MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

49. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

1897, [illegible] - Nov. 12
[illegible]

Inhalt des neunundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

49. Band. 1. Heft.

Ausgegeben am 5. März.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1896. 1897.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. I. Lieferung. [IV u. 336 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Cranz, Prof. Dr. **Carl,** Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Dozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieofficieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademien; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 20.—

Gundelfinger, Dr. **Sigmund,** Prof. an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtraktions- und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. [IV u. 15 S.] 4. 1897. Steif geh. n. ℳ 1.40.

v. Lilienthal, Dr. **R.,** a. o. Professor der Mathematik an der kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 5.—

Markoff, A. A., o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Theophil Friesendorff und Erich Prümm. Mit einem Vorworte von R. Mehmke, o. Prof. an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Schlesinger, Prof. Dr. **Ludwig,** Privatdozent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.—

Serret, J.-A., † Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Paris, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Axel Harnack, † Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In zwei Bänden. I. Band. Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren [XVI u. 570 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 10.—

Stahl, Dr. **Hermann,** Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Staude, Dr. **Otto,** ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Sturm, Dr. **Rudolf,** ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In drei Theilen. III. (Schluſs-)Theil. Die Strahlenkomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 18.—

Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un' equazione algebrica $f(xyz) = 0$ con funzioni razionali di due parametri.*)

Di

Federigo Enriques a Bologna.

Introduzione.

1. Nella teoria della risoluzione delle equazioni algebriche con più variabili, si presentano successivamente due problemi generali:

1) data un' equazione

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

decidere se e come essa possa *risolversi* ponendo $x_1 x_2 \dots x_n$ funzioni razionali di $n - 1$ parametri e (eventualmente anche) di determinate funzioni irrazionali di questi parametri;

2) assegnare le irrazionalità numeriche che vengono a comparire nei coefficienti delle anzidette funzioni razionali, considerato come campo di razionalità (nel senso di Kronecker) quello definito dei coefficienti dell' equazione

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0.$$

Questo secondo problema si collega al primo, riferito ad equazioni con un numero maggiore di variabili, perchè se nell' equazione $f = 0$ si suppone che i coefficienti varino dipendendo razionalmente da più parametri, le nominate irrazionalità numeriche divengono irrazionalità algebriche, funzioni di questi parametri.

In ordine al primo problema le equazioni algebriche

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

vengono distribuite in *classi*, ponendosi in una medesima classe due equazioni che si possono trasformare l'una nell' altra mediante una trasformazione birazionale sulle $x_1 x_2 \dots x_n$

In ordine al secondo problema si possono distribuire le equazioni

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = 0$$

*) I principali resultati contenuti in questo lavoro sono stati riassuntivamente enunciati in una nota inserita nei Rendiconti delle R. Accademia dei Lincei, Dec. 1895.

di una data classe in più *sotto-classi*, ponendo in una medesima sottoclasse due equazioni che si possono trasformare l'una nell' altra mediante una trasformazione birazionale su $x_1 x_2 \ldots x_n$, *a coefficienti razionali.*

Per brevità diremo che due equazioni sono trasformabili l'una nell' altra se appartengono alla medesima classe, e che sono trasformabili, l'una nell' altra, *razionalmente*, se appartengono alle medesima sottoclasse; vale a dire è sottinteso che la parola „trasformazione" denoti nel seguito „trasformazione birazionale" e che l'aggettivo „razionale" ad essa aggiunto, si riferisca alla razionalità dei coefficienti della trasformazione.

2. La più semplice risoluzione che un' equazione algebrica

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0$$

può ammettere, è una risoluzione con funzioni razionali di $n-1$ parametri, ottenuta ponendo

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1(u_1 \ldots u_{n-1}), \\ x_2 = x_2(u_1 \ldots u_{n-1}), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = x_n(u_1 \ldots u_{n-1}), \end{array}\right. \tag{1}$$

dove le espressioni del 2° membro sono razionali.

Le formule (1) saranno *in generale invertibili*, cioè permetteramo di esprimere inversamente i parametri $u_1 \ldots u_{n-1}$ come funzioni razionali delle $x_1 \ldots x_n$ legate dalla relazione $f = 0$: ma può darsi invece che le formule (1) non sieno invertibili univocamente per modo che ad un gruppo di valori $x_1 \ldots x_n$ corrispondano più gruppi di valori $u_1 \ldots u_{n-1}$.

Se le (1) sono invertibili, esse stabiliscono una trasformazione dell' equazione

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0$$

nell' equazione lineare

$$u_n = 0.$$

Per $n = 2$ (Lüroth) e per $n = 3$ (Castelnuovo) è stato dimostrato che se un' equazione $f = 0$ ammette una risoluzione con funzioni razionali non invertibili, essa ammette altresì una (altra) risoluzione con funzioni razionali invertibili; perciò tutte le equazioni

$$f(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (n=2 \text{ o } n=3)$$

risolubili con funzioni razionali, formano l'unica classe che ha per tipo l'equazione $x_n = 0$.

Dunque per $n = 2$, $n = 3$, il problema di determinare le equazioni $f(x_1 \ldots x_n) = 0$ risolubili con funzioni razionali si riduce al problema di caratterizzare la anzidetta classe di equazioni.

Tale problema è notoriamente risoluto: per $n = 2$ da Clebsch; per $n = 3$ dal sig^r Castelnuovo: si hanno infatti, nel 1° caso un carattere (il *genere*), nel 2^0 caso tre caratteri (il *genere geometrico* e *numerico* ed il *bigenere*), e l'annullarsi dei generi costituisce la condizione caratteristica della nominata classe di equazioni (risp. per $n = 2$, $n = 3$).

Sorge ora la questione:

Da quali irrazionalità si può far dipendere la risoluzione con funzioni razionali delle equazioni aventi i generi nulli?

E quindi: A quante sotto-classi o tipi di sotto-classi danno luogo le nominate equazioni?

Riferiamo tale questione ai casi $n = 2$, $n = 3$.

I) Per $n = 2$ la questione è stata posta e risoluta dal sig^r Noether*):

Un' equazione

$$f(xy) = 0$$

risolubile con funzioni razionali d'un parametro (ossia di genere zero), può essere risoluta in tal modo *razionalmente* o coll' *estrazione di un radicale quadratico* (da aggiungersi al campo di razionalità dei coefficienti).

Pertanto si hanno due tipi di sotto-classi di equazioni

$$f(xy) = 0$$

di genere zero (l'equazione lineare e l'equazione quadratica).

Si noti che se una equazione $f(xy) = 0$ è stata risoluta con funzioni razionali non invertibili (di un parametro), si può, *razionalmente*, ottenere una (nuova) risoluzione di essa con funzioni razionali invertibili.

II) In questo lavoro ci proponiamo di trattare il problema analogo a quello sopra enunciato, per le equazioni fra tre variabili: „da quali irrazionalità si possa far dipendere la risoluzione di una equazione

$$f(xyz) = 0$$

con funzioni razionali invertibili di due parametri (supposta possibile)": la questione analoga che si riferisce alla risoluzione dell' equazione $f(xyz) = 0$ con funzioni razionali non invertibili, comporta in qualche caso una soluzione più semplice, come verrà notato.

Il resultato a cui perveniamo può essere riassunto nell' enunciato:

Se un' equazione

$$f(xyz) = 0$$

è risolubile con funzioni razionali di due parametri (ossia ha tutti i generi nulli), si può sempre farne dipendere la effettiva risoluzione con funzioni razionali invertibili, da operazioni razionali (di eliminazione), dall' *estrazione di radicali quadratici e cubici*, e dalla risoluzione di una delle *equazioni per la bisezione degli argomenti:*

a) delle *funzioni abeliane di genere* 3,

b) o di *funzioni abeliane di genere* 4,

c) o delle *funzioni iperellittiche di genere* p ($= 1, 2, 3 \ldots$).

---

*) „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen", Mathem. Annalen Bd. III.

Il procedimento su cui è fondato il presente studio conduce a distinguere le equazioni $f(xyz) = 0$, risolubili con funzioni razionali, in 4 *famiglie*: quelle della prima famiglia (due tipi di sotto-classi analoghe a quelle delle equazioni di genere zero tra due variabili) si risolvono coll' estrazione d'un radicale quadratico (al più); quelle della seconda famiglia danno luogo a più tipi di sotto-classi e la loro risoluzione si riattacca al caso a) dell' enunciato o all' estrazione di radicali quadratici e cubici; quelle della terza e quarta famiglia dan luogo a due tipi di sotto-classi, e la loro risoluzione si riattacca risp. ai casi b) e c) dell' enunciato.

Si aggiunga che delle equazioni della 2ª famiglia può sempre ottenersi una risoluzione con funzioni razionali, astrazione fatta dalla condizione d'invertibilità, colla sola estrazione di radicali quadratici e cubici.

3. Nell' ultima parte del lavoro i resultati ottenuti vengono applicati alla studio della risoluzione dell' equazione in 4 variabili

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0, \tag{1}$$

e danno luogo alle seguenti conclusioni:

a) Quando le equazioni

$$f(x_1 x_2 x_3 a) = 0,$$

ottenute dalla (1) col dare ad x_4 un valore costante, sono risolubili con funzioni razionali, l'equazione (1) può sempre essere risoluta esprimendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ come funzioni di tre parametri costruite con operazioni razionali e coll' estrazione di radicali quadratici e cubici.

b) Quando sono risolubili con funzioni razionali (di due parametri) tutte le equazioni

$$f(x_1, x_2, x_3, a x_3 + b) = 0$$

(in $x_1\, x_2\, x_3$), la (1) è risolubile ponendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ funzioni di tre parametri $u\, v\, w$ e di un radicale quadratico che porta sopra un polinomio (di particolar forma) in $u\, v\, w$.

c) Quando sono risolubili con funzioni razionali (di due parametri) tutte le equazioni in $x_1\, x_2\, x_3$

$$f(x_1, x_2, x_3, a x_2 + b x_3 + c) = 0;$$

la (1) può risolversi ponendo $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ funzioni razionali di tre parametri (astrazion fatta dalla condizione d'invertibilità).

Nella risoluzione della

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0,$$

nei casi precedenti, si ottengono semplificazioni corrispondentemente al fatto che le equazioni in 3 variabili di cui l'enunciato discorre appartengono all' una piutosto che all' altra famiglia.

Del resto non è affatto escluso che della nominata equazione $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$, nei casi sopra enunciati, possa ottenersi con diverso procedimento una risoluzione più semplice. Gli esempi in proposito che ho considerato provano soltanto questo, che: se tutte le equazioni $f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$ sono risolubili con funzioni razionali, non si può, in alcuni casi, risolvere $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$ ponendo $x_1 x_2 x_3 x_4$ funzioni razionali di x_4 e di due altri parametri u v, cone avverrebbe se l'anzidetta risoluzione delle equazioni $f(x_1 x_2 x_3 a) = 0$ si effettuasse razionalmente, o irrazionalmente in modo tale che le irrazionalità numeriche introdotte non venissero a dipendere dal parametro x_4.

4. Nella introduzione che precede le questioni formanti oggetto di questo lavoro sono state esposte diffusamente in una forma puramente algebrica: è infatti l'interesse algebrico che in esse sembra a noi prevalente.

Nel corso del lavoro, dovendo ricorrere a procedimenti geometrici, faremo anche uso del linguaggio geometrico. Parleremo dunque della classe delle superficie razionali, e di sotto-classi di questa classe; di irrazionalità da cui può farsi dipendere la rappresentazione piana d'una superficie razionale; diremo che una superficie razionale viene trasformata *razionalmente* in un' altra data (o razionalmente rappresentata su di essa), ecc ecc in luogo di riferire le anzidette locuzioni alle corrispondenti equazioni.

Potremo ancora considerare indifferentemente, in luogo di superficie della spazio ordinario S_3, superficie appartenenti ad iperspazi: ciò corrisponde ad estendere le considerazioni relative ad equazioni $f(xyz) = 0$ a sistemi equivalenti di equazioni tra più variabili.

Distinzione delle superficie razionali in 4 famiglie.

5. Sia F una superficie razionale, d'un certo ordine n, in S_3, o in uno spazio più elevato S_r $(r > 3)$. Si dice *punto multiplo proprio* (o *isolato*) per F, un punto O di essa tale che la sezione di F con un piano (o iperpiano) per O abbia un genere inferiore a quello della sezione generica.

La superficie F può essere trasformata *razionalmente* in un' altra superficie, ad essa riferita punto per punto, priva di punti multipli propri.

Il procedimento che può servire ad effettuare una tale trasformazione è quello che andiamo ad esporre, riservandoci a giustificare subito dopo le affermazioni su cui esso riposa.

Ecco dunque il procedimento in parola.

Si considerino tutte le varietà V_m di un ordine m assai elevato dello S_r (o S_3) cui F appartiene: *i punti multipli propri di F essendo in numero finito,* le V_m passanti per essi formano un sistema lineare ampio quanto si vuole (preso m assai grande); questo sistema si lascia staccare razionalmente da quello di tutte le V_m. Si riferiscano proiettivamente le sezioni di F colle indicate V_m (considerate come elementi del sistema lineare che esse formano) agli iperpiani di un conveniente S_ϱ, e si trasformi così la F in una nuova superficie F' di cui le sezioni iperpiane rappresentino quindi le nominate sezioni della F colle V_m.

Ad ogni punto multiplo proprio di F (punto base pel sistema delle V_m) corrisponde sopra F' una curva (semplice o multipla) e in generale anche un certo numero di punti multipli propri su di esse.

La F' non possiede altri punti multipli propri che quelli provenienti nel detto modo dai punti multipli propri di F. Applichiamo ora ad F' una trasformazione analoga a quella fatta subire ad F, ciò che può farsi pure razionalmente. *Dopo un numero finito di operazioni il procedimento ha termine* e si arriva ad una superficie trasformata di F priva di punti multipli propri.

Dobbiamo giustificare le affermazioni sulle quali riposa la validità del procedimento indicato.

La cosa è molto facile posto che si tratta d'una superficie F razionale.

Rappresentiamola punto per punto sul piano e sia $|C|$ il sistema della immagini delle sue sezioni iperpiane: ad un punto multiplo proprio di F corrisponde sul piano una *curva fondamentale propria* di $|C|$, ossia una curva che presenta *una* condizione alle C che debbono contenerla, e diminuisce il genere delle curve residue. Si può escludere che qualcuna di tali curve sia ridotta all' intorno d'un punto base di $|C|$; basta per ciò (eventualmente) trasformare $|C|$ in guisa che esso abbia tutti i punti base distinti; ciò è possibile per un noto teorema del sig^r Noether*). Ora una curva fondamentale propria per $|C|$ è egualmente curva fondamentale propria del sistema $|mC|$ multiplo di $|C|$ secondo un qualsiasi intero m, sistema rappresentativo del sistema delle sezioni di F con tutte le V_m.

Il procedimento di trasformazione fatto subire alla superficie F si traduce sul piano rappresentativo nel modo seguente:

1) si moltiplichi il sistema $|C|$ per un conveniente intero m e si stacchino da esso le curve fondamentali proprie di $|C|$ ed $|mC|$: perchè questo sia possibile, preso m assai grande, occorre provare che le dette curve sono in numero finito;

2) una curva X fondamentale propria per $|C|$ può costituire una o più curve fondamentali proprie per il sistema innanzi costruito

---

*) „Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function . ." Mathem. Annalen t. IX e „Rationale Ausführung der Operationen . . .", ibid. t. XXIII. Cfr. anche Bertini „Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche", Rendic. Istituto lombardo 1888.

$$|C'| = |mC - X - \cdots|;$$

in tal caso ciascuna di queste curve fondamentali proprie deve essere staccata da un multiplo conveniente del sistema $|C'|$:
occorre provare che ripetendo convenientemente queste operazioni si arriva ad un sistema privo di curve fondamentali proprie.

In definitiva tutto ciò che basta provare per la giustificazione del procedimento sopra indicato è contenuto nella affermazione seguente: si può prendere un multiplo così elevato del sistema $|C|$, che, estratte da esso una o più volte le curve fondamentali proprie di $|C|$ o le sue parti irriducibili, si ottenga un sistema residuo per cui tali curve o parti irriducibili non sono più fondamentali.

Questa affermazione si giustifica per assurdo con un semplice calcolo numerico.

Si neghi l'affermazione precedente. Allora da un sistema $|mC|$ multiplo di $|C|$, si possono sempre estrarre curve fondamentali (proprie) pel sistema, finchè la dimensione del sistema stesso lo permette. Ammettiamo dunque tale ipotesi.

Indicato con s l'ordine delle curve piane C, e con $h_1, h_2, \dots h_\sigma$ le molteplicità dei punti base di $|C|$, si ha che le dimensione del sistema $|mC|$ $m$plo di $|C|$ vale (almeno)

$$\frac{ms(ms+3)}{2} - \Sigma_i \frac{mh_i(mh_i+1)}{2}$$

ossia

$$m^2 \frac{s^2 - \Sigma h_i^2}{2} + m \frac{3s - \Sigma h_i}{2},$$

dove

$$s^2 > \Sigma h_i^2.$$

Al crescere di m il valore dell' espressione precedente dipende essenzialmente dal 1^0 termine, il quale diviene (da un certo punto in poi) maggiore di

$$m \frac{3s - \Sigma h_i}{2} + sm.$$

Allora, nella ipotesi sopra enunciata, si deve poter estrarre dal sistema $|mC|$ d'ordine sm, sm curve fondamentali proprie; il sistema residuo, per m assai alto, viene ad avere una dimensione quanto si vuole elevata, mentre, l'ordine di ciascuna curva fondamentale di $|C|$ essendo ≥ 1, l'ordine di tale sistema residuo sarebbe nullo (o negativo).

Tale assurdo prova ciò che sopra è stato enunciato. E rimane quindi stabilito che:

Ogni superficie razionale può essere trasformata razionalmente in un' altra priva di punti multipli propri.

6. Sia F una superficie razionale priva di punti multipli propri, e indichiamone con n l'ordine: possiamo supporre che F sia (o sia stata proiettata da punti esterni) in S_3.

Supposto che le sezioni piane di F abbiano il genere $\pi > 1$, consideriano le $\infty^{\pi-1}$ superficie φ_{n-3} d'ordine $n-3$ aggiunte ad F: queste superficie possono essere determinate *razionalmente* data F, poichè la determinazione di una di esse, passante per $\pi - 1$ punti generici dati, è algebrica e univoca (data F): il problema concreto di assegnare le equazioni delle φ_{n-3}, con operazioni di eliminazione, a partire dall' equazione di F, è analogo a quello che il sig' Noether ha risoluto per le curve algebriche piane*); questo problema a noi, non importa qui di trattare.

Accade, in generale ($\pi > 3$), che le superficie φ_{n-3} segano su F (fuori della curva multipla) un sistema lineare di curve irriducibili, *semplice*, cioè tale che le curve di esso passanti per un punto generico di F non passano in conseguenza per altri punti variabili col primo; in tal caso questo sistema è anche privo di curve fondamentali proprie**).

Allora se riferiamo proiettivamente gli elementi (curve) del sistema (o ciò che è la stesso le φ_{n-3}) agli iperpiani $S_{\pi-2}$ di un $S_{\pi-1}$, si ottiene *razionalmente* una superficie F' trasformata di F, ancora priva di punti multipli propri.

Noi proietteremo (eventualmente) la F' in S_3, e applicheremo ad F' (se è possibile) una trasformazione analoga a quella operata su F, costruendo una nuova superficie F'' ecc.

Otteniamo razionalmente una serie di superficie, l'una trasformata della precedente col procedimento indicato,

$$F\, F'\, F''\, F''' \ldots :$$

si tratta di decidere se il procedimento avrà termine dopo un numero finito di operazioni, e a quale ultima superficie ci condurrà.

Per esaminare la questione, supponiamo rappresentata la superficie razionale F sopra un piano, e sia $|C|$ il sistema delle immagini delle sezioni piane di F (immagini aventi un certo ordine m): vediamo di costruire sul piano i successivi sistemi $C'|\;|C''| \ldots$ rappresentativi (delle sezioni piane) risp. di $F'\, F'' \ldots$.

Tale costruzione si effettua subito, giacchè un teorema noto***) ci avverte che $|C'|$ non è altro che il sistema delle curve d'ordine $m-3$ aggiunte alle C, spogliato eventualmente di parti fisse, ossia

*) „Rationale Ausführung ..." l. c.

**) Castelnuovo „Sulle superficie di genere o", Memorie della Società Italiana delle Scienze, ser. III, t. X, 1896.

***) Enriques „Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche — III, 3 —", Memorie dell' Accademia di Torino, 1893 — e „Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche — 31 —", Memorie della Società Italiana delle Scienze 1896. Cfr. anche Humbert, Math. Annalen Bd. 45, 1895.

il *sistema aggiunto* a $|C|$: analogamente $|C''|$ è il sistema aggiunto a $|C'|$ ecc.

Gli ordini delle curve di tali sistemi decrescono dall' uno all' altro di 3 (almeno), quindi il procedimento di aggiunzione si esaurisce.

L' ultimo sistema aggiunto $|C^{\nu}|$ (∞^1 almeno) si compone di curve razionali o ellittiche, o di gruppi di curve razionali o ellittiche d'un fascio.

Per conseguenza la serie delle superficie

$$F\,F'\,F''\,\ldots,$$

necessariamente si arresta. Però essa può aver termine o quando ha termine la serie dei successivi sistemi aggiunti a $|C|$, se questi sistemi sono tutti irriducibili e semplici, o prima. Nel primo caso l'ultima superficie F^{ν} della serie è una superficie e sezioni razionali o ellittiche. Per esaminare il secondo caso bisogna domandarci quand' è che il procedimento di aggiunzione applicato nel piano, a partire dal sistema $C|$ irriducibile, semplice e privo di curve fondamentali proprie, può condurre ad un sistema lineare riducibile, o non semplice. La risposta a tale questione è la seguente *):

Nel procedimento di aggiunzione applicato a $|C|$ il primo sistema non più irriducibile, semplice, che può incontrarsi è:

a) un fascio di curve razionali o un sistema costituito con gruppi di curve di un tal fascio, se il penultimo sistema aggiunto è costituito di curve iperellittiche;

b) oppure una rete di curve ellittiche (trasformabile in una rete di cubiche con 7 punti base);

c) oppure un sistema lineare ∞^3 di cure di genere due, trasformabile nel sistema delle sestiche con 8 punti base doppi.

Se ne ricava che se la serie delle superficie

$$F\,F'\,F''\,\ldots$$

non termina con una superficie a sezioni razionali o ellittiche, essa termina con una superficie a sezioni iperellittiche, oppure con una superficie la cui successiva trasformata (secondo il procedimento indicato) è un piano doppio con quartica limite rappresentato sul piano semplice dalla rete di curve ellittiche, o un cono quadrico doppio con sestica limite rappresentato sul piano semplice dal sistema ∞^3 delle curve di genere due.

Possiamo dire che negli ultimi due casi il piano o risp. il cono doppio chiudono la serie delle superficie $F\,F'\,F''\,\ldots$, e sono superficie (doppie) trasformate di F, ottenute razionalmente.

---

*) Cfr. l'aggiunta del sig[r] Castelnuovo alla mia memoria „Sui piani doppi di genere uno", Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1896.

Anzi nel riassumere i resultati stabiliti, possiamo considerare i piani doppi con quartica limite come superficie a sezioni ellittiche (d'ordine 2), e però possiamo enunciare che:

Le superficie razionali prive di punti multipli propri si distinguono in 4 famiglie secondochè il procedimento d'aggiunzione a partire dalle loro sezioni piane (o iperpiane) conduce a rappresentare la superficie, senza aggiunta di irrazionali numerici:

1) *sopra una superficie a sezioni razionali,*

2) *o sopra una superficie a sezioni ellittiche* (d'ordine $n \geq 2$) *che, per* $n > 2$, *è priva di punti doppi,*

3) *o sopra una superficie a sezioni iperellittiche possedente un fascio razionale di coniche,*

4) *o sopra un cono quadrico doppio con sestica di diramazione.*

I 4 tipi di superficie qui enumerati possono dunque riguardarsi come tipi a cui si possono sempre ricondurre le superficie razionali con una trasformazione effettuata senza aggiunta di irrazionalità.

Procediamo ad esaminare partitamente le irrazionalità da cui dipende la rappresentazione piana delle superficie delle 4 famiglie enumerate.

Le irrazionalità da cui può farsi dipendere la rappresentazione piana delle superficie razionali delle 4 famiglie.

7. 1ª *famiglia*. Tipo di questa famiglia sono le superficie a sezioni razionali; dunque (in S_3) il *piano*, *la quadrica*, *le rigate razionali* d'ordine > 2, e la *superficie romana di Steiner**) (del 4⁰ ordine con un punto triplo ecc).

Per rappresentare una quadrica sul piano basta la proiezione da un suo punto, e la determinazione di un punto della quadrica esige l'estrazione d'un radicale quadratico.

Una rigata razionale d'ordine > 2 si può rappresentare sul piano, riferendo proiettivamente gli elementi (generatrici) del suo fascio di rette alle rette d'un fascio nel piano, e proiettando da un qualsiasi asse ciascuna generatrice sulla retta corrispondente del detto piano. La prima operazione esige in sostanza la rappresentazione punto per punto d'una sezione piana della rigata sopra una retta, ossia la rappresentazione sulla retta d'una curva razionale; essa si effettua dunque razionalmente o estraendo un radicale quadratico**).

Infine la superficie di Steiner si rappresenta sul piano razionalmente con proiezione dal punto triplo.

---

*) Cfr. Picard „Sur les surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales", Crelle's Journal Bd. C, 1886.

**) Noether, l. c. Mathem. Annalen Bd. III.

In conclusione, dunque:

Le superficie razionali della 1ª *famiglia si possono rappresentare sul piano estraendo (al più) un radicale quadratico.*

8. 2ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia sono le superficie razionali a sezioni ellittiche: possiamo (razionalmente) renderle normali in uno spazio assai elevato; esse divengono allora superficie (non rigate) d'un certo ordine n in S_n, dove $9 \geq n \geq 2$. Tali superficie sono state studiate dal sigr Del Pezzo*).

Dobbiamo analizzarle partitamente a seconda del loro ordine n.

a) $n = 2$, „piano doppio con quartica di diramazione".

La sua rappresentazione sul piano semplice è stata data dal Clebsch**). L'equazione da cui tale rappresentazione dipende è quella che serve a separare le tangenti doppie della quartica, vale a dire è l'equazione per la bisezione dell' argomento delle funzioni abeliane di genere 3.

b) $n = 3$, „superficie cubica".

Essa si rappresenta sul piano doppio con quartica limite per proiezione da un suo punto: la determinazione di un suo punto importa la risoluzione di un' equazione del 3º grado, ossia l'estrazione d'un radicale quadratico e d'un radicale cubico.

Dopo ciò la rappresentazione della superficie sul piano semplice può effettuarsi mediante la risoluzione dell' equazione delle tangenti doppie alla quartica limite del piano doppio, semplificata però in questo caso perchè della nominata equazione è data una radice (è data la tangente doppia della quartica sezione del piano tangente alla superficie cubica nel centro di proiezione scelto)***).

c) $n = 4$, „superficie del 4º ordine F_4 normale in S_4, che, per proiezione da un punto esterno, dà una superficie del 4º ordine di S_3 dotata di conica doppia".

La superficie viene rappresentata sul piano doppio con quartica limite per proiezione da un punto della conica doppia: la determinazione di un tal punto esige (al più) l'estrazione d'un radicale quadratico; dopo ciò la questione di rappresentare la superficie sul piano semplice è ricondotta al caso a), dove però la relativa equazione appare semplificata essendo data una coppia di tangenti doppie alla quartica limite; è noto, anzi che la nominata equazione si riduce ad un' equazione di

---

*) „Sulle superficie dello nº ordine immerse nello spazio ad n dimensioni", Circolo Matematico di Palermo, t. I. Cfr. anche il mio lavoro nei Mathem. Annalen Bd. 46.

**) „Ueber den Zusammenhang . . .", Mathem. Annalen Bd. III.

***) Il consueto modo di Schläfli per rappresentare la superficie cubica sul piano conduce a risolvere *l'equazione delle* 27 *rette* della superficie, equazione studiata dai sigi Klein e Burkhardt, e da loro risoluta.

5^0 grado e all' estrazione di 4 radicali quadratici: infatti tale circostanza è rappresentata geometricamente dal fatto che la costruzione di due rette sghembe sopra una superficie cubica F_3 di cui è data una retta r, dipende dalla separazione dei 5 piani tritangenti alla F_3 passanti per r ecc.

d) $n = 5$ „superficie F_5 del 5^0 ordine normale in S_5“.

Questa superficie F_5 si può rappresentare sul piano razionalmente. Basta procedere nel seguente modo.

Si proietti la F_5 da punti esterni in S_3: la superficie proiezione, del 5^0 ordine, possiede una curva doppia del 5^0 ordine dotata di punto triplo (triplo per la superficie)*). A questo punto triplo corrisponde su F_5 una terna di punti che viene così determinata razionalmente: si seghi ora F_5 con un S_3 passante per i 3 punti della terna nominata, costruiremo in tal modo razionalmente su F_5 una coppia di punti. Proiettiamo F_5 dalla coppia di punti in S_3: la superficie proiezione è una superficie cubica su cui è data (razionalmente) una coppia di rette sghembe; ora questa superficie cubica (e quindi F_5) si rappresenta sul piano razionalmente, col noto procedimento del sig^r Schläfli, usando della congruenza lineare di rette che ha come direttrici le rette della coppia nominata.

e) $n = 6$, „superficie F_6 del 6^0 ordine in S_6“.

Per rappresentarla sul piano basta fissarne un punto O, proiettarla dal piano tangente in esso sopra una quadrica, e quindi proiettare la quadrica da un suo punto che può essere fissato razionalmente come immagine di un punto infinitamente vicino ad O sulla superficie obiettiva.

Vediamo da che si può far dipendere la determinazione di un punto della superficie F_6 di S_5.

Basta evidentemente determinare su F_6 una retta.

Ora (e ciò che si afferma qui vien subito verificato esaminando la rappresentazione piana di F_6 col sistema delle cubiche per 3 punti base, non in linea retta) sopra F_6 vi sono 6 rette le quali si distribuiscono in due terne; quelle di una terna sono incidenti a quelle dell' altra e sghembe frà loro. Dunque l'equazione del 6^0 grado da cui dipende la separazione delle 6 rette su F_6 si spezza in due equazioni del 3^0 grado (corrispondenti alle due terne) separabili coll' estrazione d'un radicale quadratico.

Mediante la risoluzione di equazioni siffatte si può quindi rappresentare la F_6 sul piano.

f) $n = 7$, „superficie F_7 del 7^0 ordine in S_7“.

*) Cfr. Clebsch, Cremona e soprattutto Caporali „Sulle superficie del 5^0 ordine dotota di una curva doppia del 5^0 ordine“, Annali di Matematica, s^e II, t. 7.

La F_7 (come risulta dalla sua rappresentazione piana) contiene 3 rette; due sghembe fra loro e l'altra incidente ad esse: da quest' ultima retta (che è costruibile razionalmente) la F_7 vien proiettata in una superficie di Veronese di S_5, e quindi da punti esterni sulla superficie di Steiner in S_3; dunque (v^i a)), la F_7 si può rappresentare sul piano razionalmente.

g) $n = 8$, „superficie F_8 dell' 8° ordine in S_8".

Vi sono due tipi di superficie F_8: la superficie rappresentabile sul piano col sistema delle cubiche con un punto base, e quella rappresentabile col sistema delle quartiche con due punti base doppi: ambedue possono rappresentarsi sul piano razionalmente.

Invero la F_8 di 1ª specie possiede una retta da cui viene proiettata in una rigata del 5° ordine di S_5, la quale si rappresenta sul piano razionalmente. Invece la F_8 di 2ª specie possiede una rete di quartiche dotata di un punto base semplice, e da questo punto viene proiettata nella F_7 di S_8 che, come abbiam visto, si rappresenta sul piano razionalmente.

h) $n = 9$, „superficie F_9 del 9° ordine in S_9".

La rappresentazione piana della F_9 può farsi dipendere dalla determinazione di un suo punto, dal quale le F_9 vien proiettata su una F_8 di S_8.

Vediamo come si può determinare un punto della F_9 risolvendo soltanto un' equazione di 4° e una di 3° grado, mentre a priori apparirebbe soltanto la possibilità di far dipendere la determinazione di un punto di F_9 dalla risoluzione di un' equazione di 9° grado.

Notiamo per questo che la relazione tra una cubica e la sua hessiana nel piano (rappresentativo di F_9), si rispecchia in una relazione per la quale ad ogni sezione iperpiana di F_9 corrisponde un' altra sezione iperpiana, razionalmente determinabile, che chiameremo la hessiana della prima.

Ora fra le sezioni iperpiane di F_9, che sono curve ellittiche, si distinguono quelle equianarmoniche: le sezione hessiana corrispondente ad una sezione equianarmonica di F_9 si spezza in 3 cubiche secantisi due a due in *un* punto. In un fascio di sezioni iperpiane di F_9 ve ne sono 4 equianarmoniche: se ne può determinare *una* risolvendo una equazione dal 4° grado; dopo ciò si potranno separare i 3 punti doppi della sua curva hessiana su F_9 (spezzata in 3 cubiche) risolvendo un' equazione del 3° grado: dunque colla risoluzione delle menzionate equazioni di 4° e 3° grado (che importano l'estrazione di radicali quadratici e cubici) si può determinare un punto di F_9 e quindi rappresentare la F_9 sul piano.

Riassumendo i resultati ottenuti avremo il seguente enunciato:

Le superficie razionali della 2ª famiglio si possono rappresentare senza introdurre irrazionalità

1) *sopra il piano semplice*,

2) *o sopra il piano doppio con quartica di diramazione*,

3) *o sopra la superficie cubica di* S_3,

4) *o sopra la superficie del* 4⁰ *ordine con conica doppia di* S_3 (o ciò, che è lo stesso, sulla superficie normale del 4⁰ ordine in S_4 di cui questa è proiezione),

5) *o sopra la superficie del* 6⁰ *ordine a sezioni ellittiche di* S_6,

6) *o sopra la superficie del* 9⁰ *ordine a sezioni ellittiche di* S_9.

La rappresentazione piana di queste superficie razionali della 2ª *famiglia si può sempre ottenere estraendo radicali quadratici e cubici e risolvendo un' equazione per la bisezione delle funzioni abeliane di genere* 3.

Osservazione. Sia data una superficie F e sopra di esse una rete di curve ellittiche. Allora (seguendo il sigr Castelnuovo)*) si può rappresentare la F sopra una involuzione del piano, nel modo seguente.

Si prenda su F un punto O e si considerino le curve (ellittiche) C della rete passanti per O: esse formano un fascio razionale. Indicando con n l'ordine delle nominate curve C, resta determinata su ciascuna C una serie completa g_n^n: la serie segata sulla C dai piani (o iperpiani) del suo spazio, resa completa. Il punto O contato $n-1$ volte dà luogo ad un gruppo della g_n^n che ha un punto residuo O'. Variando la C nel fascio, O' descrive su F una curva razionale K coordinata ad O.

Prendiano ora un punto O' sulla K; la curva razionale K' ad esso coordinata su F, descriverà una serie razionale ∞^1. Possiamo far corrispondere le curve della serie alle rette d'un fascio nel piano, riferendo queste rette ai punti della K: ciò si effettua razionalmente, perchè la K (pel modo di costruzione) è già rappresentata sopra il fascio delle curve C per O, e quindi sul fascio delle tangenti (ad esse e) ad F in O. Dopo ciò possiamo riferire punto per punto ciascuna K' alla corrispondente retta del fascio nel piano; anche ciò si effettua (in modo analogo) razionalmente. Ne risulta una rappresentazione della F sopra una involuzione dal piano, rappresentazione costruita razionalmente appena è dato il punto O di F.

Deduciamo:

Una superficie razionale della 2ª *famiglia può essere rappresentata sopra una involuzione piana coll' introduzione delle sole irrazionalità occorrenti a fissarne un punto; ossia coll' estrazione di radicali qaadratici e cubici* (al più).

Vale a dire:

Un' equazione della 2ª *famiglia può essere risoluta con funzioni razionali non invertibili mediante la sola estrazione di radicali quadratici*

*) „Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche", Rendic. Accad. dei Lincei, 1894.

e cubici: le irrazionalità superiori, di cui si è discorso, compariscono solo quando si voglia una risoluzione di essa con funzioni razionali invertibili.

9. 3ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia sono le superficie, a sezioni iperellittiche, contenenti un fascio lineare di coniche.

La rappresentazione piana di tali superficie è stata data dal sigr Noether*) il quale ha dimostrato l'esistenza di una curva unisecante le coniche del fascio sopra la superficie, curva da cui dipende (razionalmente) la menzionata rappresentazione.

Per vedere da quali irrazionalità si possa far dipendere la costruzione della unisecante e quindi la rappresentazione della superficie basterà estendere ciò che Clebsch**) ha fatto per la superficie del 4º ordine con retta doppia. Procediamo dunque nel modo seguente. Cominciamo dal riferire proiettivamente gli elementi (coniche) del fascio sulla superficie, alle rette di un fascio nel piano: tale riferimento di un ente razionale ad un fascio di raggi, esige (al più) l'estrazione di un radicale quadratico. Dopo ciò proiettiamo (da un punto del suo piano) ciascuna conica sulla corrispondente retta: con questa costruzione (effettuabile razionalmente) si rappresenta la data superficie sopra un piano doppio con curva di diramazione C_{2n}, d'un certo ordine $2n$, dotata di un punto $(2n-2)$plo O.

Una curva, sopra la superficie, unisecante le coniche del fascio, dà nel piano una curva d'un certo ordine m, avente il punto O come $(m-1)$plo, e tangente, ovunque la incontra, alla C_{2n}.

Per $m = 2n - 2$ possiamo risolvere il problema della determinazione di una F_m siffatta, colla estrazione di radicali quadratici e la risoluzione di un' equazione per la bisezione delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n}. Supponiamo qui, dapprima, che C_{2n} sia irriducibile; denotiamo con p il genere di essa curva. Si prendano su C_{2n} $n-1$ punti generici che possono determinarsi (con altrettante estrazioni di radicali quadratici) sopra $n-1$ rette uscenti da O. Allora (come è noto) vi sono 2^{2p} curve C_{2n-2}, d'ordine $2n-2$, aggiunte a C_{2n} che toccano C_{2n} negli $n-1$ punti assegnati ed altrove in p punti: la separazione di queste C_{2n-2} dipende appunto dalla risoluzione di un' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane (iperellittiche) inerenti a C_{2n}***).

---

*) l. c. Mathem. Annalen Bd. III.

**) „Ueber die Abbildung algebraischer Flächen . . .", Mathem. Annalen Bd. I; „Ueber den Zusammenhang . . .", ibid. Bd. III.

***) Cfr. Clebsch e Gordan „Theorie der Abel'schen Functionen, S. 265". L'equazione, come è noto, si riduce ad una equazione di grado $2p+2$ e all' estrazione di radicali quadratici. Questo fatto fondamentale risale a Riemann. Cfr. a questo proposito vari lavori nei Mathematische Annalen, di Weber (Bd. 13), Noether (Bde. 14, 16), e, per $p = 2$, di Burkhardt (Bd. 35).

Lievi modificazioni occorrono pel caso che C_{2n} sia riducibile. In tal caso lo spezzamento di C_{2n} può supporsi consistere soltanto nello staccarsi da essa di un certo numero h di rette distinte per O, in guisa che la residua curva C_{2n-h} sia irriducibile ad abbia O come punto $(2n-h-2)$plo: invero nella curva di diramazione d'un piano doppio si può sempre contare una volta sola (al più) le componenti multiple, e d'altra parte se da C_{2n} si staccasse una curva unisecante le rette per O (fuori di O) tale curva fornirebbe già sopra la data superficie una unisecante delle coniche del fascio ivi considerato.

Denoteremo ora con p il genere di C_{2n-h}. Ciò posto si prenda su ciascuna delle h rette per O facenti parte di C_{2n}, una delle due intersezioni con C_{2n-h}; si hanno così h punti di C_{2n-h}: ulteriormente si fissino (come innanzi) su C_{2n-h}, $n-1-h$ punti, e si considerino le curve C_{2n-h-2} d'ordine $2n-h-2$ aggiunte a C_{2n-h} che passano per questi $n-1-h$ punti e toccano ivi la C_{2n-h}, e che passano inoltre (semplicemente) per gli h punti prima nominati: queste C_{2n-h-2} segano su C_{2n-h} una serie g^{p}_{2p}; fra esse vi sono 2^{2p} C_{2n-h-2} che toccano (fuori dei punti fissati) la C_{2n-h} in p punti; tali curve toccano, ovunque la incontrano, la C_{2n} di diramazione del piano doppio. La loro determinazione dipende dalla risoluzione di un' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni iperellittiche inerenti a C_{2n-h}.

Come abbiamo innanzi accennato, una curva unisecante le rette per O (fuori di O) e tangente alla C_{2n} di diramazione dal piano doppio ovunque la incontra, rappresenta due curve unisecanti le coniche del fascio sopra la data superficie F, curve staccabili coll' estrazione di un radicale quadratico. Data una di queste curve unisecanti si può rappresentare la superficie F sul piano, proiettando ogni conica di F sopra una retta del suo piano dal punto della nominata unisecante posto sopra la conica.

Concludiamo che:

Le superficie razionali della 3ª famiglia si possono rappresentare sul piano coll' estrazione di radicali quadratici e la risoluzione di un' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni iperellittiche di genere (qualsiasi) p.

10. 4ª *famiglia.* Tipo di questa famiglia è il cono quadrico doppio con sestica di diramazione (genere 4).

Questo cono quadrico doppio si riduce (per proiezione da un suo punto) al piano doppio con sestica di diramazione dotata di due punti tripli infinitamente vicini: la rappresentazione di questo piano doppio sul piano semplice è dovuta al sig^r Noether*) che l'ha ottenuta

*) „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen", Sitzungsberichte der physik. medicin. Soc. zu Erlangen, 1878, 14. Januar.

mediante la determinazione delle cubiche aggiunte alla sestica, che la toccano ovunque la incontrano, cubiche spezzate nella retta dei due punti tripli e in una conica per essi. Veramente il sig^r^ Noether (l. c. p. 85) nota soltanto come data *una* tal conica tritangente alla detta sestica il piano doppio dato si riconduce al piano doppio con quartica limite; ma se in luogo di una sola, vengono date più, $\varrho > 1$, convenienti coniche tritangenti, il piano doppio si può ricondurre (razionalmente) ad una superficie a sezioni ellittiche d'ordine $\varrho + 1$, e quindi (p. e. per $\varrho = 4$) rappresentarsi razionalmente sul piano semplice. Dunque la rappresentazione sul piano semplice del cono quadrico doppio con sestica di diramazione di genere 4, si può ottenere determinando i piani tritangenti alla nominata sestica. Perciò *il problema della rappresentazione piana delle superficie della* 4^a^ *famiglia si può ridurre alla risoluzione dell' equazione per la bisezione degli argomenti delle funzioni abeliane di genere* 4 inerenti alla sestica, equazione da cui dipende la separazione dei $2^3(2^4 - 1)$ piani tritangenti alla sestica stessa*).

11. Riassumendo:

La rappresentazione piana delle superficie razionali si può far dipendere, oltrechè da operazioni razionali e dall' estrazione di radicali quadratici e cubici, dalla risoluzione di una delle equazioni per la bisezione degli argomenti

delle funzioni abeliane di genere 3 *o* 4,

o delle funzioni iperellittiche di genere p $(= 1, 2, \ldots)$.

Applicazioni alle varietà con un sistema lineare di superficie razionali.

12. I resultati ottenuti innanzi permettono una applicazione immediata alle varietà algebriche V (di tre dimensioni) che posseggono un *fascio* di superficie razionali, cioè un sistema di superficie razionali siffatto che per ogni punto della varietà passi *una* superficie del sistema.

Ci limiteremo al caso più notevole in cui il fascio (considerato come un ente ∞^1 di cui le superficie sono gli elementi) sia razionale. Possiamo allora riferire proiettivamente gli elementi (superficie) del fascio su V agli iperpiani (S_3) passanti per un piano fisso di S_4 (o agli iperpiani d'un fascio in uno spazio più elevato) e rappresentare ciascuna superficie su una superficie del corrispondente iperpiano; *purchè questa operazione si compia razionalmente* si otterrà una trasformazione birazionale facente passare dalla data varietà ad una varietà avente come sezioni iperpiane di un fascio le superficie costruite: questa trasformazione risulterebbe invece irrazionale, se nell' eseguire l'operazione precedente comparissero delle irrazionalità numeriche, giacchè, al

*) Cfr. Clebsch e Gordan, „Theorie der Abel'schen Functionen" S. 264; Weber, Math. Ann. 13, Noether ibid. 28, 33; Schottky, Crelle's Journal 103.

variare della superficie nel dato fascio su V, queste irrazionalità verrebbero a dipendere da un parametro.

Ciò posto esaminiamo partitamente i 4 casi che si ottengono corrispondentemente alle 4 famiglie cui le superficie del fascio su V possono appartenere.

13. a) Se le dette superficie appartengono alla 1ª famiglia, si può anzitutto trasformare V in una varietà W di S_4 le cui sezioni iperpiane d'un fascio sieno a sezioni razionali: ciascuna di queste superficie F si può rappresentare *razionalmente* sul piano appena se ne sia determinato un punto. Si otterrà dunque la rappresentazione di W sopra S_3, rappresentando le dette superficie F risp. sopra i piani per una retta in S_3, purchè si costruisca su W una curva unisecante le F.

Ora una tale curva esiste sempre: infatti si seghi W con un iperpiano generico; questo iperpiano sega le F secondo curve razionali formanti un fascio razionale sulla superficie φ sezione di W coll' iperpiano; come il sig^r Noether*) ha dimostrato esiste sempre una curva unisecante quelle del fascio su φ, questa curva sega in *un* punto le F. Risulta così provato che:

Le varietà (di tre dimensioni) contenenti un fascio razionale di superficie razionali della 1ª famiglia si possono rappresentare punto per punto su S_3, rappresentando le nominate superficie sui piani per una retta in S_3.

14. b) Si abbia una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 2ª famiglia: si può supporre che la varietà sia in S_4, e le superficie del fascio sieno le sezioni iperpiane per un piano fisso, e sieno superficie F a sezioni ellittiche di un certo ordine $n \leq 9$ (incluso il caso $n = 2$ in cui la V si riduce ad un S_3 doppio con superficie limite d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$ pla). Per $n = 5$ o per $n = 7, 8$ la V si può rappresentare su S_3 rappresentando punto per punto le F sopra i piani d'un fascio.

Per $n = 4$ si può rappresentare ciascuna F sopra un piano doppio con quartica limite, razionalmente, appena si sia determinato un punto della conica doppia di F: ora le coniche doppie delle superficie F formano una superficie su cui si può costruire una unisecante di quelle coniche**) (se le dette coniche sono spezzate la affermazione vale ancora); dunque per $n = 4$ si può sempre rappresentare la varietà V sullo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m - 4)$ pla.

Concludiamo che:

---

*) l. c. Mathem. Annalen Bd. III.

**) Noether l. c.

Una varietà V con un fascio di superficie razionali F della 2ª famiglia si può rappresentare

1) *sopra le S_3 in modo che le F vengano rappresentate sui piani d'un fascio;*

2) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m-4)$ pla, rappresentando le F sui piani doppi per questa retta (dotati di quartica limite);*

3) *o sopra una varietà di un certo ordine m in S_4, dotata di piano $(m-3)$ plo, rappresentando le F sulle superficie cubiche sezioni della varietà cogli iperpiani pel detto piano;*

4) *o sopra una varietà di S_4 possedente un fascio di superficie sezioni del 6º ordine a curve sezioni ellittiche, immagini delle F;*

5) *o sopra una varietà di S_4 possedente un fascio di superficie sezioni del 9º ordine a curve sezioni ellittiche, immagini delle F.*

Se vi è su V una curva unisecante le F, la V nei casi 4), 5) si può rappresentare nel modo 1) sullo S_3 semplice, e nel caso 3) si può rappresentare nel modo 2) sopra uno S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2m$ dotata di retta $(2m-4)$ pla.

Infatti le superficie razionali a sezioni ellittiche degli ordini 6 e 9 si possono rappresentare sopra un piano razionalmente dato un loro punto; mentre, dato un punto di una superficie cubica, questa vien proiettata da esso sul piano doppio con quartica limite.

È dubbio se tali riduzioni possono ottenersi in generale. Certo è soltanto che i casi 2) e 3) dell' enunciato non possono sempre ridursi al caso 1). Per convincersene basta considerare il fascio generale di superficie cubiche di S_3, e riconoscere (come è facile) che non è possibile trasformarlo in un fascio di piani mediante una trasformazione cremoniana.

15. c) *Una varietà V con un fascio di superficie razionali della 3ª famiglia si può rappresentare sopra una varietà contenente una congruenza (d'indice 1) di coniche* (cioè un sistema ∞^2 di coniche tale che per un punto ne passi una): la congruenza sarà razionale se è razionale il fascio delle superficie considerate.

La dimostrazione dell' enunciato è immediata posto che già sappiamo potersi trasformare ogni superficie della 3ª famiglia, razionalmente, in una superficie con un fascio di coniche; basta notare che una serie di fasci di coniche appartenenti alle superficie d'un fascio dà appunto luogo ad una congruenza (d'indice 1).

Come corollario si ha subito:

Una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 3ª famiglia si può rappresentare sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di punto $(2n-2)$ plo.

Omettiamo la ovvia dimostrazione.

Digressione. Notiamo piuttosto un' altra forma (alquanto più comprensiva) che si può dare facilmente ai resultati precedenti:

Una varietà V che contenga una congruenza (d'indice 1) *di curve razionali, si può trasformare in una varietà con una congruenza di coniche.*

Questo teorema appare come una diretta estensione del teorema del sig^r^ Noether relativo alle superficie con un fascio di curve razionali (l. c.), e si può dimostrare collo stesso procedimento, generalizzato. È da notarsi che le coniche della congruenza su V possono essere riferite alle rette d'un cono di S_4 (o, in particolare d'una stella di S_3) se esiste su V una superficie che le seghi in *un* punto: una tale superficie esiste sempre se le dette curve sono d'ordine dispari (cfr. Noether l. c.); ma nel caso opposto non esiste sempre, neppure se la congruenza è razionale: infatti si hanno esempi in proposito relativi alle congruenze di coniche di S_3, di cui il sig^r^ Montesano ha assegnato i tipi irriducibili per trasformazioni birazionali*).

Un corollario della precedente osservazione ci permette di affermare che:

Una congruenza (d'indice 1) *di curve razionali d'ordine dispari in S_3 si può sempre trasformare birazionalmente in una stella di rette.*

16. d) Si abbia una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali F della 4^a^ famiglia: la V si può trasformare in una varietà doppia W riferendo le F ai coni quadrici doppi con sestica limite, d'un fascio: siccome questo fascio è razionale si può costruire una curva unisecante i detti coni quadrici (cfr. n^0^ 13); si può quindi proiettare ciascun cono quadrico doppio dal punto della curva unisecante che gli appartiene, sopra un piano doppio con sestica limite dotata di due punti tripli infinitamente vicini. Così si perviene al resultato:

Una varietà V con un fascio razionale di superficie razionali della 4^a^ *famiglia si può rappresentare sopra lo S_3 doppio dotato di superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ con due punti* ($2n - 3$) *pli infinitamente vicini* (congiunti da una retta ($2n - 6$) pla).

17. Si abbia una varietà V (algebrica, di tre dimensioni) contenente una *rete* di superficie razionali F; cioè un sistema ∞^2 di esse, tale che per due punti generici di V ne passi *una* (sistema necessariamente razionale, essendo sottintesa la irriducibilità delle F**)). Le F passanti per un punto generico di V formano un fascio razionale: il punto base del fascio tien luogo di una curva unisecante le F. Per

*) Montesano „Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio", Rendic. dell' Accad. di Napoli 1895.

**) Enriques „Una questione sulla linearità ecc.", Rendic dell' Accad. dei Lincei 1893.

conseguenza ricordando i resultati ottenuti per le varietà con un fascio di superficie razionali, possedenti una unisecante, si avrà:

Una varietà V con una rete di superficie razionali può sempre essere rappresentata

1) *sopra lo S_3 semplice,*

2) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ con retta $(2n-4)$ pla,*

3) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di punto $(2n-2)$ plo,*

4) *o sopra lo S_3 doppio con superficie di diramazione d'un certo ordine $2n$ dotata di due punti $(2n-3)$ pli* (congiunti da una retta $(2n-6)$ pla).

Nel caso 2) si può rappresentare la V sopra una involuzione di S_3 (cfr. n⁰ 8) ossia risolvere con funzioni razionali non invertibili di tre parametri, l'equazione della V.

Un resultato analogo si ottiene anche nei casi 3) e 4), col procedimento che andiamo ad indicare, sotto le condizioni che dal procedimento stesso appariranno necessarie.

Ragioniamo come se le superficie razionali F della rete su V sieno tutte prive di punti multipli propri: non è questa una restrizione che introduciamo, perchè, se tale ipotesi non fosse verificata, sarebbe facile di mostrare come si possa trasformare V in modo che contemporaneamente tutte le F della rete perdano i loro punti multipli propri.

Ciò posto, col procedimento di aggiunzione esposto si può (nei casi 3), 4) che stiamo considerando) costruire razionalmente sopra ciascuna F un fascio (ultimo aggiunto) di curve C, fascio di curve razionali (3)), o fascio di curve ellittiche aggiunto al sistema ∞^3 di curve di genere due (4)).

Poniamoci nel caso 3) e supponiamo che le intersezioni delle superficie F (due a due) non si compongano delle curve razionali C, sopra nominate. Allora le curve C su V sono ∞^3: le C per un punto O di V formano una serie ∞^1 razionale, essendovi una C sopra ogni F pel punto O, visto che le F per O formano un fascio razionale: tracciamo sopra una F una qualsiasi curva razionale K; le ∞^2 C che si appoggiano a K in un punto formano una serie razionale ∞^2 e (essendo la K arbitraria) invadono tutta la varietà V:

possiamo far corrispondere agli elementi C della detta serie razionale ∞^3, le rette d'nna stella in S_3, e rappresentare ciascuna C sulla corrispondente retta, ciò che si effettua razionalmente avendosi sopra ogni C *un* punto*), il punto in cui essa C si appoggia alla K. Così si viene a far corrispondere ad ogni punto di S_3 *un* punto di V_3.

*) Noether l. c.

Poniamoci invece nel caso 4) e supponiamo che le intersezioni delle F due a due, non si compongano delle curve ellittiche C. Queste C sono dunque ∞^3, e le ∞^1 C passanti per un punto O di V formano una serie razionale. Sopra ogni C per O si può costruire razionalmente un punto A residuo di O contato $n-1$ volte rispetto alle serie g_n^n determinata su C dagli iperpiani dello spazio cui essa appartiene: variando C per O il punto A descrive una curva razionale K_0.

Ad ogni punto A di K_0 corrisponde analogamente una curva razionale K_A e l'insieme di queste curve costituisce una superficie φ su V, che si può riferire, razionalmente, ad una involuzione sopra un piano.

È facile costruire una serie ∞^1 razionale di superficie φ su V; basta far variare il punto O sopra una curva razionale su V (p. e. appartenente ad una F): allora se si fan corrispondere gli elementi φ della serie ai piani d'un fascio in S_3, e si rappresenta ciascuna φ sopra una involuzione appartenente al piano omologo (operazione che si compie razionalmente), si sarà in definitiva rappresentato V sopra una involuzione di S_3.

Concludiamo:

Se una varietà V contiene una rete di superficie razionali di cui le mutue intersezioni variabili non si compongono di curve razionali o ellittiche, la V può essere rappresentata sopra una involuzione di S_3, in modo che ad ogni punto di S_3 corrisponda un punto di V.

18. Il precedente teorema dà luogo ad un corollario relativo alle varietà V possedenti un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali F, le cui intersezioni, due a due, sieno irriducibili. In questo caso se le intersezioni di due F sono razionali o ellittiche si ha sopra ciascuna F una rete di curve razionali o ellittiche (segata dalle altre F) onde ciascuna F può essere riferita, razionalmente, ad una superficie razionale della 1ª o 2ª famiglia e quindi ad una involuzione piana.

Abbiamo dunque:

Una varietà contenente un sistema lineare ∞^3 di superficie razionali ad intersezioni variabili irriducibili può essere rappresentata sopra una involuzione di S_3.

19. Tutti gli enunciati precedenti possono essere tradotti sotto forma algebrica, come nell' introduzione.

Per averne l'espressione più semplice, giova supporre la V in S_4, e supporre che le superficie razionali formanti il fascio, o la rete, o il sistema lineare ∞^3, su V, sieno sezioni iperpiane di essa. Allora si può prendere risp. come fascio, rete, sistema ∞^3 degli iperpiani secanti, il fascio

$$x_4 = a,$$

o la rete

$$x_4 = a x_3 + b,$$

o la stella

$$x_4 = a x_1 + b x_2 + c$$

dove a, b, c sono parametri. È inutile ripetere quì gli enunciati che si trovano nell' introduzione. Ci limitiamo a notare che, relativamente all' ultimo caso, si può sopprimere in esso la condizione di irriducibilità delle mutue intersezioni delle ∞^3 superficie razionali (segate su V dagli iperpiani d'una stella), giacchè tali intersezioni possono esser riducibili soltanto se la V è un cono (razionale). Pertanto siamo condotti ad enunciare il resultato:

Si abbia una equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

e si supponga che tutte le equazioni

$$f(x, x_2, x_3, \; a x_1 + b x_2 + c x_3) = 0$$

(dove a, b, c sono parametri fissi) *sieno risolubili ponendo* $x_1 \, x_2 \, x_3$ *funzioni razionali di due parametri; allora la equazione*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

si può risolvere ponendo $x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4$ *funzioni razionali di tre parametri* (fatta astrazione dalla condizione di invertibilità).

Come caso particolare desumeremo la possibilità di risolvere con funzioni razionali di 3 parametri: l'equazione generale del 3⁰ grado in 4 variabili (resultato cui il sig[r] Noether è giunto direttamente nel modo più semplice); l'equazione

$$x_4^2 = f_4(x_1 x_2 x_3)$$

dove f è un polinomio generale del 4⁰ grado; l'equazione

$$x_4^2 = f(x_1 x_2 x_3)$$

dove f è un polinomio di 6⁰ grado che posto $= 0$ rappresenta una superficie del 6⁰ ordine con due rette triple infinitamente vicine ecc. Ma le risoluzioni ottenute di tali equazioni sono tutte risoluzioni con funzioni razionali (di 3 parametri) non invertibili. Se, in altro modo, si possano risolvere le predette equazioni con funzioni razionali invertibili (di 3 parametri), è una questione che rimane tuttora insoluta.

Die Plücker'schen Zahlen der Abweichungscurve*).

Von

W. Bouwman in Schiedam (Holland).

1. Die Form einer Curve C^n in der Nähe eines Punktes A wird durch den Krümmungskreis bestimmt. Die Untersuchung dieser Form erhält eine Ausdehnung durch die Betrachtung der vier- und fünfpunktig berührenden Kegelschnitte und der Abweichungsaxen**). Ebenso schliesst sich an die Entwundene der Curve C^n der Ort der Mittelpunkte dieser fünfpunktig berührenden Kegelschnitte, die wir *Abweichungskegelschnitte* nennen, an. In den folgenden Zeilen werden wir die Plücker'schen Zahlen dieser „*Abweichungscurve*" zu bestimmen versuchen, zuerst auf geometrischem Wege. Nachher werden die erhaltenen Formeln auf analytischem Wege sich als völlig richtig bewähren.

Für die geometrischen Betrachtungen setzen wir die Aufgabe also in projective Form:

Die Plücker'schen Zahlen des Ortes Δ der Pole einer Geraden l in Bezug auf die Abweichungskegelschnitte der gegebenen Curve C^n zu bestimmen.

Der Ort Δ wird die Abweichungscurve, wenn die Gerade l ins Unendliche rückt.

Zuerst bemerken wir, dass die Curven C^n und Δ dasselbe Geschlecht haben, weil sie sich eindeutig entsprechen. Denn in jedem Punkte der Curve C^n ist ein Abweichungskegelschnitt bestimmt und somit ein Pol der Geraden l und umgekehrt.

2. Wie die Normalen einer Curve die Entwundene einhüllen, ebenso ist Δ die Enveloppe der Geraden, welche die Punkte der Curve C^n mit den zugehörigen Polen verbinden. Dies zu beweisen ist

*) W. Bouwman, Dissert. Groningen 1896.

**) Salmon: Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, § 386. Zweite Auflage.

leicht. Sei a (Fig. 1) die Tangente der Curve in A, und ziehen wir durch den Durchschnittspunkt der geraden Linien a und l eine unendlich wenig von a abweichende Gerade a_1, welche mit der Curve C^n unter andern die zwei in der Nähe von A liegenden Punkte 1 und 4 gemein hat. Zwei Durchschnittspunkte 2 und 3 von a und C^n sind in A zusammengefallen. Die vier Punkte 1, 2, 3, 4 dürfen als vier auf einander folgende Punkte der Curve C^n betrachtet werden; die Abweichungskegelschnitte (01234) und (12345) haben dieselben gemein. Wenn nun P' der vierte harmonische Punkt ist zu P in Bezug auf die Punkte 1 und 4, so ist die Gerade $\overline{AP'}$ oder l' die Polargerade von P in Bezug auf die Kegelschnitte (01234) und (12345). Weil P auf l liegt, liegen die zwei Pole der Geraden l auf l', m. a. W. die Tangente der Curve Δ geht durch den zugehörigen Punkt A der Curve C^n.

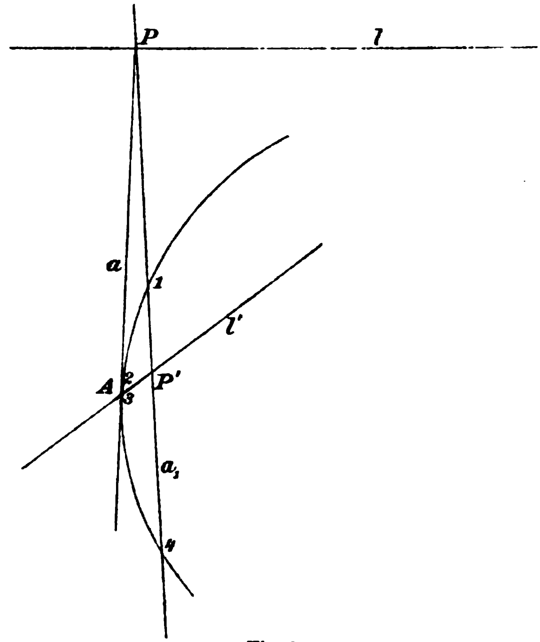


Fig. 1.

Wir dürfen somit auch sagen, dass Δ die Enveloppe ist der Polargeraden der Punkte P von l in Bezug auf die betreffenden Abweichungskegelschnitte. Diese Geraden sind auch die reciproken Polargeraden von l in Bezug auf die Schaaren, welche durch zwei auf einander folgende als Büschel zweiter Classe betrachtete Kegelschnitte bestimmt werden. Es leuchtet ein, dass der Dualismus nicht ein völliger ist.

3. Fassen wir jetzt die Singularitäten der Curve Δ und zwar die Spitzen und Inflexionen ins Auge. Diese können nicht anders entstehen als:

I) aus den Punkten der Curve C^n, in denen sechspunktige Berührung mit einem Abweichungskegelschnitt stattfindet, also aus den sextactischen Punkten*);

*) Halphen, Recherche etc. *Journal de Math. pures et appliquées*, Série III, Tome II, p. 257.

II) aus den singulären Punkten von C^n, wo die Abweichungskegelschnitte zerfallen;

III) aus den Durchschnittspunkten von l und C^n.

In einem gewöhnlichen Doppelpunkte der Curve C^n z. B. verhält jeder Ast sich als ob der andere nicht da wäre.

A. Nicht auf l liegende Punkte von C^n.

4. *Sextactischer Punkt* S. Der Kegelschnitt (12345) hat auch den Punkt 6 mit C^n gemein, der Kegelschnitt (23456) geht auch durch den Punkt 1. Die Kegelschnitte (12345, 6) und (1, 23456) fallen zusammen. Die zwei Pole von l fallen deshalb auch unbedingt zusammen: es entsteht eine Spitze der Curve Δ.

Die drei Kegelschnitte (12345, 6), (1, 23456) und (34567) haben die vier Punkte 3, 4, 5, 6 gemein, folglich liegen die drei Pole der Geraden l auf der Rückkehrtangente von Δ.

Diese Spitze zeigt also keine höhere Singularität.

5. *Inflexion* B. (Fig. 2). Auf der Inflexionstangente b liegen drei auf einander folgende Punkte 3, 4, 5 der Curve C^n. Die drei

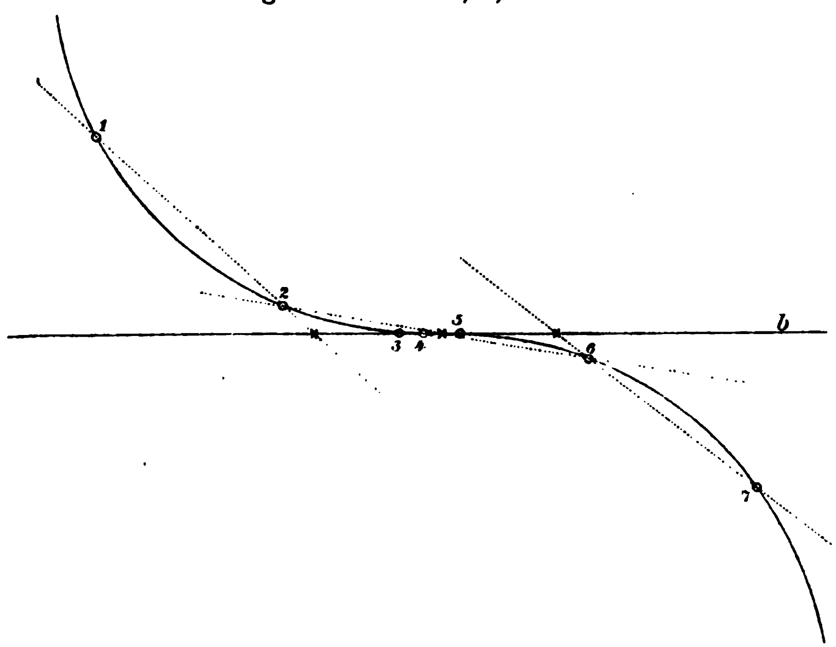


Fig. 2.

Kegelschnitte $(12\overline{345})$, $(2\overline{345}6)$ und $(\overline{345}67)$ zerfallen respective in

b und die Gerade $\overline{12}$,

b und die Gerade $\overline{26}$,

b und die Gerade $\overline{67}$.

Dies sind jedesmal zwei unendlich wenig verschiedene Geraden, deren Durchschnittspunkt auf l liegt und dem Punkte B unendlich nahe ist. Diese drei Durchschnittspunkte sind die drei Pole von l, so dass Δ eine mit B zusammenfallende Inflexion erhält, welche b als Inflexionstangente hat.

6. *Spitze* K. Wir fassen vollkommen umgekehrt wie bei der Inflexion den Abweichungskegelschnitt als einen Büschel zweiter Classe auf, der fünf auf einander folgende Tangenten mit der Curve C^n gemein hat. Es gehen durch K drei auf einander folgende Tangenten $3', 4', 5'$ der Curve C^n. Die drei Büschel $(1'2'\underline{3'4'5'})$, $(2'\underline{3'4'5'}6')$, $(\underline{3'4'5'}6'7')$ zerfallen respective in

den Büschel erster Classe K und den Büschel erster Classe $\underline{1'2'}$,
den Büschel erster Classe K und den Büschel erster Classe $\underline{2'6'}$,
den Büschel erster Classe K und den Büschel erster Classe $\underline{6'7'}$.

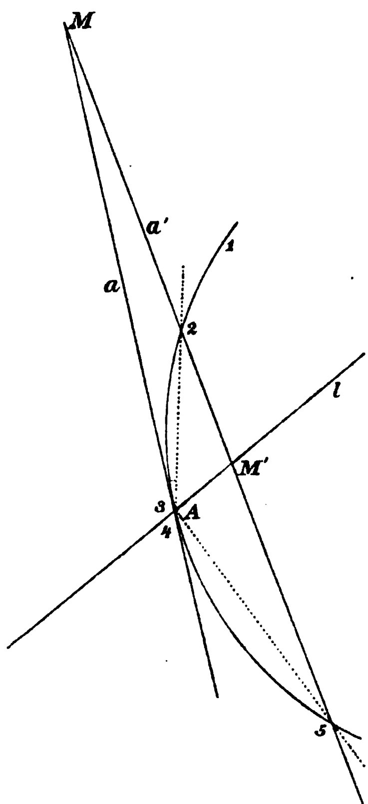


Fig. 3.

Die drei Polargeraden der drei betreffenden auf den Geraden l liegenden Punkte in Bezug auf diese drei degenerirten Büschel sind die drei Geraden, welche K verbinden mit den drei Durchschnittspunkten $\underline{1'2'}$, $\underline{2'6'}$, $\underline{6'7'}$. Diese drei Verbindungsgeraden weichen unendlich wenig von der Rückkehrtangente k der Classe C^n ab. Folglich erhält Δ eine Spitze, die mit K zusammenfällt und k als Tangente hat.

B. Punkte auf der Geraden l.

7. Sei A (Fig. 3) ein gewöhnlicher Durchschnittspunkt von l und C^n. Wir ziehen in A die Tangente a. Zwei Durchschnittspunkte 3, 4 von a und C^n sind in A zusammengefallen. Durch den folgenden Punkt 5 der Curve C^n ziehen wir die Gerade a' so, dass die in der Nähe von A liegenden Durchschnittspunkte 5 und 2 von a' und C^n harmonisch getrennt sind von den Durchschnittspunkten M' und M von a' mit l und a. Dies ist leicht auszuführen mit Hilfe der Geraden $\overline{A2}$. Es ist dann einleuchtend, dass die Pole der zwei Kegelschnitte (12345) und (23456) in M unbedingt zusammenfallen. Also ist M eine Spitze von Δ.

Die vier Kegelschnitte (01234), (12345), (23456), (34567) haben die Punkte 3, 4 gemein, d. h. eine Tangente und den Contactpunkt. Folglich liegen die vier betreffenden Pole auf der Tangente a dem Punkte M unendlich nahe. Deshalb schneidet die Rückkehrtangente a die Curve Δ in M in vier auf einander folgenden Punkten, von denen zwei unbedingt zusammenfallen. Folglich ist M eine Knotenspitze und somit einer Spitze, einer Inflexion, einem Doppelpunkt und einer Doppeltangente äquivalent (Fig. 5).

Die nachstehende Beweisführung gewährt denselben Erfolg. Die

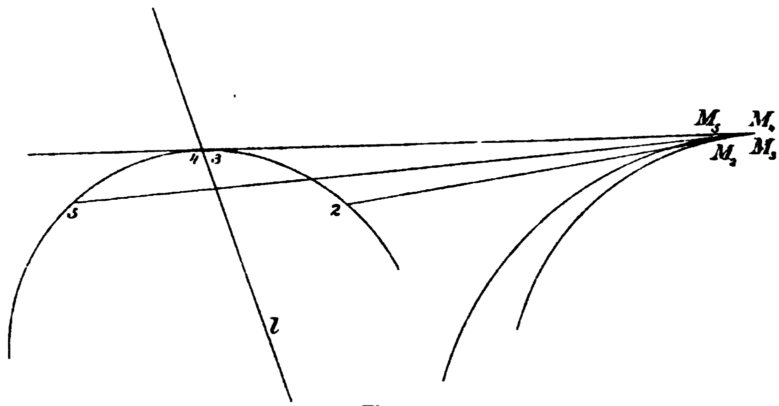


Fig. 4.

vier Geraden, welche die vier Punkte $M(M_2, M_3, M_4, M_5)$ mit den vier Punkten 2, 3, 4, 5 (Fig. 4) verbinden, wo die vier betreffenden Kegelschnitte die Curve C^n berühren, sind vier auf einander folgende

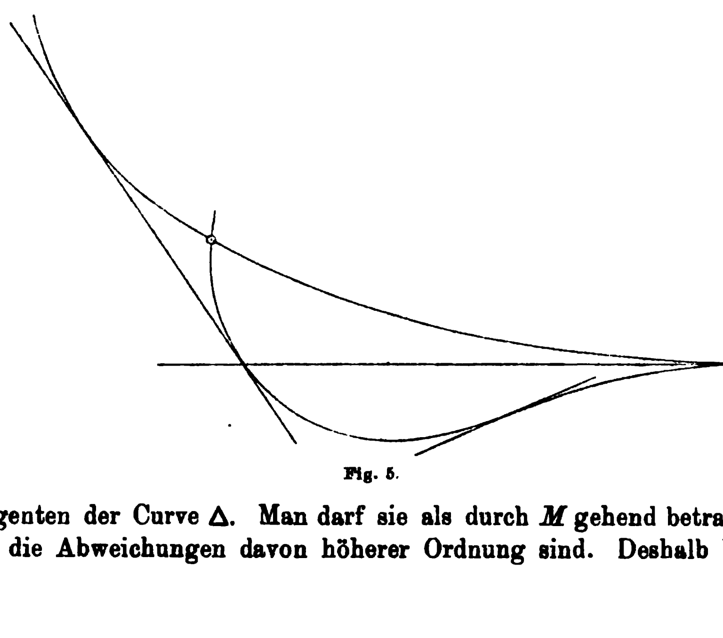


Fig. 5.

Tangenten der Curve Δ. Man darf sie als durch M gehend betrachten, weil die Abweichungen davon höherer Ordnung sind. Deshalb hat M

vier auf einander folgende Tangenten mit Δ gemein, von denen zwei, die Verbindungsgeraden des Punktes M mit 3 und 4, unbedingt zusammenfallen. Also zeigt M die Kennzeichen einer Knotenspitze.

8. *Sextactischer Punkt* S auf l. Der Kegelschnitt (12345) geht auch durch den Punkt 6, und der Kegelschnitt (23456) geht auch durch den Punkt 1. Die drei Kegelschnitte (12345, 6), (1, 23456), (34567) haben die vier Punkte 3, 4, 5, 6 gemein. Folglich fallen die drei auf einander folgenden Pole Σ_1, Σ_2, Σ_3 unbedingt zusammen.

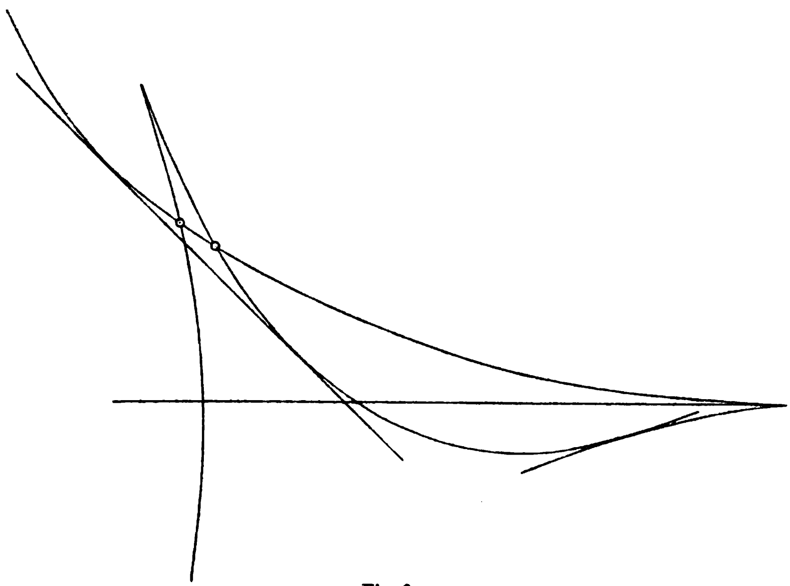


Fig. 6a.

Der Zusammenfall der Punkte Σ_1 und Σ_2 deutet auf eine Spitze, der Zusammenfall von Σ_2 und Σ_3 auf eine zweite Spitze, der Zusammenfall von Σ_1 und Σ_3 auf einen Knoten.

Die fünf Kegelschnitte (12345, 6), (1, 23456), (34567), (45678), (56789) haben die zwei Punkte 5, 6 gemein, d. h. die Tangente s und den Contactpunkt S. Hieraus ergiebt sich, dass die Tangente s in Σ fünf Durchschnittspunkte mit Δ gemein hat.

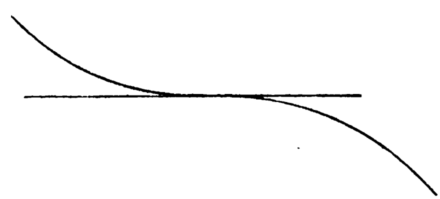


Fig. 6b.

Die fünf Geraden, welche die fünf Punkte mit den Berührungspunkten der fünf betreffenden Kegelschnitte verbinden, sind fünf auf einander folgende Tangenten, die Σ mit der Curve Δ gemein hat. Zwei von diesen fallen unbedingt zusammen. Also gilt Σ für eine Inflexion und für wenigstens eine Doppeltangente.

Die Anzahl der Spitzen und Inflexionen in Σ ist auch durch folgende Auseinandersetzung zu bestimmen. Vorausgesetzt l geht zuerst nicht durch den sextactischen Punkt und jetzt bewegen wir l, bis dies der Fall sei. Der Punkt Σ aus S ist jetzt entstanden aus einer gewöhnlichen Spitze und einer Knotenspitze, enthält also zwei Spitzen und eine Inflexion. (Fig. 6a und 6b, s. Seite 29).

9. *Gewöhnlicher Contactpunkt* von l und C^n. Von Secante werde l zur Tangente. Aus jedem der zwei zusammenfallenden Durchschnittspunkte von l und C^n entstand vorher eine Knotenspitze. Sobald l Tangente ist, ist der Durchschnittspunkt von l mit der in R an C^n gezogenen Tangente unbestimmt. Die ganze Gerade l vertritt diesen Durchschnittspunkt; die Polargerade in Bezug auf den Abweichungskegelschnitt wird gleichfalls unbestimmt und entartet in den Strahlenbüschel erster Classe R. Dieser Büschel trennt sich von Δ und die Classe wird um eins verringert.

Ordnung und Geschlecht bleiben unverändert. Mit Hilfe der Plücker'schen Formeln schliessen wir, dass die Zahl der Spitzen um eins wächst und die Zahl der Inflexionen um zwei abnimmt. Aus zwei Knotenspitzen erhalten wir also einen Punkt, der drei Spitzen und keine Inflexion enthält.

Die nachstehende Auseinandersetzung ergiebt denselben Erfolg. Vier auf einander folgende Kegelschnitte haben zwei Punkte oder die Tangente l und den Contactpunkt R gemein. Die vier betreffenden Pole fallen in R unbedingt zusammen. Durch den Zusammenfall von

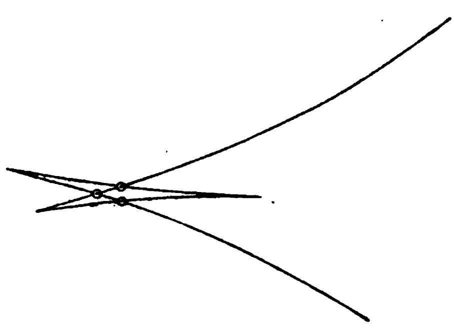


Fig. 7a.

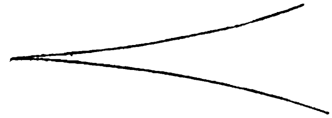


Fig. 7b.

R_1 und R_2, R_2 und R_3, R_3 und R_4 enthält dieser Punkt drei Spitzen; durch den Zusamenfall von R_1 und R_3, R_1 und R_4, R_2 und R_4 enthält derselbe drei Knoten.

Fünf auf einander folgende Kegelschnitte berühren die Gerade l. Die fünf Pole sind fünf auf einander folgende auf l liegende Punkte. R hat die fünf Geraden, welche diese fünf Pole mit den betreffenden Berührungspunkten verbinden, als auf einander folgende Tangenten mit

Δ gemein. Weil R diesen fünf Punkten unendlich nahe liegt, fallen nicht zwei dieser Tangenten unbedingt zusammen. Also enthält R keine Inflexion. Eine geometrische Darstellung geben Fig. 7a und 7b (s. Seite 30).

10. Die Gerade l sei *Tangente* in einem *sextactischen Punkte* Q von C^n.

Wir setzen voraus, dass l Tangente in einem andern Punkte von C^n sei, und bewegen l jetzt, bis Q der Contactpunkt ist. Der in § 9 betrachtete Punkt fällt dann mit einer einfachen Spitze zusammen. Der entstandene Punkt enthält also vier Spitzen und keine Inflexion.

Der Beweisführung in § 9 analog dürfen wir auch sagen: Sechs Kegelschnitte haben die Tangente l gemein. Folglich liegen auf der Tangente l sechs auf einander folgende Punkte von Δ, von denen fünf unbedingt zusammenfallen. Deshalb gilt Q für vier Spitzen und sechs

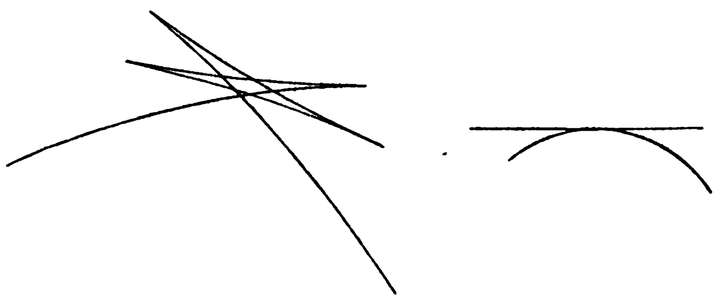


Fig. 8.

Knoten. Q hat sechs auf einander folgende Tangenten mit Δ gemein, von denen keine zwei gänzlich zusammenfallen. Folglich enthält Q keine Inflexion. (Fig. 8).

11. *Inflexion B auf l*, mit b als Inflexionstangente.

Die Gerade l hat hier bloss einen Durchschnittspunkt mit C^n. In diesem Punkte degenerirt der Abweichungskegelschnitt in zwei unendlich wenig verschiedene Geraden b und b_1, die sich in dem genannten Durchschnittspunkte schneiden. Der Pol von l wird unbestimmt und degenerirt in c, die vierte harmonische Gerade zu l in Bezug auf b und b_1. Man darf c als mit b zusammenfallende betrachten. Folglich trennt sich die Gerade b von Δ.

Wenn wir alle Punkte des in die Gerade b degenerirten Poles nach einander mit dem betreffenden Punkt B der Curve C^n verbinden, finden wir stets die Gerade b. Wenn wir aber B von b mit B verbinden, wird die Verbindungsgerade unbestimmt und degenerirt in den Büschel erster Classe B. Dieser Büschel trennt sich folglich von Δ.

Wenn wir deshalb die Gerade l aus einer anderen Lage bewegen, bis sie durch B geht, so werden Ordnung und Classe beide um eins reducirt.

Mit Hilfe der Plücker'schen Formeln finden wir leicht, dass die Zahl der Inflexionen wie die der Spitzen eins weniger wird.

Bei der genannten Bewegung von l fällt eine Knotenspitze von Δ mit einer Inflexion zusammen, und es entsteht ein Punkt, der bloss für eine Inflexion gilt, m. a. W. eine einfache Inflexion. Weil die Knotenspitze und nicht die Inflexion aus B die Lage ändert, erhellt, dass auch wenn l durch B geht, die Inflexion mit B zusammenfällt und b als Tangente hat.

12. Wir setzen nun voraus, dass die *Gerade* l aus einer willkürlichen Lage zur *Inflexionstangente* im Punkte T wird. Jeder der Abweichungskegelschnitte in den drei auf einander folgenden Durchschnittspunkten von C^n und l degenerirt in l und eine unendlich wenig von l verschiedene Gerade. Die drei Pole werden unbestimmt und degeneriren alle drei in die Gerade l, die sich folglich dreimal von Δ trennt.

Als Verbindungsgeraden der drei Pole mit den betreffenden Berührungspunkten erhalten wir dreimal die Gerade l und drei Büschel erster Classe. Der Büschel erster Classe T trennt sich somit dreimal von Δ.

Bei der genannten Bewegung von l werden Ordnung und Classe also um drei herabgesetzt; folglich wird auch die Zahl der Spitzen und die der Inflexionen drei weniger. Drei Knotenspitzen und eine einfache Inflexion fallen zusammen; es bleibt bloss eine gewöhnliche Inflexion übrig, die in T liegt und l als Tangente hat.

13. *Spitze* K *auf* l. Die Gerade k sei Rückkehrtangente. Die Gerade l schneidet C^n in K in zwei zusammenfallenden Punkten. Die zwei denselben entsprechenden Kegelschnitte degeneriren beide in die doppelt gezählte Rückkehrtangente. Man muss bei diesen Kegelschnitten K betrachten als den Durchschnittspunkt dieser zwei nicht gänzlich zusammenfallenden Geraden. Die zwei Pole von l degeneriren beide in die Gerade k, die sich folglich zweimal von Δ trennt.

Wenn wir nach einander alle Punkte des degenerirten Poles k mit dem Berührungspunkt K verbinden, erhalten wir die Gerade k und den Büschel erster Classe K. Dieser Büschel trennt sich deshalb zweimal von Δ.

Also werden Ordnung und Classe von Δ um zwei herabgesetzt, wenn eine Spitze auf l liegt und daraus ergiebt sich mit Hilfe der Plücker'schen Formeln, dass die Zahl der Spitzen wie die der Inflexionen um zwei weniger wird.

Wenn wir die Gerade l also aus einer anderen Lage bewegen, bis sie durch K geht, so fallen zwei Knotenspitzen mit einer gewöhnlichen

Spitze zusammen, und eine einfache Spitze entsteht in K mit k als Rückkehrtangente.

14. Sei l zum Schluss *Rückkehrtangente* in L. Mit den drei Durchschnittspunkten in L correspondiren drei degenerirte Kegelschnitte. Der in l degenerirte Pol trennt sich dreimal von Δ.

Die drei betreffenden Verbindungsgeraden werden gleichfalls unbestimmt, und der Büschel erster Classe L trennt sich dreimal von Δ.

Ordnung und Classe werden um drei reducirt. Die Zahl der Spitzen und die der Inflexionen wird um drei weniger; anstatt einer einfachen Spitze und drei Knotenspitzen erhalten wir bloss eine gewöhnliche Spitze in L, die l als Tangente hat.

Hiermit sind alle Fälle der Curven ohne höhere Singularitäten erschöpft. Die geometrische Behandlung dieser höheren Singularitäten bietet leider zu grosse Schwierigkeiten.

Wir wollen jetzt noch kurz darauf hinweisen, wie wir zu den erhaltenen Ergebnissen auch auf analytischem Wege gelangen können, und wie die analytische Behandlungsweise leicht auf jede höhere Singularität ausgedehnt wird.

15. F. J. van den Berg*) giebt die folgenden Formeln

$$(1)\qquad x' = x + \frac{3y_2y_3}{5y_3^2 - 3y_2y_4}, \quad y' = y - \frac{3y_2(3y_2^2 - y_1y_3)}{5y_3^2 - 3y_2y_4}.$$

Hierin sind x', y' die Coordinaten des Abweichungsmittelpunktes, d. h. des Mittelpunktes des Abweichungskegelschnitts x, y die Coordinaten des Berührungspunktes, y_1, y_2 u. s. w., die mit Hilfe der Gleichung von C^n abgeleiteten Differentialquotienten von y nach x u. s. w.

Es ist leicht die Tangentialcoordinaten u', v' der Geraden, welche diesen Mittelpunkt mit dem betreffenden Contactpunkt verbindet, zu bestimmen. Man findet

$$(2)\qquad u' = -\frac{3y_2^2 - y_1y_3}{(3y_2^2 - y_1y_3)x + yy_3}, \quad v' = -\frac{y_3}{(3y_2^2 - y_1y_3)x + yy_3}.$$

Wie bekannt ist, sind die Bedingungen für eine Spitze $\frac{dy'}{dx'}$ entweder $=\frac{0}{0}$ oder $=\frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \infty$; für eine Inflexion sind dieselben $\frac{dv'}{du'}$ entweder $=\frac{0}{0}$ oder $=\frac{\infty}{\infty}$ und $\frac{d^2v'}{du'^2} = \infty$.

Den ersten Bedingungen genügen die Punkte, welche durch die Differentialgleichung

$$(3)\qquad 9y_2^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3 = 0$$

bestimmt werden, d. h. die sextactischen Punkte.

*) F. J. v. d. Berg. Over Krommingskegelsneden van vlakke kromme lijnen. *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Acad. van Wetensch., Afd. Natuurkunde, 3de reeks, Dl IX.*

Letzteren Bedingungen genügen die durch die Differentialgleichung $y_2 = 0$ bestimmten Inflexionen von C^n.

Hinsichtlich beider Arten von Singularitäten bedürfen die singulären Punkte und die unendlich weit entfernten Punkte von C^n einer Untersuchung.

16. Wir setzen voraus, die Gleichung der Curve C^n sei in einer solchen Form gegeben, dass die zu untersuchenden Punkte mit Beziehung zu den Coordinatenaxen keine besondere Lage haben, und wir brauchen daher auf $y_1 = 0$ und $y_1 = \infty$ nicht zu achten.

Für die Untersuchung wollen wir die Coordinaten der Curve in der Nähe des betrachteten Punktes mit Hilfe eines Parameters t darstellen.

Nehmen wir zuerst einen nicht unendlich weit liegenden *linearen* Ast. Sei (ξ_1, η_1) der feste Punkt auf C^n, (x, y) der sich bewegende Punkt in der Nähe von (ξ_1, η_1). Wir haben

(4) $x - \xi_1 = t, \quad y - \eta_1 = \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \varepsilon t^5 + \cdots.$

Hieraus ergiebt sich

$$y_1 = \alpha + 2\beta t + 3\gamma t^2 + \cdots$$

u. s. w., und mit Hilfe der Formeln (1)

$$(5)\qquad \begin{cases} x' - \xi_1 = \dfrac{T_1}{N_1}, \quad y' - \eta_1 = \dfrac{T_1'}{N_1}, \\ T_1 = \beta\gamma + 8\gamma^2 t + (-10\beta\varepsilon + 46\gamma\delta)t^2 + \cdots, \\ T_1' = \alpha\beta\gamma - 2\beta^3 + (8\alpha\gamma^2 + 16\beta^2\gamma)t + \cdots, \\ N_1 = 5\gamma^2 - 4\beta\delta + (-20\beta\varepsilon + 28\gamma\delta) + \cdots. \end{cases}$$

Wenn zwischen α, β, γ u. s. w. keine Beziehung besteht, zeigt die Abweichungscurve D nichts besonderes.

17. Die Differentialgleichung eines sextactischen Punktes wird

$$\beta^2\varepsilon - 3\beta\gamma\delta + 2\gamma^3 = 0$$

und unter dieser Bedingung kann man die Formeln (5) unter die folgende Form bringen

$$(6)\qquad \begin{cases} x' - \xi_1 - \dfrac{\beta\gamma}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} = \dfrac{1}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} \cdot \dfrac{\nu_1 t^2 + \nu_2 t^3 + \cdots}{N_1}, \\ y' - \eta_1 - \dfrac{\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} = \dfrac{1}{5\gamma^2 - 4\beta\delta} \cdot \dfrac{\mu_1 t^2 + \mu_2 t^3 + \cdots}{N_1}. \end{cases}$$

Dies ist eine Spitze.

Substituiren wir den Werth von x' und y' in die Gleichung

$$\frac{X - \xi_1}{\beta\gamma} = \frac{Y - \eta_1}{\alpha\beta\gamma - 2\beta^3}$$

der Tangente, so finden wir, dass diese Tangente die Curve D in drei auf einander folgenden Punkten schneidet. Aus einem sextactischen Punkte erhalten wir folglich eine einfache Spitze.

18. Dèr betrachtete Ast zeigt eine Inflexion, wenn $\beta = 0$. Die Formeln (6) werden

$$(7)\quad \begin{cases} x' - \xi_1 = \dfrac{8\gamma^2 t + 46\gamma\delta t^2 + (80\gamma\varepsilon + 80\delta^2)t^3 + \cdots}{5\gamma^2 + 28\gamma\delta t + \cdots}, \\ y' - \eta_1 = \dfrac{8\alpha\gamma^2 t + 46\alpha\gamma\delta t^2 + (80\alpha\gamma\varepsilon + 80\alpha\delta^2 + 40\gamma^3)t^3 + \cdots}{5\gamma^2 + 28\gamma\delta t + \cdots}. \end{cases}$$

Dies ist eine Inflexion, die mit der Inflexion von C^n zusammenfällt und dieselbe Tangente hat.

Eine Spitze von C^n wird vorgestellt durch

$$x - \xi_1 = t^2,$$
$$y - \eta_1 = \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \cdots.$$

Hieraus geht wieder eine Spitze hervor.

19. Einen unendlich weit entfernten linearen Ast kann man darstellen durch

$$x = \frac{1}{t},$$
$$y = \frac{\alpha}{t} + \beta + \gamma t + \delta t^2 + \varepsilon t^3 + \cdots,$$

Hieraus findet man

$$(8)\begin{cases} x' - \dfrac{\delta}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{(-10\gamma^2\zeta + 30\gamma\delta\varepsilon - 20\delta^3)t^2 + (-40\gamma^2\eta + 60\gamma\delta\zeta + 80\gamma\varepsilon^2 - 100\delta^2\varepsilon)t^3 + \cdots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + (16\gamma\varepsilon + 20\delta^2)t^2 + \cdots}, \\ y' - \beta - \dfrac{\alpha\delta}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma}\,\dfrac{\alpha(-10\gamma^2\zeta + 30\gamma\delta\varepsilon - 20\delta^3)t^2 + \cdots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + (16\gamma\varepsilon + 20\delta^2)t^2 + \cdots}. \end{cases}$$

Dies ist eine Spitze.

Aus der Gleichung der Rückkehrtangente

$$\frac{(-5\gamma^2\zeta + 15\gamma\delta\varepsilon - 10\delta^3)t^4 + \cdots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \cdots} = 0$$

erhellt, dass diese Tangente die Curve D in vier auf einander folgenden Punkten schneidet.

Aus den Formeln (2) finden wir

$$(9)\quad \begin{cases} u' - \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{(\beta\gamma^2 + \alpha\gamma\delta)t^2 + \cdots}{\beta\gamma + 4\beta\delta t + \cdots}, \\ v' + \dfrac{1}{\beta} = -\dfrac{1}{\beta}\cdot\dfrac{\gamma\delta t^2 + \cdots}{\beta\gamma + 4\beta\delta t + \cdots}. \end{cases}$$

Zwei auf einander folgende Tangenten fallen gänzlich zusammen. Aus der Gleichung des Contactpunktes geht hervor, dass dieser Punkt vier auf einander folgende Tangenten mit der Curve D gemein hat.

Der entstandene Punkt ist also eine Knotenspitze.

20. Der betrachtete unendlich weit entfernte Punkt ist ein sextactischer Punkt unter der Bedingung

$$-\gamma^2\zeta + 3\gamma\delta\varepsilon - 2\delta^3 = 0.$$

Unter dieser Bedingung werden die erhaltenen Formeln (8) reducirt in

$$(10)\qquad \begin{cases} x' - \dfrac{\delta}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma} \cdot \dfrac{\lambda_1 t^3 + \cdots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \cdots}, \\[2ex] y' - \beta - \dfrac{\alpha\delta}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma} \cdot \dfrac{\alpha\lambda_1 t^3 + \cdots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \cdots}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$\frac{\varrho_1 t^5 + \cdots}{\gamma^2 + 8\gamma\delta t + \cdots}.$$

Die Formeln (9) bleiben unverändert. Der Contactpunkt hat fünf auf einander folgende Tangenten mit der Curve D gemein. Aus diesen Formeln ergiebt sich, dass der entstandene Punkt zwei Spitzen, zwei Knoten, einer Inflexion und einer Doppeltangente äquivalent ist.

Der betrachtete unendlich weit entfernte Punkt ist eine Inflexion wenn $\gamma = 0$

$$x' = \frac{1}{t} \cdot \frac{8\delta^2 + 46\delta\varepsilon t + (80\delta\zeta + 180\varepsilon^2)t^2 + (95\delta\eta + 340\varepsilon\zeta)t^3 + \cdots}{20\delta^2 + 100\delta\varepsilon t + \cdots},$$

$$y' - \beta = \frac{1}{t} \cdot \frac{8\alpha\delta^2 + 46\alpha\delta\varepsilon t + (80\alpha\delta\zeta + 180\alpha\varepsilon^2)t^2 + (95\alpha\delta\eta + 340\alpha\varepsilon\zeta - 10\delta^3)t^3 + \cdots}{20\delta^2 + 100\delta\varepsilon t + \cdots}.$$

Dies ist wieder eine Inflexion an derselben Stelle und mit derselben Tangente.

21. Einen Ast, welcher die unendlich weit entfernte Gerade in einem Punkte berührt, kann man darstellen durch

$$x = \frac{1}{t^2},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta}{t} + \delta t + \varepsilon t^2 + \cdots.$$

Hieraus geht ein vierfacher Punkt hervor, der drei Spitzen und drei Knoten äquivalent ist.

Dieser Contactpunkt ist sextactischer Punkt unter der Bedingung $\varepsilon = 0$. Es entsteht ein fünffacher Punkt, der für vier Spitzen und sechs Knoten gilt.

Eine unendlich weit entfernte Spitze kann man darstellen durch

$$x = \frac{1}{t^2},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^2} + \gamma + \delta t + \varepsilon t^2 + \cdots.$$

Die unendlich weit entfernte Gerade ist Inflexionstangente:

$$x = \frac{1}{t^3},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^3} + \frac{\beta}{t^2} + \frac{\gamma}{t} + \delta + \varepsilon t + \cdots.$$

Diese Gerade ist Rückkehrtangente:

$$x = \frac{1}{t^3},$$

$$y = \frac{\alpha}{t^3} + \frac{\gamma}{t} + \delta + \varepsilon t + \cdots.$$

Auch in diesen Fällen werden sich die auf geometrischem Wege erhaltenen Ergebnisse als richtig erweisen.

22. Fassen wir jetzt das Resultat zusammen:

Jede Inflexion von C^n veranlasst eine Inflexion der Curve D, an demselben Ort und mit derselben Tangente.

Aus jeder Spitze von C^n geht eine Spitze von D hervor an demselben Ort und mit derselben Tangente.

Jeder nicht auf l_∞ liegende sextactische Punkt von C^n verursacht eine Spitze von D.

Jeder gewöhnliche Durchschnittspunkt von l_∞ und C_n veranlasst eine Knotenspitze.

Aus einem sextactischen Durchschnittspunkt entsteht ein dreifacher Punkt, der zwei Spitzen, zwei Knoten, eine Inflexion und eine Doppeltangente enthält.

Aus einem gewöhnlichen Contactpunkt von C^n und l_∞ geht ein einfacher Punkt hervor, der für drei Spitzen und drei Knoten gilt. Er fällt mit dem Contactpunkt zusammen und hat l_∞ als Tangente.

Aus einem sextactischen Contactpunkt entsteht ein fünffacher Punkt, der vier Spitzen und sechs Knoten äquivalent ist.

23. Aus unseren Betrachtungen werden die nachstehenden Formeln leicht abgeleitet

$$(11)\quad \begin{cases} G = g, \\ K = 2(m+3n+10g-10) - (\beta-\varrho+2\varkappa+3\beta'+3\varkappa'), \\ B = 2(m+g-1) - (\beta+2\varrho+2\varkappa+3\beta'+3\varkappa'), \\ N = 2(m+2n+6g-6) - (\beta+2k+3\beta'+3\varkappa'), \\ M = 2(m+2n+3g-3) - (\beta+\varrho+2\varkappa+3\beta'+3\varkappa'). \end{cases}$$

Durch n, m, g, k, b stellen wir respective Ordnung, Classe, Geschlecht, Zahl der Spitzen, Zahl der Inflexionen der Curve C^n dar. Durch N, M, G, K, B bezeichnen wir die betreffenden Zahlen bei der Abweichungscurve.

Es liegen β Inflexionen und $\varkappa$ Spitzen auf l_∞, für welche l_∞ nicht Tangente ist; l_∞ ist Tangente von C^n in β' Inflexionen, $\varkappa'$ Spitzen und ϱ anderen Punkten.

24. Es ist einleuchtend, dass wir auch im Falle höherer Singularitäten die Curve in der Nähe eines jeden zu untersuchenden Punktes mit Hilfe eines Parameters darstellen können. Man substituirt den

hieraus abgeleiteten Werth von y_1, y_2 u. s. w. in die Formeln (1) und (2), und sieht, wieviel auf einander folgende Punkte, respective Tangenten, unbedingt zusammenfallen. Die Zahl der enthaltenen Spitzen, respective Inflexionen ist jedesmal eins weniger.

Aus der Zahl der Spitzen und Inflexionen und dem Geschlecht von D können die anderen Plücker'schen Zahlen abgeleitet werden.

Endlich weise ich noch darauf hin, dass der von Herrn Halphen*) zur Bestimmung der Zahl der Punkte, welche einer Differentialgleichung genügen, benutzte Weg unserem Zwecke völlig entspricht, so lange die unendlich weit entfernten Aeste nichts Besonderes darbieten.

Wir sehen aus den Formeln (1) leicht, dass die unendlich weit entfernten Punkte der Abweichungscurve der Differentialgleichung

$$5y_3^2 - 3y_2y_4 = 0$$

genügen müssen; aus den Formeln (2) finden wir, dass die Punkte der Curve C^n, welche die durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Tangenten veranlassen, durch die Gleichung

$$(3y_2^2 - y_1y_3)x + yy_3 = 0$$

bestimmt werden.

Der ersten dieser zwei Gleichungen genügen $8m - 8n + 6k$ Punkte, der zweiten Gleichung genügen $5m - 4n + 3k$ Punkte.

So lange also die unendlich weit entfernten Gerade in Bezug auf C^n keine besondere Lage hat, ist die Ordnung von D

$$N = 8m - 8n + 6k$$

und die Classe von D

$$M = 5m - 4n + 3k.$$

Mit Hilfe der Plücker'schen Formeln ergiebt sich, dass dieses Resultat mit den Formeln (11) in Einklang ist.

---

*) Halphen l. c.

Anwendungen der Theorie des Zusammenhanges in Reihen auf die Theorie der Substitutionengruppen.

Von

P. Hoyer in Burg b./Magdeburg.

§ 1.

Basisreihen (Einleitung).

Wählt man, was stets möglich ist, unter den Substitutionen einer Gruppe G die Substitutionen $S_1 \ldots S_k$ so aus, dass zwischen denselben keine Gleichung von der Form $S_\alpha = S_\beta^\gamma\ (\alpha \gtrless \beta)$ besteht, dagegen jede Substitution der Gruppe als Potenz einer dieser Substitutionen darstellbar ist, so bilden die ausgewählten Substitutionen eine Basis der Gruppe. Werden die Substitutionen einer Gruppenbasis in ihre Circularsubstitutionen zerlegt und wird aus den Buchstabencomplexen dieser eine Reihe*) gebildet, so erhält man eine zur Gruppenbasis gehörige Reihe. Sind $S_1 \ldots S_k$ und $S_1' \ldots S_l'$ zwei Basen derselben Gruppe, und ist $l > k$, so reichen die Potenzen von weniger als l der Substitutionen $S_1' \ldots S_l'$ zur Darstellung der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$ aus, es giebt also unter den Substitutionen $S_1' \ldots S_l'$ wenigstens eine S_α', die, weil als Potenz einer der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$, auch als Potenz einer Substitution $S_\beta'\ (\beta \gtrless \alpha)$ darstellbar ist. Es kann also nicht $l > k$ sein. Ebenso folgt, dass auch k nicht $> l$ sein kann, es muss also $k = l$ sein. Ebensowenig können zwei der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$, etwa $S_\alpha, S_\beta (\alpha \gtrless \beta)$ als Potenzen *einer* der Substitutionen $S_1' \ldots S_k'$ darstellbar sein, denn sonst könnten S_α, S_β durch diese Substitution ersetzt werden und es gäbe also eine Basis der Gruppe von weniger als k Substitutionen. Man kann daher

$$S_1 = S_1'^{\alpha_1},\ S_2 = S_2'^{\alpha_2} \ldots S_k = S_k'^{\alpha_k}$$

setzen, und es sind folglich die Buchstabencomplexe der zu $S_1 \ldots S_k$

*) Ergiebt diese Zerlegung dieselbe Circularsubstitution m mal, so wird deren Buchstabencomplex auch m mal als Reihenglied aufgenommen.

gehörigen Reihe enthalten unter denjenigen der zu $S_1' \ldots S_k'$ gehörigen Reihe. Da auch das Umgekehrte gelten muss, so müssen die Buchstabencomplexe beider Reihen mit einander übereinstimmen, und beide Reihen können folglich, wenn man von der Aufeinanderfolge der Buchstaben in den Complexen abstrahirt, als identisch betrachtet werden. Diese Reihe, die also die Buchstabencomplexe der durch Zerlegen der Substitutionen einer Gruppenbasis erhaltenen Circularsubstitutionen zu Gliedern hat, soll die „*Basisreihe*" der Gruppe heissen.

Beim Aufstellen einer Substitutionengruppe bestimmt man die Substitutionen durch Angabe ihrer Circularsubstitutionen und diese durch Angabe ihrer Buchstabencomplexe. Es ist indessen meines Wissens bisher kein Versuch gemacht worden, *allgemeine* Eigenschaften der Reihe dieser Complexe zu entwickeln. Dies liegt wohl weniger an der Unwichtigkeit des Gegenstandes — in der That würde die allgemeine Bestimmung dieser Reihen einen wesentlichen Theil des Problems der Bestimmung aller Gruppen bilden — als vielmehr an der Schwierigkeit des Gegenstandes und an dem Umstande, dass eine Theorie zur Auffindung solcher Eigenschaften gefehlt hat, eine Theorie, die also die wissenschaftliche Betrachtung einer Reihe von Buchstabencomplexen, d. h. die durch die Art und Weise der Zusammenfassung der Buchstaben zu Complexen bedingten Verhältnisse zum Gegenstande hat. In der Abhandlung*) „Ueber den Zusammenhang in Reihen etc." habe ich den Versuch zu einer solchen Theorie gemacht, und werde dieselbe in einer demnächst erscheinenden Programmabhandlung**) etwas weiter ausführen. Bei der Anwendung derselben zur Untersuchung der Substitutionengruppen empfiehlt es sich indessen, nicht die durch Zerlegung der Substitutionen der Gruppe unmittelbar sich ergebende Reihe, sondern die oben eingeführte Basisreihe zum Gegenstande der Untersuchung zu machen, weil diese wesentlich einfacher ist und die Gruppenbasis zur Charakteristik der Gruppe völlig ausreicht. Diese Untersuchung kann nun nach zwei Richtungen geführt werden. Entweder es kann die besondere Art des Zusammenhanges in der Reihe untersucht werden — dahin würde z. B. der leicht zu beweisende Satz gehören, dass jede Basisreihe wenigstens ein vollständiges System linear unabhängiger Cyklen besitzt, von denen jeder höchstens drei Buchstabenpaare enthält — oder es kann allein die numerische Seite des Zusammenhanges, d. h. also der Grad des Zusammenhanges zum Gegenstande der Untersuchung gemacht werden. Einen kleinen Versuch in dieser Richtung bietet die vorliegende Ab-

*) Math. Annalen Bd. 40.

**) Programm des Victoriagymnasiums in Burg, Ostern 1897.

handlung dar, in der ich einige auf den Grad g des Zusammenhanges der Basisreihe bezügliche Sätze entwickeln werde. Durch die Zahl g wird also, ausser den bisherigen numerischen Elementen — Ordnung und Grad einer Gruppe — ein neues numerisches Element zur Bestimmung einer Gruppe eingeführt. Erwägt man nun, dass für die Beurtheilung der Beschaffenheit einer Reihe ihr Grad des Zusammenhanges offenbar von wesentlicher Bedeutung is, so dürfte die Einführung gerade dieses Elements nicht ganz ohne Interesse sein. Vor der Entwickelung der allgemeinen Sätze indessen möchte es sich empfehlen, einige Beispiele der Bestimmung von Gruppen für gegebene Werthe von g anzuführen, und ich wähle hierzu die Bestimmung der transitiven Gruppen für die Werthe $g = 0$ bis 6. Da ich indessen die zu entwickelnden Sätze hierbei theilweise gebrauche, erlaube ich mir dieselben bereits hier anzuführen:

I. *Ist der Grad des Zusammenhanges der Basisreihe gleich Null, so wird die Gruppe von den Potenzen einer einzigen Substitution gebildet (m. a. W. Basisreihen vom Grade des Zusammenhanges Null, deren Glieder Buchstaben gemeinsam haben, sind unmöglich).*

II. *Ist der Grad des Zusammenhanges der Basisreihe grösser als Null, so enthält die Gruppenbasis drei oder mehr Substitutionen.*

III. *Ist der Grad des Zusammenhanges einer transitiven Gruppe grösser als Null, so ist derselbe mit einer einzigen Ausnahme mindestens gleich dem Grade der Gruppe. Eine Ausnahme bildet nur die Gruppe*

$$\big(1, ((x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_3)\big),$$

deren Basisreihe vom Grade des Zusammenhanges drei ist.

Daraus folgt nun sofort, dass eine transitive Gruppe, für die $g = 0$ ist, von den Potenzen einer einzigen Circularsubstitution gebildet wird. Für $g = 1$ und $g = 2$ existiren keine transitiven Gruppen, denn die Gruppe $\big(1, (x_1 x_2)\big)$ hat als Basisreihe $A_1 = x_1 x_2$, gehört also zu $g = 0$. Für $g = 3$ existiren zwei transitive Gruppen. Die eine ist die symmetrische Gruppe von drei Elementen, deren Basisreihe

$$A_1 = x_1 x_2 x_3, \quad A_2 = x_1 x_2, \quad A_3 = x_1 x_3, \quad A_4 = x_2 x_3$$

ist, die andere die in III angeführte Gruppe, deren Basisreihe

$$A_1 = x_1 x_2, \; A_2 = x_1 x_3, \; A_3 = x_1 x_4, \; A_4 = x_3 x_4, \; A_5 = x_2 x_4, \; A_6 = x_2 x_3$$

ist. Ausser dieser Gruppe giebt es transitive Gruppen vom Grade 4, für die $g > 0$ ist, nur die folgenden: Erstens die Gruppe

$$\big(1, (x_1 x_2 x_3 x_4), (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_3), (x_1 x_4 x_3 x_2), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_3), (x_2 x_4)\big)$$

und die ihr ähnlichen, deren Basisreihe aus der vorigen durch Hinzufügen eines Gliedes $A_7 = x_1 x_2 x_3 x_4$ hervorgeht, für die also $g = 6$ ist, ferner die alternirende Gruppe, deren Basisreihe aus der der Vierergruppe durch Hinzufügen der vier Glieder $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$, $x_2x_3x_4$ hervorgeht, für die also $g=11$ ist, und endlich die symmetrische Gruppe, deren Basisreihe aus der vorigen durch dreimaliges Hinzufügen des Complexes aller vier Buchstaben $\big($entsprechend den Substitutionen $(x_1x_2x_3x_4)$, $(x_1x_4x_2x_3)$, $(x_1x_3x_4x_2)\big)$ hervorgeht, für die also $g=20$ ist. Die beiden letzten Gruppen kommen für die gegenwärtige Bestimmung nicht in Betracht, es fragt sich also nur noch, ob unter den transitiven Gruppen vom Grade $n=5$ und 6 solche, für die $g=5$ oder 6 ist, enthalten sind. Unter den transitiven Gruppen vom Grade $n=5$ haben zunächst die Potenzen einer Circularsubstitution als Basisreihe ein einziges Glied, das den Complex aller fünf Buchstaben bildet, sie gehören also zu $g=0$. Die Basisreihe der transitiven Gruppen zehnter Ordnung geht aus der vorigen durch Hinzufügen der 10 Combinationen der Buchstaben x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 zu zweien hervor, sie gehören also zu $g=10$. So könnte man fortfahren. Wir wollen indessen die Untersuchung der übrigen Gruppen durch ein Verfahren erledigen, das auch für $n=6$ anwendbar ist. Sind O_1, $O_2 \ldots O_k$ resp. die Ordnungen der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$ der Basisreihe einer Gruppe von der Ordnung O und dem Grade n, so ist

$$\sum_{\alpha=1}^{k}(O_\alpha - 1) \geqq O - 1.$$

Ist weiter e_α der Excess von S_α (n vermindert um die Anzahl der Circularsubstitutionen von S_α mit Einschluss der identischen), so ist für eine transitive Basisreihe

$$g = \sum_{\alpha=1}^{k} e_\alpha - (n-1)^{*)}.$$

Haben nun $S_1 \ldots S_k$ keine anderen Ordnungen, als 2, 3, 4, 5, so ist $e_\alpha \geqq O_\alpha - 1$, folglich $g \geqq O - n$. Daraus ergiebt sich sofort für die noch übrigen transitiven Gruppen 5. Grades, deren Ordnung ein grösseres Vielfaches von 5, als 10 ist, dass auch für sie $g > 6$ sein muss. Es bleiben also noch die Gruppen vom Grade $n=6$ zu untersuchen. Unter diesen haben die transitiven Gruppen 6. Ordnung, die nicht als Potenzen einer einzigen Circularsubstitution darstellbar sind, als Basisreihe zwei Glieder von je drei Buchstaben z. B. $x_1x_2x_3$ und $x_4x_5x_6$ und gewisse neun der 15 Combinationen der 6 Buchstaben $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ zu zweien, sie gehören also zu $g=8$. Ist die Ordnung grösser als 6 und versetzt jede der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$ der Gruppenbasis alle 6 Buchstaben,

*) Vergl. die zu Anf. cit. Abhandl. B § 1 (Math. Ann. Bd. 40).

so ist $e_\alpha > O_\alpha - 1$, wenn nicht S_α eine Circularsubstitution 6. Ordnung ist, in welchem Falle $e_\alpha = O_\alpha - 1 = 5$ ist. Wären alle Substitutionen $S_1 \ldots S_k$ Circularsubstitutionen 6. Ordnung, so wäre $g \geqq 10$ wegen $k \geqq 3$. Entgegengesetzten Falles muss wenigstens ein $e_\alpha > O_\alpha - 1$, folglich $g > O - n$, also jedenfalls $g > 6$ sein. Versetzt eine der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$ nicht alle 6 Buchstaben, so kann unter ihnen eine Substitution S_α von der 6. Ordnung sein, die nur 5 Buchstaben versetzt. Dann ist für diese $e_\alpha = 3 > \frac{O_\alpha - 1}{2}$. Wir können also in diesem Falle nur $g > \frac{O-1}{2} - (n-1)$ setzen. Da aber jetzt $O \geqq 36$ sein muss, so folgt wieder, dass $g > 6$ ist. Ist keine der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$, die nicht alle 6 Buchstaben versetzen, von der Ordnung 6, aber eine von einer der Ordnungen 5, 4, 3, so ist jedenfalls $O > 12$ und $g \geqq O - n$, also wieder $g > 6$. Sind dieselben nur von der Ordnung 2, aber wenigstens eine ein Product zweier Transpositionen, so ist für diese $e_\alpha > O_\alpha - 1$ folglich $g > O - n$, und aus $O \geqq 12$ folgt wieder $g > 6$. Ist jede der Substitutionen $S_1 \ldots S_k$, die nicht alle 6 Buchstaben versetzt, eine Transposition, die Anzahl dieser aber grösser als Eins, so ist $O > 12$, $g \geqq O - n$, $g > 6$. Ist unter den Substitutionen $S_1 \ldots S_k$ nur eine Substitution vorhanden, die nicht alle 6 Buchstaben versetzt, und ist diese eine Transposition, so ist für die übrigen Substitutionen, wenn dieselben nicht sämmtlich Circularsubstitutionen 6. Ordnung sind, wenigstens ein $e_\alpha > O_\alpha - 1$, folglich $g > O - n$, und da wir nur noch den Fall $O \geqq 12$ betrachten, so ist $g > 6$. Sind die übrigen Substitutionen nämlich Circularsubstitutionen 6. Ordnung, und ist deren Anzahl $\geqq 3$, so muss $g > 10$ sein; der Fall endlich, dass die Anzahl dieser Circularsubstitutionen gleich 2, $k = 3$ und die dritte Substitution eine Transposition sei, ist unmöglich, denn das Product zweier Circularsubstitutionen 6. Ordnung kann keine Transposition ergeben.

Damit ist die Aufgabe gelöst, alle transitiven Gruppen zu ermitteln, für die g gleich einer der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist. Sehen wir von den Gruppen $g = 0$, deren jede von den Potenzen einer einzigen Substitution gebildet wird, ab, und verstehen wir unter einem Gruppentypus die Gesammtheit aller Gruppen, die sich nur durch die Bezeichnung der Elemente unterscheiden, so ergiebt sich aus der vorstehenden Untersuchung, dass nur drei Typen transitiver Gruppen existiren, für die g gleich einer der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist, nämlich:

1. Der Typus der Gruppe

$$\big(1,\ (x_1 x_2 x_3 x_4),\ (x_1 x_2)(x_3 x_4),\ (x_1 x_4)(x_2 x_3),\ (x_1 x_4 x_2 x_3),\ (x_1 x_3)(x_2 x_4),\ (x_1 x_3),\ (x_2 x_4)\big).$$

Er ist völlig bestimmt dadurch, dass die Gruppe transitiv und $g = 6$ ist.

2. Der Typus der Gruppe

$$\big(1,\ (x_1 x_2)(x_3 x_4),\ (x_1 x_3)(x_2 x_4),\ (x_1 x_4)(x_2 x_3)\big).$$

Er ist völlig bestimmt dadurch, dass die Gruppe transitiv und $\frac{g}{n} = \frac{3}{4}$ ist.

3. Der Typus der symmetrischen Gruppe von drei Elementen. Er ist völlig bestimmt dadurch, dass die Gruppe transitiv und $\frac{g}{n+1} = \frac{3}{4}$ ist*).

Dabei bezeichnet n stets den Grad der Gruppe.

Diese Beispiele mögen genügen, die Verwendung der neu eingeführten numerischen Elemente zur Bestimmung der Gruppen zu illustriren.

§ 2.

Transitivität der Basisreihe.

Kann der Buchstabe a einer Gruppe, die als Basis die Substitutionen $S_1 \dots S_k$ hat, durch den Buchstaben b ersetzt werden, so giebt es ein Product $S_{\alpha_1}^{\beta_1} S_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots S_{\alpha_l}^{\beta_l}$, wo $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_l}$ irgend welche der Substitutionen $S_1 \dots S_k$ bezeichnen, das a durch b ersetzt. Es existirt daher eine die Buchstaben a und b enthaltende Reihenkette von Gliedern der Basisreihe, und die Buchstaben a und b gehören folglich einer der transitiven Gruppen der Basisreihe an. Ist umgekehrt dies der Fall, so existirt auch ein den Buchstaben a durch b ersetzendes Product $S_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots S_{\alpha_l}^{\beta_l}$ von Substitutionen der Basisreihe, und die Buchstaben a und b gehören also einem der Systeme der Transitivität der Gruppe an. Es stimmen also die Systeme der Transitivität einer Gruppe überein mit den vollständigen Systemen verschiedener Buchstaben der transitiven Gruppen ihrer Basisreihe.

§ 3.

Die Gruppen $g = 0$.

Sind S_1, S_2 zwei Substitutionen einer Gruppenbasis, so ist $S_1 S_2 = S_3^{\alpha}$, wo S_3 ebenfalls der Gruppenbasis angehört. Da weder S_1 als Potenz von S_2, noch S_2 als Potenz von S_1 darstellbar ist, so muss S_3 sowohl von S_1, als auch von S_2 verschieden sein. Da S_1 von der Identität

*) Da $g = n + \alpha$, $\alpha \geqq 0$ ist, so folgt aus

$$\frac{g}{n+1} = \frac{n+\alpha}{n+1} = \frac{3}{4},$$

dass $\alpha = 0$, $n = 3$ und $g = 3$ sein muss.

verschieden ist, so wird es einen Buchstaben a geben, den S_1 durch einen von a verschiedenen Buchstaben b ersetzt. Ersetzt dann S_2 den Buchstaben b durch c, so ersetzt $S_3^{-\alpha}$ den Buchstaben c durch a. Es giebt daher einen Cyklus $ab + bc + ca$ der Basisreihe, in dem keine zwei der Paare ab, bc, ca demselben Reihengliede angehören. Dieser Cyklus könnte folglich nur dann gleich Null sein, wenn jedes dieser Paare gleich Null wäre. Es ist aber jedenfalls das erste Paar von Null verschieden, folglich auch der Cyklus selbst. Enthält daher eine Gruppenbasis zwei oder mehr Substitutionen, so ist der Grad g des Zusammenhanges der Basisreihe grösser als Null. Derselbe kann also nur dann gleich Null sein, wenn die Gruppe von den Potenzen einer einzigen Substitution gebildet wird. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so enthält die Gruppenbasis nur eine einzige Substitution, und die Basisreihe wird folglich von den Buchstabencomplexen der Circularsubstitutionen einer Substitution gebildet, ihr Grad des Zusammenhanges ist daher gleich Null. Es ergiebt sich also, *dass die Gruppen* $g = 0$ *mit der Gesammtheit derjenigen Gruppen übereinstimmen*, *von denen jede von den Potenzen einer einzigen Substitution gebildet wird, und dass jede Gruppe* $g > 0$ *wenigstens drei Substitutionen*

$$S_1 \ldots S_k \; (k \geqq 3)$$

enthält, zwischen denen keine Gleichung von der Form

$$S_\alpha = S_\beta^\gamma \; (\alpha \gtrless \beta)$$

besteht.

§ 4.

Die transitiven Gruppen $g > 0$.

Enthält die Basisreihe einer transitiven Gruppe $g > 0$ zwei Substitutionen S_α, S_β, die für sich ein transitives Product $S_\alpha . S_\beta$ bilden, und ist S_γ eine dritte Substitution der Basisreihe, für die $S_\alpha S_\beta S_\gamma^\delta = 1$ ist, so ist der Grad des Zusammenhanges der zu S_α, S_β, S_γ^δ gehörigen Reihe $\geqq n - 1$, wenn wie gewöhnlich n den Grad der Gruppe bezeichnet. Denn der Excess E*) dieses Products ist gleich $2n - 2 + 2k$, wo $k \geqq 0$, und der Grad des Zusammenhanges gleich $E - (n - 1)$. Es können aber die Buchstabencomplexe von S_β^δ aus denen von S_β durch Spaltungen entstanden gedacht werden, wofern sie nicht mit ihnen übereinstimmen, und diese Spaltungen sind solche, die keine Vermehrung der transitiven Gruppen der zu S_α, S_β, S_γ gehörigen Reihe zur Folge haben, da $S_\alpha \cdot S_\beta$ transitiv ist. Somit ist der Grad des Zusammenhanges der zu S_α, S_β, S_γ gehörigen Reihe nicht kleiner, als derjenige der zu S_α, S_β, S_γ^δ gehörigen Reihe, und das Gleiche gilt

*) S. d. z. Anf. cit. Abh. B. § 1.

daher auch vom Grade des Zusammenhanges der Basisreihe. Dieser ist also $\geqq n - 1$. Enthält die Basisreihe keine zwei Substitutionen, die ein transitives Product bilden, so sei l die kleinste Anzahl solcher Substitutionen und $\Pi = S_1 S_2 \ldots S_l$ ein aus denselben gebildetes Product. Dann existirt in der Basisreihe eine Substitution S_α für die $\Pi S_\alpha^\delta = 1$ ist, und diese muss nothwendig verschieden von jeder der Substitutionen $S_1 \ldots S_l$ sein. Denn wäre $S_\alpha = S_1$, so wären die Buchstabencomplexe der Circularsubstitutionen von S_α enthalten unter denen der transitiven Gruppen der zu $S_1, S_2 \ldots S_{l-1}$ gehörigen Reihe, und Gleiches müsste wegen $S_1^\delta S_2 \ldots S_{l-1} = S_l^{-1}$ auch von den Buchstabencomplexen der Circularsubstitutionen von S_l gelten*), d. h. $S_1 \ldots S_l$ wäre intransitiv; wäre aber $S_\alpha = S_k$, $1 < k \leqq l$, so wären die Buchstabencomplexe der Circularsubstitutionen von S_α enthalten unter denen der transitiven Gruppen der zu $S_2 \ldots S_l$ gehörigen Reihe, und Gleiches müsste wegen $S_1^{-1} = S_2 \ldots S_l S_\alpha^\delta$ auch von den Buchstabencomplexen der Circularsubstitutionen von S_1 gelten, es müsste also ebenfalls $S_1 \ldots S_l$ intransitiv sein. Auf das Product $S_1 \ldots S_l S_\alpha^\delta$ kann man nun dieselbe Schlussweise anwenden, wie auf das Product $S_\alpha S_\beta S_\gamma^\delta$, und da die zu $S_1, \ldots S_l, S_\alpha$ gehörige Reihe in der Basisreihe enthalten ist, folgt wieder, dass der Grad des Zusammenhanges dieser $\geqq n - 1$ sein muss.

§ 5.

Die transitiven Gruppen $g = n - 1$.

Wir ermitteln jetzt noch die transitiven Gruppen $g = n - 1$.

Verstehen wir unter l die Zahl 2, falls die Gruppenbasis eine Circularsubstitution mit allen n Buchstaben enthalten sollte, andernfalls die kleinste Anzahl von Substitutionen der Gruppenbasis, die für sich ein transitives Product bilden, und unter $\Pi = S_1 S_2 \ldots S_l$ ein transitives Product von Substitutionen der Gruppenbasis, so existirt zuf. § 4 eine von den Substitutionen $S_1 \ldots S_l$ verschiedene Substitution S_α der Gruppenbasis, für die $\Pi S_\alpha^\delta = 1$ ist. Zufolge § 4 müsste ferner der Grad des Zusammenhangs der Basisreihe $> n - 1$ sein, wenn die Buchstabencomplexe der Circularsubstitutionen von S_α^δ aus denen der Circularsubstitutionen von S_α durch Spaltung entstanden wären, oder wenn die Gruppenbasis ausser den Substitutionen $S_1 \ldots S_l S_\alpha$ noch andere Substitutionen enthielte. Keiner dieser beiden Fälle kann daher für die transitiven Gruppen $g = n - 1$ zutreffen, die Gruppenbasis

*) Zwei Buchstaben, die verschiedenen transitiven Gruppen eines Products angehören, können bei der Darstellung desselben durch die kleinste Anzahl von Circularsubstitutionen nicht in einer Circularsubstitution vereinigt sein.

muss $l+1$ Substitutionen enthalten, von denen S_{l+1} durch S_{l+1}^{δ} ersetzt werden kann, sodass wir die Gruppenbasis aus $l+1$ Substitutionen $S \ldots S_{l+1}$ bestehend voraussetzen dürfen, für die $S_1 \ldots S_l S_{l+1} = 1$ ist. Daraus folgt $S_k^{-1} = S_{k+1} \ldots S_l S_{l+1} S_1 \ldots S_{k-1}$. Wäre daher $S_{k+1} \ldots S_{l+1} S_1 \ldots S_{k-1}$ intransitiv, so wäre auch $S_1 \ldots S_l S_{l+1}$ intransitiv, es müssen also je l Substitutionen der Gruppenbasis ein transitives Product bilden. Sind ferner S_α, S_β zwei beliebige Substitutionen der Gruppenbasis und ist S_γ eine dritte Substitution der Gruppenbasis für die $S_\alpha S_\beta S_\gamma^{\delta} = 1$ ist, so folgt aus $S_\alpha^{-1} = S_\beta S_\gamma^{\delta}$, dass der Buchstabencomplex jeder Circularsubstitution von S_α einer der transitiven Gruppen von $S_\beta S_\gamma$ angehört. Es können daher S_α, S_β, S_γ nicht in l Substitutionen der Gruppenbasis enthalten sein, weil sonst durch Fortlassen von S_α sich ein transitives Product von weniger als l Substitutionen ergeben würde. Es muss also $l = 2$ sein und die Gruppenbasis von 3 Substitutionen gebildet werden, von denen je zwei ein transitives Product bilden.

Es seien ferner S_α, S_β zwei Substitutionen der Gruppenbasis und (A_1) eine Circularsubstitution von S_α, die mit einer Circularsubstitution (A_2) von S zwei (oder mehr) Buchstaben gemeinsam habe. Nun können wir jedenfalls voraussetzen, dass wenigstens eine dieser Circularsubstitutionen, etwa (A_1), einen Buchstaben enthält, der nicht in der anderen enthalten ist. Denn andernfalls würden entweder S_α und S_β ein intransitives Product bilden, oder jede dieser Substitutionen wäre eine Circularsubstitution mit allen n Buchstaben, der Grad des Zusammenhangs der zu ihnen gehörigen Reihe also bereits gleich $n-1$ und der der Basisreihe folglich grösser als $n-1$. Es sei daher a_0 ein in (A_1), aber nicht in (A_2) enthaltener Buchstabe, dem ein auch in (A_2) enthaltener Buchstabe a_1 folgt, und a_m sei ein zweiter in (A_1) und (A_2) enthaltener Buchstabe, also $(A_1) = (\cdots a_0 a_1 a_2 \cdots a_m)$, $(m \geqq 2)$, $(A_2) = (a_m' \cdots a_1 a_1' \cdots a_m)$, wobei auch a_1' mit a_m, a_m' mit a_1 identisch sein kann. Dem Vorigen zufolge können wir nun die dritte Substitution S_γ der Gruppenbasis so wählen, dass $S_\alpha S_\beta S_\gamma = 1$ ist. Dann ersetzt S_α den Buchstaben a_0 durch a_1, S_β den Buchstaben a_1 durch a_1' und S_γ den Buchstaben a_1' durch a_0. Durch das Product $S_\alpha^m S_\beta$ wird ferner a_0 durch a_m' ersetzt. Es könnte daher dies Product nicht gleich einer Potenz von S_β sein, weil a_0 und a_m' nicht derselben Circularsubstitution von S_β angehören, ebensowenig könnte dies Product gleich einer Potenz von S_α sein (weil sonst S_β als Potenz von S_α darstellbar wäre), es müsste folglich $S_\alpha^m S_\beta$ gleich einer Potenz von S_γ, oder $S_\alpha^m S_\beta S_\gamma^{\delta} = 1$ sein, wo S_γ^{δ} den Buchstaben a_m' durch a_0 ersetzen müsste. Somit gehörten a_1' und a_m' derselben Circularsubstitution von S_γ an. Setzten wir nun $S_\beta = (a_1 a_m) S_\beta'$, indem wir

$$(A_2) = (a_1 a_m)(a_m' \ldots a_1)(a_1' \ldots a_m)$$

setzen; so wäre folglich auch $S'_\beta S_\gamma$ ein transitives Product. Setzten wir ferner $S_\alpha = (a_1 a_m) S'_\alpha$, indem wir $(A_1) = (a_1 a_m)(\ldots a_0 a_1)(a_2 \ldots a_m)$ setzten, und $S_\alpha S_\beta S_\gamma = (a_1 a_m) S'_\alpha (a_1 a_m) S'_\beta S_\gamma = (a_1 a_m)(a_1 a_m) S''_\alpha S'_\beta S_\gamma$, wo S''_α die durch $(a_1 a_m)$ Transformirte von S'_α bedeutet, so wäre auch $S''_\alpha S'_\beta S_\gamma = 1$ und also $S''_\alpha S''_\beta S_\gamma$ ein transitives identisches Product. Der Grad des Zusammenhanges der zu den Substitutionen S'_α, S'_β, S_γ gehörigen Reihe wäre ferner gleich $n-3$, da diese Reihe aus der zu den Substitutionen S_α, S_β, S_γ gehörigen durch zwei, die Anzahl der transitiven Gruppen der Reihe nicht vermehrende Spaltungen entsteht. Dies ist aber unmöglich, denn der Grad des Zusammenhanges der zu den Substitutionen eines identischen transitiven Products mit n Buchstaben gehörigen Reihe ist mindestens gleich $n-1$. Zwei Circularsubstitutionen zweier Substitutionen der Gruppenbasis können also höchstens einen Buchstaben gemeinsam haben.

Daraus folgt, dass keine der Substitutionen S_α, S_β, S_γ der Gruppenbasis eine Circularsubstitution dritter oder höherer Ordnung enthalten kann. Bezeichnet nämlich m den kleinsten von Null verschiedenen Exponenten, für den $S_\alpha^m = S_\beta^{m'}$, d. h. gleich einer Potenz von S_β, wird, so muss $m > 1$ sein. Es kann aber nicht $m > 2$ sein, denn sonst wäre sowohl $m-1$, als auch $m-2 > 0$, und aus $S_\alpha^{m-1} S_\beta = S_\gamma^\mu$, $S_\alpha^{m-2} S_\beta = S_\gamma^\nu$ würde $S_\alpha = S_\gamma^{\mu-\nu}$ folgen. Es muss also $m = 2$ sein. Enthielte nun S_α eine Circularsubstitution (A), deren Ordnung ungerade und > 1 wäre, so müssten sämmtliche Buchstaben von (A) in einer Circularsubstitution von S_β enthalten sein, weil $S_\alpha^2 = S_\beta^{m'}$ ist. Enthielte S_α eine Circularsubstitution (A), deren Ordnung gerade und > 2 wäre, so müsste aus demselben Grunde dies von der Hälfte der Buchstaben von (A) gelten, in jedem Fall also hätte eine Circularsubstitution von S_α mit einer Circularsubstitution von S_β mehr als einen Buchstaben gemeinsam. Die Circularsubstitutionen von S_α, S_β, S_γ können also nur solche erster und zweiter Ordnung sein, und die Anzahl der letzteren muss daher gleich dem Excess E der Basisreihe, folglich $E \leqq \frac{3n}{2}$ sein. Daraus ergiebt sich für den Grad des Zusammenhanges der Basisreihe $g \leqq \frac{3n}{2} - (n-1)$, und da $g = n-1$ sein soll, so muss $n - 1 \leqq \frac{3n}{2} - (n-1)$, mithin $n \leqq 4$ sein. Wie aus § 1 hervorgeht, giebt es aber unter den transitiven Gruppen, deren Grad $n \leqq 4$ ist, nur einen einzigen Typus, für den der Grad des Zusammenhanges der Basisreihe $g = n-1$ ist, es ist derjenige der Gruppe $\big(1, (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_3)\big)$. *Für alle übrigen transitiven Gruppen, die nicht als Potenzen einer einzigen Circularsubstitution darstellbar sind, ist also $g > n-1$.*

Burg b./Magdeburg, 2. October 1896.

Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.

Von

Arthur Hirsch in Zürich.

---

§ 1.

Die Differentialgleichungen, auf welche die Bestimmung der Maxima und Minima der einfachen Integrale führt, besitzen, wie aus den Untersuchungen von Jacobi*) bekannt ist, die merkwürdige Eigenschaft, sich auf ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung transformiren zu lassen, dessen Integration äquivalent ist mit der Auflösung einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung; man erhält die Integralgleichungen des Problems der Variationsrechnung, indem man ein vollständiges Integral der damit zusammenhängenden partiellen Differentialgleichung nach seinen Integrationsconstanten differentiirt und diese Differentialquotienten neuen willkürlichen Constanten gleichsetzt.

Diese interessante Besonderheit der genannten Differentialgleichungen dürfte die Frage gerechtfertigt erscheinen lassen, deren Erledigung den Gegenstand der folgenden Ausführungen bildet:

Durch welche Eigenschaften ist eine Differentialgleichung

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0$$

als Gleichung einer Aufgabe der Variationsrechnung charakterisirt?

Die bekannten Deductionen der Variationsrechnung, die wir zunächst wiedergeben wollen, werden sogleich eine besondere Eigenschaft der in Rede stehenden Differentialgleichungen hervortreten lassen, welche sich weiterhin im wesentlichen als charakteristisch erweisen wird. — Es sei $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ eine gegebene Function des Arguments x, einer unbekannten Function y von x und deren Derivirten

*) „De aequationum differentialium isoperimetricarum transformationibus earumque reductione ad aequationem differentialem partialem primi ordinis non linearem", gesammelte Werke, Bd. V, und Vorlesungen über Dynamik, 19. Vorl.

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$; und es handle sich darum, y als Function von x derart zu bestimmen, dass das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

ein Maximum oder Minimum wird, wobei x_0 und x_1 unveränderliche Grössen sind, für welche die Functionen $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ vorgeschriebene Werthe annehmen sollen. Nach den Principien der Variationsrechnung ist für den Eintritt eines Extremums nothwendig, dass die gesuchte Function 1) die erste Variation des Integrals J:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \delta f \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\, u^{(k)} \cdot dx$$

zu Null macht, und dass sie 2) der zweiten Variation

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \delta^2 f \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i,k=0}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y^{(i)} \partial y^{(k)}}\, u^{(i)} u^{(k)} \cdot dx$$

ein unveränderliches Vorzeichen giebt; — dabei bedeutet u eine im übrigen willkürliche Function von x, die mit ihren $(n-1)$ ersten Derivirten an den Grenzen des Integrals verschwindet.

Bedienen wir uns zur Abkürzung der Schreibweise:

$$\Phi(x, y, y', \ldots) \sim \Psi(x, y, y', \ldots),$$

um auszudrücken, dass die Differenz der Functionen Φ und Ψ bei unbestimmtem y sich durch einen exacten Differentialquotienten

$$\frac{dX}{dx}(x, y, y', \ldots)$$

darstellen lässt, so erhält man durch wiederholte partielle Umformung:

$$\delta f \equiv \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot u^{(k)} \sim u \cdot F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}),$$

wobei f_k für $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$ gesetzt ist, und F den Differentialausdruck

$$(1) \qquad F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = V(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f_k$$

repräsentirt, welcher von der Ordnung $2n$ oder einer geringeren, aber, wie man weiss, jedenfalls geraden*) Ordnung ist. — Mit Rücksicht auf das Verschwinden von $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ an den Grenzen folgt dann:

*) Vergl. Frobenius, „Ueber adjungirte lineare Differentialausdrücke", Crelle's Journal, Bd. 85, p. 206.

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \delta f \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} u \cdot F \cdot dx,$$

woraus man weiter schliesst, dass die gesuchte Function y, um δJ zu Null zu machen, der Differentialgleichung

(2) $$F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = 0$$

genügen muss. —

Da die Operationen d und δ vertauschbar sind, so ergiebt sich aus

$$\delta f \sim u \cdot F$$

durch Anwendung des δ-Processes:

$$\delta^2 f \sim u \cdot \delta F,$$

so dass man die zweite Variation des Integrals in die Gestalt setzen kann:

$$\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \delta^2 f \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} u \cdot \delta F \cdot dx.$$

Die weitere Transformation dieses Ausdrucks zum Zweck der Ermittelung seines Vorzeichens gründet nun Jacobi*) auf den merkwürdigen Umstand, dass der in den Ableitungen von u lineare homogene Differentialausdruck:

$$\delta F = \sum F_k \cdot u^{(k)}$$

sich selbst adjungirt ist. — Der zu dem linearen Differentialausdruck

(3) $$P(u) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, u^{(k)}$$

adjungirte ist bekanntlich:

(4) $$P'(u) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \{p_k(x) \cdot u\},$$

und als solcher völlig durch die Eigenschaft charakterisirt**), dass

(5) $$v \cdot P(u) \sim u \cdot P'(v).$$

Dem Satze von Jacobi zufolge gilt also:

(6) $$v \cdot \delta_u F \sim u \cdot \delta_v F,$$

wie sich folgendermassen erweisen lässt:

Nach Definition ist

$$\delta_u f \sim u \cdot F,$$

also

$$\delta_v(\delta_u f) \sim u \cdot \delta_v F,$$

*) „Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen", ges. Werke, Bd. IV.

**) Cf. Frobenius, l. c. p. 188.

desgleichen

$$\delta_u(\delta_v f) \sim v \cdot \delta_u F,$$

mithin, da

$$\delta_v(\delta_u f) = \delta_u(\delta_v f),$$

$$u \cdot \delta_v F \sim v \cdot \delta_u F. \quad \text{q. e. d.*)}$$

Inwiefern umgekehrt durch die hiermit gekennzeichnete Eigenschaft des Ausdrucks F seine formale Structur bedingt wird, geht aus dem folgenden Satze hervor, dessen Beweis uns in erster Linie beschäftigen wird:

I. Wenn die Function $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)})$ von der geraden Ordnung $2n$ die Eigenschaft hat, dass der aus ihr abgeleitete lineare Differentialausdruck $\delta F = \sum_{k=0}^{2n} F_k \cdot u^{(k)}$ zu sich selbst adjungirt ist, so lässt sich durch Quadraturen eine Function $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ermitteln, derart dass F mit Hülfe von f in der Form dargestellt werden kann:

$$F = V(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial f}{\partial y^k}\right).$$

Die Differentialgleichung $F = 0$ ist mithin der Aufgabe der Variationsrechnung äquivalent, das Integral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

zu einem Extremum zu machen.

Eine unmittelbare Consequenz dieses Satzes ist der folgende:

II. Wenn die Aufgabe, das Extremum des Integrals

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(m)})\, dx$$

zu suchen, auf eine Differentialgleichung führt, die insofern degenerirt, als ihre Ordnung $2n < 2m$ ist, so lässt sich durch Quadraturen eine Function $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ der Ordnung n ermitteln, derart dass die entsprechende Aufgabe für das Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

dieselbe Differentialgleichung liefert.

Es hat übrigens keine Schwierigkeit, diesen Satz auf directem Wege zu beweisen.

---

*) Cf. Frobenius, l. c. p. 205.

Während die bisher zu Grunde gelegte Function F nothwendig von gerader Ordnung ist, hat ein Ausdruck F von ungerader Ordnung, dem man eine analoge Eigenschaft auferlegt, einen wesentlich anderen Charakter. Es besteht nämlich, wie ergänzungsweise deducirt werden soll, der Satz:

III. Wenn die Function $F(x, y, y', \ldots, y^{(2\nu+1)})$ von ungerader Ordnung die Eigenschaft hat, dass der aus ihr abgeleitete lineare Differentialausdruck $\delta F = \Sigma F_k \cdot u^{(k)}$ seinem adjungirten entgegengesetzt gleich ist, so ist F nothwendig eine in y und dessen Ableitungen lineare Function.

Es liegt nahe, die angedeutete Fragestellung auf vielfache Integrale und partielle Differentialgleichungen zu übertragen. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n unabhängige Argumente, y eine unbekannte Function derselben, und wird

$$y_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} = \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} y}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$$

gesetzt, so muss eine Function y, welche das n-fache Integral

$$\int\limits_{(n)} f(x_1 x_2 \ldots x_n, y, \ldots, y_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \ldots) \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

zu einem Extremum macht, die partielle Differentialgleichung erfüllen:

$$(7) \quad F = V(f) \equiv \sum (-1)^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n} \frac{d^{\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_n}}{dx_1^{\nu_1} \, dx_2^{\nu_2} \ldots dx_n^{\nu_n}} \left(\frac{\partial f}{\partial y_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}} \right) = 0,$$

deren linke Seite durch die Relation bedingt wird:

$$(8) \qquad \delta f \equiv \sum \frac{\partial f}{\partial y_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}} u_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} \backsim u \cdot V(f),$$

wenn diese Schreibweise jetzt dahin verstanden wird, dass die Differenz beider Seiten sich durch ein Aggregat von n exacten, nach den einzelnen Argumenten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genommenen Differentialquotienten darstellen lässt. Ganz wie oben ergiebt sich aus (8) die Beziehung

$$(6) \qquad v \cdot \delta_u F \backsim u \cdot \delta_v F,$$

und da die Gleichung (5) auch für die Adjunction partieller linearer Differentialausdrücke charakteristisch*) ist, so ist daraus zu schliessen: *dem in (7) gegebenen Ausdruck $F = V(f)$ kommt die Eigenschaft zu, dass der aus ihm abgeleitete lineare Differentialausdruck δF zu sich selbst adjungirt ist.*

So wahrscheinlich es nun ist, dass auch in diesem allgemeineren Falle der Rückschluss von der genannten Eigenschaft auf die in (7) gegebene Structur der Function F gestattet ist, so scheinen doch dem

*) Cf. Frobenius, l. c. p. 207.

Nachweise der Richtigkeit dieser Vermuthung grössere Schwierigkeiten entgegenzustehen. — Wir werden uns daher auf die Untersuchung partieller Differentialausdrücke von der zweiten Ordnung mit zwei, resp. drei Argumenten beschränken, wobei sich in der That der Satz ergeben wird:

IV. Wenn ein solcher Ausdruck F die Eigenschaft hat, dass sein δF sich selbst adjungirt ist, so lässt sich durch Quadraturen eine Function f ermitteln, welche selbst von der zweiten Ordnung ist, vermöge deren F in der Form $V(f)$ dargestellt werden kann. Die Differentialgleichung $F = 0$ ist also dem Probleme der Variationsrechnung

$$\delta \int\limits_{(n)} f \cdot dx_1 \cdots dx_n = 0 \qquad n = 2, 3$$

äquivalent.

§ 2.

Wir beginnen mit der Aufstellung und Discussion der Bedingungen dafür, dass der lineare Differentialausdruck von der geraden Ordnung $2n$:

$$(3) \qquad P(u) = \sum_{k=0}^{2n} p_k(x)\, u^{(k)}$$

seinem adjungirten Ausdruck:

$$(4) \qquad P'(u) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} (p_k \cdot u)$$

gleich wird. Entwickelt man $P'(u)$ nach den Ableitungen von u und vergleicht mit $P(u)$, so ergeben sich die Relationen:

$$(9) \qquad \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^k (2n-k)_{\lambda-k}\, p_{2n-k}^{(\lambda-k)} = p_{2n-\lambda}, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$$

oder ausgeschrieben:

$$(9) \qquad (2n)_\lambda\, p_{2n}^{(\lambda)} - (2n-1)_{\lambda-1}\, p_{2n-1}^{(\lambda-1)} + (2n-2)_{\lambda-2}\, p_{2n-2}^{(\lambda-2)} + \cdots + (-1)^\lambda p_{2n-\lambda} = p_{2n-\lambda}.$$

Unterscheidet man zwischen den ungeraden und den geraden Werthen des Index λ, so erhält man mit Benutzung des Kronecker'schen Zeichens

$$\delta_{\mu\nu} = 0, \quad \text{wenn} \quad \mu \neq \nu, \quad \delta_{\mu\mu} = 1$$

die beiden Systeme von Bedingungsgleichungen:

$$(9') \qquad \sum_{k=0}^{2\lambda-1} (-1)^k (2n-k)_{2\lambda-1-k}\, p_{2n-k}^{(2\lambda-1-k)} (1 + \delta_{k,2\lambda-1}) = 0; \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(9'') \qquad \frac{d}{dx}\left\{\sum_{k=0}^{2\lambda-1} (-1)^k (2n-k)_{2\lambda-k}\, p_{2n-k}^{(2\lambda-1-k)}\right\} = 0. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

Ohne dass es für unsern Zweck gerade erforderlich ist, soll doch der Nachweis erbracht werden, dass das System der Relationen (9″) bereits eine Consequenz der ihrerseits offenbar von einander unabhängigen Relationen (9′) ist, indem der zu differentiirende Klammerausdruck in (9″) auf Grund von (9′) von selbst verschwindet. — Aus (9′) folgt durch $(2\nu - 2\lambda)$-malige Differentiation:

$$(10)\quad \sum_{k=0}^{2\lambda-1} (-1)^k (2n-k)_{2\lambda-1-k}\, p_{2n-k}^{(2\nu-1-k)} (1+\delta_{k,2\lambda-1}) = 0; \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$$

und es lässt sich zeigen, dass die der ν-ten Gleichung in (9″) correspondirende Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{2\nu-1} (-1)^k\, (2n-k)_{2\nu-k}\, p_{2n-k}^{(2\nu-1-k)} = 0$$

eine lineare Combination der Gleichungen (10) darstellt. Zu dem Zweck ist zu beweisen, dass sämmtliche Determinanten $(\nu+1)$-ten Grades der Matrix

$$\left\{\begin{matrix} (2n-k)_{1-k}\,(1+\delta_{k,1}) \\ \vdots \\ (2n-k)_{2\lambda-1-k}\,(1+\delta_{k,2\lambda-1}) \\ \vdots \\ (2n-k)_{2\nu-1-k}\,(1+\delta_{k,2\nu-1}) \\ (2n-k)_{2\nu-k} \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu) \\ \big(k = 0, 1, 2, \ldots, (2\nu-1)\big) \end{matrix}$$

identisch verschwinden. Multiplicirt man Horizontal- und Verticalreihen derselben mit geeigneten nicht verschwindenden Factoren, so ist gleiches von den Determinanten der Matrix

$$(11)\quad \left\{\begin{matrix} (2-1)_k\;\;(1+\delta_{k,1}) \\ \vdots \\ (2\lambda-1)_k\,(1+\delta_{k,2\lambda-1}) \\ \vdots \\ (2\nu-1)_k\,(1+\delta_{k,2\nu-1}) \\ (2\nu)_k \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu) \\ \big(k = 0, 1, 2, \ldots, (2\nu-1)\big) \end{matrix}$$

zu zeigen. Dieses System componiren wir nun mit dem folgenden:

$$(12)\quad \left\{\begin{matrix} (-u_0)^k \\ (-u_1)^k \\ \vdots \\ (-u_\nu)^k \end{matrix}\right\} \quad \big(k = 0, 1, 2, \ldots, (2\nu-1)\big),$$

in welchem $u_0 u_1 \ldots u_\nu$ unbestimmte Grössen sind, und erhalten das Schema:

$$(13)\qquad \left\{\begin{matrix} (1-u_k) & -u_k \\ (1-u_k)^3 & -u_k^3 \\ (1-u_k)^5 & -u_k^5 \\ \vdots & \\ (1-u_k)^{2\nu-1} & -u_k^{2\nu-1} \\ (1-u_k)^{2\nu} & -u_k^{2\nu} \end{matrix}\right\}. \qquad (k=0,1,2,\ldots,\nu)$$

Fasst man die Determinante des letzteren als Function von u_0 auf, so ist dieselbe in u_0 rational und ganz und offenbar höchstens vom Grade $(2\nu-1)$, verschwindet dabei aber für die 2ν Werthe

$$\begin{aligned} u_0 &= u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_\nu, \\ u_0 &= 1-u_1, \quad 1-u_2, \quad 1-u_3, \ldots, 1-u_\nu, \end{aligned}$$

da für diese je zwei Colonnen der Determinante gleich oder entgegengesetzt gleich werden, und ist demnach identisch gleich Null. Bezeichnet man also die einander entsprechenden Determinanten $(\nu+1)$-ten Grades der componirten Systeme (11) und (12) mit D_k und U_k, so gilt nach dem erweiterten Multiplicationssatze der Determinanten:

$$(14)\qquad \sum D_k \cdot U_k \equiv 0.$$

Sehen wir jetzt die unbestimmten Grössen $u_0, u_1, \ldots, u_\nu$ als unendlich klein an, so zeigt eine einfache Ueberlegung, dass die Identität (14) das Verschwinden der einzelnen Determinanten D_k zur Folge hat, — vorausgesetzt, dass nicht alle Subdeterminanten ν-ten Grades aus den ν ersten Colonnen des Systems (11) verschwinden. Dass in der That eine dieser Determinanten, nämlich

$$(15)\qquad |(2\lambda-1)_k \cdot (1+\delta_{k,2\lambda-1})| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1,2,\ldots,\nu \\ k=0,1,\ldots,(\nu-1) \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist, wird sich später beiläufig ergeben.

Die Relationen (9′) stellen also für sich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass $P'(u) = P(u)$ ist.

§ 3.

Wir gehen nunmehr daran, den in Aussicht gestellten Satz I für den Fall $n=1$ zu beweisen. Soll die Function $F(x, y, y', y'')$ so beschaffen sein, dass der lineare Differentialausdruck

$$\delta F = F_0 u + F_1 u' + F_2 u''$$

sich selbst adjungirt ist, so muss nach (9′) die Beziehung bestehen:

$$\frac{dF_2}{dx} - F_1 = 0, \tag{16}$$

welche zunächst zeigt, dass F_2 y'' selbst nicht mehr enthalten kann, dass mithin F die Form haben muss:

$$F = M(x, y, y') \cdot y'' + N(x, y, y').$$

Integrirt man die Function M in bezug auf y', — diese Grösse als frei veränderlich betrachtet, — und setzt

$$\int M(x, y, y')\, dy' = P(x, y, y'),$$

so ist

$$\frac{dP}{dx} = M \cdot y'' + \frac{\partial P}{\partial y} y' + \frac{\partial P}{\partial x},$$

sodass sich F auf die Gestalt bringen lässt:

$$F = \frac{d}{dx} P(x, y, y') + Q(x, y, y'),$$

für welche (16) übergeht in:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial P}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{dP}{dx}\right) - \frac{\partial Q}{\partial y'} = 0,$$

oder, da

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial P}{\partial y'}\right) + \frac{\partial P}{\partial y},$$

in

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y'} = 0.$$

Folglich erhält man durch Quadratur eine Function $f(x, y, y')$, welche den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -P, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q,$$

und mit deren Benutzung F die Structur annimmt:

$$F = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = V(f). \qquad \text{q. e. d.}$$

Wir nehmen den Satz I. jetzt für die Ordnungszahlen $2, 4, 6, \ldots, (2n-2)$ als richtig an, und werden im Folgenden zeigen, dass er unter dieser Voraussetzung auch für die Ordnung $2n$ besteht, — womit er allgemein bewiesen ist.

§ 4.

Wenn der aus der Function $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)})$ abgeleitete lineare Differentialausdruck

$$\delta F = \sum_{k=0}^{2n} F_k \cdot u^{(k)}$$

sich selbst adjungirt sein soll, so müssen nach (9') die Relationen erfüllt sein:

$$(17)\quad \sum_{k=0}^{2\lambda-1}(-1)^k(2n-k)_{2\lambda-1-k}(1+\delta_{k,2\lambda-1})\frac{d^{2\lambda-1-k}}{dx^{2\lambda-1-k}}F_{2n-k}=0,$$

$$(\lambda=1,2,\ldots,n)$$

deren erste:

$$(17')\qquad n\frac{d}{dx}F_{2n}-F_{2n-1}=0,$$

zeigt, dass F_{2n} $y^{(2n)}$ nicht enthält, dass also F in bezug auf die höchste Derivirte von y linear ist:

$$(18)\quad F=M(x,y,y',\ldots,y^{(2n-1)})\cdot y^{(2n)}+N(x,y,y',\ldots,y^{(2n-1)}).$$

Mit W soll im Folgenden generell eine Function der ein jedesmal beigegebenen Argumente bezeichnet werden, auf deren nähere Bestimmung es nicht ankommt. Setzt man den Ausdruck (18) von F in (17') ein, so folgt:

$$n\frac{dM}{dx}-M_{2n-1}\cdot y^{(2n)}-N_{2n-1}=0,$$

oder:

$$(n-1)\frac{\partial M}{\partial y^{(2n-1)}}y^{(2n)}+W(x,y,y',\ldots,y^{(2n-1)})=0,$$

woraus hervorgeht, dass

$$\frac{\partial M}{\partial y^{(2n-1)}}=0,$$

also M von $y^{(2n-1)}$ frei ist.

Wir nehmen jetzt als bewiesen an, dass die Function M die Argumente $y^{(2n-1)}, y^{(2n-2)}, \ldots, y^{(2n-\nu+1)}$ nicht enthalten kann, und werden daraufhin zeigen, dass M auch von $y^{(2n-\nu)}$ frei ist, wenn $\nu<n$. — Auf Grund dieser Voraussetzung nämlich erhalten die ν ersten Relationen des Systems (17) die Form:

$$\begin{aligned}(2n)_{2\lambda-1}\frac{d^{2\lambda-1}}{dx^{2\lambda-1}}M&+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k(2n-k)_{2\lambda-1-k}(1+\delta_{k,2\lambda-1})\frac{d^{2\lambda-1-k}}{dx^{2\lambda-1-k}}N_{2n-k}\\&+(-1)^\nu(2n-\nu)_{2\lambda-1-\nu}(1+\delta_{\nu,2\lambda-1})M_{2n-\nu}\cdot y^{(2n+2\lambda-1-\nu)}\\&+W(x,y,y',\ldots,y^{(2n+2\lambda-\nu-2)})=0,\end{aligned}$$

$$(\lambda=1,2,\ldots,\nu)$$

und ihre $(2\nu-2\lambda)$-malige Differentiation ergiebt:

$$\begin{aligned}(19)\quad M_{2n-\nu}\cdot y^{(2n+\nu-1)}&\{(2n)_{2\lambda-1}+(-1)^\nu(2n-\nu)_{2\lambda-1-\nu}(1+\delta_{\nu,2\lambda-1})\}\\&+\sum_{k=1}^{\nu-1}(-1)^k(2n-k)_{2\lambda-1-k}(1+\delta_{k,2\lambda-1})\frac{d^{2\nu-1-k}}{dx^{2\nu-1-k}}N_{2n-k}\\&+W(x,y,y',\ldots,y^{(2n+\nu-2)})=0.\qquad(\lambda=1,2,\ldots,\nu)\end{aligned}$$

Wir bilden die Determinante Δ des Systems der Coefficienten der Gleichungen (19):

$$(20)\quad \Delta = \Big|\{(2n)_{2\lambda-1} + (-1)^{\nu}(2n-\nu)_{2\lambda-1-\nu}(1+\delta_{\nu,2\lambda-1})\}\cdots$$
$$\cdots(2n-k)_{2\lambda-1-k}(1+\delta_{k,2\lambda-1})\cdots\Big|.$$
$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, (\nu-1) \\ \lambda = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

Wenn sich nun zeigen lässt, dass Δ von Null verschieden ist, so liefert die Elimination der $(\nu-1)$ Grössen $\frac{d^{2\nu-1-k}N_{2n-k}}{dx^{2\nu-1-k}}$ aus den ν Gleichungen (19) eine Relation von der Form:

$$M_{2n-\nu}\cdot y^{(2n+\nu-1)} + W(x, y, y', \ldots, y^{(2n+\nu-2)}) = 0,$$

aus der hervorgeht, dass auch

$$(21)\qquad M_{2n-\nu} = 0,$$

also M von $y^{(2n-\nu)}$ frei ist.

Wir untersuchen jetzt die Möglichkeit der Gleichung $\Delta = 0$. Dieselbe geht zunächst durch Multiplication der Zeilen und Colonnen mit nicht verschwindenden Factoren über in:

$$\Big|\{(2n)_{\nu}\,\nu! + (-1)^{\nu}(2\lambda-1)_{\nu}\,\nu!\,(1+\delta_{\nu,2\lambda-1})\}\cdots$$
$$\cdots(2\lambda-1)_{k}\cdot k!\,(1+\delta_{k,2\lambda-1})\cdots\Big| = 0,$$
$$\begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, (\nu-1) \\ \lambda = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

oder, wenn man die Determinante entsprechend den Aggregaten der ersten Colonne in zwei Determinanten zerlegt, in:

$$(22)\qquad (2n)_{\nu}\,\nu!\,|(2\lambda-1)_{k-1}\,(k-1)!\,(1+\delta_{k-1,2\lambda-1})|$$
$$-\,|(2\lambda-1)_{k}\quad k!\qquad (1+\delta_{k,2\lambda-1})| = 0.$$
$$(k, \lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$$

Es empfiehlt sich, diese Gleichung aus dem arithmetischen in das functionale Gebiet umzusetzen. Zu dem Zweck führen wir ν Functionen

$$(23)\qquad f_{\lambda}(x) = (1+x)^{2\lambda-1} + x^{2\lambda-1}\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$$

ein, und bemerken, dass

$$f_{\lambda}^{(k)}(0) = (2\lambda-1)_{k}\cdot k!\,(1+\delta_{k,2\lambda-1})$$

ist. Mit Benutzung derselben setzt sich die Gleichung $\Delta = 0$ in die Forderung um, dass $x = 0$ der Gleichung

$$(24)\qquad (2n)_{\nu}\cdot\nu!\,|f_{\lambda}^{(k-1)}(x)| - |f_{\lambda}^{(k)}(x)| = 0\qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$$

genügt. — Das Mittel zur Berechnung der hier auftretenden Determinanten liefert uns folgende Bemerkung: die ν Functionen $f_{\lambda}(x)$ erfüllen eine homogene lineare Differentialgleichung ν-ter Ordnung:

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' & \cdots & y^{(\nu)} \\ f_1 & f_1' & f_1'' & \cdots & f_1^{(\nu)} \\ f_2 & f_2' & f_2'' & \cdots & f_2^{(\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_\nu & f_\nu' & f_\nu'' & \cdots & f_\nu^{(\nu)} \end{vmatrix} = 0,$$

welche entwickelt lauten möge:

(25) $y^{(\nu)} + p_1(x)\, y^{(\nu-1)} + p_2(x)\, y^{(\nu-2)} + \cdots + p_{\nu-1}(x)\, y' + p_\nu(x)\, y = 0.$

Darin stellt sich speciell der Coefficient von $y : p_\nu(x)$ vermittelst der Integrale auf folgende Weise dar:

$$p_\nu(x) = (-1)^\nu\, |f_\lambda^{(k)}(x)| : |f_\lambda^{(k-1)}(x)|, \qquad (k,\ \lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$$

so dass wir die Gleichung $\Delta = 0$ jetzt einfach schreiben können:

(26) $$p_\nu(0) = (-1)^\nu\, (2n)_\nu \cdot \nu!$$

§ 5.

Es handelt sich nunmehr um die Aufstellung der linearen Differentialgleichung (25), welcher die ν Functionen

(23) $$f_\lambda(x) = (1 + x)^{2\lambda-1} + x^{2\lambda-1}$$

Genüge leisten. Setzen wir zunächst $x = z - \frac{1}{2}$, wodurch

$$f_\lambda(x) = \left(\frac{1}{2} + z\right)^{2\lambda-1} - \left(\frac{1}{2} - z\right)^{2\lambda-1} = \varphi_\lambda(z)$$

wird, so sind die Ausdrücke $\varphi_\lambda(z)$ offenbar ungerade Functionen von z, also von der Form:

$$\varphi_\lambda(z) = z \cdot \psi_\lambda(z^2),$$

wobei $\psi_\lambda(u)$ eine gewisse ganze rationale Function vom Grade $(\lambda - 1)$ in u darstellt. Die lineare homogene Differentialgleichung ν-ter Ordnung, welche diese ν Functionen $\psi_\lambda(u)$ erfüllen, ist demnach einfach:

(27) $$\frac{d^\nu \eta}{du^\nu} = 0;$$

und diese ist jetzt durch die Relation $u = z^2$ auf z zu transformiren. — Der Differentialquotient $\frac{d^\lambda \eta}{du^\lambda}$ stellt sich durch die Ableitungen von η nach z in der Form dar:

(28) $$\frac{d^\lambda \eta}{du^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda} \sum_{k=0}^{\lambda-1} (-1)^k A_{\lambda k}\, z^{-(\lambda+k)} \frac{d^{\lambda-k} \eta}{dz^{\lambda-k}},$$

worin die Grössen $A_{\lambda k}$ gewisse numerische Werthe vertreten, die, wie man unmittelbar sieht, den Recursionsformeln genügen:

(29) $$A_{\lambda+1,k} = A_{\lambda k} + (\lambda + k - 1) A_{\lambda, k-1}, \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, \lambda \\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

wobei
$$A_{\lambda 0} = 1, \quad A_{\lambda\lambda} = 0$$

zu setzen ist. — Man erhält aus (29) der Reihe nach für $k = 1, 2, 3$:
$$A_{\lambda 1} = \lambda_2; \quad A_{\lambda 2} = 3 \cdot (\lambda + 1)_4; \quad A_{\lambda 3} = 3 \cdot 5 \cdot (\lambda + 2)_6,$$
und verificirt leicht durch Schluss von k auf $(k + 1)$, dass
$$A_{\lambda k} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k - 1) \cdot (\lambda + k - 1)_{2k} = \frac{(\lambda + k - 1)!}{2^k \cdot k! \, (\lambda - k - 1)!}$$
ist. Demnach geht die Gleichung (27) durch die Substitution $u = z^2$ über in folgende:

(30) $$\sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \frac{(\nu + k - 1)!}{(\nu - k - 1)!} z^{-k} \frac{d^{\nu-k}\eta}{dz^{\nu-k}} = 0,$$

in welche weiter $\eta = \frac{y}{z}$ einzutragen ist. Man erhält dadurch die Differentialgleichung der Functionen $y = \varphi_\lambda(z)$:

(31) $$\sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{(-1)^\lambda}{(\nu - \lambda)!} C_\lambda z^{-\lambda} \frac{d^{\nu-\lambda} y}{dz^{\nu-\lambda}} = 0,$$

worin
$$C_\lambda = \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{(\nu + k - 1)!}{2^k \cdot k!} (\nu - k)$$
ist. Zerlegt man aber hier $(\nu - k)$ in $(\nu + k) - 2k$, so wird
$$C_\lambda = \sum_{k=0}^{\lambda} \frac{(\nu + k)!}{2^k \cdot k!} - \sum_{k=1}^{\lambda} \frac{(\nu + k - 1)!}{2^{k-1} \cdot (k - 1)!} = \frac{(\nu + \lambda)!}{2^\lambda \cdot \lambda!},$$
also (31):
$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \nu_\lambda \frac{(\nu + \lambda)!}{2^\lambda \cdot \nu!} z^{-\lambda} \frac{d^{\nu-\lambda} y}{dz^{\nu-\lambda}} = 0.$$

Substituirt man darin endlich $z = \left(x + \frac{1}{2}\right)$, so ergiebt sich die Differentialgleichung der Functionen $f_\lambda(x)$:

(32) $$\sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \nu_\lambda \frac{(\nu + \lambda)!}{\nu!} (2x + 1)^{-\lambda} \frac{d^{\nu-\lambda} y}{dx^{\nu-\lambda}} = 0,$$

oder:

(32′) $$y^{(\nu)} - \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{(2x + 1)} y^{(\nu-1)} + \cdots + (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{\nu! \, (2x + 1)^\nu} y = 0.$$

Die Determinante der ν Functionen $f_\lambda(x)$ ist bekanntlich

$$|f_\lambda^{(k)}(x)| = ce^{-\int p_1(x)\,dx} = c(2x+1)^{\frac{\nu.\nu+1}{2}}, \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, (\nu-1) \\ \lambda = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix},$$

wo c eine nicht verschwindende Constante bedeutet. Setzen wir darin $x = 0$, so sehen wir, dass der Ausdruck

$$|(2\lambda - 1)_k \cdot k!\,(1 + \delta_{k,2\lambda-1})| = c, \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, (\nu-1) \\ \lambda = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix}$$

und mit ihm die Determinante (15) von Null verschieden ist, wie oben in Aussicht gestellt war.

Ferner entnehmen wir aus (32′):

$$p_\nu(x) = (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{\nu!} \frac{1}{(2x+1)^\nu},$$

wodurch die Gleichung (26) übergeht in folgende:

$$(33) \qquad (2n)_\nu = (2\nu)_\nu.$$

Da dieselbe aber für $\nu < n$ nicht bestehen kann, so ist $\Delta \neq 0$, und damit für $\nu < n$ Gleichung (21) bewiesen. Dagegen gilt sie nicht mehr für $\nu = n$, weil in diesem Falle (33) erfüllt, also $\Delta = 0$ ist. —

Wir haben so das Resultat gewonnen:

Wenn die Function $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)})$ so beschaffen ist, dass δF zu sich selbst adjungirt ist, so hat F die Form:

$$(34) \quad F = M(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \cdot y^{(2n)} + N(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}).$$

§ 6.

Setzen wir jetzt

$$\int M(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dy^{(n)} = P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

so ist

$$\frac{\partial P}{\partial y^{(n)}} = M,$$

also

$$\frac{d^n P}{dx^n} = M \,.\, y^{(2n)} + W(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}),$$

mithin

$$F = \frac{d^n}{dx^n} P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) + Q(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}).$$

Bezeichnen wir ferner:

$$\int P(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dy^{(n)} \quad \text{mit} \quad (-1)^n \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

so dass

$$P = (-1)^n \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n)}},$$

so kann man offenbar F auf die Gestalt bringen:

(35) $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) = \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(2n)}) + \Psi(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)})$,

worin

$$\Phi = V(\varphi) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y^{(k)}}\right) \tag{36}$$

zu setzen ist. — Nun soll

$$\delta F = \delta \Phi + \delta \Psi$$

sich selbst adjungirt sein, und da der adjungirte Ausdruck eines Aggregats gleich der Summe der adjungirten Ausdrücke der einzelnen Summanden ist, und da weiter $\delta \Phi$ der Structur von Φ in (36) zufolge sich selbst adjungirt ist, so ergiebt sich, dass auch $\delta \Psi$ seinem adjungirten Ausdruck gleich sein muss. Die Relation (17'):

$$n \frac{d}{dx} \Psi_{2n} - \Psi_{2n-1} = 0,$$

der Ψ alsdann Genüge leistet, zeigt aber, da Ψ $y^{(2n)}$ nicht enthält, dass $\Psi_{2n-1} = 0$, also Ψ auch von $y^{(2n-1)}$ frei ist. Demnach trifft auf $\Psi(x, y, y', \ldots, y^{(2n-2)})$ die Voraussetzung zu, die wir am Schluss des § 3 gemacht haben, und Ψ lässt sich auf die Gestalt bringen:

$$\Psi = V(\psi) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}}\right), \tag{37}$$

worin ψ von den Argumenten $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ abhängt. Setzen wir jetzt

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) + \psi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

so geht Gleichung (35) mit Rücksicht auf (36) und (37) über in:

$$F = V(f) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\right), \tag{38}$$

womit der Satz I bewiesen ist.

Die Function $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ist durch F nicht eindeutig bestimmt. Wenn eine Function $g(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ ebenfalls eine Darstellung $F = V(g)$ von F liefert, so genügt die Differenz

$$f - g = h(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

der Differentialgleichung:

$$V(h) \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial h}{\partial y^{(k)}}\right) = 0,$$

welche bekanntlich die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ausdrückt, dass h einem exacten Differentialquotienten gleich ist. Man erhält also alle Functionen g, welche zur Darstellung (38) von F dienen, durch die Relation:

$$g \sim f.$$

§ 7.

Wenn eine Differentialgleichung $(2n)$-ter Ordnung, die nach der höchsten Ableitung aufgelöst sei:

$$y^{(2n)} + \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(2n-1)}) = 0, \tag{39}$$

einem Problem der Variationsrechnung angehört, so muss, wie aus der Bemerkung am Schluss des § 5 ersichtlich, eine Multiplicatorfunction $M(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ von der Art existiren, dass das Product

$$F = M \cdot (y^{(2n)} + \Phi)$$

die Eigenschaft hat, δF seinem adjungirten Ausdruck gleich werden zu lassen.

Im Falle $n = 1$ der Differentialgleichung $y'' + \Phi(x, y, y') = 0$, den wir zunächst behandeln, muss $M(x, y, y')$ der Gleichung genügen:

$$\frac{dM}{dx} - \frac{\partial}{\partial y'}(M \cdot y'' + M . \Phi) = 0,$$

oder:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} y' - \Phi \cdot \frac{\partial M}{\partial y'} - \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \cdot M = 0; \tag{40}$$

und da diese Gleichung stets Integrale M besitzt und zugleich in unserm Falle die einzige Bedingung darstellt, so schliessen wir, dass principiell jede Differentialgleichung zweiter Ordnung einem Problem der Variationsrechnung äquivalent ist*), — jedoch im allgemeinen nur a posteriori; d. h. um dies Problem zu formuliren, bedarf es im allgemeinen der Kenntniss der Integrale der vorgelegten Differentialgleichung selbst. Denn setzt man in (40)

$$\log M = N,$$

so erhält man für N die lineare, nicht homogene, partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} y' - \Phi \cdot \frac{\partial N}{\partial y'} - \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = 0,$$

deren Lösung auf die Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen hinauskommt:

$$dx : dy : dy' : dN = 1 : y' : -\Phi : \frac{\partial \Phi}{\partial y'},$$

oder:

$$y'' + \Phi(x, y, y') = 0, \tag{a}$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'}(x, y, y'). \tag{b}$$

Um also aus (b) N zu bestimmen, muss man im allgemeinen (a)

*) Diese Bemerkung findet sich bereits bei Darboux, „Théorie générale des surfaces“, III. partie, p. 53 ff.

bereits integrirt haben. Nur in einem Falle ist die Ermittelung von N a priori, d. h. ohne vorherige Integration der Differentialgleichung (a) möglich, nämlich, *wenn* $\frac{\partial \Phi}{\partial y'}$ *ein exacter Differentialquotient ist, wenn also* $\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y'}$ *der Bedingung genügt:*

$$V(\Phi_1) \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y'}\right) = 0.$$

Ist dieselbe erfüllt, so lässt sich die vorgelegte Differentialgleichung (a) *a priori auf eine Aufgabe der Variationsrechnung reduciren.*

Im Falle $n > 1$ führt die Bestimmung von M durch die Relation (17′) auf die Gleichung:

$$n\frac{dM}{dx} - M\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(2n-1)}} = 0; \tag{41}$$

dieselbe zeigt, dass, wenn die Bestimmung von M möglich sein soll, $\Phi_{2n-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(2n-1)}}$ *ein exacter Differentialquotient sein, mithin der Bedingung genügen muss:*

$$V(\Phi_{2n-1}) \equiv \sum (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial \Phi_{2n-1}}{\partial y^{(k)}}\right) = 0. \tag{42}$$

Wenn letztere befriedigt wird, so bestimme man M *aus* (41); *ist dann der lineare Differentialausdruck*

$$\delta F = \delta\{M.(y^{(2n)} + \Phi)\}$$

zu sich selbst adjungirt, so ist die Differentialgleichung (39) *einem Problem der Variationsrechnung äquivalent.*

§ 8.

Der Beweis des Satzes III lässt sich mit wenigen Strichen erbringen. Ist $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n+1)})$ eine Function von ungerader Ordnung, mit der Eigenschaft, dass der aus ihr abgeleitete Differentialausdruck

$$\delta_u F = \sum_{k=0}^{2n+1} F_k . u^{(k)}$$

seinem adjungirten entgegengesetzt gleich ist, so wird dieser Umstand zufolge (5) durch die Relation ausgedrückt:

$$u . \delta_v F + v . \delta_u F \sim 0, \tag{43}$$

woraus speciell für $u = v$ hervorgeht:

$$v . \delta_v F \sim 0. \tag{44}$$

Wendet man auf (43) den δ_v-Process, auf (44) den δ_u-Process an, so folgt:

$$(43') \qquad u \,.\, \delta_v^2 F + v \,.\, \delta_v(\delta_u F) \backsim 0,$$
$$(44') \qquad v \,.\, \delta_u(\delta_v F) \backsim 0,$$

mithin ist auch

$$u \,.\, \delta_v^2 F \backsim 0.$$

Dies ist aber bei der Willkür von u nicht anders möglich, als wenn

$$\delta_v^2 F \equiv \sum_{i,k=0}^{2n+1} F_{ik} v^{(i)} v^{(k)} \equiv 0\,.$$

Ersetzt man darin v durch $(u+v)$, so ergiebt sich weiter:

$$\sum_{i,k=0}^{2n+1} F_{ik} u^{(i)} \,.\, v^{(k)} \equiv 0,$$

also

$$\sum_{k=0}^{2n+1} F_{ik} v^{(k)} \equiv 0 \qquad \bigl(i=0,1,\ldots(2n+1)\bigr)$$

und schliesslich

$$F_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(i)}\,\partial y^{(k)}} \equiv 0. \qquad \bigl(i,k=0,1,\ldots(2n+1)\bigr).$$

Daraus geht hervor, dass F von den Argumenten $y, y', y'', \ldots y^{(2n+1)}$ in linearer Weise abhängt. q. e. d.

Satz und Beweis lassen sich unmittelbar auf partielle Differentialausdrücke F übertragen.

§ 9.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung eines partiellen Differentialausdrucks $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ der zweiten Ordnung mit zwei Argumenten x, y, in welchem z die von den letzteren abhängige Function, p, q, r, s, t ihre ersten und zweiten Differentialquotienten in der Euler'schen Bezeichnung bedeuten. Die Annahme, dass δF zu sich selbst adjungirt ist, drückt sich durch die Gleichung aus:

$$\begin{aligned}\delta F \equiv F_z + F_p \frac{\partial u}{\partial x} + F_q \frac{\partial u}{\partial y} + F_r \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_s \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + F_t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ = F_z - \frac{d}{dx}(F_p . u) - \frac{d}{dy}(F_q . u) + \frac{d^2}{dx^2}(F_r . u) + \frac{d^2}{dx\,dy}(F_s . u) \\ + \frac{d^2}{dy^2}(F_t . u),\end{aligned}$$

welche sich in die zwei Relationen zerlegt:

$$(45) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{dF_r}{dx} + \dfrac{dF_s}{dy} = 2F_p, \\ \dfrac{dF_s}{dx} + 2\dfrac{dF_t}{dy} = 2F_q, \end{cases}$$

— dabei ist $F_x = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $F_{xy} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ u. s. w. gesetzt. —

Was die Abhängigkeit der Function F von r, s, t anbetrifft, so liefert die Discussion der Bedingungen (45) folgende Differentialgleichungen:

(46) $F_{rr}=0,\quad F_{tt}=0,\quad F_{rs}=0,\quad F_{st}=0,\quad 2F_{rt}+F_{ss}=0,$

deren Integration für F die Darstellung giebt:

(47) $$F=M.(rt-s^2)+R.r+2S.s+T.t+N,$$

worin M, N, R, S, T Functionen von x, y, z, p, q sind.

Setzt man den Ausdruck von F aus (47) in (45) ein, so findet man für letztere die Relationen:

(48) $$\begin{cases}(\alpha) & M_x+M_zp+S_q-T_p=0,\\ (\beta) & M_y+M_zq-R_q+S_p=0,\\ (\gamma) & R_x+R_zp+S_y+S_zq-N_p=0,\\ (\delta) & S_x+S_zp+T_y+T_zq-N_q=0.\end{cases}$$

Sei nun φ eine Function von x, y, z, p, q, so erhält man für das Symbol $V(\varphi.s)$ folgenden Ausdruck:

(49) $$\begin{aligned}V(\varphi.s)&\equiv\varphi_z.s-\frac{d}{dx}(\varphi_p.s)-\frac{d}{dy}(\varphi_q.s)+\frac{d^2}{dx\,dy}(\varphi)\\&=\varphi_{pq}(rt-s^2)+R'.r+2S'.s+T'.t+N',\end{aligned}$$

wobei R', S', T', N' Functionen von x, y, z, p, q sind, auf deren nähere Bestimmung es nicht ankommt. Bestimmt man also die Function φ so, dass

$$\varphi_{pq}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}=M,$$

so lässt sich dieselbe nach (47) und (49) zur Darstellung von F in der Form benutzen:

(50) $$F=V(\varphi.s)+R.r+2S.s+T.t+N.$$

Sei ferner ψ ebenfalls eine Function von x, y, z, p, q, so findet man:

(51) $$V(\psi)=-\psi_{pp}r-2\psi_{pq}s-\psi_{qq}t+N'';$$

bestimmt man demnach ψ durch die Gleichung:

$$\psi_{pp}=\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}=-R,$$

so kann man zufolge (50) und (51) F in die Gestalt setzen:

(52) $$F=V(\varphi.s)+V(\psi)+2S.s+T.t+N.$$

Da nun die Ausdrücke $\delta V(\varphi.s)$ und $\delta V(\psi)$ ihrer Natur nach sich selbst adjungirt sind, so gilt das gleiche auch von dem Ausdruck

$$\delta\{2S.s+T.t+N\}.$$

Die Bedingungen, denen S, T, N demgemäss unterworfen sind, erhält man aus (48), wenn man daselbst $M=0$, $R=0$ setzt:

$$(53)\qquad \begin{cases} (\alpha) & S_q - T_p = 0, \\ (\beta) & S_p \qquad = 0, \\ (\gamma) & S_y + S_z q - N_p = 0, \\ (\delta) & S_x + S_z p + T_y + T_z q - N_q = 0; \end{cases}$$

aus (β) geht hervor, dass S nur von x, y, z, q abhängt. Ist nun χ eine Function derselben Argumente, so wird

$$V(\chi.p) = -2\chi_q.s + T'.t + N';$$

bestimmt man also χ aus

$$\frac{\partial\chi}{\partial q} = -S,$$

so kann man F auf die Form bringen:

$$F = V(\varphi.s) + V(\psi) + V(\chi.p) + T.t + N,$$

oder, wenn man $\chi.p$ mit ψ vereinigt, wodurch der Charakter von ψ nicht geändert wird:

$$(54)\qquad F = V(\varphi.s) + V(\psi) + T.t + N,$$

wo T und N jetzt den Bedingungen genügen:

$$(55)\qquad \begin{cases} (\alpha) & T_p = 0, \\ (\gamma) & N_p = 0, \\ (\delta) & T_y + T_z q - N_q = 0. \end{cases}$$

T hängt zufolge (α) nur von x, y, z, q ab. Ist χ wieder eine Function derselben Argumente, so gilt:

$$V(\chi) = -\chi_{qq}t + N';$$

indem man mithin χ aus

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial q^2} = -T$$

bestimmt, $T.t$ in (54) durch $V(\chi)$ ersetzt und χ zu ψ zuschlägt, kann man $T = 0$ annehmen, so dass für N die Bedingungen bleiben:

$$N_p = 0, \quad N_q = 0.$$

Construirt man also eine Function $\chi(x, y, z)$ aus

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} = N,$$

so ist $N = V(\chi)$; und indem man χ wieder in ψ hineinzieht, erhält man folgendes Resultat:

Wenn die Function $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ so beschaffen ist, dass δF sich selbst adjungirt ist, so kann F durch Quadraturen auf die Form gebracht werden:

$$F = V(f),$$

worin

$$f(x, y, z, p, q, s) = \varphi(x, y, z, p, q).s + \psi(x, y, z, p, q),$$

und die Functionen φ und ψ keinen Beschränkungen unterworfen sind.

§ 10.

Es liege ein partieller Differentialausdruck zweiter Ordnung

$$F\{x_1, x_2, \dots x_n;\ y;\ y_1, y_2, \dots y_n;\ y_{11}, y_{12}, \dots y_{nn}\}$$

vor; in demselben bedeuten $x_1, x_2 \dots x_n$ die n Argumente, y die von ihnen abhängige Function, ferner ist gesetzt:

$$y_i = \frac{\partial y}{\partial x_i},\quad y_{ik} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_k}.$$

Soll δF sich selbst adjungirt sein, so gilt:

$$\delta F \equiv \frac{\partial F}{\partial y}\cdot u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i} u_i + \sum_{i \leqq k} \frac{\partial F}{\partial y_{ik}} u_{ik}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y}\cdot u - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\cdot u\right) + \sum_{i \leqq k} \frac{d^2}{dx_i\,dx_k}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}\cdot u\right).$$

Hieraus gehen die Relationen hervor:

$$(56)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}\right)\cdot(1+\delta_{ik}) = 2\,\frac{\partial F}{\partial y_k}, \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

$$(56')\qquad \sum_{i,k=1}^{n} \frac{d^2}{dx_i\,dx_k}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{ik}}\right)\cdot(1+\delta_{ik}) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k}\right),$$

von denen indes (56′) eine unmittelbare Consequenz von (56) ist. Fasst man in dem entwickelten Ausdruck von (56) die Terme für sich zusammen, welche die dritten Ableitungen von y enthalten, so ergiebt sich:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\,\partial y_{\mu\nu}}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{\mu\nu})\,y_{\mu\nu i} = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

also:

$$(57)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y_{ik}\,\partial y_{\mu\nu}}(1+\delta_{ik})(1+\delta_{\mu\nu}) + \frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\mu}\,\partial y_{\nu k}}(1+\delta_{i\mu})(1+\delta_{\nu k})$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial y_{i\nu}\,\partial y_{k\mu}}(1+\delta_{i\nu})(1+\delta_{k\mu}) = 0$$

für

$$i \leqq k \leqq \mu \leqq \nu = 1, 2, \dots n.$$

Man überzeugt sich leicht, dass diesem System von Differentialgleichungen die Determinante

$$|y_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \dots n)$$

sowie ihre sämmtlichen Subdeterminanten jeder Ordnung genügen. — Im Falle $n = 3$, auf den wir uns nun beschränken, lässt sich zugleich ohne Mühe zeigen, dass ein Aggregat dieser Grössen das allgemeine

Integral der Gleichungen (57) darstellt. Bei $n=3$ erhält demnach F die Form:

$$(58)\quad F = A\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13}\\ y_{21} & y_{22} & y_{23}\\ y_{31} & y_{32} & y_{33}\end{vmatrix}$$
$$+ B_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}^2) + B_{22}(y_{33}y_{11} - y_{31}^2) + B_{33}(y_{11}y_{22} - y_{12}^2)$$
$$+ 2B_{23}(y_{12}y_{13} - y_{11}y_{23}) + 2B_{31}(y_{23}y_{21} - y_{22}y_{31})$$
$$+ 2B_{12}(y_{31}y_{32} - y_{33}y_{12})$$
$$+ C_{11}y_{11} + C_{22}y_{22} + C_{33}y_{33} + 2C_{23}y_{23} + 2C_{31}y_{31} + 2C_{12}y_{12} + D,$$

worin die Coefficienten $A, B_{11}, \ldots C_{11}, \ldots D$ Functionen von $x_1, x_2, x_3, y, y_1, y_2, y_3$ sind, welche noch gewissen Bedingungen genügen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass man diesen Ausdruck F durch Subtraction geeignet construirter Grössen $V(f)$ nach und nach zerstören kann. Nimmt man zunächst $f = M.(y_{22}y_{33} - y_{23}^2)$, wo M von den zweiten Ableitungen unabhängig ist, so erhält man für $V(f)$ einen Ausdruck von derselben Form wie F in (58):

$$V\{M.(y_{22}y_{33} - y_{23}^2)\} = -\frac{\partial^2 M}{\partial y_1^2}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13}\\ y_{21} & y_{22} & y_{23}\\ y_{31} & y_{32} & y_{33}\end{vmatrix} + \cdots.$$

Folglich kann das Anfangsglied von F zerstört werden, und A darf $=0$ angenommen werden. — Weiter findet man:

$$V\{R.y_{22}\} = -\frac{\partial^2 R}{\partial y_1^2}(y_{11}y_{22} - y_{12}^2) + B'_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}^2)$$
$$+ 2B'_{31}(y_{23}y_{21} - y_{22}y_{31}) + \Sigma C'_{ik}y_{ik} + D'.$$
$$V\{S.y_{23}\} = \frac{\partial^2 S}{\partial y_1^2}(y_{12}y_{13} - y_{11}y_{23}) + B''_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}^2)$$
$$+ 2B''_{31}(y_{23}y_{21} - y_{22}y_{31}) + 2B''_{12}(y_{31}y_{32} - y_{33}y_{12})$$
$$+ \Sigma C''_{ik}y_{ik} + D'',$$
$$V\{T.y_{33}\} = -\frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2}(y_{33}y_{11} - y_{31}^2) + B'''_{11}(y_{22}y_{33} - y_{23}^2)$$
$$+ 2B'''_{12}(y_{31}y_{32} - y_{33}y_{12}) + \Sigma C'''_{ik}y_{ik} + D'''.$$

Mit Benutzung dieser Ausdrücke lassen sich in (58) resp. die Coefficienten B_{33}, B_{23}, B_{22} auf Null reduciren. — Setzt man den so vereinfachten Ausdruck von F aus (58) in die Gleichungen (56) ein, so ergeben sich für die Coefficienten B_{11}, B_{12}, B_{13} folgende Bedingungen:

$$(59)\qquad \begin{cases} (\alpha) & \dfrac{\partial B_{12}}{\partial y_1} = 0, \\ (\beta) & \dfrac{\partial B_{13}}{\partial y_1} = 0, \\ (\gamma) & \dfrac{\partial B_{11}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial B_{12}}{\partial y_2} + \dfrac{\partial B_{13}}{\partial y_3} = 0; \end{cases}$$

B_{12} und B_{13} sind somit von y_1 unabhängig.

Es seien nun S' und T' Functionen von $x_1, x_2, x_3, y, y_2, y_3$, also ebenfalls frei von y_1, so findet man:

$$V(S'.y_1.y_{23}) = -\frac{\partial S'}{\partial y_2}(y_{23}y_{21} - y_{22}y_{31}) - \frac{\partial S'}{\partial y_3}(y_{31}y_{32} - y_{33}y_{12})$$
$$+ \frac{\partial^2 S'}{\partial y_2\, \partial y_3} y_1 . (y_{22}y_{33} - y_{23}^2) + \cdots,$$

$$V(T'.y_1.y_{33}) = \quad 2\frac{\partial T'}{\partial y_2}(y_{31}y_{32} - y_{33}y_{12}) - \frac{\partial^2 T'}{\partial y_2^2} y_1 . (y_{22}y_{33} - y_{23}^2) + \cdots.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke kann man zuerst B_{31} und dann B_{12} in (58) zu Null machen, und (59γ) zeigt, dass der noch übrig bleibende Coefficient B_{11} y_1 nicht mehr enthält. Nun ist weiter, wenn auch T'' von y_1 frei ist,

$$V(T''.y_{33}) = -\frac{\partial^2 T''}{\partial y_2^2}(y_{22}y_{33} - y_{23}^2) + \cdots,$$

womit man auch B_{11} auf Null reduciren kann. —

Ferner ist

$$V(N) = -\frac{\partial^2 N}{\partial y_1^2} y_{11} + \cdots,$$

wodurch C_{11} zu Null gemacht wird. Der Ausdruck von F in (58) ist damit auf folgenden reducirt:

(60) $\quad F = 2C_{12}y_{12} + 2C_{13}y_{13} + C_{22}y_{22} + 2C_{23}y_{23} + C_{33}y_{33} + D.$

Durch Einsetzen desselben in (56) erhält man für die Coefficienten C die Relationen:

$$(61)\qquad \begin{cases} (\alpha) & \dfrac{\partial C_{12}}{\partial y_1} = 0, \quad \dfrac{\partial C_{13}}{\partial y_1} = 0, \\ (\beta) & \dfrac{\partial C_{23}}{\partial y_1} = \dfrac{\partial C_{31}}{\partial y_2} = \dfrac{\partial C_{12}}{\partial y_3}, \\ (\gamma) & \dfrac{\partial C_{22}}{\partial y_1} = \dfrac{\partial C_{12}}{\partial y_2}, \quad \dfrac{\partial C_{33}}{\partial y_1} = \dfrac{\partial C_{13}}{\partial y_3}, \\ (\delta) & \dfrac{\partial C_{22}}{\partial y_3} = \dfrac{\partial C_{23}}{\partial y_2}, \quad \dfrac{\partial C_{33}}{\partial y_2} = \dfrac{\partial C_{23}}{\partial y_3}. \end{cases}$$

Zufolge (α) und (β) kann man setzen:

$$C_{12} = -\frac{\partial N'(y_2, y_3)}{\partial y_2}, \quad C_{13} = -\frac{\partial N'(y_2, y_3)}{\partial y_3},$$

und da

$$V(N'.y_1) = -2\frac{\partial N'}{\partial y_2} y_{12} - 2\frac{\partial N'}{\partial y_3} y_{13} + \cdots$$

ist, so können C_{12} und C_{13} zerstört werden, wodurch zugleich nach (β) und (γ) C_{22}, C_{23}, C_{33} von y_1 frei werden. Da auf Grund von (56) das gleiche jetzt auch von D gilt, so tritt y_1 in F überhaupt nicht mehr auf, x_1 fungirt als Constante, und wir befinden uns im Falle von zwei Argumenten, der im § 9 erledigt ist. Wir haben damit das Resultat erlangt:

Wenn der Ausdruck F in (58) *so beschaffen ist, dass δF sich selbst adjungirt ist, so kann F durch Quadraturen auf die Form gebracht werden:*

$$F = V(f),$$

worin

$$f = M.(y_{22}y_{33} - y_{23}^2) + R.y_{22} + 2S.y_{23} + T.y_{33} + N$$

ist, und die Coefficienten M, N, R, S, T willkürliche Functionen von x_1, x_2, x_3, y, y_1, y_2, y_3 darstellen.

Zürich, Mai 1896.

Ueber den Zusammenhang zwischen der Dedekind-Weber'schen Normalbasis und dem Hensel'schen absoluten Fundamentalsystem.

Von

Ludwig Baur in Darmstadt.

I.

Ist Θ eine algebraische Function der unabhängigen Veränderlichen x, so hängt Θ mit x zusammen durch eine irreducibele Gleichung

$$(1) \qquad a_0\Theta^n + a_1\Theta^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

worin die Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ganze rationale Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler sind. Die Gesammtheit aller rationalen Functionen von Θ und x bildet dann nach der Terminologie der Herren Dedekind und Weber*) einen bestimmten *Körper Ω algebraischer Functionen von x* vom Grade n und der Inbegriff aller derjenigen Functionen aus Ω, welche gleichzeitig ganze Functionen von x bezw. von $\bar{x} = \frac{1}{x}$ sind, das System $\mathfrak{o}$ bezw. das System $\bar{\mathfrak{o}}$.

Ist nun y eine durchaus beliebige Function des Systems $\mathfrak{o}$, etwa

$$y = r_{11} + r_{12}\Theta + \cdots + r_{1n}\Theta^{n-1},$$

wo die r_{ik} rationale Functionen von x sind, so versteht man unter dem Exponenten von y die kleinste ganze Zahl r, für welche $\bar{x}^r \cdot y$ in $\bar{\mathfrak{o}}$ enthalten ist. Um diesen Exponenten allgemein zu bestimmen stellen wir zunächst die Gleichung für y auf einem ganz bestimmten rationalen Wege her, dadurch nämlich, dass wir noch die Ausdrücke bilden

$$\begin{aligned} y\Theta &= r_{21} + r_{22}\Theta + \cdots + r_{2n}\Theta^{n-1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y\Theta^{n-1} &= r_{n1} + r_{n2}\Theta + \cdots + r_{nn}\Theta^{n-1}, \end{aligned}$$

---

*) S. Dedekind und Weber, Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 92, § 1).

in denen alle r_{ik} rationale Functionen von x sind, und hieraus die Relation

$$|r_{ik} - \delta_{ik} y| = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$
$$\delta_{ik} = 0, \quad \text{wenn} \quad i \neq k,$$
$$\delta_{kk} = 1$$

herleiten, welche entwickelt zu einer Gleichung von der Form

$$(2) \qquad F(y, x) = y^n + f_1(x)\, y^{n-1} + \cdots + f_n(x) = 0$$

führen muss, so zwar, dass die $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sich als lauter *ganze* rationale Functionen von x herausstellen. Nehmen wir zunächst an, diese Gleichung sei irreducibel und r die kleinste ganze Zahl von der Beschaffenheit, dass die Grade von $f_1, f_2, \ldots, f_n$ kleiner oder ebenso gross sind wie bezüglich $r, 2r, \ldots, nr$, so geht die Gleichung (2) durch die Substitution

$$(3) \qquad \bar{x} = \frac{1}{x}, \quad \bar{y} = y \cdot \bar{x}^r$$

über in die andere

$$(4) \qquad \bar{y}^n + \bar{f}_1(\bar{x}) \cdot \bar{y}^{n-1} + \cdots + \bar{f}_n(\bar{x}) = 0,$$

wo jetzt

$$(5) \qquad \bar{f}_i(\bar{x}) = \bar{x}^{ir} f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ganze rationale Functionen von $\bar{x}$ sind. Hiernach gehört zwar $\bar{y}$, nicht mehr aber $\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ dem Systeme $\bar{\mathfrak{o}}$ an — es müssten nämlich sonst die Functionen $\frac{\bar{f}_i(\bar{x})}{\bar{x}^i} = \bar{x}^{i(r-1)} f_i(x)$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ ebenfalls lauter ganze rationale Functionen von $\bar{x}$ sein, was der Bedeutung von r widerspricht — wir haben mithin in r den verlangten Exponenten.

Ist aber etwa die Gleichung (2) reducibel, so braucht man nur zu berücksichtigen, dass dann wegen der Irreducibilität von (1) die linke Seite von (2) die Potenz einer irreducibelen Function sein muss, und kommt dann durch eine einfache Ueberlegung zu dem Schlusse, dass die vorhin gegebene Bestimmung des Exponenten auch in diesem Falle, also überhaupt gültig ist.

Es mögen jetzt die ganzen Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ mit bezügl. den Exponenten $r_1, r_2, \ldots, r_n$ eine Basis für $\mathfrak{o}$ bilden. Da eine von diesen Basisfunctionen stets gleich 1 genommen werden kann*), so können und wollen wir voraussetzen, dass $\omega_1 = 1$, also $r_1 = 0$ ist. Im übrigen sollen dieselben so geordnet sein, dass

$$r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_n$$

ist. Jedenfalls gehören nun die Functionen

*) Siehe meine Note in den Math. Ann. Bd. 32, S. 153.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega_1 \cdot \bar{x}^{r_1} = 1, \\
\bar{\omega}_2 &= \omega_2 \cdot \bar{x}^{r_2}, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\bar{\omega}_n &= \omega_n \cdot \bar{x}^{r_n}
\end{aligned}$$

dem Systeme $\bar{\mathfrak{o}}$ an; sie sind ausserdem linear unabhängig, brauchen aber trotzdem keine Basis für $\bar{\mathfrak{o}}$ zu bilden. Ich behaupte jedoch:

Falls dieses Functionensystem $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_n$ eine Basis für $\bar{\mathfrak{o}}$ ist, so ist es eine Normalbasis für $\bar{\mathfrak{o}}$ und gleichzeitig $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Normalbasis für $\mathfrak{o}$, wobei nicht übersehen werden darf, dass für ω_1 der Werth 1 vorausgesetzt wurde.

Um dies einzusehen bezeichnen wir die aufzusuchende *Normalbasis* für $\mathfrak{o}$ durch $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und nehmen an, es sei bereits bewiesen, dass für $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ die Functionen $\omega_1, \ldots, \omega_s$ gesetzt werden dürfen. Dann muss für λ_{s+1} unter denjenigen Functionen aus $\mathfrak{o}$, die nicht einer Function der Schaar $(\omega_1, \ldots, \omega_s)$, d. h. wenn $c_1, \ldots, c_s$ irgend welche Constanten bedeuten, nicht einer Function von der Form $c_1\omega_1 + \cdots + c_s\omega_s$ mod. $\mathfrak{o}x$ congruent sind, eine von möglichst kleinem Exponenten aufgesucht werden. Bezeichnen wir nun eine beliebige Function in $\mathfrak{o}$ durch λ, so kann man λ in der Form

$$\lambda = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n \tag{6}$$

darstellen, wo $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ganze rationale Functionen von x sind, und es ist daher stets

$$\lambda \equiv c_1\omega_1 + \cdots + c_s\omega_s + c_{s+1}\omega_{s+1} + \cdots + c_n\omega_n \ (\text{mod. } \mathfrak{o}x),$$

wo auch die Grössen $c_{s+1}, \ldots, c_n$ Constanten sind, und daraus folgt, dass für λ_{s+1} zunächst alle diejenigen Functionen λ zulässig sind, für welche die Constanten

$$c_{s+1}, \ldots, c_n \tag{7}$$

nicht alle verschwinden.

Es sei jetzt λ unter den Functionen, die die Bedingungen (6) und (7) erfüllen, eine vom kleinsten Exponenten ϱ, so muss zunächst $\lambda \,.\, \bar{x}^{\varrho}$ dem Systeme $\bar{\mathfrak{o}}$ angehören und daher

$$\lambda \cdot \bar{x}^{\varrho} = \sum \bar{u}_i\bar{\omega}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

gesetzt werden können derart, dass die Grössen $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$ ganze rationale Functionen von $\bar{x}$ sind. Andererseits aber ist

$$\lambda \,.\, \bar{x}^{\varrho} = \sum u_i\bar{x}^{\varrho} \,.\, \omega_i = \sum u_i x^{r_i - \varrho} \,.\, \bar{\omega}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und diese beiden Darstellungen müssen wegen der linearen Unabhängigkeit der Functionen $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_a$ in ihren Coefficienten übereinstimmen, d. h. es muss

$$u_1 \quad x^{r_1-\varrho} \quad = \bar{u}_1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_s \quad x^{r_s-\varrho} \quad = \bar{u}_s,$$
$$u_{s+1} x^{r_{s+1}-\varrho} = \bar{u}_{s+1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$u_n \quad x^{r_n-\varrho} \quad = \bar{u}_n$$

sein. Diese Relationen könnten nun, wenn $\varrho < r_{s+1}$, also auch $< r_{s+2}, \ldots, r_n$ wäre, sicher nur dann erfüllt sein, wenn die Grössen $u_{s+1}, u_{s+2}, \ldots, u_n$ sämmtlich verschwinden würden, was gegen die Forderung (7) verstösst. Also muss jener kleinste Exponent ϱ mindestens den Werth r_{s+1} haben und thatsächlich hat er auch diesen Werth, denn die unter (6) enthaltene Function ω_{s+1} besitzt gerade den Exponenten r_{s+1}, während für diese Function $c_{s+1} = 1$ und demnach die Bedingung (7) ebenfalls erfüllt ist. Es darf hiernach $\lambda_{s+1} = \omega_{s+1}$ genommen werden und da die eingangs gemachte Annahme für $s = 1$ zutrifft, so ist unser Satz bewiesen.

II.

