



Técnicas de Conteo
MSEd. Esp. Oscar Javier Gómez Mora

Técnicas de conteo

Introducción

Suponga que se encuentra al final de una línea de ensamble final de un producto y que un supervisor le ordena contar los elementos de un lote que se ha manufacturado hace unas horas y del que se desconoce el número de productos que lo constituyen, de inmediato usted empezará a contar un producto tras otro y al final informará al supervisor que son, 48, 54 u otro número cualquiera. Ahora suponga que ese mismo supervisor le plantea la siguiente pregunta ¿cuántas muestras o grupos será posible formar con los productos del lote, si las muestras o grupos a formar son de ocho elementos cada una de ellas?

En el primer caso el cuantificar los elementos del lote no presenta dificultad alguna para la persona encargada de hacerlo, pero cuando se le hace el segundo planteamiento, al tratar de formar las muestras o grupos de ocho elementos la persona encargada empezará a tener dificultad para hacerlo, en casos como este es necesario hacer uso de las técnicas de conteo para cuantificar los elementos del evento en cuestión (el número de muestras posibles a formar de ocho elementos), luego, ¿qué son las técnicas de conteo?

Las técnicas de conteo son aquellas que son usadas para enumerar eventos difíciles de cuantificar.

Ejemplos en los que definitivamente haremos uso de las técnicas de conteo serían:

-¿Cuántas comisiones pro limpieza del instituto se pueden formar si hay 150 alumnos que desean ayudar en esta tarea y se desea formar comisiones de ocho alumnos?

-¿Cuántas representaciones de alumnos pueden ser formadas a) si se desea que estas consten solo de alumnos de Ingeniería Química?, b) se desea que el presidente sea un químico?, c) se desea que el presidente y tesorero sean químicos? Para todos los casos, se desea que las representaciones consten de once alumnos.

-¿Cuántas maneras tiene una persona de seleccionar una lavadora, una batidora y dos licuadoras, si encuentra en una tienda 8 modelos diferentes de lavadoras, 5 modelos diferentes de batidoras y 7 modelos diferentes de licuadoras?

Se les denomina técnicas de conteo a: las combinaciones, permutaciones y diagrama de árbol, las que a continuación se explicarán y hay que destacar que éstas nos proporcionan la información de todas las maneras posibles en que ocurre un evento determinado.

Las bases para entender el uso de las técnicas de conteo son el principio multiplicativo y el aditivo, los que a continuación se definen y se hace uso de ellos.



3.1 Principios

Si se desea realizar una actividad que consta de r pasos, en donde el primer paso de la actividad a realizar puede ser llevado a cabo de N_1 maneras o formas, el segundo paso de N_2 maneras o formas y el r -ésimo paso de N_r maneras o formas, entonces esta actividad puede ser llevada a efecto de;

$$N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r \text{ maneras o formas}$$



El principio multiplicativo implica que cada uno de los pasos de la actividad deben ser llevados a efecto, uno tras otro.

Ejemplos:

- 1) Una persona desea construir su casa, para lo cuál considera que puede construir los cimientos de su casa de cualquiera de dos maneras (concreto o block de cemento), mientras que las paredes las puede hacer de adobe, adobón o ladrillo, el techo puede ser de concreto o lámina galvanizada y por último los acabados los puede realizar de una sola manera ¿cuántas maneras tiene esta persona de construir su casa?

Solución:

Considerando que $r = 4$ pasos

$N_1 =$ maneras de hacer cimientos = 2

$N_2 =$ maneras de construir paredes = 3

$N_3 =$ maneras de hacer techos = 2

$N_4 =$ maneras de hacer acabados = 1

$$N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4 = 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12 \text{ maneras de construir la casa}$$

El principio multiplicativo, el aditivo y las técnicas de conteo que posteriormente se tratarán nos proporcionan todas las maneras o formas posibles de como se puede llevar a cabo una actividad cualquiera.

- 2) ¿Cuántos números telefónicos es posible diseñar, los que deben constar de seis dígitos tomados del 0 al 9?, a. Considere que el cero no puede ir al inicio de los números y es posible repetir dígitos, b. El cero no debe ir en la primera posición y no es posible repetir dígitos, c. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b empiezan por el número siete?, d. ¿Cuántos de los números telefónicos del inciso b forman un número impar?.

