

Srovnání klasického a kvantového oscilátoru

Ondřej Kučera

**Semestrální projekt
2010**

 **Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně**
Fakulta aplikované informatiky

Obsah

1.	Úvod.....	3
2.	Teorie k problematice.....	4
2.1.	Mechanika	4
2.1.1.	Klasická mechanika.....	4
2.1.1.1.	Klasický oscilátor	4
2.1.2.	Kvantová mechanika	6
2.1.2.1.	Vývoj kvantové mechaniky.....	6
2.1.2.2.	Schrödingerova rovnice.....	7
2.1.2.3.	Kvantový oscilátor	7
3.	Zpracování problematiky	9
3.1.	Klasický oscilátor	9
3.2.	Kvantový oscilátor	9
3.2.1.	Odhad řešení v asymptotické oblasti.....	10
3.2.2.	Zpřesnění řešení v oblasti konečných hodnot	11
3.2.3.	Energetické spektrum	12
4.	Zhodnocení zpracované problematiky	13
5.	Závěr.....	14
	Použitá literatura	15

1. Úvod

Kmitavý pohyb (oscilace) je děj, při kterém se opakovaně mění fyzikální veličiny, a můžeme jej velmi často pozorovat ve světě kolem nás, například jako kmitání kytarových strun, kyvadlo na hodinách, kmitání atomů v látkách. Tento jev se vyskytuje nejen u hmotných objektů, ale třeba i u šíření rentgenového záření. Všechny uvedené příklady jsou kmitající mechanické soustavy (nebo jejich části), které nazýváme oscilátory.

V tomto semestrálním projektu budou popsány vlastnosti a následně diskutovány rozdíly dvou typů oscilátorů. Klasického oscilátoru, který je popsán pomocí fyziky (klasického) makroskopického světa, a oscilátoru kvantového, realizovatelného na částicové úrovni, u kterého je uplatněna fyzika kvantová, jelikož zde přestávají platit kolem nás běžné fyzikální zákony.

2. Teorie k problematice

2.1. Mechanika

Mechanika je fyzikální obor, který studuje mechanické pohyby hmotných těles, kapalin a plynů. Podle fyzikálních principů, které jsou v mechanice použity ji lze rozdělit na klasickou (Newtonovskou), kvantovou nebo relativistickou. První dvě si zde rozebereme blíže. [1]

