

東北行政委員會教育部規定

初中臨時教材

三 角

周元瑞 編著
周元谷

東北書店印行

1949

前 言

本書係臨時教本，各校可根據具體情況，靈活運用，如嫌份量太重，或有不合適者，可以酌量刪減，如嫌尚有某些問題講的不够，可以酌量增加。教師教學不要為課本所拘束，而應因地制宜，隨機應變，善於活用課本。

三 角

目 錄

第一章 三角比	1
1. 間接量度法	1
2. 正切	2
3. 正弦和餘弦	3
4. 三角比	4
5. 三角函數	4
6. 六種三角比	5
7. 仰角和俯角	6
第二章 基本公式	9
8. 餘角函數公式	9
9. 特別角的三角函數	11
10. 同角函數的基本公式	13
11. 解三角方程式的例	15
第三章 三角函數表及其應用	18
12. 三角函數表	18
13. 三角函數表的證明	18

14.	三角函數表檢查法	18
	(1) 已知角度找正函數	24
	(2) 已知角度找餘函數	25
	(3) 已知函數找角度	26
	(4) 角度帶有分秒的檢查法	28
15.	直角三角形解法	29

第四章 對數解法33

16.	對數	33
17.	對數的性質	34
18.	常用對數	33
19.	定位部與定值部	37
20.	對數表及三角函數對數表	38
21.	餘對數	40
22.	用對數解直角三角形	41
23.	應用問題上幾個名詞	46

第五章 任意三角形的解法47

24.	鈍角三角函數	47
25.	補角函數公式	49
26.	解任意三角形	50
27.	解任意三角形所根據的定律	51
28.	第一類 已知一邊與任兩角	53
29.	第二類 已知二邊與一非夾角	55
30.	第三類 已知二邊與一夾角	59

31. 第四類 已知三邊	60
32. 已知三邊求面積	62
33. 三角形內切圓的半徑	64
34. 三角形外接圓的半徑	65
第六章 三角法的應用	68
37. 三角法在物理上的應用	68
38. 三角法在測量上的應用	70
附表	
正餘弦表	19
正餘切表	21
分秒化度 度化分秒	23
對數表	76
正餘弦對數表	80
正餘切對數表	84

第一章 三角比

1. 間接量度法 平常實際的工作上量度距離，有時須用間接方法，因為直接量度，有時很不容易精確，並且手續上或許非常麻煩，甚至在事實上，有辦不到的。要測水塔或房屋的高，若用直接量法，還不過手續上比較麻煩，同時不能得到精確的結果罷了；至於要求天空星辰的距離或大洋輪艦的航線，直接量度在實際上就不可能了。所以間接度量，也是很重要的一件實際工作。下例就是間接量度的一法

如圖1，AB 是一垂直在地面上的電桿，C 點是一小木樁，AC 表示聯 AB 的頂點 A 和 C 點的

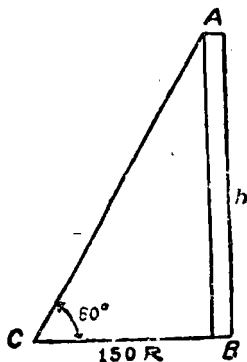
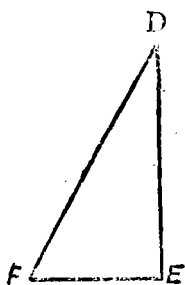


圖 1

直線。若已知 C 點到 AB 着地點 B 點的距離是 150 尺、 $\angle ACB$ 是 60° ，求 AB 的高 h 。

解：照題意 $AB \perp CB$ ，所以 $\triangle ABC$ 是一直角三角形。

設圖2， $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的縮小圖形，那末 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 是兩個相似直角三角形。根據相似三角形的原理就有



圖

$$\frac{AB}{CB} = \frac{DE}{FE} \text{ 何故?} \dots\dots\dots (1)$$

或 $\frac{h}{150} = \frac{DE}{FE}$

$$\therefore h = 150 \cdot \frac{DE}{FE} \dots\dots\dots (2)$$

從(1)可以曉得凡相似直角三角形等角兩對應邊的比是一定的，

從(2)可以曉得若已知 $\frac{DE}{FE}$ 的比值， h 就可以求出。

2. 正切 畫一直角三角形，使一銳角等於 30° 如圖

3。量出 30° 的對邊 a 和 30° 角的底邊 b ，求出 $\frac{a}{b}$ 的比值。

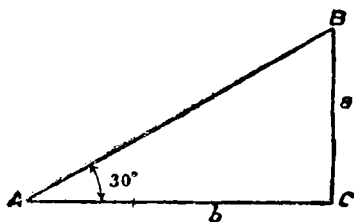


圖 3

同樣畫銳角等於 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 的三個直角三角形，量各銳角對邊和底邊的長，而求出他們相互間的比值，將各比值排成一表，各人所得等角的比值，是否相同？和右表比值的數字有幾位相同？

角度	比值
0°	0.00
30°	0.58
45°	1.00
60°	1.73
75°	3.73

上表的各個比值都是直角三角形一銳角的對邊和牠的底邊的比，在三角法上叫做這角的正切；

譬如 30° 角的正切，A角的正切，算式上寫做 $\tan 30^\circ$ ， $\tan A$ 。根據求得的比值，就可以寫做 $\tan 30^\circ = 0.58$ 。這表示角的正切的表，叫做正切表。

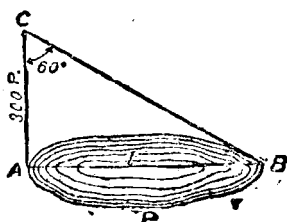


圖 4

應用例：如圖4，AB是P池對岸A，B兩點的距離，若某測量員用儀器測量，取得AC線段垂直於AB，并量得 $AC=300$ 尺， $\angle ACB=60^\circ$ ，求AB的長 l 。

$$\text{解：} \quad \because \frac{l}{300} = \tan 60^\circ,$$

$$\therefore l = 300 \tan 60^\circ,$$

$$\text{照上表} \tan 60^\circ = 1.73,$$

$$\text{所以} l = 300 \times 1.73 = 519 \text{ 尺.}$$

3. 正弦和餘弦 如圖5， $\angle ABC=30^\circ$ 若在BC邊上任一點D引 $DE \perp BA$ ，那末 $\triangle BDE$ 是一直角三角形。

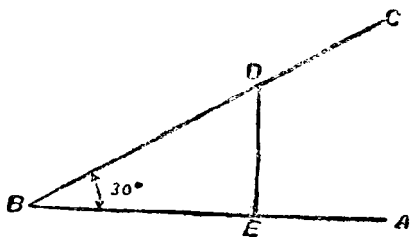


圖 5

照求正切的方法，量出B角的對邊DE和斜邊BD的長，

并求出 $\frac{DE}{BD}$ 的比值，凡直角三角形一銳角的對邊和斜邊的比，叫做這角的正弦；例如 30° 的正弦，B 角的正弦，算式上寫做 $\sin 30^\circ$, $\sin B$ 。

同樣畫銳角等於 45° , 60° , 75° 各直角三角形，量各該角的對邊和斜邊的長，求出各角的正弦，何以等角的正弦是一定數？又如圖 5, $\frac{BE}{BD}$ 叫做 B 角或 30° 角的餘弦。用話來說，就是直角三角形一銳角的底邊和斜邊的比，叫做這角的餘弦，算式上寫做 $\cos B$, $\cos 30^\circ$ 。

照求正切，正弦的方法求出 30° , 45° , 60° , 75° 各角的餘弦。等角的餘弦是一定的麼？何故？

4. 三角比 正切，正弦，餘弦的比值是表示一角的對邊，底邊及斜邊任何兩邊和這角的關係，所以牠們的總名叫做三角比。凡等角的三角比都是一定的。但是我們求出各等角的比不能完全相同，大半是由於儀器不很精密的緣故。不過三角比的用處很大，若每次應用的時候，再去求牠，也很麻煩；前人爲便利準確計，已經很精密的將各種角度的三角比求出，列成表式。本章末頁的表是 0° 到 90° 角的正弦，餘弦和正切的表，表中第一行是角度數，第二行是正弦，第三行是餘弦，第四行是正切。

看表中角度從 0° 到 90° ，正弦是從 0 漸漸增加到 1；但是，餘弦却相反，從 1 漸漸減小到 0。又看正切也是和角度相應的增加，可見三角比和角度是很有密切的關係。

5. 三角函數 三角比都是跟着角度在改變的。在角

度一定的時候，三角比就有一定的數值，如果角度改變，三角比也就相應的改變，那末照函數的定義說，三角比是角的函數，所以三角比又叫做三角函數。

習 題 一

1. 如圖已知下列各值求 a ,

(a) $b=23$ $A=25^\circ$

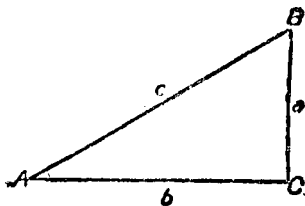
(b) $c=32$ $A=36^\circ$

(c) $b=28.7$ $A=77^\circ$

(d) $c=47.7$ $A=50^\circ$

2. 仍照一題的圖求 A

(a) 使 $a=7$, $b=8$



解： $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{8} = 1$

檢表求得正切等於 1 的相應角是 45°

$\therefore A=45^\circ$

(b) $a=21.707$ $b=10$

(c) $a=14.832$ $c=20$

(d) $b=7.314$ $c=10$

3. (a) 比較 $2\sin 10^\circ$ 和 $\sin(2 \times 10^\circ)$

(b) 比較 $3\sin 10^\circ$ 和 $\sin(3 \times 10^\circ)$

又和 $\sin(3 \times 10^\circ)$

4. 用題 3 的結果證明 $\sin(20^\circ + 30^\circ)$ 是否可以等於 $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ$

6. 六種三角比 在直角三角形ABC中，三角法上常用A,B表兩銳角；C表直角；a表A角對邊的長度；b表A角底邊，或B角對邊的長度；c表斜邊，或C角對邊的長度；如圖6。那麼

$\frac{a}{c}$ 是 A 角的正弦，寫做 $\sin A$ 。

$\frac{b}{c}$ 是 A 角的餘弦，寫做 $\cos A$ 。

$\frac{a}{b}$ 是 A 角的正切，寫做 $\tan A$ 。

這三種三角比我們已經學過，所以在直角三角形中任一銳角的

$$\text{正弦} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\text{餘弦} = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\text{正切} = \frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}$$

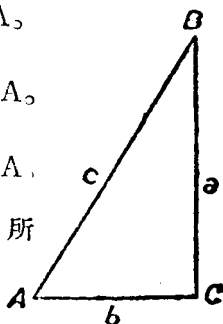


圖 6

除這三種三角比外，還有三種牠們的倒數比，就是

$\frac{c}{a}$ 叫做 A 角的餘割，寫做 $\csc A$ 。

$\frac{c}{b}$ 叫做 A 角的正割，寫做 $\sec A$ 。

$\frac{b}{a}$ 叫做 A 角的餘切，寫做 $\cot A$ 。

牠們的比值，也可以照求正弦餘弦，和正切的方法，先量兩邊的長度求的。不過這三種函數用處較少，並且是前三種的倒數，所以祇要知道前三個，這三種的比值就可以算出來。

7. 仰角和俯角 這兩個名詞應用題上常遇到，所以特別加以解釋。

若某人在P點上看一物體O，如同，P點叫視點，OP叫

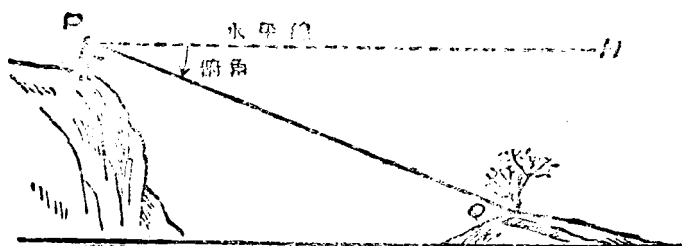


圖 6 (a)

做視線。視線和通過視點的水平線 PH所成的角叫做仰角。

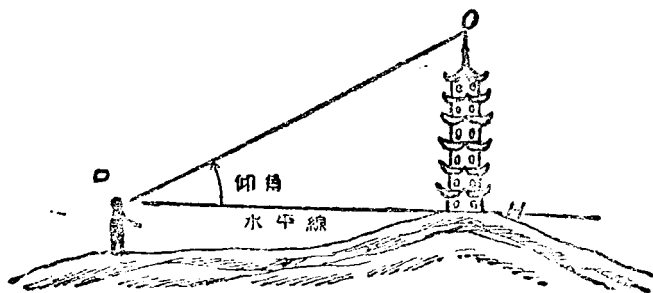


圖 7 (b)

同理某人在P點向下看一物體Q，如同，視線PQ和通過視點的水平PH線所成的角叫做俯角。

所以仰角或俯角是視線和通過視點的水平線所成的角。

習題二

1. 照求正弦，餘弦，正切的方法求， $10^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 的正的餘切，正割和餘割。

2. 在直角三角形 ABC 中，若已知下列各數值，求 a。

(1) $c=112$ $A=10^\circ$

解： $\sin A = \frac{a}{c}$ $\therefore a = c \sin A$

$= 112 \times .1736 = 19.4432$

(2) $c=125$ $A=15^\circ$ (3) $c=30.5$ $A=5^\circ$

3. 已知下列各數值，求 b。

(1) $c=103$ $A=10^\circ$ (2) $c=39.7$ $A=75^\circ$

4. 已知下列各值，求 A 的最近值。

(1) $c=20.1$ $a=12.58$

(2) $c=40.3$ $a=13.63$

(3) $c=187$ $b=93.5$

(4) $c=50.6$ $b=52.25$

5. 某樹地面影子長 7.5 尺，看太陽的仰角是 55° ，求此樹之高。

6. 380 尺高的塔窗，照在地面的影子是 315 尺，求看太陽的仰角。

7. 正六邊形外接圓的半徑是 15 寸，求每邊到圓心的距離。

8. 正五邊形對角線的長是 16 寸，求邊長。

9. 若在 175 尺高的屋頂看一塊石的俯角是 30° ，求石塊和屋屋基的距離。

10. 等腰三角形各邊的長是 60 尺，90 尺和 90 尺，求各角的度數。

11. 旗竿離竿頂 44 尺的地方，被風折斷，但仍和竿下段連接。若竿頂着地點和竿根的距離是 11 尺，求折斷部分和地面所成之角。又求竿的原長。

12. 在離池岸的水平面十尺高的地方，測得池邊樹頂的仰角是 48° ，若看樹根的俯角是 30° ，求樹高。

第二章 基本公式

8. 餘角函數公式 兩角相加的和是90度，這兩角就互相叫做餘角。普通寫做A和

$90^\circ - A$ 。

在圖8直角三角形中，

$$\angle A + \angle B = 90^\circ;$$

所以 $\angle B = 90^\circ - \angle A \dots\dots\dots (1)$

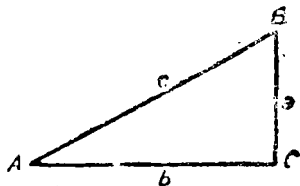


圖 8

因為 $\sin A = \cos B$

$$\cos A = \sin B$$

$$\tan A = \cot B$$

$$\cot A = \tan B$$

$$\sec A = \csc B$$

$$\csc A = \sec B$$

何故? $\dots\dots\dots (2)$

將(1)代入(2)中，就有

$$\sin A = \cos (90^\circ - A)$$

$$\cos A = \sin (90^\circ - A)$$

$$\tan A = \cot (90^\circ - A)$$

$$\cot A = \tan (90^\circ - A)$$

$$\sec A = \csc (90^\circ - A)$$

$$\csc A = \sec (90^\circ - A)$$

$\dots\dots\dots (3)$

這一套公式極容易記得。用普通語言來講，就是“凡銳角的正函數等於餘角的餘函數；銳角的餘函數等於餘角的正函數，

°	SINX	COSX	TANX	角X	SINX	COSX	TANX
36°	.6174	.9896	.6174	46°	.7193	.6940	1.0355
37°	.6040	.9994	.6040	47°	.7314	.6820	1.0724
38°	.6526	.9986	.6524	48°	.7431	.6691	1.1103
39°	.6698	.9976	.6699	49°	.7547	.6561	1.1504
40°	.6872	.9962	.6875	50°	.7660	.6428	1.1918
41°	.6045	.9945	.6051	51°	.7771	.6293	1.2340
42°	.6219	.9925	.6228	52°	.7880	.6157	1.2799
43°	.6392	.9903	.6405	53°	.7986	.6018	1.3270
44°	.6564	.9877	.6584	54°	.8090	.5878	1.3764
45°	.6736	.9848	.6763	55°	.8192	.5736	1.4281
46°	.6908	.9816	.6941	56°	.8290	.5592	1.4826
47°	.7079	.9781	.7126	57°	.8387	.5446	1.5400
48°	.7250	.9744	.7303	58°	.8480	.5299	1.6003
49°	.7419	.9703	.7493	59°	.8572	.5151	1.6643
50°	.7588	.9659	.7679	60°	.8660	.5000	1.7321
51°	.7756	.9613	.7867	61°	.8746	.4848	1.8040
52°	.7924	.9563	.8057	62°	.8829	.4695	1.8807
53°	.8090	.9511	.8249	63°	.8910	.4540	1.9626
54°	.8256	.9456	.8443	64°	.8988	.4384	2.0503
55°	.8420	.9407	.8640	65°	.9063	.4226	2.1445
56°	.8584	.9354	.8839	66°	.9135	.4067	2.2460
57°	.8746	.9297	.9040	67°	.9205	.3907	2.3559
58°	.8907	.9235	.9245	68°	.9272	.3746	2.4751
59°	.9067	.9168	.9452	69°	.9336	.3584	2.6051
60°	.9226	.9097	.9663	70°	.9397	.3420	2.7475
61°	.9384	.9023	.9877	71°	.9455	.3256	2.9042
62°	.9540	.8946	.9095	72°	.9511	.3190	3.0777
63°	.9695	.8866	.9317	73°	.9563	.2924	3.2809
64°	.9848	.8783	.9543	74°	.9613	.2756	3.4974
65°	.9000	.8697	.9774	75°	.9660	.2588	3.7321
66°	.9150	.8607	.9009	76°	.9702	.2419	4.0108
67°	.9299	.8514	.9249	77°	.9744	.2250	4.3315
68°	.9446	.8418	.9494	78°	.9781	.2079	4.7040
69°	.9592	.8320	.9745	79°	.9813	.1908	5.1405
70°	.9736	.8192	.9002	80°	.9840	.1736	5.6713
71°	.9875	.8060	.9265	81°	.9877	.1564	6.3103
72°	.9018	.7923	.9536	82°	.9903	.1393	7.1154
73°	.9157	.7780	.9813	83°	.9923	.1219	8.1443
74°	.9293	.7771	.8098	84°	.9937	.1045	9.5140
75°	.9428	.7660	.8891	85°	.9945	.0872	10.8301
76°	.9561	.7547	.8693	86°	.9976	.0698	14.3006
77°	.9691	.7431	.9004	87°	.9986	.0523	19.0811
78°	.9820	.7314	.9325	88°	.9994	.0349	28.6363
79°	.9947	.7193	.9657	89°	.9998	.0175	57.2900
80°	.9071	.7071	1.0000	90°	1.0000	.0000	∞

習題三

1. 寫出下列各函數的餘函數：

$$\begin{array}{cccc} \sin 30^\circ & \tan 89^\circ & \csc 18^\circ 10' & \cot 85^\circ 19' \\ \cos 45^\circ & \cot 15^\circ & \cos 37^\circ 24' & \csc 54^\circ 45' \end{array}$$

2. 用小於 45° 的角的函數表示下列各式：

$$\begin{array}{cccc} \sin 60^\circ & \tan 75^\circ & \csc 66^\circ 2' & \cot 89^\circ 59' \\ \cos 75^\circ & \cot 84^\circ & \cos 85^\circ 39' & \csc 45^\circ 1' \end{array}$$

3. 設 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ；求 $\cot 60^\circ$ 。

4. 設 $\tan A = \cot A$ ；求 A 。

5. 設 $\cos A = \sin 2A$ ；求 A 。

6. 設 $\sin A = \cos 2A$ ；求 A 。

7. 設 $\cos A = \sin(45^\circ - \frac{1}{2}A)$ ；求 A 。

8. 設 $\cot \frac{1}{2}A = \tan A$ ；求 A 。

9. 設 $\tan(45^\circ + A) = \cot A$ ；求 A 。

10. 試求 A ，設 $\sin A = \cos 4A$ 。

11. 試求 A ，設 $\cot A = \tan 8A$ 。

9. 特別角的三角函數 有幾個特別的角度，如 45° ， 30° ， 60° ；他的三角函數，用幾何的方法很容易推算他的準確數值，看下兩節便知道。

這幾個角度用處很多，你們最好把他的數值或者簡直連那找出這數值的方法，牢牢記住。

a. 45° 角的函數圖) $\triangle ABC$ 是一等腰直角三角形，設斜邊 $AB=1$ ；因為 $AC=BC$ ， $\angle A=45^\circ$ 。

又 $AC^2 + BC^2 = 1$, 所以 \overline{AC}

$$= 1, \text{ 即 } AC = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

用公式表示可以寫做：

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 45^\circ = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

