. p. 355 17^h 10^m 5^s lies 9° 44′ statt 48′.

„ 31655 lies 20° 27′ statt 26′. Fehler des Kataloges.

„ 31676 und 31690 = H. C. p. 355 17^h 14^m $0^s.5$ und 14^m $25^s.5$. Die Sterne stehen am Himmel 1^m früher.

Nr. 31710 lies 43° 38′ statt 33′. H. C. p. 353 $17^h\ 15^m\ 16^s.2$ lies 87° 29′.

„ 31840 und 31851 = H. C. p. 357 $17^h\ 18^m\ 12^s$ und $18^m\ 27^s$. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 32123 lies 40° 30′ statt 31′. Fehler des Kataloges.

„ 32284 lies 38° 53′ statt 48′. H. C. p. 357 13. Juni $17^h\ 30^m\ 39^s$ lies 2° 14′ 37″.

„ 32489 lies 37° 51′ statt 50′. H. C. p. 357 $17^h\ 37^m\ 0^s.5$ lies 3° 16′.

„ 32512 = H. C. p. 360 $17^h\ 37^m\ 28^s.4$.

Die Declination für 1842 folgt + 56° 9′ 6″.2
Argel. 17449 hat 8 27·0
ein W. M. B. von 1853 gibt 8 27·8
Die Z. D. scheint also fehlerhaft zu sein.

„ 32842 lies 22° 18′ statt 19′. Fehler des Kataloges.

„ 32871 = H. C. p. 355 $17^h\ 45^m\ 56^s.7$. Die Declination ist etwa 20″ zu gross.

„ 32891 = H. C. p. 357 20. Juni $17^h\ 46^m\ 37^s.2$. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

„ 33057 lies $17^h\ 52^m\ 16^s.40$ statt $6^s.40$. Fehler des Kataloges.

„ 33094 lies 44° 30′ statt 35′. H. C. p. 353 $17^h\ 53^m\ 27^s.5$ lies 86° 37′.

„ 33099 lies 25° 53′ statt 48′. H. C. p. 362 $17^h\ 52^m\ 24^s.5$ lies 15° 14′.

„ 33120 lies 24° 58′ statt 53′. H. C. p. 361 $17^h\ 54^m\ 4^s.5$ lies 16° 9′.

„ 33181, 33209, 33224, 33230, 33232 oder H. C. p. 362 $17^h\ 54^m\ 54^s.5$ bis $56^m\ 17^s.5$. Die Sterne stehen am Himmel 1^m später.

„ 33551 lies 24° 18′ statt 23′. H. C. p. 362 $18^h\ 4^m\ 0^s.5$ lies 16° 49′.

„ 33698 = H. C. p. 356 $18^h\ 6^m\ 36^s$. Die Declination folgt etwa 0′.4 kleiner als aus Argel. und einer W. M. B.

„ 34095 lies 38° 33′ statt 32′. H. C. p. 300 $18^h\ 17^m\ 13^s.5$ lies 87° 22′.

„ 34161 = H. C. p. 300 $18^h\ 18^m\ 46^s.5$. Die Declination weicht stark ab von Nr. 34162 und ist fehlerhaft.

„ 34246 = H. C. p. 356 $18^h\ 19^m\ 37^s$. Die Declination folgt etwa 0′.7 kleiner, als aus Argel. 18248 und 49.

„ 34282. Dieser Stern steht auf p. 300 der H. C. und nicht p. 330. Derselbe Fehler ist vorgefallen bei den folgenden Numern: 34332, 34368, 34513, 34541, 34579, 34580, 34667, 34708, 34762, 34808, 34878, 35113, 35183, 35276, 35326, 35342, 35439, 35444, 35531, 35535, 35619, 35711, 35782, 35813, 35823, 35915, 36020, 36091, 36131, 36216, 36260, 36345, 36512, 36568, 36703, 36734, 36787, 36901, 36962, 37005, 37043, 37072, 37272, 37305, 37357, 37380, 37408, 37445, 37475, 37477, 37524.

„ 34408 lies 30° 34′ statt 35′. Fehler des Kataloges.

„ 34481 = H. C. p. 358 $18^h\ 25^m\ 32^s.2$. Die Declination scheint 30″ zu gross zu sein.

„ 34757 = H. C. p. 359 $18^h\ 33^m\ 30^s.5$. Die Declination folgt etwa 0′.4 grösser als aus Argel. 18468 und 69.

„ 34913 = H. C. p. 358 $18^h\ 37^m\ 43^s$. Die Zeit scheint 5^s zu gross zu sein.

„ 34973 und 35004 = H. C. p. 360 $18^h 36^m\ 28^s.5$ und $37^m 12^s$. Die Z. D. sind zu vertauschen. Ausserdem aber steht Nr. 35004 am Himmel 1^m früher.

Nr. 35379. Die Zeit ist etwa 5ˢ zu klein.

„ 35456 = H. C. p. 387 18ʰ 49ᵐ 43ˢ.6. Die Zeit ist 10ˢ zu gross.

„ 35788 = H. C. p. 358 18ʰ 57ᵐ 32ˢ.5. Der Stern steht am Himmel 1ᵐ später.

„ 35852 = H. C. p. 358 18ʰ 57ᵐ 41ˢ.5. Der Stern steht am Himmel 1ᵐ später.

„ 35904, 35967, 35997 = H. C. p. 361 18ʰ 58ᵐ 19ˢ, 58ᵐ 50ˢ.5, 59ᵐ 20ˢ.5. Die drei Z. D. sind in dieser Ordnung zu schreiben: 29° 40′ 18″, 29° 47′ 54″, 29° 41′ 50″. Im Kataloge bekommt jetzt Nr. 35967 die P. D. von Nr. 35997, Nr. 35997 die von 35904, Nr. 35904 die von 35967.

„ 36058, 36064, 36078, 36084 = H. C. p. 362 19ʰ 3ᵐ 9ˢ bis 3ᵐ 44ˢ. Die Z. D. sind in dieser Ordnung zu schreiben: 15° 51′ 8″, 16° 0′ 39″, 15° 41′ 26″, 15° 49′ 56″. Im Kataloge bekommt jetzt Nr. 36058 die P. D. von 36078, Nr. 36064 die von 36084, Nr. 36078 die von 36064, Nr. 36084 die von 36058.

„ 36381 = H. C. p. 360 19ʰ 9ᵐ 12ˢ. Die Zeit scheint 10ˢ zu gross zu sein nach Vergleichung mit Argel. 19073 und einer W. M. B.

„ 36826 = H. C. p. 387 19ʰ 18ᵐ 50ˢ 0° 59′ 55″. Die Zeit ist falsch und müsste in der H. C. etwa 17ᵐ 42ˢ heissen. Die Zeit 18ᵐ 50ˢ scheint nur irrthümlich zweimal gedruckt zu sein. Der Stern ist = Nr. 36770.

„ 37043. In der H. C. fehlen die Zeitsecunden. Der Stern ist auch = Nr. 37056.

„ 37340 und 37358 = H. C. p. 358 19ʰ 30ᵐ 23ˢ und 29ᵐ 54ˢ. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 37777 = H. C. p. 358 19ʰ 39ᵐ 42ˢ.8. Die Declination für 1842 wird + 49° 36′ 56″.6. Argel. 19622 hat 37′ 29″.7, eine W. M. B. von 1853 gibt 37′ 26″.8. Lal. scheint darnach 30″ zu klein zu sein.

„ 37818 lies 19ʰ 42ᵐ 32ˢ.62 statt 22ˢ.62. Fehler des Kataloges.

„ 38300 lies 39° 52′ statt 47′. H. C. p. 359 19ʰ 52ᵐ 53ˢ.8 lies 1° 13′.

„ 38325. Die Praecession muss — 2ˢ.989 heissen statt + 2ˢ.989.

„ 39074 = H. C. p. 361 20ʰ 9ᵐ 45ˢ.5. Das Faden-Intervall ist 1ᵐ zu klein. Im Kataloge ist aber fälschlich Faden 3 um 1ᵐ vergrössert. Faden 2, sowie der Ort des Kataloges ist um 1ᵐ zu verringern. Der Stern ist auch Lal. Nr. 39038, von dem er dann noch 10ˢ bis 11ˢ abweicht. Dieser Unterschied scheint in der Reductionstafel der pag. 361 zu liegen.

„ 39144 lies 44° 4′ statt 43° 59′. H. C. p. 240 20ʰ 11ᵐ 9ˢ.5 lies 2° 54′.

„ 39147. Die Praecession lies — 2ˢ.744 statt + 2ˢ.744.

„ 39331 lies 41° 49′ statt 50′. H. C. p. 388 20ʰ 16ᵐ 43ˢ lies 0° 40′.

„ 39658 und 39673 = H. C p. 388 20ʰ 24ᵐ 49ˢ.5 und 24ᵐ 24ˢ.3. Die Z. D. sind zu vertauschen.

„ 39663. Die Z. D. ist nur in Minuten gegeben.

„ 39751 und 39780 = H. C. p. 1 20ʰ 26ᵐ 36ˢ.0 und 27ᵐ 6ˢ.5. Die Grössen und Z. D. sind zu vertauschen.

„ 39818 und 39847 = H. C. p. 302 20ʰ 27ᵐ 9ˢ und 27ᵐ 52ˢ. Die Z. D. 86° 40′ 50″ ist nur eine neue Einstellung des vorhergehenden Sternes. Die beiden Zeiten 27ᵐ 9ˢ und 27ᵐ 52ˢ sind jetzt eine Zeile tiefer zu rücken, so dass $27^m\ 52^s$ und $28^m\ 36^s$ demselben Sterne angehören. Der Zeitunterschied ist 44^s, während das berechnete Faden-Intervall $=43^s.89$ ist. Im Kataloge erhält dadurch Nr. 39818 die P. D. von 39847 und Nr. 39847 ist ganz zu streichen.

Nr. 40270 = H. C. p. 301 $20^h\ 40^m\ 42^s$. Die Zeit folgt 3^s bis 4^s kleiner, als aus Argel. 21121 und 23. Dasselbe ist der Fall mit anderen Sternen derselben Zone, so dass in der Reductionstafel ein Fehler zu liegen scheint.

„ 41306 lies 45° 17′ statt 16′. H. C. p. 1 $21^h\ 6^m\ 10^s.0$ lies $4^s\ 8'$.

„ 41374 und 41377 = H. C. p. 369 $21^h\ 8^m\ 25^s.5$ und $8^m\ 30^s$. Die Z. D. sind zu vertauschen, ausserdem aber scheint die Z. D. 1° 33′ 33″ in 1° 33′ 3″ corrigirt werden zu müssen.

„ 41733 liess 43° 34′ statt 39′. H. C. p. 241 $21^h\ 16^m\ 0^s.5$ lies 2° 24′.

„ 42177 = H. C. p. 369 $21^h\ 29^m\ 4^s$. Die Declination folgt etwa $0'.4$ südlicher als aus Argel. 22547 und einer W. M. B.

„ 42435 lies 38° 30′ statt 20′. H. C. p. 301 $21^h\ 35^m\ 46^s$ lies 87° 0′.

„ 42493 und 42495 Die Präcession muss heissen $2^s.100$ statt $2^s.077$.

„ 43229 = H. C. p. 301 $21^h\ 58^m\ 44^s.3$. Diese Zeit ist offenbar eine Zeile tiefer zu rücken, so dass sie zum ersten Faden des folgenden Sternes gehört. Im Kataloge ist daher der Stern ganz zu streichen.

„ 43774 lies 42° 21′ statt 24′. H. C. p. 363 $22^h\ 14^m\ 49^s.5$ lies 88° 43′.

„ 44115 = H. C. p. 363 $22^h\ 24^m\ 2^s$. Die Declination weicht stark ab von Nr. 44114 und Argel. 24285.

„ 44145 = H. C. p. 363 $22^h\ 24^m\ 42^s$ (die Minute fehlt aber in der H. C.). Für den Katalog ist die Minute = 24 genommen. Der Stern steht aber am Himmel etwa 22^s später.

„ 44213 = H. C. p. 369 $22^h\ 27^m\ 22^s.2$. Die Zeit ist 6^s zu klein. Aus Groombr. 3829 folgt $5^s.93$ mehr als Lalande.

„ 44577 lies 38° 9′ statt 4′. H. C. p. 304 $22^h\ 36^m\ 51^s.8$ lies 86° 59′.

„ 44671 lies 41° 29′ statt 32′. Fehler des Kataloges.

„ 45245. Die Präcession lies $1^s.093$ statt $1^s.903$.

„ 45423 = H. C. p. 363 $23^h\ 1^m\ 22^s.5$. Die Fäden weichen $6^s.3$ ab. Im Kataloge ist fälschlich Faden 2 als richtig angenommen. Faden 1 ist richtig und die Zeit daher $6^s.3$ zu vergrössern.

„ 45454 lies $23^h\ 4^m\ 17^s.41$, indem in der H. C. p. 304 $23^h\ 3^m\ 51^s.4$ Faden 2 statt 3 zu lesen ist.

„ 45695 lies 15° 47′ statt 48′. H. C. p. 364 $23^h\ 8^m\ 51^s.3$ lies 25° 16′.

„ 45784 = H. C. p. 363 $23^h\ 11^m\ 50^s$. Die Zeit folgt aus Argel. 25479 und 80, sowie aus einer W. M. B. etwa 6^s grösser.

„ 46020 lies $20^m\ 21^s.11$ statt $16^s.23$. Fehler des Kataloges. Der Fehler scheint daher zu rühren, dass die Reduction auf den Mittelfaden mit der Z. D. 23° 30′ 45″ statt 24° 30′ 45″ gemacht ist.

„ 46050 und 46044 = H. C. p. 364 $23^h\ 17^m\ 56^s$ und $19^m\ 23^s$. Bei dem ersten Sterne weichen die Fäden 10^s ab. Im Kataloge ist fälschlich Faden 1 um 10^s vergrössert. Es sind vielmehr die beiden Zeiten $19^m\ 34^s$

und $19^m 23^s$ mit einander zu vertauschen. Jetzt stimmen die Sterne mit dem Himmel überein. Im Kataloge ist also Nr. 46044 um + 11ˢ00; Nr. 46050 um — 10ˢ52 zu corrigiren.

Nr. 46107 lies 45° 12′ statt 17′. H. C. p. 364 $23^h 21^m 32^s3$ lies 51′.
„ 46140 lies 44° 58′ statt 54′. H. C. p. 242 $23^h 32^m 31^s$ lies 3° 19′.
„ 46398 lies $23^h 31^m 21^s47$, indem in der H. C. p. 242 $23^h 29^m 3^s$ Faden 1 statt 2 zu lesen ist.
„ 46486 lies 39° 10′ statt 15′. H. C. p. 369 $23^h 33^m 7^s5$ lies 1° 54′.
„ 46524 lies $23^h 35^m 6^s44$, indem in der H. C. p. 372 $23^h 34^m 0^s5$. Faden 1 und 2 statt 2 und 3 zu lesen ist.
„ 46600 lies 39° 52′ statt 57′. H. C. p. 305 $23^h 36^m 50^s6$ lies 88° 42′.
„ 46948 = H. C. p. 351 $23^h 49^m 17^s$. Die Zeit folgt etwa 36^s kleiner als aus Argel. 26216 und ist fehlerhaft.
„ 47313 lies 44° 25′ statt 24′. H. C. p. 242 $23^h 55^m 36^s5$ lies 3° 15′ statt 14′.
„ 47361 = H. C. p. 306 $23^h 58^m 55^s$. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.

Bemerkungen zu Rümker's Kataloge 1836 und 1850 (0^h und 1^h).

„ 43. Dieser Stern ist nicht am Himmel; er steht 1^m früher und ist identisch mit Nr. 36.
„ 345. Der Stern steht am Himmel 1^m früher und ist identisch mit Nr. 341.
„ 561. Die Rectascension ist fehlerhaft; sie wird für 1842 $2^h 5^m 14^s93$, während aus Argel. Zonen $5^m 26^s13$ und aus einer W. M. B. $5^m 26^s73$ folgt.
„ 1147. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.
„ 1398. Dieser Stern steht genau 1′ südlich von α Aurigae und ist nicht am Himmel.

Nachtrag zu 5^h $5^h 24^m 53^s152$. Der Stern steht am Himmel 1^m früher und ist identisch mit Nr. 1466.
Nr. 2759. Der Stern steht am Himmel 2^m später und ist identisch mit Nr. 2773.
Nachtrag zu 8^h Nr. 1. Der Stern steht am Himmel 1^m früher und ist identisch mit Nr. 2413.
Nr. 2804. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.
„ 2860. Dieser Stern ist zu streichen. Nr. 2859 ist richtig.
„ 2962. Dieser Stern steht am Himmel 1^m früher.
Nachtrag zu 9^h $9^h 9^m 58^s74$. Die Declination scheint 20″ zu gross zu sein.
Nachtrag zu 9^h $9^h 37^m 2^s80$. Die Rectascension ist etwa 14^s zu gross und der Stern wohl identisch mit Nr. 2936.
Nr. 3346. Der Stern steht am Himmel 23^s später.
„ 3470. Der Stern steht am Himmel 1′ südlicher.
„ 3491. Die Declination ist etwa 0′4 zu gross.
„ 3576. Dieser Stern ist nicht am Himmel und ist offenbar identisch mit Nr. 3577.
„ 3605. Die Zeit folgt 2^s82 grösser als aus Argel. 11813 und 14.
„ 3703. Der Stern steht am Himmel 1′ nördlicher.
„ 3754. Der Stern steht am Himmel 10′ nördlicher.
„ 3821. Der Stern steht am Himmel 10^s später.

Nr. 3869. Die Declination ist 2′ zu gross.
„ 4505. Die Declination folgt etwa 13″ kleiner als aus Argel. Zonen und einer W. M. B.
„ 4585. Die Declination ist 1′ zu gross.
Nachtrag zu 15^h. 15^h 25^m $51^s.5$ oder 26^m $1^s.44$. Die erste Zeit ist die richtige.
Nr. 6161. Die Zeit folgt 2^s bis 3^s grösser als aus Argel. Zonen und einer W. M. B.
Nachtrag zu 17^h. 17^h 30^m. Nach einer W. M. B. von 1853 wurde die Rectascension 1836 17^h 30^m $57^s.31$ folgen.
Nachtrag zu 17^h. 17^h 58^m $54^s.37$. Die Zeit ist wohl fehlerhaft. Der Stern ist offenbar identisch mit Nr. 6218.
Nr. 6356. Von den beiden Declinationen ist 30′ die richtige.
„ 6387. Von den beiden Declinationen ist 36′ die richtige.
„ 6747. Declination lies 46° 27′ statt 37′.
„ 7153. Die Rectascension scheint 1^s zu klein zu sein, indem für 1842 folgt 19^h 3^m $36^s.52$; aus Argel. Z. folgt 3^m $37^s.69$, aus einer W. M. B. von 1853 3^m $37^s.43$.
„ 9050. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.
„ 10026. Declination lies 62° statt 61°.
„ 10202. Der Stern steht am Himmel 1^m früher und ist identisch mit Nr. 10179.
„ 10584. Der Stern steht am Himmel 10^s später und ist identisch mit Nr. 10587.
„ 10628. Der Stern steht am Himmel 2′ nördlicher.
„ 10826. Die Declination ist etwa 40″ zu klein.
„ 10956. Die Zeitminute ist als zweifelhaft bezeichnet; sie ist aber richtig.
„ 11049. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.
„ 11052. Von den beiden angegebenen Zeitminuten scheint keine richtig zu sein. In der Rectascension 23^h 15^m 47^s findet sich ein Stern mit derselben Declination.
„ 11601. Die Zeit ist 10^s zu gross.
„ 11934. Von den beiden Declinationen ist 18′ richtig.
Zweite Folge Nr. 86. Dieser Stern, der bei Rümker duplex ist, findet sich nicht am Himmel, eben so wenig in irgend einem Kataloge. Ohne Zweifel ist derselbe identisch mit Argel. 275, der etwa 39^s früher steht.
Zweite Folge Nr. 318. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

Bemerkungen zu Bessel's Zonenbeobachtungen.

Zone 322. 19^h 59^m $27^s.43$. Dieser Stern ist nicht am Himmel und ist wohl identisch mit einem 50^s später stehenden.
„ 419. 16^h 2^m $37^s.40$ lies 24′ statt 46′.
„ 419. 16 18 58·80 lies 46′ statt 56′.
„ 419. 16 37 41·02 lies 31′ statt 21′.
„ 419. 17 1 50·47 lies 14′ statt 11′.
„ 461. 12 24 27·74. Der Stern steht am Himmel 10^s später.

Nr. 489. 8 31 27·68. Die Declination folgt etwa 16″ kleiner als aus Argel. 9228 und B. Z. 494 $8^h 31^m 23^s.75$.

„ 504. $12^h 47^m 12^s.86$
12 48 6 88
12 49 11·33 } Diese drei Sterne stehen am Himmel 1^m später.

„ 511. 5 43 7·64. Der Stern steht am Himmel 1^m später.

„ 514. 3 40 36·22 lies 34 statt 33 und dann 44° 56′.

Zone 531. $2^h 47^m 4^s.98$. Die Zeit ist 10^s zu gross.

„ 531. 2 49 45·56. Der Declinations-Unterschied mit dem unmittelbar vorher beobachteten Stern ist bei Bessel 1′ 32″1, nach einer W. M. B. 1′ 44″. Die Declination scheint daher ungenau.

Bemerkungen zu Struve's Kataloge 1830.

Nr. 147. Der Stern steht am Himmel 1^m früher.

„ 362. Die Declination ist 1′ zu gross. Der Fehler liegt in den Dorpater Beobachtungen.

„ 537. Der Stern steht am Himmel 1′ südlicher.

„ 1542. Die Declination ist 1′ zu klein, wie auch aus den Dorpater Beobachtungen folgt.

Bemerkungen zu Groombridge's Kataloge 1810.

Nr. 139. Die Zeit ist 10^s zu klein.

„ 407. Der Stern steht am Himmel etwa 1′5 südlicher.

„ 523. Von den beiden Minuten der P. D. ist 3′ falsch.

„ 817 lies 43° 58′ statt 59′.

„ 819 lies 38° 31′ statt 33′.

„ 821. Der Stern steht am Himmel etwa 1′9 nördlicher.

„ 830 lies 38° 26′ statt 37′.

„ 920 lies 40° 17′ statt 18′.

„ 1668. Die Zeit ist etwa 30^s zu gross.

„ 1721. Die P. D. ist etwa 3′4 zu gross.

„ 2779 lies 34° 54′ statt 53′.

„ 3517. Die Zeit ist 10^s zu klein.

„ 3519. Die Zeit ist 2^m zu gross.

„ 3598 und 3599. Die Zeiten sind etwa 10^s zu gross.

Über die Theorie der linearen algebraischen Gleichungen.

Von Victor Freiherrn v. Lichtenfels.

Bei einem so ausgedehnten Gebrauche wie ihn die mathematische Analysis auf fast allen ihren Gebieten von den linearen algebraischen Gleichungen zu machen sich genötbiget sieht, konnte es nicht fehlen, dass dieselben bereits zu wiederholtenmalen als Gegenstand von Untersuchungen gewählt und diese wieder von den verschiedensten Standpunkten ausgeführt wurden. Dessenungeachtet lässt sich ihre Theorie noch nicht als zum Abschluss gebracht ansehen, vornehmlich darum, weil zu Folge des, durch die Mannigfaltigkeit der Anwendung linearer algebraischer Gleichungen wie etwa in der Wellenlehre, Methode der kleinsten Quadrate, Theorie der Maxima und Minima, Transformation der Variablen u. s. w. bedingten letzterwähnten Umstandes nicht nur gewisse Partien derselben einer tieferen Durchbildung sich erfreuen als andere, sondern auch deren Verbindung zu einem geschlossenen Ganzen durch einzelne offengelassene Lücken hintangehalten blieb. Man besitzt nämlich allerdings ein von Krammer herrührendes combinatorisches Verfahren zur Auflösung der bestimmten Gleichungen und somit auch zur Herstellung der Eliminationsgleichung der correspondirenden unbestimmten Gleichungen — denn es lässt sich ja dieselbe sehr leicht bilden aus dem allen erwähnten Auflösungen gemeinschaftlichen Nenner — auch wurde dieser gewöhnlich mit dem Namen der Determinante belegte Nenner hinsichtlich seiner combinatorischen Eigenschaften schon mehrfach untersucht, und von jener Eliminationsgleichung, falls sie einem symmetrischen Gleichungssysteme angehört, ferner bewiesen, sie lasse nur reelle Wurzeln zu; aber nicht allein entbehrte man aller Vorkenntnisse über Grösse und was insbesondere wichtig erscheint über die Zeichen solcher Wurzeln, es fehlte auch an einer einfachen und zweckmässigen Methode zur Ermittelung der Unbekannten aus den unbestimmten Gleichungen.

Da nun der Verfasser Gelegenheit hatte die besprochenen Mängel zu fühlen, so ward es sein Bestreben denselben doch in etwas abzuhelfen. Die erzielten Resultate nun darzulegen, ist der Zweck nachfolgender Blätter.

Man findet in denselben nach Durchführung einer Eintheilung der linearen algebraischen Gleichungen, deren Bezeichnungen wir bereits gebrauchten, wenn oben von symmetrischen, bestimmten und unbestimmten Gleichungen gesprochen wurde, und nebst einer, aus den im letzten Abschnitte entwickelten Formeln hergeleiteten Completirung der von Krammer für die Auflösung bestimmter Gleichungen angegebenen combinatorischen Methode, den Nachweis ihrer Verwendbarkeit auch zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen enthaltend, zuvörderst ein eigenthümliches uniformes Verfahren die unbestimmten und mittelst der dabei gewonnenen Grössen auch die correspondirenden bestimmten Gleichungen aufzulösen, ferner damit in engstem Zusammenhange eine, die bisher gangbare an Bequemlichkeit übertreffende Methode die bewusste Eliminationsgleichung herzustellen und endlich eine gewisse Zahl von Kennzeichen zur Beurtheilung ihrer zu erwartenden Wurzeln.

Sind P_1, P_2, $P_3, \ldots P_n$ homogene nach den Unbekannten die wir mit x_1, x_2 $x_3 \ldots x_n$ bezeichnen wollen, lineare Polynome, so ist die allgemeinste Form linearer algebraischer Gleichungen:

$$P_1 = p_1,\ P_2 = p_2,\ P_3 = p_3, \ldots P_r = p_n \tag{1}$$

wo die p_1, p_2, $p_3, \ldots p_n$ Grössen bedeuten, welche die Unbekannten nicht mehr enthalten. Diese Gleichungen sind ihrer Zahl nach zur Bestimmung der Unbekannten als endliche Werthe nothwendig und — denn nur für besondere später noch zu erwähnende unter den in ihnen erscheinenden Coëfficienten statthabende Relationen hören sie auf dies zu sein — ihrer Form nach auch hinreichend, wenn von den Grössen p_1, p_2, $p_3, \ldots p_n$ wenigstens eine von der Nulle verschieden ist. Verschwinden hingegen alle p, nehmen also die Gleichungen die Gestalt:

$$P_1 = o,\ P_2 = o,\ P_3 = o, \ldots P_n = o \tag{2}$$

an, so werden sie unter eben der oben erwähnten Beschränkung und abgesehen von der besonderen Auflösung Nulle für alle Unbekannten ungenügend oder unmöglich. Eliminirt man nämlich im letzteren Falle, nachdem man eine Division sämmtlicher Gleichungen durch eine der Unbekannten, etwa x, vorgenommen hat, alle entstehenden Quotienten $\frac{x_2}{x_1}$, $\frac{x_3}{x_1}, \ldots \frac{x_n}{x_1}$ was immer möglich ist, da in den n Gleichungen (2) der Quotienten nur $n-1$ an der Zahl erscheinen, so ergibt sich eine lediglich aus den Coëfficienten, mit welchen die Unbekannten in den Polynomen $P_1, P_2\ P_3, \ldots P_n$ verknüpft waren, zusammengesetzte Bedingungsgleichung:

$$M = o \tag{3}$$

an deren Erfüllung offenbar die Möglichkeit des Zusammenbestehens der ursprünglichen gebunden ist.

Sollen demnach die Gleichungen (2) eine Auflösung zulassen, so muss die (3) entweder eine identische sein, oder es muss uns, um denselben Genüge zu leisten, wenigstens einer der in ihr enthaltenen Coëfficienten zur beliebigen Verfügung überlassen werden. Im ersteren Falle, der, wie leicht zu ersehen, die früher erwähnte Ausnahme bildet, gibt es unter den Gleichungen (2) oder was dasselbe ist, unter den Polynomen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ nur $n-1$ von einander verschiedene, welche durch die obbesagte Division ohne Mühe in Gleichungen von der Form (1) verwandelt werden können — eine besondere Betrachtung ist daher hier nicht erforderlich — wohl aber gibt zu einer solchen Veranlassung der zweite, namentlich wegen des in ihm nothwendigen willkürlichen Coëfficienten. Nennen wir denselben s, eine Bezeichnung, die wir auch im Folgenden stets beibehalten wollen und setzen voraus, er komme in allen Polynomen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ überhaupt nur mit m von einander verschiedenen Unbekannten, welche die $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ sein mögen, als Factor verbunden vor, so können wir leicht die Gleichungen (2) in zwei Gruppen scheiden, deren eine nur die Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ sammt dem willkürlichen Coëfficienten s enthält und daher zur Bestimmung eben dieser Grössen dient, während aus der anderen die Werthe der $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots x_n$ gezogen werden können, sobald man in dieselbe die des s und der $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ aus der ersteren substituirt hat. Bezeichnen wir nun mit

$$R_1, R_2, R_3, \ldots R_m;\ r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$$

nach den Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ homogene und lineare Polynome, ferner ähnliche jedoch nur die $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, \ldots x_n$ enthaltende Ausdrücke mit:

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3, \ldots Q_{n-m}$$

so ist:

$$R_1 = sx_1,\ R_2 = sx_2,\ R_3 = sx_3, \ldots R_m = sx_m \tag{4}$$

die einfachste Form, auf welche die erste und:

$$Q_1 = r_1,\ Q_2 = r_2,\ Q_3 = r_3, \ldots\ Q_{n-m} = r_{n-m} \qquad (5)$$

auf welche die zweite gebracht werden kann. Von diesen Gleichungen gehören die (5), da offenbar nicht sämmtliche r der Nulle gleich sein können, falls nicht alle $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ aus den Polynomen $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ gänzlich verschwinden sollen, zur Gattung der bereits unter (1) aufgeführten, dagegen bilden die (4) eine von der so eben erwähnten wesentlich verschiedene. In Ermanglung einer passenderen Bezeichnungsweise nun werden wir diese, da wegen der Homogenität aller ihr untergeordneten Gleichungen in Bezug auf die Unbekannten nur deren Verhältnisse aus ihr gezogen werden können, mindestens eine derselben, die also stets willkürlich bleibt, die der unbestimmten, jene hingegen, bei welchen ein derartiges Verhalten rücksichtlich der Unbekannten nicht stattfindet, die der bestimmten Gleichungen nennen. Ausser dieser Eintheilung der Gleichungen in bestimmte und unbestimmte treffen wir noch die derselben in symmetrische, und nicht-symmetrische, und zwar sollen die Gleichungen symmetrisch dann heissen, wenn die Polynome P in (1) oder die R in (4) so beschaffen sind, dass, was immer für Stellenzeiger unter k und h verstanden werden, stets der Coëfficient von x_k im h^{ten} Polynome gleich ist dem Coëfficienten von x_h im k^{ten}. Man könnte nun vielleicht erwarten, die symmetrischen Gleichungen als besonderen Fall unter die mit beliebigen also im Allgemeinen nicht symmetrischen Coëfficienten behafteten subsummirt zu finden. Wir haben aber die symmetrischen Gleichungen vorausgeschickt, denn nicht nur ergaben sich uns zunächst bei diesen die meisten Resultate, die wir erst später auf die nicht-symmetrischen zu übertragen versuchten, es besitzen auch die symmetrischen Gleichungen ein so vorwiegendes Interesse, dass es gerechtfertigt erscheinen muss, ihre Theorie isolirt hinzustellen. Aus demselben Grunde haben wir die symmetrischen Gleichungen etwas ausführlicher behandelt und uns dafür bei den nicht-symmetrischen, namentlich bezüglich alles dessen, was von jenen auf diese übertragen werden konnte, kürzer gefasst; bei den einen wie den anderen aber mit den unbestimmten Gleichungen den Anfang gemacht, und dies erklärt sich von selbst, denn es wird ja eben hier die Auflösung der bestimmten Gleichungen auf die der unbestimmten zurückgeführt.

A. Gleichungen mit symmetrischen Coëfficienten.

a. Unbestimmte Gleichungen.

Führen wir, um die unter den Coëfficienten herrschende Symmetrie stets vor Augen zu haben, das Symbol:

$$(h\ k)$$

ein, dessen Werth sich nicht ändern soll durch eine Vertauschung der in ihm enthaltenen Stellenzeiger h und k, so ergibt sich ein System wie folgt:

$$\begin{array}{l} (11)\ x_1 + (12)\ x_2 + (13)\ x_3 + \ldots (1n)\ x_n = s\ x_1 \\ (21)\ x_1 + (22)\ x_2 + (23)\ x_3 + \ldots (2n)\ x_n = s\ x_2 \\ (31)\ x_1 + (32)\ x_2 + (33)\ x_3 + \ldots (3n)\ x_n = s\ x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n1)\ x_1 + (n2)\ x_2 + (n3)\ x_3 + \ldots (nn)\ x_n = s\ x_n \end{array} \tag{1}$$

als Repräsentant der hier zu betrachtenden Gleichungen.

Nach der bisher üblichen Methode, solche Gleichungen aufzulösen, bildet man zuerst die in der Einleitung erwähnte Eliminationsgleichung. Dieselbe erscheint nun bekanntlich unter der Form

$$F(s) = o \tag{2}$$

in welcher F eine ganze rationale Function vom n^{ten} Grade bedeutet und liefert daher im Allgemeinen n verschiedene Werthe für s, die man nach und nach in die Gleichungen (1) einträgt. Da nun der Effect einer solchen Substitution offenbar der ist, die n-Gleichungen (1) auf $n-1$ von einander verschiedene zu reduciren, so kann man nach ihrer Vollziehung irgend eine der Gleichungen (1) hinweglassen und die übrig bleibenden mittelst einer Division durch eine der Unbekannten in bestimmte verwandeln. Diese Methode führt demnach die unbestimmten Gleichungen auf ähnliche bestimmte zurück, während sie für diese eine directe Auflösung voraussetzt — nicht so unsere, welche im Gegentheile eine directe Lösung der unbestimmten liefert und aus den hiebei gewonnenen Grössen ohne sonderlichen Rechnungsaufwand die Auflösungen ähnlicher bestimmter zusammensetzt.

Um die in den Gleichungen (1) liegende Willkür hinsichtlich der Grössen x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$, denn nur deren Verhältnisse werden durch sie bestimmt, zu heben, führen wir mittelst der Substitutionen:

$$x_1 = C u_1,\ x_2 = C u_2,\ x_3 = C u_3, \dots x_n = C u_n \qquad (3)$$

die neuen Grössen u_1, u_2, $u_3 \dots u_n$ ein, wobei es klar ist, dass wir dieselben wegen des unbestimmten Factors C einer neuen beliebigen Bedingungsgleichung unterwerfen dürfen.

Zur Herstellung der möglichsten Gleichförmigkeit in den zu entwickelnden Formeln ist es am besten für dieselbe folgende zu wählen:

$$u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 \dots u_n u_n = 1 \qquad (4)$$

Jedes u durchläuft aber, wie aus dem Vorhergehenden zu ersehen, eine Reihe von n verschiedenen Werthen, entsprechend der Reihe der Wurzeln der Eliminationsgleichung (2), die wir mit:

$$s_1,\ s_2,\ s_3, \dots s_k \dots s_n$$

bezeichnen wollen. Um nun auch diese zu unterscheiden, werden wir jedem u, welches der Wurzel s_k zugeordnet ist, rechts oben den Index k beifügen, während wir einem Potenz-Exponenten erst dann diesen Platz einräumen, nachdem das betreffende u mit Klammern versehen worden; es bedeutet also im Folgenden z. B. u_k^h den zur Wurzel s_h gehörenden Werth von u_k, hingegen $(u_k^h)^r$ die r^{te} Potenz desselben. Dieser Schreibweise gemäss nimmt die Gleichung (4) folgende Gestalt an:

$$(u_1^k)^2 + (u_2^k)^2 + (u_3^k)^2 + \dots (u_n^k)^2 = 1 \qquad (5)$$

und repräsentirt so eine Reihe von n-Gleichungen, die man aus (5) erhält, wenn man für den Index k alle ganze Zahlen von 1 bis n in dieselbe einträgt — denn wir wollen die Gleichung (4) für alle Wurzeln bestehen lassen.

Wir bemerken ferner noch, dass die Gleichungen (1) in Verbindung mit denen (3) und (5) zwar die numerischen Werthe so wie die Zeichenunterschiede sämmtlicher u vollkommen bestimmen, das Zeichen einer dieser Grössen aber noch willkürlich lassen — doch werden wir erst weit später Gelegenheit haben, diese Bemerkung zu benöthigen.

Nachdem wir so das Problem möglichst präcis gefasst haben, schreiten wir zur Untersuchung. Als Ausgangspunkt für diese gebrauchen wir den schon bekannten Satz, die Eliminationsgleichung in s lasse für dieses blos reelle Werthe als Wurzeln zu. Da aber der Beweis dieses Satzes, wenn schon an und für sich interessant, eine erhöhte Wichtigkeit für uns besitzt und wir ihn überdies auf etwas einfachere Weise als bisher geschehen, zu führen im Stande sind, so wollen wir ihn reproduciren. Zu diesem Zwecke ersetzen wir in den Gleichungen (1) alle darin enthaltenen Grössen u durch die der k^{ten} Wurzel zugehörenden und bekommen so:

$$\begin{array}{l}
(11)\,u_1^k + (12)\,u_2^k + (13)\,u_3^k + \ldots (1n)\,u_n^k = s_k\,u_1^k \\
(21)\,u_1^k + (22)\,u_2^k + (23)\,u_3^k + \ldots (2n)\,u_n^k = s_k\,u_2^k \\
(31)\,u_1^k + (32)\,u_2^k + (33)\,u_3^k + \ldots (3n)\,u_n^k = s_k\,u_3^k \quad (6) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n1)\,u_1^k + (n2)\,u_2^k + (n3)\,u_3^k + \ldots (nn)\,u_n^k = s_k\,u_n^k
\end{array}$$

darauf multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit:

$$u_1^h,\ u_2^h,\ u_3^h \ldots u_n^h$$

addiren sie und vereinigen alle Bestandtheile einer Vertical-Columne zu einem Gliede. Das Resultat ist folgendes:

$$\begin{array}{l}
u_1^k\,[(11)\,u_1^h + (12)\,u_2^h + \ldots (1n)\,u_n^h] + \\
+ u_2^k\,[(21)\,u_1^h + (22)\,u_2^h + \ldots (2n)\,u_n^h] + \ldots \quad (7) \\
= s^k\,[u_1^h\,u_1^k + u_2^h\,u_2^k + \ldots u_n^h\,u_n^k]
\end{array}$$

Jetzt verwandeln wir in den Gleichungen (6) den Stellenzeiger k in h, was offenbar erlaubt ist. Dabei zeigt sich denn, dass die auf der linken Seite der Gleichung (7) als Factoren erscheinenden Polinome identisch sind mit den links vom Gleichheitszeichen stehenden Theilen der in erwähnter Weise modificirten Gleichungen (6) also auch der Ordnung nach ersetzt werden können durch:

$$s^h\,u_1^h,\ s_h\,u_2^h,\ s_h\,u_3^h,\ \ldots\ s_h\,u_n^h.$$

Führen wir nun diese Vertauschung aus, so geht uns die (7) über in die gesuchte Endgleichung:

$$\begin{array}{ll}
s_h\,(u_1^k\,u_1^h + u_2^k\,u_2^h + \ldots u_n^k\,u_n^h) & \\
= s_k\,(u_1^k\,u_1^h + u_2^k\,u_2^h + \ldots u_n^k\,u_n^h) & (8)
\end{array}$$

aus welcher sich der in Frage stehende Satz, mit Rücksicht auf den Umstand, die Eliminationsgleichung (2) könne aus lauter reellen

Grössen durch Addition und Multiplication entstanden, nur reelle Coëfficienten besitzen und demnach höchstens conjungirte imaginäre Wurzeln zulassen, in folgender Weise ergibt: Die Voraussetzung eines Paares conjungirter imaginärer Wurzeln wie

$$s_h = p + q\sqrt{-1} \quad ; s_k = p - q\sqrt{-1}$$

bringt es mit sich, dass auch die ihnen zugeordneten u^h und u^k als rationale Functionen dieser Wurzeln und der Coëfficienten dessgleichen eine Form bekommen wie:

$$u_r^h = \alpha_r + \beta_r \sqrt{-1} \; ; \quad u_r^k = \alpha_r - \beta_r \sqrt{-1}$$

unter α und β reelle Grössen verstanden. Die Einführung dieser Annahmen in die Gleichung (8) liefert aber die neue:

$$2q\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots \alpha_n^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots \beta_n^2)\sqrt{-1} = 0 \quad (9)$$

zu deren Bestande erfordert wird, dass entweder das in ihr als Factor erscheinende Polynom der α und β oder die Grösse q der Nulle gleich sei. Ersteres ist aber, da der Voraussetzung nach, alle α und β reell sind und nicht zugleich verschwinden können, ohne dass dies auch in Widerspruch mit der Gleichung (5) bei sämmtlichen u^h und u^k einträte, unmöglich; man wird also haben müssen

$$q = 0 \quad (10)$$

eine Relation, welche offenbar die Realität sämmtlicher Wurzeln der Eliminationsgleichung (2) beweist.

Dies ist jedoch nicht die einzige aus der Gleichung (8) zu ziehende Folgerung — eine andere von nicht minderer Wichtigkeit für uns ist nämlich die, dass auch für reelle aber ungleiche Werthe von s_h und s_k die erwähnte Gleichung nur unter der Voraussetzung bestehen könne, das in derselben als Factor erscheinende Polynom der u^h und u^k sei der Nulle gleich. Es müssen also die aus (6) zu ziehenden Werthe der u für zwei verschiedenen Wurzeln angehörende sonst aber beliebige Stellenzeiger h und k die Gleichung:

$$u_1^h u_1^k + u_2^h u_2^k + u_3^h u_3^k + \ldots u_n^h u_n^k = 0 \quad (11)$$

erfüllen. Gibt es aber unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung doppelte oder mehrfache und sind s_h und s_k ein solches Paar gleicher Wurzeln, so wird die (8) eine identische und es ist nicht mehr erlaubt zu schliessen, das entsprechende Polynom der u sei der Nulle gleich, ja man könnte sogar leicht auf die Vermuthung gerathen, für gleiche Wurzeln würden auch die zugehörigen u zusammenfallen und das erwähnte Polynom werde der unter (5) statuirten Relation gemäss der positiven Einheit gleich — dem ist aber nicht nothwendiger Weise so. Betrachtet man nämlich einen speciellen Fall, etwa die bekannten drei Gleichungen des Polarisations-Ellipsoides, so zeigt sich, dass das Eintragen einer doppelten Wurzel der Eliminationsgleichung in jene, dieselben nicht, wie es im allgemeinsten Falle, das heisst, beim Vorhandensein dreier verschiedener Wurzeln geschehen sollte, auf zwei von einander verschiedene reducirt, sondern nur auf eine. Dies macht es uns möglich die betreffenden u einer neuen Bedingungsgleichung zu unterwerfen und zwar für jede der gleichen Wurzeln einer verschiedenen, was zur Folge hat, dass die beiden gleichen Wurzeln entsprechenden zwei Reihen der u nicht zusammenfallen. Ja man kann es selbst mit einer solchen Bedingungsgleichung leicht erreichen, dass diese zwei Reihen der u eine Gleichung wie (11) erfüllen. Um bei dem erwähnten Beispiele zu bleiben, so wird das Ellipsoid für zwei gleiche Wurzeln ein Rotations-Ellipsoid und die correspondirenden u sind die Cosinuse der Winkel, welche eine durch den Mittelpunkt des Ellipsoides gehende in der Äquatorial-Ebene gelegene Linie mit den Coordinaten-Axen einschliesst, und wir können stets verlangen, dass eine solche Linie gemäss der ersten Bedingung eine bestimmte Lage in der Äquatorial-Ebene habe und eine zweite gemäss der zweiten Bedingung auf der ersteren senkrecht stehe. Diese Betrachtungen erregten in uns die Vermuthung, das Vorkommen einer vielfachen Wurzel werde uns ganz allgemein gestatten, der Bedingungsgleichungen eine solche Anzahl aufzustellen, dass dadurch nicht nur die den gleichen Wurzeln entsprechenden Reihen der u gezwungen werden können, auch unter einander Relationen wie (11) einzugehen, sondern, dass uns deren noch mehre zur Erreichung anderer Zwecke zu Gebote blieben. Wir fanden diese Ansicht auch später bestätiget, da aber der Beweis für ihre Richtigkeit hierorts noch nicht beigebracht werden kann, so wollen wir in Folgendem einstweilen von der Voraussetzung ausgehen, die Eliminationsgleichung in s besitze in der That lauter verschiedene Wurzeln und behalten uns die Verification der gewonnenen Formeln für den Ausnahmsfall gleicher Wurzeln einem späteren Abschnitte vor.

Nach dieser Annahme gelten uns die Relationen

$$u_1^k u_1^k + u_2^k u_2^k + u_3^k u_3^k + \ldots u_n^k u_n^k = 1 \qquad (12)$$

für alle Stellenzeiger k und die

$$u_1^h u_1^k + u_2^h u_2^k + u_3^h u_3^k + \ldots u_n^h u_n^k = 0 \qquad (13)$$

für alle ungleichen Stellenzeiger h und k.

Sind nun

$$t_1\; t_2\; t_3 \ldots t_n$$

eine Reihe independenter, hingegen

$$O_1,\; O_2,\; O_3 \ldots O_n$$

eine von der vorhergehenden durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
t_1 = u_1^1 O_1 + u_1^2 O_2 + u_1^3 O_3 + \ldots u_1^n O_n \\
t_2 = u_2^1 O_1 + u_2^2 O_2 + u_2^3 O_3 + \ldots u_2^n O_n \\
t_3 = u_3^1 O_1 + u_3^2 O_2 + u_3^3 O_3 + \ldots u_3^n O_n \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
t_n = u_n^1 O_1 + u_n^2 O_2 + u_n^3 O_3 + \ldots u_n^n O_n
\end{array} \qquad (14)$$

abhängig gemachte Reihe von Grössen, so findet sich leicht, wenn man die (14) der Ordnung noch mit $u_1^1,\; u_2^1,\; u_3^1, \ldots u_n^1$ multiplicirt und darauf addirt, mit Berücksichtigung der Relationen (12) und (13)

$$u_1^1 t_1 + u_2^1 t_2 + u_3^1 t_3 + \ldots u_n^1 t_n = O_1 \qquad (15)$$

und durch dieselbe Operation mit anderen und anderen Reihen der u auch:

$$\begin{array}{l}
u_1^2 t_1 + u_2^2 t_2 + u_3^2 t_3 + \ldots u_n^2 t_n = O_2 \\
u_1^3 t_1 + u_2^3 t_2 + u_3^3 t_3 + \ldots u_n^3 t_n = O_3 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
u_1^n t_1 + u_2^n t_2 + u_3^n t_3 + \ldots u_n^n t_n = O_n
\end{array} \qquad (15)$$

Quadrirt man nun alle Gleichungen (14), und addirt sie, so zeigt sich wieder zu Folge der Relationen (12) (13)

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + \ldots t_n^2 = O_1^2 + O_2^2 + O_3^2 + \ldots O_n^2 \quad (16)$$

hingegen durch ein ähnliches Verfahren mit den Gleichungen (15)

$$O_1^2 + O_2^2 + O_3^2 + \dots O_n^2 = t_1^2 (u_1^1 u_1^1 + u_1^2 u_1^2 + \,.\,.\, u_1^n u_2^n) + t_2^2 (u_2^1 u_2^1 + u_2^2 u_2^2 + \,.\,.\, u_2^n u_2^n) + t_3^2 (u_3^1 u_3^1 + u_3^2 u_3^2 + \,.\,.\, u_3^n u_3^n) + 2\, t_1\, t_2\, (u_1^1 u_2^1 + u_1^2 u_2^2 + \,.\,.\, u_1^n u_2^n) + 2\, t_1\, t_3\, (u_1^1 u_3^1 + u_1^2 u_3^2 + \dots u_1^n u_3^n) + \dots . \qquad (17)$$

Ein Zusammenhalten der unter (16) und (17) für die Summe der Quadrate der Grössen O erhaltenen Ausdrücke liefert aber jetzt wegen der Independenz der Grössen t die neuen Relationen:

$$u_k^1 u_k^1 + u_k^2 u_k^2 + u_k^3 u_k^3 + \dots u_k^n u_k^n = 1 \qquad (18)$$

$$u_h^1 u_k^1 + u_h^2 u_k^2 + u_h^3 u_k^3 + \dots u_h^n u_k^n = 0 \qquad (19)$$

erstere gültig für alle letztere für jedes Paar ungleicher Stellenzeiger. Die Gleichungen (12), (13), (18), (19), sprechen die innige Verwandtschaft der Grössen u, n^2 an der Zahl aus, indem sie zeigen, dass dieselben in alle jene Beziehungen eintreten, in welchen die $3^2 = 9$ Cosinuse, welche die Transformation orthogonaler Coordinatensysteme vermitteln, zu einander stehen.

Auf diese Gleichungen gestützt können wie jeden Coëfficienten $(h\,k)$ darstellen als eine Function der u und der Wurzeln s. Wählen wir zu diesem Zwecke aus dem Gleichungssysteme (6), nachdem wir darin k durch r ersetzt haben, eine Gleichung, welche den gegenannten Coëfficienten enthält und ertheilen darauf dem r alle Werthe von 1 bis n, so werden wir nachstehende Reihe von Gleichungen bekommen:

$$\begin{array}{l}
(k1)\, u_1^1 + (k2)\, u_2^1 + (k3)\, u_3^1 + \dots (kn)\, u_n^1 = s_1\, u_k^1 \\
(k1)\, u_1^2 + (k2)\, u_2^2 + (k3)\, u_3^2 + \dots (kn)\, u_n^2 = s_2\, u_k^2 \\
(k1)\, u_1^3 + (k2)\, u_2^3 + (k3)\, u_3^3 + \dots (kn)\, u_n^3 = s_3\, u_k^3 \qquad (20) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(k1)\, u_1^n + (k2)\, u_2^n + (k3)\, u_3^n + \dots (kn)\, u_n^n = s_n\, u_k^n
\end{array}$$

Multipliciren wir jetzt dieselben in der Ordnung, in welcher sie angesetzt wurden mit u_h^1, u_h^2, u_h^3 . . . u_h^n und addiren sie hierauf je eine Vertical-Columne zu einem Gliede vèreinigend, so gelangen wir zu der Gleichung:

$$(k1)\, (u_1^1 u_n^1 + u_1^2 u_h^2 \dots . u_1^n u_k^n) + (k2)\, (u_2^1 u_h^1 + u_2^2 u_k^2 + \dots u_2^n u_k^n) + \dots . . (kh)\, (u_h^1 u_k^1 + u_h^2 u_h^2 \dots . u_h^n u_h^n) + \dots . (kn)\, (u^1_n u^1_h + u^2_n u^2_h + \dots . u^n_n u^n_h) = s_1\, u^1_h\, u^1_h + s_2\, u^2_k u^2_k + s_3\, u^3_k\, u^3_k + \dots s_n u_k^n u_k^n \qquad (21)$$

in welcher mit Hülfe der Relationen (18), (19), die Factoren aller Coëfficienten verschwinden, mit Ausnahme jenes von (hk), welcher der positiven Einheit gleich wird.

Der genannte Coëfficient zeigt sich daher mittelst der Gleichung:

$$(hk) = s_1\, u_h^1\, u_k^1 + s_2\, h_h^2\, u_k^2 + s_3\, u_h^3\, u_k^3 + \ldots s_n\, u_h^n\, u_k^n \qquad (22)$$

wie verlangt worden, ausgedrückt durch die u und die Wurzeln der Eliminationsgleichung. Nehmen wir nun in (22) h gleich k und legen diesem Stellenzeiger nach und nach die Werthe 1, 2, 3, . . n bei, so bekommen wir eine Reihe von Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} (11) = s_1\,(u^1{}_1)^2 + s_2\,(u^2{}_1)^2 + s_3\,(u^3{}_1)^2 + \ldots s_n\,(u^n{}_1)^2 \\ (22) = s_1\,(u^1{}_2)^2 + s_2\,(u^2{}_2)^2 + s_3\,(u^3{}_2)^2 + \ldots s_n\,(u^n{}_2)^2 \\ (33) = s_1\,(u^1{}_3)^2 + s_2\,(u^2{}_3)^2 + s_3\,(u^3{}_3)^2 + \ldots s_n\,(u^n{}_2)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (rr) = s_1\,(u^1{}_n)^2 + s_2\,(u^2{}_n)^2 + s_3\,(u^3{}_n)^3 + \ldots s_n\,(u^n_n)^2 \end{array}\right\} \qquad (23)$$

deren Summe sich, wenn man Rücksicht nimmt auf die für alle Stellenzeiger k geltende Relation (18), folgendermassen einfacher schreiben lässt:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n = (11) + (22) + (33) + \ldots (nn) \qquad (24)$$

und so eine besondere Abhängigkeit der Wurzeln der Eliminationsgleichung von den Coëfficienten, welche einen Stellenzeiger doppelt enthalten, zu erkennen gibt. Da nun solche Coëfficienten — von der Form (kk) — in allen Systemen unbestimmter Gleichungen einen entschiedenen Vorzug behaupten, so wird es nicht überflüssig sein dieselben auch durch einen eigenen Namen, dem der Diagonal-Coëfficienten, auszuzeichnen. Der aus (24) zu ziehende Lehrsatz wird dann so ausgesprochen werden können: „Die Summe der Wurzeln der Eliminationsgleichung eines symmetrischen Systemes unbestimmter linearer Gleichungen ist gleich der Summe seiner Diagonal-Coëfficienten." Wir werden durch denselben auf den Weg gewiesen, die Eliminationsgleichung selbst folgendermassen darzustellen.