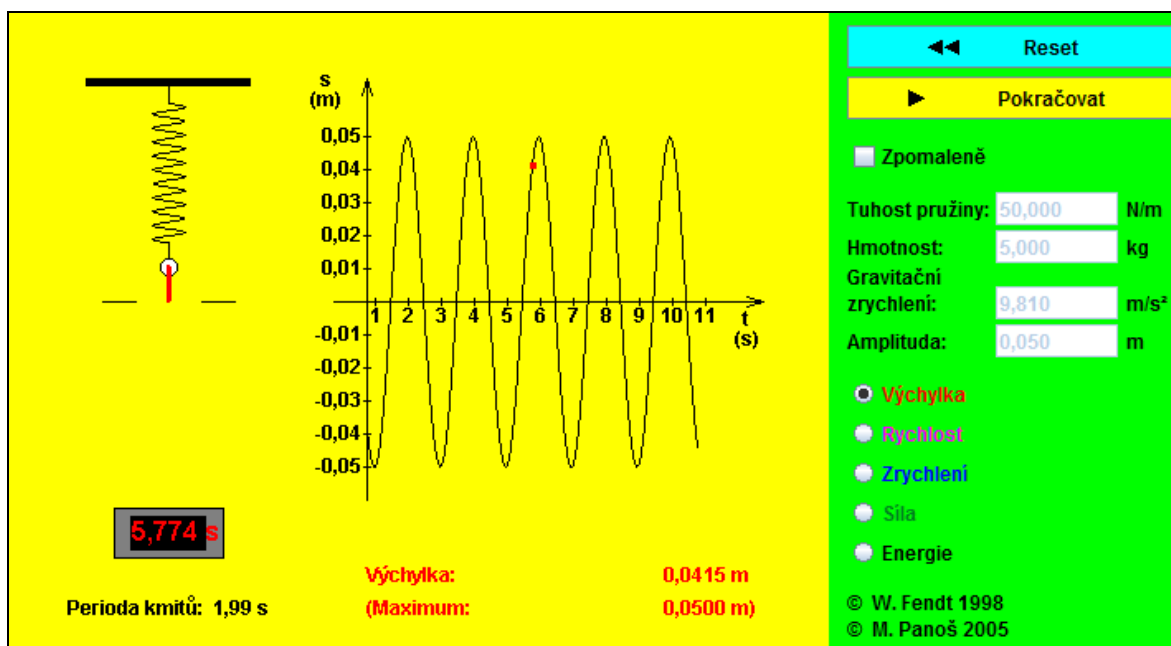
2.1.1. Klasická mechanika

Klasická mechanika se zabývá mechanikou makroskopických těles, pohybujících se rychlostí zanedbatelnou vzhledem k rychlosti světla. S jevy, které klasická mechanika popisuje, se můžeme setkat běžně kolem nás. To je také důvod, proč byla zkoumána již od starověku. Nejdůležitějším představitelem tohoto oboru byl Isaac Newton, jenž se v 17. století zasloužil o rozvoj klasické mechaniky popsáním tří pohybových zákonů.

2.1.1.1. Klasický oscilátor

Klasický lineární oscilátor lze pozorovat pouhým okem člověka. Dosahuje rozměrů a hmotnosti, pro které by nemělo smysl vyjadřování jeho fyzikálních vlastností pomocí kvantové fyziky, proto se pro jeho popis používají zákony z klasické fyziky makrosvětla.

Pro ověření a lepší pochopení problematiky klasického oscilátoru je možno použít simulační aplet [2] (obrázek 1) s pružinovým oscilátorem, ve kterém jsou přehledně znázorněny všechny vztahy odvozené v tomto textu.



Obrázek 1: Aplet klasického pružinového oscilátoru

Pokud objektu, který vykonává harmonický pohyb, nedodáváme energii, tak je kmitání oscilátoru v reálném světě vždy tlumeno (zmenšuje se jeho amplituda), a to v důsledku působení třecích (popřípadě i jiných) sil na objekt. V našem případě budeme popisovat kmitání oscilátoru, u kterého k tlumení nedochází.

Jednoduchý harmonický pohyb, který vykonává klasický oscilátor, lze popsat závislostí výchylky na čase a je vyjádřen rovnicí

$$x(t) = x_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad (2.1)$$

kde se nachází tři konstanty. Amplituda (x_m) udávající maximální velikost výchylky v kladném i záporném směru. Počáteční fáze (φ) závislá na výchylce částice v počátku a úhlová frekvence (ω).

Rychlost harmonického pohybu dostaneme pomocí derivace dráhy

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (x_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)), \quad (2.2)$$

$$v(t) = -\omega \cdot x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi). \quad (2.3)$$

Z ní vyjádříme pomocí derivace vztah pro jeho zrychlení

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot (-\omega \cdot x_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)), \quad (2.4)$$

$$a(t) = -\omega^2 \cdot x_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi). \quad (2.5)$$

Po vyjádření zrychlení vidíme, že rovnice obsahuje základní vztah pro harmonický pohyb. Proto můžeme usoudit, že zrychlení je úměrné výchylce $x(t)$ a má vždy opačné znaménko. Tuto skutečnost si můžeme ověřit i na již zmíněném simulačním apletu.

Pohybová rovnice, která je pro harmonický pohyb odvozena z druhého Newtonova pohybového zákona, říká, že síla působící na objekt je přímo úměrná výchylce, ale opačně orientovaná.

$$F = m \cdot a = -m \cdot \omega^2 \cdot x \quad (2.6)$$

Zde končí souhrn základních vlastností a vztahů, s kterými budeme pracovat v další kapitole pro vyjádření energií klasického oscilátoru. [3]

2.1.2. Kvantová mechanika

Kvantová mechanika je součástí kvantové teorie. Od klasické mechaniky se odlišuje tím, že zkoumá mechanický pohyb mikroskopických částic, kdy jejich stav není dán polohou a hybností jako v klasické mechanice, ale je určen vlnovou funkcí.