Dieser Satz liefert uns nun ohne Schwierigkeit den Zusammenhang zwischen der Dedekind-Weber'schen Normalbasis und dem Hensel-schen absoluten Fundamentalsysteme. Es muss nur zuerst noch die Beziehung zwischen Exponent und Dimension einer ganzen Function genau festgestellt werden. Um von y oder auch von $\bar{y}$ zu der entsprechenden homogenen algebraischen Function zu gelangen, haben wir blos

(8) $$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad \eta = y x_2^{\,r}$$

oder, was dasselbe ist,

(9) $$\bar{x} = \frac{x_2}{x_1}, \qquad \eta = \bar{y} x_1^{\,r}$$

zu setzen, dann geht jede der Gleichungen (2) und (4) über in

(10) $$\eta^n + f_1(x_1, x_2)\,\eta^{n-1} + f_2(x_1, x_2)\,\eta^{n-2} + \cdots + f_n(x_1, x_2) = 0,$$

wo die Functionen

(11) $$f_i(x_1, x_2) = f_i(x) \cdot x_2^{\,ir} = \bar{f_i}(\bar{x})\, x_1^{\,ir} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

binäre Formen von x_1 und x_2 bezüglich von den Dimensionen $r, 2r, \ldots, nr$ sind. Weil in Folge dessen für ein beliebiges t

(12) $$\eta(tx_1, tx_2) = t^r\, \eta(x_1, x_2)$$

und weil ausserdem in der Gleichung (10) der Coefficient von η^n gleich 1 ist, so wird η eine homogene ganze algebraische Function oder kürzer eine algebraische Form der r^{ten} Dimension von x_1 und x_2 genannt und wir sehen:

Ist y bezw. $\bar{y}$ eine beliebige Function des Systems $\mathfrak{o}$ bezw. des Systems $\bar{\mathfrak{o}}$ vom Exponenten r, so wird y durch Multiplication mit $x_2{}^r$, $\bar{y}$ durch Multiplication mit $x_1{}^r$ in eine algebraische Form von x_1 und x_2 verwandelt, deren Dimension gleich dem Exponenten r jener ganzen Function ist.

Die Umkehrung dieses Satzes ist so zu formuliren:

Ist η' eine algebraische Form von der Dimension r', die weder durch x_1 noch durch x_2 theilbar ist, so geht η' durch die Substitution $x_1 = x$, $x_2 = 1$ in eine Function y' des Systems $\mathfrak{o}$, durch die Substitution $x_1 = 1$, $x_2 = \bar{x}$ in eine Function $\bar{y}'$ des Systems $\bar{\mathfrak{o}}$ über derart, dass der Exponent von y' in Bezug auf x und der Exponent von $\bar{y}'$ in Bezug auf $\bar{x}$ einander gleich und zwar gleich der Dimension von η' sind.

Der Beweis ergiebt sich ohne Weiteres aus der Definition des Exponenten.

Noch sei bemerkt, dass nach (8), (9) und (12)

$$(13)\qquad \begin{aligned} \eta(x, 1) &= \frac{1}{x_2^r}\,\eta(x_1, x_2) = y, \\ \eta(1, \bar{x}) &= \frac{1}{x_1^r}\,\eta(x_1, x_2) = \bar{y} \end{aligned}$$

ist.

Während nun seither y eine durchaus beliebige Function des Systems $\mathfrak{o}$ war, wollen wir, um bei den folgenden Betrachtungen nicht auf die Gleichung (1) zurückgehen zu müssen, von jetzt ab voraussetzen:

Die ganze Function y sei, was ja stets auf unendlich viele Weisen geschehen kann, *so gewählt, dass die Gleichung* (2) *irreducibel ist.*

Dann *darf und soll die Gleichung* (2) *als die Grundgleichung des Körpers* Ω *angesehen werden*, während gleichzeitig die entsprechende Gleichung (10) einen ganz bestimmten Bereich von Gattungen algebraischer Formen definirt: Denjenigen Bereich $G(x_1, x_2, \eta)$ nämlich, welcher die Gesammtheit aller derjenigen rationalen Functionen von x_1, x_2 und η umfasst, die zugleich algebraische Formen von x_1 und x_2 sind.

Es sei nun $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ein absolutes Fundamentalsystem für den Bereich $G(x_1, x_2, \eta)$ mit bezüglich den Dimensionen $e_1, e_2, \ldots, e_n$, der Einfachheit halber wieder so geordnet, dass $e_1 \leqq e_2 \leqq \cdots \leqq e_n$, und ω sei eine beliebige Function aus $\mathfrak{o}$ mit dem Exponenten ϱ. Es ist dann gemäss dem obigen Satze $\omega x_2{}^\varrho$ eine algebraische Form von der Dimension ϱ, die wegen (8) dem Gattungsbereich $G(x_1, x_2, \eta)$ angehört, und daher die Darstellung möglich

(14) $\omega x_2^\varrho = u_1(x_1, x_2)\eta_1 + u_2(x_1, x_2)\eta_2 + \cdots + u_n(x_1, x_2)\eta_n,$
worin $u_1, u_2, \ldots, u_n$ binäre Formen von x_1 und x_2 sind, so beschaffen, dass die Dimension aller Glieder dieser Gleichung gleich gross, also gleich ϱ ist (vgl. z. B. Hensel, Acta. math. Bd. 18), und dass mithin $u_i(x_1, x_2)$ die Dimension $\varrho - e_i$ besitzt. Wenn man daher

$$\frac{1}{x_2^{\varrho - e_i}} u_i(x_1, x_2) = u_i,$$

$$\frac{1}{x_2^{e_i}} \eta_i(x_1, x_2) = \eta_i(x, 1) = \omega_i$$

setzt, so sind die u_i ganze rationale Functionen von x, die ω_i Functionen des Systems $\mathfrak{o}$ und man erhält für die beliebige Function ω dieses Systems die Darstellung

(15) $$\omega = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n.$$

Umgekehrt ist, wenn $u_1, u_2, \ldots, u_n$ beliebige ganze rationale Functionen von x bedeuten, stets die durch (15) gelieferte Function ω algebraisch ganz, es bilden also diese Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis für $\mathfrak{o}$.

Ebenso folgt, dass man in den Functionen

$$\bar{\omega}_i = \eta_i(1, \bar{x}) = \frac{1}{x_1^{e_i}} \eta_i(x_1, x_2)$$

eine Basis für $\bar{\mathfrak{o}}$ hat. Da ausserdem die Gleichung (14) auf die Function $\omega = 1$ mit dem Exponenten $\varrho = 0$ angewendet, zeigt, dass $\eta_1 = 1$, also auch $\omega_1 = 1$ sein muss, andererseits aber

$$\frac{\bar{\omega}_i}{\omega_i} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{e_i},$$

also

$$\bar{\omega}_i = \omega_i \,.\, \bar{x}^{e_i}$$

ist, so sind gerade die Bedingungen für die Anwendung des Satzes S. 75 erfüllt und es folgt:

Die aus einem absoluten Fundamentalsystem $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ des Bereiches $G(x_1, x_2, \eta)$ durch die Substitutionen $x_1 = x$, $x_2 = 1$ hervorgehenden ganzen algebraischen Functionen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des entsprechenden Körpers Ω bilden eine Normalbasis für $\mathfrak{o}$.

Da η_i seiner Bedeutung nach weder durch x_1 noch durch x_2 theilbar sein kann, so ist weiterhin nach S. 77 die Dimension von η_i identisch mit dem Exponenten von ω_i und daraus folgt, dass die durch die Gleichung

(16) $$N = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$$

definirte *Gesammtdimension* nicht blos bei einer linearen Transformation der unabhängigen Veränderlichen, sondern *bei jeder rationalen*

Transformation der Functionen des Körpers Ω ebenso unverändert bleibt, wie die Summe der Exponenten einer Normalbasis*).

III.

Durch die Hensel'schen Untersuchungen sind wir hiernach jederzeit im Stande, eine *Normalbasis* aufzustellen. Dann aber kann man ohne Weiteres auch die Integranden 1ter Gattung in der Riemann-schen Form angeben. Bilden nämlich jetzt die Functionen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ eine solche Normalbasis, so kann man doch jedenfalls auf rationalem Wege die Functionen $1, y, \ldots, y^{n-1}$ vermittelst dieser Normalbasis ausdrücken und man erhält, da λ_1 immer gleich 1 zu nehmen ist, die Darstellung

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1, \\ y &= a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2n}\lambda_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{n-1} &= a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{nn}\lambda_n, \end{aligned}$$

wo die Grössen a_{ik} lauter ganze rationale Functionen von x sein müssen. Bezeichnet man dann die zu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ complementäre Basis durch $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ **), so hängt diese mit der zu $1, y, \ldots, y^{n-1}$ complementären Basis durch die transponirte Substitution zusammen. Die letztere aber ist

$$\frac{Y_{n-1}}{F'(y)}, \quad \frac{Y_{n-2}}{F'(y)}, \ldots, \frac{Y_1}{F'(y)}, \quad \frac{Y_0}{F'(y)},$$

wenn

$$Y_i = y^i + f_1 y^{i-1} + \cdots + f_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1),$$

$$Y_0 = 1, \qquad F'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

gesetzt wird. Lässt man also die für die Integranden 1ter Gattung gar nicht in Betracht kommende Function μ_1 gleich ganz weg, so ergiebt sich:

$$(17) \qquad \begin{aligned} \mu_2 &= \frac{a_{22}Y_{n-2} + a_{32}Y_{n-3} + \cdots + a_{n2}Y_0}{F'(y)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_n &= \frac{a_{2n}Y_{n-2} + a_{3n}Y_{n-3} + \cdots + a_{nn}Y_0}{F'(y)} \end{aligned}$$

und bezeichnet man dann noch den Exponenten von λ_i durch r_i, so bilden die

$$p = (r_2 - 1) + \cdots + (r_n - 1)$$

Functionen

*) Siehe Dedekind und Weber, l. c. § 24, 1.

**) Vergl. für das folgende: Dedekind-Weber, l. c. § 10, 5 u. 8.

$$c_{ik}\,x^k \cdot \mu_i \qquad \begin{array}{l} i = 2, 3, \quad \ldots, n, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, r_i - 2 \end{array}$$

ein vollständiges System von Integranden 1. Gattung, wobei die Constante $c_{ik} = 0$ zu setzen ist, falls sich für k ein negativer Werth ergiebt, was indessen nur dann eintritt, wenn $r_i = 1$ ist. Dies ist die Form, die Riemann seinen Integranden 1. Gattung gab, sowohl bezüglich des Nenners, als auch bezüglich des Zählers, insofern sich y hier nicht über den Grad $n - 2$ erhebt. Die Zähler von $\mu_2, \ldots, \mu_n$ bilden ein vollständiges System von Fundamental-φ-Functionen.

IV.

Ich will zum Schlusse noch die Aufmerksamkeit auf einen sehr einfachen speciellen Fall hinlenken, welcher an sich schon wegen seines häufigen Vorkommens besondere Beachtung verdient, insbesondere aber auch deshalb, weil bei ihm die unter I. und III. gegebenen Entwicklungen durchaus hinreichen, um die hier sich aufdrängenden Fragen vollständig zu beantworten, die Einführung der homogenen algebraischen Functionen aber ganz entbehrt werden kann. Bei einer früheren Gelegenheit*) habe ich gezeigt, dass es zweckmässig ist, bei der Aufsuchung einer Basis für $\mathfrak{o}$ nicht von dem Functionensysteme $1, y, \ldots, y^{n-1}$ auszugehen, sondern von dem anderen Systeme ganzer algebraischer Functionen

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = \frac{y}{X_1}, \; \cdots, \; y_n = \frac{y^{n-1}}{X_{n-1}},$$

wobei X_i diejenige ganze rationale Function höchsten Grades von x bedeutet, die eben noch in y^i aufgeht. Diese Functionen X_i sind höchst einfach und auf rationalem Wege bestimmbar: es sind diejenigen ganzen Functionen höchsten Grades von x, welche den Congruenzen

$$\begin{array}{ll} & S(y^i) \equiv 0 \;(\text{mod. } X_i)\,^{**}), \\ (18) & S(y^{2i}) \equiv 0 \;(\text{mod. } X_i^2), \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & S(y^{ni}) \equiv 0 \;(\text{mod. } X_i^n) \end{array}$$

genügen und es ist an der erwähnten Stelle bereits darauf hingewiesen, dass diese Congruenzen unter Benutzung der Newton'schen Formeln in jedem concreten Falle eine sehr einfache Gestalt annehmen.

*) Siehe meine Note „Zur Theorie der algebraischen Functionen" im Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 116, S. 168.

**) $S(y^{\nu i})$ bedeutet die „Spur" von $y^{\nu i}$.

Legt man in dem Systeme $\bar{\mathfrak{o}}$ den ganzen rationalen Functionen $\overline{X}_i$ von $\bar{x}$ in Bezug auf $\bar{y}^i$ dieselbe Bedeutung bei, wie in $\mathfrak{o}$ den Functionen X_i in Bezug auf y^i, so sind diese Functionen in entsprechender Weise aus den Congruenzen

$$(19) \qquad S(\bar{y}^{i\nu}) \equiv 0 \pmod{\overline{X}_i^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zu bestimmen. Da nun $\bar{y}^i = y^i \,.\, \bar{x}^{ir}$, so unterscheiden sich die linken Seiten der Congruenzen (18) von denen der Congruenzen (19) blos durch eine multiplicative Potenz von $\bar{x}$ und daraus folgt, dass dasselbe auch von X_i und $\overline{X}_i$ gelten und dass daher etwa

$$\overline{X}_i = X_i \bar{x}^{\varrho_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sein muss. Es gehören dann die Functionen

$$\bar{y}_1 = 1, \quad \bar{y}_2 = \frac{\bar{y}}{\overline{X}_1}, \quad \ldots, \quad \bar{y}_n = \frac{\bar{y}^{n-1}}{\overline{X}_{n-1}}$$

sämmtlich dem System $\bar{\mathfrak{o}}$ an und es ist

$$\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{X_1^2 X_2^2 \ldots X_{n-1}^2} \Delta(1, y, \ldots, y^{n-1}),$$

$$\Delta(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) = \frac{1}{\overline{X}_1^2 \overline{X}_2^2 \ldots \overline{X}_{n-1}^2} \Delta(1, \bar{y}, \ldots, \bar{y}^{n-1}),$$

so dass im Allgemeinen die Discriminanten der Functionensysteme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bezw. $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ weniger mehrfache Factoren enthalten wie die Discriminanten der Gleichungen (2) bezw. (4). Der erwähnte specielle Fall ist nun der, dass diese beiden Discriminanten blos einfache Linearfactoren besitzen. Dann nämlich bilden die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sicher eine Basis für $\mathfrak{o}$*), $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ eine solche für $\bar{\mathfrak{o}}$, ausserdem ist

$$\bar{y}_i = y_i \bar{x}^{r(i-1)\varrho_i},$$

und die Entwicklungen unter Nr. I führen zu dem Satze:

Enthält weder $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *noch* $\Delta(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ *einen mehrfachen Linearfactor, so bilden die Functionen* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *selbst eine Normalbasis für* $\mathfrak{o}$.

Der entsprechende Functionenkörper hat dann lauter einfache Verzweigungspunkte. Die im Endlichen gelegenen werden durch die Gleichung $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ geliefert, während im Unendlichen blos dann eine Verzweigung und zwar wiederum eine einfache stattfindet, wenn in $\Delta(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n)$ der Factor $\bar{x}$ vorkommt.

Bezeichnet man die Exponenten der Normalbasis $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auch jetzt bezügl. durch $r_1, r_2, \ldots, r_n$ und beachtet, dass die früher

*) S. meine vorhin erwähnte Note S. 168.

mit a_{ik} bezeichneten ganzen rationalen Functionen von x diesmal den Werth 0 haben, sobald i von k verschieden ist, dass dagegen $a_{kk} = X_{k-1}$, so sieht man sofort, dass im vorliegenden Falle die Functionen

$$
(20) \qquad \begin{array}{llll}
X_1 \quad Y_{n-2}, & X_1 \quad Y_{n-2} \cdot x, & \cdots, & X_1 \quad Y_{n-2} \cdot x^{r_2-2}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
X_{n-2}\, Y_1, & X_{n-2}\, Y_1 \cdot x, & \cdots, & X_{n-2}\, Y_1 \cdot x^{r_{n-1}-2}, \\
X_{n-1}, & X_{n-1} \cdot x, & \cdots, & X_{n-1} \cdot x^{r_n-2}
\end{array}
$$

ein vollständiges System Riemann'scher φ-Functionen bilden, während das Geschlecht des entsprechenden Körpers durch die Gleichung

$$p = \frac{(n-1)(n-2) \cdot r}{2} - (\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_{n-1})$$

geliefert wird.

Darmstadt, August 1896.

Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern.

(Zweite Abhandlung.)*)

Von

H. Weber in Strassburg.

In der vorliegenden zweiten Abhandlung über algebraische Zahlengruppen soll ein Theil der Anwendungen gegeben werden, die in der Einleitung zur ersten Abhandlung erwähnt sind. Ich glaube das Verständniss zu erleichtern, wenn ich den Gang der Darstellung in der Weise anordne, dass ich zuerst die Voraussetzungen und Ziele möglichst allgemein darlege, und dann erst zur Betrachtung besonderer Gruppen übergehe, von denen dann nur noch zu zeigen ist, dass sie den gemachten Voraussetzungen entsprechen.

§ 1.

Primideale ersten Grades in den Idealclassen.

Ich nehme in einem algebraischen Körper Ω vom Grade n eine *Idealgruppe* $\bar{O}$ an, von der ich voraussetze

1. *Die Gruppe* $\bar{O}$ *soll alle Primideale des Körpers* Ω *enthalten mit etwaiger Ausnahme einer endlichen Anzahl.*

Es sei $\bar{E}$ die Gruppe der (functionalen) Einheiten des Körpers Ω.

Es sei O' eine Zahlengruppe von der Art, dass $\bar{E}\,O'$ eine in $\bar{O}$ enthaltene Gruppe von Hauptidealen ist. Ich nehme an

2. *Die Anzahl der Nebengruppen oder die Classenzahl*

$$(\bar{O},\ \bar{E}\,O') = h$$

ist endlich (von Null verschieden).

Die nächste Voraussetzung die zu machen ist, ist weniger einfacher Natur. Sie ist die Verallgemeinerung von bekannten Sätzen, die bei der Bestimmung von Classenzahlen mit den Dirichlet'schen

---

*) S. diese Annalen Bd. 48, S. 433.

Methoden gebraucht werden, und rechtfertigt sich durch den Erfolg bei Anwendung auf besondere Fälle. Diese Voraussetzung besteht im Folgenden:

3. *Es sei* $\mathfrak{m}$ *irgend ein ganzes Ideal in* $\bar{O}$, *und* T *oder* $T(t)$ *die Anzahl der in* $\bar{E}\,O'$ *enthaltenen durch* $\mathfrak{m}$ *theilbaren ganzen Hauptideale, deren Norm nicht grösser als die positive Zahl* t *ist. Dann soll*

$$T = \frac{g' t}{N(\mathfrak{m})} + M t^{1-\frac{1}{n}} \tag{1}$$

und folglich

$$\lim_{t=\infty} \frac{T}{t} = \frac{g'}{N(\mathfrak{m})} \tag{2}$$

sein, worin g' *eine endliche von Null verschiedene positive Grösse ist, die nur von der Natur der Gruppen* $\bar{O}$, O' *abhängt, aber von* t *und von dem besonderen Ideal* $\mathfrak{m}$ *unabhägig, während* M *eine Function von* t *ist, von der nur vorausgesetzt sein soll, dass sie mit unendlich wachsendem* t *nicht unendlich wird.*

Aus den Voraussetzungen lassen sich zunächst einige Schlüsse ziehen.

Die Nebengruppen von $\bar{O}$ zu $\bar{E}\,O'$ oder die Classen von $\bar{O}$ nach O' bilden eine Abel'sche Gruppe vom Grade h'. Die Charaktere dieser Gruppe seien mit χ bezeichnet, und wenn A eine dieser Nebengruppen ist, so seien $\chi(A)$ ihre Charaktere. Ist $\mathfrak{a}$ irgend ein ganzes Ideal der Classe A, so setzen wir

$$\chi(\mathfrak{a}) = \chi(A) \tag{3}$$

so dass $\chi(\mathfrak{a})$ eine Einheitswurzel vom Grade h' ist, die für alle Ideale einer Classe A dieselbe bleibt.

Wir betrachten nun für ein variables $s > 1$ die unendliche Reihe

$$A(s) = \sum \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = a_1 + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \cdots, \tag{4}$$

worin $\mathfrak{a}$ die sämmtlichen ganzen Ideale der Classe A durchläuft, und worin a_t die Anzahl unter diesen Idealen ist, deren Norm gleich t ist.

Hiernach ist, wenn wir die Anzahl der Ideale $\mathfrak{a}$, deren Norm nicht grösser als t ist, mit $T(t)$ bezeichnen

$$a_t = T(t) - T(t-1). \tag{5}$$

Nehmen wir jetzt ein festes ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ der zu A reciproken Classe A^{-1}, so ist nach der Bedeutung der Aequivalenz jedes $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ ein Hauptideal der Gruppe $\bar{E}\,O'$ und wenn wir $\mathfrak{m}\mathfrak{a}$ alle durch $\mathfrak{m}$ theilbaren Hauptideale aus $\bar{E}\,O'$ durchlaufen lassen, so durchläuft $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale der Classe A.

Es ist also $T(t)$ zugleich die Anzahl aller durch $\mathfrak{m}$ theilbaren ganzen Ideale aus $\bar{E}O'$, deren Norm nicht grösser als $N(\mathfrak{m})t$ ist. Demnach ergiebt sich aus (1)

$$T(t) = g' t - M_t t^{1-\frac{1}{n}},$$

worin M_t bei unendlich wachsendem t endlich bleibt. Hiernach ist wegen (5)

$$a_t = g' + m_t t^{-\frac{1}{n}}$$

worin

$$m_t = M_t t \left(1 - \left(1 - \tfrac{1}{t}\right)^{1-\frac{1}{n}}\right)$$

mit unendlich wachsendem t gleichfalls endlich bleibt.

Daraus folgt

(6) $$A(s) = g' \sum_{1,\infty}^{t} \frac{1}{t^s} + \sum_{1,\infty}^{t} \frac{m_t}{t^{s+\frac{1}{n}}}.$$

Hier durchläuft t die Reihe der natürlichen Zahlen, und so lange also $s > 1$ ist, sind die beiden auf der rechten Seite vorkommenden unendlichen Reihen unbedingt convergente und stetige Functionen von s. Die zweite Reihe

$$\sum \frac{m_t}{t^{s+\frac{1}{n}}}$$

geht für $s = 1$ stetig in den endlichen Werth

$$\sum \frac{m_t}{t^{1+\frac{1}{n}}}$$

über, für die erste aber gilt der Satz

$$\operatorname*{Lim}_{s=1} \left(\sum_{1,\infty}^{t} \frac{1}{t^s} - \frac{1}{s-1} \right) = - \Gamma(1)^{*}),$$

und demnach ist

(7) $$A(s) = \frac{g'}{s-1} + G,$$

worin G für $s = 1$ in einen *endlichen Werth übergeht.*

Nehmen wir die Summe der Gleichungen (7) für alle Classen A, so ergiebt sich die Dirichlet'sche Classenzahlformel

(8) $$\operatorname*{Lim}_{s=1} \sum \frac{s-1}{N(\mathfrak{a})^s} = g'h',$$

wenn wir die Summe über alle ganzen Ideale der Gruppe $\bar{O}$ erstrecken.

---

*) Vgl. des Verfassers Lehrbuch der Algebra, Bd. II, § 191.

Wir bilden ausserdem die allgemeineren Summen

$$(9) \qquad Q(s) = \sum^{A} \chi(A)\, A(s) = \sum^{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s},$$

worin χ einen der Charaktere bedeutet, und im ersten Ausdruck sich die Summe auf alle Classen A, im zweiten auf alle ganzen Ideale $\mathfrak{a}$ von $\bar{O}$ erstreckt.

Ist χ der Hauptcharakter, so gilt für $Q(s)$ die Formel (8) d. h. $(s-1)\, Q(s)$ erhält für $s = 1$ einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth; wenn aber χ ein anderer Charakter ist, so ist nach (7) und nach einem bekannten Satz über die Charaktere*)

$$(10) \qquad Q(s) = \sum{}' \chi(A)\, G$$

also für $s = 1$ *endlich.*

Die Reihen $Q(s)$, die, so lange $s > 1$ ist, unbedingt convergiren, lassen sich in bekannter Weise in unendliche Producte umwandeln. Man erhält, wenn $\mathfrak{p}$ die sämmtlichen Primideale der Gruppe $\bar{O}$ durchläuft**)

$$(11) \qquad Q(s) = \prod^{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{p})\, N(\mathfrak{p})^{-s}}.$$

Wir wollen die h' Charaktere χ mit

$$\chi_1,\ \chi_2,\ \ldots,\ \chi_{h'}$$

bezeichnen, und unter χ_1 den Hauptcharakter verstehen. Die entsprechenden Summen Q, sollen mit

$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{h'}$$

bezeichnet werden, so dass die Functionen

$$(12) \qquad (s-1)\, Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_{h'}$$

für $s = 1$ endliche Werthe haben.

Ist A eine unserer Classen, so giebt es einen gewissen kleinsten Exponenten f, so dass A^f die Hauptclasse $\bar{E}\, O'$ ist. Wir setzen, da f ein Theiler von h' ist,

$$h' = ef.$$

Wenn $\mathfrak{p}$ in der Classe A enthalten ist, so sind alle $\chi_i(\mathfrak{p})$ Einheitswurzeln vom Grade f, und jede f^{te} Einheitswurzel kommt darunter gleich oft, nämlich e mal vor***).

Bilden wir also nach (11) das Product aller Functionen (12), so erhalten wir

$$(13) \qquad (s-1)\, Q_1 Q_2 \cdots Q_{h'} = \prod^{\mathfrak{p}} \frac{s-1}{(1 - N(\mathfrak{p})^{-fs})^e}.$$

*) Algebra Bd. II, § 11.

**) Algebra Bd. II, § 192 und II[ter] Nachtrag.

***) Algebra Bd. II, Nachtrag II, Satz 1.

Wir unterscheiden nun unter den Primidealen zwei Arten, nämlich solche $\mathfrak{p}_1$, bei denen $N(\mathfrak{p})^f$ eine natürliche Primzahl p ist, also $N(\mathfrak{p}) = p$, $f = 1$, $e = h'$, und solche $\mathfrak{p}_2$, bei denen $N(\mathfrak{p})^f$ eine höhere als die erste Potenz einer Primzahl ist; mit anderen Worten:

Wir verstehen unter $\mathfrak{p}_1$ die in der Gruppe $\bar{E}\,O'$ vorkommenden Hauptideale ersten Grades, unter $\mathfrak{p}_2$ die übrigen Primideale der Gruppe $\bar{O}$.

Dabei wollen wir uns jedoch die Freiheit offen lassen, von den Primidealen ersten Grades der Gruppe $\bar{E}\,O'$ *eine beliebige aber endliche Anzahl zu $\mathfrak{p}_2$ zu rechnen.*

Diese Annahme hat zur Folge, dass das Product

$$S = \prod^{\mathfrak{p}_2} \left(1 - N(\mathfrak{p}_2)^{-fs}\right)^{-e} \tag{14}$$

für $s = 1$ einen *endlichen von Null verschiedenen Werth* hat (Algebra, Bd. II, § 192), und es wird

$$(s-1)\,Q_1\,Q_2 \ldots Q_{h'} = S \prod^{\mathfrak{p}_1} \frac{s-1}{\left(1 - N(\mathfrak{p}_1)^{-s}\right)^{h'}}, \tag{15}$$

was nach (12) für $s = 1$ einen endlichen Werth hat. Es kommt darauf an, ob dieser Werth auch von Null verschieden ist. Hierzu machen wir eine weitere Voraussetzung.

4. *Es soll ein Körper K' über Ω existiren, dessen relativer Grad ν in Bezug auf Ω nicht grösser als h' ist, so dass jedes Primideal $\mathfrak{p}_1$ in K' in lauter Primideale ersten Grades zerfällt, während die Primideale $\mathfrak{p}_2$ in Ω bei der Zerlegung in K' keine, oder nur eine endliche Anzahl von Primidealen ersten Grades enthalten.*

Wenn wir unter dieser Voraussetzung $\mathfrak{P}$ die Primfactoren der $\mathfrak{p}_1$ im Körper K' durchlaufen lassen, so hat nach dem Satze I in § 192 des zweiten Bandes der Algebra

$$P = \prod \frac{s-1}{1 - N_1(\mathfrak{P})^{-s}},$$

worin die Norm N_1 in Bezug auf den Körper K' genommen ist, für $s = 1$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth.

Ist nun $N(\mathfrak{p}_1) = p$, so ist $N_1(\mathfrak{p}_1) = p^\nu$, und wenn $\mathfrak{P}$ ein Theiler von $\mathfrak{p}_1$ ist, so ist $N_1(\mathfrak{P}) = p$. Es enthält also $\mathfrak{p}_1$ genau ν Factoren $\mathfrak{P}$, und unter den $N_1(\mathfrak{P})$ kommt ν mal $N(\mathfrak{p}_1)$ vor. Und nach der Voraussetzung 1. kommen unter den Factoren von $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers K' vor (vielleicht mit einer endlichen Anzahl von Ausnahmen).

Demnach ist

$$P = \prod \frac{s-1}{(1-N(\mathfrak{p}_i)^{-s})^{\nu}}.$$

Dies ist für $s=1$ endlich und von Null verschieden, und aus (15) ergiebt sich

$$(16) \qquad \big((s-1)\,Q_1 Q_2 \ldots Q_h\big)^{\nu} = (s-1)^{\nu-h'} S^{\nu} P^{h'}.$$

Da nun $S^{\nu} P^{h'}$ für $s=1$ endlich und von Null verschieden ist, und das Product $(s-1)\,Q_1 Q_2 \ldots Q_h$ wenigstens endlich, so ergiebt sich hieraus zweierlei

I. *Der Exponent $n - h'$ kann nicht negativ sein, und da v nicht grösser als h' vorausgesetzt ist, so folgt $v = h'$, d. h. der Grad der Körper K' ist $= h'$.*

II. *Die Functionen*

$$(s-1)\,Q_1,\ Q_2, \ldots Q_h$$

haben für $s=1$ endliche und von Null verschiedene Werthe.

Wenn nun wieder $Q(s)$ eine beliebige der Summen Q_i ist, so definiren wir nach (11) die Function $\log Q(s)$ durch die für jedes $s > 1$ unbedingt convergente Reihe

$$(17) \qquad \log Q(s) = -\sum^{\mathfrak{p}} \log\big(1-\chi(\mathfrak{p})\,N(\mathfrak{p})^{-s}\big)$$

$$= \sum^{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^{s}} + \frac{1}{2}\sum^{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})^2}{N(\mathfrak{p})^{2s}} + \frac{1}{3}\sum^{\mathfrak{p}} \frac{\chi(\mathfrak{p})^3}{N(\mathfrak{p})^{3s}} + \cdots.$$

Wenn χ der Hauptcharakter ist, so ist nach dieser Definition $\log Q_1(s)$ reell, und es hat also nach II

$$\log (s-1)\,Q_1(s) = \log (s-1) + \log Q_1(s)$$

für $s=1$ einen endlichen Grenzwerth.

Ist χ einer der anderen Charaktere, so hat $Q(s)$ nach II einen endlichen von Null verschiedenen Grenzwerth, und wenn also

$$Q(s) = e^{\sigma}\,Q(1)$$

gesetzt wird, so kann s so nahe an 1 angenommen werden, dass der absolute Werth von σ eine vorgeschriebene Grenze nicht mehr überschreitet. Verstehen wir dann unter $\log Q(1)$ irgend einen der endlichen Werthe des Logarithmus von $Q(1)$ und unter N eine ganze rationale Zahl, so ist

$$\log Q(s) = \log Q(1) + \sigma + 2N_s \pi i,$$

Hieraus folgt aber, dass die ganze Zahl N_s mit der Annäherung von s an den Werth 1 nicht ins Unendliche wachsen kann, denn sonst müsste sich $\log Q(s)$ unstetig ändern, was nach der Definition (17) nicht der Fall ist. Es hat also $\log Q(s)$ auch für $s=1$ einen *endlichen Grenzwerth.*

Bezeichnen wir, wie oben, mit A eine beliebige Classe oder Nebengruppe von $\bar{O}$ der Zerlegung nach $\bar{E}\,O'$, multipliciren (17) mit $\chi(A^{-1})$ und bilden die Summe, so folgt nach einem bekannten Satz über die Charaktere einer Abel'schen Gruppe (Algebra, Bd. II, § 11. 6.)

$$(18)\qquad \frac{1}{h'}\sum^{\chi}\chi(A^{-1})\log Q(s) = \sum\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} + \frac{1}{2}\sum\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{2s}} + \frac{1}{3}\sum\frac{1}{N(\mathfrak{p})^{3s}} + \cdots,$$

worin sich die Summe links auf alle Charaktere χ bezieht, und auf der rechten Seite die *erste, zweite, dritte ... Summe sich auch auf alle Primideale $\mathfrak{p}$ erstreckt, deren erste, zweite, dritte ... Potenz in A enthalten ist.*

Nun hat nach dem, was soeben bewiesen ist,

$$\log(s-1)\,Q_1 + \chi_2(A^{-1})\log Q_2 + \cdots + \chi_{h'}(A^{-1})\log Q_{h'}$$

für $s = 1$ einen endlichen Werth. Ebenso ergeben alle Glieder der rechten Seite von (18) in deren Nenner eine höhere als die s^{te} Potenz einer natürlichen Primzahl vorkommt, für $s = 1$ eine endliche Summe (Algebra, Bd. II, Seite 783), und wir erhalten also, wenn wir alle diese Glieder, deren Summe für $s = 1$ endlich bleibt, in dem Zeichen R zusammenfassen

$$(19)\qquad \sum\frac{1}{N(\mathfrak{p})^s} = \frac{1}{h'}\log\frac{1}{s-1} + R,$$

worin sich die Summe links auf alle *Primideale ersten Grades* der Classe A bezieht.

Da die rechte Seite von (19) für $s = 1$ unendlich wird, so muss es auch die linke werden, und es ergiebt sich aus unseren Voraussetzungen der Satz:

III. *In jeder Classe A von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ kommen unendlich viele Primideale ersten Grades vor.*

§ 2.

Prüfung der gemachten Voraussetzungen.

Es kommt nun darauf an, solche Gruppen $\bar{O}$, O' aufzufinden, die dem Voraussetzungen 1) bis 4) des vorigen Paragraphen genügen. Was zunächst die Forderungen 1) bis 3) betrifft, so kann man diesen, ohne die Wahl des Körpers Ω irgend zu beschränken durch sehr allgemeine Annahmen genügen.

Wir lassen also zunächst den Körper Ω vom n^{ten} Grade ganz willkürlich, und nehmen eine natürliche Zahl k an. Unter $\bar{O}$ verstehen wir die Gesaammtheit aller Ideale des Körpers Ω die *zu k relativ prim sind.* Dann ist die Voraussetzung 1) erfüllt.

Nun sei O' so gewählt, dass es nicht nur einzelne Zahlen aus Ω, sondern ganze *Zahlclassen* nach dem Modul k enthält, oder mit andern Worten so, dass, *wenn α eine Zahl aus O' ist, auch jede mit α nach dem Modul k congruente Zahl in O' enthalten ist.*

Eine solche Gruppe will ich hier eine *harmonische Zahlengruppe* nennen, und k ihren Modul. Hierbei ist aber zu bemerken, dass jedes Vielfache von k gleichfalls als Modul genommen werden kann.

Um die Annahme über O' noch etwas zu erweitern, werde in dem Falle, dass O' auch Zahlen mit negativer Norm enthält, O' noch in die zwei Nebengruppen O'_+, O'_- gespalten, so dass O'_+ die Zahlen aus O' mit positiver Norm umfasst. Giebt es dann in Ω Einheiten mit negativer Norm, dann ist $\bar{E}O' = \bar{E}O'_+$; giebt es aber keine solche Einheiten, so ist $\bar{E}O'_+$ ein echter Theiler von $\bar{E}O'$, und $(\bar{E}O, \bar{E}O'_+) = 2$.

Das System O aller Zahlen in $\bar{O}$ umfasst nur eine endliche Anzahl von Zahlclassen nach dem Modul k und folglich ist auch (O, O') und (O, O'_+) endlich.

Sind ferner E und E' die Gruppen der in O und O' enthaltenen numerischen Einheiten, so ist (E, E') endlich und $(\bar{O}, \bar{E}O)$ ist die Classenzahl des Körpers Ω, mithin auch endlich. Demnach ist auch

$$h' = (\bar{O}, \bar{E}O') = (\bar{O}, \bar{E}O)\,\frac{(O, O')}{(E, E')}$$

endlich, und dasselbe ergiebt sich für $(\bar{O}, \bar{E}O'_+)$ $\big($Abhandlung I, § 3. (12)$\big)$.

Die Forderung 2) ist also für diese Gruppen erfüllt.

Um die Voraussetzung 3) zu prüfen, haben wir die Anzahl T der ganzen Ideale der Gruppe $\bar{E}O'$ aufzusuchen, die durch ein beliebiges in $\bar{O}$ enthaltenes, also zu k theilerfremdes ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ theilbar sind, deren Norm den Werth t nicht übersteigt.

Die ganzen Zahlen der Gruppe O' zerfallen in eine endliche Anzahl von Zahlclassen nach dem Modul k. Diese Anzahl soll mit $\psi(k)$ bezeichnet sein. In jeder dieser Zahlclassen giebt es nun, da $\mathfrak{m}$ relativ prim zu k ist, einen durch $\mathfrak{m}$ theilbaren Repräsentanten

$$(1) \qquad \alpha = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \cdots + a_n\mu_n,$$

worin $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ eine Basis von $\mathfrak{m}$, und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ein System ganzer rationaler Zahlen bedeutet. Wenn wir daher in dem Ausdruck

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mu &= \alpha + k(z_1\mu_1 + z_2\mu_2 + \cdots + z_n\mu_n) \\ &= (a_1 + kz_1)\mu_1 + (a_2 + kz_2)\mu_2 + \cdots + (a_n + kz_n)\mu_n \end{aligned}$$

α ein volles Repräsentantensystem der Classen von O' nach dem

Modul k und $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Gesammtheit der ganzen rationalen Zahlen durchlaufen lassen, so stellt μ alle durch $\mathfrak{m}$ theilbaren ganzen Zahlen der Gruppe O', und nichts anderes, dar.

Ich bezeichne nun mit $n - \nu$ die Anzahl der conjugirt imaginären Paare unter den n mit Ω conjugirten Körpern und mit $2\nu - n$ die Anzahl der reellen unter diesen Körpern, so dass nach dem Dirichlet'schen Satze E' zusammengesetzt ist aus einer Potenzgruppe der Ordnung $\nu - 1$ und den in O' vorkommenden Einheitswurzeln, deren Anzahl w' sei.

Unter den Permutationen, durch die Ω in die conjugirten Körper übergeht, behalten wir die reellen und von einem conjugirten Paar nur die eine bei.

So ergeben sich aus jeder Zahl α in O' ν Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$$

die den Körpern

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_\nu$$

angehören. Diesen Permutationen ordnen wir ein System von Zahlen

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\nu$$

zu, so dass $\delta_s = 1$ oder $= 2$ ist, je nachdem Ω_s reell oder imaginär ist.

Dann sind

$$\lambda_s = \delta_s \log |\alpha_s| \qquad s = 1, 2, \ldots, \nu \tag{3}$$

die conjugirten Logarithmen der Zahl α.

Wir nehmen eine Basis $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_{\nu-1}'$ der in E' enthaltenen Potenzgruppe und bezeichnen die Logarithmen von ε_i' mit

$$l'_{i,1}, l'_{i,2}, \ldots, l'_{i,\nu},$$

so dass

$$l'_{i,1} + l'_{i,2} + \cdots + l'_{i,\nu} = 0 \tag{4}$$

und die Determinante

$$L'_{\nu-1} = \sum \pm l'_{1,1} l'_{2,2} \ldots l'_{\nu-1,\nu-1} \tag{5}$$

von Null verschieden ist*).

Den absoluten Werth L' dieser Determinante nennen wir den Regulator von O'.

Aus einer Zahl α erhalten wir nun das ganze System der associirten Zahlen in O' in der Form

$$\varrho' \, \varepsilon_1'^{\,s_1} \varepsilon_2'^{\,s_2} \ldots \varepsilon_{\nu-1}'^{\,s_{\nu-1}} \alpha = \beta \tag{6}$$

wenn die Exponenten $s_1, s_2, \ldots, s_{\nu-1}$ ganze Zahlen sind, und ϱ' das System der Einheitswurzeln in O' durchläuft.

*) Algebra Bd. II, § 185.

Aus dem System linearer Gleichungen

$$
(7)\qquad
\begin{array}{c}
\xi_1 l'_{1,1} + \cdots + \xi_{\nu-1} l'_{\nu-1,1} + \delta_1 \xi_\nu = \lambda_1, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\xi_1 l'_{1,\nu} + \cdots + \xi_{\nu-1} l'_{\nu-1,\nu} + \delta_\nu \xi_\nu = \lambda_\nu,
\end{array}
$$

dessen Determinante vom Zeichen abgesehen gleich nL', und folglich von Null verschieden ist, können die Unbekannten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu$ eindeutig bestimmt werden. Es ergiebt sich nach (3) und (4)

$$
(8)\qquad n\xi_\nu = \log N_a(\alpha),
$$

wenn N_a die absolute Norm der Zahl α oder die Norm der Hauptideale $\bar{E}\alpha$ bedeutet. Die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu-1}$ heissen die *Exponenten der Zahl* α.

Ersetzt man α durch die associirte Zahl β, so ändern sich die Exponenten um die ganzen Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_{\nu-1}$ und man kann diese letzteren also nur auf eine Weise so bestimmen, dass die neuen Exponenten nicht negative echte Brüche werden. Da die Einheitswurzel ϱ' noch willkürlich bleibt, so folgt:

1. *Unter einem System associirter Zahlen in O' kann man immer w' und nicht mehr finden, deren Exponenten den Bedingungen*

$$
(9)\qquad 0 \leqq \xi_1 < 1, \ldots, 0 \leqq \xi_{\nu-1} < 1
$$

genügen.

Man erhält daher alle durch $\mathfrak{m}$ theilbaren Ideale in $\bar{E}O'$, und jedes von ihnen w' mal, wenn man in den Ausdruck

$$
(10)\qquad y = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \cdots + x_n\mu_n
$$

für x_i alle Ausdrücke der Form

$$
(11)\qquad x_i = a_i + kz_i
$$

setzt, indem man für $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die $\psi(k)$ durch (1) definirten verschiedenen Zahlensysteme setzt, und für die z_i alle ganzen rationalen Zahlen, für die die Exponenten von (10) den Bedingungen (9) genügen.

Soll nun die Norm einer so entstandenen Zahl μ dem absoluten Werthe nach nicht grösser als t sein, so kommt noch die Bedingung hinzu

$$
(12)\qquad \pm\, \mu'\mu'' \ldots \mu^{(n)} \leqq t,
$$

wenn $\mu', \mu'', \ldots, \mu^{(n)}$ die n conjugirten Werthe von μ sind.

Um die Zahl T der so erhaltenen Werthe zu bestimmen, fassen wir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Coordinaten in einem Raum von n Dimensionen auf.

Wir betrachten die linearen Functionen

$$(13)\qquad \begin{aligned} y' &= x_1\mu_1' + \cdots + x_n\mu_n', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= x_1\mu_1^{(n)} + \cdots + x_n\mu_n^{(n)} \end{aligned}$$

und theilen unsern Raum in $2^{2\nu-n}$ Abtheilungen, so dass in jeder dieser Abtheilungen die reellen unter den Functionen einerlei Vorzeichencombination haben. Es genügt, wenn wir uns auf den Theil des Raumes beschränken, in dem diese Zeichen alle positiv sind, da die andern Theile ganz dasselbe Resultat ergeben, und den aus dem einen Theil abgeleitete Werth der Zahl T schliesslich nur noch mit $2^{2\nu-n}$ multipliciren.

Wir beschränken uns überdies auf die Betrachtung *eines einzigen Systems* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Auch hier zeigt sich, dass das Resultat von diesen a unabhängig ist, und die Endformel ist daher schliesslich noch mit $\psi(k)$ zu multipliciren.

Wir nehmen also ein Raumgitter mit der Maschenweite

$$(14)\qquad \Delta = kt^{-\frac{1}{n}}$$

an, in dem die Coordinaten der Gitterpunkte den Ausdruck haben

$$(15)\qquad x_i = (a_i + kz_i)t^{-\frac{1}{n}},$$

und haben die Anzahl der Gitterpunkte, T_1, zu bestimmen, die in einem folgendermassen bestimmten Volumen V liegen.

1) Die reellen unter den linearen Functionen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sollen in V nicht negativ werden.

3) Es soll innerhalb V

$$(16)\qquad 0 \leqq y'y'' \ldots y^n \leqq 1$$

sein.

3) Werden dann die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ als die mit den entsprechenden δ multiplicirten Logarithmen der absoluten Werthe der y definirt, und $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ aus den Gleichungen (7) bestimmt, so soll

$$(17)\qquad 0 \leqq \xi_1 \leqq 1 \ldots, 0 \leqq \xi_{\nu-1} \leqq 1$$

sein.

Für das Volumen des so bestimmten Raumtheiles erhält man nun den Werth

$$(18)\qquad V = \frac{(2\pi)^{n-\nu} L'}{N(\mathfrak{m})\sqrt{\pm D}}$$

worin $\pm D$ der absolute Werth der Körperdiscriminante ist*).

*) Vgl. hierüber Dedekind „Ueber die Anzahl der Idealclassen in den verschiedenen Ordnungen eines endlichen Körpers". Festschrift zur Säcularfeier von Gauss Geburtstag. (1877) § 12. Dirichlet-Dedekind „Vorlesungen über Zahlentheorie", 4. Aufl. § 184. Weber, Algebra Bd. II, § 189f.

Ist nun T_1 die Anzahl der in dem Volumen V gelegenen Gitterpunkte, so ist nach dem von mir in den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von 1896 bewiesenen Satze

$$V = T_1 \Delta^n + M_1 \Delta,$$

worin M_1 für unendlich kleine Δ endlich bleibt, und

$$w' T = 2^{2\nu-n} \psi(k) T_1$$

folglich nach (14) und (18)

$$T = \frac{g' t}{N(\mathfrak{m})} + M t^{1-\frac{1}{n}} \tag{19}$$

wenn

$$g' = \frac{2^\nu \pi^{n-\nu} \psi(k) L'}{k^n w' \sqrt{\pm D}},$$

$$M = -\frac{2^{2\nu-n} \psi(k) M_1}{k^{n-1} w'}$$

gesetzt ist. Dies ist aber die Voraussetzung 3) im vorigen Paragraphen, die demnach hier erfüllt ist.

Wird O'_+ an Stelle von O' gesetzt, so sind, wenn es in O' Zahlen mit negativer Norm giebt, die Ausdrücke für g' und M noch durch 2 zu theilen. Dieser Fall tritt nämlich dann und nur dann ein, wenn $2\nu - n > 0$ ist, und dann fällt von den $2^{2\nu-n}$ Abtheilungen unseres Raumes die Hälfte weg.

§ 3.

Specielle harmonische Gruppen.

Ich betrachte hier besonders dreierlei harmonische Gruppen.

a) Es bestehe O' aus allen Zahlen des Körpers Ω, die nach irgend einen Idealmodul $\mathfrak{k}$ mit einer zu $\mathfrak{k}$ theilerfremden *rationalen Zahl* congruent sind. Diese Gruppen sind harmonische Gruppen als deren Modul jede durch $\mathfrak{k}$ theilbare natürliche Zahl genommen werden kann. Aus ihnen entspringen wie in der Abhandlung I, § 4 gezeigt ist, gewisse *Ordnungen* $\mathfrak{o}'$ und ich will daher der Kürze wegen diese Gruppen hier *Ordnungsgruppen* nennen.

Ist $\mathfrak{k} = 1$, so ist O das System aller Zahlen in Ω (mit Ausnahme der Null) $\mathfrak{o}'$ ist das System aller ganzen Zahlen $\mathfrak{o}$ in Ω.

Die Classen von $\bar{O}$ nach $\bar{E}\,O'$ entprechen hier den Idealen der Ordnung $\mathfrak{o}'$, und

$$h' = (\bar{O}, \bar{E}\,O') \tag{1}$$

ist die Anzahl der Idealclassen in dieser Ordnung (Abh. I, § 4). Der Satz III lehrt also, wenn er gilt, für diesen Fall, dass es in jeder

Idealclasse der Ordnung $\mathfrak{o}'$ unendlich viele Primideale ersten Grades giebt.

Ist Ω ein quadratischer Körper mit der Grundzahl Δ, und ist Q der Führer von $\mathfrak{o}'$, so entspricht jedem Ideal in $\mathfrak{o}'$ eine Basisform

$$\varphi = c(t_1 + t_2\omega),$$

wenn ω eine Irrationalzahl zweiten Grades mit der Discriminante $Q^2\Delta$ ist, so dass also eine ganzzahlige quadratische Gleichung

$$c\omega^2 = a + b\omega, \qquad b^2 + 4ac = Q^2\Delta$$

besteht (Vgl. § 5 der ersten Abhandlung).

Nun ist c die absolute Norm von φ, also ist φ ein Primfunctional ersten Grades, wenn c eine natürliche Primzahl ist, und da c darstellbar ist durch die mit $-ax^2 - bxy + cy^2$ äquivalenten quadratischen Formen, so folgt, *dass durch jede primitive quadratische Form der Discriminante $Q^2 D$ unendlich viele Primzahlen darstellbar sind.*

b) Eine zweite Art harmonischer Gruppen O'' erhalten wir, wenn O' eine Ordnungsgruppe ist, und O'' aus allen Zahlen ω in O' besteht, die in Bezug auf irgend einen ganzen rationalen Modul m der Bedingung

(2) $$N(\omega) = 1 \text{ (mod. } m)$$

genügen.

Ist $\mathfrak{k}$ der Führer von $\mathfrak{o}'$, so kann als Modul der Gruppe O'' jede durch $\mathfrak{k}$ und durch m theilbare Zahl genommen werden. Die Ideale von $\overline{O}$ und also auch die Zahlen in O' sind hier relativ prim zu $\mathfrak{k}$ und zu m.

Es sei M die Gruppe der nach dem Modul m genommenen zu m theilerfremden rationalen Zahlen, und $\varphi(m)$ der Grad von M. In M ist eine Gruppe M' enthalten, deren Grad wir mit μ' bezeichnen, deren Zahlen a dadurch charakterisirt sind, dass

(3) $$N(\omega) \equiv a \text{ (mod. } m)$$

durch eine Zahl ω in O' befriedigt werden kann. Ausserdem ist eine Gruppe M'' vom Grade μ'' in M enthalten, die ihrerseits M' als Theiler enthält, deren Zahlen b dadurch charakterisirt sind, dass die Congruenz

(4) $$N(\mathfrak{a}) \equiv b \text{ (mod. } m)$$

durch ein Ideal $\mathfrak{a}$ in $\bar{O}$ befriedigt werden kann. (Erste Abhandlg. § 6.)

Die Gruppe M'' zerfällt nach M' in ein System von Nebengruppen

(5) $$M'' = M_1' + M_2' + \cdots + M'_{k_m}, \quad \mu'' = k_m \mu'$$

und wenn b die Zahlen einer dieser Nebengruppen durchläuft, so bilden die Ideale $\mathfrak{a}$ die der Bedingung (4) genügen, ein *Geschlecht* für den Modul m. Es ist also

$$(M'', M') = k_m = \frac{\mu''}{\mu'}$$

die Anzahl der Geschlechter. Die Eintheilung in Geschlechter hängt im Allgemeinen von m ab, man kann aber, wie in § 6 der ersten Abhandlung bewiesen ist, m so annehmen, dass die Hinzufügung beliebiger Factoren zu m keinen Einfluss mehr auf die Eintheilung in Geschlechter hat; dann hat man die *absoluten Geschlechter*.

Aequivalente Ideale kommen in demselben Geschlechte vor, so dass nicht nur die Ideale, sondern die Idealclassen in die Geschlechter vertheilt sind.

Die Zahlen b aus einer der Nebengruppen M_i' will ich *mit dem Charakter des entsprechenden Geschlechtes G, oder auch einer seiner Idealclassen verträglich nennen.* Diese Zahlen b sind alle in einer endlichen Anzahl von Linearformen $mx + b$ enthalten, die gleichfalls mit dem *Charakter des Geschlechtes G verträglich* heissen sollen.

Für den Fall der Gruppe O'' ist

$$(7) \qquad h'' = (\bar{O}, \bar{E}\, O'') = (\bar{O}, \bar{E} O')\, (\bar{E} O', \bar{E} O'') = h'\, (O', O''),$$

$$(8) \qquad (O', O'') = \mu'',$$

also

$$(9) \qquad h'' = h' \mu' = h_g' \mu'',$$

wenn mit h_g' die Anzahl der in jedem Geschlecht enthaltenen Idealclassen in $\mathfrak{o}'$ bezeichnet wird.

Die Nebengruppe von $\bar{O}$ nach $\bar{E} O''$ besteht nun aus allen Idealen einer Idealclasse in $\mathfrak{o}'$, die einer Congruenz (4) für ein bestimmtes b genügen, und unser Satz III besagt also, *dass es in jeder solchen Idealclasse unendlich viele Primideale ersten Grades giebt, deren Norm in einer beliebigen mit dem Charakter der Classe verträglichen Linearform enthalten ist.*

Im Falle eines quadratischen Körpers Ω giebt dies den Dirichlet'schen Satz:

dass durch jede primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellbar sind, die zugleich in einer mit dem Charakter der Form verträglichen Linearform enthalten sind.

Eine dritte Art harmonischer Gruppen O''' die ich Congruenzgruppen nennen will, erhält man auf folgende Weise.

Ich nehme eine Ordnungsgruppe O' mit dem Führer $\mathfrak{k}$ und einen beliebigen Idealmodul $\mathfrak{m}$. Es werden in $\bar{O}$ nur Ideale aufgenommen, die zu $\mathfrak{k}$ und zu $\mathfrak{m}$ relativ prim sind.

c) *Die Congruenzgruppe O''', soll aus allen Zahlen bestehen, die nach dem Modul $\mathfrak{m}$ mit einer Einheit ε' aus O' congruent sind, die also der Bedingung*

$$\omega \equiv \varepsilon' \pmod{\mathfrak{m}} \tag{10}$$

genügen.

Diese Gruppe ist auch harmonisch, und ihr Modul kann jede durch $\mathfrak{k}$ und durch $\mathfrak{m}$ theilbare Zahl sein.

Die Gruppe der Einheiten E' ist hier in O''' enthalten.

Die Gruppe O' zerfällt nach dem Modul $\mathfrak{m}$ in eine gewisse Anzahl von Zahlclassen, die mit $\psi'(\mathfrak{m})$ bezeichnet sein mag. Unter diesen Zahlclassen werden sich gewisse finden, die eine Einheit aus O' enthalten; diese bilden wieder eine Gruppe, deren Grad mit $e'(\mathfrak{m})$ bezeichnet sein soll. Es ist dann

$$(O', O''') = \frac{\psi'(\mathfrak{m})}{e'(\mathfrak{m})}$$

und

$$\begin{aligned} h''' &= (\bar{O}, \bar{E}O''') = (\bar{O}, \bar{E}O')\,(\bar{E}O'.\bar{E}O''') \\ &= h' \frac{\psi'(\mathfrak{m})}{e'(\mathfrak{m})}. \end{aligned} \tag{11}$$

Hier nimmt nun der Satz III die folgende Gestalt an:

Ist $\mathfrak{a}$ ein Repräsentant irgend einer Idealclasse in $\mathfrak{o}'$, so giebt es in dieser Classe unendlich viele Primideale ersten Grades, $\mathfrak{p}$, so dass

$$\mathfrak{p} = \alpha\mathfrak{a}$$

und α eine (gebrochene) Zahl in O', die mit einer beliebig gegebenen zu $\mathfrak{m}$ theilerfremden Zahl in O' nach dem Modul $\mathfrak{m}$ congruent ist.

Macht man die Anwendung auf die Hauptclasse, so ergiebt sich die folgende schöne Verallgemeinerung des Satzes von den arithmetischen Progressionen:

Es giebt in $\mathfrak{o}'$ unendlich viele ganze Zahlen x, deren Norm eine natürliche Primzahl ist (die also im Körper Ω Primideale ersten Grades sind) die zugleich mit einer beliebig gegebenen Zahl aus O' nach dem Modul $\mathfrak{m}$ congruent sind.

Z. B. stellt, wenn α, β Gauss'sche complexe Zahlen (von der Form $x + yi$) ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, die Linearform $\alpha\xi + \beta$ für unendlich viele complexe Zahlen ξ eine complexe Primzahl dar.

§ 4.

Der Classenkörper.

Alle diese Beweise sind aber nur unter der Voraussetzung § 1, 4) d. h. unter der Voraussetzung der Existenz des Körpers K' erbracht. Das eigentliche Ziel der Untersuchung sind weniger die im Vorhergehenden aufgeführten Sätze über die Vertheilung der Primzahlen, als vielmehr die Untersuchung des Körpers K', und besonders die in dem Theorem I enthaltenen Irreducibilitätssätze.

Solche Körper K' sind aber bis jetzt nur in dem Falle bekannt, wo Ω ein *imaginärer quadratischer Körper*, also ein quadratischer Körper mit negativer Discriminante ist, und in diesem Falle giebt uns die Theorie der *elliptischen Functionen* solche Körper.

Zu den Classen der quadratischen Formen einer Ordnung einer negativen Discriminante D gehört eine *Classengleichung* mit rationalen Coefficienten, deren Grad gleich der Classenzahl h' in dieser Ordnung ist. Die Wurzeln dieser Gleichung sind die *Classeninvarianten*. Der durch Adjunction einer Wurzel dieser Gleichung zu Ω entstehende Körper, der in Bezug auf Ω relativ Abel'sch ist, heisst der *Classenkörper der Ordnung* $\mathfrak{o}'$.

Um nun nachzuweisen, dass wir diesen Classenkörper in dem Falle a), wo O' eine Ordnungsgruppe ist, für den Körper K' nehmen können, haben wir noch zu zeigen, dass, von Ausnahmen abgesehen, jedes Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers Ω vom ersten Grad, das der Hauptclasse angehört, und nur diese, auch im Classenkörper in Primideale ersten Grades, $\mathfrak{P}$, zerfallen. Damit ein Primideal $\mathfrak{P}$ vom ersten Grade sei, ist nothwendig und hinreichend, dass für jede ganze Zahl ω des Körpers

$$\omega^p \equiv \omega \pmod{\mathfrak{P}} \tag{1}$$

sei, wenn $\mathfrak{P}$ in der natürlichen Primzahl p aufgeht.

Wenn nun (k) eine zu der Classe k gehörige Classeninvariante ist, so kann jede ganze Zahl ω des Classenkörpers in der Form dargestellt werden

$$\omega = a_0 + a_1(k) + a_2(k)^2 + \cdots = f(k) \tag{2}$$

worin $a_0, a_1, \ldots$ Zahlen des Körpers Ω sind, die zwar gebrochen sein können, aber nur so, dass der Nenner eine feste natürliche Zahl ist, deren Primfactoren wir zu den Ausnahmen rechnen. Da nun, wenn p in Ω in Primfactoren $\mathfrak{p}$ vom ersten Grade zerfällt,

$$a_i^p \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}}$$

ist, so reducirt sich (1) nach (2) auf die eine Congruenz

$$(k)^p \equiv (k) \pmod{\mathfrak{P}}. \tag{3}$$

Nun ist aber, wenn p durch die Formen der Classe l darstellbar ist

$$(k)^p \equiv (lk) \pmod{\mathfrak{P}},$$

und es ergiebt sich also aus (3) die Bedingung

$$(k) \equiv (lk) \pmod{\mathfrak{P}}. \tag{4}$$

Rechnen wir aber noch die Primzahlen, die in der Discriminante der Classengleichung aufgehen, zu den Ausnahmen, so ist (4) nur möglich, wenn l die Hauptclasse der Ordnung $\mathfrak{o}'$ ist.

Da die Primzahlen, die schon im Körper Ω nicht in Primfactoren ersten Grades zerfallen, auch nicht im Classenkörper in Primfactoren ersten Grades zerfallen können, so ist damit für den Fall der Ordnungsgruppen die Frage erledigt.*)

Die Classengleichung zerfällt durch Adjunction einer gewissen Anzahl reeller Quadratwurzeln in Factoren, deren jeder einem Geschlechte entspricht, und deren Grad h_g gleich der Anzahl der in einem Geschlechte enthaltenen Idealclassen ist**). Wenn wir nun dem Classenkörper K' noch die m^{ten} Einheitswurzeln ϱ adjungiren, wobei m so gewählt sein soll, dass alle jene zur Zerfällung der Classengleichung gebrauchten Quadratwurzeln und auch $\sqrt{\Delta}$ rational durch ϱ ausdrückbar sind, so entsteht ein Körper K'', dessen Grad höchstens gleich $\varphi(m)\, h_g$ ist, und dessen relativer Grad in Bezug auf Ω nur halb so gross ist.

Im Falle des quadratischen Körpers ist nun nach den Sätzen von Gauss und Dirichlet***) der Grad μ'' der Gruppe M'' (§ 3) gleich $\frac{1}{2}\varphi(m)$ und folglich ist der relative Grad von K'' in Bezug auf Ω höchstens gleich h''. (§ 3, (9).)

Ist $\mathfrak{P}$ ein in p aufgehendes Primideal des Körpers K'', so ist $\mathfrak{P}$ dann und nur dann vom ersten Grade, wenn für jede Zahl ω aus K'' die Bedingung (1) erfüllt ist. Diese Bedingung aber lässt sich, von Ausnahmen für p abgesehen, durch die beiden Bedingungen

$$(4) \qquad (k)^p \equiv (k), \qquad \varrho^p \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{P}}$$

ersetzen, und diese beiden Bedingungen sind nur dann beide erfüllt, wenn p durch die Hauptclasse der Ordnung $\mathfrak{o}'$ darstellbar und zugleich congruent mit 1 nach den Modul m ist, d. h. wenn die Primfactoren $\mathfrak{p}$ von p in Ω in der Gruppe $\overline{E}\,O'$ enthalten sind. Der Körper K'' ist also auch für den Fall b) nachgewiesen.

Es ergiebt sich daraus, dass der Grad dieses Körpers in Bezug auf Ω wirklich gleich h'' ist, und wir schliessen hieraus das bis jetzt noch nicht auf andere Weise bewiesene Resultat:

Die Classengleichung ist auch in dem Körper, der alle Einheitswurzeln enthält, nicht weiter zerlegbar als in die den Geschlechtern entsprechenden Factoren.

---

*) Ueber die hier benutzten Sätze vergl. mein Buch „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen" Braunschweig 1890. §§ 88, 109, 110 f. Die dort auf anderem Wege bewiesene Irreductibilität der Classengleichung ist hier aufs neue bewiesen.

**) Ellipt. F. § 106.

***) Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie § 125, § 155 f.

Die bisherigen Sätze (mit Ausnahme des letzten) sind schon auf anderem Wege bewiesen und geben uns also ausser der Methode und einem tieferen Einblick in ihren Zusammenhang, keine eigentlich neuen Resultate. Anders verhält es sich aber, wenn wir die Gruppe O''', die in § 3 unter c) näher beschrieben ist, in ähnlicher Weise betrachten. Dazu ist es erforderlich, noch höhere Körper heranzuziehen, nämlich die aus der Theilung der elliptischen Functionen mit singulären Moduln entspringenden, deren Untersuchung im letzten Abschnitt meines citirten Buches zwar angebahnt, aber noch nicht weit genug geführt ist. Dies aber erfordert umständlichere Erörterungen aus der Theorie der elliptischen Functionen, die einer folgenden Abhandlung vorbehalten bleiben müssen.

Ueber Tripelsysteme.

Von

Lothar Heffter in Giessen.

Das Problem der Tripelsysteme wurde — wie bisher nicht bemerkt worden zu sein scheint — zuerst von Jakob Steiner aufgestellt, der im Jahr 1862 die „combinatorische Aufgabe“ notirte: „Welche Zahl n von Elementen hat die Eigenschaft, dass sich die Elemente so zu dreien ordnen lassen, dass je zwei in einer, aber nur in einer Verbindung vorkommen? Wie viel wesentlich verschiedene Anordnungen, d. h. solche, die nicht durch eine blosse Permutation der Elemente aus einander hervorgehen, giebt es bei jeder Zahl? u. s. w.“ *) Diese Anordnung von n Elementen nennt man aber heutzutage ein *Tripelsystem*.

Eingehend mit Tripelsystemen und ihrer Anwendung in der Algebra haben sich sodann die Herrn Noether**), Netto***), Moore†) und De Vries††) beschäftigt, die letzteren drei namentlich auch mit der Frage der Herstellbarkeit und mit der wirklichen Herstellung von Tripelsystemen bei den einzelnen Zahlen n. Man fand bald, dass Tripelsysteme nur möglich sind bei den Zahlen der Form $n = 6m + 1$ und $n = 6m + 3$ und dass die Anzahl der Tripel eines Systems — wenn ein solches existirt — $\frac{n(n-1)}{6}$ ist. Herr Netto hat abgesehen von einigen zurückführenden Sätzen gezeigt, wie bei den Primzahlen der Form $6m + 1$ eine cyklische Anordnung der Tripel möglich ist; ebenso, wenn $n = 6m + 3$ das 3-fache einer Primzahl der Form $6k + 5$ ist. Allein es blieb die Frage noch offen, ob bei *jeder* Zahl $6m + 1$ und $6m + 3$ Tripelsysteme existiren. Diese Frage hat dann Herr Moore

*) Ges. Werke Bd. II, S. 436.

**) Math. Ann. Bd. 15, (1879) S. 89 ff.

***) „Die Substitutionentheorie und ihre Anwendungen in der Algebra“. Leipzig, 1882, S. 220 ff. — Math. Ann. Bd. 42, (1892) S. 143 ff. Im Folgenden wird immer auf diese letztere Publication Bezug genommen.

†) Math. Ann. Bd. 43, (1893) S. 271 ff.

††) Rend. del Circolo Mat. di Palermo vol. 8. (1894). S. 222 ff.

in bejahendem Sinne entschieden; freilich in so complicirter Weise, dass eine weitere Vereinfachung erwünscht scheint.

Nun habe ich schon in einer früheren Arbeit „Ueber das Problem der Nachbargebiete"*) beiläufig erwähnt, dass dieses Problem in seiner arithmetischen Einkleidung jenem Steiner'schen Problem der Tripelsysteme verwandt ist. Als *Nachbarpunkte* bezeichne ich nämlich n Punkte auf einer Oberfläche von hinlänglich grosser Geschlechtszahl, deren jeder mit allen $n-1$ übrigen durch Linien auf der Fläche derart verbunden ist, dass die $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien einander nicht schneiden. In gewissen Fällen zerlegen diese Verbindungslinien die Oberfläche in $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecke. Setzt man nun an die n Punkte z. B. die n Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ und gelingt es, von den $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecken derart die Hälfte zu schraffiren, dass längs jeder Linie ein schraffirtes und ein nicht schraffirtes Dreieck aneinander grenzen, so ist ohne Weiteres zu übersehen, dass sowohl die $\frac{n(n-1)}{6}$ weissen, als die $\frac{n(n-1)}{6}$ schraffirten Dreiecke ein Tripelsystem bilden.

Die Ergebnisse meiner schon citirten Arbeit sollen daher im folgenden für den Bau von Tripelsystemen nutzbar gemacht werden. Dies führt dazu, das Problem der cyklischen Anordnung solcher Systeme im Falle $6m+1$ und $6m+3$ je auf ein anderes einfacheres arithmetisches Problem zu reduciren. Diese werden — abgesehen von den schon durch Herrn Netto erledigten Fällen — gelöst für die Fälle $n = 12k+7$, wenn $4k+3$ eine Primzahl mit der primitiven Wurzel 2 ist, $n = 6m+3$, wenn $6m+3$ das 3-fache einer *beliebigen* Primzahl ist, und ausserdem für alle übrigen Zahlen $6m+1$ und $6m+3$ unter 100. Mit der allgemeinen Lösung der beiden Probleme würde die erschöpfende Natur der Resultate von Herrn Moore mit der Eleganz derer von Herrn Netto verbunden sein.

§ 1.

Bedingung für die cyklische Anordnung der Tripel im Falle $n = 6m+1$.

Im Falle $n = 6m+1$ seien $0, 1, 2, \ldots, 6m$ die $6m+1$ Elemente, aus denen ein Tripelsystem gebildet werden soll. Unter einer *cyklischen Anordnung des Tripelsystems* wollen wir eine solche verstehen, bei der aus $\frac{n-1}{6} = m$ Tripeln alle übrigen durch cyklische Verschiebung

*) Math. Ann. Bd. 38, (1891) S. 477 ff. S. besonders die Anm. S. 496.

der Zahlen 0, 1, 2, . . ., 6m in der natürlichen Folge hervorgehen; z. B. für $n = 7$ entstehen so aus (0 1 3) die 7 Tripel des Systems

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Sei nun

$$\begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1; & a_2, & b_2, & c_2 & ;\ldots; a_m, & b_m, & c_m; \\ a_1+1, & b_1+1, & c_1+1; & a_2+1, & b_2+1, & c_2+1 & ;\ldots; a_m+1, & b_m+1, & c_m+1; \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ a_1+n-1, & b_1+n-1, & c_1+n-1; & a_2+n-1, & b_2+n-1, & c_2+n-1; & \ldots; a_m+n-1, & b_m+n-1, & c_m+n-1, \end{matrix}$$

wobei alle Zahlen natürlich mod. $(n = 6m+1)$ zu nehmen sind, ein solches cyklisches Tripelsystem, so sind für jede der m Colonnen die 3 Differenzen zwischen den 3 Zahlen bei irgendwie festgelegter Folge stets dieselben, z. B. für die erste Colonne stets

$$b_1 - a_1, \quad c_1 - b_1, \quad a_1 - c_1.$$

Macht man die negativen dieser Differenzen durch Hinzufügung von $6m+1$ positiv, so ist die Summe der drei Zahlen stets $\equiv 0$ mod. $6m+1$. Ausserdem kann weder dieselbe Differenz ein zweites Mal auftreten, noch auch ihre Ergänzung zu $6m+1$, — wofür wir kurz *Supplementzahl* sagen wollen, — da sonst gewisse Zahlenpaare in den Tripeln nicht nur einmal, sondern zwei Mal vorkämen. Umgekehrt erhält man augenscheinlich ein cyklisches Tripelsystem, sobald die $3m$ Differenzen den angegebenen Bedingungen gemäss ausgewählt sind. Da nun alle möglichen Differenzen zwischen den Zahlen 0, 1, 2, . . ., 6m durch die Zahlen 1, 2, . . ., 6m gegeben sind, so ist die cyklische Anordnung eines Tripelsystems von $6m+1$ Elementen mit der Lösung des folgenden Problems äquivalent, das wir als *Differenzenproblem* I. bezeichnen:

I. *Aus den Zahlen* 1, 2, ... 6m *sind* m *Gruppen von je dreien zu bilden, sodass*

1) *die Summe der drei stets* $\equiv 0$ mod. $6m+1$ *ist,*

2) *alle* $3m$ *Zahlen von einander verschieden sind,*

3) *nicht zwei der* $3m$ *Zahlen sich zu* $6m+1$ *ergänzen.*

Ersetzt man alle Differenzen, die $> 3m$ sind, durch ihre Supplementzahlen, so nimmt das Differenzenproblem die folgende Gestalt an:

Ia. *Die Zahlen* 1, 2, . . ., 3m *sind so in* m *Gruppen von je dreien zu ordnen, dass bei jeder der Gruppen entweder die Summe der drei Zahlen* $= 6m+1$ *oder aber die eine der Zahlen gleich der Summe der beiden andern ist**).

*) Will man umgekehrt eine Differenzenanordnung Ia zur Herstellung des Tripelsystems benutzen, so ist zu bemerken, dass entweder die Zahlen, welche

Für den Fall, dass $6m+1$ eine Primzahl (mit der primitiven Wurzel g) ist, hat Herr Netto (a. a. O. § 4) dieses Problem implicite gelöst durch die Anordnung der Differenzen

(1) $g^0, g^m-g^0, -g^m; g^1, g^{m+1}-g^1, -g^{m+1}; \ldots; g^{m-1}, g^{2m-1}-g^{m-1}, g^{2m-1}$.

Eine zweite Lösung wäre

(2) $g^m, g^{2m}-g^m, -g^{2m}; g^{m+1}, g^{2m+1}-g^{m+1}, -g^{2m+1}; \ldots$
$\ldots; g^{2m-1}, g^{3m-1}-g^{2m-1}, -g^{3m-1}$

Dass beide äquivalent, d. h. nicht wesentlich verschieden sind, ergiebt sich daraus, dass die Tripel, die nach (2) gebildet werden, aus den nach (1) gebildeten durch Multiplication mit g^m hervorgehen.

§ 2.

Aus Nachbarconfigurationen ablesbare cyklische Tripelsysteme für $n = 6m + 1$.

Für eine weitere Classe von Zahlen der Form $6m+1$ wird das Problem I durch die in meiner citirten Arbeit gegebenen Configurationen gelöst. Die S. 499 (a. a. O.) gegebene Gruppirung (G) der Zahlen $1, 2, \ldots, 6m$ zu je dreien*)

$$(G)\left\{\begin{array}{l} 1, \quad 3, \ldots, 2m-3, 2m-1;\; 2m+1, 2m+3, \ldots, 4m-3, 4m-1;\\ 2, \quad 4, \ldots, 2m-2, 2m \;;\; 4m+1, 4m+3, \ldots, 6m-3, 6m-1;\\ 6m-2, 6m-6, \ldots, 2m+6, 2m+2;\; 6m, 6m-4, \ldots, 2m+8, 2m+4; \end{array}\right.$$

besitzt nämlich bereits stets die Eigenschaften 1) und 2) des Differenzenproblems. Es kommt nur darauf an, ob sich die $6m$ Colonnen so in zweimal $3m$ sondern lassen, dass auch Eigenschaft 3) für jede dieser beiden Colonnengruppen besteht.

Wenn nun m eine ungerade Zahl ist; also $n = 6m+1$ zugleich die Form $12k+7$ hat und ausserdem $4k+3$ eine Primzahl mit der primitiven Wurzel 2 ist, — dieser Fall spielte gerade bei meiner früheren Untersuchung eine ausgezeichnete Rolle — so kann man die Zahlen der mittelsten Zeile von (G) als die mod. $4k+3 = 2m+1$ genommenen Potenzen von 2 ansehen, wobei den ungeraden Potenzresten noch $8k+4 = 4m$ addirt ist. Die Colonnen der linken Hälfte von (G) haben dann sämmtlich die Gestalt

(3) $$(2^\alpha)-1, \quad (2^\alpha), \quad n-2(2^\alpha)+1,$$

die der rechten Hälfte aber

(4) $$(2^\beta)+4k+2, \quad (2^\beta)+8k+4, \quad n-2(2^\beta)+1,$$

---

gleich der Summe der zwei andern sind, erst durch ihre Supplemente zu ersetzen sind, oder aber diese Differenzen rückwärts genommen werden müssen.

*) Die jetzige Schreibweise dieser Tabelle unterscheidet sich von der damaligen nur durch eine Vertauschung von Zeilen und Colonnen.

wo die Potenzreste von 2^α mod. $4k+3$ sämmtlich gerade, die von 2^β sämmtlich ungerade sein sollen, (2^α) und (2^β) diese Potenzreste bedeuten und α und β zusammen die Werthe $0, 1, 2, \ldots, 4k+1$ annehmen. Beschränkt man nun α und β entweder auf die geraden oder auf die ungeraden der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 4k+1$, so ist leicht zu zeigen, dass unter den $3m$ Zahlen, die man dabei aus (G) jedesmal beibehält, nicht zwei Supplementzahlen vorkommen. Da in (G) die Supplementzahlen der ersten Zeile in der dritten Zeile stehen, jedoch nie in derselben Colonne, und diejenigen der Zahlen in der linken Hälfte der zweiten Zeile in der rechten Hälfte derselben Zeile, so hat man nur zu zeigen, dass keine der 5 Gleichungen bestehen kann, in denen $n=12k+7$ und α und α', sowie β und β' von einander verschieden sind,

$$(2^\alpha)+(2^\beta)+8k+4=n, \tag{5}$$
$$(2^\alpha)-1+n-2(2^{\alpha'})+1=n, \tag{6}$$
$$(2^\alpha)-1+n-2(2^\beta)+1=n, \tag{7}$$
$$(2^\beta)+4k+2+n-2(2^\alpha)+1=n, \tag{8}$$
$$(2^\beta)+4k+2+n-2(2^{\beta'})+1=n. \tag{9}$$

Dies folgt aber sehr einfach aus der Annahme, dass 2 primitive Wurzel von $4k+3$ und $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind.

Somit ist gezeigt, *dass man aus der Anordnung* (G) *falls* $m=2k+1$ *und* $4k+3$ *eine Primzahl mit der primitiven Wurzel* 2 *ist, unmittelbar zwei Lösungen des Problems I. ablesen kann,* — oder in geometrischer Einkleidung — *dass die in der Einleitung besprochene Schraffirung der Nachbarconfiguration in diesem Falle möglich ist.*

Z. B. $n=55$, $k=4$, $4k+3=19$; 2 ist primitive Wurzel von 19. Die Anordnung (G) lautet

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \quad & 19 & 21 & 23 & 25 & 27 & 29 & 31 & 33 & 35, \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & & 37 & 39 & 41 & 43 & 45 & 47 & 49 & 51 & 53, \\ 52 & 48 & 44 & 40 & 36 & 32 & 28 & 24 & 20 & & 54 & 50 & 46 & 42 & 38 & 34 & 30 & 26 & 22. \end{array}$$

Die Reste der ungeraden Potenzen von 2 mod. 19 sind

$$2,\ 8,\ 13,\ 14,\ 18,\ 15,\ 3,\ 12,\ 10,$$

und, wenn man die ungeraden unter ihnen um $8k+4=36$ vermehrt,

$$2,\ 8,\ 49,\ 14,\ 18,\ 51,\ 39,\ 12,\ 10.$$

Folglich bilden sowohl diejenigen 9 Colonnen aus (G), welche diese Zahlen in der Mittelstelle haben, als auch die 9 übrigen je eine Lösung von I; d. h. wir haben die Lösungen

(10)
$$\begin{cases} 1 & 7 & 31 & 13 & 17 & 33 & 21 & 11 & 9 \\ 2 & 8 & 49 & 14 & 18 & 51 & 39 & 12 & 10 \\ 52 & 40 & 30 & 28 & 20 & 26 & 50 & 32 & 36 \end{cases}$$

und

(11)
$$\begin{cases} 3 & 5 & 15 & 19 & 23 & 25 & 27 & 29 & 35 \\ 4 & 6 & 16 & 37 & 41 & 43 & 45 & 47 & 53 \\ 48 & 44 & 24 & 54 & 46 & 42 & 38 & 34 & 22. \end{cases}$$

§ 3.

Weitere Lösungen des Differenzenproblems I.

Das Problem I ist jedoch auch in solchen Fällen lösbar, wo $6m+1$ weder eine Primzahl ist noch der im vorigen Paragraphen zu Grunde gelegten Bedingung genügt. Dies soll durch seine Lösung — und zwar in der leichter zu übersehenden Form Ia — für alle Zahlen unter 100 gezeigt werden, die weder der einen noch der andern Bedingung genügen, nämlich für die Zahlen 25, 49, 85, 91.

Für $n = 25$ sind z. B. zwei Lösungen — es giebt deren eine ganze Anzahl —

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 6 & 5 & 11 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 9 & 10 & 12 & 8 & 3 \\ 4 & 10 & 12 & 11 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

$n = 49$

$$\begin{array}{cccccccc} 23 & 19 & 15 & 11 & \quad 21 & 16 & 9 & 6 \\ 18 & 20 & 22 & 24 & \quad 17 & 13 & 7 & 5 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & \quad 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$n = 85$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 41 & 37 & 33 & 29 & 25 & 21 & 17 & \quad 39 & 31 & 27 & 23 & 15 & 12 & 7 \\ 30 & 32 & 34 & 36 & 38 & 40 & 42 & \quad 35 & 28 & 19 & 13 & 9 & 11 & 5 \\ 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & 26 & \quad 4 & 3 & 8 & 10 & 6 & 1 & 2 \end{array}$$

$n = 91$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 45 & 41 & 37 & 33 & 29 & 25 & 21 & \quad 43 & 35 & 31 & 27 & 23 & 17 & 13 & 10 \\ 32 & 34 & 36 & 38 & 40 & 42 & 44 & \quad 39 & 30 & 28 & 19 & 12 & 15 & 7 & 9 \\ 14 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & 26 & \quad 4 & 5 & 3 & 8 & 11 & 2 & 6 & 1 \end{array}$$

§ 4.

Bedingung für cyklische Anordnung der Tripel im Falle $n = 6m + 3$.

Wenn $n = 6m + 3$, ist

$$\frac{n(n-1)}{6} = \frac{(6m+3)(6m+2)}{6} = (2m+1)(3m+1)$$

nicht durch $6m + 3$ theilbar; eine cyklische Anordnung der Tripel aus den Elementen $0, 1, 2, \ldots, 6m + 2$ genau wie im Falle $6m + 1$ ist daher hier nicht möglich. Man kann aber zunächst alle $6m + 3$ Zahlenpaare mit der Differenz $2m + 1$ zu $2m + 1$ Tripeln vereinigen, indem man einfach von

(12) $$0, \quad 2m + 1 \quad 4m + 2$$

etwa ausgeht und daraus durch cyklische Verschiebung der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 6m + 2$ $2m$ andere Tripel ableitet. Bei der $(2m + 1)^{\text{ten}}$ Schiebung würde nämlich das Ausgangstripel (12) wieder erscheinen.

In Bezug auf die $6m$ übrigen Differenzen ist dann auf Grund genau derselben Ueberlegungen wie in § 1 das *Differenzenproblem* II zu lösen:

II. *Aus den Zahlen* $0, 1, 2, \ldots, 2m, 2m+2, \ldots, 4m+1, 4m+3, \ldots$ $\ldots, 6m+2$ *sind* m *Gruppen von je dreien zu bilden, sodass*

1) *die Summe der drei stets* $\equiv 0 \bmod. 6m + 3$ *ist,*

2) *alle* $3m$ *Zahlen von einander verschieden sind,*

3) *nicht zwei der* $3m$ *Zahlen sich zu* $6m + 3$ *ergänzen.*

Ersetzt man wieder alle Zahlen, die $> 3m + 1$ sind, durch ihre Supplementzahlen in Bezug auf $6m + 3$, so erhält man die einfachere Fassung desselben Problems:

IIa. *Die Zahlen* $1, 2, \ldots, 2m, 2m+2, \ldots, 3m + 1$ *sind so in* m *Gruppen von je dreien zu ordnen, dass bei jeder Gruppe entweder die Summe der drei Zahlen* $= 6m + 3$ *oder aber die eine der Zahlen gleich der Summe der beiden andern ist.*

Dieses Problem ist wiederum von Herrn Netto (a. a. O. § 5) für den Fall

(13) $$n = 6m + 3 = 3(6k + 5),$$

wo $6k + 5$ eine Primzahl ist, durch die Anordnung*)

(14) $$g^0, g^m - g^0, -g^m; g^1, g^{m+1} - g^1, -g^{m+1}; \ldots; g^{m-1}, g^{2m-1} - g^{m-1}, -g^{2m-1},$$

wo g eine primitive Wurzel von $2m + 1 = 6k + 5$ ist und der Bedingung

(15) $$g^m \equiv 1 \bmod. 3$$

*) Für die Vergleichung mit den Formeln von Herrn Netto bemerke ich, dass der Buchstabe m in § 5 dort mit unserm k zu identificiren ist, sodass also $3m + 2$ in den Netto'schen Formeln bei uns durch m zu ersetzen ist.

genügt, die Potenzen von g aber mod. $3(2m+1)$ genommen sind. Die Multiplication der Zahlen in (14) mit g^m würde abgesehen von der Umkehrung aller Vorzeichen dieselbe Anordnung wieder erzeugen, also auch kein neues Tripelsystem liefern.

Im folgenden Paragraphen soll jedoch nun gezeigt werden, dass das Differenzenproblem II durch die Anordnung (14) thatsächlich für das 3-fache jeder *beliebigen* Primzahl gelöst ist, sobald nur die Bedingung (15) für g noch durch eine etwas weitere ersetzt wird.

§ 5.

Lösung des Differenzenproblems II für $6m+3$, falls $2m+1$ eine beliebige Primzahl.

Es sei $2m+1$ eine *beliebige* Primzahl und g eine zugehörige primitive Wurzel, die der Bedingung

$$g \equiv 1 \text{ mod. } 3 \tag{16}$$

genügt. Eine solche existirt stets, *ausser wenn* $2m+1=3$, *also* $6m+3=9$ *ist.* Denn, wenn eine beliebige primitive Wurzel g' von $2m+1$ jene Eigenschaft nicht hat, so ist dies bei

$$g'+2m+1 \quad \text{oder} \quad g'+4m+2$$

sicher der Fall, sobald nicht $2m+1=3$ ist.

Ist g so bestimmt, so stellt die im vorigen Paragraphen aus den Entwicklungen von Herrn Netto entnommene Anordnung

$$\left\{\begin{array}{cccc} g^0 & g^1 & \dots & g^{m-1} \\ -g^m & -g^{m+1} & \dots & -g^{2m-1} \\ g^m-g^0 & g^{m+1}-g^1 & \dots & g^{2m-1}-g^{m-1} \end{array}\right. \quad (\text{mod. } 6m+3) \tag{17}$$

für jede Form der Primzahl $2m+1$, *d. h. sowohl für*

$$\text{a)} \quad 2m+1=6k+1.$$

als auch

$$\text{b)} \quad 2m+1=6k+5$$

eine Lösung des Differenzenproblems II *dar.*

Da mit der Bedingung (16) zugleich auch die Bedingung (15) von g erfüllt wird, so könnten wir uns beim Beweis auf den Fall a) beschränken und für b) auf die Ableitung von Herrn Netto berufen. Wir ziehen es aber vor, nochmals den ganzen Beweis zu liefern, um deutlicher hervortreten zu lassen, wie sich die Fälle a) und b) scheiden.

Zunächst ist evident, dass die Summe der drei übereinander stehenden Zahlen in (17) stets $\equiv 0$ mod. $6m+3$ ist. Dass die Zahlen der zwei ersten Zeilen in (17) sämmtlich verschieden und nicht zwei von ihnen Supplementzahlen sind, ergiebt sich folgendermassen. Die Zahlen der zwei ersten Zeilen sind nicht durch 3 theilbar, da g nicht durch 3 theilbar, der Modul aber $3(2m+1)$ ist. Da ferner g primitive Wurzel von $2m+1$ ist und (16) besteht, so sind auch die Potenzreste von

$$g^0, g^1, \ldots, g^{2m-1} \text{ mod. } 3(2m+1)$$

sämmtlich verschieden. Es ist daher nur noch zu zeigen, dass nicht zwei dieser Potenzreste Supplementzahlen mod. $6m+3$ sein können.

Wenn nun irgend zwei dieser Potenzen Supplementzahlen wären, so müsste auch eine Potenz, etwa g^α mit $g^0 = 1$ Supplementzahl sein, d. h. es wäre

$$g^\alpha \equiv -1 \text{ mod. } 3(2m+1). \tag{18}$$

Dies erforderte aber die zwei Congruenzen

$$g^\alpha \equiv -1 \text{ mod. } (2m+1), \tag{19}$$

$$g^\alpha \equiv -1 \text{ mod. } 3, \tag{20}$$

von denen die letzte nach (16) ausgeschlossen ist.

Die Zahlen der ersten beiden Zeilen von (17) sind also sämmtlich nicht durch 3 theilbar, sämmtlich verschieden und nicht zwei von ihnen sind Supplementzahlen.

Da die Zahlen der dritten Zeile von (17) aus denen der ersten bezw. nur durch Multiplication mit $g^m - g^0$ entstehen, ist schon bewiesen, dass auch sie sämmtlich verschieden sind und nicht zwei von ihnen sich zu $6m+3$ ergänzen. Der ganze Beweis ist vollständig, sobald noch gezeigt ist, dass die Zahlen der dritten Zeile sämmtlich durch 3 theilbar sind.

Es ist

$$g^m + g^0 \equiv 0 \text{ mod. } 2m+1;$$

dagegen ist die Congruenz

$$g^m + g^0 \equiv 0 \text{ mod. } 6m+3$$

durch die vorangehende Betrachtung ausgeschlossen, da g^m und g^0 nicht Supplementzahlen sind. Also ist entweder

$$\alpha)\quad g^m + g^0 \equiv 2m+1 \text{ mod. } 6m+3$$

oder

$$\beta)\quad g^m + g^0 \equiv 4m+2 \text{ mod. } 6m+3.$$

Wenn nun Fall a) vorliegt, d. h. wenn $m = 3k$ ist, so würde nach α) g^m durch 3 theilbar sein, was schon ausgeschlossen ist; also muss im Falle a) die Congruenz β) gelten, woraus dann folgt

$$g^m - g^0 \equiv 4m \equiv 12k \text{ mod. } 6m+3,$$

sodass alle Zahlen der dritten Zeile in (17) durch 3 theilbar sind.

Wenn aber b) vorliegt, d. h. $m = 3k+2$ ist, so würde nach β) g^m durch 3 theilbar sein; also muss jetzt α) gelten, woraus in Verbindung mit b) wieder folgt, dass $g^m - g^0$ durch 3 theilbar ist.

Als Beispiele mögen dienen $6m + 3 = 15, 21$.

$6m + 3 = 15 = 3 \cdot 5$; $g = 10$; die Lösung des Differenzenproblems nach der Anordnung (17) lautet:

$$\begin{array}{llll} 5 & 1 & 7 \\ 5 & 11 & 2 \\ 5 & 3 & 6. \end{array}$$

$n = 21 = 3 \cdot 7$; $g = 10$; die Lösung nach (17) lautet

$$\begin{array}{llll} 7 & 1 & 10 & 16 \\ 7 & 8 & 17 & 2 \\ 7 & 12 & 15 & 3. \end{array}$$

§ 6.

Der Ausnahmefall $6m + 3 = 9$.

Die einzige Ausnahme von der Lösung des Differenzenproblems II nach der Methode des vorigen Paragraphen bildet der Fall $n = 9$, d. h. der erste überhaupt auftretende Fall, wenn von dem trivialen $n = 3$ abgesehen wird. Dass bei $6m + 3 = 9$ aber überhaupt keine Lösung von II *existirt*, sieht man sofort aus der Form IIa des Differenzenproblems. Die Zahlen 1, 2, 4 haben eben weder die Summe 9, noch ist die grösste von ihnen gleich der Summe der beiden andern.

Als Ersatz kann hier die Differenzenanordnung gelten:

$$\begin{array}{llll} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1. \end{array} \tag{21}$$

Bei Bildung der Tripel mit den Differenzen a, a, $2a$ müssen dann aus einem Tripel die übrigen immer durch die cyklische Substitution

$$(0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)^3$$

hergeleitet werden. Man erhält so das Tripelsystem

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 6 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 2. \end{array}$$

§ 7.

Weitere Lösungen des Differenzenproblems für $6m + 3$.

Auch das Differenzenproblem II ist in seiner Lösbarkeit nicht auf die bisher behandelten Fälle beschränkt. Es sei zum Schluss gestattet, für alle Zahlen $6m + 3$ unter 100, wo $2m + 1$ keine

Primzahl ist, eine Lösung anzugeben, was wiederum in der leichter zu übersehenden Form IIa geschehen soll.

$$6m+3=27$$

9	13	12	8	6
9	11	10	7	4
9	3	5	1	2;

$$6m+3=45$$

15	21	20	19	22	13	12	4
15	18	17	16	14	11	7	3
15	6	8	10	9	2	5	1;

$$6m+3=63$$

21	31	30	29	28	27	20	18	17	16	9
21	26	25	24	23	22	19	15	13	11	7
21	6	8	10	12	14	1	3	4	5	2;

$$6m+3=75$$

25	37	36	35	34	33	32	24	22	21	19	16	12
25	31	30	29	28	27	26	23	20	18	14	10	8
25	7	9	11	13	15	17	1	2	3	5	6	4;

$$6m+3=81$$

27	39	38	37	36	35	34	40	26	24	21	20	12	10
27	33	32	31	30	29	28	23	25	22	16	14	8	7
27	9	11	13	15	17	19	18	1	2	5	6	4	3;

$$6m+3=99$$

33	49	48	47	46	45	44	43	42	32	31	30	29	24	22	20	12
33	41	40	39	38	37	36	35	34	25	26	27	28	14	16	18	8
33	9	11	13	15	17	19	21	23	7	5	3	1	10	6	2	4.

Der noch ausstehende Beweis für die allgemeine Lösbarkeit der Differenzenprobleme I und II und die Angabe einer oder mehrerer allgemein gültiger Lösungsmethoden würde die Frage der Construction der Tripelsysteme erheblich fördern. Es würde das Tripelsystem ausser bei $n=9$ stets so gebaut werden können, dass die Tripel-gruppe die der cyklischen Substitutionen enthält. Erwägt man aber, dass bei den Primzahlen $6m + 1$ noch von der Netto'schen *verschiedene* Lösungen des Problems I möglich sind, z. B. bei 31 nach § 2, ferner, dass bei 7 eine, bei 13 ebenfalls nur eine, bei 19 vier, bei 25 schon erheblich mehr verschiedene Lösungen existiren und dass Aehnliches bei den Zahlen $6m + 3$ gilt, so scheint es in der That, dass nicht nur die Probleme I und II stets lösbar sind (ausser bei $n = 9$), sondern dass auch die Anzahl der Lösungen im Allgemeinen mit der Zahl selbst wächst.

Giessen, 17. October 1896.

Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann.

Von

ALFRED BOCHERT in Breslau.

III.

In den früher erschienenen Theilen*) dieser Arbeit ist zur Erlangung unterer Werthezahlgrenzen das Verfahren angewendet, aus den Buchstaben der betrachteten Function eine möglichst grosse Zusammenstellung von x der Art herauszugreifen, dass ausser der identischen jede der $x! = 1 \cdot 2 \ldots x$ Substitutionen, die nur Buchstaben der Zusammenstellung, und diese also nur unter einander, vertauschen, die Function ändert. Die letztere nimmt dann schon als solche der herausgegriffenen Buchstaben allein $x!$ verschiedene Werthe an, die höchste in x Buchstaben überhaupt mögliche Zahl.

Dieses Verfahren lässt sich verallgemeinern, indem man statt einer einzelnen eine Reihe von Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben sucht, von der Art, dass die gegebene Function (oder genauer gesagt, der gegebene Werth derselben) durch jede Substitution ausser der identischen geändert wird, die nur Buchstaben aus diesen Zusammenstellungen und die Buchstaben jeder einzelnen derselben höchstens unter einander versetzt.

Die Anzahl aller verschiedenen derartigen Substitutionen ist, wenn $x_1, x_2, \ldots x_k$ die Buchstabenzahlen der gesuchten Zusammenstellungen bezeichnen, offenbar gleich dem Producte $x_1!\, x_2! \ldots x_k!$, weil eben gleich der Zahl aller verschiedenen Arten, auf die sich die $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$

*) Bd. 33, S. 584 ff. und Bd. 40, S. 157 ff. Am letzteren Orte
S. 164 Z. 8 v. u. statt „nicht mehr als" lies „höchstens";
S. 167 Z. 12 v. o. nach „Substitutionen" einzuschalten „zweiter Ordnung";
S. 171 Z. 4 v. u. statt „m" lies „m'";
S. 175 Z. 12 v. o. „entweder alternirend oder symmetrisch"
und Z. 15 v. o. „*d. h. weder symmetrisch noch alternirend*" wegzulassen.

Buchstaben in diesen Zusammenstellungen anordnen lassen, wenn die Buchstaben jeder einzelnen derselben nur unter einander umgestellt werden dürfen.

(1) Und ebenso gross ist also auch die Zahl der verschiedenen Werthe, welche die Function schon durch diese Substitutionen erlangt.

In der That, erhielte sie durch irgend zwei derselben den nämlichen andern Werth, so würde sie ja über diesen zum ursprünglichen Werthe zurückgeführt werden, wenn man in ihr auf die eine der zwei Substitutionen die Umkehrung der andern folgen liesse. Eine solche Aufeinanderfolge, obwohl bei der Verschiedenheit der beiden Substitutionen offenbar nicht die identische, d. h. die Aufhebung aller Vertauschungen, ergebend, würde dann also die gegebene Function überhaupt nicht ändern. Das würde aber der über die fraglichen $x_1!\, x_2! \ldots x_k!$ Substitutionen gemachten Voraussetzung widersprechen, da nach dem Begriffe derselben ihre Umkehrungen, wie alle durch irgendwelche Zusammensetzung aus ihnen gebildeten Substitutionen wieder zu ihnen gehören müssen.

Oder auch: die fraglichen Substitutionen bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe der Ordnung $x_1!\, x_2! \ldots x_k!$, aus der nur die identische die gegebene Function ungeändert lässt. Die Zahl aller verschiedenen Werthe aber, die eine Function durch die Substitutionen einer Gruppe annimmt, ist bekanntlich gleich der Ordnung der letzteren getheilt durch die Zahl derjenigen (für sich wieder eine Gruppe zusammensetzenden) unter diesen Substitutionen, welche die Function nicht ändern.

Nun kann die für die gesuchte Zusammenstellungsreihe gestellte Bedingung, dass eine gegebene Function durch jede von der identischen verschiedene Substitution geändert werden soll, welche nur Buchstaben aus dieser Reihe und jede einzelne Zusammenstellung derselben höchstens in sich vertauscht, auch durch die ersetzt werden, dass keine solche Substitution einer gewissen, auf die Buchstaben der gegebenen Function beschränkten Gruppe angehören darf, nämlich eben derjenigen, welche durch die Gesammtheit der die Function nicht ändernden Substitutionen gebildet wird, der Gruppe der Function.

In jeder Substitution aber, die in Bezug auf eine Reihe von Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben die angegebenen Eigenschaften hat, steht ja derjenige Theil, der die Buchstaben einer dieser Zusammenstellungen nicht betrifft und also nur die der übrigen durch einander ersetzt, zur Reihe dieser übrigen in der gleichen Beziehung, wie die ganze Substitution zur ganzen Reihe.

(2) Und alle verschiedenen Ersetzungen irgendwelcher Buchstaben nur durch einander, die sich mit oder ohne Vertauschung anderer mittels der Substitutionen einer Gruppe ausführen lassen, bilden, als

Substitutionen für sich betrachtet, zusammen wieder eine Gruppe. Denn alle Zusammensetzungen dieser Ersetzungen mit sich selbst und einander müssen sich ja ebenso wieder unter den letzteren selbst finden, wie die entsprechenden Zusammensetzungen der ganzen sie als Theile enthaltenden Substitutionen der ursprünglichen Gruppe unter diesen.

(3) Um also eine Reihe von Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben, die in Bezug auf eine gegebene Gruppe von der gesuchten Art ist, aus gegebenen Buchstaben herauszugreifen, kann man schrittweise verfahren, indem man unter den letzteren zunächst eine einzelne Zusammenstellung so wählt, dass keine auf dieselbe beschränkte Substitution ausser der identischen in der gegebenen Gruppe vorkommt, und das Verfahren dann in der Weise wiederholt, dass man an die Stelle dieser Gruppe und aller gegebenen Buchstaben die noch übrigen derselben und diejenige Gruppe treten lässt, die nach dem eben unter (2) Gesagten von der Gesammtheit der verschiedenen mittels der Substitutionen der gegebenen Gruppe ausführbaren Ersetzungen dieser übrigen Buchstaben nur durch einander, mit oder ohne Vertauschung der schon herausgegriffenen, gebildet wird.

Denn hat eine aus diesen übrigen Buchstaben entnommene Reihe von Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben in Bezug auf die neue Gruppe die gesuchte Eigenschaft, dass sich in der letzteren keine von der identischen verschiedene Substitution findet, die nur Buchstaben aus dieser Reihe und jede einzelne Zusammenstellung höchstens in sich versetzt, so bedeutet dies ja nach dem Begriffe der in Rede stehenden Gruppe zugleich, dass keine Zusammensetzung einer solchen Substitution mit einer auf die herausgegriffene Zusammenstellung beschränkten der ursprünglichen Gruppe angehört; und da in dieser auch keine Substitution der letzteren Eigenschaft für sich allein, ausser der identischen, vorkommen soll, so bildet die gedachte Reihe von Zusammenstellungen mit der herausgegriffenen offenbar eine Reihe der gleichen, d. h. verlangten, Art in Bezug auf alle gegebenen Buchstaben und die ursprüngliche Gruppe.

Es seien nun irgend n Buchstaben und eine auf dieselben beschränkte Gruppe gegeben, und für den Fall, dass eine erste Zusammenstellung der gesuchten Reihe vortheilhaft aus der besonderen Art der gegebenen Gruppe folgen sollte, bezeichne u_0 die nicht näher bestimmte, möglicher Weise auch Null betragende Buchstabenzahl einer solchen Zusammenstellung, die also aus den gegebenen Buchstaben so herausgegriffen sein soll, dass keine Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen auf sie beschränkt ist.

Dieser Fall kann besonders dann eintreten, wenn die Gruppe ausser der identischen nur Substitutionen von verhältnissmässig grosser Buchstabenzahl enthält. Denn die Eigenschaft, dass sich keine von der identischen verschiedene Substitution einer gegebenen Gruppe auf sie beschränkt, hat ja schon jede Anzahl von Buchstaben, die kleiner ist als die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer solchen Substitution (die Classe der Gruppe).

Für das Weitere treten also nach dem unter (3) Gesagten an die Stelle der ursprünglichen Gruppe und aller n gegebenen Buchstaben die noch übrigen $n-u_0$ der letzteren und die Gruppe aller verschiedenen Ersetzungen dieser $n-u_0$ Buchstaben nur durch einander, die mit oder ohne Vertauschung der schon herausgegriffenen u_0 von den Substitutionen der gegebenen Gruppe bewirkt werden.

Es mag jetzt zunächst auf folgende einfache Weise fortgefahren werden.

(4) Im ersten Theile dieser Untersuchungen (Bd. 33, S. 588, Satz 2) ist nachgewiesen, dass, wenn irgendwelche Buchstaben gegeben sind und eine Gruppe, in der kein auf dieselben beschränkter Cyklus dritter Ordnung vorkommt, es unter diesen Buchstaben immer eine Zusammenstellung von nicht weniger als der Hälfte derselben giebt, auf die überhaupt keine Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen beschränkt ist.

Und ist k irgend eine ganze, nicht negative Zahl, so wird die kleinste nicht weniger als $\frac{1}{2}k$ betragende ganze Zahl (wie ebenfalls a. a. O. schon bemerkt) offenbar durch $k-\left[\frac{1}{2}k\right]$ dargestellt, unter $[q]$ wie immer die grösste nicht mehr als q betragende ganze Zahl verstanden.

Enthält demnach insbesondere die eben erwähnte, auf die noch verfügbaren $n-u_0$ der gegebenen n Buchstaben bezügliche Gruppe keinen Cyklus dritter Ordnung, so lassen sich unter diesen $n-u_0$ Buchstaben $n-u_0-\left[\frac{1}{2}(n-u_0)\right]$ so wählen, dass sich überhaupt keine darauf beschränkte Substitution ausser der identischen in der Gruppe findet. Eine aus solchen $n-u_0-\left[\frac{1}{2}(n-u_0)\right]$ Buchstaben bestehende Zusammenstellung bildet aber, wie unter (3) gezeigt, mit der zuerst herausgegriffenen von u_0 schon ein Paar der gesuchten Art, also der Eigenschaft, dass der ursprünglichen Gruppe, von der identischen abgesehen, keine derjenigen Substitutionen angehört, die nur Buchstaben aus diesen zwei den gegebenen n entnommenen Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben und jede derselben höchstens in sich vertauschen. Schon durch diese Substitutionen muss folglich nach (1) eine Function der n Buchstaben, für welche die gegebene Gruppe die zugehörige, d. h. die Gesammtheit der den Functionswerth nicht ändernden Substitutionen darstellt,

$$u_0!\left(n - u_0 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right]\right)!$$

verschiedene Werthe annehmen, 0! dabei eintretenden Falls $=1$ gesetzt.

Und was die Bedingung betrifft, dass die betrachtete Gruppe aller verschiedenen von den Substitutionen der ursprünglich gegebenen Gruppe bewirkten Ersetzungen der verfügbaren $n - u_0$ Buchstaben nur durch einander keinen Cyklus dritter Ordnung enthalten soll, so ist diese Bedingung ja wieder gleichbedeutend damit, dass keine Zusammensetzung eines solchen Cyklus mit einer auf die andern, vorher herausgegriffenen, u_0 der gegebenen n Buchstaben beschränkten Substitution in der ursprünglichen Gruppe auftritt. Durch eine derartige Zusammensetzung wird aber offenbar eine von der identischen verschiedene Substitution von nicht mehr als $u_0 + 3$ Buchstaben dargestellt. Die in Rede stehende Bedingung ist daher sicher erfüllt, wenn keine solche Substitution in der ursprünglichen Gruppe vorkommt, oder, was dasselbe sagt, eine Function der gegebenen n Buchstaben, die diese Gruppe hat, ungeändert lässt; eine Voraussetzung, die ja auch die vorher gemachte schon einschliesst, dass sich keine auf die zuerst herausgegriffenen u_0 Buchstaben beschränkte Substitution ausser der identischen in der gegebenen Gruppe finden soll.

Mithin:

III. *Wird eine Function in n Buchstaben durch jede von der identischen verschiedene Substitution geändert, die nicht mehr als $u_0 + 3$ vertauscht, unter u_0 eine ganze, nicht negative Zahl verstanden, die auch Null sein darf; oder giebt es auch nur unter den n Buchstaben u_0 der Art, dass die Function in den n, ausser der identischen, keine Substitution zulässt, welche die u_0 höchstens unter einander und die übrigen $n - u_0$ der n entweder gar nicht, oder nur in einem Cyklus dritter Ordnung versetzt: so lassen sich aus den n Buchstaben zwei Zusammenstellungen von u_0 und $n - u_0 - \left[\frac{1}{2}(n - u_0)\right]$ ohne gemeinsame Buchstaben so herausgreifen, dass schon durch Vertauschungen innerhalb dieser Zusammenstellungen die gegebene Function*

$$u_0!\left(n - u_0 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right]\right)!$$

verschiedene Werthe erlangt (mit $[q]$ die grösste ganze Zahl $\overline{\gtrless} q$ bezeichnet, und $0! = 1$ gesetzt).

Schon die hiermit gegebene untere Werthezahlgrenze ist ersichtlich bei genügender Grösse von u im Allgemeinen höher als die in den vorhergehenden Theilen der Arbeit nachgewiesenen, die ja, abgesehen von besonderen Fällen, $\left[\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}u_0\right]!$ nicht übersteigen.

Allgemeiner sei vorausgesetzt, dass die Gruppe der verschiedenen mittels der ursprünglich gegebenen Gruppe ausführbaren Ersetzungen derjenigen $n - u_0$ Buchstaben nur durcheinander, die von den gegebenen n nach Herausgreifung der ersten Zusammenstellung von u_0 noch verfügbar sind, keine weniger als h Buchstaben vertauschende Substitution dritter Ordnung enthalte.

Denkt man sich dann aus den $n - u_0$ Buchstaben irgend eine Anzahl x_1 entnommen, die auch wieder $= 0$ sein darf, so kann in derjenigen Gruppe, die zu den noch übrigen $n - u_0 - x_1$ der $n - u_0$ Buchstaben und der eben gedachten in der gleichen Beziehung steht, wie die letztere zu allen $n - u_0$ und der ursprünglichen Gruppe, d. h. also in der aller verschiedenen Ersetzungen der $n - u_0 - x_1$ übrigen Buchstaben nur durch einander, die sich mittels jener auf alle $n - u_0$ bezüglichen Gruppe bewirken lassen, keine Substitution dritter Ordnung vorkommen, die weniger als $h - x_1$ Buchstaben versetzt. Denn sonst würde eben wieder nach dem Begriffe der fraglichen Gruppe in der eben erwähnten, auf alle $n - u_0$ Buchstaben bezüglichen eine Zusammensetzung einer derartigen Substitution mit einer auf die herausgegriffenen x_1 beschränkten auftreten müssen, und das wäre offenbar eine Substitution von durch 3 theilbarer Ordnung, weil eine solche als Theil enthaltend, und von weniger als $h - x_1 + x_1 = h$ Buchstaben. Das würde aber der gemachten Voraussetzung widersprechen, da sich ja unter den Potenzen jeder Substitution von durch 3 theilbarer Ordnung, die als solche immer der gleichen Gruppe angehören und keine neuen Buchstaben vertauschen, auch Substitutionen dritter Ordnung selbst finden.

Ist demnach $h - x_1 > 3$, so kann der neuen Gruppe insbesondere kein Cyklus dritter Ordnung angehören, und es giebt dann folglich unter den $n - u_0 - x_1$ Buchstaben, auf die sie sich bezieht, nach (4) immer eine Zusammenstellung von $n - u_0 - x_1 - \left[\frac{1}{2}(n - u_0 - x_1)\right]$, auf die keine ihrer Substitutionen ausser der identischen beschränkt ist. Unter derselben Voraussetzung $h - x_1 > 3$, nach der ja erst recht h selbst > 3 ist, findet sich aber auch in der diese Gruppe erzeugenden vorigen, auf alle $n - u_0$ Buchstaben bezüglichen, kein Cyklus dritter Ordnung, da dieselbe eben keine Substitution dieser Ordnung von weniger als h Buchstaben enthalten soll. Unter der Bedingung $x_1 \overline{\gtrless} n - u_0 - \left[\frac{1}{2}(n - u_0)\right]$ lassen sich dann also auch nach dem nämlichen Satze (4) die den $n - u_0$ beliebig zu entnehmenden x_1 Buchstaben so gewählt denken, dass in der letzteren Gruppe keine auf dieselben beschränkte, von der identischen verschiedene Substitution vorkommt. Und in diesem Falle bilden ja nach (3) die x_1 mit den u_0 vorher und den $n - u_0 - x_1 - \left[\frac{1}{2}(n - u_0 - x_1)\right]$ nach ihnen herausgegriffenen Buchstaben eine Reihe von drei Zusammenstellungen der verlangten Art; wobei also x_1 jede ganze Zahl bedeuten kann, die den Bedingungen:

$$h - x_1 > 3$$

und

$$0 \overline{\overline{<}} x_1 \overline{\overline{<}} n - u_0 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right]$$

genügt.

Wird nun ferner die erste dieser zwei Bedingungen auch noch durch $x_1 = n - u_0 - \left[\frac{1}{2}(n - u_0)\right]$ erfüllt, den grössten Werth, den x_1 unter der zweiten haben kann, so mag nicht nur x_1 diesem Werthe gleich genommen, sondern auch, entsprechend dem unter (3) Bemerkten, mit den nach Fortnahme der ersten zwei Zusammenstellungen, von u_0 und x_1, noch übrigen

$$n - u_0 - x_1 = n - u_0 - \left(n - u_0 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right]\right) = \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right]$$

der gegebenen n Buchstaben und der Gruppe der verschiedenen Ersetzungen dieser $\left[\frac{1}{2}(n - u_0)\right]$ nur durch einander, die sich mittels der vorher betrachteten, auf alle zuerst verbliebenen $n - u_0$ Buchstaben bezüglichen Gruppe ausführen lassen, das soeben auf letztere Buchstaben und Gruppe angewendete Verfahren wiederholt werden. Dadurch ergeben sich offenbar, indem nach dem Gesagten $\left[\frac{1}{2}(n - u_0)\right]$ an die Stelle von $n - u_0$, $h - x_1 = h - (n - u_0) + \left[\frac{1}{2}(n - u_0)\right]$ an die von h und x_2 an die von x_1 tritt, unter den Voraussetzungen:

$$h - (n - u_0) + \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - x_2 > 3$$

und $\left(\text{wegen } \left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(n - u_0)\right]\right] = \left[\frac{1}{2^2}(n - u_0)\right]\right)$

$$0 \overline{\overline{<}} x_2 \overline{\overline{<}} \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - \left[\tfrac{1}{2^2}(n - u_0)\right]$$

zwei Zusammenstellungen von bezw.

$$x_2 \quad \text{und} \quad \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - x_2 - \left[\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - \tfrac{1}{2}x_2\right]$$

Buchstaben, die nach (3) statt der einen vorher erhaltenen dritten als dritte und vierte die gesuchte Reihe fortsetzen können.

In derselben Weise ersieht man weiter, da

$$\left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - x_2 = \left[\tfrac{1}{2^2}(n - u_0)\right],$$

wenn

$$x_2 = \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - \left[\tfrac{1}{2^2}(n - u_0)\right],$$

dass man unter den Bedingungen:

$$h-(n-u_0)+\left[\tfrac{1}{2}(n-u_0)\right]-\left(\left[\tfrac{1}{2}(n-u_0)\right]-\left[\tfrac{1}{2^2}(n-u_0)\right]\right)-x_3>3,$$

d. h.

$$h-(n-u_0)+\left[\tfrac{1}{2^2}(n-u_0)\right]-x_3>3\,,$$

und

$$0 \leqq x_3 \leqq \left[\tfrac{1}{2^2}(n-u_0)\right]-\left[\tfrac{1}{2^3}(n-u_0)\right]$$

sowohl die Buchstabenzahl x_2 durch $\left[\frac{1}{2}(n-u_0)\right]-\left[\frac{1}{2^2}(n-u_0)\right]$ ersetzen darf, als die zweite der zuletzt gefundenen zwei Zusammenstellungen durch zwei neue von bezw.

$$x_3 \text{ und } \left[\tfrac{1}{2^3}(n-u_0)\right]-x_3-\left[\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2^2}(n-u_0)\right]-\tfrac{1}{2}x_3\right]$$

Buchstaben, als vierte und fünfte der Reihe; u. s. f.

Allgemein gelangt man somit, wenn k irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, unter den Voraussetzungen:

$$h-(n-u_0)+\left[\tfrac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right]-x_k>3$$

oder

$$h>n-u_0-\left[\tfrac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right]+x_k+3,$$

und

$$0 \leqq x_k \leqq \left[\tfrac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right]-\left[\tfrac{1}{2^k}(n-u_0)\right],$$

in denen ja die entsprechenden bezüglich h für alle kleineren Werthe von k schon enthalten sind, zu einer Reihe von $k+2$ Zusammenstellungen der gesuchten Art aus den gegebenen n Buchstaben, mit den Buchstabenzahlen

$$u_0,\ n-u_0-\left[\tfrac{1}{2}(n-u_0)\right],\ \left[\tfrac{1}{2}(u-u_0)\right]-\left[\tfrac{1}{2^2}(n-u_0)\right],\cdots$$
$$\cdots\left[\tfrac{1}{2^{k-2}}(n-u_0)\right]-\left[\tfrac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right],$$

$$x_k \text{ und } \left[\tfrac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right]-x_k-\left[\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right]-\tfrac{1}{2}x_k\right], \text{ wenn } k>1,$$

und

$$u_0,\ x_1,\ n-u_0-x_1-\left[\tfrac{1}{2}(n-u_0)-\tfrac{1}{2}x_1\right], \text{ wenn } k=1;$$

von der Art also, dass keine zwei dieser $k+2$ Zusammenstellungen einen Buchstaben gemein haben, und keine von der identischen verschiedene Substitution der gegebenen Gruppe sich auf Vertauschungen innerhalb derselben beschränkt.

Das giebt aber bei der Bedeutung von h, und wenn man wieder statt der Gruppe eine Function betrachtet, für welche dieselbe die Gesammtheit der zugelassenen Substitutionen in den gegebenen Buchstaben ist, nach (1) den Satz:

IV. *Findet sich unter n Buchstaben einer Function eine Anzahl* u_0, *die auch Null sein kann, der Art, dass die Function durch jede von der identischen verschiedene Substitution in den n Buchstaben geändert wird, welche diese* u_0 *höchstens unter einander vertauscht und die übrigen* $n - u_0$ *der n entweder gar nicht oder nur in einer Versetzung dritter Ordnung von nicht mehr als*

$$n - u_0 - \left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right] + x_k + 3$$

Buchstaben, unter x_k *irgend eine der Bedingung*

$$0 \leqq x_k \leqq \left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right] - \left[\frac{1}{2^k}(n - u_0)\right]$$

genügende ganze Zahl verstanden, unter $[q]$ *die grösste* $\leqq q$ *und unter k eine positive ganze Zahl: so lassen sich* $k + 2$ *Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben, von bezw.*

$$u_0,\ n - u_0 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right],\ \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - \left[\tfrac{1}{2^2}(n - u_0)\right], \cdots$$
$$\cdots \left[\frac{1}{2^{k-2}}(n - u_0)\right] - \left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right],$$
$$x_k \text{ und } \left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right] - x_k - \left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right] - \frac{1}{2}x_k\right]$$

Buchstaben im Falle $k > 1$ *und*

$$u_0,\ x_1,\ n - u_0 - x_1 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0) - \tfrac{1}{2}x_1\right]$$

im Falle $k = 1$, *aus den gegebenen n so herausgreifen, dass schon durch Vertauschungen innerhalb dieser Zusammenstellungen die Function im Falle* $k > 1$:

$$u_0!\left(n - u_0 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right]\right)!\ \left(\left[\tfrac{1}{2}(n - u_0)\right] - \left[\tfrac{1}{2^2}(n - u_0)\right]\right)! \cdots$$
$$\cdots \left(\left[\frac{1}{2^{k-2}}(n - u_0)\right] - \left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right]\right)!$$
$$\times x_k!\left(\left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right] - x_k - \left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right] - \frac{1}{2}x_k\right]\right)!$$

und im Falle $k = 1$:

$$u_0!\, x_1!\, \left(n - u_0 - x_1 - \left[\tfrac{1}{2}(n - u_0) - \tfrac{1}{2}x_1\right]\right)!$$

verschiedene Werthe annimmt $(0! = 1)$.

Und als Folgerung daraus, z. B. durch die besonderen Annahmen

$$u_0 = 0 = x_k$$

und

$$n - u_0 - \left[\frac{1}{2^{k-1}}(n - u_0)\right] + x_k + 3 = n - \left[\frac{1}{2^{k-1}}n\right] + 3 \geqq n,$$

durch die ja

$$x_k! = 0! = 1,$$

$$\left[\frac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right] - x_k - \left[\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{k-1}}(n-u_0)\right] - \frac{1}{2}x_k\right] = \left[\frac{1}{2^{k-1}}n\right] - \left[\frac{1}{2^k}n\right]$$

und $\left[\frac{1}{2^{k-1}}n\right] \overline{\gtrless} 3$, also $\left[\frac{1}{2^k}n\right]$ und um so mehr

$$\left[\frac{1}{2^k}n\right] - \left[\frac{1}{2^{k+1}}n\right] \overline{\gtrless} 1$$

wird:

IV$_1$. *Wird eine Function von n Buchstaben durch jede Substitution dritter Ordnung geändert, so ist ihre Werthezahl nicht kleiner als*

$$\left(n - \left[\tfrac{1}{2}n\right]\right)!\left(\left[\tfrac{1}{2}n\right] - \left[\tfrac{1}{2^2}n\right]\right)!\left(\left[\tfrac{1}{2^2}n\right] - \left[\tfrac{1}{2^3}n\right]\right)!\cdots 1!$$

([q] die grösste ganze Zahl $\overline{\gtrless} q$).

Zu weiteren Ergebnissen führt die Zuhülfenahme einer Folgerung aus einem andern früheren Satze der Arbeit.

Hat man nämlich, wie hier, irgendwelche Buchstaben und eine auf dieselben beschränkte Gruppe, und ist aus diesen Buchstaben eine Zusammenstellung herausgegriffen, auf die keine von der identischen verschiedene Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt, und die ausserdem in keiner andern Zusammenstellung dieser Eigenschaft aus den gegebenen Buchstaben vollständig enthalten ist; wird ferner für irgend eine Substitution der Gruppe durch s bezeichnet, wie viele Buchstaben dieselbe überhaupt vertauscht, durch m, wie viele von den herausgegriffenen, und durch r, wie viele unter den letzteren so, dass sie wieder welche derselben dafür setzt: so müssen nach Satz 5 in Theil II dieser Arbeit*) von der identischen verschiedene gerade Substitutionen von nicht mehr als $3 + 3m - r$ Buchstaben in der gegebenen Gruppe vorkommen, wenn nicht $2m - r = s$ sein soll.

Ist nun insbesondere $r = m$, d. h. ersetzt die fragliche Substitution die m von ihr betroffenen unter den herausgegriffenen Buchstaben überhaupt nur durch einander (oder, was ja dasselbe sagt, stellt sie sich als Zusammensetzung einer auf die herausgegriffenen mit einer auf die etwa noch übrigen unter den gegebenen Buchstaben beschränkten

*) Bd. 40, S. 164.

Substitution dar), so wird die Beziehung $2m - r = s$ zu $m = s$, und das Bestehen derselben würde somit bedeuten, dass alle s von der Substitution vertauschten Buchstaben zu den herausgegriffenen gehören, dass also die ganze Substitution auf diese letzteren beschränkt wäre. Das ist ja aber durch die Voraussetzung über dieselben ausgeschlossen, wenn die Substitution nicht mit der identischen einerlei ($s = 0$) sein soll. Von diesem Falle abgesehen, muss demnach unter der gemachten besonderen Annahme ($r = m$) die Zahl m der Buchstaben, welche die Substitution unter den herausgegriffenen vertauscht, immer so gross sein, dass eine von der identischen verschiedene gerade Substitution von nicht mehr als $3 + 3m - r = 3 + 2m$ Buchstaben in der gegebenen Gruppe auftreten kann. Und daraus folgt ja weiter, wenn diese Gruppe keine derartige Substitution von weniger als u' Buchstaben enthalten soll, dass dann $3 + 2m \geqq u'$, also $m \geqq \frac{1}{2}u' - \frac{3}{2}$ sein muss.

Es besteht somit der Satz:

Sind irgendwelche Buchstaben und eine auf dieselben beschränkte Substitutionengruppe gegeben, in der sich keine von der identischen verschiedene gerade Substitution von weniger als u' Buchstaben findet; ist dann aus den gegebenen Buchstaben eine Zusammenstellung herausgegriffen, auf die keine Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen beschränkt, und die überdies in keiner andern Zusammenstellung derselben Eigenschaft aus diesen Buchstaben vollständig enthalten ist: so muss jede in der Gruppe vorkommende von der identischen verschiedene Substitution, welche die herausgegriffenen Buchstaben höchstens unter einander versetzt, auch mindestens $\frac{1}{2}u' - \frac{3}{2}$ derselben wirklich vertauschen.

Bedeutung hat dieser Satz offenbar nur, wenn $\frac{1}{2}u' - \frac{3}{2} > 0$, d. h. $u' > 3$ gesetzt werden darf; und das ist ja der Fall, wenn die gegebene Gruppe keinen Cyklus dritter Ordnung enthält, die einzige gerade Substitutionsart von nicht mehr als 3 Buchstaben ausser der identischen. Dann ergiebt sich aus ihm zugleich, dass unter seinen Voraussetzungen auch auf die nicht herausgegriffenen der gegebenen Buchstaben keine von der identischen verschiedene Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt ist. Denn eine solche Substitution würde ja von den herausgegriffenen Buchstaben gar keinen vertauschen, also weniger als $\frac{1}{2}u' - \frac{3}{2}$, wenn $u' > 3$, obwohl auch von ihr diese Buchstaben höchstens unter einander, weil eben gar nicht, versetzt würden. Und da man auch 0 und 1 als besondere Fälle der Buchstabenzahl einer Zusammenstellung betrachten kann, in denen es ja dann überhaupt keine auf dieselbe beschränkte Substitution ausser der identischen giebt; da also eine Zusammenstellung von der im Satze vorausgesetzten Art immer möglich ist, so hat man noch als Folge desselben:

(5) *Ist $u' > 3$, und enthält eine auf gegebene Buchstaben beschränkte Gruppe keine gerade Substitution von weniger als u' ausser der identischen, so lassen sich die gegebenen Buchstaben sämmtlich in zwei Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben vertheilen, auf deren keine irgend eine der von der identischen verschiedenen Substitutionen der gegebenen Gruppe beschränkt ist, und von denen die eine durch keine dieser Substitutionen derart nur in sich versetzt wird, dass weniger als $\frac{1}{2}u' - \frac{3}{2}$ ihrer Buchstaben dabei vertauscht werden.*

Es werde jetzt wieder die Gruppe aller verschiedenen mittels der ursprünglich gegebenen Gruppe ausführbaren Ersetzungen derjenigen $n - u_0$ Buchstaben nur durch einander betrachtet, die von den gegebenen n nach Herausgreifung der ersten Zusammenstellung von u_0 noch übrig sind; und es bezeichne u_0' eine untere Grenze für die Buchstabenzahl jeder von der identischen verschiedenen geraden Substitution dieser Gruppe.

Da nach dem Begriffe derselben, wie schon bemerkt, das Auftreten irgend einer nicht identischen Substitution in ihr das einer ebensolchen Zusammensetzung dieser Substitution mit einer auf die herausgegriffenen u_0 Buchstaben beschränkten in der ursprünglichen Gruppe bedeutet, und eine derartige Zusammensetzung weniger als $u_0 + u_0'$ Buchstaben vertauschen würde, wenn die Buchstabenzahl jener ersteren Substitution kleiner als u_0' wäre, so ist die Bedingung, dass keine gerade Substitution von weniger als u_0' Buchstaben ausser der identischen in der betrachteten Gruppe enthalten sein soll, wieder sicher erfüllt, wenn sich unter den von der identischen verschiedenen Substitutionen der ursprünglichen überhaupt keine von weniger als $u_0 + u_0'$ findet. Und zugleich ist ja in der letzteren Voraussetzung auch schon wieder die früher gemachte eingeschlossen, dass unter diesen Substitutionen keine auf die herausgegriffenen u_0 Buchstaben beschränkte vorkommen soll.

Ist nun $u_0' > 3$, so müssen sich nach (5) die verfügbaren $n - u_0$ Buchstaben in zwei Zusammenstellungen, etwa von x_1 und $n - u_0 - x_1$, so vertheilen lassen, dass auf keine der beiden irgend eine von der identischen verschiedene Substitution der betrachteten, auf die $n - u_0$ Buchstaben bezüglichen Gruppe beschränkt ist, und dass überdies ausser der identischen keine der verschiedenen Versetzungen der einen Zusammenstellung, etwa der von $n - u_0 - x_1$ Buchstaben, nur in sich, die von dieser Gruppe bewirkt werden, und die ja nach (2) für sich wieder eine Gruppe bilden, weniger als $\frac{1}{2}u_0' - \frac{3}{2}$ Buchstaben vertauscht.

Dann setzt aber zunächst nach (3) jede der beiden Zusammenstellungen mit der vorher herausgegriffenen von u_0 Buchstaben eine Reihe von zweien der gesuchten Art zusammen, d. h. also eine solche von Zusammenstellungen ohne gemeinsame Buchstaben aus den gegebenen n mit der Eigenschaft, dass keine von der identischen verschiedene Substitution der gegebenen Gruppe nur Vertauschungen innerhalb dieser Zusammenstellungen bewirkt. Eine Zusammenstellung von x Buchstaben kurz durch (x) angedeutet, giebt dies somit die beiden Paare solcher Art:

$$(u_0),\ (x_1) \quad \text{und} \quad (u_0),\ (n-u_0-x_1).$$

Und ist ferner auch noch $\frac{1}{2}u_0' - \frac{3}{2} > 3$, so kann auf die Buchstaben der Zusammenstellung $(n-u_0-x_1)$ und die vorerwähnte, darauf bezügliche Gruppe, für die eben $\frac{1}{2}u_0' - \frac{3}{2}$ an die Stelle von u_0' tritt, wieder in der nämlichen Weise der Satz (5) angewendet werden, wie soeben auf alle zuerst betrachteten $n-u_0$ Buchstaben und die Gruppe in denselben. Dadurch zerlegen sich diese $n-u_0-x_1$ Buchstaben, die ja mit denjenigen einerlei sind, welche das vorher erhaltene Paar (u_0), (x_1) von den gegebenen n übrig lässt, in zwei neue Zusammenstellungen (x_2) und $(n-u_0-x_1-x_2)$, deren jede wieder nach (3) mit (u_0), (x_1) eine Reihe der verlangten Art bildet; so dass man dann statt dieses Paares die beiden dreigliedrigen Reihen hat:

$$(u_0),\ (x_1),\ (x_2) \quad \text{und} \quad (u_0),\ (x_1),\ (n-u_0-x_1-x_2).$$

Und zugleich lässt sich die Zerlegung auch wieder so ausführen, dass man in derselben Weise fortfahrend unter der neuen Voraussetzung:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_0' - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{2^2}u_0' - \frac{1}{2^2}3 - \frac{1}{2}3 > 3$$

die eine dieser dreigliedrigen Reihen, (u_0), (x_1), (x_2), in die beiden viergliedrigen der gleichen Art erweitern kann:

$$(u_0),\ (x_1),\ (x_2),\ (x_3) \quad \text{und} \quad (u_0),\ (x_1),\ (x_2),\ (n-u_0-x_1-x_2-x_3);$$

ferner, wenn auch noch

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}u_0' - \frac{1}{2^2}3 - \frac{1}{2}3\right) - \frac{3}{2} \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{2^3}u_0' - \frac{1}{2^3}3 - \frac{1}{2^2}3 - \frac{1}{2}3 > 3$$

ist, die viergliedrige (u_0), (x_1), (x_2), (x_3) in die fünfgliedrigen:

$$(u_0),\ (x_1),\ (x_2),\ (x_3),\ (x_4)$$

und

$$(u_0),\ (x_1),\ (x_2),\ (x_3),\ (n-u_0-x_1-x_2-x_3-x_4),$$

u. s. w.

Ueberhaupt also, da die hierbei nach einander auftretenden Bedingungen sämmtlich in der jeweiligen letzten enthalten sind und in die übereinstimmende Gestalt gebracht werden können:

$u_0' > 3(2^1-1)$ (aus $u_0' > 3$),

$u_0' > 3(2^2-1)$ $\left(\text{aus } \frac{1}{2}u_0' - \frac{3}{2} > 3 \text{ oder } u_0' > 2.3+3\right)$,

$u_0' > 3(2^3-1)$ $\left(\text{aus } \frac{1}{2^2}u_0' - \frac{1}{2^2}3 - \frac{1}{2}3 > 3 \text{ oder } u_0' > 2^2.3+2.3+3\right)$

u. s. f,

ergeben sich, mit h irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, unter der Voraussetzung:

$$u_0' > 3(2^h-1)$$

die $h+1$ Zusammenstellungsreihen der gesuchten Art:

$$\begin{array}{l}
(u_0),\ (n-u_0-x_1),\\
(u_0),\ (x_1),\ (n-u_0-x_1-x_2),\\
(u_0),\ (x_1),\ (x_2),\ (n-u_0-x_1-x_2-x_3),\\
\quad\vdots\\
(u_0),\ (x_1),\ (x_2),\ \ldots (x_{h-1}),\ (n-u_0-x_1-x_2-\cdots-x_h),\\
(u_0),\ (x_1),\ (x_2),\ \ldots (x_{h-1}),\ (x_h).
\end{array}$$

Für keine dieser aus den gegebenen n Buchstaben entnommenen Reihen kann also dann, wie gesagt, irgend eine von der identischen verschiedene Substitution, die sich auf Vertauschungen innerhalb der einzelnen die Reihe bildenden, keinen Buchstaben mit einander gemein habenden Zusammenstellungen beschränkt, der gegebenen Gruppe angehören, oder, was dasselbe sagt, eine Function ungeändert lassen, die diese Gruppe in den gegebenen n Buchstaben zur Gesammtheit der zugelassenen Substitutionen hat. Und so erhält man bei dem, was vorher über u_0' festgestellt worden ist, nach (1) den Satz:

V. *Wird eine Function in n Buchstaben durch jede Substitution von nicht mehr als* $u_0+3(2^h-1)$ *ausser der identischen geändert, unter* u_0 *und h ganze Zahlen verstanden, von denen die erste* $\lesseqgtr n$ *und* $\geqq 0$, *die zweite* >0 *ist; oder finden sich auch nur solche* u_0 *unter den gegebenen n Buchstaben, dass die Function keine auf die letzteren beschränkte, von der identischen verschiedene Substitution zulässt, welche die* u_0 *höchstens unter einander vertauscht und die übrigen* $n-u_0$ *der gegebenen n gar nicht oder nur in einer geraden Substitution von nicht mehr als* $3(2^h-1)$ *Buchstaben: so giebt es h ganze Zahlen* $x_1, x_2, \ldots x_h$, *jede* $\geqq 0$ *und zusammen nicht grösser als* $n-u_0$, *der Art, dass für die Werthezahl der Function in den n Buchstaben jede der* $h+1$ *unteren Grenzen besteht* $(0! = 1)$:

$$u_0!\ (n-u_0-x_1)!,$$
$$u_0!\ x_1!\ (n-u_0-x_1-x_2)!,$$
$$u_0!\ x_1!\ x_2!\ (n-u_0-x_1-x_2-x_3)!,$$
$$\vdots$$
$$u_0!\ x_1!\ x_2!\ \ldots x_{h-1}!\ (n-u_0-x_1-x_2-\cdots-x_h)!,$$
$$u_0!\ x_1!\ x_2!\ \ldots x_{h-1}!\ x_h!.$$

Bestimmtere Schlüsse lassen sich aus diesem Ergebnisse mit Hülfe der folgenden einfachen Bemerkungen ziehen.

So lange der absolute Unterschied der beiden ganzen, nicht negativen Zahlen z_1 und z_2 grösser als 1 ist, lässt sich der Werth des Factoriellenproductes $z_1!\,z_2!$ ohne Aenderung der Grundzahlensumme z_1+z_2 verkleinern, indem man gleichzeitig die kleinere um 1 vergrössert, die grössere um 1 verkleinert (also den Unterschied verringert):

Denn ist $z_1-z_2>1$ und $z_2 \geqq 0$, also $z_1>z_2+1>0$, so ist ja $(z_1-1)!\,(z_2+1)! < z_1!\,z_2!$, weil $= z_1!\,z_2!\,\frac{z_2+1}{z_1}$.

Daraus folgt offenbar, dass allgemein der kleinste Werth, den das Factoriellenproduct $z_1!\,z_2!\ldots z_k!$ durch Aenderung seiner ganzen, nicht negativen Grundzahlen $z_1, z_2, \ldots z_k$ bei gleichbleibender Summe s und Anzahl k derselben erlangen kann, nur für solche Werthe dieser Grundzahlen eintritt, von denen keine zwei sich um mehr als 1 unterscheiden.

In diesem Falle können aber unter den k Zahlen $z_1, z_2, \ldots z_k$, wenn z die geringste unter denselben vorkommende Grösse bezeichnet, ausser solchen dieser Grösse höchstens noch welche auftreten, die $= z+1$ sind. Ist also dann k' die Anzahl der letzteren, so sind alle übrigen $k-k'$ von der Grösse z, mithin

$$s = k'(z+1)+(k-k')z = kz+k',$$

und da nach dem eben Gesagten $k'<k$ ist,

$$z = \left[\frac{1}{k}s\right], \quad \text{weil} = \frac{1}{k}s-\frac{k'}{k}, \quad \text{und} \quad k' = s-k\left[\frac{1}{k}s\right],$$

unter $[q]$ wie immer die grösste ganze Zahl $\leqq q$ verstanden. z und k' sind hiernach durch s und k eindeutig bestimmt und damit auch der entsprechende Werth des Factoriellenproductes

$$(z+1)!^{k'}\,z!^{k-k'} = \left(\left[\frac{1}{k}s\right]+1\right)!^{\,s-k\left[\frac{1}{k}s\right]}\cdot\left[\frac{1}{k}s\right]!^{\,k\left(\left[\frac{1}{k}s\right]+1\right)-s}.$$

Als allein dafür in Betracht kommend kann folglich dieser Werth, der ja jedenfalls $\geqq \left[\frac{1}{k}s\right]!^{k}$, weil $\geqq z!^{k}$, ist, auch nur der fragliche kleinstmögliche von $z_1!\,z_2!\ldots z_k!$ selbst sein.

Und da sich der Werth eines Factoriellenproductes nicht ändert, wenn die Factorielle $1! = 1$ eine beliebige Zahl k_0 mal als Factor hinzutritt, während sich dadurch sowohl die Summe als die Anzahl der Grundzahlen um k_0 vergrössert, so folgt aus

$$z_1!\, z_2! \ldots z_k! \geqq \left[\frac{1}{k} s\right]!^k$$

auch noch:

$$z_1!\, z_2! \ldots z_k! \geqq \left[\frac{s+k_0}{k+k_0}\right]!^{k+k_0} \geqq \left[\frac{s}{k+k_0}\right]!^{k+k_0}$$

(weil eben $= z_1!\, z_2! \ldots z_k!(1!)^{k_0}$), mit s immer $z_1 + z_2 + \cdots + z_k$ bezeichnet.

Also, wenn noch k_1 für $k + k_0$ gesetzt wird, so dass nun k_1 irgend eine ganze Zahl $\geqq k$ bedeutet:

(6) *Sind $z_1, z_2, \ldots z_k$ irgend k ganze, nicht negative Zahlen, s die Summe derselben und k_1 eine beliebige ganze Zahl $\geqq k$, so ist das Factoriellenproduct*

$$z_1!\, z_2! \ldots z_k! \geqq \left[\frac{1}{k_1} s\right]!^{k_1}$$

$$\left(\text{und } \geqq \left(\left[\frac{1}{k} s\right]+1\right)!^{s-k\left[\frac{1}{k}s\right]} \cdot \left[\frac{1}{k} s\right]!^{k\left(\left[\frac{1}{k}s\right]+1\right)-s}\right)$$

(*$[q]$ die grösste ganze Zahl $\overline{\overline{<}}\, q$, und* $0! = 1$).

Um dies zur Entfernung der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots . x_h$ in den $h+1$ Factoriellenproducten benützen zu können, die der Satz V als untere Grenzen für die Werthezahl einer und derselben Function giebt, braucht man diese Grenzen offenbar nur so zu verbinden, dass Factoriellenproducte von bekannten Grundzahlensummen entstehen.

Nun haben die von $x_1, x_2, \ldots x_h$ abhängigen Theile jener $h+1$ Producte, also die bei Weglassung von $u_0!$ verbleibenden, bezw. die Grundzahlensummen

$$\begin{aligned} &n - u_0 - x_1, \\ x_1 + n - u_0 - x_1 - x_2 &= n - u_0 - x_2, \\ x_1 + x_2 + n - u_0 - x_1 - x_2 - x_3 &= n - u_0 - x_3, \\ &\vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{h-1} + n - u_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_h &= n - u_0 - x_h \end{aligned}$$

und

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_h,$$

die zusammen den von $x_1, x_2, \ldots x_h$ freien Betrag $h(n-u_0)$ geben.

Ein Factoriellenproduct mit einer von diesen Unbekannten unabhängigen Grundzahlensumme erhält man also einfach dadurch, dass man die betrachteten $h+1$ Producte aus Satz V sämmtlich mit einander multiplicirt, wobei sich ja die Grundzahlensummen addiren. Das

Gesammtproduct ist dann als solches von $h+1$ unteren Grenzen für dieselbe Werthezahl, von denen keine negativ ist, seinerseits eine untere Grenze für die $(h+1)^{\text{te}}$ Potenz dieser Werthezahl; und man hat somit, wenn die letztere mit v und das Product aller von $x_1, x_2, \ldots x_h$ abhängigen Factoriellen in den multiplicirten $h+1$ Ausdrücken mit P bezeichnet wird

$$(7) \qquad v^{h+1} \geqq (u_0!)^{h+1} \,.\, P,$$

wo jetzt also nach dem zuvor Gesagten P ein Factoriellenproduct von der Grundzahlensumme $h(n-u_0)$ darstellt.

Nach (6) ist daher zunächst, wenn k_1 irgend eine ganze Zahl bedeutet, die nicht kleiner als die Anzahl der Factoriellen in P ist,

$$P \geqq \left[\frac{h(n-u_0)}{k_1}\right]!^{k_1},$$

und also nach (7):

$$v^{h+1} \geqq u_0!^{h+1} \left[\frac{h(n-u_0)}{k_1}\right]!^{k_1},$$

oder, da weder die rechte Seite dieser Beziehung, noch v und h negativ sind,

$$(8) \qquad v \geqq u_0! \left(\left[\frac{h}{k_1}(n-u_0)\right]!\right)^{\frac{k_1}{h+1}}.$$

Die fragliche Factoriellenzahl ist nun als solche aller von $x_1, x_2, \ldots x_h$ nicht freien Factoriellen in den betrachteten $h+1$ Producten (V.), die deren bezw. $1, 2, \ldots h-1, h, h$ enthalten,

$$= 1 + 2 + \cdots + h - 1 + h + h = \tfrac{1}{2} h(h+1) + h = \tfrac{1}{2} h(h+3),$$

und folglich:

$$k_1 \geqq \tfrac{1}{2} h(h+3).$$

Insbesondere ist demnach, dem kleinsten Werthe von k_1 entsprechend,

$$v \geqq u_0! \left(\left[\frac{2(n-u_0)}{h+3}\right]!\right)^{\frac{h(h+3)}{2(h+1)}}.$$

Von einfacherer Gestalt, wenn auch im Allgemeinen etwas niedriger, wird indessen die aus (8) folgende untere Grenze von v, wenn für k_1 die sowohl durch h als $h+1$ theilbare Zahl $h(h+1)$ gesetzt wird; was ja gestattet ist, da $h(h+1)$ nicht nur wie h selbst eine ganze Zahl, sondern auch keinesfalls $< \frac{1}{2} h(h+3)$ ist. Es ergiebt sich dadurch:

$$v \geqq u_0! \left(\left[\frac{n-u_0}{h+1}\right]!\right)^{h}.$$

Man kann aber die Factoriellen in P $\big($s. (7)$\big)$ auch zu kleineren

Gruppen von bekannten Grundzahlensummen zusammenfassen, nämlich, wie man sofort sieht, wenn man sie in der durch die ursprünglichen $h+1$ Producte (V.) gegebenen Ordnung auf einander folgen lässt, in der Art:

$$\begin{aligned} P = {} & (n-u_0-x_1)!\, x_1! \\ & \times (n-u_0-x_1-x_2)!\, x_1!\, x_2! \\ & \times (n-u_0-x_1-x_2-x_3)!\, x_1!\, x_2!\, x_3! \\ & \quad \vdots \\ & \times (n-u_0-x_1-x_2-\cdots-x_h)!\, x_1!\, x_2! \ldots x_h!; \end{aligned}$$

wobei also h Theilproducte mit der jedesmal gleichen Grundzahlensumme $n-u_0$ und den bezüglichen Factoriellenzahlen $2, 3, 4, \ldots h+1$ entstehen. Indem man auf jedes einzelne dieser Theilproducte den Satz (6) anwendet, und dabei k_1 jedesmal der Factoriellenzahl selbst gleich wählt, erhält man:

$$P \geqq \left[\frac{n-u_0}{2}\right]!^2 \left[\frac{n-u_0}{3}\right]!^3 \cdots \left[\frac{n-u_0}{h+1}\right]!^{h+1}$$

und damit nach (7):

$$v^{h+1} \geqq u_0!^{h+1} \left[\frac{n-u_0}{2}\right]!^2 \left[\frac{n-u_0}{3}\right]!^3 \cdots \left[\frac{n-u_0}{h+1}\right]!^{h+1},$$

eine Beziehung, die noch etwas höhere untere Grenzen für v giebt, als die vorher gefundenen.

Man hat demnach schliesslich das Ergebniss:

V$_1$. *Unter den Voraussetzungen des Satzes V (insbesondere also, wenn eine Function in n Buchstaben durch jede von der identischen verschiedene Substitution von nicht mehr als $u_0+3(2^h-1)$ Buchstaben geändert wird, unter u_0 und h ganze, den Bedingungen $0 \gtreqless u_0 \gtreqless n$ und $h > 0$ genügende Zahlen verstanden) gelten für die Werthezahl v der Function in den n Buchstaben die Beziehungen:*

$$v \geqq u_0! \left(\left[\frac{n-u_0}{h+1}\right]!\right)^h,$$

und

$$v^{h+1} \geqq u_0!^{h+1} \left[\frac{n-u_0}{2}\right]!^2 \left[\frac{n-u_0}{3}\right]!^3 \cdots \left[\frac{n-u_0}{h+1}\right]!^{h+1}.$$

Und durch $u_0 = 0$ (s. V.):

V$_2$. *Wird eine Function in n Buchstaben durch jede von der identischen verschiedene gerade Substitution geändert, die nicht mehr als $3(2^h-1)$ vertauscht, unter h eine positive ganze Zahl verstanden, so ist, wenn v die Werthezahl der Function in den n Buchstaben bezeichnet, und $[q]$ die grösste ganze Zahl $\gtreqless q$,*

$$v \geqq \left[\frac{n}{h+1}\right]^h!, \quad \textit{und} \quad v^{h+1} \geqq \left[\frac{n}{2}\right]!^2 \left[\frac{n}{3}\right]!^3 \cdots \left[\frac{n}{h+1}\right]!^{h+1}.$$

Hiernach ist die Werthezahl v einer Function von n Buchstaben z. B.

$$\geqq \left[\frac{n}{3}\right]!^2, \quad \text{und} \quad v^3 \geqq \left[\frac{n}{2}\right]!^2 \left[\frac{n}{3}\right]!^3,$$

wenn die Function durch jede von der identischen verschiedene gerade Substitution von nicht mehr als $3(2^2-1)=9$ Buchstaben geändert wird ($h=2$);

$$\geqq \left[\frac{n}{4}\right]!^3, \quad \text{und} \quad v^4 \geqq \left[\frac{n}{2}\right]!^2 \left[\frac{n}{3}\right]!^3 \left[\frac{n}{4}\right]!^4,$$

wenn durch jede solche von nicht mehr als $3(2^3-1)=21$ Buchstaben ($h=3$), u. s. w.

Allgemein: Es lasse eine Function von n Buchstaben keine von der identischen verschiedene gerade Substitution zu, die nicht mehr als u_1' Buchstaben vertauscht. Dann wird sie sicher durch jede solche Substitution von nicht mehr als $3(2^h-1)$ geändert, wenn $3(2^h-1) \overline{\gtrless} u_1'$ ist, d. h. $2^h \overline{\gtrless} \frac{1}{3} u_1' + 1$. Und der grösste unter den ganzzahligen Werthen von h, die dieser Bedingung entsprechen, wenn auch nicht im Allgemeinen derjenige unter ihnen, durch den die Werthezahlgrenzen in V_2 ganz die grösste Höhe erlangen, ist, $u_1' \geqq 0$ vorausgesetzt,

$$h = \left[\log_2\left(\frac{1}{3} u_1' + 1\right)\right],$$

wenn $\log_2$ den nach 2 als Grundzahl zu nehmenden Logarithmus bedeutet. Verbindet man dies mit V_2, so ergiebt sich als eine Folgerung dieses Satzes, da die Grenze $\left[\frac{n}{h+1}\right]!^h$ offenbar auch noch für $h=0$ besteht, wenn auch dann ohne Belang, und $\left[\log_2\left(\frac{1}{3} u_1' + 1\right)\right] \geqq 0$ ist, sobald dasselbe von u_1' gilt, ferner > 0, sobald $u_1' \geqq 3$:

V_3. *Wird eine Function von n Buchstaben durch jede gerade Substitution von nicht mehr als u_1', ausser der identischen, geändert, so ist, unter v ihre Werthezahl verstanden, unter $\log_2$ den (reellen) Logarithmus nach der Grundzahl 2, und unter $[q]$ die grösste ganze Zahl $\leqq q$,*

$$v \geqq \left[\frac{n}{\left[\log_2\left(\frac{1}{3}u_1'+1\right)\right]+1}\right]!^{\left[\log_2\left(\frac{1}{3}u_1'+1\right)\right]}, \quad \text{wenn } u_1' \geqq 0,$$

und

$$v^{\left[\log_2\left(\frac{1}{3}u_1'+1\right)\right]+1} \geqq \left[\frac{n}{2}\right]!^2 \left[\frac{n}{3}\right]!^3 \cdots \left[\frac{n}{\left[\log_2\left(\frac{1}{3}u_1'+1\right)\right]+1}\right]!^{\left[\log_2\left(\frac{1}{3}u_1'+1\right)\right]+1}.$$

wenn

$$u_1' \geqq 3.$$

Eine Anwendung hiervon lässt sich z. B. mit Benützung des in der folgenden Untersuchung über die Classe der transitiven Gruppen nachgewiesenen Satzes machen, dass jede von der identischen verschiedene Substitution einer mehr als einfach transitiven Gruppe von n Buchstaben, welche die alternirende ihres Grades nicht enthält, mehr als $\frac{1}{3}n - \sqrt{n}$ Buchstaben vertauscht. Dieser Satz besagt, auf Functionen übertragen, offenbar, dass eine mehr als einfach transitive und dabei mehr als zweiwerthige Function von n Buchstaben durch jede Substitution von nicht mehr als $\frac{1}{3}n - \sqrt{n}$, ausser der identischen, geändert wird. Es kann demnach in diesem Falle $u_1' = \frac{1}{3}n - \sqrt{n}$ gesetzt werden, und damit ergiebt sich aus V_3, dass unter der Voraussetzung $\frac{1}{3}n - \sqrt{n} \geqq 0$, d. h. $n \geqq 9$, keine solche Function weniger als

$$\left[\frac{n}{\left[\log_2\left(\frac{1}{9}n - \frac{1}{3}\sqrt{n} + 1\right)\right] + 1}\right]!^{\left[\log_2\left(\frac{1}{9}n - \frac{1}{3}\sqrt{n} + 1\right)\right]}$$

verschiedene Werthe haben kann.

(Im Uebrigen besteht ja daneben, was für die kleineren Werthe von n in Betracht kommt, für jede derartige Function, als solche, die keinen Cyklus dritter Ordnung zulässt, schon auf Grund des Satzes (4) auch die untere Werthezahlgrenze $\left(n - \left[\frac{1}{2}n\right]\right)!$. Aus dem gleichen Grunde, und im Falle $n = 3$ als selbstverständliche Folge aus der Art der Function, gilt die letztere Grenze auch noch für diejenigen einfach transitiven Functionen von n Buchstaben, deren Gruppe primitiv ist.)

Ueber die Classe der transitiven Substitutionengruppen.

Von

Alfred Bochert in Breslau.

II.

Wie schon bemerkt, ist es auf dem im ersten Theile*) dieser Untersuchungen eingeschlagenen Wege möglich, für die Classe der mehr als ein- und der mehr als zweifach transitiven Gruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten, noch erheblich höhere untere Grenzen nachzuweisen, als die damals gegebenen (unter Classe einer Gruppe wieder die kleinstmögliche Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution derselben verstanden).

Im Nachstehenden soll dies für den Fall der mehr als einfach transitiven Gruppen geschehen.

Von den früheren Grundlagen wird dabei zunächst der damals als Folgerung eines weitergehenden erhaltene Satz (1′) benützt:

(1) *Werden zwei Substitutionen nicht durch einander in sich selbst transformirt (sind sie nicht gegen einander vertauschbar), so finden sich unter den blossen Zusammensetzungen derselben mit sich selbst und einander (und also in jeder Gruppe, der beide angehören) von der identischen verschiedene (gerade) Substitutionen, die nicht mehr als dreimal soviel Buchstaben vertauschen, wie von den beiden gegebenen gemeinsam betroffen werden.*

(Eine solche Substitution wird eben z. B. durch $S_2^{-1} S_1 S_2 S_1^{-1}$ dargestellt, wenn S_1 und S_2 die beiden gegebenen bezeichnen, und S^{-1} wie gewöhnlich die Umkehrung von S bedeutet. Denn die Substitution, die man erhält, wenn man von irgend zwei gegebenen die eine durch die andere transformirt, d. h. die letztere in den Buchstaben der ersteren vollzieht, ersetzt ja anders als die ursprüngliche von den durch diese

*) Bd. 40, S. 176 ff.
Daselbst S. 181, Z. 15 u. 16 v. o. statt „nicht . . .“ bis „. . . betragenden“ l. „den Werth 3 der soeben >2 vorausgesetzten“;
S. 193, Z. 7 v. o. statt „zu“ l. „$z\,u$“.

vertauschten Buchstaben höchstens diejenigen, die selbst oder deren ersetzende sich durch die Transformation ändern, und von den durch die ursprüngliche Substitution nicht vertauschten diejenigen, die dabei zu vertauschten werden; also höchstens alle von den gegebenen zwei Substitutionen gemeinsam betroffenen Buchstaben, alle, welche die zu transformirende Substitution durch solche gemeinsame ersetzt, und alle, die umgekehrt von der transformirenden an die Stelle von gemeinsam vertauschten gebracht werden; zusammen die dreifache Zahl der letzteren. Höchstens die Vertauschungen aller dieser Buchstaben heben sich folglich nicht auf, wenn man auf die transformirte Substitution $(S_2^{-1} S_1 S_2)$ die Umkehrung der ursprünglichen (S_1^{-1}) folgen lässt; während die durch diese Aufeinanderfolge dargestellte Substitution $(S_2^{-1} S_1 S_2 S_1^{-1})$ offenbar durch blosse Zusammensetzung aus den gegebenen (S_1 und S_2) hervorgeht, (von gerader Art) und mit der identischen nur dann einerlei ist, wenn transformirte und ursprüngliche Substitution einander gleich sind, letztere also in sich selbst transformirt ist.)

Ausserdem aber der damalige Satz 2, oder an seiner Stelle der allgemeinere und dabei einfachere:

(2) *Alles, was für beliebige Bedeutungen gegebener Buchstaben gilt, besteht auch mit jeder Vertauschung dieser Buchstaben unter einander.*

Denn jede solche Vertauschung lässt sich ja auch als blosse Vertauschung der Bedeutungen auffassen.

Und in Verbindung mit diesem Satze, der trotz seiner Einfachheit überhaupt von grosser Anwendbarkeit für die Substitutionentheorie ist, die bekannten Umstände, dass

(3) nach dem Begriffe der Transitivität mittels der Substitutionen einer transitiven Gruppe jede den Transitivitätsgrad derselben nicht übersteigende Anzahl der Gruppenbuchstaben beliebig aus den letzteren ersetzbar ist,

und (4) jede Gruppe durch jede ihrer eigenen Substitutionen in sich selbst transformirt wird, d. h. sich bei keiner durch eine solche Substitution bewirkten Vertauschung ihrer Buchstaben ändert.

Letzteres folgt ja nicht nur aus der Möglichkeit, die durch Transformation einer Substitution mittels einer andern entstehende durch blosse Zusammensetzung aus den beiden gegebenen abzuleiten, sondern wegen (2) auch daraus, dass es für jede Gruppe eine Function giebt, für die sie die Gesammtheit der den Functionswerth nicht ändernden Substitutionen darstellt.

Es sei nun irgend eine mehr als einfach transitive Gruppe gegeben, und es bezeichne für dieselbe, wie früher, u die Classe (d. h. also die kleinste Buchstabenzahl, die eine von der identischen verschiedene Substitution der Gruppe vertauscht) und n den Grad (die Zahl aller verschiedenen von der Gruppe betroffenen Buchstaben).

Aus dieser Gruppe denke man sich — diesmal ohne weitere Einschränkung — die Gesammtheit aller verschiedenen Substitutionen der Buchstabenzahl u und daraus wieder eine einzelne herausgegriffen. Solche Substitutionen sind hier immer vorhanden, da sich eben eine mehr als einfach transitive Gruppe, als mindestens zwei Buchstaben vertauschend ($n > 1$), nicht auf die identische Substitution beschränken kann. Ihre demnach von Null verschiedene Anzahl sei z.

Für jede von der herausgegriffenen nicht in sich selbst transformirte unter diesen z Substitutionen ist dann nach (1), wenn die Zahl aller verschiedenen von ihr und der herausgegriffenen gemeinsam betroffenen Buchstaben durch m angegeben wird, zufolge der Bedeutung von u offenbar $3m \geqq u$, und also bei der Ganzzahligkeit von m

$$m \geqq \left(\frac{1}{3}u\right), \tag{5}$$

unter $\left(\frac{1}{3}u\right)$ beliebig $\frac{1}{3}u$ selbst oder die kleinste nicht weniger als $\frac{1}{3}u$ betragende ganze Zahl verstanden.

Es bedeute nun x die grösste Zahl der Art, dass unter den betrachteten z Substitutionen x der Beziehung

$$\Sigma_x m \geqq x\left(\frac{1}{3}u\right) \tag{6}$$

genügen, in der $\Sigma_x m$ die Summe der entsprechenden x Zahlen m darstellt, also die Gesammtzahl der in den fraglichen x Substitutionen vorkommenden einzelnen Vertauschungen solcher Buchstaben, die auch von der herausgegriffenen Substitution vertauscht werden.

Ist dann x noch $< z$, so muss schon für irgend $x + 1$ der z Substitutionen

$$\Sigma_{x+1} m < (x + 1)\left(\frac{1}{3}u\right)$$

sein, wenn $\Sigma_{x+1} m$ entsprechend die Summe der bezüglichen $x + 1$ Zahlen m bezeichnet; und um so mehr folglich

$$\Sigma_x m < (x + 1)\left(\frac{1}{3}u\right),$$

oder

$$x\left(\frac{1}{3}u\right) > \Sigma_x m - \left(\frac{1}{3}u\right). \tag{7}$$

Sollen aber x die Bedingung (6) erfüllende Substitutionen unter den betrachteten z auch nur in keiner grösseren Anzahl derselben Eigenschaft aus den z sämmtlich enthalten sein, so muss zu ihnen jede solche dieser z Substitutionen gehören, die schon einzeln der Bedingung (5) genügt, d. h. also mindestens $\left(\frac{1}{3}u\right)$ Buchstaben mit der herausgegriffenen gemeinsam betrifft. Denn eine solche Substitution würde ja sonst mit den x zusammen eine Anzahl von $x+1$ unter einander verschiedenen aus den s bilden, für welche die durch Addition aus (5) und (6) folgende Beziehung

$$\Sigma_{x+1} m \geqq (x+1)\left(\frac{1}{8}u\right)$$

bestände, im Widerspruche mit der Voraussetzung.

Der Bedingung (5) entspricht nun vor Allem die herausgegriffene Substitution selbst, die sich ja unter den betrachteten s, als der Gesammtheit der in der Gruppe vorhandenen ihrer Buchstabenzahl, ebenfalls findet, und für die m eben geradezu $=u$ ist.

Ferner aber, wie gesagt, nach (1) jede solche der s Substitutionen, die von der herausgegriffenen nicht in sich selbst transformirt wird. Und von dieser Eigenschaft ist sicher jede, die auch nur einen von der herausgegriffenen vertauschten Buchstaben durch einen von derselben nicht betroffenen ersetzt. Denn von solchen zwei Buchstaben wird ja der erstere durch die in Rede stehende Transformation geändert, der andere, ihn ersetzende, dagegen nicht; so dass der letztere von der transformirten Substitution nicht mehr an die Stelle desselben Buchstaben gebracht wird, auf dessen Platz er durch die ursprüngliche kommt.

Zu der durch $\Sigma_x m$ dargestellten Anzahl aller von den fraglichen x Substitutionen bewirkten Vertauschungen von einzelnen Buchstaben der herausgegriffenen zählt mithin, als nothwendig diesen Substitutionen angehörend, jede überhaupt in den betrachteten s vorkommende Ersetzung eines solchen Buchstaben durch einen von der herausgegriffenen nicht vertauschten. Die Gesammtzahl dieser Ersetzungen ist leicht zu bestimmen. Denn da von den s Substitutionen, als solchen der Buchstabenzahl u, zusammen genau su Vertauschungen einzelner Buchstaben ausgeführt werden, so muss darunter jede der möglichen $n(n-1)$ verschiedenen Ersetzungen eines der n Gruppenbuchstaben durch einen andern derselben genau $\frac{su}{n(n-1)}$ mal auftreten, weil ja nach (2), (3) und (4) bei der mehr als einfachen Transitivität der Gruppe gleichoft, und folglich der offenbar auf $u(n-u)$ Arten mögliche Fall, dass insbesondere einer der u von der herausgegriffenen Substitution vertauschten Buchstaben durch einen der übrigen $n-u$, von ihr nicht betroffenen Gruppenbuchstaben ersetzt wird, insgesammt $\frac{su}{n(n-1)} \cdot u(n-u) = s\frac{u^2(n-u)}{n(n-1)}$ mal.

Indem man hierzu die u Ersetzungen je eines Buchstaben der herausgegriffenen Substitution durch einen andern solchen fügt, welche diese, wie gesagt, ebenfalls zu den fraglichen x gehörige Substitution selbst bewirkt, hat man somit schliesslich für die Zahl $\Sigma_x m$ aller durch die x ausgeführten Vertauschungen von einzelnen solchen Buchstaben die untere Grenze

$$\Sigma_x m \geqq s \frac{u^2(n-u)}{n(n-1)} + u.$$

Verbindet man dies mit der vorher unter der Voraussetzung $x < s$ erhaltenen Beziehung (7), so ergiebt sich unter derselben Voraussetzung, und wenn also x die grösste der Bedingung (6) genügende Zahl ist,

$$x\left(\frac{1}{3}u\right) > s \frac{u^2(n-u)}{n(n-1)} + u - \left(\frac{1}{3}u\right),$$

mithin, da den Bedeutungen von u und $\left(\frac{1}{3}u\right)$ zufolge $u > \left(\frac{1}{3}u\right) > 0$ ist, erst recht

(8) $$x > s \frac{u^2(n-u)}{\left(\frac{1}{3}u\right) n(n-1)}.$$

Zwischen x und $\Sigma_x m$ wird aber hier für jede beliebige Anzahl x unter den betrachteten s Substitutionen auch eine Abhängigkeit durch die Art gegeben, wie sich in Folge der mehr als einfachen Transitivität der Gruppe die mit der herausgegriffenen Substitution gemeinsam betroffenen Buchstaben auf die Gesammtheit der s Substitutionen vertheilen müssen.

Nach (2), (3) und (4) muss nämlich offenbar in dieser Gesammtheit, wie in jeder durch die Gruppe eindeutig bestimmten, nicht nur die Vertauschung jedes einzelnen der Gruppenbuchstaben gleichoft auftreten, sondern auch die jedes Paares derselben durch eine und dieselbe Substitution. Von jeder der fraglichen s Substitutionen werden aber u Buchstaben vertauscht, und aus diesen lassen sich bei nicht gleichgültiger Aufeinanderfolge $u(u-1)$ verschiedene Paare bilden. Das giebt in allen s zusammen su Einzel- und $su(u-1)$ Paar-Vertauschungen. Wenn also, wie hier, gleichviele, so kommen davon auf jeden einzelnen der n Gruppenbuchstaben $\frac{su}{n}$ und auf jede der $n(n-1)$ aus denselben möglichen verschiedenen Reihenfolgen von je zweien $\frac{su(u-1)}{n(n-1)}$. Und folglich ist die Gesammtzahl dieser Vertauschungen für alle u einzelnen Buchstaben der herausgegriffenen Substitution $\frac{su}{n} \cdot u = s\frac{u^2}{n}$ und für alle $u(u-1)$ aus denselben zu bildenden verschiedenen Aufeinanderfolgen von je zweien

$$\frac{su(u-1)}{n(n-1)} \cdot u(u-1) = s \frac{u^2(u-1)^2}{n(n-1)}.$$

Die erste dieser zwei Zahlen wird nun andererseits durch $\Sigma_s m$ dargestellt, wenn, ähnlich wie $\Sigma_x m$ für gewisse x der betrachteten Substitutionen, $\Sigma_s m$ für alle s die Summe der Zahlen m bedeutet, welche angeben, wie viele vertauschte Buchstaben jede einzelne dieser Substitutionen mit der herausgegriffenen gemein hat; und also die zweite entsprechend durch $\Sigma_s\big(m(m-1)\big)$, da eben die Anzahl der möglichen verschiedenen Reihenfolgen von je zweien bei m Buchstaben $m(m-1)$ beträgt. Man hat somit

$$\Sigma_s m = s\,\frac{u^2}{n}, \quad \text{und} \quad \Sigma_s\big(m(m-1)\big) = s\,\frac{u^2(u-1)^2}{n(n-1)}. \tag{9}$$

Und da

$$\Sigma_s\big(m(m-1)\big) = \Sigma_s m^2 - \Sigma_s m$$

ist, also

$$\Sigma_s m^2 = \Sigma_s\big(m(m-1)\big) + \Sigma_s m,$$

wenn wieder in entsprechender Weise unter $\Sigma_s m^2$ die über alle betrachteten s Substitutionen erstreckte Summe der Quadrate der Zahlen m verstanden wird, so ist mit $\Sigma_s m$ und $\Sigma_s\big(m(m-1)\big)$ zugleich diese Quadratsumme $\Sigma_s m^2$ gegeben.

Die Summe $\Sigma_k y^2$ der Quadrate irgend welcher reellen Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ steht aber zur Summe $\Sigma_k y$ der letzteren selbst in der Beziehung

$$\Sigma_k y^2 \geqq \frac{1}{k}(\Sigma_k y)^2; \tag{10}$$

d. h. sie ist keinesfalls kleiner als das durch die Anzahl k der Zahlen getheilte Quadrat dieser Summe. Oder, wie dies in anderer bekannter Form ausgesprochen werden kann, da ja

$$\frac{1}{k}(\Sigma_k y)^2 = k\left(\frac{1}{k}\Sigma_k y\right)^2$$

ist: der kleinste Werth, den die Summe der Quadrate reeller Zahlen durch Aenderung der letzteren bei gleichbleibender Summe und Anzahl derselben erlangen kann, tritt ein, wenn diese Zahlen alle einander gleich werden, also jede gleich der durch die Anzahl getheilten Summe derselben, dem arithmetischen Mittel aus ihnen.

Es ergiebt sich dies ja z. B., wenn man y in $\Sigma_k y^2$ durch

$$y - \frac{1}{k}\Sigma_k y + \frac{1}{k}\Sigma_k y$$

ersetzt und nach den Differenzen $y - \frac{1}{k}\Sigma_k y$ entwickelt. Man erhält dadurch, da

$$\Sigma_k\left(2\left(y - \frac{1}{k}\Sigma_k y\right)\frac{1}{k}\Sigma_k y\right)$$

$$= \frac{2}{k}\Sigma_k y \cdot \Sigma_k\left(y - \frac{1}{k}\Sigma_k y\right) = \frac{2}{k}\Sigma_k y \cdot (\Sigma_k y - \Sigma_k y) = 0,$$

und

$$\Sigma_k\left(\frac{1}{k}\Sigma_k y\right)^2 = k\left(\frac{1}{k}\Sigma_k y\right)^2 = \frac{1}{k}(\Sigma_k y)^2$$

ist, die Gleichheit

$$\Sigma_k y^2 = \Sigma_k\left(y - \frac{1}{k}\Sigma_k y + \frac{1}{k}\Sigma_k y\right)^2 = \Sigma_k\left(y - \frac{1}{k}\Sigma_k y\right)^2 + \frac{1}{k}(\Sigma_k y)^2,$$

die zugleich zeigt, um wie viel die Quadratsumme reeller Veränderlicher von ihrem bei gegebener Summe und Anzahl derselben kleinstmöglichen Werthe abweicht, nämlich um die Quadratsumme der Unterschiede dieser Veränderlichen von ihrem arithmetischen Mittel.

Demnach ist hier für irgend eine von Null verschiedene Anzahl x der s Zahlen m (die also angeben, wie viele Buchstaben jede der s in der Gruppe insgesammt vorhandenen verschiedenen Substitutionen der kleinsten vertauschten Buchstabenzahl u mit einer aus ihnen herausgegriffenen gemeinsam betrifft)

$$\Sigma_x m^2 \geqq \frac{1}{x}(\Sigma_x m)^2,$$

wenn durch $\Sigma_x m$ wieder die einfache Summe, durch $\Sigma_x m^2$ die Quadratsumme dieser x dargestellt wird, wie dies für alle s entsprechend durch $\Sigma_s m$ und $\Sigma_s m^2$ geschieht. Und für die übrigen $s - x$, die ja dann zur einfachen Summe $\Sigma_s m - \Sigma_x m$ und zur Quadratsumme $\Sigma_s m^2 - \Sigma_x m^2$ haben,

$$\Sigma_s m^2 - \Sigma_x m^2 \geqq \frac{1}{s-x}(\Sigma_s m - \Sigma_x m)^2,$$

wenn x zugleich $< s$ ist.

Das giebt zusammen unter den Bedingungen $0 < x < s$:

$$\Sigma_s m^2 \geqq \frac{1}{x}(\Sigma_x m)^2 + \frac{1}{s-x}(\Sigma_s m - \Sigma_x m)^2,$$

und bei Erweiterung mit dem nicht negativen Nennerproducte $x(s-x)$:

$$x(s-x)\,\Sigma_s m^2 \geqq (s-x)\,(\Sigma_x m)^2 + x(\Sigma_s m - \Sigma_x m)^2,$$

welche letztere Beziehung offenbar auch noch in den Fällen $x = 0$ und $= s$ gilt, da ja $\Sigma_x m = 0$, wenn $x = 0$.

Und daraus ergiebt sich der Reihe nach weiter, durch Entwicklung nach $\Sigma_x m$, beiderseitige Division mit der positiven Zahl s und Ergänzung der $\Sigma_x m$ enthaltenden Glieder zum vollen Quadrat:

$$x(s-x)\,\Sigma_s m^2 \geqq s(\Sigma_x m)^2 - 2x\,\Sigma_x m\,\Sigma_s m + x(\Sigma_s m)^2,$$

$$x\left(1-\frac{x}{s}\right)\Sigma_s m^2 \geqq (\Sigma_x m)^2 - 2\,\frac{x}{s}\,\Sigma_x m\,\Sigma_s m + \left(\frac{x}{s}\right)^2(\Sigma_s m)^2$$
$$- \left(\frac{x}{s}\right)^2(\Sigma_s m)^2 + \frac{x}{s}(\Sigma_s m)^2,$$

$$x\left(1-\frac{x}{s}\right)\Sigma_s m^2 \geqq \left(\Sigma_x m - \frac{x}{s}\,\Sigma_s m\right)^2 + \frac{x}{s}\left(1-\frac{x}{s}\right)(\Sigma_s m)^2;$$

also endlich, indem $\frac{x}{s}\left(1-\frac{x}{s}\right)(\Sigma_s m)^2$ auf die andere Seite geschafft und dort der Factor $x\left(1-\frac{x}{s}\right)$ ausgesondert wird:

$$x\left(1-\frac{x}{s}\right)\left(\Sigma_s m^2 - \frac{1}{s}(\Sigma_s m)^2\right) \geqq \left(\Sigma_x m - \frac{x}{s}\,\Sigma_s m\right)^2.$$

Soll nun insbesondere x der Bedingung (6) genügen, so darf die damit gegebene untere Grenze $x\left(\frac{1}{3}u\right)$ für $\Sigma_x m$ in der eben erhaltenen Beziehung sicher eingesetzt werden, wenn $x\left(\frac{1}{3}u\right)$ noch $\geqq \frac{x}{s}\, \Sigma_s m$ ist; da ja $\left(\Sigma_x m - \frac{x}{s}\, \Sigma_s m\right)^2$ mit abnehmendem Werthe von $\Sigma_x m$ ebenfalls abnimmt, solange $\Sigma_x m$ nicht $< \frac{x}{s}\, \Sigma_s m$ wird. Und da x nicht negativ, so ist $x\left(\frac{1}{3}u\right) \geqq \frac{x}{s}\, \Sigma_s m$, wenn

$$\left(\frac{1}{3}u\right) \geqq \frac{1}{s}\, \Sigma_s m. \tag{11}$$

Unter dieser letzteren Voraussetzung erhält man somit durch die gemachte besondere Annahme (6) über x:

$$x\left(1 - \frac{x}{s}\right)\left(\Sigma_s m^2 - \frac{1}{s}(\Sigma_s m)^2\right) \geqq \left(x\left(\frac{1}{3}u\right) - \frac{x}{s}\, \Sigma_s m\right)^2,$$

und folglich auch:

$$\left(1 - \frac{x}{s}\right)\left(\Sigma_s m^2 - \frac{1}{s}(\Sigma_s m)^2\right) \geqq x\left(\left(\frac{1}{3}u\right) - \frac{1}{s}\, \Sigma_s m\right)^2; \tag{12}$$

wie sich ja für $x > 0$ durch Kürzung mit x ergiebt und in dem belanglosen Falle $x = 0$ daraus, dass nach (10) immer

$$\Sigma_s m^2 - \frac{1}{s}(\Sigma_s m)^2 \geqq 0$$

sein muss.

Dabei kann also x noch jede der Beziehung (6):

$$\Sigma_x m \geqq x\left(\frac{1}{3}u\right)$$

entsprechende Zahl bedeuten und ebenso, da ja in (12) mit abnehmendem Werthe von x die linke Seite grösser, die rechte kleiner wird, auch jede untere Grenze einer solchen Zahl, je höher, desto vortheilhafter.

Für die grösste derartige Zahl besteht aber, wie vorher gezeigt (8), die untere Grenze

$$x > s\, \frac{u^2(n-u)}{\left(\frac{1}{3}u\right) n(n-1)},$$

sobald diese grösste Zahl noch $< s$ ist. Und das ist ja der Fall, wenn

$$\Sigma_s m < s\left(\frac{1}{3}u\right). \tag{13}$$

Zugleich wird mit dieser letzteren Annahme bei dem positiven Werthe von s die Bedingung (11) für (12) erfüllt. Man darf dann also in (12) jene untere Grenze (8) für x einführen. Thut man dies und ersetzt zugleich $\Sigma_s m$ und $\Sigma_s m^2$ durch ihre Ausdrücke in s, n und u nach (9):

$$\Sigma_s m = s\, \frac{u^2}{n},$$

und

$$\Sigma_s m^2 = \Sigma_s\big(m(m-1)\big) + \Sigma_s m = s\, \frac{u^2(u-1)^2}{n(n-1)} + s\, \frac{u^2}{n}$$

$\Big($wodurch $\quad \Sigma_s m^2 - \frac{1}{s}(\Sigma_s m)^2 = s\,\frac{u^2(u-1)^2}{n(n-1)} + s\,\frac{u^2}{n^2} - s\,\frac{u^4}{n^2}$

$$= s\,\frac{u^2}{n^2(n-1)}\Big(n(u-1)^2 + n(n-1) - (n-1)\,u^2\Big)$$

$= s\,\frac{u^2(n-u)^2}{n^2(n-1)}$ wird$\Big)$, so ergiebt sich, mit der aus (13) hervorgehenden Bedingung

$$(14)\qquad s\,\frac{u^2}{n} < s\Big(\frac{1}{3}\,u\Big),\quad \text{oder}\quad u^2 < \Big(\frac{1}{3}\,u\Big)\,n,$$

zunächst:

$$\left(1 - \frac{u^2(n-u)}{\left(\frac{1}{3}\,u\right) n(n-1)}\right) s\,\frac{u^2(n-u)^2}{n^2(n-1)} > s\,\frac{u^2(n-u)}{\left(\frac{1}{3}\,u\right) n(n-1)}\left(\Big(\frac{1}{3}\,u\Big) - \frac{u^2}{n}\right)^2,$$

und daraus durch Kürzung mit $su^2(n-u)$ und Erweiterung mit $\left(\frac{1}{3}\,u\right) n^3(n-1)$ $\Big($um rechts allein $\left(\left(\frac{1}{3}\,u\right) n - u^2\right)^2$ zu haben$\Big)$:

$$(15)\qquad \left(\Big(\frac{1}{3}\,u\Big)\,n - \frac{u^2(n-u)}{n-1}\right)(n-u) > \left(\Big(\frac{1}{3}\,u\Big)\,n - u^2\right)^2.$$

Denn es sind ja sowohl s, n und $n-1 \;\; > 0$, als nach (14) und dem Begriffe $\left(\frac{1}{3}\,u\right)$ $\big($s. unter (5)$\big)$ auch $\left(\frac{1}{3}\,u\right)$ und $n-u$.

Es handelt sich jetzt nur noch um die Auflösung nach u.

In (15) würde, wie ersichtlich, auch die linke Seite durch $\left(\left(\frac{1}{3}\,u\right)\,n - u^2\right)$ theilbar werden, wenn darin für $n-u$ das wegen $u > 1$ grössere $n-1$ gesetzt werden dürfte. Diese Seite ist aber $\Big($mit $\frac{u^2}{n-1}$ erweitert$\Big)$

$$= \frac{n-1}{u^2}\cdot\frac{u^2(n-u)}{n-1}\left(\Big(\frac{1}{3}\,u\Big)\,n - \frac{u^2(n-u)}{n-1}\right),$$

also von der Gestalt $qy(a-y)$, unter q, a und y positive Zahlen verstanden. Und letzterer Ausdruck wird ja, weil

$$= q\left(\frac{1}{4}\,a^2 - \Big(\frac{1}{2}\,a - y\Big)^2\right),$$

mit grösser werdendem y bei unveränderten Werthen von q und a ebenfalls grösser, so lange $y \leqq \frac{1}{2}\,a$ bleibt. Es ist demnach hier, da $\frac{u^2(n-u)}{n-1} < u^2$, auch sicher

$$\frac{n-1}{u^2}\cdot\frac{u^2(n-u)}{n-1}\left(\Big(\frac{1}{3}\,u\Big)\,n - \frac{u^2(n-u)}{n-1}\right)\left(\Big(\frac{1}{3}\,u\Big)\,n - \frac{u^2(n-u)}{n-1}\right)(n-u)$$

d. h.

$$< \left(\Big(\frac{1}{3}\,u\Big)\,n - u^2\right)(n-1),$$

wenn

(16) $$u^2 \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u\right) n.$$

Und da auch die Gültigkeitsbedingung (14) von (15) mit dieser Annahme erfüllt wird, so ist also unter derselben nach (15) um so mehr

$$\left(\left(\frac{1}{3}u\right) n - u^2\right)^2 < \left(\left(\frac{1}{3}u\right) n - u^2\right)(n-1).$$

Das giebt dann durch Kürzung mit dem sowohl nach Voraussetzung als nach der Beziehung selbst positiven Ausdruck $\left(\frac{1}{3}u\right) n - u^2$:

$$\left(\frac{1}{3}u\right) n - u^2 < n - 1,$$

woraus wegen der gemachten Annahme (16) weiter:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u\right) n < n - 1$$

folgt, also auch:

$$\left(\frac{1}{3}u\right) < 2,$$

und da $\left(\frac{1}{3}u\right)$ die kleinste nicht weniger als $\frac{1}{3}u$ betragende ganze Zahl bedeuten kann $\big($s. unter (5)$\big)$:

$$\frac{1}{3}u \text{ selbst } \overline{\gtrless} 1.$$

Als Folge der Annahme (16) erhält man somit schliesslich $u \overline{\gtrless} 3$, d. h., nach dem Begriffe von u, es muss dann die Gruppe von der identischen verschiedene Substitutionen von nicht mehr als drei Buchstaben enthalten. Dann enthält sie aber bekanntlich die ganze alternirende ihres Grades (vgl. Thl. I, Bd. 40, S. 182 unter (I)).

Soll dies daher nicht der Fall sein, sondern $u > 3$, so darf die Annahme (16) nicht zutreffen, und es muss dann also

$$u^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u\right) n$$

sein. Das besagt aber, da eben unter $\left(\frac{1}{3}u\right)$ beliebig $\frac{1}{3}u$ selbst oder die kleinste nicht unter $\frac{1}{3}u$ liegende ganze Zahl verstanden werden darf, und die letztere unter der Voraussetzung $u > 3$ keinesfalls < 2 ist, dass unter dieser Voraussetzung u^2 sowohl $> \frac{1}{6}un$ als $> n$ ist, u selbst also sowohl $> \frac{1}{6}n$ als $> \sqrt{n}$.

Und so hat man zunächst das Ergebniss:

(17) Die Classe jeder mehr als einfach transitiven Gruppe von n Buchstaben, welche die alternirende ihres Grades nicht enthält, ist nicht nur > 3, sondern auch $> \sqrt{n}$ und $> \frac{1}{6}n$.

Lässt man jetzt weiter in der Beziehung (15) und ihrer Voraussetzung (14) $\left(\frac{1}{3}u\right)$ einfach $\frac{1}{3}u$ selbst bedeuten, so wird aus (14) bei beiderseitiger Division mit dem positiven Factor u:

$$u < \frac{1}{3}n, \tag{18}$$

und aus (15) bei solcher mit u^2:

$$\left(\frac{1}{3}n - \frac{u(n-u)}{n-1}\right)\frac{n-u}{u} > \left(\frac{1}{3}n - u\right)^2. \tag{19}$$

In letzterer Ungleichung wird aber die linke Seite mit kleiner werdendem Werthe von u bei gleichbleibendem von n sicher grösser, so lange

$$0 < u \leqq \frac{1}{2}n$$

ist; da ja $u(n-u)$ $\left(= \frac{1}{4}n^2 - \left(\frac{1}{2}n - u\right)^2\right)$ für $u \leqq \frac{1}{2}n$ mit u zugleich abnimmt. Unter der Voraussetzung (18) folglich, unter der die Ungleichung (19) gilt, und nach der ja u sogar $< \frac{1}{3}n$ bleiben soll, besteht dieselbe auch, wenn darin links für u irgend eine dieser Voraussetzung genügende positive untere Grenze eingesetzt wird.

Geschieht dies nun mit der eben (17) gefundenen $\frac{1}{6}n$, die ja von der erforderlichen Art ist, so ergiebt sich:

$$\left(\frac{1}{3}n - u\right)^2 < 5\left(\frac{1}{3}n - \frac{5}{36}\frac{n^2}{n-1}\right) = \frac{5}{36}n\left(12 - 5\frac{n}{n-1}\right) < \frac{35}{36}n < n,$$

mithin insbesondere:

$$\frac{1}{3}n - u < \sqrt{n}$$

oder

$$u > \frac{1}{3}n - \sqrt{n};$$

und dies gilt also zunächst unter der Bedingung:

$$\frac{1}{6}n \leqq u < \frac{1}{3}n.$$

Als augenscheinlich unter $\frac{1}{3}n$ liegend und daher für $u \geqq \frac{1}{3}n$ selbstverständlich, bedarf aber die so erhaltene untere Grenze für u der Beschränkung $u < \frac{1}{3}n$ nicht und besteht somit schon, wenn nur $u \geqq \frac{1}{6}n$ ist.

Zufolge des vorigen Ergebnisses (17) und der Bedeutung der Classe u als kleinstmöglicher Buchstabenzahl einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe hat man demnach sofort den Satz:

Enthält eine mehr als einfach transitive Gruppe von n Buchstaben die alternirende ihres Grades nicht, so vertauscht jede von der *identischen verschiedene Substitution in ihr nicht nur mehr als* 3, *sondern auch mehr als* $\sqrt{n}$ *und als* $\frac{1}{3}n - \sqrt{n}$ *Buchstaben.*

$\left(u > \frac{1}{6}n\right.$ ist als blosse, durch Addition zu erhaltende Folge von $u > \sqrt{n}$ und $u > \frac{1}{3}n - \sqrt{n}$ hierin nicht mehr erwähnt.$\Big)$

Die zuletzt erlangte Grenze $u > \frac{1}{3}n - \sqrt{n}$ könnte noch wieder in derselben Weise zu weiterer Annäherung benützt werden, wie dies zu ihrer Ableitung soeben mit $u > \frac{1}{6}n$ geschehen ist; indem sie also ihrerseits in die linke Seite von (19) eingeführt würde. Indessen erscheint die auf diese Weise, und auch durch Wiederholung des Verfahrens, noch zu erzielende Erhöhung $\left(\text{bis auf annähernd } \frac{1}{3}n - \frac{1}{3}\sqrt{2n}\right)$ zu unbedeutend und der entstehende Ausdruck auch zu wenig einfach, um weiter darauf einzugehen.

(Statt von dem Ergebnisse $u > \frac{1}{6}n$, wenn > 3, kann man übrigens auch von dem im ersten Theile der Arbeit (Bd. 40, S. 182, Satz I) für sich auf einfachere Weise nachgewiesenen ausgehen, dass u, wenn > 3, auch $\geqq \frac{1}{4}n$ ist, mit Ausnahme höchstens des Falles $n = 25$, in dem dann aber immer noch u mindestens $\left[\frac{1}{4}n\right] = 6$ beträgt. Durch Einsetzung von $\frac{1}{4}n$ für u auf der linken Seite von (19) erhält man:

$$\left(\frac{1}{3}n - u\right)^2 < 3\left(\frac{1}{3}n - \frac{3}{16}\frac{n^2}{n-1}\right) = n\left(1 - \frac{9}{16}\frac{n}{n-1}\right) < \frac{7}{16}n,$$

mithin

$$\frac{1}{3}n - u < \sqrt{\frac{7}{16}n} < \frac{2}{3}\sqrt{n}$$

und

$$u > \frac{1}{3}n - \frac{2}{3}\sqrt{n}.$$

Und da $\frac{1}{3}n - \frac{2}{3}\sqrt{n}$ für $n = 25$ noch < 6 ist, so hat man überhaupt:

$$u > \frac{1}{3}n - \frac{2}{3}\sqrt{n}, \quad \text{wenn} \quad > 3,$$

also eine etwas höhere Grenze als $\frac{1}{3}n - \sqrt{n}$ von ähnlich einfacher Gestalt.)

Breslau, im August 1896.

Ueber die Integration der Hamilton'schen Differentialgleichung mittelst Separation der Variabeln.

Von

Paul Stäckel in Königsberg i. Pr.

In der Abhandlung: *Eine charakteristische Eigenschaft der Flächen, deren Linienelement ds durch*

$$ds^2 = \big(\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)\big)\,(dq_1^2 + dq_2^2)$$

gegeben wird (diese Annalen, Bd. 35, 1889, S. 91—103) habe ich die Frage, wann eine *Hamilton'sche Differentialgleichung:*

$$H \equiv E\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + 2F\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial W}{\partial q_2} + G\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - 2(\Pi + \alpha) = 0$$

mittelst *Separation der Variabeln* integrirt werden kann, unter der Voraussetzung beantwortet, dass alle betrachteten Grössen *reell* seien. Lässt man diese Voraussetzung fallen, so verliert meine damalige Beweisführung ihre Kraft, da bei ihr die Thatsache benutzt wurde, dass E und G im reellen Gebiete nur für besondere Werthe von q_1 und q_2 verschwinden können. Nichts destoweniger bleiben die Ergebnisse meiner Untersuchung auch im Gebiete der *complexen Werthe* ausnahmslos gültig, und das nachzuweisen ist der Zweck dieser Note.

Ist zunächst $E = G = 0$, so folgt, wenn Separation der Variabeln stattfindet, aus der Gleichung

$$H \equiv 2FW_1W_2 - 2(\Pi + \alpha) = 0$$

durch zweimalige Differentiation:

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2 \log(\Pi + \alpha)}{\partial q_1 \partial q_2} = 0,$$

und da F und Π von α unabhängig sind, so muss für sich

$$\frac{\partial^2 \log F}{\partial q_1 \partial q_2} = 0, \quad \Pi_{12} = 0, \quad \Pi_1 . \Pi_2 = 0$$

sein. Man darf daher unbeschadet der Allgemeinheit $F = 1$ setzen, während Π entweder nur von q_1 oder nur von q_2 abhängt. Mithin hat die Gleichung $H = 0$ entweder den Typus II[a]) oder den Typus II[b]) meiner früheren Abhandlung.

Verschwindet aber nur eine der Grössen E und G, etwa G, so behalten die Betrachtungen in Nr. 2 ihre Gültigkeit. Geht man nun die vier Fälle durch, die dort unterschieden wurden, so kann *Fall* 1. und *Fall* 3. nicht eintreten, weil sonst $E = 0$ wäre.

Im *Falle* 4. wird

$$E\Pi_2 - E_2(\Pi + \alpha) = 0,$$

folglich darf man $E = 1$ setzen, und Π hängt nur von q_1 ab. Weiter ist

$$F = \frac{1}{W_2} \cdot \frac{\Pi + \alpha - W_1^2}{2 W_1} = \psi(q_2) \cdot \varphi(q_1),$$

oder, indem man statt q_2 eine Function von q_2 als zweite Veränderliche einführt:

$$F = \varphi(q_1),$$

das heisst, die Gleichung $H = 0$ gehört zu dem Typus II[a]).

Im *Falle* 2. wird:

$$\frac{d}{b} = -\frac{\Pi_2}{\Pi + \alpha} + 2\frac{F_2}{F} - \frac{E_2}{E} = \mathfrak{b}(q_2, \alpha).$$

Folglich ist

$$-\frac{\Pi_{12}}{\Pi + \alpha} + \frac{\Pi_1 \Pi_2}{(\Pi + \alpha)^2} + \frac{\partial^2 \log \frac{F^2}{E}}{\partial q_1 \partial q_2} = 0,$$

und da E, F und Π von α unabhängig sind, so muss

$$\frac{\partial^2 \log \frac{F^2}{E}}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$$

sein, sodass man unbeschadet der Allgemeinheit $E = F^2$ setzen darf.

Weiter hat man:

$$-\frac{f}{b} = \mathfrak{b}(q_2, \alpha)\frac{F_2}{F} + \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 = \mathfrak{f}(q_2, \alpha).$$

Hieraus folgt:

$$F = \chi(q_1)\,\omega(q_2), \qquad E = \chi^2(q_1)\,\omega^2(q_2)$$

und indem man statt q_1 eine Function von q_1 als erste Veränderliche einführt:

$$F = \omega(q_2), \qquad E = \omega^2(q_2).$$

Endlich besteht die Gleichung:

$$-2\frac{g}{b} = (\Pi + \alpha)\left(\mathfrak{b}(q_2, \alpha) + 2\frac{\omega'(q_2)}{\omega(q_2)}\right)^2 = \mathfrak{g}(q_2, \alpha).$$

Ist der zweite Factor von Null verschieden, so wird Π eine Function von q_2 allein, und die Gleichung $H=0$ hat den Typus II[b]). Verschwindet aber der zweite Factor, so muss gleichzeitig

$$\Pi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \omega'(q_2) = 0$$

sein, und es tritt der Typus II[a]) ein.

Hiermit ist bewiesen, dass man im Gebiete der complexen Grössen keine neuen Typen erhält.

Königsberg i. Pr., im Mai 1896.

Eine arithmetische Formel.

Von

E. Netto in Giessen.

(Mitgetheilt von E. Study).

In meiner Abhandlung über Systeme von Kegelschnitten (Math. Ann. Bd. 40, S. 542) ist ein Punkt unerledigt gelassen. Es wird nämlich dort für die Zahl $N(\lambda, \lambda')$ der linear-unabhängigen Kegelschnittsysteme mit gegebenen Charakteristiken λ, λ' nur ein Ausdruck angegeben, der die Auflösung eines Systems diophantischer Gleichungen verlangt. Die gemeinte Formel ist

$$N(\lambda, \lambda') = \Sigma(2j+1)(2j'+1)(j+j'+1),$$

wo die Summe sich bezieht auf alle positiven ganzen Zahlen j, j', die zusammen mit zwei anderen $\varkappa, \varkappa'$ den Gleichungen

$$j + 2j' + 3\varkappa = \lambda + 2\lambda', \quad j' + 2j + 3\varkappa' = \lambda' + 2\lambda$$

genügen. Ich hatte aber bereits die Vermuthung ausgesprochen, dass diese Zahl, nach Analogie etwa der Zahl $\binom{n+3}{3}$ der linear-unabhängigen Flächen n. Ordnung im Raume, eine ganze Function der Charakteristiken sein möchte. Herr Netto hat nun die Freundlichkeit gehabt, mir den folgenden Werth der obigen Summe mitzutheilen, den ich mit seiner Erlaubniss veröffentliche:

$$\begin{aligned}120N = {} & (\lambda^5+\lambda'^5) + 10(\lambda^4\lambda'+\lambda\lambda'^4) + 40(\lambda^3\lambda'^2+\lambda^2\lambda'^3)\\ & + 15(\lambda^4+\lambda'^4) + 120(\lambda^3\lambda'+\lambda\lambda'^3) + 240\lambda^2\lambda'^2\\ & + 85(\lambda^3+\lambda'^3) + 430(\lambda^2\lambda'+\lambda\lambda'^2)\\ & + 225(\lambda^2+\lambda'^2) + 600\lambda\lambda'\\ & + 247(\lambda+\lambda')\\ & + 120.\end{aligned}$$

Für $\lambda'=0$ reducirt sich die Zahl N, wie a. a. O. angegeben, auf $\binom{\lambda+5}{5}$.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

49. Band. 2. Heft.

Ausgegeben am 6. Juli.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie.

Von

Paul Stäckel in Kiel und Friedrich Engel in Leipzig.

1.

Als wir im fünften Abschnitte unsers Buches: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie* (Leipzig 1895) alle uns zugänglichen Aeusserungen von Gauss über die „ersten Gründe der Geometrie" zusammenstellten, bemerkten wir dazu, dass dieser Abschnitt recht dürftig ausgefallen sei (S. V und 216*)), und dass das vorliegende Material nicht einmal ausreiche um zu entscheiden, in welcher Beziehung die Untersuchungen der beiden Bolyai zu den Untersuchungen von Gauss gestanden haben (S. 242).

Dass wir uns jetzt in günstigerer Lage befinden, verdanken wir vor allem der Ausdauer und Hingebung des Herrn Baumeisters Franz Schmidt in Budapest, der seit dreissig Jahren unausgesetzt bemüht ist, den Antheil der beiden Bolyai an der Geschichte der nichteuklidischen Geometrie aufzuklären und festzustellen. Ihm hat nämlich die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen im December 1896 dankenswerther Weise eine Abschrift des Briefwechsels zwischen Gauss und Wolfgang Bolyai zur Verfügung gestellt, und im Einverständnisse mit ihm hat der eine von uns den mathematischen Theil dieses Briefwechsels ausgezogen und in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht**). Wir bringen hier die betreffenden Stellen nochmals zum Abdruck und fügen auch Wolfgang Bolyais *Göttingische Theorie der Parallelen* hinzu, die dessen Briefe vom 16. September 1804 beigelegt war, die aber der Kürze der Zeit wegen in die Göttinger Nachrichten nicht hatte mitaufgenommen werden können; zur Erleichterung des Verständnisses geben wir neben dem lateinischen Texte eine deutsche Uebersetzung dieser wichtigen Abhandlung W. Bolyais.

Wir verdanken jedoch Herrn Baumeister Schmidt noch mehr.

---

*) Hier wie im Folgenden beziehen sich die ohne weitere Bemerkung angeführten Seitenzahlen stets auf die Anfangs erwähnte *Theorie der Parallellinien.*

**) *Mittheilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai* von Paul Stäckel, Göttinger Nachrichten, mathematisch-physicalische Classe, Jahrgang 1897, Heft 1.

In Gemeinschaft mit seinem Sohne, Herrn Prof. Dr. Martin Schmidt in Pressburg, hat er den Nachlass der beiden Bolyai einer erneuten Durchsicht unterworfen und uns über deren Ergebnisse eine Reihe von Mittheilungen zukommen lassen, von denen wir einen Theil bereits in unsrer *Theorie der Parallellinien* benutzt haben. Namentlich aber hat er uns einige, bis jetzt unbekannt gebliebene, in magyarischer Sprache abgefasste Schriften über die beiden Bolyai zugänglich gemacht, die eine werthvolle, ja unentbehrliche Ergänzung zu den Briefen von Gauss und Wolfgang Bolyai bilden.

2.

In Briefen an Taurinus (8. Nov. 1824, S. 249), Bessel (27. Jan. 1829, S. 226) und Schumacher (17. Mai 1831, Seite 230 und 28. Nov. 1846, S. 225) berichtet Gauss, dass er sich schon sehr früh mit der Theorie der Parallelen beschäftigt habe, und seine verschiedenen Angaben lassen sich dahin vereinigen, dass man ungefähr das Jahr 1792 als Anfangspunkt seiner „Meditationen“ annimmt. Eine etwas spätere Zeit, frühestens 1797, ergiebt sich aus dem Briefe an Bolyai vom 6. März 1832, jedenfalls zeigt aber der Brief an Bolyai vom 16. Dec. 1799, dass Gauss schon damals in seinen Arbeiten „über die ersten Gründe der Geometrie“ „weit vorgerückt war“, und seine Aeusserung, dass „der Weg ... nicht so wohl zu dem Ziele führt, das man wünscht *und welches Du erreicht zu haben versicherst**), als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen“ lässt in Verbindung mit der weiteren Bemerkung, „es wäre ja wohl möglich, dass so entfernt man auch die drei Endpunkte des Δ im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre“, wohl keine andre Deutung zu, als dass Gauss bereits 1799 die Annahme, Euklids fünfte Forderung sei nicht erfüllt, in ihren Consequenzen verfolgt hatte, wie das vor ihm Saccheri (1733) und Lambert (1766) gethan hatten.

Gegenüber dem Briefe vom 16. Dec. 1799 zeigt der vom 25. Nov. 1804 einen gewissen Rückschritt. Gauss spricht darin von Klippen, an denen seine Beweisversuche gescheitert seien, und fährt fort: „Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden, ..., glaube mir, es soll mich herzlich freuen wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir gelingt, alle Hindernisse zu übersteigen“.

*) Die *cursiv* gedruckten Worte fehlen in dem Abdrucke dieses Briefes, der im Jahre 1877 bei Gelegenheit der Centenarfeier von Gauss durch Herrn Geheimrath Schering besorgt worden ist. Sie scheinen uns für die Beurteilung des Verhältnisses zwischen den Untersuchungen von Gauss und W. Bolyai von entscheidender Bedeutung zu sein.

Wir möchten hieraus schliessen, dass die Erkenntniss von der logischen Unanfechtbarkeit der nichteuklidischen Geometrie Gauss nicht durch eine geniale Intuition zu Theil geworden ist, sondern dass er sie erst in hartem Kampfe gegen das alte Vorurtheil errungen hat, und hiermit stimmt überein, dass er 1824 in dem Briefe an Taurinus von seinen vergeblichen Anstrengungen erzählt, „einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nichteuklidischen Geometrie zu entdecken".

Freilich ist uns über die Entwickelung der Gaussschen Ideen nichts Genaueres bekannt, denn in dem Briefwechsel zwischen ihm und W. Bolyai stossen wir jetzt auf eine grosse Lücke: noch einige Briefe rein freundschaftlichen Inhalts folgen, aber von 1808 bis 1832 hat er an seinen Jugendfreund nicht geschrieben, und auch Bolyai an ihn nur einen einzigen Brief, der persönliche Angelegenheiten betraf und unbeantwortet blieb. Wir sind daher für die Zwischenzeit auf andre Quellen angewiesen, aber auch diese fliessen nur spärlich; denn Gauss, der überzeugt war, „dass die Zahl wahrer Geometer äusserst gering ist, und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurtheilen noch selbst einmal sie verstehen können", scheute, „das Geschrei der Boeoter" und war in Bezug auf seine Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie äusserst zurückhaltend. So erklärt es sich, dass er in seinen Anzeigen aus den Jahren 1816 und 1822 (S. 220 und S. 223) seine wahre Meinung nur durchschimmern liess, und bloss vertrauten Freunden wie Gerling (1819, S. 246), Bessel (27. Jan. 1829, S. 226) und Schumacher (12. Juli 1831, S. 232) einen Einblick in seine Entdeckungen gestattete. Nur scheinbar bildet der Brief an Taurinus (8. Nov. 1824, S. 249) eine Ausnahme, denn Gauss verpflichtet diesen ausdrücklich zum Stillschweigen über seine Mittheilungen.

Leider ist es nicht möglich, sich auf Grund dieser wenigen Andeutungen ein Bild davon zu machen, welchen Weg Gauss bei seinen Untersuchungen eingeschlagen hat, die ihn dazu führten, die nichteuklidische Geometrie „ganz befriedigend auszubilden", sodass er bereits 1819 „jede Aufgabe in derselben auflösen konnte". Um so wichtiger ist es, dass sein Briefwechsel mit W. Bolyai in dieser Richtung einen gewissen Aufschluss giebt.

Am 6. März 1832 schreibt Gauss wieder an seinen „unvergesslichen Freund", der ihm das „Werkchen" seines Sohnes Johann Bolyai, nämlich den *Appendix*, zugeschickt hatte: „Der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Aeusserste überrascht".

Kurze Zeit vorher, am 17. Mai 1831, hatte Gauss an Schumacher geschrieben: „Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahre alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, . . ., habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge". Man vergleiche hiermit, was er in dem erwähnten Briefe an Bolyai sagt: „Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. . . . Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge. Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann".

Hiernach möchte man fast befürchten, dass Gauss das Aufschreiben seiner Meditationen später nicht fortgesetzt hat, und es wird daher vielleicht niemals aufgeklärt werden können, ob Gauss die nichteuklidische Geometrie mit seinen eigenen *Disquisitiones circa superficies curvas* in Verbindung gebracht hat, ob er bereits wusste, dass für die geodätischen Dreiecke auf den Flächen constanter negativer Krümmung seine Nichteuklidische Geometrie gilt, und ob es ihm also im Jahre 1854 mit Riemann ebenso gegangen ist, wie 1832 mit Johann Bolyai.

3.

