

Politecnico di Torino
Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

appunti di
Sistemi e tecnologie elettroniche

Autori principali: Luca Ghio

Docenti: Fabrizio Bonani, Franco Ferraris

Anno accademico: 2011/2012

Versione: 1.0.3.2

Data: 4 febbraio 2019

Ringraziamenti

Oltre agli autori precedentemente citati, quest'opera può includere contributi da opere correlate su [WikiAppunti](#) e su [Wikibooks](#), perciò grazie anche a tutti gli utenti che hanno apportato contributi agli appunti *Sistemi e tecnologie elettroniche* e al libro *Sistemi e tecnologie elettroniche*.

Informazioni su quest'opera

Quest'opera è pubblicata gratuitamente. Puoi scaricare l'ultima versione del documento PDF, insieme al codice sorgente \LaTeX , da qui: <http://lucaghio.webege.com/redirs/9>

Quest'opera non è stata controllata in alcun modo dai professori e quindi potrebbe contenere degli errori. Se ne trovi uno, sei invitato a correggerlo direttamente tu stesso realizzando un commit nel [repository Git](#) pubblico o modificando gli appunti *Sistemi e tecnologie elettroniche* su WikiAppunti, oppure alternativamente puoi contattare l'autore principale inviando un messaggio di posta elettronica a artghio@tiscali.it.

Licenza

Quest'opera è concessa sotto una [licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale](#) (anche le immagini, a meno che non specificato altrimenti, sono concesse sotto questa licenza).

Tu sei libero di:

- condividere: riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare questo materiale con qualsiasi mezzo e formato;
- modificare: remixare, trasformare il materiale e basarti su di esso per le tue opere;

per qualsiasi fine, anche commerciale, alle seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: devi attribuire adeguatamente la paternità sul materiale, fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate modifiche. Puoi realizzare questi termini in qualsiasi maniera ragionevolmente possibile, ma non in modo tale da suggerire che il licenziante avalli te o il modo in cui usi il materiale;
- **Condividi allo stesso modo**: se remixi, trasformi il materiale o ti basi su di esso, devi distribuire i tuoi contributi con la stessa licenza del materiale originario.

Indice

1	Sistemi e segnali elettronici	8
1.1	Definizioni	8
1.2	Funzione	8
1.3	Alimentazione	8
1.4	Segnali	9
1.4.1	Segnali analogici	9
1.4.2	Segnali digitali	9
1.4.3	Rumore e disturbi	10
1.4.4	Interfacce verso il mondo esterno	10
1.4.5	Vantaggi/limiti dei segnali digitali	10
2	Gli amplificatori	11
2.1	Vista dall'esterno	11
2.1.1	Guadagno di potenza	11
2.2	Struttura interna	12
2.2.1	Amplificatore di tensione	12
2.2.2	Casi ideali	12
2.2.3	Casi reali	13
2.3	Da rete a doppio bipolo	13
2.3.1	Doppi bipoli in cascata	13
3	Gli amplificatori: comportamento in frequenza	14
3.1	Celle del I ordine	14
3.1.1	Analisi della risposta al gradino nel dominio del tempo	14
3.1.2	Analisi del comportamento dinamico nel dominio della frequenza	15
3.1.3	Filtri passa-alto	16
3.1.4	Filtri passa-basso	18
3.1.5	Filtri passa-banda	19
3.2	Celle del II ordine	20
3.2.1	Amplificatori accordati	20
3.3	Da rete a doppio bipolo	21
3.4	Linearità e non linearità	21
3.4.1	Rappresentazione della relazione tra ingresso e uscita	21
3.4.2	Moduli lineari	22
3.4.3	Moduli non lineari	22
3.4.4	Moduli reali	22
4	Amplificatore operazionale ideale	23
4.1	Amplificatore differenziale	23
4.1.1	Amplificatore operazionale ideale	23
4.2	Modello dei sistemi reazionati	24
4.2.1	Amplificatori reazionati	24
4.3	Amplificatore di tensione non invertente ($V \rightarrow V$)	25

4.3.1	Inseguitore di tensione	25
4.4	Amplificatore di transresistenza invertente ($I \rightarrow V$)	26
4.4.1	Fotorivelatore	27
4.5	Amplificatore di tensione invertente ($V \rightarrow V$)	27
4.5.1	Integratore attivo	27
4.5.2	Derivatore attivo	28
4.6	Amplificatore di corrente non invertente ($I \rightarrow I$)	28
4.6.1	Inseguitore di corrente	29
4.7	Amplificatore di transconduttanza non invertente ($V \rightarrow I$)	29
5	Circuiti con amplificatori operazionali ideali	31
5.1	Amplificatori reazionati con elementi reattivi	31
5.2	Sommatori	31
5.2.1	Sommatore (invertente)	31
5.2.2	Amplificatore differenziale	32
5.2.3	Sommatore generalizzato	32
5.3	Modo differenziale e modo comune	33
5.3.1	Segnale differenziale e di modo comune	33
5.3.2	Guadagno differenziale e di modo comune	33
5.3.3	Amplificatore differenziale	34
6	L'amplificatore operazionale reale	35
6.1	Guadagno differenziale	35
6.1.1	A_d finito: effetto su A_V	35
6.2	Resistenze interne	36
6.2.1	A_d finito + R_{id} finita: effetto su R_i	36
6.2.2	A_d finito + R_o non nulla: effetto su R_u	36
6.3	Tensione in ingresso	37
6.3.1	V_{off} non nulla: effetto su V_u	37
6.4	Correnti in ingresso	37
6.4.1	I_+ e I_- non nulle: effetto su V_u	38
6.5	Limiti di dinamica	38
6.5.1	Dinamica di uscita	38
6.5.2	Dinamica di ingresso	38
6.5.3	Transcaratteristica	39
6.6	Moduli funzionali commerciali	39
7	I semiconduttori	40
7.1	Semiconduttori intrinseci	40
7.1.1	Elettroni in una struttura cristallina	40
7.1.2	Modello di Shockley	40
7.1.3	Concentrazione intrinseca	41
7.1.4	Dispositivi a semiconduttore	42
7.2	Drogaggio	42
7.2.1	Equazioni di Boltzmann	43
7.2.2	Equazioni di Shockley	43
7.2.3	Drogaggio di tipo n	43
7.2.4	Drogaggio di tipo p	44
7.2.5	Drogaggio netto donatore	44
7.2.6	Condizioni di non degenerazione	44
7.2.7	Mobilità	45
7.3	Assenza di equilibrio termodinamico	45
7.3.1	Corrente di trascinalamento J_{tr}	45
7.3.2	Corrente di diffusione J_{diff}	46
7.3.3	Modello matematico per le variazioni di concentrazione di carica libera	47

7.3.4	Regioni neutre con campo elettrico nullo	48
7.3.5	Livelli di iniezione	49
8	La giunzione <i>pn</i>	50
8.1	Condizioni di equilibrio termodinamico	50
8.1.1	Diagramma a bande	52
8.1.2	Reinterpretazione del diagramma a bande	52
8.2	Assenza di equilibrio in regime stazionario nel tempo	53
8.2.1	Polarizzazione inversa	54
8.2.2	Polarizzazione diretta	54
8.2.3	Contributi di trascinamento J_{tr} dei portatori minoritari	54
8.2.4	Contributi di diffusione J_{diff} dei portatori minoritari	54
8.2.5	Contributi $J_{diff} + J_{tr}$ dei portatori maggioritari	55
8.2.6	Caratteristica statica $I(V)$	56
8.2.7	Modello statico	57
8.2.8	Fenomeni di breakdown	58
8.3	Assenza di equilibrio con tensione applicata tempo-variante	59
8.3.1	Capacità di svuotamento $C_s(v)$	59
8.3.2	Capacità di diffusione $C_d(v)$	59
8.3.3	Modello dinamico di ampio segnale	60
8.3.4	Modello dinamico di piccolo segnale	60
9	Il transistoro bipolare	63
9.1	Regioni di funzionamento	63
9.2	Regione attiva diretta	64
9.2.1	Uso come amplificatore (analogico)	64
9.2.2	Descrizione qualitativa	64
9.2.3	Descrizione quantitativa	65
9.2.4	Parametri di efficienza del dispositivo a transistoro	66
9.3	Modello statico di Ebers Moll	67
9.3.1	Configurazione a base comune	67
9.3.2	Configurazione a emettitore comune	68
9.3.3	Uso in commutazione (digitale)	68
9.3.4	Effetto Early	69
9.3.5	Fenomeni di breakdown	69
9.4	Modello dinamico di Ebers Moll	70
9.4.1	Modello dinamico di ampio segnale	70
9.4.2	Modello statico di piccolo segnale	70
9.4.3	Modello dinamico di piccolo segnale	71
10	Il transistoro MOSFET	72
10.1	Il sistema MOS	72
10.1.1	Struttura	72
10.1.2	Regioni di funzionamento	72
10.1.3	Condizioni di equilibrio termodinamico	73
10.1.4	Assenza di equilibrio in regime stazionario nel tempo	73
10.2	Il transistoro MOSFET	75
10.2.1	Definizione e struttura	75
10.2.2	Regime stazionario nel tempo	75
10.2.3	Regime dinamico nel tempo	77
11	Tecnologia dei semiconduttori	79

12	Uso in commutazione dei transistori	80
12.1	Interruttori low-side	80
12.1.1	Interruttore low-side a transistoro bipolare	80
12.1.2	Interruttore low-side a transistori bipolari in configurazione Darlington	81
12.1.3	Interruttore low-side a transistoro <i>n</i> MOS	81
12.2	Interfacce a componenti discreti	82
12.3	Interruttori high-side	82
12.3.1	Interruttore high-side a transistoro bipolare <i>npn</i>	82
12.3.2	Interruttore high-side a transistoro <i>n</i> MOS	82
12.3.3	Interruttore high-side a transistoro <i>p</i> MOS	83
12.4	Isolamento galvanico ottico	83
12.4.1	Fotoaccoppiatore	83
12.4.2	Isolatore fotovoltaico	83
12.5	Comportamento in commutazione	84
12.5.1	Carico resistivo ($Z_L = R_L$)	84
12.5.2	Carico induttivo ($Z_L = R_L + j\omega L$): transitorio di accensione	84
12.5.3	Carico induttivo ($Z_L = R_L + j\omega L$): transitorio di spegnimento	84
13	Circuiti logici: specifiche funzionali	86
13.1	Segnali logici	86
13.1.1	Compatibilità tra porte	86
13.1.2	Comparatore di soglia	87
13.2	Invertitori <i>R</i> -switch	87
13.2.1	Invertitore <i>n</i> MOS: uscita a vuoto ($R_L \rightarrow +\infty$)	87
13.2.2	Invertitore <i>n</i> MOS: carico resistivo R_L	88
13.2.3	Invertitore <i>p</i> MOS	88
13.3	Invertitore CMOS	88
13.3.1	Uscita a vuoto	88
14	Circuiti logici: caratteristiche elettriche e interfacciamento	90
14.1	Invertitore CMOS con carico resistivo R_L	90
14.1.1	Uscita a stato <i>H</i> , carico verso massa	90
14.1.2	Uscita a stato <i>L</i> , carico verso alimentazione	91
14.2	Invertitori con carico capacitivo	91
14.2.1	Ritardi di transizione	91
14.2.2	Ritardi di propagazione	94
14.3	Collegamento a bus	94
14.3.1	Uscita totem pole (TP)	94
14.3.2	Uscita a tre stati (3S)	95
14.3.3	Uscita a collettore aperto (OC)	95
14.4	Segnali differenziali digitali	96
15	Circuiti logici combinatori	97
15.1	Porte a livello singolo	97
15.1.1	Porte NAND e NOR <i>R</i> -switch	97
15.1.2	Porte NAND e NOR CMOS	98
15.2	Porte a livelli multipli	98
15.2.1	Porte AND e OR in cascata	98
15.3	Pass gate	99
15.4	Consumo	99
15.4.1	Potenza statica P_S	99
15.4.2	Potenza dinamica P_D	100
15.4.3	Prodotto potenza $P_D \times$ ritardo t_P	100

I	Misure elettroniche	101
16	Incertezze di misura	102
16.1	Misurazione	102
16.1.1	Definizioni	102
16.1.2	Nomenclatura	102
16.2	Definizioni	102
16.2.1	Rappresentazioni	102
16.2.2	Componenti di incertezza	103
16.2.3	Cifre significative	103
16.3	Modello deterministico di stima dell'incertezza	103
16.3.1	Definizioni	103
16.3.2	Incertezza delle misurazioni indirette	103
16.4	Compatibilità delle misure	104
17	Gli oscilloscopi analogici	105
17.1	Modi operativi	105
17.1.1	Modalità XY	105
17.1.2	In base ai tempi	105
17.2	Parametri	105
17.2.1	Asse verticale	105
17.2.2	Asse orizzontale	106
17.3	Sincronizzazione	106
17.3.1	Parametri del trigger	106
17.3.2	Tipi di trigger	106
17.3.3	Correzioni livello di trigger	107
17.4	Oscilloscopi a tracce multiple	107
17.4.1	Rappresentazione alternate	107
17.4.2	Rappresentazione chopped	107
17.5	Stadio di ingresso	107
17.6	Esercitazione	108
17.6.1	Alimentatore	108
17.6.2	Scheda	108
17.6.3	Oscilloscopio	108
17.6.4	Misurazioni	108
17.6.5	Cursori	109

Capitolo 1

Sistemi e segnali elettronici

1.1 Definizioni

Un **sistema elettronico** è costituito da un'interconnessione di **moduli** più semplici. Si dice che i moduli sono **interconnessi** se scambiano informazioni tra di loro.

Un sistema elettronico è univocamente definito in termini di tensioni e correnti, e l'informazione è contenuta nelle loro variazioni nel tempo.

Il progettista spesso collega dei moduli già costruiti da altri: egli non ne conosce la struttura interna, ma solo il comportamento esterno, e in particolare:

- funzione: che cosa fa?
- alimentazione: qual è il tipo di alimentazione? quanta alimentazione assorbe?
- segnali: come si interconnette il modulo con il mondo esterno?

Verrà preso come modello un telefono cellulare.

1.2 Funzione

Il cellulare scambia informazioni con l'utente da una parte e il campo elettromagnetico esterno dall'altra. L'antenna è un **trasduttore** che trasforma l'informazione da un segnale elettrico in un campo elettromagnetico, e viceversa. Altri trasduttori (tastiera, microfono, auricolare, display) permettono lo scambio di informazioni tra l'utente e il telefono.

La catena di ricezione riceve i segnali analogici dall'antenna, mentre la catena di trasmissione li invia ad essa. La parte più interna del telefono lavora invece su segnali digitali. Gli **oscillatori** sono dispositivi elettronici che ricevendo non segnali in ingresso ma un'alimentazione e forniscono in uscita un segnale tempo-variante.

Il **deviatore** è un interruttore che regola la direzione del flusso di informazioni tra le catene e l'antenna.

I **transistori** sono dei dispositivi a semiconduttore che, opportunamente combinati con elementi elettrici più semplici, realizzano funzioni più complesse. L'opportuna combinazione delle tensioni applicate ai **terminali di controllo** fa commutare il deviatore.

1.3 Alimentazione

Per le leggi della termodinamica, ogni elaborazione di informazioni richiede un flusso di **energia**/potenza in ingresso \Rightarrow l'alimentatore trasferisce una corrente applicando una tensione continua/costante (DC).

Il sistema di alimentazione di un cellulare si compone di circuiti complessi atti a:

- compensare le variazioni di tensione della batteria, in particolare quando si sta per scaricare, producendo una tensione il più costante possibile;
- minimizzare il tempo di ricarica delle batterie e massimizzarne la durata;
- minimizzare la produzione di calore.

1.4 Segnali

I flussi di informazioni sono contenuti in vari tipi di segnali:

- segnali analogici a radiofrequenza: sono ad alta frequenza;
- segnali analogici audio: sono a bassa frequenza;
- segnali digitali: sono codificati in bit.

1.4.1 Segnali analogici

I segnali analogici sono di tipo sinusoidale:

$$v(t) = V \sin(\omega t + \phi) = V_C \cos(\omega t) + V_S \sin(\omega t)$$

Caso particolare $\phi = 0 \Rightarrow V_C = 0 \wedge V_S = V$

Dato un segnale analogico descritto dalla trasformata di Fourier:

$$v(t) = \sum_n V_n \sin(\omega_n t + \phi_n)$$

il **contenuto spettrale** è il grafico delle ampiezze V_n in funzione della frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$. V_0 si dice **componente continua** (DC), perché il suo contributo è costante ($\omega = 0$).

Esempi di contenuti spettrali

- singolo tono audio a singola frequenza non periodico (sinusoide) \Leftrightarrow linea verticale in corrispondenza della singola frequenza;
- segnale periodico in più frequenze (onda triangolare) \Leftrightarrow tante linee verticali quante sono le frequenze;
- sovrapposizione di sinusoidi (voce) \Leftrightarrow l'energia è distribuita su intervalli di frequenza continui (= **banda**), ovvero costituiti dall'accostamento di linee verticali infinitesime.

La rapidità (pendenza) di variazione del segnale è proporzionale alla sua frequenza.

I segnali analogici sono continui sia nel tempo sia in ampiezza.

Il **modulatore** è un dispositivo che trasferisce le informazioni da segnale audio a segnale a radiofrequenza, e il demodulatore viceversa.

1.4.2 Segnali digitali

I **segnali digitali** sono discreti sia nel tempo sia in ampiezza \Rightarrow essi sono delle rappresentazioni approssimate dei segnali analogici che introducono degli errori:

- **frequenza di campionamento** f_s (nel tempo): sono rappresentabili segnali analogici con banda $f_a \leq \frac{1}{2}f_s$ (**criterio di Nyquist**);
- **quantizzazione**: nel rappresentare le ampiezze, i valori digitali sono in numero finito \Rightarrow tra gli istanti di tempo discretizzati il valore di tensione non è ben definito.

A ciascun istante di tempo discretizzato è associato un valore di bit: $1 = H$ (stato logico alto) e $0 = L$ (stato basso).

Ridurre i margini di rumore, ovvero avvicinare gli intervalli di valori corrispondenti agli stati, aiuta a ridurre i consumi di energia \Rightarrow ridurre la tensione di alimentazione, infatti, è utile per compensare gli aumenti di campo elettrico determinati dalla miniaturizzazione dei componenti. Bisogna tuttavia assicurarsi di non ridurre troppo i margini di rumore, per non confondere il bit 1 con il bit 0.

1.4.3 Rumore e disturbi

Più l'ampiezza del segnale utile è bassa, più il **rumore** disturba in modo significativo il segnale.

Ogni passaggio di elaborazione/amplificazione aggiunge rumore al segnale. Inoltre, gli amplificatori amplificano oltre al segnale utile il rumore prodotto da tutti quelli precedenti \Rightarrow è importante porre dei dispositivi a basso rumore, soprattutto all'inizio della catena.

Se il segnale è digitale e gli effetti del rumore sono sufficientemente contenuti, il segnale originario può essere recuperato alla fine della catena da un dispositivo di ripristino chiamato **comparatore di soglia**, che discerne i valori digitali per confronto con il **valore soglia**.

1.4.4 Interfacce verso il mondo esterno

La trasmissione del segnale (d)al mondo esterno è tipicamente in analogico, mentre l'elaborazione è più efficiente in digitale \Rightarrow occorrono dei convertitori analogico/digitale (A/D) e digitale/analogico (D/A). Il demodulatore abbassa la banda del segnale analogico affinché la conversione in digitale risulti più efficiente.

Si dice **front-end** l'interfaccia in ingresso verso il mondo esterno, e il **back-end** viceversa.

1.4.5 Vantaggi/limiti dei segnali digitali

Vantaggi

- comparatore di soglia \Rightarrow non cumula rumore;
- si possono realizzare più facilmente componenti che eseguono funzioni complesse;
- esistono programmi CAD per progettare moduli digitali in maniera quasi automatica \Rightarrow costi più bassi;
- comportamento modificabile a livello software, grazie alla programmazione.

Limiti

- errore di quantizzazione e discretizzazione nel tempo;
- non tutti i segnali possono essere digitali.

Capitolo 2

Gli amplificatori

2.1 Vista dall'esterno

L'**amplificatore** restituisce in uscita un certo segnale con più potenza del segnale in ingresso. Deve tendere ad essere un **modulo lineare**, cioè deve replicare il segnale deteriorandolo il meno possibile.

Gli amplificatori sono specifici in base alla frequenza del segnale.

A seconda se i segnali in ingresso e in uscita sono correnti o tensioni:

- $V \rightarrow V$: amplificatore di tensione
- $I \rightarrow I$: amplificatore di corrente
- $I \rightarrow V$: amplificatore di transresistenza $R_m = \frac{V}{I}$
- $V \rightarrow I$: amplificatore di transconduttanza $G_m = \frac{I}{V}$

In un amplificatore di tensione si possono distinguere 4 terminali:

- in basso: terminale comune (a cui sono collegate tutte le tensioni);
- a sinistra: porta di ingresso a cui è applicata la tensione di ingresso $V_{in} = V_1$;
- a destra: porta di uscita a cui è applicata la tensione $V_{out} = V_2$;
- in alto: alimentazione, costituita da una tensione costante V_A .

Flusso del segnale: porta di ingresso \rightarrow amplificatore \rightarrow porta di uscita

La tensione di uscita V_{out} è misurata sulla **resistenza di carico**,¹ che si comporta da utilizzatore² quando riceve il segnale.

2.1.1 Guadagno di potenza

L'alimentazione fornisce l'energia necessaria per amplificare la tensione di ingresso. Avviene però una dispersione dell'energia \Rightarrow si definisce **efficienza** il rapporto tra la potenza fornita al carico e la potenza fornita dall'alimentatore.

L'**amplificazione di tensione** A_V determina di quanto è aumentato il **valore di picco** (= ampiezza massima) del segnale:

$$V_{out,p} = A_V \cdot V_{in,p}$$

Si potrebbe realizzare un amplificatore tramite un trasformatore (ideale), il cui numero di spire sia legato ad A_V , ma la potenza di uscita sarebbe uguale a quella in ingresso: $V_1 I_1 = V_2 I_2$

¹Si veda la voce [Carico \(elettrostatica\)](#) su Wikipedia in italiano.

²Si veda la voce [Utilizzatore elettrico](#) su Wikipedia in italiano.

Il **guadagno di potenza**, espresso in decibel (dB), è un modo per calcolare il rapporto tra le potenze:

$$G_P = K_P \text{ (dB)} = 10 \log_{10} K_P$$

dove $K_P = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}$ è una quantità adimensionata detta **rapporto di potenza**. Se $P_{\text{in}} = P_{\text{out}} \Rightarrow G_P \text{ (dB)} = 0$. Se $P_{\text{out}} = 1 \text{ mW}$, l'unità di misura del guadagno diventa il dBm.

Esprimendo il guadagno di potenza tramite i rapporti tra tensioni e resistenze:

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow K_P = \left(\frac{V_u}{V_i} \right)^2 \left(\frac{R_i}{R_u} \right)$$

e supponendo uguali le resistenze R_i e R_u :³

$$K_P = \left(\frac{V_u}{V_i} \right)^2 \Rightarrow G_P = 2 \cdot 10 \log_{10} \left| \frac{V_u}{V_i} \right| = 20 \log_{10} |A_V| = A_V \text{ (dB)} \Rightarrow A_V = \sqrt{K_P}$$

Se più amplificatori sono connessi in cascata, le amplificazioni A_V si moltiplicano e i guadagni $G_P = A_V \text{ (dB)}$ si sommano. Si chiama **tensione picco-picco** la differenza tra i valori massimo e minimo di tensione: $V_{PP} = 2V_P$.

Se invece $\begin{cases} V_{\text{in}} = V_{\text{out}} \Rightarrow A_V = 1 \\ R_{\text{in}} \neq R_{\text{out}} \end{cases}$, l'amplificazione del segnale è proporzionale al rapporto tra le resistenze.

2.2 Struttura interna

2.2.1 Amplificatore di tensione

All'interno vi è un generatore di tensione pilotato in uscita.

Idealmente, tutti i generatori sono ideali e non vi sono resistenze \Rightarrow nessuna perdita. In realtà, le resistenze interne R_i e R_u dissipano potenza.

Effetto degli ingressi Con uscita a vuoto ($R_c = +\infty \Rightarrow V_u = A_V V_1$), la tensione del generatore reale V_i si ripartisce tra la resistenza del generatore R_g e la resistenza di ingresso R_i :

$$V_1 = V_i \frac{R_i}{R_i + R_g}$$

Effetto delle uscite Con generatore ideale in ingresso ($R_g = 0 \Rightarrow V_i = V_1$), la tensione $V_1 A_V$ si ripartisce tra la resistenza di uscita R_u e la resistenza di carico R_c :

$$V_u = A_V V_1 \frac{R_c}{R_c + R_u}$$

La funzione di trasferimento complessiva tiene conto degli effetti combinati della resistenza d'ingresso R_i e di quella d'uscita R_u :

con uscita a vuoto	con generatore ideale	effetto complessivo
$\frac{V_u}{V_i} = A_V \frac{R_i}{R_i + R_g}$	$\frac{V_u}{V_i} = A_V \frac{R_c}{R_u + R_c}$	$\frac{V_u}{V_i} = A_V \frac{R_i}{R_i + R_g} \frac{R_c}{R_u + R_c}$

2.2.2 Casi ideali

Idealmente, i generatori in ingresso devono essere ideali, e il carico deve ricevere tutta la tensione $A_V V_i$:

- ingressi in tensione: $R_i \rightarrow +\infty \Rightarrow R_G \rightarrow 0$

³Si veda la sezione [Una nota di cautela sul fattore 20](#) alla voce "Decibel" su Wikipedia in italiano.

- ingressi in corrente: $R_i \rightarrow 0 \Rightarrow R_g \rightarrow +\infty$
- uscite in tensione: $R_u \rightarrow 0 \Rightarrow V_u = A_V V_i$
- uscite in corrente: $R_u \rightarrow +\infty \Rightarrow I_2 = I$

2.2.3 Casi reali

- ingressi in tensione: amplificatori per microfono, circuiti logici;
- ingressi in corrente: sensori ottici (fotodiodi, telecomandi con infrarossi) che convertono l'onda elettromagnetica in corrente;
- uscite in tensione: alimentazione di circuiti elettronici, lampadine;
- uscite in corrente: motori, attuatori elettromagnetici, caricabatterie.

2.3 Da rete a doppio bipolo

Il modello più semplice di amplificatore è definito dai 3 parametri R_i , R_u , A_V :

$$\begin{cases} R_i = \frac{V_i}{I_i} \\ R_u = \frac{V_{u_{vuoto}}}{I_{u_{cortocircuito}}} \\ A_V = \frac{V_{u_{vuoto}}}{V_i} \end{cases}$$

Qualunque doppio bipolo con generatore pilotato, applicando il teorema di Thevenin, si può ricondurre al modello più semplice.

2.3.1 Doppoli bipoli in cascata

Due doppi bipoli sono in cascata se la tensione di uscita del primo è quella di ingresso del secondo. Una catena di N doppi bipoli si può ricondurre a un singolo doppio bipolo equivalente di parametri:

- funzione di trasferimento complessiva: è il prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli moduli;
- resistenza equivalente di ingresso R_i : coincide con la resistenza di ingresso R_{i_1} del primo modulo:

$$R_i = R_{i_1}$$

- resistenza equivalente di uscita R_u : coincide con la resistenza di uscita R_{u_N} dell'ultimo modulo:

$$R_u = R_{u_N}$$

Capitolo 3

Gli amplificatori: comportamento in frequenza

Uno stadio amplificatore deve avere una certa **risposta in frequenza**¹ in base alla **frequenza** (= rapidità di variazione) del segnale in ingresso.

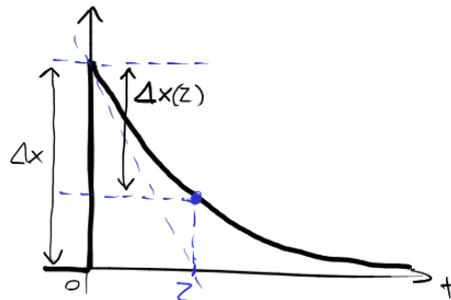
Se vi sono elementi dinamici (induttori, condensatori), l'amplificazione non è più una costante ma dipende dalla frequenza: $A_V(s)$.

3.1 Celle del I ordine

3.1.1 Analisi della risposta al gradino nel dominio del tempo²

Nel **dominio del tempo**, si studia il comportamento asintotico durante una **risposta al gradino** $u(t)$.

Gli elementi dinamici introducono un ritardo nella risposta del circuito: per esempio, durante la risposta al gradino di un circuito RC³ la tensione ai capi del condensatore non assume istantaneamente il valore del gradino (amplificato nel caso degli amplificatori), ma è caratterizzato da un transitorio⁴ che tende asintoticamente a tale valore \Rightarrow lo studio di frequenze elevate richiede rapidi transitori.



La risposta al gradino di un circuito dinamico del I ordine è definita univocamente dai comportamenti asintotici a $t = 0^+$ e a $t \rightarrow +\infty$ e dalla costante di tempo τ :

$$x(t) = [x(0^+) - x(+\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + x(+\infty) = x_B e^{-\frac{t}{\tau}} + x_A$$

¹Si veda la voce [Risposta in frequenza](#) su Wikipedia in italiano.

²Nel dominio del tempo, il condensatore si comporta come un cortocircuito all'inizio del transitorio ($t = 0^+$) e come un circuito aperto al termine del transitorio, e viceversa per l'induttore.

³Si veda la sezione 3.1.3.

⁴Si veda il file [RC impulso.PNG](#) su Wikipedia in italiano.

I circuiti del II ordine hanno invece una risposta al gradino più complessa.

Si dimostra che $\Delta x(\tau) = |x(0^+) - x(\tau)| = 0,63 \cdot \Delta x = 0,63 \cdot |x(0^+) - x(+\infty)| \Rightarrow$ graficamente la funzione $x(t)$ assume in $t = \tau$ un valore che è aumentato/diminuito, a partire da $x(0^+)$, del 63% rispetto all'intervallo Δx tra $x(0^+)$ e $x(+\infty)$.

Inoltre, la tangente al grafico in $t = 0^+$ interseca l'asintoto per $x(+\infty)$ in $t = \tau$:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{x_B}{\tau} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -\frac{x_B}{\tau}t + x(0^+) \\ x(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = x(0^+) \cdot \frac{\tau}{x_B} \\ x(+\infty) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \tau$$

3.1.2 Analisi del comportamento dinamico nel dominio della frequenza⁵

Nel **dominio della frequenza**, si rappresenta tramite il **diagramma di Bode** il comportamento dinamico del circuito.

La **funzione di rete** $H(s)$ è un rapporto di funzioni polinomiali che sono le espressioni di due **segnali sinusoidali**:

$$H(s) = \frac{s^{n_z} (z_1 + s)(z_2 + s) \cdots}{s^{n_p} (p_1 + s)(p_2 + s) \cdots} = K \cdot s^{n_z - n_p} \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right) \cdots}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right) \cdots}$$

Gli **zeri** sono le radici del numeratore (di cui n_z nulle), i **poli** sono le radici del denominatore (di cui n_p nulle). I poli sono una caratterizzazione univoca del comportamento del circuito, indipendentemente dalla funzione di rete. Il **diagramma di Bode** è la rappresentazione grafica della funzione di rete $H(s)$ nella sua restrizione ai numeri complessi $H(j\omega)$ (cioè l'amplificazione di tensione $A_V(j\omega)$ nel caso particolare degli amplificatori), in funzione della frequenza angolare ω (u.m. rad/s) espressa in scala logaritmica.⁶

L'espressione in decibel (dB) del modulo della funzione di rete $|H(j\omega)|$ (cioè il guadagno di potenza G_P nel caso particolare degli amplificatori) è, sostituendo s con $j\omega$ e applicando le proprietà dei logaritmi e dei numeri complessi:

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| \text{ (dB)} &= 20 \log_{10} |H(j\omega)| = \\ &= 20 \log_{10} |K| + 20(n_z - n_p) \log_{10} \omega + 20 \sum_i \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_i^2}} - 20 \sum_j \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_j^2}} \end{aligned}$$

Il diagramma di Bode è dato dalla somma dei contributi dei singoli termini:

- la **costante** K contribuisce con una retta orizzontale;
- ogni **zero nullo** contribuisce con una retta di pendenza 20 dB/dec passante per $(z, 20 \log_{10} z) = (1 \text{ rad/s}, 0 \text{ dB})$;
- ogni **zero non nullo** contribuisce con una spezzata composta da:
 - a sinistra dello zero, una retta orizzontale costante:

$$\omega \ll z_j \Rightarrow 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_j^2}} \simeq 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

- in corrispondenza dello zero, uno scostamento verticale di entità trascurabile:

$$\omega \simeq z_j \Rightarrow 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_j^2}} \simeq 20 \log_{10} \sqrt{2} \simeq 3 \text{ dB}$$

⁵Nel dominio della frequenza, il condensatore si comporta come un circuito aperto a bassa frequenza (in continua) e come un cortocircuito ad alta frequenza, e viceversa per l'induttore.

⁶Nella scala logaritmica, si dice **decade** l'intervallo tra due potenze del 10.

- a destra dello zero, una retta di pendenza 20 dB/dec intersecante l'asse orizzontale nello zero:

$$\omega \gg z_j \Rightarrow 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_j^2}} \simeq 20 \log_{10} \frac{\omega}{z_j} \text{ dB}$$

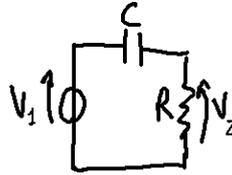
- ogni **polo** contribuisce con una spezzata analoga a quella degli zeri, ma con pendenza negativa.

Per i tratti a pendenza 20 dB/dec, i rapporti tra frequenze e i rapporti tra ampiezze sono uguali.

3.1.3 Filtri passa-alto

Se si pone un **condensatore in serie** al flusso di segnale si ottiene un **filtro passa-alto**.

Cella RC passa-alto



Analisi nel tempo Applicando un **segnale a gradino** a una **cella RC passa-alto**, la tensione di uscita V_2 :

$$\begin{cases} V_2(t) = [V_2(0^+) - V_2(+\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + V_2(+\infty) = V_B e^{-\frac{t}{\tau}} + V_A \\ V_2(0^+) = V_1 \\ V_2(+\infty) = 0 \end{cases} \Rightarrow V_2(t) = V_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

presenta una risposta transitoria che ha nel tempo un andamento esponenziale decrescente.

