大學用書

人壽保險計算學

周紹濂編著

正中書局印行

大 學 用 書

人壽保險計算學

周紹濂編著

正 中 書 局 印 行

中華民國三十四年六月渝初版
中華民國三十五年十月滬一版

人壽保險計算學

全一冊　定價國幣三元七角
（外埠酌加運費匯費）

編著者　周紹濂
發行人　吳秉常
印刷所　正中書局
發行所　正中書局

整：荷
校：向

（1832）

本（本）（國）　1/1—0,15

何　序

學者宜先治生，賢者所尙，矧在常人．宜乎天下之熙來攘往者莫非爲利也．夫太上因之，其次利導之，爲政者應知所去取，憂時者宜知所提倡矣．吾國習俗，除士人而外，莫不競置產業，得數十方丈之地，輒以牆圍之，得數十百畝良田，便欲歸耕，無所事事矣．其貪婪無厭者，則享受踰分，適足以自戕賊，轉而貽害子孫，可痛也夫！余以爲凡人在筋力未衰以前，應努力事業，按月儲蓄，以成儉德，以備不虞，其家累過重者，則儲蓄而外，以人壽保險，最足以防意外，無論政府社會，宜廣爲宣揚者也．周紹濂先生爲數學名家，尤擅高等幾何，今出其餘緒，成人壽保險計算學一書，原原本本，悉有根據，實際應用，闡發無餘，可謂良書．惜以吾國統計材料缺乏，卽死亡率亦取材美國，此豈周先生之過，適以見吾國社會之未入正軌也．是爲序．

民國三十二年何魯識於唐家沱．

例　　言

一、本書除根據美國密西根大學教授 James W. Glove 與 Walter O. Menge 二氏所著 An Introduction to the Mathematics of Life Insurance 外,並參考下列諸書:

1. Handy Guide to Premium Rates Application and Polices of 170 American Life Insurance Companies.

2. Theorie Mathématique des Assurances, par P. J. Richard et E. Petit.

3. Wahrscheinlichkeits Rechnung, II. Von Czuber.

二、本書之目的在作大學或專科學校之教本及一般對壽險事業或理論有興趣之人士之參考資料,凡具有高中畢業生之數學知識者卽可暢讀.

三、本書爲機率與利息原理之聯合應用,專述個人壽險,理論與實務並重.

四、本書共分六章,首章闡述死亡表之來源,次三章對計算原理作一般之敍述,最後兩章論最新之準備金制度及總保費之算法,爲實務方面最重要之部分.

五、本書習題三百有奇,且附答數以便參考,爲本文之補篇,對本書如僅欲略覽梗概,則可省略之.

六、本書限於篇幅,計算之基本表未能完全編入,然初步計算之必需資料,槪已列入.

編者序言

壽險事業，爲集合多數人於一經濟組織之下，依互助精神與機率原理，使衆人分擔個人所受之損失，實爲一最公允之辦法．惟常人恆以迹近賭博，不予注意，似於壽險事業之眞諦未盡明瞭，蓋賭博之事，多憑一時僥倖，非若壽險之化不定爲一定，有常則可循，本利可求也．如擲銅元一枚，其兩面向上之機會各爲二分之一，誰能必操左劵！他如設局製騙，純恃機詐險巧者，更無論矣．今以擲骰爲例：設云注一元於十八點（三骰各爲六點），中則可獲百五十元之厚利，常人不察，未有不視爲利藪，走相告語，爭相趨赴者，殊不知百五十元之獲得，僅有二百一十六分之一之機會（骰子一枚成六點之機率爲六分之一，二枚爲三十六分之一，三枚爲二百一十六分之一），以二百一十六，分一百五十元，每元所得纔六角九分強，是每元所少之三角一分，未待角逐，已無形中爲賭主所掠去，其爲投機之行爲豈待言哉．人壽保險事業則不然，壽險事業爲近代科學昌明之產物，一本服務之精神，依統計之結果，按率取値，照比分配，集微成鉅，化禍無形；所取之費用雖少，所造之幸福甚大，實一至大至公之事業，決非賭博所能比擬．

壽險保費之計算，係以死亡率爲準則．所謂死亡率者，爲一種比率，例如現有三十五歲之人若干，在一年之內死亡若干人，此死亡數與原有人數之比，卽爲三十五歲之死亡率．此種數字，或出於調查戶口之結果，或利用公司逐年之統計，蓋應用機率上之大數法則而求之大多數人有效之原理也．壽險公司依此比率，薄收保費，積年累月，可厚給鉅款；倘不幸而有不測之變，更可獲利無窮也．是所謂投保壽險，直可視作一種投資，壽險機關，不過代爲居間管理而已．

此種事業，在歐美文明國家，莫不十分發達．據美國商部一九三七年之統計，全美壽險金額為一千一百萬萬金元；持有一張及一張以上之壽險保單者達六千三百萬人以上，各保單之受益人，占全美人口總數四分之三．自一九二九年以後，美國各壽險公司每年給付被保險人或受益人之款項，約為二十五萬萬金元，投資總額達一百四十餘萬萬金元．舉凡美國鐵道之興辦，教育之改進，公路之修築，電工之發展，市鄉之建設，莫不有壽險公司之資金流動其間，即可見其梗概矣．

我國壽險事業，往昔多為外人經營，以在我國所獲之準備金，復在我國投資牟利，輾轉相循，資金外溢至鉅．近年國人仿辦，因信用未孚，推行不力，進展十分遲鈍，加以理論不明，經營不善，遂使國人對此互助事業十分輕視，實屬憾事！

但理論為實踐之南針，如欲發展壽險事業，非先闡揚壽險理論不可！而壽險計算學為壽險理論之骨幹．舉凡業務種類之設計，保費之擬定，成本之分析，責任準備金之提存，盈虧之稽核，莫不與之有密切之聯繫．余嘗講授斯學有年，深感欲求此項事業之發達，壽險計算原理之介紹及闡揚，實有必要．本書為民國念玖年與叁拾年余於重慶大學商學院教授人壽保險計算學之講稿，先後教授二次，覺其頗能合用，茲特付梓，倘因此而能引起國人研究壽險理論之興趣，則幸甚矣！

本書承李磐如君與劉智白女士襄助繕校，謹此誌謝！

周紹濂　民國三十一年元月於沙坪壩國立中央大學

目　次

第一章　死亡表

第二章　年　金

第三章 純保險費

第四章 均衡純準備金

第五章　近代準備金制

第六章　總保費

第一章　死亡表

1.緒言　天有不測風雲，人有旦夕禍福，橫逆之來，常出人意表.故個人生命修短，實難預測.雖富蘭克林謂人事之最確定者爲死亡與賦稅，然最不確定者則爲死亡之時期也.

多數人於一定時期內，必有死亡，然死亡者究屬何人，則不能預必.爲欲彌補個人因此突然發生之不幸事件，所受之經濟損失，故有人壽保險公司之組織.凡適合一定健康條件之人，均可向公司要保壽險，蓋以普通人民壽命之修短，變化極緩，因之適合一定健康條件之多數人中，其每年死亡之比率，恆能由過去經驗而估定之也.

人壽保險之基本原素有三：即(一)死亡之機率，(二)投資之利率，(三)消耗之負擔率及保險單效力之維持是也.

因機率在人壽保險之計算原理上，至爲重要，故其基本原理，將於本章中討論之.

2.機率　設某一事件可成功 h 次，失敗 f 次，且其發生之機會均等，則此事成功之機率爲

$$p=\frac{h}{h+f}, \tag{1}$$

失敗之機率爲

$$q=\frac{f}{h+f}. \tag{2}$$

此數學上之定義，給予某事發生之"機會"或"機率"一精確之意義.如一袋內裝球十個，其中七爲白色，三爲黑色，今於袋中任取一球，希望其爲白色，於此 h 爲 7，f 爲 3，則此事成功之機率爲 $\frac{7}{10}$.

所當注意者爲(1),(2)兩式中之分母不論此事成功與否,皆爲發生成功與失敗之總數.

由(1)(2)兩式之定義,p 與 q 均爲小於或等於 1 之數,甚爲明顯;至其和則爲

$$p+q=\frac{h+f}{h+f}=1.$$

卽一事成功之機率與失敗之機率之和恆等於 1,此外,若 $f=0$,則 $p=1$,故一事確可成功時,其成功之機率當爲 1.

3.經驗機率　有許多事項,實不能計算其結果爲成功或失敗之機率究爲若干.依上述機率之意義,於生命保險及統計學上,卽不能用,且用之亦極感不便;於是不能不藉助於由觀察而決定之機率之近似值,卽觀察極多數之事件中以決定之經驗機率也.如觀察一事,在 n 個可能情形中成功 m 次(n 爲一大數),則可假設比值 $\frac{m}{n}$ 爲此事成功之機率,若 n 之值增加,此項估計之眞確性,亦隨之增加.

例如於現年 20 歲之 100,000 人中,於次年死亡之人數爲 781,則一 20 歲之人,於次年死亡機率之近似值爲 0.00781.

由經驗之觀點言之,機率定義之精確公式,須於 n 值漸增至無限時,以求 $\frac{m}{n}$ 之極限值.故此種極限存在之假設實屬必要.今設其存在,則一事發生之機率當爲

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}. \qquad (3)$$

在統計應用上,普通不能決定 $\frac{m}{n}$ 之極限,但可求得其足爲應用之近似值.

須注意者,經驗機率之數值,乃決定於過去之經驗,並擬用以預

示未來事件之假定．雖此種推定非恆能無誤，然對於極大數之統計，卽微有變化，所影響者亦極小，故在任何情形下，此種假定實爲最方便最可利用之方法也．

尤須認淸者，卽所謂某一事件之機率爲 $\frac{2}{3}$ 者，其意卽(a)若作多次之試驗時，其成功機率之近似値爲 $\frac{2}{3}$，與(b)迨試驗之次數漸增，則所得之成功機率卽漸接近於此極限 $\frac{2}{3}$．此種意義並非謂試驗次數爲一已知數，如 60 時，其試驗成功之次數，確爲試驗總數之 $\frac{2}{3}$，或 40，是亦不過表示試驗成功之期望次數爲 40 而已．實際試驗成功之次數亦或少於或多於是也．

4. 機率之定理　在諸事件中，若一事之發生，恆使另外事件不再發生者，謂之互斥事件；若一事件之發生影響於另外事件發生之機率者，謂之互依事件；若一事之發生不影響於另外事件發生之機率者，謂之獨立事件．

定理一　諸互斥事件中，任一事件發生之機率爲每個單獨事件機率之總和．

設 r 個互斥事件之機率，$p_1, p_2, \cdots\cdots p_r$ (通分後)分別爲

$$\frac{h_1}{n}, \frac{h_2}{n}, \cdot\ \cdot\ \cdot, \frac{h_r}{n},$$

則上述任一事件可有

$$h_1+h_2+\cdot\ \cdot\ \cdot+h_r$$

個機會均等之發生方法；且在此諸事中任一事件發生之機率爲

$$\frac{h_1+h_2+\cdot\ \cdot\ \cdot+h_r}{n}=p_1+p_2+\cdot\ \cdot\ \cdot+p_r.$$

定理二　一組獨立事件全然發生之機率，爲諸獨立事件各機率相乘之積．

設二獨立事件之機率各爲 $p_1=\frac{h_1}{n_1}$ 及 $p_2=\frac{h_2}{n_2}$,此 h_1 與 h_2 各爲在此事件中以機會均等之方法所發生之數.對於第一事件發生之任一方法,第二事件均可有 h_2 個發生之方法,今第一事件有 h_1 個方法,故此二事相繼發生可有 $h_1\cdot h_2$ 個方法.同理,此二事件發生或失敗之總數 $n_1\cdot n_2$。

由定義,得此兩事件發生之機率爲

$$\frac{h_1\cdot h_2}{n_1\cdot n_2}=p_1\cdot p_2.$$

此定理推廣至於兩件以上事件之證明,讀者可自證之.

定理三 設有連續二事,第一事之機率爲 p_1,第二事之機率爲 p_2,則兩事在此特別順序下發生之機率爲 $p_1\cdot p_2$.

此定理之證明與前一定理之證明極相類似.

練 習(一)

1.設 A,B 生存於一確定年限內之機率分別爲 0·7,0·8,試求在下述各情形時之機率

(a) A,B 均生存, (b) 至少一人死亡.

解 (a) 設 A, B 之死亡爲獨立事件,則依定理二,可確定其機率爲

$$0.7\times0.8=0.56.$$

(b) 今(a)與(b)爲互斥事件,其中之一必定發生.然其與(a)發生機率之和爲 1,由定理一,故所求之機率爲

$$1-0.56=0.44.$$

2.一袋內有白球 5 個,紅球 3 個,黑球 4 個.設於其中任取一球,問爲紅球之機率如何?爲白球之機率如何?爲一紅球或一白球之

機率如何?

3. 試求擲骰子兩枚得兩個三點之機率; 得兩個四點之機率; 得一為三點一為四點之機率.

4. 設一年 30 歲之人,再活 10 年之機率為 0.9; 一40 歲之人,再活 10 年之機率為 0.8. 試求年 30 歲之人在下述情形之機率

(a) 生存至 50,

(b) 在 40 歲至 50 歲中死亡,

(c) 未達 40 歲卽死亡.

5. 由 52 張紙牌中,任取二張. 試求兩張同為么時; 皆為王時; 一張為么,次一張為王時; 一張為王次一張為么時; 不論么與王之次序時; 其機率各如何?

6. 一棒球隊與其對手之勢力相等,試求其在比賽時三次全勝之機率為何? 勝二次敗一次之機率為何?

7. 由 52 張紙牌中任取三張. 試求三張皆為么時; 兩張為么,次一張為王時; 一張王,一張么,一張后,且不論其順序時之機率各為何?

8. 設在問題 5 及 7 中,於每次取出後仍放回原處,其解答應如何?

9. 一旅行者欲如期達到目的地,於途中須換車四次. 如每次能按時換車之機率為 $\frac{3}{4}$,試求四次均能依時換車之機率為何?

10. 於一遊戲中, A 隊勝 B 隊之機率為 $\frac{3}{5}$. 今連作三次遊戲,試求 A 隊勝兩次或三次之機率.

11. 設 A, B, C, D 生存於一定時期之機率分別為 $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$, 試求在下列情形中之機率

(a) 在此時期中四人均存在,

(b) 在此時期中四人均死亡,

(c)　在此時期中至少有一人死亡，

(d)　在此時期中至少有一人存在.

12.擲骰子兩枚，計算其向上數目之和.試求得七點；兩點；十一點；及任何大於八點之機率各爲何？

13.設一袋中有紅球四個，白球三個，另外一袋內有紅球兩個，白球五個，今於每袋內各取一球，試求此二球爲一紅一白之機率.

14.擲銅錢 n 次，試求得 n 次正面之機率爲何？又得一背面，餘皆爲正面時之機率爲何？

15.於衆人中任選一人，其年齡在 20 歲至 35 歲間之機率爲 $\frac{1}{3}$，其年齡在 20 歲至 25 歲間之機率爲 $\frac{1}{4}$，試求其在 25 歲至 35 歲間之機率爲何？

16.設年齡爲 30, 40, 50 之人，再生存 10 年之機率分別爲 0·8, 0·7, 0·6，試求現年爲 30 歲者在 50 歲至 60 歲間死亡之機率.

5.**選擇**　選擇羣乃非任意集合之羣.例如被保壽險者，必先經過健康檢查，故組成一選擇羣.選擇羣亦有自動組織成功者，如一國至他國之移民，其身體必有相當之健康.又向保險公司購買年金者，若非達某種健康之程度，必不願購買此項年金是也.

由上述之選擇方法，可使死亡率逐漸減低，且有時雖選擇之時期不同，然若均適合於一定條件，則於短時期如五年或十年內之死亡率，可相差無幾.例如有兩羣人於此，一羣爲保險十五年前爲三十歲者，一羣爲保險十年前爲三十五歲者，(則此兩羣人之現年相同)，其死亡率幾相等.

人壽保險計算家主要工作之一，爲編製一完整而適合應用之死亡表.

6.**死亡表之來源**　人壽保險理論之基礎，建於死亡表上.故此表被視爲"用以測度生存與死亡之重要工具".內容則純爲過去經驗之記載，用以預測將來每年之死亡率也.其基本來源有二：一爲政

府普通戶口之調查，一爲保險公司關於死亡之記載.

多數死亡表純依戶口調查之結果而編造.以每年死亡登記之人數被原來總人數除之，卽得該年之死亡率.此種死亡表頗宜於人壽保險公司之用.因壽險公司之被保險人均經健康檢查，與普通戶口調查中之含有不健康者不同，故在壽險公司所編造之死亡表上之死亡率較戶口調查者爲低.

重要之死亡表分三類，按其用爲計算之統計資料曾否經過體格檢驗而分之：一曰檢選 (select) 表，係僅根據曾經檢驗體格之統計資料而製成；二曰終極 (ultimate) 表，非由發行保單五年以內之統計所製成，乃根據被保險人五年以後之死亡數而編者；三曰混合 (Aggregate) 表，包含各種死亡統計，卽根據發行保單後起初數年及以後各年間之死亡記載所製者也.吾國此類統計尙屬闕如，玆就美國之情形爲例言之.

美國各部人民死亡率均載於美國人口死亡表上，此表爲根據東北部之戶口調查所得之統計而編成.然各州之死亡率極不一致，故全國人口死亡表難以編造.在南部及西南部各州，如阿拉巴馬，密西西比，亞爾堪薩斯之死亡率比北部各州爲高，故卽編造全國人口死亡表，亦不適於應用也.

在美國人口死亡表內，各州之下，更細分各種項目，以示其死亡率之不同，如白種人與有色人種，男人與女人，土籍與外籍.城市與鄉村.然大致言之，有色人種之死亡率幾爲白人之二倍；他如男者高於女者，二十五至四十歲之土籍者高於外籍者，城居者高於鄉居者，亦一一分別記載.

死亡表在若干壽險公司中皆係依經驗而編造者.在此種表中，每歲死亡人數及原來總數，均詳爲塡列.然不論統計之方法如何，所得之死亡率逐歲並不一致，故必用"逐漸法"(graduation)以修正之.

美國經驗死亡表爲美國最馳名之死亡表.此表係 1860 年紐約

互助壽險公司，依若干年之經驗編造者；為一"終極表"．所載之死亡率，雖不甚正確，然至今仍為各壽險公司計算之基礎．

在 1915 年由美國各壽險公司合作，有一較大之組織，集各公司由 1900 年至 1915 年之經驗編造美國男性死亡表．此表不僅示"終極"死亡率之值，且表示死亡率之修正，即所謂選擇率者．茲節錄其一部如下，以示在其選定年歲中之死亡率．

美國男性生存死亡表

每千人之死亡率

開始年齡	保險年度						到達年齡
	1	2	3	4	5	6 以上	
15	2.47	3.24	3.41	3.55	3.72	3.92	20
16	2.52	3.31	3.48	3.63	3.82	4.02	21
17	2.56	3.37	3.55	3.73	3.92	4.12	22
18	2.61	3.44	3.64	3.81	4.00	4.18	23
19	2.66	3.52	3.72	3.89	4.07	4.25	24
20	2.73	3.59	3.80	3.96	4.13	4.31	25
21	2.78	3.66	3.85	4.01	4.18	4.35	26
22	2.83	3.72	3.91	4.06	4.21	3.39	27
23	2.86	3.76	3.96	4.08	4.24	4.41	28
24	2.91	3.80	3.99	4.11	4.26	4.43	29
25	2.93	3.84	4.02	4.12	4.27	4.46	30
26	2.95	3.86	4.04	4.13	4.28	4.48	31
27	2.98	3.88	4.06	4.14	4.29	4.51	32
28	2.95	3.91	4.06	4.14	4.32	4.59	33
29	2.99	3.92	4.08	4.17	4.37	4.68	34
			等	等			

在上表中 3.91 為 22 歲要保壽險後第三年之死亡機率數，亦即一人現年 24 歲(於兩年前 22 歲時要保壽險)在到達 25 歲以前死亡

之機率爲 0.00391。

此外由各壽險公司所編造之表，計有美國年金選擇表及組合年金表。

下列之表爲由各著名死亡表中所摘取者，以示千人中每隔五年之死亡率。

每千人之死亡率

年齡	美國經驗表	美國男性終極死亡表	1901 美國生存表	美國年金表	
				男	女
15	7.63	——	2.84	——	——
20	7.80	3.92	4.68	——	——
25	8.06	4.31	5.54	4.31	4.01
30	8.43	4.46	6.51	4.49	4.52
35	8.95	4.78	8.04	6.00	5.27
40	9.79	5.84	9.39	7.51	6.39
45	11.16	7.94	11.52	9.78	8.07
50	13.78	11.58	14.37	13.15	10.56
55	18.57	17.47	20.03	18.17	14.28
60	26.69	26.68	28.58	25.66	19.84
65	40.13	40.66	41.06	35.73	28.09
70	61.99	61.47	59.52	53.05	40.31
75	94.37	91.91	87.37	76.98	58.27
80	144.47	135.74	130.28	111.65	84.58
85	235.55	197.07	183.80	161.12	122.51
90	454.54	280.35	249.62	230.04	176.46
95	1,000.00	387.76	325.02	323.06	250.84
100	——	562.50	401.91	456.79	349.79
105	——	——	500.22	1,000.00	772.73

練　習（二）

試依美國男性死亡表（第 8 頁），勿用乘法，以答下列諸問題之

數值.

1.某人現年21歲,於一年前要保壽險,問其生存至23歲之機率如何?

解 依表知此人於一年內死亡之機率爲0·00359.故其在一年內生存之機率爲$1-0.00359=0.99941$.現年22歲之人,於兩年前要保壽險,生存一年之機率爲$1-0.00380=0.99620$.由定理二,故所求之機率爲(0·99641)(0·99620).

2.某人於26歲時要保壽險,問其生存至30歲時之機率如何?

3.某人現年20歲,於兩年前要保壽險,問其於21歲與22歲間之死亡率如何?

4.某人現年17歲,於15歲時要保壽險,問其生存至25歲時之機率如何?

5.某人在20歲時曾保壽險,問其在達25歲以前之死亡機率如何?

7.死亡表 爲便利起見,以符號(x)表一現年x歲之人.以q_x表在x歲之死亡率,亦即(x)在x與$x+1$歲間之死亡機率.若以p_x表(x)生存至$x+1$歲之機率,則

$$p_x+q_x=1.$$

命l_x表示依照死亡表生存至x歲之人數.d_x表示l_x在x歲至$x+1$歲一年間死亡之人數.則立得

$$d_x=l_x\cdot q_x, \tag{4}$$

與

$$l_{x+1}=l_x-d_x. \tag{5}$$

在前節中關於死亡率q_x數值之求法已曾述及.如此若於初生者l_0(名爲表之基數)人中開始,且由方程式(4)與(5)以求l_x與d_x諸項,自屬可能.但死亡表於人之初生時開始,實屬不必;故可取一適當年齡a,以任一數l_a爲基數.如美國經驗表(參看附表II)以現年10歲之100,000人爲基數,且

$d_{10}=749=l_{10}\cdot q_{10}$，此處 $l_{10}=100,000$，$q_{10}=0.007490$，

$l_{11}=99,251=l_{10}-d_{10}$，

$d_{11}=746=l_{11}\cdot q_{11}$，此處 $l_{11}=99,251$，$q_{11}=0.007516$，

$l_{12}=98,505=l_{11}-d_{11}$，

等等.

符號 w 用以表示表中最末或極限年齡，高於此年齡者，事實上均假設在 l_x 項中之值漸近於零. 在美國經驗表中，極限年齡爲 95，蓋以超過此年齡時 l_x 之數值非常小，於計算上不發生若何影響也.

於此吾人所宜注意者爲 l_x 或 d_x 各行內之數值，本身並無意義. 如 l_x 之值爲表示現年爲 x 歲者一年前於 l_{x-1} 人中生存至 x 歲之希望數，餘以此類堆.

練　習（三）

1. 試用方程式（4）與（5）以證明下列諸恆等式：

(a) $l_x=d_x+d_{x+1}+\cdot\cdot\cdot+d_w$.

(b) $l_x-l_{x+n}=d_x+d_{x+1}+\cdot\cdot\cdot+d_{x+n-1}$.

(c) $l_{x+n}=l_x\cdot p_x\cdot p_{x+1}\cdot\cdot\cdot p_{x+n-1}$.

2. 設 $l_{15}=100,000$，與在 15，16，17，18，19 歲時之死亡率分別爲 0.0050，0.0054，0.0058，0.0062 與 0.0070，試計算在此諸歲中之 l_x，d_x 與 p_x.

3. 試由美國經驗死亡表中之 40 歲至 45 歲者以驗證方程式（4）與（5）.

4. 試於美國經驗死亡表中，命 $x=90$，與 $n=3$，以核算問題 1 中諸恆等式之數值.

8. 記法　以符號 ${}_np_x$ 表示（x）生存至 $x+n$ 歲之機率. l_x 生存至 $x+n$ 歲者爲 l_{x+n} 則

$$ {}_np_x=\frac{l_{x+n}}{l_x}. $$

以 $/_nQ_x$ 表示(x)在達 $x+n$ 歲以前死亡之機率，因是

$$ /_nQ_x=\frac{d_x+d_{x+1}+\cdot\cdot\cdot+d_{x+n-1}}{l_x}=\frac{l_x-l_{x+n}}{l_x}. $$

以 ${}_{m}/q_x$ 表示一現年 x 歲之人於達 $x+m$ 歲時死亡之機率，亦卽在 $x+m$ 歲與 $x+m+1$ 歲間死亡之機率，依死亡表知 d_{x+m} 表 l_x 於 $x+m$ 歲時死亡之數，故有

$$ {}_{m}/q_x=\frac{d_{x+m}}{l_x}. $$

若 (x) 於達到 $x+m$ 歲以後 n 年中，卽 $x+m$ 歲與 $x+m+n$ 歲中死亡之機率以符號 ${}_{m}/_{n}Q_x$ 表之，則立得

$$ {}_{m}/_{n}Q_x=\frac{d_{x+m}+d_{x+m+1}+\cdot\cdot\cdot+d_{x+m+n-1}}{l_x}, $$

或 $$ {}_{m}/_{n}Q_x=\frac{l_{x+m}-l_{x+m+n}}{l_x} \tag{6} $$

由上述之，符號 "p" 附一適宜之下誌，卽表示一人於一定期間之生存機率；"q" 附一適宜之下誌，卽表示一人於一定期間之死亡機率；此外，大寫字母 "Q" 乃用以表示死亡之可能期間大於一年者. ${}_{m}/_{n}Q_x$ 爲最普通之符號，特化之得下諸式

$$ q_x={}_0/_1Q_x,\quad /_nQ_x={}_0/_nQ_x,\quad {}_{m}/q_x={}_{m}/_1Q_x. $$

練　習（四）

1. 試由美國經驗死亡表，以求下列諸機率之數值（各與以適當之符號）：

(a)　一年 20 歲之人至少再生存 25 年，

(b)　一年 30 歲之人於達到 45 歲後死亡，

(c)　一年 35 歲之人於 60 與 70 歲之間死亡，

(d)　一年 40 歲之人將生存至 55 歲，但於 60 歲以前死亡，

(e)　一年 45 歲之人將於 5 年內死亡，

(f)　一年 20 歲之人於 45 與 50 歲之間死亡.

(g)　試解釋何以(f)之解答為(a)與(e)解答之乘積.

2.試述下列諸符號所代表機率之意義：

$$ {}_{10}p_{21};\quad p_{21};\quad {}_{10/}q_{30};\quad {}_{10/2}Q_{8};\quad q_{40};\quad {}_{15/5}Q_{50}. $$

3.機率 ${}_np_x$ 可視為複合事件之機率，即含有 (x) 生存一年，$(x+1)$生存一年，$(x+2)$生存一年，・・・與$(x+n-1)$生存一年之意義，則由定理二，此複合事件之機率為 .

$$ p_x\, p_{x+1}\, p_{x+2} \cdots p_{x+n-1}. $$

試以代數方法，證明此式等於 ${}_np_x$.

4.試證明下列諸恆等式：

(a)　$${}_{m+1}p_x + {}_{m/}q_x = {}_mp_x,$$

(b)　$${}_{m+n}p_x + {}_{m/n}Q_x = {}_mp_x,$$

(c)　$${}_{m+n}p_x = {}_mp_x \cdot {}_np_{x+m} = {}_np_x \cdot {}_mp_{x+n}.$$

5.一年 30 歲之人與一年 50 歲者於 20 年內同時生存之機率為 0.4. 今有年 30 者 48,000 人，於達 40 歲前死亡者 3,000 人. 試計算一現年 40 年者於次 30 年內死亡之機率.

6.試計算下列恆等式：

(a)　$${}_{m/}q_x = {}_mp_x \cdot q_{x+m},$$

(b)　$${}_{m/n}Q_x = {}_mp_x \cdot {}_{/n}Q_{x+m}.$$

9.生命期望率　生命期望率者，即現年 x 歲之人將再生存若干年之平均數也. 設於某年開始時 l_x 個人，至該年末除去死亡者外，仍然生存者為 l_{x+1} 人，則於 x 歲後第一年全體生存之年數為 l_{x+1}；在次

年末尚生存者爲 l_{x+2} 人，則於 x 後第二年全體生存之年數爲 l_{x+2}；第三年全體生存之年數爲 l_{x+3}，餘以此類推．將此總共生存之年數相加以原來人數 l_x 除之，得現年 x 歲之人將再生存若干年之平均數，卽

$$e_x=\frac{l_{x+1}+l_{x+2}+l_{x+3}+\cdots l_\omega}{l_x}. \tag{7}$$

此分數名爲簡約期望率．

若假定每年死亡者之死亡時間，在一年內分布極爲一致，平均言之，每人於其死亡年尚生存半年，則現年 x 者之完全生命期望率爲於簡約期望率中加 $\frac{1}{2}$，卽其近似值爲

$$\mathring{e}_x=e_x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{l_{x+1}+l_{x+2}+\cdots+l_\omega}{l_x}. \tag{8}$$

生命期望率常用於簡略問題．關於較精密者，其解法亦較複雜，以後將論及之．

練　習（五）

1．試以美國經驗死亡表，核算現年爲 75，85，與 90 者生命期望率之數値．

2．設全年死亡之時期分布極爲一致，試證

$$\mathring{e}_x=\tfrac{1}{2}(q_x+3\cdot {}_{1|}q_x+5\cdot {}_{2|}q_x+7\cdot {}_{3|}q_x+\cdots).$$

3．試證　$e_x=p_x+{}_2p_x+{}_3p_x+\cdots$.

4．試證 (a) $e_x=p_x(1+e_{x+1})$.

(b) $$\frac{e_x\cdot e_{x+1}\cdot e_{x+2}\cdots e_{x+n-1}}{(1+e_{x+1})(1+e_{x+2})(1+e_{x+3})\cdot(1+e_{x+n})}={}_np_x.$$

5．試證　$1+e_x=q_x+p_x(1+q_{x+1})+{}_2p_x(1+q_{x+2})+\cdots$.

複習題(六)

1. 已與下列死亡表,試推演 d_x, q_x, p_x, e_x 及 $\mathring{e}_x$ 各項之數値.

x	90	91	92	93	94	95	96
l_x	850	450	210	75	20	4	0

2. 設 $l_x=k(86-x)$, k 爲一常數,試證

$$d_x=k,\quad p_x=\frac{85-x}{86-x},\qquad q_x=\frac{1}{86-x}.$$

3. 設某人於 17 歲時要保壽險,試以第六節美國男性死亡表,以求下列之諸機率

(a) 生存至 20 歲,

(b) 於 18 至 19 歲時死亡,

(c) 生存至 19 歲.

4. 設 A, B 二人中,至少有一人於 10 年後死亡之機率爲 0.44. 在該期限內至少仍有一人生存之機率爲 0.94. 試求 A 活至十年末之機率.

5. 某夫婦結婚時,夫年 22,婦年 24;試以美國經驗死亡表,以求彼等能共同慶祝其銀婚節(婚後 25 年)及金婚節(婚後 50 年)之機率.

6. 試以美國經驗死亡表,以求下述諸機率之數字解答:

(a) (30)將在 65 歲至 70 歲時死亡,

(b) (50)將生存至 70 歲,

(c) (20)將在 80 至 85 歲時死亡.

7. 設年齡之間隔爲 5 歲,試以圖表示美國經驗死亡表中 q_x 之値.

8.設某人現年35歲,試依美國經驗死亡表,以求此人何兩連續歲中死亡之機會最高?且其機率為何?

第二章 年 金

10. 複利 人壽保險事業爲一長期低利之投資，故關於利息之重要原理當爲論述．計算利息之方法可分爲兩類：(a)單利，即在投資期內，本金固定不變者；(b)複利，即將已得之利息，按週期加於本金，以作下期之新本金者．人壽保險公司所用者多爲一年爲週期之複利。吾人所欲論述者，亦以此爲基礎．

設以 i 表年利率，則在一年內由本金 P 所生之利息爲 $P\cdot i$，在一年末之本利和爲 $P(1+i)$，第二年以此本利和爲本金所生之利息爲 $P(1+i)i$，本利和爲

$$P(1+i)+P(1+i)i=P(1+i)^2.$$

同樣，在第三年之本金爲 $P(1+i)^2$，利息爲 $P(1+i)^2i$，本利和爲

$$P(1+i)^2+P(1+i)^2i=P(1+i)^3.$$

一般言之，經過 n 年後，A 本利和所積存金額爲

$$A=P(1+i)^n. \tag{9}$$

以$(1+i)^n$除之，得

$$P=A(1+i)^{-n}=A\cdot v^n, \tag{10}$$

此處 $v=(1+i)^{-1}$.

本金 P 名爲 A 之現價或折現價．A 爲在 n 年後以複利計算之本利和．

函數$(1+i)^n$與 v^n 依利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算之值，載於附錄表 I 中．

11. 確定年金 確定年金爲於一期限內連續支付數目相等之金額．兩連續支付間之時期，名爲支付期．吾人於此所論述者爲支付期爲一年之年金．由第一支付期開始至最後支付期之末，名爲年金期．任一年內支付之總額，稱爲年金金額．今所論者爲年付年金，故年金

金額即每年支付之數. 其於支付期開始時支付者爲期首付年金; 於期末付者爲期末付年金, 任一年金之現價或蠆繳費爲各次支付金額於期首之現價總和; 至年金終值則爲各次支付金額於期末之積存總值. 年金之現價與終值依利率而變更, 甚爲明顯. 又以年金之現價與終值爲於不同之時期所計算同樣之金額, 故現價即終值經過年金期之折現價也.

茲討論金額一元期末付之年金, 即於第一年末支付一元, 第二年末支付一元, 直至第 n 年末支付之一元爲止. 命 $s_{\overline{n|}}$ 表各期支付金額以年利率 i 之複利計算, 積存至第 n 年末之和, 即年金終值. 因第一年支付之金額將積存 $n-1$ 年, 第二年支付者積存 $n-2$ 年等等, 第 n 年末支付者無利息, 則連續應用方程式(9), 得

$$s_{\overline{n|}}=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdot\cdot\cdot+(1+i)+1.$$

以$(1+i)$乘兩端, 得

$$(1+i)s_{\overline{n|}}=(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+(1+i)^2+(1+i).$$

減去上式, 得

$$i\cdot s_{\overline{n|}}=(1+i)^n-1,$$

故
$$s_{\overline{n|}}=\frac{(1+i)^n-1}{i}. \tag{11}$$

命 $a_{\overline{n|}}$ 表同一年金之現價, 即各次支付金額在第一年初之折現價. 因總額 $s_{\overline{n|}}$ 經過 n 年期之折現價, 即 $a_{\overline{n|}}$ 之值, 故

$$a_{\overline{n|}}=(1+i)^{-n}s_{\overline{n|}}=\frac{(1+i)^{-n}(1+i)^n-(1+i)^{-n}}{i};$$

故
$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-v^n}{i}. \tag{12}$$

$s_{\overline{n|}}$ 及 $a_{\overline{n|}}$ 以利率 $3\frac{1}{2}\%$ 所計算之值, 見附錄表 I.

