Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2018/2019

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 5

Die Pausenaufgaben

Aufgabe 5.1. Wir zählen, indem wir in die Hände klatschen. Die nächste Zahl ist also durch ein zusätzliches Klatschen bestimmt. Zählen Sie in diesem Klatschsystem, ohne sich durch ein anderes Zählsystem zu kontrollieren. Es empfiehlt sich, mit einem Rhythmus zu arbeiten.

Aufgabe 5.2. Zähle im Zweiersystem bis 100000.

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.3. Bauer Ernst war in der Dorfkneipe und hat zu viel Bier getrunken. Er kann sich zwar an alles erinnern, aber nicht mehr, wie man im Dezimalsystem zählt. Seine Frau fragt ihn, wie viele Bier er getrunken hat. Er antwortet: „ein Bier und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins und dann noch eins“. Wie viele Bier hat er im Dezimalsystem getrunken?

Aufgabe 5.4. Warum macht der Kellner Striche auf den Bierdeckel, statt Zahlen drauf zu schreiben?

Aufgabe 5.5. Bestimme die Anzahl der Silben in der Formulierung „Die Hintereinanderschaltung von Abbildungen ist wieder eine Abbildung“. Warum ist es schwierig, dies ohne Fingerzählen durchzuführen?

Aufgabe 5.6. Erstelle das „kleine Einsnachnull“.

Aufgabe 5.7. Wir zählen

heute, morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen, ...

(1) Was ist überübermorgen von morgen?
(2) Was ist morgen von morgen von morgen von übermorgen?
(3) Was ist heute von überüberübermorgen?
(4) Welche Tage sind ein morgen eines Tages der Zählliste?

Aufgabe 5.8.*

Wir zählen

ich, Mama, Oma, Uroma, Ururoma, ...

(1) Was ist die Mama der Urururoma?
(2) Was ist die Uroma der Uroma?
(3) Was ist die Oma der Oma der Oma?
(4) Was ist das ich der Uroma der Ururoma?

Aufgabe 5.9. Der Alleinherrscher X herrscht mit großer Willkür und möchte im Alltag des Volkes präsent sein. Deshalb schafft er das übliche Zählen ab und ersetzt es durch die Namen seiner Söhne gemäß der Geburtsreihenfolge. Es soll also hinfort (nach der Null) mit

Peter , Heinz , Ulrich , Albrecht , Karl

gezählt werden, danach soll es mit Überpeter, Überheinz, ... , Überkarl, Überüberpeter, ..., Überüberkarl, Überüberüberpeter, ... weitergehen. Ist dies ein mathematisch sinnvolles Zählen? Benenne die Dezimalzahl 27 in diesem Sohnsystem. Welche Dezimalzahl verbirgt sich hinter Überüberüberüberüberüberüberalbrecht?

Aufgabe 5.10. Intelligente zählbegabte Lebewesen aus einer fernen Galaxie besuchen die Erde. Sie besitzen nur ein Auge, dass immer nach links schaut. Sie lernen somit das menschliche Zählen anhand der linken Straßenseiten (bei wechselseitiger Nummerierung) kennen und berichten zuhause: „Die Menschen auf der Erde zählen

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23,$$

und so weiter. Es treten vorne Ziffern auf, die als Endziffer nicht erlaubt sind. Die Idee einer 0 scheinen sie nicht zu kennen“.

(1) Kann man mit diesem Straßenseitensystem zählen?
(2) Welche Hausnummer bekommt das n-te Haus auf der linken (ungeraden) Straßenseite, welche Hausnummer bekommt das n-te Haus auf der rechten (geraden) Straßenseite?
(3) Welche Zahlen im Fünfersystem stimmen inhaltlich mit den Straßenseitenzahlen überein?
(4) Was ist der Nachteil des Straßenseitensystems gegenüber dem Fünfersystem?
(5) Wäre es für das Zählen ein Nachteil, wenn wir $1, 2, 3, 4, \ldots, 9, 11, 12, \ldots, 19, 21, \ldots, 99, 111, 112$ zählen würden? Hat es andere Nachteile?

Aufgabe 5.11. Im Euromünzensystem wird so gezählt, dass die Koeffizienten (also $0, 1, 2$) der minimalen Darstellung einer Zahl im Sinne von Satz 2.1 in absteigender Wertreihenfolge angegeben werden. Bestimme die zehn Nachfolger von

$$1020\,.$$

Die folgende Aufgabe sollte man nicht bearbeiten, sondern zum Anlass nehmen, sich über unser Ziffernsystem zu freuen.

Aufgabe 5.12. Man definiere, welche endlichen Zeichenketten aus I, V, X, L, C, D, M im römischen Zahlsystem (mit oder ohne Subtraktionsregel) erlaubt sind und welche nicht. Man erstelle einen Algorithmus, der zu jeder erlaubten römischen Zahl den Nachfolger berechnet.

Aufgabe 5.13. Es sei $M \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Telefonnummern in einer Stadt. Besitzt die Nachfolgerfunktion auf dieser Menge eine sinnvolle Interpretation?

Aufgabe 5.14. Bestimme die Anzahl der Menge $\{1, \ldots, 6\}$ in den in der Vorlesung gegebenen Zählsystemen.

Aufgabe 5.15. Zeige, dass die Menge $\{1, \ldots, n\}$ endlich mit n Elementen ist.