Il grafico di V_2 è toccato in $t = 0^+$ dalla retta tangente:

$$V_2(t) = mt + V_2(0^+)$$

di coefficiente angolare m :

$$m = D_t(V_2(t))|_{t=0^+} = D_t\left(V_2(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}}\right)|_{t=0^+} = V_2(0^+) \left(-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right)|_{t=0^+} = -\frac{1}{\tau} V_2(0^+)$$

che interseca l'asse delle ascisse t nel punto $t = \tau$:

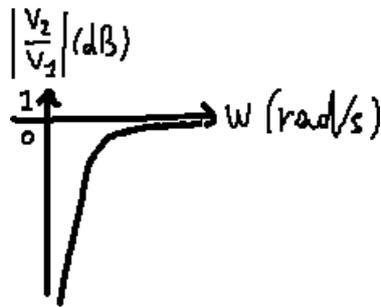
$$V_2(t) = 0 \Rightarrow 0 = V_2(0^+) \left(-\frac{1}{\tau} t + 1\right) \Rightarrow t = \tau$$

Per questo motivo, la costante di tempo τ è detta **costante di decadimento**.

Analisi in frequenza Il condensatore posto in serie al flusso di segnale si comporta come un **filtro passa-alto**, cioè attenua in dB⁷ a basse frequenze:

- i segnali a bassa frequenza ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) non passano: il condensatore si comporta come un circuito aperto $\Rightarrow V_2 = 0$;

⁷Un'attenuazione del segnale nel diagramma di Bode significa che il logaritmo è negativo \Rightarrow il suo argomento è compreso tra 0 e 1 \Rightarrow la tensione di uscita è minore di quella in ingresso.



- i segnali ad alta frequenza ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$) passano: il condensatore si comporta come un cortocircuito $\Rightarrow V_2 = V_1$.

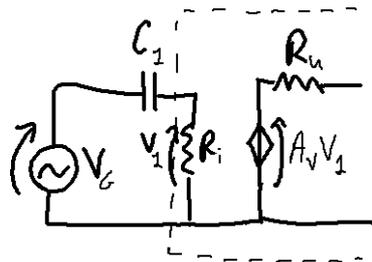
Applicando il partitore di tensione sulla resistenza, si trova la seguente funzione di rete:

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{s\tau}{s\tau + 1}$$

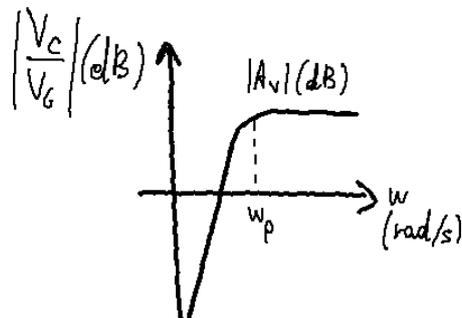
avente uno zero nell'origine ($\omega = z = 1 \text{ rad/ms}$) e un polo in $\omega = p = \frac{1}{\tau} \text{ rad/ms}$, con $\tau = RC$.

I segnali ad alta frequenza in realtà vengono epurati della loro componente continua (DC), cioè viene mantenuta solamente la sinusoide azzerando⁸ il valor medio attorno a cui essa oscilla.

Amplificatore con cella RC passa-alto



Introducendo, come impedenza del generatore reale, un condensatore in serie nella linea di ingresso di un amplificatore, esso si comporta come un filtro passa-alto, filtrando le componenti continue dei segnali sinusoidali in ingresso e rispondendo con un transitorio agli ingressi a gradino.



Posto A_V costante, la tensione V_1 filtrata dalla cella RC viene poi amplificata nella tensione $V_C = A_V V_1$ di uscita dell'amplificatore. La funzione di rete $\frac{V_C}{V_G}(s)$ complessiva:

$$\begin{cases} V_1 = H(s) \cdot V_G \\ V_C = A_V \cdot V_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_C}{V_G} = A_V \cdot H(s)$$

⁸L'esempio sulla diapositiva considera una tensione di uscita non collegata a massa ma ad un'ulteriore tensione continua V_R .

presenta un diagramma di Bode analogo a quello della funzione di rete $H(s)$ della singola cella RC, ma per le proprietà dei logaritmi con sfalsamento costante pari a $20 \log_{10} A_V$:

$$\left| \frac{V_C}{V_G}(j\omega) \right| (\text{dB}) = |A_V \cdot H(j\omega)| (\text{dB}) = A_V (\text{dB}) + |H(j\omega)| (\text{dB}) = 20 \log_{10} A_V + 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

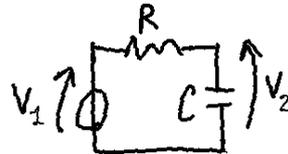
Condensatori di disaccoppiamento tra stadi amplificatore in cascata

Se due stadi amplificatore sono posti in cascata separati da un **condensatore di disaccoppiamento**, il condensatore si comporta come un filtro passa-alto. La costante di tempo τ è uguale al prodotto tra la capacità C e la resistenza equivalente $R_{\text{eq}} = R_{u1} + R_{u2}$ vista ai capi del condensatore allo spegnimento di tutti i generatori indipendenti.

3.1.4 Filtri passa-basso

A differenza di quello passa-alto, in un **filtro passa-basso** l'uscita viene presa ai capi del condensatore.

Cella RC passa-basso



Analisi nel tempo Nella risposta al gradino, la tensione di uscita V_2 ha un andamento esponenziale crescente:

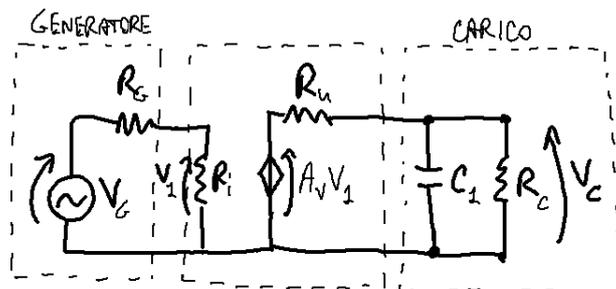
$$\begin{cases} V_2(t) = [V_2(0^+) - V_2(+\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + V_2(+\infty) = V_B e^{-\frac{t}{\tau}} + V_A \\ V_2(0^+) = 0 \\ V_2(+\infty) = V_1 \end{cases} \Rightarrow V_2(t) = V_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Analisi in frequenza Un **filtro passa-basso** consente il passaggio di segnali solo al di sotto di una certa frequenza. La funzione di rete $H(s)$ ha un polo a frequenza $\omega = \frac{1}{\tau}$:

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{s\tau + 1}$$

Il diagramma di Bode presenta un'attenuazione in dB dei segnali ad alta frequenza ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$).

Amplificatore con cella RC passa-basso



La funzione di rete complessiva di un amplificatore passa-basso è:

$$\begin{cases} V_C = A_V V_1 \frac{Z_C}{Z_C + R_U} \\ V_1 = V_G \frac{R_i}{R_i + R_G} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_C}{V_G} = A_{V_1}(s) = A_V \frac{R_i}{R_i + R_G} \frac{Z_C}{Z_C + R_u} =$$

$$= A_V \frac{R_i}{R_i + R_G} \frac{R_C}{R_C + R_u} \frac{1}{1 + sC_1 \frac{R_C R_u}{R_C + R_u}}$$

con $Z_C = C_1 || R_C$.

A $t \rightarrow +\infty$ nel dominio del tempo e per $\omega \rightarrow 0$ nel dominio della frequenza il condensatore si comporta come un circuito aperto, e il circuito diventa un normale stadio amplificatore con un generatore reale in ingresso e una resistenza di carico R_C in uscita:

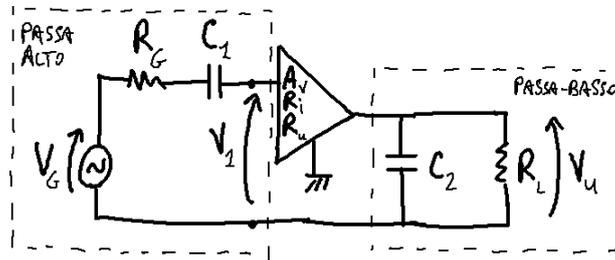
$$\frac{V_C}{V_G} = A_{V_1}(\omega \rightarrow 0) = A_V \frac{R_i}{R_i + R_G} \frac{R_C}{R_C + R_u}$$

Pertanto la funzione di rete complessiva si può scrivere come il prodotto tra il **valore in banda passante** dell'amplificazione $A_{V_1}(\omega \rightarrow 0)$ e un termine legato al comportamento passa-basso:

$$\frac{V_C}{V_G} = A_{V_1}(s) = A_{V_1}(\omega \rightarrow 0) \cdot \frac{1}{1 + sC_1 \frac{R_C R_u}{R_C + R_u}} = A_{V_1}(\omega \rightarrow 0) \cdot \frac{1}{1 + s\tau}$$

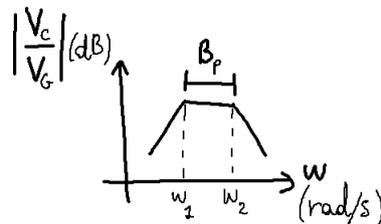
dove vale ancora: $\tau = C_1 \cdot (R_C || R_u) = R_{eq} C$.

3.1.5 Filtri passa-banda



Il circuito in figura presenta un condensatore di disaccoppiamento all'ingresso (cella passa-alto) e un carico reattivo all'uscita (cella passa-basso). I due condensatori si dicono disaccoppiati dal generatore di tensione interno all'amplificatore.

Analisi in frequenza



Il diagramma di Bode risulta dalla composizione dei due filtri passa-alto e passa-basso, aventi rispettivamente costanti di tempo τ_1 e τ_2 e poli ω_1 e ω_2 , posti in cascata al flusso di segnale:

$$V_C = A_V V_G \frac{sC_2 R_2}{1 + sC_2 R_2} \cdot \frac{1}{1 + sC_1 (R_1 + R_G)} = A_V V_G \frac{s\tau_1}{1 + s\tau_1} \cdot \frac{1}{1 + s\tau_2}$$

Si definisce **banda passante** B_p lo spettro di frequenza compreso tra la frequenza di taglio inferiore f_1 e la frequenza di taglio superiore f_2 :

- la frequenza di taglio inferiore $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ corrisponde a un'attenuazione di 3 dB rispetto al valore massimo dovuta al filtro passa-alto;
- la frequenza di taglio superiore $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ corrisponde a un'attenuazione di 3 dB rispetto al valore massimo dovuta al filtro passa-basso.

Mentre per annullare l'effetto passa-alto basta rimuovere il condensatore in ingresso, l'effetto passa-basso non si può eliminare a causa degli effetti di tipo capacitivo propri dei transistori, che sono dei dispositivi a semi-conduttore, di cui è composto l'amplificatore stesso.

Analisi nel tempo

La **risposta** nel tempo **all'onda quadra** (= successione di gradini alternati con periodo T) è una sovrapposizione dei transitori passa-alto e passa-basso. I ritardi e le rapidità con cui si manifestano i comportamenti passa-alto e passa-basso dipendono dall'ordine di grandezza del periodo T dell'onda quadra rispetto agli ordini di grandezza delle costanti di tempo τ_1 e τ_2 associate rispettivamente ai comportamenti passa-alto e passa-basso:⁹

- se $T \ll \tau_1 \Rightarrow \bar{\omega} \ll \omega_2$: il comportamento passa-alto è trascurabile perché il suo transitorio si manifesta con troppo ritardo \Rightarrow prevale il comportamento passa-basso: allo sbalzo di tensione il segnale è totalmente attenuato, ma questa attenuazione si riduce durante il tratto costante;
- se $T \gg \tau_2 \Rightarrow \bar{\omega} \ll \omega_2$: il comportamento passa-basso è trascurabile perché il suo transitorio si esaurisce subito \Rightarrow prevale il comportamento passa-alto: al termine del breve transitorio passa-basso il segnale è totalmente amplificato, ma questa amplificazione si riduce durante il tratto costante.

Amplificatore in continua

Gli amplificatori in continua (es. alimentatori) forniscono segnali DC a tensione costante ($\Rightarrow \omega = 0$) indipendentemente dal carico, perché hanno una frequenza di taglio inferiore $\omega_1 = 0$.

3.2 Celle del II ordine

A seconda del tipo di segnale su cui deve operare, un amplificatore deve garantire una banda passante entro la quale rientrino tutte le possibili frequenze del tipo di segnale:

- **amplificatori a larga banda** (audio): banda di ampiezza \sim Mhz centrata intorno a basse frequenze \sim Mhz (es. altoparlante);
- **amplificatori accordati** (di potenza RF): banda di ampiezza \sim Mhz centrata intorno ad alte frequenze \sim Ghz (es. microfono).

3.2.1 Amplificatori accordati

Gli amplificatori accordati sono di solito realizzati con celle reattive del II ordine, cioè **circuiti risonatori** aventi un induttore e un condensatore nella stessa maglia. Un circuito risonatore è caratterizzato da una funzione di trasferimento a poli complessi coniugati del tipo:

$$H(s) = K(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

⁹Anche se l'onda quadra non è propriamente un segnale sinusoidale, i segnali a gradino e a onda quadra si possono in realtà immaginare come segnali a frequenza variabile che è infinita in corrispondenza degli sbalzi di tensione, e si riduce progressivamente fino ad annullarsi nei tratti di tensione costante. Questa interpretazione spiega intuitivamente i grafici delle risposte al gradino delle celle RC.

dove:

- ω_n è la **frequenza di risonanza**;
- ξ (“xi”) è lo **smorzamento**.

Amplificatore accordato con cella RC

L'**amplificatore con cella LC** è un amplificatore accordato con impedenza di carico costituita dal parallelo di un induttore L , un condensatore C e un resistore R_C .

Analisi in frequenza Tramutando internamente all'amplificatore la serie generatore di tensione-resistore nel parallelo generatore di corrente-resistore, si trova la seguente funzione di rete $H(s)$:

$$I_{RC} = \frac{G_m V_i}{R_u} \cdot \frac{\frac{1}{RC}}{R_C || R_u || L || C} \Rightarrow H(s) = \frac{V_u}{V_i} = \frac{G_m}{R_u} \cdot \frac{1}{R || L || C} = \frac{G_m s}{R_u C} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}$$

dove:

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = \frac{1}{RC} \\ \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} \\ \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

il cui modulo ha un andamento in frequenza “a campana” di ampiezza $\sim \xi$ centrata attorno a ω_n .

Analisi nel tempo Se la resistenza di perdita è sufficientemente piccola $\Rightarrow \xi$ non è troppo elevato, le risposte al gradino e all'impulso presentano un andamento oscillante di periodo $T = \frac{1}{\omega_n}$ con uno smorzamento proporzionale a ξ .

3.3 Da rete a doppio bipolo

Si opera in maniera analoga agli amplificatori resistivi in continua, tenendo conto che i 3 parametri $Z_i(s)$, $Z_u(s)$ e $A_V(s)$ possono essere complessi.

3.4 Linearità e non linearità

3.4.1 Rappresentazione della relazione tra ingresso e uscita

La relazione tra tensione di ingresso $V_i(t)$ e tensione di uscita $V_u(t)$ di un dispositivo si può rappresentare attraverso:

- due grafici separati di $V_i(t)$ e $V_u(t)$;
- il grafico della funzione di trasferimento $H(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)}$;
- il grafico della **transcaratteristica** $V_u(V_i)$: è variabile a seconda di $\omega \Rightarrow$ è difficile rappresentare comportamenti dovuti a bipoli dinamici.

3.4.2 Moduli lineari

Il grafico della transcaratteristica ideale è una retta passante per l'origine.

Il grafico della transcaratteristica di un **modulo lineare**¹⁰ è una retta che si discosta dall'idealità in base a 3 parametri, a 2 a 2 indipendenti:

- **guadagno** ΔK : differenza di pendenza tra i due andamenti rettilinei;
- **offset** ΔU (verticale): valore di uscita a ingresso nullo;
- **offset** ΔI (orizzontale): valore d'ingresso che annulla l'uscita.

3.4.3 Moduli non lineari

Il grafico della transcaratteristica di un modulo non lineare non ha andamento rettilineo, e non vale più il principio di sovrapposizione degli effetti.

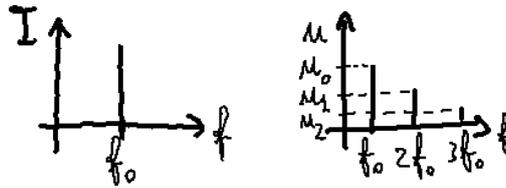
Il **circuito raddrizzatore** è un modulo non lineare, ma lineare a tratti, che restituisce in uscita solo le tensioni d'ingresso positive:

$$V_u = \begin{cases} 0 & \text{se } V_i < 0 \\ V_i & \text{se } V_i \geq 0 \end{cases}$$

Altri moduli permettono di **saturare** un ingresso di tipo sinusoidale entro un certo intervallo di valori.

3.4.4 Moduli reali

- limiti di dinamica: tutti i moduli reali non sono lineari, ma alcuni sono approssimabili linearmente, cioè la transcaratteristica è approssimabile a una retta (per esempio la tangente) entro una restrizione di valori in ingresso, cioè limitando le **dinamiche**¹¹ d'ingresso e uscita, che sono strettamente correlate tra loro attraverso la pendenza della retta; in uno stadio amplificatore, la dinamica di uscita è limitata dalla dinamica delle tensioni di alimentazione, in particolare superiormente a $+V_{AL1}$ e inferiormente a $-V_{AL2}$;
- limiti fisici: se la tensione in ingresso è troppo elevata può danneggiare il modulo, soprattutto se la tensione di alimentazione è bassa;
- limiti di banda: mentre la frequenza massima non può superare i limiti fisici del modulo, la frequenza minima può anche essere scelta nulla, ma è consigliabile limitare anche la frequenza minima per escludere le frequenze basse di rumore.



Un amplificatore non lineare introduce una distorsione nel segnale: se per esempio viene fornito in ingresso un segnale con una singola **frequenza fondamentale** f_0 , il segnale amplificato sarà caratterizzato anche dalle sue frequenze multiple $2f_0$, $3f_0$, ecc. dette **armoniche**. La **distorsione armonica totale** THD misura il livello di distorsione del segnale amplificato in uscita rispetto alla fondamentale:

$$\text{THD} = \frac{\sum_{i=2} |u_i|}{|u_1|}$$

¹⁰Per un modulo lineare vale la sovrapposizione degli effetti: l'uscita si può esprimere come la somma delle risposte parziali agli ingressi.

¹¹In questo caso, la dinamica è l'intervallo di valori che il segnale di ingresso/uscita può assumere garantendo la linearità della curva generata.

Capitolo 4

Amplificatore operazionale ideale

4.1 Amplificatore differenziale

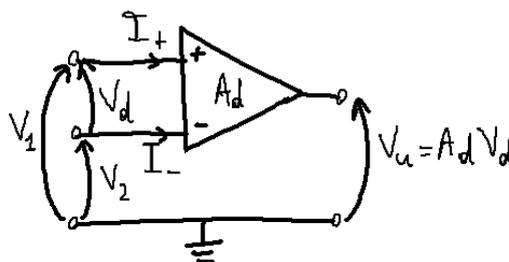
A differenza di un amplificatore standard il cui ingresso V_i è sempre riferito a massa, l'**amplificatore differenziale** è caratterizzato in ingresso dalla **tensione differenziale** V_d :

$$V_d = V_+ - V_-$$

dove V_+ è la tensione al terminale non invertente (+) e V_- è la tensione al terminale invertente (-). La tensione di uscita V_u si può esprimere come la combinazione lineare delle tensioni applicate ai singoli terminali di ingresso, ed è pertanto proporzionale alla tensione differenziale V_d con un **guadagno differenziale** A :

$$\begin{cases} V_u = AV_+ + BV_- \\ A > 0, A = -B \end{cases} \Rightarrow V_u = A(V_+ - V_-) = AV_d$$

4.1.1 Amplificatore operazionale ideale



Un amplificatore differenziale si dice **operazionale ideale** (AO) se:

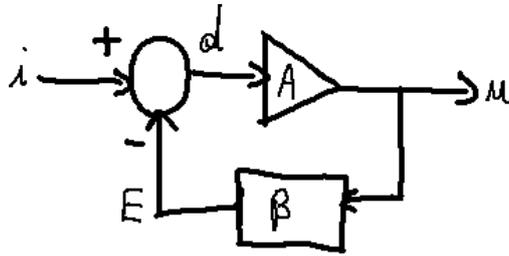
- la tensione differenziale è proporzionale alla tensione in uscita V_u con un guadagno differenziale A_d infinito:

$$V_u = A_d V_d, \quad A_d \rightarrow +\infty$$

Siccome V_u è una tensione finita, la condizione imposta sul guadagno differenziale implica:
 $V_d \rightarrow 0$

- le correnti che scorrono ai terminali di ingresso sono nulle: $i_+ = i_- = 0$
- non è presente una resistenza in uscita: $R_u = 0$

4.2 Modello dei sistemi reazionati



I **sistemi reazionati** sono basati sul principio della **reazione negativa** (o feedback):

1. il segnale di ingresso i viene amplificato nell'uscita u di un fattore A : $u = A \cdot d$;
2. l'uscita u viene ridotta nella parte E del fattore di partizione β : $E = \beta \cdot u$;
3. la parte E viene riportata al morsetto invertente;
4. la parte E viene confrontata con l'ingresso i tramite l'errore d , che è la differenza tra l'ingresso i e la parte E :

$$\begin{cases} d = i - E \\ E = \beta \cdot u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = i - \beta u \\ u = A \cdot d \end{cases} \Rightarrow u = \frac{A}{1 + A\beta} i$$

Si parla di reazione negativa perché la parte E dell'uscita u , riportata sul morsetto invertente, viene sottratta all'ingresso i .

Il **guadagno di anello** $T = A\beta$ è il contributo del ramo di reazione all'amplificazione del segnale. Se non c'è reazione ($\beta = 0$), l'amplificazione si dice **ad anello aperto**, e l'ingresso i è amplificato esattamente del fattore A : $u = A \cdot i$.

Criticità Se $A\beta = -1$ l'uscita u diverge \Rightarrow il sistema reazionato diventa **instabile**.

4.2.1 Amplificatori reazionati

Poiché il guadagno di anello di un amplificatore operazionale ideale è sempre infinito:

$$A = A_d \rightarrow +\infty \Rightarrow A\beta \rightarrow +\infty$$

l'amplificatore operazionale ideale rende l'amplificazione $\frac{u}{i}$ complessiva del sistema reazionato indipendente dal fattore A :

$$A\beta \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{u}{i} = \frac{A}{1 + A\beta} \simeq \frac{1}{\beta}, \quad \beta < 1 \Rightarrow u > i$$

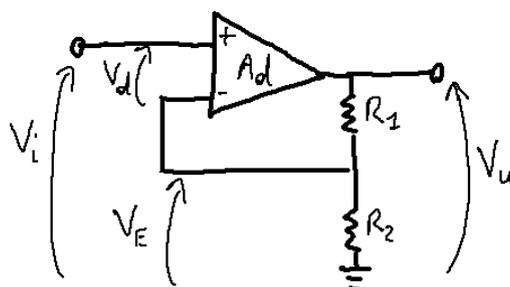
Generalmente, le resistenze di ingresso e di uscita si comportano idealmente o da cortocircuiti o da circuiti aperti a seconda se i segnali sono correnti o tensioni.

L'amplificatore è invertente se il segnale viene applicato al morsetto invertente e viceversa, con la convenzione: tensione verso l'uscita dell'operazionale, corrente entrante nell'uscita dell'operazionale.

Se il circuito comprende un solo amplificatore operazionale, affinché sia un circuito amplificatore il ramo di reazione deve essere sempre collegato al morsetto invertente.

Per studiare un circuito con amplificatori operazionali, si possono usare le regole dell'elettrotecnica per eliminare gli elementi che non perturbano il comportamento del circuito (ad es. i resistori in parallelo con generatori di tensione diventano circuiti aperti).

4.3 Amplificatore di tensione non invertente ($V \rightarrow V$)



L'amplificatore operazionale può essere impiegato per realizzare circuiti amplificatori di tensione, con guadagno A_V assegnato, di tipo reazionato: la parte $E = V_E$ della tensione $u = V_u$ viene riportata al morsetto invertente e confrontata con la tensione $d = V_d$. Le resistenze R_1 e R_2 sono in serie perché $i_- = 0 \Rightarrow$ la tensione V_u si ripartisce su di esse:

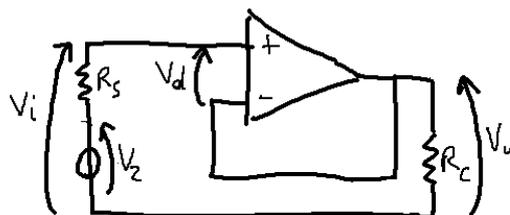
$$\begin{cases} V_E = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_u = \beta V_u \\ V_d = V_i + V_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_d = V_i - \beta V_u \\ V_d \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_u = \frac{1}{\beta} V_i \\ V_u = A_V V_i \end{cases} \Rightarrow A_V = \frac{V_u}{V_i} = \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

Parametri Il circuito può quindi essere modellato come il suo doppio bipolo equivalente definito da 3 parametri:

$$\begin{cases} A_V = 1 + \frac{R_1}{R_2} \\ R_i \rightarrow +\infty \\ R_u \rightarrow 0 \end{cases}$$

- la resistenza di ingresso R_i è infinita perché le correnti ai terminali di ingresso sono nulle;
- la resistenza R_u interna all'amplificatore operazionale ideale è nulla \Rightarrow la tensione V_u non si ripartisce tra i resistori R_u e R_c , ma si applica interamente al resistore R_c indipendentemente dal suo valore di resistenza;
- l'amplificazione A_V del circuito è minore di quella che avrebbe l'amplificatore operazionale ideale se preso singolarmente, ma ci sono dei vantaggi:
 - l'amplificazione è indipendente dalle caratteristiche dell'amplificatore operazionale;
 - l'amplificazione dipende solo dal rapporto delle resistenze R_1 e $R_2 \Rightarrow$ è indipendente dai singoli valori di resistenza purché il loro rapporto sia mantenuto;
 - il sistema reazionato ha migliori prestazioni e una maggiore stabilità.

4.3.1 Inseguitore di tensione



L'**inseguitore di tensione** (o voltage follower) è un buffer¹ che trasferisce tutta la tensione V_i sul carico R_c indipendentemente dal suo valore di resistenza.

Resistenze La resistenza di carico R_c e la resistenza R_S del generatore reale sono disaccoppiate:

- la tensione V_S del generatore non viene ripartita in V_i e non dipende dalla resistenza interna R_S :

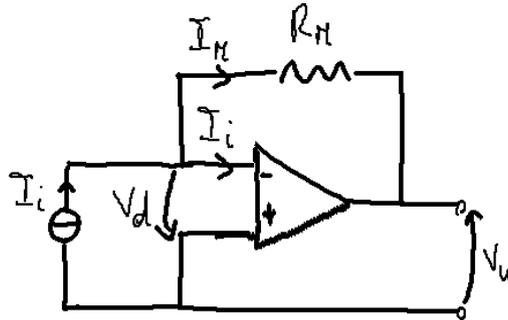
$$\begin{cases} V_i = V_S \frac{R_i}{R_i + R_S} \\ R_i \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow V_i = V_S$$

- la resistenza R_u è nulla \Rightarrow la tensione V_u non si ripartisce tra i resistori R_u e R_c , ma si applica interamente al resistore R_c indipendentemente dal suo valore di resistenza.

Tensioni L'inseguitore può essere visto come un amplificatore con guadagno A_V unitario, in cui tutta la tensione di uscita V_u viene riportata attraverso il terminale invertente a quella d'ingresso V_i :

$$\begin{cases} A_V = \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \\ R_1 = 0 \wedge R_2 \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ V_d = V_i - \beta V_u \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_i = V_u \\ A_V = 1 \end{cases}$$

4.4 Amplificatore di transresistenza invertente ($I \rightarrow V$)



Il generatore di corrente è disaccoppiato dal carico:

- la resistenza d'ingresso R_i è idealmente nulla:

$$\begin{cases} R_i = \frac{V_-}{I_i} = \frac{-V_d}{I_i} \\ V_d \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow R_i = 0$$

- la resistenza R_u è nulla \Rightarrow la tensione V_u non si ripartisce tra i resistori R_u e R_c , ma si applica interamente al resistore R_c indipendentemente dal suo valore di resistenza.

Se il generatore non fosse disaccoppiato dal carico, il generatore invierebbe corrente verso un circuito aperto. È un amplificatore invertente perché ha una transresistenza R_m negativa:

$$\begin{cases} V_u = -V_d - R_M I_M \\ V_d \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_u = -R_M I_M \\ I_- = 0 \Rightarrow I_M = I_i \end{cases} \Rightarrow R_m = \frac{V_u}{I_i} = -R_M < 0$$

¹Un **buffer** permette di trasferire tutto il segnale di ingresso sul carico indipendentemente dal suo valore di resistenza.

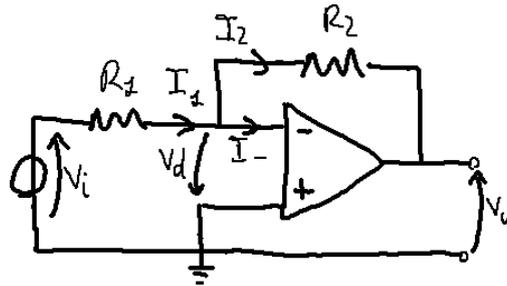
4.4.1 Fotorivelatore

In un **fotorivelatore** le correnti e la tensione V_u sono proporzionali all'intensità L della radiazione luminosa incidente:

$$I_i = I_M = KL \Rightarrow V_u = -R_M I_i = -KR_M L$$

dove K è una proprietà intrinseca del fotorivelatore.

4.5 Amplificatore di tensione invertente ($V \rightarrow V$)



Il generatore di tensione d'ingresso è applicato al morsetto invertente anziché a quello non invertente.

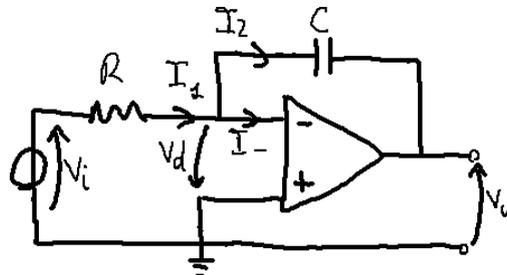
Parametri

- amplificazione A_V : anche in questo caso dipende solo dal rapporto tra le due resistenze R_1 e R_2 :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{V_i - V_d}{R_1} \\ V_d \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{V_i}{R_1} \\ I_- = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_2 = \frac{V_i}{R_1} \\ V_d \rightarrow 0 \Rightarrow V_u = -R_2 I_2 \end{cases} \Rightarrow A_V = \frac{V_u}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

- resistenza R_i : coincide con la resistenza $R_1 \Rightarrow$ non rientra nei casi ideali;
- resistenza R_u : è quella nulla dell'amplificatore operazionale ideale, perché l'uscita è indipendente dal carico.

4.5.1 Integratore attivo



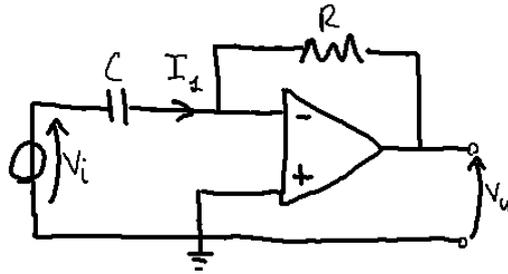
L'**integratore attivo** è un amplificatore di tensione invertente il cui amplificatore operazionale è un circuito attivo: la resistenza di reazione è sostituita da un condensatore avente ai capi una

tensione V_u :

$$\begin{cases} -V_u(s) = \frac{1}{sC} \cdot I_2(s) \\ I_2(s) = I_1 = \frac{V_i(s)}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_u(s) = -\frac{1}{RC} \cdot \frac{V_i(s)}{s} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{X(s)}{s} \right] (t) = \int_0^t x(\alpha) d\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

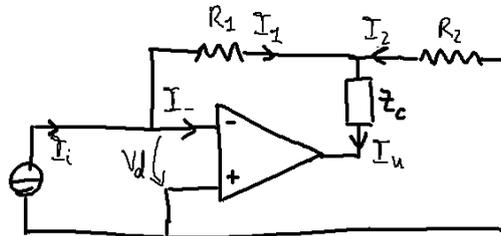
$$\Rightarrow V_u(t) = -\frac{1}{RC} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{V_i(s)}{s} \right] (t) = -\frac{1}{RC} \cdot \int_0^t V_i(\alpha) d\alpha$$

4.5.2 Derivatore attivo



$$V_u = -RI_1 = -sCRV_i \Rightarrow V_u(t) = -RC \frac{dV_i}{dt}$$

4.6 Amplificatore di corrente non invertente ($I \rightarrow I$)



L'uscita in corrente richiede che l'impedenza di carico Z_c sia posta in serie all'uscita dell'amplificatore operazionale.

Parametri

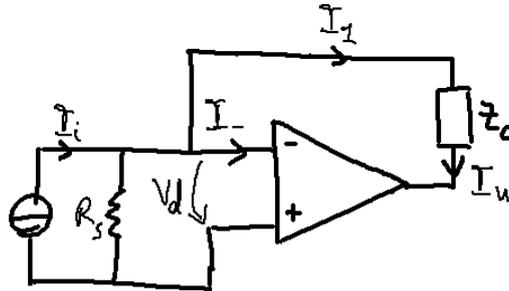
- amplificazione A_i : è indipendente dall'impedenza Z_c :

$$\begin{cases} I_- = 0 \Rightarrow I_i = I_1 \\ V_d \rightarrow 0 \Rightarrow R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ I_u = I_1 + I_2 \end{cases} \Rightarrow A_i = \frac{I_u}{I_i} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

- resistenza R_i : è nulla \Rightarrow non rientra nei casi ideali;
- resistenza R_u : I_1 e I_2 non dipendono da $Z_c \Rightarrow$ la corrente I_u non dipende dal valore di carico $Z_c \Rightarrow$ la resistenza R_u è infinita.

da chiarire

4.6.1 Inseguitore di corrente



L'**inseguitore di corrente** è un buffer che, analogamente all'inseguitore di tensione, trasferisce tutta la corrente I_i sul carico Z_c indipendentemente dal suo valore di resistenza.