Wir multipliciren in dem als allgemeines Schema dienenden Systeme:

$$\begin{array}{l} (11)\, u_1 + (12)\, u_2 + (13)\, u_3 + \ldots (1n)\, u_n = s\, u_1 \\ (21)\, u_1 + (22)\, u_2 + (23)\, u_3 + \ldots (2n)\, u_n = s\, u_2 \\ (31)\, u_1 + (32)\, u_2 + (33)\, u_3 + \ldots (3n)\, u_n = s\, u_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n1)\, u_1 + (n2)\, u_2 + (n3)\, u_3 + \ldots (nn)\, u_n = s\, u_n \end{array} \qquad (25)$$

die einzelnen Gleichungen der Ordnung nach mit den Coëfficienten der ersten Horizontalreihe, also die erste mit (11), die zweite mit (12), die dritte mit (13) und so fort, worauf wir sie alle addiren. Der Theil links vom Gleichheitszeichen in der Summe wird dann durch ein nach den $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n$ homogenes und lineares Polynom gebildet werden, während der Theil rechts vom Gleichheitszeichen

$$s\,[(11)\,u_1 + (12)\,u_2 + (13)\,u_3 + \ldots (1\,n)\,u_n]$$

oder gemäss der ersten der in Gebrauch gezogenen Gleichungen (25),

$$s^2\,u_1$$

wird. Dieselbe Operation aber mit den Coëfficienten der 2^{ten} $3^{\text{ten}} \ldots n^{\text{ten}}$ Horizontalreihe vorgenommen, liefert ebenso Gleichungen, in welchen die links vom Gleichheitszeichen stehenden Theile stets nach den $u_1,\ u_2,\ u_3 \ldots u_n$ homogene und lineare Polynome darstellen, während die rechts vom Zeichen stehenden der Reihe nach gleich

$$s^2 u_2,\ s^2 u_3 \ldots s^2 u_n$$

gefunden werden. Alle auf diese Weise erhaltenen Gleichungen bilden zusammen ein neues, dem (25) ähnliches System, welchem offenbar dieselben Auflösungen der $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots u_n$ und dieselben Wurzeln s zukommen, da es aus dem gegebenen blos durch Combination seiner Gleichungen ohne Zuziehung fremder abgeleitet wurde —wir wollen es, entsprechend der in ihm vorkommenden zweiten Potenz von s, das System zweiter Ordnung nennen. Dieses so eben beschriebene Verfahren aus dem ursprünglichen Systeme oder dem der ersten Ordnung das der zweiten abzuleiten, können wir aber auf letzteres selbst wieder anwenden und so, mit Beibehaltung obiger Bezeichnungsweise, zu einem Systeme dritter Ordnung gelangen — einfach dadurch, dass wir die einzelnen Gleichungen des Systemes zweiter Ordnung nach und nach mit den entsprechenden Gliedern der ersten, zweiten, dritten ... bis n^{ten} Horizontalreihe der Coëfficienten des Systemes erster Ordnung multipliciren und jedesmal addiren. Wir können ferner von dem Systeme dritter Ordnung in gleicher Weise zu einem der vierten fortschreiten, von diesem zu einem der fünften u. s. w., kurz wir können uns durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens Gleichungssysteme von beliebig hoher Ordnungszahl verschaffen, welchen übrigens allen aus eben den für das System zweiter Ordnung angeführten Gründen eine Identität mit dem ursprünglich gegebenen zukömmt, wenn sie auch mit stets anderen und anderen Coëfficienten behaftet erscheinen.

Die Coëfficienten aller Systeme von der Ordnung 1 bis n zusammengenommen sind nun die Elemente, aus denen sich sowohl die Auflösungen der $u_1\, u_2\, u_3 \ldots u_n$, als die Coëfficienten der Eliminationsgleichung in s sich formen.

Das Bildungsgesetz der neuen Coëfficienten anzugeben und den Beweis zu führen, dass alle Systeme höherer Ordnung abermals symmetrische seien, ist es, was uns zunächst obliegt.

Unterscheiden wir die Coëfficienten höherer Systeme dadurch, dass wir den anfänglich gegebenen ihre Ordnungszahl rechts unten als Index beifügen, so können wir das System r^{ter} Ordnung also schreiben:

$$\begin{array}{l}
(11)_r\, u_1 + (12)_r\, u_2 + (13)_r\, u_3 + \ldots (1n)_r\, u_n = s^r u_1 \\
(21)_r\, u_1 + (22)_r\, u_2 + (23)_r\, u_3 + \ldots (2n)_r\, u_n = s^r u_2 \\
(31)_r\, u_1 + (32)_r\, u_2 + (33)_r\, u_3 + \ldots (3n)_r\, u_n = s^r u_3 \quad (26) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n1)_r\, u_1 + (n2)_r\, u_2 + (n3)_r\, u_3 + \ldots (nn)_r\, u_n = s_r u_n
\end{array}$$

Aus demselben bilden wir dem Vorhergehenden gemäss die k^{te} Gleichung des $(r+1)^{\text{ten}}$ Systemes durch Multiplication der Gleichungen (26) der Reihe nach mit

$$(k1),\ (k2),\ (k3) \ldots (kn).$$

Es entsteht demnach der Coëfficient von u_h in der k^{ten} Gleichung des $(r+1^{\text{ten}})$ Systemes, wenn man die Terme der h^{ten} Verticalreihe aus (26)

$$(1h)_r,\ (2h)_r,\ (3h)_r \ldots (nh)_r$$

mit den correspondirenden der Reihe

$$(k1),\ (k2),\ (k3) \ldots (kn)$$

multiplicirt und alle Producte zu einer Summe vereiniget. Da aber der genannte Coëfficient durch $(kh)_{r+1}$ bezeichnet werden soll, so hat man offenbar

$$(kh)_{r+1} = (1h)_r(k1) + (2h)_r(k2) + (3h)_r(k3) + \ldots (nh)_r(kn) \quad (27)$$

als allgemeines Bildungsgesetz sämmtlichen Coëfficienten. Es bleibt noch die Symmetrie der neu entstandenen Coëfficienten oder was das selbe die Gleichung:

$$(kh)_{r+1} = (hk)_{r+1} \tag{28}$$

zu beweisen übrig. Aus (27) lässt sich aber zeigen, dass die Coëfficienten der $(r+1)^{ten}$ Ordnung symmetrisch sind, sobald dies nur bei denen der r^{ten} und $(r-1)^{ten}$ der Fall ist. Schreibt man nämlich die Gleichung (27) so:

$$(kh)_{r+1} = \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\alpha h)_r \ (k\alpha) \Big\}_\alpha \tag{29}$$

und bemerkt, dass nach demselben Bildungsgesetze

$$(\alpha h)_r = \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\beta h)_{r-1} \ (\alpha\beta) \Big\}_\beta$$

und wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Coëfficienten r^{ter} Ordnung auch

$$(\alpha h)_r = \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\beta\alpha)_{r-1} \ (h\beta) \Big\}_\beta \tag{30}$$

sei, so gelangt man leicht durch Substitution der Gleichung (30) in die (29) zu

$$(kh) = \mathbf{S}_1^n \mathbf{S}_1^n \Big\{ (\beta\alpha)_{r-1} \ (k\alpha) \ (h\beta) \Big\}_{\alpha.\beta} \tag{31}$$

einem Ausdrucke, welcher der gleichfalls vorausgesetzten Symmetrie von $(\beta\alpha)_{r-1}$ zu Folge auch die von $(kh)_{r+1}$ beweist, da in (31) sowohl die Summation nach dem Stellenzeiger α als die nach β sich auf alle ganzen Zahlen von 1 bis n zu erstrecken hat.

Die Coëfficienten erster Ordnung $(kh)_1$ gleichbedeutend mit (kh) sind aber symmetrisch, ebenso die zweiter Ordnung, wie aus ihrem Bildungsgesetze:

$$(kh)_2 = (1\,h)\,(k\,1) + (2\,h)\,(k\,2 + (3\,h)\,(k\,3) + \ldots (nh)\,(kn)$$

das man aus (27) erhält, darin $r = 1$ setzend, ersichtlich ist; es sind also nach dem so eben bewiesenen Satze auch die der dritten Ordnung symmetrisch, ferner die der vierten, weil es die der zweiten und dritten sind u. s. w. Man schliesst daraus, dass alle Systeme höherer Ordnungen die Eigenschaft der Symmetrie — wie wohl zu vermuthen war — besitzen. Dies berechtiget uns, jene aus Gleichung (21) gezogene Folgerung anzuwenden auf alle Systeme wie (26) von beliebiger Ordnungszahl r, wodurch wir, in der Eliminationsgleichung eines jeden derselben die zugehörige s^r als Unbekannte ansehend, offenbar zur Kenntniss der Summe der Auflösungen für letztere Grösse gelangen — eine solche Summe nämlich wird sich darnach stets gleichfinden der Summe der betreffenden Diagonal-Coëfficienten.

Alle höheren Systeme sind aber, wie schon einmal gezeigt worden, mit dem ursprünglich gegebenen derart übereinstimmend, dass alle ihre Eliminationsgleichungen erfüllt werden durch die Wurzeln s, welche der Eliminationsgleichung eben dieses Systemes Genüge leisten; die oben erwähnten Summen sind daher nichts anderes als die Summen der respective zweiten, dritten . . . r^{ten} Potenzen der Wurzeln s. Bezeichnen wir also diese mit

$$S_1, S_2, S_3 \dots S_r \dots$$

so ergibt sich uns folgende für alle Stellenzeiger r gültige Gleichung:

$$S_r = (11)_r + (22)_r + (33)_r + \dots (nn)_r \qquad (32)$$

Ihr Bestand sowohl als auch die Symmetrie der Coëfficienten sämmtlicher abgeleiteter Systeme lässt sich noch auf einem anderen Wege als den bisher genommenen erweisen, und zwar durch Darstellung jener Coëfficienten als Functionen der u und der Wurzeln s, die wir schon ihrer späteren Verwendung halber hier vornehmen müssen.

Wir wählen dazu aus dem Systeme (26), dieses auf die Wurzel s_ε bezogen, eine Gleichung etwa die k^{te} aus, und ertheilen darauf dem Stellenzeiger ε alle Werthe von 1 bis n. Die so erhaltenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(k1)_r\, n^1{}_1 + (k2)_r\, u^1{}_2 + (k3)_r\, u^1{}_3 + \dots (kn)_r\, u^1{}_n = s^r{}_1\, u^1{}_k \\
&(k1)_r\, u^2{}_1 + (k2)_r\, u^2{}_2 + (k3)_r\, u^2{}_3 + \dots (kn)_r\, u^2{}_n = s^r{}_2\, u^2{}_k \\
&(k1)_r\, u^3{}_1 + (k2)_r\, u^3{}_2 + (k3)_r\, u^3{}_3 + \dots (kn)_r\, u^3{}_n = s^r{}_3\, u^3{}_k \quad (33) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&(kn)_r\, u^n{}_1 + (k2)_r\, u^n{}_2 + (k3)_r\, u^n{}_3 + \dots (kn)_r\, u^2{}_n = s^r{}_n\, u^n_k
\end{aligned}$$

unterwerfen wir einer Multiplication der Reihe nach mit den Grössen $u_h{}^1, u_h{}^2, u_h{}^3 \dots u_h{}^n$ und nachherigen Addition. In der Summe verschwinden dann zu Folge der Relationen (18) und (19) sämmtliche links vom Gleichheitszeichen stehende Polynome der u, ausgenommen das mit $(kh)_r$ multiplicirte, welches der Einheit gleich wird. Sie selbst liefert daher bereits die beabsichtigte Darstellung der Coëfficienten jedes Systemes von beliebiger Ordnung r unter der Form:

$$(hk)_r = s_1{}^r\, u_k{}^1\, u_h{}^1 + s_2{}^r\, u_k{}^2\, u_h{}^2 + s_3{}^r\, u_k{}^3\, u_h{}^3 + \dots s_n{}^r\, u_k{}^n\, u_h{}^n \; (34).$$

Aus dieser Gleichung ist zuvörderst wieder die Symmetrie der Coëfficienten $(h\,k)_r$ als ihres linken Theiles ersichtlich, denn es erleidet ja ihr rechter Theil keine Veränderung durch eine Vertauschung der Stellenzeiger k und h in ihm, weiterhin aber auch der Bestand der Gleichung (32). Setzt man nämlich in der (34) $h = k$ und nimmt alsdann mit ihr eine Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n vor, so erhält man, da in der Summe alle Potenzen der s mit Polynomen wie

$$u_1^\alpha\, u_1^\alpha + u_2^\alpha\, u_2^\alpha + \ldots\, u_n^\alpha\, u_n^\alpha$$

multiplicirt erscheinen, diese aber nach (12) sämmtlich der Einheit gleich sind, als solche nachstehende Gleichung:

$$s_1^r + s_2^r + s_3^r + \ldots\, s_n^r = (11)_r + (22)_r + (33)_r + \ldots\, (n\,n)_r \quad (35)$$

die mit der unter (32) angeführten genau übereinstimmt.

Was nun die Eliminationsgleichung in s anlangt, so ist der zu ihrer Bildung einzuschlagende Gang der Rechnung durch die bisher gewonnenen Formeln bereits vorgezeichnet und zwar folgender: Man berechnet aus den Coëfficienten des gegebenen Systemes die allen höheren Systemen von der zweiten bis einschliesslich n^{ten} Ordnung angehörenden, nach dem für alle Ordnungszahlen r geltenden Bildungsgesetze:

$$\begin{aligned}(hk)_{r+1} &= (h1)_r\,(k1) + (h2)_r\,(k2) + (h3)_r\,(k3) + \cdot\,(hn)_r\,(kn)\\ &= (k1)_r\,(h1) + (k2)_r\,(h2) + (k3)_r\,(h3) + \cdot\,(kn)_r\,(hn)\end{aligned}$$

namentlich aber sämmtliche Diagonal-Coëfficienten. Die Werthe dieser letzteren substituirt man in die aus (32) dadurch, das man darin für den Stellenzeiger r der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 … n setzt, hervorgehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}S_1 &= (11)_1 + (22)_1 + (33)_1 + \ldots\, (n\,n)_1\\ S_2 &= (11)_2 + (22)_2 + (33)_2 + \ldots\, (n\,n)_2\\ S_3 &= (11)_3 + (22)_3 + (33)_3 + \ldots\, (n\,n)_3 \qquad (37)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ S_n &= (11)_n + (22)_n + (33)_n + \ldots\, (n\,n)_n\end{aligned}$$

wodurch man zur Kenntniss der Grössen $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$ gelangt. Da aber diese Grössen S mit den Coëfficienten der in entwickelter Form aufgeschriebenen Eliminationsgleichung:

$$F(s) = s^n + s^{n-1} A_1 + s^{n-2} A_2 + \ldots s A_{n-1} + A_n = 0 \qquad (38)$$

bekanntlich durch folgende Relationen

$$A_1 + S_1 = o,\ 2\,A_2 + A_1\,S_1 + S_2 = o,$$
$$3\,A_3 + A_2\,S_1 + A_1\,S_2 + S_3 = o\ \ldots \tag{39}$$

verbunden sind, so hat man nur mehr ihre Werthe einzutragen in die Gleichungen (39) und diese dann nach den $A_1, A_2 \ldots A_n$ aufzulösen, um so Alles zu besitzen behufs der Darstellung der Eliminationsgleichung (38) in Zahlen und der Berechnung ihrer Wurzeln.

Um nun letzteres Geschäft in jedem speciellen Falle zu erleichtern, vorzüglich aber um gewisse Regeln zu gewinnen, nach denen aus dem unmittelbaren Anblick eines vorgelegten Gleichungssystemes die seiner Eliminationsgleichung entsprechenden Wurzeln in voraus beurtheilt werden könnten, stellen wir es uns zur nächsten Aufgabe, das Verhalten solcher Wurzeln hinsichtlich ihres Vorzeichens und numerischen Werthes zu untersuchen. In dieser Absicht wenden wir uns an die unter (34) angeführte Gleichung, in derselben $h = k$ gesetzt, also an folgende:

$$(kk)_r = s^r{}_1\,(u^1{}_k)^2 + s^r{}_2\,(u^2{}_k)^2 + s^r{}_3\,(u^3{}_k)^2 + \ldots s^r_n\,(u^n_k)^2 \tag{40}$$

und theilen alle jene, welche der Form nach mit ihr übereinstimmen, in zwei Gattungen, deren eine nur solche enthält, für die der betreffende Stellenzeiger r eine ungerade Zahl ist, während die andere blos Gleichungen mit geraden Stellenzeigern in sich begreift.

Letztere nun, mit denen wir uns zuerst beschäftigen wollen, können, unter r eine ganze, sonst aber willkürliche Zahl verstanden, so geschrieben werden:

$$(kk)_{2r} = s^{2r}{}_1\,(u^1{}_k)^2 + s^{2r}{}_2\,(u^2{}_k)^2 + s^{2r}{}_3(u^3{}_k)^{2r} + \ldots s^{2r}_n(u_k{}^n)^{2r} \tag{41}$$

Sie geben bezüglich der Wurzeln s zu erkennen, dass unter diesen erstens solche vorkommen müssen, deren numerischer Werth den von

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

übersteigt, dann aber auch solche, deren numerischer Werth von dem eben dieser Grösse übertroffen wird. In der That fände ersteres nicht Statt, das heisst wären — abgesehen von dem Falle einer Gleichheit sämmtlicher Wurzeln — alle kleiner als die erwähnte Grösse, so müsste auch der rechte Theil der Gleichung (41) kleiner sein als:

$$(kk)_{2r}\,[(u_k{}^1)^2 + (u_k{}^2)^2 + (u_k{}^3)^2 + \ldots (u_k{}^n)^2]$$

oder zu Folge der Relationen (18) auch kleiner als

$$(kk)_{2r}$$

was nicht sein kann, da er ja eben dieser Grösse gleich sein soll. Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich von der Unzulässigkeit der Voraussetzung, alle Wurzeln wären numerisch grösser als:

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

Was aber jenen Ausnahmsfall betrifft, alle Wurzeln besässen, höchstens dem Zeichen nach verschieden, einen gemeinschaftlichen numerischen Werth, so ist jetzt schon so viel klar, dass dieser gemäss der Gleichung (41) und Relation (18) dem von

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

gleich kommen müsse — doch werden wir später noch ausführlicher auf ihn zurückkommen. Das Gesagte gilt natürlich für alle Ordnungszahlen $2r$ und alle Stellenzeiger k. Sind demnach M, N, die grösste und kleinste aller Zahlen, die man erhält in .

$$\sqrt[2r]{(kk)_{2r}}$$

sowohl r als k auf alle mögliche Weise verändernd, oder doch solche, die innerhalb der Grenzen der letzteren liegend denselben beziehungsweise möglichst nahe kommen, so gibt es unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung in s erstens solche, deren numerischer Werth zwischen

$$c \text{ und } N$$

zweitens aber solche, deren numerischer Werth zwischen

$$M \text{ und } \infty$$

liegt. Eine genauere Bestimmung der Grössen M und N uns noch vorbehaltend, versuchen wir auch eine oberste Grenze, die kleiner ist als ∞, für die numerischen Werthe der Wurzeln zu ermitteln.

Aus den Gleichungen von der Form:

$$S_{2r} = s^{2r}_1 + s^{2r}_2 + s^{2r}_3 + \ldots s^{2r}_n$$

erhellt zuvörderst, dass, da wegen der nachgewiesenen Realität sämmtlicher Wurzeln alle einzelnen Glieder ihrer rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theile positiv sind, jedes derselben für sich kleiner sein müsse, als der betreffende links vom Zeichen stehende

Theil, dass also keine der Wurzeln numerisch grösser sein könne als:

$$\sqrt[2r]{S_{2r}}$$

und dies gilt wieder für alle positiven Stellenzeiger r.

Bezeichnet man nun mit p_r den grössten aller Coëfficienten im Systeme r^{ter} Ordnung ohne Rücksicht auf das Zeichen und mit P die grösste der Summen:

$$\pm(k1) \pm (k2) \pm (k3) \pm \ldots . (kn)$$

die man durch schickliche Wahl von k und des Vorzeichens eines jeden Gliedes erreichen kann, so schliessen wir aus dem allgemeinen Bildungsgesetze der Coëfficienten höherer Ordnungen

$$(hk)_{r+1} = (1h)_r(k1) + (2h)_r(k2) + (3h)_r(k3) + \ldots (nh)_r(kn)$$

dass der numerische Werth eines jeden Coëfficienten im $(r+1)^{ten}$ Systeme kleiner sei als

$$p_r \, P$$

dass man also auch haben werde

$$p_{r+1} < p_r \, P \tag{42}$$

Eine Verbindung aller aus (42) dadurch hervorgehenden Bedingungen, dass man darin statt r der Reihe nach die natürlichen Zahlen von 1 bis $r-1$ setzt, ergibt aber:

$$p_r < p \; P^{r-1}$$

eine Relation, aus welcher sich, zu Folge der Voraussetzung, p_r sei der grösste im Systeme r^{ter} Ordnung vorkommende Coëfficient und mit Rücksicht darauf, dass die Diagonal-Coëfficienten aller Systeme gerader Ordnung schon ihrer Form nach stets positiv sein müssen, wie ein Blick auf die Gleichung (41) lehrt, noch nachstehende zwei neue, nämlich:

$$(kk)_{2r} < p \; P^{2r-1}$$

und

$$(11)_{2r} + (22)_{2r} + (33)_{2r} + \ldots . (nn)_{2r} < np \; P^{2r-1}$$

gültig für alle Ordnungszahlen r und Stellenzeiger k, ableiten lassen. Letztere, die mit Hülfe der Gleichung (32) auch so geschrieben werden kann

$$S_{2r} < np \; P^{2r-1}$$

zeigt, mit dem oben Gesagten verbunden, dass keine unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung grösser sein kann als:

$$P\sqrt[2r]{\frac{np}{P}}$$

Da aber dieser Grenzwerth für beliebig grosse r Statt hat, weder n noch p und P das r enthalten, mit diesem also auch nicht wachsen können, ferner P seiner Definition nach kleiner als np oder diesem höchstens gleich ist und demgemäss $\sqrt{\frac{np}{P}}$ sich seinem kleinsten Werthe der Einheit um so mehr nähert, je grösser r angenommen wird, so ist klar, dass keine Wurzel numerisch den Werth von

$$P \tag{43}$$

zu übersteigen vermag; und dies ist die engste Grenze, welche wir für die Wurzeln s, ohne den Coëfficienten specielle Werthe beizulegen, finden konnten. Versucht man auf ähnlichem Wege extreme Werthe für N und M zu finden, so gelingt dies im Allgemeinen nur für erstere Grösse — für letztere nämlich nur unter der Voraussetzung, sämmtliche Coëfficienten seien positiv — und man überzeugt sich ferner leicht, dass die derart ermittelten stets noch innerhalb jener liegen, welche der alleinige Gebrauch des Systems zweiter Ordnung zu ihrer Bestimmung ergeben würde. Die tauglichsten derselben werden demnach hervorgehen aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} N^2 &= (k1)^2 + (k2)^2 + (k3)^2 + \ldots (kn)^2 \\ M^2 &= (k1)^2 + (k2)^2 + (k3)^2 + \ldots (kn)^2 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

in der ersteren den Stellenzeiger k so gewählt, dass ihr rechter Theil möglichst klein, in der letzteren aber so, dass er möglichst gross werde. Unter den Wurzeln der Eliminationsgleichung in s wird sich also mindestens eine befinden müssen, die, abgesehen vom Zeichen zwischen der Nulle und der Quadratwurzel, aus dem kleinsten der Diagonal-Coëfficienten zweiter Ordnung liegt, ferner gleichfalls mindestens eine liegend zwischen der Quadratwurzel aus dem grössten der Diagonal-Coëfficienten zweiter Ordnung und dem grössten unter den Summen der numerischen Werthe aller je einer Horizontal- oder Verticalreihe angehörenden Coëfficienten, es wird deren aber endlich keine geben, welche den Werth der letztgenannten Grösse übersteigt.

Gehen wir jetzt über zur zweiten der oben unterschiedenen Arten von Gleichungen, nämlich zu Gleichungen von der Form:

$$(kk)_{2r\ 1} = s_1^{2r+1}(u^1{}_k)^2 + s_2^{2r+1}(u^2{}_k)^2 + s_3^{2r+1}(u^3{}_k)^2 + \ldots s_n^{2r+1}(u^n_k)^2$$

so dringt sich zuerst die Bemerkung auf, ihre rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Theile könnten, da alle Wurzeln s und folglich auch alle u reell, deren Quadrate daher allemal positiv sind, nur dann der Nulle gleich oder negativ werden, wenn wenigstens eine der Wurzeln s eine negative ist. Es folgt daraus, dass die Eliminationsgleichung in s Wurzeln von ungleichen Zeichen besitzen müsse, sobald es unter den Diagonal-Coëfficienten ungerader Ordnung der Nulle gleiche oder an Zeichen verschiedene gibt. Man wird also einem vorgelegten symmetrischen Systeme sogleich ansehen oh man überhaupt hoffen dürfe, in der Eliminationsgleichung lauter positive oder negative Wurzeln zu finden — ersteres, wenn alle Coëfficienten (kk) positiv, letzteres, wenn sie negativ sind. Eine Gewissheit aber erlangt man dadurch keineswegs, denn einerseits bedingt ein durchgehends gemeinschaftliches Zeichen sämmtlicher Diagonal-Coëfficienten ungerader Ordnung noch nicht ein ähnliches Verhalten der Wurzeln, anderseits könnten ja wohl einige unter den genannten Coëfficienten höherer Ordnung an Zeichen verschieden ausfallen — ein Umstand, von dessen Nichteintreten man, mit Rücksicht auf das Bildungsgesetz höherer Coëfficienten nur dann überzeugt ist, wenn das Gleichungssystem erster Ordnung entweder lauter Coëfficienten von einerlei Zeichen besitzt oder doch sich auf ein solches zurückführen lässt, dem diese Eigenschaft zukömmt. Dies findet z. B. Statt, wenn das Zeichen der ursprünglich gegebenen Coëfficienten (hk) bestimmt ist durch

$$\pm\ (-1)^{\varphi(h)+\varphi(k)}$$

unter φ eine Function verstanden, derart, dass $\varphi\ (k)$ für alle Stellenzeiger k eine ganze Zahl werde. Lässt man nämlich für einen Augenblick (hk) blos den numerischen Werth der Coëfficienten hedeuten, so dass sie selhst durch

$$\pm\ (-1)^{\varphi(h)+\varphi(k)}\ (hk)$$

ausgedrückt werden müssen und führt dann im Gleichungssysteme (1) mittelst der Suhstitutionen

$$x_k = x'_k\ (-1)^{\varphi(k)} \tag{48}$$

die neuen Grössen x' ein, wodurch offenbar die Wurzeln s in keiner Weise berührt werden, so gelangt man zu einem transformirten, dessen Gleichungen, deren eine etwa die k^{te} nach Multiplication mit $(-1)^{\varphi(k)}$ folgendermassen geschrieben werden kann:

$$+ [(1k)\, x'_1\, (-1)^{2\varphi(1)+2\varphi(k)} + (2k)\, x'_2\, (-1)^{2\varphi(2)+2\varphi(k)} + \ldots$$
$$(nk)\, x'_n\, (-1)^{2\varphi(n)+2\varphi(k)}] = s x'_k\, (-1)^{2\varphi(k)} \qquad (49)$$

da der Voraussetzung nach $\varphi(k)$ stets eine ganze Zahl ist, Coëfficienten von durchgehends positiven oder negativen Zeichen besitzen, je nachdem in (46) das obere oder das untere der vor der Potenz von -1 stehenden Zeichen zu gelten hat. Es kann hier gelegentlich bemerkt werden, dass einem symmetrischen Systeme von Gleichungen wie (1) selbst dann noch lauter reelle Wurzeln s entsprechen, wenn einige seiner Coëfficienten nach bestimmten Gesetzen rein imaginär werden. In der That behält man die durch die Formel (47) angezeigte Ausdrucksweise für die Coëfficienten und die Substitutionen (48) für die Unbekannten bei, mit dem einzigen Unterschiede, $\varphi(k)$ solle nicht mehr für alle Stellenzeiger k eine ganze Zahl werden, sondern ein Bruch mit dem Nenner 2 und einer beliebigen ganzen Zahl als Zähler, so tragen einerseits gewisse unter den durch die Formel (47) bestimmten Coëfficienten des gegebenen Systemes $\sqrt{-1}$ als Factor bei sich, während andererseits sämmtliche Gleichungen des transformirten Systemes wieder eine Form bekommen, gleich der (49) und daher zu Folge der angenommenen Beschaffenheit der Function φ lediglich reelle und zwar symmetrische Coëfficienten besitzen, also auch in der ihnen entsprechenden Eliminationsgleichung lediglich reelle Wurzeln zulassen.

Aus der Gleichung (49) geht aber ferner deutlich hervor, dass einem Systeme von Gleichungen, in welchem der Zeichenwechsel der Coëfficienten durch irgend einen Ausdruck wie (46) bestimmt ist, dieselben Wurzeln s angehören, die ein mit den Coëfficienten $\pm (hk)$, darunter den gemeinschaftlichen numerischen Werth der Coëfficienten beider Systeme verstanden, behaftetes besitzt; dass also namentlich die dem ersteren Systeme entsprechenden Wurzeln von durchgehends gleichen Zeichen sein müssen, wenn es die des zweiten sind und umgekehrt.

Dieser Umstand liess uns vermuthen, es möchten sich, ohne Rücksicht auf die Zeichen der Coëfficienten lediglich die numerischen Werthe derselben betreffende Bedingungen angeben lassen, deren Erfüllung hinreicht, das Vorkommen durchgehends positiver oder negativer Wurzeln in der Eliminationsgleichung zu bedingen. Es finden sich solche nun wirklich und zwar in einem gewissen Überwiegen von Seite der Diagonal-Coëfficienten:

Setzen wir, um dies in Bezug auf positive Wurzeln nachzuweisen, in dem Gleichungssysteme (1) $r+\sigma$ statt s unter r eine positive übrigens willkürliche Grösse verstanden, die wir nach ausgeführter Substitution auf die linke Seite der Gleichungen in die Diagonal-Coëfficienten schaffen und sehen dann σ als die neue Unbekannte der Eliminationsgleichung an, so ist klar, dass es unter den Wurzeln s keine negative geben könne, wenn abgesehen vom Zeichen keine der Wurzeln σ das r übersteigt. Dies wird, mit Rücksicht auf die durch (43) gegebene oberste Grenze für die numerischen Werthe der Wurzeln, dann stattfinden, wenn keine unter den Summen der numerischen Werthe aller je einer Horizontal- oder Verticalreihe angehörenden Coëfficienten des transformirten Systemes grösser ist als r. Bezeichnen wir also für irgend eine der Gleichungen, etwa die h^{te}, eine solche Summe aller ihrer Coëfficienten, jedoch mit Ausschluss der diagonalen mit $[hh]$, derart, dass dieses Symbol die Grösse r nicht enthält, so werden die gesuchten Bedingungen offenbar folgende sein:

$$(gg) - r + [gg] <= r \tag{50}$$

und

$$r - (kk) + [kk] <= r \tag{51}$$

erstere hervorgehend aus jenen Gleichungen, deren Diagonal-Coëfficienten vor der angezeigten Substitution gleich oder grösser, letztere aber aus jenen, in welcher eben diese Grössen gleich oder kleiner waren als r. Da sich aber die einen so schreiben lassen

$$(gg) => [gg] + 2(gg) - 2r \tag{52}$$

während die anderen auf die Relationen

$$(kk) => [kk] \tag{53}$$

führen, so ist klar, dass, weil diese das r nicht mehr enthalten, jene aber nur für $(gg) => r$ bestehen, zu ihrer Erfüllung um so kleinere Werthe der Diagonal-Coëfficienten hinreichen, je grösser r angenommen wird. Lassen wir daher dieses an Grösse sämmtliche Diagonal-Coëfficienten übersteigen, so reduciren sich uns die zu erfüllenden Bedingungen auf die einzige für alle Stellenzeiger k gültige:

$$(kk) => [kk] \tag{54}$$

Es erhellt daraus, die Eliminationsgleichung in s müsse Wurzeln von durchgehend positiven Zeichen stets dann bieten, wenn jeder unter den Diagonal-Coëfficienten gleich oder grösser ist, als die Summe der numerischen Werthe aller mit ihm in einer Reihe stehenden.

Auf ähnlichem Wege gelangt man nach Vertauschung von s mit $-s$ im Gleichungssysteme (1) zu den Relationen

$$-(kk) = > [kk] \qquad (55)$$

als Bedingungen für das Vorkommen lediglich negativer Wurzeln — wir übergehen aber der Kürze wegen ihre Ableitung und fügen nur bei, dass sie übereinstimmend mit dem oben Gesagten augenscheinlich für sämmtliche Diagonal-Coëfficienten das negative Vorzeichen erheischen, gleich wie die (54) für eben diese Grösse das positive.

Wenn nun auch ein so bedeutendes Überwiegen an numerischem Werth von Seite der Diagonal-Coëfficienten, das hier als hinreichend nachgewiesen wurde, um in der Eliminationsgleichung lauter Wurzeln von einerlei Zeichen erscheinen zu lassen, eben nicht überall dazu nothwendig ist, so kann doch andererseits wieder leicht gezeigt werden, dass die genannten Grössen nicht unter bestimmte Grenzen sinken dürfen, ohne gewiss Veranlassung zu geben zur Entstehung von Wurzeln mit verschiedenen Zeichen. Führt man nämlich in (1) statt irgend eines Paares der Unbekannten x deren Summe und Differenz als neue Unbekannte ein, setzt also etwa:

$$x_h = x'_h + x'_k \ ; \ x_k = x'_h - x'_k$$

und ordnet dann die Gleichungen derart, dass sie mit der ursprünglichen der Form nach übereinstimmen, so finden sich unter ihren Diagonal-Coëfficienten namentlich folgende zwei:

$$\frac{(hh)+(kk)}{2} + (hk) \ ; \ \frac{(kh)+(hk)}{2} - (hk)$$

die stets von ungleichen Zeichen sind, sobald der numerische Werth von (hk) den von $\frac{(hh)+(kk)}{2}$ übertrifft, — womit das Gesagte bewiesen ist. Die Eliminationsgleichung bietet also gewiss Wurzeln von verschiedenen Zeichen, wenn einer der Coëfficienten numerisch grösser ist, als die halbe Summe jener Diagonal-Coëfficienten, mit denen er in einer Reihe vorkömmt.

Es ist ferner noch möglich, verschiedene Paare von Grenzen, innerhalb welcher einzelne unter den Wurzeln s und zwar mit Rücksicht auf ihr Zeichen liegen müssen, anzugeben: Nennen wir $r+\alpha$ und $r-\alpha$ ein solches, unter r und α einstweilen unbestimmte Grössen verstanden, so werden wir, um die Existenz einer Wurzel, kleiner als $r+\alpha$, aber grösser als $r-\alpha$, sicher zu stellen, nur nöthig haben zu beweisen, die Eliminationsgleichung in s besitze deren mindestens eine, welche den Ausdruck:

$$\sigma=(s-r+\alpha)\ (s-r-\alpha)$$

oder was dasselbe ist, den

$$\sigma=s^2-2rs+r^2-\alpha \tag{56}$$

zu einem negativen macht. Dies geschieht aber folgendermassen:

Wir subtrahiren von den einzelnen Gleichungen des Systemes (26) darin den Stellenzeiger $r=2$ gesetzt, also von denen der zweiten Ordnung die correspondirenden der ersten, nachdem wir diese vorher mit $2r$ multiplicirt haben, worauf wir zur ersten der so neu entstehenden beiderseits $u_1\ (r^2-\alpha^2)$, zur zweiten $u_2\ (r^2-\alpha^2)$ kurz allgemein zur k^{ten} $u_k\ (r^2-\alpha^2)$ addiren. Das in beschriebener Weise erzeugte combinirte System besitzt nun aber, wie leicht zu ersehen, Diagonal-Coëfficienten von der Form

$$(kk)_2-2r\ (kk)+r^2-\alpha^2 \tag{57}$$

während der gemeinschaftliche Factor der Unbekannten u in den rechts vom Zeichen stehenden Theilen seiner Gleichungen, also die neue Unbekannte der Eliminationsgleichung offenbar eben die durch den Ausdruck (56) definirte Grösse σ ist. Lassen wir daher α bestimmt sein durch folgende Gleichung:

$$\alpha=\sqrt{r^2-2r\ (kk)+(kk)_2} \tag{58}$$

was immer zulässig ist, da dem Bildungsgesetze höherer Coëfficienten gemäss $(kk)_2$ sich stets grösser als $(kk)^2$ findet, also auch der in (58) unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck das positive Zeichen für ein beliebiges r und k an sich trägt, so verschwindet im transformirten Systeme einer der Diagonal-Coëfficienten, nämlich der (57); die Eliminationsgleichung in σ liefert dann wie wir wissen mindestens eine negative und eben darum die in s auch mindestens eine, nach Umständen positive oder negative Wurzel, aber eingeschlossen zwischen den Grenzen

$$r-\sqrt{r^2-2r\ (kk)+(kk)_2} \tag{59}$$

und

$$r+\sqrt{r^2-2r\,(kk)+(kk)_2} \qquad (59)$$

Um jetzt diese möglichst enge zu machen, wählen wir

$$r=(kk)$$

wodurch sie uns übergehen in nachstehende

$$(kk)-\sqrt{(kk)_2-(kk)^2} \quad ; \quad (kk)+\sqrt{(kk)_2-(kk)^2} \qquad (60)$$

und sodann mit Rücksicht auf die Zusammensetzung der Coëfficienten $(kk)_2$ zu dem Schlusse führen, die Eliminationsgleichung in s besitze mindestens eine Wurzel liegend zwischen der Summe und der Differenz aus je einem der Diagonal-Coëfficienten und der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller jener Coëfficienten, welche mit ihm in einer Horizontal- oder Verticalreihe vorkommen.

Solche Grenzenpaare wie (60), die wir kürzer so schreiben:

$$(kk)\pm[kk]_2 \qquad (61)$$

erhalten wir nun so viele als es Stellenzeiger k, oder was dasselbe ist, so viele als es der Gleichungen im Systeme (1) gibt, doch werden sie nur Hindeutungen auf so viele von einander verschiedene Wurzeln darbieten, als unter ihnen sich gegenseitig vollkommen ausschliessende befinden, was, wie ersichtlich, allein von den numerischen Werthen sämmtlicher Coëfficienten abhängt. Erwähnenswerth ist hier der Fall, wo die Diagonal-Coëfficienten sich in eine Reihenfolge bringen lassen, derart, dass stets die einem derselben coordinirte untere Grenze grösser ist als die dem in der Reihe nächstfolgenden zugeordnete obere — man besitzt dann in der That Hinweisungen auf n differente Wurzeln der Eliminationsgleichung.

Von weit grösserem Belange als vermöge der Erleichterung des Aufsuchens der Wurzeln, welche sie nach Obigen gewähren, werden aber diese Grenzenpaare dadurch, dass sie in vielen Fällen einen Schluss auf die Anzahl der in der Eliminationsgleichung vorkommenden positiven und negativen Wurzeln gestatten.

Denken wir uns nämlich die Eliminationsgleichung allgemein aufgelöst, das heisst ihre Wurzeln in die Formen:

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots\ldots\ \varphi_n$$

gebracht, unter den φ Functionen der Coëfficienten (hk) verstanden, so ist zuvörderst klar, dass, weil jedes der Grenzenpaare (61) auf eine positive oder negative Wurzel hinweist, je nachdem der betreffende Diagonal-Coëfficient (kk) grösser ist als $[kk]_2$ oder kleiner als $-[kk]_2$, sich unter den letzteren, bezüglich eines jeden der Diagonal-Coëfficienten (kk), auch mindestens eine befinden müsse, deren Zeichen lediglich durch schickliche Wahl eben dieses Coëfficienten und ohne Rücksicht auf die Werthe aller übrigen, beliebig positiv oder negativ festgesetzt werden kann. Die eben erwähnte Eigenschaft kann aber offenbar keiner der Functionen φ in Bezug auf zwei oder mehrere der Diagonal-Coëfficienten zukommen, ferner eben darum und weil ihre Anzahl gleich der ist der Diagonal-Coëfficienten, auch nicht mehreren unter ihnen in Bezug auf einen und denselben. Es wird daher das Zeichen einer jeden dieser Functionen auch nur durch schickliche Wahl je eines der Diagonal-Coëfficienten ausschliesslich bestimmbar sein. Daraus folgt nun aber, es müssten nach Substitution der Werthe sämmtlicher Coëfficienten in die Functionen φ von diesen, oder was dasselbe ist, von den Wurzeln der Eliminationsgleichung in s gewiss so viele positiv ausfallen, als im ursprünglichen Gleichungs-Systeme der Relation

$$(kk) = > [kk]_2 \tag{62}$$

hingegen so viele negativ als der

$$(kk) = < -[kk]_2 \tag{63}$$

Genüge leistende Diagonal-Coëfficienten vorkommen. Man wird also namentlich auf durchgehends positive oder negative Wurzeln der Eliminationsgleichung schliessen, je nachdem sämmtliche Diagonal-Coëfficienten die Relation (62) oder die (63) erfüllen, und nur in dem Falle, als einige von ihnen keiner derselben entsprechen sollten, über das Zeichen eben so vieler Wurzeln in Ungewissheit bleiben. Vergleicht man jetzt die unter (54) und (55), für das Vorkommen von Wurzeln einerlei Zeichens, angegebenen Bedingungen mit den neuerlich gefundenen, so fällt dies zu Gunsten der letzteren aus, während nämlich erstere von Seite jedes Diagonal-Coëfficienten ein durchschnittliches Überwiegen aller in einer Reihe neben ihm stehenden Coëfficienten im Verhältnisse von $1 : n-1$ erheischen, fordern diese nur ein solches im Verhältnisse von $1 : \sqrt{n-1}$.

Bisher haben wir nur einzelne, das Verhalten der Coëfficienten unter einander betreffende Bedingungen ermittelt, deren Erfüllung zur Entscheidung, ob die Eliminationsgleichung lauter Wurzeln von einerlei Zeichen darbieten werde, allein nothwendig oder hinreichend war — solche nun aufzustellen, denen diese beiden Charaktere zugleich zukommen, sind wir nicht im Stande, wohl aber können wir für die Coëfficienten (hk) eine Art ihrer Zusammensetzung aus anderen und zwar willkürlichen Grössen angeben, die stets das Vorkommen von Wurzeln mit gemeinschaftlichen Zeichen, etwa dem positiven herbeiführt. Lassen sich nämlich die Coëfficienten (hk) eines symmetrischen Systemes auf die Form:

$$(hk) = (1h)'\,(1k)' + (2h)'\,(2k)' + \ldots\; (nh)'\,(nk)' \quad (64)$$

bringen, unter den neuen abermals symmetrischen Symbolen $(hk)'$ reelle übrigens willkürliche Grössen verstanden, so ist klar, dass man der früher eingeführten Bezeichnungsweise gemäss auch setzen könne:

$$(hk) = (hk)'_2$$

woraus folgt, dass das mit den Coëfficienten (hk) ursprünglich gegebene System betrachtet werden könne als eines zweiter Ordnung, dass ihm demnach als Wurzeln die Quadrate jener zukommen, die ein mit den Coëfficienten $(hk)'$ behaftetes besitzt. Nun wissen wir aber, dass die Wurzeln eines Systemes mit Coëfficienten wie $(hk)'$ allemal reell sind, falls nur die $(hk)'$ selbst es sind, es werden daher auch die Wurzeln eines Systemes mit den Coëfficienten

$$(hk) = (hk)'_2$$

als Quadrate reeller Grössen sämmtlich positiv sein müssen. Liegen also die Coëfficienten irgend eines Systemes in der Art (64) zusammengesetzt vor, so wird man sicher sein, in der Eliminationsgleichung lauter positive Wurzeln anzutreffen, ist dies aber nicht der Fall, so wird man wohl niemals zur Auflösung einer Reihe von Gleichungen wie (64), deren es wie ersichtlich $\frac{n(n+1)}{2}$ gibt, seine Zuflucht nehmen, um aus der Realität der aus ihnen hervorgehenden Werthe der Grössen $(hk)'$ an der Zahl ebenfalls $\frac{n(n+1)}{2}$ auf ein solches Verhalten der Wurzeln s zu schliessen; man wird vielmehr, was erwähnenswerth scheint, eine gelegentlich gebotene Auflösung von Gleichungen der Form (64), die offenbar bezüglich der Unbekannten $(hk)'$ vom zweiten Grade sind, zurückführen auf die eines Systemes linearer Gleichungen (1), behaftet mit den Coëfficienten (hk). Hiezu dient aber nachstehende Formel:

$$(hk)' = \pm u_k^1 u_h^1 \sqrt{s_1} \pm u_k^2 u_h^2 \sqrt{s_2} \pm u^3_k u_h^3 \sqrt{s_3} \pm \ldots u_k^n u_h^n \sqrt{s_n} \quad (65)$$

in welcher die Zeichen der einzelnen Glieder, mit der Einschränkung nicht zu wechseln beim Übergange auf andere und andere Stellenzeiger h, k, beliebig gewählt werden dürfen, die also, wie es sein muss, für jede der Grössen $(hk)'$ mehre den Gleichungen (64) entsprechende Auflösungen darbietet, nämlich so viele als verschiedene Zeichenabwechslungen in (65) statuirt werden können — eine Formel, deren Richtigkeit zur Genüge hervorgeht aus dem bereits erwähnten Umstande, die Gleichungen (1), denen die u und s entnommen sind, liessen sich betrachten als solche zweiter Ordnung, abgeleitet aus einem mit den Coëfficienten $(h\,k)'$ behafteten Gleichungs-Systeme erster Ordnung.

Wir kehren jetzt zurück zur Eliminationsgleichung in s und der von uns in den Gleichungen (36)—(39) dargelegten Methode ihrer numerischen Berechnung:

Im Vergleiche zu dem üblichen combinatorischen Verfahren, die Determinante der Grössen (hk) und aus dieser die Eliminationsgleichung in s darzustellen, besitzt nun das hier beschriebene zuvörderst den Vorzug grösserer Einfachheit. Es ist nämlich nach demselben einerseits nicht nöthig, die erwähnte Gleichung zuerst vollständig in symbolischer Form aufzuschreiben, was, wenn die Anzahl der Gleichungen des gegebenen Systemes eine nur irgend bedeutende ist, keinen unerheblichen Theil der Gesammtarbeit ausmacht, wie dies bei dem combinatorichen Verfahren erfordert wird um sicher zu sein, dass alle durch dasselbe angezeigten Rechnungsoperationen ausgeführt werden, andererseits die Zahl der nöthigen Rechnungsoperationen bedeutend kleiner ist als bei jenem. Um Letzteres deutlich zu machen, wollen wir die nach beiden Methoden erforderlichen Zahlen von Multiplicationen und Divisionen einander gegenüberstellen.

Da in jedem Systeme der Coëfficienten $\frac{n(n+1)}{2}$ verschiedene vorkommen, jeder dieser Coëfficienten aber, wie ihr Bildungsgesetz ausweist, durch n Multiplicationen gewonnen wird, so sind deren in jedem Systeme höherer Ordnung $n\,\frac{n(n+1)}{2}$ auszuführen. Wir haben aber solcher Systeme aus dem gegebenen $n—1$ neun an der Zahl abzuleiten, es werden sich daher die zur Berechnung sämmtlicher Coëfficienten nöthigen Multiplicationen auf:

$$\frac{n^2(n+1)\,(n-1)}{2}$$

belaufen. Fügen wir hinzu die Multiplicationen und Divisionen, welche die Gleichungen (39) zur Auflösung erfordern $\frac{n\,(n+1)}{2}-1$, wie leicht zu ersehen, so stellt sich die gesuchte Gesammtzahl bezüglich unserer Methode auf

$$n.\frac{n\,(n+1)}{2}\,(n-1)+\frac{n\,(n+1)}{2}-1 \qquad (66)$$

Dass nun diese mindestens von gewissen und zwar sehr niedrigen Werthen von n angefangen, kleiner sei als die entsprechende für das combinatorische Verfahren, ersieht man daraus, dass bei dem letzteren, wie aus dem Bildungsgesetze der Determinante hervorgeht, allein die Berechnung des letzten Gliedes der Eliminationsgleichung eine Anzahl von

$$(n-1).\,n\,(n-1)\,(n-2)\;.\;.\;.\;.\;2\cdot 1$$

Multiplicationen erfordert. In der That schon für $n=5$, wo diese Zahl 480 wird, übertrifft sie bedeutend die oben gefundene Gesammtzahl, welche sich in diesem Falle auf 314 beläuft. Ein noch günstigeres Verhältniss stellt sich und zwar bei noch minderen Werthen von n heraus, wenn man auch von dem combinatorischen Verfahren wie billig die Gesammtzahl der nöthigen Operationen in den Vergleich zieht. Aber noch mehr — es lassen sich viele von den in (66) angegebenen Multiplicationen ganz zweckmässig in Additionen umwandeln. Betrachtet man nämlich das Bildungsgesetz höherer Coëfficienten (36), so wird man sehen, dass in allen den Producten, die zu ihrer Ermittlung gerechnet werden müssen, eine Reihe von Factoren, bestehend aus Coëfficienten des Systems erster Ordnung, stets wiederkehrt und nur die andere, Coëfficienten des unmittelbar vorher berechneten Systemes in sich begreifend, von Ordnung zu Ordnung wechselt.

Hat man daher jeden der Coëfficienten des gegebenen Systems der Reihe nach multiplicirt mit den Zahlen 1, 2, 3 . . . 9, so werden sich aus den so entstandenen Elementen, da offenbar jeder unter den Coëfficienten höherer Ordnung wieder nur durch einen Complex der Ziffern 0 bis 9 vorgestellt wird, alle erwähnten Producte und somit auch sämmtliche Coëfficienten lediglich durch die Operation des Addirens und die ganz mühelose Multiplication mit Potenzen von 10 bilden lassen. Solcher Elemente gibt es aber $9\,\frac{n(n+1)}{2}$ und zu ihrer Berechnung sind, weil der Einser als Factor nicht zählt, $4n\,(n+1)$ Multiplicationen auszuführen; es ergibt sich daher mit Rücksicht auf die zur Auflösung der Gleichungen (39) nöthigen Rechnungsoperationen

$$4n\,(n+1)+\frac{n\,(n+1)}{2}-1 \tag{67}$$

als Gesammtzahl der nach unserer Methode zur Herstellung der Eliminationsgleichung in s erforderlichen Multiplicationen und Divisionen. Bei jeder Rechnung von einiger Weitläufigkeit ist aber, um einen während derselben begangenen Fehler leichter entdecken zu können, eine Controlle wünschenswerth — in unserer Methode liegt nun folgende: Es lehrt eine kurze Vergegenwärtigung der Eliminationsgleichung in symbolischer Form nach dem combinatorischen Verfahren, dass alle ihre Coëfficienten ganze Zahlen sein müssen, falls nur die des vorgelegten Gleichungs-Systemes solche sind. Nun gewinnen wir aber, wie aus (39) zu ersehen, die Coëfficienten der Eliminationsgleichung erst nach mehren Divisionen durch 2, 3, 4, . . . n. Sollen also die Rechnungen fehlerlos sein, so müssen, die Coëfficienten (hk) als ganze Zahlen vorausgesetzt, alle diese Divisionen ohne Rest ausführbar sein — und diese Controlle ist auch dann noch anwendbar, wenn die Coëfficienten des vorgelegten Gleichungs-Systemes zwar nicht ganze, aber doch rationale Zahlen sind, denn man kann in diesem Falle durch Einführung von s/m statt s unter m den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner aller Coëfficienten verstanden und nachherige Multiplication des gegebenen Systems mit m dasselbe offenbar auf ein anderes mit ganzzahligen Coëfficienten zurückführen. Die Vortheile, welche nach dem Vorhergehenden unsere Methode bietet, werden noch bedeutend dadurch vermehrt, dass die bei ihrer Durchführung gewonnenen Grössen, nämlich die Coëfficienten der Systeme höherer Ordnung und der Eliminationsgleichung in sehr einfacher Weise die Auflösungen für die Unbekannten u zusammensetzen.