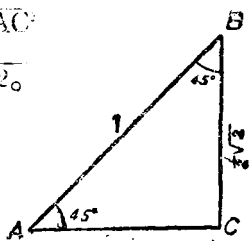


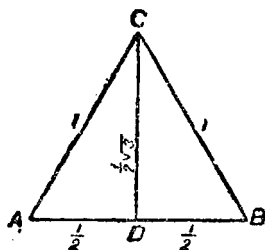
圖 9

b. 30° 及 60° 角的函數 圖 10 $\triangle ABC$ 是等邊三角形，

設各邊都等於 1；又直線 CD 平分 C 角，同時又是 AB 的中點垂線。所以

$$AD = \frac{1}{2}, CD = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

在三角形 ADC 中， $\angle C = 30^\circ$ ，何故？ $\angle CAD = 60^\circ$ ，何故？



圖

依照公式(3)就有：

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

10. 同角函數的基本公式 同是A角的函數都互相有關係的，這種關係中，最要緊的有三個：

a. 在圖11中，依畢達哥拉定理(Pythagorean theorem)，直角三角形ABC中， $a^2 + b^2 = c^2$

或 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$

或 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

但是 $\frac{a}{c} = \sin A,$

$$\frac{b}{c} = \cos A,$$

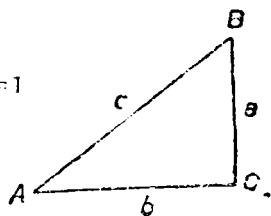


圖 11

所以 $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

爲方便起見，常寫做

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots\dots\dots (1)$$

(1)式叫做平方關係式，用普通語言來說，就是“正弦平方同餘弦平方的和等於1。”

用公式(1)可以由餘弦去找正弦，或由正弦去找餘弦：

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

b. 因爲 $\frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}$

但是 $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$, 又 $\frac{a}{b} = \tan A$,

所以 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \dots\dots\dots [2]$

(2)式叫做分式關係式，用普通語言來說，就是“正切等於餘弦除正弦的商”。

$$\begin{aligned} \text{c. 因為 } \frac{a}{c} \times \frac{c}{a} &= 1; \quad \frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1 \\ \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} &= 1 \end{aligned}$$

但是 $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$, $\frac{a}{b} = \tan A$

$$\frac{b}{a} = \cot A, \quad \frac{c}{b} = \sec A, \quad \frac{c}{a} = \csc A$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \left. \begin{aligned} \sin A \times \csc A &= 1 \\ \cos A \times \sec A &= 1 \\ \tan A \times \cot A &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots [3] \end{aligned}$$

這叫做倒數關係式。用普通語言來說，就是“正弦和餘割；餘弦和正割；正切和餘切：都互相成爲倒數。”

d. 從(2) $\tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$ ，兩端加1，得

$$1 + \tan^2 A = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

但 $1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} = \sec^2 A$

$$\therefore 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \dots\dots\dots [4]$$

又從(3)與(2), $\cot^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$, 兩端加1, 得

$$1 + \cot^2 A = 1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

但 $1 + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin^2 A} = \frac{1}{\sin^2 A} = \csc^2 A$

$$\therefore 1 + \cot^2 A = \csc^2 A \dots\dots\dots(5)$$

這兩式叫做切割平方關係式。用普通語言來說, 就是“正切(或餘切)的平方加1, 等於正割(或餘割)的平方”。

11. 解三角方程式的例 從三角方程式給與的同角各函數的關係, 求那角的度數, 叫做解三角方程式。請看下列:

1. 已知 $2\cos A = \sec A$, 求A,

$$\sec A = \frac{1}{\cos A},$$

所以原式可改做 $2\cos A = \frac{1}{\cos A}$,

$$\therefore 2\cos^2 A = 1, \cos^2 A = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

檢表求得A角等於 45° 。

2. $\tan A + \cot A = 2$, 求A,

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

所以原式可變做 $\tan A + \frac{1}{\tan A} = 2$

$$\therefore \tan^2 A + 1 = 2\tan A$$

$$\tan^2 A - (\tan A + 1) = 0$$

$$(\tan A - 1)^2 = 0, \quad \therefore \tan A - 1 = 0,$$

$$\tan A = 1,$$

檢表求得A角等於 45° 。

習 題 四

1. a. 設 $\sin 31^\circ$ 爲 0.5195 求 $\cos 31^\circ$.3
- b. 設 $\sin 50^\circ$ 爲 0.9135 求 $\csc 50^\circ$ 及 $\cos 40^\circ$
- c. 設 $\cos 43^\circ$ 爲 0.7278 求 $\sec 43^\circ$.3及 $\sin 46^\circ$.7
- d. 設 $\tan 52^\circ$ 爲 1.2885 求 $\cot 52^\circ$.4及 $\tan 38^\circ$.6
- e. 設 $\sin 38^\circ$ 爲 0.6111 求 $\cos 38^\circ$.5, $\tan 38^\circ$.4 及 \cot
38° .4

2. 設證明 a.
$$\sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

- b.
$$\cos A = \frac{\cot A}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

試證明下列各題：

3. $\cos A \csc A \tan A = 1$
4. $\tan^2 A \cos^2 A + \cos^2 A = 1$
5. $\sec A - \cos A = \sin A \tan A$
6.
$$\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$$
7.
$$\cot x = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$$
8. 正方形的對角線等於2，求牠的邊。
9. 等腰三角形的底角等於 35° ，底邊等於3，求牠的高。
10. 已知下列函數之值，求其餘各函數之值：

$$(a) \cos B = \frac{1}{3}$$

$$\text{解: } \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\cos B = \frac{1}{3} \quad \therefore \cos^2 B = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin^2 B + \frac{1}{9} = 1, \sin^2 B = \frac{8}{9}$$

$$\sin B = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{2}{3} \sqrt{2}}{\frac{1}{3}} = 2 \sqrt{2}$$

尚有 $\sec B$, $\csc B$ 及 $\cot B$ 三函數值可用 §10 公式 (3) 求得之。

$$(b) \sin B = \frac{1}{4}$$

$$(c) \csc B = 2$$

$$(d) \sec B = \sqrt{2}$$

$$(e) \tan B = 7.5$$

$$(f) \cot B = 3$$

11. 解下列各三角方程式：

$$(a) \tan A = \frac{1}{2} \sin A$$

$$(b) \frac{1}{2} \sin A = \csc A$$

$$(c) \sin^2 A = \cos^2 A$$

$$(d) 3 \tan^2 A - \sec^2 A = 1$$

$$(e) \tan^2 A + \csc^2 A = 3$$

若三角各函數的關係如下，求 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 之值：

$$(1) \frac{1}{2} \sin A = \cos A$$

$$(2) \frac{1}{2} \sin A = \tan A$$

第三章 三角函數表及其應用

12. 三角函數表 角的函數，都有一定的數值，前人他們算出，列成表式，叫做三角函數表；所以我們現在要把求某角函數的數值，可到表裏去找。第一章所列的表，也是三角函數表，不過僅有整度的角，若遇到有小數的度數或分秒數，這個表就不能應用。必須用下面幾頁三角函數表。

13. 三角函數表的說明 請看後面的表，譬如正餘弦表，他的組成是分爲三大部分：

a. 中間的一大部分每組數字表每個函數的數值，左右兩旁邊緣上每行所記的數字是角的度數。找正弦的時候，在左邊的一行從上向下讀，找餘弦的時候，在右邊的一行從下向上讀；都是從 0° 到 90° 。所以找正弦是順讀的，找餘弦是要倒讀的，理由是兩角的和是 90° ，牠們的正弦和餘弦互爲正餘，故正弦和餘弦可以合做一表，同理正切餘切等也是如此。

b. 在表頂的邊緣上，有橫列兩排一位的數字，倒順都可以讀的，是角度的第一位小數，找正弦從左向右順讀黑字，找餘弦從右向左倒讀白字，同理正切餘切等也是一樣的。

c. 還有表邊的附表，分做 12345 五行排列，是找角度的第二位小數用的，用法看下節。

14. 三角函數表檢查法 三角函數的檢查分四種：

(1) 已知角度找正函數，(2) 已知角度找餘函數，(3) 已

Tangent

正餘切表

Cotangent

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10										度	分				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		10	1	2	3	4
											1.0000	45°				
45°	1.0000	0.026	0.052	0.078	0.111	0.176	0.212	0.247	0.282	0.319	0.355	44	4	7	11	14
46	0.825	0.832	0.839	0.846	0.853	0.860	0.867	0.874	0.881	0.888	0.895	43	4	7	11	15
47	0.724	0.761	0.799	0.837	0.875	0.913	0.951	0.989	1.027	1.065	1.103	42	4	8	13	19
48	1.169	1.145	1.124	1.234	1.268	1.302	1.336	1.370	1.404	1.438	1.472	41	4	8	13	20
49	1.504	1.534	1.563	1.628	1.687	1.746	1.805	1.864	1.923	1.982	2.041	40°	4	8	13	21
50°	1.1918	1.800	2.002	2.045	2.088	2.131	2.174	2.218	2.261	2.305	2.349	39	4	9	13	17
51	2.949	2.933	2.917	2.901	2.885	2.869	2.853	2.837	2.821	2.805	2.789	38	5	9	14	21
52	2.789	2.840	2.892	2.944	2.996	3.048	3.099	3.151	3.202	3.254	3.305	37	5	10	14	24
53	3.270	3.319	3.367	3.416	3.465	3.514	3.563	3.612	3.661	3.710	3.759	36	5	10	15	25
54	3.784	3.814	3.844	3.874	3.904	3.934	3.964	3.994	4.024	4.054	4.084	35	5	10	16	26
55	1.4281	4.275	4.238	4.201	4.164	4.127	4.090	4.053	4.016	3.979	3.942	34	5	11	16	27
56	4.836	4.823	4.810	4.797	4.784	4.771	4.758	4.745	4.732	4.719	4.706	33	6	11	17	28
57	5.712	5.653	5.594	5.535	5.476	5.417	5.358	5.299	5.240	5.181	5.122	32	6	12	18	30
58	6.750	6.666	6.582	6.498	6.414	6.330	6.246	6.162	6.078	6.000	5.922	31	6	13	19	32
59	1.6843	6.700	6.775	6.849	6.923	6.997	7.071	7.145	7.219	7.293	7.367	30°	7	14	20	37
60°	1.762	1.739	1.716	1.753	1.730	1.767	1.744	1.781	1.758	1.795	1.804	20	1	2	3	4
61	1.804	1.811	1.819	1.827	1.834	1.841	1.848	1.857	1.865	1.873	1.881	19	1	2	3	4
62	1.881	1.889	1.897	1.905	1.913	1.921	1.929	1.937	1.945	1.953	1.961	18	1	3	4	5
63	1.963	1.971	1.979	1.987	1.995	1.997	2.003	2.014	2.023	2.032	2.041	20	1	3	5	6
64	2.050	2.059	2.068	2.077	2.087	2.097	2.108	2.116	2.125	2.135	2.145	25	1	3	5	6
65	2.145	2.154	2.164	2.174	2.184	2.194	2.204	2.215	2.225	2.236	2.246	24	1	3	5	6
66	2.246	2.257	2.267	2.277	2.288	2.298	2.308	2.318	2.329	2.340	2.350	23	1	3	5	6
67	2.350	2.361	2.372	2.383	2.394	2.404	2.415	2.426	2.437	2.448	2.459	22	1	3	5	6
68	2.459	2.470	2.481	2.492	2.503	2.514	2.525	2.536	2.547	2.558	2.569	21	1	3	5	7
69	2.569	2.580	2.591	2.602	2.613	2.624	2.635	2.646	2.657	2.668	2.679	20°	1	3	5	7
70°	2.747	2.763	2.778	2.793	2.808	2.824	2.840	2.856	2.872	2.888	2.904	19	2	3	5	6
71	2.904	2.921	2.937	2.954	2.971	2.988	3.005	3.023	3.042	3.060	3.078	18	2	3	6	7
72	3.078	3.096	3.115	3.133	3.152	3.171	3.191	3.211	3.230	3.250	3.271	17	2	4	6	8
73	3.271	3.291	3.312	3.332	3.353	3.374	3.395	3.416	3.437	3.458	3.479	16	2	4	6	9
74	3.479	3.511	3.534	3.558	3.582	3.606	3.630	3.655	3.681	3.708	3.733	15	2	5	7	10
75	3.733	3.763	3.793	3.823	3.853	3.883	3.913	3.943	3.973	4.004	4.034	14	3	6	8	11
76	4.034	4.041	4.071	4.102	4.134	4.165	4.197	4.229	4.261	4.293	4.325	13	3	6	10	13
77	4.325	4.330	4.352	4.374	4.411	4.448	4.485	4.522	4.559	4.596	4.705	12	3	7	11	
78	4.705	4.745	4.787	4.829	4.872	4.915	4.959	5.002	5.045	5.087	5.145	11	3	7	12	
79	5.145	5.196	5.247	5.299	5.351	5.403	5.455	5.507	5.560	5.614	5.671	10°	3	7	12	
80°	5.671	5.730	5.789	5.850	5.911	5.972	6.034	6.107	6.171	6.248	6.314	9	3	7	12	
81	6.314	6.386	6.460	6.535	6.611	6.687	6.773	6.865	6.960	7.059	7.115	8	3	7	12	
82	7.115	7.207	7.300	7.394	7.490	7.588	7.700	7.823	7.950	8.083	8.144	7	3	7	12	
83	8.144	8.264	8.386	8.510	8.638	8.777	8.915	9.058	9.205	9.357	9.514	6	3	7	12	
84	9.514	9.677	9.845	10.019	10.199	10.385	10.579	10.781	10.988	11.205	11.430	5	3	7	12	
85	11.430	11.634	11.800	12.108	12.429	12.768	13.195	13.600	14.017	14.451	14.901	4	3	7	12	
86	14.901	15.039	15.066	15.464	15.876	16.150	16.482	17.348	17.805	18.464	19.131	3	3	7	12	
87	19.131	19.714	20.45	21.30	22.14	23.08	24.00	24.90	25.80	27.27	28.64	2	3	7	12	
88	28.64	30.14	31.84	33.64	35.54	37.54	39.64	41.84	44.07	47.74	52.09	1	3	7	12	
89	52.09	58.00	71.02	81.85	95.59	114.55	143.24	191.0	288.5	578.0	∞	0°	3	7	12	

A 分 秒 化 度

0'	0°	00	000
1'		01	006
2'		03	333
3'		05	
4'		06	666
5'		08	333
6'		10	
7'		11	666
8'		13	333
9'		15	
10'	0°	16	000
1		18	333
2		20	
3		21	666
4		23	333
15'		25	
6		26	666
7		28	333
8		30	
9		31	666
20'	0°	33	333
1		35	
2		36	666
3		38	333
4		40	
25'		41	666
6		43	333
7		45	
8		46	666
9		48	333
30'	0°	50	
1		51	666
2		53	333
3		55	
4		56	666
35'		58	333
6		60	
7		61	666
8		63	333
9		65	
40'	0°	66	666
1		68	333
2		70	
3		71	666
4		73	333
45'		75	
6		76	666
7		78	333
8		80	
9		81	666
50'	0°	83	333
1		85	
2		86	666
3		88	333
4		90	
55'		91	666
6		93	333
7		95	
8		96	666
9		98	333
60	1°00		

兩小點「」表示末位補數或復

0'	0°	00	000
1'		00	027
2'		00	055
3'		00	083
4'		00	111
5'		00	138
6'		00	166
7'		00	194
8'		00	222
9'		00	25
10'	0°	00	277
1		00	305
2		00	333
3		00	361
4		00	389
15'		00	416
6		00	444
7		00	472
8		00	5
9		00	527
20'	0°	00	555
1		00	583
2		00	611
3		00	639
4		00	666
25'		00	694
6		00	722
7		00	75
8		00	777
9		00	805
30'	0°	00	833
1		00	861
2		00	889
3		00	916
4		00	944
35'		00	972
6		01	
7		01	027
8		01	055
9		01	083
40'	0°	01	111
1		01	139
2		01	166
3		01	194
4		01	222
45'		01	25
6		01	277
7		01	305
8		01	333
9		01	361
50'	0°	01	389
1		01	416
2		01	444
3		01	472
4		01	5
55'		01	527
6		01	555
7		01	583
8		01	611
9		01	639
60	0°	01	666

B 度 化 分 秒

0° 00'	=	0° 00'	0° 50'	=	30'
1	0'36"		1	30'36"	
2	1'12"		2	31'12"	
3	1'48"		3	31'48"	
4	2'24"		4	32'24"	
0° 05'	3"	0°	55'	33"	
6	3'36"		6	33'36"	
7	4'12"		7	34'12"	
8	4'48"		8	34'48"	
9	5'24"		9	35'24"	
0° 10'	6"	0°	60'	36"	
1	6'36"		1	36'36"	
2	7'12"		2	37'12"	
3	7'48"		3	37'48"	
4	8'24"		4	38'24"	
0° 15'	9"	0°	65'	39"	
6	9'36"		6	39'36"	
7	10'12"		7	40'12"	
8	10'48"		8	40'48"	
9	11'24"		9	41'24"	
0° 20'	12"	0°	70'	42"	
1	12'36"		1	42'36"	
2	13'12"		2	43'12"	
3	13'48"		3	43'48"	
4	14'24"		4	44'24"	
0° 25'	15"	0°	75'	45"	
6	15'36"		6	45'36"	
7	16'12"		7	46'12"	
8	16'48"		8	46'48"	
9	17'24"		9	47'24"	
0° 30'	18"	0°	80'	48"	
1	18'36"		1	48'36"	
2	19'12"		2	49'12"	
3	19'48"		3	49'48"	
4	20'24"		4	50'24"	
0° 35'	21"	0°	85'	51"	
6	21'36"		6	51'36"	
7	22'12"		7	52'12"	
8	22'48"		8	52'48"	
9	23'24"		9	53'24"	
0° 40'	24"	0°	90'	54"	
1	24'36"		1	54'36"	
2	25'12"		2	55'12"	
3	25'48"		3	55'48"	
4	26'24"		4	56'24"	
0° 45'	27"	0°	95'	57"	
6	27'36"		6	57'36"	
7	28'12"		7	58'12"	
8	28'48"		8	58'48"	
9	29'24"		9	59'24"	
0° 50'	30"	1°	00'	00"	
0°	000	=	0°	0	
1	8' 6				
2	7' 2				
3	10' 8				
4	11' 4				
0°	065	18' 0			
6	21' 6				
7	25' 2				
8	28' 8				
9	32 4				
0°	010	36 0			

知函數找角度，(4) 帶有分秒角度的檢查法。

(1) 已知角度找正函數

a. 求 $\sin 55^\circ = ?$

在正餘弦表上第一行 sine 字的行下順次找到 55° ，再平行橫看中部函數部分的第一行（表頂對準從左到右的 0 字）便是 0.8192，

$$\therefore \sin 55^\circ = 0.8192$$

b. 求 $\sin 21^\circ.6 = ?$

在正餘弦表上 sine 字的行下找到 21° ，再平行向右橫看。找到直對表頂 .6 字一行下面的數字（從左到右黑字的 .6 字），讀得 0.3681，就是 $21^\circ.6$ 的正弦。

$$\therefore \sin 21^\circ.6 = 0.3681$$

c. 求 $\sin 76^\circ.62 = ?$

這問題有兩位小數，所以要用到附表，照前例先找到 $\sin 76^\circ.6 = 0.9728$ 。再看附表上分 12345 的五行。本題的第二位小數是 2，在附表上 2 字下直對到 76° 一排上找得 1。將 1 加在 $\sin 76^\circ.6 = 0.9728$ 的末一位上，就得

$$\sin 76^\circ.62 = 0.9728 + 0.0001 = 0.9729$$

d. 求 $\sin 35^\circ.87 = ?$

這問題和前例不同的地方，在第二位小數 7 大過附表末行的 5。因為 $.87 = .90 - .03$ 。所以我們先去找出 $\sin 35^\circ.90 = 0.5864$ ，再看在附表 3 字下對準 35° 一排是 4 字。然後從 $\sin 35^\circ.90 = 0.5864$ 的末位減去 4 就得，

$$\begin{aligned} \sin 35^\circ.87 &= \sin 35^\circ.90 - 0.0004 \\ &= 0.5864 - 0.0004 \end{aligned}$$

$$=0.5860$$

上面的四例是找正弦的方法。找正切等照此類推。

習 題 五

試在上表中找下列各函數：

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. $\sin 23^\circ$ | 2. $\sin 65^\circ.7$ |
| 3. $\tan 27^\circ$ | 4. $\tan 67^\circ.3$ |
| 5. $\sin 22^\circ.44$ | 6. $\tan 61^\circ.32$ |
| 7. $\tan 86^\circ.9$ | 8. $\tan 6^\circ.78$ |
| 9. $\tan 81^\circ.23$ | 10. $\sin 89^\circ.2$ |
| 11. $\sin 0^\circ.8$ | 12. $\sin 8.^\circ.33$ |
| 13. $\tan 21^\circ.42$ | 14. $\tan 0^\circ.8$ |
| 15. $\sin 15^\circ.2$ | 16. $\tan 49^\circ.46$ |
| 17. $\sin 25^\circ.63$ | 18. $\tan 8^\circ.97$ |
| 19. $\sin 89^\circ.37$ | 20. $\sin 16^\circ.35$ |
| 21. $\sin 2^\circ.35$ | 22. $\tan 89^\circ.67$ |
| 23. $\sin 37^\circ.38$ | 24. $\tan 50^\circ.03$ |