Resistenze La resistenza di carico Z_c e la resistenza R_S del generatore reale sono disaccoppiate:

- la corrente I_i del generatore non viene ripartita in I_1 e non dipende dalla resistenza interna R_S :

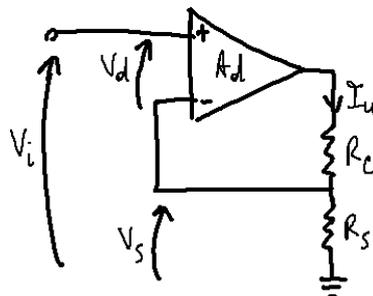
$$\begin{cases} I_1 = I_i \frac{G_i}{G_i + G_S} \\ R_i = 0 \Rightarrow G_i \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow I_1 = I_i$$

- la resistenza R_u interna all'amplificatore operazionale ideale è infinita \Rightarrow la corrente I_u non si ripartisce tra i resistori R_u e Z_c , ma attraversa interamente il resistore Z_c indipendentemente dal suo valore di resistenza.

Correnti L'inseguitore può essere visto come un amplificatore con guadagno A_i unitario:

$$\begin{cases} A_V = \frac{I_u}{I_i} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \\ R_1 = 0 \wedge R_2 \rightarrow +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_i = I_u \\ A_V = 1 \end{cases}$$

4.7 Amplificatore di transconduttanza non invertente ($V \rightarrow I$)



Parametri

- transconduttanza G_m :

$$\begin{cases} I_- = 0 \Rightarrow I_u = I_S = \frac{V_S}{R_S} \\ V_d \rightarrow 0 \Rightarrow V_S = V_i \end{cases} \Rightarrow G_m = \frac{I_u}{V_i} = \frac{1}{R_S}$$

- resistenza R_i : la tensione del generatore non viene ripartita in V_i :

$$\begin{cases} R_i = \frac{V_i}{I_i} \\ I_i = I_+ = 0 \end{cases} \Rightarrow R_i \rightarrow +\infty$$

- resistenza R_u : la corrente I_u è uguale alla corrente I_S indipendentemente dal valore di carico $R_c \Rightarrow$ la resistenza R_u è infinita.

Capitolo 5

Circuiti con amplificatori operazionali ideali

5.1 Amplificatori reazionati con elementi reattivi

L'analisi di un circuito amplificatore con elementi reattivi richiede di considerare le loro impedenze equivalenti.

Si può disegnare il diagramma di Bode dell'amplificazione (analisi in frequenza) o studiare la risposta al gradino (analisi nel tempo).

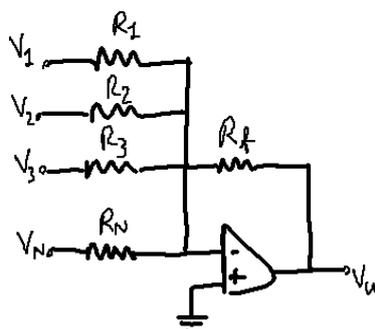
5.2 Sommatore

Il **sommatore** è uno stadio amplificatore che restituisce in uscita la combinazione lineare di più ingressi V_1, V_2, \dots :

$$V_u = AV_1 + BV_2 + CV_3 + \dots$$

dove i coefficienti A, B, \dots sono negativi o positivi a seconda se l'ingresso è collegato al morsetto invertente o non invertente rispettivamente. L'amplificatore differenziale è un caso particolare con $A = -B$ e $C = D = \dots = 0$.

5.2.1 Sommatore (invertente)

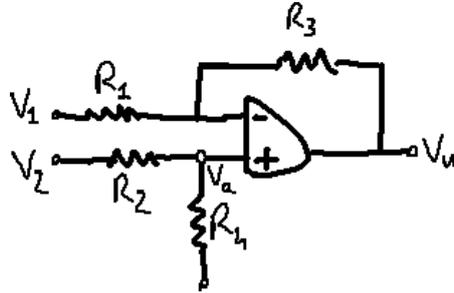


Ogni generatore di tensione V_i fornisce la corrente $I_i = \frac{V_i}{R_i}$ per il principio di sovrapposizione degli effetti:¹

$$I_f = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_n}{R_n} \Rightarrow V_u = -R_f I_f = -\frac{R_f}{R_1} V_1 - \frac{R_f}{R_2} V_2 - \dots - \frac{R_f}{R_n} V_n$$

¹Il segnale di uscita si ottiene sommando le uscite parziali che si ottengono applicando uno solo dei generatori quando tutti gli altri sono spenti.

5.2.2 Amplificatore differenziale



Per il principio di sovrapposizione degli effetti:

- spegnendo il generatore V_2 : il parallelo $R_2 || R_4$ non è attraversato da corrente \Rightarrow amplificatore di tensione invertente:

$$V_{u1} = V_1 \left(-\frac{R_3}{R_1} \right)$$

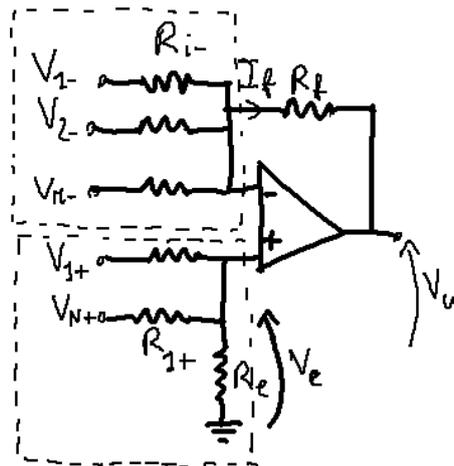
- spegnendo il generatore V_1 , la tensione V_2 si ripartisce in V_a su R_4 , e si combina con la reazione all'altro morsetto dell'amplificatore di tensione non invertente:

$$V_{u2} = V_a \left(1 + \frac{R_3}{R_1} \right) = V_2 \frac{R_4}{R_2 + R_4} \left(1 + \frac{R_3}{R_1} \right)$$

Ponendo l'uguaglianza del rapporto delle resistenze:

$$\begin{cases} V_u = V_{u1} + V_{u2} \\ \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2} = A_d \end{cases} \Rightarrow V_u = V_1 (-A_d) + V_2 \frac{A_d}{1 + A_d} (1 + A_d) = A_d (-V_1 + V_2) = A_d V_d$$

5.2.3 Sommatore generalizzato



Nel **sommatore generalizzato** le tensioni sono applicate a entrambi i terminali in ingresso:

$$\begin{cases} V_{u-} = -R_f I_f = -R_f \sum_{i-} \frac{V_i}{R_i} \\ V_{u+} = A_V \cdot \sum_{i+} V_{ei} = \left(1 + \frac{R_f}{R_{1-} || R_{2-} || \dots} \right) \cdot \sum_{i+,j+} V_i \frac{R_e || R_{eqj \neq i}}{R_e || R_{eqj \neq i} + R_i} \end{cases} \Rightarrow V_u = V_{u-} + V_{u+}$$

- lato invertente: il contributo V_{u-} è analogo a quello del sommatore invertente,² poiché il parallelo delle resistenze al morsetto non invertente, attraversate da corrente nulla, non influisce sulla tensione in uscita;
- lato non invertente: lasciando acceso solo il generatore V_{i+} , la sua tensione si ripartisce in $V_{e_{i+}}$ sul parallelo $R_{eq_{j+\neq i+}}$ costituito dalle altre resistenze applicate al morsetto non invertente, quindi viene amplificata in V_{u+} secondo il modello dell'amplificatore non invertente.

5.3 Modo differenziale e modo comune

5.3.1 Segnale differenziale e di modo comune

Le tensioni V_1 e V_2 possono essere espresse come “scostamento” $\frac{V_D}{2}$ dalla media V_C :

$$\begin{cases} V_C = \frac{V_1 + V_2}{2} \\ V_D = V_2 - V_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = V_C - \frac{V_D}{2} \\ V_2 = V_C + \frac{V_D}{2} \end{cases}$$

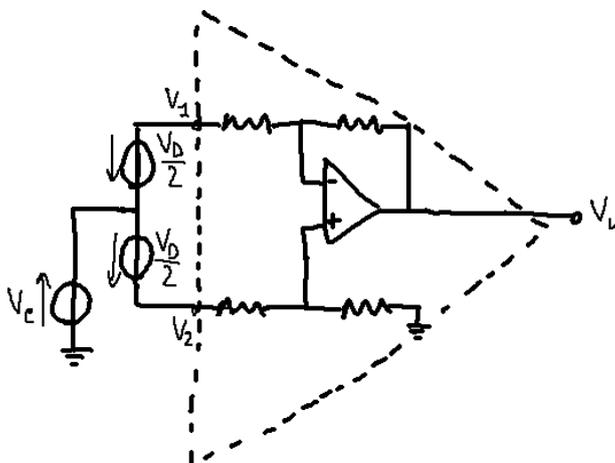
dove:

- V_C è il **segnale di modo comune**, cioè la differenza di potenziale tra la media tra V_1 e V_2 e la massa;
- V_D è il **segnale differenziale**, cioè la differenza di potenziale tra V_1 e V_2 .

Un'informazione può essere trasferita in due modi:

- lungo un filo singolo, l'informazione utile dipende solamente dal modo comune: siccome è semplicemente riferito a massa, qualsiasi disturbo (es. fulmine) che si presenta lungo la linea risulta nella perturbazione del segnale di uscita;
- lungo due fili posti a una specifica distanza, l'informazione utile è codificata solamente nel segnale differenziale: la trasmissione nel modo differenziale è meno soggetta a disturbi, soprattutto su lunghe distanze, grazie al fatto che il segnale differenziale non è riferito a massa, e quindi i disturbi perturbano in egual misura i modi comuni dei singoli segnali ma non la differenza di potenziale tra i due.

5.3.2 Guadagno differenziale e di modo comune



²Si veda la sezione 5.2.1

La tensione in uscita di un amplificatore si può esprimere in funzione dei modi comune e differenziale degli ingressi:

$$\begin{cases} V_u = AV_1 + BV_2 \\ V_1 = V_C - \frac{V_D}{2}, V_2 = V_C + \frac{V_D}{2} \\ A_C = A + B, A_D = \frac{B - A}{2} \end{cases} \Rightarrow V_u = A_C V_C + A_D V_D$$

dove A_C è il **guadagno di modo comune** e A_D è il **guadagno differenziale**.

Il **rapporto di reiezione di modo comune** (CMRR), definito come il rapporto tra il guadagno differenziale A_D e il guadagno di modo comune A_C , misura la tendenza a rigettare i segnali d'ingresso di modo comune a favore di quelli differenziali.

5.3.3 Amplificatore differenziale

Un amplificatore differenziale ideale è caratterizzato da un guadagno di modo comune nullo:

$$A_C = 0 \Rightarrow \frac{A_D}{A_C} \rightarrow +\infty$$

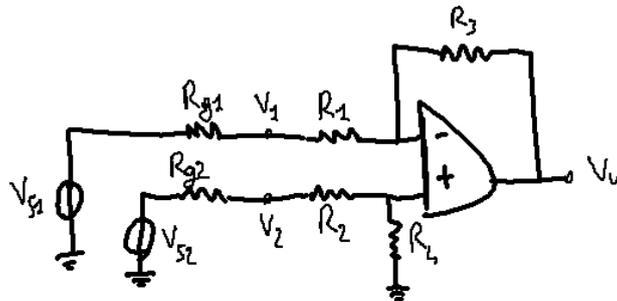
L'obiettivo è massimizzare il guadagno A_D e minimizzare il guadagno A_C , in modo che il primo sia trascurabile rispetto al secondo:

$$A_C \ll A_D \Rightarrow \frac{A_D}{A_C} \gg 1$$

Esistono tuttavia delle cause di errore che allontanano l'amplificatore differenziale reale dall'idealità, derivanti dal fatto che i valori nominali di resistenza hanno una certa incertezza:

- è difficile scegliere una combinazione di resistenze che garantisca la condizione ideale dell'uguaglianza dei rapporti:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2}$$



- le resistenze interne ai generatori reali in ingresso, se non sono uguali tra loro, convertono una parte del segnale di modo comune ($V_{S1} = V_{S2} = V_S \Rightarrow V_D = 0$) in segnale differenziale ($V_1 \neq V_2 \Rightarrow V_D \neq 0$), che viene così incorrettamente amplificato:

$$\begin{cases} V_1 = V_S \frac{R_{i1}}{R_{i1} + R_{g1}} \\ V_2 = V_S \frac{R_{i2}}{R_{i2} + R_{g2}} \end{cases} \Rightarrow V_D = V_1 - V_2 =$$

$$= V_S \left(\frac{R_{i1}}{R_{i1} + R_{g1}} - \frac{R_{i2}}{R_{i2} + R_{g2}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R_{g1} = R_{g2} \\ R_{i1} = R_{i2} \Rightarrow R_1 = R_2 + R_4 \end{cases}$$

Capitolo 6

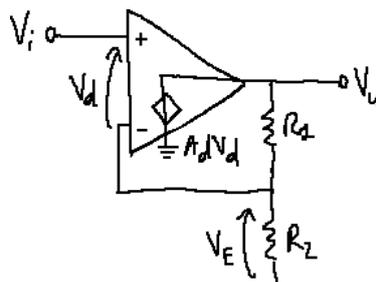
L'amplificatore operazionale reale

Un **amplificatore operazionale reale** si differenzia dall'ideale per le seguenti condizioni di non idealità:

- il guadagno differenziale A_d è grande ma non infinito, e il guadagno di modo comune A_C è piccolo ma non identicamente nullo;
- le grandezze elettriche V_d , i_+ , i_- e R_u sono piccole ma non identicamente nulle;
- il grafico della transcaratteristica $V_u(V_d)$ non è lineare \Rightarrow non si può applicare il principio della sovrapposizione degli effetti;
- la dinamica di uscita è limitata principalmente dalle tensioni di alimentazione;
- la banda passante è limitata \Rightarrow l'amplificazione A_d si riduce a frequenze ω grandi;
- il comportamento dell'amplificatore è influenzato anche da parametri esterni (temperatura, tensioni di alimentazione...).

6.1 Guadagno differenziale

6.1.1 A_d finito: effetto su A_V

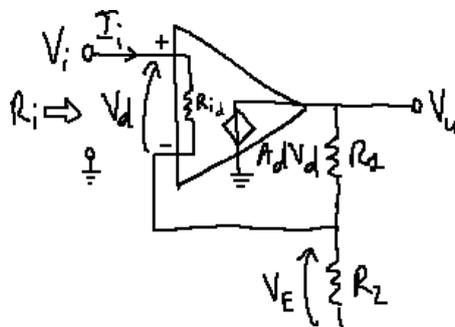


Un guadagno differenziale A_d non infinito comporta una riduzione ε_G delle prestazioni dell'amplificatore dell'ordine del reciproco del guadagno di anello $T = \beta A_d$:

$$\begin{cases} V_E = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_u = \beta V_u \\ V_d = V_i - V_E \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_d = V_i - \beta V_u \\ V_u = A_d V_d \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_i = V_u \left(\frac{1}{A_d} + \beta \right) \Rightarrow A_V = \frac{V_u}{V_i} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{T}} \approx \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{1}{T} \right)$$

6.2 Resistenze interne

6.2.1 A_d finito + R_{id} finita: effetto su R_i

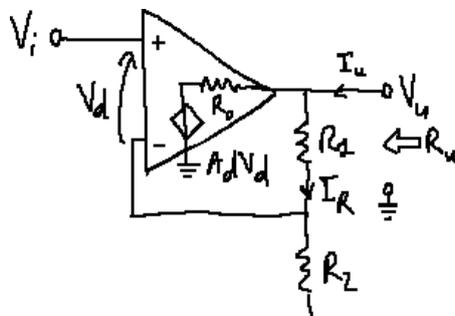


Ponendo internamente in ingresso una **resistenza differenziale** R_{id} finita e applicando un segnale differenziale V_d , si determina una corrente $I_i \neq 0$ che passa dal morsetto non invertente a quello invertente. Il suo effetto sulla resistenza R_i vista complessivamente ai terminali di ingresso è però trascurabile anche per bassi valori di R_{id} e T :

$$R_{id} = \frac{V_d}{I_i} < +\infty \Rightarrow R_i = \beta R_1 + R_{id}(1 + T) \simeq R_{id}(1 + T)$$

A guadagno differenziale A_d idealmente infinito, la resistenza di ingresso R_i è ricondotta al caso ideale ($R_i \rightarrow +\infty$) indipendentemente dalla resistenza differenziale R_{id} .¹

6.2.2 A_d finito + R_o non nulla: effetto su R_u



Una resistenza R_o non nulla, posta in uscita in serie al generatore pilotato interno, ripartisce la tensione di quest'ultimo influenzando in modo limitato la resistenza di uscita R_u .²

$$V_u = A_d V_d + (I_u - I_R) R_o \Rightarrow R_u = \frac{R_o}{T + 1 + \frac{R_o}{R_1 + R_2}} \simeq \frac{R_o}{T}$$

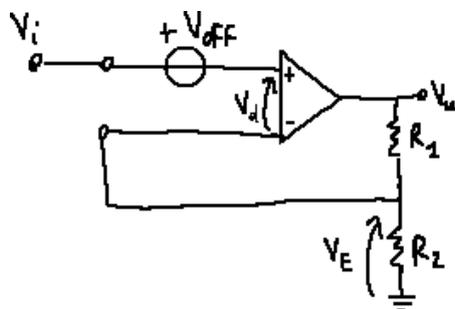
A guadagno differenziale A_d idealmente infinito, la resistenza di uscita R_u è ricondotta al caso ideale ($R_u = 0$) indipendentemente dalla resistenza R_o .

¹Non si considerano mai resistenze differenziali R_{id} troppo vicine al cortocircuito.

²Si noti che R_u è la resistenza vista complessivamente ai terminali di uscita quando i generatori indipendenti sono spenti $\Rightarrow V_i = 0$.

6.3 Tensione in ingresso

6.3.1 V_{off} non nulla: effetto su V_u



Assumiamo che il modulo abbia una transcaratteristica lineare, ma non ideale perché si discosta dall'origine per i due offset ΔU e ΔI .

La **tensione di offset** $V_{\text{off}} = \Delta I$ si può interpretare/modellizzare circuitualmente come un generatore di tensione aggiuntivo in serie all'ingresso, che riduce dello stesso offset la tensione in ingresso:

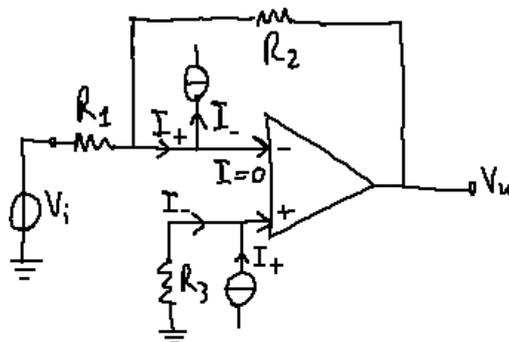
$$V_d \rightarrow 0 \Rightarrow V_i - V_{\text{off}} = V_E$$

A ingresso V_i nullo:

$$V_i = 0 \Rightarrow V_u = -V_{\text{off}} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \neq 0$$

Il costruttore del modulo si limita a specificare la tensione di offset massima senza segno (l'estremo superiore del suo valore assoluto).

6.4 Correnti in ingresso



Le correnti d'ingresso I_+ e I_- sono definite in funzione della **corrente di bias** I_b (modo comune) e della **corrente di offset** I_{off} (modo differenziale):

$$\begin{cases} I_b = \frac{I_+ + I_-}{2} \\ I_{\text{off}} = I_+ - I_- \end{cases}$$

Il costruttore fornisce il segno solo della corrente di bias; il segno della corrente di offset non è noto.

6.4.1 I_+ e I_- non nulle: effetto su V_u

Le non idealità delle correnti I_+ e I_- si possono modellizzare con generatori di corrente uscente dalle relative linee in ingresso. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti su ciascun generatore, si porta a zero la corrente in ingresso:

- $I_- \neq 0$: la resistenza R_3 non è attraversata da corrente $I_+ \Rightarrow V_- = V_+ = V_{R_1} = 0 \Rightarrow$ la corrente scorre solamente su R_2 :

$$V_{u-} = R_2 I_-$$

- $I_+ \neq 0$: il parallelo resistenza R_3 -generatore di corrente I_+ equivale alla serie resistenza-generatore di tensione $R_3 I_+ \Rightarrow$ diventa un amplificatore di tensione non invertente reazionato, con tensione di uscita:

$$V_{u+} = -R_3 I_+ \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)$$

Le correnti I_+ e I_- non nulle danno alla tensione di uscita un contributo complessivo:

$$V_u = V_{u+} + V_{u-} = R_2 I_- - R_3 I_+ \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)$$

- l'effetto della corrente di bias I_b può essere annullato se la resistenza R_3 è uguale al parallelo tra R_1 e R_2 :

$$I_{\text{off}} = 0 \Rightarrow V_u = I_b \left[R_2 - R_3 \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \right] = 0 \Leftrightarrow R_3 = R_1 || R_2$$

- l'effetto della corrente di offset I_{off} non può essere annullato per alcun valore di resistenza R_3 (tranne se $R_2 \gg 0$):

$$I_b = 0 \Rightarrow |V_u| = \frac{1}{2} |I_{\text{off}}| \left[R_2 + R_3 \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \right]$$

6.5 Limiti di dinamica

6.5.1 Dinamica di uscita

L'intervallo dei possibili valori di tensione di uscita V_u è limitato da:

- le tensioni di alimentazione V_{AL+} e V_{AL-} ;
- la resistenza interna di uscita R_o non nulla, perché su di essa vi è una caduta di potenziale (non indipendente dal carico).

6.5.2 Dinamica di ingresso

Anche il segnale di ingresso non è illimitato:

- dinamica di modo comune ΔV_C : è limitata dalle tensioni di alimentazione V_{AL+} e V_{AL-} ;
- dinamica differenziale ΔV_d : è legata alla dinamica di uscita: $\Delta V_d = \frac{\Delta V_u}{A_d}$.

Valori di tensione in ingresso al di fuori della dinamica possono danneggiare il circuito. La restrizione ΔMC della dinamica di modo comune comprende valori di tensione lontani dalle tensioni di alimentazione che, oltre a non danneggiare il circuito, garantiscono il suo corretto funzionamento.

6.5.3 Transcaratteristica

La transcaratteristica $V_u(V_d)$ dell'amplificazione operazionale ideale è una retta verticale poiché $A_d \rightarrow +\infty$.

Si discosta dalla idealità per l'amplificazione A_d finita, la dinamica di uscita ΔV_u finita (che provoca una saturazione quando V_u si avvicina alle tensioni di alimentazione), le tensioni di offset $V_{i\text{off}}$ e $V_{u\text{off}}$, e la corrente che determina la caduta di potenziale sulla resistenza di uscita interna R_o (specialmente se la resistenza di carico R_C richiede un'elevata corrente).

6.6 Moduli funzionali commerciali

I parametri del modulo sono descritti dal costruttore nel data sheet. Esempi di utilizzo sono contenuti nelle application notes.

Il data sheet non si occupa delle caratteristiche interne, ma descrive il modulo solo ai morsetti.

I valori dei parametri forniti hanno un'imprecisione. Più si vuole precisione, più il costo del componente aumenta.

Capitolo 7

I semiconduttori

Classificazione dei materiali per conducibilità elettrica I materiali **semiconduttori** (soprattutto il silicio) sono usati per i transistori.

La **conducibilità elettrica** $\sigma = \frac{J}{\mathcal{E}}$ ¹ e la **resistività elettrica** $\rho = \frac{1}{\sigma}$ sono i parametri che caratterizzano la capacità di condurre corrente di un materiale:

- isolanti/dielettrici: (es. quarzo) la corrente che scorre è nulla qualunque sia la caduta di potenziale ($\sigma \rightarrow 0$);
- conduttori: (es. metalli) la caduta di potenziale è nulla qualunque sia la corrente che scorre ($\rho \rightarrow 0$);
- semiconduttori: (es. silicio) hanno delle caratteristiche intermedie tra isolanti e conduttori.

La corrente, poiché è la variazione di quantità di carica nel tempo, viene generata dallo spostamento di cariche elettriche: idealmente negli isolanti nessuna carica elettrica può essere messa in moto, mentre nei conduttori anche un campo elettrico infinitesimo può mettere in moto infinite cariche elettriche.

7.1 Semiconduttori intrinseci

7.1.1 Elettroni in una struttura cristallina

La maggior parte dei materiali è composta da atomi tutti uguali e idealmente disposti in una **struttura cristallina**, cioè disposti non in modo casuale ma su un reticolo periodico e alla stessa distanza (= **passo reticolare**) l'uno dall'altro. Nel singolo atomo l'energia può assumere solo certi valori discreti. In un reticolo cristallino, se il passo reticolare è abbastanza piccolo da permettere agli atomi di non rimanere isolati e interagire tra loro, i valori discreti si aprono in intervalli energetici consentiti detti **bande di energia**.

Anche per le bande di energia vale il **principio di Pauli**: non possono coesistere più di due elettroni all'interno della stessa banda di energia. Gli elettroni contenuti nei gusci più interni rimangono legati all'atomo e non possono essere messi in moto; quelli nei gusci più esterni, detti **elettroni di valenza**,² possono invece essere messi in moto sotto opportune condizioni e dare origine a un flusso di corrente.

7.1.2 Modello di Shockley

Molti elementi semiconduttori si trovano nel IV gruppo \Rightarrow ogni atomo isolato ha 4 elettroni di valenza: 2 elettroni nel livello s e 2 nei livelli p (4 posti liberi). In una struttura cristallina, i

¹ $J = \frac{I}{A}$ è la **densità di corrente**, cioè la corrente che scorre per unità di area; \mathcal{E} è il campo elettrico.

²Con "elettroni di valenza" non s'intendono solo gli elettroni in BV, ma sono compresi anche gli elettroni in BC.

livelli s e p di ogni atomo si aprono in due bande di energia: la **banda di valenza** (BV) e la **banda di conduzione** (BC). Le bande hanno ciascuna banda 4 **stati** (= posti) disponibili, e sono separate dalla **banda proibita** (BP).

La **conducibilità elettrica** è la capacità del materiale di mettere in moto elettroni liberi in BC quando sottoposto a un campo elettrico.

Il campo elettrico \vec{E} esercita una forza opposta ad esso su tutti gli elettroni:

$$\vec{F} = -q\vec{E} = m^* \cdot \vec{a}$$

dove m^* è la **massa efficace** dell'elettrone, che è una proprietà del reticolo cristallino e serve per semplificare lo studio dell'azione di un campo elettrico esterno su un elettrone escludendo le interazioni di quest'ultimo con le altre cariche elettriche nel solido.

A temperatura 0 K , tutti i 4 elettroni di valenza occupano l'intera BV, lasciando vuota la BC che ha un'energia superiore. Gli elettroni si possono scambiare, ma lo spostamento di carica di uno bilancia quello opposto dell'altro \Rightarrow il materiale è un isolante perfetto.

Se la temperatura è sufficientemente elevata da permettergli di superare la BP, un elettrone viene promosso nella BC, lasciando un posto libero in BV, e così si può muovere liberamente per tutto il materiale senza essere vincolato a un atomo (**elettrone libero**/delocalizzato). Invece, gli elettroni in BV si possono muovere solo nei posti lasciati liberi; in realtà non si considera il moto dell'elettrone, ma il moto in verso opposto di una carica positiva $+q$ virtuale, detta **lacuna**.

Ogni elettrone in BV è legato in modo covalente a un elettrone di un altro atomo. La promozione in BC significa lo spezzarsi di un legame: gli elettroni in BC quindi non hanno più legami e si possono muovere liberamente nel cristallo. Lo spostamento di una lacuna significa che un elettrone si lega a un elettrone di un altro atomo. A temperature troppo elevate, il numero di legami covalenti spezzati può essere tanto grande da "sciogliere" la struttura cristallina del materiale.

Gli elettroni in BC si addensano negli stati a energia più bassa, a partire da E_c . Le lacune (positive) in BV si addensano negli stati a energia dal punto di vista degli elettroni più alta, fino a E_v , e dal punto di vista delle lacune più bassa.

Meccanismo diretto o banda-banda La promozione di un elettrone in BC corrisponde alla **generazione** di una coppia elettrone-lacuna. Viceversa, il "declassamento" di un elettrone in BV corrisponde alla **ricombinazione** di una coppia elettrone-lacuna.

Il **tasso netto di ricombinazione** U è la differenza tra il **tasso di ricombinazione** R e il **tasso di generazione** G , cioè il numero di coppie rispettivamente generate/ricombinate per unità di tempo e volume.

7.1.3 Concentrazione intrinseca

Un semiconduttore si dice **intrinseco** o puro se all'equilibrio termodinamico la concentrazione degli elettroni liberi n è uguale a quella delle lacune p :

$$n = p = n_i$$

dove:

- n è la concentrazione/cm³ di elettroni in BC;
- p è la concentrazione/cm³ di lacune in BV;
- n_i è la **concentrazione intrinseca**.

Vale la **legge dell'azione di massa**:

$$np = n_i^2$$

e continuerà a valere anche in un semiconduttore non intrinseco (drogato).

Il salto da BV a BC è ostacolato dalla banda proibita: più ampia è la banda proibita, meno elettroni passano in BC.

Un aumento di temperatura riduce l'ampiezza di banda proibita $E_g = E_c - E_v$, che così aiuta a spezzare i legami covalenti.

La concentrazione intrinseca cresce esponenzialmente al diminuire dell'ampiezza della banda proibita, e rapidamente al crescere della temperatura.

La concentrazione intrinseca misura la sensibilità alle variazioni di equilibrio: i fenomeni di generazione e di ricombinazione all'equilibrio si bilanciano tra di loro ($R = G \Rightarrow U = 0$), cioè a una generazione corrisponde una ricombinazione, perché lo spostamento di una carica elettrica, se non venisse controbilanciato dallo spostamento di un'altra carica in verso opposto, provocherebbe una variazione di energia che farebbe perdere l'equilibrio termodinamico.

7.1.4 Dispositivi a semiconduttore

- I dispositivi elettronici non possono lavorare a temperature troppo elevate, perché a causa delle loro piccole dimensioni dissipano molta energia termica \Rightarrow aumento di temperatura \Rightarrow diminuzione della conducibilità elettrica \Rightarrow diminuzione delle prestazioni.
- I **trasduttori** sono dei dispositivi fotorivelatori che convertono segnali ottici in elettrici fornendo agli elettroni energia sotto forma di fotoni e promuovendoli di banda.
- L'ampiezza di banda proibita di un materiale semiconduttore è intorno a 1 eV .³ Se il fotone ha una energia inferiore all'ampiezza di banda proibita, non viene assorbito dal materiale che appare così trasparente.
- L'ampiezza della banda proibita è la minima energia che deve assorbire un elettrone per salire di banda, nonché la minima energia ceduta dalla ricombinazione della coppia elettrone-lacuna \Rightarrow grazie alla tecnologia dei semiconduttori si possono realizzare LED e laser che possono emettere fotoni aventi un'energia pari o superiore all'ampiezza di banda proibita.

7.2 Drogaggio

Drogare un materiale significa sostituire un certo numero di atomi con **atomi droganti** appartenenti a un altro gruppo, che ionizzandosi variano il numero di portatori liberi e così la conducibilità elettrica del materiale.

Una variazione significativa della conducibilità elettrica richiede una variazione del numero di portatori liberi di un ordine di grandezza maggiore o uguale a quello della concentrazione intrinseca. I semiconduttori sono più facili da drogare perché hanno una concentrazione intrinseca molto inferiore a quella dei metalli, i quali richiederebbero l'inserimento di un numero eccessivo di atomi droganti che farebbe perdere le proprietà/caratteristiche intrinseche del cristallo.

Il **livello di ionizzazione** è il rapporto tra N^\pm , la concentrazione/cm³ degli atomi droganti che si sono effettivamente ionizzati, e N , la concentrazione totale/cm³ degli atomi droganti inseriti. A temperatura abbastanza elevata (per il silicio è sufficiente la temperatura ambiente $T = 300 \text{ K}$) si raggiunge la **completa ionizzazione**, cioè tutti gli atomi droganti si ionizzano: $N^\pm \approx N$.

³L'**elettronvolt** è un'unità di misura per l'energia: 1 eV è l'energia potenziale che assume una carica q quando sottoposta a una differenza di potenziale applicata di 1 V ($1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$).

7.2.1 Equazioni di Boltzmann

All'equilibrio termodinamico, nei semiconduttori non degeneri⁴ le concentrazioni n e p sono legate tra loro attraverso E_F dalle **equazioni di Boltzmann**:

$$\begin{cases} n \approx N_c \cdot e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} \\ p \approx N_v \cdot e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} \end{cases}$$

dove:

- N_c e N_v sono le **densità efficaci degli stati** in BC e BV:

$$\begin{cases} N_c = K_c \sqrt{T^3} \\ N_v = K_v \sqrt{T^3} \end{cases}$$

dove K_c e K_v sono delle proprietà intrinseche del materiale che non dipendono dalla temperatura;

- k_B è la **costante di Boltzmann** (a $T = 300 \text{ K}$: $k_B T = 26 \text{ meV}$);
- E_c è la minima energia in BC, e E_v è la massima energia in BV;
- E_F è detta **livello di Fermi**, e dipende dal livello di drogaggio.

La concentrazione intrinseca n_i è indipendente dal livello di Fermi E_F e quindi si mantiene costante al variare del drogaggio:

$$n_i^2 = np = N_c N_v e^{-\frac{E_c - E_v}{k_B T}} = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{k_B T}}$$

Le concentrazioni n e p sono inversamente proporzionali: all'equilibrio termodinamico, un aumento della concentrazione n dovuto al drogaggio implica una diminuzione della concentrazione p , e viceversa.

7.2.2 Equazioni di Shockley

Il **livello di Fermi intrinseco** E_{F_i} è la posizione del livello di Fermi E_F in assenza di drogaggio, e se (come nel silicio) $N_c \approx N_v$, esso si trova circa a metà della banda proibita:

$$n = p \Rightarrow E_{F_i} = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{1}{2} k_B T \ln \frac{N_c}{N_v} \approx \frac{E_c + E_v}{2}$$

Sostituendo nelle equazioni di Boltzmann N_c e N_v ricavati nel caso intrinseco, si ottengono le **equazioni di Shockley**:

$$\begin{cases} n \approx n_i \cdot e^{\frac{E_F - E_{F_i}}{k_B T}} \\ p \approx n_i \cdot e^{\frac{E_{F_i} - E_F}{k_B T}} \end{cases}$$

7.2.3 Drogaggio di tipo n

Si inseriscono atomi droganti, in concentrazione N_D , appartenenti a un gruppo superiore: gli elettroni eccedenti degli atomi droganti **donatori**, in concentrazione N_D^+ hanno così estrema facilità di essere ceduti alla BC del cristallo, aumentando la concentrazione n e quindi la conducibilità elettrica. Gli atomi droganti si ionizzano con una carica positiva: essa non è una lacuna, ma è un protone in eccesso che rimane nel nucleo.