Wir benützen nun zur Darstellung der u nicht die ursprünglich gegebenen Gleichungen (1), sondern die aus ihnen abgeleiteten (18), (19), (22), (34). Es hatten bisher die Symbole $(hk)_r$ nur eine Bedeutung für alle positiven ganzen Zahlen r vor der Einheit angefangen, auch erschien dieser Bezeichnung gemäss die Gleichung (22) als specieller Fall der (34). Führen wir aber der Bequemlichkeit wegen das Symbol $(hk)_0$ ein und sei dasselbe der Nulle gleich, wenn k und h von einander verschieden, hingegen der positiven Einheit, wenn dem nicht so ist, so können wir offenbar alle erwähnten Gleichungen durch die eine

$$(hk)_r = s_1^r\, u_h^1\, u_k^1 + s_2^r\, u_h^2\, u_k^2 + s_3^r\, u_h^3\, u_k^3 + \dots s_n^r\, u_h^n\, u_k^n \qquad (68)$$

ersetzen, in welcher r alle positiven ganzen Zahlen von der Nulle angefangen bedeuten darf. In dieser betrachten wir nun wieder nicht die einzelnen u, sondern vielmehr die Producte $u_h^1\, u_k^1$, $u_h^2\, u_k^2$, $u_h^3\, u_k^3$ $\dots u_h^n\, u_k^n$ an der Zahl n wie ersichtlich als die Unbekannten, bedürfen also zu deren Bestimmung nur n-Gleichungen von der Form (68), etwa jene, welche aus (68) hervorgehen, darin nach und nach r gleich $0, 1, 2, 3 \dots n-1$ nehmend. Um aber später zu zeigen, dass die so erhaltenen Auflösungen der u in das gegebene Gleichungssystem substituirt, dieses zu einem identischen machen, wird noch eine andere Relation nöthig, die wir nur bekommen die Gleichungen von der Form (68) an der Zahl $n+1$ in Gebrauch ziehend. Es sind dieselben folgende:

$$\left.\begin{array}{l}
u_h^1 u_k^1 + u_h^2 u_k^2 + u_h^3 u_k^3 + \dots u_h^n u_k^n = (hk)_0 \\
s_1\, u_k^1 u_k^1 + s_2^1\, u_h^2 u_k^2 + s_3\, u_k^n u_k^n + \dots s_n\, u_h^n u_k^n = (hk)_1 \\
s_1^2\, u_h^1 u_k^1 + s_2^2\, u_k^2 u_k^2 + s_3^2\, u_k^3 u_k^3 + \dots s_n^2\, u_h^n u_k^n = (hk)_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
s_1^{n-1} u_h^1 u_k^1 + s_2^{n-1} u_k^2 u_k^2 + s_3^{n-1} u_k^3 u_k^3 + \dots s_n^{n-1} u_n^h u_n^k = (hk)_{n-1} \\
s_1^n\, u_k^1 u_k^1 + s_2^n\, u_k^2\, u_k^2 + s_3^n\, u_h^3\, u_k^3 + \dots s_n^n\, u_k^n\, u_k^n = (hk)_n
\end{array}\right\} \quad (69$$

Multipliciren wir sie der Reihe nach mit den Coëfficienten der Eliminationsgleichung (38), nämlich die erste mit A_n, die zweite mit A_{n-1} und so fort, endlich die letzte mit der Einheit und addiren darauf, so erhalten wir, bemerkend es seien einerseits die $s_1, s_2, s_3, \dots s_n$ Wurzeln der erwähnten Gleichung, andererseits die Producte $u_h\, u_k$ schon in Folge der Relationen (5) stets endliche Grössen

$$\begin{array}{l}(hk)_n + A_1\,(hk)_{n-1} + A_2\,(hk)_{n-2} + \dots \\ \qquad + A_{n-1}\,(hk)_1 + A_n\,(hk)_0 = 0\end{array} \qquad (70)$$

und dies ist die gesuchte Relation. Trifft man die Bestimmung, dass in nachstehender Formel die positiven Potenzen von (hk), nach denen sie zu entwickeln ist, in Ordnungszahlen verwandelt werden sollen, so kann man der Gleichung (70) die sehr einfache symbolische Form:

$$F\{(hk)\} = o \tag{71}$$

ertheilen. Es ist aber eben diese Gleichung (70) nicht die einzige der Art, sondern nur ein specieller Fall der allgemeineren:

$$\begin{aligned}(hk)_{n+r} + A_1\,(hk)_{n+r-1} + A_2\,(hk)_{n+r-2} + \ldots \\ + A_{n-1}\,(hk)_{r+1} + A_n\,(hk)_r = 0\end{aligned} \tag{72}$$

die erhalten wird, wenn man anstatt der Gleichungen (69) eine Reihe anderer aus (68) dadurch, dass man darin r in $r+1$, $r+2$, $r+3$, . . . $r+n$ übergehen lässt, hervorgehende derselben Behandlung unterwirft, und die sich gleich der (70) folgendermassen symbolisch schreiben lässt:

$$F\{(hk)_r\} = o \tag{73}$$

Die Gleichungen (70) und (72) sind schon darum erwähnenswerth, weil sie ein einfacheres Bildungsgesetz für die Coëfficienten höherer Systeme vorstellen, deren Ordnungszahl grösser ist als $n-1$, es zeigt sich nämlich jeder Coëfficient $(hk)_{n+r}$ eines solchen Systems linear ausgedrückt durch alle jene, welche in n vorhergehenden dieselbe Stelle einnehmen, wie der gesuchte in seinem und durch die von h und k unabhängigen Coëfficienten A der Eliminationsgleichung.

Was nun die Producte $u_h\,u_k$ anlangt, so lassen sich diese sehr leicht aus den ersten n-Gleichungen (69) finden, wenn man bemerkt, dass der Ausdruck

$$\frac{F(s)}{s-s_r}$$

verschwindet, so oft man für s eine der Wurzeln $s_1\ s_2\ s_3\ \ldots\ s_n$ mit Ausnahme von s_r in denselben setzt, hingegen in

$$F'(s_r)$$

sich verwandelt, wenn man $s=s_r$ nimmt. Multiplicirt man daher die ersten n-Gleichungen (69) mit den durch die Relation:

$$\frac{F(s)}{s-s_\mu} = \lambda_0{}^\mu + \lambda_1{}^\mu\, s + \lambda_2{}^\mu\, s^2 + \ldots \lambda_{n-1}{}^\mu\, s^{n-1} \tag{74}$$

definirten Grössen λ der Reihe nach, das heisst die erste mit $\lambda_0{}^r$, die zweite mit $\lambda_1{}^r$ u. s. f., endlich die letzte mit $\lambda^r{}_{n-1}$ und addirt sie darauf alle, so erhält jedes der Producte $u_h\,u_k$ einen solchen verschwindenden Ausdruck als Factor mit alleiniger Ausnahme von $u_h^\nu u_k^\nu$, welches in

$$F'\ (s_\nu)$$

multiplicirt erscheint. Das Resultat wird also sein:

$$u_h^\mu\, u_k^\mu\, F'(s_\mu) = \lambda_0^\mu\,(hk)_0 + \lambda_1^\mu\,(hk)_1 + \lambda_2^\mu\,(hk)_2 + \ldots \lambda_{n-1}^\mu\,(hk)_{n-1}$$

woraus:

$$u_h^\mu\, u_k^\mu = \frac{\underset{r}{\mathrm{S}} \left\{\lambda_r^\mu\,(hk)_r\right\}_0^{n-1}}{F'(s_\mu)} \tag{75}$$

als gesuchte Auflösung für die Unhekannten hervorgeht. Um aus vorstebender Gleichung die Wertbe der einzelnen u ziehen zu können, hat man nurmehr nöthig die Eingangs erwähnte und auch in (75) liegende Willkür, bezüglich des Zeichens einer der Grössen u dadurch zu hchen, dass man eine derselben mit bestimmten z. B. positiven Zeichen verlangt. In der That setzen wir in der Gleichung (75), die wir der Kürze wegen so schreiben

$$u^\nu_h\, u^\nu_k = U^\nu_{hk} \tag{76}$$

$h=k$ so findet sich, dass wegen

$$u^\nu_h = \pm\sqrt{U^\nu_{hh}} \tag{77}$$

diese Grösse u_h mit beliebigen Zeichen genommen werden kann, aber auch, dass diese Unbestimmtheit nur bei einer von allen derselben Wurzel s_ν zugeordneten Grössen u vorkömmt, da wenn in (77) das Zeichen von u_h festgesetzt worden, etwa als positiv alle übrigen derselben Wurzel s_ν zugeordneten u nach Subtitution der (77) in (76) aus

$$u_k^\mu = \frac{U^\mu_{h.k}}{\sqrt{U^\mu_{h.h}}} \tag{78}$$

mit bestimmten Zeichen hervorgehen. Lassen wir also h den Stellenzeiger jener Unbekannten bedeuten, deren Zeichen im voraus bestimmt ist, so wird, wenn dieses das positive ist, die Gleichung

$$u_k^\mu = \frac{U^\mu_{h.k}}{\sqrt{U^\mu_{h.h}}} \tag{79}$$

wenn es aber das negative ist, die

$$u_k^\mu = -\frac{U^\mu_{h.k}}{\sqrt{U^\mu_{h.h}}} \tag{80}$$

es sein, welche uns zur Kenntniss aller einzelnen u führt. In den meisten Fällen ist es aber genügend, solche am Eingange mit x bezeichnete Grössen zu kennen, die eine willkürliche Constante als Factor bei sich tragen. Substituiren wir also die aus (79) oder (80) sich ergebenden Werthe der u in die Gleichungen (3) und begreifen sowohl $\pm \sqrt{U_{hh}^{\mu}}$ als auch den gemeinschaftlichen Nenner $F'(s_\rho)$ in die erwähnte Constante ein, so bekommen wir, da diese für jede Wurzel s_ρ eine andere sein darf

$$x_k^{\mu} = C_{\mu} \underset{r}{\mathsf{S}} \left\{\lambda_r^{\mu} (hk)_r\right\}_0^{n-1} \tag{81}$$

eine Formel, in welcher der Stellenzeiger h beliebig gewählt werden kann und zwar jener Grösse x angehört, die mit

$$\frac{C_\rho}{F'(s_\rho)}$$

einerlei Zeichen zu tragen bestimmt ist.

Der Beweis, dass die aus (81) gezogenen Auflösungen für die Unbekannten x das vorgelegte Gleichungs-System (1) erfüllen, lässt sich nun auch rückwärts etwa folgendermassen führen:

Man setzt in (81), nachdem man darin den Index μ der Kürze wegen hinweggelassen hat, für die λ ihre bekannten Werthe, nämlich:

$$\lambda_{n-1}=1,\ \lambda_{n-2} = s + A_1;\ \lambda_{n-3} = s^2 + sA_1 + A_2;\ \ldots\ldots \\ \lambda_0 = s^{n-1} + s^{n-2} A_1 + \ldots\ldots A_{n-1}$$

wodurch man zu

$$x_k = C \left\{ s^{n-1} (hk)_0 + s^{n-2} \left[(hk)_0 A_1 + (hk)_1 \right] + \ldots\ldots \right. \\ \left. \left[(hk)_0 A_{n-1} + (hk)_1 A_{n-2} + \ldots (hk)_{n-1} \right] \right\} \tag{82}$$

gelangt und bildet dann das Polynom:

$$(1k)\, x_1 + (2k)\, x_2 + (3k)\, x_3 + \ldots (nk)\, x_n = \\ = \underset{\alpha}{\mathsf{S}} \left\{ (\alpha k) x_\alpha \right\}_1^n = C \underset{\alpha\, r}{\mathsf{S}\mathsf{S}} \left\{ {}_1^n \lambda_r\, (h\alpha)_r\, (\alpha k) \right\}_0^{n-1}$$

Schreibt man aber dieses mit Rücksicht auf das Bildungsgesetz höherer Coëfficienten wie folgt

$$(1k)\, x_1 + (2k)\, x_2 + \ldots (nk)\, x_k = C \left\{ s^{n-1} (hk)_1 + \right. \\ \left. s^{n-2}[(hk)_1 A_1 + (hk)_2] + \ldots [(hk)_1 A_{n-1} + (hk)_2 A_{n-2} + \ldots (hk)_n] \right\} \tag{83}$$

und zieht hierauf die (82), nachdem man sie vorher mit s multiplicirt hat, von der (83) ab, so ergibt sich nach einigen Reductionen

$$(1k)\, x_1 + (2k)\, x_2 + (3k)\, x_3 + \ldots (nk)\, x_n - s x_k =$$
$$C.[(hk)_1\, A_{n-1} + (hk)_2\, A_{n-2} + \ldots (hk)_n]$$
$$- C\,(hk)_0 [s^n + s^{n-1} A_1 + \ldots . s A_{n-1}]$$

oder weil hier das als Factor von $(hk)_0$ erscheinende Polynom nach (38) gleich

$$- A_n$$

ist, auch:

$$(1k)\, x_1 + (2k)\, x_2 + \ldots . (nk)\, x_n = s x_k +$$
$$+ C . \left\{(hk)_n + (hk)_{n-1} A_1 + (hk)_{n-2} A_2 + \ldots (hk)_0 A_n\right\} \quad (84)$$

In dieser Gleichung verschwindet aber zufolge der unter (70) nachgewiesenen Relation rechterseits das ganze in C multiplicirte Polynom. Sie selbst reducirt sich daher auf die:

$$(1k) x_1 + (2k) x_2 + (3k)\, x_3 + \ldots (nk) x_n = s x_k \quad (85)$$

und gibt somit die Überzeugung, dass die Auflösungen (81) für die Unbekannten x in der That für jeden beliebigen Stellenzeiger k der Gleichung (85) oder was dasselbe ist, sämmtlichen des vorgelegten Gleichungs-Systemes (1) Genüge leisten.

Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass die Auflösungen (81), für sie dieselbe schon oben gebrauchte symbolische Schreibweise in Anspruch nehmend, in nachstehende sehr einfache Gestalt sich fassen lassen:

$$x_k^{\nu} = C_{\nu} \frac{F\,(hk)}{(hk) - s_{\nu}} \quad (86)$$

eine Formel, deren Richtigkeit ein kurzes Zusammenhalten der Gleichungen (74) und (81) unmittelbar lehrt und die wir, des häufigen Vorkommens unbestimmter Gleichungen halber vorzüglich darum beibringen, weil sie ungleich der (81) tauglich erscheint, die Zusammensetzung ihrer Auflösungen aus den Coëfficienten (hk) deutlich vor Augen zu führen.

b. Bestimmte Gleichungen.

Die ein System symmetrischer bestimmter Gleichungen wie:

$$\begin{array}{l}
(11)\, x_1 + (12)\, x_2 + (13)\, x_3 + \ldots (1n)\, x_n = \xi_1 \\
(21)\, x_1 + (22)\, x_2 + (23)\, x_3 + \ldots (2n)\, x_n = \xi_2 \\
(31)\, x_1 + (32)\, x_2 + (33)\, x_3 + \ldots (3n)\, x_n = \xi_3 \\
\ldots \\
(n1)\, x_1 + (n2)\, x_2 + (n3)\, x_3 + \ldots (nn)\, x_n = \xi_n
\end{array}$$

erfüllenden Werthe der Unbekannten x lassen sich wie bereits angekündet worden, zusammensetzen aus den, bei der Auflösung eines mit denselben Coëfficienten behafteten Systemes unbestimmter Gleichungen, gewonnenen Grössen, das heisst, sie lassen sich darstellen als Functionen sämmtlicher u und der Wurzeln der Eliminationsgleichung. Es geschieht dies nun folgendermassen:

Man multiplicirt, unter Beibehaltung der im vorigen Abschnitte angenommenen Bezeichnungen die Gleichungen (1) der Reihe nach mit

$$u^1_1,\ u^1_2,\ u^1_3\ \ldots\ldots\ u^1_n$$

darauf addirt man sie und erhält als Resultat vermöge der Gleichungen (a 25), diese auf die Wurzel s_1 bezogen:

$$s_1(x_1u_1{}^1+x_2u_2{}^1+x_3u_3{}^1+\ldots x_nu_n{}^1)=\xi_1u_1{}^1+\xi_2u_2{}^1+\ldots\ldots\xi_nu_n{}^1 \quad (2)$$

dieselbe Operation mit anderen und anderen Reihen der u vorgenommen, liefert aber noch aus ähnlichen Gründen:

$$s_2(x_1u_1{}^2+x_2u_2{}^2+x_3u_3{}^2+\ldots x_nu_n{}^2)=\xi_1u_1{}^2+\xi_2u_2{}^2+\ldots\ldots\xi_nu_n{}^2$$
$$s_3(x_1u_1{}^3+x_2u_2{}^3+x_3u_3{}^3+\ldots x_nu_n{}^3)=\xi_1u_1{}^3+\xi_2u_2{}^3+\ldots\ldots\xi_nu_n{}^3 \quad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n(x_1u_1{}^n+x_2u_2{}^n+x_3u_3{}^n+\ldots x_nu_n{}^n)=\xi_1u_1{}^n+\xi_2u_2{}^n+\ldots\ldots\xi_nu_n{}^n$$

Jetzt multiplicirt man die sämmtlichen Gleichungen (2) in der Ordnung, in welcher sie aufgeführt wurden, mit

$$\frac{u^1_k}{s_1},\ \frac{u^2_k}{s_2},\ \frac{u^3_k}{s_3},\ \ldots\ldots\ \frac{u^n_k}{s_n}$$

und addirt sie abermals, womit die Rechnung beendet ist. In der so erhaltenen Summe fallen nämlich links vom Gleichheitszeichen alle x hinweg, da sie einen zu Folge der Relationen (a, 19) der Nulle gleichen Factor bei sich tragen, mit alleiniger Ausnahme von x_k, dessen Factor sich der Einheit gleich findet. Sie selbst:

$$\begin{aligned} x_k = {} & \xi_1\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_1}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_1}{s_2}+\ldots\ \frac{u^n_ku^n{}_1}{s_n}\right] \\ & +\xi_2\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_2}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_2}{s_2}+\ldots\ \frac{u^n_ku^n{}_2}{s_n}\right] \\ & +\ldots\xi_n\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_n}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_n}{s_2}+\ldots\ \frac{u^n_ku^n_n}{s_n}\right] \end{aligned}$$

liefert daher sogleich den gesuchten Werth von x_k wie folgt:

$$x_k = \underset{r}{\mathrm{S}}\left\{\xi_r\left[\frac{u^1{}_ku^1{}_r}{s_1}+\frac{u^2{}_ku^2{}_r}{s_2}+\ldots\ \frac{u^n_ku^n_r}{s_n}\right]\right\}_1^n \quad (3)$$

Nun ist aber im Sinne der für Coëfficienten von Gleichungs-systemen verschiedener Ordnung eingeführten Bezeichnungsweise, die auf negative Ordnungszahlen auszudehnen uns offenbar gar nichts hindert

$$(hk)_{-1} = \frac{u^1{}_h u^1{}_k}{s_1} + \frac{u^2{}_h u^2{}_k}{s_2} + \frac{u^3{}_h u^3{}_k}{s_3} + \ldots \frac{u^n_h u^n_k}{s_n} \quad (4)$$

wir können also den, in der für alle Stellenzeiger k gültigen Gleichung (3) enthaltenen Auflösungen des Gleichungs-Systemes (1) noch nachstehende übersichtlichere Formen ertheilen:

$$\begin{array}{l}
x_1 = (11)_{-1}\,\xi_1 + (12)_{-1}\,\xi_2 + (13)_{-1}\,\xi_3 + \;\ldots\; (1n)_{-1}\,\xi_n \\
x_2 = (21)_{-1}\,\xi_1 + (22)_{-1}\,\xi_2 + (23)_{-1}\,\xi_3 + \;\ldots\; (2n)_{-1}\,\xi_n \\
x_3 = (31)_{-1}\,\xi_1 + (32)_{-1}\,\xi_2 + (33)_{-1}\,\xi_3 + \;\ldots\; (3n)_{-1}\,\xi_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = (n1)_{-1}\,\xi_1 + (n2)_{-1}\,\xi_2 + (n3)_{-1}\,\xi_3 + \;\ldots\; (nn)_{-1}\,\xi_n
\end{array}$$

Was nun die Coëfficienten $(hk)_{-1}$ oder überhaupt die negativer Ordnungszahlen betrifft, so stehen sie, obgleich sie nicht wie die positiver Ordnungszahlen nach dem im ersten Abschnitte beschriebenen Verfahren aus den Coëfficienten des Gleichungs-Systemes (1) sich bilden lassen, dennoch sowohl zu allen ihres Gleichen als zu denen positiver Ordnungszahlen genau in denselben Beziehungen, in welche die letzteren unter einander treten. Es hat dies darin seinen Grund, dass das Bildungsgesetz (36), welches seiner Entstehung nach nur für positive Ordnungszahlen r Gültigkeit hat, diese auch für negative nicht verliert. Nimmt man nämlich mit der Gleichung

$$(h\alpha)_r = s^r{}_1 u^1{}_h u^1{}_\alpha + s^r{}_2 u^2{}_h u^2{}_\alpha + \;\ldots\ldots\; s^r{}_n u^n{}_h u^n{}_\alpha$$

nachdem sie vorher mit (αk) multiplicirt worden, eine Summation nach dem Stellenzeiger α von 1 bis n vor, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Bedeutung der Grössen u

$$\underset{\alpha}{\mathrm{S}}\Big\{ (h\alpha)_r\ (\alpha k) \Big\}_1^n = s^{r+1}{}_1 u^1{}_h u^1{}_k + s^{r+1}{}_2 u^2{}_h u^2{}_k + \;\ldots\; s^{r+1}{}_n u^n{}_h u^n{}_k$$

oder

$$(hk)_{r+1} = \underset{\alpha}{\mathrm{S}}\Big\{ (h\alpha)_r\ (\alpha k) \Big\}_1^n$$

eine Gleichung, die, der Form nach mit dem Bildungsgesetze (a 36) identisch, das Gesagte beweist, weil bei ihrer Ableitung die Voraussetzung, r sei positiv, nirgends in Rechnung gesetzt wurde. Die unmittelbare Folge davon ist aber, und man überzeugt sich dessen sehr leicht, dass auch die Gleichung (a 72) oder was dasselbe ist die (a 73) noch für negative r Bestand hat. Schreiben wir sie also namentlich für $r = -1$ auf

$$(hk)_{n-1} + A_1 (hk)_{n-2} + A_2 (hk)_{n-3} + \ldots A_{n-1} (hk)_o + \\ + A_n (hk)_{-1} = o \tag{6}$$

so können wir offenbar aus ihr den Werth der Coëfficienten $(hk)_{-1}$ und zwar in neuer Gestalt ziehen. Es liefert die Gleichung (6)

$$A_n (hk)_{-1} = -\left\{(hk)_{n-1} + A_1 (hk)_{n-2} + \ldots A_{n-1} (hk)_o\right\}$$

oder nach symbolischer Schreibweise:

$$(hk)_{-1} = \frac{1}{(hk)} \left\{1 - \frac{F(hk)}{F(o)}\right\} \tag{8}$$

und es zeigen sich jetzt die Coëfficienten $(hk)_{-1}$ nicht mehr ausgedrückt durch sämmtliche s und u wie in (4), sondern durch die schon zur Berechnung der letzteren Grössen erforderlichen Elemente, das sind die Coëfficienten von n Systemen positiver Ordnungszahl und die der Eliminationsgleichung.

Eine Eigenthümlichkeit aber besitzen die Coëfficienten negativer Ordnungszahl, und zwar die, gelegentlich durchgehends unendlich zu werden. Dies ist, wie aus (4) zu ersehen, dann der Fall, wenn eine oder mehrere der Wurzeln s verschwinden. Da aber mit ihnen zugleich sämmtliche rechts vom Zeichen befindliche Polynome in (5) unendlich werden, so hören augenscheinlich in dem bezeichneten Falle die Gleichungen (1) auf, allgemein durch endliche Werthe der x erfüllbar zu sein. Soll dies dennoch stattfinden, so müssen die ξ gewisse Relationen erfüllen — sie müssen nämlich die Zähler aller in (3) auftretenden Brüche, die irgend eine Wurzel Nulle im Nenner tragen, zum Verschwinden bringen. Von diesen Brüchen besitzen aber alle, welche einer und derselben Wurzel s_ρ zugehören, den Ausdruck

$$\sigma_\rho = u^\rho{}_1\, \xi_1 + u^\rho{}_2\, \xi_2 + u^\rho{}_3\, \xi_3 + \ldots u^\rho{}_n\, \xi_n$$

als gemeinschaftlichen Factor,

$$\sigma_\rho = 0 \tag{9}$$

ist daher die durch das Verschwinden der Wurzeln s_ρ zu dem erwähnten Zwecke geforderte Relation und es wird deren im Ganzen so viele geben, als der Nulle gleiche Wurzeln in der Eliminationsgleichung vorkommen.

Leisten nun die ξ diesen Relationen Genüge, so werden die Auflösungen (5) allerdings endlich — aber unbestimmt. Es treten nämlich jetzt an die Stelle der Gleichungen (5), wenn man die Werthe der x, welche sich, nach Hinweglassung aller von der Nulle gleichen Wurzeln herrührenden Gliedern, aus ihnen ergeben würden, mit x' die Brüche $\frac{\sigma_r}{s_r}$ aber mit g_r bezeichnet nachstehende

$$x_k = x_k' + g_r\, u_k^r + \;.\;.\;. \tag{10}$$

und diese enthalten, da uns nichts zu einer bestimmten Wahl der Quotienten g_r, die offenbar von der Form $\frac{0}{0}$ sind, zwingt, genau so viele willkürliche Grössen als die Eliminationsgleichung in s der Nulle gleiche Wurzeln bietet. Diese Willkürlichkeit bestätiget nicht nur eine Substitution der Auflösungen (10) in (1), sie geht auch unmittelbar hervor aus den Gleichungen (2), wenn man nur darauf Acht hat, dass von ihnen mit dem Verschwinden einer oder mehrerer Wurzeln und der Erfüllung der betreffenden Relationen (9) eben so viele identisch werden, sie also auch dann die Werthe für eben so viele x unbestimmt lassen.

Bei dem sonst üblichen Verfahren, ein System bestimmter linearer Gleichungen wie (1) aufzulösen, ist der wesentlichste Theil der Rechnung der, aus den Coëfficienten (hk) das unter dem Namen der Determinante bekannte Polynom zu bilden und dieses zuerst nach den Coëfficienten der ersten Horizontalreihe in (1) dann nach denen der zweiten, dritten u. s. w., endlich nach denen der n^{ten} zu ordnen. Hat man dies gethan, das heisst, hat man dem genannten Polynome, welches M heissen mag, die Formen:

$$\begin{aligned} M &= (11)\, p^1_1 + (12)\, p^1_2 + (13)\, p^1_3 + \;.\;.\;.\; (1n)\, p^1_n \\ &= (21)\, p^2_1 + (22)\, p^2_2 + (23)\, p^2_3 + \;.\;.\;.\; (2n)\, p^2_n \\ &= (31)\, p^3_1 + (32)\, p^3_2 + (33)\, p^3_3 + \;.\;.\;.\; (3n)\, p^3_n \quad (11) \\ &\;. \\ &= (n1)\, p^n_1 + (n2)\, p^n_2 + (n3)\, p^n_3 + \;.\;.\;.\; (nn)\, p^n_n \end{aligned}$$

ertheilt, so findet man auch allsogleich die Werthe der Unbekannten x durch eine Reihe von Gleichungen wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
Mx_1 = p^1_1\,\xi_1 + p^1_2\,\xi_2 + p^1_3\,\xi_3 + \ldots\; p^1_n\,\xi_n \\
Mx_2 = p^2_1\,\xi_1 + p^2_2\,\xi_2 + p^2_3\,\xi_3 + \ldots\; p^2_n\,\xi_n \\
Mx_3 = p^3_1\,\xi_1 + p^3_2\,\xi_2 + p^3_3\,\xi_3 + \ldots\; p^3_n\,\xi_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Mx_n = p^n_1\,\xi_1 + p^n_2\,\xi_2 + p^n_3\,\xi_3 + \ldots\; p^n_n\,\xi_n
\end{array}
\qquad (12)
$$

Die hier erscheinenden Grössen p nun sind, wie ein Zusammenhalten der Gleichungen (12) und (5) wegen der Independenz der Grössen ξ lehrt, mit den von uns eingeführten Coëfficienten $(h\,k)_{-1}$ offenbar durch folgende Relation verbunden:

$$p^h_k = M\,(hk)_{-1} = M\left\{\frac{u^1_h u^1_k}{s_1} + \frac{u^2_h u^2_k}{s_2} + \ldots\; \frac{u^n_h u^n_k}{s_n}\right\} \qquad (13)$$

es ist also von ihnen auch nachgewiesen, sie seien beziehlich ihrer Stellenzeiger h und k symmetrisch. Weiter geht aus (12) hervor, die Auflösungen x könnten, da die p ihrer Natur nach stets endliche Grössen sind, wenn nur die $(h\,k)$ es sind, allein dann unendlich werden, wenn die letzteren die Bedingung

$$M = 0 \qquad (14)$$

erfüllen. Diese stimmt aber genau überein mit der oben angegebenen des Verschwindens einer oder mehrerer Wurzeln s, denn aus der Art, wie aus der Determinante M die Eliminationsgleichung in s hergeleitet werden kann, weiss man, dass ihr letztes Glied A_n abgesehen vom Zeichen mit eben diesem M identisch ist und sein Verschwinden ist ja nothwendig, sollen eine oder mehrere der Wurzeln s der Nulle gleich werden. Doch dürften die Auflösungsformen (11), (12) weniger als die (4), (5) zur Erörterung der beim Vorhandensein von der Nulle gleichen Wurzeln eintretenden Umstände geeignet sein.

Sieht man jetzt darauf, welche Methode der Auflösung der Gleichungen (1), ob die in (11) und (12) oder die von uns in (4) und (5) dargelegte einen geringeren Rechnungsaufwand erheischt, so muss man ohne Zweifel der ersterwähnten im Allgemeinen den Vorzug einräumen, fordert doch letztere entweder die Berechnung sämmtlicher Producte $u_h\,u_k$ und der Wurzeln s nach (4) oder die der $(hk)_r$ und der Coëfficienten der Eliminationsgleichung nach (7). Gleichwohl hielten wir es nicht für überflüssig, die Gleichungen (4), (5) zu erzeugen, denn es ist, selbst abgesehen von den Vortheilen, welche die Kenntniss der Zusammensetzung der Coëfficienten $(h\,k)_{-1}$ aus den

u und s gelegentlich bieten kann, ebenso entschieden vortheilhafter, den durch sie gezeigten Weg in der Rechnung zu betreten in dem Falle als mit der Auflösung eines Systemes bestimmter Gleichungen wie (1) auch die eines ähnlichen Systemes aber unbestimmter oder doch die Darstellung seiner Eliminationsgleichung geboten ist; denn dann ist es offenbar weit leichter, die Coëfficienten $(hk)_{-1}$ zusammenzusetzen aus den bereits bekannten Grössen u und s oder den schon behufs der Bildung der Eliminationsgleichung gerechneten $(hk)_r$ und A_r als die verschiedenen p zu ermitteln nach ihrer durch die Relationen (11) gegebenen Definition.

B. Gleichungen mit beliebigen Coëfficienten.

a. Unbestimmte Gleichungen.

Um bei Gleichungen mit beliebigen also im Allgemeinen nicht symmetrischen Coëfficienten zu ähnlichen Resultaten zu gelangen, wie bei den in den vorhergehenden Abschnitten behandelten symmetrischen, wird es nothwendig, gleichzeitig zwei verschiedene Systeme der Betrachtung zu unterwerfen, die zwar dieselben Coëfficienten aber nicht in derselben Anordnung besitzen. Dieser Unterschied in der Stellung der Coëfficienten besteht nun darin, dass ein Coëfficient, welcher in der h^{ten} Horizontal- und k^{ten} Verticalreihe des ersten Systemes vorkömmt, im zweiten seinen Platz findet in der k^{ten} Horizontal- und h^{ten} Verticalreihe — mit einem Worte, Horizontal- und Verticalreihen werden vertauscht beim Übergange von einem Systeme zum anderen. Es wird dies am anschaulichsten durch die Einführung der neuen Symbole:

$$\left(\frac{h}{k}\right)$$

in welchen für das eine System der Zähler die Ordnungszahl der Horizontal- und der Nenner die der Verticalreihe angezeigt, während für das andere System diese Bedeutungen sich umkehren, und dessen Werth eine Änderung erfahren darf durch eine Verwechslung der in ihm enthaltenen Stellenzeiger h und k. Das erste System findet sodann dem Gesagten zu Folge in:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1}\right)x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)x_2 + \left(\frac{1}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{1}{n}\right)x_n &= sx_1 \\ \left(\frac{2}{1}\right)x_1 + \left(\frac{2}{2}\right)x_2 + \left(\frac{2}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{2}{n}\right)x_n &= sx_2\end{aligned} \qquad (1)$$

$$\left(\frac{3}{1}\right)x_1 + \left(\frac{3}{2}\right)x_2 + \left(\frac{3}{3}\right)x_3 + \ldots\left(\frac{3}{n}\right)x_n = sx_3 \quad (1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{n}{1}\right)x_1 + \left(\frac{n}{2}\right)x_2 + \left(\frac{n}{3}\right)x_3 + \ldots\left(\frac{n}{n}\right)x_n = sx_n$$

das zweite hingegen in:

$$\left(\frac{1}{1}\right)y_1 + \left(\frac{2}{1}\right)y_2 + \left(\frac{3}{1}\right)y_3 + \ldots\left(\frac{n}{1}\right)y_n = sy_1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)y_1 + \left(\frac{2}{2}\right)y_2 + \left(\frac{3}{2}\right)y_3 + \ldots\left(\frac{n}{2}\right)y_n = sy_2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)y_1 + \left(\frac{2}{3}\right)y_2 + \left(\frac{3}{3}\right)y_3 + \ldots\left(\frac{n}{3}\right)y_n = sy_3 \quad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)y_1 + \left(\frac{2}{n}\right)y_2 + \left(\frac{3}{n}\right)y_3 + \ldots\left(\frac{n}{n}\right)y_n = sy_n$$

seinen Ausdruck. Es ist klar, dass auch hier die Gleichungen (1) und (2) keineswegs alle x und y vollkommen bestimmen, sondern blos deren Verhältnisse; führen wir daher mittelst der Relationen:

$$x_1 = C'u_1,\ x_2 = C'u_2,\ x_3 = C'u_3 \quad \ldots\ldots \quad x_n = C'u_n \quad (3)$$

$$y_1 = C''v_1,\ y_2 = C''v_2,\ y_3 = C''v_3 \quad \ldots\ldots \quad y_n = C''v_n \quad (4)$$

die neuen Grössen u und v ein, so ist es uns, da nach vollführter Substitution die constanten Factoren C', C'' aus den Gleichungen (1) und (2) hinwegfallen, gestattet, zur Entfernung aller Willkürlichkeit diese Grössen u und v zweien beliebigen Bedingungsgleichungen zu unterwerfen.

Es ist nun vortheilhaft, diese Bedingungsgleichungen so zu wählen, dass, falls man die Systeme (1) und (2) in symmetrische, also beziehlich ihrer Coëfficienten identische übergehen lässt, auch die u und v zusammenfallen. Als eine derselben wird recht passend folgende gelten können:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \ldots\ldots u_n v_n = 1 \quad (5)$$

da sie aber für $u = v$ sich in die für symmetrische Gleichungen festgesetzte:

$$u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 + \ldots u_n u_n = 1 \quad (6)$$

verwandelt, so müssen wir als zweite offenbar eine solche wählen, die durch die Substitution $u=v$ identisch erfüllt wird. Unter der gemachten Voraussetzung nämlich fallen die Systeme (1) und (2) in ein einziges zusammen und dieses reicht dann in Verbindung mit (6) vollkommen hin, alle u oder die ihnen gleichgeltenden v zu bestimmen, daher eine weitere Bedingungsgleichung für die u oder v unzulässig wäre. Eine solche durch die Annahme

$$u = v$$

identisch erfüllte Gleichung ist nun etwa folgende:

$$u_1 u_1 + u_2 u_2 + u_3 u_3 + \ldots u_n u_n = v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3 + \ldots v_n v_n \quad (7)$$

und wir wollen sie auch, obgleich es eben nicht nöthig wäre, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, beibehalten.

Die Gleichungen (1) und (2) darin die x und y durch die entsprechenden u und v ersetzt in Verbindung mit denen (5) und (7) sind es also, mit deren Auflösung wir es zu thun haben.

Wir haben in beiden Systemen (1) und (2) den „unbestimmten Coëfficienten“ mit einerlei Zeichen mit s angedeutet und dies darum, weil in der That beide Systeme dieselbe Eliminationsgleichung, also auch einerlei Wurzeln besitzen. Man konnte dies leicht nachweisen durch das allgemeine Bildungsgesetz der Determinante der Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$, aus welcher die erwähnte Eliminationsgleichung bekanntlich dadurch hervorgeht, dass man in demselben alle Coëfficienten von der Form

$$\left(\frac{k}{k}\right)$$

denen wir auch hier den Namen der diagonalen geben, mit

$$\left(\frac{k}{k}\right) - s$$

vertauscht und das so veränderte Polynom der Nulle gleich setzt.

Dem Gange unserer Rechnung ist jedoch eine andere Beweisart natürlich — dagegen benützen wir das Bildungsgesetz der Determinante dazu, um zu zeigen, dass auch für nicht symmetrische Gleichungssysteme wie (1) und (2) noch die Summe der Wurzeln der Eliminationsgleichung der Summe der Diagonal-Coëfficienten gleich sei, während wir uns die Schöpfung dieses Beweises aus den Gleichungen (1) und (2) selbst noch vorbehalten.

Diese Determinante setzt sich nun zusammen aus einer Reihe von Producten, welche aus dem ersten derselben:

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{n}{n}\right) \qquad (8)$$

für das System (1) dadurch erzeugt werden, dass man in ihm alle möglichen Vertauschungen der in den Symbolen $\left(\frac{k}{k}\right)$ als Nenner auftretenden Stellenzeiger vornimmt, hingegen für das System (2) dadurch, dass man in gleicher Weise mit den als Zähler erscheinenden Stellenzeigern verfährt. Daraus erhellt aber, dass nur in dem ersten Gliede (8) der Determinante sämmtliche Coëfficienten von der Form:

$$\left(\frac{k}{k}\right)$$

n an der Zahl vorkommen, in jeder der übrigen aber deren höchstens $n—2$ an der Zahl erscheinen können, denn schon eine einfache auf nur zwei Stellenzeiger in (8) sich beziehende Permutation liefert in dem neuen Gliede bereits ein Factorenpaar wie:

$$\cdot \cdot \cdot \left(\frac{h}{k}\right) \cdot \cdot \cdot \left(\frac{k}{h}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot$$

belässt also nur $n—2$ Symbole in ihrer früheren Form. Erinnert man sich jetzt der Art, wie aus der Determinante die Eliminationsgleichung $n\ s$ hervorgeht, so ersieht man, dass lediglich das erste Glied der nach oben angegebener Weise veränderten Determinante, das ist:

$$\left[\left(\frac{1}{1}\right)-s\right]\left[\left(\frac{2}{2}\right)-s\right]\left[\left(\frac{3}{3}\right)-s\right] \cdot \cdot \cdot \cdot \left[\left(\frac{n}{n}\right)-s\right]$$

die n^{te} und $(n—1)^{te}$, alle übrigen aber höchstens die $(n—2)^{te}$ Potenz von s enthalten können. Demnach kommen die zwei höchsten Terme der Eliminationsgleichung nur aus (9) und da sie offenbar folgende sind:

$$s^n—s^{n-1}+\left[\left(\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{3}{3}\right)+ \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{n}{n}\right)\right]+ \cdot \cdot$$

so ist auch bewiesen, die Summe der Wurzeln der Eliminationsgleichung sei der Summe der Diagonal-Coëfficienten gleich.

Das Gesagte gilt nun für beide Systeme (1) und (2), nennen wir daher die Summen der ersten, zweiten, dritten etc. Potenzen der Wurzeln in Bezug auf das erste System

$$S'_1,\ S'_2,\ S'_3,\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\ S'_n \qquad (9)$$

in Bezug auf das zweite aber

$$S''_1, S''_2, S''_3, \ldots\ldots S''_n$$

so wird man zuvörderst haben:

$$S'_1 = S''_2 = \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{2}{2}\right) + \left(\frac{3}{3}\right) + \ldots\ldots \left(\frac{n}{n}\right) \quad (10)$$

Dass auch für die Summen höherer Potenzen der Wurzeln ähnliche Gleichungen gelten wie (10), hat darin seinen Grund, dass sich die in den Systemen (1) und (2) herrschende Reciprocität unter den Coëfficienten auch in alle Systeme von höherer Ordnungszahl als der ersten fortpflanzt. Da aber dies nicht unmittelbar wahrgenommen werden kann, so müssen wie diese letzteren, zumal sie auch sonst noch nöthig werden, entwickeln.

Es geschieht dies genau so wie bei den symmetrischen Gleichungen im ersten Abschnitte. Man gewinnt nämlich, falls man von einem der Systeme (1) oder (2) zu dem entsprechenden zweiter Ordnung vorschreiten will, irgend eine Gleichung, etwa die k^{te} dieses letzteren, wenn man die Gleichungen des ursprünglichen Systems der Reihe nach multiplicirt mit den Coëfficienten der k^{ten} Horizontalcolumne eben dieses Systemes erster Ordnung und sie darauf alle addirt. Die Gleichungen zweiter Ordnung sind dann der Zahl nach vollständig, wenn sämmtliche Horizontalreihen auf diese Weise verbraucht worden. So wie aus dem System erster Ordnung das zweiter Ordnung entsteht, so entsteht auch aus diesem das der dritten etc., und allgemein aus dem der r^{ten} das der $(r+1)^{ten}$. Bezeichnet man daher die Coëfficienten der aus (1) abgeleiteten Systeme höherer Ordnung mit:

$$\left(\frac{h}{k}\right)'_r$$

hingegen mit

$$\left(\frac{h}{k}\right)''_r$$

die, welche den aus (2) hervorgegangenen angehören, so wird die Bildung des Coëfficienten von u_k in der h^{ten} Gleichung des $(r+1)^{ten}$ Systems der einen Gattung geschehen durch Multiplication der Terme:

$$\left(\frac{1}{k}\right)'_r, \left(\frac{2}{k}\right)'_r, \left(\frac{3}{k}\right)'_r, \ldots\ldots \left(\frac{n}{k}\right)'_r$$

mit der correspondirenden der Reihe:

$$\left(\frac{h}{1}\right), \left(\frac{h}{2}\right), \left(\frac{h}{3}\right), \ldots\ldots \left(\frac{h}{n}\right)$$

und darauf folgende Addition aller einzelnen Producte, hingegen die des Coëfficienten von u_h in der k^{ten} Gleichung des $(r+1)^{\text{ten}}$ Systemes der anderen Gattung durch eine ähnliche Behandlung der Terme:

$$\left(\frac{h}{1}\right)_r'', \left(\frac{h}{2}\right)_r'', \left(\frac{h}{3}\right)_r'', \ldots\ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r''$$

mit denen der Reihe:

$$\left(\frac{1}{k}\right), \left(\frac{2}{k}\right), \left(\frac{3}{k}\right), \ldots\ldots \left(\frac{n}{k}\right)$$

die Bildungsgesetze der einen und der anderen Art Coëfficienten werden daher sein:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}' = \left(\frac{1}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{1}\right) + \left(\frac{2}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{3}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{3}\right) + \ldots \ldots \left(\frac{n}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{n}\right) \tag{11}$$

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}'' = \left(\frac{h}{1}\right)_r'' \left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)_r'' \left(\frac{2}{k}\right) + \left(\frac{h}{3}\right)_r'' \left(\frac{3}{k}\right) + \ldots \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r'' \left(\frac{n}{k}\right) \tag{12}$$

Die Reciprocität der beiden Coëfficientensorten oder was dasselbe ist die Gleichung

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}' = \left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}''$$

lässt sich nun für einen bestimmten Werth von r nachweisen, unter der Voraussetzung, sie finde Statt für die nächst niederen Ordnungszahlen r und $r-1$. Geben wir nämlich den Gleichungen (11) und (12) folgende Gestalt:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}' = \underset{\alpha}{S}\left\{\left(\frac{\alpha}{k}\right)_r' \left(\frac{h}{\alpha}\right)\right\}_1^r \tag{13}$$

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}'' = \underset{\beta}{S}\left\{\left(\frac{h}{\beta}\right)_r'' \left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}_1^n \tag{14}$$

so können wir dann, da denselben Bildungsgesetzen zu Folge auch

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right)_r'' = \underset{\beta}{S}\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{r-1}'' \left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}_1^n \tag{15}$$

und

$$\left(\frac{h}{\beta}\right)_r' = \underset{\alpha}{S}\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{r-1}' \left(\frac{h}{\alpha}\right)\right\}_1^n \tag{16}$$

ist, die Symbole

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right)'_r\;;\;\left(\frac{h}{\beta}\right)''_r$$

in (13) und (14) mit den ihnen ja gleichgeltenden aus (15) und (16) genommenen:

$$\left(\frac{\alpha}{k}\right)''_r\;;\;\left(\frac{h}{\beta}\right)'_r$$

vertauschen und gelangen somit zu den neuen Formen:

$$\left(\frac{h}{k}\right)'_{r+1} = \mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_\beta\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)''_{r-1}\left(\frac{h}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}^n_1 \qquad (17)$$

$$\left(\frac{h}{k}\right)''_{r+1} = \mathfrak{S}_\alpha\mathfrak{S}_\beta\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'_{r-1}\left(\frac{h}{\alpha}\right)\left(\frac{\beta}{k}\right)\right\}^n_1 \qquad (18)$$

welche wegen der ebenfalls vorausgesetzten Gleichheit:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'_{r-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)''_{r-1}$$

auch die von

$$\left(\frac{h}{k}\right)'_{r+1} = \left(\frac{h}{k}\right)''_{r+1} \qquad (19)$$

beweisen. Da aber die Gleichung (19) besteht für $r=0$ und wie ein Blick auf (11) und (12) lehrt auch für $r=1$, so besteht sie dem eben Bewiesenen zu Folge auch für $r=2$, ferner eben darum für $r=3$ u. s. w., kurz für alle möglichen Ordnungszahlen r. Nennen wir also die in (19) identisch befundenen Symbole:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1}$$

so bekommen wir für die aus (1) abgeleiteten Systeme höherer Ordnung:

$$\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{1}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{1}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{1}{n}\right)_r u_n = s^r u_1 \\
\left(\frac{2}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{2}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{2}{n}\right)_r u_n = s^r u_2 \\
\left(\frac{3}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{3}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{3}{n}\right)_r u_n = s^r u_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{n}{1}\right)_r u_1 + \left(\frac{n}{2}\right)_r u_2 + \left(\frac{n}{3}\right)_r u_3 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)_r u_n = s^r u_n
\end{array} \qquad (20)$$

und für die aus (2) abgeleiteten:

$$\begin{array}{l} \left(\frac{1}{1}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{1}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{1}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{1}\right)_r v_n = s^r v_1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{2}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{2}\right)_r v_n = s^r v_2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{3}\right)_r v_n = s^r v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{1}{n}\right)_r v_1 + \left(\frac{2}{n}\right)_r v_2 + \left(\frac{3}{n}\right)_r v_3 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)_r v_n = s^r v_n \end{array} \tag{21}$$

als allgemeines Schema, während die in ihnen enthaltenen Coëfficienten durch das gemeinschaftliche Bildungsgesetz:

$$\begin{aligned} \left(\frac{h}{k}\right)_{r+1} &= \left(\frac{1}{k}\right)_r \left(\frac{h}{1}\right) + \left(\frac{2}{k}\right)_r \left(\frac{h}{2}\right) + \left(\frac{3}{k}\right)_r \left(\frac{h}{3}\right) + \ldots \\ &\quad \ldots \left(\frac{n}{k}\right)_r \left(\frac{h}{n}\right) \\ &= \left(\frac{h}{1}\right)_r \left(\frac{1}{k}\right) + \left(\frac{h}{2}\right)_r \left(\frac{2}{k}\right) + \left(\frac{h}{3}\right)_r \left(\frac{3}{k}\right) + \ldots \\ &\quad \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r \left(\frac{n}{k}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

definirt sind.

Kehren wir jetzt zurück zu den Grössen S', S'' und der Eliminationsgleichung. Da die Systeme (20) und (21) bezüglich identisch sind mit den ursprünglichen erster Ordnung (1) und (2), denn sie wurden ja blos durch Combination der letzteren unter einander erzeugt, so muss auch ihre Auflösung dieselben Werthe für s zulassen wie die Auflösung dieser; woraus folgt, dass die Grössen

$$S'_r\ ,\ S''_r$$

aus den Diagonal-Coëfficienten in (20) und (21) genau so entstehen wie die:

$$S'_1\ S''_1$$

aus den analogen Coëfficienten in (1) und (2). Es besitzen aber die Systeme (20) und (21) gemeinschaftliche Diagonal-Coëfficienten, wie man sieht, die Grössen S_r', S_r'' bekommen daher ebenfalls einen gemeinschaftlichen Werth und zwar den:

$$S_r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \left(\frac{3}{3}\right)_r + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)_r \tag{23}$$

woraus wiederum folgt, dass die beiden in Rede stehenden Gleichungssysteme einerlei Eliminationsgleichung

$$F(s) = 0 \tag{24}$$

haben, deren Coëfficienten, nachdem sie in entwickelter Form aufgeschrieben worden:

$$s^n + A_1 s^{n-1} + A_2 s^{n-2} + \ldots A_{n-1} s + A_n = o \tag{25}$$

sich durch die Grössen S mittelst der bekannten Relationen:

$$S_1 + A_1 = o\,,\quad S_2 + S_1 A_1 + 2 A_2 = o\,,\ \ldots\ S_n + S_{n-1} A_1 + \\ + S_1 A_{n-1} + n A_n = o \tag{26}$$

bestimmen.

Die Kenntniss des Umstandes, die Systeme (1) und (2) liessen dieselben Wurzeln s als Auflösungen zu, erleichtert uns die Auffindung einfacherer Beziehungen, in welche die u und v unter einander treten. Zu diesem Ende bezeichnen wir die einzelnen Wurzeln der Eliminationsgleichung (25) mit

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ s_n$$

ferner die einer derselben etwa s_k entsprechende Reihe der u mit

$$u_1^k,\ u_2^k,\ u_3^k,\ \ldots\ u_n^k$$

und die der v mit

$$v_1^k,\ v_2^k,\ v_3^k\ \ldots\ v_n^k$$

und behandeln die Systeme (20), (21), nachdem wir in ihnen der Einfachheit wegen die Ordnungszahl $r=1$ genommen, das erstere aber auf die Wurzel s_k, das letztere auf die s_h bezogen haben, genau so, wie wir es im ersten Abschnitte thaten, um die Realität der Wurzeln zu beweisen. Wir multipliciren nämlich die geänderten Gleichungen (20) der Reihe nach mit

$$v_1^h,\ v_2^k,\ v_3^h\ \ldots\ v_n^h$$

worauf wir sie alle addiren, jede Verticalcolumne zu einem Gliede vereinigend. In dem Resultate:

$$\begin{aligned} &u_1^k\Big[\Big(\frac{1}{1}\Big) v_1^h + \Big(\frac{2}{1}\Big) v_2^h + \ldots \Big(\frac{n}{1}\Big) v_n^h\Big] + \\ + &u_2^k\Big[\Big(\frac{1}{2}\Big) v_1^h + \Big(\frac{2}{2}\Big) v_2^h + \ldots \Big(\frac{n}{2}\Big) v_2^n\Big] + \\ + &u_n^h\Big[\Big(\frac{1}{n}\Big) v_1^h + \Big(\frac{2}{n}\Big) v_2^h + \ldots \Big(\frac{n}{n}\Big) v_2^h\Big] = \\ = s_k\, &(u_1^k v_1^h + u_2^k v_2^h + u_3^k v_3^h + \ldots u_n^h v_n^h) \end{aligned} \tag{27}$$

erkennen wir aber durch ein Zusammenhalten mit den in beschriebener Weise geänderten Gleichungen (21), dass die hier als Factoren der u erscheinenden Polynome der v der Reihe nach ersetzt werden können durch:

$$s_h\, v_1^{\,h},\ s_h\, v_2^{\,k},\ s_h\, v_3^{\,k},\ \ldots\ .\ s_h\, v_n^{\,h}$$

Wir führen also diese Substitutionen aus, bringen dann die (27) auf Null und bekommen somit:

$$(s_h - s_k)\,(u_1^{\,k}\, v_1^{\,k} + u_2^{\,k}\, v_2^{\,k} + u_3^{\,k}\, v_3^{\,k} + \ldots u_n^{\,k}\, v_n^{\,h}) = 0 \quad (28)$$

Zur Erfüllung der (28) ist es aber nothwendig, dass einer der Factoren des auf der linken Seite vom Zeichen stehenden Productes verschwinde. Der Factor

$$s_h - s_k$$

ist aber wegen der Ungleichheit der Stellenzeiger im Allgemeinen von der Nulle verschieden, das Polynom der u und v muss daher der Nulle gleich sein, das heisst, es muss

$$u_1^{\,k}\, v_1^{\,h} + u_2^{\,k}\, v_2^{\,h} + u_3^{\,k}\, v_3^{\,h} + \ldots\ u_n^{\,k}\, v_n^{\,h} = 0 \qquad (29)$$

sein; jedoch mit Ausnahme des Falles, wo $h = k$ wird, denn dann ist die Gleichung (28) wegen

$$s_k - s_k = 0$$

ohnedies identisch erfüllt, es wird vielmehr alsdann in Gemässheit der Gleichung (5), die wir fernerhin für alle den einzelnen Wurzeln entsprechenden Reihen der u und v statuirt wissen wollen,

$$u_1^{\,k}\, v_1^{\,k} + u_2^{\,k}\, v_2^{\,k} + u_3^{\,k}\, v_3^{\,k} + \ldots\ u_n^{\,k}\, v_n^{\,k} = 1 \qquad (30)$$

Das Gesagte gilt streng genommen nur, wenn die Eliminationsgleichung lauter verschiedene Wurzeln bietet; fände nämlich dies nicht Statt, würden also eine oder mehrere der Differenzen

$$s_h - s_k$$

trotz der Verschiedenheit der Stellenzeiger der Nulle gleich, so könnte man aus der Gleichung (28) nicht mehr auf die entsprechende (29) schliessen. Ähnliches wie im ersten Abschnitte bei den symmetrischen Gleichungen könnten wir auch hier bezüglich des Vorkommens gleicher Wurzeln s bemerken, wir begnügen uns jedoch zur

Vermeidung von Weitläufigkeiten die dortige Annahme, die Eliminationsgleichung besässe in der That lauter verschiedene Wurzeln, auch auf die hier behandelten Gleichungen auszudehnen und rücksichtlich der durch das Auftreten gleicher Wurzeln etwa erforderlichen Modificationen der Rechnung auf den Schluss dieses Abschnittes zu verweisen.