(2) 已知角度找餘函數

a. 求 $\cos 55^\circ = ?$

在正餘弦表靠右面 cosine 字行中從底下倒看上來，找得 55° ，再平行往左看，在對準頂上從右到左的白字數字的 0 行下面，就可以找到

$$\cos 55^\circ = 0.5736$$

b. 求 $\cos 21^\circ.6 = ?$

先照 a 法找到 $\cos 21^\circ$ 之後，再平行向左讀到表頂白字（從右到左數字）.6 字下的行裏就可找到。

$$\cos 21^{\circ}.6 = 0.9298$$

c. 求 $\cos 71^{\circ}.62 = ?$

先照 b 法找得 $\cos 71^{\circ}.6 = 0.3156$ ，但是要注意角度加大，餘弦反減小，和正弦是相反的。所以在附表 2 字下對準 71° 一排讀得的 3，應該從 $\cos 71^{\circ}.6 = 0.3156$ 的末位減去（與正弦相反）。

$$\begin{aligned} \therefore \cos 71^{\circ}.62 &= \cos 71^{\circ}.6 - 0.0003 \\ &= 0.3156 - 0.0003 \\ &= 0.3153 \end{aligned}$$

d. 求 $\cos 35^{\circ}.87 = ?$

這個問題和上面檢查正弦法是一樣，但是角度減小；餘弦是增大的，所以結果不是減，却是加。譬如先找出 $\cos 35^{\circ}.9 = 0.8100$ ，在附表 3 字行下對準 35° 橫行一排讀得是 3。

$$\begin{aligned} \therefore \cos 35^{\circ}.87 &= \cos 35^{\circ}.9 + 0.0003 \\ &= 0.8100 + 0.0003 \\ &= 0.8103 \end{aligned}$$

上面四例是找餘弦的方法，找餘切等照此類推。

(3) 已知函數找角度 已知函數找角度只要將上面所講的方法反過來應用便是。

a. 已知 $\sin x = 0.3681$ 檢表求 $x = ?$

在正餘弦表中尋得 0.3681，平行在左面靠邊的一行角度是 21° ，頂上所對的黑字小數是 .6，

$$\therefore x = 21^{\circ}.6。$$

b. 已知 $\sin x = 0.9729$ 檢表求 $x = ?$

表中找不着這數。但是找得一個最近的數值是 0.9728

牠是在角度 76° 的橫行裏面，黑字 .6 行的下面，可見這數的角度還要比較 $76^\circ.6$ 大些。又兩數相差只有 0.0001，同時附表上有一個1字，這1字在附表這行頂上的數是2；所以知道 $\sin 76.62 = 0.9729$ ，

$$\therefore x = 76^\circ.62。$$

c. 已知 $\sin x = 0.8560$ 檢表求 $x = ?$

照 b 找得最近數 0.8563 的角度是 $58^\circ.9$ ，相差最小數字是3。在附表上對準 3 的一行頂上數字是4。正弦函數小，角度也小；所以這個 4 要從 $58^\circ.90$ 末位減去。

$$\begin{aligned}\therefore \sin (58^\circ.90 - 0.04) &= \sin 58^\circ.86 \\ &= 0.8560,\end{aligned}$$

$$\therefore x = 58^\circ.86。$$

d. 已知 $\cos x = 0.8103$ 檢表求 $x = ?$

在正餘弦表上找得最近數 0.8100 的角度是 35.9 ，相差最小數字是3，再看在附表上 3 的一行，頂上數字是3。但是餘弦角度小，函數反大。

$$\begin{aligned}\therefore \cos (35^\circ.9 - 0.03) &= \cos 35^\circ.87 \\ &= 0.8103\end{aligned}$$

$$\therefore x = 35^\circ.87$$

正切餘切等從函數找角度照此類推。

習 題 六

試用上表找下列各函數：

1. $\cos 0^\circ.3$

2. $\cos 8^\circ.7$

3. $\cot 43^\circ.12$

4. $\cot 89^\circ.5$

- | | | | |
|-----|--------------------------------|----|----------------------|
| 5. | $\cot 82^{\circ}.65$ | 6. | $\cos 10^{\circ}.09$ |
| 7. | $\cot 16^{\circ}.09$ | 8. | $\cos 37^{\circ}.33$ |
| 9. | $\cos 66^{\circ}.66$ | | |
| 10. | 已知 $\sin x=0.7009$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 11. | 已知 $\cos x=0.7547$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 12. | 已知 $\sin x=0.7980$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 13. | 已知 $\cos x=0.5360$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 14. | 已知 $\cot x=13.617$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 15. | 已知 $\tan x=0.0787$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 16. | 已知 $\tan x=1.6984$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 17. | 已知 $\cot x=1.768$, 檢表找 $x=?$ | | |
| 18. | 已知 $\cot x=\infty$ 檢表找 $x=?$ | | |

(4) 角度帶有分秒的檢查法 上面所用的表，祇有度數的十進小數，沒有六十進的分秒。所以碰到有分秒的問題，就要用分秒化度表或度化分秒表。

a. 用上列表找 $\sin 63^{\circ}23'36''=?$

先在分秒變度表中找得

$$23' = 0^{\circ}.38333$$

$$36'' = 0^{\circ}.01$$

共計得 $0^{\circ}.39333$

用四捨五入方法， $23'36''=0^{\circ}.39$

$$\therefore \sin 63^{\circ}23'36'' = \sin 63^{\circ}.39$$

檢表得

$$= 0.8941$$

b. 已知 $\cos x=0.7112$ 檢表找 $x=?$ 以分秒計。

$$\cos x = 0.7112 \quad x = 44^{\circ}.67$$

再將 $0^{\circ}.67$ 在度化分秒表中找得 $40'12''$

$$\therefore x = 44^{\circ}40'12''$$

習題七

檢表找下列各函數：

1. $\sin 23^{\circ}12'37''$
2. $\cos 9^{\circ}6'8''$
3. $\tan 51^{\circ}47'28''$
4. $\cot 41^{\circ}40'12''$
5. 已知 $\sin x = 0.4115$, 試找 x 的度分秒 = ?
6. 已知 $\cos x = 0.9552$, 試找 x 的度分秒 = ?
7. 已知 $\tan x = 3.734$, 試找 x 的度分秒 = ?
8. 已知 $\cot x = 0.5767$, 試找 x 的度分秒 = ?

15. 直角三角形解法 有了三角函數表, 就可應用這函數表來解直角三角形, 不過所欲解的直角三角形, 除直角外, 至少還要知道兩個條件, 這兩個條件中, 至少有一個是邊。

所以有五種如下：

- a. 一銳角及斜邊
- b. 一銳角及對邊
- c. 一銳角及底邊
- d. 斜邊及另一邊
- e. 對邊及底邊

(a) 已知一銳角和斜邊,

解直角三角形, 在圖 12, 已知

$A = 43^{\circ}.7, c = 26$, 求 B, a 和 b 。

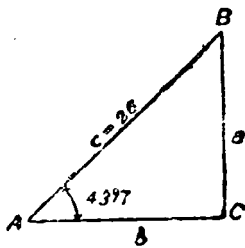


圖 12

解：(1) $B = 90^{\circ} - A = 90^{\circ} - 43^{\circ}.7 = 46^{\circ}.3$

$$(2) \frac{a}{c} = \sin A \quad \therefore a = c \sin A$$

檢表得 $\sin 43^{\circ}.7 = 0.6909$

$$\therefore a = 26 \times 0.6909 = 17.9634$$

$$(3) \frac{b}{c} = \cos A, \quad \therefore b = c \cos A$$

檢表得 $\cos 43^\circ.7 = 0.7230$

$$\therefore b = 26 \times 0.7230 = 18.798$$

(b) 已知一銳角和對邊，解直角三角形，在圖13，已知 $A = 13^\circ.6$, $a = 15.2$, 求 B, b 和 c 。

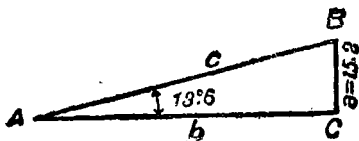


圖 13

解：(1) $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 13^\circ.6 = 76^\circ.4$

$$(2) \frac{b}{a} = \cot A, \quad \therefore b = a \cot A$$

檢表得 $\cot 13^\circ.6 = 4.134$

$$\therefore b = 15.2 \times 4.134 = 62.8368$$

$$(3) \frac{a}{c} = \sin A, \quad \therefore c = \frac{a}{\sin A}$$

檢表得 $\sin 13^\circ.6 = 0.2351$

$$\therefore c = \frac{15.2}{0.2351} = 64.65$$

(c) 已知一銳角及底邊，解直角三角形。在圖14，已知 $A = 27^\circ.2$, $b = 31$, 求 B, a 和 c 。

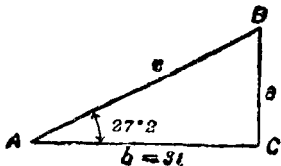


圖 14

解：(1) $B=90^\circ-A=90^\circ-27^\circ.2=62^\circ.8$

$$(2) \frac{a}{b} = \tan A, \quad \therefore a = b \tan A$$

檢表得 $\tan 27^\circ.2 = 0.5139$

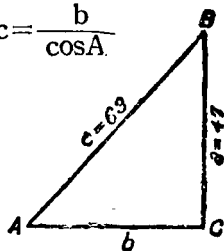
$$\therefore a = 31 \times 0.5139 = 15.9309$$

$$(3) \frac{b}{c} = \cos A, \quad \therefore c = \frac{b}{\cos A}$$

檢表得 $\cos 27^\circ.2 = 0.8894$

$$\therefore c = \frac{31}{0.8894} = 34.9$$

(b) 已知斜邊和另一邊，解直角三角形。在圖15，已知 $a=47, c=63$ ，求 A, B 和 b 。



解：(1) $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{47}{63} = 0.7460$ 圖 15

檢表得 $A = 48^\circ.24$

$$(2) B = 90^\circ - A = 90^\circ - 48^\circ.24 = 41^\circ.76$$

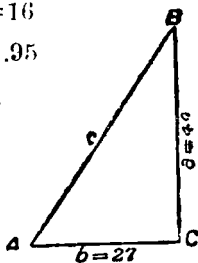
$$(3) b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$$

$$\text{因爲 } c+a = 63+47 = 110$$

$$c-a = 63-47 = 16$$

$$\text{所以 } b = \sqrt{110 \times 16} = \sqrt{1760} = 41.95$$

(e) 已知對邊及底邊，解直角三角形。在圖16，已知 $a=40, b=27$ ，求 A, B 和 c 。



解：(1) $\tan A = \frac{a}{b}$

$$\therefore \tan A = \frac{40}{27} = 1.4815,$$

圖 16

檢表得 $A = 55^\circ.98$

$$(2) B = 90^\circ - A = 90^\circ - 55^\circ.98 = 34^\circ.02$$

$$(3) a^2 = 1600, b^2 = 729$$

$$\begin{aligned} \therefore c &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1600 + 729} \\ &= \sqrt{2329} = 48.26 \end{aligned}$$

c 也可以用別的關係式求得，譬如求出 $\tan A$ 以後，就可以求得 $\sin A$ ，然後再用 $c = \frac{a}{\sin A}$ 求出；不過數字位數不多的時候，上面所用的方法比較工作簡省。

習 題 八

在直角三角形中已知：

1. $a=3, b=4$, 求 A, B, c 。
2. $a=7, c=13$, 求 A, B, b 。
3. $a=5.3, A=15^\circ.3$, 求 B, b, c 。
4. $a=10.4, B=45^\circ.18$, 求 A, b, c 。
5. $c=26, A=37^\circ.42$, 求 B, a, b 。
6. $c=140, B=24^\circ.15$, 求 A, a, b 。
7. $b=19, c=23$, 求 A, B, a 。
8. $b=98, c=135.2$, 求 A, B, a 。
9. $b=42.4, A=32.14$, 求 B, a, c 。
10. $b=200, B=46^\circ.11$, 求 A, a, c 。
11. $a+c=18, b=12$, 求 A, B, a, c 。
12. $a+b=9, c=8$, 求 A, B, a, b 。
13. 在湖的兩岸，立兩標竿 A 和 B 。在沿湖的一邊已經取得一線段 BC 垂直 AB ，並量得 $BC=300$ 公尺， $\angle ACB=50^\circ$ ，求湖寬 AB 的長。
14. 若等腰三角形等邊的長是 75 公分，底角是 $15^\circ.1$ ，解這等腰

三角形。

15. 正八邊形外接圓的半徑是40公分，求每邊的長。

16. 正方立體的對角線和牠一面的對角線相交在頂角，求兩對角線所夾的角。

17. 梯長45尺，一端靠在牆頂，另一端是在地上；若牆和梯所成的角是 60° ，求牆高及梯和牆在地面的距離。

18. 塔高300公尺，從另一塔頂看第一塔頂的仰角是 12° ，看塔基的俯角是 53° ，求兩塔的距離。

第四章 對數解法

16. 對數 三角上的算術計算，前面已經見過，往往是很麻煩的。要免去這種麻煩，我們就要用到一種新方法，叫做對數。

若有任何數 b ，牠的 x 次乘方（ x 也是任意數）是 N ，便有下式：

$$b^x = N \dots\dots\dots(1)$$

我們現在要特別看重這指數 x ，叫牠為 N 用 b 做底的對數，用記號表示，就有

$$x = \log_b N \dots\dots\dots(2)$$

(1) 叫做指數式，

(2) 叫做對數式。

他們表示的關係，完全是同樣的；不過寫法不同就是了。譬如 $2^3=8$ ，那末3就是8用2做底的對數；對數的記法就應寫做 $\log_2 8=3$ 。同樣 $3^2=9$ ， $2^5=32$ ， $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ ，

$xy=Z$ ，可寫做 $\log_3 9=2$ ， $\log_2 32=5$ ， $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}=3$ ， $\log Z$

$=y$ 。

習 題 九

1. 試將下列各等式寫成對數式：

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}; \sqrt[3]{125} = 5; 2^{-4} = \frac{1}{16}; 10^{-2} = .01; 10^8 = Q$$

2. 設底數為5，那末1, 5, 25, 125, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$ 等的對數是什麼？

3. 試尋出下列各對數的底：

$$\log 64 = 2; \log 121 = 2; \log 625 = 4; \log \frac{1}{25} = -2$$

4. 證明下列各式：

$$\log_{10} 1000 + \log_{10} 100 + \log_{10} 10 + \log_{10} 1 = 6$$

5. 試求：

$$2\log_a a + 2\log_a \frac{1}{a} + \log_a 1 = ?$$

17. 對數的性質

A. 兩數積的對數，等於兩數對數之和，

設兩數是M及N，牠們的對數是x及y，公共底是b，就有

$$\log_b M = x \quad \log_b N = y \cdots \cdots \text{I}$$

寫成指數式，

$$b^x = M \text{ 及 } b^y = N \cdots \cdots \text{II}$$

若兩數相乘，就有 $b^x \times b^y = M \times N$

照指數原理，就有 $b^{x+y} = MN \cdots \cdots \text{III}$

將 III 又寫成對數式，即得，

$$\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N$$

同理在兩個以上數的積，等於各個數的對數和，

B. 兩數商的對數，等於兩數的對數之差，和A一樣，

先寫出

$$\log_b M = x \text{ 及 } \log_b N = y$$

寫成指數式就有

$$b^x = M \text{ 及 } b^y = N$$

將N去除M就有

$$b^x \div b^y = M \div N$$

照指數原理，就有

$$b^{x-y} = \frac{M}{N}$$

寫成對數式就有

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y = \log_b M - \log_b N$$

C. 某數P次乘方的對數，等於牠的對數的P倍，

設 $\log_b N = x$

或 $b^x = N$

設兩邊都用P次乘方，就有

$$b^{px} = N^p$$

再寫成對數式，就有

$$\log_b N^p = px = p \log_b N$$

D. 某數的 r 次開方的對數，等於牠的對數的 $\frac{1}{r}$ 倍

設 $\log_b N = x$

$$b^x = N$$

兩邊都開 r 方，即得

$$b^{\frac{x}{r}} = N^{\frac{1}{r}}$$

再寫成對數式

$$\log_b N^{\frac{1}{r}} = \frac{x}{r} = \frac{\log_b N}{r} = \frac{1}{r} \log_b N$$

習 題 十

1. 已知 $\log_{10} 4 = 0.6021$; $\log_{10} 3 = 0.4771$, 求 $\log_{10} 12$; $\log_{10} 74$.
2. 求 $\log_{10} \sqrt{1000} + \log_{10} \sqrt{.1} = ?$
3. 問 $\log 5$ 是否等於 $\log \log 5$ 或 $5 \log 5$?
4. $\frac{\log 28}{\log 9}$ 是否等於 $\log \frac{28}{9}$ 或 $\frac{28}{9}$?
5. 試證明:

$$\log_1 \sqrt[3]{103 - \log_{10} (.1)^2} = \frac{14}{3}$$

18. 常用對數 凡正數中除 1 外，任何數都可以做對數的底，普通所用的對數，用 10 做底，叫做常用對數，這個 10 字往往省去不寫，譬如 $\log_{10} 100 = 2$ ，只須寫做 $\log 100 = 2$ 。

現在且將幾個對數是整數的寫在下面，

因爲 $10^4 = 10,000$	所以 $\log 10,000 = 4$
$10^3 = 1,000$	$\log 1,000 = 3$
$10^2 = 100$	$\log 100 = 2$
$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\log 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log 0.01 = -2$
$10^{-3} = 0.001$	$\log 0.001 = -3$
$10^{-4} = 0.0001$	$\log 0.0001 = -4$

在上面各排裏面，我們可以看出真數增加時，對數也

增加；並且凡在 100 到 1000 中間的數，牠們的對數在 2 到 3 之間；同理在 .1 到 .01 中間的數，牠們的對數在 -1 到 -2 之間。

19. **定位部與定值部** 因為對數完全是整數的很少，大多數的對數都有整數和小數兩部分。

例如，4587 是一個介在 10^3 到 10^4 中間的數，所以，

$$\log 4587 = 3 + \text{小數}$$

同理，因為 0.0067 是一個介在 10^{-3} 到 10^{-2} 中間的數，所以

$$\begin{aligned} \log 0.0067 &= -(2 + \text{小數}) \\ &= -2 - \text{小數} \end{aligned}$$

實際上，爲了要便於計算，

$$\begin{aligned} \log 0.0067 &= (-2) + (-\text{小數}) \\ &= (-1-2) + (1-\text{小數}) \\ &= -3 + \text{新的小數} \end{aligned}$$

$$400 > 4587 > 300$$

這樣一改變的意思，是使常用對數的小數部分總是正數；再舉一例，

$$\begin{aligned} \log .004712 &= -2.3268 \\ &= -2 - .3268 \\ &= (-1-2) + (1-.3268) \\ &= \bar{3}.6732 \end{aligned}$$

這種寫法的意思，就是 3 是負數，而 .6732 却是正數。那末祇要數字相同，不管是整數小數，牠的對數的小數部分都是一樣的。

諸如上述情形，可見對數中的整數部分與真數的位數

有關，因此叫做定位部。

又對數中的小數部分，可以決定對數的大小，因此叫做定值部。

例如 $\log 357=2.5527$ 及 $\log 3.57=0.5527$; $\log .004712=3.6732$ 及 $\log 4712=3.6732$ ，其中 2, 0, $\bar{3}$ 及 3 都是定位部，而 .5527, .5527, .6732 及 .6732 都是定值部。

20. 對數表及三角函數對數表 指定一數做底，任何數都可以找出他的對數，為便利起見，前人已將常用對數開列成表，本書末尾附有對數表及三角函數對數表，各表都有四位數，檢表方法略述如下：

在後兩面（第90—91面）是由 1 到 10 的各數，定位部是 0。有了這表，一切對數的定值部都可以找到，定位部則隨位數變換。

因為要免去附表的手續，自 1 至 2 中間各數的對數另列一表（第104—105面）。

又如已知某數的對數，反過來求這個數時，方法也是一樣。不過於定位部須特別注意，以定小數點的位置。尤其是在定位部為負數的時候。

例如已知某數的對數是 3.9786，檢表得 952，但是因為定位部是 3，所以這個數就是 9520。

又如已知某數的對數是 -2.3268 ，因為定位部是負數，所以應該改寫做 $\bar{3}.6732$ ，檢表得 4712。已知定位部是 -3 ，所以這個數就是 .004712。

三角函數對數表，是已將三角函數找好了對數的表，在應用時不必先去找得函數，再由函數找對數，只要直接

由角度，在表中便可以找出三角函數的對數。

在正餘弦對數表（第94—95面）之前，另有一表載 0° 至 10° 各角的正弦及 80° 至 90° 各角的餘弦對數，而在正餘切對數表（第98—99面）之前後，另有 0° 至 10° 各角度的正餘切及 80° 至 90° 各角度的正餘切的對數，因為這些函數的變化甚大，所以不能應用附表。

在三角函數對數表內，定位部都已印好，有正的，也有負的。負定位部如 $\bar{1}$ ， $\bar{2}$ 等，在計算時，最好改為 $9-10$ 及 $8-10$ 等較為便利。