All'aumentare del livello di drogaggio di tipo n , il livello di Fermi E_F si avvicina a E_c e si allontana da E_v .

Le concentrazioni di elettroni liberi e di lacune dovute al drogaggio di tipo n si indicano rispettivamente con n_n e p_n .

⁴Un semiconduttore è non degenero se il suo livello di Fermi E_F si trova nella banda proibita BP.

7.2.4 Drogaggio di tipo p

Si inseriscono atomi droganti, in concentrazione N_A , appartenenti un gruppo inferiore \Rightarrow aumenta la concentrazione p di lacune \Rightarrow gli atomi droganti **accettatori**, in concentrazione N_A^+ , sottraggono elettroni dalla BV di altri atomi e si ionizzano negativamente, riuscendo a realizzare i legami covalenti mancanti. È necessario scegliere un tipo di atomo che non sottragga elettroni dalla BC ma solo dalla BV.

All'aumentare del livello di drogaggio di tipo p , il livello di Fermi E_F si avvicina a E_v e si allontana da E_c .

Le concentrazioni di elettroni liberi e di lacune dovute al drogaggio di tipo p si indicano rispettivamente con n_p e p_p .

7.2.5 Drogaggio netto donatore

Un materiale è globalmente neutro se la sua carica totale è nulla, cioè il numero totale di cariche positive è uguale a quello di cariche negative. Se il semiconduttore neutro è **omogeneo** (= le sue proprietà non cambiano con la posizione), allora la proprietà di neutralità vale anche localmente (= punto per punto) (**condizione di neutralità locale**): le concentrazioni di carica positiva p e N_D^+ sono localmente compensate da quelle di carica negativa n e N_A^- :⁵

$$n + N_A = p + N_D \Rightarrow n - p = N_D - N_A = N^+$$

dove N^+ è il drogaggio netto donatore.

Se un semiconduttore subisce sia il drogaggio di tipo n sia quello di tipo p , si comporta complessivamente come se avesse subito un drogaggio con una concentrazione equivalente di **portatori di maggioranza** pari al valore assoluto del drogaggio netto donatore N^+ , perché il drogaggio minore compensa una parte del drogaggio maggiore (**legge di compensazione**). Se però prevale uno dei drogaggi, l'effettiva concentrazione dei portatori di maggioranza tende a $|N^+|$:

- prevalenza di drogaggio di tipo n : (i portatori di maggioranza sono gli elettroni liberi)

$$\begin{cases} N^+ = n - p > 0 \\ np = n_i^2 \end{cases} \Rightarrow N^+ = n - \frac{n_i^2}{n} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{N^+}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{N^+} \right)^2} \right] \\ n_i \ll N^+ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \approx N^+ \\ p = \frac{n_i^2}{n} \approx \frac{n_i^2}{N^+} \end{cases}$$

- prevalenza di drogaggio di tipo p : (i portatori di maggioranza sono le lacune)

$$\begin{cases} N^+ = n - p < 0 \\ np = n_i^2 \end{cases} \Rightarrow |N^+| = p - \frac{n_i^2}{p} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{|N^+|}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2n_i}{|N^+|} \right)^2} \right] \\ n_i \ll |N^+| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \approx |N^+| \\ n = \frac{n_i^2}{p} \approx \frac{n_i^2}{|N^+|} \end{cases}$$

7.2.6 Condizioni di non degenerazione

Un eccessivo drogaggio può portare a un materiale degenerare se l'energia di Fermi E_F esce dall'intervallo tra E_c e E_v :

- drogaggio di tipo n :

$$n = N_c \cdot e^{-\frac{E_c - E_F}{k_B T}} \approx N_D \Rightarrow E_F = E_c - k_B T \cdot \ln \frac{N_c}{N_D} < E_c \Leftrightarrow N_D < N_c$$

- drogaggio di tipo p :

$$p = N_v \cdot e^{-\frac{E_F - E_v}{k_B T}} \approx N_A \Rightarrow E_F = E_v + k_B T \cdot \ln \frac{N_v}{N_A} > E_v \Leftrightarrow N_A < N_v$$

⁵Si considera la completa ionizzazione a temperatura ambiente: $N_D^+ \approx N_D$ e $N_A^- \approx N_A$.

7.2.7 Mobilità

La **mobilità** μ è un parametro caratteristico del tipo di materiale ed è proporzionale alla sua conducibilità elettrica. In un dispositivo a semiconduttore, la mobilità μ è inversamente proporzionale al **tempo di transito** τ , definito come il tempo impiegato da un elettrone per attraversare una certa lunghezza fisica L . Siccome il dispositivo fisico impone un limite minimo τ all'intervallo di tempo in cui la corrente può variare, la mobilità è proporzionale alle prestazioni in frequenza, ovvero alla frequenza (= velocità di variazione) massima f_{\max} che il dispositivo può processare:

da chiarire

$$\begin{cases} v = \frac{L}{\tau} \\ v = \mu E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu \propto \frac{1}{\tau} \\ \omega_{\max} = 2\pi f_{\max} = \frac{1}{\tau} \end{cases} \Rightarrow f_{\max} \propto \mu$$

Elevate temperature comportano una riduzione della mobilità e quindi un peggioramento delle prestazioni.

La mobilità μ diminuisce significativamente al crescere del drogaggio totale N_T , cioè la concentrazione totale di atomi droganti $N_A + N_D$: fissato un drogaggio netto N^+ , un semiconduttore avrà mobilità massima se il drogaggio non è compensato e i portatori minoritari danno un contributo nullo. La mobilità è legata empiricamente al drogaggio netto mediante la seguente espressione:

$$\mu = \mu_{\min} + \frac{\mu_{\max} - \mu_{\min}}{1 + \left(\frac{N_T}{N_{\text{ref}}}\right)^\alpha}$$

7.3 Assenza di equilibrio termodinamico

Nella realtà i dispositivi a semiconduttore non lavorano in condizioni di equilibrio termodinamico, ma per processare segnali scambiano energia con l'esterno. Le concentrazioni di carica libera n e p in assenza di equilibrio termodinamico non sono più costanti, ma anche in un campione omogeneo variano in base alla posizione x (ad es. il semiconduttore è illuminato da un solo lato) e al tempo t (ad es. viene introdotta una corrente/tensione variabile nel tempo).

Fissando in n_0 e p_0 le concentrazioni di portatori liberi all'equilibrio termodinamico, si definiscono le **concentrazioni in eccesso** n' e p' come le variazioni di concentrazione rispetto alla condizione di equilibrio:

$$\begin{cases} n = n_0 + n' \\ p = p_0 + p' \end{cases}$$

- **iniezione:** le concentrazioni in eccesso sono positive \Rightarrow si ha un eccesso di portatori liberi: $n, p > n_0, p_0$;
- **svuotamento:** le concentrazioni in eccesso sono negative \Rightarrow si ha una carenza di portatori liberi: $n, p < n_0, p_0$.

7.3.1 Corrente di trascinamento J_{tr}

La **corrente di trascinamento** J_{tr} è determinata da un campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ che esercita una forza $\vec{F} = \mp q\vec{\mathcal{E}}$ rispettivamente sugli elettroni liberi e sulle lacune. Poiché per convenzione la corrente è il flusso di carica positiva, uno spostamento di elettroni genera un flusso di corrente in direzione opposta. La media delle velocità istantanee dei singoli portatori liberi è detta **velocità media di trascinamento** \vec{v} :

- in assenza di campo elettrico, i portatori liberi sono in moto casuale con velocità media nulla;

- in presenza di un campo elettrico esterno $\vec{\mathcal{E}}$, le velocità istantanee vengono turbate da esso e la velocità media \vec{v} non è più nulla:

$$\begin{cases} \vec{v}_n = -\mu_n \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{v}_p = \mu_p \vec{\mathcal{E}} \end{cases}$$

Nella curva che rappresenta, su scale logaritmiche, la velocità media in funzione del campo elettrico, si possono individuare due regioni particolari:

- regioni a **mobilità di basso campo** μ_0 : per campi elettrici sufficientemente piccoli esiste una proporzionalità diretta tra la velocità media e il campo elettrico, poiché il coefficiente di mobilità di basso campo μ_0 è approssimativamente costante;
- regioni a **mobilità differenziale negativa** μ_d : per campi elettrici sufficientemente elevati la velocità media satura, cioè tende a un valore di asintoto orizzontale detto **velocità di saturazione** (tipicamente dell'ordine di 10^7 cm/s), e a un aumento del campo elettrico corrisponde una diminuzione della velocità media.

Complessivamente il silicio SI ha delle prestazioni in frequenza peggiori di quelle dell'arseniuro di gallio GaAs e del germanio Ge, ma i dispositivi con il silicio sono di più facile realizzazione.

Supponiamo un volume di lunghezza infinitesima ds e di sezione A trasversale al flusso di corrente, riempito con un semiconduttore drogato di tipo n in modo che la corrente di trasciamento J_{trp} dei portatori minoritari (lacune) sia trascurabile. Applicando un campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ uniforme, vale la **legge di Ohm microscopica** che lega la conducibilità elettrica σ alla mobilità μ :

$$J_{trn} = \frac{I}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{dQ}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{A} \cdot \left(A \frac{dQ}{dV} \right) (v_n) = (-qn) (-\mu_n \mathcal{E}) \Rightarrow \begin{cases} J_{trn} = qn\mu_n \mathcal{E} \\ \sigma = \frac{J}{E} \end{cases} \Rightarrow \sigma = qn\mu_n$$

Quindi, in presenza del solo drogaggio di tipo n il flusso di corrente è costituito da elettroni liberi in concentrazione n con mobilità μ_n . In generale, gli effetti dei contributi di cariche libere e di lacune si sovrappongono:

$$J_{tr} = J_{trn} + J_{trp} \Rightarrow \sigma = qn\mu_n + qp\mu_p$$

7.3.2 Corrente di diffusione J_{diff}

La **corrente di diffusione** J_{diff} è determinata dal moto per diffusione di cariche da una zona a maggiore concentrazione a una zona a minore concentrazione, per raggiungere l'equilibrio termodinamico. La corrente di diffusione è il gradiente (= derivata prima) della concentrazione; man mano che le cariche si diffondono e le concentrazioni tendono a uguagliarsi la corrente di diffusione si riduce sempre di più, e alla fine la concentrazione diventa costante e la corrente di diffusione è nulla:⁶

$$\begin{cases} J_{diffn} = qD_n \frac{\partial n}{\partial x} \\ J_{diffp} = -qD_p \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

dove:

- $\frac{\partial n}{\partial x}$ e $\frac{\partial p}{\partial x}$ sono le variazioni nello spazio delle concentrazioni di portatori liberi;

⁶I segni dipendono dall'orientamento dell'asse x ; in questo caso si suppone che sia più vicina all'origine la concentrazione maggiore.

- D_n e D_p sono detti **coefficienti di diffusione** o **diffusività** (u.m. cm^2/s^7), e vicino all'equilibrio termodinamico soddisfano la **relazione di Einstein**:

$$\begin{cases} D_n = V_T \mu_n \\ D_p = V_T \mu_p \end{cases}$$

dove $V_T = \frac{(k_B T)}{q}$ è detto **equivalente elettrico della temperatura** (u.m. V) (a $T = 300 K$: $V_T = 26 mV$).

7.3.3 Modello matematico per le variazioni di concentrazione di carica libera⁸

I moti per diffusione e per trascinamento dei portatori liberi generano un flusso di corrente di densità J :

$$J = J_n + J_p = J_{tr} + J_{diff}$$

Nell'approssimazione a deriva-diffusione:

$$\begin{cases} J_n = J_{trn} + J_{diffn} = qn\mu_n\mathcal{E} + qD_n\frac{\partial n}{\partial x} \\ J_p = J_{trp} + J_{diffp} = qp\mu_p\mathcal{E} - qD_p\frac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

I fenomeni di generazione e di ricombinazione non si bilanciano più tra loro \Rightarrow non è più nullo il tasso netto di ricombinazione⁹ U , che è approssimabile al rapporto tra la concentrazione in eccesso e il **tempo di vita medio** τ , cioè il tempo che una coppia di portatori trascorre prima di essere ricombinata:¹⁰

$$\begin{cases} U_n \approx \frac{n - n_0}{\tau_n} = \frac{n'}{\tau_n} \\ U_p \approx \frac{p - p_0}{\tau_p} = \frac{p'}{\tau_p} \end{cases}$$

Le **equazioni di continuità**, basate sul principio di conservazione di particelle in un flusso attraverso una superficie, esprimono le variazioni nel tempo delle concentrazioni di carica libera dovute sia alle correnti di spostamento e di diffusione, sia ai fenomeni di generazione e di ricombinazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = +\frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - U_n \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} - U_p \end{cases}$$

Le incognite più significative sono le concentrazioni n e p e il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$.

⁷Analisi dimensionale:

$$[J] = \frac{A}{cm^2} = C \cdot [D] \cdot \frac{cm^{-3}}{cm}; [D] = \frac{A}{C} \cdot \frac{cm^4}{cm^2} = \frac{C}{s \cdot C} \cdot cm^2 = \frac{cm^2}{s}$$

⁸Vi sono dei flussi di **corrente di spostamento dielettrico** di densità \vec{J} :

$$\begin{cases} \vec{J} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{D} = \epsilon \vec{\mathcal{E}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{J} = \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t} \\ \vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \vec{J} = \epsilon \mathcal{E}_0 \omega \cos(\omega t) \Rightarrow |J| \leq \epsilon |\mathcal{E}_0| \omega$$

Quindi, in un semiconduttore il suo contributo, se la frequenza ω del campo tempo-variante non è troppo elevata, è trascurabile rispetto alle correnti di trascinamento e di diffusione. Invece, in un isolante (es. condensatore) non ci sono portatori liberi \Rightarrow le correnti di trascinamento e di diffusione sono nulle \Rightarrow il contributo della corrente di spostamento dielettrico è dominante.

⁹Si veda la sezione 7.1.2.

¹⁰Si distingue se si fa riferimento agli elettroni liberi (U_n) o alle lacune (U_p).

Alle equazioni di continuità si aggiunge l'**equazione di Poisson** per ricavare il campo elettrico incognito $\vec{\mathcal{E}}$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \begin{cases} \mathcal{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \rho = q \cdot (p + N_D^+ - n - N_A^-) \end{cases}$$

dove:

- ϵ è la **costante dielettrica** del materiale;
- ρ è la **densità di carica netta positiva** all'interno del materiale, cioè la quantità di carica elettrica per unità di volume (u.m. C/cm^3).

7.3.4 Regioni neutre con campo elettrico nullo

Il **potenziale elettrostatico** $\varphi(x)$ rappresenta la condizione al contorno dell'equazione differenziale di Poisson e dipende dalle condizioni fisiche del semiconduttore, in particolare dalla differenza di potenziale ΔV applicata:

$$\Delta V = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

La **regione neutra** di un semiconduttore è una parte di esso in cui la densità di carica netta ρ è nulla. Ai capi di una regione neutra compresa tra x_1 e x_2 si ha una differenza di potenziale ΔV :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \text{cost.} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\mathcal{E}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) = -\mathcal{E}_0 x + C \\ \Delta V = \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \end{cases} \Rightarrow \Delta V = -\mathcal{E}_0 (x_2 - x_1)$$

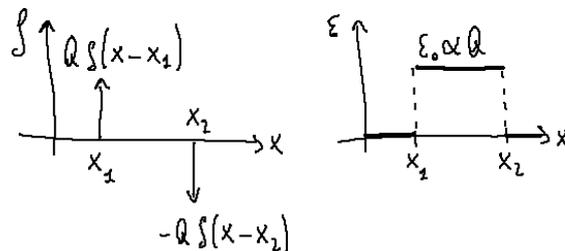
Se la differenza di potenziale ΔV ai capi di una regione neutra è nulla, il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ è anch'esso nullo e le equazioni di continuità si disaccoppiano in modo da non richiedere più l'equazione di Poisson:

Resistore Una regione drogata in modo uniforme è caratterizzata da una resistenza R associata a una resistività ρ :¹¹

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

Se tale regione resistiva è attraversata da una corrente I nulla, la differenza di potenziale ΔV è nulla:

$$I = 0 \Rightarrow \Delta V = R \cdot I = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = 0$$



Condensatore Due cariche q e $-q$ uguali ed opposte, separate da una regione dielettrica $x_1 < x < x_2$ a densità di carica netta ρ nulla, sono concentrate su due superfici di spessori infinitesimi (rispettivamente $\delta(x - x_1)$ e $\delta(x - x_2)$) \Rightarrow integrando le delta di Dirac, nella regione dielettrica il campo elettrico è una costante \mathcal{E}_0 che dipende da $q \Rightarrow$ la differenza di potenziale ΔV è nulla solo a condensatore scarico ($q = 0$).

¹¹La resistività non va confusa con la densità di carica netta positiva.

7.3.5 Livelli di iniezione

In un semiconduttore drogato in **condizione di quasi neutralità** ($n' \approx p'$):

- se il **livello di iniezione** non è troppo alto, solo la concentrazione dei portatori minoritari risente della variazione di equilibrio, perché la concentrazione in eccesso è a un ordine di grandezza trascurabile rispetto a quello della concentrazione dei portatori maggioritari (ad es. nel caso prevalga di drogaggio di tipo n : $n' \ll n_0 \approx n$);
- ad un alto livello di iniezione, le concentrazioni n e p sono confrontabili tra loro e molto distanti dall'equilibrio.

In basso livello di iniezione, le componenti di trascinamento sono dominate dai portatori maggioritari; in alto livello di iniezione, le componenti di diffusione sono dello stesso ordine di grandezza.

Si ha un campione di silicio drogato uniformemente di tipo p , in condizione di quasi neutralità (\Rightarrow il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ è trascurabile). Se si compie all'estremità $x = 0$ un'iniezione di basso livello di portatori minoritari (in questo caso n), questi ultimi assumeranno la seguente distribuzione spaziale:

$$n'_p(x) = n'_p(0) \frac{\sinh\left(\frac{L-x}{L_n}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{L_n}\right)}, \quad 0 \leq x \leq L$$

Casi limite A seconda della lunghezza L del campione¹² rispetto alla **lunghezza di diffusione** dei portatori minoritari $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$:

- **campione corto** ($L \ll L_n$): la distribuzione è **lineare**:

$$n'_p(x) \approx n'_p(0) \frac{L-x}{L_n}$$

- **campione lungo** ($L \gg L_n$): la distribuzione è **esponenziale**:

$$n'_p(x) \approx n'_p(0) e^{-\frac{x}{L_n}}$$

¹²All'estremità $x = L$ si suppone che valga la condizione di **contatto ohmico**: $n'_p(L) = 0$.

Capitolo 8

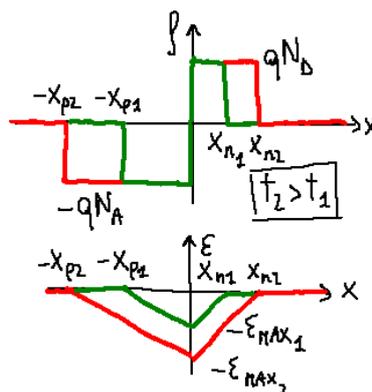
La giunzione pn

Una **giunzione pn** è una regione di semiconduttore perfettamente cristallino nella quale si abbia una parte drogata p ed una drogata n . Si parla idealmente di **giunzione brusca** quando non c'è alcuna regione di transizione tra le due regioni e le concentrazioni di atomi droganti passano subito da N_A a N_D .

8.1 Condizioni di equilibrio termodinamico

Supponiamo di riuscire idealmente a realizzare una giunzione pn saldando assieme due semiconduttori, sebbene in realtà la tecnologia non consenta tecnicamente tale operazione. I due semiconduttori presi inizialmente isolati sono omogenei e localmente neutri \Rightarrow trascurando il contributo dei portatori minoritari, le cariche dei portatori maggioritari si compensano con quelle degli atomi ionizzati.

Dopo la formazione della giunzione, siccome i portatori minoritari in ciascuna regione sono trascurabili, i portatori maggioritari si spostano per diffusione nel lato opposto, ma l'incontro tra una lacuna e un elettrone libero in corrispondenza della **giunzione metallurgica** provoca una ricombinazione dei due \Rightarrow tra le regioni inizia a formarsi una **regione svuotata** (o di carica spaziale).



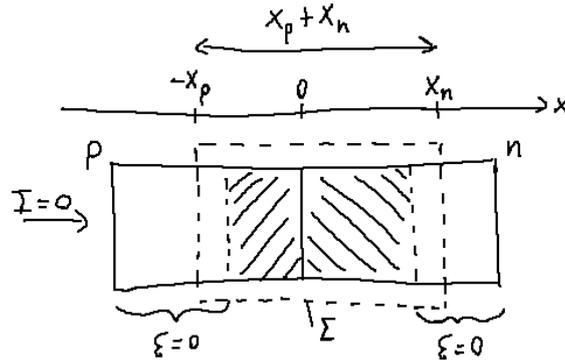
La regione svuotata è priva di portatori liberi, e quindi la carica degli atomi ionizzati non è più bilanciata \Rightarrow la regione svuotata ha una densità di carica ρ non nulla (in particolare pari a $-qN_A$ nella metà verso il lato p , e qN_D nella metà verso il lato n), e internamente a essa si crea un campo elettrico \vec{E} detto **di built-in** (o di contatto), associato a un potenziale V_{bi} non applicato dall'esterno detto **di built-in** (o di contatto). Siccome è negativo,¹ il campo elettrico oppone

¹Si suppone che l'asse x sia orientato dalla regione drogata di tipo p a quella drogata n , con l'origine in corrispondenza della giunzione metallurgica.

al moto di diffusione di portatori liberi una forza di trascinamento sempre maggiore, agente sui pochissimi portatori minoritari rimasti nella regione svuotata, fino a raggiungere l'**equilibrio dettagliato**:

$$\begin{cases} J_{\text{diff}n} + J_{\text{tr}n} = 0 \\ J_{\text{diff}p} + J_{\text{tr}p} = 0 \end{cases}$$

Non c'è un confine netto tra la regione neutra e la regione svuotata; l'ampiezza della regione di transizione viene però considerata trascurabile nell'**approssimazione di completo svuotamento**: la regione svuotata è esattamente compresa tra $-x_p$ e x_n .



Applicando il teorema di Gauss:

$$\oint_{\Omega} \rho dV = \oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} d\sigma = \oint_{\Sigma} \epsilon \vec{E} \cdot \hat{n} d\sigma$$

a un cilindro Ω che racchiude la regione svuotata:

- le basi tagliano la giunzione in $-x_p$ e x_n , cioè nelle regioni neutre dove il campo elettrico \vec{E} è nullo;
- il vettore normale \hat{n} alla superficie cilindrica Σ è ortogonale all'asse del cilindro, a sua volta parallelo all'asse x e al campo elettrico $\vec{E} \Rightarrow$ il prodotto scalare $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$.

La regione racchiusa dal cilindro è quindi in condizione di **neutralità globale**:

$$\oint_{\Omega} \rho dV = 0 \Rightarrow \int_{-x_p}^{x_n} \rho(x) dx = 0$$

e ciò impone delle condizioni ai grafici di $\rho(x)$ e $\mathcal{E}(x)$:

$$(-qN_A)(-x_p) = (qN_D)x_n \Rightarrow \begin{cases} N_A x_p = N_D x_n \\ \mathcal{E}(0^-) = \mathcal{E}(0^+) = -\mathcal{E}_{\text{max}} \end{cases}$$

Se $N_D \ll N_A \Rightarrow x_p \rightarrow 0$, si può trascurare la parte di regione svuotata appartenente al campione drogato di tipo p (e viceversa).

In equilibrio termodinamico, la regione svuotata presenta perciò un campo elettrico $\vec{E}(x)$:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \mathcal{E}(x) = \begin{cases} -\frac{qN_A}{\epsilon}(x+x_p) & -x_p \leq x \leq 0 \\ +\frac{qN_D}{\epsilon}(x-x_n) & 0 \leq x \leq x_n \end{cases}$$

che, per la condizione di neutralità globale, in corrispondenza della giunzione metallurgica equivale a:

$$\mathcal{E}(0^-) = \mathcal{E}(0^+) \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{max}} = \frac{qN_A}{\epsilon}x_p = \frac{qN_D}{\epsilon}x_n$$

da cui si ricava un potenziale elettrostatico $\varphi(x)$ a tratti parabolici:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\mathcal{E} \Rightarrow \varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -x_p \\ +\frac{qN_A}{2\epsilon}(x+x_p)^2 & -x_p \leq x \leq 0 \\ -\frac{qN_D}{2\epsilon}(x-x_n)^2 + \frac{qN_A}{2\epsilon}x_p^2 + \frac{qN_D}{2\epsilon}x_n^2 & 0 \leq x \leq x_n \\ \varphi(x_n) - \varphi(x_p) = \frac{qN_A}{2\epsilon}x_p^2 + \frac{qN_D}{2\epsilon}x_n^2 & x \geq x_n \end{cases}$$

8.1.1 Diagramma a bande

Il **diagramma a bande** di energia è una rappresentazione grafica dell'energia potenziale U alla quale sono sottoposti gli elettroni. Nella regione svuotata, l'energia potenziale $U(x)^2$ segue l'andamento inverso del potenziale elettrostatico $\varphi(x)$:

$$U(x) = -q\varphi(x)$$

determinando ai capi della regione svuotata una barriera di energia potenziale qV_{bi} , che si oppone al flusso di portatori, con potenziale di built-in V_{bi} pari a:

$$V_{bi} = \varphi(x_n) - \varphi(-x_p) = -\frac{U(x_n)}{q} + \frac{U(-x_p)}{q} = \frac{-E_{Fi}(x_n) + E_{Fi}(-x_p)}{q}$$

Si può dimostrare che siccome il dispositivo non è attraversato da corrente, il livello di Fermi E_F si trova a un livello di energia potenziale costante lungo x . Nelle regioni neutre, le equazioni di Shockley legano il livello di Fermi E_F al livello di Fermi intrinseco $E_{Fi}(x)$:

$$\begin{cases} n = N_D = n_i \cdot e^{\frac{E_F - E_{Fi}}{k_B T}} \\ p = N_A = n_i \cdot e^{\frac{E_{Fi} - E_F}{k_B T}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_F - E_{Fi} = k_B T \ln \frac{N_D}{n_i} & n \geq x_n \\ E_{Fi} - E_F = k_B T \ln \frac{N_A}{n_i} & x \leq -x_p \end{cases}$$

Sfruttando anche la condizione di neutralità globale $N_A x_p = N_D x_n$, si ricava che le ampiezze x_n e x_p sono proporzionali alla radice quadrata del potenziale di built-in $V_{bi} = \varphi(x_n) - \varphi(-x_p)$ che sta ai capi della regione svuotata:³

$$\begin{cases} V_{bi} = \frac{-E_{Fi}(x_n) + E_{Fi}(-x_p)}{q} = \frac{k_B T}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \\ V_{bi} = \varphi(x_n) - \varphi(-x_p) = \frac{qN_A}{2\epsilon}x_p^2 + \frac{qN_D}{2\epsilon}x_n^2 \\ N_A x_p = N_D x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q}} \cdot \frac{\sqrt{N_{eq}}}{N_D} \cdot \sqrt{\varphi(x_n) - \varphi(-x_p)} \\ x_p = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q}} \cdot \frac{\sqrt{N_{eq}}}{N_A} \cdot \sqrt{\varphi(x_n) - \varphi(-x_p)} \\ x_d = x_n + x_p = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N_{eq}}} \cdot \sqrt{\varphi(x_n) - \varphi(-x_p)} \end{cases}$$

dove N_{eq} è il "parallelo" tra le concentrazioni N_A e N_D :

$$N_{eq} = N_A || N_D = \frac{N_A \cdot N_D}{N_A + N_D}$$

8.1.2 Reinterpretazione del diagramma a bande

Per il diagramma a bande viene preso come riferimento assoluto il **livello del vuoto** E_0 , che è la minima energia che deve assumere un elettrone per liberarsi e uscire all'esterno del cristallo. Si definiscono i seguenti salti di energia:

²Tutte le energie definite nelle bande di energia (E_c , E_v , E_g , E_F , E_{Fi}) seguono l'andamento della generica $U(x)$.

³Le espressioni di x_n , x_p e x_d ricavate qui varranno anche in assenza di equilibrio termodinamico con $\varphi(x_n) - \varphi(-x_p) = V_{bi} - V$.

- **affinità elettronica** $q\chi_S$: il salto di energia rispetto ad E_c :

$$q\chi_S = E_0 - E_c$$

- **lavoro di estrazione** $q\phi_S$: il salto di energia rispetto al livello di Fermi E_F :

$$q\phi_S = E_0 - E_F = q\chi_S + E_c - E_F$$

Il lavoro di estrazione $q\phi_S$ dipende dal drogaggio; l'affinità elettronica è propria del materiale (ad es. per il silicio vale: $q\chi_S = 4,05 \text{ eV}$).

I due campioni presi isolati presentano un diverso livello di Fermi E_F : il campione drogato di tipo p ha un livello di Fermi inferiore a quello intrinseco E_{Fi} , e l'altro di tipo n lo ha superiore.

Formata la giunzione, l'equilibrio impone che il livello di Fermi E_F sia costante \Rightarrow il salto tra i due livelli di Fermi dei campioni isolati deve essere annullato da uno sfalsamento pari a qV_{bi} del livello del vuoto $E_0 \Rightarrow$ siccome anche l'affinità elettronica $q\chi_S$ dev'essere costante, tutti gli altri livelli di energia subiscono pari sfalsamento. Nella regione svuotata, la variazione del livello di Fermi E_F rispetto a quello intrinseco E_{Fi} determina il flusso di portatori liberi.

Ricordando le equazioni di Boltzmann, i due campioni, aventi uguale affinità elettronica $q\chi_S$ perché dello stesso materiale, quando presi isolati hanno i seguenti lavori di estrazione:

$$\begin{cases} q\phi_{S_p} = q\chi_S + E_g - (E_F - E_v) = q\chi_S + E_g - k_B T \ln \frac{N_v}{N_A} \\ q\phi_{S_n} = q\chi_S + (E_c - E_F) = q\chi_S + k_B T \ln \frac{N_c}{N_D} \end{cases}$$

La barriera di energia potenziale qV_{bi} all'equilibrio della giunzione coincide con la differenza dei lavori di estrazione:

$$\begin{aligned} qV_{bi} = q\phi_{S_p} - q\phi_{S_n} &\Rightarrow \begin{cases} qV_{bi} = E_g - k_B T \ln \frac{N_v N_c}{N_A N_D} \\ n_i^2 = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{k_B T}} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow qV_{bi} &= k_B T \left(\ln \frac{N_c N_v}{n_i^2} - \ln \frac{N_v N_c}{N_A N_D} \right) = k_B T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \end{aligned}$$

8.2 Assenza di equilibrio in regime stazionario nel tempo

Applicando dall'esterno una tensione V costante alla giunzione pn si determina una corrente I .

Nella giunzione pn si possono riconoscere 3 regioni, che sono in serie perché sono attraversate da una corrente I costante che:

- entra dalla parte a potenziale più alto, senza venire dispersa perché si assume la condizione di **contatto ohmico**;
- attraversa la regione neutra tra $-w_p$ e $-x_p$, su cui vi è una caduta di potenziale V_1 ;
- attraversa la regione svuotata tra $-x_p$ e x_n , su cui vi è una caduta di potenziale V_2 ;
- attraversa la regione neutra tra x_n e w_n , su cui vi è una caduta di potenziale V_3 ;
- esce dalla parte a potenziale più basso, sempre in condizione di contatto ohmico, e per la legge di Kirchhoff il suo valore è pari al valore iniziale.

Le regioni neutre sono drogate in modo omogeneo \Rightarrow le conducibilità $\sigma_n = qN_D\mu_n$ e $\sigma_p = qN_A\mu_p$ sono costanti \Rightarrow le regioni neutre sono di tipo resistivo, e vengono chiamate **resistenze parassite** R_{p_n} e R_{p_p} :

$$R_p = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{w - x}{A}$$

Siccome le regioni sono in serie, la somma delle cadute di potenziale V_1 , V_2 e V_3 coincide con la tensione applicata V :

$$\begin{cases} V = V_1 + V_2 + V_3 \\ R_p = R_{pn} + R_{pp} \end{cases} \Rightarrow V = R_p I + V_2$$

Per semplicità, si trascurerà la corrente che scorre nelle resistenze parassite, in modo che queste ultime non intervengano nella giunzione pn :

$$I \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} V \simeq V_2 \\ \mathcal{E} \rightarrow 0 \end{cases}$$

8.2.1 Polarizzazione inversa

Applicando una tensione V^4 negativa, essa si sovrappone nella regione svuotata alla tensione di built-in V_{bi} :

$$\varphi(x_n) - \varphi(-x_p) = V_{bi} - V = V_{bi} + |V| > V_{bi}$$

allargando i confini x_n e x_p della regione stessa e aumentando il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ di trascinamento e la barriera di energia potenziale $q(V_{bi} - V)$ in opposizione al flusso per diffusione dei portatori maggioritari. Prevale quindi la forza di trascinamento che agisce sui pochissimi portatori minoritari rimasti nella regione di svuotamento \Rightarrow si determina una corrente I negativa (cioè positiva verso il lato p) che, poiché il numero di portatori minoritari spostati è molto ridotto, è di intensità molto piccola e indipendente dalla tensione V .

8.2.2 Polarizzazione diretta

Applicando una tensione V positiva, essa si sovrappone nella regione svuotata alla tensione di built-in V_{bi} , restringendo i confini e riducendo la barriera di energia potenziale \Rightarrow viene favorito il flusso per diffusione dei portatori maggioritari \Rightarrow si determina una corrente I positiva (verso il lato n) che, vista la grande disponibilità di portatori maggioritari, è fortemente crescente con la tensione V .