Solución:

a. $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900,000$ números telefónicos

b. $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 136,080$ números telefónicos

c. $1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15,120$ números telefónicos

d. $8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 5 = 67,200$ números telefónicos





Ejercicios:

1. Si una prueba se compone de 12 preguntas de verdadero-falso, a. ¿de cuántas maneras diferentes un estudiante puede dar una respuesta para cada pregunta?, b. Si de antemano el maestro le dice que la primera pregunta es verdadera, ¿cuántas maneras tiene de contestar esta prueba?.
2. Una computadora de propósito especial contiene tres conmutadores, cada uno de los cuales puede instalarse de tres maneras diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes puede instalarse el banco de conmutadores de la computadora?
3. Si los cinco finalistas de un torneo internacional de golf son España, Estados Unidos, Portugal, Uruguay y Japón, a. Diga de cuántas maneras es posible que se otorgue un primero, segundo lugar y tercer lugar, b. Considerando que el primer lugar lo gana Portugal y el segundo lo gana Estados Unidos, ¿cuántas maneras hay de que se otorguen los lugares antes mencionados?
4. Un determinado zapato se fabrica en 5 estilos diferentes y en 4 colores distintos para cada uno. Si la zapatería desea mostrar a su clientela pares de zapatos en todos los estilos y colores, ¿cuántos pares distintos deberán colocar en el aparador?
5. Un estudiante de primer año debe tomar un de ciencia, uno de humanidades y otro de matemáticas. Si puede escoger entre cualquiera de 6 cursos de ciencias, 4 de humanidades y 4 de matemáticas, ¿cuántas maneras tiene de seleccionar las materias?
6. Un urbanista de una nueva subdivisión ofrece a los clientes prospectos para la compra de una casa, la posibilidad de seleccionar cualquiera de 4 diseños diferentes, tres sistemas de calefacción, cochera con puertas o sin ellas, y patio o pórtico, ¿cuántos planes distintos están disponibles para el comprador?
7. ¿Cuántos menús que consisten de sopa, emparedado, postre y un refresco se puede ofrecer si se puede seleccionar entre 4 sopas diferentes, 3 clases de emparedados, 5 postres y 4 refrescos?



3.2 Notación factorial

Se usa la notación $n!$ para denotar el producto de los enteros positivos desde 1 hasta n .



RECORDAR

- 1) $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$
- 2) $0! = 1$
- 3) $1! = 1$
- 4) $n! = (n - 1)! \times n$

3.3 Permutaciones

Para entender lo que son las permutaciones es necesario definir lo que es una combinación y lo que es una permutación para establecer su diferencia y de esta manera entender claramente cuando es posible utilizar una combinación y cuando utilizar una permutación al momento de querer cuantificar los elementos de algún evento.

Combinación:

Es todo arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

Permutación:

Es todo arreglo de elementos en donde nos interesa el lugar o posición que ocupa cada uno de los elementos que constituyen dicho arreglo.

Para ver de una manera objetiva la diferencia entre una combinación y una permutación, plantearemos cierta situación.

Suponga que un salón de clase está constituido por 35 alumnos. a) El maestro desea que tres de los alumnos lo ayuden en actividades tales como mantener el aula limpia o entregar material a los alumnos cuando así sea necesario.

b) El maestro desea que se nombre a los representantes del salón (Presidente, Secretario y Tesorero).

Solución:

- a) Suponga que por unanimidad se ha elegido a Daniel, Arturo y a Rafael para limpiar el aula o entregar material, (aunque pudieron haberse seleccionado a Rafael, Daniel y a Enrique, o pudo haberse formado cualquier grupo de tres personas para realizar las actividades mencionadas anteriormente).

¿Es importante el orden como se selecciona a los elementos que forma el grupo de tres personas?