例如 $\log \sin 4^\circ.22 = 2.8668$ ，倘改寫作 $8.8668-10$ ，於計算時便當不少。

習 題 十 一

1. 求下列各數的對數

- | | |
|--------------|--------------|
| a. 1.852 | b. 36.78 |
| c. 0.7384 | d. 0.09381 |
| e. 0.0006842 | f. 2,345,000 |
| g. 3,406,000 | h. 789.1 |
| i. 9876 | |

2. 設某數的對數為

- | | |
|--------------|--------------|
| a. 0.7752 | b. 1.7683 |
| c. 3.3162 | d. 9.7348-10 |
| e. 8.4084-10 | f. 2.7960 |

求各個某數。

3. 求下列各數之值

- | |
|----------------------------|
| a. $\log \sin 6^\circ.21$ |
| b. $\log \sin 70^\circ.83$ |

- c. $\log \cos 21^\circ.73$
 d. $\log \cos 42^\circ.98$
 e. $\log \tan 78^\circ.25$
 f. $\log \tan 5^\circ.44$
 g. $\log \cot 82^\circ.31$
 h. $\log \cot 8^\circ.34$

4. 求下列各式中 x 之值

- a. $\log \sin x = 9.7608 - 10$
 b. $\log \sin x = 9.9107 - 10$
 c. $\log \cos x = 9.8223 - 10$
 d. $\log \cos x = 9.6197 - 10$
 e. $\log \tan x = 0.4418$
 f. $\log \tan x = 1.4791$

21. 餘對數 凡數的倒數的對數叫做這數的餘對數，用 colog 記之、

$$\text{colog } n = \log \frac{1}{n} = \log 1 - \log n$$

所以 $\text{colog } n = 0 - \log n$

或
$$\begin{aligned} \text{colog } n &= (10 - 10) - \log n \\ &= 10 - \log n - 10 \end{aligned}$$

爲便利起見，只要從10上減去該數的對數，而後面寫上一10就是餘對數。

例如 $\log 71.24 = 1.8527$

$$\begin{aligned} \text{colog } 71.24 &= 10 - 1.8527 - 10 \\ &= 8.1473 - 10 \end{aligned}$$

在計算時，只須洛用心算，不必像上面的列成式子，只要將結果直接寫出就是。

餘對數的便利處是在用加可以代減，

例如 $\log \frac{m}{nP} = \log m - \log n - \log P$

改用餘對數後，即得

$$\log \frac{m}{nP} = \log m + \operatorname{colog} n + \operatorname{colog} P$$

習 題 十 二

1. 求下列各數的餘對數

- | | |
|--------------|-----------|
| a. 345.0 | b. 67.89 |
| c. 9874 | d. 1.632 |
| e. 0.05431 | f. 0.2468 |
| g. 0.008342 | h. 998600 |
| i. 0.0003694 | |

2. 求下列各數之值

- $\operatorname{colog} \sin 20^\circ.78$
- $\operatorname{colog} \sin 78^\circ.82$
- $\operatorname{colog} \cos 83^\circ.64$
- $\operatorname{colog} \cos 1^\circ.63$
- $\operatorname{colog} \tan 81^\circ.34$
- $\operatorname{colog} \tan 28^\circ.74$

22. 用對數解直角三角形 從前直角三角形的解法，

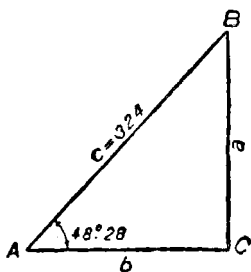


圖 17

數目乘除的時候，非常麻煩，現在採用對數，就可省去。

例 I 圖17中 $A=48.28$, $c=324$, 解直角三角形，並求牠的面積。

$$\text{解： } B=90^\circ - A=41^\circ.72$$

$$a=c \sin A$$

$$\log a = \log c + \log \sin A$$

檢表即得

$$\begin{array}{r} \log c = 2.5105 \\ +) \log \sin A = 9.8730 - 10 \\ \hline \log a = 12.3835 - 10 \\ = 2.3835 \end{array}$$

檢表即得

$$\begin{aligned} a &= 241.8 \\ b &= c \cos A \end{aligned}$$

$$\log b = \log c + \log \cos A$$

檢表即得

$$\begin{array}{r} \log c = 2.5105 \\ +) \log \cos A = 9.8231 - 10 \\ \hline \log b = 12.3336 - 10 \\ = 2.3336 \end{array}$$

檢表即得

$$b = 215.6$$

驗誤

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{何故?}$$

$$a^2 = (c+b)(c-b) \quad \text{何故?}$$

$$2 \log a = \log (c+b) + \log (c-b)$$

$$\log a = \frac{1}{2} \{ \log (c+b) + \log (c-b) \}$$

據上所得

$$c+b = 539.6 \text{ 及 } c-b = 108.4$$

$$\log (c+b) = 2.7321$$

$$\begin{array}{r} +) \log (c-b) = 2.0350 \\ \hline 2 \log a = 4.7671 \end{array}$$

$$\log a = 2.3835$$

所驗結果相同，故知無錯誤。

直角三角形的面積是高底相乘之半，
就是

$$\text{面積 } A = \frac{ab}{2}$$

$$\log A = \log a + \log b - \log 2$$

$$\log a = 2.3835$$

$$+) \log b = 2.3336$$

$$4.7171$$

$$-) \log 2 = 0.3010$$

$$4.4161$$

檢表得面積 $A = 26,070$

例 II 已知 $b = 15.12, c = 30.81,$

解直角三角形 (圖 18)。

$$\text{解: } \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\therefore \log \cos A = \log b - \log c$$

$$\log b = 11.1796 - 10$$

$$-) \log c = 1.4887$$

$$\log \cos A = 9.6909 - 10$$

$$\therefore A = 60^\circ .61$$

$$B = 90^\circ - A$$

$$= 90^\circ - 60^\circ .61$$

$$= 29^\circ .39$$

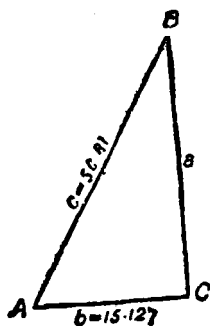


圖 18

求 a 時用公式

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$a = b \tan A$$

$$\log a = \log b + \log \tan A$$

$$\log b = 1.1796$$

$$\begin{array}{r} + \log \tan A = 0.2493 \\ \log a = 1.4289 \end{array}$$

$$\therefore a = 26.85$$

驗誤：

$$a^2 = (c+b)(c-b)$$

$$\log a = \frac{1}{2} \{ \log(c+b) + \log(c-b) \}$$

據上式得

$$c+b = 45.93$$

$$c-b = 15.69$$

$$\log(c+b) = 1.6621$$

$$\log(c-b) = 1.1956$$

$$\frac{2 \log a = 2.8577}{\log a = 1.4289}$$

$$\log a = 1.4289$$

驗得結果相同，故知無錯誤，

例 III 已知 $B=2^\circ.305$, $a=1875.3$,

解直角三角形 (圖19),

$$\text{解：} \quad A = 90^\circ - B$$

$$= 90^\circ - 2^\circ.305$$

$$= 87^\circ.695$$

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$c = \frac{a}{\sin A}$$

$$\log c = \log a - \log \sin A$$

$$\log a = 13.2731 - 10$$

$$- \log \sin A = 9.9996 - 10$$

$$\log c = 3.2735$$

$$\therefore c = 1877$$

求 b , 用公式

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$b = \frac{a}{\tan A}$$

$$\log b = \log a - \log \tan A$$

$$\log a = 13.2731 - 10$$

$$\begin{array}{r} - \log \tan A = 11.3953 - 10 \\ \hline \log b = 1.8778 \end{array}$$

$$\therefore b = 75.49$$



圖 19

驗誤時可用下列二式

$$a^2 = (c+b)(c-b); \quad b = c \sin B.$$

習 題 十 三

用對數法試解下列各直角三角形, $C=90^\circ$:

- | | | | |
|-----|----|-----------------|-----------|
| 1. | 已知 | $A=43^\circ.5$ | $c=11.2$ |
| 2. | 已知 | $B=68^\circ.83$ | $a=729.3$ |
| 3. | 已知 | $B=62^\circ.93$ | $b=47.7$ |
| 4. | 已知 | $a=.624$ | $c=.91$ |
| 5. | 已知 | $A=72^\circ.12$ | $a=83.4$ |
| 6. | 已知 | $b=2.887$ | $c=5.11$ |
| 7. | 已知 | $A=52^\circ.68$ | $b=4217$ |
| 8. | 已知 | $a=101$ | $b=116$ |
| 9. | 已知 | $A=43^\circ.37$ | $a=158.3$ |
| 10. | 已知 | $a=204.2$ | $c=275.3$ |
| 11. | 已知 | $B=10^\circ.85$ | $c=.7264$ |
| 12. | 已知 | $a=638.5$ | $b=501.2$ |

13.	已知	$b = .02497$	$c = .04792$
14.	已知	$B = 2^{\circ}19'$	$a = 1375.3$
15.	已知	$B = 10^{\circ}33'11''$	$a = .8271$
16.	已知	$A = 74^{\circ}118''$	$c = 275.62$
17.	已知	$B = 34^{\circ}14'37''$	$b = 129.52$
18.	已知	$a = 10.107$	$b = 17.303$
19.	已知	$a = 24.67$	$b = 33.02$
20.	已知	$A = 78^{\circ}17'$	$a = 203.8$

23. 應用問題上幾個名詞 三角上的應用問題很多，其中所用的專門名詞也不少，所以要特別解釋，纔能明白。

I. 在地面上任何點上所引直線通過地心的，就叫做這點的垂直線。經過垂直線的平面，叫做垂直面。和垂直線成直角的線或平面，叫做水平線或水平面。

II. 仰角俯角的解釋，見第一章第七節。仰角有時叫做高度 譬如太陽的高度就是太陽的仰角。

III. 線的方向 平常所說線的方向就是該線和正南

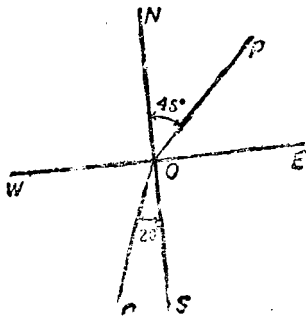


圖 20

或正北線相交的角度。例如圖 20 的 OP 在北向東 45° 就寫作 $N 45^{\circ}E$ ；若以在東向北記 OP 之方向，就寫作 $E 45^{\circ}N$ 。同樣 OQ 是在南向西 20° ，所以寫做 $S 20^{\circ}W$ ；若以在西向南記 OQ 之方向，就寫做 $W 70^{\circ}S$ 。

再如說甲地在乙地的 $S 36^{\circ}E 20$ 里，就是表示甲地在乙地

的南方再向東 36° ，並且兩地的距離是30里。

習 題 十 四

1. 甲乙兩站同在一平線上，相隔三公里。若在甲站垂直的空中汽球上看乙站，量得俯角是 $8^\circ.15'$ ，求汽球的高。
2. 從南岸量得北岸土山頂的仰角為 $14^\circ 3' 21''$ 。已知北岸土山頂高出水面130公尺，求河的闊。
3. 用18尺長繩子縛在20尺高的樹頂上，順手拉繩的末端使和地平碰着，求繩和樹間所成的角度。
4. 5尺長的人，站在距燈光4尺的地方而或13尺的影子，求燈光的高。
5. 113尺高的海邊岩石的影子，能遮住離牠93尺的船隻。求此時太陽的高度。
6. 一樹被風折斷，牠的頂點倒在離樹根15尺地方而和地成 $4^\circ 28'$ 的角度，求樹高多少？
7. 在地上仰望對街高121尺房屋仰角為 $35^\circ.3'$ ，求街面的闊。
8. 兩脚規的長為7寸。設將兩腳分開到 45° 時，求中間距離多少寸？

第五章 任意三角形的解法

24. 鈍角三角函數 在第一章已經講過銳角的三角函數，以後並利用這種函數解直角三角形，但是三角形的三隻角不必都是銳角，其中可以含有直角，或鈍角的；所以要解任意三角形，先要研究鈍角的各三角函數

如圖 21，銳角 POX 可以說是直線 OX 從 OX 的位置繞着一端點 O ，依反時針向旋轉到 OP 的位置發生的。直線

OX 叫做這角的始線，
直線 OP 叫做軸的終線。
從始線旋轉到 90° 的時
候，例如到 OP' 的位置，
 $\angle P'OX$ 就是直角；若
再繼續旋轉，例如到 O
P'' 的位置， $\angle P''OX$ 就
是鈍角。

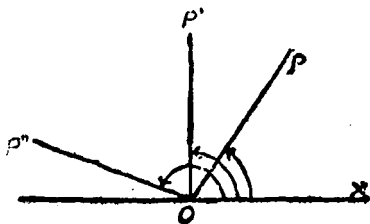


圖 21

設在圖 22, $\angle POX$ 是一銳角，用 A 來表示牠；又 $\angle P'OX$ 是一鈍角，用 B 來表示牠。今在 $\angle A$ 的終線上取一點 P 向始線 OX 作垂線 PM，那麼 OM 叫做 OP 在始線上的正射影，PM 叫做 P 點的射線，同樣 $\angle B$ 終線 OP'，在始線上的正射影是 OX 在反向引長線上的 OM'，而 OM' 的垂線 P'M'，叫做 P' 點對於始線的射線。若用正射影的關係來

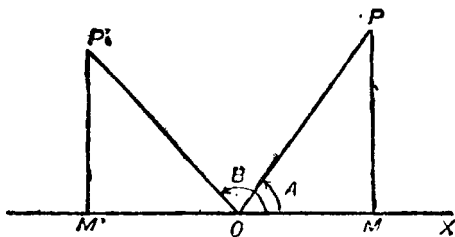


圖 22

表示各三角函數，就有

$$\sin A = \frac{P \text{ 點射線}}{A \text{ 角終線}} = \frac{PM}{OP}, \quad \sin B = \frac{P' \text{ 點射線}}{B \text{ 角終線}} = \frac{P'M'}{OP'}$$

$$\cos A = \frac{A \text{ 角終線正射影}}{A \text{ 角終線}} = \frac{OM}{OP}, \quad \cos B = \frac{B \text{ 角終線正射影}}{B \text{ 角終線}} = \frac{OM'}{OP'}$$

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{P \text{ 點射線}}{A \text{ 角終線正射影}} = \frac{PM}{OM}, & \tan B &= \frac{P' \text{ 點射線}}{B \text{ 角終線正射影}} = \frac{P'M'}{OM'} \\ \cot A &= \frac{A \text{ 角終線正射影}}{P \text{ 點射線}} = \frac{OM}{PM}, & \cot B &= \frac{B \text{ 角終線正射影}}{P' \text{ 點射線}} = \frac{OM'}{P'M'} \\ \sec A &= \frac{A \text{ 角終線}}{A \text{ 角終線正射影}} = \frac{OP}{OM}, & \sec B &= \frac{B \text{ 角終線}}{B \text{ 角終線正射影}} = \frac{OP'}{OM'} \\ \csc A &= \frac{A \text{ 角終線}}{P \text{ 點射線}} = \frac{OP}{PM}, & \csc B &= \frac{B \text{ 角終線}}{P' \text{ 點射線}} = \frac{OP'}{P'M'} \end{aligned}$$

25. 補角函數公式 在普通初等幾何學上，直線祇論長度但在三角法上再要加一種方向。通例以一點做標準，向右所引的直線段是正，向左引的，就是反向所引的直線是負；例如上節圖 22, OM 是正, OM' 是負。直線的方向有了正負，鈍角的三角函數，就可以用補角的三角函數來表示。所謂補角就是兩角相加，等於 180° 。例如 $A + B = 180^\circ$ ，那末 A 和 B 叫做互為補角。

設在圖 23, $\angle POX$ 和 $\angle P'OX'$ 是兩相等的銳角，那末 $\angle POX + \angle P'OX = \angle P'OX + \angle P'OX' = 180^\circ$ 或 $\angle A' + \angle B$

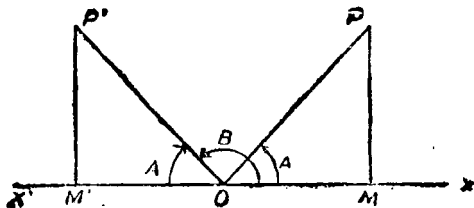


圖 23

$= \angle B + \angle A' = 180^\circ$ 。同時假定 $OP = OP'$, PM 和 $P'M'$ 均垂直於 $X'X$, $PM = P'M'$, 那末依上節所講的鈍角三角函數定義和直線方向的正負號，就有

$$\sin B = \frac{P'M'}{OP'} = \frac{PM}{OP} = \sin A$$

$$\cos B = \frac{OM'}{OP'} = -\frac{OM}{OP} = -\cos A$$

$$\tan B = \frac{P'M'}{OM'} = -\frac{PM}{OM} = -\tan A$$

$$\cot B = \frac{OM'}{P'M'} = -\frac{OM}{PM} = -\cot A$$

$$\sec B = \frac{OP'}{OM'} = -\frac{OP}{OM} = -\sec A$$

$$\csc B = \frac{OP'}{P'M'} = \frac{OP}{PM} = \csc A$$

用普通語言來說，就是“鈍角各三角函數和牠互為補角的銳角各三角函數的數值（即絕對值）是相等的；但是除正弦餘割之外，其他各函數的正負號却都相反”

所以要找鈍角各函數，祇要從牠的補角（當然是銳角）求得，同時應改號的再改變正負號。

習 題 十 五

1. 在方格紙上畫出 120° ， 135° 和 150° 各鈍角，照第一章求銳角各三角函數的方法，求這三種角的各三角函數。

2. 用正射影的關係，說明正弦，餘弦和正切的變化。

(a) 角度從 0° 到 90°

(b) 角度從 90° 到 180°

26. 解任意三角形 有了鈍角的三角函數，就可以解任意三角形。三角形共有三邊和三角，彼此有相互的關係，只要知道了其中三件，就不難將其牠三件找出。但所知的三件之中，至少要一件是邊。所以解任意三角形的方法，可分做四類：

I 已知一邊與兩角

II 已知二邊與一非夾角

III 已知二邊與一夾角

IV 已知三邊

此外還有三角形的面積；頂垂線（三角形的高度）；中線；分角線；內接圓徑及外接圓徑等等，也都可以從三邊三角推算出來。

27. 解任意三角形所根據的定律 在從前解直角三角形，牠的 $\angle C=90^\circ$ ，就是任意三角形中的一種特殊情形，所以現在所採用的定律，可以將以前的

$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$a = c \sin A$$

及

$$a^2 + b^2 = c^2$$

約略改變一下即得，

I 三角和的定律

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \dots\dots\dots I$$

II 正弦定律 在圖24，左右兩圖中，A, B, C, 為 $\triangle ABC$ 的三隻角，a, b, c 為 $\triangle ABC$ 的三邊。作 $CD \perp AB$ 和 AB 或引長線相遇於 D。叫 $CD=h$ ，於是

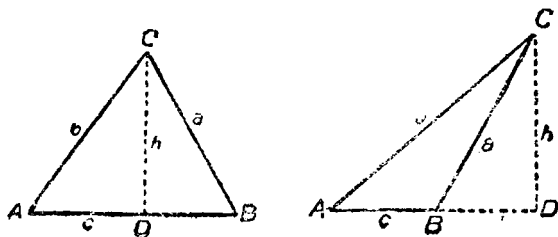


圖 24

$$\frac{h}{b} = \sin A$$

在左圖 $\frac{h}{a} = \sin B$

在右圖 $\frac{h}{a} = \sin(180^\circ - B) = \sin B$

$$\therefore \frac{h}{b} \div \frac{h}{a} = \sin A \div \sin B$$

得 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$

同理 $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$ 或 $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$

於是即得

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots\dots \text{II}$$

這就叫做正弦定律。

III. 餘弦定律

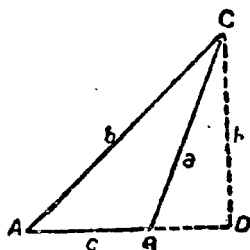
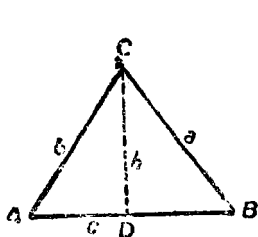


圖 25

在圖 25 左右兩圖中，

$$a^2 = h^2 + BD^2 \dots\dots\dots (1)$$

左圖中 $BD = c - AD$

右圖中 $BD = AD - c$

總之 $BD^2 = \overline{AD}^2 - 2c \times AD + c^2$

代入 (1) 中

$$a^2 = h^2 + \overline{AD}^2 + c^2 - 2c \times AD \dots\dots\dots (2)$$

但是 $h^2 + \overline{AD}^2 = b^2$

$$AD = b \cos A$$

代入 (2) 中

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \dots\dots\dots \text{III}$$