Es gelten uns also die Relationen:

$$u_1^k\, v_1^k + u_2^k\, v_2^k + u_3^k\, v_3^k + \dots u_n^k\, v_n^k = 1 \tag{31}$$
$$u_1^k\, v_1^k + u_2^h\, v_2^k + u_3^h\, v_3^k + \dots u_n^h\, v_n^k = 0 \tag{32}$$

gewiss für alle von einander verschiedenen Stellenzeiger h und k. Wir leiten zunächst aus ihnen einige neue ab und zwar auf folgende Weise:

Wir multipliciren die aus (31) und (32) durch Vertauschung von k mit r und h der Reihe nach mit 1, 2, 3 … n hervorgehenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
u_1^r v_1^1 + u_2^r v_2^1 + u_3^r v_3^1 + \dots u_n^r v_n^1 = 0 \\
u_1^r v_2^2 + u_2^r v_2^2 + u_3^r v_3^2 + \dots u_n^r v_n^2 = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_1^r v_1^r + u_2^r v_2^r + u_3^r v_3^r + \dots u_n^r v_n^r = 1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_1^r v_1^n + u_2^r v_2^n + u_3^r v_3^n + \dots u_n^r v_n^n = 0
\end{array} \tag{33}$$

in der Ordnung, in welcher sie aufgeführt worden, mit

$$u_k^1,\ u_k^2,\ u_k^3 \dots u_k^n$$

und addiren sie nachher. Das Resultat wird, wenn wir die neuen Symbole

$$[u_k\, v_h] = u_k^1\, v_h^1 + u_k^2\, v_k^2 + u_k^3\, v_h^3 + \dots u_k^n\, v_h^n \tag{34}$$

in Gebrauch ziehen, folgendes sein:

$$u_1^r\, [u_k\, v_1] + u_2^r\, [u_k\, v_2] + u_3^r\, [u_k\, v_3] + \dots u_n^r\, [u_k\, v_n] = u_k^r \tag{35}$$

In diesem letzteren ertheilen wir jetzt dem r nach und nach alle Werthe von 1 bis n und unterwerfen die so neu entstehenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
u_1^1 [u_k v_1] + u_2^1 [u_k v_2] + \dots u_n^1 [u_k v_n] = u_k^1 \\
u_1^2 [u_k v_1] + u_2^2 [u_k r_2] + \dots u_n^2 [u_k v_n] = u_k^2 \\
u_1^3 [u_k v_1] + u_2^3 [u_k v_2] + \dots u_n^3 [u_k v_n] = u_k^3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_1^n [u_k v_1] + u_2^n [u_k v_2] + \dots u_n^n [u_k v_n] = u_k^n
\end{array} \tag{36}$$

wieder einer Multiplication aber mit der Factorenfolge:

$$v_h^1,\ v_h^2,\ v_h^3\ \ .\ .\ .\ v_h^n$$

und nachheriger Addition, was uns in Verbindung mit (34) zu

$$\begin{gathered}[u_1 v_k][u_k v_1] + [u_2 v_k][u_k v_2] + [u_3 v_k][u_k v_3] + \cdots \\ + [u_n v_k][u_k v_n] = [u_k v_k]\end{gathered} \tag{37}$$

gelangen lässt. Solcher Gleichungen wie (37) können wir uns aber dadurch, dass wir sowohl h als k die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen lassen, offenbar n^2 an der Zahl verschaffen. Daraus nun und aus dem Umstande, dass diese Gleichungen die Symbole $[u_k\ v_h]$ in verschiedenen Dimensionen enthalten, folgt, dass sie die Werthe der letzteren, deren es ebenfalls nur n^2 an der Zahl gibt, vollkommen zu bestimmen fähig sind. Es wäre nun gewiss nicht leicht, diese n^2 Gleichungen allgemein aufzulösen und wenn schon dies bereits geschehen wäre von den vielen Auflösungen, welche sie für jede ihrer Unbekannten $[u_k\ v_h]$ bieten würden, gerade die hierorts passende auszuwählen — denn eine kann es nur sein, weil ja für uns die Symbole $[u_k\ v_h]$ nach (34) zusammengesetzt sind aus den durch die vorhergehenden Gleichungen definirten Grössen u und v; man gelangt aber fast ohne alle Rechnung zum Ziele durch folgende einfache Überlegung:

Denken wir uns, die Gleichungen (37) seien bereits aufgelöst und die Auflösungen unter die Form

$$[u_k\ v_h] = \varpi_k^h \tag{38}$$

gebracht, so ist klar, dass die Grössen ϖ sämmtlich reine Zahlen sein müssen, denn die Gleichungen (37) enthalten ausser den gesuchten Symbolen gar keine anderweitigen Grössen, dass sie also insbesondere von den Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$ der beiden Systeme (1) und (2) in keiner Weise abhängen. Ohne also die Grössen ϖ zu berühren, können wir die erwähnten Coëfficienten beliebig wählen, thun wir aber dies, so dass die Systeme (1) und (2) symmetrisch werden, so fallen uns den am Eingange statuirten Gleichungen (5) und (7) zu Folge die Werthe der u und v zusammen, die Symbole $[u_k\ v_h]$ gehen über in:

$$[u_k v_h] = [u_k u_h] = u_k^1 u_h^1 + u_k^2 u_h^2 + \ .\ .\ .\ u_k^n v_h^n$$

und erhalten somit gemäss den Gleichungen (18) und (19) des ersten Abschnittes den Werth Nulle, wenn h und k von einander verschieden, hingegen den Werth 1, wenn dies nicht der Fall ist. Combinirt man jetzt das Gesagte mit (38), so geht aus demselben hervor, dass wenn die ϖ die hierorts passenden Auflösungen der Gleichungen (37) vorstellen sollen, von ihnen alle mit verschiedenen Stellenzeigern behafteten verschwinden, alle mit gleichen oberen und unteren Stellenzeigern behafteten hingegen der positiven Einheit gleich sein müssen. Die gesuchten Auflösungen der Gleichungen (37) werden daher folgende sein:

$$\begin{aligned} [u_k v_k] &= u_k^1 v_k^1 + u_k^2 v_k^2 + u_k^3 v_k^3 + \;.\;.\; u_k^n v_k^n = 1 \\ [u_k v_h] &= u_k^1 v_h^1 + u_k^2 v_h^2 + u_k^3 v_h^3 + \;.\;.\; u_k^n v_k^n = 0 \end{aligned} \tag{39}$$

erstere gültig für jeden, letztere für jedes Paar ungleicher Stellenzeiger. Sie ermöglichen es uns die sämmtlichen Coëfficienten

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r$$

auszudrücken durch die u, v, und die Wurzeln der Eliminationsgleichung (25). Zu diesem Zwecke wählen wir aus den Systemen (20) (21) eine Gleichung, welche den genannten Coëfficienten enthält, etwa die h^{te} in (20), beziehen sie nach und nach auf alle Wurzeln s und nehmen mit den so bekommenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^1 + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^1 + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^1 + \cdot\cdot \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^1 = s^r u_h^1 \\ &\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^2 + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^2 + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^2 + \cdot\cdot \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^2 = s^r u_h^2 \\ &\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^3 + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^3 + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_2^3 + \cdot\cdot \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^3 = s^r u_h^3 \quad (40) \\ &\cdot\;\cdot \\ &\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^n + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^n + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^n + \cdot\cdot \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^h = s^r u_h^n \end{aligned}$$

eine Multiplication mit der Factorenfolge:

$$v_k^1,\; v_k^2,\; v_k^3 \;.\;.\;.\;.\; v_k^n$$

und nachherige Addition vor. In dem Resultate, welches mit Berücksichtigung von (34) so geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{h}{1}\right)_r [u_1 v_k] + \left(\frac{h}{2}\right)_r [u_2 v_k] + \;.\;.\; \left(\frac{h}{k}\right)_r [u_h v_h] + \;.\;.\;. \\ &+ \left(\frac{h}{n}\right) [u_n v_k] = s_1^r u_h^1 v_k^1 + s_2^r u_h^2 v_k^2 + s_3^r u_h^3 v_k^3 + \;.\;. \\ &\qquad + s_n^r u_h^n v_k^n \end{aligned} \tag{41}$$

tragen aber gemäss den Relationen (39) alle Coëfficienten einen der Nulle gleichen Factor bei sich, mit alleiniger Ausnahme von $\left(\frac{h}{k}\right)_r$ welcher mit der positiven Einheit multiplicirt erscheint. Dieser selbst findet sich daher schon, wie verlangt, mittelst der Gleichung:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r = s_1{}^r u_h{}^1 v_k{}^1 + s_2{}^r u_h{}^2 v_k{}^2 + s_3{}^r u_h{}^3 v_k{}^3 + \ldots s_n{}^r u_h{}^n v_k{}^n \quad (42)$$

dargestellt, als Function der u, v und der Wurzeln der Eliminationsgleichung. Zur Gewinnung der Relationen (31), (32), (39) und der Gleichung (42) aus ihnen war uns allein die Kenntniss nothwendig, die Systeme (1) und (2) besässen einerlei Wurzeln s, keineswegs aber die der Eliminationsgleichung selbst; hatte man sich also davon auf irgend einem anderen Wege als dem oben angegebenen überzeugt, so konnte man jetzt Behufs der Darstellung dieser von der Gleichung (42) ausgehen. Denn setzt man in der letzteren $h=k$ und nimmt alsdann mit ihr eine Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n vor, so erhält man, da in der Summe jede Wurzel s sich mit einem Polynome wie:

$$u_1{}^\alpha v_1{}^\alpha + u_2{}^\alpha v_2{}^\alpha + v_3{}^\alpha u_3{}^\alpha + \ldots u_n{}^\alpha v_n{}^\alpha$$

die gemäss den Relationen (31) sämmtlich der Einheit gleich sind, multiplicirt findet:

$$s_1{}^r + s_2{}^r + s_3{}^r + \ldots s_n{}^r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \left(\frac{3}{3}\right)_r + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)_r \quad (43)$$

eine Gleichung, die von Neuem zeigt, in jedem Systeme beliebiger Ordnungszahl sei die Summe der entsprechenden Wurzeln der Summe der Diagonal-Coëfficienten gleich und die identisch mit der (23) unmittelbar zur Bildung der Eliminationsgleichung führt.

Das hierzu dienliche Verfahren ist nun, wie aus den oben entwickelten Formeln zu ersehen, genau der Form nach übereinstimmend mit dem, welches wir im ersten Abschnitte zu einem ähnlichen Zwecke in Bezug auf symmetrische Gleichungen angegeben haben, man berechnet nämlich aus den Coëfficienten der Systeme (1) und (2) die aller höheren Ordnungen bis einschliesslich der n^{ten} nach ihrem Bildungsgesetze:

$$(44)\quad \begin{aligned}\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1} &= \left(\frac{1}{k}\right)_r\left(\frac{h}{1}\right)+\left(\frac{2}{k}\right)_r\left(\frac{h}{2}\right)+\left(\frac{3}{k}\right)_r\left(\frac{h}{3}\right)+\cdots\left(\frac{n}{k}\right)_r\left(\frac{h}{n}\right)\\ &= \left(\frac{h}{1}\right)_r\left(\frac{1}{k}\right)+\left(\frac{h}{2}\right)_r\left(\frac{2}{k}\right)+\left(\frac{h}{3}\right)_r\left(\frac{3}{k}\right)+\cdots\left(\frac{h}{n}\right)_r\left(\frac{n}{k}\right)\end{aligned}$$

dann addirt man sämmtliche Diagonal-Coëfficienten je einer Ordnung, um die Potenzsummen der Wurzeln

$$S_r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \left(\frac{3}{3}\right)_r + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)$$

zu ermitteln, aus welchen Elementen man schliesslich mit Hülfe der Relationen (26) die Coëfficienten A der Eliminationsgleichung

$$s^n + A_1\, s^{n-1} + A_2\, s^{n-2} + A_3\, s^{n-3} + \ldots A_n = 0 \qquad (45)$$

berechnet.

Gehen wir nun über zur Untersuchung des Vorkommens reeller oder imaginärer Wurzeln der Eliminationsgleichung und deren Verhalten hinsichtlich ihres Vorzeichens und numerischen Werthes. Im ersten Abschnitte konnten wir uns zu ähnlichem Zwecke der Gleichung (a, 40) mit einigem Erfolge hedienen, hier können wir dies mit der ihr analogen (42) darin $h = k$ gesetzt nicht, weil in der letzteren weder alle Wurzeln s reell sein noch sämmtliche Producte $u_k^{\alpha}\ v_k^{\alpha}$ einerlei Zeichen, das positive, nothwendig tragen müssen, wie dies bei den symmetrischen Gleichungen mit den dort auftretenden Wurzeln und Producten $u_k^{\alpha}\ u_k^{\alpha}$ der Fall war; es steht uns zur Ermittelung allgemeiner Bestimmungen hinsichtlich der Wurzeln nebst dem Bildungsgesetze der Coëfficienten allein die Betrachtung der Grössen:

$$S_r = s_1^{\,r} + s_2^{\,r} + s_3^{\,r} + \ldots s_n^{\,r} \qquad (46)$$

zu Gebote. Scheiden wir die Wurzeln in zwei Partien, reelle und imaginäre, nennen die ersteren

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3\ \ldots$$

die letzteren aber, welche stets nur als conjungirte vorkommen können, da in der Eliminationsgleichung (45) sämmtliche Coëfficienten A reell sind,

$$\rho_1 e^{\varphi_1 i},\ \rho_1 e^{-\varphi_1 i},\ \rho_2 e^{\varphi_2 i},\ \rho_2 e^{-\varphi_2 i},\ \ldots$$

wobei wir, was immer erlaubt ist, die Modulle ρ der imaginären Wurzeln als positive Grössen betrachten, so nimmt die Gleichung (46) folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} S_r = \rho_1 \cos(r\varphi_1) + \rho_1 \cos(r\varphi_1) + \rho_2 \cos(r\varphi_2) + \rho_2 \cos(r\varphi_2) + \ldots \\ + \sigma_1^{\,r} + \sigma_2^{\,r} + \sigma_3^{\,r} + \ldots \qquad (47) \end{aligned}$$

Die Bögen $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\ \ldots$ können nun zwar ganze gebrochene, rationale oder irrationale Zahlen sein, es wird uns aber in allen diesen Fällen mit einem beliebig hohen Grade der Näherung gestattet sein, denselben folgende Formen zu ertheilen:

$$\varphi_1 = \frac{a_1\pi}{m},\ \varphi_2 = \frac{a_2\pi}{m},\ \varphi_3 = \frac{a_3\pi}{m},\ \ldots\ldots$$

unter den m, a_1, a_2, a_3 ... ganze Zahlen verstanden, wenn wir nur diesen letzteren bezüglich ihrer Grösse keine Beschränkung auferlegen. Gehen wir also nach den angezeigten Substitutionen in (47) dem r einmal den Werth

$$2\,pm$$

ein andermal den

$$(2\,p+1)\,m$$

unter p ebenfalls eine ganze Zahl verstanden, so bekommen wir, da alle Cosinuse von der Form:

$$Cos\ (2\,pa\pi)$$

der positiven, hingegen alle von der Form:

$$Cos\ [(2\,p+1)\,a\pi]$$

der negativen Einheit gleich sind, das erste Mal:

$$S_{2pm} = (\rho_1^{2pm} + \rho_1^{2pm} + \rho_2^{2pm} + \rho_2^{2pm} + \ldots) + (\sigma_1^{2pm} + \sigma_2^{2pm} + \sigma_3^{2pm} \ldots) \quad (48)$$

das zweite Mal aber:

$$S_{(2p+1)m} = -\,(\rho_1^{(2p+1)m} + \rho_1^{(2p+1)m} + \rho_2^{(2p+1)m} + \rho_2^{(2p+1)m} + \ldots) + (\sigma_1^{(2p+1)m} + \sigma_2^{(2p+1)m} + \sigma_3^{(2p+1)m} + \ldots) \quad (49)$$

Eine Grenze der reellen und der Module der imaginären Wurzeln geht nun aus (48) hervor. Diese Gleichung enthält nämlich auf ihrer rechten Seite lauter positive Grössen, es kann daher keine derselben grösser sein als der linke Theil eben dieser Gleichung, demnach ist

$$\sqrt[2pm]{S_{2pm}}$$

und zwar für ein beliebiges p eine solche Grenze. Aus dem Bildungsgesetze der Coëfficienten höherer Systeme (44) erhellt aber, dass wenn man mit q_r den numerisch grössten der Coëfficienten im Systeme r^{ter} Ordnung ferner mit Q' die grösste der durch passende Wahl des Stellenzeigers k und des Vorzeichens eines jeden Gliedes zu erreichenden Summen:

$$\pm\left(\frac{k}{1}\right) \pm \left(\frac{k}{2}\right) \pm \left(\frac{k}{3}\right) \pm \cdots \pm \left(\frac{k}{n}\right)$$

endlich mit Q″ ebenso die grösste der Summen:

$$\pm\left(\frac{1}{k}\right)\pm\left(\frac{2}{k}\right)\pm\left(\frac{3}{k}\right)\pm\cdots\pm\left(\frac{n}{k}\right)$$

bezeichnet einerseits

$$q_{r+1} < q_r Q' \tag{50}$$

anderseits auch

$$q_{r+1} < q_r Q'' \tag{50}$$

sei. Verbindet man jetzt, nachdem man in den Relationen (50) das r auf die verschiedensten Weisen gewählt hat, alle gefundenen Ungleichheiten unter einander, so ergibt sich

$$q_r < q_1 \overset{r-1}{Q'} \tag{51}$$

und

$$q_r < q_1 \overset{r-1}{Q''} \tag{51}$$

Da aber q_r der numerisch grösste Coëfficient im r^{ten} Systeme ist, so hat man auch offenbar in Bezug auf numerische Werthe

$$S_r = \left(\frac{1}{1}\right)_r + \left(\frac{2}{2}\right)_r + \cdot\cdot \left(\frac{n}{n}\right)_r =< nq_r$$

also auch wegen (51)

$$S_r < nq_1 \overset{r-1}{Q'}$$

und

$$S_r < nq_1 \overset{r-1}{Q''}$$

die gesuchte Grenze ist daher gewiss kleiner, als jede der beiden Grössen:

$$Q' \sqrt[2pm]{\frac{nq_1}{Q'}};\quad Q'' \sqrt[2pm]{\frac{nq_1}{Q''}}$$

diese selbst nähern sich aber, da weder q_1 noch die Q′ und Q″ das p enthalten, und die letzteren kleiner sind als $n\,q_1$, oder diesem höchstens gleich, beim Wachsthume der willkürlichen Zahl p immer mehr den Grössen:

$$Q',\ Q''$$

nennen wir daher die kleineren derselben Q so ist dieser Werth:

$$Q \tag{52}$$

eine Grenze, welche weder die reellen Wurzeln noch die Module der imaginären, falls man vom Zeichen absieht, zu überschreiten vermögen.

Nehmen wir jetzt die Gleichung (49) vor. Da der Voraussetzung nach die Module ρ sämmtlich positiv sind, so kann der rechte Theil dieser Gleichung nur dann positiv werden, wenn wenigstens eine der reellen Wurzeln σ und zwar in überwiegendem Masse positiv ist. Besitzt demnach der aus den Coëfficienten berechnete Werth des linken Theiles eben dieser Gleichung das positive Vorzeichen, so muss wenigstens eine reelle und zwar positive Wurzel der Eliminationsgleichung genügen. Wir kennen aber m nicht, können also auch $S_{(2p+1)m}$ nicht berechnen, wohl aber ist so viel klar, dass diese letztere Grösse für alle p positiv ausfallen müsse, wenn alle Coëfficienten positiv sind. Der einzige aus (49) zu ziehende Schluss ist demnach der: die Elimationsgleichung in s müsse mindestens eine reelle und zwar positive Wurzel zulassen, wenn das gegebene Gleichungssystem entweder selbst Coëfficienten von durchgehends positiven Zeichen besitzt oder doch in ein derartiges verwandelt werden kann; also auch, wie eine Vertauschung von s mit $-s$ in den Gleichungssystemen (1) und (2) lehrt, mindestens eine reelle negative Wurzel dann, wenn sämmtliche Coëfficienten negativ sind. Die erwähnte Umwandlung der Systeme (1) und (2) aber lässt sich so wie bei den symmetrischen Gleichungen und nach derselben dort angegebenen Weise erzielen, wenn das Zeichen eines jeden Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$ bestimmt ist durch einen Ausdruck wie:

$$\pm (-1)^{\varphi(h)+\varphi(k)} \tag{53}$$

unter $\varphi(k)$ eine Function verstanden, die für jeden Stellenzeiger k eine ganze Zahl wird. Dessgleichen überträgt sich auch hierher die dort gemachte Bemerkung hinsichtlich imaginärer Coëfficienten; denn lässt man diese wieder ausgedrückt sein durch ein Product ihres numerischen Werthes in eine Grösse wie (53), aber unter Annahme nicht die Function $\varphi(k)$ selbst, sondern nur $2\varphi(k)$ solle stets eine ganze Zahl sein, derart, dass unter ihnen imaginäre vorkommen können, so führt man, so wie im ersten Abschnitte unter (a, 48, 49) ein symmetrisches, auch hier das vorgelegte nicht symmetrische Gleichungssystem sehr leicht auf ein anderes mit durchgehends reellen Coëfficienten behaftetes zurück, woraus folgt, dass das erstere trotz seiner imaginären Coëfficienten so lange keine imaginären Wurzeln s zulassen werde, als das letztere solche nicht bietet.

War es nun bei den symmetrischen Gleichungen von Interesse Bedingungen kennen zu lernen, an deren Erfüllung das Vorkommen von Wurzeln mit einerlei Zeichen in der Eliminationsgleichung geknüpft ist, so wird dies hier der gleiche Fall sein mit denen, welche, sobald ihnen Genüge geschehen, das Auftreten wenn nicht durchgehends positiv oder negativ reeller Wurzeln, so doch solcher herbeiführen, deren reelle Theile an Zeichen nicht verschieden sind. Wir setzen also, einem schon gebrauchten Verfahren folgend, in die Gleichungssysteme (1) und (2) $r+\sigma$ statt s, worauf wir das r, von dem sogleich vorausgesetzt werden soll, was sich später als erforderlich zeigen würde, es sei positiv und grösser als jeder der Diagonal-Coëfficienten $\left(\frac{k}{k}\right)$, auf die linke Seite der Gleichungen bringen, und es wird dann, damit die Eliminationsgleichung in s keine Wurzel mit negativen reellen Theilen liefere, hinreichend sein, dass die in σ keine besitze, deren Modul grösser ist als r. Mit Rücksicht auf die kurz vorher nachgewiesene oberste Grenze der Module der imaginären Wurzeln eines Gleichungssystemes mit beliebigen Coëfficienten wird dies aber dann Statt finden, wenn in den transformirten Systemen (1) und (2) entweder die Summen der numerischen Werthe aller je einer Horizontalreihe oder die der numerischen Werthe aller je einer Verticalreihe angehörenden Coëfficienten gleich oder kleiner sind als r. Bezeichnen wir also die Summe der numerischen Werthe der Glieder einer Reihe wie:

$$\left(\frac{1}{k}\right), \left(\frac{2}{k}\right), \left(\frac{3}{k}\right), \cdots \left(\frac{n}{k}\right)$$

mit p_k' ferner eine ähnliche Summe einer Reihe wie

$$\left(\frac{k}{1}\right), \left(\frac{k}{2}\right), \left(\frac{k}{3}\right), \cdots \left(\frac{k}{n}\right)$$

mit p_k'' beide aber mit Ausschluss der Diagonal-Coëfficienten $\left(\frac{k}{k}\right)$, so werden, weil in den transformirten Systemen wegen der überwiegenden Grösse des r die Diagonal-Coëfficienten die numerischen Werthe

$$r-\left(\frac{k}{k}\right)$$

bekommen, die gesuchten Bedingungen offenber folgende sein:

$$r-\left(\frac{k}{k}\right)+p_k' = < r \qquad (54)$$

oder die

$$r - \left(\frac{k}{k}\right) + p_k'' = < r \qquad (55)$$

je nachdem man die Horizontal-, oder die Verticalreihen des einen oder des andern der beiden Systeme (1) und (2) der Rechnung zu Grunde legt. Damit also die Eliminationsgleichung in s lauter Wurzeln mit positiven reellen Theilen liefere, wird es hinreichen, dass die Diagonal-Coëfficienten eine der Relationen

$$\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k' \qquad (56)$$

oder

$$\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k'' \qquad (57)$$

erfüllen und es werden, wie man sich leicht überzeugt, an die Stelle dieser Relationen folgende treten:

$$-\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k' \qquad (58)$$

und

$$-\left(\frac{k}{k}\right) = > p_k'' \qquad (59)$$

wenn die reellen Theile sämmtlicher Wurzeln das negative Vorzeichen besitzen sollen.

Darauf gestützt, lassen sich nun weiter Bedingungen angeben, die, wenn ihnen entsprochen wird, zur Folge haben, dass in sämmtlichen Wurzeln der reelle Theil den in $\sqrt{-1}$ multiplicirten, abgesehen vom Zeichen, überwiegt, und solche deren Erfüllung das Gegentheil bewirkt. Jede Wurzel wie

$$s = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$$

gibt nämlich zum Quadrate erhoben

$$= s^2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\,\alpha\,\beta\,\sqrt{-1}$$

und es werden die reellen Theile der s^2 durchgehends positiv oder negativ, je nachdem für sämmtliche Wurzeln s die Relation

$$\alpha^2 > \beta^2$$

oder die

$$\beta^2 > \alpha^2$$

besteht; nun besitzen aber die Systeme zweiter Ordnung eben die s^2 als Wurzeln, wir werden also, um die erwähnten Bedingungen zu erhalten, blos die schon oben unter (56 — 59) gefundenen auf Systeme zweiter Ordnung zu übertragen haben. Sie sind daher, wenn wir der Kürze wegen mit p_k die kleinere der beiden Grössen p_k' und p_k'' und mit $p_{2\cdot k}$ eine ähnliche aber auf Systeme zweiter Ordnung bezogene Grösse bezeichnen, nachstehende:

$$\left(\frac{k}{k}\right)_2 => p_{2.k} \tag{60}$$

und

$$-\left(\frac{k}{k}\right)_2 => p_{2.k} \tag{61}$$

Erfüllen also die Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)$ alle Relationen der einen Art (60), so herrschen in den Wurzeln der Eliminationsgleichung (25) die reellen Theile vor und es gibt unter ihnen, abgesehen von Wurzeln Nulle, namentlich keine reine imaginäre; leisten sie aber allen der anderen Art (61) Genüge, so herrschen in sämmtlichen Wurzeln die imaginären Theile vor, und es gibt insbesondere unter ihnen, bei gleicher Ausnahme keine, welche rein reell wäre.

Wir wollen nun auch hier, um einen Vergleich unserer Methode mit der combinatorischen hinsichtlich ihres praktischen Werthes ziehen zu können, sehen, wie viele Multiplicationen oder Divisionen erstere auszuführen vorschreibt zur Darstellung der Eliminationsgleichung (25) in Zahlen.

Die Coëfficienten dieser Gleichung entstehen aus den Grössen S_r und diese wieder aus den Diagonal-Coëfficienten sämmtlicher Systeme. Wäre es nun nicht möglich zur Kenntniss der Diagonal-Coëfficienten irgend eines höheren Systemes zu gelangen auf einem anderen Wege als durch Berechnung sämmtlicher Coëfficienten der vorhergehenden Systeme, so hätte man, da ausser dem ursprünglichen erster Ordnung noch $n - 1$ Systeme höherer Ordnung mit je n^2 Coëfficienten erforderlich sind und jeder Coëfficient, wie ihr Bildungsgesetz (44) ausweist, durch n-Multiplicationen gewonnen wird

$$n^3 (n - 1)$$

Multiplicationen auszuführen, lediglich um die Grössen S zu berechnen. Die gesuchte Gesammtzahl würde sich daher, weil, wie schon einmal erwähnt worden $\frac{n(n+1)}{2}-1$ Multiplicationen und Divisionen nöthig sind, um aus den S_r die Coëfficienten A der Eliminationsgleichung zu finden, auf:

$$n^2(n-1)+\frac{n(n+1)}{2}-1$$

belaufen. Glücklicherweise ist aber dem nicht so. Es lassen sich nämlich die Coëfficienten der Systeme höherer Ordnung und zwar vom $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ten}}$, wenn n gerade und vom $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^{\text{ten}}$ wenn n ungerade, direct durch eine n-malige Multiplication gewinnen aus je zwei, der so eben erwähnten, vorhergehenden Systemen. Man gelangt zur betreffenden Formel, entweder wenn man nicht wie bisher irgend ein System von der Ordnung $(p+q)$ stufenweise aus dem der ersten entstehen lässt, sondern durch Combination zweier, deren Ordnungszahlen p und q sind, oder aber mittelst der Gleichung (42). Ersetzt man in dieser r durch p, k durch r, multiplicirt sie darauf mit $\left(\frac{r}{k}\right)_q$ und nimmt sodann eine Summation nach dem Stellenzeiger r von 1 bis n vor, so ergibt sich:

$$\underset{r}{S}\left\{\left(\frac{h}{r}\right)_p\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_1{}^p\,\underset{r}{S}\left\{v_r{}^1\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n u_h{}^1 + \qquad (62)$$

$$s_2{}^p\,\underset{r}{S}\left\{v_r{}^2\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n u_h{}^2+\ldots.$$

Gemäss der Bedeutung der Grössen u und v ist aber:

$$\underset{r}{S}\left\{v_r{}^1\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_1{}^q\,v_k{}^1;\quad \underset{r}{S}\left\{v_r{}^2\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_2{}^q\,v_k{}^2,\ \ldots.$$

es wird also auch:

$$\underset{r}{S}\left\{\left(\frac{h}{r}\right)_p\left(\frac{r}{k}\right)_q\right\}_1^n = s_1{}^{p+q}u_h{}^1v_k{}^1+s_2{}^{p+q}u_h{}^2v_k{}^2+s_3{}^{p+q}u_h{}^3v_k{}^3+\ldots.$$

und dies verglichen mit (42), darin $(p+q)$ statt r genommen, führt auf

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{p+q}=\left(\frac{h}{1}\right)_p\left(\frac{1}{k}\right)_q+\left(\frac{h}{2}\right)_p\left(\frac{2}{k}\right)_q+\left(\frac{h}{3}\right)_p\left(\frac{3}{k}\right)_q+\ldots$$

$$+\left(\frac{h}{n}\right)_p\left(\frac{n}{k}\right)_q \qquad (63)$$

eine Gleichung, die offenbar eine Verallgemeinerung des Bildungsgesetzes (44) enthält und deren Brauchbarkeit zu dem erwähnten

Zwecke augenscheinlich ist. Die Zahl der erforderlichen Rechnungs-Operationen stellt sich demnach auf nur:

$$n^2 . \frac{n}{2} . (n-1) + \frac{n}{2} . n + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad (64)$$

wenn n gerade, hingegen auf

$$n^2 \left(\frac{n+1}{2}\right) . (n-1) + \left(\frac{n-1}{2}\right) n + \frac{n(n-1)}{2} - 1 \qquad (65)$$

wenn n ungerade; und es ist, so wie im ersten Abschnitte bei den symmetrischen Gleichungen, erweislich, dass sie mindestens von gewissen, und zwar sehr niedrigen Werthen von n angefangen kleiner sei als die durch die combinatorische Methode geforderte, und dies wieder um so mehr, je grösser n oder die Zahl der aufzulösenden Gleichungen. Es lässt sich aber auch die Umwandlung der meisten Multiplicationen in Additionen, auf welche wir bei den symmetrischen Gleichungen hingewiesen haben, hier wieder anwenden, nur die Zahl der Elemente, aus denen dann sämmtliche Coëfficienten höherer Systeme durch Addition hervorgehen, erleidet eine Änderung, sie wird $9n^2$, und es sind zu deren Gewinnung 8 n^2 Multiplicationen auszuführen, die Gesammtzahlen (64) und (65) können daher für ein beliebiges n auf:

$$8 n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \qquad (66)$$

herabgesetzt werden; endlich gilt noch dasselbe von der eben dort angegebenen Controle der Rechnung.

Wir gehen nun über zur Ermittelung der u und v. Bezeichnen wir der Gleichförmigkeit wegen mit $\left(\frac{h}{k}\right)_0$, $\left(\frac{k}{k}\right)_0$ die unter (39) gefundenen Werthe der Symbole $[u_k\, v_h]$ und $[u_k\, v_k]$, so können wir die Gleichung (42) nicht nur für alle Zahlen r von der Einheit angefangen gelten lassen, sondern auch für $r = 0$. Legen aber jetzt in der erwähnten Gleichung dem r nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . n bei, so führen die so entstehenden:

$$\begin{array}{l}
u_h{}^1 v_h{}^1 + \quad u_h{}^2 v_k{}^2 + \quad u_h{}^3 v_k{}^3 + \ldots \quad u_h{}^n v_k{}^n = \left(\frac{h}{k}\right)_0 \\
s_1\, u_h{}^1 v_h{}^1 + s_2\, u_h{}^2 r_k{}^2 + s_3\, u_h{}^3 r_h{}^3 + \ldots s^n\, u_h{}^n v_h{}^n = \left(\frac{h}{k}\right)_1 \\
s_1{}^2 u_h{}^1 v_h{}^1 + s_2{}^2 u_h{}^2 v_k{}^2 + s_3{}^2 u_h{}^3 v_h{}^3 + \ldots s_n{}^2 u_h{}^n v_k{}^n = \left(\frac{h}{k}\right)_2 \qquad (67) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_1{}^n u_h{}^1 v_k{}^1 + s_2{}^n u_h{}^2 v_k{}^2 + s_3{}^n u_h{}^3 v_h{}^3 + \ldots s_n{}^n u_h{}^n v_h{}^n = \left(\frac{h}{k}\right)_n
\end{array}$$

zunächst zu einem neuen einfacheren Bildungsgesetze der Coëfficienten des n^{ten} Systemes. Multiplicirt man nämlich dieselben der Reihe nach mit den Coëfficienten der Eliminationsgleichung $A_n, A_{n-1} \ldots A_1, 1$ und addirt sie hierauf, so verschwindet in der Summe der links vom Zeichen stehende Theil, weil ja die $s_1, s_2 \ldots s_n$ die Wurzeln der letzteren sind, man enthält daher als Resultat:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_n + A_1\left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} + A_2\left(\frac{h}{k}\right)_{n-2} + \ldots A_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)_1 + \\ + A_n\left(\frac{h}{k}\right)_0 = 0 \qquad (68)$$

eine Gleichung, die man symbolisch auch noch so schreiben kann:

$$F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)\right\} = 0 \qquad (69)$$

Hätten wir aber die Reihe der Werthe, welche wir in (42) dem r ertheilten, anstatt von der Nulle von diesem selbst beginnen lassen, so würden wir in derselben Weise, nach der wir zu den Gleichungen (68), (69) gelangten, auch noch folgende bekommen haben

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{r+n} + A_1\left(\frac{h}{k}\right)_{r+n-1} + A_2\left(\frac{h}{k}\right)_{r+n-2} + \ldots \\ + A_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)_{r+1} + A_n\left(\frac{h}{k}\right)_r = 0$$

oder was dasselbe ist, die:

$$F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)_r\right\} = 0 \qquad (70)$$

woraus zu ersehen, dass das neue Bildungsgesetz, durch welches höhere Coëfficienten durch alle jene, welche in n vorhergehenden Systemen dieselbe Stelle einnahmen wie der gesuchte in seinem und die Coëfficienten der Eliminationsgleichung ausgedrückt erscheinen, sich auch auf alle die erstrecke, deren Ordnungszahl grösser ist als n.

Multipliciren wir aber jetzt die Gleichungen (67) und zwar nur die ersten $n-1$ derselben der Reihe nach mit den durch die Relation

$$\frac{F(s)}{s-s_\mu} = \lambda_0{}^\mu + \lambda_1{}^\mu s + \lambda_2{}^\mu s^2 + \ldots \lambda_{n-1}{}^\mu s^{n-1} \qquad (71)$$

definirten Grössen λ und addiren sie hierauf, so bekömmt in der Summe jedes der Producte $u_h\, v_k$, dessen oberer Stellenzeiger von μ verschieden ist, die Nulle zum Factor, während jenes, dessen oberer Stellenzeiger eben das μ ist, in $F'.\ (s_\mu)$ multiplicirt erscheint, wir gelangen somit zu:

$$u_h{}^\mu v_k{}^\mu F'(s_\mu) = \lambda_0{}^\mu\left(\frac{h}{k}\right)_0 + \lambda_1{}^\mu\left(\frac{h}{k}\right)_1 + \lambda_2{}^\mu + \ldots \lambda_{n-1}{}^\mu\left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} \qquad (72)$$

woraus

$$u_k{}^\mu v_k{}^\mu = \frac{\mathop{\mathfrak{S}}\limits_r \left\{\lambda_r{}^\mu \left(\frac{h}{k}\right)_r\right\}_1^{n-1}}{F'(s_r)} \tag{73}$$

hervorgeht, eine Gleichung, die offenbar fähig ist, die Werthe aller der Wurzel s_μ zugeordneten u und v wiederzugeben, sobald nur noch eine unter letzteren Grössen stattfindende Relation festgesetzt ist. Hier wäre also erst der Ort, die Eingangs unter (7) statuirte Relation in die Rechnung einzuführen, dies ist jedoch ganz überflüssig — es genügt, die noch je eine willkürliche Constante enthaltenden x und y darzustellen, da es stets möglich ist, von diesen auf die u und v zurückzukehren. Zu diesem Zwecke dividiren wir die (73) darin h mit k verwechselt mit $v_h{}^\mu$, verbinden sie dann mit den Gleichungen (3), den gemeinschaftlichen Nenner $v_h{}^\mu f(s_\mu)$ in die erwähnte Constante einbegreifend, und bekommen somit:

$$x_k{}^\mu = C' \mathop{\mathfrak{S}}\limits_r \left\{\lambda_r{}^\mu \left(\frac{k}{h}\right)^r\right\}_1^{n-1} \tag{74}$$

während ein ähnliches Verfahren in Bezug auf die v und y:

$$y_k{}^\mu = C'' \mathop{\mathfrak{S}}\limits_r \left\{\lambda_r{}^\mu \left(\frac{h}{k}\right)_r\right\}_1^{n-1} \tag{75}$$

liefert. In diesen Formeln sind sowohl die C', C'' als der Stellenzeiger h willkürlich; nur müssen diese Grössen dieselben bleiben, so lange man nicht von den einem bestimmten μ zugehörigen Reihen dem x und y zu den einer anderen Wurzel entsprechenden übergeht. Benützt man auch hier die schon oft gebrauchte symbolische Bezeichnungsweise, so lassen sich von den Gleichungen (74), (75) die eine weit übersichtlicher

$$x_k{}^\mu = C' \frac{F\left\{\left(\frac{k}{h}\right)\right\}}{\left(\frac{k}{h}\right) - s_\mu} \tag{76}$$

und die andere so schreiben:

$$x_k = C'' \frac{F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)\right\}}{\left(\frac{k}{k}\right) - s_\mu} \tag{77}$$

Der vielleicht zu wünschende Rückbeweis dafür, dass die aus (74), (75) gezogenen Werthe der x und y den zur Auflösung vorgelegten

Gleichungssystemen (1) und (2) wirklich Genüge leisten, wäre aber für die x etwa folgender:

Man multiplicirt die Gleichung (74) nach Hinweglassung des μ der Kürze wegen mit $\left(\frac{g}{k}\right)$ und nimmt hierauf mit ihr eine Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n vor, wodurch man mit Berücksichtigung des Bildungsgesetzes (44) zu:

$$\underset{k}{S}\left\{\left(\frac{g}{k}\right)x_k\right\}_1^n = C'\underset{r}{S}\left\{\lambda_r\left(\frac{g}{h}\right)_{r+1}\right\}_0^{n-1} \tag{78}$$

gelangt. Da aber die λ der Relation entsprechen:

$$\lambda_r = s\lambda_{r+1} + A_{n-r-1}$$

so lange r kleiner ist als n, hingegen gleich Null sind, wenn r gleich oder grösser als n, so kann man die (78) auch so schreiben:

$$\begin{aligned}\underset{k}{S}\left\{\left(\frac{g}{k}\right)x_k\right\}_1^n &= C's\underset{r}{S}\left\{\lambda_r\left(\frac{g}{h}\right)_r\right\}_0^{n-1} - \\ &- C's\lambda_0\left(\frac{g}{h}\right)_0 + C'\underset{r}{S}\left\{A_{n-r-1}\left(\frac{g}{h}\right)_{r+1}\right\}_0^{n-1}\end{aligned} \tag{79}$$

woraus in Verbindung mit (74) darin k durch g ersetzt und wegen:

$$s\lambda_0 = -A_n$$

auch:

$$\begin{aligned}\underset{r}{S}\left\{\left(\frac{g}{k}\right)x_k\right\}_1^n &= sx_g + C'\left\{\left(\frac{g}{h}\right)_n + A_1\left(\frac{g}{h}\right)_{n-1} + \cdots\right. \\ &\left. + A_{n-1}\left(\frac{g}{h}\right) + A_n\left(\frac{g}{h}\right)_0\right\}\end{aligned} \tag{80}$$

folgt. In dieser Gleichung verschwindet aber, zu Folge der Relation (68) das ganze in C' multiplicirte Polynom, sie geht daher über in nachstehende

$$\left(\frac{g}{1}\right)x_1 + \left(\frac{g}{2}\right)x_2 + \left(\frac{g}{3}\right)x_3 + \cdots \left(\frac{g}{n}\right)x_n = sx_g \tag{81}$$

und damit ist der verlangte Beweis, der sich genau in derselben Weise, wie leicht zu ersehen, für die y führen lässt, geliefert.

Nachdem wir so auch für die nicht symmetrischen Gleichungen alle nöthigen Formeln entwickelt haben, unter der Annahme, die Eliminationsgleichung in s besitze lauter verschiedene Wurzeln, liegt es uns nur noch ob zu zeigen, dass ihr Bestand keineswegs abhängig sei von dieser Voraussetzung, und dies wird wieder nur nothwendig sein in Bezug auf das so eben behandelte Gleichungssystem mit beliebigen Coëfficienten, da ja dieses das mit symmetrischen Coëfficienten behaftete als speciellen Fall in sich schliesst.

Wir haben aber die erwähnte Voraussetzung während der ganzen Rechnung nur zu einem Schritte benöthiget, nämlich zur Festsetzung der Gleichungen (30) und (31) oder was dasselbe ist, der (39) und Ableitung der (42) aus denen (20) und (21) mittelst der (39); zur Herstellung des verlangten Beweises wird es also genügen, die Gleichungen (20) und (21) rückwärts aus denen (31), (32) und (42) entstehen zu lassen, jedoch ohne die bewusste Annahme dazu zu gebrauchen. Dies geschieht nur durch eine Multiplication der (42) mit u_k^μ und darauf folgende Summation nach dem Stellenzeiger k von 1 bis n für (20) und durch dieselbe Operation aber mit v_k^μ vorgenommen für die (21); im ersteren Falle erhält man mit Hülfe der Relationen (31) und (32):

$$\left(\frac{h}{1}\right)_r u_1^\mu + \left(\frac{h}{2}\right)_r u_2^\mu + \left(\frac{h}{3}\right)_r u_3^\mu + \ldots \left(\frac{h}{n}\right)_r u_n^\mu = s_\mu{}^r u_h^\mu \qquad (82)$$

und im letzteren

$$\left(\frac{1}{k}\right)_r v_1^\mu + \left(\frac{2}{k}\right)_r v_2^\mu + \left(\frac{3}{k}\right)_r v_3^\mu + \ldots \left(\frac{n}{k}\right)_r v_n^\mu = s_\mu{}^r v_k^\mu \qquad (83)$$

also die Repräsentanten sämmtlicher Gleichungen der Systeme (20) und (21) woraus sogleich folgt, dass sich die gegebenen Systeme (1) und (2) mit ihren Bedingungsgleichungen (5) und (7) ersetzen lassen durch die (7), (31), (31) und (42), denn der einen wie der anderen sind wie leicht zu ersehen, genau so viele als es Unbekannte gibt, nämlich $2n^2 + n$. Die oben dargestellten Auflösungen für die u und v müssen daher, schon ihrer Form nach, den ursprünglich gegebenen Gleichungs-Systemen (1) und (2) Genüge leisten, es erleidet demnach keinen Zweifel, dass sie dies auch dann noch thun, wenn die Eliminationsgleichung in s der Wurzeln gleiche bieten sollte, es frägt sich nur mehr, ob die früher ausgesprochene Vermuthung: es möchten für eine doppelte oder mehrfache Wurzel nicht blos zwei oder entsprechend mehrere Reihen zugehörender u und v, sondern deren eine weit grössere Zahl die Gleichungen (1) und (2) erfüllen, sich bestätige; dies ist in der That der Fall. Sind nämlich etwa zwei Wurzeln s_1 und s_2 einander gleich, so kann man aus den Gleichungen (67) die correspondirenden Producte $u_h^1\, v_k^1$ und $u_h^2\, v_k^2$ nicht mehr einzeln bestimmen, sondern nur deren Summe und zwar durch eine Multiplication der ersten $n-1$ derselben der Ordnung nach mit den jetzt durch die Relation

$$\frac{F(s)}{(s-\sigma)^2} = \lambda'_0 + \lambda'_1 s + \lambda_2 s^2 + \ldots \lambda_{n-2} s^{n-2} \qquad (84)$$

in welcher σ die doppelte Wurzel bedeutet, definirten Grössen λ' und darauf folgende Addition. Das Resultat

$$u_h^1 v_k^1 + u_h^2 v_k^2 = \frac{\underset{r}{S} \left\{ \lambda_r' \left(\frac{h}{k}\right)_r \right\}_0^{n-2}}{F''(\sigma)} = \frac{F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)\right\}}{\left[\left(\frac{h}{k}\right) - \sigma\right]^2} \tag{85}$$

zeigt deutlich, dass noch eine Bedingungsgleichung zwischen den u^1, u^2, v^1, v^2 aufgestellt werden müsse, um in Verbindung mit (7) alle u und v, die den Wurzeln σ zugeordnet sind, einzeln zu bestimmen, und es ist daher wegen der Willkür diese Bedingungsgleichung zu wählen, möglich, unzählige Doppelreihen der u^1, u^2, v^1, v^2, zu finden, welche alle die Eigenschaft haben die vorgelegten Gleichungssysteme (1) und (2) zu erfüllen.

Was nun das Vorkommen gleicher Wurzeln in der Eliminationsgleichung betrifft, so lassen sich wenigstens für zwei Fälle bestimmte Kennzeichen angeben.

Sind nämlich erstens alle Wurzeln einander gleich, so geht, wenn man ihren gemeinschaftlichen Werth σ nennt, die Gleichung (42) über in:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r = \sigma^r \left(u^1_h v^1_k + u_h^2 v_k^2 + u_h^3 v_k^3 + \ldots u_h^n v_k^n\right) \tag{86}$$

und liefert dann gemäss den Relationen (39)

$$\left(\frac{h}{k}\right)_r = o \tag{87}$$

so lange h von k verschieden, hingegen

$$\left(\frac{k}{k}\right)_r = \sigma^r \tag{88}$$

wenn $h = k$ genommen wird, es verschwinden also sämmtliche Coëfficienten mit Ausnahme der diagonalen, von welchen letzteren aber alle einerlei Ordnung einen gemeinschaftlichen Werth bekommen und die stets beim Übergange von irgend einem Systeme zu demnächst höherem im Verhältnisse von $1:\sigma$ wachsen; sind aber zweitens die Wurzeln, wenn auch an Zeichen von einander verschieden, doch an numerischem Werthe einander gleich — und dies ist der Fall, auf welchen wir im ersten Abschnitte hingewiesen haben — so geht die Gleichung (42) in Bezug auf Systeme ungerader Ordnung über in:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{2r+1} = \sigma^{2r+1} \left(\pm u_h^1 v^1 \pm u_h^2 v_k^2 \pm u_h^3 v_k^3 + \ldots u_h^n v_k^n\right) \tag{89}$$

eine Relation, in welcher der Zeichenwechsel der einzelnen Glieder des Polynoms der u und v durch den Zeichenwechsel der Wurzeln bestimmt ist und σ den gemeinschaftlichen numerischen Werth der letzteren bedeutet, in Bezug auf Systeme gerader Ordnung aber in:

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{2r} = \sigma^{2r}(u_h{}^1 v_k{}^1 + u_h{}^2 v_k{}^2 + u_h{}^3 v_k{}^3 + \ldots u_h{}^n v_k{}^n) \qquad (90)$$

Hier verschwinden also, da die Gleichung (90) wieder gemäss der Relationen (39)

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{2r} = o \qquad (91)$$

für ungleiche und

$$\left(\frac{k}{k}\right)_{2r} = \sigma^{2r} \qquad (92)$$

für gleiche Stellenzeiger h und k liefert, sämmtliche Coëfficienten gerader Ordnung mit Ausnahme der diagonalen, von denen alle einem und demselben Systeme angehörenden unter einander gleich werden und die so wie sämmtliche ungerader Ordnung nach (89) beim Übergange von irgend einem Systeme zu dem entsprechenden des nächst höheren, respective gerader oder ungerader Ordnung, ein Wachsthum im Verhältnisse von $1:\sigma^2$ zeigen.

Der eine wie der andere Fall wird sich daher, da von den ihnen eigenthümlichen Relationen namentlich die (87), (88) für das ursprüngliche und die (91), (92) für das System zweiter Ordnung gelten, sehr bald verrathen.

b. Bestimmte Gleichungen.