Reflexionando al respecto nos damos cuenta de que el orden en este caso no tiene importancia, ya que lo único que nos interesaría es el contenido de cada grupo, dicho de otra forma, ¿quiénes están en el grupo? Por tanto, este ejemplo es una combinación, quiere decir esto que las combinaciones nos permiten formar grupos o muestras de elementos en donde lo único que nos interesa es el contenido de los mismos.

b) Suponga que se han nombrado como representantes del salón a Daniel como Presidente, a Arturo como secretario y a Rafael como tesorero, pero resulta que a alguien se le ocurre hacer algunos cambios, los que se muestran a continuación:

Cambios:

PRESIDENTE:	Daniel	Arturo	Rafael	Daniel
SECRETARIO:	Arturo	Daniel	Daniel	Rafael
TESORERO:	Rafael	Rafael	Arturo	Arturo

Ahora tenemos cuatro arreglos, ¿se trata de la misma representación?

Creo que la respuesta sería no, ya que el cambio de función que se hace a los integrantes de la representación original hace que definitivamente cada una de las representaciones trabaje de manera diferente, ¿importa el orden de los elementos en los arreglos?. La respuesta definitivamente sería sí, luego entonces las representaciones antes definidas son diferentes ya que el orden o la forma en que se asignan las funciones sí importa, por lo tanto es este caso estamos tratando con permutaciones.

A continuación obtendremos las fórmulas de permutaciones y de combinaciones, pero antes hay que definir lo que es $n!$ (ene factorial), ya que está involucrado en las fórmulas que se obtendrán y usarán para la resolución de problemas.

$n!$ = al producto desde la unidad hasta el valor que ostenta n .

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$

Ejem.

- $10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 10 = 3,628,800$
- $8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 8 = 40,320$
- $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 6 = 720$, etc., etc.

Obtención de fórmula de permutaciones.

Para hacer esto, partiremos de un ejemplo.

¿Cuántas maneras hay de asignar los cuatro primeros lugares de un concurso de creatividad que se verifica en las instalaciones de nuestro instituto, si hay 14 participantes?

Solución:

Haciendo uso del principio multiplicativo,

$14 \times 13 \times 12 \times 11 = 24,024$ maneras de asignar los primeros cuatro lugares del concurso

Esta solución se debe, a que al momento de asignar el primer lugar tenemos a 14 posibles candidatos, una vez asignado ese lugar nos quedan 13 posibles candidatos para



el segundo lugar, luego tendríamos 12 candidatos posibles para el tercer lugar y por último tendríamos 11 candidatos posibles para el cuarto lugar.

Luego si n es el total de participantes en el concurso y r es el número de participantes que van a ser premiados, y partiendo de la expresión anterior, entonces.

$$14 \times 13 \times 12 \times 11 = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1)$$

si la expresión anterior es multiplicada por $(n - r)! / (n - r)!$, entonces

$$= n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r + 1) (n - r)! / (n - r)!$$

$$= n! / (n - r)!$$

Por tanto, la fórmula de permutaciones de r objetos tomados de entre n objetos es:

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Esta fórmula nos permitirá obtener todos aquellos arreglos en donde el orden es importante y solo se usen parte (r) de los n objetos con que se cuenta, además hay que hacer notar que no se pueden repetir objetos dentro del arreglo, esto es, los n objetos son todos diferentes.

Entonces, ¿qué fórmula hay que usar para arreglos en donde se utilicen los n objetos con que se cuenta?

Si en la fórmula anterior se sustituye n en lugar de r , entonces.

$${}_n P_n = n! / (n - n)! = n! / 0! = n! / 1 = n!$$

Como $0! = 1$ de acuerdo a demostración matemática, entonces

$${}_n P_n = n!$$



Ejemplos:

- 1) ¿Cuántas representaciones diferentes serán posibles formar, si se desea que consten de Presidente, Secretario, Tesorero, Primer Vocal y Segundo Vocal?, si esta representación puede ser formada de entre 25 miembros del sindicato de una pequeña empresa.

Solución:**Por principio multiplicativo:**

$25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6,375,600$ maneras de formar una representación de ese sindicato que conste de presidente, secretario, etc., etc.