若上述之年金於每年初支付, 則此期首付年金, 每年支付金額

在該年末之值爲 $(1+i)$. 故若以 $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ 及 $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ 分別表示期首付年金之總額及現價，則有

$$\ddot{s}_{\overline{n|}}=(1+i)s_{\overline{n|}},$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}=(1+i)a_{\overline{n|}}.$$

以(11)式之值代入，得

$$\ddot{s}_{\overline{n|}}=\frac{1+i}{i}\left[(1+i)^n-1\right]$$

$$=\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1.$$

卽
$$\ddot{s}_{\overline{n|}}=s_{\overline{n+1|}}-1. \qquad (13)$$

同理

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}=\frac{1+i}{i}\left[1-v^n\right]=\frac{(1+i)-v^{n-1}}{i}$$

$$=1+\frac{1-v^{n-1}}{i},$$

卽
$$\ddot{a}_{\overline{n|}}=1+a_{\overline{n-1|}}. \qquad (14)$$

由 $s_{\overline{n|}}$ 及 $a_{\overline{n|}}$ 以求 $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ 及 $\ddot{a}_{\overline{n|}}$，(13)與(14)兩方程式頗爲有用，其數值見表 I.

於此所應注意者爲 $a_{\overline{n|}}$ 表示於第一次支付期前一個支付期所計算各次金額之現價; $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ 表示於第一次支付時所計算之現價; $s_{\overline{n|}}$ 表示在末次支付時之總額; $\ddot{s}_{\overline{n|}}$ 表示在最後一次支付後一個支付期所計算之總額.

練　習（七）

在下列各題中均依年利率 $i=3\frac{1}{2}\%$ 及每年複利一次計算.

1.一受益人於壽險公司中應領取 10,000 元之現金，或將此款分十年於每年末領取數目相等之金額．試求每年末所得之金額．

解 命 R 爲每年所得之金額．則金額爲 R 元之年金之現價，可以下列乘積表之，即

$$R\cdot a_{\overline{10|}}$$

然此值等於 10,000 元之現金，故有

$$Ra_{\overline{n|}}=10,000,$$

由表 I，得

$$R=\frac{10\ 000}{a_{\overline{n|}}}=10,000(0.120241)=\$1202.41.$$

2.若問題 1 爲限期十年或十五年於每年開始時給付之年金，試求每年所給付之金額．

3.(a)試求 2000 元積存二十年，七十年之總額．

(b)試求十年後，百年後 1000 元之現價．

4.某人於 30 歲時納 5000 元與壽險公司，公司允彼於 60 歲時給付一定之金額．若此人於 60 歲前死亡，公司卽將本金 5000 元及在其生存期間積存之利息給付其承繼人．試求此人於 60 歲時所應得之金額．

5.若 d（名爲折現率）滿足方程式 $d=iv$，試證

(a) $d=1-v$

(c) $a_{\overline{n|}}=\dfrac{1-v^n}{d}$,

(b) $s_{\overline{n|}}=\dfrac{(1+i)^n-1}{d}$,

(d) $s_{\overline{n|}}=a_{\overline{n|}}-d$.

6.試證下列諸恆等式：

(a) $a_{\overline{n+1}|}=a_{\overline{n}|}+v^{n+1}$, (c) $v^{n}=v\cdot a_{\overline{n}|}-a_{\overline{n-1}|}$,

(b) $s_{\overline{n+1}|}=s_{\overline{n}|}+(1+i)^{n}$, (d) $v^{n}=1-i\cdot a_{\overline{n}|}$.

12.**生存保險金** 設有 l_x 個人,其年齡皆爲 x 歲,欲於彼等連續生存 n 年後,每人給付一元。因至 n 年末尚生存者爲 l_{x+n} 個人,則屆時必有 l_{x+n} 元備用.此款之現價爲 $v^n l_{x+n}$.由現在生存之 l_x 個人分擔之,若以 ${}_nE_x$ 表每人繳納之數,則

$$ {}_nE_x=\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}=v^n\cdot {}_np_x. \tag{15}$$

以上所述,即所謂每人之生存保險金也,換言之,即此種金額之給付係在某特定年限之末,且以受款人必須仍然生存者爲限.至每人所繳納之保費 ${}_nE_x$,則依利率及其能收到最後一元之機率而變.是以設某人現年 x 歲,則其將得 n 年期金額 R 元之現價爲

$$A=R\cdot {}_nE_x=R\cdot v^n\cdot {}_np_x.$$

設(15)式右端之分子分母皆乘以 v^x,則得

$$ {}_nE_x=\frac{v^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x}.$$

以 D_x 表示 $v^x l_x$ 之積,D_{x+n} 表示 $v^{x+n}l_{x+n}$ 之積,如此可書 $D_{25}=v^{25}l_{25}$, $D_{50}=v^{50}l_{50}$ 等等.

將此等符號代入上式,則得

$$ {}_nE_x=\frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{16}$$

符號 D_x 爲諸輔助符號之一,即所謂換算符號者,此種符號在實際計算上占一重要位置.蓋以死亡表上之數值除換算符號外實乏之直接用途也.美國經驗死亡表上之 D_x 及其他換算符號與各種利率,常爲一般公司所採用.以後關於數字問題之計算亦均基於此表;書中

各應用問題除另有說明外概依年利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算.以此利率計算之各項數值見表III;至 ${}_nE_x$ 及其倒數,則分別載於表VII及表VIII中.

練　　習(八)

1.某人將於五年末及十年末各得到 1000 元之金額.試求其現價

(a) 若屆期必能得到;

(b) 若某人現年 45 歲,屆時仍然生存始能得到.

解 (a) 在此情形中,利息爲折現價之唯一因子,故可立得

$$現價=1000(1.035)^{-5}+1000(1.035)^{-10}=1550.89 元.$$

(b) 在此情形則爲兩種生存保險金,各於生存至 50 歲及 55 歲時領取者.故其現價之和爲

$$1000\ {}_5E_{45}+1000\ {}_{10}E_{45}.$$

用表VII檢其數值,則得

$$1000(0.7923786)+1000(0.6170699)=1409.45 元.$$

2.某人現年 20 歲,被允於其 35 歲時給付一價值 5000 元之禮物,試求此禮物之現價.

3.試證明

(a) ${}_mE_x\cdot{}_nE_{x+m}={}_{m+n}E_x$;

(b) ${}_nE_x={}_1E_x\cdot{}_1E_{x+1}\cdot{}_1E_{x+2}\cdot\cdot{}_1E_{x+n-1}$;

(c) 由表試用第一恆等式以計算 ${}_9E_{30}$ 之現價.

4.(a) 設(x)確可再生存 n 年,公式 ${}_nE_x$ 將爲如何?

(b) 設資金不生利息,則其情形如何?

(c) 設資金不生利息,且(x)確將生存至 n 年,則其情形如何?

5.某人現年 25 歲,繳 1000 元於壽險公司.設彼承認若未達 45 歲時死亡,一切權利盡行放棄,試求其生存至 45 歲時所得之金額.

6.試核算表中已與 D_{20}, D_{55}, ${}_{15}E_{25}$ 及 $1/{}_5E_{50}$ 之值.

7. 試證

$$D_{x+1}=v\cdot p_x\cdot D_x.$$

8. 某人在年30歲時繳2000元之現金購得65歲之生存保險單，試求屆時可得之金額.

9. 試求下述生存保險金之現價

(a)於25歲時購買金額1000元期限30年之生存保險;

(b)於60歲時購買金額500元期限10年之生存保險.

10. 試計算 ${}_{10}E_{70}$ 及 $1/{}_{20}E_{65}$ 之值.

13. **生存年金** 生存年金爲以若干年爲期逐年給付數目相等之金額，但金額之給付以年金受益人仍然生存爲限. 至支付期，年金額，年金期，期末付，期首付諸名詞之用法與在確定年金中所論及者同. 若此年金之給付，繼續於年金受益人之終身，則名爲終身年金；若給付至約定時期之末，雖年金受益人仍然生存，亦即停付者，則名爲定期生存年金. 設非特別言明，普通所謂生存年金者，係指終身年金而言. 以上所述，知生存保險金爲定期生存年金之特例，換言之，即生存保險金爲一次給付之定期生存年金也.

依照年金期之開始時間，又可分年金爲數類：若年金期開始於收受年金者之現年，則名爲普通年金；若年金期開始於若干年之後，則名爲延期年金；若年金期開始於若干年之前，則名爲生存分紅年金.

14. **終身年金** 設由現年 x 歲之 l_x 個人中，欲籌資金若干，以後逐年由此總數中給予生存者每人一元之年金，直至 l_x 個人完全死亡爲止. 依死亡表第一年末之生存者爲 l_{x+1} 人，則給付所需之款爲 l_{x+1} 元，其現價爲 vl_{x+1} 元；在第二年末之生存者爲 l_{x+2} 人，則必須有 v^2l_{x+2} 元之現金，以備屆時給付之用；同理，現在必須有 v^3l_{x+3} 元以備第三年末之需；如此繼續推算，以至死亡表末.

若以 a_x 表每人於 x 歲時所繳納之費，則 l_x 個人所納之總數，當

與上述逐年給付額之現價總和相等，由此得

$$l_x \cdot a_x = vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \cdots + v^{w-x} l_w,$$

以 l_x 除之，得

$$a_x = \frac{vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \cdots + v^{w-x} l_w}{l_x}. \qquad (17)$$

於此吾人所應注意者爲上述之諸人中，每人均於其所繳納之資金中年取一元，直至其死亡爲止，故 a_x 卽爲各人爲將來自己利益所繳之躉繳費．以上所述卽所謂期末付終身年金也．

將(17)式右端之分子分母各乘以 v^x，則得

$$a_x = \frac{v^{x+1} l_{x+1} + v^{x+2} l_{x+2} + v^{x+3} l_{x+3} + \cdots + v^w l_w}{v^x l_x}, \qquad (18)$$

或 $$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_w}{D_x}.$$

以換算符號 N_x 表下面之和，

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_w.$$

此和爲取至表中之極限年者．例如

$$N_{25} = D_{25} + D_{26} + D_{27} + \cdots + D_w,$$
$$N_{30} = D_{30} + D_{31} + D_{32} + \cdots + D_w.$$

用 N_{x+1} 表方程式(18)右端之分子，卽得

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \qquad (19)$$

上述推演之方法，卽普通所謂“相互資金法”者是也．

期末付終身年金之躉繳費 a_x 亦可由第一年末，第二年末等等給付之生存保險金得之．由此則可立得下式：

$$a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \cdots + {}_{\omega-x}E_x,$$

或
$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdots + D_\omega}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

關於終身年金，學者必須明瞭期末付與期首付年金之唯一分別僅在前者於第一年末開始付款，而後者在第一年開始，即行給付也。至其給付時則均相同，故若以 a_x 表期首付年金之躉繳費，則立有

$$\text{a}_x = 1 + a_x = 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x},$$

或
$$\text{a}_x = \frac{N_x}{D_x}. \tag{20}$$

期首付終身年金之躉繳費 a_x 載於表 IV 中。

練　習（九）

1. 試計算一現年 30 歲或 50 歲者購買期末及期首付金額 600 元之終身年金所應納之躉繳費。

2. 某人現年 60 歲，以 10,000 元購買於 61 歲時開始給付之終身年金。試求其每年所得之年金金額。

3. 某人現年 65 歲領有養老金一分。此養老金言明在其生存期內每年終給付 500 元，試求此養老金之現價。

4. 某人現年 30 歲，欲當其生存期間於每年開始時繳 50 元於壽險公司。若此人於 30 歲時將此費躉繳，則其值為若干？

5. 某人現年 30 歲，試以相互資金法，以推演此人購買期首付終身年金之躉繳費之公式。

6. 試證

(a) $\mathrm{a}_x=1+v\cdot p_x\cdot \mathrm{a}_{x+1}$;

(b) $\mathrm{a}_{x+1}=\dfrac{(1+i)a_x}{p_x}$.

7. 設利率爲零，試證 $a_x=e_x$.

8. 試證 $a_x<1/i$,

〔提示〕 $l_x>l_{x+1}>l_{x+2}>\cdot\cdot\cdot\cdot$.

9. 試以代數方法證明下列公式，並以文字解釋其意義：

$$\mathrm{a}_x=\sum_{n=1}^{\omega-x+1}(\mathrm{a}_{\overline{n|}}\cdot{}_{n-1}/q_x).$$

10. 設利率爲 4 %, $a_{20}=18.662$, $a_{21}=18.517$,
$a_{22}=18.379$, $l_{22}=94.932$,

試以 6 (a)之恆等式計算 l_{20} 及 l_{21} 之值.

15. **定期及延期生存年金** 設以 $\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}$ 表期首付金額一元之 n 年定期年金之躉繳費，所謂期首付 n 年定期年金者，卽在 n 年期中逐年於年初給付 (x)一金額一元之年金也.至 n 年終了，雖 (x)仍然生存，年金亦卽停付.此種躉繳費，可視爲在 n 年中於每年初收受一元之生存保險金之現價總和，故

$$\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}={}_0E_x+{}_1E_x+{}_2E_x+\cdot\cdot\cdot\cdot+{}_{n-1}E_x,$$

或 $$\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdot\cdot\cdot\cdot+D_{x+n-1}}{D_x},$$

因 $$N_x=D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+D_{x+n-1}+D_{x+n}+\cdot\cdot\cdot D_\omega,$$
$$N_{x+n}=D_{x+n}+\cdot\cdot\cdot+D_\omega,$$

由減法，得 $$N_x-N_{x+n}=D_x+D_{x+1}+\cdot\cdot\cdot+D_{x+n-1}.$$

因此 $$\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}. \tag{21}$$

$a_{x:\overline{n|}}$ 之數値，見表 IX。

設 ${}_{n|}\text{a}_x$ 表期首付金額一元 n 年延期生存年金之躉繳費，所謂期首付金額一元 n 年延期生存年金者，即於今後之 n 年末，$n+1$ 年末等等逐年給付一元之年金也。此種年金在 n 年延期期間並不給付，自 n 年末開始給付後，直至(x)死亡爲止。如此則易知

$$ {}_{n|}\text{a}_x = {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \cdot\cdot\cdot + {}_{w-x}E_x, $$

或
$$ {}_{n|}\text{a}_x = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \cdot\cdot\cdot + D_w}{D_x}, $$

故
$$ {}_{n|}\text{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}. \tag{22} $$

設以 ${}_{n|}\text{a}_{x:\overline{m|}}$ 表期首付金額一元、n 年延期、m 年定期年金之躉繳費，此種年金即(x)在今後 n 年末，$n+1$ 年末・・・，$n+m-1$ 年末之 m 年中每年獲得一元之年金也。因任何年金期之起迄時間，均可以適當之 n 與 m 表之，故此種年金爲年金中之最普徧者。

將此躉繳費視爲生存年金逐年之和，則有

$$ {}_{n|}\text{a}_{x:\overline{m|}} = {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \cdot\cdot\cdot + {}_{n+m-1}E_x, $$

或
$$ {}_{n|}\text{a}_{x:\overline{m|}} = \frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \cdot\cdot\cdot + D_{x+n+m-1}}{D_x}, $$

故得
$$ {}_{n|}\text{a}_{x:\overline{m|}} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+m}}{D_x}. \tag{23} $$

設以 $a_{x:\overline{n|}}$，${}_{n|}a_x$ 與 ${}_{n|}a_{x:\overline{m|}}$ 分別表示相當之期末付年金之躉繳費。比較給付款項之時期，則可知

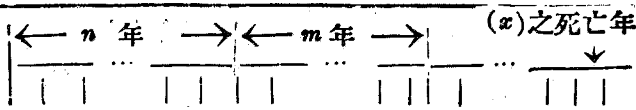
$$ a_{x:\overline{n|}} = {}_{1|}\text{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}, $$

$$ {}_{n|}a_x = {}_{n+1|}\text{a}_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}, $$

$${}_{n}/a_{x:\overline{m|}} = {}_{n+1}/\mathrm{a}_{x:\overline{m|}} = \frac{N_{x+n+1}-N_{x+n+m+1}}{D_x}.$$

年金給付圖解

假定(x)於$x+m$年後死亡



	x	$x+1$	$x+2$			$x+n-1$	$x+n$	$x+n+1$				$x+n+m$				
$a_x =$		1	1	…	1	1	1	1	…	1	1	1	1	…	1	1
$\mathrm{a}_x =$	1	1	1	…	1	1	1	1	…	1	1	1	1	…	1	1
$a_{x:\overline{n|}} =$		1	1	…	1	1	1									
$\mathrm{a}_{x:\overline{n|}} =$	1	1	1	…	1	1										
${}_{n}/a_x =$								1	…	1	1	1	1	…	1	1
${}_{n}/\mathrm{a}_x =$							1	1	…	1	1	1	1	…	1	1
${}_{n}/a_{x:\overline{m|}} =$								1	…	1	1	1				
${}_{n}/\mathrm{a}_{x:\overline{m|}} =$							1	1	…	1	1					
${}_{n}E_x =$							1									

練　習（十）

1.(a)試用代數方法以證明下列各恆等式:

(1)　${}_{n}/\mathrm{a}_x = {}_{n}E_x \cdot \mathrm{a}_{x+n}$;

(2)　$\mathrm{a}_{x:\overline{(m+n)|}} = \mathrm{a}_{x:\overline{m|}} + {}_{m}E_x \cdot \mathrm{a}_{x+m:\overline{n|}}$;

(3)　${}_{n}/\mathrm{a}_{x:\overline{m|}} = {}_{n}E_x \cdot \mathrm{a}_{x+n:\overline{m|}}$.

(b)試由a_x, $\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}$及${}_{n}E_x$諸表依$(a)$中之公式,計算下列各值

(1)　${}_{10}/\mathrm{a}_{30}$;

(2)　$\mathrm{a}_{25:\overline{14|}}$

(3) ${}_{4|}a_{35:\overline{20|}}$.

2.試用相互資金法,推演下列各公式:

(a) ${}_{n|}a_x$;

(b) $a_{x:\overline{n|}}$.

3.試證下列諸恆等式:

(a) $a_{x:\overline{n|}} = 1 + a_{x:\overline{n-1|}}$;

(b) ${}_{n|}a_x = a_x - a_{x:\overline{n|}}$;

(c) $a_{x:\overline{n|}} = a_x - {}_{n}E_x \cdot a_{x+n}$.

4.試證

(a) $a_{x:\overline{n|}} < a_{\overline{n|}}$;　　(b) ${}_{n|}a_{x:\overline{m|}} < v^n a_{\overline{m|}}$.

5.某人年 35 歲以 5000 元向壽險公司購買一定額之延期終身保單,將來款項之給付於其 55 歲時之生日開始.若此人於 55 歲前死亡,則公司不付任何賠款.

(a)如公司不加營業費用,試求其年金金額.

(b)如公司於其所繳之費內扣去 5 % 之營業費,則其年金金額又如何?

6.某人現年 34 歲,須依其保單在二十年內於每年初納 100 元之保費與保險公司.試求此等保費之現價.

7.某人現年 20 歲,於生存期間,每年初須繳納 50 元之保費,試求其繳費之現價.又設其最末一次繳費在 34 歲時,則其所繳費之現價如何?

8.某一保險單,於保單持有人 50 歲時滿期,屆時彼或領 10,000 元之現款,或於屆期後十年開始領取每年數目相等之終身年金.若彼於前十年內死亡,則由其承繼人繼續領取此十年內彼所得之數.試求彼每年應得之金額.

〔提示〕在此情形下含有限期十年之確定年金及延期十年之終身年金各一分,若以 R 表彼年得之款,則

$$R(a_{\overline{10}|}+{}_{10|}a_{50})=10,000.$$

9. 設 $v=0.9$, 試填充下表(計算至小數三位)

年齡 x	l_x	d_x	q_x	p_x	a_x	e_x	$\mathring{e}_x$
90	600	100					
91							
92	400			0.75			
93							
94	200		0.50				
95							
96	0						

16. 生存分紅年金 設 l_x 個人在一定年限內，於每年之初每人出資若干，共集一基金. 將此資金以複利率 i 投資生息，在規定年限之末，由生存者平均分配所積存之金額. 但在期前死亡者，不得享受此種利益. 如此所積存之資金名爲圖丁資金 (tontine fund)，每人所分得之款名爲生存分紅年金.

吾人於此將討論每一生存者於約定 n 年限期之末所分得之金額.

設每人於每年初各繳一元，並以 ${}_nu_x$ 表示生存者於 n 年末分得之金額. 因此基金於第一年初收入 l_x 元，此數於第 n 年末積存爲 $l_x(1+i)^n$ 元; 於第二年初生存人數爲 l_{x+1}，每人出一元，在 n 年末積存爲 $l_{x+1}(1+i)^{n-1}$ 元; 如此繼續至最後一年初生存人數爲 l_{x+n-1}，各出一元，積存至該年末爲 $l_{x+n-1}(1+i)$ 元. 截至 n 年末將此歷年積存之總資金分配於生存者，得

$${}_nu_x=\frac{l_x(1+i)^n+l_{x+1}(1+i)^{n-1}+\cdots+l_{x+n-1}(1+i)}{l_{x+n}}$$

以 v^{x+n} 乘分子，分母，並以換算符號表之，得

$$ {}_nu_x=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+D_{x+n-1}}{D_{x+n}}, $$

故
$$ {}_nu_x=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+n}}. \tag{24} $$

符號 ${}_nu_x$ 乃指每個生存者存款利息與生存享有權之積存值而言。公式(24)亦可以下法得之，以 $\text{a}_{x:\overline{n|}}$（各期付款之現價）等於 n 年末生存保險金 ${}_nu_x$ 之折現價，即

$$ \text{a}_{x:\overline{n|}}={}_nu_x\cdot{}_nE_x, $$

或
$$ {}_nu_x=\text{a}_{x:\overline{n|}}\left(\frac{1}{{}_nE_x}\right)=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+n}}。 $$

在上式中倒數 $1/{}_nE_x$ 爲利息及生存享有權之集存因子，此式於後數節中亦常用之。

當 $n=1$ 時，常以符號 u_x 代替 ${}_1u_x$，故

$$ u_x=\frac{N_x-N_{x+1}}{D_{x+1}}=\frac{D_x}{D_{x+1}}. \tag{25} $$

${}_nu_x$ 及 u_x 之數值分別見表 X 及表 VI.

17. **年金之一般公式**　在任何時間逐年給付某生存者一數目相等之年金，其現價均可以一般之公式表示之。如

$$ R\cdot\frac{N_a-N_b}{D_c} \tag{26} $$

表示逐年給付 R 元，於 a 歲開始至 $b-1$ 歲停止給付之年金，在 c 歲時之現價。當 b 超過於表中之極限年齡時，則分子之第二項即行消失。$b-a$ 表示給付之次數。適當選擇年齡 $a,b,$ 及 c 之數值，則 a_x, a_x,

$a_{x:\overline{n|}}$，$\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$，$_{n|}a_{x:\overline{m|}}$，$_nE_x$，$_nu_x$ 與 u_x 均可由(26)式之形式表之.

練 習（十一）

1.某人現年 30 歲，欲於 60 歲時開始獲得每年 1000 元之終身年金.試求今後 30 年中，彼每年應納若干?

(a) 若契約上載明遇彼死亡時不退還其所納之費，

(b) 若契約上載明彼在 60 歲以前死亡，公司立即退還其所納之費及利息.

解 (a) 在此情形下，彼於 60 歲時之積蓄，即此人 30 年後之生存分紅年金.因而由

$$R\cdot {}_{30}u_{30}=1000\cdot a_{60},$$

並由表 IV 及表 X，得

$$R=\frac{1000\,a_{60}}{{}_{30}u_{30}}=\frac{1000(11.032399)}{70.14711}=157.28\text{ 元}.$$

(b) 在此情形下，彼只能得在 60 歲前所儲蓄之利，故爲期首付確定年金，因而有

$$R\,\ddot{s}_{\overline{30|}}=1000\,a_{60},\qquad R(s_{\overline{31|}}-1)=1000\,a_{60},$$

由表 IV 及表 I 得

$$R=\frac{1000\,a_{60}}{s_{\overline{31|}}-1}=\frac{1000(11.032399)}{53.429471}=206.49\text{ 元}.$$

2.(a) 試證

$$_{m+n}u_x={}_mu_x\cdot\frac{1}{_nE_{x+m}}+{}_nu_{x+m},$$

(b) 試由表用恆等式(a)以求 $_{17}u_{20}$ 之數值.

3.試證

(a) $$a_{x+1}=(a_x-1)u_x,$$

(b) $$_nu_x=\frac{a_x}{_nE_x}-a_{x+n},$$

(c) $$a_x=vp_x(u_x+a_{x+1}).$$

4.某人現年20歲於彼生存至25,26,27,28,29歲時每年有5000元之年金.今彼欲以此保單易一於現在開始領款之年金.試求其每年所得.

5.某人現年40歲,決定購買每年1000元之延期年金,第一次領款在今後二十年末.購買此年金之方法,則爲在今後十年中於每年初繳相等之保費.若彼於任何時死亡並不退其已納之費,試計算其年繳純保費.

6.一現年17歲之男孩於生存至第25次生日時將得到10,000元之遺產,今彼欲以此易一在18歲時開始後之四年中每年末給付之一進款,試以換算符號表示此新年金每年之金額.

7.某人現年35歲在今後十年中,不論其生死,於每年末均有10,000元之收入.今彼欲以此款易爲延期生存年金,第一次款項在65歲時付給.試求其年金金額.

8.設某人於30歲時開始獲得期首付終身年金,此年金之給付方法爲前十年每年爲50元,此後每年增至100元,試以換算符號表此年金之現價.

9.某人現年30歲,欲購買一於50歲時開始每年1000元之生存年金,保費則於今後二十年內繳納,設規定其在中途死亡時,不退還所繳之費,試求其每年應納之費.

10.某人於30歲時開始獲得定期期首付生存年金.設於前十五年中每年之年金爲500元,此後十年每年之年金爲100元,試計算此年金之現價.

11.試證 ${}_nu_x > s_{\overline{n|}}$，並解釋何以此不等式爲眞確.

18.遞增生存年金　期首付遞增年金者乃一種期首付逐年依算術級數增加之年金也. 如第一年一元，第二年二元，第三年三元，等等之年金爲逐年增加一元者. 其躉繳費 $(Ia)_x$ 爲逐年遞增之生存年金現價之和；因此

$$(Ia)_x = 1\cdot{}_0E_x + 2{}_1E_x + 3{}_2E_x + \cdot\cdot\cdot + (w-x+1){}_{w-x}E_x,$$

$$= \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdot\cdot\cdot + (w-x+1)D_w}{D_x}.$$

因

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdot\cdot\cdot D_w,$$

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \cdot\cdot\cdot D_w,$$

$$N_{x+2} = D_{x+2} + D_{x+3} + \cdot\cdot\cdot D_w,$$

等等至表末爲止，將此諸方程式相加，得

$$N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdot\cdot\cdot + N_w = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + 4D_{x+3} + \cdot\cdot\cdot + (w-x+1)D_w,$$

若命換算符號有下列之關係，即

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \cdot\cdot\cdot + N_w,$$

則期首付遞增年金之躉繳費可書爲

$$(Ia)_x = \frac{S_x}{D_x} \tag{27}$$

練　習（十二）

1.某人現年 30 歲，於現時開始之定期生存年金依次爲 500 元，450 元，400 元，350 元，300 元，及 250 元，試計算其現價.

解　此連續給付之年金含有六種生存保險金，於今後六年中在

每年初時給付. 因此設 K 代表其現價, 則

$$K=500\,{}_0E_{30}+450\,{}_1E_{30}+400\,{}_2E_{30}+350\,{}_3E_{30}$$
$$+300\,{}_4E_{30}+250\,{}_5E_{30},$$
$$=50\frac{10D_{30}+9D_{31}+8D_{32}+7D_{33}+6D_{34}+5D_{35}}{D_{30}}.$$

又因

$$\begin{aligned}
5(D_{30}+D_{31}+D_{32}+D_{33}+D_{34}+D_{35})&=5(N_{30}-N_{36}),\\
D_{30}+D_{31}+D_{32}+D_{33}+D_{34}&=(N_{30}-N_{35}),\\
D_{30}+D_{31}+D_{32}+D_{33}&=(N_{30}-N_{34}),\\
D_{30}+D_{31}+D_{32}&=(N_{30}-N_{33}),\\
D_{30}+D_{31}&=(N_{30}-N_{32}),\\
D_{30}&=(N_{30}-N_{31}),
\end{aligned}$$

將上列六式相加, 得

$$10D_{30}+9D_{31}+8D_{32}+7D_{33}+6D_{34}+5D_{35}$$
$$=10N_{30}-(N_{31}+N_{32}+N_{33}+N_{34}+N_{35}+5N_{36})$$
$$=10N_{30}-(S_{31}-S_{36})-5N_{36}.$$

應用表 III, 得

$$K=50\frac{10N_{30}-(S_{31}-S_{36})-5N_{36}}{D_{30}}$$

$$=50\frac{10(596,803.64)-(8800,553.5-6,248,356.9)-5(432,326.51)}{30,440.784}$$

$$=2060.08\text{ 元}.$$

2. 設一現年為 x 歲者, 於現在開始有一期首付遞增年金, 第一次之款為 h 元, 此後每年增加 k 元, 試證此年金之現價為

$$\frac{hN_x+kS_{x+1}}{D_x}.$$

3. 設期首付遞增年金給付之次數為 n，試證其躉繳保費為

$$(I\text{a})_{x:\overline{n|}}=\frac{S_x-S_{x+n}-n\cdot N_{x+n}}{D_x}.$$

4. 某人現年 35 歲於現時開始有一定期年金，連續給付之金額為 10 元，8 元，6 元，4 元，2 元，4 元，6 元，8 元及 10 元．試計算其現價．

5. 試以換算符號表示下述各年金之現價：

(a) 某人現年 24 歲於現時開始之年金為 10 元，此後年增一元，增至 25 元以後之數額不再增加．

(b) 某人現年 30 歲於現時開始之年金為 100 元，此後年減 5 元至 0 元為止．

6. 試說明下列各年金現價之意義：

(a) $$\frac{S_{x+1}}{D_x},$$

(b) $$\frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}}{D_x},$$

(c) $$\frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-n\cdot N_{x+n+1}}{D_x}.$$

19. **每年分次繳納之年金** 生存保險與生存年金之契約常有載明保費每年分數次繳納者．生存保險費常分為半年繳或季繳，工業保險費則常按週繳．其他尚有按月繳納者．吾人於此將討論每年分 m 次納費之年金，此處 m 為一任意正整數．以符號 $\text{a}_x^{(m)}$ 表年金一元期首付分 m 次繳納之現價，則繳納期間為 $1/m$ 年，於每次期間開始時繳納 $1/m$ 元．將此種年金視為一組之生存保險金，則有

$$\text{a}_x^{(m)}=\frac{1}{m}(1+{}_{1/m}E_x+{}_{2/m}E_x+{}_{3/m}E_x+\cdots)$$

或　$$a_x^{(m)}=\frac{1}{m}(1+v^{1/m}\cdot{}_{1/m}p_x+v^{2/m}\cdot{}_{2/m}p_x+v^{3/m}\cdot{}_{3/m}p_x+\cdots)$$

上式數值之計算，極爲繁複，且死亡表上關於時間小於一年之死亡率亦無記載，故欲得 $a_x^{(m)}$ 之眞確值，事實上爲不可能。然有一求近似值法以滿足此種需要。

試察下列二式:

$$_{0}/a_x=a_x-0,\qquad _{1}/a_x=a_x-1.$$

則由插補法，可得關於延期年金 $_{1/m}/a_x$ 之公式爲

$$_{1/m}/a_x=a_x-\frac{1}{m}.$$

同理用插補法，得

$$_{2/m}/a_x=a_x-\frac{2}{m},$$

在一般情形，爲

$$_{k/m}/a_x=a_x-\frac{k}{m}.$$

設吾人有 m 分金額一元之年金於此，每分均爲年付一次，其第一次繳納之時期分別在 $0,1/m,2/m,3/m,\cdots(m-1)/m$ 年之末，則此諸年金之和卽金額 m 元每年分 m 次繳納之期首付年金。故此諸年金現價之和爲 $m\cdot a_x^{(m)}$，如此則有

$$m\cdot a_x^{(m)}=\left[a_x+\left(a_x-\frac{1}{m}\right)+\left(a_x-\frac{2}{m}\right)+\cdots+\left(a_x-\frac{m-1}{m}\right)\right].$$

方程式之右端爲一公差爲 $-1/m$ 之算術級數。求此級數之和，得

$$m\mathrm{a}_x^{(m)}=m\mathrm{a}_x-\frac{m(m-1)}{2m}.$$

以 m 除之,得近似值

$$\mathrm{a}_x^{(m)}=\mathrm{a}_x-\frac{m-1}{2m}. \tag{28}$$

設 $a_x^{(m)}$ 表金額一元每年分 m 次繳納期末付年金之現價,則

$$a_x^{(m)}=\mathrm{a}_x^{(m)}-\frac{1}{m}=\mathrm{a}_x-\frac{m+1}{2m},$$

或其近似公式爲

$$a_x^{(m)}=a_x+\frac{m-1}{m}. \tag{29}$$

在特別情形時,公式(28)及(29)之近似值如下:

$$\mathrm{a}_x^{(2)}=\mathrm{a}_x-\frac{1}{4},\qquad a_x^{(2)}=a_x+\frac{1}{4};$$

$$\mathrm{a}_x^{(4)}=\mathrm{a}_x-\frac{3}{8},\qquad a_x^{(4)}=a_x+\frac{3}{8};$$

$$\mathrm{a}_x^{(12)}=\mathrm{a}_x-\frac{11}{24},\qquad a_x^{(12)}=a_x+\frac{11}{24};$$

同理,對定期期首付年金,則

$$\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}=\mathrm{a}_x^{(m)}-{}_{n|}\mathrm{a}_x^{(m)}=\mathrm{a}_x^{(m)}-{}_nE_x\mathrm{a}_{x+n}^{(m)}$$

$$=\mathrm{a}_x-\frac{m-1}{2m}-{}_nE_x\left(\mathrm{a}_{x+n}-\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$=[\mathrm{a}_x-{}_nE_x\mathrm{a}_{x+n}]-\frac{m-1}{2m}(1-{}_nE_x);$$

故其近似公式，爲

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)}=a_{x:\overline{n|}}-\frac{m-1}{2m}(1-{}_nE_x). \tag{30}$$

練　習（十三）

1.某人現年25歲有一半年付金額500元之生存年金，試求其現價：

(a)若於每六個月之初給付.

(b)若於每六個月之末給付.

2.金額100元於每年末給付某人之年金，其現價爲1798.54元，若以同一金額於每月末給付，則其現價若干

3.一年金受益人於60歲時開始收受金額100元之年金，若屆60歲時，彼欲於每月初提取，試求此每月相等之金額；又若此年金改爲於每季初領取，則此每季相等之金額又爲若干？

4.(a)符號 $a_x^{(m)}$ 用以表示金額一元每年分 m 次付之期首付確定年金之現價，今設某人確可生存 n 年，試證公式(30)可書爲

$$a_{\overline{n|}}^{(m)}=a_{\overline{n|}}-\frac{m-1}{2m}(1-v^n).$$

(b)試用(a)之結果以解下題：若定期十年於每季初給付年金之現價等於同期內於每年初給付100元年金之現價，試求季付之金額.

5.試證

$$_{n}/a_x^{(m)}={}_nE_x\left(a_{x+n}-\frac{m-1}{2m}\right).$$

6.試證

(a) $$a_{x:\overline{n|}}^{(2)}=\frac{1}{4}(3a_{x:\overline{n|}}+\text{a}_{x:\overline{n|}}),$$

(b) $$a_{x:\overline{n|}}^{(4)}=\frac{1}{8}(5a_{x:\overline{n|}}+3\text{a}_{x:\overline{n|}}),$$

7.若 ${}_nu_x^{(m)}$ 表金額一元每年分 m 次給付之生存分紅年金之積存值,試證

$$ {}_nu_x^{(m)}={}_nu_x-\frac{m-1}{2m}\cdot\left(\frac{1}{{}_nE_x}-1\right),$$

8.一現年 x 歲者有一每年分 m 次給付之期首付遞增年金,其第一年之金額爲一元,第二年之金額爲二元,第三年之金額爲三元等等,試將其現價以 $(I\text{a})_x^{(m)}$ 表之,並證

$$(I\text{a})_x^{(m)}=(I\text{a})_x-\frac{m-1}{2m}\text{a}_x.$$

複習題(十四)

1.一現年 x 歲者之期末付終身年金在第一年末爲 (1.035),第二年末爲 $(1.035)^2$,第三年末爲 $(1.035)^3$ 等等.試證此年金以 $3\frac{1}{2}\%$ 利率計算之現價爲 e_x.