Um die Auflösungen der mit denselben Coëfficienten wie die unbestimmten behafteten bestimmten Gleichungen nämlich:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{1}\right)x_1 + \left(\frac{1}{2}\right)x_2 + \left(\frac{1}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{1}{n}\right)x_n = \xi_1 \\
\left(\frac{2}{1}\right)x_1 + \left(\frac{2}{2}\right)x_2 + \left(\frac{2}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{2}{n}\right)x_n = \xi_2 \\
\left(\frac{3}{1}\right)x_1 + \left(\frac{3}{2}\right)x_2 + \left(\frac{3}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{3}{n}\right)x_n = \xi_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left(\frac{n}{1}\right)x_1 + \left(\frac{n}{2}\right)x_2 + \left(\frac{n}{3}\right)x_3 + \ldots \left(\frac{n}{n}\right)x_n = \xi_n
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

und:

$$
\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{1}\right) y_1 + \left(\tfrac{2}{1}\right) y_2 + \left(\tfrac{3}{1}\right) y_3 + \ldots \left(\tfrac{n}{1}\right) y_n &= \eta_1 \\
\left(\tfrac{1}{2}\right) y_1 + \left(\tfrac{2}{2}\right) y_2 + \left(\tfrac{3}{2}\right) y_3 + \ldots \left(\tfrac{n}{2}\right) y_n &= \eta_2 \\
\left(\tfrac{1}{3}\right) y_1 + \left(\tfrac{2}{3}\right) y_2 + \left(\tfrac{3}{3}\right) y_3 + \ldots \left(\tfrac{n}{3}\right) y_n &= \eta_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\left(\tfrac{1}{n}\right) y_1 + \left(\tfrac{2}{n}\right) y_2 + \left(\tfrac{3}{n}\right) y_3 + \ldots \left(\tfrac{n}{n}\right) y_n &= \eta_n
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

darzustellen als Functionen der u, v und der Wurzeln s, unterwerfen wir die ersteren nach und nach einer Multiplication mit den für alle Stellenzeiger μ aufzuschreibenden Factorenfolgen

$$v_1{}^{\mu},\ v_2{}^{\mu},\ v_3{}^{\mu},\ \ldots\ v_n{}^{\mu}$$

die letzteren aber einer mit denen:

$$u_1{}^{\mu},\ u_2{}^{\mu},\ u_3{}^{\mu},\ \ldots\ u_n{}^{\mu}$$

und addiren hierauf alle je eines Systems. Dieses Verfahren liefert uns mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der u und v von den Coëfficienten anstatt der Gleichungssysteme (1) und (2) die folgenden:

$$
\begin{aligned}
s_1\,(v_1^1 x_1 + v_2^1 x_2 + v_3^1 x_3 + \ldots v_n^1 x_n) &= \xi^1 v_1^1 + \xi_2 v_2^1 + \xi_3 v_3^1 + \ldots \xi_n v_n^1 \\
s_2\,(v_1^2 x_1 + v_2^2 x_2 + v_3^2 x_3 + \ldots v_n^2 x_n) &= \xi_1 v_1^2 + \xi_3 v_2^2 + \xi_3 v_3^2 + \ldots \xi_n v_n^2 \\
s_3\,(v_1^3 x_1 + v_2^3 x_2 + v_3^3 x_3 + \ldots v_n^3 x_n) &= \xi_1 v_1^3 + \xi_3 v_2^3 + \xi_3 v_3^3 + \ldots \xi_n v_n^3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
s^n\,(v_1^n x_1 + v_2^n x_2 + v_3^n x_3 + \ldots v_n^n x^n) &= \xi_1 v^n + \xi_2 v_2^n + \xi_3 v_3^n + \ldots \xi_n v_n^n
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

und

$$
\begin{aligned}
s_1\,(u_1^1 y_1 + u_2^1 y_2 + u_3^1 y_3 + \ldots u_n^1 y_n) &= \eta_1 u_1^1 + \eta_2 u_2^1 + \eta_3 u_3^1 + \ldots \eta_n u_2^1 \\
s_2\,(u_1^2 y_1 + u_2^2 y_2 + u_3^2 y_3 + \ldots u_n^2 y_n) &= \eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 + \eta_3 u_3^2 + \ldots \eta_n u_2^2 \\
s_3\,(u_1^3 y_1 + u_2^3 y_2 + u_3^3 y_3 + \ldots u_n^3 y_n) &= \eta_1 u_1^3 + \eta_2 u_2^3 + \eta_3 u_3^3 + \ldots \eta_n u_n^3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
s_n\,(u_1^n y_1 + u_2^n y_2 + u_3^n y_3 + \ldots u_n^n y_n) &= \eta_1 u_1^n + \eta_2 u_2^n + \eta_3 u_3^n + \ldots \eta_n u_n^n
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Um nun etwa die x_k und y_k zu ermitteln, multiplicire man abermals die einzelnen Gleichungen des Systems (3) der Reihe nach mit

$$\frac{u_k{}^1}{s_1},\ \frac{u_k{}^2}{s_2},\ \frac{u_k{}^3}{s_3},\ \ldots\ \frac{v_k{}^n}{s_n}$$

die des Systems (4) hingegen mit:

$$\frac{v_k{}^1}{s_1},\ \frac{v_k{}^2}{s_2},\ \frac{v_k{}^3}{s_3},\ \ldots\ \frac{v_k{}^n}{s_n}$$

und addire sowohl die einen als die andern. Gemäss den Relationen (39) des vorigen Abschnittes führt dies aber auf:

$$\begin{aligned} x_k = {} & \xi_1 \left[\frac{v_1^1 u_k^1}{s^1} + \frac{v_1^2 u_k^2}{s_2} + \cdot\cdot \ \frac{v_1^n u_k^n}{s_n}\right] + \\ & + \xi_2 \left[\frac{v_2^1 u_k^1}{s_1} + \frac{v_2^2 u_k^2}{s_2} + \cdot\cdot \ \frac{v_2^n u_k^n}{s_n}\right] + \cdot\cdot \\ & + \xi_n \left[\frac{v_n^1 u_k^1}{s_1} + \frac{v_n^2 u_k^2}{s_2} + \cdot\cdot \ \frac{v_n^n u_n^n}{s_n}\right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} y_k = {} & \eta_1 \left[\frac{u_1^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_1^2 v_k^2}{s_2} + \cdot\cdot \ \frac{u_1^n v_k^n}{s_n}\right] + \eta_2 \left[\frac{u_2^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_2^2 v_k^2}{s_2} + \cdot \right. \\ & \left. + \frac{u_2^n v_k^n}{s^n}\right] + \cdot\cdot\ \eta^n \left[\frac{u_n^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_n^2 v_k^2}{s_2} + \cdot\cdot \ \frac{u_n^n v_k^n}{s_n}\right] \end{aligned}$$

oder

$$x_k = \mathop{S}_{r} \left\{ \xi_r \left[\frac{v_r^1 u_k^1}{s_1} + \frac{v_r^2 u_k^2}{s_2} + \frac{v_r^3 u_k^3}{s_3} + \cdot\cdot \ \frac{v_r^n u_k^n}{s_n}\right]\right\}_1^n \tag{5}$$

und

$$y_k = \mathop{S}_{r} \left\{ \eta^r \left[\frac{u_r^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_r^2 v_k^2}{s_2} + \frac{u_r^3 v_k^3}{s_3} + \cdot\cdot \ \frac{u_r^n v_k^n}{s_n}\right]\right\}_1^n \tag{6}$$

Formeln, die nach Übertragung einer eingeführten Bezeichnungsweise auf negative Ordnungszahlen

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = \frac{u_h^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_h^2 v_k^2}{s_2} + \frac{u_h^3 v_k^3}{s_3} + \cdot\cdot\cdot\cdot \ \frac{u_h^n v_k^n}{s_n} \tag{7}$$

für die Auflösungen des Gleichungssystems (1):

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{1}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{1}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot \left(\frac{1}{n}\right)_{-1} \xi_n \\ x_2 &= \left(\frac{2}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{2}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot \left(\frac{2}{n}\right)_{-1} \xi_n \\ x_3 &= \left(\frac{3}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{3}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot \left(\frac{3}{n}\right)_{-1} \xi_n \\ & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ x_n &= \left(\frac{n}{1}\right)_{-1} \xi_1 + \left(\frac{n}{2}\right)_{-1} \xi_2 + \left(\frac{n}{3}\right)_{-1} \xi_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot \left(\frac{n}{n}\right)_{-1} \xi_n \end{aligned} \tag{8}$$

und für die des Systemes (2):

$$\begin{aligned}
y_1 &= \left(\frac{1}{1}\right)_{-1}\eta_1 + \left(\frac{2}{1}\right)_{-1}\eta_2 + \left(\frac{3}{1}\right)_{-1}\eta_3 + \dots \left(\frac{n}{1}\right)_{-1}\eta_n \\
y_2 &= \left(\frac{1}{2}\right)_{-1}\eta_1 + \left(\frac{2}{2}\right)_{-1}\eta_2 + \left(\frac{3}{2}\right)_{-1}\eta_3 + \dots \left(\frac{n}{2}\right)_{-1}\eta_n \\
y_3 &= \left(\frac{1}{3}\right)_{-1}\eta_1 + \left(\frac{2}{3}\right)_{-1}\eta_2 + \left(\frac{3}{3}\right)_{-1}\eta_3 + \dots \left(\frac{n}{3}\right)_{-1}\eta_n \qquad (9) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y_n &= \left(\frac{1}{n}\right)_{-1}\eta_1 + \left(\frac{2}{n}\right)_{-1}\eta_2 + \left(\frac{3}{n}\right)_{-1}\eta_3 + \dots \left(\frac{n}{n}\right)_{-1}\eta_n
\end{aligned}$$

als einfachere Schreibweise zu lassen. Die Coëfficienten negativer Ordnungszahl und namentlich die oben erscheinenden gehen aber, was sich so wie bei den symmetrischen Gleichungen erweisen lässt, ebenfalls in das bisher nur für Coëfficienten positiver Ordnungszahlen aufgestellte allgemeine Bildungsgesetz ein. Es wird also auch die Gleichung (70) des vorigen Abschnittes noch für negative Ordnungszahlen r Gültigkeit haben. Setzen wir aber in dieser $r = -1$

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} + A_1\left(\frac{h}{k}\right)_{n-2} + A_2\left(\frac{h}{k}\right)_{n-3} + \dots A_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right) + \\ + A_n\left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = o \qquad (10)$$

so gewinnen wir aus ihr

$$A_n\left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = -\left\{\left(\frac{h}{k}\right)_{n-1} + A_1\left(\frac{h}{k}\right)_{n-2} + A_2\left(\frac{h}{k}\right)_{n-3} + \dots \right. \\ \left. + A_{n-1}\left(\frac{h}{k}\right)_o\right\} \qquad (11)$$

oder symbolisch

$$\left(\frac{h}{k}\right)_{-1} = \frac{1}{\left(\frac{h}{k}\right)} \cdot \left\{1 - \frac{F\left\{\left(\frac{h}{k}\right)\right\}}{F\left\{(o)\right\}}\right\} \qquad (12)$$

also eine zweite Darstellung der Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)_{-1}$ und zwar bequemer als die (7), denn nach ihr hat man zur Berechnung der genannten Coëfficienten nicht mehr die Kenntniss sämmtlicher u, v und der Wurzeln s nöthig, sondern es genügt die der Coëfficienten von n Systemen positiver Ordnungszahl und der Eliminationsgleichung. Die Coëfficienten $\left(\frac{h}{k}\right)_{-1}$ werden nun auch hier beim Verschwinden einer oder mehrerer Wurzeln s unendlich und die Auflösungen (8),

(9) nehmen im Allgemeinen daran Theil. Letzteres wird nur dann nicht eintreten, wenn in Bezug auf die x die ξ, in Bezug auf die y aber die η in gewissen Relationen zu einander stehen, und zwar werden diese für je eine Wurzel

$$s_\mu = o \tag{13}$$

folgende sein

$$\sigma_\mu' = v_1^\mu \xi_1 + v_2^\mu \xi_2 + v_3^\mu \xi_3 + \ldots v_n^\mu \xi_n = o \tag{14}$$

und

$$\sigma_\mu'' = u_1^\mu y_1 + u_2^\mu y_2 + u_3^\mu y_3 + \ldots u_n^\mu y_n = o \tag{15}$$

denn σ_μ' und σ_μ'' sind die gemeinschaftlichen Factoren aller beziehungsweise in (8) und (9) vorkommenden Brüche, deren Nenner die Wurzel s_μ ist. Ist dies nun der Fall, so bekommen zwar die Auflösungen (8), (9) endliche Werthe, es bleibt aber in ihnen eine gewisse Willkür zurück, sie können nämlich auf die Formen

$$x_k = x_k' + g_\mu' u_k^\mu \ldots \tag{16}$$

und

$$y_k = y'_k + g_\mu'' v_k^\mu \ldots \tag{17}$$

gebracht werden, wenn man mit g_μ' und g_μ'' die Brüche $\frac{\sigma_\mu'}{s_\mu}$ und $\frac{\sigma_\mu''}{s_\mu}$ mit x_k' und y_k' aber jene Bestandtheile, der in (8) und (9) rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Polynome, welche von nicht der Nulle gleichen Wurzeln herrühren, bezeichnet, enthalten also unter dem Bestande der Relationen (13), (14), (15) die ganz willkürlichen Grössen g_μ' und g_μ'', von denen sowohl die mit einem als die mit zwei Accenten versehenen der Zahl so viele sind, als der Nulle gleiche Wurzeln in der Eliminationsgleichung vorkommen.

Bedient man sich bei Auflösung zweier Systeme bestimmter linearer Gleichungen wie (1) und (2) der combinatorischen Methode, so beginnt die Rechnung damit aus den Coëfficienten derselben, die Determinante zu bilden und zwar als Complex der Symbole $\left(\frac{h}{k}\right)$ nicht aber als Zahl. Dann ordnet man sie Behufs der Auflösung des Systemes (1), nach den Coëfficienten aller Verticalreihen eben dieses Systemes, gibt ihr also die Formen:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\tfrac{1}{1}\right) p_1^1 + \left(\tfrac{2}{1}\right) p_1^2 + \left(\tfrac{3}{1}\right) p_1^3 + \cdot\cdot \left(\tfrac{n}{1}\right) p_1^n \\
&= \left(\tfrac{1}{2}\right) p_2^1 + \left(\tfrac{2}{2}\right) p_2^2 + \left(\tfrac{3}{2}\right) p_2^3 + \cdot\cdot \left(\tfrac{n}{2}\right) p_2^n \\
&= \left(\tfrac{1}{3}\right) p_3^1 + \left(\tfrac{2}{3}\right) p_3^2 + \left(\tfrac{3}{3}\right) p_3^3 + \cdot\cdot \left(\tfrac{n}{3}\right) p_3^n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \left(\tfrac{1}{n}\right) p_n^1 + \left(\tfrac{2}{n}\right) p_n^2 + \left(\tfrac{3}{n}\right) p_n^3 + \cdot\cdot \left(\tfrac{n}{n}\right) p_n^n
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

und Behufs der Auflösung des Systems (2), nach den Coëfficienten sämmtlicher Verticalreihen des Systems (2), gibt ihr also noch die Formen:

$$
\begin{aligned}
M &= \left(\tfrac{1}{1}\right) q_1^1 + \left(\tfrac{1}{2}\right) q_2^1 + \left(\tfrac{1}{3}\right) q_3^1 + \cdot\cdot \left(\tfrac{1}{n}\right) q_n^1 \\
&= \left(\tfrac{2}{1}\right) q_1^2 + \left(\tfrac{2}{2}\right) q_2^2 + \left(\tfrac{2}{3}\right) q_3^2 + \cdot\cdot \left(\tfrac{2}{n}\right) q_n^2 \\
&= \left(\tfrac{3}{1}\right) q_1^3 + \left(\tfrac{3}{2}\right) q_2^3 + \left(\tfrac{3}{3}\right) q_3^3 + \cdot\cdot \left(\tfrac{3}{n}\right) q_n^3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \left(\tfrac{n}{1}\right) q_1^n + \left(\tfrac{n}{2}\right) q_2^n + \left(\tfrac{n}{3}\right) q_3^n + \cdot\cdot \left(\tfrac{n}{n}\right) q_n^n
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Jetzt rechnet man die p und q in Zahlen und trägt die ersteren in die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
Mx_1 &= p_1^1 \xi_1 + p_1^2 \xi_2 + p_1^3 \xi_3 + \cdot\cdot\, p_1^n \xi_n \\
Mx_2 &= p_2^1 \xi_1 + p_2^2 \xi_2 + p_2^3 \xi_3 + \cdot\cdot\, p_2^n \xi_n \\
Mx_3 &= p_3^1 \xi_1 + p_3^2 \xi_2 + p_3^3 \xi_3 + \cdot\cdot\, p_3^n \xi_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Mx^n &= p_n^1 \xi_1 + p_n^2 \xi_2 + p_n^3 \xi_3 + \cdot\cdot\, p_n^n \xi_n
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

die letzteren aber in die:

$$
\begin{aligned}
My_1 &= q_1^1 \eta_1 + q_2^1 \eta_2 + q_3^1 \eta_3 + \cdot\cdot\, q_n^1 \eta_n \\
My_2 &= q_1^2 \eta_1 + q_2^2 \eta_2 + q_3^2 \eta_3 + \cdot\cdot\, q_n^2 \eta_n \\
My_3 &= q_1^3 \eta_1 + q_2^3 \eta_2 + q_3^3 \eta_3 + \cdot\cdot\, q_n^3 \eta_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
My_n &= q_1^n \eta_1 + q_2^n \eta_2 + q_3^n \eta_3 + \cdot\cdot\, q_n^n \eta_n
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

ein, aus welchen sodann beziehungsweise die Werthe der Unbekannten x und y gezogen werden können. Vergleicht man nun die Auflösungen (20), (21) mit den von uns in (8) und (9) gebotenen, so ergibt sich zunächst ein Zusammenhang der p und q mit den Coëfficienten negativer Ordnungszahl $\left(\frac{h}{k}\right)_{-1}$ wie folgt:

$$p_h^k = q_k^h = M\left(\frac{h}{k}\right) = M\left[\frac{u_h^1 v_k^1}{s_1} + \frac{u_h^2 v_k^2}{s_2} + \frac{u_h^3 v_k^3}{s_3} \cdots \frac{u_h^n v_k^n}{s_n}\right] \tag{22}$$

Diese Relation, analog der (13) im zweiten Abschnitte, ist darum von einiger Bedeutung, weil sie uns zu einer Vervollkommnung der oben in Kürze angedeuteten, von Krammer für die Auflösung bestimmter Gleichungen angegebenen combinatorischen Methode, bestehend in einer Verwendung derselben auch zur Auflösung unbestimmter Gleichungen, gelangen lässt.

Die Determinante M ist nämlich, wie bekannt, gleich dem letzten Gliede der Eliminationsgleichung dieses aber mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen, je nachdem n gerade oder ungerade, das heisst, sie ist das Product sämmtlicher Wurzeln s, verschwindet also eine der letzteren etwa die s_μ und wir wollen dies für einen Augenblick voraussetzen, so reducirt sich offenbar die Relation (22), wenn wir das Product aller übrigen Wurzeln mit M_μ' bezeichnen, auf:

$$p_h^k = q_k^h = M_\mu' \,.\, u_h^\mu \, v_k^\mu \tag{23}$$

Nun ist aber klar, dass die Hinzufügung einer und derselben Grösse etwa $-\alpha$ zu sämmtlichen Diagonal-Coëfficienten $\left(\frac{k}{k}\right)$ keinen unmittelbaren Einfluss auf die Grössen u und v nimmt, sondern weil sie aus den beiden Systemen unbestimmter Gleichungen durch die Substitution

$$s = s' + \alpha$$

also durch Einführung einer neuen Unbekannten der Eliminationsgleichung s' sehr leicht wieder entfernt werden kann, nur in so ferne als man die erwähnten Grössen nach der angezeigten Veränderung als Functionen der Wurzeln s' nicht aber der s betrachten will, dass also die in den transformirten Systemen irgend einer Wurzel

$$s_\mu' = s_\mu - \alpha$$

entsprechenden u und v genau dieselben sind, welche in den ursprünglichen der Wurzel s_μ zugeordnet waren. Die Gleichung (22) auf das transformirte System bezogen, wird daher, wenn man die Vertauschung sämmtlicher Diagonal-Coëfficienten $\left(\frac{k}{k}\right)$ mit denen $\left(\frac{k}{k}\right) - \alpha$ an den Grössen p, q und M durch Einklammerung derselben und Beifügung des α kenntlich macht, folgende sein

$$[p_h^k]_\alpha = [q_k^h] = [M]_\alpha \left\{ \frac{u_h^1 v_k^1}{s_1 - \alpha} + \frac{u_h^2 v_k^2}{s_2 - \alpha} + \frac{u_h^3 v_k^3}{s_3 - \alpha} \cdots \frac{u_h^n v_k^n}{s_n - \alpha} \right\} \quad (24)$$

Wählen wir aber jetzt:

$$\alpha = s_\mu$$

gleich einer der Wurzeln s, so gibt es unter denen s' eine der Nulle gleiche, nämlich die

$$s_\mu' = s_\mu - \alpha$$

wir haben somit den unter (23) erwähnten Fall und die Gleichung (24) geht, da wie leicht zu ersehen

$$[M]s_\mu = (-1)^n \; F(s_\mu)$$

und

$$[M']s_\mu = (-1)^n \; F'(s_\mu)$$

wird, über in die:

$$[p_h{}^k]s_\mu = [q_h{}^k]s_\mu = (-1)^n \, u_h{}^\mu \, v_k{}^\mu \, F'(s_\mu), \quad (25)$$

welche die Stelle der im vorigen Abschnitte gefundenen (73) vertritt und in Verbindung mit der eben dort angenommenen Relation (7) hinreicht alle einzelnen u und v zu ermitteln. Was die x und y in der ihnen bei den unbestimmten Gleichungen gegebenen Bedeutung betrifft, so liefert die (25) für sie nachstehende sehr einfache Ausdrücke:

$$x_k{}^\mu = C_\mu' \, [p_k{}^h]s_\mu = C_\mu' \, [q_h{}^k]_\mu \quad (26)$$

und

$$y_k{}^\mu = C_\mu'' \, [q_k{}^h]s_\mu = C_\mu'' \, [p_h{}^k]_{s_\mu} \quad (27)$$

in welchen wieder der Stellenzeiger h mit der Einschränkung nicht zu wechseln, so lange man nicht zu den einer anderen Wurzel entsprechenden x oder y übergeht, beliebig gewählt werden kann. Will man also von der hier gezeigten Erweiterung der combinatorischen Methode Gebrauch machen zur Auflösung der unbestimmten Gleichungen, so hat man, sind die Determinante und ihre Entwickelungs-Coëfficienten p und q einmal gebildet und die Wurzeln der Eliminationsgleichung gefunden, nur mehr nöthig in den als Polynome der $\left(\frac{h}{k}\right)$ betrachteten p, q sämmtliche Diagonalcoëfficienten

$$\left(\frac{k}{k}\right)$$

der Reihe nach entsprechend den verschiedenen Wurzeln s, durch

$$\left(\frac{k}{k}\right) - s_\mu$$

zu ersetzen; die derart veränderten Polynome p und q sind dann selbst schon die gesuchten Werthe der Unbekannten oder doch diesen proportionale Grössen.

Wir haben uns schon im zweiten Abschnitte bei den symmetrischen bestimmten Gleichungen dahin ausgesprochen, es müsse von den zu ihrer Auflösung dienlichen Methoden, der auf die combinatorischen Eigenschaften der Determinante sich fussenden im Allgemeinen der Vorzug eingeräumt werden im Vergleiche zu der von uns dargelegten — und allein den Fall ausgenommen, das auf ein System bestimmter linearer Gleichungen führende Problem erheische auch noch die Auflösung eines ähnlichen Systemes aber unbestimmter Gleichungen — es gilt nun ganz dasselbe bezüglich der nicht symmetrischen Gleichungen; ob aber die im ersten und dritten Abschnitte oder die kurz vorher unter (26) und (27) gewonnenen Auflösungsformen der unbestimmten Gleichungen grössere Bequemlichkeit bieten, darauf liegt die Antwort in dem schon früher über die Bildung der Eliminationsgleichung, also auch der Determinante Gesagten, indem wir daher schliessen, erlauben wir uns nur noch darauf hinzudeuten: die ganze hier durchgeführte Behandlungsweise algebraischer linearer Gleichungen empfehle sich überdies dadurch, dass sie allen bei einem wie oben erwähnten Probleme etwa noch ferner nöthigen Rechnungen eine gewisse Eleganz zu verleihen im Stande ist.

Über die Kriterien des Grössten und Kleinsten bei den Problemen der Variationsrechnung.

Von **Simon Spitzer,**
Assistenten und Privat-Docenten der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Mai 1854.)

Der bedeutendste Fortschritt, der in der neuern Zeit in der Variationsrechnung geschehen ist, rührt von Jacobi her. Dieser grosse Analyst ist der erste, welcher allgemeine und sichere Regeln angab, mittelst welcher man erkennen kann, ob eine Lösung eines Problems des Grössten oder Kleinsten wirklich ein Grösstes oder Kleinstes gibt, oder keines von beiden. Seine Arbeiten hierüber sind im 17. Bande von Crelle's Journal in solcher Kürze veröffentlicht, dass sie eines Commentars bedürfen, um gehörig verstanden zu werden. Einen solchen lieferte nun, vier Jahre nach der Veröffentlichung der Jacobi'schen genialen Arbeit, Delaunay im 6. Bande von Liouville's Journal, und man muss, um gerecht zu sein, gestehen, dass Delaunay's ausgezeichnete Arbeit nicht wenig zum Verständniss der Jacobi'schen beiträgt.

Ich habe versucht, auf eine andere Weise die Kriterien abzuleiten, zu denen Jacobi gelangt ist, und glaube, dass der von mir betretene Weg einige Beachtung verdiene.

§. 1.

Es sei

$$U = \int_{x_1}^{x_2} V dx, \qquad V = f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)})$$

es wird für y eine solche Function von x gesucht, welche U zu einem Maximum oder Minimum macht.

Denken wir uns diese Function bereits gefunden, sie sei $y = \varphi(x)$. Durch eine sehr kleine Veränderung dieser Function nehme die sie repräsentirende Curve eine andere, von der früheren sehr wenig verschiedene Gestalt an; geht nämlich y über in $y + \delta y$, wo δy eine sehr kleine von x abhängige Grösse vorstellt, so geht dadurch

$$
\begin{array}{lll}
y' & \text{über in} & \frac{\partial\,(y+\delta y)}{\partial x} = y' + \delta y' \\
y'' & \text{"} \quad \text{"} & \frac{\partial^2 (y+\delta y)}{\partial x^2} = y'' + \delta y'' \\
\cdots & & \cdots \\
\cdots & & \cdots \\
y^{(n)} & \text{"} \quad \text{"} & \frac{\partial^n (y+\delta y)}{\partial x^n} = y^{(n)} + \delta y^{(n)}
\end{array}
$$

und U in U_1, V in V_1.

Entwickelt man nun V_1 nach der Taylor'schen Reihe, so hat man

$$V_1 = V + \frac{dV}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} + R$$

wo R der Kürze halber statt der Glieder der zweiten und höheren Ordnung der Taylor'schen Reihe gesetzt ist. Es ist daher:

$$U_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} R dx$$

oder

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} R dx$$

Dieser Ausdruck soll nun im Falle des Maximums stets negativ, und im Falle des Minimums stets positiv bleiben, wie immer auch δy beschaffen ist. — Denkt man sich nun statt δy, $\varepsilon\psi\ (x)$ gesetzt, unter ε eine sehr kleine Zahl verstanden, so lässt sich U_1—U folgendermassen darstellen:

$$U_1 - U = A\varepsilon + B\varepsilon^2 + C\varepsilon^3 + \ldots$$

wo

$$A\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} \right\} dx$$

ist, $B\varepsilon^2$ die Glieder der zweiten Ordnung, $C\varepsilon^3$ die Glieder der dritten Ordnung bezeichnet, u. s. f. und man hat bekanntlich für ein Maximum oder Minimum

$$A = o$$

für ein Maximum zu gleicher Zeit nach

$$B < o$$

und für ein Minimum

$$B > o$$

Wir haben also als Bedingungsgleichung für ein Maximum oder Minimum

$$(1) \qquad \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} \right\} dx = 0$$

Behandeln wir nun nach einander die einzelnen Glieder dieses Ausdruckes nach der Methode des theilweisen Integrirens, so haben wir, von der bekannten Formel

$$\int_{x_1}^{x_2} PQ^{(n)} dx = \left\{ Q^{(n-1)} P - Q^{(n-2)} P' + Q^{(n-3)} P'' - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1} QP^{(n-1)} \right\}_{x_1}^{x_2} + (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} QP^{(n)} dx$$

Gebrauch machend:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{\partial y}\delta y \quad \partial x = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial y}\delta y \, dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial y'}\delta y' \, dx = \left\{ \delta y \frac{\partial V}{\partial y'} \right\}_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left[\frac{\partial V}{\partial y'} \right]' dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial y''}\delta y'' \, dx = \left\{ \delta y' \frac{\partial V}{\partial y''} - \delta y \left[\frac{\partial V}{\partial y''} \right]' \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left[\frac{\partial V}{\partial y''} \right]'' dx$$

. . . .

. . . .

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} dx = \left\{ \delta y^{(n-1)} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} - \delta y^{(n-2)} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right]' + \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^{n-1} \delta y \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right]^{(n-1)} \right\}_{x_1}^{x_2} + (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right]^{(n)} dx$$

Werden diese Werthe in (1) substituirt, so erhält man:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} \right\} dx +$$

$$+ \left\{ \delta y \left\{ \frac{\partial V}{\partial y'} - \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} + \tag{2}$$

$$+ \left\{ \delta y' \left\{ \frac{\partial V}{\partial y''} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \left\{ \delta y^{(n-1)} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2} = 0$$

für die Bedingungsgleichung des Grössten oder Kleinsten.

Sucht man nun aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} = 0 \tag{3}$$

welche im Allgemeinen von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist, y als Function von x, setzt man dann diesen Werth von y in

$$\left\{ \delta y \left\{ \frac{\partial V}{\partial y'} - \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \left\{ \delta y' \left\{ \frac{\partial V}{\partial y''} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)} \right\} \right\}_{x_1}^{x_2} + \tag{4}$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \left\{ \delta y^{(n-1)} \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \right\}_{x_1}^{x_2}$$

und wählt man die in y auftretenden Constanten so, dass der Ausdruck (4) verschwindet, so ist der so gefundene Werth von y ein solcher, welcher die Gleichung (2) und somit auch die Gleichung (1) befriedigt. Ob aber dieses y wirklich das U zu einem Maximum oder Minimum macht, muss erst weiter untersucht werden, und diese Untersuchung bildet den Hauptgegenstand des hier vorliegenden Aufsatzes.

§. 2.

Betrachten wir nun die Glieder der zweiten Ordnung der Taylor'schen Reihe, sie sind:

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\delta y^2+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\delta y'^2+\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\delta y''^2+\ldots+\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}}\delta y^{(n)2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y'+2\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''}\delta y\delta y''+\ldots+2\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)}\partial y^{(n)}}\delta y^{(n-1)}\delta y^{(n)}\right\}dx$$

Setzt man der Kürze halber $\delta y = w$, $\delta y' = w'$, $\delta y'' = w''$, ... und $\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(r)}\partial y^{(s)}} = (r\,s)$, wodurch also $(r\,s) = (s\,r)$ wird, so kann man die Glieder unter dem Integralzeichen so ordnen:

$$\begin{aligned}
&(0\,0)\,w\ \ w+(0\,1)\,w\ \ w'+(0\,2)\,w\ \ w''+\ldots+(0\,n)\,w\ \ w^{(n)}+\\
+&(1\,0)\,w'\ \ w+(1\,1)\,w'\ \ w'+(1\,2)\,w'\ \ w''+\ldots+(1\,n)\,w'\ \ w^{(n)}+\\
+&(2\,0)\,w''\ \ w+(2\,1)\,w''\ \ w'+(2\,2)\,w''\ \ w''+\ldots+(2\,n)\,w''\ \ w^{(n)}+\\
+&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+&(n\,0)\,w^{(n)}w+(n\,1)\,w^{(n)}w'+(n\,2)\,w^{(n)}w''+\ldots+(n\,n)\,w^{(n)}w^{(n)}
\end{aligned}$$

oder endlich auch so:

$$\begin{aligned}
&w\ \ [(0\,0)\,w+(0\,1)\,w'+(0\,2)\,w''+\ \ldots\ +(0\,n)\,w^{(n)}]+\\
+&w'\ \ [(1\,0)\,w+(1\,1)\,w'+(1\,2)\,w''+\ \ldots\ +(1\,n)\,w^{(n)}]+\\
+&w''\ [(2\,0)\,w+(2\,1)\,w'+(2\,2)\,w''+\ \ldots\ +(2\,n)\,w^{(n)}]+\\
+&\ldots\\
+&w^{(n)}[(n\,0)\,w+(n\,1)\,w'+(n\,2)\,w''+\ \ldots\ +(n\,n)\,w^{(n)}]
\end{aligned}$$

Setzt man nun wieder der Kürze wegen

$$(r\,0)\,w+(r\,1)\,w'+(r\,2)\,w''+\ \ldots\ +(r\,n)\,w^{(n)} = M_r$$

so hat man für die Glieder der zweiten Ordnung

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{w\,M_0+w'M_1+w''M_2+\ \ldots\ +w^{(n)}M_n\}\,dx$$

Einen ganz ähnlichen Ausdruck erhielten wir für die Glieder der ersten Ordnung, demnach hat man:

$$U_1-U=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial V}{\partial y}w+\frac{\partial V}{\partial y'}w'+\frac{\partial V}{\partial y''}w''+\ \ldots\ +\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}w^{(n)}\right\}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\{M_0\,w+M_1\,w'+M_2\,w''+\ \ldots\ +M_n\,w^{(n)}\}\,dx+\ \ldots$$

wo in der ersten Zeile die Glieder der ersten, in der zweiten die Glieder der zweiten Ordnung stehen. Setzt man:

$$\frac{\partial V}{\partial y} w + \frac{\partial V}{\partial y'} w' + \frac{\partial V}{\partial y''} w'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} w^{(n)} = W$$

so ist, weil $w, w', w'' \ldots$ als reine Functionen von x vorausgesetzt sind:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = M_0,\ \frac{\partial W}{\partial y'} = M_1,\ \frac{\partial W}{\partial y''} = M_2,\ \ldots\ \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} = M_n$$

und folglich

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2} W dx + \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial W}{\partial y} \delta y + \frac{\partial W}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial W}{\partial y''} \delta y'' + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)}\right\} dx + \ldots$$

oder

$$U_1 - U = \int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)}\right\} dx +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{\partial W}{\partial y} \delta y + \frac{\partial W}{\partial y'} \delta y' + \ldots + \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)}\right\} dx + \ldots$$

So wie wir nun die Glieder der ersten Ordnung mittelst des theilweisen Integrirens umwandelten, genau so lassen sich auch die Glieder der zweiten Ordnung umwandeln, man hat nämlich für dieselben:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)}\right\} dx + \\
&+ \left\{\delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)}\right\}\right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \left\{\delta y' \left\{\frac{\partial W}{\partial y''} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)}\right\}\right\}_{x_1}^{x_2} + \\
&+ \ldots \\
&+ \left\{\delta y^{(n-1)} \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right\}_{x_1}^{x_2}
\end{aligned} \tag{5}$$

und dieses muss stets sein Zeichen beibehalten, wenn U ein Maximum oder Minimum sein soll.

§. 3.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich noch auf eine andere, von Legendre gezeigte Weise transformiren, wir wollen diese Transformation zuerst in dem speciellen Falle bewerkstelligen, wenn V blos eine Function ist von x, y, y'. Man setze alsdann:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 = (v w^2)' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} (w' + \lambda w)^2 \tag{6}$$

und bestimme λ und v so, dass dieser Gleichung identisch Genüge geschieht. Entwickelt man den zweiten Ausdruck, und ordnet ihn dann, so erhält man

$$w^2 \left[v' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right] + 2 w w' \left[v + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right] + w'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

woraus man sieht, dass λ und v so gewählt werden müssen, dass folgende zwei Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \end{aligned} \tag{7}$$

und diese sind hinreichend zur Bestimmung von λ und v.

Kömmt in V auch noch y'' vor, so setze man:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} w w'' + \\ &2\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} w' w'' = (v w^2 + 2 v_1 w w' + v_2 w'^2)' + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} (w + \lambda w' + \mu w)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Der zweite Theil gibt entwickelt und geordnet

$$\begin{aligned} &w^2 \left[v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + w'^2 \left[2 v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + w''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} + \\ &+ 2 w w' \left[v + v_1' + \lambda\mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + 2 w w'' \left[v_1 + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] + \\ &+ 2 w' w'' \left[v_2 + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right] \end{aligned}$$

Die Gleichung (8) wird nun identisch erfüllt, wenn v, v_1, v_2, λ und μ so gewählt werden, auf dass folgende Gleichungen stattfinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= 2 v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + v_1' + \lambda\mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} = v_1 + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} = v_2 + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

Kömmt in V auch noch y''' vor, so setze man:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} w'''^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} w w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} w w''' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} w' w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} w' w''' + \\
&+ 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} w'' w''' = (v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2 v_3 w w' + 2 v_4 w w'' + \\
&\qquad + 2 v_5 w' w'')' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} (w''' + \lambda_1 w'' + \lambda_2 w' + \lambda_3 w)^2
\end{aligned} \tag{10}$$

der zweite Theil dieser Gleichung gibt entwickelt und geordnet:

$$\begin{aligned}
&w^2 \left(v' + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + w'^2 \left(v_1' + 2 v_3 + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + \\
&+ w''^2 \left(v_2' + 2 v_5 + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + w'''^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} + \\
&+ 2 w w' \left(v + v_3' + \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + 2 w w'' \left(v_3 + v_4' + \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + \\
&+ 2 w w''' \left(v_4 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + 2 w' w'' \left(v_1 + v_4 + v_5' + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + \\
&+ 2 w' w''' \left(v_5 + \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right) + 2 w'' w''' \left(v_2 + \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)
\end{aligned}$$

und folglich muss, damit die Gleichung (10) identisch stattfinde, folgendes System von Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \lambda_3^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= v_1' + 2 v_3 + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} &= v_2' + 2 v_5 + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + v_3' + \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} &= v_3 + v_4' + \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} &= v_4 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} &= v_1 + v_4 + v_5' + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y'''} = v_5 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y''\partial y'''} = v_2 + \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$

Setzt man endlich ganz allgemein:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,\delta y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\,\delta y'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\,\delta y''^2 + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}}\,\delta y^{(n)2} +$$
$$+ 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\,\delta y \delta y' + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\,\delta y \delta y'' + 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''}\,\delta y' \delta y'' + \ldots$$
$$+ 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} dy^{(n)}}\,\delta y^{(n-1)} \delta y^{(n)} =$$
$$[U_{0,0}\,w^2 + U_{1,1}\,w'^2 + U_{2,2}\,w''^2 + \ldots U_{n-1,n-1} w^{(n-1)2} + 2U_{0,1}\,ww' +$$
$$2\,U_{0,2}\,ww'' + 2\,U_{1,2}\,w'w'' + \ldots + 2\,U_{n-2,n-1}\,w^{(n-2)} w^{(n-1)}]' +$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}}\,(w^{(n)} + \lambda_1\,w^{(n-1)} + \lambda_2\,w^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n w)^2$$

so gelangt man, wenn man den zweiten Theil dieser Gleichung entwickelt und ihn dem ersten identisch gleich setzt, zu einem Systeme von $\frac{n(n+3)}{2}$ Gleichungen, die hinreichen, um dieselbe Anzahl von Unbekannten, nämlich:

$$\begin{matrix} U_{0,0} & U_{1,1} & U_{2,2} & U_{n-1,n-1} \\ U_{0,1} & U_{0,2} & U_{1,2} & U_{n-2,n-1} \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_n \end{matrix}$$

zu bestimmen.

Anmerkung. Die Gleichung (6) setzt voraus, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ von Null verschieden ist, eben so setzt die Gleichung (8) voraus, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$; die Gleichung (10) dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$; und die letzte Gleichung, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}}$ von Null verschieden sind. Sind die genannten Ausdrücke aber Null, so müssen diese Gleichungen auf andere Art transformirt werden; wir werden später bei der Betrachtung der speciellen Fälle darüber ausführlich zur Sprache kommen.

§. 4.

Der Hauptzweck der ganzen hier durchzuführenden Analyse besteht aber gerade darin, diese Unbekannten zu finden. Würde man direct dieses Ziel verfolgen, so käme man zu Differentialgleichungen erster Ordnung, deren Lösung jedoch solche Schwierigkeiten darbieten, dass selbst so mächtige Geister wie Legendre, Lagrange.... diese nicht überwinden konnten. Durch eine äusserst feine und schwierige Analysis, die wir bald näher besprechen werden, gelangte Jacobi zur Integration derselben.

So ist nämlich die Differentialgleichung, welche sich aus der Elimination von λ aus den beiden Gleichungen (7) ergibt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - v'\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - v\right)^2$$

so sind ferner die Differentialgleichungen, welche sich durch Elimination von λ und μ aus den fünf Gleichungen (9) ergeben

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - v'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - v_1\right)^2$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - 2v_1 - v_2'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - v_2\right)^2$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - v - v_1'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - v_1\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - v_2\right)$$

und die aus der Elimination von $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ aus den Gleichungen (11) hervorgehenden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - v'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - v_4\right)^2$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} - v_1' - 2v_3\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - v_5\right)^2$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} - v_2' - 2v_5\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - v_2\right)^2$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - v - v_3'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - v_5\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - v_4\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - v_3 - v_4'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - v_2\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - v_4\right)$$
$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - v_1 - v_4 - v_5'\right)\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - v_2\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - v_5\right)$$

und so kömmt man, je weiter man fortschreitet, zu immer mehr, aber wenigstens nicht zu complicirteren Gleichungen ersten Grades.

Aber das ist klar, dass wenn man bei dem ersten hier erwähnten Beispiele λ kennen würde, v sich ohne Integration ergäbe, es ist nämlich

$$v = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - \lambda\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

eben so, wenn man bei dem zweiten Beispiele λ und μ kennen würde, v, v_1 und v_2 fast gar keine Berechnung mehr erfordern, es ist nämlich

$$v_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$
$$v_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$
$$v = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right)' - \lambda\mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$

und so hätte man im dritten Beispiele, wenn $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ bekannt wären:

$$v_2 = \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} - \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$v_4 = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$v_5 = \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$v_1 = \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} - \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)' - \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$v_3 = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)' - \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$
$$v = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} - \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)''$$
$$+ \left(\lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\right)' - \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}$$

u. s. f. u. s. f.

Durch wiederholt angewandte und geschickt durchgeführte partielle Integration gelang es **Jacobi**, den Ausdruck:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \cdots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)}\right\} dx$$

so zu transformiren, dass unter dem Integralzeichen ein vollständiges Quadrat zu stehen kömmt; oder mit andern Worten, es gelang ihm, den Ausdruck (5) auf die Form:

$$\Big\{U_{0,0}\ \delta y^2 + U_{1,1}\ \delta y'^2 + U_{2,2}\ \delta y''^2 + \cdots + U_{n-1,n-1}\ \delta y^{(n-1)2}$$
$$+ 2\ U_{0,1}\ \delta y \delta y' + 2\ U_{0,2}\ \delta y \delta y'' + 2\ U_{1,2}\ \delta y' \delta y'' + \cdots$$
$$+ 2\ U_{n-2,n-1}\ \delta y^{(n-2)}\ \delta y^{(n-1)}\Big\}_{x_1}^{x_2}$$
$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}} \left[\delta y^{(n)} + \lambda_1\ \delta y^{(n-1)} + \lambda_2\ \delta y^{(n-2)} + \cdots + \lambda_n\ \delta y\right]^2 dx$$

zu bringen, woraus sich also unmittelbar die Werthe von λ ergeben, und folglich mittelst derselben die übrigen zu bestimmenden Grössen.

Dies ist die Haupt-Pointe dieser höchst merkwürdigen Jacobi'schen Arbeit. Mir ist es geglückt, auf eine andere viel einfachere Weise die Werthe von λ zu bestimmen, wodurch sich die complicirte und schwierige Transformation Jacobi's umgehen lässt.

§. 5.

Ich will vorerst den Beweis eines von Jacobi erwähnten Lehrsatzes führen, der für diese Theorie von grosser Wichtigkeit ist. Es sei

$$\varphi\,(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0 \tag{12}$$

eine Differentialgleichung n^{ten} Grades,

$$y = \psi\,(x, a_1, a_2, a_3, \dots a_n) \tag{13}$$

das vollständige Integrale derselben. Denkt man sich diesen Werth von y in (12) eingeführt, so erhält man eine identische Gleichung; differenzirt man dann dieselbe noch irgend ein a, so erhält man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial a} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}\frac{\partial y^{(n)}}{\partial a} = 0 \tag{14}$$

und dies ist offenbar wieder eine identische Gleichung. Setzt man:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = z, \text{ so ist: } \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial a} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)}{\partial x}, \text{ oder } \frac{\partial y'}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

und eben so:

$$\frac{\partial y''}{\partial a} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial y'''}{\partial a} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \dots \frac{\partial y^{(n)}}{\partial a} = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}$$

und die Gleichung (14) geht über in:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}z + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}z' + \frac{\partial\varphi}{\partial y''}z'' + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}z^{(n)} = 0 \tag{15}$$

und ist, wie man sieht, eine lineare Differentialgleichung, der genügt wird für

$$z = \frac{\partial y}{\partial a_1},\ z = \frac{\partial y}{\partial a_2},\ z = \frac{\partial y}{\partial a_3}, \dots z = \frac{\partial y}{\partial a^n}$$

es ist folglich das vollständige Integrale derselben:

$$z = C_1\frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2\frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3\frac{\partial y}{\partial a_3} + \dots + C_n\frac{\partial y}{\partial a_n}$$

Kennt man daher das Integrale der Gleichung (12), so kennt man auch das Integrale der Gleichung (15), vorausgesetzt, dass man in $\frac{d\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \frac{\partial\varphi}{\partial y''}, \ldots \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n)}}$ statt y seinen in (13) stehenden Werth gesetzt hat.

Betrachten wir nun die zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)} = 0 \tag{16}$$

welche, da

$$W = \frac{\partial V}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial V}{\partial y'}\,\delta y' + \frac{\partial V}{\partial y''}\,\delta y'' + \ldots + \frac{\partial V}{\partial y^{(n)}}\,\delta y^{(n)}$$

ist, in demselben analytischen Zusammenhange stehen, wie die Gleichungen (12) und (15), so hat man, wenn das Integral der Gleichung (3)

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2, a_3, \ldots a_m)$$

ist, für das Integrale der Gleichung (16)

$$\delta y = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + C_m \frac{\partial y}{\partial a_m}$$

unter $C_1, C_2, C_3, \ldots C_m$ willkürlichen Constanten verstanden.

§. 6.

Um nun zu den allgemeinen Ausdrücken von $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ zu gelangen, betrachte man die zu identificirende Gleichung

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \ldots + (-1)^n \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n)}\right\} dx +$$

$$+ \left\{\delta y \left\{\frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-1} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-1)}\right\}\right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \left\{\delta y' \left\{\frac{\partial W}{\partial y''} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''''}\right]'' - \ldots + (-1)^{n-2} \left[\frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right]^{(n-2)}\right\}\right\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left\{\delta y^{(n-1)} \frac{\partial W}{\partial y^{(n)}}\right\}_{x_1}^{x_2} =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n)2}} \left(\delta y^{(n)} + \lambda_1 \, \delta y^{(n-1)} + \lambda_2 \, \delta y^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n \, \delta y \right)^2 +$$
$$+ \{ U_{0,0} \, \delta y^2 + U_{1,1} \, \delta y'^2 + U_{2,2} \, \delta y''^2 + \ldots + U_{n-1,n-1} \, \delta y^{(n-1)2} +$$
$$+ 2 \, U_{0,1} \, \delta y \, \delta y' + 2 \, U_{0,2} \, \delta y \, \delta y'' + 2 \, U_{1,2} \, \delta y' \, \delta y'' + \ldots$$
$$+ 2 \, U_{n-2,n-1} \, \delta y^{(n-2)} \, \delta y^{(n-1)} \}_{x_1}^{x_2}$$

Setzt man in dem ersten Theile derselben statt δy den Ausdruck:

$$A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + A_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

unter $A_1 \; A_2 \; A_3 \ldots A_{2n}$ willkürliche Constante verstanden, so verschwindet das unter dem Integralzeichen Stehende; folglich muss auch der Ausdruck unter dem Integralzeichen im zweiten Theile der Gleichung, wenn man statt δy denselben Werth setzt, verschwinden, weil dieser Theil dem ersten identisch gleich sein soll, oder mit andern Worten

$$\delta y = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + A_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

muss ein particuläres Integrale der Differentialgleichung

$$\delta y^{(n)} + \lambda_1 \, \delta y^{(n-1)} + \lambda_2 \, \delta y^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n \, \delta y = 0 \tag{17}$$

sein. Setzt man ferner:

$$\delta y = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + B_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

unter $B_1, B_2, B_3 \ldots B_{2n}$ ebenfalls willkürliche Constante verstanden, so lässt sich von diesem Ausdrucke dasselbe sagen, ebenso wenn man:

$$\delta y = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + \ldots + C_{2n} \frac{\partial y}{\partial a_{2n}}$$

setzen würde, u. s. f. Man kann daher n solche Ausdrücke als die n particulären Integrale der Gleichung (17) betrachten, und demgemäss die Coëfficienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ bestimmen. Nennt man diese Werthe von δy der Reihe nach

$$u_1, \; u_2, \; u_3 \; \ldots \; u_n$$

so hat man folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
u_1^{(n)} + \lambda_1\, u_1^{(n-1)} + \lambda_2\, u_1^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n\, u_1 &= 0 \\
u_2^{(n)} + \lambda_1\, u_2^{(n-1)} + \lambda_2\, u_2^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n\, u_2 &= 0 \\
u_3^{(n)} + \lambda_1\, u_3^{(n-1)} + \lambda_2\, u_3^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n\, u_3 &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n^{(n)} + \lambda_1\, u_n^{(n-1)} + \lambda_2\, u_n^{(n-2)} + \ldots + \lambda_n\, u_n &= 0
\end{aligned}$$

aus welchen sich leicht $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_n$ berechnen lassen.

In den auf diese Weise entstehenden Ausdrücken für $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ erscheinen $2n^2$ constante Grössen, die aber nicht ganz willkürlich, sondern gewissen Bedingungen unterworfen sind. Es scheint ziemlich schwierig zu sein, diese ganz allgemein anzugeben, wir begnügen uns daher nach Jacobi's und besonders Delaunay's Vorgang mit der ausführlichen Untersuchung specieller Fälle.

§. 7.

Untersuchung des speciellen Falles, wenn $V = \varphi\,(x\,, y\,, y')$ ist.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich, wie auch ganz allgemein gezeigt wurde, auf folgende drei verschiedene Weisen darstellen:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\, w^2 + 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\, w w' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\, w'^2 \right) dx \tag{18}$$

$$\left\{ w \cdot \frac{\partial W}{\partial y'} \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} w \left\{ \frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'} \right]' \right\} dx \tag{19}$$

$$\left\{ v\, w^2 \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\, (w' + \lambda\, w)^2\, dx \tag{20}$$

die einander identisch gleich sind. Die in (19) vorkommende Grösse W ist gleich

$$W = \frac{\partial V}{\partial y}\, w + \frac{\partial V}{\partial y'}\, w'$$

und die in (20) vorkommenden Grössen v und λ haben zu genügen den Gleichungen (7), diese sind:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 V}{\partial y^2} &= v' + \lambda^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + \lambda\, \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Wir nehmen an, dass die Gleichung

$$\frac{dV}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' = 0$$

integrirt werden kann, und dass ihr Integral

$$y = \varphi(x, a_1, a_2)$$

sei; das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' = 0$$

die sich in entwickelter Gestalt auch so schreiben lässt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'' + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w' + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] w = 0 \qquad (21)$$

ist dann:

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$$

was wir der Kürze wegen $w = u$ schreiben wollen. Wir wählen nun λ so, dass $w = u$ das Integral der linearen Differentialgleichung:

$$w' + \lambda w = 0$$

werde, und haben demgemäss

$$u' + \lambda u = 0$$

woraus

$$\lambda = -\frac{u'}{u}$$

folgt. Aus der zweiten der Gleichungen (7) ergibt sich dann:

$$v = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} + \frac{u'}{u} \frac{d^2 V}{\partial y'^2}$$

und jetzt bleibt uns nur noch übrig, um unsere Analyse gegen jeden Einwand zu sichern, nachzuweisen, dass die Werthe von λ und v der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = v' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

identisch genügen. Substituirt man daher λ und v in dieser Gleichung, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' + \frac{u'}{u}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)' + \frac{d^2 V}{\partial y'^2} \cdot \frac{uu'' - u'^2}{u^2} + \frac{u'^2}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$$

Die beiden letzten Glieder heben sich auf, multiplicirt man dann die ganze Gleichung mit u und ordnet gehörig, so erhält man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} u'' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)' u' + \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] u = 0$$

was wirklich identisch stattfindet, weil $w=u$ das Integrale der Gleichung (21) ist. Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,w^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}\,ww'+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\,w'^2\right)dx=$$

$$=\left\{w^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}+\frac{C_1\,\frac{\partial y'}{\partial a_1}+C_2\,\frac{\partial y'}{\partial a_2}}{C_1\,\frac{dy}{\partial a_1}+C_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right]\right\}_{x_1}^{x_2}+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(w'-\frac{C_1\,\frac{\partial y'}{\partial a_1}+C_2\,\frac{\partial y'}{\partial a_2}}{C_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1}+C_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2}}\,w\right)^2 dx$$

oder wenn man $\frac{C_2}{C_1}=m$ setzt, so ist der zweite Theil dieser Gleichung

$$\left\{w^2\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}+\frac{\frac{\partial y'}{\partial a_1}+m\,\frac{\partial y'}{\partial a_2}}{\frac{\partial y}{\partial a_1}+m\,\frac{\partial y}{\partial a_2}}\,\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right]\right\}_{x_1}^{x_2}+$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(w'-\frac{\frac{dy'}{\partial a_1}+m\,\frac{\partial y'}{\partial a_2}}{\frac{\partial y}{\partial a_1}+m\,\frac{\partial y}{\partial y_2}}\,w\right)^2 dx$$

welcher eine willkürliche Constante enthält, was übrigens schon daraus folgt, weil v durch eine Differentialgleichung ersten Grades gegeben ist.

Die Kriterien sind daher in diesem Falle höchst einfach $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y dy'}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen, denn sonst würde der erste Theil der letzten Gleichung nämlich der Ausdruck (18) unstättig sein; ferner muss $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ für alle Werthe von $x=x_1$ bis $x=x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, endlich muss noch die willkürliche Constante m so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der Nenner $\frac{\partial y}{\partial a_1}+m\,\frac{\partial y}{\partial a_2}$ gleich Null wird.

Findet alles dieses Statt, und lässt sich ein solcher Werth von m ausfindig machen; der es unmöglich macht, dass zwischen den Integrationsgrenzen $\frac{\partial y}{\partial a_1}+m\frac{\partial y}{\partial a_2}=o$ wird, so kann man, weil für die Grenzwerthe w gleich Null ist, die obige Gleichung so schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,\delta y^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}\,\delta y\,\frac{d\delta y}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2\right]dx=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{d^2 V}{dy'^2}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}-\frac{\dfrac{\partial y'}{\partial a_1}+m\dfrac{\partial y'}{\partial a_2}}{\dfrac{\partial y}{\partial a_1}+m\dfrac{\partial y}{\partial a}}\,\delta y\right)^2.\,dx$$

und hat somit ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}$ für alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Werthe negativ oder positiv ist.