Wolfgang Bolyai*), geboren den 5. Febr. 1775, war nach langem Schwanken über die Wahl eines Berufes im Jahre 1796 nach Jena gegangen, wo sein Freund und Gönner Baron Simon Kemény studirte. „Und bald begann ich, an dem Ufer der Saale spazirend, mit meinen geringen und zerstreuten Kenntnissen jenen Weg, auf dem ich mich auch noch im Greisenalter befinde . . . . Wir gingen nach Göttingen [Herbst 1796], wo uns Kaestner und Lichtenberg gut leiden konnten, und ich mit dem damals [seit Herbst 1795] dort studirenden Gauss bekannt wurde, mit dem ich noch heute in Freundschaft stehe, obgleich weit davon, mich mit ihm messen zu können. Er war sehr bescheiden und zeigte wenig; nicht drei Tage, wie mit Plato, Jahre lang konnte man mit ihm zusammen sein, ohne seine Grösse zu kennen. Schade, dass ich dieses titellose, schweigsame Buch nicht aufzumachen und zu lesen verstand. Ich wusste nicht, wieviel er weiss,

*) Als Quelle für das Folgende hat uns die von Herrn Prof. Martin Schmidt ins Deutsche übersetzte Biographie Wolfgang Bolyais von Joseph Koncz gedient, die 1887 in dem Programme des Evangelischen Reformirten Collegiums zu Maros Vásárhely erschienen ist; später ist dieses Programm mit einigen andern zu einer *Geschichte des Collegiums* vereinigt und darin S. 271—388 abgedruckt worden. In der genannten Biographie sind auch Aufzeichnungen wiedergegeben, die W. Bolyai selbst im Jahre 1840 über sein Leben gemacht und der Ungarischen Gelehrten Gesellschaft in Budapest eingesandt hatte.

und er hielt, wie er meine Art sah, viel von mir, ohne zu wissen, wie wenig ich bin. Uns verband die (sich äusserlich nicht zeigende) Leidenschaft für die Mathematik und unsre sittliche Uebereinstimmung, sodass wir oft mit einander wandernd mit den eigenen Gedanken beschäftigt stundenlang wortlos waren".

Ergänzt werden diese eigenen Mittheilungen W. Bolyais durch eine Aeusserung, die Gauss nach Sartorius von Waltershausen in früheren Jahren gethan haben soll: „Bolyai sei der einzige gewesen, der in seine metaphysischen Ansichten über Mathematik einzugehen verstanden habe"*).

Bevor Bolyai, am 8. Juni 1799, die Heimreise antrat, ist er noch ein letztes Mal am 24. Mai 1799 bei Clausthal im Harz mit Gauss zusammengetroffen, der Göttingen bereits im Herbst 1798 verlassen hatte und nach Braunschweig zurückgekehrt war. Wahrscheinlich haben die beiden Freunde bei dieser Gelegenheit mit einander über die Parallelenfrage gesprochen; denn nachdem Bolyai am 11. Sept. 1799 aus Pest seine Ankunft in der Heimath gemeldet hatte, schreibt Gauss am 9. Dec. 1799: „Es thut mir leid, dass ich unsre ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren .... Mach doch ja Deine Arbeit bald bekannt". Diese Arbeit, in der Bolyai, wie er damals Gauss versichert hatte, das Ziel, nämlich den Beweis der fünften Euklidischen Forderung, erreicht hatte, ist wohl die in dem Briefe vom 16. Sept. 1804 erwähnte und erst damals Gauss übersandte *Göttingische Theorie der Parallelen*, als deren Entstehungszeit hiernach die Zeit zwischen Herbst 1798 und Juni 1799 anzunehmen ist.

An Anregung zur Beschäftigung mit der Parallelentheorie hat es Bolyai in Göttingen kaum gefehlt. Ganz abgesehen davon, dass gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts auch in weiteren Kreisen ein lebhaftes Interesse für diesen Gegenstand vorhanden war (S. 211—213), ist es bekannt, dass Kaestner sich eingehend mit dem elften Axiome beschäftigt, in seinen Vorlesungen darauf hingewiesen und 1763 Klügels Dissertation veranlasst hat (S. 140f.). Aber was mehr bedeutet, Bolyai stand in freundschaftlichem Verhältnisse zu einem vorzüglichen Kenner der Untersuchungen über die Theorie der Parallelen, dem Professor der Astronomie Seyffer, über den wir in unserm Buche S. 214—215f. eingehend berichtet haben. Das beweisen nicht nur die wiederholten Grüsse und Erkundigungen in den Briefen Bolyais an Gauss, sondern auch die Worte in seiner Autobiographie: „Ich machte mich [am 8. Juni 1799] zu Fuss auf den Weg. Der Professor der Astronomie (der [später] mit Napoléon bei Austerlitz war und dann

*) Sartorius von Waltershausen, *Gauss zum Gedächtniss.* Leipzig 1856. S. 17.

dessen Ingenieur-Oberst wurde) und andre begleiteten mich zu Fuss bis zu dem ersten Dorfe"*).

Die Hoffnungen, die Wolfgang Bolyai, der vom April 1804 ab als Professor der Mathematik, Physik und Chemie an dem ev. ref. Collegium zu Maros Vásárhely thätig war, auf seine Arbeit gesetzt hatte, gingen nicht in Erfüllung, und auch später hat er trotz aller seiner Anstrengungen das ersehnte Ziel nicht erreichen können. Er schreibt hierüber in seiner Autobiographie: „Da ich aber mit meinem Versuche, die Parallelen zu beweisen, nicht zufrieden war, und nach langer Zeit, obgleich ich sie bis zur Grenze der Möglichkeit untersuchte, auch dann keine Ruhe fand, so schwand mein Feuer für die Mathematik, und ich warf mich auf die Poesie", und seinem Sohne Johann klagte er, „wenn er seiner Zeit in den Sachen des Axioms XI zu einem Resultate gekommen wäre, so hätte er sich weder mit dem Construiren von Oefen noch mit der Dichtkunst befasst und wäre ein besserer Mensch und Wirth geworden".

Seine Ansichten über die Grundlagen der Geometrie hat W. Bolyai in dem Werke: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos ... introducendi* ...**) niedergelegt, von dem der erste Band 1832, der zweite 1833 erschienen ist. In dem *Generalis Conspectus Geometriae* (Bd. I, S. 442—502) berichtet er von S. 490 an über seine früheren Versuche, die fünfte Forderung Euklids zu beweisen, und giebt an, welches neue Axiom in jedem einzelnen Falle erforderlich ist, um den betreffenden Beweisversuch zu einem Beweise zu machen. Am ausführlichsten bespricht er dabei einen Beweisversuch, der mit dem 1804 in dem *Supplementum ad Theoriam Parallelarum* mitgetheilten aufs Engste verwandt ist.

4.

Wolfgang Bolyais Sohn Johann, geboren am 15. December 1802 zu Klausenburg, war, wie sein Vater am 20. Juni 1831 an Gauss schreibt, für Mathematik hervorragend begabt. „Den Unterricht in der Mathematik behielt sein Vater für sich", sagt Koloman Szily***).

*) K. F. Seyffer (1762—1822) verliess im Jahre 1805 Göttingen, wo er seit 1789 ausserordentlicher Professor der Astronomie gewesen war, und befand sich von 1805 bis 1806 als Ingénieur-topographe im Hauptquartier Napoléons. Später war er in München Director des topographisch-statistischen Bureaus. Vgl. Allgemeine deutsche Biographie, Bd. 34, S. 107 f.

**) Eine neue, prachtvoll ausgestattete Ausgabe dieses Werkes geben jetzt J. König und M. Réthy im Auftrage der Kgl. Ungarischen Akademie zu Buda-Pest heraus. Der soeben erschienene erste Band (mit einem Bilde W. Bolyais) enthält jedoch nur den arithmetischen Theil des ersten Bandes der Originalausgabe.

***) Értekezések a mathematikai tudományok köréből (Abhandlungen aus den Gebieten der mathematischen Wissenschaften) Bd. XI, Heft 9. Budapest 1884.

„Seine Fortschritte in der Mathematik waren so blitzschnell, dass er, wie sein Vater öfter erzählte, den Beweis des Theorems gar nicht abwartete und ihn selber gab. Wie der Teufel sprang er vor mich, die Worte seines Vaters, und bat mich weiter zu gehen".

Von dem Verlaufe seiner Untersuchungen über die Parallelentheorie hat Johann Bolyai selbst in einer Autobiographie, deren Abfassung Franz Schmidt in die Zeit von 1840 bis 1851 setzt, folgende Darstellung gegeben.

„Er [mein Vater] machte mich auf die grosse Lücke und Unvollkommenheit der Parallelentheorie aufmerksam, bedeutete mich, weit Besseres als seine Vorgänger geleistet, vollständige und gebührende Befriedigung jedoch nicht gefunden zu haben, insofern keines seiner neuen Axiome, deren jedes zum strengen Beweise des XI. Axiomes allerdings hinreiche, so sehr sie auch auf den ersten Blick und vorurtheilig geurtheilt annehmbar erschienen, den erforderlichen Grad geometrischer Evidenz besitze. Behauptet jedoch ohne Beweis, dass es unmöglich sei, das XI. Axiom zu beweisen; und suchte mich, nicht ohne Grund besorgt, ich könnte damit mein ganzes Leben umsonst und vergeblich zubringen, auf alle mögliche und erdenkliche Art von allen weiteren Untersuchungen dieses Gegenstandes gänzlich abzuhalten und abzuschrecken"....

„Als ich ihm aus der K. K. Ingenieur-Akademie in Wien berichtete, ich habe zu einem möglichen Beweise des XI. Euklidischen Axioms zuerst den Weg eingeschlagen, zu beweisen, dass die mit einer Geraden gleichlaufende, das heisst davon in einer Ebene überall gleichweit abstehende Linie auch eine Gerade sei, und habe zu diesem Zweke die Eigenschaften einer solchen Linie für den Gegenfall zu entwickeln angefangen*), antwortete er mir 1820 in einem denkwürdigen Schreiben folgendermassen [Brief fehlt]....

„Erst im Jahre 1823 hat Er [Johann] dem Wesen nach sein Problem durchdrungen, obschon auch nachher noch Vervollkommnungen hinsichtlich der Materie und Form hinzukamen".

Bestätigt und ergänzt wird diese letzte Aeusserung durch einen Brief, den Johann am 3. November 1823 aus Temesvár an seinen Vater richtete. In diesem magyarisch geschriebenen Briefe, den Herr Prof. Martin Schmidt in dem Nachlasse Wolfgang Bolyais aufgefunden und von dem er uns freundlichst eine Uebersetzung mitgetheilt hat, heisst es:

„Mein Entschluss steht fest, ein Werk über die Parallelen herauszugeben, sobald ich den Stoff geordnet habe, und es die Umstände

*) [Hiernach hat Johann Bolyai bei seinen geometrischen Untersuchungen zuerst genau denselben Weg eingeschlagen, den schon Saccheri (1733) und Lambert (1766) mit Erfolg betreten hatten.]

erlauben; gegenwärtig habe ich es *noch nicht*, aber der Weg, den ich befolgt habe, hat beinahe sicher das Erreichen des Zieles versprochen, wenn das überhaupt möglich ist; ich habe das Ziel nicht, aber ich habe so grossartige Sachen herausgebracht, dass ich selbst verblüfft war, und dass es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen. Wenn Sie es sehen werden, werden Sie es auch erkennen; jetzt kann ich nur soviel sagen: *dass ich aus Nichts eine neue Welt geschaffen habe.* Alles was ich früher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleiche zu dem Thurme. Ich bin überzeugt, dass es mir nicht minder zur Ehre gereichen wird, als ob ich es schon entdeckt hätte".

In seiner Autobiographie fährt Johann folgendermassen fort: „Er [Johann] theilte diese Arbeit seinem Vater und auch andern Personen mit, so zum Beispiel seinem ehemaligen Lehrer an der Ingenieur-Akademie, Herrn Johann Wolter von Eckwehr, im Jahre 1825 in einem schriftlichen Aufsatze, worin bereits der Grund zum Ganzen gelegt wird; er befindet sich wahrscheinlich noch in dessen Händen. Bei einem Zusammentreffen mit seinem Vater veranlasste dieser ihn, seine Arbeit ins Lateinische zu übersetzen und ihm zu übergeben, worauf sie 1832 als *Appendix* zum *Tentamen* veröffentlicht wurde."

„Tentamen sammt Appendix wurden an Gauss gesandt. Nach sechs Wochen kam seine Antwort. Gauss fängt damit an: Er könne, so sehr es auch auf den ersten Blick auffallend sei, diese Arbeit und zwar aus dem Grunde nicht loben, weil er sich damit auch mitloben müsste — weil der ganze Weg, den ich eingeschlagen hätte, wie auch die Resultate, zu denen ich dabei geführt wäre, fast durchgehends mit seinen eigenen, schon seit 30—35 Jahren angestellten Untersuchungen und Ideen zusammenträfen. In einem frühern Briefe schrieb er [Gauss, 25. Nov. 1804]: er hoffe diese Klippen einst umschiffen zu können — also er hofft! —".

Diese letzten Worte lassen ein gewisses Misstrauen Johanns gegen Gauss erkennen, das vielleicht durch folgenden Umstand erklärt wird, den Koloman Szily erzählt: „Das Verhältniss zwischen Wolfgang und Johann war nicht gut. Der Sohn war voll Neid und Undank bis zur letzten Stunde. Diesen Hass hatte in dem Sohne der grundlose Verdacht hervorgerufen, der Vater habe die im Appendix niedergelegten Ideen an Gauss verrathen, und dieser wolle ihn nun der Priorität, auf jene Ideen gekommen zu sein, berauben". —

Zu den Worten: „Tentamen sammt Appendix wurden an Gauss gesandt" ist noch eine Bemerkung erforderlich. Von dem ersten Bande des Tentamen ist der Appendix zuerst gedruckt worden, und Wolfgang Bolyai schickte auf die Bitte seines Sohnes dessen „Werkchen" an Gauss zur Beurtheilung, wie sein Brief vom 20. Juni 1831 zeigt.

Der Ueberbringer dieses Briefes war nach W. Bolyais eigener Angabe ein ungarischer Edelmann, Joseph von Zeyk, dessen Vater, Daniel von Zeyk, mit Gauss und Bolyai zusammen in Göttingen studirt hatte. In dem folgenden Briefe vom 6. Januar 1832 schreibt Bolyai an Gauss: „Dieses Werkchen hatte ich zu gleicher Zeit mit dem ersten Briefe [vom 20. Juni 1831] abgeschickt und wusste lange nicht, wo es in den fatalen Cholera-Umständen hingekommen sey; nun schicke ich es durch Post unter Recepisse zum H. Joseph von Zeyk [nach Franz Schmidt damals in Klausenburg] mit der Bitte, dass er einen Weg ausfindig mache", und Gauss antwortet am 6. März 1832: „Durch Deine beiden mir durch Herrn Zeyk zugestellten Briefe hast Du, mein alter unvergesslicher Freund, mich sehr erfreut. Ich zögerte nach Empfang des ersten Dir sogleich zu antworten, weil ich erst die Ankunft der versprochenen kleinen Schrift abwarten wollte". —

Wir lassen jetzt die neuen Urkunden für sich selbst sprechen.

Mittheilungen aus dem Briefwechsel von Gauss und W. Bolyai.

1.

Gauss an W. Bolyai, Helmstedt, den 16. Dec. 1799*).

Es thut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiss dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben u. ruhiger geworden sein, als jemand wie ich es sein kann solange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desideriren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wie wol mir meine anderen ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wol zu dem Ziele das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie NICHTS beweiset z. B. wenn man beweisen könnte dass ein geradlinigtes Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als jede gegebne Fläche so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig streng zu beweisen. Die meisten würden nun wol jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wol möglich, dass so entfernt man auch die drei Endpunkte des Δ im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra)

*) Dieser Brief ist in der Hauptsache bereits von Herrn Geheimrath Schering im Jahre 1877 bei Gelegenheit der Centenarfeier von Gauss mitgetheilt worden.

einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes. Mach doch ja Deine Arbeit bald bekannt; gewiss wirst Du dafür den Dank nicht zwar des grofsen Publikums (worunter auch mancher gehört der für einen geschickten Math. gehalten wird) einerndten, denn ich überzeuge mich immermehr, dass die Zahl wahrer Geometer äusserst gering ist und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurtheilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber geniess den Dank aller derer deren Urtheil Dir allein wirklich schätzbar sein kann. — In Braunschweig ist ein Emigrant Namens Chauvelot, ein nicht schlechter Geometer, welcher vorgiebt, die Theorie der Parallellinien ganz begründet zu haben, und seine Arbeit nächstens wird drucken lassen, aber ich verspreche mir nichts von ihm. In Hindenburgs Archiv 9tes Stück, befindet sich gleichfalls ein neuer Versuch über denselben Gegenstand, von einem gewissen Hauff, welcher unter aller Kritik ist.

2.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 16. Sept. 1804.

Ich fiel auf den Gedanken, anstatt Zeit (nonum annum) und Fülle der Umstände ganz abzuwarten, Dir halbbogenweis damit der Brief nicht verdächtig werde auf der Post einiges zu schicken. In diesen Brief eingeschlossen schicke ich Dir Meine Göttingische Theorie der Parallelen*); auf den nächsten Posten bin ich willens die Grundlage der Arithmetik und Geometrie Dir zu schicken, welches auf drei Posten geschehen kan; wenn Dich etwas das System selbst interessiren sollte, das könnte mir doch eine Gelegenheit seyn. — In etwa drei Jahren ist diese Theorie gelegen, Umstände hielten mich ab — nun habe ich sie beim Lehren hervornehmen müssen, und es in einen engern Raum gepresst. Ich kan den Fehler nicht entdecken, prüfe Du der Wahrheit getreu, und schreibe mir sobald als nur möglich, schreibe Deine Einwendungen, oder wenn ich mich schlecht oder etwa zu kurz ausgedrückt oder im schreiben gefehlt hätte, ich habe es durch einen Studenten schreiben lassen, da ich nicht schön schreibe, aber ich hatte Mühe die Fehlern zu verbessern, und es kann auch jetzt in irgend einem Buchstaben auch von mir übersehen geworden seyn. Hier ist kein Geschmack vor so was, auch sonst überhaupt bin ich von den hiesigen Aftergelehrten verdammt — Wenn Du dieses Werkchen davor werth hieltest (ich setze den Fall) so schicke es einer würdigen Akademie hin, das es beurtheilt werde (es soll gestempelt seyn). Ich

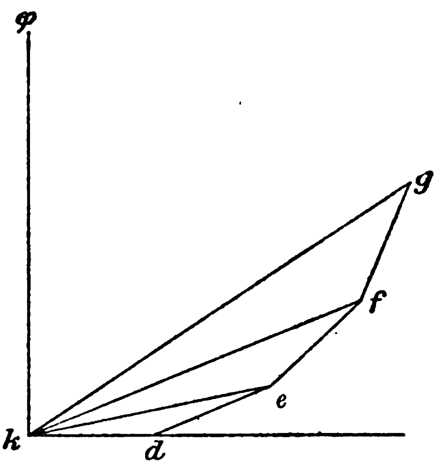
*) Diese *Theoria parallelarum* folgt hinter den hier mitgetheilten Briefen.

bin auch auf die schlechte Seite gefasst, wiewohl ich nicht läugne, dass ich es noch nicht herausgegeben hätte, wenn ich um ruhiger leben zu können zwischen meinen vielen Richtern, nicht um etwas äufsere Ehre zu hazardiren gezwungen wäre — Weist Du! was Hamlet sagt „the spurns, that patient merit of th' unworthy takes".

3.

Gauss an W. Bolyai, Braunschweig, den 25. Nov. 1804.

Nun .... noch Einiges über deine geometrische Mittheilung. Ich habe Deinen Aufsatz mit grossem Interesse und Aufmerksamkeit durchgelesen, und mich recht an dem ächten gründlichen Scharfsinne ergötzt. Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermaassen schon darum partheiisch scheinen könnte, weil dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Aehnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knotens versuchte, und vergebens bis jetzt versuchte. Du willst nur mein aufrichtiges unverholenes Urtheil. Und dies ist, dass dein Verfahren mir noch nicht Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein des Anstofses, den ich noch darin finde (und der auch wieder zu derselben G r u p p e von Klippen gehört woran meine Versuche bisher scheiterten) mit so vieler Klarheit als mir möglich ist ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hofnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigung vor der Hand, dass ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir gelingt alle Hindernisse zu übersteigen. Ich würde dann mit der innigsten Freude alles thun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen, soviel in meinen Kräften steht. Ich komme nun sogleich zur Sache.



Bei allen ü b r i g e n Schlüssen finde ich gar nichts wesentliches einzuwenden: was mich n i c h t überzeugt hat ist blofs das Räsonnement im XIII Artikel. Du denkst dir daselbst eine ins Unbestimmte fortgeführte Linie $\Pi \ldots kdefg \ldots$ die aus lauter geraden und gleichen Stücken besteht kd, de, ef, fg, &c und wo die Winkel kde, def, efg, &c einander gleich sind. und willst beweisen, dass Π über kurz oder lang nothwendig über $k\varphi$ hinaus gehen werde. Zu dieser Absicht lässest du die gerade Linie $kd\infty = Q$ sich nach der Seite zu wo Π liegt um k herumbewegen, so dafs sie nach und nach von einer Seite des Polygons Π zur folgenden kommt. Du zeigst vortrefflich dass Q so wie es stufenweise durch d, e, f, g &c geht jedesmal näher an $k\varphi$ kommt: gegen alles dieses lässt sich Nichts einwenden: aber nun fährst Du fort.

„Quapropter Q moveri potest modo praescripto usque dum in $k\varphi\varphi'\infty$ pervenerit" &c und diese Schlussfolge ist die mir nicht einleuchtet. Aus deinem Räsonnement folgt meiner Einsicht nach noch gar nicht, dass der Winkel, um den Q, beim Durchlaufen einer Seite von Π . . .*), der $k\varphi$ näher kommt, nicht etwa immer unbedeutender werde, so dass das Aggregat aller successiven Annäherungen, so oft sie auch wiederholt werden, dennoch immer noch nicht grofs [genug] werden könnte, um Q in $k\varphi$ zu bringen, könntest Du beweisen, dass $dke = ekf = fkg$ etc. so wäre die Sache gleich aufs Reine. Aber dieser Satz ist zwar wahr, allein schwerlich ohne die Theorie der Parallelen schon vorauszusetzen, strenge zu beweisen. Man könnte also immer noch besorgen, dass die Winkel dke, ekf, fkg &c successive abnehmen. Geschähe dies (bloss exempli gratia) in einer geometrischen Progression, so dass $ekf = \psi \times dke$, $fkg = \psi \times dke$ &c (sodass ψ kleiner als 1), so würde die Summe aller Annäherungen, so viele Male man sie auch fortsetzte, doch immer kleiner als $\frac{1}{1-\psi} \times ekf$ bleiben, und diese Grenze könnte dann immer noch kleiner als der rechte Winkel $dk\varphi$ sein. Du hast mein aufrichtiges Urtheil verlangt: ich habe es gegeben, und ich wiederhole nochmals die Versicherung, dass es mich innig freuen soll, wenn Du alle Schwierigkeiten überwindest.

4.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 20. Juni 1831.

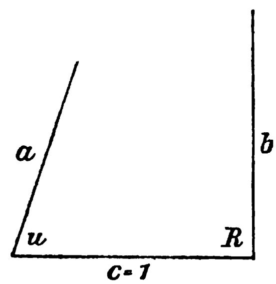
[Mein Sohn] ist schon OberLieutenant im Génie Corps, und wird schon bald Hauptman ein schöner Jüngling, virtuos auf der Violin, guter Fechter und brav, aber hat oft duellirt, und ist überhaupt noch ein zu wilder Soldat — aber auch sehr fein — Licht in Finsternis — und Finsternis im Lichte, und ein passionirter Mathematiker mit sehr seltenen Geistes Fähigkeiten — itzt ist er in Lemberg in Garnison — ein grofser Verehrer von Dir — Dich zu verstehen und zu schätzen fähig. — Auf seine Bitte schicke ich dieses sein Werkchen zu Dir: habe die Güte, es mit Deinem scharfen durchdringenden Auge zu

*) [Die hier stehenden Buchstaben sind durch einen Knick des Papieres unleserlich geworden.]

beurtheilen, und dein hohes Urtheil ohne Schonung in Deiner Antwort, auf die ich sehnsuchtsvoll warte, zu schreiben. Es ist der erste Anfang von meinem Werke, welches unter der Presse ist; ich war Willens den 1ten Band itzt mitzuschicken: er ist aber noch nicht heraus.

[Auf der Innenseite des Briefumschlages schreibt W. Bolyai noch Folgendes:]

Nach meiner Ansicht, wird im Werkchen meines Sohnes, u (nehmlich wo a die b zuerst nicht schneidet, für $c =$ der Einheit der Geraden) geometrisch construiert; woraus aber nicht bestimmt wird, wie groſs u sey, von 0 an bis R (jenes aus-, dieses eingeschlossen). Jedoch was immer in der Geometrie, ist von u entweder abhängig oder nicht; (z. B.) die sphärische Trigonometrie wird davon unabhängig § 26. festgesetzt, so wie die Oberfläche der Sphaere oder Zone — &c. Was aber davon abhängt, wird alles durch eine gewisse Function von u ausgedrückt, wo nichts als die Gröſse von u unbestimmt bleibt, und wahr für jeden subjectiv möglichen Werth von u ist; wenn nehmlich für einen gewissen Fall $f(u) = y$ und u durch abscisse (wachsend von 0 bis R) und y durch die entsprechende Ordinate vorgestellt wird, so wird die Gröſse von y für jeden Werth von u, auch für $u = R$ in der Gränze durch den allgemeinen von u abhängigen Ausdruck ausgedrückt — Er bedient sich gewisser groſser und kleiner Buchstaben, die aber alle gewisse Functionen von u sind; und es wäre eleganter und klarer gewesen, sie so auszudrücken, da es aus dem Werke selbst leicht zu thun ist — übrigens ist dieses nichts mehr und nur in Worten, von dem, was im Werke steht, verschieden. Am Ende zeigt er auch, dass wenn u nicht $= R$, so ist der Cirkel quadrieret.



5.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 16. Jan. 1832.

[W. Bolyai übersendet Gauss den *Appendix* und schreibt bei dieser Gelegenheit:]

Mein Sohn war nicht gegenwärtig, wie sein Werkchen gedruckt wurde: er lies die Errata (die hinten sind) drucken; ich habe die meisten, um Dir weniger lästig zu seyn, mit Feder corrigirt — Er schreibt aus Lemberg, das er nachdem manches vereinfacht und eleganter gemacht, und die Unmöglichkeit, a priori zu bestimmen, ob das Ax. XI wahr sey oder nicht, bewiesen habe. —

6.

Gauss an W. Bolyai, Göttingen, den 6. März 1832.

- - - Jetzt einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange „dass ich solche nicht loben darf“: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hieſse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äuſserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muſs man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

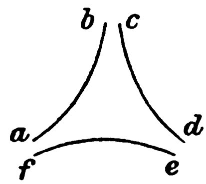
Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.

Sehr prägnant und abkürzend finde ich die Bezeichnungen: doch glaube ich, dass es gut sein wird, für manche Hauptbegriffe nicht bloſs Zeichen oder Buchstaben, sondern bestimmte Namen festzusetzen, und ich habe bereits vor langer Zeit an einige solcher Namen gedacht. So lange man die Sache nur in unmittelbarer Anschauung durchdenkt, braucht man keine Namen oder Zeichen; die werden erst nöthig, wenn man sich mit andern verständigen will. So könnte z. B. die Fläche, die Dein Sohn F nennt, eine Parasphäre, die Linie L ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche, oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heiſsen, die von einer Geraden, mit der sie in einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; eben so Hypersphäre. Doch das sind alles nur unbedeutende Nebensachen: die Hauptsache ist der Stoff, nicht die Form.

In manchem Theile der Untersuchung habe ich etwas andere Wege eingeschlagen: als ein Specimen füge ich einen rein geometrischen

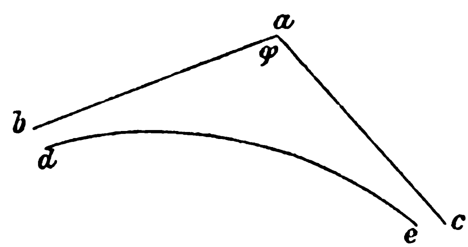
Beweis (in den Hauptzügen) von dem Lehrsatze bei, dass die Differenz der Summe der Winkel eines Dreiecks von 180^0 dem Flächeninhalte des Dreiecks proportional ist.

I. Der Complexus dreier Geraden ab, cd, ef, die so beschaffen sind, dass $ab///dc$, $cd///ef$, $ef///ba$, bildet eine Figur, die ich T nenne. Es lässt sich beweisen, dass solche immer in einem Planum liege.



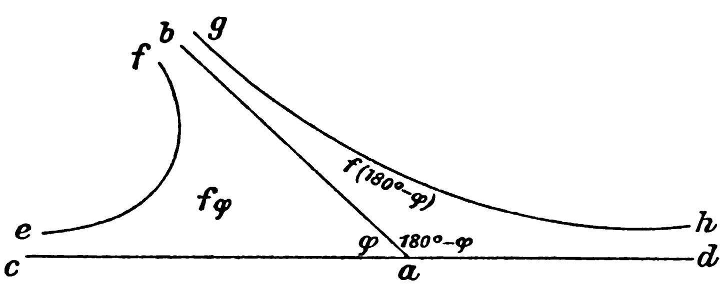
II. Derjenige Theil des Planums, welcher zwischen*) den drei Geraden ab, cd, ef liegt, hat eine bestimmte endliche Area: sie heisse t.

III. Indem zwei Gerade ab, ac sich in a unter dem Winkel φ schneiden, möge eine dritte Gerade de so beschaffen sein, dass $ab///ed$, $ac///de$: es liegt dann auch de mit ab u. ac in Einem Planum, und die Area der Fläche zwischen diesen Geraden ist endlich und nur von dem Winkel φ abhängig; offenbar bilden in Σ, de und bac nur Eine gerade Linie, wenn $\varphi = 180^0$ ist, wo folglich verschwindet der Werth jener Area mit $180^0 - \varphi$: man setze also allgemein die Area $= f(180^0 - \varphi)$, wo f ein Functionszeichen bezeichnet.



IV. Lehrsatz. Es ist allgemein

$$f\varphi + f(180^0 - \varphi) = t.$$



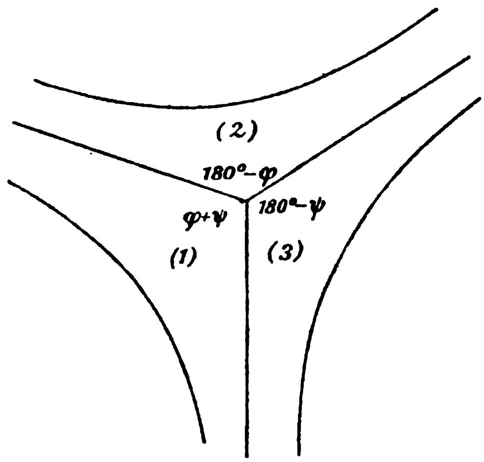
Den Beweis giebt die Figur, wo $bac = \varphi$, $bad = 180^0 - \varphi$, $ac///fe$,

*) Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte, wie „zwischen" auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.

ef///ab, *ab///hg*, *ad///gh*, und wo der Flächeninhalt roth eingeschrieben ist.

V. Lehrsatz. Es ist allgemein

$$f\varphi + f\psi + f(180^0 - \varphi - \psi) = t.$$



Der Beweis erhellet leicht aus der Figur, wo die drei Flächentheile (*1*), (*2*), (*3*) die Werthe haben

$$(1) = f(180^0 - \varphi - \psi)$$
$$(2) = f(\varphi)$$
$$(3) = f(\psi)$$

und ihre Summe $= t$ wird.

VI. Corollarium. Es ist also

$$f(\varphi) + f(\psi) = t - f(180^0 - \varphi - \psi) = f(\varphi + \psi):$$

woraus leicht folgt, dass

$$\frac{f\varphi}{\varphi} = \text{constans},$$

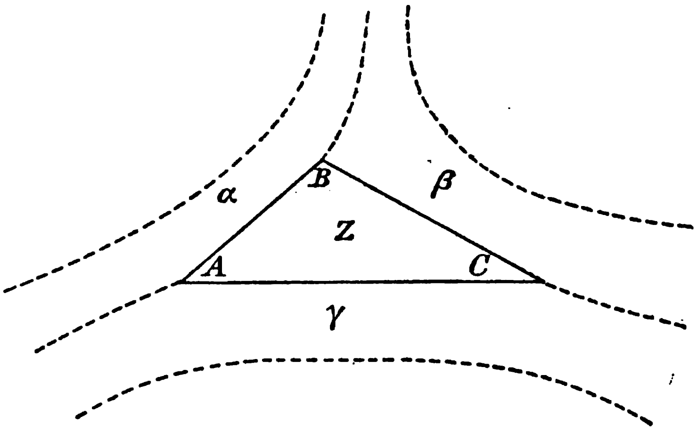
und zwar

$$= \frac{t}{180^0}$$

ist.

VII. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Winkel A, B, C sind, ist

$$= \frac{180^\circ - (A + B + C)}{180^\circ} \times t$$



Den Beweis giebt die Figur. Es ist nämlich der Inhalt

$$\alpha = fA = \frac{A}{180^\circ} \cdot t$$

$$\beta = fB = \frac{B}{180^\circ} \cdot t$$

$$\gamma = fC = \frac{C}{180^\circ} \cdot t$$

$$t = \alpha + \beta + \gamma + z = \frac{A + B + C}{180^\circ} t + z.$$

Ich habe hier bloss die Grundzüge des Beweises angeben wollen, ohne alle Feile oder Politur, die ich ihm zu geben, jetzt keine Zeit habe. Es steht Dir frei, es Deinem Sohne mitzutheilen: jedenfalls bitte ich Dich, ihn herzlich von mir zu grüſsen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf sich mit der Aufgabe zu beschäftigen:

„Den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu bestimmen“.

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks sich so einfach angeben läſst: so hätte man erwarten sollen, dass es auch für diesen Kubikinhalt einen eben so einfachen Ausdruck geben werde: aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht.

Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist es unerläſslich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel, und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man mufs sich wundern, dass alle Schriftsteller von Euklid bis auf die neuesten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind: allein diese Schwierigkeit ist von durchaus verschiedener [Natur] mit der Schwierigkeit, zwischen Σ und S zu entscheiden, und jene ist nicht gar schwer zu heben. Wahrscheinlich finde ich mich auch schon durch Dein Buch hierüber befriedigt.

Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweiss, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen anderen ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht Stück 64 Pag. 625*). Vielleicht wird es Dich nicht gereuen, wenn Du Dich bemühest Dir diesen Band der G. G. A. zu verschaffen (was jeder Buchhändler in Wien oder Ofen leicht bewirken kann), da darin unter anderen auch die Quintessenz meiner Ansicht von den imaginären Gröfsen auf ein Par Seiten dargelegt ist.

7.

W. Bolyai an Gauss, Maros Vásárhely, den 20. April 1835.

[W. Bolyai übersendet Gauss die beiden Bände des Tentamen und schreibt unter Anderm:]

Am Ende des II[ten] Bandes ist nebst der Erleicht[er]ung mancher im I[ten] gegebenen Begriffe, auch eine gewisse Einigkeit beyder Trigonometrien, nach dem Gedanke meines Sohnes. Gern hätte ich die Auflösung des Tetraeders drucken lassen (welche mein Sohn noch ein Jahr vor der Herausgabe seiner Appendix fand): aber die Formeln die ich sah, waren zu verwickelt, und ich weifs sie

---

*) Gauss bezieht sich auf die Selbstanzeige seiner Abhandlung: *Theoremata residuorum biquadraticorum, commentatio secunda*, in der er auf S. 637 sagt: „Dieser Unterschied zwischen rechts und links ist ... in sich völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes anderen *nur* durch Nachweisung an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können", und fügt in einer Anmerkung hinzu: „Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung, dass der Raum *nur* Form unserer äusseren Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweist."

Kant hat 1783 in den *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik* (§ 13) die Existenz symmetrischer Figuren zum Beweise der Idealität des Raumes zu verwerthen gesucht, während er 1768 in dem Aufsatze: *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* aus derselben Bemerkung die „Wirklichkeit des absoluten Raumes" hergeleitet hatte.

nicht. Und über alles hätte ich den Beweis davon drucken lassen, dass es absolut unmöglich sey, dem menschlichen Auge es einzusehen, ob das XI Axiom wahr sey, oder nicht: mein Sohn behauptet den evidenten Beweis davon zu haben; ich kan sonst nichts beweisen, als dass sowohl das Seyn als das Nicht-Seyn dieses Satzes, mit den übrigen euklidischen Axiomen gleich bestehen könne, und dadurch zwei verschiedene Systeme (jedes für sich insofern gleich bestehend) seyen; welches ich schon seit vielen Jahren her weiſs — Aber es ist die Frage, ob nicht ein anderes Axiom sey, gleichen Ranges mit denen wenigstens, die Euklid und andere tacite annehmen, und die man in beyden Systemen annehmen mus — Was ich meinem Sohne vorgearbeitet habe, ist in Tom. I p. 488 . . .

Anhang.

Wolfgang Bolyai an Sartorius von Waltershausen, Maros Vásárhely, den 13. Juli 1856.

. . . Nun ging ich nach Wien . . . ein besonderer Umstand bewog mich zuerst Jena zu besuchen . . . hörte keine Mathematik an, allein an der Saale spazierend fing ich aus dem im Gedächtnisse zerstreut Gebliebenen, ohne Buch über die Gründe der Mathematik zu grübeln an — und da ich auch meinte etwas gethan zu haben, hier an der Saale entstand die erste Wurzel dessen, was ich nachdem zu verfeinern und zu erweitern suchte. Von Jena ging ich nach Göttingen: wo ich den sehr gütigen Professor Seyffer besuchend Gauss *zuerst sah* — ich als unwissender Selbstdenker sprach dreist (mit des leeren Fasses Klang) über die Seichtigkeit der Behandlung der Gründe der Mathematik — in Hinsicht der Multiplication, Division, Potenz . . . gerade Linie, Ebene — Gleichheiten in verschiedener Hinsicht u. d. gl. — Nach diesem begegneten wir uns auf dem Walle, jeder war allein — gesellten uns — gingen zu einander — und bald schwuren wir unter der Fahne der Wahrheit Brüderschaft. Hierauf ruhte er von seiner anhaltenden stillen Arbeit meistens bey mir aus — sprach nie im voraus, selbst bei Fertigem schweigend — nur einmal sah ich an ihm eine mässige Freude, wo er die kleine Tafel, auf welcher er das 17 Eck Disq. Ar. 662 berechnet hat, zum Andenken mir gab.

Wir gingen auch zweye zu Fuss zu seinen Eltern nach Braunschweig, seine Mutter fragte, ob aus ihrem Sohne etwas werde? und auf meine Antwort: *der erste Mathematiker in Europa* in Thränen zerfloss.

Theoria Parallelarum.

[Auctore W. Bolyai*).]

Problema [1]. Sit ad rectam An Fig. 1**) perpendicularis du (in Plano P.); sitque $Au = un$; et linea ex du et An conjuncta nominetur T; moveaturque T in P ita, ut An in $Ann'\infty$ moveatur semper porro in infinitum; moveaturque simul in P aliud T aequaliter ut prius, ita ut An ejus in $nyy'\infty$ moveatur semper porro in infinitum: quaeritur, d' fluens quam lineam describet?

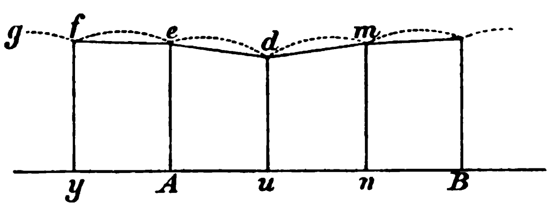


Fig. 1.

Resolutio: Nominetur linea illa $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}$ est recta.

Demonstratio.

I. $\mathfrak{L}$ non redit; quia tum duo perpendiculares ad eandem $AB\infty$ concurrerent ibidem; quod fieri nequit, quia tum et ab altera parte rectae $AB\infty$ perpendiculares eaedem concurrerent (ob casuum aequalitatem).

II. Atqui si $\mathfrak{L}$ non esset recta rediret: quia

---

*) [Zusätze der Herausgeber im Texte sind in eckige Klammern eingeschlossen. Solche Stellen, bei denen die in der Einleitung erwähnte Abschrift einen verdorbenen Text bot, sind cursiv gedruckt.]

**) NB. 1. Plagam saepius denomino ab aliquo quod in eâ est.

2. Litera supra verticem virgulâ signata denotat punctum.

3. Linea aliqua (ex. gr. du) in utramque partem producta in ∞, denotatur per $du\infty$.

4. Et du producta in ∞ ex d' in partem eam ubi u' est denotatur per $duu'\infty$.

Theorie der Parallelen.

[Von W. Bolyai.]

Aufgabe [1]. Auf der Geraden An (Fig. 1*)) stehe du (in der Ebene P) senkrecht, und es sei $Au = un$. Der aus du und An bestehende Linienzug heisse T, und T werde in P so bewegt, dass sich An auf $Ann'\infty$ immer weiter bis ins Unendliche bewegt. Gleichzeitig werde in P ein zweites T in gleicher Weise wie das erste bewegt, sodass sich das zugehörige An auf $nyy'\infty$ immer weiter bis ins Unendliche bewegt. Man fragt, welche Linie d' bei seiner Bewegung beschreibt?

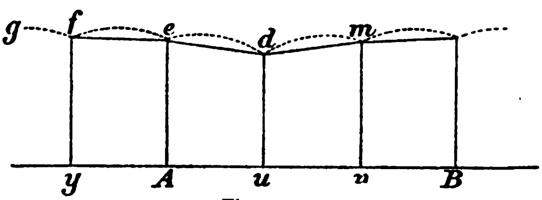


Fig. 1.

Lösung. Diese Linie heisse $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}$ ist eine Gerade.

Beweis. I. $\mathfrak{L}$ kehrt nicht in sich zurück, weil sonst zwei auf derselben Geraden $AB\infty$ senkrecht stehende Gerade an derselben Stelle zusammenträfen, und das kann nicht geschehen, weil sonst dieselben Senkrechten auch auf der andern Seite der Geraden $AB\infty$ zusammenträfen (wegen der Gleichheit der Fälle).

II. Wäre nun aber $\mathfrak{L}$ keine Gerade, so kehrte es in sich zurück. Denn:

---

*) *Anmerkung* [auf der Figurentafel des Urtextes].

1. Eine Seite benenne ich öfters nach einem Dinge, das sich auf ihr befindet.
2. Ein Buchstabe, der oben mit einem Striche bezeichnet ist, bedeutet einen Punkt.
3. Eine Linie (z. B. du), die nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert ist, wird mit $du\infty$ bezeichnet.
4. Wird du von d' aus ins Unendliche nach der Seite verlängert, wo u' ist, so dient als Zeichen $duu'\infty$.

III. Accipiatur (ex Fig. 1) Fig. 2 ita, ut $sim\infty$ sit $\mathfrak{L}$, $kn\infty$ vero sit $An\infty$; at a' ubicumque libet accipiatur ex $An\infty$, tantum $ak = an$, si[n]t $sk = nm = du = ia$ perpendiculares ad eandem kn; tum $si = im$, partes nimirum τ8*) $\mathfrak{L}$ aequaliter generatae si u' in a' posito, d' in i', T moveatur (ut supra) donec d' lineam im generet, et iterum aliud T *ut supra* donec d' ejus generet lineam is; ex quibus generationibus aequalibus patet etiam angulum ais aequalem angulo aim generari. Hinc etsi per is et im rectae intelligantur, dictum valet, nam partibus is et im τ8 $\mathfrak{L}$ coincidentibus, etiam rectae is et im coincidunt.

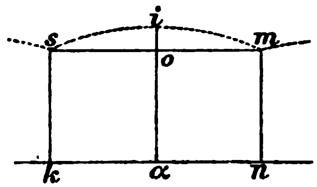


Fig. 2.

IV. Recta sm secta ab ai in o' perpendiculariter secatur; nam superponatur $oanm$ ipsi $oaks$; a' manebit in a'; o' in o'; n' cadet in k' (quia ang. $oak = nao =$ recto per Constr.); m' vero cadet in s' (quia ang[ul]i $aks = anm$, $nm = ks$ per Constr.); hinc recta om cadit in os, adeoque anguli $aos = aom$; ergo ambo recti sunt.

V. Hinc τ8 $\mathfrak{L}$ quaevis duo puncta sumantur s' et m'; perpendicularis $V\infty$ ex medio o' rectae sm ad ipsam rectam sm, bisecat partem τ8 $\mathfrak{L}$, quae inter s' et m' (nimirum ab s' usque ad m') est.

VI. Porro si $\mathfrak{L}$ abiens ex i' in plaga s' habeat cum perpendiculari V (seu ai) punctum aliquod h commune, idem h' commune esse debet etiam plagae alteri m' ex i' τ8 $\mathfrak{L}$; tam ex generationibus utrinque aequalibus patet, quam et si superponatur linea, ex $imm'\infty$, $ia\infty$ conjuncta, lineae ex $iss'\infty$ et $ia\infty$ conjunctae, manente a' in a' et i' in i', manifestum est ex plane dictis (Ac. Ax. 2**)).

VII. Si m' ex m' moveatur in mis (parte τ8 $\mathfrak{L}$) usque in s'; cum ponatur $\mathfrak{L}$ non esse rectam, m' simulac ex m' moveatur, ex recta ms egredi debet (nam si in ea quantumvis moveretur, via quam describeret integra esset linea recta, et si pars τ8 $\mathfrak{L}$ recta esset ob

*) [τ8 = τοῦ.]

**) [W. Bolyai bezieht sich hier und an einigen späteren Stellen, wie es scheint, auf gewisse Axiome, die er für seinen eigenen Gebrauch zusammengestellt hatte, die aber nicht mehr zu ermitteln sind.]

III. Man nehme (auf Grund von Fig. 1) die Fig. 2 so an, dass $sim\infty$ $\mathfrak{L}$ ist, $kn\infty$ aber $An\infty$. Ferner werde a' auf $An\infty$ irgendwo angenommen, nur sei $ak = an$, und $sk = nm = du = ia$ mögen alle auf der Geraden kn senkrecht stehen. Dann sind si und im einander gleich, da sie als Theile von $\mathfrak{L}$ in der gleichen Weise erzeugt sind, wenn u' in a', d' in i' liegt und T (wie vorhin) bewegt wird, bis d' die Linie im erzeugt, und zweitens das andre T, wie vorhin, bis sein d' die Linie is erzeugt. Aus diesen gleichen Erzeugungen geht hervor, dass auch die Winkel ais und aim bei der Erzeugung gleich ausfallen. Das Gesagte gilt daher noch, wenn man unter is und im Gerade versteht; denn wenn die Theile is und im von $\mathfrak{L}$ zusammenfallen, fallen auch die Geraden is und im zusammen.

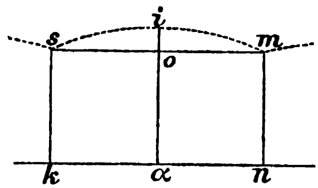


Fig. 2.

IV. Die Gerade sm wird von ai in o' senkrecht geschnitten; legt man nämlich $oanm$ auf $oaks$, so bleibt a' in a', o' in o', n' fällt auf k' (weil der Winkel $oak = nao =$ einem Rechten ist, nach der Construction), m' aber fällt auf s' (weil der Winkel $aks = anm$ ist, und $nm = ks$, nach der Construction). Mithin fällt die Gerade om auf os, und überdies sind die Winkel aos und aom gleich, folglich sind beide Rechte.

V. Man nehme also auf $\mathfrak{L}$ irgend zwei Punkte s' und m' an, dann halbirt die in der Mitte o' der Geraden sm auf dieser Geraden sm errichtete Senkrechte $V\infty$ den Theil von $\mathfrak{L}$, der zwischen s' und m' liegt (nämlich von s' bis nach m' hin).

VI. Hat ferner $\mathfrak{L}$ auf seinem Wege von i' nach der Seite von s' hin mit dem Lothe V (oder ai) einen Punkt h gemeinsam, so muss derselbe Punkt h auch der andern Seite von $\mathfrak{L}$ angehören, also von i' aus der Seite, auf der m' liegt; das erkennt man sowohl aus der auf beiden Seiten gleichen Erzeugung, als auch indem man die aus $imm'\infty$ und $ia\infty$ zusammengesetzte Linie, auf die aus $iss'\infty$ und $ia\infty$ zusammengesetzte Linie legt, wobei a' in a', i' in i' bleibt, wie aus dem oben Gesagten klar ist (siehe Axiom 2).

VII. Wird m' von m' aus auf mis (einem Theile von $\mathfrak{L}$) bis nach s' bewegt, so muss, wenn man annimmt, $\mathfrak{L}$ sei keine Gerade, m', sobald es sich von m' fort bewegt, aus der Geraden ms heraustreten; wenn es sich nämlich auch noch so wenig in dieser bewegte, so wäre der ganze Weg, den es beschriebe, eine Gerade, und wenn ein Theil von $\mathfrak{L}$ gerade wäre, so wäre, da die Erzeugung bis ins Unendliche gleichmässig fortgesetzt wird, die ganze Linie $\mathfrak{L}$ gerade. Nun aber generationem in infinitum continuatam aequaliter, tota $\mathfrak{L}$ esset recta); ingreditur vero m' (in mts motum) rectam ms iterum tum in s' pervenit: ergo seu contigerit id antea quoque, seu non; accipiatur punctum illud rectae $ms\infty$, in quod m' postquam ex m' exiit, primum ingressum est, nomineturque punctum illud e' (Fig. 1), tum pars edm (seu me) τὸ $\mathfrak{L}$ in unam plagam rectae em cadit.

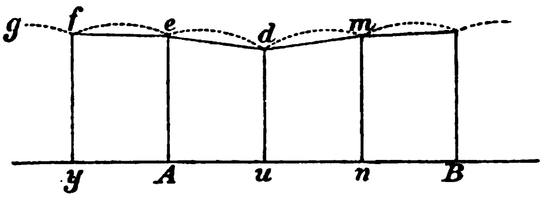


Fig. 1.

VIII. Bisecetur dicta edm (juxta V) in d'; ibi oritur $\Delta\, edm$.

IX. Accipiatur ultra e' ex $\mathfrak{L}$, $fe = ed$; ang. $fed = edm$ (nam sicut linea mde generatur, ita linea def generatur); ergo rectis md, de, ef ductis, si ang. $edu <$ recto, et $feA <$ recto; anguli vero feA, deA, edu, udm sunt aequales (ob generationes utrinque aequales) (Ac. Ax. 2). Recti tamen esse nequeunt, nam ed cum dm angulum duobus rectis minorem facit (aut ab altera parte majorem) cum τὸ edm sit Δ (VIII).

X. Si $edu <$ recto (Fig. 3), tum $edm < 2$ rectis, consequ. recta dm in plagam eam cadit rectae $ed\infty$, in quâ du est, ita $fed < 2$ rectis; consequ. recta fe in plagam A' (seu u') rectae $ed\infty$ cadit; et fe atque dm in plagam eandem rectae ed cadunt; quod in aeternum sic continuari evidens est, ut nascatur linea composita $mdef\ldots$ ex rectis aequalibus ad angulos aequales, ita ut cujusvis lateri[s] duo adjacentia in plaga eadem sita sint.

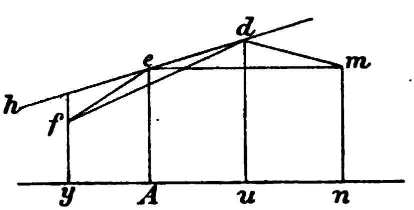


Fig. 3.

Si vero $edu >$ recto (Fig. 4), tum $edu + udm > 2$ rectis, (at minus esse debet 4 rectis, quia adhuc angulus is deficit, quem ed cum dm ab alterâ parte facit); hinc dy^{I} (id est prolongata ed) intra dm et du cadere debet; hinc dm in eam plagam cadit rectae $ed\infty$, in qua u' non est; porro tum et $dcA >$ recto, et tritt m' bei seiner Bewegung auf mis, sobald es nach s' gekommen ist, wieder in die Gerade ms, mithin wird das entweder bereits vorher einmal geschehen sein oder nicht. Man denke sich auf der Geraden $ms\infty$ den ersten Punkt, in den m', nachdem es m' verlassen hat, gelangt ist, und nenne ihn e' (Fig. 1); dann fällt der Theil edm (oder em) von $\mathfrak{L}$ auf die eine Seite der Geraden em.

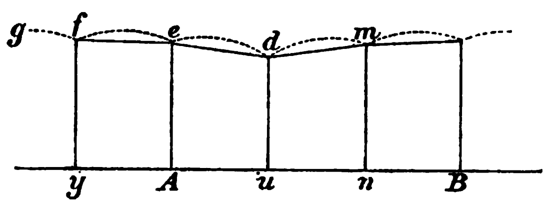


Fig. 1.

VIII. Man halbire den genannten Theil edm (nach V.) in d': so entsteht ein Dreieck edm.

IX. Man nehme jenseits von e' auf $\mathfrak{L}$ das Stück $fe = ed$ an, dann ist der Winkel $fed = edm$; denn wie die Linie mde erzeugt wird, so wird auch die Linie def erzeugt. Zieht man daher die Geraden md, de, ef, und ist der Winkel edu kleiner als ein Rechter, so ist auch feA kleiner als ein Rechter. Die Winkel feA, deA, edu, udm aber sind einander gleich wegen der auf beiden Seiten gleichen Erzeugung (siehe Axiom 2). Rechte können sie jedoch nicht sein, da ed mit dm einen Winkel bildet, der kleiner als zwei Rechte oder auf der andern Seite grösser als zwei Rechte ist, denn edm ist ein Dreieck (VIII).

X. Ist edu kleiner als ein Rechter (Fig. 3), so ist edm kleiner als zwei Rechte, folglich fällt die Gerade dm auf die Seite der Geraden $ed\infty$, auf der du liegt. Ebenso ist fed kleiner als zwei Rechte, folglich fällt die Gerade fe auf die Seite der Geraden $ed\infty$, auf der A' oder u' liegt, und fe sowie dm fallen auf dieselbe Seite der Geraden ed. Es ist klar, dass es in dieser Weise ohne Aufhören weiter geht, und es entsteht daher ein Linienzug $mdef\ldots$, der aus gleichen Geraden unter gleichen Winkeln besteht, und zwar so, dass bei jeder Kante dieses Linienzuges die beiden anliegenden Kanten auf derselben Seite liegen.

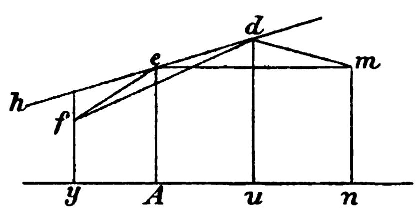


Fig. 3.

Ist aber edu grösser als ein Rechter (Fig. 4), so ist $edu + udm$ grösser als zwei Rechte, jedoch muss es kleiner als vier Rechte sein, weil noch der Winkel fehlt, den ed mit dm auf der andern Seite bildet. Mithin muss dy^1 (das heisst, die Verlängerung von ed) zwischen dm und du fallen, mithin fällt dm auf die Seite der

$deA + Aef > 2$ rectis; consequ. eh (scilicet de in h' prolongatum) inter fe et eA cadit; consequ. fe in plagam eam rectae $ed\infty$ cadit, in qua non est u' (nam A' et u' in plagam eandem rectae dh cadunt) hinc fe et dm in plagam eandem rectae ed cadunt.

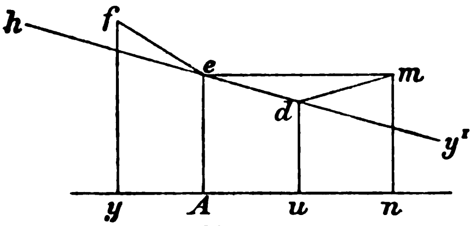


Fig. 4.

In utroque casu ergo, hac methodo continuata in infinitum, nascitur linea ut supra plane dictum est; quae tamen non redit, quia tum duae perpendiculares concurrerent (Fig. 1).

XI. Fig. 5 repraesentet lineam ejusmodi $mdefg\ldots$ quae nominetur Π; ad md erigatur perpendicularis $\varphi k\infty$; et $kdd'\infty$ vocetur Q; ac moveatur Q circa k' per lineam $defg\ldots$; ast ne Q ultra φk eat. Quando Q in $kee'\infty$ perveniet, tum ef (cadens in plagam rectae $ed\infty$ eandem cum dm) cadet aut inter eu et ek aut inter ek et ed, aut in $ekk'\infty$; si posterius sit, tum f' cadet aut inter e' et k' aut in k' aut ultra k'; si f' in λ' cadat, erigatur ad $e\lambda$ ex o', ubi λe divisa bifariam sit, perpendicularis $oq\infty$; tum $oq\infty$ bisecat partem eam τϑ Ω, quae est ab e' usque in f' (V.) et praeterea ex Π egredi debet per aliquod latus, et lateri illi adpertinentem partem τϑ Ω secare, et tum Ω rediit (VI.). Si vero ef inter ek et ed cadat, tum ef intra

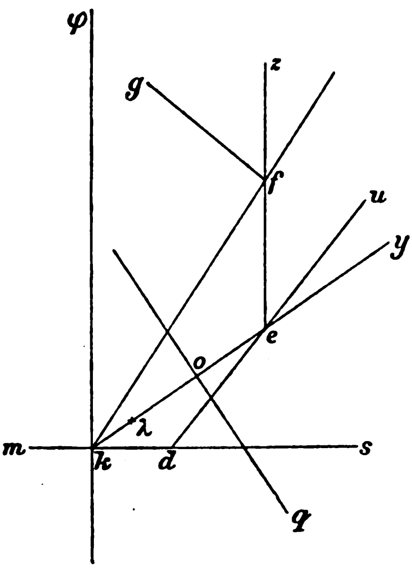


Fig. 5.

lineam ex ke et parte τϑ Π *eousque* ab k' incipiendo usque ad e' generatâ compositam tota continetur, nam ef secus partem dictam τϑ Π transiret (contra clausulam in X). Hinc perpendicularis ad ef ex dimidio τϑ ef egredi debet per aliquod latus partis dictae τϑ Π, Geraden $ed\infty$, auf der u' nicht liegt. Ferner ist alsdann auch deA grösser als ein Rechter und $deA + Aef$ grösser als zwei Rechte, folglich fällt eh (nämlich die Verlängerung von de nach h') hier zwischen fe und eA, folglich fällt fe auf die Seite der Geraden $ed\infty$, auf der u' nicht liegt, denn A' und u' liegen auf derselben Seite der Geraden dh. Mithin fallen fe und dm auf dieselbe Seite der Geraden ed.

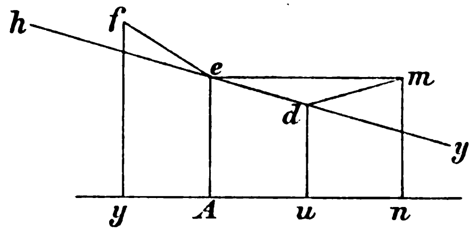


Fig. 4.

In beiden Fällen entsteht also, wenn man dieses Verfahren ins Unendliche fortsetzt, ein Linienzug, wie er vorhin beschrieben worden ist. Dieser kehrt jedoch nicht in sich selbst zurück, weil sonst zwei Senkrechte zusammenträfen (Fig. 1).

XI. Figur 5 stelle einen solchen Linienzug $mdefg\ldots$ dar, der Π genannt werden möge. Auf md errichte man die Senkrechte $\varphi k\infty$ und bezeichne $kdd'\infty$ mit Q. Nunmehr werde Q um k herum an dem Linienzuge $defg\ldots$ hin bewegt; es fragt sich, ob Q über φk hinausgeht. Ist Q nach $kee'\infty$ gelangt, dann fällt ef, das auf derselben Seite der Geraden $ed\infty$ liegt wie dm, entweder zwischen eu und ek oder zwischen ek und ed oder in $ekk'\infty$.

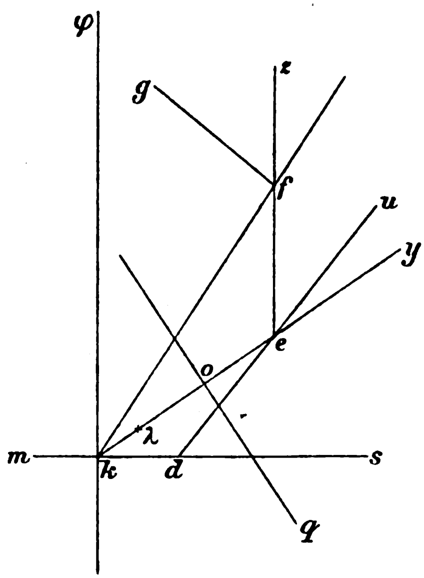


Fig. 5.

Trifft das letzte ein, so fällt f' entweder zwischen e' und k' oder auf k' oder jenseits von k'. Fällt f' nach λ', so errichte man auf der Geraden $e\lambda$ in derem Halbirungspunkte o' das Loth $oq\infty$. Dann halbirt $oq\infty$ den Theil von $\mathfrak{L}$, der sich von e' bis f' erstreckt (V.), und muss ausserdem durch irgend eine Kante aus Π heraustreten und den Theil von $\mathfrak{L}$, der dieser Kante anliegt, schneiden, und alsdann ist $\mathfrak{L}$ in sich zurückgekehrt (VI.).

Fällt aber ef zwischen ek und ed, so wird ef ganz von dem Linienzuge eingeschlossen, der zusammengesetzt ist aus ke und aus et tum secare partem τȣ $\mathfrak{Q}$ lateri illi adpertinentem, praeterea secat partem τȣ $\mathfrak{Q}$ ipsi fe adpertinentem (V.), ergo tum $\mathfrak{Q}$ redit (VI.). Notandum est, tum quando fe in ek caderet, f' inter e' et k' cadere, secus violaretur clausula in X.

XII. Si vero f' inter eu et ek cadat, tum ang. $uef + fed = 2$ rectis $= eds + edm$, atqui $edm = fed$ (X.) ergo $eds = uef$.

XIII. Vocetur R pars illa τȣ Q, quae ultra Π est, uti $ey\,y'\infty$ et $ds\,s'\infty$.... Iam si Q uti praeceptum est circa k' per Π porro moveatur, in lateris cujusvis fine quaeratur num latus sequens in Q ipsum cadat aut vero intus aut extus?

Si duorum priorum casuum aliquis advenerit, tum $\mathfrak{Q}$ rediit (XI.), idem enim casus est. Si vero semper extra Q cadat, tum pars prolongata (uti eu lateris ed) (lateris ad cujus finem Q plane pervenit) in eam plagam τȣ Q in quam latus sequens cadit, cadit inter R et latus sequens; consequ. R ultra illud latus sequens semper, quando ad initium ejus pervenit est intervallo aliquo quod R cum parte dicta prolongatâ facit (uti yeu est) et insuper constante intervallo aequali angulo eds (XII.). Porro donec Q motu praescripto per aliquod latus τȣ Π movetur, illud in initio secuit et porro secabit; adeoque Q tum semper angulum circa k' describit eoque ipsi φk propius venit.

Hinc R semper aliquo intervallo ultra eam partem τȣ Π manet, quam Q percurrere tendit; et intervallum illud tantum abest ut nihilum fieret ut simulac Q motum incoepit in cujusvis lateris τȣ Π extremo, est constante angulo eds majus.

Hinc R nunquam intra Π venire poterit, nam intervallum tolli est inpossibile; cum quantitas, quae etsi quantovis decresceret, semper dem bis jetzt, von k' anfangend bis e' hin, erzeugten Theile von Π; sonst ginge nämlich ef, entgegen der in X. gemachten Bemerkung, durch den soeben genannten Theil von Π hindurch. Mithin muss die auf ef im Halbirungspunkte errichtete Senkrechte durch irgend eine Kante des genannten Theiles von Π austreten und alsdann den zu jener Kante gehörigen Theil von $\mathfrak{L}$ schneiden. Ausserdem schneidet es aber den Theil von $\mathfrak{L}$, der zu fe selbst gehört (V.), und alsdann kehrt $\mathfrak{L}$ in sich zurück (VI.).

Noch ist zu bemerken, dass, wenn fe auf ek fiele, f' zwischen e' und k' fällt, sonst würde die in X. gemachte Bemerkung aufgehoben.

XII. Fällt jedoch f zwischen eu und ek, dann ist der Winkel $uef + fed$ gleich zwei Rechten, gleich $eds + edm$, es ist aber $edm = fed$ (X.), also $eds = uef$.

XIII. Es heisse R der Theil von Q, der jenseits Π liegt, wie $eyy'\infty$ und $dss'\infty$ .... Wird nun Q in der vorgeschriebenen Weise um k' herum an Π hin weiter bewegt, so muss beim Endpunkte einer jeden Kante gefragt werden, ob die folgende Kante auf Q fällt oder nach innen oder nach aussen.

Tritt einer der beiden ersten Fälle ein, so ist $\mathfrak{L}$ in sich zurückgekehrt (XI.), denn das ist ganz genau derselbe Fall. Fällt jedoch die folgende Kante von Q aus gesehen immer nach aussen, so verlängere man die Kante, zu deren Endpunkte Q gerade gelangt ist, dahin, wohin die folgende Kante von Q aus gesehen fällt, und es wird diese Verlängerung (bei der Seite ed ist es eu) zwischen R und die folgende Kante fallen. Folglich liegt R, wenn es an den Anfangspunkt der folgenden Kante gelangt ist, immer jenseits dieser und ist von ihr durch einen Zwischenraum getrennt, nämlich durch den Zwischenraum zwischen R und der genannten Verlängerung (ein solcher ist yeu), wozu noch ein constanter Zwischenraum gleich dem Winkel eds kommt (XII.). Ferner hat Q, während es in der vorgeschriebenen Bewegung an einer Kante von Π hin bewegt wird, diese am Anfange geschnitten und hört nicht auf sie zu schneiden, und Q beschreibt dann sogar immer einen Winkel um k' und kommt dadurch der Geraden φk immer näher.

Mithin bleibt R immer um einen gewissen Zwischenraum jenseits des Theiles von Π, den Q zu durchlaufen im Begriffe ist, und dieser Zwischenraum wird niemals gleich Null, vielmehr ist er jedesmal, wenn Q seine Bewegung in dem Endpunkte einer Kante von Π begonnen hat, grösser als der constante Winkel eds.

Mithin wird R niemals in das Innere von Π gelangen können; denn dass der Zwischenraum verschwinde, ist unmöglich, weil eine tamen priusquam absumeretur, redintegratur in eandem constantem aut eâ majus, tolli nequit.

Quapropter Q moveri potest modo praescripto usque quo in $\varphi k \varphi' \infty$ veniet; tum vero etiam Π adest, secus enim R ex Π exiisset quod absurdum esse est demonstratum, tum vero aut extremum lateris alicujus τȣ Π cadit in $\varphi k \infty$, et tum punctum aliquod τȣ Ω (illud nempe) in $\varphi k \infty$ cadit; aut latus aliquod τȣ Π per $\varphi k \infty$ transiit iterum, ergo et pars ea τȣ Ω, quae inter extrema lateris illius est, transiit per $\varphi k \infty$; in utroque casu Ω rediit (VI.).

Hinc posito eo quod Ω non sit recta redire debet: Itaque cum demonstratum sit in (I) Ω non redire, falsum est Ω non esse rectam, quia per id veritas demonstrata destrueretur; omne vero, quod veritati repugnat, falsum est*).

Schol[ium]. Nihilo minus tamen per aliquod punctum τȣ Ω non dari et aliam parallelam ipsi An demonstratum adhuc non est, adeoque donec id fieret semper parallelae ita generatae aut generandae intelligantur.

Corol[larium]. 2. Fig. 1. In generatione τȣ Ω, το du ex quovis loco sive porro eat, sive via qua venit redeat, generat aequaliter; hinc facit angulos cum Ω ubique et utrinque aequales seu rectos.

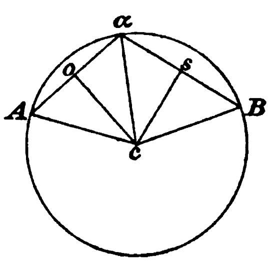


Fig. 6.

Th[eorema]. 1. (Fig. 6). Recta circulum non potest in pluribus quam duobus punctis secare.

Nam si rectae AB punctum a sit in peripheria, tum ad eandem rectam perpendiculares co et cs concurrerent (contra Prob. Dem. 1). Sit nempe c' centrum, $oa = oA$ et $sa = sB$; tum anguli ad o' sunt recti quia sunt aequales (ob co commune, $cA = ca$ et $oa = oA$); pariter et anguli ad s' erunt recti.

*) Hier folgt ein uns nicht verständliches Corollarium, das mit Strichen umrandet ist und zu dem W. Bolyai auf der Figurentafel hinter den früher mitgetheilten Anmerkungen selbst bemerkt:

„5. Corollarium Problematis I non est legendum, quia ad Definitiones traditas alibi refertur“. (Den Zusatz zu Aufgabe I braucht man nicht zu lesen, da er sich auf anderwärts mitgetheilte Definitionen bezieht.)

Das Corollarium selbst lautet wie folgt:

Cor[ollarium 1]. Hinc [Fig. 1) Ω est recta parallela ipsi $An\infty$; nam (Def. 42) quodvis. γ ex spatio quod = alteri Z est eidem simile, si in eadem Definitione

Grösse nicht verschwinden kann, die, wie sehr sie auch einmal abnehmen möge, doch immer wieder, bevor sie erschöpft ist, zu derselben Constanten oder einer noch beträchtlicheren Grösse ergänzt wird.

Demnach lässt sich Q auf die vorgeschriebene Art bewegen, bis es nach $\varphi k \varphi' \infty$ gelangt. Dann ist aber auch Π an dieser Stelle, sonst wäre nämlich R aus Π herausgetreten, was als widersinnig erwiesen ist. Dann aber fällt entweder der Endpunkt einer Kante von Π auf $\varphi k \infty$ und damit fällt ein Punkt von $\mathfrak{L}$ (nämlich gerade dieser) auf $\varphi k \infty$, oder es ist eine Kante von Π zum zweiten Male durch $\varphi k \infty$ hindurchgegangen, also ist auch der Theil von $\mathfrak{L}$, der zwischen den Endpunkten dieser Kante liegt, durch $\varphi k \infty$ hindurchgegangen; in beiden Fällen ist $\mathfrak{L}$ in sich zurückgekehrt (VI.).

Mithin muss $\mathfrak{L}$, wenn man annimmt, dass es keine Gerade sei, in sich zurückkehren. Da nun unter (I.) bewiesen worden ist, dass $\mathfrak{L}$ nicht in sich zurückkehrt, so ist es falsch, dass $\mathfrak{L}$ keine Gerade sein soll, weil dadurch eine bewiesene Wahrheit zerstört werden würde; alles aber, was einer Wahrheit widerspricht, ist falsch*).

Anmerkung. Nichtsdestoweniger ist bis jetzt nicht bewiesen, dass es durch einen Punkt von $\mathfrak{L}$ keine andre Parallele zu An mehr giebt; bis das geschieht, hat man also unter Parallelen immer Linien zu verstehen, die so [wie $\mathfrak{L}$] erzeugt oder zu erzeugen sind.

Zusatz 2. Fig. 1. Bei der Erzeugung von $\mathfrak{L}$ fällt das Erzeugniss von du stets gleich aus, an welcher Stelle man auch anfängt, mag es nun vorwärts gehen oder auf dem Wege, den es gekommen ist, wieder zurückkehren; mithin bildet du überall und auf beiden Seiten mit $\mathfrak{L}$ gleiche oder rechte Winkel.

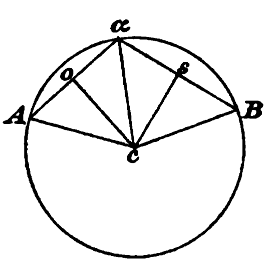


Fig. 6.

Lehrsatz I. (Fig. 6). Eine Gerade kann einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

Denn läge der Punkt α der Geraden AB auf dem Umfange, so träfen co und cs, die auf eben dieser Geraden senkrecht stehen, zusammen (gegen Aufgabe 1, Beweis I). Es sei nämlich c' der Mittelpunkt, $o\alpha = oA$ und $s\alpha = sB$, dann sind die Winkel bei o' Rechte, weil sie gleich sind, denn co ist gemeinschaftlich und $cA = c\alpha$, $o\alpha = oA$; ebenso sind auch die Winkel bei s' Rechte.

*) Zusatz [1]. Mithin (Fig. 1) ist $\mathfrak{L}$ eine Gerade, die zu $An\infty$ parallel ist, denn (Def. 42) jedes γ aus dem Raume, das gleich einem andern Z ist, ist ihm ähnlich. Wenn in derselben Definition im Besonderen $\alpha = \beta$ angenommen, γ' in γ angenommen wird, und γ und Z so gelegt werden, dass sie zusam-

Cor[ollarium]. Hinc pars τὸ $AB\infty$ ea, quae praeter AB est, extra peripheriam cadit, nam accipiatur centro B peripheria in eodem plano, peripheriam $A\alpha B$ intracludens (quod fieri posse patet si centro B in plano dicto radio omni, cujus alterum extremum est punctum peripheriae $A\alpha B$, generentur peripheriae et deinde ultra extremam harum peripheriarum ex centro B generatarum accipiatur punctum aliquod p in eodem plano et rectâ Bp centro B' fiat peripheria); tum recta AB ultra A' attingit peripheriam exteriorem, adeoque amplius intra peripheriam $A\alpha B$ non veniet, quia tum recta in tribus punctis secaret circulum; idem et de altera parte τὸ $AB\infty$ probari potest ex centro A'.

Theo[rema]. 2. Fig. 7. Si cathetus unus crescit, crescit hypothenusa.

Nam scribatur centro δ' radio $\delta\beta$ circulus; hic adhuc habet cum $\alpha\beta\alpha'\infty$ unum punctum B' commune, si $B\alpha = \alpha\beta$ (quia $\Delta\,\delta\,\alpha\,\beta = \Delta\,\delta\,\alpha\,B$); ergo recta $B\beta\beta'\infty$ (praeter $B\beta$) est extra peripheriam, ergo et γ (Th. 1. Cor.), quam ob rem $\delta\gamma > \delta\beta$.

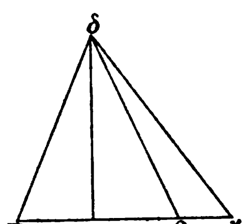


Fig. 7.

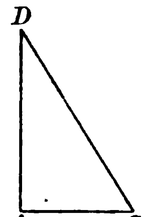


Fig. 8.

Cor[ollarium]. 1. Fig. 7 et 8. Hinc in triangulis rectangulis cathetus et hypothenusa ponunt aequalitatem. Nam superponatur DA ipsi $\delta\alpha$, D' in δ' cadente, et A' in α'; ang. DAG et $\delta\alpha\gamma$ sunt recti, demum etiam (cum $DG = d\gamma$) το G' in γ' cadere debet; nam omnes aliae hypothenusae, quae ex δ ad $\alpha\gamma\gamma'\infty$ duci possunt, sunt [aut] majores aut minores.

Scholion. Non tamen universaliter verum est per duo latera

(specialiter) $\alpha = \beta$ accipiatur, ac γ' in γ accipiatur, ita positis γ et Z ut coincidant; porro ducatur recta per quaevis duo puncta τὰ $\mathfrak{L}$ et per quaevis duo puncta τὰ $An\infty$ ducatur alia, rectis $\mathfrak{L}$ et $An\infty$ jam ita sitis uti in Fig. 1, et rectae ductae erunt in eodem plano nec concurrent, cum una earum cadat in $\mathfrak{L}$, altera in $An\infty$; ergo cum idem de quibusvis duobus τὰ $\mathfrak{L}$ punctis et quibusvis duobus τὰ $An\infty$ *similium* valeat, valet et de homologis, ergo (Deff. 44) $\mathfrak{L}$ et $An\infty$ sunt parallelae.

Zusatz. Mithin fällt der Theil von $AB\infty$, der nach Wegnahme von AB übrig bleibt, ausserhalb des Umfangs. Man denke sich in derselben Ebene einen Kreis mit dem Mittelpunkte B, der den Umfang AaB einschliesst. Dass das möglich ist, erkennt man, wenn man in der genannten Ebene um den Mittelpunkt B mit einem jeden Halbmesser, dessen andrer Endpunkt ein Punkt des Umfanges AaB ist, einen Kreis erzeugt, sodann jenseits des äussersten jener Kreise, die von dem Mittelpunkt B aus erzeugt sind, irgend einen Punkt p in derselben Ebene annimmt und mit der Geraden Bp und dem Mittelpunkte B' einen Kreis beschreibt. Dann trifft die Gerade AB den äusseren Umfang jenseits A' und kommt überhaupt nicht wieder in den Umfang AaB, weil dann eine Gerade einen Kreis in drei Punkten schnitte. Dasselbe lässt sich von dem andern Theile von $AB\infty$ beweisen, indem man A' zum Mittelpunkte nimmt.

Lehrsatz 2. Fig. 7. Wenn die eine Kathete wächst, so wächst die Hypotenuse.

Denn man beschreibe einen Kreis mit dem Mittelpunkte δ' und dem Halbmesser $\delta\beta$. Dieser hat mit $\alpha\beta\alpha'\infty$ noch einen Punkt B' gemeinsam, wenn $B\alpha = \alpha\beta$ ist, weil $\Delta\delta\alpha\beta = \Delta\delta\alpha B$, also liegt die Gerade $B\beta\beta'\infty$, abgesehen von $B\beta$, ausserhalb des Umfanges, also auch γ (Lehrsatz 1, Zusatz), und deshalb ist $\delta\gamma$ grösser als $\delta\beta$.

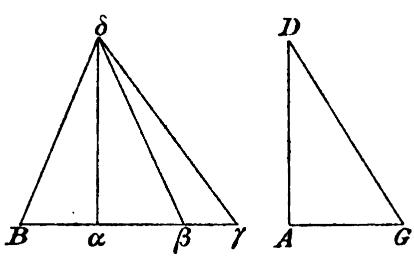


Fig. 7. Fig. 8.

Zusatz 1. Fig. 7 und 8. Bei rechtwinkligen Dreiecken bedingen mithin Kathete und Hypotenuse die Gleichheit. Denn man lege DA auf $\delta\alpha$, so dass D' auf δ' fällt und A' auf α'. Die Winkel DAG und $\delta\alpha\gamma$ sind Rechte, endlich muss, da noch $DG = \delta\gamma$ ist, auch G' auf γ' fallen, denn alle andern Hypotenusen, die man von δ' aus nach $\alpha\gamma\gamma'\infty$ ziehen kann, sind entweder grösser oder kleiner.

Anmerkung. Es gilt jedoch nicht allgemein, dass ein Dreieck

---

menfallen; wenn man ferner durch irgend zwei Punkte von $\mathfrak{L}$ eine Gerade zieht und eine andre durch irgend zwei Punkte von $An\infty$, wobei die Geraden $\mathfrak{L}$ und $An\infty$ bereits so liegen, wie in Fig. 1, so liegen auch die gezogenen Geraden in derselben Ebene und treffen nicht zusammen, da die eine von ihnen auf $\mathfrak{L}$, die andre auf $An\infty$ fällt. Da also dasselbe von je zwei beliebigen Punkten von $\mathfrak{L}$ und von je zwei beliebigen von $An\infty$ gilt, und beide Gerade einander ähnlich sind, so gilt es auch von entsprechenden Punkten, also (Def. 44) sind $\mathfrak{L}$ und $An\infty$ parallel.

et unum angulum determinari triangulum. Ex. gr. Δ^i $B\delta\gamma$ est pars $\Delta\,\beta\delta\gamma$, quamvis ang. γ communis sit, latus quoque $\delta\gamma$ commune et $\delta B = \delta\beta$.

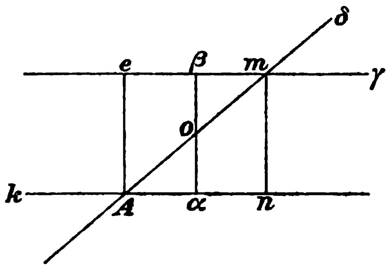


Fig. 9.

Cor[ollarium]. 2. Hinc si (ex Fig. 1) accipiatur $emnA$, ducaturque (Fig. 9) Am; tum $\Delta meA = \Delta Anm$; superponatur unum eorum alteri et patebit angulorum omnium Δ^i rectanguli summam esse dimidium quatuor rectorum; idem vero de quolibet Δ rectangulo valet, cum An et Ae quanta libet sumere fas est.

Cor[ollarium]. 3. Hinc cum Δ quodvis possit in duo Δ^a rectangula distingui, cujusvis Δ^i angulorum summa est $= 2$ rectis.

Th[eorema]. 3. Sie duas parallelas em et An (Fig. 9) recta secet in A' et m', anguli alterni mAn et Ame sunt aequales, et $mAk = Am\gamma$.

Nam sit Am divisa bifariam in o'; demittatur ex o' ad An perpendicularis. Si haec in oA cadat, tum ang. alterni sunt recti et aequales (Prob. 1., Cor. 2.).

Si extra oA cadat (ex. gr. in $o\alpha$), tum αo continuata secare debet rectam em (per genesin $\tau\delta$ em in Prob. et Fig. 1); transiens αo in plagam rectae Am alteram secat rectam me in β; $\Delta\ A\alpha o = m\beta o$; anguli verticales sunt aequales et ang. α et β sunt recti (Prob. 1, Cor. 2), ergo tertius aequalis tertio, et latus $Ao = om$.

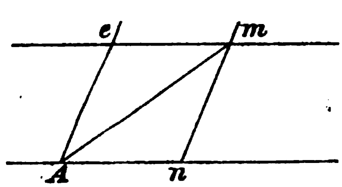


Fig. 10.

Hinc et complementa ad duos rectos angulorum horum duorum alternorum pariter alterni sunt aequales.

Cor[ollarium]. 1. Hinc et externus $=$ interno opposito, nempe $\gamma m\delta = mAn$, nam $\gamma m\delta =$ verticali Ame, qui est $= mAn$.

Cor[ollarium]. 2. Hinc (Fig. 10), si duas parallelas em et An

durch zwei Seiten und einen Winkel bestimmt ist. Zum Beispiel bildet das Dreieck $\beta\delta\gamma$ einen Theil des Dreiecks $B\delta\gamma$, obgleich der Winkel γ beiden gemeinsam ist, ebenso die Seite $\delta\gamma$ gemeinsam und $\delta B = \delta\beta$.

Zusatz 2. Entnimmt man daher aus Figur 1 $emnA$ und zieht (Fig. 9) Am, so ist $\Delta meA = \Delta Anm$. Man lege das eine dieser Dreiecke auf das andre, so ist sofort klar, dass die Summe aller Winkel des rechtwinkligen Dreiecks die Hälfte von vier Rechten ist. Dasselbe gilt aber in jedem beliebigen rechtwinkligen Dreiecke, da man An und Ae beliebig gross annehmen darf.

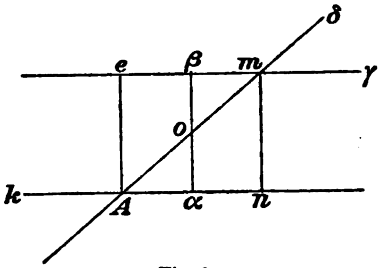


Fig. 9.

Zusatz 3. Da nun ein jedes Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, so ist die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks gleich zwei Rechten.

Lehrsatz 3. Werden zwei Parallelen em und An (Fig. 9) von einer Geraden in A' und m' geschnitten, so sind die Wechselwinkel mAn und Ame gleich und $mAk = Am\gamma$.

Denn man halbire Am in o' und fälle von o' das Lot auf An. Fällt dieses in oA, so sind die Wechselwinkel Rechte und einander gleich (Aufgabe 1, Zusatz 2).

Fällt es ausserhalb oA (zum Beispiel in $o\alpha$), so muss die Verlängerung von αo, zu Folge der Erzeugung von em in Aufgabe und Figur 1, die Gerade em schneiden. Nach dem Uebergange auf die andre Seite der Geraden Am möge αo die Gerade me in β schneiden. Dann ist $\Delta A\alpha o = m\beta o$; die Scheitelwinkel sind [nämlich] einander gleich, die Winkel α und β sind Rechte (Aufgabe 1, Zusatz 2), also ist auch der dritte Winkel dem dritten gleich, und überdies ist die Seite Ao gleich om.

Mithin sind für diese beiden Wechselwinkel auch die Ergänzungen zu zwei Rechten, die wiederum Wechselwinkel sind, einander gleich.

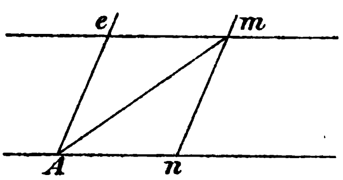


Fig. 10.

Zusatz 1. Mithin ist auch ein äusserer Winkel gleich dem inneren entgegengesetzten, also $\gamma m\delta$ gleich mAn, denn $\gamma m\delta$ ist gleich seinem Scheitelwinkel Ame, der gleich mAn ist.

Zusatz 2. Werden mithin (Fig. 10) zwei Parallelen em und An

duae parallelae eA et mn secent, et sectionis puncta sint e', m', A' et n': tunc $em = An$ et $eA = mn$, nam $\Delta\, eAm = nmA$, quia alterni aequales et Am commune.

Th[eorema]. 4. Si (Fig. 9) ang[ul]i alterni sint aequales: tum rectae sectae concurrere nequeunt. Nam si $emA = mAn$ et $Am\gamma = mAk$, superponatur linea composita ex Am, $m\gamma\gamma'\infty$ et $Ann'\infty$ lineae compositae ex Am, $Akk'\infty$ et $mee'\infty$, cadet A' in m', m' in A', $m\gamma\gamma'\infty$ in $Akk'\infty$ et $Ann'\infty$ in $mee'\infty$, consequ., si $mee'\infty$ et $Akk'\infty$ concurrerent, etiam $Ann'\infty$ et $m\gamma\gamma'\infty$ concurr[er]ent, et tum duae rectae duo puncta communia habentes non coinciderent.

Cor[ollarium]. Hinc si internus externo opposito sit aequalis demonstratur idem.

Th[eorema]. 5. Fig. 11. Si Δ^i latus prolongetur, angulus externus $x = y + z$, nam $x + v = 2$ rectis $= y + z + v$; subtracto v ex utroque membro est $x = y + z$.

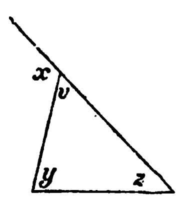


Fig. 11.

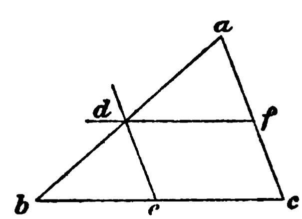


Fig. 12.

Th[eorema]. 6. Si (Fig. 12) $ad = db$ et $af = fc$ tum $df = \frac{bc}{2}$.

Nam fiat rectae bc per d' parallela; haec per ac in puncto quodam f transeat necesse est; quia supra rectam $bc\infty$ ex una plaga rectae $baa'\infty$ in alteram debet transire, nam in ipsam $baa'\infty$ cadere nequit, cum ita non esset parallela; itaque in $\Delta\, abc$ ingreditur, egredi quoque ex eo debet (demonstrari potest modo ex Th. 1 Corol. petito), quod cum nequeat per bc fieri, nempe parallelam per ac fieri debet; fiat in f'; deinde ducatur per d' ipsi ac parallela transeat ea per bc

von zwei Parallelen eA und mn geschnitten, und sind e', m', A' und n' die Schnittpunkte, so ist em gleich An und eA gleich mn, denn das Dreieck eAm ist gleich dem Dreiecke nmA, weil Wechselwinkel gleich sind, und Am beiden gemeinsam ist.

Lehrsatz 4. Wenn (Fig. 9) Wechselwinkel einander gleich sind, so können die geschnittenen Geraden nicht zusammentreffen.

Denn ist emA gleich mAn und $Am\gamma$ gleich mAk, so lege man den aus Am, $m\gamma\gamma'\infty$ und $Ann'\infty$ zusammengesetzten Linienzug auf den aus Am, $Akk'\infty$ und $mee'\infty$ zusammengesetzten Linienzug. Dann fällt A' auf m', m' auf A', $m\gamma\gamma'\infty$ auf $Akk'\infty$ und $Ann'\infty$ auf $mee'\infty$, folglich müssten, wenn $mee'\infty$ und $Akk'\infty$ zusammenträfen, auch $Ann'\infty$ und $m\gamma\gamma'\infty$ zusammentreffen, und dann fielen zwei Gerade, die zwei Punkte gemeinsam haben, nicht zusammen.

Zusatz. Ist daher ein innerer Winkel einem äussern entgegengesetzten gleich, so lässt sich dasselbe beweisen.

Lehrsatz 5. Fig. 11. Wird die Seite eines Dreiecks verlängert, so ist der Aussenwinkel $x = y + z$.

Denn es ist $x + v = 2$ Rechten $= y + z + v$. Zieht man auf beiden Seiten v ab, so ist $x = y + z$.

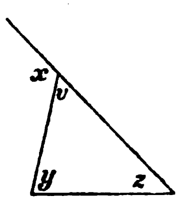


Fig. 11.

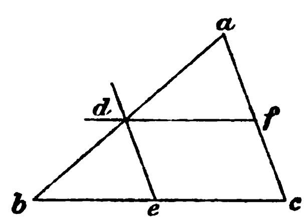


Fig. 12.

Lehrsatz 6. Ist (Fig. 12) $ad = db$ und $af = fc$, so ist $df = \frac{1}{2}bc$.

Denn man ziehe durch d' zu bc die Parallele. Diese muss durch ac in einem gewissen Punkte f hindurchgehen, weil sie oberhalb der Geraden $bc\infty$ von der einen Seite der Geraden $baa'\infty$ auf die andre übergehen muss, denn auf $baa'\infty$ selbst kann sie nicht fallen, da sie dann keine Parallele wäre. Sie tritt also in das Dreieck abc ein und muss auch aus diesem austreten, was man durch ein dem Zusatze des ersten Lehrsatzes entlehntes Verfahren beweisen kann. Da dies durch bc, in e': tum $\triangle\, dbe = adf$, nam ang. $dbe = adf$ (scilicet internus externo opposito), $bd = da$, et ang. $bde = daf$ (externus interno opposito), ergo $be = df = ec$ (Th. 3, Cor. 2); ergo $bc = 2df$.

Prob[lema]. 2. Construere $\triangle$ ex datis angulis x, y, z, quorum summa $= 2$ rectis.

Res[olutio]. Fig. 13. Iungantur rectae ab et ac in a' ad angulum x, ducatur bc; tum angulorum acb et abc summa $= y + z$ (Th. 2, Cor. 3), ergo aut unum eorum aequale y, alterum $= z$, aut unum est majus aliquo των y et z, alterum plane tanto minus των y et z altero. Sit $abc > y$, tum moveatur $bcc'\infty$ circa b' per ca porro, donec in $baa'\infty$ perveniat, adeoque ang. abc fiat 0. Durante eo motu (quia ang. abc per omnes angulos ipso abc minores variatur) sistatur $bcc'\infty$ ibi quando angulum cum ba facit $= y$; tum quoque $bcc'\infty$ per ac transit, quia omnis recta ex b' inter ab et bc ducta per ac transire debet, tum ergo adest $\triangle$ petitum, tertius enim angulus $= 2$ rectis $- (x + y) = z$.

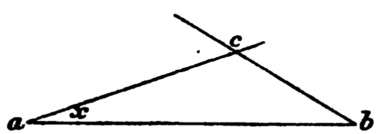


Fig. 13.

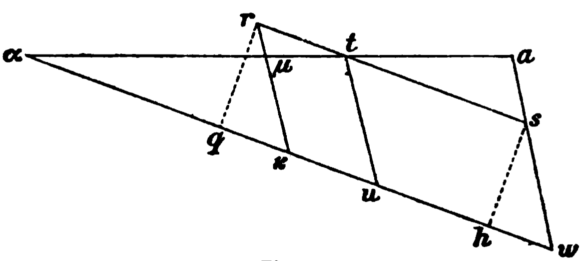


Fig. 14.

Prob[lema]. 3. Sit (Fig. 14) $a = x$, $a\varkappa\mu = y$, $a\mu\varkappa = z$; detur recta definita b: quaeritur recta ipsâ b major ejusmodi, quae unum als Parallele [zu df], nicht geschehen kann, so muss es durch ac geschehen. Es geschehe in f'. Sodann ziehe man durch d' die Parallele zu ac, die in e' durch bc gehen möge. Dann ist das Dreieck dbe gleich dem Dreiecke adf, denn der Winkel dbe ist gleich adf, (nämlich der innere dem äussern, entgegengesetzten), bd ist gleich da, und der Winkel bde gleich daf (der äussere dem innern, entgegengesetzten). Also ist $be = df = ec$ (Lehrsatz 3, Zusatz 2), also $bc = 2df$.

Aufgabe 2. Ein Dreieck aus gegebenen Winkeln x, y, z zu construiren, deren Summe gleich zwei Rechten ist.

Auflösung. Fig. 13. Man lege die Geraden ab und ac in a' unter dem Winkel x an einander und ziehe bc, dann ist die Summe der Winkel acb und abc gleich $y + z$ (Lehrsatz 2, Zusatz 3), also ist entweder einer von ihnen gleich y, der andre gleich z, oder der eine ist grösser als der eine der beiden Winkel y und z, der andre um eben soviel kleiner als der andre der Winkel y und z.

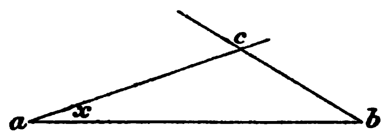


Fig. 13.

Es sei $abc > y$. Dann bewege man $bcc'\infty$ um b' durch ca fort, bis es nach $baa'\infty$ gelangt, und somit der Winkel abc gleich Null wird. Während dieser Bewegung, bei welcher der Winkel abc alle Winkel, die kleiner als abc sind, durchläuft, halte man $bcc'\infty$ an der Stelle fest, wo es mit ba einen Winkel gleich y bildet. Auch dann geht $bcc'\infty$ noch durch ac, weil eine jede Gerade, die zwischen ab und bc von b' aus gezogen ist, durch ac hindurchgehen muss. Man hat also dann das verlangte Dreieck, denn der dritte Winkel ist gleich zwei Rechten, vermindert um $x + y$, also gleich z.

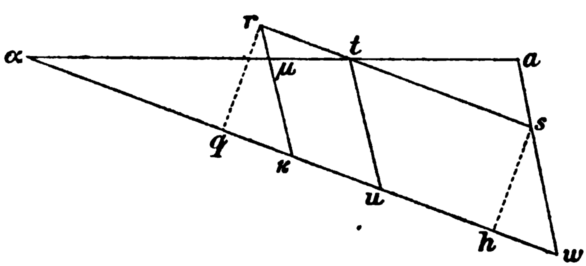


Fig. 14.

Aufgabe 3. Es sei (Fig. 14) $a = x$, $a\varkappa\mu = y$, $a\mu\varkappa = z$, und gegeben sei eine bestimmte Gerade b. Gesucht wird eine Gerade, die extremum n crure $aww'\infty$ habeat, alterum in crure $a\alpha\alpha'\infty$ sitque parallela ipsi $\mu\varkappa$.

Res[olutio]. Accipiatur $\varkappa w = \varkappa\alpha$ et $\mu a = \mu\alpha$, atque (ex Theor. 6) recta $w\alpha$ erit $2\mu\varkappa$; iterum si in $aww'\infty$ accipiatur ex w' recta $= aw$ et in $a\alpha\alpha'\infty$ ex α' accipiatur recta $= a\alpha$ et hoc continuetur; tum $\varkappa\mu$ crescet in progressione geometrica (exponente 2), adeoque evadet aliquando major quam b.

Cor[ollarium]. Ita si $\mu\varkappa$ sit majus quam b, potest $\mu\varkappa$ in talem rectam ipsa b minorem variari, quae unum extremum in $a\mu$ habeat, alterum in $a\varkappa$; si rectae $a\mu$ et $a\varkappa$ bisectae fuerint et methodus plane exercita retrorsum continuetur, ut $\varkappa\mu$ decrescat in progressione cadente geometrica exponentis $\frac{1}{2}$ (Th. 6).

Prob[lema]. 4. Fig. 14. Sit (juxta Prob. praec.) $\varkappa\mu < b$ et $w\alpha > b$, et $ws = b$ et $\varkappa r = b$, quaeritur recta aequalis ipsi b unum extremum in aw, alterum in $a\alpha$ habens, et ipsi $\mu\varkappa$ parallela.

Res[olutio]. Ducatur sr. Ea transeat in t' per $\mu\alpha$; ducatur tu ita ut ang. atu sit $= a\mu\varkappa$, tum tu, $\varkappa\mu$ et $w\alpha$ nunquam concurrere queunt (Th. 4, Cor.); adeoque tu per $\varkappa w$ transire debet, fiat id in u'; porro rs est parallela ipsi $\varkappa w$; nam si demittantur ex r' et s' perpendiculares ad $aw\infty$, illae aut ipsae $\mu\varkappa$ et sw erunt (et tum, quia $r\varkappa = sw$, erunt rs et $\varkappa w$ parallelae (Prob. 1) aut perpendicularis ex r' erit rq et altera ex s' erit sh, tum vero $\Delta\ rq\varkappa = shw$, nam $\varkappa = w$, $q = h$, ergo $r = s$, porro $r\varkappa = sw$; hinc $rq = sh$, et (Prob. 1) rs est parallela ipsi $\varkappa w$. Porro etiam tu est parallela ipsi sw, nam per t' potest parallela duci ipsi sw, et ea talis esse debet, ut ang. $w\alpha\alpha = ut\alpha$ (internus externo opposito), tu vero talis est, neque alia recta datur in hac plaga rectae $\alpha\alpha$, quae cum at in t' angulum aequalem atu faciat; hinc illa est ex t' sola parallela ipsi sw (sensu Prob. 1 Scholii intelligenda).

Hinc (Th. 3, Cor. 2) $tu = sw = b$, quod erat petitum.

grösser als b und so beschaffen ist, dass sie ihren einen Endpunkt auf dem Schenkel $aww'\infty$, den andern auf dem Schenkel $a\alpha\alpha'\infty$ hat, und dass sie zu $\mu\varkappa$ parallel ist.

Auflösung. Man nehme $\varkappa w$ gleich $\varkappa a$ an und $\mu\alpha$ gleich μa, so ist (nach Lehrsatz 6) die Gerade $w\alpha$ gleich $2\mu\varkappa$. Nimmt man wiederum auf $aww'\infty$ von w' aus eine Gerade gleich aw an, und nimmt auf $a\alpha\alpha'\overline{\infty}$ von α' aus eine Gerade gleich $a\alpha$ an und fährt so fort, so wächst $\varkappa\mu$ in einer geometrischen Progression mit dem Exponenten 2 und wird somit einmal grösser als b.

Zusatz. Ebenso kann man, wenn $\mu\varkappa$ grösser als b ist, $\mu\varkappa$ durch eine Gerade ersetzen, die kleiner als b ist und die ihren einen Endpunkt auf $a\mu$, den andern auf $a\varkappa$ hat, indem man nämlich $a\mu$ und $a\varkappa$ halbirt und das soeben angewandte Verfahren rückwärts fortsetzt, sodass $\varkappa\mu$ in einer fallenden geometrischen Progression mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ abnimmt (Lehrsatz 6).

Aufgabe 4. Fig. 14. Es sei (gemäss der vorhergehenden Aufgabe) $\varkappa\mu < b$ und $w\alpha > b$, sowie $ws = b$ und $\varkappa r = b$. Man sucht eine Gerade, die gleich b ist, ihren einen Endpunkt auf aw, den andern auf $a\alpha$ hat und die zu $\mu\varkappa$ parallel ist.

Auflösung. Man ziehe die Gerade sr, die $\mu\alpha$ in t' überschreite, und ziehe tu so, dass der Winkel atu gleich $a\mu\varkappa$ ist. Dann können tu, $\varkappa\mu$ und $w\alpha$ niemals zusammentreffen (Lehrsatz 4, Zusatz), und tu muss $\varkappa w$ überschreiten, was in u' geschehen möge. Ferner ist rs zu $\varkappa w$ parallel; werden nämlich von r' und s' aus Lote auf $aw\infty$ gefällt, so sind diese entweder $\mu\varkappa$ und sw selbst, und dann sind, weil $r\varkappa = sw$ ist, rs und $\varkappa w$ parallel (Aufgabe 1), oder das Lot von r' aus ist rq, und das andre von s' aus ist sh. Dann aber ist $\Delta\, rq\varkappa = shw$, denn es ist $\varkappa = w$, $q = h$, also $r = s$, und ferner ist $r\varkappa = sw$, mithin $rq = sh$, und rs ist (nach Aufgabe 1) zu $\varkappa w$ parallel. Ferner ist auch tu zu sw parallel, denn durch t' lässt sich eine Parallele zu sw ziehen, und diese muss so beschaffen sein, dass der Winkel $wa\alpha$ gleich uta ist, ein innerer dem äussern, entgegengesetzten. Aber tu ist so beschaffen, und es giebt auf dieser Seite der Geraden $a\alpha$ keine andre Gerade, die mit at in t' einen Winkel gleich atu bildete. Mithin ist jene Gerade von t' aus die einzige Parallele zu sw (aufzufassen im Sinne der Anmerkung zu Aufgabe 1).

Mithin ist (Lehrsatz 3, Zusatz 2) $tu = sw = b$, was verlangt war.

Cor[ollarium]. Hinc ex Probl. 2., 3., 4. patet construi posse Δ, cujus unum latus est datum b et angulorum adjacentium unus datus y, alter vero datus z.

Th[eorema] 7. (Fig. 15). Sit quaevis recta AB, et rectae BD et AC in eadem plaga rectae AB in eodem plano; et sit ang. $CAB + ABD < 2$ rectis, tum $ACC'\infty$ et $BDD'\infty$ se invicem secabunt.

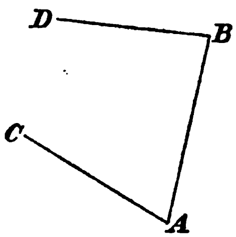


Fig. 15.

Nam (Prob. 4 et Cor.) sit ang. $A = y$, ang. $B = z$ et $AB = b$, atque A in u' cadens, B in t'; tum $BD\infty$ et $t\mu\infty$ coincident, nec non $AC\infty$ et $u\varkappa\infty$ adeoque illud punctum, quod ipsis $t\mu\infty$ et $u\varkappa\infty$ commune est, etiam ipsis $BD\infty$ et $CA\infty$ commune est.

Th[eorema]. 8. Rectae unica tantum per aliquod punctum datur parallela (Def. 44).

Nam ducatur alia (Fig. 1), una plaga intra parallelam ibidem constructam cadens. Summam angulorum internorum minorem faciet duobus rectis, nam duo anguli interni ibidem ambo recti sunt (Prob. 1, Cor. 2), adeoque (Th. 7) se invicem secarent $An\infty$ et illa linea, quae praeter parallelam in Fig. 1 per idem punctum duceretur.

Ad Theoriam parallelarum supplementum.

XI. Fig. 5° repraesentat lineam ejusmodi $mdefg\ldots$ quae nominetur Π; ad md erigatur perpendicularis $\varphi k\infty$; porro $mdd'\infty$ vocetur Q, ac moveatur Q circa m' per lineam $mdefg\ldots$ semper porro in ∞. Dum Q in $mee'\infty$ perveniet, quaeritur quorsum latus sequens cadet; ut hoc patefiat sectio prius sequens tractabitur.

XII. $\mathfrak{Q}$ extra $mdefg\ldots$ cadat necesse est (nimirum ubi latera angulum convexum faciunt); nam

Zusatz. Mithin lehren die Aufgaben 2., 3., 4., dass man ein Dreieck construiren kann, dessen eine Seite die gegebene Gerade b ist und bei dem von den anliegenden Winkeln der eine der gegebene Winkel y, der andre der gegebene Winkel z ist.

Lehrsatz 7. (Fig. 15). Es sei AB eine beliebige Gerade, und die Geraden BD und AC mögen auf derselben Seite der Geraden AB in derselben Ebene liegen, und es seien die Winkel CAB und ABD zusammen kleiner als zwei Rechte. Dann werden $ACC'\infty$ und $BDD'\infty$ einander schneiden.

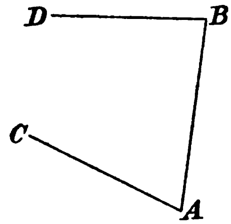


Fig. 15.

Denn es sei (Aufgabe 4 und Zusatz) der Winkel A gleich y, der Winkel B gleich z und AB gleich b, und A' falle auf u', B' auf t'. Dann fallen $BD\infty$ und $t\mu\infty$ zusammen, und ebenso $AC\infty$ und $u\varkappa\infty$, somit ist der Punkt $[\alpha]$ der $t\mu\infty$ und $u\varkappa\infty$ gemeinsam ist, auch den Geraden $BD\infty$ und $CA\infty$ gemeinsam.

Lehrsatz 8. Zu einer Geraden giebt es durch einen beliebigen Punkt nur eine Parallele (Def. 44).

Denn man ziehe eine andre (Fig. 1), die auf der einen Seite innerhalb der dort construirten Parallelen liegt. Sie wird als Summe der inneren Winkel weniger als zwei Rechte ergeben, denn die beiden inneren Winkel ebenda sind beide Rechte (Aufgabe 1, Zusatz 2), also müssten (Lehrsatz 7) $An\infty$ und jene Linie, die ausser der Parallelen in Fig. 1 durch denselben Punkt gezogen würde, einander schneiden.

Nachtrag zu der Theorie der Parallelen.

XI. Figur 5⁰ stellt eine solche Linie $mdefg\ldots$ dar, die Π genannt werden möge. Auf md errichte man die Senkrechte $\varphi k\infty$. Ferner werde $mdd'\infty$ mit Q bezeichnet, und Q werde um m' herum durch die Linie $mdefg\ldots$ immer weiter bis ins Unendliche bewegt. Wenn Q nach $mee'\infty$ gelangt, so fragt es sich, wohin die folgende Kante $[ef]$ fallen wird. Damit dies klar werde, schalten wir zuvor den folgenden Abschnitt ein.

XII. $\mathfrak{L}$ fällt nothwendig ausserhalb $mdefg\ldots$, das heisst, dahin, wo die Kanten einen erhabenen Winkel bilden. Denn:

1) Fig 5′. Si $\mathfrak{L}$ habeat ejusmodi partem, cujus medium et duo extrema in peripheriam circuli alicujus cadant, tum tota $\mathfrak{L}$ in gyrum

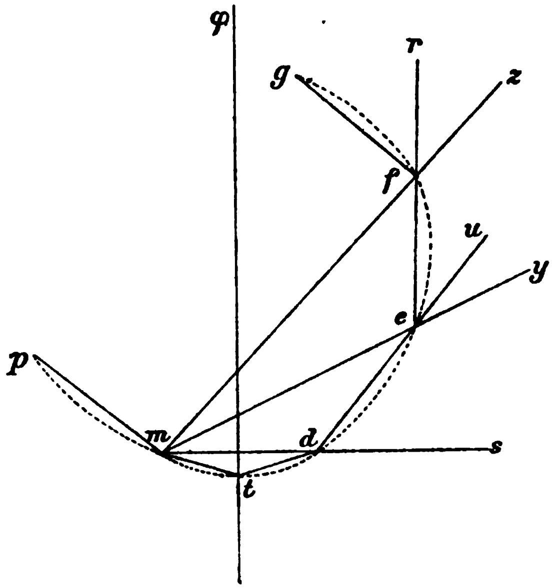


Fig. 5ᵃ.

torquebitur; nam sint a', b', d' puncta illa; accipiatur angulus $bde = abd$, erit e' in $\mathfrak{L}$, et in eadem peripheria, quia e' eo cadit, ubi arcui db aequalis arcus ultra d' finitur, tum enim angulus $bde = abd$ (per trium illorum $\triangle\triangle^{\text{lorum}}$ et angulorum ad basin aequalitatem). Hinc si db arcus ultra e' et ita porro transferatur, in gyrum redigetur $\mathfrak{L}$ (quoties libuerit); tum ab aut est pars aliquota peripheriae, et tunc $\mathfrak{L}$ in a' rediit, aut non, et hoc in casu prodibit latus ik. Tum e medio lateris cujusvis eruta perpendicularis aliud aliquod latus egrediendo secabit, adeoque lineam $\mathfrak{L}$ in duobus saltem punctis secabit (secaret partem lineae $\mathfrak{L}$ illi lateri adnexam, ad quam perpendicularis ducta erigitur,

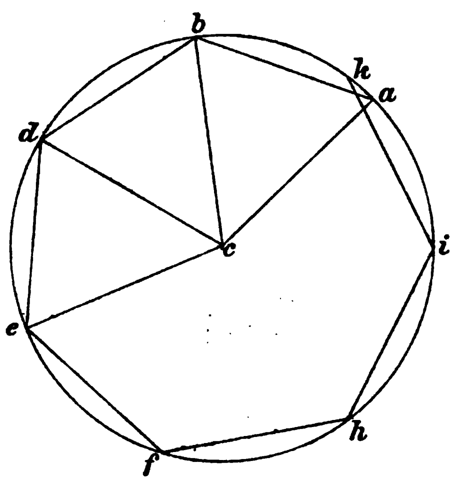


Fig. 5′.

1) Fig. 5′. Enthält $\mathfrak{L}$ einen solchen Theil, dessen Mitte und dessen beide Endpunkte in den Umfang eines Kreises fallen, so wird sich dann

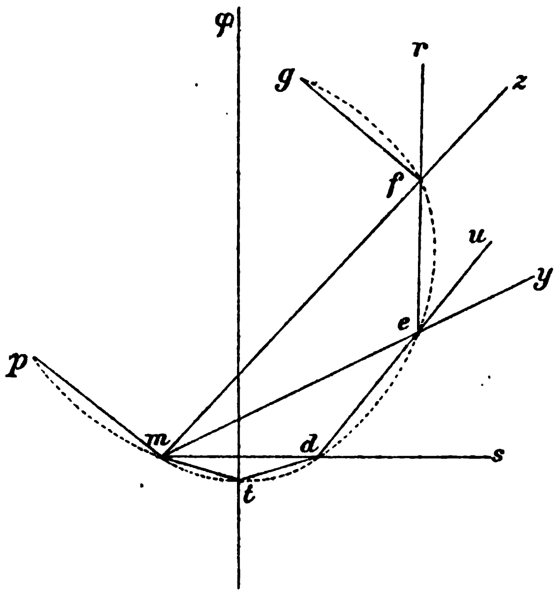


Fig. 5°.

die ganze Linie $\mathfrak{L}$ im Kreise herumwinden. Es seien nämlich a', b', d' diese Punkte. Man nehme den Winkel bde gleich abd an, dann liegt e' auf $\mathfrak{L}$ und auf demselben Umfange, weil e' dahin fällt, wo ein dem Bogen db gleicher Bogen jenseits d' endigt; denn alsdann ist der Winkel bde gleich abd, weil jene drei Dreiecke und die Winkel an ihren Grundlinien gleich sind. Wird mithin der Bogen db über e' hinaus immer wieder abgetragen, so zieht sich $\mathfrak{L}$ beliebig oft im Kreise herum. Dann ist ab entweder ein echter Theil des Umfanges und alsdann ist $\mathfrak{L}$ in a' in sich zurückgekehrt, oder das ist nicht der Fall, und dann entsteht die Kante ik. Dann schneidet die in der Mitte einer Kante errichtete Senkrechte jedesmal beim Heraustreten eine

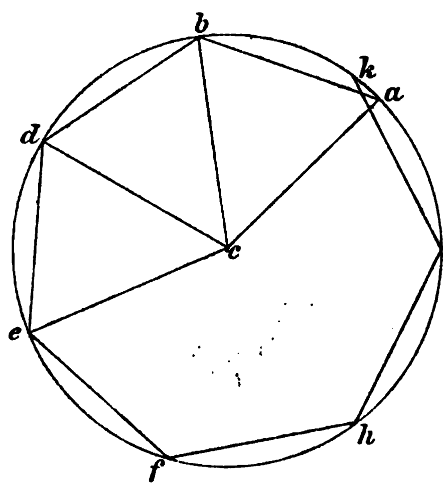


Fig. 5′.

altera vice lateri per quod transiit adnexam); quo pacto $\mathfrak{L}$ rediit (VI.).

2) Fig. 5''. Pars lineae $\mathfrak{L}$ lateri cuivis lineae Π adnexa in unam plagam lateris ejus cadit, nam prius in aliquâ plaga incipere debet (ex. gr. extra, uti ea); transeat in alteram plagam; ab altero extremo (Ac. Ax. 2) item in eadem plaga plane ita incipiet; transeat in alteram plagam per γ'; (num inter α' et γ' adhuc redierit in plagam priorem, haud in censum venit). Erunt rectae puncta α', γ', d' cum $\mathfrak{L}$ communia. Accipiatur b' e plaga interiore; fiat ad (pars lineae $\mathfrak{L}$) $= b\gamma$; erit $ab = d\gamma$, porro fiat $bk =$ parti γa; cadet k' inter e' et α', nam ak opportet esse $= b\gamma = ad$, remanere autem ke debet; nam vocetur A pars $ea = \gamma d$, et vocetur B pars $a\gamma$, erit rectae ed adnexa $= 2A + B$, unde si dematur ad (quod est minus quam A) manebit plus quam $A + B$, adeoque ultra $A + B$ adhuc superesse ke oportet. Tum vero erit pars $abk = d\gamma a$, adeoque a', b', k' sunt in rectâ, at tum recta ab transeundo ex una plaga in aliam secabit rectam ed, et ab b' in k' eundo pariter, adeoque duo puncto habebunt duae rectae communia nec tamen coincident (contra superius demonstrata). Consequ. $\mathfrak{L}$ cum recta tria puncta habere nequit communia; demonstratio eadem est si recta inter duo exteriora lineae $\mathfrak{L}$ puncta (e tribus dictis) ut latus consideratur.

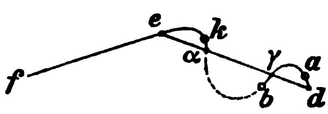


Fig. 5''.

3) Fig. 5'''. Pars lineae $\mathfrak{L}$ lateri cuivis adnexa cadit in plagam exteriorem lateris ejus. Nam sint ef et ed latera lineae Π; sit eo recta angulum fed bifariam secans, sint a' et b' meditullia laterum dictorum. Si perpendiculares ex iis (ad latera erectae) secent rectam $eo\infty$, tum per $\Delta\Delta^{\text{orum}}$ aequalitatem f', e', d' in peripheria circuli erunt, adeoque $\mathfrak{L}$ rediit (per 1.). Si vero perpendicularis quaedam inter e' et a' sit ad fe, quae (si perpendicularis ad fe a e' incipiendo per $eoo'\infty$ moveatur manente ef in $eff'\infty$) erit limes, antequam perpendicularis mota semper [secabit] et ibi primâ vice,

gewisse andre Kante und schneidet somit die Linie $\mathfrak{L}$ in wenigstens zwei Punkten; sie würde nämlich den Theil der Linie $\mathfrak{L}$ schneiden, der zu jener Kante gehört, auf der die gezogene Senkrechte errichtet ist, und wiederum den Theil, der zu der Kante gehört, durch die sie hindurchgegangen ist. Auf diese Weise ist $\mathfrak{L}$ in sich zurückgekehrt (VI).

2) Fig. 5″. Der zu einer beliebigen Kante von Π gehörige Theil von $\mathfrak{L}$ fällt [ganz] auf die eine Seite dieser Kante. Denn zunächst muss die Linie $\mathfrak{L}$ auf irgend einer Seite beginnen, zum Beispiel ausserhalb, wie ea. Sie möge auf die andre Seite hinübergehen. Am andern Endpunkte (s. Axiom 2) wird sie ebenfalls auf derselben Seite genau in derselben Weise beginnen. Sie möge durch γ' auf die andre Seite hinübergehen; ob sie bereits zwischen α' und γ' auf die andre Seite zurückgekehrt ist, kommt nicht in Betracht. Die Gerade [ed] hat mit $\mathfrak{L}$ die Punkte α', γ', d' gemeinsam. Man nehme b' auf der innern Seite an. Macht man ad (einen Theil der Linie $\mathfrak{L}$) gleich $b\gamma$, so ist $ab = d\gamma$. Macht man weiter bk gleich dem Theile γa, so fällt k' zwischen e' und α'. Denn ak muss gleich $b\gamma$ gleich ad sein, und ke muss übrig bleiben. Bezeichnet man nämlich den Theil ea gleich γd mit A und den Theil $a\gamma$ mit B, so ist der zur Geraden ed gehörige Theil gleich $2A + B$; nimmt man davon ad hinweg, das kleiner ist als A, so bleibt mehr als $A + B$ übrig, und es muss somit ausser $A + B$ noch ke übrig bleiben. Dann aber ist der Theil abk gleich $d\gamma a$, und a', b', k' liegen [ebenso wie d', γ', α'] in einer Geraden. Dann aber schneidet die Gerade ab beim Uebergange von der einen Seite auf die andre die Gerade ed, und ebenso beim Uebergange von b' nach k', und es haben zwei Gerade zwei Punkte gemeinsam, ohne zusammenzufallen, entgegen dem oben Bewiesenen. Folglich kann $\mathfrak{L}$ mit einer Geraden nicht drei Punkte gemeinsam haben. Der Beweis ist derselbe, wenn man die Gerade zwischen zwei äussern Punkten der Linie $\mathfrak{L}$ (von den drei genannten) als Kante auffasst.

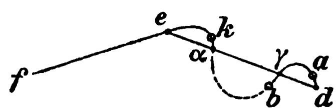


Fig. 5″.

3) Fig. 5‴. Der Theil der Linie $\mathfrak{L}$, der zu irgend einer Kante [von Π] gehört, liegt auf der äussern Seite dieser Kante. Denn es seien ef und ed Kanten der Linie Π, ferner sei eo die Halbirungslinie des Winkels fed, und a' und b' seien die Mittelpunkte der genannten Kanten. Schneiden die in a' und b' auf den Kanten errichteten Senkrechten die Gerade $eo\infty$, so liegen f', e', d' wegen der Gleichheit der Dreiecke auf dem Umfange eines Kreises, und $\mathfrak{L}$ kehrt nach 1) in sich zurück. Giebt es aber, wenn man die Senkrechte auf fe von e' anfangend durch $eoo'\infty$ bewegt, während ef in $eff'\infty$ bleibt

non secabit rectam $eoo'\infty$, tum demittatur perpendicularis ex o' ad fe, cadat in u', centro o' radio eo scribatur circulus; is (cum

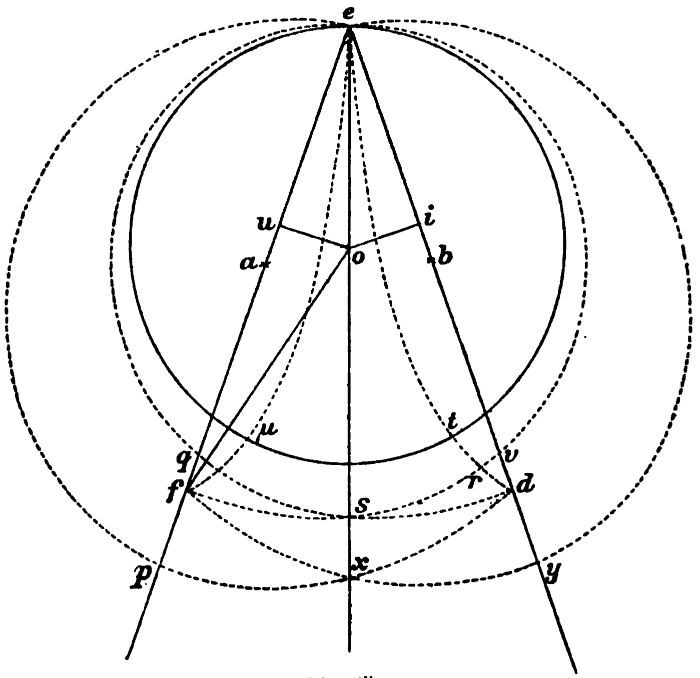


Fig. 5''*).

oe hypothenusa > catheto uo) incipiet extra ef et transibit per uf inter u' et f', nam $uf > ue$, adeoque (per superiora) $fo > eo$.

Iam pars lineae $\mathfrak{L}$ lateri adnexa aut in plagam interiorem aut exteriorem cadet (per 2); si in interiorem, tunc aut ingredietur circulum (uti erd) aut non; si prius, tum egredi oportet ad d' (quod extra circulum situm est) et tunc e', t', μ' in peripheriam cadunt, adeoque $\mathfrak{L}$ rediit (per 1). Si circulum non ingrediatur, tunc pars lateri ed adnexa aut $eqsd$ erit aut $epxd$ et pars lateri ef adpertinens pro $epxd$ erit $eyxf$ et pro $eqsd$ erit $evsf$ (pars lateri ed adpertinens enim per f' ire nequit, quia tum, parte lateri ef adnexa in f' veniente, rediret $\mathfrak{L}$); in quovis casu partes lineae $\mathfrak{L}$ secabunt se invicem, in priore in x', in posteriore in s', et tum $\mathfrak{L}$

*) [Der Buchstabe μ fehlt in der Originalfigur.]

giebt es da auf fe zwischen e' und a' eine gewisse Senkrechte, welche die Grenze bildet, vor deren Erreichung die bewegte Senkrechte immer

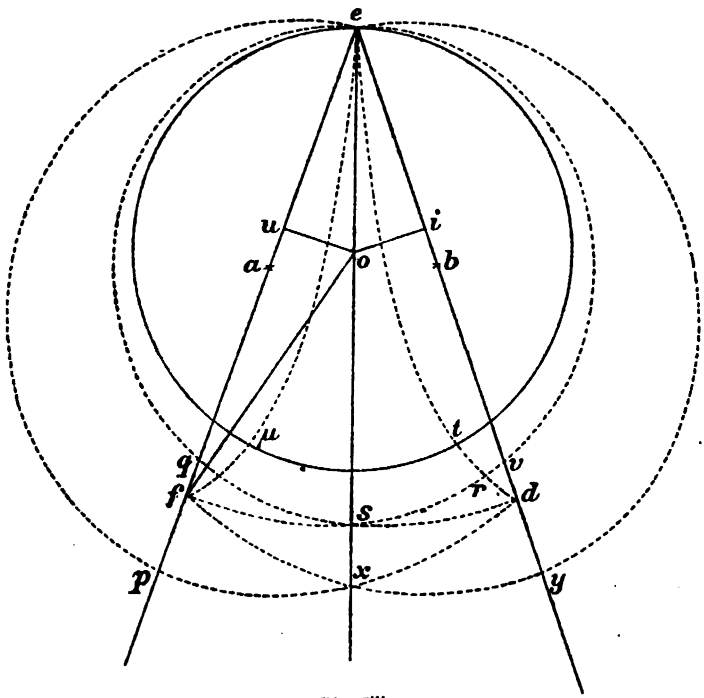


Fig. 5‴.

die Gerade $eoo'\infty$ schneidet und bei deren Erreichung sie das zum ersten Male nicht thut, so fälle man von o' aus auf fe das Lot, das in u' treffen möge, und beschreibe mit dem Halbmesser eo um den Mittelpunkt o' einen Kreis. Dieser wird, da die Hypotenuse eo grösser ist, als die Kathete uo, ausserhalb ef beginnen und durch uf zwischen u' und f' hindurchgehen; denn uf ist grösser als ue, und daher, nach dem Vorhergehenden, fo grösser als eo.

Nun fällt der Theil der Linie $\mathfrak{L}$, der zu einer Kante gehört, nach 2) entweder auf die innere oder auf die äussere Seite. Fällt er auf die innere, so tritt er entweder in den Kreis ein, wie erd, oder nicht. Geschieht das erste, so muss er, um nach d' zu kommen, was ausserhalb des Kreises liegt, heraustreten, und dann fallen e', t', μ' in den Umfang, $\mathfrak{L}$ kehrt somit nach 1) in sich zurück. Tritt $\mathfrak{L}$ nicht in den Kreis ein, dann ist der zur Kante ed gehörende Theil entweder $eqsd$ oder $epxd$, und der zur Kante ef gehörende Theil ist $eyxf$ für $epxd$ und $evsf$ für $eqsd$; der zur Kante ed gehörende Theil kann nämlich nicht durch f' gehen, weil der zur Kante ef gehörende Theil nach f' kommt, rediit. Consequenter pars lineae $\mathfrak{L}$ lateri cuivis adpertinens semper in plagam convexitatis (exteriorem dictam) cadet, et $\mathfrak{L}$ cadet tota in plagam exteriorem lineae Π.

XIII. [Fig. 5°.] Modo quaeratur quorsum latus ef cadat. Cum atera ef et dm in plagam rectae ed eandem cadant, latus fe cadere oportet aut supra me aut in $emm'\infty$ aut inter em et ed. Si

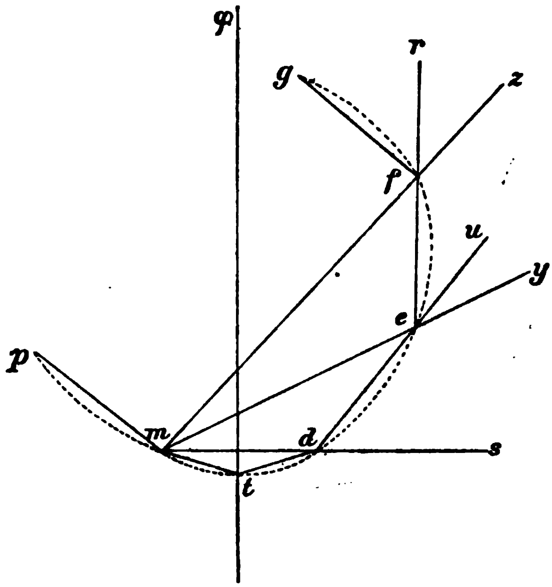


Fig. 5°.

secundus casus fuerit, tum f' aut inter m' et e' cadet aut in m' aut ultra m'; si in m', tum $\mathfrak{L}$ rediit; si ultra m' in o', tum pars lateri ef adpertinens secatur a parte lateri mp adpertinente, et $\mathfrak{L}$ rediit; si intra m' cadat, perpendicularis e medio lateris ef eruta utrinque in ∞ secabit lineam $\mathfrak{L}$ in duobus saltem punctis (transeundo semel per partem lateri fe adpertinentem, altera vice per partem (lineae $\mathfrak{L}$) lineae mde adpertinentem), et tum $\mathfrak{L}$ rediit (per VI et I). Adeoque cum hoc ad *casum* cujusvis lateris sequentis adplicare fas sit, quodvis latus sequens cadet supra $mdd'\infty$ (seu Q), nimirum fe cadet supra me, et fg supra mf etc....

und somit $\mathfrak{L}$ in sich zurückkehren würde. In jedem Falle schneiden Theile der Linie $\mathfrak{L}$ einander, im ersten in x', im zweiten in s', und dann kehrt $\mathfrak{L}$ in sich zurück. Folglich liegt der Theil der Linie $\mathfrak{L}$, der zu irgend einer Kante gehört, immer auf der Seite der Wölbung, die wir als die äussere bezeichnet haben, und $\mathfrak{L}$ fällt ganz auf die äussere Seite der Linie Π.

XIII. Nunmehr möge gefragt werden, wohin die Kante ef fällt. Da die Kanten ef und dm auf dieselbe Seite der Geraden ed fallen, so muss die Kante fe entweder oberhalb me fallen oder auf $emm'\infty$

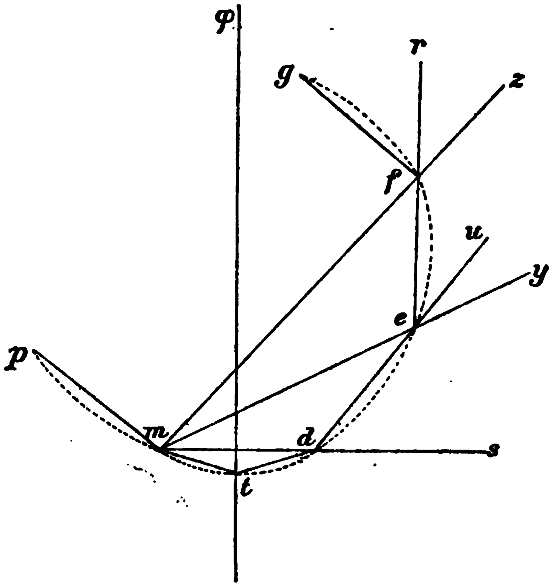


Fig. 5ª.

oder zwischen em und ed. Findet der zweite Fall statt, so fällt f' entweder zwischen m' und e' oder auf m' oder über m' hinaus. Wenn auf m', so kehrt $\mathfrak{L}$ in sich zurück; wenn über m' hinaus nach o', so wird der zur Seite ef gehörende Theil von dem zur Seite mp gehörenden Theile geschnitten, und $\mathfrak{L}$ kehrt in sich zurück; fällt f' innerhalb m', so wird die in der Mitte der Kante ef errichtete und nach beiden Seiten ins Unendliche verlängerte Senkrechte die Linie $\mathfrak{L}$ in wenigstens zwei Punkten schneiden, zum ersten Male beim Hindurchgehen durch den zur Kante fe gehörenden Theil und zum zweiten Male beim Hindurchgehen durch den zur Linie mde gehörenden Theil der Linie $\mathfrak{L}$, und dann kehrt $\mathfrak{L}$, nach VI. und I. in sich zurück. Und da man diese Ueberlegung auf jede beliebige folgende Kante anwenden kann, so fällt jede folgende Kante oberhalb $mdd'\infty$ oder Q, nämlich fe fällt oberhalb me und fg oberhalb mf und so weiter.

XIV. Ita si accipiatur medium partis cujusvis (uti partis md in t') et ducantur eo rectae e lateris extremis (ut mt et td), porro partis mt quoque medium accipiatur, atque ex m' et t' ducantur eo rectae, et ita porro in infinitum, ut cuivis lateri adpertinens pars lineae $\mathfrak{L}$ decrescat in progressione geometrica exponentis $\frac{1}{2}$, cadet pars mt extra rectam mt (per XII) et cadet $\mathfrak{L}$ extra omnia illa latera (*instar* Π).

XV. Pars ef cadet inter ey et rectam ef, nam si infra ey veniret, tum ex e' eundo in f' praeter e' et m' adhuc [punctum] haberet $\mathfrak{L}$ cum rectâ commune, adeoque $\mathfrak{L}$ rediret. Pariter patet partem ef cadere inter rectas eu et ef.

XVI. Fig. V''''. Angulus quem facit md cum rectâ ex m' ad cujusvis lateris lineae Π extremum ductâ est aequalis angulo, quem facit cum eâdem recta latus illud. Ex. gr. $gmd = mgf$ et $hmd = mhg$. Nam ab m' usque ad illud extremum numerus laterum lineae Π est aut par aut impar. Si par (uti ex. gr. ab m' usque ad g') tum sit z' medium rectae gm, ducatur recta ez, dein superimponatur $gfez$ ipsi $mdez$, maneat e' in e', f' in d', g' in m' cadere possunt, tum vero z' in z' cadet, quia ez latus commune, et $mz = gz$, ez et mz vero in illa plaga nonnisi in uno puncto possunt se invicem secare (per superiora).

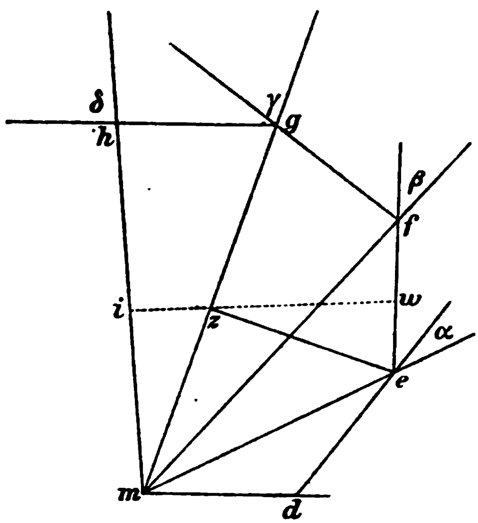


Fig. V''''.

Si numerus fuerit impar (uti in $hgfedm$), tum sit medium w lateris ef et i lateris hm. Superimponatur $wfghi$ ipsi $wedmi$, maneat w' in w'; f' in e', g' in d' et h' in m' cadere possunt, tunc $mi = hi$ et $wi =$ sibi in illa plaga non nisi in uno puncto se invicem secare queunt.

XIV. Denkt man sich daher bei jedem Theile die Mitte, wie die des Theiles md in t', und zieht dahin von den Endpunkten der Kante aus Gerade, wie mt und td, denkt man sich ferner auch die Mitte des Theiles mt und zieht dahin von m' und t' aus Gerade und so fort ins Unendliche, sodass der zu jeder Kante gehörende Theil der Linie $\mathfrak{L}$ in einer geometrischen Progression mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ abnimmt, dann fällt der Theil mt auf Grund von XII. ausserhalb der Geraden mt, und $\mathfrak{L}$ fällt ausserhalb aller dieser Kanten.

XV. Der Theil ef fällt zwischen ey und die Gerade ef; denn läge er unterhalb ey, so hätte $\mathfrak{L}$ beim Uebergange von e' nach f' ausser e' und m' mit der Geraden [mey] noch einen Punkt gemeinsam, und $\mathfrak{L}$ kehrte daher in sich zurück. In ähnlicher Weise erkennt man, dass der Theil ef zwischen die Geraden eu und ef fällt.

XVI. Fig. V''''. Der Winkel, den md mit der Geraden bildet, die von m' aus nach dem Endpunkte jeder einzelnen Kante der Linie Π gezogen ist, ist gleich dem Winkel, den jene Kante mit derselben Geraden bildet; zum Beispiel ist $gmd = mgf$ und $hmd = mhg$.

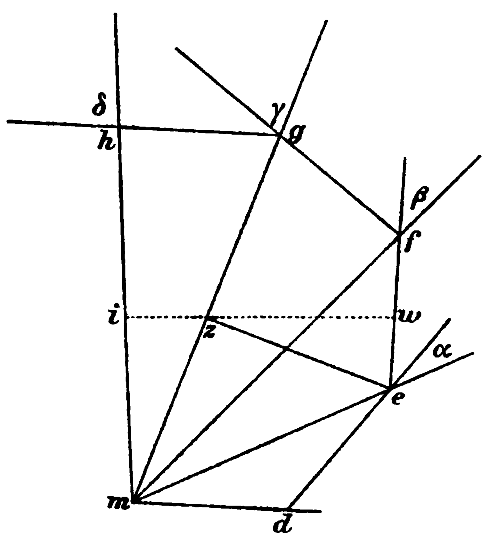


Fig. V''''.

Denn von m' an bis zu jener letzten Kante ist die Anzahl der Kanten der Linie Π entweder gerade oder ungerade. Ist sie gerade, wie zum Beispiel von m' an bis zu g', so sei z' die Mitte der Geraden gm. Man ziehe die Gerade ez und lege $gfez$ auf $mdez$. Es bleibe e' in e'; f' kann auf d', g' auf m' fallen, dann aber fällt z' auf z', denn ez ist die gemeinsame Kante, und mz ist gleich gz, ez und mz aber können einander auf dieser Seite nur in einem Punkte schneiden (nach dem Früheren).

Ist die Anzahl ungerade, wie bei $hgfedm$, so sei w die Mitte der Kante ef und i die Mitte der Kante hm. Man lege $wfghi$ auf $wedmi$. Es bleibe w' in w'; f' kann auf e', g' auf d', und h' auf m' fallen, und dann können mi gleich hi und wi gleich sich selbst einander auf dieser Seite nur in einem Punkte schneiden.

XVII. Hinc cum angulus ad m' per motum rectae Q crescat, et anguli verticales sint aequales, angulus qui apud d' est $= o$ et fit $= \alpha$ apud e', fit major in β, adhuc major dum γ fit, crescit in majus fiendo δ et ita porro sine fine (non asseritur in ∞).

XVIII. Fig. 5°. Angulus quem facit latus quodvis productum cum $\mathfrak{L}$ porro fluente est ubique aequalis (per dicta). Angulus quem facit eu cum parte fe lineae $\mathfrak{L}$ (cadente inter rectas ef et eu) est $=$ angulo quem facit fr cum parte fg lineae $\mathfrak{L}$ (cadente inter fr et fg), quod continuari posse in ∞ patet. At si addatur angulus uey quem facit (si rectae Q (quod est $mdd'\infty$) pars quae ultra $\mathfrak{L}$ cadit, R vocetur) R cum lateris continuatione, cum hic crescat (XVII), et summa crescet; fiat ut exactius concipiatur radio certo (ex. gr. ef), qui semper idem maneat, centro (pro hoc casu e') arcus fy, hic mensura hujus anguli esse poterit.

XIX. At inquiramus, num hic angulus, quem R cum $\mathfrak{L}$ facit, semper porro sine fine continuo crescat. Si Π varietur juxta XIV, ut latera fiant omni dabili minora, extremis venientibus omni dabili propius, tum quoque in cujusvis novi lateris initio angulus, de quo sermo est, crescit. Nullum vero tempus datur, sub quo non crevisset; nam secat in temporis ejus initio Q lineam $\mathfrak{L}$ in aliquo puncto ε' (Fig. 5ᵛ) et in fine temporis ejus in η', erit pars $\varepsilon\eta$ lineae $\mathfrak{L}$ (denotante n numerum quantumlibet magnum) plus quam ter major (parte mtd) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{mtd}{2^n}$, quod $=$ quantitati omni dabili minori, itaque et si lateris extremum non cadet in ε', sed in α', cum $\varepsilon\alpha$ sit $<$ parte lineae $\mathfrak{L}$ uni lateri adpertinente, remanebit adhuc, si ex α' accipiantur duo latera versus η', aliquid, crescet ergo etiam sub hoc tempore angulus dictus, cum in fine cujusvis lateris crescat.

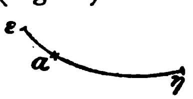


Fig. 5ᵛ.

XX. Angulus hic (qui vocetur x) simul cum angulo quem Q cum latere primo facit, crescens sine fine continuo, aut in tantum

XVII. Da mithin der Winkel bei m' durch die Bewegung der Geraden Q wächst, und da Scheitelwinkel einander gleich sind, so wird dieser Winkel, der bei d' gleich Null und bei e' gleich α ist, bei β grösser, und noch grösser, wenn er γ wird, er wächst noch weiter, indem er gleich δ wird, und so weiter ohne Ende, es wird aber nicht behauptet, ins Unendliche.

XVIII. Fig. 5⁰. Der Winkel, den die Verlängerung einer jeden Kante mit der sich immer weiter erstreckenden Linie $\mathfrak{L}$ bildet, ist, nach dem Gesagten, überall derselbe. Der Winkel, den eu mit dem zwischen die Geraden ef und eu fallenden Theile fe der Linie $\mathfrak{L}$ bildet, ist gleich dem Winkel, den fr mit dem zwischen fr und fg fallenden Theile fg der Linie $\mathfrak{L}$ bildet, und das lässt sich augenscheinlich ins Unendliche fortsetzen. Fügt man aber den Winkel uey hinzu, den R, wenn der über $\mathfrak{L}$ hinausfallende Theil der Geraden Q, das heisst $mdd'\infty$, R genannt wird, mit der Verlängerung der Kante [de] bildet so wächst dieser Winkel (XVII.), und daher wächst auch die Summe. Um eine genauere Vorstellung zu haben, beschreibe man mit einem gewissen Halbmesser, zum Beispiel mit ef, der immer derselbe bleibe, um einen Mittelpunkt, für den vorliegenden Fall um e', den Bogen fy, der kann als Maass dieses Winkels dienen.

XIX. Fragen wir jedoch, ob nicht dieser Winkel, den R mit $\mathfrak{L}$ bildet, immer weiter ohne Ende beständig wächst. Wenn Π, gemäss XIV., abgeändert wird, sodass die Kanten kleiner werden als jede angebbare Grösse, und ihre Endpunkte einander näher kommen als jede angebbare Grösse, so wächst auch dann beim Anfange einer jeden neuen Kante der Winkel, von dem die Rede ist. Es giebt aber keine Zeit, während der er nicht gewachsen wäre. Denn am Anfange dieser Zeit schneidet Q die Linie $\mathfrak{L}$ in irgend einem Punkte ε', und am Ende dieser Zeit in η', dann ist der Theil $\varepsilon\eta$ der Linie $\mathfrak{L}$, wenn n eine beliebig grosse Zahl bezeichnet, mehr als dreimal so gross als der Theil

Fig. 5^V.

mtd mal $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{mtd}{2^n}$, also gleich einem Ausdrucke, der kleiner ist als jede angebbare Grösse. Wenn daher auch der Endpunkt der Kante nicht nach ε', sondern nach a' fällt, indem εa kleiner ist, als der zu einer Kante gehörende Theil der Linie $\mathfrak{L}$, so bleibt immer noch etwas übrig, wenn man sich von a' aus zwei Seiten nach η' hin denkt. Folglich wird der genannte Winkel auch während dieser Zeit wachsen, da er am Ende einer jeden Kante wächst.

XX. Da dieser Winkel, der x genannt werden möge, zugleich mit dem Winkel, den Q mit der ersten Seite bildet, ohne Ende excrescet, ut Q ultra φk perveniat, et tunc si hucusque dicta ab altera parte ex d' praestentur, et pars $mtdefg\ldots$ lineae $\mathfrak{L}$ et pars $dmp\ldots$ ultra φk venient, adeoque aut in $\varphi k\infty$ concurrerent duae partes, aut $\varphi k\infty$ praeter t' adhuc duo puncta habebit cum $\mathfrak{L}$ communia, adeoque $\mathfrak{L}$ rediit; aut vero habebit x limitem λ, ad quem omni dabili propius ibit, sed eum attingere nunquam poterit, donec Q circa m' per $\mathfrak{L}$ moveatur. Tum x in d' sit $= A$, incrementa vero semper nova sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ quae quamvis lege continui fiant, ita ut inter quaevis duo innumerabilia sint, nihilominus tamen ita exponere licet. Hoc pacto erit series infinita $A + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \cdots$, cujus summae limes est λ, id est cujus quotcunque membra (parte in ∞ abeunte residuâ) summentur, tamen minus quam λ prodibit, et pro quâvis data quantitate q potest ad aliquod membrum usque omnium summa talis produci, cujus differentia ab λ sit $< q$. At si omnia membra seriei infinitae summari possent, ne ullum remaneat, limes ipse prodiret (in hoc casu λ). Atqui hic Q per omnia puncta partis $mtdefg\ldots$ lineae $\mathfrak{L}\infty$ succedendo omnia incrementa acquisivit, omnibus ergo membris seriei summatis (plane in illo temporis puncto experte cum Q prima vice non est in $\mathfrak{L}$, inter quod et desertionem lineae $\mathfrak{L}$ mutatio nulla evenire potest, cum ad mutationem duae partes temporis adesse debent, punctum temporis autem est expers in quo prima vice exiit Q ex $\mathfrak{L}$) angulum x factum esse $= \lambda$ oportet, postquam Q ex $\mathfrak{L}$ exiit. Atqui hoc absurdum est, cum tunc $x = 0$ factum sit. Ergo absurdum est angulum x non crevisse eousque ut Q per $\varphi k\infty$ transiret. Ergo $\mathfrak{L}$ nisi recta sit redit (contra I). Ergo $\mathfrak{L}$ recta est*).

*) [Das Axiom, das bei diesem Beweise stillschweigend vorausgesetzt wird, hat W. Bolyai selbst in dem *Generalis Conspectus Geometriae* folgendermassen formulirt:

Axioma intervalli.

„Si duarum linearum simplicium uniformium utrinque ∞tarum, in plano se invicem secantium, apertura (id est angulus ad punctum sectionis) maneat utrinque constante quodam earundem linearum angulo semper majore ante temporis t finem: in puncto experte temporis ipsum t terminante una alteram transiliisse nequit.“]

beständig wächst, so wird er entweder so weit anwachsen, dass Q über φk hinaus gelangt, und dann wird, wenn das bis jetzt Gesagte auch auf den andern Theil [von $\mathfrak{L}$] von d' aus angewandt wird, sowohl der Theil $mtdefg\ldots$ der Linie $\mathfrak{L}$ als auch der Theil $dmp\ldots$ über φk hinauskommen, und daher werden entweder in $\varphi k\infty$ zwei Theile zusammentreffen oder $\varphi k\infty$ wird ausser t' noch zwei Punkte mit $\mathfrak{L}$ gemein haben, also kehrt $\mathfrak{L}$ in sich zurück; oder x wird eine Grenze λ haben, der es näher kommt, als jede angebbare Grösse beträgt, die es jedoch niemals erreichen kann, so lange Q um m' herum durch $\mathfrak{L}$ bewegt wird. Alsdann sei x in d' gleich A, die beständig neuen Zuwächse aber seien α, β, γ, $\delta, \ldots$; diese geschehen allerdings nach dem Gesetze der Stetigkeit, sodass es zwischen je zweien unzählig viele giebt, aber nichts desto weniger darf man sie so darstellen. Auf diese Weise erhält man die unendliche Reihe $A+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots$, deren Summe zur Grenze λ hat, das heisst, bei der die Summe von beliebig vielen Gliedern (während der Theil, der ins Unendliche geht, als Rest übrig bleibt) kleiner als λ ausfällt, und bei der man, wenn eine beliebige Grösse q gegeben ist, die Summation bis zu einem solchen Gliede erstrecken kann, dass die Abweichung von λ kleiner ist als q. Könnte man jedoch alle Glieder der unendlichen Reihe summiren, sodass keines übrig bliebe, so erhielte man die Grenze selbst (in diesem Falle λ). Hier hat Q, indem es durch alle Punkte des Theiles $mtdefg\ldots$ der Linie $\mathfrak{L}\infty$ geht, alle Zuwächse erschöpft. Hat man also alle Glieder der Reihe summirt — und das ist gerade in dem Augenblicke geschehen, wo sich Q zum ersten Male nicht in $\mathfrak{L}$ befindet, denn zwischen diesem Augenblicke und dem Verlassen der Linie $\mathfrak{L}$ kann keine Veränderung eintreten, da zu einer Veränderung zwei Zeittheile vorhanden sein müssen, jener Augenblick aber, in dem Q zum ersten Male aus $\mathfrak{L}$ herausgetreten ist, keinen Antheil an der Zeit hat — so muss der Winkel x gleich λ geworden sein, sobald Q aus $\mathfrak{L}$ herausgetreten ist. Das ist aber widersinnig, da alsdann $x=0$ wird. Folglich ist es widersinnig, dass der Winkel x nicht soweit gewachsen sein soll, bis Q durch $\varphi k\infty$ hindurchgeht. Folglich kehrt $\mathfrak{L}$ in sich zurück, gegen I., es sei denn eine Gerade. Folglich ist $\mathfrak{L}$ eine Gerade.

Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai.

Gauss an Bolyai			Bolyai an Gauss		
1)	Braunschweig,	29. Sept. 1797			
2)	„ ,	21. April 1798			
3)	„ ,	30. Sept. 1798	1)	Göttingen,	31. Oct. 1798
4)	„ ,	29. Nov. 1798	2)	„ ,	30. Dec. 1798
5)	„ ,	9. Jan. 1799	3)	„ ,	4. März 1799
			4)	„ ,	20. März 1799
			5)	„ ,	9. April 1799
6)	„ ,	22. April 1799	6)	„ ,	12. Mai 1799
7)	„ ,	17. Mai 1799	7)	„ ,	20. Mai 1799
			8)	„ ,	27. Mai 1799
8)	„ ,	29. Mai 1799	9)	Pest,	11. Sept. 1799
9)	*Helmstedt,*	*16. Dec. 1799*	10)	Clausenburg,	13. April 1800
			11)	Domáld,	11. Sept. 1802
10)	Braunschweig,	3. Dec. 1802	12)	Clausenburg,	24. Febr. 1803
11)	„ ,	20. Juni 1803	13)	Domáld,	1. März 1804
12)	„ ,	28. Juni 1804	14)	*Maros Vásárhely,*	*16. Sept. 1804*
13)	*Braunschweig,*	*25. Nov. 1804*	15)	„ ,	18. Dec. 1807
14)	Göttingen,	20. Mai 1808			
15)	„ ,	2. Sept. 1808	16)	„ ,	27. Dec. 1808
			17)	„ ,	10. April 1816
			18)	*Maros Vásárhely,*	*20. Juni 1831*
			19)	*Maros Vásárhely,*	*16. Jan. 1832*
16)	*Göttingen,*	*6. März 1832*	20)	*Maros Vásárhely,*	*20. April 1835*
			21)	„ ,	4. Oct. 1835
			22)	„ ,	3. Oct. 1836
17)	„ ,	23. Oct. 1836	23)	„ ,	18. Jan. 1848
18)	„ ,	20. April 1848	24)	„ ,	6. Febr. 1853

Bei den Briefen, aus denen im Vorstehenden Stücke mitgetheilt sind, ist jedesmal der Abgangsort und der Abgangstag cursiv gedruckt.

Einige für unsre Zwecke nicht in Betracht kommende Stellen aus Briefen von Gauss an Bolyai hat *L. Hänselmann* in seinem Buche: *Carl Friedrich Gauss*, Leipzig 1878, auf S. 40—42, 48, 49 und 92 abgedruckt.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.

Von

Georg Cantor in Halle a/S.

(Zweiter Artikel.)

---

§ 12.

Die wohlgeordneten Mengen.

Unter den einfach geordneten Mengen gebührt den *wohlgeordneten Mengen* eine ausgezeichnete Stelle; ihre Ordnungstypen, die wir ‚*Ordnungszahlen*' nennen, bilden das natürliche Material für eine genaue Definition der höheren transfiniten Cardinalzahlen oder Mächtigkeiten, einer Definition, die durchaus conform ist derjenigen, welche uns für die kleinste transfinite Cardinalzahl *Alef-null* durch das System aller endlichen Zahlen ν geliefert worden ist (§ 6).

‚*Wohlgeordnet*' nennen wir eine einfach geordnete Menge F (§ 7), wenn ihre Elemente f von einem niedersten f_1 an *in bestimmter Succession aufsteigen*, so dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

I. „*Es giebt in F ein dem Range nach niederstes Element* f_1".

II. „*Ist F' irgend eine Theilmenge von F und besitzt F ein oder mehrere Elemente höheren Ranges als alle Elemente von F', so existirt ein Element f' von F, welches auf die Gesammtheit F' zunächst folgt, so dass keine Elemente in F vorkommen, die ihrem Range nach zwischen F' und f' fallen.*"*)

Im Besondern folgt auf jedes einzelne Element f von F, *falls es nicht das höchste ist*, ein bestimmtes anderes Element f' dem Range nach als *nächsthöheres;* dies ergiebt sich aus der Bedingung II, wenn man für F' das einzelne Element f setzt. Ist ferner beispielsweise in F eine unendliche Reihe auf einander folgender Elemente

$$e' \prec e'' \prec e''' \cdots e^{(\nu)} \prec e^{(\nu+1)} \cdots$$

enthalten, doch so, dass es in F auch solche Elemente giebt, die

---

*) Es stimmt diese Definition der ‚wohlgeordneten Menge', abgesehen vom Wortlaut, durchaus mit derjenigen überein, welche in Bd. XXI der Math. Ann. pag. 548 (Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre pag. 4) eingeführt wurde.

höheren Rang haben *als alle* $e^{(\nu)}$, so muss nach der Bedingung II, wenn man darin für F' die Gesammtheit $\{e^{(\nu)}\}$ setzt, ein Element f' existiren, so dass nicht nur

$$f' \succ e^{(\nu)}$$

für alle Werthe von ν, sondern dass es auch *kein Element* g in F giebt, welches den beiden Bedingungen genügt

$$g \prec f',$$
$$g \succ e^{(\nu)}$$

für alle Werthe von ν.

So sind z. B. die drei Mengen

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3)$$

wo

$$a_\nu \prec a_{\nu+1} \prec b_\mu \prec b_{\mu+1} \prec c_1 \prec c_2 \prec c_3$$

wohlgeordnet. Die beiden ersten haben kein höchstes Element, die dritte hat das höchste Element c_3; in der zweiten und dritten folgt auf sämmtliche Elemente a_ν zunächst b_1, in der dritten auf sämmtliche Elemente a_ν und b_μ zunächst c_1.

Im Folgenden wollen wir die in § 7 erklärten Zeichen $\prec$ und $\succ$, welche dort zum Ausdruck der Rangbeziehung je zweier Elemente gebraucht wurden, auf Gruppen von Elementen ausdehnen, so dass die Formeln

$$M \prec N,$$
$$M \succ N$$

der Ausdruck dafür seien, dass in einer vorliegenden Rangordnung alle Elemente der Menge M niederen resp. höheren Rang haben, als alle Elemente der Menge N.

A. „*Jede Theilmenge F_1 einer wohlgeordneten Menge F hat ein niederstes Element.*“

Beweis. Gehört das niederste Element f_1 von F zu F_1, so ist es zugleich das niederste Element von F_1.

Andernfalls sei F' die Gesammtheit aller Elemente von F, welche niederen Rang haben als alle Elemente von F_1, so ist eben deshalb kein Element von F zwischen F' und F_1 gelegen.

Folgt also f' (nach II) zunächst auf F' so gehört es nothwendig zu F_1 und nimmt hier den niedersten Rang ein.

B. „*Ist eine einfach geordnete Menge F so beschaffen, dass sowohl F, wie auch jede ihrer Theilmengen ein niederstes Element haben, so ist F eine wohlgeordnete Menge.*“

Beweis. Da F ein niederstes Element hat, so ist die Bedingung I erfüllt.

Sei F' eine Theilmenge von F derart, dass es in F ein oder mehrere Elemente $\succ F'$ giebt; F_1 sei die Gesammtheit aller dieser Elemente und f' das niederste Element von F_1, so ist offenbar f' das auf F' zunächst folgende Element von F. Somit ist auch die Bedingung II erfüllt und es ist daher F eine wohlgeordnete Menge.

C. *„Jede Theilmenge F' einer wohlgeordneten Menge F ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge."*

Beweis. Nach Satz A hat F' sowohl, wie jede Theilmenge F'' von F' (da sie zugleich Theilmenge von F ist) ein niederstes Element; daher ist nach Satz B F' eine wohlgeordnete Menge.

D. *„Jede einer wohlgeordneten Menge F ähnliche Menge G ist gleichfalls eine wohlgeordnete Menge."*

Beweis. Ist M eine Menge, welche ein niederstes Element besitzt, so hat, wie aus dem Begriffe der Aehnlichkeit (§ 7) unmittelbar folgt, auch jede ihr ähnliche Menge N ein niederstes Element.

Da nun $G \simeq F$ sein soll und F als wohlgeordnete Menge ein niederstes Element hat, so gilt dasselbe von G.

Ebenso hat jede Theilmenge G' von G ein niederstes Element; denn bei einer Abbildung von G auf F entspricht der Menge G' als Bild eine Theilmenge F' von F, so dass

$$G' \simeq F'.$$

F' hat aber nach Satz A ein niederstes Element, daher auch G'. Es haben also sowohl G, wie auch jede Theilmenge G' von G ein niederstes Element; nach Satz B ist daher G eine wohlgeordnete Menge.

E. *„Werden in einer wohlgeordnete Menge G an Stelle ihrer Elemente g wohlgeordnete Mengen substituirt in dem Sinne, dass wenn F_g und $F_{g'}$ die an Stelle der beiden Elemente g und g' tretenden wohlgeordneten Mengen sind und $g \prec g'$, alsdann auch $F_g \prec F_{g'}$, so ist die auf diese Weise durch Zusammensetzung aus den Elementen sämmtlicher Mengen F_g hervorgehende Menge H eine wohlgeordnete."*

Beweis. Sowohl H, wie auch jede Theilmenge H_1 von H haben ein niederstes Element, was nach Satz B H als wohlgeordnete Menge kennzeichnet. Ist nämlich g_1 das niederste Element von G, so ist das niederste Element von F_{g_1} zugleich niederstes Element von H. Hat man ferner eine Theilmenge H_1 von H, so gehören ihre Elemente zu bestimmten Mengen F_g, die znsammengenommen eine Theilmenge der aus den Elementen F_g bestehenden, der Menge G ähnlichen wohlgeordneten Menge $\{F_g\}$ bilden; ist etwa F_{g_0} das niederste Element dieser Theilmenge, so ist das niederste Element der in F_{g_0} enthaltenen Theilmenge von H_1 zugleich niederstes Element von H_1.

§ 13.

Die Abschnitte wohlgeordneter Mengen.

Ist f irgend ein *vom Anfangselement* f_1 *verschiedenes* Element der wohlgeordneten Menge F, so wollen wir die Menge A aller Elemente von F, welche $\prec f$, einen *„Abschnitt von F"* und zwar den *durch das Element f bestimmten* Abschnitt von F nennen. Dagegen heisse die Menge R aller übrigen Elemente von F *mit Einschluss von f* ein *„Rest von F"* und zwar der *durch das Element f bestimmte* Rest von F. Die Mengen A und R sind nach Satz C, § 12 *wohlgeordnet*, und wir können nach § 8 und § 12 schreiben:

(1) $$F = (A, R),$$

(2) $$R = (f, R'),$$

(3) $$A \prec R.$$

R' ist der auf das Anfangselement f folgende Theil von R und reducirt sich auf 0, falls R ausser f kein anderes Element hat.

Nehmen wir als Beispiel die wohlgeordnete Menge

$$F = (a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

so sind hier durch das Element a_3 der Abschnitt

$$(a_1, a_2)$$

und der zugehörige Rest

$$(a_3, a_4, \ldots a_{\nu+2}, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

durch das Element b_1 der Abschnitt

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots)$$

und der zugehörige Rest

$$(b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1, c_2, c_3),$$

durch das Element c_2 der Abschnitt

$$(a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots b_1, b_2, \ldots b_\mu, \ldots c_1)$$

und der zugehörige Rest

$$(c_2, c_3)$$

bestimmt.

Sind A und A' zwei Abschnitte von F; f und f' die sie bestimmenden Elemente und ist

(4) $$f' \prec f$$

so ist A' auch Abschnitt von A.

Wir nennen A' den *kleineren*, A den *grösseren* Abschnitt von F:

(5) $$A' < A.$$

Dementsprechend können wir auch von jedem A von F sagen, dass er kleiner ist als F selbst:

(6) $$A < F.$$

A. „*Sind zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen F und G auf einander abgebildet, so entspricht jedem Abschnitt A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G, und jedem Abschnitt B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F, und die Elemente f und g von F und G, durch welche die einander zugeordneten Abschnitte A und B bestimmt sind, entsprechen einander ebenfalls bei der Abbildung.*“

Beweis. Hat man zwei ähnliche einfach geordnete Mengen M und N auf einander abgebildet, sind m und n zwei zugeordnete Elemente und ist M' die Menge aller Elemente von M, welche $\prec m$, N' die Menge aller Elemente von N, welche $\prec n$, so entsprechen bei der Abbildung M' und N' einander. Denn jedem Element m' von M, das $\prec m$, muss (§ 7) ein Element n' von N entsprechen, das $\prec n$ und umgekehrt.

Wendet man diesen allgemeinen Satz auf die wohlgeordneten Mengen F und G an, so erhält man das zu Beweisende.

B. „*Eine wohlgeordnete Menge F ist keinem ihrer Abschnitte A ähnlich.*“

Beweis. Nehmen wir an, es sei $F \backsim A$, so denken wir uns eine Abbildung von F auf A hergestellt. Nach Satz A entspricht alsdann dem Abschnitt A von F als Bild ein Abschnitt A' von A, so dass $A' \backsim A$. Es wäre also auch $A' \backsim F$ und es ist $A' < A$. Aus A' würde sich in derselben Weise ein kleinerer Abschnitt A'' von F ergeben, so dass $A'' \backsim F$ und $A'' < A'$ u. s. w.

Wir erhielten so eine *nothwendig unendliche* Reihe

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)}, \ldots$$

von stets kleiner werdenden Abschnitten von F, die alle der Menge F ähnlich wären.

Bezeichnen wir mit $f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots$ die diese Abschnitte bestimmenden Elemente von F, so wäre

$$f \succ f' \succ f'' \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)}, \ldots.$$

Wir würden also eine *unendliche* Theilmenge

$$(f, f', f'', \ldots f^{(\nu)}, \ldots)$$

von F haben, in welcher *kein Element den niedersten Rang* einnimmt. Solche Theilmengen von F sind aber nach Satz A, § 12 *nicht möglich*. Die Annahme einer Abbildung von F auf einen ihrer Abschnitte führt also zu einem Widerspruch, und es ist daher die Menge F keinem ihrer Abschnitte ähnlich.

Ist auch nach Satz B eine wohlgeordnete Menge F keinem ihrer *Abschnitte* ähnlich, so giebt es doch immer, wenn F *unendlich* ist, *andere Theilmengen* von F, welchen F ähnlich ist. So ist z. B. die Menge

$$F = (a_1, a_2, \ldots a_\nu, \ldots)$$

jedem ihrer Reste

$$(a_{\varkappa+1}, a_{\varkappa+2}, \ldots a_{\varkappa+\nu}, \ldots)$$

ähnlich. Es ist daher von Bedeutung, dass wir dem Satz B auch noch folgenden an die Seite stellen können:

C. „*Eine wohlgeordnete Menge F ist keiner Theilmenge irgend eines ihrer Abschnitte A ähnlich.*“

Beweis. Nehmen wir an, es sei F' Theilmenge eines Abschnittes A von F und $F' \simeq F$. Wir denken uns eine Abbildung von F auf F' zu Grunde gelegt; dabei wird nach Satz A dem Abschnitte A von F ein Abschnitt F'' der wohlgeordneten Menge F' als Bild entsprechen; dieser Abschnitt werde durch das Element f' von F' bestimmt. Es ist f' auch Element von A und bestimmt einen Abschnitt A' von A, von welchem F'' eine Theilmenge ist.

Die Annahme einer Theilmenge F' eines Abschnittes A von F, so dass $F' \simeq F$, führt uns daher zu einer Theilmenge F'' eines Abschnittes A' von A, so dass $F'' \simeq A$.

Dieselbe Schlussweise ergiebt eine Theilmenge F''' eines Abschnittes A'' von A', so dass $F''' \simeq A'$. Und wir erhalten so fortgehend, wie im Beweise des Satzes B, eine *nothwendig unendliche* Reihe immer kleiner werdender Abschnitte von F

$$A > A' > A'' \ldots A^{(\nu)} > A^{(\nu+1)} \ldots$$

und damit die *unendliche* Reihe der diese Abschnitte bestimmenden Elemente

$$f \succ f' \succ f'' \ldots f^{(\nu)} \succ f^{(\nu+1)} \ldots$$

in welcher kein niederstes Element vorhanden wäre, was nach dem Satze A, § 12 unmöglich ist. Es giebt daher keine Theilmenge F' eines Abschnittes A von F, so dass $F' \simeq F$. —

D. „*Zwei verschiedene Abschnitte A und A' einer wohlgeordneten Menge F sind nicht einander ähnlich.*“

Beweis. Ist $A' < A$, so ist A' auch Abschnitt der wohlgeordneten Menge A, kann daher nach Satz B nicht A ähnlich sein.

E. „*Zwei ähnliche wohlgeordnete Mengen F uud G lassen sich nur auf eine einzige Weise auf einander abbilden.*“

Beweis. Setzen wir zwei verschiedene Abbildungen von F auf G voraus und sei f ein Element von F, dem bei den beiden Abbildungen verschiedene Bilder g und g' in G entsprächen. A sei der Abschnitt von F, der durch f bestimmt ist, B und B' seien die Abschnitte von G, die durch g und g' bestimmt sind. Nach Satz A ist sowohl $A \simeq B$, wie auch $A \simeq B'$, und es wäre daher auch $B \simeq B'$, was gegen den Satz D streitet. —

F. „*Sind F und G zwei wohlgeordnete Mengen, so kann ein Abschnitt A von F höchstens einen ihm ähnlichen Abschnitt B in G haben.*"

Beweis. Würde der Abschnitt A von F zwei ihm ähnliche Abschnitte B und B' in G haben, so wären auch B und B' ähnlich, was nach Satz D unmöglich ist. —

G. „*Sind A und B ähnliche Abschnitte zweier wohlgeordneter Mengen F und G, so giebt es auch zu jedem kleineren Abschnitt $A' < A$ von F einen ähnlichen Abschnitt $B' < B$ von G und zu jedem kleineren Abschnitt $B' < B$ von G einen ähnlichen Abschnitt $A' < A$ von F.*"

Beweis folgt aus Satz A, wenn derselbe auf die ähnlichen Mengen A und B angewandt wird.

H. „*Sind A und A' zwei Abschnitte einer wohlgeordneten Menge F, B und B' ihnen ähnliche Abschnitte einer wohlgeordneten Menge G, und ist $A' < A$, so ist $B' < B$.*

Beweis folgt aus den Sätzen F und G.

I. „*Ist ein Abschnitt B einer wohlgeordneten Menge G keinem Abschnitt einer wohlgeordneten Menge F ähnlich, so ist sowohl jeder Abschnitt $B' > B$ von G als auch G selbst weder einem Abschnitt von F noch F selbst ähnlich.*"

Beweis folgt aus Satz G.

K. „*Giebt es zu jedem Abschnitt A einer wohlgeordneten Menge F einen ihm ähnlichen Abschnitt B einer andern wohlgeordneten Menge G, aber auch umgekehrt zu jedem Abschnitt B von G einen ihm ähnlichen Abschnitt A von F, so ist $F \simeq G$.*"

Beweis. Wir können F und G nach folgendem Gesetz auf einander abbilden:

das niederste Element f_1 von F entspreche dem niedersten Element g_1 von G. Ist $f \succ f_1$ irgend ein anderes Element von F, so bestimmt es einen Abschnitt A von F; zu diesem gehört der Voraussetzung nach ein bestimmter ähnlicher Abschnitt B von G; das den Abschnitt B bestimmende Element g von G sei das Bild von f. Und ist g irgend ein Element von G, das $\succ g_1$, so bestimmt es einen Abschnitt B von G, zu dem voraussetzungsgemäss ein ähnlicher Abschnitt A von F gehört; das Element f, welches diesen Abschnitt A bestimmt, sei das Bild von g.

Dass die auf diese Weise definirte gegenseitig eindeutige Zuordnung von F und G eine *Abbildung* im Sinne von § 7 ist, folgt leicht. Sind nämlich f und f' zwei beliebige Elemente von F, g und g'

die ihnen entsprechenden Elemente von G, A und A' die durch f und f', B und B' die durch g und g' bestimmten Abschnitte, und ist etwa

$$f' \prec f,$$

so ist

$$A' < A;$$

nach Satz H ist daher auch

$$B' < B$$

und folglich

$$g' \prec g.$$

L. „*Giebt es zu jedem Abschnitt A einer wohlgeordneten Menge F einen ihm ähnlichen Abschnitt B einer andern wohlgeordneten Menge G, ist hingegen mindestens ein Abschnitt von G vorhanden, zu dem es keinen ähnlichen Abschnitt von F giebt, so existirt ein bestimmter Abschnitt B_1 von G, so dass $B_1 \simeq F$.*"

Beweis. Wir fassen die Gesammtheit aller Abschnitte von G ins Auge, zu denen es keine ähnlichen Abschnitte in F giebt; unter ihnen muss es einen *kleinsten* Abschnitt geben, den wir B_1 nennen. Dies folgt daraus, dass nach Satz A, § 12 die Menge der alle diese Abschnitte bestimmenden Elemente ein niederstes Element besitzt; der durch letzteres bestimmte Abschnitt B_1 von G ist der kleinste aus jener Gesammtheit. Nach Satz I ist *jeder* Abschnitt von G, der $> B_1$ ist, derartig, dass zu ihm kein ähnlicher Abschnitt in F vorhanden ist, es müssen daher die Abschnitte B von G, welchen ähnliche Abschnitte von F gegenüberstehen, alle $< B_1$ sein, und zwar gehört zu jedem Abschnitt $B < B_1$ ein ähnlicher Abschnitt A von F, weil eben B_1 der kleinste Abschnitt von G ist unter denen, welchen keine ähnlichen Abschnitte in F entsprechen.

Somit giebt es zu jedem Abschnitt A von F einen ähnlichen Abschnitt B von B_1 und zu jedem Abschnitt B von B_1 einen ähnlichen Abschnitt A von F; nach Satz K ist daher

$$F \simeq B_1. \text{ —}$$

M. „*Hat die wohlgeordnete Menge G mindestens einen Abschnitt, zu dem kein ähnlicher Abschnitt in der wohlgeordneten Menge F vorhanden ist, so muss jeder Abschnitt A von F einen ihm ähnlichen Abschnitt B in G haben.*"

Beweis. Sei B_1 der kleinste Abschnitt in G von allen, zu denen keine ähnlichen in F vorhanden sind. (M. s. den Beweis von L). Würde es Abschnitte in F geben, denen keine ähnlichen Abschnitte in G gegenüberstehen, so würde auch unter diesen einer der kleinste sein, wir nennen ihn A_1. Zu jedem Abschnitt von A_1 würde alsdann ein ähnlicher Abschnitt von B_1 und zu jedem Abschnitt von B_1 ein ähnlicher Abschnitt von A_1 existiren. Nach Satz K wäre daher

$$B_1 \simeq A_1.$$

Dies widerspricht aber dem, dass zu B_1 kein ähnlicher Abschnitt in F vorhanden ist. Es kann daher in F keinen Abschnitt geben, dem nicht ein ähnlicher in G gegenübersteht. —

N. „*Sind F und G zwei beliebige wohlgeordnete Mengen, so sind entweder* 1) *F und G einander ähnlich, oder es giebt* 2) *einen bestimmten Abschnitt B_1 von G, welcher F ähnlich ist, oder es giebt* 3) *einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, welcher G ähnlich ist; und jeder dieser drei Fälle schliesst die Möglichkeit der beiden anderen aus.*"

Beweis. Das Verhalten von F zu G kann ein *dreifaches* sein.

1) Es gehört zu jedem Abschnitte A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G und umgekehrt zu jedem Abschnitte B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F.

2) es gehört zu jedem Abschnitt A von F ein ähnlicher Abschnitt B von G, dagegen giebt es mindestens einen Abschnitt von G, dem kein ähnlicher Abschnitt in F entspricht.

3) Es gehört zu jedem Abschnitt B von G ein ähnlicher Abschnitt A von F, dagegen giebt es mindestens einen Abschnitt von F, dem kein ähnlicher Abschnitt in G entspricht.

Der Fall, dass es sowohl einen Abschnitt von F, dem kein ähnlicher in G entspricht, wie auch einen Abschnitt von G giebt, dem kein ähnlicher in F entspricht, ist nicht möglich; er wird durch den Satz M ausgeschlossen.

Nach Satz K ist im *ersten* Falle

$$F \simeq G.$$

Nach Satz L giebt es im *zweiten* Falle einen bestimmten Abschnitt B_1 von B, so dass

$$B_1 \simeq F,$$

und im *dritten* Falle einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, so dass

$$A_1 \simeq G.$$

Es kann aber nicht gleichzeitig $F \simeq G$ und $F \simeq B_1$ sein, da alsdann auch $G \simeq B_1$ wäre, gegen den Satz B, und aus demselben Grunde kann nicht gleichzeitig $F \simeq G$ und $G \simeq A_1$ sein.

Aber auch das Zusammenbestehen von $F \simeq B_1$ und $G \simeq A_1$ ist unmöglich; denn nach Satz A würde aus $F \simeq B_1$ die Existenz eines Abschnitts B_1' von B_1 folgen, so dass $A_1 \simeq B_1'$. Es wäre daher auch $G \simeq B_1'$ gegen den Satz B. —

O. „*Ist eine Theilmenge F' einer wohlgeordneten Menge F keinem Abschnitt von F ähnlich, so ist sie F selbst ähnlich.*"

Beweis. F' ist eine wohlgeordnete Menge nach Satz C, § 12. Wäre F' weder einem Abschnitt von F noch F selbst ähnlich, so gäbe es nach Satz N einen Abschnitt F_1' von F', der F ähnlich wäre. F_1' ist aber eine Theilmenge desjenigen Abschnitts A von F, der durch dasselbe Element bestimmt ist, wie der Abschnitt F_1' von F'. Es müsste also die Menge F einer Theilmenge eines ihrer Abschnitte ähnlich sein, was dem Satz C widerspricht.

§ 14.

Die Ordnungszahlen wohlgeordneter Mengen.

Nach § 7 hat jede einfach geordnete Menge M einen bestimmten *Ordnungstypus* $\overline{M}$; es ist dies der Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergiebt, wenn unter Festhaltung der Rangordnung ihrer Elemente von der Beschaffenheit der letzteren abstrahirt wird, so dass aus ihnen lauter Einsen werden, die in einem bestimmten Rangverhältniss zu einander stehen. *Allen einander ähnlichen Mengen, und nur solchen, kommt ein und derselbe Ordnungstypus zu.*

Den Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge F nennen wir die ihr zukommende ‚*Ordnungszahl*'.

Sind α und β zwei beliebige *Ordnungszahlen*, so können sie ein *dreifaches* Verhalten zu einander haben. Sind nämlich F und G zwei wohlgeordnete Mengen derart, dass

$$\overline{F} = \alpha, \quad \overline{G} = \beta,$$

so sind nach dem Satze N, § 13 *drei* sich gegenseitig ausschliessende Fälle möglich:

1) $$F \simeq G.$$

2) Es giebt einen bestimmten Abschnitt B_1 von G, so dass
$$F \simeq B_1.$$

3) Es giebt einen bestimmten Abschnitt A_1 von F, so dass
$$G \simeq A_1.$$

Wie man leicht sieht, bleibt jeder dieser drei Fälle bestehen, wenn F und G durch ihnen ähnliche Mengen F' und G' ersetzt werden; demnach haben wir es auch mit drei sich gegenseitig ausschliessenden Beziehungen der Typen α und β zu einander zu thun.

Im ersten Falle ist $\alpha = \beta$; im zweiten sagen wir, dass $\alpha < \beta$, im dritten, dass $\alpha > \beta$.

Wir haben also den Satz:

A. „*Sind α und β zwei beliebige Ordnungszahlen, so ist entweder $\alpha = \beta$, oder $\alpha < \beta$, oder $\alpha > \beta$.*"

Aus der Erklärung des Kleiner- und Grösserseins folgt leicht:

B. „*Hat man drei Ordnungszahlen α, β, γ und ist $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, so ist auch $\alpha < \gamma$.*"

Die Ordnungszahlen bilden also in ihrer *Grössenordnung* eine einfach geordnete Menge; später wird sich zeigen, dass es eine *wohlgeordnete* Menge ist. —

Die in § 8 definirten Operationen der *Addition* und *Multiplication* von Ordnungstypen beliebiger einfach geordneter Mengen sind natürlich auch auf die Ordnungszahlen anwendbar.

Ist $\alpha = \bar{F}$, $\beta = \bar{G}$, wo F und G zwei wohlgeordnete Mengen sind, so ist

$$(1) \qquad \alpha + \beta = \overline{(F, G)}.$$

Die Vereinigungsmenge (F, G) ist offenbar auch eine wohlgeordnete Menge; wir haben also den Satz:

C. „*Die Summe zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.*"

In der Summe $\alpha + \beta$ heisst α der ‚*Augendus*', β der ‚*Addendus*'.

Da F ein *Abschnitt* von (F, G), so hat man stets:

$$(2) \qquad \alpha < \alpha + \beta.$$

Hingegen ist G nicht ein *Abschnitt*, sondern ein *Rest* von (F, G), kann daher, wie wir in § 13 sahen, der Menge (F, G) ähnlich sein; trifft dies nicht ein, so ist G nach Satz O, § 13 einem Abschnitt von (F, G) ähnlich. Es ist also

$$(3) \qquad \beta \leqq \alpha + \beta.$$

Sonach haben wir:

D. „*Die Summe zweier Ordnungszahlen ist stets grösser als der Augendus, dagegen grösser oder gleich dem Addendus. Hat man $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, so folgt hieraus immer, dass $\beta = \gamma$.*"

Im Allgemeinen sind $\alpha + \beta$ und $\beta + \alpha$ nicht gleich. Dagegen hat man, wenn γ eine dritte Ordnungszahl ist

$$(4) \qquad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

D. h.

E. „*Bei der Addition von Ordnungszahlen ist das associative Gesetz gültig.*"

Substituirt man in der Menge G vom Typus β für *jedes* Element g je eine Menge F_g vom Typus α, so erhält man nach Satz E, § 12 eine *wohlgeordnete* Menge H, deren Typus durch die Typen α und β völlig bestimmt und das *Product* $\alpha . \beta$ genannt wird:

$$(5) \qquad \bar{F}_g = \alpha,$$

$$(6) \qquad \alpha . \beta = \bar{H}.$$

F. „*Das Product zweier Ordnungszahlen ist ebenfalls eine Ordnungszahl.*"

In dem Product $\alpha . \beta$ heisst α der ‚*Multiplicandus*', β der ‚*Multiplicator*'.

Im Allgemeinen sind $\alpha . \beta$ und $\beta . \alpha$ nicht gleich. Man hat aber (§ 8)

$$(7) \qquad (\alpha . \beta) . \gamma = \alpha . (\beta . \gamma).$$

D. h.

G. „*Bei der Multiplication von Ordnungszahlen gilt das associative Gesetz.*“

Das *distributive* Gesetz hat im Allgemeinen (§ 8) nur in folgender Form hier Gültigkeit

(8) $$\alpha \,.\, (\beta + \gamma) = \alpha \,.\, \beta + \alpha \,.\, \gamma.$$

In Bezug auf die Grösse des Products gilt, wie man leicht sieht, der Satz:

H. „*Ist der Multiplicator grösser als* 1, *so ist das Product zweier Ordnungszahlen stets grösser als der Multiplicandus, dagegen grösser oder gleich dem Multiplicator. Hat man* $\alpha\beta = \alpha\gamma$, *so folgt hieraus immer, dass* $\beta = \gamma$.“

Andrerseits ist offenbar:

(9) $$\alpha \,.\, 1 = 1 \,.\, \alpha = \alpha.$$

Es kommt hier noch die Operation der *Subtraction* hinzu. Sind α und β zwei Ordnungszahlen und $\alpha < \beta$, so existirt immer eine bestimmte Ordnungszahl, die wir $\beta - \alpha$ nennen, welche der Gleichung genügt

(10) $$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta.$$

Denn ist $\overline{G} = \beta$, so hat G einen Abschnitt B, so dass $\overline{B} = \alpha$; den zugehörigen Rest nennen wir S und haben

$$G = (B,\, S),$$

$$\beta = \alpha + \overline{S},$$

also

(11) $$\beta - \alpha = \overline{S}.$$

Die Bestimmtheit von $\beta - \alpha$ erhellt daraus, dass der Abschnitt B von G ein völlig bestimmter (Satz D, § 13), daher auch S eindeutig gegeben ist. — Wir heben folgende, aus (4), (8) und (10) fliessende Formeln hervor:

(12) $$(\gamma + \beta) - (\gamma + \alpha) = \beta - \alpha,$$

(13) $$\gamma(\beta - \alpha) = \gamma\beta - \gamma\alpha.$$

Von Bedeutung ist es, dass die Ordnungszahlen stets auch in unendlicher Anzahl sich summiren lassen, so dass ihre Summe eine bestimmte, von der Reihenfolge ihrer Summanden abhängige Ordnungszahl ist.

Ist etwa

$$\beta_1,\, \beta_2,\, \ldots\, \beta_\nu,\, \ldots$$

eine beliebige einfach unendliche Reihe von Ordnungszahlen und hat man

(14) $$\beta_\nu = \overline{G}_\nu,$$

so ist (Satz E, § 12) auch

$$(15)\qquad G = (G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots)$$

eine wohlgeordnete Menge, deren Ordnungszahl β die Summe der β_ν darstellt. Wir haben also

$$(16)\qquad \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots = \overline{G} = \beta$$

und man hat, wie aus der Definition des Productes leicht hervorgeht, stets

$$(17)\quad \gamma\cdot(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu+\cdots)=\gamma\cdot\beta_1+\gamma\cdot\beta_2+\cdots+\gamma\cdot\beta_\nu+\cdots.$$

Setzen wir

$$(18)\qquad \alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu,$$

so ist

$$(19)\qquad \alpha_\nu = \overline{(G_1, G_2, \ldots G_\nu)}.$$

Es ist

$$(20)\qquad \alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu,$$

und wir können nach (10) die Zahlen β_ν durch die Zahlen α_ν wie folgt ausdrücken:

$$(21)\qquad \beta_1 = \alpha_1;\quad \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu.$$

Die Reihe

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$$

stellt daher eine *beliebige* unendliche Reihe von Ordnungszahlen dar, welche *die Bedingung* (20) erfüllen; wir nennen sie eine ‚*Fundamentalreihe*‘ von Ordnungszahlen (§ 10); zwischen ihr und β besteht eine Beziehung, die sich folgendermassen aussprechen lässt:

1) β ist $> \alpha_\nu$ für jedes ν, weil die Menge $(G_1, G_2, \ldots G_\nu)$, deren Ordnungszahl α_ν ist, ein *Abschnitt* der Menge G ist, welche die Ordnungszahl β hat.

2) Ist β' *irgend eine* Ordnungszahl $< \beta$, so ist von einem gewissen ν an stets

$$\alpha_\nu > \beta'.$$

Denn da $\beta' < \beta$, so giebt es einen Abschnitt B' der Menge G vom Typus β'. Das diesen Abschnitt bestimmende Element von G muss einer von den Theilmengen G_ν, wir wollen sie G_{ν_0} nennen, angehören. Dann ist aber B' auch Abschnitt von $(G_1, G_2, \ldots G_{\nu_0})$ und folglich $\beta' < \alpha_{\nu_0}$, daher

$$\alpha_\nu > \beta'$$

für $\nu \geqq \nu_0$.

Somit ist β die auf alle α_ν der Grösse nach nächstfolgende Ordnungszahl; wir wollen sie daher die ‚*Grenze*‘ der α_ν für wachsende ν nennen und mit $\operatorname{Lim}\limits_\nu \alpha_\nu$ bezeichnen, so dass nach (16) und (21):

$$(22)\qquad \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu) + \cdots.$$

Wir können das Vorangehende in folgendem Satze aussprechen:

I. „*Zu jeder Fundamentalreihe* $\{\alpha_\nu\}$ *von Ordnungszahlen gehört eine Ordnungszahl* $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$, *welche auf alle* α_ν *der Grösse nach zunächst folgt; sie wird dargestellt in der Formel* (22)."

Wird unter γ irgend eine constante Ordnungszahl verstanden, so beweist man leicht mit Hülfe der Formeln (12), (13), (17) die in folgenden Formeln enthaltenen Sätze:

$$\operatorname{Lim}_\nu (\gamma + \alpha_\nu) = \gamma + \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu, \tag{23}$$

$$\operatorname{Lim}_\nu \gamma \cdot \alpha_\nu = \gamma \cdot \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu. \tag{24}$$

Wir haben in § 7 bereits erwähnt, dass alle einfach geordneten Mengen von gegebener *endlicher* Cardinalzahl ν einen und denselben Ordnungstypus haben. Dies lässt sich hier wie folgt beweisen. Jede einfach geordnete Menge von *endlicher* Cardinalzahl ist eine *wohlgeordnete* Menge; denn sie muss, ebenso wie jede ihrer Theilmengen ein niederstes Element haben, was sie nach Satz B, § 12 als eine wohlgeordnete Menge kennzeichnet.

Die Typen endlicher einfach geordneter Mengen sind daher nichts Anderes als *endliche Ordnungszahlen*. Zwei verschiedenen Ordnungszahlen α und β kann aber nicht eine und dieselbe *endliche* Cardinalzahl ν zukommen. Ist nämlich etwa $\alpha < \beta$ und $\overline{G} = \beta$, so existirt, wie wir wissen, ein Abschnitt B von G, so dass $\overline{B} = \alpha$.

Es würde also der Menge G und ihrer Theilmenge B dieselbe endliche Cardinalzahl ν eignen. Dies ist nach Satz C, § 6 unmöglich.

Die *endlichen Ordnungszahlen* stimmen daher in ihren Eigenschaften mit den *endlichen Cardinalzahlen* überein.

Ganz anders verhält es sich mit den *transfiniten Ordnungszahlen;* zu einer und derselben transfiniten Cardinalzahl $\mathfrak{a}$ giebt es eine *unendliche* Anzahl von Ordnungszahlen, die ein einheitliches zusammenhängendes System bilden, welches wir die ‚Zahlenclasse $Z(\mathfrak{a})$' nennen. Sie ist ein Theil der *Typenclasse* $[\mathfrak{a}]$ (§ 7).

Den nächsten Gegenstand unserer Betrachtung bildet die Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$, welche wir die *zweite Zahlenclasse* nennen wollen.

In diesem Zusammenhange verstehen wir nämlich unter der *ersten Zahlenclasse* die Gesammtheit $\{\nu\}$ aller *endlichen* Ordnungszahlen. —

§ 15.

Die Zahlen der zweiten Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$.

Die zweite Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$ ist die Gesammtheit $\{\alpha\}$ aller Ordnungstypen α wohlgeordneter Mengen von der Cardinalzahl $\aleph_0$ (§ 6).

A. „*Die zweite Zahlenclasse hat eine kleinste Zahl $\omega = \operatorname{Lim}_\nu \nu$.*“

Beweis. Unter ω verstehen wir den Typus der wohlgeordneten Menge

(1) $$F_0 = (f_1, f_2, \ldots f_\nu, \ldots)$$

wo ν alle endlichen Ordnungszahlen durchläuft und

(2) $$f_\nu \prec f_{\nu+1}.$$

Es ist also (§ 7)

(3) $$\omega = \overline{F}_0$$

und (§ 6)

(4) $$\overline{\overline{\omega}} = \aleph_0.$$

ω ist daher eine Zahl der zweiten Zahlenclasse und zwar die *kleinste*. Denn ist γ irgend eine Ordnungszahl $< \omega$, so muss sie (§ 14) Typus eines *Abschnitts* von F_0 sein. F_0 hat aber nur Abschnitte

$$A = (f_1, f_2, \ldots f_\nu)$$

mit *endlicher* Ordnungszahl ν. Es ist daher $\gamma = \nu$.

Es giebt also keine *transfiniten* Ordnungszahlen, welche kleiner wären als ω, die daher die kleinste von ihnen ist. Nach der in § 14 gegebenen Erklärung von $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$ ist offenbar $\omega = \operatorname{Lim}_\nu \nu$.

B. „*Ist α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, so folgt auf sie als nächstgrössere Zahl derselben Zahlenclasse die Zahl $\alpha + 1$.*“

Beweis. Sei F eine wohlgeordnete Menge vom Typus α und von der Cardinalzahl $\aleph_0$:

(5) $$\overline{F} = \alpha,$$

(6) $$\overline{\overline{\alpha}} = \aleph_0.$$

Wir haben, wenn unter g ein neu hinzutretendes Element verstanden wird,

(7) $$\alpha + 1 = \overline{(F, g)}.$$

Da F ein Abschnitt von (F, g) ist, so haben wir

(8) $$\alpha + 1 > \alpha.$$

Es ist

$$\overline{\overline{\alpha + 1}} = \overline{\overline{\alpha}} + 1 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 \quad (§ 6).$$

Die Zahl $\alpha + 1$ gehört also zur zweiten Zahlenclasse. Zwischen α und $\alpha + 1$ giebt es aber keine Ordnungszahlen; denn jede Zahl γ, die $< \alpha + 1$, entspricht als Typus einem Abschnitte von (F, g); ein solcher kann nur entweder F oder ein Abschnitt von F sein. γ ist also entweder $=$ oder $< \alpha$. —

C. „*Ist* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \ldots$ *irgend eine Fundamentalreihe von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so gehört auch die auf sie der Grösse nach zunächst folgende Zahl* $\operatorname{Lim}\limits_{\nu} \alpha_\nu$ (§ 14) *der zweiten Zahlenclasse an.*"

Beweis. Nach § 14 ergiebt sich aus der Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$ die Zahl $\operatorname{Lim}\limits_{\nu} \alpha_\nu$, indem man eine andere Reihe $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ herstellt, so dass

$$\beta_1 = \alpha_1, \ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1, \ldots \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu, \ldots$$

Sind dann $G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots$ wohlgeordnete Mengen derart, dass

$$\bar{G}_\nu = \beta_\nu,$$

so ist auch

$$G = (G_1, G_2, \ldots G_\nu, \ldots)$$

eine wohlgeordnete Menge und

$$\operatorname{Lim}_{\nu} \alpha_\nu = \bar{G}.$$

Es handelt sich daher nur um den Nachweis, dass

$$\bar{\bar{G}} = \aleph_0.$$

Da aber die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu, \ldots$ der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehören, so ist

$$\bar{\bar{G}}_\nu \leqq \aleph_0,$$

daher

$$\bar{\bar{G}} \leqq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

G ist aber jedenfalls eine transfinite Menge, also ist der Fall $\bar{\bar{G}} < \aleph_0$ ausgeschlossen. —

Zwei *Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$ und $\{\alpha'_\nu\}$ von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse nennen wir (§ 10) ‚*zusammengehörig*', in Zeichen

$$\{\alpha_\nu\} \,\|\, \{\alpha'_\nu\}, \tag{9}$$

wenn zu *jedem* ν endliche Zahlen λ_0, μ_0 vorhanden sind, so dass

$$\alpha'_\lambda > \alpha_\nu, \quad \lambda \geqq \lambda_0, \tag{10}$$

und

$$\alpha_\mu > \alpha'_\nu, \quad \mu \geqq \mu_0. \tag{11}$$

D. *„Die zu zwei Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$, $\{\alpha_\nu'\}$ *gehörigen Grenzzahlen* $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$ *und* $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu'$ *sind dann und nur dann gleich, wenn* $\{\alpha_\nu\} \| \{\alpha_\nu'\}$."

Beweis. Der Kürze halber setzen wir $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu = \beta$, $\operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu' = \gamma$.

Nehmen wir zuerst an, es sei $\{\alpha_\nu\} \| \{\alpha_\nu'\}$ so behaupten wir, dass $\beta = \gamma$. Wäre nämlich β nicht gleich γ, so müsste eine von diesen beiden Zahlen die kleinere sein, etwa $\beta < \gamma$. Von einem gewissen ν an wäre $\alpha_\nu' > \beta$ (§ 14), daher auch wegen (11) von einem gewissen μ an $\alpha_\mu > \beta$. Dies ist aber unmöglich, weil $\beta = \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu$, also für alle μ $\alpha_\mu < \beta$.

Wird umgekehrt vorausgesetzt, dass $\beta = \gamma$, so muss, weil $\alpha_\nu < \gamma$, von einem gewissen λ an $\alpha_\lambda' > \alpha_\nu$, und weil $\alpha_\nu' < \beta$, von einem gewissen μ an $\alpha_\mu > \alpha_\nu'$ sein; d. h. es ist $\{\alpha_\nu\} \| \{\alpha_\nu'\}$.

E. *„Ist α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, ν_0 eine beliebige endliche Ordnungszahl, so ist $\nu_0 + \alpha = \alpha$ und daher auch $\alpha - \nu_0 = \alpha$."*

Beweis. Wir überzeugen uns zuerst von der Richtigkeit des Satzes wenn $\alpha = \omega$. Es ist

$$\omega = \overline{(f_1, f_2 \ldots f_\nu, \ldots)},$$
$$\nu_0 = \overline{(g_1, g_2, \ldots g_{\nu_0})},$$

daher

$$\nu_0 + \omega = \overline{(g_1, g_2, \ldots g_{\nu_0}, f_1, f_2, \ldots f_\nu \ldots)} = \omega.$$

Ist aber $\alpha > \omega$, so haben wir

$$\alpha = \omega + (\alpha - \omega),$$
$$\nu_0 + \alpha = (\nu_0 + \omega) + (\alpha - \omega) = \omega + (\alpha - \omega) = \alpha.$$

F. *„Ist ν_0 irgend eine endliche Ordnungszahl, so ist $\nu_0 \cdot \omega = \omega$."*

Beweis. Um eine Menge vom Typus $\nu_0 \cdot \omega$ zu erhalten, hat man für die einzelnen Elemente f_ν der Menge $(f_1, f_2, \ldots f_\nu \ldots)$ Mengen $(g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots g_{\nu,\nu_0})$ vom Typus ν_0 zu substituiren. Man erhält die Menge

$$(g_{1,1}, g_{1,2}, \ldots g_{1,\nu_0}, g_{2,1}, \ldots g_{2,\nu_0}, \ldots g_{\nu,1}, g_{\nu,2}, \ldots g_{\nu,\nu_0}, \ldots),$$

welche der Menge $\{f_\nu\}$ offenbar ähnlich ist; daher ist

$$\nu_0 \omega = \omega.$$

Kürzer ergiebt sich dasselbe wie folgt: nach (24) § 14 ist, da $\omega = \operatorname{Lim}_\nu \nu$,

$$\nu_0 \omega = \operatorname{Lim}_\nu \nu_0 \nu.$$

Andrerseits ist

$$\{\nu_0 \nu\} \| \{\nu\},$$

mithin

$$\operatorname{Lim}_\nu \nu_0 \nu = \operatorname{Lim}_\nu \nu = \omega,$$

also

$$\nu_0 \omega = \omega.$$

G. „*Man hat immer*

$$(\alpha + \nu_0)\omega = \alpha\omega,$$

unter α *eine Zahl der zweiten, unter* ν_0 *eine solche der ersten Zahlenclasse verstanden.*"

Beweis. Wir haben

$$\operatorname*{Lim}_{\nu} \nu = \omega.$$

Nach (24) § 14 ist daher

$$(\alpha+\nu_0)\omega = \operatorname*{Lim}_{\nu} (\alpha+\nu_0)\nu.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}(\alpha+\nu_0)\nu &= \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{1} + \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{2} + \cdots + \overbrace{(\alpha+\nu_0)}^{\nu} \\ &= \alpha + \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{1} + \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{2} \cdots \overbrace{(\nu_0+\alpha)}^{\nu-1} + \nu_0 \\ &= \overbrace{\alpha}^{1} + \overbrace{\alpha}^{2} + \cdots + \overbrace{\alpha}^{\nu} + \nu_0 \\ &= \alpha\nu + \nu_0.\end{aligned}$$

Man hat nun, wie leicht zu sehen,

$$\{\alpha\nu + \nu_0\} \,||\, \{\alpha\nu\},$$

und folglich

$$\operatorname*{Lim}_{\nu} (\alpha+\nu_0)\nu = \operatorname*{Lim}_{\nu} (\alpha\nu+\nu_0) = \operatorname*{Lim}_{\nu} \alpha\nu = \alpha\omega.$$

H. „*Ist* α *irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, so bildet die Gesammtheit* $\{\alpha'\}$ *aller Zahlen* α' *der ersten und zweiten Zahlenclasse, welche kleiner sind als* α, *in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge vom Typus* α."

Beweis. Sei F eine wohlgeordnete Menge derart, dass $\overline{F} = \alpha$; f_1 sei das niederste Element von F. Ist α' eine beliebige Ordnungszahl $< \alpha$, so giebt es (§ 14) einen bestimmten Abschnitt A' von F, so dass

$$\overline{A'} = \alpha',$$

und umgekehrt bestimmt jeder Abschnitt A' durch seinen Typus $\overline{A'} = \alpha'$ eine Zahl $\alpha' < \alpha$ der ersten oder zweiten Zahlenclasse; denn, da $\overline{\overline{F}} = \aleph_0$, so kann $\overline{\overline{A'}}$ nur eine endliche Cardinalzahl oder $\aleph_0$ sein.

Der Abschnitt A' wird durch ein Element $f' \succ f_1$ von F bestimmt und umgekehrt bestimmt jedes Element $f' \succ f_1$ von F einen Abschnitt A' von F. Sind f' und f'' zwei Elemente $\succ f_1$ von F, A' und A'' die durch sie bestimmten Abschnitte von F, α' und α'' deren Ordnungstypen, und ist etwa $f' \prec f''$, so ist (§ 13) $A' < A''$ und daher $\alpha' < \alpha''$.

Setzen wir daher $F = (f_1, F')$, so wird, wenn man dem Element f' von F' das Element α' von $\{\alpha'\}$ zuordnet, eine Abbildung dieser beiden Mengen gewonnen. Es ist somit

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{F'}.$$

Nun ist aber $\overline{F'} = \alpha - 1$ und nach Satz E $\alpha - 1 = \alpha$, daher

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha.$$

Da $\bar{\alpha} = \aleph_0$, so ist auch $\overline{\overline{\{\alpha'\}}} = \aleph_0$; es gilt daher:

I. „*Die Menge $\{\alpha'\}$ aller Zahlen α' der ersten und zweiten Zahlenclasse, welche kleiner sind als eine Zahl α der zweiten Zahlenclasse, hat die Cardinalzahl $\aleph_0$.*“

K. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenclasse ist entweder derart, dass sie aus einer nächst kleineren $\underline{\alpha}_1$ durch Hinzufügung der 1 hervorgeht:*

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1,$$

oder es lässt sich eine Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu\}$ von Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse angeben, so dass

$$\alpha = \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu.\text{“}$$

Beweis. Sei $\alpha = \bar{F}$. Hat F ein dem Range nach höchstes Element g, so ist $F = (A, g)$, wo A der durch g bestimmte Abschnitt von F ist. Wir haben dann den ersten Fall, nämlich

$$\alpha = \bar{A} + 1 = \underline{\alpha}_1 + 1.$$

Es existirt also eine *nächst kleinere* Zahl, die eben $\underline{\alpha}_1$ genannt wird.

Besitzt aber F kein höchstes Element, so fassen wir den Inbegriff $\{\alpha'\}$ aller Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse ins Auge, welche kleiner als α sind. Nach Satz H ist die Menge $\{\alpha'\}$ in ihrer Grössenordnung ähnlich der Menge F; unter den *Zahlen* α' ist daher keine die grösste. Nach Satz I lässt sich die Menge $\{\alpha'\}$ in die Form $\{\alpha_\nu'\}$ einer einfach unendlichen Reihe bringen. Gehen wir von α_1' aus, so werden im Allgemeinen in dieser von der Grössenordnung abweichenden Rangordnung die nächstfolgenden $\alpha_2', \alpha_3' \ldots$ kleiner sein als α_1'; jedenfalls aber kommen im weiteren Verlaufe Glieder vor, die $> \alpha_1'$; denn α_1' kann nicht grösser sein als alle anderen Glieder, weil unter den Zahlen $\{\alpha_\nu'\}$ keine grösste vorhanden ist. Die mit dem kleinsten Index versehene Zahl α_ν', welche grösser ist als α_1', sei α'_{ϱ_2}. Ebenso sei α'_{ϱ_3} die mit dem kleinsten Index versehene Zahl der Reihe $\{\alpha_\nu'\}$, welche grösser ist als α'_{ϱ_2}. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine unendliche Reihe wachsender Zahlen, eine Fundamentalreihe:

$$\alpha'_1, \alpha'_{\varrho_2}, \alpha'_{\varrho_3}, \ldots \alpha'_{\varrho_\nu}, \ldots.$$

Es ist

$$1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \cdots < \varrho_\nu < \varrho_{\nu+1}, \cdots,$$
$$\alpha_1{}' < \alpha'_{\varrho_2} < \alpha'_{\varrho_3} < \cdots < \alpha'_{\varrho_\nu} < \alpha'_{\varrho_{\nu+1}}, \cdots,$$
$$\alpha'_\mu < \alpha'_{\varrho_\nu} \quad \text{stets wenn} \quad \mu < \varrho_\nu,$$

und da offenbar $\nu \overline{\gtrless} \varrho_\nu$, so haben wir immer

$$\alpha'_\nu \leqq \alpha'_{\varrho_\nu}.$$

Man sieht hieraus, dass jede Zahl $\alpha_\nu{}'$, daher auch jede Zahl $\alpha' < \alpha$ von Zahlen α'_{ϱ_ν} für hinreichend grosse Werthe von ν übertroffen wird.

α ist aber die auf alle Zahlen α' der Grösse nach zunächst folgende Zahl, mithin auch die nächst grössere Zahl in Bezug auf alle α'_{ϱ_ν}. Setzen wir daher $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha_{\varrho_{\nu+1}} = \alpha_{\nu+1}$, so ist

$$\alpha = \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu.$$

Aus den Sätzen B, C, ... K erhellt, dass die Zahlen der zweiten Zahlenclasse sich auf zwei Weisen aus kleineren Zahlen ergeben. Die einen, wir nennen sie *Zahlen erster Art*, erhält man aus einer nächstkleineren $\underline{\alpha}_1$ durch Hinzufügung der 1, nach der Formel

$$\alpha = \underline{\alpha}_1 + 1;$$

die anderen, wir nennen sie *Zahlen zweiter Art*, sind so beschaffen, dass es für sie *eine nächstkleinere* $\underline{\alpha}_1$ *gar nicht giebt;* diese gehen aber aus *Fundamentalreihen* $\{\alpha_\nu\}$ als deren *Grenzzahlen* hervor, nach der Formel

$$\alpha = \operatorname{Lim}_\nu \alpha_\nu.$$

α ist hier die auf sämmtliche Zahlen α_ν der Grösse nach *nächstfolgende* Zahl.

Diese beiden Weisen des Hervorgehens grösserer Zahlen aus kleineren nennen wir das *erste und das zweite Erzeugungsprincip* der Zahlen der zweiten Zahlenclasse.

§ 16.

Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse ist gleich der zweitgrössten transfiniten Cardinalzahl Alef-eins.

Bevor wir uns in den folgenden Paragraphen einer eingehenderen Betrachtung der Zahlen der zweiten Zahlenclasse und der sie beherrschenden Gesetzmässigkeit zuwenden, wollen wir die Frage nach der Cardinalzahl beantworten, welche der Menge $Z(\aleph_0) = \{\alpha\}$ aller dieser Zahlen zukommt.