同理即得

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

這就叫做餘弦定律。

有了這三個定律，我們就可以解任何三角形。因為在正弦定律中可以：

(一) 用一邊兩角去再找一邊 第一類

(二) 二邊非夾角去再找一角 第二類在餘弦定律中

可以

(三) 用二邊夾一角去找第三邊 第三類

(四) 用三邊去找一角 第四類

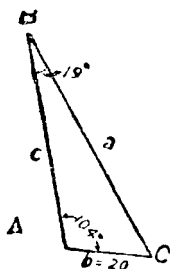
28. 第一類 已知一邊與任兩角

例：設如圖 26 中，已知 $b=20$,

$$A = 104^\circ$$

$$B = 19^\circ$$

求解這三角形



$$\begin{aligned} \text{解： } \angle C &= 180^\circ - (A + B) \\ &= 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ \end{aligned}$$

$$\text{求 } a \quad \text{用 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B$$

$$\log b = 1.3010$$

$$\begin{array}{r} \text{圖 26} \quad +) \log \sin A = 9.9869 - 10 \\ \hline 11.2879 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -) \log \sin B = 9.5126 - 10 \\ \hline \log a = 1.7753 \end{array}$$

$$\text{檢表得 } a = 59.61$$

$$\text{求 } c \quad \text{用 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B}$$

$$\log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B$$

$$\log b = 1.3010$$

$$\begin{array}{r} +) \log \sin C = 9.9236 - 10 \\ \hline 11.2246 - 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -) \log \sin B = 9.5126 - 10 \\ \hline \log c = 1.7120 \end{array}$$

$$\text{檢表得 } c = 51.52$$

習 題 十 六

求解下列三角形ABC, 已知

1.	$a=10$	$A=38^\circ$	$B=77^\circ 10'$
2.	$a=795$	$A=75^\circ 50'$	$B=44^\circ 41'$
3.	$b=23.01$	$A=87^\circ 40'$	$C=33^\circ 15'$
4.	$c=161$	$A=35^\circ 15'$	$C=123^\circ 40'$
5.	$b=2056$	$A=60^\circ 52'$	$B=70^\circ$
6.	$b=8$	$A=86^\circ$	$B=9^\circ 15' 43''$
7.	$c=.0059$	$B=76^\circ$	$C=36^\circ 57'$
8.	$b=8000$	$A=24^\circ 5'$	$B=86^\circ 40'$
9.	$c=59$	$A=2^\circ 08'$	$B=112^\circ$
10.	$a=500$	$A=10^\circ 2'$	$B=46^\circ 6'$

29. 第二類 已知二邊與一非夾角 這一類情形中，有時會沒有解答的。若三角形 ABC，已知 a, b 和 A 三項，可應用正弦定律

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

以求 B；但是在用對數算時，設使得到的結果是

$$\log \sin B = 0, \sin B = 1, = 90^\circ,$$

那末就是直角三角形。

設 $\log \sin B > 0$ ，即 $\sin B > 1$ ，那是命題的錯誤，因為決無此理的。

設 $\log \sin B < 0$ 及 $b < a$ ，那末只有一個答數。

設 $\log \sin B < 0$ 而 $b > a$ ，則可得到兩個答數。

要明白上述的情形，最好看下面各例：

a. 若 $a=30$ ， $b=80$ ， $A=28^\circ$ ，解三角形

解：先求 $\sin B$ 。

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\log b = 1.9031$$

$$+) \frac{\log \sin A = 9.6716 - 10}{11.5747 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 1.5563}{\log \sin B = 10.0184 - 10}$$

$$\therefore \log \sin B = 0.0184$$

因爲 $\log \sin B > 0$, $\sin B > 1$, 所以
不能有解答的。

b. 已知 $a=7.42$, $b=3.39$, $A=105^\circ$ 。

$$\text{解: } \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\log b = 0.5302$$

$$+) \frac{\log \sin A = 9.9849 - 10}{10.5151 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 0.8704}{\log \sin B = 9.6447 - 10}$$

因爲 $\log \sin B < 0$, 而 $b < a$, 所以祇有一個解答;

$$\therefore B = 26^\circ 11'$$

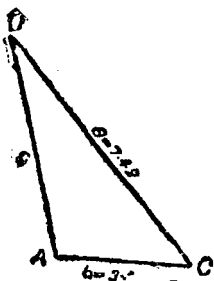


圖 28

$$\angle C = 180^\circ - (A + B)$$

$$= 180^\circ - 131^\circ 11' = 48^\circ 49'$$

求 c 用

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

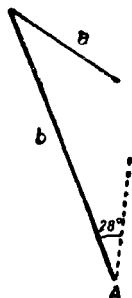


圖 27

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

$$\log a = 0.8704$$

$$+) \frac{\log \sin C = 9.8766 - 10}{10.7470 - 10}$$

$$-) \frac{\log \sin A = 9.9849 - 10}{\log c = 0.7621}$$

$$\therefore c = 5.783$$

c. 已知 $a = 732$, $b = 1015$, $A = 40^\circ$

$$\text{解: } \sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$$

$$\log b = 3.0065$$

$$+) \frac{\log \sin A = 9.8081 - 10}{12.8146 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 2.8645}{\log \sin B = 9.9501 - 10}$$

因爲 $\log \sin B < 0$,

而 $b > a$,

所以我們可以得到兩個解答 如圖 29 中, $B = 63^\circ 5'$, 而另外還有一個 B 就是

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 116^\circ$$

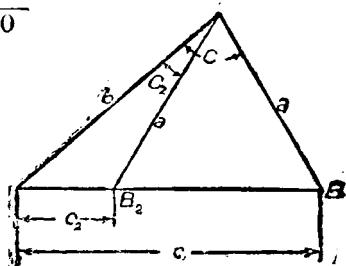


圖 29

57'

同理 $\angle C_1 = 180^\circ - (A + B_1) = 180^\circ - 103^\circ 5' = 76^\circ 55'$

$$\angle C_2 = 180^\circ - (A + B_2) = 180^\circ - 156^\circ 57' = 23^\circ 3'$$

求 c_1 用 $c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A}$

$$\log c_1 = \log a + \log \sin C_1 - \log \sin A$$

$$\log a = 2.8645$$

$$+) \log \sin C_1 = \frac{9.9886 - 10}{12.8531 - 10}$$

$$-) \log \sin A = \frac{9.8081 - 10}{\log c_1 = 3.0450}$$

$$\therefore c_1 = 1109.3$$

同理 $c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A}$

$$c_2 = 445.9$$

習 題 十 七

求解下列各三角形，已知

- | | | | |
|-----|-----------|------------|--------------------|
| 1. | $a=50$ | $c=66$ | $A=123^\circ 11'$ |
| 2. | $a=5.05$ | $b=3.59$ | $A=63^\circ 50'$ |
| 3. | $a=62.2$ | $b=74.8$ | $A=27^\circ 18'$ |
| 4. | $b=2337$ | $c=1982$ | $B=109^\circ$ |
| 5. | $a=107$ | $c=171$ | $C=31^\circ 53'$ |
| 6. | $b=3069$ | $c=1223$ | $C=55^\circ 52'$ |
| 7. | $b=5.161$ | $c=6.84$ | $B=44^\circ 3'$ |
| 8. | $a=3.656$ | $c=19$ | $A=52^\circ 57'$ |
| 9. | $a=34.56$ | $b=284.79$ | $B=104^\circ 20'$ |
| 10. | $a=32.16$ | $c=27.03$ | $C=52^\circ 24'$ |
| 11. | $b=811.3$ | $c=606.4$ | $B=126^\circ 42''$ |
| 12. | $b=9.399$ | $c=9.197$ | $B=120^\circ 4'$ |

13. $b=0.048$ $c=0.0621$ $B=57^{\circ}.62$

14. $a=34$ $b=22$ $C=30^{\circ}.35$

30. 第三類 已知二邊與一夾角

例如圖 30 中, $a=540$, $b=420$, $C=52^{\circ}6'$, 應用餘弦定律,

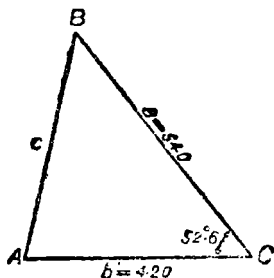


圖 30

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\begin{aligned} \therefore c &= \sqrt{540^2 - 420^2 - 2 \times 540 \times 420 \cos 52^{\circ}6'} \\ &= \sqrt{291600 + 176400 - 278700} \\ &= \sqrt{189300} \\ &= 435.1 \end{aligned}$$

求 A,

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}$$

$$\log \sin A = \log a + \log \sin C - \log c$$

$$\log a = 2.7324$$

$$\begin{aligned} +) \log \sin C &= 9.8971 - 10 \\ \hline &= 12.6295 - 10 \end{aligned}$$

$$-) \frac{\log c = 2.6386}{\log \sin A = 9.9909 - 10}$$

檢表得 $A = 78^\circ 18'$

$$\begin{aligned} \angle B &= 180^\circ - (A + C) = 180 - 130^\circ 24' \\ &= 49^\circ 36' \end{aligned}$$

習 題 十 八

求解下列各三角形，已知

- | | | | |
|----|--------------|--------------|------------------|
| 1. | $a=27$ | $c=15$ | $B=46^\circ$ |
| 2. | $a=486$ | $b=347$ | $C=51^\circ 36'$ |
| 3. | $a=53.27$ | $b=41.61$ | $C=78^\circ 33'$ |
| 4. | $b=\sqrt{5}$ | $c=\sqrt{3}$ | $A=35^\circ 53'$ |
| 5. | $a=101$ | $b=29$ | $C=32^\circ 18'$ |
| 6. | $b=6$ | $c=9$ | $A=88^\circ.9$ |
| 7. | $a=12$ | $b=19$ | $C=5^\circ.24$ |
| 8. | $c=45$ | $b=29$ | $A=42^\circ.8$ |

31. 第四類 已知三邊

例：求解圖31中三角形，已知 $a=51$ ， $b=65$ 及 $c=20$

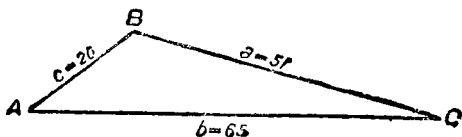


圖 31

解：求 A 從 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\therefore \cos A = \frac{65^2 + 20^2 - 51^2}{2 \times 65 \times 20} = \frac{2024}{2600} = 0.7784$$

檢表得 $A = 38^\circ.9$

求 C 從 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

即 $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$

$$\log \sin C = \log c + \log \sin A - \log a$$

$$\log c = 1.3010$$

$$+) \log \sin A = \frac{9.7979 - 10}{11.0989 - 10}$$

$$-) \frac{\log a = 1.7076}{\log \sin C = 9.3913 - 10}$$

檢表得 $C = 14^\circ.24$

$$B = 180 - (A + C)$$

$$= 180 - 53^\circ.14$$

$$= 126^\circ.86$$

習 題 十 九

求解下列各三角形，已知

- | | | | |
|----|----------|----------|----------|
| 1. | $a=2$ | $b=3$ | $c=4$ |
| 2. | $a=2.5$ | $b=2.79$ | $c=2.33$ |
| 3. | $a=5.6$ | $b=4.3$ | $c=4.9$ |
| 4. | $a=111$ | $b=145$ | $c=40$ |
| 5. | $a=79.3$ | $b=14.2$ | $c=36.3$ |
| 6. | $a=331$ | $b=151$ | $c=402$ |
| 7. | $a=641$ | $b=593$ | $c=702$ |

8. $a=73$ $b=52$ $c=91$
 9. $a=1.9$ $b=3.4$ $c=4.9$
 10. $a=\sqrt{5}$ $b=\sqrt{6}$ $c=\sqrt{7}$

32. 已知三邊求面積

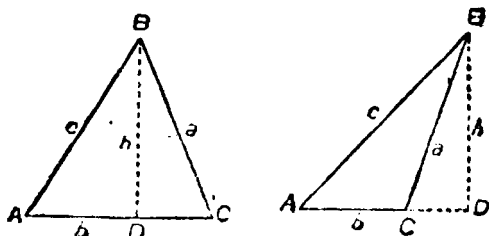


圖 32

因爲 $\sin A = \frac{BD}{c}$
 $BD = c \sin A$
 面積 $= \frac{1}{2} h b$
 $h = BD$
 \therefore 面積 $F = \frac{1}{2} c \sin A \cdot b$
 $= \frac{1}{2} cb \sin A$

同理 $F = \frac{1}{2} a b \sin C$
 $= \frac{1}{2} b c \sin A$
 $= \frac{1}{2} a c \sin B$ }

$$\text{因爲 } F = \frac{1}{2} b c \sin A$$

$$F^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 A$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 A)$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 + \cos A) (1 - \cos A)$$

用餘弦定律

$$F^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

簡化得

$$= \frac{1}{16} (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c) \cdots \text{II}$$

假定三角形的全周叫做 $2s$ ，那末

$$a+b+c=2s$$

$$b+c-a=2(s-a)$$

$$a+c-b=2(s-b)$$

$$a+b-c=2(s-c)$$

代入 II 中，

$$F^2 = \frac{1}{16} \times 2s \times 2(s-a) \times 2(s-b) \times 2(s-c)$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\therefore F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

例：求三角形 ABC 的面積，已知 $a=12.53$, $b=24.9$, $c=18.91$

解： $2s = a + b + c = 12.53 + 24.9 + 18.91 = 56.34$

$$\therefore s = 28.17$$

$$s-a=28.17-12.53=15.64$$

$$s-b=28.17-24.9=3.27$$

$$s-c=28.17-18.91=9.26$$

$$\therefore F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore \log F = \frac{1}{2} (\log s + \log (s-a) + \log (s-b) + \log (s-c))$$

$$\log s = 1.4498$$

$$\log (s-a) = 1.1942$$

$$\log (s-b) = 0.5145$$

$$\log (s-c) = 0.9666$$

$$\underline{\underline{24.1251}}$$

$$\log F = 2.0326$$

$$F = 115.5$$

習 題 二 十

求下列三角形的面積，已知

- | | | | |
|----|-----------|----------|-----------|
| 1. | $b=142.8$ | $c=89.6$ | $a=59$ |
| 2. | $a=79$ | $b=74$ | $c=67$ |
| 3. | $a=23.1$ | $b=19.7$ | $c=25.2$ |
| 4. | $a=58.2$ | $b=6$ | $c=4.26$ |
| 5. | $a=4$ | $b=7$ | $c=5$ |
| 6. | $a=56$ | $b=43$ | $c=49$ |
| 7. | $a=9191$ | $b=9134$ | $c=.0353$ |
| 8. | $a=8$ | $b=90$ | $c=100$ |

33. 三角形內切圓的半徑 在圖 33 中，設內切圓的半徑叫做 r ，將三角形 ABC 的面積分作三部分計算，可得

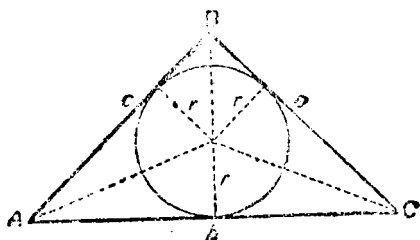


圖 33

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\
 &= \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr \dots\dots\dots(I)
 \end{aligned}$$

因爲 $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

將(1)代入，即得

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

31. 三角形外接圓的半徑 在圖 34 中，假定 R 是 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑， O 是中心， $OM \perp BC$ ，於是得到

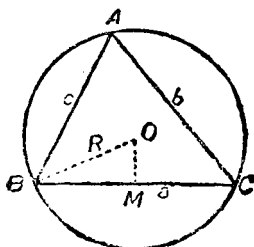


圖 34

$$BM = R \sin \angle BOM$$

$$= R \sin A$$

何故？

$$\therefore BC \text{ 或 } a = 2R \sin A$$

同理

$$b = 2R \sin B \quad c = 2R \sin C$$

$$\therefore 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots (I)$$

但是

$$F = \frac{1}{2} ac \sin B$$

用

$$2R = \frac{b}{\sin B} \text{ 或 } \sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\therefore F = \frac{abc}{4R} \dots\dots (II)$$

習 題 二 十 一

求三角形 ABC 的內切圓及外接圓的半徑，已知

- | | | | |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 1. | $a=40$ | $b=13$ | $c=37$ |
| 2. | $a=8$ | $c=5$ | $b=9$ |
| 3. | $a=.23$ | $b=.23$ | $c=.198$ |
| 4. | $a=31.3$ | $b=84.7$ | $c=47.6$ |
| 5. | $a=705$ | $b=43$ | $c=49$ |
| 6. | $a=2.51$ | $b=2.79$ | $c=2.33$ |
| 7. | $a=.01$ | $b=.26$ | $c=.31$ |
| 8. | $a=513.4$ | $b=726.8$ | $c=931.3$ |

習 題 二 十 二 應 用 問 題

1. 在岸上 AB 兩處都可望見 S 船，設量得 $AB=300$ 尺， $\angle SAB=67^\circ 43'$ ， $\angle SBA=72^\circ 21'$ ，求船到 A 相距多少路？

2. 平行四邊形的一條對角線是 11.237 ，這線和兩邊所成的角度爲 $15^{\circ}1'$ 及 $42^{\circ}4'$ 。求兩邊的長。

3. 平行四邊形的一邊長 35 ，一條對角線長 63 ，而兩對角線交叉角是 $21^{\circ}37'$ 。求另一對角線長多少？

4. 水上兩浮標相距 2789 尺，一船和較近的浮標相距 4325 尺。由船到兩浮標的連線所成的角度是 $16^{\circ}15'$ 。求船和較遠的浮標相距多少？

5. 兩列火車同時在同一車站出發。軌道相交成 30° 角。設其之一的速度爲每小時三十公里，另一列的速度是每小時 40 公里。問半小時後兩列車相距多少里？

6. AB 兩樹，隔池而生，設在 C 點上量得 $AC=897.6$ 尺， $BC=864.4$ 尺，及 $\angle ABC=87^{\circ}.72$ ，求兩樹相距多少尺？

7. ABC 三城的距離爲 $AB=165$ 里， $AC=72$ 里， $BC=185$ 里。設 B 城在 A 城的正東，求 C 城對 A 城的方向。

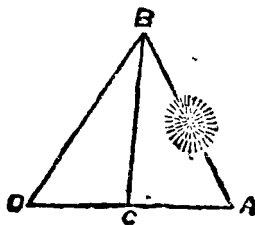
8. 已知三角形的面積是 12 。設 $a=60$ ， $\angle B=40^{\circ}35'$ ，求內切圓半徑是多少？

9. 某甲順路向東走，看見一塔在他的 $N37^{\circ}.62E$ 的方向。走了 3.5 里之後，那塔卻在他的 $N40^{\circ}.3E$ 了，問他和塔相距多少遠？

10. AB 兩燈塔相距 50 里。一船 S 從 A 塔出發，每小時行 35 里，經三小時半後， $\angle ASB$ 成 36° 角，問此船和 AB 各距多少里？

11. 山峯上有塔一座，在平地的一點望得塔頂的仰角爲 30° 。向前行 400 公尺，望得塔頂的仰角爲 57° ，塔基仰角 42° 。問山高及塔高各多少？

12. AB 兩地，中間隔一山，如下圖。設先另找 CD 兩點，都可看見 AB ，量得 $AC=236$ 尺， $CD=213$ 尺， $\angle ACB=115^{\circ}20'$ ， $\angle CDA=74^{\circ}$ 。
15. 求 AB 的距離。



第六章 三角法的應用

35. 三角法在物理上的應用

a. 力的圖解 力有方向大小，及作用點；線段有方向，長短及起點；故用線段來表示力最爲便當。

例： 甲乙兩力，都作用在O點上，互相做成一只 38° 的角。甲力爲13公斤，乙力爲17公斤。求合力的大小及方向。

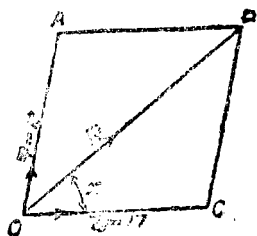


圖 35

係照物理上合力的平行四邊形定律得圖35所示的平行四邊形

OABC, R表示合力, $\angle x$ 可以表示R的方向,

解： $\triangle OBC$, 依任意三角形解法第三類,

$$R = \sqrt{13^2 + 17^2 - 2 \times 13 \times 17 \cos 142^\circ} \\ = 28.39 \text{ 公斤}$$

$$\sin x = \frac{\sin 142^\circ}{28.39} \times 13$$

$$\log \sin x = \log \sin 142^\circ + \log 13 - \log 28.39$$

$$\therefore x = 16^\circ.37$$

b. 速度的圖解 速度和力一樣也可以用線段來表示。

例： 若南北兩碼頭，北碼頭在南碼頭北偏西 20° 地方，如圖36，若汽船速度每小時30里，水流由西向東每小時

是10里，問這汽船應取什麼方向可以由南岸碼頭直駛到北岸碼頭？

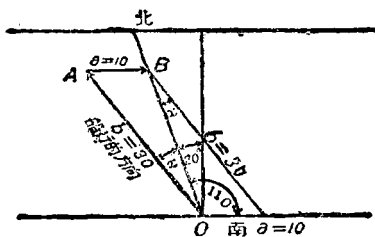


圖 36

依速力的平行四邊形定律，如圖36 $\angle x + 20^\circ$ 是為船應取的方向。

這是屬於任意三角形解法第二類的，要求 $\angle x$ ，可先解 $\triangle OAB$ ，

$$\sin x = \frac{\sin 100^\circ}{30} \times 10 = \frac{\sin 110^\circ}{3}$$

$$\log \sin x = \log \sin 110^\circ - \log 3$$

$$= 9.4959 - 10$$

$$\therefore x = 18^\circ.26$$

所以汽船應取的方向是 $x + 20^\circ = 38^\circ.26$ ，就是應取正北偏西 $38^\circ.26$ 的方向。

習 題 二 十 三

1. 有a力19公斤，b力26公斤，都作用在同點上，在ab方向間的角度為 34° 時，求合力的大小與方向。

2. 兩火車同時在兩站出發向兩直進軌道交叉角為 $37^{\circ}.75$ 進行。若兩車的速度為 32 里及 43 里，求 3 小時後兩車相隔多少里。
3. 甲乙兩力的合力是 10 公斤；甲力為 8 公斤，同合力成 36° 角度，求乙力的大小及方向。
4. 一球在平地上滾動，每秒進行 10 尺；若用棒改向 45° 方向擊去，而棒擊速度為 20 尺，求球的結果速度及方向。
5. 每小時行 22 里的汽船，從岸上開向東偏南 10° 的小島駛去。潮流每小時向北流 10 里。問用什麼方向此船可恰到小島。