§. 8.

Ist aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}=0$, d. h. ist $V=f(x,y)+y'f(x,y)$, (ein Fall, den weder Jacobi noch Delaunay einer Discussion unterzog) so muss die eben angeführte Analyse abgeändert werden, denn man hat statt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y}-\left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]'=0$$

die sich hier so stellt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+y'\,\frac{\partial f}{\partial y}-[f(x,\,y)]'=0$$

wenn man gehörig reducirt, folgende gewöhnliche Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

aus welcher y als Function von x ohne willkürliche Constante hervorgeht. Die unmittelbare Folge hiervon ist, dass die Coordinaten der Grenzpunkte der gesuchten Curven nicht mehr, wie im vorhergehenden Falle willkürlich, sondern der Bedingung unterworfen sind, der zuletzt aufgeschriebenen Gleichung zu genügen, d. h. mit andern Worten, die Endpunkte sind Punkte der Curve, deren Gleichung $\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}=0$ ist; findet dieses nicht Statt, so ist die Aufgabe unmöglich.

Hier hat man nun:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,w^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}\,w\,w'\right)dx=\left\{w\,\frac{\partial W}{\partial y'}\right\}_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}w\left\{\frac{\partial W}{\partial y}-\left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]'\right\}dx$$

wo, wie man leicht sieht:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' = \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] w$$

und

$$\frac{\partial W}{\partial y'} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w$$

ist; da ferner für die Grenzwerthe $w = 0$ ist, so folgt:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w'\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} w^2 \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right] dx$$

und es gelten daher in diesem speciellen Falle für die Kriterien des Grössten und Kleinsten folgende Vorschriften:

Die Glieder $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}$ dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen, ferner muss:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, und zwar ein negatives, wenn ein Maximum und ein positives, wenn ein Minimum sein soll.

Wäre auch $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ so wäre Vdx ein vollständiges Differential, und die Untersuchung müsste dann auf andere Art geführt werden.

§. 9.

Untersuchung des speciellen Falles, wenn $V = \psi(x, y, y', y'')$ ist.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich in diesem Falle auf folgende drei verschiedene Weisen darstellen:

$$(22) \qquad \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} w''^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} w w' + \right.$$
$$\left. + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y\, y''} w w'' + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} w' w''\right) dx$$

$$(23) \qquad \left[w \left\{\frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'\right\} + w' \frac{\partial W}{\partial y''}\right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} w \left\{\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]''\right\} dx$$

$$(vw^2 + 2\,v_1 w w' + v_2 w'^2)_{x_1}^{x_2} + \int_x^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} (w'' + \lambda w' + \mu w)^2\, dx \tag{24}$$

die einander identisch gleich sind. Die in (23) vorkommende Grösse W ist gleich

$$W = \frac{\partial V}{\partial y}\, w + \frac{\partial V}{\partial y'}\, w' + \frac{\partial V}{\partial y''}\, w''$$

und die in (24) vorkommenden Grössen v, v_1, v_2, λ und μ haben zu genügen den Gleichungen (9), diese sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= 2\, v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + v_1' + \lambda\mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} &= v_1 + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} &= v_2 + \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}
\end{aligned} \tag{9}$$

Wir nehmen an, dass die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' = 0$$

integrirt werden kann, und dass ihr Integrale

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

sei; das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' = 0$$

die sich in entwickelter Gestalt auch so schreiben lässt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\, w'''' + 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right)' w''' + \left[2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} - \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''}\right)' + \right. \\
&\quad + \left.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\right)''\right] w'' + \left[2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\right)' - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''}\right)''\right] w' + \\
&\quad + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\right)''\right] w = 0
\end{aligned}$$

oder kürzer, wenn man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = A,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = B,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = C,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} = D,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} = E,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} = F$$

setzt

$$C w'''' + 2 C w''' + (2E - B + D' + C'') w'' + (2E - B' + \\ + D'') w' + (A - F + E'') w = 0 \tag{25}$$

ist dann:

$$\delta y = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

oder

$$\delta y = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

von denen wir das erstere mit u_1 das zweite mit u_2 bezeichnen. Wählen wir nun λ und μ so, dass $\delta y = u_1$ und $\delta y = u_2$ die particulären Integrale der linearen Differenzialgleichung

$$w'' + \lambda w' + \mu w = 0$$

werden, so haben wir demgemäss:

$$u_1'' + \lambda u_1' + \mu u_1 = 0$$
$$u_2'' + \lambda u_2' + \mu u_2 = 0$$

woraus

$$\lambda = \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

$$\mu = \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

folgen. Aus den drei letzten der Gleichungen (9) ergeben sich dann:

$$\begin{aligned} v &= F - \left(E - \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C\right)' - \\ &\quad - \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C \\ v_1 &= E - \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C \\ v_2 &= D - \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'} . C \end{aligned} \tag{26}$$

und jetzt bleibt uns wieder nur noch übrig, um unsere Analyse gegen jeden Einwand zu sichern, nachzuweisen, dass die gefundenen Werthe von λ, μ, v_1 und v_2 erstens den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = 2 v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$$

identisch genügen, und zweitens, dass sie mit der gehörigen Anzahl willkürlicher Constanten versehen sind. Da die Gleichungen (9) durch Elimination von λ und μ auf drei Differentialgleichungen ersten Grades führen, so müssen in den Resultaten unserer Rechnung drei willkürliche Constante erscheinen. Berechnen wir vorerst die Werthe von λ und μ. Wir haben:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} \\
u_1' &= A_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} \\
u_1'' &= A_1 \frac{\partial y''}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} \\
u_2' &= B_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} \\
u_2'' &= B_1 \frac{\partial y''}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 u_2' - u_2 u_1' = {} & C_1 \left(\frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y'}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3} \frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y'}{\partial a_3}\right) + \\
& + C_3 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4} \frac{\partial y'}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y'}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3} \frac{\partial y'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y'}{\partial a_3}\right) + \qquad (27) \\
& + C_5 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4} \frac{\partial y'}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y'}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4} \frac{\partial y'}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3} \frac{\partial y'}{\partial a_4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1 u_2'' - u_2 u_1'' = {} & C_1 \left(\frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y''}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3} \frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
& + C_3 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4} \frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y}{\partial a_1} \frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial y}{\partial a_3} \frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
& + C_5 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4} \frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y}{\partial a_2} \frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial y}{\partial a_4} \frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3} \frac{\partial y''}{\partial a_4}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1' u_2'' - u_2' u_1'' = {} & C_1 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_2} \frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1} \frac{\partial y''}{\partial a_2}\right) + C_2 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_3} \frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1} \frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
& + C_3 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_4} \frac{\partial y''}{\partial a_1} - \frac{\partial y'}{\partial a_1} \frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_4 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_3} \frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y'}{\partial a_2} \frac{\partial y''}{\partial a_3}\right) + \\
& + C_5 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_4} \frac{\partial y''}{\partial a_2} - \frac{\partial y'}{\partial a_2} \frac{\partial y''}{\partial a_4}\right) + C_6 \left(\frac{\partial y'}{\partial a_4} \frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y'}{\partial a_3} \frac{\partial y''}{\partial a_4}\right)
\end{aligned}
$$

wo $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ folgende Bedeutungen haben:

$$
(28) \qquad
\begin{aligned}
C_1 &= A_2B_1 - A_1B_2 \\
C_2 &= A_3B_1 - A_1B_3 \\
C_3 &= A_4B_1 - A_1B_4 \\
C_4 &= A_3B_2 - A_2B_3 \\
C_5 &= A_4B_2 - A_2B_4 \\
C_6 &= A_4B_3 - A_3B_4
\end{aligned}
$$

Wir wollen die Gleichungen (27) kurz so schreiben:

$$
\begin{aligned}
u_1 u_2' - u_2 u_1' &= C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + C_4P_4 + C_5P_5 + C_6P_6 \\
u_1u_2'' - u_2u_1'' &= C_1Q_1 + C_2Q_2 + C_3Q_3 + C_4Q_4 + C_5Q_5 + C_6Q_6 \\
u_1'u_2'' - u_2'u_1'' &= C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3 + C_4R_4 + C_5R_5 + C_6R_6
\end{aligned}
$$

wo $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, constant, P, Q, R hingegen bestimmte Functionen von x sind. In λ und μ erscheinen somit blos sechs Constante, nämlich die erwähnten $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$, welche aber nicht ganz willkürlich sind, da

$$C_1C_6 - C_2C_5 + C_3C_4 = 0$$

ist, wie man sich durch unmittelbarer Entwicklung des Ausdruckes

$$(A_2 B_1 - A_1 B_2)(A_4 B_3 - A_3 B_4) - (A_3 B_1 - A_1 B_3)(A_4 B_2 - \\ - A_2 B_4) + (A_4 B_1 - A_1 B_4)(A_3 B_2 - A_2 B_3)$$

überzeugen kann. Es lässt sich folglich λ und μ so darstellen.

$$
(29) \qquad
\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{C_1Q_1 + C_2Q_2 + C_3Q_3 + C_4Q_4 + C_5Q_5 + C_6Q_6}{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + C_4P_4 + C_5P_5 + C_6P_6} \\
\mu &= \frac{C_1R_1 + C_2R_2 + C_3R_3 + C_4R_4 + C_5R_5 + C_6R_6}{C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 + C_4P_4 + C_5P_5 + C_6P_6}
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner von λ und μ mit C_5 und setzt statt $C_2\, C_5$ seinen Werth $C_1\, C_6 + C_3\, C_4$, so erscheinen in λ und μ blos die Constanten

$$C_1, C_3, C_4, C_5, C_6$$

man kann dann noch durch irgend einen der Coëfficienten Zähler und Nenner dividiren, und hat somit in λ und μ blos die vier Verhältnisse

$$\frac{C_3}{C_1},\ \frac{C_4}{C_1},\ \frac{C_5}{C_1},\ \frac{C_6}{C_1}$$

eingeführt. — Man kann noch zum Überflusse bemerken, dass zwischen den Grössen $P, Q, R,$ die Gleichungen stattfinden:

$$P_1\, P_3 - P_2\, P_5 + P_3\, P_4 = 0$$
$$Q_1\, Q_6 - Q_2\, Q_5 + Q_3\, Q_4 = 0$$
$$R_1\, R_3 - R_2\, R_5 + R_3\, R_4 = 0$$

Nehmen wir jetzt die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \mu^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= 2v_1 + v_2' + \lambda^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

vor, und setzen in ihnen zuerst statt v, v_1 und v_2 ihre Werthe, so hat man:

$$(\mu^2 C - A) + (F - \lambda\mu C)' + (\mu C - E)'' = 0$$
$$2E - B + (\lambda^2 - 2\mu) C + (D - \lambda C)' = 0$$

Entwickelt man diese Ausdrücke, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\mu^2 C - A + F - \lambda\mu C' - \lambda C\mu' - \mu C\lambda' + \mu'' C +\\ 2\mu' C' + \mu C'' - E'' = 0\\ 2E - B + \lambda^2 C - 2\mu C + D' - \lambda C' - \lambda' C = 0\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Setzt man nun der Kürze halber:

$$\begin{aligned}u_1\, u_2' - u_2\, u_1' &= M_1\\ u_1\, u_2'' - u_2\, u_1'' &= M_2\\ u_1\, u_2''' - u_2\, u_1''' &= M_3\\ u_1'\, u_2'' - u_2'\, u_1'' &= M_4\\ u_1\, u_2'''' - u_2\, u_1'''' &= M_5\\ u_1'\, u_2''' - u_2'\, u_1''' &= M_6\\ u_1'\, u_2'''' - u_2'\, u_1'''' &= M_7\\ u_1''\, u_2''' - u_2''\, u_1''' &= M_8\end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{M_2}{M_1}\\ \mu &= \frac{M_4}{M_1}\\ \lambda' &= -\frac{M_3}{M_1} - \mu + \lambda^2\\ \mu' &= \frac{M_6}{M_1} + \lambda\mu\\ \mu'' &= \frac{M_7}{M_1} + \frac{M_8}{M_1} + 2\lambda\mu' - \lambda^2\mu + \lambda'\mu\end{aligned}$$

und wenn man in (31) die Substitution für μ'' durchführt, so hat man statt der Gleichungen (31) folgende Gleichungen:

$$\mu^2 C - A + F' - \lambda\mu C' + \lambda C\mu' + \mu C'' + 2\,\mu' C' - E'' - C\lambda^2\mu + \\ + C\left(\frac{M_7}{M_1} + \frac{M_8}{M_1}\right) = 0$$

$$2\,E - B + \lambda^2 C - 2\,\mu C + D' - \lambda C' - \lambda' C = 0.$$

Setzt man jetzt für λ' und μ' ihre Werthe, so hat man:

$$\mu^2 C - A + F' + \lambda\mu C' + \mu C'' - E'' + C\left(\frac{M_7}{M_1} + \frac{M_8}{M_1} + \lambda\,\frac{M_6}{M_1}\right) + \\ + 2\,C'\,\frac{M_6}{M_1} = 0$$

$$2\,E + D' - \lambda C' - B - \mu C + C\,\frac{M_3}{M_1} = 0.$$

Setzt man endlich auch noch für λ und μ ihre Werthe, so hat man:

$$(32)\qquad C\,\frac{M_4^2}{M_1^2} - A + F' - E'' - C\,\frac{M_3}{M_1}\,\frac{M_4}{M_1} + C''\,\frac{M_4}{M_1} + \\ + C\,\frac{M_7}{M_1} + C\,\frac{M_8}{M_1} - C\,\frac{M_3}{M_1}\,\frac{M_6}{M_1} + 2\,C'\,\frac{M_6}{M_1} = 0$$

$$2\,E + D' - B + C'\,\frac{M_2}{M_1} - C\,\frac{M_4}{M_1} + C\,\frac{M_3}{M_1} = 0$$

Die erste dieser beiden Gleichungen lässt sich reduciren, wenn man statt $-A+F'-E''$ seinen ihm identisch gleichen Werth setzt, den wir auf folgende Weise erhalten:

Setzt man in der Gleichung (25) statt w, u_1 oder u_2 so erhält man stets eine identische Gleichung, weil u_1 sowohl als auch u_2 die vollständigen Integrale dieser Gleichung sind, man hat daher:

$$(33)\qquad \begin{aligned} &C\,u_1'''' + 2\,C'\,u_1''' + u_1''\,(2\,E + D' + C'' - B) + \\ &+ u_1'\,(2\,E' + D'' - B') + u_1\,(A - F' + E'') = 0 \\ &C\,u_2'''' + 2\,C'\,u_2''' + u_2''\,(2\,E + D' + C'' - B) + \\ &+ u_2'\,(2\,E' + D'' - B') + u_2\,(A - F' + E'') = 0 \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste derselben mit u_2' die zweite mit u_1' und subtrahirt dann beide, so erhält man folgende identische Gleichung:

$$C\,(u_2'\,u_1'''' - u_1'\,u_2'''') + 2\,C'\,(u_2'\,u_1''' - u_1'\,u_2''') + \\ + (u_2'\,u_1'' - u_1'\,u_2'')\,(2E + D' + C'' - B) \\ + (u_1\,u_2' - u_2\,u_1')\,(A - F' + E'') = 0$$

aus welcher folgt:

$$-A+F'-E'' = -C\cdot\frac{M_7}{M_1} - 2\,C'\cdot\frac{M_6}{M_1} - (2\,E + D' + C'' - B)\cdot\frac{M_4}{M_1}$$

Dies in die erste der Gleichungen (32) eingeführt und reducirt gibt:

$$C\left(\frac{M_4^2}{M_1^2}+\frac{M_8}{M_1}-\frac{M_2}{M_1}\frac{M_6}{M_1}\right)-C'\frac{M_2}{M_1}\frac{M_4}{M_1}-(2\,E+D'-B)\frac{M_4}{M_1}=0$$

Nun ist aber: $M_3\,M_4+M_1\,M_8-M_2\,M_6=o$; folglich:

$$\frac{M_8}{M_1}-\frac{M_2}{M_1}\frac{M_6}{M_1}=-\frac{M_4}{M_1}\frac{M_3}{M_1}$$

und setzt man dies in den obigen Ausdruck, so lässt sich durchgehends $\frac{M_4}{M_1}$ als gemeinschaftlicher Factor herausheben, und man erhält:

$$-\frac{M_4}{M_1}\left(2\,E+D'-B+C'\frac{M_2}{M_1}-C\frac{M_4}{M_1}+C\frac{M_3}{M_1}\right)=0$$

Man sieht hieraus, dass die beiden Gleichungen (32) befriedigt werden, wenn nur die zweite derselben befriedigt wird. Diese lässt sich nun so schreiben:

$$M_1\,(2\,E+D'-B)+C'\,M_2+C\,(M_3-M_4)=0 \tag{34}$$

Differentiirt man dieselbe nach x, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$+\,C\,M_5+2\,C'\,M_3+(C''+2\,E+D'-B)\,M_2+$$
$$+\,(2\,E'+D''-B')\,M_1=0$$

Multiplicirt man aber die erste der Gleichungen (33) mit u_2 die zweite mit u_1 und subtrahirt man dann beide, so erhält man genau dieselbe Gleichung, zu der wir jetzt gekommen sind. Da aber die Gleichungen (33) identisch stattfinden, so muss auch die aus ihnen gefolgerte identisch stattfinden; ist daher das Differential der Gleichung (34) identisch Null, so muss auf der linken Seite der Gleichung (34) eine reine Function der Constanten

$$C_1,\quad C_2,\quad C_3,\quad C_4,\quad C_5,\quad C_6$$

stehen, welche, so wie der rechte Theil der Gleichung, Null ist. Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}w^2+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}w'^2+\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}w''^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y'}ww'+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial y''}ww''+\right.$$
$$\left.+\;2\,\frac{\partial^2 V}{\partial y'\partial y''}\,w'\,w''\right\}dx=$$
$$\Big\{v\,w^2+2\,v_1\,ww'+v_2\,w'^2\Big\}_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\,(w''+\lambda\,w'+\mu\,w)^2\,dx$$

wo v, v_1, v_2, λ und μ die in (26) und (29) angegebenen, mit sechs Constanten versehenen Werthe haben, zwischen denen die 2 Bedingungsgleichungen

$$C_1\ C_6 - C_2\ C_5 + C_3\ C_4 = 0$$
$$M_1\ (2\ E + D' - B) + C'\ M_2 + C\ (M_3 - M_4) = 0$$

stattfinden; da ausserdem blos die Verhältnisse der Constanten in den Werthen von v, v_1, v_2, λ und μ eintreten, so haben sie die nothwendige Allgemeinheit.

Die Kriterien sind daher auch in diesem Falle nicht complicirt. Die zweiten Differential-Quotienten von V dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen; ferner muss $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$ für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, endlich müssen noch die drei in der Rechnung eintretenden willkürlichen Constanten so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der gemeinschaftliche Nenner von λ und μ gleich Null wird.

Findet alles dieses Statt, und lassen sich für die drei Constanten solche Werthe ausfindig machen, durch die es unmöglich wird, dass der Nenner von λ und μ innerhalb der Integrationsgrenzen gleich Null wird, so kann man, wenn für die Grenzwerthe nicht nur $w = o$ sondern auch $w' = o$ ist, die Glieder der zweiten Ordnung so schreiben:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\ (w'' + \lambda\ w' + \mu\ w)^2\ .\ dx$$

und man hat somit ein Maximum oder Minimum, je nachdem $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}$ für alle zwischen x_1 und x_2 liegenden Werthe negativ oder positiv ist.

§. 10.

Ist aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = 0$, d. h. ist $V = f\ (x,\ y,\ y') + y''f\ (x,\ y,\ y')$, so muss die eben angeführte Analyse abgeändert werden, denn die zwei Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' = 0$$
$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' = 0$$

die im Vorhergehenden von der vierten Ordnung waren, gehen jetzt in Differentialgleichungen der zweiten Ordnung über, namentlich erscheint die letztere von ihnen in folgender Form:

$$(2E-B+D')w''+(2E'-B'+D'')w'+(A-F'+E'')w=0$$

und die Integrale der angeführten zwei Gleichungen sind:

$$y=\varphi(x, a_1, a_2)$$
$$\delta y=C_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+C_2\frac{\partial y}{\partial a_2}$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden.

Bevor wir weiter gehen, bemerken wir, dass in dem hier betrachteten Falle wohl die Endpunkte der Curven, für welche das vorgelegte Integrale ein Maximum oder Minimum werden soll, willkürlich gewählt werden können, nicht aber die Richtung der Tangente an diesen Punkten, diese muss vielmehr aus der Gleichung $y=\varphi(x, a_1, a_2)$ gezogen werden, und ist somit ganz bestimmt; oder wenn man die Tangente an den Endpunkten willkürlich wählen würde, so müssten die Endpunkte solche Coordinaten haben, dass sie der Gleichung $y=\varphi(x, a_1, a_2)$ genügen.

Wir setzen nun an die Stelle des Ausdruckes (24) den Ausdruck:

$$\left\{v\,w^2+2\,v_1\,w\,w'+v_2\,w'^2\right\}_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}P\,(w'+\lambda\,w)^2\,dx$$

somit statt der Gleichung (8), die Gleichung:

$$A\,w^2+B\,w'^2+2\,F\,w\,w'+2\,E\,w\,w''+2\,D\,w'\,w''=$$
$$=(v\,w^2+2\,v_1\,w\,w'+v_2\,w'^2)'+P\,(w'+\lambda\,w)^2$$

und folglich statt der Gleichungen (9) die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= v'+P\lambda^2\\
B &= 2\,v_1+v'_2+P\\
F &= v+v'_1+\lambda\,P\\
E &= v_1\\
D &= v_2
\end{aligned}$$

wählen ferner λ der Art, dass

$$w=C_1\frac{\partial y}{\partial a_1}+C_2\frac{\partial y}{\partial a_2}$$

das Integral der Gleichung

$$w'+\lambda\,w=0$$

werde, woraus hervorgeht

$$\lambda = -\frac{u'}{u}$$

unter u der Ausdruck $C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$ verstanden.

Jetzt ergeben sich leicht für v, v_1, v_2 und P nachfolgende Werthe:

$$\begin{aligned} v_1 &= E \\ v_2 &= D \\ P &= B - 2E - D' \\ v &= F - E' + \frac{u'}{u}(B - 2E - D') \end{aligned}$$

und falls unsere Analyse richtig ist, müssen dieselben in

$$A = v' + P\lambda^2$$

substituirt, auf eine identische Gleichung führen. Wir erhalten nun die Substitution durchführend:

$$A = F' - E'' + \frac{u'}{u}(B' - 2E' - D'') +$$

$$+ (B - 2E - D') \frac{uu'' - u'^2}{u^2} + \frac{u'^2}{u^2}(B - 2E - D')$$

wenn man hier die Brüche wegschafft, reducirt und ordnet:

$$(2E - B + D')u'' + (2E' - B' + D'')u + (A - F' + E'')u = 0$$

und dies ist wirklich identisch, weil $w = u$ das Integral der Gleichung:

$$(2E - B + D')w'' + (2E' - B' + D'')w + (A - F' + E'')w = 0$$

ist. — Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2} (Aw^2 + Bw'^2 + 2Fww' + 2Eww'' + 2Dw'w'')\,dx =$$

$$\Big\{ vw^2 + 2v_1ww' + v_2w'^2 \Big\}_{x_1}^{x_2} +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} (B - 2E - D') \left(w' - \frac{C_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2}}{C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}} \right)^2 dx$$

oder, wenn man statt $\frac{C_2}{C_1}$, m setzt, und bedenkt, dass für die Grenzen w und w' gleich Null werden, so hat man für den zweiten Theil dieser Gleichung:

$$\int_{x_1}^{x_2} (B - 2\,E - D') \left(w' - \frac{\frac{\partial y'}{\partial a_1} + m\,\frac{\partial y'}{\partial a_2}}{\frac{\partial y}{\partial a_1} + m\,\frac{\partial y}{\partial a_2}} \right)^2 dx$$

unter m eine willkürliche Constante verstanden.

Die Kriterien für ein Maximum oder Minimum sind daher hier folgende:

Die zweiten Differential-Quotienten von V dürfen innerhalb der Integrationsgrenzen nicht durch unendlich gehen, ferner muss $B—2E—D'$ für alle Werthe von $x = x_1$ bis $x = x_2$ stets dasselbe Zeichen beibehalten, und endlich muss noch die willkürliche Constante m so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der Ausdruck $\frac{\partial y}{\partial a_1} + m\,\frac{\partial y}{\partial a_2}$ gleich Null wird. Ist nun unter diesen Umständen $B—2\,E—D'$ stets positiv, so hat man ein Minimum und ist es stets negativ, so hat man ein Maximum.

Wir haben endlich noch den Fall zu besprechen, wo nebstdem, dass $\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = 0$ ist, auch noch die Gleichung $B—2E—D'=0$ stattfindet. Alsdann hört die Gleiehung, die zur Bestimmung von y dient, auf, eine Differentialgleichung zu sein, sondern sie ist eine ganz gewöhnliche, etwa von der Form $y=\varphi\,(x)$, und jetzt können blos die Abscissen der Endpunkte beliebig gewählt werden, die Ordinaten derselben, so wie die Richtung der Tangente an denselben, folgt aus der Gleichung $y=\varphi\,(x)$ von selbst. Man hat in diesem Falle für die Glieder der zweiten Ordnung

$$\left\{ w \left\{ \frac{\partial W}{\partial y'} - \left[\frac{\partial W}{\partial y''} \right]' \right\} + w' \frac{\partial W}{\partial y''} \right\}_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} w^2 \,(A - F + E')\, dx$$

und da für die Grenzen w und w' gleich Null sind:

$$\int_{x_1}^{x_2} w^2 \,(A - F + E')\, dx$$

woraus man auf ein Maximum oder Minimum schliessen kann, je nachdem $A - F' + E''$ stets negativ oder stets positiv ist.

Wäre auch $A - F' + E'' = 0$, so wäre $V dx$ ein vollständiges Differential, und die Untersuchung müsste auf eine andere Art fortgeführt werden.

§. 11.

Untersuchung des speciellen Falles, wenn $V = \varphi\,(x, y, y', y'', y''')$ ist.

Die Glieder der zweiten Ordnung lassen sich in diesem Falle auf folgende drei Weisen darstellen.

$$
\begin{aligned}
(35)\qquad & \int_{x_1}^{x_2} \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\, w^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\, w'^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2}\, w''^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\, w'''^2 + \\
& + 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'}\, w w' + 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''}\, w w'' + 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''}\, w w''' + \\
& + 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''}\, w' w'' + 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''}\, w' w''' + 2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''}\, w'' w''' \Big)\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(36)\qquad & \Big[w \Big\{ \frac{\partial W}{\partial y'} - \Big[\frac{\partial W}{\partial y''}\Big]' + \Big[\frac{\partial W}{\partial y'''}\Big]'' \Big\} + w' \Big\{ \frac{\partial W}{\partial y''} - \Big[\frac{\partial W}{\partial y'''}\Big]' \Big\} + w'' \frac{\partial W}{\partial y'''} \Big]_{x_1}^{x_2} + \\
& + \int_{x_1}^{x_2} w \Big\{ \frac{\partial W}{\partial y} - \Big[\frac{\partial W}{\partial y'}\Big]' + \Big[\frac{\partial W}{\partial y''}\Big]'' - \Big[\frac{\partial W}{\partial y'''}\Big]''' \Big\}\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(37)\qquad & \Big(v w^2 + v_1 w'^2 + v_2 w''^2 + 2 v_3 w w' + 2 v_4 w w'' + 2 v_5 w' w'' \Big)_{x_1}^{x_2} + \\
& \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}\, (w''' + \lambda_1 w'' + \lambda_2 w' + \lambda_3 w)^2\, dx
\end{aligned}
$$

die einander identisch gleich sind. Die in (36) vorkommende Grösse W ist gleich

$$
W = \frac{\partial V}{\partial y}\, w + \frac{\partial V}{\partial y'}\, w' + \frac{\partial V}{\partial y''}\, w'' + \frac{\partial V}{\partial y'''}\, w'''
$$

und die in (37) vorkommenden Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und $v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ haben zu genügen den Gleichungen (11), diese sind:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= v' + \lambda_3{}^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= v_1' + 2 v_3 + \lambda_2{}^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} &= v_2' + 2 v_5 + \lambda_1{}^2\, \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} &= v + v_3' + \lambda_2 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} &= v_2 + v_4' + \lambda_1 \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} &= v_4 + \lambda_3 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} &= v_1 + v_4 + v_5' + \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} &= v_5 + \lambda_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} &= v_2 + \lambda_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)
$$

Wir nehmen an, dass die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

integrirt werden kann, und dass ihr Integrale

$$y = \varphi\,(x, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$$

sei, das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

die sich in entwickelter Gestalt, wenn man:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = A,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} = B,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} = C,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} = D,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'} = E,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y''} = F,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y'''} = G,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y''} = H,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y' \partial y'''} = I,\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'' \partial y'''} = K$$

setzt, auch so schreiben lässt:

$$
\left.\begin{aligned}
&- D w^{(6)} - 3 D' w^{(5)} + (C - 3 D'' - 2 I - K') w'''' + \\
&+ (2 C' - D''' - 4 I' - 2 K'') w''' + (- B + C' + \\
&+ 2 F - 3 G' + H' - 3 I'' - K''') w'' + (- B' + \\
&+ 2 F - 3 G'' + H' - I''') w' + (A - E + F'' - G''') w = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (38)
$$

hat dann folgende Werthe:

$$w = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + A_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + A_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$w = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

von denen wir das erste mit u_1 das zweite mit u_2 und das dritte mit u_3 bezeichnen. Wählen wir nun λ_1, λ_2 und λ_3 so, dass $w = u_1$, $w = u_2$, und $w = u_3$ die particulären Integrale der linearen Differentialgleichung

$$w''' + \lambda_1 w'' + \lambda_2 w' + \lambda_3 w = 0$$

werden, so haben wir demgemäss:

$$\begin{aligned} u_1''' + \lambda_1 u_1'' + \lambda_2 u_1' + \lambda_3 u_1 &= 0 \\ u_2''' + \lambda_1 u_2'' + \lambda_2 u_2' + \lambda_3 u_2 &= 0 \\ u_3''' + \lambda_1 u_3'' + \lambda_2 u_3' + \lambda_3 u_3 &= 0 \end{aligned}$$

woraus:

(39)

$$\lambda_1 = -\frac{u_1 u_2' u_3''' - u_1 u_3' u_2''' - u_2 u_1' u_3''' + u_2 u_3' u_1''' + u_3 u_1' u_2''' - u_3 u_2' u_1''}{u_1 u_2' u_3'' - u_1 u_3' u_2'' - u_2 u_1' u_3'' + u_2 u_3' u_1'' + u_3 u_1' u_2'' - u_3 u_2' u_1'''}$$

$$\lambda_2 = +\frac{u_1 u_2'' u_3''' - u_1 u_3'' u_2''' - u_2 u_1'' u_3''' + u_2 u_3'' u_1''' + u_3 u_1'' u_2''' - u_3 u_2'' u_1'''}{u_1 u_2' u_3'' - u_1 u_3' u_2'' - u_3 u_1' u_3'' + u_2 u_3' u_1'' + u_3 u_1' u_2'' - u_3 u_2' u_1''}$$

$$\lambda_3 = -\frac{u_1' u_2'' u_3''' - u_1' u_3'' u_2''' - u_2' u_1'' u_3''' + u_2' u_3'' u_1''' + u_3' u_1'' u_2''' - u_3' u_2'' u_1'''}{u_1 u_2' u_3'' - u_1 u_3' u_2'' - u_2 u_1' u_3'' + u_2 u_3' u_1'' + u_3 u_1' u_2'' - u_3 u_2' u_1'}.$$

folgen. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (11), so findet man dann v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5; diese sind:

(40)

$$\begin{aligned} v &= E - F' + (G - \lambda_3 D)'' + (\lambda_1 \lambda_2 D)' - \lambda_2 \lambda_3 D \\ v_1 &= H - G + \lambda_3 D - (I - \lambda_2 D)' - \lambda_1 \lambda_2 D \\ v_2 &= K - \lambda_1 D \\ v_3 &= F - (G - \lambda_3 D)' - \lambda_1 \lambda_3 D \\ v_4 &= G - \lambda_3 D \\ v_5 &= I - \lambda_2 D \end{aligned}$$

und jetzt bleibt uns nur noch nachzuweisen übrig, dass die gefundenen Werthe der Unbekannten den 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \qquad v' \qquad + \lambda_3{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} &= v_1' + 2\, v_3 + \lambda_2{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y''^2} &= v_2' + 2\, v_5 + \lambda_1{}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2} \end{aligned} \tag{41}$$

identisch genügen, und zugleich mit der gehörigen Anzahl willkürlicher Constanten versehen sind. Da die Gleichungen (11) durch Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf 6 Differentialgleichungen ersten Grades führen, so müssen in den Resultaten unserer Rechnung sechs willkürliche Constanten erscheinen.

Die Gleichungen (41) gehen, wenn man in ihnen statt $v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ ihre Werthe setzt, in folgende über:

$$\begin{aligned} A &= E' - F'' + (G - \lambda_3 D)''' + (\lambda_1 \lambda_3 D)'' - (\lambda_2 \lambda_3 D)' + \lambda_3{}^2 D \\ B &= H' - G' + (\lambda_3 D)' - (I - \lambda_2 D)'' - (\lambda_1 \lambda_3 D)' + 2\, F - \\ &\qquad - 2\,(G - \lambda_3 D)' - 2\, \lambda_1 \lambda_3\, D + \lambda_2{}^2 D \\ C &= K' - (\lambda_1 D)' + 2\, I - 2\, \lambda_2\, D + \lambda_1{}^2 D \end{aligned} \tag{42}$$

und diese führen entwickelt und geordnet auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\lambda_3''' D + 3\, \lambda_3'' D' - D\,(\lambda_1 \lambda_3'' + \lambda_1'' \lambda_3) + 3\, \lambda_3' D'' - \\ &- 2 D' (\lambda_1 \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_3) + D\,(\lambda_2 \lambda_3' + \lambda_2' \lambda_3 - 2 \lambda_1' \lambda_3) + \\ &+ \lambda_3\,(D''' - \lambda_1 D'' + \lambda_2 D' - \lambda_3 D) = - A + E' - \\ &- F'' + G''' \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_2'' D + 2\, \lambda_2' D' + D\,(3\, \lambda_3' - \lambda_1 \lambda_2' - \lambda_1' \lambda_2) + \lambda_2 D'' + \\ &+ D'(3\, \lambda_3 - \lambda_1 \lambda_2) + D\,(\lambda_2{}^2 - 2\, \lambda_1 \lambda_3) = B - 2\, F + \\ &+ 3\, G' - H' + I'' \end{aligned} \tag{44}$$

$$- \lambda_1' D - \lambda_1 D' + D\,(\lambda_1{}^2 - 2\, \lambda_2) = C - 2\, I - K' \tag{45}$$

Nun ist in diesen Gleichungen die Substitution für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und ihren Differentialquotienten durchzuführen. Wir sind aber hier gezwungen, um nicht gar zu weitläufige Entwicklungen zu haben, eine Reihe von Abkürzungen einzuführen.

Setzen wir nämlich:

$$
\begin{array}{l}
u_1\, u_2'\, u_3'' - u_1\, u_3'\, u_2'' - u_2\, u_1'\, u_3'' + u_2\, u_3'\, u_1'' + u_3\, u_1'\, u_2'' - u_3\, u_2'\, u_1'' = M_1 \\
u_1\, u_2'\, u_3''' - u_1\, u_3'\, u_2''' - u_2\, u_1'\, u_3''' + u_2\, u_3'\, u_1''' + u_3\, u_1'\, u_2''' - u_3\, u_2'\, u_1''' = M_2 \\
u_1\, u_2'\, u_3'''' - u_1\, u_3'\, u_2'''' - u_2\, u_1'\, u_3'''' + u_2\, u_3'\, u_1'''' + u_3\, u_1'\, u_2'''' - u_3\, u_2'\, u_1'''' = M_3 \\
u_1\, u_2''\, u_3''' - u_1\, u_3''\, u_2''' - u_2\, u_1''\, u_3''' + u_2\, u_3''\, u_1''' + u_3\, u_1''\, u_2''' - u_3\, u_2''\, u_1''' = M_4 \\
u_1\, u_2'\, u_3^{(5)} - u_1\, u_3'\, u_2^{(5)} - u_2\, u_1'\, u_3^{(5)} + u_2\, u_3'\, u_1^{(5)} + u_3\, u_1'\, u_2^{(5)} - u_3\, u_2'\, u_1^{(5)} = M_5 \\
u_1\, u_2''\, u_3'''' - u_1\, u_3''\, u_2'''' - u_2\, u_1''\, u_3'''' + u_2\, u_3''\, u_1'''' + u_3\, u_1''\, u_2'''' - u_3\, u_2''\, u_1'''' = M_6 \\
u_1'\, u_2''\, u_3''' - u_1'\, u_3''\, u_2''' - u_2'\, u_1''\, u_3''' + u_2'\, u_3''\, u_1''' + u_3'\, u_1''\, u_2''' - u_3'\, u_2''\, u_1''' = M_7 \\
u_1\, u_2'\, u_3^{(6)} - u_1\, u_3'\, u_2^{(6)} - u_2\, u_1'\, u_3^{(6)} + u_2\, u_3'\, u_1^{(6)} + u_3\, u_1'\, u_2^{(6)} - u_3\, u_2'\, u_1^{(6)} = M_8 \\
u_1\, u_2''\, u_3^{(5)} - u_1\, u_3''\, u_2^{(5)} - u_2\, u_1''\, u_3^{(5)} + u_2\, u_3''\, u_1^{(5)} + u_3\, u_1''\, u_2^{(5)} - u_3\, u_2''\, u_1^{(5)} = M_9 \\
u_1\, u_2'''\, u_3'''' - u_1\, u_3'''\, u_2'''' - u_2\, u_1'''\, u_3'''' + u_2\, u_3'''\, u_1'''' + u_3\, u_1'''\, u_2'''' - u_3\, u_2'''\, u_1'''' = M_{10} \\
u_1'\, u_2''\, u_3'''' - u_1'\, u_3''\, u_2'''' - u_2'\, u_1''\, u_3'''' + u_2'\, u_3''\, u_1'''' + u_3'\, u_1''\, u_2'''' - u_3'\, u_2''\, u_1'''' = M_{11} \\
u_1\, u_2'\, u_3^{(7)} - u_1\, u_3'\, u_2^{(7)} - u_2\, u_1'\, u_3^{(7)} + u_2\, u_3'\, u_1^{(7)} + u_3\, u_1'\, u_2^{(7)} - u_3\, u_2'\, u_1^{(7)} = M_{12} \\
u_1\, u_2''\, u_3^{(6)} - u_1\, u_3''\, u_2^{(6)} - u_2\, u_1''\, u_3^{(6)} + u_2\, u_3''\, u_1^{(6)} + u_3\, u_1''\, u_2^{(6)} - u_3\, u_2''\, u_1^{(6)} = M_{13} \\
u_1\, u_2'''\, u_3^{(5)} - u_1\, u_3'''\, u_2^{(5)} - u_2\, u_1'''\, u_3^{(5)} + u_2\, u_3'''\, u_1^{(5)} + u_3\, u_1'''\, u_2^{(5)} - u_3\, u_2'''\, u_1^{(5)} = M_{14} \\
u_1'\, u_2''\, u_3^{(5)} - u_1'\, u_3''\, u_2^{(5)} - u_2'\, u_1''\, u_3^{(5)} + u_2'\, u_3''\, u_1^{(5)} + u_3'\, u_1''\, u_2^{(5)} - u_3'\, u_2''\, u_1^{(5)} = M_{15} \\
u_1'\, u_2'''\, u_3'''' - u_1'\, u_3'''\, u_2'''' - u_2'\, u_1'''\, u_3'''' + u_2'\, u_3'''\, u_1'''' + u_3'\, u_1'''\, u_2'''' - u_3'\, u_2'''\, u_1'''' = M_{16} \\
u_1\, u_2'\, u_3^{(8)} - u_1\, u_3'\, u_2^{(8)} - u_2\, u_1'\, u_3^{(8)} + u_2\, u_3'\, u_1^{(8)} + u_3\, u_1'\, u_2^{(8)} - u_3\, u_2'\, u_1^{(8)} = M_{17} \\
u_1\, u_2''\, u_3^{(7)} - u_1\, u_3''\, u_2^{(7)} - u_2\, u_1''\, u_3^{(7)} + u_2\, u_3''\, u_1^{(7)} + u_3\, u_1''\, u_2^{(7)} - u_3\, u_2''\, u_1^{(7)} = M_{18} \\
u_1\, u_2'''\, u_3^{(6)} - u_1\, u_3'''\, u_2^{(6)} - u_2\, u_1'''\, u_3^{(6)} + u_2\, u_3'''\, u_1^{(6)} + u_3\, u_1'''\, u_2^{(6)} - u_3\, u_2'''\, u_1^{(6)} = M_{19} \\
u_1\, u_2''''\, u_3^{(5)} - u_1\, u_3''''\, u_2^{(5)} - u_2\, u_1''''\, u_3^{(5)} + u_2\, u_3''''\, u_1^{(5)} + u_3\, u_1''''\, u_2^{(5)} - u_3\, u_2''''\, u_1^{(5)} = M_{20} \\
u_1'\, u_2''\, u_3^{(6)} - u_1'\, u_3''\, u_2^{(6)} - u_2'\, u_1''\, u_3^{(6)} + u_2'\, u_3''\, u_1^{(6)} + u_3'\, u_1''\, u_2^{(6)} - u_3'\, u_2''\, u_1^{(6)} = M_{21} \\
u_1'\, u_2'''\, u_3^{(5)} - u_1'\, u_3'''\, u_2^{(5)} - u_2'\, u_1'''\, u_3^{(5)} + u_2'\, u_3'''\, u_1^{(5)} + u_3'\, u_1'''\, u_2^{(5)} - u_3'\, u_2'''\, u_1^{(5)} = M_{22} \\
u_1''\, u_2'''\, u_3'''' - u_1''\, u_3'''\, u_2'''' - u_2''\, u_1'''\, u_3'''' + u_2''\, u_3'''\, u_1'''' + u_3''\, u_1'''\, u_2'''' - u_3''\, u_2'''\, u_1'''' = M_{23}
\end{array}
$$

so ist, wie man leicht sieht:

$$
\begin{aligned}
M_1' &= M_2 \\
M_2' &= M_3 + M_4 \\
M_3' &= M_5 + M_6 \\
M_4' &= M_6 + M_7 \\
M_5' &= M_8 + M_9 \\
M_6' &= M_9 + M_{10} + M_{11} \\
M_7' &= M_{11} \\
M_8' &= M_{12} + M_{13} \\
M_9' &= M_{13} + M_{14} + M_{15} \\
M_{10}' &= M_{14} + M_{16} \\
M_{11}' &= M_{15} + M_{16} \\
M_{12}' &= M_{17} + M_{18} \\
M_{13}' &= M_{18} + M_{19} + M_{21} \\
M_{14}' &= M_{16} + M_{20} + M_{22} \\
M_{15}' &= M_{21} + M_{23} \\
M_{16}' &= M_{22} + M_{23}
\end{aligned}
$$

und λ_1, λ_2, λ_3 und ihre Differentialquotienten haben folgende Werthe

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{M_2}{M_1} \\
\lambda_2 &= \frac{M_4}{M_1} \\
\lambda_3 &= -\frac{M_7}{M_1} \\
\lambda_1' &= -\frac{M_3}{M_1} - \lambda_2 + \lambda_1^2 \\
\lambda_2' &= \frac{M_6}{M_1} - \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 \\
\lambda_3' &= -\frac{M_{11}}{M_1} + \lambda_1 \lambda_3 \\
\lambda_1'' &= -\frac{M_5 + M_6}{M_1} - \lambda_1^3 + \lambda_1 \lambda_2 + 3 \lambda_1 \lambda_1' - \lambda_2' \\
\lambda_2'' &= \frac{M_9 + M_{10} + M_{11}}{M_1} + 2 \lambda_1 \lambda_2' + \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_1^2 \lambda_2 - \lambda_3' + \lambda_1' \lambda_2 \\
\lambda_3'' &= -\frac{M_{15} + M_{16}}{M_1} - \lambda_1^2 \lambda_3 + 2 \lambda_1 \lambda_3{}^1 + \lambda_1' \lambda_3 \\
\lambda_3''' &= -\frac{M_{21} + 2M_{22} + M_{23}}{M_1} + 3 \lambda_1 \lambda_3'' + \lambda_1^3 \lambda_3 - 3 \lambda_1^2 \lambda_3' - 3 \lambda_1 \lambda_1' \lambda_3 + \\
&\quad + 3 \lambda_1' \lambda_3' + \lambda_1'' \lambda_3
\end{aligned}
$$

Wird nun in der Gleichung (43) statt λ_3''' sein Werth gesetzt, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&- D.\frac{M_{21}+2M_{22}+M_{23}}{M_1} + \lambda_3'' \, (3\, D' + 2\, \lambda_1\, D) + 3\, \lambda_3'\, D'' - \\
&- 2\, D' \, (\lambda_1\, \lambda_3' + \lambda_1'\, \lambda_3) + D\, (\lambda_1'\, \lambda_3' - 3\, \lambda_1\, \lambda_1'\, \lambda_3 - 3\, \lambda_1^2\, \lambda_3' + \\
&+ \lambda_2\, \lambda_3' + \lambda_3'\, \lambda_3) + \lambda_3\, (D''' - \lambda_1\, D'' + \lambda_2\, D' - \lambda_3\, D + \lambda_1^3\, D) = \\
&= - A + E' - F' + G'''
\end{aligned}
$$

Setzt man hierein statt λ_3'' seinen Werth, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&- D.\frac{M_{21}+2M_{22}+M_{23}}{M_1} - \frac{M_{15}+M_{16}}{M_1}(3\, D' + 2\, \lambda_1\, D) + 3\, \lambda_3'\, D'' + \\
&+ D'\, (4\, \lambda_1\, \lambda_3' + \lambda_1'\, \lambda_3) + D\, (\lambda_1'\, \lambda_3' - \lambda_1\, \lambda_1'\, \lambda_3 + \lambda_1^2\, \lambda_3' + \lambda_2\, \lambda_3' + \\
&+ \lambda_2'\, \lambda_3) + \lambda_3\, [D''' - \lambda_1\, D'' + D'\, (\lambda_2 - 3\, \lambda_1^2) - D\, (\lambda_3 + \lambda_1^3)] = \\
&= - A + E' - F' + G'''
\end{aligned}
$$

setzt man jetzt für λ_1', λ_3' und λ_2' ihre Werthe, so kömmt:

$$
\begin{aligned}
&- D\left[\frac{M_{21}+2M_{22}+M_{23}}{M_1} + 2\, \lambda_1\, \frac{M_{15}+M_{13}}{M_1} + 2\, \lambda_1^2\, \frac{M_{11}}{M_1} - \frac{M_3 M_{11}}{M_1^2} - \right. \\
&\left. - \lambda_3\, \frac{M_3}{M_1}\right] - D'\left[\, 3\, \frac{M_{15}+M_{13}}{M_1} + 4\, \lambda_1\, \frac{M_{11}}{M_1} + \lambda_3\, \frac{M_3}{M_1}\right] - 3\, D''\frac{M_{11}}{M_1} + \\
&+ \lambda_3\, [D''' + 2\, \lambda_1\, D'' + 2\, \lambda_1^2\, D' + D\, (2\, \lambda_1\, \lambda_2 - 2\, \lambda_3)] = \\
&= - A + E' - F' + G'''
\end{aligned}
$$

und setzt man endlich noch für λ_1, λ_2, λ_3 ihre Werthe, so erhält man wenn man die ganze Gleichung mit M_1^3 multiplicirt und ordnet:

$$
\begin{aligned}
&- D'''\, M_1\, M_7 + D''\, (2\, M_2\, M_7 - 3\, M_1\, M_{11}) + D'\, (4\, M_2\, M_{11} + \\
&+ M_3\, M_7 - 3\, M_1\, M_{15} - 3\, M_1\, M_{13} - 2\, \frac{M_2^2 M_7}{M_1}) + D\, (2\, M_2\, M_{15} + \\
&+ 2\, M_2\, M_{13} - M_1\, M_{21} - 2\, M_1\, M_{22} - M_1\, M_{23} + M_3\, M_{11} - \\
&- 2\, \frac{M_2^2\, M_{11}}{M_1} - M_5\, M_7 - 2\, M_7^2 + 2\, \frac{M_2\, M_4\, M_7}{M_1}\,) = \\
&= M_1^2\, (- A + E' - F' + G''')
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Verfährt man mit der Gleichung (44) eben so, so erhält man, wenn man zuerst für λ_3'' seinen Werth setzt:

$$
\begin{aligned}
&D\, \frac{M_3+M_{10}+M_{11}}{M_1} + \lambda_3\, D'' + D'\, (3\, \lambda_3 + 2\, \lambda_3' - \lambda_1\, \lambda_3) + \\
&+ D\, (\lambda_1\, \lambda_3' - \lambda_1\, \lambda_3 + \lambda_2^2 - \lambda_1^3\, \lambda_2 + 2\, \lambda_3') = B - 2\, F + \\
&+ 3\, G' - H' + I'
\end{aligned}
$$

wenn man dann für λ_2' und λ_3' ihre Werthe setzt:

$$D\left(\frac{M_9+M_{10}-M_{11}}{M_1}+\lambda_1\frac{M_6}{M_1}\right)+2D'\frac{M_6}{M_1}+\lambda_2 D''+D'(\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)+$$
$$+\lambda_2{}^2 D = B-2F+3G'-H'+I''$$

und wenn man nun noch für λ_1, λ_2, λ_3 ihre Werthe setzt, und die Gleichung dann von Brüchen befreiet

$$\begin{aligned}&M_1 M_4 D''+D'(2M_1M_6-M_1M_7-M_2M_4)+\\&+D(M_1M_9+M_1M_{10}-M_1M_{11}-M_2M_6+M_4{}^2)=\\&=M_1{}^2(B-2F+3G'-H'+I'')\end{aligned}\qquad(47)$$

Endlich erhält man für die Gleichung (45), wenn man für λ'_1 seinen Werth setzt:

$$\frac{M_3}{M_1}D-\lambda_2 D-\lambda_1 D' = C-2I-K'$$

und wenn man noch für λ_1 und λ_2 ihre Werthe setzt und ordnet:

$$M_2 D'+D(M_3-M_4)=M_1(C-2I-K')\qquad(48)$$

Die drei Gleichungen (43), (44) und (45) gehen daher in folgende drei Gleichungen über:

$$\begin{aligned}&-D'''M_1M_7+D''(2M_2M_7-3M_1M_{11})+D'(4M_2M_{11}+\\&+M_3M_7-3M_1M_{15}-3M_1M_{16}-2\frac{M_2{}^2M_7}{M_1})+D(2M_2M_{15}+\\&+2M_2M_{16}-M_1M_{21}-2M_1M_{22}-M_1M_{23}+M_3M_{11}-\\&-2\frac{M_2{}^2M_{11}}{M_1}-M_6M_7-2M_7{}^2+2\frac{M_2M_4M_7}{M_1})=\\&=M_1{}^2(-A+E'-F''+G''')\end{aligned}\qquad(46)$$

$$\begin{aligned}&M_1M_4D''+D'(2M_1M_6-M_1M_7-M_2M_4)+D(M_1M_9+\\&+M_1M_{10}-M_1M_{11}-M_2M_6+M_4{}^2)=M_1{}^2(B-2F+\\&+3G'-H'+I'')\end{aligned}\qquad(47)$$

$$M_2D'+D(M_3-M_4)=M_1(C-2I-K')\qquad(48)$$

Die zwei ersten dieser 3 Gleichungen sind einer bedeutenden Reduction fähig, man hat zu dem Behufe nur statt $-A+E'-F''+G'''$ und $B-2F+3G'-H'+I''$ ihre, ihnen identisch gleichen Werthe zu setzen, die wir auf folgende Weise erhalten:

Setzt man in der Gleichung (38) statt w die drei Werthe u_1 u_2 oder u_3, so erhält man stets eine identische Gleichung, weil u_1

u_2 und u_3 die Integrale dieser Gleichung (38) sind, man hat daher folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned}&-D\,u_1^{(6)}-3\,D'\,u_1^{(5)}+u_1^{(4)}\,(C-3\,D''-2\,I-K')+\\&+u_1'''\,(2\,C'-D'''-4\,I'-2\,K'')+u_1''\,(-B+C''+2\,F-3\,G'+\\&+H'-3\,I''-K''')+u_1'\,(-B'+2\,F'-3\,G''+H''-I''')+\\&+u_1\,(A-E'+F''-G''')=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-D\,u_2^{(6)}-3\,D'\,u_2^{(5)}+u_2^{(4)}\,(C-3\,D''-2\,I-K')+\\&+u_2'''\,(2\,C'-D'''-4\,I'-2\,K'')+u_2''\,(-B+C''+2\,F-3\,G'+\\&+H'-3\,I''-K''')+u_2'\,(-B'+2\,F'-3\,G''-H''-I''')+\\&+u_2\,(A-E'+F''-G''')=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-D\,u_3^{(6)}-3\,D'\,u_3^{(5)}+u_3^{(4)}\,(C-3\,D''-2\,I-K')+\\&+u_3'''\,(2\,C'-D'''-4\,I'-2\,K'')+u_3''\,(-B+C''+2\,F-3\,G'+\\&+H'-3\,I''-K''')+u_3'\,(-B'+2\,F-3\,G''+H''-I''')+\\&+u_3\,(A-E'+F''-G''')=0\end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste derselben mit $u_2'\,u_3''-u_3'\,u_2''$, die zweite mit $u_3'\,u_1''-u_1'\,u_3''$ die dritte mit $u_1'\,u_2''-u_2'\,u_1''$ und addirt man sämmtliche so erhaltene Gleichungen, so hat man:

$$\begin{aligned}&-D\,M_{21}-3\,D'\,M_{15}+M_{11}\,(C-3\,D''-2\,I-K')+\\&+M_7\,(2\,C'-D'''-4\,I'-2\,K'')+M_1\,(A-E'+F''-G''')=0\end{aligned}\tag{49}$$

multiplicirt man hingegen die drei Gleichungen der Reihe nach mit

$$u_3\,u_2''-u_2\,u_3''\quad u_1\,u_3''-u_3\,u_1''\quad u_2\,u_1''-u_1\,u_2''$$

und addirt sie alsdann, so erhält man:

$$\begin{aligned}&-D\,M_{13}-3\,D'\,M_9+M_6\,(C-3\,D''-2\,I-K')+\\&+M_4\,(2\,C'-D'''-4\,I'-2\,K'')+M_1\,(B'-2\,F'+\\&+3\,G''-H''+I''')=0\end{aligned}\tag{50}$$

multiplicirt man endlich dieselben drei Gleichungen mit

$$u_2'\,u_3-u_3'\,u_2\quad u_3\,u_1'-u_1\,u_3'\quad u_1\,u_2'-u_2\,u_1'$$

und addirt sie, so hat man

$$\begin{aligned}&-D\,M_8-3\,D'\,M_5+M_3\,(C-3\,D''-2\,I-K')+\\&+M_2\,(2\,C'-D'''-4\,I'-2\,K'')+M_1\,(-B+C''+\\&+2\,F-3\,G'+H'-3\,I''-K''')=0\end{aligned}\tag{51}$$

Diese drei Gleichungen (49), (50) und (51) sind offenbar identische Gleichungen, aus der ersten derselben folgt:

$$M_1\,(-A + E' - F'' + G''') = -D\,M_{21} - 3\,D'\,M_{15} + M_{11}\,(C - 3\,D'' - 2\,I - K') + M_7\,(2\,C' - D''' - 4\,I' - 2\,K'')$$

und dies in (46) gesetzt und reducirt gibt:

$$\begin{aligned} &2\,M_2\,M_7\,D'' + D'\,(4\,M_2\,M_{11} + M_3\,M_7 - 3\,M_1\,M_{16} - \\ &- 2\,\frac{M_2^2\,M_7}{M_1}) + D\,(2\,M_2\,M_{15} + 2\,M_2\,M_{16} - 2\,M_1\,M_{22} - \\ &- M_1\,M_{23} + M_3\,M_{11} - 2\,\frac{M_2^2\,M_{11}}{M_1} - M_6\,M_7 - 2\,M_7^2 + \\ &+ 2\,\frac{M_2\,M_4\,M_7}{M_1}) = M_1\,M_{11}\,(C - 2\,I - K') + \\ &+ 2\,M_1\,M_7\,(C' - 2\,I' - K'') \end{aligned} \tag{52}$$

Versuchen wir, um diese Gleichung noch weiter zu vereinfachen, statt $C - 2I - K'$ seinen aus (48) folgenden Werth zu setzen, so hat man, da

$$M_1\,(C - 2\,I - K') = M_2\,D' + D\,(M_3 - M_4) \tag{48}$$

ist, wenn man diese Gleichung differenzirt:

$$\begin{aligned} M_1\,(C' - 2\,I' - K'') + M_2\,(C - 2\,I - K') = M_2\,D'' + \\ + 2\,M_2\,D' + D\,(M_5 - M_7) \end{aligned} \tag{53}$$

Bringt man nun zuerst mittelst dieser Gleichung aus (52) das Glied $C' - 2I' - K''$ weg, so hat man:

$$\begin{aligned} &D'\,(4\,M_2\,M_{11} - 3\,M_1\,M_{16} - 3\,M_3\,M_7 - 2\,\frac{M_2^2\,M_7}{M_1}) + D\,(2\,M_{12}\,M_{15} + \\ &+ 2\,M_2\,M_{16} - 2\,M_1\,M_{22} - M_1\,M_{23} + M_3\,M_{11} - M_6\,M_7 - 2\,M_5\,M_7 - \\ &- 2\,\frac{M_2^2\,M_{11}}{M_1} + 2\,\frac{M_2\,M_4\,M_7}{M_1}) = (M_1\,M_{11} - 2\,M_2\,M_7)\,(C - 2\,I - K') \end{aligned}$$

und bringt man hieraus mittelst der Gleichung (48) das Glied $C - 2I - K'$ weg, und befreiet man dann die Gleichung von Brüchen, so hat man:

$$\begin{aligned} &3\,M_1 D'\,(M_1 M_{16} - M_2 M_{11} + M_3 M_7) + D\,[2\,M_1\,(M_1 M_{22} - \\ &- M_2 M_{15} + M_5 M_7) + M_1\,(M_1 M_{23} - M_4 M_{11} + M_6 M_7) - \\ &- 2\,M_2\,(M_1 M_{16} - M_2 M_{11} + M_3 M_7)] = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

Uns bleibt nun nichts anders übrig, als die hier erscheinenden Ausdrücke

$$M_1M_{16} - M_2M_{11} + M_3M_7$$
$$M_1M_{22} - M_2M_{15} + M_5M_7$$
$$M_1M_{23} - M_4M_{11} + M_6M_7$$

wirklich zu berechnen. Wir haben diese mühsame Operation durchgeführt, und haben gefunden, dass jeder der drei Ausdrücke aus 108 Gliedern besteht, die sich paarweise aufheben, es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
&M_1M_{16} - M_2M_{11} + M_3M_7 = \\
&(u_1u_2'u_3'' - u_1u_3'u_2'' - u_2u_1'u_3'' + u_2u_3'u_1'' + u_3u_1'u_2'' - u_3u_2'u_1''). \\
&(u_1'u_2'''u_3'''' - u_1'u_3'''u_2'''' - u_2'u_1'''u_3'''' + u_2'u_3'''u_1'''' + u_3'u_1'''u_2'''' - \\
&- u_3'u_2'''u_1'''') - (u_1u_2'u_3''' - u_1u_3'u_2''' - u_2u_1'u_3''' + u_2u_3'u_1''' + \\
&+ u_3u_1'u_2''' - u_3u_2'u_1''')\cdot(u_1'u_2''u_3'''' - u_1'u_3''u_2'''' - u_2'u_1''u_3'''' + \\
&+ u_2'u_3''u_1'''' + u_3'u_1''u_2'''' - u_3'u_2''u_1'''') + (u_1u_2'u_3'''' - u_1u_3'u_2'''' - \\
&- u_2u'_1u_3'''' + u_2u_3'u_1'''' + u_3u_1'u_2'''' - u_3u_2'u_1'''')\cdot(u_1'u_2''u_3''' - \\
&- u_1u_3''u_2''' - u_2'u_1''u_3''' + u_2'u_3''u_1''' + u_3'u_1''u_2''' - u_3'u_2''u_1''') = 0
\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung überall $u^{(5)}$ statt u'''', so erhält man offenbar wieder eine identische Gleichung, und die ist:

$$M_1M_{22} - M_2M_{15} + M_5M_7 = 0$$

und verwechselt man in derselben Gleichung u' mit u'' und u'' mit u', so erhält man

$$-M_1M_{23} + M_4M_{11} - M_6M_7 = 0$$

also ist die Gleichung (54) identisch erfüllt.