I když klasická a kvantová fyzika zkoumá jiné objekty, je mezi nimi souvislost. Takzvaný princip korespondence mezi nimi nastává, pokud pozvolna přecházíme od mikročástic k makroskopickým objektům. Tehdy můžeme pozorovat jak se jednotlivé vlnové délky a konstanty začínají jevit nekonečně malé a vztahy kvantové fyziky přechází ve vztahy klasické fyziky. [4]

2.1.2.1. Vývoj kvantové mechaniky

Max Planck v roce 1900 došel k závěru, že absolutně černé těleso a elektromagnetické záření, s nímž je v rovnováze, si vyměňují energie v kvantech, která je rovna $E = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega$. Tyto kvanta elektromagnetického záření se nazývají fotony. Planckův poznatek naznačil, že elektromagnetické záření má kromě vlnových vlastností i částicové.

Dalším významným krokem byl v roce 1905 Einsteinův objev fotoefektu, při kterém se předává energie fotonu elektronu v pevné látce.

Určitý pokrok ve stavbě atomu zaznamenala Bohrova kvantová teorie z roku 1913. Podle té nemůže částice nabývat libovolných energických hodnot, ale pouze násobky Planckovy konstanty. Existence energetických hladin elektronů v atomu byla později potvrzena. Bohužel, Bohrova teorie zcela selhala u systémů složitějších, než atom vodíku.

Dále Compton v roce 1922 popsal jev, při němž byl zkoumán rozptýl paprsků na elektronech. Comptonův jev se liší od fotoelektrického efektu tím, že foton odevzdává energii jen částečně. Vytvořil tak důkaz reálné existence kvant elektromagnetického pole s energií $E = \hbar \cdot \omega$ a hybností $p = E/c = \hbar \cdot \omega/c$.

V roce 1925 Uhlenbeck a Goudsmit objevili spin elektronu. Vlastnost, která nemá v klasické fyzice analogii, je však důležitá k objasnění stability hmoty.

Roku 1924 přišel de Broglie s myšlenkou, že vlnové vlastnosti a vztahy lze přenést i na volný elektron, přičemž vztah mezi částicí a vlnovou délkou vlny, která byla částici přiřazena, vyjádřil vztahem $p = h/\lambda$. Této myšlenky se chopil v roce 1925 Schrödinger a zavedl obecněji i pro elektron v potenciálovém poli tzv. vlnovou funkci (ψ), pro níž odvodil pohybovou rovnici. Později byla dokázána ekvivalence Schrödingerovy teorie s teorií, kterou publikoval o něco dříve Heisenberg, známou jako maticová kvantová

mechanika. Problém v Schrödingerovy teorie byl však s interpretací vlnové funkce. Schrödingerova rovnice určuje chování vlnové funkce, ale neurčuje co vlnová funkce je. Proto byla roku 1926 Bornem zavedena tzv. pravděpodobnostní interpretace kvantové mechaniky. [5]

2.1.2.2. Schrödingerova rovnice

Schrödingerova rovnice je základní pohybová rovnice, popisující časovou a prostorovou závislost kvantově mechanických systémů. S touto rovnicí se zde seznámíme blíže především proto, že je z hlediska řešení praktických úkolů vhodnější než Heisenbergova. Pomocí Schrödingerovy rovnice můžeme získat analytické řešení jednoduchých problémů kvantové mechaniky jako je lineární harmonický oscilátor nebo částice nacházející se v potenciální jámě.