8.2.3 Contributi di trascinamento J_{tr} dei portatori minoritari

Siccome nelle regioni neutre si suppone che il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ sia trascurabile e che il livello di iniezione sia basso ($n_p \ll p_p$ al lato p e $p_n \ll n_n$ al lato n), i contributi di trascinamento J_{tr} dei portatori minoritari si possono ignorare:

$$\begin{cases} x < -x_p : \mathcal{E}(x) \rightarrow 0 \wedge n_p(x) \ll p_p(x) \Rightarrow J_{trn} = qn_p(x)\mu_n\mathcal{E}(x) \rightarrow 0 \\ x > x_n : \mathcal{E}(x) \rightarrow 0 \wedge p_n(x) \ll n_n(x) \Rightarrow J_{trp} = qp_n(x)\mu_p\mathcal{E}(x) \rightarrow 0 \end{cases}$$

8.2.4 Contributi di diffusione J_{diff} dei portatori minoritari

In equilibrio termodinamico:

$$\begin{cases} p_{p0}(-x_p) = N_A \\ n_{p0}(-x_p) = \frac{n_i^2}{N_A} \\ n_{n0}(x_n) = N_D \\ p_{n0}(x_n) = \frac{n_i^2}{N_D} \\ V_{bi} = V_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{bi} = V_T \ln \frac{p_{p0}(-x_p)}{p_{n0}(x_n)} \\ V_{bi} = V_T \ln \frac{n_{n0}(x_n)}{n_{p0}(-x_p)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{n0}(x_n) = p_{p0}(-x_p) e^{-\frac{V_{bi}}{V_T}} \\ n_{p0}(-x_p) = n_{n0}(x_n) e^{-\frac{V_{bi}}{V_T}} \end{cases}$$

⁴Si ricorda che la tensione V del generatore si scarica tutta sulla tensione V_2 della regione svuotata perché si trascurano le regioni neutre.

Supponendo un basso livello di iniezione:

$$\begin{cases} n_n(x_n) \approx n_{n0}(x_n) \\ p_p(-x_p) \approx p_{p0}(-x_p) \end{cases}$$

in assenza di equilibrio termodinamico vale la **legge della giunzione**:

$$e^{-\frac{v_{bi}-V}{V_T}} = e^{-\frac{v_{bi}}{V_T}} \cdot e^{\frac{V}{V_T}} \Rightarrow \begin{cases} p_n(x_n) \approx \left(p_{p0}(-x_p) e^{-\frac{v_{bi}}{V_T}} \right) \cdot e^{\frac{V}{V_T}} = p_{n0}(x_n) e^{\frac{V}{V_T}} = \frac{n_i^2}{N_D} e^{\frac{V}{V_T}} \\ n_p(-x_p) \approx \left(n_{n0}(x_n) e^{-\frac{v_{bi}}{V_T}} \right) \cdot e^{\frac{V}{V_T}} = n_{p0}(-x_p) e^{\frac{V}{V_T}} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{\frac{V}{V_T}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p'_n(x_n) = p_n(x_n) - p_{n0}(x_n) = \frac{n_i^2}{N_D} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \\ n'_p(-x_p) = n_p(-x_p) - n_{p0}(-x_p) = \frac{n_i^2}{N_A} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \end{cases}$$

È possibile vedere ciascun lato della giunzione come un campione drogato uniformemente, in condizione di quasi neutralità, sottoposto a un'iniezione di basso livello di portatori minoritari all'estremità $x = \pm x_{n,p}$.⁵ Supponendo che i due lati w_p e w_n siano lunghi rispetto alla lunghezza di diffusione dei portatori minoritari $L_{n,p} = \sqrt{D_{n,p}\tau_{n,p}}$, la distribuzione è esponenziale:

$$\begin{cases} p'_n(x) \approx p'_n(x_n) e^{-\frac{x-x_n}{L_p}} = \frac{n_i^2}{N_D} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) e^{-\frac{x-x_n}{L_p}} \\ n'_p(x) \approx n'_p(-x_p) e^{\frac{x-(-x_p)}{L_n}} = \frac{n_i^2}{N_A} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) e^{\frac{x-(-x_p)}{L_n}} \end{cases}$$

Ai confini $-x_p$ e x_n della giunzione metallurgica:

- polarizzazione inversa: si verifica uno svuotamento di portatori minoritari perché i loro eccessi sono negativi:

$$V < 0 \Rightarrow \begin{cases} p'_n(x_n) < 0 \\ n'_p(-x_p) < 0 \end{cases}$$

- polarizzazione diretta: si verifica un'iniezione di portatori minoritari perché i loro eccessi sono positivi:

$$V > 0 \Rightarrow \begin{cases} p'_n(x_n) > 0 \\ n'_p(-x_p) > 0 \end{cases}$$

I portatori minoritari danno perciò ai confini della giunzione i seguenti contributi di diffusione J_{diff} :

$$\begin{cases} J_{\text{diff}_p}(x_n) = qD_p \left. \frac{dp'_n}{dx} \right|_{x=x_n} \\ J_{\text{diff}_n}(-x_p) = qD_n \left. \frac{dn'_p}{dx} \right|_{x=-x_p} = q \frac{D_n}{L_n} \cdot \frac{n_i^2}{N_A} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \end{cases}$$

8.2.5 Contributi $J_{\text{diff}} + J_{\text{tr}}$ dei portatori maggioritari

Al di fuori della regione svuotata La densità di corrente totale J_{tot} è costante poiché la corrente I è costante lungo $x \Rightarrow$ i contributi dei portatori maggioritari $J_p(x)$ e $J_n(x)$ si possono ricavare come i "complementari" dei contributi di diffusione J_{diff_p} e J_{diff_n} dei minoritari.

⁵Si veda la sezione 7.3.5.

All'interno della regione svuotata Trascurando:

- le variazioni nel tempo delle concentrazioni di carica libera perché si suppone di lavorare in condizioni stazionarie:

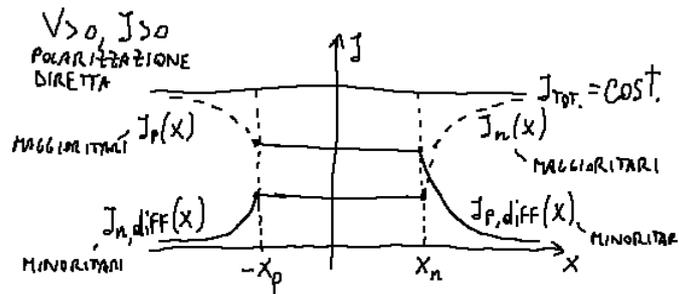
$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

- il contributo dei fenomeni di generazione e ricombinazione nella regione svuotata:

$$\begin{cases} U_n = \frac{n - n_0}{\tau_n} = 0 \\ U_p = \frac{p - p_0}{\tau_p} = 0 \end{cases}$$

le equazioni di continuità impongono che le densità di corrente J_p e J_n devono essere costanti:⁶

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = +\frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} - U_n \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} - U_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial J_n}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial J_p}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J_n(x) = \text{cost.} \\ J_p(x) = \text{cost.} \end{cases}$$



Graficamente, si ottengono i contributi J_p e J_n dei portatori maggioritari ai confini $-x_p$ e x_n della regione svuotata:

$$\begin{cases} J_p(-x_p) = J_{diff_p}(x_n) = q \frac{D_p}{L_p} \cdot \frac{n_i^2}{N_D} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \\ J_n(x_n) = J_{diff_n}(-x_p) = q \frac{D_n}{L_n} \cdot \frac{n_i^2}{N_A} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) \end{cases}$$

8.2.6 Caratteristica statica $I(V)$

All'interno della regione svuotata, la densità di corrente totale è costante:

$$J_{tot} = J_n(x) + J_p(x) = J_{diff_n}(x) + J_{trn}(x) + J_{diff_p}(x) + J_{trp}(x) = q \frac{D_n}{L_n} \cdot \frac{n_i^2}{N_A} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) + q \frac{D_p}{L_p} \cdot \frac{n_i^2}{N_D} \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right)$$

e la corrente I che scorre è espressa in funzione della tensione V nella **caratteristica statica**, definita come la relazione tra la tensione V , applicata dall'esterno, e la corrente I in regime stazionario nel tempo, cioè con tensione a transitorio esaurito e con corrente stabilizzata a un valore costante:

$$I(V) = J_{tot} \cdot A = \left[q A n_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n N_A} + \frac{D_p}{L_p N_D} \right) \right] \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right) = I_s \left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1 \right)$$

⁶Inoltre, anche all'interno della regione svuotata la densità di corrente totale è costante.

dove I_s è la **corrente di saturazione inversa** della giunzione:

$$I_s = qAn_i^2 \left(\frac{D_n}{\xi_n N_A} + \frac{D_p}{\xi_p N_D} \right) = \begin{cases} qAn_i^2 \left(\frac{D_n}{L_n N_A} + \frac{D_p}{L_p N_D} \right) & w_{p,n} \gg L_{n,p} \text{ (lato lungo)} \\ qAn_i^2 \left(\frac{D_n}{w_p N_A} + \frac{D_p}{w_n N_D} \right) & w_{p,n} \ll L_{n,p} \text{ (lato corto)} \end{cases}$$

che essendo proporzionale a $n_i^2 N_{A,D}$ è molto piccola se il drogaggio è abbastanza grande.

A seconda del tipo di polarizzazione domina il termine esponenziale o la corrente I_s :

- polarizzazione inversa: $V < 0 \Rightarrow$ domina la corrente $I_s \Rightarrow$ la corrente $I \simeq -I_s$ è molto piccola anche con una tensione V elevata;
- polarizzazione diretta: $V > 0 \Rightarrow$ domina il termine esponenziale \Rightarrow la corrente I è fortemente crescente con la tensione V .

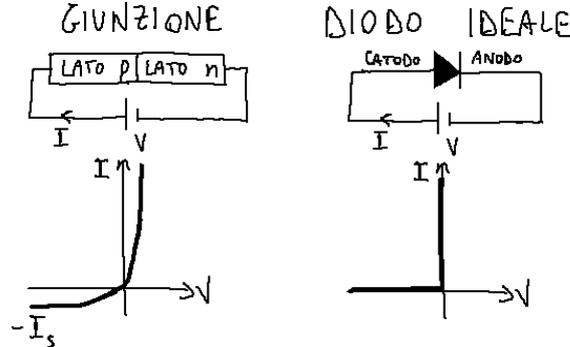
Se non si trascura il contributo dei fenomeni di generazione e ricombinazione, la caratteristica statica segue la legge:

$$I = I_s \left(e^{\frac{V}{\eta V_T}} - 1 \right)$$

dove η è il **fattore di idealità**, e dipende dalla polarizzazione: $\eta = \eta(V)$ ($\eta = 1 \div 2$). Per una giunzione al silicio:

- $\eta \approx 2$ per basse tensioni dirette ($V \leq 0,3 V$) e in polarizzazione inversa;
- $\eta \approx 1$ per tensioni dirette elevate.

8.2.7 Modello statico



Si alimenti un **diodo** in DC con un generatore reale V_a di resistenza R (che include la resistenza parassita R_p). La tensione V sul diodo e la corrente I devono soddisfare due vincoli:

- la **caratteristica statica** $I(V)$ (non lineare) del diodo;
- la relazione lineare (detta **retta di carico**) dovuta alla legge di Kirchhoff:

$$I = \frac{V_a - V}{R}$$

La soluzione (I_0, V_0) costituisce il **punto di funzionamento** della giunzione, in questo caso **a riposo** poiché la tensione del generatore è costante.

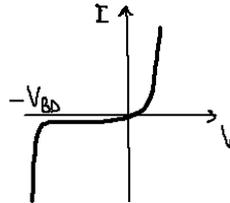
Si può usare un **modello statico semplificato** per la caratteristica statica:

- **diodo interdetto**: in polarizzazione inversa ($V < V_\gamma$), il diodo è un circuito aperto $\Rightarrow I = 0$;

- **diodo in conduzione:** in polarizzazione diretta ($I > 0$), il diodo è un generatore ideale di tensione con una caduta di potenziale V_0 costante pari alla tensione di accensione $V_\gamma \approx \frac{E_g}{2q}$ (per il silicio: $V_\gamma = 0,5 \div 0,6 \text{ V}$).

Nel diodo ideale, i comportamenti della corrente I sono approssimati al circuito aperto e al cortocircuito: la conduzione è permessa solo se la corrente scorre dal catodo verso l'anodo.

8.2.8 Fenomeni di breakdown



In polarizzazione inversa, esiste un valore negativo di tensione, detto **di breakdown** V_{BD} , in cui avviene un **fenomeno di rottura**. Dopo il breakdown, la corrente aumenta⁷ in modo brusco, più dell'esponenziale, e la giunzione si comporta in modo simile a un generatore ideale di tensione; siccome sia la tensione sia la corrente sono molto elevate,⁷ la potenza dissipata $p = v \cdot i > 0$ è molto grande e può distruggere il dispositivo (in polarizzazione diretta invece la tensione non è così elevata).

Cause di breakdown

Perforazione diretta Una tensione applicata troppo elevata⁷ può allargare la regione svuotata fino ai confini della giunzione, annullando la barriera di energia potenziale in uno "scivolo" che favorisce il moto dei portatori maggioritari dai bordi al lato opposto \Rightarrow si determina una corrente molto elevata. Il fenomeno è favorito in diodi con lati sottili.

Effetto valanga L'allargamento della regione svuotata corrisponde a un aumento⁷ del valore di picco del campo elettrico. Se la tensione applicata supera⁷ la **tensione di breakdown per effetto valanga** caratteristica del materiale, il campo elettrico supera⁷ il valore critico E_c a cui è associata, e i portatori liberi in BC durante il loro moto casuale nel cristallo, quando urtano tra di loro, acquisiscono energia cinetica sufficiente a causare la **generazione da impatto** di una coppia elettrone-lacuna \Rightarrow in BC all'elettrone se ne aggiunge un altro \Rightarrow aumentano gli urti \Rightarrow **moltiplicazione a valanga** dei portatori \Rightarrow brusco aumento della corrente inversa. Il fenomeno è favorito in giunzioni con lati poco drogati, perché a parità di campo elettrico hanno una regione svuotata più ampia. Al crescere della temperatura, la tensione di breakdown per effetto valanga aumenta.⁷

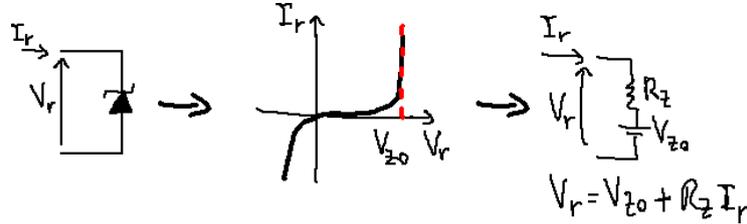
Effetto Zener Se la regione svuotata è molto sottile e se i livelli di energia E_v e E_c sono tanto degeneri che il livello E_c al lato n è superiore al livello E_v al lato p , un campo elettrico superiore⁷ al valore critico può indurre il passaggio orizzontale per **effetto tunnel** di un elettrone dalla BV del lato p alla BC del lato n (viceversa per le lacune). Il fenomeno è favorito da giunzioni con lati molto drogati, quindi aventi una regione svuotata più sottile a parità di campo elettrico. Al crescere della temperatura, la **tensione di breakdown per effetto Zener** diminuisce.⁷

Diodi Zener

I **diodi Zener** sono appositamente progettati per lavorare in condizioni di breakdown dovuto sia all'effetto Zener sia all'effetto valanga: poiché questi due tipi di breakdown presentano due

⁷in valore assoluto

comportamenti opposti in funzione delle variazioni di temperatura, essi si compensano a vicenda (**stabilizzazione in temperatura**). La condizione di breakdown è però limitata in tensione e corrente entro la **Safe Operating Area (SOA)** indicata dal produttore, altrimenti il dispositivo si può distruggere per effetto termico.



Il circuito equivalente di un diodo Zener reale è costituito dalla serie:

- generatore di tensione $V_{Z0} = -V_{BD}$, detta **tensione nominale**;
- resistore di resistenza R_Z , detta **resistenza parassita**.

Nella regione di breakdown, la caratteristica statica $I_r(V_r) = -I(-V)$ è approssimabile a una retta di pendenza $\frac{1}{R_Z}$; idealmente, la retta è verticale \Rightarrow la resistenza parassita R_Z è nulla. I diodi Zener trovano applicazione come **stabilizzatori di tensione**, perché se il carico è in parallelo a un diodo Zener quest'ultimo rende costante la tensione fornita al carico indipendentemente dal suo valore di carico.

8.3 Assenza di equilibrio con tensione applicata temporaneamente

8.3.1 Capacità di svuotamento $C_s(v)$

Nella regione svuotata vi è la **carica fissa** Q_f , costituita dalle coppie di portatori maggioritari ricombinate, a cui è associata la **capacità di svuotamento** $C_s(v)$:

$$i_s(t) = \frac{dQ_f}{dt} = \frac{dQ_f}{dv} \frac{dv}{dt} = C_s(v) \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_s(v) = \frac{dQ_f}{dv} \\ Q_f = -qA \int_{-x_p(v)}^0 N_A dx = -qAN_A x_p(v) \Rightarrow C_s(v) = A \sqrt{\frac{q\epsilon N_{eq}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_{bi} - v(t)}} \\ x_p(v) = \sqrt{\frac{2\epsilon}{q}} \cdot \frac{\sqrt{N_{eq}}}{N_A} \cdot \sqrt{V_{bi} - v(t)} \end{cases}$$

Questo modello non vale nella **regione di alta iniezione**, cioè per $v(t) \rightarrow V_{bi}$ o maggiore, perché in polarizzazione diretta una tensione v non sufficientemente bassa comporta una corrente $i(v)$ molto elevata \Rightarrow la corrente che scorre nelle resistenze parassite R_p non è più trascurabile:

$$v(t) \rightarrow V_{bi} \Rightarrow \begin{cases} i(v) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_T}} - 1 \right) \rightarrow +\infty \Rightarrow x_p \propto \sqrt{V_{bi} - v(t) + R_p i(v)} \rightarrow +\infty \\ x_p \propto \sqrt{V_{bi} - v(t)} \rightarrow 0 \text{ secondo il modello (errato)} \end{cases}$$

8.3.2 Capacità di diffusione $C_d(v)$

Nelle due regioni neutre vi è la **carica mobile** Q_m , costituita dai portatori minoritari in eccesso spinti dalla tensione di polarizzazione diretta,⁸ a cui è associata la **capacità di diffusione**

⁸Si veda la sezione 8.2.4.

$C_d(v)$, che è proporzionale alla corrente che scorre nella giunzione:

$$\begin{cases} i_d(t) = \frac{dQ_d}{dt} = \frac{dQ_d}{dv} \frac{dv}{dt} = C_d(v) \frac{dv}{dt} \\ Q_m = Q'_n = -qA \int_{-w_p}^{-x_p} n'_p(x) dx \approx -qA \int_{-\infty}^{-x_p} n'_p(x) dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_d(v) = \frac{dQ_m}{dv} = qA \frac{n_i^2}{V_T} \left(\frac{L_n}{N_A} + \frac{L_p}{N_D} \right) e^{\frac{v(t)}{V_T}} \\ i_{DC}(v) = I_s \left(e^{\frac{v(t)}{V_T}} - 1 \right) \Rightarrow e^{\frac{v(t)}{V_T}} = \frac{I_{DC}(v)}{I_s} + 1 \end{cases} \Rightarrow C_d(v) \propto e^{\frac{v(t)}{V_T}} \propto i_{DC}(v)$$

8.3.3 Modello dinamico di ampio segnale

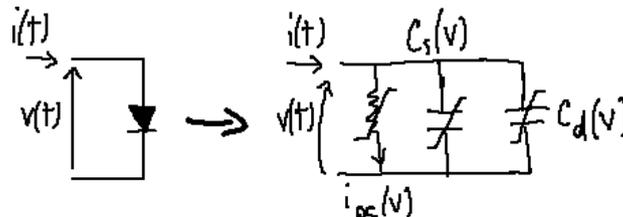
In una giunzione pn , quindi, sono presenti due cariche, la carica fissa $Q_f(v)$ e la carica mobile $Q_m(v)$,⁹ dipendenti dalla tensione applicata $v(t)$ e associate alle due capacità non lineari rispettivamente $C_s(v)$ e $C_d(v)$.

Prevale l'uno o l'altro tipo di carica a seconda del tipo di polarizzazione:

- polarizzazione inversa: prevale la capacità di svuotamento $C_s(v)$ ($v(t) < 0 \Rightarrow$ l'esponenziale di $C_d(x)$ tende a zero);
- polarizzazione diretta: prevale la capacità di diffusione $C_d(v)$ ($v(t) > 0 \Rightarrow$ l'esponenziale di $C_d(x)$ tende a infinito).

Se la tensione di ingresso è tempo-variante, alla corrente di uscita ottenuta dalla caratteristica statica $i_{DC}(v)$ (cioè la risposta istantanea con tensione di ingresso costante) si aggiungono degli **effetti capacitivi** di ritardo, determinati dalla presenza delle cariche fissa e mobile che dipendono da una tensione applicata tempo-variante $v(t)$:

$$i(v) = i_{DC}(v) + C_s(v) \frac{dv}{dt} + C_d(v) \frac{dv}{dt}$$



Il **circuito equivalente di ampio segnale** è costituito dal parallelo tra una resistore non lineare e due condensatori non lineari di capacità $C_s(v)$ e $C_d(v)$.

Modello statico Se la tensione è costante nel tempo, gli effetti capacitivi scompaiono e vale la caratteristica statica. Quest'ultima può essere ulteriormente approssimata al modello statico semplificato del diodo.

8.3.4 Modello dinamico di piccolo segnale

Spesso un dispositivo elettronico è alimentato da una tensione di alimentazione costante e riceve in ingresso un segnale tempo-variante \Rightarrow il segnale tempo-variante di uscita $v(t)$ o $i(t)$ può

⁹Esse sono state ricavate per brevità considerando solamente il lato p .

essere decomposto nella somma tra il contributo costante V_0 o I_0 e il contributo tempo-variante $v_{ss}(t)$ o $i_{ss}(t)$:

$$\begin{cases} v(t) = V_0 + v_{ss}(t) \\ i(t) = I_0 + i_{ss}(t) \end{cases}$$

In **condizione di piccolo segnale** $|v_{ss}(t)| \ll |V_0|$, le componenti della corrente $i(v)$ possono essere sviluppate in serie di Taylor:

$$\begin{cases} i_{DC}(v) \approx i_{DC}(V_0) + \left. \frac{\partial i_{DC}}{\partial v} \right|_{v=V_0} \cdot v_{ss}(t) = I_0 + g_{d0} \cdot v_{ss}(t) \\ Q_f(v) \approx Q_f(V_0) + \left. \frac{\partial Q_f}{\partial v} \right|_{v=V_0} \cdot v_{ss}(t) = Q_f(V_0) + C_{s0} \cdot v_{ss}(t) \\ Q_m(v) \approx Q_m(V_0) + \left. \frac{\partial Q_m}{\partial v} \right|_{v=V_0} \cdot v_{ss}(t) = Q_m(V_0) + C_{d0} \cdot v_{ss}(t) \end{cases}$$

dove:

- g_{d0} è la conduttanza differenziale:

$$\begin{cases} g_{d0} = \left. \frac{\partial i_{DC}}{\partial v} \right|_{v=V_0} \\ i_{DC}(v) = I_s \left(e^{\frac{v}{\eta V_T}} - 1 \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{d0} = \frac{I_s}{\eta V_T} e^{\frac{V_0}{\eta V_T}} \\ e^{\frac{V_0}{\eta V_T}} = \frac{I_0}{I_s} + 1 \end{cases} \Rightarrow g_{d0} = \frac{I_0 + I_s}{\eta V_T}$$

- C_{s0} è la capacità differenziale di svuotamento:

$$C_{s0} = \left. \frac{\partial Q_f}{\partial v} \right|_{v=V_0} = A \sqrt{\frac{q \epsilon N_{eq}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{V_{bi} - V_0}}$$

- C_{d0} è la capacità differenziale di diffusione:

$$C_{d0} = \left. \frac{dQ_m}{dv} \right|_{v=V_0} = qA \frac{n_i^2}{V_T} \left(\frac{L_n}{N_A} + \frac{L_p}{N_D} \right) e^{\frac{V_0}{V_T}}$$

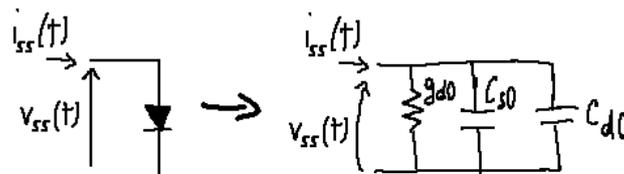
La corrente $i(v)$ è quindi linearizzabile nell'approssimazione di piccolo segnale in questo modo:

$$i(v) = I_0 + i_{ss}(t) = i_{DC}(v) + \left(\frac{Q_f(v)}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{dQ_m(v)}{dt} \frac{dv}{dt} \right) \approx I_0 + g_{d0} \cdot v_{ss}(t) + \left(C_{s0} \frac{dv_{ss}}{dt} + C_{d0} \frac{dv_{ss}}{dt} \right)$$

da cui si distingue la relazione tra le variazioni di segnale rispetto al punto di funzionamento a riposo I_0 :

$$i_{ss}(t) = g_{d0} v_{ss}(t) + C_{s0} \frac{dv_{ss}}{dt} + C_{d0} \frac{dv_{ss}}{dt}$$

che è descritta dal "circuitto equivalente di piccolo segnale" (lineare), costituito dal parallelo di un resistore e due condensatori.



Nel circuito di piccolo segnale:

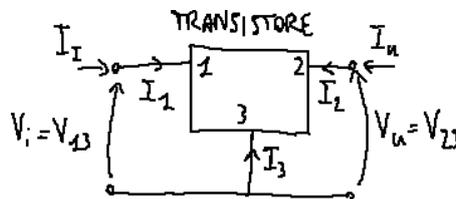
- gli elementi lineari (R , L , C) rimangono invariati;

- i generatori di tensione/corrente costante vengono spenti (tensione \rightarrow cortocircuito, corrente \rightarrow circuito aperto).

In polarizzazione diretta la capacità di svuotamento C_{s0} è trascurabile e prevale la capacità di diffusione C_{d0} grazie al termine esponenziale dominante. La conduttanza g_{d0} posta in parallelo, però, è proporzionale anch'essa allo stesso termine esponenziale \Rightarrow l'elemento capacitivo è in parallelo con una resistenza molto piccola \Rightarrow a capacità di diffusione elevate corrispondono elevate perdite di potenza dovute all'elemento resistivo. In polarizzazione inversa, invece, la conduttanza g_{d0} posta in parallelo con la capacità di svuotamento C_{s0} dominante è molto piccola \Rightarrow si verificano perdite di potenza inferiori.

Capitolo 9

Il transistoro bipolare



Il **transistore** è un dispositivo elettronico caratterizzato da:

- almeno tre terminali, uno dei quali individua il **terminale comune** tra la porta¹ di ingresso e la porta di uscita;
- una corrente di uscita I_u che dipende, oltre che dalla tensione di uscita V_u , anche dal segnale di ingresso:
 - **transistore bipolare**: (analogico) la **caratteristica di uscita** $I_u(V_u, I_i)$ è controllata in corrente I_i ;
 - **transistore a effetto di campo** (FET): (digitale) la caratteristica di uscita $I_u(V_u, V_i)$ è controllata in tensione V_i .

I transistori trovano applicazione nei generatori pilotati, negli amplificatori, nei circuiti digitali... Per le leggi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ V_{21} = V_2 - V_1 = V_{23} - V_{13} \end{cases}$$

Il **transistore bipolare a giunzione** è un dispositivo caratterizzato da tre terminali detti emettitore, base e collettore, che corrispondono alle tre regioni ottenute unendo due giunzioni *pn* in antiserie.

9.1 Regioni di funzionamento

A seconda della polarizzazione delle due giunzioni, si hanno quattro regioni di funzionamento:

- **regione attiva diretta**: giunzione BE in diretta ($V_{BE} > 0$), giunzione BC in inversa ($V_{BC} < 0$);

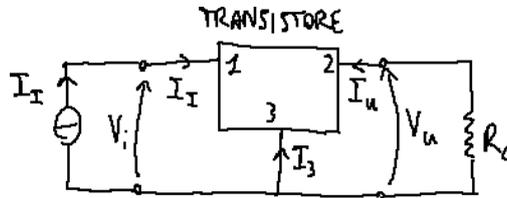
¹La **porta** è una coppia di terminali tali che la corrente che esce da uno entra dall'altro.

- **regione attiva inversa:** giunzione BE in inversa ($V_{BE} < 0$), giunzione BC in diretta ($V_{BC} > 0$): le prestazioni da amplificatore sono pessime perché il transistor bipolare non è ottimizzato in termini di livelli di drogaggio per lavorare in regione attiva inversa;
- **regione di interdizione:** giunzione BE in inversa ($V_{BE} < 0$), giunzione BC in inversa ($V_{BC} < 0$): approssima il circuito aperto ($I_C \approx I_E \approx 0$) perché i portatori maggioritari non sono spinti dall'emettitore al collettore;
- **regione di saturazione:** giunzione BE in diretta ($V_{BE} > 0$), giunzione BC in diretta ($V_{BC} > 0$): approssima il cortocircuito perché la caduta di potenziale è trascurabile ($V_{CE} = V_{BE} - V_{BC} \approx 0$) con un forte flusso di corrente.

Le regioni attive sono usate per le applicazioni analogiche, le altre due per le applicazioni digitali.

9.2 Regione attiva diretta

9.2.1 Uso come amplificatore (analogico)



Si collegano un generatore di corrente I_i e una resistenza di carico R_c a un transistor che lavora in condizioni di piccolo segnale. Un **amplificatore** richiede una relazione lineare tra ingresso e uscita:

$$\begin{cases} I_u(V_u, I_i) = I_u(V_{u0} + v_{u_{ss}}(t), I_{i0} + i_{i_{ss}}(t)) \simeq \\ I_u(V_u, I_i) = I_{u0} + i_{u_{ss}}(t) = I_u(V_{u0}, I_{u0}) + i_{u_{ss}}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \simeq I_u(V_{u0}, I_{u0}) + \left. \frac{\partial I_u}{\partial V_u} \right|_{(V_{u0}, I_{u0})} \cdot v_{u_{ss}}(t) + \left. \frac{\partial I_u}{\partial I_i} \right|_{(V_{u0}, I_{u0})} \cdot i_{i_{ss}}(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} i_{u_{ss}}(t) = \left. \frac{\partial I_u}{\partial V_u} \right|_{(V_{u0}, I_{u0})} \cdot v_{u_{ss}}(t) + \left. \frac{\partial I_u}{\partial I_i} \right|_{(V_{u0}, I_{u0})} \cdot i_{i_{ss}}(t) \Rightarrow \\ i_{u_{ss}}(t) = C \cdot i_{i_{ss}}(t) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} C = \left. \frac{\partial I_u}{\partial I_i} \right|_{(V_{u0}, I_{u0})} \\ \left. \frac{\partial I_u}{\partial V_u} \right|_{(V_{u0}, I_{u0})} \cdot v_{u_{ss}}(t) = 0 \Leftrightarrow I_u(V_u) = \text{cost.} \end{cases} \end{cases}$$

Affinché sia un amplificatore, la caratteristica di uscita I_u deve dipendere da V_i ma non da V_u .

9.2.2 Descrizione qualitativa

Per esempio, nel transistor *npn*:

1. la tensione di polarizzazione diretta applicata sulla giunzione *np* a sinistra spinge gli elettroni liberi maggioritari dal suo lato *n* (**emettitore**) alla regione *p* (**base**) in comune con la giunzione *pn* a destra;

2. se la base è abbastanza sottile (in particolare più corta della lunghezza di diffusione), gli elettroni non fanno in tempo a ricombinarsi ed entrano nella regione svuotata della giunzione pn a destra;
3. la tensione di polarizzazione inversa della giunzione pn a destra li spinge verso il suo lato n (**collettore**), creando una corrente di trascinamento.

In questo modo, la corrente di trascinamento generata è molto più alta di quella che si otterrebbe da una giunzione pn isolata, perché ai portatori minoritari della giunzione pn a destra si aggiungono i portatori maggioritari provenienti dalla giunzione np a sinistra; per questo motivo, la corrente di trascinamento generata è fortemente dipendente dalla tensione di polarizzazione diretta applicata alla giunzione pn il cui lato n è l'emettitore, e viceversa per il collettore \Rightarrow il transistor bipolare è un amplificatore perché la corrente di uscita I_C è indipendente dalla tensione applicata sull'uscita V_{CE} .

Nonostante sia geometricamente simmetrica, la struttura del transistor bipolare non è simmetrica in quanto i livelli di drogaggio dell'emettitore e del collettore differiscono in modo che il transistor sia ottimizzato per lavorare in regione attiva diretta.

9.2.3 Descrizione quantitativa

Le concentrazioni di portatori minoritari ai confini delle regioni di svuotamento seguono le leggi delle giunzioni:

- regione di svuotamento tra emettitore e base:

$$\begin{cases} p'_n(x_{E^-}) = \frac{n_i^2}{N_{DE}} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \\ n'_p(x_{E^+}) = \frac{n_i^2}{N_{AB}} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \end{cases}$$

- regione di svuotamento tra base e collettore:

$$\begin{cases} n'_p(x_{C^-}) = \frac{n_i^2}{N_{AB}} \left(e^{\frac{V_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \\ p'_n(x_{C^+}) = \frac{n_i^2}{N_{DC}} \left(e^{\frac{V_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \end{cases}$$

Poiché i bordi della giunzione sono dei contatti ohmici, non ci sono portatori minoritari in eccesso. Spesso l'emettitore e la base sono lati corti e il collettore è un lato lungo \Rightarrow gli eccessi di portatori minoritari hanno un andamento esponenziale nel collettore e lineare nella base e nell'emettitore \Rightarrow le correnti di diffusione, legate alle derivate degli eccessi di portatori minoritari,² sono costanti nella base e nell'emettitore, ed esponenziali ma molto piccole nel collettore.

Il **flusso** F di portatori è il numero di portatori per unità di tempo e di area che si spostano:

$$\begin{cases} |J_{\text{diff}n}| = q |F_n| \\ |J_{\text{diff}p}| = q |F_p| \end{cases}$$

In totale sono presenti 5 flussi di carica:

$$\begin{cases} I_E = -qAF_{nEB} - qAF_{pBE} \\ I_C = qAF_{nBC} + (qAF_{nBC0} + qAF_{pCB0}) = qAF_{nBC} + I_{CB0} \approx qAF_{nBC} \end{cases}$$

dove:

²Per i portatori maggioritari si assumono le ipotesi semplificative (condizioni stazionarie e fenomeni di generazione/ricombinazione trascurabili) \Rightarrow il loro contributo in corrente è esprimibile in funzione di quello dei portatori minoritari.

- la corrente I_E deriva dal moto di portatori in corrispondenza della regione svuotata tra emettitore e base;
- la corrente I_C deriva dal moto di portatori in corrispondenza della regione svuotata tra base e collettore.

Il flusso F_{nBC} dei portatori maggioritari provenienti dall'emettitore si aggiunge ai flussi F_{nBC0} e F_{pBC0} di portatori minoritari che avrebbe il collettore se fosse isolato dall'emettitore, e che danno origine alla piccolissima **corrente inversa di saturazione** I_{CB0} .