2.試證年付一元之終身年金如於 (x) 死亡年之末開始給付,則其現價爲 $1/i-a_x$.

3.A 現年 30 歲,B 現年 40 歲.彼等欲納相等之款與一慈幼會.A 允於自第 30 次至第 44 次之生日間,每年繳納 500 元, B 則於其到達 45 歲時繳納 R 元.試求 R 之值.

4.設於前十年之利率爲 4%,此後之利率爲 5%,試求以換算

符號所表之 a_{30}。

5. 試求金額 120 元現年 30 歲之期末付終身年金之現價，若給付之方法爲(a)按年；(b)按半年；(c)按季；與(d)按月。

6. 試證

(a) $${}_n u_x = ({}_{n-1}u_x + 1)u_{x+n-1}.$$

(b) $$a_{x+1} = (a_x - 1)u_x.$$

7. 某人現年 x 歲，其延期年金之躉繳保費爲

$$\frac{a_{x-n} - a_{x-n:\overline{n}|}}{{}_nE_{x-n}},$$

設其第一次付款在 $x+n$ 歲，試求此年金之金額。

8. 試證：

$${}_{r|}a^{(m)}_{x:\overline{n}|} = {}_{r|}a_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left({}_rE_x - {}_{n+r}E_x\right).$$

9. 若 $(Ia)^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ 表示每年分 m 次於期首給付之定期遞增年金之現價，在第一年爲一元，第二年爲二元，第三年爲三元等等，至第 n 年爲 n 元，試證

$$(Ia)^{(m)}_{x:\overline{n}|} = (Ia)_{x:\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}a_{x:\overline{n}|}.$$

10. 一受益人現年 50 歲，可選擇下列受款方法之任一種：

(a)領取 10,000 元之現金，或

(b)於每月開始時領取相等之金額直至死亡爲止，或

(c)於每月開始時領取相等之金額，但不論其生存與否公

司至少須付 120 個月之金額.

試計算彼按(b)與(c)兩法每月領取之金額.

〔提示〕參看練習(十)習題 8,練習(十三)習題 4,(a)與習題 5.

第三章　純保險費

20.引言　人壽保險者，將個人因死亡而受之經濟損失，依科學互助之原理以轉嫁於多數人之一種經濟制度也。故保險之人愈多，則公司之基礎愈固。當某人向保險公司要保壽險時，彼與公司須訂一契約，此契約曰保險單；在保險單上被保險人或保險單持有人須簽訂一某項報酬與保險公司，此報酬名曰總保險費（簡稱保費）；被保險人按期支付保險費與公司，公司則於其死亡時給予一定金額以爲賠償，此金額曰保險金額（簡稱保額）；領取賠款之人曰受益人；保單上書明之訂約日曰保單日；保單日後經歷各年，名曰保單年；大都人壽保險公司索取之總保費，依被保險人於保險時之年齡而定，該年齡又按最接近於保單簽發時之生日而定，此最近生日之年齡曰保單年齡。

保險單上之基本問題，係決定要保人或被保險人應付若干保險費，以及受益人應得之保險金額。每一保險公司均採取一死亡生殘表與一投資基金之假定利率作計算之基礎。通常所用之死亡表爲美國經驗死亡表，有若干公司則採用美國男性死亡表。而利率則爲3%至$4\frac{1}{2}$%之複利率。

保險單上之純保費，其總現值爲基於在次列諸假定下所計算保金額之現價：(a)保險單上之保險金額於保單年終了時給付；(b)公險司以基金投資所生之利息適爲依假定利率所得者；(c)被保險人之死亡率適與所採取死亡表上之死亡率相符。若在保單年內每次繳納之純保費皆相等，則此種保費曰均衡純保險費。

公司所收取之眞正總保費，等於純保費加一定額之營業費，作爲公司之開銷及爲上述(a),(b),(c)三種情形不順利時之支出.關於總保費之計算法，以後詳加討論，本章則專事純保費及其有關問題之論述.吾人知被保險人於繳納等於所有保險金額現價之純保費外，尙須加若干之營業費，故被保險人於要保時須以審愼之態度出之.如一保單之保費較他保單之保費爲少，且又在同一時期繳納，則第一保單保險金額之現價較小.究竟何種保單最適宜於某人，大都視個人之需要及其付款能力之是否能適於保險金額之種類及保費之大小而定.

21.終身保險　若保單上規定被保險人將每期應繳納之保費統於保單訂定日一次繳付，則此種保費曰躉繳保費.在上節所述之三種假定下，總保險金額之現價稱曰躉繳純保費.

終身壽險者，被保險人於保單日開始後任何時死亡，均須付給受益人一定金額之保險也.保單具有上項條件者爲終身壽險單.同理，終身壽險之躉繳純保費者乃依所定死亡率與利息之假定下於被保險人死亡年末給付金額之現價也.

命 A_x 表(x)之保額一元終身壽險之躉繳純保費，亦卽(x)於死亡年末公司給付一元之現價.今若有 l_x 人向某公司要保，年齡均爲 x，保單日亦同，則躉繳保費之總數應爲 $l_x\cdot A_x$.在此諸被保險人中，若在第一保單年死亡 d_x 人，則在此年末公司必須付給受益人 d_x 元，亦卽公司於現在必備有 vd_x 元以應此項需要；在第二年中有 d_{x+1} 人死亡，公司現在必須有 v^2d_{x+1} 元以備給付受益人；在第三年，有 d_{x+2} 人死亡，則現在必須備有 v^3d_{x+2} 元，如是繼續，直至 l_x 個被保險人全數死亡爲止.然以公司所收集之總純保費適與保險金額之總現價相等，故得

$$l_x\cdot A_x=vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+v^{\omega-x+1}d_\omega$$

或 $$A_x=\frac{vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+v^{w-x+1}d_w}{l_x}.$$

將方程式右端分式之分子及分母各乘以 v^x，得

$$A_x=\frac{v^{x+1}d_x+v^{x+2}d_{x+1}+v^{x+3}d_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+v^{w+1}d_w}{v^x l_x},$$

命換算符號 C_x 表 $v^{x+1}d_x$ 之乘積，如

$$C_{25}=v^{26}d_{25};\qquad C_{30}=v^{31}d_{30};$$

等等．於是以換算符號 $C_x, C_{x+1}, C_{x+2}, \cdot\cdot\cdot$，代入 A_x 式中，則得

$$A_x=\frac{C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+C_w}{D_x}.$$

設以換算符號 M_x 表下列之和，即

$$M_x=C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+C_w,$$

如 $$M_{25}=C_{25}+C_{26}+C_{27}+\cdot\cdot\cdot+C_w,$$

$$M_{30}=C_{30}+C_{31}+C_{32}+\cdot\cdot\cdot+C_w.$$

由此，立得

$$A_x=\frac{M_x}{D_x}. \tag{31}$$

同理，被保險人之年齡為 x，終身壽險金額為 R 元之躉繳純保費為

$$R\cdot A_x=R\cdot\frac{M_x}{D_x}.$$

躉繳保費 A_x 之值及其倒數均載於附表IV中．至於換算符號 C_x 及 M_x 之值，則可由附表 III 檢得．

練　習（十五）

1. 設年齡 x 為 95, 94, 93, 試驗證 C_x 及 M_x 在附表中之記錄. 又設年齡 x 為 20, 35, 50, 試驗證 A_x 在附表中之記錄.

2. 某終身壽險之金額為 4000 元, 被保險人之年齡為 (a) 20, (b) 40, (c) 85, 試求其躉繳純保費.

3. 設總保費與純保費相等, 試求一年齡為 40 者以 2,000 元之現金所能購得之終身壽險金額為若干?

4. 某人現年 30 歲, 要保終身壽險, 保險金額為 R 元. 試用相互資金法以換算符號表示 R 之現價.

5. 試證 $$A_x = v(q_x + p_x A_{x+1}),$$

6. 試證 $$A_x u_x = A_{x+1} + q_x/p_x.$$

7. 試證

(a) $$p_x = \frac{1-(1+i)A_x}{1-A_{x+1}},$$

(b) $$q_x = \frac{(1+i)A_x - A_{x+1}}{1-A_{x+1}}.$$

22. 各種躉繳保費之關係　在兩組換算符號間以及 A_x 與 a_x 間均存在若干個之基本關係, 如

$$C_x = v^{x+1} d_x = v^{x+1}(l_x - l_{x+1})$$
$$= v v^x l_x - v^{x+1} l_{x+1},$$

故有

$$C_x = vD_x - D_{x+1}. \tag{32}$$

倣此, 得

$$C_{x+1} = vD_{x+1} - D_{x+2},$$

$$C_{x+1}=vD_{x+2}-D_{x+3}.$$

如是繼續至表末。將此諸方程式之相當行相加，得

$$M_x=vN_x-N_{x+1}. \qquad (33)$$

以 D_x 除(33)式之兩端，故有

$$A_x=v\mathrm{a}_x-a_x. \qquad (34)$$

設以 d 表 $1-v$ 之差，d 名爲貼現率. 因 $a_x=\mathrm{a}_x-1$，則方程式 (34)可書爲

$$A_x=1-d\mathrm{a}_x. \qquad (35)$$

由此諸關係式，可知 C_x 及 M_x 之值，在必要時可直接由 D_x 及 N_x 之表求得，不必求助於最初之死亡表. 至 A_x 之值則可由 a_x 或 a_x 之附表求得。

最饒興趣者爲公式(34)與(35)亦可用文字解釋以證明之. 如公式(34)可證之如下: 假設(x)有兩種年金，第一種於每年初給付 v 元，第二種於每年末給付一元；則第一種較第二種多給付一次款項，蓋於(x)死亡之年，前者已於年初給付 v 元，而後者則因(x)已亡未能給付也. 又因於任一年初給付之 v 元同値於該年末給付之一元，故此兩年金之差可以(x)死亡年開始時給付之 v 元表示之. 此 v 元至(x)死亡年之末積存爲一元；故此兩年金現價之差爲在 (x) 死亡年末給付一元之現價，卽 A_x.

同理，方程式(35)可以文字解釋之如下: 設(x)以利率 i 投資一元至其死亡時爲止. 其所生之利息 i 於每年末給付. 則此每年所給付之 i 元與該年初給付 iv 或 d 元之價值相等. 如此所投資之一元組成一期首付 d 元之終身年金，且於(x)死亡年末退還其本金一元. 由此兩種現價相等，可得方程式(35)之結果.

練習(十六)

試用文字以解釋下列諸方程式:

1. $v^n = 1 - d\text{a}_{\overline{n|}}$.
2. $v^n = v\text{a}_{\overline{n|}} - a_{\overline{(n-1)|}}$.
3. $l_x(1+i)A_x = d_x + l_{x+1}A_{x+1}$.
4. 試證 $M_x = D_x - dN_x$.
5. 試證 $A_x = v(1 - ia_x) = v - (1-v)a_x = v - da_x$.

23.年繳保險費 人壽保險公司通常發出之保險單多規定保險費按年繳納,且每年之數目相等。此類年保費應在每保單年之初繳納。至其期限則有規定終身繼續繳納者,有限定在若干年內繳納者,此納費之諸年名曰保費繳納期。是以終身壽險又可分為下列二類:(a)普通終身壽險,年保費規定終身繼續繳納者;(b)限期繳費終身壽險,年保費限定於若干年內繳納者,通常之期限為十年,十五年,或二十年。由是易知限期繳費終身壽險之保費高於普通終身壽險之保費。又躉繳保費之保單為限期繳費保單之一特例,即限期繳費保單規定一次將保費繳足也。

命 P_x 表現年 x 歲普通終身壽險之年繳均衡純保費。此種年保費必然組成一期首付生存年金,其現價為 $P_x \cdot \text{a}_x$ 依年保費之定義,知其現價等於保險金額現價之躉繳純保費,故得

$$P_x \cdot \text{a}_x = A_x,$$

於是有

$$P_x = \frac{A_x}{\text{a}_x}. \tag{36}$$

或由14節,可得

$$P_x = \frac{M_x}{N_x}.$$

以 $1-d\mathrm{a}_x$ 代公式(36)中之 A_x，可得 P_x 之另一公式，即

$$P_x=\frac{1-d\mathrm{a}_x}{\mathrm{a}_x}=\frac{1}{\mathrm{a}_x}-d. \tag{37}$$

命 ${}_nP_x$ 表 n 年限期之年繳均衡純保費.此種保單通常指 n 年限期繳費之終身壽險保單而言.至其保費則組成一期首付定期生存年金.因其現價等於躉繳純保費 A_x，故有

$${}_nP_x\mathrm{a}_{x:\,\overline{n|}}=A_x,$$

因得公式

$${}_nP_x=\frac{A_x}{\mathrm{a}_{x:\,\overline{n|}}}. \tag{38}$$

或由15節，上式又可書為

$${}_nP_x=\frac{M_x}{N_x-N_{x+n}}.$$

此處須注意以上所論純保費之公式，乃由於假定保險金額為一元而得者.至保險金額為其他數目之保費，其計算法為以保險金額為一元之保費乘其保險金額之積.附表V表示普通終身壽險，十九年限期繳費及二十年限期繳費等終身壽險之純保費之數值.

練　習　七)

1.設被保險人之現年為30歲，保險金額為1,000元，試求下列諸保單上純保費至小數點兩位之數值

(a)五年限期繳費終身壽險，

(b)十年限期繳費終身壽險，

(c)三十年限期繳費終身壽險.

2. 試用公式(37)以核驗附表 V 所示之 P_{45}.

3. 設要保人之現年爲(a) 60 歲,(b) 20 歲,(c) 15 歲,保險金額爲 5,000 元,試求二十年限期繳費終身壽險之年繳純保費爲若干?

4. 試證

(a) $A_x=\frac{P_x}{P_x+d}$, (b) $P_x=\frac{dA_x}{1-A_x}$.

5. 試證

$$P_x=\frac{vq_x+P_{x+1}\cdot a_x}{\mathrm{a}_x}.$$

24. 定期壽險 定期壽險者被保險人於保險期內死亡時,公司給予賠款,若被保險人於期滿時仍生存或於期滿後死亡時公司不給賠款之保險也.例如十年定期壽險,除被保險人於該十年內死亡,公司概不給付任何賠款.命 $A^1_{x:\overline{n|}}$ 表金額一元 n 年定期壽險之躉繳純保費.符號內第一下誌 x 表被保險人之現在年齡,第二下誌表保單有效之時期.在年齡上之上誌'1'表此種賠款僅於被保險人在 n 年內死亡時給付之.

若有現年爲 x 者 l_x 個人,向某保險公司要保 n 年定期壽險,則公司所收得之躉繳純保費之總數爲 $l_x\cdot A^1_{x:\overline{n|}}$.與終身壽險之情形同,公司於第一保單年初必須有 vd_x 元,以備給付於該年內死亡者之受益人;又於第二保單年末給付受益人賠款之現價爲 v^2d_{x+1} 元;如此繼續,至第 n 保單年末給付賠款之現價爲 v^nd_{x+n-1} 元,此後保單即滿期.因純保費總和之現價等於賠款金額總和之現價,故有

$$l_x\cdot A^1_{x:\overline{n|}}=vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+v^nd_{x+n-1}.$$

以 l_x 除此方程式之兩端，卽得每一保單之躉繳保費爲

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=\frac{vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+v^nd_{x+n-1}}{l_x}.$$

上式右端之分子分母均乘以 v^x，並易以換算符號，則得

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=\frac{C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+C_{x+n-1}}{D_x}.$$

因

$$M_x=C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdot\cdot\cdot+C_{x+n-1}+C_{x+n}+\cdot\cdot\cdot+C_\omega,$$

$$M_{x+n}=C_{x+n}+\cdot\cdot\cdot+C_\omega.$$

將此兩式相減，得

$$M_x-M_{x+n}=C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdot\cdot+C_{x+n-1},$$

故得公式

$$A_{x:\overline{n}|}^{1}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}.\qquad(39)$$

現年 x 者之一年定期保險之純保費名曰在 x 歲時之自然保費，常以符號 c_x 表之. 在公式 (39) 中，使 $n=1$，卽可得自然保費之公式爲

$$c_x=A_{x:\overline{1}|}^{1}=\frac{M_x-M_{x+1}}{D_x}=\frac{C_x}{D_x},\qquad(40)$$

此處因 $C_x=M_x-M_{x+1}$.

若以 ${}_nP_{x:\overline{m}|}^{1}$ 表金額一元 n ($n\leqq m$) 年限期繳費之 m 年定期壽險之年繳純保費，則有

$${}_nP_{x:\overline{m}|}^{1}\cdot \text{a}_{x:\overline{n}|}=A_{x:\overline{m}|}^{1},$$

故得公式

$$ {}_{n}P^{\cdot}_{x:\,m|} = \frac{A^{\cdot}_{x:\,m|}}{\mathrm{a}_{x:\,n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{41} $$

當保費繳納時期與保險期限相等時，即 $m=n$，符號 ${}_{n}P^{1}_{x:\,n|}$ 常簡寫爲 $P^{1}_{x:\,n|}$，故有

$$ P^{1}_{x:\,n|} = \frac{A^{1}_{x:\,n|}}{\mathrm{a}_{x:\,n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}. \tag{42} $$

c_x 之數值詳載於附表 VI 中.至躉繳保費 $A^{\cdot}_{x:\,n|}$ 之值（限於數個選定之 n），則可由附表 XI 檢得.除附有特別言明者外，"n 年定期壽險之純保費"一語，即 n 年限期繳費之 n 年定期壽險之年繳保費，如公式(42)所示.

練　習（十八）

1.試證

(a) $A_x = A^{1}_{x:\,n|} + {}_{n}E_x \cdot A^{1}_{(x+n):\,n|} + {}_{2n}E_x \cdot A^{1}_{(x+2n):\,n|} + \cdots$

(b) $A_x = c_x + {}_{1}E_x c_{x+1} + {}_{2}E_x c_{x+2} + \cdots$

並以文字解釋之.

2.試證

(a) $c_x = vq_x = v \cdot \dfrac{d_x}{l_x}$;

(b) $A_{x:\overline{n|}} = v\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - a_{x:\overline{n|}}$;

(c) $P_{x:\overline{n|}} = v - \dfrac{a_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$.

3. 設被保險人之年齡爲 30 歲，保險金額爲 1,000 元，試求

(a)十年定期壽險，

(b)二十年定期壽險，保險費於十年內繳納，

(c)五十年定期壽險.

年繳純保費至小數點兩位之數值.

4. 設被保險人現年 45 歲，十年定期壽險之金額爲 R 元. 試用相互資金法推演其躉繳純保費之公式，並以換算符號表示之.

5. (a)設被保險人之年齡爲 50 歲，保險金額爲 1,000 元，試求五年定期壽險之躉繳純保費. (b) 設被保險人之年齡爲 50, 51, 52, 53, 與 54，試求各年齡保險金額均爲 1,000 元之自然保費. (c)試解釋何以(b)中解答之和不等於(a)中之結果.

25. **儲蓄壽險**[1] 儲蓄壽險者，被保險人於保險期內死亡時，公司給付賠款，此保險期限稱爲<u>儲蓄期</u>，又被保險人於保險期末尚未死亡時，公司給付生存保險金額之保險也. 故 n 年儲蓄壽險可視爲 n 年定期壽險加以 n 年期之生存保險.

若 n 年儲蓄壽險保額一元之躉繳保費以 $A_{x:\overline{n|}}$ 表之，於是得

$$A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + {}_{n}E_{x}.$$

由此公式 $A_{x:\overline{n|}}$ 之數值可用附表XI及附表 VII 計算之. 若等式右端諸項各以換算符號表之，則可得

[1] 儲蓄壽險又名養老壽險，如到期之年齡爲六十歲（或六十五歲）者曰六十歲養老壽險（或六十五歲養老壽險）。

$$A_{x:\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}+\frac{D_{x+n}}{D_x},$$

即

$$A_{x:\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}. \tag{43}$$

儲蓄壽險之躉繳保費 $A_{x:\overline{n}|}$ 亦可以與方程式(35)相似之形式表示之。因由方程式(33),得

$$M_x=vN_x-N_{x+1}=(1-d)N_x-(N_x-D_x),$$

故

$$M_x=D_x-dN_x,$$

與

$$M_{x+n}=D_{x+n}-dN_{x+n}.$$

將此兩式相減後,加 D_{x+n} 於等式之兩端,則得

$$M_x-M_{x+n}+D_{x+n}=D_x-D_{x+n}-d(N_x-N_{x+n})+D_{x+n},$$

兩端各除以 D_x,故有

$$A_{x:\overline{n}|}=\frac{D_x-d(N_x-N_{x+n})}{D_x},$$

或

$$A_{x:\overline{n}|}=1-d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \tag{44}$$

符號 ${}_nP_{x:\overline{m}|}$ 表限 $n(n\leqq m)$ 年繳費、保額一元、m 年儲蓄壽險之年繳純保費。以此等年繳純保費之現價與保險金額之躉繳純保費相等,故有

$${}_nP_{x:\overline{m}|}\cdot\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=A_{x:\overline{m}|},$$

或

$$ {}_{n}P_{x:\overline{m}|}=\frac{A_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{M_x-M_{x+m}+D_{x+m}}{N_x-N_{x+n}}. \tag{45}$$

當保費繳納期與儲蓄壽險之期限相等時，即 $m=n$，則符號 ${}_{n}P_{x:\overline{n}|}$ 通常簡寫爲 $P_{x:\overline{n}|}$，於是有

$$P_{x:\overline{n}|}={}_{n}P_{x:\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}. \tag{46}$$

儲蓄壽險之年繳純保費，除有特別說明外，統在整個保險期內按年繳納。n 年儲蓄壽險之年繳純保費，亦可以普通終身壽險年繳純保費之公式(37)相同之形式表示之。因以 $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ 除方程式(44)之兩端後，即得

$$P_{x:\overline{n}|}=\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}=\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-d.$$

練　習（十九）

1. 試證

$$A_{x:\overline{n}|}=v\ddot{a}_{x:\overline{n}|}-a_{x:\overline{n-1}|}$$

並以文字解釋之。

2. 設被保險人之現年爲 (a) 20 歲，(b) 40 歲，(c) 60 歲，彼等二十年儲蓄壽險之保額均爲 1,000 元。試計算其年繳純保費。

3. 設被保險人現年爲 35 歲，保險金額爲 1,000 元。試求下列保險之年繳純保費：

(a) 十年儲蓄壽險，

(b) 十年限期繳費之 65 歲儲蓄壽險（於 65 歲時滿期），

(c) 二十年限期繳費之三十年儲蓄壽險。

4. 某要保人現年四十歲，擬於十年中每年繳納 100 元之保費以購買十五年儲蓄壽險。若總保費與純保費相等，試求其所購之保額為若干？

26. **延期保險** 符號 ${}_{r|}A^{1}_{x:\overline{n|}}$ 表示 r 年延期、n 年定期壽險、保額一元之躉繳純保費，亦即在(x)死亡年末給付一元之現價。至被保險人死亡之時期，則限於在彼達到 $x+r$ 歲後及 $x+r+n$ 歲以前。由此易知此項躉繳保費可視為 $n+r$ 年定期壽險與 r 年定期壽險之躉繳保費之差。如是

$$ {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{n|}}=A^{1}_{x:\overline{(r+n)|}}-A^{1}_{x:\overline{r|}}=\frac{M_x-M_{x+r+n}}{D_x}-\frac{M_x-M_{x+r}}{D_x}, $$

故得

$$ {}_{r|}A^{1}_{x:\overline{n|}}=\frac{M_{x+r}-M_{x+r+n}}{D_x}. \tag{47} $$

同樣，若以 ${}_{r|}A_x$ 表 r 年延期終身壽險，保額一元之躉繳純保費，則

$$ {}_{r|}A_x=A_x-A^{1}_{x:\overline{r|}}=\frac{M_x}{D_x}-\frac{M_x-M_{x+r}}{D_x}, $$

故

$$ {}_{r|}A_x=\frac{M_{x+r}}{D_x}. \tag{48} $$

又若以 ${}_{r|}A_{x:\overline{n|}}$ 表 r 年延期、n 年儲蓄壽險、保額一元之躉繳純保費，則

$$ {}_{r|}A_{x:\overline{n|}}=A_{x:\overline{(r+n)|}}-A^{1}_{x:\overline{r|}} $$

$$ =\frac{M_x-M_{x+r+n}+D_{x+r+n}}{D_x}-\frac{M_x-M_{x+r}}{D_x}, $$

故有

$$ {}_{r|}A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_{x+r} - M_{x+r+n} + D_{x+r+n}}{D_x}. \tag{49} $$

27. **期末付之保費**　符號 ${}_nk_x$ 用以表示 n 年定期壽險、保額一元於期終時繳納之躉繳純保費。然人壽保險單於保險期滿時即失其實際效用；且被保險人如於期限終了時始繳納保費，則彼於保險期內死亡時，公司將無從收得保費，且亦極難於期終時向生者收集保費也。雖然如此，保費累積之意義在人壽保險單之準備金上仍有其重要價值，關於此點，將於下章詳論之。

因保費 ${}_nk_x$ 僅於 n 年期終了被保險人尙生存時繳納，則其現價爲 ${}_nk_x \cdot {}_nE_x$。使其等於定期壽險保額之現價，則得

$$ {}_nk_x \cdot {}_nE_x = A^1_{x:\overline{n|}}, $$

故有

$$ {}_nk_x = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{{}_nE_x}, $$

或

$$ {}_nk_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+n}}. \tag{50} $$

當 $n=1$ 時，常以符號 k_x 以代替 ${}_1k_x$，因有

$$ k_x = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_{x+1}} = \frac{C_x}{D_{x+1}} \tag{51} $$

${}_nk_x$ 與 k_x 之數值分別可從附表 XII 及附表 VI 檢得。

28. **計算保費之一般公式**　倣照 17 節之情形，可得一通式以表保險金額於任何時之現值．於是

$$R\frac{M_a-M_b}{D_c},\tag{52}$$

表被保險人在 a 歲後 b 歲前死亡時所給 R 元賠款，在 c 歲時之現價。當 b 超過表中之極限年齡時，分子中第二項即可取消．$b-a$ 之差表示保險之有效時期．若選擇年齡 a,b,c 之適當值，則公式 (52) 可表示 A_x，$A^1_{x:\,\overline{n}|}$，$_r/A^1_{x:\,\overline{n}|}$，$_n k_x$，$k_x$ 以及其他之諸公式．

練　習（二十）

1. 某壽險保單，簽發時被保險人之年齡為 30 歲，規定保費按年繳付並於二十年內付清．若被保險人在 30 歲至 40 歲之間死亡，則給付 1,000 元之賠款；若在 40 歲至 50 歲之間死亡，則給付 2,000 元之賠款；若在 50 歲以後死亡，則給付 3,000 元之賠款．試求其年繳純保費．

解　設 P 為年繳純保費．因各年純保費之現價與保險金額之現價相等，故有

$$P\cdot \mathrm{a}_{30:\,\overline{20}|}=1,000\,A^1_{30:\,\overline{10}|}+2,000\,{}_{10}/A^1_{30:\,\overline{10}|}+3,000\,{}_{20}/A_{30},$$

或

$$P=\frac{1,000(M_{30}-M_{40})+2,000(M_{40}-M_{50})+3,000M_{50}}{N_{30}-N_{50}},$$

$$=1,000\frac{M_{30}+M_{40}+M_{50}}{N_{30}-N_{50}}.$$

以換算符號表之，並由附表 III，可檢得

$$P=1000\frac{24,703.369}{415,140.28}=59.51.$$

2. 某壽險保單，簽發時被保險人之年齡爲 20 歲 規定保費按年繳付，並於三十年內繳清。若被保險人在二十年內死亡時，則給付 1,000 元之賠款；如在二十年後死亡，則給付 3,000 元之賠款。試求其年繳純保費。

3. 一現年 30 歲之人，其保單規定保費按年繳納，並於十年內繳清。若被保險人於 65 歲前死亡，則給付 1,000 元之賠款；若至 65 歲仍生存，則給 2,000 元之賠款。試求其年繳純保費。

4. 現年 50 歲之人要保終身壽險，約明前五年平均年保費爲以後各年平均保費之半數。試求五年後每年之保費。

5. 試用代數方法以證明下列之恆等式：

(a) $A_x u_x = k_x + A_{x+1}$;

(b) $A^1_{x:\overline{n}|}\,.\,u_x = k_x + A^1_{x+1:\overline{n-1}|}$;

(c) $A_{x:\overline{n}|}\,.\,u_x = k_x + A_{x+1:\overline{n-1}|}$.

6. 試證

(a) $A_x = ({}_mk_x + A_{x+m})\,{}_mE_x$;

(b) $A^1_{x:\overline{n}|} = ({}_mk_x + A^1_{x+m:\overline{n-m}|})\,{}_mE_x$;

(c) $A_{x:\overline{n}|} = ({}_mk_x + A_{x+m:\overline{n-m}|})\,{}_mE_x$.

7. 試證

(a) $c_x u_x = k_x$;

(b) $P_{x+1} = P_x + \dfrac{P_{x+1} - c_x}{a_x}$;

(c) $P_{x:\overline{n|}} = \dfrac{{}_n k_x}{{}_n u_x}$.

8. 試證下列之恆等式

(a) ${}_t u_x = {}_{t-1} u_{x+1} + \dfrac{1}{{}_t E_x}$;

(b) ${}_t k_x = {}_{t-1} k_{x+1} + \dfrac{c_x}{{}_t E_x}$.

29. 遞增壽險與遞減壽險　若終身壽險之保額逐年增加，即被保險人於第一保單年死亡時，給付賠款一元；於第二年死亡時，給付賠款二元；於第三年死亡，則給付賠款三元，餘以此類推。如是之保險金額，可設想其爲數個保額一元之均衡終身壽險保額之和，第一個立即開始；第二個延期一年；第三個延期二年；如是繼續。若被保險人之年齡爲 x，且以 $(IA)_x$ 表上述遞增壽險之純保費，則可得

$$(IA)_x = A_x + {}_{1|}A_x + {}_{2|}A_x + {}_{3|}A_x + \cdots + {}_{\omega-x|}A_x$$

$$= \frac{M_x}{D_x} + \frac{M_{x+1}}{D_x} + \frac{M_{x+2}}{D_x} + \frac{M_{x+3}}{D_x} + \cdots + \frac{M_\omega}{D_x},$$

即

$$(IA)_x = \frac{M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \cdots + M_\omega}{D_x}.$$

設換算符號 R_x 之定義爲

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \cdots + M_\omega.$$

故遞增終身保險之躉繳純保費可書爲

$$(IA)_x=\frac{R_x}{D_x}. \tag{58}$$

R_x 之值可由附表 III 檢得.

練　習（二十一）

1. 設被保險人之年齡爲 30 歲，若彼在第一保單年內死亡，則給付 500 元之賠款。此後之保額每年增加 100 元，試計算此終身遞增壽險之躉繳純保費爲若干?

解　此遞增壽險之躉繳保費可書爲

$$A=\frac{500vd_{30}+600v^2d_{31}+700v^3d_{32}+\cdots}{l_{30}}$$

$$=\frac{500C_{30}+600C_{31}+700C_{32}+\cdots}{D_{30}}$$

$$=\frac{500(C_{30}+C_{31}+C_{32}+\cdots)+100(C_{31}+C_{32}+\cdots)+100(C_{32}+C_{33}+\cdots)+\cdots}{D_{30}}$$

$$=\frac{500M_{30}+100(M_{31}+M_{32}+\cdots)}{D_{30}}$$

$$=\frac{500M_{30}+100R_{31}}{D_{30}}.$$

因 $M_{30}=R_{30}-R_{31}$，故此躉繳保費又可書爲

$$A=\frac{400M_{30}+100R_{30}}{D_{30}}.$$

由附表 III，以換算之符號之數值代入後，得

$$A=\frac{32,005.469}{30,440.784}=1,051.40.$$

2. 若 29 節所述保險之期限定爲 n 年，試證其躉繳純保費之公式爲

$$(IA)^{1}_{x:\overline{n|}}=\frac{R_x-R_{x+n}-n\cdot M_{x+n}}{D_x}.$$

3. 設被保險人之現年爲 x，第一保單年內保額爲 h 元，此後每年增加 k 元。試證此遞增壽險之躉繳保費爲

$$\frac{hM_x+kR_{x+1}}{D_x}.$$

4. 設被保險人之年齡爲 45 歲，死亡年與保額如下表：

年次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	此後
保額	1000	1200	1400	1600	1800	2000	1500	1000	500	0

(a) 試計算上項保單之躉繳純保費。

(b) 若於五年內按年繳費以購上項保單，求其年繳純保費。

5. 某一兒童於一歲要保儲蓄壽險，第一保單年內死亡之保額爲 100 元；第二年爲 200 元；如此每年增加 100 元至達到最大額 1,000 元爲止。生存至 21 歲時則給付生存保險金額 1,000 元。試證二十年限期繳費之年繳純保費爲

$$1,000\frac{0.1(R_1-R_{11})-M_{21}+D_{21}}{N_1-N_{21}}.$$

6. 某壽險保單規定被保險人在 x 歲與 41 歲間死亡時，公司給付保額 10,000 元；在 41 至 42 歲間死亡時，則給付 9,700 元；在 42 歲與 43 歲間死亡，則給付 9,400 元，如是繼續每年遞減 300 元，直至 70 歲時保額減至 1,000 元爲止，以後則保持此項常數不再遞減。設年保費之繳納期爲自 x 歲至 64 歲（64 歲在內）止。

(a)試證明此項保險之年繳純保費為

$$\frac{10,000M_x-30(R_{41}-R_{71})}{N_x-N_{65}};$$

(b)試計算要保年齡為 25 歲時之年繳純保費。

7.試述下保險所屬之種類，設其躉繳純保費為

(a) $\frac{1,000}{D_x}(M_x+3R_{x+1})$;

(b) $\frac{1,000}{D_{25}}[M_{25}+2(R_{30}-R_{35})]$;

(c) $\frac{100}{D_x}(M_x+3R_{x+}+{}_23R_{x+3})$.

8.試述下列保單所屬之種類，設其年繳純保費為

(a) $1,000\frac{M_x+R_{x+1}}{N_x-N_{x+10}}$;

(b) $1,000\frac{R_x}{N_x}$;

(c) $\frac{1,000(M_x-M_{x+15})}{N_x}$.

(d)保單之年繳保費如(c)者，是否一定實用?

9.試證

(a) $R_x=vS_x-S_{x+1}$;

(b) $R_x=N_x-dS_x$;

(c) $a_x=(IA)_x+d(Ia)_x$.

10.某終身壽險單規定被保險人於第 n 保單年度死亡之保額爲 $(1.01)^n$ 元.若公司用 $3\frac{1}{2}\%$ 利率作計算之基礎,試證保單上年繳純保費之近似值爲

$$\frac{A_x}{\text{a}_x},$$

此處之分子以 $2\frac{1}{2}\%$ 之利率計算,而分母則用 $3\frac{1}{2}\%$ 之利率計算.

30.**還本保單** 若干人壽保險契約,規定在被保險人死亡時,除賠償其所保之保險金額外,並退還其已繳純保費之全部.