Rovnice (2.7) představuje obecnou nestacionární (časovou) Schrödingerovu rovnici, kde \hat{H} je časově proměnný Hamiltonův operátor (rov. 2.8), který vyjadřuje celkovou energii částice pohybující se v poli sil jako součet kinetické a potenciální energie (V).

$$\hat{H}(t)\psi(r,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r,t) \quad (2.8)$$

Zvláštním případem je stacionární (bezčasová) Schrödingerova rovnice popsaná rovnicí (2.9), kterou lze získat, pokud je Hamiltonův operátor časově nezávislý, tedy popisující pohyb částice v časově nezávislých vnějších polích. Řešení stacionární Schrödingerovy rovnice nám poskytuje pohled do povahy mnoha kvantových jevů. [6]

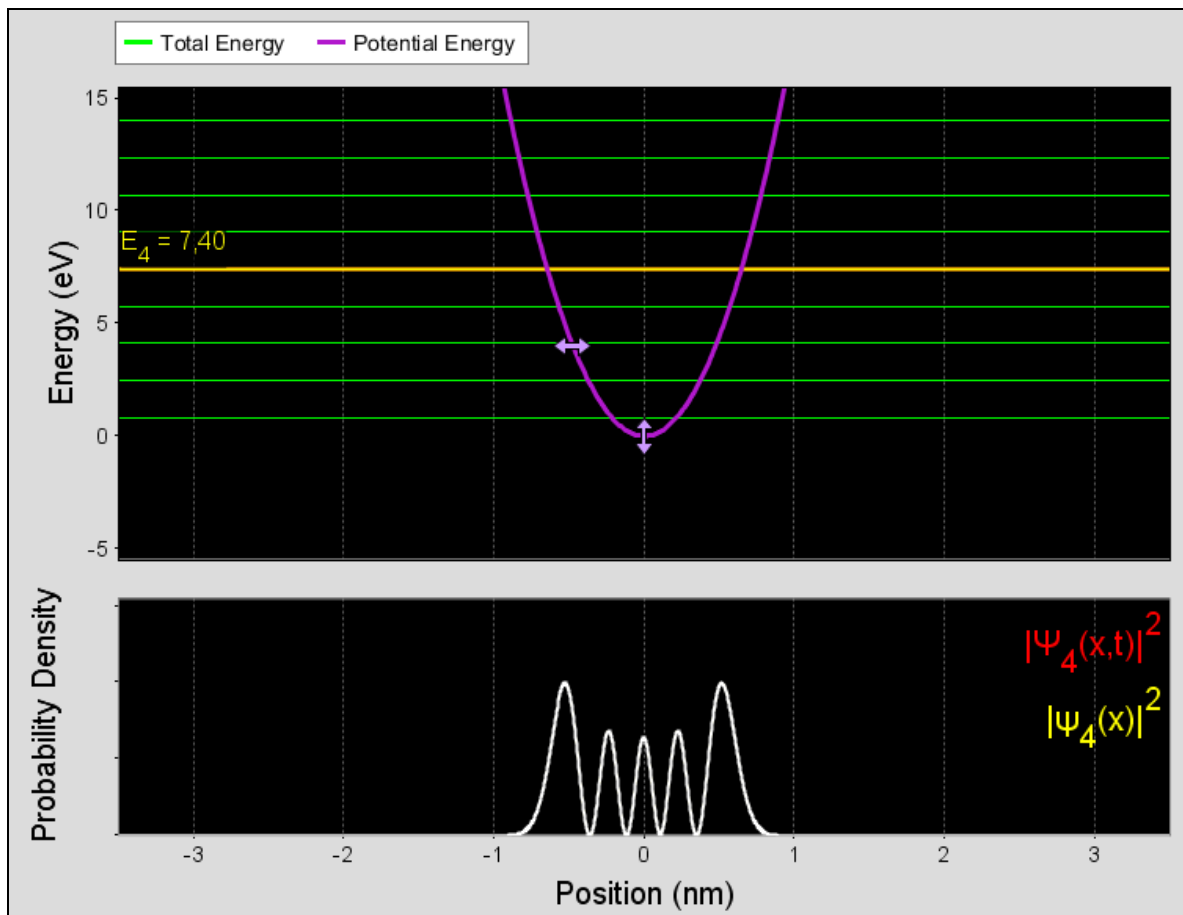
$$\hat{H}\psi(r) = i\hbar \frac{\partial \psi(r)}{\partial t} \quad (2.9)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) \quad (2.8)$$