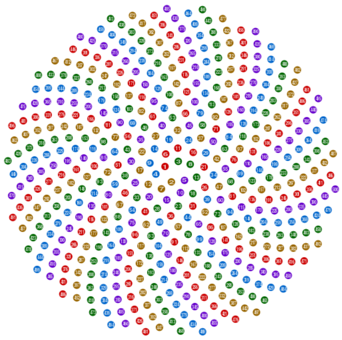
Aufgabe 5.16.*

Es sei M eine endliche Menge mit n Elementen und sei w ein Element, das nicht zu M gehöre. Zeige, dass dann die Vereinigung $M \cup \{w\}$ genau n' Elemente besitzt.

Aufgabe 5.17. Beschreibe mit Quantoren die Eigenschaft einer Abbildung

$$F\colon L \longrightarrow M,$$

injektiv bzw. surjektiv zu sein.



Aufgabe 5.18. Bestimme die Anzahl der Punkte im Bild nebenan.

Aufgabe 5.19. Bestimme die Anzahl der folgenden Mengen.

(1) $\{5, 17, 43, 26, 9, 65, 63, 38, 30, 85, 93, 54\}$,
(2) $\{6, 11, 46, 76, 7, 54, 6, 46, 39, 43, 85, 62, 46, 54, 12, 11\}$,
(3) $\{|||, ||||, ||||||, |||||, |||||||||, |||, |, |||, ||||, ||, ||||||, ||||||\}$.

Aufgabe 5.20.*

Die Absetzmulde ist voll mit Schutt und soll durch eine leere Mulde ersetzt werden, die das Absetzkipperfahrzeug bringt, das auch die volle Mulde mitnehmen soll. Auf dem Fahrzeug und auf dem Garagenvorplatz, wo die volle Mulde steht, ist nur Platz für eine Mulde. Dafür kann die Straße als Zwischenablage genutzt werden. Wie viele Ladevorgänge sind vor Ort nötig, bis der Gesamtaustausch vollständig abgeschlossen ist?

Aufgabe 5.21. Welche der folgenden Vokabeln passen zu einer Abbildung, welche zu einer bijektiven Abbildung? Entsprechung, Wertzuweisung, Korrespondenz, Umkehrbarkeit, Zuordnung, Eineindeutigkeit, Wechselseitigkeit.

Aufgabe 5.22. Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5.23. Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion f injektiv ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.24. (2 Punkte)

Im Euromünzensystem wird so gezählt, dass die Koeffizienten (also $0, 1, 2$) der minimalen Darstellung einer Zahl im Sinne von Satz 2.1 in absteigender Wertreihenfolge angegeben werden. Bestimme die zehn Nachfolger von

$$20110\,.$$

Aufgabe 5.25. (3 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Definiere die Nachfolgerabbildung, die zu jeder Zeitangabe die Zeitangabe der nächsten Sekunde berechnet.

Aufgabe 5.26. (5 (0.5+0.5+1+2+1) Punkte)

Ein Teil der Schüler und Schülerinnen der Klasse 4c sind auf einer Wattwanderung, und zwar

$$\{G, L, H, M, A, B, C, R, S, T\}\,.$$

Sie werden von Wattführer Heino und Frau Maier-Sengupta begleitet. Nach einer scharfen Wende um eine unübersichtliche Düne herum zählen die beiden Aufsichtspersonen die Gruppe durch. Heino zählt

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varphi(n)$	M	T	A	L	S	B	G	R	H	C

und Frau Maier-Sengupta zählt

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\psi(n)$	L	A	B	R	T	C	M	G	H	S

Es sind also alle Kinder da.

(1) Welche Nummer gibt Heino demjenigen Kind, das von Frau Maier-Sengupta die Nummer 8 bekommt?
(2) Welche(s) Kind(er) bekommen von beiden die gleiche Nummer?
(3) Welche(s) Kind(er) bekommen von Heino eine höhere Nummer als von Frau Maier-Sengupta?
(4) Gabi (G) denkt sich das folgende Spiel aus: Jedes Kind muss demjenigen Kind, dessen Heino-Nummer gleich seiner (des ersten Kindes) Maier-Sengupta-Nummer ist, eine Muschel schenken. Welche Schenkzykel (oder Schenkperioden) entstehen dabei?
(5) Ist die durch

$$F(n) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{falls } n \text{ ungerade}\,, \\ \psi(n), & \text{falls } n \text{ gerade}\,, \end{cases}$$

gegebene Abbildung F eine Nummerierung der Schülermenge?

Aufgabe 5.27. (3 (2+1) Punkte)

Mustafa Müller und Heinz Ngolo waren beim Spiel Borussia Dortmund gegen Bayern München. Zum Glück hat Dortmund 5 zu 2 gewonnen, daher ist gute Stimmung im Fanbus auf der Heimreise. Die Torfolge war

$$0:1, 1:1, 2:1, 2:2, 3:2, \text{Halbzeit}, 4:2, 5:2\,.$$

Die beiden überlegen sich die folgenden Fragen.

(1) Wie viele mögliche Torreihenfolgen gibt es bei einem $5:2$-Sieg?
(2) Wie viele mögliche Torreihenfolgen gibt es bei einem $5:2$-Sieg, wenn man noch die Halbzeit mitberücksichtigt?

Aufgabe 5.28. (2 Punkte)

Bestimme, wie viele echte Potenzen (also Zahlen der Form n^k mit $k \geq 2$) es zwischen 0 und 100 gibt.

Abbildungsverzeichnis