假定普通終身壽險規定在被保險人死亡時給付保額一元,並無利退還被保險人死亡前所繳純保費之全部.並以 P 表此契約上之年繳純保費.若被保險人在第一保單年死亡,公司應給付賠款一元及退還第一次所繳之純保費 P.故被保險人於第一保單年死亡時,公司應給付之金額共爲 $(1+P)$ 元;又若被保險人於第二保單年死亡,公司給付賠款一元並退還被保險人第一第二兩年所繳之純保費,於是知第二保單年應給付之金額共爲 $(1+2P)$;倣此,第三年之賠款共爲 $(1+3P)$;第四年爲 $(1+4P)$.如此繼續每年增加 P 元,則純保費之退還組成一遞增壽險.又因純保費之現價必等於保險金額之現價,於是有

$$P\text{a}_x=A_x+P(IA)_x,$$

解出純保費 P,並代以換算符號,即得公式

$$P=\frac{A_x}{\text{a}_x-(IA)_x}=\frac{M_x}{N_x-R_x}. \tag{54}$$

練 習(二十二)

1.一特殊之二十年儲蓄壽險保單於被保險人 x 歲時簽發,規定被保險人在二十年期内死亡時,公司給付賠款一元,並無利退還其

已繳保費之全數．若保單於二十年期滿而被保險人仍生存時，公司只給付賠款一元．試證其年繳純保費可書為

$$\frac{M_x-M_{x+20}+D_{x+20}}{N_x-N_{x+20}-R_x+R_{x+20}+20M_{x+20}}.$$

2．設二十年限期繳費之終身壽險保單於被保險人 x 歲時簽發，規定若被保險人於前二十年內死亡，則公司給付賠款一元，並無利退還其已繳之純保費．試以換算符號表此人每年所繳之純保費．

3．某終身壽險保單於被保險人 x 歲時簽發，規定保費於保單日躉繳；且被保險人死亡時，公司給付保額一元並無利退還其躉繳之純保費．

(a)試用換算符號表此躉繳純保費．

(b)當 $x=35$ 時，試計算此躉繳純保費之值．

4．某生存年金契約於購買人 30 歲時簽發，規定於購買人至 60 歲時開始年給 1,000 元．今此人擬於三十年內以按年繳費法購買．若契約持有人於 60 歲前死亡，則無利退還其已繳之純保費．試計算此純保費．

複 習 題（二十三）

1．設一保額 1,000 元之普通終身壽險保單於被保險人 30 歲時簽發，另一 55 年儲蓄壽險，其被保險人之年齡與保額均與上同，則此兩者之年繳純保費之差別何在（保險公司常以後一種 85 歲儲蓄壽險以代終身壽險）？

2．每個人均不應延遲要保壽險，其兩主要理由安在？

3．設於終身壽險保單上規定被保險人死亡時，受益人於其死亡後十年內每年初領取 1,000 元之賠款，試用換算符號以表示此種保單之躉繳純保費．

4.試作一圖以示 50 歲以後之自然保費之值，並指示 50 歲時普通終身壽險年保費之值.

5.設 (x) 以躉繳保費法購買生存保險之契約.若 (x) 生存 n 年時,則給付保額 1,000 元;若彼於 $x+n$ 歲前死亡，則無利退還其躉繳保費,試以換算符號表示此躉繳保費.

6.試以 a_x, A_x, P_x 三符號之一及貼現因子 d 以表示其他而完成下表:

	a_x	A_x	P_x
a_x	a_x		
A_x	$1-d\mathrm{a}_x$	A_x	
P_x	$\dfrac{1}{\mathrm{a}_x}-d$		P_x

7.試以 $\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$, $A_{x:\overline{n}|}$, $P_{x:\overline{n}|}$ 三符號之一及貼現因子 d 以表示其他而完成上表:

	$\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$	$A_{x:\overline{n}|}$	$P_{x:\overline{n}|}$
$\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$	$\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$		
$A_{x:\overline{n}|}$	$1-d\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}$	$A_{x:\overline{n}|}$	
$P_{x:\overline{n}|}$	$\dfrac{1}{\mathrm{a}_{x:\overline{n}|}}-d$		$P_{x:\overline{n}|}$

8.試用終身年金與定期生存年金之符號及利率以表示

(a) 20 年定期壽險之年保費

(b) 20 年生存壽險之年保費.

9.試以換算符號證明

$$\frac{A_{x+n}-A_x}{1-A_x}+\frac{a_{x+n}}{a_x}=1.$$

10.設(50)以躉繳費之方法購買金額100元之年金，按季領取。若彼於第一保單年死亡時，公司退還其躉繳保費五分之四．此後死亡賠款逐年減少其所繳保費五分之一，以至於零爲止．試計算其躉繳純保費爲若干？

11.某甲現年x歲，擬以${}_nE_x$元及一年繳保費$P'_{x:\overline{n}|}$元購買於$x+n$歲時滿期之儲蓄壽險，試求其保險金額．

12.試證

$$\text{(a)}\quad \overleftarrow{P}^{\,1}_{x:\overline{n}|}=v-a_{x:\overline{n}|}(P_{x:\overline{n}|}+d);$$

$$\text{(b)}\quad a_{x:\overline{n}|}=\frac{1-A_{x:\overline{n+1}|}}{d}-1.$$

13.某死亡表對x爲任何值時恆有$A_x=0.01\cdot x$，若利率爲4%．試求a_x及P_x之公式．

14.某t年儲蓄壽險保單於被保險人x歲時簽發，規定被保險人於第一保單年死亡時，公司給付$a_{\overline{m}|}$元；第二保單年死亡時，給付$_{\overline{2m}|}$；如此繼續至第t保單年死亡或(x)於滿期後猶生存時，給付$_{\overline{tn}|}$元，試證明此保單所示之躉繳純保費，以利率i計算，可書爲下式

$$\frac{A_{x:\overline{t}|}-A'_{x:\overline{t}|}}{d},$$

此處$A_{x:\overline{t}|}$以利率i計算，而$A'_{x:\overline{t}|}$以另一不同之利率計算之．

第四章　均衡純準備金

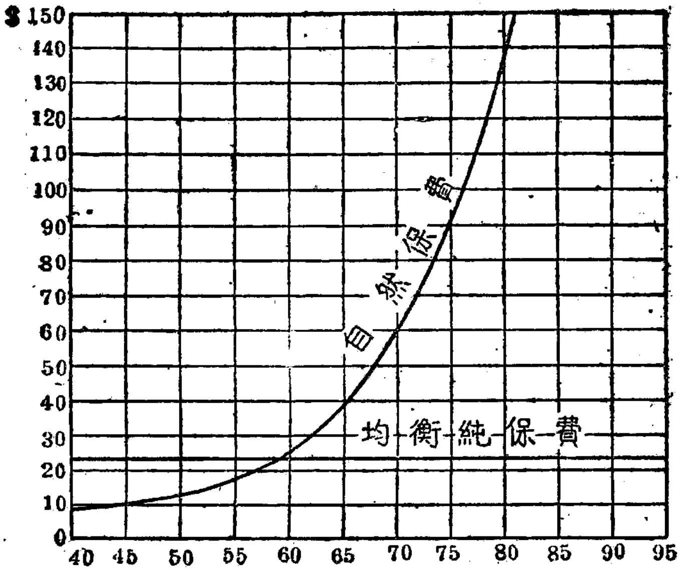
31. **準備金**　人類之死亡率，除嬰孩外，類與年齡俱增，詳察死亡表，卽可見其逐年漸增之顯然趨勢．保單上所規定之保費雖年年相等，但每年實際所需之費用（卽自然保費 c_x），則逐年增加．在此情形下，被保險人早年所繳之均衡純保費，較大於其應繳之自然保費，而其晚年所繳者較小於自然保費．此種意義可由下列實例以說明之．依美國經驗死亡表複利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算，知保額 1,000 元於被保險人 40 歲時所承保之普通終身壽險，其均衡純保費爲 23.50 元．但第一年之自然保費爲 $1000\,c_{40}$ 或由附表 VI 檢得爲 9.46 元；在第二年均衡純保費仍爲 23.50 元，而自然保費則爲 $1000\,c_{41}$ 或 9.67 元．如是自然保費逐年增加，至 59 歲時達 23.88 元，至 80 歲達 139.58 元．而均衡純保費則恆保持常數 23.50 元而無任何變更．下圖爲於被保險人 40 歲時簽發之保單，其均衡純保費 23.50 元與遞增之自然保費之比較圖．

但須注意者爲老年之自然保費超過均衡純保費甚多．若保險公司欲有一穩固之基金，應將被保險人早年所多繳之保險費妥爲投資，以爲被保險人晚年少繳保險費之挹注．此"超過"之積存值，稱爲準備金．

普通終身保單之均衡純保費與自然保費之比較圖

要保年齡: 40.　　複利率: $3\frac{1}{2}\%$.

縱軸表每千元之自然保費，橫軸表到達年齡．



準備金之意義亦可由另一觀點加以說明：保單均衡純保費之計算，係使純保費之現價與保險金額之現價恰於保單簽發日相等．此後任何時間，尚未繳納之純保費之現價匪小於保單簽發日純保費之現價，蓋尚未繳納之純保費，其數目已較原來數目爲小也．至保險金額之現價，則以賠款日期之漸近，逐漸增加．此保險金額現價增加之數值與未來純保費現價遞減值之差額，適爲公司應行存儲之準備金．

計算準備金之第一種方法，純依過去已繳之保險費計算，曰已繳保費推算法；第二種方法，則根據以後應繳之保險費計算，曰未繳保費推算法．由是可知以此兩種方法計算所得準備金必彼此相等；關於此點，將於以後詳論之．

32.實例說明 設現年 40 歲者 l_{40} 個人，於某保險公司要保保額一元、三年限期繳費之六年儲蓄壽險．設公司將費用除外後，其純

保費係依照美國經驗死亡表以複利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算，則每一保單應有年保費

$$ {}_{3}P_{40:\overline{6}|}=\frac{M_{40}-M_{46}+D_{46}}{N_{40}-N_{43}}=0.2848216 $$

元，始足以維持自然保費及準備金．於第一年開始時，有 l_{40} 人或 78,106 人，每人繳納純保費 0.2848216 元，則共得基金 22,246.28 元；是年末再加以利率 $3\frac{1}{2}\%$ 所生之利息，即得 23,024.90 元．但以年內有 d_{40} 或 765 人死亡，於年末給付每人賠款一元後所餘之平衡數爲 22,259.90 元；是時尙生存者爲 $l_{41}=77,341$ 人，以此人數除平衡金額 22,259.90 元，即得每一保單之準備金爲 0.28782 元．在第二年初由 77,341 名被保險人所收得之保費爲 22,028.39 元；將此金額加於上年之平衡額中，以後繼續做此．下表表示計算之結果：

年次	所收保費之總數	年初金額	加利息後之金額	死亡人數	年末金額	生存人數	每保單之準備金
1	$22,246.28	$22,246.28	$23,024.90	765	$22,259.90	77,341	0.28782
2	22,028.39	44,288.29	45,833.38	774	45,064.33	76,567	0.58856
3	21,807,94	66,872.33	69,212.85	785	68,427.85	75,782	0,90293
4	——	68,427.85	70,822.82	797	70,025.83	74,985	0.93383
5	——	70,025.83	72,476.72	812	71,364.72	74,173	0,9[illegible]618
6	——	71,364.72	74,172.99	828	73,344.99	73,345	1.00000

於此所應注意者爲依保單之規定，第三年後，即不收保費；迨至第六年末之準備金適足在該時給付每一被保險人生存保險金一元．

上表所示之準備金爲在每保單年末所存儲者，故曰期末準備金．如上表中末行第二列之數 0.58856 稱爲第二年期末準備金；亦即表示在第二保單年末尙未繳納第三次保險費時，公司對於每一保單所

應積存之數也．上表之記載，乃假定所有尙生存之保單持有人，均將繼續按期繳納保費．然實際上常有被保險人不能按期繳納者，在此情形下之期末準備金，可視爲公司對保單持有人之一種負務．

練　習（二十四）

1．設五年儲蓄壽險保單於被保險人 50 歲時簽發，依美國經驗死亡表以複利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算，倣 32 節之方法，試作一表以表示各年末之準備金．

2．設五年定期壽險保單，於被保險人 20 歲時簽發，依美國經驗死亡表以複利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算，倣 32 節之方法，試作一表以表示各年末之準備金．

33．已繳保費推算法　32 節所述期末準備金之計算法，既長且煩，不適於應用，故於此特述一較爲簡便之方法．由已繳保費之觀點，知某保單之期末準備金，爲已繳保費之積存值與過去自然保費積存值之差．是以要保年齡爲 x 之保單，其第 t 年末之準備金，係於第 t 保單年末，亦卽被保險人之年齡爲 $x+t$ 歲時，以求上述之差．故有

$$\begin{pmatrix}\text{第 } t \text{ 年之期末}\\ \text{準備金}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{在 } x+t \text{ 歲時已繳}\\ \text{純保費之積存值}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{在 } x+t \text{ 歲時過去}\\ \text{自然保費之積存值}\end{pmatrix}$$

應用此定義，吾人可計算普通終身壽險保單第 t 年末之準備金．設要保年齡爲 x，至 t 保單年末，公司已收得 t 次純保費 P_x．因保費在每年初繳納，則在 $x+t$ 歲時，此等純保費之積存值爲 $P_x\cdot{}_tu_x$ 元．而 t 年期限內自然保費之積存值爲 $1\cdot{}_tk_x$ 元．茲以 ${}_tV_x$ 表普通終身壽險保額一元之第 t 年末之準備金，故有

$${}_tV_x=P_x\cdot{}_tu_x-{}_tk_x. \tag{55}$$

由 16 節及 17 節，卽得

$$ {}_tV_x = \frac{1}{D_{x+t}}\left[P_x(N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})\right]. $$

同理，若 n 年限期繳費普通終身壽險之第 t 年末之準備金以 ${}_{t:n}V_x$ 表之，且 $t \leqq n$，則

$$ {}_{t:n}V_x = {}_nP_x \cdot {}_tu_x - {}_tk_x. \tag{56} $$

試觀察當 $t>n$ 時，n 年限期繳費普通終身壽險之第 t 年末之準備金，吾人須注意者爲第 n 保單年末至第 t 保單年末之間，被保險人已無需繳納保費，而在保費繳納期終了時，已繳純保費之積存值爲 ${}_nP_x \cdot {}_nu_x$. 又以於此期間開始時被保險人之年齡爲 $x+n$，由第 n 保單年至第 t 保單年之年數爲 $(t-n)$，故此項金額只依利息及生存享有權積存至第 t 保單年末. 其積存因子爲

$$ \frac{1}{{}_{t-n}E_{x+n}}. $$

是以若 $t>n$ 時，以已繳保費推算法所求之準備金之公式爲

$$ {}_{t:n}V_x = \frac{{}_nP_x \cdot {}_nu_x}{{}_{t-n}E_{x+n}} - {}_tk_x $$

$$ = \frac{1}{D_{x+t}}\left[{}_nP_x(N_x - N_{x+n}) - (M_x - M_{x+t})\right]. \tag{57} $$

同理，於被保險人 x 歲時簽發之保額一元 n 年儲蓄壽險，以已繳保費推算法所求得之準備金爲

$$ {}_tV_{x:\overline{n|}} = P_{x:\overline{n|}} \cdot {}_tu_x - {}_tk_x $$

$$ = \frac{1}{D_{x+t}}\left[P_{x:\overline{n|}}(N_x - N_{x+t}) - (M_x - M_{x+t})\right]. \tag{58} $$

綜　習（二十五）

1.試應用已繳保費推算法，計算 32 節中之三年限期繳費六年儲蓄壽險第三年末之準備金.

解　應用已繳保費推算法之定義，立得第三年末之期末準備金爲

$$ {}_{3:\,3}V_{40:\,\overline{6}|} = ({}_{3}P_{40:\,\overline{6}|})({}_{3}u_{40}) - {}_{3}k_{40}. $$

應用附表 X 及 XII，則得

$$ {}_{3:\,3}V_{40:\,\overline{6}|} = (0.2848216)(3.281702) - 0.03174338 $$
$$ = 0.902956, $$

此與 32 節已得之數值相符合.

2.試以已繳保費推算法，求下列保單之第 n 年末期末準備金之簡單形式：

(a) n 年定期壽險；

(b) n 年限期繳費終身壽險；

(c) n 年儲蓄壽險.

3.設二十年限期繳費之三十年儲蓄壽險保單於被保險人 35 歲時簽發，試以換算符號表出第25年期末準備金，並證明此式與 $A_{60:\,\overline{5}|}$ 相等.

4.設要保年齡爲 25 歲，保額爲 1000 元，試求下列諸保單第五保單年之期末準備金：

(a)普通終身壽險；

(b)二十年限期繳費終身壽險；

(c)二十年儲蓄壽險；

(d)十年定期壽險.

5.設要保年齡爲 25 歲，試求下列諸保單第十保單年之期末準

備金:

(a)普通終身壽險;

(b)二十年限期繳費終身壽險;

(c)二十年儲蓄壽險;

(d)五年限期繳費終身壽險.

6. 設要保年齡爲40歲,保額爲 1000 元,試求下列諸保單第十五保單年之期末準備金:

(a)十年限期繳費終身壽險;

(b)十年限期繳費二十年儲蓄壽險;

(c)二十年限期繳費三十年儲蓄壽險.

34. 未繳保費推算法 就未繳保費之觀點言,某一保單之期末準備金,係保單未來保險額之現價與未來純保費現價之差. 是以若保單於被保險人 x 歲時簽發,則第 t 年之期末準備金係於第 t 保單年末,即被保險人 $x+t$ 歲時,以求上述之差,故有

$$\begin{pmatrix}\text{第 } t \text{ 年之期}\\ \text{末準備金}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{在 } x+t \text{ 歲時未來}\\ \text{保險金額之現價}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{在 } x+t \text{ 歲時未來}\\ \text{純保費之現價}\end{pmatrix}.$$

設有保額一元之普通終身壽險保單於被保險人 x 歲時簽發,則其在第 t 保單年末之未來保費組成一期首付生存年金 P_x, 於被保險人$(x+t)$歲時開始給付. 因此等未來純保費之現價爲 $P_x\cdot \text{a}_{x+t}$, 而在該時普通終身保單未來保險金額之現價爲 A_{x+t}, 依未繳保費推算法之定義, 故有

$$_tV_x=A_{x+t}-P_x\cdot \text{a}_{x+t} \tag{59}$$

或

$$_tV_x=\frac{1}{D_{x+t}}[M_{x+t}-P_x\cdot N_{x+t}].$$

倣此 若求於被保險人 x 歲簽發之保額一元，n 年限期繳費終身壽險保單之第 $t\left(t \leqq n\right)$ 年期末準備金，則在此情形下，保費組成一 $(n-t)$ 年定期生存年金，故有

$$ {}_{t:n}V_x = A_{x+t} - {}_nP_x \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \tag{60} $$

在保費繳清後之保單年末之準備金，即 $t>n$ 時之期末準備金，爲

$$ {}_{t:n}V_x = A_{x+t}, $$

因此時應繳保費之值爲零也。

若求保額一元，n 年儲蓄壽險之第 t 年期末準備金，則以未來保險金額含有 $(n-t)$ 年儲蓄壽險之意，其未來保費且組成一定期期首付生存年金。由未繳保費推算法之定義，故有

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, \tag{61} $$

或

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_{x+t}}\left[M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n} - P_{x:\overline{n}|} \cdot (N_{x+t} - N_{x+n})\right]. $$

下節將證明以已繳保費推算法所求得之期末準備金與以未繳保費推算法所求得者完全相等。

練習（二十六）

1. 試用未繳保費推算法，計算 32 節之三年限期繳費六年儲蓄壽險之第一年期末準備金。

解 由未繳保費推算法之公式，得第一年期末準備金爲

$$ {}_{1:3}V_{40:\overline{6}|} = A_{41:\overline{5}|} - {}_3P_{40:\overline{6}|} \cdot \ddot{a}_{41:\overline{2}|}. $$

用附表 VII，XI，及 IX 得

$$_{1:\,5}V_{40:\,\overline{6}|}=46.60200+798.4707-(0.2848216)(1.956514)$$
$$=0.2878153.$$

此與32節所求得之數值相符.

2.設下列諸保單爲於被保險人25歲時簽發者,試以未繳保費推算法以求其第五年之期末準備金.

(a)普通終身壽險;

(b)二十年限期繳費終身壽險;

(c)二十年儲蓄壽險;

(d)十年定期壽險.

3.設二十年限期繳費三十年儲蓄壽險保單於被保險人 x 歲時簽發,試以換算符號表示其第二十五年期末準備金.

4.設保額1000元,二十年限期繳費,三十年儲蓄壽險保單於被保險人35歲時簽發,試用未繳保費推算法以求其第十年期末準備金.

5.設下列諸保單之保額均爲1000元,且同於被保險人25歲時簽發,試用未繳保費推算法,分別計算其第十五年之期末準備金.

(a)普通終身壽險;

(b)十年限期繳費終身壽險;

(c)十年限期繳費二十年儲蓄壽險;

(d)三十年儲蓄壽險.

6.對於在被保險人 x 歲時簽發之普通終身壽險保單,以已繳保費推算法或未繳保費推算法所求得之第 t 年期末準備金,恆彼此相等,試以代數法證明之.

7.若將上題之保單改爲二十年限期繳費普通終身壽險保單,則上題於(a) $t\leqq 20$,(b) $t>20$ 時仍成立,試證明之.

35.上述兩法之相等性 欲證明由已繳保費推算法及未繳保費

推算法所求得之準備金恆相等，不能不追溯決定純保費時所用之基本方程式，即

$$\begin{pmatrix}\text{所有純保費在簽}\\\text{發保單時之現價}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{所有保險金額在簽}\\\text{發保單時之現價}\end{pmatrix}$$

此等式兩端之值，以同一利率及生存享有權應得之值積存至計算準備金時，則有

(所有純保費在計算準備金時之現價)

　　　　=(所有保險金額在計算準備金時之現價).

但所有純保費在計算準備金時之現價可分爲兩部: (a) 在計算準備金時以前已繳純保費之積存值; (b) 未來所有純保費之現價. 同樣，所有保險金額在計算準備金時之現價亦可分爲兩部: (a) 在計算準備金時以前自然保費之積存值; (b) 未來保險金額之現價. 由是得(各值均以計算準備金時爲標準):

(已繳純保費之積存值)+(未來純保費之現價)

　　　　=(過去自然保費之積存值)+(未來保險金額之現價).

此方程式之第二項及第三項經移項後，即得

$$\begin{pmatrix}\text{以已繳保費推算法}\\\text{所求得之準備金}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{以未繳保費推算法}\\\text{所求得之準備金}\end{pmatrix}.$$

練　習 (二十七)

1. 設某二十年限期繳費之終身壽險保單規定被保險人於

　前五年內死亡時，給付 1000 元;

　其次五年內死亡時，給付 2000 元; 及

　此十年後任何時死亡，均給付 5000 元.

試以換算符號表示下值:

　(a)年繳純保費;

(b)用已繳保費推算法計算第七年期末準備金;

(c)用未繳保費推算法計算第七年期末準備金;

(d)證明(b),(c)之結果彼此相等.

解 (a)使純保費之現價等於保險金額之現價,卽有

$$P\cdot \mathrm{a}_{x:\overline{20|}}=1000A_x+1000\,{}_{5}/A_x+1000\,{}_{10}/A_x,$$

以換算符號代入,並就 P 求解,得

$$P=\frac{1000(M_x+M_{x+5}+M_{x+10})}{N_x-N_{x+20}},$$

(b)於計算第七年末自然保費之積存值時,必須知在第五年末保險金額自 1000 元增至 2000 元; 在第七年末,被保險人應有之金額可分爲兩部: 一爲保額 1000 元之自然保費在第七年末之積存值;一爲保額 1000 元之自然保費在第二年末之積存值. 此二者之和爲 $1000({}_7k_x+{}_2k_{x+5})$,應用已繳保費推算法之定義,故得第七年期末準備金爲

$${}_7V=P\cdot {}_7u_x-1000({}_7k_x+{}_2k_{x+5})$$

$$=P\frac{N_x-N_{x+7}}{D_{x+7}}-1000\frac{M_x+M_{x+5}-2M_{x+7}}{D_{x+7}}.$$

(c)此保單之未來保險金額,在七年末可分爲兩部分: 一爲保額 2000 元之終身壽險,一爲保額 1000 元之三年延期終身壽險. 應用未繳保費推算法之定義,得

$${}_7V=2000A_{x+7}+1000\,{}_3/A_{x+7}-P\cdot \mathrm{a}_{x+7:\overline{13|}}$$

$$=1000\frac{2M_{x+7}+M_{x+10}}{D_{x+7}}-P\frac{N_{x+7}-N_{x+20}}{D_{x+7}}.$$

(d)由(a),有

$$\frac{P}{D_x}(N_x-N_{x+20})=\frac{1000}{D_x}(M_x+M_{x+5}+M_{x+10}).$$

以$\frac{D_x}{D_{x+7}}$乘此式之兩端，經移項後，得

$$\frac{P}{D_{x+7}}N_x-1000\frac{M_x+M_{x+5}}{D_{x+7}}=\frac{1000M_{x+10}}{D_{x+7}}+P\frac{N_{x+20}}{D_{x+7}}.$$

由此式兩端減去

$$\frac{P\cdot N_{x+7}-2000M_{x+7}}{D_{x+7}},$$

即得

$$P\frac{N_x-N_{x+7}}{D_{x+7}}-1000\frac{M_x+M_{x+5}-2M_{x+7}}{D_{x+7}}$$

$$=1000\frac{2M_{x+7}+M_{x+10}}{D_{x+7}}-P\frac{N_{x+7}-N_{x+20}}{D_{x+7}},$$

或

$$\left(\begin{array}{c}\text{以已繳保費推算法所求}\\\text{得之第七年期末準備金}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{以未繳保費推算法所求}\\\text{得之第七年期末準備金}\end{array}\right)$$

2.(a)設十年限期繳費二十五年儲蓄壽險保單於被保險人x歲時簽發，試以未繳保費推算法之公式計算其第二十三年期末準備金，並以換算符號表示之；

(b)試用已繳保費推算法以推演(a)之結果；

(c)試以代數方法證明(a)，(b)之結果彼此相等。

3.某終身壽險保單於被保險人 30 歲時簽發，並規定被保險人於第一年內死亡，給付 100 元；於第二年內死亡，給付 200 元；於第三年內死亡，給付 300 元，如是遞增，試

(a)計算其均衡純保費;

(b)用未繳保費推算法計算其第十年期末準備金;

(c)用已繳保費推算法計算其第十年期末準備金.

4.設三十五年限期繳費終身壽險保單於被保險人 30 歲時簽發,並規定被保險人於 30 至 41 歲間死亡時,給付 10,000元;於 41 至 42 歲間死亡時,給付 9700 元;於 42 至 43 歲間死亡時,給付 9400 元;如是繼續,每年遞減 300 元,直至 70 歲時保額減至 1000 元爲止,此後則保持此常數,試計算其第二十年期末準備金

(a)用未繳保費推算法;

(b)用已繳保費推算法.

(參考練習二十一之第 6 題).

36.其他公式　保單之期末準備金,顯然可以許多不同之形式表示之.其中若干或能以文字解釋,或便於計算,各有其優點.例如公式(59)之符號 A_{x+t} 易以 $P_{x+t}\cdot a_{x+t}$ 後,即得

$$_tV_x=(P_{x+t}-P_x)\cdot a_{x+t}.$$

此式之文字解釋如下:某普通終身壽險保單於被保險人 x 歲時簽發,其年保費爲 P_x.迨達 $x+t$ 歲後,若被保險人擬將保額加倍,則彼必另購一新普通終身壽險保單,保單年齡爲 $x+t$,年保費爲 P_{x+t}.如此,則將來此二種保費之差額,$(P_{x+t}-P_x)a_{x+t}$,即爲所求之準備金也.

由恆等式

$$A_x=1-d\cdot a_x,\qquad P_x+d=\frac{1}{a_x},$$

可書公式(59)爲

$$_tV_x=1-\frac{a_{x+t}}{a_x}. \tag{62}$$

此式對於準備金之計算頗爲有用,以後將詳論之.

練　習（二十八）

1. 有保單年齡為 x 之普通終身壽險保單，試證其第 t 年期末準備金可書為下列各式：

(a) $\dfrac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x}$;　　(c) $\dfrac{a_x-a_{x+t}}{1+a_x}$;

(b) $1-\dfrac{1-A_{x+t}}{1-A_x}$;　　(d) $A_{x+t}\left(1-\dfrac{P_x}{P_{x+t}}\right)$.

2. 設 $a_x+a_{x+2t}=2a_{x+t}$，試以 ${}_tV_x$ 表 ${}_tV_{x+t}$ 及 ${}_{2t}V_x$.

3. 設 $1-A_{x+2t}=A_{x+2t}-A_{x+t}=A_{x+t}-A_x$，試以 ${}_tV_x$ 表 ${}_tV_{x+t}$，並求 ${}_tV_{x+t}$ 及 ${}_tV_x$ 之數值.

4. 試證明恆等式：

$$ {}_{t+r}V_x=1-(1-{}_rV_x)(1-{}_tV_{x+r}). $$

5. 試用第 4 題之結果，以證

$$ {}_tV_x=1-(1-{}_1V_x)(1-{}_1V_{x+1})\cdots(1-{}_1V_{x+t-1}). $$

6. 試證 n 年儲蓄壽險保單之第 t 年期末準備金可書為下列各式：

(a) $\dfrac{A_{x+t:\overline{n-t|}}-A_{x:\overline{n|}}}{1-A_{x:\overline{n|}}}$;

(b) $1-\dfrac{a_{x+t:\overline{n-t|}}}{a_{x:\overline{n|}}}$;

(c) $(P_{x+t:\overline{n-t|}}-P_{x:\overline{n|}})a_{x+t:\overline{n-t|}}$;

(d) $A_{x+t:\overline{n-t|}}\left(1-\dfrac{P_{x:\overline{n|}}}{P_{x+t:\overline{n-t|}}}\right)$.

7.有要保年齡爲 x 之 n 年限期繳費終身壽險保單,試證其第 t 年期末準備金;於 $t \leqq n$ 時,可書爲

$$_{t:\,n}V_x=({}_{n-t}P_{x+t}-{}_nP_x)a_{x+t:\,\overline{(n-t)}|}$$

並以文字解釋其意義.

8 有要保年齡爲 x 之 n 年定期壽險保單,試證其第 t 年期末準備金可書爲下式:

$$_tV^{\;1}_{x:\,\overline{n}|}=(P^{\;1}_{(x+t)\,\overline{(n-t)}|}-P^{\;1}_{x:\,\overline{n}|})a_{x+t:\,\overline{(n-t)}|}.$$

並以文字解釋其意義.

37.法克勒氏累積公式　32節求表中逐年準備金時,所用之方法過煩,不便應用,玆有一公式可將計算之手續化簡;且以此公式對於任何保單均能應用,故在推演中已將表明某特種保單之符號略去設有 l_x 個人同於 x 歲時要保保額一元之壽險,則 t 年後公司對此諸人中之生存者應備有之準備金爲 $l_{x+t}\cdot{}_tV$ 元. 次年初公司所收得之純保費爲 $l_{x+t}\cdot P$ 元. 於此年中公司又可按利率 i 得利息若干,但有 d_{x+t} 人死亡,於年末給付各受益人賠款一元.後所存餘之數,即表本年爲生存者 l_{x+t+1} 個人所應保持之準備金,或 $l_{x+t+1}\cdot{}_{t+1}V$.由上所論,可得方程式.

$$(l_{x+t}\cdot{}_tV+l_{x+t}\cdot P)(1+i)-d_{x+t}=l_{x+t+1}\cdot{}_{t+1}V. \tag{63}$$

以 l_{x+t+1} 除此方程式,並以 v^{x+t+1} 乘左端各項之分子及分母,得

$$({}_tV+P)\frac{D_{x+t}}{D_{x+t+1}}-\frac{C_{x+t}}{D_{x+t+1}}={}_{t+1}V,$$

故有

$$({}_tV+P)u_{x+t}-k_{x+t}={}_{t+1}V. \tag{64}$$

公式(64)名曰法克勒累積公式.此式對計算保單逐年之準備金

最爲簡便.因 ${}_0V=0$ 於 $t=0$ 時 公式(64)即變爲

$$P\cdot u_x-k_x={}_1V, \tag{65}$$

又當 $t=1$ 時 變爲

$$({}_1V+P)u_{x+1}-k_{x+1}={}_2V, \tag{66}$$

如此繼續.由公式(65),可計算第一年期末準備金,以此結果代入(66)式,即可得第二年期末準備金,至第三年第四年等等之期末準備金.但在保費繳納期終了後之保單年,公式中之純保費須略去不計.

練 習(二十九)

1.設保額1000元十年儲蓄壽險保單於被保險人25歲時簽發,試用法克勒累積公式以計算其前五年之期末準備金,並以未繳保費推算法以核算第五年之期末準備金.

解 由公式(45),且 $m=n=10$,則得

$$1000P=\frac{1000A_{25:\overline{10|}}}{\mathrm{a}_{25:\overline{10|}}}=\frac{1000A^{\ 1}_{25:\overline{10|}}+1000{}_{10}E_{25}}{\mathrm{a}_{25:\overline{10|}}}.$$

$1000\,A^{\ 1}_{25:\overline{10|}}$, $1000{}_{10}E_{25}$ 及 $\mathrm{a}_{25:\overline{10|}}$ 之諸值可分別由附表XI, VII 及 IX 檢得,代入上式,即得

$$1000P=\frac{67.3198+651.5091}{8.314613}=86.4535.$$

由公式(65),得第一年期末準備金爲

$${}_1V=Pu_{25}-1000\,k_{25},$$

由附表VI,可檢得第一年期末準備金爲

$${}_1V=(86.4535)(1.0434146)-(8.13008)=82.0768.$$

用公式(66)，可得第二年期末準備金為

$$
\begin{aligned}
{}_2V &= ({}_1V+P)u_{26}-1000\,k_{26}\\
&=(82.0768+86.4535)(1.0434836)-8.19672\\
&=167.6619.
\end{aligned}
$$

同理，可得

$$
\begin{aligned}
{}_3V &= (167.6619+86.4535)(1.0435537)-8.26446\\
&=256.9186.\\
{}_4V &= (256.9186+86.4535)(1.0436250)-8.33333\\
&=350.0184.
\end{aligned}
$$

與 $$
\begin{aligned}
{}_5V &= (350.0184+86.4535)(1.0437097)-8.41516\\
&=447.1348.
\end{aligned}
$$

用未繳保費推算法核算之結果為

$$
\begin{aligned}
{}_5V &= 1000A^{\;1}_{30:\overline{5|}}+1000\,{}_5E_{30}-Pa_{30:\overline{5|}}\\
&=38.2402+806.3100-(86.4535)(4.596873)\\
&=447.1344.
\end{aligned}
$$

2. 試證法克勒累積公式可書為下式：

$$
{}_{t+1}V=({}_tV+P-c_{x+t})u_{x+t}.
$$

3. 試以法克勒累積公式驗證32節表上所載之期末準備金。

4. 設保額1000元之普通終身壽險保單於被保險人20歲時簽發，試用法克勒累積公式計算其前十年之期末準備金。

5. 設保額1000元之十年定期壽險保單於被保險人30歲時簽發，試用法克勒累積公式以計算其逐年之期末準備金。

6. (a)試用37節之法以證明方程式

$$
{}_{r+t}V={}_tV\cdot\frac{1}{{}_rE_{x+t}}+P_r\cdot u_{x+t}-{}_rk_{x+t}.
$$

(b)設保額 1000 元之普通終身壽險保單於被保險人 30 歲時簽發，其第五年期末準備金爲 50.58 元，純保費爲 17.19 元，試用(a)中之方程式以計算此保單之第十五年期末準備金.

38. **期首準備金與純危險金額** 保單之期首準備金者，卽在保單年初於保費繳納後之準備金也.是以第 t 保單年之期首準備金爲前一年期末準備金及第 t 年初繳納純保費之和.若以 ${}_tI$ 表於被保險人 x 歲時所簽發之保單第 t 保單年之期首準備金，則有

$$ {}_tI = {}_{t-1}V + P. $$

因此式對任何保單均可適用，故表保單種類之特有符號已被略去：於此所應注意者爲保費繳納期終了後，卽不再繳納保費，故此期間任何年期首準備金卽爲前一年之期末準備金.

某保單第 t 保單年純危險金額，爲被保險人死亡時所應得之保額與該年期末準備金之差.若保單規定被保險人在 t 年死亡時之賠款爲一元，則在此保單年之純危險金額爲

$$ 1 - {}_tV. $$

前節方程式 (63)，可化爲一頗有趣味之期首，期末準備金及純危險金額之關係式.其法爲以 l_{x+t} 除方程式(63)，於是有

$$ ({}_tV + P)(1+i) - \frac{d_{x+t}}{l_{x+t}} = \frac{l_{x+t+1}}{l_{x+t}} \cdot {}_{t+1}V, $$

故得

$$ ({}_tV + P)(1+i) - q_{x+t} = p_{x+t} \cdot {}_{t+1}V = (1 - q_{x+t})\,{}_{t+1}V. $$

將 $q_{x+t} \cdot {}_{t+1}V$ 移項後，則有

$$ ({}_tV + P)(1+i) - q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V) = {}_{t+1}V. \qquad (67) $$

$q_{x+t}(1 - {}_{t+1}V)$ 一項稱爲"基於純危險金額之壽險成本".方程式(67)又可以文字解釋之，卽某年之期末準備金，包含期首準備金於該年之本利和與基於純危險金額之壽險成本之差也.