Man kann daher folgenden Satz aussprechen: Wenn die in (39) angegebenen Werthe von λ der Gleichung (45) genügen, so genügen sie gewiss auch der Gleichung (43). Ich habe gesucht, dieses noch deutlicher ersichtlich zu machen, und bin dahin gelangt die Gleichung (52), welche mit der Gleichung (43) identisch ist, in folgender Form aufzustellen:

$$(55)\quad \begin{aligned}
&2\,{}^{1}M_7\ [M_1\ (C-2J-K') - M_2D' - D\,(M_3 - M_4)]' + \\
&+ \left(M_{11} - \frac{2M_2M_7}{M_1}\right)[M_1\,(C-2J-K') - M_2D' - D\,(M_3 - M_4)] = 0
\end{aligned}$$

Zwischen den verschiedenen M finden noch mehr Gleichungen Statt, als die oben angeführten; da sie uns im Verlauf der Rechnung von Nutzen sein werden, so wollen wir sie hier, mit Wiederholung der schon genannten drei, anführen:

$$\begin{aligned}
M_1\, M_{10} - M_2\, M_6 + M_3\, M_4 &= 0\\
M_1\, M_{14} - M_3\, M_9 + M_4\, M_5 &= 0\\
M_1\, M_{16} - M_2\, M_{11} + M_6\, M_7 &= 0\\
M_1\, M_{19} - M_2\, M_{13} + M_4\, M_8 &= 0\\
M_1\, M_{20} - M_6\, M_3 + M_5\, M_6 &= 0\\
M_1\, M_{26} - M_2\, M_{15} + M_5\, M_7 &= 0\\
M_1\, M_{23} - M_4\, M_{11} + M_6\, M_7 &= 0\\
M_6\, M_{20} - M_3\, M_{14} + M_5\, M_{10} &= 0\\
M_3\, M_{33} - M_4\, M_{16} + M_7\, M_{10} &= 0\\
M_3\, M_{23} - M_6\, M_{16} + M_{10}\, M_{11} &= 0\\
M_4\, M_{30} - M_6\, M_{14} + M_9\, M_{10} &= 0
\end{aligned}$$

Behandeln wir auf dieselbe Weise die Gleichung (47). Aus (51) folgt:

$$\begin{aligned}
M_1\,(B - 2F + 3G' - H' + I'') = &- D M_8 - 3D' M_5 + (C - \\
&- 3D'' - 2I - K')\, M_3 + (2C' - D''' - 4I' - 2K'')\, M_2 + (C'' - \\
&- 2I'' - K''')\, M_1
\end{aligned}$$

und dies in (47) gesetzt, gibt:

$$\begin{aligned}
&M_1\, M_2\, D''' + D''\,(M_1\, M_4 + 3\, M_1\, M_6) + D'\,(2M_1\, M_6 - M_1\, M_7 - \\
&- M_2\, M_4 + 3M_1\, M_5) + D\,(M_1\, M_8 + M_1\, M_3 + M_1\, M_{10} - M_1\, M_{11} - \\
&M_2\, M_6 + M^2{}_4) = (C - 2I - K')\, M_1\, M_3 + 2\,(C' - 2I' - K'') - \\
&- M_1\, M_2 + (C'' - 2I'' - K''')\, M^2{}_1
\end{aligned} \tag{56}$$

Versucht man auch hier, um diese Gleichung zu vereinfachen, statt $C - 2I - K'$ seinen aus (48) folgenden Werth zu setzen, so hat man, da

$$M_1\,(C - 2I - K') = M_2\, D' + D\,(M_3 - M_4) \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
M_1\,(C' - 2I' - K'') + M_2\,(C - 2I - K') = M_2\, D'' + \\
+ 2\, M_3\, D' + D\,(M_5 - M_7)
\end{aligned} \tag{53}$$

ist, die letzte Gleichung nochmals differenzirend

$$\begin{aligned}
M_1\,(C'' - 2\,I'' - K''') + 2\,M_2\,(C' - 2I' - K'') + \\
(M_3 + M_4)\,(C - 2\,I - K') \\
= D\,(M_8 + M_9 - M_{11}) + D'\,(3\,M_5 + 2M_6 - M_7) + \\
+ D''\,(3\,M_3 + M_4) + M_2\, D'''
\end{aligned} \tag{57}$$

Bringt man aus (56) mittelst der eben entwickelten Gleichung das Glied $C'' - 2I' - K''$ weg, so hat man:

$$- D' M_2 M_4 + D (M_1 M_{10} - M_2 M_6 + M_4^2) = - \\ - M_1 M_4 (C - 2I - K)$$

und bringt man aus dieser Gleichung mittelst der Gleichung (48) das Glied $C - 2I - K$ weg, so erhält man:

$$D (M_1 M_{10} - M_2 M_6 + M_3 M_4) = 0$$

und dies findet wirklich identisch Statt.

Man kann daher jetzt auch sagen: Die beiden Gleichungen (43) und (44) oder die aus ihnen abgeleiteten (46) und (47) werden befriedigt, wenn nur die Gleichung (45) oder die aus ihr hervorgehende (48) befriedigt wird.

Zugleich lässt sich bemerken, dass man der Gleichung (56) folgende Form geben könne:

$$(58) \quad M_1 [M_1 (C - 2I - K) - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]'' - \\ - M_4 [M_1 (C - 2I - K) - M_2 D' - D (M_3 - M_4)] = 0$$

Um den Faden unserer Rechnung nicht zu verlieren, wollen wir erwähnen, dass unsere Untersuchung, ob nämlich die in (39) und (40) aufgestellten Werthe von

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$$

den Gleichungen (41) genügen, uns auf folgende drei Gleichungen führte:

$$(55) \quad 2 M_7 [M_1 (C - 2I - K) - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]' + (M_{11} \\ - \frac{2 M_3 M_7}{M_1})[M_1 (C - 2I - K) - M_2 D' - D (M_3 - M_4)] = 0$$

$$(58) \quad M_1 [M_1 (C - 2I - K) - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]'' - \\ - M_4 [M_1 (C - 2I - K) - M_2 D' - D (M_3 - M_4)] = 0$$

$$(48) \quad M_1 (C - 2I - K) - M_2 D' - D (M_3 - M_4) = 0$$

die der Reihe nach den Gleichungen (41) identisch sind. Wenn sich daher erweisen lässt, dass die Gleichung (48) identisch stattfindet (etwa dadurch, dass man zwischen den in ihr eintretenden

Constanten gewisse Beziehungen statuirt, so finden auch die Gleichungen (55) und (58) und somit auch die Gleichungen (41) identisch Statt.

Suchen wir nun aus den zwei Gleichungen (50) und (51) eine dritte abzuleiten, in der nicht mehr $B - 2F + 3G' - H' + I'$ erscheint. Zu dem Behufe differenzire man (51), dies gibt:

$$\begin{aligned} -M_2 D'''' - D''' (4 M_3 + M_4) - D'' (6 M_5 + 3 M_6) - D' (4 M_8 + \\ + 3M_9) - D (M_{12} + M_{13}) + (M_5 + M_6)(C - 2I - K') + \\ + (3 M_3 + 2 M_4)(C' - 2I' - K'') + 2 M_2 (C'' - \\ - 2I'' - K''') + M_1 (-B' + C'' + 2F' - 3G'' + H'' - \\ - 3I''' - K''') + M_2 (-B + C'' + 2F - 3G' + H' - \\ - 3I'' - K''') = 0 \end{aligned}$$

addirt man hinzu (50) so hat man:

$$\begin{aligned} -M_2 D'''' - D''' (4 M_3 + 2 M_4) - D'' (6 M_5 + 6 M_6) - D' (4M_8 + \\ + 6M_9) - D (M_{12} + 2 M_{13}) + (M_5 + 2 M_6)(C - 2I - K') + \\ + (3 M_3 + 4 M_4)(C' - 2I' - K'') + 2 M_2 (C'' - \\ - 2I'' - K''') + M_1 (C''' - 2I''' - K'''') + \\ + M_2 (-B + C'' + 2F - 3G' + H' - 3I'' - K''') = 0 \end{aligned}$$

Multiplicirt man jetzt diese Gleichung mit M_1, (51) mit M_2 und subtrahirt dann beide von einander, so hat man:

$$\begin{aligned} -M_1 M_2 D'''' + D''' (-4 M_1 M_3 - 2 M_1 M_4 + M_2^2) + \\ + D'' (-6 M_1 M_5 - 6 M_1 M_6 + 3 M_2 M_3) + D' (-6 M_1 M_9 - \\ - 4 M_1 M_8 + 3 M_2 M_5) + D (- M_1 M_{12} - 2 M_1 M_{13} + \\ + M_2 M_8) + (M_1 M_5 + 2 M_1 M_6 - M_2 M_3)(C - 2I - K') + \\ + (3 M_1 M_3 + 4 M_1 M_4 - 2 M_2^2)(C' - 2I' - K'') + \\ + 2 M_1 M_2 (C'' - 2I'' - K''') + M_1^2 (C''' - \\ - 2I''' - K'''') = 0 \end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} M_1 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]''' - \\ - M_2 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]'' + \\ + M_4 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)]' - \\ - M_7 [M_1 (C - 2I - K') - M_2 D' - D (M_3 - M_4)] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Setzen wir der Kürze halber

$$M_1\,(C - 2\,I - K') - M_2\,D' - D\,(M_3 - M_4) = u$$

so lässt sich die Gleichung (59) so darstellen:

$$M_1\,u''' - M_3\,u'' + M_4\,u' - M_7\,u = 0$$

oder

$$u''' - \frac{M_3}{M_1}\,u'' + \frac{M_4}{M_1}\,u' - \frac{M_7}{M_1}\,u = 0$$

oder endlich, was dasselbe ist, in folgender Form:

$$u''' + \lambda_1\,u'' + \lambda_2\,u' + \lambda_3\,u = 0$$

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der Gleichung

$$w''' + \lambda_1\,w'' + \lambda_2\,w' + \lambda_3\,w = 0$$

so sieht man, dass u die drei Auflösungen:

$$A_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$B_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + B_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + B_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$C_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + C_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + C_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + C_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

hat. Wie lässt sich nun denken, dass der Ausdruck:

$$M_1\,(C - 2\,I - K') - M_2\,D' - D\,(M_3 - M_4)$$

in welchem die Coëfficienten A, B, C determinantenartig verbunden vorkommen, identisch gleich sei, einem der drei angeführten Ausdrücke, wo die Coëfficienten A, B oder C alleinstehend und in linearer Form auftreten?

Wir sind daher gezwungen anzunehmen, dass

(48) $$M_1\,(C - 2\,I - K') - M_2\,D' - D\,(M_3 - M_4) = 0$$

identisch stattfinde, denn nur unter dieser Voraussetzung lässt sich aus (59) kein weiterer Schluss ziehen.

Wir wollen nun zur wirklichen Berechnung von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ schreiten. Es ist:

$$u_1 = A_1\,\frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$u_1' = A_1\,\frac{\partial y'}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y'}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y'}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y'}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y'}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y'}{\partial a_6}$$

$$u_1'' = A_1\,\frac{\partial y''}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y''}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y''}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y''}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y''}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y''}{\partial a_6}$$

$$u_1''' = A_1\,\frac{\partial y'''}{\partial a_1} + A_2\,\frac{\partial y'''}{\partial a_2} + A_3\,\frac{\partial y'''}{\partial a_3} + A_4\,\frac{\partial y'''}{\partial a_4} + A_5\,\frac{\partial y'''}{\partial a_5} + A_6\,\frac{\partial y'''}{\partial a_6}$$

$$u_2 = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$u_2' = B_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y'}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y'}{\partial a_6}$$

$$u_2'' = B_1 \frac{\partial y''}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y''}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y''}{\partial a_6}$$

$$u_2''' = B_1 \frac{\partial y'''}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y'''}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y'''}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y'''}{\partial a_4} + B_5 \frac{\partial y'''}{\partial a_5} + B_6 \frac{\partial y'''}{\partial a_6}$$

$$u_3 = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y}{\partial a_6}$$

$$u_3' = C_1 \frac{\partial y'}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y'}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y'}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y'}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y'}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y'}{\partial a_6}$$

$$u_3'' = C_1 \frac{\partial y''}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y''}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y''}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y''}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y''}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y''}{\partial a_6}$$

$$u_3''' = C_1 \frac{\partial y'''}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y'''}{\partial a_2} + C_3 \frac{\partial y'''}{\partial a_3} + C_4 \frac{\partial y'''}{\partial a_4} + C_5 \frac{\partial y'''}{\partial a_5} + C_6 \frac{\partial y'''}{\partial a_6}$$

Setzt man der Kürze halber:

$$A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 - A_2B_1C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 = N_1$$
$$A_1B_2C_4 - A_1B_4C_2 - A_2B_1C_4 + A_2B_4C_1 + A_4B_1C_2 - A_4B_2C_1 = N_2$$
$$A_1B_2C_5 - A_1B_5C_2 - A_2B_1C_5 + A_2B_5C_1 + A_5B_1C_2 - A_5B_2C_1 = N_3$$
$$A_1B_2C_6 - A_1B_6C_2 - A_2B_1C_6 + A_2B_6C_1 + A_6B_1C_2 - A_6B_2C_1 = N_4$$
$$A_1B_3C_4 - A_1B_4C_3 - A_3B_1C_4 + A_3B_4C_1 + A_4B_1C_3 - A_4B_3C_1 = N_5$$
$$A_1B_3C_5 - A_1B_5C_3 - A_3B_1C_5 + A_3B_5C_1 + A_5B_1C_3 - A_5B_3C_1 = N_6$$
$$A_1B_3C_6 - A_1B_6C_3 - A_3B_1C_6 + A_3B_6C_1 + A_6B_1C_3 - A_6B_3C_1 = N_7$$
$$A_1B_4C_5 - A_1B_5C_4 - A_4B_1C_5 + A_4B_5C_1 + A_5B_1C_4 - A_5B_4C_1 = N_8$$
$$A_1B_4C_6 - A_1B_6C_4 - A_4B_1C_6 + A_4B_6C_1 + A_6B_1C_4 - A_6B_4C_1 = N_9$$
$$A_1B_5C_6 - A_1B_6C_5 - A_5B_1C_6 + A_5B_6C_1 + A_6B_1C_5 - A_6B_5C_1 = N_{10}$$
$$A_2B_3C_4 - A_2B_4C_3 - A_3B_2C_4 + A_3B_4C_2 + A_4B_2C_3 - A_4B_3C_2 = N_{11}$$
$$A_2B_3C_5 - A_2B_5C_3 - A_3B_2C_5 + A_3B_5C_2 + A_5B_2C_3 - A_5B_3C_2 = N_{12}$$
$$A_2B_3C_6 - A_2B_6C_3 - A_3B_2C_6 + A_3B_6C_2 + A_6B_2C_3 - A_6B_3C_2 = N_{13}$$
$$A_2B_4C_5 - A_2B_5C_4 - A_4B_2C_5 + A_4B_5C_2 + A_5B_2C_4 - A_5B_4C_2 = N_{14}$$
$$A_2B_4C_6 - A_2B_6C_4 - A_4B_2C_6 + A_4B_6C_2 + A_6B_2C_4 - A_6B_4C_2 = N_{15}$$
$$A_2B_5C_6 - A_2B_6C_5 - A_5B_2C_6 + A_5B_6C_2 + A_6B_2C_5 - A_6B_5C_2 = N_{16}$$
$$A_3B_4C_5 - A_3B_5C_4 - A_4B_3C_5 + A_4B_5C_3 + A_5B_3C_4 - A_5B_4C_3 = N_{17}$$
$$A_3B_4C_6 - A_3B_6C_4 - A_4B_3C_6 + A_4B_6C_3 + A_6B_3C_4 - A_6B_4C_3 = N_{18}$$
$$A_3B_5C_6 - A_3B_6C_5 - A_5B_3C_6 + A_5B_6C_3 + A_6B_3C_5 - A_6B_5C_3 = N_{19}$$
$$A_4B_5C_6 - A_4B_6C_5 - A_5B_4C_6 + A_5B_6C_4 + A_6B_4C_5 - A_6B_5C_4 = N_{20}$$

und ferner:

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_3$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_2}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_5$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_6$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_3}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_7$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_8$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_4}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_9$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_6}-\frac{\partial y}{\partial a_1}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_6}+\frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_1}+\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_1}\frac{\partial y''}{\partial a_5}-\frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_1}=P_{10}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_4} + \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_2} = P_{11}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_5} + \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_2} = P_{12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_6} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_6} + \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_3} - \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_2} = P_{13}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_5} + \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_2} = P_{14}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_6} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_6} + \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_2} = P_{15}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_6} - \frac{\partial y}{\partial a_2}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_6} + \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_2} + \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_2}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_2} = P_{16}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_5} + \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_3} + \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_3} = P_{17}$$

$$\frac{dy}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_6} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_6} + \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_3} + \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_4} - \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_3} = P_{18}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_6} - \frac{\partial y}{\partial a_3}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_6} + \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_3} + \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_3}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_3} = P_{19}$$

$$\frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_6} - \frac{\partial y}{\partial a_4}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_6} + \frac{\partial y}{\partial a_5}\frac{\partial y'}{\partial a_6}\frac{\partial y''}{\partial a_4} + \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_4}\frac{\partial y''}{\partial a_5} - \frac{\partial y}{\partial a_6}\frac{\partial y'}{\partial a_5}\frac{\partial y''}{\partial a_4} = P_{20}$$

so ist der gemeinschaftliche Nenner von λ_1, λ_2 und λ_3 folgender:

$$\begin{aligned} & N_1 P_1 + N_2 P_2 + N_3 P_3 + N_4 P_4 + N_5 P_5 + N_6 P_6 + N_7 P_7 + \\ & + N_8 P_8 + N_9 P_9 + N_{10} P_{10} + N_{11} P_{11} + N_{12} P_{12} + N_{13} P_{13} + \\ & + N_{14} P_{14} + N_{15} P_{15} + N_{16} P_{16} + N_{17} P_{17} + N_{18} P_{18} + N_{19} P_{19} + \\ & + N_{20} P_{20}. \end{aligned}$$

Will man den Zähler von λ_1 haben, so müssen in allen den P statt y'' die y''', gesetzt werden; will man den Zähler von λ_2 haben, so muss man im Zähler von λ_1 die y' mit y'' verwechseln, und endlich findet man aus dem Zähler von λ_2 den von λ_3, wenn man statt y, y' setzt. Wir erhalten durch dies in den Ausdrücken für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zwanzig Constante $N_1, N_2, N_3, \ldots N_{20}$, zwischen denen aber folgende 30 Gleichungen stattfinden:

$$\begin{array}{l} N_1 N_8 - N_2 N_3 + N_3 N_5 = 0 \\ N_1 N_3 - N_2 N_7 + N_4 N_5 = 0 \\ N_1 N_{13} - N_3 N_7 + N_4 N_8 = 0 \\ N_1 N_{14} - N_2 N_{12} + N_3 N_{11} = 0 \\ N_1 N_{15} - N_2 N_{13} + N_4 N_{11} = 0 \\ N_1 N_{16} - N_3 N_{13} + N_4 N_{12} = 0 \\ N_1 N_{17} - N_5 N_{12} + N_6 N_{11} = 0 \\ N_1 N_{18} - N_5 N_{13} + N_7 N_{11} = 0 \\ N_1 N_{19} - N_6 N_{13} + N_7 N_{12} = 0 \\ N_2 N_{10} - N_3 N_6 + N_4 N_8 = 0 \\ N_2 N_{16} - N_3 N_{15} + N_4 N_{14} = 0 \\ N_2 N_{17} - N_5 N_{14} + N_6 N_{11} = 0 \\ N_2 N_{18} - N_5 N_{15} + N_8 N_{11} = 0 \\ N_2 N_{20} - N_8 N_{15} + N_9 N_{14} = 0 \\ N_3 N_{17} - N_8 N_{14} + N_6 N_{12} = 0 \\ N_3 N_{18} - N_8 N_{13} + N_{16} N_{11} = 0 \\ N_3 N_{20} - N_8 N_{13} + N_{16} N_{14} = 0 \\ N_4 N_{18} - N_7 N_{15} + N_9 N_{13} = 0 \\ N_4 N_{19} - N_7 N_{16} + N_{10} N_{13} = 0 \\ N_4 N_{20} - N_9 N_{16} + N_{10} N_{15} = 0 \\ N_5 N_{10} - N_6 N_9 + N_7 N_8 = 0 \\ N_5 N_{18} - N_8 N_{16} + N_7 N_{17} = 0 \\ N_5 N_{20} - N_8 N_{18} + N_9 N_{17} = 0 \\ N_6 N_{20} - N_8 N_{19} + N_{10} N_{17} = 0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
N_7\ N_{20} - N_9\ N_{19} + N_{10}\ N_{18} &= 0 \\
N_{11}\ N_{19} - N_{19}\ N_{16} + N_{16}\ N_{14} &= 0 \\
N_{11}\ N_{19} - N_{19}\ N_{18} + N_{13}\ N_{17} &= 0 \\
N_{11}\ N_{20} - N_{14}\ N_{19} + N_{16}\ N_{17} &= 0 \\
N_{13}\ N_{20} - N_{14}\ N_{19} + N_{16}\ N_{17} &= 0 \\
N_{16}\ N_{20} - N_{15}\ N_{19} + N_{16}\ N_{18} &= 0
\end{aligned}
$$

Diese dreissig Gleichungen können offenbar nicht lauter verschiedene Gleichungen sein, denn in ihnen kommen ja nur zwanzig Unbekannte vor, man überzeugt sich sehr bald, dass sie alle befriedigt werden für:

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \frac{N_1\,(N_9\,N_{11} - N_6\,N_{15})}{N_7\,N_{11} - N_5\,N_{16}} \\
N_4 &= \frac{N_1\,(N_9\,N_{16} - N_7\,N_{15})}{N_7\,N_{11} - N_5\,N_{16}} \\
N_6 &= -\frac{N_1\,(N_7\,N_{17} + N_6\,N_{19})}{N_7\,N_{11} - N_5\,N_{16}} \\
N_8 &= -\frac{N_1\,(N_9\,N_{11} - N_5\,N_{15})\,(N_7\,N_{17} + N_5\,N_{16})}{(N_7\,N_{11} - N_5\,N_{16})^2} - \frac{N_6\,N_5}{N_1} \\
N_{10} &= \frac{N_1\,(N_9\,N_{19} - N_7\,N_{15})\,(N_7\,N_{17} + N_5\,N_{16})}{(N_7\,N_{11} - N_5\,N_{13})^2} + \frac{N_6\,N_7}{N_1} \\
N_{12} &= -\frac{N_1\,(N_{16}\,N_{17} + N_{11}\,N_{16})}{N_7\,N_{11} - N_5\,N_{16}} \\
N_{14} &= -\frac{N_1\,(N_9\,N_{11} - N_5\,N_{15})\,(N_{19}\,N_{17} + N_{11}\,N_{19})}{(N_7\,N_{11} - N_5\,N_{16})^2} - \frac{N_6\,N_{11}}{N_1} \\
N_{16} &= \frac{N_1\,(N_9\,N_{13} - N_7\,N_{15})\,(N_{19}\,N_{17} + N_{11}\,N_{19})}{(N_7\,N_{11} - N_5\,N_{19})^2} + \frac{N_9\,N_{19}}{N_1} \\
N_{19} &= \frac{N_5\,N_{16} - N_7\,N_{11}}{N_1} \\
N_{20} &= \frac{N_3\,(N_{11}\,N_{19} + N_{19}\,N_{17}) - N_{15}\,(N_7\,N_{17} + N_6\,N_{16})}{N_7\,N_{11} - N_5\,N_{16}} - \\
&- \frac{N_6\,(N_5\,N_{16} - N_7\,N_{11})}{N_1^{\,2}}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Man kann nun auch hier, die in den früheren Fällen gemachten Schlussbemerkungen wiederholen. Die Werthe für

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$$

enthalten 20 Constante nämlich:

$$N_1,\ N_3,\ N_5\ \ldots\ N_{13},\ N_{16},\ N_{20}$$

von denen sich aber, so wie es die Gleichungen (60) zeigen, jene mit geraden Zeigern durch die mit ungeraden ausdrücken lassen; da man ferner noch durch irgend einen der übrig bleibenden Coëfficienten Zähler und Nenner dividiren kann, so kann man die Werthe von den v und den λ betrachten als abhängig von neun Constanten, sechs willkürliche Constante dürfen aber nur vorkommen, folglich muss die Gleichung

$$M_1\,(C-2I-K')-M_2\,D'-D\,(M_2-M_4)=0 \tag{48}$$

auf drei Relationen zwischen den Constanten $N_2, N_4, N_6, N_8 \,.\,.\, N_{20}$ führen.

§. 12.

Wäre aber $\frac{\partial^2 V}{\partial y'''^2}=0$, d. h.

$$V=f(x,y,y',y'')+y'''f(x,y,y'\,y''),$$

so setze man statt (37) folgenden Ausdruck:

$$\Big\{v\,w^2+v_1\,w'^2+v_2\,w''^2+2\,v_3\,w\,w'+2\,v_4\,w\,w''+2\,v_5\,w'\,w''\Big\}_{x_1}^{x_2}+$$
$$+\int_{x_1}^{x_2} P\,(w''+\lambda\,w'+\mu\,w)^2\,dx$$

somit statt der Gleichungen (11) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= v' + P\mu^2\\
B &= v'_1 + 2\,v_3 + P\lambda^2\\
C &= v'_2 + 2\,v_5 + P\\
E &= v + v'_3 + P\lambda\,\mu\\
F &= v_3 + v'_4 + P\mu\\
G &= v_4\\
H &= v_1 + v_4 + v'_5 + P\lambda\\
I &= v_5\\
K &= v_2
\end{aligned}$$

aus denen sich leicht die Werthe von v_2, v_4, v_5 und P ergeben. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
v_2 &= K\\
v_4 &= G\\
v_5 &= I\\
P &= C-K'-2I
\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die obigen Gleichungen, so hat man zur Bestimmung von v, v_1, v_2, λ und μ die fünf Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= v' + \mu^2 (C - K' - 2I) \\ B &= v'_1 + 2v_2 + \lambda^2 (C - K' - 2I) \\ E &= v + v'_2 + \lambda\mu (C - K' - 2I) \\ F &= v_2 + G' + \mu (C - K' - 2I) \\ H &= v_1 + G + I' + \lambda (C - K' - 2I) \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

welche, durch Elimination ein λ und μ auf drei Differentialgleichungen ersten Grades führen.

Wir werden nun genau so, wie bisher die directe Integration dieser Gleichungen umgehen. Ist nämlich das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

$$y = \varphi(x, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

so ist das Integral der Gleichnng:

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \left[\frac{\partial W}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial W}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial W}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

die in entwickelter Gestalt sich so schreiben lässt:

$$\begin{aligned} w''''(C - 2I - K') + 2w'''(C' - 2I' - K'') + w''(-B + C'' + \\ + 2F - 3G' + H' - 3I'' - K''') + w'(-B' + 2F' - 3G'' + \\ + H'' - I'') + w(A - E' + F' - G''') = 0 \end{aligned}$$

$$w = A_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + A_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + A_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

$$w = B_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial y}{\partial a_2} + B_3 \frac{\partial y}{\partial a_3} + B_4 \frac{\partial y}{\partial a_4}$$

von denen wir das erste mit u_1, das zweite mit u_2 bezeichnen. Und nun wählen wir, so wie in §. 9, λ und μ dermassen, das $w = u_1$ und $w = u_2$ die particulären Integrale der linearen Differentialgleichung

$$w'' + \lambda w' + \mu = 0$$

werden, dem zu Folge ist daher:

$$\lambda = \frac{u_2 u_1'' - u_1 u_2''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

$$\mu = \frac{u_2'' u_1' - u_1'' u_2'}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}$$

Aus den Gleichungen (61) ergeben sich nun:

$$\begin{aligned} v_1 &= H - G - I' - \lambda (C - K' - 2I) \\ v_2 &= F - G' - \mu (C - K' - 2I) \\ v &= E - F + G'' + [\mu (C - K' - 2I)]' - \lambda\mu (C - K' - 2I) \end{aligned}$$

und jetzt bleibt nur noch zu beweisen übrig, dass die gefundenen Werthe von λ, μ und den v die zwei Gleichungen:

$$A = v' + \mu^2 (C - K' - 2I)$$
$$B = v_1' + 2v_3 + \lambda^2 (C - K' - 2I)$$

identificiren und dabei mit drei willkürlichen Constanten versehen sind. Setzen wir in diesen zwei Gleichungen statt v, v_1 und v_3 ihre Werthe so haben wir:

$$A = E' - F'' + G''' + [\mu (C - K' - 2I)]'' - [\lambda\mu (C - K' - 2I)]' + \mu^2 (C - K' - 2I)$$
$$B = H' - G' - I'' - [\lambda (C - K' - 2I)]' + 2F' - 2G' + (\lambda^2 - 2\mu)(C - K' - 2I)$$

oder wenn man diese Ausdrücke entwickelt und ordnet:

(62)
$$\begin{gathered}\mu'' (C - K' - 2I) + 2\mu' (C - K' - 2I)' - (\lambda'\mu + \lambda\mu')(C - K' - 2I) + \mu (C - K' - 2I)'' - \lambda\mu (C - K' - 2I)' + \mu^2 (C - K' - 2I) - A + E' - F'' + G''' = 0\\ -\lambda' (C - K' - 2I) - \lambda (C - K' - 2I)' + (\lambda^2 - 2\mu)(C - K' - 2I) - B + H' - 3G' + 2F' - I'' = 0\end{gathered}$$

Macht man von den im §. 9 eingeführten Grössen $M_1, M_2, M_3 \ldots M_8$ Gebrauch, so hat man für μ'' seinen Werth setzend:

$$\begin{gathered}\mu (C - K' - 2I)'' + (2\mu' - \lambda\mu)(C - K' - 2I)' + \left(\frac{M_7 + M_8}{M_1} + \lambda\mu' - \lambda^2\mu - \mu^2\right)(C - K' - 2I) - A + E' - F'' + G''' = 0\\ -\lambda' (C - K' - 2I) - \lambda (C - K' - 2I)' + (\lambda^2 - 2\mu)(C - K' - 2I) - B + H' - 3G' + 2F' - I'' = 0\end{gathered}$$

Setzt man ferner statt λ' und μ' ihre Werthe so erhält man:

$$\begin{gathered}\mu (C - K' - 2I)'' + \left(2\frac{M_3}{M_1} + \lambda\mu\right)(C - K' - 2I)' + \left(\frac{M_7 + M_8}{M_1} + \lambda\frac{M_3}{M_1} + \mu^2\right)(C - K' - 2I) - A + E' - F'' + G''' = 0\\ -\lambda (C - K' - 2I)' + \left(\frac{M_2}{M_1} - \mu\right)(C - K' - 2I) - B + H' - 3G' + 2F' - I'' = 0\end{gathered}$$

und endlich noch für λ und μ ihre Werthe, so erhält man:

(63)
$$\begin{gathered}M_1 M_4 (C - K' - 2I)'' + (2M_1 M_3 - M_2 M_4)(C - K' - 2I)' + (M_1 M_7 + M_1 M_8 - M_2 M_3 + M_4^2)(C - K' - 2I) + M_1^2 (-A + E' - F'' + G''') = 0\\ M_2 (C - K' - 2I)' + (M_3 - M_4)(C - K' - 2I) + M_1 (-B + H' - 3G' + 2F' - I'') = 0\end{gathered}$$

Nun folgt aus den beiden identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&u_1'''' (C - 2I - K') + 2u_1''' (C' - 2I' - K'') + u_1'' (-B + \\
&+ C'' + 2F - 3G' + H' - 3I'' - K''') + u_1' (-B' + \\
&+ 2F' - 3G'' + H'' - I''') + u_1 (A - E' + F'' - G''') = 0 \qquad (64) \\
&u_2'''' (C - 2I - K') + 2u_2''' (C' - 2I' - K'') + u_2'' (-B + \\
&+ C'' + 2F - 3G' + H' - 3I'' - K''') + u_2' (-B' + \\
&+ 2F' - 3G'' + H'' - I''') + u_2 (A - E' + F'' - G''') = 0
\end{aligned}$$

wenn man die erste mit u_2' die zweite mit u_1' multiplicirt und dann von einander subtrahirt:

$$\begin{aligned}
&- M_7 (C - 2I - K') - 2M_6 (C' - 2I' - K'') - M_4 (-B + C'' + \\
&+ 2F - 3G' + H' - 3I'' - K''') + M_1 (A - E' + F'' - G''') = 0
\end{aligned}$$

Nimmt man jetzt den Werth, den diese Gleichung für $A - E' + F'' - G'''$ gibt, und setzt ihn in die erste der Gleichungen (63), so erhält man statt derselben:

$$\begin{aligned}
&- M_2 M_4 (C - 2I - K')' + (M_1 M_8 - M_2 M_6 + M_4^2) (C - 2I - \\
&\qquad - K') - M_1 M_4 (-B + 2F - 3G' + H' - I') = 0
\end{aligned}$$

und wenn man statt $M_1 M_8 - M_2 M_6$ seinen Werth $- M_6 M_4$ setzt:

$$\begin{aligned}
&- M_4 [M_2 (C - 2I - K')' + (M_3 - M_4) (C - 2I - K') + \\
&\qquad + M_1 (-B + 2F - 3G' + H' - I')] = 0
\end{aligned}$$

woraus man sieht, dass die beiden Gleichungen (63) befriedigt werden, wenn nur die zweite von ihnen befriedigt ist.

Verfährt man nun weiter, wie im §. 9, differenzirt man nämlich die letztgenannte Gleichung nach x, so erhält man nach einigen Reductionen:

$$\begin{aligned}
&M_2 (C - 2I - K')'' + 2M_3 (C - 2I - K')' + M_5 (C - 2I - K') + \\
&+ M_1 (-B' + 2F' - 3G'' + H'' - I'') + M_2 (-B + \\
&\qquad + 2F - 3G' + H' - I') = 0
\end{aligned}$$

welche identisch stattfindet, denn sie ist eine unmittelbare Folge der zwei identischen Gleichungen (64) und geht aus ihnen hervor, wenn man die erste mit u_2 die zweite mit $- u_1$ multiplicirt und dann beide addirt. Ist aber die jetzt eben aufgestellte Gleichung identisch Null, so muss ihr Integrale, d. i.

$$\begin{aligned}
&M_2 (C - 2I - K')' + (M_3 - M_4) (C - 2I - K') + M_1 (-B + \\
&\qquad + 2F - 3G' + H' - I')
\end{aligned}$$

gleich einer Constanten sein; ist nun diese Constante gleich Null, so sind die Gleichungen (63) erfüllt, und somit die gefundenen Werthe von λ, μ, v, v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5 die richtigen.

Man hat somit:

$$\int_{x_1}^{x_2} (Aw^2 + Bw'^2 + Cw''^2 + 2Eww' + 2Fww'' + 2Gww''' + \\ + 2Hw'w'' + 2Iw'w''' + 2Kw''w''')\, dx =$$

$$= \Big\{ v\, w^2 + v_1\, w'^2 + v_2\, w''^2 + 2v_3\, ww' + 2v_4\, ww'' + 2v_5\, w'w'' \Big\}_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} P\,(w'' + \lambda\, w' + \mu\, w)^2\, dx$$

wo v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, λ und μ die früher angegebenen Werthe haben, welche genau so wie in §. 9 mit den sechs Constanten C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 versehen sind, zwischen denen die zwei Bedingungsgleichungen:

$$C_1\, C_6 - C_2\, C_5 + C_3\, C_4 = 0$$

$$M_2\,(C - 2I - K')' + (M_3 - M_4)\,(C - 2I - K') + M_1\,(-B + \\ + 2F - 3G' + H' - I'') = 0$$

stattfinden; da ausserdem bloſs die Verhältnisse der Constanten in den Werthen der gefundenen Unbekannten eintreten, so haben sie die nothwendige Allgemeinheit. Die Kriterien sind daher folgende:

$C - K' - 2J$ muss für alle Werthe innerhalb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen beibehalten, und die drei in der Rechnung eintretenden willkürlichen Constanten müssen so gewählt werden können, dass für keinen zwischen x_1 und x_2 liegenden Werth von x der gemeinschaftliche Nenner von λ und μ gleich Null wird.

§. 13.

Ist aber nebstdem, dass $D = 0$ ist, noch $C - K' - 2J = 0$, so lassen sich die Glieder der zweiten Ordnung in die Form:

$$\Big\{ v\, w^2 + v_1\, w'^2 + v_2\, w''^2 + 2v_3\, ww' + 2v_4\, ww'' + 2v_5\, w'w'' \Big\}_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} Q\,(w' + \lambda\, w)^2\, dx$$

bringen, wo die hier eintretenden Unbekannten aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\begin{aligned}
A &= v' + Q\lambda^2 \\
B &= v_1' + 2v_3 + Q \\
C &= v_2' + 2v_5 \\
E &= v + v_3' + Q\lambda \\
F &= v_3 + v_4' \\
G &= v_4 \\
H &= v_1 + v_4 + v_5' \\
I &= v_5 \\
K &= v_2
\end{aligned}$$

Aus ihnen ergeben sich:

$$\begin{aligned}
v_2 &= K \\
v_4 &= G \\
v_5 &= I \\
v_1 &= H - G - I' \\
v_3 &= F - G' \\
Q &= B - 2F + 3G' - H' + I''
\end{aligned}$$

und die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A &= v' + \lambda^2 (B - 2F + 3G' - H' + I'') \\
E &= v + F' - G'' + \lambda (B - 2F + 3G' - H' + I'')
\end{aligned}$$

welche zur Bestimmung von λ und v dienen.

Die Gleichung (38) ist in diesem Falle:

$$w'' (- B + 2F - 3G' + H' - I'') + w' (- B' + 2F' - 3G'' + \\ + H'' - I''') + w (A - E' + F'' - G''') = 0$$

und hat zum Integrale:

$$w = C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$$

unter a_1 und a_2 die Constanten verstanden, die im Integrale der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \left[\frac{\partial V}{\partial y'}\right]' + \left[\frac{\partial V}{\partial y''}\right]'' - \left[\frac{\partial V}{\partial y'''}\right]''' = 0$$

eintreten.

Setzt man, wie im §. 7

$$\lambda = - \frac{u'}{u}$$

unter u den Ausdruck $C_1 \frac{\partial y}{\partial a_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial a_2}$ verstanden, so hat man für v folgenden Werth:

$$v = E - F' + G'' + \frac{u'}{u} (B - 2F + 3G' - H' + I')$$

und wenn alles dies richtig ist, muss folgende Gleichung identisch sein:

$$A = E' - F'' + G''' + \frac{u'}{u} (B' - 2F' + 3G'' - H'' + I'') + \\ + (B - 2F + 3G' - H' + I') \frac{u\,u'' - u'^2}{u^2} + \frac{u'^2}{u^2} (B - 2F + \\ + 3G' - H' + I')$$

Ordnet man sie, so erhält man:

$$u'' (-B + 2F - 3G' + H' - I') + u' (-B' + 2F' - 3G'' + \\ + H'' - I'') + u (A - E' + F'' - G''') = 0$$

was wirklich identisch ist.

In diesem Falle muss also, damit ein Maximum oder Minimum eintrete, $B - 2F + 3G' - H' + J''$ innerhalb der Integrationsgrenzen stets dasselbe Zeichen heibehalten, und ein solcher Werth von m vorhanden sein, der es unmöglich macht, dass innerhalb derselben Grenzen $\frac{\partial y}{\partial a_1} + m \frac{\partial y}{\partial a_2}$ gleich Null wird.

Wäre auch noch $B - 2F + 3G' - H' + J'' = 0$, so lassen sich die Glieder der zweiten Ordnung so darstellen:

$$\left\{ v\,w^2 + v_1\,w'^2 + v_2\,w''^2 + 2v_3\,ww' + 2v_4\,ww'' + 2v_5\,w'w'' \right\}_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} (A - E' + F'' - G''')\,w^2\,dx$$

wo

$$\begin{aligned} v &= E - F' + G'' \\ v_1 &= H - G - J' \\ v_2 &= K \\ v_3 &= F - G' \\ v_4 &= G \\ v_5 &= J \end{aligned}$$

ist, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann. Zum Bestehen eines Maximums oder Minimums genügt es daher, dass $A-E'+F''-G'''$ für alle Werthe von x innerhalb den Integrationsgrenzen einerlei Zeichen habe.

Wäre endlich auch $A-E'+F''-G'''=0$, so müsste man, da Vdx ein vollständiges Differential ist, die Untersuchung auf andere Art führen.

SITZUNG VOM 23. MAI 1854.

Eingesendete Abhandlungen.

Osservazioni della II. Cometa dell' Anno 1854 apparsa verso la fine di Marzo, visibile ad occhio nudo, fatte nell' I. R. Osservatorio di Padova.

(Communicazione Accademica del **Prof. Giovanni Santini.**)

Nella sera 31 di Marzo, mentre si disponevano gli Astronomi alle osservazioni dei due nuovi pianeti Bellona, ed Anfitrite recentemente scoperti a Londra, e Parigi, si presentò alla loro vista una Cometa risplendente con magnifica coda opposta al Sole protraentesi per circa 6 in 8 gradi nella costellazione dei pesci, già molto prossima al tramonto. Osservata con un cannocchiale vi si riscontrava un nucleo ben contornato, splendente, senza quel capillizio, circondante per lo più le comete che ne rende le osservazioni difficili, ed incerte; la sua coda era uniforme non divisa in due rami, come spesso si osserva, rara, luminosa, e lasciava travedere agevolmente le minute stelle, fra le quali brillava con uno splendore direbbesi oltre il consueto la 109 dei pesci (533 del Catalogo dell' associazione Brittannica). La sua lunghezza e splendore si illanguidì nelle sere consecutive al crescere del chiarore della Luna, che pervenne alla prima quadratura ai 5 di Aprile; ma il nucleo si mantenne sempre splendente, e facilmente visibile col cannocchiale anche nella forte luce crepuscolare. La sua *AR* andava rapidamente crescendo, mentre diminuendo pure la declinazione con rapidità si avvicinava continuamente all' Equatore, e mostrava che non sarebbesi potuta osservare per lungo tempo. Si osservò alla machina equatoriale di questo osservatorio da me, e dal mio Collega Sigr. Trettenero, fino al giorno 12 Aprile, dopo la quale epoca, in grazia delle ferie Pasquali vennero interrotte le osservazioni. Io potei continuare ad osservarlo con un buon cannocchiale di Amici montato paralatticamente in Noventa presso Padova fino al giorno 17 Aprile, e mantenevasi ancora abbastanza splendente per poterla comodamente confrontare alle stelle vicine; ma non potei ottenerne buone posizioni, essendosi in quei giorni dissestato l'orologio, di cui soglio servirmi in questa mia privata abitazione. In seguito, turbatasi l'atmosfera, divenuta australe la Cometa, e molto prossima all' orizonte, non potei più vederla.

Eccone le osservazioni ottenute alla Specola di Padova.

1854. Mesi e Giorni.	Tempo Medio in Padova.	AR. della cometa osservª.	Declinazione osservata.	Stelle, alle quali fù confrontata.	Osservatori.	No. dei confr.
Marzo 31	8ʰ 9ᵐ 56ˢ.9	24° 11′ 56″6	+19° 15′ 22″1	523. Brit. Ass.	Trett.	1
Aprile 2	7 34 59·8	31 28 21·3	18 1 44·3	665. B. A.	Sant.	1
—	7 51 59·1	31 30 34·4	18 1 21·7	4238. La Lande.	Trett.	5
3	7 37 58·3	34 54 59·8	17 12 52·0	771. B. A.	Trett.	8
4	7 13 17·0	38 8 10·1	16 19 30·7	870. B. A.	T.	2
—	7 47 12·6	38 12 14·3	16 18 0·9	5099. L. L.	T.	7
7	7 44 20·5	46 53 49·1	13 19 17·8	6088. L. L.=168. H. 3ª. Weisse.	T.	8
8	8 2 57·7	49 28 16·7	12 17 17·2	1087. B. A.	T.	6
9	7 44 19·9	51 48 55·2	11 17 13·8	1084. B. A.	S.	4
10	7 39 6·4	54 1 39·0	10 18 12·8	1174. B. A.	S.	4
12	7 55 42·3	58 4 21·8	+ 8 23 44·0	1073. Weisse H. 3.	S.	4

Nella riduzione delle osservazioni, essendo per lo più la cometa molto vicina all' orizonte, ho avuto riguardo alla differenza delle istruzioni medie, quando questa era sensibile. Le posizioni apparenti delle stelle, delle quali ho fatto uso, desunte dai cataloghi sopra citati, sono le seguenti:

523. Brit. Assoc.	$\alpha' = 1^h\,34^m\,33^s.17$;	$\delta' = +19^\circ\,33'\,19''6$.
665. „ „	2 2 30·83;	18 48 31·3.
4238. La Lande	2 9 38·91;	17 46 29·9.
771. B. A.	2 22 47·43;	17 3 19·9.
5099. La Lande	2 37 35·70;	16 24 1·8.
870. B. A. (ῶ Asiete)........	2 41 7·66;	16 51 14·0.
6088. L. L=(168. H. 3ªWeisse).	3 9 47·33;	13 18 32·7.

1087. B. A.	$\alpha' = 3^h\,32^m\,47^s{:}53$;	$\delta' = +12^0\,55'\,57''.2$.
1084. „ „	3 22 24·74 ;	10 49 51·3.
1174. „ „	3 40 14·83 ;	10 41 22·3.
1073. H. 3^h Weisse	3 55 13·90 ;	8 28 28·7.

Dalle osservazioni dei giorni 2, 7, 12 Aprile sopra riferite, senza avere alcun riguardo alle piccole correzioni dipendenti dalla paralasse diurna, e dall' aberrazione della luce, facendo uso del metodo di Olbers colla modificazione interessantissima introdottavi dal Sigr. Carlini *(Eff. di Milano 1831)*, ho dedotto il seguente sistema di elementi parabolici, che molto si avvicina a rappresentarne le osservazioni.