9.2.4 Parametri di efficienza del dispositivo a transistoro

Il comportamento da amplificatore è accentuabile minimizzando la corrente di ingresso I_B :

$$\begin{cases} I_B + I_C + I_E = 0 \\ I_B \approx 0 \end{cases} \Rightarrow I_C \approx -I_E$$

cioè minimizzando il flusso di lacune maggioritarie F_{pBE} tra base ed emettitore con un differente livello di drogaggio tra base ed emettitore:

$$\begin{cases} I_B = -I_C - I_E = qAF_{nEB} + qAF_{nBE} - qAF_{nBC} \\ I_C \approx -I_E \\ N_{AB} \ll N_{DE} \Rightarrow F_{pBE} \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_B \approx 0 \\ F_{nEB} \approx F_{nBC} \end{cases}$$

I **fattori di merito** del transistoro sono due parametri che misurano la qualità del dispositivo, perché sono tanto più vicini a 1 quanto più è minimizzata la corrente di ingresso I_B :

- la condizione $F_{pBE} \approx 0$ è misurata dall'**efficienza di iniezione di emettitore** γ :

$$\gamma = \frac{F_{nEB}}{F_{nEB} + F_{pBE}} \leq 1$$

che per avvicinarsi all'idealità impone la seguente condizione sui livelli di drogaggio di base N_{AB} ed emettitore N_{DE} :³

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{D_{pE}}{D_{nB}} \cdot \frac{N_{AB}}{N_{DE}} \cdot \frac{w_B}{w_E}} \rightarrow 1 \Leftrightarrow N_{AB} \ll N_{DE}$$

- la condizione $F_{nEB} \approx F_{nBC}$ è misurata dal **fattore di trasporto di base** b :

$$b = \frac{F_{nBC}}{F_{nEB}} \leq 1$$

che per avvicinarsi all'idealità impone che la base sia un lato corto:

$$b = \frac{1}{\cosh \frac{w_B}{L_{nB}}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow w_B \ll L_{nB}$$

Altri parametri descrivono l'efficienza del dispositivo:

- l'**amplificazione di corrente a base comune** α_F , idealmente pari a 1, lega la corrente I_C del collettore alla corrente I_E dell'emettitore:

$$\alpha_F = \gamma_b < 1 \Rightarrow I_C = -\alpha_F I_E + I_{CB0} \approx -\alpha_F I_E$$

dove la corrente inversa di saturazione I_{CB0} è detta **corrente di collettore a emettitore aperto** (cioè se $I_E = 0 \Rightarrow I_C = I_{CB0}$);

³La base e l'emettitore sono supposti essere lati corti.

- l'**amplificazione di corrente a emettitore comune** β_F , idealmente molto grande,⁴ lega la corrente I_C del collettore alla corrente I_B della base:

$$\beta_F = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} \Rightarrow I_C = \beta_F I_B + I_{CE0}$$

dove I_{CE0} è la **corrente di collettore a base aperta** ($I_B = 0$):

$$\begin{cases} I_{CE0} = \frac{\beta_F}{\alpha_F} I_{CB0} \\ \alpha_F \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{CE0} \approx \beta_F I_{CB0} \\ I_{CB0} \approx 0 \end{cases} \Rightarrow I_C \approx \beta_F I_B$$

9.3 Modello statico di Ebers Moll

9.3.1 Configurazione a base comune

Il **modello statico di Ebers Moll** generalizza il funzionamento in regione attiva diretta \Rightarrow vale in ogni regione di funzionamento indipendentemente dalla polarizzazione delle tensioni applicate:

$$\begin{cases} I_E = -I_F + \alpha_R I_R \\ I_C = -I_R + \alpha_F I_F \end{cases}$$

dove:

- I_F e I_R sono le caratteristiche statiche delle singole giunzioni:

$$\begin{cases} I_F = I_{E0} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \\ I_R = I_{C0} \left(e^{\frac{V_{BC}}{V_T}} - 1 \right) \end{cases}$$

- α_R è l'amplificazione di corrente a base comune in regione attiva inversa, legata ad α_F dalla **condizione di reciprocità**:

$$\alpha_R I_{C0} = \alpha_F I_{E0}$$

Il circuito equivalente sostituisce a ogni giunzione il parallelo tra un diodo, rappresentante il flusso di corrente che la giunzione avrebbe se fosse isolata, e un generatore pilotato di corrente, rappresentante il contributo in corrente proveniente dall'altra giunzione:

- regione attiva diretta: la corrente dei portatori minoritari della giunzione base-collettore I_R è trascurabile:

$$\begin{cases} I_E = -I_F \\ I_C = \alpha_F I_F \\ I_B = -I_C - I_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_C \approx -\alpha_F I_E = \alpha_F I_{E0} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_T}} - 1 \right) \\ I_B \approx (1 - \alpha_F) I_E \end{cases}$$

- regione attiva inversa: la corrente dei portatori minoritari della giunzione base-emettitore I_E è trascurabile:

$$\begin{cases} I_C = -I_R \\ I_E = \alpha_R I_R \end{cases} \Rightarrow I_E \approx -\alpha_R I_C$$

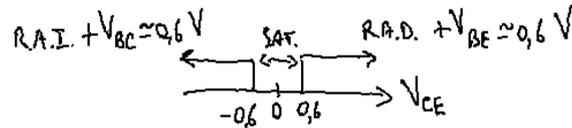
⁴Proprio perché β_F è un valore molto grande rispetto ad α_F da cui deriva, l'errore di α_F si propaga molto in β_F :

$$\frac{\Delta \beta_F}{\beta_F} \approx \beta_F \frac{\Delta \alpha_F}{\alpha_F}$$

9.3.2 Configurazione a emettitore comune

Il modello statico di Ebers Moll descrive un transistoro in configurazione a base comune:

$$\begin{cases} I_E = f(V_{BE}, V_{BC}) \\ I_C = f(V_{BE}, V_{BC}) \end{cases}$$



0,6 V IN R.A.D.

$$V_{CE} = V_{BE} - V_{BC}$$

↑ < 0 IN R.A.D.

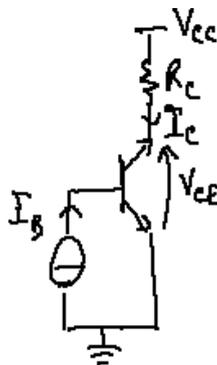
Nella **configurazione a emettitore comune**, l'ingresso è la corrente I_B entrante nella base, e l'uscita è la corrente I_C entrante nel collettore. Il terminale in comune tra ingresso e uscita è l'emettitore, a cui fanno riferimento tutte le tensioni:

$$\begin{cases} I_B = f(V_{BE}, V_{CE}) \\ I_C = f(V_{BE}, V_{CE}) \end{cases}$$

In regione attiva diretta ($V_{CE} \geq 0,2 \text{ V}$):

- la caratteristica di ingresso $I_B(V_{BE}, V_{CE})$, per ogni tensione V_{BE} fissata, è indipendente dalla tensione V_{CE} , e quindi V_{BC} , applicata, ed è approssimabile a una “spezzata” nel punto di accensione ($V_{BE} = 0,5 \div 0,6 \text{ V}$ per il silicio);
- la corrente di uscita $I_C(V_{BE}, V_{CE})$, per ogni corrente di ingresso $I_B(V_{BE}, V_{CE})$ fissata, è indipendente dalla tensione V_{CE} applicata,⁵ ed è approssimabile con un “pettine” e con una resistenza finita in condizioni di saturazione.

9.3.3 Uso in commutazione (digitale)



Il circuito in figura impone una retta di carico alla porta di uscita (collettore):

$$V_{CC} = R_C I_C + V_{CE}$$

⁵Anche in regione attiva inversa la corrente di uscita è indipendente, ma essa risulta amplificata molto meno.

Il transistoro bipolare può essere usato nelle applicazioni digitali commutando, attraverso la scelta della corrente di ingresso I_B , tra la regione di saturazione ($V_{CE} = V_{CEsat} \approx 0$) e quella di interdizione ($I_C = 0$).

Il punto di funzionamento (I_{C0}, V_{CE0}) del transistoro è l'intersezione tra la retta di carico e la caratteristica di uscita $I_C = \beta_F I_B$:

- interdizione (circuito aperto):

$$I_B \approx 0 \Rightarrow \begin{cases} I_{C0} \approx 0 \\ V_{CE0} \approx V_{CC} \end{cases}$$

- saturazione/conduzione (cortocircuito):

$$I_B \geq \frac{I_{C0}}{\beta_F} \Rightarrow \begin{cases} I_{C0} = \frac{V_{CC} - V_{CEsat}}{R_C} \approx \frac{V_{CC}}{R_C} \\ V_{CE0} \approx V_{CEsat} \end{cases}$$

Più la corrente I_B è elevata, più si garantisce che la tensione V_{CE0} sia compresa nella regione di saturazione ($V_{CE0} < V_{CEsat}$), e più è bassa la potenza dissipata $P = V_{CE0} \cdot I_{C0} \leq V_{CE0} \cdot (\beta_{Fmin} I_B) \Rightarrow$ per massimizzare la corrente I_B così da minimizzare la tensione V_{CE0} , conviene scegliere l'estremo inferiore β_{Fmin} della fascia di incertezza di β_F .

9.3.4 Effetto Early

In regione attiva diretta, a un aumento della tensione V_{CE} corrisponde un aumento⁶ della tensione di polarizzazione inversa $V_{BC} \Rightarrow$ la regione svuotata della giunzione base-collettore allarga i propri confini x_p e x_n , in particolare avvicinandosi all'emettitore dalla parte della base \Rightarrow aumenta il flusso di elettroni maggioritari provenienti dall'emettitore \Rightarrow le caratteristiche di uscita $I_C(V_{CE})$ non sono più idealmente costanti al variare della tensione di uscita V_{CE} , ma convergono alla **tensione di Early** $-V_A$ con pendenza $\frac{I_{C0}}{V_A + V_{CE0}}$.

Per minimizzare l'effetto Early, poiché vale la condizione di neutralità:

$$N_{AB} x_p = N_{DC} x_n \Rightarrow \frac{N_{AB}}{N_{DC}} = \frac{x_p}{x_n} = \text{cost.}$$

si può minimizzare l'estensione del confine x_p nella base imponendo un differente livello di drogaggio tra base e collettore:

$$N_{AB} \gg N_{DC}$$

in modo che la regione di svuotamento si estenda di più nel collettore dalla parte del confine x_n . In definitiva:

$$N_{DE} \gg N_{AB} \gg N_{DC}$$

9.3.5 Fenomeni di breakdown

L'allargamento della regione svuotata verso l'emettitore può portare al breakdown per perforazione diretta (la base "sfora" nella regione svuotata della giunzione base-emettitore) o per effetto valanga: si verifica quindi un forte aumento della tensione V_{CE} e della corrente di uscita I_C , e quindi della potenza dissipata.

⁶in valore assoluto

9.4 Modello dinamico di Ebers Moll

9.4.1 Modello dinamico di ampio segnale

Il modello dinamico di ampio segnale aggiunge al modello statico di Ebers Moll:

- due coppie di condensatori (non lineari) in parallelo, che tengono conto degli effetti capacitivi di ritardo associati alle singole giunzioni (ovvero la capacità di svuotamento $C_s(v)$ e la capacità di diffusione $C_d(v)$);
- tre resistenze parassite collegate ai tre terminali, che tengono conto delle perdite in prestazioni.

9.4.2 Modello statico⁷ di piccolo segnale

Scomponendo, linearizzando e approssimando in piccolo segnale le caratteristiche I_C e I_B della configurazione a emettitore comune, si trovano le espressioni del doppio bipolo transistorore:

$$\begin{cases} i_{B_{ss}}(t) = \frac{\partial i_B}{\partial v_{BE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} v_{BE_{ss}}(t) + \frac{\partial i_B}{\partial v_{CE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} v_{CE_{ss}}(t) = g_{11} v_{BE_{ss}}(t) + g_{12} v_{CE_{ss}}(t) \\ i_{C_{ss}}(t) = \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} v_{BE_{ss}}(t) + \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} v_{CE_{ss}}(t) = g_{21} v_{BE_{ss}}(t) + g_{22} v_{CE_{ss}}(t) \end{cases}$$

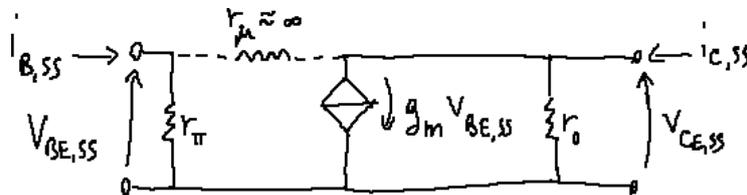
dove, in regione attiva diretta:⁸

- g_{11} e g_{22} sono delle conduttanze:

$$\begin{cases} g_{11} = \frac{\partial i_B}{\partial v_{BE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} = \frac{g_{21}}{\beta_F} = \frac{I_{C0}}{\beta_F V_T} \\ g_{22} = \frac{\partial i_C}{\partial v_{CE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} = \frac{I_{C0}}{V_A + V_{C0}} \approx \frac{I_{C0}}{V_A} \end{cases}$$

- g_{12} e g_{21} sono delle trans-conduttanze:

$$\begin{cases} g_{12} = \frac{\partial i_B}{\partial v_{CE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} = \frac{g_{22}}{\beta_F} \approx \frac{I_{C0}}{\beta_F V_A} \\ g_{21} = \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} \Big|_{(V_{BE0}, V_{CE0})} = \frac{I_{C0}}{V_T} \end{cases}$$



Le equazioni sono interpretabili circuitalmente come il **circuito a π** in figura, dove:

$$\begin{aligned} r_\pi &= \frac{1}{g_{11}} = \beta_F \frac{V_T}{I_{C0}} & r_o &= \frac{1}{g_{22}} = \frac{V_A}{I_{C0}} \\ r_\mu &= \frac{1}{g_{12}} = \beta_F \frac{V_A}{I_{C0}} & g_m &= g_{21} = \frac{I_{C0}}{V_T} \end{aligned}$$

⁷Il modello statico è approssimativamente valido, oltre che per il punto di funzionamento a riposo, anche per segnali tempo-varianti a basse frequenze, poiché si possono trascurare gli effetti capacitivi.

⁸Si veda la sezione 9.3.1.

g_m è la transconduttanza del transistor nel suo punto di funzionamento a riposo, e lega la corrente di uscita i_C e la tensione di ingresso $V_{BE} \Rightarrow$ per avere un'amplificazione elevata, il transistor va polarizzato con una corrente di collettore I_{C0} elevata. In assenza di effetto Early, le resistenze r_μ e r_o che modellizzano le perdite non hanno più influenza:

$$V_A \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} r_\mu \rightarrow +\infty \\ r_o \rightarrow +\infty \end{cases}$$

9.4.3 Modello dinamico di piccolo segnale

Gli effetti capacitivi che tengono conto del comportamento dinamico sono dati dai contributi della capacità di svuotamento $C_s(v)$ della giunzione base-collettore e della capacità di diffusione $C_d(v)$ della giunzione base-emettitore. Ad alta frequenza, i condensatori si approssimano al cortocircuito \Rightarrow impediscono al dispositivo di funzionare.

Capitolo 10

Il transistoro MOSFET

10.1 Il sistema MOS

10.1.1 Struttura

Il **sistema MOS** è la struttura base del transistoro MOSFET, ed è anche detto condensatore MOS perché ha una struttura simile a quella di un condensatore:

- **bulk:** è un substrato composto da un materiale **semiconduttore** drogato, di solito silicio drogato di tipo *p* (*p*-Si);
- sopra vi è uno strato molto sottile di materiale isolante/dielettrico di bassa conducibilità elettrica, come il **biossido** di silicio SiO_2 ;
- **gate:** è uno strato **metallico** conduttore di elevata conducibilità elettrica, come l'alluminio o più recentemente il silicio policristallino¹ con forte drogaggio *n* (**poly**).

10.1.2 Regioni di funzionamento

A seconda della tensione V_G applicata al terminale del gate, si hanno tre regioni di funzionamento: ($V_{FB} < 0$, $V_{th} > V_{FB}$)

- **accumulo di lacune** ($V_G < V_{FB}$): in prossimità dell'interfaccia tra gate e ossido si forma uno strato superficiale di carica negativa, dovuto agli elettroni attirati verso l'ossido; le lacune del semiconduttore sono di conseguenza attirate all'interfaccia ossido-bulk;
- **svuotamento di lacune** ($V_{FB} < V_G < V_{th}$): gli elettroni del metallo vengono allontanati dall'interfaccia gate-ossido, formando così all'interfaccia stessa uno strato di spessore infinitesimo di carica positiva, che viene bilanciata dalla carica negativa che si forma nella regione di svuotamento del bulk, sotto l'interfaccia con l'ossido, con la sottrazione di lacune dalla BV di N_A^- atomi che diventano accettori ionizzati;
- **inversione** ($V_G > V_{th}$): la regione svuotata si amplia sempre di più, finché la tensione applicata V_G non supera la tensione di soglia V_{th} e inizia ad aggiungersi in prossimità dell'interfaccia ossido-bulk un sottile strato di elettroni liberi in BC, che aumenta la carica negativa della regione svuotata stessa.

¹Poiché il biossido di silicio nella base sottostante ha un passo reticolare differente, si formano tanti piccoli cristalli di silicio, di struttura regolare se presi uno a uno, che però non riescono a congiungersi tra loro in un'unica struttura regolare.

10.1.3 Condizioni di equilibrio termodinamico

$V_G = 0$: Svuotamento di lacune

I livelli di Fermi E_F del metallo e del semiconduttore non sono allineati: il livello di Fermi del metallo è praticamente coincidente con il livello E_c poiché drogato n^+ , mentre quello del semiconduttore è vicino al livello E_v poiché drogato p . Il lavoro di estrazione $q\phi_M$ degli elettroni nel metallo è quindi minore del lavoro di estrazione $q\phi_{S_p}$ nel semiconduttore, e la loro differenza definisce la **tensione di banda piatta** V_{FB} :

$$V_{FB} = \phi_M - \phi_{S_p} \simeq -0,9 \text{ V}$$

Alla formazione della giunzione con $V_G = 0$, per raggiungere l'equilibrio termodinamico il livello di Fermi deve essere costante poiché non c'è corrente che scorre \Rightarrow si ha uno spostamento di elettroni dal metallo al semiconduttore, o equivalentemente di lacune nel verso opposto:

- **semiconduttore**: si forma una regione svuotata caricata negativamente dagli atomi accettori ionizzati;
- **ossido**: la barriera di energia è molto ampia e la carica elettrica al suo interno è nulla poiché è un isolante;
- **metallo**: si forma uno strato svuotato di elettroni, con una carica quindi positiva che, poiché il sistema dev'essere globalmente neutro, compensa la carica negativa $-qN_A x_p$ nel semiconduttore; dato che un metallo ideale è equipotenziale, gli elettroni si concentrano su una superficie infinitesima, rappresentata matematicamente con una delta di Dirac, in prossimità dell'interfaccia metallo-ossido.

Ricavando il campo elettrico $\vec{\mathcal{E}}$ dall'equazione di Poisson:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

all'interfaccia ossido-semiconduttore è presente una discontinuità, poiché la componente normale del campo elettrico ai lati dell'interfaccia si conserva anche se le costanti dielettriche ϵ_{ox} e ϵ_s dei due materiali sono differenti:

$$\epsilon_{ox}\mathcal{E}_{ox} = \epsilon_s\mathcal{E}_{s0}$$

dove:

$$\begin{cases} \epsilon_{ox} = \epsilon_{rox} \cdot \epsilon_0, & \epsilon_{rox} = 3,9 \text{ (biossido di silicio)} \\ \epsilon_s = \epsilon_{rs} \cdot \epsilon_0, & \epsilon_{rs} = 11,7 \text{ (silicio)} \end{cases}$$

Poiché il campo elettrico è inversamente proporzionale alla costante dielettrica, l'uso di dielettrici ad alta costante dielettrica permette di ridurre il campo elettrico in modo da mantenere costante la tensione di soglia $\mathcal{E}_{ox}t_{ox}$ del transistor ad un maggiore spessore t_{ox} in modo da minimizzare l'effetto tunnel.

Integrando ancora si ricava il potenziale:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\mathcal{E}$$

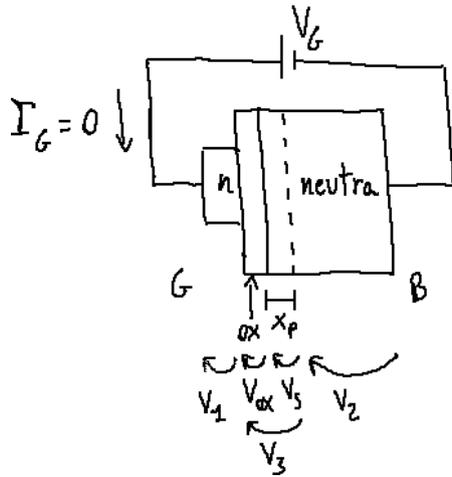
La tensione di banda piatta V_{FB} è la differenza di potenziale tra il bulk e il gate:

$$-V_{FB} = V_{ox} + V_s$$

10.1.4 Assenza di equilibrio in regime stazionario nel tempo

Lo strato isolante intermedio impedisce il passaggio di corrente \Rightarrow il transistor si comporta come un circuito aperto: scorre corrente I_G nulla \Rightarrow non c'è caduta di potenziale sulle regioni neutre, cioè $V_1 = 0$ sul gate e $V_2 = 0$ nella parte non svuotata del bulk, indipendentemente dalla tensione V_G applicata \Rightarrow la tensione V_G si sovrappone solo alla tensione di banda piatta $-V_{FB}$ che si ha all'equilibrio sullo strato isolante (V_{ox}) e sulla regione svuotata del bulk (V_s):

$$V_3 = V_{ox} + V_s = -V_{FB} + V_G$$



$V_G = V_{FB}$: Condizione di banda piatta

La **condizione di banda piatta** si ha quando si applica una tensione V_G pari alla tensione di banda piatta V_{FB} , quindi quando è nulla la caduta di potenziale V_3 agli estremi della densità di carica ρ . Per l'equazione di Poisson la densità ρ è nulla \Rightarrow si annullano le cariche della regione di svuotamento e sull'interfaccia. Il diagramma a bande è rettilineo e analogo a quello precedente alla formazione della giunzione, perché il salto di energia $-qV_{FB}$ viene compensato totalmente dall'esterno. Il livello di Fermi non è più costante, ma continua a esserlo se si considerano singolarmente le due regioni neutre.

$V_{FB} < V_G < V_{th}$: Svuotamento di lacune

Al crescere della tensione applicata V_G aumenta la curvatura delle bande, fino a che V_G raggiunge il valore di soglia V_{th} e il livello di Fermi intrinseco E_{Fi} arriva ad intersecare il livello di Fermi del semiconduttore E_{Fs} .

La tensione di soglia V_{th} vale:

$$V_{th} = V_{FB} + 2\phi_p + \gamma_B \sqrt{2\phi_p - V_B}$$

dove:

- ϕ_p è il salto di potenziale tra il livello di Fermi e quello intrinseco della regione neutra del bulk:

$$q\phi_p = E_{Fi} - E_F = V_T \ln \frac{N_A}{n_i}$$

- γ_B è il **coefficiente di substrato** (o di effetto body):

$$\gamma_B = \frac{\sqrt{2q\epsilon_s N_A}}{C_{ox}}$$

- V_B è il potenziale a cui si trova il bulk. L'**effetto body** (o di substrato) è legato alla variazione, in funzione di V_B , della tensione di soglia V_{th} rispetto alla tensione di soglia V_{th0} che si ha quando il bulk è a massa ($V_B = 0$):

$$V_{th} = V_{th0} + \Delta V_{th}(V_B) = V_{th}|_{V_B=0} + \gamma_B \left[\sqrt{2\phi_p - V_B} - \sqrt{2\phi_p} \right]$$

$V_G > V_{th}$: Inversione di popolazione

Oltrepassando il valore di soglia V_{th} , all'interfaccia ossido-semiconduttore ($x = 0^+$) il livello di Fermi intrinseco E_{Fi} scende sotto il livello di Fermi E_{Fs} , e la concentrazione $n(x)$ di elettroni liberi non è più trascurabile ma cresce esponenzialmente:

$$E_{Fi}(0^+) < E_{Fs} \Rightarrow n(0^+) = n_i e^{\frac{E_{Fs} - E_{Fi}(0^+)}{k_B T}} > n_i$$

Alla carica $Q_d = -qN_A x_p$ dovuta allo svuotamento di lacune si aggiunge quindi una carica Q_n legata a questi elettroni liberi, detta **carica di inversione**. Lo strato di elettroni liberi, detto **canale**, ha uno spessore infinitesimo a causa della relazione di tipo esponenziale; nell'approssimazione di carica superficiale, il canale assume uno spessore nullo rappresentato con una delta di Dirac che, per la condizione di neutralità, rimane compensata dalla delta di Dirac nel metallo associata alla carica positiva $Q_t = -Q_d - Q_n$.

La carica di inversione Q_n cresce (in valore assoluto) linearmente con la tensione $V_G > V_{th}$:²

$$Q_n = -C_{ox}(V_G - V_{th})$$

dove il coefficiente angolare della retta è la capacità per unità di superficie dell'ossido C_{ox} (u.m. $\frac{F}{cm^2}$):

$$C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}}$$

10.2 Il transistor MOSFET

10.2.1 Definizione e struttura

Il sistema $nMOS$,³ usato in regione di inversione ($V_G > V_{th}$), è la base dei transistori $nMOS$ a **effetto di campo** (FET), che sono dei dispositivi a 3 terminali dove la caratteristica di uscita $I_{DS}(V_G)$ dipende dalla tensione di ingresso V_G ma non dalla tensione di uscita V_{DS} . Il transistor MOSFET è un **dispositivo monopolare** perché la corrente dipende dal flusso di un solo tipo di portatori.

Il **canale conduttivo** di elettroni liberi di lunghezza L che si forma in regione di inversione può essere sfruttato per originare una **corrente di drain** I_{DS} che, attraverso la carica Q_n , è controllata dalla tensione di ingresso V_G . Gli elettroni si muovono lungo il canale, per trascinamento dovuto al campo elettrico \mathcal{E} , dal terminale di **source** a quello di **drain**, e danno origine così a una corrente I_{DS} positiva dal drain al source.⁴ In corrispondenza dei due terminali vi sono due regioni con forte drogaggio n allineate ai lati del gate, che grazie alla loro elevata conducibilità elettrica garantiscono continuità spaziale al passaggio di elettroni. Di solito il source e il bulk sono cortocircuitati ($V_{BS} = 0$), così da garantire che la tensione di soglia V_{th} non cambi al variare del potenziale di bulk $V_B = V_S$.

10.2.2 Regime stazionario nel tempo

Si definisce **potenziale di canale** $\varphi_{ch}(x)$ il potenziale della sezione Δx infinitesima del canale rispetto al terminale di source. Il potenziale di canale φ_{ch} è una funzione crescente⁵ lungo x man mano che ci si allontana dal terminale di source,⁶ e agli estremi vale:⁷

$$\begin{cases} \varphi_{ch}(0) = 0 \text{ (source)} \\ \varphi_{ch}(L) = V_{DS} \text{ (drain)} \end{cases}$$

²In realtà c'è un piccolo cambiamento graduale in $V_G \approx V_{th}$ che però si trascura nell'approssimazione a spezzata.

³La n specifica che il substrato è drogato p e nel canale di inversione si formano elettroni liberi.

⁴Il dispositivo poiché simmetrico funziona analogamente con corrente in direzione opposta.

⁵Caso particolare: è identicamente nullo se i terminali sono allo stesso potenziale: $V_S = V_D \Rightarrow V_{DS} = 0$.

⁶In questo esempio, il source è collegato a massa: $V_s = 0$.

⁷Si trascura l'effetto delle resistenze parassite R_s e R_d nelle regioni drogate n^+ .

Regione lineare ($V_{DS} \rightarrow 0^+$)

Il canale si comporta come un resistore a cui è applicata di caduta di potenziale V_{DS} . Se il terminale di drain è posto a un potenziale lievemente superiore rispetto al potenziale del terminale di source ($V_{DS} \rightarrow 0^+$) in modo che l'effetto del potenziale di canale φ_{ch} sia minimo, la corrente I_{DS} cresce linearmente con la tensione V_{DS} .

A parità di tensione V_{DS} , la pendenza della caratteristica inoltre aumenta al crescere della tensione V_{GS} perché aumenta il numero di elettroni liberi da spostare nel canale e quindi cresce la transcaratteristica $I_{DS}(V_{GS})$.

Regione triodo/quadratica ($0 \ll V_{DS} < V_{DSS}$)

Il potenziale di canale φ_{ch} , sottraendosi sempre di più alla tensione V_{GS} lungo x , ostacola il flusso di elettroni verso il drain:

$$Q_n(x) = -C_{ox}(V_{GS} - \varphi_{ch}(x) - V_{th})$$

e frena quindi il crescere lineare della corrente I_{DS} a un andamento parabolico con concavità verso il basso:

$$I_{DS} = \beta_n \left[(V_{GS} - V_{th}) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right]$$

dove: (W è la larghezza del canale)

$$\beta_n = \frac{W}{L} \mu_n C_{ox}$$

Punto di strozzamento ($V_{DS} = V_{DSS}$)

Si verifica lo **strozzamento** (o pinch-off) del canale se è applicata al terminale di drain una tensione V_{DSS} che annulla il numero di elettroni liberi in corrispondenza del terminale di drain ($x = L$):

$$Q_n(L) = -C_{ox}(V_{GS} - \varphi_{ch}(L) - V_{th}) = 0 \Rightarrow V_{DSS} = \varphi_{ch}(L) = V_{GS} - V_{th}$$

L'andamento parabolico si arresta per la seguente tensione di strozzamento V_{DSS} :

$$\left. \frac{dI_{DS}}{dV_{DS}} \right|_{V_{DS}=V_{DSS}} = \beta_n (V_{GS} - V_{th} - V_{DSS}) = 0 \Leftrightarrow V_{DSS} = V_{GS} - V_{th}$$

corrispondente al seguente punto di massimo di I_D :

$$I_D(V_{DSS}) = \beta_n \left[(V_{GS} - V_{th})^2 - \frac{1}{2} (V_{GS} - V_{th})^2 \right] = \frac{\beta_n}{2} (V_{GS} - V_{th})^2$$

Regione di saturazione ($V_{DS} > V_{DSS}$)

Il punto di strozzamento ($Q_n = 0$) arretra in $L' < L$ tale che $\varphi_{ch}(L') = V_{DSS}$.

Poiché $I_{DS} \propto \frac{1}{L}$, l'accorciamento, detto **modulazione della lunghezza di canale**, aumenta la corrente I_{DS} .

Tuttavia, la distanza $\Delta L = L - L'$ converge a un valore non troppo grande, cioè l'influenza dell'accorciamento del canale sulla corrente è trascurabile \Rightarrow in regione di saturazione ($V_{DS} > V_{DSS}$), al variare della tensione di uscita V_{DS} la caratteristica di uscita I_{DS} rimane approssimativamente costante e pari a $I_{DS}(V_{DSS}) \Rightarrow$ questa è la regione in cui il sistema n MOS viene usato come transistor digitale.

Questo effetto di non idealità è tanto meno trascurabile quanto più è corto il canale, perché variazioni ΔL su una lunghezza L piccola diventano significative. Il coefficiente correttivo λ è legato alla pendenza (idealmente nulla) della caratteristica in regione di saturazione:

$$I_D = \frac{\beta_n}{2} (V_{GS} - V_{th})^2 [1 + \lambda (V_{DS} - V_{DSS})]$$

Regione di interdizione ($V_{GS} \leq V_{th}$)

Se il sistema n MOS si trova al di fuori della regione di inversione, esso si comporta circuitualmente come un circuito aperto ($I_{DS} = 0$), perché non si sono formati gli elettroni liberi da spostare nel canale.

A seconda del segno della tensione di soglia V_{th} , i transistori n MOSFET si distinguono in:

- $V_{th} < 0$: n MOS a **svuotamento** o **normalmente on** (all'equilibrio $V_G = 0$ il canale è già presente);
- $V_{th} > 0$: n MOS **ad arricchimento** o **normalmente off** (all'equilibrio $V_G = 0$ il canale non si è ancora formato).

Siccome lo strato di ossido è molto sottile ed eventuali cariche fisse non ideali intrappolate al suo interno o sulla superficie possono variare la carica totale e la tensione di banda piatta, è possibile regolare la tensione di soglia V_{th} impiantando N'_D atomi donatori nel canale:

$$V'_{FB} = V_{FB} + \Delta V_{th} = V_{FB} + \frac{q}{C_{ox}} (N'_A - N'_D)$$

in modo che la riduzione della tensione di banda piatta V_{FB} renda negativa la tensione di soglia V_{th} :

$$V_{th} = V'_{FB} + 2\phi_p + \gamma_B \sqrt{2\phi_p - V_B} < 0$$

e il transistor n MOS diventi a svuotamento con **canale preformato**.

Breakdown ($V_{DS} \gg V_{DSS}$ o $V_{GS} \gg V_{th}$)

La corrente non deve entrare nella regione neutra del bulk attraverso le due giunzioni pn formate tra i terminali drogati n^+ e la regione neutra del bulk drogata p : per avere una corrente nulla ($I \simeq 0$) quindi queste due giunzioni non devono essere in polarizzazione diretta ($V \leq 0$), cioè il un potenziale di bulk V_B dev'essere minore o uguale sia del potenziale di source V_S sia di quello di drain V_D . Se entrambi i terminali di bulk e di source sono posti a massa, sulla giunzione source-bulk è applicata una tensione nulla ($V_S = V_B$) \Rightarrow basta che la tensione $V_{DB} = V_{DS}$ applicata alla giunzione drain-bulk sia positiva o nulla.⁸

- $V_{DS} \gg V_{DSS}$: Una tensione di uscita V_{DS} eccessiva può però portare una delle due giunzioni al breakdown. Inoltre, l'elevato campo elettrico generato nel canale può provocare un effetto valanga. Elevate tensioni di ingresso V_{GS} tendono ad amplificare questo effetto, perché il breakdown si instaura prima per tensioni V_{GS} crescenti.
- $V_{GS} \gg V_{th}$: Elevate tensioni di ingresso V_{GS} possono provocare campi elettrici che superano la rigidità dielettrica⁹ dell'ossido distruggendolo.

Inoltre non si devono superare la tensione, la corrente e la potenza dissipata massime specificate dal produttore del dispositivo.