36. 三角法在測量上的應用 三角法在應用上最有功效的就是幫助測量。田畝的面積，往往不能成正方；然而直線所成的田邊，大約都可以劃成幾個三角形。其他如築路的問題，都可應用三角法來解決。

例 a. 某測量員量得地一塊，製成圖形，如圖 37 所示，從 A 點出發依 $N27^{\circ}E$ 度量到 B，是 10 丈，然後依 $N56^{\circ}.15'E$ 度量 8 丈到 C，再依 $S5^{\circ}W$ 度量 24 丈到 D，終依 $N40^{\circ}.44'W$ 度量 13.94 丈回到 A。求此 ABCD 的面積，由圖上看得，

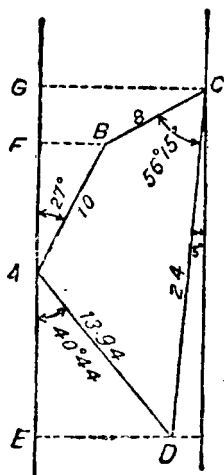


圖 37

$$ABCD = GCDE - (GCBF + \triangle FBA + \triangle ADE)$$

先求 DE，因為

$$\begin{aligned} DE &= AD \sin 40^{\circ}.44' \\ &= 13.94 \sin 40^{\circ}.44' \end{aligned}$$

$$DE = 13.94 \times .6525 = 9.096 \text{ 丈}$$

$$BF = AB \sin 27^{\circ} = 10 \sin 27^{\circ}$$

$$=10 \times .4540 = 4.54 \text{ 丈}$$

$$GC = BF + 8 \cos (90 - 56^\circ 15')$$

$$= BF + 8 \cos 33^\circ 45'$$

$$= 4.54 + 8 \times .8315$$

$$= 4.54 + 6.65 = 11.19 \text{ 丈}$$

$$GE = GF + FA + AE$$

$$= 8 \sin(90 - 56^\circ 15') + 10 \cos 27^\circ$$

$$+ 13.94 \times \cos 40^\circ 44'$$

$$= 8 \sin 33^\circ 45' + 10 \cos 27^\circ$$

$$+ 13.94 \times \cos 40^\circ 44'$$

$$= 4.445 + 8.91 + 10.56 = 23.975 \text{ 丈}$$

$$GCDE = GE \times \frac{GC + LE}{2}$$

$$= 23.915 \times \frac{11.19 + 9.096}{2}$$

$$= 242.57 \text{ 方丈}$$

$$GCBF = GF \times \frac{BF + GC}{2}$$

$$= 4.445 \times \frac{4.54 + 11.19}{2}$$

$$= 34.96 \text{ 方丈}$$

$$\triangle FBA = \frac{FA \times BF}{2} = \frac{8.91 \times 4.54}{2}$$

$$= 20.23 \text{ 方丈}$$

$$\triangle ADE = \frac{DE \times AE}{2} = \frac{9.096 \times 10.56}{2} = 48.02 \text{ 方丈}$$

$$\therefore ABCD = GCDE - (GCBF + \triangle FBA + \triangle ADE)$$

$$= 242.57 - (34.96 + 20.23 + 48.02)$$

$$= 139.36 \text{ 方丈}$$

b. 有許多人跡不便到的地方，要直接度量，比較費事，為避重就輕又能得同樣結果起見，可把那容易度量的先量出來再推算。這種方法也是要用三角學來幫助的。

例 1. 某人在海岸上 AB 兩處測 P 島的遠近 (如圖 38)，先測得 $\angle A = 47^\circ 31'$ ， $\angle B = 76^\circ 23'$ 。又量得 AB 長 12.5 里，問 P 島離 A、B 各多少里？

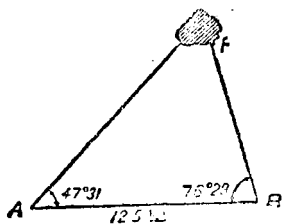


圖 38

依第一類方法解 $\triangle ABP$ ：

$$\angle P = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$$

$$= 56^\circ 6'$$

$$\therefore PA = \frac{12.5}{\sin 56^\circ 6'} \times \sin 76^\circ 23'$$

$$= 14.64 \text{ 里}$$

$$PB = \frac{12.5}{\sin 56^\circ 6'} \times \sin 47^\circ 31'$$

$$= 11.11 \text{ 里}$$

例 2. 如圖 39, AC 為一湖的長，量得 $AB = 400$ 尺， $BC = 351$ 尺， $\angle B = 50^\circ.3$ ，求湖長。

依第三類方法解 $\triangle ABC$ ：

$$AC = \sqrt{400^2 + 351^2 - 2 \times 400 \times 351 \cos 50.3}$$

$$= 322.2$$

例 3. 山頂一塔，在地面上測得塔頂的仰角是 31° ，山頂的仰角是 13° ；直上到離地 29 尺的屋頂上，又測得塔頂的

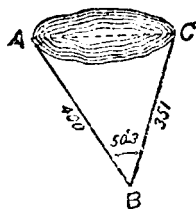


圖 39

仰角是 25° ，如圖 40° 求塔高。

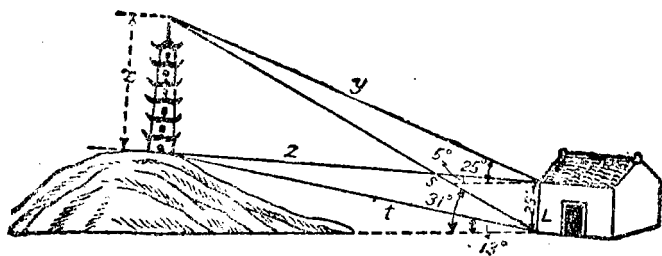


圖 40

設 x 爲塔的高， y 爲山的高， a 爲房屋到塔的垂直距離，

$$\therefore \tan 31^\circ = \frac{x+y}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a}$$

$$\tan 13^\circ = \frac{y}{a}$$

$$\tan 25^\circ = \frac{x+y-29}{a} = \frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \frac{29}{a}$$

$$\therefore \tan 31^\circ - \tan 25^\circ = \frac{29}{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \frac{29}{\tan 31^\circ - \tan 25^\circ} = \frac{29}{0.6009 - 0.4663} \\ &= 215.5 \text{ 尺} \end{aligned}$$

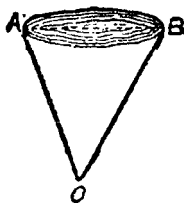
$$\therefore \tan 31^\circ - \tan 13^\circ = \frac{x}{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= a (\tan 31^\circ - \tan 13^\circ) \\ &= 215.5 (0.6009 - 0.2309) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 215.5 \times 0.37 \\
 &= 79.7 \text{ 尺}
 \end{aligned}$$

習 題 二 十 四

1. 某測量家從A點量起，得 $S 50^\circ 15' E 0.4$ 尺，而後 $S 5^\circ 10' W 41.5$ 尺，再 $N 28^\circ 12' W 1$ 尺，最後回到A點。求最後一次所量得之方向，及回到A點的距離。並求所包圍的面積。
2. AB是湖對岸的兩株大樹。如下圖，設在O點測好 $\angle O = 51^\circ 8'$ ，又量得 $OA = 143$ 尺， $OB = 194$ 尺，求AB兩樹相隔多少尺。



3. 有A及OB兩船，相距二里。在A船測得B船和砲臺的方向差為 $35^\circ 14'$ 。在B船上測得A船和砲臺的方向差為 $42^\circ 12'$ 。問兩船各距離砲臺多少？
4. 在樹下望塔，其仰角為 40° 。爬上樹頂望之，仰角為 $37^\circ 30'$ 。設樹高為18尺，問塔高多少？
5. 在城外地上，測得城樓頂的仰角是 41° ，城牆頂(即城樓底)的仰角是 $30^\circ 5'$ 。直上51尺的屋頂上，又測得城樓頂的仰角為 24° 。城牆頂的仰角是 16° 。問這城樓有多少高？
6. 天空飛機經過時，甲乙二人同時在相隔3000尺地方測量。甲得仰角 $42^\circ 13'$ ；乙得仰角 $61^\circ 3'$ 。求飛機的高度，及和甲乙二人相距多少遠。
7. 有人在山脚見山頂的仰角是 4° 。上山行1000尺，則見山頂的仰角為 7° 。若山的斜度是 32° ，問山高多少尺？

8. 有人在平地見山頂的仰角為 60° 。這人向前走了800尺，就到了山脚。再上山800尺，測得山頂仰角為 75° 。若山的斜度是 30° ，問山高多少尺？

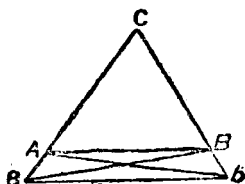
9. 某人在船上看見，甲乙兩燈塔和船成一直線，在船的 $N15^\circ E$ ，其後船向正西北走了五里，則見甲塔在船的正東，乙塔在船的正北，求兩塔的距離。

10. A, B 兩點和 C 點隔江相望。今欲測牠們的距離又無量角器。設假定另設 ab 兩點， aBC 及 bBC 都各在一直線上量得。

$$AB=550 \quad aA=100 \text{ 尺} \quad aB=560$$

$$bB=100 \quad Ab=550$$

問 C 與 A, B 相距各多少尺？



11. 在平地上測得屋頂旗竿的仰角為 62° ，又測得屋頂的仰角為 43° 。已知屋高 75 尺，求旗竿的長。

12. 從 90 尺高的塔頂測得一屋頂及屋底的俯角為 13° 及 29° 。屋間幾高何？

Log 對 數 表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1.00	0.0000	0004	0009	0013	0017	0021	0026	0030	0035	0039	0043
1.01	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	0086
1.02	0088	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	0128
1.03	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	0170
1.04	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	0212
1.05	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	0254
1.06	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	0294
1.07	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	0334
1.08	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	0374
1.09	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	0414
1.10	0.0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	0453
1.11	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	0492
1.12	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0516	0519	0523	0527	0531
1.13	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	0569
1.14	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	0607
1.15	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	0645
1.16	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	0682
1.17	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	0719
1.18	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	0755
1.19	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	0792
1.20	0.0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	0828
1.21	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	0864
1.22	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	0899
1.23	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	0934
1.24	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	0969
1.25	0969	0973	0976	0980	0983	0987	0990	0993	0997	1000	1004
1.26	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	1038
1.27	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	1072
1.28	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	1106
1.29	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	1139
1.30	0.1139	1143	1146	1149	1153	1156	1160	1163	1166	1169	1173
1.31	1173	1176	1179	1183	1186	1190	1193	1197	1200	1202	1206
1.32	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	1238
1.33	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	1271
1.34	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	1303
1.35	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	1335
1.36	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1354	1358	1361	1364	1367
1.37	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	1399
1.38	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	1430
1.39	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1456	1468	1461
1.40	0.1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489	1492
1.41	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	1523
1.42	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550	1553
1.43	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581	1584
1.44	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	1614
1.45	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641	1644
1.46	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	1673
1.47	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	1703
1.48	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729	1732
1.49	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1759	1761

Log 對 數 表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	⊙
1.60	0.1761	1764	1767	1770	1773	1775	1778	1781	1784	1787	1790
1.61	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816	1818
1.62	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844	1847
1.63	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872	1875
1.64	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901	1903
1.65	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928	1931
1.66	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956	1959
1.67	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984	1987
1.68	1987	1990	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011	2014
1.69	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038	2041
1.60	0.2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066	2068
1.61	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092	2095
1.62	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119	2122
1.63	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146	2148
1.64	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172	2175
1.65	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198	2201
1.66	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225	2227
1.67	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251	2253
1.68	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276	2279
1.69	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302	2304
1.70	0.2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327	2330
1.71	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353	2355
1.72	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378	2380
1.73	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403	2405
1.74	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428	2430
1.75	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453	2455
1.76	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477	2480
1.77	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502	2504
1.78	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526	2529
1.79	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550	2553
1.80	0.2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574	2577
1.81	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598	2601
1.82	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622	2625
1.83	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2645	2648
1.84	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669	2672
1.85	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693	2695
1.86	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716	2718
1.87	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739	2742
1.88	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762	2765
1.89	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785	2788
1.90	0.2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808	2810
1.91	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831	2833
1.92	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853	2856
1.93	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876	2878
1.94	2878	2880	2882	2885	2887	2890	2891	2894	2896	2898	2900
1.95	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920	2924
1.96	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942	2945
1.97	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964	2967
1.98	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986	2989
1.99	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008	3010

本表為真數自1至10之常用對數。移動真數之小數點n位向右(或向左)等於加n(或-n)於其對數。例如： $\log 0.17438 = 0.2419 - 2 (= \bar{2}.2419)$

當x在0°與1°之間時

當x在88°與90°之間時

公式(一)	$\log \sin x = \bar{2}.2419 + \log(x^\circ)$	$\log \cos x = \bar{2}.2419 + \log(90^\circ - x^\circ)$
公式(二)	$\log \tan x = \bar{2}.2419 + \log(x^\circ)$	$\log \cot x = \bar{2}.2419 + \log(90^\circ - x^\circ)$
公式(三)	$\log \cot x = 1.7581 - \log(x^\circ)$	$\log \tan x = 1.7581 - \log(90^\circ - x^\circ)$

Log

對數表

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9										表尾差					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	0414					
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	0792					
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	1139					
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	1461					
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	1761					
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	2041					
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	2304					
1.7	2304	2330	2355	2380	2406	2430	2455	2480	2504	2529	2553					
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2788					
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	3010					
2.0	0.3010	3032	3054	3076	3096	3118	3139	3160	3181	3201	3222	2	4	6	8	11
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	3424	2	4	6	8	10
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3599	3617	2	4	6	8	10
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	3802	2	4	5	7	9
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	3979	2	4	5	7	9
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	4150	2	3	5	7	9
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	4314	2	3	5	7	8
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4455	4472	2	3	5	6	8
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	4624	2	3	5	6	8
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	4771	1	3	4	6	7
3.0	0.4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	4914	1	3	4	6	7
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	5051	1	3	4	6	7
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	5185	1	3	4	5	7
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	5315	1	3	4	5	6
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	5441	1	3	4	5	6
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	5563	1	2	4	5	6
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	5682	1	2	4	5	6
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	5798	1	2	3	5	6
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	5911	1	2	3	5	6
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	6021	1	2	3	4	6
4.0	0.6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	6128	1	2	3	4	5
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	6232	1	2	3	4	5
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	6335	1	2	3	4	5
4.3	6335	6346	6356	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	6435	1	2	3	4	5
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	6532	1	2	3	4	5
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6600	6609	6618	6628	1	2	3	4	5
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	6721	1	2	3	4	5
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	6812	1	2	3	4	5
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	7902	1	2	3	4	5
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	6990	1	2	3	4	5

表尾差

1 2 3 4 5 6

尾差時看前一表

用此十列之表

Log 對 數 表

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9										表尾差				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5
5.0	0.6990	6998	7009	7018	7024	7033	7042	7050	7059	7067	7076	1	2	3	4
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	7160	1	2	3	4
5.2	7160	7168	7177	7185	7192	7202	7210	7218	7226	7235	7243	1	2	2	3
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	7324	1	2	2	3
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	7404	1	2	2	3
5.5	7404	7412	7420	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	7482	1	2	2	3
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	7559	1	2	2	3
5.7	7559	7566	7574	7582	7590	7597	7604	7612	7619	7627	7634	1	2	2	3
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7709	1	1	2	3
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7782	1	1	2	3
6.0	0.7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7853	1	1	2	3
6.1	7853	7860	7867	7875	7882	7890	7896	7903	7910	7917	7924	1	1	2	3
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7993	1	1	2	3
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	8062	1	1	2	3
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	8129	1	1	2	3
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	8195	1	1	2	3
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	8261	1	1	2	3
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	8325	1	1	2	3
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8364	8370	8376	8382	8388	1	1	2	3
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	8451	1	1	2	3
7.0	0.8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	8513	1	1	2	3
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	8573	1	1	2	3
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	8633	1	1	2	3
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	8692	1	1	2	3
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	8751	1	1	2	3
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	8808	1	1	2	3
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	8865	1	1	2	3
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	8921	1	1	2	3
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	8976	1	1	2	3
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	9031	1	1	2	3
8.0	0.9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	9085	1	1	2	3
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	9138	1	1	2	3
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	9191	1	1	2	3
8.3	9191	9196	9201	9206	9211	9217	9222	9227	9232	9238	9243	1	1	2	3
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	9294	1	1	2	3
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	9345	1	1	2	3
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	9395	1	1	2	3
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	9445	0	1	1	2
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	9494	0	1	1	2
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	9543	0	1	1	2
9.0	0.9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	9590	0	1	1	2
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	9638	0	1	1	2
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	9685	0	1	1	2
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	9731	0	1	1	2
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	9777	0	1	1	2
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	9823	0	1	1	2
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	9868	0	1	1	2
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	9912	0	1	1	2
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	9956	0	1	1	2
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9982	9987	9991	9995		0	1	1	2

附 表

Log Sin

正餘弦對數表

Log Cos

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0										尾 差						
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4		
5° 0	2 9420	9428	9437	9446	9454	9463	9472	9480	9489	9497	2.9506	84.9	1	2	3	4	
5.1	9506	9515	9523	9532	9540	9549	9557	9565	9574	9582	9591	84.8	1	2	3	4	
5.2	9591	9599	9608	9616	9624	9633	9641	9649	9657	9666	9674	84.7	1	2	2	4	
5.3	9674	9682	9690	9699	9707	9715	9723	9731	9739	9747	9756	84.6	1	2	2	4	
5.4	9758	9761	9772	9780	9788	9796	9804	9812	9820	9828	9836	84.5	1	2	2	4	
5.5	9836	9844	9852	9860	9867	9875	9883	9891	9899	9907	9915	84.4	1	2	2	4	
5.6	9915	9922	9930	9938	9946	9953	9961	9969	9977	9984	2.9992	84.3	1	2	2	4	
5.7	2.9992	0000	0007	0015	0022	0030	0038	0045	0053	0060	1.0068	84.2	1	2	2	4	
5.8	1.0068	0075	0083	0090	0098	0105	0113	0120	0128	0135	0143	84.1	1	1	2	4	
5.9	0143	0150	0157	0165	0172	0180	0187	0194	0202	0209	1 0216	84.0	1	1	2	4	
6° 0	1.0216	0223	0231	0238	0245	0253	0260	0267	0274	0281	0289	83.9	1	1	2	4	
6.1	0289	0296	0303	0310	0317	0324	0331	0338	0346	0353	0360	83.8	1	1	2	4	
6.2	0360	0367	0374	0381	0388	0395	0402	0409	0416	0423	0430	83.7	1	1	2	4	
6.3	0430	0437	0444	0451	0457	0464	0471	0478	0485	0492	0499	83.6	1	1	2	4	
6.4	0499	0506	0512	0519	0526	0533	0540	0546	0553	0560	0567	83.5	1	1	2	4	
6.5	0567	0573	0580	0587	0593	0600	0607	0614	0620	0627	0633	83.4	1	1	2	4	
6.6	0633	0640	0647	0653	0660	0667	0673	0680	0686	0693	0699	83.3	1	1	2	4	
6.7	0699	0706	0712	0719	0725	0732	0738	0745	0751	0758	0764	83.2	1	1	2	4	
6.8	0764	0771	0777	0784	0790	0796	0803	0809	0816	0822	0828	83.1	1	1	2	4	
6.9	0828	0835	0841	0847	0853	0860	0866	0873	0879	0885	1 0891	83.0	1	1	2	4	
7° 0	1.0891	0898	0904	0910	0916	0923	0929	0935	0941	0947	0953	82.9	1	1	2	4	
7.1	0954	0960	0966	0972	0978	0984	0991	0997	1003	1009	1015	82.8	1	1	2	4	
7.2	1015	1021	1027	1033	1039	1045	1051	1058	1064	1070	1076	82.7	1	1	2	4	
7.3	1076	1082	1088	1094	1100	1106	1112	1117	1123	1129	1135	82.6	1	1	2	4	
7.4	1135	1141	1147	1153	1159	1165	1171	1177	1183	1188	1194	82.5	1	1	2	4	
7.5	1194	1200	1206	1212	1218	1223	1229	1235	1241	1247	1252	82.4	1	1	2	4	
7.6	1252	1258	1264	1270	1276	1281	1287	1293	1299	1304	1310	82.3	1	1	2	4	
7.7	1310	1316	1321	1327	1333	1338	1344	1350	1355	1361	1367	82.2	1	1	2	4	
7.8	1367	1372	1378	1384	1389	1395	1400	1406	1412	1417	1423	82.1	1	1	2	4	
7.9	1423	1428	1434	1439	1445	1450	1456	1461	1467	1473	1.1478	82.0	1	1	2	4	
8° 0	1.1478	1484	1489	1494	1500	1505	1511	1516	1522	1527	1533	81.9	1	1	2	4	
8.1	1533	1538	1544	1549	1554	1560	1565	1571	1576	1581	1587	81.8	1	1	2	4	
8.2	1587	1592	1597	1603	1608	1613	1619	1624	1629	1635	1640	81.7	1	1	2	4	
8.3	1640	1645	1651	1656	1661	1667	1672	1677	1683	1688	1693	81.6	1	1	2	4	
8.4	1693	1698	1703	1709	1714	1719	1724	1729	1735	1740	1745	81.5	1	1	2	4	
8.5	1745	1750	1755	1761	1766	1771	1776	1781	1786	1791	1797	81.4	1	1	2	4	
8.6	1797	1802	1807	1812	1817	1822	1827	1832	1837	1842	1848	81.3	1	1	2	4	
8.7	1848	1853	1858	1863	1868	1873	1878	1883	1888	1893	1898	81.2	1	1	2	4	
8.8	1898	1903	1908	1913	1918	1923	1928	1933	1938	1943	1948	81.1	0	1	1	2	4
8.9	1948	1953	1958	1963	1968	1973	1977	1982	1987	1992	1.1997	81.0	0	1	1	2	4
9° 0	1.1997	2003	2007	2012	2017	2022	2027	2031	2036	2041	2046	80.9	0	1	1	2	4
9.1	2046	2051	2056	2060	2065	2070	2075	2080	2085	2089	2094	80.8	0	1	1	2	4
9.2	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2132	2137	2142	80.7	0	1	1	2	4
9.3	2142	2147	2151	2156	2161	2166	2170	2175	2180	2185	2189	80.6	0	1	1	2	4
9.4	2189	2194	2199	2203	2208	2213	2217	2222	2227	2231	2236	80.5	0	1	1	2	4
9.5	2236	2241	2245	2250	2255	2259	2264	2269	2273	2278	2282	80.4	0	1	1	2	4
9.6	2282	2287	2292	2296	2301	2305	2310	2315	2319	2324	2328	80.3	0	1	1	2	4
9.7	2328	2333	2337	2342	2346	2351	2356	2360	2365	2369	2374	80.2	0	1	1	2	4
9.8	2374	2378	2383	2387	2392	2396	2401	2405	2410	2414	2419	80.1	0	1	1	2	4
9.9	1.2419	2423	2428	2432	2437	2441	2445	2450	2454	2459	1.2463	80.0	0	1	1	2	4