若方程式(67)對 P 解之，卽得

$$P = vq_{x+t}(1 - {}_{t+1}V) + (v \cdot {}_{t+1}V - {}_tV). \tag{68}$$

由此方程式，可知每一保單之純保費 P，必含(a)基於純危險金額之壽險成本之現價，與(b)兩期末準備金於年初時現價之差。多數保單上之(a)項當 t 增加時而遞減，而(b)項則隨之而增加。至於純保費則逐年仍保持其常數。是以由公式(68)，知任何儲蓄壽險保單均含有兩部分：(a)保險金額逐年變更之定期保險，其保額與各該年年初之純危險金額相等。(b)以(68)式之純保費除去購買(a)項定期壽險後所餘金額，於每年初以利率 i 投資之儲蓄金額。

練　習（三十）

1. 設一身體不健康者於 20 歲時購買 1000 元之普通終身壽險保單，其年繳保費較正常者多 5 元。(a)若公司以 $3\frac{1}{2}\%$，美國經驗死亡表之準備金爲根據，試求在第一保單年中之死亡率；(b)又第五保單年中如何？（應用 41 節所示之準備金表。）

解 (a)由 41 節，可立得

$$1000 \cdot P_{20} = 13.48, \qquad 1000 \cdot {}_1V_{20} = 6.19$$

各式兩端均以 1000 除之，卽得保額一元保單之純保費及準備金爲

$$P_{20} = 0.01348, \qquad {}_1V_{20} = 0.00619.$$

今被保險人於保額爲 1000 元時多繳保費 5 元，故保額一元保單之總純保費爲

$$P'_{20} = 0.01848.$$

由方程式(67)，就死亡率 q_{x+t} 解之，得

$$q_{x+t} = \frac{({}_tV + P)(1+i) - {}_{t+1}V}{1 - {}_{t+1}V}.$$

以 $t=0$ 代入此式:

$$q'_{25}=\frac{(0+0.01848)(1.035)-0.00619}{1-0.00619}=0.01302.$$

(b)倣此，第五保單年，即 $t=4$ 時，則得

$$q'_{24}=\frac{(0.02611+0.01848)(1.035)-0.03323}{1-0.03323}$$

$$=0.01336.$$

2. 設二十年儲蓄壽險保單於被保險人 25 歲時簽發，試計算:

(a)第一、第二、及第三年期末準備金;

(b)開始三年中之純危險金額;

(c)在各該年中基於純危險金額之壽險成本. 並驗證當 $t=0$, 1, 2 時方程式(67)均能成立.

3. 設保額一元之普通終身壽險保單於被保險人 25 歲時簽發，其第十六年期末準備金為 0.17367 元. 若純保費為 0.01611 元，第十七年之死亡率為 0.01001 及利率為 3 %，試求第十七年期末準備金.

4. 在若干舊記錄中可尋得於被保險人 20 歲時所簽發之保額 1000 元之保單，其前二十年之純保費及期末準備金. 若利率為 3 %，試問能造成死亡表若干行? 所用之方法又如何?

5. 設保額 1000 元之二十年儲蓄壽險保單於被保險人 35 歲時簽發，若利率以 4 %計，則其第十、第十一年之期末準備金分別為 384.69 元及 433.64 元. 若在 45 歲之死亡率為 0.01116，試求此保單之年保費.

6. 試證:

$$P+d\cdot{}_tV=v\cdot q_{x+t}(1-{}_tV)+v\cdot p_{x+t}({}_{t+1}V-{}_tV),$$

並以文字解釋之.

39.利率之變更 觀察下表,可知利率增加時,則純保費及準備金均減少,故人壽保險公司如採用 3% 利率作計算基礎,所求得之準備金較用 $3\frac{1}{2}$% 或 4% 之利率計算所得者爲大.且下表顯示如變更利率,則幼年時保費之變動較老年時之變動爲大.

每千元之均衡純保費

美國經驗死亡表

	3%	$3\frac{1}{2}$%	4%
20 歲時普通終身壽險	$ 14.41	$ 13.48	$ 12.67
40 歲時普通終身壽險	24.75	23.50	22.35
60 歲時普通終身壽險	58.27	56.83	55.45
20 歲時廿年限期繳費終身壽險	23.13	20.72	18.73
40 歲時廿年限期繳費終身壽險	33.14	30.75	28.63
60 歲時廿年限期繳費終身壽險	61.62	59.85	58.18
20 歲時廿年儲蓄壽險	40.77	38.90	37.12
40 歲時廿年儲蓄壽險	43.01	41.18	39.42
60 歲時廿年儲蓄壽險	63.29	61.65	60.07

由於利率變更所產生準備金變動之百分率,在較前之保單年者較大.下表乃示普通終身壽險保單,投保年齡爲 25,保額爲 1000 元,以美國經驗死亡表所計算之均衡純準備金.

有效年度	3%	$3\frac{1}{2}$%	4%
5	$ 45.76	$ 40.91	$ 36.59
10	98.94	89.42	80.82
20	230.50	213.04	196.87
30	394.11	372.38	351.75
40	570.12	549.00	528.49
50	728.07	711.36	694.83
60	859.44	849.23	838.96
70	954.76	951.08	947.33

40.計算機 近年製造之新式計算機可作加減，或由連續加減法以計算乘除．每一計算機均有一鍵盤以記錄數目，且有上下兩示數欄之滑車．若求 $K\times L$ 之積，則先將 K 記錄於鍵盤上，然後轉動一端之曲柄直至 L 發現於上面之示數欄中爲止，於是 $K\times L$ 之積卽可在下面之示數欄內讀得。

計算機之最大用途在能使兩數相乘，並將其乘積加於第三數而不需記錄其中間步驟．如欲求 $J+K\cdot L$ 之值，則先記 J 於下面之示數欄中，然後再作 $K\times L$ 之運算，則下面示數欄中之記錄卽所求 $J+K\times L$ 之結果也．當 J 與 K 爲常數，L 爲變數之一組計算時，計算機之功效特別顯著．玆舉一例以說明之．若 $L=2,6,10,15$ 等，以求 $10+5L$ 之值時，先置 $J=10$ 於下面之示數欄中，再於鍵盤上將 $K=5$ 按下；然後轉動曲柄兩周，$L=2$ 卽在上面之示數欄中出現，於是 $10+5\times 2$ 卽可在下面示數欄中讀得．求以下之數值時不需清理已有之記錄，卽可再轉動曲柄，至第二 L 之值 6 出現於上面之示數欄中時，則下面示數欄中卽有所求之結果 $10+5\times 6$ 出現．繼續使用此法，至 $10+5\cdot L$ 之值盡行求得爲止．以上論述之方法，名曰計算之"連續法"．此種方法於計算一組數目時節省時間不少，且有時更見其便利者，例如方程式

$$A_x=1-d\cdot a_x.$$

若表上已載有 a_x 在各年齡時之值，則亦可用連續法以計算 A_x 之值．此處 $J=1,K=d,L$ 爲年金之負數．計算方法爲先將數字 1 記於下面之示數欄中，將鍵盤上之 d 按下，再以反對方向轉動曲柄，在上面示數欄內卽可發現 $(-a_x)$ 之各值；則所求結果 A_x 之值卽可於下面示數欄中逐次讀得。

練　習（三十一）

1.試由附表 IV 用連續法以核算

$$A_x=1-d\cdot a_x.$$

在 20 至 29 歲之值.

2.試由附表 IX 所得之定期生存年金之值,用連續法以計算

$$A_{x:\,\overline{10|}}=1-d\cdot a_{x:\,\overline{10|}}$$

由 40 至 49 歲之各值.

3.試由附表 I 確定年金之值,用連續法以核算

$$v^n=1-i\cdot a_{\overline{n|}}$$

於 n 由 1 至 10 之值.

41.**準備金之表列法**　人壽保險公司常以各種保單之準備金列成複式表.下乃此類表中摘錄之一部:

保額千元普通終身保單之期末準備金

美國經驗死亡表　利率 $3\frac{1}{2}\%$

保單年齡	純保費	期末準備金						
		1	2	3	4	5	6	7
20	$ 13.47758	$ 6.19	$ 12.60	$ 19.24	$ 26.11	$ 33.23	$ 40.60	$ 48.24
21	13.77229	6.45	13.13	20.04	27.20	34.63	42.31	50.26
22	14.08122	6.72	13.68	20.8[illegible]	28.35	36.09	44.09	52.[illegible]8
23	14.40531	7.01	14.26	21.78	29.57	37.62	45.96	54.59
24	14.74558	7.31	14.88	22.72	30.83	39.23	47.92	56.91
25	15.10314	7.63	15.52	23.70	32.16	40.91	49.97	59.35
26	15.47921	7.9[illegible]	16.19	24.7	33.54	42.67	52.11	61.89

有若干方法爲計算各種保單之準備金時所通用者，玆分別論述如下：

普通終身壽險：

(a)對角線法　設以 y 表到達年齡 $x+t$，則未繳保費推算法之公式變爲

$$ {}_tV_x=A_y-P_x\cdot a_y. $$

若 A_x，a_x 及 P_x 對各種年齡均有表可資利用，此方程式實爲計算準備金之便利方法.當表中沿對角線上之準備金之 y 爲常數，故 A_y 及 a_y 亦爲常數，而 P_x 則依要保時之年齡而變.是以上述之連續法可直接利用。

(b)水平線法　36節普通終身壽險之期末準備金爲（以 y 代 $x+t$ 後）

$$ {}_tV_x=1-\frac{a_y}{a_x}. $$

若年金之值有表可查，則在一水平線上之準備金，可用此方程式以連續法計算之.設 x 爲常數，y 依保單年而變，則準備金可以下列形式表之：

$$ J+K\cdot L, $$

此處 $J=1, K=1/a_x$，與 $L=-a_y$。

普通終身壽險之準備金亦可用下式以水平線法連續計算之：

$$ {}_{t+1}V_x={}_tV_x-\frac{a_{x+t+1}-a_{x+t}}{a_x}. $$

上式之證明讀者可自爲之.若以 Δa_{x+t} 表 $a_{x+t+1}-a_{x+t}$ 則：

$$ {}_{t+1}V_x={}_tV_x+(-\Delta a_{x+t})(1/a_x). $$

$-\Delta a_x$ 之數值載於附表 IV 中.其計算之法，係先在計算機之鍵盤上按下 $1/a_x$ 之值，然後轉動曲柄，於 $(-\Delta a_x)$ 之數值發現於上面之示

數欄中後，下面示數欄中即得第一年期末準備金之記錄．蓋以 $t=0$ 時，上列之方程式即變爲

$$ {}_1V_x=(-\Delta a_x)(1/a_x) $$

也．然後清理上面示數欄內之記錄，而不動下面示數欄或鍵盤上之記錄，再轉動曲柄使 $(-\Delta a_{x+1})$ 之值出現於上面示數欄後，則下面示數欄中即出現第二年期末準備金；其公式，因 $t=1$，故爲

$$ {}_2V_x={}_1V_x+(-\Delta a_{x+1})(1/a_x). $$

連續應用此法，可得所有欲求之準備金之數值．

儲蓄壽險：

應用 36 節之方法，n 年儲蓄壽險之準備金可以下式表之：

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|}=1-(a_{x+t:\overline{n-t}|})(1/a_{x:\overline{n}|}), \qquad (69) $$

以 y 代 $x+t$ 後，即變爲

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|}=1-(a_{y:\overline{n-t}|})(1/a_{x:\overline{n}|}). $$

若定期年金對一切 x 及 n 之值皆有表可查，以此公式即可計算在表中水平線上之準備金．

在同一年齡滿期之儲蓄壽險：

關於在被保險人 x 歲時簽發，z 歲滿期之儲蓄壽險保單，以未繳保費推算法所求得之期末準備金爲

$$ {}_tV_{x:\overline{z-x}|}=A_{y:\overline{z-y}|}-P_{x:\overline{z-x}|}\cdot a_{y:\overline{z-y}|}, $$

此處，$y=x+t$．若 $A_{y:\overline{z-y}|}$，$P_{x:\overline{z-x}|}$ 及 $a_{y:\overline{z-y}|}$ 之值均已載於表中，則此方程式可用連續計算法以求表中對角線上所示之準備金．

練　習（三十二）

1．試用連續計算法以驗證 41 節準備金表中，20 歲時各年之記錄．

2. 試用連續計算法以驗證41節之表中，從26歲第一年期末準備金開始沿對角線上之記錄。

3. 設保額1000元十年儲蓄壽險保單於被保險人25歲時簽發，試用連續計算法以求前五年之準備金。

4. 對於保額1000元60歲滿期之儲蓄壽險保單，試計算

(a)自20至25歲之純保費，用公式

$$P_{x:\,n|} = \frac{1}{a_{x:\,n|}} - d;$$

(b)與41節相似之表中之記錄，以對角線法，從25歲時之第一年期末準備金開始。

42. 退保價值　以上所述之期末準備金，對於保單持有人不欲繼續其保單效力時，至關重要，遇有此種事項發生時，公司常規定下列三種方法任被保險人選擇。

(1)現金價值　於退保時即刻給付之金額；

(2)繳清壽險　以現金價值購買繳清保費之保單，其保額為原保額之一部；

(3)繳清定期壽險　以現金價值購買原保額之繳清定期壽險(如儲蓄壽險保單上之現金價值，購買同原保單期限之定期壽險保單而有餘時，則以此餘額購買於保單滿期時給付之生存保險)。

多數保險公司均規定以上三種選擇在退保日之價值彼此相等。若退保人不作任何決定，則公司即自動依第三種方法辦理之。

美國保險公司所用之保險法規共有四十八條。自一般言之，此等法規在各州尚屬一致，但有若干情形，則各州互有不同，適合於一州之保險法規，在其他各州常不適用，甚且有視為不合法者。

退保時之現金價值，常為期末準備金打一折扣(名曰退保費)而得者。美國各州之保險法大都皆規定保額1000元之保單，其第二

保單年以後之退保費不得超過 25 元．有若干州則限制退保費祇能爲準備金之 20 %．在實際上各公司計算退保費之方法亦各不同；常用者爲遞減折扣法，且規定自某期間以後卽不收退保費，此期間自五年至二十年不等。

被保險人亦可以保單作爲貸款之抵押品．至貸款之數額自不能超過當時保單上之現金價值，遇有被保險人死亡或保單滿期時，須由賠款中將此貸款扣除．

由上所論，知現金價值爲期末準備金與退保費之差；繳淸壽險之保額係現金價值按原有保險期限所購得之保額；至繳淸定期壽險則爲定期壽險之保額，其現價等於現金價值者．

例題1． 設保額 1000 元之終身壽險保單於被保人 25 歲時簽發，依美國經驗死亡表按利率 $3\frac{1}{2}$ % 計算，其第五年之期末準備金爲 40.91 元．若退保費爲 8 元，試計算上述三種退保選擇之結果．

解 在第五保單年末，被保險人之年齡爲 30 歲．

(1)現金價值＝(期末準備金)－(退保費)

$$=40.91-8.00=32.91.$$

(2)繳淸壽險之保額(用附表 IV)

$$=(32.91)(1/A_{30})=(32.91)(2.967222)=97.65.$$

(3)繳淸定期壽險之期限(由附表 XI 用插補法)

$$1000\,A^{\;1}_{30:\overline{5|}}=38.24 \qquad 每日差=\frac{7.18}{365}=0.01967,$$

$$\begin{array}{r}1000\,A^{\;1}_{30:\overline{4|}}=31.06\\ \hline 差\ =\ 7.18\end{array} \qquad 32.91-31.06=1.85,$$

$$日數=\frac{1.85}{0.01967}=94.$$

故繳淸定期壽險之期限爲 4 年 94 日．

例題 2. 設保額 1000 元之十年儲蓄壽險保單於被保險人 45 歲時簽發，依美國經驗死亡表，按利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算，其第五年之期末準備金為 443.88 元.若退保費為 10.88 元，試計算上述三種退保選擇之結果.

解 在第五保單年末，被保險人之年齡為 50 歲.

(1)現金價值 $=443.88-10.88=433.00$.

(2)繳淸五年儲蓄壽險之保額.

由附表 XI 及 VII，得

$$1000\,A_{50:\overline{5|}}=67.5987+778.7564$$

$$=846.3551.$$

故以現金價值 433.00 元，所購繳淸儲蓄壽險之保額為

$$\frac{433.00}{0.8463551}=511.61.$$

(3)繳淸定期壽險及生存保險.

現金價值 433.00 元，除用以購買五年定期壽險外，尙有多餘，此值為：

$$433.00-1000\,A^{1}_{50:\overline{5|}}=433.00-67.60$$

$$=365.40,$$

用以購買五年定期生存保險：

$$\text{生存保險之保額}=(365.40)(1/{}_5E_{50})$$

$$=(365.40)(1.284099)$$

$$=469.21.$$

故依第三種選擇方法所購得者為保額 1000 元五年定期壽險及保額 469.21 元五年定期生存保險.

練 習（三十三）

1.設保額 1000 元之普通終身壽險保單於被保險人 20 歲時簽發，若退保費規定如下：第一第二保單年爲期末準備金之全部；第三年爲 12 元；第四年爲 10 元；第五年爲 8 元；第六年爲 6 元，試以 41 節表上所示之準備金以求其於前六保單年退保時三種選擇之結果.

2.設保額 1000 元之十五年儲蓄壽險保單於被保險人 40 歲時簽發，其第五年之期末準備金爲 265.03 元. 今假定退保費爲 7.03 元，試計算退保時三種選擇之結果.

3.設保額 1000 元之十五年儲蓄壽險保單於被保險人 40 歲時簽發，其第十年之期末準備金爲 591.27 元. 設退保費爲 1.27 元，試計算退保時三種計算之結果.

4.(a) 試證要保年齡爲 x 之普通終身壽險，其第 t 年期末準備金所能購得繳清壽險之保額爲：

$$1-\frac{P_x}{P_{x+t}}.$$

(b) 試證明要保年齡爲 x 之 n 年儲蓄壽險，其第 t 年期末準備金所能購得繳清壽險之保額爲

$$1-\frac{P_{x:\,\overline{n|}}}{P_{x+t:\,\overline{(n-t)|}}}.$$

43.期中準備金 期中準備金爲任何保單年中期首及期末準備金之平均值. 故第 t 年之期中準備金爲第 t 保單年期首及期末準備金之平均值，卽等於

$$\frac{{}_{t-1}V+P+{}_tV}{2}.$$

各人壽保險公司於每年年終之報告中，除其他各項外，必須述

及一切保單之總準備金. 爲製造此項報告之便利計,於同年度發出之保單,皆假定其爲在該年度之中間(七月一日)發出者. 此假定即使保單年爲自每年七月一日始至次年七月一日爲止. 故結帳之日(十二月三十一日)適在保單年開始及終了之中間,因此所用之準備金爲期首及期末準備金之平均值,即期中準備金也. 以會計學之觀點言之,在1934年12月31日之第一年期中準備金,其保單爲在1934年所發者;第二年期中準備金,其保單爲在1933年所發者;第三年期中準備金爲在1932年所發者等等. 吾人應注意若結帳之年及簽發保單年之差額爲 t,則該保單之期中準備金爲第$(t+1)$年之期中準備金.

練　習(三十四)

設保額1000元之普通終身壽險保單於被保險人20歲時簽發,試用41節之表以計算其前五年之期中準備金.

總 練 習(三十五)

1. 試以代數方法證明保額一元之 n 年儲蓄壽險,其第 n 年之期首準備金爲 v,並以文字解釋其意義.

2. 設保額1000元十年限期繳費之二十年儲蓄壽險保單於被保險人20歲時簽發,試求其第五年期末準備金.

3. 某人現年45歲在30歲時要保保額1000元之二十年儲蓄壽險,其第十五年之期末準備金爲664.91元. 若年繳純保費爲39.51元,且公司以美國經驗死亡表按利率 $3\,^1/_2\,\%$ 爲計算之基礎,試求第十六年期末準備金.

4. 設 n 年限期繳費之普通終身壽險保單於被保險人 x 歲時簽發,若公司不收退保費,試證第 t 保單年末所能購得之繳清壽險之保

額爲

$$1-\frac{{}_nP_x}{{}_{n-t}P_{x+t}}.$$

5. 試證明

$$P_{x+t}(1-{}_tV_x)=P_x+d\cdot{}_tV_x,$$

並書出二十年儲蓄壽險與此式相似之關係式.

6. 設 $P_{30}=0.01828$; $P_{50}=0.03636$ 與 $i=3\%$, 試求 ${}_{20}V_{30}$ 之數值.

7. 設某人在 x 歲時要保二十年限期繳費之普通終身壽險, 在第五年末欲換爲於 $x+20$ 歲滿期之儲蓄壽險, 將來之保費等於 $P_{x:\overline{20|}}$. 此種方法影響於變更之金額爲純保費積存值之差. 若只限用純保費及準備金, 試討論並決定此種交易公平與否?

8. 設保額一元之保單於被保險人 x 歲時簽發, 其年繳費爲 π, 試證明其第 t 年期末準備金可書爲

$$A_{x+t}-\pi a_{x+t}+\frac{(\pi-P_x)N_x}{D_{x+t}},$$

此處 t 小於或等於保費繳納之期限.

9. 設二十年限期繳費保單於被保險人 30 歲時簽發, 並規定被保險人於 60 歲以前死亡則給付 2000 元, 於 60 歲以後死亡則給付 1000 元. 試用已繳保費推算法及未繳保費推算法以求其第三十五年期末準備金, 並以換算符號表示之, 且證其彼此相等.

10. 對於下列諸壽險, 試以換算符號代入, 並化簡以驗證方程式 (64).

(a) 普通終身壽險;

(b) 二十年儲蓄壽險.

第五章　近代準備金制

44.引言　由前章所論，得知公司自被保險人所收之保費爲純保費及營業費所組成之總保費. 總保費逐年不變而均衡純保費亦爲一常數，如此則在保費繳納期間各保單年之營業費亦應彼此相同. 公司所收者雖爲總保費，但在前章於計算保費及準備金時均未將營業費列入，如此所求得之準備金即所謂均衡純保費制之準備金也.

以此方法處理保單之準備金實含有兩種假定，即 (a) 純保費之全部爲純作死亡賠款及維持準備金之用，(b) 經營此項事業毋需任何營業費用. 但在事實上此種假定頗不正確. 因公司對於每一保單之簽發均需一筆開支，此種開支在第一保單年較大，以後各年則較小. 有時公司對於每一保單第一保單年之開支實超出營業費. 若公司欲維持均衡純保費準備金，則不得不有雄厚之基金以補第一年營業費之不足. 故均衡純保費準備金之實行，對於一般人壽保險公司，實多困難，尤其規模較小之新公司更難以維持也.

美國各州對此種均衡純保費準備金制大都均有修正，以爲各公司準備金之法定最低限度. 數種修正法將於本章內詳論之.

例題　設保額 1000 元之普通終身壽險保單於被保險人 25 歲時簽發，若公司所收之總保費爲 16.25 元，第一保單年公司之費用如下：

(a)業務員之佣金：　總保費之 50 %，

(b)政府保費稅：　總保費之 3 %，

(c)驗體費：　2.50 元，

(d)其他開支：　1.25 元.

若公司用美國經驗死亡表，$3\frac{1}{2}\%$ 之利率，作計算均衡純保費準備金之基礎，試求公司對於此保單於第一年所墊付之數。

解 公司對於此保單之開支爲佣金 8.12 元；稅 0.49 元；驗體費 2.50 元；其他開支 1.25 元，共計 12.36 元。所收之純保費爲 15.10 元。於第一保單年公司必須付死亡賠款及提存第一年末有效保單之均衡純保費準備金。若死亡率亦如美國經驗死亡表所示者，則由方程式(68)，得知所有之純保費(15.10 元)必須爲給付死亡賠款及保持準備金之用。所有開支及純保費共爲 27.46 元，而公司所收之總保費僅爲 16.25 元，故公司必須先墊付 11.21 元。

45. **修正制度** 準備金之決定若不依均衡純保費爲計算之基礎，稱爲"修正準備金制"。本章論修正準備金制之步驟爲(a)數種重要修正制度相互關係之論述；(b)由此關係之特例所生之個別修正制度。

爲便利計，茲先討論保額一元於被保險人 x 歲時所簽發 n 年限期繳費 m 年儲蓄壽險之保單。除定期壽險外，若適當選擇 m 及 n，此保單可代表任何普通保單。如 m 年儲蓄期延長至死亡表之極限年齡，此保單卽變爲限期繳費終身壽險保單；當 m 及 n 同時延長至死亡表之極限年齡，此保單卽變爲普通終身壽險保單；若選 m 及 n 均等於二十，則此保單又變爲二十年儲蓄壽險保單等等。前此曾用 ${}_nP_{x:\overline{m|}}$ 以表此保單之均衡純保費，爲便利計，可將下誌略去，以P 表所討論之保單之均衡純保費。

設公司於第一保單年爲賠款及準備金所需之純保費爲 α，在此後保費繳納期之續年純保費爲 β。在均衡純保費準備金制下之第一年之純保費爲 P，以後各續年純保費仍爲 P，則修正後之純保費

$$\alpha\ \beta, \beta, \beta, \cdots,$$

可代替其相當之均衡純保費

$$P, P, P, P, \cdots.$$

因此兩組純保費同為該 m 年儲蓄壽險而繳納，故所有修正純保費之現價必須等於所有均衡純保費之現價，即

$$P\cdot a_{x:\,\overline{n|}}=\alpha+\beta\cdot a_{x:\,\overline{(n-1)|}}。\tag{70}$$

於此方程式之右端加，減一 β 後，得

$$P\cdot a_{x:\,\overline{n|}}=\alpha-\beta+\beta(a_{x:\,\overline{(n-1)|}}+1),$$

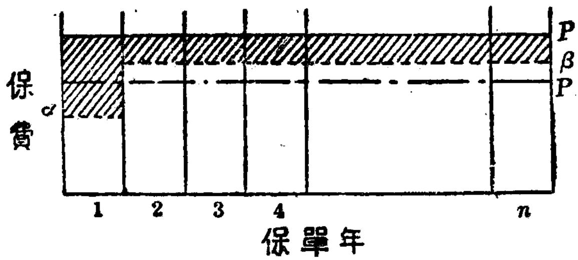
或
$$P\cdot a_{x:\,\overline{n|}}=\beta\cdot a_{x:\,\overline{n|}}-(\beta-\alpha)。$$

以 $a_{x:\,\overline{n|}}$ 除此方程式經移項後，得

$$\beta-P=\frac{\beta-\alpha}{a_{x:\,\overline{n|}}}。\tag{71}$$

由方程式(71)，知續年純保費 β 及 P 之差依修正後續年保費 β 及初年修正保費 α 之差而變。為確定以後各節中諸種修正準備金制之定義，必須給與 $(\beta-\alpha)$ 以各種之特別值。且 β 之值必大於所指定之值 α，如此則修正制度始可以減輕第一保單年開支之負擔。由方程式(71)，知當 β 大於 α 時，β 之值亦大於均衡純保費 P。因第一年純保費至少須足以負擔該年保險給付之成本，則 α 之值不能小於自然保費 c_x，甚為明顯。

46. 營業費 本節以營業費之觀點以討論純保費及準備金之修正，由下圖可知營業費修正後之情形(P'表總保費)：



在修正制中第一保單年之營業費爲 $(P'-\alpha)$，以後各年之營業費爲 $(P'-\beta)$，均以陰影部分表之；至在均衡純保費制中之營業費，則每年均爲 $(P'-P)$。由 $P'a_{x:\,\overline{n}|}$ 減去(70)式之兩端，卽得

$$(P'-P)\cdot a_{x:\,\overline{n}|}=(P'-\alpha)+(P'-\beta)a_{x:\,\overline{(n-1)}|}.$$

此方程式之意義爲在上述兩種方法中營業費之現價適相等。又純保費修正之意義爲將均衡純保費制中，第一保單年以後各年之營業費移借一部分於第一保單年，以爲第一年開支較大之挹注。在修正制中，第一年超過以後各年之營業費爲

$$(P'-\alpha)-(P'-\beta)=\beta-\alpha.$$

保費及準備金之修正其唯一目的，在彌補第一保單年之較大費用，使以後各年擔負一部分，與保單持有人每年所繳納總保費之數目無關。故修正制純爲公司內部計算之一種方法也。

47. **修正準備金**　修正期末準備金可由已繳保費或未繳保費推算法以求之。由已繳保費推算法以求第 t 年修正期末準備金，須將第一年之純保費 α 以利率及生存享有權應得之值積存 t 年。由 16 節，知此積存值爲 $\alpha/{}_tE_x$。以後之續年純保費於 t 年末組成一金額 β 元 $(t-1)$ 年之分紅生存年金，第一次給付開始於 $x+1$ 歲，其積存值爲 $\beta\cdot{}_{t-1}u_{x+1}$。自然保費之積存值爲 ${}_tk_x$。若以 ${}_tV'$ 表第 t 年修正期末準備金，則由已繳保費推算法，得 $(1\leqq t\leqq n)$

$${}_tV'=\alpha\frac{1}{{}_tE_x}+\beta\cdot{}_{t-1}u_{x+1}-{}_tk_x,$$

因

$${}_tu_x={}_{t-1}u_{x+1}+\frac{1}{{}_tE_x},$$

故上式又可書爲

$${}_tV'=\beta\cdot{}_tu_x-(\beta-\alpha)\frac{1}{{}_tE_x}-{}_tk_x, \tag{72}$$

觀察未來保額及保費之現價，由未繳保費推算法，可得

$$ {}_tV' = A_{x+t:\,\overline{m-t}|} - \beta\cdot a_{x+t:\,\overline{n-t}|}. \qquad (73)$$

用方程式(71)，甚易證明方程式(72)及(73)所表之準備金其數值相等。

第 t 年之均衡純保費制準備金與該年修正準備金之差，可以極簡單之式表之。以 ${}_tV$ 表第 t 保單年末之均衡純保費制準備金，則由未繳保費推算法，得

$$ {}_tV = A_{x+t:\,\overline{m-t}|} - P\cdot a_{x+t:\,\overline{n-t}|}. $$

該年之修正準備金為

$$ {}_tV' = A_{x+t:\,\overline{m-t}|} - \beta\cdot a_{x+t:\,\overline{n-t}|}. $$

由第一式減第二式，得

$$ {}_tV - {}_tV' = (\beta - P)a_{x+t:\,\overline{n-t}|}, $$

更由(71)式，此式可書為

$$ {}_tV - {}_tV' = (\beta - \alpha)\frac{\ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}}. \qquad (74)$$

因 $(\beta-\alpha)$ 在每一修正制度中均為正數，則由此式知在保費繳納期中，修正之準備金恆小於其相當之均衡純保費制準備金；且此差愈大，則此二相當之期末準備金之差亦愈大。若 t 之值漸增，則此二期末準備金之差漸減，直至保費繳納期終了時而達於零，此二種期末準備金因以相等。

練　習（三十六）

1.(a)設保額 1000 元之二十年限期繳費終身壽險保單於被保險人 30 歲時簽發，若 α 之值為 10.00 元，試計算 β 之值。

(b)對於(a)項所述之保單，試計算其第十保單年末均衡純保

費制準備金超過修正準備金之數值.

解 (a)由方程式(71)對β求解,得

$$\frac{1000_{20}P_{30}\cdot a_{30:\overline{20|}}-\alpha}{a_{30:\overline{20|}}-1}=\frac{1000A_{30}-10}{a_{30:\overline{20|}}-1}$$

$$=\frac{337.0156-10}{12.63763}=25.8763.$$

(b)由方程式(74),立得

$$_{10}V-{}_{10}V'=(25.8763-10)\frac{a_{40:\overline{20|}}}{a_{30:\overline{20|}}}=9.59.$$

2.(a)設保額1000元之二十年儲蓄壽險保單於被保險人30歲時簽發,若β較均衡純保費多1.25元,試求$(\beta-\alpha)$之值.

(b)對於(a)項所述之保單,試求在第十保單年末均衡純準備金超過修正準備金之數值.

3.設保額1000元之十五年儲蓄壽險保單於被保險人30歲時簽發,續年保費與初年純保費之差為40.00元,試求α.β及第十年修正準備金之值.

4.試證由方程式(72)與(73)所計算n年限期繳費m年儲蓄壽險保單之準備金彼此相等.

48.一年定期修正制 一年定期修正制為45–47節所論一般原理之特例.符號α,β均將與以下誌F以表一年定期修正制之純保費.在此修正制度中,第一年純保費α_F為任何保單之最小可能值,亦即選擇α_F使其適足以給付第一年之死亡賠款.此α_F之值為一年定期保單之純保費或自然保費c_x.若均衡純保費

$$P,P,P,P,\cdots$$

為一年定期修正制之純保費

$$c_x,\beta_F,\beta_F,\beta_F,\cdots\cdot$$

所代替，並以

$$c_x=\alpha \tag{75}$$

代入方程式(70)中，得

$$P\cdot \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}=c_x+\beta_F\cdot \ddot{a}_{x:\,\overline{n-1}|}\,.$$

因均衡純保費 P 適合於方程式

$$P\cdot \ddot{a}_{x:\,\overline{n}|}=A_{x:\,\overline{m}|}\,,$$

則得

$$c_x+\beta_F\cdot \ddot{a}_{x:\,\overline{n-1}|}=A_{x:\,\overline{m}|}\,,$$

對 β_F 求解，

$$\beta_F=\frac{A_{x:\,\overline{m}|}-c_x}{\ddot{a}_{x:\,\overline{n-1}|}}=\frac{{}_{1|}A_{x:\,\overline{m-1}|}}{{}_{1|}\ddot{a}_{x:\,\overline{n-1}|}},$$

故

$$\beta_F={}_{n-1}P_{x+1:\,\overline{m-1}|}\,. \tag{76}$$

方程式(76)之意義為表在一年定期修正制中，任何保單之續年純保費等於一相似保單之均衡純保費，唯此保單簽發時之年齡較原保單多一歲，保費繳納期少一年，保單期限則與原保單相同。

以(76)式 β_F 之值代入方程式(73)中，得

$${}_tV'=A_{x+t:\,\overline{m-t}|}-{}_{n-1}P_{x+1:\,\overline{m-1}|}\cdot \ddot{a}_{x+t:\,\overline{n-t}|}\,,$$

或

$${}_tV'={}_{t-1:\,n-1}V_{x+1:\,\overline{m-1}|}\,. \tag{77}$$

此處 $1\leqq t\leqq n$. 於是在一年定期修正制中第一保單年末之準備金為零，一般言之，一年定期修正制之第 t 年期末準備金適為另一保單第 $(t-1)$ 年之均衡純準備金，此另一保單之簽發年齡較原保單者多一歲，保費繳納期限則少一年，契約終止期與原保單相同。

(77)式亦可由令 $\alpha = c_x$ 代入 47 節(72)式之前一式而得之。如是:

$${}_tV' = c_x \frac{1}{{}_tE_x} + \beta \cdot {}_{t-1}u_{x+1} - {}_tk_x,$$

因

$${}_tk_x = {}_{t-1}k_{x+1} + \frac{c_x}{{}_tE_x}; \quad \beta = {}_{n-1}P_{x+1:\,\overline{m-1}|}.$$

故上式又可書為

$${}_tV' = \beta \cdot {}_{t-1}u_{x+1} - {}_{t-1}k_{x+1} = {}_{t-1:\,n-1}V_{x+1:\,\overline{m-1}|}.$$

由以上所論之純保費及準備金,知任何保單之一年定期修正制,實由兩保單組合而成:卽(a)依原保單年齡 x 而簽發之一年定期保單,其純保費為 c_x, 且第一年期末準備金為零,(b)較原保單遲一年(卽 $x+1$ 歲時)簽發之均衡保費保單,其保額及保費繳納終止期均與原保單相同.