Por Fórmula:

$$n = 25, \quad r = 5$$

$${}_{25}P_5 = 25! / (25 - 5)! = 25! / 20! = (25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 \times \dots \times 1) / (20 \times 19 \times 18 \times \dots \times 1) = 6,375,600 \text{ maneras de formar la representación}$$

- 2) ¿Cuántos puntos de tres coordenadas (x, y, z), será posible generar con los dígitos 0, 1, 2, 4, 6 y 9?, Si, a. No es posible repetir dígitos, b. Es posible repetir dígitos.

Solución:**a. Por fórmula:**

$$n = 6, \quad r = 3$$

$${}_6P_3 = 6! / (6 - 3)! = 6! / 3! = 6 \times 5 \times 4 \times 3! / 3! = 6 \times 5 \times 4 = 120 \text{ puntos posibles}$$

Nota: este inciso también puede ser resuelto por el principio multiplicativo

b. Por el principio multiplicativo:

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ puntos posibles}$$

¿Cuál es la razón por la cuál no se utiliza en este caso la fórmula? No es utilizada debido a que la fórmula de permutaciones sólo se usa cuando los objetos no se repiten, esto quiere decir que en el inciso a. Los puntos generados siempre van a tener coordenadas cuyos valores son diferentes ejem. (1, 2, 4), (2, 4, 6), (0, 4, 9), etc. etc., mientras que los puntos generados en el inciso b. Las coordenadas de los puntos pueden tener valores diferentes o repeticiones de algunos valores o pueden tener todas las coordenadas un mismo valor ejem. (1, 2, 4), (1, 2, 2), (1, 1, 1), etc., etc.

**Ejercicio:**

¿Cuántas claves de acceso a una computadora será posible diseñar, si debe constar de tres letras, seguidas de cuatro dígitos, las letras serán tomadas del abecedario y los números de entre los dígitos del 0 al 9. a. Considere que se pueden repetir letras y números, b. Considere que no se pueden repetir letras y números, c. ¿Cuántas de las claves del inciso X empiezan por la letra W y terminan por el número 1?



3.4 Pruebas ordenadas

Se le llama prueba ordenada al hecho de seleccionar r objetos de entre n objetos contenidos en una urna uno tras otro. Una prueba ordenada puede ser llevada a efecto de dos maneras:

- 1) Con sustitución (con reemplazo).- En este caso se procede a seleccionar el primer objeto de entre los n que hay, se observa de qué tipo es y se procede a regresarlo a la urna, luego se selecciona el siguiente objeto, lo anterior se repite hasta que se han extraído los r objetos de la prueba, por tanto el número de pruebas ordenadas de con sustitución se obtiene:

$$\text{Número total de pruebas ordenadas con sustitución} = n \times n \times n \times \dots \times n = n^r$$

Hay n maneras de seleccionar el primer objeto, luego al seleccionar el segundo objeto, dado que se ha regresado a la urna el primer objeto, también se tendrán n objetos y así sucesivamente.

- 2) Sin sustitución (sin reemplazo).- En este caso se procede a seleccionar el primer objeto, el cual no es regresado a la urna, luego se selecciona el segundo objeto, lo anterior se repite hasta completar los r objetos de la prueba, por lo que el número total de pruebas ordenadas sin sustitución se obtiene:

$$\text{Número total de pruebas ordenadas sin sustitución} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = {}_n P_r$$

Hay n maneras de seleccionar el primer objeto, luego al seleccionar el segundo objeto, hay $n-1$ maneras, dado que el primer objeto no se regresa a la urna, luego cuando se extrae el r -ésimo objeto, hay $(n-r+1)$ de que sea seleccionado.



Ejemplos:

- 1) ¿Cuántas maneras hay de que se asignen tres premios del sorteo ITSON en donde el primer premio es una departamento, el segundo premio es un auto y el tercer premio es un centro de cómputo, si los participantes en este sorteo son 120 personas, a.sí la asignación se puede hacer con sustitución, b.sí la asignación se puede hacer sin sustitución.