2.1.2.3. Kvantový oscilátor

Modelem kvantového harmonického oscilátoru je každý oscilující objekt kolem své rovnovážné polohy např. kmity atomů v krystalické mřížce. Lineární harmonický oscilátor patří mezi výjimky kvantové mechaniky, které lze řešit analyticky Schrödingerovou rovnicí. Řada fyzikálních jevů lze přinejmenším přibližně převést na harmonický oscilátor a popsat je tak s dostatečnou přesností.

Pro lepší pochopení kvantového harmonického oscilátoru je možno použít simulační aplet (Obrázek 2) [7], kde jsou znázorněny energické hodnoty a pole s potenciální energií, ve které by se měla částice nacházet. Ve spodní části je pak znázorněna hustota pravděpodobnosti pro výskyt částice.



Obrázek 2: Aplet kvantového harmonického oscilátoru

3. Zpracování problematiky

3.1. Klasický oscilátor

Při použití rovnic pružně potenciální energie $E_p = kx^2/2$ a harmonického pohybu v rovnici (2.1) získáme vztah pro potenciální energie harmonického oscilátoru, ze které vyplývá, že tato potenciální energie je závislá na výchylce $x(t)$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi). \quad (3.1)$$

Kinetická energie oscilujícího systému je vázaná na pohybující těleso, proto se mění podle rychlosti pohybujícího se objektu $v(t)$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi). \quad (3.2)$$

Podle těchto dvou rovnic můžeme usoudit, že největší kinetickou energii má závaží oscilátoru v rovnovážné poloze, kdy je rychlost největší a potenciální energie je nulová. Naopak nulová kinetická energie je v mezních polohách oscilátoru, kde je rychlost nulová a potenciální energie je zde největší.

Celková mechanická energie oscilátoru E je v každém okamžiku rovna součtu energie kinetické a potenciální.

$$E = E_p + E_k \quad (3.3)$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \varphi) \quad (3.4)$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2 \cdot (\cos^2(\omega \cdot t + \varphi) + \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)) \quad (3.5)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot x_m^2} \quad (3.6)$$

Z vyjádření tedy můžeme usoudit, že celková energie je na čase nezávislá a také konstantní.

3.2. Kvantový oscilátor

Nyní se budeme zabývat kvantovým popisem lineárního harmonického oscilátoru, což je modelový systém, zahrnující částici vázanou na přímkou nacházející se v poli sil popsáných potenciální energií $V(x)$, která lze určit ze vztahu z rovnice (3.1). V poli tohoto potenciálu budeme studovat stacionární stavy a pohyb částice.

Pokud pro $V(x)$ platí

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad (3.7)$$

tak klasický Hamiltonův operátor můžeme zapsat jako

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m\omega^2}{2} x^2. \quad (3.8)$$

S ohledem na Hamiltonův operátor a definici Laplaceova operátoru Δ má stacionární Schrödingerova rovnice pro lineární harmonický oscilátor tvar

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right) \psi(x) = E \psi(x). \quad (3.9)$$

Vynásobíme-li celou rovnici $2/\hbar\omega$, získáme

$$\left(-\frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right) \psi(x) = \frac{2E}{\hbar\omega} \psi(x), \quad (3.10)$$

a zavedeme-li pro zjednodušení rovnice bezrozměrné veličiny

$$\lambda = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \cdot x, \quad (3.11)$$

$$\xi = \frac{2E}{\hbar\omega}, \quad (3.12)$$

rovnice přejde ve tvar

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \xi^2 \right) \psi(\xi) = -\lambda \psi(\xi). \quad (3.13)$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} + (\lambda - \xi^2) \psi(\xi) = 0. \quad (3.14)$$

3.2.1. Odhad řešení v asymptotické oblasti

Řešení rovnice 3.14 nelze nalézt jednoduchým matematickým aparátem a vyžaduje komplikovanější úvahy. V souladu s požadavky kladenými na vlnovou funkci ψ budeme požadovat, aby řešení rovnice byla konečná, jednoznačná a spojitá.