為決定一年定期修正制之純保費及準備金,一普通終身壽險保單常被視為一年定期保單,繼以於次年簽發之均衡純保費制之普通終身壽險保單;二十年儲蓄壽險保單常被視為一年定期保單繼以於次年簽發之均衡純保費制之十九年儲蓄壽險保單;二十年限期繳費終身壽險保單常被視為一年定期保單,繼以均衡純保費制之十九年限期繳費終身壽險保單;與二十年限期繳費三十年儲蓄壽險保單常被視為一年定期,繼以均衡純保費制之十九年限期繳費二十九年儲蓄壽險保單.

於此所應注意者為於保費繳納期終了後以一年定期修正制所得之準備金適與以均衡純保費制所求得者相等.

練　習（三十七）

1. 設下列諸保單之保額均爲 1000 元，同於 35 歲時簽發，試用未繳保費推算法，以求其由一年定期修正制所得之第五保單年之期末準備金：

(a)普通終身壽險；

(b)二十年限期繳費終身壽險.

2. 試用已繳保費推算法以計算第一題.

3. 設保額 1000 元之十年儲蓄壽險保單於被保險人 35 歲時簽發，試計算其均衡純保費，一年定期修正制之初年與續年保費，及均衡純保費制與一年定期修正制之第五年期末準備金.

4. 試證普通終身壽險第 t 年之期末準備金經一年定期修正制修正後可以下式表示之：

$$ {}_tV' = 1 - \frac{a_{x+t}}{a_{x+1}}, \qquad t \geqq 1. $$

5. (a)試證 n 年儲蓄壽險保單之第 t 年期末準備金經一年定期修正制修正後可以下式表示之：

$$ {}_tV' = 1 - \frac{a_{x+t:\,(n-t)|}}{a_{x+1:\,(n-1)|}}, \qquad 1 \leqq t \leqq n. $$

(b)設保額 1000 元之五年儲蓄壽險保單於被保險人 25 歲時簽發，試以(a)項之方程式用連續計算法依一年定期修正制以求其各年之準備金.

6. 設十年限期繳費儲蓄壽險保單於被保險人 [illegible]0 歲時簽發，規定被保險人於二十年內死亡，則給付 1000 元之賠款；若被保險人於二十年後仍生存，則給付 2000 元之生存保險金，試用一年定期修正制以求

(a)α_F 及 β_F 之值;

(b)以已繳保費推算法及未繳保費推算法所得第五年期末準備金之值.

49.**一年定期修正制之疵瑕** 一年定期修正制將第一保單年之總保費完全用作開支及死亡賠款,在該年末未提存準備金.此對於年齡較小者簽發之終身壽險保單,其營業費之開支呈均衡狀態,即營業費適爲簽發保單之費用,且在保單繼續年所減少之營業費爲數不大,故對於第一保單年以後之費用尙無若何影響.

但試觀察在其他年齡簽發之其他保單,即知一年定期修正制在某種情形下不甚適用.對於保費較大之保單,如短期儲蓄壽險保單,第一年開支費用超過所供給之數甚多,對此等保單如用一年定期修正制,公司勢必額外消耗,且於保單繼續年保費之增加相當大,但實際上在此諸年之費用反見減少.

在美國各州規定一年定期修正制適用於保費較低之保單,至其餘保費較高之保單,則用其他之修正制度.

50.**普通終身壽險修正制** 45–47節普通原理之另一特例爲"普通終身壽險修正制",通常稱爲"定期修正制".符號 α 及 β 均採與以下誌 O 以表普通終身壽險修正制之純保費.在此方法中,不論保單之種類如何,均以修正之純保費

$$\alpha_O, \beta_O, \beta_O, \beta_O, \cdot \cdot \cdot,$$

代替均衡純保費

$$P, P, P, P, \cdot \cdot \cdot \cdot,$$

於是

$$\beta_O - \alpha_O = P_{x+1} - c_x. \tag{78}$$

此處 P_{x+1} 爲於 $x+1$ 歲簽發之終身壽險保單之年繳純保費,c_x 爲 x 歲時之自然保費,$(P_{x+1}-c_x)$之數值載於附表V中.

由方程式(78),可知任何保單之($\beta_O-\alpha_O$)等於其相當終身壽險

保單以一年定期制修正之繼續純保費與第一年純保費之差.在實際應用上,此修正制更不適於定期壽險,定期壽險所適用者爲一年定期修正制或均衡純保費制.

於(71)式中以$P_{x+1}-c_x$代$\beta_0-\alpha_0$,得

$$\beta_0-P=\frac{P_{x+1}-c_x}{a_{x:\,\overline{n}|}},$$

故有

$$\beta_0=P+\frac{P_{x+1}-c_x}{a_{x:\,\overline{n}|}},\tag{79}$$

由此式可計算β_0之值.由(79)式求得β_0後,則由(78)式可求得第一年純保費α_0.

以所與保單之α_0及β_0之值代入(47)節任一期末準備金計算之公式中,如已繳保費推算法之公式,則第t年期末準備金可由

$$_tV'=\beta_0\cdot{}_tu_x-(\beta_0-\alpha_0)\frac{1}{_tE_x}-{}_tk_x.\tag{72'}$$

計算之.但未繳保費推算法之公式

$$_tV'=A_{x+t:\,\overline{(m-t)}|}-\beta_0\cdot a_{x+t:\,\overline{(n-t)}|},\tag{73'}$$

較(72′)式少一項,故在數值計算上較爲便利.

若以普通終身壽險修正制計算逐年之期末準備金,法克勒公式可直接應用.依37節,第一年之期末準備金可由公式

$$_1V'=\alpha_0\cdot u_x-k_x$$

計算之.第一年以後之期末準備金可由公式

$$_{t+1}V'=({}_tV'+\beta_0)u_{x+t}-k_{x+t}$$

於$t=1,2,3,\cdots(n-1)$時繼續代入以求之.

練　習（三十八）

1.設保額 1000 元之二十年儲蓄壽險保單於被保險人 40 歲時簽發，試依普通終身壽險修正制計算

(a)初年及續年純保費；

(b)由未繳保費推算法所得之第十年期末準備金；

(c)由已繳保費推算法所得之第十年期末準備金。

解 (a)此保單之年繳均衡純保費可由

$$1000P_{40:\overline{20|}}=1000\left(\frac{1}{\mathrm{a}_{40:\overline{20|}}}-d\right)$$

求得，並由附表 IX，則

$$1000P_{40:\overline{20|}}=\frac{1000}{13.33479}-33.81643=41.17538.$$

由附表 V，得

$$\beta-\alpha=1000(P_{41}-P_{40})=14.89336,$$

將此值代入(79)式，得

$$\beta=41.17538+\frac{14.89336}{13.33479}=42.29226.$$

由方程式(78)，得初年純保費爲

$$\alpha=42.29226-14.89336=27.39890.$$

(b)應用公式(73)及附表XI，VII與IX，得第十年修正準備金爲

$$
\begin{aligned}
{}_{10}V' &= 1000A_{50:\overline{10|}}-\beta\cdot \mathrm{a}_{50:\overline{10|}}\\
&=139.7360+588.1932-(42.29226)(8.045433)\\
&=387.67 \text{ 元}.
\end{aligned}
$$

(c)同樣,由已繳保費推算法公式(72),用附表X,VIII及XII,得

$$ {}_{10}V' = \beta\cdot{}_{10}u_{40} - (\beta-\alpha)\frac{1}{{}_{10}E_{40}} - 1000\cdot{}_{10}k_{40} $$

$$ = (42.29226)(13.00173) - (14.89336)(1.578366) $$

$$ - 138.6934 $$

$$ = 387.67 \text{ 元.} $$

2. 設保額 1000 元之十年儲蓄壽險保單於被保險人 40 歲時簽發,試依普通終身壽險修正制以計算

(a)初年及續年純保費;

(b)用已繳保費推算法所得之第五年期末準備金;

(c)用未繳保費推算法所得之第五年期末準備金.

3. 設保額 1000 元之十五年限期繳費三十年儲蓄壽險保單於被保險人 25 歲時簽發,試依普通終身壽險修正制以計算其第十及第二十五年期末準備金.

4. 對於在被保險人 x 歲時簽發之 n 年限期繳費 m 年儲蓄壽險保單,試證在普通終身壽險修正制下有

$$ \beta_0 = \frac{A_{x:\overline{m|}} + (P_{x+1} - c_x)}{a_{x:\overline{n|}}}. $$

5. 設保額 1000 元之十年儲蓄壽險保單於被保險人 30 歲時簽發,試以法克勒累積公式依普通終身壽險修正制以求其逐年之準備金.

6. 設以 $a'_{x:\overline{n|}}$ 表分數

$$ \frac{a_{x:\overline{n|}}}{1 + P_{x+1} - c_x}, $$

對於 n 年儲蓄壽險保單，試依普通終身壽險修正制以證

(a) $$\beta_0=\frac{1}{a'_{x:\overline{n}|}}-d,$$

(b) $${}_tV'=1-\frac{a_{x+t:\overline{n-t}|}}{a'_{x:\overline{n}|}}.$$

7. 設保額 1000 元之十年儲蓄保單於被保險人 25 歲時簽發，試用第六題之公式以連續計算法以求其第五至第十年之修正準備金。

41. **普通終身壽險修正制之其他性質** 由上節各關係式，可得普通終身壽險修正制之若干有趣性質。決定 β_0 值之方程式

$$\beta_0=P+\frac{P_{x+1}-c_x}{a_{x:\overline{n}|}},\tag{79}$$

含有經修正後之續年純保費 β_0 超過同保單之均衡純保費，此超過之數與年繳保費及保單年齡有關，與保單之種類及保險期限完全無關。玆舉一例以說明之，β_0-P 對於所有二十年限期繳費保單均屬相同，不論此保單爲終身者或儲蓄者。

以(78)式 $\beta_0-\alpha_0$ 之值代入(74)式，得

$${}_tV-{}_tV'=(P_{x+1}-c_x)\frac{a_{x+t:\overline{n-t}|}}{a_{x:\overline{n}|}}.\tag{80}$$

此方程式之意義表示均衡純準備金超過相當修正準備金之數，與保單年齡 x，保費繳納次數 n，計算準備金時之期限 t 有關，但與保單之種類及保單之期限無關。例如此差對於保額相同，於同時簽發之二十年儲蓄壽險保單，二十年限期繳費終身壽險保單，二十年限期繳費三十年儲蓄壽險保單之第十年期末準備金均屬相同。又(80)式右端可以 40 節所述之連續法計算之。

尙有一點應行補充者爲普通終身壽險修正制之初年純保費 α_0

可視爲自然保費 c_x 與另一量 π 之和，則

$$\alpha_0 = c_x + \pi, \tag{81}$$

又以

$$\beta_0 = \alpha_0 + (P_{x+1} - c_x),$$

則得

$$\beta_0 = P_{x+1} + \pi. \tag{82}$$

將此 α_0 及 β_0 之值代入(72)式，得

$$ {}_tV' = (P_{x+1} + \pi)\,{}_tu_x - (P_{x+1} - c_x)\,\frac{1}{{}_tE_x} - {}_tk_x. \tag{83}$$

更由恆等式

$$ {}_tu_x = {}_{t-1}u_{x+1} + \frac{1}{{}_tE_x},$$

與

$$ {}_tk_x = {}_{t-1}k_{x+1} + \frac{c_x}{{}_tE_x},$$

方程式(83)可書爲

$$ {}_tV' = (P_{x+1} \cdot {}_{t-1}u_{x+1} - {}_{t-1}k_{x+1}) + \pi \cdot {}_tu_x,$$

或

$$ {}_tV' = {}_{t-1}V_{x+1} + \pi \cdot {}_tu_x. \tag{84}$$

由方程式(84)，知修正後之第 t 年期末準備金可視爲與原保單年齡相同之終身壽險保單以一年定期修正制，所計算之第 t 年準備金與均衡額外保費 π 以利率及生存享有權積存值之和．如第一年修正準備金爲 $\pi \cdot u_x$；第二年修正準備金爲 $\pi \cdot {}_2u_x + {}_1V_{x+1}$；第三年修正準備金爲 $\pi \cdot {}_3u_x + {}_2V_{x+1}$ 等等．在保費繳納期終了時修正準備金與均衡

純準備金彼此相等。故有

$$\pi \cdot {}_n u_x + {}_{n-1}V_{x+1} = A_{x+n:\,\overline{(m-n)}|}.$$

對 π 解之，得

$$\pi = \frac{A_{x+n:\,\overline{(m-n)}|} - {}_{n-1}V_{x+1}}{{}_n u_x}, \tag{85}$$

由此式可求 π 之值，再由方程式(81)，(82)以求 α_0 及 β_0 之值，而修正準備金因以可由方程式(84)求得也。當普通終身壽險準備金可利用時，此方法於計算修正準備金時特別有用。

練　習（三十九）

1. 設保額 1000 元之二十年限期繳費終身壽險保單於被保險人 45 歲時簽發，試以普通終身壽險修正制以計算

(a) π，α_0 及 β_0 之值；

(b) 由(84)式所得之第十五年期末準備金。

解 (a) 應用方程式(85)與附表 IV 及 X，得

$$\pi = \frac{1000(A_{30} - {}_{19}V_{46})}{{}_{20}u_{45}} = \frac{1000A_{60} - 1000\left(1 - \frac{a_{65}}{a_{46}}\right)}{{}_{20}u_{45}}$$

$$= \frac{688.2364 - 1000\left(1 - \frac{9.219295}{15.791058}\right)}{38.89932}$$

$$= 6.99412.$$

由方程式(81)，(82)與附表 VI 及 V，可得

$$\alpha_0 = 10.78560 + 6.99412 = 17.77972,$$

與

$$\beta_0 = 29.51055 + 6.99412 = 36.50467.$$

(b)應用方程式(84)及附表X，得

$$_{15}V'=1000_{14}V_{46}+\pi\cdot{}_{15}u_{45}$$

$$=1000\left(1-\frac{a_{60}}{a_{46}}\right)+(6.99412)(23.48303)$$

$$=301.3515+164.2431=465.5946.$$

應用未繳保費推算法公式及附表IV以核算此準備金之值，得

$$_{15}V'=1000A_{60}-\beta_O\cdot a_{60:\,5|}$$

$$=626.9237-(36.50467)(4.419409)$$

$$=465.5946.$$

2.設保額1000元之二十五年儲蓄壽險保單於被保險人25歲時簽發，試依普通終身壽險修正制

(a)由方程式(78)，(79)以求β_O及α_O之值；

(b)由方程式(72′)以求第十五年期末準備金；

(c)由方程式(73′)以求第十五年期末準備金；

(d)由方程式(85)以求π之值；

(e)由驗證方程式(81)，(82)以核算π之值；

(f)由方程式(84)以求第十五年之期末準備金；

(g)由方程式(80)以求第十五年之期末準備金。

3.設保額1000元之十年限期繳費三十年儲蓄壽險保單於被保險人30歲時簽發，試依普通終身壽險修正制

(a)以求π之值；

(b)由方程式(84)以求第五年之期末準備金；

(c)由未繳保費推算法以核算(b)項所得之值；

(d)由已繳保費推算法以核算(b)項所得之值。

4.設下列諸保單均於同歲時簽發且保額亦相等，並在同一假定下之死亡表及利率，以作計算之基礎，試填下表所缺各項之值。

保單種類	均衡純保費	第五年均衡純準備金	α_0	β_0	普通終身壽險修正制之第五年準備金
十年限期繳費終身保單	$ 44.77	$204.80	$ 34.31	$ 46.21	$ 198.21
十年儲蓄壽險	87.02	446.15			
十年限期繳費十五年儲蓄壽險	75.02	377.59			
十年限期繳費二十年儲蓄壽險	65.56	323.78			
十年限期繳費六十歲養老壽險	58.28	281.95			
十年限期繳費六十五歲養老壽險	52.87	251.04			

5.(a)試證對於任何 n 年限期繳費之保單依定期修正制有下列關係：

$$\pi=(\beta_F-P_{x+1})\frac{a_{x:\overline{n-1|}}}{\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}}.$$

(b)設 $\beta_F>P_{x+1}$，試由(a)之方程式以證明 $\alpha_0>c_x$.

(c)設定期保單以一年定期修正法所得之續年純保費小於 $_{x+1}$，試解釋何以定期修正法不適用於此項保單.

6.設下列各保單均於被保險人 30 歲時簽發，且保額均爲 1000 元，試求各保單之 π 值.

(a)三十年限期繳費終身壽險；

(b)三十年儲蓄壽險；

(c)十年限期繳費 65 歲養老壽險.

7.設保額 1000 元之二十年儲蓄壽險保單於被保險人 45 歲時簽發，試依均衡純保費制以求第十五年期末準備金；並依 (80) 式以求普通終身壽險修正制之第十五年期末準備金.

52. 二十年繳費終身壽險修正制 45–47 節普通原理之另一特

例爲"二十年繳費終身壽險修正制."在上節所論之方法爲對於整個保費繳納期之保費與準備金之修正.本節所論爲對於不超過二十年期限之保費與準備金之修正.符號 α 與 β 於此均將與以下誌 I 以表所討論者爲二十年繳費終身壽險修正制.在此制中以所修正之純保費

$$\alpha_I, \beta_I, \beta_I, \cdot\cdot\cdot, \beta_I, P, P, \cdot\cdot\cdot \tag{86}$$

(在數列(86)中 β_I 之最多個數爲 19)以代替相當之均衡純保費

$$P, P, P, \cdot\cdot\cdot, P, P, P, \cdot\cdot\cdot,$$

於是

$$\beta_I - \alpha_I = {}_{19}P_{x+1} - c_x, \tag{87}$$

此式與保單之種類無關,由(87)式可知任何保單之($\beta_I - \alpha_I$)之差等於二十年限期繳費終身壽險,以一年定期修正制修正之續年純保費與初年純保費之差.對於保費較低之保單用二十年繳費終身壽險修正制所得之 α_I,較自然保費爲小.此種修正制自不適用;在此情形,習慣上則採用一年定期修正制或均衡純保費制.

適用於二十年繳費終身壽險修正制之保單可分爲二類:(a)保費繳納次數等於或小於二十者;(b)保費繳納次數等於或大於二十者.茲將此種情形分別討論如次.

53.繳費次數等於或小於二十之保單 若保單之繳費次數小於或等於二十,則於(71)式中以(${}_{19}P_{x+1} - c_x$)代替($\beta_I - \alpha_I$)後,得

$$\beta_I - P = \frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{a_{x:\overline{n|}}},$$

或

$$\beta_I = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{a_{x:\overline{n|}}} \tag{88}$$

由此式可決定 β_I 之值.再由(87)式以求第一年純保費 α_I.至

$({}_{19}P_{x+1}-c_x)$之值則載於附表V中.

於是將 α_I, β_I 之值代入47節任一期末準備金公式中.如由已繳保費推算法公式以求第 t 年期末準備金 $(1 \leqq t \leqq n)$,則得

$$ {}_tV' = \beta_I \cdot {}_tu_x - (\beta_I - \alpha_I)\frac{1}{{}_tE_x} - {}_tk_x, \qquad (72'') $$

或由未繳保費推算法公式,則得

$$ {}_tV' = A_{x+t:\overline{(n-t)|}} - \beta_I \cdot \mathrm{a}_{x+t:\overline{(n-t)|}} \qquad (73'') $$

若以二十年繳費終身壽險修正制求逐年之準備金,一如普通終身壽險修正制所論者,可直接應用法克勒公式以求之.

練　習 (四十)

1.設保額1000元之十五年儲蓄壽險保單於被保險人35歲時簽發,試依二十年限期繳費終身壽險修正制以求

(a)第一年及續年純保費;

(b)由未繳保費推算法所得之第十年期末準備金;

(c)由已繳保費推算法所得之第十年期末準備金.

解 (a)均衡純保費可由下列恆等式求得:

$$ 1000P_{35:\overline{15|}} = 1000\left(\frac{1}{\mathrm{a}_{35:\overline{15|}}} - d\right) $$

$$ = \frac{1000}{11.21251} - 33.81643 $$

$$ = 55.36967. \qquad \text{(附表IX)} $$

將由附表V所得之

$$ \beta_I - \alpha_I = 1000({}_{19}P_{36} - c_{35}) = 20.24506, $$

代入(88)式，得

$$\beta_I = 55.36967 + \frac{20.24806}{1.21251}$$

$$= 57.1755.$$

由(87)式，得

$$\alpha_I = 57.1755 - 20.2481 = 36.9274.$$

(b) 由未繳保費推算法公式(73″)及附表 XI, VII 與 IX，得

$$_{10}V' = 1000A_{45:\overline{5}|} - \beta_I \cdot a_{45:\overline{5}|}$$

$$= 53.08709 + 792.3786 - (57.1755)(4.569802)$$

$$= 584.185.$$

(c)同樣，用已繳保費推算法公式(72″)由附表 X，VIII 及 XII 得

$$_{10}V' = \beta_I \cdot {}_{10}u_{35} - (\beta_I - \alpha_I)\frac{1}{_{10}E_{35}} - 1000\,_{10}k_{35}$$

$$= (57.1755)(12.87760) - (20.24806)(1.556065)$$

$$-120.5907$$

$$= 584.185.$$

2. 試證對於 n 年限期繳費 m 年儲蓄壽險($n \leqq 20$)以二十年限期繳費終身壽險修正制所得之續年純保費，可以下式表之：

$$\beta_I = \frac{A_{x:\overline{m}|} + ({}_{19}P_{x+1} - c_x)}{a_{x:\overline{x}|}}.$$

3. 設下列諸保單之保額爲 1000 元且同於 30 歲時簽發，試以二十年限期繳費終身壽險修正制以求其初年及續年純保費.

(a) 十年限期繳費二十年儲蓄壽險保單；

(b) 十年限期繳費終身壽險保單；

(c)十五年限期繳費終身壽險保單。

4.若以 $a'_{x:\overline{n}|}$ 表分數

$$\frac{a_{x:\overline{n}|}}{1+{}_{19}P_{x+1}-c_n},$$

對於 n 年儲蓄壽險以二十年限期繳費終身壽險修正制爲基礎，試證

$$\text{(a)}\quad \beta_I=\frac{1}{a'_{x:\overline{n}|}}-d;\qquad \text{(b)}\quad {}_tV'=1-\frac{a_{x+t:\overline{(n-t)}|}}{a'_{x:\overline{n}|}}.$$

5.設保額 1000 元之十年儲蓄壽險保單於被保險人 25 歲時簽發，試依習題 4 之方程式用連續計算法，以求其第五至第十年之修正準備金。

6.設保額 1000 元之十年儲蓄壽險保單於被保險人 25 歲時簽發，試依二十年限期繳費終身壽險修正制用法克勒累積公式以求其逐年之修正準備金。

7.設保額 1000 元之十五年限期繳費三十年儲蓄壽險保單於被保險人 35 歲時簽發，試依二十年限期繳費終身壽險修正制以求其第十及第二十五年之期末準備金。

54.保費繳納次數等於或大於二十之保單 在 52 節中曾論及二十年繳費終身壽險修正制之純保費，在第二十年以後者須爲均衡純保費。試比較修正之純保費數列(86)與同一保單之均衡純保費數列，即知此兩數列前二十年保費之現價必須相等。故對於保費繳納次數等於或大於二十之任何保單有關係式

$$P\cdot a_{x:\overline{20}|}=\alpha_I+\beta_I\cdot a_{x:\overline{19}|},$$

於方程式之右端加減一β_I，並以 $a_{x:\overline{20}|}$ 除之，得

$$\beta_I=P+\frac{\beta_I-\alpha_I}{a_{x:\overline{20}|}}. \tag{89}$$

由方程式(87)所示修正制之定義，知(89)式可書爲

$$\beta_I = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{\text{a}_{x:\,\overline{20}|}}, \tag{90}$$

由此方程式可求得 β_I 之值。更由(87)式，經移項後，得

$$\alpha_I = \beta_I - ({}_{19}P_{x+1} - c_x).$$

則第 t 年期末準備金可由已繳保費推算法公式於 $1 \leqq t \leqq 20$ 時，求得爲

$${}_tV' = \beta_I \cdot {}_tu_x - (\beta_I - \alpha_I)\frac{1}{{}_tE_x} - {}_tk_x. \tag{72''}$$

欲由未繳保費推算法以求第 t 年，$t \leqq 20$，之期末準備金，須注意在第二十年末時純保費之變更。至保費繳納期終了時將來之純保費可分爲兩部分：一部分組成金額 β_I 元之 $(20-t)$ 年定期年金；另一部分組成金額 P 元之延期年金。故由未繳保費推算法所求得之第 t 年修正準備金爲

$${}_tV' = A_{x+t.\,\overline{(m-t)}|} - \beta_I \cdot \text{a}_{x+t:\,\overline{(20-t)}|} - P \cdot {}_{20-t|}\text{a}_{x+t:\,\overline{(n-20)}|}. \tag{91}$$

二十年繳費終身壽險修正制，與均衡純保費制第二十年以後之純保費彼此相等，故當 t 等於或大於二十時之第 t 年修正準備金卽其相當之均衡純準備金。

於此所應注意者爲(90)式爲(88)式於 $n=20$ 時之特例。

練習(四十一)

1. 設保額1000元之二十五年儲蓄壽險保單於被保險人20歲時簽發，試依二十年繳費終身壽險修正制以計算

(a)純保費 α_I，β_I，及 P 之值；

(b)由已繳保費推算法所得之第十年期末準備金;

(c)由未繳保費推算法所得之第十年期末準備金.

2. 設二十年限期繳費保單於被保險人 40 歲時簽發,並規定被保險人於三十年內死亡,則給付 1000 元之賠款,若於此期限終止時仍生存,則給付 800 元之生存保險金.試依二十年繳費終身壽險修正制以求

(a)初年及續年之純繳費;

(b)由已繳保費及未繳保費推算法所得之第十年期末準備金

55. **二十年繳費終身壽險修正制之其他性質** 由上節所論列之關係式可得二十年繳費終身壽險修正制之若干有趣性質.由方程式

$$\beta_I = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{a_{x:\overline{n}|}}, \tag{88}$$

此處 $n \leqq 20$,與

$$\beta_I = P + \frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{a_{x:\overline{20}|}}, \tag{90}$$

此處 $n \geqq 20$ 知於 $n < 20$ 時,此修正之續年純保費 β_I 超過同保單之均衡純保費 P,此超過之數與保單年齡 x 及年繳保費之次數 n 有關,而與保單之種類及保險期限之長短完全無關.例如對於一切於 x 歲簽發之保額相等之十年限期繳費保單,不論其為終身壽險保單或儲蓄壽險保單,此$(\beta_I - P)$之值,恆為一常數.進而言之,若保單年齡相同之一切保單,其限期繳費之期限等於或大於二十時,則$(\beta_I - P)$之值亦為一常數.

以均衡純準備金之未繳保費推算法公式

$${}_tV = A_{x+t:\overline{m-t}|} - P \cdot a_{x+t:\overline{n-t}|}$$

分別減去方程式(73″)及(91)則得第 t 年均衡純準備金與第 t 年

修正準備金之差，爲($t<20$)

$$ {}_tV - {}_tV' = \left(\frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right) \ddot{a}_{x+t:\overline{(n-t)}|} \tag{92} $$

此處 $n \leqq 20$，與

$$ {}_tV - {}_tV' = \left(\frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{\ddot{a}_{x:\overline{20}|}} \right) \ddot{a}_{x+t:\overline{(20-t)}|} \tag{93} $$

此處 $n \geqq 20$. 此二方程式之意義爲均衡純準備金超過其相當之修正準備金之數與保單年齡 x，提存準備金時之期限 t 及 $n<20$ 時年繳保費之次數有關。例如若十年限期繳費終身壽險保單，十年儲蓄壽險保單及十年限期繳費二十年儲蓄壽險保單之保單年齡相同，則其第五年均衡純準備金與第五年修正準備金之差均相等。且保單年齡相同之二十年限期繳費終身壽險保單，二十年儲蓄壽險保單，二十五年儲蓄壽險保單等等之第五年均衡純準備金，與第五年修正準備金之差亦相等。

在計算中對於巳知年齡 x 及 n 於求得分數

$$ \frac{{}_{19}P_{x+1} - c_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} $$

之值後，方程式(92)，(93)之右端可以 40 節所述之連續計算法以求得其逐年之值。

56. **二十年繳費終身壽險修正制之額外保費** 於此應行補充者爲二十年繳費終身壽險修正制之第一年純保費 α_I 可視爲自然保費 c_x 與第二量 π' 之和，故有

$$ \alpha_I = c_x + \pi', \tag{94} $$

因
$$\beta_I=\alpha_I+({}_{19}P_{x+1}-c_x),$$
不論 n 之值如何，則得
$$\beta_I={}_{19}P_{x+1}+\pi'. \tag{95}$$
將 α_I 及 β_I 之值代入(72'')式，於 $t\leqq 20$ 時，有
$${}_tV'=({}_{19}P_{x+1}+\pi')_tu_x-({}_{19}P_{x+1}-c_x)\frac{1}{{}_tE_x}-{}_tk_x \tag{96}$$
用恆等式
$${}_tu_x={}_{t-1}u_{x+1}+\frac{1}{{}_tE_x},\qquad {}_tk_x={}_{t-1}k_{x+1}+\frac{c_x}{{}_tE_x},$$
則(96)式可書爲
$${}_tV'=({}_{19}P_{x+1}\cdot{}_{t-1}u_{x+1}-{}_{t-1}k_{x+1})+\pi'\cdot{}_tu_x,$$
或
$${}_tV'={}_{t-1:\,19}V_{x+1}+\pi'\cdot{}_tu_x. \tag{97}$$
方程式(97)表示以二十年限期繳費終身壽險修正制所得之第 t 年($t\leqq 20$)準備金，可視爲保單年齡相同之二十年限期繳費終身壽險第 t 年之一年定期修正準備金與均衡額外保費 π' 以利率及生存享有權積存值之和.例如第一年修正準備金爲 $\pi'\cdot u_x$；第二年爲 $\pi'\cdot{}_2u_x+{}_{1:\,19}V_{x+1}$；第三年爲 $\pi'\cdot{}_3u'_x+{}_{2:\,19}V_{x+1}$ 等等.

若繳費之次數 n 小於二十，則於保費繳納期終了時之修正準備金與均衡純準備金相等.故有
$$\pi'\cdot{}_nu_x+{}_{n-1:\,19}V_{x+1}=A_{x+n:\,\overline{(m-n)}|}.$$
由此式對 π' 求解，得
$$\pi'=\frac{A_{x+n:\,\overline{(m-n)}|}-{}_{n-1:\,19}V_{x+1}}{{}_nu_x} \tag{98}$$

此處 $n \leqq 20$. π' 之值可由此式求得. 若保費繳納之期限等於或大於二十年, 則第二十年末之修正準備金卽等於均衡純準備金, 故有

$$\pi' \cdot {}_{20}u_x + {}_{19:\,19}V_{x+1} = {}_{20}V.$$

對 π' 解之, 得

$$\pi' = \frac{{}_{20}V - {}_{19:\,19}V_{x+1}}{{}_{20}u_x},$$

或

$$\pi' = \frac{{}_{20}V - {}_{20:\,20}V_x}{{}_{20}u_x} = \frac{{}_{20}V - A_{x+20}}{{}_{20}u_x}, \tag{99}$$

此處 $n \geqq 20$. 將此方程式右端之二準備金代以相當之已繳保費推算法公式, 則(99)式可書爲

$$\pi' = \frac{(P \cdot {}_{20}u_x - {}_{20}k_x) - ({}_{20}P_x \cdot {}_{20}u_x - {}_{20}k_x)}{{}_{20}u_x},$$

化簡後, 得

$$\pi' = P - {}_{20}P_x, \tag{100}$$

此處 $n \geqq 20$. 方程式(98)與(100)爲於 $n < 20$ 及 $n \geqq 20$ 時以求 π' 值之公式. 對於任一保單於求得 π' 之值後, 則由(94)及(95)式可求得 α_I 及 β_I 之值, 於是二十年繳費終身壽險修正制之準備金可由方程式(97)求之. 當一年定期修正制及二十年繳費終身壽險修正制之準備金可利用時, 此種方法特別有用.

練　習（四十二）

1. 試證二十年限期繳費之 m 年儲蓄保單對於二十年繳費終身壽險修正制有關係式

$$\pi' = \frac{D_{x+m} - M_{x+m}}{N_x - N_{x+20}}.$$

2. 設某保單繳費之次數小於二十，試證其對於二十年繳費終身壽險修正制有

$$\pi' = (\beta_F - {}_{19}P_{x+1})\frac{a_{x:\overline{(n-1)}|}}{a_{x:\overline{n}|}}.$$

3. 設保額 1000 元之二十五年儲蓄壽險保單於被保險人 20 歲時簽發，試以二十年繳費終身壽險修正制以計算

(a)由方程式(90)及(87)所得 β_I 及 α_I 之值；

(b)由(72″)式所得第十五年期末準備金之值；

(c)由方程式(100)所得 π' 之值；

(d)由驗證(94)式以核算 π' 之值；

(e)由(97)式以計算第十五年之期末準備金；

(f)由(93)式以計算第十五年之期末準備金.

4. 設下列各保單之保額均為 1000 元，並同於被保險人 25 歲時簽發，試計算其 π' 之值：

(a)二十五年儲蓄壽險保單；

(b)三十年儲蓄壽險保單.

5. 試證二十年儲蓄壽險保單有下列各關係：

(a) $\beta_I = P_{x:\overline{20}|} + ({}_{19}P_{x+1} - {}_{20}P_x)$；

(b) ${}_tV' = {}_tV_{x:\overline{20}|} + ({}_{t-1:19}V_{x+1} - {}_{t:20}V_x)$.

57. **依利諾(Illinois)標準制** 美國各州大部以所謂"依利諾標準制"修正準備金為提存準備金之最低限度.在此種制度下分保單為兩類：

(a)於同保單年齡所發之保費小於或等於二十年限期繳費終身保單保費之保單.

(b)於同保單年齡所發之保費大於或等於二十年限期繳費

終身保單保費之保單.

在依利諾標準制下屬於(a)類之保單,其最低之準備金爲一年定期修正制之準備金,至屬於(b)類之保單,其準備金至少須等於以二十年繳費終身壽險修正制所得者.因二十年限期繳費終身壽險保單之一年定期修正準備金與二十年繳費終身壽險修正制之準備金相等,故此保單可屬於(a)類亦可屬於(b)類.

終身及儲蓄壽險保單之屬於(a)類者爲保費繳納期大於二十年之保單(二十年限期繳費終身保單爲例外).若於此時應用於二十年繳費終身壽險修正制,則由(100)式得 π' 之值爲負數,亦即第一年之純保費 α_I 尙不足第一年保險之成本也.

58. **新澤稷(New Jersey)標準制** 人壽保險公司常對於某些年齡所發之保單採用依利諾標準制一年定期修正制,對於其他年齡所發之保單則用其他修正準備金制.例如,若用美國經驗死亡表,利率 $3\frac{1}{2}\%$ 爲計算之基礎,則對於保單年齡爲 31 歲或大於 31 歲時所發之三十年儲蓄壽險保單,用一年定期修正制;若保單年齡小於 31 歲時,則用二十年繳費終身壽險修正制.對近於 31 歲時所簽發之此種保單之純保費及第二十年期末準備金列表如次:

保額千元之三十年儲蓄壽險保單

美國經驗死亡表 $3\frac{1}{2}\%$

依利諾標準制

保單年齡	準備金制度	純保費 第一年	純保費 2-20 年	純保費 21-30 年	第二十年準備金
28	20 PLM	\$ 9.11	\$ 26.13	\$ 24.91	\$ 24.04
29	20 PLM	8.83	25.38	25.06	24.58
30	20 PLM	8.54	25.52	25.21	\$25.09
31	FPTM	8.22	23.47	23.47	\$17.07
32	FPTM	8.32	23.67	23.67	\$17.72
33	FPTM	8.42	23.90	23.90	\$18.45

新澤稷標準制在消除 30 歲與 31 歲間第二十年準備金之顯然裂痕，依此標準常將保單分爲三類：

(a)保單大於同保單年齡之二十年限期繳費終身壽險保單保費之保單；

(b)保費小於同保單年齡自然保費 c_x 之 150 % 之保單；

(c)保單等於或小於同保單年齡之二十年限期繳費終身壽險保單之保費而大於同保單年齡自然保費 c_x 之 150 % 之保單.