A. *„Die Gesammtheit $\{\alpha\}$ aller Zahlen α der zweiten Zahlenclasse bildet in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge.“*

Beweis. Verstehen wir unter A_α die Gesammtheit aller Zahlen der *zweiten* Zahlenclasse, die kleiner sind als eine gegebene Zahl α, in ihrer Grössenordnung, so ist A_α eine wohlgeordnete Menge vom Typus $\alpha - \omega$. Dies geht aus Satz H, § 14 hervor. Die dort mit $\{\alpha'\}$ bezeichnete Menge aller Zahlen α' der *ersten* und *zweiten* Zahlenclasse ist aus $\{\nu\}$ und A_α zusammengesetzt, so dass

$$\{\alpha'\} = (\{\nu\}, A_\alpha).$$

Daher ist

$$\overline{\{\alpha'\}} = \overline{\{\nu\}} + \overline{A_\alpha}$$

und da

$$\overline{\{\alpha'\}} = \alpha, \quad \overline{\{\nu\}} = \omega,$$

so ist

$$\overline{A_\alpha} = \alpha - \omega.$$

Sei J irgend eine Theilmenge von $\{\alpha\}$ derart, dass es Zahlen in $\{\alpha\}$ giebt, die grösser sind als alle Zahlen von J. Sei etwa α_0 eine dieser Zahlen. Dann ist auch J eine Theilmenge von A_{α_0+1} und zwar eine solche, dass mindestens die Zahl α_0 von A_{α_0+1} grösser ist, als alle Zahlen von J. Da A_{α_0+1} eine wohlgeordnete Menge ist, so muss (§ 12) eine Zahl α' von A_{α_0+1}, die daher auch eine Zahl von $\{\alpha\}$ ist, auf alle Zahlen von J zunächst folgen. Es ist somit die Bedingung II, § 12 an $\{\alpha\}$ erfüllt; die Bedingung I, § 12 ist auch erfüllt, weil $\{\alpha\}$ die kleinste Zahl ω hat. —

Wendet man nun auf die wohlgeordnete Menge $\{\alpha\}$ die Sätze A und C, § 12 an, so erhält man die folgenden Sätze:

B. *„Jeder Inbegriff von verschiedenen Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse hat eine kleinste Zahl, ein Minimum.“*

C. *„Jeder Inbegriff von verschiedenen, in ihrer Grössenordnung aufgefassten Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse bildet eine wohlgeordnete Menge.“*

Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse von derjenigen der ersten, welche $\aleph_0$ ist, verschieden ist.

D. *„Die Mächtigkeit der Gesammtheit $\{\alpha\}$ aller Zahlen α der zweiten Zahlenclasse ist nicht gleich $\aleph_0$.“*

Beweis. Wäre $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$, so könnte man die Gesammtheit $\{\alpha\}$ in die Form einer einfach unendlichen Reihe

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu, \ldots$$

bringen, so dass $\{\gamma_\nu\}$ die Gesammtheit *aller* Zahlen der zweiten

Zahlenclasse in einer von der Grössenordnung abweichenden Rangordnung darstellen würde, und es enthielte $\{\gamma_\nu\}$ ebensowenig wie $\{\alpha\}$ eine grösste Zahl.

Von γ_1 ausgehend sei γ_{ϱ_2} das mit dem kleinsten Index versehene Glied jener Reihe $> \gamma_1$, γ_{ϱ_3} das mit dem kleinsten Index versehene Glied $> \gamma_{\varrho_2}$ u. s. w. Wir erhalten eine unendliche Reihe wachsender Zahlen

$$\gamma_1, \gamma_{\varrho_2}, \ldots \gamma_{\varrho_\nu}, \ldots,$$

so dass

$$1 < \varrho_2 < \varrho_3 \cdots \varrho_\nu < \varrho_{\nu+1}, \cdots,$$

$$\gamma_1 < \gamma_{\varrho_2} < \gamma_{\varrho_3} \cdots \gamma_{\varrho_\nu} < \gamma_{\varrho_{\nu+1}},$$

$$\gamma_\nu \leq \gamma_{\varrho_\nu}.$$

Nach Satz C, § 14 würde es eine bestimmte Zahl δ der zweiten Zahlenclasse geben, nämlich

$$\delta = \operatorname*{Lim}_\nu \gamma_{\varrho_\nu},$$

welche grösser wäre, als alle γ_{ϱ_ν}; folglich wäre auch

$$\delta > \gamma_\nu$$

für jedes ν.

Nun enthält aber $\{\gamma_\nu\}$ *alle* Zahlen der zweiten Zahlenclasse, folglich auch die Zahl δ; es wäre also für ein bestimmtes ν_0

$$\delta = \gamma_{\nu_0},$$

welche Gleichung mit der Relation $\delta > \gamma_{\nu_0}$ unverträglich ist. Die Annahme $\overline{\overline{\{\alpha\}}} = \aleph_0$ führt also zu einem Widerspruch.

E. „*Ein beliebiger Inbegriff $\{\beta\}$ von verschiedenen Zahlen β der zweiten Zahlenclasse hat, wenn er unendlich ist, entweder die Cardinalzahl $\aleph_0$ oder die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ der zweiten Zahlenclasse.*"

Beweis. Die Menge $\{\beta\}$ in ihrer Grössenordnung ist als Theilmenge der wohlgeordneten Menge $\{\alpha\}$ nach Satz O, § 13 entweder einem Abschnitte A_{α_0} der letzteren (d. h. dem Inbegriffe aller Zahlen der zweiten Zahlenclasse, welche $< \alpha_0$, in ihrer Grössenordnung) oder der Gesammtheit $\{\alpha\}$ selbst ähnlich. Wie im Beweise von Satz A gezeigt wurde, ist $\overline{A_{\alpha_0}} = \alpha_0 - \omega$.

Wir haben also entweder $\overline{\{\beta\}} = \alpha_0 - \omega$ oder $\overline{\{\beta\}} = \overline{\{\alpha\}}$, daher auch $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ entweder $= \overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ oder $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Es ist aber $\overline{\overline{\alpha_0 - \omega}}$ entweder eine endliche Cardinalzahl oder $= \aleph_0$ (Satz I, § 15). Der erste Fall ist hier ausgeschlossen, weil $\{\beta\}$ als unendliche Menge vorausgesetzt ist. Somit ist die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\beta\}}}$ entweder $= \aleph_0$ oder $= \overline{\overline{\{\alpha\}}}$.

F. „*Die Mächtigkeit der zweiten Zahlenclasse $\{\alpha\}$ ist die zweitgrösste transfinite Cardinalzahl Alef-eins.*"

Beweis. Es giebt keine Cardinalzahl $\mathfrak{a}$, welche $> \aleph_0$ und $< \overline{\overline{\{\alpha\}}}$ wäre. Denn sonst müsste nach § 2 eine unendliche Theilmenge $\{\beta\}$ von $\{\alpha\}$ existiren, so dass $\overline{\overline{\{\beta\}}} = \mathfrak{a}$.

Dem soeben bewiesenen Satze E zufolge hat aber die Theilmenge $\{\beta\}$ entweder die Cardinalzahl $\aleph_0$ oder die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$. Es ist daher die Cardinalzahl $\overline{\overline{\{\alpha\}}}$ nothwendig die auf $\aleph_0$ der Grösse nach nächstfolgende Cardinalzahl, welche wir $\aleph_1$ nennen.

In der zweiten Zahlenclasse $Z(\aleph_0)$ besitzen wir daher den natürlichen *Repräsentanten* für die zweitgrösste transfinite Cardinalzahl *Alef-eins*.

§ 17.

Die Zahlen von der Form $\omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu$.

Es ist zweckmässig, sich zunächst mit denjenigen Zahlen von $Z(\aleph_0)$ vertraut zu machen, welche ganze algebraische Functionen endlichen Grades von ω sind. Jede derartige Zahl lässt sich, und dies nur auf eine Weise, in die Form bringen

(1) $$\varphi = \omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu,$$

wo μ, ν_0 endlich und von Null verschieden sind, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\mu$ aber auch Null sein können. Dies beruht darauf, dass

(2) $$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu \nu = \omega^\mu \nu,$$

falls $\mu' < \mu$ und $\nu > 0$, $\nu' > 0$.

Denn nach (8), § 14 ist

$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu \nu = \omega^{\mu'}(\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu),$$

und nach Satz E, § 15

$$\nu' + \omega^{\mu-\mu'}\nu = \omega^{\mu-\mu'}\nu.$$

Es können daher in einem Aggregate von der Form

$$\cdots + \omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu \nu + \cdots$$

alle Glieder fortgelassen werden, denen nach rechts hin Glieder höheren Grades in ω folgen. Dies Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis die in (1) gegebene Form erreicht ist. Wir heben noch hervor, dass

(3) $$\omega^\mu \nu + \omega^\mu \nu' = \omega^\mu(\nu + \nu').$$

Vergleichen wir nun die Zahl φ mit einer Zahl ψ derselben Art

(4) $$\psi = \omega^\lambda \varrho_0 + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\lambda.$$

Sind μ und λ verschieden und etwa $\mu < \lambda$, so haben wir nach (2)

$$\varphi + \psi = \psi,$$

daher

$$\varphi < \psi.$$

Sind $\mu = \lambda$, ν_0 und ϱ_0 verschieden, und etwa $\nu_0 < \varrho_0$, so ist nach (2)

$$\varphi + \left(\omega^\lambda(\varrho_0 - \nu_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\mu\right) = \psi,$$

daher auch

$$\varphi < \psi.$$

Ist endlich

$$\mu = \lambda, \quad \nu_0 = \varrho_0, \ \nu_1 = \varrho_1, \ldots \nu_{\sigma-1} = \varrho_{\sigma-1}, \quad \sigma \overline{\gtrless} \mu,$$

dagegen ν_σ von ϱ_σ verschieden und etwa $\nu_\sigma < \varrho_\sigma$, so ist nach (2)

$$\varphi + \left(\omega^{\lambda-\sigma}(\varrho_\sigma - \nu_\sigma) + \omega^{\lambda-\sigma-1}\varrho_{\sigma+1} + \cdots + \varrho_\mu\right) = \psi,$$

daher wieder

$$\varphi < \psi.$$

Wir sehen also, dass nur bei völliger Identität der Ausdrücke φ und ψ die durch sie dargestellten Zahlen gleich sein können.

Die *Addition* von φ und ψ führt zu folgendem Resultat:

1) ist $\mu < \lambda$, so ist, wie schon oben bemerkt wurde,

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Ist $\mu = \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \omega^\lambda(\nu_0 + \varrho_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\lambda.$$

3) Ist $\mu > \lambda$, so hat man

$$\varphi + \psi = \omega^\mu\nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \omega^{\lambda+1}\nu_{\mu-\lambda-1} + \omega^\lambda(\nu_{\mu-\lambda} + \varrho_0) + \omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varrho_\lambda.$$

Um die Multiplication von φ und ψ auszuführen, bemerken wir, dass, wenn ϱ eine endliche von Null verschiedene Zahl ist, die Formel besteht:

(5) $$\varphi\varrho = \omega^\mu\nu_0\varrho + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu.$$

Sie ergiebt sich leicht durch Ausführung der aus ϱ Gliedern bestehenden Summe $\varphi + \varphi + \cdots + \varphi$.

Durch wiederholte Anwendung des Satzes G, § 15 erhält man ferner, unter Berücksichtigung von F, § 15

(6) $$\varphi\omega = \omega^{\mu+1},$$

daher auch

(7) $$\varphi\omega^\lambda = \omega^{\mu+\lambda}.$$

Nach dem distributiven Gesetze [(8), § 14] ist

$$\varphi\psi = \varphi\omega^\lambda\varrho_0 + \varphi\omega^{\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \varphi\omega\varrho_{\lambda-1} + \varphi\varrho_\lambda.$$

Die Formeln (4), (5) und (7) liefern daher folgendes Resultat:

1) Ist $\varrho_\lambda = 0$, so hat man

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\varrho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\varrho_{\lambda-1} = \omega^\mu\psi.$$

2) Ist ϱ_λ nicht $= 0$, so ist

$$\varphi\psi = \omega^{\mu+\lambda}\varrho_0 + \omega^{\mu+\lambda-1}\varrho_1 + \cdots + \omega^{\mu+1}\varrho_{\lambda-1} + \omega^\mu\nu_0\varrho_\lambda + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu.$$

Zu einer bemerkenswerthen Zerlegung der Zahlen φ kommen wir auf folgende Weise: Es sei

$$\varphi = \omega^{\mu}\varkappa_0 + \omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau, \tag{8}$$

wo

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \cdots > \mu_\tau \geqq 0$$

und $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$ von Null verschiedene endliche Zahlen sind. Wir haben dann

$$\varphi = (\omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \omega^{\mu_2}\varkappa_2 + \cdots + \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau)(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0 + 1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhalten wir

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}\varkappa_{\tau-1}+1)(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}\varkappa_{\tau-2}+1)\cdots(\omega^{\mu-\mu_1}\varkappa_0+1).$$

Nun ist aber

$$\omega^\lambda\varkappa + 1 = (\omega^\lambda+1)\varkappa,$$

falls $\varkappa$ eine von Null verschiedene endliche Zahl ist, daher:

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}+1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\mu_{\tau-2}-\mu_{\tau-1}}+1)\varkappa_{\tau-2}\ldots \tag{9}$$
$$\ldots(\omega^{\mu-\mu_1}+1)\varkappa_0.$$

Die hier vorkommenden Factoren $\omega^\lambda + 1$ sind sämmtlich *unzerlegbar*, und es lässt sich eine Zahl φ in dieser Productform nur *auf eine einzige Weise* darstellen. Ist $\mu_\tau = 0$, so ist φ von der *ersten* Art, in allen anderen Fällen von der *zweiten* Art.

Die scheinbare Abweichung der Formeln dieses Paragraphen von denjenigen, welche bereits in Bd. XXI, pag. 585 (Grundl. pag. 41) gegeben wurden, hängt nur mit der veränderten Schreibweise des Productes zweier Zahlen zusammen; da wir nun den Multiplicandus links, den Multiplicator rechts setzen, damals jedoch die entgegengesetzte Regel befolgten.

§ 18.

Die Potenz γ^α im Gebiete der zweiten Zahlenclasse.

Es sei ξ eine *Veränderliche*, deren Gebiet aus den Zahlen der ersten und zweiten Zahlenclasse mit Einschluss der 0 besteht. γ und δ seien zwei demselben Gebiete angehörige *Constanten* und zwar

$$\delta > 0, \quad \gamma > 1.$$

Wir können dann folgenden Satz begründen:

A. „*Es giebt eine einzige, völlig bestimmte eindeutige Function $f(\xi)$ der Veränderlichen ξ, welche folgende Bedingungen erfüllt:*

1) $f(0) = \delta$.

2) *Sind ξ' und ξ'' zwei beliebige Werthe von ξ, und ist*

$$\xi' < \xi'',$$

so ist

$$f(\xi') < f(\xi'').$$

3) *Für jeden Werth von* ξ *ist*

$$f(\xi+1) = f(\xi)\gamma.$$

4) *Ist* $\{\xi_\nu\}$ *eine beliebige Fundamentalreihe, so ist auch* $\{f(\xi_\nu)\}$ *eine solche und hat man*

$$\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu,$$

so ist

$$f(\xi) = \operatorname*{Lim}_\nu f(\xi_\nu)."$$

Beweis. Nach 1) und 3) haben wir

$$f(1) = \delta\gamma,\ f(2) = \delta\gamma\gamma,\ f(3) = \delta\gamma\gamma\gamma, \ldots$$

und man hat, wegen $\delta > 0$, $\gamma > 1$

$$f(1) < f(2) < f(3) < \cdots < f(\nu) < f(\nu+1), \cdots.$$

Somit ist die Function $f(\xi)$ für das Gebiet $\xi < \omega$ völlig bestimmt.

Nehmen wir nun an, es stehe der Satz fest für alle Werthe von ξ, die $< \alpha$ sind, wo α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse ist, so ist er auch gültig für $\xi \leqq \alpha$. Denn ist α von der *ersten* Art, so folgt aus 3):

$$f(\alpha) = f(\alpha_1)\gamma > f(\alpha_1);$$

es sind also auch die Bedingungen 2), 3), 4) für $\xi \leqq \alpha$ erfüllt. Ist aber α von der *zweiten* Art und $\{\alpha_\nu\}$ eine Fundamentalreihe derart, dass $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu = \alpha$, so folgt aus 2), dass auch $\{f(\alpha_\nu)\}$ eine Fundamentalreihe ist, und aus 4), dass $f(\alpha) = \operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha_\nu)$. Nimmt man eine andere Fundamentalreihe $\{\alpha_\nu'\}$ derart, dass $\operatorname*{Lim}_\nu \alpha_\nu' = \alpha$, so sind wegen 2) die beiden Fundamentalreihen $\{f(\alpha_\nu)\}$ und $\{f(\alpha_\nu')\}$ zusammengehörig; es ist daher auch $f(\alpha) = \operatorname*{Lim}_\nu f(\alpha_\nu')$. Der Werth $f(\alpha)$ ist also auch in diesem Falle *eindeutig* bestimmt.

Ist α' irgend eine Zahl $< \alpha$, so überzeugt man sich leicht, dass $f(\alpha') < f(\alpha)$. Es sind also die Bedingungen 2), 3), 4) auch für $\xi \mathrel{\overline{\gtrless}} \alpha$ erfüllt. Daraus folgt die Gültigkeit des Satzes *für alle Werthe* von ξ.

Denn gäbe es Ausnahmewerthe von ξ, für welche er nicht bestände, so müsste nach Satz B, § 16 einer derselben, wir nennen ihn α, der *kleinste* sein. Es wäre dann der Satz gültig für $\xi < \alpha$, nicht aber für $\xi \leqq \alpha$, was mit dem soeben Bewiesenen in Widerspruch stehen würde.

Es giebt daher für das ganze Gebiet von ξ *eine* und nur eine Function $f(\xi)$, welche die Bedingungen 1) bis 4) erfüllt.

Legt man der Constanten δ den Werth 1 bei, und wird alsdann die Function $f(\xi)$ mit

$$\gamma^\xi$$

bezeichnet, so können wir folgenden Satz formuliren:

B. „*Ist γ eine beliebige der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige Constante* > 1, *so giebt es eine ganz bestimmte Function γ^ξ von ξ, so dass*

1) $\gamma^0 = 1$.

2) *Wenn* $\xi' < \xi''$, *so ist* $\gamma^{\xi'} < \gamma^{\xi''}$.

3) *Für jeden Werth von ξ ist* $\gamma^{\xi+1} = \gamma^\xi \gamma$.

4) *Ist $\{\xi_\nu\}$ eine Fundamentalreihe, so ist auch $\{\gamma^{\xi_\nu}\}$ eine solche, und man hat, falls* $\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu$, *auch*

$$\gamma^\xi = \operatorname*{Lim}_\nu \gamma^{\xi_\nu}.\text{“}$$

Wir können aber auch den Satz aussprechen:

C. „*Ist $f(\xi)$ die in Satz A charakterisirte Function von ξ, so ist*

$$f(\xi) = \delta\gamma^\xi.\text{“}$$

Beweis. Im Hinblick auf (24), § 14 überzeugt man sich leicht, dass die Function $\delta\gamma^\xi$ nicht nur den Bedingungen 1), 2), 3) des Satzes A, sondern auch der Bedingung 4) desselben genügt. Wegen der Einzigkeit der Function $f(\xi)$ muss sie daher mit $\delta\gamma^\xi$ identisch sein.

D. „*Sind α und β zwei beliebige Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse mit Einschluss der* 0, *so ist*

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta.\text{“}$$

Beweis. Wir betrachten die Function $\varphi(\xi) = \gamma^{\alpha+\xi}$.

Im Hinblick darauf, dass nach Formel (23), § 14

$$\operatorname*{Lim}_\nu (\alpha + \xi_\nu) = \alpha + \operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu,$$

erkennen wir, dass $\varphi(\xi)$ folgende vier Bedingungen erfüllt:

1) $\varphi(0) = \gamma^\alpha$.

2) Wenn $\xi' < \xi''$, so ist $\varphi(\xi') < \varphi(\xi'')$.

3) Für jeden Werth von ξ ist $\varphi(\xi+1) = \varphi(\xi)\gamma$.

4) Ist $\{\xi_\nu\}$ eine Fundamentalreihe derart, dass $\operatorname*{Lim}_\nu \xi_\nu = \xi$, so ist

$$\varphi(\xi) = \operatorname*{Lim}_\nu \varphi(\xi_\nu).$$

Nach Satz C ist daher, $\delta = \gamma^\alpha$ gesetzt,

$$\varphi(\xi) = \gamma^\alpha \gamma^\xi.$$

Setzen wir hierin $\xi = \beta$, so folgt

$$\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \gamma^\beta.$$

E. „*Sind α und β zwei beliebige Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse mit Einschluss der* 0, *so ist*

$$\gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta.\text{“}$$

Beweis. Betrachten wir die Function $\psi(\xi) = \gamma^{\alpha\xi}$ und bemerken, dass nach (24), § 14 stets $\operatorname{Lim}\limits_{\nu} \alpha\xi_\nu = \alpha \operatorname{Lim}\limits_{\nu} \xi_\nu$, so können wir auf Grund des Satzes D Folgendes behaupten:

1) $\psi(0) = 1$.

2) Wenn $\xi' < \xi''$, so ist $\psi(\xi') < \psi(\xi'')$.

3) Für jeden Werth von ξ ist $\psi(\xi + 1) = \psi(\xi)\gamma^\alpha$.

4) Ist $\{\xi_\nu\}$ eine Fundamentalreihe, so ist auch $\{\psi(\xi_\nu)\}$ eine solche und man hat, falls $\xi = \operatorname{Lim}\limits_{\nu} \xi_\nu$, auch $\psi(\xi) = \operatorname{Lim}\limits_{\nu} \psi(\xi_\nu)$.

Man hat daher nach Satz C, wenn darin $\delta = 1$ und γ^α für γ gesetzt wird:

$$\psi(\xi) = (\gamma^\alpha)^\xi. \text{ —}$$

Ueber die *Grösse* von γ^ξ im Vergleich mit ξ lässt sich der folgende Satz aussprechen:

F. „*Ist $\gamma > 1$, so hat man für jeden Werth von ξ*

$$\gamma^\xi \geqq \xi.\text{“}$$

Beweis. In den Fällen $\xi = 0$ und $\xi = 1$ leuchtet der Satz unmittelbar ein. Wir zeigen nun, dass, wenn er für alle Werthe von ξ gilt, die kleiner sind als eine gegebene Zahl $\alpha > 1$, er auch für $\xi = \alpha$ richtig ist.

Ist α von der *ersten* Art, so ist vorausgesetztermassen

$$\underline{\alpha}_1 \leqq \gamma^{\underline{\alpha}_1},$$

daher auch

$$\underline{\alpha}_1 \gamma \leqq \gamma^{\underline{\alpha}_1} \gamma = \gamma^\alpha,$$

mithin

$$\gamma^\alpha \geqq \underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_1(\gamma - 1).$$

Da sowohl $\underline{\alpha}_1$ wie $\gamma - 1$ mindestens $= 1$ sind und $\underline{\alpha}_1 + 1 = \alpha$ ist, so folgt

$$\gamma^\alpha \geqq \alpha.$$

Ist dagegen α von der *zweiten* Art und zwar

$$\alpha = \operatorname{Lim}_{\nu} \alpha_\nu,$$

so ist, wegen $\alpha_\nu < \alpha$, der Voraussetzung gemäss

$$\alpha_\nu \leqq \gamma^{\alpha_\nu},$$

daher auch

$$\operatorname{Lim}_{\nu} \alpha_\nu \leqq \operatorname{Lim}_{\nu} \gamma^{\alpha_\nu},$$

d. h.

$$\alpha \leqq \gamma^\alpha.$$

Würde es nun Werthe von ξ geben, für welche

$$\xi > \gamma^\xi,$$

so müsste unter ihnen nach Satz B, § 16 einer der *kleinste* sein; wird dieser mit α bezeichnet, so hätte man für $\xi < \alpha$

$$\xi \leqq \gamma^{\xi},$$

dagegen

$$\alpha > \gamma^{\alpha},$$

was dem vorhin Bewiesenen widerspricht. Somit haben wir für alle Werthe von ξ

$$\gamma^{\xi} \geqq \xi.$$

§ 19.

Die Normalform der Zahlen der zweiten Zahlenclasse.

Es sei α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse. Die Potenz ω^{ξ} wird für hinreichend grosse Werthe von ξ grösser als α. Dies ist nach Satz F, § 18 stets der Fall für $\xi > \alpha$, im Allgemeinen wird es aber auch schon für kleinere Werthe von ξ eintreten.

Nach Satz B, § 16 muss unter den Werthen von ξ, für welche

$$\omega^{\xi} > \alpha$$

einer *der kleinste* sein; wir nennen ihn β und überzeugen uns leicht, dass er *nicht* eine Zahl der *zweiten* Art sein kann. Wäre nämlich

$$\beta = \operatorname*{Lim}_{\nu} \beta_{\nu}$$

so hätte man, da $\beta_{\nu} < \beta$,

$$\omega^{\beta_{\nu}} \overline{\overline{<}} \alpha,$$

daher auch

$$\operatorname*{Lim}_{\nu} \omega^{\beta_{\nu}} \overline{\overline{<}} \alpha.$$

Es wäre also

$$\omega^{\beta} \overline{\overline{<}} \alpha,$$

während doch

$$\omega^{\beta} > \alpha.$$

Also ist β von der *ersten* Art. Wir bezeichnen $\underline{\beta}_1$ mit α_0, so dass $\beta = \alpha_0 + 1$, und können daher behaupten, *dass es eine völlig bestimmte Zahl α_0 der ersten oder zweiten Zahlenclasse giebt*, *welche die beiden Bedingungen erfüllt:*

(1) $$\omega^{\alpha_0} \leqq \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}\omega > \alpha.$$

Aus der zweiten Bedingung schliessen wir, dass *nicht für alle endlichen Zahlwerthe von ν*

$$\omega^{\alpha_0}\nu \leqq \alpha,$$

da sonst auch $\operatorname*{Lim}_{\nu} \omega^{\alpha_0}\nu = \omega^{\alpha_0}\omega \leqq \alpha$ wäre.

Die *kleinste endliche Zahl ν* für welche

$$\omega^{\alpha_0}\nu > \alpha,$$

bezeichnen wir mit $\varkappa_0 + 1$. Wegen (1) ist $\varkappa_0 > 0$.

Es giebt also auch eine völlig bestimmte Zahl $\varkappa_0$ der ersten Zahlenclasse, so dass

(2) $$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 \leqq \alpha, \qquad \omega^{\alpha_0}(\varkappa_0+1) > \alpha$$

ist. Setzen wir $\alpha - \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \alpha'$, so haben wir

(3) $$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha'$$

und

(4) $$0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \qquad 0 < \varkappa_0 < \omega.$$

Es lässt sich aber α nur auf *eine einzige* Weise unter den Bedingungen (4) in der Form (3) darstellen. Denn aus (3) und (4) folgen rückwärts zunächst die Bedingungen (2) und daraus die Bedingungen (1).

Den Bedingungen (1) genügt aber nur die Zahl $\alpha_0 = \beta_{-1}$, und durch die Bedingungen (2) ist die endliche Zahl $\varkappa_0$ eindeutig bestimmt. Aus (1) und (4) folgt noch mit Rücksicht auf Satz F, § 18, dass

(5) $$\alpha' < \alpha, \qquad \alpha_0 \leqq \alpha.$$

Wir können daher die Richtigkeit des folgenden Satzes behaupten:

A. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenclasse lässt sich, und zwar nur auf eine einzige Weise auf die Form bringen:*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha',$$

so dass

$$0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \qquad 0 < \varkappa_0 < \omega;$$

α' ist immer kleiner als α, dagegen α_0 kleiner oder gleich α."

Ist α' eine Zahl der *zweiten* Zahlenclasse, so lässt sich auch auf sie der Satz A anwenden und wir haben

(5) $$\alpha' = \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \alpha'',$$

$$0 \leqq \alpha'' < \omega^{\alpha_1}, \qquad 0 < \varkappa_1 < \omega,$$

und es ist

$$\alpha_1 < \alpha_0, \qquad \alpha'' < \alpha'.$$

Im Allgemeinen erhalten wir eine weitere Folge analoger Gleichungen:

(6) $$\alpha'' = \omega^{\alpha_2}\varkappa_2 + \alpha''',$$

(7) $$\alpha''' = \omega^{\alpha_3}\varkappa_3 + \alpha^{\mathrm{IV}}.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Diese Folge kann aber nicht unendlich sein, sie muss nothwendig abbrechen.

Denn die Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ nehmen ihrer Grösse nach ab, es ist

$$\alpha > \alpha' > \alpha'' > \alpha''' \ldots.$$

Wäre eine Reihe von abnehmenden transfiniten Zahlen unendlich, so würde kein Glied derselben das kleinste sein; dies ist nach Satz B, § 16 unmöglich. Es muss daher für einen gewissen *endlichen* Zahlwert τ

$$\alpha^{(\tau+1)} = 0$$

sein. Verbinden wir nun die Gleichungen (3), (5), (6), (7) mit einander, so erhalten wir den Satz:

B. „*Jede Zahl α der zweiten Zahlenclasse lässt sich, und zwar nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \varkappa_0 + \omega^{\alpha_1} \varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau} \varkappa_\tau,$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\tau$ Zahlen der ersten oder zweiten Zahlenclasse sind, welche den Bedingungen genügen:

$$\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\tau \geqq 0$$

während $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$, $\tau + 1$ von Null verschiedene Zahlen der ersten Zahlenclasse sind.“

Die hier nachgewiesene Form der Zahlen der zweiten Zahlenclasse wollen wir ihre *Normalform* nennen; α_0 heisse der ‚*Grad*‘, α_τ der ‚*Exponent*‘ von α; für $\tau = 0$ sind Grad und Exponent einander gleich.

Je nachdem der Exponent α_τ gleich oder grösser als 0, *ist α eine Zahl der ersten oder der zweiten Art.*

Nehmen wir eine andere Zahl β in der Normalform:

(8) $$\beta = \omega^{\beta_0} \lambda_0 + \omega^{\beta_1} \lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma} \lambda_\sigma .$$

Sowohl zum Vergleich von α mit β, wie auch zur Ausführung ihrer Summe und Differenz, dienen die Formeln:

(9) $$\omega^{\alpha'} \varkappa' + \omega^{\alpha'} \varkappa = \omega^{\alpha'} (\varkappa' + \varkappa),$$

(10) $$\omega^{\alpha'} \varkappa' + \omega^{\alpha''} \varkappa'' = \omega^{\alpha''} \varkappa'', \quad \alpha' < \alpha''$$

$\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ haben hier die Bedeutung endlicher Zahlen.

Es sind dies Verallgemeinerungen der Formeln (2) und (3), § 17.

Für die Bildung des Products $\alpha\beta$ kommen die folgenden Formeln in Betracht:

(11) $$\alpha \lambda = \omega^{\alpha_0} \varkappa_0 \lambda + \omega^{\alpha_1} \varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau} \varkappa_\tau, \quad 0 < \lambda < \omega,$$

(12) $$\alpha \omega = \omega^{\alpha_0 + 1},$$

(13) $$\alpha \omega^{\beta'} = \omega^{\alpha_0 + \beta'}, \quad \beta' > 0.$$

Die Potenzirung α^β ist leicht ausführbar auf Grund der folgenden Formeln:

(14) $$\alpha^\lambda = \omega^{\alpha_0 \lambda} \varkappa_0 + \cdots, \quad 0 < \lambda < \omega.$$

Die auf der Rechten hinzukommenden Glieder haben niederen Grad als das erste. Hieraus folgt leicht, dass die Fundamentalreihen $\{\alpha^\lambda\}$ und $\{\omega^{\alpha_0 \lambda}\}$ zusammengehörig sind, so dass

(15) $$\alpha^\omega = \omega^{\alpha_0 \omega}, \quad \alpha_0 > 0.$$

Daher ist auch in Folge des Satzes E, § 18:

(16) $$\alpha^{\omega^{\beta'}} = \omega^{\alpha_0 \omega^{\beta'}}, \quad \alpha_0 > 0, \ \beta' > 0.$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich folgende Sätze beweisen:

C. „*Sind die ersten Glieder* $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$, $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ *der Normalformen der beiden Zahlen* α *und* β *nicht gleich, so ist* α *kleiner oder grösser als* β, *je nachdem* $\omega^{\alpha_0}\varkappa_0$ *kleiner oder grösser als* $\omega^{\beta_0}\lambda_0$ *ist. Hat man aber*

$$\omega^{\alpha_0}\varkappa_0 = \omega^{\beta_0}\lambda_0, \; \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 = \omega^{\beta_1}\lambda_1, \ldots \omega^{\alpha_\varrho}\varkappa_\varrho = \omega^{\beta_\varrho}\lambda_\varrho,$$

und ist $\omega^{\alpha_{\varrho+1}}\varkappa_{\varrho+1}$ *kleiner oder grösser als* $\omega^{\beta_{\varrho+1}}\lambda_{\varrho+1}$, *so ist auch* α *entsprechend kleiner oder grösser als* β."

D. „*Ist der Grad* α_0 *von* α *kleiner als der Grad* β_0 *von* β, *so ist*

$$\alpha + \beta = \beta.$$

Ist $\alpha_0 = \beta_0$, *so ist*

$$\alpha + \beta = \omega^{\beta_0}(\varkappa_0 + \lambda_0) + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma.$$

Ist aber

$$\alpha_0 > \beta_0, \; \alpha_1 > \beta_0, \ldots \alpha_\varrho \geqq \beta_0, \; \alpha_{\varrho+1} < \beta_0,$$

so ist

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \cdots + \omega^{\alpha_\varrho}\varkappa_\varrho + \omega^{\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\beta_\sigma}\lambda_\sigma."$$

E. „*Ist* β *von der zweiten Art* ($\beta_\sigma > 0$), *so ist*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_\sigma}\lambda_\sigma = \omega^{\alpha_0}\beta;$$

ist aber β *von der ersten Art* ($\beta_\sigma = 0$), *so ist*

$$\alpha\beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}\lambda_0 + \omega^{\alpha_0+\beta_1}\lambda_1 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_{\sigma-1}}\lambda_{\sigma-1} + \omega^{\alpha_0}\varkappa_0\lambda_\sigma$$
$$+ \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau."$$

F. „*Ist* β *von der zweiten Art* ($\beta_\sigma > 0$), *so ist*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta};$$

ist aber β *von der ersten Art* ($\beta_\sigma = 0$) *und zwar* $\beta = \beta' + \lambda_\sigma$, *wo* β' *von der zweiten Art ist, so hat man:*

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta'}\alpha^{\lambda_\sigma}."$$

G. „*Jede Zahl* α *der zweiten Zahlenclasse lässt sich und zwar nur auf eine einzige Weise in der Productform darstellen:*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\varkappa_\tau(\omega^{\gamma_1}+1)\varkappa_{\tau-1}(\omega^{\gamma_2}+1)\varkappa_{\tau-2}\cdots(\omega^{\gamma_\tau}+1)\varkappa_0,$$

und es ist

$$\gamma_0 = \alpha_\tau, \; \gamma_1 = \alpha_{\tau-1} - \alpha_\tau, \; \gamma_2 = \alpha_{\tau-2} - \alpha_{\tau-1}, \ldots \gamma_\tau = \alpha_0 - \alpha_1,$$

während $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_\tau$ *dieselbe Bedeutung wie in der Normalform haben. Die Factoren* $\omega^\gamma + 1$ *sind alle unzerlegbar.*"

H. „*Jede der zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl* α *zweiter Art lässt sich und zwar nur auf eine Weise in der Form*

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}\alpha'$$

darstellen, wo $\gamma_0 > 0$ *und* α' *eine der ersten oder zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl erster Art ist.*"

I. „*Damit zwei Zahlen* α *und* β *der zweiten Zahlenclasse die Relation*

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

erfüllen, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie die Form haben

$$\alpha = \gamma\mu, \quad \beta = \gamma\nu,$$

wo μ *und* ν *Zahlen der ersten Zahlenclasse sind.*"

K. „*Damit zwei Zahlen* α *und* β *der zweiten Zahlenclasse, welche beide von der ersten Art sind, die Relation*

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

erfüllen, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie die Form haben

$$\alpha = \gamma^{\mu}, \quad \beta = \gamma^{\nu},$$

wo μ *und* ν *Zahlen der ersten Zahlenclasse sind.*"

Um die Tragweite der nachgewiesenen *Normalform* und der mit ihr unmittelbar zusammenhängenden *Productform* der Zahlen der zweiten Zahlenclasse zu exemplificiren, mögen die sich darauf gründenden Beweise der beiden letzten Sätze I und K hier folgen.

Aus der Annahme

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

schliessen wir zunächst, dass der Grad α_0 von α dem Grade β_0 von β gleich sein muss. Denn wäre etwa $\alpha_0 < \beta_0$, so hätte man, nach Satz D,

$$\alpha + \beta = \beta,$$

daher auch

$$\beta + \alpha = \beta,$$

was nicht möglich ist, da [(2) § 14]

$$\beta + \alpha > \beta.$$

Wir können daher setzen

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \qquad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \beta',$$

wo die Grade der Zahlen α' und β' kleiner sind als α_0, μ und ν endliche von 0 verschiedene Zahlen sind.

Nach Satz D ist nun

$$\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta', \qquad \beta + \alpha = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha',$$

also

$$\omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \beta' = \omega^{\alpha_0}(\mu + \nu) + \alpha'.$$

Wegen Satz D, § 14 ist daher

$$\beta' = \alpha'.$$

Somit haben wir

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\mu + \alpha', \qquad \beta = \omega^{\alpha_0}\nu + \alpha'$$

und wenn

$$\omega^{\alpha_0} + \alpha' = \gamma$$

gesetzt wird, nach (11):

$$\alpha = \gamma\mu, \qquad \beta = \gamma\nu.$$

Setzen wir andrerseits zwei der zweiten Zahlenclasse zugehörige Zahlen der *ersten Art* α und β voraus, welche die Bedingung

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

erfüllen und nehmen an, dass

$$\alpha > \beta.$$

Wir denken uns nach Satz G beide Zahlen in ihrer Productform und es sei

$$\alpha = \delta\alpha', \qquad \beta = \delta\beta',$$

wo α' und β' ohne gemeinsamen linksseitigen Endfactor (ausser 1) seien.

Man hat alsdann

$$\alpha' > \beta'$$

und

$$\alpha'\delta\beta' = \beta'\delta\alpha'.$$

Alle hier und im Weiteren vorkommenden Zahlen sind von der *ersten Art*, weil dies von α und β vorausgesetzt wurde.

Die letzte Gleichung lässt zunächst (im Hinblick auf Satz G) erkennen, dass α' und β' *nicht beide* transfinit sein können, weil ihnen in diesem Falle ein gemeinsamer linksseitiger Endfactor anhaften würde. Auch können sie *nicht* beide endlich sein; denn es wäre alsdann δ transfinit und, wenn $\varkappa$ der endliche linksseitige Endfactor von δ ist, so müsste

$$\alpha'\varkappa = \beta'\varkappa,$$

daher auch

$$\alpha' = \beta'$$

sein. Es bleibt also nur die Möglichkeit, dass

$$\alpha' > \omega, \qquad \beta' < \omega.$$

Die endliche Zahl β' muss aber 1 sein:

$$\beta' = 1,$$

weil sie sonst in dem endlichen linksseitigen Endfactor von α' als Theil enthalten wäre.

Wir kommen zu dem Resultat, dass $\beta = \delta$, folglich

$$\alpha = \beta\alpha',$$

wo α' eine der zweiten Zahlenclasse angehörige Zahl der ersten Art ist, die kleiner als α sein muss:

$$\alpha' < \alpha.$$

Zwischen α' und β besteht die Relation

$$\alpha'\beta = \beta\alpha'.$$

Ist daher auch $\alpha' > \beta$, so schliesst man in derselben Weise auf die Existenz einer transfiniten Zahl *erster Art* $\alpha'' < \alpha'$, so dass

$$\alpha' = \beta\alpha'', \qquad \alpha''\beta = \beta\alpha''.$$

Falls auch α'' noch $> \beta$, existirt eine ebensolche Zahl $\alpha''' < \alpha''$, so dass

$$\alpha'' = \beta\alpha''', \qquad \alpha'''\beta = \beta\alpha''',$$

u. s. w.

Die Reihe abnehmender Zahlen $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$ muss nach Satz B, § 16 *abbrechen*. Es wird daher für einen bestimmten endlichen Index ϱ_0

$$\alpha^{(\varrho_0)} \leqq \beta$$

sein. Ist

$$\alpha^{(\varrho_0)} = \beta,$$

so hat man

$$\alpha = \beta^{\varrho_0+1}, \qquad \beta = \beta;$$

der Satz K wäre dann bewiesen, und man hätte

$$\gamma = \beta, \quad \mu = \varrho_0 + 1, \quad \nu = 1.$$

Ist aber

$$\alpha^{(\varrho_0)} < \beta,$$

so setzen wir

$$\alpha^{(\varrho_0)} = \beta_1$$

und haben

$$\alpha = \beta^{\varrho_0}\beta_1, \quad \beta\beta_1 = \beta_1\beta, \quad \beta_1 < \beta.$$

Daher giebt es auch eine endliche Zahl ϱ_1, so dass

$$\beta = \beta_1^{\varrho_1}\beta_2, \quad \beta_1\beta_2 = \beta_2\beta_1, \quad \beta_2 < \beta_1.$$

Im Allgemeinen hat man analog:

$$\beta_1 = \beta_2^{\varrho_2}\beta_3, \quad \beta_2\beta_3 = \beta_3\beta_2, \quad \beta_3 < \beta_2$$

u. s. w.

Auch die Reihe abnehmender Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ muss nach Satz B, § 16 *abbrechen*.

Es existirt daher eine endliche Zahl $\varkappa$, so dass

$$\beta_{\varkappa-1} = \beta_\varkappa^{\varrho_\varkappa}.$$

Setzen wir

$$\beta_\varkappa = \gamma$$

so ist

$$\alpha = \gamma^\mu, \qquad \beta = \gamma^\nu,$$

wo μ und ν Zähler und Nenner des Kettenbruchs

$$\frac{\mu}{\nu} = \varrho_0 + \frac{1}{\varrho_1 +} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\varrho_\varkappa}$$

sind.

§ 20.

Die ε-Zahlen der zweiten Zahlenclasse.

Der Grad α_0 einer Zahl α ist, wie aus der Normalform

$$(1) \quad \alpha = \omega^{\alpha_0} \varkappa_0 + \omega^{\alpha_1} \varkappa_1 + \cdots, \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots, \quad 0 < \varkappa_\nu < \omega$$

im Hinblick auf Satz F, § 18 sofort einleuchtet, niemals grösser als α; es fragt sich aber, ob es nicht Zahlen α giebt, für welche $\alpha_0 = \alpha$ ist.

Jedenfalls müsste sich in einem solchen Falle die Normalform von α auf das erste Glied reduciren und dieses $= \omega^\alpha$ sein, d. h. es müsste α Wurzel der Gleichung

$$(2) \qquad \omega^\xi = \xi$$

sein. Andrerseits würde jede Wurzel α dieser Gleichung zur Normalform ω^α haben; ihr Grad wäre ihr selbst gleich.

Die Zahlen der zweiten Zahlenclasse, die ihrem Grade gleich sind, stimmen also durchaus überein mit den Wurzeln der Gleichung (2). Es ist unsere Aufgabe, diese Wurzeln in ihrer Gesammtheit zu bestimmen. Um sie von allen übrigen Zahlen zu unterscheiden, nennen wir sie die *„ε-Zahlen der zweiten Zahlenclasse"*.

Dass es aber solche ε-Zahlen giebt, geht aus folgendem Satze hervor:

A. *„Ist γ irgend eine, der Gleichung* (2) *nicht genügende Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse, so bestimmt sie eine Fundamentalreihe $\{\gamma_\nu\}$ durch die Gleichungen*

$$\gamma_1 = \omega^\gamma, \ \gamma_2 = \omega^{\gamma_1}, \cdots \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}}, \ldots .$$

Die Grenze $\operatorname*{Lim}_\nu \gamma_\nu = E(\gamma)$ dieser Fundamentalreihe ist stets eine ε-Zahl."

Beweis. Da γ keine ε-Zahl ist, so ist $\omega^\gamma > \gamma$, d. h. $\gamma_1 > \gamma$. Nach Satz B, § 18 ist daher auch $\omega^{\gamma_1} > \omega^\gamma$, d. h. $\gamma_2 > \gamma_1$ und in derselben Weise folgt, dass $\gamma_3 > \gamma_2$ u. s. w. Die Reihe $\{\gamma_\nu\}$ ist somit eine Fundamentalreihe. Ihre Grenze, die eine Function von γ ist, nennen wir $E(\gamma)$ und haben:

$$\omega^{E(\gamma)} = \operatorname*{Lim}_\nu \omega^{\gamma_\nu} = \operatorname*{Lim}_\nu \gamma_{\nu+1} = E(\gamma).$$

$E(\gamma)$ ist daher eine ε-Zahl. —

B. *„Die Zahl $\varepsilon_0 = E(1) = \operatorname*{Lim}_\nu \omega_\nu$, wo*

$$\omega_1 = \omega, \ \omega_2 = \omega^{\omega_1}, \ \omega_3 = \omega^{\omega_2}, \cdots \omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}}, \ldots$$

ist die kleinste von allen ε-Zahlen."

Beweis. Sei ε' irgend eine ε-Zahl, so dass

$$\omega^{\varepsilon'} = \varepsilon'.$$

Da $\varepsilon' > \omega$, so ist $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega}$, d. h. $\varepsilon' > \omega_1$. Hieraus folgt ebenso $\omega^{\varepsilon'} > \omega^{\omega_1}$, d. h. $\varepsilon' > \omega_2$, u. s. w.

Wir haben allgemein

$$\varepsilon' > \omega_\nu$$

daher

$$\varepsilon' \geqq \operatorname{Lim}_\nu \omega_\nu,$$

d. h.

$$\varepsilon' \geqq \varepsilon_0.$$

Es ist also $\varepsilon_0 = E(1)$ die kleinste von allen ε-Zahlen.

C. „*Ist ε' irgend eine ε-Zahl, ε'' die nächstgrössere ε-Zahl und γ irgend eine zwischen beiden liegende Zahl*

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

so ist $E(\gamma) = \varepsilon''$."

Beweis. Aus

$$\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$$

folgt

$$\omega^{\varepsilon'} < \omega^{\gamma} < \omega^{\varepsilon''},$$

d. h.

$$\varepsilon' < \gamma_1 < \varepsilon''.$$

Hieraus schliessen wir ebenso

$$\varepsilon' < \gamma_2 < \varepsilon''$$

u. s. w. Wir haben allgemein

$$\varepsilon' < \gamma_\nu < \varepsilon'',$$

daher

$$\varepsilon' < E(\gamma) \leqq \varepsilon''.$$

$E(\gamma)$ ist nach Satz A eine ε-Zahl. Da ε'' die auf ε' der Grösse nach nächstfolgende ε-Zahl ist, so kann nicht $E(\gamma) < \varepsilon''$ sein, und es muss daher

$$E(\gamma) = \varepsilon''$$

sein. —

Da $\varepsilon' + 1$ schon aus dem Grunde keine ε-Zahl ist, weil alle ε-Zahlen, wie aus der Definitionsgleichung $\xi = \omega^{\xi}$ folgt, von der *zweiten* Art sind, so ist $\varepsilon' + 1$ sicherlich kleiner als ε'' und wir haben daher folgenden Satz:

D. „*Ist ε' irgend eine ε-Zahl, so ist $E(\varepsilon' + 1)$ die nächstgrössere ε-Zahl.*"

Auf die kleinste ε-Zahl ε_0 folgt also die nächstgrössere, die wir ε_1 nennen,

$$\varepsilon_1 = E(\varepsilon_0 + 1)$$

auf diese die nächstgrössere

$$\varepsilon_2 = E(\varepsilon_1 + 1)$$

u. s. w.

Allgemein haben wir für die der Grösse nach $(\nu+1)^{\text{te}}$ ε-Zahl die Recursionsformel

$$\varepsilon_\nu = E(\varepsilon_{\nu-1} + 1). \tag{3}$$

Dass aber die unendliche Reihe

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots$$

keineswegs die Gesammtheit aller ε-Zahlen umfasst, geht aus folgendem Satze hervor:

E. „*Ist* $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ *irgend eine unendliche Reihe von* ε-*Zahlen derart, dass*

$$\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' \cdots \varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu+1)}, \ldots$$

so ist auch $\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ *eine* ε-*Zahl und zwar die auf alle* $\varepsilon^{(\nu)}$ *der Grösse nach nächstfolgende* ε-*Zahl.*“

Beweis.

$$\omega^{\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname{Lim}_\nu \omega^{\varepsilon^{(\nu)}} = \operatorname{Lim}_\nu \varepsilon^{(\nu)}.$$

Dass aber $\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Grösse nach *nächstfolgende* ε-*Zahl* ist, geht daraus hervor, dass $\operatorname{Lim}\limits_\nu \varepsilon^{(\nu)}$ die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ der Grösse nach *nächstfolgende Zahl der zweiten Zahlenclasse* ist.

F. „*Die Gesammtheit aller* ε-*Zahlen der zweiten Zahlenclasse bildet in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge vom Typus* Ω *der in ihrer Grössenordnung aufgefassten zweiten Zahlenclasse und hat daher die Mächtigkeit Alef-eins.*“

Beweis. Die Gesammtheit aller ε-Zahlen der zweiten Zahlenclasse bildet nach Satz C, § 16 in ihrer Grössenordnung eine wohlgeordnete Menge:

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\nu, \ldots \varepsilon_\omega, \varepsilon_{\omega+1}, \ldots \varepsilon_{\alpha'}, \ldots \tag{4}$$

deren Bildungsgesetz in den Sätzen D und E ausgesprochen liegt.

Würde nun der Index α' nicht alle Zahlen der zweiten Zahlenclasse durchlaufen, so müsste es eine kleinste Zahl α geben, die er nicht erreicht. Dies widerspräche aber dem Satze D, wenn α von der ersten Art und dem Satze E, wenn α von der zweiten Art wäre. Es nimmt daher α' alle Zahlwerthe der zweiten Zahlenclasse an.

Bezeichnen wir den Typus der zweiten Zahlenclasse mit Ω, so ist der Typus von (4)

$$\omega + \Omega = \omega + \omega^2 + (\Omega - \omega^2);$$

da aber $\omega + \omega^2 = \omega^2$, so folgt hieraus

$$\omega + \Omega = \Omega.$$

Daher ist auch

$$\overline{\overline{\omega + \Omega}} = \overline{\overline{\Omega}} = \aleph_1.$$

G. „*Ist ε irgend eine ε-Zahl und α eine beliebige Zahl der ersten oder zweiten Zahlenclasse, die kleiner ist als ε:*

$$\alpha < \varepsilon,$$

so genügt ε den drei Gleichungen:

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \quad \alpha^\varepsilon = \varepsilon.\text{“}$$

Beweis. Ist α_0 der Grad von α, so ist $\alpha_0 \leqq \alpha$, daher ist wegen $\alpha < \varepsilon$ auch $\alpha_0 < \varepsilon$. Der Grad von $\varepsilon = \omega^\varepsilon$ ist aber ε; es hat also α einen kleineren Grad als ε, mithin ist nach Satz D, § 19

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon,$$

daher auch

$$\alpha_0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Andrerseits haben wir nach Formel (13), § 19

$$\alpha\varepsilon = \alpha\omega^\varepsilon = \omega^{\alpha_0+\varepsilon} = \omega^\varepsilon = \varepsilon,$$

und daher auch

$$\alpha_0\varepsilon = \varepsilon.$$

Endlich ist im Hinblick auf Formel (16), § 19

$$\alpha^\varepsilon = \alpha^{\omega^\varepsilon} = \omega^{\alpha_0\omega^\varepsilon} = \omega^{\alpha_0\varepsilon} = \omega^\varepsilon = \varepsilon.$$

H. „*Ist α irgend eine Zahl der zweiten Zahlenclasse, so hat die Gleichung*

$$\alpha^\xi = \xi$$

keine anderen Wurzeln als die ε-Zahlen, welche grösser sind als α.“

Beweis. Sei β eine Wurzel der Gleichung

$$\alpha^\xi = \xi,$$

also

$$\alpha^\beta = \beta,$$

so folgt zunächst aus dieser Formel, dass

$$\beta > \alpha.$$

Andrerseits muss β von der zweiten Art sein, da sonst

$$\alpha^\beta > \beta$$

wäre. Wir haben daher nach Satz F, § 19

$$\alpha^\beta = \omega^{\alpha_0\beta},$$

mithin

$$\omega^{\alpha_0\beta} = \beta.$$

Es ist nach Satz F, § 19

$$\omega^{\alpha_0\beta} \geqq \alpha_0\beta,$$

daher

$$\beta \geqq \alpha_0\beta.$$

Es kann aber nicht $\beta > \alpha_0\beta$ sein; daher ist

$$\alpha_0\beta = \beta,$$

und mithin

$$\omega^\beta = \beta.$$

β ist also eine ε-Zahl, die grösser ist als α.

Halle, März 1897.

A Theory of Magnetic Action upon Light.

By

A. B. Basset M. A.; F. R. S.

1. The object of this communication is to remove an objection to a theory of magnetic action upon light, which was first suggested by Prof. Rowland*) of America in 1881, and afterwards fully developed by myself**) in 1890. The defect of this theory is that it makes the tangential component of the electromotive force *discontinuous* at the surface of separation of two different media; and I propose to show that the theory can be modified in such a manner as to get rid of this objection. The notation employed by Maxwell and other British mathematicians will be used through out.

It will be desirable to give a brief account of the principal Anglican theories on this subject.

2. At the date of the publication of Maxwell's *Electricity and Magnetism*, Faraday's discovery of the rotatory polarization produced by a magnetic field was the only known phenomenon of this character. To account for it, Maxwell***) introduced into the kinetic energy of the medium an additional term, which was supposed to arise from the displacement of certain hypothetical vortices. This theory suffices to explain Faraday's experiments, but no attempt was made to connect it with the author's previous electromagnetic theory of light.

In 1879, Prof Fitz Gerald of Dublin†) improved Maxwell's theory by establishing a connection between it and the electromagnetic theory of isotropic and doubly-refracting media. Fitz Gerald introduced a new vector A, whose time variation is the magnetic force; hence the curl of this vector is equal to the electric displacement multiplied by

*) *Phil. Mag.* April 1881, p. 254.

**) *Phil Trans.* 1891, p. 371; Basset's. *Physical Optics*, Chapter XX.

***) *Electricity and Magnetism*, vol II. Chap. XXI.

†) *Phil. Trans.* 1880. p. 691.

4π. Accordingly if ξ, η, ζ be the components of A, the electrostatic energy per unity of volume is

(1) $$\frac{2\pi}{K}(f^2+g^2+h^2) = \frac{1}{8\pi K}\left\{\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right)^2\right\}$$

whilst the portion of the electrokinetic energy due to the motion of the medium is

(2) $$\frac{\mu}{8\pi}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2).$$

To account for magnetic action, Fitz Gerald, following Maxwell, introduced into the kinetic energy the additional term

(3) $$4\pi C\left(\dot{f}\,\frac{d\xi}{d\varpi}+\dot{g}\,\frac{d\eta}{d\varpi}+\dot{h}\,\frac{d\zeta}{d\varpi}\right)$$

which is supposed to arise from the displacement of the abovementioned hypothetical vortices. In (3), f, g, h are the components of electric displacement; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ of the magnetic forces *due to external causes;* C is a constant which depends upon the nature of the magnetized medium, and which varies for different media; and*)

(4) $$d/d\varpi = \alpha_0\, d/dx + \beta_0\, d/dy + \gamma_0\, d/dz.$$

By means of these expressions for the energy of the medium, Fitz Gerald proceeded to deduce the equations of motion and the boundary conditions by means of the Principle of Least Action: but on working out the theory, a difficulty presented itself from the fact that the boundary conditions were too numerous.

In 1893, Mr. Larmor of Cambridge**) proposed to remedy this defect in the following manner. He observed that ξ, η, ζ are not independent, but are connected together by the equation

(5) $$d\xi/dx + d\eta/dy + d\zeta/dz = 0;$$

it is therefore necessary to introduce into the variational equation the above expression multiplied by an undetermined quantity λ. The effect of this additional term is to furnish four equations of motion and four boundary conditions connecting the four unknown quantities $\xi, \eta, \zeta, \lambda$. There is consequently no superfluous equation as was the case in Fitz Gerald's theory; but there are just sufficient equations, and no more, for determining all the unknown quantities.

If this theory were satisfactory, it would be unnecessary to propose another; but as a matter of fact Mr. Larmor's theory contains two serious defects. In the first place, it involves the introduction into the general equations of the electromagnetic field of a new quantity λ, for which there is no justification on any electrical or optical ground

*) Fitz Gerald and Larmor write $d/d\theta$ for $d/d\varpi$.

**) *British Association Report*, 1893, p. 346.

whatever. In the second place, the theory makes the tangential component of the electromotive force discontinuous at an interface.

3. We must now consider there objections in detail.

The equations of motion obtained by Larmor (see, *Brit. Assoc. Rep.* 1893, p. 348) are

$$\frac{da}{dt} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}\right) - 32\pi^2 C \frac{d\dot{f}}{d\varpi} - 4\pi \frac{d\lambda}{dx}. \tag{6}$$

With the exception of the term $d\lambda/dx$, these equations are of the same form as equations (10) of my paper in the *Phil. Trans.**) 1891. Moreover if we eliminate λ, we obtain three equations of electric displacement which are exactly the same as equations (12) of that paper; hence, *so far as the propagation of light is concerned*, the two theories an identical. There is, however, an essential difference between them, owing to the introduction of the quantity λ which in Mr. Larmor's theory cannot be put equal to zero.

4. The introduction of the additional term (3) into the electrokinetic energy must necessarily produce some modification in Maxwell's general equations of the electromagnetic field. We must therefore enquire, which of the different sets of equations are modified? What is the nature of the modifications? Can any evidence, experimental or otherwise, be adduced in support of these modifications? But to all these interesting and important questions Mr. Larmor maintains an impenetrable silence, and not a single hint is any where given with regard to their solution.

For a non-conducting medium, Maxwell's equations are

$$P = -dF/dt - d\psi/dx, \tag{7}$$

$$P = 4\pi f/K, \tag{8}$$

$$a = dH/dy - dG/dz, \tag{9}$$

$$4\pi\mu\dot{f} = dc/dy - db/dz. \tag{10}$$

Equation (10) connects the electric displacement with the magnetic induction; and as this equation is expressly assumed in the theory, it cannot be modified.

Equation (9) connects the vector potential with the magnetic induction. Now the use of the vector potential is a mere mathematical artifice introduced by Maxwell, who found it convenient to employ this quantity in certain portions of the work. The vector itself is indeterminate, for if the magnetic force is given, and F, G, H are any *particular* values which satisfy (9), these equations will also be satisfied by $F + d\varphi/dx$, $G + d\varphi/dy$, $H + d\varphi/dz$, where φ is an arbitrary function. The indeterminateness of the vector potential is

*) See also, *Physical Optics* p. 394, equation (6).

taken into account in (7) by the introduction of the function ψ; and in the theory of light all difficulty arising from this cause can be got rid of by eliminating it. Equation (9) cannot therefore be modified.

Equation (8) gives the relation between electromotive force and electric displacement; and as Mr. Larmor assumes this relation in his expression for the electrostatic energy, equation (8) cannot be modified.

Equation (7) is consequently the only one which is capable of modification. To ascertain the necessary modification, let Φ be any solution of Laplace's equation $\nabla^2\Phi = 0$, and let us write in the place of (7)

$$(11) \qquad P = -\frac{dF}{dt} - p_3\dot{g} + p_2\dot{h} + z\frac{d\Phi}{dy} - y\frac{d\Phi}{dz} - \frac{d\psi}{dx}$$

with two similar equations, where $p_1 = 32\pi^2 C\alpha_0$ etc.

Substitute the value of P from (8) in (11), differentiate the first of (11) will respect to y and the second with respect to x and subtract; then recollecting that f, g, h satisfy (5), we shall obtain

$$(12) \qquad \frac{dc}{dt} = \frac{4\pi}{K}\left(\frac{df}{dy} - \frac{dg}{dx}\right) - \frac{d\dot{h}}{d\varpi} + \frac{d}{dx}\left(\Phi + x\frac{d\Phi}{dx} + y\frac{d\Phi}{dy} + z\frac{d\Phi}{dz}\right).$$

Now according to Mr. Larmor's theory, λ is a potential function; we may therefore put

$$(13) \qquad -4\pi\lambda = \Phi + x\frac{d\Phi}{dx} + y\frac{d\Phi}{dy} + z\frac{d\Phi}{dz}$$

in which case (12) will be identical with (6).

We have therefore shown that Mr. Larmor's theory requires that Maxwell's equation (7) should be modified in the manner expressed by (11). The second and third terms are equivalent to the introduction of Hall's effect, which was the procedure originally suggested by Prof. Rowland and afterwards more fully developed by myself; but for the introduction of the two terms in Φ, there is no justification whatever: they are not required in optics nor in electromagnetism.

5. Having disposed of the equations of motion, we must now consider the boundary conditions.

Mr. Larmor takes the axis of z at right angles to the surface of separation, and on page 349 of the *British Association Report* for 1893, he obtains the condition that*)

$$\frac{4\pi g}{K} + 4\pi C\frac{d\beta}{d\varpi} - 16\pi^2 C\gamma_0\frac{df}{dt}$$

should be continuous at an interface. By (8) this requires that

$$Q + 4\pi C\frac{d\beta}{d\varpi} - 16\pi^2 C\gamma_0\frac{df}{dt}$$

*) Larmor writes $d/d\theta$ for $d/d\varpi$.

should be continuous. In other words, *the tangential component of the electromotive force must be discontinuous at an interface.*

It thus appears that, so for from being any improvement on its predecessors, Mr. Larmor's theory is not only open to the original objection of making the electromotive force discontinuous at an interfaces, but at the same time necessitates the introduction of a new quantity for which there is no justification whatever.

Whether or not this theory is capable of accounting for the experiments of Kerr and Kundt on the reflection of light from magnetized substances is a question which it is unnecessary to discuss; since I shall now explain how the theory of Rowland and myself, which has already been shown to be capable of giving an explanation of this phenomenon*), can be modified to as to remedy the objection to which it was originally subject.

6. The theory of Rowland and myself consisted in introducing Hall's effect into Equations (7), which were accordingly replaced by

$$(14) \qquad P = -\dot{F} - p_3\dot{g} + p_2\dot{h} - d\psi/dx$$

where $p_1 = C\alpha_0$ etc.; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ being the components of the magnetic force produced by external causes, and C is Hall's constant. The boundary conditions are carefully discussed in my paper**), from which it will be found that we are obliged to suppose that the tangential component of the electromotive force is discontinuous at an interface. This discontinuity constitutes a serious defect in the theory, which I shall now proceed to remedy.

In the absence of any experimental evidence to the contrary (of which there appears to be none), we may equally well assume that the effect of the external magnetic field may be represented by introducing the additional terms into (8) instead of (7). We shall therefore replace (8) by

$$(15) \qquad P = 4\pi f/K + p_3\dot{g} - p_2\dot{h}$$

keeping (7), (9) and (10) unchanged. This is the first hypothesis.

According of Maxwell's theory, when electromotive force acts upon a dielectric it produces electric displacement; and the work done

*) *Provisional Theory of Kerr's Experiments. Proc. Camb. Phil. Soc.* vol. VIII p. 68. In this paper the results obtained in my paper in the Phil. Trans. 1891 are transformed by the method of Cauchy and Eisenlohr, by assuming that the refractive index for a metal is a complex quantity of the form $R\epsilon^{\iota\alpha}$. The values of R and α are obtained by means of the experimental values of the principal incidence and azimuth given by Jamin and Conroy, and the results agree very well with experiment.

**) *Phil. Trans.* 1891, p. 381; and *Physical Optics* p. 400.

is equal to half the product of the force into the electric displacement produced. Whence the electrostatic energy of the medium is equal to

$$\frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh). \tag{16}$$

We shall now suppose that this theorem is true when the relation between electromotive force and electric displacement is given by (15) instead of (8); whence the electrostatic energy per unit of volume will be given by (16), where the values of P, Q, R are given by (15); whilst the electrokinetic energy will be given by (2). This is the second hypothesis.

Since

$$4\pi f = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz} \text{ \&c.} \tag{17}$$

all the quantities can be expressed in terms of ξ, η, ζ, and the equations of motion and the boundary conditions can be obtained by the Principle of Least Action

$$\iiiint \delta(T - W)\, dx\, dy\, dz\, dt = 0 \tag{18}$$

where T and W are the electrokinetic and electrostatic energies respectively.

Substituting in terms of ξ, η, ζ the values of T from (2) and W from (16), (15) and (17), and working out the integral in (18) by the ordinary methods of the Calculus of Variations*), we shall find that the *non-magnetic* portion involving $\delta\xi$ is

$$\iiiint \left\{ -\frac{\mu}{4\pi}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{1}{K}\left(\frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}\right)\right\} \delta\xi\, dx\, dy\, dz\, dt \tag{19}$$
$$- \frac{1}{K}\iiint (ng - mh)\, \delta\xi\, dS\, dt$$

where l, m, n are the direction cosines of the normal to dS drawn outwards.

The magnetic part of δW is

$$\frac{1}{2}\iiiint \{(p_3\dot{g} - p_2\dot{h})\,\delta f - (p_3 g - p_2 h)\,\delta\dot{f} + \cdots\}\, dx\, dy\, dz\, dt \tag{20}$$
$$= \iiiint \{(p_3\dot{g} - p_2\dot{h})\,\delta f + \cdots\}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

the terms at the limits of the time being omitted. The right hand side of (20), so far as it involves $\delta\xi$, can be shown by an integration by parts to be equal to

---

*) In strictness, we ought to have introduced an indeterminante multiplier λ, as in § 2, but it will be found that $\lambda = 0$.

$$(21)\qquad \frac{1}{4\pi}\iiiint \frac{d\dot{f}}{d\varpi}\,\delta\xi\,dx\,dy\,dz\,dt$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\{n(p_1\dot{h}-p_3\dot{f})-m(p_2\dot{f}-p_1\dot{g})\}\,\delta\xi\,dS\,dt.$$

Subtracting this expression from (19) and equating the result to zero, we obtain the equation

$$(22)\qquad \mu\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{4\pi}{K}\left(\frac{dg}{dz}-\frac{dh}{dy}\right)-\frac{d\dot{f}}{d\varpi}$$

and the condition that

$$(23)\quad \left\{n\left(\frac{4\pi g}{K}+p_1\dot{h}-p_3\dot{f}\right)-m\left(\frac{4\pi h}{K}+p_2\dot{f}-p_1\dot{g}\right)\right\}\delta\xi+\cdots$$

should be continuous at an interface.

Since $\mu\,d\xi/dt=a$, equation (22) is identical with equation (10) of my paper in the *Phil. Trans.* 1891. The modified theory accordingly furnishes exactly the same equations of motion as the original theory.

By virtue of (15) the condition (23), when written out in full, is equivalent to the condition that

$$(24)\qquad (nQ-mR)\,\delta\xi+(lR-nP)\,\delta\eta+(mP-lQ)\,\delta\zeta.$$

should be continuous at an interface. If therefore we take the axis of x to be perpendicular to the interface, $l=1$, $m=n=0$ and (24) requires that

$$R\delta\eta-Q\delta\zeta.$$

should be continuous.

Now Newton's third Law of Motion requires that the electromotive and the magnetic forces should be continuous at an interface; the latter condition requires that $\delta\eta$ and $\delta\zeta$ should be continuous, and this requires that Q and R should be continuous, which is the symbolical expression for the first condition. Hence the two assumptions, on which the modified theory has been based, lead to a consistent scheme of equations which do not violate any of the fundamental principles of Dynamics, as Mr. Larmor's theory does. The theory also gives a fairly good explanation of the experiments of Kerr and Kundt upon magnetic reflection.

7. With regard to the hypothesis on which the modified theory depends, we may point out that there are some grounds for thinking that the portion of the energy due to the external magnetic field is static instead of kinetic. For when magnetic force acts upon a magnetic substance, such as iron, a state of magnetic stress is produced within the substance, which must necessarily modify the

passage of electromagnetic waves. The kinetic energy, being due to the motion of the medium, will be unchanged by magnetic action; but the forces by which electromagnetic motions are resisted, will necessarily be affected by the presence of the external magnetic field; and the additional portion of the forces, due to this cause, will give rise to a term in the energy which will be static rather than kinetic.

Fledborough Hall, Holyport, Berks, England.

Biegungen und conjugirte Systeme.

Von

Paul Stäckel in Königsberg i. Pr.

In der folgenden Abhandlung setze ich Untersuchungen fort, mit denen ich mich bereits in der Arbeit: *Ueber Abbildungen* (diese Annalen, Bd. 44, S. 553 bis 564) beschäftigt habe, und zwar handelt es sich hier um die Ausführung der dort in der letzten Nummer angedeuteten Gedanken. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei, dass die *Biegungen* als eine besondere Art der Abbildung angesehen werden. Bei dieser Auffassung gewinnen die *conjugirten Systeme* auf den Biegungsflächen eine besondere Wichtigkeit, und man gelangt, von der Existenz eines gemeinschaftlichen conjugirten Systems zweier Biegungsflächen ausgehend, zu einem bemerkenswerthen Verfahren, aus einem gegebenen Paar von Biegungsflächen neue Paare solcher Flächen herzuleiten. Der Nutzen dieses Verfahrens besteht darin, dass nicht nur die meisten bis jetzt bekannten Scharen von Biegungsflächen, die durch die verschiedenartigsten Kunstgriffe ermittelt worden waren, aus wenigen einfachen Grundtypen hergeleitet und in Zusammenhang mit einander gebracht werden, sondern dass sich auch eine Reihe neuer Scharen von Biegungsflächen ergiebt und dass man zu verschiedenen interessanten flächentheoretischen Problemen geführt wird.

Vielfache Anregungen verdanke ich dem werthvollen Buche des verstorbenen russischen Mathematikers Karl Peterson: *Ueber Curven und Flächen.* Erste Lieferung [mehr ist nicht erschienen]. Moskau und Leipzig 1868. 8°. 106 S., auf das ich ausdrücklich hinweisen möchte. Ist es doch so wenig beachtet worden, dass in Herrn Darboux's grossem Werke: *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* 4 Bände, Paris 1886—1896, Peterson an keiner Stelle erwähnt wird. Man muss freilich berücksichtigen, dass Peterson's Buch keine grosse Verbreitung gefunden hat, dass seine Darstellung manches zu wünschen übrig lässt und dass die Beweise häufig ganz fehlen oder doch der vollen Strenge entbehren. Das sind jedoch Mängel, die gegenüber dem Reichthum an neuen und fruchtbaren Gedanken nicht ins Gewicht fallen. Ich bin sorgfältig bemüht gewesen durch genaue Citate Peterson die lange Zeit versagte Gerechtigkeit zu gewähren und wünsche, dass meine Abhandlung dazu beitragen möge, ihm auch in weiteren Kreisen zur Anerkennung zu verhelfen*).

I.

Ein Verfahren aus einem Paar von Biegungsflächen neue Paare von Biegungsflächen herzuleiten.

§ 1.

1. Es seien $S_1(x_1, y_1, z_1)$ und $S_2(x_2, y_2, z_2)$ zwei Flächenstücke, die durch Biegung in einander übergeführt werden können, also, wenn ds_1 und ds_2 ihre Linienelemente bedeuten:

$$ds_1^2 = ds_2^2 = E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2. \tag{1}$$

Aus einem solchen Paar von Biegungsflächen lassen sich neue Paare von Biegungsflächen $\Sigma_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ und $\Sigma_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ mit den Linienelementen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ durch ein Verfahren herleiten, das von Peterson herrührt (S. 59—61) und das sich in aller Strenge folgendermassen begründen lässt.

Macht man den Ansatz:

$$\left\{\begin{aligned} d\xi_1 &= P\frac{\partial x_1}{\partial p}dp + Q\frac{\partial x_1}{\partial q}dq, & d\xi_2 &= P\frac{\partial x_2}{\partial p}dp + Q\frac{\partial x_2}{\partial q}dq,\\ d\eta_1 &= P\frac{\partial y_1}{\partial p}dp + Q\frac{\partial y_1}{\partial q}dq, & d\eta_2 &= P\frac{\partial y_2}{\partial p}dp + Q\frac{\partial y_2}{\partial q}dq,\\ d\zeta_1 &= P\frac{\partial z_1}{\partial p}dp + Q\frac{\partial z_1}{\partial q}dq, & d\zeta_2 &= P\frac{\partial z_2}{\partial p}dp + Q\frac{\partial z_2}{\partial q}dq, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

so werden dadurch zwei neue Flächen Σ_1 und Σ_2 bestimmt, wenn die Functionen P und Q von p und q so gewählt werden können, dass

---

*) Erwähnt wird Peterson von H. A. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, Journal für Mathematik, Bd. 80, 1875, S. 288 (Ges. Abhandlungen, Bd. I, S. 176), A. Voss, Zur Theorie der Krümmung der Flächen, diese Annalen, Bd. 39, 1891, S. 205, B. Mlodzjejowski, Untersuchungen über die Biegung von Oberflächen, Gelehrte Berichte der Kaiserlichen Universität zu Moskau, Moskau 1887 (russisch) und Sur la déformation des surfaces, Bulletin des sciences mathématiques, sér. 2, t. XV, 1891, S. 17.

die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Ist das aber möglich, so folgt aus (2) sofort das Bestehen der Gleichungen:

$$(3) \qquad d\sigma_1^2 = d\sigma_2^2 = P^2 E dp^2 + 2PQF dp\, dq + Q^2 G dp^2,$$

es sind also auch Σ_1 und Σ_2 Biegungsflächen.

2. Als Integrabilitätsbedingungen erhält man sechs Gleichungen der Form:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(P\frac{\partial\Theta}{\partial p}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(Q\frac{\partial\Theta}{\partial q}\right);$$

für Θ ist der Reihe nach x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 einzusetzen. Diese sechs Coordinaten genügen mithin der partiellen Differentialgleichung:

$$(4) \qquad (P - Q)\frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial q} = 0.$$

Man darf auf beiden Seiten mit $P - Q$ dividiren. Wäre nämlich $P = Q$, so würden die Gleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial q}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial q} = 0 \qquad (\Theta = x_1, y_1, z_1)$$

entweder das Verschwinden sämmtlicher Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p} & \frac{\partial y_1}{\partial p} & \frac{\partial z_1}{\partial p} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q} & \frac{\partial y_1}{\partial q} & \frac{\partial z_1}{\partial q} \end{pmatrix}$$

nach sich ziehen, und es würde daher

$$EG - F^2 = 0$$

sein, oder es wäre gleichzeitig

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial p} = 0.$$

In dem ersten Falle ist die Fläche eine dem unendlich fernen imaginären Kugelkreise umschriebene Developpable. Dieser Fall braucht um so weniger berücksichtigt zu werden, als die Flächen vom Krümmungsmaasse Null überhaupt für die vorliegende Untersuchung von keinem Interesse sind und daher von vorn herein ausgeschlossen werden sollen. In dem zweiten Falle ist $P = Q =$ const., und es geht daher das Flächenpaar Σ_1 und Σ_2 aus dem Flächenpaare S_1 und S_2 durch eine Aehnlichkeitstransformation hervor. Flächenpaare, die in einer solchen Beziehung stehen, können einander ersetzen und sind nicht wesentlich verschieden. Sie sollen im Folgenden als gleichwerthig angesehen werden. Mithin darf man statt (4):

$$(5) \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} + \frac{1}{P-Q}\frac{\partial P}{\partial q}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial p} + \frac{1}{Q-P}\frac{\partial Q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial q} = 0$$

schreiben.

Die Gleichung (5) hat eine einfache geometrische Bedeutung: sie besagt, dass die Curven $p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ auf den Flächen S_1 und S_2 ein conjugirtes System bilden. Sollen also die Gleichungen (2) ein neues Flächenpaar Σ_1 und Σ_2 bestimmen, so ist nothwendig, jedoch keineswegs hinreichend, dass *die Coordinatenlinien p, q das gemeinschaftliche conjugirte System der Flächen S_1 und S_2 bilden.*

Ein anderer Beweis hierfür ergiebt sich, wenn man mittelst der Gleichungen (2) und (3) die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung $\mathsf{\Lambda}_1$, M_1, N_1 und $\mathsf{\Lambda}_2$, M_2, N_2 von Σ_1 und Σ_2 bildet. Eine einfache Rechnung zeigt dann, dass diese Grössen mit den entsprechenden Grössen L_1, M_1, N_1 und L_2, M_2, N_2 von S_1 und S_2 durch die Relationen:

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathsf{\Lambda}_1 = PL_1, & \mathsf{M}_1 = PM_1 = QM_1, \quad \mathsf{N}_1 = QN_1, \\ \mathsf{\Lambda}_2 = PL_2, & \mathsf{M}_2 = PM_2 = QM_2, \quad \mathsf{N}_2 = QN_2 \end{cases}$$

verknüpft sind, und da $P - Q$ von Null verschieden ist, so folgt aus (6), dass M_1 und M_2 alle beide verschwinden. Mithin sind die Linien $p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ sowohl auf S_1 als auch auf S_2 conjugirt. Gleichzeitig erkennt man aber, dass M_1 und M_2 ebenfalls verschwinden, und dass daher *diesen Linien für die Flächen Σ_1 und Σ_2 dieselbe Eigenschaft zukommt.*

3. Bei jeder Abbildung von zwei Flächen S_1 und S_2, also auch bei jeder Biegung, giebt es nach Peterson (S. 37) ein gemeinschaftliches conjugirtes System $p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ *). Bedeuten u und v die ursprünglichen, die Abbildung vermittelnden Coordinaten, so wird dieses System durch die totale Differentialgleichung:

$$(\mathrm{I.})\qquad \begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ N_1 & M_1 & L_1 \\ N_2 & M_2 & L_2 \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt**), die sich bei manchen Untersuchungen mit Vortheil durch die beiden gleichwerthigen partiellen Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{I^a.})\qquad \begin{cases} 0 = L_1 \dfrac{\partial p}{\partial v}\dfrac{\partial q}{\partial v} - M_1\left(\dfrac{\partial p}{\partial u}\dfrac{\partial q}{\partial v} + \dfrac{\partial p}{\partial v}\dfrac{\partial q}{\partial u}\right) + N_1 \dfrac{\partial p}{\partial u}\dfrac{\partial q}{\partial u}, \\ 0 = L_2 \dfrac{\partial p}{\partial v}\dfrac{\partial q}{\partial v} - M_2\left(\dfrac{\partial p}{\partial u}\dfrac{\partial q}{\partial v} + \dfrac{\partial p}{\partial v}\dfrac{\partial q}{\partial u}\right) + N_2 \dfrac{\partial p}{\partial u}\dfrac{\partial q}{\partial u} \end{cases}$$

oder auch

*) Das gemeinschaftliche conjugirte System von zwei Biegungsflächen betrachtete später Ribaucour, Sur les systemes cycliques, Comptes rendus, t. 103, 24. August 1891, S. 324—326; vergl. auch Darboux, Leçons, t. IV, S. 120—122.

**) Die Fundamentalgrössen L, M, N beziehen sich hier auf die Coordinaten u und v.

$$
(\mathrm{I}^b.)\quad \begin{cases} 0 = L_1 \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial u}{\partial q} + M_1\left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}\right) + N_1 \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q}, \\ 0 = L_2 \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial u}{\partial q} + M_2\left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}\right) + N_2 \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} \end{cases}
$$

ersetzen lässt.

Handelt es sich im Besonderen um zwei Biegungsflächen S_1 und S_2, so nennt Peterson (S. 58) die Linien $p =$ const. und $q =$ const. die *Biegungslinien* der beiden Flächen, und zwar aus folgendem Grunde. Jedes conjugirte System theilt die Fläche in ein Netz von *ebenen* Vierecken, und es lässt sich daher vermöge des gemeinschaftlichen conjugirten Systems die Biegung des Flächenstückes S_1 in das Flächenstück S_2, oder in das Spiegelbild von S_2, im Grenzübergange auffassen als die Deformation eines ungeschlossenen Polyeders, dessen Seitenflächen aus starren ebenen Vierecken bestehen und dessen Ecken vierkantig sind, in ein anderes Polyeder derselben Art, bei der nur Drehungen um die Kanten gestattet sind, sodass also S_1 in S_2 „um die Biegungslinien gebogen wird“. Es ist sehr lehrreich sich diese Biegungen an einem Modelle zu veranschaulichen, das aus vier aneinanderstossenden Vierecken gebildet ist; dabei hat man zu unterscheiden, ob das Gauss'sche Krümmungsmaass positiv oder negativ ausfällt. Diese Auffassung der Biegung erfährt jedoch dadurch eine Einschränkung, dass die Biegungslinien imaginär werden können; ein einfaches Beispiel hierfür bildet die Biegung von Minimalflächen in Minimalflächen, bei der das gemeinschaftliche conjugirte System aus den erzeugenden Minimalcurven besteht*).

4. Sind die Coordinaten p und q conjugirt, so genügen die Cartesischen Coordinaten x, y, z des Flächenpunktes p, q alle drei der partiellen Differentialgleichung:

$$
(7)\qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p\,\partial q} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \Theta}{\partial p} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \Theta}{\partial q} = 0,
$$

und zwar haben die Christoffel'schen Symbole folgende Werthe:

$$
(8)\qquad \begin{cases} \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{G\dfrac{\partial E}{\partial q} - F\dfrac{\partial G}{\partial p}}{EG - F^2}, \\[2ex] \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{E\dfrac{\partial G}{\partial p} - F\dfrac{\partial E}{\partial q}}{EG - F^2}. \end{cases}
$$

*) Dass man jede krumme Oberfläche als die Grenze eines Polyeders auffassen kann, dessen Seitenflächen aus *ebenen* Vierecken bestehen, ist der Ausgangspunkt einer beachtenswerthen Abhandlung Kretschmer's: Die krummen Flächen für die Theorie der Krümmungen als Grenze eines Polyeders betrachtet. Programm des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Posen. 1875. Die Sätze, zu denen Kretschmer gelangt, sind auch für die Theorie der Biegungen von Wichtigkeit.

Hieraus folgt in Verbindung mit (5), dass die partielle Differentialgleichung:

$$\left(\frac{1}{P-Q}\frac{\partial P}{\partial q}+\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial p}+\left(\frac{1}{Q-P}\frac{\partial Q}{\partial p}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial q}=0$$

durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 erfüllt wird, und da nicht alle Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial p} & \frac{\partial y_1}{\partial p} & \frac{\partial z_1}{\partial p}\\ \frac{\partial x_1}{\partial q} & \frac{\partial y_1}{\partial q} & \frac{\partial z_1}{\partial q}\end{pmatrix}$$

identisch verschwinden können, so ist das nur möglich, wenn die Coefficienten von $\frac{\partial \Theta}{\partial p}$ und $\frac{\partial \Theta}{\partial q}$ beide gleich Null sind, das heisst, wenn die Functionen P und Q den Gleichungen genügen:

$$\text{(II.)}\quad\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial q}+(P-Q)\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}=0,\\ \frac{\partial Q}{\partial p}+(Q-P)\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}=0.\end{cases}$$

Sind umgekehrt die Coordinaten p und q für S_1 und S_2 conjugirt und genügen P und Q den Gleichungen (II.), so bestehen auch die Gleichungen (5) für $\Theta = x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2$, und es sind daher die rechten Seiten der Gleichungen (2) vollständige Differentiale, man erhält also aus ihnen ein Paar Biegungsflächen Σ_1 und Σ_2 oder vielmehr unendlich viele Paare, denn die Integration der simultanen partiellen Differentialgleichungen (II.) bringt zwei willkürliche Functionen mit sich, die in P und Q enthalten sind.

5. Die Durchführung des Verfahrens von Peterson gestaltet sich hiernach folgendermassen. Man muss *erstens* zwei Biegungsflächen S_1 und S_2 kennen. Dann hat man *zweitens* die Biegungslinien von S_1 und S_2 zu ermitteln, was die Integration der totalen Differentialgleichung (I.) erfordert. Hat man darauf *drittens* die beiden simultanen partiellen Differentialgleichungen (II.) integrirt, so sind *viertens* $\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ durch je eine Quadratur bestimmt.

Man könnte meinen, dass dieses Verfahren keinen grossen Gewinn bedeutet, da die Erledigung des allgemeinen Biegungsproblems nur die Integration der drei simultanen partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(III.)}\quad\begin{cases}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2=E,\\ \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q}=F,\\ \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2=G\end{cases}$$

verlangt, wo p und q beliebige Gauss'sche Coordinaten bezeichnen. Es wird sich jedoch herausstellen, dass die besondere Form der Gleichungen (I.) und (II.) grosse Vortheile bietet und die Aufstellung einer Reihe von Biegungen ermöglicht, die man wohl niemals unmittelbar aus den Gleichungen (III.) hergeleitet haben würde.

6. Für die Anwendungen ist folgende ergänzende Bemerkung von Wichtigkeit. Das Verfahren von Peterson erfordert nur, dass man die *Biegungslinien* von S_1 und S_2 kennt. Die Coordinaten p und q sind daher nicht vollständig bestimmt. Setzt man nämlich:

$$p = \varphi(p_1), \qquad q = \psi(q_1), \tag{9}$$

so werden auch durch $p_1 = \text{const.}$ und $q_1 = \text{const.}$ die Biegungslinien von S_1 und S_2 dargestellt, und man darf daher diese Transformation zur Vereinfachung der Rechnungen benutzen.

Es ist leicht zu zeigen, dass man dieselben Flächenpaare Σ_1 und Σ_2 erhält, gleichgültig wie die Coordinaten der Biegungslinien gewählt sind. Vermöge (9) wird zunächst

$$ds_1^2 = ds_2^2 = E_1 dp_1^2 + 2F_1 dp_1 dq_1 + G_1 dq_1^2,$$

wo

$$\varphi'^2(p_1)\, E = E_1, \quad \varphi'(p_1)\,\psi'(q_1)\, F = F_1, \quad \psi'^2(q_1)\, G = G_1$$

gesetzt worden ist. Hieraus folgen sofort die Identitäten

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = \psi'(q_1)\cdot\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = \varphi'(p_1)\cdot\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix},$$

welche zeigen, dass die Gleichungen (II.) durch die Transformation (9) gerade in die Gleichungen

$$(\mathrm{II}_1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial q_1} + (P - Q)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial p_1} + (Q - P)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = 0 \end{cases}$$

übergehen. Ist das aber der Fall, so sind die Gleichungen (2) diesen Transformationen gegenüber invariant, und damit ist die Behauptung bewiesen*).

§ 2.

7. Man wird jetzt fragen, in welcher Beziehung die Flächen S_1 und Σ_1, beziehungsweise S_2 und Σ_2 zu einander stehen. Es reicht aus, wenn eins dieser Flächenpaare betrachtet wird, das der Einfachheit halber mit S und Σ bezeichnet werden möge.

*) Allgemeine Untersuchungen über die flächentheoretischen Invarianten der Transformation $p = \varphi(p_1)$, $q = \psi(q_1)$ findet man in der Abhandlung von Voss: „Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie" (Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie, Jahrgang 1889, S. 200—220).

Der Fläche $S(x, y, z)$ mit dem Linienelemente ds wird durch die Gleichungen:

$$(2')\quad \begin{cases} d\xi = P\dfrac{\partial x}{\partial p}\,dp + Q\dfrac{\partial x}{\partial q}\,dq, \\ d\eta = P\dfrac{\partial y}{\partial p}\,dp + Q\dfrac{\partial y}{\partial q}\,dq, \\ d\zeta = P\dfrac{\partial z}{\partial p}\,dp + Q\dfrac{\partial z}{\partial q}\,dq \end{cases}$$

eine Fläche $\Sigma(\xi, \eta, \zeta)$ mit dem Linienelemente $d\sigma$ zugeordnet, wenn die Curven $p =$ const. und $q =$ const. conjugirt sind, und wenn die Multiplicatoren P und Q den partiellen Differentialgleichungen:

$$(\text{II.})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial q} + (P - Q)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_s = 0, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial p} + (Q - P)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_s = 0 \end{cases}$$

genügen.

Aus den Gleichungen (2′) folgt zunächst:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = P\frac{\partial x}{\partial p}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial p} = P\frac{\partial y}{\partial p}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial p} = P\frac{\partial z}{\partial p},$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = Q\frac{\partial x}{\partial q}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial q} = Q\frac{\partial y}{\partial q}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial q} = Q\frac{\partial z}{\partial q},$$

und hieraus ersieht man sofort, dass die Richtungscosinus der Tangenten der Linien $p =$ const. und $q =$ const. in entsprechenden Punkten der Flächen S und Σ dieselben Werthe haben, dass also diese Tangenten paarweise parallel sind. Berechnet man ferner die Richtungscosinus der Flächennormalen in entsprechenden Punkten, so ergeben sich auch hierfür dieselben Werthe. *Die Linien $p =$ const. und $q =$ const. vermitteln also eine Abbildung von S auf Σ durch parallele Normalen* und zwar in der Weise, dass sie das gemeinschaftliche conjugirte System dieser Abbildung darstellen.

Bildet man umgekehrt zwei Flächen S und Σ durch parallele Normalen auf einander ab und bestimmt das gemeinschaftliche conjugirte System dieser Abbildung, so beweist man leicht (vergl. Peterson, S. 46 und 47), dass die Tangenten dieser Curven in entsprechenden Punkten paarweise parallel sind, woraus sofort das Bestehen der Gleichungen (2′) folgt. Legt man also auf der Fläche S das conjugirte System $p =$ const. und $q =$ const. zu Grunde, so erhält man *alle* Flächen, die sich auf S durch parallele Normalen so abbilden lassen, dass die Curven $p =$ const. und $q =$ const. das gemeinschaftliche conjugirte System bilden, indem man sich mittelst (2′) die Flächen Σ herstellt (vergl. Peterson, S. 50 und 51: *Problem des Parallelismus*)*).

*) Die Abbildung durch parallele Normalen spielt auch eine wichtige Rolle bei den schönen Untersuchungen von L. Bianchi über *associirte Flächen*, man

8. Weitere Sätze ergeben sich durch die Betrachtung der Fundamentalgrössen erster Ordnung von S und Σ, die durch die Gleichungen:

$$(1') \qquad ds^2 = E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2$$

und

$$(3') \qquad d\sigma^2 = P^2 E dp^2 + 2PQF dp\, dq + Q^2 G dq^2$$

gegeben werden. Bildet man aus diesen Grössen die Christoffel'schen Symbole für S und Σ, so finden zwischen ihnen vermöge der Gleichungen (II.) die folgenden bemerkenswerthen Relationen statt:

$$(10) \quad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_\Sigma = \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_S + \frac{\partial \log P}{\partial p}, & \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_\Sigma = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_S + \frac{\partial \log Q}{\partial q}, \\ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\Sigma = \frac{P}{Q}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_S, & \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_\Sigma = \frac{Q}{P}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_S, \\ \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_\Sigma = \frac{Q}{P}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_S, & \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_\Sigma = \frac{P}{Q}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_S. \end{cases}$$

Die beiden letzten Relationen erhält man fast ohne jede Rechnung durch folgende Bemerkung. Die Gleichungen (2') lassen sich ersetzen durch die Gleichungen:

$$dx = \frac{1}{P}\frac{\partial \xi}{\partial p} dp + \frac{1}{Q}\frac{\partial \xi}{\partial q} dq,$$
$$dy = \frac{1}{P}\frac{\partial \eta}{\partial p} dp + \frac{1}{Q}\frac{\partial \eta}{\partial q} dq,$$
$$dz = \frac{1}{P}\frac{\partial \zeta}{\partial p} dp + \frac{1}{Q}\frac{\partial \zeta}{\partial q} dq,$$

und es ist daher:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{P}\right) + \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{Q}\right)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_\Sigma = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{Q}\right) + \left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{P}\right)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_\Sigma = 0,$$

woraus durch Vergleichung mit (II.) die gesuchten Relationen hervorgehen.

9. Die geodätischen Linien der Fläche S genügen der totalen Differentialgleichung:

---

vergleiche seine Abhandlung: Sulle deformazioni infinitesimi delle superficie flessibile ed inestensibile, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti, Serie 5ª, t. I. Sem. 2. 1892. S. 41—49, sowie seine Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1894, Cap. XI und E. Cosserats Note: Sur la déformation infinitésimale et sur les surfaces associées de M. Bianchi, Comptes rendus, t. 115, 1892, S. 1252—1255.

Für die Abbildung von Flächen durch parallele Normalen vergleiche man auch Enneper, Göttinger Nachrichten, 1882, S. 34—47, 89—102 und Ribaucour, Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes, Journal de Mathématiques, série 4, t. VII, 1891. S. 5—108, 219—270.

$$(11)\quad \begin{cases} dq\,d^2p - dp\,d^2q = \left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_S dp^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_S dp\,dq + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_S dq^2\right] dp \\ \qquad\qquad - \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_S dp^2 + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_S dp\,dq + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_S dq^2\right] dq, \end{cases}$$

und eine analoge Gleichung gilt für die Fläche Σ. Die Relationen (10) zeigen, dass die sämmtlichen ∞^2 geodätischen Linien von S die sämmtlichen ∞^2 geodätischen Linien von Σ zu Bildern haben, wenn $P = Q =$ const. ist. Sollen umgekehrt die Flächen S und Σ dieselbe Differentialgleichung der geodätischen Linien besitzen, so müssen für beide Flächen die Christoffel'schen Symbole dieselben Werthe haben. Die Gleichungen (10) zeigen aber, dass diese Forderung nur dadurch erfüllt werden kann, dass entweder $P = Q$ also, nach Nr. 2, $=$ const. ist, oder dass die Grössen:

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_S, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_S, \quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_S, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_S, \quad \frac{\partial \log P}{\partial p}, \quad \frac{\partial \log Q}{\partial q}$$

identisch verschwinden. Dann ist aber nach (II.) auch

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = 0,$$

P und Q sind also beide Constanten. Genaueres über diesen besonderen Fall findet man in dem Abschnitte IV dieser Abhandlung.

Im Allgemeinen werden daher nur bestimmten geodätischen Linien von S geodätische Linien von Σ entsprechen können, und von besonderem Interesse ist dabei der Fall, dass die Coordinatenlinien $p =$ const. und $q =$ const. diese Eigenschaft besitzen. Sollen diese Curven geodätisch sein, so muss die Gleichung (11) durch $dp = 0$ und durch $dq = 0$ erfüllt sein, und das erfordert, dass die Identitäten

$$(12)\qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_S = 0 \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_S = 0$$

bestehen. Dann zeigen aber die Relationen (10), dass auch

$$(12')\qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_\Sigma = 0 \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\Sigma = 0$$

ist, das heisst, es gilt der Satz:

„*Besitzt die Fläche S ein conjugirtes System $p =$ const. und $q =$ const., das aus lauter geodätischen Linien gebildet wird, und leitet man aus S neue Flächen Σ durch die Gleichungen* (2′) *her, so sind die Linien $p =$ const. und $q =$ const. auf Σ ebenfalls conjugirt und geodätisch*".

Die Flächen S, die ein solches conjugirtes System besitzen, constituiren eine besondere Flächenclasse, die durch die drei Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0, \quad M = 0$$

charakterisirt ist. Ausserdem müssen die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung den drei Fundamentalgleichungen genügen, die allgemein so lauten:

$$(\mathrm{F.})\quad \begin{cases} LN - M^2 = K(EG) - F^2), \\ \dfrac{\partial L}{\partial q} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N = \dfrac{\partial M}{\partial p} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} M, \\ \dfrac{\partial N}{\partial p} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} M = \dfrac{\partial M}{\partial q} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N, \end{cases}$$

und für den vorliegenden Fall übergehen in:

$$(14)\quad \begin{cases} LN = K(EG - F^2), \\ \dfrac{\partial \log L}{\partial q} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}, \\ \dfrac{\partial \log N}{\partial p} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}. \end{cases}$$

Mithin bestehen zwischen den drei Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G die drei Differentialgleichungen:

$$(15)\quad \begin{cases} \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial p}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \dfrac{\partial}{\partial q}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \dfrac{\partial^2 \log K(EG - F^2)}{\partial p\,\partial q} \;{}^{*)}. \end{cases}$$

10. Die Relationen (10) zeigen, dass nicht nur die Gleichungen

$$(12)\qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_S = 0, \qquad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_S = 0,$$

sondern auch die Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_S = 0, \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_S = 0$$

gegenüber der Transformation von S in Σ invariant sind. Auch die Gleichungen (16) haben eine einfache geometrische Bedeutung. Sie haben zur Folge, dass die Coordinaten x, y, z der Differentialgleichung:

$$(7')\qquad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial p\,\partial q} = 0$$

*) Hierzu vergleiche man die Abhandlungen:

A. Voss, Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden, Sitzungsberichte der Bayrischen Akademie, Jahrgang 1888, S. 95—102;

A. Razzaboni, Delle superficie dalle quali due serie di geodetiche formano un sistema conjugato, Memorie di Bologna serie 3ª, t. IX, 1889, S. 765—776;

C. Guichard, Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces qui s'y rattachent, Annales scientifiques de l'École normale, série 3, t. VII, 1890, S, 233;

sowie die Werke: L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1894, S. 271 und G. Darboux, Leçons, t. IV, Paris 1895, S. 103.

genügen, und das bedeutet, dass die Fläche S eine *Translationsfläche* ist, deren erzeugende Curven die Linien $p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ bilden; es ist bekannt, dass diese Curven stets ein conjugirtes System bilden. Vermöge (10) gilt also der Satz:

„*Ist die Fläche S eine Translationsfläche, deren erzeugende Curven die Linien $p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ sind, so werden auch die Flächen Σ Translationsflächen, deren erzeugende Curven die Linien $p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ sind.*

Bestehen die Gleichungen (16), so gehen die Gleichungen (II.) über in

$$(\text{II}'.) \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} = 0,$$

und es ist daher

$$P = \varphi(p), \qquad Q = \psi(q).$$

Kennt man also von einer Translationsfläche S_1 eine Biegungsfläche S_2 von der Beschaffenheit, dass die Biegungslinien die erzeugenden Curven von S_1 sind, so erfordert die Durchführung des Verfahrens von Peterson nur die sechs Quadraturen.

Sind die erzeugenden Curven im Besonderen Minimalcurven, also die Fläche S eine *Minimalfläche*, so wird

$$ds^2 = 2F\,dp\,dq,$$

also auch

$$d\sigma^2 = 2PQF\,dp\,dq,$$

das heisst, die Flächen Σ sind ebenfalls Minimalflächen.

11. Bildet man endlich die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L, M, N von S und $\mathsf{\Lambda}$, M, N von Σ, so ist

$$(6') \qquad \mathsf{\Lambda} = PL, \qquad \mathsf{M} = M = 0, \qquad \mathsf{N} = QN,$$

und es gilt daher der Satz:

„*Werden die drei Fundamentalgleichungen* (F.) *durch die Grössen:*

$$E,\ F,\ G;\ \ L,\ 0,\ N$$

befriedigt, so genügen ihnen auch die Grössen:

$$P^2E,\ PQF,\ Q^2G;\ \ PL,\ 0,\ QN,$$

vorausgesetzt, dass P und Q durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial q} + (P - Q)\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} + (Q - P)\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$$

bestimmt werden".

Es ist leicht diesen Satz direct zu beweisen und damit eine zweite Begründung des Verfahrens von Peterson zu gewinnen. Stellt man nämlich die Fundamentalgleichungen für Σ auf, so ist die zweite und dritte Gleichung vermöge der Relationen (10) befriedigt, während die Gauss'sche Gleichung

$$(17) \qquad \mathsf{K} = \frac{1}{PQ} \cdot \frac{LN}{EG - F^2} = \frac{1}{PQ} \cdot K$$

sofort aus den Gleichungen für die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 von S, P_1 und P_2 von Σ folgt, die so lauten:

$$LNR^2-(GL+EN)R+(EG-F^2)=0$$

und

$$LN\mathsf{P}^2-(QGL+PEN)\mathsf{P}+PQ(EG-F^2)=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich noch eine Folgerung ziehen, die genannt zu werden verdient. Ist S eine Minimalfläche, so besitzt Σ dann und nur dann dieselbe Eigenschaft, wenn

$$E=G=0$$

ist, das heisst, wenn die Curven $p=\text{const.}$ und $q=\text{const.}$ die erzeugenden Minimalcurven sind, und das ist gerade der Fall, der am Schluss der vorhergehenden Nummer betrachtet wurde.

§ 3.

12. Will man das Verfahren von Peterson anwenden, so besteht die hauptsächliche Schwierigkeit in der Integration der simultanen partiellen Differentialgleichungen:

$$\text{(II.)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial q}+(P-Q)\left\{ {12 \atop 1} \right\}=0, \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial p}+(Q-P)\left\{ {12 \atop 2} \right\}=0, \end{cases}$$

die daher genauer untersucht werden sollen.

Sind allgemeiner die Differentialgleichungen:

$$\text{(18)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial q}+\alpha P+\beta Q=0, \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial p}+\gamma P+\delta Q=0 \end{cases}$$

vorgelegt, wo α, β, γ und δ Functionen von p und q bedeuten, so wird

$$\text{(19)}\qquad Q=-\frac{\alpha}{\beta}P-\frac{1}{\beta}\frac{\partial P}{\partial q},$$

und P genügt daher der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\text{(20)}\quad \frac{\partial^2 P}{\partial p\,\partial q}+\alpha\frac{\partial P}{\partial p}+\left(\delta-\frac{\partial\log\beta}{\partial p}\right)\frac{\partial P}{\partial q}+\left(\beta\frac{\partial}{\partial p}\frac{\alpha}{\beta}+\alpha\delta-\beta\gamma\right)P=0.$$

Hiermit ist der Anschluss an die classischen Theorien von Laplace, Riemann und Darboux erreicht (vergl. Darboux, Leçons, t. II.)

Die Invarianten der Gleichung (20) sind:

$$h=\beta\gamma,\quad k=\beta\gamma-\frac{\partial\alpha}{\partial p}+\frac{\partial\delta}{\partial q}-\frac{\partial^2\log\beta}{\partial p\,\partial q}.$$

Sobald eine dieser Invarianten verschwindet, lässt sich die Integration der Gleichung (20) durch blosse Quadraturen ausführen. Wendet man das auf (II.) an, so ergeben sich die beiden ausgezeichneten Fälle:

$$\text{(a)} \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial p}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial q}\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{\partial^2 \log}{\partial p\, \partial q}\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

oder die Gleichung, die hieraus durch Vertauschung von p und q, 1 und 2 entsteht.

Ist $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$, so sind die drei Coordinaten x_1, y_1, z_1 von S_1 Lösungen der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial p\, \partial q} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial q} = 0.$$

Setzt man daher

$$e^{\int \left\{ {12 \atop 2} \right\} \partial q} = \lambda(p, q),$$

so wird:

$$(21) \qquad \begin{cases} x_1 = \int \lambda \varphi_1(p)\, \partial p + f_1(q), \\ y_1 = \int \lambda \psi_1(p)\, \partial p + g_1(q), \\ z_1 = \int \lambda\, \chi_1(p)\, \partial p + h_1(q), \end{cases}$$

und entsprechende Gleichungen gelten für x_2, y_2, z_2. Bildet man hieraus $ds_1{}^2$ und $ds_2{}^2$ und setzt diese quadratischen Differentialformen einander gleich, so ergeben sich drei Gleichungen, denen φ_2, ψ_2, χ_2; f_2, g_2, h_2 genügen müssen, wenn S_2 eine Biegungsfläche von S_1 und die Linien $p =$ const. und $q =$ const. die Biegungslinien von S_1 und S_2 sein sollen. Gelingt es eine solche Fläche S_2 zu finden, so erfordert die Bestimmung von Σ_1 und Σ_2 nur Quadraturen.

Der ausgezeichnete Fall (a) wird später eingehend behandelt werden. Hier sei nur noch bemerkt, dass er bei einer *jeden Fläche* S_1 eintritt. Es geschieht das im Besonderen, wenn man für die Curvenschar $p =$ const. die eine Schar der Minimallinien von S_1 wählt, wodurch dann die andere Schar des conjugirten Systems p, q: $q =$ const. vollständig festgelegt ist. Verschwindet nämlich G, so ist auch

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

13. Die Zurückführung der Gleichungen (II.) auf die lineare Differentialgleichung (20) für P hat den Nachtheil, dass die Symmetrie verloren geht. Bei den allgemeineren Gleichungen (18) wird sich das

nicht vermeiden lassen, aber die besondere Form der Gleichungen (II.) gestattet ein Verfahren, das nicht nur den Vorzug der Symmetrie hat, sondern auch bei den folgenden Untersuchungen wiederholt als zweckmässig sich bewähren wird.

Setzt man

$$(22) \qquad P = \frac{\partial \Omega}{\partial p} : \frac{\partial H}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial \Omega}{\partial q} : \frac{\partial H}{\partial q},$$

wo H irgend eine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung:

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial H}{\partial p} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

bedeutet, so gehen die beiden Gleichungen (II.) in dieselbe lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(24) \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial q} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\frac{\partial H}{\partial q}}{\frac{\partial H}{\partial p}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial p} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\frac{\partial H}{\partial p}}{\frac{\partial H}{\partial q}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial q} = 0$$

über, die also die Gleichungen (II.) vollständig ersetzt.

Um eine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung (23) zu erhalten, braucht man aber nur

$$H = a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 + a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2$$

zu setzen, wo a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 willkürliche Constanten bedeuten, denn die 6 Coordinaten, x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 müssen der Differentialgleichung (7) genügen, wenn $p =$ const. und $q =$ const. das gemeinschaftliche conjugirte System von S_1 und S_2 sein soll.

Die Gleichung (24) gewinnt eine besonders einfache Gestalt, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial q},$$

mithin H eine Function von $p + q$ allein ist. Als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (23) eine Lösung $H = H(p+q)$ besitzt, ergiebt sich sofort

$$(25) \qquad \left\{ {12 \atop 1} \right\} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} = f(p+q).$$

Besteht also die Gleichung (25), so tritt an die Stelle von (II.) die Gleichung

$$(24') \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p \partial q} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial p} - \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial q} = 0.$$

Man kann sofort einen Fall angeben, in dem (25) besteht: wenn E, F, G selbst nur von $p + q$ abhängen. Wird dann

$$(26) \qquad p + q = \sigma, \quad p - q = \tau$$

eingeführt, so geht ds_1^2 in eine quadratische Differentialform über, deren Coefficienten nur von σ abhängen, mithin ist S_1 auf eine *Rotationsfläche* abwickelbar.

Ist im Besonderen

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2} f(p+q),$$

so werden die Gleichungen (23) und (24) mit einander identisch, und man hat daher die Lösung

$$\Omega = a_1' x_1 + b_1' y_1 + c_1' z_1 + a_2' x_2 + b_2' y_2 + c_2' z_2,$$

in der $a_1', b_1', c_1'; a_2', b_2', c_2'$ wieder willkürliche Constanten bedeuten. Ist aber Ω bekannt, so erfordert die Bestimmung der Biegungsflächen Σ_1 und Σ_2 nur noch Quadraturen; ein Beispiel hierfür liefern die in Nr. 43 betrachteten Schraubenflächen.

§ 4.

14. Bildet man zwei Flächenstücke S_1 und S_2 auf einander ab, so giebt es, wie schon in Nr. 3 bemerkt wurde, auf S_1 stets ein conjugirtes System $p =$ const. und $q =$ const., dessen Bild auf S_2 wieder ein conjugirtes System ist. Wird eine dritte Fläche S_3 auf S_1 abgebildet, so besitzen auch S_1 und S_3 ein gemeinschaftliches conjugirtes System $p' =$ const. und $q' =$ const., das im Allgemeinen verschieden von dem Systeme $p =$ const. und $q =$ const. ausfällt. Nur in besonderen Fällen wird es eintreten, dass ein und dasselbe conjugirte System allen drei Flächen S_1, S_2 und S_3 gemeinsam ist.

Die Gleichungen (I^b) erlauben, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür aufzustellen. Es muss nach ihnen gleichzeitig:

$$(27)\qquad \begin{cases} L_1 \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial u}{\partial q} + M_1\left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}\right) + N_1 \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} = 0,\\ L_2 \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial u}{\partial q} + M_2\left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}\right) + N_2 \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} = 0,\\ L_3 \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial u}{\partial q} + M_3\left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}\right) + N_3 \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} = 0 \end{cases}$$

sein*). Das ist aber, wie man ohne Mühe beweist, nur dann möglich, wenn die Determinante

$$(\mathrm{A.})\qquad \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1\\ L_2 & M_2 & N_2\\ L_3 & M_3 & N_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Besteht umgekehrt die Gleichung (A.), so folgt aus den Gleichungen:

*) Die Fundamentalgrössen L, M, N beziehen sich in dieser Nummer auf die Coordinaten u und v.

$$(\mathrm{I}^b)\quad \begin{cases} L_1 \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial u}{\partial q} + M_1\left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}\right) + N_1 \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} = 0, \\ L_2 \dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial u}{\partial q} + M_2\left(\dfrac{\partial u}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} + \dfrac{\partial u}{\partial q}\dfrac{\partial v}{\partial p}\right) + N_2 \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial v}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

dass entweder auch

$$L_3 \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q} + M_3\left(\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} + \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p}\right) + N_3 \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q} = 0$$

oder dass alle Determinanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{pmatrix}$$

identisch verschwinden. Das letztere bedeutet aber, dass die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von S_1 den entsprechenden Grössen von S_2 proportional sind und dass daher *jedes* conjugirte System auf S_1 ein conjugirtes System auf S_2 zum Bilde hat, im besonderen also auch das gemeinschaftliche conjugirte System von S_1 und irgend einer dritten Fläche S_3. Hiermit ist also bewiesen, dass die Gleichung (A.) die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines gemeinsamen conjugirten Systems von S_1, S_2 und S_3 darstellt.

In ähnlicher Weise giebt, wie nebenbei bemerkt werden möge, das Bestehen der Gleichung:

$$(\mathrm{A}'.)\quad \begin{vmatrix} E_1 & F_1 & G_1 \\ E_2 & F_2 & G_2 \\ E_3 & F_3 & G_3 \end{vmatrix} = 0$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die drei Flächen S_1, S_2 und S_3, die durch die Gauss'schen Coordinaten u und v auf einander abgebildet sind, ein und dasselbe gemeinschaftliche Orthogonalsystem besitzen, wobei der Fall der conformen Abbildung von S_1 auf S_2 wieder eine Ausnahmestellung einnimmt.

15. Nunmehr sei die Abbildung von S_1 auf S_2 eine Biegung. Nimmt man auf S_1 ein bestimmtes conjugirtes System an, so lässt sich nach Nr. 3 im Allgemeinen diese Fläche S_1 nur in eine einzige neue Form S_2 biegen, so dass das gegebene conjugirte System die Biegungslinien von S_1 und S_2 darstellt (vergl. Peterson, S. 58), und es ist daher etwas Besonderes, wenn drei Biegungsflächen S_1, S_2 und S_3 dieselben Biegungslinien besitzen. In diesem Falle lässt sich zeigen, dass S_2 und S_3 einer stetigen Mannigfaltigkeit von Biegungsflächen der Fläche S_1 angehören, die sämmtlich mit S_1 jenes conjugirte System gemeinsam haben*). Diese Biegungslinien sollen dann nach Peterson (S. 59) *Hauptbiegungslinien* heissen.

*) Unabhängig von Peterson ist später E. Cosserat auf dieses Theorem gekommen, das Peterson (S. 59) ausgesprochen hatte, ohne es jedoch zu beweisen;

Zum Beweise bilde man die drei Ausdrücke:

$$L = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3,$$
$$M = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3,$$
$$N = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3,$$

in denen α_1, α_2, α_3 Functionen von u und v bedeuten, über die noch verfügt werden darf, und sehe sie als die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung einer Fläche S an, deren Fundamentalgrössen erster Ordnung, wie bei S_1 und S_2, E, F, G sind*). Dann ist identisch:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

das heisst, S hat mit S_1 und S_2 dasselbe conjugirte System gemeinschaftlich, und es kommt also nur darauf an zu zeigen, dass die Fundamentalgrössen E, F, G und L, M, N vermöge geeigneter Bestimmung der Functionen α_1, α_2, α_3 die drei Fundamentalgleichungen:

$$(\mathrm{F.})\quad \begin{cases} LN - M^2 = K(EG - F^2), \\ \dfrac{\partial L}{\partial v} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} M + \left\{ {11 \atop 2} \right\} N = \dfrac{\partial M}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} L + \left\{ {12 \atop 2} \right\} M, \\ \dfrac{\partial N}{\partial u} + \left\{ {22 \atop 1} \right\} L + \left\{ {22 \atop 2} \right\} M = \dfrac{\partial M}{\partial v} + \left\{ {12 \atop 1} \right\} M + \left\{ {12 \atop 2} \right\} N \end{cases}$$

befriedigen. Dabei ist zu beachten, dass diesen Gleichungen bereits die Fundamentalgrössen von S_1, S_2, S_3 Genüge leisten. Berücksichtigt man diesen Umstand und führt noch zur Vereinfachung statt der allgemeinen Coordinaten u, v die Coordinaten p, q des gemeinschaftlichen conjugirten Systems von S_1, S_2, S_3 ein, so ergeben sich aus (F.) für α_1, α_2, α_3 die drei Bedingungsgleichungen:

$$(\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3)(\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3) = K(EG - F^2),$$
$$L_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + L_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial q} + L_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial q} = 0,$$
$$N_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + N_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial p} + N_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial p} = 0,$$

deren Integration theoretisch keine Schwierigkeiten hat.

Man wird so auf die interessante Aufgabe geführt, alle Flächen S_1 zu bestimmen, die sich in stetiger Weise so biegen lassen, dass ein

---

man vergleiche seine Abhandlung: Sur les systèmes conjugués et sur la déformation des surfaces. Comptes rendus, t. 113, 12. October 1891, S. 460—463, sowie auch die in Nr. 7 angeführten Schriften von L. Bianchi. Der im Folgenden mitgetheilte Beweis ist wesentlich verschieden von dem Beweis, den Cosserat giebt.

*) Abweichend von der früheren Bezeichnung beziehen sich hier L, M, N und E, F, G auf die Coordinaten u und v.

conjugirtes System während des ganzen Verlaufes der Biegung stets conjugirt bleibt*). Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe, auf die Peterson zuerst hingewiesen hat, scheint erhebliche Schwierigkeiten zu bieten**). Wohl aber wird bei den folgenden Untersuchungen eine Reihe von Flächentypen auftreten, die der soeben charakterisirten Classe angehören. Wendet man nämlich das Verfahren von Peterson an, um aus einem Paare von Biegungsflächen S_1 und S_2 ein neues Paar von Biegungsflächen Σ_1 und Σ_2 zu erhalten, so sind die Linien $p =$ const. und $q =$ const. die Biegungslinien sowohl von S_1 und S_2 als auch von Σ_1 und Σ_2. Kennt man also eine Fläche S_1, die sich auf stetige Art in Flächen S_2 so biegen lässt, dass ein conjugirtes System von S_1 im ganzen Verlaufe der Biegung conjugirt bleibt, so erhält man eine Fläche Σ_1, der die gleiche Eigenschaft zukommt, und gleichzeitig sind die Flächen Σ_2 die betreffenden Biegungsflächen von Σ_1. Aus jeder Lösung der betrachteten Aufgabe entspringt auf diese Weise eine neue Lösung und so fort, vorausgesetzt, dass nicht etwa

---

*) Eine entsprechende Aufgabe gilt für die Biegung von *ungeschlossenen* Polyedern mit starren ebenen Seitenflächen. Es dürfte hier für die Theorie der Polyeder, die in neuester Zeit durch Eberhardt eine so bedeutsame Förderung erfahren hat, sich ein neues Feld eröffnen. Dass ein convexes, geschlossenes Polyeder starr ist, war schon Euklid bekannt, es ist aber erst 1812 von Cauchy bewiesen worden. Wie Cauchy in den Comptes rendus, t. 21. 1845. S. 564 berichtet, hatte Lagrange, dem er 1812 seinen Beweis mitgetheilt hatte, daraus geschlossen, dass eine geschlossene, convexe Fläche als Ganzes nicht biegsam ist; man vergl. auch Minding, Journal für Mathematik. Bd. 18, 1838, S. 368.

**) E. Cosserat hat diese Aufgabe auf folgendes Problem reducirt: Gestattet eine Fläche S eine stetige Biegung mit Erhaltung eines conjugirten Systems, so genügen bei Einführung dieses conjugirten Systems als Parametercurven die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung E, F, G; L, 0, N ausser den drei Fundamentalgleichungen auch den Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial p}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial q}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}';$$

hierbei beziehen sich die Christoffel'schen Zeichen, die oben mit einem Strich versehen sind, auf die quadratische Differentialform

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \mathfrak{E}\,dp^2 + \mathfrak{F}\,dp\,dq + \mathfrak{G}\,dq^2,$$

wo X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormale im Punkte p, q bedeuten; siehe seine Abhandlung: Sur les systèmes cycliques et sur la déformation des surfaces, Comptes rendus, t. 113, 1891, S. 461. Bald darauf hat E. Bianchi diesen Satz in eleganter Weise bewiesen und auch gezeigt, dass alle Voss'schen Flächen die verlangte Eigenschaft besitzen (vergl. die in Nr. 7 angeführten Schriften).

Es fehlt jedoch noch eine eingehende Discussion der Gleichungen die Cosserat aufgestellt hat.

Eine weitere, sehr interessante Aufgabe wäre, zu ermitteln, welche Flächen mehr als ein conjugirtes System besitzen, unter dessen Erhaltung sie stetig gebogen werden können.

die Fläche Σ_1 mit S_1 oder einer der zugehörigen Biegungsflächen S_2 zusammenfällt, ein Fall, der, wie sich bald herausstellen wird, wirklich eintreten kann.

II.

Ueber die Biegungen der Schraubenflächen.

§ 1.

16. Im Jahre 1838 machte Minding die wichtige Entdeckung, dass eine jede *Rotationsfläche:*

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u)$$

sich in stetiger Weise so biegen lässt, dass ihre Meridiane und Parallelkreise in die Meridiane und Parallelkreise neuer Rotationsflächen übergehen*). Setzt man nämlich

$$(S_a)\quad x = au \cos \frac{v}{a}, \quad y = au \sin \frac{v}{a}, \quad z = \int \sqrt{1 - a^2 + f'^2(u)}\, du,$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet, so wird identisch

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \big(1 + f'^2(u)\big)\, du^2 + u^2\, dv^2.$$

Bald darauf, im Jahre 1839, gelangte Minding zu einer bedeutsamen Verallgemeinerung dieser Formeln. Indem er untersuchte, „wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht", wurde er auf die „Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaass" geführt, die bei dieser Untersuchung eine Ausnahmestellung einnehmen, und es glückte ihm alle ∞^2 *Schraubenflächen* zu finden, die auf die Kugel vom Halbmesser $\frac{1}{\sqrt{k}}$ abwickelbar sind. Sie werden durch die Gleichungen:

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi, \quad z = \int \sqrt{\frac{1}{a - kr^2} - 1 - \frac{h^2}{r^2}}\, dr + h\psi$$

gegeben, in denen a und h willkürliche Constanten sind.

Minding hat die nahe liegende Verallgemeinerung auf die Biegung beliebiger Rotationsflächen in Schraubenflächen nicht durchgeführt, das ist erst von Bour in seiner 1861 gekrönten Preisarbeit geschehen***). Geht man aus von der Rotationsfläche

---

*) Ueber die Biegung gewisser Flächen, Journal für Mathematik Bd. 18, Berlin 1838, S. 367.

**) Journal für Mathematik Bd. 19, Berlin 1839, S. 376—378.

***) Théorie de la déformation des surfaces. Journal de l'École polytechnique. Cahier 39, Paris 1862, S. 82.

(28) $x = U(u)\cos v,\quad y = U(u)\sin v,\quad z = \int\sqrt{1 - U'^2(u)}\,du,$

deren Linienelement ds durch die Gleichung

(29) $$ds^2 = du^2 + U^2(u)\,dv^2$$

gegeben wird, so besitzen auch die ∞^2 Schraubenflächen:

$$(S_{a,b})\quad \begin{cases} x = a\sqrt{U^2 - b^2}\cdot\cos\dfrac{v - \varphi(u)}{a}, \\ y = a\sqrt{U^2 - b^2}\cdot\sin\dfrac{v - \varphi(u)}{a}, \\ z = \psi(u) + bv, \end{cases}$$

wo a und b willkürliche Constanten bedeuten, sämmtlich dasselbe Linienelement ds, wenn man die Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ durch die Gleichungen:

$$(30)\quad \begin{cases} \varphi(u) = \int\sqrt{U^2 - b^2 - a^2U^2U'^2}\cdot\dfrac{b\,du}{U(U^2 - b^2)}, \\ \psi(u) = \int\sqrt{U^2 - b^2 - a^2U^2U'^2}\cdot\dfrac{du}{U} \end{cases}$$

bestimmt; der Quadratwurzel ist beide Male dasselbe Vorzeichen beizulegen. Setzt man $b = 0$, so ergeben sich die ∞^1 Minding'schen Biegungsflächen $S_{a,0}$:

$$x = aU\cos\frac{v}{a},\quad y = aU\sin\frac{v}{a},\quad z = \int\sqrt{1 - a^2U'^2}\,du$$

der ursprünglichen Rotationsfläche $S_{1,0}$:

$$x = U\cos v,\quad y = U\sin v,\quad z = \int\sqrt{1 - U'^2}\,du.$$

17. Die Betrachtungen der vorhergehenden Nummer bedürfen nach zwei Richtungen hin der Ergänzung. Zu jeder quadratischen Differentialform

$$du^2 + U^2(u)\,dv^2$$

gehören vermöge der Gleichungen $(S_{a,b})$ ∞^2 Schraubenflächen, die sich als Biegungsflächen der Rotationsfläche $S_{1,0}$ auffassen lassen. Geht man aber umgekehrt von $S_{1,0}$ aus, so könnte das Quadrat des Linienelementes ds von $S_{1,0}$ sich auf verschiedene Arten in der Form

$$du^2 + U^2(u)\,dv^2$$

darstellen lassen. Zu jeder dieser Darstellungen gehörten dann die ∞^2 Flächen $S_{a,b}$, und es könnte daher Flächen $S_{1,0}$ geben, die mehr als ∞^2 Schraubenflächen zu Biegungsflächen haben.

Andererseits könnten sich unter den ∞^2 Flächen $S_{a,b}$ unendlich viele congruente oder ähnliche Flächen befinden, und dann ist es denkbar, dass man durch die Gleichungen $(S_{a,b})$ nur ∞^1 oder sogar nur eine endliche Anzahl von wesentlich verschiedenen Flächen erhält.

Um das erste Bedenken zu beseitigen, hat man die Gleichung

$$ds^2 = du^2 + U^2(u)\,dv^2 = du_1^{\,2} + U_1^{\,2}(u_1)\,dv_1^{\,2}$$

zu untersuchen, in der u_1 und v_1 unbekannte Functionen von u und v bedeuten. Aus der Invarianz des Gauss'schen Krümmungsmaasses folgt zunächst

$$\frac{1}{U}\,\frac{d^2U}{du^2} = \frac{1}{U_1}\,\frac{d^2U_1}{du_1^{\,2}},$$

und es ist daher entweder u_1 eine Function von u allein:

$$u_1 = f(u),$$

oder die Fläche $S_{1,0}$ ist von constantem Krümmungsmaass.

Hat man

$$u_1 = f(u),$$

so wird

$$dv_1^{\,2} = \frac{1-f'^2}{U_1^2(f)}\,du^2 + \frac{U^2}{U_1^2(f)}\,dv^2,$$

während andererseits

$$dv_1^{\,2} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\frac{\partial v_1}{\partial u}\,\frac{\partial v_1}{\partial v}\,du\,dv + \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

ist. Diese beiden Gleichungen sind nur dann mit einander verträglich, wenn v_1 eine Function von v allein wird:

$$v_1 = g(v),$$

und dann muss

$$1 - f'^2(u) = 0, \quad \frac{U^2(u)}{U_1^2(f)} = g'^2(v)$$

sein. Hieraus folgt sofort:

$$f(u) = \pm u + \text{const.}, \quad g(v) = av + a',$$

wo a und a' Constanten bedeuten, und es wird unbeschadet der Allgemeinheit

$$ds^2 = du^2 + U^2(u)\,dv^2 = du^2 + \frac{U^2(u)}{a^2}\,d(av)^2,$$

das heisst man erhält die Linienelemente, die zu den Minding'schen Biegungsflächen $S_{a,0}$ von $S_{1,0}$ gehören und die von dem Linienelemente der Fläche $S_{1,0}$ nicht wesentlich verschieden sind. Ist also das Krümmungsmaass dieser Fläche variabel, so gehören zu ihr nur die ∞^2 Schraubenflächen $S_{a,b}$.

Ist das Krümmungsmaass constant, und etwa

$$K = \frac{-1}{k^2},$$

so genügt U der Differentialgleichung:

$$U'' - k^2 U = 0,$$

aus der

$$U = c_1 e^{ku} + c_2 e^{-ku}$$

folgt; c_1 und c_2 sind die Integrationsconstanten. Da jedoch U nur bis auf eine multiplicative Constante bestimmt ist, so giebt es nur ∞^1 verschiedene Formen des Linienelementes der Fläche $S_{1,0}$. Zu jeder dieser ∞^1 Formen gehört eine Flächenschar $S_{a,b}$. Trotzdem giebt es nur ∞^2 Schraubenflächen constanten Krümmungsmaasses $K = \frac{-1}{k^2}$, die sich nach Minding durch die Gleichungen:

$$x = r\cos\psi,\quad y = r\sin\psi,\quad z = \int\sqrt{\frac{1}{a+k^2r^2} - 1 - \frac{h^2}{r^2}}\,dr + h\psi$$

darstellen lassen; a und h bedeuten willkürliche Constanten.

Es ist jedoch in diesem Falle nicht gleichgültig, von welcher der ∞^1 Formen des Linienelementes man ausgeht. Wählt man zum Beispiel

$$U = e^{ku},$$

so sind die Flächen $S_{a,0}$ alle congruent der Fläche, die durch Rotation der *Tractrix* um ihre Axe entsteht; es ergeben sich also auf diese Weise nur ∞^1 Schraubenflächen constanten Krümmungsmaasses

$$K = \frac{-1}{k^2}\,*).$$

Damit wird man auf das zweite Bedenken geführt, das sich demnach als begründet erweist. Soll die Schar der Flächen $S_{a,b}$ sich durch *Congruenz* auf ∞^1 Flächen reduciren, so ist leicht zu zeigen, dass diese Flächen ∞^2 Biegungen in sich gestatten müssen und daher von *constantem Krümmungsmaasse* sind. Soll dasselbe durch *Aehnlichkeit* eintreten, so müssen die Flächen $S_{a,b}$ gleichzeitig *Spiralflächen* sein und hierfür ist es nach Peterson, S. 76, nothwendig und hinreichend, dass ds^2 auf die Form

$$du^2 + u^{2m}\,dv^2$$

gebracht werden kann, wo m eine Constante bedeutet**). Ein Beispiel hierfür findet sich in Nr. 38.

§ 2.

18. Will man auf zwei Schraubenflächen $S_{a,b}$ und S_{a_1,b_1} das Verfahren von Peterson anwenden, so muss man zunächst das gemeinschaftliche conjugirte System dieser Biegungsflächen ermitteln und hat zu diesem Zwecke vor allem die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L, M, N von $S_{a,b}$ zu berechnen.

---

*) Man vergleiche Darboux, Leçons, t. I, S. 37.

**) Dieselbe Frage behandelt L. Raffy, Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égale courbure parallèles, Bulletin de la société mathématique, t. XX, 1892, S. 22.

Da in dem vorliegenden Falle nach (29):

$$EG - F^2 = U^2$$

ist, so kommt zunächst, wenn zur Abkürzung

$$\frac{v - \varphi(u)}{a} = \chi$$

gesetzt wird:

$$UN = \begin{vmatrix} a\frac{UU'}{\sqrt{U^2-b^2}}\cos\chi + \sqrt{U^2-b^2}\sin\chi\,\varphi' & -\sqrt{U^2-b^2}\sin\chi & -\sqrt{U^2-b^2}\,\frac{\cos\chi}{a} \\ a\frac{UU'}{\sqrt{U^2-b^2}}\sin\chi - \sqrt{U^2-b^2}\cos\chi\,\varphi' & +\sqrt{U^2-b^2}\cos\chi & -\sqrt{U^2-b^2}\,\frac{\sin\chi}{a} \\ \psi' & b & 0 \end{vmatrix},$$

und hieraus erhält man durch leichte Umformungen:

$$N = \frac{1}{a}\sqrt{U^2 - b^2 - a^2 U^2 U'^2}.$$

Entsprechend wird

$$UM =$$

$$\begin{vmatrix} a\frac{UU'}{\sqrt{U^2-b^2}}\cos\chi + \sqrt{U^2-b^2}\sin\chi\,\varphi' & -\sqrt{U^2-b^2}\sin\chi & -\frac{UU'}{\sqrt{U^2-b^2}}\sin\chi + \sqrt{U^2-b^2}\,\frac{\cos\chi}{a}\,\varphi' \\ a\frac{UU'}{\sqrt{U^2-b^2}}\sin\chi - \sqrt{U^2-b^2}\cos\chi\,\varphi' & +\sqrt{U^2-b^2}\cos\chi & +\frac{UU'}{\sqrt{U^2-b^2}}\cos\chi + \sqrt{U^2-b^2}\,\frac{\sin\chi}{a}\,\varphi' \\ \psi' & b & 0 \end{vmatrix}$$

und hieraus folgt:

$$M = \frac{1}{a}\cdot\frac{-b}{U}.$$

Die Berechnung von L geschieht jetzt zweckmässig mittelst der *Gauss'schen Relation:*

$$LN - M^2 = K(EG - F^2);$$

denn für K ergiebt sich aus (29) sofort der einfache Ausdruck:

(31) $$K = -\frac{U''}{U}.$$

Mithin wird

$$LN - M^2 = -UU''$$

und

$$L = \frac{1}{a}\frac{b^2 - a^2 U^3 U''}{U^2\sqrt{U^2 - b^2 - a^2 U^2 U'^2}}.$$

Man hat daher:

$$(32)\qquad \begin{cases} L = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{b^2 - a^2 U^3 U''}{U^2\sqrt{U^2 - b^2 - a^2 U^2 U'^2}}, \\[2ex] M = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{-b}{U}, \\[2ex] N = \dfrac{1}{a}\cdot\sqrt{U^2 - b^2 - a^2 U^2 U'^2}, \end{cases}$$

und entsprechende Gleichungen gelten für die Fundamentalgrössen L_1, M_1 und N_1 von S_{a_1,b_1}.

19. Nach diesen Vorbereitungen ergiebt sich für die Biegungslinien von $S_{a,b}$ und S_{a_1,b_1} die totale Differentialgleichung:

$$(\mathrm{I}_1.)\qquad \begin{vmatrix} du^2 & du\,dv & dv^2 \\ \sqrt{U^2 - b^2 - a^2 U^2 U'^2} & \dfrac{b}{U} & \dfrac{b^2 - a^2 U^3 U''}{U^2\sqrt{U^2 - b^2 - a^2 U^2 U'^2}} \\ \sqrt{U^2 - b_1^2 - a_1^2 U^2 U'^2} & \dfrac{b_1}{U} & \dfrac{b_1^2 - a_1^2 U^3 U''}{U^2\sqrt{U^2 - b_1^2 - a_1^2 U^2 U'^2}} \end{vmatrix} = 0,$$

die sich sofort in der Form

$$A(u)\,du^2 + 2B(u)\,du\,dv + C(u)\,dv^2 = 0$$

schreiben lässt; hierbei ist zu beachten, dass die Coefficienten A, B, C nur von u und nicht von v abhängen.

Soll der Coefficient $C(u)$ von dv^2 verschwinden, so muss

$$b_1^2(U^2 - b^2 - a^2 U^2 U'^2) = b^2(U^2 - b_1^2 - a_1^2 U^2 U'^2)$$

sein, woraus sofort

$$b_1^2 - b^2 = (a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2)\,U'^2$$

folgt. Nun sollte K nicht gleich Null sein, mithin ist nach (31) U' keine Constante, und daher für sich

$$b_1^2 - b^2 = 0 \quad\text{und}\quad a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2 = 0.$$

Diese Gleichungen erfordern, dass entweder

$$a^2 = a_1^2,\quad b^2 = b_1^2$$

ist, und dann sind die Flächen $S_{a,b}$ und S_{a_1,b_1} bis auf ihre Stellung im Raume mit einander identisch oder dass man

$$b = b_1 = 0$$

hat, und dann sind $S_{a,0}$ und $S_{a_1,0}$ Rotationsflächen. Die Gleichung (I_1) geht für

$$b = b_1 = 0$$

in

$$du\,dv = 0$$

über, es bilden also, wie ja von vorn herein zu erwarten war, die Meridiane und Parallelkreise das gemeinschaftliche conjugirte System aller Minding'schen Biegungsflächen $S_{a,0}$.

Schliesst man den Fall $b = b_1 = 0$ aus, so lässt sich die Gleichung (I_1) auf die Form:

(33) $$dv^2 + 2\mathfrak{A}(u)\,du\,dv + \mathfrak{B}(u)\,du^2 = 0$$

bringen, und ihre Integralgleichungen haben die Form:

$$\Phi(u) + v = \text{const.}$$

und

$$\Psi(u) - v = \text{const.}$$

Man darf also setzen:

(34) $$2p = \Phi(u) + v, \quad 2q = \Psi(u) - v.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$p + q = \frac{1}{2}\left(\Phi(u) + \Psi(u)\right),$$

und u ist daher eine Function von $p + q$ allein, etwa

(35) $$u = \mathfrak{f}(p+q).$$

Ferner wird

$$p - q = \frac{1}{2}\left(\Phi(u) - \Psi(u)\right) + v,$$

sodass man

(36) $$v = \mathfrak{g}(p+q) + p - q$$

setzen darf.

20. Es giebt jedoch einen Ausnahmefall, der, wie sich bald zeigen wird, wirklich eintreten kann. Er wird dadurch bedingt, dass die linke Seite der Gleichung (33) ein vollständiges Quadrat werden kann. Die beiden conjugirten Richtungen im Punkte u, v fallen dann zusammen, und die *einzige* Integralgleichung

$$\Phi(u) + v = \text{const.}$$

stellt die eine der beiden Scharen der asymptotischen Linien von $S_{a,b}$ und S_{a_1,b_1} dar. Das Verfahren von Peterson lässt sich in diesem Falle auf die Flächen $S_{a,b}$ und S_{a_1,b_1}, wenigstens direct, nicht anwenden; unter Umständen lässt sich jedoch das Zusammenfallen der beiden conjugirten Richtungen als *Grenzfall* auffassen, und dann gehören zu $S_{a,b}$ und S_{a_1,b_1} neue Flächenpaare Σ und Σ_1, deren gemeinschaftliches conjugirtes System wieder aus einer der beiden Scharen der asymptotischen Linien besteht (vergl. auch Peterson, S. 65, Fall $\mu = \nu$).

Ein Satz von Ossian Bonnet ermöglicht es jedoch, im Folgenden von diesem Ausnahmefalle gänzlich abzusehen. Wird die eine der beiden Scharen der asymptotischen Linien einer Fläche durch eine Biegung in eine Schar asymptotischer Linien einer anderen Fläche übergeführt, so sind nach dem Satze von Bonnet die beiden Biegungsflächen congruent oder symmetrisch, es sei denn, dass die Flächen geradlinig und die einander entsprechenden Asymptotencurven die erzeugenden Geraden sind*). Es sind aber bereits 1838 von Minding alle Biegungen einer geradlinigen Fläche in geradlinige Flächen bestimmt und später von Ossian Bonnet und Bour eingehend untersucht worden**).

21. Mittelst der Gleichungen (35) und (36) geht

$$du^2 + U^2(u)\,dv^2$$

in einen Ausdruck der Form

$$E(p+q)\,dp^2 + 2F(p+q)\,dp\,dq + G(p+q)\,dq^2 \tag{37}$$

über, wo E, F, G nur von $p+q$ abhängen. Die Biegungslinien von $S_{a,b}$ und S_{a_1,b_1}, $p = \text{const.}$ und $q = \text{const.}$ haben also die Eigenschaft, dass die zugehörigen Fundamentalgrössen bei geeigneter Wahl von p und q Functionen von $p+q$ allein werden.

Ist umgekehrt eine quadratische Differentialform ds^2 von der Gestalt (37) gegeben, so gehört sie, wie schon in Nr. 13 bemerkt wurde, einer Rotationsfläche an. Setzt man nämlich

$$p + q = \sigma, \quad p - q = \tau, \tag{26}$$

so wird

$$ds^2 = \mathfrak{E}(\sigma)\,d\sigma^2 + 2\mathfrak{F}(\sigma)\,d\sigma\,d\tau + \mathfrak{G}(\sigma)\,d\tau^2; \tag{38}$$

dabei ist

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}(\sigma) &= \tfrac{1}{4}(E+2F+G),\\ \mathfrak{F}(\sigma) &= \tfrac{1}{4}(E-G),\\ \mathfrak{G}(\sigma) &= \tfrac{1}{4}(E-2F+G). \end{aligned}\right. \tag{39}$$

Geht man bei der Durchführung des Verfahrens von Peterson von der Form (37) für ds^2 aus, so gewinnen die Gleichungen der Bour'schen Biegungsflächen eine sehr elegante Gestalt. Es wird

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\sqrt{\mathfrak{U}^2 - b^2}\cdot\cos\frac{\mathfrak{V} + p - q}{a},\\ y &= a\sqrt{\mathfrak{U}^2 - b^2}\cdot\cos\frac{\mathfrak{V} + p - q}{a},\\ z &= \mathfrak{W} + b(p-q), \end{aligned}\right. \tag{$S'_{a,b}$}$$

*) Man vergleiche Darboux, Leçons, t. III, S. 293, wo die Litteratur ausführlich angegeben ist.

**) Minding, Ueber die Biegung gewisser Flächen, Journal für Mathematik, Bd. 18. Berlin 1838. S. 297—302; Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces, Journal de l'École polytechnique, Cahier 32. Paris 1848. S. 111—124; Bour a. a. O. S. 31—65.

wo die Functionen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ von $p+q=\sigma$ den Gleichungen genügen müssen:

$$\frac{a^2\mathfrak{U}^2\mathfrak{U}'^2}{\mathfrak{U}^2-b^2}+(\mathfrak{U}^2-b^2)(\mathfrak{V}'+1)^2+(\mathfrak{W}'+b)^2=E,$$

$$\frac{a^2\mathfrak{U}^2\mathfrak{U}'^2}{\mathfrak{U}^2-b^2}+(\mathfrak{U}^2-b^2)(\mathfrak{V}'^2-1)+\mathfrak{W}'^2-b^2=F,$$

$$\frac{a^2\mathfrak{U}^2\mathfrak{U}'^2}{\mathfrak{U}^2-b^2}+(\mathfrak{U}^2-b^2)(\mathfrak{V}'-1)^2+(\mathfrak{W}'-b)^2=G.$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, stelle man sich nach (39) die Verbindungen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ her. Eine einfache Rechnung ergiebt dann:

$$(40)\begin{cases}\mathfrak{U}^2=\mathfrak{G},\\ \mathfrak{V}=\int\left\{\mathfrak{F}(\mathfrak{G}-b^2)-b\sqrt{(\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)(\mathfrak{G}-b^2)-\frac{1}{4}a^2\mathfrak{G}\mathfrak{G}'^2}\right\}\dfrac{d\sigma}{\mathfrak{G}(\mathfrak{G}-b^2)},\\ \mathfrak{W}=\int\left\{b\mathfrak{F}+\sqrt{(\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)(\mathfrak{G}-b^2)-\frac{1}{4}a^2\mathfrak{G}\mathfrak{G}'^2}\right\}\dfrac{d\sigma}{\mathfrak{G}};\end{cases}$$

der Quadratwurzel ist beide Male dasselbe Vorzeichen beizulegen.

22. Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, dass in (33):

$$\mathfrak{A}(u)=0$$

wird. Dann kommt:

$$(34')\qquad 2p=\Phi(u)+v,\qquad 2q=\Phi(u)-v,$$

und es wird daher:

$$(36')\qquad v=p-q.$$

Hieraus folgt aber

$$(37')\qquad E=\mathfrak{f}'^2+U^2,\quad F=\mathfrak{f}'^2-U^2,\quad G=\mathfrak{f}'^2+U^2,$$

$$(39')\qquad \mathfrak{E}=\mathfrak{f}'^2,\qquad \mathfrak{F}=0,\qquad \mathfrak{G}=U^2$$

und

$$(40')\qquad\begin{cases}\mathfrak{V}=-b\int\sqrt{\mathfrak{f}'^2(U^2-b^2)-a^2U^2U'^2}\cdot\dfrac{d\sigma}{U(U^2-b^2)},\\ \mathfrak{W}=\int\sqrt{\mathfrak{f}'^2(U^2-b^2)-a^2U^2U'^2}\cdot\dfrac{d\sigma}{U};\end{cases}$$

in diesen Gleichungen bedeutet der Strich die Ableitung nach

$$\sigma=p+q.$$

Berechnet man ferner die Christoffel'schen Symbole, so wird:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\frac{E'}{E+F}=\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{f}'\mathfrak{f}''+UU'}{\mathfrak{f}'^2}=\chi(p+q),$$

und es tritt daher nach Nr. 13 an die Stelle der Gleichungen (II.) die Gleichung:

$$(24'') \qquad \frac{\partial^2\Omega}{\partial p\,\partial q} - \chi(p+q)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \frac{\partial\Omega}{\partial q}\right) = 0,$$

von der man sofort das particuläre Integral

$$\Omega = H = \int e^{2\int \chi(\sigma)\,d\sigma}\,d\sigma$$

angeben kann. Mithin wird

$$(22') \qquad P = e^{-2\int \chi(\sigma)\,d\sigma}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial p}, \qquad Q = e^{-2\int\chi(\sigma)\,d\sigma}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial q}.$$

Die Invarianten der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (24″) sind einander gleich:

$$h = k = \chi^2 - \chi'.$$

Man wird daher:

$$(41) \qquad \Omega = e^{\int\chi(\sigma)\,d\sigma}\cdot\Theta$$

setzen, wodurch (24″) in die *harmonische Gleichung* *)

$$(42) \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q} = (\chi^2 - \chi')\Theta = \varphi(p+q)\Theta$$

übergeht.

§ 3.

23. Die Betrachtungen in Nr. 15 führen zu der Frage, welche Schraubenflächen $S_{a,b}$ sich in stetiger Weise so biegen lassen, dass ein conjugirtes System von $S_{a,b}$ conjugirt bleibt; diese Frage hat einen Sinn, da bei den Minding'schen Biegungsflächen $S_{a,0}$ die Krümmungslinien während der Biegung erhalten bleiben.

Soll $S_{a,b}$ die verlangte Eigenschaft besitzen, so muss es zwei Biegungsflächen von $S_{a,b}$: S_{a_1,b_1} und S_{a_2,b_2} geben, die der Gleichung:

$$(\mathrm{A.}) \qquad \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Setzt man hierin aus (32) die Werthe der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung ein, so ergiebt sich nach leichten Umformungen die Bedingungsgleichung:

$$(\mathrm{B.}) \qquad \begin{vmatrix} b\sqrt{U^2 - b^2 - a^2\,U^2U'^2} & U^2 - b^2 - a^2\,U^2U'^2 & b^2 - a^2\,U^3U'' \\ b_1\sqrt{U^2 - b_1^2 - a_1^2\,U^2U'^2} & U^2 - b_1^2 - a_1^2\,U^2U'^2 & b_1^2 - a_1^2\,U^3U'' \\ b_2\sqrt{U^2 - b_2^2 - a_2^2\,U^2U'^2} & U^2 - b_2^2 - a_2^2\,U^2U'^2 & b_2^2 - a_2^3\,U^3U'' \end{vmatrix} = 0,$$

*) Vergleiche Darboux, Leçons, t. II. S. 43 und S. 192.

die augenscheinlich die triviale Lösung

$$b = b_1 = b_2 = 0$$

zulässt.

In der Gleichung (B.) sind a, b; a_1, b_1; a_2, b_2 Constanten, und U bedeutet eine Function von u, die von diesen Constanten unabhängig ist. Man darf unbeschadet der Allgemeinheit den Constanten a_1, b_1 und a_2, b_2 feste Werthe beilegen und hat dann zu untersuchen, wie a und b variiren dürfen und wie U beschaffen sein muss, damit (B.) besteht. Es wird sich herausstellen, dass zwischen a und b eine Relation von ganz bestimmter Form bestehen muss und dass alsdann U als Function von u durch eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt wird.

24. Es soll zunächst gezeigt werden, dass die Gleichung (B.) nicht bestehen kann, wenn a und b beide für sich als unabhängige Veränderliche angesehen werden, sondern dass zwischen a und b eine Relation bestehen muss.

Entwickelt man nach den Elementen der ersten Zeile, so geht (B.) über in:

$$(\mathrm{B}'.)\quad \lambda b\sqrt{U^2-b^2-a^2U^2U'^2}+\mu(U^2-b^2-a^2U^2U'^2)+\nu(b^2-a^2U^3U'')=0,$$

wo die Multiplicatoren λ, μ, ν von u allein abhängen und die Constanten a und b nicht enthalten. Beseitigt man jetzt die Quadratwurzel und setzt zur Abkürzung

$$a^2 = \alpha,\quad b^2 = \beta,$$

so ergiebt sich an Stelle von (B'.) die Gleichung:

$$(\mathrm{C}.)\quad \begin{cases} 0=\mu^2U^4-2\mu U^4(\mu U'^2+\nu UU'')\alpha-U^2\big(\lambda^2+2\mu(\mu-\nu)\big)\beta \\ \quad +U^4(\mu U'^2+\nu UU'')^2\alpha^2 \\ \quad +U^2\big(\lambda^2U'^2+2(\mu-\nu)(\mu U'^2+UU'')\big)\alpha\beta+\big(\lambda^2+(\mu-\nu)^2\big)\beta^2. \end{cases}$$

Soll (C.) bestehen, indem α und β unabhängig von einander variiren, so müsen alle sechs Coefficienten identisch verschwinden. Es ist mithin zuerst $\mu=0$, dann $\lambda=0$ und schliesslich $\nu=0$. Das bedeutet aber, dass die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von S_{a_1,b_1} den entsprechenden Grössen von S_{a_2,b_2} proportional sind, was nur möglich ist, wenn diese Flächen durch eine Bewegung oder durch eine Bewegung und eine Spiegelung in einander übergeführt werden können*).

*) Einen einfachen Beweis dieses Satzes, den zuerst wohl Ossian Bonnet (1861) ausgesprochen hat, findet man in meiner Abhandlung: Ueber Abbildungen, diese Annalen Bd. 44, S. 562.

Damit ist bewiesen, dass höchstens die eine der Grössen α und β als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden kann. Die andere wird dann durch die Gleichung (C.) als Function der ersten bestimmt. Da α und β von u unabhängig sind, darf man dieser Veränderlichen in (C.) einen beliebigen festen Werth beilegen und erkennt, dass die Abhängigkeit zwischen α und β durch eine Gleichung vermittelt wird, die wegen der besonderen Natur der Coefficienten in (C.) auf die Form:

(D.) $$0 = \mathfrak{a}^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{c}\alpha + 2\mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}^2\alpha^2 + 2\mathfrak{d}\alpha\beta + \mathfrak{e}\beta^2$$

gebracht werden kann, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ Constanten bedeuten.

Bestimmt man hieraus, je nach der Beschaffenheit dieser Constanten, α als Function von β oder β als Function von α und setzt diese Werthe in (C.) ein, so resultirt eine algebraische Gleichung beziehungsweise für β oder α, die identisch bestehen muss, wenn diese Grösse eine unabhängige Veränderliche sein soll. Diese Forderung liefert eine Reihe von Bedingungsgleichungen für U, die jedoch, was sehr merkwürdig ist, in allen Fällen sich auf eine einzige Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen lassen.

25. Bei der Durchführung des soeben auseinandergesetzten Untersuchungsverfahrens ist es vortheilhaft zu unterscheiden, ob in (B'.) λ gleich Null oder von Null verschieden ist.

Für $\lambda = 0$ geht (B'.) in eine lineare Gleichung zwischen α und β über, es wird:

(B''.) $$U^2(\mu U'^2 + \nu U U'')\alpha + (\mu - \nu)\beta - \mu U^2 = 0,$$

und es ist daher, vorausgesetzt dass $\mu U'^2 + UU'$ nicht identisch verschwindet:

$$\alpha = \mathfrak{a}\beta + \mathfrak{b}.$$

Setzt man diesen Werth von α in (B''.) ein, so wird die linke Seite eine lineare Function von β, deren Coefficienten identisch verschwinden müssen. Es ist also:

$$\mathfrak{a}U^2(\mu U'^2 + \nu U U'') + \mu - \nu = 0,$$
$$\mathfrak{b}(\mu U'^2 + \nu U U'') - \mu = 0,$$

und da λ, μ, ν nicht alle drei gleichzeitig verschwinden dürfen, so folgt hieraus für U die Differentialgleichung:

(43) $$U(\mathfrak{b} + \mathfrak{a}U^2)U'' = 1 - \mathfrak{b}U'^2,$$

deren Integration keine Schwierigkeiten hat.

Man erhält aus (43), wenn $\mathfrak{b} \neq 0$ ist,

$$u = \int \frac{\mathfrak{b}\, U\, dU}{\sqrt{(1 - c\mathfrak{a})U^2 - c\mathfrak{b}}},$$

wo c eine Integrationsconstante bedeutet. Ist $c = \frac{1}{\mathfrak{a}}$ so wird:

$$U^2 = 2\frac{u-c'}{\sqrt{-\mathfrak{a}\mathfrak{b}}};$$

ist dagegen $c \neq \frac{1}{\mathfrak{a}}$ so wird:

$$U^2 = \frac{1-c\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}^2}(u-c')^2 + \frac{c\mathfrak{b}}{1-c\mathfrak{a}}.$$

Verschwindet aber $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a}$ von Null verschieden, damit λ, μ, ν nicht gleichzeitig verschwinden, und man erhält

$$u = \int \frac{\sqrt{\mathfrak{a}}\, U\, dU}{\sqrt{cU^2-1}}.$$

Ist $c = 0$, so wird

$$U^2 = 2\frac{u-c'}{\sqrt{-\mathfrak{a}}};$$

ist dagegen $c \neq 0$, so wird

$$U^2 = \frac{c}{\mathfrak{a}}(u-c')^2 + \frac{1}{c};$$

c' bedeutet immer eine neue willkürliche Constante.

Folgende fast selbstverständliche Bemerkung ermöglicht es, diese Ausdrücke für U^2 erheblich zu vereinfachen. Führt man nämlich in

(29) $$ds^2 = du^2 + U^2(u)\,dv^2$$

neue Veränderliche u_1 und v_1 durch die Gleichungen ein:

(44) $$u = mu_1 + m', \quad v = nv_1 + n',$$

wo $m, m'; n, n'$ Constanten bedeuten, so wird

$$ds^2 = m^2\left(du_1^2 + \frac{n^2}{m^2}U^2(mu_1+m')\,dv_1^2\right) = m^2\left(du_1^2 + U_1^2(u_1)\,dv_1^2\right).$$

Man darf daher unbeschadet der Allgemeinheit $U^2(u)$ durch

$$\frac{n^2}{m^2}U^2(mu+m')$$

ersetzen.

Thut man das, so ergeben sich bei geeigneter Bestimmung von m, m', n die beiden einfachen Ausdrücke:

$$U^2 = u$$

und

$$U^2 = u^2 + 1.$$

Wird in (43) $U^2 = u$ gesetzt, so erfordert das identische Bestehen dieser Gleichung, dass

$$\mathfrak{a} = -4$$

ist, während $\mathfrak{b}$ beliebig bleibt. Setzt man noch

$$\mathfrak{b} = 4\varkappa^2,$$

so ergiebt sich als *erste Lösung der Bedingungsgleichung* (B.):

(45) $$a^2 = 4(\varkappa^2 - b^2), \quad U^2 = u;$$

es ist leicht, die Richtigkeit dieser Lösung durch unmittelbares Einsetzen in (B.) nachzuweisen.

In ähnlicher Weise muss für $U^2 = u^2 + 1$, damit (43) besteht:

$$\mathfrak{b} = 1 - \mathfrak{a}$$

sein, während $\mathfrak{a}$ beliebig bleibt. Setzt man noch

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{1 - \varkappa^2},$$

so ergiebt sich als *zweite Lösung der Bedingungsgleichung* (B.):

$$(46) \qquad a^2 = \frac{b^2 - \varkappa^2}{1 - \varkappa^2}, \qquad U^2 = u^2 + 1;$$

auch diese Lösung lässt sich sofort verificiren*).

26. Die noch zu erledigende Annahme, dass

$$\mu U'^2 + \nu U U'' = 0$$

ist, führt nicht auf etwas Neues. In diesem Falle wird α die unabhängige Veränderliche, und β hat den constanten Werth β_0, der durch die Gleichung:

$$\beta_0 = \frac{\mu U^2}{\mu - \nu} = \frac{U^2 U''}{UU'' + U'^2}$$

bestimmt ist. Die Function $U(u)$ genügt daher der Differentialgleichung

$$(43') \qquad UU''(U^2 - \beta_0) = \beta_0 U^2.$$

Man darf wieder unbeschadet der Allgemeinheit

$$U^2 = u^2 + 1$$

setzen und findet aus (43'), dass

$$\beta_0 = 1$$

sein muss. Nun war vorher nach (46):

$$(1 - \varkappa^2)\, a^2 = b^2 - \varkappa^2;$$

die soeben gefundene Lösung geht daher aus (46) hervor, wenn man $\varkappa = 1$ werden lässt.

---

*) Man könnte zwar die beiden Lösungen (45) und (46) formal in die *eine* zusammenfassen:

$$a^2 = \mathfrak{a} b^2 + \mathfrak{b}, \qquad (AC - B^2)\,\mathfrak{a} = 1 - \mathfrak{b} A, \qquad U^2 = Au^2 + 2Bu + C,$$
$$(AC - B^2 \neq 0),$$

die genauere Untersuchung würde indessen sofort die Sonderung der beiden Fälle $A \neq 0$ und $A = 0$ bedingen, die zu wesentlich verschiedenen Flächentypen führen (vergl. Abschnitt III).

§ 4.

27. Nachdem nunmehr der Fall $\lambda = 0$ erledigt ist, darf man die rechte Seite der Gleichung (C.) durch λ dividiren oder auch, was auf eine Aenderung der Bezeichnungsweise hinauskommt, in (C.) $\lambda = 1$ setzen. Auf diese Weise entsteht die Gleichung:

$$
(\mathrm{C}'.)\left\{\begin{aligned}
0 = {} & \mu^2 U^4 - 2\mu U^4(\mu U'^2 + \nu U U'')\,\alpha - U^2\big(1 + 2\mu(\mu - \nu)\big)\beta \\
& + U^4(\mu U'^2 + \nu U U'')^2 \alpha^2 \\
& + U^2\big(U'^2 + 2(\mu - \nu)(\mu U'^2 + \nu U U'')\big)\,\alpha\beta + \big(1 + (\mu - \nu)^2\big)\beta^2,
\end{aligned}\right.
$$

die α als Function der unabhängigen Veränderlichen β definirt. Wäre nämlich β oder α constant, so würde aus (C'.) sofort $U'' = 0$ folgen, während die Flächen vom Krümmungsmaasse Null ausgeschlossen sein sollten.

Ist zunächst

$$\mu U'^2 + \nu U U'' \neq 0,$$

so folgt aus (C'.) durch Auflösung nach α:

$$
(47)\left\{\begin{aligned}
\alpha = {} & \frac{1}{U^2(\mu U'^2 + \nu U U'')^2}\Big\{\mu U^2(\mu U'^2 + \nu U U'') - \big(\tfrac{1}{2} U'^2 + (\mu - \nu)(\mu U'^2 + \nu U U'')\big)\beta \\
& \pm \sqrt{\nu U^3 U''(\mu U'^2 + \nu U U'')\beta + \big(\tfrac{1}{4} U'^2 - \nu(U'^2 + U U'')(\mu U'^2 + \nu U U'')\big)\beta^2}\Big\}
\end{aligned}\right.
$$

oder abgekürzt:

$$\alpha = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}\beta \pm \sqrt{\mathfrak{h}\beta + \mathfrak{i}\beta^2}. \tag{48}$$

Differentiirt man diese Gleichung nach u, so kommt, da α und β von u unabhängig sind:

$$0 = \mathfrak{f}' + \mathfrak{g}'\beta \pm \frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{h}'\beta + \mathfrak{i}'\beta^2}{\sqrt{\mathfrak{h}\beta + \mathfrak{i}\beta^2}},$$

und es ist daher

$$0 = 4(\mathfrak{f}' + \mathfrak{g}'\beta)^2(\mathfrak{h}\beta + \mathfrak{i}\beta^2) - (\mathfrak{h}'\beta + \mathfrak{i}\beta^2)^2.$$

Da diese ganze rationale Function vierten Grades von β identisch verschwinden muss, so ist zunächst

$$4\mathfrak{f}'^2\mathfrak{h} = 0,$$

also entweder $\mathfrak{f}' = 0$ oder $\mathfrak{h} = 0$. Es lässt sich aber zeigen, dass

$$\mathfrak{h} = \frac{\nu U''}{U(\mu U'^2 + \nu U U'')^3}$$

nicht identisch verschwinden kann. Aus $\mathfrak{h} = 0$ folgt nämlich $\nu = 0$, und dann ergiebt die Gleichung (47), jenachdem der Quadratwurzel das positive oder negative Vorzeichen gegeben wird:

$$\alpha = \frac{1}{U'^2} - \frac{1}{U^2 U'^2} \cdot \beta$$

oder

$$\alpha = \frac{1}{U'^2} - \frac{1+\mu^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{U^2 U'^2} \cdot \beta.$$

Nun müssen die Coefficienten dieser beiden linearen Functionen von β constant sein, mithin ist in beiden Fällen gegen die Voraussetzung $U'' = 0$.

Demnach ist $\mathfrak{f}' = 0$. Setzt man jetzt der Reihe nach die Coefficienten von β^2, β^3 und β^4 gleich Null, so kommt $\mathfrak{h}' = 0$, $\mathfrak{g}' = 0$, $\mathfrak{i}' = 0$, es sind daher die vier Ausdrücke $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}$ von u unabhängig, also gleich Constanten, die gerade mit $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}$ bezeichnet werden sollen. Um diese Constanten durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ auszudrücken, braucht man nur (D.) nach α aufzulösen, und das Ergebniss mit (48) zu vergleichen. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$(49) \qquad \mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}}, \quad \mathfrak{g} = -\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{c}^2}, \quad \mathfrak{h} = -2 \cdot \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}^3}, \quad \mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{d}^2 - \mathfrak{c}^2\mathfrak{e}}{\mathfrak{c}^4}.$$

Es ist jedoch vortheilhaft zunächst die Grössen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{i}$ beizubehalten und erst in dem Schlussergebnisse die Transformation (49) auszuführen.

28. Die Vergleichung von (47) und (48) liefert nunmehr die vier Bedingungsgleichungen:

$$(50) \qquad \mathfrak{f}(\mu U'^2 + \nu U U'') = \mu,$$

$$(51) \quad \mathfrak{g} U^2 (\mu U'^2 + \nu U U'')^2 = -\tfrac{1}{2} U'^2 - (\mu - \nu)(\mu U'^2 + \nu U U''),$$

$$(52) \quad \mathfrak{h} U^3 (\mu U'^2 + \nu U U'')^3 = \nu U^2 U'',$$

$$(53) \quad \mathfrak{i} U^4 (\mu U'^2 + \nu U U'')^4 = +\tfrac{1}{4} U'^4 - \nu (U'^2 + U U'')(\mu U'^2 + \nu U U''),$$

aus denen μ und ν zu eliminiren sind, was am einfachsten folgendermaassen geschieht.

Aus (50) folgt durch Potenziren

$$\mathfrak{f}^3 (\mu U'^2 + \nu U U'')^3 = \mu^3.$$

Setzt man diesen Werth von $(\mu U'^2 + \nu U U'')^3$ in (52) ein, so wird

$$\mathfrak{h} \mu^3 U = \mathfrak{f}^3 \nu U'',$$

und schreibt man jetzt (50) in der Form:

$$\mathfrak{f}^3 \mu U'^2 + \mathfrak{f}^3 \nu U U'' = \mathfrak{f}^2 \mu,$$

so ergiebt sich für μ die Gleichung:

$$(54) \qquad \mu (\mathfrak{f}^3 U'^2 - \mathfrak{f}^2 + \mathfrak{h} \mu^2 U^2) = 0.$$

Ist $\mu = 0$, so ist nach (50) auch $\mathfrak{f} = 0$ und umgekehrt. Dann wird aus (52):

$$\nu^2 = \frac{1}{\mathfrak{h} U^4 U''^2};$$

wäre nämlich $\nu = 0$, so würde gegen die Voraussetzung $\mu U'^2 + \nu U U'$ verschwinden. Setzt man diese Werthe von μ und ν in (51) und (53) ein, so ergeben sich für U die beiden Differentialgleichungen:

$$(51') \qquad U^3\left(\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{h} U'^2\right) U'' - 1 = 0,$$

$$(53') \qquad U\left(\mathfrak{h} + \mathfrak{i} U^2 - \tfrac{1}{4}\mathfrak{h}^2 U^2 U'^4\right) U'' + \mathfrak{h} U'^2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Elimination von U'':

$$(55) \qquad \tfrac{1}{4}\mathfrak{h}^2 U^2 U'^4 + \mathfrak{g}\mathfrak{h} U^2 U'^2 + \mathfrak{i} U^2 + \mathfrak{h} = 0,$$

und nunmehr zeigt eine einfache Rechnung die merkwürdige Thatsache, dass die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung (51′) und (53′) eine Folge der Differentialgleichung erster Ordnung (55) sind.

Man genügt also für $\mu = 0$ der Gleichung (B.) durch:

$$\alpha = \mathfrak{g}\beta \pm \sqrt{\mathfrak{h}\beta + \mathfrak{i}\beta^2}, \qquad \tfrac{1}{4}\mathfrak{h}^4 U^2 U'^4 + \mathfrak{g}\mathfrak{h} U^2 U'^2 + \mathfrak{i} U^2 + \mathfrak{h} = 0;$$

dabei sind $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ willkürliche Constanten.

Ist $\mu \neq 0$, so wird nach (54):

$$(54') \qquad \mu^2 = \frac{\mathfrak{f}^2(1 - \mathfrak{f} U'^2)}{\mathfrak{h} U^2}.$$

Nun war

$$\mathfrak{h}\mu^3 U = \nu \mathfrak{f}^3 U'',$$

mithin wird

$$\mu . \nu = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{h}} \cdot \frac{(1 - \mathfrak{f} U'^2)^2}{U^3 U''};$$

es genügt für die folgenden Rechnungen $\mu . \nu$ zu kennen, da ν nur in dieser Verbindung auftritt, sobald man noch die Gleichung

$$\mu U'^2 + \nu U U'' = \frac{\mu}{\mathfrak{f}}$$

zu Hilfe nimmt. Mittelst dieser Gleichungen gehen (51) und (53) über in die Differentialgleichungen für U:

$$(51'') \quad \left[\left(\tfrac{1}{2}\mathfrak{h} - \mathfrak{f}\mathfrak{g}\right) U^2 U'^2 - \mathfrak{f}^2 U'^2 + \mathfrak{g} U^2 + \mathfrak{f}\right] U U'' - (1 - \mathfrak{f} U'^2)^2 = 0,$$

$$(53'') \quad \left[\left(\tfrac{1}{4}\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{f}^2\mathfrak{i}\right) U'^4 + (2\mathfrak{f}\mathfrak{i} U'^2 - \mathfrak{i}) U^2 - \mathfrak{h}(1 - \mathfrak{f} U'^2)^2\right] U U'' - \mathfrak{h} U'^2 (1 - \mathfrak{f} U'^2)^2 = 0.$$

Hieraus folgt durch Elimination von U'':

$$(55') \quad \left(\tfrac{1}{4}\mathfrak{h}^2 - \mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h} + \mathfrak{f}^2\mathfrak{i}\right) U^2 U'^4 + (\mathfrak{g}\mathfrak{h} - 2\mathfrak{f}\mathfrak{i}) U^2 U'^2 - \mathfrak{f}\mathfrak{h} U'^2 + \mathfrak{i} U^2 + \mathfrak{h} = 0,$$

und nunmehr ergiebt sich wiederum, dass die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung (51″) und (53″) eine Folge der Differentialgleichung erster Ordnung (55′) sind.

Man genügt also der Gleichung (B.), wenn

$$\alpha = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}\beta \pm \sqrt{\mathfrak{h}\beta + \mathfrak{i}\beta^2}$$

gesetzt wird, und wenn gleichzeitig U ein Integral der Differentialgleichung (55') ist.

In dieser Lösung der Gleichung (B.) ist auch der Fall $\mu = 0$ enthalten. Setzt man nämlich $\mathfrak{f} = 0$, so wird nach (54') auch $\mu = 0$, und es geht gleichzeitig die Differentialgleichung (55') genau in die Differentialgleichung (55) über.

29. Es bleibt übrig, die Annahme

$$\mu U'^2 + \nu U U'' = 0$$

zu untersuchen. In diesem Falle geht die Gleichung (C'.) über in:

$$\text{(C''.)} \quad 0 = \mu^2 U^4 - U^2\big(1 + 2\mu(\mu - \nu)\big)\beta + U^2 U'^2 \alpha\beta + \big(1 + (\mu - \nu)^2\big)\beta^2.$$

Ist $\mu = 0$, so genügt man dieser Gleichung durch

$$\beta = 0.$$

U bleibt dann ganz willkürlich, und es ergeben sich auf diese Weise die Minding'schen Biegungsflächen $S_{\alpha,0}$.

Ist $\mu \neq 0$, so darf (C''.) in die Gleichung

$$\alpha = -\frac{\mu^2 U^2}{U'^2} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{1 + 2\mu(\mu - \nu)}{U'^2} - \frac{1 + (\mu - \nu)^2}{U^2 U'^2} \cdot \beta$$

übergeführt werden. Man beweist sofort, dass die Coefficienten der rechten Seite Constanten sein müssen, und es ist vortheilhaft

$$\alpha = -\mathfrak{k}\frac{1}{\beta} + 2\mathfrak{l} - \mathfrak{m}\beta$$

zu setzen.

Es ist leicht, die Constanten $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ auszudrücken. Ist nämlich $\mu U'^2 + \mu U U'' = 0$, so zeigt (C.), dass $\mathfrak{c} = 0$ wird, sodass (D.) in die Gleichung:

$$\text{(D'.)} \qquad 0 = \mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{b}\beta + 2\mathfrak{d}\alpha\beta + \mathfrak{e}\beta^2$$

übergeht, aus der

$$\alpha = -\frac{\mathfrak{a}^2}{2\mathfrak{d}} \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}} - \frac{\mathfrak{e}}{2\mathfrak{d}}\beta$$

folgt. Mithin ist:

$$(56) \qquad \mathfrak{k} = \frac{\mathfrak{a}^2}{2\mathfrak{d}}, \quad \mathfrak{l} = -\frac{\mathfrak{b}}{2\mathfrak{d}}, \quad \mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{e}}{2\mathfrak{d}};$$

von diesen Gleichungen wird jedoch erst später Gebrauch gemacht werden.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$\mu U'^2 + \nu U U'' = 0, \tag{57}$$

$$\mathfrak{k} U'^2 = \mu^2 U^2, \tag{58}$$

$$2\mathfrak{l} U'^2 = 1 + 2\mu(\mu - \nu), \tag{59}$$

$$\mathfrak{m} U^2 U'^2 = 1 + (\mu - \nu)^2, \tag{60}$$

aus denen μ und ν zu eliminiren sind. Aus (58) folgt

$$\mu = \sqrt{\mathfrak{k}} \cdot \frac{U'}{U},$$

und da $\mathfrak{k} \neq 0$ ist, darf man (59) umformen in

$$\mu - \nu = \frac{2\mathfrak{l} U'^2 - 1}{2\sqrt{\mathfrak{k}} U'} \cdot U.$$

Vermöge dieser Gleichungen gehen (57) und (60) über in die Differentialgleichungen für U:

$$(2\mathfrak{l} U^2 U'^2 - 2\mathfrak{k} U'^2 - U^2)\, U U'' - 2\mathfrak{k} U'^4 = 0, \tag{57'}$$

$$4(\mathfrak{l}^2 - \mathfrak{k}\mathfrak{m})\, U^2 U'^4 - 4\mathfrak{l} U^2 U'^2 + 4\mathfrak{k} U'^2 + U^2 = 0. \tag{60'}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass (57′) eine Folge von (60′) ist, sodass U nur der Differentialgleichung (60′) zu genügen braucht.

Die Gleichung (B.) ist also befriedigt, wenn man

$$\alpha = -\mathfrak{k}\frac{1}{\beta} + 2\mathfrak{l} - \mathfrak{m}\beta$$

setzt und gleichzeitig für U ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung (60′) wählt.

30. Die in der vorhergehenden Nummer gewonnenen Lösungen der Gleichung (B.) sind in der Lösung enthalten, die in Nr. 27 gefunden wurde. Um das nachzuweisen, braucht man nur in den Gleichungen (55′) und (60′) mittelst der Relationen (49) und (56) die Constanten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ einzuführen. Es ergeben sich dann die Gleichungen:

$$(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2\mathfrak{e})\, U^2 U'^4 + 2(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\mathfrak{d})\, U^2 U'^2 + 2\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c})\, U'^2 + (\mathfrak{d}^2 - \mathfrak{c}^2\mathfrak{e})\, U^2 - 2\mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = 0 \tag{55''}$$

und

$$(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2\mathfrak{e})\, U^2 U'^4 + 2\mathfrak{b}\mathfrak{d}\, U^2 U'^2 + 2\mathfrak{a}^2\mathfrak{d}\, U'^2 + \mathfrak{d}^2 U^2 = 0, \tag{60''}$$

und es ist unmittelbar ersichtlich, dass (55″) in (60″) übergeht, wenn

$$\mathfrak{c} = 0$$

wird. Genau dasselbe gilt aber für die zugehörigen Relationen zwischen α und β:

$$0 = \mathfrak{a}^2 - 2\mathfrak{a}\mathfrak{c}\alpha + 2\mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}^2\alpha^2 + 2\mathfrak{d}\alpha\beta + \mathfrak{e}\beta^2 \tag{D.}$$

und

$$0 = \mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{b}\beta + 2\mathfrak{d}\alpha\beta + \mathfrak{e}\beta^2, \tag{D'.}$$

mithin ist die Lösung (D'.) und (60″) in der Lösung (D.) und (55″) enthalten.

Setzt man ferner

$$\mathfrak{a} = 0, \quad \mathfrak{b} = 0, \quad \mathfrak{c} = 0, \quad \mathfrak{d} = 0,$$

während $\mathfrak{e}$ beliebig bleibt, so besteht (55″) identisch für jede Function U, während (D.) in

$$\mathfrak{e}\beta^2 = 0$$

übergeht. Also ist auch der Fall der Minding'schen Biegungsflächen als Grenzfall in der Lösung (D.) und (55″) enthalten, *die demnach sämmtliche Möglichkeiten umfasst, die für* $\lambda \neq 0$ *eintreten können.* Sie soll daher als die *allgemeine Lösung* der Gleichung (B.) bezeichnet werden.

§ 5.

31. Es entsteht jetzt die Frage, ob nicht auch die beiden Lösungen, die für $\lambda = 0$ gefunden wurden:

(45) $$\alpha = 4(\varkappa^2 - \beta), \qquad U^2 = u$$

und

(46) $$\alpha = \frac{\beta - \varkappa^2}{1 - \varkappa^2}, \qquad U^2 = u^2 + 1$$

in der allgemeinen Lösung enthalten sind. Soll das der Fall sein, so müssen zunächst die Constanten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ in (D.) so gewählt werden, dass zwischen α und β eine *lineare* Relation besteht, die Gleichung (D.) muss also reducibel werden. Die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist, dass die Gleichung $\mathfrak{h} = 0$ oder nach (49):

(61) $$\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 0$$

erfüllt ist; ist jedoch $\mathfrak{c} = 0$, so muss gleichzeitig $\mathfrak{a} = 0$ gesetzt werden. Dann geht aber (55″) über in:

$$(\mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2\mathfrak{e})\, U'^4 + 2(\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\mathfrak{d})\, U'^2 + \mathfrak{d}^2 - \mathfrak{c}^2\mathfrak{e} = 0,$$

und es ist entweder, gegen die Voraussetzung, $U'' = 0$ oder U bleibt beliebig, und man erhält die Minding'schen Biegungsflächen.

Demnach sind die beiden Lösungen (45) und (46) in der allgemeinen Lösung nicht enthalten. Sie sollen daher als die *singulären Lösungen* der Gleichung (B.) bezeichnet werden.

32. Die singulären Lösungen der Gleichung (B.) sind von der allgemeinen wesentlich verschieden. Dies darzuthun dient folgende Betrachtung.

Schreibt man die Gleichung (55″) in der Form:

(U.) $$p\,U^2 U'^4 + 2q\,U^2 U'^2 + 2r\,U'^2 + s\,U^2 - 2t = 0,$$

so bestehen zwischen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ einerseits und p, q, r, s, t andererseits die fünf Relationen:

$$(62)\qquad \begin{cases} p = \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^2\mathfrak{e}, & s = \mathfrak{d}^2 - \mathfrak{c}^2\mathfrak{e}, \\ r = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}), & t = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c}), \\ & q = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{e} + \mathfrak{b}\mathfrak{d}, \end{cases}$$

die sich nach $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ auflösen lassen. Setzt man zur Abkürzung

$$(63)\qquad w^2 = pt^2 + 2qrt + r^2 s = (\mathfrak{a}\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\mathfrak{c})^4,$$

so ergeben sich die eleganten Formeln:

$$(64)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}^2 = \frac{r^2}{w}, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{c} = \frac{rt}{w}, \qquad \mathfrak{c}^2 = \frac{t^2}{w}, \\ \mathfrak{b} = \frac{pt+qr}{w}, \qquad \mathfrak{d} = \frac{qt+rs}{w}, \\ \mathfrak{e} = \frac{q^2-ps}{w}, \end{cases}$$

mit deren Hilfe (D.) in die Gleichung:

$$(E.)\quad r^2 - 2rt\alpha + 2(pt+qr)\beta + t^2\alpha^2 + 2(qt+rs)\alpha\beta + (q^2-ps)\beta^2 = 0$$

übergeht.

Die Grösse w erlangt jetzt eine zweifache Bedeutung: Dass $w \neq 0$ ist, stellt nicht nur die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Irreducibilität von (E.), sondern auch, wie man sich leicht überzeugt, von (U.) dar, wenn man (U.) als Gleichung für U' im Rationalitätsbereiche (U) ansieht*).

Nach dieser Vorbereitung lässt sich das Gesammtergebniss der Untersuchungen dieses Abschnittes folgendermassen darstellen:

Unter den ∞^2 Schraubenflächen $S_{a,b}$, für die

$$ds^2 = du^2 + U^2(u)\,dv^2$$

ist und deren Krümmungsmaass nicht verschwindet, giebt es stets eine Schar von ∞^1 Flächen, die sich mit Erhaltung eines conjugirten Systemes in einander biegen lassen, nämlich die Minding'schen Rotationsflächen $S_{a,0}$, im Allgemeinen aber nicht mehr. Genügt jedoch U der Differentialgleichung:

$$(U.)\quad pU^2U'^4 + 2qU^2U'^2 + 2rU'^2 + sU^2 - 2t = 0,$$

in der die Constanten p, q, r, s, t bis auf die Beschränkung willkürlich sind, dass

$$pt^2 + 2qrt + r^2 s \neq 0$$

sein soll, so kommt unter den ∞^2 Flächen $S_{a,b}$ noch einer zweiten

*) Von Interesse erscheint auch, dass w eine *Invariante* gegenüber der Transformation von $U(u)$ in $\frac{n^2}{m^2}\,U(mu + m')$ ist (vergl. Nr. 25).

Schar von ∞^1 Flächen diese Eigenschaft zu, und zwar sind diese Flächen durch die irreducible Gleichung:

$$(\mathrm{E.})\quad r^2-2rta^2+2(pt+qr)b^2+t^2a^4+2(qt+rs)a^2b^2+(q^2-ps)b^4=0$$

bestimmt und lassen sich daher als Biegungsflächen der Rotationsfläche $S_{a,0}$ auffassen, bei der

$$a^2=\frac{r}{t}$$

ist.

Ganz anders verhalten sich die Schraubenflächen, deren Linienelement ds durch

$$ds^2=du^2+u\,dv^2$$

oder

$$ds^2=du^2+(u^2+1)\,dv^2$$

gegeben wird. Zwar genügt U auch bei ihnen der Gleichung (U.), man braucht dazu nur beziehungsweise

$$r=-\tfrac{1}{8}p,\qquad s=0,\qquad t=\tfrac{1}{4}q$$

und

$$r=\tfrac{1}{2}p,\qquad s=-(p+2q),\qquad t=-\tfrac{1}{2}(p+2q)$$

zu setzen, jedoch wird für diese Werthe der Constanten r, s, t beide Male

$$pt^2+2qrt+r^2s=0,$$

was sonst nur für $K=0$ eintritt. Ferner sind a und b beziehungsweise durch die Relationen:

$$a^2=4(\varkappa^2-b^2)$$

und

$$a^2=\frac{b^2-\varkappa^2}{1-\varkappa^2}$$

verbunden, in denen $\varkappa$ eine willkürliche Constante bedeutet, und diese Gleichungen besagen, dass *eine jede dieser Schraubenflächen $S_{a,b}$ die Eigenschaft besitzt, sich stetig mit Erhaltung eines conjugirten Systemes biegen zu lassen.* Legt man nämlich den Constanten a und b beliebige Werthe a_0 und b_0 bei, so braucht man $\varkappa^2$ nur beziehungsweise aus den Gleichungen:

$$a_0^2=4(\varkappa^2-b_0^2)$$

oder

$$a_0^2=\frac{b_0^2-\varkappa^2}{1-\varkappa^2}$$

zu bestimmen, um die betreffende Schar von ∞^1 Biegungsflächen der Fläche S_{a_0,b_0} zu erhalten. Unter diesen ∞^1 Biegungsflächen befindet sich immer eine *Rotationsfläche* $S_{a_0,0}$, die als *Repräsentant der Schar* dienen kann, und indem man a_0 variirt, erhält man die ∞^1 Scharen von ∞^1 Biegungsflächen, die zusammen *alle* ∞^2 Flächen $S_{a,b}$ ausmachen.

§ 6.

33. Um die Untersuchung der Gleichung (B.) abzuschliessen, hat man noch die Differentialgleichung

$$(U.)\qquad pU^2U'^4 + 2qU^2U'^2 + 2rU'^2 + sU^2 - 2t = 0$$

zu integriren. Die Constanten p, q, r, s, t sind dabei nur der Beschränkung unterworfen, dass der Ausdruck

$$pt^2 + 2qrt + r^2s$$

von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung ist (U.), als Gleichung für U' angesehen, im Rationalitätsbereiche (U) irreducibel. Macht man aber die Substitution

$$(65)\qquad U^2 = \frac{(q^2 - ps)V^2 - r^2}{2(pt + qr) - 2(q^2 - ps)V},$$

so ergiebt sich für V' eine Gleichung vierten Grades, die im Rationalitätsbereiche (V) in zwei Factoren zweiten Grades zerfällt, deren Coefficienten rationale Functionen von V, p, q, r, s, t und $\sqrt{q^2 - ps}$ sind. In Betreff der adjungirten Grösse $\sqrt{q^2 - ps}$ soll festgesetzt werden, dass ihr Vorzeichen durch die Gleichung

$$\lim_{p=0} \sqrt{q^2 - ps} = +q$$

festgelegt ist. Setzt man noch zur Abkürzung

$$\Omega = (q^2 - ps)^2 \frac{\left((q^2 - ps)V^2 - 2(pt + qr)V + r^2\right)^2}{\left(2(pt + qr) - 2(q^2 - ps)V\right)^3} V'^2,$$

so lautet die Gleichung für V':

$$(V.)\left\{\begin{aligned} 0 = \Big[&p\Omega + (q^2 - ps)\left(q + \sqrt{q^2 - ps}\right)V^2 - 2\left(r(q^2 - ps) + (pt + qr)\sqrt{q^2 - ps}\right)V \\ &\qquad + r\left(2pt + qr + r\sqrt{q^2 - ps}\right)\Big] \\ \times \Big[&p\Omega + (q^2 - ps)\left(q - \sqrt{q^2 - ps}\right)V^2 - 2\left(r(q^2 - ps) - (pt + qr)\sqrt{q^2 - ps}\right)V \\ &\qquad + r\left(2pt + qr - r\sqrt{q^2 - ps}\right)\Big];\end{aligned}\right.$$

die beiden Factoren gehen durch Vertauschung von $+\sqrt{q^2 - ps}$ und $-\sqrt{q^2 - ps}$ in einander über. Durch Einführung des Werthes von Ω ergiebt sich aus $(V.)$ für V' die Gleichung:

$$(V'.)\qquad V' = \frac{2(pt + qr) - 2(q^2 - ps)V}{(q^2 - ps)\left((q^2 - ps)V^2 - 2(pt + qr)V + r^2\right)}\sqrt{R},$$

wo die ganze rationale Function R durch die Gleichung:

$$R = \frac{2}{p}\left[(q^2 - ps)\,V - (pt + qr)\right]$$
$$\times\left[(q^2 - ps)(q \pm \sqrt{q^2 - ps})\,V^2 - 2\left(r(q^2 - ps) \pm (pt + qr)\sqrt{q^2 - ps}\right)V\right.$$
$$\left. + r(2pt + qr \pm r\sqrt{q^2 - ps})\right]$$

bestimmt ist. Die Ermittelung von V führt also im Allgemeinen auf ein elliptisches Integral dritter Gattung, und durch V ist alsdann auch U gegeben.

34. Die Gleichung (V'.) bleibt auch für den Grenzfall

$$p = 0$$

brauchbar, wenn man in R der Wurzel $\sqrt{q^2 - ps}$ das negative Vorzeichen giebt und in dem zweiten Factor die Division durch p ausführt. Es ist jedoch vortheilhafter in diesem Falle direct die Gleichung (U.) zu behandeln.

Ebenso wenig schadet es, wenn

$$q^2 - ps = 0$$

wird. Man hat dann nur in (65):

$$\sqrt{q^2 - ps}\cdot V = W$$

zu setzen und dann zur Grenze für $q^2 - ps = 0$ überzugehen. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$(65') \qquad U^2 = \frac{W^2 - r^2}{2(pt + qr)}$$

und

$$(\mathrm{W}'.) \qquad W' = \frac{1}{W}\sqrt{\frac{-2}{p}(pt + qr)(W \pm r)\left(W \pm (2pt + qr)\right)}.$$

Schwierigkeiten entstehen nur, wenn gleichzeitig

$$pt + qr = 0$$

ist. Aus den beiden linearen homogenen Gleichungen für p und q:

$$s\cdot p - q\cdot q = 0,$$
$$t\cdot p + r\cdot q = 0$$

folgt aber, dass entweder $p = 0$ und $q = 0$ oder $qt + rs = 0$ ist. Nun sollte

$$pt^2 + 2qrt + r^2 s = t(pt + qr) + r(qt + rs)$$

von Null verschieden sein, folglich kann $qt + rs$ nicht identisch verschwinden, und es ist

$$p = 0, \quad q = 0.$$

In diesem Falle, der besonders behandelt werden muss, wird aus (U.):

$$2rU'^2 + sU^2 - 2t = 0,$$

und es ist $r^2 s \neq 0$. Durch Differentiation folgt hieraus

$$2rU'' + sU = 0,$$

und das hat zur Folge, dass

$$K = -\frac{U''}{U} = \frac{s}{2r}$$

ist; demnach ergeben sich die von Minding entdeckten *Schraubenflächen constanten Krümmungsmaasses.* Es sei also

$$K = \frac{-1}{k^2}.$$

Dann darf unbeschadet der Allgemeinheit

$$(66) \qquad U = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{k}} - e^{-\frac{u}{k}}\right)$$

gesetzt werden, und daher wird

$$r = 1, \quad s = -\frac{2}{k^2}, \quad t = \frac{1}{k^2},$$

sodass zwischen a und b die Gleichung

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{k} - \frac{k}{a}\right)$$

besteht. Mithin ist $S_{k,0}$ die repräsentirende Rotationsfläche der Schar.

Ist $q^2 - ps = 0$, so lässt sich, wie die Gleichungen (W'.) und (66) zeigen, die Integration von (U.) durch elementare Functionen ausführen. Damit das überhaupt eintritt, muss entweder der Grad von R sich erniedrigen oder R muss einen quadratischen Factor besitzen. Die genauere Untersuchung zeigt, dass dies ausser für $q^2 - ps = 0$ nur noch für $s = 0$ und $t = 0$ eintritt, und zwar erhält man die Formeln:

(a) Ist $s = 0$ und wählt man in R das *positive* Vorzeichen, so kommt:

$$V' = \frac{\left(2(pt+qr) - 2q^2V\right)^2}{q^2\left(q^2V^2 - 2(pt+qr)V + r^2\right)}\sqrt{\frac{qV-r}{p}};$$

wählt man aber das negative Vorzeichen, so ergiebt sich:

$$V' = \frac{4(pt+qr) - 4q^2V}{q^2\left(q^2V^2 - 2(pt+qr)V + r^2\right)}\sqrt{t\left(q^2V - (pt+qr)\right)(qV+r)}.$$

(b) Ist $t = 0$, so kommt in beiden Fällen:

$$V' = \frac{\left(2qr - 2(q^2-ps)V\right)\left(r \mp \sqrt{q^2-ps}\,V\right)}{(q^2-ps)\left((q^2-ps)V^2 - 2(pt+qr)V + r^2\right)}\sqrt{\left(q \pm \sqrt{q^2-ps}\right)\left((q^2-ps)V - qr\right)}.$$

Auf die Durchführung der Integration soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

III.

Ueber neue Biegungen, die aus den Biegungen der Schraubenflächen hervorgehen.

§ 1.

35. Im Folgenden soll das Verfahren von Peterson bei den Scharen von Biegungsflächen durchgeführt werden, die sich im Abschnitte II. ergeben haben. An erster Stelle kommen hierfür die Minding'schen Biegungsflächen $S_{a,0}$ oder kürzer S_a in Betracht, bei denen das gemeinschaftliche conjugirte System aus den *Krümmungslinien* besteht. Man erhält aus ihnen eine neue Schar von Biegungsflächen Σ_a, bei denen das gemeinschaftliche conjugirte System wieder aus den Krümmungslinien besteht.

Die Flächen S_a lassen sich (vergl. Nr. 16) durch die Gleichungen

$$(S_a.)\quad x_a = ap\cos\frac{q}{a},\qquad y_a = ap\sin\frac{q}{a},\qquad z_a = \int\sqrt{1-a^2+f'^2(p)}\,dp$$

darstellen, aus denen

$$ds^2 = dx_a^2 + dy_a^2 + dz_a^2 = \left(1+f'^2(p)\right)dp^2 + p^2dq^2$$

folgt. Es ist also

$$E = 1 + f'^2(p),\qquad F = 0,\qquad G = p^2,$$

und die Gleichungen (II.) gehen über in die Gleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 0,\qquad \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{1}{p}(Q-P) = 0.$$

Mithin wird P eine Function von p allein, die man zweckmässig mit $\lambda'(p)$ bezeichnet, und Q genügt der linearen Differentialgleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{Q}{p} = \frac{\lambda'(p)}{p},$$

deren allgemeines Integral

$$Q = \frac{\lambda(p)+\mu(q)}{p}$$

ist, wo auch $\mu(q)$ eine willkürliche Function ihres Argumentes bezeichnet.

Setzt man diese Werthe in (2.) ein, so ergiebt die Ausführung der Quadraturen:

$$(\Sigma_a.)\quad \begin{cases} \xi_a = a\lambda(p)\cos\frac{q}{a} - \int\sin\frac{q}{a}\cdot\mu(q)\,dq, \\ \eta_a = a\lambda(p)\sin\frac{q}{a} + \int\cos\frac{q}{a}\cdot\mu(q)\,dq, \\ \zeta_a = \int\sqrt{1-a^2+f'^2(p)}\,.\,\lambda'(p)\,dp, \end{cases}$$

und es wird:

$$d\sigma^2 = d\xi_a^2 + d\eta_a^2 + d\zeta_a^2 = \big(1+f'^2(p)\big)\,\lambda'^2(p)\,dp^2 + \big(\lambda(p)+\mu(q)\big)^2 dq^2.$$

Zur Vereinfachung führe man statt p und q neue Veränderliche

$$p_1 = \lambda(p), \qquad q_1 = q$$

ein, wodurch ja die Biegungslinien nicht geändert werden. Dann kommt:

$$(\Sigma_a'.)\quad \begin{cases} \xi_a = ap_1 \cos\frac{q_1}{a} - \int \sin\frac{q_1}{a}\,.\,\mu(q_1)\,dq_1, \\ \eta_a = ap_1 \sin\frac{q_1}{a} + \int \cos\frac{q_1}{a}\,.\,\mu(q_1)\,dq_1, \\ \zeta_a = \int \sqrt{1-a^2+f_1'^2(p_1)}\,dp_1 \end{cases}$$

und

$$d\sigma^2 = \big(1+f_1'^2(p_1)\big)\,dp_1^2 + \big(p_1+\mu(q_1)\big)^2\,dq_1^2.$$

Auf diese Weise erhält man aus der *Rotationsfläche* S_1 und ihren Minding'schen Biegungsflächen S_a die *Gesimsfläche* (surface moulure) Σ_1 und ihre Bour'schen Biegungsflächen Σ_a*), und es zeigt sich, dass die Gesimsflächen, welche die Rotationsflächen als besonderen Fall umfassen, in stetiger Weise mit Erhaltung der Krümmungslinien gebogen werden können (vergl. Peterson, S. 61—63).

36. Man kann nunmehr auf die Biegungsflächen Σ_a das Verfahren von Peterson anwenden, und hat dann von den Gleichungen:

$$(\bar{S}_a.)\quad \begin{cases} \bar{x}_a = ap \cos\frac{q}{a} - \int \sin\frac{q}{a}\,.\,\mu(q)\,dq, \\ \bar{y} = ap \sin\frac{q}{a} + \int \cos\frac{q}{a}\,.\,\mu(q)\,dq, \\ \bar{z}_a = \int \sqrt{1-a^2+f'^2(p)}\,dp \end{cases}$$

auszugehen. Dabei ist

$$d\bar{s}^2 = \big(1+f'^2(p)\big)\,dp^2 + \big(p+\mu(q)\big)^2\,dq^2,$$

also

$$\bar{E} = 1+f'^2(p), \qquad \bar{F} = 0, \qquad \bar{G} = \big(p+\mu(q)\big)^2.$$

Mithin werden die Gleichungen (II.):

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} + (Q-P)\,\frac{\partial \log\big(p+\mu(q)\big)}{\partial p} = 0,$$

woraus durch Integration

$$P = \varrho'(p), \qquad Q = \frac{\varrho(p)+\sigma(q)}{p+\mu(q)}$$

folgt; $\varrho(p)$ und $\sigma(q)$ bedeuten willkürliche Functionen ihrer Argumente.

*) Peterson übersetzt (S. 62) surface moulure mit Mühlenfläche; er scheint moulure und moulin verwechselt zu haben.

Setzt man diese Werthe in (2) ein, so ergiebt die Ausführung der Quadraturen:

$$(\overline{\Sigma}_a.)\quad\begin{cases}\overline{\xi}_a = a\varrho(p)\cos\frac{q}{a} - \int\sin\frac{q}{a}\,.\,\sigma(q)\,dq,\\ \overline{\eta}_a = a\varrho(p)\sin\frac{q}{a} + \int\cos\frac{q}{a}\,.\,\sigma(q)\,dq,\\ \overline{\zeta}_a = \int\sqrt{1-a^2+f'^2(p)}\cdot\varrho'(p)\,dp,\end{cases}$$

sodass die Flächen $\overline{\Sigma}_a$ in ihrer Gesammtheit mit den Flächen Σ_a identisch sind. *Die Flächen Σ_a sind also, in ihrer Gesammtheit betrachtet, gegenüber der Transformation* (2) *invariant.*

Dieses Ergebniss liess sich von vornherein erwarten. Codazzi hat nämlich im Jahre 1857 nach den Flächen gefragt, die in stetiger Weise mit Erhaltung der Krümmungslinien gebogen werden können, und gefunden, dass diese Eigenschaft allein den Gesimsflächen und den Flächen vom Krümmungsmaasse Null zukommt; aber erst Bour hat 1861 die betreffenden Biegungen wirklich angegeben.

§ 2.

37. Bei dem *ersten singulären Falle* ist

$$(45)\qquad a^2 = 4(\varkappa^2 - b^2),\qquad U^2 = u,\qquad ds^2 = du^2 + u\,dv^2,$$

und es ergeben sich daher die Schraubenflächen:

$$(\mathfrak{S}_I.)\quad\begin{cases}x = 2\sqrt{\varkappa^2-b^2}\sqrt{u-b^2}\cos\frac{v-\varphi(u)}{2\sqrt{\varkappa^2-b^2}},\\ y = 2\sqrt{\varkappa^2-b^2}\sqrt{u-b^2}\sin\frac{v-\varphi(u)}{\sqrt{\varkappa^2-b^2}},\\ z = \psi(u) + bv,\end{cases}$$

wo

$$\varphi(u) = \int\sqrt{\frac{u-\varkappa^2}{u}}\cdot\frac{b\,du}{u-b^2},\qquad \psi(u) = \int\sqrt{\frac{u-\varkappa^2}{u}}\,du$$

zu setzen ist. Sie sind Biegungsflächen der Rotationsfläche

$$x = u\cos v,\qquad y = u\sin v,\qquad z = \int\sqrt{u-\frac{1}{r}}\,\frac{du}{\sqrt{u}},$$

die durch Umdrehung der *Evolute einer Kettenlinie* um die Axe dieser Curve erzeugt wird. *Sämmtliche* Biegungsflächen dieser Rotationsfläche sind von Weingarten bestimmt worden; vergl. auch Darboux, Leçons, t. III, S. 234 und S. 331 und t. IV, S. 326.

Legt man der Constanten $\varkappa$ einen festen Werth bei, so stellen die Gleichungen ($\mathfrak{S}_I$.) eine Schar von ∞^1 Schraubenflächen dar, die mit Erhaltung eines conjugirten Systemes in einander gebogen werden können. Um ihre Hauptbiegungslinien zu bestimmen, hat man die Differentialgleichung (I.) zu integriren, die vermöge (45) in die Gleichung

$$dv^2 - \frac{\varkappa^2}{u(u-\varkappa^2)}\,du^2 = 0$$

übergeht. Mithin ist $\mathfrak{A} = 0$, und es tritt der in Nr. 22 behandelte Fall ein. Werden noch an Stelle von p und q neue Veränderliche p_1 und q_1 durch die Gleichungen

$$p = +2i\varkappa p_1, \qquad q = -2i\varkappa q_1$$

eingeführt, so findet man:

$$u = \varkappa^2 \cos^2(p_1 - q_1), \qquad v = 2i\varkappa(p_1 + q_1) \tag{67}$$

und

$$ds^2 = -4\varkappa^4\cos^4(p_1 - q_1)(dp_1 - dq_1)^2 - 16\varkappa^4\cos^2(p_1 - q_1)\,dp_1\,dq_1. \tag{68}$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 = -\cot(p_1 - q_1), \qquad \left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 = +\cot(p_1 - q_1).$$

Wird daher in den Gleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} + (P - Q)\left\{ {12 \atop 1} \right\}_1 = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p_1} + (Q - P)\left\{ {12 \atop 2} \right\}_1 = 0 \tag{II.}$$

die Substitution:

$$P = \frac{\partial R}{\partial p_1}, \qquad Q = \frac{\partial R}{\partial q_1}$$

gemacht, so lassen sich diese Gleichungen durch die *eine* lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p_1 \partial q_1} - \cot(p_1 - q_1)\left(\frac{\partial R}{\partial p_1} - \frac{\partial R}{\partial q_1}\right) = 0$$

ersetzen. Die Invarianten dieser Gleichung sind:

$$h = k = +1,$$

sie wird daher durch die Substitution:

$$R = \sin(p_1 - q_1) \, . \, S$$

in die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p_1 \partial q_1} = S$$

übergeführt, deren allgemeines Integral bekannt ist.

Hiermit ist folgendes Theorem gewonnen: „*Jedem Integrale der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p_1\,\partial q_1} = S$$

lässt sich mittelst blosser Quadraturen eine Schar von ∞^1 *Biegungsflächen zuordnen, deren Linienelement* ds *durch die Gleichungen:*

$$ds^2 = -A\left[A P^2 dp_1^2 + 2(A - 4\varkappa^2) PQ\, dp_1\, dq_1 + A Q^2 dq_1^2\right],$$
$$A = 2\varkappa^2 \cos^2(p_1 - q_1),$$
$$P = \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\sin(p_1 - q_1) \cdot S\right), \quad Q = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sin(p_1 - q_1) \cdot S\right)$$

gegeben wird. Die Curven $p_1 = const.$ *und* $q_1 = const.$ *sind Hauptbiegungslinien".*

Die Curven $p_1 =$ const. und $q_1 =$ const. besitzen eine interessante Eigenschaft: sie sind gleichzeitig *geodätische Linien.* Um das nachzuweisen hat man nach Nr. 9 die Grössen

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1$$

zu bilden. Eine einfache Rechnung zeigt dann, dass diese beiden Grössen identisch verschwinden.

38. Die Gleichungen ($\mathfrak{S}_I$.) geben noch zu folgender Bemerkung Anlass. Setzt man:

$$x = \varkappa^2 x_1, \quad y = \varkappa^2 y_1, \quad z = \varkappa^2 z_1 \tag{69}$$

und gleichzeitig:

$$u = \varkappa^2 u_1, \quad v = \varkappa v_1, \quad b = \varkappa b_1, \tag{70}$$

so kommt:

$$(\mathfrak{S}_I'.)\qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{1 - b_1^2}\,\sqrt{u_1 - b_1^2} \cdot \cos\frac{v_1 - \varphi_1(u_1)}{2\sqrt{1 - b_1^2}}, \\ y_1 &= 2\sqrt{1 - b_1^2}\,\sqrt{u_1 - b_1^2} \cdot \sin\frac{v_1 - \varphi_1(u_1)}{2\sqrt{1 - b_1^2}}, \\ z_1 &= \psi_1(u_1) + b_1 v_1, \end{aligned} \right.$$

und hierin ist

$$\varphi_1(u_1) = \int \sqrt{\frac{u_1 - 1}{u_1}}\, \frac{b_1\, du_1}{u_1 - b_1^2},$$
$$\psi_1(u_1) = \int \sqrt{\frac{u_1 - 1}{u_1}}\, du_1,$$

sodass x_1, y_1, z_1 nur von b_1, nicht mehr von $\varkappa$ abhängen; sie gehen für $\varkappa = 1$ in x, y, z über. Für den vorliegenden Zweck genügt es daher, die Schar der ∞^1 Schraubenflächen $\mathfrak{S}_I'$ zu betrachten, aus denen durch die *Aehnlichkeitstransformation* (69) die ∞^2 Schraubenflächen $\mathfrak{S}_I$ hervorgehen. Seine Erklärung findet dieses Verhalten der Flächen $\mathfrak{S}_I$ in dem Umstande, dass alle Linienelemente ds, die durch

$$ds^2 = du^2 + u^{2m} dv^2$$

gegeben werden, gleichzeitig den *Rotationsflächen* und den *Spiralflächen* angehören (vergl. Nr. 17).

§ 3.

39. Von weit grösserem Interesse als der erste ist der *zweite singuläre Fall*, da er zu Biegungen einer Flächenclasse führt, welche die *Minimalflächen* als besondere Art in sich enthält.

Aus den Gleichungen:

$$(46) \qquad a^2 = \frac{b^2 - \varkappa^2}{1 - \varkappa^2}, \quad U^2 = u^2 + 1, \quad ds^2 = du^2 + (u^2+1)\,dv^2$$

ergeben sich die Schraubenflächen:

$$(\mathfrak{S}_{II}.) \qquad \begin{cases} x = a\sqrt{u^2 + 1 - b^2} \cdot \cos \dfrac{v - \varphi(u)}{a}, \\ y = a\sqrt{u^2 + 1 - b^2} \cdot \sin \dfrac{u - \varphi(u)}{a}, \\ z = \psi(u) + bv, \end{cases}$$

wo

$$\varphi(u) = bb'\int \sqrt{\frac{1 + \frac{u^2}{\varkappa'^2}}{1 + u^2}} \cdot \frac{du}{u + b'^2},$$

$$\psi(u) = b'\int \sqrt{\frac{1 + \frac{u^2}{\varkappa'^2}}{1 + u^2}} \cdot du$$

und

$$\varkappa'^2 = 1 - \varkappa^2, \qquad b'^2 = 1 - b^2$$

zu setzen ist. Sie sind Biegungsflächen der Rotationsfläche:

$$x = \sqrt{u^2 + 1}\cos v, \quad y = \sqrt{u^2 + 1}\sin v, \quad z = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}},$$

die durch Umdrehung der *Kettenlinie:*

$$x = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

um ihre Axe, die z-Axe, erzeugt wird. Diese Fläche ist das aus der Theorie der Minimalflächen wohlbekannte *Catenoid*. Es liess sich voraussehen, dass es bei der vorliegenden Untersuchung eine Rolle spielen würde, denn die durch Biegung des Catenoids entstehenden *Minimalschraubenflächen* *) haben augenscheinlich die Eigenschaft mit Erhaltung eines conjugirten Systemes, nämlich des Systemes der

*) Nach Bour sind diese Flächen zuerst von Catalan untersucht worden (a. a. O. S. 101).

erzeugenden Minimalcurven, in einander gebogen werden zu können. Sie werden erhalten, wenn man der Constanten $\varkappa$ den ausgezeichneten Werth ∞ beilegt. Ihre Gleichungen sind also:

$$(\mathrm{M.})\qquad \begin{cases} x = \sqrt{u^2 + b'^2}\cos\big(v - \varphi(u)\big), \\ y = \sqrt{u^2 + b'^2}\cos\big(v - \varphi(u)\big), \\ z = \psi(u) + bv, \end{cases}$$

wo

$$\varphi(u) = bb'\int\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,\frac{du}{u^2+b'^2},\qquad \psi(u) = b'\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

zu setzen ist.