Solución:**a. Por principio multiplicativo:**

$$120 \times 120 \times 120 = 1,728,000 \text{ maneras de asignar los premios}$$

Por fórmula: $n = 120$, $r = 120$

$$n^r = 120^3 = 1,728,000 \text{ maneras de asignar los tres premios}$$

Hay que considerar que en este caso, al regresar cada boleto que es extraído de la urna, las personas que participan en el sorteo tienen la posibilidad de no ganar uno solo de los premios, de ganar un premio, dos de los premios o los tres premios. Cosa que generalmente no ocurre.

b. Por principio multiplicativo:

$$120 \times 119 \times 118 = 1,685,040 \text{ maneras de asignar los premios}$$

Por fórmula:

$$n = 120, \quad r = 3$$

$${}_{120}P_3 = 120! / (120 - 3)! = 120! / 117! = 120 \times 119 \times 118 = 1,685,040 \text{ maneras de asignar los premios}$$

Hay que hacer notar que en este caso, como los boletos que son seleccionados ya no regresan a la urna de donde fueron extraídos, los participantes solo pueden recibir un premio en caso de que fueran de los afortunados. Esta es la forma en que generalmente se efectúa un sorteo.



- 2) ¿Cuántas formas hay de asignar las primeras cinco posiciones de una carrera de autos de fórmula K, si participan 26 autos en esta carrera?. Considere que la asignación es totalmente al azar.

Solución:

Esta asignación debe ser sin sustitución, esto es, se trata de una prueba ordenada sin sustitución, por lo que la solución es la que se muestra.

$$n = 26, \quad r = 5$$

${}_{26}P_5 = 26! / (26 - 5)! = 26! / 21! = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7,893,600$ maneras de asignar las cinco primeras posiciones de salida



Ejercicios:

1. ¿Cuántas formas hay de asignar el orden de participación de las primeras 5 concursantes de 11 finalistas de un concurso de Miss Mundo?
2. ¿Cuántas formas hay de asignar los primeros 10 lugares en un maratón si participan 30 personas?



3.5 Combinaciones.

Como ya se mencionó anteriormente, una combinación, es un arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupan los mismos dentro del arreglo. En una combinación nos interesa formar grupos y el contenido de los mismos.

La fórmula para determinar el número de combinaciones es:

$${}_n C_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

${}_n C_r$ = Combinaciones de r objetos tomados de entre n objetos

Donde se observa que,

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!}$$

La expresión anterior nos explica como las combinaciones de r objetos tomados de entre n objetos pueden ser obtenidas a partir de las permutaciones de r objetos tomados de entre n objetos, esto se debe a que como en las combinaciones no nos importa el orden de los objetos, entonces si tenemos las permutaciones de esos objetos al dividirlos entre $r!$, les estamos quitando el orden y por tanto transformándolas en combinaciones, de otra forma, también si deseamos calcular permutaciones y tenemos las combinaciones, simplemente con multiplicar estas por el $r!$ obtendremos las permutaciones requeridas.

$${}_n P_r = {}_n C_r r!$$

Y si deseamos $r = n$ entonces;

$${}_n C_n = n! / (n-n)!n! = n! / 0!n! = 1$$

¿Qué nos indica lo anterior?

Que cuando se desea formar grupos con la misma cantidad de elementos con que se cuenta solo es posible formar un grupo.

Ejemplos:

- 1) Si se cuenta con 14 alumnos que desean colaborar en una campaña pro limpieza del ITSON, cuántos grupos de limpieza podrán formarse si se desea que consten de 5 alumnos cada uno de ellos, b.si entre los 14 alumnos hay 8 mujeres, ¿cuántos de los grupos de limpieza tendrán a 3 mujeres?.

Solución:

a. $n = 14$, $r = 5$



$$\begin{aligned}
 {}_{14}C_5 &= 14! / (14 - 5)!5! = 14! / 9!5! \\
 &= 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9! / 9!5! \\
 &= 2002 \text{ grupos}
 \end{aligned}$$

Entre los 2002 grupos de limpieza hay grupos que contienen solo hombres, grupos que contienen solo mujeres y grupos mixtos, con hombres y mujeres.