新澤稷標準制最低之準備金如次：屬於(a)類之保單用二十年繳費終身壽險保單修正制；屬於(b)類之保單用一年定期修正制；屬於(c)類之保單用相似於一年定期修正制之特別修正制，但其第二十年之期末準備金須等於該年之均衡純準備金.

終身壽險與儲蓄壽險之屬於(c)類者爲保費繳納期大於二十年之保單，甚爲明顯．於此將討論三種不相等之純保費：第一年者爲 c_x；由第二年至第二十年者爲 β_J；第二十年以後者爲均衡純保費 P．因新澤稷標準制之第二十年修正準備金等於均衡純準備金，則前二十年修正純保費之現價等於其相當均衡純保費之現價；是以得

$$c_x+\beta_J\cdot a_{x:\,\overline{19|}}=P\cdot \text{a}_{x:\,\overline{20|}}$$

對 β_J 求解，得

$$\beta_J=\frac{P\cdot \text{a}_{x:\,\overline{20|}}-c_x}{a_{x:\,\overline{19|}}},$$

又以

$$\text{a}_{x:\,\overline{20|}}=1+a_{x:\,\overline{19|}},$$

故

$$\beta_J=P+\frac{P-c_x}{\text{a}_{x:\,\overline{20|}}-1}\tag{101}$$

以與前數節相同之方法，知第 t 年均衡純準備金與第 t 年之期末準備金可書爲

$$ {}_tV = A_{x+t:\overline{m-t}|} - P \cdot \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, $$

$$ {}_tV' = A_{x+t:\overline{m-t}|} - \beta_J \cdot \mathrm{a}_{x+t:\overline{20-t}|} - P \cdot {}_{20-t|}\mathrm{a}_{x+t:\overline{n-20}|}, $$

由減法，得

$$ {}_tV - {}_tV' = (\beta_J - P)\mathrm{a}_{x+t:\overline{20-t}|}. $$

由方程式(101)，故得

$$ {}_tV - {}_tV' = (P - c_x)\frac{\mathrm{a}_{x+t:\overline{20-t}|}}{\mathrm{a}_{x:\overline{20}|} - 1}. \qquad (102) $$

於此應注意方程式 (102) 右端分數之值如先求得，則均衡純準備金超過修正準備金之數，於 $t<20$ 時可用 40 節所述之連續計算法以求之.

練　習（四十三）

1. 設於被保險人 50 歲時簽發保額 1000 元之三十年儲蓄保單屬於 58 節之(c)類，試以新澤稷標準制以求其純保費及第五年期末準備金.

2. 試決定保單年齡爲 20 歲保額 1000 元之 60 歲儲蓄壽險保單屬於新澤稷標準制三類保單之何類；並求其純保費及第十年期末準備金.

3. 設保單年齡爲 40 歲保額 1000 元之普通終身保單屬於新澤稷標準制之(c)類，試求其純保費及第五年期末準備金.

4. 試證屬於新澤稷標準制(c)類之保單有關係式

$$\beta_J = P + \frac{\beta_J - c_x}{a_{x:\,20|}}.$$

95. **檢選與終極修正制**　"檢選與終極修正制"在對於一保單減低其前四年之期末準備金，但此種準備金須以美國經驗死亡表爲基礎所計算而得者．美國紐約州用此種修正制以爲最低準備金之標準已有數年，其原理與本章以前所論者完全不同．在以前修正法中假定實際死亡率與死亡表上所載者相同，而"選擇與終極修正法"因選擇關係在前五保單年所用之死亡率較表中所載者爲小．至決定之方法大都採用下列比率：第一年爲美國經驗死亡表同歲死亡率之 50 %；第二年爲該表之 65 %；第三年爲 75 %；第四年爲 85 %；第五年爲 95 %．由美國經驗死亡表所製之"選擇與終極"死亡表之形式同第 6 節所示之表．

保單年齡 30 歲保額 1000 十年儲蓄保單之期末準備金

美國經驗死亡表 $3\frac{1}{2}$ %

有效年度	均衡純準備金	一年定期修正制之準備金	普通終身壽險修正制之準備金	二十年繳費終身壽險修正制之準備金	選擇與終極準備金
1	$ 81.78	$ 0.	$ 73.22	$ 65.56	$ 77.12
2	167.47	93.13	159.13	152.58	164.93
3	256.64	190.26	249.56	243.35	255.56
4	349.66	291.59	343.46	338.63	349.43
5	446.72	397.32	441.45	436.83	446.72
6	548.03	507.67	543.72	539.94	548.03
7	653.77	622.85	65[illegible].47	647.58	653.77
8	764.19	743.13	761.93	759.97	764.19
9	879.51	868.75	878.33	877.35	879.51
10	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00

計算修正準備金時如"檢選與終極"表與美國經驗死亡表同時並用，則對於某一保單用未繳保費推算法所求得之第 t 年期末準備金為

$${}_tV'=A_{[x]+t:\,\overline{(m-t)}|}-P\cdot a_{[x]+t:\,\overline{(n-t)}|},$$

此處以美國經驗死亡表以計算純保費 P 之值，以"檢選與終極"表以計算符號 $A_{[x]+t:\,\overline{(m-t)}|}$ 與 $a_{[x]+t:\,\overline{(n-t)}|}$ 之值．但試觀察兩表即知依"檢選與終極"表所求第四保單年以後之期末準備金與相當之普通均衡純準備金相等．上表卽示"檢選與終極"準備金與以其他準備金之比較．

60. **保費偏差準備金** 在美國各州又有所謂增加準備金者，其目的在備所取計算標準，對於某保單所得之總保費較小於純保費時之用．在此情形下所需之總準備金為未來總保費之現價與未來純保額現價之差．如此所求得之準備金與普通純保費準備金之差，卽將來純保費超過總保費之數之現價或

$$(P-P')\cdot a_{x+t:\,\overline{(n-t)}|},$$

此處 P 與 P' 分別表該保單之純保費及總保費，此量名為"保費偏差準備金"，常為各公司採用以補純保費準備金之不足．

當保單年度增加時(卽 t 增加時)，則保費偏差準備金漸減．此種準備金對於保單年齡較小之短期保單較大．例如保單年齡為 20 歲之普通終身壽險保單之總保費較純保費少一元，則在保單日依美國經驗死亡表利率 $3\,{}^1/_2\,\%$ 計算所應提存之保費偏差準備金為 $1\cdot a_{20}=21.14$ 元．在一般情形下，公司於計算總保費時常使其等於或大於相當之純保費，以避免提存大量之保費偏差準備金．

計算總保費之原理，將於下章討論之．

練習（四十四）

1.設下表之保單之保單年齡相同，並以相同之死亡表及利率作計算之基礎，試填充其所缺之諸值。

保單種類	均衡純保費	第五年均衡純準備金	α_I	β_I	依利諾標準制第五年準備金
10 年限期繳費終身壽險保單	$ 40.61	$ 184.08	$ 24.88	$ 42.76	$ 174.19
10 年儲蓄壽險保單	86.63	446.72			
10 年限期繳費 15 年儲蓄壽險保單	74.58	377.72			
10 年限期繳費 20 年儲蓄壽險保單	64.93	322.71			

設下表之保單之保單年齡相同，並以相同之死亡表及利率爲計算之基礎，試填充其所缺之諸值。

保單種類	均衡純保費	第十年均衡純準備金	α_I	β_I	依利諾標準制第十年準備金
20 年限期繳費終身壽險保單	$ 24.71	$ 206.47	$ 8.14	$ 26.02	$ 195.67
20 年儲蓄壽險保單	39.61	395.98			
30 年儲蓄壽險保單	25.21	212.87			
25 年儲蓄壽險保單	30.69	282.98			
20 年限期繳費 30 年儲蓄壽險保單	31.32	291.08			

3.試證對於 n 年限期繳費之保單有關係式

$$\beta_O=\beta_F-\frac{\beta_F-P_{x+1}}{a_{x:\overline{n}|}}.$$

4.試證對於 n 年限期繳費之保單（$n\leqq 20$）有關係式

(a) $$\beta_I=\beta_O+\frac{{}_{19}P_{x+1}-P_{x+1}}{\text{a}_{x:\,n|}},$$

(b) $$\alpha_I=\alpha_O+\frac{({}_{19}P_{x+1}-P_{x+1})a_{x:\,(n-1)|}}{\text{a}_{x:\,n|}},$$

5.對於二十年儲蓄壽險,試證依利諾標準制準備金較大於相當之一年定期修正制之準備金而小於普通終身壽險修正制之準備金.

6.設30歲及31歲之死亡率分別為0.008427及0.008510,對於保單年齡為30歲,保額1000元之十年儲蓄壽險,試僅依59節之表分別用一年定期修正制,普通終身壽險修正制及二十年繳費終身壽險保單修正制,以求其前若干保單年之初年及續年純保費.

7.(a)試證對於終身壽險,用普通終身壽險修正制修正,則有關係式$\pi=0$,是以對於此種壽險,用普通終身壽險修正制實等於一年定期修正制.

(b)試證對於二十年限期繳費終身壽險,用二十年繳費終身壽險修正制修正,則有關係式$\pi'=0$,是以對於此保單,二十年繳費終身壽險修正制實等於一年定期修正制.

8.試證屬於新澤稷標準制(c)類之保單有關係式

$$\beta_J={}_{19}P_{x+1}+\frac{P-{}_{20}P_x}{{}_{19}V_{x:\,\overline{20}|}},$$

此處分母上之符號表與原保單年齡相同之二十年儲蓄壽險保單之第十九年均衡純準備金.

9.設某公司採取美國經驗死亡表利率$3\frac{1}{2}\%$之依利諾標準制之純保費及準備金,屬於57節(b)類之保單共3267紙,總保額為5,717,250元.每一保單均在十年前30歲時簽發,且保費繳期均為等於或大於二十年者.若第一年純保費之總和為75,696.39元,試求其

(a)續年純保費之總和;

(b)均衡純保費之總和;

(c)依利諾標準制準備金之總和;

(d)(c)項所應增加之數以使依利諾標準制準備金變爲均衡純保費制之準備金.

10. 設保單年齡爲 40 歲,保額 1000 元之保單,其用普通終身壽險修正制之續年純保費與均衡純保費之差爲 1.808 元,試求其保費繳納期爲若干年.

11. 設保額 1000 元之三十年限期繳費保單之保單年齡爲 40歲,以一年定期修正制所得之第一年純保費爲 9.463 元,至均衡純保費則爲 28.181 元.試求以一年定期修正制所得之續年純保費.

12. 設保額 1000 元之二十五年限期繳費之保單於被保險人 50 歲時簽發.以新澤稷標準制修正之續年純保費爲 42.069 元.試求其均衡純保費.

第六章　總保費

61.　**人壽保險公司**　人壽保險公司分爲兩類：一爲股分公司，一爲互助公司．所謂股分公司者爲股東出資所組成之組織，業務由股東或委人管理，其目的只在爲股東牟利，且公司之資金爲保證基金，於被保險人所納保費不足應用時可以動用，此種公司多發行不分紅保單；互助公司爲保單持有人之合作協會，其目的在保護其自身利益，公司之贏餘卽保單持有人之財產，故其保單常特爲分取贏餘而簽發，此種保單名爲分紅保單，保單持有人分得之贏餘名曰紅利，公司業務恆由保單持有人選舉代表處理之．

各種保單逐年總保費之決定，對於不分紅保單較重要於分紅保單．股分公司因營業競爭及欲穩定其基礎與維持其永久業務起見，在可能範圍內常將不分紅保單之總保費規定至最低限度．至分紅保單之總保費則不需要如此正確，蓋保單持有人倘可分取公司之贏餘也．故分紅保單與不分紅保單之總保費，須分別討論之．

62.　**不分紅總保費**　公司爲計算不分紅保單之總保費所取之利率與死亡表可與法定之最低保費與準備金無關．美國各州於計算準備金時，大都採取美國經驗死亡表再與以修正，其利率均不大於4％．但諸公司於計算總保費時所用之利率則大於4％．有若干公司則用美國男性選擇與終極死亡表或用此表再與以修正，所取死亡率則爲該表死亡率之百分數．故諸公司之總保費及純保費與法定準備金之計算甚少關係．至"營業費"則爲總保費與純保費二獨立數量之差．

63.　**死亡率利率與營業費用**　計算不分紅保單總保費之第一

步即死亡表之採取，並假定將來實際之死亡率與表上所示者相同。因被保險人於要保時須經過驗體，其死亡率自較一般者爲低，則總保費之決定似應採取檢選死亡表，蓋非如此不能與承保以後之實際死亡率相近似也。然有謂計算總保費時必須用終極死亡表者，蓋如此規定，則在前數保單年內，實際死亡率較預定者爲低，其賠款節餘可用以彌補簽發保單之費用。但實際上各公司營業費用之來源與用終極表之節餘無關。

最近各公司所採取之死亡表對於年歲較小者已逐漸改進，由經驗知儲蓄壽險保單與限期繳費終身壽險保單所示之死亡率，較普通終身壽險保單與定期壽險保單之死亡率爲低，且各種保單之死亡率多少均不相同，若以此爲計算保費之基礎自較公允，但此種情形於實際計算上殊不便利。

(2)計算總保費之利率須永久不變，並希望以此利率爲計算將來投資之基礎。人壽保險事業之唯一特質在長期投資，故選擇適當利率，實甚重要。若所選擇之利率欲近於過去所用以投資者，則於十年或二十年後取一較小之利率實爲適宜。在通常多於假定利率及投資利率中選擇一公平之邊值，以爲計算保費及實際投資之基礎。

計算不分紅保單總保費之主要問題，爲在如何均分公司費用於各種不同之年齡與保單上。各公司不但費用彼此不同，且其分派之方法亦異：若干費用，如業務員佣金及保費稅，直接按總保費之百分率計算；其餘費用，如醫藥費、檢查費、手續費及店員薪給，則依照保單之數目而定。保額 100,000 元之保單之店員薪給費實較一百個保額 1000 元之保單所需者爲小，但實際上不論保單之大小，均徵同樣之保費率。美國政府亦有規定禁止以保額之大小而變動保費率。

下節所述之例題並非公司實際上所應用者，不過用以說明計算之方法而已。

64. 總保費之計算 下例在說明不分紅保單總保費之計算：設

人壽保險公司在被保險人35歲時所簽發之保額 1000 元之十年儲蓄壽險保單，其費用爲

(a)業務員之佣金，第一年爲總保費之 40 %，以後逐年各爲總保費之 3 %；

(b)保費稅各爲總保費之 3 %；

(c)營業費第一年爲 3 元，以後每年爲 1 元。

如遇被保險人死亡時，在習慣上公司於得到確實證據後，即立即給付賠款，但在前數章中之公式均假定賠款於被保險人死亡年之年末給付．因每年之死亡平均日大概在每保單年中間，故應用以上公式計算總保費時須於保額上多加半年利息。

設以美國男性檢選與終極死亡表以 $4\,^1/_2$ %之利率爲計算上述保單總保費之基礎，則公司所收總保費之現價至少須與估計之費用及賠款之現價相等．對於上述保單，若以 P' 表此最小之總保費，求 P' 之法爲使總保費之現價與保額及估計費用之現價和相等，即

$$\begin{aligned} P'\mathrm{a}_{[35]:\overline{10|}} &= 1000\left[(1.0225)A^{\;1}_{[35]:\overline{10|}} + {}_{10}E_{[35]}\right] + 3 + 1\cdot a_{[35]:\overline{9|}} \\ &\quad + P'\left[0.4 + 0.03a_{[35]:\overline{9|}} + 0.03\mathrm{a}_{[35]:\overline{10|}}\right] \end{aligned} \tag{103}$$

此處符號[35]表年齡35歲之選擇者．於此應注意用檢選死亡表所計算之符號之數值不僅與被保險人之到達年齡有關，且與保單年齡有關．在一般情形，符號$[x]+t$表現年$x+t$歲而於t年前x歲時承保者．於選擇年限滿期時所有到達同年齡之人均以相同之終極死亡率計算，此時表年齡之方括弧即可略去．因美國男性死亡表之檢選有效年限只有五年，故本例題於被保險人達到 40 歲之年齡時即可將方括弧略去。

由方程式(103)對 P' 求解，得

$$P' = \frac{1022.5A^{\;1}_{[35]:\overline{10|}} + 1000\,{}_{10}E_{[35]} + 3 + a_{[35]:\overline{9|}}}{\mathrm{a}_{35:\overline{10|}} - \left[0.4 + 0.03a_{[35]:\overline{9|}} + 0.03\mathrm{a}_{[35]:\overline{10|}}\right]},$$

以換算符號代入並化簡，得

$$P'=\frac{(1022.5)(M_{[35]}-M_{45})+1000D_{45}+3D_{[35]}+N_{[35]+1}-N_{45}}{0.57N_{[35]}+0.37N_{[35]+1}-0.94N_{45}} \tag{104}$$

此處符號 $[35]+1$ 表現年 36 歲且在前一年 35 歲時尚在檢選期內者。由下表計算(104)式，得

$$P'=91.211.$$

下表表示基於美國男性檢選與終極死亡表以 $4\frac{1}{2}\%$ 利率計算各符號之數值。

換算數值		積存因子		
		t	$u_{[35]+t}$	$(1022.5)\cdot k_{[35]+t}$
$N_{[35]}$	33[illegible]18.8	0	1.[illegible]48317	3.24543
$N_{[35]+1}$	31[illegible]380.9	1	1.0495[illegible]3	4.40583
N_{45}	176722.8	2	1.0[illegible]9800	4.59705
N_{55}	813[illegible]4.26	3	1.050044	4.93523
$D_{[35]}$	13037.92	4	1.05049[illegible]	5.37130
D_{45}	119[illegible]7.31	5	1.051144	6.01140
D_{55}	6[illegible]65.3[illegible]6	6	1.051476	6.3372[illegible]
$M_{[35]}$	51[illegible]8.2[illegible]8	7	1.051873	6.7275[illegible]
M_{45}	4357.234	8	1.052306	7.14893
M_{55}	33[illegible]9.691	9	1.0[illegible]2806	7.638[illegible]1

練習(四十五)

1. 設估計簽發保單年齡 35 歲保額 1000 元之十年定期壽險保

單所需之費用如下:

(a)第一年佣金爲總保費之 40 % 以後各年爲 5 %;

(b)保費稅爲各年總保費之 2 %;

(c)營業費第一年爲 2.5 元,以後各年爲 2 元.

試用 64 節之換算符號以計算此保單之最小總保費.

2. 設估計簽發保單年齡 35 歲保額 1000 元之十年儲蓄壽險所需之費用如下:

(a)第一年佣金爲總保費之 35 %,以後各年爲 5 %;

(b)保費稅爲各年總保費之 3 %;

(c)營業費第一年爲 3.50 元,以後各年爲 1.50 元.

試用 64 節之換算符號以計算此保單之最小總保費.

3. 設估計簽發保單年齡 35 歲保額 1000 元之二十年限期繳費終身保單之費用如下:

(a)第一年佣金爲總保費之 60 %,以後各年爲 5 %;

(b)保費稅爲各年總保費之 3 %;

(c)營業費第一年爲 4.50 元,以後直至被保險人死亡之各年爲 2 元.

(1)試用 64 節之符號以計算此保單之最小總保費.

(2)若純保費爲 28.89 元,試用美國經驗死亡表 $3\frac{1}{2}$ %利率以求第五保單年之保費偏差準備金.

65. 自然準備金 在 64 節中以假定之死亡率,利率及費用所求得保單年齡 35 歲保額 1000 元之十年儲蓄壽險之總保費 P' 爲 91.21 元. 若公司之法定準備金爲依修正依利諾標準制及美國經驗死亡表 $3\frac{1}{2}$ % 利率計算而得者,因計算總保費所用之死亡表及利率與計算純保費及期末準備金所用者不同,則尙須一增加金額以便總保費與法定退保價值相當.

公司對於簽發十年儲蓄壽險,第一年之費用爲營業費 3 元及總

保費之 43 %，共爲 42.221 元.由總保費減去此值之餘數稱爲實收保費，等於 48.990 元，將實收保費以利率及生存享有權所積存之值減去保險成本之積存值(用 64 節所示之值)得

$$48.990u_{[35]}-(1022.5)k_{[35]}=(48.990)(1.048317)-3.24543$$
$$=48.112.$$

此金額 48.112 元表總保費之積存值超過費用及保險成本積存值之數，名之曰第一保單年之自然準備金.

公司於第二年之費用爲營業費 1 元與總保費之 6 %，共爲 6.473 元.則第二年之實收保費爲 84.738 元，第二自然準備金爲

$$(48.112+84.738)(1.049503)-4.40583=135.021.$$

將此步驟繼續進行至第十自然準備金求得爲止.自然準備金與美國經驗死亡表利率 $3\,1/2$ % 依利諾制期末準備金之比較，列表如下:

依利諾制純保費 第一年爲 69.22 元，繼續年爲 89.47 元		實收保費 第一年爲 48.99 元，繼續年爲 84.74 元	
年度	依利諾制期末準備金美國經驗死亡表利率 3 1/2 %	自然準備金美國男性檢選與終極死亡表利率 4 ½ %	差
1	$ 63.26	$ 48.11	$ 15.15
2	150.35	135.02	15.33
3	241.20	226.01	15.19
4	335.99	321.36	14.63
5	434.93	421.23	13.70
6	538.23	525.83	12.40
7	646.12	635.66	10.46
8	758.86	751.05	7.81
9	876.72	872.35	4.37
10	1000.00	1000.00	0.

由上表知每一期末準備金均超過其相當之自然準備金 但最後一年彼此相等.

在42節中曾論及退保價值在習慣上為法定準備金減去退保費，美國各州大都規定保額 1000 元之保險，其退保費不得超過 25 元. 檢查上表可知徵收退保費之合理數目. 各保單年末之現金價值不能大於其相當之自然準備金積存值，故上表末行之差數即表退保費之最小值. 在上表中之差數均不大於法定退保費 25 元，則上例之最小總保費能適合於法定現金價值也甚為顯然.

如 64 節所云，則與公司無一利益，故在實際上所用之總保費均較計算之最小總保費 P' 為高. 以此增加之總保費為基礎所求得之自然準備金自較上表所示者為大，且將於保單滿期前超過法定準備金. 在實際上自然準備金超過法定準備金所需之年限不同. 詳察一般公司之總保費可知短期儲蓄壽險之此種年限，至少需要四年或五年，至終身壽險則至少需要十五年或二十年.

練　習（四十六）

1. 設某公司所發保單年齡 35 歲保額 1000 元之普通終身壽險保單之總保費為 21.10 元，對此保單之費用第一年為 15.46 元 以後各年為 3.75 元.

(a)試用美國男性檢選與終極死亡表利率 $4^1/_2\%$，以求其前五年之自然準備金.

(b)若第三年之法定準備金為 36.45 元，則第三年末應收之最小退保費為若干?

2. 設某公司所發保單年齡 35 歲保額 1000 元之二十年儲蓄壽險保單之總保費為 42 元. 對此保單之費用第一年為 18.36 元，以後各年為 3 元.

(a)試用美國男性檢選與終極死亡表利率 $4^1/_2\%$，以求其

前五年之自然準備金.

(b)若第五年之法定準備金爲 188.18 元,則第五年末應收之最小退保費爲若干?

66. **分紅總保費** 計算分紅保單之總保費時不需要十分正確,蓋一部之保費仍將於紅利中返還保單持有人也.所需要者僅爲總保費之等級對於死亡率,利率及營業費用變動取捨之適宜. 各公司計算分紅總保費之方法多不相同.多數公司恆加一常數於均衡純保費後,將此和再乘以百分數.若以 P' 表分紅總保費,則

$$P'=(P+c)(1+k), \tag{105}$$

此處 c 與 k 均爲常數, P 爲該保單之均衡純保費.在習慣上方程式(105)中之 c 值與 k 值,常因保險之種類而變更.

練 習 (四十七)

1. 設被保險人於 25 歲時以躉繳保費購買保額 1000 元之終身壽險保單且規定於被保險人死亡時,除給付賠款外並無利退還其已繳之總保費.若該總保費爲以方程式 (105) 於 $c=5, k=0.1$ 時所求得者,試求此保單之躉繳純保費及總保費.

解 設以 W 及 W' 分別表示躉繳純保費及總保費.因純保費 W 爲保額$(1000+W')$之終身壽險保單之現價,故有

$$W=(1000+W')A_{25},$$

此時方程式(105)爲

$$W'=(W+5)(1.1).$$

由此二方程式聯立求解,並用附表 IV,得

$$W=\frac{1005.5A_{25}}{1-1.1A_{25}}=\frac{(1005.5)(0.3087342)}{1-(1.1)(0.3087342)}=470.07.$$

故

$$W' = (W+5)(1.1) = 522.58.$$

2. 設被保險人於30歲時以躉繳保費購買保額 1000 元之終身壽險保單，且規定於被保險人死亡時除給付賠款外並無利退還其已繳之總保費．若該保費為以方程式 (105) 於 $c=4, k=0.07$ 時所求得者，試求此保單之躉繳純保費及總保費．

3. 在英國計算普通終身壽險保單之年繳均衡純保費之公式為

$$P'_x = 1.075\left[P_x + \frac{0.01}{a_x} + 0.00125\right].$$

試證此方法與方程式 (105) 所示者同值，又若利率為 $3\frac{1}{2}\%$ 時，試求 c 與 k 之值．

4. 設保額 1000 元之二十年限期繳費終身保單於被保險人 30 歲時簽發，且規定於被保險人死亡時除給付賠款外並無利退還其已繳之總保費．若總保費為以方程式 (105) 於 $c=0.005, k=0.09$ 時所求得者，試證

(a) 此保單之純保費為

$$\frac{1000M_{30}+5.45(R_{30}-R_{50})}{N_{30}-N_{50}-1.09(R_{30}-R_{50})};$$

(b) 此保單之總保費為

$$1.09\,\frac{1000M_{30}+5(N_{30}-N_{50})}{N_{30}-N_{50}-1.09(R_{30}-R_{50})}.$$

附表目錄

美國經驗表 (利率 $3\frac{1}{2}\%$)

I 積存與折現因子

利率 $3\frac{1}{2}\%$

n	$(1.035)^n$	$(1.035)^{-n}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$a_{\overline{n}\vert}$	$1/a_{\overline{n}\vert}$	n
1	1.035000	0.9661836	1.000000	0.9661836	1.035000	1
2	1.071225	0.9335107	2.035000	1.8996943	0.526400	2
3	1.108718	0.9019427	3.106225	2.8016370	0.356934	3
4	1.147523	0.8714422	4.214943	3.6730792	0.272251	4
5	1.187686	0.8419732	5.362466	4.5150524	0.221481	5
6	1.229255	0.8135006	6.550152	5.3285530	0.187668	6
7	1.272279	0.7859910	7.779408	6.1145440	0.163544	7
8	1.316809	0.7594116	9.051687	6.8739555	0.145477	8
9	1.362897	0.7337310	10.368496	7.6076865	0.131446	9
10	1.410599	0.7089188	11.731393	8.3166053	0.120241	10
11	1.459970	0.6849457	13.141992	9.0015510	0.111092	11
12	1.511069	0.6617833	14.601962	9.6633343	0.103484	12
13	1.563956	0.6394042	16.113030	10.3027385	0.097062	13
14	1.618695	0.6177818	17.676986	10.9205203	0.091571	14
15	1.675349	0.5968906	19.295681	11.5174109	0.086825	15
16	1.733986	0.5767059	20.971030	12.0941168	0.082685	16
17	1.794676	0.5572038	22.705016	12.6513206	0.079043	17
18	1.857489	0.5383611	24.499691	13.1896817	0.075817	18
19	1.922501	0.5201657	26.357180	13.7098374	0.072940	19
20	1.989789	0.5025659	28.279682	14.2124033	0.070361	20
21	2.059431	0.4855709	30.269471	14.6979742	0.068037	21
22	2.131512	0.4691506	32.328902	15.1671248	0.065932	22
23	2.206114	0.4532856	34.460414	15.6204105	0.064019	23
24	2.283328	0.4379571	36.666528	16.0583676	0.062273	24
25	2.363245	0.4231470	38.949857	16.4815146	0.060674	25
26	2.445959	0.4088377	41.313102	16.8903523	0.059205	26
27	2.531567	0.3950122	43.759060	17.2853645	0.057852	27
28	2.620172	0.3816543	46.290627	17.6670188	0.056603	28
29	2.711878	0.3687482	48.910799	18.0357670	0.055445	29
30	2.806794	0.3562784	51.622677	18.3920454	0.054371	30
31	2.905031	0.3442304	54.429471	18.7362758	0.053372	31
32	3.006708	0.3325897	57.334502	19.0688655	0.052442	32
33	3.111942	0.3213427	60.341210	19.3902082	0.051572	33
34	3.220860	0.3104760	63.453152	19.7006842	0.050760	34
35	3.333590	0.2999769	66.674013	20.0006611	0.049998	35
36	3.450266	0.2898327	70.007603	20.2904938	0.049284	36
37	3.571025	0.2800316	73.457869	20.5705254	0.048613	37
38	3.696011	0.2705619	77.028895	20.8410874	0.047982	38
39	3.825372	0.2614125	80.724906	21.1024999	0.047388	39
40	3.959260	0.2525725	84.550278	21.3550723	0.046827	40
41	4.097834	0.2440314	88.509537	21.5991037	0.046298	41
42	4.241258	0.2357791	92.607371	21.8348828	0.045798	42
43	4.389702	0.2278059	96.848629	22.0626887	0.045325	43
44	4.543342	0.2201023	101.238331	22.2827910	0.044878	44
45	4.702359	0.2126592	105.781673	22.4954503	0.044453	45
46	4.866941	0.2054679	110.484031	22.7009181	0.044051	46
47	5.037284	0.1985197	115.350973	22.8994378	0.043669	47
48	5.213589	0.1918064	120.388257	23.0912442	0.043306	48
49	5.396065	0.1853202	125.601846	23.2765645	0.042962	49
50	5.584927	0.1790534	130.997910	23.4556179	0.042634	50

I 積存與折現因子（續）

利率 3½%

n	$(1.035)^n$	$(1.035)^{-n}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$a_{\overline{n}\mid}$	$1/a_{\overline{n}\mid}$	n
51	5.780399	0.1729984	136.582837	23.6286163	0.042322	51
52	5.982713	0.1671482	142.363236	23.7957645	0.042024	52
53	6.192108	0.1614959	148.345950	23.9572604	0.041741	53
54	6.408832	0.1560347	154.538058	24.1132951	0.041471	54
55	6.633141	0.1507581	160.946890	24.2640532	0.041213	55
56	6.865301	0.1456600	167.580031	24.4097133	0.040967	56
57	7.105587	0.1407343	174.445332	24.5504476	0.040732	57
58	7.354282	0.1359752	181.550919	24.6864228	0.040508	58
59	7.611682	0.1313770	188.905201	24.8177998	0.040294	59
60	7.878091	0.1269343	196.516883	24.9447341	0.040089	60
61	8.153824	0.1226418	204.394974	25.0673760	0.039892	61
62	8.439208	0.1184945	212.548798	25.1858705	0.039705	62
63	8.734580	0.1144875	220.988006	25.3003580	0.039525	63
64	9.040291	0.1106159	229.722586	25.4109739	0.039353	64
65	9.356701	0.1068753	238.762876	25.5178492	0.039188	65
66	9.684185	0.1032611	248.119577	25.6211103	0.039030	66
67	10.023132	0.0997692	257.803762	25.7208795	0.038879	67
68	10.373941	0.0963954	267.826894	25.8172749	0.038734	68
69	10.737029	0.0931356	278.200835	25.9104105	0.038595	69
70	11.112825	0.0899861	288.937865	26.0003966	0.038461	70
71	11.501774	0.0869431	300.050690	26.0873398	0.038333	71
72	11.904336	0.0840030	311.552464	26.1713428	0.038210	72
73	12.320988	0.0811623	323.456800	26.2525051	0.038092	73
74	12.752223	0.0784177	335.777788	26.3309228	0.037978	74
75	13.198550	0.0757659	348.530011	26.4066887	0.037869	75
76	13.660500	0.0732038	361.728561	26.4798924	0.037764	76
77	14.138617	0.0707283	375.389061	26.5506207	0.037664	77
78	14.633469	0.0683365	389.527678	26.6189572	0.037567	78
79	15.145640	0.0660256	404.161147	26.6849828	0.037474	79
80	15.675738	0.0637928	419.306787	26.7487757	0.037385	80
81	16.224388	0.0616356	434.982524	26.8104113	0.037299	81
82	16.792242	0.0595513	451.206913	26.8699626	0.037216	82
83	17.379970	0.0575375	467.999155	26.9275001	0.037137	83
84	17.988269	0.0555918	485.379125	26.9830919	0.037060	84
85	18.617859	0.0537119	503.367394	27.0368037	0.036987	85
86	19.269484	0.0518955	521.985253	27.0886993	0.036916	86
87	19.943916	0.0501406	541.254737	27.1388399	0.036848	87
88	20.641953	0.0484450	561.198653	27.1872849	0.036782	88
89	21.364421	0.0468068	581.840606	27.2340917	0.036719	89
90	22.112176	0.0452240	603.205027	27.2793156	0.036658	90
91	22.886102	0.0436946	625.317203	27.3230103	0.036599	91
92	23.687116	0.0422170	648.203305	27.3652273	0.036543	92
93	24.516165	0.0407894	671.890421	27.4060167	0.036488	93
94	25.374230	0.0394101	696.406585	27.4454268	0.036436	94
95	26.262329	0.0380774	721.780816	27.4835042	0.036385	95
96	27.181510	0.0367897	748.043145	27.5202939	0.036337	96
97	28.132863	0.0355456	775.224655	27.5558395	0.036290	97
98	29.117513	0.0343436	803.357517	27.5901831	0.036245	98
99	30.136626	0.0331822	832.475031	27.6233653	0.036201	99
100	31.191408	0.0320601	862.611657	27.6554254	0.036159	100

II 美國經驗死亡表

x	l_x	d_x	q_x	$\mathring{e}_x$	x
10	100000	749	.007490	48.72	10
11	99251	746	.007516	48.08	11
12	98505	743	.007543	47.45	12
13	97762	740	.007569	46.80	13
14	97022	737	.007596	46.16	14
15	96285	735	.007634	45.50	15
16	95550	732	.007661	44.85	16
17	94818	729	.007688	44.19	17
18	94089	727	.007727	43.53	18
19	93362	725	.007765	42.87	19
20	92637	723	.007805	42.20	20
21	91914	722	.007855	41.53	21
22	91192	721	.007906	40.85	22
23	90471	720	.007958	40.17	23
24	89751	719	.008011	39.49	24
25	89032	718	.008065	38.81	25
26	88314	718	.008130	38.12	26
27	87596	718	.008197	37.43	27
28	86878	718	.008264	36.73	28
29	86160	719	.008345	36.03	29
30	85441	720	.008427	35.33	30
31	84721	721	.008510	34.63	31
32	84000	723	.008607	33.92	32
33	83277	726	.008718	33.21	33
34	82551	729	.008831	32.50	34
35	81822	732	.008946	31.78	35
36	81090	737	.009089	31.07	36
37	80353	742	.009234	30.35	37
38	79611	749	.009408	29.62	38
39	78862	756	.009586	28.90	39
40	78106	765	.009794	28.18	40
41	77341	774	.010008	27.45	41
42	76567	785	.010252	26.72	42
43	75782	797	.010517	26.00	43
44	74985	812	.010829	25.27	44
45	74173	828	.011163	24.54	45
46	73345	848	.011562	23.81	46
47	72497	870	.012000	23.08	47
48	71627	896	012509	22.36	48
49	70731	927	.013106	21.63	49
50	69804	962	.013781	20.91	50
51	68842	1001	014541	20.20	51
52	67841	1044	.015389	19.49	52
53	66797	1091	.016333	18.79	53
54	65706	1143	.017396	18.09	54