10.2.3 Regime dinamico nel tempo

Modello statico di piccolo segnale

Il modello statico di piccolo segnale viene ricavato in regione di saturazione:

$$i_{Dss}(t) = g_m v_{GSss}(t) + g_o v_{DSss}(t) g_{mB} v_{BSss}(t)$$

dove:

⁸Si noti il verso della tensione V_{DS} : se positiva polarizza inversamente la giunzione.

⁹Si veda la voce [Rigidità dielettrica](#) su Wikipedia in italiano.

- g_m è la **transconduttanza**:¹⁰

$$g_m = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \right|_{(V_{GS0}, V_{DS0}, V_{BS0})} = \sqrt{2\beta_n I_{D0}}$$

- g_o è la conduttanza di uscita:

$$g_o = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{DS}} \right|_{(V_{GS0}, V_{DS0}, V_{BS0})} = \lambda I_{D0}$$

- g_{mB} è la transconduttanza di substrato:¹⁰

$$g_{mB} = \left. \frac{\partial i_D}{\partial v_{BS}} \right|_{(V_{GS0}, V_{DS0}, V_{BS0})} = \frac{\lambda_B g_m}{2\sqrt{2\varphi_p - V_{BS0}}}$$

Modello dinamico di piccolo segnale

Nel modello dinamico, gli effetti capacitivi sono rappresentati da condensatori che si aggiungono al circuito equivalente. A frequenze troppo elevate possono però essi degradare le prestazioni del dispositivo.

¹⁰Qui il coefficiente λ è stato trascurato.

Capitolo 11

Tecnologia dei semiconduttori

Classificazione dei circuiti

- **circuiti discreti:** i componenti passivi (resistori, induttori, condensatori) e attivi (dispositivi o circuiti integrati a semiconduttore) sono montati per saldatura su un substrato di materiale isolante e sono interconnessi tramite delle piste conduttive;
- **circuiti integrati:** vi sono dei componenti costruiti direttamente per crescita sul substrato:
 - **circuiti integrati ibridi:** solo una parte dei componenti è costruita su un substrato isolante, tipicamente i componenti passivi;
 - **circuiti integrati monolitici (IC):** tutti i componenti sono costruiti su un substrato semiconduttore (Si, GaAs...).

Capitolo 12

Uso in commutazione dei transistori

I transistori sono usati in commutazione per pilotare **carichi di potenza** (attuatori), cioè dei carichi che richiedono che scorra al loro interno una corrente di valore significativo, che i **circuiti digitali** commutano tra on e off attraverso gli interruttori.

I circuiti logici possono basarsi su:

- logiche a giunzioni pn : diodi e/o transistori bipolari (in disuso);
- logiche a transistori MOSFET: n MOS o CMOS.

Un carico di potenza è caratterizzato da tensione di lavoro, corrente, tipo (resistivo o reattivo), velocità di commutazione e tipo di interruttore.

L'interruttore può assumere due stati: ON quando è chiuso e approssima il cortocircuito, OFF quando è aperto e approssima il circuito aperto. Le non idealità si rappresentano circuitalmente con la **resistenza** R_{on} in stato ON (idealmente nulla) e con un generatore di **corrente di perdita** I_{off} (idealmente nulla).

Gli interruttori si distinguono in:

- **high-side**: l'interruttore si trova tra la tensione di alimentazione V_{AL} e carico Z_L ;
- **low-side**: l'interruttore si trova tra il carico Z_L e massa ($V = 0$).

12.1 Interruttori low-side

12.1.1 Interruttore low-side a transistore bipolare

Il circuito impone una retta di carico alla porta di uscita (collettore):

$$V_{AL} = Z_L I_C + V_{CE}$$

Il transistore bipolare può essere usato nelle applicazioni digitali commutando, attraverso la scelta della corrente di ingresso I_B , tra la regione di saturazione ($V_{CE} = V_{CEsat} \approx 0$) e quella di interdizione ($I_C = 0$). Il punto di funzionamento (I_{C0}, V_{CE0}) del transistore è l'intersezione tra la retta di carico e la caratteristica di uscita $I_C = \beta_F I_B$:

- interdizione (circuito aperto):

$$I_B \approx 0 \Rightarrow \begin{cases} I_{C0} \approx 0 \\ V_{CE0} \approx V_{AL} \end{cases}$$

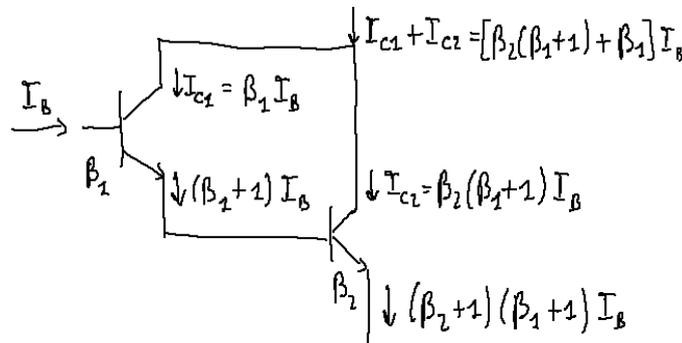
- saturazione/conduzione (cortocircuito):

$$I_B \geq \frac{I_{C0}}{\beta_F} \Rightarrow \begin{cases} I_{C0} = \frac{V_{AL} - V_{CEsat}}{Z_L} \approx \frac{V_{AL}}{Z_L} \\ V_{CE0} \approx V_{CEsat} \end{cases}$$

Più la corrente I_B è elevata, più si garantisce che la tensione V_{CE0} sia compresa nella regione di saturazione ($V_{CE0} < V_{CEsat}$), e più è bassa la potenza dissipata $P = V_{CE0} \cdot I_{C0} \leq V_{CE0} \cdot (\beta_{Fmin} I_B) \Rightarrow$ per massimizzare la corrente I_B così da minimizzare la tensione V_{CE0} , conviene scegliere l'estremo inferiore β_{Fmin} della fascia di incertezza di β_F .

La corrente di ingresso I_B , tuttavia, è piccola poiché proviene da un circuito digitale \Rightarrow con un solo transistor non è possibile realizzare un interruttore che abbia un guadagno sufficientemente significativo senza dissipare troppa potenza.

12.1.2 Interruttore low-side a transistori bipolari in configurazione Darlington



Due transistori bipolari sono collegati in **coppia Darlington** se la corrente di emettitore di uno è la corrente di base dell'altro. Il guadagno complessivo è il prodotto dei due guadagni parziali:

$$I_C = [\beta_2 (\beta_2 + 1) + \beta_1] I_B \approx \beta_1 \beta_2 I_B$$

Si possono anche collegare in cascata più di due transistori bipolari, anche in configurazioni miste.

Il **tempo di commutazione** è il tempo richiesto da un transistor bipolare per passare tra una buona approssimazione del circuito aperto e una buona approssimazione del cortocircuito. In particolare, spesso è significativo il tempo di commutazione di spegnimento, cioè il tempo di apertura dell'interruttore: poiché il transistor passa dalla regione di saturazione a quella di interdizione ($I_C = 0$), deve infatti passare un certo tempo affinché si riduca l'eccesso di portatori minoritari n'_p nella regione di svuotamento (**transitorio di spegnimento**).

La corrente di base I_B , che allontana gli elettroni in eccesso, è però molto bassa poiché arriva dal circuito digitale. Nella coppia Darlington, si collega un resistore R_E tra base e massa che aumenta la corrente per accelerare il tempo di commutazione di spegnimento del transistor T_2 .

12.1.3 Interruttore low-side a transistor n MOS

Il transistor n MOS si comporta da interruttore aperto in regione di interdizione ($V_{GS} < V_{th}$) \Rightarrow la tensione di soglia V_{th} deve frapporsi a metà tra gli stati logici 0 e 1. Per il gate del transistor è sufficiente la corrente bassa proveniente dal circuito digitale.

Se il circuito digitale è collegato in maniera diretta al gate, però, il circuito risonante formato dalla capacità equivalente del gate C_G e da induttanze parassite può far oscillare la tensione

rendendola instabile o superandone il valore massimo (breakdown) \Rightarrow la resistenza R_G aumenta il fattore di smorzamento γ :

$$\gamma = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

e riduce il fattore di qualità $Q = \frac{1}{2}\gamma$, ma aumenta il tempo di commutazione perché rallenta il transitorio di carica e scarica del condensatore C_G .

12.2 Interfacce a componenti discreti

Poiché i circuiti digitali operano con correnti molto basse e non sono adatti a pilotare direttamente carichi di potenza, le **interfacce a componenti discreti** sono dei circuiti **MOS driver** che si occupano di amplificare il comando del circuito digitale in modo da fornire un valore massimo di corrente sufficiente per pilotare il carico di potenza.

Nel caso di interruttore a MOS, il tempo di commutazione t dipende da quanto viene caricata rapidamente la capacità di gate C_G :¹

$$I = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \Delta v = v(t) - v_0 = \frac{1}{C} \int_0^t I dt = \frac{1}{C} I \cdot t \Rightarrow t = C \frac{\Delta v}{I}$$

L'aggiunta di un MOS driver amplifica la corrente I e riduce il tempo di commutazione t .

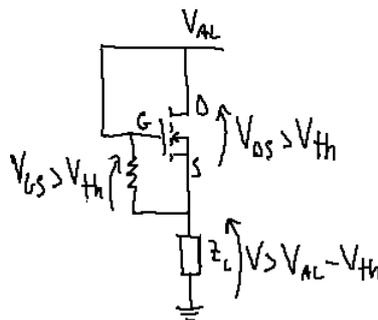
In un condensatore posto molto vicino all'alimentazione del driver si accumula la carica di commutazione da fornire alla base.

12.3 Interruttori high-side

12.3.1 Interruttore high-side a transistor bipolare *npn*

Il transistor bipolare *npn* non riesce ad approssimare bene il cortocircuito e dissipa troppa potenza: la tensione V_{CE} di conduzione, soprattutto considerando che la corrente sul carico I_C è molto elevata, è significativa poiché sulla giunzione base-emettitore è applicata una tensione di polarizzazione diretta non trascurabile tra il carico Z_L e l'alimentazione.

12.3.2 Interruttore high-side a transistor *nMOS*



Il transistor *nMOS* soffre in conduzione dello stesso tipo di problema: la tensione V_{DS} non riesce a essere trascurabile, ma siccome è imposta una tensione $V_{GS} > V_{th}$ è dell'ordine di grandezza della tensione di soglia V_{th} . Il problema è risolvibile applicando al terminale di gate una tensione più elevata della tensione di alimentazione.

¹Nell'esempio si suppone una corrente I costante; in caso contrario, la tensione $v(t)$ varia con un andamento esponenziale.

12.3.3 Interruttore high-side a transistor p MOS

Quando l'interruttore di controllo² è chiuso, vale $V_{GS} = -V_{AL}$ (affinché il transistor p MOS sia in conduzione, deve valere $V_{GS} < V_{th}$), ma c'è poca dissipazione di potenza perché la tensione di source però non è più vincolata ad essere uguale a quella del carico Z_L . Tuttavia, le prestazioni di un p MOS sono peggiori di quelle di un n MOS sia in termini di velocità di commutazione, sia perché ha un'elevata resistenza R_{on} .

12.4 Isolamento galvanico ottico

La parte di controllo (il circuito digitale) e la parte di potenza (l'interruttore) devono essere elettricamente isolate l'una dall'altra a causa di eventuali sbalzi di tensione o interferenze.

Tipi di isolamento galvanico

- trasformatore: isolamento tramite campo magnetico;
- condensatore: isolamento tramite campo elettrico;
- fotoaccoppiatore o isolatore fotovoltaico: isolamento ottico.

Per il passaggio di segnali in continua l'**isolamento ottico** non richiede modulazione, al contrario delle altre due soluzioni basate su elementi reattivi.

12.4.1 Fotoaccoppiatore

Il **fotoaccoppiatore** è un circuito integrato dove il segnale elettrico passa unidirezionalmente attraverso un meccanismo ottico:

- alla porta d'ingresso vi è un **diodo LED**: la radiazione luminosa in uscita ha un'intensità proporzionale alla corrente fornita all'ingresso;
- alla porta d'uscita vi è un **fototransistore**, cioè un transistor bipolare la cui corrente di base I_B è fornita dall'assorbimento di radiazione luminosa proveniente dal diodo LED \Rightarrow la corrente di base, pur essendo a sua volta proporzionale alla corrente fornita all'ingresso, è isolata da quest'ultima.

Il **CTR** (Current Transfer Ratio) è il rapporto tra la corrente di collettore del transistor bipolare e la corrente d'ingresso nel diodo LED.

Il tempo di commutazione del fotoaccoppiatore è lento, in particolare il tempo di spegnimento a causa del transistor bipolare (bisogna attendere la ricombinazione dei portatori minoritari nella base). Aggiungere una resistenza per velocizzare il tempo di commutazione riduce il parametro CTR.

12.4.2 Isolatore fotovoltaico

L'**isolatore fotovoltaico** sfrutta lo stesso meccanismo ottico del fotoaccoppiatore con alcune differenze:

- alla porta d'ingresso sono posti in serie due diodi LED \Rightarrow la tensione alla porta d'ingresso è maggiore;
- alla porta d'uscita sono posti in serie delle giunzioni pn dette **fotodiodi**, che convertono una radiazione luminosa in un segnale di corrente.

Anche se non richiedono alimentazione, i fotodiodi generano una corrente bassa \Rightarrow se messi a pilotare direttamente un transistor MOS, i tempi di commutazione sono molto lunghi.

²L'**interruttore di controllo**, in questo caso low-side, serve per caricare e scaricare la capacità equivalente del transistor, ma è facile da realizzare perché è a bassa potenza e deve gestire correnti basse. Il transitorio immediatamente successivo alla commutazione dell'interruttore si considererà sempre esaurito.

12.5 Comportamento in commutazione

12.5.1 Carico resistivo ($Z_L = R_L$)

In un interruttore low-side a transistoro n MOS, se il carico è di tipo resistivo la retta di carico è definita come:

$$V_{DS} = V_{AL} - R_L I_L, \quad I_L \equiv I_D$$

Stato OFF ($t = 0^-$)

Stato ON ($t = 0^+$)

$$\begin{cases} V_L = R_L I_L = 0 \\ V_{DS} = V_{AL} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_L = R_L I_L = 0 \\ V_{DS} = R_{on} I_L \approx 0 \end{cases}$$

La retta di carico può trovarsi per un breve periodo di tempo ($< 100 \mu s$) durante la commutazione al di fuori della Safe Operating Area (SOA) statica, ma sempre entro quella dinamica caratterizzata da una potenza massima maggiore.

12.5.2 Carico induttivo ($Z_L = R_L + j\omega L$): transitorio di accensione

La corrente I_L cresce solo esponenzialmente perché non è forzata:³

Stato OFF ($t = 0^-$)

Stato ON ($t = 0^+$)

Stato ON (transitorio esaurito)

$$\begin{cases} V_L = 0 \\ R_L I_L = 0 \\ V_{DS} = V_{AL} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_L(0^+) = I_L(0^-) \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0^+} > 0 \\ V_L = L \frac{dI_L}{dt} = V_{AL} \\ R_L I_L = 0 \\ V_{DS} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_L = 0 \\ R_L I_L = V_{AL} \\ V_{DS} = 0 \end{cases}$$

La potenza dissipata dal transistoro rimane sempre dentro la SOA, perché non si hanno mai tensione V_{DS} e corrente I_L entrambe elevate allo stesso istante.

12.5.3 Carico induttivo ($Z_L = R_L + j\omega L$): transitorio di spegnimento

La corrente I_L diminuisce molto rapidamente perché è forzata dal transistoro MOS che è supposto ideale:

Stato ON ($t = 0^-$)

Stato OFF ($t = 0^+$)

Stato OFF (transitorio esaurito)

$$\begin{cases} V_L = 0 \\ R_L I_L = V_{AL} \\ V_{DS} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_L(0^+) = I_L(0^-) \\ \left. \frac{dI_L}{dt} \right|_{t=0^+} \ll 0 \\ V_L = L \frac{dI_L}{dt} \ll V_{AL} \\ R_L I_L = V_{AL} \\ V_{DS} = V_{AL} - V_L - R_L I_L \gg V_{AL} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_L = 0 \\ R_L I_L = 0 \\ V_{DS} = V_{AL} \end{cases}$$

Nel transitorio, la tensione di drain V_{DS} assume un valore molto superiore alla tensione di alimentazione V_{AL} , tanto che la potenza dissipata esce persino dalla SOA dinamica e può anche raggiungere la tensione di breakdown del transistoro.

³All'istante $t = 0^+$ si trascura il transitorio di accensione sulla tensione V_{DS} del transistoro n MOS \Rightarrow esso si comporta in modo ideale.

L'energia accumulata nell'induttore:

$$E_L = \frac{1}{2} R_L I_L^2$$

alla commutazione viene scaricata sul transistor n MOS.

Un **diodo di ricircolo** (o volano) posto in parallelo al carico⁴ protegge il transistor dagli sbalzi di tensione: quando l'interruttore si apre, il diodo da interdetto ($V = -V_{AL} < V_\gamma$) entra in conduzione ($V \approx -V_L \gg V_{AL}$) e si determina un flusso di corrente verso il diodo in modo che l'energia E_L accumulata dall'induttore si scarichi sulla resistenza parassita del diodo e sulla resistenza di carico R_L .

⁴Si noti il verso della tensione sul diodo:

$$V = -V_L - R_L I_L$$

Capitolo 13

Circuiti logici: specifiche funzionali

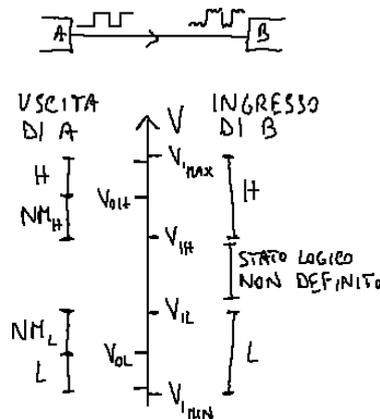
13.1 Segnali logici

In elettronica gli stati logici 0 e 1 sono associati ai due valori di tensione alta $V_H \approx V_{AL}$ e bassa $V_L \approx GND = 0$:

- convenzione **logica positiva**: $1 \longleftrightarrow V_H \mid 0 \longleftrightarrow V_L$
- convenzione **logica negativa**: $0 \longleftrightarrow V_H \mid 1 \longleftrightarrow V_L$

Si definisce una tensione di soglia V_{TR} al di sotto della quale il segnale analogico viene riconosciuto nello stato logico L , e viceversa.

13.1.1 Compatibilità tra porte



Per **compatibilità** si intende la capacità di circuiti connessi in cascata di scambiarsi correttamente stati logici: gli ingressi devono interpretare correttamente i livelli di tensione.

Per un segnale analogico proveniente dall'uscita di un circuito digitale, sono definiti due valori limite di tensione:

- V_{OH} è il valore di tensione minimo per l'uscita U allo stato H ;
- V_{OL} è il valore di tensione massimo per l'uscita U allo stato L .

Affinché questo segnale venga riconosciuto correttamente all'ingresso di un circuito digitale, sono definiti altri due valori limite:

- $V_{IH} \leq V_{OH}$ è il valore di tensione minimo per l'ingresso I allo stato H ;
- $V_{IL} \geq V_{OL}$ è il valore di tensione massimo per l'ingresso I allo stato L .

Due circuiti logici appartenenti alla stessa **famiglia logica** hanno le stesse caratteristiche elettriche (alimentazione, tensioni e correnti di uscita e di ingresso, ritardi, consumo) \Rightarrow sono elettricamente compatibili tra di loro.

13.1.2 Comparatore di soglia¹

Conviene evitare valori limite ingresso-uscita uguali garantendo un **margin**e di rumore per ridurre l'effetto dei disturbi:

$$\begin{cases} V_{IH} < V_{OH} \\ V_{IL} > V_{OL} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NM_H = V_{OH} - V_{IH} \\ NM_L = V_{IL} - V_{OL} \end{cases}$$

Per recuperare un segnale digitale disturbato, si può interporre fra due circuiti digitali un **comparatore di soglia**, un modulo che realizza una funzione a gradino: converte un ingresso analogico, in base a un unico valore di soglia S , in un valore logico/binario in uscita.

Se il segnale è molto disturbato e oscilla frequentemente attorno al valore di soglia, è preferibile usare un comparatore di soglia con **isteresi**, che ha due valori di soglia S_1 e S_2 : il valore di soglia S_1 viene attivato quando il segnale è crescente nel tempo (da L a H), e viceversa. Il trigger di Schmitt è un circuito che approssima il comportamento del comparatore di soglia con isteresi.

13.2 Invertitori R -switch

13.2.1 Invertitore n MOS: uscita a vuoto ($R_L \rightarrow +\infty$)

L'invertitore a transistor n MOS è costituito da una **resistenza di pull-up** R_{PU} verso l'alimentazione V_{AL} e da un interruttore a transistor n MOS verso massa GND:

- $I = L, U = H$: la tensione di ingresso $V_I = V_{GS} = 0$ è minore della tensione di soglia $V_{th} \Rightarrow$ il transistor è aperto e in interdizione \Rightarrow la corrente che scorre nella resistenza di pull-up R_{PU} è nulla \Rightarrow la tensione di uscita V_O è "portata su" alla tensione di alimentazione V_{AL} ;
- $I = H, U = L$: la tensione di ingresso $V_I = V_{GS}$ è maggiore della tensione di soglia $V_{th} \Rightarrow$ il transistor è chiuso e in conduzione \Rightarrow la tensione V_{DS} di pull-down è nulla \Rightarrow la tensione di uscita V_O è "portata giù" a massa ($V_O = 0$).

Se si considerano anche le non idealità dell'invertitore:

- $U = L$: la tensione V_{AL} si ripartisce anche sulla resistenza R_{on} ;
- $U = H$: una parte della corrente si disperde nella corrente di perdita I_{off} .

La **transcaratteristica** $V_O(V_I)$ di un invertitore reale non è brusca ma segue una variazione continua e graduale attraverso uno stato logico non definito. Quando l'uscita è allo stato basso L la resistenza di pull-up dissipa potenza.

Sulla transcaratteristica, i valori limite di tensione sono definiti di solito come i punti in cui le tangenti al grafico hanno pendenza 45° .

¹Per approfondire, si veda il capitolo "Comparatori di soglia" negli appunti di *Elettronica applicata e misure*.

²Questa immagine è tratta da Wikimedia Commons ([Caratteristica nm invertitore.jpg](#)), è stata realizzata da [Hachreak](#) ed è concessa sotto la [licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 3.0](#).

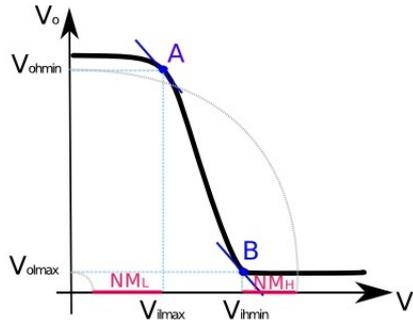


Figura 13.1: Transcaratteristica di un invertitore reale²

13.2.2 Invertitore nMOS: carico resistivo R_L

Se il carico R_L è collegato verso massa, la tensione V_O è inferiore a quella che si ottiene nel caso di carico ideale:

$U = L$	$U = H$
$V_O = \frac{R_L R_{on}}{R_L R_{on} + R_{PU}} V_{AL} > \frac{R_{on}}{R_{on} + R_{PU}} V_{AL}$	$V_O = \frac{R_L}{R_L + R_{PU}} V_{AL} - I_{off}(R_{PU} R_L) > V_{AL} - I_{off} R_{PU}$

Viceversa, se il carico è collegato verso massa, la tensione V_O è superiore a quella che si ottiene nel caso di carico ideale.

13.2.3 Invertitore pMOS

Poiché nel transistor p MOS le posizioni di source e drain risultano scambiate,³ se esso venisse collegato verso massa la sua tensione di gate V_{GS} sarebbe controllata anche dalla tensione di uscita $V_{DS} \equiv V_O \Rightarrow$ non sarebbe un invertitore:

$$V_{GS} = V_I - V_{DS}$$

L'invertitore a transistor p MOS ha quindi una **resistenza di pull-down** R_{PD} verso massa, in modo che il controllo della commutazione dell'invertitore sia esercitato dalla sola tensione di ingresso:

$$V_{GS} = V_I - V_{AL}$$

La scelta della tensione di soglia V_{th} ha delle restrizioni:

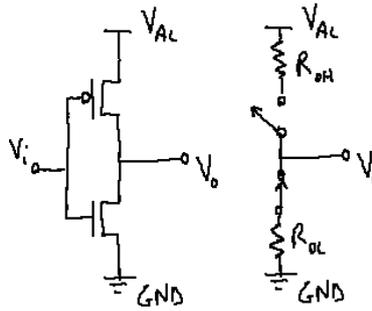
- aperto/interdizione: $V_I = V_{AL} \Rightarrow V_{GS} = 0 > V_{th} \Rightarrow V_O = 0$ (la tensione di soglia V_{th} dev'essere negativa);
- chiuso/conduzione: $V_I = 0 \Rightarrow V_{GS} = -V_{AL} < V_{th} \Rightarrow V_O = V_{AL}$ (la tensione di soglia V_{th} dev'essere minore (in valore assoluto) della tensione di alimentazione V_{AL}).

13.3 Invertitore CMOS

13.3.1 Uscita a vuoto

In un **invertitore CMOS** (o a MOS complementari) entrano alternativamente in funzione due transistori di polarità opposte: l' n MOS sostituisce la resistenza di pull-down R_{PD} , il p MOS la resistenza di pull-up R_{PU} , e ciascun transistor ha il terminale di drain verso quello dell'altro. Ogni transistor è caratterizzato da una propria tensione di soglia:

³La corrente deve scorrere dall'alimentazione verso massa.



- *n*MOS: la tensione di soglia V_{thn} deve essere positiva e minore della tensione di alimentazione V_{AL} ;
- *p*MOS: la tensione di soglia V_{thp} deve essere negativa e maggiore della tensione di alimentazione $-V_{AL}$.

La tensione d'ingresso $V_I = V_{GSn}$ è applicata al transistor *n*MOS di pull-down \Rightarrow sul transistor *p*MOS di pull-up è applicata una tensione:

$$V_{GSp} = V_I - V_{AL}$$

Se $|V_{thp}| < V_{AL} - V_{thn}$, a seconda della tensione di ingresso V_I si distinguono tre casi:

- $0 < V_I < V_{thn}$: *n*MOS interdetto, *p*MOS in conduzione $\Rightarrow U = H$: il carico è portato all'alimentazione;⁴
- $V_{thp} < V_I < 0$: *n*MOS in conduzione, *p*MOS interdetto $\Rightarrow U = L$: il carico è portato a massa;
- $V_{thp} < V_I < V_{thn}$: *n*MOS in conduzione, *p*MOS in conduzione \Rightarrow l'uscita non corrisponde a uno stato logico definito.

Ciascun transistor ammette la rappresentazione circuitale di perdita.

Un invertitore CMOS è anche rappresentabile con due interruttori *p*-switch e *n*-switch oppure con un unico deviatore.

Vantaggi rispetto agli invertitori *R*-switch

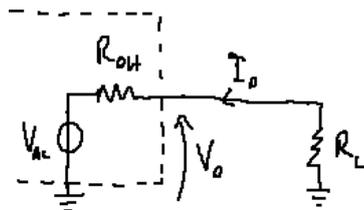
- sono fisicamente molto più piccoli rispetto agli invertitori *R*-switch;
- hanno una struttura simmetrica e un comportamento simmetrico negli stati *H* e *L*;
- in condizioni statiche hanno in entrambi gli stati un consumo di potenza trascurabile;
- hanno una transcaratteristica $V_O(V_I)$ di pendenza maggiore rispetto a quella degli invertitori *R*-switch \Rightarrow la regione in cui lo stato logico non è definito è molto più stretta \Rightarrow migliori prestazioni logiche. Se la pendenza è idealmente verticale, lo stato logico non definito coincide con l'unica tensione di soglia $V_T R$.

⁴Si suppone un carico ideale: $R_L \rightarrow +\infty \Rightarrow I = 0$.

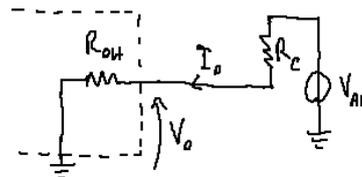
Capitolo 14

Circuiti logici: caratteristiche elettriche e interfacciamento

14.1 Invertitore CMOS con carico resistivo R_L



(a) Circuito equivalente di un invertitore CMOS allo stato alto H collegato a un carico resistivo R_L verso massa.



(b) Circuito equivalente di un invertitore CMOS allo stato basso L collegato a un carico resistivo R_C verso l'alimentazione.

14.1.1 Uscita a stato H, carico verso massa

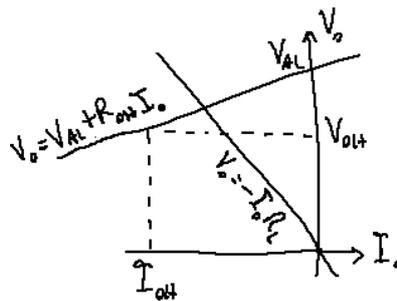


Figura 14.2: Caratteristica di un invertitore CMOS allo stato alto H collegato a un carico resistivo R_L verso massa.

Il circuito impone una retta di carico sulla resistenza R_L di carico:¹

$$\begin{cases} V_O = V_{AL} + R_{OH}I_O \\ V_O = -R_L I_O \end{cases} \Rightarrow I_O = -\frac{V_{AL}}{R_{OH} + R_L}$$

¹È chiamata resistenza R_{OH} la resistenza di perdita R_{onp} del transistor p MOS quando l'uscita dell'inverter è allo stato alto H, e viceversa per la resistenza R_{OL} . L'altro effetto di non idealità, la corrente di perdita I_{off} , verrà sempre trascurato.

La resistenza di carico R_L non deve essere troppo piccola affinché il punto di funzionamento del circuito non esca dal valore limite V_{OH} :

$$\begin{cases} U = H \Rightarrow V_O > V_{OH} \\ I_O(V_O) = \frac{V_O - V_{AL}}{R_{OH}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_O(V_O) > I_O(V_{OH}) \equiv I_{OH} \\ I_O(V_O) = -\frac{V_{AL}}{R_{OH} + R_L(V_O)} \end{cases} \Rightarrow R_L(V_O) > R_L(V_{OH})$$

14.1.2 Uscita a stato L, carico verso alimentazione

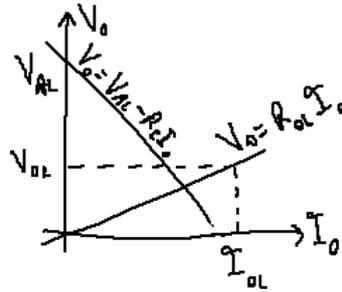


Figura 14.3: Caratteristica di un invertitore CMOS allo stato basso L collegato a un carico resistivo R_C verso l'alimentazione.

Il circuito impone una retta di carico sulla resistenza R_{OL} di perdita dell'inverter:

$$\begin{cases} V_O = V_{AL} - R_C I_O \\ V_O = R_{OL} I_O \end{cases} \Rightarrow I_O = \frac{V_{AL}}{R_{OL} + R_C}$$

La resistenza di carico R_C non deve essere troppo piccola affinché il punto di funzionamento del circuito non esca dal valore limite V_{OL} :

$$\begin{cases} U = L \Rightarrow V_O < V_{OL} \\ I_O(V_O) = \frac{V_O - V_{AL}}{R_C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_O(V_O) < I_O(V_{OL}) \equiv I_{OL} \\ I_O(V_O) = \frac{V_{AL}}{R_{OL} + R_C(V_O)} \end{cases} \Rightarrow R_C(V_O) > R_C(V_{OL})$$

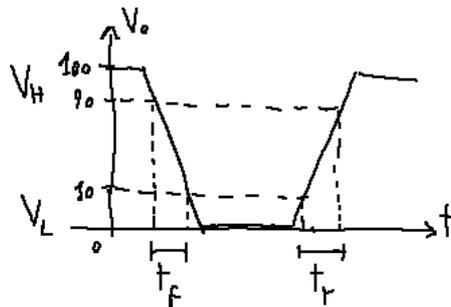
14.2 Invertitori con carico capacitivo

La presenza di una capacità nel carico introduce degli effetti capacitivi di ritardo: le commutazioni non sono istantanee.

Nella realtà sono presenti anche degli effetti induttivi che introducono delle piccole oscillazioni nel segnale.

14.2.1 Ritardi di transizione

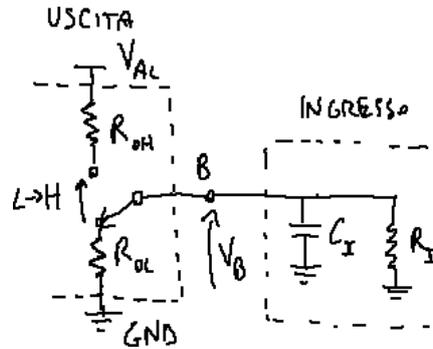
Si definisce **tempo di transizione** l'intervallo di tempo impiegato dal segnale per variare la sua ampiezza tra il 10% e il 90%. Si distinguono il **tempo di salita** t_r e il **tempo di discesa** t_f :



Il tempo di transizione Δt , sia nel fronte di salita sia nel fronte di discesa, è direttamente proporzionale alla costante di tempo τ :

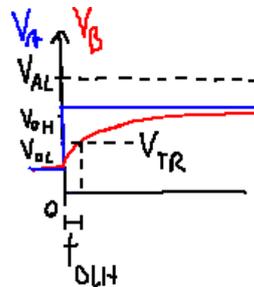
$$\Delta t = \tau \ln \frac{0,1(V_H - V_L) - V_H}{0,9(V_H - V_L) - V_H} = 2,2\tau$$

Transizione $L \rightarrow H$

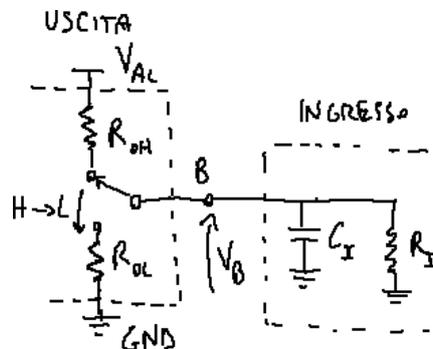


Il condensatore passa da circuito aperto a cortocircuito \Rightarrow la tensione di uscita $V_B(t)$ ha un andamento esponenziale crescente che parte dalla tensione V_{OL} e tende alla tensione V_{OH} con costante di decadimento $\tau_{HL} = C_I R_{OH} || R_I \simeq C_I R_{OH}^2$

$$V_B(t) = V_{OH} + (V_{OL} - V_{OH}) e^{-\frac{t}{\tau_{HL}}}$$



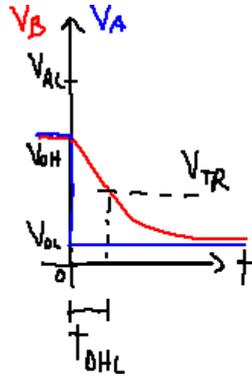
Transizione $H \rightarrow L$



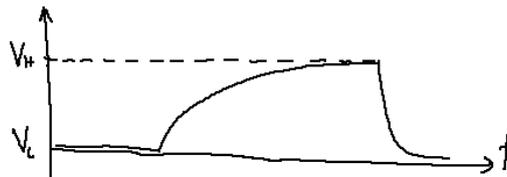
²La resistenza di carico R_I non deve essere troppo piccola perché, quando ad esempio il condensatore è un circuito aperto, la tensione di alimentazione V_A si ripartirebbe in una tensione di uscita V_B troppo piccola \Rightarrow la qualità del segnale viene degradata.