b. $n = 14$ (8 mujeres y 6 hombres), $r = 5$

En este caso nos interesan aquellos grupos que contengan 3 mujeres y 2 hombres

$$\begin{aligned}
 {}_8C_3 * {}_6C_2 &= (8! / (8 - 3)!3!) * (6! / (6 - 2)!2!) \\
 &= (8! / 5!3!) * (6! / 4!2!) \\
 &= 8 \times 7 \times 6 \times 5 / 2! \\
 &= 840 \text{ grupos con 3 mujeres y 2 hombres, puesto que cada}
 \end{aligned}$$

grupo debe constar de 5 personas

- 2) Para contestar un examen un alumno debe contestar 9 de 12 preguntas, a.¿Cuántas maneras tiene el alumno de seleccionar las 9 preguntas?, b.¿Cuántas maneras tiene si forzosamente debe contestar las 2 primeras preguntas?, c.¿Cuántas maneras tiene si debe contestar una de las 3 primeras preguntas?.

Solución:

a. $n = 12$, $r = 9$

$$\begin{aligned}
 {}_{12}C_9 &= 12! / (12 - 9)!9! \\
 &= 12! / 3!9! = 12 \times 11 \times 10 / 3! \\
 &= 220 \text{ maneras de seleccionar las nueve preguntas o dicho de otra}
 \end{aligned}$$

manera,

el alumno puede seleccionar cualquiera de 220 grupos de 9 preguntas para contestar el examen

b. ${}_2C_2 * {}_{10}C_7 = 1 \times 120 = 120$ maneras de seleccionar las 9 preguntas entre las que están las dos primeras preguntas

c. ${}_3C_1 * {}_9C_8 = 3 \times 9 = 27$ maneras de seleccionar la 9 preguntas entre las que está una de las tres primeras preguntas





Ejercicios:

1. Una señora desea invitar a cenar a 5 de 11 amigos que tiene ¿Cuántas maneras tiene de invitarlos?
2. ¿Cuántas maneras hay de repartir 15 muñecas entre tres niñas, si se desea darle 3 la primera niña, 10 a la segunda niña y 2 al tercera niña?.
3. ¿Cuántas maneras hay de repartir 20 botellas entre 4 personas?.



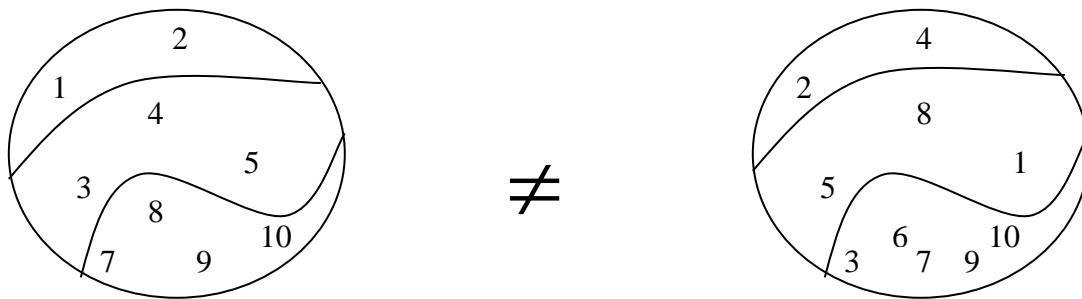
3.6 Particiones ordenadas

Se le llama partición ordenada al hecho de repartir n objetos en células de una cantidad de x_1 objetos, x_2 objetos,.....y x_k objetos.

Para deducir la fórmula de particiones ordenadas partiremos de un ejemplo.

¿Cuántas maneras hay de repartir 10 libros diferentes entre tres alumnos, si al primero le daremos 2, al segundo 3 y el resto al tercer alumno?

Ejemplos de esta partición serían las siguientes si se numeran los libros del 1 al 10;



Solución:

Lo primero que debemos hacer es seleccionar 2 libros de los 10 que se tienen para el primer alumno, esto es;

$${}_{10}C_2 = 10! / (10 - 2)!2! = 10! / 8!2! = 45 \text{ maneras de seleccionar los libros}$$