Log Sin

正餘弦對數表

Log Cos

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	表尾註				
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
0	∞	3.2419	6429	7190	8439	9408	0209	0870	1350	1761	2.2419	80					
1	2.2419	2642	3210	3556	3800	4179	4459	4724	4971	5206	5425	88					
2	5428	5840	5842	6385	6920	7397	7897	8395	8839	9241	9615	87					
3	7188	7329	7468	7602	7731	7857	7976	8095	8213	8326	8436	86					
4	8430	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	2.9403	85					
5	2.9403	9499	9578	9655	9730	9804	9884	9959	0040	0120	1.0192	84					
6	1.0192	0264	0324	0383	0442	0500	0556	0605	0676	0734	0787	83					
7	0959	0923	0981	1039	1099	1157	1214	1271	1326	1381	1436	82					
8	1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	1943	81					
9	1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	1.2397	80					
10°	1.2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	2806	79	4	8	12	16	20
11	2806	2846	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	3179	78	4	7	11	15	19
12	3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	3521	77	3	7	10	14	17
13	3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	3837	76	3	6	9	13	16
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	4130	75	3	6	9	12	15
15	4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	4403	74	3	5	8	11	14
16	4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4659	73	3	5	8	10	13
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4900	72	2	5	7	10	12
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	5126	71	2	5	7	9	11
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	1.5341	70°	2	4	6	9	11
20°	1.5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	5543	69	2	4	6	8	10
21	5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	5736	68	2	4	6	8	10
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	5919	67	2	4	6	7	9
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6075	6093	66	2	3	6	7	8
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	6259	65	2	3	5	7	8
25	6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	6418	64	2	3	5	6	8
26	6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	6570	63	2	3	5	6	8
27	6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	6716	62	1	3	4	6	7
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	6856	61	1	3	4	6	7
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	1.6990	60°	1	3	4	5	7
30°	1.6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	7118	59	1	3	4	5	6
31	7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	7242	58	1	2	4	5	6
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	7361	57	1	2	4	5	6
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	7476	56	1	2	3	5	6
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	7586	55	1	2	3	4	6
35	7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	7692	54	1	2	3	4	5
36	7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	7795	53	1	2	3	4	5
37	7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	7893	52	1	2	3	4	5
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	7989	51	1	2	3	4	5
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	1.8081	50°	1	2	3	4	5
40°	1.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49	1	2	3	4	4
41	8169	8178	8187	8195	8204	8212	8221	8230	8238	8247	8255	48	1	2	3	4	4
42	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47	1	2	3	4	4
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46	1	2	3	4	4
44	8418	8426	8434	8441	8449	8457	8465	8472	8480	8487	1.8495	45°	1	2	3	4	4
45°	1.8495																

表尾註
1 2 3 4 5

用此表上列之表
為查對之用

Log Sin

正餘弦對數表

Log Cos

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	差尾差					
		L. 8495											1	2	3	4	5	
45°	1.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	8599	41	1	1	2	3	4
46	8569	8577	8584	8591	8598	8603	8613	8620	8627	8634	8641	8611	42	1	1	2	3	4
47	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	8711	43	1	1	2	3	4
48	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8771	8779	44	1	1	2	3	4
49	8773	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8838	8848	1.8343	40	1	1	2	3	4
50°	1.8343	8849	8855	8863	8870	8874	8880	8887	8893	8900	8906	8906	39	1	1	2	2	3
51	8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	8965	8965	38	1	1	2	2	3
52	8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	9024	9024	37	1	1	2	2	3
53	9023	9029	9035	9041	9047	9052	9057	9063	9069	9074	9080	9080	36	1	1	2	2	3
54	9080	9085	9091	9098	9104	9107	9112	9118	9125	9128	9134	9134	35	1	1	2	2	3
55	9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	9187	9187	34	1	1	2	2	3
56	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	9236	33	1	1	2	2	3
57	9236	9241	9246	9251	9256	9261	9266	9270	9275	9280	9285	9285	32	0	1	1	2	2
58	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	9331	31	0	1	1	2	2
59	9331	9335	9340	9344	9349	9353	9357	9362	9367	9371	1.9375	9375	30	0	1	1	2	2
60°	1.9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	9418	29	0	1	1	2	2
61	9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	9459	9459	28	0	1	1	2	2
62	9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	9499	9499	27	0	1	1	2	2
63	9499	9503	9507	9511	9515	9519	9523	9527	9531	9535	9539	9539	26	0	1	1	2	2
64	9537	9541	9544	9548	9551	9555	9559	9563	9567	9570	9574	9574	25	0	1	1	2	2
65	9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	9607	24	0	1	1	2	2
66	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	9640	23	0	1	1	2	2
67	9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9663	9666	9669	9672	9672	22	0	1	1	2	2
68	9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	9702	9702	21	0	1	1	2	2
69	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	1.9730	9730	20	0	1	1	2	2
70°	1.9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	9757	19	0	1	1	2	2
71	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9779	9782	9782	18	0	0	1	1	1
72	9782	9785	9787	9790	9792	9795	9797	9799	9801	9804	9806	9806	17	0	0	1	1	1
73	9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	9828	9828	16	0	0	1	1	1
74	9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	9849	9849	15	0	0	1	1	1
75	9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	9869	9869	14	0	0	1	1	1
76	9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	9887	9887	13	0	0	1	1	1
77	9887	9889	9891	9892	9894	9895	9897	9899	9901	9902	9904	9904	12	0	0	1	1	1
78	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	9919	9919	11	0	0	1	1	1
79	9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	1.9934	9934	10	0	0	1	1	1
80°	1.9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	9946	9946	9	0	0	1	1	1
81	9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	9957	9957	8	0	0	0	0	1
82	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9968	7	0	0	0	0	0
83	9968	9969	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	9976	9976	6	0	0	0	0	0
84	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	9983	9983	5	0	0	0	0	0
85	9983	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	4	0	0	0	0	0
86	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	9994	3	0	0	0	0	0
87	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9997	9997	9997	9997	9997	2	0	0	0	0	0
88	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	1.9999	9999	9999	1	0	0	0	0	0
89	1.9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0	0	0	0	0	0
90°	0.0000												0	0	0	0	0	0

Log Tan

正餘切對數表

Log Cotan

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差	尾 差						
												1	2	3	4	5			
0° 0	∞	2419	2229	7190	3430	9408	2229	3670	1450	1061	2.2119	59	9						
0.1	3	2419	2234	3211	3553	3830	4170	4460	4720	4970	5200	5420	59	8					
0.2		5429	5611	5843	6030	6221	6388	6530	6752	6850	7043	7190	59	7					
0.3		7190	7232	7470	7604	7734	7890	7982	8161	8277	8329	8439	59	6					
0.4		8439	8547	8651	8754	8853	8951	9046	9140	9231	9321	9409	59	5					
0.5	3	9409	9496	9579	9622	9713	9823	9901	9978	0053	0127	2.0200	59	4					
0.6	2	0200	0272	0313	0312	0431	0513	0574	0620	0744	0807	0870	59	3					
0.7		0870	0932	0957	1022	1111	1170	1227	1284	1340	1395	1450	59	2					
0.8		1450	1504	1542	1570	1622	1713	1764	1814	1864	1913	1962	59	1					
0.9		1962	2010	2057	2104	2150	2196	2242	2287	2331	2376	2.2419	59	0					
1° 0	2	2419	2492	2505	2540	2590	2631	2672	2713	2754	2794	2833	88	9					
1.1		2833	2375	2412	2450	2488	2526	2564	2604	2641	2678	2715	88	8	4	11	15	18	
1.2		3211	3247	3283	3318	3354	3389	3423	3458	3492	3525	3559	88	7	3	7	10	14	17
1.3		3559	3592	3626	3658	3691	3723	3755	3787	3818	3850	3881	88	6	3	6	10	13	16
1.4		3881	3912	3943	3975	4003	4033	4063	4093	4122	4152	4181	88	5	3	6	9	12	15
1.5		4181	4210	4238	4267	4295	4323	4351	4379	4406	4434	4461	88	4	3	6	8	11	14
1.6		4461	4488	4515	4542	4568	4595	4621	4647	4673	4699	4725	88	3	3	5	8	11	13
1.7		4725	4750	4775	4801	4826	4851	4875	4900	4925	4949	4973	88	2	2	5	7	10	12
1.8		4973	4997	5021	5045	5068	5092	5115	5139	5162	5185	5208	88	1	2	5	7	9	12
1.9		5208	5231	5253	5275	5298	5321	5343	5365	5387	5409	2.5431	88	0	2	4	7	9	11
2° 0	2	5431	5453	5474	5495	5517	5538	5559	5580	5601	5622	5643	87	9	2	4	6	8	11
2.1		5643	5664	5684	5705	5725	5745	5765	5785	5805	5825	5845	87	8	2	4	6	8	10
2.2		5845	5865	5884	5903	5923	5943	5962	5981	6000	6019	6038	87	7	2	4	6	8	10
2.3		6038	6057	6076	6095	6113	6132	6150	6169	6187	6205	6223	87	6	2	4	6	7	9
2.4		6223	6242	6260	6277	6295	6313	6331	6348	6366	6384	6401	87	5	2	4	5	7	9
2.5		6401	6418	6436	6453	6470	6487	6504	6521	6538	6555	6571	87	4	2	3	5	7	9
2.6		6571	6588	6605	6621	6638	6654	6671	6687	6703	6719	6736	87	3	2	3	5	7	8
2.7		6736	6752	6768	6784	6800	6815	6831	6847	6862	6878	6894	87	2	2	3	5	6	8
2.8		6894	6909	6925	6940	6955	6970	6985	7001	7016	7031	7046	87	1	2	3	5	6	8
2.9		7046	7061	7076	7091	7106	7121	7136	7150	7165	7179	2.7194	87	0	1	3	4	6	7
3° 0	2	7194	7208	7223	7237	7252	7266	7280	7294	7308	7323	7337	86	9	1	3	4	6	7
3.1		7337	7351	7365	7379	7392	7406	7420	7434	7448	7461	7475	86	8	1	3	4	6	7
3.2		7475	7488	7502	7515	7529	7542	7555	7569	7582	7596	7609	86	7	1	3	4	5	7
3.3		7609	7622	7635	7648	7661	7674	7687	7700	7713	7726	7739	86	6	1	3	4	5	6
3.4		7739	7751	7764	7777	7790	7802	7815	7827	7840	7852	7865	86	5	1	3	4	5	6
3.5		7865	7877	7889	7902	7914	7927	7939	7951	7963	7975	7988	86	4	1	2	4	5	6
3.6		7988	8000	8012	8024	8036	8048	8059	8071	8083	8095	8107	86	3	1	2	4	5	6
3.7		8107	8119	8130	8142	8154	8165	8177	8188	8200	8212	8223	86	2	1	2	3	5	6
3.8		8223	8234	8246	8257	8269	8280	8291	8302	8314	8325	8336	86	1	1	2	3	5	6
3.9		8336	8347	8358	8370	8381	8392	8403	8414	8425	8436	2.8446	86	0	1	2	3	4	6
4° 0	2	8446	8457	8458	8479	8490	8501	8511	8522	8532	8543	8553	85	9	1	2	3	4	5
4.1		8553	8565	8575	8585	8596	8607	8617	8627	8638	8649	8659	85	8	1	2	3	4	5
4.2		8659	8669	8680	8690	8700	8711	8721	8731	8741	8751	8761	85	7	1	2	3	4	5
4.3		8761	8772	8782	8792	8802	8812	8822	8832	8842	8852	8862	85	6	1	2	3	4	5
4.4		8862	8872	8882	8891	8901	8911	8921	8931	8940	8950	8960	85	5	1	2	3	4	5
4.5		8960	8970	8979	8989	8998	9008	9018	9027	9037	9046	9056	85	4	1	2	3	4	5
4.6		9056	9065	9075	9084	9093	9103	9112	9122	9131	9140	9150	85	3	1	2	3	4	5
4.7		9150	9159	9168	9177	9186	9195	9205	9214	9223	9232	9241	85	2	1	2	3	4	5
4.8		9241	9250	9260	9269	9278	9287	9296	9305	9314	9323	9331	85	1	1	2	3	4	5
4.9		9331	9340	9349	9358	9367	9376	9384	9393	9402	9411	2.9420	85	0	1	2	3	4	5

Table 100 萬位開頭數表 (Table of numbers starting with 100,000) Cotan

No.	Number										No.	Date		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0		1	2	3
00	100000	100001	100002	100003	100004	100005	100006	100007	100008	100009	80			
01	100010	100011	100012	100013	100014	100015	100016	100017	100018	100019	81			
02	100020	100021	100022	100023	100024	100025	100026	100027	100028	100029	82			
03	100030	100031	100032	100033	100034	100035	100036	100037	100038	100039	83			
04	100040	100041	100042	100043	100044	100045	100046	100047	100048	100049	84			
05	100050	100051	100052	100053	100054	100055	100056	100057	100058	100059	85			
06	100060	100061	100062	100063	100064	100065	100066	100067	100068	100069	86			
07	100070	100071	100072	100073	100074	100075	100076	100077	100078	100079	87			
08	100080	100081	100082	100083	100084	100085	100086	100087	100088	100089	88			
09	100090	100091	100092	100093	100094	100095	100096	100097	100098	100099	89			
10	100100	100101	100102	100103	100104	100105	100106	100107	100108	100109	90			
11	100110	100111	100112	100113	100114	100115	100116	100117	100118	100119	91	4	8	13
12	100120	100121	100122	100123	100124	100125	100126	100127	100128	100129	92	4	8	12
13	100130	100131	100132	100133	100134	100135	100136	100137	100138	100139	93	4	8	11
14	100140	100141	100142	100143	100144	100145	100146	100147	100148	100149	94	4	8	10
15	100150	100151	100152	100153	100154	100155	100156	100157	100158	100159	95	4	8	9
16	100160	100161	100162	100163	100164	100165	100166	100167	100168	100169	96	4	8	8
17	100170	100171	100172	100173	100174	100175	100176	100177	100178	100179	97	4	8	7
18	100180	100181	100182	100183	100184	100185	100186	100187	100188	100189	98	4	8	6
19	100190	100191	100192	100193	100194	100195	100196	100197	100198	100199	99	4	8	5
20	100200	100201	100202	100203	100204	100205	100206	100207	100208	100209	00	2	5	7
21	100210	100211	100212	100213	100214	100215	100216	100217	100218	100219	01	2	5	6
22	100220	100221	100222	100223	100224	100225	100226	100227	100228	100229	02	2	5	5
23	100230	100231	100232	100233	100234	100235	100236	100237	100238	100239	03	2	5	4
24	100240	100241	100242	100243	100244	100245	100246	100247	100248	100249	04	2	5	3
25	100250	100251	100252	100253	100254	100255	100256	100257	100258	100259	05	2	5	2
26	100260	100261	100262	100263	100264	100265	100266	100267	100268	100269	06	2	5	1
27	100270	100271	100272	100273	100274	100275	100276	100277	100278	100279	07	2	5	0
28	100280	100281	100282	100283	100284	100285	100286	100287	100288	100289	08	2	4	9
29	100290	100291	100292	100293	100294	100295	100296	100297	100298	100299	09	2	4	8
30	100300	100301	100302	100303	100304	100305	100306	100307	100308	100309	10	2	4	7
31	100310	100311	100312	100313	100314	100315	100316	100317	100318	100319	11	2	4	6
32	100320	100321	100322	100323	100324	100325	100326	100327	100328	100329	12	2	4	5
33	100330	100331	100332	100333	100334	100335	100336	100337	100338	100339	13	2	4	4
34	100340	100341	100342	100343	100344	100345	100346	100347	100348	100349	14	2	4	3
35	100350	100351	100352	100353	100354	100355	100356	100357	100358	100359	15	2	4	2
36	100360	100361	100362	100363	100364	100365	100366	100367	100368	100369	16	2	4	1
37	100370	100371	100372	100373	100374	100375	100376	100377	100378	100379	17	2	4	0
38	100380	100381	100382	100383	100384	100385	100386	100387	100388	100389	18	2	3	9
39	100390	100391	100392	100393	100394	100395	100396	100397	100398	100399	19	2	3	8
40	100400	100401	100402	100403	100404	100405	100406	100407	100408	100409	20	2	3	7
41	100410	100411	100412	100413	100414	100415	100416	100417	100418	100419	21	2	3	6
42	100420	100421	100422	100423	100424	100425	100426	100427	100428	100429	22	2	3	5
43	100430	100431	100432	100433	100434	100435	100436	100437	100438	100439	23	2	3	4
44	100440	100441	100442	100443	100444	100445	100446	100447	100448	100449	24	2	3	3
45	100450	100451	100452	100453	100454	100455	100456	100457	100458	100459	25	2	3	2
46	100460	100461	100462	100463	100464	100465	100466	100467	100468	100469	26	2	3	1
47	100470	100471	100472	100473	100474	100475	100476	100477	100478	100479	27	2	3	0
48	100480	100481	100482	100483	100484	100485	100486	100487	100488	100489	28	2	2	9
49	100490	100491	100492	100493	100494	100495	100496	100497	100498	100499	29	2	2	8
50	100500	100501	100502	100503	100504	100505	100506	100507	100508	100509	30	2	2	7
51	100510	100511	100512	100513	100514	100515	100516	100517	100518	100519	31	2	2	6
52	100520	100521	100522	100523	100524	100525	100526	100527	100528	100529	32	2	2	5
53	100530	100531	100532	100533	100534	100535	100536	100537	100538	100539	33	2	2	4
54	100540	100541	100542	100543	100544	100545	100546	100547	100548	100549	34	2	2	3
55	100550	100551	100552	100553	100554	100555	100556	100557	100558	100559	35	2	2	2
56	100560	100561	100562	100563	100564	100565	100566	100567	100568	100569	36	2	2	1
57	100570	100571	100572	100573	100574	100575	100576	100577	100578	100579	37	2	2	0
58	100580	100581	100582	100583	100584	100585	100586	100587	100588	100589	38	2	1	9
59	100590	100591	100592	100593	100594	100595	100596	100597	100598	100599	39	2	1	8
60	100600	100601	100602	100603	100604	100605	100606	100607	100608	100609	40	2	1	7
61	100610	100611	100612	100613	100614	100615	100616	100617	100618	100619	41	2	1	6
62	100620	100621	100622	100623	100624	100625	100626	100627	100628	100629	42	2	1	5
63	100630	100631	100632	100633	100634	100635	100636	100637	100638	100639	43	2	1	4
64	100640	100641	100642	100643	100644	100645	100646	100647	100648	100649	44	2	1	3
65	100650	100651	100652	100653	100654	100655	100656	100657	100658	100659	45	2	1	2