Ausser für $\varkappa = \infty$ gehen die elliptischen Integrale in $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ auch für

$$\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad \varkappa = 1$$

in elementare Integrale über. Gerade die drei Flächenscharen, die den ausgezeichneten Werthen

$$\varkappa = 0,\ 1,\ \infty$$

entsprechen, waren schon bekannt, sie sind von Peterson als Beispiele für Schraubenflächen angegeben worden, die sich stetig mit Erhaltung eines conjugirten Systems biegen lassen (vergl. S. 65 und 66). Im Folgenden sollen zunächst diese drei besonderen Fälle untersucht und dann der allgemeine Fall behandelt werden.

40. Ist $\varkappa = 0$, so wird $a = b$ und daher $b^2 - a^2 U^3 U'' = 0$, sodass die Differentialgleichung (I.) in

$$dv^2 = 0$$

übergeht. Man überzeugt sich leicht davon, dass die Curven $v = \text{const.}$ gerade Linien sind, denn die Gleichungen der Flächen $S_{a,a}$ lassen sich auf die in u lineare Form bringen:

$$(S_{a,a}.)\qquad \begin{cases} x = a\left(\sqrt{1-a^2}\cos\frac{v}{a} + u\sin\frac{v}{a}\right), \\ y = a\left(\sqrt{1-a^2}\sin\frac{v}{a} - u\cos\frac{v}{a}\right), \\ z = \sqrt{1-a^2}\,.\,u + av. \end{cases}$$

Für die Durchführung des Verfahrens von Peterson ist dieser Fall nicht brauchbar.

41. Ist $\varkappa = 1$, so wird $b = 1$, während a beliebig bleibt. Die Differentialgleichung (I.) geht in die Gleichung:

$$dv^2 = \frac{du^2}{u^2(u^2+1)}$$

über, und es tritt daher der in Nr. 22 behandelte Fall $\mathfrak{A}=0$ ein. Werden noch an Stelle von p und q neue Veränderliche p_1 und q_1 durch die Gleichungen

$$p=ip_1,\qquad q=iq_1$$

eingeführt, so findet man

$$u=\frac{i}{\sin(p_1+q_1)},\quad v=i(p_1-q_1)$$

und

$$ds^2=-A^2(dp_1+dq_1)^2-4A\,dp_1\,dq_1,\quad A=\cot^2(p_1+q_1).$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1=-\cot(p_1+q_1),$$

und es wird daher:

$$(71)\qquad\begin{cases}P=\sin^2(p_1+q_1)\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial p_1},\quad Q=\sin^2(p_1+q_1)\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial q_1},\\[2mm]\Omega=\dfrac{\Theta}{\sin(p_1+q_1)},\\[2mm]\dfrac{\partial^2\Theta}{\partial p_1\,\partial q_1}+\Theta=0.\end{cases}$$

Damit ist die Integration der Differentialgleichungen (II.) auf die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial p_1\,\partial q_1}+\Theta=0$$

zurückgeführt, die als erledigt gelten kann. Man hat daher, indem man zu den Veränderlichen p und q zurückgeht, das Theorem:

„*Jedem Integrale der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial p\,\partial q}=\Theta$$

lässt sich mittelst blosser Quadraturen eine Schar von ∞^1 *Biegungsflächen zuordnen, deren Linienelement ds durch die Gleichungen* (68) *und*

$$ds^2=A^2P^2\,dp^2+2(A^2+2A)PQ\,dp\,dq+A^2Q^2\,dq^2$$

gegeben wird. Die Linien $p=$ *const. und* $q=$ *const. sind Hauptbiegungslinien*".

Die Hauptbiegungslinien $p=$ const. und $q=$ const. besitzen eine interessante Eigenschaft, auf die schon Peterson aufmerksam gemacht hat: sie sind gleichzeitig *geodätische Linien*. Um dies nachzuweisen, hat man nach Nr. 9 zu zeigen, dass

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=0\quad\text{und}\quad\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0$$

ist, und das geschieht am einfachsten in der Art, dass man, von der quadratischen Differentialform

$$A^2(dp+dq)^2 + 2cA\,dp\,dq, \quad A = A(p+q)$$

ausgehend, diese Christoffel'schen Symbole bildet. Es stellt sich dann heraus, dass identisch

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

ist, gleichgültig, was für eine Function von $p+q$ A ist und was für eine Constante c man gewählt hat.

42. Ist $\varkappa = \infty$, so wird $a = 1$, während b beliebig bleibt. Die Differentialgleichung (I.) geht über in die Gleichung:

$$dv^2 = -\frac{du^2}{u^2+1},$$

sodass wiederum der Fall $\mathfrak{A} = 0$ eintritt. Man findet weiter

$$(72) \qquad u = i \sin(p+q), \qquad v = p - q$$

und

$$ds^2 = -4\cos^2(p+q)\,dp\,dq,$$

sodass $E = G = 0$ und daher auch

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

ist. Hierdurch wird bestätigt, dass die Flächen $S_{1,b}$ *Minimalflächen* sind, und es ergiebt sich gleichzeitig aus Nr. 10, dass die Flächen Σ, die das Verfahren von Peterson liefert, wieder Minimalflächen sein müssen.

Führt man vermöge der Gleichungen (70) in die Gleichungen (M.) der Minimalschraubenflächen an Stelle von u und v die conjugirten Veränderlichen p und q ein, so ergiebt eine leichte Umformung:

$$(\mathrm{M}'.) \qquad \begin{cases} x = \frac{i}{2}(e^{ic}\cos 2p - e^{-ic}\cos 2q), \\ y = \frac{i}{2}(e^{ic}\sin 2p + e^{-ic}\sin 2q), \\ z = \quad e^{ic}p - e^{-ic}q, \end{cases}$$

worin c eine willkürliche Constante bedeutet. Ferner gehen die Gleichungen (II.) über in die einfachen Gleichungen:

$$\frac{\partial P}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = 0,$$

aus denen sofort

$$P = \varrho'(p), \qquad Q = \sigma'(q)$$

folgt; $\varrho(p)$ und $\sigma(q)$ bedeuten willkürliche Functionen ihrer Argumente. Mithin werden die Flächen Σ durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$(\mathrm{M}'.)\quad\begin{cases}\xi = i\left(-e^{ic}\int \sin 2p\,.\,\varrho'(p)\,dp + e^{-ic}\int \sin 2q\,.\,\sigma'(q)\,dq\right).\\ \eta = i\left(+e^{ic}\int \cos 2p\,.\,\varrho'(p)\,dp + e^{-ic}\int \cos 2q\,.\,\sigma'(q)\,dq\right),\\ \zeta = e^{ic}\varrho(p) - e^{-ic}\sigma(q).\end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen sämmtliche Minimalflächen dar und setzen zugleich in Evidenz, dass jede Minimalfläche stetig gebogen werden kann, ohne ihre Minimaleigenschaft zu verlieren).*

43. Zum Schlusse dieses Abschnittes soll der allgemeine Fall betrachtet werden, von dem die Fälle $\varkappa = 0,\ 1,\ \infty$ ausgezeichnete Grenzfälle sind. Wird zur Abkürzung

$$1 - \varkappa^2 = \varkappa'^2$$

gesetzt, so lautet die Differentialgleichung des gemeinsamen conjugirten Systems (I.):

$$dv^2 = \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}\,\frac{du^2}{(1+u^2)\left(1+\frac{u^2}{\varkappa'^2}\right)},$$

sodass wieder $\mathfrak{A} = 0$ ist. Es wird daher, wenn noch

$$p = \varkappa p_1, \quad q = \varkappa q_1$$

eingeführt wird:

$$u = \varkappa\, tn(p_1 + q_1, \varkappa), \quad v = \varkappa(p_1 - q_1)$$

und

$$ds^2 = A^2(dp_1 + dq_1)^2 - 4\varkappa^2 A\, dp_1\, dq_1, \quad A = \left(\frac{dn(p_1+q_1)}{cn(p_1+q_1)}\right)^2.$$

Diese Form des Linienelementes zeigt sofort, dass die Linien $p_1 =$ const. und $q_1 =$ const. *geodätische Linien* sind, sodass die für $\varkappa = 1$ von Peterson entdeckte Eigenschaft auch dem allgemeinen Falle zukommt.

Weiter ergiebt sich:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = -\frac{d \log cn(p_1+q_1)}{d(p_1+q_1)} = \frac{sn(p_1+q_1)\, dn(p_1+q_1)}{cn(p_1+q_1)}.$$

Setzt man also:

$$P = cn^2(p_1+q_1)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial p}, \quad Q = cn^2(p_1+q_1)\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial q},$$

*) Vergl. H. A. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen, Journal für Mathematik, Bd. 80, 1875, S. 288.

so tritt an die Stelle der Gleichungen (II.) die lineare homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial p_1\,\partial q_1} - \frac{sn(p_1+q_1)\,.\,dn(p_1+q_1)}{cn(p_1+q_1)}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial p_1}+\frac{\partial\Omega}{\partial q_1}\right) = 0,$$

deren Invarianten einander gleich sind, es wird nämlich

$$h = k = 2\varkappa^2\, sn^2(p_1+q_1) - 1.$$

Mithin ergiebt die Substitution

$$\Theta = cn(p_1+q_1)\,.\,\Omega$$

die *harmonische Gleichung:*

$$(73)\qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial p_1\,\partial q_1} = \left(2\varkappa^2\, sn^2(p_1+q_1) - 1\right)\Theta,$$

nach deren Integration die Durchführung des Verfahrens von Peterson nur noch Quadraturen erfordert.

44. Nach Darboux*) besitzt die harmonische Gleichung:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial p_1\,\partial q_1} = \left(\varphi(p_1+q_1) - \psi\,(p_1-q_1)\right)\Theta$$

unendlich viele particuläre Integrale der Form:

$$\Theta = f(p_1+q_1)\,.\,g\,(p_1-q_1).$$

Man hat dazu nur $f(\sigma)$ und $g(\tau)$ so zu wählen, dass gleichzeitig

$$f''(\sigma) = \left(\varphi(\sigma) + c\right)f(\sigma),$$
$$g''(\tau) = \left(\psi\,(\tau) + c\right)g(\tau)$$

ist, wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

In dem Falle der Gleichung (73) handelt es sich also um die Integration der linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$f''(\sigma) = \left(2\varkappa^2 sn^2(p_1+q_1) + c - 1)\right)f(\sigma),$$
$$g''(\sigma) = c g(\sigma).$$

Die zweite Gleichung lässt sich sofort integriren. Aber auch das allgemeine Integral der ersten ist bekannt, da die Lamé'sche Differentialgleichung:

$$y'' = \left(n(n+1)\varkappa^2\, sn^2(x,\varkappa) + h\right)y$$

für $n = 1$ in diese Gleichung übergeht.

Was die allgemeine Integration der Gleichung (73) betrifft, so genüge es hier, auf die Integrationsmethode hinzuweisen, die Riemann in seiner Abhandlung „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite“ (1868) auseinandergesetzt hat.

*) Leçons, t. II, S. 192.

45. Aus den Schraubenflächen S, die auf das Catenoid abwickelbar sind, entstehen durch das Verfahren von Peterson neue Familien von Flächen Σ, die durch Biegung in einander übergehen, und es liegt nahe, wie das in Nr. 36 bei den Gesimsflächen geschehen ist, auf diese Flächen wiederum das Verfahren von Peterson anzuwenden. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, dass hier dasselbe eintritt, was damals bei den Gesimsflächen zu beobachten war: die Flächen Σ sind, in ihrer Gesammtheit betrachtet, gegenüber der Transformation (2) invariant. Um zu weiteren Ergebnissen zu gelangen, muss man daher statt der *Schraubenflächen* eine andere Classe von Flächen zu Grunde legen, und hierfür bieten sich sofort die *Translationsflächen* dar, die schon in Nr. 10 auftraten und deren Biegungen in dem folgenden Abschnitte untersucht werden sollen.

Berlin, im October 1896.

(Schluss folgt.)

Ueber das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung.

Von

W. Ahrens in Leipzig.

Für eine beliebige galvanische Stromverzweigung in linearen Leitern liefern bekanntlich die beiden Kirchhoff'schen Gesetze ein Gleichungssystem, aus dem sich die Stromintensitäten der verschiedenen Drähte des Systems als eindeutige Functionen aller elektromotorischen Kräfte und Widerstände des Systems ergeben. Das Bildungsgesetz der sich so für die Intensitäten ergebenden mathematischen Ausdrücke ist bekanntlich von Kirchhoff*) vollständig angegeben und zwar gelangt er zu seinen Resultaten im Wesentlichen auf Grund eines physikalischen Postulats, nämlich des folgenden:

Es ist einerlei, ob man einen Draht zerschneidet resp. entfernt oder den Widerstand desselben unendlich gross macht.

Da die ganze Frage jedoch rein mathematischer Natur ist, so dürfte es nicht unangebracht sein, die Kirchhoff'schen Resultate auf rein mathematischem Wege abzuleiten, wobei wir ausgehen von gewissen allgemeinen Betrachtungen, welche überhaupt für jedes „Liniensystem" gelten und zum Theil implicite auch bei Kirchhoff vorkommen, und diese dann für das Kirchhoff'sche Gleichungssystem verwenden.

§ 1.

Als ein „Liniensystem" **) sei definirt eine Mannigfaltigkeit von beliebig geformten Linien im Raume von der Beschaffenheit, dass es möglich ist, von jedem Punkte einer Linie des Systems zu irgend

*) „Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird", Poggendorff's Annal. Bd. 72, 1847, pag. 497 ff.; Ges. Abhandl. pag. 22.

**) Diese Bezeichnung entnehme ich Lippich, „Bemerkungen zu einem Satze aus Riemann's Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse", Wiener Sitzungsber. Bd. LXIX, Abth. II, 1874, pag. 91 ff., während Listing, „Vorstudien zur Topologie" in Göttinger Studien, Bd. I, 1847, pag. 867 den Ausdruck „Linearcomplexionen" gebraucht.

einem andern solchen Punkte zu gelangen auf einem Wege, welcher ausschliesslich aus Linien des Systems besteht. Während man im Allgemeinen von einem Punkte in dem System in zwei verschiedenen Richtungen ausgehen kann, sind diejenigen Punkte ausgezeichnet, von denen aus dies nur in einer oder andererseits in 3 resp. mehr Richtungen möglich ist. Diejenigen Punkte, welche man nur in einer Richtung verlassen kann, nennen wir Endpunkte, diejenigen, von welchen man in 3 oder mehr Richtungen ausgehen kann, Kreuzungspunkte. Ein System ohne Endpunkte wollen wir ein „geschlossenes" nennen. Genetisch können wir ein System offenbar auch definiren als eine Mannigfaltigkeit von Punkten, welche durch beliebig geformte Linien mit einander verbunden sind, so zwar, dass von jedem dieser Punkte mindestens 3 Linien oder aber nur eine ausgehen und man von einem beliebigen Punkte des Systems durch die Linien des Systems zu jedem andern Punkte des Systems gelangen kann. Wir verstehen alsdann unter einer „Linie" immer nur das Stück von einem Punkte des Systems bis zum nächsten und bezeichnen einen Punkt, in dem $n \geq 3$ Linien münden, als einen Kreuzungspunkt $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und einen solchen, von dem nur eine Linie ausgeht, als einen Endpunkt. Besteht ein System nun aus e Endpunkten, k_3 Kreuzungspunkten erster Ordnung, k_4 solchen zweiter Ordnung $\ldots k_l$ von der $(l-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, so ist offenbar die Anzahl n der Linien des Systems gegeben durch die Formel:

$$n = \frac{e + \sum_{3}^{l} i k_i}{2}, \tag{1}$$

während

$$m = e + \sum_{3}^{l} k_i \tag{2}$$

die Gesammtanzahl der Punkte (End- und Kreuzungspunkte) angiebt.

Die Formel (1) involvirt die bekannte Eigenschaft eines Liniensystems, dass die Anzahl der Endpunkte und der Kreuzungspunkte ungerader Ordnung in einem Liniensystem stets gerade ist*). Für geschlossene Systeme, mit denen wir es in erster Linie hier zu thun haben, lauten also diese Formeln:

$$n = \frac{1}{2} \sum_{3}^{l} i k_i, \tag{1a}$$

$$m = \sum_{3}^{l} k_i. \tag{2a}$$

*) Lippich, l. c. pag. 98; vgl. a. Durège, „Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse", Dritte Aufl. 1882, pag. 193.

Sind die Ordnungszahlen der m Punkte des geschlossenen Systems bezw. $r_1, r_2 \ldots r_m$, wo dann unter diesen r gleiche Zahlen vorkommen können, so ist offenbar:

$$(1^b) \qquad n = \sum_1^m {}^p \frac{(r_p + 2)}{2} = \frac{1}{2} \sum_1^m {}^p r_p + m,$$

eine Formel, welche unter Umständen bequemer ist als die obige.

§ 2.

Geht man von einem Kreuzungspunkte des Systems aus und kehrt, nachdem man mehrere andere Punkte des Systems, jeden jedoch nur einmal, passirt hat, wieder zu dem Ausgangspunkte zurück, so nennt man den so beschriebenen Weg einen geschlossenen Kreis. Besondere Bedeutung besitzen diejenigen geschlossenen Kreise, welche alle Kreuzungspunkte des Systems enthalten. Die Frage nach der Existenz eines solchen lässt sich jedoch noch nicht beantworten, wenn nur die Ordnungszahlen der einzelnen Kreuzungspunkte gegeben sind, sondern hängt vielmehr stets von der inneren Structur des Systems ab*). Dasselbe gilt auch hinsichtlich der Anzahl aller geschlossenen Kreise eines Systems, für welche sich aus den Ordnungszahlen der Punkte allgemein nur eine Maximalzahl angeben lässt, worauf wir unten zurückkommen werden.

Haben wir nun 2 geschlossene Kreise mit bestimmten Durchlaufungsrichtungen, so wollen wir unter der Composition der beiden diejenige Bahn verstehen, welche sich aus den einzelnen Linien der beiden, jede Linie mit der zugehörigen Durchlaufungsrichtung versehen, ergiebt, wobei eine zweimal und zwar mit entgegengesetzten Richtungen vorkommende Linie als ausgeschieden gilt. Besitzen die beiden ursprünglichen Kreise keine gemeinschaftliche Linie, so besteht die Composition derselben auch nur wieder aus diesen beiden. Besitzen dieselben jedoch eine oder mehrere Linien gemeinsam, so scheiden bei entsprechender Festsetzung der Durchlaufungsrichtungen eine oder mehrere dieser Linien aus und die Composition besteht aus einem oder mehreren von den ursprünglichen verschiedenen, geschlossenen Kreisen, wobei jedoch eine Mehrdeutigkeit möglich ist, insofern als die übrigbleibenden Linien der beiden Kreise auf verschiedene Art zu geschlossenen Kreisen eventuell zusammengesetzt werden können. Hiernach stellen wir folgende Sätze auf:

*) Die dualistisch verwandte Frage nach der Existenz eines Linienzuges, welcher jede Linie des Systems gerade einmal enthält, ist von C. Hierholzer, Math. Annal. Bd. 6 erledigt worden.

I. Die Composition zweier geschlossener Kreise besteht aus einem oder mehreren geschlossenen Kreisen; ist die Composition nur ein Kreis, so enthält dieser keine der Linien mehr, welche den beiden ursprünglichen Kreisen gemein waren. Die Durchlaufungsrichtungen der beiden ursprünglichen Kreise lassen sich stets so wählen, dass eine bestimmte, ihnen beiden gemeinsame Linie in der Composition nicht mehr vorkommt.

II. Ergeben zwei Kreise R und S die Composition T, so ist S auch die Composition von R und T und R auch die von T und S.

§ 3.

Wenn es möglich ist, durch Fortnahme einer Linie ein Liniensystem so zu verändern, dass man nicht mehr von jedem Punkte des Systems zu jedem andern gelangen kann, so sagen wir: „das System zerfällt durch Fortnahme dieser Linie“ und nennen diese Linie dann eine „Brücke“ des Systems. Wir erhalten durch Fortnahme einer solchen Brücke 2, aber auch nicht mehr getrennte Theile, welche, jedes für sich, wieder Liniensysteme sind; allgemein kann durch Fortnahme von a Linien ein Liniensystem höchstens in a getrennte Theile zerfallen, welche dann, jedes für sich, Liniensysteme sind. Besitzt ein Liniensystem auch nur eine Brücke, so lässt sich in demselben jedenfalls kein alle Punkte des Systems umfassender, geschlossener Kreis angeben. Wir wollen nun, beginnend in einem beliebigen Punkte des Systems, von den von diesem Punkte ausgehenden Linien so viele als möglich entfernen, ohne dass das System zerfällt, d. h. also z. B., wenn von diesem Punkte keine Brücke ausgeht, alle Linien bis auf eine. Alsdann gehen wir längs der übrig bleibenden Linien zu den Nachbarpunkten und machen hier dasselbe u. s. w. Schliesslich wird das System den, wie wir sagen wollen „baumförmigen Typus“ *) angenommen haben, d. h. eine Form, bei der das System noch zusammenhängt, so dass man nach wie vor von einem Punkte des Systems zu jedem andern gelangen kann, bei der es aber unmöglich ist, auch nur einen geschlossenen Kreis zu beschreiben. Es ist nun leicht ersichtlich, dass zwischen m Punkten höchstens $m - 1$ Verbindungslinien existiren dürfen, ohne dass eine geschlossene Bahn besteht,

*) Diese geometrischen Gebilde sind vor allem behandelt von Cayley, welcher sie „Trees“ nennt (Phil. Mag. XIII, 1857; XVIII, 1859; XLVII, 1874 u. British Association Report 1875), dann von Polignac (Bulletin de la société mathématique de France 1880, wiedergegeben in Lucas, Récréations mathématiques t. I. pag. 51), welcher sie mit den Namen „ramification, arbre, arborescence“ belegt. Das Hauptresultat dieser Polignac'schen Arbeit findet sich übrigens schon bei Lippich, l. c. pag. 93.

dass aber in dem Falle des baumförmigen Typus, wo das System eben noch nicht zerfällt, auch gerade diese Maximalzahl erreicht wird, mithin, um diese Form aus dem ursprünglichen System herbeizuführen, $n - m + 1$ Linien fortgenommen werden müssen, eine für das Liniensystem besonders charakteristische Constante, welche wir im Folgenden immer mit μ bezeichnen wollen und welche nach § 1 (1^b) zweckmässig nach der Formel

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}^{p}\, r_p + 1$$

berechnet wird.

Die Operation der Ueberführung eines beliebigen Liniensystems in den baumförmigen Typus kann natürlich auf sehr viele verschiedene Arten bewerkstelligt werden. Die Grösse μ jedoch, welche die Anzahl der hierfür zu entfernenden Linien angiebt, ist für jedes System eine bestimmte Constante; μ solche zusammengehörige Linien, welche die Eigenschaft besitzen, dass nach ihrer Fortnahme das Liniensystem in den baumförmigen Typus übergeht, wollen wir eine „Gruppe von μ Linien" nennen.

Hiernach sagen wir:

III. Um ein Liniensystem in den baumförmigen Typus überzuführen, müssen $\mu = n - m + 1$ Linien desselben entfernt werden.

IV. Entfernt man aus einem System μ Linien, ohne dass dasselbe zerfällt, so liegt der baumförmige Typus vor.

V. Jeder geschlossene Kreis eines Liniensystems enthält stets mindestens eine der μ Linien einer beliebigen Gruppe.

VI. Nimmt man in einem Liniensystem $\mu - 1$ zu einer Gruppe gehörige Linien fort, so bleibt gerade noch ein geschlossener Kreis übrig.

Wäre nämlich kein geschlossener Kreis mehr vorhanden, so wäre dies ein Widerspruch mit III., und blieben noch mehrere geschlossene Kreise übrig, so müssten diese zu gleicher Zeit durch Entfernung der μ^{ten} Linie der Gruppe zerstört werden, also jedenfalls diese Linie enthalten. Nach I. liesse sich dann aber eine Composition aus 2 dieser geschlossenen Kreise so bilden, dass jene Linie darin nicht vorkäme, und der oder die geschlossenen Kreise dieser Composition würden also nach Fortnahme jener Linie bestehen bleiben, was mit der Definition der Gruppe widerstreitet.

§ 4.

Nach VI. können wir zu jeder Gruppe G_t von μ Linien $l_1, l_2 \ldots l_\mu$ μ geschlossene Kreise $K_1, K_2 \ldots K_\mu$ so finden, dass der Kreis K_t von den Linien der Gruppe nur l_t enthält, indem wir eben in dem ursprünglichen Liniensystem die Linien $l_1, l_2 \ldots l_{i-1}, l_{i+1} \ldots l_\mu$ entfernen und den einzigen dann übrig bleibenden geschlossenen Kreis aufsuchen. Haben wir nun irgend einen geschlossenen Kreis K des Liniensystems, so enthält dieser nach V. wenigstens eine Linie der Gruppe G_l, etwa l_1. Alsdann können wir aus K und K_1 eine Composition K' derart bilden (vergl. I.), dass in dieser Composition l_1 nicht mehr vorkommt. Da K_1 von den Linien der Gruppe nur l_1 enthält, so enthält also K' von den Linien dieser Gruppe nur die in K bereits vorkommenden ausser l_1. Umgekehrt lässt sich nach II. aus K' und K_1 auch K durch Composition erhalten. K', welches jedenfalls l_1 nicht enthält, enthalte nun noch l_2. Alsdann bilden wir diejenige Composition K'' von K' und K_2, welche l_2 nicht mehr, also nur noch die in K vorkommenden Linien der Gruppe ausser l_1 und l_2 enthält. Da sich nun K' umgekehrt durch Composition aus K_2 und K'' erhalten lässt, so lässt sich K durch Composition aus K_1, K_2 und K'' erhalten. In derselben Weise geht dies fort, und wir erhalten schliesslich das Resultat, dass sich K durch Composition herstellen lässt aus $K_1, K_2 \ldots$ und einem Kreis $\overline{K}$, welcher nur noch eine Linie der Gruppe enthält. Dann muss aber $\overline{K}$ mit einem der Kreise $K_1, K_2 \ldots, K_\mu$ identisch sein, denn wenn $\overline{K}$ von der Gruppe nur noch l_i enthält, so lässt sich aus $\overline{K}$ und K_i nach I. eine Composition bilden, welche l_i nicht mehr, also überhaupt keine Linie der Gruppe mehr enthält, was nach V. unmöglich ist; es muss daher $\overline{K}$ mit K_i identisch sein, d. h. jeder geschlossene Kreis K lässt sich durch Composition jedenfalls aus den $K_1, K_2 \ldots K_\mu$ herstellen. Ein solches System von μ Kreisen, welche die Eigenschaft haben, dass sich jeder geschlossene Kreis durch Composition aus ihnen herstellen lässt, wollen wir ein „Fundamentalsystem von Kreisen" nennen und zwar bezeichnen wir das System der Kreise $K_1, K_2 \ldots K_\mu$ als das zu der Gruppe G_l zugehörige Fundamentalsystem.

Diese so erhaltenen Resultate sprechen wir folgendermassen aus:

VII. Ist $K_1, K_2 \ldots K_\mu$ das zu der Gruppe $l_1, l_2, \ldots l_\mu$ in der oben angegebenen Weise gebildete zugehörige Fundamentalsystem von Kreisen, so ist K_i der einzige geschlossene Kreis in dem Liniensystem, welcher von den Linien der Gruppe G_l nur die Linie l_i enthält.

VIII. Ein beliebiger geschlossener Kreis K lässt sich aus den Kreisen des Fundamentalsystems durch Composition herleiten und zwar, wenn K von den Linien der Gruppe G_l etwa $l_{i_1}, l_{i_2}, l_{i_3} \ldots l_{i_r}$ enthält, aus $K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_3} \ldots K_{i_r}$.

Hierzu fügen wir noch den ohne Weiteres evidenten Satz:

IX. Leitet man aus gewissen Kreisen $K_{i_1}, K_{i_2} \ldots K_{i_r}$ eines Fundamentalsystems durch Composition K her, so erhält man, wenn man einen der hierbei wesentlichen Kreise durch K ersetzt, wieder ein Fundamentalsystem von Kreisen.

Als Corollar hierzu ergiebt sich:

Es lassen sich stets zu einem beliebigen Kreis K oder auch zu zweien K und K' $\mu-1$ resp. $\mu-2$ andere so hinzufügen, dass ein Fundamentalsystem entsteht.

Sodann fügen wir noch folgenden weiterhin zu gebrauchenden Satz hinzu:

X. Bilden die Linien $k_1, k_2 \ldots k_\mu$ und $l_1, l_2 \ldots l_\mu$ je eine Gruppe G_k und G_l, so kann man zu beliebigen und beliebig vielen (r) Linien der ersten $\mu - r$ der zweiten so adjungiren, dass wieder eine Gruppe entsteht.

Der Beweis hierfür ergiebt sich leicht: Es seien $k_1, k_2 \ldots k_r$ diejenigen Linien von G_k, welche beibehalten werden sollen. Die Linie k_1 muss nothwendig in einem Kreise des zu der Gruppe G_l zugehörigen Fundamentalsystems vorkommen, sagen wir in demjenigen, welcher l_1 enthält. Alsdann erhalten wir offenbar, wenn wir in der Gruppe G_l l_1 durch k_1 ersetzen, wieder eine Gruppe: $k_1, l_2, l_3 \ldots l_\mu$. In derselben Weise kommen wir dann etwa zu der Gruppe $k_1, k_2, l_3, l_4, \ldots l_\mu$ und erhalten so fortschreitend offenbar die gewünschte Gruppe.

Schliesslich bemerken wir noch, indem wir auf eine oben (§ 2) aufgeworfene Frage zurückgehen, dass die Maximalzahl aller geschlossenen Kreise in einem Liniensystem auf Grund von VIII. offenbar

$$= \binom{\mu}{1} + \binom{\mu}{2} + \cdots + \binom{\mu}{\mu} = 2^\mu - 1 = 2^{n-m+1} - 1$$

ist.

§ 5.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über Liniensysteme wenden wir uns dem Kirchhoff'schen Problem zu, nämlich zu zeigen, dass die bekannten beiden Kirchhoff'schen Gesetze ein für die Berechnung der Stromintensitäten ausreichendes Gleichungssystem liefern und nach welchem Bildungsgesetz die aus diesen Gleichungen resultirenden Ausdrücke zusammengesetzt sind.

Wir nehmen an, dass eine Stromverzweigung von m Kreuzungspunkten und n Drähten vorliegt.

Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz besagt bekanntlich, dass wenn die Drähte $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ in einem Punkte zusammenstossen und $J_{\lambda_1}, J_{\lambda_2} \ldots$ die zu diesen Drähten zugehörigen Stromintensitäten sind,

$$\sum^i \varepsilon_i J_{\lambda_i} = 0$$

ist, wo $\varepsilon_i = \pm 1$ ist je nach der Richtung des Stroms in dem betreffenden Draht. Von den m Gleichungen, welche die Anwendung dieses Satzes auf die m Kreuzungspunkte liefert, sind nun, wie Kirchhoff zeigt*), $m-1$ von einander unabhängig, während die m^{te} die Folge der übrigen ist, da alle m als algebraische Summe die Identität $0=0$ ergeben.

Das erste Kirchhoff'sche Gesetz besagt, dass wenn die Drähte $k_1, k_2 \ldots$ eine geschlossene Figur bilden und J_k die Stromintensität und w_k den Widerstand des Drahtes k bezeichnet und E_k die elektromotorische Kraft, die in demselben ihren Sitz hat, nach derselben Richtung positiv gerechnet wie J_k, dann:

$$\varepsilon_1 w_{k_1} J_{k_1} + \varepsilon_2 w_{k_2} J_{k_2} + \cdots = \varepsilon_1 E_{k_1} + \varepsilon_2 E_{k_2} + \cdots$$

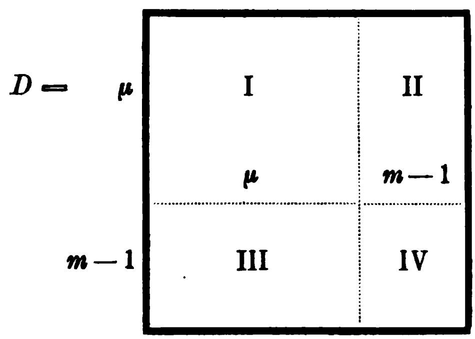
ist, wo die ε je nach den Stromrichtungen ± 1 sind.

Dieses erste Gesetz denken wir uns auf ein zu irgend einer Gruppe von Linien zugehöriges Fundamentalsystem von Kreisen des Liniensystems angewandt und erhalten so $\mu = n - m + 1$ Gleichungen. Da jeder Kreis dieses Fundamentalsystems dann (vergl. § 4) eine Linie enthält, welche in den übrigen nicht vorkommt, so kommt in jeder dieser Gleichungen eine in den übrigen nicht vorkommende Grösse J vor, so dass eine Abhängigkeit zwischen diesen Gleichungen nicht bestehen kann. Da ferner jeder geschlossene Kreis aus denen des Fundamentalsystems sich durch Composition herleiten lässt, eine Operation, welche algebraisch der Addition resp. Subtraction der betreffenden Gleichungen entspricht, so ist ersichtlich, dass für jede geschlossene Figur sich die zugehörige Gleichung des ersten Kirchhoff-schen Gesetzes aus jenen μ Gleichungen herleiten lässt, mithin die Leistungsfähigkeit dieses Gesetzes damit auch erschöpft ist. Das erste Gesetz liefert also $n - m + 1$, das zweite $m - 1$, zusammen also n von einander unabhängige Gleichungen, wie es erforderlich ist. Einen directen Nachweis hierfür giebt Kirchhoff nicht, vielmehr erscheint bei ihm als physikalisches Postulat, dass die beiden Gesetze ein zur Berechnung aller Stromintensitäten ausreichendes Gleichungssystem liefern, und dient ihm dieses Postulat, nachdem er gezeigt hat, dass das zweite Gesetz gerade $m-1$ von einander unabhängige Gleichungen liefert**), das erste jedoch so viele, als in dem System mindestens Drähte fortgenommen werden müssen, um alle geschlossenen Figuren zu zerstören***), zur Berechnung dieser Minimalzahl μ von Drähten †), welche er direct nicht bestimmt.

*) Ges. Abhdl. pag. 31.
**) l. c. pag. 31.
***) l. c. pag. 23, 24.
†) l. c. pag. 31.

§ 6.

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems verfahren wir nun folgendermassen: Wir wählen eine beliebige Gruppe von Linien des Liniensystems aus, bestimmen das zugehörige Fundamentalsystem von Kreisen und stellen für die Kreise desselben die Gleichung des ersten Kirchhoff'schen Gesetzes auf, so zwar, dass die Stromintensitäten, welche zu den Linien der ausgezeichneten Gruppe gehören, an den μ ersten Stellen, und zwar die in der i^{ten} Gleichung vorkommende an i^{ter} Stelle, steht. Der Uebersichtlichkeit halber denken wir uns in der Determinante D dieses Gleichungssystems die μ ersten Horizontalreihen und ebenso die μ ersten Verticalreihen durch eine Horizontal- bezw. Verticallinie von den übrigen abgetrennt, so dass wir eine Vierteilung der Determinante, wie in der nachstehenden Figur erhalten:



Alsdann entsprechen die Gebiete I und II den Gleichungen des ersten, die Gebiete III und IV denen des zweiten Gesetzes und enthalten I und III die von den μ Linien der ausgewählten Gruppe, II und IV die von den übrigen, d. h. den Linien des nach Fortnahme jener μ übrigbleibenden baumförmigen Typus herrührenden Elemente. In I und II kommen nur die Widerstände w der verschiedenen Drähte und Nullen, in III und IV nur die Grössen $0, +1, -1$ vor. Man ersieht hieraus, dass die Determinante eine homogene Function μ^{ten} Grades der Grössen w ist und zwar kommen nur Combinationen von solchen Grössen w vor, deren zugehörige Linien (Drähte) eine Gruppe bilden. Denken wir uns nämlich eine Combination von μ Linien, welche keine Gruppe bilden, so bleibt nach deren Fortnahme jedenfalls mindestens ein geschlossener Kreis übrig. Durch diesen Kreis nun können wir nach § 4, IX einen der Kreise des Fundamentalsystems ersetzen und erhalten dann ein neues Fundamentalsystem; denken wir uns dann mit Bezug auf dieses das Gleichungssystem aufgestellt, so kommt in einer der μ ersten Horizontalreihen der Determinante keine jener μ Grössen vor, d. h. ihre Combination kann auch in der Determinante nicht vorkommen. In dem Theil I unserer Determinante enthält offenbar nur die Diagonalreihe von 0 verschiedene Grössen, so dass also I als selbständige Determinante betrachtet, den absoluten Werth $w_1 w_2 \ldots w_\mu$ besitzt, wenn $w_1 w_2 \ldots w_\mu$ die zu den Linien der Gruppe gehörenden Widerstände sind.

Um jedoch zu ermitteln, ob dieses Glied in der Determinante D auch wirklich mit einem von 0 verschiedenen Coefficienten vorkommt, müssen wir das Gebiet IV näher in's Auge fassen. Wenn die μ Drähte der Gruppe entfernt sind, bleibt nur noch ein baumförmiger Typus übrig. Wir wollen uns nun die $m-1$ Gleichungen des zweiten Gesetzes in folgender Weise aufgestellt denken: Wir gehen von einem beliebigen Punkte aus, den wir mit I bezeichnen, gehen dann von I zu einem Nachbarpunkte II längs einer Linie, die wir mit 1 bezeichnen, von II wieder zu einem Nachbarpunkte III längs einer mit 2 zu bezeichnenden Linie u. s. f., bis wir schliesslich nicht mehr weiter gehen können; alsdann gehen wir zu einem der bereits passirten Punkte zurück, von dem noch andere, nicht passirte Linien ausgehen, und setzen hier die Numerirung in derselben Weise fort u. s. f., bis alle Punkte und Linien des baumförmigen Typus numerirt sind. Sodann stellen wir für die $m-1$ ersten Punkte ihrer Nummer nach die Gleichungen des zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes auf, wobei wir nur die von den Linien des baumförmigen Typus, nicht aber die von den μ Linien der Gruppe herrührenden Elemente zu berücksichtigen haben, da es uns ja nur auf das Gebiet IV jetzt ankommt. In den einzelnen Gleichungen, also auch in der Determinante ordnen wir nach den Nummern der Linien; alsdann hat die Determinante IV folgende Eigenschaften: In jeder Verticallinie — ausgenommen die letzte, wo nur ein von 0 verschiedenes Element $= \pm 1$ vorkommt — stehen gerade 2 von 0 verschiedene Glieder, von denen das eine $= +1$, das andere $= -1$ ist, so zwar, dass in der i^{ten} Verticalen eins derselben an der $(i+1)^{\text{ten}}$ Stelle von oben und das andere oberhalb desselben steht. Addirt man alsdann zu jeder Zeile die Summe der vorhergehenden, so bleiben auf der linken Seite der Diagonale nur Nullen, während die Glieder der Diagonale alle den Werth ± 1 haben, so dass die Determinante IV den absoluten Werth 1 hat, also das Glied $w_1 w_2 \ldots w_\mu$ in der Determinante D, vom Vorzeichen abgesehen, mit dem Coefficienten 1 behaftet ist.

§ 7.

Es ist daher jetzt nur noch die Frage des Vorzeichens zu erledigen. Bilden die Linien $1, 2 \ldots, \mu$ eine Gruppe und ist $\mu + 1$ eine Linie, welche dem nach Fortnahme von $1, 2 \ldots \mu - 1$ allein noch übrig bleibenden geschlossenen Kreise angehört und μ benachbart ist, so bilden also auch $1, 2 \ldots \mu - 1,\ \mu + 1$ eine Gruppe, d. h. es muss in der Determinante neben $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1} w_\mu$ auch das Glied $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1} w_{\mu+1}$ vorkommen und man kann der Determinante alsdann folgende Form geben:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc}
\delta_1 w_1 & 0 & 0\ldots & & & & & \\
0 & \delta_2 w_2 & 0\ldots & & & & & \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & 0 & 0\ldots & \delta_\mu w_\mu & \delta_{\mu+1} w_{\mu+1} & & & \\
\hline
 & & & \varepsilon & \varepsilon_1 & & & \\
 & & & & 0 & \varepsilon_2 & & \\
 & & & & 0 & 0 & \varepsilon_3 & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & & & & 0 & 0\ldots & & \varepsilon_{m-1}
\end{array}\right|$$

wo die Grössen ε und $\delta = \pm 1$ sind. Da nun $w_1, w_2 \ldots w_{\mu-1}$ nur je einmal vorkommen und $w_{\mu+1}$ in der μ^{ten} Reihe jedenfalls auch nur einmal, so ergiebt sich das Product $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1} w_{\mu+1}$ bei der Auswerthung der Determinante nur einmal. Vertauschen wir nun die μ^{te} und $(\mu + 1)^{\text{te}}$ Verticalreihe, so sehen wir, dass in der neuen Determinante $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1} w_{\mu+1}$ den Coefficienten

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{\mu-1} \delta_{\mu+1} \varepsilon \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1}$$

haben würde, also in der alten den Coefficienten

$$-\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{\mu-1} \delta_{\mu+1} \varepsilon \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1}$$

hat*), während der des Gliedes $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1} w_\mu$

$$\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{\mu-1} \delta_\mu \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1}$$

ist. Der Quotient dieser beiden Coefficienten ist nun

$$-\frac{\delta_{\mu+1} \cdot \varepsilon}{\delta_\mu \cdot \varepsilon_1} = +1$$

da, wenn δ_μ und $\delta_{\mu+1}$ gleiches Vorzeichen, ε und ε_1 ungleiches haben und umgekehrt. Damit ist zunächst Folgendes bewiesen: Zwei Producte, welche $\mu - 1$ Factoren gemein haben und deren μ^{te} Factoren einander

*) Ein weiteres Glied kann bei der Auswerthung der Determinante nicht auftreten, auch wenn in der μ^{ten} Colonne des Gebietes III noch ausser ε ein von 0 verschiedenes Glied vorkommt, wie es gewöhnlich der Fall sein wird, — da ja dann der Coefficient von $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1} w_{\mu+1} = 0$ oder ± 2 würde, während er nach § 6 $= \pm 1$ sein muss.

benachbarten Linien entsprechen*), haben gleiches Vorzeichen. Indem wir nun von dem Product $w_1 w_2 \dots w_{\mu-1} w_{\mu+1}$ zu $w_1 w_2 \dots w_{\mu-1} w_{\mu+2}$ übergehen, wo $\mu + 2$ wieder eine $\mu + 1$ benachbarte Linie sein mag u. s. w., so erhalten wir offenbar das Resultat, dass 2 beliebige in $\mu - 1$ Factoren übereinstimmende Glieder der Determinante mit gleichen Vorzeichen vorkommen.

Nun wissen wir nach dem zum Beweise von X, § 4 angewandten Verfahren, dass sich zwischen 2 beliebige Gruppen von Linien stets eine Reihe von Gruppen derart einschalten lässt, dass je 2 auf einander folgende in $\mu - 1$ Gliedern übereinstimmen. Für 2 benachbarte Glieder dieser Reihe gilt also nach dem eben Bewiesenen, dass die entsprechenden Glieder der Determinante dasselbe Vorzeichen haben, mithin überhaupt für alle Glieder. Wir können daher ohne Beschränkung alle Glieder der Determinante als positiv annehmen und zusammenfassend sagen:

„Die Determinante D ist eine ganze homogene Function μ^{ten} Grades der Widerstände, wobei jedoch nur solche Widerstände mit einander combinirt vorkommen, deren zugehörige Linien eine Gruppe bilden, und wo jedes Glied den Coefficienten $+ 1$ besitzt".

§ 8.

Nachdem wir so das Bildungsgesetz der Determinante, des gemeinsamen Nenners aller Functionen, welche sich für die Stromintensitäten ergeben, erkannt haben, wenden wir uns den Zählern dieser Quotienten zu, und denken uns etwa beispielsweise den zu der Intensität J_1 gehörigen als zu bestimmen. Bilden nun die Linien $2, 3 \dots \mu$ mit 1 eine Gruppe, so können wir mit Bezug auf diese als ausgezeichnete Gruppe das Gleichungssystem aufstellen; alsdann sind für die Berechnung der Zählerfunction die Elemente der ersten Verticalreihe zu ersetzen durch die auf der rechten Seite der Gleichungen stehenden algebraischen Summen der elektromotorischen Kräfte. Die Verbindung $w_2 w_3 \dots w_\mu$ kommt alsdann gerade einmal in der Determinante des Zählers vor und zwar multiplicirt mit der Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte, welche sich auf derjenigen geschlossenen Figur befinden, welche nach Fortnahme von $2, 3 \dots \mu$ allein übrig bleibt, wo als positive Richtung der elektromotorischen Kräfte, wie leicht ersichtlich, die positive Richtung von J_1 zu nehmen ist.

Dabei haben wir also nur noch nachzuweisen, dass die angegebenen Glieder auch die einzigsten sind. Sind nämlich $2', 3' \dots \mu'$ Linien,

*) In der Annahme, dass die Linie $\mu + 1$ in dem betreffenden geschlossenen Kreise mit μ liegt, ist keine Beschränkung enthalten, da ja eine andere Linie mit den übrigen $\mu - 1$ keine Gruppe bilden würde.

welche nicht in einer Gruppe zusammen vorkommen können, so bleiben nach ihrer Fortnahme mindestens noch 2 geschlossene Kreise übrig, welche wir dann nach § 4, IX zu einem Fundamentalsystem ergänzen können. Legt man dann dieses Fundamentalsystem für die Aufstellung der Gleichungen zu Grunde, so kommt in zweien derselben keine der Grössen $w_{2'}, w_{3'} \ldots w_{\mu'}$ mehr vor, also kann die Combination derselben auch nicht in der Determinante vorkommen. Nun wäre es ja aber noch möglich, dass eine Combination $w_{2'} w_{3'} \ldots w_{\mu'}$ vorkäme, wenn $2', 3' \ldots \mu'$ zwar unter sich, nicht aber mit 1 in einer Gruppe zusammen vorkommen. Alsdann bleibt nach Fortnahme der Linien $2', 3' \ldots \mu'$ noch ein geschlossener Kreis übrig, welcher die Linie 1 nicht enthält, dagegen etwa eine Linie $1'$. Legen wir alsdann die Gruppe $1', 2', 3' \ldots \mu'$ als ausgezeichnete für die Aufstellung des Gleichungssystems zu Grunde, so kommen die Grössen $w_{2'} w_{3'} \ldots w_{\mu'}$ nur je einmal in D vor; d. h. für die betreffende fragliche Combination kann also nichts mehr aus der $2, 3 \ldots \mu^{\text{ten}}$ Horizontalreihe von D vorkommen, also bleibt von I der Determinante D nur noch die erste Horizontale zu berücksichtigen. In dieser ist nun das Glied der der Linie 1 entsprechenden Verticalen, welches hier 0 ist, durch die betreffende algebraische Summe der rechten Seite der ersten Gleichung zu ersetzen, um die Zählerdeterminante zu erhalten, und mit diesem Gliede allein kann $w_{2'} w_{3'} \ldots w_{\mu'}$ zusammen vorkommen, wobei dann nur noch der aus dem übrigen Theil der Determinante sich ergebende numerische Factor zu bestimmen ist. Es kommen hierfür nur noch die erste Verticale von III und das Gebiet IV ausser der der Linie 1 entsprechenden Verticalen in Betracht; ersetzen wir letztere durch die erste Verticale von III, so ist es also die so resultirende Determinante, welche bestimmt werden muss. Um den Werth hiervon zu bestimmen, verfahren wir folgendermassen: Bei dem in § 6 (Ende) angegebenen Numerirungsverfahren denken wir uns hier als mit den ersten Nummern diejenigen Linien belegt, welche mit $1'$ einen geschlossenen Kreis des Fundamentalsystems bilden, und zwar mag an dem einen Endpunkt von $1'$ der Anfang gemacht sein; da die Linie 1 in diesem Kreise nicht liegt, so erhält sie also eine spätere Nummer. In der der Linie $1'$ entsprechenden Verticalen, der ersten der Determinante D, wird also, da die Endpunkte von $1'$ bei dieser Numerirung jedenfalls früher als der letzte der Endpunkte von 1 kommt, das zweite von Null verschiedene Glied höher stehen als in der 1 entsprechenden Verticalen, d. h. es wird also nach Vertauschung dieser beiden und nach Ausführung der in § 6 angegebenen Additionen unter den Zeilen von IV in dieser Verticalen das Diagonalglied $= 0$ werden. Die Determinante IV, welche jetzt nach der Vertauschung nicht mehr einem baumförmigen Typus zugeordnet ist, (für welchen das Nichtverschwinden der nach diesem Bildungsgesetz gebildeten Determinanten charakteristisch ist), hat also jetzt den Werth 0, das hypothetische Glied kommt also in der Zählerdeterminante nicht vor.

Hiernach können wir also sagen:

„Die Determinante des Zählers in dem für J_1 resultirenden Quotienten ist eine homogene ganze Function $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Grades der Grössen w ausser w_1 und zwar kommen nur die w derjenigen Linien mit einander combinirt vor, welche mit 1 eine Gruppe bilden, jede Combination mit der algebraischen Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte multiplicirt, welche in dem nach Fortnahme jener $\mu - 1$ Linien allein übrig bleibenden Kreise vorkommen, alle in der Richtung als positiv gerechnet, in der J_1 positiv ist".

Minkowski, Dr. **Hermann,** o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg O./Pr., Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. [240 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Plücker's, Julius, gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgeg. von A. Schoenflies u. Fr. Pockels. In 2 Bänden. gr. 8. geh. n. ℳ 50.—

Einzeln:

I. Band: **Mathematische Abhandlungen.** Hrsg. von A. Schoenflies. Mit einem Bildniss Plückers und 73 in den Text gedruckten Figuren. [XXXVI u. 620 S.] 1895. n. ℳ 20.—

II. Band: **Physikalische Abhandlungen.** Hrsg. von Fr. Pockels. Mit 78 Textfiguren und 9 Tafeln. [XVIII u. 834 S.] 1896. n. ℳ 30.—

Schlegel, Dr. **V.,** Professor an der Gewerbeschule in Hagen, die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. [44 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.—

Schlesinger, Prof. Dr. **Ludwig,** Privatdocent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.—

Serret, J.-A., † Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes Paris, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Axel Harnack, † Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In zwei Bänden. I. Band. Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. [XVI u. 570 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ. 10.—

Stahl, Dr. **Hermann,** Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Staude, Dr. **Otto,** ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Stolz, Dr. **Otto,** ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Sturm, Dr. **Rudolf,** ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schluss-)Theil. Die Strahlencomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 18.—

Volkmann, P., ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☛ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck,** München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer,** Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von dem **Internationalen Mathematiker-Kongress** in **Zürich** und **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

Title page

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

49. Band. 3. u. 4. Heft.

Ausgegeben am 26. Oktober.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1897.

Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif.

Par

S. Pincherle à Bologne.

Introduction.

La science des nombres, soit dans son développement historique, soit dans l'exposé d'un programme d'études, nous présente au premier abord une division en deux parties distinctes. La première s'occupe des nombres, de leur classification, de leurs propriétés, de la façon d'opérer sur eux, à un point de vue que l'on pourrait appeler *statique*, c'est à dire en laissant toujours aux nombres, objets de cette étude, des valeurs fixes; dans la seconde au contraire, le nombre est considéré à un point de vue *dynamique:* c'est un élément essentiellement variable et dominé par les concepts de dépendance, de limite, de continuité, etc. Cette deuxième partie comprend l'analyse mathématique, la théorie des fonctions avec ses divers chapitres et ses nombreuses applications. Mais en examinant avec plus d'attention quelques uns de ces chapitres — comme la théorie des formes algébriques, le calcul des variations, plusieurs recherches sur les équations différentielles, d'autres de physique mathématique, etc. — on s'aperçoit que l'idée de nombre s'est en quelque sorte effacée, pour donner place à celle de fonction, considerée en elle-même, et qui s'y substitue comme élément variable. Aux deux premières parties que l'on a aperçues dès l'abord dans la science des nombres, s'en ajoute ainsi une troisième, à laquelle on pourrait donner le nom de Calcul fonctionnel: on réunirait sous ce titre les chapitres de l'analyse où l'élément variable n'est plus le nombre, mais la fonction considérée en elle-même.

Bien que le calcul fonctionnel comprenne, comme on vient de le dire, plusieurs des chapitres les plus intéressants de l'analyse, les principes généraux qui le gouvernent ont à peine été entrevus. Cependant on doit remarquer dès à présent qu'on peut y suivre deux voies bien distinctes, ainsi que cela a lieu dans la théorie ordinaire des fonctions. Dans celle-ci nous avons en effet deux directions différentes par la méthode et par le but. L'une mène à la théorie des fonctions de variables réelles au sens de Dirichlet, où la dépendance entre la fonction et ses arguments est tout-à-fait arbitraire; l'autre conduit à la théorie des fonctions analytiques, où la nature arithmétique de cette dépendance a, au contraire, la plus grande importance. La première, plus extensive, nous permet d'obtenir des résultats plus généraux; l'autre, plus intensive, pénètre plus profondément dans l'essence intime des propriétés des fonctions. Il en est de même dans le calcul fonctionnel: là aussi, on a le choix entre deux ordres de recherches, soit qu'on veuille étudier les conséquences qui résultent du seul fait qu'un élément varie en suite de la variation arbitraire d'une ou de plusieurs fonctions, soit qu'on préfère étudier et classifier les différentes formes que peuvent présenter les opérations qu'on peut exécuter sur les fonctions et que nous appellerons opérations fonctionnelles.

Au premier ordre d'idées appartient le calcul des variations. Dans ce calcul, on étudie la variation d'une quantité qui dépend d'une ou de plusieurs fonctions arbitraires en vue des applications qui en découlent pour la détermination des maxima et minima des intégrales définies: mais l'étude de ces variations présente aussi un intérêt intrinsèque et peut être poussée plus loin. C'est ce qu'a fait M. Volterra. Dans quelques notes d'un grand intérêt, il considère une quantité y qui dépend de toutes les valeurs qu'une fonction $\varphi(x)$, définie dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, prend dans cet intervalle; il définit la variation de y pour une variation arbitraire de $\varphi(x)$, pose la notion de continuité, et sous certaines restrictions, il arrive enfin à une formule qu'il nomme formule de Taylor généralisée et qui donne le développement de y en une série dont les termes sont des intégrales multiples dépendants de y*). Ces recherches de M. Volterra, d'une généralité si remarquable, appartiennent évidemment au premier des deux points de vue que nous avons signalés dans le calcul fonctionnel: on n'y suppose rien sur la nature de l'opération qu'on exécute sur $\varphi(x)$ pour obtenir y, et cette remarque n'est pas contredite par le fait que la série de Taylor généralisée donne, sous certaines restrictions, une expression de l'opération en question: c'est quelque chose d'analogue à ce que l'on a dans la théorie des fonctions d'une variable réelle, où la série de Fourier sert à donner l'expression d'une fonction arbitrairement donnée.

Dans les recherches qui se placent au second point de vue, comme c'est le cas pour le présent Mémoire, il en est tout autrement. C'est la nature particulière des opérations qu'on a à exécuter sur les fonctions

*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, S. IV, T. III (agosto—novembre 1887.) Une extension de cette formule de Taylor généralisée à été donnée, par M$^{\text{lle}}$ Fabri (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, T. XXV, p. 654) pour le cas de quantités dépendantes de plusieurs fonctions.

variables qui a ici la plus d'importance. On pourra commencer par l'étude des opérations les plus simples; ensuite, par compositions et par inversions successives, on passera au fur à mesure aux plus compliquées, de même que dans la théorie des fonctions analytiques on s'élève successivement des fonctions rationnelles aux transcendantes élémentaires, puis aux algébriques, et ainsi de suite. Nous remarquons sans peine, dès le début, que les opérations fonctionnelles nous offrent une très grande variété: pour ne citer que les plus communes, nous trouvons parmi elles, en outre de toutes les opérations arithmétiques, celle de dérivation, celle de différentiation finie, de substitution, etc., et celles qu'on obtient par la réitération, la composition et l'inversion de celles que nous venons d'énumérer. Parmi ces opérations, lesquelles convient-il de regarder comme les plus simples? Laissons-nous conduire par l'analogie avec les fonctions: la plus simple d'entre elles est la fonction linéaire qui satisfait (sous la condition de s'annuler pour la valeur zéro de la variable) à l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$

en d'autres termes, elle jouit de la propriété distributive. En outre, cette propriété est caractéristique de la fonction linéaire, au moins parmi celles qui ne sont pas infinies dans tout intervalle fini*). Si nous passons aux opérations fonctionnelles, nous trouvons que les plus fréquentes jouissent de la propriété distributive: telles sont la dérivation et la différentiation finie, simples ou multiples, l'intégration, et la classe nombreuse d'opérations qui consistent dans la multiplication d'une fonction arbitraire de n variables $\varphi(t_1, t_2, \ldots t_n)$ par une fonction déterminée α de ces variables et d'autres p paramètres $x_1, x_2, \ldots x_p$, et dans l'intégration définie entre des limites données, par rapport à $t_1, t_2, \ldots t_n$**). Enfin, on voit immédiatement que les opérations qui jouissent de la propriété distributive, et que nous appellerons précisément *opérations distributives*, forment un groupe.

Une grande partie des travaux de calcul fonctionnel qui se placent à notre second point de vue s'occupent effectivement d'opérations distributives. Passons sommairement en revue quelques uns des plus remarquables. Nous trouvons d'abord Laplace, avec sa théorie des fonctions génératrices***), où à chaque fonction a_n d'une variable n correspond la fonction $\varphi(x)$, définie par

---

*) V. Darboux, Math. Annalen, Bd. XVII, p. 55.

**) M. Volterra m'a fait remarquer qu'en se fondant sur la formule (18) du § 61 du présent mémoire (que j'ai publiée déjà dans les Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, S. V, T. IV, p. 142) on peut mettre, au moins formellement, une opération distributive quelconque sous forme d'une semblable intégrale définie.

***) Théorie analytique des probabilités, p. 9 et suiv. (Paris, V^ve Courcier, 1820).

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et qu'il a appelée fonction génératrice de a_n. On peut mettre la relation entre ces deux fonctions sous forme d'intégrale définie, et cette relation est évidemment distributive. Cette théorie a été reprise par Abel*), qui appelle $\varphi(x, y, z)$ fonction génératrice de $f(u, v, w)$ et celle-ci fonction déterminante de la première, lorsque ces deux fonctions sont liées par la relation

$$\varphi(x, y, z) = \int\int\int e^{ux+vy+wz} f(u, v, w)\, du\, dv\, dw,$$

où les intégrations sont prises entre des limites fixées. Ici on aperçoit clairement l'idée de correspondance — au sens géométrique moderne du mot — entre la variété des fonctions f et celles des fonctions φ. De nombreux auteurs, depuis Bessel jusqu'à M. Poincaré, ont donné des applications de cette correspondance**), sans parler d'autres correspondances ou transformations fonctionnelles plus ou moins analogues et plus ou moins générales, qui ont occupé un grand nombre de géomètres***). A cet ordre de recherches appartient la question de l'inversion des intégrales définies†).

La dérivation à indices quelconques est une opération distributive qui a, depuis Leibniz, interessé des savants celèbres††). Cette opéra-

---

*) Oeuvres complètes, 2ème éd., T. II, mém. XI.

**) V. mon mémoire: „Sulla trasformazione di Laplace", Mem. dell' Accad. delle scienze di Bologna, S. IV, T. VIII.

***) V. par exemple: Riemann, Werke, pag. 140; Spitzer, plusieurs notes dans le Grunert's Archiv, T. XXXII et XXXIII; Appell, Annales de l'Ecole normale, S. II, T. IX; Pincherle, Mem. dell' Accad. delle scienze di Bologna, S. IV, T. VII; Jensen, Bulletin de l'Académie des sciences de Danemark, 1894, etc. V. aussi Heine, Crelle, T. LX, LXI et LXII; Pochhammer, plusieurs mémoires dans le Journal de Crelle et dans les Math. Annalen (t. XXXV); Pincherle, Mem. dell' Accad. di Bologna, S. V, T. II; Mellin, Acta Soc. Fennicae, T. XXI; Schlesinger, Crelle, T. CXVI et CXVII, etc.

†) V. sur le problème d'inversion des intégrales définies, la notice bibliographique dans mon mémoire: „Studî sopra alcune operazioni funzionali", Mem. dell' Accad. di Bologna, S. IV, T. VII. Parmi les travaux publiés sur ce sujet postérieurement à cette notice, v. mon mémoire dans le T. X des Acta Mathematica, deux notes de M. Levi-Civita (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, S. II, T. XXVIII, et Rendiconti della R. Accad. di Torino, T. XXI), enfin deux notes de M. Volterra (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, S. V, T. V, 1896).

††) Sur le calcul des dérivées à indices quelconques, v. Leibniz, Oeuvres, T. III, p. 105 et correspondance avec Bernouilli, passim. Cfr. Euler, Comment. Petropolit., 1780—81; Fourier, Théorie de la chaleur, p. 564; Lacroix, Calcul différentiel, 3ème éd., T. III, p. 409; Liouville, Journal de l'Ecole Polytechnique, T. XIII; Spitzer, Grunert's Archiv, T. XXXII et XXXIII; Riemann, Werke, S. 331;

tion, dont il ne semble pas qu'on ait encore donné la forme définitive, se rattache d'un côté aux transformations fonctionnelles qu'on vient de citer, de l'autre au calcul symbolique ou calcul des opérations, dont la nomenclature et les méthodes s'introduisent spontanément dans les études sur les opérations fonctionnelles, surtout dans celles qui ont un caractère formel ou algorithmique. Le calcul des opérations, quoique déjà ancien, est considéré avec quelque défiance par la plupart des mathématiciens du continent, tandis que de nombreux auteurs anglais s'en sont constamment occupés: le »philosophical magazine«, les »philosophical transactions« et d'autres recueils contiennent, depuis plus de quarante ans, de nombreuses notes à ce sujet*). Cette défiance dépend sans doute du caractère formel que présente ce calcul, et du peu de peine qu'on s'est donné pour limiter ses résultats de façon à les rendre rigoureux; néanmoins plusieurs de ses applications qui, interprétées convenablement, sont susceptibles de toute rigueur, offrent beaucoup d'intérêt: par exemple la déduction des intégrales d'une équation différentielle de ceux d'une autre**), la décomposition en facteurs du premier membre d'une équation linéaire différentielle ou aux différences finies, à coefficients constants***) ou variables†), etc. A propos du calcul symbolique, on peut encore mentionner une méthode à laquelle son inventeur, M. Oltramare, a donné le nom de calcul de généralisation††). Cette méthode, qui semble découler du calcul des dérivées à indices quelconques de Liouville, se fonde sur l'application d'une opération distributive spéciale G. L'auteur obtient, par cette méthode, de nombreuses formules de calcul intégral: mais, outre que la permutabilité de l'opération G avec l'intégration définie, dont il est fait usage, ne semble pas démontrée, le défaut de précision qu'on note dans les mémoires de M. Oltramare ne laisse aux résultats qu'il obtient, qu'une valeur assez limitée.

Holmgren, mém. de l'Académie des sciences de Stockholm, T. V, 1866; Oltramare, Essai sur le calcul de généralisation (Genève, lithogr.) p. 63.

*) De Jellett, Graves, Boole, Sylvester, Murphy, etc. V. aussi Gregory (Exemples on the diff. and integr. Calculus), Boole (Treatise on differ. equations), Carmichael (Treatise on the Calculus of operations), Forsyth (Differ. equations) etc. En outre Casorati (Annali di Matematica, S. II, T. X), P. Cazzaniga (Giornale di Battaglini, T. XX), Lucas (Théorie des nombres, chap. XIII et XIV), etc.

**) V. Boole, Carmichael et Forsyth, ouvrages cités.

***) V. Casorati et Cazzaniga, loc. cit. V. aussi Vaschy, Journal de l'Ecole Polytechnique, cahier 63, 1893.

†) Libri, Crelle, T. X; Carmichael, ouvrage cité, et autres jusqu'à Schlesinger, Handbuch der lin. Differentialgleichungen, Bd. I, zweiter Abschnitt.

††) Sur la généralisation des identités. Mém. de l'Institut national génevois, T. XVI, 1886. Essai sur le calcul de généralisation. Genève, chez Stapelmohr (lithogr.) 1896.

Il nous reste enfin à citer quelques travaux qui regardent encore le calcul fonctionnel, mais qui s'en occupent à un point de vue nouveau, qui permet de rendre très claires et presque intuitives certaines généralités de ce calcul. C'est le point de vue vectoriel ou du calcul géométrique, inspiré par l'Ausdehnungslehre de Grassmann et par les écrits de Hamilton et de Tait sur les quaternions. Dans cet ordre d'idées, M. Peano a écrit quelques pages très intéressantes*) où, d'une façon aussi sobre que claire, il donne les propriétés les plus simples des opérations distributives appliquées à des éléments déterminés par n coordonnées: on peut dire que c'est une esquisse de la théorie des opérations fonctionnelles distributives exécutées sur les fonctions d'un ensemble linéaire n fois infini; par exemple sur les polynômes entiers à une variable de degré non supérieur à $n-1$. L'auteur note encore, sans y insister, qu'on pourrait aussi considérer des systèmes linéaires à un nombre infini de dimensions**). Le même point de vue se retrouve dans un travail étendu de M. Carvallo***), dont la première partie considère les substitutions linéaires comme des opérations (l'auteur dit *opérateurs*) appliquées aux vecteurs de l'espace ordinaire: la seconde partie, qui traite du calcul différentiel de ces opérations, rentre comme cas particulier, dans l'ordre des considérations de M. Volterra que nous avons rappelées ci-dessus. Au même ordre d'idées, bien que le concept vectoriel n'y soit pas explicitement énoncé, se rattachent d'autres travaux importants: pour n'en citer qu'un, le mémoire de M. Frobenius sur les formes bilinéaires†) et les nombreuses recherches que ce beau mémoire a inspirées††).

Après avoir ainsi passé sommairement en revue les principaux travaux où, à ma connaissance, se trouvent des idées analogues à celles qui ont dirigé les recherches que j'expose ici, qu'il me soit permis d'indiquer rapidement le plan et le but du présent travail.

L'objet de ce mémoire est l'étude des opérations distributives qu'on peut appliquer aux fonctions analytiques, plus particulièrement aux séries de puissances entières et positives de la variable x, et qui donnent comme résultat des séries de la même nature. Nous considérons l'ensemble de ces séries comme une variété ou espace (que nous appelons espace fonctionnel) à un nombre infini de dimensions:

---

*) Calcolo geometrico, cap. IX, p. 141 (Turin, Bocca).

**) Ibid., p. 143.

***) Sur les systèmes linéaires etc. Monatshefte für Math. und Physik, Bd. II, S. 177, 225, 311 (1891).

†) Crelle, T. LXXXIV, p. 1.

††) V. par exemple Study, Monatshefte für Math. und Physik, Bd. II, S. 23, Sforza, Giornale di Matematiche, T. XXXIV, etc.

chaque série est un élément ou point de cet espace, et le système des coefficients de la série peut se regarder comme le système de ses coordonnées. Les opérations distributives donnent des correspondances de cet ensemble sur lui-même, correspondances qui sont analogues aux homographies et se réduisent aux homographies mêmes lorsque on les applique à des variétés à un nombre fini de dimensions contenues dans l'espace fonctionnel. Ces opérations donnent lieu à un calcul que l'on peut pousser assez loin et qui offre assez d'analogie avec le calcul ordinaire des fonctions, grâce à l'opération de dérivation ordinaire, que nous indiquons par D, et qui est l'élément fondamental de ce calcul où D^n joue le même rôle que jouent, dans la théorie des fonctions, les puissances de la variable. De plus, les expressions auxquelles on est conduit (séries de puissances de D, de D^{-1}, etc.) n'ont pas seulement une existence formelle: sous des restrictions convenables, elles sont tout aussi valables que les séries convergentes ordinaires de l'analyse. C'est là un des points sur lesquels nous avons insisté.

Notre mémoire se divise en quatre chapitres. Dans le premier, après quelques généralités sur les opérations distributives, on traite des racines de ces opérations, puis des opérations appliquées aux variétés linéaires à un nombre fini de dimensions, et au moyen du concept de racines d'une opération, on retrouve d'une façon tout-à-fait simple et naturelle la décomposition d'une homographie par les diviseurs élémentaires de Weierstrass. Le deuxième chapitre traite des propriétés générales des opérations distributives appliquées à tout l'espace fonctionnel: on y definit certaines opérations fort simples, on y introduit le concept de dérivation fonctionelle qui va être fort utile, enfin, A étant une opération et φ et ψ deux fonctions, on obtient le développement de $A(\varphi\psi)$ sous une forme tout-à-fait analogue à celle de la série de Taylor. Pour terminer ce chapitre, nous montrons qu'une opération, ou une classe d'opérations, peut être déterminée par une équation symbolique: nous en donnons un exemple dont nous déduisons comme cas particulier le groupe des opérations que M. Schapira a pris comme base de son „Cofunctional Rechnung". Le troisième chapitre a pour objet l'expression, sous forme de séries de puissances de D ou de D^{-1}, des opérations distributives, l'étude des conditions de convergence et de validité de ces expressions, leurs conditions d'identité qui donnent lieu à une extension de la méthode des coefficients indéterminés, enfin l'énoncé et la solution d'un problème d'interpolation fonctionelle analogue aux problèmes d'interpolation qui se présentent dans la théorie des fonctions. Enfin le quatrième chapitre est consacré à deux applications: l'une, à la question des dérivées à indices quelconques, que nous définissons au moyen d'une équation symbolique, l'autre, à l'expression générale de l'intégrale d'une équation différentielle linéaire non homogène en série de puissances de D^{-1}, à coefficients exprimables rationnellement au moyen des coefficients de l'équation*).

Ce travail est certainement incomplet sur bien des points: pour n'en citer qu'un, il faudrait développer le § 104 de façon à obtenir la décomposition d'une opération distributive appliquée à tout l'espace fonctionnel comme on a décomposé, au chap. I, les opérations appliquées à une variété d'ordre fini; mais je n'y suis pas encore parvenu. Il y aurait encore, non seulement à étendre les résultats obtenus aux opérations qui portent sur plusieurs fonctions ou sur des fonctions de plusieurs variables, comme l'a indiqué M. Calò**), mais à géneraliser l'espace fonctionnel au delà des séries de puissances, à étudier les équations symboliques et les équations fonctionnelles linéaires comme on étudie les équations différentielles ou aux différences et comme M. Grévy***) a étudié les équations formées linéairement avec les opérations itératives, etc. Mais nous espérons que, malgré ces lacunes, notre essai suffira à prouver qu'on peut pénetrer assez profondément dans l'étude des opérations fonctionnelles par des moyens suffisamment élémentaires, et sans l'usage des intégrales définies qui ont l'inconvénient d'introduire des considérations étrangères à la théorie des opérations.

Chapitre I.

Les opérations distributives dans une variété à un nombre fini de dimensions.

I. Généralités.

1. Les éléments sur lesquels opère le calcul qui forme l'objet de cette étude, sont les séries ordonnées selon les puissances entières et positives d'une variable x. Nous donnerons à ces éléments le nom de fonctions: ce mot de *fonction* signifie donc, dans ce qui suit et à moins qu'on ne dise explicitement le contraire, *série de puissances*. Par $n^{\text{ème}}$ coefficient de la série nous entendons le coefficient de la $n-1^{\text{ème}}$ puissance de la variable. On regardera une fonction comme déterminée ou comme variable, arbitraire ou non, selon que les coefficients de la série seront eux-mêmes déterminés, ou variables arbitrairement ou non.

*) Plusieurs des résultats contenus dans ce mémoire ont fait l'objet de quelques notes préventives que j'ai publiées dans les Comptes rendus des Académies dei Lincei, de Turin et de l'Institut Lombard pour les années 1895 et 96. A ces notes se rattachent celles de MM. Calò (R. c. delle R. Accad. de Lincei, agosto 1895) et Levi-Civita (R. C. dell'Istituto lombardo, 4 e 18 aprile e 11 luglio 1895).

**) Loc. cit.

***) Annales de l'Ecole normale supérieure, S. III, T. XI. 1894.

2. Nous appelerons *opération fonctionnelle* toute opération qui, exécutée sur une fonction, donne comme résultat une fonction. Dans cette nouvelle fonction la variable pourra être indiquée par x, ou par une autre lettre, suivant la façon dont l'operation est définie: lorsque rien ne s'y oppose, nous l'indiquerons par la même lettre x. Comme cas particulier, une opération fonctionnelle peut donner comme résultat une constante.

3. Dans ce travail, les nombres, réels ou complexes, seront indiqués par les lettres minuscules de l'alphabet romain; les fonctions, par les minuscules de l'alphabet grec; les opérations fonctionnelles, par des majuscules. Il va de soi que la notation $A(\varphi)$ exprime nonseulement l'opération A qu'il faut exécuter sur la fonction φ, mais encore le résultat obtenu par cette opération.

4. Par *opération fonctionnelle distributive*, ou simplement *opération distributive*, nous entendons une opération A qui donne, lorsqu'on l'exécute sur les fonctions φ, ψ et $\varphi + \psi$:

$$A(\varphi + \psi) = A(\varphi) + A(\psi), \tag{1}$$

et qui donne en outre pour tout nombre a réel ou complexe et pour toute fonction φ:

$$A(a\varphi) = aA(\varphi). \tag{2}$$

Dans ce qui suit, nous nous occupons des opérations fonctionelles distributives.

5. Une opération qui, exécutée sur une fonction déterminée, ne peut donner lieu qu'à un seul résultat se dit à *détermination unique;* elle est dite à *détermination multiple* dans le cas contraire. En disant qu'une opération A à détermination multiple est distributive, on doit entendre que parmi les déterminations de $A(\varphi)$, $A(\psi)$ et $A(\varphi + \psi)$, il s'en trouve qui vérifient l'égalité

$$A(\varphi) + A(\psi) = A(\varphi + \psi).$$

6. Nous désignerons par le nom de champ fonctionnel l'ensemble des fonctions qui jouissent d'une proprieté commune. Les expressions »champ fonctionnel qui en contient un autre« ou »est contenu dans un autre«, comme celle de »champ commun à deux champs fonctionnels« s'expliquent d'elles-mêmes.

Une opération fonctionnelle qui est à détermination multiple dans un certain champ, peut fort bien se reduire à détermination unique dans un champ plus restreint. Nous en verrons bientôt un exemple, au § 19.

7. La somme de deux opérations est la somme des résultats qu'on obtient en appliquant les deux opérations à une même fonction variable arbitrairement. Ainsi

$$(A + B)(\varphi) = A(\varphi) + B(\varphi).$$

La somme d'un nombre quelconque d'opérations se définit de la même façon. La somme ainsi définie admet la propriété commutative et la propriété associative. La somme de deux ou plusieurs opérations distributives est aussi une opération distributive.

8. Le produit de l'opération A par l'opération B est l'opération B exécutée sur le résultat de l'opération A. Cette opération sera indiquée par BA. On définit de même le produit d'un nombre quelconque d'opérations.

Le produit de plusieurs opérations distributives est aussi une opération distributive: en effet,

$$BA(\varphi + \psi) = B\big(A(\varphi) + A(\psi)\big) = BA(\varphi) + BA(\psi).$$

On en déduit que les opérations fonctionnelles distributives forment un groupe.

La multiplication ainsi définie jouit de la propriété associative, mais non, en général, de la propriété commutative. Ainsi on a

$$(AB)(C) = A(BC) = ABC,$$

mais on n'a pas en général

$$AB = BA;$$

lorsque cela a lieu, on dit que A e B sont permutables. Les opérations permutables avec une opération donnée forment un groupe. Il est évident qu'on a

$$A(B+C) = AB + AC, \quad (A+B)C = AC + BC.$$

9. Le produit de l'opération A par elle même s'écrira A^2, de même A^m indiquera le produit de m facteurs égaux à A, et l'on a

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

Dans le groupe des opérations fonctionnelles distributives se trouve l'opération identique, qu'on peut représenter par 1 ou par A^0.

Une opération telle que $A^m = 1$ se dira cyclique.

10. Nous appelerons inverse de A et nous indiquerons par A^{-1} une opération telle que

$$AA^{-1} = 1.$$

L'opération A^{-1} peut être à détermination multiple même si A est à détermination unique, comme nous le verrons tout-à-l'heure (§ 11); mais de la propriété

$$A(\varphi + \varphi_1) = A(\varphi) + A(\varphi_1)$$

dont jouit A, on déduit immédiatement que A^{-1} et une opération distributive, au sens indiqué au § 5.

11. Etant données n fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ qui ne satisfont pas identiquement à une équation linéaire homogène à coefficients constants, considérons toutes les fonctions de la forme

(3) $$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n,$$

où les constantes $c_1, c_2, \ldots c_n$ peuvent recevoir toutes les valeurs possibles, réelles ou complexes. L'ensemble de ces fonctions formera une variété linéaire d'ordre n ou à n dimensions. Chaque fonction de la forme (3) sera un élément ou un point de cette variété, que nous indiquerons par la notation $V_r(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ s'il sera nécessaire de mettre les n fonctions données en évidence, ou par les notations $V_n(\alpha)$ ou V_n quand cela ne sera pas nécessaire*).

12. Si l'on prend $n + 1$ fonctions de la variété $V_n(\alpha)$, ces fonctions seront nécéssairement liées par une relation homogène linéaire à coefficients constants, ce que nous exprimerons en disant qu'elles sont linéairement dépendantes. Nous dirons que n fonctions de $V_n(\alpha)$, linéairement indépendantes, forment un système fondamental de la variété; tel sera le système

$$\beta_h = a_{h.1}\alpha_1 + a_{h.2}\alpha_2 + \cdots + a_{h.n}\alpha_n, \quad (h = 1, 2, \ldots n)$$

où le déterminant $\Sigma \pm a_{1.1}a_{2.2}\ldots a_{n.n}$ est différent de zéro.

Chaque élément de la variété peut se mettre sous la forme d'une fonction linéaire homogène à coefficients constants des éléments d'un système fondamental.

13. Rappelons que la condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ de la variable x soient linéairement indépendantes, est que le déterminant fonctionnel ou wronskien

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \frac{d\alpha_1}{dx} & \frac{d\alpha_2}{dx} & \cdots & \frac{d\alpha_n}{dx} \\ \frac{d^{n-1}\alpha_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}\alpha_2}{dx^{n-1}} & \cdots & \frac{d^{n-1}\alpha_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Nous indiquerons ce déterminant par $W(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ ou W_n; et on peut remarquer que W est une opération fonctionnelle distributive par rapport à chacun des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

14. Si $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r$ sont r éléments linéairement indépendants appartenant à la variété $V_n(\alpha)$, on aura $r \leq n$; si $r < n$, ces éléments donneront un système fondamental d'une variété $V(\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_r)$ d'ordre r, dont chaque élément appartient à $V_n(\alpha)$ et qu'on peut dire en conséquence, contenue dans $V_n(\alpha)$.

D'ici découlent immédiatement les définitions de somme de deux variétés sans éléments communs, de variétés communes à deux variétés

*) L'ensemble des fonctions défini au § 1 nous donne un exemple de ce que M. Veronese, dans ses *Fondamenti di Geometria*, appelle *espace général;* l'ensemble (3) est un espace linéaire à n dimensions contenu dans l'espace général.

données, de variétes contenant deux variétés données, etc., sur lesquelles il est superflu d'insister.

15. Comme exemples de variétés à une dimension, on peut considérer l'ensemble des nombres, réels et complexes. Comme exemples de variétés à n dimensions, on peut considérer l'ensemble des polynômes entiers en x de degré au plus égal à $n-1$, ou l'ensemble des intégrales d'une équation différentielle linéaire d'ordre n, pour laquelle $x=0$ n'est pas un point singulier, dans un domaine de ce point, etc.

16. Si l'on applique aux fonctions de la variété $V_n(\alpha)$ une opération distributive A à détermination unique, on obtient une variété qui ne peut être d'ordre supérieur à n. En effet, si l'on considère $n+1$ éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ de $V_n(\alpha)$, on a entre ces éléments une relation de la forme

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n + c_{n+1}\alpha_{n+1} = 0,$$

d'où, par les (1) et (2) (§ 4):

$$c_1 A(\alpha_1) + c_2 A(\alpha_2) + \cdots + c_n A(\alpha_n) + c_{n+1} A(\alpha_{n+1}) = 0.$$

On dira que la variété que l'on obtient est transformée de $V_n(\alpha)$ par l'opération A, et les éléments α_i et $A(\alpha_i)$ des deux variétés se diront correspondants. Pour indiquer la variété transformée de $V_n(\alpha)$ par A, on pourra écrire $AV_n(\alpha)$, et l'on a

$$AV(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = V\big(A(\alpha_1), A(\alpha_2), \ldots A(\alpha_n)\big)\cdot$$

Il n'est pas exclu, et nous le verrons tout-à-l'heure, que la transformée d'une variété d'ordre n puisse être d'ordre inférieur à n.

La transformée par une opération A d'une variété contenue en $V_n(\alpha)$ est contenue dans la variété transformée de $V_n(\alpha)$ par la même opération.

II. Racines des opérations.

17. On dira qu'une fonction α est *racine* de l'opération A lorsqu'on aura

$$A(\alpha) = 0.$$

Si une opération a pour racines n fonctions linéairement indépendantes, elle aura pour racine toute fonction de la variété a n dimensions déterminée par ces fonctions. Nous dirons que cette variété est racine de l'opération.

18. Si une opération A admet une racine α, l'opération inverse est à détermination multiple; en effet, on aura en même temps

$$A(\varphi) = \psi, \quad A(\varphi + \alpha) = \psi,$$

d'où il suit que $A^{-1}(\psi)$ admettra les déterminations φ, $\varphi + \alpha$, et (k étant un nombre quelconque) $\varphi + k\alpha$. Il en résulte que $A^{-1}(0) = k\alpha$. Remarquons en passant qu'à cause de la formule (2), une opération à détermination unique appliquée à zéro ne peut donner comme résultat que zéro*).

19. Montrons par un exemple de quelle façon une opération à détermination multiple peut être reduite à détermination simple en limitant convenablement le champ fonctionnel. Il est facile de trouver une opération A dont les racines soient des fonctions régulières dans un cercle de centre $x=0$ et de rayon r: il suffit de prendre pour A le premier membre d'une équation différentielle linéaire en x dont les points singuliers soient tous sur la circonférence $|x|=r$. Qu'on prenne comme champ fonctionnel l'ensemble des fonctions régulières dans un cercle de centre $x=0$ et de rayon $r+h$: alors si $A^{-1}(\varphi)$ a une détermination dans ce champ, cette détermination est unique.

20. Montrons maintenant, comme nous l'avons annoncé au § 16, qu'une opération à détermination unique A exécutée sur une variété d'ordre n, $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, peut donner lieu à une varieté d'ordre moindre. Si dans cette variété il existe r fonctions linéairement indépendantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ qui soient racines de A, avec $r \leq n$, formons un système fondamental constitué par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ et $n-r$ autres fonctions $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-r}$; en exécutant sur notre variété, que nous pouvons désigner par

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-r})$$

l'opération A, nous obtiendrons comme résultat la variété d'ordre $n-r$

$$V\Big(A(\mu_1),\ A(\mu_2), \ldots A(\mu_{n-r})\Big).$$

Réciproquement, si une opération A exécutée sur une variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ d'ordre n donne lieu à une variété d'ordre moindre $n-r$, il doit y avoir, dans la V_n, r racines de A linéairement indépendantes; en effet, entre $A(\alpha_1), A(\alpha_2), \ldots A(\alpha_n)$ il devra y avoir r relations de la forme

$$c_{i.1} A(\alpha_1) + c_{i.2} A(\alpha_2) + \cdots + c_{i.n} A(\alpha_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots r)$$

d'où

$$A(c_{i.1}\alpha_1 + c_{i.2}\alpha_2 + \cdots + c_{i.n}\alpha_n) = 0.$$

21. On dira qu'une opération A qui fait correspondre à une variété d'ordre n une variété d'ordre moindre, est *dégénerée* par rapport à cette variété; nous dirons qu'elle est *dégénerée de degré* r si elle diminue de r unités l'ordre de la variété.

22. Il suit du § 20 que la condition nécéssaire et suffisante pour qu'une opération A soit dégénerée du $r^{\text{ème}}$ degré par rapport à une variété V_n, est que V_n contienne r racines de A, linéairement indépendantes.

*) Dorénavant, en parlant de racines d'une opération, nous exclurons toujours la racine zéro. En outre il est bien clair que lorsqu'on dit que α est racine de A, on considère, en même temps que α, toute fonction $c\alpha$.

On voit donc que, tandis qu'une opération A non dégénerée par rapport à V_n établit entre les éléments de V_n et ceux de AV_n une correspondance bi-univoque, une opération dégénerée au contraire fait correspondre à chaque élément de V_n un élément dans AV_n, mais à chaque élément de AV_n correspondent des éléments de V_n en nombre infini.

23. Soit α une racine de A, A étant une opération à détermination unique. Puisque $A(0)$ ne peut avoir d'autre détermination que zéro (§ 18), on voit que α est aussi racine de A^2, mais A^2 peut admettre des racines qui ne sont pas racines de A. De même, m étant un nombre entier positif, toute racine de $A, A^2, \ldots A^{m-1}$ est racine de A^m, mais A^m peut admettre des racines qui n'annulent pas A^{m-1}. De telle racines se diront *racines propres* de A^m, tandis qu'une racine de $A^r (r < m)$ sera une racine impropre pour A^m.

Indiquons par $\alpha^{(m-1)}$ une racine propre quelconque de A^m, par α une racine de A: il est clair que $A(\alpha^{(m-1)})$ est une racine propre de A^{m-1}, de sorte qu'on peut écrire:

$$A(\alpha^{(m-1)}) = \alpha^{(m-2)},$$

et en général:

$$(4)\quad A^{m-1}(\alpha^{(m-1)}) = \alpha,\quad A^{m-2}(\alpha^{(m-1)}) = \alpha^{(1)},\quad \ldots A^{m-r}(\alpha^{(m-1)}) = \alpha^{(r-1)}.$$

24. Soient $\alpha_1^{(m-1)}, \alpha_2^{(m-1)}, \ldots \alpha_s^{(m-1)}$ des racines propres de A^m: la variété $V(\alpha_1^{(m-1)}, \ldots \alpha_s^{(m-1)})$ sera elle-même racine de A^m. Nous dirons que cette variété est racine propre ou impropre de A^m, suivant que toutes les fonctions qu'elle contient sont, ou non, racines propres de A^m.

Il est clair que si $V_s(\alpha^{(m-1)})$ est racine propre de A^m, la variété $AV(\alpha^{(m-1)})$ sera racine propre de A^{m-1}.

25. Admettons qu'une opération A à détermination unique n'ait comme variété racine qu'une variété d'ordre r: en d'autres termes, A ait en tout r racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ linéairement indépendantes. Je dis que A^2 admet au plus, comme variété racine propre, une variété d'ordre r. En effet, supposons pour un instant que A^2 ait $r+1$ racines propres, dont aucune combinaison linéaire n'est donc racine de A, et soient $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{r+1}$ ces racines; on aura

$$A^2(\beta_i) = 0,\quad \text{ou}\quad AA(\beta_i) = 0,\quad (i = 1, 2, \ldots r+1)$$

et puisque $A(\beta_1), A(\beta_2), \ldots A(\beta_{r+1})$ ne sont pas nulles par hypothèse, on aura entre ces $r+1$ racines de A une relation linéaire

$$c_1 A(\beta_1) + c_2 A(\beta_2) + \cdots + c_{r+1} A(\beta_{r+1}) = 0,$$

d'où

$$A(c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_{r+1}\beta_{r+1}) = 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse, puisque $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{r+1}$ sont linéairement indépendantes et aucune de leurs combinaisons linéaires n'est racine de A. Le théorème est donc démontré.

26. Il en resulte que si A a en tout r racines linéairement indépendantes, A^m a une variété racine propre de l'ordre r au plus, et par conséquent la variété qui comprend la totalité des racines de A^m est de l'ordre mr au plus.

27. Le théorème du § 25 est un cas particulier du suivant. Soient A et B deux opérations distributives permutables (§ 8). Les racines de A, que nous indiquerons par la lettre α, forment en tout une variété V_r d'ordre r, les racines de B, que nous indiquerons par β, forment en tout une variété V_s d'òrdre s. Ces deux variétés aient une variété commune maxima (§ 14) d'ordre q, et il existe par conséquent une variété minima d'ordre $r+s-q$ comprenant V_r et V_s, soit W. Je dis que l'opération AB admet comme variété racine une variété de l'ordre $r+s$ au plus, qui comprend la variété W.

En effet, soient

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_q,\ \alpha_{q+1},\ \ldots\ \alpha_r$$

et

$$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=\alpha_2,\ \cdots\ \beta_q=\alpha_q,\ \beta_{q+1},\ \cdots\ \beta_s$$

deux systèmes fondamentaux, l'un de V_r, l'autre de V_s;

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\ \alpha_r,\ \beta_{q+1},\ \ldots\ \beta_s$$

sera un système fondamental de W. Toute fonction φ de W sera racine de AB, car si

$$\varphi=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r+c_{r+1}\beta_{q+1}+\cdots+c_{r+s-q}\beta_s,$$

on aura, en exécutant l'opération AB, A et B étant permutables:

$$AB(\varphi)=BA(c_1\alpha_1+\cdots+c_r\alpha_r)+AB(c_{r+1}\beta_{q+1}+\cdots+c_{r+s-q}\beta_s),$$

dont le résultat est évidemment nul. Cela posé, supposons qu'il existe $q+1$ fonctions indépendantes linéairement entre elles et avec la variété W: soient $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_q;\ \mu$ ces $q+1$ fonctions. Si φ est une fonction contenue dans W, on ne pourra donc pas déterminer $q+1$ costantes $c_0,\ c_1',\ \ldots\ c_q'$ telles que

$$c_0\mu+c_1'\lambda_1+c_2'\lambda_2'+\cdots+c_q'\lambda_q=\varphi.$$

Puisque l'on a $AB(\mu)=0$, et que μ n'est pas racine de B, $B(\mu)$ sera racine de A: par la même raison $B(\lambda_1),\ldots B(\lambda_q)$ sont des racines de A; enfin, quisque

$$BA(\alpha_{q+h})=0=AB(\alpha_{q+h}),\qquad (h=1,2,\cdots r-q)$$

et que les α_{q+h} ne sont pas racines de B, $B(\alpha_{q+h})$ sera racine de A. Posons donc

$$B(\mu)=\alpha',\quad B(\lambda_i)=\alpha_i',\qquad (i=1,2,\cdots q)$$
$$B(\alpha_{q+h})=\alpha_h'',\qquad (h=1,2,\cdots r-q).$$

Ces racines de A étant au nombre de $r+1$, elles seront liées par une relation linéaire

$$c\alpha' + c_1\alpha_1' + \cdots + c_q\alpha_q' + c_{q+1}\alpha_1'' + \cdots + c_r\alpha_{r-q}'' = 0$$

qui équivaut à

$$B(c\mu + c_1\lambda_1 + \cdots + c_q\lambda_q + c_{q+1}\alpha_{q+1} + \cdots + c_r\alpha_r) = 0;$$

d'où il suit que la fonction entre parenthèses est nulle ou est une racine de B. Dans l'un et dans l'autre cas les $q+1$ fonctions $\mu, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q$ sont liées linéairement avec une fonction de la variété W: donc les racines de AB distinctes de W sont au plus q, c. q. f. d.

28. On déduit immédiatement comme corollaires de ce théorème les propositions des §§ 25 et 26.

On en déduit encore le corollaire suivant: Si deux opérations distributives permutables A, B n'ont pas de racines communes, et A admet comme racine la variété V_r et B la variété V_s, les racines de AB seront toutes les fonctions de la variété $V_r + V_s$, et celles-là seulement. Ce théorème s'étend immédiatement au produit de plusieurs opérations permutables n'ayant pas de racines communes.

III. Variétés invariantes pour une opération donnée.

29. Nous dirons qu'une fonction α est invariante par rapport à une opération donnée A à détermination unique, quand on a, k étant une constante:

(5) $$A(\alpha) = k\alpha.$$

Il suit de là que toutes les fonctions de la variété du premier ordre $c\alpha$ sont pareillement invariantes par rapport à A.

30. Nous dirons qu'une variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ est invariante par rapport à une opération A lorsque la transformée de V par rapport à A est la V même, ou y est contenue. Ce dernier cas a lieu (§ 21) lorsque l'opération A est dégénérée pour V, et par suite (§ 22) lorsque cette variété contient quelque racine de A.

Lorsque la variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ est invariante par rapport à A, on a

(6) $$A(\alpha_i) = a_{i.1}\alpha_1 + a_{i.2}\alpha_2 + \cdots + a_{i.n}\alpha_n, \qquad (i = 1, 2, \cdots n);$$

l'opération A est donc, pour la variété V, une substitution linéaire*). Si l'operation est dégénérée, le déterminant $\Sigma \pm a_{1.1}a_{2.2}\cdots a_{n.n}$ est nul, et réciproquement; le degré de dégénérescence (§ 21) dépend de la caractéristique de ce déterminant.

*) Il est clair qu'une opération A, qui est une substitution linéaire pour V, peut être definie d'une toute autre façon pour des variétés plus générales.

31. A côté de l'opération A, considérons les opérations

$$B = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m.\text{*)} \tag{7}$$

Ces opérations forment un groupe permutable; elles admettent toutes la variété V comme invariante. Elles se multiplient suivant les règles de la multiplication ordinaire: on peut donc les décomposer en produits d'opérations du même groupe, mais de la forme plus simple $A - z$; nous appelerons ces dernières *opérations du premier degré en* A et nous les indiquerons par E. Une opération comme (7) (du degré m en A) peut donc toujours se mettre sous la forme d'un produit de m facteurs E: il suffit pour cela de décomposer le polynôme

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_m t^m$$

en

$$a_m (t - z_1)^{r_1} (t - z_2)^{r_2} \cdots (t - z_q)^{r_q}$$

et, en faisant

$$E_i = A - z_i,$$

il vient

$$B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \cdots E_q^{r_q}. \tag{8}$$

32. Proposons nous maintenant la question suivante:

Etant données l'opération A et la variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$, invariante par rapport à A et qui ne renferme pas de racines de A, existe-t-il, dans cette variété, une fonction ω invariante par rapport à A?

En rappelant l'équation (5), on peut donner encore à cette question l'énoncé suivant:

Parmi les opérations du premier degré en A, $E = A - z$, y en a-t-il qui soit dégénérée par rapport à la variété donnée, c'est-à-dire qui admette quelque racine dans cette variété?

Mis sous cette forme, on voit que le problème dépend de la détermination du nombre z: on voit de plus que ce nombre est indépendant du choix du système fondamental de $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$: c'est donc un invariant de la variété donnée.

33. Soit donc

$$\omega = h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2 + \cdots + h_n \alpha_n$$

une fonction invariante par rapport à A; on aura

$$A(\omega) = z\omega$$

d'où, par les équations (6), et puisque les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sont linéairement indépendantes, on tire

$$h_1 a_{1 \cdot i} + h_2 a_{2 \cdot i} + \cdots + h_n a_{n \cdot i} = z h_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{9}$$

---

*) J'écris $a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots$ au lieu de $a_0 A^0 + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \cdots$, A^0 étant l'opération identique: cela ne peut donner lieu à aucune méprise.

d'où suit pour z la condition nécessaire et suffisante d'être racine de l'équation

$$(10)\qquad f(t)=\begin{vmatrix} a_{1\cdot1}-t & a_{1\cdot2} & a_{1\cdot3}\cdots & a_{1\cdot n}\\ a_{2\cdot1} & a_{2\cdot2}-t & a_{2\cdot3}\cdots & a_{2\cdot n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n\cdot1} & a_{n\cdot2} & a_{n\cdot3}\cdots & a_{n\cdot n}-t\end{vmatrix}=0.$$

Cette équation est dite équation caractéristique ou fondamentale de l'opération A par rapport à la variété donnée; si nous indiquons par $z_1, z_2, \ldots z_q$ ses racines et par $r_1, r_2, \ldots r_q$ leurs ordres de multiplicité respectifs, nous aurons:

$$(10')\qquad f(t)=(t-z_1)^{r_1}(t-z_2)^{r_2}\cdots(t-z_q)^{r_q}.$$

Si donc une opération $E=A-z$ admet une racine ω dans $V_n(\alpha)$, z est une racine de l'équation fondamentale, et réciproquement.

34. L'équation fondamentale est, comme on l'a remarqué pour une de ses racines, indépendante du choix du système fondamental en $V_n(\alpha)$: ses coefficients, comme ses racines, sont donc des invariants. On démontre immédiatement que si $V_n(\alpha)$ contient une variété $V_m(\beta)$, $m<n$, qui est aussi invariante par rapport à A, et $g(t)$ est le premier membre de l'équation fondamentale de A par rapport à $V_m(\beta)$, $g(t)$ est diviseur de $f(t)$. De même, si $V_n(\alpha)$ est la somme des deux variétés $V_m(\beta)$, $V_{n-m}(\gamma)$ invariantes par rapport à A et dont $g(t)$, $h(t)$ sont les premiers membres des équations fondamentales, on a

$$f(t)=g(t)\,h(t).$$

35. A côté de l'opération A considérons l'opération

$$(11)\qquad B=E_1^{r_1}E_2^{r_2}\cdots E_q^{r_q};\qquad (E_i=A-z_i,\ i=1,2,\cdots q).$$

Nous savons que sa variété racine est (§ 28) la somme des variétés racines de $E_1^{r_1}$, $E_2^{r_2}$, $\cdots E_q^{r_q}$. De plus, nous pouvons dire qu'à cette variété appartiennent toutes les fonctions invariantes par rapport à A.

36. Nous nous proposons maintenant d'étudier les racines de l'opération B, et pour cela, celles de l'opération E^r, où $E=A-z$, et z désigne l'une quelconque des racines de (10).

Remarquons d'abord qu'une opération $(A-a)^p$, où p est un nombre entier positif quelconque, ne peut avoir de racine propre λ en $V_n(\alpha)$ que si a est une racine de (10), puisque $(A-a)^{p-1}$, appliquée à λ, donne une racine de $A-a$.

Cela posé, si l'opération $E^p=(A-z)^p$ admet, dans la variété $V_n(\alpha)$, une racine propre $\omega^{(p-1)}$, on aura (§ 23):

$$E(\omega^{(p-1)})=\omega^{(p-2)},\ E(\omega^{(p-2)})=\omega^{(p-3)},\ \ldots E(\omega^{(1)})=\omega,\ E(\omega)=0,$$

d'où l'on tire:

$$(12)\qquad \begin{cases} A(\omega) = z\omega, \\ A(\omega^{(1)}) = z\omega^{(1)} + \omega, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A(\omega^{(p-1)}) = z\omega^{(p-1)} + \omega^{(p-2)}. \end{cases}$$

Les fonctions ω, $\omega^{(1)}$, ... $\omega^{(p-1)}$ ainsi determinées sont linéairement indépendantes; supposons en effet qu'on ait, pour des constantes c_0, c_1, ... c_{p-1}:

$$(13)\qquad c_0\omega + c_1\omega^{(1)} + \cdots + c_{p-1}\omega^{(p-1)} = 0,$$

et appliquons aux deux membres l'opération E^{p-1}; il viendra $c_{p-1} = 0$; en appliquant à la relation (13) ainsi reduite l'opération E^{p-2}, il vient $c_{p-2} = 0$, et ainsi de suite.

Si donc E^p admet dans la variété $V_n(\alpha)$ une racine propre $\omega^{(p-1)}$, il existe une variété d'ordre p,

$$V_p(\omega,\ \omega^{(1)}, \dots \omega^{(p-1)})$$

également invariante par rapport à A, contenue dans $V_n(\alpha)$, et sur laquelle A opère la substitution linéaire (12). Le tableau (12) montre que le premier membre de l'équation caractéristique correspondante est

$$g(t) = (t - z)^p,$$

d'où il suit (§ 35) que z est racine de $f(t) = 0$ de l'ordre p au moins.

37. Représentons maintenant par $W_m(\omega)$ la variété linéaire contenue dans $V_n(\alpha)$ et qui est formée par l'ensemble des racines de E et de ses puissances: nous voulons étudier la structure de cette variété. Soit, pour cela, p la plus haute puissance de E dont W_m renferme des racines propres, et soit $T_{k_1}(\omega_1^{(p-1)}, \omega_2^{(p-2)}, \dots \omega_{k_1}^{(p-1)})$ la variété racine propre de E^p. En appliquant à cette variété l'opération E, on obtiendra une variété appartenant à la variété racine propre de E^{p-1}, et si nous posons

$$E(\omega_1^{(p-1)}) = \omega_1^{(p-2)}, \dots E(\omega_{k_1}^{(p-1)}) = \omega_{k_1}^{(p-2)},$$

la variété racine propre de E^{p-1} sera de l'ordre k_1 au moins: soit en général $k_1 + k_2$ son ordre, nous pourrons l'indiquer par

$$T_{k_2}(\omega_1^{(p-2)}, \omega_2^{(p-2)}, \dots \omega_{k_1}^{(p-2)}, \omega_{k_1+1}^{(p-2)}, \dots \omega_{k_1+k_2}^{(p-2)}).$$

En appliquant à cette variété l'opération E, on obtiendra une variété appartenant à la variété racine propre de E^{p-2} dont on pourra indiquer en général l'ordre par $k_1 + k_2 + k_3$, ... et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrivera aux racines propres de E^2, dont nous indiquerons la variété par

$$T_{k_{p-1}}\left(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \dots \omega_{k_1}^{(1)}, \omega_{k_1+1}^{(1)}, \dots \omega_{k_1+k_2}^{(1)}, \dots \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}}^{(1)}\right);$$

en appliquant à celle-ci l'opération E, on aura enfin une variété appartenant à la variété racine de E, qui pourra cependant renfermer d'autres fonctions linéairement indépendantes des précédentes: en posant

$$E(\omega_i^{(1)}) = \omega_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots k_1 + k_2 + \cdots + k_{p-1})$$

et en indiquant par

$$\omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}+1}, \; \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}+2}, \ldots \omega_m$$

ces nouvelles racines de E, on aura la variété racine de E:

$$T_{k_p}\left(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{k_1}, \omega_{k_1+1}, \ldots \omega_{k_1+k_2}, \ldots \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}}, \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}+1}, \ldots \omega_m\right).$$

Le tableau

$$(14)\left\{\begin{array}{l}
\omega_1^{(p-1)} \ldots \omega_{k_1}^{(p-1)}. \\
\omega_1^{(p-2)} \ldots \omega_{k_1}^{(p-2)} \quad \omega_{k_1+1}^{(p-2)} \ldots \omega_{k_1+k_2}^{(p-2)}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\omega_1^{(1)} \quad \ldots \omega_{k_1}^{(1)} \quad \omega_{k_1+1}^{(1)} \ldots \omega_{k_1+k_2}^{(1)} \quad \omega_{k_1+k_2+1}^{(1)} \ldots \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}}^{(1)}, \\
\omega_1 \quad \ldots \omega_{k_1} \quad \omega_{k_1+1} \ldots \omega_{k_1+k_2} \quad \omega_{k_1+k_2+1} \ldots \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}} \cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \omega_{k_1+k_2+\cdots+k_{p-1}+k_p}
\end{array}\right.$$

est formé par

$$pk_1 + (p-1)k_2 + \cdots + 2k_{p-1} + k_p$$

fonctions qui sont linéairement indépendantes, car si l'on admettait entre elles une relation linéaire, en exécutant $p-1$ fois au plus l'opération E sur les deux membres on trouverait une relation linéaire entre les fonctions d'une même ligne horizontale du tableau, contre l'hypothèse. Les fonctions du tableau (14) nous donnent donc un système fondamental de la variété $W_m(\omega)$, et l'on a determiné le nombre m par la formule

$$m = pk_1 + (p-1)k_2 + \cdots + 2k_{p-1} + k_p.$$

Remarquons que la variété W_m contenue en $V_n(\alpha)$ et qui est invariante par rapport à A, contient encore des variétés également invariantes et ayant pour systèmes fondamentaux les fonctions d'une même ligne verticale du tableau (14); chacune de ces variétés est transformée par A au moyen des formules (12).

38. Nous voulons maintenant démontrer que m est précisément égal à r, degré de multiplicité de la racine z de l'équation fondamentale. A cet effet, prenons un système fondamental $V_n(\alpha)$ qui soit formé des m fonctions du tableau (14) et des $n-m$ autres fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{n-m}$. Exécutons sur ces fonctions l'opération E^p, soit

$$E^p(\sigma_i) = \pi_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n-m).$$

Les fonctions π_i seront des éléments linéairement indépendants dans $V_n(\alpha)$, car si on avait des constantes $c_1, c_2, \ldots c_{n-m}$ telles que

$$c_1\pi_1 + c_2\pi_2 + \cdots + c_{n-m}\pi_{n-m} = 0,$$

il s'ensuivrait

$$E^p(c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + \cdots + c_{n-m}\sigma_{n-m}) = 0,$$

ce qui est impossible par suite du choix des fonctions σ_i. De plus, une fonction linéaire des π_i ne peut être racine d'une puissance E^k de E, sans quoi une combinaison linéaire des σ serait racine de E^{p+k}, contre les hypothèses. Enfin, la variété $V_{n-m}(\pi)$ est invariante par rapport à A, car si l'on pose, $\overline{\omega}$ étant une fonction de $W_m(\omega)$,

$$A(\sigma_i) = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \cdots + a_{n-m}\sigma_{n-m} + a'\overline{\omega},$$

on aura, en prenant l'opération E^p de part et d'autre:

$$A(\pi_i) = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \cdots + a_{n-m}\pi_{n-m}.$$

La variété $V_n(\alpha)$ est donc la somme des deux variétés $W_m(\omega)$, $V_{n-m}(\pi)$, toutes deux invariantes par rapport à A: soit $h(t)$ le premier membre de l'équation fondamentale relative à $V_{n-m}(\pi)$; le premier membre de l'équation relative à $W_m(\omega)$ étant évidemment $(t-z)$, comme le montrent les formules (12) appliquées aux colonnes verticales du tableau (14), on a (§ 35)

$$f(t) = h(t)\,(t-z)^m;$$

mais $h(t)$ ne peut renfermer la racine z, donc m est le degré r de multiplicité de cette racine dans $f(t)$, c. q. f. d.*)

39. Les propositions établies aux deux derniers §§ nous conduisent à cette conclusion: que chaque facteur $E_i^{r_i}$ de l'opération

$$B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \cdots E_q^{r_q} \tag{11}$$

donne lieu à une variété W_{r_i}, d'ordre r_i, invariante par rapport à l'opération A, comprise dans la variété donné $V_n(\alpha)$ et constituée par les racines de E_i et de ses puissances qui appartiennent à cette variété $V_n(\alpha)$. La variété W_{r_i} peut elle-même se décomposer en d'autres variétés invariantes: ce sont celles données par les colonnes verticales des tableaux (14). Deux opérations E_i, E_j ne peuvent avoir de racines communes, et il en est de même de leurs puissances, comme il suit de la conclusion des §§ 33 et 36. Les opérations

$$E_1^{r_1}, E_2^{r_2}, \ldots E_q^{r_q}$$

étant permutables et sans racines communes, il résulte du théorème enoncé au § 28 que les racines de l'opération B sont données, et exclusivement, par la somme des variétés W_{r_1}, $W_{r_2}, \ldots W_{r_q}$, et puisque $r_1 + r_2 + \cdots + r_q = n$, cette variété coïncide avec la variété donnée $V_n(\alpha)$. L'opération B a donc pour variété racine la variété donnée:

*) Le lecteur a sans doute déjà remarqué que la théorie des opérations distributives nous a permis d'obtenir, dans les §§ 37 et 38, le concept des diviseurs élémentaires de Weierstrass, et cela, d'une façon excessivement simple.

c'est une opération de la forme (7) et du degré n en A (§ 31) et c'est l'opération de cette forme du degré minimum qui jouisse de cette propriété. En développant le produit indiqué au second membre de (11), on obtient les coefficients des puissances de A dans le développement de B; ce sont les mêmes que ceux des puissances de t dans $f(t)$ et ce sont des invariants.

Le résultat que nous venons d'obtenir peut encore s'exprimer sous la forme suivante: Toutes les fois qu'une opération distributive A admet une varieté invariante V_n, il existe une opération de la forme

$$B = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

qui, appliquée à une fonction quelconque de la variété, donne zéro comme résultat, et les §§ précédents nous apprennent de quelle façon la structure de V_n dépend de la décomposition de B en facteurs.

40. Le cas le plus simple a lieu lorsque $f(t)$ (et par conséquent aussi B) n'a pas de facteurs multiples. En ce cas, la variété $V_n(\alpha)$ renferme n fonctions linéairement indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ pour lesquelles la transformation opérée par A est donnée par

$$(15) \qquad A(\omega_i) = z_i \omega_i, \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

IV. Détermination des variétés invariantes dans un cas particulier remarquable.

41. Dans ce qui précède, on a supposé de connaître une variété invariante pour une opération donnée. En général, quand on aura à établir la théorie d'une opération distributive, on devra chercher précisément quelles sont les variétés que cette opération laisse invariantes, et ce problème présentera ordinairement des difficultés. Nous allons examiner un cas remarquable où ces difficultés disparaissent.

42. Soit une opération distributive A, sur laquelle nous faisons les hypothèses suivantes:

1° Pour toute fonction d'un certain champ fonctionnel Γ — qui peut être tout l'ensemble des fonctions — cette opération donne une fonction du même champ.

2° Pour toute valeur du paramètre z comprise entre certaines limites, l'équation

$$A(\varphi) - z\varphi = 0,$$

ou

$$E(\varphi) = 0, \qquad (E = A - z)$$

admet dans le champ Γ une solution unique ω_z (abstraction faite, bien entendu, d'un multiplicateur constant.)

3° Cette solution ω_z, qui est fonction de z au sens général du mot, a entre les limites considérée, les dérivées determinées de tous les ordres, et ces dérivées appartiennent de même au champ fonctionnel Γ*).

Nous allons montrer qu'il est possible, pour une telle opération, de trouver toutes les variétés invariantes, et de déterminer une variété pour laquelle cette opération équivaut à une substitution linéaire donnée.

43. Nous avons, par hypothèse:

$$A(\omega_z) = z\,\omega_z. \tag{16}$$

Donnons à z un accroissement h assez petit en valeur absolue; on aura, en indiquant par h' un nombre moindre que h en valeur absolue:

$$A(\omega_{z+h}) = A\left(\omega_z + h\frac{\partial \omega_z}{\partial z} + \frac{h^2}{1\cdot 2}\,\frac{\partial^2 \omega(z+h')}{\partial z^2}\right)$$

d'où, par l'équation (16):

$$A\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) = \frac{1}{h}\Big((z+h)\,\omega_{z+h} - z\,\omega_z\Big) - \frac{h}{2}\,\frac{\partial^2 \omega(z+h')}{\partial z^2},$$

et en passant à la limite pour $h = 0$,

$$A\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) = z\,\frac{\partial \omega_z}{\partial z} + \omega_z. \tag{17}$$

On en déduit immédiatement

$$E^2\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right) = 0;$$

$\frac{\partial \omega_z}{\partial z}$ est donc une racine propre de E^2, et elle constitue à elle seule la variété racine propre de E^2, d'après le théorème du § 25. On démontre de la même façon que la variété racine propre de E^p est constituée par $\frac{\partial^{p-1} \omega_z}{\partial z^{p-1}}$.

44. Si maintenant on veut déterminer toutes les variétés invariantes par rapport à A dans le champ fonctionnel Γ, on remarquera que si $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ est une telle variété, l'opération A détermine sur elle la substitution

$$A(\alpha_i) = a_{i\cdot 1}\alpha_1 + a_{i\cdot 2}\alpha_2 + \cdots + a_{i\cdot n}\,\alpha_n, \qquad (i=1,2,\ldots n):$$

on en déduit l'équation fondamentale

$$f(t) = (t-z_1)^{r_1}(t-z_2)^{r_2}\ldots(t-z_q)^{r_q} = 0$$

et l'opération B $\big((11),\ \S\ 35\big)$

$$B = E_1^{r_1} E_2^{r_2} \cdots E_q^{r_q}$$

dont $V_n(\alpha)$ est la variété racine. Mais les racines de B forment la variété somme des variétés racines de $E_1^{r_1}, E_2^{r_2}, \ldots E_q^{r_q}$ (§ 28) et

*) Il est facile de réaliser une telle opération, en prenant par exemple pour $A(\varphi)$ le premier membre d'une équation différentielle linéaire.

celles-ci sont données par le théorème du § précédente. La variété $V_n(\alpha)$ admet donc le système fondamental

$$(18) \qquad \omega_{z_i},\ \frac{\partial \omega_{z_i}}{\partial z_i}, \ldots \frac{\partial^{r_i-1}\omega_{z_i}}{\partial z_i^{r_i-1}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots q).$$

Réciproquement, toute variété qui admet un système fondamental de la forme (18) est invariante par rapport à A.

45. L'autre question: existe-t-il une variété $V_n(\alpha)$ pour laquelle A coïncide avec une substitution linéaire donnée

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

se résout non moins facilement. Il suffit de former l'équation fondamentale définie par cette substitution, d'en trouver les racines

$$z_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots q) \qquad \cdot$$

de l'ordre de multiplicité respectif r_i: le tableau (18) relatif a ces racines donne un système fondamental cherché.

Remarquons que le problème proposé équivaut à la résolution du système d'équations fonctionnelles

$$(19) \qquad A(\varphi_i) = a_{i1}\varphi_1 + a_{i2}\varphi_2 + \cdots + a_{in}\varphi_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

par rapport aux fonctions inconnues $\varphi_1, \varphi_2, , \ldots \varphi_n$.

46. La résolution de l'équation fonctionnelle

$$(20) \qquad A^n(\varphi) + a_1 A^{n-1}(\varphi) + \cdots + a_{n-1}A(\varphi) + a_n\varphi = 0$$

rentre dans ce qui précède. En effet, l'équation (20) équivaut au système

$$\begin{cases} A(\varphi) & = -a_1\varphi + \varphi_1, \\ A(\varphi_1) & = -a_2\varphi + \varphi_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A(\varphi_{n-1}) & = -a_n\varphi, \end{cases}$$

de la forme (19); ou bien, ce qui revient au même, la variété qui donne la solution de l'équation (20) a pour système fondamental le tableau (18) où $z_1, z_2, \ldots z_q$ sont les racines de l'équation

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n = 0$$

et $r_1, r_2, \ldots r_q$ leurs ordres respectifs de multiplicité.

La résolution des équations et des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants rentre évidemment comme cas particulier dans les questions que nous avons résolues dans ces deux derniers paragraphes.

Chapitre II.

Propriétés générales des opérations distributives.

I. Opérations distributives appliquées aux séries. — Quelques opérations particulières. —

47. Après nous être plus spécialement occupés, dans le chapitre précédent, des variétés d'ordre fini, revenons maintenant à l'ensemble général des fonctions, c'est à dire (§ 1) des séries ordonnées selon les puissances entières et positives d'une variable x. Nous indiquerons par (r) le cercle décrit, dans le plan de la variable x, du point $x=0$ comme centre avec le rayon r, et nous dirons, pour abréger, qu'une fonction appartient au cercle (r) lorsque le cercle de convergence de la série correspondante a un rayon supérieur à r.

48. La propriété distributive, dont jouit une opération A, peut naturellement s'étendre, sous certaines restrictions, au cas où l'on exécute cette opération sur une série infinie de fonctions. Cette extension est admissible, par exemple, si l'on assujétit A aux conditions suivantes:

a) d'être à détermination unique,

b) de faire correspondre aux fonctions α qui appartiennent à un certain cercle (r), des fonctions qui appartiennent à un cercle (r'),

c) de faire correspondre à un nombre positif arbitraire g un nombre positif h tel qu'à une fonction α appartenant à (r) et dont la valeur absolue maxima en (r) est moindre que h, correspond une fonction $A(\alpha)$ dont la valeur absolue maxima en (r') soit moindre que g.

49. Sous ces conditions, on peut en effet démontrer le théorème suivant:

Soit un système de fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ appartenant au cercle (r) et telles que la série

$$\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$$

soit convergente uniformément dans ce cercle, la circonférence comprise; soit A une opération jouissant des propriétés énoncées au § précédent; on aura:

$$A\left(\sum_1^{\infty}\alpha_n\right)=\sum_1^{\infty}A(\alpha_n). \tag{1}$$

Remarquons d'abord que, par un théorème connu de la théorie des fonctions, φ est une fonction qui appartient au cercle (r). En outre, si g est un nombre positif arbitraire et h le nombre qui lui correspond d'après le § 48, c, on peut déterminer l'entier s tel que l'on ait dans tout le cercle (r):

$$\left|\sum_{n=s+1}^{\infty} \alpha_n\right| < \frac{1}{2} h,$$

et par conséquent, t étant un entier quelconque positif,

$$\left|\sum_{n=s+1}^{s+t} \alpha_n\right| < h,$$

d'où l'on déduit

$$\left|A\left(\sum_{s+1}^{\infty} \alpha_n\right)\right| < g \tag{2}$$

et

$$\left|\sum_{n=s+1}^{s+t} A(\alpha_n)\right| < g. \tag{3}$$

L'inégalité (3) montre que la série $\Sigma A(\alpha_n)$ est convergente uniformément en (r') et représente par conséquent une fonction, que nous indiquerons par ψ; formons $A(\varphi) - \psi$, et nous aurons

$$A(\varphi) - \psi = A\left(\sum_{s+1}^{\infty} \alpha_n\right) - \sum_{s+1}^{\infty} A(\alpha_n).$$

Or il suit de (2) et (3) que le second membre ne peut être supérieur à $2g$, tandis que le premier a une détermination fixe en (r'): cette détermination doit donc être nulle, et l'on a $A(\varphi) = \psi$; la (1) est ainsi démontrée.

50. Indiquons par ξ_n la fonction qu'on obtient en appliquant l'opération A à la fonction x^n:

$$A(x^n) = \xi_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

et supposons que les fonctions ξ_n appartiennent toutes au cercle (r'). En déterminant les coefficients c_n de telle sorte que la série

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

appartienne au cercle (r), elle y sera convergente uniformément, comme on sait, et le théorème du § précédent sera, par conséquent, valable: on aura ainsi dans (r'):

$$A(\varphi) = A\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi_n. \tag{5}$$

Remarquons qu'une opération est déterminée dans tout le champ fonctionnel de validité de la formule précédente, dès que l'on connait les fonctions ξ_n que cette opération fait correspondre aux puissances entières et positives de x.

51. Avant d'aller plus loin, il nous faut étudier certaines opérations particulières fort simples. Pour chacune de ces opérations, nous chercherons les fonctions indiquées par ξ_n au § précédent.

La première de ces opérations est celle qui a pour effet de multiplier une fonction arbitraire φ par la fonction donnée α: on peut l'indiquer par M_α et lui donner le nom de ***multiplication***. Pour cette opération,

$$\xi_n = M_\alpha(x^n) = \alpha x^n.$$

Cette opération n'a d'autres racines que zéro et n'est donc dégénérée pour aucune variété; elle n'a pas non plus de variétés invariantes, sauf le cas où α est une constante; dans ce cas M_α ne diffère pas essentiellement de l'opération identique. L'ensemble des opérations M_α, quand α varie arbitrairement, constitue un groupe permutable.

52. Une deuxième opération, aussi simple qu'importante, est la dérivation: nous l'indiquerons par D. Elle est déterminée par

$$\xi_n = D(x^n) = n x^{n-1}.$$

La formule (5) est applicable et le cercle (r') coïncide avec (r), quel que soit r. L'opération D admet comme racine la constante; elle est en conséquence dégénérée pour les varietés qui renferment la constante et pour celles-là seulement. De l'opération D se deduisent les opérations D^m, $E = D - z$ et E^m. L'opération D^m admet comme racine la variété ∞^m des fonctions entières de degré $m-1$; x^{m-1} est sa racine propre; E admet comme racine e^{zx}, fonction invariante de D d'où l'on déduit toutes les variétés invariantes; la racine propre de E^m est $x^{m-1}e^{zx}$. D'où la solution des problèmes indiqués aux §§ 44—46.

53. L'opération D^{-1}, inverse de D, est à détermination multiple: deux de ses déterminations diffèrent par une constante. De même, deux déterminations de D^{-m} diffèrent par une fonction entière de degré $m-1$. Il est avantageux de fixer pour D^{-1} et D^{-m} une seule détermination: c'est ce que l'on peut faire très aisément en déterminant les ξ_n de D^{-1} par

$$(6) \qquad \xi_n = D^{-1}(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

et celles de D^{-m} par

$$(7) \qquad \xi_n = D^{-m}(x^n) = \frac{x^{n+m}}{(n+1)\cdots(n+m)}.$$

La validité de la formule (5) est bien connue, et les formules (6) et (7) nous fixent la détermination de $D^{-1}(\varphi)$ et $D^{-m}(\varphi)$.

54. En combinant par somme et multiplication les opérations M_α et D, on obtient l'opération

(8) $$F = \alpha_0 D^m + \alpha_1 D^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} D + \alpha_m D^0$$

à laquelle on donne le nom de forme différentielle linéaire d'ordre m. Les formes différentielles linéaires forment un groupe qui renferme, entre autres, les sous-groupes des multiplications (§ 51) et celui des formes à coefficients constants, tous deux permutables. La validité de (5) est évidente. Les racines de F forment une variété linéaire ∞^m; de même leurs fonctions invariantes, ou racines de $F - z$, pour une valeur donnée de z. L'opération F^{-1} est à détermination multiple; on peut cependant, en général, en fixer la détermination en faisant, par exemple:

(9) $$F^{-1}(x^i) = 0, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots m - 1^*).$$

55. Si α est une fonction donnée, on peut définir une opération S_α au moyen des ξ_n suivantes:

$$\xi_n = S_\alpha(x^n) = \alpha^n.$$

L'opération S_α a donc pour effet de substituer, en φ, la fonction $\alpha(x)$ à la variable x; on peut l'appeler *substitution*. Les opérations de substitution forment un groupe (non permutable); elle n'ont pas de racines, excepté zéro; l'étude de leurs variétés invariantes se rattache à celle des fonctions itératives de MM. Schroeter, Korkine et Koenigs. Les opérations S jouissent de la propriété distributive non seulement par rapport à la somme, mais aussi par rapport à la multiplication, c'est à dire que

$$S(\varphi\psi) = S(\varphi)\, S(\psi),$$

et par conséquent par rapport à tout système d'opérations arithmétiques rationnelles.

La formule (5) est valable pour toute fonction φ appartenant à un cercle (r), pour les valeurs de x pour lesquelles la valeur absolue maxima de α n'est pas supérieure à r.

Comme cas particulier de l'opération de substitution, on peut noter S_{x+1}, et $S_{x+1} - 1$ qui est la différence finie.

II. Dérivation fonctionnelle. — Développement fonctionnel de Taylor.

56. Si A est une opération fonctionnelle distributive, l'expression

$$A(x\varphi) - xA(\varphi)$$

nous donne aussi une nouvelle opération fonctionnelle distributive, que

*) On fixe ainsi l'intégrale de l'équation linéaire non homogène $F^{-1} = \alpha$, qu'on appelle intégrale principale (Hauptintegral) dans le domaine de $x = 0$. V. p. ex. Schlesinger, Handbuch der lin. Differentialgleich., Bd. I, S. 78.

nous appellerons dérivée fonctionnelle de la première et que nous indiquerons par A'. La dérivée fonctionnelle de A' sera

$$A'(x\varphi) - xA'(\varphi),$$

nous l'appellerons dérivée fonctionnelle seconde de A et nous l'indiquerons par A'', et ainsi de suite. Si $A^{(n)}$ est la dérivée fonctionnelle $n^{\text{ème}}$ de A, on a immédiatement,

$$(10) \qquad A^{(n)}(\varphi) = A(x^n\varphi) - nxA(x^{n-1}\varphi) + \binom{n}{2}x^2A(x^{n-2}\varphi) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n x^n A(\varphi), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

d'où l'on tire sans peine

$$(11) \quad A(x^n\varphi) = A^{(n)}(\varphi) + nxA^{(n-1)}(\varphi) + \binom{n}{2}x^2A^{(n-2)}(\varphi) + \cdots + x^nA(\varphi).$$

57. Il est clair que la dérivée fonctionnelle d'une somme d'opérations est égale à la somme des dérivées fonctionnelles de ces opérations.

58. Soit C le produit des opérations A, B, et indiquons toujours par l'accent la dérivée fonctionnelle: on aura

$$C'(\varphi) = BA(x\varphi) - xBA(\varphi)$$

ou, identiquement:

$$C'(\varphi) = BA(x\varphi) - B\big(xA(\varphi)\big) + (Bx - xB)A(\varphi),$$

ou enfin

$$(12) \qquad C' = BA' + B'A.$$

La règle pour la dérivation fonctionnelle d'un produit est donc la même que pour la dérivation ordinaire, et l'on trouve de même pour les dérivations d'ordre supérieur

$$(13) \quad C^{(n)} = B^{(n)}A + nB^{(n-1)}A' + \binom{n}{2}B^{(n-2)}A'' + \cdots + BA^{(n)}.$$

Bien entendu, les facteurs des termes du second membre ne sont pas, en général permutables.

59. Indiquons, comme précédemment, $A(x^n)$ par ξ_n et posons

$$A'(x^n) = \xi_n^{(1)};$$

de la définition de A' on tire

$$(14) \qquad \xi_n^{(1)} = \xi_{n+1} - x\xi_n.$$

60. Cherchons à présent quelles sont les propriétés de la dérivée fonctionnelle des opérations élementaires que nous avons passées en revue aux §§ 51—55.

a) Pour la multiplication, on a immédiatement $M'(\varphi) = 0$. Réciproquement, une opération définie par ses ξ_n dont la dérivée fonctionnelle est nulle est une multiplication; en effet, on tire de (14)

$$\xi_{n+1} = x\xi_n,$$

d'où

$$\xi_n = x^n \xi_0$$

et en posant

$$\varphi = \sum c_n x^n,$$

il vient $A(\varphi) = \xi_0 \varphi$, c. q. f. d.

Deux opérations qui ont la même dérivée fonctionnelle ont pour différence une opération de multiplication: c'est à dire si $A' = B'$, on a $A = B + M$. Notons encore les formules

$$(AM)' = A'M, \quad (MA)' = MA'.$$

b) Pour la dérivation, on trouve

$$D(x\varphi) - xD(\varphi) = \varphi, \quad \text{ou} \quad D' = 1.$$

Cette propriété est caractéristique; si en effet une opération A est telle que sa dérivée fonctionnelle soit l'opération identique, la formule (14) donnera pour cette opération

$$\xi_{n+1} - x\xi_n = x^n,$$

d'où

$$\xi_n = nx^{n-1} + \xi_0 x^n$$

c'est-à-dire

$$A(\varphi) = D(\varphi) + \xi_0 \varphi;$$

l'opération A ne diffère donc de D que par l'addition d'une opération de multiplication. La dérivée seconde de D est nulle.

Pour l'opération D^m, on a

$$(D^m)' = mD^{m-1}, \tag{15}$$

et cette formule est vraie même si m est un nombre entier négatif, comme on peut le vérifier facilement.

c) La dérivée fonctionnelle de la forme différentielle linéaire

$$F = \alpha_0 D^m + \alpha_2 D^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} D + \alpha_m D^0 \tag{8}$$

est, par (15),

$$F' = m\alpha_0 D^{m-1} + (m-1)\alpha_1 D^{m-2} + \cdots + 2\alpha_{m-2} D + \alpha_{m-1} D^0; \tag{16}$$

on l'obtient par la règle de dérivation ordinaire appliquée comme si F était un polynôme entier contenant D comme variable*). En appliquant $m+1$ fois la dérivation, on obtient $F^{(m+1)} = 0$; réciproquement, on trouve sans peine que l'opération plus générale dont la dérivée $m+1^{\text{ème}}$ est nulle (et définie d'ailleurs par ses ξ_n) est la forme différentielle linéaire d'ordre m dont les coefficients sont des fonctions arbitraires.

*) La forme différentielle F' a été considérée, à côté de F, depuis plus d'une siècle; si je ne me trompe, c'est d'Alembert qui l'a remarquée le premier.

d) Enfin pour l'opération de substitution S_α, la dérivée fonctionnelle est donnée par

$$S'_\alpha = (\alpha - x) S_\alpha .$$

61. La considération de la dérivée fonctionnelle nous permet d'obtenir une formule qui a la plus grande analogie de forme avec la série de Taylor et que nous appelerons, pour cette raison, série fonctionnelle*) de Taylor. Etant donnée l'opération A satisfaisant aux conditions du § 48, et φ et ψ étant deux fonctions appartenant au cercle (r), on aura, si $\psi = \sum\limits_0^\infty h_n x^n$:

$$A(\varphi\psi) = \sum_{n=0}^\infty h_n A(x^n \varphi)$$

et par les formules (11):

$$(17) \quad A(\varphi\psi) = \sum_0^\infty h_n \left(A^{(n)}(\varphi) + nx A^{(n-1)}(\varphi) + \cdots + x^n A(\varphi)\right).$$

Si maintenant il sera permis d'ordonner les termes du second membre selon les dérivées d'indice croissant du symbole A, il viendra

$$(18) \quad A(\varphi\psi) = A(\varphi)\psi + A'(\varphi) D\psi + \frac{1}{1\cdot 2} A''(\varphi) D^2\psi + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!} A^{(n)}(\varphi) D^n \psi + \cdots .$$

C'est là le développement annoncé**).

62. Le développement trouvé n'a de valeur effective que si les termes du second membre de (17) peuvent être groupés comme on l'a indiqué; en tout autre cas, il n'a qu'une valeur formelle. On peut, dans les cas particuliers, discuter la validité de (18) comme on le fait en calcul différentiel pour la série de Taylor ordinaire, en examinant le reste. Posons

$$R_n(\varphi, \psi) = A(\varphi\psi) - A(\varphi)\psi - A'(\psi) D\psi - \cdots - \frac{1}{n-1!} A^{(n-1)}(\varphi) D^{n-1}\psi;$$

on voit que R_n est une opération distributive par rapport à ψ, qui est nulle ainsi que ses $n-1$ premières dérivées fonctionnelles si ψ est une constante et dont la $n^{\text{ème}}$ dérivée fonctionnelle est $A^n(\varphi\psi)$; et on voit encore facilement que ces deux conditions caractérisent complètement R_n. La validité de (18) dépend donc des champs fonctionnels où l'on doit prendre φ et ψ, si l'on veut que $\lim\limits_{n=\infty} R_n(\varphi, \psi) = 0$.

---

*) Par opposition, le développement ordinaire pourrait s'appeler série ponctuelle.

**) J'ai donné pour la première fois cette formule dans les R. C. dell' Accademia dei Lincei (S. V, T. IV, p. 142). V. les généralisations qu'en a données M. Calò (Ibid., S. V. T. IV, p. 52).

63. De la formule (18) on tire, en faisant $\varphi = 1$:

$$(19)\quad A(\psi) = A(1)\psi + A'(1)D\psi + \cdots + \frac{1}{n!}A^{(n)}(1)D^n\psi + \cdots,$$

qui montre qu'une opération fonctionnelle distributive peut toujours s'exprimer formellement au moyen d'une série ordonnée selon les dérivées successives de la fonction arbitraire: les coefficients se déduisent facilement des ξ_n au moyen des formules (10). De la même formule (18) on tire encore:

$$(20)\quad A(\psi) = A(\varphi)\frac{\psi}{\varphi} + A'(\varphi)D\frac{\psi}{\varphi} + \cdots + \frac{1}{n!}A^{(n)}(\varphi)D^n\frac{\psi}{\varphi} + \cdots.$$

64. La validité de la formule (18) a lieu sans exception lorsque A est une forme différentielle linéaire: dans ce cas, elle est connue depuis longtemps.

Pour une fonction donnée φ, l'ensemble des fonctions ψ pour lesquelles la formule (20) est valable constitue ce qu'on peut appeler le domaine de φ par rapport à l'opération A. Ce domaine renferme toutes les fonctions de la forme $\varrho\varphi$, où ϱ est une fonction rationnelle entière. De même, l'ensemble des fonctions ψ pour lesquelles la formule (19) est valable peut s'appeler le *domaine de la constante:* il renferme toutes les fonctions rationnelles entières.

III. Exemple de détermination d'une classe d'opérations fonctionnelles au moyen d'une équation symbolique.

65. Il est intéressant de remarquer qu'une opération fonctionelle distributive peut être déterminée par certaines de ses propriétés, en particulier par une équation symbolique qu'elle doit vérifier. Ainsi nous avons vu (§ 60) que l'opération de multiplication est caractérisée par l'equation symbolique $A' = 0$; que la solution générale de l'équation $A' = 1$ est donnée par $A = D + M$; que la forme différentielle linéaire d'ordre $m - 1$ est la solution générale de l'équation $A^{(m)} = 0$, et on pourrait multiplier les exemples. Dans les §§ suivants, nous allons résoudre le problème de déterminer l'opération plus générale A qui vérifie une équation de la forme

$$(21)\qquad \lambda_0 A^{(n)} + \lambda_1 A^{(n-1)} + \cdots + \lambda_{n-1}A' + \lambda_n A = 0,$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ sont des fonctions données.

66. Remarquons d'abord que si une opération A est une solution de l'équation (21), μA en est pareillement une solution, μ étant une fonction arbitraire (§ 60, a). De même, si A, B sont deux solutions et μ, ν sont deux fonctions arbitraires, $\mu A + \nu B$ sera aussi une solution. Ici se présente la concept d'opérations linéairement dépendantes, ou non; nous dirons que des opérations $A_1, A_2, \ldots A_n$ sont

linéairement dépendantes ou indépendantes, suivant qu'il existe ou non un système de n fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, telles que l'on ait identiquement — c'est à dire pour toute fonction φ sur laquelle opèrent les $A_1, A_2, \ldots A_n$ — la relation

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = 0. \tag{22}$$

Or, la condition nécéssaire et suffisante pour que les opérations $A_1, A_2, \ldots A_n$ soient linéairement dépendantes, est que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots A_n \\ A_1' & A_2' & \ldots A_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{(n-1)} & A_2^{(n-1)} & \ldots A_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot$$

soit identiquement nul. On voit immédiatement que la condition est nécéssaire, en prenant $n-1$ fois la dérivée fonctionelle de (22) (§§ 57, 60) et en éliminant $\alpha_1, \ldots \alpha_n$. Pour montrer que la condition est aussi suffisante, remarquons que le déterminant précédent peut s'écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1(\varphi) & A_2(\varphi) & \ldots A_n(\varphi) \\ A_1(x\varphi) & A_2(x\varphi) & \ldots A_n(x\varphi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1(x^{n-1}\varphi) & A_2(x^{n-1}\varphi) & \ldots A_n(x^{n-1}\varphi) \end{vmatrix};$$

or, si ce déterminant est nul, on peut trouver n fonctions telles que l'on ait

$$\alpha_1 A_1(x^q\varphi) + \alpha_2 A_2(x^q\varphi) + \cdots + \alpha_n A_n(x^q\varphi) = 0,$$
$$(q = 0, 1, 2, \ldots n-1);$$

changeons maintenant φ en $x\varphi$: l'équation précédente sera encore vraie pour $q = n$, et de même pour $q = n+1$, $n+2$, etc. Sous les conditions de validité de la formule (5), on aura donc, quelle que soit la fonction ψ,

$$\alpha_1 A_1(\psi\varphi) + \alpha_2 A_2(\psi\varphi) + \cdots + \alpha_n A_n(\psi\varphi) = 0,$$

et puisque ψ est arbitraire, le théorème est démontré.

67. Si l'on a $n+1$ solutions de l'équation (21), elles sont linéairement dépendantes, puisque l'élimination des coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$ montre que le déterminant Δ d'ordre $n+1$ des $n+1$ solutions, est identiquement nul. Montrons que l'équation (21) admet n solutions linéairement indépendantes: toute autre solution s'exprimera linéairement au moyen de celles-là; au système de ces n solutions on pourra donc donner le nom de système fondamental.

68. A cet effet, considérons l'équation de degré n en z:

$$\lambda_0(z-x)^n + \lambda_1(z-x)^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}(z-x) + \lambda_n = 0 \tag{23}$$

et soient $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots \omega_n(x)$ ses racines, que nous supposerons d'abord différentes entre elles. L'opération de substitution (§ 55) S_{ω_i} pour une quelconque de ces racines donne (§ 60, d)

$$S'_{\omega_i} = (\omega_i - x) S_{\omega_i}, \quad (i = 1, 2, \dots n); \tag{24}$$

en dérivant encore, on aura

$$S''_{\omega_i} = (\omega_i - x)^2 S_{\omega_i},$$

et ainsi de suite; d'où il suit que si l'on fait $A = S_{\omega_i}$, l'équation (21) est vérifiée quelle que soit la fonction arbitraire φ. Nous avons ainsi les n solutions

$$S_{\omega_1}, \quad S_{\omega_2}, \dots S_{\omega_n}$$

de l'équation, et si l'on forme le déterminant Δ pour ces solutions, on voit immédiatement (en tenant compte de (24) et de ses conséquences) qu'il n'est pas identiquement nul.

69. Si parmi les n fonctions $\omega_1(x), \dots \omega_n(x)$, h étaient égales entre elles $\big($par exemple $\omega_1(x) = \omega_2(x) = \cdots = \omega_h(x)\big)$ on voit aussi aisément qu'aux h opérations $S_{\omega_1}, S_{\omega_2}, \dots S_{\omega_h}$ on peut substituer le système

$$S_{\omega_1}, \quad S_{\omega_1} D, \quad S_{\omega_1} D^2, \dots S_{\omega_1} D^{h-1}.$$

Le problème proposé est donc complètement résolu.

70. L'équation linéaire (21) nous a conduits, avec ses solutions, à une classe d'opérations distributives dont le type général est

$$\sum_{i=1}^{s} \left(\alpha_{i.0} S_{\omega_i} + \alpha_{i.1} S_{\omega_i} D + \cdots + \alpha_{i.h_i} S_{\omega_i} D^{h_i}\right) \tag{25}$$

où $\alpha_{i.j}$ et ω_i sont des fonctions données. Cette classe d'opérations — qui joue, pour ainsi dire, dans l'ensemble des opérations distributives le même rôle que jouent les fonctions $\Sigma x^a e^{bx}$ parmi les fonctions analytiques — jouit des propriétés suivantes:

La somme de deux opérations du type (25) est une opération du même type.

Le produit de deux opérations du type (25) est aussi une opération du même type: ces opérations forment donc un groupe.

La dérivation fonctionnelle exécutée sur une opération de ce groupe reproduit une opération du même groupe.

Au groupe (25) appartient comme sous-groupe l'ensemble des formes différentielles linéaires. Au même groupe appartient le sous-groupe des opérations de la forme

$$\alpha_1 S_{\omega_1} + \alpha_2 S_{\omega_2} + \cdots + \alpha_s S_{\omega_s},$$

dont un sous-groupe est à son tour celui où les ω sont des fonctions algébriques, qui contient celui où les ω sont rationelles, etc. Si $\omega_i = x + i$, les opérations précédentes se réduisent aux formes linéaires aux différences finies.

Remarquons enfin que si l'on prend $\omega_i = e_i x$, où e_i est une racine primitive de l'unité, les opérations (25) deviennent celles que M. Schapira a prises comme base d'un calcul qu'il a appelé »Cofunctionalrechnung«*).

Chapitre III.

Expression des opérations distributives par des séries.

I. Séries ordonnées suivant les puissances de D.

71. Nous avons vu ci-dessus, au § 63, que toute opération distributive A peut, au moins formellement, être mise sous la forme

$$A(\varphi) = A(1)\varphi + A'(1)D\varphi + \cdots + \frac{1}{n!}A^{(n)}(1)D^n\varphi + \cdots;$$

réciproquement, toute série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n \varphi \tag{1}$$

représente une opération distributive pour l'ensemble des fonctions qui la rendent convergente. Nous sommes ainsi conduits à l'étude des séries (1) ordonnées selon les puissances entières et positives du symbole de dérivation D, et nous appelerons *champ fonctionnel de validité* d'une telle série l'ensemble des fonctions φ pour lesquelles elle est uniformément convergente; par suite d'un théorème connu de la théorie des fonctions la série (1) donne, pour chacune de ces fonctions φ, une fonction de notre ensemble (série de puissances convergente dans un domaine de $x = 0$).

Les formes différentielles linéaires, qui tiennent parmi les opérations distributives la place des polynômes entiers parmi les fonctions, se présentent comme cas particulier des séries (1) et leur champ de validité est indéfini.

72. Si l'on substitue dans (1) pour φ un polynôme entier, la série se réduit à un polynôme: on peut donc dire que les fonctions rationnelles entières appartiennent au champ de validité de toute série (1). Mais on peut montrer que si les fonctions $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, coefficients de (1), appartiennent à un même cercle (r), la série (1) a un champ de validité comprenant une infinité d'autres fonctions.

73. Soit en effet m_n la valeur absolue maxima de α_n en (r): nous pouvons déterminer une suite de nombres positifs décroissants a_n tels que la série $\Sigma a_n m_n$ soit convergente. Alors toute fonction

*) Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen. Wien, Holzhausen, 1881. — Theorie allgemeiner Cofunctionen. Leipzig, Teubner, 1892.

$$\varphi = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s, \quad \text{où} \quad |c_s| \leq \frac{a_s}{s!}$$

appartient au champ de validité de (1). Car si l'on prend $|x| \leq r$, on aura

$$|\varphi(x)| \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_s r^s}{s!} \leq a_0 e^r$$

et

$$|D^n \varphi| \leq \sum_{s=n}^{\infty} \frac{a_s r^{s-n}}{(s-n)!} \leq a_n e^r,$$

d'où

$$\left| \sum \alpha_n D^n \varphi \right| \leq e^r \sum a_n m_n,$$

ce qui démontre la convergence uniforme de la série (1).

74. Notons le cas particulier où les fonctions $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n, \dots$ se maintiennent toutes, dans le cercle (r), inférieures en valeur absolue à un nombre m. Dans ce cas, a étant un nombre positif arbitraire plus petit que l'unité, toute fonction

$$\varphi = \sum_{s=0}^{\infty} c_s x^s, \quad \text{où} \quad |c_s| \leq \frac{a^s}{s!} \tag{2}$$

se trouve, ainsi que $x\varphi$, $x^2\varphi, \dots$, dans le champ de validité de la série (1).

75. La série (1) représente une opération distributive que nous indiquerons par A:

$$A(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D_n \varphi. \tag{1}$$

Prenons une fonction φ qui soit dans le champ de validité de (1) en même temps que $x\varphi$; on aura:

$$A(\varphi x) = x \sum_{0}^{\infty} \alpha_n D^n \varphi + \sum_{1}^{\infty} n \alpha_n D^{n-1} \varphi$$

d'où, en indiquant toujours par A' la dérivée fonctionnelle de A:

$$A'(\varphi) = \sum_{1}^{\infty} n \alpha_n D^{n-1} \varphi;$$

la règle pour la dérivation est donc la même que pour les séries de puissances ordinaires. De même si $x^2\varphi, \dots x^q\varphi$ se trouvent dans le champ de validité de (1), on aura

$$(3) \qquad A^{(q)}(\varphi) = \sum_q^{\infty} n(n-1)\ldots(n-q+1)\alpha_n D^{n-q}\varphi\,.$$

76. Dans le cas particulier examiné au § 74, le développement (3) est certainement valable pour les fonctions (2) pour tout nombre entier positif q; de plus, on voit facilement qu'en ce cas on a (§§ 73 et 74)

$$A(\varphi) \leq \frac{m e^r}{1-a}, \quad \frac{1}{q!} A^{(q)}(\varphi) \leq \frac{m e^r a^q}{(1-a)^{q+1}}.$$

Si donc on fait $a < \frac{1}{2}$, la série

$$\sum \frac{1}{q!} A^{(q)}(\varphi) D^q \psi$$

est, par rapport à ψ, une opération de la forme (1) dont les coefficients appartiennent à un cercle déterminé et qui admet par conséquent un champ de validité; le reste de la série tendant à zéro pour toute fonction ψ prise dans ce champ, la série représente $A(\varphi\psi)$ (§ 62) et le devéloppement fonctionnel de Taylor est valable.

77. Si dans la formule (1) on pose $\varphi = 1$, on trouve $A(1) = \alpha_0$, de même, si l'on pose $\varphi = 1$ dans (3), on trouve

$$\alpha_q = \frac{1}{q!} A^{(q)}(1).$$

On retombe ainsi sur le développement (19) du § 63, et l'on voit que pour une opération à détermination unique il ne peut exister qu'un seul développement de la forme (1). Un tel développement ne peut donc être nul pour toute fonction prise dans un domaine de la constante (§ 64) que si tous ses coefficients sont nuls: deux séries (1) égales pour toute fonction d'un domaine de la constante ont leurs coefficients respectivement égaux. D'où il suit qu'on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés à la recherche du développement de la forme (1) d'une opération distributive définie par une propriété convenable. Nous en donnerons un exemple au § 79.

78. Quand la validité du développement fonctionnel de Taylor

$$(4) \qquad A(\varphi\psi) = \sum \frac{1}{q!} A^{(q)}(\varphi) D^q \psi$$

est démontrée, on peut en déduire, en posant $\varphi = \omega$, $\psi = \frac{\varphi}{\omega}$, le nouveau développement pour A:

$$A(\varphi) = \sum \frac{1}{q!} A^{(q)}(\omega) D^q \frac{\varphi}{\omega};$$

et en posant

$$\omega D \frac{\varphi}{\omega} = E\varphi, \quad \text{d'où} \quad \omega D^q \frac{\varphi}{\omega} = E^q \varphi,$$

on obtient pour $A(\varphi)$ une expression de la forme

(5) $$A(\varphi) = \sum_{q=0}^{\infty} \lambda_q E^q \varphi.$$

On voit facilement que la fonction ϖ joue, dans ce développement, le même rôle que joue la constante dans (1); le champ de validité de (5) est un domaine de ϖ (§ 64) et toute fonction de la forme $\varphi = x^n \varpi$ est dans ce champ de validité, puisque $x^n \varpi$ est une racine de E^q pour $q > n$, et est précisément une racine propre de E^{n+1}.

79. Une opération A, donnée sous la forme d'une série (1), peut être dégénerée; l'opération D elle-même nous en donne un exemple. Mais une opération donnée par une série (1) peut-elle faire correspondre à l'ensemble fonctionnel une variété à un nombre fini de dimensions? La réponse est affirmative; nous allons construire effectivement, sous forme d'une série (1), une opération C qui fait correspondre à chaque fonction φ une constante, et par conséquent à un ensemble fonctionnel à un nombre infini de dimensions une variété à une seule dimension.

Soit en effet

$$C(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_n D^n \varphi$$

une opération qui, pour toute fonction φ appartenant à son champ de validité, donne comme résultat une constante. Pour une telle fonction φ, la série du second membre est convergente uniformément et comme telle, par une proposition connue de la théorie des fonctions*), elle représente une fonction dont la dérivée s'obtient par la dérivation terme à terme de la série même:

$$DC(\varphi) = D\lambda_0 \cdot \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (n\lambda_{n-1} + D\lambda_n) D^n \varphi.$$

Mais $C(\varphi)$, par hypothèse, est une constante quelle que soit φ dans le champ de validité de C: on doit donc avoir (§ 77):

(6) $$D\lambda_0 = 0, \quad n\lambda_{n-1} + D\lambda_n = 0.$$

De ces équations il est facile de tirer l'expression des fonctions λ_n: en indiquant par $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ des constantes arbitraires, on obtient

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_n = (-1)^n \left(a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + n a_{n-1} x + a_n \right).$$

La question proposée est donc résolue par le développement

*) Zur Functionenlehre. (Monatsbericht der Berliner Akademie der Wissenschaften, 1880.)

$$(7)\quad C(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(a_0x^n+na_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\cdots+a_n\right)D^n\varphi.$$

Remarquons que les polynômes λ_n, définis par les équations (6), sont ceux auxquels M. Appell a consacré un intéressant mémoire*); tout système de polynômes de M. Appell nous donne donc une série (7) qui fait correspondre une constante à toute fonction de son champ de validité.

80. Suivant le choix des constantes arbitraires $a_0, a_1, \ldots$, ce champ de validité peut être plus ou moins étendu. Faisons d'abord, par exemple, $a_0=1$, $a_n=0$, $(n=1, 2, 3, \ldots)$; la formule (7) nous donnera le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}D^n\varphi$$

et le théorème ordinaire de Taylor nous montre que cette série est valable pour une fonction quelconque φ: si φ appartient au cercle (r), il suffit de prendre $|x|\leq\frac{r}{2}$ et la série précédente représente la constante $\varphi(0)$.

Faisons ensuite $a_n=1$, $(n=0, 1, 2, \ldots)$: nous aurons le développement

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{n!}D^n\varphi.$$

Celui-ci n'est plus, comme le précédent, valable pour toute fonction φ: il faudra que φ appartienne à un cercle (r) où r est supérieur à l'unité; on devra prendre

$$x|\leq\frac{r-1}{2}$$

et le développement aura pour valeur $\varphi(-1)$.

81. L'opération αC, où α est une fonction donnée, fait correspondre à l'ensemble fonctionnel la variété à une dimension $k\alpha$. Plus généralement, on peut construire une opération A qui transforme un ensemble fonctionnel à un nombre infini de dimensions en une variété linéaire donnée à n dimensions $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$: il suffit de prendre

$$(8)\qquad A=\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\cdots+\alpha_nC_n,$$

$C_1, C_2, \ldots C_n$ étant des séries (7). De plus, il est toujours possible de trouver une fonction à laquelle A fait correspondre une fonction donnée

$$\psi=g_1\alpha_1+g_2\alpha_2+\cdots+g_n\alpha_n$$

*) Sur une classe de polynômes. (Ann. de l'Ecole normale supérieure, S. II, T. IX, 1880.)

de la variété $V_n(\alpha)$. En effet, on peut toujours trouver n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ telles si

$$A(\varphi_i) = c_{i.1}\alpha_1 + c_{i.2}\alpha_2 + \cdots + c_{i.n}\alpha_n, \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

le déterminant $|c_{ij}|$ soit différent de zéro, car dans le cas contraire A transformerait l'ensemble fonctionnel en une variété ayant moins de n dimensions. On déterminera alors les nombres $h_1, h_2, \dots h_n$ au moyen des équations

$$c_{1j}h_1 + c_{2j}h_2 + \cdots + c_{nj}h_n = g_j, \quad (j = 1, 2, \dots n)$$

ce qui est possible, puisque le déterminant $|c_{ij}|$ est différent de zéro, et l'on aura

$$A(h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 + \cdots + h_n\varphi_n) = \psi.$$

82. L'opération (8) transforme la variété $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ en elle-même; on peut donc lui appliquer tout ce qu'on a obtenu aux §§ 29—40.

Quant aux racines de (8), il est clair qu'elles forment une variété à un nombre infini de dimensions: étant données $n+1$ fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n+1}$ arbitraires dans le champ de validité de (8), il existera toujours une combinaison linéaire de ces fonctions qui sera racine de A.

83. Remarquons enfin que le produit d'une opération αC par une opération quelconque est encore une opération αC, et il en est de même du produit d'une opération quelconque par une opération C.

Une remarque analogue s'applique à l'opération A donnée par la formule (8).

II. Séries de première et de deuxième espèce.

84. Une série

$$(1) \qquad \sum \alpha_n D^n \varphi$$

ne converge pas en général pour une fonction quelconque φ; cette fonction (donnée, comme nous l'avons établi au § 1, par une série de puissances de x) doit ordinairement avoir un cercle de convergence de rayon supérieur à un nombre déterminé, pour qu'on puisse dire qu'elle appartient au champ de validité de (1). Toutefois, il existe des séries (1) valables pour toute fonction φ de notre ensemble fonctionnel; en d'autres termes, quelque petit que soit le rayon de convergence de φ, ou pourra toujours trouver un domaine du point $x = 0$ pour lequel la série (1) est convergente uniformément. Nous avons vu au § 80 un exemple d'une telle série. Nous sommes ainsi conduits à partager les séries (1) en deux classes: celles *de première espèce,* qui sont valables pour tout notre ensemble fonctionnel, et celles de *deuxième espèce,* dont le champ de validité est seulement une partie de cet ensemble. Ainsi

$$\sum \frac{x^n}{n!} D^n \varphi$$

est une série de première espèce, convergente uniformément pour $|x| < \frac{r}{2}$ si r est le rayon de convergence de φ, tandis que

$$\sum \frac{1}{n!} D^n \varphi, \quad \sum D^n \varphi$$

sont des séries de deuxième espèce, valables, la première, pour les fonctions φ qui appartiennent à un cercle (r) où $r \geq 1$ et la seconde, valable seulement pour une classe de fonctions transcendantes entières.

85. Un exemple fort simple permet de montrer qu'on peut, en certains cas, à une série de deuxième espèce en substituer une de première espèce, qui jouit des mêmes propriétés formelles qui servent de définition à la première. La série

$$(9) \qquad Z(\varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} D^n(\varphi)$$

est évidemment de deuxième espèce. D'ailleurs, elle vérifie l'équation

$$(10) \qquad DZ(\varphi) - zZ(\varphi) = \varphi,$$

dont on pourrait l'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. D'un autre côté, la série

$$C(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{x}{z^n} + \frac{x^2}{2!\, z^{n-1}} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!\, z}\right) D^n \varphi$$

est une série (7): on l'obtient en faisant dans cette formule

$$a_0 = \frac{1}{z}, \quad a_n = (-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

Par conséquent, $e^{zx} C(\varphi)$ nous donne le produit de e^{zx} par une constante, d'où il suit que l'opération

$$Z_1(\varphi) = Z(\varphi) + e^{zx} C(\varphi)$$

vérifie aussi l'équation (10). Mais cette opération peut s'écrire

$$e^{zx} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{e^{-zx}}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{x}{z^n} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!\, z}\right) D^n \varphi,$$

et en développant e^{-zx} et en supprimant les termes communs,

$$(11) \qquad Z_1(\varphi) = e^{zx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1!} - \frac{x^{n+2} z}{n+2!} + \cdots\right) D^n \varphi;$$

or il est très facile de vérifier que le second membre est une série de première espèce, et pour une fonction φ appartenant à (r), cette série est convergente uniformément pour $|x| \leq \frac{r}{2}$.*)

*) V. un exemple plus général dans les R. c. del Circolo Matematico di Palermo (avril 1897).

III. Puissances négatives de D. — Séries ordonnées suivant ces puissances.

86. L'opération indiquée par $Z_1(\varphi)$, que nous avons obtenue au § précédent, peut s'écrire $(D-z)^{-1}$, puisqu'elle vérifie l'équation (10). Si maintenant on fait $z=0$, on a l'opération D^{-1}, et la série (11) donne pour cette opération l'expression:

$$D^{-1}\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{\overline{n+1}\,!} D^n \varphi. \tag{12}$$

Il est facile de vérifier à posteriori l'exactitude de cette formule pour $|x| \leq \frac{r}{2}$ si φ appartient à (r). En outre, on voit que la détermination de D^{-1} donnée par la formule (12) est précisément celle que nous avons fixée au § 53, puisque en ordonnant le second membre de (12) suivant les puissances de x, le premier coefficient est nul. Puisque toute fonction φ rentre dans son champ de validité, la série (12) est une série de première espèce.

87. En changeant dans (12) la fonction φ en $D^{-1}\varphi$, $D^{-2}\varphi$, ..., nous obtenons la formule suivante, facile à vérifier en général:

$$D^{-m}\varphi = \frac{x^m}{\overline{m-1}\,!} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{(m+n)\, n!} D^n \varphi. \tag{13}$$

Le second membre est encore une série de première espèce: quelle que soit φ, si elle appartient à (r), la série (13) est valable pour $|x| \leq \frac{r}{2}$. En outre, la détermination de D^{-m} donnée par (13) est celle que nous avons fixée au § 53.

88. Donnons une limite supérieure des valeurs de D^{-m}, qui nous sera utile tout-à l'heure. Soit $\varphi = \Sigma a_n x^n$ une fonction appartenant à (r) et dont g est la valeur absolue maxima en (r); on a, par une propriété connue des séries de puissances:

$$|a_n| \leq \frac{g}{r^n};$$

or

$$D^{-m}\varphi = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n x^{m+n}}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)},$$

donc, pour $|x| \leq r' < r$:

$$|D^{-m}\varphi| \leq \frac{g r'^m}{m!} \sum_{0}^{\infty} \frac{1.2.3\dots n}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)} \left(\frac{r'}{r}\right)^n;$$

or la série contenue sous le signe Σ a ses termes respectivement inférieurs à ceux de la progression géométrique; donc

$$(14) \qquad |D^{-m}\varphi| < \frac{grr'^m}{(r-r')m!}$$

et en particulier, si l'on prend $r' \leq \frac{1}{2} r$:

$$(15) \qquad |D^{-m}\varphi| < 2g\frac{r'^m}{m!}.$$

89. On peut appliquer la dérivation fonctionnelle terme à terme aux séries (12) et (13); on obtient ainsi le résultat que nous avons annoncé au § 60:

$$(16) \qquad (D^{-m})' = -mD^{-(m+1)}.$$

Si, au moyen de cette formule, on construit le développement fonctionnel de Taylor (§ 61) pour l'opération D^{-1}, on trouve

$$(17) \qquad D^{-1}(\varphi\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D^{-(n+1)}\psi \,.\, D^n\varphi.$$

Nous voulons démontrer que cette formule remarquable a une validité effective quelles que soient les fonctions φ et ψ, pourvu qu'en indiquant par (r) un cercle auquel elles appartiennent toutes deux, on prenne le module de x non supérieur à $\frac{r}{2}$.

90. A cet effet, par la formule d'intégration par parties et en prenant toujours les déterminations de D^{-1} et D^{-m} comme on a fixé au § 53, on a

$$D^{-1}(\varphi\psi) = D^{-1}\psi \,.\, \varphi - D^{-1}(D^{-1}\psi \,.\, D\varphi),$$
$$D^{-1}(\varphi\psi) = D^{-1}\psi \,.\, \varphi - D^{-2}\psi \,.\, D\varphi + D^{-1}(D^{-2}\psi \,.\, D^2\varphi),$$

et ainsi de suite, en sorte que

$$D^{-1}(\varphi\psi) = D^{-1}\psi.\varphi - D^{-2}\psi.D\varphi + \cdots + (-1)^{n-1}D^{-n}\psi.D^{n-1}\varphi$$
$$+ (-1)^n D^{-1}(D^{-n}\psi.D^n\varphi);$$

on voit donc que le reste (§ 62) du développement fonctionnel de Taylor est donné par

$$D^{-1}(D^{-n}\psi \,.\, D^n\varphi);$$

il s'agit de prouver que ce reste tend à zéro pour $n = \infty$. Or, puisque nous avons pris $|x| < r' \leq \frac{r}{2}$, en indiquant par g la valeur absolue maxima de ψ en (r), nous aurons, par l'inégalité (15):

$$|D^{-n}\psi| < 2g\frac{r'^n}{n!};$$

indiquons encore par $\overline{\varphi}$ ce que devient φ lorsqu'on y remplace chaque coefficient et la variable par leurs modules respectifs, et nous aurons:

$$|D^{-n}\psi \,.\, D^n\varphi| < 2g\,\frac{r'^n}{n!}\,D^n\bar{\varphi},$$

mais puisque $\bar{\varphi}$ appartient à (r) et $r' \leq \frac{r}{2}$, le second membre de l'inégalité précédente tend évidemment à zéro pour $n = \infty$. Il en est donc de même, par (14), de $D^{-1}(D^{-n}\psi \,.\, D^n\varphi)$ et la formule (17) est ainsi valable sons les conditions énoncées.

D'une façon analogue, on obtient la formule

$$D^{-m}(\varphi\psi) = \sum_0^\infty (-1)^n \binom{m+n-1}{n} D^{-(m+n)}\psi \,.\, D^n\varphi, \tag{18}$$

valable sous les mêmes conditions.

91. Passons maintenant à l'étude des séries ordonnées suivant les puissances entières et négatives de D. Soit

$$\sum_0^\infty \alpha_n D^{-n}\varphi \tag{19}$$

une telle série. Nous dirons encore qu'elle est valable pour une détermination φ_1, lorsqu'elle est uniformément convergente dans un domaine de $x = 0$ pour $\varphi = \varphi_1$; l'ensemble des fonctions pour lesquelles (19) est valable en constitue le champ fonctionnel de validité. On peut donner, pour les séries de la forme (19), une condition fort peu restrictive de validité. Supposons en effet que les fonctions α_n appartiennent à un cercle commun (r_1); en outre, m_n étant la valeur absolue maxima de α_r en (r_1), supposons qu'il existe deux nombres positifs h et c tels que

$$m_n < h n!\, c^n;$$

sous ces conditions, la série (19) admet comme champ de validité tout notre ensemble fonctionnel. Soit en effet φ une fonction appartenant à un cercle quelconque (r), g sa valeur absolue maxima en (r); soit enfin r' un nombre positif inférieur à r, r_1 et $\frac{1}{c}$. On aura, par (14), pour $|x| \leq r'$:

$$|D^{-n}\varphi| < \frac{g r r'^n}{(r-r')n!},$$

d'où

$$|\alpha_n D^{-n}\varphi| < \frac{m_n g r r'^n}{(r-r')\,n!} < \frac{ghr}{r-r'}\,c^n r'^n,$$

et puisque cr' est plus petit que l'unité, la série $\Sigma\alpha_n D^{-n}\varphi$ sera absolument et uniformément convergente pour les valeurs de x indiquées.

92. La série (19) nous donne donc, sous les conditions énoncées au § précédent, une opération distributive que nous indiquerons par

$A(\varphi)$; formons $A(\varphi\psi)$ en appliquant les formules (17) et (18), nous aurons — formellement pour le moment:

$$A(\varphi\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}(-1)^v \alpha_n \binom{n+v-1}{v} D^{-(n+v)}\psi \,.\, D^v\varphi .$$

Je dis que la série du second membre est absolument et uniformément convergente dans un domaine de $x=0$, φ et ψ étant deux fonctions qui appartiennent à (r). Prenons en effet deux nombres r'', r''' tels que $r'' < r''' \leq \frac{1}{2} r'$; on aura, par les principes de la théorie des séries de puissances, k étant la valeur absolue maxima de φ en (r), et pour $|x| < r''$

$$|D^v\varphi| < \frac{2kv!}{r'''^v}$$

en outre, g étant le valeur absolue maxima de ψ en (r) on a, par le § 88, formule (15) et pour les mêmes valeurs de x:

$$|D^{-(n+v)}\psi| < 2g\frac{r''^{n+v}}{\overline{n+v}!},$$

d'où il suit que le terme général du développement précédent est, en valeur absolue, plus petit que

$$4gkm_n\binom{n+v-1}{v}\frac{v!}{\overline{n+v}!}\frac{r''^{n+v}}{r'''^v},$$

et par les conditions posées pour m_n au § précédent, plus petit que

$$4gkh\frac{n}{n+v}(cr'')^n\left(\frac{r''}{r'''}\right)^v;$$

mais c'est là le terme d'une série convergente à termes positifs, c. q. f. d.

Nous pouvons donc ordonner le développement précédent suivant les puissances $D^v\varphi$, et les coefficients de ces puissances seront les dérivées fonctionnelles de l'opération A, divisées par $v!$ Mais nous apercevons immédiatement que ces dérivées sont précisément les séries qu'on obtient de la série (19) en appliquant la dérivation fonctionnelle terme à terme. D'où l'on conclut qu'aux opérations fonctionnelles representées par des séries (19) on peut appliquer la dérivation terme à terme sous les conditions du § 91, et que le théorème fonctionnel de Taylor est applicable à ces opérations pour tout l'ensemble fonctionnel et pour les valeurs de la variable comprises dans un domaine convenable de $x=0$. On en conclut encore la possibilité de substituer, pour l'opération A, à l'expression (19) une série ordonnée suivant les puissances de $E(\varphi) = \omega D\frac{\varphi}{\omega}$, comme cela a été indiqué au § 78.

93. Une série (19) valable soit pour tout l'ensemble fonctionnel, soit pour un domaine quelconque de la constante, ne peut être nulle

pour toute fonction φ que si ses coefficients sont nuls. Nous allons même voir qu'il suffit que la série (19) soit nulle pour toute puissance entière et positive x^h de la variable, pour que ses coefficients soient tous nuls. Faisons en effet $\varphi = x^h$ et posons

$$\alpha_n = a_{n\cdot 0} + a_{n\cdot 1}x + a_{n\cdot 2}x^2 + \cdots,$$

nous aurons par hypothèse, quel que soit h:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n\cdot 0} + a_{n\cdot 1} + a_{n\cdot 2}x^2 + \cdots)\frac{x^n}{(h+1)(h+2)\cdots(h+n)} = 0,$$

et puisque la série, étant valable, peut être ordonnée suivant les puissances de x, on devra avoir

$$a_{0\cdot 0} = 0, \quad a_{0\cdot 1} + \frac{a_{1\cdot 0}}{h+1} = 0, \cdots$$

et en général

$$a_{0\cdot n} + \frac{a_{1\cdot n-1}}{h+1} + \frac{a_{2\cdot n-2}}{(h+1)(h+2)} + \cdots + \frac{a_{n\cdot 0}}{(h+1)(h+2)\ldots(h+n)} = 0. \tag{20}$$

Or on ne peut satisfaire à ces conditions qu'en faisant tous les coefficients $a_{i\cdot j}$ égaux à zéro, car si l'on fixe n et l'on donne à h les $n+1$ valeurs consécutives $h, h+1, h+2, \ldots h+n$, le déterminant des coefficients des inconnues a_{ij} dans le système (20) sera:

$$\begin{vmatrix} (h+1)(h+2)\ldots(h+n) & (h+2) & \ldots(h+n) & \ldots h+n & 1 \\ (h+2)(h+3)\ldots(h+n+1) & (h+3) & \ldots(h+n+1) & \ldots h+n+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (h+n+1) & (h+2n) & (h+n+2)\ldots(h+2n) & \ldots h+2n & 1 \end{vmatrix}$$

qui équivaut, comme on le voit par la soustraction des lignes horizontales, à

$$n!\begin{vmatrix} (h+2)(h+3)\ldots(h+n) & (h+3) & \ldots(h+n) & \ldots h+n & 1 \\ (h+3)(h+4)\ldots(h+n+1) & (h+4) & \ldots(h+n+1) & \ldots h+n+1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (h+n+1) & \ldots(h+2n-1) & (h+n+2)\ldots(h+2n-1) & \ldots h+2n-1 & 1 \end{vmatrix};$$

en répétant sur ce déterminant, qui a la même forme du précédent, la même réduction, on arrive enfin à un produit de factorielles par le déterminant

$$\begin{vmatrix} h+n & 1 \\ h+n+1 & 1 \end{vmatrix}$$

qui n'est certainement pas nul. On conclut de là que tous les coefficients $a_{i\cdot j}$ doivent être nuls.

94. Une démonstration tout-à-fait analogue permet de vérifier le même théorème pour les séries de la forme

$$\sum_{-m}^{\infty} a_n D^{-n}\varphi. \tag{21}$$

95. Du théorème précédent, il suit que si deux séries de la forme (19) ou (21) donnent le même résultat pour toute fonction φ d'un domaine de la constante, ou même seulement pour toute puissance entière et positive de la variable, elles ont respectivement les mêmes coefficients. De là on conclut qu'on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés à la recherche de l'expression d'une opération sous forme de série ordonnée suivant les puissances entières négatives de D.

IV. Interpolation fonctionnelle.

96. Nous terminerons ce chapitre, qui a pour objet l'expression d'une opération fonctionnelle distributive au moyen d'opérations du calcul ordinaire, par la recherche d'une opération A définie par la condition de faire correspondre aux fonctions d'une suite donnée $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n, \ldots$ respectivement les fonctions d'une autre suite donnée $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_n, \ldots$. On peut dire qu'on pose ainsi un problème d'interpolation fonctionnelle.

Si, comme nous le supposerons, l'opération A est à détermination unique, il est clair qu'entre m quelconques des fonctions données α_n il ne devra subsister aucune relation linéaire; car à une fonction construite linéairement avec m des fonctions α_n correspond la même expression linéaire des fonctions correspondantes β_n.

97. Commençons par le cas où les fonctions données sont en nombre fini; on doit trouver une opération qui fasse correspondre respectivement aux fonctions données $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ linéairement indépendantes, les fonctions données $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}$. On peut dire que cette opération transforme la variété linéaire d'ordre n, $V(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1})$, dans la variété, d'ordre au plus égal à n, des fonctions β. Le problème n'est pas déterminé, car si A est l'opération cherchée et B est une opération dont $V_n(\alpha)$ est variété racine, toute opération de la forme

$$A + CB$$

répond à la question, C étant une opération arbitraire à détermination unique.

En particulier, il existe une forme différentielle linéaire d'ordre $n-1$ qui répond à la question: on peut la déterminer comme il suit. Soit

$$A = \pi_0 D^{n-1} + \pi_1 D^{n-2} + \cdots + \pi_{n-1} D^0$$

cette forme: le système d'équations linéaires suivant (où pour abrèger $\alpha^{(r)}$ représente la dérivée $r^{\text{ème}}$ de α)

$$\pi_0 \alpha_i^{(n-1)} + \pi_1 \alpha_i^{(n-2)} + \cdots + \pi_{n-1} \alpha_i = \beta_i, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

sert à déterminer les coefficients $\pi_0, \pi_1, \ldots \pi_{n-1}$ de la forme A; d'où, en indiquant comme au § 13 par $W(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_r)$ le déterminant wronskien des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_r$, on tire

$$(22) \qquad A = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \frac{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, \varphi, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)}{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n)}$$

Cette formule offre la plus grande analogie avec la formule d'interpolation de Lagrange. En indiquant par $U_i(\varphi)$ le coefficient de β_i dans la formule précédente et en posant

$$(23) \qquad F = \frac{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{n-1}, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{n-1})},$$

où F est par conséquent la forme différentielle linéaire de l'ordre n qui admet $V_n(\alpha)$ comme variété racine, on voit aisément que l'on a

$$(24) \qquad D\,U_i = \mu_i F, \qquad (i = 0, 1, 2, \dots n-1),$$

$\mu_0, \mu_1, \dots \mu_{n-1}$ étant donc les multiplicateurs de F.

98. La formule (22) n'est pas nouvelle: je crois nouvelle au contraire la formule suivante, qu'on peut regarder comme l'analogue de la formule d'interpolation de Newton. Posons

$$(25) \quad A(\varphi) = \lambda_0 \frac{\varphi}{\alpha_0} + \lambda_1 \frac{W(\alpha_0, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1)} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{n-2}, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{n-1})};$$

nous avons ainsi une forme différentielle linéaire de l'ordre $n-1$ qu'on peut déterminer aisément par les conditions

$$A(\alpha_i) = \beta_i, \qquad (i = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

En effet, en remplaçant successivement φ par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ on obtient le système

$$(26) \qquad \begin{cases} \beta_0 = \lambda_0, \\ \beta_1 = \lambda_0 \dfrac{\alpha_1}{\alpha_0} + \lambda_1, \\ \beta_2 = \lambda_0 \dfrac{\alpha_2}{\alpha_0} + \lambda_1 \dfrac{W(\alpha_0, \alpha_2)}{W(\alpha_0, \alpha_1)} + \lambda_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui détermine successivement $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$; le problème est donc résolu.

99. Les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ du développement (25) se présentent comme les analogues des fonctions interpolaires qu'on tire de la formule d'interpolation de Newton et qu'ont étudiées Gergonne, Cauchy, Jacobi, Genocchi, Peano, etc. Ils sont liés par une relation récurrente analogue et qu'on obtient aisément. Échangeons en effet dans la formule (25) α_0 et α_1, puis posons $\varphi = \alpha_1$; il vient

$$\beta_1 = \lambda_0(\beta_0) \frac{\alpha_1}{\alpha_0} + \lambda_1(\beta_0, \beta_1), \quad \beta_1 = \lambda_0(\beta_1),$$

d'où

$$\lambda_1(\beta_0, \beta_1) = \frac{\lambda_0(\beta_1)\alpha_0 - \lambda_0(\beta_0)\alpha_1}{\alpha_0};$$

de même, en faisant dans (25) $\varphi = \alpha_2$, puis en échangeant dans la même formule α_1 et α_2 et en posant encore $\varphi = \alpha_2$, on obtient

$$\beta_2 = \lambda_0(\beta_0)\frac{\alpha_2}{\alpha_0} + \lambda_1(\beta_0, \beta_1)\frac{W(\alpha_0, \alpha_2)}{W(\alpha_0, \alpha_1)} + \lambda_2(\beta_0, \beta_1, \beta_2),$$

$$\beta_2 = \lambda_0(\beta_0)\frac{\alpha_2}{\alpha_0} + \lambda_1(\beta_0, \beta_2),$$

d'où

$$\lambda_2(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \frac{\lambda_1(\beta_0, \beta_2)W(\alpha_0, \alpha_1) - \lambda_1(\beta_0, \beta_1)W(\alpha_0, \alpha_2)}{W(\alpha_0, \alpha_1)},$$

et de même en général:

$$\text{(27)} \qquad \lambda_i(\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_i)$$

$$= \frac{\lambda_{i-1}(\beta_0, \ldots \beta_{i-2}, \beta_i)W(\alpha_0, \ldots \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1}) - \lambda_{i-1}(\beta_0, \ldots \beta_{i-2}, \beta_{i-1})W(\alpha_0, \ldots \alpha_{i-2}, \alpha_i)}{W(\alpha_0, \ldots \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1})}.$$

100. La formule (25) offre sur la formule (22) l'avantage de s'étendre aisément au cas de $n = \infty$, du moins formellement. Une opération telle que $A(\alpha_i) = \beta_i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots \infty$ est donnée formellement par le développement

$$\text{(28)} \qquad A(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \frac{W(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \varphi)}{W(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \alpha_i)}$$

dont les coefficients λ_i se déterminent successivement soit par le système (36), soit par la formule récurrente (27).

101. Nous laisserons pour le moment de côté les conditions de validité du développement (28) dans le cas général, pour examiner le cas particulier où l'on a $\alpha_n = x^n$; dans ce cas, les fonctions β_n sont celles que nous avons indiquées par ξ_n aux § 50 et suivants. Dans ce cas, les déterminants wronskiens se calculent immédiatement, et l'on a

$$W(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}, \varphi) = 0!\,1!\,2! \ldots (i-1)!\,D^i\varphi,$$
$$W(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_i) \qquad = 0!\,1!\,2! \ldots i!$$

de sorte que le développement (28) se réduit à

$$\text{(29)} \qquad A(\varphi) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_i}{i!} D^i\varphi$$

et l'on retombe sur une série (1). Le système (26) permet de déterminer les coefficients λ_i; on a en effet

$$\text{(30)} \qquad \xi_i = \lambda_i + i\lambda_{i-1}x + \binom{i}{2}\lambda_{i-2}x^2 + \cdots + \lambda_0 x^i$$

d'où l'on tire pour λ_i l'expression*)

(31) $$\lambda_i = \xi_i - i\xi_{i-1}x + \binom{i}{2}\xi_{i-2}x^2 - \cdots + (-1)^i\xi_0 x^i.$$

102. Quant à la validité de la formule (29), on voit sans peine que si les fonctions données ξ_n appartiennent à un même cercle (r), il en est de même des coefficients λ_i de la série, en sorte que l'on peut appliquer le théorème des §§ 72—73. Car si les fonctions $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_i, \ldots$ sont des séries de puissances convergentes dans un cercle de centre $x = 0$ et de rayon supérieur à r, il en est de même, par la formule (31), des fonctions $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_i, \ldots$.

103. Remarquons encore que l'on peut ramener au cas particulier où la fonctions α_i sont les puissances α_i de la variable, le problème général énoncé au § 96. En effet, si A et B sont deux opérations définies par

$$A(x^n) = \alpha_n, \qquad B(x^n) = \beta_n,$$

l'opération $C = BA^{-1}$ donnera évidemment

$$C(\alpha_n) = \beta_n.$$

104. Un cas particulier remarquable du problème d'interpolation fonctionnelle est celui où il s'agit de trouver une opération A telle que $A(\alpha_n)$ donne $c_n\alpha_n$. Dans ce cas, l'opération A admet, quel que soit n, la variété $V(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n)$ comme variété invariante et $c_0, c_1, \ldots c_n$ sont les racines, en général différentes, de l'équation fondamentale, comme on l'a vu au chap. I. Ce problème se ramène à la recherche d'opérations que j'indiquerai par J, définies par

$$J(x^n) = c_n x^n;$$

en effet, si T est l'opération telle que $T(x^n)$ donne α_n, on voit que $A = TJT^{-1}$.

Les opérations J jouissent de propriétés remarquables. Elles forment un groupe, qui est permutable; toute combinaison rationnelle des opérations de ce groupe appartient au même groupe; la derivée fonctionnelle d'une opération J appartient aussi au même groupe, car on a

(32) $$J'(\varphi) = (c_{n+1} - c_n)x^n,$$

d'où il serait facile de tirer des conséquences intéressantes. Parmi les opérations J, il y en a de remarquables, entre autres la transformation de Laplace, mais nous n'insisterons pas ici sur ce sujet.

*) Cfr. Chap. II, formules (10) et (11).

Chapitre IV.

Applications.

I. Sur les dérivées à indices quelconques.

105. Nous avons défini, aux §§ 52 et 53, l'opération D^s pour le cas où s est un nombre entier positif ou négatif; nous nous proposons maintenant de chercher ce que l'on doit entendre par D^s lorsque s est un nombre quelconque. A cet effet, remarquons que dans le cas de s entier, la dérivée fonctionnelle de D^s est sD^{s-1}; en indiquant par l'accent la dérivation fonctionnelle, on a donc

$$(D^s)' = sD^{s-1},$$

d'où

$$D(D^s)' = sD^s;$$

de sorte que l'opération D^s vérifie l'équation symbolique

(1) $$DX' = sX.$$

Il sera donc naturel de chercher l'opération D^s, même lorsque s n'est plus un nombre entier, parmi les solutions de cette équation.

106. Si X_1 est une solution de l'équation (1), toute autre solution est de la forme $X = X_1 M$, où M est une opération de multiplication (§ 51). En effet, posons $X = X_1 H$ et substituons dans (1), il viendra

$$DX_1'H + DX_1H' = s_1 X_1 H,$$

et puisque X_1 vérifie l'équation (1), on aura $DX_1H' = 0$, d'où $H' = 0$, et par suite H est une opération de multiplication (§ 60, a)). Réciproquement, quelle que soit la multiplication M, $X_1 M$ vérifie l'équation (1) en même temps que X_1. Pour fixer ce qu'on doit entendre par dérivée d'indice s, il faudra donc fixer, dans la solution de (1), cette multiplication.

107. Intégrons maintenant l'équation (1) par la méthode des coefficients indéterminés: en posant

$$X = \sum_0^\infty \alpha_n D^n$$

et en substituant dans (1), on obtient facilement (§ 77) pour les coefficients α_n les équations

(2) $$(n-s)\alpha_n + (n+1)\alpha'_{n+1} = 0$$

d'où l'on tire

$$\alpha_n = \binom{s}{n} D^{-n} \alpha_0,$$

où il n'est pas nécéssaire de fixer maintenant la détermination de D^{-n}. On obtient donc

$$X = \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^{-n}\alpha_0 \,.\, D^n, \tag{3}$$

et en fixant α_0 et en désignant par X_1 la détermination ainsi donnée par la formule (3), la solution générale de l'équation (1) sera $X(\varphi) = X_1(\mu\varphi)$, où μ est une fonction arbitraire.

108. Pour déterminer X_1, donnons à α_0 la détermination e^x, et fixons la détermination de $D^n\alpha_0$ en prenant aussi $D^{-n}\alpha_0 = e^x$: on a ainsi la solution particulière de l'équation (1):

$$X_1(\varphi) = e^x \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^n \varphi,$$

et par conséquent la solution générale sera

$$X(\varphi) = e^x \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^n(\mu\varphi). \tag{4}$$

Il faut voir maintenant comment on doit choisir la fonction arbitraire μ pour que $X(\varphi)$ puisse être naturellement regardée comme la dérivée d'indice s de φ; à cet effet, convenons avec Liouville que la dérivée d'indice s de e^{ax} soit $a^s e^{ax}$; il suffira de prendre $\mu = e^{-x}$ pour que la formule (4) donne effectivement l'opération D^s. Nous obtenons ainsi

$$D^s(\varphi) = e^x \sum_0^\infty \binom{s}{n} D^n(e^{-x}\varphi). \tag{5}$$

109. Telle est la définition de la dérivée d'ordre s: on peut cependant modifier aisément cette formule en substituant au développement en séries de puissances de D un développement en série de puissances de formes différentielles linéaires de premier ordre, comme on l'a vu au § 78, et en variant ainsi le champ de validité de la formule. En particulier, si l'on pose

$$E(\varphi) = D\varphi - \varphi,$$

on aura

$$D^n(e^{-x}\varphi) = e^{-x}E^n\varphi,$$

et le développement (5) devient

$$D^s(\varphi) = \sum_0^\infty \binom{s}{n} E^n\varphi. \tag{6}$$

Sous cette forme, il est facile de justifier la définition de D^s en montrant que $D^s D^{s'} = D^{s+s'}$; en effet, la série (6) est une série de puissances de E à coefficients constants: or, à de telles séries on peut appliquer les règles ordinaires de la multiplication, et l'on a par le même calcul qui sert pour la série binomiale ordinaire:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s}{n}E^n\sum_{n'=0}^{\infty}\binom{s'}{n'}E^{n'}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+s'}{n}E^n.$$

La série (6) est valable dans un domaine de la fonction e^x (§ 78) et l'on remarquera qu'à ce développement dans le domaine de e^x correspond, dans la théorie des fonctions, le développement de x^s dans le domaine de $x=1$.

II. Sur les équations différentielles linéaires non homogènes.

110. Au § 54 nous avons déjà défini les formes différentielles linéaires d'ordre m

$$F=\sum_{i=0}^{m}\pi_{m-i}D^i, \tag{7}$$

et nous savons que ces formes jouissent de propriétés tout-à-fait semblables à celles des fonctions entières rationnelles. En particulier la dérivation fonctionnelle s'exécute sur elles par la même règle que la dérivation ordinaire sur les fonctions entières (§ 60, c)); le théorème fonctionel de Taylor donne

$$F(\varphi\psi)=\varphi F(\psi)+D\varphi\cdot F'(\psi)+\frac{D^2\varphi}{1\cdot 2}F''(\psi)+\cdots+\frac{D^m\varphi}{m!}F^{(m)}(\psi), \tag{8}$$

où $F^{(m)}(\psi)$ n'est autre chose que $m!\,\pi_0\psi$; on a pour ces formes une règle d'interpolation analogue à celle des fonctions entières (§ 97), enfin on sait décomposer l'opération F en facteurs du premier ordre au moyen des racines de l'opération F, c'est-à-dire des intégrales de l'équation différentielle d'ordre m, $F=0$. Remarquons que la décomposition en facteurs de F est representée par la formule

$$F=M_mDM_m^{-1}M_{m-1}DM_{m-1}^{-1}M_{m-2}\ldots M_1DM_1^{-1}, \tag{9}$$

où $M_1, M_2, \ldots M_m$ sont des opérations de multiplication,

111. Résoudre l'équation différentielle linéaire non homogène, par rapport à la fonction inconnue ψ:

$$F(\psi)=\varphi, \tag{10}$$

revient à exécuter sur φ l'opération F^{-1}. On pourra donc dire que l'équation (10) est résolue pour toute fonction φ d'un certain domaine fonctionnel, si l'on arrive à construire, au moyen d'opérations connues, une expression de F^{-1} qui soit valable dans ce domaine. Bien entendu, d'une détermination de F^{-1} on déduit toutes les autres en y ajoutant une racine quelconque de F.

Or on a deux formules qui donnent une expression de F^{-1}; l'une, qu'on tire immédiatement de (9)

$$(11)\qquad F^{-1} = M_1 D^{-1} M_1^{-1} M_2 D^{-1} M_2^{-1} \cdots M_m D^{-1} M_m^{-1};$$

l'autre, qu'on obtient par la méthode de la variation des constantes arbitraires de Lagrange:

$$(12)\qquad F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i \int_{x_0}^{x} \mu_i \varphi,$$

où $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_m$ est un système fondamental d'intégrales de $F = 0$ et $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_m$ est le système des multiplicateurs correspondants. Mais ces formules présentent l'une et l'autre un inconvénient: c'est d'exiger la connaissance des racines de F. Nous allons montrer qu'il est possible de donner pour F^{-1} une autre expression, sous forme d'une série de puissances de D^{-1} et dont les coefficients s'expriment rationnellement au moyen des coefficients π_i de la forme F: en entendant par là que chaque coefficient de la série peut se déduire des coefficients π_i au moyen d'opérations rationnelles et de dérivation, exclusivement.

112. Pour obtenir cette expression de F^{-1}, nous allons faire usage de la méthode des coefficients indéterminés (§ 95). Posons

$$(13)\qquad F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n D^{-n} \varphi;$$

si ce développement est valable dans un certain champ fonctionnel, on pourra lui appliquer l'opération F terme à terme; on aura ainsi

$$FF^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} F(\lambda_n D^{-n} \varphi)$$

et en appliquant la formule (8),

$$FF^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F(\lambda_n) D^{-n} \varphi + F'(\lambda_n) D^{-n+1} \varphi + \cdots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_n) D^{-n+m} \varphi \right\}$$

enfin, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de D:

$$FF^{-1} = \sum_{n=-m}^{\infty} \Big\{ F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n+1}) + \frac{1}{1\cdot 2} F''(\lambda_{n+2}) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\lambda_{n+m}) \Big\} D^{-n}.$$

Mais ce résultat doit être équivalent à φ; il faudra donc, d'après le § 94, que les coefficients des mêmes puissances de D soient les mêmes dans les deux membres, et l'on a ainsi, en notant que $F^{(r)}(\lambda_s)$ est nul si l'indice s est négatif:

$$\frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_0) = 0, \quad \frac{1}{m-1!}F^{(m-1)}(\lambda_0) + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_1) = 0, \ldots$$

$$F'(\lambda_0) + \frac{1}{1\cdot 2}F''(\lambda_1) + \cdots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_{m-1}) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_1 = 0, \ldots \lambda_{m-1} = 0;$$

puis

$$\frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_m) = 1, \qquad \frac{1}{m-1!}F^{(m-1)}(\lambda_m) + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_{m+1}) = 0, \ldots$$

et en général

$$(14) \quad F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n+1}) + \frac{1}{1\cdot 2}F''(\lambda_{n+2}) + \cdots + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\lambda_{n+m}) = 0.$$

On voit donc que les m premiers coefficients du développement (13) sont nuls, que le $m^{\text{ème}}$ est $\frac{1}{\pi_0}$, et que les autres s'obtiennent successivement par la formule (14), qu'on peut encore écrire

$$(14') \quad \lambda_{n+m} = -\frac{1}{\pi_0}\left\{F(\lambda_n) + F'(\lambda_{n+1}) + \cdots + \frac{1}{m-1!}F^{(m-1)}(\lambda_{n+m-1})\right\},$$

au moyen d'opérations rationnelles et de dérivation. Remarquons l'analogie entre la formule (14) et l'échelle de relation des coefficients d'une série récurrente.

113. Occupons nous à présent de la validité du développement

$$(13') \quad F^{-1}(\varphi) = -\frac{1}{\pi_0}D^{-m} + \lambda_{m+1}D^{-(m+1)} + \lambda_{m+2}D^{-(m+2)} + \cdots$$

que nous venons d'obtenir. Nous voulons démontrer que si l'on suppose que les fonctions $\pi_0, \pi_1 \ldots . \pi_m$ et $\frac{1}{\pi_0}$ appartiennent à un même cercle (r), le développement précédent satisfait aux conditions de validité des séries (19) du § 91, c'est-à-dire qu'il est valable dans l'espace fonctionnel pour des valeurs de x dont le module est assez petit.

A cet effet, remarquons que $\lambda_m = \frac{1}{\pi_0}$, $\lambda_{m+1}, \ldots$ et toutes les fonctions λ_{m+n} déterminées par (14') appartiendront au même cercle (r); il en sera de même des fonctions $\bar{\lambda}_{m+n}$ que l'on obtient de λ_{m+n} en y remplaçant chaque coefficient par son module. Indiquons maintenant par Φ ce que devient $\frac{1}{\pi_0} F$ lorsqu'on remplace dans chacune des séries $\frac{\pi_1}{\pi_0}, \frac{\pi_2}{\pi_0}, \dots \frac{\pi_m}{\pi_0}$, chaque coefficient par son module, et par $\Phi', \Phi'', \dots$ les dérivées fonctionnelles de Φ; puis posons $|x| \leq u < r$, et nous aurons immédiatement, par la formule (14'):

$$\bar{\lambda}_{m+n}(u) \leq \Phi(\bar{\lambda}_n(u)) + \Phi'(\bar{\lambda}_{n+1}(u)) + \dots + \frac{1}{m+1!} \Phi^{(m-1)}(\bar{\lambda}_{n+m-1}(u)).$$

Or, soit g_m la valeur absolue maxima de $\bar{\lambda}_m, \bar{\lambda}_{m+1}, \dots \bar{\lambda}_{m+n-1}$ dans (r); on aura par un théorème connu

$$\bar{\lambda}_{n+s}(u) < g_n \frac{r}{r-u}, \qquad (s = 0, 1, 2, \dots m-1)$$

et par suite

$$\bar{\lambda}_{m+n}(u) < g_n \left(\Phi\left(\frac{r}{r-u}\right) + \Phi'\left(\frac{r}{r-u}\right) + \dots + \frac{1}{m-1!} \Phi^{(m-1)}\left(\frac{r}{r-u}\right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m!} \Phi^{(m)}\left(\frac{r}{r-u}\right)\right).$$

Mais on tire immédiatement de la formule (8):

$$F(\varphi) + F'(\varphi) + \frac{1}{1 \cdot 2} F''(\varphi) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(\varphi) = e^{-x} F(\varphi e^x);$$

par conséquent on a

$$\bar{\lambda}_{m+n}(u) < g_n e^{-u} \Phi\left(\frac{r e^u}{r-u}\right).$$

Ici, le second membre a une valeur déterminée: en indiquant par h le plus grand des deux nombres 1 et $e^{-u} \Phi\left(\frac{r e^u}{r-u}\right)$, nous aurons donc

$$\bar{\lambda}_{m+n}(u) < g_n h$$

et puisqu'il est clair que pour $|x| \leq u$, $\lambda_{m+n}(x)$ est, en module, au plus égal à $\bar{\lambda}_{m+n}(u)$, nous aurons

$$|\lambda_{m+n}(x)| < g_n h, \qquad (s = 0, 1, 2, \dots m).$$

Par le même raisonnement, nous trouverons

$$|\lambda_{m+n+1}(x)| < g_n h^2, \qquad |\lambda_{m+n+2}(x)| < g_n h^3, \dots,$$

conditions qui sont comprises dans celles du § 91: d'où l'on conclut la validité du développement (13) pour tout l'ensemble fonctionnel, avec toutes les conséquences qu'on en tire par les §§ 91 et 92.

114. La formule (13') nous donne une série qu'on peut, autant qu'elle est valable, ordonner suivant la puissances de x; or le terme de degré minimum en x est du degré m: cela revient à dire que la formule trouvée nous donne cette détermination de l'intégrale de (10) qu'on appelle intégrale principale.

Si dans la formule de Lagrange (12) on fait $x_0 = 0$, on sait que l'on a aussi l'intégrale principale: cette formule coïncide alors avec

$$F^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{-1}(\mu_i \varphi),$$

où D^{-1} est déterminé comme on l'a établi au § 53; et en appliquant la formule (17) du chap. III, il vient

$$(15) \qquad F^{-1}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{n-1} \mu_i \,.\, D^n \varphi.$$

Mais ce développement ne peut différer de (13), et d'après le § 95 il faudra donc que les coefficients des mêmes puissances de D soient égaux: on aura ainsi

$$(16) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^s \mu_i = 0, & (s = 0, 1, 2, \dots n-2) \\ \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{m-1} \mu_i = \frac{(-1)^{m-1}}{\pi_0} \end{cases}$$

qui sont les formules connues qui déterminent les multiplicateurs, et en général

$$(17) \qquad \lambda_n = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \omega_i D^{n-1} \mu_i, \quad (n = m, m+1, m+2, \dots)^{*)}.$$

Bologne, février 1897.

Table des Matières.

*) Aux travaux indiqués dans l'Introduction, il faut ajouter un mémoire de M. Bourlet qui traite précisément des opérations distributives, et qui a paru, pendant l'impression du présent travail, dans les Annales de l'École Normale supérieure, avril—mai 1897.

Einige Sätze über die asymptotische Darstellung von Integralen linearer Differentialgleichungen.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Die reelle Function $f(x)$ sei für alle oberhalb einer gewissen Grenze liegenden Werthe von x endlich und stetig; dasselbe gelte von ihrer ersten Ableitung, und es sei

$$\lim f(x) = a^2$$

eine bestimmte positive Grösse, wobei das Zeichen lim ohne nähere Charakterisirung, wie fortan immer, den Grenzübergang für $x = +\infty$ bedeute. Alsdann besteht, wie Poincaré*) gezeigt hat, für jedes Integral der Differentialgleichung

$$y'' = yf(x) \tag{1}$$

eine der Gleichungen

$$\lim \frac{y'}{y} = \pm a.$$

Dass es Integrale, für welche dieser Grenzwerth negativ ist, wirklich giebt, habe ich bewiesen**); in derselben Abhandlung habe ich für den Fall, dass die Function $f(x) - a^2$ nicht oberhalb jeder positiven Grenze ihr Zeichen wechselt und das Integral

$$\int_x^{+\infty} \left(f(x) - a^2\right) dx \tag{2}$$

endlich ist, gezeigt, dass die Integrale der Gleichung (1) in einer der Formen

$$Be^{\pm ax}(1+\varepsilon)$$

*) Poincaré, Sur les équations linéaires aux différences ordinaires et aux différences finies, American Journal of Math. Bd. VII, S. 204; Picard, Traité d'analyse Bd. III, S. 368.

**) Kneser, Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments, (Erster Aufsatz) Crelle's Journal Bd. CXVI, S. 192.

darstellbar sind, wobei B eine Constante bedeutet und die Gleichungen

$$\lim \varepsilon = \lim \varepsilon' = 0$$

gelten. Ein ähnliches Resultat leite ich im folgenden ab, ohne das Integral (2) als endlich vorauszusetzen.

Wird ferner die speciellere Voraussetzung eingeführt, es sei

$$f(x) = a^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \cdots$$

eine reelle für hinreichend grosse Werthe von $|x|$ convergente Potenzreihe des Arguments $1:x$, so habe ich unter der Annahme

(3) $$a_1 = 0$$

gezeigt, dass die Grösse ε durch eine nach fallenden Potenzen von x geordnete, im Allgemeinen divergente Reihe asymptotisch dargestellt werden kann im Sinne der von Stieltjes*) und Poincaré**) gegebenen Definition. Auch diesem Resultat stelle ich auf den folgenden Blättern ein allgemeineres zur Seite, indem ich die Annahme (3) fallen lasse.

§ 1.

Die Integrale der Gleichung (1) nach ihren Grössenverhältnissen bei grossen positiven Werthen des Arguments.

Es sei a ein beliebiger Werth der Quadratwurzel der positiven Grösse a^2; man setze

(4) $$f(x) = a^2 + \varphi(x) = a^2 + \frac{1}{x}\left(a_1 + \varphi_1(x)\right),$$

und nehme an, a_1 sei eine reelle nicht verschwindende Constante; die reelle Function $\varphi_1(x)$ bleibe, sobald x eine gewisse Grenze überschritten hat, nebst ihrer ersten Ableitung stetig, und sei so beschaffen, dass

$$\lim \varphi_1(x) = 0$$

und das Integral

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(x)}{x}\,dx$$

dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Grösse verbleibt, wenn x unbegrenzt wächst. Ist dann y ein Integral der Gleichung (1), für welches

(5) $$\lim \frac{y'}{y} = a,$$

und setzt man

*) Stieltjes, Recherches sur quelques séries sémiconvergentes, Annales de l'école normale supérieure Ser. 3, Bd. III (1886), S. 201.

**) Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, Acta math. Bd. VIII, S. 295.

$$y = e^{ax} s, \quad \frac{y'}{y} = a + \sigma,$$

so hat man die Gleichungen

$$\sigma = \frac{s'}{s}, \quad \lim \sigma = 0,$$

$$s'' + 2as' = s\varphi(x). \tag{6}$$

Die Function y kann der Gleichung (5) zufolge nicht oberhalb jeder Grenze verschwinden; man darf daher annehmen, dass y und s positive Werthe haben, sobald x eine gewisse Grenze überschritten hat, oder, wie wir sagen wollen, für grosse Werthe von x.

Aus der Gleichung (6) folgt nun leicht

$$[s' e^{2ax}]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} s e^{2ax} \varphi(x)\, dx; \tag{7}$$

daraus ergiebt sich, da $\varphi(x)$ bei unsern Voraussetzungen nicht mehr oberhalb jeder Grenze verschwindet, dass dasselbe von dem Product $s' e^{2ax}$ gilt, welches den Sinn seiner Aenderung der Gleichung (7) zufolge für grosse Werthe von x beibehält. Somit sind auch die Grössen s' und σ für grosse Werthe von x von Null verschieden und haben ein constantes Zeichen. Dies festgestellt, leiten wir aus der Identität

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2$$

die folgenden Gleichungen ab:

$$\begin{aligned} \sigma' &= a^2 + \varphi(x) - (a+\sigma)^2 \\ &= \varphi(x) - \sigma(2a+\sigma), \end{aligned}$$

$$\sigma - \sigma_0 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx - \int_{x_0}^{x} \sigma(2a+\sigma)\, dx;$$

dabei sei σ_0 der Werth von σ für $x = x_0$. Ist letzterer Werth hinreichend gross und $x > x_0$, so kann auf das letzte Integral der erste Mittelwerthsatz angewandt werden; ist σ_m ein Werth von σ in dem Intervall von x_0 bis x, so kann man setzen

$$\sigma - \sigma_0 = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx - (2a + \sigma_m) \int_{x_0}^{x} \sigma\, dx,$$

oder, was genau dasselbe bedeutet

$$(2a + \sigma_m) \lg \frac{s}{s_0} = a_1 \lg x + \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(x)}{x}\, dx + \sigma_0 - \sigma. \tag{8}$$

Das Integral auf der rechten Seite bleibt nach Voraussetzung zwischen endlichen Grenzen, wenn man x über alle Grenzen wachsen lässt; die ganze rechte Seite hat daher für grosse Werthe von x das Zeichen des ersten Gliedes oder der Grösse a_1. Da nun $|\sigma_m|$ beliebig klein ist, wenn x_0 hinreichend gross genommen wird, so zeigt die Gleichung (8), dass die Function s für grosse Werthe des Arguments x mit diesem zugleich wächst oder abnimmt und dass die Grössen s' und σ positiv oder negativ sind, jenachdem die Grösse

$$\varrho = \frac{a_1}{2a}$$

positiv oder negativ ist. Behufs genauerer Discussion der Gleichung (8) unterscheiden wir die vier möglichen Combinationen von Zeichen der Grössen a und a_1.

1) Wenn die Ungleichungen

$$a > 0, \quad a_1 > 0, \quad \varrho > 0$$

bestehen, und c eine beliebig kleine Constante ist, kann man annehmen

$$0 < \sigma_m < c,$$

also

$$2a + c > 2a + \sigma_m > 2a,$$

und die Gleichung (8) ergiebt

$$\lg \frac{s}{s_0} > \frac{a_1}{2a+c} \lg x + R_1, \tag{9}$$

$$\lg \frac{s}{s_0} < \varrho \lg x + R_2,$$

dabei mögen durch R, wie fortan immer, Grössen bezeichnet werden, deren absolute Beträge unterhalb einer festen Grenze bleiben, wenn man x unbegrenzt wachsen lässt.

Da nun c beliebig klein sein kann, so kann man setzen

$$\frac{a_1}{2a+c} = \varrho - \gamma,$$

wenn fortan unter γ eine beliebig klein gegebene positive Grösse verstanden wird, und die Ungleichungen (9) ergeben, dass bei passender Wahl der positiven Constanten Γ die Ungleichungen

$$s x^{-\varrho} < \Gamma_1, \quad s x^{-\varrho+\gamma} > \Gamma_2 \tag{10}$$

für grosse Werthe von x bestehen.