Il condensatore passa da cortocircuito a circuito aperto \Rightarrow la tensione di uscita $V_B(t)$ ha un andamento esponenziale decrescente che parte dalla tensione V_{OH} e tende alla tensione V_{OL} con costante di decadimento $\tau_{LH} = C_I R_{OL} || R_I \simeq C_I R_{OL}$:²

$$V_B(t) = V_{OL} + (V_{OH} - V_{OL}) e^{-\frac{t}{\tau_{HL}}}$$



Invertitore nMOS



La resistenza equivalente di uscita vale R_{PU} nello stato H e $R_{OL} || R_{PU} \simeq R_{OL}$ nello stato $L \Rightarrow$ è molto più piccola quando l'interruttore è chiuso \Rightarrow la costante di tempo τ_{LH} del fronte di salita risulta molto più piccola \Rightarrow il tempo di transizione $L \rightarrow H$ è maggiore del tempo di transizione $H \rightarrow L$.

Invertitore CMOS



L'elemento di pull-up non è più passivo ma attivo: cambia il suo valore di resistenza equivalente in funzione dell'ingresso esattamente come fa l'elemento di pull-down \Rightarrow il comportamento dinamico è simmetrico e i tempi di transizione sono entrambi piccoli.

Si possono minimizzare i ritardi riducendo la costante di tempo, in particolare:

- la resistenza equivalente R_O vista ai morsetti del condensatore \Rightarrow la corrente I_O che scorre all'uscita diventa elevata;
- la capacità equivalente $C_I \Rightarrow$ il dispositivo deve essere piccolo (ad esempio, nel transistore MOS la capacità C_{ox} , cioè la capacità equivalente per unità di superficie,³ si estende all'intero volume moltiplicandola per l'area $A = W \cdot L$) \Rightarrow conferma la legge di Moore.

³Nel sistema MOS, la superficie è perpendicolare alla lunghezza del canale L .

14.2.2 Ritardi di propagazione

Una variazione all'ingresso viene propagata all'uscita con un certo ritardo: si definisce **tempo di propagazione** della porta l'intervallo di tempo tra l'istante in cui il segnale d'ingresso ha il 50% di ampiezza e l'istante in cui il segnale d'uscita ha il 50% di ampiezza:

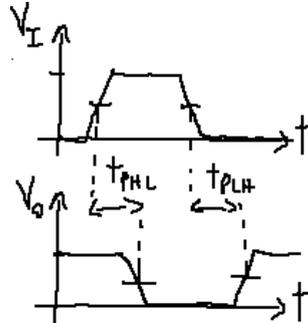
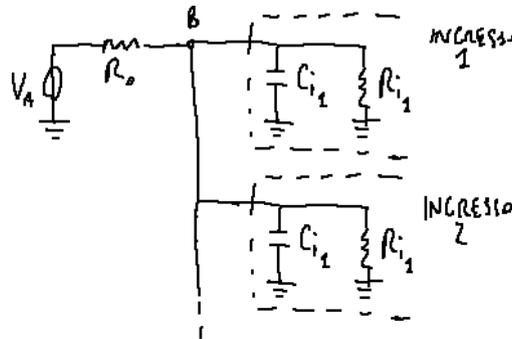


Figura 14.4: Tempo di propagazione di un invertitore.



La costante di tempo, e quindi il tempo di transizione, dipende anche dalla parte capacitiva del carico: collegare l'invertitore a un circuito digitale con un numero di ingressi, detto **fan out**, troppo grande aumenta la capacità equivalente di carico, rischiando che il tempo di transizione superi il tempo di propagazione e il segnale non abbia il tempo di commutare.

da chiarire

14.3 Collegamento a bus

In un collegamento a bus non è noto a priori il numero di dispositivi logici connessi \Rightarrow bisogna evitare le collisioni, cioè due dispositivi non devono comunicare sul bus in contemporanea.

14.3.1 Uscita totem pole (TP)

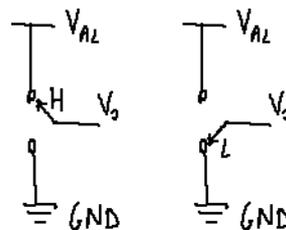


Figura 14.5: Uscita totem pole.

Collegare tra loro le uscite di più invertitori CMOS può essere pericoloso: siccome i vari segnali di controllo sono indipendenti tra loro, un'errata combinazione di essi può far andare l'alimentazione in cortocircuito.

14.3.2 Uscita a tre stati (3S)

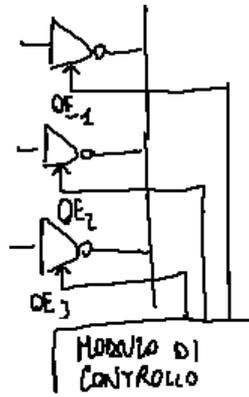


Figura 14.6: Collegamento a bus con uscite a tre stati.

In un collegamento a bus con **uscite a tre stati**, ogni circuito ha un **segnale di enable**, e i segnali di enable vengono attivati uno alla volta da un modulo di controllo per evitare le collisioni:

- segnale di enable OE allo stato basso L : l'uscita del circuito è abilitata (come totem pole);
- segnale di enable OE allo stato basso H : l'uscita del circuito viene disabilitata e assume un terzo stato Hi-Z (ad alta impedenza).

Il segnale di enable può essere rappresentato circuitalmente con un unico deviatore a 3 posizioni, di cui una corrisponde allo stato Hi-Z, oppure con un altro deviatore in serie all'uscita che abilita o disabilita l'uscita a seconda se chiuso o aperto:

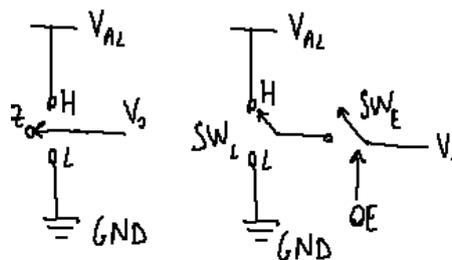


Figura 14.7: Due rappresentazioni circuitali per l'uscita a tre stati.

La non idealità del circuito aperto interpretato nello stato Hi-Z è rappresentabile con una corrente di perdita I_{OZ} .

L'uscita a tre stati è pericolosa se non si può garantire di poter attivare i segnali di enable solo uno alla volta.

14.3.3 Uscita a collettore aperto (OC)

L'**uscita a collettore aperto** (open drain) trova applicazione nella gestione delle richieste di interrupt, dove possono verificarsi più richieste alla volta.

Ogni stadio di uscita è realizzato con un solo interruttore n MOS verso massa.

Tutti gli stadi di uscita sono in parallelo e condividono un'unica resistenza di pull-up R_{PU} :

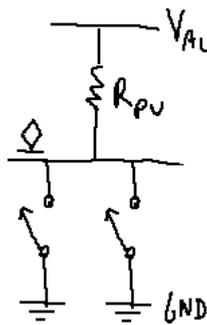


Figura 14.8: Collegamento a bus con uscite a collettore aperto.

- **wired or:** la linea va nello stato basso L se anche una sola uscita è chiusa;
- **wired and:** la linea va nello stato alto H solo se tutte le uscite sono aperte.

Nel caso dell'inverter, l'interruttore è chiuso se l'ingresso è allo stato alto H e viceversa:

- **operatore NOR** (uscita 0 quando almeno uno degli ingressi è 1): basta che uno solo degli interruttori sia chiuso perché la linea scenda allo stato basso L ;
- **operatore NAND** (uscita 0 quando tutti gli ingressi sono 1): tutti gli interruttori devono essere aperti perché la linea salga allo stato alto H .

Collegando n carichi a m uscite OC, è necessario scegliere una resistenza di pull-up R_{PU} che garantisca la compatibilità statica, cioè la corrente e la tensione non devono superare i valori limite riconosciuti dai carichi:

$$\begin{cases} I_R = mI_O - nI_I : & I_O < I_{OL} \vee I_O > I_{OH} \\ V_O = V_{AL} - I_R R_{PU} : & V_O < V_{OL} \vee V_O > V_{OH} \end{cases} \Rightarrow I_R = \frac{V_{AL} - V_O}{R_{PU}} \begin{cases} > mI_{OH} + nI_{IH} \Rightarrow R_{PU} < R_{\max} \\ < mI_{OL} + nI_{IL} \Rightarrow R_{PU} > R_{\min} \end{cases}$$

La scelta del valore di resistenza R_{PU} è quindi un compromesso tra due caratteristiche del dispositivo:

- $R_{PU} = R_{\min}$: massimizza la velocità perché è minore la resistenza equivalente e quindi la costante di tempo τ ;
- $R_{PU} = R_{\max}$: minimizza la potenza dissipata perché la corrente che scorre attraverso la resistenza R_{PU} è minore.

14.4 Segnali differenziali digitali

Anche i segnali digitali possono essere trasmessi in modo differenziale: lungo due fili, entrambi riferiti al terzo filo di massa, scorrono due segnali digitali uno invertito all'altro, e il segnale logico di informazione è dato dalla loro differenza.

Vantaggi

- immunità ai disturbi dall'esterno;
- minor consumo: i gradienti dei singoli segnali hanno metà ampiezza del segnale differenziale allo stato alto $H \Rightarrow$ è richiesta una tensione di alimentazione minore di quella richiesta da un singolo segnale di modo comune di ampiezza doppia.

Capitolo 15

Circuiti logici combinatori

I circuiti si suddividono in:

- **combinatori:** lo stato dell'uscita dipende dagli stati correnti degli ingressi;
- **sequenziali:** lo stato dell'uscita, oltre che dagli stati correnti degli ingressi, dipende anche da stati precedenti nel tempo (di solito al colpo di clock precedente) \Rightarrow richiedono degli elementi di memoria detti **flip-flop**.

15.1 Porte a livello singolo

Le porte logiche si suddividono in invertenti e non invertenti a seconda se il segnale viene rispettivamente negato o no:

Invertenti

- inverter
- NOR
- NAND
- EXNOR

Non invertenti

- buffer¹
- OR
- AND
- EXOR

15.1.1 Porte NAND e NOR *R*-switch

Porta NAND *n*MOS

È costituita da più transistori collegati in serie e da una resistenza di pull-up R_{PU} . L'uscita va a massa se tutti gli interruttori sono chiusi, ovvero se tutti i segnali di ingresso sono allo stato alto H .

Porta NOR *n*MOS

È analoga alla porta NAND, ma i transistori *n*MOS sono collegati in parallelo. L'uscita va a massa se almeno uno degli interruttori è chiuso, ovvero se almeno uno dei segnali di ingresso è allo stato H .

¹Uno stadio buffer si limita a rigenerare il segnale senza modificarlo dal punto di vista funzionale. Quando il segnale di uscita ha una potenza maggiore, il buffer è un amplificatore.

Porte p MOS

Una porta p MOS rappresenta la stessa funzione di una porta n MOS se presenta delle caratteristiche opposte:

- chiuso se $I = L$
- aperto se $I = H$
- serie \rightarrow parallelo
- parallelo \rightarrow serie
- verso massa \rightarrow verso alimentazione

15.1.2 Porte NAND e NOR CMOS

Le tipologie n MOS e p MOS si complementano nelle porte CMOS, che non richiedono più resistenze di pull-up o di pull-down \Rightarrow anche se rispetto alle porte R -switch si ha un numero doppio di transistori, le dimensioni fisiche risultano sempre più ridotte.

Porta NAND

È l'unione di una porta NAND n MOS come elemento di pull-down e di una porta NAND p MOS come elemento di pull-up. Poiché in un CMOS gli elementi devono essere cortocircuitati uno alla volta, ogni segnale d'ingresso deve sdoppiarsi agli ingressi di una coppia di transistori di tipo opposto: "bufferato" al transistore n MOS e negato al transistore p MOS.

Porta NOR

Entrambi gli elementi di pull-down e pull-up invertono il tipo di collegamento dei transistori.

15.2 Porte a livelli multipli

Qualsiasi funzione logica può essere ricondotta a una somma di prodotti o a un prodotto di somme \Rightarrow bastano sempre al massimo due livelli di porte logiche, cioè con due porte poste in serie.²

15.2.1 Porte AND e OR in cascata

Porte R -switch

Avendo una resistenza di pull-up R_{PU} , si possono mettere in cascata più transistori nell'elemento di pull-down:

- la funzione OR si realizza con un collegamento in parallelo;
- la funzione AND si realizza con un collegamento in serie.

L'elemento di pull-down è sempre invertente \Rightarrow data una funzione logica, è necessario ricavare attraverso le leggi di De Morgan la corrispondente funzione negata.

Le prestazioni si riducono fortemente all'aumentare del numero di transistori inseriti, perché si amplificano gli effetti di non idealità.

²Già le porte NAND e NOR CMOS in realtà erano a due livelli, perché la negazione degli ingressi comporta la presenza di un invertitore in serie.

Porte CMOS

L'elemento di pull-up complementare si realizza invertendo le caratteristiche di quello di pull-down nel modo consueto.³

15.3 Pass gate

Il **pass gate** è un interruttore in serie al segnale, realizzato con una coppia di transistori p MOS e n MOS in parallelo. Il segnale di controllo S apre un transistoro chiudendo l'altro e viceversa, e l'uscita assume uno dei due valori di ingresso A o B :

$$U = A \cdot \bar{S} + B \cdot S$$

Se il secondo segnale è il negato del primo ($B = \bar{A}$), si realizza una porta XOR.

La resistenza di perdita R_{on} del transistoro in conduzione e la capacità equivalente C_P associate al pass gate aumentano la costante di tempo \Rightarrow inserire più pass gate in serie porta a un eccessivo ritardo di propagazione.

Rispetto a un collegamento di porte logiche, il pass gate è vantaggioso perché richiede internamente meno transistori. A differenza delle porte logiche, però non rigenera il segnale perché si limita a restituire direttamente uno dei segnali di ingresso \Rightarrow i disturbi non vengono filtrati.

15.4 Consumo

Ogni modulo consuma energia:

- una parte è usata per il funzionamento interno del modulo;
- una parte viene usata per i segnali esterni;
- una parte viene dissipata in calore.

L'energia viene fornita al modulo attraverso la tensione di alimentazione V_{AL} : l'indicatore del consumo è la corrente assorbita dall'alimentazione.

Convieni evitare un consumo di potenza eccessivo:

- forti correnti comportano dei disturbi elettromagnetici;
- per portare una corrente elevata con una bassa dissipazione di potenza, il tratto di filo conduttore in cui scorre deve avere una resistenza equivalente molto bassa \Rightarrow la resistenza equivalente è inversamente proporzionale alla sezione di conduttore;
- per i dispositivi portatili è importante l'autonomia delle batterie;
- un alto consumo di potenza comporta un'elevata quantità di calore disperso, specialmente se i componenti elettronici sono di piccole dimensioni.

15.4.1 Potenza statica P_S

La **potenza statica** P_S è la potenza assorbita in assenza di commutazione, cioè quando la corrente I_{DC} è costante nel tempo:

$$P = VI_{DC}$$

Varia con la temperatura e con la tensione di alimentazione V_{AL} .

Dipende dalla tecnologia del dispositivo e dai carichi resistivi.

La potenza statica di un dispositivo R -switch è dovuta principalmente alla resistenza di perdita R_{on} del transistoro che dissipa potenza durante l'intervallo di tempo in cui l'uscita è

³Si veda la sezione 15.1.1.

portata a massa ($I = H, U = L$), definito in funzione del tempo totale (di solito l'intervallo tra due colpi di clock) attraverso una costante D detta **duty cycle**:

$$P_S = D_I \frac{V_{AL}^2}{R_{PU}}, \quad D_I = \frac{T_H}{T}$$

La potenza statica di un dispositivo CMOS, a differenza di quella della tecnologia R -switch, è approssimativamente nulla perché, in assenza di carico resistivo,⁴ in entrambi gli stati logici vi è un transistor in interdizione.

15.4.2 Potenza dinamica P_D

La **potenza dinamica** P_D è la potenza assorbita per eseguire una commutazione. Con un carico capacitivo, la transizione $L \Rightarrow H$ dal livello basso al livello alto richiede che il condensatore venga caricato con una corrente proveniente dall'alimentazione, e viceversa con una corrente che va verso massa.

Dipende dalla tecnologia del dispositivo e soprattutto dal carico capacitivo. Di solito è molto maggiore della potenza statica P_S .

Se il condensatore C a cui è applicata una differenza di potenziale V viene caricato e scaricato F volte al secondo, scorre una corrente pari a F volte la quantità di carica Q (s) caricata ogni volta:

$$I = F \cdot Q = F \cdot CV$$

con una potenza dinamica media:

$$P = VI = FCV^2$$

La potenza dinamica P_D è per definizione proporzionale alla frequenza di clock \Rightarrow il consumo è proporzionale alla frequenza.

Come ridurre la potenza dinamica P_D ?

- Non conviene ridurre la frequenza di commutazione F perché altrimenti per portare a termine un'operazione sarebbero richiesti più colpi di clock \Rightarrow l'energia totale consumata sarebbe sempre la stessa, oltre al fatto che le prestazioni del circuito sarebbero peggiori.
- Ridurre la capacità equivalente C , che essendo nel transistor MOS proporzionale a $\frac{W}{L}$ comporta una riduzione delle dimensioni.
- Non conviene ridurre troppo la tensione di alimentazione V_{AL} perché comporterebbe una riduzione eccessiva dei margini di rumore.

15.4.3 Prodotto potenza $P_D \times$ ritardo t_P

Un circuito logico ideale è caratterizzato da potenza dissipata nulla ($P_D = 0$) e ritardo nullo ($t_P = 0$). In un dispositivo reale si cerca un compromesso tra:

- correnti elevate: alta velocità e forte dissipazione;
- correnti deboli: bassa velocità e bassa dissipazione.

Si può dimostrare che il prodotto $P_D \times t_P$ di una porta, una volta fissata la sua tecnologia, dipende solo dalla tensione di alimentazione V_{AL} e dalla capacità equivalente C del carico \Rightarrow definisce una iperbole nel piano (P_d, t_P).

⁴Vale anche per un carico puramente capacitivo.

Parte I

Misure elettroniche

Capitolo 16

Incertezze di misura

16.1 Misurazione

16.1.1 Definizioni

Eeguire una **misurazione** significa seguire un certo numero di passi per ottenere il risultato, detto **misura**, cioè l'informazione che va comunicata.

16.1.2 Nomenclatura

misurando la grandezza da misurare, espressa con un modello matematico oppure descrittivo (es. lunghezza della scrivania)

sistema misurato il sistema fisico che viene misurato, che può avere misurandi (es. la scrivania ha lunghezza e grandezza)

operatore chi esegue la misurazione

campione di riferimento la misura è per via diretta/indiretta il confronto tra un campione scelto e la grandezza misurata (es. metro)

grandezze di influenza le grandezze ambientali che alterano in modo apprezzabile il risultato della misurazione (es. temperatura, umidità, disturbi di tipo elettrico)

16.2 Definizioni

L'**incertezza** è un'informazione che stima la bontà della misurazione. Sotto certe condizioni coincide con la fascia di valori. Lo sperimentatore ha anche il compito di stimare correttamente l'incertezza.

16.2.1 Rappresentazioni

- fascia di valori: $x = [9,98 \div 10,02] V$
- semiampiezza della fascia di valori:
 - valore assoluto: $x = 10,00 V \pm 0,02 V$, errore assoluto: $E_x = 0,004 A$
 - valore relativo: $e_x = \frac{E_x}{x} \cdot x = 0,13\%$

16.2.2 Componenti di incertezza

L'incertezza non è mai uguale a 0, perché avrebbe un costo infinito e ci vorrebbe un tempo infinito per eseguirla:

- il misurando ha una **incertezza intrinseca**, anche dovuta all'approssimazione del modello matematico che lo descrive, generalmente trascurabile;
- tutti i campioni hanno un loro **incertezza**, che è dichiarata dal costruttore;
- anche i **dispositivi di misura** hanno delle incertezze, scritte nel manuale;
- lo **stato** è un insieme di grandezze che interagiscono nella misurazione e che definiscono le condizioni in cui si sta lavorando; lo stato non è perfettamente definito (servirebbero troppe grandezze) e varia al variare delle condizioni ambientali.

Alcuni scarti sono calcolabili con modelli teorici, per correggere la misura se la correzione risulta conveniente e non trascurabile nei confronti dell'incertezza. Alcune correzioni possono essere necessarie nell'utilizzo di alcuni strumenti apportanti "errori" di **consumo** (carico strumentale), ovvero quelli che quando messi in funzionamento variano lo stato del sistema rispetto a quando sono spenti.

Le grandezze di influenza sono tutte le grandezze di incertezza che sono dell'ordine di qualche percento. Esse si sommano secondo un certo modello.

16.2.3 Cifre significative

Si mettono solo le cifre significative che danno informazione. Siccome l'incertezza è stimata con qualche percento, servono non più di due cifre significative.

16.3 Modello deterministico di stima dell'incertezza

16.3.1 Definizioni

Il **modello deterministico** prevede una misurazione a lettura singola, quello **probabilistico** è a letture ripetute del valore di output dello strumento. La **funzione di taratura**, scritta nel manuale dello strumento, è un'informazione che, data una certa lettura, permette di eseguire una stima della grandezza (es. un grafico, un tabella, o anche un semplice coefficiente).

L'operatore prudente compie una stima pessimistica delle componenti di incertezza. Il valore centrale nella fascia di valori non è quello più probabile, ma tutti i valori sono ugualmente ragionevoli.

Ogni tanto lo strumento dev'essere ritarato.

16.3.2 Incertezza delle misurazioni indirette

Il risultato di una **misurazione indiretta** è ottenuta elaborando i risultati di una o più **misurazioni dirette**, ovvero effettuate con un campione (es. la velocità è calcolata con lunghezza e tempo).

Ciascuna delle misurazioni dirette ha una incertezza.

Se le grandezze dirette sono ragionevolmente indipendenti, l'incertezza assoluta massima della misurazione indiretta è data da:

$$\delta x = \left| \frac{\partial f}{\partial x_{1o}} \right| \delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_{mo}} \right| \delta x_m$$

con x_{io} valori centrali.

Casi particolari

Somma	Prodotto	Potenza
$x = a + b$ $\delta x = \delta a + \delta b$	$x = a \cdot b$ $\frac{\delta x}{ x } = \frac{\delta a}{ a } + \frac{\delta b}{ b }$	$x = a^n$ $\frac{\delta x}{ x } = n \frac{\delta a}{ a }$
Differenza	Quoziente	Radice
$x = a - b$ $\delta x = \delta a + \delta b$	$x = \frac{a}{b}$ $\frac{\delta x}{ x } = \frac{\delta a}{ a } - \frac{\delta b}{ b }$	$x = \sqrt[n]{a}$ $\frac{\delta x}{ x } = \frac{1}{n} \frac{\delta a}{ a }$

16.4 Compatibilità delle misure

Non si può mai dire che due misure sono uguali. Si introduce la definizione di compatibilità: due misure sono compatibili quando le fasce di valori relative alla stessa quantità misurate in varie occasioni hanno intersezione non nulla.

Valgono le proprietà riflessiva (a è compatibile con a) e simmetrica (se a è compatibile con b , b è compatibile con a), ma non quella transitiva (se a è compatibile con b e b è compatibile con c , non necessariamente a è compatibile con c). Sono **mutualmente compatibili** le misure che hanno almeno un intervallo in comune tra le fasce di valori.

Capitolo 17

Gli oscilloscopi analogici

L'**oscilloscopio** nasce come strumento che visualizza, su uno schermo con tubo a raggi catodici, l'andamento dei segnali di un generatore. Successivamente è diventato uno strumento di misura.

Misura due tensioni V_x e V_y in ingresso variabili nel tempo La prima fa muovere un punto luminoso lungo l'asse x , la seconda lungo l'asse y . Il punto ha una certa persistenza su uno schermo, permettendo di saperne la traiettoria.

17.1 Modi operativi

17.1.1 Modalità XY

Sullo schermo appare la curva parametrica data dalle equazioni: $x = V_x(t)$ e $y = V_y(t)$.

17.1.2 In base ai tempi

Sullo schermo appare solo l'andamento nel tempo di $V_y(t)$, mentre $V_x(t)$ viene generato all'interno dell'oscilloscopio come una funzione proporzionale rispetto al tempo: $x = V_x(t) = k \cdot t$.

Il grafico di V_x è composto da una successione di: salita (detta **rampa**/spazzolata) \rightarrow discesa (qualunque) \rightarrow retta orizzontale. Durante la spazzolata, viene disegnato sullo schermo l'andamento di V_y .

17.2 Parametri

Sul pannello anteriore dell'oscilloscopio, vi sono due potenziometri per regolare la traccia:

- **INT** (intensità): regola la luminosità della traccia \rightarrow una intensità troppo alta produce una traccia troppo spessa e rovina lo schermo;
- **FOCUS**: regola la messa a fuoco del punto \rightarrow è necessario rendere il punto il più piccolo possibile per ridurre l'incertezza di lettura.

17.2.1 Asse verticale

- sensibilità: ampiezza del segnale in ingresso necessaria per muovere di un tot il punto lungo l'asse y (con incertezza di qualche %);
- posizione: la posizione del punto rispetto all'asse V_y quando non c'è tensione V_y ;
- scala verticale (V/div, "Volt a divisione"): si può variare tramite un **attenuatore calibrato**, che ha due manopole: una gira a scatti (con incertezza di qualche %), l'altra gira in modo continuo ma non è tarata;

- impedenza e capacità di ingresso: le grandezze elettriche del modello equivalente (vd. sezione 17.5);
- banda: nel diagramma di Bode dell'oscilloscopio guadagno (modulo)/frequenza, i segnali ad alta frequenza vengono distorti, in particolare attenuati in guadagno → la banda passante è la frequenza per cui si ha un'attenuazione di -3 dB (-30%) rispetto al guadagno che si trova alle basse frequenze;
- tempo di risposta/salita: tipicamente nelle funzioni a gradino (un interruttore accende/spegne un segnale periodico), è nel grafico segnale in uscita/tempo l'intervallo di tempo per passare dal 10% al 90% del valore finale di oscillazione:

$$T_{\text{salita}} = \frac{0,35}{\text{banda}}$$

17.2.2 Asse orizzontale

- velocità di scansione: tramite il **regolatore tarato** (due manopole), si può spostare l'asse dei tempi lungo l'asse x ;
- posizione: la posizione del punto rispetto all'asse V_x all'inizio della spazzolata (consigliato a sinistra dello schermo).

17.3 Sincronizzazione

La traccia ha una persistenza di pochi secondi → per vederla stabile bisogna dare continue spazzolate sull'asse orizzontale (il segnale in ingresso è periodico).

Le spazzolate vanno date in determinati istanti in modo che la traccia sia stabile e la spazzolata sia sincrona con la precedente.

Il pennello elettronico deve partire quando il segnale da visualizzare:

- assume un valore prefissato;
- ha la derivata di un determinato segno (pendenza).

La rampa parte all'**impulso di trigger** ("grilletto"). L'estremo sinistro della spazzolata si dice **punto di trigger**.

Durante la spazzolata il trigger è accecato: la spazzolata continua fino alla fine, senza dare altri impulsi di trigger se V_y passa nuovamente per il punto di trigger. L'**hold off** fa sì che il trigger rimane accecato anche per un certo tempo dopo la fine della rampa.

17.3.1 Parametri del trigger

- livello di trigger: tensione a cui far partire l'impulso (potenziometro)
- pendenza (slope) della tensione (commutatore $+/-$)

17.3.2 Tipi di trigger

Sul pannello anteriore dell'oscilloscopio è presente un commutatore per impostare il segnale da triggerare per far partire la rampa: (il segnale visualizzato è sempre V_y)

- **INT** (internal): si triggera lo stesso segnale V_y ;
- **EXT** (external): si triggera il segnale proveniente dal connettore posto sul pannello posteriore, usato per sincronizzare più strumenti;
- **LINE**: si triggera il segnale sinusoidale di rete, cioè la corrente a 220 V con cui è alimentato l'oscilloscopio.

17.3.3 Correzioni livello di trigger

Per ovviare agli errori di livello di trigger, esiste un auto trigger chiamato **gate**, corrispondente a un commutatore con tre posizioni:

- **normal**: il trigger parte solo quando riceve il segnale;
- **auto**: se il trigger non comanda la spazzolata entro un certo tempo, fornisce comunque una spazzolata ogni tanto, che però non è sincronizzata;
- **single**: il trigger parte una sola volta \Rightarrow serve per vedere i segnali non periodici (es. gradino).

17.4 Oscilloscopi a tracce multiple

L'oscilloscopio a tracce multiple permette di visualizzare sullo schermo più segnali d'ingresso per rilevarne la differenza di fase, cioè la differenza temporale per esempio tra i punti di trigger. Normalmente sono 2 o al massimo 4, per non generare confusione. Si usa un unico punto luminoso per tutte le tracce.

17.4.1 Rappresentazione alternate

La rappresentazione alternate conviene per alte frequenze.

In ogni spazzolata si disegnano alternativamente una sola delle due tracce, tramite un commutatore.

Modalità di trigger

1. si triggera uno solo dei due segnali \Rightarrow utile se i due segnali sono sincronizzati tra di loro, cioè sono isofrequenziali \Rightarrow la **relazione di fase** (cioè differenza di fase nulla) tra i due segnali viene conservata sullo schermo;
2. si triggerano alternativamente entrambi i segnali \Rightarrow utile se i due segnali non sono isofrequenziali, ma bisogna fare attenzione a non perdere la relazione di fase, impostando un opportuno punto di trigger per il secondo segnale.

17.4.2 Rappresentazione chopped

La rappresentazione chopped conviene per basse frequenze.

In una stessa spazzolata si disegnano entrambe le tracce, ciascuna disegnata alternativamente in brevissimi tratti \Rightarrow se la frequenza di commutazione tra le due tracce è abbastanza piccola, le tracce sembrano continue. Come nella seconda modalità di rappresentazione alternate, non è garantita la relazione di fase.

17.5 Stadio di ingresso

L'oscilloscopio è un carico passivo nei confronti del circuito, e può essere visto dall'esterno come il modello equivalente parallelo resistenza-condensatore con impedenza di $\frac{1}{10} \frac{M\Omega}{PF}$ (con incertezza di qualche %). Ai connettori BNC¹ relativi ai segnali in ingresso (V_{yA} , V_{yB} , EXT...), che si trovano sul pannello dell'oscilloscopio, si collegano dei cavi coassiali². Il cavo coassiale può essere visto in un modello elettrico semplificato, composto da una parte resistiva trascurabile e una parte con capacità dell'ordine di grandezza di quella dell'oscilloscopio. Per ragioni di sicurezza:

¹Si veda la voce [Connettore BNC](#) su Wikipedia in italiano.

²Si veda la voce [Cavo coassiale](#) su Wikipedia in italiano.

- cavo coassiale: collegata alla massa vi è una “calza” di separazione tra il filo di rame e un certo materiale sintetico;
- connettore BNC: la parte centrale è circondata da una “ghiera” collegata alla carcassa dell’oscilloscopio, a sua volta collegata alla terra attraverso un terzo filo giallo-verde.

17.6 Esercitazione

Lo scopo dell’esercitazione è imparare a usare l’oscilloscopio. La prima cosa da fare è chiudere l’interruttore differenziale e accendere l’oscilloscopio per evitare il problema di warm-up. L’oscilloscopio riceve i segnali da un sintetizzatore realizzato su scheda, a sua volta collegato a un alimentatore doppio (due tensioni) o triplo (tre tensioni).

17.6.1 Alimentatore

L’alimentatore presenta in alto degli indicatori della tensione e della corrente erogate, e nella parte centrale dei connettori per le due tensioni +12 V e -12 V; ai lati di questi connettori, delle manopole impongono una corrente e una tensione massime per motivi di sicurezza.

17.6.2 Scheda

La scheda può generare segnali con diversi tipi di forme d’onda, che possono essere commutati con i pulsanti Up e Down. Un cavo coassiale BNC collega l’uscita A della scheda con il primo canale dell’oscilloscopio.

17.6.3 Oscilloscopio

Inizialmente, è consigliabile porre il gate in auto, e agire sulla intensità e sul fuoco per regolare la visualizzazione della traccia.

Figura 18: accanto al connettore BNC maschio, vi è un commutatore per determinare il segnale di ingresso:

- DC: il segnale di ingresso non viene filtrato e arriva direttamente all’oscilloscopio (uso normale);
- AC: viene introdotto un filtro passa-alto (da non usare);
- GD (ground): l’ingresso è in cortocircuito → segnale 0 (serve per regolare la posizione y).

Il tasto INV cambia segno al segnale: un segnale $+/-$ viene visualizzato come $-/+$; si può usare per fare la somma o la differenza (a uno dei due si applica INV) dei due segnali.

17.6.4 Misurazioni

- frequenza: Dato un segnale sinusoidale, si imposta il trigger secondo istruzioni, quindi effettua la misurazione del periodo del segnale, cioè l’intervallo di tempo tra due punti che hanno lo stesso valore e la stessa pendenza (tipicamente il punto 0, che dovrebbe essere impostato sulla pendenza massima). Viene calcolato il periodo tramite la formula $T = K_o \cdot n_{div}$, quindi si fa l’inverso per ricavare la frequenza. Truccone: c’è il pulsante autoset che visualizza automaticamente la frequenza!
- duty cycle di un segnale a impulso: è la percentuale dell’intervallo di tempo T_H in cui il segnale è a picco rispetto all’intero periodo T .

17.6.5 Cursori

L'oscilloscopio può calcolare automaticamente l'intervallo di tempo (impostando le barre verticalmente) o la differenza di tensione (orizzontalmente) tra due cursori (= barre tratteggiate sullo schermo).