Nejdříve odhadneme chování vlnové funkce ψ v asymptotické oblasti ($\xi \rightarrow \pm\infty$). Pro hodnoty $\xi \rightarrow \pm\infty$ lze λ v rovnici zanedbat a ta se pak zjednodušuje na tvar

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} - \xi^2 \psi(\xi) = 0. \quad (3.15)$$

Jejím řešením je na stejné úrovni přesnosti rovnice 3.16, kde A a B jsou libovolné konstanty.

$$\psi(\xi) = A^{-\xi^2/2} + B^{\xi^2/2} \quad (3.16)$$

Pro znaménko plus v exponenciále vlnová funkce ψ diverguje pro $\xi \rightarrow \pm\infty$ a nelze ji normovat. Proto v asymptotické oblasti přibližně platí

$$\psi(\xi) \approx A^{-\xi^2/2}. \quad (3.16)$$

3.2.2. Zpřesnění řešení v oblasti konečných hodnot

Mimo asymptotickou oblast získané přibližné řešení původní rovnice pochopitelně nevyhovuje. Přejít k řešení přesnému, a to pro všechny hodnoty ξ , znamená předpokládat, že A na ξ závisí. To znamená, že přesné řešení stacionární Schrödingerovy rovnice je ve tvaru

$$\psi(\xi) = A(\xi)^{-\xi^2/2}, \quad (3.17)$$

kde $A(\xi)$ je dosud neurčená funkce modulující exponenciálu $\exp(-\xi^2/2)$. Dosazením rovnice (3.17) pro ψ získáme novou rovnici pro neznámou funkci $A(\xi)$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - 2\xi \frac{\partial A}{\partial \xi} + (\lambda - 1)A = 0. \quad (3.18)$$

Funkci $A(\xi)$ budeme hledat ve tvaru mocninné řady

$$A(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (3.19)$$

Neznámé koeficienty a_k pak získáme postupem, který zahrnuje dosazení řady pro A do odpovídající rovnice a porovnání členů se stejnými mocninami ξ^k . Po jistém úsilí získáme

$$a_k \begin{cases} \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)\dots(2k-3-\lambda)}{k!} a_0, \text{ pro } k = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)\dots(2k-3-\lambda)}{k!} a_1, \text{ pro } k = 3, 5, 7, \dots \end{cases}. \quad (3.20)$$

Protože A je řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, závisí podle očekávání na dvou konstantách a_0 a a_1 . Ukazuje se však, že nekonečná řada $A(\xi)$ se pro velká λ chová jako funkce $\exp(-\xi^2/2)$, což znamená, že vlnová funkce (3.17) pro $\xi \rightarrow \pm\infty$ diverguje. Funkce $A(\xi)$ proto nemůže mít předpokládaný tvar nekonečné řady. Nezbyvá než předpokládat, že má funkce $A(\xi)$ tvar polynomu, to znamená, že počínaje určitým k platí