Table 100

Table 100

Table 100

Table 100

Table 100

Table 100

Log Tan

正餘切對數表

Log Cotan

	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9										Log Cotan	正餘差					
	0.0000											45°	1	2	3	4	5
45	0.0000	0.015	0.030	0.045	0.061	0.076	0.091	0.106	0.121	0.136	0.152	44	2	3	5	6	8
46	0.152	0.167	0.182	0.197	0.212	0.228	0.243	0.258	0.273	0.288	0.303	43	2	3	5	6	8
47	0.303	0.319	0.334	0.349	0.364	0.379	0.395	0.410	0.425	0.440	0.456	42	2	3	5	6	8
48	0.456	0.471	0.486	0.501	0.517	0.532	0.547	0.562	0.578	0.593	0.608	41	2	3	5	6	8
49	0.608	0.623	0.639	0.654	0.670	0.685	0.700	0.716	0.731	0.746	0.762	40	2	3	5	6	8
50°	0.762	0.777	0.793	0.808	0.824	0.839	0.854	0.870	0.885	0.901	0.916	39	2	3	5	6	8
51	0.916	0.932	0.947	0.963	0.978	0.993	1.010	1.025	1.041	1.056	1.072	38	2	3	5	6	8
52	1.072	1.088	1.103	1.119	1.135	1.150	1.166	1.182	1.197	1.213	1.229	37	2	3	5	6	8
53	1.229	1.245	1.260	1.276	1.292	1.308	1.324	1.340	1.356	1.371	1.387	36	2	3	5	6	8
54	1.387	1.403	1.419	1.435	1.451	1.467	1.483	1.499	1.515	1.532	1.548	35	2	3	5	6	8
55	1.548	1.564	1.580	1.596	1.612	1.629	1.645	1.661	1.677	1.694	1.710	34	2	3	5	6	8
56	1.710	1.726	1.743	1.759	1.776	1.792	1.809	1.825	1.842	1.858	1.875	33	2	3	5	6	8
57	1.875	1.891	1.908	1.925	1.941	1.958	1.975	1.992	2.009	2.025	2.042	32	2	3	5	6	8
58	2.042	2.059	2.076	2.093	2.110	2.127	2.144	2.161	2.178	2.195	2.212	31	2	3	5	6	8
59	2.212	2.229	2.247	2.264	2.281	2.299	2.316	2.333	2.351	2.368	2.386	30	2	3	5	6	8
60°	0.2386	2.403	2.421	2.438	2.456	2.474	2.491	2.509	2.527	2.545	2.562	29	2	4	5	7	9
61	2.562	2.580	2.598	2.616	2.634	2.652	2.670	2.689	2.707	2.725	2.743	28	2	4	5	7	9
62	2.743	2.762	2.780	2.798	2.817	2.835	2.854	2.872	2.891	2.910	2.928	27	2	4	5	7	9
63	2.928	2.947	2.966	2.985	3.004	3.023	3.042	3.061	3.080	3.099	3.118	26	2	4	5	7	9
64	3.118	3.137	3.157	3.176	3.196	3.215	3.235	3.254	3.274	3.294	3.313	25	2	4	5	7	9
65	3.313	3.333	3.353	3.373	3.393	3.413	3.433	3.453	3.473	3.494	3.514	24	2	4	5	7	9
66	3.514	3.535	3.555	3.576	3.596	3.617	3.637	3.657	3.678	3.698	3.719	23	2	4	5	7	9
67	3.719	3.740	3.761	3.781	3.802	3.823	3.843	3.864	3.885	3.905	3.926	22	2	4	5	7	9
68	3.926	3.947	3.968	4.002	4.024	4.046	4.068	4.091	4.113	4.136	4.158	21	2	4	5	7	9
69	4.158	4.181	4.204	4.227	4.250	4.273	4.296	4.319	4.342	4.366	0.4380	20	2	5	7	10	12
70°	0.4389	4.413	4.437	4.461	4.484	4.509	4.533	4.557	4.581	4.606	4.630	19	2	5	7	10	12
71	4.630	4.655	4.680	4.705	4.730	4.755	4.780	4.805	4.831	4.857	4.882	18	2	5	8	10	12
72	4.882	4.908	4.934	4.960	4.986	5.013	5.039	5.066	5.093	5.120	5.147	17	2	5	8	10	12
73	5.147	5.174	5.201	5.228	5.255	5.284	5.312	5.340	5.368	5.397	5.425	16	2	5	8	10	12
74	5.425	5.454	5.482	5.511	5.541	5.570	5.599	5.629	5.659	5.689	5.718	15	2	5	8	10	12
75	5.718	5.750	5.780	5.811	5.842	5.873	5.904	5.936	5.968	6.000	6.032	14	2	5	8	10	12
76	6.032	6.065	6.097	6.130	6.163	6.197	6.230	6.264	6.298	6.332	6.366	13	2	5	8	10	12
77	6.366	6.401	6.435	6.471	6.507	6.543	6.578	6.615	6.651	6.688	6.725	12	1	5	11	13	15
78	6.725	6.763	6.800	6.838	6.877	6.916	6.954	6.993	7.033	7.073	7.113	11	1	5	11	13	15
79	7.113	7.154	7.195	7.236	7.278	7.320	7.363	7.406	7.449	7.492	0.7387	10	1	5	11	13	15
80°	0.7387	7.581	7.628	7.677	7.727	7.777	7.827	7.878	7.929	7.981	8.032	9	1	5	11	13	15
81	8.032	8.085	8.138	8.192	8.246	8.300	8.354	8.409	8.463	8.518	8.572	8	1	5	11	13	15
82	8.572	8.627	8.682	8.737	8.792	8.847	8.902	8.958	9.013	9.069	9.124	7	1	5	11	13	15
83	9.124	9.180	9.236	9.292	9.348	9.404	9.460	9.516	9.572	9.628	9.684	6	1	5	11	13	15
84	0.9784	9.687	9.743	9.799	9.855	9.911	9.967	10.023	10.079	10.135	10.191	5	1	5	11	13	15
85	1.0536	10.247	10.303	10.359	10.415	10.471	10.527	10.583	10.639	10.695	10.751	4	1	5	11	13	15
86	10.751	10.807	10.863	10.919	10.975	11.031	11.087	11.143	11.200	11.256	11.312	3	1	5	11	13	15
87	11.312	11.368	11.424	11.480	11.536	11.592	11.648	11.704	11.760	11.816	11.872	2	1	5	11	13	15
88	11.872	11.928	11.984	12.040	12.096	12.152	12.208	12.264	12.320	12.376	12.432	1	1	5	11	13	15
89	12.432	12.488	12.544	12.600	12.656	12.712	12.768	12.824	12.880	12.936	12.992	0	1	5	11	13	15
90°	12.992	13.048	13.104	13.160	13.216	13.272	13.328	13.384	13.440	13.496	13.552	0	1	5	11	13	15

Log Tan

正餘切對數表

Log Cotan

		正餘切對數表										Log Cotan				
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
80	0	7371	7540	7710	7880	8050	8220	8390	8560	8730	8900	9070	9240	9410	9580	9750
80	1	7381	7550	7720	7890	8060	8230	8400	8570	8740	8910	9080	9250	9420	9590	9760
80	2	7391	7560	7730	7900	8070	8240	8410	8580	8750	8920	9090	9260	9430	9600	9770
80	3	7401	7570	7740	7910	8080	8250	8420	8590	8760	8930	9100	9270	9440	9610	9780
80	4	7411	7580	7750	7920	8090	8260	8430	8600	8770	8940	9110	9280	9450	9620	9790
80	5	7421	7590	7760	7930	8100	8270	8440	8610	8780	8950	9120	9290	9460	9630	9800
80	6	7431	7600	7770	7940	8110	8280	8450	8620	8790	8960	9130	9300	9470	9640	9810
80	7	7441	7610	7780	7950	8120	8290	8460	8630	8800	8970	9140	9310	9480	9650	9820
80	8	7451	7620	7790	7960	8130	8300	8470	8640	8810	8980	9150	9320	9490	9660	9830
80	9	7461	7630	7800	7970	8140	8310	8480	8650	8820	8990	9160	9330	9500	9670	9840
81	0	7471	7640	7810	7980	8150	8320	8490	8660	8830	9000	9170	9340	9510	9680	9850
81	1	7481	7650	7820	7990	8160	8330	8500	8670	8840	9010	9180	9350	9520	9690	9860
81	2	7491	7660	7830	8000	8170	8340	8510	8680	8850	9020	9190	9360	9530	9700	9870
81	3	7501	7670	7840	8010	8180	8350	8520	8690	8860	9030	9200	9370	9540	9710	9880
81	4	7511	7680	7850	8020	8190	8360	8530	8700	8870	9040	9210	9380	9550	9720	9890
81	5	7521	7690	7860	8030	8200	8370	8540	8710	8880	9050	9220	9390	9560	9730	9900
81	6	7531	7700	7870	8040	8210	8380	8550	8720	8890	9060	9230	9400	9570	9740	9910
81	7	7541	7710	7880	8050	8220	8390	8560	8730	8900	9070	9240	9410	9580	9750	9920
81	8	7551	7720	7890	8060	8230	8400	8570	8740	8910	9080	9250	9420	9590	9760	9930
81	9	7561	7730	7900	8070	8240	8410	8580	8750	8920	9090	9260	9430	9600	9770	9940
82	0	7571	7740	7910	8080	8250	8420	8590	8760	8930	9100	9270	9440	9610	9780	9950
82	1	7581	7750	7920	8090	8260	8430	8600	8770	8940	9110	9280	9450	9620	9790	9960
82	2	7591	7760	7930	8100	8270	8440	8610	8780	8950	9120	9290	9460	9630	9800	9970
82	3	7601	7770	7940	8110	8280	8450	8620	8790	8960	9130	9300	9470	9640	9810	9980
82	4	7611	7780	7950	8120	8290	8460	8630	8800	8970	9140	9310	9480	9650	9820	9990
82	5	7621	7790	7960	8130	8300	8470	8640	8810	8980	9150	9320	9490	9660	9830	10000
82	6	7631	7800	7970	8140	8310	8480	8650	8820	8990	9160	9330	9500	9670	9840	10010
82	7	7641	7810	7980	8150	8320	8490	8660	8830	9000	9170	9340	9510	9680	9850	10020
82	8	7651	7820	7990	8160	8330	8500	8670	8840	9010	9180	9350	9520	9690	9860	10030
82	9	7661	7830	8000	8170	8340	8510	8680	8850	9020	9190	9360	9530	9700	9870	10040
83	0	7671	7840	8010	8180	8350	8520	8690	8860	9030	9200	9370	9540	9710	9880	10050
83	1	7681	7850	8020	8190	8360	8530	8700	8870	9040	9210	9380	9550	9720	9890	10060
83	2	7691	7860	8030	8200	8370	8540	8710	8880	9050	9220	9390	9560	9730	9900	10070
83	3	7701	7870	8040	8210	8380	8550	8720	8890	9060	9230	9400	9570	9740	9910	10080
83	4	7711	7880	8050	8220	8390	8560	8730	8900	9070	9240	9410	9580	9750	9920	10090
83	5	7721	7890	8060	8230	8400	8570	8740	8910	9080	9250	9420	9590	9760	9930	10100
83	6	7731	7900	8070	8240	8410	8580	8750	8920	9090	9260	9430	9600	9770	9940	10110
83	7	7741	7910	8080	8250	8420	8590	8760	8930	9100	9270	9440	9610	9780	9950	10120
83	8	7751	7920	8090	8260	8430	8600	8770	8940	9110	9280	9450	9620	9790	9960	10130
83	9	7761	7930	8100	8270	8440	8610	8780	8950	9120	9290	9460	9630	9800	9970	10140
84	0	7771	7940	8110	8280	8450	8620	8790	8960	9130	9300	9470	9640	9810	9980	10150
84	1	7781	7950	8120	8290	8460	8630	8800	8970	9140	9310	9480	9650	9820	9990	10160
84	2	7791	7960	8130	8300	8470	8640	8810	8980	9150	9320	9490	9660	9830	10000	10170
84	3	7801	7970	8140	8310	8480	8650	8820	8990	9160	9330	9500	9670	9840	10010	10180
84	4	7811	7980	8150	8320	8490	8660	8830	9000	9170	9340	9510	9680	9850	10020	10190
84	5	7821	7990	8160	8330	8500	8670	8840	9010	9180	9350	9520	9690	9860	10030	10200
84	6	7831	8000	8170	8340	8510	8680	8850	9020	9190	9360	9530	9700	9870	10040	10210
84	7	7841	8010	8180	8350	8520	8690	8860	9030	9200	9370	9540	9710	9880	10050	10220
84	8	7851	8020	8190	8360	8530	8700	8870	9040	9210	9380	9550	9720	9890	10060	10230
84	9	7861	8030	8200	8370	8540	8710	8880	9050	9220	9390	9560	9730	9900	10070	10240
85	0	7871	8040	8210	8380	8550	8720	8890	9060	9230	9400	9570	9740	9910	10080	10250
85	1	7881	8050	8220	8390	8560	8730	8900	9070	9240	9410	9580	9750	9920	10090	10260
85	2	7891	8060	8230	8400	8570	8740	8910	9080	9250	9420	9590	9760	9930	10100	10270
85	3	7901	8070	8240	8410	8580	8750	8920	9090	9260	9430	9600	9770	9940	10110	10280
85	4	7911	8080	8250	8420	8590	8760	8930	9100	9270	9440	9610	9780	9950	10120	10290
85	5	7921	8090	8260	8430	8600	8770	8940	9110	9280	9450	9620	9790	9960	10130	10300
85	6	7931	8100	8270	8440	8610	8780	8950	9120	9290	9460	9630	9800	9970	10140	10310
85	7	7941	8110	8280	8450	8620	8790	8960	9130	9300	9470	9640	9810	9980	10150	10320
85	8	7951	8120	8290	8460	8630	8800	8970	9140	9310	9480	9650	9820	9990	10160	10330
85	9	7961	8130	8300	8470	8640	8810	8980	9150	9320	9490	9660	9830	10000	10170	10340
86	0	7971	8140	8310	8480	8650	8820	8990	9160	9330	9500	9670	9840	10010	10180	10350
86	1	7981	8150	8320	8490	8660	8830	9000	9170	9340	9510	9680	9850	10020	10190	10360
86	2	7991	8160	8330	8500	8670	8840	9010	9180	9350	9520	9690	9860	10030	10200	10370
86	3	8001	8170	8340	8510	8680	8850	9020	9190	9360	9530	9700	9870	10040	10210	10380
86	4	8011	8180	8350	8520	8690	8860	9030	9200	9370	9540	9710	9880	10050	10220	10390
86	5	8021	8190	8360	8530	8700	8870	9040	9210	9380	9550	9720	9890	10060	10230	10400
86	6	8031	8200	8370	8540	8710	8880	9050	9220	9390	9560	9730	9900	10070	10240	10410
86	7	8041	8210	8380	8550	8720	8890	9060	9230	9400	9570	9740	9910	10080	10250	10420
86	8	8051	8220	8390	8560	8730	8900	9070	9240	9410	9580	9750	9920	10090	10260	10430
86	9	8061	8230</													

類號 418.01,
06 197

atan

	尾差															
	0	1	3	5	7	8	9	2	3	4	5					
85.0	1.0580	0583	0598	0607	0624	0633	0642	0651	0660	1.0668	4.9	1	2	3	4	4
85.1	0669	0678	0687	0696	0704	0713	0722	0731	0740	0750	4.8	1	2	3	4	4
85.2	0759	0768	0777	0786	0795	0804	0814	0823	0832	0842	4.7	1	2	3	4	5
85.3	0850	0860	0869	0878	0888	0897	0907	0916	0925	0935	4.6	1	2	3	4	5
85.4	0944	0954	0963	0973	0982	0992	1002	1011	1021	1030	4.5	1	2	3	4	5
85.5	1040	1050	1060	1069	1079	1089	1099	1109	1118	1128	4.4	1	2	3	4	5
85.6	1138	1148	1158	1168	1178	1188	1198	1208	1218	1228	4.3	1	2	3	4	5
85.7	1238	1249	1259	1269	1279	1289	1300	1310	1320	1331	4.2	1	2	3	4	5
85.8	1341	1351	1362	1372	1383	1393	1404	1414	1425	1435	4.1	1	2	3	4	5
85.9	1446	1457	1467	1478	1489	1499	1510	1521	1532	1543	4.0	1	2	3	4	5
86.0	1.1554	1564	1575	1586	1597	1608	1619	1630	1642	1653	3.9	1	2	3	4	6
86.1	1664	1675	1686	1698	1709	1720	1731	1743	1754	1766	3.8	1	2	3	5	6
86.2	1777	1788	1800	1812	1823	1835	1846	1858	1870	1881	3.7	1	2	3	5	6
86.3	1893	1905	1917	1929	1941	1952	1964	1976	1988	2000	3.6	1	2	4	5	6
86.4	2012	2025	2037	2049	2061	2073	2086	2098	2110	2123	3.5	1	2	4	5	6
86.5	2135	2148	2160	2173	2185	2198	2210	2223	2236	2249	3.4	1	3	4	5	6
86.6	2261	2274	2287	2300	2313	2325	2339	2352	2365	2378	3.3	1	3	4	5	6
86.7	2391	2404	2418	2431	2444	2458	2471	2485	2498	2512	3.2	1	3	4	5	7
86.8	2525	2539	2552	2566	2580	2594	2608	2621	2635	2649	3.1	1	3	4	6	7
86.9	2663	2677	2692	2706	2720	2734	2748	2763	2777	2792	3.0	1	3	4	6	7
87.0	1.2806	2821	2835	2850	2864	2879	2894	2909	2924	2939	2.9	1	3	4	6	7
87.1	2954	2969	2984	2999	3014	3029	3044	3060	3075	3091	2.8	2	3	5	6	8
87.2	3106	3122	3137	3153	3169	3185	3200	3216	3232	3248	2.7	2	3	5	6	8
87.3	3264	3281	3297	3313	3329	3346	3362	3379	3395	3412	2.6	2	3	5	7	8
87.4	3429	3446	3462	3479	3496	3513	3530	3547	3564	3582	2.5	2	3	5	7	9
87.5	3599	3616	3634	3652	3670	3687	3705	3723	3740	3758	2.4	2	4	5	7	9
87.6	3777	3795	3813	3831	3850	3868	3887	3905	3924	3943	2.3	2	4	6	7	9
87.7	3962	3981	4000	4019	4038	4057	4077	4096	4116	4135	2.2	2	4	6	8	10
87.8	4155	4175	4195	4215	4235	4255	4275	4295	4316	4337	2.1	2	4	6	8	10
87.9	4357	4378	4399	4420	4441	4462	4483	4504	4526	4547	2.0	2	4	6	8	11
88.0	1.4569	4591	4613	4635	4657	4679	4702	4724	4747	4769	1.9	2	4	7	9	11
88.1	4792	4815	4838	4861	4885	4908	4932	4955	4979	5003	1.8	2	5	7	9	12
88.2	5027	5051	5075	5100	5125	5149	5174	5199	5225	5250	1.7	2	5	7	10	12
88.3	5275	5301	5327	5353	5379	5405	5432	5458	5485	5512	1.6	3	5	8	11	13
88.4	5539	5566	5594	5621	5649	5677	5705	5733	5762	5790	1.5	3	6	8	11	14
88.5	5819	5848	5878	5907	5937	5967	5997	6027	6057	6088	1.4	3	6	9	12	15
88.6	6119	6150	6182	6213	6245	6277	6309	6342	6375	6408	1.3	3	6	10	13	16
88.7	6441	6475	6508	6542	6577	6611	6646	6682	6717	6753	1.2	3	7	10	14	17
88.8	6789	6825	6862	6899	6936	6974	7012	7050	7088	7127	1.1	4	8	11	15	19
88.9	7167	7206	7246	7287	7328	7369	7410	7452	7495	7538	1.0	4	8	11	15	19
89.0	1.7581	7624	7668	7713	7758	7804	7850	7896	7943	7990	0.9	4	8	11	15	19
89.1	8038	8087	8136	8186	8236	8287	8338	8390	8443	8496	0.8	4	8	11	15	19
89.2	8550	8605	8660	8716	8773	8830	8889	8948	9008	9068	0.7	4	8	11	15	19
89.3	9130	9193	9256	9320	9385	9452	9519	9588	9657	9728	0.6	4	8	11	15	19
89.4	1.9808	9873	9937	0002	0069	0137	0207	0278	0351	0425	0.5	4	8	11	15	19
89.5	2.0501	0679	0769	0860	0954	1049	1147	1245	1349	1453	0.4	4	8	11	15	19
89.6	1561	1671	1783	1899	2010	2140	2266	2396	2530	2668	0.3	4	8	11	15	19
89.7	2810	2957	3110	3268	3431	3602	3779	3964	4157	4359	0.2	4	8	11	15	19
89.8	4571	4794	5028	5277	5540	5820	6120	6442	6789	7167	0.1	4	8	11	15	19
89.9	2.7581	8006	8550	9130	9809	3.0532	1561	2810	4571	7581	0.0	4	8	11	15	19

用到此十一列之表尾
差時對數表上層公
式(三)檢對數表



三 角

1949. 5. 初版 長 1-10,000

基本定價： 240元