Passaggio al perielio T = 1854 a giorni 83·05627 T. M. di Berlino.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\omega} = 57^0\;\;9'\;\;34''9\\ \omega = 315\;\;29\;\;49\cdot4\end{array}\right\}\text{ dall' Equin. vero.}$$

$$i = 97\;\;36\;\;37\cdot6$$

$$log.\ q = 9\cdot442676.$$

Calcolando ora la distanza della cometa dalla terra mediante il precedente sistema di elementi, ho applicato alle osservazioni l'effetto dell' aberrazione e paralasse, assumendo le seguenti quantità :

	Corr. in AR. per		Corr. totale in AR.	Corr. in declinazione per		Corr. totale
	l' aberr^e.	la paral.		l'aberr^e.	paral.	
Aprile 2	+ 59"82	+ 7"57	+67"39	− 14"18	+ 7"24	− 6"94
7	+ 48·90	+ 14·00	+62·90	− 19·59	+ 6·62	−12·97
12	+ 41·12	+ 6·20	+47·32	− 17·70	+ 6·11	−11·59

Applicando alle osservazioni nei tre precedenti giorni queste correzioni, passando dal piano dell' equatore al piano dell' ecclittica, ed alla posizione media dell' equinozio pel giorno o Gennajo 1854, prendendo i luoghi della terra dalle Effemeridi di Berlino, e riducendo i tempi osservati in giorni e parti di giorno pel meridiano di Berlino, ho ottenuto pel calcolo dell' orbita parabolica le seguenti posizioni:

T. Medio in Berlino 1854.	Longitudine della cometa=α	Longitudine della terra = A	Latit. Geoc. della cometa=β	Log. dist. della terra dal sole.
92^g.33201	35°33′ 17"3	192°43′ 24"0	+ 4°55′ 22"2	0·000182
97·32669	48 12 30·2	197 38 3·7	− 4 6 25·4	0·000792
102·33458	57 44 11·8	202 32 34·5	−11 33 42·9	0·001402

Queste posizioni conducono al seguente sistema di elementi parabolici dai superiori poco diversi :

$$
\begin{aligned}
T &= 83^d{,}04843 \text{ del } 1854 \text{ T. M. di Berlino}\\
\tilde{\omega} &= 57^\circ\ 5'\ 12{,}''5 \left.\vphantom{\int}\right\} \text{dall' eq. M.}\\
\omega &= 315\ \ 27\ \ 40{,}\ 4 \left.\vphantom{\int}\right\} \text{0 Genn. 1854.}\\
i &= 97\ \ 28\ \ \ 3{,}\ 2\\
\log.\ q &= 9{,}442538
\end{aligned}
$$

Le due osservazioni estreme essendo bene rappresentate, rimangono nella osservazione di mezzo le seguenti differenze

osserv. — Calcolo = — 6″, 2 in longitudine

= + 0″, 1 in latitudine.

Chiamasse, nel calcolo dei luoghi geocentrici, impiegare le regole del moto retrogrado, dovrà cambiare i superiori valori di $\tilde{\omega}$, ed i nei seguenti . . . $\tilde{\omega} = 213^\circ\ 50'\ 8''$, 3 ; $i = 82^\circ\ 31'\ 56''$, 8.

Esaminando la tavola delle comete fin' ora calcolate, non sembra esservene alcuna, i cui elementi abbiano coi precedenti tale somiglianza da farne argomentare la identità.

Pleochroismus einiger Augite und Amphibole.

Von dem w. M. W. **Haidinger.**

Wie in einer früheren Sitzung, am 16. März, einige Bemerkungen über den Pleochroismus des Amethystes, ebenso habe ich heute die Ehre, der hochverehrten mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe Bemerkungen über den Pleochroismus einiger Varietäten von Augit und Amphibol als Bruchstück früherer Studien in dieser Richtung vorzulegen. Sie haben sehr verschiedene Daten, die ich zum Theil an den bezüglichen Stellen anmerkte. Möchte das vielfältig Merkwürdige doch bald fernere Untersuchungen jüngerer Forscher veranlassen.

1. Diopsid von Pfitsch in Tirol. Nach und nach erst gelingt es ein vollständigeres Bild der optischen Verhältnisse, namentlich in Beziehung zur Krystallgestalt darzustellen, wenn auch jetzt noch grosse Lücken übrig bleiben.

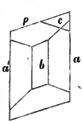
Schon vor 20 Jahren [1]) schrieb Herr Prof. Dove: „Die von „Herrn Prof. Nörrenberg am Gyps und Borax entdeckte Unsym-

[1]) Poggendorff's Annalen. 1835, Bd. 35. S. 380.

„metrie der Farbenerscheinungen in den Ringsystemen der beiden „Axen, welche nach Herrn Prof. Neumann auch am Adular vor„handen ist, zeigt sich am Diopsid nicht. Die neutralen farbigen „Säume der beiden, bei der gewöhnlichen Temperatur eines Zimmers „ganz gleichen Ringsysteme kehren wie beim Arragonit ihre „rothen Enden einander zu, wenn der Hauptschnitt der Krystalle „einer der Axen der gekreuzten Turmalinplatten parallel ist.“ Herr Professor Neumann bemerkt über diese Angabe in einem Briefe an Poggendorff: „Dass es sich mit dem Diopsid nahe so verhält „wie Sie mir schreiben, war mir bereits bekannt, ich sage nahe, „weil ich bis jetzt noch keine Platte geschliffen habe, gegen welche „beide Axen gleich geneigt gewesen wären, was, wenn die Axen so „wie beim Diopsid liegen, nemlich in den die Gestalt symmetrisch „theilenden Ebenen, nothwendig ist, wenn kleine Unterschiede „sichtbar werden sollen“. Herr Prof. Poggendorff erinnert noch, dass hier auch der Umstand bemerkenswerth sei, dass abweichend von der allgemeinen Regel bei hemiprismatischen Krystallen, beim Diopsid oder durchsichtigen Augit (gleich wie bei der Hornblende) die vordere und hintere schiefe Endfläche (*P* und *t* bei Haüy) einen gleichen Winkel mit der Axe der Säule bilden.

Die vorstehenden Angaben liessen übrigens in Bezug auf die eigentliche Lage der Axen ganz im Dunkeln. Dagegen findet sie sich vom Herrn Prof. Miller in der von ihm und Herrn Brooke besorgten Ausgabe von Phillips' Mineralogie [1]) vollständig durchgeführt als ein Ergebniss umsichtiger und mühevoller Forschungen, die derselbe übrigens bereits früher in einer besondern Abhandlung bekannt machte [2]). Es heisst daselbst mit Beziehung auf eine Projection, ähnlich der Fig. 1, auf der Längsfläche oder Ebene der Abweichung der Axe. „Die optischen Axen liegen in der Ebene parallel *b*. Die eine macht Winkel respective von 80° 34′ und 6° 35′ mit Normalen respective auf *a* und *c*,

Fig. 1.

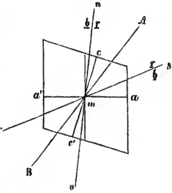


[1]) An Elementary Introduction to Mineralogy. By the late William Phillips. New Edition. By H. J. Brooke and W. H. Miller 1852, pag. 291.

[2]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. VII. Part II. — Poggendorff's Annalen. 1842. Bd. 55. Seite 624.

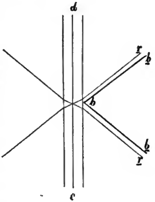
die andere macht Winkel von 21° 38′ und 52° 21′ mit Normalen respective auf a und c." Zur Orientirung kann noch dienen, dass die Winkel ca = 106° 1′, und pa' = 105° 24′ gegeben sind. Ferner ist der Brechungsexponent für Strahlen in der Ebene b, und in dieser Ebene polarisirt = 1·680. Zu grösserer Deutlichkeit wird es indessen vortheilhaft sein, die Lage der Axen wirklich in Beziehung auf die vorstehende Projection Fig. 2 einzuzeichnen. Die Axen sind no und rs, die Winkel nmc = 6° 35′, nma = 80° 34′, rma' = 21° 38′, rmc' = 52° 21′. Daraus folgt der Winkel der Axen rmo = 58° 56′ und 121° 4′ und zwar ist diess der innere Winkel, so wie er erscheinen würde, wenn man die Axen durch Flächen beobachtet, welche senkrecht auf dieselben geschliffen sind, also senkrecht auf no und auf rs stehen.

Fig. 2.



Die Angaben in Hrn. Dr. A. Beer's sehr dankenswerther Zusammenstellung [1]) gleichfalls nach Miller sind folgende: Winkel $p\xi$ (Neigung einer Normalen auf die geneigte Fläche p gegen die optische Mittellinie) = 54° 53′; AB (Winkel der Axenrichtungen) = 58° 56′; β = 1.680. Ferner ist noch angegeben: „$\rho > v$, die Axen für rothes Licht schliessen die für violettes Licht ein. Positiv. — Die Beobachtung des Haupteinfallswinkels liefert μ = 1.378. Positive Reflexion nach Jamin".

Fig. 3.



An den natürlichen Diopsidkrystallen, z. B. den schönen, klaren, zum Theile stark grün gefärbten von

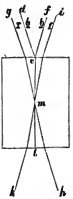
[1]) Einleitung in die höhere Optik. 1853. S. 392.

Pfitsch in Tirol, finden sich Flächen senkrecht auf die optischen Axen eben so wenig als an andern Augitvarietäten. Dagegen kann man sehr leicht schon an den dünnen zwischen den Querflächen *a* und *a'* ($\infty\breve{D}$) flachgedrückten Prismen in einem Polarisations-apparat oder auch schon in einer Turmalinzange zwei Ringsysteme sehen wie in Fig. 3. Eine Messung an einem, etwa zwei Linien dicken Zwilling gab in der Luft die scheinbare Neigung der Axen 76°. Allein, selbst wenn beide Ringsysteme vollkommen gleich erscheinen, so unterliegt man hierbei einer Täuschung. Man hat einen Zwillings-krystall vor sich; die Zwillingsfläche *de* ist sehr deutlich zu erkennen; gewöhnlich ist ein Individuum dünner als das andere, daher auch ein Ringsystem oft viel grösser als das andere erscheint, wie unter andern an einem Exemplar von Soleil in Kork gefasst in dem hiesigen k. k. physikalischen Institute. Von dem halben Winkel 38° ausgehend, findet man:

$$\left.\begin{array}{r} \log \sin \ 38^\circ = 9.78934 \\ -\log \ 1.680 = 0.22531 \\ \hline = \log \sin \ 21^\circ 30' = 9.56403 \end{array}\right\}.$$

Dies stimmt hinlänglich mit Miller's Angabe von 21° 38' überein. Trennt man die beiden Individuen durch einen in der Zwillingsebene geführten Schnitt, so zeigt jedes derselben nur mehr ein Ringsystem.

Fig. 4.



Die Lage der zweiten Axe erscheint sehr schön, wenn man wie in Fig. 4 in einem der vorhin erwähnten Zwillinge Flächen senkrecht auf die Zwillingsfläche und die Longitudinal-Prismenflächen ∞A, $\infty\breve{D}$, $\infty\bar{D}$ schneidet, und zwar bedarf es dann zur Beobachtung derselben oft nicht einmal eines Polarisations-Apparates. Die Krystalle sind nämlich, um es mit einem dem Herschel'schen idiocyclophan analogen Worte auszudrücken, idiostaurophan, da man die Lage der Axen durch das farbige Büschelkreuz erkennt, aber nicht eigentliche Ringe wahrnimmt. Sieht man nämlich in der Richtung *gh* oder *ik* dergestalt durch den Krystall hindurch, dass man auf dem Wege die Zwillingsfläche *el* trifft, so erscheinen kleine lauchgrüne Farbenbüschel von der gewohnten Garbenform auf gelbem Grunde und zwar in einer solchen Lage, dass die durch das Grün gezogene

Linie parallel ist dem Durchschnitte der Zwillingsfläche mit der Fläche, durch welche man hinblickt, die Linie durch die gelben Räume aber senkrecht auf der Zwillingsfläche steht. In Bezug auf die Farben-Intensität der Büschel ist es nicht gleichgültig, ob man durch den Mittelpunct *m* des Krystalles, oder näher an dem obern oder untern Ende hindurchsieht. Der eine Krystall nämlich enthält die optische Axe in der Sehrichtung, der andere wirkt nur als Compensationsprisma von gleicher Brechkraft. Je kürzer daher die wirkliche optische Axe ist und je dicker das Compensationsprisma, desto matter an Farben sind auch die Axenbüschel, während sie recht kräftig sichtbar werden, wenn man eine Stelle wählt, wo die optische Axe länger ist, und das Compensationsprisma nur wenig in die Sehrichtung hineinreicht. Am lebhaftesten erscheinen sie, wenn man blos durch denjenigen Krystall hindurchsieht, der die Axe in der angegebenen Richtung enthält.

Der Winkel *d e f*, welchen die in dem Zwilling beobachteten, scheinbar doppelt vorhandenen Axenrichtungen einschliessen, gab bei einem, zwischen *e* und *l* acht Linien dicken Krystall einen Durchschnittswerth von 33° 32′, davon die Hälfte für die Neigung der einen Axe gegen die Zwillingslinie = 16° 46′. Wie vorher nach dem Brechungsverhältnisse von 1·680 berechnet, wird der innere Winkel = 9° 53′. Für die gleiche Lage kommt bei Miller 9° 26′, welchen Winkel ich daher gerne annehme.

Bei einer frühern Mittheilung[1]) hatte Herr Professor Miller den Winkel in der That ebenfalls höher, nämlich auf 9° 45′, oder eigentlich das Doppelte desselben auf 19° 30′ geschätzt, aber unter der Voraussetzung, dass die bei senkrecht auf das Prisma MM' (∞A) geschnittenen Platten sichtbaren zwei Ringsysteme auch zwei verschiedene Axen eines und desselben Individuums angehören. In den spätern Angaben in den *Cambridge Transactions* und in der *Introduction to Mineralogy* hat derselbe jedoch erst den vollständigen Charakter der Krystalle in Bezug auf die wahre Lage der Axen in einem zusammenhängenden Bilde gegeben. Namentlich erwähnt er daselbst[2]), dass Herr Prof. Nörremberg es war, der ihn zuerst auf die Zwillingsbildung aufmerksam machte.

[1]) Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. V. III. Poggendorff's Annalen 1836. Bd. 37. S. 366.

[2]) Poggendorff's Annalen. 1842. Bd. 55. S. 629.

Zur Charakteristik der Natur der Axenbüschel des Diopsides noch einige Worte. Idiophane Axenbüschel zeigen in Bezug auf die Lage der rothen und blauen farbigen Axenkeile denselben Charakter im gewöhnlichen Lichte und bei einer der Lagen des polarisirten, während die entgegengesetzte Richtung der Polarisationsebene die entgegengesetzte Lage der Farbenkeile hervorbringt. Im gewöhnlichen Lichte liegen bei den Axenbüscheln der eben erwähnten Axe die blauen, oder da hier gar kein Blau in der Farbenmischung ist, die der blauen Seite des Spectrums entsprechenden etwas mehr bläulich grünen Keile zunächst der Zwillingsfläche, die rothen Keile entfernter, so wie es durch die Buchstaben *b* (blau), und *r* (roth) in der Fig. 4 angedeutet ist. Die hellen Balken der elliptischen Ringsysteme liegen in der Ebene der Axen, senkrecht auf die Zwillingsfläche.

Will man die andere optische Axe untersuchen, so dient zur Erläuterung Fig. 3. Aber dann muss man die Ringsysteme in derjenigen Lage des Polarisationsapparates betrachten, wo die hellen Balken in der Ebene der Axen erscheinen. Dies findet bei parallel gestellten Polarisirern Statt und ist in der Fig. 3 durch die Buchstaben *b* und *r* ebenfalls angedeutet. Auf die Projection der Fig. 2 übertragen, erscheinen also, wie es dort durch die gleichen Buchstaben *b* und *r* angedeutet ist, im gewöhnlichen Lichte, oder bei parallelen Polarisirern die rothen Keile zunächst der optischen Hauptaxe oder Mittellinie *AB*, die rothen Axen schliessen einen kleinern Winkel miteinander ein als die blauen. Dies ist der entgegengesetzte Charakter des Aragons, bei welchem die blauen Axen einen kleinern Winkel einschliessen, wenn man mit parallelen Polarisirern untersucht. Bei gekreuzten Polarisirern findet natürlich das entgegengesetzte Statt. Die hier gegebene Nachweisung zeigt, dass in der Zusammenstellung des Herrn Dr. Beer, wo es heisst $\rho < v$, die Untersuchung durch gekreuzte Polarisirer vorausgesetzt wird, indem dort die violetten und blauen Strahlen einen kleineren Winkel mit einander machen als die rothen, und daher von denselben eingeschlossen werden.

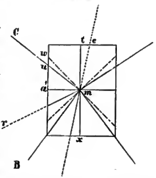
Unter der Voraussetzung von gekreuzten Polarisirern erscheint in der so leicht anzustellenden Beobachtung Fig. 3 sehr deutlich ein inneres Roth und äusseres Blau der Keile. Auf den ersten Anblick wird man versucht dabei in der That zwei Axen zu vermuthen, mit den rothen gegen einander gekehrten Keilen, wie sie von Dove und

Neumann oben erwähnt wurden, wenn nicht die genauere Untersuchung die wahre Natur der Zwillinge zeigte.

Man kann die grünen Axenbüschel sehr schön durch die Linsen in einem Soleil'schen Polarisationsapparat untersuchen, wenn man zur Beleuchtung ordinäres helles Licht wählt. Dies genügt für Beobachtung und Messung mit einer geeigneten Vorrichtung. Wenn man ein Kalkspathrhomboeder vor eine kleine Ocular-Öffnung hält, wie bei dem Amici'schen Polarisations-Mikroskope, so erhält man zwei Bilder der Erscheinung. Ein dem ursprünglichen ähnliches aber reineres in den Farben gibt das in der Richtung der grünen Büschel oder senkrecht auf die Ebenen der optischen Axen polarisirte Lichtfeld; die Richtung der grünen Büschel senkrecht auf die Ebenen der Axe und die Lage der gelben Räume in dieser Ebene bleibt unverändert, eben so die Lage der innern blauen und äussern rothen Keile. Das senkrecht auf das vorige oder in der Ebene der optischen Axen polarisirte Lichtfeld gibt eine complementäre Erscheinung. Ein grüner Axenbüschel erscheint in der Ebene der Axen, die gelben Räume stehen senkrecht darauf. Dann sind aber auch die inneren Keile, die Spitzen der innern Büschelhälften roth, die Spitzen der äussern Büschelhälften blau, oder wie vorhin bemerkt wurde, blaulichgrün.

Wenn man eine Zwillingsplatte wie Fig. 5 in ihrer eigenen Ebene zwischen gekreuzten Polarisirern herumdreht, so verschwindet der Lichtstrahl nicht gleichzeitig in beiden Individuen, sondern bei der Lage, welche hier vorgestellt ist, früher in dem rechten als in dem linken. Eine annähernde Messung des Drehungswinkels nach dem Maximum des Lichtabganges geschätzt, gab 13°. Begreiflich vertheilt sich dies bei der symmetrischen Lage der Zwillingsfläche gleich zu beiden Seiten derselben oder vielmehr der mit ihr Winkel von 45° einschliessenden Ebenen. Nun muss aber die Linie *Cm* die Lage der optischen Normale in der Ebene der Axen senkrecht auf die Mittellinie, oder zweiten Mittellinie *mB* haben, oder es muss der Winkel $cmt + tmw + wmu$ gleich sein dem Winkel

Fig. 5.



uma' + *a'mr*. Es ist aber *tmu* = *uma* = 45°, und *wmu* = demselben gemessenen Winkel von 13°, sage $\frac{z}{2}$.

Nun ist nach der Angabe von Miller:

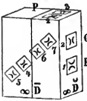
$$cmt = 9°26' \text{ und } a'mr = 21°38', \text{ also}$$

$$9°26 + 45° + \frac{z}{2} = 45° - \frac{z}{2} + 21°38' \text{ und daher}$$

z = 12°12'. Der Winkel von *rmC* = *Cmc* wird aber 60°32' und *rmc* = 121°4', oder das Supplement zu dem Winkel der Axen von 58°56' wie oben. Der Winkel, welchen in der Ebene der optischen Axen die Projection der Zwillingsfläche *tx*, mit der Mittellinie *Bm* einschliesst, oder *Bmx* ist = 38°54', der Winkel *tmC*, welchen sie mit der Normale einschliesst = 51°6'.

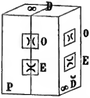
Pleochroismus. (23. October 1848.) In den Zwillingen *E*. Auf den Flächen *P* und $\infty\breve{D}$ unterscheidet man deutlich drei schöne Farbentöne (Fig. 6).

Fig. 6.



1. Dunkellauchgrün.
2. Helllauchgrün, deutlich gleich auf $O(P)$ und $\infty\breve{D}$.
3. Ölgrün, man würde besser sagen ölgelb, der hellste Ton überhaupt, auf der Fläche *P*. Man stelle den Krystall vor die senkrecht unter einander stehenden Bilder der dichroskopischen Loupe, so dass die Fläche $\infty\breve{D}$ horizontal ist, Fig. 7, und drehe ihn sodann um die verticale Axe, welche die optische Queraxe ist, indem die nun horizontale Fläche $\infty\breve{D}$ der Ebene der optischen Axe parallel liegt, so bleibt rund herum in dem untern extraordinär polarisirten Bilde *E* das hellere Lauchgrün unverändert, während in dem obern ordinären Bilde *O* auf *P* ölgelb, zu dem dunkler lauchgrünen *O* auf $\infty\breve{D}$ wechselt.

Fig. 7.



Man sollte nun erwarten, dass auf der Fläche $\infty\breve{D}$ senkrecht auf den beiden vorhergehenden, die beiden Farbentöne, heller ölgelb und dunkler lauchgrün nach der Elasticitätsebene orientirt, einen glänzenden Gegensatz geben sollten. Aber dies findet nicht Statt. Es erscheint zwar eine kleine Verschiedenheit in der Richtung dieser Ebenen, wie in Fig. 6 angedeutet ist, aber nur so, dass die Töne 4 und 6 gleich dunkler, die Töne 5 und 7 gleich lichter sind als die andern in den beiden Individuen.

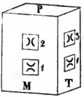
Man sieht, dass selbst noch in der Austheilung der pleochromatischen Töne hier ein Räthsel obwaltet, das wohl genauere Untersuchungen verdient. Jedenfalls gehört der heller lauchgrüne Farbenton und der beim Hindurchsehen durch Flächen, welche auf der Ebene der optischen Axe senkrecht stehen, erscheinende in dieser Ebene polarisirte Lichtstrahl, der extraordinäre Strahl E in Fig. 7 zusammen und zu dem Miller'schen Brechungs-Exponenten 1·860. Eben so gewiss ist von den übrigen beiden Exponenten der eine grösser der andere kleiner. Sie sind beide noch zu messen. Nach Herrn Jamin's oben angeführter Angabe aus dem Maximum des Polarisationswinkels, ist einer derselben = 1·378.

In Bezug auf Farbe überhaupt verdient noch bemerkt zu werden, dass parallel der Fläche $\infty \bar{D}$, (b Miller) oder der Ebene der Axe eine zahlreiche Abwechslung von Schichten sichtbar wird, zum Theil selbst von röthlichen Tönen, und verschieden genug von den zunächst liegenden um zu spiegeln, wobei öfters wahre grüne und rothe Interferenzstreifen sichtbar werden. Ein centrales Reflexionsbild einer Kerzenflamme zum Beispiel ist dann von zwei secundären, ganz nahe liegenden begleitet, von welchen bei einer Winkeldistanz der Sehrichtung von etwa 25° das gegen den ursprünglichen Gegenstand (etwa eine Kerzenflamme) zu liegende senkrecht auf die Einfallsebene das entfernter liegende in derselben polarisirt ist. Doch ist diese Erscheinung nicht häufig wahrzunehmen, und beschränkt sich auf einzelne Stellen der Krystalle.

2. Augit, aus dem Olivin von Kapfenstein im Steiermark Fig. 8 (29. Mai 1846). Im Ganzen dunkel lauchgrün.

1. Hauptaxe	lauchgrün	mittlerer	Ton.
2. Querdiagonale	ölgrün	lichtester	
3. Längsdiagonale	leberbraun ins Röthlichbraune	dunkelster	

Fig. 8.



Nebst den unterbrochenen Theilungsflächen in der Richtung des Prismas ∞A von 87°5′ erscheinen auch noch Spuren nach $\infty \breve{D}$ (M), weniger deutlich nach $\infty \bar{D}$ (T). Im extraordinären Bilde erscheinen beim Hindurchsehen durch M einzelne gelbe Streifen, die bei kleinen Wendungen des Krystalls wechseln.

3. Augit. Grünlichgrau in das Olivengrüne geneigt, ein sogenannter Anthophyllit. (23. Oct. 1848.) Vorige Figur.

1. Hauptaxe	grünlichgrau	mittlerer	Ton.
2. Querdiagonale	honiggelb	dunkelster	
3. Längsdiagonale	strohgelb	hellster	

4. Hypersthen. Vom Ultenthal in Tirol. (23. Octob. 1848.) Bricht leicht vierkantig wie die Fig. 8 nach $\infty \breve{D}$ und $\infty \bar{D}$, ersteres deutlicher.

1. Hauptaxe	olivengrün	gleich hellerer	Ton.
2. Querdiagonale	dunkel honiggelb ins Blutrothe	dunkelster	
3. Längsdiagonale	olivengrün	gleich hellerer	

5. Hypersthen von Labrador [1]. Vorige Figur.

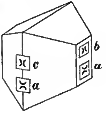
1. Hauptaxe	grau zum Theil grünlich		dunkelster	Ton.
2. Querdiagonale	hyazinthroth ins Nelkenbraun	mehr röthlich	mittlerer	
3. Längsdiagonale		mehr gelblich	hellster	

Nach den Ergebnissen der ersten Untersuchung wich die Orientirung der Farben nach den drei senkrecht auf einander stehenden Elasticitäts-Axen in den letzten vier Varietäten gänzlich ab von denen des Diopsides, aber ich war damals nicht auf diesen Unterschied aufmerksam. Fehlt auch selbst bei dem letzteren noch manches zu bestimmende Stück, so war es doch möglich schärfere Beobachtungen anzustellen, als bei den genannten. Eine Revision ist daher sehr wünschenswerth, aber sie eröffnet ein so weites Feld von Arbeit, dass man nicht so bald eine Vollendung erwarten dürfte, daher vor der Hand die wenigen ersten Beobachtungen als Anregung zu weiteren Forschungen aufgenommen werden mögen.

Als eine höchst wünschenswerthe parallele Reihe von Untersuchungen läge dann noch die vor, welche sich auf die durchsichtigen Varietäten des Amphibols bezöge. So viel ist gewiss, dass die Lage der Elasticitäts-Axen an der sogenannten basaltischen Hornblende, so wie am Strahlstein vom Greiner einigermassen der Lage derselben am Diopsid analog ist, insofern nämlich als sie nicht den Prismen-

[1]) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften. I. Bd. 1848. S 311.

kanten parallel sind, und senkrecht auf denselben stehen. Aber schon aus den ersten Orientirungen stellt sich der merkwürdige Unterschied heraus, dass während beim Diopsid die in der Ebene der Abweichung (*b* **Miller**) liegenden Elasticitätsaxen die kleinen Winkel von 9° 26′ mit den die Prismenaxe von ∞A unter 45° schneidenden Richtungen machen, die eben in derselben Ebene liegenden Elasticitätsaxen am Amphibol die kleinen Winkel von etwa 10° mit den Prismenaxen von ∞A und den darauf senkrecht stehenden Linien einschliessen, so dass also bei möglichst paralleler Stellung der Individuen von Diopsid und von Amphibol die Elasticitätsaxen der einen ungefähr die Winkel halbiren, welche die Elasticitätsaxen der andern einschliessen.



Der Pleochroismus ist bei mehren Varietäten sehr deutlich. Er ist hier nach den, wie eben erwähnt, nur wenig abweichenden drei senkrechten Richtungen orientirt, die ich damals nicht unterschied, die sich aber nach der letzten Revision ganz unzweifelhaft auf die geneigten Linien beziehen.

Strahlstein von Arendal, krystallisirt, lauch-grün.

Farbe der	Axe *a*	dunkelgrün etwas schwärzlich		dunkelster Ton.
Farbe der	Längsaxe *b*	hell gelblich	lauchgrün	hellster Ton.
	Queraxe *c*	dunkel gelblich		mittlerer Ton.

Das hellere Gelblichlauchgrün fast gelblichweiss zu nennen.

Basaltische Hornblende. Die bekannten schwarzen eingewachsenen Krystalle, in dünnen etwa $^1/_8$ Linie dicken Platten, auf Glas gekittet.

Axe *a*	schwarz, undurchsichtig	dunkelster	Ton.
Längsaxe *b*	honiggelb, in das Orangegelbe	hellster	
Queraxe *c*	röthlichbraun	mittlerer	

Merkwürdig ist der starke Contrast der Absorption bei dieser Varietät. Man glaubt einen Turmalin vor sich zu haben, aber mit dem Unterschiede, dass bei vertical stehender Axe beider es beim Turmalin der in der Richtung der Axe polarisirte Strahl ist, welcher absorbirt wurde, während im Amphibol gerade umgekehrt der senkrecht (oder nahe senkrecht) auf die Axe polarisirte Strahl absorbirt wird. In der dichroskopischen Loupe ist für Turmalin das ordinäre Bild schwarz, für Amphibol das extraordinäre. Der Turmalin ist ein negativer Krystall, der Amphibol wäre auf die verticale Axe bezogen ein positiver. Sehr deutlich zeigt sich die von der Krystall-Axe abweichende Richtung der Elasticitäts-Axe in den nach demselben Gesetze wie beim Diopsid zusammengesetzten Zwillingen.

Bei einer anderen Varietät von Amphibol, dem Carinthin von der Saualpe hat bereits Herr Bergrath Breithaupt die Verschiedenheit der Durchsichtigkeit hervorgehoben, je nachdem man die Prismen von 124° 22′ in der Richtung der kleinen Diagonale oder in der Richtung der grossen Diagonale betrachtet, wo sie in der ersten weniger durchsichtig sind als in der zweiten; er schätzt die Verschiedenheit bei gleichen Dicken dem Verhältniss von 1 : 4 gleich [1]. „Stücke in der geeigneten Diagonale geschliffen würden vielleicht „besser zu optischen die Licht-Polarisation betreffenden Vorrich- „tungen gebraucht werden als Schörl [2])“.

Indessen muss das Meiste oder eigentlich Alles in diesen Beziehungen erst durch spätere Forschungen sicher gestellt werden. Vielleicht werden die Studien der optischen Verhältnisse der hieher gehörigen Individuen manchen festen Haltpunkt in Beurtheilung der schwierigen Aufgaben in Bezug auf die Lage der kleinsten Theilchen in den ursprünglich gebildeten und in jenen gewähren, bei welchen Einflüsse späterer Veränderungen nachweisbar sind.

Form und Farbe des Weltzienits.

Von dem w. M. W. **Haidinger.**

Unser hochverehrter College, Hr. Professor Redtenbacher vertraute mir vor einiger Zeit eine Anzahl schöner Krystalle zur Untersuchung an, von einer neuen chemischen Verbindung, die ihm Herr Professor Weltzien in Karlsruhe mitgetheilt, und welche dieser mit einer Reihe von Untersuchungen beschäftigt, kürzlich dargestellt hatte. Herr Professor Weltzien wird selbst über die chemischen Verhältnisse nähere Nachrichten geben, vorläufig möge

[1]) Vollständiges Handbuch der Mineralogie 1836. I. Bd. S. 87.

[2]) Vollständige Charakteristik des Mineral-Systems. 1832. S. 135.

erwähnt werden, dass der eigentliche wissenschaftlich-chemische Name *Tetraethylammonium-Trijodid* ist, und die Formel $\left.\begin{matrix}C_4\,H_5\\C_4\,H_5\\C_4\,H_5\\C_4\,H_5\end{matrix}\right\}NJ_3$.

Als kürzeren Namen, nach den Grundsätzen der specifischen Nomenclatur, bitte ich um Erlauhniss, dem Entdecker der schönen Krystalle zu Ehren, für die Species den Namen *Weltzienit* in Vorschlag zu bringen.

Die regelmässigen Formen des Weltzienits gehören in das pyramidale System. Die Krystalle, bis anderthalb Linien gross, zeigen gewöhnlich die in den Figuren dargestellten Formen $0\,.\,P\,.\,2P'\,.\,\infty P\,.\,\infty P'$. Nach den von Hrn. J. Schahus mir freundlichst mitgetheilten Ergebnissen seinen genauen Messungen sind die Axenkanten der Pyramide $= 121°26'$, die Kanten an der Basis $= 87°32'$, die Axe selbst $= 0.958 = \sqrt{0.9136}$. Die Krystalle sind meistens tafelartig zwischen den Flächen 0, der Base, zusammengedrückt, auch wohl gleichzeitig zwischen zwei der Prismenflächen ∞P, so dass sie längliche vierseitige Tafeln bilden.

Fig. 1.

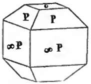
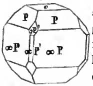


Fig. 2.



Die Farbe erscheint im Ganzen schwärzlichblau mit Diamantglanz. Bei näherer Betrachtung findet man, dass dies ein Gesammteindruck ist, welchen eine hlaue Oberflächenfarbe zugleich mit der Körperfarbe hervorbringt, welche letztere zwar in sehr dünnen Krystallsplittern gelb aber überhaupt so stark absorbirt ist, dass die Krystalle undurchsichtig werden. Man beobachtet die Farbentöne einzeln wie folgt:

In Krystallen. Körperfarhe. Sehr dunkel röthlichhraun; in dünnen Splittern bei neunzigfacher Vergrösserung blassgelh his dunkel röthlichhraun und endlich undurchsichtig. Der in der Richtung der Axe polarisirte Strahl stärker absorbirt, als der senkrecht auf die Axe polarisirte. In hellem Lichte sind etwa $1/2$ Linie dicke Krystalle senkrecht auf die Axe noch tief hyazinthroth durchscheinend, in der Richtung der Axe sind sie undurchsichtig. Oberflächenfarbe. Auf der Endfläche 0 in allen Azimuthen sehr schönes Lasurhlau, senkrecht auf die Einfallsebene polarisirt. Auf allen Seitenflächen, ∞P, $\infty P'$, sehr schönes Lasurblau polarisirt in der Richtung der Axe.

Aufpolirt. Diamantglanz, Körperfarbe orangegelb, Oberflächenfarbe sehr schön lasurblau in allen Azimuthen, senkrecht auf die Einfallsebene polarisirt. Die letztere bei sehr grossen Einfallswinkeln durch wenig deutliches Violett in eben solches Gelblichweiss.

Zusatz zu dem Aufsatze: Über die Ursache des plötzlichen Erstarrens übersättigter Salzlösungen unter gewissen Umständen[1]*.*

Von A. Lieben.

In der Theorie, welche ich in der vorstehenden Abhandlung, über die Erscheinungen, die sich an einer in der Wärme gesättigten Lösung von schwefelsaurem Natron zeigen, aufstellte, habe ich nachzuweisen gesucht, dass sich zwei Salze mit verschiedenen Mengen Krystallwasser, nämlich $NaO, SO_3 . 10HO$ und $NaO . SO_3 . 7HO$, neben einander in derselben befinden. Es wurde daselbst erwähnt, dass diese beiden Salze wahrscheinlich einen Einfluss auf einander in Bezug auf ihre Löslichkeit ausüben, wodurch es möglich wird, dass die überstehende Flüssigkeit, nachdem in Folge von Abkühlung Krystalle von (7) herausgefallen sind, reicher an NaO, SO_3 ist, als eine derselben Temperatur entsprechende gesättigte Lösung von (10). Der folgende Versuch soll die Reactionen in der Löslichkeit, welche zwischen den beiden Salzen (10) und (7) obwalten, etwas heller ins Licht setzen.

Durch Abkühlung einer in der Wärme gesättigten Lösung von schwefelsaurem Natron verschaffte ich mir eine Flüssigkeit, welche Krystalle des Salzes (7) enthielt; das Kölbchen, in dem sich dieselbe befand, war durch einen Kork verschlossen, in welchen zwei abwärtsgebogene Röhren eingepasst waren. Gleichzeitig bereitete ich eine bei gewöhnlicher Temperatur gesättigte Lösung von (10), indem ich die Krystalle dieses Salzes unter zeitweisem Umschütteln längere Zeit mit Wasser in Berührung liess. Es wurde nun die Flüssigkeit von den Krystallen abgegossen; die eine der bei-

[1]) Dieser Zusatz wurde in der Classen-Sitzung am 27. Juli überreicht.

den Röhren am Kölbchen in dieselbe getaucht und an der anderen Röhre gesaugt. Auf diese Weise wurde also bei Abhaltung des Luft- (somit auch des Staub-)Zutrittes eine gesättigte (10)-Lösung von derselben Temperatur in das Kölbchen gebracht und es konnte ihre Wirkung beobachtet werden. Die Krystalle (7) verschwanden allmählich und beim Umschütteln wurde eine klare Lösung ohne Krystalle erhalten. Somit sind die Krystalle des Salzes (7) in einer gesättigten (10)-Lösung unauflöslich. — Wenn man dieses Resultat berücksichtigt, so erscheint es nun vollkommen klar, warum die Flüssigkeit, welche über den herausgefallenen Krystallen (7) steht und welche nach den dort entwickelten Vorstellungen eine gesättigte Lösung von (10) ist, nebst diesem Salze auch noch (7) gelöst enthält und warum sie daher, auch nachdem sie von den Krystallen (7) abgegossen wurde, durch den Zutritt der Luft oder durch einen eingetauchten Körper erstarren kann. Es ergibt sich ferner auf eine höchst einfache Weise all das, was beim Erwärmen einer Lösung, welche Krystalle von (7) abgesetzt hat, geschieht. Der Hergang ist dem bei der Abkühlung gerade entgegengesetzt. Beim Erwärmen nimmt nämlich das Wasser an Lösungsvermögen zu; ein Theil des in Lösung befindlichen (7) verwandelt sich dadurch in (10), die Vermehrung der vorhandenen Menge (10)-Lösung bewirkt aber eine theilweise Auflösung der am Boden befindlichen Krystalle (7) u. s. w. So wird beim allmählichen Steigen der Temperatur stets ein Theil des gelösten (7) in (10) übergehen, dadurch ein Theil der Krystalle (7) in die Flüssigkeit aufgenommen werden, bis jene ganz verschwunden sind und sich nur mehr (7) und (10) in der Lösung befinden. Bei noch fortgesetzter Erwärmung, wo das Wasser an Lösungsvermögen zunimmt, verwandelt sich immer vollständiger das (7) in (10), bis endlich bei der Temperatur, wo man ursprünglich die Lösung gemacht hat, nur mehr (10) sich in Lösung befindet.

Ebenso wie die Entziehung von Wasser (bei der Verdunstung) dieselbe Wirkung thut, wie fortgesetzte Abkühlung bei einer in der Wärme gesättigten Lösung von schwefelsaurem Natron, so gibt wieder anderseits ein Zusatz von Wasser dieselben Resultate wie fortgesetzte Erwärmung. Um mich davon zu überzeugen, stellte ich den oben beschriebenen Versuch wieder an, nur nahm ich diesmal reines Wasser anstatt der gesättigten (10)-Lösung. Nachdem das Wasser hineingesaugt worden war, verschwanden allmählich die Krystalle

(7) vom Boden des Gefässes und es wurde eine klare Lösung erhalten.

In der bereits erwähnten früheren Arbeit habe ich die Wirkung fortgesetzter Abkühlung auf die in der Wärme gesättigte Lösung von schwefelsaurem Natron bis an die äusserste Grenze verfolgt, ohne dabei auf das Gefrieren Rücksicht zu nehmen, welches nach Loewel zwischen — 16° und — 20° eintritt. Loewel [1]) gibt an, dass wenn man eine Lösung, die bereits Krystalle von (7) abgesetzt hat, zum Gefrieren bringt und hierauf die Masse erwärmt, ein Brei von (10)-Krystallen entsteht, indem die Krystalle (7) undurchsichtig und milchweiss werden. Diese Thatsache wird, wie mir scheint, aus der Eigenschaft der Krystalle (7) klar, sich wohl in einer gesättigten (10)-Lösung aufzulösen, aber bei unmittelbarem Zusatze von Wasser dieses zu absorbiren und wenigstens an der Oberfläche sich in (10) zu verwandeln. Im vorliegenden Falle schmilzt nämlich das Eis durch die Erwärmung und das entstandene Wasser dient theils dazu, das Salz zu lösen, theils auch das Salz (7) in (10) zu verwandeln, wobei es eben undurchsichtig wird; sobald nun einmal Krystalle von (10) entstanden sind, so leiten sie auf die bekannte Weise die Krystallisation in der ganzen Flüssigkeit ein.

Ob das Salz (7) sich in der gesättigten (10)-Lösung als solches auflöst, oder ob dabei irgend eine Veränderung eintritt, muss ich vor der Hand dahingestellt sein lassen und kann mich um so mehr mit der blossen Thatsache begnügen, als sie vollkommen zur Erklärung der gebotenen Erscheinungen hinreicht.

---

[1]) Annales de Chim. et de Phys. [3]. XXIX, S. 62.

AUS DER GESAMMTSITZUNG VOM 26. MAI 1854.

In der Gesammtsitzung der kaiserl. Akademie am 27. Mai 1853 wurde der Termin für die im Jahre 1851 ausgeschriebene Preisfrage: „Was sind Druck- und Wärme-Capacität bei Gasen, die sich ausserhalb der Nähe der Liquefaction befinden, für Functionen der Dichte und Temperatur?“ welcher am 31. December 1852 abgelaufen war, bis zum 31. December 1853 verlängert. Zur festgesetzten Frist war aber keine Abhandlung eingelaufen, und die Akademie beschloss, diese Frage nicht zu wiederholen.

Für die dritte, der im Jahre 1852 ausgeschriebenen Preisfrage „Bestimmung der Massen der Planeten“ war gleichfalls am festgesetzten Termine, den 31. December 1853, keine Abhandlung eingesendet worden, und die Akademie beschloss, auch diese Frage nicht zu wiederholen.

In der Gesammtsitzung am 26. Mai 1854 wurden daher statt der obengenannten, nachfolgende zwei neue Preisaufgaben der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe angenommen und in der feierlichen Sitzung am 30. Mai publicirt:

Erste Preis-Aufgabe.

(Vorgeschlagen vom Director v. Littrow.)

Eine der fühlbarsten Lücken unserer gegenwärtigen astronomischen Kenntnisse ist der Mangel irgend umfassender Helligkeitsmessungen von Fixsternen. So sehr verdienstlich die bisherigen Leistungen dieser Art, besonders von Argelander, dann von Heis u. a. sind, so können dieselben doch, da sie lediglich auf Schätzungen mit freiem Auge beruhen, nur als Vorarbeiten betrachtet werden. So lang aber eigentlich photometrische Bestimmungen in grösserer

Anzahl fehlen, ist z. B. weder an völlig genügende Sternkarten noch an genauere Beobachtung der Lichtverhältnisse von sogenannten Veränderlichen zu denken. Da nun andererseits durch die Arbeiten von Steinheil, J. Herschel, Dawes etc. der Weg zu solchen Untersuchungen völlig angebahnt ist, so findet sich die kais. Akademie veranlasst, folgende Preisfrage auszuschreiben:

Es sind möglichst zahlreiche und möglichst genaue photometrische Bestimmungen von Fixsternen in solcher Anordnung und Ausdehnung zu liefern, dass der heutigen Sternkunde dadurch ein bedeutender Fortschritt erwächst.

Preis: Dreihundert Stück k. k. österreichische Münzducaten. Termin der Einsendung: 31. December 1856. Die Ertheilung des Preises erfolgt am 30. Mai 1857.

Zweite Preis-Aufgabe.

(Vorgeschlagen vom Prof. Schrötter.)

Im Jahre 1851 hatte die Akademie als Preisaufgabe die Bestimmung der Krystallgestalten in chemischen Laboratorien erzeugter Producte gestellt. Der Erfolg rechtfertigte die Wahl dieses Gegenstandes, denn die Akademie sah sich in der angenehmen Lage, in ihrer feierlichen Sitzung am 30. Mai 1853 einer Arbeit den Preis zuzuerkennen, die zur Erweiterung der Naturwissenschaft beitrug, indem durch dieselbe gerade auf dem noch so mangelhaft bearbeiteten, der Physik und Chemie gemeinschaftlichen Gebiete namhafte Lücken ausgefüllt wurden. Die Akademie hat den Grundsatz anerkannt, dass Preisaufgaben vorzüglich dann geeignet sind einen Einfluss auf die Richtung der Wissenschaft zu üben, wenn die von Zeit zu Zeit ausgeschriebenen in einem bestimmten, nahen Zusammenhange stehen, und dass nur auf diesem Wege die Forschungen und Bestrebungen in der Naturwissenschaft einem bestimmten Ziele zugelenkt werden können.

Die Akademie hat sich daher dafür entschieden, diesmal ihre zweite Preisaufgabe so zu stellen, dass sie gewissermassen eine, dem gemachten Fortschritte angemessene Erweiterung der oben genannten gelösten Aufgabe bildet. Wenn nämlich bei dieser Preisaufgabe die

Bestimmung der Abmessungen der Krystalle der in Laboratorien erzeugten Producte in den Vordergrund trat, so ist es bei der nun gestellten die Ermittelung der optischen Verhältnisse dieser Körper.

Die Preisfrage lautet daher:

Bestimmung der Krystallgestalten und der optischen Verhältnisse in chemischen Laboratorien erzeugter Producte.

Die Untersuchung der optischen Verhältnisse hat sich mindestens auf die Ermittelung der Flächen- und Körperfarbe, der inneren Dispersion, der Lage der optischen Axen, der Brechungs-Coëfficienten und des Farbenzerstreuungs-Vermögens zu erstrecken. Sehr erwünscht wird es sein, wenn die Bewerber ihre Untersuchungen auch noch auf die Absorption, die Ablenkung der Polarisations-Ebene durch circular polarisirende Lösungen, so wie auf andere Eigenschaften, die Bestimmung der Dichte etc. richten.

Es bedarf ferner, als im Geiste der Frage liegend, kaum der Erwähnung, dass es den Preisbewerbern unbenommen bleibt, auch Körper, deren Krystallform bereits bekannt ist, oder solche, die bisher blos in der Natur vorkommen, sowie Flüssigkeiten, in optischer Beziehung, in den Bereich ihrer Untersuchung zu ziehen.

Besonderes Augenmerk ist darauf zu richten, dass sich unter den untersuchten Substanzen solche befinden, die einer Reihe homologer organischer Verbindungen angehören. Es wird endlich gefordert, dass das Detail der Untersuchungen angegeben und gute Zeichnungen zur Erläuterung beigefügt werden.

Der Termin der Einsendung ist der 31. December 1856. Der Preis beträgt 250 Stück k. k. österreichische Münzducaten.

Die Zuerkennung des Preises erfolgt am 30. Mai 1857.

Zur Verständigung der Preiswerber folgen hier die auf die Preisschriften sich beziehenden Paragraphe der Geschäftsordnung der kaiserl. Akademie der Wissenschaften:

§. 46. Abhandlungen und Mittheilungen, welche der Akademie vorgelegt werden, können in jeder Landessprache der Monarchie oder in lateinischer Sprache verfasst sein, und werden in jener gedruckt, in welcher sie geschrieben sind.

§. 55. Die um einen Preis werbenden Abhandlungen dürfen den Namen des Verfassers nicht enthalten, sind aber, wie allgemein üblich, mit einem Wahlspruche zu versehen. Jeder Abhandlung hat ein versiegelter, mit demselben Motto versehener Zettel beizuliegen, der den Namen des Verfassers enthält. In der feierlichen Sitzung am 30. Mai eröffnet der Vorsitzende den versiegelten Zettel jener Abhandlung, welcher der Preis zuerkannt wurde, und verkündet den Namen des Verfassers. Die übrigen Zettel werden uneröffnet verbrannt, die Abhandlungen aber aufbewahrt, bis deren Verfasser sie zurück verlangen.

§. 56. Theilung eines Preises unter mehrere Bewerber findet nicht Statt.

§. 57. Jede gekrönte Preisschrift bleibt Eigenthum ihres Verfassers. Wünscht es derselbe, so wird die Schrift von der Akademie als gesondertes Werk in Druck gelegt. In diesem Falle erhält der Verfasser fünfzig Exemplare und verzichtet auf das Eigenthumsrecht.

§. 58. Die wirklichen Mitglieder der Akademie dürfen an der Bewerbung um die von ihr ausgeschriebenen Preise nicht Theil nehmen.

§. 59. Abhandlungen, welche der Veröffentlichung würdig sind, ohne jedoch den Preis erhalten zu haben, können mit Einwilligung des Verfassers entweder in den Schriften der Akademie oder auch als abgesonderte Werke herausgegeben werden.

In Folge besonderen Beschlusses behält sich die kaiserl. Akademie vor, Schriften, welchen zwar kein Preis zuerkannt werden konnte, die aber als der Berücksichtigung würdige wissenschaftliche Leistungen anerkannt wurden, nach Übereinkunft mit dem Verfasser zu honoriren und in Druck zu legen.

VERZEICHNISS

DER

EINGEGANGENEN DRUCKSCHRIFTEN.

(MAI.)

Anzeiger, für Kunde der deutschen Vorzeit. Nr. 5.

Akademie, Leopold - Carolinische, der Naturforscher. Verhandlungen. Bd. 24.

Archive de Physiologie de Thérapeutique et d'Hygiène. Par M. Bouchardat. Nr. 1. Paris 1854; 8°.

Flora. Nr. 9—24.

Accademia pontificia de nuovi Lincei, Atti. sess. 5.

Akademie, königl. preussische, der Wissenschaften, Monatsbericht. Mai.

L'Archeografo Triestino. Vol. 1—4. Trieste 1829—37; 8°.

Berliner Universitätsschriften a. d. J. 1853.

Bleeker, P. Oversigt der Geschiedenis van het Bataviaasch Genootschap von Kunsten en Wetenschappen. Van 1778—53. Batavia 1853; 4°.

— 3. Bijdrage tot de Kennis der ichthyologischen Fauna von Ceram.

— 4. Bijdrage tot de Kennis der ichthyologischen Fauna von Amboina. Batavia 1853; 8°.

(Cibrario), Memorie cronolog. e genealog. di Storia nazionale. Torino 1852; 4°.

(Cicogna), Clemente VIII Papa, Breve i. d. 15. Ag. 1603 ad Offredo degli Offredi ecc. Venezia 1854; 8°.

Gesellschaft, königl. sächsische, der Wissenschaften. Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Bd. 2, Bog. 1—26. Leipzig 1854; 8°.

Göttingen, Universitäts-Schriften a. d. J. 1853.

Greifswald, Universitäts-Schriften a. d. J. 1853.

Kiel, Universitäts-Schriften a. d. J. 1853.

Lotos, 1854. Nr. 2, 3, 4.

(Marcello Aless.), Relazione dell' Ambasceria a Constantinop. di Gianfranc. Morosini ecc. 1582—85 ecc. Venezia 1854; 8°.

Maury, M. F. Explanations and sailing directions 6. ed. Philadelphia 1854; 4°.

Mittheilungen a. d. Gebiete d. Statistik. Jahrgang III, Heft 1.

Nardo, G. D. sopra 2 specie di pesci pubblicate come nuove dal Prof. R. Molin. Venezia 1853; 8°.

— Notizie sullo sferococco confervoide delle venete Lagune ecc. Venezia 1853; 8°.

— Sunto di alcune osservazioni anatom. sull' intima struttura della cuta de' pesci ecc. Venezia 1853; 4°.

Orti, Manara G. G. Dei lavori architettonici di Fra Giocondo in Verona. Verona 1853; 8°.

— Cenni storici e documenti che risguardano Cangrande I, della Scala. Verona 1853; 8°.

Pamatky, archaeologické a místopirné ecc. D. I, s. 1, 2. Praze 1854; 4°.

Poggioli P., Nouvelle application de l'Electricité par frottement ecc. Paris 1854, 8°.

Reuß, August. Kurze Übersicht der geognostischen Verhältnisse Böhmens. Mit 3 geologischen Übersichtskarten. Prag. 1854; 8°.

Romanin, S. Storia documentale di Venezia. Tom. II, pag. 1. Venezia 1854; 8°.

Schott, H. Analecta botanica Nro. 1. Vindobona 1854; 8°.

Society asiatic of Bengal. Journal, 1853. Nro. 6.

Stein, Friedr. Die Infusionsthierchen auf ihre Entwickelungsgeschichte untersucht. Leipzig 1854; 4°.

Verein, historischer, für Steiermark. Mittheilungen, 4. Graz 1854; 8°.

— Jahresbericht 1853—54.

Verein, siebenbürgischer, für Naturwissenschaften zu Hermanstadt. Verhandlungen, Bd. IV.

Viquesnel, A. Résumé des observat. géograph. et géolog. faites en 1847 dans la Turquie d'Europe. (Bulletin de la Société géolog. de France, 1853, 2 Série, T. X.

Zech, Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. Leipzig, 1853; 4°.