2) Wenn ferner

$$a > 0, \quad a_1 < 0, \quad \varrho < 0,$$

so kann man annehmen

$$-c < \sigma_m < 0,$$

also

$$2a - c < 2a + \sigma_m < 2a;$$

schreibt man daher die Gleichung (8) in der Form

$$(2a + \sigma_m) \lg \frac{s_0}{s} = -a_1 \lg x + \cdots,$$

so ergiebt sich

$$\lg \frac{s_0}{s} > -\varrho \lg x + R_3, \tag{11}$$

$$\lg \frac{s_0}{s} < \frac{-a_1}{2a - c} \lg x + R_4; \tag{12}$$

da nun offenbar

$$\frac{-a_1}{2a - c} - \frac{-a_1}{2a} > 0,$$

so kann die Ungleichung (12) geschrieben werden

$$\lg \frac{s_0}{s} < (-\varrho + \gamma) \lg x + R_4;$$

hieraus aber und aus der Relation (11) folgen auch hier die Ungleichungen (10), wenn die Grössen Γ passend gewählt werden.

3) Hat man

$$a < 0, \quad a_1 > 0, \quad \varrho < 0,$$

so ist σ_m negativ, und demnach

$$-2a + c > -2a - \sigma_m > -2a.$$

Die Gleichung (8) schreiben wir in der Form

$$(-2a - \sigma_m) \lg \frac{s_0}{s} = a_1 \lg x + \cdots;$$

dann ergeben die letzten Ungleichungen

$$\lg \frac{s_0}{s} > \frac{a_1}{-2a + c} \lg x + R_5,$$

$$\lg \frac{s_0}{s} < -\varrho \lg x + R_6,$$

und da man setzen kann

$$\frac{a_1}{-2a + c} = -\varrho - \gamma,$$

so nimmt die vorletzte Ungleichung folgende Gestalt an:

$$\lg \frac{s_0}{s} > (-\varrho - \gamma) \lg x + R_5.$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so hat man also bei passender Wahl der positiven Constanten Γ die Ungleichungen

$$s x^{-\varrho} > \Gamma_1, \quad s x^{-\varrho - \gamma} < \Gamma_2. \tag{13}$$

4) Dasselbe Resultat ergiebt sich auch unter der Annahme

$$a < 0, \quad a_1 < 0, \quad \varrho > 0.$$

Dann ist nämlich

$$-2a > -2a - \sigma_m > -2a - c$$

und die Gleichung (8) in der Form

$$(-2a-\sigma_m)\lg\frac{s}{s_0}=-a_1\lg x+\cdots$$

ergiebt sofort

(14) $$\lg\frac{s}{s_0}>\varrho\lg x+R_7,$$

$$\lg\frac{s}{s_0}<\frac{a_1}{2a+c}\lg x+R_8,$$

oder auch

(15) $$\lg\frac{s}{s_0}<(\varrho+\gamma)\lg x+R_8,$$

da offenbar

$$\frac{-a_1}{-2a-c}>\frac{-a_1}{-2a};$$

die Ungleichungen (14) und (15) beweisen aber die ausgesprochene Behauptung.

Die unter (10) und (13) erhaltenen Resultate können in folgendem Satze zusammengefasst werden.

Die reelle Function $\varphi_1(x)$ sei nebst ihrer ersten Ableitung stetig, sobald x eine gewisse Grenze überschritten hat; ferner sei

$$\lim_{x=+\infty}\varphi_1(x)=0,$$

und der absolute Betrag des Integrals

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi_1(x)}{x}\,dx$$

bleibe unterhalb einer festen Grenze, wenn man x unendlich gross werden lässt. Die Constanten a und a_1 seien reell und von Null verschieden und man setze

$$\varrho=\frac{a_1}{2a};$$

ist dann y ein Integral der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y\left(a^2+\frac{1}{x}\left(a_1+\varphi_1(x)\right)\right),$$

für welches die Gleichung

$$\lim_{x=+\infty}\frac{y'}{y}=a$$

besteht, so gelten für $a>0$ die Ungleichungen

$$|y|\,e^{-ax}x^{-\varrho}<\Gamma_1,\quad |y|\,e^{-ax}x^{-\varrho+\gamma}>\Gamma_2,$$

für $a<0$ die Ungleichungen

$$|y|\,e^{-ax}x^{-\varrho}>\Gamma_1,\quad |y|\,e^{-ax}x^{-\varrho-\gamma}<\Gamma_2,$$

sobald x eine gewisse Grenze überschritten hat. Dabei seien γ und Γ positive Constante, von denen die erste beliebig klein gegeben, die andern in passender Weise bestimmt sein mögen.

Eine andere Form dieses Satzes erhält man, wenn man gleichzeitig zwei Integrale y_1 und y_2 betrachtet, für welche die Gleichungen

$$\lim \frac{y_1'}{y_1} = a, \quad \lim \frac{y_2'}{y_2} = -a$$

bestehen. Setzt man dann

$$|y_1| e^{-ax} x^{-\varrho} = s_1, \quad |y_2| e^{ax} x^{\varrho} = s_2,$$

so folgt aus dem obigen Satze, wenn a positiv ist,

$$\begin{aligned} s_1 &< \Gamma_1, \quad & s_1 x^{\gamma} &> \Gamma_2, \\ s_2 &> \Gamma_3, \quad & s_2 x^{-\gamma} &< \Gamma_4; \end{aligned}$$

wenn a negativ ist, hat man in diesen Ungleichungen links die Indices 1 und 2 zu vertauschen.

§ 2.

Asymptotische Darstellung durch semiconvergente Reihen.

Unter die betrachteten Differentialgleichungen fällt speciell die folgende

$$(16) \qquad y'' = y\left(a^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \cdots\right) = y\left(a^2 + \varphi(x)\right)$$

wenn der Factor von y eine reelle, für grosse Werthe von x convergente Potenzreihe des Arguments $1 : x$ ist; denn sie geht aus der Gleichung (1) bei der Annahme (4) hervor wenn man setzt

$$\varphi_1(x) = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \cdots,$$

wobei die in § 1 an die Function $\varphi_1(x)$ gestellten Anforderungen offenbar erfüllt sind.

Macht man nun in der Gleichung (16) die Substitution

$$y = u x^{\varrho} e^{ax},$$

indem man ϱ wie bisher durch die Gleichung

$$2a\varrho - a_1 = 0$$

definirt, so ergiebt sich

$$u'' + 2\left(a + \frac{\varrho}{x}\right) u' + u\left(\frac{\varrho(\varrho - 1)}{x^2} - \varphi(x)\right) = 0,$$

oder, indem man neue Constanten b einführt,

$$(17) \qquad u'' + \left(a + \frac{\varrho}{x}\right) u' + u\left(\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots\right) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung werde, auch wenn u eine beliebige Function von x ist, durch $\Theta(u)$ bezeichnet; setzt man unter $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ von x unabhängige Grössen verstehend

$$\mathfrak{R} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \cdots,$$

und bildet rein formal den Ausdruck $\Theta(\mathfrak{R})$, so erhält man

$$\Theta(\mathfrak{R}) = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \cdots,$$

und eine leichte Rechnung ergiebt

$$A_n = b_2\alpha_{n-2} + b_3\alpha_{n-3} + \cdots + b_n\alpha_0 - 2[(n-1)a\alpha_{n-1} + (n-2)\varrho\alpha_{n-2}] + (n-1)(n-2)\alpha_{n-2}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Grössen $A_2, A_3, \ldots A_{n+1}$ ungeändert bleiben, wenn man alle Grössen α, deren Index grösser als n ist, gleich Null setzt. Bezeichnet man daher durch $\mathfrak{P}$ fortan immer eine Potenzreihe des beigefügten Arguments, welche für von Null verschiedene Werthe desselben convergirt, so kann man setzen

$$(18)\quad \Theta\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x_n}\right) = \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \cdots + \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+2}}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Jetzt bestimme man die Grössen α so, dass für jeden Werth von n die Gleichung

$$(19)\qquad A_n = 0$$

besteht; aus der Form ihrer linken Seite ist ersichtlich, dass alle Grössen α eindeutig bestimmt sind, sobald man α_0 willkürlich festgelegt hat. Dann braucht die Reihe $\mathfrak{R}$ keineswegs zu convergiren; es gilt aber die rein formale Gleichung

$$\Theta(\mathfrak{R}) = 0$$

und in demselben Sinne besteht die Gleichung (16), wenn man für y den Ausdruck

$$(20)\qquad e^{ax}x^{\varrho}\mathfrak{R}$$

einsetzt. Dass eine derartige formale Integration möglich ist, auch bei allgemeineren Differentialgleichungen, ist bekannt. Wir richten unsre Aufmerksamkeit auf die Frage, ob der Ausdruck (20), obwohl im Allgemeinen divergent, nicht zur asymptotischen Darstellung der Grösse y dienen kann, d. h. ob nicht, wenn man setzt

$$u = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + w,$$

bei passender Wahl von α_0 die Gleichung

$$\lim\,(wx^n) = 0$$

besteht.

Um diese Frage beurtheilen zu können, schreiben wir die Gleichung (17) in folgender Form

$$\Theta(u) = \Theta(w) + \Theta\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n}\right) = 0,$$

woraus nach (18) bei der Annahme (19) folgt

$$\Theta(w) = \frac{1}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{21}$$

Bildet man nun die Grösse

$$w x^n = v,$$

so ergiebt sich leicht

$$\Theta(w) = \Theta\left(\frac{v}{x^n}\right) = \frac{1}{x^n}\Big[v'' + 2\left(a + \frac{\varrho - n}{x}\right) v'$$
$$+ v\left(-\frac{2an}{x} + \frac{b_1 + n(n+1)}{x^2} + \frac{b_2}{x^3} + \cdots\right)\Big],$$

also nach (21)

$$v'' + Pv' + Qv = \frac{1}{x^2} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right), \tag{22}$$

wenn man setzt

$$P = 2\left(a + \frac{\varrho - n}{x}\right), \quad Q = -\frac{2an}{x} + \frac{b_2 + n(n+1)}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots.$$

Substituirt man weiter

$$v = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} z = e^{-ax} x^{n-\varrho} z,$$

so erhält man

$$e^{-\frac{1}{2}\int P dx} \left\{z'' + z\left(Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2\right)\right\} = \frac{1}{x^2} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

oder

$$z'' + z\left(-a^2 - \frac{2a\varrho}{x} + \frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e^{ax} x^{\varrho - n - 2} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{23}$$

Diese Gleichung kann bekanntlich durch Quadraturen aufgelöst werden, wenn man die Integrale der homogenen Gleichung

$$Y'' = Y\left(a^2 + \frac{2a\varrho}{x} - \frac{1}{x^2}\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) \tag{24}$$

kennt; sind Y_1 und Y_2 zwei linear unabhängige für grosse Werthe von x positive Integrale, für welche man die Gleichung

$$Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1' = \pm 1$$

voraussetzen darf, so wird das allgemeine Integral der Gleichung (23) für grosse Werthe von x durch folgenden Ausdruck dargestellt

$$\pm z = -Y_1 \int_{x_0}^{x} Y_2 e^{ax} x^{\varrho - n - 2} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx + Y_2 \int_{x_1}^{x} Y_1 e^{ax} x^{\varrho - n - 2} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$+ C_1 Y_1 + C_2 Y_2.$$

Dabei sind x_0, x_1, C_1, C_2 Constante, von denen die beiden ersten innerhalb des Convergenzbereichs der Reihe $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ liegen mögen.

Man kann nun nach den in der Einleitung erwähnten Sätzen die Integrale Y_1 und Y_2 so wählen, dass

$$\lim \frac{Y_1'}{Y_1} = a, \quad \lim \frac{Y_2'}{Y_2} = -a;$$

setzt man dabei

$$Y_1 e^{-ax} x^{-\varrho} = S_1, \quad Y_2 e^{ax} x^{\varrho} = S_2,$$

so ist offenbar

(25) $$\lim \frac{S_1'}{S_1} = \lim \frac{S_2'}{S_2} = 0,$$

Da ferner die Gleichung (24) zu den in § 1 behandelten gehört, indem der Ausdruck

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{x}\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)$$

den dort an die Function $\varphi_1(x)$ gestellten Anforderungen genügt und die Buchstaben a und ϱ ihre Bedeutung behalten, so besteht eins der folgenden beiden Systeme von Ungleichungen für grosse Werthe von x

(26) $$\begin{cases} a > 0, & S_1 < \Gamma_1, \quad S_1 x^{\gamma} > \Gamma_2, \\ & S_2 > \Gamma_3, \quad S_2 x^{-\gamma} < \Gamma_4, \end{cases}$$

(27) $$\begin{cases} a < 0, & S_1 > \Gamma_1, \quad S_1 x^{-\gamma} < \Gamma_2, \\ & S_2 < \Gamma_3, \quad S_2 x^{\gamma} > \Gamma_4; \end{cases}$$

dabei haben γ und Γ dieselbe Bedeutung wie in § 1 und es besteht in beiden Fällen eine Relation

(28) $$S_1 S_2 x^{-\gamma} < \Gamma_0^2.$$

Von diesen Resultaten ausgehend betrachten wir den Ausdruck

$$v = z e^{-ax} x^{n-\varrho},$$

der sich nach Einführung der Grössen S folgendermassen gestaltet:

$$\pm v = -x^n S_1 \int_{x_0}^{x} \frac{S_2}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx + e^{-2ax} x^{n-2\varrho} S_2 \int_{x_1}^{x} \frac{e^{2ax} S_1}{x^{n-2\varrho+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$+ x^n (C_1 S_1 + C_2 e^{-2ax} x^{n-2\varrho} S_2).$$

Wir bemerken zunächst, dass das erste Integral auf der rechten Seite für $x = +\infty$ gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt. Das ist offenbar, wenn die Ungleichungen (27) gelten, die Grösse S_2 also, wenn man x unbegrenzt wachsen lässt, unterhalb einer festen Grenze verbleibt. Hat man dagegen mit den Ungleichungen (26) zu rechnen, so sei γ ein echter Bruch, und das in Rede stehende Integral werde in der Form

(29) $$\int_{x_0}^{x} S_2 x^{-\gamma} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^{n-\gamma+2}}$$

geschrieben; da nun das Integral

$$\int_{x_0}^{+\infty} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^{n-\gamma+2}}$$

endlich und bestimmt ist, die Grösse $S_2 x^{-\gamma}$ aber für $x = +\infty$ nicht über alle Grenzen wächst, so convergirt auch jetzt das Integral (29), wenn man x unbegrenzt wachsen lässt, gegen einen bestimmten, endlichen Grenzwerth. Man kann daher für die Constanten C folgende specielle Wahl treffen

$$C_1 = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{S_2}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \qquad C_2 = 0,$$

und erhält dann als particuläres Integral der Gleichung (22)

$$\pm v = x^n S_1 \int_x^{+\infty} \frac{S_2}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx + e^{-2ax} x^{n-2\varrho} S_2 \int_{x_1}^{x} \frac{e^{2ax} S_1}{x^{n-2\varrho+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wie wir zeigen wollen, für $x = +\infty$. Zunächst gilt das von dem ersten Gliede; denn gelten erstens die Ungleichungen (26) und ist γ ein positiver echter Bruch, so ist das Integral

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2-\gamma}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{x^{n+1-\gamma}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

endlich, und man kann setzen

$$\int_x^{+\infty} \frac{S_2}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx = (S_2 x^{-\gamma})_m \int_x^{\infty} \frac{1}{x^{n+2-\gamma}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

wobei der Index m bedeute, dass von der mit ihm versehenen Grösse einer der Werthe zu nehmen ist, die sie im Intervall von x bis $+\infty$ annehmen kann. Man hat daher die Gleichung

$$M = x^n S_1 \int_x^{+\infty} \frac{S_2}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx = S_1 (S_2 x^{-\gamma})_m \frac{1}{x^{1-\gamma}} \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

und diese Grösse wird nach (26) offenbar unendlich klein, wenn x über alle Grenzen wächst. Gelten zweitens die Ungleichungen (27), so kann man setzen

$$M = x^{n+\gamma}(S_1 x^{-\gamma})\,(S_2)_m \int_x^{+\infty} \frac{1}{x^{n+2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= S_1 x^{-\gamma} (S_2)_m \frac{1}{x^{1-\gamma}} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

und da in diesem Falle die Grössen S_2 und $S_1 x^{-\gamma}$ bei wachsenden Werthen von x unterhalb endlicher Grenzen bleiben, so hat man hier wie im vorigen Falle

(30) $$\lim M = 0.$$

Hieraus folgt leicht

(31) $$\lim M' = 0;$$

denn es ist

$$M' = \left(\frac{n}{x} + \frac{S_1'}{S_1}\right) M - \frac{S_1 S_2}{x} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

und es verschwinden die mit M multiplicirten Glieder nach (25), das letzte nach (28) für $x = +\infty$.

Um eine ähnliche Discussion für das zweite Glied des Ausdruckes v durchzuführen, setzen wir

$$\Phi(x) = \int_{x_1}^{x} e^{2ax} S_1 x^{2\varrho - n - 2} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

$$\Psi(x) = \frac{e^{2ax} x^{2\varrho - n}}{S_2},$$

sodass man weiter hat

$$\Psi'(x) = \Psi(x)\left(2a + \frac{2\varrho - n}{x} - \frac{S_2'}{S_2}\right).$$

Dieser Ausdruck hat, wie $\Psi(x)$, für grosse Werthe von x ein constantes Zeichen, da die Klammer auf der rechten Seite nach (25) das Zeichen der Grösse $2a$ hat, sobald x eine gewisse Grenze überschritten hat. Daher wechselt die Function $\Psi(x)$ nicht mehr oberhalb jeder Grenze den Sinn ihrer Aenderung. Nimmt man an, es sei $a < 0$, so setze man

$$\Psi(x) = \frac{e^{2ax} x^{2\varrho + \gamma - n}}{S_2 x^{\gamma}};$$

dann bleibt nach (27) der Nenner oberhalb einer um Null verschiedenen Grenze, sodass die Gleichung

(32) $$\lim \Psi(x) = 0$$

resultirt. Wenn dagegen $a > 0$ ist, so setze man

$$\Psi(x) = \frac{e^{2ax} x^{2\varrho - \gamma - n}}{S_2 x^{-\gamma}};$$

dann bleibt der Nenner unterhalb einer endlichen Grenze und es folgt

(33) $$\lim \Psi(x) = +\infty.$$

In beiden Fällen kann man einen in der Hauptsache von Stolz*) herrührenden Satz anwenden, nach welchem, wenn eine der Gleichungen

*) Stolz, Ueber Grenzwerthe von Quotienten, Math. Ann. Bd. XV, S. 556.

(32) und (33) besteht, wenn ferner $\Psi'(x)$ nicht oberhalb jeder Grenze das Zeichen wechselt und der Grenzwerth

$$\lim \frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

bestimmt ist, die Gleichung

$$\lim \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \lim \frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)}$$

gilt und der links stehende Grenzwerth ebenfalls bestimmt ist. Nun hat man

$$\frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)S_1 S_2}{2\varrho - n + x\left(2a - \frac{S_2'}{S_2}\right)},$$

also nach (25) und (28)

$$\lim \frac{\Phi'(x)}{\Psi'(x)} = 0;$$

der citirte Satz ergiebt also

$$\lim \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = 0. \tag{34}$$

Setzt man ferner

$$N = \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)},$$

so dass

$$v = M + N, \tag{35}$$

so ist

$$N' = N\left(-2a + \frac{n-2\varrho}{x} + \frac{S_2'}{S_2}\right) + \frac{S_1 S_2}{x^2}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

woraus nach (34) und (28) folgt

$$\lim N' = 0.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den unter (30), (31), (34) und (35) notirten ergiebt endlich

$$\lim v = \lim v' = 0. \tag{36}$$

Einem particulären Integral v der Gleichung (22) entspricht nun ein solches der Gleichung (17), welches mit jenem durch die Relation

$$u = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{v}{x^n}$$

verbunden ist; die Gleichungen (36) ergeben offenbar

$$\lim u = \alpha_0, \quad \lim u' = \lim \frac{u'}{u} = 0,$$

und für das entsprechende Integral der Gleichung (16),

$$y = u e^{ax} x^{\varrho}$$

ergiebt sich

$$\lim \frac{y'}{y} = a + \lim \left(\frac{\varrho}{x} + \frac{u'}{u}\right) = a,$$
$$\lim \left(y e^{-ax} x^{-\varrho}\right) = \alpha_0.$$

Wenn daher a ein beliebiger Werth der Quadratwurzel aus der positiven Grösse a^2 ist, giebt es immer Integrale der Gleichung (16), *für welche der Grenzwerth*

$$\lim_{x=+\infty} \left(y e^{-ax} x^{-\frac{a_1}{2a}}\right)$$

endlich und bestimmt ist, und der Quotient $y' : y$ für $x = +\infty$ dem Grenzwerthe a zustrebt.

Aber die obigen Resultate erlauben das Verhalten der Integrale y noch genauer zu charakterisiren. Die Formel

$$(37) \qquad y = u e^{ax} x^{\varrho} = e^{ax} x^{\varrho} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{v}{x^n}\right)$$

liefert zunächst ein particuläres Integral der Gleichung (16), welches von n abhängt. Indessen ist, wenn a negativ ist, diese Abhängigkeit nur scheinbar, da zwei durch jene Formel gegebene Integrale y_1 und y_2 ebenso wie ihre ersten Ableitungen für $x = +\infty$ verschwinden, die Grösse $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ also, welche constant ist, den Werth Null haben muss, und offenbar die Gleichung

$$(38) \qquad \lim \frac{y_1}{y_2} = 1$$

besteht. Im Falle $a < 0$ giebt es also, wenn man für α_0 einen willkürlichen Werth festsetzt, ein bestimmtes für $x = +\infty$ verschwindendes Integral y der Gleichung (16), welches der Gleichung

$$\lim \left[\left(y e^{-ax} x^{-\varrho} - \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{x} - \cdots - \frac{\alpha_n}{x^n}\right) x^n\right] = 0$$

für jeden Werth von n genügt, sodass die Grösse $y e^{-ax} x^{-\varrho}$ durch die Reihe $\mathfrak{R}$ asymptotisch dargestellt wird. Da ferner alle für $x = +\infty$ verschwindenden Integrale, wie ich a. a. O. gezeigt habe, sich nur um constante Factoren unterscheiden, so ist klar, dass jedes derartige Integral multiplicirt mit $e^{-ax} x^{-\varrho}$, durch eine Reihe $\mathfrak{R}$ asymptotisch dargestellt wird.

Wenn dagegen a positiv ist, so lehrt die Gleichung (37) zunächst nur, dass zwei bei verschiedenen Werthen von n erhaltene Integrale y_1 und y_2 der Gleichung (38) genügen. Beide werden für $x = +\infty$ unendlich gross; ist daher $\bar{y}$ ein Integral, für welches

$$\lim \bar{y} e^{ax} x^{\varrho} = \lim \bar{u}$$

endlich ist — und es giebt, wie gezeigt, solche Integrale —, so kann das allgemeine Integral der Gleichung (16) in der Form

$$C_0 y_1 + C\bar{y},$$

geschrieben werden, wobei C und C_0 Constante sind. Man erhält daher das allgemeinste Integral y_2, für welches die Gleichung (38) besteht, indem man setzt

$$C_0 = 1.$$

Hat man nun y_1 etwa aus der Gleichung (37) erhalten, indem man $n = n_1$ setzt, wobei $v = v_1$ werde, so folgt

$$y_1 + C\bar{y} = e^{ax}x^{\varrho}\left\{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \cdots + \frac{\alpha_{n_1}}{x^{n_1}} + \frac{v_1}{x^{n_1}} + Ce^{-2ax}x^{-2\varrho}\bar{u}\right\}$$

und

$$\lim\left[x^{n_1}\left\{e^{-ax}x^{-\varrho}(y_1 + C\bar{y}) - \alpha_0 - \frac{\alpha_1}{x} - \cdots - \frac{\alpha_{n_1}}{x^{n_1}}\right\}\right] = 0.$$

Die Reihe $\mathfrak{R}$ stellt also, wenn $a > 0$, alle Integrale asymptotisch dar, welche zu einem bestimmten durch die Gleichung (37) definirten in Verhältnissen stehen, die für $x = +\infty$ der Einheit zustreben. Da man ferner das allgemeinste für $x = +\infty$ unendlich werdende Integral erhält, indem man den Ausdruck $y_1 + C\bar{y}$ mit einer von Null verschiedenen Constanten multiplicirt, so sieht man, dass jedes derartige Integral multiplicirt mit $e^{-ax}x^{-\varrho}$ durch eine Reihe $\mathfrak{R}$ asymptotisch dargestellt wird.

Eine interessante Folge der zweiten Gleichung (36) erhält man, wenn man die Gleichung (37) differenzirt:

$$(ye^{-ax}x^{-\varrho})' = u' = -\frac{\alpha_1}{x^2} - \frac{2\alpha_2}{x^3} - \cdots - \frac{n\alpha_n}{x^{n+1}} - \frac{nv}{x^{n+1}} + \frac{v'}{x^n},$$

also

$$\lim\left[\left(u' + \frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{2\alpha_2}{x^3} + \cdots + \frac{(n-1)\alpha_{n-1}}{x^n.}\right)x^n\right]$$
$$= \lim\left[-\frac{n\alpha_n}{x} - \frac{nv}{x} + v'\right] = 0.$$

Die Grösse u' wird also asymptotisch dargestellt durch die Reihe

$$\mathfrak{R}' = -\frac{\alpha_1}{x^2} - \frac{2\alpha_2}{x^3} - \frac{3\alpha_3}{x^4} - \cdots,$$

welche durch formale, gliedweise durchgeführte Differentiation der Reihe $\mathfrak{R}$ entsteht. Da nun Reihen der hier betrachteten Beschaffenheit, welche zur asymptotischen Darstellung bestimmter Functionen geeignet sind, nach Poincaré rein formal addirt und multiplicirt werden können, sowohl mit einander wie mit convergenten Potenzreihen des Arguments $1:x$, so wird der Ausdruck

$$u'' = -2\left(a+\frac{\varrho}{x}\right)u' - u\left(\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\cdots\right)$$

asymptotisch dargestellt durch den rein formal gebildeten Ausdruck

$$-2\left(a+\frac{\varrho}{x}\right)\mathfrak{R}' - \left(\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\cdots\right)\mathfrak{R}.$$

Andrerseits ist die Reihe $\mathfrak{R}$ geradezu definirt durch die formale Gleichung

$$(39)\qquad \Theta(\mathfrak{R})=0,\quad \mathfrak{R}'' = -2\left(a+\frac{\varrho}{x}\right)\mathfrak{R}' - \left(\frac{b_2}{x^2}+\frac{b_3}{x^3}+\cdots\right)\mathfrak{R};$$

die Grösse u'' wird also durch die formal gebildete Reihe $\mathfrak{R}''$ asymptotisch dargestellt. Dass ein analoges Resultat für die höheren Differentialquotienten von u gilt, folgt leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ aus den Gleichungen, welche man durch Differentiation der linearen

$$\Theta(u)=0$$

und der formalen Gleichung (39) erhält. Durch dieses Resultat und den analogen Satz*), dass die zur Darstellung der Bessel'schen Functionen dienenden semiconvergenten Reihen gliedweise differenzirt werden dürfen, rechtfertigen sich beiläufig bemerkt die Operationen, welche Kirchhoff in seiner Theorie der schwingenden Kreisscheibe mit semiconvergenten Reihen durchführt**).

Die wesentlichen Resultate dieser Entwicklungen fassen wir in folgendem Theorem zusammen.

In der Differentialgleichung

$$(A)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\right)$$

sei der Factor von y eine reelle Potenzreihe von nicht verschwindendem Convergenzbereich, ferner sei

$$a_0>0,\quad a_0=a^2,\quad \varrho=\frac{a_1}{2a}.$$

Der Ausdruck

$$(B)\qquad e^{ax}x^{\varrho}\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\cdots\right)$$

in welchem $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ Constante sind und α_0 willkürlich festgelegt sei, genüge, für y gesetzt, formal der Gleichung (A); dann wird durch ihn ein Integral y asymptotisch dargestellt in dem Sinne, dass für jeden Werth von n die Gleichung

$$\lim_{x=+\infty}\left[x^n\left(ye^{-ax}x^{-\varrho}-\alpha_0-\frac{\alpha_1}{x}-\cdots-\frac{\alpha_n}{x^n}\right)\right]=0$$

*) Crelle's Journal Bd. CXVII, S. 98.

**) Kirchhoff, Ges. Abhandlungen S. 274.

besteht. Das Integral y ist eindeutig bestimmt, wenn $a < 0$; ist dagegen a positiv, so bestehen alle diese Gleichungen für eine Gruppe von Integralen y, deren Verhältnisse zu einander für $x = +\infty$ dem Grenzwerth Eins zustreben.

Jedes Integral der Gleichung (A) *kann durch einen Ausdruck* (B) *asymptotisch dargestellt werden, indem man α_0 und a passend bestimmt, und es ist dann die Grösse*

$$\lim_{x=+\infty} y e^{-ax} x^{-\varrho}$$

endlich, bestimmt und $= \alpha_0$.

Auf die Gleichung (A) reducirt sich übrigens die allgemeinere

$$(40) \qquad w'' + w'\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots\right) + w\left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots\right) = 0,$$

wenn die Coefficienten B und C reell sind und die Ungleichung

$$C_0 - \frac{1}{4} B_0^2 < 0$$

besteht, vermittelst der Substitution

$$w = y e^{-\frac{1}{2}\int dx \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots\right)},$$

sodass dann auch jedes Integral der Gleichung (40) asymptotisch dargestellt werden kann.

Dorpat, Oktober 1896.

Ueber die Convergenz der Thetareihe.

Von

A. Krazer in Strassburg i. E.

In § 1 wird die Frage nach der Convergenz der einfach unendlichen Thetareihe beantwortet. Die drei folgenden Artikel enthalten sodann eine Untersuchung über die Convergenz der p-fach unendlichen Thetareihe, welche Herr Prym und der Verf. im Jahre 1885 angestellt haben, und deren Hauptpunkte bereits früher vom Verf.*) mitgetheilt wurden. Bei dieser hier vorliegenden Behandlung der Convergenzfrage wird die Frage nach den nothwendigen Bedingungen der Convergenz ebenso erschöpfend behandelt wie die nach den hinreichenden, und es tritt hiebei, schärfer als es sonst betont wird, zu Tage, dass, sobald man die Bedingung stellt, es solle das allgemeine Glied der Thetareihe gegen Null convergiren, wenn irgend welche der Summationsbuchstaben ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen, dieses Verlangen allein schon zu jener Eigenschaft der Thetareihe führt, welche nun ihrerseits die absolute Convergenz der Reihe für alle endlichen Werthe der Variablen nach sich zieht. Die gegenwärtige Veröffentlichung der Untersuchung hat den Verf. veranlasst, die Untersuchungen Anderer über die Convergenz der Thetareihe einer Durchsicht zu unterwerfen. Auf diese Weise ist der § 5 entstanden, der eine möglichst kurze und übersichtliche Zuzammenstellung der dem Verf. bekannt gewordenen Convergenzbeweise enthält; bei einigen derselben war es möglich, den Beweisgang etwas zu vereinfachen oder die Fassung präciser zu gestalten.

§ 1.

Die Convergenz der einfach unendlichen Thetareihe.

Die Untersuchung über die Convergenz der einfach unendlichen Thetareihe:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{am^2+2mw}$$

*) Krazer und Prym, Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen, herausg. von Krazer. Leipzig 1892, Teubner, pag. 3.

zerfällt in zwei Theile. Im ersten Theile wird eine nothwendige Bedingung der Convergenz ermittelt; im zweiten Theile wird gezeigt, dass die gefundene nothwendige Convergenzbedingung auch hinreichend ist.

Soll eine Reihe:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m$$

convergiren, und zwar in dem Sinne, dass sie aus zwei selbständigen convergenten Reihen:

$$\frac{1}{2} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_m + \cdots$$

und:

$$\frac{1}{2} u_0 + u_{-1} + u_{-2} + \cdots + u_{-m} + \cdots$$

besteht, so muss:

$$\lim_{m=\infty} u_{\pm m} = 0, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{m=\infty} u_m u_{-m} = 0$$

sein. Nun ist für die gegebene Thetareihe:

$$u_m u_{-m} = e^{2am^2},$$

und es ergibt sich daher als nothwendige Convergenzbedingung die, dass der reelle Theil r des Moduls $a = r + si$ einen negativen Werth besitze.

Es soll jetzt weiter gezeigt werden, dass die gefundene Bedingung $r < 0$, ohne welche, wie wir gesehen haben, von Convergenz keine Rede sein kann, dazu hinreicht, dass die Thetareihe convergirt, und zwar für alle endlichen Werthe der Variable $w = u + vi$ und absolut, d. h. so, dass auch ihre Modulreihe:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{rm^2 + 2mu}$$

convergent ist. Dieser Beweis ergibt sich aber sofort aus dem Satze:

„Eine Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + \cdots$ mit positiven Gliedern convergirt, wenn:

$$\lim_{m=\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} < 1$$

ist“; oder aus dem Satze:

„Eine Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m + \cdots$ mit positiven Gliedern convergirt, wenn:

$$\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{a_m} < 1$$

ist“, wenn man beachtet, dass für die angeschriebene Modulreihe:

$$\frac{a_{\pm(m+1)}}{a_{\pm m}} = e^{r(2m+1) \pm 2u}, \qquad \sqrt[m]{a_{\pm m}} = e^{rm \pm 2u},$$

also sobald $r < 0$:

$$\lim_{m=\infty} \frac{a_{\pm(m+1)}}{a_{\pm m}} = 0, \qquad \lim_{m=\infty} \sqrt[m]{a_{\pm m}} = 0$$

ist.

Das Resultat der angestellten Untersuchung lautet also: *Die einfach unendliche Thetareihe:*

$$\vartheta(w) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{am^2+2mw}$$

convergirt, und zwar absolut und für jeden endlichen Werth der complexen Variable w, wenn der reelle Theil des Moduls $a = r + si$ negativ ist.

§ 2.

Die Convergenz der p-fach unendlichen Thetareihe. Ermittlung einer nothwendigen Convergenzbedingung.

Gegeben sei die p-fach unendliche Thetareihe:

$$\sum_{m_1, \ldots, m_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu} m_\mu w_\mu}.$$

Eine nothwendige Bedingung für die Convergenz dieser Reihe ist die, dass das allgemeine Glied derselben gegen Null convergirt, wenn irgend welche der p ganzen Zahlen m, einerlei wie die übrigen gleichzeitig sich bewegen, ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen. Setzt man daher im allgemeinen Gliede der Reihe an Stelle von $m_1, \ldots, m_p$ das eine Mal Zahlen $m_1', \ldots, m_p'$, das andere Mal die Zahlen $-m_1', \ldots, -m_p'$, so muss, wenn die Reihe convergent sein soll, ein jeder der beiden dadurch entstehenden Ausdrücke und daher auch ihr Product:

$$e^{2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} m'_\mu m'_{\mu'}}$$

gegen Null convergiren, wenn irgend welche der p ganzen Zahlen m' ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen, und man erhält daraus, wenn man allgemein den reellen Theil des Moduls $a_{\mu\mu'}$ mit $r_{\mu\mu'}$ bezeichnet, als *nothwendige Bedingung für die Convergenz der Thetareihe die, dass der Werth des Ausdrucks:*

$$R(m_1|\cdots|m_p) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} r_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$$

gegen $-\infty$ geht, wenn irgend welche der p ganzen Zahlen m ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen.

§ 3.

Nachweis, dass die gefundene nothwendige Convergenzbedingung auch hinreichend ist.

Es soll jetzt weiter gezeigt werden, dass die soeben gefundene Bedingung, ohne welche, wie wir gesehen haben, von Convergenz keine Rede sein kann, dazu hinreicht, dass die Thetareihe convergirt, und zwar für alle endlichen Werthe der Variablen $w_\mu = u_\mu + v_\mu i$ und absolut, d. h. so, dass auch ihre Modulreihe:

$$(M) \qquad \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} r_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu} m_\mu u_\mu}$$

convergent ist.

Bei dieser Untersuchung treten gewisse Verbindungen der Grössen $r_{\mu\mu'}$ auf, welche sich sämmtlich als Determinanten von der Form:

$$r_{\varrho\sigma}^{(\nu)} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1,\nu-1} & r_{1\sigma} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2,\nu-1} & r_{2\sigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{\nu-1,1} & r_{\nu-1,2} & \cdots & r_{\nu-1,\nu-1} & r_{\nu-1,\sigma} \\ r_{\varrho 1} & r_{\varrho 2} & \cdots & r_{\varrho,\nu-1} & r_{\varrho\sigma} \end{vmatrix}$$

darstellen lassen, wobei ν, ϱ, σ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ bezeichnen, die auch theilweise oder alle einander gleich sein können. Der Fall $\nu = 1$ ist in der Weise aufzufassen, dass alsdann die Determinante $r_{\varrho\sigma}^{(\nu)}$ sich auf das einzige Element $r_{\varrho\sigma}$ reducirt, so dass also $r_{\varrho\sigma}^{(1)}$ mit $r_{\varrho\sigma}$ identisch ist. In Folge der zwischen den Grössen r bestehenden Relationen $r_{\mu\mu'} = r_{\mu'\mu}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ ändert die Determinante $r_{\varrho\sigma}^{(\nu)}$ ihren Werth nicht, wenn man ϱ und σ vertauscht; es ist daher stets $r_{\sigma\varrho}^{(\nu)} = r_{\varrho\sigma}^{(\nu)}$. Beachtet man dann, dass in der Determinante $r_{\varrho\sigma}^{(\nu+1)}$ $(\nu < p)$ die zu den Elementen $r_{\varrho\sigma}$, $r_{\nu\nu}$, $r_{\nu\sigma}$, $r_{\varrho\nu}$ gehörigen Unterdeterminanten ν^{ten} Grades, die mit $r'_{\varrho\sigma}$, $r'_{\nu\nu}$, $r'_{\nu\sigma}$, $r'_{\varrho\nu}$ beziehlich bezeichnet werden sollen, mit den Determinanten $r_{\nu\nu}^{(\nu)}$, $r_{\varrho\sigma}^{(\nu)}$, $-r_{\varrho\nu}^{(\nu)}$, $-r_{\nu\sigma}^{(\nu)}$ identisch sind, und bildet die Determinante:

$$\begin{vmatrix} r'_{\nu\nu} & r'_{\nu\sigma} \\ r'_{\varrho\nu} & r'_{\varrho\sigma} \end{vmatrix},$$

so erhält man auf Grund eines bekannten Satzes der Determinantentheorie, wenn man noch $r_{\varrho\nu}^{(\nu)}$ durch $r_{\nu\varrho}^{(\nu)}$ ersetzt, die im Folgenden wiederholt zur Anwendung kommende Relation:

$$r_{\nu\nu}^{(\nu)} r_{\varrho\sigma}^{(\nu)} - r_{\nu\varrho}^{(\nu)} r_{\nu\sigma}^{(\nu)} = r_{\nu-1,\nu-1}^{(\nu-1)} r_{\varrho\sigma}^{(\nu+1)},$$

die für jedes ν von 1 bis $p-1$ gilt, wenn man noch im Falle $\nu=1$ unter der dann auf der rechten Seite auftretenden Grösse $r_{00}^{(0)}$ die Einheit versteht. Diese Relation ist für die jetzt vorzunehmenden Zerlegungen der Form $R(m_1 | \dots | m_p)$ stets im Auge zu behalten.

Man nehme nun an, dass die Form $R(m_1 | \dots | m_p)$ die für die Convergenz der Thetareihe oben als nothwendig erkannte Bedingung erfülle, dass also ihr Werth immer gegen $-\infty$ gehe, wenn irgend welche der p ganzen Zahlen m ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen, einerlei wie die übrigen gleichzeitig sich bewegen. Dann muss speciell auch:

$$R(m_1 | 0 | \dots | 0) = r_{11} m_1^2$$

gegen $-\infty$ gehen, wenn m_1 über alle Grenzen wächst. Dies zieht aber für $r_{11} = r_{11}^{(1)}$ die Bedingung $r_{11}^{(1)} < 0$ nach sich, und man kann daher $R(m_1 | \dots | m_p)$ zunächst in die Form:

$$R(m_1 | \dots | m_p) = r_{11}^{(1)} \left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_2 + \dots + \frac{r_{1p}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_p \right)^2$$
$$+ \frac{1}{r_{11}^{(1)}} \sum_{\mu=2}^{p} \sum_{\mu'=2}^{p} r_{\mu\mu'}^{(2)} m_\mu m_{\mu'}$$

bringen. Weiter muss aber auch:

$$R(m_1 | m_2 | 0 | \dots | 0) = r_{11}^{(1)} \left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_2 \right)^2 + \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} m_2^2$$

gegen $-\infty$ gehen, wenn man m_2 unbegrenzt wachsen lässt und jedesmal zu dem betreffenden Werthe von m_2 den Werth von m_1 der Bedingung $0 \leqq m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_2 < 1$ gemäss wählt. Dies zieht für den Coefficienten von m_2^2 auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Bedingung $\frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} < 0$ nach sich, und man kann alsdann $R(m_1 | \dots | m_p)$ in die Form:

$$R(m_1 | \cdots | m_p) = r_{11}^{(1)} \left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_2 + \frac{r_{13}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_3 + \dots + \frac{r_{1p}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_p \right)^2$$
$$+ \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} \left(m_2 + \frac{r_{23}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}} m_3 + \dots + \frac{r_{2p}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}} m_p \right)^2$$
$$+ \frac{1}{r_{22}^{(2)}} \sum_{\mu=3}^{p} \sum_{\mu'=3}^{p} r_{\mu\mu'}^{(3)} m_\mu m_{\mu'}$$

bringen. Weiter muss aber auch:

$$R(m_1|m_2|m_3|0|\cdots|0) = r_{11}^{(1)}\left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}}m_2 + \frac{r_{13}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}}m_3\right)^2$$
$$+ \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}}\left(m_2 + \frac{r_{23}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}}m_3\right)^2 + \frac{r_{33}^{(3)}}{r_{22}^{(2)}}m_3^2$$

gegen $-\infty$ gehen, wenn man m_3 unbegrenzt wachsen lässt und jedesmal zu dem betreffenden Werthe von m_3 zunächst den Werth von m_2 der Bedingung $0 \leqq m_2 + \frac{r_{23}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}}m_3 < 1$ und alsdann den Werth von m_1 der Bedingung $0 \leqq m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}}m_2 + \frac{r_{13}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}}m_3 < 1$ gemäss wählt. Dies zieht aber für den Coefficienten von m_3^2 auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Bedingung $\frac{r_{33}^{(3)}}{r_{22}^{(2)}} < 0$ nach sich. Fährt man so fort, so ergibt sich schliesslich für $R(m_1|\ldots|m_p)$, immer unter der Voraussetzung, dass es die am Ende des vorigen Artikels angegebene zur Convergenz der Thetareihe nothwendige Bedingung erfüllt, die Darstellung*):

$$R(m_1|\cdots|m_p) = r_{11}^{(1)}\left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}}m_2 + \cdots + \frac{r_{1,p-1}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}}m_{p-1} + \frac{r_{1p}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}}m_p\right)^2$$
$$+ \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}}\left(m_2 + \cdots + \frac{r_{2,p-1}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}}m_{p-1} + \frac{r_{2p}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}}m_p\right)^2$$
$$+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+ \frac{r_{p-1,p-1}^{(p-1)}}{r_{p-2,p-2}^{(p-2)}}\left(m_{p-1} + \frac{r_{p-1,p}^{(p-1)}}{r_{p-1,p-1}^{(p-1)}}m_p\right)^2$$
$$+ \frac{r_{pp}^{(p)}}{r_{p-1,p-1}^{(p-1)}}(m_p)^2,$$

und man hat zugleich gesehen, dass die p auf der rechten Seite der letzten Gleichung vor den Klammern stehenden Coefficienten:

$$r_{11}^{(1)}, \quad \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}}, \quad \ldots, \quad \frac{r_{p-1,p-1}^{(p-1)}}{r_{p-2,p-2}^{(p-2)}}, \quad \frac{r_{pp}^{(p)}}{r_{p-1,p-1}^{(p-1)}}$$

sämmtlich negative Werthe haben.

Ein jeder der p den einzelnen Zeilen entsprechenden Summanden, aus denen sich die rechte Seite der letzten Gleichung zusammensetzt, ist das Product zweier Factoren, von denen der erste eine negative Grösse,

*) Vergl. Jacobi, Ueber eine elementare Transformation eines in Bezug auf jedes von zwei Variablen-Systemen linearen und homogenen Ausdrucks. Gesammelte Werke. Bd. 3, p. 583.

der zweite das Quadrat einer reellen Grösse ist, und es kann daher keiner dieser Summanden jemals positiv werden, welche Werthe die ganzen Zahlen m auch annehmen mögen. In Folge dessen kann der Werth von $R(m_1|\ldots|m_p)$ niemals den Werth des in der p^{ten} Zeile stehenden Summanden überschreiten, und es besteht daher, wenn man noch zur Vereinfachung die Determinante $r_{pp}^{(p)}$, die mit der Determinante $\Sigma \pm r_{11} r_{22} \ldots r_{pp}$ der quadratischen Form $R(m_1|\ldots|m_p)$ identisch ist, mit Δ, die Determinante $r_{p-1,\,p-1}^{(p-1)}$, insofern sie die zu dem Elemente r_{pp} gehörige Unterdeterminante $p-1^{\text{ten}}$ Grades der Determinante Δ ist, mit ϱ_{pp} bezeichnet, die Beziehung:

$$R(m_1|\ldots|m_p) \overline{\gtrless} \frac{\Delta}{\varrho_{pp}} m_p^2, \qquad \frac{\Delta}{\varrho_{pp}} < 0.$$

Nun besitzt aber bei der Form $R(m_1|\ldots|m_p)$ keine der Zahlen m einen Vorzug vor den anderen, und es besteht daher, vorausgesetzt immer, dass $R(m_1|\ldots|m_p)$ die angegebene Bedingung erfüllt, für jedes ν von 1 bis p die Beziehung:

$$R(m_1|\ldots|m_p) \overline{\gtrless} \frac{\Delta}{\varrho_{\nu\nu}} m_\nu^2, \qquad \frac{\Delta}{\varrho_{\nu\nu}} < 0,$$

wobei $\varrho_{\nu\nu}$ die zu dem Elemente $r_{\nu\nu}$ gehörige Unterdeterminante $p-1^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $\Delta = \Sigma \pm r_{11} r_{22} \ldots r_{pp}$ bezeichnet. Setzt man hierin an Stelle von ν der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ und addirt die p so entstandenen Relationen zu einander, so erhält man zunächst:

$$p\,R(m_1|\ldots|m_p) \overline{\gtrless} \sum_{\nu=1}^{p} \frac{\Delta}{\varrho_{\nu\nu}} m_\nu^2$$

und weiter, indem man linke und rechte Seite dieser letzten Relation durch p dividirt, gleichzeitig durch Abkürzung:

$$\frac{1}{p}\frac{\Delta}{\varrho_{\nu\nu}} = -k_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

und für $R(m_1|\ldots|m_p)$ das setzt, was es bedeutet, die Beziehung:

$$\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} r_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} \overline{\gtrless} -\sum_{\nu=1}^{p} k_\nu m_\nu^2,$$

wobei die k sämmtlich positive reelle Grössen bezeichnen.

Auf Grund der zuletzt gewonnenen Beziehung ergibt sich aber sofort die Convergenz der gegebenen Modulreihe M, indem man diese mit dem Producte der p einfach unendlichen, für jeden endlichen Werth der u convergenten Reihen:

$$\sum_{m_\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-k_\nu m_\nu^2+2m_\nu u_\nu} \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

vergleicht.

Damit ist aber bewiesen, dass die im vorigen Artikel ermittelte nothwendige Convergenzbedingung in der That auch dazu hinreicht, dass die Thetareihe convergirt und zwar für alle Werthe der w und absolut, d. h. so, dass auch ihre Modulreihe convergent ist.

Das Resultat der angestellten Untersuchung lautet also: *Die p-fach unendliche Thetareihe:*

$$\vartheta(w_1|\ldots|w_p) = \sum_{m_1,\cdots,m_p}^{-\infty,\cdots,+\infty} e^{\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_\mu m_\mu w_\mu}$$

convergirt und zwar absolut und für alle endlichen Werthe der complexen Variablen $w_1,\ldots,w_p$, wenn der Werth des mit den reellen Theilen $r_{\mu\mu'}$ der Moduln $a_{\mu\mu'}$ gebildeten Ausdrucks:

$$R(m_1|\ldots|m_p) = \sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} r_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$$

gegen $-\infty$ geht, wenn irgend welche der p ganzen Zahlen m ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen, einerlei, wie die übrigen sich gleichzeitig bewegen.

§ 4.

Andere Formen für die Convergenzbedingung.

Die für $R(m_1|\ldots|m_p)$ gefundene, zur Convergenz der p-fach unendlichen Thetareihe nothwendige und hinreichende Bedingung kann durch ein System von Bedingungen, welche sich ausschliesslich auf die Coefficienten r der Form $R(m_1|\ldots|m_p)$ beziehen, ersetzt werden. Erfüllt nämlich die Form $R(m_1|\ldots|m_p)$ die angegebene Bedingung, so bestehen immer, wie früher gezeigt wurde, die p Ungleichheiten:

$$r_{11}^{(1)} < 0, \quad \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} < 0, \quad \ldots, \quad \frac{r_{pp}^{(p)}}{r_{p-1,p-1}^{(p-1)}} < 0.$$

Es gilt aber auch das Umgekehrte. Genügen nämlich die Coefficienten r irgend einer Form $R(m_1|\ldots|m_p)$ diesen p Ungleichheiten, so lässt sich diese zunächst immer in der früher angegebenen Weise zerlegen. Bei dieser Zerlegung ist aber die Determinante der p auf der rechten Seite vorkommenden, in Klammern eingeschlossenen homogenen linearen Functionen der Zahlen $m_1,\ldots,m_p$ von verschieden (sie hat, wie unmittelbar zu sehen, den Werth Eins), es entsprechen daher endlichen Werthen dieser Functionen immer auch endliche Werthe der ganzen Zahlen m. Wachsen daher irgend welche der p ganzen Zahlen m, einerlei wie die übrigen gleichzeitig sich bewegen, ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen, so muss wenigstens eine der genannten Functionen ihrem absoluten Werthe nach über alle Grenzen wachsen, und der Werth von $R(m_1|\cdots|m_p)$ geht dann gegen $-\infty$, da die vor den Quadraten dieser Functionen stehenden Coefficienten sämmtlich negativ sind. Jede Form $R(m_1|\cdots|m_p)$, deren Coefficienten r den p aufgestellten Ungleichheiten genügen, erfüllt daher immer auch die oben angegebene *zur Convergenz der p-fach unendlichen Thetareihe nothwendige und hinreichende Bedingung*, und es kann daher diese Bedingung *durch das System der p Bedingungen:*

$$r_{11}^{(1)} < 0, \; \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} < 0, \ldots, \frac{r_{pp}^{(p)}}{r_{p-1,\,p-1}^{(p-1)}} < 0,$$

oder was dasselbe, *durch das System der p Bedingungen:*

$$(-1)^\nu r_{\nu\nu}^{(\nu)} > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

ersetzt werden.

Der gefundenen Convergenzbedingung soll endlich noch eine andere Form gegeben werden. Zu dem Ende betrachte man die mit Hülfe der Coefficienten r der Form $R(m_1|\ldots|m_p)$ gebildete quadratische Form:

$$R(x_1|\cdots|x_p) = \sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} r_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'},$$

bei der die x unabhängige reelle Veränderliche bezeichnen sollen. Diese Form lässt sich dann, wenn $R(m_1|\cdots|m_p)$ die angegebene Bedingung erfüllt, oder, was dasselbe, wenn die Coefficienten r den p aufgestellten Ungleichheiten genügen, in derselben Weise zerlegen, wie vorher $R(m_1|\cdots|m_p)$; man braucht in der früheren die betreffende Zerlegung darstellenden Gleichung, die eine identische ist, und also gilt, was auch die Buchstaben m bedeuten, nur die Buchstaben m durch die Buchstaben x zu ersetzen. Diese Zerlegung zeigt dann, dass die Form $R(x_1|\cdots|x_p)$ eine negative quadratische Form ist, oder, was dasselbe sagt, stets einen negativen Werth hat, wenn nicht gleichzeitig $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots, x_p = 0$ ist. Da nämlich die p bei der Zerlegung auftretenden vor den Klammern stehenden Coefficienten sämmtlich negativ sind, so kann die Form einen positiven Werth überhaupt nicht, den Werth Null aber nur dann annehmen, wenn die p in den Klammern stehenden homogenen linearen Functionen der x gleichzeitig verschwinden. Dies letztere aber ist, da die Determinante derselben, wie vorher erwähnt, vor Null verschieden ist, nur dann möglich, wenn alle Grössen x gleichzeitig verschwinden. Bezeichnet umgekehrt $R(x_1 | \cdots | x_p)$ eine negative quadratische Form, so kann man dieselbe in der nämlichen Weise zerlegen, wie es früher mit der Form $R(m_1 | \cdots | m_p)$ geschehen ist; man braucht dazu nur der Reihe nach die Formen $R(x_1 | 0 | \cdots | 0)$, $R(x_1 | x_2 | 0 | \cdots | 0), \cdots$ zu betrachten und festzuhalten, dass eine jede dieser Formen, sobald nicht die sämmtlichen darin vorkommenden Grössen x Null sind, negativ sein muss. Bei dieser Zerlegung ergeben sich dann für die vor den runden Klammern stehenden Coefficienten wieder die vorher aufgestellten Ungleichheiten, und es erfüllt daher die zu $R(x_1 | \cdots | x_p)$ gehörige Form $R(m_1 | \cdots | m_p)$ stets die vorher angegebene *zur Convergenz der p-fach unendlichen Thetareihe nothwendige und hinreichende Bedingung.* Diese Bedingung kann daher auch *durch die Bedingung, dass $R(x_1 | \cdots | x_p)$ eine negative quadratische Form ist, ersetzt werden.*

Das Endresultat der ganzen bisherigen Untersuchung lässt sich nun endlich, wie folgt aussprechen: *Die p-fach unendliche Thetareihe:*

$$\vartheta(w_1 | \cdots | w_p) = \sum_{m_1, \cdots, m_p}^{-\infty, \cdots, +\infty} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu} m_\mu w_\mu}$$

convergirt, und zwar absolut und für alle endlichen Werthe der complexen Variablen $w_1, \ldots, w_p$, wenn die mit den reellen Theilen $r_{\mu\mu'}$ der Moduln $a_{\mu\mu'}$ gebildete quadratische Form:

$$\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} r_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$$

eine negative Form ist. Diese Bedingung ist dann aber auch nur dann erfüllt, wenn die Coefficienten $r_{\mu\mu'}$ den p Ungleichheiten:

$$(-1)^\nu r_{\nu\nu}^{(\nu)} > 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen.

§ 5.

Andere Convergenzbeweise.

Der erste Theil der Convergenzuntersuchung, welcher den Nachweis enthält, dass das Negativsein der Form:

$$R(x_1 | \cdots | x_p) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} r_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$$

eine zur Convergenz der Thetareihe in der Art nothwendige Bedingung ist, dass ohne ihr Erfülltsein das allgemeine Glied der Reihe nicht gegen Null convergirt, wenn irgend welche der Summationsbuchstaben ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen, ist wenig bearbeitet worden. Dem Verf. ist nur jener Beweis bekannt, welchen Herr Weierstrass hiefür in seinen Vorlesungen*) gegeben hat; derselbe lässt sich kurz so angeben.

Gäbe es reelle Grössen x, für welche $R(x_1 | \cdots | x_p) > 0$ wäre, so gäbe es auch rationale und daher auch ganze Zahlen, für welche dies stattfindet. Wäre dann aber $R(m_1 | \cdots | m_p) > 0$, so würde $R(km_1 | \cdots | km_p)$ mit k über alle Grenzen wachsen. Zur Convergenz der Thetareihe ist also jedenfalls nothwendig, dass $R(x_1 | \cdots | x_p)$ für kein reelles Werthesystem der x positiv ist; dann sind aber nur zwei Fälle möglich, entweder ist die Form $R(x_1 | \cdots | x_p)$, wie bewiesen werden soll, eine ordinäre negative Form, oder sie ist singulär, in der Weise, dass sie in Quadrate linearer Formen zerlegt, als Summe von q, $q < p$, negativen Quadraten erscheint. Dass aber auch bei letzterer Annahme die Reihe nicht convergiren kann, zeigt der Hülfssatz**): Man kann zu q, $q < p$, linearen Formen von p Variablen x mit reellen Coefficienten die x als ganze Zahlen so bestimmen, dass jede dieser Formen dem absoluten Werthe nach kleiner wird als eine vorgegebene beliebig kleine Grösse, während mindestens eine der Zahlen x grösser ist als eine vorgegebene beliebig grosse positive ganze Zahl.

Der zweite Theil der Convergenzuntersuchung, welcher den Nachweis enthält, dass das Negativsein der Form $R(x_1 | \cdots | x_p)$ eine zur absoluten Convergenz der Thetareihe für alle endlichen w hinreichende Bedingung ist, hat dagegen vielfache Bearbeitung gefunden. Die zahlreichen Beweise lassen sich in zwei Classen eintheilen; die Beweise der ersten Classe erbringen, ebenso wie der vom Verf. oben mitgetheilte, den gewünschten Nachweis dadurch, dass sie die Modulreihe M der p-fach unendlichen Thetareihe mit dem Producte von p einfach unendlichen Reihen vergleichen; die Beweise der zweiten Classe dagegen dadurch, dass sie die Modulreihe M durch gruppenweises Zusammenfassen ihrer Glieder mit einer einzigen einfach unendlichen Reihe vergleichen.

Beweise der ersten Classe.

Bei dem nur für $p=2$ angegebenen Rosenhain'schen Beweise***) wird die Convergenz der 2-fach unendlichen Reihe:

---

*) Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Functionen. W. S. 81, 82.

**) Zum Beweise dieses Hülfssatzes vergl. Jacobi, De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Ges. Werke Bd. II, pag. 29; auch Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig 1866, pag. 130.

***) Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la premièe classe.

$$\sum_{m_1, m_2}^{-\infty, \cdots, +\infty} e^{r_{11}m_1^2+2r_{12}m_1m_2+r_{22}m_2^2+2m_1u_1+2m_2u_2}$$

bewiesen, indem dieselbe auf Grund der aus den beiden Identitäten:

$$r_{11}m_1^2 + 2r_{12}m_1m_2 + r_{22}m_2^2 = \frac{(r_{11}m_1 + r_{12}m_2)^2}{r_{11}} + \frac{r_{11}r_{22} - r_{12}^2}{r_{11}} m_2^2$$
$$= \frac{(r_{12}m_1 + r_{22}m_2)^2}{r_{22}} + \frac{r_{11}r_{22} - r_{12}^2}{r_{22}} m_1^2$$

unter den Bedingungen $r_{11} < 0$, $r_{11}r_{22} - r_{12}^2 > 0$ folgenden Ungleichung:

$$r_{11}m_1^2 + 2r_{12}m_1m_2 + r_{22}m_2^2 \overline{\overline{<}} \frac{r_{11}r_{22} - r_{12}^2}{2r_{22}} m_1^2 + \frac{r_{11}r_{22} - r_{12}^2}{2r_{11}} m_2^2$$

mit dem Producte der beiden unter den angegebenen Bedingungen convergenten Reihen:

$$\sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{r_{11}r_{22}-r_{12}^2}{2r_{22}}m_1^2+2m_1u_1},$$

$$\sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{r_{11}r_{22}-r_{12}^2}{2r_{11}}m_2^2+2m_2u_2}$$

verglichen wird. Man sieht, dass der vom Verf. oben mitgetheilte Beweis die Verallgemeinerung des Rosenhain'schen ist, mit dem er für $p = 2$ identisch wird.

Von Herrn Weierstrass*) rührt der folgende Beweis her: Geht die Form $R(x_1 \mid \cdots \mid x_p)$ durch eine orthogonale Substitution in $-\sum_\nu k_\nu y_\nu^2$ über, und wird mit k die kleinste der p positiven Grössen $k_1, \ldots, k_p$ bezeichnet, so ist für alle reellen Werthe der x:

$$R(x_1 \mid \cdots \mid x_p) \overline{\overline{<}} -k \sum_{\nu=1}^{p} y_\nu^2,$$

(Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut national de France. Sc. math. et phys. t. XI, pag. 387; oder die deutsche Ausgabe in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften Nr. 65, pag. 29); siehe auch: Krause, die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Leipzig 1886, pag. 1.

*) Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Functionen. W. S. 81, 82; siehe auch: Stahl, Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1896, pag. 204.

oder, da wegen der Orthogonalität der Substitution $\sum_\nu y_\nu^2 = \sum_\nu x_\nu^2$ ist, auch:

(k) $$R(x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_p) \overline{\gtrless} -k \sum_{\nu=1}^{p} x_\nu^2.$$

Auf Grund dieser Ungleichung ergiebt sich aber die Convergenz der Modulreihe M sofort, indem man diese mit dem Producte der p einfach unendlichen convergenten Reihen:

$$\sum_{m_\nu=-\infty}^{+\infty} e^{-k m_\nu^2 + 2 m_\nu u_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

vergleicht.

Weniger einfach ist ein auf derselben Grundlage ruhender Beweis von Herrn Thomae*).

Herr Christoffel**) hat die Ungleichung (k) auf folgende Weise abgeleitet: Man bezeichne mit $-k$ den grössten Werth, den die Form $R(x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_p)$ für alle jene Werthesysteme $x_1, \cdots, x_p$ annimmt, für welche $\sum_\nu x_\nu^2 = 1$ ist. Für ein beliebiges Werthesystem $x_1, \ldots, x_p$, für welches $\sum_\nu x_\nu^2 = s^2$ sei, ist dann $R(x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_p) \overline{\gtrless} -ks^2$, woraus sofort, indem man s^2 durch $\sum_\nu x_\nu^2$ ersetzt, die Ungleichung (k) folgt.

Noch einfacher kann man, wie Herr Prym in einer Vorlesung angegeben hat, zu der Ungleichung (k) durch die Ueberlegung gelangen, dass die Form $R(x_1 \,|\, \ldots \,|\, x_p)$, wenn sie eine negative ist (was stets und nur unter den p Bedingungen $(-1)^\nu r_{\nu\nu}^{(\nu)} > 0$ der Fall ist), auch eine solche bleibt, wenn man allgemein $r_{\mu\mu'}$ durch $r_{\mu\mu'} + \delta_{\mu\mu'} k$ ersetzt, wo $\delta_{\mu\mu'} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix}$ ist und k eine hinreichend klein gewählte positive Grösse bezeichnet; es ist dann für alle reellen Werthe der x:

$$\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} (r_{\mu\mu'} + \delta_{\mu\mu'} k)\, x_\mu x_{\mu'} < 0$$

oder:

$$R(x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_p) < -k \sum_{\nu=1}^{p} x_\nu^2.$$

---

*) Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden. Halle 1876, pag. 22.

**) Christoffel, Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's. Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich. Jahrg. XLI (1896), pag. 3.

In die erste Classe gehört endlich der folgende von Hrn. v. Dalwigk*) mitgetheilte Beweis: Da der Ausdruck:

$$(m_1^2+\Theta)\cdots(m_p^2+\Theta)\,e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} r_{\mu\mu'}m_\mu m_{\mu'}+2\sum\limits_{\mu} m_\mu u_\mu},$$

bei dem Θ ein echter Bruch sein mag, für kein endliches Werthesystem der m unendlich, und unter der Voraussetzung, dass die Form $R(x_1|\ldots|x_p)$ eine negative ist, Null wird, wenn irgend welche der m ihrem absoluten Werthe nach über alle Grenzen wachsen, so hat er für alle möglichen Werthesysteme der m eine obere Grenze und es ist, wenn diese mit g bezeichnet wird, stets:

$$e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} r_{\mu\mu'}m_\mu m_{\mu'}+2\sum\limits_{\mu} m_\mu u_\mu} \overline{\gtrless} \frac{g}{(m_1^2+\Theta)\cdots(m_p^2+\Theta)}.$$

Auf Grund dieser Ungleichung ergiebt sich aber sofort die Convergenz der Modulreihe M, indem man diese mit dem Producte der p einfach unendlichen convergenten Reihen:

$$\sum_{m_\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m_\nu^2+\Theta} \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

vergleicht.

Beweise der zweiten Classe.

Der Riemann'sche**) Beweis benützt einen Hülfssatz, der in der Fassung des Herrn Hurwitz***) folgendermassen lautet: Es sei b eine endliche Grösse, x eine Variable, die nur die Werthe, welche gleich oder grösser als b sind, annehmen soll. Sind nun $f(x)$ und $g(x)$ zwei Functionen, die beständig positiv sind, und von denen die erste mit wachsendem x abnimmt, die zweite (bis ins Unendliche) zunimmt, und ist die Anzahl der Glieder einer Reihe mit positiven Gliedern, die gleich oder grösser als $f(x)$ sind, gleich oder kleiner als $g(x)$, so convergirt die Reihe, wenn das Integral $\int\limits_b^\infty f(x)\,g'(x)\,dx$ convergirt." Um die Convergenz der Modulreihe M auf Grund dieses Hülfssatzes zu beweisen, bringe man das allgemeine Glied derselben, indem man p reelle Grössen t_μ durch die Gleichungen:

---

*) v. Dalwigk, Beiträge zur Theorie der Thetafunctionen von p Variabeln. Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. D. Akademie der Naturf. Bd. 57, pag. 232.

**) Riemann, Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe. Ges. math. Werke. Leipzig 1876, pag. 452.

***) Hurwitz, Ueber Riemann's Convergenzcriterium. Math. Ann. Bd. 44, pag. 83.

$$u_\mu = \sum_{\mu'=1}^{p} r_{\mu\mu'}\, t_{\mu'} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

bestimmt, in die Form:

$$\sum_{\mu}\sum_{\mu'} r_{\mu\mu'}\, m_\mu m_{\mu'} + 2\sum_{\mu} m_\mu u_\mu = \sum_{\mu}\sum_{\mu'} r_{\mu\mu'}\,(m_\mu + t_\mu)(m_{\mu'} + t_{\mu'}) \\ - \sum_{\mu}\sum_{\mu'} r_{\mu\mu'}\, t_\mu t_{\mu'}$$

und lege der Convergenzuntersuchung die von M nur um einen Factor verschiedene Reihe:

$$(M') \qquad \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} r_{\mu\mu'}(m_\mu + t_\mu)(m_{\mu'} + t_{\mu'})}$$

zu Grunde. Durch die Gleichung:

$$(\mathrm{h}) \qquad -\sum_{\mu}\sum_{\mu'} r_{\mu\mu'}\, x_\mu x_{\mu'} = h^2$$

wird, wenn die x die rechtwinkligen Coordinaten eines Raumes von p Dimensionen sind, eine geschlossene, sich nirgends ins Unendliche erstreckende Mannigfaltigkeit von $p-1$ Dimensionen $M_h^{(p-1)}$ definirt, durch welche der ganze Raum von p Dimensionen in zwei Theile getheilt wird, einen inneren, für dessen Punkte die linke Seite der Gleichung $< h^2$ ist, und einen äusseren, für den dieselbe $> h^2$ ist. Das Volumen des Innenraumes wird durch das Integral:

$$J_h = \int\int\ldots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_p$$

geliefert, wenn dessen Grenzen aus der Gleichung (h) bestimmt werden. Die Anzahl aller „Gitterpunkte“ $x_1 = m_1 + t_1, \ldots, x_p = m_p + t_p$ (wobei die m ganze Zahlen, die t die oben eingeführten Grössen bezeichnen), welche im Inneren oder auf der Begrenzung von M_h liegen, möge mit Z_h bezeichnet werden. Dieselben sind die Eckpunkte einer Anzahl von Parallelotopen, von denen jedes den Inhalt 1 hat, und die ganz innerhalb von M_h liegen. Für die Anzahl Z_h' dieser Parallelotope gilt dann, da jedes Parallelotop 2^p Eckpunkte hat, den Z_h' im Inneren von M_h liegenden Parallelotopen aber ein Theil ihrer Eckpunkte gemeinsam ist, die Ungleichung:

$$Z_h < 2^p Z_h'.$$

Nun stellt aber Z_h' zugleich den Gesammtinhalt dieser ganz innerhalb von M_h gelegenen Parallelotopen dar und ist daher $< J_h$; also ist a fortiori:

$$Z_h < 2^p J_h,$$

und da, wie der obige Integralausdruck zeigt:

$$J_h = h^p J_1$$

ist, so hat man endlich*):

$$(z) \qquad Z_h < (2h)^p J_1.$$

Aus dieser Ungleichung ergiebt sich aber sofort die Convergenz der Reihe M' unter Anwendung des obigen Hülfssatzes, indem man:

$$f(x) = e^{-x^2}, \qquad g(x) = (2x)^p J_1$$

setzt.

Nachdem die Ungleichung (z) gewonnen ist, kann man die Convergenz der Reihe M' ohne Benutzung des Riemann'schen Hülfssatzes folgendermassen beweisen. Man denke sich die Mannigfaltigkeiten $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ construirt und fasse die Glieder der Reihe M' gruppenweise zusammen, indem man in die n^{te} Gruppe jene Glieder aufnimmt, für welche die Gitterpunkte:

$$x_1 = m_1 + t_1, \ldots, x_p = m_p + t_p$$

zwischen M_{n-1} und M_n, die Begrenzung des letzteren inbegriffen, liegen; es ist dann die Anzahl dieser Glieder $Z_n - Z_{n-1}$ und der Betrag jedes einzelnen Gliedes $< e^{-(n-1)^2}$. Da aber:

$$Z_n - Z_{n-1} < Z_n < (2n)^p J_1$$

ist, so ergiebt sich sofort die Convergenz der Reihe M', indem man diese mit der einfach unendlichen convergenten Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^p e^{-(n-1)^2}$$

vergleicht**).

Von ähnlichen Gesichtspunkten geht endlich der folgende Beweis des Herrn v. Dalwigk***) aus. Man construire die Parallelotope $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, von denen allgemein P_n die 2^pEckpunkte:

$$x_1 = \varepsilon_1 n, \ldots, x_p = \varepsilon_p n$$

besitzt, wo $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p$ die 2^p Variationen der Elemente $+1, -1$ zur p^{ten} Classe mit Wiederholung bezeichnen, und fasse die Glieder der Modulreihe M gruppenweise zusammen, indem man in die n^{te} Gruppe jene Glieder aufnimmt, für welche die Punkte $x_1 = m_1, \ldots, x_p = m_p$ auf der Begrenzung von P_n liegen. Die Anzahl dieser Glieder ist

*) Riemann benutzt statt der Ungleichung (z) die weniger einfache Grenzbeziehung $\lim\limits_{h=\infty} \left(Z_h h^{-p}\right) = J_1$.

**) Dieser Gedanke ist von Herrn Thomae (Convergenz der Thetareihen. Schlömilch Z. Bd. 25, pag. 43) zu einem für den Fall $p = 2$ mitgetheilten Convergenzbeweise verwendet worden.

***) v. Dalwigk, Beiträge zur Theorie der Thetafunctionen von p Variabeln. Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. D. Akademie der Naturf. Bd. 57, pag. 232.

dann jedenfalls $<(2n+1)^p$, da dies die Anzahl aller Gitterpunkte $x_1=m_1, \ldots, x_p=m_p$ sowohl auf der Begrenzung als auch im Inneren von P_n ist*). Nun betrachte man die Werthe der Functionen $\sum_{\mu}\sum_{\mu'} r_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$ und $2\sum_{\mu} x_\mu u_\mu$ auf der ganzen Begrenzung von P_1 und bezeichne die obere Grenze der ersteren mit $-k$, der letzteren mit l; dann ist für jedes Glied der n^{ten} Gruppe:

$$\sum_{\mu}\sum_{\mu'} r_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} \overline{\overline{<}} -kn^2, \quad 2\sum_{\mu} m_\mu u_\mu \overline{\overline{<}}\, ln,$$

und es ergiebt sich auf Grund dieser Ungleichungen die Convergenz der Reihe M, indem man diese mit der einfach unendlichen convergenten Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^p e^{-kn^2+ln}$$

vergleicht.

Traunstein, im September 1896.

*) Eine genauere Abzählung der auf der Begrenzung von P_n liegenden Gitterpunkte, wie sie Herr v. Dalwigk angiebt, ist unnöthig.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

von

N. J. Sonin

aus dem Russischen übersetzt*) von

Friedrich Engel.

Allgemeine Untersuchungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind keineswegs zahlreich. Einige Bemerkungen Lagranges in der schönen Abhandlung: „Sur les intégrales particulières des équations différentielles“ (Oeuvres, Bd. IV), eine grosse Abhandlung Ampères im 17. Hefte des Journal de l'École Polytechnique, 1815, die Imschenetzkij in seiner Doktordissertation meisterhaft wiedergegeben hat, eine Abhandlung von Darboux im Journal de l'École Normale 1870, endlich die viel versprechende Mittheilung Lévys in den Comptes Rendus von 1872, Bd. LXXV, das ist die ganze Literatur über die Frage.

Lagrange giebt keine Integrationsmethode und seine Bemerkungen beschränken sich auf die Angabe, wieviele willkürliche Constanten in vollständigen Integralen enthalten sind und auf welche Weise diese Integrale in allgemeine verwandelt werden können.

---

*) Das Original ist im August 1874 im 3. Hefte des VII. Bandes der mathematischen Sammlung (Sbornik) der Moskauer mathematischen Gesellschaft erschienen, unter dem Titel: „Ob integrirowánii urawnjénij s tschástnymi proiswódnymi wtorówa porjadka“ und ist vom Verfasser am 28/16. Sept. 1874 vor der physikomathematischen Facultät der Universität Moskau als Doctordissertation öffentlich verteidigt worden. Da die Arbeit bisher gänzlich unbeachtet geblieben ist, so schien eine Uebersetzung angezeigt. Die vorliegende ist mit Genehmigung des Verfassers ausgeführt und giebt das Original getreu wieder, abgesehen von einigen unwesentlichen Aenderungen, die der Verfasser selbst in der Einleitung, ferner am Schlusse von § 4 und endlich in § 18, bei Gleichung (43) und (49) angebracht hat. Einige vom Verfasser neu hinzugefügte Anmerkungen sind als solche durch die Worte: „Zusatz d. Verf.“ gekennzeichnet. Am Rande der Uebersetzung sind die Seitenzahlen des Originals beigefügt.

Ampère gründet seine Integrationsmethode auf die Einführung neuer unabhängiger Veränderlicher.

Darboux entwickelt den Gedanken Ampères weiter und macht einige Andeutungen über eine neue Integrationsmethode, die der Jacobischen Methode zur Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung entspricht.

Was Lévy angeht, so ist in seiner Mittheilung weder der Weg angegeben, den er einschlägt, noch sind es die Gleichungen, zu denen er gelangt.

286 Die Bemerkungen Lagranges, die vor genau hundert Jahren gemacht und seitdem mehrmals wiederholt worden sind, haben bis jetzt nicht die geringste Weiterentwickelung erfahren.

Ampères Gesichtspunkt ist künstlich.

Darboux begründet seine Methode von demselben Gesichtspunkte aus. Zwar giebt er nachher einige Andeutungen über die Bildung der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die Integrale der gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen müssen, jedoch werden diese Gleichungen nach seinem Verfahren vom zweiten Grade, während sie in Wirklichkeit leicht als Gleichungen ersten Grades gedeutet und in dieser Gestalt hingeschrieben und untersucht werden können.

Um dieses Ziel zu erreichen, genügt es, von dem Gesichtspunkte auszugehen, der der vorliegenden Arbeit zu Grunde gelegt ist.

Dieser neue Gesichtspunkt ist in dem Masse natürlich, dass man sich wundern kann, dass er bis jetzt noch Niemandes Aufmerksamkeit auf sich gezogen hat. Durch seine Hülfe werden die Betrachtungen Lagranges und die Ergebnisse Ampères und Darbouxs unter einander verknüpft.

Indem man bei der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von einem ähnlichen Gesichtspunkte ausgeht, kann man die Integrationsmethoden von Jacobi und Cauchy mit einander verknüpfen.

§ 1.

Wir beschränken uns auf die Untersuchung der Gleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen x und y. Die unbekannte Function dieser Veränderlichen nennen wir z und ihre i-mal nach x und k-mal
287 nach y genommene partielle Ableitung bezeichnen wir mit z_k^i, so dass wird*):

*) Im Original werden die partiellen Ableitungen noch mit d geschrieben; in der Uebersetzung wenden wir überall die Jacobische Schreibweise mit ∂ an, zu der mittlerweile auch der Verfasser übergegangen ist. Anm. d. Uebersetzers.

$$z' = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad z_{,} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad z_{,}' = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad z_{,,} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$
$$\ldots, \quad z^i_k = \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k}.$$

Bei dieser Bezeichnung wird die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (die wir betrachten wollen) in allgemeinster Gestalt so lauten:

$$(1) \qquad f(x, y, z, z', z_{,}, z'', z_{,}', z_{,,}) = 0.$$

Wir wollen noch die folgende Bezeichnung verabreden: Wenn wir irgend eine Function mit partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung:

$$\varphi(x, y, z, z', z_{,}, \ldots, z^n, z^{n-1}_{,}, z^{n-2}_{,,}, \ldots, z'_{n-1}, z_n)$$

i-mal nach x und k-mal nach y differentiiren sollen, so wollen wir den Inbegriff der Glieder des Ergebnisses, die die höchsten Ableitungen von z, also die Ableitungen $(n+i+k)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht enthalten, mit φ^i_k bezeichnen, so dass das Ergebniss der betrachteten Operation, wenn wir sie auf die Function φ ausführen, so lautet:

$$\varphi^i_k + \frac{\partial \varphi}{\partial z^n} z^{n+i}_k + \frac{\partial \varphi}{\partial z^{n-1}_{,}} z^{n+i-1}_{k+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial z^{n-2}_{,,}} z^{n+i-2}_{k+2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} z^i_{k+n}.$$

Nunmehr schreiten wir zur Integration der Gleichung (1).

§ 2.

Das Endziel bei der Integration der Gleichung (1) besteht darin, z als Function von x und y zu bestimmen. Wäre dieses Ziel erreicht, so könnten wir aus dem bekannten Ausdrucke für z die Werthe der ersten und zweiten Ableitungen von z finden, die die Gleichungen:

$$(2) \qquad dz = z' dx + z_{,} dy, \quad dz' = z'' dx + z_{,}' dy, \quad dz_{,} = z_{,}' dx + z_{,,} dy$$

identisch erfüllten. Wenn wir umgekehrt für z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ als Functionen von x, y, z, z', $z_{,}$ solche Ausdrücke finden können, die die Gleichung (1) identisch erfüllen und das System (2) vollständig zu integriren erlauben, so werden wir aus drei Integralen dieses Systems durch Wegschaffung von z' und $z_{,}$ für z als Function von x und y einen 288
Ausdruck finden, der die Gleichung (1) befriedigt.

Man kann daher sagen: *Die Gleichung* (1) *integriren heisst, das System der Gleichungen* (2) *vollständig integriren und zwar muss man in diesem die Coefficienten z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ als solche Functionen von $x, y, z, z', z_{,}$ betrachten, die der Gleichung $f = 0$ und den Integrabilitätsbedingungen des Systems identisch genügen.*

Die Integrabilitätsbedingungen bestehen augenscheinlich darin, dass in jeder Gleichung die vollständige Ableitung des Coefficienten von dx genommen nach y gleich sein muss der vollständigen Ableitung des Coefficienten von dy genommen nach x. Diese Bedingungen kommen für die Gleichungen (2) auf die beiden hinaus:

$$(3)\begin{cases}\dfrac{\partial z''}{\partial y}+z_{,}\dfrac{\partial z''}{\partial z}+z_{,}'\dfrac{\partial z''}{\partial z'}+z_{,,}\dfrac{\partial z''}{\partial z_{,}}=\dfrac{\partial z_{,}'}{\partial x}+z'\dfrac{\partial z_{,}'}{\partial z}+z''\dfrac{\partial z_{,}'}{\partial z'}+z_{,}'\dfrac{\partial z_{,}'}{\partial z_{,}},\\ \dfrac{\partial z_{,}'}{\partial y}+z_{,}\dfrac{\partial z_{,}'}{\partial z}+z_{,}'\dfrac{\partial z_{,}'}{\partial z'}+z_{,,}\dfrac{\partial z_{,}'}{\partial z_{,}}=\dfrac{\partial z_{,,}}{\partial x}+z'\dfrac{\partial z_{,,}}{\partial z}+z''\dfrac{\partial z_{,,}}{\partial z'}+z_{,}'\dfrac{\partial z_{,,}}{\partial z_{,}}.\end{cases}$$

Anstatt die Werthe der drei Functionen z'', $z_{,}'$ und $z_{,,}$ aus den drei Gleichungen (1) und (3) zu bestimmen und dann das System (2) zu integriren, werden wir uns unmittelbar mit dem Studium der Integrale dieses Systems beschäftigen, die wir *Integrale erster Ordnung der Gleichung*: $f=0$ nennen werden.

§ 3.

Es sei $\varphi(x, y, z, z', z_{,})=a$ eines dieser Integrale erster Ordnung. Das Differential $d\varphi$ muss augenscheinlich vermöge der Gleichungen (2) identisch verschwinden, was die beiden Bedingungen:

$$(4)\qquad \varphi'+z''\frac{\partial \varphi}{\partial z'}+z_{,}'\frac{\partial \varphi}{\partial z_{,}}=0,\quad \varphi_{,}+z_{,}'\frac{\partial \varphi}{\partial z'}+z_{,,}\frac{\partial \varphi}{\partial z_{,}}=0$$

liefert, die nothwendig und hinreichend sind, damit die Gleichung: $\varphi=a$ ein Integral des Systems (2) sei.

Je nach der Beschaffenheit der Functionen f und φ können die Gleichungen (1) und (4) entweder ausreichend sein, um z'', $z_{,}'$, $z_{,,}$ als Functionen von $x, y, z, z', z_{,}$ zu bestimmen, oder nicht ausreichend.
289 Dementsprechend werden wir die Integrale erster Ordnung der Gleichung: $f=0$ in zwei Classen eintheilen und *werden als Integrale erster Ordnung und erster Classe der Gleichung*: $f=0$ *solche Gleichungen* $\varphi=a$ *bezeichnen, von denen jede in Verbindung mit*: $f=0$ *unzureichend ist, um die zweiten Ableitungen von* z *zu bestimmen.*

Sehen wir zu, welche Gleichungen: $f=0$ Integrale erster Classe besitzen und wie diese letzteren bestimmt werden.

§ 4.

Indem wir der Kürze wegen:

$$(5)\qquad \alpha=-\varphi':\frac{\partial\varphi}{\partial z'},\quad \beta=-\varphi_{,}:\frac{\partial\varphi}{\partial z_{,}},\quad \omega=\frac{\partial\varphi}{\partial z_{,}}:\frac{\partial\varphi}{\partial z'}$$

setzen, erhalten wir aus den Gleichungen (4):

$$(6)\qquad z''=\alpha-\omega\,.\,z_{,}',\quad z_{,,}=\beta-\frac{z_{,}'}{\omega}.$$

Folglich muss für Integrale erster Classe die Gleichung:

$$f\left(x, y, z, z', z_{,}, \alpha - \omega \,.\, z_{,}', z_{,}', \beta - \frac{z_{,}'}{\omega}\right) = 0 \tag{7}$$

identisch sein, unabhängig von dem Werthe von $z_{,}'$.

Denken wir uns die linke Seite der Identität (7) nach steigenden Potenzen von $z_{,}'$ entwickelt, so zerfällt diese in die folgende Reihe von Identitäten:

$$f(x, y, z, z', z_{,}, \alpha, 0, \beta) = 0, \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (9) & \omega \dfrac{\partial f}{\partial z''} - \dfrac{\partial f}{\partial z_{,}'} + \dfrac{1}{\omega} \dfrac{\partial f}{\partial z_{,,}} = 0 \\ (10) & \left\{\begin{array}{l} \left(\omega \dfrac{\partial}{\partial z''} - \dfrac{\partial}{\partial z_{,}'} + \dfrac{1}{\omega} \dfrac{\partial}{\partial z_{,,}}\right)^{2} f = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(\omega \dfrac{\partial}{\partial z''} - \dfrac{\partial}{\partial z_{,}'} + \dfrac{1}{\omega} \dfrac{\partial}{\partial z_{,,}}\right)^{n} f = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right. \end{array}\right\} \text{für: } z'' = \alpha,\ z_{,}' = 0,\ z_{,,} = \beta,$$

die umgekehrt die Identität (7) nach sich ziehen und diese mithin vollständig ersetzen.

Damit daher die Gleichung: $\varphi = a$ ein Integral erster Classe der 290
Gleichung: $f = 0$ sei, müssen die Grössen α, β, ω, die aus den Ableitungen von φ gebildet sind, den Gleichungen (8), (9) und (10) genügen.

Die Gleichung (8) wird im Allgemeinen nicht von α und β frei sein; wäre es anders, so müsste sie selbst ein particuläres Integral erster Ordnung ohne willkürliche Constante sein. Lassen wir diesen letzteren Fall ausser Acht, so bleiben, wenn Integrale erster Ordnung und erster Classe vorhanden sein sollen, nur die folgenden beiden Annahmen möglich: 1) Alle Gleichungen des Systems (9), (10) werden befriedigt, wenn man zwei unter ihnen herausgreift und mit der Gleichung (8) verbindet. 2) Alle Gleichungen des Systems (9), (10) sind algebraische Folgen einer unter ihnen und der Gleichung (8).

§ 5.

Im ersten Falle erhalten wir für α, β, ω ein System oder einige Systeme vollständig bestimmter Werthe, von denen alle Gleichungen (10) und die Identität (7) erfüllt werden. Ausserdem bekommen wir, indem wir die gefundenen Werthe von α, β, ω in die Gleichungen (5) einsetzen, zur Bestimmung der Function φ drei lineare Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + z' \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + z_{,} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \beta \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} - \omega \dfrac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

Wenn wir die folgenden Operationssymbole einführen:

$$\frac{\partial}{\partial x} + z' \frac{\partial}{\partial z} + \alpha \frac{\partial}{\partial z'} = A, \quad \frac{\partial}{\partial y} + z_{,} \frac{\partial}{\partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial z_{,}} = B,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{,}} - \omega \frac{\partial}{\partial z'} = \Omega,$$

so verwandeln sich die Gleichungen (11) in:

$$A(\varphi) = 0, \quad B(\varphi) = 0, \quad \Omega(\varphi) = 0,$$

und zu deren Integration müssen wir, wie bekannt, das neue System von Gleichungen:

$$A\big(B(\varphi)\big) - B\big(A(\varphi)\big) = 0, \quad B\big(\Omega(\varphi)\big) - \Omega\big(B(\varphi)\big) = 0,$$
$$\Omega\big(A(\varphi)\big) - A\big(\Omega(\varphi)\big) = 0$$

bilden und zu jenen hinzufügen, ein System, das in entwickelter Form lautet:

291
$$(12) \quad \begin{cases} A(\beta) \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} - B(\alpha) \dfrac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0, \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + B(\omega) \dfrac{\partial \varphi}{\partial z'} - \Omega(\beta) \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} = 0 \\ \qquad - \omega \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \{\Omega(\alpha) + A(\omega)\} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0. \end{cases}$$

Die Verbindung der Gleichungen (11) und (12) führt zu den zwei Bedingungen:

$$(13) \quad B(\alpha) = \omega \,.\, A(\beta), \quad \omega^2 \,.\, \Omega(\beta) - \omega \,.\, B(\omega) - \Omega(\alpha) - A(\omega) = 0$$

und ausserdem zu den vier Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \{\alpha + z' \,.\, \omega \,.\, \Omega(\beta) - z' \,.\, B(\omega)\} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \{\beta \,.\, \omega + z_{,} \,.\, \omega \,.\, \Omega(\beta) - z_{,} \,.\, B(\omega)\} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad + \{B(\omega) - \omega \,.\, \Omega(\beta)\} \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} \qquad - \omega \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0,$$

die zeigen, dass die Gleichung: $\varphi = a$ das Integral der Differentialgleichung:

$$(14) \quad \begin{cases} dz' + \omega \,.\, dz_{,} + \{\omega \,.\, \Omega(\beta) - B(\omega)\} dz - \\ - \{\beta \omega + z_{,} \,.\, \omega \,.\, \Omega(\beta) - z_{,} \,.\, B(\omega)\} dy - \\ - \{\alpha + z' \,.\, \omega \,.\, \Omega(\beta) - z' \,.\, B(\omega)\} dx = 0 \end{cases}$$

ist, und wenn diese letztere den Integrabilitätsbedingungen genügt, so kann das Integral erster Classe: $\varphi = a$ gefunden werden und wird *eine* willkürliche Constante enthalten.

Ohne bei der Entwickelung der erwähnten Integrabilitätsbedingungen, die zu den Bedingungen (13) hinzukommen, zu verweilen, werden wir zur Untersuchung des zweiten in § 4 angegebenen Falles übergehen.

§ 6.

Indem wir annehmen, dass die gegebene Gleichung (1) in Bezug auf die zweiten Ableitungen von z nicht linear ist, bestimmen wir die Werthe von α und β aus den Gleichungen (8) und (9) als Functionen 292
von $x, y, z, z', z_{,}, \omega$ und es sei:

$$\alpha = \Theta(\omega), \quad \beta = \Psi(\omega), \tag{15}$$

so dass sich die Gleichungen (6) in:

$$z'' = \Theta(\omega) - \omega \,.\, z_{,}', \quad z_{,,} = \Psi(\omega) - \frac{z_{,}'}{\omega} \tag{16}$$

verwandeln. (Die Functionen Θ und Ψ enthalten im Allgemeinen die sechs Grössen $x, y, z, z', z_{,}, \omega$, wir fassen aber besonders die letzte ins Auge, die sie *nothwendig**) enthalten. Mit den Zeichen $\Theta'(\omega)$ und $\Psi'(\omega)$ werden wir die nach ω genommenen partiellen Ableitungen der Functionen Θ und Ψ bezeichnen.)

Nach der Voraussetzung werden durch die Werthe (15) alle Gleichungen (10) erfüllt und die Grösse ω bleibt vollständig unbestimmt. Das bedeutet, dass in dem betrachteten Falle die Gleichung:

$$f\left(x, y, z, z', z_{,}, \Theta(\omega) - \omega \,.\, z_{,}', z_{,}', \Psi(\omega) - \frac{z_{,}'}{\omega}\right) = 0 \tag{17}$$

identisch sein muss, unabhängig von ω und $z_{,}'$. Hieraus ziehen wir zwei wichtige Schlüsse:

Erstens. Indem wir in der Gleichung: $f = 0$ nur die beiden Veränderlichen z'' und $z_{,,}$ ins Auge fassen und beachten, dass die Gleichung vermöge (17) identisch erfüllt wird (unabhängig von ω), sobald wir in ihr an Stelle jener Veränderlichen die Werthe (16) einsetzen, schliessen wir, dass *die Gleichung: $f = 0$ durch Wegschaffung von ω aus den Gleichungen* (16) *erhalten wird.*

Zweitens. Indem wir die Identität (17) zwei Mal nach $z_{,}'$ differentiiren und aus den Ergebnissen die Functionen $\Theta(\omega)$ und $\Psi(\omega)$ mit Hülfe der Gleichungen (16) wegschaffen, finden wir zwei Gleichungen:

$$\omega \frac{\partial f}{\partial z''} - \frac{\partial f}{\partial z_{,}'} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial f}{\partial z_{,,}} = 0, \tag{18}$$

---

*) Ausgenommen ist nur ein besonderer Fall der Ampèreschen Gleichung. nämlich (§ 14): $Hz'' + Lz_{,,} + HL + z''z_{,,} - z_{,}'^2 = 0$. Zusatz des Verf.

$$(19)\quad \begin{cases} \omega^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial z''^2} - 2\omega \dfrac{\partial^2 f}{\partial z'' \partial z_,'} + 2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial z'' \partial z_{,,}} + \\ + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_,'^2} - \dfrac{2}{\omega} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_,' \partial z_{,,}} + \dfrac{1}{\omega^2} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_{,,}^2} = 0 \text{*)}, \end{cases}$$

293 *und indem wir ω aus diesen Gleichungen wegschaffen, erhalten wir eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die Function f genügt, wie auch die Functionen Θ und Ψ beschaffen sein mögen.*

In Wirklichkeit drücken diese beiden Schlüsse ganz dieselbe, für die Function f charakteristische Eigenschaft aus.

[§ 6a.]**).

[Es ist auch möglich, dass das System (9), (10) durch die Gleichung (8) und durch einen bestimmten Werth: $\omega = \sigma(x, y, z, z', z_,)$ befriedigt wird, und es ist leicht zu erkennen, wann dieser Fall eintritt. Wenn man den Werth: $\omega = \sigma$ in die Gleichung (7) einsetzt, so muss die Gleichung:

$$f\left(x, y, z, z', z_,, \alpha - \sigma z_,', z_,', \beta - \frac{z_,'}{\sigma}\right) = 0$$

schon vermöge der Gleichung (8) allein bestehen, woraus sich schliessen lässt, dass ihre linke Seite mit dem Ausdrucke:

$$f(x, y, z, z', z_,, \alpha, 0, \beta) = \Phi(x, y, z, z', z_,, \alpha, \beta)$$

identisch wird. Demzufolge ist in diesem Falle:

$$f(x, y, z, z', z_,, z'', z_,', z_{,,}) \equiv \Phi\left(x, y, z, z', z_,, z'' + \sigma z_,', z_{,,} + \frac{z_,'}{\sigma}\right).$$

In der That, wenn man in der Gleichung:

$$\Phi\left(x, y, z, z', z_,, z'' + \sigma z_,', z_{,,} + \frac{z_,'}{\sigma}\right) = 0$$

die Substitution:

$$z'' = \alpha - \omega z_,', \quad z_{,,} = \beta - \frac{z_,'}{\omega}$$

macht, so erhält man die Gleichung:

$$\Phi\left(x, y, z, z', z_,, \alpha - (\omega - \sigma) z_,', \beta + \frac{\omega - \sigma}{\omega \sigma} z_,'\right) = 0,$$

die durch die Annahme:

---

*) Wenn wir auf Grund von (16) die Grösse z'' als Function von $z_,'$ und $z_{,,}$ betrachten, so verwandeln sich die Gleichungen (18) und (19) in die folgenden:

$$\omega + \frac{\partial z''}{\partial z_,'} - \frac{1}{\omega} \frac{\partial z''}{\partial z_{,,}} = 0,$$

$$\omega \frac{\partial^2 z''}{\partial z_,'^2} - 2 \frac{\partial^2 z''}{\partial z_,' \partial z_{,,}} + \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 z''}{\partial z_{,,}^2} = 0.$$

Zusatz des Verf.

**) Vom Verfasser neu hinzugefügt.

$$\omega = \sigma, \quad \Phi(x, y, z, z', z_,, \alpha, \beta) = 0$$

für jeden Werth von $z_,'$ identisch befriedigt wird.

Von der Function $f(x, y, z, z', z_,, z'', z_,', z_{,,})$ wird in diesem Falle die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\sigma \frac{\partial f}{\partial z''} - \frac{\partial f}{\partial z_,'} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial z_{,,}} = 0$$

identisch erfüllt.]

§ 7.

Nehmen wir an, dass die gegebene Gleichung (1) den Bedingungen des § 6 genügt und sehen wir zu, ob es immer ein Integral erster Classe: $\varphi = a$ giebt und wie dieses bestimmt wird.

Indem wir mit Hülfe der gegebenen Gleichung die Gleichungen (8) und (9) bilden und diese nach α und β auflösen, finden wir die Functionen Θ und Ψ. Nunmehr ergeben die Gleichungen (5):

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + z' \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \Theta\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_,} : \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}\right) \cdot \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'} = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + z_, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \Psi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_,} : \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}\right) \cdot \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_,} = 0 \end{cases}$$

und unsre Frage kommt auf die Untersuchung dieser beiden simultanen Gleichungen hinaus. Nach einem bekannten Verfahren*) bilden wir aus diesen beiden Gleichungen die neue Gleichung:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\left\{\Theta'(\omega) + \omega^2\Psi'(\omega)\right\} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}\left\{\dfrac{\partial\Theta}{\partial y} + z_, \dfrac{\partial\Theta}{\partial z} + \right. \\ + \left(\Psi(\omega) + \omega\Psi'(\omega)\right)\dfrac{\partial\Theta}{\partial z_,} - \omega^2\Psi'(\omega)\cdot\dfrac{\partial\Theta}{\partial z'} - \omega\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} - \\ \left. - \omega z' \dfrac{\partial\Psi}{\partial z} - \omega\left(\Theta(\omega) - \omega\Theta'(\omega)\right)\dfrac{\partial\Psi}{\partial z'} - \omega\Theta'(\omega)\dfrac{\partial\Psi}{\partial z_,}\right\}, \end{cases}$$

wo der Kürze halber die Bezeichnung: $\omega = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_,} : \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}$ beibehalten ist.

Sind die Functionen Θ und Ψ so beschaffen, dass:

$$(22)\qquad \Theta'(\omega) + \omega^2\Psi'(\omega) = 0,$$

*) Man denke sich für $x, y, z, z', z_,$ der Reihe nach geschrieben: $x_1, x_2, \ldots x_5$ und für den Differentialquotienten von φ nach x_i geschrieben p_i; dann erscheinen die Gleichungen (20) in der Form:

$$U(x_1, \ldots x_5, p_1, \ldots p_5) = 0, \quad V(x_1, \ldots x_5, p_1, \ldots p_5) = 0$$

und das „bekannte Verfahren" besteht in der Bildung und Nullsetzung des Poisson-Jacobischen Klammerausdruckes:

$$(UV) = \sum_1^5{}_i \left(\frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial p_i}\right).$$

Anm. d. Uebers.

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{\partial\Theta}{\partial y} + z_{,}\frac{\partial\Theta}{\partial z} + \left(\Psi(\omega) + \omega\Psi'(\omega)\right)\frac{\partial\Theta}{\partial z_{,}} - \\ -\,\omega^2\Psi'(\omega)\frac{\partial\Theta}{\partial z'} - \omega\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \omega z'\frac{\partial\Psi}{\partial z} - \\ -\,\omega\left(\Theta(\omega) - \omega\Theta'(\omega)\right)\frac{\partial\Psi}{\partial z'} - \omega\Theta'(\omega)\frac{\partial\Psi}{\partial z_{,}} = 0 \end{cases}$$

294 ist, so ist die Gleichung (21) eine Identität und zur Bestimmung der Function φ bleiben nur die beiden Gleichungen (20) übrig.

Wenn wir die Gleichungen (20) durch $\frac{\partial\varphi}{\partial z'}$ dividiren und nunmehr z' als eine Function von $x, y, z, z_{,}$ betrachten, die durch die Gleichung: $\varphi = a$ bestimmt ist, so verwandeln sich diese Gleichungen (20) in:

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{\partial z'}{\partial x} + z'\frac{\partial z'}{\partial z} - \Theta\left(-\frac{\partial z'}{\partial z_{,}}\right) = 0, \\ \frac{\partial z'}{\partial y} + z_{,}\frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial z'}{\partial z_{,}}\Psi\left(-\frac{\partial z'}{\partial z_{,}}\right) = 0 \end{cases}$$

und zu deren Integration muss man bekanntlich noch zwei Gleichungen mit zwei willkürlichen Constanten b und c aufsuchen:

$$F\left(x, y, z, z', z_{,}, \frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}, \frac{\partial z'}{\partial z}, \frac{\partial z'}{\partial z_{,}}\right) = b,$$

$$\Phi\left(x, y, z, z', z_{,}, \frac{\partial z'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial y}, \frac{\partial z'}{\partial z}, \frac{\partial z'}{\partial z_{,}}\right) = c,$$

die zusammen mit (24) solche Werthe der partiellen Ableitungen von z' liefern, die den Integrabilitätsbedingungen genügen. Das Integral der Gleichung:

$$dz' - \frac{\partial z'}{\partial x}dx - \frac{\partial z'}{\partial y}dy - \frac{\partial z'}{\partial z}dz - \frac{\partial z'}{\partial z_{,}}dz_{,} = 0$$

wird gerade: $\varphi = a$ sein.

Wie wir sehen, *hat die Gleichung: $f = 0$ in dem Falle, dass die Functionen Θ und Ψ den Bedingungen* (22) *und* (23) *genügen, ein Integral erster Classe mit drei willkürlichen Constanten.*

§ 8.

Wenn die Functionen Θ und Ψ nur eine von den Bedingungen (22) und (23) erfüllen, so kommt zu den Gleichungen (20) eine neue Gleichung hinzu.

Wenn wir zulassen, dass nur die eine Bedingung (22) identisch erfüllt wird, so verwandelt sich die Gleichung (21) in (23) und liefert
295 einen bestimmten Werth für ω; wir erhalten den in § 5 betrachteten Fall.

Wenn wir annehmen, dass nur die eine Bedingung (23) identisch erfüllt wird, so verwandelt sich die Gleichung (21) entweder in (22) und liefert einen bestimmten Werth von ω — der Fall des § 5 — oder sie ergiebt: $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. In diesem letzteren Falle muss man annehmen, dass die Functionen Θ und Ψ und folglich auch die gegebene Gleichung: $f = 0$ von z frei sind, und das Integral: $\varphi = a$ enthält zwei willkürliche Constanten.

§ 9.

Wenn endlich gar keine von den Bedingungen (22) und (23) erfüllt ist, so müssen wir zu den Gleichungen (20) die Gleichung (21) hinzufügen, die wir uns auf die Gestalt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \sigma(\omega) \frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0 \tag{25}$$

gebracht denken wollen.

Indem wir diese Gleichung mit jeder der Gleichungen (20) combiniren*), um neue Beziehungen abzuleiten, denen die Function φ genügt, gelangen wir zu den beiden Gleichungen $\left(\text{wo } \sigma'(\omega) = \frac{\partial \sigma}{\partial \omega}\right)$:

$$\tag{26} \left\{ \begin{aligned} \big(\sigma(\omega) - \omega\sigma'(\omega)\big) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Big\{ & \frac{\partial \sigma}{\partial x} + z' \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \big(\Theta(\omega) - \omega\Theta'(\omega)\big) \frac{\partial \sigma}{\partial z'} + \\ & + \Theta'(\omega) \frac{\partial \sigma}{\partial z_{,}} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \\ & - \big(\sigma(\omega) - \omega\sigma'(\omega)\big) \frac{\partial \Theta}{\partial z'} - \sigma'(\omega) \frac{\partial \Theta}{\partial z_{,}} \Big\} \frac{\partial \varphi}{\partial z'}, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{27} \left\{ \begin{aligned} \sigma'(\omega) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \Big\{ & \frac{\partial \sigma}{\partial y} + z_{,} \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \omega^2 \Psi'(\omega) \frac{\partial \sigma}{\partial z'} + \big(\Psi(\omega) + \omega\Psi'(\omega)\big) \frac{\partial \sigma}{\partial z_{,}} + \\ & + \omega \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \omega \big(\sigma(\omega) - \omega\sigma'(\omega)\big) \frac{\partial \Psi}{\partial z'} - \\ & - \omega\sigma'(\omega) \frac{\partial \Psi}{\partial z_{,}} \Big\} \frac{\partial \varphi}{\partial z'}, \end{aligned} \right.$$

durch deren Vergleichung mit der Gleichung (25) wir erhalten:

$$\tag{28} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial x} + z' \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \big(\Theta(\omega) - \omega\Theta'(\omega)\big) \frac{\partial \sigma}{\partial z'} + \Theta'(\omega) \frac{\partial \sigma}{\partial z_{,}} + \\ & \quad + \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \big(\sigma(\omega) - \omega\sigma'(\omega)\big) \frac{\partial \Theta}{\partial z'} - \sigma'(\omega) \frac{\partial \Theta}{\partial z_{,}} = \\ & \quad = \sigma(\omega) \cdot \{\sigma(\omega) - \omega\sigma'(\omega)\}, \end{aligned} \right.$$

$$\tag{29} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial y} + z_{,} \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \omega^2 \Psi'(\omega) \frac{\partial \sigma}{\partial z'} + \big(\Psi(\omega) + \omega\Psi'(\omega)\big) \frac{\partial \sigma}{\partial z_{,}} + \\ & \quad + \omega \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \omega \big(\sigma(\omega) - \omega\sigma'(\omega)\big) \frac{\partial \Psi}{\partial z'} - \omega\sigma'(\omega) \frac{\partial \Psi}{\partial z_{,}} = \\ & \quad = \sigma(\omega)\sigma'(\omega). \end{aligned} \right.$$

296

*) Nämlich in der Weise, die in der Anm. zu § 7 auseinandergesetzt ist. Anm. d. Uebers.

Wenn eine von diesen Gleichungen nicht identisch ist, aber doch einen bestimmten Werth für ω liefert, so haben wir den Fall von § 5; *wenn dagegen beide Gleichungen* (28) *und* (29) *identisch erfüllt sind, so erhalten wir durch Integration der Gleichungen* (20) *und* (25) *ein Integral erster Classe:* $\varphi = a$ *der Gleichung:* $f = 0$, *mit zwei willkürlichen Constanten.*

§ 10.

Wir haben die Aufsuchung der Integrale erster Classe und Ordnung der gegebenen Gleichung: $f = 0$ auf die Integration eines Systems von zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt. Es ist daher klar, dass, wenn die Gleichung: $f = 0$ ein Integral erster Classe mit zwei oder drei willkürlichen Constanten zulässt, wir aus diesem Integrale durch Variation der willkürlichen Constanten ein Integral erster Classe mit einer willkürlichen Function erhalten. Indem wir unter:

$$Z(x, y, z, z', z_{,}, a, b) = 0$$

ein zwei willkürliche Constanten enthaltendes Integral erster Classe der Gleichung: $f = 0$ verstehen und b gleich einer willkürlichen Function $\varphi(a)$ setzen, erhalten wir ein Integral erster Classe der Gleichung: $f = 0$ mit einer willkürlichen Function, sobald wir a aus den Gleichungen:

$$Z\big(x, y, z, z', z_{,}, a, \varphi(a)\big) = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial a} + \frac{\partial Z}{\partial \varphi(a)}\varphi'(a) = 0$$

wegschaffen (vgl. Lagrange, a. a. O. S. 101).

Auf ähnliche Weise erhalten wir aus einem Integrale erster Classe mit drei willkürlichen Constanten:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, a, b, c) = 0,$$

297 indem wir c gleich einer willkürlichen Function $\varphi(a, b)$ setzen, ein Integral erster Classe mit einer willkürlichen Function, sobald wir a und b aus den Gleichungen:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, a, b, \varphi) = 0, \ \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$$

wegschaffen.

[Als Beispiel betrachte man die Gleichung;

$$x^2 z'' + 2xy z_{,}' + y^2 z_{,,} = 0$$

und setze:

$$a = \frac{y}{x}, \quad b = \frac{xz' + yz_{,}}{x},$$

dann ergiebt die Gleichung:

$$z - xz' - yz_{,} = \varphi(a, b)$$

durch Differentiation nach x und y:

$$-xz'' - yz_{,}' = -\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{y}{x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\left(z'' + \frac{y}{x}z_{,}' - \frac{y}{x^2}z_{,}\right),$$

$$-xz_{,}' - yz_{,,} = \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{1}{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\left(z_{,}' + \frac{y}{x}z_{,,} + \frac{1}{x}z_{,}\right),$$

woraus man durch Wegschaffung von $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ die Gleichung:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\frac{\partial\varphi}{\partial b}\right)(x^2 z'' + 2xy\, z_{,}' + y^2 z_{,,}) = 0$$

erhält. Zusatz d. Verf.]

Aber hier zeigt sich eine Schwierigkeit, die darin besteht, dass die willkürliche Function von zwei Argumenten abhängt, während man bei der Integration von Gleichungen mit *zwei* unabhängigen Veränderlichen im Integrale nur willkürliche Functionen erwarten kann, die von *einem* Argumente abhängen. Diese Schwierigkeit ist augenscheinlich identisch mit der, die Lagrange bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angetroffen hat und die von Charpit beseitigt worden ist (vgl. Imschenetzkij, Sur l'intégration des équations du premier ordre, trad. par Hoüel, p. 41). Wir werden unsre Schwierigkeit auf ähnliche Weise beseitigen: bevor wir das Integral mit den drei willkürlichen Constanten verallgemeinern, werden wir einer der Constanten einen besonderen Werth geben und sodann von dem Integrale mit zwei willkürlichen Constanten zu einem Integrale mit einer willkürlichen Function übergehen.

§ 11.

Was wir Integral erster Classe und Ordnung mit zwei willkürlichen Constanten nennen, nennt Lagrange ein vollständiges Integral erster Ordnung. In der That, wenn die Gleichung:

(30) $$\varphi(x, y, z, z', z_{,}, b) = a$$

ein Integral erster Classe der gegebenen Gleichung: $f = 0$ ist, so erhalten wir, indem wir sie nach x und y differentiiren, die Gleichungen (4) und wissen, dass die aus diesen letzteren bestimmten Werthe von z'' und $z_{,,}$, die die willkürliche Constante b enthalten, der Gleichung: $f = 0$ identisch genügen, unabhängig von b; das aber bedeutet, dass die Gleichung: $f = 0$ aus (4) durch Wegschaffung von b erhalten wird. Wollten wir daher im Allgemeinen durch:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, a, b) = 0$$ 298

ein Integral erster Classe mit zwei willkürlichen Constanten darstellen, so würden wir, indem wir dieses nach x und y differentiirten, zwei Gleichungen erhalten, und das Ergebniss der Wegschaffung der willkürlichen Constanten a und b aus den drei Gleichungen wäre die

Gleichung: $f=0$. Folglich ist: $F=0$ ein vollständiges Integral der Gleichung: $f=0$.

Hieraus folgt, dass, was wir Integral erster Classe mit einer willkürlichen Function genannt haben, ein Lagrangesches allgemeines Integral erster Ordnung ist.

Es zeigt sich auf diese Weise, dass die Untersuchungen der vorhergehenden Paragraphen die Untersuchung der Fälle in sich schliessen, wann eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ein vollständiges und ein allgemeines Integral erster Ordnung zulässt, und dass sie ein nothwendiges Glied in der Theorie der Gleichungen von dieser Kategorie bilden.

§ 12.

Es sei:

$$\varphi(x, y, z, z', z_{,}, b, c)=a$$

ein Integral erster Classe mit drei willkürlichen Constanten. Indem wir dieses nach x und y differentiiren, erhalten wir die zwei Gleichungen (4) und da die hieraus bestimmten Werthe von z'' und $z_{,,}$ der Gleichung: $f=0$ identisch genügen, unabhängig von den Werthen der willkürlichen Constanten b und c, so folgt, dass die Gleichung: $f=0$ aus (4) durch Wegschaffung einer dieser willkürlichen Constanten erhalten wird, wobei von selbst zugleich auch die andre wegfällt.

Allgemein, wenn:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, a, b, c)=0$$

ein Integral erster Classe der Gleichung: $f=0$ ist, mit drei willkürlichen Constanten, so erhalten wir, indem wir es nach x und y differentiiren, insgesammt *drei* Gleichungen, aus denen sich die *drei* willkürlichen Constanten a, b, c wegschaffen lassen und das Ergebniss der Elimination wird die Gleichung: $f=0$ sein.

299 Einer solchen Elimination dreier willkürlicher Constanten aus drei Gleichungen gedenkt Lagrange (a. a. O. S. 104), indem er sich auf die Bemerkung beschränkt, dass sie nur in besonderen Fällen stattfinden könne.

Die vorhergehenden Untersuchungen zeigen, dass sie stattfindet, wenn die Gleichung: $f=0$ aus den Gleichungen (16) durch Wegschaffung von ω entsteht, wobei die Functionen Θ und Ψ den Gleichungen (22) und (23) genügen.

§ 13.

Wenn die Gleichung: $f=0$ ein Integral erster Classe zulässt und dieses Integral gefunden ist, so besteht die fernere Lösung der Aufgabe einfach in der Integration der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, die durch dieses Integral dargestellt wird.

In der That, wenn wir unter:

$$\Phi(x, y, z, z', z_,) = A$$

ein anderes Integral des Systems (2) verstehen, so erhalten wir aus diesem ähnlich wie bei (4):

$$(31) \qquad \Phi' + z'' \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + z_,' \frac{\partial \Phi}{\partial z_,} = 0, \qquad \Phi_, + z_,' \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + z_{,,} \frac{\partial \Phi}{\partial z_,} = 0,$$

und die Verbindung der Gleichungen (4) und (31) liefert vollständig bestimmte Werthe der zweiten Ableitungen z'', $z_,'$, $z_{,,}$ und ausserdem, durch Wegschaffung dieser Ableitungen die Bedingungsgleichung, der die Function Φ genügen muss:

$$\Phi' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z'} - \varphi' \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \Phi_, \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z_,} - \varphi_, \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z_,} = 0,$$

die wir auch erhalten würden, wenn wir unmittelbar zur Integration der Gleichung: $\varphi = a$ übergingen.

Auf diese Weise kann man von dem allgemeinen Integrale erster Ordnung zu einem endlichen allgemeinen Integrale mit zwei willkürlichen Functionen übergehen und von einem Integrale erster Classe mit drei willkürlichen Constanten zu einem endlichen Integrale mit
fünf willkürlichen Constanten, das Lagrange vollständig nennt. Das 300
auf diesem Wege gefundene endliche vollständige Integral kann augenscheinlich in ein allgemeines mit zwei willkürlichen Functionen verwandelt werden.

§ 14.

Indem wir den Functionen Θ und Ψ besondere Werthe ertheilten, konnten wir verschiedene Classen solcher partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung finden, die ein allgemeines Integral mit zwei willkürlichen Functionen oder ein vollständiges Integral zulassen. Wir beabsichtigen jedoch nicht, uns in der gegenwärtigen Abhandlung auf derartige Untersuchungen einzulassen und werden uns darauf beschränken, auf den Zusammenhang unsrer Untersuchung mit den Untersuchungen hinzuweisen, denen die Ampèresche Gleichung:

$$f = Hz'' + 2Kz_,' + Lz_{,,} + M + N(z'' z_{,,} - z_,'^2) = 0$$

unterworfen worden ist.

Für diese und, wie man sich leicht überzeugt, nur für diese Form der Function f verwandelt sich die Gleichung (19) in eine Identität, unabhängig von ω; folglich kann man zur Bestimmung der Functionen Θ und Ψ schreiten. Indem wir die Bezeichnung:

$$G = K^2 + MN - HL$$

einführen, finden wir aus den Gleichungen (8) und (9) ohne Schwierigkeit:

$$
(32) \qquad \begin{cases} \Theta(\omega) = -\frac{L}{N} + \frac{K \pm \sqrt{G}}{N}\,\omega, \\ \Psi(\omega) = -\frac{H}{N} + \frac{K \mp \sqrt{G}}{N} \cdot \frac{1}{\omega} \end{cases}
$$

und, wenn wir diese Werthe in die Gleichungen (20) einsetzen, so gelangen wir gerade zu den Gleichungen, die Bour, Boole und Imschenetzkij betrachtet haben. Wir wollen erwähnen, dass die Gleichungen (20) nur in dem Falle linear sind, wenn die Functionen Θ und Ψ die Gestalt (32) besitzen, wenn also die zu integrirende Gleichung: $f = 0$ eine Ampèresche ist.

§ 15.

Gehen wir über zur Untersuchung der Integrale erster Ordnung und zweiter Classe.

301 Aus der unmittelbaren Betrachtung des Integrales: $\varphi = a$ selbst können wir hier nichts ableiten, sondern wir müssen uns zu den Differentialgleichungen (2) wenden.

Zuweilen ist es ziemlich leicht, besondere Werthe der zweiten Ableitungen: z'', $z_,'$, $z_{,,}$ zu bemerken, die den Gleichungen (3) und $f = 0$ genügen. Es ist aber klar, dass Erfolge dieser Art vollständig zufällig sind und keiner allgemeinen Untersuchung unterliegen.

Um diese letztere auszuführen, werden wir uns nicht unmittelbar an die Gleichungen (3) wenden, sondern die Frage nach der Bestimmung der zweiten Ableitungen: z'', $z_,'$, $z_{,,}$ etwas anders aussprechen.

Es seien:

$$
(33) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, z, z', z_,, z'', z_,', z_{,,}) = a_1, \\ F_2(x, y, z, z', z_,, z'', z_,', z_{,,}) = a_2 \end{cases}
$$

zwei Gleichungen, die zusammen mit: $f = 0$ solche Werthe der zweiten Ableitungen von z liefern, die den Integrabilitätsbedingungen des Systems (2) genügen, und die Integrale dieses Systems seien:

$$
(34) \qquad F_3(x, y, z, z', z_,, z'', z_,', z_{,,}) = a_3, \quad F_4 = a_4, \quad F_5 = a_5.
$$

Wenn wir die Gleichungen (33), (34) und: $f = 0$ differentiiren und die Differentiale der sechs abhängigen Veränderlichen bestimmen, so muss das Ergebniss augenscheinlich mit den sechs Gleichungen:

$$
(35) \begin{cases} dz = z'\,dx + z_,\,dy, \quad dz' = z''\,dx + z_,'\,dy, \quad dz_, = z_,'\,dx + z_{,,}\,dy, \\ dz'' = z'''\,dx + z_,''\,dy, \quad dz_,' = z_,''\,dx + z_{,,}'\,dy, \quad dz_{,,} = z_{,,}'\,dx + z_{,,,}\,dy \end{cases}
$$

identisch sein.

Wir können daher sagen, dass die Gleichungen (33), (34) und: $f = 0$ Integrale des Systems (35) sind, in dem die dritten Ableitungen von z als Functionen aller übrigen Veränderlichen betrachtet werden.

Damit die Gleichung: $f=0$ ein particuläres Integral des Systems (35) sei, muss das Differential df augenscheinlich vermöge der Gleichungen (35) identisch verschwinden. Das liefert die zwei Bedingungen: 302

$$(36)\qquad \begin{cases} f' + \dfrac{\partial f}{\partial z''} z''' + \dfrac{\partial f}{\partial z'_{,}} z''_{,} + \dfrac{\partial f}{\partial z_{,,}} z'_{,,} = 0, \\ f_{,} + \dfrac{\partial f}{\partial z''} z''_{,} + \dfrac{\partial f}{\partial z'_{,}} z'_{,,} + \dfrac{\partial f}{\partial z_{,,}} z_{,,,} = 0 \end{cases}$$

und wir hätten die dritten Ableitungen von z so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen (36) und den Integrabilitätsbedingungen des Systems (35) genügen.

Statt dessen werden wir wie in § 2 unmittelbar die Integrale des Systems (35) betrachten, die wir als *Integrale zweiter Ordnung* der gegebenen Gleichung: $f=0$ bezeichnen werden.

Auf diese Weise führt uns die Aufsuchung der Integrale erster Ordnung und zweiter Classe ganz naturgemäss zur Aufsuchung der Integrale zweiter Ordnung.

§ 16.

Es sei:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}) = a$$

ein Integral zweiter Ordnung der Gleichung: $f=0$.

Aehnlich den Gleichungen (36) werden wir haben:

$$(37)\qquad \begin{cases} F' + \dfrac{\partial F}{\partial z''} z''' + \dfrac{\partial F}{\partial z'_{,}} z''_{,} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{,,}} z'_{,,} = 0, \\ F_{,} + \dfrac{\partial F}{\partial z''} z''_{,} + \dfrac{\partial F}{\partial z'_{,}} z'_{,,} + \dfrac{\partial F}{\partial z_{,,}} z_{,,,} = 0. \end{cases}$$

Je nach der Beschaffenheit der Functionen f und F sind die vier Gleichungen (36) und (37) entweder hinreichend zur Bestimmung der vier linear in ihnen auftretenden Ableitungen dritter Ordnung von z oder sie sind es nicht. *Jenachdem werden wir daher die Gleichung: $F=a$ als ein Integral zweiter Ordnung der Gleichung: $f=0$ von der zweiten oder der ersten Classe bezeichnen.*

§ 17. 303

Betrachten wir die Integrale zweiter Ordnung und erster Classe.

Wir wollen ein für alle Male verabreden, dass wir die Ableitungen der gegebenen Function f folgendermassen bezeichnen:

$$\frac{\partial f}{\partial z''} = R, \quad \frac{\partial f}{\partial z'_{,}} = S, \quad \frac{\partial f}{\partial z_{,,}} = T,$$

so dass die Gleichungen (36) lauten:

$$(38)\quad f' + Rz''' + Sz''_{,} + Tz'_{,,} = 0, \quad f_{,} + Rz''_{,} + Sz'_{,,} + Tz_{,,,} = 0.$$

Wenn: $F = a$ ein Integral erster Classe ist, so genügt die Verbindung der Gleichungen (37) und (38) nicht, um die dritten Ableitungen von z zu bestimmen, so dass eine von diesen Gleichungen eine algebraische Folge der drei übrigen ist. Demnach können wir vier solche, von den dritten Ableitungen von z unabhängige Multiplicatoren λ', $\lambda_,$, μ', $\mu_,$ finden, dass wir, wenn wir die Gleichungen (37) und (38) damit multipliciren und addiren, auf der linken Seite Null bekommen. Diese für die Integrale erster Classe charakteristische Bedingung zerfällt in die fünf verschiedenen Bedingungen:

$$\lambda' F' + \lambda_, F_, + \mu' f' + \mu_, f_, = 0, \tag{39}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda' \frac{\partial F}{\partial z''} + \mu' R = 0, \\ &\lambda' \frac{\partial F}{\partial z_,'} + \lambda_, \frac{\partial F}{\partial z''} + \mu' S + \mu_, R = 0, \\ &\lambda' \frac{\partial F}{\partial z_{,,}} + \lambda_, \frac{\partial F}{\partial z_,'} + \mu' T + \mu_, S = 0, \\ &\lambda_, \frac{\partial F}{\partial z_{,,}} + \mu_, T = 0. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Indem wir die Gleichungen (40) der Reihe nach mit $\lambda_,^3$, $-\lambda_,^2\lambda'$, $\lambda_,\lambda'^2$, $-\lambda'^3$ multipliciren und addiren, schaffen wir die Function F weg und erhalten:

$$(R\lambda_,^2 - S\lambda_,\lambda' + T\lambda'^2)(\mu'\lambda_, - \mu_,\lambda') = 0. \tag{41}$$

Auf ähnliche Weise finden wir, indem wir die Gleichungen (40) der Reihe nach mit: $-\mu_,^3$, $\mu_,^2\mu'$, $-\mu_,\mu'^2$, μ'^3 multipliciren und addiren:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\mu_,^2 - \frac{\partial F}{\partial z_,'}\mu_,\mu' + \frac{\partial F}{\partial z_{,,}}\mu'^2\right)(\mu'\lambda_, - \mu_,\lambda') = 0. \tag{42}$$

304 Die beiden Gleichungen (41) und (42) ersetzen zusammen zwei beliebige der Gleichungen (40). Sie werden beide erfüllt, wenn wir:

$$\mu'\lambda_, - \mu_,\lambda' = 0$$

annehmen, aber diese Annahme ist unzulässig, denn aus ihr erhalten wir:

$$\mu' = \lambda' . \nu, \quad \mu_, = \lambda_, . \nu,$$

demnach ergeben die Gleichungen (40):

$$\frac{\partial F}{\partial z''} = -\nu R, \quad \frac{\partial F}{\partial z_,'} = -\nu S, \quad \frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = -\nu T; \tag{α}$$

diese drei Gleichungen aber zeigen, dass die zweiten Ableitungen von z in die Function F nur in der Verbindung f eingehen, sodass für:

$f = 0$ die Gleichung: $F = a$ gar kein Integral zweiter Ordnung ist. In Folge dessen verwandeln sich die Gleichungen (41) und (42) in:

$$(43)\quad R\lambda_,^2 - S\lambda_,\lambda' + T\lambda'^2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z'}\mu_,^2 - \frac{\partial F}{\partial z_,'}\mu_,\mu' + \frac{\partial F}{\partial z_{,,}}\mu'^2 = 0,$$

und zu diesen Gleichungen müssen wir noch zwei von den Gleichungen (40) und die Gleichung (39) hinzufügen.

Wählen wir unter den Gleichungen (40) die beiden einfachsten aus, nämlich die erste und die letzte. Diese gestatten zwei unter den Multiplicatoren mit Hülfe der beiden andern auszudrücken; wir wollen jedoch diese Ausdrücke nicht benutzen, sondern alle vier Multiplicatoren mit Hülfe zweier unbestimmter Grössen λ und μ ausdrücken, sodass die Gleichungen (40) identisch erfüllt werden; wir werden nämlich setzen:

$$\lambda' = -R.\lambda, \quad \mu' = \frac{\partial F}{\partial z''}\lambda, \quad \lambda_, = -T\mu, \quad \mu_, = \frac{\partial F}{\partial z_{,,}}\mu.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe verwandeln sich die drei Gleichungen (39) und (43), die noch geblieben sind, in die folgenden:

$$(44)\qquad \lambda f' \frac{\partial F}{\partial z'} + \mu f_, \frac{\partial F}{\partial z_{,,}} - \lambda R F' - \mu T F_, = 0,$$

$$(45)\qquad \frac{\partial F}{\partial z'}\lambda^2 - \frac{\partial F}{\partial z_,'}\lambda\mu + \frac{\partial F}{\partial z_{,,}}\mu^2 = 0,$$

$$(46)\qquad R\lambda^2 - S\lambda\mu + T\mu^2 = 0,$$ 305

die in Bezug auf die Functionen f und F symmetrisch sind, wie vorauszusehen war, und homogen in Bezug auf λ und μ.

Diese drei Gleichungen müssen für: $f = 0$, $F = a$ erfüllt sein. Unter ihnen liefert die Gleichung (46) vollständig bestimmte Werthe des Verhältnisses $\lambda : \mu$, sodann verwandeln sich die Gleichungen (44) und (45) in vollständig bestimmte lineare partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die Function F.

§ 18.

Die Gleichung (46) liefert, allgemein zu reden, zwei verschiedene Werthe des Verhältnisses $\frac{\lambda}{\mu}$. Nennen wir diese: $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ und: $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$. Durch Einsetzung der gefundenen Werthe von λ und μ in die Gleichungen (44) und (45) erhalten wir zwei Systeme von Gleichungen, von denen das eine λ_1 und μ_1 entspricht, das andere λ_2 und μ_2. Wir müssen jedes System besonders untersuchen.

Wir wollen bemerken, dass die beiden Gleichungen (44) und (45) für $F = f$ identisch befriedigt werden. Ausser diesem particulären

Integrale kann die Gleichung (45) nur noch *ein einziges* particuläres Integral mit den zweiten Ableitungen von z besitzen, das zugleich ein Integral des Systems:

$$(47) \qquad \frac{dz''}{\lambda^2} = \frac{dz_{,}'}{-\lambda\mu} = \frac{dz_{,,}}{\mu^2}$$

sein wird. Nennen wir dieses Integral u, so müssen wir setzen:

$$(48) \qquad F = F(u, f, x, y, z, z', z_{,})$$

und können dann die Gleichung: $F = a$ durch die folgende:

$$(49) \qquad u = \varphi(x, y, z, z', z_{,}, a)$$

ersetzen, die nunmehr das gesuchte Integral zweiter Ordnung und erster Classe sein wird.

§ 19.

Indem wir den Werth von F in die Gleichung (44) einsetzen, erhalten wir:

306
$$(50) \qquad \begin{cases} \lambda f' \frac{\partial u}{\partial z''} + \mu f_{,} \frac{\partial u}{\partial z_{,,}} - \lambda R u' - \mu T u_{,} + \\ \qquad + \lambda R \left(\varphi' + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} z'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} z_{,}'\right) + \\ \qquad + \mu T \left(\varphi_{,} + \frac{\partial \varphi}{\partial z'} z_{,}' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_{,}} z_{,,}\right) = 0, \end{cases}$$

und diese Gleichung muss sich vermöge der Gleichungen: $f = 0$ und (49) in eine Identität verwandeln, so dass, wenn wir z'' und $z_{,,}$ aus ihr wegschaffen, wir zu einer Beziehung gelangen müssen, die unabhängig von $z_{,}'$ erfüllt ist. In Folge dessen zerfällt die Gleichung (50) in eine Reihe von Gleichungen, denen die Function φ genügen muss und die entweder *erstens* unverträglich sind, oder *zweitens* einen Werth von φ mit einer willkürlichen Constanten oder einer willkürlichen Function liefern. Dementsprechend hat die gegebene Gleichung: $f = 0$ entweder *erstens* kein Integral zweiter Ordnung und erster Classe oder sie hat *zweitens* ein Integral dieser Art, das entweder eine willkürliche Constante enthält oder eine willkürliche Function, in die z und dessen Ableitungen bis *höchstens zur ersten Ordnung* eingehen können.

Nehmen wir an, dass irgend ein Integral erster Classe bekannt ist, und sehen wir zu, wie die übrigen Integrale des Systems (35) gefunden werden.

§ 20.

Wenn wir neben: $f = 0$, $F = a$ unter $\Phi = A$ ein neues Integral des Systems (35) verstehen, so haben wir:

$$
(51)\qquad \begin{cases} \Phi' + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z''} z''' + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,}'} z_{,}'' + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} z'_{,,} = 0, \\[2ex] \Phi_{,} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z''} z_{,}'' + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,}'} z'_{,,} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} z_{,,,} = 0. \end{cases}
$$

Da unter den Gleichungen (37) und (38) nur drei von einander unabhängig sind, so liefert die Verbindung der Gleichungen (37), (38) und (51) die Werthe der vier dritten Ableitungen von z und ausserdem noch eine von den dritten Ableitungen von z freie Gleichung, die zur Bestimmung der Function Φ dienen wird. Man kann diese letztere Gleichung auch finden, indem man zugleich die vorhergehende Untersuchung der Integrale zweiter Ordnung und erster Classe in etwas anderer Form darstellt, ausgehend von den folgenden Erwägungen.

Obgleich unter den vier Gleichungen (37) und (38) nur drei von 307
einander unabhängig sind, so kann nichtsdestoweniger keine einzige unter ihnen mit einer andern, diese für sich genommen, identisch sein, denn die entgegengesetzte Annahme führt nothwendig zu den Gleichungen (α) von § 17. Daher sind die drei ersten Gleichungen von (37), (38) und (51) schon an und für sich hinreichend zur Bestimmung der drei Ableitungen z''', $z_{,}''$, $z'_{,,}$ und die drei zweiten Gleichungen von (37), (38) und (51) sind schon an und für sich hinreichend zur Bestimmung der drei Ableitungen $z_{,}''$, $z'_{,,}$, $z_{,,,}$.

Wenn wir der Kürze wegen:

$$
\frac{\partial F}{\partial z''} = R_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z_{,}'} = S_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial z_{,,}} = T_1
$$

setzen und unter Δ die Determinante:

$$
\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial z''} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,}'} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} \\ R & S & T \\ R_1 & S_1 & T_1 \end{vmatrix}
$$

verstehen, so erhalten wir einerseits:

$$
(52)\qquad \begin{cases} \Delta z''' = \Phi' (TS_1 - ST_1) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,}'} (T_1 f' - TF') + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} (SF' - S_1 f'), \\[2ex] \Delta z_{,}'' = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z''} (TF' - T_1 f') + \Phi' (RT_1 - TR_1) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} (R_1 f' - RF'), \\[2ex] \Delta z'_{,,} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z''} (S_1 f' - SF') + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,}'} (RF' - R_1 f') + \\ \qquad\qquad + \Phi' (SR_1 - RS_1). \end{cases}
$$

und andrerseits:

$$
(52')\quad
\begin{cases}
\Delta z_{,}'' = \Phi_{,}(TS_1 - ST_1) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,}'}(T_1 f_{,} - TF_{,}) + \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,,}}(SF_{,} - S_1 f_{,}), \\
\Delta z'_{,,} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z''}(TF_{,} - T_1 f_{,}) + \Phi_{,}(RT_1 - TR_1) + \\
\qquad\qquad + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,,}}(R_1 f_{,} - RF_{,}), \\
\Delta z_{,,,} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z''}(S_1 f_{,} - SF_{,}) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,}'}(RF_{,} - R_1 f_{,}) + \\
\qquad\qquad + \Phi_{,}(SR_1 - RS_1).
\end{cases}
$$

Indem wir die Ausdrücke für $\Delta z_{,}''$ und $\Delta z'_{,,}$ in dem einen und dem andern Systeme vergleichen, finden wir:

308

$$
(53)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial\Phi}{\partial z''}(TF' - T_1 f') + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,}'}(TF_{,} - T_1 f_{,}) + ' \\
\qquad + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,,}}(R_1 f' - RF' + S_1 f_{,} - SF_{,}) + \\
\qquad + \Phi'(RT_1 - TR_1) + \Phi_{,}(ST_1 - TS_1) = 0, \\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial z''}(S_1 f' - SF' + T_1 f_{,} - TF_{,}) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,}'}(RF' - R_1 f') + \\
\qquad + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z_{,,}}(RF_{,} - R_1 f_{,}) + \Phi'(SR_1 - RS_1) + \\
\qquad + \Phi_{,}(TR_1 - RT_1) = 0.
\end{cases}
$$

Wir haben auf diese Weise *zwei* Gleichungen bekommen, denen die Function Φ genügen muss. Aber gleichzeitig wissen wir von vornherein, dass, wenn: $F = a$ ein Integral erster Classe ist, nur eine derartige Gleichung bestehen kann. Damit demnach: $F = a$ ein Integral erster Classe sei, müssen die zwei vorhergehenden Gleichungen nothwendig identisch sein, das heisst, bei Benutzung zweier Multiplicatoren λ und μ müssen wir erhalten:

$$
(54)\quad
\begin{cases}
\mu(TF' - T_1 f') + \lambda(S_1 f' - SF' + T_1 f_{,} - TF_{,}) = 0, \\
\mu(TF_{,} - T_1 f_{,}) + \lambda(RF' - R_1 f') = 0, \\
\mu(R_1 f' - RF' + S_1 f_{,} - SF_{,}) + \lambda(RF_{,} - R_1 f_{,}) = 0, \\
\mu(RT_1 - TR_1) + \lambda(SR_1 - RS_1) = 0, \\
\mu(ST_1 - TS_1) + \lambda(TR_1 - RT_1)) = 0.
\end{cases}
$$

Indem wir die beiden letzten Gleichungen der Reihe nach mit μT und λR multipliciren und die eine von der andern abziehen, andrerseits sie mit λ und μ multipliciren und addiren, erhalten wir:

$$
(T_1 R - R_1 T)(R\lambda^2 - S\lambda\mu + T\mu^2) = 0,
$$
$$
S(R_1\lambda^2 + T_1\mu^2) = S_1(R\lambda^2 + T\mu^2).
$$

Die erste dieser Gleichungen verwandelt sich einfach in die Gleichung (46) und sodann liefert die zweite die Gleichung (45). Endlich gehen die drei ersten der Gleichungen (54) in die eine Gleichung (44) über.

Indem wir auf diese Weise von der Betrachtung eines zweiten
Integrals: $\Phi = A$ der Gleichung: $f = 0$ ausgegangen sind, haben wir
zu gleicher Zeit die Gleichungen (44), (45) und (46) gefunden, die
das Integral erster Classe: $F = a$ bestimmen, ferner die mit einander 309
identischen Gleichungen (53), die das Integral: $\Phi = A$ bestimmen und
ausserdem die Gleichungen (52) und (52'), das heisst, die Werthe der
dritten Ableitungen von z.

Wenn das Integral: $\Phi = A$, das augenscheinlich eine willkürliche Function enthält, gefunden ist, so bleibt zur vollständigen Lösung unsrer Hauptaufgabe noch übrig, die Werthe der dritten Ableitungen von z in die Gleichungen (35) einzusetzen und die übrigen drei Integrale dieser Gleichungen zu finden, oder, was ganz dasselbe ist, die zweiten Ableitungen von z aus den Gleichungen: $f = 0$, $F = a$, $\Phi = A$ zu bestimmen und das System (2) zu integriren. Es ist klar, dass, wenn ein Integral erster Classe: $F = a$ mit einer willkürlichen Function bekannt ist, wir dann ein endliches allgemeines Integral mit zwei willkürlichen Functionen finden. Wenn ein Integral: $F = a$ mit einer willkürlichen Constanten bekannt ist, so erhalten wir, wenn wir uns auf eine particuläre Lösung der Gleichung (53), ohne willkürliche Grössen beschränken, schliesslich für z einen Ausdruck mit fünf willkürlichen Constanten, das heisst, ein Lagrangesches vollständiges Integral, das in dem gegenwärtigen Falle im Allgemeinen nicht dieselbe Beschaffenheit haben wird, wie ein vollständiges Integral, das aus einem Integrale erster Ordnung und erster Classe mit drei willkürlichen Constanten gefunden worden ist (§§ 12, 13).

§ 21.

Die Gleichung: $\Phi = A$, die durch Integration der Gleichung (53) gefunden worden ist, wird, allgemein zu reden, ein Integral zweiter Classe der gegebenen Gleichung sein. Sollte sie ein Integral erster Classe sein, so müsste die Function Φ augenscheinlich der Gleichung (53) genügen und zwei Gleichungen ähnlich (44) und (45). Es ist bemerkenswerth, dass, wenn die Systeme, die aus den Gleichungen (44) und (45) erhalten werden und von denen das eine den Werthen λ_1 und μ_1, das andre den Werthen λ_2 und μ_2 entspricht, beide der Integration fähig sind, dass man dann von diesen beiden Integralen das eine als Function F, das andre als Function Φ nehmen kann. In der That, nehmen wir an, dass die Function F den Werthen λ_1 und μ_1 entspricht, so dass:

$$(44') \qquad \lambda_1 f' R_1 + \mu_1 f_, T_1 - \lambda_1 R F' - \mu_1 T F_, = 0,$$

$$(45') \qquad R_1 \lambda_1^2 - S_1 \lambda_1 \mu_1 + T_1 \mu_1^2 = 0,$$

310 so werden wir zeigen, dass die beiden Gleichungen:

$$(44'') \qquad \lambda_2 f' \frac{\partial \Phi}{\partial z''} + \mu_2 f_, \frac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} - \lambda_2 R \Phi' - \mu_2 T \Phi_, = 0,$$

$$(45'') \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z''} \lambda_2^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial z_,'} \lambda_2 \mu_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} \mu_2^2 = 0$$

die Gleichung (53) nach sich ziehen.

Da $\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ und $\frac{\lambda_2}{\mu_2}$ die Wurzeln der Gleichung (46) sind, so haben wir:

$$R \lambda_1 \lambda_2 = T \mu_1 \mu_2$$

und dürfen setzen:

$$\mu_1 = R \lambda_2, \qquad \lambda_1 = T \mu_2.$$

Durch Hinzufügung der Gleichung:

$$R \lambda_1^2 - S \lambda_1 \mu_1 + T \mu_1^2 = 0$$

zu der Gleichung (45′) finden wir zwischen λ_1 und μ_1 zwei Beziehungen, die den beiden letzten Gleichungen (54) ähnlich sind, und bekommen:

$$\mu_1 = S R_1 - R S_1, \qquad \lambda_1 = T R_1 - R T_1.$$

Demnach sind die zwei letzten Glieder der Gleichung (44″) mit den beiden letzten Gliedern der zweiten Gleichung (53) identisch. Wenn wir endlich zu der Gleichung (44″) die mit:

$$\frac{RF' - R_1 f'}{\lambda_2 \mu_2}$$

multiplicirte Gleichung (45″) hinzufügen, so erhalten wir die Gleichung:

$$\lambda_2 \left(f' + \frac{RF' - R_1 f'}{\mu_2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z''} - (RF' - R_1 f') \frac{\partial \Phi}{\partial z_,'} +$$

$$+ \mu_2 \left(f_, + \frac{RF' - R_1 f'}{\lambda_2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_{,,}} - \lambda_2 R \Phi' - \mu_2 T \Phi_, = 0,$$

die mit Hülfe der gefundenen Werthe von λ_2, μ_2, λ_1, μ_1 leicht in die Gleichung (53) übergeführt wird; das aber war zu beweisen.

311 § 22.

Wenn die Aufsuchung von Integralen zweiter Ordnung und erster Classe nicht gelingt, so muss man sich zu den Integralen zweiter Classe wenden. Es ist klar, dass man auf Grund derselben Erwägungen wie in § 15 ganz naturgemäss zu den Integralen dritter Ordnung übergehen kann und wenn es bei dieser neuen Untersuchung nicht gelingt Integrale erster Classe zu finden, so geht man zu den Integralen vierter Ordnung über und so fort.

Betrachten wir allgemein Integrale n^{ter} Ordnung:

$$F(x, y, z, z', z_{,}, z'', \ldots, z^n, z_{,}^{n-1}, z_{,,}^{n-2}, \ldots, z''_{n-2}, z'_{n-1}, z_n) = \alpha.$$

Die Frage nach der Integration von: $f = 0$ erscheint hierbei in der folgenden Gestalt:

Gegeben ist ein System von

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Gleichungen:

$$(55)\quad \begin{cases} dz = z'dx + z_{,}dy, \\ dz' = z''dx + z_{,}'dy, \quad dz_{,} = z_{,}'dx + z_{,,}dy, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dz^{n-1} = z^n dx + z_{,}^{n-1}dy, \quad dz_{,}^{n-2} = z_{,}^{n-1}dx + z_{,,}^{n-2}dy, \\ \qquad \cdots, dz_{n-1} = z'_{n-1}dx + z_n dy, \\ dz^n = z^{n+1}dx + z_{,}^n dy, \quad dz_{,}^{n-1} = z_{,}^n dx + z_{,,}^{n-1}dy, \\ \qquad \cdots, dz_n = z'_n dx + z_{n+1}dy, \end{cases}$$

wo die Coefficienten von dx und dy in der letzten Reihe als Functionen aller übrigen Grössen vorausgesetzt werden. Ausserdem ist gegeben das System der

$$\frac{(n-1)n}{2}$$

Gleichungen:

$$(56)\quad \begin{cases} f(x, y, z, z', z_{,}, z'', z_{,}', z_{,,}) = 0, \qquad 312 \\ f' + Rz''' + Sz_{,}'' + Tz_{,,}' = 0, \quad f_{,} + Rz_{,}'' + Sz_{,,}' + Tz_{,,,} = 0, \\ f'' + Rz^{(4)} + Sz_{,}''' + Tz_{,,}'' = 0, \quad f_{,}' + Rz_{,}''' + Sz_{,,}'' + Tz_{,,,}' = 0, \\ f_{,,} + Rz_{,,}'' + Sz_{,,,}' + Tz_{(4)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n-2)} + Rz^n + Sz_{,}^{n-1} + Tz_{,,}^{n-2} = 0, \quad f_{,}^{(n-3)} + Rz_{,}^{n-1} + Sz_{,,}^{n-2} + \\ \quad + Tz_{,,,}^{n-3} = 0, \cdots, f_{n-2} + Rz''_{n-2} + Sz'_{n-1} + Tz_n = 0, \end{cases}$$

und die Coefficienten der letzten Reihe der Gleichungen (55) sind unter einander durch die n linearen Beziehungen:

$$(57)\quad \begin{cases} f^{(n-1)} + Rz^{n+1} + Sz_{,}^n + Tz_{,,}^{n-1} = 0, \quad f_{,}^{(n-2)} + Rz_{,}^n + Sz_{,,}^{n-1} + \\ \quad + Tz_{,,,}^{n-2} = 0, \ldots, f_{n-1} + Rz''_{n-1} + Sz'_n + Tz_{n+1} = 0 \end{cases}$$

verknüpft. Es wird verlangt, solche Werthe dieser Coefficienten zu finden, die das System (55) integrabel machen, und sodann dieses System wirklich zu integriren.

Bemerken wir hierbei, dass sich jede der Gleichungen (56) auf Grund des entsprechenden Paares von Gleichungen der folgenden Reihe und jede Gleichung der letzten Reihe auf Grund des entsprechenden Paares der Gleichungen (57) als ein particuläres Integral des

Systems (55) erweist, so dass, sobald die unbekannten Coefficienten gefunden sind, nur noch

$$\frac{(n+1)(n+2)-(n-1)n}{2}=2n+1$$

Integrale des Systems (55) zu finden bleiben, die dann zugleich Integrale n^{ter} Ordnung der gegebenen Gleichung: $f=0$ sein werden.

§ 23.

Indem wir uns zur Betrachtung der Integrale n^{ter} Ordnung: $F=a$ wenden, bekommen wir zwei Gleichungen:

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} &F'+\frac{\partial F}{\partial z^n}z^{n+1}+\frac{\partial F}{\partial z_{,}^{n-1}}z_{,}^{n}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial z'_{n-1}}z''_{n-1}+\frac{\partial F}{\partial z_n}z'_n=0,\\ &F_{,}+\frac{\partial F}{\partial z^n}z_{,}^{n}+\frac{\partial F}{\partial z_{,}^{n-1}}z_{,,}^{n-1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial z'_{n-1}}z'_n+\frac{\partial F}{\partial z_n}z_{n+1}=0,\end{aligned}\right.$$

313 und wenn es nicht möglich ist, aus diesen beiden Gleichungen in Verbindung mit den n Gleichungen (57) die $n+2$ Ableitungen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Function z zu bestimmen, so werden wir die Gleichung: $F=a$ ein *Integral erster Classe* nennen, während wir die übrigen Integrale zur zweiten Classe rechnen.

Die Bedingung dafür, dass die Gleichung: $F=a$ ein Integral erster Classe sei, können wir ausdrücken, indem wir annehmen, dass die Summe der Gleichungen (57), die der Reihe nach mit gewissen Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ multiplicirt sind, identisch gleich ist der Summe der Gleichungen (58), diese multiplicirt mit gewissen Multiplicatoren $\lambda', \lambda_{,}$. Diese Bedingung zerfällt in die folgenden $n+3$ Bedingungen

$$(59)\quad \mu_1 f^{(n-1)}+\mu_2 f_{,}^{(n-2)}+\mu_3 f_{,,}^{(n-3)}+\cdots+\mu_{n-1}f'_{n-2}+\mu_n f_{n-1}=\lambda' F'+\lambda_{,}F_{,},$$

$$(60)\quad \left\{\begin{aligned} \mu_1 R &= \lambda'\frac{\partial F}{\partial z^n},\\ \mu_1 S+\mu_2 R &= \lambda'\frac{\partial F}{\partial z_{,}^{n-1}}+\lambda_{,}\frac{\partial F}{\partial z^n},\\ \mu_1 T+\mu_2 S+\mu_3 R &= \lambda'\frac{\partial F}{\partial z_{,,}^{n-2}}+\lambda_{,}\frac{\partial F}{\partial z_{,}^{n-1}},\\ \mu_2 T+\mu_3 S+\mu_4 R &= \lambda'\frac{\partial F}{\partial z_{,,,}^{n-3}}+\lambda_{,}\frac{\partial F}{\partial z_{,,}^{n-2}},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mu_{n-2}T+\mu_{n-1}S+\mu_n R &= \lambda'\frac{\partial F}{\partial z'_{n-1}}+\lambda_{,}\frac{\partial F}{\partial z''_{n-2}},\\ \mu_{n-1}T+\mu_n S &= \lambda'\frac{\partial F}{\partial z_n}+\lambda_{,}\frac{\partial F}{\partial z'_{n-1}},\\ \mu_n T &= \lambda_{,}\frac{\partial F}{\partial z_n}.\end{aligned}\right.$$

Indem wir die $n+2$ Gleichungen (60) der Reihe nach mit:

$$\lambda_,^{n+1},\ -\lambda_,^n\lambda',\ +\lambda_,^{n-1}\lambda'^2,\ -\lambda_,^{n-2}\lambda'^3,\ldots,\lambda_,^2(-\lambda')^{n-1},\ \lambda_,(-\lambda')^n,\ (-\lambda')^{n+1}$$

multipliciren, erhalten wir:

$$(61)\quad (R\lambda_,^2-S\lambda_,\lambda'+T\lambda'^2)\left(\mu_1\lambda_,^{n-1}-\mu_2\lambda_,^{n-2}\lambda'+\mu_3\lambda_,^{n-3}\lambda'^2-\cdots+\right.$$
$$\left.+\mu_n(-\lambda')^{n-1}\right)=0,$$

eine Gleichung, die erfüllt wird, wenn entweder der erste oder der 314
zweite Factor verschwindet. Aber es ist nicht schwer sich zu überzeugen, dass die zweite Annahme unzulässig ist, so dass also die Gleichung (61) übergeht in:

$$(62)\qquad R\lambda_,^2-S\lambda_,\lambda'+T\lambda'^2=0.$$

In der That, wenn der zweite Factor gleich Null ist, so kann eine der darin auftretenden Grössen durch die $n+1$ übrigen ausgedrückt werden, die einstweilen willkürlich bleiben. Statt dessen werden wir alle Grössen μ mit Hülfe von λ', $\lambda_,$ und $n-1$ neuen willkürlichen Grössen ausdrücken, so dass wir durch Wegschaffung dieser letzteren zu der ursprünglichen Gleichung zurückkommen können, wir werden nämlich setzen:

$$\mu_1=\nu_1\lambda',\ \mu_2=\nu_2\lambda'+\nu_1\lambda_,,\ \mu_3=\nu_3\lambda'+\nu_2\lambda_,,\ \ldots,$$
$$\mu_{n-1}=\nu_{n-1}\lambda'+\nu_{n-2}\lambda_,,\ \mu_n=\nu_{n-1}\lambda_,.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichungen (60) verwandeln wir diese in die $n+1$ folgenden von einander unabhängigen:

$$\begin{aligned}
&&&R\nu_1&&=\frac{\partial F}{\partial z^n},\\
&&S\nu_1&+R\nu_2&&=\frac{\partial F}{\partial z_,^{n-1}},\\
T\nu_1&&+S\nu_2&+R\nu_3&&=\frac{\partial F}{\partial z_{,,}^{n-2}},\\
T\nu_2&&+S\nu_3&+R\nu_4&&=\frac{\partial F}{\partial z_{,,,}^{n-3}},\\
&\ldots&&&&\\
T\nu_{n-2}&+S\nu_{n-1}&&&&=\frac{\partial F}{\partial z'_{n-1}},\\
T\nu_{n-1}&&&&&=\frac{\partial F}{\partial z_n}.
\end{aligned}$$

Wenn wir mit dem Buchstaben D das Differential bezeichnen, das unter der Annahme gebildet ist, dass sich nur die n^{ten} Ableitungen von z ändern, so erhalten wir auf Grund der vorhergehenden Gleichungen:

315 $$DF = \nu_1 D(Rz^n + Sz_{\prime}^{n-1} + Tz_{\prime\prime}^{n-2}) + \nu_2 D(Rz_{\prime}^{n-1} + Sz_{\prime\prime}^{n-2} + Tz_{\prime\prime\prime}^{n-3}) + \\ + \cdots + \nu_{n-1} D(Rz''_{n-2} + Sz'_{n-1} + Tz_n),$$

eine Gleichung, die zeigt, dass die n^{ten} Ableitungen von z in die Function F nur in den $n-1$ Combinationen eingehen, die auf der rechten Seite auftreten, so dass die Function F mit Hülfe der Gleichungen (56) auf die $(n-1)^{\text{te}}$ Ordnung zurückgeführt werden kann und also die Gleichung: $F = a$ kein Integral n^{ter} Ordnung ist, was der Voraussetzung widerspricht.

Der Bequemlichkeit wegen werden wir an Stelle von λ' und $\lambda_,$ zwei neue Grössen λ und μ einführen, indem wir setzen:

$$\lambda' = R\lambda, \qquad \lambda_, = T\mu,$$

sodass sich die Gleichung (62) in

$$R\lambda^2 - S\lambda\mu + T\mu^2 = 0 \tag{63}$$

verwandelt. Wir wollen das System (60) auf eine solche Form bringen, bei der jede Gleichung nur eine Ableitung von F enthält. Die erste Gleichung genügt dieser Bedingung. Indem wir die beiden ersten Gleichungen der Reihe nach mit: $-\lambda_,$, λ' multipliciren und addiren, sodann die drei ersten Gleichungen mit: $\lambda_,^2$, $-\lambda_,\lambda'$, λ'^2 multipliciren und addiren, sodann die vier ersten Gleichungen mit: $-\lambda_,^3$, $\lambda_,^2\lambda'$, $-\lambda_,\lambda'^2$, λ'^3 multipliciren und addiren u. s. f., erhalten wir ein neues System, das die angegebene Bedingung erfüllt und das mit Hülfe der Gleichung (62) schliesslich in die folgende einfache Gestalt übergeht:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda\,\frac{\partial F}{\partial z^n} &= \mu_1, \\ \mu\lambda\,\frac{\partial F}{\partial z_{\prime}^{n-1}} &= \mu_1\lambda + \mu_2\mu, \\ \mu\lambda\,\frac{\partial F}{\partial z_{\prime\prime}^{n-2}} &= \mu_2\lambda + \mu_3\mu, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu\lambda\,\frac{\partial F}{\partial z'_{n-1}} &= \mu_{n-1}\lambda + \mu_n\mu, \\ \mu\,\frac{\partial F}{\partial z_n} &= \mu_n. \end{aligned}\right. \tag{64}$$

316 Dieses System ersetzt zusammen mit der Gleichung (63) das System (60) vollständig. Es ergiebt leicht die Werthe von

$$\mu_1, \ldots \mu_n$$

und ausserdem eine von

$$\mu_1, \ldots \mu_n$$

freie Gleichung. Diese letztere lautet:

$$(65)\quad \begin{cases} \lambda^n \dfrac{\partial F}{\partial z^n} - \lambda^{n-1}\mu \dfrac{\partial F}{\partial z_{,}^{n-1}} + \lambda^{n-2}\mu^2 \dfrac{\partial F}{\partial z_{,,}^{n-2}} - \cdots + \\ \qquad\qquad + \lambda(-\mu)^{n-1} \dfrac{\partial F}{\partial z'_{n-1}} + (-\mu)^n \dfrac{\partial F}{\partial z_n} = 0; \end{cases}$$

indem wir noch die Werthe von $\mu_1, \ldots \mu_n$ in die Gleichung (59) einsetzen und der Kürze wegen den Ausdruck:

$$\mu^{n-i} f_{i-1}^{n-i} - \mu^{n-i-1} \lambda f_i^{n-i-1} + \mu^{n-i-2} \lambda^2 f_{i+1}^{n-i-2} - \cdots + (-\lambda)^{n-i} f_{n-1}$$

mit s_i bezeichnen, erhalten wir:

$$(66)\quad \begin{cases} \lambda \left\{ s_1 \dfrac{\partial F}{\partial z^n} + s_2 \mu \dfrac{\partial F}{\partial z_{,}^{n-1}} + s_3 \mu^2 \dfrac{\partial F}{\partial z_{,,}^{n-2}} + \cdots + s_n \mu^{n-1} \dfrac{\partial F}{\partial z'_{n-1}} \right\} = \\ \qquad\qquad = \mu^{n-1}(R\lambda F' + T\mu F_{,}). \end{cases}$$

Auf diese Weise wird die Aufsuchung der Integrale n^{ter} Ordnung und erster Classe schliesslich auf die Gleichungen (63), (65) und (66) zurückgeführt. Für $n = 2$ ergeben diese Gleichungen wieder die Gleichungen (46), (45) und (44).

§ 24.

Die Gleichung (63) liefert im Allgemeinen zwei Werthepaare: λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, denen zwei verschiedene Gleichungensysteme (65) und (66) entsprechen werden.

Es ist nicht schwer, sich zu überzeugen, dass diese beiden Gleichungen identisch erfüllt werden, wenn man für F die linken Seiten aller der Gleichungen (56) einsetzt, die Ableitungen n^{ter} Ordnung von z enthalten. Ausser diesen $n - 1$ particulären Integralen kann die Gleichung (65) augenscheinlich nur noch *ein einziges* Integral mit den n^{ten} Ableitungen von z besitzen, und wenn wir das dieser Gleichung entsprechende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen hinschreiben, so bemerken wir leicht, dass man, ähnlich wie in § 18, als neues Integral ($F = a$) annehmen kann:

$$\mu z'_{n-1} + \lambda z_n - \varphi(x, y, z, \ldots, z_{n-1}),$$ 317

wo φ eine willkürliche Function von x, y, z und von den Ableitungen *bis höchstens zur* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung* bezeichnet.

Indem wir den Werth von F in die Gleichung (66) einsetzen und die Ableitungen n^{ter} Ordnung von z mit Hülfe der Gleichungen (56) und: $F = a$ wegschaffen, gelangen wir zu einem Ergebniss, das nur eine Ableitung n^{ter} Ordnung von z enthält und das in zwei Gleichungen zerfällt, aus denen wir unter Benutzung der Gleichungen (56) die Function φ bestimmen müssen.

Auf diese Weise können wir uns entweder überzeugen, dass es unmöglich ist φ zu finden und dass also keine Integrale n^{ter} Ordnung und erster Classe vorhanden sind, oder wir können einen Ausdruck für φ und folglich auch für das Integral n^{ter} Ordnung finden, der eine willkürliche Constante oder eine willkürliche Function enthält.

Sobald ein Integral erster Classe bekannt ist, bietet die fernere Lösung der Aufgabe keine Schwierigkeiten. Wenn wir mit: $\Phi = A$ ein neues Integral des Systems (55) bezeichnen, so ist es nicht schwer, eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zu finden, der die Function Φ genügt. Entsprechend den Gleichungen (58) haben wir:

$$(67)\qquad \begin{cases} \Phi' + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z^n} z^{n+1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,}^{n-1}} z_{,}^{n} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_n} z_n' = 0, \\ \Phi_{,} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z^n} z_{,}^{n} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_{,}^{n-1}} z_{,}^{n-1} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z_n} z_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen in Verbindung mit der ersten der Gleichungen (58) und mit den Gleichungen (57), nach Ausschluss der letzten, liefert die Werthe von $z^{n+1}, z_{,}^{n}, \ldots z_n'$. Sodann liefert die zweite der Gleichungen (67) in Verbindung mit der zweiten der Gleichungen (58) und mit allen Gleichungen (57) nach Ausschluss der ersten ihrerseits die Werthe von $z_{,}^{n}, z_{,,}^{n-1}, \ldots, z_{n+1}$. Indem wir die auf dem einen und auf dem andern Wege gefundenen Werthe von $z_{,}^{n}, z_{,,}^{n-1}, \ldots z_n'$ einander gleichsetzen, entstehen n Gleichungen, die in Bezug auf die Ableitungen der Function Φ linear sind und die in eine einzige Gleichung übergehen, die noch zu integriren ist.

318 Wenn jedes der Systeme, die aus den Gleichungen (65) und (66) für λ_1 und μ_1, λ_2 und μ_2 hervorgehen, eine Lösung zulässt, so können diese beiden Lösungen als die Functionen F und Φ genommen werden.

Können wir ein Integral erster Classe mit nur einer willkürlichen Constanten finden, so erhalten wir, indem wir uns auf eine particuläre Lösung für Φ beschränken und dann das System (55) integriren, einen Ausdruck für z mit $2n+1$ willkürlichen Constanten. Ist ein Integral erster Classe mit einer willkürlichen Function bekannt, so können wir noch ein zweites Integral: $\Phi = A$ mit einer willkürlichen Function finden und die Integration des Systems (55) wird für z einen Ausdruck mit zwei willkürlichen Functionen und mit $2n-1$ willkürlichen Constanten liefern, die sich *möglicherweise* mit den willkürlichen Functionen vereinigen.

§ 25.

Durch die vorhergehenden Untersuchungen wird augenscheinlich die Frage nach der Integration simultaner Gleichungen vollständig beantwortet, wenn die eine unter diesen von der zweiten Ordnung ist, wobei die übrigen als Integrale dieser Gleichung betrachtet werden müssen.

Wir machen schliesslich noch eine Bemerkung.

Die vorhergehenden Untersuchungen sind unter der Annahme durchgeführt, dass R und T nicht gleich Null sind. Diese Annahme lässt sich immer verwirklichen, indem man die unabhängigen Veränderlichen transformirt, falls die Gleichung: $f=0$ z'' oder $z_{,,}$ nicht enthalten sollte. Aber auch ohne zu einer solchen Umformung der gegebenen Gleichung: $f=0$ zu greifen, kann man aus den Gleichungen (59) und (60) ohne Schwierigkeit Formeln ableiten, die den Fällen: $R=0$ oder: $T=0$ oder: $R=0$ und: $T=0$ entsprechen. Wir wollen erwähnen, dass man in diesem letzteren Falle entweder $\frac{\partial F}{\partial z^{n}}=0$ annehmen muss oder $\frac{\partial F}{\partial z_{n}}=0$.

Zur Theorie der linearen Substitutionen. II.

Von

Alfred Loewy.

In einer unter dem gleichen Titel in diesen Annalen (Bd. 48, p. 97 ff.) veröffentlichten Arbeit, welche ich im Folgenden mit I citire, habe ich folgendes Theorem (p. 106) aufgestellt: *Führen zwei ähnliche lineare Substitutionen U_1 und U_2 dieselbe quadratische Form S von nicht verschwindender Determinante kogredient in sich über, so können sie durch eine Substitution R, welche auch ebendieselbe quadratische Form S in sich transformirt, in einander übergeführt werden.*

$$U_1 = R U_2 R^{-1}.$$

Der Zweck der folgenden Zeilen ist es, einen neuen Beweis dieses Satzes zu geben. Die Methode dieses Beweises gilt in unveränderter Weise wie für die symmetrischen so auch für die *alternirenden* bilinearen Formen. Infolge dessen können genau analoge Betrachtungen, wie wir sie in I, § 4 für die symmetrischen Formen anstellten, jetzt auch für die alternirenden Formen durchgeführt werden. Hierdurch wird eine in Herrn Tabers Arbeit „*On the Automorphic Linear Transformation of an Alternate Bilinear Form*"*) offen gelassene Frage, nämlich nach den nothwendigen und zugleich hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Substitution, welche eine alternirende Form von nicht verschwindender Determinante kogredient in sich überführt, als Quadrat einer linearen Substitution, welche dieselbe alternirende Form in sich überführt, darstellbar ist, zur Entscheidung gebracht.

Seien U_1 und U_2 die Symbole für zwei lineare Substitutionen, welche beide dieselbe beliebige symmetrische [alternirende] bilineare Form S von nicht verschwindender Determinante kogredient in sich transformiren; es sei:

$$U_1' S U_1 = S; \quad U_2' S U_2 = S.$$

---

*) Math. Annalen, Bd. 46, Heft 4.

Da U_1 und U_2 nach Voraussetzung ähnlich sind, so giebt es eine Substitution P, dass:

$$U_2 = P^{-1} U_1 P$$

wird. Setzt man diesen Wert des U_2, sowie

$$U_2' = P' U_1' (P^{-1})'$$

in die Gleichung:

$$S = U_2' S U_2,$$

so folgt:

$$S = P' U_1' (P^{-1})' . S . P^{-1} U_1 P.$$

Führt man:

$$U_1' = S U_1^{-1} S^{-1}$$

ein, so ergiebt sich:

$$S = P' S U_1^{-1} S^{-1} . (P^{-1})' S P^{-1} U_1 P.$$

Hieraus folgt:

$$U_1 (P S^{-1} P' S) = (P S^{-1} P' S) . U_1 .$$

Bedeutet nun:

$$\chi (P S^{-1} P' S)$$

eine beliebige ganze Funktion von:

$$P S^{-1} P' S,$$

so wird:

$$\chi (P S^{-1} P' S) U_1 = U_1 \chi (P S^{-1} P' S).$$

Führen wir mit Herrn Frobenius*) auch gebrochene Potenzen linearer Substitutionen ein, so ist die mit

$$(P S^{-1} P' S)^{\frac{1}{2}}$$

bezeichnete Form auch eine ganze Funktion von

$$P S^{-1} P' S;$$

mithin wird:

$$(P S^{-1} P' S)^{\frac{1}{2}} U_1 = U_1 (P S^{-1} P' S)^{\frac{1}{2}}.$$

Infolge dessen ergiebt sich, wenn

$$R = (P S^{-1} P' S)^{-\frac{1}{2}} P$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} R^{-1} U_1 R &= P^{-1} . (P S^{-1} P' S)^{\frac{1}{2}} . U_1 (P S^{-1} P' S)^{-\frac{1}{2}} P \\ &= P^{-1} U_1 P = U_2, \\ U_1 &= R U_2 R^{-1}. \end{aligned}$$

Ich behaupte nun, die Substitution:

$$R = (P S^{-1} P' S)^{-\frac{1}{2}} P$$

*) Frobenius, Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie. 16. Januar 1896. § 1.

führt bei *beliebiger* Wahl von P die symmetrische [alternirende] Form S cogredient in sich über; denn:

$$\begin{aligned}R'SR &= P'(SPS^{-1}P')^{-\frac{1}{2}}S(PS^{-1}P'S)^{-\frac{1}{2}}P,\\ &= (P'SPS^{-1})^{-\frac{1}{2}}\,.\,P'SP(S^{-1}P'SP)^{-\frac{1}{2}}\\ &= (P'SPS^{-1})^{-\frac{1}{2}}\,.\,(P'SPS^{-1})\,.\,S(S^{-1}P'SP)^{-\frac{1}{2}}\\ &= (P'SPS^{-1})^{\frac{1}{2}}\,.\,(P'SPS^{-1})^{-\frac{1}{2}}\,.\,S\\ &= S.\end{aligned}$$

Hiermit ist unser Satz erwiesen. In dem Specialfall $S = E$ hat Herr Frobenius*):

$$(PP')^{-\frac{1}{2}}P$$

als orthogonale Substitution angegeben.

Wenden wir uns nun zur ausschliesslichen Betrachtung der *alternirenden* Formen von nicht verschwindender Determinante. Es gilt zunächst folgender Satz:

*Bildet man das Quadrat von allen nicht singulären Substitutionen, welche von der Form**):*

$$(S+Y)^{-1}(S-Y)$$

sind, wo Y eine beliebige symmetrische Form ist, und welche die gegebene alternirende Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich überführen, so erhält man hierdurch von den singulären Substitutionen, die S in sich überführen, ausnahmslos alle diejenigen, bei denen die charakteristische Function die Elementartheiler $(\varrho+1)^{\delta}$ paarweise besitzt.

Der Beweis ist genau analog wie in I, § 4, p. 107 und 108 für symmetrische Formen zu führen. Es gelten bei alternirenden Formen folgende Thatsachen: Ist ein Product von Elementartheilern der Art vorgegeben, dass diese paarweise von gleichem Grade sind und für reciproke Werthe Null werden, mit Ausnahme derer, welche für den Werth $+1$ oder -1 verschwinden und einen geraden Exponenten haben, so giebt es stets eine Substitution P_1 mit den vorgeschriebenen Elementartheilern der charakteristischen Function, welche eine alternirende Form S_1 von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich überführt***). Ferner sind auch alle alternirenden Formen von nicht verschwindender Determinante congruent.

*) Frobenius, a. a. O. § 3.

**) Vgl. etwa Taber a. a. O. § 1 in Bezug auf diese Formel.

***) Frobenius, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 84, p. 41.

Da unser Beweis auch für $\delta = 0$ gilt, so finden wir auf neue Art das bereits von Herrn Taber*) ausgesprochene Resultat:

Die nicht singulären Substitutionen, welche von der Form:

$$(S+Y)^{-1}(S-Y)$$

sind, können ausnahmslos auch als Quadrate dargestellt werden.

Herr Taber**) theilt die Gesammtheit der linearen Substitutionen, welche eine alternirende Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich überführen und welche eine Gruppe bilden, in zwei Arten ein. Er nennt eine Substitution von der *ersten* oder *zweiten* Art, je nachdem dieselbe als Quadrat einer linearen Substitution der Gruppe darstellbar ist oder sich dieser Darstellung entzieht.

Nach I, § 3 sind keine weiteren Substitutionen als diejenigen, deren charakteristische Function die Elementartheiler $(\varrho+1)^\delta$ paarweise besitzt, [hierbei kann auch $\delta = 0$ sein, d. h. die charakteristische Function hat keinen Elementartheiler $(\varrho+1)^\delta$ und wir haben eine nicht singuläre Substitution] als Quadrate nicht singulärer Substitutionen darstellbar.

Man zeigt auf dieselbe Art wie in I, § 3, dass durch Quadriren von singulären Substitutionen dieser Kreis auch nicht erweitert werden kann. Hieraus folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine lineare Substitution, welche eine alternirende Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich überführt, nach der Taberschen Bezeichnung von der ersten Art ist, lautet: die charakteristische Function der linearen Substitutionen muss die Elementartheiler der Form $(\varrho+1)^\delta$ paarweise besitzen.

Ferner gelten folgende Sätze:

Durch das negative Quadrat von $(S+Y)^{-1}(S-Y)$ werden alle singulären Substitutionen dargestellt, welche die alternirende Form S in sich überführen und deren charakteristische Function die Elementartheiler der Form $(\varrho-1)^\gamma$ paarweise besitzt.

Das zuletzt angeführte Resultat der Darstellung als negatives Quadrat gilt auch für $\gamma = 0$; diese Substitutionen, welche Herr Frobenius in seiner grundlegenden Arbeit***) in der Form:

$$(S+Y)^{-1}(Y-S)$$

als Normaltypus angiebt und welche wir auch nach unserer in I angewandten Terminologie als nicht singuläre Substitutionen bezeichnen, können nach der Taber'schen Bezeichnung von der zweiten Art sein; dies tritt ein, wenn die charakteristische Function der Substitution

*) Taber, a. a. O. § 7.

**) Taber, a. a. O. § 1 und § 7.

***) Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 84, p. 37.

einen nicht paarweise auftretenden Elementartheiler $(\varrho + 1)^\alpha$, wo $\alpha > 1$ ist, besitzt. [$\alpha = 1$ ist unmöglich, denn dann würde der Elementartheiler $(\varrho + 1)$ nach dem Frobenius'schen Fundamentalsatze*) paarweise auftreten.]

Mit unseren Hilfsmitteln beweist man auf neue Art den bereits von Herrn Taber ausgesprochenen Satz**):

Jede Substitution, welche eine alternirende Form S von nicht verschwindender Determinante cogredient in sich überführt, ist stets als $2m + 1^{\text{te}}$ Potenz einer Substitution, welche auch S in sich transformirt, darstellbar; m kann hierbei jeden beliebigen ganzzahligen Wert annehmen.

Rawitsch, im August 1896.

*) Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 84, p. 41.

**) Taber, a. a. O. § 7.

In meiner Arbeit: I (Bd. 48) ist folgender Druckfehler zu verbessern:
p. 104 Zeile 14 lies: $-V + \varrho E$ statt $V + \varrho E$.

Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung. I.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

Die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1x + b_1)\frac{dy}{dx} + (a_2x + b_2)y = 0$$

sei unter der Voraussetzung, dass die Gleichung $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$ zwei verschiedene Wurzeln besitzt, auf die Form gebracht:

$$\text{(A)} \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda_1 + \lambda_2 + 2)\frac{dy}{dx} + \big(x + (\lambda_1 - \lambda_2)i\big)y = 0^{*}),$$

wobei der Einfachheit halber ganzzahlige Werthe von λ_1, λ_2 und $\lambda_1 + \lambda_2$ ausgeschlossen seien. Die Differentialgleichung (A) besitzt zwei linear unabhängige Integrale

$$y_1 = G_1(x)$$
$$y_2 = x^{-\lambda_1-\lambda_2-1}G_2(x),$$

wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ ganze transcendente Functionen sind. Zweck des Folgenden ist die *Untersuchung des Verhaltens der Integrale von* (A) *in der Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ unter Benutzung der divergenten Reihen*

---

*) Dies wird erreicht durch die Substitution

$$y = e^{-\frac{a_1}{2}x}y', \quad x = \frac{2x'}{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}.$$

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = n - \frac{1}{2}$ ist (A) die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (2n+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

welche aus der Bessel'schen Differentialgleichung

$$\frac{d^2J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)J = 0$$

durch die Substitution $J = x^n y$ hervorgeht.

$$S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right)$$

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\right),$$

durch welche die Differentialgleichung formell befriedigt wird.

Die Bedeutung, welche diesen Reihen trotz ihrer Divergenz zukommt, wurde zunächst im Specialfall der Bessel'schen Differentialgleichung untersucht*); namentlich sind aber die Untersuchungen von Poincaré**) über die asymptotische Darstellung der Integrale allgemeinerer linearer Differentialgleichungen durch die Thomé'schen Normalreihen hervorzuheben***).

Ich möchte zunächst zu den im Specialfall der Bessel'schen Functionen am weitesten durchgeführten Entwickelungen†) einige Ergänzungen hinzufügen, wobei ich das Ziel verfolge, das Verhalten der Integrale möglichst in der *ganzen Umgebung* der singulären Stelle $x = \infty$ zu untersuchen; ich ziehe jedoch vor, gleich die allgemeinere Differentialgleichung (A) zu nehmen, weil die aus der Bessel'schen Differentialgleichung hervorgehenden Reihen S_1, S_2 wegen der Uebereinstimmung der Potenzen $x^{-\lambda_1-1}$, $x^{-\lambda_2-1}$ mit Rücksicht auf die spätere Verwendung dieser Reihen zu speciell sind.

Der vorliegende erste Theil hat hauptsächlich den Zweck, die Grundlage für die im zweiten Theil zu behandelnden Anwendungen der asymptotischen Darstellungen zu liefern; dabei handelt es sich namentlich um die Lage der Nullstellen der Integrale der Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ und damit zusammenhängende Untersuchungen (z. B. über das Geschlecht der ganzen transcendenten Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$).

§ 1.

Die Differentialgleichung (A) wird durch das Integral

$$y = \int_{l} (z - i)^{\lambda_1} (z + i)^{\lambda_2} e^{xz} dz$$

---

*) Poisson, Journ. de l'Éc. Pol., cah. 19. — Lipschitz, Crelle's Journ. Bd. 59. — Hankel, Math. Ann. Bd. 1. — Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III (1887). — Weber, Math. Ann. Bd. 37.

**) Poincaré, Amer. Journ. Bd. 7, Act. math. Bd. 8. — In Betreff des Rechnens mit asymptotischen Reihen sehe man auch Poincaré, les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Bd. II. — Auch die Untersuchungen von Kneser über gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (Crelle's Journ. Bd. 116 und 117) gehören hierher.

***) Dass auch für nicht lineare Differentialgleichungen divergente Reihen zur asymptotischen Darstellung der Integrale benutzt werden können, zeige ich in Aufsätzen, welche demnächst in Crelle's Journal erscheinen.

†) Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III (1887), S. 253 ff.

befriedigt, wenn der Integrationsweg l so gewählt wird, dass

$$\int\limits_{l} d\left[(z-i)^{\lambda_1+1}(z+i)^{\lambda_2+1}e^{zx}\right] = 0$$

ist*). Wir betrachten zunächst die beiden Integrale

$$\eta_1 = \int\limits_{l_1} (z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2}e^{zx}\,dz \tag{1}$$

$$\eta_2 = \int\limits_{l_2} (z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2}e^{zx}\,dz; \tag{2}$$

l_1 (l_2) besteht aus der Geraden $G = \infty p$, welche mit der positiven reellen Axe den Winkel $\pi - \arg x$ bildet, einem in positivem Sinn durchlaufenen Kreis C mit dem kleinen Radius r um den Punkt $z = i$ (bezw. $z = -i$) und der Geraden $G' = p\,\infty$**). Wir untersuchen das Verhalten von η_1 und η_2 für grosse Werthe von $|x|$, indem wir die in Picard's Traité d'Analyse, Bd. III, S. 375 ff. im Anschluss an die citirten Arbeiten Poincaré's gegebene Darstellung, welche sich allerdings auf eine allgemeinere Differentialgleichung bezieht, für unsere Zwecke ergänzen***).

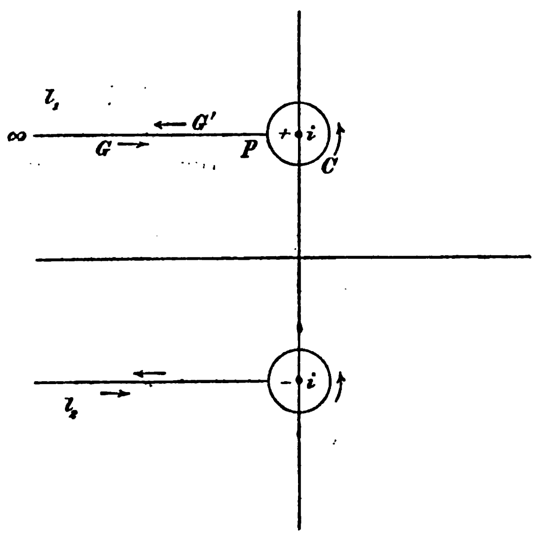


Fig. 1.

Um zunächst η_1 für reelle positive Werthe von x ($\arg x = 0$) zu erhalten, nehmen wir den geradlinigen Theil des Integrationsweges l_1 parallel zur reellen Axe an, und zwar von der linken Seite her aus dem Unendlichen kommend. Die Werthe der vieldeutigen Ausdrücke $(z-i)^{\lambda_1}$, $(z+i)^{\lambda_2}$ seien dadurch bestimmt, dass am Anfang des Weges l_1 im Unendlichen $\arg(z-i) = \pi$, $\arg(z+i) = \pi$†) angenommen wird. Das Integral (1) stellt, ohne dass der zuletzt beschriebene

*) Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III, S. 253 ff.

**) In Fig. 1 sind die Integrationswege l_1, l_2 für $\arg x = 0$ dargestellt.

***) Man sieht, dass auch ein Theil der folgenden auf die Differentialgleichung (A) bezüglichen Entwickelungen allgemeinere Gültigkeit besitzt.

†) $\arg a$ bedeutet das Argument φ der complexen Zahl $a = re^{i\varphi}$.

Integrationsweg geändert wird, die Function η_1 dar, so lange $\arg x$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Zur Fortsetzung dieser Function drehen wir den geradlinigen Theil des Integrationsweges l_1 in beiderlei Sinn, so weit es ohne Durchgang durch den Punkt $z = -i$ möglich ist. Dabei kann $\arg(z-i)$ sowie $\arg(z+i)$ am Anfang von l_1 zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ variiren. Für $\arg(z-i) = \arg(z+i) = \omega$ stellt das Integral (1) die Function η_1 für

$$\frac{\pi}{2} - \omega < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \omega$$

dar. Wenn sich also ω zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ bewegt, so ist η_1 für

$$-\pi < \arg x < 2\pi$$

dargestellt. Man kann also, mit reellen positiven Werthen von x beginnend, die Veränderliche x nahezu eine halbe Umdrehung im negativen Sinn und nahezu eine volle Umdrehung im positiven Sinn ausführen lassen, ohne dass die Gestalt des Integrationsweges l_1 geändert werden muss (abgesehen von der Richtung des gradlinigen Theiles).

Wir nehmen, unter δ eine beliebig kleine positive Grösse verstehend, $\omega = \arg(z-i) = \arg(z+i)$ am Anfang von l_1 zwischen $\frac{-\pi+\delta}{2}$ und $\frac{3\pi-\delta}{2}$ und lassen $\arg x$ von $\pi - \omega$ nach beiderlei Richtung höchstens um $\frac{\pi-\delta}{2}$ abweichen, so dass die Function η_1 durch die Formel (1) für Argumente von x zwischen $-\pi+\delta$ und $2\pi-\delta$ dargestellt ist.

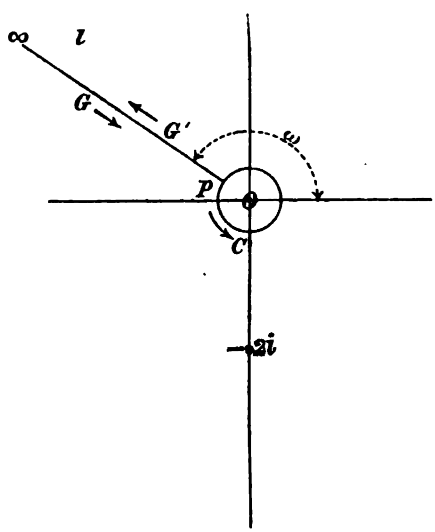


Fig. 2.

Setzt man in (1) z an Stelle von $z-i$, so hat man

$$(3)\quad \eta_1 = e^{ix}\int_l z^{\lambda_1}(z+2i)^{\lambda_2} e^{zx}\,dz$$

mit dem in Fig. 2 angegebenen Integrationsweg l (aus den Theilen G, C, G' bestehend), an dessen Anfang im Unendlichen jetzt $\arg z = \omega$, $\arg(z+2i) = \omega$ ist. Im Anfangspunkt p des Kreises C, dessen Radius r jedenfalls kleiner als 1 sein soll, ist $\arg z = \omega$, $\arg(z+2i)$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$. Für $|z| < 1$ ist

$$(z+2i)^{\lambda_2} = (2i)^{\lambda_2}\left(1+\frac{z}{2i}\right)^{\lambda_2}\,{}^{*)}$$
$$= \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 z + \mathsf{A}_2 z^2 + \cdots,$$

wo

(4) $$\mathsf{A}_\mu = \frac{\Gamma(\lambda_2+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\lambda_2-\mu+1)} \cdot (2i)^{\lambda_2-\mu}; \quad \mathsf{A}_0 = (2i)^{\lambda_2}$$

gesetzt ist. Da indessen die Binomialreihe nicht auf dem ganzen Integrationsweg l convergirt, so setzen wir

(5) $$(z+2i)^{\lambda_2} = \mathsf{A}_0 + \mathsf{A}_1 z + \cdots + \mathsf{A}_n z^n + R_n;$$

auf dem geradlinigen Theil G von l setzen wir einfach

$$R_n = (z+2i)^{\lambda_2} - \sum_{\mu=0}^{n} \mathsf{A}_\mu z^\mu;$$

da zwei positive Grössen g und ϱ so vorhanden sind, dass

$$|\mathsf{A}_\mu| < g\varrho^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, so ist auf dem Kreis C

$$|R_n| \leqq \sum_{\mu=n+1}^{\infty} |\mathsf{A}_\mu| \cdot |z|^\mu < \sum_{\mu=n+1}^{\infty} g\varrho^\mu |z|^\mu = \frac{g\varrho^{n+1}}{1-r\varrho}|z|^{n+1},$$

wenn $r\varrho < 1$ angenommen wird.

Wir berechnen

$$\eta_1 e^{-ix} x^{\lambda_1+1} = x^{\lambda_1+1}\int_l z^{\lambda_1}(z+2i)^{\lambda_2} e^{zx}\,dz = \sum_{\mu=0}^{n} \mathsf{A}_\mu \cdot x^{\lambda_1+1}\int_l z^{\lambda_1+\mu} e^{zx}\,dz$$
$$+ x^{\lambda_1+1}\int_l R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\,dz.$$

Die Substitution $xz = -y$ ergiebt

$$x^{\lambda_1+1}\int_l z^{\lambda_1+\mu} e^{zx}\,dz = \frac{(-1)^{\lambda_1+\mu+1}}{x^\mu}\int_L y^{\lambda_1+\mu} e^{-y}\,dy\ {}^{**)};$$

der Integrationsweg L, welcher aus l durch die Substitution $xz = -y$ hervorgeht, besteht aus der Geraden $\mathfrak{G} = \infty\mathfrak{p}$, an deren Anfang $\arg y = \vartheta = \arg x + \omega - \pi$ ist, dem Kreis $\mathfrak{C}$ mit dem Radius $r|x|$ um $y = 0$ und der Geraden $\mathfrak{G}' = \mathfrak{p}\infty$ (Fig. 3). Es ist

$$\frac{-\pi+\delta}{2} < \vartheta < \frac{\pi-\delta}{2},$$

---

*) Bei den hier auftretenden Potenzen von $2i$ ist $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ anzunehmen; dann ist auf dem Kreis C $\arg\left(1+\frac{z}{2i}\right)$ nahezu gleich Null, d. h. es ist derjenige Werth der Potenz $\left(1+\frac{z}{2i}\right)^{\lambda_2}$ zu nehmen, welchen die Binomialreihe geliefert hat.

**) Hierbei ist $\arg(-1) = \pi$ angenommen.

da arg x von $\pi - \omega$ nach beiderlei Richtung höchstens um $\frac{\pi - \delta}{2}$ abweichen sollte. Wir haben*)

$$\int_L y^{\lambda_1+\mu} e^{-y}\, dy = (e^{2\pi i \lambda_1} - 1)\,\Gamma(\lambda_1 + \mu + 1),$$

da der Integrationsweg L durch einen Weg ersetzt werden kann, welcher mit arg $y = 0$ aus dem Unendlichen kommt, den Punkt $y = 0$ umschliesst und längs der positiven reellen Axe in's Unendliche geht.

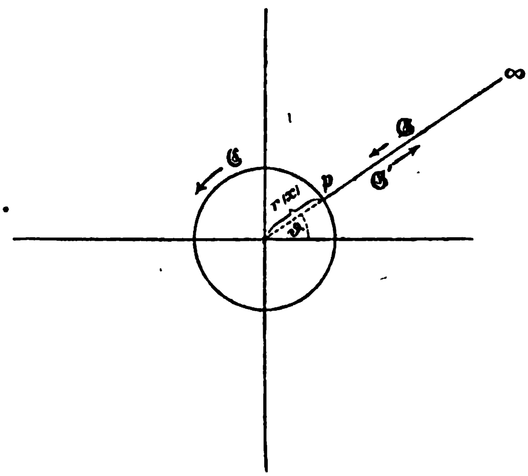


Fig. 3.

Zur Bestimmung von

$$\alpha_n = x^{\lambda_1+n+1} \int_l R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz \tag{6}$$

zerlegen wir den Integrationsweg l in den kreisförmigen Theil C und die geradlinigen Theile G, G'. Wir haben zunächst

$$\begin{aligned} \alpha_n' &= x^{\lambda_1+n+1} \int_C R_n(z)\,.\, z^{\lambda_1} e^{zx}\, dz \\ &= (-1)^{\lambda_1+1} x^n \int_{\mathfrak{C}} R_n\left(-\frac{y}{x}\right) \cdot y^{\lambda_1} e^{-y}\, dy, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} |\alpha_n'| &< c\,.\,|x|^n \int_{\mathfrak{C}} \frac{g\varrho^{n+1}}{1 - r\varrho}\, \frac{|y|^{n+1}}{|x|^{n+1}}\, |y^{\lambda_1} e^{-y}\, dy| \text{ **)} \\ &= \frac{c}{|x|}\, \frac{g\varrho^{n+1}}{1 - r\varrho} \int_{\mathfrak{C}} |y^{\lambda_1+n+1} e^{-y}\, dy| \\ &< \frac{c}{|x|}\, \frac{g\varrho^{n+1}}{1 - r\varrho} \int_L |y^{\lambda_1+n+1} e^{-y}\, dy|\,; \end{aligned}$$

*) Jordan, Cours d'Analyse, Bd. III, S. 257.

**) Dabei ist $c \geqq |(-1)^{\lambda_1}|$.

das letzte Integral liegt aber für alle Werthe von ϑ zwischen $\frac{-\pi+\delta}{2}$ und $\frac{\pi-\delta}{2}$ unter einer bestimmten endlichen Grenze. Nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε lässt sich also eine positive Grösse R so bestimmen, dass für $|x| > R$ $|\alpha_n'| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist, welchen Werth zwischen $-\pi+\delta$ und $2\pi-\delta$ auch das Argument von x haben mag, mit anderen Worten, α_n' convergirt für $\lim |x| = \infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi+\delta$ und $2\pi-\delta$.

Wir betrachten ferner

$$\alpha_n'' = x^{\lambda_1+n+1} \int_{\mathfrak{G}} R_n z^{\lambda_1} e^{zx} dz,$$

wo

$$R_n = (z+2i)^{\lambda_2} - \sum_{\mu=0}^{n} \mathsf{A}_\mu z^\mu$$

ist. Es ist eine positive Grösse h so vorhanden, dass für

$$|z| > r, \quad \frac{-\pi+\delta}{2} < \arg z < \frac{3\pi-\delta}{2}$$

$$\left| \frac{\lambda_1 \log z + \lambda_2 \log (z+2i)}{z} \right| < h,$$

also

$$|z^{\lambda_1}(z+2i)^{\lambda_2}| < e^{h|z|}$$

ist. Wenn $\arg x = \varphi$ von $\pi - \omega$ höchstens um $\frac{\pi-\delta}{2}$ abweicht, ist

$$|e^{zx}| = e^{|z|\,|x| \cos(\omega+\varphi)} < e^{-|z|\,|x| \sin\frac{\delta}{2}},$$

also

$$\left| \int_{\mathfrak{G}} z^{\lambda_1}(z+2i)^{\lambda_2} e^{zx} dz \right| < \int_r^\infty e^{-\left(|x| \sin\frac{\delta}{2} - h\right)|z|} \cdot d|z|$$

$$= \frac{e^{-\left(|x| \sin\frac{\delta}{2} - h\right) r}}{|x| \sin\frac{\delta}{2} - h}.$$

Für $\mu = 0, 1, \ldots n$ ist

$$x^{\lambda_1+n+1} \int_{\mathfrak{G}} z^{\lambda_1+\mu} e^{zx} dz = (-1)^{\lambda_1+\mu+1} x^{n-\mu} \int_{\mathfrak{S}} y^{\lambda_1+\mu} e^{-y} dy.$$

Die Substitution $y = te^{i\vartheta}$ ergiebt dafür

$$(-1)^{\lambda_1+\mu+1} x^{n-\mu} \cdot e^{i(\lambda_1+\mu+1)\vartheta} \int_{r|x|}^{\infty} t^{\lambda_1+\mu} e^{-t(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)} dt$$

mit einem absoluten Betrag kleiner als

$$k|x|^{n-\mu}\int\limits_{r|x|}^{\infty} t^{\Re(\lambda_1+\mu)} e^{-t\sin\frac{\delta}{2}} dt\,^{*)}$$

$$\leqq k|x|^{n}\int\limits_{r|x|}^{\infty} t^{\Re(\lambda_1+n)} e^{-t\sin\frac{\delta}{2}} dt.$$

Wir haben also

$$|\alpha_n''| \leqq |x^{\lambda_1+n+1}|\cdot\left|\int\limits_{G}^{\circ} z^{\lambda_1}(z+2i)^{\lambda_2} e^{xz} dz\right|$$

$$+\sum_{\mu=0}^{n}|A_\mu|\cdot\left|x^{\lambda_1+n+1}\int\limits_{G} z^{\lambda_1+\mu} e^{xz} dz\right|$$

$$< |x^{\lambda_1+n+1}|\,\frac{e^{-\left(|x|\sin\frac{\delta}{2}-h\right)r}}{|x|\sin\frac{\delta}{2}-h}$$

$$+\sum_{\mu=0}^{n}|A_\mu|\cdot k|x|^{n}\int\limits_{r|x|}^{\infty} t^{\Re(\lambda_1+n)} e^{-t\sin\frac{\delta}{2}} dt.$$

Der letzte Ausdruck nähert sich mit unendlich wachsendem $|x|$ der Grenze Null. Man kann R so wählen, dass für

$$|x| > R, \quad -\pi+\delta < \arg x < 2\pi-\delta, \quad |\alpha_n''| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Schliesslich ist

$$\alpha_n''' = x^{\lambda_1+n+1}\int\limits_{G'}^{\circ} R_n z^{\lambda_1} e^{xz} dz$$

$$= -e^{2\pi i\lambda_1} x^{\lambda_1+n+1}\int\limits_{G}^{\circ} R_n z^{\lambda_1} e^{xz} dz = -e^{2\pi i\lambda_1}\alpha_n'';$$

es ist demnach, wenn R hinreichend gross genommen wird, für

$$|x| > R, \quad -\pi+\delta < \arg x < 2\pi-\delta, \quad |\alpha_n'''| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nun ist $\alpha_n = \alpha_n' + \alpha_n'' + \alpha_n'''$; nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse ε lässt sich also eine positive Grösse R so bestimmen, dass

$$|\alpha_n| < \varepsilon$$

ist für

$$|x| > R, \quad -\pi+\delta < \arg x < 2\pi-\delta;$$

d. h. α_n convergirt bei unendlich wachsendem $|x|$ zur Grenze Null, und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi+\delta$ und $2\pi-\delta$. Es besteht nun die Gleichung

*) Es ist $|(-1)^{\lambda_1+\mu+1} e^{i(\lambda_1+\mu+1)\vartheta}| < k$ für $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$.

$$\eta_1 e^{-ix} x^{\lambda_1+1} = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{(-1)^{\lambda_1+\mu+1}(e^{2\pi i\lambda_1}-1)\,\Gamma(\lambda_1+\mu+1)\,\mathsf{A}_\mu}{x^\mu} + \frac{\alpha_n}{x^n},$$

oder wenn

$$(7)\qquad A_\mu = (-1)^{\lambda_1+\mu+1}(e^{2\pi i\lambda_1}-1)\Gamma(\lambda_1+\mu+1)\,\mathsf{A}_\mu$$

gesetzt wird,

$$(8)\qquad \eta_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right).$$

Wir sagen, die Function η_1 werde durch die divergente Reihe

$$(9)\qquad S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right)$$

für grosse Werthe von $|x|$ asymptotisch dargestellt, und zwar gleichmässig für $\arg x$ zwischen $-\pi+\delta$ und $2\pi-\delta$. Fig. 4 veranschaulicht das Gültigkeitsgebiet der asymptotischen Gleichung $\eta_1 \backsim S_1$ *).

Aus der Gleichung (6)

$$\alpha_n = x^{\lambda_1+n+1}\int_l R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\,dz$$

erhält man

$$x\frac{d\alpha_n}{dx} = x^{\lambda_1+n+2}\int_l R_n z^{\lambda_1+1} e^{zx}\,dz$$

$$+ (\lambda_1+n+1)x^{\lambda_1+n+1}\int_l R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\,dz.$$

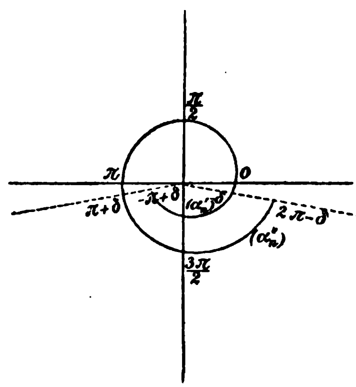


Fig. 4.

Das zweite Glied dieser Summe convergirt für $\lim x = \infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für die angegebenen Argumente von x, ebenso das erste, wie sich aus der bisherigen Entwickelung dadurch ergiebt, dass man λ_1 durch $\lambda_1 + 1$ ersetzt. Demnach convergirt auch $x\frac{d\alpha_n}{dx}$ gleichmässig zur Grenze Null, ebenso

$$x^2\frac{d^2\alpha_n}{dx^2} = x^{\lambda_1+n+3}\int_l R_n z^{\lambda_1+2} e^{zx}\,dz + 2(\lambda_1+n+1)x^{\lambda_1+n+2}\int_l R_n z^{\lambda_1+1} e^{zx}\,dz$$

$$+ (\lambda_1+n+1)(\lambda_1+n)x^{\lambda_1+n+1}\int_l R_n z^{\lambda_1} e^{zx}\,dz$$

und allgemein

$$x^\nu \frac{d^\nu \alpha_n}{dx^\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

*) In der unteren Halbebene ist die Function α_n zweiwerthig; man erhält α_n' oder α_n'', je nachdem man sich von der positiven reellen Axe aus im negativen oder positiven Sinn dreht.

Die Ableitung $\frac{d\eta_1}{dx}$ wird durch die Reihe

$$\frac{dS_1}{dx} = e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0' + \frac{A_1'}{x} + \frac{A_2'}{x^2} + \cdots\right),$$

welche durch formale Differentiation der Reihe S_1 entsteht, in demselben Sinne asymptotisch dargestellt, wie die Function η_1 durch die Reihe S_1. Durch Differentiation der Gleichung

$$\eta_1 = e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)$$

erhält man

$$\frac{d\eta_1}{dx} = e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0' + \frac{A_1'}{x} + \cdots + \frac{A_n'}{x^n} + \frac{\alpha_n'}{x^n}\right),$$

wo

$$\alpha_n' = \frac{d\alpha_n}{dx} + i\alpha_n - \frac{(\lambda_1+n+1)\alpha_n}{x} - \frac{(\lambda_1+n+1)A_n}{x}$$

gesetzt ist. Letzterer Ausdruck convergirt aber nach dem Vorangehenden gleichmässig zur Grenze Null. Man sieht so, dass die asymptotische Gleichung $\eta_1 \sim S_1$ beliebig oft differentiirt werden kann.

Die Function η_1 ist dadurch ausgezeichnet, dass sie, wenn R hinreichend gross genommen wird, in dem Gebiet

$$|x| > R, \quad -\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

keine Nullstellen besitzt*). Es ist $\eta_1 = e^{ix}x^{-\lambda_1-1}(A_0 + \alpha_0)$; nach Annahme einer positiven Grösse $\varepsilon < |A_0|$ lässt sich eine Grösse R so bestimmen, dass für $|x| > R$, $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$ $|\alpha_0| < \varepsilon$, also $|A_0 + \alpha_0| > |A_0| - |\alpha_0| > |A_0| - \varepsilon > 0$ ist; da auch der Factor $e^{ix}x^{\lambda_1}$ für keinen endlichen Werth von x in dem angegebenen Gebiet verschwindet, so gilt das Gleiche für η_1.

Aehnlich ist die Function η_2 zu behandeln. Wir nehmen zunächst (Fig. 1) am Anfang des Integrationsweges l_2 $\arg(z-i) = \pi$, $\arg(z+i) = \pi$ an, so dass das Integral (2) für $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$ einen Sinn hat. Der geradlinige Theil des Weges l_2 kann, ohne dass der Punkt $z = i$ überschritten wird, in positivem Sinn um 90^0 und in negativem Sinn um 270^0 gedreht werden, so dass das Anfangsargument ω von $z - i$ und $z + i$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{5\pi}{2}$ variirt. Das Integral (2) hat einen Sinn, so lange $\arg x$ um weniger als $\frac{\pi}{2}$ von $\pi - \omega$ abweicht, d. h. für $\frac{\pi}{2} - \omega < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \omega$. Die Function η_2 ist demnach, ohne dass die Gestalt des Integrationsweges l_2 geändert zu werden braucht, durch

*) Diese Eigenschaft geht verloren, wenn $\arg x$ nicht zwischen den angegebenen Grenzen bleibt.

das Integral (2) für $-2\pi < \arg x < \pi$ dargestellt. Ersetzt man in (2) $z + i$ durch z, so hat man

$$(10) \qquad \eta_2 = e^{-ix}\int\limits_l (z-2i)^{\lambda_1} z^{\lambda_2} e^{zx}\, dz,$$

und zwar ist am Anfang des jetzt mit l bezeichneten Integrationsweges (Fig. 5) $\arg z = \omega$, $\arg(z+2i) = \omega$ und in dem in der Nähe von 0 gelegenen Punkt p

$\arg z = \omega$, $\arg(z-2i)$

nahezu gleich $\frac{3\pi}{2}$. Wir setzen

$$(z-2i)^{\lambda_1}$$
$$= (-2i)^{\lambda_1}\left(1-\frac{z}{2i}\right)^{\lambda_1} \text{*)}$$
$$= \mathsf{B}_0 + \mathsf{B}_1 z + \mathsf{B}_2 z^2 + \cdots,$$

indem wir die Bezeichnung benutzen:

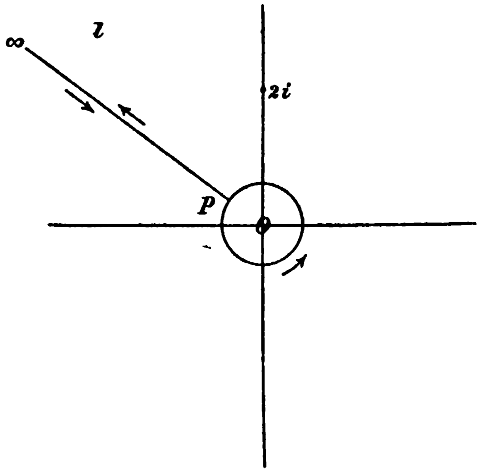


Fig. 5.

$$(11) \qquad \mathsf{B}_\mu = \frac{\Gamma(\lambda_1+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\lambda_1-\mu+1)}\cdot(-2i)^{\lambda_1-\mu}; \quad \mathsf{B}_0 = (-2i)^{\lambda_1}.$$

Genau wie oben finden wir

$$x^{\lambda_2+1}\int\limits_l z^{\lambda_2}(z-2i)^{\lambda_1} e^{zx}\, dz$$
$$= \sum_{\mu=0}^{n} \frac{(-1)^{\lambda_2+\mu+1}\,(e^{2\pi i\lambda_2}-1)\,\Gamma(\lambda_2+\mu+1)\,\mathsf{B}_\mu}{x^\mu} + \frac{\beta_n}{x^n}$$

oder, wenn

$$(12) \qquad B_\mu = (-1)^{\lambda_2+\mu+1}(e^{2\pi i\lambda_2}-1)\,\Gamma(\lambda_2+\mu+1)\cdot\mathsf{B}_\mu$$

gesetzt wird,

$$(13) \qquad \eta_2 = e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right),$$

wo β_n sowie $x^\nu \frac{d^\nu \beta_n}{dx^n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit unendlich wachsendem $|x|$ für alle Argumente von x zwischen $-2\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null convergirt**). Die Function η_2 ist dadurch ausgezeichnet, dass sie für hinreichend grosse endliche Werthe von $|x|$

*) Hierbei ist $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$.