Luego se seleccionan 3 libros de los 8 que quedan para el segundo alumno;

$${}_8C_3 = 8! / (8 - 3)!3! = 8! / 5!3! = 56 \text{ maneras}$$

Y por último se procederá a seleccionar cinco libros de los cinco que quedan para el tercer alumno, lo que se muestra a continuación;

$${}_5C_5 = 5! / (5 - 5)!5! = 5! / 0!5! = 1 \text{ manera}$$

Por tanto el número total de particiones ordenadas en células de 2, 3 y 5 elementos se determina:

$${}_{10}C_2 * {}_8C_3 * {}_5C_5 = (10! / (10 - 2)!2!) * (8! / (8 - 3)!3!) * (5! / (5 - 5)!5!) = 10! / 2!3!5!$$



La expresión anterior nos recuerda a la fórmula utilizada para encontrar las permutaciones de n objetos, entre los cuales hay algunos objetos que son iguales, por lo que usaremos la misma fórmula para encontrar las particiones ordenadas.

Por tanto la fórmula para las particiones ordenadas sería:

$$n P_{x_1, x_2, \dots, x_k} = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!}$$

Esta fórmula sólo puede ser utilizada cuando se reparten todos los objetos, no parte de ellos, en ese caso se usarán combinaciones.

Donde:

$n P_{x_1, x_2, \dots, x_k}$ = Total de particiones ordenadas o reparticiones que es posible hacer cuando los n objetos son repartidos en grupos de x_1 objetos, x_2 objetos y x_k objetos.

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

Ejemplos:

- 1) ¿Cuántas maneras hay de repartir 9 juguetes entre tres niños, si se desea que al primer niño le toquen 4 juguetes, al segundo 2 y al tercero 3 juguetes?

Solución:

Por combinaciones,

$${}_9 C_4 * {}_5 C_2 * {}_3 C_3 = 126 * 10 * 1 = 1260 \text{ maneras de repartir los juguetes}$$

Por fórmula,

$$n = 9$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 3$$

$${}_9 P_{4,2,3} = 9! / 4!2!3! = 1,260 \text{ maneras de repartir los juguetes}$$

- 2) ¿Cuántas maneras hay de que se repartan 14 libros diferentes entre 3 alumnos, si se pretende que al primer alumno y al segundo les toquen 5 libros a cada uno y al tercero le toque el resto?, b. ¿Cuántas maneras hay de que se repartan los libros si se desea dar 5 libros al primer alumno, 3 al segundo y 2 libros al tercer alumno?



${}_{14}P_{5,5,4} = 14! / 5!5!4! = 21,021$ maneras de repartir los libros en grupos de 5, 5 y 4 libros

b. Por combinaciones:

${}_{14}C_5 * {}_9C_3 * {}_6C_2 = 2,002 * 84 * 15 = 2,522,520$ maneras de repartir 10 de los 14 libros en grupos de 5, 3 y 2 libros



Ejercicios:

1. ¿Cuántas maneras hay de repartir a 12 alumnos en 4 equipos de 3 personas cada uno de ellos para que realicen prácticas de laboratorio diferentes?.
2. ¿Cuántas maneras hay de repartir 10 golosinas entre 4 niños, si se desea que al primer niño le toquen 2, al segundo 4, al tercero 2 y al tercero 2.
3. ¿Cuántas maneras hay de repartir 10 tacos entre 5 comensales, si se desea que al primer comensal le toquen 2, al segundo 5, al tercero 1 y al tercero 2.