$$a_{k+2} = 0 \quad (3.21)$$

a pro dosud libovolné λ musí splňovat podmínku

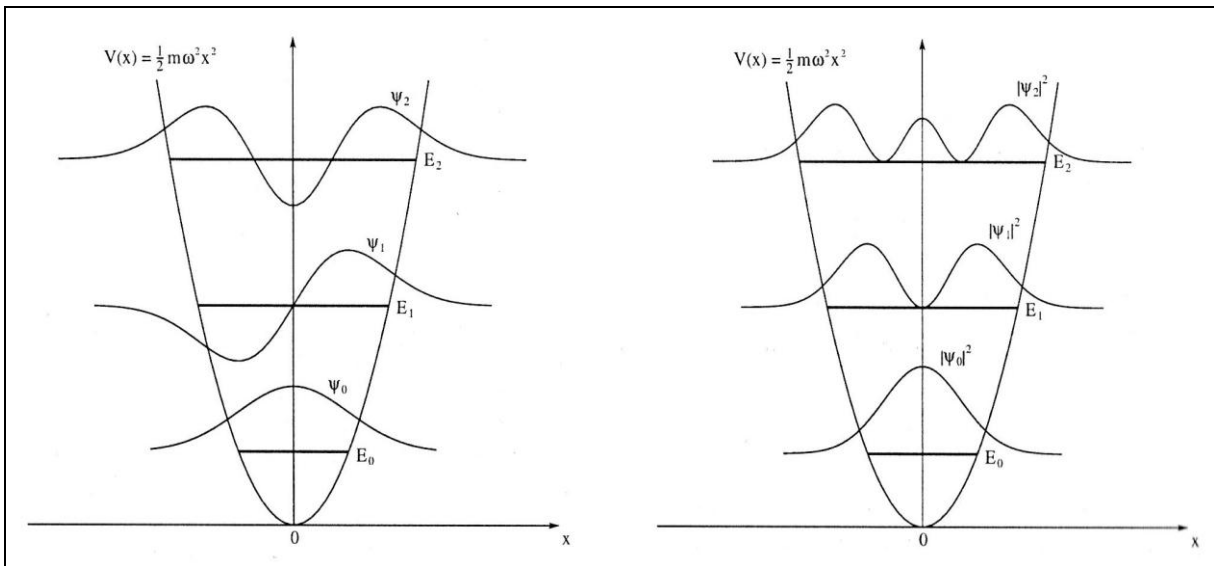
$$\lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

3.2.3. Energetické spektrum

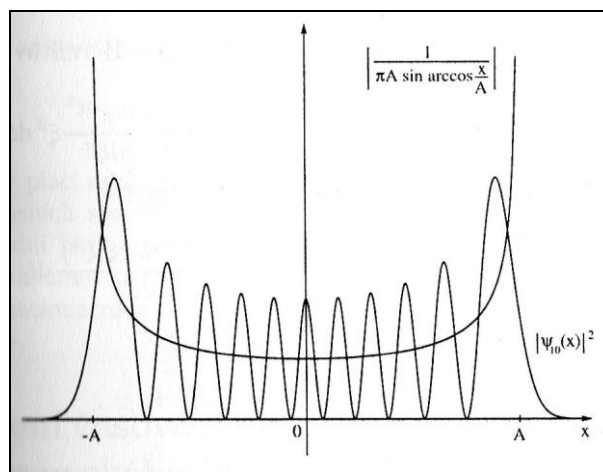
S ohledem na vztah (3.11) a (3.22) dostáváme kvantování energií stacionárních stavů lineárního harmonického oscilátoru (3.24). [8] [5]

$$E_n = \frac{\hbar\omega\lambda}{2} = \hbar\omega\frac{2n+1}{2} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$



Obrázek 3: Lineární harmonický oscilátor (zdroj [5]), kde v obou obrázcích úsečky zobrazují polohu energie E_n , které představují klasicky dovolenou oblast. Na levém obrázku je vyznačena vlnová funkce $\psi_n(x)$ pro $n=0,1,2$. Na pravém obrázku je vyznačena hustota pravděpodobnosti $|\psi_n(x)|^2$ pro $n=0,1,2$.



Obrázek 4: Lineární harmonický oscilátor (zdroj [5]). Porovnání kvantové hustoty pravděpodobnosti $|\psi_n(x)|^2$ pro $n=10$ s klasickou hustotou pravděpodobnosti $1/[\pi A \sin \arcsin(x/A)]$.

4. Zhodnocení zpracované problematiky

Ze vztahu (3.24) jsme dokázali, že energie kvantového oscilátoru je kvantována a také že jednotlivé energetické hladiny jsou rozloženy s konstantním krokem.