**) Die Function β_n ist in der oberen Halbebene zweideutig; man erhält β_n' oder β_n'', je nachdem man sich von der positiven reellen Axe aus in negativem oder positivem Sinn dreht.

nicht verschwindet, wenn $\arg x$ zwischen den bezeichneten Grenzen bleibt (Fig. 6). Wir sagen, die Function η_2 werde durch die Reihe

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\right) \tag{14}$$

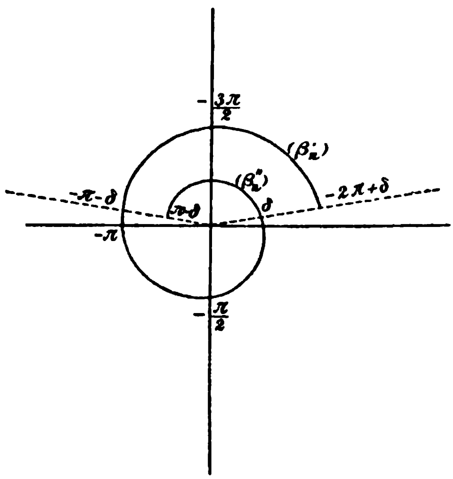


Fig. 6.

für grosse Werthe von $|x|$ asymptotisch dargestellt, und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen

$$-2\pi + \delta \quad \text{und} \quad \pi - \delta.$$

Wir fassen das Bisherige in den Satz zusammen:

Das Integral η_1 der Differentialgleichung (A) *wird durch die Reihe*

$$S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} \cdot \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right),$$

das Integral η_2 durch die Reihe

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\right)$$

für grosse Werthe von $|x|$ asymptotisch dargestellt, und zwar η_1 gleichmässig für $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$, η_2 gleichmässig für $-2\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$); d. h. wenn man*

$$\eta_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)$$

$$\eta_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right)$$

setzt, so convergirt mit unendlich wachsendem $|x|$ α_n sowie $x^\nu \frac{d^\nu \alpha_n}{dx^\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$, dagegen β_n sowie $x^\nu \frac{d^\nu \beta_n}{dx^\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-2\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ zur Grenze Null.

§ 2.

Bei einem positiven Umlauf der Veränderlichen x um $x = 0$ (oder bei einem negativen Umlauf um $x = \infty$) gehen η_1, η_2 in lineare Verbindungen η_1', η_2' über. Es sei ursprünglich $\arg x = 0$ und am Anfang der Integrationswege l_1, l_2 (Fig. 1) im Unendlichen sei $\arg(z - i) = \arg(z + i) = \pi$. Einer positiven Drehung von x ent-

*) Hierbei ist δ eine beliebig kleine positive Grösse. Vgl. Fig. 4 und Fig. 6.

spricht eine ebenso grosse negative Drehung des geradlinigen Theiles des Integrationsweges l_1 bezw. l_2; man muss aber schliesslich die Form der Integrationswege ändern, damit l_1 den Punkt $z = -i$ und l_2 den Punkt $z = i$ nicht überschreitet. Man erhält sonach nach einer vollen Umdrehung von x die Integrationswege l_1', l_2' von η_1', η_2' (Fig. 7 und 8).

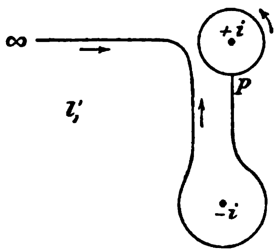


Fig. 7.

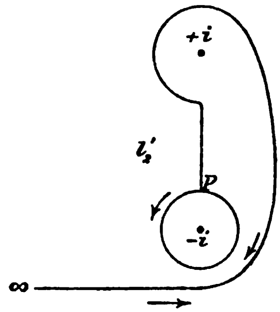


Fig. 8.

l_1' (l_2') besteht aus der in Fig. 7 (bezw. Fig. 8) dargestellten Linie $\infty\, p$, einem kleinen Kreis um $z = i$ (bezw. $z = -i$) und der Linie $p\,\infty$. Indem man l_1', l_2' auf l_1, l_2 zurückführt, findet man*)

$$(15)\qquad \begin{cases} \eta_1' = e^{-2\pi i\lambda_1}\eta_1 + e^{-2\pi i\lambda_2}(e^{-2\pi i\lambda_1} - 1)\eta_2 \\ \eta_2' = e^{-2\pi i\lambda_1}(1 - e^{2\pi i\lambda_2})\eta_1 + (1 - e^{-2\pi i\lambda_1} + e^{-2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)})\eta_2. \end{cases}$$

Bleibt $\arg x$ zwischen $-\pi + \delta$ und $\pi - \delta$, so sind für grosse Werthe von $|x|$ η_1 und η_2 gleichzeitig von Nullstellen frei und es bestehen gleichzeitig die asymptotischen Gleichungen

$$\eta_1 \sim S_1, \quad \eta_2 \sim S_2.$$

Dagegen ändert die Function η_2 ihren Charakter, wenn $\arg x$ von 0 aus um π wächst, während sich der Charakter von η_1 bei einer halben Umdrehung von x in negativem Sinne ändert. Indessen lassen sich auch zwei Integrale $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ von (A) angeben, welche für hinreichend grosse Werthe von $|x|$ gleichzeitig von Nullstellen frei sind, wenn $\arg x$ zwischen δ und $2\pi - \delta$ liegt**). η_1 und η_2 waren zuerst für $\arg x = 0$, d. h. auf der positiven reellen Axe definirt; wir erhalten $\bar{\eta}_1$ auf der negativen reellen Axe, indem wir in $e^{2\pi i\lambda_1}\eta_1$***) die Veränderliche x eine halbe positive Drehung machen lassen; wir erhalten $\bar{\eta}_2$ auf der negativen reellen Axe, indem in $e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2$***) die Ver-

*) Dieselben Formeln ergeben sich aus dem in § 3 dargestellten Zusammenhang zwischen η_1, η_2 und y_1, y_2.

**) Im zweiten Theil wird gezeigt, dass jedes andere Integral von (A) unendlich viele Nullstellen a_n besitzt, so dass $\lim\limits_{n=\infty} |a_n| = \infty$ und $\lim\limits_{n=\infty} \arg a_n = 0$, so wie unendlich viele Nullstellen b_n der Art, dass $\lim\limits_{n=\infty} |b_n| = \infty$ und $\lim\limits_{n=\infty} \arg b_n = \pi$ ist.

***) Die Factoren $e^{2\pi i\lambda_1}$ und $e^{-2\pi i\lambda_2}$ sind beigefügt, um in § 3 eine einfachere Beziehung zwischen y_1, y_2 und $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ zu erhalten.

änderliche x von der positiven reellen Axe aus eine halbe negative Drehung ausführt. Wenn wir nun auf der negativen reellen Axe $\arg x = \pi$ annehmen, so haben wir

$$\bar{\eta}_1 = e^{2\pi i\lambda_1} \int\limits_{l_1} (z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz$$

$$\bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i\lambda_2} \int\limits_{l_2} (z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz,$$

und zwar ist am Anfang von l_1 $\arg(z-i) = 0$, $\arg(z+i) = 0$ und am Anfang von l_2 $\arg(z-i) = 2\pi$, $\arg(z+i) = 2\pi$. Hierfür können wir schreiben

$$\bar{\eta}_1 = \int\limits_{l_1} (z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz \tag{16}$$

$$\bar{\eta}_2 = \int\limits_{l_2} (z-i)^{\lambda_1}(z+i)^{\lambda_2} e^{zx} dz, \tag{17}$$

wenn wir am Anfang von l_1 sowohl wie von l_2 $\arg(z-i) = 2\pi$, $\arg(z+i) = 0$ annehmen. Hiermit sind auch die Fortsetzungen der zunächst für $\arg x = \pi$ definirten Functionen $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ bestimmt. Bezeichnet man mit $'\eta_2$ die durch eine negative Umdrehung aus η_2 hervorgehende Function, so ist

$$\bar{\eta}_1 = e^{2\pi i\lambda_1}\eta_1, \quad \bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i\lambda_2}\,'\eta_2.$$

Nach (15) ist

$$e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2 = \eta_2' - (1 - e^{2\pi i\lambda_1})\eta_1',$$

also

$$e^{-2\pi i\lambda_2}\,'\eta_2 = \eta_2 - (1 - e^{2\pi i\lambda_1})\eta_1$$

und demnach

$$\begin{cases} \bar{\eta}_1 = e^{2\pi i\lambda_1}\eta_1 \\ \bar{\eta}_2 = \eta_2 + (e^{2\pi i\lambda_1} - 1)\eta_1, \end{cases} \tag{18}$$

Für $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$ haben wir $\bar{\eta}_1 = e^{2\pi i\lambda_1}\eta_1$, also

$$\bar{\eta}_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} e^{2\pi i\lambda_1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right). \tag{19}$$

Auf der negativen reellen Axe ist, wenn $\arg x = -\pi$ genommen wird,

$$\bar{\eta}_2 = e^{-2\pi i\lambda_2}\eta_2 = e^{-2\pi i\lambda_2} e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots\right);$$

setzt man $x = re^{-\pi i}$, so ist

$$e^{-2\pi i\lambda_2} x^{-\lambda_2 - 1} = e^{-2\pi i\lambda_2 - (\lambda_2+1)(\log r - \pi i)} = e^{-(\lambda_2+1)(\log r + \pi i)},$$

d. i. der Werth von $x^{-\lambda_2-1}$ mit $\arg x = \pi$. Es ist demnach für $\arg x = \pi$ und allgemeiner für $\delta < \arg x < 3\pi - \delta$

$$\bar{\eta}_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right). \tag{20}$$

Die Gebiete, in welchen in (19) und (20) α_n und β_n zur Null convergiren, sind in Fig. 4 und Fig. 9 dargestellt. Bleibt $\arg x$ zwischen δ und $2\pi - \delta$, so sind die Formeln (19) und (20) gleichzeitig gültig.

Das Integral $\bar{\eta}_1$ *von* (A) *wird durch die Reihe*

$$e^{3\pi i\lambda_1} S_1 = e^{ix} x^{-\lambda_1 - 1} e^{3\pi i\lambda_1} \cdot \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right),$$

das Integral $\bar{\eta}_2$ *durch die Reihe*

$$S_2 = e^{-ix} x^{-\lambda_2 - 1} \cdot \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\right)$$

für grosse Werthe von $|x|$ *asymptotisch dargestellt, und zwar* $\bar{\eta}_1$ *gleichmässig für*

$$-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$$

und $\bar{\eta}_2$ *gleichmässig für*

$$\delta < \arg x < 3\pi - \delta.$$

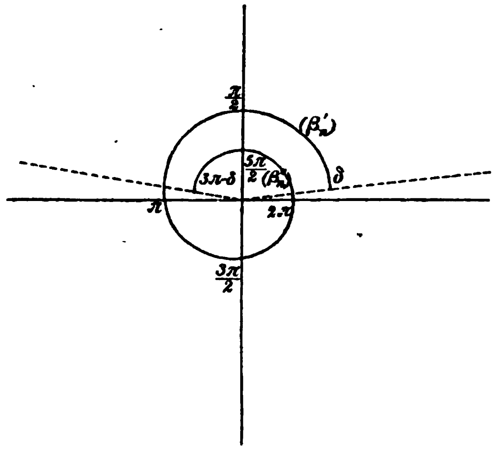


Fig. 9.

In § 1 und § 2 ist noch der folgende Satz enthalten:

Die Integrale η_1, η_2 *besitzen in der Nähe der positiven reellen Axe*), die Integrale* $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ *in der Nähe der negativen reellen Axe keine Nullstellen, deren absolute Beträge eine gewisse Grenze überschreiten**). Die Werthe von* $\bar{\eta}_1$ *und* $\bar{\eta}_2$ *auf der negativen reellen Axe erhält man***), indem man, von der positiven reellen Axe ausgehend,* η_1 *im positiven,* η_2 *im negativen Drehungssinn fortsetzt.*

§ 3.

Wir führen zwei weitere Integrale von (A) ein:

$$(21) \qquad y_1 = \int_{L_1} (z - i)^{\lambda_1} (z + i)^{\lambda_2} e^{zx} dz$$

$$(22) \qquad y_2 = \int_{L_2} (z - i)^{\lambda_1} (z + i)^{\lambda_2} e^{zx} dz.$$

Der Integrationsweg L_2 von y_2 besteht aus einer Geraden, welche aus dem Unendlichen kommt und mit der positiven reellen Axe den Winkel $\pi - \arg x$ bildet, einem die Punkte $z = i$ und $z = -i$ enthaltenden Kreis um $z = 0$, und der in entgegengesetztem Sinn durchlaufenen

*) D. h. zwischen zwei von 0 ausgehenden, gegen die positive reelle Axe unter den Winkeln ϑ und $-\vartheta$ (ϑ klein) geneigten Strahlen.

**) Vgl. die zweite Fussnote auf der vorletzten Seite.

***) Abgesehen von constanten Factoren.

Geraden. Ist (Fig. 10) $\arg x = 0$, fällt also der geradlinige Theil von L_2 in die negative reelle Axe, so kann L_2 durch die nacheinander durchlaufenen Wege l_2 und l_1 (Fig. 1) ersetzt werden; war am Anfang von L_2

$$\arg(z - i) = \pi,$$
$$\arg(z + i) = \pi,$$

angenommen, so hat sich nach Durchlaufung des den Punkt $z = -i$ umgebenden Weges l_2 $\arg(z + i)$ um 2π vermehrt, während $\arg(z - i)$ ungeändert geblieben ist; es ist daher

$$y_2 = \eta_2 + e^{2\pi i \lambda_2}\eta_1.$$

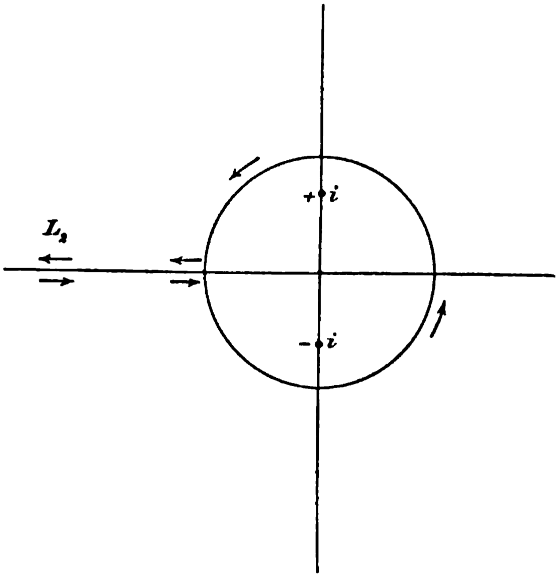


Fig. 10.

Der Integrationsweg L_1 von y_1 setzt sich zusammen (Fig. 11) aus einem von 0 ausgehenden, den Punkt $z = -i$ in positivem Sinn umlaufenden und nach 0 zurückkehrenden Weg s_2, einem von 0 ausgehenden und nach einem positiven Umlauf um $z = i$ dahin zurückkehrenden Weg s_1, dem entgegengesetzt durchlaufenen Weg s_2 und dem entgegengesetzt durchlaufenen Weg s_1. Am Anfang von L_1 in 0 sei

$$\arg(z - i) = \frac{3\pi}{2},$$
$$\arg(z + i) = \frac{\pi}{2}.$$

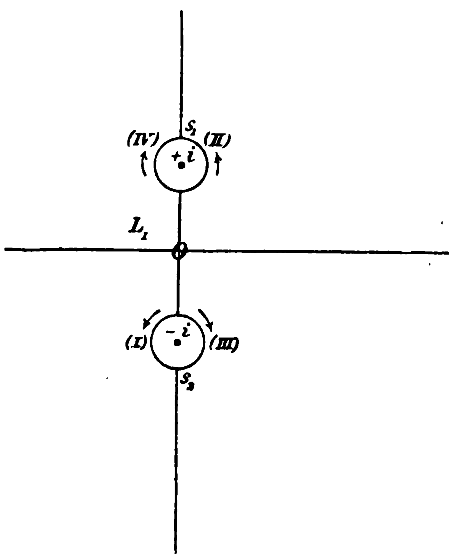


Fig. 11.

Nehmen wir $\arg x = 0$ an, so können wir dem Weg L_1 eine in die negative reelle Axe fallende, im Unendlichen mit $\arg(z - i) = \pi$, $\arg(z + i) = \pi$ beginnende und in 0 endigende Gerade l vorangehen lassen, wenn wir auch am Ende von L_1 die entgegengesetzt zu durchlaufende Gerade l^{-1} hinzufügen; man kann ferner zwischen zwei Schleifen die Wege l^{-1} und l einfügen, so dass man erhält:

$$L_1 = l s_2 l^{-1} l s_1 l^{-1} l s_2^{-1} l^{-1} l s_1^{-1} l^{-1} = l_2 l_1 l_2^{-1} l_1^{-1};$$

am Anfang von l_2 ist $\arg(z-i) = \pi$, $\arg(z+i) = \pi$, am Anfang von l_1 ist $\arg(z+i)$ um 2π grösser, am Ende von l_2^{-1} hat $\arg(z+i)$ wieder den ursprünglichen Werth, während der anfängliche Werth von $\arg(z-i)$ um 2π gewachsen ist, und am Ende von l^{-1} haben beide Argumente wieder ihre Anfangswerthe; es ist also

$$y_1 = \eta_2 + e^{2\pi i \lambda_2}\eta_1 - e^{2\pi i \lambda_1}\eta_2 - \eta_1$$

oder

$$y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1)\eta_1 - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1)\eta_2.$$

Der Zusammenhang zwischen y_1, y_2 und η_1, η_2 ist also durch die Formel dargestellt:

$$(23) \qquad \begin{cases} y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1)\eta_1 - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1)\eta_2 \\ y_2 = e^{2\pi i \lambda_2}\eta_1 + \eta_2 \text{ *)}. \end{cases}$$

Unter Benutzung der Beziehung (18) zwischen η_1, η_2 und $\bar\eta_1$, $\bar\eta_2$ erhält man

$$(24) \qquad \begin{cases} y_1 = (e^{2\pi i \lambda_2} - 1)\bar\eta_1 - (e^{2\pi i \lambda_1} - 1)\bar\eta_2 \\ y_2 = e^{-2\pi i \lambda_1}\bar\eta_1 + \bar\eta_2. \end{cases}$$

Nach (21) ist**)

$$(25) \qquad y_1 = G_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

eine ganze transcendente Function; für y_2 findet man unter Benutzung der Substitution $xz = u$**)

$$(26) \quad y_2 = x^{-\lambda_1-\lambda_2-1} G_2(x) = x^{-\lambda_1-\lambda_2-1}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots),$$

wo $G_2(x)$ eine ganze transcendente Function bedeutet.

Wir benutzen den Zusammenhang (23) zwischen y_1, y_2 und η_1, η_2, sowie den Zusammenhang (24) zwischen y_1, y_2 und $\bar\eta_1$, $\bar\eta_2$, ersteren für $\arg x$ zwischen $-\pi+\delta$ und $\pi-\delta$, letzteren für $\arg x$ zwischen δ und $2\pi-\delta$, wobei δ jedesmal eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet; setzen wir für η_1, η_2 die Ausdrücke (8), (13), für $\bar\eta_1$, $\bar\eta_2$ die Ausdrücke (19), (20) ein, so erhalten wir

---

*) Da der Voraussetzung nach $\lambda_1 + \lambda_2$ keine ganze Zahl ist, so ist

$$\begin{vmatrix} e^{2\pi i \lambda_2} - 1, & -(e^{2\pi i \lambda_1} - 1) \\ e^{2\pi i \lambda_2}, & 1 \end{vmatrix} = e^{2\pi i(\lambda_1+\lambda_2)} - 1$$

von Null verschieden, also y_1 und y_2 linear unabhängig.

**) Man sehe Pochhammer, Math. Ann. Bd. 36, wo nur eine von (A) verschiedene Normalform bei der Untersuchung von y_1 und y_2 benutzt ist. Die Reihen $G_1(x)$, $G_2(x)$ werden bei Benutzung dieser Normalform einfacher als bei uns.

$$(27)\qquad y_1 = (e^{2\pi i\lambda_2} - 1)e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)$$
$$- (e^{2\pi i\lambda_1} - 1)e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right),$$

$$(28)\qquad y_2 = e^{2\pi i\lambda_2}e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x_n}\right)$$
$$+ e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x_n}\right)$$

für $-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$, d. h. in der ganzen Ebene mit Ausschluss eines beliebig kleinen, die negative reelle Axe enthaltenden Sectors, ferner

$$(29)\qquad y_1 = (e^{2\pi i\lambda_2} - 1)e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\cdot e^{2\pi i\lambda_1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)$$
$$- (e^{2\pi i\lambda_1} - 1)e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right),$$

$$(30)\qquad y_2 = e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)$$
$$+ e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right)$$

für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$, d. h. in der ganzen Ebene mit Ausschluss eines beliebig kleinen, die positive reelle Axe enthaltenden Sectors.

Bezeichnen wir mit y ein particuläres Integral von (A), z. B. y_1 oder y_2 und setzen wir

$$y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2$$

so haben wir, wenn c_2 von Null verschieden ist, bei Beschränkung auf das Gebiet $\delta < \arg x < \pi - \delta$

$$y = c_2 e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right)$$
$$+ c_2 e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\cdot\frac{c_1}{c_2}e^{2ix}x^{\lambda_2-\lambda_1}(A_0 + \alpha_0).$$

Setzt man

$$\sigma_n = \beta_n + \frac{c_1}{c_2}e^{2ix}x^{\lambda_2-\lambda_1+n}(A_0 + \alpha_0),$$

so ist

$$y = c_2 e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\sigma_n}{x^n}\right),$$

und σ_n convergirt für $\delta < \arg x < \pi - \delta$ gleichmässig zur Grenze Null, wenn $|x|$ unendlich gross wird*). D. h. in der oberen Halb-

*) Die benutzten Functionen β_n, σ_n wären der Deutlichkeit halber mit β_n'', σ_n'' zu bezeichnen. Würde man für $\delta < \arg x < \pi - \delta$ y durch $\bar\eta_1$, $\bar\eta_2$ ausdrücken, so würde β_n' auftreten.

ebene wird jedes Integral von (A), abgesehen von der mit einem constanten Factor multiplicirten Function η_1, durch die mit einem geeigneten constanten Factor multiplicirte Reihe S_2 asymptotisch dargestellt. Wir haben demnach für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$ die asymptotischen Gleichungen

$$y_1 \sim -(e^{2\pi i\lambda_1}-1)e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots\right), \tag{31}$$

$$y_2 \sim e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots\right). \tag{32}$$

Ebenso erkennt man, dass in der unteren Halbebene jedes Integral, abgesehen von der mit einem constanten Factor multiplicirten Function η_2, durch die mit einem constanten Factor versehene Reihe S_1 asymptotisch dargestellt wird und dass insbesondere für $-\pi+\delta < \arg x < -\delta$ die asymptotischen Gleichungen bestehen:

$$y_1 \sim (e^{2\pi i\lambda_2}-1)e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots\right), \tag{33}$$

$$y_2 \sim e^{2\pi i\lambda_2}e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots\right). \tag{34}$$

Die gefundenen Resultate über das Verhalten der Integrale y_1, y_2 fassen wir in den folgenden Satz zusammen:

Sind S_1, S_2 die der Differentialgleichung (A) *genügenden divergenten Reihen*

$$S_1 = e^{ix}x^{-\lambda_1-1}\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots\right)$$

$$S_2 = e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\left(B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots\right)$$

und setzt man

$$S_1' = (e^{2\pi i\lambda_2}-1)S_1, \quad S_2' = -(e^{2\pi i\lambda_1}-1)S_2,$$
$$S_1'' = e^{2\pi i\lambda_2}S_1, \quad S_2'' = S_2,$$

so bestehen für grosse Werthe von $|x|$ *die asymptotischen Gleichungen*

$y_1 \sim S_1'$,	$y_2 \sim S_1''$	*für* $\arg x = -\frac{\pi}{2}$,
$y_1 \sim S_1' + S_2'$,	$y_2 \sim S_1'' + S_2''$	„ $\arg x = 0$,
$y_1 \sim S_2'$,	$y_2 \sim S_2''$	„ $\arg x = \frac{\pi}{2}$,
$y_1 \sim e^{2\pi i\lambda_1}S_1' + S_2'$,	$y_2 \sim e^{-2\pi i\lambda_2}S_1'' + S_2''$	„ $\arg x = \pi$,
$y_1 \sim e^{2\pi i\lambda_1}S_1'$,	$y_2 \sim e^{-2\pi i\lambda_2}S_1''$	„ $\arg x = \frac{3\pi}{2}$.

Die für $\arg x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ *bestehenden asymptotischen Darstellungen gelten gleichmässig in dem Gebiet*

$$k\pi + \delta < \arg x < (k+1)\pi - \delta,$$

die für $\arg x = k\pi$ *angegebenen gelten gleichmässig in dem Gebiet*

$$(k-1)\pi + \delta < \arg x < (k+1)\pi - \delta,$$

wo δ *eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet.*

Die aufgestellten asymptotischen Darstellungen werden im zweiten Theil zur genaueren Untersuchung des Verhaltens der Integrale der Differentialgleichung (A) in der Umgebung der singulären Stelle $x = \infty$ benutzt.

Später folgt eine Ausdehnung der Untersuchung auf allgemeinere lineare Differentialgleichungen unter Benutzung der Laplace'schen Transformirten im Anschluss an die Arbeiten Poincaré's.

Cronberg, 4. Januar 1897.

Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung. II.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

Im vorausgehenden Aufsatz (Seite 453 ds. Bds.) wurde die asymptotische Darstellung der Integrale der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+(\lambda_1+\lambda_2+2)\frac{dy}{dx}+\big(x+(\lambda_1-\lambda_2)i\big)y=0^{*)}$$

vermittelst der divergenten Reihen

$$S_1=e^{ix}\;x^{-\lambda_1-1}\Big(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots\Big),$$
$$S_2=e^{-ix}x^{-\lambda_2-1}\Big(B_0+\frac{B_1}{x}+\frac{B_2}{x^2}+\cdots\Big),$$

welche (A) formell befriedigen, für die ganze Umgebung der singulären Stelle $x=\infty$ behandelt**). Wir wollen nun auf Grund der früheren Entwicklungen die divergenten Reihen zur Untersuchung des Verhaltens der Integrale der Differentialgleichung (A) in der Umgebung von $x=\infty$ benutzen.

In § 1 und § 2 werden die in der Umgebung der singulären Stelle gelegenen Nullstellen der Integrale betrachtet; in § 3 werden die bei Integration der Differentialgleichung auftretenden ganzen transcendenten Functionen mit Rücksicht auf Productentwicklung und Geschlecht untersucht; § 4 beschäftigt sich mit dem Verlauf der reellen Integrale einer Differentialgleichung mit reellen Coefficienten.

Uebrigens bleiben die folgenden wie die früheren Entwicklungen zum Theil für allgemeinere lineare Differentialgleichungen bestehen;

*) Auf diese Form kann die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten gebracht werden, wenn man von den Ausnahmefällen absieht. Der Fall ganzzahliger Werthe von λ_1, λ_2, $\lambda_1+\lambda_2$ ist im Folgenden wie früher ausgeschlossen.

**) Es handelte sich darum, die Untersuchungen des Herrn Poincaré über allgemeinere lineare Differentialgleichungen sowie ältere Untersuchungen über Bessel'sche Functionen so weit zu ergänzen, dass sich das Verhalten der Integrale von (A) in der ganzen Umgebung der singulären Slelle übersehen lässt.

deswegen wird auch gewöhnlich von der Einsetzung der unserer speciellen Differentialgleichung entsprechenden Werthe der Reihencoefficienten abgesehen. Aehnliche Untersuchungen für allgemeinere Differentialgleichungen werde ich später führen.

§ 1.

Die Differentialgleichung (A) besitzt zwei particuläre Integrale η_1, η_2, welche durch die Reihen S_1, S_2 asymptotisch dargestellt werden; es ist

$$\eta_1 = e^{ix} \quad x^{\mu_1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right),$$

$$\eta_2 = e^{-ix} x^{\mu_2}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right),$$

wenn wir

$$\mu_1 = -\lambda_1 - 1, \quad \mu_2 = -\lambda_2 - 1$$

setzen; α_n und β_n sind Functionen von x, welche zur Grenze Null convergiren, wenn $|x|$ unendlich gross wird, und zwar α_n $\left(\text{sowie } x^\nu \frac{d^\nu \alpha_n}{dx^\nu}\right)$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $2\pi - \delta$, β_n $\left(\text{sowie } x^\nu \frac{d^\nu \beta_n}{dx^\nu}\right)$ gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $-2\pi + \delta$ und $\pi - \delta$, wobei δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet. Beschränkt man sich, unter ω eine beliebige Grösse zwischen 0 und π verstehend, auf das Gebiet

$$-\omega < \arg x < \omega,$$

so convergiren beide Functionen α_n und β_n gleichmässig zur Grenze Null, ebenso $x\frac{d\alpha_n}{dx}$ und $x\frac{d\beta_n}{dx}$. Wie früher gezeigt wurde, *besitzen die Integrale η_1 und η_2 in dem Gebiet $-\omega < \arg x < \omega$ keine Nullstelle, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze überschreitet.*

Ein beliebiges Integral $y = f(x)$ von (A) hat die Form

$$y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2\text{*)}.$$

Wir setzen die Constanten c_1, c_2 beide von Null verschieden voraus und *untersuchen die Lage der in der Nähe von $x = \infty$ gelegenen Nullstellen, deren Argument zwischen $-\omega$ und ω liegt.*

Wir haben

$$(1) \qquad y = f(x) = e^{ix} \quad x^{\mu_1} c_1\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right)$$
$$+ e^{-ix} x^{\mu_2} c_2\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right).$$

*) In dem Gebiet $|x| > r$, $-\omega < \arg x < \omega$ sollen alle betrachteten Functionen eindeutig fixirt sein.

Die Gleichung $f(x) = 0$ schreibt sich

$$e^{2ix}x^{\mu_1-\mu_2} = -\frac{c_2}{c_1}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{B_\nu}{x^\nu}+\frac{\beta_n}{x^n}}{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{A_\nu}{x^\nu}+\frac{\alpha_n}{x^n}}$$

oder

$$2ix + (\mu_1-\mu_2)\log x = \log\left(-\frac{c_2}{c_1}\frac{B_0}{A_0}\right)$$

$$+\log\frac{1+\frac{B_1}{B_0x}+\cdots+\frac{B_n}{B_0x^n}+\frac{\beta_n}{B_0x^n}}{1+\frac{A_1}{A_0x}+\cdots+\frac{A_n}{A_0x^n}+\frac{\alpha_n}{A_0x^n}}+2k\pi i;$$

hierbei ist $\log x$ durch die Festsetzung $-\varpi < \arg x < \varpi$ bestimmt, von $\log\left(-\frac{c_2B_0}{c_1A_0}\right)$ ist ein beliebiger Werth zu nehmen, und k ist eine ganze positive Zahl; der zweite Logarithmus ist so fixirt, dass er für $x = \infty$ verschwindet.

Wir führen die Bezeichnung ein:

$$\mu = \frac{\mu_1-\mu_2}{2i},\quad c = \frac{1}{2i}\log\left(-\frac{c_2B_0}{c_1A_0}\right). \tag{2}$$

Setzt man

$$\frac{1}{2i}\log\left(1+\frac{B_1}{B_0x}+\cdots+\frac{B_n}{B_0x^n}+\frac{\beta_n}{B_0x^n}\right)$$

$$-\frac{1}{2i}\log\left(1+\frac{A_1}{A_0x}+\cdots+\frac{A_n}{A_0x^n}+\frac{\alpha_n}{A_0x^n}\right)$$

$$=\frac{K_1}{x}+\cdots+\frac{K_n}{x^n}+\frac{\varkappa_n}{x^n}\,^{*)},$$

so convergiren $\varkappa_n$ und $x\frac{d\varkappa_n}{dx}$ für $\lim|x| = \infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für $-\varpi < \arg x < \varpi$.

Die Gleichung $f(x) = 0$ lautet jetzt

$$\varphi_k(x) = x + \mu\log x - c - k\pi - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{x^\nu} - \frac{\varkappa_n}{x^n} = 0. \tag{3}$$

Wenn man die Reihen

$$\sum_\nu\frac{A_\nu}{x^\nu},\quad \sum_\nu\frac{B_\nu}{x^\nu},\quad \sum\frac{K_\nu}{x^\nu}$$

ins Unendliche fortsetzt, α_n, β_n, $\varkappa_n$ weglässt und die Rechnungen ohne Rücksicht auf die Divergenz der auftretenden Reihen formell ausführt, so erhält man für die Nullstellen von

*) Dabei ist $K_1 = \frac{A_0B_1 - A_1B_0}{2iA_0B_0}$.

$$f(x) = e^{ix} x^{\mu_1} c_1 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{x^\nu} + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{x^\nu}$$

die Gleichung

$$x + \mu \log x = c + k\pi + \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2} + \cdots, \tag{4}$$

welche durch die Substitution

$$t = \frac{1}{c + k\pi}, \quad x = \frac{1}{t(1+\xi)}$$

übergeht in

$$\frac{1}{1+\xi} - \mu t \log t - \mu t \log(1+\xi)$$
$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} K_\nu t^{\nu+1} (1+\xi)^{\nu+1};$$

$\log t$ und $\log(1+\xi)$ sind dadurch fixirt, dass für $k = \infty$

$$\arg t = \arg \frac{1}{c + k\pi} = 0$$

und für $\xi = 0$

$$\arg(1+\xi) = 0$$

angenommen wird. Durch Einsetzen der für $|\xi| < 1$ convergenten Reihen für $\frac{1}{1+\xi}$ und $\log(1+\xi)$ erhält man zur Bestimmung der Function ξ von t die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & \mu t \log t + K_1 t^2 + K_2 t^3 + \cdots \\ & + \xi(1 + \mu t + K_1 t^2 + 2 K_2 t^3 + \cdots) \\ & + \xi^2\left(-1 - \tfrac{1}{2}\mu t + K_2 t^3 + 3 K_3 t^4 + \cdots\right) + \cdots. \end{aligned}$$

Ersetzt man im ersten Glied $t \log t$ durch z, so wird die Gleichung durch eine Potenzreihe von t und z

$$\xi = \sum_{p+q>0} C_{pq} t^p z^q$$

formell befriedigt. Durch Einsetzung der Reihe von ξ in die Gleichung, Entwicklung der rechten Seite nach Potenzen von t und z und Nullsetzung des Coefficienten von $t^p z^q$ erhält man eine Gleichung, welche C_{pq} durch die Grössen $C_{p'q'}$ $(p' \leq p,\ q' \leqq q,\ p' + q' < p + q)$ ausdrückt; ist $p \leqq n+1$, so kommen in dieser Gleichung nur $K_1, \ldots K_n$, nicht aber $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$ vor, d. h. C_{pq} hängt, so lange $p \leqq n+1$ nur von $K_1, \ldots K_n$ ab. Insbesondere erhält man

$$C_{10} = 0, \qquad C_{01} = -\mu,$$
$$C_{20} = -K_1, \quad C_{11} = \mu^2, \quad C_{02} = \mu^2.$$

Nun ist

$$x_k = \frac{1}{t(1+\xi)} = \frac{1}{t\left(1+\sum C_{pq} t^p z^q\right)}$$
$$= \frac{1}{t(1-\mu z - K_1 t^2 + \mu^2 t z + \mu^2 z^2 + \cdots)}$$
$$= \frac{1+\mu z + K_1 t^2 - \mu^2 t z + \cdots}{t} = \frac{\sum\limits_{pq} A_{pq} t^p z^q}{t}.$$

Hierbei ist $A_{pq} (p \leqq n+1)$ nur von $K_1, \ldots K_n$ abhängig, ferner $A_{0q} = 0$ für $q > 1$. Um letzteres zu zeigen, bestimmen wir die Gesammtheit ξ' der von t freien Glieder in ξ; es ist

$$0 = z + \xi' - \xi'^2 + \xi'^3 - \cdots,$$

also

$$\xi' = -\frac{\mu z}{1+\mu z}$$

und

$$\frac{1}{1+\xi'} = 1 + \mu z.$$

Hiernach ist

$$x_k = \frac{1}{t} + \mu \log t + K_1 t - \mu^2 t \log t + \cdots$$
$$= c + k\pi - \mu \log(c+k\pi) + \frac{K_1}{c+k\pi} + \mu^2 \frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi} + \cdots$$

oder

$$(5) \qquad x_k = c + k\pi - \mu \log(c+k\pi) + \sum_{p+q>0} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q;$$

$L_{pq} (p \leqq n)$ ist nur von $K_1, \ldots K_n$ abhängig; insbesondere ist

$$L_{10} = \frac{A_0 B_1 - A_1 B_0}{2 i A_0 B_0}, \quad L_{01} = \mu^2.$$

Da wir bisher lediglich formale Rechnungen mit divergenten Reihen ausgeführt haben, so müssen wir beweisen, dass die Gleichung (3) wirklich für jeden hinreichend grossen positiven Werth von k eine Wurzel x_k besitzt, und untersuchen, welchen Aufschluss die Reihe (5) über den Werth dieser Wurzel giebt.

Ersetzt man in der formalen Gleichung (4) $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$ durch Null, oder, was dasselbe ist, ersetzt man in der Gleichung (3) $\varphi_k(x) = 0$ $\varkappa_n$ durch Null, so erhält man die Gleichung

$$(6) \qquad \Phi_k(x) = x + \mu \log x - c - k\pi - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{K_\nu}{x^\nu} = 0,$$

welche, wenn k hinreichend gross angenommen wird, eine folgendermassen zu bestimmende Wurzel x_k besitzt.

Setzt man

$$t = \frac{1}{c + k\pi}, \quad x = \frac{1}{t(1+\bar{\xi})},$$

so erhält man zwischen $\bar{\xi}$ und t eine Gleichung von der Form

$$0 = \mu t \log t + \mathfrak{P}(t, \bar{\xi}),$$

welche aus der obigen Gleichung zwischen ξ und t durch Nullsetzen von $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$ hervorgeht. Jetzt ist aber $\mathfrak{P}(t, \bar{\xi})$ eine Potenzreihe, welche für hinreichend kleine Werthe von $|t|$ und $|\bar{\xi}|$ convergirt. Setzt man wieder $z = t \log t$, so ergiebt sich für $\bar{\xi}$ eine Potenzreihe

$$\bar{\xi} = \sum_{p+q>0} \bar{C}_{pq} t^p z^q,$$

welche für hinreichend kleine Werthe von $|t|$ und $|z|$ convergent ist. $\bar{C}_{pq}$ geht aus C_{pq} durch Nullsetzen von $K_{n+1}, K_{n+2}, \ldots$ hervor; d. h. es ist $\bar{C}_{pq} = C_{pq}$ für $p \leqq n+1$. Nun ist

$$X_k = \frac{1}{t(1+\bar{\xi})} = \frac{1}{t(1 + \sum \bar{C}_{pq} t^p z^q)} = \frac{\sum_{pq} \bar{A}_{pq} t^p z^q}{t},$$

und zwar ist

$$\bar{A}_{pq} = A_{pq} \quad (p \leqq n+1),$$

und schliesslich

$$X_k = c + k\pi - \mu \log(c + k\pi) + \sum_{p+q>0} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q; \tag{7}$$

letztere Reihe ist für hinreichend grosse Werthe von k convergent, und es ist

$$\bar{L}_{pq} = L_{pq} \quad (p \leqq n).$$

Wir zeigen nun, dass der Wurzel X_k der Gleichung $\Phi_k(x) = 0$, wenn k hinreichend gross genommen wird, eine Wurzel x_k der Gleichung $\varphi_k(x) = 0$ entspricht. Wir beschreiben, unter ε eine beliebige kleine positive Grösse verstehend, um X_k einen Kreis vom Radius $\frac{\varepsilon}{k^n}$, vom Umfang $\mathfrak{C}_k$, und zeigen, dass innerhalb $\mathfrak{C}_k$ eine Wurzel der Gleichung $\varphi_k(x) = 0$ liegt, wenn k hinreichend gross ist. Da die über den Kreisumfang $\mathfrak{C}_k$ erstreckten Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_k} d \log \varphi_k(x), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}_k} d \log \Phi_k(x)$$

die Anzahl der innerhalb $\mathfrak{C}^k$ gelegenen Wurzeln der Gleichungen

$\varphi_k(x) = 0$ bezw. $\Phi_k(x) = 0$ angeben, so brauchen wir nur nachzuweisen, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_k}\left(d\log\varphi_k(x) - d\log\Phi_k(x)\right)$$

verschwindet. Da dieses Integral aber nur einen ganzzahligen Werth haben kann, so genügt der Nachweis, dass

$$J_k = \int\limits_{\mathfrak{C}_k}\left(\frac{d\log\varphi_k(x)}{dx} - \frac{d\log\Phi_k(x)}{dx}\right)dx$$

für hinreichend grosses k dem absoluten Betrage nach beliebig klein wird.

Nun ist

$$F_k = \frac{d\log\varphi_k(x)}{dx} - \frac{d\log\Phi_k(x)}{dx}$$

$$= \frac{\varkappa_n\left(1+\frac{\mu}{x}-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{x^\nu}\right)+\left(n\varkappa_n - x\frac{d\varkappa_n}{dx}\right)\left(1+\mu\frac{\log x}{x}-\frac{c+k\pi}{x}-\sum\limits_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{x^{\nu+1}}\right)}{x^n\varphi_k(x)\,\Phi_k(x)}.$$

Setzt man auf $\mathfrak{C}_k$

$$x = X_k + \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n},$$

so ist

$$\begin{aligned}\Phi_k(x) &= \Phi_k\left(X_k + \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n}\right) - \Phi_k(X_k)\\ &= \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n} + \mu\left[\log\left(X_k+\frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n}\right) - \log X_k\right]\\ &\qquad - \sum_{\nu=1}^{n}K_\nu\left[\frac{1}{\left(X_k+\frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n}\right)^\nu} - \frac{1}{X_k^\nu}\right]\\ &= \frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n} + \mu\log\left(1+\frac{\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n X_k}\right)\\ &\qquad + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{K_\nu}{X_k^\nu}\left[\frac{\nu\varepsilon e^{i\varphi}}{k^n X_k}+\cdots\right],\end{aligned}$$

also

$$k^n\Phi_k(x) = \varepsilon e^{i\varphi} + \left(\frac{\mu\varepsilon e^{i\varphi}}{X_k}+\cdots\right),$$

$$|k^n\Phi_k(x)| > \varepsilon - \left|\frac{\mu\varepsilon e^{i\varphi}}{X_k}+\cdots\right|.$$

Nimmt man k so gross, dass der Subtrahend auf der rechten Seite kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird, so ist auf $\mathfrak{C}_k$

$$|k^n \Phi_k(x)| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner ist

$$\varphi_k(x) = \Phi_k(x) - \frac{\varkappa_n}{x^n},$$

$$|k^n \varphi_k(x)| > |k^n \Phi_k(x)| - \left|\frac{k^n}{x^n} \varkappa_n\right|;$$

nun ist aber $\lim\limits_{k=\infty} \frac{X_k}{k} = \pi$ und, wenn x auf $\mathfrak{C}_k$ liegt, $\lim\limits_{k=\infty} \frac{x}{k} = \pi$; da auf $\mathfrak{C}_k$ $|\varkappa_n|$ beliebig klein wird*), wenn man k hinreichend gross nimmt, so kann man erreichen, dass

$$\left|\frac{k^n}{x^n} \varkappa_n\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

und demnach auf $\mathfrak{C}_k$

$$|k^n \varphi_k(x)| > \frac{\varepsilon}{4}$$

wird. Bedeutet δ eine beliebig kleine positive Grösse, so ist für hinreichend grosses k der Zähler von F_k dem absoluten Betrage nach kleiner als $\frac{1}{8} \delta \varepsilon$, also da

$$k^{2n} |\varphi_k(x) \; \Phi_k(x)| > \frac{1}{8} \varepsilon^2$$

ist,

$$|F_k| < \frac{\delta k^n}{\varepsilon}.$$

Weiter ist

$$|J_k| = \left|\int\limits_{\mathfrak{C}_k} F_k \, dx\right| < \frac{2\pi\varepsilon}{k^n} \cdot \frac{\delta k^n}{\varepsilon} = 2\pi\delta,$$

d. h. für hinreichend grosses k wird $|J_k|$ beliebig klein, w. z. b. w.

Im Innern des Kreises vom Radius $\frac{\varepsilon}{k^n}$ um X_k liegt eine Wurzel x_k von $\varphi_k(x) = 0$, es ist also

$$|x_k - X_k| < \frac{\varepsilon}{k^n}$$

oder

$$\lim_{k=\infty} k^n (x_k - X_k) = 0.$$

Wir hatten gefunden (7)

---

*) Wegen $\lim\limits_{k=\infty} \arg X_k = 0$ gehört $\mathfrak{C}_k$ dem Gebiet $-\omega \; \arg x < \omega$ an.

$$X_k = c + k\pi - \mu \log(c + k\pi) + \sum_{p+q \leqq n} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q$$
$$+ \sum_{p+q>n} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q;$$

setzen wir nun

$$(8) \quad x_k = c + k\pi - \mu \log(c + k\pi) + \sum_{p+q \leqq n} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q + \frac{\varepsilon_n}{(c+k\pi)^n},$$

so ist

$$x_k - X_k = \frac{\varepsilon_n}{(c+k\pi)^n} - \sum_{p+q>n} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c+k\pi)}{c+k\pi}\right)^q,$$

also

$$\lim_{k=\infty} k^n (x_k - X_k) = \frac{1}{\pi^n} \lim_{k=\infty} \varepsilon_n,$$

d. h.

$$(8') \qquad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Wir haben also den Satz:

Das Integral $y = c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ *) *der Differentialgleichung besitzt in der Nähe von* $x = \infty$ *unendlich viele Nullstellen* x_k ($\lim k = +\infty$), *welche durch die Reihe* (5) *asymptotisch dargestellt werden, d. h. es bestehen die Gleichungen* (8) *und* (8').

Setzen wir in der Formel (8) $n = 0$, so haben wir, wenn wir χ_k für ε_0 schreiben,

$$x_k = c + k\pi - \mu \log(c + k\pi) + \chi_k, \qquad \lim_{k=\infty} \chi_k = 0.$$

Setzen wir weiter

$$x_k = \xi_k + i\eta_k,$$
$$c = a + ib, \quad \chi_k = \chi_k' + i\chi_k'', \quad \mu = \mu' + i\mu'',$$

so haben wir

$$\xi_k = a + k\pi - \mu' \log\sqrt{(a+k\pi)^2 + b^2} + \mu'' \operatorname{arctg} \frac{b}{a+k\pi} + \chi_k',$$
$$\eta_k = b - \mu'' \log\sqrt{(a+k\pi)^2 + b^2} - \mu' \operatorname{arctg} \frac{b}{a+k\pi} + \chi_k'';$$

$$\arg x_k = \operatorname{arctg} \frac{\eta_k}{\xi_k}, \qquad |x_k| = \sqrt{\xi_k^2 + \eta_k^2},$$

---

*) c_1 und c_2 sind von Null verschieden vorausgesetzt.

Hieraus ergiebt sich

$$\lim_{k=\infty} |x_k| = \infty, \qquad \lim_{k=\infty} \arg x_k = 0;$$

ferner ist $\lim\limits_{k=\infty} \xi_k = \infty$, $\lim\limits_{k=\infty} \eta_k$ hat den endlichen Werth b, wenn $\mu'' = 0$, also μ reell ist, einen unendlich grossen Werth im Falle eines imaginären μ. Aus der Gleichung

$$x_{k+1} - x_k = \pi - \mu \log\left(1 + \frac{\pi}{c + k\pi}\right) + \chi_{k+1} - \chi_k$$

folgt noch

$$\lim_{k=\infty} (x_{k+1} - x_k) = \pi.$$

Im Falle $\mu = 0$ (bei der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen) fallen in der Reihe (5) die mit Logarithmen behafteten Glieder fort; denn da in der Gleichung zwischen ξ und t der Logarithmus nur in der Verbindung $\mu t \log t = \mu s$ vorkommt, so erhält man für ξ eine Potenzreihe von t und μs, so dass die Reihe (5), von den beiden ersten Gliedern abgesehen, nach Potenzen von $\frac{1}{c + k\pi}$ und $\mu \frac{\log(c + k\pi)}{c + k\pi}$ fortschreitet; es besteht demnach im Falle $\mu = 0$ die asymptotische Gleichung

$$x_k = c + k\pi + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_p}{(c + k\pi)^p}$$

mit der Bedeutung

$$x_k = c + k\pi + \sum_{p=1}^{n} \frac{L_p}{(c + k\pi)^p} + \frac{\varepsilon_n}{(c + k\pi)^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n = 0^{*)}.$$

---

*) Im 9. Band der amerikanischen Annals of Mathematics (ich kenne nur das Referat im Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik) hat Mc Mahon die Gleichung

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi x}\, J_n(x) = \cos\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \varphi_n(x) + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}n\pi\right) \psi_n(x) = 0,$$

wo $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ die bekannten divergenten Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ sind, mit Benutzung der Lagrange'schen Umkehrungsformel aufgelöst und für x_k eine Reihe nach fallenden Potenzen von $\frac{\pi}{4}(2n - 1 + 4k)$ aufgestellt. Die Arbeit enthält wohl nur die formale Ausführung der Rechnungen, denn das Referat bemerkt, dass sich nichts über die Convergenz der Reihen finde.

§ 2.

Wir haben uns bisher mit der Untersuchung derjenigen Nullstellen der Integrale der Differentialgleichung beschäftigt, deren absoluter Betrag gross ist und deren Argument zwischen $-\omega$ und ω $(\omega < \pi)$ liegt. Wir betrachten jetzt ein Integral $y = \bar{f}(x)$, welches für $\pi - \omega < \arg x < \pi + \omega$ eindeutig fixirt sei, und untersuchen die in diesem Gebiete in der Nähe von $x = \infty$ gelegenen Nullstellen $\bar{x}_k$. Es giebt zwei particuläre Integrale $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, welche in dem jetzigen Gebiet durch die Reihen $\varrho_1 S_1$, $\varrho_2 S_2$*) asymptotisch dargestellt werden, d. h. es ist

$$\bar{\eta}_1 = e^{ix} \ x^{\mu_1} \varrho_1 \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots + \frac{A_n}{x^n} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right),$$

$$\bar{\eta}_2 = e^{-ix} x^{\mu_2} \varrho_2 \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots + \frac{B_n}{x^n} + \frac{\beta_n}{x^n}\right);$$

α und β_n convergiren für $\lim |x| = \infty$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für alle Argumente von x zwischen $\pi - \omega$ und $\pi + \omega (\omega < \pi)$.

Um die Gleichung $\bar{f}(x) = 0$ aufzulösen, haben wir an der Entwicklung von § 1 nur einige Aenderungen anzubringen. Es sei

$$\bar{f}(x) = \bar{c}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{c}_2 \bar{\eta}_2.$$

Die Gleichung

$$\bar{f}(x) = e^{ix} \ x^{\mu_1} \varrho_1 \bar{c}_1 \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{A_\nu}{x^\nu} + \frac{\alpha_n}{x^n}\right) + e^{-ix} x^{\mu_2} \varrho_2 \bar{c}_2 \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{B_\nu}{x^\nu} + \frac{\beta_n}{x^n}\right) = 0 \tag{9}$$

schreibt sich

$$x + \mu \log x = \bar{c} - k\pi + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{K_\nu}{x^\nu} + \frac{\varkappa_n}{x^n};$$

$\log x$ ist durch die Festsetzung $\pi - \omega < \arg x < \pi + \omega$ bestimmt, k ist eine positive ganze Zahl, während in

$$\bar{c} = \frac{1}{2i} \log\left(- \frac{\varrho_2 \bar{c}_2}{\varrho_1 \bar{c}_1} \frac{B_0}{A_0}\right) \tag{10}$$

ein beliebiger Werth des Logarithmus zu nehmen ist. Um zunächst die Auflösung der Gleichung

$$x + \mu \log x = \bar{c} - k\pi + \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2} + \cdots$$

---

*) Für unsere specielle Differentialgleichung (A) ist unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung $\varrho_1 = e^{2\pi i \lambda_1}$, $\varrho_2 = 1$.

formal auszuführen, setzen wir

$$t = \frac{1}{\bar{c} - k\pi}, \quad x = \frac{1}{t(1+\xi)}$$

und erhalten

$$\frac{1}{1+\xi} - \mu t \log t - \mu t \log(1+\xi) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} t^{\nu+1}(t+\xi)^{\nu};$$

für $k = +\infty$ wird $\arg t = -\pi$, wodurch $\log t$ fixirt ist; wegen $\arg x = \pi$ für $k = \infty$ und $\arg x = -\arg t - \arg(1+\xi)$ muss für $k = \infty$ $\arg(1+\xi) = 0$ sein, so dass für $\log(1+\xi)$ die Logarithmenreihe zu setzen ist. Die frühere Rechnung liefert die Wurzel

$$\bar{x}_k = \frac{1}{t} + \mu \log t + \sum_{p+q>0} L_{pq} t^p (-t \log t)^q.$$

Nun ist aber, da für $k = \infty$ $\arg t = -\pi$ sein soll,

$$\log t = -\pi i - \log(k\pi - \bar{c})$$

zu setzen, wenn $\log(k\pi - \bar{c})$ durch die Bestimmung $\arg(k\pi - \bar{c}) = 0$ für $k = \infty$ fixirt wird. Demnach erhält man eine Reihenentwicklung von der Form

$$\begin{aligned}\bar{x}_k = \bar{c} - \mu\pi i - k\pi - \mu \log(k\pi - \bar{c}) \\ + \sum_{p+q>0} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{k\pi - \bar{c}}\right)^p \left(\frac{\log(k\pi - \bar{c})}{k\pi - \bar{c}}\right)^q\end{aligned} \tag{11}$$

mit der Bedeutung

$$\begin{aligned}\bar{x}_k = \bar{c} - \mu\pi i - k\pi - \mu \log(k\pi - \bar{c}) \\ + \sum_{p+q \geq n} \bar{L}_{pq} \left(\frac{1}{k\pi - \bar{c}}\right)^p \left(\frac{\log(k\pi - \bar{c})}{k\pi - \bar{c}}\right)^q \\ + \frac{\bar{\varepsilon}_n}{(k\pi - \bar{c})^n}, \quad \lim_{k=\infty} \bar{\varepsilon}_n = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Das Integral $y = \bar{c}_1 \bar{\eta}_1 + \bar{c}_2 \bar{\eta}_2$ *besitzt**) *in der Umgebung von* $x = \infty$ *unendlich viele Nullstellen* $\bar{x}_k$ ($\lim k = +\infty$), *welche durch die Reihe* (11) *asymptotisch dargestellt werden, d. h. es besteht die Gleichung* (12).

Nach (12) ist $\lim\limits_{k=\infty} \arg \bar{x}_k = \pi$, während in § 1 $\lim\limits_{k=\infty} \arg x_k = 0$ war. Wir nehmen nun an, das Integral $\bar{f}(x)$ der Differentialgleichung (A), welches für $\pi - \omega < \arg x < \pi + \omega$ fixirt sein sollte, falle mit dem für $-\omega < \arg x < \omega$ fixirten Integral $f(x)$ für $\pi - \omega < \arg x < \omega$ zusammen (wobei ω zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegen soll). Zwischen den von der positiven reellen Axe zur negativen reellen Axe fortgesetzten

*) Falls $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ von Null verschieden sind.

Functionen η_1, η_2 und den auf der negativen reellen Axe definirten Functionen $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ besteht der Zusammenhang:

$$\bar{\eta}_1 = e^{2\pi i\lambda_1}\eta_1, \qquad \bar{\eta}_2 = \eta_2 + (e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\eta_1$$

oder

$$\eta_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}\bar{\eta}_1, \quad \eta_2 = \bar{\eta}_2 - e^{-2\pi i\lambda_1}(e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\bar{\eta}_1.$$

Die Fortsetzung des Integrals $f(x)$ ist daher auf der negativen reellen Axe

$$\bar{f}(x) = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 = e^{-2\pi i\lambda_1}\Big(\big(c_1 - c_2(e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\big)\Big)\bar{\eta}_1 + c_2\bar{\eta}_2,$$

also durch Vergleichung mit $\bar{f}(x) = \bar{c}_1\bar{\eta}_1 + \bar{c}_2\bar{\eta}_2$

$$\bar{c}_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}\Big(c_1 - c_2(e^{2\pi i\lambda_2} - 1)\Big), \quad \bar{c}_2 = c_2.$$

Lässt man die Veränderliche eine volle positive Umdrehung um $x = 0$ ausführen, so geht die Function $f(x)$ über in

$$f_1(x) = c_1\eta_1' + c_2\eta_2'$$

oder, da

$$\eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2,$$
$$\eta_2' = \gamma\eta_1 + \beta\eta_2$$

ist, wo die Coefficienten die früher bestimmten Werthe haben,

$$f_1(x) = (c_1\alpha + c_2\gamma)\eta_1 + (c_1\beta + c_2\delta)\eta_2 = c_1'\eta_1 + c_2'\eta_2,$$

so dass in den Formeln des § 1 an Stelle von c_1, c_2 die Werthe

$$c_1' = c_1\alpha + c_2\gamma,$$
$$c_2' = c_1\beta + c_2\delta$$

treten.

Um die in der Nähe von $x = \infty$ gelegenen Nullstellen der ganzen transcendenten Functionen $G_1(x)$ und $G_2(x)$ zu finden, hat man in den Formeln von § 1 und § 2 zu setzen:

$$c_1 = e^{2\pi i\lambda_2} - 1, \qquad c_2 = -(e^{2\pi i\lambda_1} - 1),$$
$$\bar{c}_1 = e^{2\pi i\lambda_2} - 1, \qquad \bar{c}_2 = -(e^{2\pi i\lambda_1} - 1)$$

für $G_1(x)$ und

$$c_1 = e^{2\pi i\lambda_1}, \qquad c_2 = 1,$$
$$\bar{c}_1 = e^{-2\pi i\lambda_1}, \quad \bar{c}_2 = 1$$

für $G_2(x)$.

§ 3.

Die Differentialgleichung (A) besitzt die Integrale

$$(13) \qquad y_1 = G_1(x), \qquad y_2 = x^{-\lambda_1-\lambda_2-1}G_2(x),$$

wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ ganze transcendente Functionen sind. Wir stellen uns die Aufgabe, *mit Hülfe der asymptotischen Darstellungen das Geschlecht dieser ganzen Functionen zu bestimmen* *).

*) Auch diese Untersuchung wird im Hinblick auf allgemeinere lineare Differentialgleichungen geführt.

Die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)y=0$$

mit den Integralen

$$y_1=F_1(x),\qquad y_2=x^{1-b_1}F_2(x),$$

wo $F_1(x)$, $F_2(x)$ ganze transcendente Functionen sind, geht durch die Substitution

$$y=e^{-\frac{a_1}{2}x},\qquad x=\frac{2\xi}{\sqrt{4a_2-a_1^2}}$$

über in

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2+2)\frac{d\eta}{d\xi}+\big(\xi+(\lambda_1-\lambda_2)i\big)\,\eta=0,$$

wo

$$\lambda_1+\lambda_2+2=b_1,$$
$$(\lambda_1-\lambda_2)i=\frac{2b_2-a_1b_1}{\sqrt{4a_2-a_1^2}}\ *)$$

ist, während man durch die Substitution

$$y=e^{\alpha x}\mathfrak{y},\qquad x=-\frac{\mathfrak{x}}{2\alpha+a_1},$$

wo α eine der beiden (als verschieden vorausgesetzten) Wurzeln der quadratischen Gleichung $\alpha^2+a_1\alpha+a_2=0$ darstellt, die Gleichung

$$\mathfrak{x}\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2}=(\mathfrak{x}-q)\frac{d\mathfrak{y}}{dx}+p\mathfrak{y}$$

erhält, worin

$$q=b_1,\quad p=\frac{b_1\alpha-b_2}{2\alpha+a_1}$$

gesetzt ist. Unter Einführung der ganzen transcendenten Function

$$F(p,q,x)=1+\frac{p}{1\,.\,q}x+\frac{p(p+1)}{1\,.\,2\,.\,q(q+1)}x^2+\cdots \tag{14}$$

erhält man für letztere Differentialgleichung die Integrale

$$\mathfrak{y}_1=F(p,q,x),$$
$$\mathfrak{y}_2=x^{1-q}F(p-q+1,\ 2-q,\ x)\ **).$$

Eine ganze transcendente Function $F(x)$ mit den Nullstellen $\omega_\nu(\nu=1,2,\ldots\infty)$ ist vom Geschlecht m, wenn die Reihe $\sum_\nu|\omega_\nu|^{-m}$ divergent, die Reihe $\sum_\nu|\omega_\nu|^{-m-1}$ convergent ist, so dass das Weierstrass'sche Product

---

*) Es wird vorausgesetzt, dass $4a_2-a_1^2$ von Null verschieden ist und dass λ_1, λ_2 die früheren Bedingungen erfüllen.

**) Pochhammer, Math. Ann. Bd. 36.

$$\Pi(x) = \prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\omega_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{m}\left(\frac{x}{\omega_\nu}\right)^m}$$

convergirt, und wenn weiter

$$F(x) = e^{g(x)}\,\Pi(x)$$

ist, wo $g(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, deren Grad nicht grösser als m ist.

Die Function $G_1(x)$ besitzt nach § 1 und § 2 unendlich viele Nullstellen

$$x_k = c + k\pi - \mu \log(c + k\pi) + \varepsilon_k, \qquad \lim_{k=\infty} \varepsilon_k = 0,$$

$$\bar{x}_k = \bar{c} - \mu\pi i - k\pi - \mu \log(k\pi - \bar{c}) + \bar{\varepsilon}_k, \quad \lim_{k=\infty} \bar{\varepsilon}_k = 0.$$

Die Reihe

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|}$$

ist divergent; denn es ist

$$x_k = k\pi(1 + \delta_k), \quad \lim_{k=\infty} \delta_k = 0,$$

also

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|} = \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{1}{k\,|1 + \delta_k|} \geqq \frac{1}{\pi} \sum_k \frac{1}{k\,(1 + |\delta_k|)};$$

für $k > k'$ ist $|\delta_k|$ kleiner als die beliebig kleine positive Grösse δ, also

$$\sum_{k>k'} \frac{1}{|x_k|} > \frac{1}{\pi(1+\delta)} \sum_{k>k'} \frac{1}{k}.$$

Dagegen ist die Reihe

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|^2}$$

convergent; denn es ist

$$\sum_k \frac{1}{|x_k|^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_k \frac{1}{k^2 . |1 + \delta_k|^2} < \frac{1}{\pi^2} \sum_k \frac{1}{k^2 . |1 - |\delta_k|^2|},$$

also

$$\sum_{k>k'} \frac{1}{|x_k|^2} < \frac{1}{\pi^2(1 - \delta^2)} \sum_{k>k'} \frac{1}{k^2}.$$

Ebenso ist von den Reihen

$$\sum_k \frac{1}{|\bar{x}_k|}, \qquad \sum_k \frac{1}{|\bar{x}_k|^2}$$

die erste divergent, die zweite convergent. Wenn wir sämmtliche Nullstellen von $G_1(x)$ mit ω_ν $(\nu = 1, 2, \cdots \infty)$ bezeichnen, so convergirt das Product

$$\Pi(x) = \prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu}}$$

und es ist

$$G_1(x) = e^{g(x)}\Pi(x),$$

wo $g(x)$ eine ganze rationale oder transcendente Function darstellt. Um zu zeigen, dass $G_1(x)$ das Geschlecht 1 besitzt, bedarf es noch des Nachweises, dass $g(x)$ eine ganze Function ersten Grades ist.

Nun haben wir für $G_1(x)$ eine Darstellung von der Form

$$G_1(x) = c_1 e^{ix} x^{\mu_1}(A_0 + \alpha_0) + c_2 e^{-ix} x^{\mu_2}(B_0 + \beta_0),$$

wo α_0 und β_0 für $\lim |x| = \infty$ gleichmässig zur Grenze Null convergiren, wenn $\arg x$ zwischen $-\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ liegt, und eine Darstellung von derselben Form, nur mit theilweise anderen Coefficienten, welche für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$ gilt. Dabei ist δ eine beliebig kleine positive Grösse. Demnach ist für $-\pi + \delta < \arg x < \pi - \delta$

$$\begin{aligned} |G_1(x) &\leqq e^{|x|}\left\{e^{\Re(\mu_1 \log x)}\,|c_1(A_0+\alpha_0)| + \cdots\right\} \\ &\leqq e^{|x|}\left\{e^{|\mu_1|\,|\log|x|| + |\mu_1|\,|\arg x|}|c_1(A_0+\alpha_0)| + \cdots\right\} \\ &= e^{|x|^{1+\varepsilon}}\left\{e^{|\mu_1|\log|x| + |\mu_1|\,|\arg x| - |x|^{\varepsilon}}\cdot|c_1(A_0+\alpha_0)| + \cdots\right\}. \end{aligned}$$

Wenn man unter ε eine beliebige positive Grösse versteht, wird der Klammerausdruck für alle Argumente von x zwischen $-\pi + \delta$ und $\pi - \delta$ kleiner als 1, also

$$|G_1(x)| < e^{|x|^{1+\varepsilon}},$$

wenn man nur $|x|$ hinreichend gross nimmt. Dasselbe zeigt man für $\delta < \arg x < 2\pi - \delta$. Wenn also ε eine beliebig kleine positive Grösse darstellt, ist für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze übersteigt,

$$|G_1(x)| < e^{|x|^{1+\varepsilon}}.$$

Ferner lassen sich*) um den Nullpunkt Kreise mit beliebig grossen Radien beschreiben, auf welchen

$$|\Pi(x)| > e^{-|x|^{1+\varepsilon}}$$

ist. Auf diesen Kreisen ist also

$$|e^{g(x)}| = \left|\frac{G_1(x)}{\Pi(x)}\right| < e^{2|x|^{1+\varepsilon}}.$$

Wenn es aber beliebig grosse Werthe von $|x|$ giebt, für welche

$$|e^{g(x)}| < e^{H|x|^{\lambda}}$$

ist**), so ist $g(x)$ eine ganze rationale Function höchstens λ^{ten} Grades. In unserem Falle ist also $g(x)$ linear oder constant.

Dieselben Schlüsse gelten für $G_2(x)$.

Die Differentialgleichung (A) *besitzt die Integrale*

---

*) Hadamard, Liouv. Journ. 1893, S. 204.

**) Hadamard, a. a. O. S. 187.

$$y_1 = G_1(x), \quad y_2 = y^{-\lambda_1-\lambda_2-1} G_2(x),$$

wo $G_1(x)$, $G_2(x)$ *ganze transcendente Functionen vom Geschlecht* 1 *sind.*

Ist die Function $F(x)$ vom Geschlecht 1, so gilt das Gleiche für $e^{ax} F(bx)$; also sind auch die oben eingeführten Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$ sowie $F(p, q, x)$ vom Geschlecht 1*). Sind $\omega_\nu (\nu = 1, 2, \cdots \infty)$ die Nullstellen von $F(p, q, x)$, so ist

$$F(p, q, x) = e^{cx} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu}}; \tag{15}$$

durch Reihenentwicklung des Products und Coefficientenvergleichung findet man

$$c = \frac{p}{q}. \tag{15'}$$

Die Bessel'sche Function**)

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\Gamma(n+\nu+1)\, \Gamma(\nu+1)}$$

habe die Nullstellen $\pm \omega_\nu$ $(\nu = 1, 2 \cdots \infty)$. Unter Einführung des convergenten Productes

$$\prod_\nu \left(1 - \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{\frac{x}{\omega_\nu}} \left(1 + \frac{x}{\omega_\nu}\right) e^{-\frac{x}{\omega_\nu}} = \prod_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\omega_\nu^2}\right)$$

haben wir

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} e^{cx} \prod_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\omega_\nu^2}\right);$$

die Coefficientenvergleichung ergiebt $c = 0$, also ist

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \prod_\nu \left(1 - \frac{x^2}{\omega_\nu^2}\right). \tag{16}$$

Demnach ist $x^{-n} J_n(x)$ eine ganze transcendente Function von x^2 vom Geschlecht 0.

Herr Hadamard stellte sich in seiner bereits angeführten Arbeit (zum Zweck der Untersuchung der Riemann'schen Function $\zeta(s)$) die Aufgabe, aus der Art, wie die Coefficienten einer beständig convergenten Potenzreihe abnehmen, das Geschlecht der ganzen transcen-

*) Dabei nehmen wir an, dass die entsprechende Differentialgleichung (A) die früheren Bedingungen erfüllt.

**) Wenn auch der Fall eines ganzzahligen n zu den bisher ausgeschlossenen Fällen gehört, so besitzt $J_n(x)$ doch eine asymptotische Darstellung, welche in der bisher betrachteten enthalten ist.

denten Function zu bestimmen. Herr Poincaré*) hatte den Satz bewiesen:

„Ist die ganze Function

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

vom Geschlecht m, so ist

$$\lim_{n=\infty} a_n \sqrt[m+1]{n!} = 0.\text{“}$$

Herr Hadamard stellte den Satz auf:

„Wenn für grosse n

$$|a_n| \cdot \sqrt[\lambda]{n!} < 1$$

ist, so ist das Geschlecht der Function $F(x)$ nicht grösser als λ.“**)

Wir versuchen, vermittelst dieses Satzes das Geschlecht der Function $F(p, q, x)$ zu bestimmen; hier ist

$$(17) \qquad a_n = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(q+n)} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)},$$

also

$$\log(n!\, a_n) = \log \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} + \log \Gamma(p+n) - \log \Gamma(q+n).$$

Zur Entwicklung der beiden letzten Glieder benutzen wir die Stirling'sche Reihe

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2a} - \frac{B_2}{3.4.a^3} + \cdots;$$

trotz der Divergenz der Reihe hat die Gleichung die folgende Bedeutung: setzt man

$$\log \Gamma(a) = \left(a - \tfrac{1}{2}\right) \log a - a + \log \sqrt{2\pi} + \frac{C_1}{a} + \frac{C_2}{a^2} + \cdots + \frac{C_\nu}{a^\nu} + \frac{\gamma_\nu}{a^\nu}\text{***)},$$

so convergirt γ_ν mit unendlich wachsendem $|a|$ zur Grenze Null und zwar gleichmässig für alle Argumente von a zwischen $-\omega$ und $\omega\,(\omega < \pi)$†). Hiernach ist

---

*) Bulletin de la Société mathématique 1883.

**) Damit konnte gezeigt werden, dass die Riemann'sche Function $\xi(t)$ eine ganze Function von t^2 vom Geschlecht 0 ist.

***) Dabei ist zur Vereinfachung der Schreibweise $C_1 = \frac{B_1}{1.2}$, $C_2 = 0$ u. s. w. gesetzt.

†) Für complexe a wurde die Reihe von Stieltjes, Liouv. Journ. 1889, behandelt.

$$\log(n!\,a_n) = \log\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)}$$

$$+ n\log\frac{p+n}{q+n} + \left(p-\tfrac{1}{2}\right)\log(p+n) - \left(q-\tfrac{1}{2}\right)\log(q+n) - p + q$$

$$+ C_1\left(\frac{1}{p+n} - \frac{1}{q+n}\right) + C_2\left(\frac{1}{(p+n)^2} - \frac{1}{(q+n)^2}\right) + \cdots$$

$$+ C_\nu\left(\frac{1}{(p+n)^\nu} - \frac{1}{(q+n)^\nu}\right) + \frac{\gamma_\nu'}{(p+n)^\nu} - \frac{\gamma_\nu''}{(q+n)^\nu},$$

$$\lim_{n=\infty}\gamma_\nu' = 0, \quad \lim_{n=\infty}\gamma_\nu'' = 0.$$

Nun ist

$$n\log\frac{p+n}{q+n} = p - q - \frac{p^2-q^2}{2n} + \cdots \pm \frac{p^{\nu+1}-q^{\nu+1}}{(\nu+1)n^\nu} + \frac{\alpha_\nu}{n^\nu},$$

$$\lim_{n=\infty}\alpha_\nu = 0;$$

$$\left(p-\tfrac{1}{2}\right)\log(p+n) - \left(q-\tfrac{1}{2}\right)\log(q+n)$$

$$= (p-q)\log n + \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)p - \left(q-\frac{1}{2}\right)q}{n} + \cdots$$

$$\pm \frac{\left(p-\frac{1}{2}\right)p^\nu - \left(q-\frac{1}{2}\right)q^\nu}{\nu n^\nu} + \frac{\beta_\nu}{n^\nu}, \quad \lim_{n=\infty}\beta_\nu = 0;$$

$$\frac{1}{(p+n)^\mu} - \frac{1}{(q+n)^\mu} = \frac{1}{n^\mu}\left(\left(1+\frac{p}{n}\right)^{-\mu} - \left(1+\frac{q}{n}\right)^{-\mu}\right)$$

$$= \frac{1}{n^\mu}\left(-\mu\frac{p-q}{n} + \cdots + \frac{\delta_{\mu\nu}}{n^{\nu-\mu}}\right)$$

$$= -\mu\frac{p-q}{n^{\mu+1}} + \cdots + \frac{\delta_{\mu\nu}}{n^\nu}, \quad \lim_{n=\infty}\delta_{\mu\nu} = 0.$$

Durch Einsetzung dieser Ausdrücke erhält man eine Entwickelung von der Form

$$\log(n!\,a_n) = \log\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} + (p-q)\log n$$

$$+ \frac{\varkappa_1}{n} + \frac{\varkappa_2}{n^2} + \cdots + \frac{\varkappa_\nu}{n^\nu} + \frac{\varepsilon_\nu}{n^\nu}, \quad \lim_{n=\infty}\varepsilon_\nu = 0$$

oder die asymptotische Gleichung für grosse n

$$\log(n!\,a_n) \sim \log\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} + (p-q)\log n + \frac{\varkappa_1}{n} + \frac{\varkappa_2}{n^2} + \cdots,$$

woraus hervorgeht*):

*) Ueber das Rechnen mit asymptotischen Reihen vgl. Poincaré, Act. math. Bd. 8 und Méth. nouv. de la Méc. cél. Bd. II.

$$(18) \qquad n!\, a_n \sim \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} n^{p-q}\left(1+\frac{\gamma_1}{n}+\frac{\gamma_2}{n^2}+\cdots\right).$$

Hiernach ist insbesondere

$$n!\, a_n = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} n^{p-q}(1+\varepsilon), \quad \lim_{n=\infty} \varepsilon = 0.$$

Bedeutet δ eine beliebig kleine positive Grösse, so ist für grosse n

$$|a_n| \cdot \sqrt[1+\delta]{n!} < 1,$$

so dass nach dem Hadamard'schen Satze das Geschlecht kleiner als $1+\delta$ ist, d. h. gleich 0 oder 1. Wäre unsere Function vom Geschlecht 0, so müsste nach dem Poincaré'schen Satze $\lim\limits_{n=\infty} a_n n! = 0$ sein; im Falle $\Re(p-q) \geqq 0$ ist demnach das Geschlecht sicher gleich 1, während der Fall $\Re(p-q) < 0$ noch unentschieden bleibt. Mit Hülfe des Aufschlusses, welchen die asymptotische Darstellung über die Nullstellen giebt, ersieht man, dass das Geschlecht 0 ausgeschlossen ist.

§ 4.

Wir setzen jetzt die Coefficienten der Differentialgleichung (A) als reell, λ_1 und λ_2 als conjugirt complex voraus, so dass auch

$$\mu_1 = -\lambda_1 - 1 = \varrho + i\sigma,$$
$$\mu_2 = -\lambda_2 - 1 = \varrho - i\sigma$$

conjugirt complex sind. *Wir benutzen die asymptotischen Darstellungen zur Untersuchung der reellen Integrale für grosse reelle positive Werthe von x.* Die zu dem Integral η_1 conjugirte Function ist, wie aus den früher aufgestellten bestimmten Integralen hervorgeht, $-e^{-2\pi i\lambda_1 - 4\pi i\lambda_2}\eta_2$. Wir wollen die frühere Bezeichnung insofern abändern, als wir η_2 an Stelle von $-e^{-2\pi i\lambda_1-4\pi i\lambda_2}\eta_2$ und entsprechend B_n an Stelle von $-e^{-2\pi i\lambda_1-4\pi i\lambda_2}B_n$ setzen. Die Differentialgleichung besitzt dann zwei conjugirt complexe Integrale η_1, η_2, welche für grosse reelle positive x durch die Reihen

$$S_1 = e^{ix} \; x^{\mu_1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right),$$
$$S_2 = e^{-ix} \, x^{\mu_2}\left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\right)$$

asymptotisch dargestellt ist; die Coefficienten A_n und B_n sind conjugirt complex. Wenn die Constanten c_1, c_2 conjugirt complex sind, stellt

$$y = f(x) = c_1\eta_1 + c_2 y_2$$

ein reelles Integral der Differentialgleichung dar. Die Function $f(x)$ besitzt nach § 1 unendlich viele Nullstellen

$$x_k = c + k\pi - \mu \log (c + k\pi)$$
$$+ \sum_{p+q \leq n} L_{pq} \left(\frac{1}{c+k\pi}\right)^p \left(\frac{\log c + k\pi}{c+k\pi}\right)^q + \frac{\varepsilon_n}{(c+k\pi)^n},$$
$$\lim_{k=\infty} \varepsilon_n = 0;$$

die Coefficienten L_{pq} sind jetzt ebenso wie c reell. Es bedarf noch des Nachweises, *dass für hinreichend grosse k x_k selbst reell ist* *). Man hat jetzt

$$f(x) = e^{ix} x^{\mu_1} (A_0 + \alpha_0) + e^{-ix} x^{\mu_2} (B_0 + \beta_0),$$
$$\lim_{x=+\infty} \alpha_0 = 0, \quad \lim_{x=+\infty} \beta_0 = 0$$

oder

$$h(x) = x^{-\varrho} f(x) = \cos (x + \sigma \log x) \cdot (P_0 + \varphi_0)$$
$$- \sin (x + \sigma \log x) \cdot (Q_0 + \psi_0),$$

wo P_0, Q_0 reelle Constante und φ_0, ψ_0 reelle Functionen von x sind, für welche

$$\lim_{x=\infty} \varphi_0 = 0, \qquad \lim_{x=\infty} \psi_0 = 0$$

ist. Setzt man

$$H(x) = P_0 \cos (x + \sigma \log x) - Q_0 \sin (x + \sigma \log x),$$

so ist

$$h(x) = H(x) + \varepsilon_0,$$
$$\varepsilon_0 = \varphi_0 \cos (x + \sigma \log x) - \psi_0 \sin (x + \sigma \log x),$$
$$\lim_{x=\infty} \varepsilon_0 = 0.$$

Die Gleichung $H(x) = 0$ oder

$$x + \sigma \log x = \operatorname{arctg} \frac{P_0}{Q_0} + k\pi$$

hat, einem grossen positiven Werth von k entsprechend, eine grosse positive Wurzel X_k. Wenn δ eine hinreichend kleine positive Grösse bedeutet, hat die Function $H(x)$ für $x = X_k - \delta$ und $x = X_k + \delta$ verschiedene Vorzeichen; dasselbe gilt wegen $\lim\limits_{x=\infty} \varepsilon_0 = 0$ für hinreichend grosse k für $h(x) = H(x) + \varepsilon_0$. Es liegt also zwischen $X_k - \delta$ und $X_k + \delta$ eine reelle Wurzel x_k der Gleichung $f(x) = 0$, wenn k hinreichend gross genommen wird**).

Es wurde früher gezeigt, dass die asymptotische Gleichung

$$(19) \quad f(x) \sim e^{ix} x^{\mu_1} c_1 \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \cdots\right) + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2 \left(B_0 + \frac{B_1}{x} + \cdots\right)$$

---

*) In Betreff sämmtlicher Nullstellen der Bessel'schen Function $J_n(x)$ vgl. Hurwitz, Math. Ann. Bd. 33.

**) Sämmtliche reellen Integrale besitzen unendlich viele reelle Nullstellen. Die Integrale η_1, η_2 ohne Nullstellen in der Nähe von $x = \infty$ sind nicht reell. Vgl. Kneser, Math. Ann. Bd. 42.

differentiirt werden kann; es ist

$$(20)\quad f'(x) \sim e^{ix} x^{\mu_1} c_1\left(A_0' + \frac{A_1'}{x} + \cdots\right) + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2\left(B_0' + \frac{B_1'}{x} + \cdots\right),$$

$$(21)\quad f''(x) \sim e^{ix} x^{\mu_1} c_1\left(A_0'' + \frac{A_1''}{x} + \cdots\right) + e^{-ix} x^{\mu_2} c_2\left(B_0'' + \frac{B_1''}{x} + \cdots\right),$$

wobei gesetzt ist:

$$\begin{aligned} A_0' &= \quad iA_0, & A_1' &= \quad iA_1 + \mu_1 A_0, \cdots, \\ B_0' &= -iB_0, & B_1' &= -iB_1 + \mu_2 B_0, \cdots, \\ A_0'' &= -\ A_0, & A_1'' &= -A_1 + 2i\mu_1 A_0, \cdots, \\ B_0'' &= -\ B_0, & B_1'' &= -B_1 - 2i\mu_2 B_0, \cdots. \end{aligned}$$

Die Gleichungen $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$ besitzen unendlich viele reelle positive Wurzeln x_k' bezw. x_k'':

$$(22)\quad x_k' = c' + k\pi - \mu \log(c' + k\pi) + \sum_{p+q \leq n} L'_{pq} \left(\frac{1}{c' + k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c' + k\pi)}{c' + k\pi}\right)^q + \frac{\varepsilon_n'}{(c' + k\pi)^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n' = 0;$$

$$(23)\quad x_k'' = c'' + k\pi - \mu \log(c'' + k\pi) + \sum_{p+q \leq n} L''_{pq} \left(\frac{1}{c'' + k\pi}\right)^p \left(\frac{\log(c'' + k\pi)}{c'' + k\pi}\right)^q + \frac{\varepsilon_n''}{(c'' + k\pi)^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varepsilon_n'' = 0;$$

hierbei ist

$$(24)\qquad c' = c + \frac{\pi}{2}, \quad c'' = c.$$

Aus der obigen asymptotischen Darstellung lässt sich vermittelst einfacher Rechnungen das Verhalten der Curve $y = f(x)$ für grosse reelle x ermitteln. Nachdem asymptotische Ausdrücke für die Abscissen x_k' und x_k'' der Maxima und Minima bezw. der Wendepunkte gefunden sind, wollen wir noch die Maximal- und Minimalwerthe der Function untersuchen, d. h. eine asymptotische Darstellung für $f(x_k')$ ableiten.

Aus (22) folgt, wenn wir vorübergehend

$$\frac{1}{c' + k\pi} = t, \quad \frac{\log(c' + k\pi)}{c' + k\pi} = s$$

setzen,

$$e^{ix_k'} = e^{i(c' + k\pi)} (c' + k\pi)^{-\mu i} \left(1 + \sum_{(0 < p+q \leq n)} A_{pq} t^p s^q + \gamma_n t^n\right),$$

$$\lim_{k=\infty} \gamma_n = 0,$$

sowie

$$x_k'^{\mu_1} = (c' + k\pi)^{\mu_1}(1 - \mu z + L'_{10}t^2 + L'_{01}tz + \cdots)^{\mu_1}$$
$$= (c' + k\pi)^{\mu_1}\Big(1 + \sum_{(0<p+q\leqq n)} B_{pq}t^p z^q + \delta_n t^n\Big),$$
$$\lim_{k=\infty} \delta_n = 0;$$

ferner ist:

$$\frac{1}{x_k'} = \frac{1}{c' + k\pi}(1 + \mu z + \cdots) = t + \mu t z + \cdots$$

und nach Einsetzung dieser Reihe

$$A_0 + \frac{A_1}{x_k'} + \cdots + \frac{A_n}{x_k'^n} + \frac{\alpha_n}{x_k'^n}$$
$$= A_0 + \sum_{(0<p+q\leqq n)} C_{pq}t^p z^q + \zeta_n t^n, \qquad \lim_{k=\infty}\zeta_n = 0;$$

also haben wir eine Entwickelung von der Form

$$e^{ix_k'} x_k'^{\mu_1} c_1\Big(A_0 + \frac{A_1}{x_k'} + \cdots + \frac{A_n}{x_k'^n} + \frac{\alpha_n}{x_k'^n}\Big)$$
$$= (-1)^k(c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}\Big[\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0} + \sum_{(0<p+q\leqq n)} R_{pq}t^p z^q + \varrho_n t^n\Big],$$
$$\lim_{k=\infty}\varrho_n = 0^{*)}$$

und ähnlich

$$e^{-ix_k'} x_k'^{\mu_2} c_2\Big(B_0 + \frac{B_1}{x_k'} + \cdots + \frac{B_n}{x_k'^n} + \frac{\beta_n}{x_k'^n}\Big)$$
$$= (-1)^k(c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}\Big[\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0} + \sum_{(0<p+q\leqq n)} S_{pq}t^p z^q + \sigma_n t^n\Big],$$
$$\lim_{k=\infty}\sigma_n = 0.$$

Wir haben demnach

$$(25)\quad f(x_k') = (-1)^k(c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}\Big[2\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0}$$
$$+ \sum_{(0<p+q\leqq n)} T_{pq}\Big(\frac{1}{c' + k\pi}\Big)^p\Big(\frac{\log(c' + k\pi)}{c' + k\pi}\Big)^q + \frac{\tau_n}{(c' + k\pi)^n}\Big],$$
$$\lim_{k=\infty}\tau_n = 0$$

---

*) Dabei ist auf die Gleichungen

$$\mu i = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}, \quad c' = \frac{1}{2i}\log\frac{c_2 B_0}{c_1 A_0}$$

Rücksicht genommen.

und insbesondere

$$f(x_k') = (-1)^k (2\sqrt{c_1 c_2 A_0 B_0} + \tau_0)(c' + k\pi)^{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}},$$
$$\lim_{k=\infty} \tau_0 = 0.$$

Ersetzt man in der asymptotischen Reihe für $f(x)$ x durch die asymptotische Reihe für die Wurzel x_k' der Gleichung $f(x) = 0$ und führt man die Rechnungen nach den für convergente Reihen gültigen Regeln formal aus, so erhält man eine asymptotische Darstellung für $f(x_k')$.

Das Bisherige wird genügen, um zu zeigen, wie sich mit Hülfe der asymptotischen Darstellung der Integrale durch divergente Reihen das Verhalten der reellen Integralcurven im Unendlichen untersuchen lässt.

Charlottenburg, 3. Februar 1897.

Das Apollonische Problem.

Von

E. Study in Greifswald*).

§ 1.

Einleitung.

Die nach Apollonius von Perga benannte Aufgabe „Einen Kreis zu bestimmen, der drei gegebene Kreise berührt" hat bekanntlich im Allgemeinen acht (reelle oder imaginäre) Lösungen, die auf vier Paare vertheilt sind. Die grösste Gruppe nun, nicht nur von Punkt- sondern auch von Berührungstransformationen, die Kreise in Kreise und *jede* Lösung des Apollonischen Problems in eine Lösung der transformirten Aufgabe verwandelt, ist die Gruppe aller Punkttransformationen, die überhaupt Kreise in Kreise überführen. Das Problem gehört also in gewissem Sinne zu der bekannten sechsgliedrigen, aus zwei continuirlichen Schaaren G_6, H_6 bestehenden Gruppe, die durch die Aufeinanderfolge beliebig vieler Inversionen (Transformationen durch reciproke Radien) erzeugt wird**). Aus dieser Bemerkung ergiebt sich für das Apollonische Problem, und für alle Aufgaben, von denen Aehnliches

*) Die folgende Mittheilung bietet eine Uebersicht der hauptsächlichsten Ergebnisse einer Untersuchung, die als Theil eines grösseren Ganzen später veröffentlicht werden soll. Die Grundgedanken hat der Verfasser bereits in der math. Section der Naturforscherversammlung zu Frankfurt a. Main (im Sept. 1896) vorgetragen.

**) Diese Art von Zugehörigkeit geometrischer Probleme zu bestimmten Transformationsgruppen ist bekanntlich zuerst von Herrn F. Klein dargelegt worden (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872. Abgedruckt Math. Ann. Bd. 43). Dort wird auch (S. 38—39) auf die Möglichkeit hingewiesen, noch für andere Gruppen als die allgemeine projective, algebraische Invariantentheorien zu entwerfen. Herr F. Klein hat die Güte gehabt, mich auf diese von mir und Anderen übersehene Stelle seiner Schrift aufmerksam zu machen. Die Willkür des Coordinatensystems aus den Formeln nach Möglichkeit verschwinden zu lassen, haben Leibnitz, Hamilton und H. Grassmann gefordert.

zu sagen ist, die Forderung: Wo möglich auch die bei der algebraischen oder constructiven Lösung zu verwendenden Hülfsmittel so einzurichten, dass sie gegenüber der genannten „Gruppe der Inversionen“ die Invarianteneigenschaft haben. Es werden danach — sofern es möglich ist, eine solche Forderung zu erfüllen — Formeln und Constructionen so zu wählen sein, dass alle vermöge der Transformationen von G_6, H_6 äquivalenten Aufgaben gleichzeitig und durch äquivalente Processe erledigt werden.

Ausserdem werden wir noch andere Anforderungen an die Lösung unserer Aufgabe, wie überhaupt an die Lösung algebraisch-geometrischer Probleme stellen: Wir bestehen darauf, bei der Lösung durch Formeln, wie bei der geometrischen Construction, mit einem Mindestaufwand von irrationalen Operationen auszukommen. Ferner werden wir der Lösung einen möglichst hohen Grad von Allgemeinheit zu geben wünschen, jedenfalls aber sie so einzurichten suchen, dass sie höchstens in solchen Grenzfällen illusorisch wird, in denen die Aufgabe selbst ihr eigentliches Interesse verliert. Endlich werden wir von der Lösung verlangen, dass sie unbeschadet der algebraischen Allgemeinheit auf reelle Figuren besondere Rücksicht nimmt, dass also namentlich die geometrische Construction bei reeller Lösung auch immer ausführbar ist.

Die drei letzten Forderungen wird man wohl ohne Weiteres als berechtigt anerkennen, wiewohl man thatsächlich oft genug, und zwar leider auch vielfach ganz ohne Noth, ihnen Rechnung zu tragen unterlassen hat, und wiewohl man ihnen, wie auch der ersten Forderung, in manchen Fällen zur Zeit wirklich wohl noch nicht genügen kann. Was nun die erste Forderung angeht, so kann man heute *vielleicht* noch verschiedener Meinung darüber sein, ob und wie weit einer solchen Zumuthung nachzugeben ist. Insbesondere bei den Aufgaben über Kreise wird sie vielleicht Mancher als unbequem empfinden, der mit der herkömmlichen Behandlungsweise solcher Probleme ganz zufrieden ist. Indessen hat das Beispiel der projectiven Geometrie und der zugehörigen Algebra der linearen Transformationen gezeigt, dass der wahre Reichthum und die grosse Schönheit der geometrischen Gestalten erst dann zu Tage kommen, wenn man sich auf den geschlossenen Bereich der invarianten Operationen beschränkt, dass also die Anfangs allerdings aufzuwendende grössere Mühe sich reichlich lohnt.

Der beste Weg, über den Werth methodischer Principien in's Reine zu kommen, wird jedenfalls der sein, dass man ihre Tragweite durch Behandlung bestimmter Aufgaben zu ermitteln sucht. Das Apollonische Problem aber fordert ganz besonders zu einem solchen Unternehmen heraus. Denn obgleich gerade diese Aufgabe bis auf die neueste Zeit schier unzählige Male bearbeitet worden ist, und obgleich man sie daher wohl gar schon als „erledigt“ angesehen hat, so ist es doch kaum zweifelhaft, dass alle bis jetzt gelieferten algebraischen und geometrischen Lösungen weit davon entfernt sind, der Gesammtheit der oben gestellten Forderungen Genüge zu leisten. Ueberhaupt nur die bekannte von Plücker angegebene (übrigens unvollständige) Lösung dürfte als eine Vorstufe zu der von uns abzuleitenden geometrischen Construction hier zu nennen sein*).

Natürlich wird man nicht erwarten dürfen, dass unsere Lösungen so „einfach“ ausfallen, nämlich sich mit so wenigen Worten beschreiben lassen werden, wie mehrere der bekannten. Die zu erstrebende wahre Einfachheit liegt aber unseres Erachtens nicht so sehr in der Kürze des Ausdrucks, als in der grundsätzlichen Anwendung der angemessensten Mittel. Diese sind zunächst zu entwickeln. Die präcisere Problemstellung erfordert natürlich auch sorgfältiger gearbeitete Werkzeuge.

Da wir nur sehr wenige Formeln und Constructionen aus der vorhandenen Litteratur übernehmen können, und da auch diese in einer unseren Zwecken entsprechenden Gestalt nicht vorliegen, so müssen wir ziemlich weit ausholen. Die an die Spitze gestellten Sätze, die sich auf n Dimensionen ausdehnen lassen, geben eine geeignete Grundlage ab für die algebraische Theorie noch vieler anderer geometrischer Probleme.

§ 2.

Inversionsinvarianten von Kreisen.

Es sei zunächst vorgelegt eine beliebige Zahl von Kreisen einer Ebene, dargestellt, wie wir der Kürze wegen annehmen wollen, etwa durch ihre Gleichungen in rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten $x_2 : x_1$, $x_3 : x_1$, z. B.

(1) $$\mathfrak{C}_0 x_1^2 + \mathfrak{C}_1 (x_2^2 + x_3^2) + 2\mathfrak{C}_2 x_1 x_2 + 2\mathfrak{C}_3 x_1 x_3 = 0,$$

oder auch in tetracyclischen, der Gleichung

(2) $$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$$

genügenden Coordinaten**):

(3) $$C_0 X_0 - C_1 X_1 - C_2 X_2 - C_3 X_3 = 0.$$

*) Crelle's Journal, Bd. 10, S. 293 oder Plücker's Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, S. 251.

Die meisten Lehrbücher bringen die Gergonne'sche Construction. An Eleganz lässt diese allerdings Nichts zu wünschen übrig; sie ist aber weder invariant, noch allgemein, noch algebraisch vollständig, also wohl nicht gerade „mustergültig“.

**) Um nicht mehrere Formelsysteme schreiben zu müssen, haben wir zwischen den Grössen $\mathfrak{C}_i$, C_i einen bestimmten Zusammenhang angenommen, nämlich diesen:

$$\mathfrak{C}_0 = C_0 - C_1, \quad \mathfrak{C}_1 = C_0 + C_1, \quad \mathfrak{C}_2 = C_2, \quad \mathfrak{C}_3 = C_3.$$

Wir unterscheiden nun die einzelnen Kreise durch angehängte Indices $\alpha, \beta, \ldots$, und verstehen unter einer *ganzen Invariante* dieser Kreise, genauer der zugehörigen algebraischen Formen, gegenüber der oben erwähnten continuirlichen Gruppe G_6, d. i. gegenüber den eigentlichen linearen Transformationen der quadratischen Gleichung (2) eine solche ganze rationale allseitig-homogene Function der Coefficienten $\mathfrak{C}_{\alpha i}, \mathfrak{C}_{\beta i}, \ldots$ oder $C_{\alpha i}, C_{\beta i}, \ldots$, die sich nach Ausführung einer Transformation von G_6 mit einem Factor reproducirt, der nur von den Transformationscoefficienten abhängt.

Die Frage nach der Gesammtheit dieser Functionen lässt sich erschöpfend beantworten: Es giebt nur zwei Typen elementarer Invarianten dieser Art, dargestellt durch die Ausdrücke

$$(4)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{C}_{\alpha 0}\mathfrak{C}_{\beta 1} + \mathfrak{C}_{\alpha 1}\mathfrak{C}_{\beta 0} - 2\mathfrak{C}_{\alpha 2}\mathfrak{C}_{\beta 2} - 2\mathfrak{C}_{\alpha 3}\mathfrak{C}_{\beta 3} = \\ &= 2(C_{\alpha 0}C_{\beta 0} - C_{\alpha 1}C_{\beta 1} - C_{\alpha 2}C_{\beta 2} - C_{\alpha 3}C_{\beta 3}) = (\Phi_\alpha \Phi_\beta), \end{aligned}$$

$$(5)\quad |\mathfrak{C}_{\alpha 0}\mathfrak{C}_{\beta 1}\mathfrak{C}_{\gamma 2}\mathfrak{C}_{\delta 3}| = 2|C_{\alpha 0}C_{\beta 1}C_{\gamma 2}C_{\delta 3}| = (\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_\gamma\Phi_\delta).$$

Es gilt der für die Geometrie und Algebra der Inversionen grundlegende Satz, dass alle ganzen Invarianten von Kreisen gegenüber der Gruppe G_6 ganze und rationale Functionen von Invarianten dieser beiden Arten sind.

Zwischen den Invarianten dieser beiden Typen bestehen ferner die folgenden beiden *irreduciblen Relationen* (und keine weiteren):

$$(6)\quad \begin{aligned} 0 &= (\Phi_\beta\Phi_\gamma\Phi_\delta\Phi_\varepsilon)(\Phi_\alpha\Psi) + (\Phi_\gamma\Phi_\delta\Phi_\varepsilon\Phi_\alpha)(\Phi_\beta\Psi) + (\Phi_\delta\Phi_\varepsilon\Phi_\alpha\Phi_\beta)(\Phi_\gamma\Psi) \\ &\quad + (\Phi_\varepsilon\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_\gamma)(\Phi_\delta\Psi) + (\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_\gamma\Phi_\delta)(\Phi_\varepsilon\Psi), \\ 0 &= 4(\Phi_\alpha\Phi_\beta\Phi_\gamma\Phi_\delta)(\Psi_\alpha\Psi_\beta\Psi_\gamma\Psi_\delta) + |(\Phi_\alpha\Psi_\alpha)\ldots(\Phi_\delta\Psi_\delta)|. \end{aligned}$$

Wegen der zweiten dieser Identitäten braucht man Invarianten des zweiten Typus nicht in höherem als dem ersten Grade zuzulassen. Bezeichnen wir also die beiden Invariantentypen kurz mit J und J', so wird sich jede Invariante von beliebig vielen Kreisen in folgender Form schreiben lassen:

$$\mathfrak{F}(J) + \Sigma J'.\mathfrak{F}'(J).$$

In den beiden Bestandtheilen dieser Summe $\mathfrak{F}(J)$ und $\Sigma J'.\mathfrak{F}'(J)$, haben wir dann die ähnlich wie oben zu definirenden ganzen Invarianten der umfassenderen Gruppe G_6, H_6 (s. § 1), der Gruppe aller — eigentlichen und uneigentlichen — automorphen linearen Transformationen der quadratischen Gleichung (2). *Solcher Invarianten der Gruppe (G_6, H_6) giebt es also zwei wesentlich verschiedene Arten;* und diese unterscheiden sich, wie wir hinzufügen wollen, durch die Factoren, die bei den Transformationen der Schaar H_6 zu ihnen hinzutreten

Man kann sie als Invarianten geraden und ungeraden Charakters auseinanderhalten*).

Es bedeutet nun die Gleichung $(\Phi\Psi) = 0$ die Orthogonalität zweier Kreise Φ, Ψ, und ähnlich zeigt eine Gleichung der Form $(\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \Phi_\delta) = 0$ eine lineare Abhängigkeit zwischen vier Kreisen, also das Vorhandensein eines gemeinsamen Orthogonalkreises an. Verstehen wir also unter $X, Y, \ldots$ Kreise, die als veränderlich gelten, „*Veränderliche*", wie wir kurz sagen wollen, so können wir zunächst einen jeden Kreis durch eine Gleichung von der Form

$$(\Phi X) = (C_0 X_0 - C_1 X_1 - C_2 X_2 - C_3 X_3) = 0$$

darstellen, auch ohne zwischen den Grössen X_i die Relation (2) anzunehmen, d. h. wir können den Kreis als geometrischen Ort seiner sämmtlichen Orthogonalkreise auffassen.

Verstehen wir schliesslich unter einer *Covariante* eine solche simultane Invariante von Kreisen, an deren Bildung auch die veränderlichen Kreise $X, Y, \ldots$ betheiligt sind (die man, beiläufig bemerkt, bei einer grossen Classe von Problemen nur in der Zweizahl zuzulassen braucht), so haben wir nunmehr alle Voraussetzungen beisammen, die zur Formulirung und zur Lösung unseres algebraischen Problems nöthig sind.

„*Vorgelegt sind die Gleichungen dreier Kreise*

$$(\Phi_1 X) = 0, \quad (\Phi_2 X) = 0, \quad (\Phi_3 X) = 0.$$

Gesucht ist eine irrationale Covariante der linearen Formen $(\Phi_i X)$, *deren verschiedene Werthe, gleich Null gesetzt, die Berührungskreise einzeln darstellen.*"**)

Völlig bestimmt ist diese Aufgabe freilich nicht; die Zahl der in Betracht kommenden Möglichkeiten wird aber bedeutend eingeschränkt durch unsere zweite und dritte Forderung, sowie dadurch, dass die gesuchte Covariante die Berührungskreise selbstverständlich rein, ohne fremde Factoren, ausdrücken soll. Es können, wenn man von trivialen Umänderungen absieht, wie sich zeigen wird, überhaupt nur zwei Ausdrücke als Lösungen ernsthaft in Frage kommen.

Die Lösung wird sich in der Weise vollziehen, dass der Bereich

---

*) Ich habe schon früher darauf aufmerksam gemacht, dass es bei den Untergruppen der allgemeinen projectiven Gruppe nicht genügt, nach solchen Formen zu fragen, die, je nach der Darstellungsart der betrachteten Gruppe mit dem Factor Eins, oder mit Potenzen eines und desselben Factors reproducirt werden. Was unter dem „vollständigen Formensystem" einer (discontinuirlichen) projectiven Gruppe verstanden wird, scheint mir einen solchen Namen nicht immer zu verdienen.

**) Wegen des Begriffs der *irrationalen* Covariante vergleiche man den I. Abschnitt von des Verfassers „Methoden zur Theorie der ternären Formen" (Leipzig, 1889). Alles dort Gesagte lässt sich ohne Weiteres auf die Invariantentheorie der Gruppen G_6 und G_6, H_6 übertragen.

der ganzen rationalen Invarianten und Covarianten durch Adjunction gewisser irrationaler — ebenfalls ganzer — Invarianten erweitert wird, wobei es theils auf die Werthe der einzuführenden Irrationalitäten selbst, theils nur auf ihre Verhältnisse ankommt. *Als einziges Hülfsmittel der Rechnung fungiren die beiden Identitäten* (6). Ein Hinaustreten aus dem Bereiche der invarianten Bildungen wird also auch in den Hülfsrechnungen grundsätzlich vermieden; eine Abweichung von diesem Princip würde, soviel wir uns haben überzeugen können, auch nicht den geringsten Nutzen bringen.

Eigenschaften der Apollonischen Figur, die zu den vier- und dreigliedrigen Untergruppen der Gruppe G_6, H_6 gehören, die von den Aehnlichkeitstransformationen und den Bewegungen und Umlegungen der Euclidischen Ebene gebildet werden, bleiben von unserer Untersuchung ausgeschlossen. Von Mittelpunkten und Radien der vorkommenden Kreise wird also keine Rede sein. Wir bemerken aber ausdrücklich, dass die angewendete Methode, nach geringer Erweiterung, auch zur Untersuchung dieser Gegenstände völlig ausreichend ist. Ein Gleiches gilt von den durch Kreise definirten dreigliedrigen Untergruppen, also von metrischen Eigenschaften der Apollonischen Figur auf der Kugelfläche.

§ 3.

Algebraische Lösung des Apollonischen Problems. Copulirte Lösungen.

Die drei linearen Formen $(\Phi_i X)$ haben sechs Invarianten $F_{i\varkappa} = (\Phi_i \Phi_\varkappa)$, zwischen denen keine Relation besteht. Von den aus diesen zusammenzusetzenden rationalen Invarianten haben wir nur zu betrachten die Determinante

$$R = |F_{11} F_{22} F_{33}|, \tag{6}$$

eine sogenannte Combinante, deren Verschwinden aussagt, dass die drei Kreise $(\Phi_i X) = 0$ einen Punkt gemein haben; ferner die zugehörigen Unterdeterminanten $R_{i\varkappa}$, von denen die der Diagonalglieder durch ihr Verschwinden anzeigen, dass zwei der gegebenen Kreise einander berühren. In dem Product

$$D = F_{11} \cdot F_{22} \cdot F_{33} \cdot R_{11} \cdot R_{22} \cdot R_{33} \cdot R \tag{7}$$

haben wir dann bereits *die Discriminante des Apollonischen Problems*, die Invariante nämlich, deren Verschwinden ausdrückt, dass zwei oder mehr der Lösungen sich vereinigen. Von rationalen Covarianten haben wir nur zu bilden die Combinante

$$(\Phi X) = 2(X \Phi_1 \Phi_2 \Phi_3), \tag{8}$$

die, gleich Null gesetzt, den Orthogonalkreis der gegebenen Kreise darstellt, und deren nach Analogie von F_{ii} gebildete Invariante den Werth $-R$ hat, sowie die drei Covarianten

$$(XY\Phi_2\Phi_3),\quad (XY\Phi_3\Phi_1),\quad (XY\Phi_1\Phi_2),$$

deren Bedeutung ebenfalls unmittelbar ersichtlich ist.

Wir adjungiren nun die Irrationalitäten $\sqrt{-F_{11}}$, $\sqrt{-F_{22}}$, $\sqrt{-F_{33}}$*), und bilden die irrationalen Invarianten und Covarianten

$$(9)\qquad \Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{-F_{11}} & \sqrt{-F_{22}} & \sqrt{-F_{33}} \\ \sqrt{-F_{11}} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ \sqrt{-F_{22}} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ \sqrt{-F_{33}} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

$$(10)\qquad (\mathfrak{S}X)(\mathfrak{T}Y) = -(\mathfrak{S}Y)(\mathfrak{T}X) =$$
$$= \sqrt{-F_{11}}(XY\Phi_2\Phi_3) + \sqrt{-F_{22}}(XY\Phi_3\Phi_1) + \sqrt{-F_{33}}(XY\Phi_1\Phi_2),$$

$$(11)\qquad (\mathfrak{P}X) = \begin{vmatrix} 0 & (\Phi_1 X) & (\Phi_2 X) & (\Phi_3 X) \\ \sqrt{-F_{11}} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ \sqrt{-F_{22}} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ \sqrt{-F_{33}} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix},$$

$$(12)\qquad (\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}Y) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \sqrt{-F_{11}} & \sqrt{-F_{22}} & \sqrt{-F_{33}} \\ 0 & (XY) & (\Phi_1 X) & (\Phi_2 X) & (\Phi_3 X) \\ \sqrt{-F_{11}} & (\Phi_1 Y) & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ \sqrt{-F_{22}} & (\Phi_2 Y) & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ \sqrt{-F_{33}} & (\Phi_3 Y) & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix};$$

Wir adjungiren ferner die Wurzelgrösse $\sqrt{R+\Delta}$. In dem Ausdruck

$$(13)\qquad \boxed{(\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}Y) + 2\sqrt{R+\Delta}\cdot(\mathfrak{S}X)(\mathfrak{T}Y)}$$

haben wir dann bereits die vollständige Lösung unserer Aufgabe, soweit es sich dabei um die Bestimmung eines *einzelnen* Berührungskreises handelt:

Das Verschwinden eines Werthes der Covariante (13) *sagt aus, dass entweder der Kreis X oder der Kreis Y zu einem Berührungskreis der Kreise* $\Phi_i = 0$ *orthogonal ist.*

---

*) Nämlich der Symmetrie wegen. In der Lösung selbst kommen nur die Verhältnisse dieser Grössen vor, wie weiterhin noch ausgeführt werden soll.

Man erhält also die Gleichungen aller Berührungskreise, wenn man den Hülfskreis Y, der auch ein Punktkreis sein darf, willkürlich annimmt (doch so, dass er nicht selbst schon zu einem Berührungskreis orthogonal ist), und dann in der gleich Null gesetzten Covariante (13) den vorkommenden Irrationalitäten ihre verschiedenen Werthe beilegt. Die hierin liegende Lösung hat gleichzeitig den grössten überhaupt möglichen Grad der Allgemeinheit, weshalb wir sie als *„allgemeine Lösung“* des algebraisch gefassten Apollonischen Problems bezeichnen: *Nur dann kann ein Werth der Covariante* (13) *identisch, d. h. für jedes beliebige Kreispaar X, Y verschwinden, wenn das Problem selbst unbestimmt wird.* Das tritt aber nur dann ein, wenn die drei gegebenen Kreise sich in einem und demselben Punkte berühren, oder — was dasselbe besagt — wenn gleichzeitig die vier Invarianten R, R_{11}, R_{22}, R_{33} den Werth Null haben*), und wenn überdies den Irrationalitäten $\sqrt{-F_{ii}}$ geeignete Werthe beigelegt werden.

Die Covariante (13) geht in den conjugirten Werth

$$(\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}Y) - 2\sqrt{R+\Delta}\cdot(\mathfrak{S}X)(\mathfrak{T}Y)$$

über, wenn man X und Y vertauscht. Sie stellt also, wenn man X und Y beide variiren lässt, ein Paar *„copulirter“* Lösungen dar, solcher, die einander durch die Spiegelung an dem Orthogonalkreis $\Phi = 0$ zugeordnet sind. Die eine von diesen ist geschrieben mit der Veränderlichen X, die andere mit Y. *Die Covariante* (13) *ist also reducibel, ein Product zweier verschiedener Formen, nach dem Reducibilitätsbegriff der Functionentheorie. Sie ist aber nicht auch reducibel im Sinne der Algebra, nicht in Factoren zerlegbar im Bereiche der ganzen Covarianten, mit denen wir es hier zu thun haben.* Es besteht nämlich der noch allgemeinere Satz, dass überhaupt keine irrationale Covariante mit nur einem veränderlichen Kreis X vorhanden ist, die die Lösungen des Apollonischen Problems darstellte, und so zu thun fortführe auch in dem Falle, wo die Invariante R verschwindet. *Der Hülfskreis Y kann also nicht entbehrt werden, so lange man den Fall $R=0$ mit berücksichtigen will.* Nimmt man dagegen an, dass $R \neq 0$ ist, wie wir nun thun wollen, so kann man den Ausdruck (13) allerdings durch einen einfacheren ersetzen: *Das Product der Covariante* (13) *mit der Invariante R ist reducibel:*

$$(14)\quad \begin{aligned} &-R\{(\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}Y) + 2\sqrt{R+\Delta}(\mathfrak{S}X)(\mathfrak{T}Y)\} = \\ &= \{(\mathfrak{P}X) + \sqrt{R+\Delta}(\Phi X)\}\{(\mathfrak{P}Y) - \sqrt{R+\Delta}(\Phi Y)\}. \end{aligned}$$

---

*) Hierin liegen nur *drei* unabhängige Bedingungen; die im Texte besprochene Figur hängt bemerkenswerther Weise von ebensovielen Constanten ab, wie die Figur dreier Kreise, die einander in verschiedenen Punkten berühren.

Hiermit haben wir eine zweite, die „*specielle Lösung*“ unseres Problems, dargestellt durch die gleich Null gesetzte Covariante

$$(15) \qquad \boxed{(\mathfrak{Y}X) = (\mathfrak{P}X) + \sqrt{R+\Delta}(\Phi X)}.$$

Diese Lösung versagt dann und nur dann, wenn R verschwindet. In diesem Falle verschwindet nämlich immer der eine Werth der Covariante (15) identisch, und der andere, mit dem ersten „copulirte“ Werth stellt die triviale Lösung vor, die sich mit dem gemeinsamen Schnittpunkt der drei Kreise vereinigt — falls nicht etwa die drei Kreise einem Büschel angehören, und daher beide Werthe identisch gleich Null sind.

Natürlich ist es einfacher, mit der Form (15) zu operiren, als mit der etwas unbequem zu handhabenden Covariante (13). Wir werden weiterhin von dieser Erleichterung Gebrauch machen.

Wir fügen, unter der Annahme reeller Kreise $\Phi_i = 0$ mit reellen Punkten ($F_{ii} < 0$) die auf die *Realität der Lösungen* bezüglichen Kriterien hinzu. Es sind, wenn $D \neq 0$, die folgenden Fälle zu unterscheiden:

(A) $R < 0, \quad n = 4.$

(B) $R > 0, \quad R_{11} > 0, \quad R_{22} > 0, \quad R_{33} > 0, \quad n = 4.$

(C) $R_{\lambda\lambda} < 0, \quad R_{\mu\mu} > 0, \quad R_{\nu\nu} > 0, \quad n = 2.$

(D) $R_{\lambda\lambda} > 0, \quad R_{\mu\mu} < 0, \quad R_{\nu\nu} < 0, \quad n = 2.$

(E) $R_{11} < 0, \quad R_{22} < 0, \quad R_{33} < 0, \quad F_{23}F_{31}F_{12} > 0, \quad n = 4.$

(F) $R_{11} < 0, \quad R_{22} < 0, \quad R_{33} < 0, \quad F_{23}F_{31}F_{12} < 0, \quad n = 0.$

n bedeutet die Zahl der vorhandenen Paare reeller Lösungen.

Ein besonderes Interesse hat unter diesen Fällen der erste (A). Es ist der Fall, in dem die gegebenen Kreise einander paarweise schneiden, und so liegen, dass ihr Orthogonalkreis keine reellen Punkte hat. Diesem Falle insbesondere sind die von uns angewendeten Bezeichnungen angepasst. Die anderen Annahmen (B) . . . (F) können natürlich in ähnlicher Weise behandelt werden.

§ 4.

Fortsetzung: Abhängigkeit der verschiedenen Lösungen. Tripel und Quadrupel.

Bis hierher haben wir nur ein einzelnes Paar von Berührungskreisen betrachtet. Nunmehr wollen wir sie alle zugleich in's Auge fassen. Wir versehen zu diesem Zwecke die eingeführten Covarianten mit unteren Indices 0, 1, 2, 3, entsprechend den verschiedenen Werthsystemen

$$
\begin{array}{llll}
0] & \sqrt{-F_{11}}, & \sqrt{-F_{22}}, & \sqrt{-F_{33}}; \\
1] & \sqrt{-F_{11}}, & -\sqrt{-F_{22}}, & -\sqrt{-F_{33}}; \\
2] & -\sqrt{-F_{11}}, & \sqrt{-F_{22}}, & -\sqrt{-F_{33}}; \\
3] & -\sqrt{-F_{11}}, & -\sqrt{-F_{22}}, & \sqrt{-F_{33}}.
\end{array}
$$

Wir schreiben demgemäss

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
(\mathfrak{Y}_0^{\pm} X) &= (\mathfrak{P}_0 X) \pm \sqrt{R + \Delta_0} \cdot (\Phi X), \\
(\mathfrak{Y}_1^{\pm} X) &= (\mathfrak{P}_1 X) \pm \sqrt{R + \Delta_1} \cdot (\Phi X), \\
(\mathfrak{Y}_2^{\pm} X) &= (\mathfrak{P}_2 X) \pm \sqrt{R + \Delta_2} \cdot (\Phi X), \\
(\mathfrak{Y}_3^{\pm} X) &= (\mathfrak{P}_3 X) \pm \sqrt{R + \Delta_3} \cdot (\Phi X).
\end{aligned}
$$

Zwischen den verschiedenen eingeführten Irrationalitäten besteht nun eine und auch nur eine Abhängigkeit: *Das Product der letzten vier Wurzelgrössen ist rational:*

$$
(17) \qquad \boxed{\sqrt{R + \Delta_0}\sqrt{R + \Delta_1}\sqrt{R + \Delta_2}\sqrt{R + \Delta_3} = 4\, R_{11} R_{22} R_{33}}\,.
$$

Wenn einer der Factoren rechts verschwindet, so vereinfacht sich das Problem bedeutend, wie wir schon angedeutet haben. Schliessen wir diesen Fall aus, so können wir jede der Wurzeln $\sqrt{R + \Delta_i}$ durch die drei übrigen rational ausdrücken.

Hieraus ergiebt sich die *Galois'sche Gruppe* des Apollonischen Problems, die 32 Substitutionen umfasst.

Besonders wichtig ist für die Theorie unseres Problems das Verhalten der Paare, Tripel und Quadrupel von Lösungen gegenüber den Substitutionen dieser Gruppe G_{32}.

Von den vier copulirten *Paaren*, die durch die sogenannte Vierergruppe unter einander vertauscht werden, haben wir schon gesprochen.

Unter den *Tripeln* giebt es 32 *„unabhängige"*, nämlich die Tripel von Berührungskreisen, die drei verschiedenen Paaren entnommen sind. *Diese Tripel werden von der Gruppe G_{32} transitiv unter einander vertauscht. Sie entsprechen daher den Wurzeln der Galois'schen Resolvente des Problems.*

Von *Quadrupeln* haben wir vier Arten zu unterscheiden.

Es giebt zunächst acht gleichberechtigte *„syzygetische Quadrupel 1. Art"*, solche wie $\mathfrak{Y}_0^+$, $\mathfrak{Y}_1^+$, $\mathfrak{Y}_2^+$, $\mathfrak{Y}_3^+$. Sie sind charakterisirt durch die Relation

$$
\Pi \sqrt{R + \Delta} = 4 R_{11} R_{22} R_{33}.
$$

Sodann haben wir acht ebenfalls gleichberechtigte *„syzygetische Quadrupel 2. Art"*, wie $\mathfrak{Y}_0^-$, $\mathfrak{Y}_1^+$, $\mathfrak{Y}_2^+$, $\mathfrak{Y}_3^+$. Sie sind charakterisirt durch die Relation

$$
\Pi \sqrt{R + \Delta} = -4 R_{11} R_{22} R_{33}.
$$

Ferner giebt es drei Figuren von je sechszehn gleichberechtigten „*asyzygetischen Quadrupeln*“, oder „*Quadrupeln* 3. *Art*“, solchen, die ein copulirtes Paar enthalten, endlich drei Figuren von je zwei gleichberechtigten „*gepaarten Quadrupeln*“, solchen, die aus zweimal zwei copulirten Berührungskreisen bestehen.

Von den verschiedenen Arten von Quadrupeln werden wir weiterhin noch mehr zu reden haben; hier wollen wir noch die oben bereits angeführte Eigenschaft der unabhängigen Tripel bestimmter aussprechen: *Hat man auf irgend einem Wege die Gleichungen eines unabhängigen Tripels von Berührungskreisen gefunden*), so kann man — falls keine der Invarianten $R_{\lambda\lambda}$ verschwindet — die Gleichungen der sämmtlichen übrigen Berührungskreise durch rationale Operationen finden.*

Hieraus ergiebt sich noch eine weitere merkwürdige Folgerung. Bilden nämlich drei Kreise $\mathfrak{Y}_i = 0$ ein unabhängiges Tripel von Berührungskreisen dreier anderer Kreise $\Phi_i = 0$, so ist auch das Umgekehrte der Fall. Man kann also die sämmtlichen Berührungskreise eines unabhängigen Tripels Apollonischer Berührungskreise bestimmen, ohne dazu andere Irrationalitäten nöthig zu haben, als die, die zur Lösung des Apollonischen Problems selbst dienen. Unter diesen Berührungskreisen kann man dann wieder ein Tripel von unabhängigen herausgreifen, und das zugehörige Apollonische Problem mit denselben Hülfsmitteln lösen, u. s. w. *Es ist also mit der Lösung des ursprünglichen Apollonischen Problems eine unendliche Mannigfaltigkeit weiterer Probleme dieser Art gegeben, deren Lösung die Adjunction neuer Irrationalitäten nicht erfordert.*

Kehren wir zurück zu unseren Covarianten (13) und (15), und betrachten wir die algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln sie sind.

Wir erkennen unmittelbar, dass die Covariante (13) und ebenso z. B. das Product

$$\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\,(\mathfrak{Y}X)$$

Wurzeln je einer irreducibelen Gleichung 8. Grades sind, deren Galois'sche Gruppe eben die Gruppe G_{32} ist. Diese Gleichungen gehören zu der Classe algebraischer Gleichungen mit Parametern, deren Auflösung von Resolventen abhängt, die diese Parameter (X, Y) nicht enthalten**). Man hat, um die Wurzeln der genannten Gleichungen zu finden,

*) Es genügt sogar, wenn man gewisse durch Gleichungen der Form

$$F_{\mu\mu}^{\;2} R_{\mu\mu} - F_{\nu\nu} R_{\nu\nu} = 0$$

charakterisirte Fälle ausschliesst, schon die Kenntniss je eines der dreimal drei Berührungspunkte. S. § 18.

**) Vgl. die Abhandlung des Verfassers: On Irrational Covariants of certain Binary Forms. American Journal, vol. XVII, 1894.

zunächst zwei der Producte $\sqrt{-F_{ii}}\sqrt{-F_{\varkappa\varkappa}}$, hierauf drei der Producte $\sqrt{-F_{ii}}\sqrt{R+\Delta_\varkappa}$ oder $\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\sqrt{R+\Delta_\varkappa}$ zu adjungiren, insgesammt also *fünf* Quadratwurzeln auszuziehen.

Dagegen sind die Covarianten $(\mathfrak{Y}X)$ und $-(\mathfrak{Y}X)$ Wurzeln einer Gleichung 16. Grades, mit einer Gruppe G_{64}, die sich erst nach Adjunction des Productes $\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}$ auf die Gruppe G_{32} reducirt. Zur Auflösung dieser Gleichung muss man die Wurzelgrössen $\sqrt{-F_{ii}}$, $\sqrt{R+\Delta_i}$ selbst adjungiren; man hat also in diesem Falle *sechs* Quadratwurzeln auszuziehen.

Die besprochenen Gleichungen sind ziemlich umständlich zu bilden. Wir begnügen uns daher, die quadratischen Gleichungen anzugeben, von denen die „copulirten" Werthe der genannten Covarianten abhängen.

Die beiden copulirten Werthe der Covariante (13) sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(18) \qquad \mathfrak{X}^2-2(\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}Y)\cdot\mathfrak{X}+(\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}X)\cdot(\mathfrak{R}Y)(\mathfrak{R}Y)=0,$$

ebenso die beiden Werthe $(\mathfrak{Y}^{\pm}X)$ von $(\mathfrak{Y}X)$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(19) \qquad \mathfrak{Y}^2-2(\mathfrak{P}X)\cdot\mathfrak{Y}-R\cdot(\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}X)=0.$$

In der Gleichung $(\mathfrak{R}X)(\mathfrak{R}X)=0$ *werden je zwei copulirte Lösungen zusammengefasst**). So lange man darauf verzichtet, die Lösungen des Apollonischen Problems vollständig zu trennen, ist demnach die Einführung des Hülfskreises Y auch dann nicht nöthig, wenn man den Fall $R=0$ mit umspannen will.

§ 5.

Nebenkreise.

Durch das in § 3 und § 4 Beigebrachte kann die in § 2 gestellte algebraische Aufgabe als erledigt gelten, so lange wenigstens, als man annimmt, dass die Gleichung 8. Grades, von der das Apollonische Problem abhängt, in ihrer Art allgemein bleibt (keinen neuen Affect bekommt), dass also die Gruppe des Problems sich nicht reducirt**). Wir wünschen aber noch an einigen Beispielen zu zeigen, dass die entwickelten Formeln den Zugang zu einem grossen Reichthum von algebraischen und geometrischen Sätzen eröffnen, die in ihrer Ge-

*) Diese Zusammenfassung je zweier Lösungen in eine Gleichung ist, in einer metrisch specialisirten Gestalt, bereits von dem irischen Mathematiker Casey angegeben worden. Vgl. § 8.

**) Eine Aufzählung der verschiedenen Fälle, in denen sich der algebraische Charakter der Lösung noch vereinfacht, scheint uns wenig Interesse zu bieten.

sammtheit doch noch einen genaueren Einblick in die Natur unserer Aufgabe vermitteln.

Wir beginnen damit, dass wir die betrachtete Figur, unter der Voraussetzung $D \neq 0$, durch Hinzufügung dreier neuer Kreise erweitern, die durch die Kreise $\Phi_i = 0$ rational bestimmt sind, und „Nebenkreise" genannt werden sollen. Wir wollen diese Kreise durch Gleichungen $\Psi_i = 0$ darstellen, wobei wir in die Bezeichnung auf der linken Seite einen irrationalen Nenner aufnehmen, der den Zweck hat, die zu entwickelnden Formeln möglichst symmetrisch zu gestalten, der aber natürlich jederzeit leicht wieder beseitigt werden kann. *Diese Nebenkreise sind geometrisch dadurch definirt, dass sie auf je zweien der Kreise* $\Phi_i = 0$ *und auf deren gemeinsamem Orthogonalkreis* $\Phi = 0$ *senkrecht stehen.* Analytisch werden sie dargestellt durch die gleich Null gesetzten Covarianten:

$$(20)\quad \sqrt{-R}\cdot(\Psi_i X) = R_{i1}(\Phi_1 X) + R_{i2}(\Phi_2 X) + R_{i3}(\Phi_3 X) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Zwischen ihnen und den ursprünglichen Kreisen $(\Phi_i X) = 0$ besteht eine vollkommene Reciprocität im Falle $R = -1$, sobald der Grösse $\sqrt{-R}$ der Werth Eins beigelegt wird.

Stellen wir nun die Apollonische Aufgabe auch für diese Figur von drei Kreisen, so zeigt sich, dass die zur Lösung einzuführenden Irrationalitäten von den von uns bereits adjungirten Wurzelgrössen nicht unabhängig sind. Diese Irrationalitäten sind zunächst (wenn wir uns der einfacheren Darstellung halber der „speciellen Lösung" bedienen) die Wurzelgrössen $\sqrt{R_{ii}}$, sodann gewisse Wurzelgrössen $\sqrt{R + \nabla}$, deren Radicanden, analog zu den Ausdrücken

$$(21\text{a})\quad R + \Delta = 2\left\{F_{23}F_{31}F_{12} - F_{11}F_{22}F_{33} + \Sigma R_{\mu\nu}\sqrt{-F_{\mu\mu}}\sqrt{-F_{\nu\nu}}\right\}$$

(vgl. Nr. 9) durch die Ausdrücke

$$(21\text{b})\quad R + \nabla = 2\left\{F_{23}F_{31}F_{12} - F_{11}F_{22}F_{33} - \Sigma F_{\mu\nu}\sqrt{R_{\mu\mu}}\sqrt{R_{\nu\nu}}\right\}$$

definirt sind.

Setzen wir nun

$$(22\text{a})\quad \begin{cases} 2P_\lambda^+ = \sqrt{-F_{\mu\mu}}\sqrt{-F_{\nu\nu}} + F_{\mu\nu}, \quad 2P_\lambda^- = \sqrt{-F_{\mu\mu}}\sqrt{-F_{\nu\nu}} - F_{\mu\nu}, \\ \qquad\qquad 2\sqrt{P_\lambda^+}\sqrt{P_\lambda^-} = \sqrt{R_{\lambda\lambda}}, \end{cases}$$

$$(22\text{b})\quad \begin{cases} 2Q_\lambda^+ = \sqrt{R_{\mu\mu}}\sqrt{R_{\nu\nu}} - R_{\mu\nu}, \quad 2Q_\lambda^- = \sqrt{R_{\mu\mu}}\sqrt{R_{\nu\nu}} + R_{\mu\nu}, \\ \qquad\qquad 2\sqrt{Q_\lambda^+}\sqrt{Q_\lambda^-} = \sqrt{-R}\sqrt{-F_{\lambda\lambda}}, \end{cases}$$

so erlauben die zwischen den eingeführten Irrationalitäten bestehenden Abhängigkeiten ohne Widerspruch anzunehmen, dass

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
\sqrt{R+\Delta_0} &= 4\sqrt{P_1^+}\sqrt{P_2^+}\sqrt{P_3^+}, & \sqrt{-R}\sqrt{R+\nabla_0} &= 4\sqrt{Q_1^+}\sqrt{Q_2^+}\sqrt{Q_3^+},\\
\sqrt{R+\Delta_1} &= 4\sqrt{P_1^+}\sqrt{P_2^-}\sqrt{P_3^-}, & \sqrt{-R}\sqrt{R+\nabla_1} &= 4\sqrt{Q_1^+}\sqrt{Q_2^-}\sqrt{Q_3^-},\\
\sqrt{R+\Delta_2} &= 4\sqrt{P_1^-}\sqrt{P_2^+}\sqrt{P_3^-}, & \sqrt{-R}\sqrt{R+\nabla_2} &= 4\sqrt{Q_1^-}\sqrt{Q_2^+}\sqrt{Q_3^-},\\
\sqrt{R+\Delta_3} &= 4\sqrt{P_1^-}\sqrt{P_2^-}\sqrt{P_3^+}, & \sqrt{-R}\sqrt{R+\nabla_3} &= 4\sqrt{Q_1^-}\sqrt{Q_2^-}\sqrt{Q_3^+},
\end{aligned}
$$

und dass ausserdem

$$
(24)\quad
\begin{aligned}
2\sqrt{R+\nabla_0} &= -\sqrt{R+\Delta_0}+\sqrt{R+\Delta_1}+\sqrt{R+\Delta_2}+\sqrt{R+\Delta_3},\\
2\sqrt{R+\nabla_1} &= \sqrt{R+\Delta_0}-\sqrt{R+\Delta_1}+\sqrt{R+\Delta_2}+\sqrt{R+\Delta_3},\\
2\sqrt{R+\nabla_2} &= \sqrt{R+\Delta_0}+\sqrt{R+\Delta_1}-\sqrt{R+\Delta_2}+\sqrt{R+\Delta_3},\\
2\sqrt{R+\nabla_3} &= \sqrt{R+\Delta_0}+\sqrt{R+\Delta_1}+\sqrt{R+\Delta_2}-\sqrt{R+\Delta_3}.
\end{aligned}
$$

Dieses Formelsystem, durch das die bis jetzt eingeführten Irrationalitäten so vollständig als überhaupt möglich erklärt sind, liefert sofort einen bemerkenswerthen Satz:

Nach Lösung der ursprünglichen Apollonischen Aufgabe ist zur Lösung des Apollonischen Problems für die Figur der Nebenkreise nur noch die Adjunction einer Quadratwurzel erforderlich.

Behufs gleichzeitiger Lösung beider Aufgaben hat man also sechs Quadratwurzeln auszuziehen. Hierbei kann man in symmetrischer Weise vorgehen: Adjungirt man zunächst zwei unter den Wurzeln $\sqrt{-F_{\mu\mu}}\sqrt{-F_{\nu\nu}}$ und zwei unter den Wurzeln $\sqrt{R_{\mu\mu}}\sqrt{R_{\nu\nu}}$, so genügt die Adjunction etwa von $\sqrt{+F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\sqrt{R+\Delta_0}$ zur Lösung des ersten, und die Adjunction von

$$\sqrt{-R}\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}\sqrt{R+\nabla_0}$$

zur Lösung des zweiten Apollonischen Problems. — Zur Aufstellung der der „speciellen Lösung“ beider Aufgaben entsprechenden Covarianten sind dann noch zwei weitere Quadratwurzeln,

$$\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}} \quad \text{und} \quad \sqrt{-R}\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}$$

erforderlich.

Wir bilden nun, zur Vorbereitung neuer Entwickelungen, auch die Ausdrücke der irrationalen Covarianten, die die specielle Lösung des Apollonischen Problems für die Figur der Nebenkreise darstellen. Wir haben zu diesem Zweck neben die aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Ausdrücke

$$
(25a)\quad
\begin{aligned}
(\mathfrak{P}_0 X) &= \sqrt{-R}\{-\sqrt{-F_{11}}\Psi_1-\sqrt{-F_{22}}\Psi_2-\sqrt{-F_{33}}\Psi_3\},\\
(\mathfrak{P}_1 X) &= \sqrt{-R}\{-\sqrt{-F_{11}}\Psi_1+\sqrt{-F_{22}}\Psi_2+\sqrt{-F_{33}}\Psi_3\},\\
(\mathfrak{P}_2 X) &= \sqrt{-R}\{\sqrt{-F_{11}}\Psi_1-\sqrt{-F_{22}}\Psi_2+\sqrt{-F_{33}}\Psi_3\},\\
(\mathfrak{P}_3 X) &= \sqrt{-R}\{\sqrt{-F_{11}}\Psi_1+\sqrt{-F_{22}}\Psi_2-\sqrt{-F_{33}}\Psi_3\}
\end{aligned}
$$

(vgl. Nr. 11) die folgenden, analog gebildeten zu stellen:

$$
\text{(25b)}\quad
\begin{aligned}
(\mathfrak{Q}_0 X) &= \sqrt{-R}\{-\sqrt{R_{11}}\Phi_1 - \sqrt{-R_{22}}\Phi_2 - \sqrt{R_{33}}\Phi_3\},\\
(\mathfrak{Q}_1 X) &= \sqrt{-R}\{-\sqrt{R_{11}}\Phi_1 + \sqrt{-R_{22}}\Phi_2 + \sqrt{R_{33}}\Phi_3\},\\
(\mathfrak{Q}_2 X) &= \sqrt{-R}\{\quad \sqrt{R_{11}}\Phi_1 - \sqrt{-R_{22}}\Phi_2 + \sqrt{R_{33}}\Phi_3\},\\
(\mathfrak{Q}_3 X) &= \sqrt{-R}\{\quad \sqrt{R_{11}}\Phi_1 + \sqrt{-R_{22}}\Phi_2 - \sqrt{R_{33}}\Phi_3\}.
\end{aligned}
$$

Die gesuchten Covarianten sind dann, nach Analogie der Formen

$$\text{(26a)}\qquad (\mathfrak{Y}_i^{\pm} X) = (\mathfrak{P}_i X) \pm \sqrt{R + \Delta_i}\,(\Phi X)$$

(s. Nr. 15) gegeben durch die Ausdrücke

$$\text{(26b)}\qquad (\mathfrak{Z}_i^{\pm} X) = (\mathfrak{Q}_i X) \pm \sqrt{R + \nabla_i}\,(\Phi X).$$

Bilden wir nun für jede der Formen $(\mathfrak{Y}_i X)$, $(\mathfrak{Z}_i X)$ ihre Invariante, negativ genommen, bilden wir also die Grössen $-(\mathfrak{Y}_i \mathfrak{Y}_i)$, $-(\mathfrak{Z}_i \mathfrak{Z}_i)$, so ergiebt sich ein bemerkenswerthes Resultat:

Alle diese Invarianten haben einen und denselben Werth und dieser Werth ist überdies ein Quadrat, nämlich das Quadrat der Invariante R. Wir können daher erklären, dass

$$\text{(27)}\qquad \boxed{\sqrt{-(\mathfrak{Y}_i^{\pm}\mathfrak{Y}_i^{\pm})} = R = \sqrt{-(\mathfrak{Z}_i^{\pm}\mathfrak{Z}_i^{\pm})}}$$

sein soll $(i = 0, 1, 2, 3)$.

Hieraus ergiebt sich eine Menge von Eigenschaften der Apollonischen Figur. Es folgt unter Anderem, dass man nach Lösung des ursprünglichen Apollonischen Problems, die *Steiner'schen Potenzkreise* von je zweien der Apollonischen Kreise rational bestimmen kann, was übrigens auch geometrisch leicht zu erkennen ist. Einer, der „eigentliche" Potenzkreis der Kreise $(\mathfrak{Y}_i X) = 0$, $(\mathfrak{Y}_\varkappa X) = 0$ wird dargestellt durch die Gleichung

$$\text{(28)}\qquad (\mathfrak{Y}_i X) - (\mathfrak{Y}_\varkappa X) = 0,$$

der zweite „uneigentliche" durch die Gleichung

$$\text{(29)}\qquad (\mathfrak{Y}_i X) + (\mathfrak{Y}_\varkappa X) = 0.$$

Hieraus folgt dann weiter, dass auch alle Schaaren von *Isogonalkreisen* der Apollonischen Berührungskreise, d. h. von solchen Kreisen, die mehrere der genannten Kreise unter gleichen Winkeln schneiden, rational bestimmt werden können.

Die genannten Potenzkreise bilden eine merkwürdige Figur. Sehen wir von denen der copulirten Paare ab, die sich offenbar auf den Orthogonalkreis $\Phi = 0$ und auf die Kreise $\mathfrak{P} = 0$ reduciren, so bleiben vierundzwanzig eigentliche und vierundzwanzig uneigentliche Potenzkreise. Die uneigentlichen sind zu achten auf drei Kreisbüschel vertheilt, dieselben Büschel, die den Orthogonalkreis $\Phi = 0$ mit je einem der Nebenkreise verbinden; die eigentlichen aber gehören zu vieren sechs Büscheln an. In jedem der sechs Potenzkreise der drei Kreise $\Phi_i = 0$ und der entsprechenden Nebenkreise $\Psi_i = 0$ durchdringen sich ferner acht Kreisbüschel, von denen jedes einen der besprochenen vierundzwanzig uneigentlichen Potenzkreise der ersten Apollonischen Figur mit einem der vierundzwanzig uneigentlichen Potenzkreise verbindet, die den Apollonischen Kreisen der Nebenfigur zugehören; u. dgl. mehr.

§ 6.

Sphärische Dreiecke und Quadrupelinvarianten.

Setzen wir

$$(30)\quad \begin{aligned} 2\,[\pm\pm\pm\pm] &= \pm\sqrt{R+\Delta_0} \pm\sqrt{R+\Delta_1} \pm\sqrt{R+\Delta_2} \pm\sqrt{R+\Delta_3}, \\ 2\,\{\pm\pm\pm\pm\} &= \pm\sqrt{R+\nabla_0} \pm\sqrt{R+\nabla_1} \pm\sqrt{R+\nabla_2} \pm\sqrt{R+\nabla_3} \end{aligned}$$

und schreiben wir sodann

$$(31a)\quad \begin{aligned} 2X_0 &= [++++], & 2Y_0 &= [-+++], & 2Z_0 &= \sqrt{R+\Delta_0}, \\ 2X_1 &= [--++], & 2Y_1 &= [+-++], & 2Z_1 &= \sqrt{R+\Delta_1}, \\ 2X_2 &= [-+-+], & 2Y_2 &= [++-+], & 2Z_2 &= \sqrt{R+\Delta_2}, \\ 2X_3 &= [-++-], & 2Y_3 &= [+++-], & 2Z_3 &= \sqrt{R+\Delta_3}, \end{aligned}$$

so folgt

$$(31b)\quad \begin{aligned} 2X_0 &= \{++++\}, & 2Z_0 &= \{-+++\}, & 2Y_0 &= \sqrt{R+\nabla_0}, \\ 2X_1 &= \{++--\}, & 2Z_1 &= \{+-++\}, & 2Y_1 &= \sqrt{R+\nabla_1}, \\ 2X_2 &= \{+-+-\}, & 2Z_2 &= \{++-+\}, & 2Y_2 &= \sqrt{R+\nabla_2}, \\ 2X_3 &= \{+--+\}, & 2Z_3 &= \{+++-\}, & 2Y_3 &= \sqrt{R+\nabla_3}. \end{aligned}$$

Grössen, die in der Beziehung der Grössen X_i, Y_i, Z_i stehen, kann man als zusammengehörige Parametersysteme einer orthogonalen Substitution auffassen*). Die Ausdrücke der zugehörigen Substitutionscoefficienten $a_{i\varkappa}$ lassen sich nun in unserem Falle so schreiben:

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{00} &= 2\,\{F_{23}F_{31}F_{12} - F_{11}F_{22}F_{33}\}, \\ a_{11} &= 2\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}, \\ a_{22} &= 2\sqrt{-F_{33}}\sqrt{-F_{11}}\sqrt{R_{33}}\sqrt{R_{11}}, \\ a_{33} &= 2\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}, \\ a_{23} &= -2F_{23}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}, \quad a_{32} = 2R_{23}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}, \\ a_{31} &= -2F_{31}\sqrt{R_{33}}\sqrt{R_{11}}, \quad a_{13} = 2R_{31}\sqrt{-F_{33}}\sqrt{-F_{11}}, \\ a_{12} &= -2F_{12}\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}, \quad a_{21} = 2R_{12}\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}, \end{aligned} \right.$$

*) S. des Verfassers Sphärische Trigonometrie, Abh. der K. Sächs. G. d. W. 1893, II. (Leipzig, Hirzel.) S. 142.

während gleichzeitig

$$(33)\qquad \begin{aligned} 2\sqrt{Y_0 Y_1 Y_2 Y_3} &= \sqrt{-R}\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}},\\ 2\sqrt{Z_0 Z_1 Z_2 Z_3} &= \qquad \sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}} \end{aligned}$$

erklärt werden darf.

Aus diesen Grössen kann man sodann die Elemente eines *eigentlichen* sphärischen Dreiecks ableiten*):

$$(34)\qquad \begin{aligned} \cos a_1 &= \frac{-F_{23}}{\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}}, & \cos \alpha_1 &= \frac{R_{23}}{\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}},\\ \sin a_1 &= \frac{\sqrt{R_{11}}}{\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}}, & \sin \alpha_1 &= \frac{\sqrt{-R}\sqrt{-F_{11}}}{\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}},\\ P &= \frac{\sqrt{-R}}{\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}}, & \Pi &= \frac{-R}{\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}},\\ l_1 &= \frac{\sqrt{R_{11}}}{2P_1^+} = \frac{2P_1^-}{\sqrt{R_{11}}}, & \lambda_1 &= \frac{\sqrt{-R}\sqrt{-F_{11}}}{2Q_1^+} = \frac{2Q_1^-}{\sqrt{-R}\sqrt{-F_{11}}}, \end{aligned}$$

$$(35)\qquad \begin{aligned} \sin\frac{a_i}{2} &= \frac{\sqrt{P_i^+}}{\sqrt[4]{-F_{22}}\sqrt[4]{-F_{33}}}, & \sin\frac{\alpha_i}{2} &= \frac{\sqrt{Q_i^+}}{\sqrt[4]{R_{22}}\sqrt[4]{R_{33}}},\\ \cos\frac{a_i}{2} &= \frac{\sqrt{P_i^-}}{\sqrt[4]{-F_{22}}\sqrt[4]{-F_{33}}}, & \cos\frac{\alpha_i}{2} &= \frac{\sqrt{Q_i^-}}{\sqrt[4]{R_{22}}\sqrt[4]{R_{33}}},\\ 2\sin s_i &= \frac{\sqrt{R+\nabla_i}}{\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}}, & 2\sin\sigma_i &= \frac{\sqrt{-R}\sqrt{R+\Delta_i}}{\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}},\\ r_i &= \frac{\sqrt{R+\Delta_i}}{\sqrt{-R}}, & \varrho_i &= \frac{\sqrt{R+\nabla_i}}{\sqrt{-R}}, \end{aligned}$$

u. s. w. Bestimmen wir andrerseits die Invarianten von je vieren der Apollonischen Kreise, *Quadrupelinvarianten*, wie wir sie nennen wollen, so zeigt sich, dass diese, abgesehen von den identisch verschwindenden Invarianten der gepaarten Quadrupel, zu den Ausdrücken (30), (31) proportional sind, und zwar für beide Figuren $\Phi_i = 0$, $\Psi_i = 0$. Es findet sich:

$$(36)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{Y}_0^\pm \mathfrak{Y}_1^\pm \mathfrak{Y}_2^\pm \mathfrak{Y}_3^\pm) &= -4R^3\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\,[\pm\pm\pm\pm],\\ (\mathfrak{Y}_0^+ \mathfrak{Y}_0^- \mathfrak{Y}_\mu\, \mathfrak{Y}_\nu) &= \quad 4R^3\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\sqrt{R+\Delta_0},\\ (\mathfrak{Y}_\lambda^+ \mathfrak{Y}_\lambda^- \mathfrak{Y}_\nu\, \mathfrak{Y}_\mu) &= -4R^3\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\sqrt{R+\Delta_\lambda},\\ (\mathfrak{Y}_\lambda^+ \mathfrak{Y}_\lambda^- \mathfrak{Y}_0\, \mathfrak{Y}_\mu) &= \quad 4R^3\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\sqrt{R+\Delta_\lambda},\\ (\mathfrak{Y}_\lambda^+ \mathfrak{Y}_\lambda^- \mathfrak{Y}_0\, \mathfrak{Y}_\nu) &= -4R^3\sqrt{-F_{11}}\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}}\sqrt{R+\Delta_\lambda}, \end{aligned}$$

ebenso

*) Ebenda, S. 148 u. ff.

$$(36b)\quad \sqrt{-R}(\mathfrak{Z}_0^{\pm}\mathfrak{Z}_1^{\pm}\mathfrak{Z}_2^{\pm}\mathfrak{Z}_3^{\pm}) = -4R^3\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}\{\pm\pm\pm\pm\}$$

u. s. w.

Hiermit ist der folgende Satz bewiesen:

Die drei Arten von nicht identisch verschwindenden Quadrupelinvarianten der Apollonischen Berührungskreise sind abgesehen von den Vorzeichen proportional zu dreimal vier Grössen X_i, Y_i, Z_i, zwischen denen die bekannten für die Figur der desmischen Tetraeder charakteristischen linearen Gleichungen bestehen.

Es sind nämlich die acht Invarianten der syzygetischen Quadrupel 1. *Art zu zweien proportional zu den vier Grössen X_i, ebenso die acht Invarianten* 2. *Art zu zweien proportional zu den vier Grössen Y_i, und die achtundvierzig Invarianten* 3. *Art* (*die der asyzygetischen Quadrupel*) *zu zwölfen proportional zu den vier Grössen Z_i.*

Zu diesem System von zwölf Verhältnissgrössen ist ferner, wieder bis auf die Vorzeichen, das System von zwölf Grössen proportional, das entsteht, wenn man die gegebenen drei Kreise durch ihre Nebenkreise ersetzt. (31a, b.) *Und zwar entsprechen einander in beiden Figuren die Quadrupelinvarianten* 1. *Art wechselweise, während den Invarianten* 2. *Art der einen Figur die Quadrupelinvarianten* 3. *Art der Nebenfigur zugeordnet sind, und umgekehrt.*

Bildet man nun mit den Grössen X_i — also mit den Quadrupelinvarianten erster Art — als Euler'schen Parametern eine orthogonale Substitution, so sind die Seiten a_i des zugehörigen sphärischen Dreiecks die Winkel (*genauer: ein System von Winkeln*) *der gegebenen Kreise $\Phi_i = 0$, und die Winkel α_i des Dreiecks sind die Winkel der Nebenkreise $\Psi_i = 0$.*

Dass die Formeln der sphärischen Trigonometrie in der Theorie des Apollonischen Problems auftreten müssen, war vorauszusehen. Man kann nämlich offenbar, wenn $R \neq 0$ ist, ohne damit eine Beschränkung einzuführen, die Kreise $\Phi_i = 0$ als Hauptkreise einer Kugel betrachten, und zwar als reelle Hauptkreise (grösste Kreise), wenn die Invarianten F_{ii} und R negativ sind. (Vgl. § 19.) Die Nebenkreise, wie überhaupt alle zu dem Kreise $\Phi = 0$ orthogonalen Kreise, werden dann ebenfalls Hauptkreise: Ihre Ebenen bestimmen zusammen mit denen der Kreise $\Phi_i = 0$ die Figur zweier zu einander polarer Dreiflache. Unsere Formeln enthalten jedoch eine wesentliche Ergänzung zu den vom Verfasser früher schon abgeleiteten Sätzen; denn die genaue Natur des in Rede stehenden Zusammenhangs, namentlich die Bedeutung der Quadrupelinvarianten liegt nicht auf der Hand.

Die Zahl der zur Figur dreier Kreise gehörigen orthogonalen Substitutionen ist sechzehn, entsprechend den verschiedenen Werthsystemen der in die Formeln (32) eintretenden Wurzelgrössen.

§ 7.

Einführung elliptischer Functionen.

Natürlich lassen sich die Formeln, die zur Darstellung sphärischer Dreiecke durch elliptische Functionen dienen*), auch auf die Theorie der Apolloniscben Figur anwenden. Man wird versuchen, nicht nur die Ausdrücke (34) durch elliptische Functionen darzustellen, sondern die Grössen selbst, aus denen diese Ausdrücke als Quotienten hervorgehen. Der Zusammenhang der simultanen Invarianten $F_{i\varkappa}$ mit elliptischen Functionen zweier Argumente ist indessen nicht so einfach, wie man vielleicht erwarten wird. Es genügen nämlich zur eindeutigen Darstellung dieser Grössen nicht eigentlich elliptische Functionen, sondern man muss solche Functionen einführen, die aus elliptischen durch Wurzelziehen hervorgehen. Der fragliche Zusammenhang wird dargestellt durch den folgenden Satz:

Die simultanen Invarianten $F_{i\varkappa}$, $R_{i\varkappa}$, R dreier Kreise, d. h. die Elemente einer dreireihigen symmetrischen Determinante und ihrer Adjungirten, sowie gewisse aus diesen Grössen abgeleitete Irrationalitäten, lassen sich, wie folgt, durch Parameter ω_λ, ω_μ, ω_ν; s_1, s_2, s_3; K, K_1, K_2, K_3 ausdrücken, zwischen denen die Relationen

$$\omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu = 0, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad K_1 K_2 K_3 = 1$$

stattfinden:

$$\sqrt{P_1^+} \cong \pm \frac{KK_1 \cdot \sigma s_1 \sigma_\nu s_1}{(\varepsilon_\mu \sqrt{e_\mu - e_\lambda})^{-\frac{2}{3}} \sqrt[4]{\tau_\lambda(2s_1)}},$$

$$\sqrt{P_1^-} \cong \pm \frac{KK_1 \cdot \sigma_\lambda \sigma_1 \sigma_\mu s_1}{(\varepsilon_\mu \sqrt{e_\mu - e_\lambda})^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\tau_\lambda(2s_1)}},$$

$$(37) \qquad F_{23} \cong - \frac{K^2 K_1^2 \cdot \sigma_\mu(2s_1)}{(\varepsilon_\mu \sqrt{e_\mu - e_\lambda})^{\frac{2}{3}} \sqrt{\tau_\lambda(2s_1)}},$$

$$\sqrt{-F_{22}}\sqrt{-F_{33}} \cong \frac{K^2 K_1^2 \cdot \sigma_\lambda(2s_1)}{(\varepsilon_\mu \sqrt{e_\mu - e_\lambda})^{\frac{2}{3}} \sqrt{\tau_\lambda(2s_1)}},$$

$$\sqrt{R_{11}} \cong \frac{K^2 K_1^2 \cdot \sigma(2s_1)}{(\varepsilon_\mu \sqrt{e_\mu - e_\lambda})^{-\frac{1}{3}} \sqrt{\tau_\lambda(2s_1)}},$$

*) S. des Verfassers Trigonometrie, III. Abschnitt.

$$(37)\quad \begin{aligned}
\frac{\sqrt{Q_1^+}}{\sqrt[8]{-R}} &\cong \mp \frac{KK_1^{-1}\,\sigma s_1\,\sigma_\mu s_1}{(\varepsilon_\nu\sqrt{e_\nu-e_\lambda})^{-\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\tau_\lambda(2s_1)}},\\
\frac{\sqrt{Q_1^-}}{\sqrt[8]{-R}} &\cong \mp \frac{KK_1^{-1}\cdot\sigma_\lambda s_1\,\sigma_\nu s_1}{(\varepsilon_\nu\sqrt{e_\nu-e_\lambda})^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\tau_\lambda(2s_1)}},\\
\frac{-R_{12}}{\sqrt[8]{-R}} &\cong - \frac{K^2K_1^{-2}\cdot\sigma_\nu(2s_1)}{(\varepsilon_\nu\sqrt{e_\nu-e_\lambda})^{\frac{3}{2}}\sqrt{\tau_\lambda(2s_1)}},\\
\frac{\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}}{\sqrt[8]{-R}} &\cong \frac{K^2K_1^{-2}\cdot\sigma_\lambda(2s_1)}{(\varepsilon_\nu\sqrt{e_\nu-e_\lambda})^{\frac{3}{2}}\sqrt{\tau_\lambda(2s_1)}},\\
\sqrt[8]{-R}\sqrt{-F_{11}} &\cong \frac{K^2K_1^{-2}\cdot\sigma(2s_1)}{(\varepsilon_\nu\sqrt{e_\nu-e_\lambda})^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\tau_\lambda(2s_1)}},
\end{aligned}$$

$$\sqrt[8]{-R} \cong \frac{K\cdot(\varepsilon_\mu\sqrt{e_\mu-e_\lambda})^{\frac{1}{4}}(\varepsilon_\nu\sqrt{e_\nu-e_\lambda})^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sigma(2s_1)\sigma(2s_2)\sigma(2s_3)}}{\sqrt[4]{\tau_\lambda(2s_1)}\sqrt[4]{\tau_\lambda(2s_2)}\sqrt[4]{\tau_\lambda(2s_3)}},$$

u. s. w.*) Dabei ist

$$\sqrt{e_\mu-e_\lambda}=\frac{\sigma_\lambda\omega_\mu}{\sigma\omega_\mu},\quad \sqrt{e_\nu-e_\lambda}=\frac{\sigma_\lambda\omega_\nu}{\sigma\omega_\nu},\quad \tau_\lambda(u)=\sigma(u)\sigma_\lambda(u);$$

ε_μ und ε_ν bezeichnen jedes die positive oder die negative Einheit; K ist ein Proportionalitätsfactor; endlich ist in alle Formeln zugleich entweder das obere oder das untere Vorzeichen einzutragen.

Wir übergehen die aus den Formeln (37) abzuleitenden Ausdrücke der Grössen X_i, Y_i, Z_i, wiewohl sie nicht ohne Interesse sind, und fügen nur die Werthe der Grössen $\cos a_i$ etc. (Nr. 34) hinzu, die aus (37) durch Quotientenbildung hervorgehen:

$$(38)\quad \begin{aligned}
\cos a_1 &\cong \frac{\sigma_\mu(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, & \cos\alpha_1 &\cong \frac{\sigma_\nu(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)},\\
\sin a_1 &\cong \varepsilon_\mu\sqrt{e_\mu-e_\lambda}\,\frac{\sigma(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)}, & \sin\alpha_1 &\cong \varepsilon_\nu\sqrt{e_\nu-e_\lambda}\,\frac{\sigma(2s_1)}{\sigma_\lambda(2s_1)},\\
l_1 &\cong \frac{\varepsilon_\mu}{\sqrt{e_\mu-e_\lambda}}\,\frac{\sigma_\lambda s_1\,\sigma_\mu s_1}{\sigma s_1\,\sigma_\nu s_1}, & \lambda_1 &\cong \frac{\varepsilon_\nu}{\sqrt{e_\nu-e_\lambda}}\,\frac{\sigma_\lambda s_1\,\sigma_\nu s_1}{\sigma s_1\,\sigma_\mu s_1}.
\end{aligned}$$

Es sind das die vom Verfasser bereits aufgestellten Formeln, abgesehen von den hier zugefügten willkürlichen Einheiten ε_μ und ε_ν, die Trig. S. 220 und 221 unzweckmässiger Weise $= +1$ gesetzt worden sind.

*) Wir bedienen uns des Zeichens $\cong$ statt des gewöhnlichen Gleichheitszeichens, um anzudeuten, dass es sich um ein sogenanntes Uebertragungsprincip handelt.

Aus den Formeln (38) sind die dem Bereich der elliptischen Functionen nicht angehörigen Irrationalitäten herausgefallen. Es gilt aber der noch allgemeinere Satz:

Die Cosinus der sämmtlichen Winkel, die in der Figur von 22 Kreisen vorkommen, die von irgend drei Kreisen, ihren Nebenkreisen und den 2. 8. zugehörigen Apollonischen Berührungskreisen gebildet werden, lassen sich darstellen als eindeutige homogene Functionen nullten Grades der sechs Argumente ω_λ, ω_μ, ω_ν, s_1, s_2, s_3, zwischen denen die beiden linearen Gleichungen

$$\omega_\lambda + \omega_\mu + \omega_\nu = 0, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0$$

stattfinden.

Uebrigens lässt sich auch dieser Satz noch bedeutend erweitern: Es lassen sich noch eine Menge anderer Winkelfunctionen, die in der Apollonischen Figur auftreten, in derselben Weise ausdrücken.

Die in den Formeln (37) rechts auftretenden Argumente können insbesondere so gewählt werden, dass alle Werthsysteme der Grössen links entstehen, die bei einem *reellen* sphärischen Dreieck (a_i, α_i) auftreten können.

§ 8.

Hülfssätze: Isogonalkreise von vier Kreisen.

Die in § 6 und § 7 angestellten Betrachtungen haben vorwiegend analytisches Interesse. Wir wenden uns nunmehr zu geometrischen Eigenschaften der Apollonischen Figur. Dabei werden wir uns, was den Ausdruck der vorkommenden Sätze durch Formeln anlangt, auf einige der hauptsächlichsten Angaben beschränken: Die algebraische Theorie, die die Grundlage der folgenden Untersuchung bildet, lässt sich nicht gut in Kürze darstellen.

Es giebt, wie bereits Steiner bekannt war und wie dann zuerst Plücker gezeigt hat*), acht im Allgemeinen verschiedene Kreise, die vier gegebene Kreise $(\Phi_i X) = 0$ unter gleichen Winkeln schneiden (falls nicht im besonderen Falle deren unendlich viele vorhanden sind). Wir können leicht ihre Gleichungen bestimmen:

*Die acht Kreise, die vier gegebene linear-unabhängige Kreise unter gleichen Winkeln schneiden (also deren „Isogonalkreise"), werden dargestellt durch die gleich Null gesetzte irrationale Covariante***):

---

*) In den analytisch-geometrischen Entwickelungen, 1828. Plücker's Behandlung der Steiner'schen Aufgaben in dieser Schrift ist von neueren Autoren unverdienter Weise mit Stillschweigen übergangen worden.

**) Wenn $(\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4) = 0$ ist, so vereinigen sich alle acht Isogonalkreise mit dem gemeinsamen Orthogonalkreis der vier Kreise, oder es giebt ihrer unendlich viele. Der letzte Fall ist charakterisirt durch das Verschwinden eines Werthes oder dreier Werthe der Invariante (40).

$$(39)\qquad \begin{aligned}&\sqrt{-F_{11}}(X\Phi_2\Phi_3\Phi_4)+\sqrt{-F_{22}}(X\Phi_1\Phi_4\Phi_3)+\\&+\sqrt{-F_{33}}(X\Phi_4\Phi_1\Phi_2)+\sqrt{-F_{44}}(X\Phi_3\Phi_2\Phi_1).\end{aligned}$$

Es folgt beiläufig, was übrigens auch geometrisch leicht zu beweisen ist, dass diese acht Kreise zusammen mit den Orthogonalkreisen von je dreien der gegebenen eine merkwürdige Figur bilden, die man wegen ihres Zusammenhangs mit den desmischen Tetraedern eine *desmische Kreisfigur* nennen kann. — Drücken wir aus, dass einer der acht Isogonalkreise von vier Kreisen $\Phi_i = 0$ einen von diesen und folglich auch die übrigen berührt, so kommen wir zu dem folgenden Satz:

Die Bedingung dafür, dass vier Kreise von einem fünften berührt werden, ist das Bestehen einer Relation der Form:

$$(40)\qquad 0 = -\frac{1}{16}\begin{vmatrix} -1 & \sqrt{-F_{11}} & \sqrt{-F_{22}} & \sqrt{-F_{33}} & \sqrt{-F_{44}} \\ \sqrt{-F_{11}} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ \sqrt{-F_{22}} & F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ \sqrt{-F_{33}} & F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ \sqrt{-F_{44}} & F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{aligned}&\{-\sqrt{P_{12}}\sqrt{P_{34}}-\sqrt{P_{13}}\sqrt{P_{42}}-\sqrt{P_{14}}\sqrt{P_{23}}\}\cdot\\ &\cdot\{-\sqrt{P_{12}}\sqrt{P_{34}}+\sqrt{P_{13}}\sqrt{P_{42}}+\sqrt{P_{14}}\sqrt{P_{23}}\}\cdot\\ &\cdot\{\ \ \sqrt{P_{12}}\sqrt{P_{34}}-\sqrt{P_{13}}\sqrt{P_{42}}+\sqrt{P_{14}}\sqrt{P_{23}}\}\cdot\\ &\cdot\{\ \ \sqrt{P_{12}}\sqrt{P_{34}}+\sqrt{P_{13}}\sqrt{P_{42}}-\sqrt{P_{14}}\sqrt{P_{23}}\},\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$F_{i\varkappa} = (\Phi_i\Phi_\varkappa), \qquad 2P_{i\varkappa} = F_{i\varkappa} + \sqrt{-F_{ii}}\sqrt{-F_{\varkappa\varkappa}}\ ^{*)}.$$

Der gemeinschaftliche Berührungskreis wird dann, falls nicht auch die Invariante $(\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4)$ *verschwindet, dargestellt durch den gleich Null gesetzten entsprechenden Werth der Covariante* (39)**).

Beide Sätze sind von der grössten Wichtigkeit für die Theorie des Apollonischen Problems. Wir wollen hier zunächst von dem

*) Soweit ist der Satz, allerdings in einer metrisch specialisirten und daher nicht immer brauchbaren Gestalt, von Casey angegeben worden. S. etwa Salmon-Fiedler, Kegelschnitte, 5. Aufl. Nr. 140.

**) Der gemeinsame Berührungskreis kann im Allgemeinen auch rational ermittelt werden; wir haben aber keine Veranlassung, darauf einzugehen. — In dem genannten Ausnahmefall existirt (mindestens) ein Büschel von Isogonalkreisen; der entsprechende Werth der Covariante (39) verschwindet identisch, und die Ermittelung der zugehörigen Berührungskreise verlangt die Auflösung einer *quadratischen* Gleichung.

ersten eine Anwendung machen, deren Bedeutung für die Apollonische Figur aus dem Folgenden hervorgehen wird.

Aus den acht Kreisen, die die Nebenkreise $\Psi_i = 0$ berühren, entstehen durch eine gewisse Berührungstransformation die acht Kreise, die je drei der Schnittpunkte der Kreise $\Phi_i = 0$ verbinden. Wir wollen diese Kreise „*umschriebene Kreise des Kreisbogendreiseits* $\Phi_i = 0$" nennen. Sie werden dargestellt durch Gleichungen $(\mathfrak{U}_i^{\pm} X) = 0$, wo

$$(41)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{U}_0^{\pm} X) &= \Phi \pm \sqrt{R_{11}}\,\Phi_1 \pm \sqrt{R_{22}}\,\Phi_2 \pm \sqrt{R_{33}}\,\Phi_3,\\ (\mathfrak{U}_1^{\pm} X) &= \Phi \pm \sqrt{R_{11}}\,\Phi_1 \mp \sqrt{R_{22}}\,\Phi_2 \mp \sqrt{R_{33}}\,\Phi_3,\\ (\mathfrak{U}_2^{\pm} X) &= \Phi \mp \sqrt{R_{11}}\,\Phi_1 \pm \sqrt{R_{22}}\,\Phi_2 \mp \sqrt{R_{33}}\,\Phi_3,\\ (\mathfrak{U}_3^{\pm} X) &= \Phi \mp \sqrt{R_{11}}\,\Phi_1 \mp \sqrt{R_{22}}\,\Phi_2 \pm \sqrt{R_{33}}\,\Phi_3. \end{aligned}$$

Vergleicht man nun diese Formeln mit den Formeln (39), und berücksichtigt man den angegebenen Zusammenhang zwischen den Kreisen $\Phi_i = 0$ und deren Nebenkreisen $\Psi_i = 0$, so ergiebt sich:

Die acht umschriebenen Kreise des Kreisbogendreiseits $\Phi_i = 0$ *sind identisch mit den acht Kreisen, die den Orthogonalkreis* $\Phi = 0$ *und die drei Nebenkreise* $\Psi_i = 0$ *unter gleichen Winkeln schneiden.*

Umgekehrt:

Die acht Isogonalkreise zu drei Kreisen $\Phi_i = 0$ *und deren Orthogonalkreis* $\Phi = 0$ *sind identisch mit den umschriebenen Kreisen der Nebenkreise* $\Psi_i = 0$.

§ 9.

Die Quadrupel 2. Art und die Hart'schen Kreise.

Wenden wir nun das im vorigen Paragraphen abgeleitete Casey'sche Kennzeichen für das Vorhandensein gemeinsamer Berührungskreise von vier Kreisen auf die verschiedenen Quadrupel von Apollonischen Kreisen $\mathfrak{Y}_i^{\pm} = 0$ an, so kommen wir, bei gehöriger Bestimmung der Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzeln, zu dem folgenden Satze:

Man kann zu drei Kreisen im Allgemeinen) auf vierzehn Arten einen weiteren Kreis fügen, der mit den gegebenen zusammen vier gemeinsame Berührungskreise hat.*

Die Gleichung, von der dieses Problem abhängt, ist reducibel, und zerfällt in drei Gleichungen 2. *Grades und eine Gleichung* 8. *Grades,*

*) Die Aufzählung und Untersuchung gewisser Grenzfälle bietet weder Schwierigkeiten, noch hat sie besonderes Interesse.

deren Galois'sche Gruppe G'_{32} *isomorph ist mit der Gruppe* G_{32} *des Apollonischen Problems**).

*Es werden nämlich sowohl die sechs gepaarten Quadrupel Apollonischer Berührungskreise als auch die acht syzygetischen Quadrupel 2. Art von je einem weiteren Kreise berührt***).

Es giebt danach zwei gänzlich verschiedene Figuren von solchen vier Kreisen, die vier gemeinsame Berührungskreise zulassen.

Betrachten wir zuerst die zweite, von einem syzygetischen Quadrupel 2. Art und seinen vier Berührungskreisen gebildete Figur. Wir wollen sie nach ihrem Entdecker, eine *Hart'sche Kreisfigur* nennen**); und ausserdem wollen wir als *Hart'schen Kreis* eines Kreistripels $\Phi_i = 0$ jeden der acht Kreise bezeichnen, die man den Kreisen $\Phi_i = 0$ hinzufügen kann, um das zweite Quadrupel einer Hart'schen Kreisfigur zu erhalten. Wir können dann behaupten:

*Die Beziehung zwischen den beiden Quadrupeln einer Hart'schen Kreisfigur ist gegenseitig. Die Kreise dieser Quadrupel sind einander in bestimmter Weise zugeordnet, so dass nach geeigneter Festsetzung eines Umlaufssinnes für alle Kreise der Figur jeder Kreis des einen Quadrupels bestimmte drei Kreise des anderen eigentlich (oder uneigentlich) und einen uneigentlich (oder eigentlich) berührt****).

Wählt man aus irgend einem der beiden Quadrupel einer Hart'schen Kreisfigur drei Kreise nach Belieben aus, so ist der letzte Kreis des Quadrupels einer der acht zugehörigen Hart'schen Kreise, und die anderen vier Kreise bilden ein Quadrupel 2. Art von Apollonischen Kreisen.

Dieser Satz liegt ziemlich nahe, obwohl er übrigens durchaus nicht als selbstverständlich betrachtet werden darf. Versteckter ist die folgende merkwürdige Eigenschaft der Hart'schen Figur:

*) Die Beziehung beider Gleichungen 8. Grades ist so beschaffen, dass durch geeignete drei Wurzeln der einen sich alle Wurzeln der anderen rational ausdrücken lassen.

**) Der im Texte angeführte Hart'sche Satz ist bis jetzt, soviel ich weiss, geometrisch überhaupt nicht und auch algebraisch nicht vollständig bewiesen worden. U. A. scheint mir der in mehrere Lehrbücher übergegangene Casey'sche Beweis eine Lücke zu enthalten: Es fehlt in diesem Beweise, von dem der erste der beiden im Texte angedeuteten Beweise den Grundgedanken entlehnt, die Bestimmung der Vorzeichen gewisser Quadratwurzeln. Casey beruft sich daher, wie auch andere Autoren, auf eine *Figur*, um die Quadrupel 2. Art von denen 1. Art (die keinen weiteren Berührungskreis haben) zu trennen.

***) Wenn zwei Kreise $\Phi_i = 0$, $\Phi_k = 0$ einander berühren, so heisst die Berührung, nach Festsetzung bestimmter Umlaufsrichtungen (d. h., nach Adjunction des Productes $\sqrt{-F_{ii}}\,\sqrt{-F_{\varkappa\varkappa}}$) eigentlich, wenn die Umlaufsrichtungen im Berührungspunkt übereinstimmen (wenn $\sqrt{-F_{ii}}\,\sqrt{-F_{\varkappa\varkappa}} + F_{i\varkappa} = 0$ ist), uneigentlich im anderen Falle (wenn $\sqrt{-F_{ii}}\,\sqrt{-F_{\varkappa\varkappa}} - F_{i\varkappa} = 0$ ist).

Die zwölf Punkte, in denen je zwei Kreise des einen Quadrupels einer Hart'schen Kreisfigur einander treffen, zerfallen in zwei Gruppen von je sechs Punkten. Jede Gruppe ist das System aller Schnittpunkte von gewissen drei Kreisen.

Wir wollen zwei Kreistripel, die auf diese Weise aus einer Hart'schen Kreisfigur abgeleitet sind, *supplementäre Tripel* nennen. Dann gilt der weitere Satz:

Jeder Kreis des einen von zwei supplementären Tripeln schneidet zwei Kreise des anderen Tripels unter rechtem Winkel.

Die so gekennzeichneten zwölf Schnittpunkte bilden das vollständige Schnittpunktsystem von vier neuen Kreisen.

Construirt man die Orthogonalkreise von je dreien dieser letzten vier Kreise, so erhält man wieder ein Hart'sches Quadrupel, und zwar gerade das Quadrupel, das mit dem gegebenen zusammen eine vollständige Hart'sche Kreisfigur ausmacht.

Von den zu diesen Sätzen gehörigen Formeln führen wir an die *Gleichungen der acht Hart'schen Kreise*, die den Hart'schen Satz unmittelbar zu verificiren erlauben: Diese Kreise werden dargestellt durch die gleich Null gesetzten irrationalen Covarianten

$$(42)\quad \begin{aligned} \left(H_0^{\pm} X\right) &= \sqrt{-F_{11}}\,\sqrt{-F_{22}}\,\sqrt{-F_{33}}\,.\,(\Phi X) \pm \\ &\pm Y_1\sqrt{-F_{22}}\,\sqrt{-F_{33}}\,.\,\Phi_1 \pm Y_2\sqrt{-F_{33}}\sqrt{-F_{11}}\,.\,\Phi_2 \pm \\ &\pm Y_3\sqrt{-F_{11}}\,\sqrt{-F_{22}}\,.\,\Phi_3, \\ \left(H_1^{\pm} X\right) &= \sqrt{-F_{11}}\,\sqrt{-F_{22}}\,\sqrt{-F_{33}}\,.\,(\Phi X) \pm \\ &\pm Y_0\sqrt{-F_{22}}\,\sqrt{-F_{33}}\,.\,\Phi_1 \mp Y_3\sqrt{-F_{33}}\sqrt{-F_{11}}\,.\,\Phi_2 \mp \\ &\mp Y_2\sqrt{-F_{11}}\,\sqrt{-F_{22}}\,.\,\Phi_3, \end{aligned}$$

u.s.f.; sie gehören der Reihe nach zu den Quadrupeln $\mathfrak{Y}_0^-, \mathfrak{Y}_1^+, \mathfrak{Y}_2^+, \mathfrak{Y}_3^+$; $\mathfrak{Y}_0^+, \mathfrak{Y}_1^-, \mathfrak{Y}_2^-, \mathfrak{Y}_3^-$ — $\mathfrak{Y}_0^+, \mathfrak{Y}_1^-, \mathfrak{Y}_2^+, \mathfrak{Y}_3^+$; $\mathfrak{Y}_0^-, \mathfrak{Y}_1^+, \mathfrak{Y}_2^-, \mathfrak{Y}_3^-$ — u. s. w.

Diese Formeln liefern u. A. noch den bereits von R. Lachlan*) angegebenen Satz:

Die Winkel, unter denen die Hart'schen Kreise die drei gegebenen Kreise $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ *schneiden, haben die Werthe*

$$(43)\quad \begin{array}{cccc} & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ H_0^{\pm} & a_2 - a_3 & a_3 - a_1 & a_1 - a_2 \\ H_1^{\pm} & a_2 - a_3 & a_3 + a_1 & a_1 + a_2 \\ H_2^{\pm} & a_2 + a_3 & a_3 - a_1 & a_1 + a_2 \\ H_3^{\pm} & a_2 + a_3 & a_3 + a_1 & a_1 - a_2. \end{array}$$

*) Phil. Trans. 1886, II, p. 511.

Die Winkel, unter denen der Berührungskreis $\mathfrak{Y}_0^- = 0$ die Kreise $\mathfrak{Y}_1^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_2^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_3^+ = 0$ schneidet, sind also auch die Differenzen der Winkel, die diese letzten Kreise unter einander bilden. Es gilt aber auch noch der folgende Satz:

Die zwölf verschiedenen Winkel von je zwei nicht copulirten Apollonischen Berührungskreisen sind identisch mit den entsprechend gebildeten zwölf Winkeln der Nebenfigur.

Diese Winkel sind in beiden Figuren auf verschiedene Weise geordnet.

Es entsprechen nämlich den Winkeln, die drei Kreise der ersten Figur unter einander bilden, solche Winkel der Nebenfigur, die ein Kreis mit drei anderen bildet.

Solche vier Berührungskreise der Nebenkreise bilden ein Quadrupel erster Art.

Die letzten Sätze sind der Kürze halber so ausgedrückt, wie sie sich darstellen, wenn Winkel der Form $\pm \varphi + 2\varkappa\pi$ als nicht verschieden von dem Winkel φ angesehen werden.

§ 10.

Supplementäre Kreistripel und Ketten.

Einer der im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze lässt sich folgendermassen umkehren:

Die acht umschriebenen Kreise eines Kreisbogendreiseits bestehen aus zwei Hart'schen Quadrupeln. Zu jedem Kreisbogendreiseit gehören also zwei andere, deren jedes zu dem ersten supplementär ist.

Die beiden genannten Quadrupel sind die folgenden: $\mathfrak{U}_0^+, \mathfrak{U}_1^+, \mathfrak{U}_2^+, \mathfrak{U}_3^+$, und $\mathfrak{U}_0^-, \mathfrak{U}_1^-, \mathfrak{U}_2^-, \mathfrak{U}_3^-$ (S. Nr. 41). Die gemeinsamen Berührungskreise des ersten unter ihnen, die zusammen mit denen der zweiten durch die schon erwähnte Berührungstransformation aus den Hart'schen Kreisen der Nebenfigur $\Psi_i = 0$ hervorgehen, werden dargestellt durch die gleich Null gesetzten Covarianten

(44)

$$(\mathfrak{W}_0 X) = Z_0 \sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}\,(\Phi X) +$$
$$+ \sqrt{-R}\,\{Z_1\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}\,\Psi_1 + Z_2\sqrt{R_{33}}\sqrt{R_{11}}\,\Psi_2 + Z_3\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\,\Psi_3\},$$
$$(\mathfrak{W}_1 X) = Z_1 \sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}\,(\Phi X) +$$
$$+ \sqrt{-R}\,\{Z_0\sqrt{R_{22}}\sqrt{R_{33}}\,\Psi_1 - Z_3\sqrt{R_{33}}\sqrt{R_{11}}\,\Psi_2 - Z_2\sqrt{R_{11}}\sqrt{R_{22}}\,\Psi_3\},$$

u. s. f. Das zugehörige, zu den Kreisen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$

supplementäre Tripel aber wird dargestellt durch die gleich Null gesetzten Covarianten

$$(45)\quad \begin{aligned} (\Phi_1^* X) &= R_{23}\sqrt{R_{11}}\,(\Phi X) + \sqrt{-R}\,\sqrt{R_{22}}\,\sqrt{R_{33}}\,(\Psi_1 X),\\ (\Phi_2^* X) &= R_{31}\sqrt{R_{22}}\,(\Phi X) + \sqrt{-R}\,\sqrt{R_{33}}\,\sqrt{R_{11}}\,(\Psi_2 X),\\ (\Phi_3^* X) &= R_{12}\sqrt{R_{33}}\,(\Phi X) + \sqrt{-R}\,\sqrt{R_{11}}\,\sqrt{R_{22}}\,(\Psi_3 X). \end{aligned}$$

Die Kreise des einen Tripels schneiden die ihnen *nicht* entsprechenden Kreise des anderen unter rechten Winkeln in den zwölf Schnittpunkten der Kreise

$$(46)\quad \begin{aligned} -\frac{\mathfrak{U}_0}{Y_0} + \frac{\mathfrak{U}_1}{Y_1} + \frac{\mathfrak{U}_2}{Y_2} + \frac{\mathfrak{U}_3}{Y_3} &= 0,\\ \frac{\mathfrak{U}_0}{Y_0} - \frac{\mathfrak{U}_1}{Y_1} + \frac{\mathfrak{U}_2}{Y_2} + \frac{\mathfrak{U}_3}{Y_3} &= 0,\\ \frac{\mathfrak{U}_0}{Y_0} + \frac{\mathfrak{U}_1}{Y_1} - \frac{\mathfrak{U}_2}{Y_2} + \frac{\mathfrak{U}_3}{Y_3} &= 0,\\ \frac{\mathfrak{U}_0}{Y_0} + \frac{\mathfrak{U}_1}{Y_1} + \frac{\mathfrak{U}_2}{Y_2} - \frac{\mathfrak{U}_3}{Y_3} &= 0, \end{aligned}$$

deren jeder Orthogonalkreis von dreien der Kreise $(\mathfrak{W}_i X) = 0$ (Nr. 44) ist. Ausserdem gilt der Satz:

Die in zwei supplementären Tripeln auftretenden Winkel a_i, a_i^* stehen in der involutorischen Beziehung

$$(47)\quad \begin{gathered} \cos a_\lambda^* = -\cos a_\lambda, \qquad \sin a_\lambda^* = \sin a_\lambda,\\ \cos \alpha_\lambda + \cos \alpha_\lambda^* = 2 \operatorname{ctg} a_\mu \operatorname{ctg} a_\nu = 2 \operatorname{ctg} a_\mu^* \operatorname{ctg} a_\nu^*\\ (\lambda \neq \mu \neq \nu, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3). \end{gathered}$$

Die Winkel a_i in dem einen Tripel sind also *Supplemente* der Winkel a_i^* in dem anderen.

Aus dem zu Eingang des Paragraphen aufgestellten Satze ergiebt sich ferner:

Jede Figur von drei Kreisen, deren Invariante

$$R \cdot R_{11} \cdot R_{22} \cdot R_{33} \cdot (R - 4F_{23}\,F_{31}\,F_{12})$$

von Null verschieden ist, ist ein Glied einer durch sie bestimmten, im Allgemeinen in's Unendliche fortlaufenden Kette von Kreistripeln. Je zwei benachbarte Glieder dieser Kette sind supplementär, und also gemeinsam dem einen Quadrupel einer Hart'schen Kreisfigur eingeschrieben.

Die ganze Kette geht in sich selbst über durch die Spiegelung an dem Orthogonalkreis irgend eines ihrer Tripel, und also auch durch alle Transformationen der von diesen Spiegelungen erzeugten Gruppe.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kette sich schliesst, besteht darin, dass der Winkel der Orthogonalkreise *benachbarter Tripel* $= \frac{m}{n}\pi$ *ist, wo* m $(\neq 0)$ *und* n (> 2) *theilerfremde ganze Zahlen bedeuten. Die Kette besteht dann aus* $2n$ *Gliedern.**)

§ 11.

Begleitende Sechsecke. Erweiterung des Feuerbach'schen Satzes.

Der in § 9 aufgestellte und in § 10 umgekehrte Satz lässt sich noch auf eine andere Art betrachten. Wir brauchen dazu einen neuen Begriff, den des „begleitenden Sechsecks" eines Kreisbogendreiseits.

Wir denken uns die Schnittpunkte der Kreise $\Phi_\mu = 0$, $\Phi_\nu = 0$ irgendwie mit $\Xi_{\mu\nu}^+$, $\Xi_{\mu\nu}^-$ bezeichnet, und construiren hierauf, ausgehend von irgend einem Punkte X_1 des Kreises $\Phi_1 = 0$, eine Reihe neuer Punkte X_2, X_3, X_1', X_2', X_3'', X_1'', die der Reihe nach den Kreisen $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, $\Phi_1 = 0$ angehören, und durch die Forderung näher bestimmt sind, zu zweien mit je zweien etwa der Punkte $\Xi_{\mu\nu}^+$ auf einem Kreise zu liegen:

$$(X_1\, X_2\, \Xi_{31}^+ \Xi_{23}^+) = (X_2\, X_3\, \Xi_{12}^+ \Xi_{31}^+) = (X_3\, X_1'\, \Xi_{23}^+ \Xi_{31}^+) =$$
$$= (X_1' X_2'\, \Xi_{31}^+ \Xi_{23}^+) = (X_2' X_3'\, \Xi_{12}^+ \Xi_{31}^+) = (X_3' X_1''\, \Xi_{23}^+ \Xi_{31}^+) = 0.$$

Dann fällt, wie man leicht erkennt, der letzte X_1'' dieser Punkte mit dem ersten X_1 zusammen. Die so construirte Figur von sechs Punkten X_i, X_i' und sechs Kreisbogen soll nun *„ein die Kreise* $\Phi_i = 0$ *begleitendes Sechseck"* heissen.

Unter den begleitenden Sechsecken dreier Kreise $\Phi_i = 0$ *giebt es sechzehn, die sich auf doppelt zählende Dreiecke reduciren. Diese sechzehn Kreisbogendreiecke sind auf zwei verschiedene Weisen zu Paaren geordnet und demzufolge auf vier Quadrupel vertheilt.*

Es gehören nämlich erstens je zwei zusammen, die derselben Schaar begleitender Sechsecke angehören, zweitens je zwei Dreiecke, die durch die Spiegelung an dem Orthogonalkreis $\Phi = 0$ *in einander übergehen.*

Die sechs Ecken von je zwei solchen Dreiecken nun, die in demselben Quadrupel liegen, aber auf keine der genannten beiden Arten gepaart sind, bilden das Schnittpunktsystem der Kreise $\Phi_i = 0$ *mit je einem der acht Hart'schen Kreise.*

So wird z. B. von den beiden Schnittpunkten des Hart'schen Kreises $H_0^+ = 0$ (Nr. 42) mit dem Kreise $\Phi_\mu = 0$ oder dem Kreise $\Phi_\nu = 0$ der eine ausgeschnittene von dem Kreis

*) Dabei ist abgesehen von den Falle $n = 1$, also von der ganz speciellen, aus zwei zusammenfallenden Gliedern bestehenden Kette, die von drei einander unter rechten Winkeln schneidenden Kreisen gebildet wird. Dem Werthe $n = 2$ entspricht überhaupt keine geschlossene Kette.

(48a) $$\sqrt{-F_{\lambda\lambda}}\,(\mathfrak{U}_\lambda^- X) + 2\,Y_0\,(\Phi_\lambda X) = 0,$$
der andere von dem Kreis

(48b) $$\sqrt{-F_{\lambda\lambda}}\,(\mathfrak{U}_\lambda^+ X) + 2\,Y_0\,(\Phi_\lambda X) = 0;$$
und die sechs durch die Formeln (48) dargestellten Kreise bilden die zwei supplementären Tripel, die zu dem Hart'schen Quadrupel $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, $H_0 = 0$ gehören.

Gehen wir zu dem Grenzfall $R = 0$ über, und verlegen wir den den Kreisen Φ_i gemeinsamen Punkt in's Unendliche, so erhalten wir ein ebenes geradliniges Dreiseit. Eine Schaar begleitender Sechsecke wird geradlinig, und enthält als doppelt zählendes Dreieck das dem gegebenen parallel eingeschriebene Dreieck; eine bestimmte zweite Schaar wird von Kreisbogen gebildet, deren jeder zwei Ecken des gegebenen Dreiecks enthält. Das zu dieser Schaar gehörige doppelt zählende Dreieck besteht aus den drei Kreisen, die über den Seiten des gegebenen Dreiecks als Durchmessern beschrieben sind. So erhalten wir im Grenzfall den *Feuerbach'schen Satz*, dessen in den vorhergehenden Sätzen enthaltene Ausdehnung auf Kreisbogendreiecke schon von Mehreren gesucht worden ist:

„Die vier Berührungskreise eines ebenen geradlinigen Dreiecks werden von einem Kreise berührt, der die Mitten der Seiten und die Fusspunkte der Höhen des Dreiecks enthält“.

Ausserdem ergiebt sich: „Die vier Orthogonalkreise von je dreien der Berührungskreise des ebenen Dreiecks haben ihre zwölf Schnittpunkte zu vieren auf den Seiten des parallel-eingeschriebenen Dreiecks, und ebenfalls zu vieren auf den Kreisen, die über den Seiten als Durchmessern beschrieben sind“.

Das von diesen letzten Kreisen gebildete Dreiseit ist ein solches, dessen Invariante $R - 4F_{23}F_{31}F_{12}$ (S. § 10) verschwindet. Die diesem Grenzfall entsprechende Kette von Kreistripeln enthält beiderseits nur noch ein anderes Glied und bricht dann ab.

§ 12.

Gepaarte Quadrupel.

Weit leichter als die Hart'schen Quadrupel sind zu behandeln die gepaarten Quadrupel Apollonischer Berührungskreise.

Auch die Beziehung zwischen einem gepaarten Quadrupel und seinen vier Berührungskreisen ist gegenseitig.

In einer solchen Figur von zweimal vier Kreisen haben die Kreise eines jeden Quadrupels zu zweien einen gemeinsamen Potenzkreis, der zugleich Orthogonalkreis des anderen Quadrupels ist.

Nach geeigneter Erklärung eines Umlaufssinnes für alle acht Kreise berührt ein Kreispaar in jedem Quadrupel beide Paare des anderen *eigentlich, und eines ein Paar des anderen Quadrupels eigentlich und ein Paar uneigentlich.*

Die zwölf Schnittpunkte der Kreise etwa des ersten Quadrupels zerfallen in eine Gruppe von vier und eine Gruppe von acht Punkten.

Die vier Punkte — die Schnittpunkte der gepaarten Kreise — liegen auf dem Orthogonalkreis des zweiten Quadrupels; die acht Punkte bilden vier Punktepaare der Inversion, die mit diesem Orthogonalkreis verbunden ist, und zerfallen ausserdem noch in zwei Gruppen von vieren.

Die acht Punkte liegen also zu vieren auf sechs Kreisen, deren jeder auf dem genannten Orthogonalkreis senkrecht steht, und von denen überdies zwei auch auf dem Orthogonalkreis des ersten Quadrupels senkrecht sind.

Das vorgelegte Quadrupel ist also ein „gepaartes" Quadrupel umschriebener Kreise in Bezug auf vier, und im Allgemeinen auch nur in Bezug auf vier Kreisbogendreiecke.

Da unter den Quadrupeln umschriebener Kreise eines Kreisbogendreiseits ausser den beiden Hart'schen Quadrupeln $\mathfrak{U}_i^+ = 0$ und $\mathfrak{U}_i^- = 0$ nur die sechs gepaarten, nämlich die Quadrupel $\mathfrak{U}_0^+ = 0$, $\mathfrak{U}_0^- = 0$, $\mathfrak{U}_1^+ = 0$, $\mathfrak{U}_1^- = 0$ u. s. w. so liegen, dass keine drei von ihnen durch einen Punkt gehen, so folgt weiter:

Wenn die zwölf Schnittpunkte je zweier von vier Kreisen von einander verschieden sind, und wenn sechs von ihnen das Schnittpunktsystem dreier neuer Kreise bilden, so haben entweder auch die sechs übrigen Schnittpunkte diese Eigenschaft, und die vier Kreise bilden ein Hart'sches Quadrupel; oder die vier Kreise haben zu zweien einen gemeinsamen Potenzkreis. Auch im letzten Falle also werden die vier Kreise von (mindestens) vier weiteren Kreisen berührt. (Im Besonderen kann sich die Zahl auf sechs erhöhen). —

Der Kreis, der ausser den Kreisen $\Phi_i = 0$ z. B. die Apollonischen Kreise $\mathfrak{Y}_0^+$, $\mathfrak{Y}_0^-$, $\mathfrak{Y}_1^+$, $\mathfrak{Y}_1^-$ berührt, hat die Gleichung

$$\begin{aligned}(49)\qquad &\sqrt{-F_{22}}\,\sqrt{-F_{33}}\,(\sqrt{-F_{22}}\,\sqrt{-F_{33}} + F_{23})\,(\Phi_1 X) + \\ &+ (F_{12}\sqrt{-F_{33}} - F_{31}\sqrt{-F_{22}})(\sqrt{-F_{33}}\,\Phi_2 - \sqrt{-F_{22}}\,\Phi_3) = 0.\end{aligned}$$

§ 13.

Die unabhängigen Tripel von Lösungen.

Greifen wir aus den acht Berührungskreisen der Kreise $\Phi_i = 0$ irgend drei heraus, z. B. die Kreise $\mathfrak{Y}_1^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_2^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_3^+ = 0$, und stellen wir für *diese* drei Kreise nun die Apollonische Aufgabe, so muss es sich zeigen, dass unter den zugehörigen Berührungskreisen die Kreise $H_0 = 0$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ vorkommen. Bilden wir also die specielle Lösung des auf die drei Kreise $\mathfrak{Y}_i = 0$ bezüglichen Apollonischen Problems, und unterscheiden wir die entsprechenden Covarianten von denen der Kreise $\Phi_i = 0$ durch beigefügte Accente (so dass also $\Phi_i' = \mathfrak{Y}_i^+$, für $i = 1, 2, 3$), so müssen vier Gleichungen der folgenden Form bestehen:

$$
(50)\quad
\begin{aligned}
(\mathfrak{P}_0' X) - \sqrt{R' + \Delta_0'} \,.\, (\Phi' X) &= \tau_0 \,.\, (H_0^+ X),\\
(\mathfrak{P}_1' X) + \sqrt{R' + \Delta_1'} \,.\, (\Phi' X) &= \tau_1 \,.\, (\Phi_1 X),\\
(\mathfrak{P}_2' X) + \sqrt{R' + \Delta_2'} \,.\, (\Phi' X) &= \tau_2 \,.\, (\Phi_2 X),\\
(\mathfrak{P}_3' X) + \sqrt{R' + \Delta_3'} \,.\, (\Phi' X) &= \tau_3 \,.\, (\Phi_3 X).
\end{aligned}
$$

Die Covarianten $(\mathfrak{P}_i' X)$ sind leicht zu bilden. Schwieriger ist es, brauchbare Ausdrücke für die Wurzelgrössen $\sqrt{R' + \Delta_i'}$ und die Factoren τ_i zu finden. Es ist klar, dass diese Grössen *rational* werden müssen im Bereiche der Grössen $\sqrt{-F_{ii}}$, $\sqrt{R + \Delta_i}$; es besteht aber auch noch der tiefer liegende Satz, dass sie *ganze* Functionen in dem genannten Bereiche sind.

Man findet, wenn man zur Abkürzung

$$\mathfrak{A}_0 = \sqrt{-F_{11}}\,\sqrt{-F_{22}}\,\sqrt{-F_{33}}, \quad \mathfrak{A}_\lambda = F_{\mu\nu}\sqrt{-F_{\lambda\lambda}}$$

setzt,

$$
(51)\quad
\begin{aligned}
\sqrt{R' + \Delta_0'} &= 4R^2 . \{(-\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3) Z_0 + \\
&\quad + (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_0) Z_1 + (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_0) Z_2 + (\mathfrak{A}_3 - \mathfrak{A}_0) Z_3\},\\
\sqrt{R' + \Delta_\lambda'} &= 4R^2 . \{\mathfrak{A}_0 (Z_\mu + Z_\nu) - \mathfrak{A}_\mu (Z_\lambda + Z_\mu) - \mathfrak{A}_\nu (Z_\lambda + Z_\nu)\},
\end{aligned}
$$

$$
(52)\quad
\begin{aligned}
\tau_0 &= 32 R^4 \{\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3) X_0 + \Sigma (\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_\lambda) Z_\lambda\},\\
\tau_\lambda &= Y_0 \sqrt{-F_{\mu\mu}}\,\sqrt{-F_{\nu\nu}} \,.\, \tau_0 .
\end{aligned}
$$

Auch von diesen Formeln mögen wir einige Anwendungen machen.

Die Bedingung dafür, dass die drei Apollonischen Kreise $\mathfrak{Y}_1^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_2^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_3^+ = 0$ *durch einen Punkt gehen* (*ohne dass* $D = 0$ *würde*) *ist*

$$(\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_3) X_0 + \Sigma (\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_\lambda) Z_\lambda = 0.$$

In diesem Falle haben die beiden zu dem Quadrupel $\mathfrak{Y}_0^-$, $\mathfrak{Y}_1^+$, $\mathfrak{Y}_2^+$, $\mathfrak{Y}_3^+$ gehörigen supplementären Tripel die zu Schluss des § 11 betrachtete besondere Eigenschaft: Bei dem einen verschwindet die Invariante R, bei dem anderen die Invariante $R - 4F_{23}F_{31}.F_{12}$; das erste Tripel schickt seine Kreise ebenfalls durch jenen Punkt.

Wir können ferner die Abhängigkeit untersuchen, in der die Elemente (a_i', α_i') des mit den drei Kreisen $\mathfrak{Y}_i = 0$ verbundenen sphärischen Dreiecks (genauer eines der sechzehn zugehörigen Dreiecke) zu den Elementen (a_i, α_i) des bereits betrachteten Dreiecks der Kreise $\Phi_i = 0$ stehen.

Diese Abhängigkeit ist so beschaffen, dass die Verhältnisse der Parameter, z. B. der Parameter Z_i' des einen sich *rational* durch die Verhältnisse der Parameter Z_i des anderen Dreiecks ausdrücken lassen. Es findet sich, wenn τ einen Proportionalitätsfactor bedeutet

$$(53)\qquad \begin{aligned} \tau \,.\, Z_0' &= -(Z_0+Z_1)(Z_0+Z_2)(Z_0+Z_3),\\ \tau \,.\, Z_1' &= (Z_0+Z_1)(Z_2 Z_3+Z_0 Z_1),\\ \tau \,.\, Z_2' &= (Z_0+Z_2)(Z_3 Z_1+Z_0 Z_2),\\ \tau \,.\, Z_3' &= (Z_0+Z_3)(Z_1 Z_2+Z_0 Z_3). \end{aligned}$$

Diese Formeln stellen eine Cremona'sche und überdies involutorische Transformation des Raumes $Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3$ vor: Ersetzt man den Factor τ durch die Einheit, und drückt man dann gewisse Grössen Z_i'' durch die Grössen Z_i' ebenso aus, wie diese selbst durch die Grössen Z_i ausgedrückt sind, so werden diese Grössen Z_i'' gleich den Grössen Z_i selbst, jede multiplicirt mit einem ihnen allen gemeinsamen Factor, der in acht lineare Factoren zerfällt, und den folgenden Werth hat:

$$(54)\qquad 8Z_0^2 \,.\, (Z_0+Z_1) \,.\, (Z_0+Z_2) \,.\, (Z_0+Z_3) \,.\, Y_1 \,.\, Y_2 \,.\, Y_3 \,.$$

§ 14.

Geometrie der Inversionen: Lineare Constructionen.

Wir wenden uns nun zu dem zweiten Theil unserer Aufgabe, zu der constructiven Lösung des Apollonischen Problems. Hierzu sind einige Vorbereitungen erforderlich; denn die üblichen Hülfsmittel der elementaren construirenden Geometrie, Lineal und Zirkel, sind durch die in § 1 gestellten Forderungen ausgeschlossen. Die Art von Geometrie, von der hier die Rede sein soll, gleicht der Mascheroni'schen Geometrie des Zirkels insofern, als auch sie ausschliesslich mit Kreisen arbeitet. Sie unterscheidet sich aber von dieser principiell dadurch, dass der Mittelpunkt des Kreises nicht benutzt wird, und von dem derzeitigen Entwicklungszustande der Mascheroni'schen Geometrie ausserdem dadurch, dass ein sorgfältiger Unterschied zwischen linearen und quadratischen Constructionen gemacht wird. Die *linearen* Kreisconstructionen, von denen wir zunächst zu reden haben, bilden ein Seitenstück zu der Geometrie des Lineals. Sie beruhen auf folgenden Constructionspostulaten:

I. *Man kann drei vorgelegte (reelle) Punkte durch einen Kreis verbinden.*

II. *Wenn zwei Kreise sich in einem bekannten Punkte schneiden, so ist auch der andere Schnittpunkt dieser Kreise bekannt.*

Indem wir weitergehende Darlegungen über die aus diesen Postulaten entspringende „*Geometrie der Inversionen*“, ihre Ausdehnung auf den Raum und die Uebertragung dieser Theorie auf die Lie'sche Kreis- und Kugelgeometrie auf spätere Gelegenheiten verschieben, werden wir hier nur soviel davon anführen, als zum Verständniss unserer Lösung des Apollonischen Problems nothwendig ist.

Zunächst wollen wir, um sogleich einen hinreichend allgemeinen Standpunkt zu gewinnen, auf einen wichtigen Umstand aufmerksam machen, der, wie es scheint, von allen Geometern übersehen worden ist, die sich bisher mit der Geometrie der Kreise beschäftigt haben: Man muss scharf unterscheiden zwischen Kreisen, von denen man einzelne Punkte kennt (punktweise bekannten Kreisen, wie wir sagen wollen) und solchen Kreisen, bei denen nur die zugehörige Inversion als bekannt angesehen wird; algebraisch ausgedrückt, zwischen Kreisen, deren Parameterdarstellung als rational bekannt gilt, und Kreisen, von denen man nur die Gleichung kennt. Eine Inversion ist als bestimmt anzusehen, sobald man irgend zwei ihrer Punktepaare Y, Y'; Z, Z' gegeben hat, die ihrerseits auf einem (natürlich punktweise bekannten) Kreise angenommen werden müssen. Denn aus solchen vier Punkten kann man zu einem beliebig angenommenen Punkte X den entsprechenden X' ableiten, auf Grund der Postulate I und II, vermöge einer auf der Hand liegenden Construction, die wir durch die Formel

$$X \begin{Bmatrix} Y, & Y' \\ Z, & Z' \end{Bmatrix} X'$$

bezeichnen wollen*). Der so durch zwei Punktepaare eines Kreises definirte, zu der Inversion

$$\begin{Bmatrix} Y, & Y' \\ Z, & Z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z, & Z' \\ X, & X' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X, & X' \\ Y, & Y' \end{Bmatrix} = \cdots$$

gehörige Kreis hat nicht nothwendig reelle Punkte, und wenn er solche hat, so sind doch im Allgemeinen keine darunter, die durch lineare Construction, also auf Grund der Postulate I und II ermittelt werden könnten. Sobald man aber *einen* Punkt eines Kreises kennt, kann man auch beliebig viele andere Punkte finden, die eine überall dichte Punktmenge bilden; welche Punkte, das hängt ab von der Beschaffenheit der sonst noch als (rational-) bekannt geltenden Punkte**). Punktweise bekannt ist natürlich insbesondere jeder durch drei seiner Punkte gegebene Kreis.

---

*) Nach dem Vorgange von H. Wiener drücken wir durch $\mathfrak{A}\{S\}\mathfrak{B}$ aus, dass das Gebilde $\mathfrak{A}$ durch die Transformation S in das Gebilde $\mathfrak{B}$ übergeführt wird.

**) Eine triviale Ausnahme bildet der Fall, wo der gegebene Kreis ein Punktkreis und der bekannte Punkt sein Doppelpunkt ist.

Eine *Fundamentalaufgabe* unserer Geometrie der Inversionen ist natürlich die folgende:

„*Die Inversion zu construiren, die mit einem durch drei seiner Punkte gegebenen Kreis verbunden ist*".

Die einfache Lösung enthält einen bemerkenswerthen geometrischen Satz. Man nehme auf dem gegebenen Kreis irgend vier Punkte P, Q, R, S an, und setze die drei Inversionen

$$\begin{Bmatrix} P, & Q \\ R, & S \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} P, & R \\ Q, & S \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} P, & S \\ Q, & R \end{Bmatrix}$$

in irgend einer Reihenfolge zusammen. Ihr Product ist unabhängig von der Lage der angenommenen Punkte auf dem Kreis, und stellt die gesuchte Inversion dar.

Auf Grund dieser Construction lassen sich nun eine Menge von Aufgaben lösen, von denen wir beispielsweise einige der wichtigsten anführen.

„*Gegeben sind zwei Kreise durch die zugehörigen Inversionen J_1, J_2. Man soll den Kreis construiren, der durch einen gegebenen Punkt X geht, und entweder (a) auf den beiden gegebenen Kreisen senkrecht steht, oder (b) mit ihnen demselben Büschel angehört*".

Im Falle der Aufgabe (a) hat man einfach den Punkt X mit den durch

$$X\{J_1\}X_1, \quad X\{J_2\}X_2$$

bestimmten Punkten X_1 und X_2 durch einen Kreis zu verbinden. Liegt die Aufgabe (b) vor, so verschaffe man sich, auf Grund der Lösung von (a), zwei verschiedene punktweise bekannte Kreise, die zu den Kreisen J_1 und J_2 orthogonal sind. Man construire dann die zu diesen Kreisen gehörigen Inversionen J' und J'', und verfahre schliesslich wie soeben, indem man J_1 und J_2 durch J' und J'' ersetzt.

„*Gegeben sind drei Kreise durch die zugehörigen Inversionen. Man soll den Kreis (d. h. die durch ihn bestimmte Inversion) construiren, der auf allen dreien senkrecht steht*".

Man lege durch irgend einen Punkt X drei Kreise, deren jeder mit zweien der gegebenen in einem Büschel liegt. Diese drei Kreise schneiden sich in dem Punkte X', der dem Punkt X in der gesuchten Inversion zugeordnet ist.

In ähnlicher Weise erledigt man u. A. folgende Aufgaben, deren Lösung dem Leser überlassen bleiben mag:

„Zu drei Punkten X, Y, Y' eines Kreises den Punkt X' zu fügen, der von X durch Y und Y' harmonisch getrennt ist."

„Gegeben sind vier Kreise, die einen gemeinsamen Orthogonalkreis haben. Man soll die Kreise (d. h. immer die zugehörigen

Inversionen) bestimmen, in denen sich je zwei der durch die vier Kreise bestimmten Büschel durchdringen."

„Zu entscheiden, wann zwei Kreise einander berühren, und den Berührungspunkt zu finden."