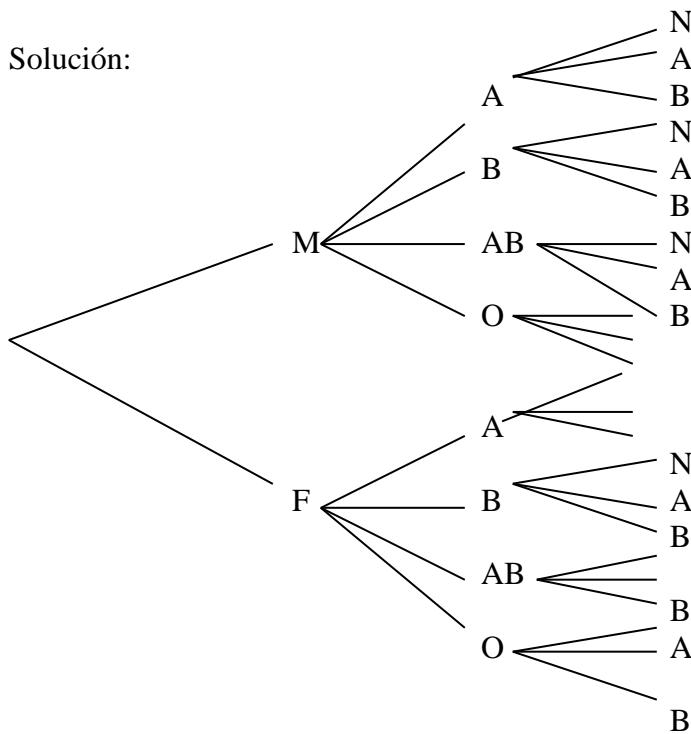


3.7 Diagrama de árbol

Un diagrama de árbol es una representación gráfica de un experimento que consta de r pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo.

Ejemplos:

1. Un médico general clasifica a sus pacientes de acuerdo a: su sexo (masculino o femenino), tipo de sangre (A, B, AB u O) y en cuanto a la presión sanguínea (Normal, Alta o Baja). Mediante un diagrama de árbol diga en cuantas clasificaciones pueden estar los pacientes de este médico?



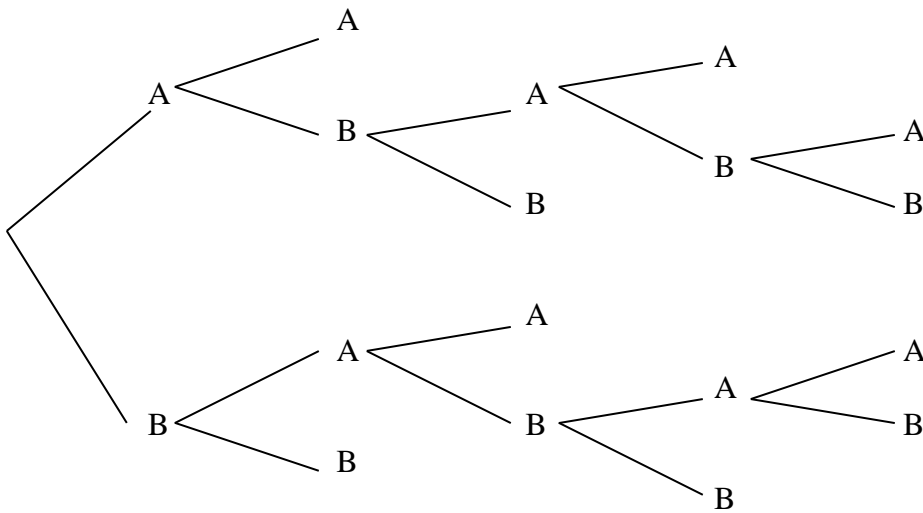
Si contamos todas las ramas terminales, nos damos cuenta que el número de clasificaciones son $2 \times 4 \times 3 = 24$ mismas que podemos enumerar; MAN, MAA, MAB, MBN, MBA, MBB, etc, etc.

1. Dos equipos denominados A y B se disputan la final de un partido de baloncesto, aquel equipo que gane dos juegos seguidos o complete un total de tres juegos ganados será el que gane el torneo. Mediante un diagrama de árbol diga de cuantas maneras puede ser ganado este torneo,

Solución:

A = gana el equipo A

B = gana el equipo B



En este diagrama se muestran que hay solo diez maneras de que se gane el torneo, que se obtienen contando las ramas terminales de este diagrama de árbol, las que es posible enumerar;

AA, AB, BA, BB, ABA, ABB, BAA, BAB, etc, etc.



Ejercicios:

1. Un dispositivo Biomecánico para emergencias médicas puede operar 0, 1 o 2 veces por noche. Trace un diagrama de árbol para demostrar que existen 10 maneras diferentes en las que puede operar para un total de 6 veces en cuatro noches.
2. Un inspector de construcciones tiene que revisar el cableado de un nuevo de departamentos, ya sea el lunes, el martes, miércoles o jueves, a las 8 A. M., a las 10 A. M. o a las 2 P. M. Obtenga las maneras en que el inspector puede realizar las revisiones del cableado, haciendo uso ahora de un diagrama de árbol.