Zároveň si musíme uvědomit, že vztah (3.24) platí i pro makroskopický oscilátor, ale kvanta jsou u něj příliš malá, tudíž je můžeme zanedbat, proto klasický harmonický oscilátor může nabývat praktický všech stavů (podle rovnice 3.6) a nemá pro něj vztah (3.24) smysl. Naopak u mikroskopických objektů se objevují děje s velmi malými kvantovými čísly, takže rozdíly mezi energetickými hladinami jsou v mikrosvětě větší a hodnoty stavů jsou diskrétní.

Další příklad rozporu nastává u nejmenší možné energie (tzv. energie základního stavu) kvantového oscilátoru, kde je hodnota nenulová, což se v klasické mechanice stát nemůže.

Rozdíl nastává i u určení kinetické a potenciální energie, kdy u klasického oscilátoru je můžeme určit současně, kdežto v kvantové teorii spolu operátory kinetické a potenciální energie „nekomunikují“.

Naopak shodnost těchto dvou systémů můžeme pozorovat u hustoty pravděpodobnosti (obrázek 4), která je soustředěna v kvantovém oscilátoru u bodů obratu. Tento jev je shodný s jevem u klasického oscilátoru a je patrný se vzrůstající energií. To si můžeme vysvětlit tím, že čím větší je kvantové číslo (energie) tím více se blížíme ke klasické fyzice.

Pozoruhodné je také sledovat, že vlnové funkce jsou nenulové i v klasické zakázané oblasti, kde $E < V(x)$. Proto je také nenulová pravděpodobnost, že nalezneme částici mimo vnitřní oblast potenciální energie (obrázek 3).

5. Závěr

Díky názorným apletům a kvalitní literatuře se mi podařilo pochopit a zpracovat problém dvou typů oscilátoru, kvantového a klasického.

Nalezl jsem mezi oběma oscilátory rozdíly, které jsem zmínil ve 4. kapitole při zhodnocení problematiky, dokonce některé pozorované vlastnosti kvantového oscilátoru nemají v klasické mechanice analogii. Proto jsem dospěl k názoru, že i když obě teorie systému popisují podobné děje kolem nás (jen na jiných úrovních), tak oscilátory vykazují do jisté míry jiné chování. Avšak toto jiné chování pomalu mizí se zvyšováním energetických hladin (princip korespondence).

Použitá literatura

- [1] Mechanika. In *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, [cit. 2010-12-15]. Dostupné z WWW: <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Mechanika>>.
- [2] FENDT, Walter. *Fyzikální JAVA aplety* [online]. 2005-12-01 [cit. 2010-12-15]. Pružinový oscilátor. Dostupné z WWW: <http://www.walter-fendt.de/ph14cz/springpendulum_cz.htm>.
- [3] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *FYZIKA: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, nakladatelství VUTIUM, 2000. Kmity. ISBN 80-214-1869-9.
- [4] *Encyklopedie fyziky* [online]. 2006 - 2010 [cit. 2010-12-16]. Vznik a základy kvantové mechaniky. Dostupné z WWW: <<http://fyzika.jreichl.com/index.php?sekce=browse&page=732>>.
- [5] SKÁLA, Lubomír. *Úvod do kvantové mechaniky*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2005. 281 s. ISBN 8020013164
- [6] Schrödingerova rovnice. In *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida): Wikipedia Foundation, [cit. 2010-12-17]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Schrödingerova_rovnice>.
- [7] *PhET* [online]. 2009 [cit. 2010-12-17]. Quantum Bound States. Dostupné z WWW: <<http://phet.colorado.edu/en/simulation/bound-states>>.
- [8] *Katedra fyziky Přf OU* [online]. 2009 [cit. 2010-12-17]. LINEÁRNÍ HARMONICKÝ OSCILÁTOR - PODROBNÉ ŘEŠENÍ STACIONÁRNÍ SCHRÖDINGEROVY ROVNICE. Dostupné z WWW: <http://artemis.osu.cz/mmfiz/qm/qm_4_9_10.htm>.