§ 15.

Geometrie der Inversionen: Quadratische Constructionen.

Zu den im vorigen Paragraphen kurz betrachteten linearen Constructionen in der Geometrie der Inversionen sind, zur weiteren Entwickelung dieser Disciplin, successive quadratische Constructionen und solche höheren Grades hinzuzufügen, und zwar bei jeder einzelnen Aufgabe Constructionen von möglichst einfacher Beschaffenheit, und diese in möglichst geringer Anzahl, entsprechend den Forderungen der Galois'schen Theorie. Als äquivalent betrachtet werden dürfen daher nur solche nicht-lineare Constructionen, die sich vermöge linearer auf einander zurückführen lassen; je zwei Constructionen, bei denen das nicht der Fall ist, stellen zwei verschiedene Postulate dar. Der Inbegriff aller als bekannt geltenden Punkte, Inversionen, und daraus linear construirten Figuren, bildet einen *Constructionsbereich* in unserer Geometrie, entsprechend dem Rationalitätsbereich der Algebra.

Die systematische Entwickelung dieses Gedankens ist natürlich ein sehr umfangreiches und wohl überhaupt auf eigentlich geometrischem Wege nur in sehr beschränktem Umfange durchführbares Unternehmen; namentlich bietet die Theorie des Imaginären dieselben Verwickelungen dar, wie in der projectiven Geometrie. Für unseren Zweck aber reicht es aus, quadratische Constructionen zu betrachten; auch brauchen wir hier die durch solche Constructionen definirten Gebilde nur dann in weitere Constructionen eintreten zu lassen, wenn sie reell sind.

Die quadratischen Aufgaben müssen sich, wie die Algebra zeigt, alle in die folgende Form bringen lassen:

„Zwei Kreise mit einander zum Durchschnitt zu bringen";

und diese Aufgabe selbst lässt sich, durch lineare Construction, wiederum auf das folgende Postulat zurückführen:

III. *Man kann die Schnittpunkte zweier zu einander orthogonaler Kreise finden, von denen der eine punktweise bekannt ist.*

Man erkennt, dass dieses Postulat äquivalent ist mit der Forderung, die Doppelpunkte einer Involution auf einem punktweise bekannten Kreise zu bestimmen. —

Beispielsweise führt man die Aufgaben: „Die beiden Punktkreise eines Büschels zu ermitteln" und „die beiden Kreise eines Büschels zu finden, die einen gegebenen Kreis berühren" ohne Weiteres auf das Postulat III zurück. Verwickelter ist schon die Lösung des folgenden Problems:

„Die beiden Potenzkreise zweier gegebener Kreise zu finden",
einer Aufgabe, die wir auch so ausdrücken können:

„Man soll die beiden Inversionen S und S' bestimmen, die zwei gegebene Inversionen J_1 und J_2 mit einander vertauschen:

$$J_1\{S\}J_2, \qquad J_1\{S'\}J_2$$

oder

$$SJ_1 = J_2S', \qquad S'J_1 = J_2S'\text{“}.$$

Man nehme auf einem punktweise bekannten Orthogonalkreis der Kreise J_1 und J_2 zwei Punkte X, Y an, von denen der eine X als fest, der andere Y als veränderlich angesehen werde. Dann ist durch $X\{\Sigma\}Y$ eine gewisse Inversion des Büschels (J_1, J_2) linear bestimmt. Construirt man nun weiter zwei Punkte Y_2 und Y_1' aus den Forderungen $Y\{J_2\}Y_2$ und $X\{J_1\Sigma\}Y_1'$, so sind die Punktreihen Y_1, Y_2 und Y_1' projectiv auf einander bezogen. Man kann nun, auf Grund einer bekannten Construction*), die sich ohne Weiteres auf unsere Geometrie der Inversionen übertragen lässt, die Doppelelemente Z' und Z'' der Projectivität (Y_2, Y_1') finden; aus diesen leitet man dann vermöge $Z'\{J_2\}X'$ und $Z''\{J_2\}X''$ die beiden Punkte X' und X'' ab, die man dem Punkte X zuordnen muss, um Σ mit S oder S' zusammenfallen zu lassen.

Aus der Lösung der letzten Aufgabe ergiebt sich weiter:

Die Bestimmung der sechs Potenzkreise im System dreier Kreise erfordert i. A. zwei von einander unabhängige quadratische Constructionen; und zwei weitere von den ersten und von einander unabhängige quadratische Constructionen hat man anzuwenden, um auch die sechs Potenzkreise in der Figur der drei Nebenkreise zu finden.

Aus dem Zusammenhange genommen erscheint dieser Satz trivial; seine Bedeutung liegt aber darin, dass wir die Natur der anzuwendenden Constructionen genau angegeben haben: Es ist bei beiden Aufgaben ausser linearen Constructionen (den Postulaten I und II) nur die unter III postulirte quadratische Construction zu verwenden, und zwar bei der ersten Aufgabe zweimal, und bei der zweiten insgesammt viermal. In demselben Sinne ist die folgende Aussage zu verstehen:

Um die zu zwei, drei oder vier Kreisen gehörigen Schaaren von Isogonalkreisen (gleichwinklig schneidenden Kreisen) zu finden, hat man im Allgemeinen eine, zwei oder drei von einander unabhängige quadratische Constructionen aufzuwenden.

---

*) H. Wiener, „Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden", Darmstadt 1885 und Sächs. Ber. 1891, S. 646 u. ff.

(In besonderen Fällen können diese Constructionen alle oder zum Theil durch lineare ersetzt werden.) Die Constructionen selbst liegen nach dem in § 14 Gesagten auf der Hand, und sollen dem Leser überlassen bleiben.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns nun wieder zum Apollonischen Problem. Dieses wird, als eine Aufgabe der construirenden Geometrie, offenbar so zu fassen sein:

> „*Gegeben sind drei Kreise durch die mit ihnen verbundenen Inversionen. Man soll durch lineare und möglichst wenige quadratische Constructionen die Kreise finden, die diese drei Kreise berühren*“.

Einiges Gewicht möchten wir bei dieser Formulirung darauf legen, dass die gegebenen Kreise *nicht* als von vorn herein punktweise bekannt gelten; denn diese Annahme, die wohl in allen bis jetzt gelieferten Constructionen gemacht worden ist, enthält eine ungerechtfertigte *Specialisirung* des Problems. Aber allerdings ist, wenn die Aufgabe überhaupt reelle Lösungen zulassen soll, anzunehmen, dass bei allen drei Kreisen reelle Punkte vorhanden sind ($F_{ii} > 0$), dass also die Punktepaare einer jeden der gegebenen Inversionen einander nicht trennen, und ausserdem noch, dass keiner der drei Kreise die beiden anderen trennt, dass die Invarianten R_{ii} und $F_{23}F_{31}F_{12}$ nicht gleichzeitig negativ sind. Um uns kurz fassen zu können, wollen wir ferner noch voraussetzen, dass die Discriminante D unseres Problems von Null verschieden sei; wir bemerken aber, dass die anzugebende Construction, nach geringer Abänderung, auch auf alle Grenzfälle sich erstreckt.

Ausserdem sei hervorgehoben, dass alle reellen Lösungen auch durch wirklich ausführbare Constructionen ermittelt werden*).

§ 16.

Inversionen eines Büschels.

Die Lösung des nunmehr in präciser Gestalt vor uns liegenden Constructionsproblems kann in drei Schritte zerlegt werden. Der erste besteht in der Construction der Potenzkreise der gegebenen Kreise. Hiervon haben wir schon im vorigen Paragraphen geredet. Der zweite Schritt ist die Construction der *Plücker'schen Kreise*, d. h. der Kreise, die aus den gegebenen Kreisen $\Phi_i = 0$ die Berührungspunkte je zweier copulirter Apollonischer Kreise orthogonal ausschneiden, und die sich

*) Diese Eigenschaft fehlt einigen der bekannten geometrischen Lösungen, z. B. der nicht uninteressanten Laguerre'schen Construction.

hieraus ergebende Construction dreier Lösungspaare. Der dritte der auszuführenden Schritte endlich besteht in der Bestimmung der Abhängigkeit des vierten Lösungspaares von den drei ersten.

Die Lösung des zweiten und dritten Theiles unserer Aufgabe lässt sich nun in eleganter Weise ausführen auf Grund des folgenden, auch sonst für die Geometrie der Inversionen wichtigen Satzes:

Sind J_1, J_2, J_3 drei Inversionen eines Büschels (zu Kreisen eines Büschels gehörige Inversionen), so ist die zusammengesetzte Transformation $J_3 J_1 J_2$ nicht verschieden von $J_2 J_1 J_3$, und stellt eine neue Inversion J_0 desselben Büschels dar.

Dieses Theorem ist eine von zwei möglichen Uebertragungen eines bekannten Satzes der projectiven Geometrie*) auf die Geometrie der Inversionen.

Es wird noch vervollständigt durch den weiteren, im Grunde ebenfalls der Theorie der binären Involutionen angehörigen Satz:

Die beiden Paare J_0, J_1 und J_2, J_3 der genannten Inversionen, die in der Beziehung

$$J_0 = J_3 J_1 J_2 = J_2 J_1 J_3, \qquad J_1 = J_2 J_0 J_3 = J_3 J_0 J_2,$$
$$J_2 = J_1 J_3 J_0 = J_0 J_3 J_1, \qquad J_3 = J_0 J_2 J_1 = J_1 J_2 J_0$$

stehen, werden durch dasselbe Paar von Inversionen Σ, Σ' mit einander vertauscht:

$$J_0 \Sigma = \Sigma J_1, \qquad J_2 \Sigma = \Sigma J_3,$$
$$J_0 \Sigma' = \Sigma' J_1, \qquad J_2 \Sigma' = \Sigma' J_3;$$

anders ausgedrückt: Die zu J_0, J_1 und die zu J_2, J_3 gehörigen Kreise haben je dasselbe Paar von Potenzkreisen.

Die Inversionen Σ, Σ' lassen sich nun linear construiren, sobald man etwa die Schnittpunkte X_2, X_2' und X_3, X_3' der Kreise J_2, J_3**) mit irgend einem Orthogonalkreis des Büschels (J_1, J_2, J_3) kennt: Man hat offenbar

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} X_2, & X_3 \\ X_2', & X_3' \end{Bmatrix}, \qquad \Sigma' = \begin{Bmatrix} X_2, & X_3' \\ X_2', & X_3 \end{Bmatrix}.$$

Kennt man nun ausserdem die Schnittpunkte X_1 und X_1' von J_1 mit dem genannten Orthogonalkreis, so lassen sich die Schnittpunkte X_0 und X_0' von J_0 mit demselben Kreis linear construiren:

$$X_1 \{\Sigma\} X_0, \quad X_1' \{\Sigma\} X_0', \quad X_1 \{\Sigma'\} X_0', \quad X_1' \{\Sigma'\} X_0.$$

*) H. Wiener, Verwandtschaften als Folgen zweier Spiegelungen, Sächs. Ber. 1891, S. 669 (Einschub II).

**) Wir bezeichnen die Kreise kurz durch dieselben Buchstaben wie die zugehörigen Inversionen.

Also: *Kennt man bei dreien unter vier in der genannten Beziehung stehenden Kreisen eines Büschels die Schnittpunkte mit einem Orthogonalkreis des Büschels, so kann man das Schnittpunktpaar des vierten Kreises mit diesem Orthogonalkreis linear construiren.*

Und zwar gilt Das, wie man leicht erkennt, auch in dem Grenzfall, wo etwa J_2 und J_3 zusammenfallen.

§ 17.

Geometrische Lösung des Apollonischen Problems.

Wir identificiren nun die im vorigen Paragraphen betrachteten Inversionen J_1, J_2, J_3 mit den Spiegelungen an drei solchen Potenzkreisen der Kreise $\Phi_i = 0$, die einem Büschel angehören. Nennen wir, entsprechend den Indices 1, 2, 3 drei solche Spiegelungen I_e, II_e, III_e, und die drei übrigen I_u, II_u, III_u, so haben wir insgesammt vier Büschel, nämlich

$$I_e,\ II_e,\ III_e;\quad I_e,\ II_u,\ III_u;\quad I_u,\ II_e,\ III_u;\quad I_u,\ II_u,\ III_e.$$

Führt man nun je drei solche Inversionen, die zu den Potenzkreisen eines Büschels gehören, hinter einander aus, so sind die entstehenden zwölf neuen Inversionen identisch mit denen, die zu den zwölf Plücker'schen Kreisen gehören. D. h., es schneiden z. B. die vier Kreise, die durch die Formeln

$$(55)\qquad \begin{aligned} J_{01} &= III_e\, I_e\, II_e = II_e\, I_e\, III_e, \\ J_{11} &= III_u\, I_e\, II_u = II_u\, I_e\, III_u, \\ J_{21} &= III_u\, I_u\, II_e = II_e\, I_u\, III_u, \\ J_{31} &= III_e\, I_u\, II_u = II_u\, I_u\, III_e \end{aligned}$$

definirt sind, den Kreis $\Phi_1 = 0$ unter rechtem Winkel in den Berührungspunkten je eines Paares copulirter Apollonischer Kreise.

Es gelten aber noch die weiteren Sätze:

Die Plücker'schen Kreise können nicht nur zu dreien auf vier Büschel, sondern auch zu vieren auf drei Büschel vertheilt werden. Es gehören nämlich z. B. die vier Kreise (55), *die zu dem Kreise $\Phi_1 = 0$ orthogonal sind, dem Büschel an, das die Nebenkreise $\Psi_2 = 0$, $\Psi_3 = 0$ verbindet.*

Ueberdies sind diese vier Kreise in bestimmter Weise in Paare J_{01}, J_{11}; J_{21}, J_{31} geordnet, so dass

$$(56)\qquad \begin{aligned} J_{01} &= J_{21}\, J_{11}\, J_{31} = J_{31}\, J_{11}\, J_{21}, \\ J_{02} &= J_{32} J_{22} J_{12} = J_{12} J_{22} J_{32}, \\ J_{03} &= J_{13} J_{33} J_{23} = J_{23} J_{33} J_{13}. \end{aligned}$$

Die beiden Paare z. B. des ersten Quadrupels, J_{01}, J_{11} *und* J_{21}, J_{31} *haben dasselbe Paar von Potenzkreisen, wie die Nebenkreise* $\Psi_2 = 0$ *und* $\Psi_3 = 0$.

Hieraus, und aus dem letzten Satze des vorigen Paragraphen ergiebt sich nun ohne Weiteres die gesuchte Construction: Man bestimme zunächst die Schnittpunkte etwa der zu den Inversionen J_{11}, J_{21}, J_{31} gehörigen Plücker'schen Kreise mit dem Kreise $\Phi_1 = 0$, was *drei* quadratische Constructionen verlangt. Hierauf kann man durch lineare Construction die der Inversion J_{01} entsprechenden Schnittpunkte finden. Die Berührungspunkte der Apollonischen Kreise mit den Kreisen $\Phi_2 = 0$ und $\Phi_3 = 0$ ergeben sich dann vermöge der bekannten Spiegelungen I, II, III.

Eleganter noch ist eine zweite Construction, die aus dem zuletzt hervorgehobenen Satze entspringt: Man bestimme zuerst die Potenzkreise der Kreise $\Phi_i = 0$ und die der Nebenkreise $\Psi_i = 0$ (§ 15), durch insgesammt *vier* quadratische Constructionen. Hierauf suche man die Schnittpunkte des Plücker'schen Kreises J_{01} mit dem Kreise $\Phi_1 = 0$, durch *eine* neue quadratische Construction. Diese Schnittpunkte liefern, wie oben, ein Lösungspaar $\mathfrak{Y}_0^+$, $\mathfrak{Y}_0^-$. Unterwirft man nun die auf dem Kreise $\Phi_\lambda = 0$ gelegenen Berührungspunkte der Spiegelung an dem einen oder anderen Potenzkreise der Nebenkreise $\Psi_\mu = 0$, $\Psi_\nu = 0$, so erhält man die Berührungspunkte der Kreise $\mathfrak{Y}_\lambda^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_\lambda^- = 0$ mit dem Kreise $\Phi_\lambda = 0$.

Die ersten vier quadratischen Constructionen sind bei dieser Lösung dieselben, mag man nun die Berührungskreise der Kreise $\Phi_i = 0$ oder die der Nebenkreise $\Psi_i = 0$ suchen. Beide Probleme zugleich werden also durch insgesammt *sechs* quadratische Constructionen erledigt, entsprechend der algebraischen Theorie. —

Ein Theil vom Inhalte der letzten Sätze lässt sich, in noch etwas vervollständigter Fassung, auch so ausdrücken:

Leitet man, vermöge der Potenzkreise I, II, III *eines Büschels, aus einem beliebig angenommenen Punkte* Y_1 *fünf weitere ab nach Anweisung der Formel*

$$(57) \qquad Y_1\{III\}\,Y_2\{I\}\,Y_3\{II\}\,Y_1'\{III\}\,Y_2'\{I\}\,Y_3'\{II\}\,Y_1,$$

so liegen alle diese Punkte auf einem Isogonalkreis der Kreise $\Phi_i = 0$.

Und zwar entsprechen die gegenüberliegenden Ecken $Y_\varkappa$, $Y_\varkappa'$ *des construirten Sechsecks einander in je einer der drei Inversionen, die mit den drei Plücker'schen Kreisen des Büschels* (I, II, III) *verbunden sind.*

Hieraus ergiebt sich ohne Schwierigkeit u. A. die Gergonne'sche Construction in einer verallgemeinerten Fassung, in der an Stelle der geraden Linien Kreise durch einen *nicht* auf dem Orthogonalkreis $\Phi = 0$, aber sonst beliebig angenommenen Punkt treten. Da man auch diese Construction so vervollständigen kann, dass die Abhängigkeit zwischen den einzuführenden Irrationalitäten gehörig berücksichtigt wird, so gelangt man zu einer dritten Lösung des Apollonischen Problems. Diese ist indessen weniger einfach als die beiden oben angeführten.

§ 18.

Construction der Hart'schen Kreise.

Durch die im vorigen Paragraph angegebenen Sätze ist zwar die gestellte Constructionsaufgabe vollständig gelöst; es bleibt aber noch die Frage nach der Construction der Hart'schen Kreise, oder, was dasselbe ist, die Frage nach der geometrischen Unterscheidung der syzygetischen Quadrupel erster und zweiter Art. Ist in drei Lösungspaaren je ein Berührungskreis bezeichnet: Welcher Kreis des vierten Paares bildet mit den dreien zusammen ein Quadrupel 2. Art? Die Antwort ergiebt sich aus dem folgenden Satz:

Die acht Quadrupel 2. Art Apollonischer Kreise können (auf drei Weisen) in zwei Gruppen von vieren zerlegt werden, deren jede einem Potenzkreis zweier Nebenkreise entspricht. Die Spiegelung an einem Potenzkreis der Kreise $\Psi_\mu = 0$, $\Psi_\nu = 0$ *hat nämlich die Eigenschaft, die Berührungspunkte eines jeden von vier Quadrupeln 2. Art mit dem Kreise* $\Phi_\lambda = 0$ *unter einander zu vertauschen, während der zweite Potenzkreis dieselbe Beziehung zu den übrigen vier Quadrupeln hat.*

Hierauf gründet sich eine Construction der Hart'schen Kreisfigur. Wir bemerken zunächst:

Sind vorgelegt drei Kreise $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, *und drei ihnen gemeinsame Berührungskreise, die zu verschiedenen copulirten Paaren gehören (also drei unabhängige Lösungen des Apollonischen Problems), so besteht zwischen beiden Figuren von je drei Kreisen eine bestimmte Zuordnung. Man kann daher die drei Berührungkreise, auf völlig bestimmte Weise, mit* $\mathfrak{Y}_1 = 0$, $\mathfrak{Y}_2 = 0$, $\mathfrak{Y}_3 = 0$ *bezeichnen.*

Die gemeinte Zuordnung wird geometrisch so ermittelt: Man kann zunächst, durch lineare Construction, die Potenzkreise der Kreise $\Phi_i = 0$ finden. Einer der Potenzkreise (I_u) der Kreise $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ ist dann orthogonal zu den Kreisen $\mathfrak{Y}_2 = 0$, $\mathfrak{Y}_3 = 0$, während der andere (I_e) auf dem Kreise $\mathfrak{Y}_1 = 0$ senkrecht steht.

Man bezeichne nun den Berührungspunkt der Kreise $\mathfrak{Y}_i = 0$, $\Phi_\varkappa = 0$ *mit* $Y_{i\varkappa}$, *und nenne* $X_{i\varkappa}$ *sein Spiegelbild in Bezug auf den Orthogonalkreis der Kreise* $\Phi_j = 0$, *und* $Z_{i\varkappa}$ *sein Spiegelbild in Bezug auf den Orthogonalkreis der Kreise* $\mathfrak{Y}_j = 0$.

Jetzt construire man sechs weitere Punkte Y_{0i}, Y_{i0} *nach Anweisung der Formeln*

$$(58)\quad \begin{array}{c} Y_{11}\begin{Bmatrix} Y_{21} & Y_{31} \\ X_{21} & X_{31}\end{Bmatrix} Y_{01},\ Y_{22}\begin{Bmatrix} Y_{32} & Y_{12} \\ X_{32} & X_{12}\end{Bmatrix} Y_{02},\ Y_{33}\begin{Bmatrix} Y_{13} & Y_{23} \\ X_{13} & X_{23}\end{Bmatrix} Y_{03}, \\ Y_{11}\begin{Bmatrix} Y_{12} & Y_{13} \\ Z_{12} & Z_{13}\end{Bmatrix} Y_{10},\ Y_{22}\begin{Bmatrix} Y_{23} & Y_{21} \\ Z_{23} & Z_{21}\end{Bmatrix} Y_{20},\ Y_{33}\begin{Bmatrix} Y_{31} & Y_{23} \\ Z_{31} & Z_{21}\end{Bmatrix} Y_{30}. \end{array}$$

Dann sind die Punkte Y_{0i} die Berührungspunkte der Kreise $\Phi_i = 0$ mit einem neuen Kreis $\mathfrak{Y}_0 = 0$, und ebenso die Punkte Y_{i0} die Berührungspunkte der Kreise $\mathfrak{Y}_i = 0$ mit einem neuen Kreis $\Phi_0 = 0$. Die beiden Kreise $\mathfrak{Y}_0 = 0$ und $\Phi_0 = 0$ berühren einander wiederum in einem gewissen Punkte Y_{00}. Die Kreise $\mathfrak{Y}_i = 0$ und $\Phi_i = 0$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ bilden eine Hart'sche Kreisfigur. Die gegenseitige Beziehung der zweimal vier Kreise und ihrer Berührungspunkte bleibt also ungeändert, wenn man die Indices 0, 1, 2, 3 beliebig vertauscht. —

Setzt man $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_1^+$, $\mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{Y}_2^+$, $\mathfrak{Y}_3 = \mathfrak{Y}_3^+$, so wird $\mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{Y}_0^-$ und $\Phi_0 = H_0$ in der früher angewendeten Bezeichnung.

Wir kennen also nunmehr aus jedem Paar von Berührungskreisen des Tripels $\mathfrak{Y}_1^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_2^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_3^+ = 0$ einen Kreis. Die vier anderen Berührungskreise dieses Tripels Apollonischer Kreise werden dann durch Spiegelung an dem Orthogonalkreis der Kreise $\mathfrak{Y}_1^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_2^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_3^+ = 0$ gefunden. Unter den acht Berührungskreisen unseres Tripels können wir dann wieder ein Tripel unabhängiger herausgreifen, und dieselbe Construction von Neuem anwenden, u. s. f. Wir haben also hiermit die unendliche Mannigfaltigkeit Apollonischer Aufgaben, von der in § 4 die Rede war, nunmehr auch durch Construction gelöst, und zwar durch *lineare* Construction im Sinne des § 14.

Hinzufügen wollen wir noch, dass es zur Lösung der ursprünglichen Apollonischen Aufgabe, und also auch der zuletzt besprochenen Probleme, hinreichend ist, wenn man auf irgend einem Wege *einen* Berührungspunkt je eines der Kreise $\mathfrak{Y}_1^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_2^+ = 0$, $\mathfrak{Y}_3^+ = 0$ mit einem der Kreise $\Phi_i = 0$, insgesammt also drei „unabhängige" von den neun Berührungspunkten gefunden hat; und zwar kann von den Berührungspunkten z. B. des Kreises $\mathfrak{Y}_1 = 0$ mit den Kreisen $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$ jeder beliebige gewählt werden. Ausgeschlossen sind dabei indessen gewisse besondere Fälle, die durch das Verschwinden einer der Invarianten

$$F_{\mu\mu} R_{\mu\mu} - F_{\nu\nu} R_{\nu\nu}$$

gekennzeichnet sind. —

Mehrere der in den letzten Paragraphen aufgestellte Sätze lassen sich in besonders einfacher Weise auffassen, wenn man das Kreisbogendreieck $\Phi_i = 0$ etwa durch stereographische Projection als sphärisches, von Hauptkreisen gebildetes Dreiseit auf die Oberfläche einer Kugel überträgt. (Vgl. § 6 und § 19.) Die Potenzkreise der Kreise $\Phi_i = 0$ werden dann die Winkelhalbirenden des entstehenden sphärischen Dreiseits, und die zwei Basispunkte der von ihnen gebildeten Büschel werden zu zweien die Mittelpunkte von je einem Paar eingeschriebener Kreise $\mathfrak{Y}_i^{\pm} = 0$. Ferner gehen die Potenzkreise der Nebenkreise über in die Mittelsenkrechten der Seiten, ihre vier Paar Basispunkte also in die Mittelpunkte der Paare umschriebener Kreise $\mathfrak{U}_i^{\pm} = 0$. Die Plücker'schen Kreise endlich sind die Hauptkreise, die die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise mit deren Berührungspunkten verbinden. Spiegelungen an grössten Kreisen sind natürlich zugleich Spiegelungen an den zugehörigen Ebenen, also Spiegelungen im ursprünglichen Sinne des Wortes.

§ 19.

Schlussbetrachtung.

Wenden wir uns nun noch einmal zurück zu den allgemeinen Ueberlegungen, mit denen wir diese Untersuchung eingeleitet haben. Denken wir uns die Punkte der Ebene, in der wir operiren, durch eine für Punkte allgemeiner Lage eindeutig umkehrbare Transformation den Punkten einer anderen rationalen zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zugeordnet, so erhalten wir statt der Gruppen G_6 und G_6, H_6 zwei neue Gruppen G_6' und G_6', H_6'; und aus der Mannigfaltigkeit aller Kreise geht eine neue Mannigfaltigkeit von dreifach unendlich vielen Curven hervor, die eben die Gruppen G_6' und G_6', H_6' definirt. Gleichzeitig verwandelt sich natürlich das Apollonische Problem in eine entsprechende Berührungsaufgabe. Es gehen nun aber auch die zu den Gruppen G_6 und G_6, H_6 gehörigen invarianten algebraischen Processe und geometrischen Constructionen über in Processe und Constructionen, die gegenüber den neuen Gruppen G_6' und G_6', H_6' invariant sind*).

*Es folgt also, dass durch unsere Lösung des Apollonischen Problems — nicht aber durch jede beliebige Art der Lösung — alle im angegebenen Sinn äquivalenten Aufgaben zugleich erledigt sind***).

Die nächstliegende und wichtigste Aufgabe dieser Art ist das Apollonische Problem bezogen auf Kreise einer Kugelfläche. Um diese Aufgabe zu lösen, haben wir weder in unseren Formeln noch in den Constructionen auch nur die geringste Aenderung anzubringen: Lediglich die Auffassung der Formeln ist ein wenig abzuändern. Man hat nämlich etwa nur die Gleichung (2) als die Gleichung einer Kugel,

---

*) Entsprechendes gilt, wenn man eine eindeutige Berührungstransformation ausführt. (Die Lie'schen Kreistransformationen gehören nicht zu dieser Classe.)

**) Diese Forderung ist also nur der Form nach allgemeiner als die von uns im § 1 an die Spitze gestellte. Sie fliesst aus jenem *Princip der Oeconomie des Denkens*, worin E. Mach das Wesen aller Wissenschaft überhaupt erblickt.

und die Gleichung (3) als die Gleichung einer Ebene anzusehen, die aus der Kugel einen Kreis ausschneidet*). Alles Weitere ergiebt sich von selbst. Entsprechendes gilt aber offenbar auch noch von der noch etwas umfassenderen Aufgabe:

„*Die ebenen Schnitte einer allgemeinen Fläche* 2. *Grades zu finden, die drei gegebene ebene Schnitte berühren*“,

sowie von ihrem dualistischen Gegenstück, wenigstens so lange die Fläche zu den nicht-geradlinigen mit reellen Punkten gehört. Auch bei diesem Problem ist eine Aenderung unserer Formeln und Constructionen nicht nöthig; nur der Begriff der Orthogonalität ist zu ersetzen durch den des Conjugirt-Seins. Vorausgesetzt ist dabei zunächst, dass die Fläche 2. Grades „punktweise bekannt“, z. B. durch reciproke Bündel erzeugt ist. Doch kann man sich, wie nicht schwer zu sehen, von dieser eine gewisse Beschränkung enthaltenden Annahme befreien; an Stelle der Constructionen auf der Fläche selbst treten dann natürlich solche, die im Raume auszuführen sind. Die anzuwendenden Hülfsmittel gehören dem Gedankenkreise der gewöhnlichen projectiven Geometrie an**).

Sei, in der üblichen symbolischen Bezeichnung, $(LX)^2 = 0$ die Punktgleichung der vorgelegten Fläche 2. Grades, bezogen auf ein *beliebiges* System projectiver Coordinaten; so ist $J = \frac{1}{24}(LL'L''L''')^2$ die Discriminante der Fläche. Sie ist nach Voraussetzung eine *negative* Grösse. Nehmen wir ferner an, dass $(LX)^2$ positiv ist für Punkte im Innern der Fläche 2. Grades, und dass irgend welche ebenen Schnitte der Fläche durch die Pole $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, \ldots$ der zugehörigen Ebenen bestimmt seien, so haben wir, um die in Rede stehende erweiterte Aufgabe auf unser ursprüngliches Problem zurückzuführen, in den entwickelten Formeln einfach die Substitutionen

$$(59) \qquad \begin{aligned} (\Phi_\alpha \Phi_\beta) &\backsimeq 2(LX_\alpha)(LX_\beta), \\ (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \Phi_\delta) &\backsimeq 2\sqrt{-J} \cdot (X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta) \end{aligned}$$

zu machen. Zu bemerken ist dabei nur, dass die Irrationalität $\sqrt{-J}$ immer in Verbindung mit anderen Quadratwurzeln auftritt, derart, dass die Zahl der zur Lösung erforderlichen irrationalen Operationen sich *nicht* erhöht.

---

*) Insbesondere kann man die Kreise $(\Phi_i X) = 0$ als Hauptkreise wählen $(\mathfrak{C}_{i0} = 0)$. Der Orthogonalkreis $(\Phi X) = 0$ wird dann ausgeschnitten von der unendlich fernen Ebene $(X_0 = 0)$. Man kommt so zu den bereits betrachteten Beziehungen der Apollonischen Figur zur sphärischen Trigonometrie.

**) Man kann also unsere Geometrie der Inversionen der projectiven Geometrie unterordnen. *Aber auch das Umgekehrte ist richtig.* Wir hoffen noch zeigen zu können, wie sich die Geometrie der Inversionen selbstständig begründen lässt.

Etwas tiefer einschneidende Aenderungen sind zu machen, wenn die vorgelegte Fläche 2. Grades geradlinig ist, sobald man nämlich auch in diesem Falle reelle Figuren vor den anderen auszeichnen will; denn unser gegenwärtiges Problem hängt mit dem Apollonischen nunmehr nur noch durch eine imaginäre Transformation zusammen. Die Discriminante J ist jetzt *positiv.* An Stelle der Substitutionen (59) sind die folgenden zu machen:

$$(60)\qquad \begin{gathered}(\Phi_\alpha \Phi_\beta) \underline{\backsim} 2(L X_\alpha)(L X_\beta),\\ (\Phi_\alpha \Phi_\beta \Phi_\gamma \Phi_\delta) \underline{\backsim} 2i\sqrt{J} \cdot (X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta).\end{gathered}$$

Es versteht sich, dass die Discussion der Realität der Lösungen bei dem gegenwärtigen Problem besonders auszuführen ist; denn über diesen Punkt giebt das angewendete Uebertragungsprincip keine Auskunft. Demgemäss sind auch die von uns angewendeten Bezeichnungen durch andere zu ersetzen, derart, dass auch hier die Einführung imaginärer Grössen nach Möglichkeit vermieden wird. — Erwähnt sei noch, dass die zuletzt besprochene Aufgabe sich auch als ein Problem aus der Theorie der binären bilinearen Formen fassen lässt.

Der Grenzfall $J=0$, in dem die vorgelegte Fläche 2. Grades ein *Kegel* wird, ist bei den letzten Betrachtungen nicht inbegriffen. Er bedarf einer besonderen Untersuchung. Er hat übrigens ein geringeres algebraisches Interesse, da die dem Apollonischen Problem entsprechende Aufgabe aus der Geometrie auf einer Kegelfläche 2. O. nicht vom achten, sondern nur vom zweiten Grade ist.

Wir glauben durch das Gesagte die Fruchtbarkeit unserer Grundanschauung dargethan zu haben, so weit es in den gesteckten Grenzen thunlich war. Eine weitere Folgerung, der man sich nicht gut wird entziehen können, ist natürlich die, dass noch zahlreiche andere Aufgaben, die man bisher als „erledigt“ angesehen hat (und nicht nur solche aus der Geometrie der Kreise und Kugeln), einer Neubearbeitung bedürftig sind. Wir wollen beispielsweise nur auf das der Apollonischen Aufgabe entsprechende Problem der Raumgeometrie hindeuten. Natürlich lässt sich ein Theil unserer Entwickelungen auf eine Dimension mehr und auch auf eine unbestimmte Dimensionenzahl übertragen; es gilt das aber keineswegs von allen. Eine einigermassen vollständige Theorie auch dieses Problems zu entwerfen, scheint eine umfangreiche und schon recht verwickelte Aufgabe zu sein, namentlich nach der geometrischen Seite hin. Jedenfalls wird durch die bekannten ganz an der Oberfläche liegenden Constructionen die Schwierigkeit der auf vier Kugeln bezüglichen Berührungsaufgabe noch nicht einmal gestreift.

Bonn, im December 1896.

Inhalt.

Theorie der Involutionssysteme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung in beliebig vielen abhängigen und unabhängigen Veränderlichen.

(Erste Abhandlung.)

Von

E. v. Weber in München.

Jedes beliebige System partieller Differentialgleichungen kann durch Einführung geeigneter abhängiger Variabeln in ein System von Gleichungen *erster* Ordnung verwandelt werden. Unter den letztgenannten Systemen beanspruchen die von Lie*) so bezeichneten „Involutionssysteme" das hauptsächlichste Interesse. Wir betrachten im Folgenden nur solche Systeme I. O. in den Independenten $x_1 \dots x_m$ und den unbekannten Functionen $z^1 \dots z^n$, die sich in gewisser Weise nach den Ableitungen der z^i auflösen lassen**); die Involutionseigenschaft kann dann kurz dahin charakterisirt werden, dass ein solches System die grösstmögliche, mit seiner Form verträgliche Mannigfaltigkeit von Integralen $z^1 . z^n$ besitzt. Die vorliegende *erste* Abhandlung beschäftigt sich mit folgenden Gegenständen:

Das *erste* Capitel behandelt die algebraischen Definitionsgleichungen eines Involutionssystems, und die Frage nach der Existenz eines allgemeinen Integrals, wobei wir uns im Wesentlichen auf die grundlegenden Untersuchungen des H. Bourlet**) stützen.

Das *zweite* Capitel ist der Betrachtung einer für die ganze Theorie fundamentalen *Matrix* gewidmet. Die Eigenschaften dieser Matrix führen uns in Cap. III zu einer Theorie der charakteristischen Mannigfaltigkeiten, insbesondere zur Definition einer besonderen Categorie von Involutionssystemen, der sog. „*Normalsysteme*". Für diese letzteren skizziren wir in Cap. IV eine *Integrationstheorie*, indem wir zeigen,

---

*) Vgl. Leipz. Ber. 47, p. 53—128 (1895).

**) Einen Specialfall hiervon untersucht Herr König, Math. Ann. 23, p. 520, den allgemeinen Fall für *lineare* Systeme Herr Bourlet, Ann. de l'Ec. Norm. (3) VIII (1891) Supplém. p. 43 ff.

wie man unter der Annahme der Integrabilität gewisser totaler Differentialgleichungen eine *Reduction der Anzahl der Independenten* herbeiführen kann*).

Die weitere Durchführung dieses Ansatzes, die Besprechung der mannigfachen Analogien, die unsere Theorie zu derjenigen der partiellen Differentialgleichungen I. O. mit *einer* Unbekannten darbietet, endlich die Untersuchung der *linearen* Involutionssysteme soll einer *zweiten* Abhandlung vorbehalten bleiben.

Capitel I.

Die Definitionsgleichungen und das allgemeine Integral des Involutionssystems.

1. Wir bezeichnen mit $z^1, z^2, \ldots, z^n$ Functionen der m unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_m$, setzen:

$$p_i^k \equiv \frac{\partial z^k}{\partial x_i}$$

und betrachten das folgende System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\text{(A)} \quad f_1(x_1 \ldots x_m,\ z^1 \ldots z^n,\ p_1^1 \ldots p_m^n) = 0, \quad f_2 = 0 \ldots f_N = 0.$$

Die Anzahl N dieser Gleichungen sei kleiner als mn, aber nicht kleiner als n, so dass wir schreiben können:

$$N = \mu n + \nu \quad (0 \leqq \nu \leqq n-1; \quad 1 \leqq \mu \leqq m-1),$$

Es werde nun angenommen, dass die Gleichungen (A) *sich in folgender Weise auflösen lassen:*

$$(\mathrm{A}')\begin{cases} -p_1^1+\varphi_1^1=0, & -p_2^1+\varphi_2^1=0 \cdot -p_\mu^1+p_\mu^1=0, \quad -p_{\mu+1}^1+\varphi_{\mu+1}^1=0,\\ -p_1^2+\varphi_1^2=0, & -p_2^2+\varphi_2^2=0 \cdot -p_\mu^2+p_\mu^2=0, \quad \cdot\\ \cdot & \cdot \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \qquad\qquad -p_{\mu+1}^\nu+\varphi_{\mu+1}^\nu=0,\\ -p_1^n+\varphi_1^n=0, & -p_2^n+\varphi_2^n=0 \cdot -p_\mu^n+p_\mu^n=0, \end{cases}$$

Hierin bedeuten die φ_a^b gewisse Functionen der Variabeln x_i, z^k, $p_{\mu+1}^{\nu+1} \cdot p_{\mu+1}^n$, $p_{\mu+2}^1 \ldots p_m^n$. Der von den Herrn Méray und Riquier**) eingeführten Terminologie folgend nennen wir die N Grössen $p_1^1 \ldots p_1^n$, $p_2^1 \ldots p_\mu^n$, $p_{\mu+1}^1 \ldots p_{\mu+1}^\nu$ „*principale*", die übrigen $mn - N$ Grössen p_i^k „*parametrische*" Ableitungen 1. O.; die ersteren werden im Folgenden generell mit p_a^b, die letzteren mit p_g^h bezeichnet. Dementsprechend

---

*) Diese Theorie findet sich skizzirt in meiner Note: „Sur l'intégration etc.", Comptes Rendus vom 3. August 1896.

**) Ann. de l'Ec. Norm. (3) VII (1890).

theilen wir die mn Indicespaare (i, k) $(i = 1 \dots m,\ k = 1 \dots n)$ in zwei Classen, indem wir die N Paare (a, b) der ersten, die Paare (g, h) der zweiten zuzählen; endlich werde die zweite Ableitung

$$r_{ij}^k \equiv \frac{\partial^2 z^k}{\partial x_i \partial x_j}$$

„parametrisch“ oder „einfach principal“ oder „doppelt principal“ genannt, je nachdem von den beiden Zahlenpaaren (i, k) (j, k) keines oder eines oder alle beide der ersten Classe angehören.

2. Indem wir die Gleichungen (A′) partiell nach $x_{\mu+2} \dots x_m$ differentiiren, wobei z^i, p_i^k als Functionen der x zu betrachten sind, erhalten wir die einfach principalen Ableitungen

$$r_{a,\mu+2}^b,\ r_{a,\mu+3}^b \dots r_{a,m}^b$$

ausgedrückt als ganze lineare Functionen $\psi_{a,\mu+2}^b \dots \psi_{a,m}^b$ der parametrischen 2. Ableitungen, deren Coefficienten von den Variabeln x, z, p_g^h abhängen. Durch Differentiation der Gleichungen

$$-p_\alpha^\beta + \varphi_\alpha^\beta = 0 \quad (\beta = \nu + 1 \dots n,\ \ \alpha = 1 \dots \mu)$$

nach $x_{\mu+1}$ gewinnen wir für die noch übrigen einfach principalen Ableitungen $r_{a,\mu+1}^\beta$ Ausdrücke, die ausser von parametrischen Derivirten noch von einfach principalen Ableitungen

$$r_{s,\mu+1}^t \ (s = \mu + 2 \dots m,\ \ t = 1 \dots \nu)$$

abhängen; ersetzen wir diese Grössen durch ihre vorhin gefundenen Werthe $\psi_{\mu+1,s}^t$, so sind schliesslich alle einfach principalen 2. Ableitungen r_{al}^b dargestellt durch ganze lineare Ausdrücke ψ_{al}^b in den parametrischen 2. Ableitungen; die Coefficienten der letzteren sind Functionen von x, z, p_g^h.

3. Sind (a, b) (a', b) Zahlenpaare der ersten Classe, so gewinnt man durch partielle Differentiation der Gleichung:

$$-p_a^b + \varphi_a^b = 0$$

nach $x_{a'}$ für die doppelt principale Ableitung $r_{aa'}^b$ einen Ausdruck, der zunächst noch von den parametrischen und einfach principalen 2. Derivirten abhängt, aber, indem man letztere durch ihre obigen Werthe ersetzt, in eine Linearfunction $\psi_{aa'}^b$ der parametrischen r_{ij}^k übergeht. Ein ähnlicher Ausdruck $\psi_{a'a}^b$ ergibt sich für $r_{aa'}^b$ aus der Gleichung

$$-p_{a'}^b + \varphi_{a'}^b = 0$$

durch Differentiation nach x_a. Indem wir verlangen, dass die Identitäten

$$(1) \qquad \psi_{aa'}^b \equiv \psi_{a'a}^b$$

keine Relation zwischen den parametrischen Ableitungen begründen, d. h. unabhängig von den Werthen derselben erfüllt seien, erhalten wir das nachstehende System von Bedingungsgleichungen, worin zur Abkürzung:

$$P_{ag}^{bh} \equiv \frac{\partial \varphi_a^b}{\partial p_g^h}, \qquad K_{aa'r}^{bt} \equiv \sum_{\nu+1}^{n} {}_h P_{a,\mu+1}^{bh} P_{a'r}^{ht} \begin{pmatrix} r = \mu + 2 \dots m \\ t = 1 \dots \nu \end{pmatrix}$$

$$M_{al}^{b} \equiv \frac{\partial \varphi_a^b}{\partial x_l} + \sum_{1}^{n} {}_h p_l^h \frac{\partial \varphi_a^b}{\partial z^h} \ *)$$

gesetzt ist:

$$(B) \begin{cases} (1) \ \sum_1^{\nu} {}_t \left[(K_{aa'r}^{bt} - K_{a'ar}^{bt}) P_{\mu+1,s}^{tl} + (K_{aa's}^{bt} - K_{a'as}^{bt}) P_{\mu+1,r}^{tl} \right] \\ \quad \equiv \sum_1^{n} {}_h (P_{as}^{hl} P_{a'r}^{bh} - P_{a's}^{hl} P_{ar}^{bh} + P_{ar}^{hl} P_{a's}^{bh} - P_{a'r}^{hl} P_{as}^{bh}), \\ (2) \ \sum_1^{\nu} {}_t (K_{aa'r}^{bt} - K_{a'ar}^{bt}) P_{\mu+1,\mu+1}^{tj} + \sum_{\nu+1}^{n} {}_h (P_{a'r}^{hj} P_{a,\mu+1}^{bh} - P_{ar}^{hj} P_{a',\mu+1}^{bh}) \\ \quad \equiv \sum_1^{n} {}_h (P_{a'r}^{bh} P_{a,\mu+1}^{hj} - P_{ar}^{bh} P_{a',\mu+1}^{hj}), \\ (3) \ \sum_{\nu+1}^{n} {}_h (P_{a,\mu+1}^{bh} P_{a',\mu+1}^{hj} - P_{a',\mu+1}^{bh} P_{a,\mu+1}^{hj}) = 0, \\ (a, a' = 1 \dots \mu; \ b = 1 \dots n; \ r, s = \mu + 2 \dots m; \ l = 1 \dots n; \\ \qquad j = \nu + 1 \dots n). \end{cases}$$

$$(B') \qquad M_{aa'}^{b} - M_{a'a}^{b} + \sum_{g,h} (P_{ag}^{bh} M_{a'g}^{h} - P_{a'g}^{bh} M_{ag}^{h})$$

$$\equiv \sum_{\mu+2}^{m} {}_s \sum_1^{\nu} {}_t (K_{a'as}^{bt} - K_{aa's}^{bt}) M_{\mu+1,s}^{t}$$

$$(a, a' = 1 \dots \mu; \ b = 1 \dots n),$$

$$(C) \begin{cases} (1) \sum_1^{\nu} {}_t [(P_{ar}^{bt} - K_{\mu+1,ar}^{bt}) P_{\mu+1,s}^{tl} + (P_{as}^{bt} - K_{\mu+1,as}^{bt}) P_{\mu+1,r}^{tl}] \\ \quad \equiv \sum_1^{n} {}_h (P_{\mu+1,r}^{bh} P_{as}^{hl} + P_{\mu+1,s}^{bh} P_{ar}^{hl}), \end{cases}$$

*) Für die principalen 1. Ableitungen sind hierin ihre Werthe aus (A') zu substituiren.

$$
(\mathrm{C})\begin{cases}
(2)\ P_{ar}^{bj} + \sum\limits_1^{\nu} {}_t (P_{ar}^{bt} - K_{\mu+1,ar}^{bt}) P_{\mu+1,\mu+1}^{tj} \\
\qquad \equiv \sum\limits_{\nu+1}^{n} {}_h P_{ar}^{hj} P_{\mu+1,\mu+1}^{bh} + \sum\limits_1^{n} {}_h P_{\mu+1,r}^{bh} P_{a,\mu+1}^{hj}, \\
(3)\ P_{a,\mu+1}^{bj} \equiv \sum\limits_{\nu+1}^{n} {}_h P_{a,\mu+1}^{hj} P_{\mu+1,\mu+1}^{bh}, \\
(a = 1 \ldots \mu;\ b = 1 \ldots \nu;\ l = 1 \ldots n;\ r, s = \mu + 2 \ldots m; \\
\qquad j = \nu + 1 \ldots n),
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{C}') \qquad M_{\mu+1,a}^{b} - M_{a,\mu+1}^{b} + \sum_{g\,h} P_{\mu+1,g}^{bh} M_{ag}^{h}
$$

$$
\equiv \sum_{\mu+2}^{m} {}_s \sum_1^{\nu} {}_t (P_{as}^{bt} - K_{\mu+1,as}^{bt}) M_{\mu+1,s}^{t} \qquad (a = 1 \ldots \mu;\ b = 1 \ldots \nu).
$$

Für $\mu = 1$ kommen die Relationen (B) (B'), für $\nu = 0$ (C) (C') in Wegfall; ist $\mu = 1$, $\nu = 0$, so bestehen überhaupt keine Relationen für die partiellen Ableitungen der φ_a^b; ist $\mu = m - 1$ oder $\nu = 0$, so verschwinden alle von den Grössen $K_{aa's}^{bt}$ abhängenden Terme.

Sind die Bedingungen (B) (B'), (C) (C'), wie wir fortab voraussetzen, identisch, d. h. für beliebige Werthe der x, z, p_g^k erfüllt, so werde (A) ein *Involutionssystem* genannt, und zur Abkürzung mit J bezeichnet.

4. Ueberträgt man die Benennungen „parametrisch", „einfach principal" u. s. w. auf die dritten Ableitungen r_{ijl}^k der z^k, so erkennt man leicht, dass nunmehr vermöge der Gleichungen, die aus (A') durch zweimalige partielle Ableitung nach den x entstehen, sich auch für jede einfach, zweifach und dreifach principale 3. Ableitung r_{ijl}^k je ein und nur ein in den parametrischen 3. Ableitungen linearer Ausdruck ergiebt, dessen Coefficienten von $x, z,$ und den parametrischen 1. und 2. Ableitungen abhängen; Analoges gilt für die Derivierten beliebiger Ordnung*).

5. Die Relationen (C) (C') zeigen, dass jedes einzelne der μ Systeme von Gleichungen

$$
(2) \qquad \begin{cases}
-p_\alpha^1 + \varphi_\alpha^1 = 0, \ldots, -p_\alpha^n + \varphi_\alpha^n = 0, \\
-p_{\mu+1}^1 + \varphi_{\mu+1}^1 = 0, \ldots, -p_{\mu+1}^{\nu} + \varphi_{\mu+1}^{\nu} = 0
\end{cases}
$$

für sich genommen ein Involutionssystem bildet, wenn man darin die Grössen $x_1 \ldots x_{\alpha-1}$, $x_{\alpha+1} \ldots x_\mu$ als constante Parameter betrachtet; die Gleichungen (2) mögen als „Theilsystem J_α" bezeichnet werden.

*) Bourlet, l. c. pag. 86.

Sind ferner $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ irgend welche Zahlen der Reihe $1, 2 \ldots \mu$, so bilden die $sn + \nu$ Gleichungen, aus welchen die Theilsysteme $J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \ldots, J_{\alpha_s}$ bestehen, ebenfalls ein Involutionssystem, wenn man die ausser $x_{\alpha_1} \ldots x_{\alpha_s}$ noch vorhandenen Grössen der Reihe $x_1 \ldots x_\mu$ als Parameter ansieht.

6. Für die unaufgelöste Form (A) von J lassen sich die Bedingungen der Nr. 3 folgendermassen formuliren: durch einmalige partielle Differentiation von (A) nach $x_1 \ldots x_m$ erhält man $m\mathsf{N}$ in den $\frac{1}{2}m(m+1)n$ Unbekannten r^k_{il} lineare Gleichungen:

$$(3) \quad f_{il} \equiv \mathsf{M}_{il} + \sum_1^n{}^k \sum_1^m{}^j \mathsf{P}^k_{ij} r^k_{jl} = 0; \quad i = 1 \ldots N; \; l = 1 \ldots m,$$

worin

$$\mathsf{M}_{il} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_1^n{}^k \frac{\partial f_i}{\partial z^k} p^k_l, \qquad \mathsf{P}^k_{ij} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial p^k_j}$$

gesetzt ist. Diese Gleichungen sollen nun alle parametrischen Ableitungen r^k_{jl} willkürlich lassen; die Anzahl derselben ist

$$(m-\mu)\,(n-\nu) + \frac{1}{2}n(m-\mu)\,(m-\mu-1),$$

mithin sind genau

$$\mathsf{N}' = \mu\nu + \frac{1}{2}n\mu(\mu-1),$$

der Relationen (3) eine Consequenz der übrigen, d. h. es verschwinden alle $(m\mathsf{N}-\mathsf{N}'+1)$ reihigen, aber nicht alle $(m\mathsf{N}-\mathsf{N}')$ reihigen Determinanten der zu dem Gleichungssystem (3) gehörigen Matrix, die aus $m\mathsf{N}$ Zeilen und $\frac{1}{2}n(m+1)m + 1$ Colonnen besteht*).

Offenbar sind auch umgekehrt die so erhaltenen Bedingungsgleichungen mit denjenigen der Nr. 3 völlig äquivalent.

7. Wir stellen in dieser Nr. einige der von Herrn Bourlet veröffentlichten Resultate und Bezeichnungen zusammen**).

Jedes System von linearen partiellen Differentialgleichungen in m unabhängigen Variabeln $x_1 \ldots x_m$ und p unbekannten Functionen $u_1 \ldots u_p$ kann durch Auflösung nach einer gewissen Zahl von Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ auf eine Form gebracht werden, in der es nur Gleichungen der folgenden Art enthält:

---

*) Dies folgt auch daraus, dass N' die Anzahl der verschiedenen Identitäten (1) ist.

**) Vgl. die Anmerkung pag. 547.

$$(4) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = a_{00}^{ik} + \sum_{i+1}^{p} {}^j a_{jk}^{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{1}^{p} {}^j \sum_{k+1}^{m} {}^h a_{jh}^{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_h};$$

die Coefficienten a_{rs}^{ik} sind Functionen der x und u.

Ein solches System heisst *canonisch;* die Variable x_k heisst *„principal"* oder *„parametrisch" in Bezug auf* u_i, je nachdem $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ auf der linken Seite einer der Gleichungen (4) auftritt oder nicht, und entsprechend wird auch die Ableitung $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ principal oder parametrisch genannt; eine zweite Ableitung $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial u_l}$ wird parametrisch, einfach oder doppelt principal genannt, je nachdem keine, oder eine oder alle beide Variabeln x_k, x_l in Bezug auf u_i principal sind. Die einfach principalen 2. Ableitungen können mit Hülfe der Gleichungen, die aus (3) durch partielle Differentiation nach den x folgen, als Linearfunctionen der parametrischen 2. Ableitungen dargestellt werden, deren Coefficienten von den x, u und von parametrischen 1. Ableitungen abhängen. Für die doppelt principalen Derivirten erhält man dagegen im allgemeinen zwei verschiedene derartige Darstellungen; sind diese für alle Werthe der x, u und der 1. und 2. parametrischen Ableitungen identisch, so heisst das canonische System (4) *unbeschränkt integrabel.*

Sind die Coefficienten a_{rs}^{ik} *in der Umgebung der Stelle* $x_h = x_h^0$, $u_k = u_k^0$ *holomorph, und ist* φ_i *eine arbiträre Function der in Bezug auf* u_i *parametrischen Variabeln* x_h, *die an der Stelle* $x_j = x_j^0$ *holomorph ist und den Werth* u_i^0 *annimmt, so giebt es ein und nur ein System von Functionen* u_i *der Variabeln* x_h, *die an der Stelle* $x_h = x_h^0$ *holomorph sind, dem unbeschränkt integrabeln System* (4) *identisch genügen, und sich resp. auf* φ_i *reduciren, wenn die in Bezug auf* u_i *principalen Variabeln* x_l *die Werthe* x_l^0 *annehmen.*

8. Indem wir zu den Bezeichnungen der Nr. 3 zurückkehren, betrachten wir das folgende System linearer partieller Differentialgleichungen 1. O.:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p_a^b}{\partial x_{a'}} = \psi_{aa'}^b, & \dfrac{\partial p_{a'}^b}{\partial x_a} = \psi_{aa'}^b, \\[2ex] \dfrac{\partial p_a^b}{\partial x_l} = \psi_{al}^b, & \dfrac{\partial p_l^b}{\partial x_a} = \psi_{al}^b, \\[2ex] \dfrac{\partial p_g^h}{\partial x_{g'}} = \dfrac{\partial p_{g'}^h}{\partial x_g}, & \dfrac{\partial z^k}{\partial x_i} = p_i^k. \quad (i = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n) \end{cases}$$

In diesen Gleichungen durchlaufen die Zahlenpaare (a, b) $(a'\, b)$ alle Paare der 1. Classe; für jedes einzelne Werthsystem (a, b) ist ferner l auf alle mögliche Arten so zu wählen, dass (l, b) der 2. Classe angehört. Die Zahlenpaare (g, h) (g', h) durchlaufen alle Paare der 2. Classe, und zwar so, dass stets $g' < g$; in den Ausdrücken φ^k_{ij} endlich sind die parametrischen Ableitungen in der Form $\frac{\partial p^b_{g'}}{\partial x_g}$ zu schreiben, wo $g' \leqq g$.

Bezeichnen wir nun die Grössen

$$z^1 \ldots z^n, \; p^1_1 \ldots p^n_1, \; p^1_2 \ldots p^n_m$$

in der hier hingeschriebenen Reihenfolge mit $u_1, u_2 \ldots u_p$ $\big(p = n(m+1)\big)$, so geht das System (5) über in ein unbeschränkt integrables canonisches System der Form (4), wie aus den Bemerkungen der Nr. 4 und der Entstehungsweise der Ausdrücke ψ^k_{ij} unmittelbar hervorgeht, und zwar sind in Bezug auf die Functionen z, p^b_a alle Variabeln x principal, dagegen:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } p^{\nu+1}_{\mu+1} \ldots p^n_{\mu+1}: & x_1 \ldots x_\mu & \text{principal}, & x_{\mu+1} \ldots x_m \text{ parametrisch;} \\
\text{,,} \;\; p^1_{\mu+2} \ldots p^n_{\mu+2}: & x_1 \ldots x_{\mu+1} & \text{,,} & x_{\mu+2} \ldots x_m \quad \text{,,} \quad ; \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\text{,,} \;\; p^1_m \ldots p^n_m: & x_1 \ldots x_{m-1} & \text{,,} & x_m \quad \text{,,} \quad .
\end{array}$$

Wir verstehen nun unter $\bar{x}_i$, $\bar{z}^k$, $\bar{p}^k_i$ $n(m+1)+m$ willkürliche Constante, ferner für jedes Zahlenpaar (g, h) der II. Classe unter π^h_g eine arbiträre Function der Variabeln $x_g, x_{g+1} \ldots x_m$, die sich an der Stelle $x_i = \bar{x}_i$ holomorph verhält und auf die Constante $\bar{p}^h_g$ reducirt; sind nun die Functionen φ^b_a in der Umgebung der Stelle $\bar{x}, \bar{z}, \bar{p}^h_g$ holomorph, so existirt nach Nr. 7 ein und nur ein den Gleichungen (5) identisch genügendes System von Functionen z^i, p^k_i von der Beschaffenheit, dass z^i, p^b_a für $x_1 = \bar{x}_1 \ldots x_m = \bar{x}_m$ bez. die Werthe $\bar{z}^i$, $\bar{p}^b_a$ annehmen, während sich die Grössen p^h_g für $x_1 = \bar{x}_1 \ldots x_{g-1} = \bar{x}_{g-1}$ bez. auf die arbiträren Funktionen π^h_g reduciren. Substituiren wir die so definirten Functionen z^i, p^k_i in die Gleichungen (A'), so gehen die linken Seiten derselben über in Functionen von $x_1 \ldots x_n$, deren Ableitungen wegen (5) identisch verschwinden, d. h. in Constante; die vorhin erhaltenen Functionen $z^1 \ldots z^n$ sind also Integrale des gegebenen Systems J, wenn die Integrationsconstanten den Bedingungen

$$-\bar{p}^b_a + \varphi^b_a(\bar{x}, \bar{z}, \bar{p}^h_g) = 0$$

unterworfen werden.

9. Man kann mit Hülfe von Quadraturen ν Functionen $\zeta^i (i = 1 \ldots \nu)$, der Variabeln $x_{\mu+2} \ldots x_m$ auf eine einzige Weise so bestimmen, dass man identisch hat:

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial x_{\mu+2}} \equiv \pi^i_{\mu+2},$$

dass sich ferner die Ableitungen

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial x_{\mu+s}} \quad (s = 3, 4 \ldots m - \mu)$$

für

$$x_{\mu+2} = \bar{x}_{\mu+2} \ldots x_{\mu+s-1} = \bar{x}_{\mu+s-1}$$

bez. auf die arbiträren Functionen $\pi^i_{\mu+s}$ reduciren, und überdies ζ^i an der Stelle $\bar{x}$ den Werth $\bar{z}^i$ annimmt; desgleichen giebt es ein einziges System von Functionen $\zeta^k (k = \nu + 1 \ldots n)$ der Variabeln $x_{\mu+1} \ldots x_m$, derart, dass:

$$\frac{\partial \zeta^k}{\partial x_{\mu+1}} \equiv \pi^k_{\mu+1},$$

ferner die Ableitungen

$$\frac{\partial \zeta^k}{\partial x_{\mu+s}} \quad (s = 2, 3 \ldots m - \mu)$$

für

$$x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1} \ldots x_{\mu+s-1} = \bar{x}_{\mu+s-1}$$

bez. in die Ausdrücke $\pi^k_{\mu+s}$ übergehen, endlich ζ^k an der Stelle $\bar{x}$ den Werth $\bar{z}^k$ erhält; umgekehrt sind bei willkürlicher Wahl der Functionen ζ die π^h_g durch obige Bedingungen eindeutig bestimmt; hieraus ergiebt sich mit Hülfe der vorigen Nr. das folgende Theorem:

„*Es seien* $\zeta^1 \ldots \zeta^\nu$ *arbiträre Functionen von* $x_{\mu+2} \ldots x_m$, *ferner* $\zeta^{\nu+1} \ldots \zeta^n$ *ebensolche von* $x_{\mu+1} \ldots x_m$; *für* $x_i = \bar{x}_i$ *gehe* ζ^i in $\bar{z}^i$, $\frac{\partial \zeta^h}{\partial x_g}$ *in* $\bar{p}^h_g$ *über. Sind dann die Functionen* φ^b_a *an der Stelle* $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{p}^h_g$ *holomorph, so giebt es ein und nur ein an der Stelle* $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m$ *reguläres Integralsystem* $z^1 \ldots z^n$ *des Involutionssystems J, von der Beschaffenheit, dass* $z^1 \ldots z^\nu$ *für*

$$x_1 = \bar{x}_1 \ldots x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1}$$

sich bez. auf $\zeta^1 \ldots \zeta^\nu$, *ferner* $z^{\nu+1} \ldots z^n$ *für*

$$x_1 = \bar{x}_1 \ldots x_\mu = \bar{x}_\mu$$

bez. auf $\zeta^{\nu+1} \ldots \zeta^n$ *reduciren. Wir nennen das so definirte System* $z^1 \ldots z^n$ *das allgemeine Integral von J, in das sonach* $n - \nu$ *willkürliche Functionen von* $m - \mu$ *Argumenten, sowie* ν *willkürliche Functionen von je* $m - \mu - 1$ *Argumenten eingehen.*"

10. Ein Werthsystem $z^1 \ldots z^n\ x_1 \ldots x_m\ p^1_1 \ldots p^n_m$ heisst nach Lie ein „*Element*"; zwei benachbarte Elemente $x + dx$, $z + dz$, $p^k_i + dp^k_i$ heissen „*vereinigt liegend*", wenn die Relationen

$$(6) \qquad dz^k = \sum_1^m {}^i p^k_i dx_i$$

erfüllt sind. Eine $m - q$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit von Elementen, die den totalen Differentialgleichungen (6) identisch genügt, heisse eine „*Element-M_{m-q}*". In der vorliegenden Arbeit wollen wir ausdrücklich nur solche Elementmannigfaltigkeiten betrachten, welche durch Gleichungen der Form:

$$(7)\qquad \begin{cases} x_s = \xi_s(x_{q+1},\ x_{q+2}\ldots x_m), & (s = 1\ldots q) \\ z^i = z^i(x_{q+1}\ldots x_m), \\ p_i^k = p_i^k(x_{q+1}\ldots x_m) \end{cases}$$

definirt werden können, deren zugehörige Punktmannigfaltigkeit also ebenfalls $m - q$-fach ausgedehnt ist.

Eine Element-M_{m-q}, die den Gleichungen (A) identisch genügt, heisse eine „*Integral-M_{m-q}*" von J. Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise der vorigen Nr. existirt eine und nur eine Integral-$M_{m-\mu}$ von J, unter deren Definitionsgleichungen die folgenden enthalten sind:

$$(8)\quad x_s = \bar{x}_s\ (s = 1\ldots\mu);\quad z^k = \zeta^k(x_{\mu+1}\ldots x_m)\ (k = \nu + 1\ldots n)$$

und welche der Bedingung genügt, dass sich die Ausdrücke von $z^1\ldots z^\nu$ für $x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1}$ bez. auf $\zeta^1(x_{\mu+2}\ldots x_m),\ \zeta^2\ldots\zeta^\nu$ reduciren. Denn das System von ν Gleichungen in den abhängigen Variabeln $z^1\ldots z^\nu$ und den Independenten $x_{\mu+1}\ldots x_m$, das man erhält, wenn man in den Relationen

$$\frac{\partial z^i}{\partial x_{\mu+1}} = \varphi^i_{\mu+1}\quad (i = 1\ldots\nu)$$

für die x_s und z^k ihre Ausdrücke (8) substituirt, besitzt nach der vor. Nr. ein und nur ein System von Integralen $z^i(x_{\mu+1}\ldots x_m)$, das den obigen Festsetzungen entspricht, worauf die noch fehlenden Definitionsgleichungen der gesuchten Integral-$M_{m-\mu}$ sich unmittelbar aus (A') ergeben, wenn man in die Functionen φ_a^b für $x_1\ldots x_\mu\ z^1\ldots z^n$ die erhaltenen Ausdrücke in $x_{\mu+1}\ldots x_m$ einsetzt. Ebenso erhält man durch Integration des „Theilsystems J_μ" (vgl. Nr. 5) eine und nur eine Integral-$M_{m-\mu+1}$, welche die soeben bestimmte $M_{m-\mu}$ umfasst; ferner durch Integration des Systems von Gleichungen, aus denen die Theilsysteme $J_{\mu-1}$, J_μ bestehen, eine ganz bestimmte Integral-$M_{m-\mu+2}$ etc. Man erkennt so, dass durch die zuerst gefundene Integral-$M_{m-\mu}$ successive eine ganz bestimmte Serie von Integralmannigfaltigkeiten $M_{m-\mu+1}\ldots M_m$ festgelegt ist, deren jede die vorhergehende ganz in sich enthält.

Der Fall, dass die ersten μ Definitionsgleichungen der Ausgangs-$M_{m-\mu}$ die allgemeinere Form

$$x_s = \xi_s(x_{\mu+1}\ldots x_m)\quad (s = 1\ldots\mu)$$

besitzen, wird auf den vorhergehenden zurückgeführt, indem man vermöge der Gleichungen:

$$X_s - \overline{X}_s = x_s - \xi_s, \quad s = 1 \dots \mu;$$
$$X_t - \overline{X}_t = x_t - \bar{x}_t, \quad t = \mu + 1 \dots m,$$

neue unabhängige Veränderliche $X_1 \dots X_m$ einführt, wodurch weder die Involutionseigenschaft noch die Gestalt der Gleichungen (A′) geändert wird.

Die allgemeinste Integral-$M_{m-\mu}$ der Form (7) *ergiebt sich somit durch Integration eines Hülfssystems von ν Gleichungen in ν abhängigen und $m - \mu$ unabhängigen Variabeln, im Falle $\nu = 0$ also ohne jede Integration; die allgemeinste Integral-$M_{m-\mu+s}$ von J durch Integration eines Involutionssystems, bestehend aus $N - sn$ Gleichungen in n abhängigen und $m - \mu + s$ unabhängigen Veränderlichen.*

11. Führt man in das System (A′) vermöge der Mayer'schen Transformationsformeln:

$$(9) \qquad \begin{gathered} x_2 = \bar{x}_2 + y_1 y_2 \dots x_\mu = \bar{x}_\mu + y_1 y_\mu, \\ x_1 = \bar{x}_1 + y_1, \; x_{\mu+1} = \bar{x}_{\mu+1} + y_{\mu+1} \dots x_m = \bar{x}_m + y_m \end{gathered}$$

neue Independente $y_1 \dots y_m$ ein, und wird:

$$\frac{\partial z^k}{\partial y_i} = q_i^k, \quad \psi_a^b \equiv \varphi_a^b(\bar{x}_1 + y_1, \; \bar{x}_2 + y_1 y_2 \dots z^1, \dots z^n, p_g^h)$$

gesetzt, so geht das System (A′) über in das folgende:

$$(\mathrm{A}'') \qquad \begin{cases} -q_1^b + \psi_1^b + y_2 \psi_2^b + \cdots y_\mu \psi_\mu^b = 0, & b = 1 \cdots n; \\ -q_{\mu+1}^c + \psi_{\mu+1}^c = 0, & c = 1 \dots \nu; \end{cases}$$
$$-q_k^b + y_k \psi_k^b = 0, \quad k = 2, 3 \dots \mu; \; b = 1 \dots n.$$

Die $n + \nu$ Gleichungen (A″) *bilden nun für sich genommen ein Involutionssystem J_0 in den unabhängigen Variabeln $y_1, y_{\mu+1}, y_{\mu+2}, \dots y_m$, und zwar für beliebige Werthe der als Parameter zu betrachtenden Grössen $y_2 \dots y_\mu$.* In der That: die Relationen (C) (C′) der Nr. 3 bestehen der Annahme nach für alle Werthe der Variabeln x, z, p_g^h, also auch, wenn man die x durch ihre Ausdrücke (9), die p_g^h durch q_g^h ersetzt. Wir fassen nun nach erfolgter Substitution eine bestimmte der Relationen (C) oder (C′) ins Auge, lassen darin a successive die Werthe $1, 2 \dots \mu$ annehmen, multipliciren die so erhaltenen, den Indices $a = 2, 3 \dots \mu$ entsprechenden Gleichungen bez. mit $y_2 \dots y_\mu$ und addiren sie zu der dem Index $a = 1$ entsprechenden Gleichung; verfahren wir analog mit allen Beziehungen (C) (C′), so erhalten wir gerade die Bedingungen dafür, dass die Gleichungen (A″) ein Involutionssystem darstellen. Nach Nr. 3 besitzen dieselben also ein und nur ein Integral $z_0^1(y_1 \dots y_m) \dots z_0^n(y_1 \dots y_m)$ von der Beschaffenheit, dass $z_0^s (s = 1 \dots \nu)$ für $y_1 = 0$, $y_{\mu+1} = 0$ in den arbiträren

Ausdruck $\zeta^{\nu}(\bar{x}_{\mu+2}+y_{\mu+2},\ldots\bar{x}_m+y_m)$ übergeht, während sich die Functionen $z_0^{i}(i=\nu+1\ldots n)$ für $y_1=0$ bezw. auf die willkürlichen Functionen $\zeta^{i}(\bar{x}_{\mu+1}+y_{\mu+1}\ldots\bar{x}_m+y_m)$ reduciren. Ersetzt man in den z_0^{i}, welche die Parameter $y_2\ldots y_\mu$ augenscheinlich nur in den Verbindungen $y_1y_2,\ldots y_1y_\mu$ enthalten, die y_i durch ihre aus (9) folgenden Ausdrücke, so erhält man gerade wieder die in Nr. 9 definirten Integralfunctionen $z^1\ldots z^n$ des gegebenen Systems J.

Die Integration von J kann sonach auf diejenige eines Involutionssystems J_0 von $n+\nu$ Gleichungen in n abhängigen und $m-\mu+1$ unabhängigen Variabeln zurückgeführt werden.

Capitel II.

Die charakteristische Matrix.

12. Indem wir die Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorigen Capitels beibehalten, schreiben wir

$$\mathrm{L}_i^k\equiv\sum_1^m{}_s\,\mathrm{P}_{is}^k\lambda_s\quad\text{(vgl. Nr. 6)},$$

worin $\lambda_1\ldots\lambda_m$ unbestimmte Grössen bedeuten. Das rechteckige Schema

$$(\mathrm{D})\qquad\left\|\begin{matrix}\mathrm{L}_1^1, & \mathrm{L}_2^1\ldots & \mathrm{L}_N^1\\ \cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot\\ \mathrm{L}_1^n, & \mathrm{L}_2^n\ldots & \mathrm{L}_N^n\end{matrix}\right\|$$

werde die „*charakteristische Matrix*“ des Involutionssystems J genannt. Wir wollen nunmehr folgendes Theorem beweisen:

„*Bedeuten die Grössen x, z, p_i^k irgend welche den Relationen* (A) *genügende Constanten, und interpretirt man die Variabeln $\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_m$ als homogene Punktcoordinaten eines $m-1$-fach ausgedehnten Raums, so stellen die Gleichungen, die man durch Nullsetzen aller n-reihigen Determinanten der charakteristischen Matrix* (D) *erhält, eine $m-\mu-1$-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit* M *der Ordnung $n-\nu$ dar*“, mit andern Worten: „*Zu jedem beliebig gewählten System von Werthen $\lambda_{\mu+1},\lambda_{\mu+2}\ldots\lambda_m$ giebt es $n-\nu$ Werthsysteme der Variabeln $\lambda_1\ldots\lambda_\mu$, welche alle n-reihigen Determinanten von* (D) *annulliren*“.

13. Für die aufgelöste Form (A′) von J hat die charakteristische Matrix folgende Gestalt

$$(\mathrm{D}')\qquad\left\|\begin{matrix}L_1^{11}\ldots L_1^{n1}, & L_2^{11}\ldots L_\mu^{n1}, & L_{\mu+1}^{11}\ldots L_{\mu+1}^{\nu1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ L_1^{1n}\ldots L_1^{nn}, & L_2^{1n}\ldots L_\mu^{nn}, & L_{\mu+1}^{1n}\ldots L_{\mu+1}^{\nu n}\end{matrix}\right\|,$$

worin gesetzt ist:

$$L_a^{bj} \equiv \lambda_a \delta_{bj} + \sum_{\mu+2}^{m} {}_s \lambda_s P_{as}^{bj}, \quad j = 1, 2 \ldots \nu,$$

$$L_a^{bh} \equiv \lambda_a \delta_{bh} + \sum_{\mu+2}^{m} {}_s \lambda_s P_{as}^{ih}, \quad h = \nu + 1 \ldots n$$

$$(\delta_{ik} = 0, \ \delta_{ii} = -1).$$

Substituiren wir nun in die Relationen (A) für die p_a^b ihre aus (A′) folgenden Werthe und differentiiren die erhaltenen Identitäten nach p_g^h, so kommt:

$$\sum_{a,b} \mathrm{P}_{ia}^b P_{ag}^{bh} + \mathrm{P}_{ig}^h = 0,$$

woraus sofort folgt:

$$\mathrm{L}_i^k \equiv \sum_{a,b} \mathrm{P}_{ia}^b L_a^{bk} \quad (i = 1 \ldots N, \ k = 1 \ldots n).$$

Umgekehrt lassen sich die nN Grössen L_a^{bk} linear durch die L_i^k darstellen, da die N-reihige Determinante:

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} \mathrm{P}_{11}^1 \ldots \mathrm{P}_{11}^n, & \mathrm{P}_{12}^1 \ldots \mathrm{P}_{1\mu}^n, & \mathrm{P}_{1,\mu+1}^1 \ldots \mathrm{P}_{1,\mu+1}^\nu \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathrm{P}_{N1}^1 \ldots \mathrm{P}_{N1}^n, & \mathrm{P}_{N2}^1 \ldots \mathrm{P}_{N\mu}^n, & \mathrm{P}_{N,\mu+1}^1 \ldots \mathrm{P}_{N,\mu+1}^\nu \end{Vmatrix}$$

der Annahme nach vermöge (A) nicht Null ist. Die n-reihigen Determinanten der Matrices (D) (D′) verschwinden also bez. für dieselben Werthe der λ_s, wenn das Element x, z, p_i^k innerhalb der durch (A) definirten Mannigfaltigkeit beliebig gewählt ist, und es genügt somit, das Theorem der vorigen Nr. für die Matrix (D′) zu erweisen.

14. Wir betrachten die folgenden beiden Matrices, von denen die erste einen Bestandtheil von (D′) bildet:

$$(\alpha) \qquad \begin{Vmatrix} L_a^{11} \ldots L_a^{n1}, & L_{\mu+1}^{11} \ldots L_{\mu+1}^{\nu 1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_a^{1n} \ldots L_a^{nn}, & L_{\mu+1}^{1n} \ldots L_{\mu+1}^{\nu n} \end{Vmatrix},$$

$$(\beta) \qquad \begin{Vmatrix} L_{\mu+1}^{11} \ldots L_{\mu+1}^{1n}, & \Theta_a^{11} \ldots \Theta_a^{1\nu} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_{\mu+1}^{\nu 1} \ldots L_{\mu+1}^{\nu n}, & \Theta_a^{\nu 1} \ldots \Theta_a^{\nu\nu} \end{Vmatrix}$$

hierin ist

$$\Theta_a^{ik} \equiv -L_a^{ik} + \sum_{\mu+2}^{m} {}_s \lambda_s K_{\mu+1,as}^{ik}$$

gesetzt, die Grössen $K^{ik}_{\mu+1,\alpha s}$ haben die in Nr. 3 erklärte Bedeutung; unter α ist eine beliebige Zahl der Reihe $1 \dots \mu$ zu verstehen. Die Relationen (C) der Nr. 3 drücken aus, dass für beliebige Werthe der λ_i und für alle Indices $h = 1, 2, \dots n$; $l = 1, 2, \dots \nu$ die folgende Identität besteht:

$$\sum_1^n{}^i L_a^{ih} L_{\mu+1}^{is} + \sum_1^\nu{}^i L_{\mu+1}^{ih} \Theta_a^{il} \equiv 0,$$

d. h. also, dass die beiden Matrices (α) (β) für jedes Werthsystem der λ einander *correspondiren* *). Eine beliebige n-reihige Determinante des Schema's (α) ist demnach bis auf das Zeichen identisch gleich dem Product einer Function K_a der Variabeln λ in die complementäre ν-reihige Determinante von (β). Aber die ganz-rationalen homogenen Functionen der λ, welche durch die ν-reihigen Determinanten von (β) dargestellt werden, besitzen keinen gemeinsamen, von den λ_i abhängigen Factor, da die beiden Determinanten, welche aus den ersten, resp. letzten ν Colonnen von (β) bestehen, von λ_a bezw. $\lambda_{\mu+1}$ frei sind, und resp. die Glieder $(-\lambda_{\mu+1})^\nu$, $(-\lambda_a)^\nu$ enthalten. *Der gemeinschaftliche Factor K_a aller n-reihigen Determinanten von (α) ist demnach ein ganzrationaler homogener Ausdruck $n-\nu$. Grades in* $\lambda_a, \lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2} \dots \lambda_m$, der augenscheinlich das Glied $(-\lambda_a)^{n-\nu}$ enthält, und dessen Coefficienten in den Grössen P^{bh}_{ag} rational sind.

15. Durch die erhaltenen Resultate ist unser Theorem im Falle $\mu = 1$ bereits bewiesen. In diesem Falle nämlich ist das Verschwinden aller n-reihigen Determinanten von (α) äquivalent mit einer einzigen ganzrationalen homogenen Gleichung $n-\nu$. Grades in $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$:

$$K(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_m) = 0. \tag{2}$$

Wir wollen die Form K gelegentlich als die „*charakteristische Form*“ des Involutionssystems J ($\mu = 1$) bezeichnen.

Diese Thatsache lässt sich auch unmittelbar aus den Bemerkungen der Nr. 6 erschliessen. Darnach existiren nämlich $\mathsf{N}' = \nu$ linear unabhängige Systeme von je $m\mathsf{N}$ Functionen α^s_{il} $(s = 1 \dots \nu)$ der Grössen x, z, p^k_i von der Beschaffenheit, dass für beliebige Werthe der zweiten Ableitungen r^k_{ij} die Identitäten stattfinden:

$$\sum_1^N{}^i \sum_1^m{}^l \alpha^s_{il} f_{il} = 0 \quad (s = 1 \dots \nu) \tag{3}$$

Hieraus folgen die Beziehungen:

---

*) Vgl. z. B. Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie I Leipzig 1885. pag. 94 ff.

(4) $$\sum_1^N{}^i \sum_1^m{}^i \alpha_{il}^s \mathsf{M}_{il} \equiv 0, \quad \sum_1^N{}^i \alpha_{ij}^s\, \mathsf{P}_{il}^k + \sum_1^N{}^i \alpha_{il}^s\, \mathsf{P}_{ij}^k \equiv 0$$

$$(l, j = 1 \ldots m;\ k = 1 \ldots n).$$

Setzt man demnach

$$\pi_i^s \equiv \lambda_1 \alpha_{i1}^s + \lambda_2 \alpha_{i2}^s + \cdots + \lambda_m \alpha_{im}^s,$$

so hat man für $s = 1 \ldots \nu$, $k = 1 \ldots n$ die Identität

$$\sum \pi_i^s L_i^k \equiv 0,$$

d. h. die Matrix der Ausdrücke π_i^s ist zu (D) correspondirend, woraus das Theorem der Nr. 12 für den Fall $\mu = 1$ wie oben gefolgert wird.

16. Wir wenden uns nun zu dem allgemeinen Fall $\mu > 1$. Da sich unter den Definitionsgleichungen der im Theorem genannten Mannigfaltigkeit M die μ Gleichungen

(5) $$K_1 = 0,\ K_2 = 0 \ldots K_\mu = 0$$

vorfinden, so ist die Dimensionszahl von M sicher $\leqq m - \mu - 1$; erreicht sie diese Zahl und ist r die Ordnung von M, so dass bei beliebigen Werthen von $\lambda_{\mu+1} \ldots \lambda_m$ die ev. theilweise coincidirenden r Werthsysteme $\lambda_1^{(s)} \ldots \lambda_\mu^{(s)} (s = 1 \ldots r)$ alle n-reihigen Determinanten von (D′), also auch von (D) annulliren, so ist der in den $\lambda_a, \lambda_{\mu+1} \ldots \lambda_m$ ganzrationale homogene Ausdruck

$$\prod_{s=1}^r (-\lambda_a + \lambda_a^{(s)})$$

augenscheinlich als Factor in K_a enthalten, also ist $r \leqq n - \nu$.

17. Um den Beweis für $\mu > 1$ zu Ende zu führen, verstehen wir unter a' eine von a verschiedene Zahl der Reihe $1 \ldots \mu$ und setzen:

$$\mathsf{H}_{aa'}^{bk} \equiv \sum_{\mu+2}^m{}^s \lambda_s (K_{aa's}^{bk} - K_{a'as}^{bk});$$

dann sagen die Relationen (B) der Nr. 3 aus, dass für beliebige λ und alle Indicespaare $p, q = 1 \ldots n$ die Identität

$$0 \equiv \sum_1^n{}^s (-L_a^{sp} L_{a'}^{qs} + L_{a'}^{sp} L_a^{qs})$$

$$+ \sum_1^\nu{}^l L_{\mu+1}^{lp} \mathsf{H}_{aa'}^{ql}$$

stattfindet. Hieraus und aus den Entwickelungen der Nr. 14 ergiebt sich, dass die folgenden beiden Matrices:

$$(\gamma)\qquad \left\| \begin{matrix} L_a^{11} & \dots & L_a^{n1}, & L_{a'}^{11} \dots L_{a'}^{n1}, & L_{\mu+1}^{11} \dots L_{\mu+1}^{\nu 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_a^{1n} & \dots & L_a^{nn}, & L_{a'}^{1n} \dots L_{a'}^{nn}, & L_{\mu+1}^{1n} \dots L_{\mu+1}^{\nu n} \end{matrix} \right\|,$$

$$(\delta)\qquad \left\| \begin{matrix} -L_{a'}^{11} & \dots -L_{a'}^{1n}, & L_a^{11} \dots L_a^{1n}, & \mathrm{H}_{aa'}^{11} \dots \mathrm{H}_{aa'}^{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -L_{a'}^{n1} & \dots -L_{a'}^{nn}, & L_a^{n1} \dots L_a^{nn}, & \mathrm{H}_{aa'}^{n1} \dots \mathrm{H}_{aa'}^{n\nu} \\ L_{\mu+1}^{11} \dots & L_{\mu+1}^{1n}, & 0, \dots 0, & \Theta_a^{11} \dots \Theta_a^{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{\mu+1}^{\nu 1} \dots & L_{\mu+1}^{\nu n}, & 0, \dots 0, & \Theta_a^{\nu 1} \dots \Theta_a^{\nu\nu} \end{matrix} \right\|$$

für beliebige λ einander correspondiren, und zwar ist jede $n+\nu$-reihige Determinante von (δ) bis aufs Zeichen identisch gleich der zu ihr complementären n-reihigen Determinante von (γ) multiplicirt mit der Determinante

$$(6)\qquad |\Theta_a^{ik}| \quad i, k = 1, 2 \dots \nu$$

18. Wir machen nun für den Augenblick die Annahme, dass wenigstens *eine* der μ Gleichungen

$$(7)\qquad \Delta_a \equiv \begin{vmatrix} L_a^{11} \dots L_a^{n1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ L_a^{1n} \dots L_a^{nn} \end{vmatrix} = 0$$

nicht für *beliebige* Werthe $\lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ mehrfach zählende Wurzeln λ_a besitze; dass diese Voraussetzung „im Allgemeinen" zutrifft, folgt schon daraus, dass sich aus den Bedingungen (B), (C) der Nr. 3 für die Coefficienten eines einzelnen Schemas Δ_a keine Relationen ableiten lassen.

Es genüge also die dem Index a entsprechende Gleichung (7) der genannten Bedingung; substituiren wir nun in die Relation

$$K_a = 0$$

für $\lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ beliebige Constante $\lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m^0$ und bezeichnen wir mit λ_a^0 irgend eine der $n-\nu$ Wurzeln der so erhaltenen algebraischen Gleichung für λ_a, so dürfen wir nach dem eben gesagten annehmen, dass für die Werthe $\lambda_a^0, \lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m^0$ nicht alle ersten Hauptunterdeterminanten von Δ_a verschwinden; es sei etwa der zum Element L_a^{11} gehörige Minor nicht null. Ist jetzt (α') die Matrix, die aus (α) entsteht, wenn man ihr die $n+1^{\text{te}}$ Colonne von (γ) hinzufügt, so verschwinden alle n-reihigen Determinanten von (α'), wenn man $\lambda_a, \lambda_{\mu+1} \dots \lambda_m$ resp. durch $\lambda_a^0, \lambda_{\mu+1}^0 \dots \lambda_m^0$ und $\lambda_{a'}$ durch einen Werth $\lambda_{a'}^0$ ersetzt, der sich durch $\lambda_a^0 \dots \lambda_m^0$ rational darstellen lässt. Nach dem

Ergebniss der vor. Nummer verschwinden nun für die genannten Werthe der λ auch alle $n+\nu$-reihigen Determinanten von (δ), welche zu den (auch in (γ) enthaltenen) Determinanten von (α') bezw. complementär sind, d. h. die $n+2^{\text{te}}$, $n+3^{\text{te}} \ldots 2n^{\text{te}}$ Colonne miteinander gemein haben, mithin, da unter den $n-1$-reihigen aus diesen Colonnen gebildeten Determinanten auch der oben genannte nicht verschwindende Minor von Δ_a sich vorfindet, *überhaupt alle* $n+\nu$*-reihigen Determinanten von* (δ). Aber die Determinante (6) ist für das wiederholt genannte Werthsystem der λ von Null verschieden, da sonst wegen:

$$\Delta_a \equiv K_a \cdot \left| \Theta_a^{ik} \right|$$

die Gleichung (7) für $\lambda_{\mu+1} = \lambda_{\mu+1}^0 \ldots \lambda_m = \lambda_m^0$ entgegen unserer Voraussetzung die *mehrfach* zählende Wurzel λ_a^0 besässe; *es giebt also nach Nr.* 17 *zu jedem beliebigen System von Constanten* $\lambda_{\mu+1}^0 \ldots \lambda_m^0$ $n-\nu$ *verschiedene Werthepaare* λ_a^0, $\lambda_{a'}^0$ *von der Beschaffenheit, dass diese Werthe der* λ *alle* n*-reihigen Determinanten von* (γ) *annulliren.* Lässt man nun den Index a' alle Zahlen $1 \ldots \mu$ mit Ausnahme von a durchlaufen, so folgt die Richtigkeit unseres Theorems unter den zu Anfang dieser Nr. gemachten Voraussetzungen.

18. Besitzen alle μ Gleichungen (7) für beliebige Werthe von $\lambda_{\mu+1} \ldots \lambda_m^n$ mehrfach zählende Wurzeln, so denken wir uns die Constanten P_{ag}^{bh} unendlich wenig derart variirt, dass diese Besonderheit nicht mehr stattfindet, die Bedingungen (B), (C) der Nr. 3 aber nach wie vor erfüllt sind. Für die charakteristische Matrix, die mit Hülfe der variirten Grössen P_{ag}^{bh} gebildet wird, gilt nun das Theorem der Nr. 12; durch Rückübergang ergiebt sich sofort, dass die Dimensions- und Ordnungszahl der zur ursprünglichen Matrix gehörigen Punktmannigfaltigkeit M nicht kleiner sind als bezw. $m-\mu-1$ und $n-\nu$, also nach Nr. 16 mit diesen Zahlen übereinstimmen, vorausgesetzt, dass eventuell irreducible $m-\mu-1$-fach ausgedehnte Bestandtheile von M mit geeigneter Vielfachheit in Rechnung gezogen werden.

19. Wir schreiben

$$\Omega_{ij}^k \equiv \lambda_1 \mathsf{P}_{i1}^k + \lambda_2 \mathsf{P}_{i2}^k + \cdots + \lambda_\mu \mathsf{P}_{i\mu}^k + \lambda_j \mathsf{P}_{ij}^k$$

und bilden die $m-\mu$ Matrices:

$$(E_j) \quad \begin{Vmatrix} \Omega_{1j}^1 & \Omega_{1j}^2 & \cdots & \Omega_{1j}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Omega_{Nj}^1 & \Omega_{Nj}^2 & \cdots & \Omega_{Nj}^n \end{Vmatrix},$$
$j=\mu+1 \cdots m.$

deren n-reihige Determinanten nach dem Theorem der Nr. 12 resp. für $n-\nu$ im allgemeinen verschiedene Werthsysteme

(6) $\Lambda_{1j}^{(\varkappa)}, \Lambda_{2j}^{(\varkappa)} \cdots \Lambda_{\mu j}^{(\varkappa)} \quad (\varkappa = 1, 2 \cdots n - \nu)$

der Verhältnisse:

$$-\lambda_1 : \lambda_j, \; -\lambda_2 : \lambda_j, \cdots -\lambda_\mu : \lambda_j$$

sämmtlich verschwinden. Es sei nun (E) die aus N Zeilen und $(m-\mu)n$ Colonnen bestehende Matrix, die durch Nebeneinanderstellung der $m-\mu$ Schemata $(E_{\mu+1}) \ldots (E_m)$ erhalten wird. Wir nehmen für den Augenblick an, *dass alle n-reihigen Determinanten von (E) verschwinden, wenn in jedem der Theilschemata (E_j) die Verhältnisse*

$$-\lambda_1 : \lambda_j \cdots -\lambda_\mu : \lambda_j$$

resp. durch die Grössen (6) *ersetzt werden, vorausgesetzt, dass der Index* $(\varkappa)$ *in allen Theilschematen gleich gewählt wird und der Reihe nach die Werthe* $1, 2, \ldots n-\nu$ *annimmt.* Durch diese Voraussetzung legen wir den Grössen P_{ij}^k natürlich eine Serie neuer algebraischer Bedingungen auf. Sind diese erfüllt, *so zerfällt die Punktmannigfaltigkeit* M *der Nr.* 22 *in* $n-\nu$ *lineare* $m-\mu-1$*-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeiten,* die bez. durch die Gleichungen:

$$(7) \quad \lambda_1 + \sum_{\mu+1}^{m} {}_j \Lambda_{1j}^{(\varkappa)} \lambda_j = 0 \cdots \lambda_\mu + \sum_{\mu+1}^{m} {}_j \Lambda_{\mu j}^{(\varkappa)} \lambda_j = 0; \qquad \varkappa = 1 \cdots n - \nu$$

definirt werden; in der That folgt aus unseren Voraussetzungen sofort, dass alle n-reihigen Determinanten von (D) für beliebige Werthe der Variabeln $\lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2} \ldots \lambda_\mu$ verschwinden, wenn man für $\lambda_1, \ldots \lambda_\mu$ ihre aus (7) hervorgehenden Werthe substituirt.*)

Im Falle $\mu = 1$ zerfällt also unter den gemachten Annahmen die charakteristische Form K in $n-\nu$ lineare Factoren, d. h. man hat identisch:

$$K \equiv \pm \Lambda_1 \Lambda_2 \ldots \Lambda_{n-\nu},$$
$$\Lambda_\varkappa \equiv \lambda_1 + \Lambda_2^{(\varkappa)} \lambda_2 + \Lambda_3^{(\varkappa)} \lambda_3 + \cdots + \Lambda_m^{(\varkappa)} \lambda_m;$$

hierin bedeuten $\Lambda_s^{(1)} \ldots \Lambda_s^{(n-\nu)}$ die Werthe des Verhältnisses $-\lambda_1 : \lambda_s$, welche die Form K annulliren, nachdem man darin alle λ_i mit Ausnahme von λ_1 und λ_s durch Null ersetzt hat.

Capitel III.

Die Charakteristiken.

20. Durch ein System von Gleichungen zwischen den Grössen x, z, p_i^k, welches $x_m, z^1 \ldots z^n, p_1^1 \ldots p_m^n$ als Functionen der Variabeln $x_1, x_2 \ldots x_{m-1}$ auszudrücken gestattet, sei eine beliebige Integralmannigfaltigkeit M_{m-1} des gegebenen Involutionssystems J definirt

*) Das Theorem lässt sich nicht umkehren.

(vgl. Nr. 10). Die genannten Functionen von $x_1 \dots x_{m-1}$ genügen dann den aus den Relationen

$$(1) \qquad dz^k = p_1^k dx_1 + \cdots + p_m^k dx_m$$

hervorgehenden Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\partial z^k}{\partial x_l} - p_m^k \frac{\partial x_m}{\partial x_l} - p_l^k = 0; \quad k = 1 \dots n; \; l = 1, \dots m-1.$$

Da nach Nr. 10 durch eine beliebige Integral-M_{m-1} von J im Allgemeinen eine und nur eine Integral-M_m hindurchgeht*), so ist durch jedes Element x, z, p_l^k unserer M_{m-1} ein einziges System von Werthen r_{ij}^k definirt, welche den Gleichungen

$$(3) \qquad f_{il} = 0 \quad \text{(vgl. Nr. 6)}$$

sowie den aus den Beziehungen

$$(4) \qquad dp_l^k = r_{l1}^k dx_1 + \cdots + r_{lm}^k dx_m$$

folgenden Relationen:

$$(5) \qquad \frac{\partial p_l^k}{\partial x_j} - r_{lm}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_j} - r_{lj}^k = 0;$$

$$j = 1 \dots m-1; \quad l = 1 \dots m; \quad k = 1 \dots n,$$

Genüge leisten. Durch Elimination der r_{ij}^k folgen hieraus, beiläufig bemerkt, die für jede Element-M_{m-1} gültigen Beziehungen:

$$(6) \qquad \frac{\partial p_l^k}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j^k}{\partial x_l} + \frac{\partial p_m^k}{\partial x_j}\frac{\partial x_m}{\partial x_l} - \frac{\partial p_m^k}{\partial x_l}\frac{\partial x_m}{\partial x_j} = 0$$

$$(l, j = 1, 2, \dots m-1; \; k = 1 \dots n),$$

die sich übrigens auch leicht aus (2) ableiten lassen.

21. Aus den Combinationen

$$f_{il} + \frac{\partial x_m}{\partial x_l} f_{im} = 0 \quad (l = 1 \dots m-1, \; i = 1 \dots n)$$

fallen die Grössen r_{ij}^k vermöge (5) heraus, und es folgen die Beziehungen

$$(7) \qquad \mathsf{M}_{il} + \frac{\partial x_m}{\partial x_l} \mathsf{M}_{im} + \sum_1^n{}^k \sum_1^m{}^s \mathsf{P}_{is}^k \frac{\partial p_s^k}{\partial x_l} = 0,$$

die natürlich für jede Integral-M_{m-1} von J identisch erfüllt sind. Um die r_{ij}^k aus (3) und (5) zu berechnen, genügt es sonach, die Relationen

$$f_{1m} = 0, \; f_{2m} = 0 \,.\,, \,.\, f_{Nm} = 0$$

zu betrachten, aus denen vermöge (5) für die Ableitungen r_{mm}^k das folgende Gleichungssystem hervorgeht:

*) Wobei allerdings vorausgesetzt wird, dass die Relation, die x_m als Function von $x_1 \dots x_{m-1}$ darstellt, nach x_l auflösbar sei.

$$(8)\qquad \mathsf{M}_{im}+\sum_1^n{}^k\sum_1^{m-1}{}^s\mathsf{P}_{is}^k\frac{\partial p_m^k}{\partial x_s}-\sum_1^n{}^k\Pi_i^k r_{mm}^k=0$$
$$(i=1,2\ldots N).$$

Hierin ist

$$\Pi_i^k\equiv-\mathsf{P}_{im}^k+\sum_1^{m-1}{}^j\mathsf{P}_{ij}^k\frac{\partial x_m}{\partial x_j}$$

gesetzt. Nach dem oben gesagten lassen sich die Unbekannten r_{mm}^k hieraus eindeutig bestimmen, worauf die übrigen Ableitungen r_{ij}^k mit Hülfe von (5) ermittelt werden.

Nennen wir ein Werthsystem x, z, p_r^s, r_{ij}^k ein *„Element 2. Ordnung"*, welches das Element 1. Ordnung x, z, p_r^s *„enthält"*, so können wir sagen: *zu jedem Element 1. O. der betrachteten Integral-M_{m-1} gehört ein und nur ein Element 2. O., das jenes Element 1. O. und alle ∞^{m-2} dazu benachbarten Elemente von M_{m-1} enthält, und den Relationen* (3) *Genüge leistet.*

Es existiren im Allgemeinen zu jedem Werthsystem x, z, p_i^k unserer Integral-M_{m-1} $\mathsf{N}-n$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$l_{1,s}, l_{2,s}\ldots l_{N,s}\quad(s=1\ldots N-n)$$

der linearen Gleichungen in den Unbekannten l_i:

$$(9)\qquad \sum l_i\Pi_i^k=0\quad(k=1\ldots n),$$

und es ergiebt sich somit, dass jede beliebige Integral-M_{m-1} der betrachteten Art auch die aus (8) folgenden $\mathsf{N}-n$ Relationen

$$(10)\qquad \sum_1^N{}^i\left(\mathsf{M}_{im}+\sum_1^n{}^k\sum_1^{m-1}{}^j\mathsf{P}_{ij}^k\frac{\partial p_m^k}{\partial x_j}\right)l_{i,s}=0$$

erfüllen muss.

22. Anders verhält sich die Sache, wenn für alle Elemente x, z, p_i^k der betrachteten Integral-M_{m-1} die sämmtlichen n-reihigen Determinanten der aus den Grössen Π_i^k gebildeten Matrix verschwinden, was wir durch die symbolische Gleichung:

$$(11)\qquad \|\Pi_i^k\|=0$$

andeuten wollen. Die Relationen (3) und (5) reichen jetzt zur Bestimmung der Unbekannten r_{ij}^k nicht mehr hin. Sollen die Gleichungen (8) überhaupt von endlichen Werthsystemen der r_{ij}^k befriedigt werden, so müssen auch alle Relationen (10), deren Anzahl nunmehr $>\mathsf{N}-n$ ist, für die Elemente unserer M_{m-1} erfüllt sein. Eine derartige M_{m-1} heisse *eine $m-1$-fach ausgedehnte* ***charakteristische Mannigfaltigkeit*** *oder* ***Charakteristik*** *des Involutionssystems J* und werde generell mit C_{m-1} bezeichnet.

Eine C_{m-1} ist demnach dadurch gekennzeichnet, dass es unbegrenzt viele Elemente 2. Ordnung giebt, welche ein beliebiges Element 1. O. von C_{m-1}, sowie alle dazu benachbarten enthalten und den Beziehungen (3) *genügen.*

23. Es erhebt sich vor allem die Frage, ob Charakteristiken C_{m-1} für ein beliebig gegebenes Involutionssystem J überhaupt existiren. Wir machen zunächst die Annahme $\mu = 1$. Nach den Ergebnissen der Nr. 15 sind dann die Bedingungen (11) äquivalent mit der *einen* Gleichung:

$$K\left(\frac{\partial x_m}{\partial x_1}, \frac{\partial x_m}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial x_m}{\partial x_{m-1}}, -1\right) = 0. \tag{12}$$

Drücken wir hierin mit Hülfe der Definitionsgleichungen einer beliebigen Integral-M_m von J die Grössen z, p_i^k als Functionen von $x_1 \ldots x_m$ aus, so ergiebt sich eine partielle Differentialgleichung I. O. mit der unbekannten Function x_m und der Independenten $x_1 \ldots x_{m-1}$. Sind die x_i cartesische Punktcoordinaten eines R_m, so sind dem Grade $n - \nu$ der Gleichung (12) entsprechend nach bekannten Sätzen durch eine im R_m beliebig gewählte Punktmannigfaltigkeit π von $m - 2$ Dimensionen $n - \nu$ sie enthaltende Zweige

$$x_m = \psi_i(x_1 \ldots x_{m-1}) \quad i = 1 \ldots n - \nu \tag{13}$$

einer $m - 1$-dimensionalen Integralmannigfaltigkeit von (12) festgelegt; dieselbe projicirt sich auf die oben betrachtete Integral-M_m von J offenbar als eine Charakteristik, d. h. jede der Relationen (13) stellt zusammen mit den Definitionsgleichungen von M_m, die z, p_i^k als Functionen der x bestimmen, eine C_{m-1} von J dar. Da sich ebenso die Mannigfaltigkeit π als beliebige $m - 2$-dimensionale Mannigfaltigkeit auf M_m projicirt, so haben wir das Theorem:

„*Im Falle $\mu = 1$ gehen durch eine beliebige $m - 2$-fach ausgedehnte Elementenmannigfaltigkeit, die auf einer Integral-M_m des Involutionssystems J verläuft, im allgemeinen $n - \nu$ vollständig bestimmte Zweige einer ganz auf M_m enthaltenen Charakteristik C_{m-1} hindurch.*“

24. Ist $\mu > 1$, so sind die Relationen (11) mit μ verschiedenen partiellen Differentialgleichungen für x_m äquivalent. Auf die Frage, ob diese Gleichungen gemeinsame Integrale besitzen, gehen wir an dieser Stelle nicht näher ein.

25. Es ist leicht, die Entwickelungen der Nrn. 22 und 23 zu verallgemeinern. Betrachten wir zunächst, falls $m > 2$, eine Integral-M_{m-2} von J, die auf irgend einer Integral-M_m verlaufen möge, und durch deren Definitionsgleichungen die Grössen x_{m-1}, x_m, z, p als Functionen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{m-2}$ dargestellt seien. Aus den Relationen (3) und

$$\frac{\partial p_l^k}{\partial x_j} - r_{l,m-1}^k \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_j} - r_{l,m}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_j} - r_{l,j}^k = 0$$

ergeben sich sofort die folgenden:

$$(14) \qquad \mathsf{M}_{il} + \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_l} \mathsf{M}_{i,m-1} + \frac{\partial x_m}{\partial x_l} \mathsf{M}_{im} + \sum_1^n{}^k \sum_1^m{}^s \mathsf{P}_{is}^k \frac{\partial p_s^k}{\partial x_l} = 0$$

$$(l = 1, 2 \ldots m-2),$$

welche für ein Integral-M_{m-2} eo ipso erfüllt sind, ferner noch die Beziehungen:

$$(15) \quad \mathsf{M}_{i,m-1} + \sum_1^n{}^k \sum_1^{m-2}{}^s \mathsf{P}_{is}^k \frac{\partial p_{m-1}^k}{\partial x_s} = \sum_1^n{}^k \Phi_i^k r_{m-1,m-1}^k + \sum_1^n{}^k \Psi_i^k r_{m-1,m}^k,$$

$$(16) \qquad \mathsf{M}_{i,m} + \sum_1^n{}^k \sum_1^{m-2}{}^s \mathsf{P}_{is}^k \frac{\partial p_m^k}{\partial x_s} = \sum_1^n{}^k \Phi_i^k r_{m-1,m}^k + \sum_1^n{}^k \Psi_i^k r_{mm}^k,$$

worin

$$\Phi_i^k \equiv -\mathsf{P}_{i,m-1}^k + \sum_1^{m-2}{}^s \mathsf{P}_{is}^k \frac{\partial x_{m-1}}{\partial x_s},$$

$$\Psi_i^k \equiv -\mathsf{P}_{im}^k + \sum_1^{m-2}{}^s \mathsf{P}_{is}^k \frac{\partial x_m}{\partial x_s}$$

gesetzt wird. Wir wollen die betrachtete Integral-M_{m-2} eine C_{m-2}, d. h. eine „*$m-2$-fach ausgedehnte Charakteristik*" nennen, wenn alle n-reihigen Determinanten der Matrix

$$(17) \qquad \left\| \begin{matrix} \Phi_1^1 \cdots \Phi_1^n, & \Psi_1^1 \cdots \Psi_1^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Phi_N^1 \cdots \Phi_N^n, & \Psi_N^1 \cdots \Psi_N^n \end{matrix} \right\|$$

identisch Null sind. Diese Annahme liefert ein System partieller Differentialgleichungen I. O. mit den abhängigen Variabeln x_{m-1}, x_m und den unabhängigen Variabeln $x_1 \cdots x_{m-2}$, wenn man die in den Coefficienten P_{is}^k auftretenden Grössen s, p durch die Ausdrücke in $x_1 \ldots x_m$ ersetzt, welche der oben erwähnten Integral-M_m zukommen. Die erhaltenen partiellen Differentialgleichungen sind aber selbst im Falle $\mu = 1$ (und a fortiori für $\mu > 1$) *im Allgemeinen* nicht miteinander verträglich. Dies lehrt schon der einfache Fall $\mu = 1$, $\nu = 0$, $m = 3$; die charakteristische Form K ist hier identisch mit der n-reihigen Determinante, die aus dem (nunmehr quadratischen) Schema (D) p. 554 gebildet wird; d. h. mit einer vollständig allgemeinen Form n. Grades in $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, während das Verschwinden aller n-reihigen Determinanten der zugehörigen Matrix (17) nach Nr. 19 die Zerlegbarkeit der Form K im Gefolge hätte.

Auch für Involutionssysteme $\mu = 1$ enthält somit eine beliebige Integral-M_m im allgemeinen keine Charakteristiken C_{m-2}.

26. In der vorliegenden ersten Abhandlung werden fortan nur solche Involutionssysteme J betrachtet, *für welche die Zahl μ den Werth eins besitzt.* Nach Nr. 11 kann jedes beliebige Involutionssystem mit Hülfe der Mayer'schen Transformation auf diesen Fall zurückgeführt werden.

27. Durch leichte Verallgemeinerung der in den vor. Nummern durchgeführten Rechnungen gelangt man zu einer ganz analogen Definition der Charakteristiken C_{m-3}, C_{m-4} etc.; wir betrachten ausführlich den Fall der Charakteristiken C_1.

Es seien die Grössen $x_2, x_3 \dots x_m$, z, p als Functionen der unabhängigen Variabeln x_1 so bestimmt, dass die Relationen

$$dz^k = p_1^k dx_1 + \cdots + p_m^k dx_m \qquad (k = 1 \dots n) \tag{18}$$

identisch bestehen. Die so definirte Element-M_1, die wir gelegentlich auch als *„Streifen"* bezeichnen wollen, ist eine Integralmannigfaltigkeit von J, wenn die Bedingungen

$$df_1 = 0,\ df_2 = 0 \dots df_{n+\nu} = 0 \tag{19}$$

erfüllt sind, und ausserdem *ein* Element des Streifens die Relationen (A) erfüllt. Ist M_m eine m-fach ausgedehnte Integralmannigfaltigkeit, welche unsere M_1 enthält, so ist jedem Element von M_1 durch die M_m ein bestimmtes System von Werthen r_{ij}^k zugeordnet, welche den Relationen (3) sowie den folgenden:

$$dp_i^k = r_{i1}^k dx_1 + \cdots + r_{im}^k dx_m \qquad (k = 1 \cdots n,\ i = 1 \cdots m) \tag{20}$$

Genüge leisten. Die Elimination der Grössen r_{i1}^k aus (3) und (20) führt auf die schon betrachteten Beziehungen (19), sowie auf die nachfolgenden $m - 1$ Systeme von je $\mathsf{N} = n + \nu$ Gleichungen:

$$(F_h)_{h=2,3\cdots m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{M}_{ih} + \sum_1^n{}^k \mathsf{P}_{i1}^k \dfrac{dp_h^k}{dx_1} + \sum_1^n{}^k \sum_2^m{}^j r_{hj}^k \left(\mathsf{P}_{ij}^k - \dfrac{dx_j}{dx_1}\mathsf{P}_{i1}^k\right) = 0 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2 \dots \mathsf{N}). \end{array} \right.$$

Wir nennen den Streifen M_1 einen *„charakteristischen Streifen"* oder eine C_1 von J, wenn sich die N Gleichungen eines jeden der Systeme $(F_2) \dots (F_m)$ auf nur $n - 1$ in Bezug auf die Unbekannten r_{ij}^k linear unabhängige Relationen reduciren.

28. Nach Nr. 19 hat man für eine C_1 die Beziehungen

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \Lambda_2^{(\varkappa)},\ \frac{dx_3}{dx_1} = \Lambda_3^{(\varkappa)} \cdots \frac{dx_m}{dx_1} = \Lambda_m^{(\varkappa)}, \tag{21}$$

unter $\varkappa$ einen der Indices $1, 2, \dots n - \nu$ verstanden, und es müssen die in jener Nr. angegebenen algebraischen Bedingungsgleichungen erfüllt sein, d. h. es müssen alle n-reihigen Determinanten der aus $n+\nu$ Zeilen und $n(m-1)$ Colonnen bestehenden Matrix

$$(G_\varkappa)\qquad \left\| \begin{array}{l} \mathsf{P}^1_{12}-\Lambda_2^{(\varkappa)}\mathsf{P}^1_{11}\,,\ldots \mathsf{P}^n_{12}-\Lambda_2^{(\varkappa)}\mathsf{P}^n_{11}\ldots \mathsf{P}^n_{1m}-\Lambda_m^{(\varkappa)}\mathsf{P}^n_{11} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mathsf{P}^1_{N2}-\Lambda_2^{(\varkappa)}\mathsf{P}^1_{N1}\,,\ldots \mathsf{P}^n_{N2}-\Lambda_2^{(\varkappa)}\mathsf{P}^n_{N1}\ldots \mathsf{P}^n_{Nm}-\Lambda_m^{(\varkappa)}\mathsf{P}^n_{N1} \end{array} \right\|$$

für alle Indices $\varkappa=1,2\ldots n-\nu$ vermöge (A) Null sein.

Die charakteristische Form K zerfällt dann in $n-1$ Linearfactoren $\Lambda_1\ldots\Lambda_{n-\nu}$, *die wir fortab ausdrücklich als von einander verschieden voraussetzen wollen.* Dann ist klar, dass in keinem der $n-\nu$ Schemata $(G_\varkappa)$ alle $n-1$-reihigen Determinanten verschwinden können, da andernfalls der Factor $\Lambda_\varkappa$ in K mehrfach auftreten würde.

29. Unter den soeben gemachten Annahmen besitzen die $n(m-1)$ Gleichungen in den Unbekannten $l_1^{(\varkappa)}\ldots l_N^{(\varkappa)}$

$$(22)\qquad \sum_1^N{}^i\, l_i^{(\varkappa)}(\mathsf{P}^k_{ij}-\Lambda_j^{(\varkappa)}\mathsf{P}^k_{i1})=0,\quad j=2\ldots m,\ k=1\ldots n$$

für jeden der Indices $\varkappa=1,2,\ldots,n-\nu$ genau $\nu+1$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$l_{1s}^{(\varkappa)}\ l_{2s}^{(\varkappa)}\ldots l_{Ns}^{(\varkappa)}\quad (s=1,2,\ldots\nu+1).$$

Die Elimination der Unbekannten r^k_{ij} aus den Relationen (F_h) führt sonach auf die folgenden totalen Differentialgleichungen, denen jeder Streifen C_1 ebenfalls genügen muss:

$$(23)\qquad \sum_1^N{}^i\, l_{is}^{(\varkappa)}\mathsf{M}_{ih}+\sum_1^N{}^i\sum_1^n{}^k\, l_{is}^{(\varkappa)}\mathsf{P}^k_{i1}\frac{dp^k_h}{dx_1}=0,$$
$$(h=2,\ldots m;\quad s=1,2,\ldots,\nu+1).$$

Aber diese $(\nu+1)\,(m-1)$ Relationen sind nicht alle unabhängig von den Gleichungen (19); denn unter den Lösungen $l_i^{(\varkappa)}$ der Gleichungen (22) befinden sich, wie aus den Bemerkungen der Nr. 15 sofort folgt, u. a. die sämmtlichen $(m-1)\,\nu$ Grössensysteme:

$$\alpha^s_{1j}-\Lambda_j^{(\varkappa)}\alpha^s_{11},\quad \alpha^s_{2j}-\Lambda_j^{(\varkappa)}\alpha^s_{21}\ \cdots\ \alpha^s_{Nj}-\Lambda_j^{(\varkappa)}\alpha^s_{N1},$$
$$(s=1\ldots\nu;\quad j=2\ldots m);$$

mithin sind die ν Ausdrücke

$$\sum_2^m{}^j\sum_1^N{}^i\left(\alpha^s_{ij}-\Lambda_j^{(\varkappa)}\alpha^s_{i1}\right)\mathsf{M}_{ij}+\sum_2^m{}^j\sum_1^N{}^i\sum_1^n{}^k\mathsf{P}^k_{i1}\left(\alpha^s_{ij}-\Lambda_j^{(\varkappa)}\alpha^s_{i1}\right)\frac{dp^k_j}{dx_1}$$

lineare Combinationen der linken Seiten von (23). Aber diese Ausdrücke sind andererseits zufolge der Relationen (4) der Nr. 15 mit den folgenden identisch:

$$-\sum_1^N{}^i \alpha^s_{i1} \frac{df_i}{dx_1};$$

dabei ist in df_i für dz^k sein aus (18), (21) folgender Werth

$$\left(p_1^k + p_2^k \Lambda_2^{(\varkappa)} + \cdots + p_m^k \Lambda_m^{(\varkappa)}\right) dx_1$$

einzusetzen. Demnach sind ν unabhängige Linearcombinationen der Gleichungen (23), — und wie leicht ersichtlich auch nicht mehr — eine Folge von (19). Also sind die Gleichungen (19), (23) für jeden Index $\varkappa$ zusammen nur mit $(m-1)(\nu+1)+n$ unabhängigen Relationen für die Ableitungen $\frac{dp_j^k}{dx_1}$ äquivalent.

Wir bezeichnen ein Involutionssystem der Form (A) *als ein* ***Normalsystem***, *wenn die Zahl* $\mu = 1$ *ist und die algebraischen Bedingungsgleichungen der Nr.* 19 *erfüllt sind.* Dann können wir folgenden Satz aussprechen:

„*Jedes Normalsystem besitzt* $n-\nu$ *im allgemeinen verschiedene Systeme charakteristischer Streifen* C_1“.

30. Wir wollen die $n-\nu$ Systeme von Definitionsgleichungen der C_1 der Uebersicht halber noch einmal zusammenstellen:

$$(\mathsf{H}_\varkappa)\quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \varkappa = 1, 2, \\ \ldots, n-\nu \end{matrix} \quad \begin{cases} \text{a)}\ \dfrac{dx_2}{dx_1} = \Lambda_2^{(\varkappa)}, \ldots, \dfrac{dx_m}{dx_1} = \Lambda_m^{(\varkappa)}, \\ \text{b)}\ \dfrac{dz^k}{dx_1} = p_1^k + \sum_2^m{}^j \Lambda_j^{(\varkappa)} p_j^k, \qquad (k = 1 \ldots n) \\ \text{c)}\ df_1 = 0, \quad df_2 = 0, \ldots, df_{n+\nu} = 0, \\ \text{d)}\ \sum_1^N{}^i l_{is}^{(\varkappa)} \mathsf{M}_{ih} + \sum_1^N{}^i \sum_1^n{}^k l_{is}^{(\varkappa)} \mathsf{P}_{i1}^k \dfrac{dp_h^k}{dx_1} = 0, \\ \quad (h = 2, 3, \ldots, m; \quad s = 1, 2, \ldots, \nu+1). \end{cases}$$

Man kann die Gleichungen c) aus diesem System weglassen und die Grössen $p_1{}^1 \ldots p_1{}^n$, $p_2{}^1 \ldots p_2{}^\nu$ nebst ihren Differentialen vermöge des aufgelösten Systems (A′) aus $(\mathsf{H}_\varkappa)$ entfernen. Das so modificirte Gleichungssystem $(\mathsf{H}_\varkappa)$ werden wir später mit $(\mathsf{H}'_\varkappa)$ bezeichnen. Es besteht aus $(m-1)(\nu+1)-\nu+n+m-1$ unabhängigen Gleichungen zwischen den $(m-1)+n+(mn-n-\nu)$ Ableitungen $\frac{dx_j}{dx_1}, \frac{dz^k}{dx_1}, \frac{dp_g^h}{dx_1}$; die Zahl der letzteren ist somit um $(m-1)(n-\nu-1)$ grösser als die der ersteren, also gleich derselben nur im Falle $\nu = n-1$.

„Ein Normalsystem $v = n - 1$ besitzt demnach eine Schaar von eindimensionalen Charakteristiken, die nur von einer endlichen Parameterzahl abhängt."

31. Ihrer Entstehungsweise nach sind die Definitionsgleichungen $(\mathsf{H}_\varkappa)$ der C_1 völlig äquivalent mit den folgenden:

$$(24)\qquad dx_j = \Lambda_j^{(\varkappa)}\, dx_1, \quad j = 2 \ldots m;$$

$$(25)\qquad dz^k = p_1^k + \sum_2^m{}^i\, p_i^k\, \Lambda_i^{(\varkappa)}, \qquad k = 1 \ldots n;$$

$$(26)\qquad dp_i^k = r_{i1}^k + \sum_2^m{}^l\, r_{il}^k \Lambda_l^{(\varkappa)}, \qquad k = 1 \ldots n, \quad i = 1 \ldots m;$$

wenn unter den r_{il}^k beliebige Grössen verstanden werden, die den Beziehungen (3) genügen. Jede eindimensionale Mannigfaltigkeit von „Punkten" $x_1 \ldots x_m,\ z_1 \ldots z_n$, welche den Differentialgleichungen (24) genügt und einer Integral-M_m von J angehört, bestimmt also mit den ihr zugehörigen Elementen 1. O. von M_m eine Charakteristik C_1; wir schliessen daraus sofort:

„Jede Integral-M_m des Normalsystems J ist erzeugt von je ∞^{m-1} Streifen C_1 eines jeden der $n - v$ Charakteristikensysteme, in dem Sinne, dass für $\varkappa = 1, 2 \ldots, n - v$ durch jedes Element x, z, p von M_m ein und nur ein Streifen hindurchgeht, welcher dem $\varkappa^{\text{ten}}$ Charakteristikensystem angehört und ganz auf M_m enthalten ist."

32. Die partielle Differentialgleichung (12) der Charakteristiken C_{m-1} unseres Normalsystems J zerfällt in die $n - v$ linearen Gleichungen:

$$(27)\qquad \frac{\partial x_m}{\partial x_1} + \Lambda_2^{(\varkappa)} \frac{\partial x_m}{\partial x_2} + \cdots + \Lambda_{m-1}^{(\varkappa)} \frac{\partial x_m}{\partial x_{m-1}} = \Lambda_m^{(\varkappa)},$$
$$(\varkappa = 1, 2 \ldots n - v).$$

Ersetzt man in den Functionen $\Lambda_j^{(\varkappa)}$ die Grössen z, p vermöge der Definitionsgleichungen irgend einer Integral-M_m von J durch Functionen der x, so entstehen lineare partielle Differentialgleichungen für x_m, deren „Charakteristiken" im gewöhnlichen Sinn durch (24) definirt werden. Man schliesst daraus unmittelbar:

„Ein Normalsystem besitzt $n - v$ verschiedene C_{m-1}-Systeme; die allgemeinste C_{m-1}, die auf einer beliebigen Integral-M_m von J enthalten ist, wird von ∞^{m-2} Charakteristiken $C_1^{(\varkappa)}$ erzeugt, die ganz auf M_m verlaufen und bezw. von den Elementen einer beliebigen, auf M_m gelegenen M_{m-2} ausgehen."

Für die $m - s$-dimensionalen Charakteristiken C_{m-s} hat man ebenso die $n - v$ Systeme von je s Gleichungen:

$$\frac{\partial x_{m-s+j}}{\partial x_1} + \Lambda_2^{(\varkappa)} \frac{\partial x_{m-s+j}}{\partial x_2} + \cdots + \Lambda_{m-s}^{(\varkappa)} \frac{\partial x_{m-s+j}}{\partial x_{m-s}} = \Lambda_{m-s+j}^{(\varkappa)},$$
$$(j = 1, 2 \,.\, s),$$

woraus wie oben folgt:

„Es gibt für ein Normalsystem $n - \nu$ verschiedene Systeme von Charakteristiken C_{m-s}; die allgemeinste, auf einer beliebigen Integral-M_m von J verlaufende C_{m-s} wird von ∞^{m-s-1} Charakteristiken $C_1^{(\varkappa)}$ erzeugt, die bezw. von den Elementen einer willkürlichen, auf M_m gelegenen M_{m-s-1} auslaufen."

Capitel IV.

Reduction der Anzahl der Independenten.

33. Aus den Entwickelungen der Nr. 30 und 31 ergibt sich für Normalsysteme, deren Zahl ν den Werth $n - 1$ hat, eine Theorie, die derjenigen einer partiellen Differentialgleichung 1. O. mit *einer* unbekannten Function vollkommen analog ist, und auch thatsächlich in dieselbe übergeht, wenn wir im vorigen Capitel die Annahme $n = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 0$ machen. Für $\nu = n - 1$ gibt es nämlich einerseits nach Nr. 30 nur ein einziges System von eindimensionalen Charakteristiken, die durch *gewöhnliche* Differentialgleichungen definirt werden, und zwar ist jedes Flächenelement der durch (A) definirten Schaar auf einer und nur einer C_1 enthalten; andererseits sind nach Nr. 31 auf jeder Integral-M_m je ∞^{m-1} C_1 gelegen, und es folgt:

Die allgemeinste Integral-M_m eines Normalsystems $\nu = n - 1$ wird erzeugt von ∞^{m-1} Charakteristiken C_1, die bezw. durch die ∞^{m-1} Elemente einer beliebigen Integral-M_{m-1} bestimmt werden. Die Integration des Systems (A) *ist so zurückgeführt auf diejenige eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems, auf ausführbare Operationen und auf die Herstellung der allgemeinsten Integral-M_{m-1} von J, die nach Nr.* 10 *die Integration eines Hülfssystems von $n - 1$ Gleichungen I. O. in $m - 1$ Independenten und $n - 1$ unbekannten Functionen erfordert.*

34. Betrachten wir nunmehr den Fall $\nu < n - 1$. Die um eins verminderte Zahl der Differentiale $dx_1 \,.\, dx_m$, $dz^1 \,.\, dz^n$, $dp_2^{\nu+1} \ldots dp_2^n$, $dp_3^1 \ldots dp_m^n$ übertrifft nunmehr nach Nr. 30 diejenige der unabhängigen Gleichungen in dem System (H$_\varkappa'$), und es sind gewisse Integrabilitätsbedingungen erforderlich, wenn sich aus den linken Seiten der (in den Differentialen homogen geschriebenen) Gleichungen (H$_\varkappa'$) lineare Combinationen der Form $d\psi^{(\varkappa)}$ sollen bilden lassen, unter $\varkappa$ irgend eine der Zahlen $1 \,.\, n - \nu$, unter $\psi^{(\varkappa)}$ eine Function der Grössen x, z, p_g^h verstanden. Nehmen wir nun an, es sei eine solche Combination vorhanden, von der Beschaffenheit, dass sich die Gleichung

(1) $$\psi^{(\varkappa)} = 0$$

in der Form

$$-p_2^{\nu+1}+\varphi_2^{\nu+1}(x,\,z,\,p_2^{\nu+2}\dots p_2^n,\,p_3^1\cdot p_m^n)=0$$

auflösen lässt.

Dann bilden die $n+\nu+1$ *Relationen:*

(2) $\quad -p_1^b+\varphi_1^b=0,\ -p_2^c+\varphi_2^c=0\ (b=1\dots n;\ c=1\dots \nu+1)$

wieder ein Involutionssystem, wenn man sich die Grösse $p_2^{\nu+1}$ aus den ersten N Gleichungen vermöge der letzten eliminirt denkt. Denn der Umstand, dass $d\psi^{(\varkappa)}$ eine integrable Combination der linken Seiten des Systems $(\mathsf{H}_\varkappa')$ ist, lässt sich nach Nr. 31 so ausdrücken: Der totale Differentialausdruck $d\psi^{(\varkappa)}$ verschwindet vermöge der Relationen (3), pag. 6, wenn man dx_i, dz^k, dp_g^k durch ihre Ausdrücke (24), (25), (26) des vor. Cap. ersetzt. Schreiben wir demnach:

$$\Psi_i^{(\varkappa)}\equiv\frac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial x_i}+\sum_1^n{}^k\frac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial z^k}p_i^k+\sum_{g,k}\frac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_g^k}r_{gi}^k,$$

so besteht vermöge (A) eine Identität der Form

$$\Psi_1^{(\varkappa)}+\Lambda_2^{(\varkappa)}\Psi_2^{(\varkappa)}+\dots+\Lambda_m^{(\varkappa)}\Psi_m^{(\varkappa)}\equiv\sum_1^m{}^l\sum_1^N{}^i\sigma_{il}f_{il}\tag{3}$$

für alle Werthe der r_{ij}^k; also gibt es nach Nr. 6 zwischen den linken Seiten der $m(\mathsf{N}+1)$ Relationen, die durch partielle Ableitung aus:

$$f_1=0\ \dots\ f_N=0,\quad \psi^{(\varkappa)}=0\tag{4}$$

erhalten werden, $\nu+1$ unabhängige lineare Identitäten, woraus die Involutionseigenschaft des Systems (4) oder (2) sofort folgt.

35. Die charakteristische Matrix des Involutionssystems (4) hat folgende Gestalt:

$$\left\|\begin{matrix}\mathrm{L}_1^1\dots\mathrm{L}_N^1, & \lambda_1\dfrac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_1^1}+\lambda_2\dfrac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_2^1}+\dots+\lambda_m\dfrac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_m^1}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \mathrm{L}_1^n\dots\mathrm{L}_N^n, & \lambda_1\dfrac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_1^n}+\lambda_2\dfrac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_2^n}+\dots+\lambda_m\dfrac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_m^n}\end{matrix}\right\|,\tag{5}$$

wobei in den Elementen der letzten Colonne die verschwindenden Ableitungen $\dfrac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_a^b}$ nur der Symmetrie halber eingeführt wurden.

Aus (3) folgert man nun die für beliebige λ bestehenden Identitäten:

$$\sum_1^N{}^i(\sigma_{i1}\lambda_1+\dots+\sigma_{im}\lambda_m)\,\mathrm{L}_i^k$$
$$-(\lambda_1+\Lambda_2^{(\varkappa)}\lambda_2+\dots+\Lambda_m^{(\varkappa)}\lambda_m)\left(\lambda_1\frac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_1^k}+\dots+\lambda_m\frac{\partial\psi^{(\varkappa)}}{\partial p_m^k}\right)=0,$$
$$(k=1,2\dots n).$$

In der Bezeichnungsweise der Nr. 15 schreibt sich demnach die zu (5) correspondirende Matrix so:

$$\left\|\begin{matrix} \sum^s \sigma_{1s}\lambda_s, & \cdots, & \sum^s \sigma_{Ns}\lambda_s, & -(\lambda_1 + \Lambda_2^{(\varkappa)}\lambda_2 + \cdots + \Lambda_m^{(\varkappa)}\lambda_m) \\ \pi_1^1, & & \pi_N^1, & 0 \\ \pi_1^2, & & \pi_N^2, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_1^n, & & \pi_N^n, & 0 \end{matrix}\right\|,$$

woraus sich ergibt, dass die charakteristische Form des Involutionssystems (4) erhalten wird, indem man aus K den Factor $\Lambda_\varkappa$ weglässt.

36. Die Resultate der vor. Nr. lassen sich leicht verallgemeinern. *Es sei* $s < n - \nu$ *und* $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_s$ *verschiedene Zahlen der Reihe* $1, 2 \ldots n - \nu$. *Gestatten dann die Systeme*

(6) $$(\mathsf{H}'_{\varkappa_1}),\ (\mathsf{H}'_{\varkappa_2}) \ldots (\mathsf{H}'_{\varkappa_s})$$

je eine integrable Combination $d\psi^{(\varkappa_h)}$ *von der Beschaffenheit, dass die Gleichungen*

$$\psi^{(\varkappa_1)} = 0, \quad \psi^{(\varkappa_2)} = 0 \ldots \psi^{(\varkappa_s)} = 0,$$

in deren linke Seiten die Variabeln x, z, $p_2^{\nu+1} \cdot p_2^n$, $p_3^1 \ldots p_m^n$ *eingehen, sich in der Form:*

(7) $$-p_2^{\nu+1} + \varphi_2^{\nu+1} = 0 \ldots - p_2^{\nu+s} + \varphi_2^{\nu+s} = 0$$

auflösen lassen, so stellen die Gleichungen:

(8) $$f_1 = 0, \ldots, f_N = 0, \quad \psi^{(\varkappa_1)} = 0, \ldots, \psi^{(\varkappa_s)} = 0$$

oder die damit äquivalenten Relationen (A') *und* (7) *ein Involutionssystem dar, dessen charakteristische Form mit dem Ausdruck*

$$\pm \frac{K}{\Lambda_{\varkappa_1}\Lambda_{\varkappa_2}\ldots\Lambda_{\varkappa_s}}$$

identisch ist.

37. Sind $u^{(\varkappa)}$, $v^{(\varkappa)}$ Integrale des Systems $(\mathsf{H}'_\varkappa)$, so gilt dasselbe von jeder arbiträren Function $\varphi(u^{(\varkappa)}, v^{(\varkappa)})$. Nehmen wir nun an, dass jedes der s Gleichungssysteme (6) je m unabhängige Integrale $u_1^{(\varkappa_h)} u_2^{(\varkappa_h)} \ldots u_m^{(\varkappa_h)}$ besitze, und verstehen wir unter $\psi^{(\varkappa_h)}$ eine arbiträre Function dieser Ausdrücke, so bilden die Gleichungen (8) natürlich wieder ein Involutionssystem, und es ist klar, dass jede Integral-M_m desselben auch das ursprüngliche System J erfüllt. Aber man kann auch umgekehrt die willkürlichen Functionen $\psi^{(\varkappa_h)}$ so bestimmen, dass eine beliebige Integral-M_m von J auch das System (8) befriedigt. Nach Nr. 10 ist nämlich für jedes Involutionssystem eine Integral-M_m durch Angabe einer sie enthaltenden Integral-M_{m-1} vollständig bestimmt. Wir denken uns nun eine beliebige Integral-M_{m-1} von J ermittelt, was im Falle $\nu = 0$ durch ausführbare Operationen, im Falle $\nu > 0$

durch Integration eines Hülfssystems in $m-1$ Independenten geschieht. Die Ausdrücke, die sich so für die Grössen x, $z^1 \dots z^n$, p_i^k als Functionen der Variabeln $x_2 \dots x_m$ ergeben, denken wir uns in die Relationen $\psi^{(\varkappa\lambda)}=0$ substituirt. Man kann dann die arbiträren Functionen auf eine und wesentlich nur eine Art so wählen, dass diese Relationen identisch, d. h. für beliebige Werthe der Variabeln $x_2, \dots, x_m$ erfüllt sind, mit andern Worten: dass die erwähnte Integral-M_{m-1} auch dem Involutionssystem (8) genügt. *Die Herstellung der allgemeinsten Integral-M_m von J ist somit auf die Integration des Involutionssystems* (8) *zurückgeführt.* Ist die Zahl s insbesondere gleich $n-\nu$, so besteht das letztere System aus $2n$ partiellen Differentialgleichungen in n unbekannten Functionen; indem man wie in Nr. 11 in die aufgelöste Form

$$-p_a^b+\varphi_a^b=0 \quad (a=1,2;\ b=1,2,\dots,n)$$

desselben vermöge der Mayer'schen Transformationsformeln

$$x_1=x_1{}^0+y_1, \quad x_2=x_2{}^0+y_1y_2, \quad x_3=x_3{}^0+y_3 \dots x_m=x_m^0+y_m$$

neue unabhängige Veränderliche $y_1y_2 \dots y_m$ einführt, gelingt es, die Integration dieses Systems auf diejenige eines Systems (A″) von n Gleichungen in n abhängigen Veränderlichen $z^1 \dots z^n$ und $m-1$ Independenten $y_1, y_3 \dots y_m$ zurückzuführen.

Da man die Existenz etwaiger Integrale von ($H'_\varkappa$) stets mit Hülfe von Differentiationen und Eliminationen feststellen, die Integrale selbst durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ermitteln kann, so ergibt sich folgendes Theorem:

„*Besitzt jedes der $n-\nu$ Systeme totaler Differentialgleichungen, durch welche bezw. die $n-\nu$ Systeme charakteristischer Streifen unseres Normalsystems definirt werden, m unabhängige Integrale, so kann die Integration des Normalsystems durch ausführbare Operationen und Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme auf Differentialprobleme in $m-1$ Independenten zurückgeführt werden, und es lässt sich stets durch Differentiationen und Eliminationen entscheiden, ob bei einem gegebenen Normalsystem dieser Ansatz zum Ziele führt oder nicht.**)"

München, im Januar 1897.

*) Weitere Resultate dieser Theorie habe ich in einer Note: „Résumé einer Integrationstheorie höherer partieller Differentialprobleme" Leipz. Ber. 1897 skizzirt.

Zur Gruppentheorie der homogenen linearen Differentialgleichungen.

Von

Emanuel Beke in Budapest.

1. *Formale und numerische Invarianz.* Wie in der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen, so ist auch in der Picard-Vessiot'schen Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen von besonderer Wichtigkeit, die formale Unveränderlichkeit der rationalen Functionen der Lösungen und die Unveränderlichkeit dieser Functionen als Functionen von x, — welche der numerischen Invarianz entspricht — genau auseinander zu halten*). Wir wissen, dass diejenigen linearen Substitutionen, welche eine rationale Function R der Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung (und deren Differentialquotienten) formal unverändert lassen, immer eine endliche continuirliche (complexe) Gruppe bilden. Nicht so diejenigen Substitutionen, welche eine rationale Function numerisch (also als Function von x) unverändert lassen. Es wird vielleicht nicht unnütz sein diese Behauptung an einem Beispiel zu beweisen.

Zu diesem Zweck nehmen wir die homogene lineare Differentialgleichung:

$$(1) \qquad x^4 y^{IV} - 4x^3 y''' + 12x^2 y'' - 24xy' + 24y = 0$$

deren Integrale aus dem Fundamentalsystem:

$$(2) \qquad y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3,\ y_4 = x^4$$

entstammen.

*) Auf diesen Punkt machte zuerst Herr F. Klein aufmerksam. Siehe Vorlesungsheft über Höhere Geometrie Bd. II, p. 299.

Betrachten wir jetzt die folgende rationale Function:

$$R = y_1 y_4. \tag{3}$$

Diese Function bleibt numerisch (als Function von x) invariant z. B. bei der folgenden Schaar von Substitutionen (A):

$$\left\{\begin{aligned} \bar{y}_1 &= y_2, \\ \bar{y}_2 &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4, \\ \bar{y}_3 &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4, \\ \bar{y}_4 &= y_3, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

wo die Grössen a_i und b_i ganz beliebig sind. Diese Schaar bildet keine Gruppe; denn $(A)^2$ wäre die folgende Substitution:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{y}}_1 &= \bar{y}_2 = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4, \\ \bar{\bar{y}}_2 &= (a_1 a_2 + a_3 b_1) y_1 + (a_1 + a_2^2 + a_3 b_2) y_2 + (a_2 a_3 + a_4 + a_3 b_3) y_3 \\ &\qquad + (a_2 a_4 + a_3 b_4) y_4, \\ \bar{\bar{y}}_3 &= (b_1 b_2 + a_1 b_2) y_1 + (b_1 + b_2^2 + a_2 b_3) y_2 + (b_2 b_3 + b_4 + a_3 b_3) y_3 \\ &\qquad + (b_2 b_4 + a_4 b_3) y_4, \\ \bar{\bar{y}}_4 &= \bar{y}_3 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4 \end{aligned}$$

und diese Substitution lässt die Function R nicht unverändert. —

Es steht die Sache ganz anders, wenn wir uns nur auf Substitutionen beschränken, welche zur Rationalitätsgruppe der gegebenen linearen homogenen Differentialgleichungen gehören; dann bilden diejenigen Substitutionen, welche eine rationale Function numerisch invariant lassen, wirklich eine Gruppe. —

2. *Die Bestimmung der Rationalitätsgruppe.* Zur Bestimmung der Rationalitätsgruppe der homogenen linearen Differentialgleichung führen zwei verschiedene Wege: der ursprüngliche „Picard'sche“ und der „Vessiot'sche“. Der letztgenannte besteht darin, dass wir alle diejenigen Gruppen betrachten, welche rationale Functionen der Lösungen, welche in x rational sind, invariant lassen, und von diesen Gruppen diejenige, welche die minimale Zahl von Parametern hat, als Rationalitätsgruppe betrachten. Bei der Befolgung dieses Weges muss man sich nach unserer früheren Bemerkung ausdrücklich auf formale Invarianz beschränken, oder wie Herr Vessiot behauptet, die Lösungen als unbestimmte Functionen betrachten, da doch diejenigen Substitutionen, welche die in x rationalen Functionen unverändert lassen, im Allgemeinen gar keine Gruppe bilden. Der ursprüngliche „Picard'sche“

Weg zur Bildung der Rationalitätsgruppe besteht darin, dass wir eine irreducible algebraische Differentialgleichung für die „empfindliche Function"*) V aufstellen und diejenige Gruppe betrachten, welche die Lösungen dieser Gleichung in einander überführen. An diesem Weg lässt sich nach dem Vorgang, welchen Herr Kronecker in der Theorie der algebraischen Gleichungen befolgte**), dadurch eine kleine Modification anwenden, dass man, um die numerische Invarianz ganz bei Seite lassen zu können, auf die schon von Herrn Vessiot in anderer Verbindung betrachtete dualistische Gruppe übergeht. —

Sei die betrachtete empfindliche Function:

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n \tag{5}$$

und die irreducible algebraische Differentialgleichung, welcher V genügt, die Picard'sche Resolvente:

$$F(V) = 0, \tag{6}$$

dann ist die linke Seite dieser Gleichung eine Differentialfunction der Grössen:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n. \tag{7}$$

Wir können dies auch so auffassen, dass wir aus den Coefficienten der Gleichung (6) die wir mit:

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$$

bezeichnen, durch Einführung unbestimmter Coefficienten die Function:

$$h_1\Phi_1 + h_2\Phi_2 + \cdots + h_k\Phi_k = \Phi \tag{8}$$

bilden, und Φ als Differentialfunction der Grössen (7) betrachten.

Jetzt bestimmen wir diejenige homogene lineare Gruppe, welche die rationale Function Φ als Differentialfunction der Grössen (7) formell invariant lässt. Sei diese Gruppe die folgende:

$$\bar{u}_i = A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + \cdots + A_{in} u_n \tag{9}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

wo die Coefficienten A algebraische Functionen einer bestimmten Zahl von Parametern bilden; dann bildet die dualistische Gruppe von (9) die gesuchte Rationalitätsgruppe.

*) Dieser Ausdruck findet sich zuerst bei Herrn Schlesinger, Handbuch II, pag. 60.

**) Festschrift pag. 33. Journal f. Math. 92. Vgl. Bolza: Math. Annalen Bd. 42, pag. 253.

3. *Rationale Function, welche zu einer gegebenen Gruppe gehört.* In dieser Theorie kommt es sehr oft vor, dass wir eine rationale Function der Fundamentallösungen zu bestimmen haben, welche zu einer vorgegebenen Gruppe gehört; d. h. welche bei den Substitutionen dieser Gruppe und *nur bei diesen* invariant bleibt.

Dazu dient ein Verfahren, welches aus der allgemeinen Lie'schen Theorie folgt, nämlich die Lösung eines vollständigen Systems partieller Differentialgleichungen, welche den erweiterten infinitesimalen Transformationen entsprechen. Wir wollen einen anderen, unserer Theorie näher liegenden Weg zur Bestimmung solcher Functionen einschlagen.

Sei zu diesem Zweck eine empfindliche Function:

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n \tag{5}$$

auf welche wir die gegebene algebraische Gruppe von k Parametern $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k$

$$\bar{y}_i = \sum_{\varrho} A_{i\varrho}(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) y_\varrho \qquad i = 1, \dots, n \tag{10}$$

anwenden; wodurch wir aus V die *allgemeine* Function

$$W = \sum\sum A_{i\varrho}(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k) u_i y_\varrho \tag{11}$$

erhalten. — Wenn wir aus $W, W', \dots, W^{(k)}$ die k Parameter eliminiren, erhalten wir für W eine algebraische Differentialgleichung:

$$F(W) = 0 \tag{12}$$

welcher alle Functionen (11), die von einander nur in den Parametern differiren, entsprechen. Umgekehrt kann man beweisen, dass eine jede Lösung dieser Differentialgleichung aus W durch besondere Wahl der Parameter entstammen kann. Nehmen wir an, dass U die Lösung dieser Gleichung wäre. Nehmen wir weiter an, dass im Punkte $x = a$ die Anfangswerthe von U

$$U_0, U_0', U_0'', \dots, U_0^{(k-1)}$$

wären; dann können wir im Allgemeinen die Werthe der k Parameter so bestimmen, dass in diesem Punkte die Anfangswerthe von W dieselben Werthe seien. Dann folgt aus der Gleichung (12), welche für $W^{(k)}$ eine algebraische Gleichung ist, dass die Werthe von $W^{(k)}$ und $U^{(k)}$ im Punkte $x = a$ auch übereinstimmen. Weiter folgt auch durch Differentiation von (12) dass die sämmtlichen Ableitungen von W und U im Punkte $x = a$ übereinstimmen, folglich sind die beiden Functionen identisch. Dadurch ist der verlangte Beweis geführt.

Wenn wir also die linke Seite der Gleichung (12) betrachten, oder wenn wir die Coefficienten dieser Gleichung

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_r$$

mit unbestimmten Coefficienten:

$$h_1, h_2, \ldots, h_r$$

addiren, dann erhalten wir in

$$\Phi = h_1\Phi_1 + h_2\Phi_2 + \cdots + h_r\Phi_r \tag{13}$$

eine Differentialfunction von $y_1, y_2, \ldots, y_n$, welche nur bei der vorgelegten Gruppe (10) invariant bleibt. —

4. *Die Parameter der rationalen Functionen.* Wenn eine rationale Function der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung formell bei einer linearen Gruppe mit k Parametern invariant bleibt, dann enthält die Function als Function der allgemeinsten Lösungen selbst $n^2 - k$ unabhängige Parameter. Um den Beweis dieser Behauptung zu führen, müssen wir der Uebersicht halber zuerst die rationalen ganzen Functionen von

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}$$

nach einem gewissen Princip ordnen. Ein Glied:

$$y_1^{(k_1)^{l_1}} y_2^{(k_2)^{l_2}} \ldots y_n^{(k_n)^{l_n}} \tag{14}$$

wo die Buchstaben k die Ordnung der Differentialquotienten, und die Buchstaben l Exponenten bedeuten, soll einem andern Glied

$$y_1^{(i_1)^{m_1}} y_2^{(i_2)^{m_2}} \ldots y_n^{(i_n)^{m_n}}$$

in der Anordnung vorangehen, wenn in der Reihe

$$k_1, k_2, \ldots, k_n$$

die erste, von

$$i_1, i_2, \ldots, i_n$$

verschiedene Zahl k_μ grösser als i_μ ist; und wenn die sämmtlichen Zahlen der zwei Reihen übereinstimmen, dann die erste, in der Reihe der Exponenten

$$l_1, l_2, \ldots, l_n$$

vorkommende, von

$$m_1, m_2, \ldots, m_n$$

resp. verschiedene Zahl l_r grösser als m_r ist.

Nach dieser Vereinbarung lässt sich eine rationale Function R in einer bestimmten Weise ordnen

$$R = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + \cdots + A_\varrho X_\varrho}{Y_1 + A_{\varrho+1} Y_2 + \cdots + A_{\varrho+\sigma-1} Y_\sigma},$$

wo die Symbole X und Y Ausdrücke von der Gestalt (14) bedeuten. Wenn wir jetzt die Gruppe von R bestimmen wollen, dann müssen wir statt y_i die allgemeinsten Lösungen

$$\bar{y}_i = \sum a_{ik} y_k$$

setzen. Dadurch erhalten wir

$$(15) \qquad \bar{R} = \frac{\mathsf{A}_1 X_1 + \mathsf{A}_2 X_2 + \cdots + \mathsf{A}_\varrho X_\varrho}{Y_1 + \mathsf{A}_{\varrho+1} Y_2 + \cdots + \mathsf{A}_{\varrho+\sigma-1} Y_\sigma}$$

wo die Coefficienten A bestimmte ganze algebraische Functionen der n^2 Grössen a_{ik} sind. Wenn die Gruppe von R k-gliedrig ist, dann lassen sich aus den $\varrho + \sigma - 1$ Gleichungen

$$(16) \qquad \mathsf{A}_i - A_i = 0$$

$n^2 - k$ Coefficienten der linearen Substitution als algebraische Functionen der übrigen bestimmen oder anders ausgedrückt: Es lassen sich von diesen $\varrho + \sigma - 1$ Gleichungen $n^2 - k$ so auswählen, z. B.

$$(17) \qquad \mathsf{A}_1 - A_1 = 0, \ldots, \mathsf{A}_{n^2-k} - A_{n^2-k} = 0$$

dass die linken Seiten einer jeden Gleichung in der Form:

$$(18) \quad \mathsf{A}_i - A_i = \lambda_{1i}(\mathsf{A}_1 - A_1) + \cdots + \lambda_{n^2-k,i}(\mathsf{A}_{n^2-k} - A_{n^2-k})$$

darstellbar ist, wo die Coefficienten λ im Allgemeinen von den n^2 Coefficienten a_{ik} abhängen. — Wenn wir also in die rechte Seite von (15) die Ausdrücke von A_i aus (18) einsetzen, dann erhalten wir $\bar{R}$ in einer Form, in welcher nur die $n^2 - k$ Parameter:

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_{n^2-k}$$

vorkommen.

Daraus folgt, dass, wenn wir aus dem Ausdruck von

$$\bar{R}, \bar{R}', \ldots, \bar{R}^{(n^2-k)}$$

diese $n^2 - k$ Parameter eliminiren, wir eine leicht zu bildende algebraische Differentialgleichung $n^2 - k^{\text{ter}}$ Ordnung für $\bar{R}$ erhalten.

Es ist dann nach dem Vorgange des Herrn Vessiot*) nachweisbar, dass diese Gleichung invariant bleibt bei der allgemeinen homogenen linearen Gruppe, folglich die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ gar nicht enthält.

*) Vessiot: Thèse 1892, p. 24.

5. *Dem Lagrange'schen entsprechender Satz.* Aus der Darstellung (15) lässt sich auch sehr einfach der Satz beweisen, welcher in dieser Theorie dem „Lagrange'schen" in der Theorie der algebraischen Gleichungen entspricht. Wenn nämlich S eine solche rationale Function der Fundamentallösungen bedeutet,

$$S = \frac{B_1 X_1 + B_2 X_2 + \cdots}{Y_1 + B_{\sigma+1} Y_2 + \cdots},$$

welcher dieselbe Gruppe entspricht, als der Function R, dann folgt, dass die, zur Bestimmung der Gruppe von S den Gleichungen (16) analoge Gleichungen

$$\text{(19)} \qquad \mathsf{B}_i - B_i = 0$$

auch aus den Gleichungen (17) folgen müssen, so dass also, ebenfalls, wie in (18) bei entsprechender Wahl der Indices

$$\mathsf{B}_i - B_i = \mu_{1i}(\mathsf{A}_1 - A_1) + \mu_{2i}(\mathsf{A}_2 - A_2) + \cdots + \mu_{n^2-k,i}(\mathsf{A}_{n^2-k} - A_{n^2-k})$$

ist. Wenn wir also in den Ausdruck von $\bar{S}$ diese Ausdrücke der Coefficienten B_i einsetzen, dann können wir aus

$$\bar{R},\ \bar{R}',\ldots,\bar{R}^{(n^2-k-1)},\ \bar{S}$$

die Coefficienten $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_{n^2-k}$ eliminiren; und da die letzte Gleichung in der Form

$$\bar{S}(\mathsf{A}_1\varphi_1 + \mathsf{A}_2\varphi_2 + \cdots + \mathsf{A}_{n^2-k}\varphi_{n^2-k}) = \mathsf{A}_1\psi_1 + \mathsf{A}_2\psi_2 + \cdots + \mathsf{A}_{n^2-k}\psi_{n^2-k}$$

darstellbar ist, wo die Functionen φ und ψ ganze rationale Differentialfunctionen von $y_1, y_2, \ldots$ sind, so enthält die bei der Elimination entstammende Resultante $\bar{S}$ in der ersten Ordnung, also

$$\bar{S} = F(\bar{R},\ \bar{R}',\ldots,\bar{R}^{(n^2-k-1)})$$

wo F eine rationale Function bedeutet. —

Wenn die Gruppe von S nur eine Untergruppe von R ist, dann ist die algebraische Mannigfaltigkeit, welche die Gruppe von S definirt, als Theil in der algebraischen Mannigfaltigkeit enthalten, welche die Gruppe von R bestimmt. Dann dienen also zur Bestimmung der Gruppe von S ausser den Gleichungen (17) noch gewisse andere von der Form (19), u. zw. wenn die Gruppe von S $k-l$-gliedrig ist; dann wird also diese Gruppe z. B. durch die Gleichungen

$$\mathsf{A}_1 - A_1 = 0, \ldots, \mathsf{A}_{n^2-k} - A_{n^2-k} = 0; \quad \mathsf{B}_1 - B_1 = 0, \ldots, \mathsf{B}_l - B_l = 0$$

bestimmt; woraus dann folgt, dass auch ausser (18) die Gleichungen bestehen müssen:

$$\mathsf{B}_i - B_i = \nu_{i1}(\mathsf{A}_1 - A_1) + \nu_{i2}(\mathsf{A}_2 - A_2) + \cdots + \nu_{i,n^2-k+l}(\mathsf{B}_l - B_l)$$
$$(i = l+1, l+2, \ldots)$$

und wenn wir diese Ausdrücke von B_i in $\bar{S}$ einsetzen, dann wird also $\bar{S}$ die $n^2 - k + l$ Parameter:

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n^2-k}, B_1, B_2, \ldots, B_l$$

enthalten, und diese Parameter können aus

$$\bar{R}, \bar{R}', \ldots, \bar{R}^{(n^2-k-1)}, \bar{S}, \bar{S}', \ldots, \bar{S}^{(l)}$$

eliminirt werden, wodurch wir eine algebraische Gleichung zwischen diesen Grössen erhalten, in welcher $S^{(l)}$ nur im ersten Grade vorkommt. Diese Resolvente ist, wie nach dem Vorgange des Herrn Vessiot zu beweisen ist, ebenfalls von den Lösungen $y_1, y_2, \ldots$ der gegebenen linearen Differentialgleichung unabhängig, allein durch die Coefficienten der Gleichung ausdrückbar. —

Budapest, im December 1896.

Ueber die Einfachheit der alternirenden Gruppe.

Von

Emanuel Beke in Budapest.

Die Wichtigkeit, welche die Einfachheit der alternirenden Gruppe in der Theorie der algebraischen Gleichungen besitzt, wird es wohl rechtfertigen, dass ich mir erlaube in den folgenden Zeilen einen neuen, einfachen Beweis dieses Satzes zu geben. Der Beweis geht von dem, von Herrn F. Klein*), durch eine directe Abzählung gegebenen Satz aus, dass die alternirende Gruppe von 5 Elementen einfach ist. Nehmen wir an, der Satz sei für n Elemente bewiesen. Seien nun die $n+1$ gegebenen Elemente:

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1},$$

dann beweisen wir zuerst, dass, wenn die alternirende Gruppe dieser Elemente, welche wir mit Γ_{n+1} bezeichnen wollen, eine invariante Untergruppe J besitzt, J nur solche Substitutionen enthalten kann, welche sämmtliche Elemente (1) umsetzen. — Denn wenn s und t solche Substitutionen sind, welche z. B. x_{n+1} nicht umsetzen, dann lässt auch st das Element x_{n+1} am Platze. Daraus folgt, dass diejenigen Subsitutionen der Gruppe J, welche x_{n+1} nicht umsetzen, eine Gruppe G bilden. Diese Gruppe wäre aber in der alternirenden Gruppe Γ_n der n ersten Elemente als invariante Untergruppe enthalten; denn wenn σ eine Substitution von Γ_n bedeutet, dann enthielte die transformirte Gruppe

$$\sigma G \sigma^{-1}$$

ebenfalls nur solche Substitutionen von J, welche x_{n+1} nicht umsetzen, folglich wäre

$$\sigma G \sigma^{-1} = G$$

bei einer jeden Substitution σ, also wirklich G eine invariante Untergruppe von Γ_n. G könnte also nach unserer Voraussetzung entweder 1 oder Γ_n selbst sein. Wenn aber G mit Γ_n identisch wäre, dann würde J die sämmtlichen Circularsubstitutionen dritter Ordnung der

*) Vorlesungen über das Ikosaeder p. 18.

n ersten Elemente enthalten, folglich würde auch J die Circularsubstitution $(x_1\, x_2\, x_{n+1})$ enthalten, welche z. B. aus $(x_1\, x_i\, x_k)$ durch Transformation mit

$$\sigma = (x_i x_2)\,(x_k x_{n+1})$$

entsteht, welche in Γ_{n+1} enthalten ist, wenn $n + 1 \geq 5$. Die Gruppe J wäre also Γ_{n+1} selbst. — Dadurch ist also bewiesen, dass die angebliche invariante Untergruppe J, wenn sie nicht die Identität ist, nur solche Substitutionen enthalten kann, welche sämmtliche Elemente umsetzen. Es sei nebenbei bemerkt, dass die Substitutionen von J gleichcyklisch sein müssten; denn wenn in den Cyklen von s nicht die gleiche Anzahl von Elementen vorhanden wäre, dann würde eine Potenz von s weniger als $n + 1$ Elemente umsetzen, ohne der Identität gleich zu sein.

Wir müssen nun zeigen, dass man aus einer jeden Substitution s von J durch Transformation und Multiplication eine Substitution herstellen kann, welche weniger als $n + 1$ Elemente umsetzt. Sei eine Substitution von J:

$$s = (x_1 x_{\alpha_1} \cdots)(\cdots)\cdots$$

Wenn wir s durch die in Γ_{n+1} enthaltene Substitution:

$$\sigma = (x_1\, x_{\alpha_1})\,(x_i x_k)$$

transformiren, dann erhalten wir die, ebenfalls in J enthaltene Substitution

$$t = (x_{\alpha_1} x_1 \cdots)(\cdots)\cdots,$$

welche von s immer verschieden ist, ausgenommen den Fall, wo

$$s = (x_1\, \alpha_{\alpha_1})\,(x_i x_k)$$

ist und die Anzahl der Elemente nicht grösser ist als 4.

Das Product st lässt x_1 an Ort und Stelle, ohne sich auf die Identität zu reduciren. Die Gruppe J würde also eine Substitution enthalten, welche nicht alle $n + 1$ Elemente umsetzt, folglich muss J entweder die Identität, oder die Gruppe Γ_{n+1} selbst sein. Dadurch ist also die Einfachheit der alternirenden Gruppe bei mehr als 5 Elementen bewiesen. —

Budapest im März 1897.

Beweis einer Formel des Herrn Sonine.

Von

E. Gubler in Zürich.

In seiner trefflichen Arbeit „Recherches sur les fonctions cylindriques“ Math. Annalen Band XVI gelangt Sonine auf pag. 18 zu folgender Gleichung

$$\overset{n}{J}(-ic)=\frac{(-i)^n}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$=\frac{(-i)^n}{\pi}\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi+\int\limits_1^{\infty}\sin\left[\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}\right]s^{-n-1}\, ds\right\},$$

woraus sich ergiebt

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi=(-1)^n\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi$$

$$=\int\limits_1^{\infty}\sin\left[\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}\right]s^{-n-1}ds.$$

Er fügt hinzu: „La démonstration directe de cette égalité singulière de deux intégrales définies paraît presque impossible.“ Einen solchen Beweis will ich hier mittheilen.

Es sei

$$A=\int\limits_1^{\infty}\sin\left[\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}\right]s^{-n-1}ds,\qquad u=\frac{c}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)-\frac{n\pi}{2}.$$

Da $\sin u=\frac{1}{2i}e^{+iu}-\frac{1}{2i}e^{-iu}$, so zerlege ich dieser Trennung entsprechend das Integral A in zwei Theile

$$A=I+II.$$

In I setze ich $is = t$, $\log s = \log t - \frac{i\pi}{2}$; $\log t$ soll reell sein, wenn t in der positiven Axe liegt. Da

$$s^{-n-1} = e^{i(n+1)\frac{\pi}{2}}\, t^{-n-1}, \quad ds = e^{-\frac{i\pi}{2}}\, dt,$$

so folgt

$$I = \frac{1}{2i}\int_{i}^{i\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\, t^{-n-1}\, dt,$$

Am westlichen Horizont verschwindet das Integral; man kann daher einen Integrationsweg von $i\infty$ bis $-\infty$ zulegen und dann geradlinig von i nach $-\infty$ integriren. Das Integral wird dadurch convergenter. Man hat also

$$I = \frac{1}{2i}\int_{i}^{-\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\, t^{-n-1}\, dt;$$

II ist conjugirt, somit

$$II = -\frac{1}{2i}\int_{-i}^{-\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\, t^{-n-1}\, dt = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{-i} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\, t^{-n-1}\, dt.$$

Zur Verbindung beider Wege dient ein rechtläufiger Halbkreis um 0, der von $-i$ durch 1 nach i geht. Setzt man auf diesem Halbkreis $t = e^{i\varphi}$, so ist das noch fehlende Integral

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi - in\varphi}\, d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi$$

Man bekommt somit

$$A + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{c\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2i}\int_{-\infty} e^{\frac{c}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}\, t^{-n-1}\, dt = \pi e^{-i\frac{n\pi}{2}}\, \overset{n}{J}(ic),$$

wodurch die angeführten Gleichungen Sonine's bewiesen sind.

Zürich, December 1896.

Neue Eigenschaften des Strahlencomplexes zweiten Grades.

Von

Th. Reye in Strassburg i. E.

In einer meiner analytisch-geometrischen Publicationen v. J. 1876 (in Crelle's Journal 82, S. 192) ergab sich beiläufig ein merkwürdiger Zusammenhang des quadratischen Strahlencomplexes mit gewissen quadratischen Mannigfaltigkeiten von ∞^8 mit dem Complexe covarianten Flächen zweiten Grades. Daraus aber lassen sich neue Eigenschaften des quadratischen Strahlencomplexes ableiten, die ich, angeregt durch den reichhaltigen dritten Theil von Sturm's Liniengeometrie, hier in Kürze zusammenstelle. Der Complex braucht nicht der allgemeine zweiten Grades zu sein; er kann einzelne und sogar unendlich viele Doppelstrahlen haben, und in einem sehr speciellen Falle aus den Tangenten eines Ellipsoides, Paraboloides oder Hyperboloides bestehen. Wir setzen aber voraus, dass die Kegel des Complexes nicht alle eine Fläche Φ^2 zweiter Classe stützen, d. h. nicht alle Poltetraedern von Φ^2 umschrieben sind, und dass seine ebenen Complexcurven nicht alle auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung ruhen, d. h. nicht alle Poltetraedern von F^2 eingeschrieben sind. Und insbesondere sollen weder die C.-Kegel alle durch einen Punkt gehen, noch die C.-Curven alle eine Ebene berühren. Dann gelten für den quadratischen Complex u. a. folgende Sätze:

Die Ebenen solcher Complexcurven, die auf einer beliebig gegebenen Fläche F^2 zweiter Ordnung ruhen, umhüllen eine Fläche Φ^2 zweiter Classe. Und umgekehrt: Die C.-Curven, deren Ebenen eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Classe berühren, ruhen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung. Wenn die Fläche Φ^2 eine Flächenschaar beschreibt, so beschreibt die entsprechende Fläche F^2 einen Flächenbüschel, und umgekehrt; dieser F^2-Büschel aber ist zu der Flächenschaar projectiv und enthält i. A. zwei Flächen F^2, die ihre entsprechenden Flächen Φ^2 stützen, d. h. Poltetraedern der entsprechenden Φ^2 umschrieben sind. Ueberhaupt giebt es ∞^8 Flächen F^2, die ihre entsprechenden Flächen Φ^2 stützen, und zwar bilden sie ein System zweiten Grades. Dieses quadratische F^2-System achter Stufe aber enthält alle ∞^3 zweifachen

Ebenen des Raumes und die ∞^5 Ebenenpaare, aus deren Doppellinien der quadratische Complex besteht. Den Flächen des F^2-Systemes entsprechen die Flächen Φ^2 einer anderen achtfach unendlichen Mannigfaltigkeit, eines quadratischen „Φ^2-Gewebes“. Dieses Gewebe enthält jede Fläche zweiter Classe, die auf ihrer entsprechenden F^2 ruht, und insbesondere jede ebene Complexcurve.

Die ∞^8 Flächen des quadratischen F^2-Systemes stehen zu dem quadratischen Complexe in der invarianten Beziehung, dass unter ihren Poltetraedern je ∞^1 „Complextetraeder“ vorkommen, d. h. solche, deren Kanten aus Complexstrahlen bestehen. Die ∞^8 Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes aber sind je ∞^1 Complextetraedern eingeschrieben und gleichfalls mit dem Complexe covariant.

Eine beliebige Fläche F^2 zweiter Ordnung ist bezüglich des quadratischen F^2-Systemes ∞^8 anderen Flächen $F_1{}^2$ conjugirt, d. h. sie ist von ihnen harmonisch getrennt durch je zwei Flächen des Systemes, die mit ihr in einem F^2-Büschel liegen. Ebenso ist eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Classe ∞^8 anderen $\Phi_1{}^2$, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden, conjugirt bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes. Sind nun F^2 und Φ^2 zwei homologe, durch den quadratischen Complex einander zugewiesene Flächen, so stützt F^2 alle diese Flächen $\Phi_1{}^2$, die der Φ^2 conjugirt sind bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes, und zugleich ruht Φ^2 auf allen den ∞^8 Flächen $F_1{}^2$, die der F^2 conjugirt sind bezüglich des quadratischen F^2-Systemes. Ich nenne F^2 die Polare von Φ^2 bezüglich des Φ^2-Gewebes, und Φ^2 die Polare von F^2 bezüglich des quadratischen F^2-Systemes. Von zwei bezüglich des Systemes conjugirten Flächen F^2, $F_1{}^2$ stützt also jede die Polare der andern; ihre Polaren Φ^2, $\Phi_1{}^2$ aber sind bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes conjugirt, und jede von ihnen ruht auf der Polare der andern bezüglich des Gewebes. Sich selbst conjugirt sind nur die ∞^8 Flächen des quadratischen F^2-Systemes bezw. Φ^2-Gewebes.

Diese letzten Sätze sind in der a. a. O. entwickelten Polarentheorie der quadratischen F^2-Systeme und Φ^2-Gewebe achter Stufe enthalten. Am gleichen Orte (Crelle 82, S. 192) habe ich die Gleichung unseres durch den quadratischen Complex bestimmten F^2-Systemes aufgestellt und bewiesen, dass dieses System alle zweifachen Ebenen und die ∞^5 Ebenenpaare enthält, deren Doppellinien Complexstrahlen sind, und dass die Polare einer zweifachen Ebene mit deren Complexcurve zusammenfällt. Daraus aber und aus den invarianten Beziehungen, in denen apolare Flächen zweiten Grades zu einander stehen, ergeben sich alle unsere übrigen Sätze. Statt ihrer wollen wir aber lieber die folgenden zu ihnen reciproken Eigenschaften des quadratischen Complexes beweisen.

Die Mittelpunkte der Complexkegel, die eine beliebige Fläche Φ^2

zweiter Classe stützen, liegen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung; und die Complexkegel, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen F^2 liegen, stützen eine Φ^2. Von den auf F^2 liegenden ∞^1 singulären Punkten zerfallen die C.-Kegel in je zwei Ebenen, die nach Φ^2 conjugirt sind. Diese Φ^2 ist keineswegs mit der Fläche identisch, die vorhin der Fläche F^2 entsprach. Beschreibt F^2 einen Flächenbüschel, so beschreibt die entsprechende Fläche Φ^2 eine zu dem Büschel projective Flächenschaar und kommt i. A. zweimal in solche Lage, dass sie auf ihrer entsprechenden F^2 ruht. Demnach bilden die Flächen Φ^2, die auf ihren entsprechenden F^2 ruhen, wiederum ein quadratisches Φ^2-Gewebe achter Stufe, und ihnen entsprechen die Flächen eines quadratischen F^2-Systemes achter Stufe. Das quadratische Φ^2-Gewebe enthält die ∞^3 zweifachen Punkte des Raumes und die ∞^5 Punktepaare, die auf je einem Strahle des Complexes liegen; das quadratische F^2-System aber enthält alle Complexkegel und jede Fläche F^2 zweiter Ordnung, die ihre entsprechende Φ^2 stützt.

Von den vorhin besprochenen quadratischen Flächenmannigfaltigkeiten sind diese beiden verschieden, ihre ∞^8 Flächen aber sind wiederum mit dem quadratischen Complexe covariant. Den Flächen des quadratischen F^2-Systemes können nämlich je ∞^1 Complextetraeder eingeschrieben werden, und die Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes haben je ∞^1 Complextetraeder zu Poltetraedern. Die nicht singulären Flächen dieses Φ^2-Gewebes sind mit denen des vorhin besprochenen quadratischen F^2-Systemes identisch, ausser ihnen enthält das Gewebe noch ∞^7 Curven zweiter Classe, ∞^5 Punktepaare und ∞^3 zweifache Punkte, das System dagegen ∞^7 Kegel zweiter Ordnung, ∞^5 Ebenenpaare und ∞^3 zweifache Ebenen.

Von den beiden einander entsprechenden Flächen F^2, Φ^2 ist F^2 die Polare von Φ^2 bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes und Φ^2 die Polare von F^2 bezüglich des zugehörigen quadratischen F^2-Systemes in demselben Sinne wie vorhin. Von zwei bezüglich des Gewebes conjugirten Flächen Φ^2, $\Phi_1{}^2$ ruht also jede auf der Polare der anderen, und ihre Polaren F^2, $F_1{}^2$ sind conjugirt bezüglich des F^2-Systemes. Sich selbst conjugirt sind wieder nur die ∞^8 Flächen des F^2-Systemes und des Φ^2-Gewebes, und nur diese Flächen sind zu ihren entsprechenden apolar.

Um nun diese Eigenschaften des quadratischen Complexes zu begründen, gehen wir aus von folgenden Sätzen, die schon a. a. O. (Crelle 82, S. 193) bewiesen sind:

Durch den quadratischen Strahlencomplex ist ein quadratisches Φ^2-Gewebe achter Stufe nebst dem zugehörigen quadratischen F^2-System achter Stufe bestimmt. Das Φ^2-Gewebe enthält alle zweifachen Punkte des Raumes und alle auf je *einem Complexstrahle liegenden Punktepaare, das F^2-System aber enthält u. a. alle Kegel des Complexes. Jeder Complexkegel ist die Polare seines Mittelpunktes bezüglich des Φ^2-Gewebes.**)

Wenn also eine Fläche Φ^2 zweiter Classe sich auf einen zweifachen Punkt reducirt, so geht ihre Polare F^2 bezüglich des quadratischen Φ^2-Gewebes über in den Complexkegel dieses Punktes. Mit anderen Worten: Der zweifache Punkt ist allen auf seinem C.-Kegel ruhenden Flächen $\Phi_1{}^2$ zweiter Classe conjugirt bezüglich des Φ^2-Gewebes, und durch ihn gehen alle Polaren $F_1{}^2$ dieser Flächen $\Phi_1{}^2$. Die Polare F^2 einer beliebigen Φ^2 bezüglich des Gewebes enthält demnach die Mittelpunkte aller C.-Kegel, auf denen Φ^2 ruht, d. h. denen Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben werden können. Von dieser F^2 aber ist Φ^2 die Polare bezüglich des quadratischen F^2-Systemes (Crelle 82, S. 184); und wenn Φ^2 eine Flächenschaar beschreibt, so beschreibt F^2 einen Flächenbüschel, der zu der Schaar projectiv ist (Crelle 82, S. 178). Die von uns aufgestellten Eigenschaften des quadratischen Complexes sind damit bewiesen bis auf seine invarianten

---

*) Das quadratische Φ^2-Gewebe hat die Gleichung:

(1) $$\sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} a_{il} & a_{im} \\ a_{kl} & a_{km} \end{vmatrix} = 0, \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4),$$

wenn der quadratische Strahlencomplex und eine beliebige Fläche Φ^2 zweiter Classe dargestellt werden durch:

(2) $$\sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = 0$$

und

(3) $$\sum a_{ik} \xi_i \xi_k = 0.$$

Hierin bezeichnen $a_{ik} = a_{ki}$ und $C_{ik,lm} = C_{lm,ik} = -C_{ki,lm}$ Constante.

Die Fläche Φ^2 zerfällt in zwei Punkte x, y, wenn:

(4) $$2a_{ik} = x_i y_k + x_k y_i \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

ist; durch die Substitution (4) aber geht (1) in (2) über, und das Φ^2-Gewebe enthält demnach alle auf je einem Complexstrahle liegenden Punktepaare und insbesondere alle zweifachen Punkte. Bezüglich des Gewebes (1) sind zwei Flächen zweiter Classe conjugirt, wenn ihre Coordinaten a_{ik} und b_{ik} der Gleichung:

(5) $$\sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} a_{il} & b_{im} \\ a_{kl} & b_{km} \end{vmatrix} + \sum C_{ik,lm} \begin{vmatrix} b_{il} & a_{im} \\ b_{kl} & a_{km} \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Reduciren sich die beiden Flächen auf zweifache Punkte x, y, so wird $a_{ik} = x_i x_k$ und $b_{ik} = y_i y_k$; die Gleichung (5) aber geht dann in (2) über, und die Polare des zweifachen Punktes x fällt folglich mit dessen Complexkegel zusammen.

Beziehungen zu den ∞^8 Flächen des F^2-Systemes und des Φ^2-Gewebes, auf die wir hernach zurückkommen werden.

Wie construirt man nun aber mit Hülfe des quadratischen Complexes zu einer beliebigen Fläche Φ^2 zweiter Classe die entsprechende Fläche F^2 zweiter Ordnung? Der Beantwortung dieser Frage schicken wir einige Bemerkungen über apolare Flächen zweiten Grades voraus, die uns das Verständniss der betreffenden Constructionen erleichtern werden. Ist:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die Gleichung einer veränderlichen Ebene ξ in homogenen Punktcoordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, so können wir eine Φ^2 und eine F^2 darstellen durch:

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + \cdots + 2a_{34}\xi_3\xi_4 + a_{44}\xi_4^2 = 0$$

und

$$\alpha_{11}x_1^2 + 2\alpha_{12}x_1x_2 + \cdots + 2\alpha_{34}x_3x_4 + \alpha_{44}x_4^2 = 0.$$

Diese beiden Flächen aber nenne ich apolar zu einander und sage, die Fläche F^2 zweiter Ordnung stützt oder trägt die Fläche Φ^2 zweiter Classe, und Φ^2 ruht oder stützt sich auf F^2, wenn die Coefficienten ihrer Gleichungen der bilinearen Gleichung:

$$a_{11}\alpha_{11} + 2a_{12}\alpha_{12} + \cdots + 2a_{34}\alpha_{34} + a_{44}\alpha_{44} = 0$$

genügen (vgl. Crelle 82, S. 1 und 64).

Zu einer Fläche F^2 oder Φ^2 zweiten Grades sind demnach ∞^8 Flächen Φ^2 resp. F^2 apolar, die eine lineare Mannigfaltigkeit bilden. Ein F^2-Büschel enthält nur eine Fläche, die zu einer gegebenen Φ^2 apolar ist, falls nicht alle seine Flächen diese Φ^2 stützen. Ist ein F^2-Büschel projectiv zu einer Φ^2-Schaar, so enthält er i. A. zwei Flächen F^2, die ihre homologen Flächen Φ^2 stützen. Eine Fläche F^2 trägt jeden zweifachen Punkt, der auf ihr liegt, und jedes Punktepaar, dessen Punkte conjugirt sind bezüglich der F^2; eine Fläche Φ^2 aber stützt sich auf jede sie berührende zweifache Ebene und auf jedes Ebenenpaar, dessen Ebenen nach Φ^2 conjugirt sind. Dieses alles folgt leicht aus der bilinearen Bedingungsgleichung.

Jede Fläche F^2, die einem Poltetraeder einer Fläche Φ^2 umschrieben ist, stützt diese Φ^2 (vgl. Crelle 78, S. 345), und jede Φ^2, die einem Poltetraeder einer F^2 eingeschrieben ist, ruht auf F^2; einer F^2 aber, die eine Φ^2 stützt, können dreifach unendlich viele Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben, und der Φ^2 können zugleich ∞^3 Poltetraeder von F^2 umgeschrieben werden. Ist Φ^2 eine *Curve* zweiter Classe, so können den zu ihr apolaren F^2 je ∞^1 Poldreiecke der Curve eingeschrieben werden, und die Curve stützt sich auf die in ihrer Ebene liegenden Schnittcurven dieser F^2. Ist F^2 ein Kegel zweiter Ordnung, so können den zu F^2 apolaren Φ^2 je ∞^1 Poldreikante des Kegels umschrieben werden, und der Kegel ist zu den mit ihm concentrischen Tangentenkegeln dieser Φ^2 apolar.

Die Kegel des quadratisches Complexes, bezüglich deren zwei beliebige Punkte P, Q conjugirt sind, stützen das Punktepaar P, Q, und ihre Mittelpunkte liegen demnach auf einer durch P und Q gehenden Fläche zweiter Ordnung F^2, wie schon Battaglini gefunden hat. Diese Polare F^2 des Punktepaares aber enthält die biquadratischen Schnittlinien von je zwei Complexkegeln, deren Mittelpunkte auf der Geraden PQ liegen und durch P und Q harmonisch getrennt sind; denn die C.-Kegel der Punkte dieser Schnittlinien trennen P von Q harmonisch. Ueberhaupt schneiden sich solche C.-Kegel, deren Mittelpunkte in einer geraden Involution einander zugeordnet sind, paarweise in Linien, deren Ort eine F^2 ist, mögen nun die Doppelpunkte P, Q der Involution reell oder imaginär sein. Damit ist von der Polare F^2 eines Punktepaares P, Q eine Construction gegeben.

Wenn das Punktepaar P, Q auf einem Complexstrahle liegt, so geht seine Polare F^2 durch diesen Strahl, trägt also das Paar und ist in dem quadratischen F^2-System achter Stufe enthalten; denn in diesem Falle bestehen jene auf ihr liegenden biquadratischen Linien aus dem Strahle PQ und je einer cubischen Raumcurve. Dass das quadratische Φ^2-Gewebe 8. St. jedes auf einem Complexstrahle liegende Punktepaar enthält, folgt hieraus wiederum. Ist PQ ein singulärer Complexstrahl, so ist F^2 ein Kegel des F^2-Systemes; denn alsdann berühren die durch PQ gehenden C.-Kegel sich und die zugehörige singuläre Ebene längs PQ, jene biquadratischen Schnittlinien zerfallen in die zweifache Gerade PQ und je einen Kegelschnitt, und ihr geometrischer Ort F^2 berührt die singuläre Ebene längs PQ. Das quadratische F^2-System enthält demnach einen Bündel von ∞^2 Kegeln, die sich längs PQ berühren, und unter ihnen ∞^1 Ebenenpaare, die aus der singulären und je einer Ebene einer gewissen Geraden bestehen.

Ist Φ^2 eine beliebige Curve zweiter Classe, so liegen auf ihrer Polare F^2 die Mittelpunkte aller Complexkegel, denen Poldreiecke der Curve eingeschrieben werden können. Insbesondere liegen also auf F^2 die acht Schnittpunkte von je drei C.-Kegeln, deren Mittelpunkte ein Poldreieck von Φ^2 bilden. Wenn die drei nach Φ^2 conjugirten Mittelpunkte oder wenn zwei von ihnen ihre Lage ändern, so beschreiben die Schnittpunkte der drei C.-Kegel die Fläche F^2 bezw. eine biquadratische Raumcurve auf F^2. Eine Construction dieser Polare F^2 ist damit gegeben*).

*) Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Complexkegel liegen, beiläufig bemerkt, auf einer Fläche zweiter Ordnung, nämlich auf der Polare des unendlich fernen imaginären Kugelkreises.

Die Fläche F^2 enthält die Schnittpunkte von je zwei Complexstrahlen, die bezüglich der Curve Φ^2 conjugirt sind. Sie ist somit einem Poldreieck von Φ^2 umschrieben, wenn dessen drei Seiten aus Complexstrahlen bestehen. In diesem Falle also stützt F^2 die Curve Φ^2 und ist in dem quadratischen F^2-System achter Stufe enthalten; Φ^2 aber ist eine singuläre Fläche des quadratischen Φ^2-Gewebes. Zugleich stützt der Kegelschnitt Φ^2 die Complexcurve seiner Ebene, weil dieser Curve eines seiner Poldreiecke umschrieben ist, und weil *ihm* daher Poldreiecke der C.-Curve eingeschrieben werden können*). Das quadratische Φ^2-Gewebe achter Stufe enthält also jeden Kegelschnitt, der irgend eine Complexcurve stützt, d. h. einem Poldreieck der C.-Curve umschrieben ist. Und jede nicht zerfallende Curve des Gewebes stützt die in ihrer Ebene liegende Complexcurve. Damit sind die ∞^7 singulären Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes bestimmt, in jeder Ebene ∞^4.

Ist Φ^2 eine Complexcurve, so liegt sie auf ihrer Polare F^2, weil die C.-Kegel ihrer Punkte durch je eine ihrer Tangenten gehen und die Curve stützen. Von den ∞^3 Complexcurven sind nur die ∞^2 zerfallenden in dem quadratischen Φ^2-Gewebe enthalten; ihre Polaren sind Kegel des quadratischen F^2-Systemes.

Die Polare einer beliebigen Fläche Φ^2 zweiter Classe geht durch jeden Schnittpunkt von vier Complexkegeln, deren Mittelpunkte A, B, C, D ein Poltetraeder von Φ^2 bilden; denn der C.-Kegel eines solchen Schnittpunktes ist dem Poltetraeder umschrieben, stützt also die Fläche Φ^2. Allerdings haben vier C.-Kegel i. A. keinen Punkt gemein; aber wir können das Poltetraeder $ABCD$ von Φ^2 so verändern, dass ihm ein C.-Kegel umschrieben werden kann. Wir lassen die nach Φ^2 conjugirten Eckpunkte A, B auf einer Geraden g_1, die Eckpunkte B, D aber auf deren Polare g_2 je eine Involution conjugirter Punkte beschreiben. Dann beschreibt die Schnittlinie der C.-Kegel von A und B (resp. von C und D), wie vorhin bewiesen wurde, eine Fläche $F_1{}^2$ (resp. $F_2{}^2$) zweiter Ordnung, nämlich die Polare des Punktepaares, welches die Gerade g_1 (resp. g_2) mit Φ^2 gemein hat. Die Schnittpunkte von $F_1{}^2$ und $F_2{}^2$ aber sind die Mittelpunkte von C.-Kegeln, denen je ein Poltetraeder $ABCD$ von Φ^2 mit den Gegenkanten g_1, g_2 eingeschrieben ist. Folglich schneiden sich die Polaren der Punktepaare, welche irgend zwei nach Φ^2 polare Gerade mit der Fläche Φ^2 gemein haben, auf der Polare F^2 von Φ^2. Eine Construction der Polare einer beliebigen Fläche zweiter Classe ist damit gegeben.

Ist A der Pol einer Ebene α in Bezug auf Φ^2, so schneiden sich

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl., I, S. 223.

der Complexkegel von A und die Polare des in α liegenden Kegelschnittes von Φ^2 in einer biquadratischen Raumcurve, die gleichfalls auf der Polare von Φ^2 liegt. Der Beweis ist dem eben geführten analog.

Ein Tetraeder, dessen sechs Kanten in dem quadratischen Complex enthalten sind, nannten wir vorhin ein „Complextetraeder". Wenn eine Fläche Φ^2 zweiter Classe irgend ein Complextetraeder zum Poltetraeder hat, so ist sie in dem quadratischen Φ^2-Gewebe, und ihre Polare F^2 ist in dem quadratischen F^2-System achter Stufe enthalten; denn ihre Polare ist dem Poltetraeder umschrieben, stützt also die Fläche Φ^2. Das quadratische Φ^2-Gewebe enthält also die lineare Mannigfaltigkeit der ∞^3 Flächen zweiter Classe, die ein beliebiges Complextetraeder zum Poltetraeder haben, darunter dessen vier Eckpunkte als zweifache Punkte. Das quadratische F^2-System enthält die ∞^3 dem Complextetraeder umschriebenen Polaren dieser Φ^2; diese Polaren aber bilden ein F^2-Gebüsch, welches die C.-Kegel der vier Eckpunkte enthält und durch sie linear bestimmt ist.

Der quadratische Complex enthält die Kanten von ∞^6 Tetraedern. Um nämlich eines dieser Complextetraeder zu construiren, kann man einen Eckpunkt A ganz beliebig, den zweiten B beliebig auf dem C.-Kegel von A und den dritten C irgendwo auf der cubischen Raumcurve annehmen, in welcher die C.-Kegel von A und B sich abgesehen von der Geraden AB schneiden. Der Complexkegel von C hat mit dieser Raumcurve ausser A, B und C zwei Punkte D gemein, die mit A, B und C je ein C.-Tetraeder bilden.

Die ∞^6 Complextetraeder sind Poltetraeder von je ∞^3 Flächen zweiter Classe, die alle in dem quadratischen Φ^2-Gewebe enthalten sind. Weil aber das Gewebe nicht aus ∞^9, sondern nur aus ∞^8 Flächen besteht, so erhalten wir seine Flächen je ∞^1-mal mittelst der Complextetraeder. Die Flächen des quadratischen Φ^2-Gewebes haben demnach je ∞^1 Complextetraeder zu Poltetraedern, und die Flächen des quadratischen F^2-Systemes sind je ∞^1 Complextetraedern umgeschrieben. Damit sind auch die invarianten Beziehungen des quadratischen Complexes zu diesen ∞^8 Flächen zweiten Grades bewiesen.

Von den Complextetraedern gelten u. a. folgende leicht zu beweisende Sätze. Ein beliebiger Punkt A ist Eckpunkt von ∞^3 Complextetraedern; in diesen liegen ihm die Berührungsebenen α einer Fläche zweiter Classe gegenüber, und zwar jede Ebene α in ∞^1 C.-Tetraedern, deren übrige Ebenen einen Kegel zweiter Classe umhüllen und deren übrige Eckpunkte in α auf einem Kegelschnitt liegen. Wenn der C.-Kegel von A in zwei Ebenen zerfällt, so reducirt sich die Fläche zweiter Classe auf zwei Punkte dieser Ebenen. Ein nicht durch A gehender Complexstrahl ist Kante von zwei der ∞^3 Complextetraeder;

er schneidet den C.-Kegel von A in zwei gemeinschaftlichen Eckpunkten dieser Tetraeder.

Eine beliebige Ebene α ist Seitenfläche von ∞^3 Complextetraedern; in diesen liegen der Ebene die Punkte A einer Fläche zweiter Ordnung gegenüber, und zwar jeder Punkt A in ∞^1 Tetraedern, deren übrige Eckpunkte wieder in α auf einem Kegelschnitt liegen, u. s. w. Ein Complexstrahl, der nicht in α liegt, ist Kante von zwei der ∞^3 Tetraeder. Die Mittelpunkte der Complexkegel, denen Tangentendreiecke einer gegebenen Complexcurve eingeschrieben werden können, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung. Diese Fläche zerfällt in zwei Ebenen, wenn die C.-Curve sich auf zwei Punkte reducirt.

Ein beliebiger Complexstrahl k ist Kante von ∞^3 Complextetraedern; in diesen liegen der Kante k die Strahlen k_1 einer Congruenz zweiter Ordnung und zweiter Classe gegenüber, und zwar jeder Strahl k_1 in ∞^1 Tetraedern, deren übrige Kanten auf einer Fläche vierten Grades, und deren Eckpunkte auf k und k_1 in zwei Involutionen liegen. Die Congruenz besteht aus den gemeinschaftlichen Strahlen des quadratischen und eines linearen Complexes. Ein beliebiger Punkt ist Eckpunkt, und eine beliebige Ebene ist Fläche von zwei der ∞^3 Complextetraeder. Ein mit k incidenter C.-Strahl l ist Kante von ∞^1 der C.-Tetraeder; in diesen liegen der Kante k (oder l) die Strahlen einer Regelfläche vierten Grades gegenüber, die l (resp. k) zur Doppelpunktsgeraden hat; ferner liegen dem Endpunkte kl die Ebenen eines biquadratischen Ebenenbüschels, und der Ebene kl die Punkte einer biquadratischen Raumcurve gegenüber. In dieser Raumcurve schneiden sich der C.-Kegel des Punktes kl und die zu der Ebene kl gehörige Fläche zweiter Ordnung.

Die Complexkegel der Punkte von k schneiden sich bekanntlich in dem Complexstrahle k und in vier Punkten A; von einem beliebigen dieser Punkte A zerfällt aber der C.-Kegel in zwei Ebenen, von denen die eine $\varkappa$ durch k, die andere β nicht durch k geht. Jeder Punkt P von β nun bildet mit A und den beiden Punkten, die sein C.-Kegel mit k gemein hat, ein Complextetraeder, worin k und AP zwei Gegenkanten sind. Und wenn P in β einen Strahl des Büschels A durchläuft, so beschreiben die übrigen vier Kanten des C.-Tetraeders die Ebene Ak und eine cubische Regelfläche. Die quadratische Congruenz der Strahlen k_1, die dem C.-Strahle k in je ∞^1 Complextetraedern gegenüberliegen, enthält demnach vier Strahlenbüschel (A, β) erster Ordnung.

Die vier singulären Punkte A bilden ein Tetraeder, dessen Ebenen wir mit α bezeichnen. Eine beliebige der vier Ebenen α schneidet k in einem Punkte Q, dessen C.-Kegel drei Strahlen QA mit α gemein hat und folglich in α und eine durch k gehende Ebene $\varkappa$ zerfällt.

Die Complexcurve in α aber reducirt sich auf Q und einen anderen Punkt B, durch den von drei Büscheln (A, β) Strahlen gehen. Der C.-Kegel von B zerfällt deshalb in α und eine andere Ebene, deren Schnittpunkt mit k wir P nennen. Dann bilden B, P und Q mit jedem Punkte R, den der C.-Kegel von P mit α gemein hat, ein C.-Tetraeder, worin k und BR zwei Gegenkanten sind. Die quadratische Congruenz der Strahlen k_1 enthält also auch vier Strahlenbüschel (B, α) erster Ordnung.

Nicht nur liegen die vier Ebenen α den vier Punkten A in einem Tetraeder gegenüber, sondern ebenso die Ebenen β den Punkten B in einem zweiten Tetraeder. Diese beiden Tetraeder aber sind, wie aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, einander um- und zugleich eingeschrieben. Die acht Strahlenbüschel (A, β) und (B, α) liegen in dem linearen Complex, der mit dem quadratischen die Congruenz der Strahlen k_1 gemein hat; und fünf ihrer Strahlen bestimmen ihn.

Wenn k ein singulärer Complexstrahl ist, so berühren sich in ihm die C.-Kegel aller seiner Punkte. Diese Kegel durchdringen sich deshalb zu zweien in Kegelschnitten, deren Ebenen alle durch eine Gerade l gehen. Die Complexstrahlen k_1 aber, die dem singulären Strahle k in je ∞^1 Complextetraedern gegenüberliegen, schneiden alle die Gerade l, und ihre quadratische Congruenz ist demnach in dem speciellen Complexe der mit l incidenten Strahlen enthalten.

Wenn insbesondere der quadratische Complex aus den Tangenten einer Fläche G^2 zweiten Grades besteht, so sind alle seine Strahlen singulär, die Gegenkanten seiner ∞^6 Complextetraeder berühren G^2 und sind zugleich conjugirt in Bezug auf G^2, und von zwei Gegenkanten k, k_1 schneidet jede die Polare der anderen bezüglich G^2. Von den Tangentenkegeln der Fläche G^2 zweiten Grades gelten u. a. die folgenden Sätze, denen andere über die Kegelschnitte der Fläche reciprok gegenüberstehen.

Die Mittelpunkte solcher Tangentenkegel von G^2, denen Poltetraeder einer gegebenen Fläche Φ^2 zweiter Classe eingeschrieben werden können, liegen auf einer Fläche F^2 zweiter Ordnung. Wenn Φ^2 eine Flächenschaar beschreibt, so beschreibt F^2 einen Flächenbüschel, und umgekehrt; der Büschel ist zu der Schaar projectiv. Es giebt ∞^8 Flächen Φ^2, die auf ihren entsprechenden Flächen F^2 ruhen, jede von ihnen hat ∞^1 Poltetraeder, deren Kanten die Fläche G^2 berühren. Diese ∞^8 mit G^2 covarianten Flächen zweiter Classe bilden ein quadratisches Φ^2-Gewebe, das auch die ∞^5 auf je einer Tangente von G^2 liegenden Punktepaare enthält. Andere singuläre Flächen des Gewebes reduciren sich auf die ∞^7 Kegelschnitte, denen Poldreiecke von G^2 eingeschrieben werden können.

Die biquadratische Schnittlinie von zwei Tangentenkegeln der

Fläche G^2 beschreibt eine Fläche F^2 zweiter Ordnung, wenn die Mittelpunkte der Kegel eine gerade Involution beschreiben. Die beiden Doppelpunkte der Involution liegen auf F^2, ihr gerader Träger aber nur dann, wenn er die Fläche G^2 berührt. In diesem besonderen Falle ist F^2 ein Kegel.

Die acht Schnittpunkte von drei Tangentenkegeln der Fläche G^2 beschreiben eine Fläche zweiter Ordnung, wenn die Mittelpunkte der Kegel sich so bewegen, dass sie in jeder ihrer Lagen ein Poldreieck eines gegebenen reellen oder imaginären Kegelschnittes bilden.

Von den Kegeln eines beliebigen quadratischen Complexes seien zum Schlusse noch folgende Sätze hervorgehoben. Die ∞^3 Complexkegel bilden ein F^2-System dritter Stufe achten Grades, weil drei beliebige Flächen Φ^2 zweiter Classe i. A. auf acht Complexkegeln ruhen; die entsprechenden drei Flächen F^2 zweiter Ordnung schneiden sich in den associirten acht Mittelpunkten dieser Kegel. Ebenso bilden die ∞^3 ebenen Complexcurven ein Φ^2-Gewebe dritter Stufe achten Grades. — Die ∞^2 C.-Kegel, deren Mittelpunkte auf einer F^2 liegen, bilden ein F^2-System zweiter Stufe achten Grades, das in einem linearen F^2-System achter Stufe enthalten ist; denn sie stützen eine Φ^2, und zwei beliebige andere Φ^2 ruhen i. A. auf acht von ihnen, deren Mittelpunkte associirt sind. — Die ∞^1 C.-Kegel, in deren Mittelpunkten zwei F^2 sich schneiden, bilden ein F^2-System erster Stufe achten Grades, das in einem linearen System siebenter Stufe enthalten ist.

Die ∞^2 C.-Kegel, deren Mittelpunkte in einer beliebigen Ebene η liegen, bilden ein F^2-System zweiter Stufe vierten Grades und sind in einem linearen System fünfter Stufe enthalten. Sie stützen nämlich ein lineares Φ^2-Gewebe dritter Stufe, dessen Flächen den ∞^3 aus η und je einer anderen Ebene bestehenden F^2 entsprechen, und zwei beliebige andere Φ^2 ruhen i. A. auf vier von ihnen. Die Flächen des linearen F^2-Systemes fünfter Stufe entsprechen den Kegelschnitten, Punktepaaren und zweifachen Punkten der Ebene η. — Wenn der Mittelpunkt eines C.-Kegels irgend einen Kegelschnitt oder eine Gerade beschreibt, so beschreibt der C.-Kegel ein F^2-System vierten resp. zweiten Grades, das in einem linearen F^2-System vierter resp. zweiter Stufe enthalten ist.

Strassburg i. E., 1. März 1897.

A construction by the ruler of a point covariant with five given points.

By

F. Morley of Haverford (Pennsylvania).

The points which represent the zeros of a linear or quadratic covariant of a binary quantic can of course be constructed metrically when the zeros of the quantic itself are given as numbers — real or complex — attached to points of a plane. But such a metrical construction appears to afford little information in comparison with a projective construction. I propose to carry through a projective construction for a certain linear covariant of the binary quintic; using the ruler alone.

There is no limitation in taking the five given points on a conic. For if they lie on a line we can assume arbitrarily a ground point g and a point on each of four the five lines from g to the given points; the conic through these five points will cut the fifth line through g in a point determined by the ruler alone, by Pascal's theorem. I do not suppose the conic drawn; that is, when a line is given its intersections with the conic are not given; the determination of these intersections, from five points of the conic cannot of course be effected by the ruler, which is here sufficient.

§ 1.

Identification of a covariant pair.

Let the conic be given by the equations

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2t : t^2.$$

Taking any even number $2n$ of points t_α on the conic consider

$$\prod_\alpha (\xi_1 + 2t_\alpha \xi_2 + t_\alpha^2 \xi_3)\,(4x_1x_3 - x_2^2)^n$$

where ξ_1 means a differentiation as to x_1 and so on. The result is, we know, an invariant of the points and of the conic. I say that it is of the second order in the coefficients of the equation giving t_α.

For if

$$\xi_1 + 2t_\alpha\xi_2 + t_\alpha^2\xi_3 = \xi_3(t - t_\alpha)(t' - t_\alpha)$$

then $\xi_3^n\Pi(t - t_\alpha)$ is linear in those coefficients; thus $\xi_3^{2n}\Pi(t - t_\alpha)(t' - t_\alpha)$ is of the second order in the coefficients. Thus our invariant is of the second order in the coefficients: it is then the one whose vanishing expresses that the $2n$ points are *self-apolar*.

Hence if we take the polar of $2n - 1$ points on the conic $a_x^2 = 0$ as to $(a_x^2)^n$ we get a line which cuts out of the conic the points either of which forms with the given points a self-apolar system. Taking 5 points, the two points on the polar line are the zeros of that covariant which Salmon (Higher Algebra § 455) denotes by S and Clebsch (Binäre Formen) by i.

§ 2.

The conjugate-polar of a point as to four points.

Now for the construction of this line, which I shall call the S-line. First let us state what is necessary of the projective theory of four points.

Four points pair off the points of the plane into *conjugate* points; that is points conjugate with respect to all conics through the four points. Given a point x, its conjugate y is constructed at once as the intersection of its polars as to the line-pairs through the four points.

Also four points pair off the lines and points of the plane, by taking for any point x its polar line ξ as to the diagonal triangle of the gi venfour. Given a point or line, its polar is at once constructed in a well known elementary way.

Hence also we can pair off points and lines by taking for any point y the polar line ξ of its conjugate x. This line may be called the *conjugate-polar* line of y, with regard to the four points.

If we take the four given points as $1, \pm 1, \pm 1$ then for conjugate points

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3,$$

for the polar point and line

$$x_1 \xi_1 = x_2 \xi_2 = x_3 \xi_3,$$

and hence if ξ is the polar of the conjugate of y

$$y_1 : y_2 : y_3 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3.$$

Thus y and ξ are polar as to the imaginary conic

(1) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

This covariant conic is the one discussed by Gundelfinger, Analytische Geometrie, p. 208.

§ 3.

Construction of the covariant line.

Taking now four points $1, \pm 1, \pm 1$ and a conic through them,

(2) $$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2 = 0$$

where

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

the polar conic of the four points, as to

$$(\Sigma c_\alpha x_\alpha^2)^3,$$

is

$$(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\,(-\xi_1+\xi_2+\xi_3)\,(\xi_1-\xi_2+\xi_3)\,(\xi_1+\xi_2-\xi_3)\,(\Sigma c_\alpha x_\alpha^2)^3 = 0$$

or

(3) $$\Sigma c_1 (3c_1^2 - c_2 c_3) x_1^2 = 0$$

or, since

$$c_1^2 - c_2 c_3 = - \Sigma c_2 c_3,$$

$$-3(\Sigma c_2 c_3)\, \Sigma c_1 x_1^2 + 2 c_1 c_2 c_3 \Sigma x_1^2 = 0.$$

Hence the conics (1), (2), (3) belong to a pencil. Hence taking any fifth point y on the conic (2) its polar as to (3), which is the sought covariant line, passes through the intersection of the tangent of (2) at y with the line

$$\Sigma y_\alpha x_\alpha = 0.$$

Therefore, *given five points on a conic, the tangent at any one meets the conjugate-polar line of that point with regard to the other four on the sought covariant line.*

§ 4.

Construction of six points apolar with a triple pair.

We can obtain a single covariant point by taking the polar of the five given points in succession as to the points S each taken thrice; that is by constructing a sixth point on the conic such that the six points are apolar with S^3. I suppose that the S-points are the circular points; the conic is then the circle

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2t : t^2$$

the S-points are $t = 0$ and $t = \infty$, and x_3/x_2 may be the stroke from the centre of the circle, whose diameter is 1, to any point. The condition that $t_1 \ldots t_6$ be apolar with 0^3 and ∞^3 is simply

$$\xi^3 \eta^3 . \Pi(x - t_\alpha y),$$

or

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = 0.$$

To obtain a geometric meaning, divide the 6 points into a set of four, $t_1 t_2 t_3 t_4$, and a set of two. Let, for the four points,

$$s_1 = \Sigma t_1, \quad s_2 = \Sigma t_1 t_2, \ldots$$

Then

$$s_3 + s_2(t_5 + t_6) + s_1 t_5 t_6 = 0.$$

Now the polar of the line $t_5 t_6$, as to the circle, is

$$y_1 : y_2 : y_3 = 1 : t_5 + t_6 : t_5 t_6.$$

Hence this polar lies on the line

$$s_3 y_1 + s_2 y_2 + s_1 y_3 = 0.$$

and this line P is to be constructed.

Let us obtain the directrix D of the parabola which touches the tangents of the circle at $t_1 t_2 t_3 t_4$. Among the conics which touch these four lines is the point-pair

$$1 : t_1 + t_2 : t_1 t_2 \quad \text{and} \quad 1 : t_3 + t_4 : t_3 t_4.$$

The director circle of this conic is, writing x for the stroke x_3/x_2 and y for the conjugate stroke x_1/x_2,

$$\left(x - \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}\right)\left(y - \frac{1}{t_1 + t_2}\right) + \left(x - \frac{t_3 t_4}{t_3 + t_4}\right)\left(y - \frac{1}{t_3 + t_4}\right)$$
$$= \left(\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} - \frac{t_3 t_4}{t_3 + t_4}\right)\left(\frac{1}{t_1 + t_2} - \frac{1}{t_3 + t_4}\right),$$

this equation merely expressing Euclid I, 47; or is

$$2xy - \frac{x s_1 + y s_3}{(t_1 + t_2)(t_3 + t_4)} + \frac{t_1 t_2 + t_3 t_4}{(t_1 + t_2)(t_3 + t_4)} = 0.$$

The director circle of the given circle is

$$2xy = 1.$$

Hence the line of intersection is

$$x s_1 + y s_3 - s_2 = 0,$$

and this is the equation of the directrix.

But in the same notation the line sought was

$$x s_1 + y s_3 + s_2 = 0;$$

so that the lines are parallel and equidistant from the centre of the circle.

To construct the directrix we use the property that perpendicular tangents of the parabola intersect on it.

Thus in projective statement the construction of the 6 points is as follows. We draw the tangents of a_x^2 at the points $1, 2, 3, 4$. We consider the conic α_ξ^2 which touches these and the S-line. We know, on this line, an involution of point-pairs of which the double points are the (undetermined) S-points. From such a pair of points we draw by Brianchon's theorem the remaining tangents to α_ξ^2. Their intersection determines a line D, meeting S at a point DS. Let s be the polar of S as to a_x^2; this is constructed by Pascal's theorem. Let the polar of D, as to S and the line $DS.s$, be P. From the point where P meets the tangent of a_x^2 at t_5 draw the other tangent. Its point of contact is t_6.

It will be observed that we have not made use of the special nature of the S-points; they might be, in this section, any two points of the conic.

§ 5.

Identification of the covariant point.

We have constructed in § 3 a *line* representing S; and in § 4 a *point on the conic* representing a linear covariant. To identify this covariant, we have to take the polar of

$$a_1 x_1^5 + a_2 x_2^5 + a_3 x_3^5$$

as to

$$(\Sigma a_2 a_3 x_2 x_3)^3.$$

We write $\xi_2 - \xi_3$ for x_1 and effect the differentiations; and readily find that the covariant is the second of the linear covariants of Salmon's list, namely

$$a_1 a_2 a_3 \Sigma(a_2^2 a_3^2 + a_1^2 a_2 a_3)(x_2 - x_3).$$

The polar of this as to S is another fundamental linear covariant — the first of Salmon's list. But the construction of the zeros of the other two fundamental linear covariants depends on another problem, namely the construction of the canonizant.

INHALT.

Seite

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. $1^1/_2$, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.