II 美國經驗死亡表(續)

x	l_x	d_x	q_x	$\mathring{e}_x$	x
55	64563	1199	.018571	17.40	55
56	63364	1260	.019885	16.72	56
57	62104	1325	.021335	16.05	57
58	60779	1394	.022936	15.39	58
59	59385	1468	.024720	14.74	59
60	57917	1546	.026693	14.10	60
61	56371	1628	.028880	13.47	61
62	54743	1713	.031292	12.86	62
63	53030	1800	.033943	12.26	63
64	51230	1889	.036873	11.67	64
65	49341	1980	.040129	11.10	65
66	47361	2070	.043707	10.54	66
67	45291	2158	.047647	10.00	67
68	43133	2243	.052002	9.47	68
69	40890	2321	.056762	8.97	69
70	38569	2391	.061993	8.48	70
71	36178	2448	.067665	8.00	71
72	33730	2487	.073733	7.55	72
73	31243	2505	.080178	7.11	73
74	28738	2501	.087028	6.68	74
75	26237	2476	.094371	6.27	75
76	23761	2431	.102311	5.88	76
77	21330	2369	.111064	5.49	77
78	18961	2291	.120827	5.11	78
79	16670	2196	.131734	4.74	79
80	14474	2091	.144466	4.39	80
81	12383	1964	.158605	4.05	81
82	10419	1816	.174297	3.71	82
83	8603	1648	.191561	3.39	83
84	6955	1470	.211359	3.08	84
85	5485	1292	.235552	2.77	85
86	4193	1114	.265681	2.47	86
87	3079	933	.303020	2.18	87
88	2146	744	.346692	1.91	88
89	1402	555	.395863	1.66	89
90	847	385	.454545	1.42	90
91	462	246	.532468	1.19	91
92	216	137	.634259	.98	92
93	79	58	.734177	.80	93
94	21	18	.857143	.64	94
95	3	3	1.000000	.50	95
96	0				96

III 換算符號

利率 $3\frac{1}{2}\%$

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
15	57471.613	1249025.0	23055464.	423.87885	15234.051	469371.67	15
16	55104.250	1191553.4	21806439.	407.87317	14810.172	454137.61	16
17	52832.948	1136449.2	20614886.	392.46527	14402.299	439327.44	17
18	50653.861	1083616.2	19478437.	378.15319	14009.834	424925.14	18
19	48562.776	1032962.4	18394820.	364.36027	13631.681	410915.31	19
20	46556.196	984399.60	17361858.	351.06776	13267.321	397283.63	20
21	44630.764	937843.40	16377458.	338.72676	12916.253	384016.31	21
22	42782.784	893212.64	15439615.	326.81894	12577.526	371100.05	22
23	41009.205	850429.85	14546402.	315.32914	12250.707	358522.53	23
24	39307.091	809420.65	13695972.	304.24269	11935.378	346271.82	24
25	37673.623	770113.56	12886552.	293.54545	11631.135	334336.44	25
26	36106.090	732439.93	12116438.	283.61879	11337.590	322705.31	26
27	34601.492	696333.84	11383998.	274.02782	11053.971	311367.72	27
28	33157.366	661732.35	10687664.	264.76118	10779.943	300313.75	28
29	31771.341	628574.99	10025932.	256.16418	10515.182	289533.80	29
30	30440.784	596803.64	9397357.1	247.84585	10259.018	279018.62	30
31	29163.539	566362.86	8800553.5	239.79718	10011.172	268759.60	31
32	27937.536	537199.32	8234190.6	232.33078	9771.3749	258748.43	32
33	26760.457	509261.79	7696991.3	225.40561	9539.0441	248977.06	33
34	25630.109	482501.33	7187729.5	218.68313	9313.6385	239438.01	34
35	24544.707	456871.22	6705228.2	212.15755	9094.9554	230124.37	35
36	23502.535	432326.51	6248356.9	206.38330	8882.7978	221029.42	36
37	22501.380	408823.98	5816030.4	200.75696	8676.4145	212146.62	37
38	21539.707	386322.60	5407206.4	195.79797	8475.6576	203470.21	38
39	20615.513	364782.89	5020883.8	190.94479	8279.8596	194994.55	39
40	19727.425	344167.38	4656101.0	186.68400	8088.9148	186714.69	40
41	18873.630	324439.95	4311933.6	182.49302	7902.2308	178625.77	41
42	18052.898	305566.32	3987493.6	178.82763	7719.7378	170723.54	42
43	17263.586	287513.42	3681927.3	175.42154	7540.9102	163003.81	43
44	16504.372	270249.84	3394413.9	172.67930	7365.4886	155462.90	44
45	15773.574	253745.47	3124164.0	170.12739	7192.8093	148097.41	45
46	15070.041	237971.89	2870418.6	168.34469	7022.6819	140904.60	46
47	14392.081	222901.85	2632446.7	166.87161	6854.3372	133881.92	47
48	13738.521	208509.77	2409544.8	166.04694	6687.4650	127027.58	48
49	13107.886	194771.25	2201035.1	165.98248	6521.4187	120340.11	49
50	12498.642	181663.36	2006263.8	166.42449	6355.4362	113818.69	50
51	11909.558	169164.72	1824600.4	167.31539	6189.0117	107463.26	51
52	11339.504	157255.16	1655435.7	168.60170	6021.6963	101274.25	52
53	10787.441	145915.66	1498180.6	170.23383	5853.0946	95252.550	53
54	10252.414	135128.22	1352264.9	172.31655	5682.8608	89399.456	54

III 換算符號（續）

利率 3½%

x	D_x	N_x	S_x	C_x	M_x	R_x	x
55	9733.3976	124875.81	1217136.7	174.64638	5510.5442	83716.595	55
56	9229.6025	115142.41	1092260.9	177.32526	5335.8979	78206.051	56
57	8740.1651	105912.81	977118.46	180.16714	5158.5726	72870.153	57
58	8264.4368	97172.641	871205.65	183.13955	4978.4055	67711.580	58
59	7801.8235	88908.204	774033.01	186.33956	4795.2659	62733.175	59
60	7351.6542	81106.381	685124.81	189.60429	4608.9263	57937.909	60
61	6913.4432	73754.726	604018.43	192.90910	4419.3221	53328.982	61
62	6486.7462	66841.283	530263.70	196.11704	4226.4130	48909.660	62
63	6071.2706	60354.537	463422.42	199.10865	4030.2959	44683.247	63
64	5666.8533	54283.266	403067.88	201.88740	3831.1873	40652.951	64
65	5273.3332	48616.413	348784.61	204.45706	3629.2999	36821.764	65
66	4890.5508	43343.080	300168.20	206.52228	3424.8428	33192.464	66
67	4518.6476	38452.529	256825.12	208.02123	3218.3205	29767.621	67
68	4157.8219	33933.881	218372.59	208.90322	3010.2993	26549.301	68
69	3808.3160	29776.060	184438.71	208.85778	2801.3961	23539.002	69
70	3470.6746	25967.744	154662.65	207.88097	2592.5383	20737.606	70
71	3145.4278	22497.069	128694.91	205.63935	2384.6573	18145.067	71
72	2833.4213	19351.641	106197.84	201.85070	2179.0180	15760.410	72
73	2535.7544	16518.220	86846.198	196.43635	1977.1673	13581.392	73
74	2253.5679	13982.465	70327.978	189.49051	1780.7309	11604.225	74
75	1987.8698	11728.897	56345.513	181.25252	1591.2404	9823.4937	75
76	1739.3946	9741.0277	44616.615	171.94044	1409.9879	8232.2532	76
77	1508.6341	8001.6330	34875.588	161.88916	1238.0475	6822.2653	77
78	1295.7283	6492.9989	26873.955	151.26465	1076.1583	5584.2178	78
79	1100.6468	5197.2706	20380.956	140.08910	924.89367	4508.0595	79
80	923.33774	4096.6238	15183.685	128.88005	784.80456	3583.1658	80
81	763.23370	3173.2861	11087.061	116.95877	655.92451	2798.3613	81
82	620.46510	2410.0524	7913.7754	104.48810	538.96574	2142.4368	82
83	494.99509	1789.5873	5503.7230	91.615261	434.47764	1603.4710	83
84	386.64086	1294.5922	3714.1358	78.956448	342.86238	1168.9934	84
85	294.60960	907.95132	2419.5436	67.049020	263.90594	826.13101	85
86	217.59794	613.34172	1511.5922	55.856634	196.85692	562.22507	86
87	154.38292	395.74378	898.25053	45.199212	141.00028	365.36815	87
88	103.96303	241.36085	502.50676	34.824253	95.801071	224.36787	88
89	65.623121	137.39782	261.14591	25.099294	60.976818	128.56680	89
90	38.304688	71.774700	123.74808	16.822437	35.877524	67.589983	90
91	20.186924	33.470012	51.973383	10.385393	19.055088	31.712459	91
92	9.1188815	13.283089	18.503371	5.5881498	8.6696949	12.657371	92
93	3.2223637	4.1642071	5.2202825	2.2857836	3.0815451	3.9876758	93
94	.82761130	.94184337	1.0560754	.68539238	.79576153	.90613067	94
95	.11423206	.11423206	.11423206	.11036914	.11036914	.11036914	95

IV 期首付生存年金臺繳保費及其倒數

$d = 0.03381643$

$3\frac{1}{2}\%$

x	a_x	$-\Delta a_x$*	$1000/a_x$	$1000A_x$	$1/A_x$	x
15	21.732904	.109283	46.01318	265.0709	3.772576	15
16	21.623621	113385	46.24572	268.7664	3.720703	16
17	21.510236	.117667	46.48949	272.6007	3.668369	17
18	21.392569	.121907	46.74520	276.5798	3.615593	18
19	21.270662	126331	47.01311	280.7023	3.562494	19
20	21.144331	.130947	47.29400	284.9743	3.509088	20
21	21.013384	.135532	47.58872	289.4025	3.455396	21
22	20.877852	.140316	47.89765	293.9857	3.401526	22
23	20.737536	.145306	48.22174	298.7307	3.347497	23
24	20.592230	150512	48.56201	303.6444	3.293326	24
25	20.441718	155945	48.91957	308.7342	3.239032	25
26	20.285773	.161385	49.29563	314.0077	3.184635	26
27	20.124388	.167062	49.69095	319.4652	3.130232	27
28	19.957326	.172987	50.10691	325.1146	3.075839	28
29	19.784339	.178942	50.54503	330.9644	3.021473	29
30	19.605397	.185159	51.00686	337.0156	2.967222	30
31	19.420238	191651	51.49268	343.2770	2.913099	31
32	19.228587	198203	52.00590	349.7579	2.859120	32
33	19.030384	.204817	52.54755	356.4604	2.805360	33
34	18.825567	.211728	53.11925	363.3866	2.751890	34
35	18.613839	.218950	53.72347	370.5465	2.698717	35
36	18.394889	.226049	54.36293	377.9506	2.645848	36
37	18.168840	.233471	55.03929	385.5948	2.593396	37
38	17.935369	.240787	55.75575	393.4899	2.541361	38
39	17.694582	.248444	56.51447	401.6325	2.489838	39
40	17.446138	.256019	57.31928	410.0340	2.438822	40
41	17.190119	.263955	58.17295	418.6916	2.388393	41
42	16.926164	.271836	59.08013	427.6176	2.338538	42
43	16.654328	.279889	60.04445	436.8102	2.289324	43
44	16.374439	.287694	61.07079	446.2750	2.240771	44
45	16.086745	.295687	62.16298	456.0038	2.192964	45
46	15.791058	.303246	63.32698	466.0029	2.145910	46
47	15.487812	.310794	64.56690	476.2575	2.099704	47
48	15.177018	.317929	65.88910	486.7675	2.054369	48
49	14.859089	.324441	67.29888	497.5187	2.009975	49
50	14.534648	.330534	68.80111	508.4901	1.966606	50
51	14.204114	.336209	70.40214	519.6676	1.924307	51
52	13.867905	.341466	72.10894	531.0370	1.883108	52
53	13.526439	.346302	73.92929	542.5842	1.843032	53
54	13.180137	.350516	75.87175	554.2949	1.804094	54

* $-\Delta a_x = a_x - a_{x+1}$

IV 期首付生存年金躉繳保費及其倒數(續)

$d = 0.03381643$

$3\frac{1}{2}\%$

x	a_x	$-\Delta a_x$*	$1000/a_x$	$1000A_x$	$1/A_x$	x
55	12.829621	.354283	77.94462	566.1481	1.766322	55
56	12.475338	.357397	80.15815	578.1287	1.729719	56
57	12.117941	.360014	82.52227	590.2146	1.694299	57
58	11.757927	.362103	85.04901	602.3890	1.660057	58
59	11.395824	.363425	87.75145	614.6340	1.626985	59
60	11.032399	.364093	90.64212	626.9237	1.595090	60
61	10.668306	.364021	93.73560	639.2360	1.564367	61
62	10.304285	.363279	97.04700	651.5459	1.534811	62
63	9.941006	.361922	100.5934	663.8307	1.506408	63
64	9.579084	.359789	104.3941	676.0696	1.479138	64
65	9.219295	.356678	108.4682	688.2364	1.452989	65
66	8.862617	.352874	112.8335	700.2980	1.427964	66
67	8.509743	.348287	117.5124	712.2309	1.404039	67
68	8.161456	.342761	122.5272	724.0087	1.381199	68
69	7.818695	.336650	127.8986	735.5997	1.359435	69
70	7.482045	.329737	133.6533	746.9840	1.338717	70
71	7.152308	.322529	139.8150	758.1345	1.319027	71
72	6.829779	.315655	146.4176	769.0413	1.300320	72
73	6.514124	.309534	153.5126	779.7156	1.282519	73
74	6.204590	.304356	161.1710	790.1830	1.265530	74
75	5.900234	.299994	169.4848	800.4751	1.249258	75
76	5.600240	.296348	178.5638	810.6200	1.233624	76
77	5.303892	.292812	188.5408	820.6414	1.218559	77
78	5.011080	.289065	199.5578	830.5432	1.204031	78
79	4.722015	.285259	211.7740	840.3184	1.190025	79
80	4.436756	.279070	225.3899	849.9649	1.176519	80
81	4.157686	.273419	240.5184	859.4019	1.163600	81
82	3.884267	.268903	257.4485	868.6480	1.151214	82
83	3.615364	.267057	276.5973	877.7413	1.139288	83
84	3.348307	.266427	298.6584	886.7722	1.127685	84
85	3.081880	.263187	324.4773	895.7819	1.116343	85
86	2.818693	.255302	354.7744	904.6818	1.105361	86
87	2.563391	.241788	390.1083	913.3152	1.094912	87
88	2.321603	.227862	430.7369	921.4917	1.085197	88
89	2.093741	.219957	477.6140	929.1972	1.076198	89
90	1.873784	.215779	533.6795	936.6354	1.067651	90
91	1.658005	.201347	603.1346	943.9323	1.059398	91
92	1.456658	164375	686.5031	950.7409	1.051811	92
93	1.292283	154257	773.8241	956.2992	1.045697	93
94	1.138026	.138026	878.7144	961.5157	1.040024	94
95	1.000000	1.000000	1000.000	966.1836	1.035000	95

* $-\Delta a_x = a_x - a_{x+1}$

V　年繳保費及初年與續年保費之差

$3\frac{1}{2}\%$

x	$1000P_x$	$1000\,{}_{19}P_x$	$1000\,{}_{20}P_x$	$1000(P_{x+1}-c_x)$	$1000({}_{19}P_{x+1}-c_x)$	x
20	13.47758	21.41214	20.72267	6.23156	14.21567	20
21	13.77229	21.75640	21.05670	6.49169	14.52391	21
22	14.08122	22.11345	21.40322	6.76628	14.84496	22
23	14.40531	22.28399	21.76292	7.05635	15.17954	23
24	14.74558	22.86877	22.13654	7.36299	15.52846	24
25	15.10314	23.26861	22.52489	7.68741	15.89260	25
26	15.47921	23.68440	22.92886	8.01938	16.26110	26
27	15.87453	24.11625	23.34859	8.37095	16.64562	27
28	16.29049	24.56516	23.78510	8.74361	17.04727	28
29	16.72860	25.03226	24.23949	9.12720	17.45515	29
30	17.18994	25.51789	24.71217	9.53435	17.88146	30
31	17.67625	26.02336	25.20448	9.96698	18.32765	31
32	18.18948	26.55015	25.71792	10.41504	18.78297	32
33	18.73112	27.09905	26.25333	10.87973	19.24784	33
34	19.30282	27.67093	26.81163	11.37477	19.73549	34
35	19.90704	28.26776	27.39482	11.90278	20.24806	35
36	20.54650	28.89178	28.00518	12.44154	20.76229	36
37	21.22286	29.54361	28.64343	13.01735	21.30399	37
38	21.93933	30.22597	29.31233	13.60796	21.84990	38
39	22.69805	30.93999	30.01312	14.24066	22.42684	39
40	23.50285	31.68903	30.74920	14.89336	23.01172	40
41	24.35653	32.47489	31.52252	15.59450	23.63257	41
42	25.26371	33.30178	32.33736	16.32227	24.26670	42
43	26.22803	34.17246	33.19663	17.09301	24.92989	43
44	27.25437	35.09125	34.10476	17.88391	25.59837	44
45	28.34655	36.06101	35.06480	18.72496	26.30169	45
46	29.51055	37.08729	36.08244	19.57965	27.00240	46
47	30.75047	38.17322	37.16109	20.47799	27.73011	47
48	32.07267	39.32479	38.30693	21.39622	28.46043	48
49	33.48245	40.54666	39.52490	22.32189	29.18030	49
50	34.98469	41.84310	40.81962	23.27030	29.90486	50
51	36.58571	43.22027	42.19752	24.24369	30.63640	51
52	38.29252	44.68523	43.66601	25.24433	31.37759	52
53	40.11286	46.24612	45.23347	26.27458	32.13142	53
54	42.05532	47.91216	46.90929	27.32079	32.88488	54
55	44.12820	49.69229	48.70256	28.39873	33.65469	55
56	46.34173	51.59769	50.62455	29.49317	34.42648	56
57	48.70584	53.63915	52.68625	30.61888	35.21617	57
58	51.23258	55.82987	54.90103	31.77507	36.02429	58
59	53.93502	58.18424	57.28363	32.94159	36.83228	59
60	56.82569	60.71638	59.84860	34.12847	37.65234	60

VI 分項估值表

$3\frac{1}{2}\%$ $u_x = D_x/D_{x+1}$ $k_x = C_x/D_{x+1}$ $c_x = C_x/D_x$

x	u_x	$1000k_x$	$1000c_x$	x	u_x	$1000k_x$	$1000c_x$
15	1.0429615	7.69231	7.37545	55	1.0545847	18.92242	17.94300
16	1.0429903	7.72005	7.40185	56	1.0559986	20.28855	19.21267
17	1.0430102	7.74798	7.42842	57	1.0575633	21.80029	20.61370
18	1.0430594	7.78689	7.46544	58	1.0592955	23.47394	22.15996
19	1.0431002	7.82625	7.50287	59	1.0612337	25.34662	23.88410
20	1.0431414	7.86605	7.54073	60	1.0633853	27.42545	25.79070
21	1.0431945	7.91736	7.58954	61	1.0657798	29.73896	27.90348
22	1.0432483	7.96940	7.63903	62	1.0684330	32.30247	30.23350
23	1.0433030	8.02219	7.68923	63	1.0713654	35.13566	32.79522
24	1.0433584	8.07575	7.74015	64	1.0746245	38.28459	35.62602
25	1.0434146	8.13008	7.79180	65	1.0782698	41.80655	38.77188
26	1.0434836	8.19672	7.85515	66	1.0823941	45.70444	42.22884
27	1.0435537	8.26446	7.91954	67	1.0867824	50.03130	46.03617
28	1.0436250	8.33333	7.98499	68	1.0917744	54.85449	50.24343
29	1.0437097	8.41516	8.06274	69	1.0972840	60.17786	54.84256
30	1.0437959	8.49848	8.14190	70	1.1034030	66.08989	59.89642
31	1.0438837	8.58333	8.22250	71	1.1101166	72.57634	65.37722
32	1.0439858	8.68187	8.31608	72	1.1173879	79.60183	71.23921
33	1.0441024	8.79456	8.42309	73	1.1252177	87.16682	77.46663
34	1.0442214	8.90958	8.53227	74	1.1336596	95.32340	84.08467
35	1.0443430	9.02701	8.64372	75	1.1428516	104.20437	91.17926
36	1.0444930	9.17203	8.78132	76	1.1529599	113.97093	98.85073
37	1.0446465	9.32032	8.92198	77	1.1643135	124.94067	100.83288
38	1.0448300	9.49760	9.09009	78	1.1772427	137.43251	116.74102
39	1.0450179	9.67915	9.26219	79	1.1920306	151.72033	127.27889
40	1.0452375	9.89126	9.46317	80	1.2097705	168.86054	139.58063
41	1.0454626	10.10879	9.66921	81	1.2300994	188.50178	153.24109
42	1.0457212	10.35866	9.90576	82	1.2534772	211.08916	168.40286
43	1.0460008	10.62879	10.16136	83	1.2802451	236.95183	185.08318
44	1.0463305	10.94738	10.46264	84	1.3213839	268.00365	204.21132
45	1.0466842	11.28911	10.78560	85	1.3539172	308.13260	227.58601
46	1.0471064	11.69704	11.17082	86	1.4094689	361.80578	256.69653
47	1.0475714	12.14626	11.59468	87	1.4849792	434.76235	292.77337
48	1.0481111	12.66771	12.08623	88	1.5842440	530.67047	334.96764
49	1.0487448	13.28004	12.66280	89	1.7131878	655.25382	382.47636
50	1.0494631	13.97403	13.31541	90	1.8974999	833.33330	439.17436
51	1.0502715	14.75509	14.04883	91	2.2137496	1138.88883	514.46144
52	1.0511765	15.62944	14.86853	92	2.8298737	1734.17746	612.81091
53	1.0521854	16.60427	15.78074	93	3.8926325	2761.90504	709.34972
54	1.0533233	17.70364	16.80741	94	7.2450014	6000.00000	828.15719

VII 生存保險躉繳保費

$3\frac{1}{2}\%$　　　$1000\,{}_nE_x = 1000\,D_{x+n}/D_x$

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=10$	x
20	958.6428	918.9493	880.8539	844.2934	809.2075	653.8503	20
21	958.5940	918.8551	880.7174	844.1178	808.9956	653.4403	21
22	958.5445	918.7595	880.5790	843.9397	808.7714	653.0088	22
23	958.4943	918.6626	880.4387	843.7494	808.5347	652.5476	23
24	958.4434	918.5643	880.2863	843.5467	808.2852	652.0480	24
25	958.3918	918.4541	880.1215	843.3312	808.0132	651.5091	25
26	958.3284	918.3317	879.9441	843.0928	807.7130	650.9299	26
27	958.2640	918.2072	879.7535	842.8405	807.4084	650.3009	27
28	958.1986	918.0700	879.5493	842.5740	807.0743	649.6206	28
29	958.1208	917.9197	879.3313	842.2829	806.7053	648.8713	29
30	958.0417	917.7666	879.0988	841.9661	806.3100	648.0590	30
31	957.9611	917.5998	878.8408	841.6230	805.8876	647.1653	31
32	957.8675	917.4076	878.5566	841.2530	805.4175	646.1879	32
33	957.7605	917.2006	878.2561	840.8444	804.9080	645.1155	33
34	957.6513	916.9893	877.9276	840.4034	804.3475	643.9447	34
35	957.5399	916.7508	877.5703	839.9169	803.7344	642.6467	35
36	957.4023	916.4844	877.1612	839.3744	803.0466	641.2092	36
37	957.2616	916.1888	876.7207	838.7766	802.3018	639.6088	37
38	957.0936	915.8632	876.2250	838.1218	801.4773	637.8230	38
39	956.9214	915.5062	875.6948	837.4076	800.5802	635.8263	39
40	956.7204	915.1168	875.1059	836.6207	799.5759	633.5668	40
41	956.5144	914.6935	874.4673	835.7467	798.4707	631.0157	41
42	956.2778	914.2228	873.7419	834.7712	797.2172	628.1265	42
43	956.0222	913.6904	872.9380	833.6669	795.8092	624.8667	43
44	955.7209	913.0938	872.0163	832.4170	794.2069	621.1938	44
45	955.3980	912.4173	870.9834	831.0029	792.3786	617.0699	45
46	955.0128	911.6446	869.7977	829.3701	790.2804	612.4471	46
47	954.5889	910.7707	868.4388	827.5077	787.8988	607.2899	47
48	954.0973	909.7516	866.8734	825.3803	785.1967	601.5522	48
49	953.5208	908.5796	865.0902	822.9733	782.1562	595.2007	49
50	952.8682	907.2589	863.0890	820.2823	778.7564	588.1962	50
51	952.1347	905.7801	860.8560	817.2761	774.9744	580.4954	51
52	951.3150	904.1325	858.3619	813.9335	770.7714	572.0485	52
53	950.4028	902.2898	855.5878	810.2167	766.1165	562.8092	53
54	949.3762	900.2370	852.4982	806.0967	760.9743	552.7336	54
55	948.2406	897.9562	849.0804	801.5619	755.3020	541.7772	55
56	946.9709	895.4272	845.3044	796.5299	749.0510	529.8766	56
57	945.5699	892.6403	841.1345	790.9969	742.1766	516.9980	57
58	944.0236	889.5530	836.5293	784.8988	734.6261	503.0980	58
59	942.2995	886.1317	831.4397	778.1861	726.3498	488.1315	59
60	940.3929	882.3519	825.8373	770.8270	717.2989	472.0944	60

VII 生存保險躉繳保費(續)

$3\frac{1}{2}\%$ $1000\,{}_nE_x = 1000\,D_{x+n}/D_x$

x	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$	To Age 60 $n=60-x$	To Age 65 $n=65-x$	x
20	527.2060	423.7336	338.8072	268.4636	157.909[illegible]	113.2681	20
21	526.5994	422.8839	337.6604	266.8464	164.7217	118.1547	21
22	525.9447	421.9664	336.3989	265.0483	171.8367	123.2583	22
23	525.2408	420.9686	335.0107	263.0493	179.2684	128.5890	23
24	524.4731	419.8828	333.4738	260.8286	187.0312	134.1573	24
25	523.6402	418.6901	331.7611	258.3611	195.1406	139.9741	25
26	522.7271	417.3822	329.8490	255.6245	203.6126	146.0511	26
27	521.7376	415.9382	327.7172	252.5950	212.4664	152.4019	27
28	520.6561	414.3429	325.3407	249.2489	221.7201	159.0396	28
29	519.4736	412.5695	322.6938	245.5617	231.3926	165.9777	29
30	518.1724	410.5887	319.7486	241.5067	241.5067	173.2325	30
31	516.7425	408.3715	316.4774	237.0578	252.0837	180.8194	31
32	515.1521	405.8878	312.8467	232.1875	263.1461	188.7544	32
33	513.3889	403.1112	308.8302	226.8747	274.7208	197.0569	33
34	511.4253	400.0145	304.4007	221.1014	286.8366	205.7476	34
35	509.2194	396.5579	299.5210	214.8460	299.5210	214.8460	35
36	506.7350	392.7067	294.1573	208.0861	312.8026	224.3730	36
37	503.9470	388.4280	288.2822	200.8165	326.7201	234.3560	37
38	500.8165	383.6838	281.8641	193.0306	341.3071	244.8192	38
39	497.3155	378.4443	274.8830	184.7306	356.6079	255.79[illegible]4	39
40	493.3942	372.6616	267.3098	175.9315	372.6616	267.3098	40
41	489.0211	366.3017	259.1208	166.6573	389.5199	279.4022	41
42	484.1419	359.3188	250.3004	156.9510	407.2285	292.1045	42
43	478.7207	351.6807	240.8435	146.8846	425.8474	305.4599	43
44	472.7125	343.3547	230.7459	136.5437	445.4368	319.5113	44
45	466.0741	334.3144	220.0310	126.0253	466.0741	334.3144	45
46	458.7541	324.5214	208.7206	115.4207	487.8324	349.9216	46
47	450.7163	313.9676	196.8736	104.8239	510.8125	366.4052	47
48	441.9159	302.6397	184.5726	94.31353	535.1125	383.8356	48
49	432.3240	290.5362	171.9246	83.96829	560.8573	402.3023	49
50	421.9125	277.6841	159.0469	73.87505	588.1962	421.9125	50
51	410.6408	264.1095	146.0503	64.08581	617.2903	442.7816	51
52	398.4872	249.8717	133.0423	54.71713	648.3224	465.0409	52
53	385.4317	235.0654	120.1145	45.88624	681.5012	488.8401	53
54	371.4555	219.8085	107.3549	37.71218	717.0657	514.3504	54
55	356.5738	204.2319	94.86284	30.26791	755.3020	541.7772	55
56	340.7978	188.4582	82.69410	23.57609	796.5299	571.3500	56
57	324.1840	172.6093	70.99009	17.66362	841.1345	603.3448	57
58	306.8273	156.7836	59.89459	12.57957	889.5530	638.0753	58
59	288.8514	141.0756	49.55776	8.411254	942.2995	675.9103	59
60	270.3976	125.5959	40.07392	5.210350	1000.000	717.2989	60

VIII 生存保險躉繳保費之倒數

$3\frac{1}{2}\%$　　$1/{}_nE_x = D_x/D_{x+n}$

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=10$	x
20	1.043141	1.088199	1.135262	1.184422	1.235777	1.529402	20
21	1.043194	1.088311	1.135438	1.184669	1.236101	1.530362	21
22	1.043248	1.088424	1.135616	1.184919	1.236443	1.531373	22
23	1.043303	1.088539	1.135797	1.185180	1.236805	1.532455	23
24	1.043358	1.088655	1.135994	1.185471	1.237187	1.533630	24
25	1.043415	1.088786	1.136207	1.185774	1.237604	1.534898	25
26	1.043484	1.088931	1.136436	1.186109	1.238056	1.536264	26
27	1.043554	1.089079	1.136682	1.186464	1.238531	1.537750	27
28	1.043625	1.089242	1.136946	1.186839	1.239043	1.539360	28
29	1.043710	1.089420	1.137228	1.187250	1.239610	1.541138	29
30	1.043796	1.089602	1.137529	1.187696	1.240218	1.543069	30
31	1.043884	1.089800	1.137862	1.188180	1.240868	1.545200	31
32	1.043985	1.090028	1.138231	1.188703	1.241592	1.547537	32
33	1.044102	1.090274	1.138620	1.189281	1.242378	1.550110	33
34	1.044221	1.090525	1.139046	1.189901	1.243244	1.552928	34
35	1.044343	1.090809	1.139510	1.190594	1.244192	1.556065	35
36	1.044493	1.091126	1.140041	1.191364	1.245258	1.559554	36
37	1.044647	1.091478	1.140614	1.192213	1.246414	1.563456	37
38	1.044830	1.091866	1.141259	1.193144	1.247696	1.567833	38
39	1.045018	1.092292	1.141950	1.194162	1.249094	1.572756	39
40	1.045237	1.092757	1.142719	1.195285	1.250663	1.578366	40
41	1.045463	1.093262	1.143553	1.196535	1.252394	1.584747	41
42	1.045721	1.093825	1.144503	1.197933	1.254363	1.592036	42
43	1.046001	1.094463	1.145557	1.199520	1.256583	1.600341	43
44	1.046331	1.095178	1.146768	1.201321	1.259118	1.609803	44
45	1.046684	1.095990	1.148128	1.203365	1.262023	1.620562	45
46	1.047106	1.096919	1.149693	1.205734	1.265374	1.632794	46
47	1.047571	1.097971	1.151492	1.208448	1.269198	1.646660	47
48	1.048111	1.099201	1.153571	1.211563	1.273566	1.662366	48
49	1.048745	1.100619	1.155949	1.215106	1.278517	1.680105	49
50	1.049463	1.102221	1.158629	1.219093	1.284099	1.700113	50
51	1.050272	1.104021	1.161634	1.223577	1.290365	1.722667	51
52	1.051176	1.106033	1.165010	1.228602	1.297402	1.748104	52
53	1.052185	1.108291	1.168787	1.234238	1.305284	1.776801	53
54	1.053323	1.110819	1.173023	1.240546	1.314105	1.809190	54
55	1.054585	1.113640	1.177745	1.247580	1.323974	1.845777	55
56	1.055999	1.116785	1.183006	1.255446	1.335023	1.887232	56
57	1.057563	1.120272	1.188871	1.264228	1.347388	1.934244	57
58	1.059296	1.124160	1.195415	1.274050	1.361237	1.987684	58
59	1.061234	1.128500	1.202733	1.285040	1.376747	2.048628	59
60	1.063385	1.133335	1.210892	1.297308	1.394119	2.118221	60

VIII 生存保險躉繳保費之倒數(續)

$3\frac{1}{2}\%$ $1/{}_nE_x = D_x/D_{x+n}$

x	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$	To Age 60 $n=60-x$	To Age 65 $n=65-x$	x
20	1.896792	2.359973	2.951531	3.724900	6.332751	8.828609	20
21	1.898977	2.364715	2.961556	3.747474	6.070816	8.463483	21
22	1.901340	2.369857	2.972661	3.772397	5.819477	8.113044	22
23	1.903889	2.375474	2.984980	3.801569	5.578228	7.776714	23
24	1.906675	2.381617	2.998736	3.833935	5.346700	7.453937	24
25	1.909708	2.388401	3.014217	3.870552	5.124510	7.144176	25
26	1.913044	2.395885	3.031690	3.911988	4.911288	6.846920	26
27	1.916672	2.404204	3.051412	3.958906	4.706627	6.561598	27
28	1.920653	2.413460	3.073701	4.012054	4.510191	6.287743	28
29	1.925026	2.423834	3.098913	4.072297	4.321659	6.024907	29
30	1.929860	2.435527	3.127457	4.140671	4.140671	5.772589	30
31	1.935200	2.448751	3.159783	4.218381	3.966936	5.530381	31
32	1.941174	2.463735	3.196454	4.306864	3.800170	5.297889	32
33	1.947841	2.480705	3.238026	4.407719	3.640059	5.074676	33
34	1.955320	2.499910	3.285143	4.522811	3.486305	4.860324	34
35	1.963790	2.521700	3.338664	4.654496	3.338664	4.654496	35
36	1.973418	2.546430	3.399541	4.805703	3.196904	4.456865	36
37	1.984335	2.574480	3.468824	4.979671	3.060723	4.267013	37
38	1.996739	2.606313	3.547809	5.180527	2.929913	4.084647	38
39	2.010796	2.642397	3.637912	5.413288	2.804201	3.909389	39
40	2.026777	2.683400	3.740978	5.684032	2.683400	3.740978	40
41	2.044902	2.729990	3.859203	6.000338	2.567263	3.579070	41
42	2.065510	2.783044	3.995199	6.371413	2.455624	3.423432	42
43	2.088901	2.843488	4.152075	6.808067	2.348259	3.273752	43
44	2.115451	2.912440	4.333772	7.323663	2.244988	3.129780	44
45	2.145582	2.991196	4.544815	7.934913	2.145582	2.991196	45
46	2.179817	3.081461	4.791094	8.663957	2.049884	2.857783	46
47	2.218690	3.185042	5.079400	9.539809	1.957666	2.729219	47
48	2.262874	3.304259	5.417922	10.60293	1.868766	2.605282	48
49	2.313080	3.441911	5.816504	11.90926	1.782985	2.485693	49
50	2.370160	3.601214	6.287455	13.53637	1.700113	2.370160	50
51	2.435218	3.786308	6.846956	15.60408	1.619983	2.258450	51
52	2.509491	4.002054	7.516404	18.27581	1.542442	2.150348	52
53	2.594493	4.254135	8.325388	21.79303	1.467349	2.045659	53
54	2.692112	4.549414	9.314900	26.51663	1.394572	1.944200	54
55	2.804469	4.896396	10.54154	33.03829	1.323974	1.845777	55
56	2.934292	5.306215	12.09276	42.41585	1.255446	1.750241	56
57	3.084668	5.793429	14.08647	56.61355	1.188871	1.657427	57
58	3.259163	6.378217	16.69600	79.49400	1.124160	1.567213	58
59	3.461987	7.088399	20.17848	118.8883	1.061234	1.479486	59
60	3.698257	7.962042	24.95389	191.9257	1.000000	1.394119	60

IX 期首付定期生存年金

$3\frac{1}{2}\%$　　　$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}=(N_x-N_{x+n})/D_x$

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=10$	x
20	1.000000	1.958643	2.877592	3.758446	4.602733	8.325336	20
21	1.000000	1.958594	2.877449	3.758166	4.602284	8.323419	21
22	1.000000	1.958545	2.877304	3.757883	4.601823	8.321415	22
23	1.000000	1.958494	2.877157	3.757596	4.601345	8.319305	23
24	1.000000	1.958443	2.877008	3.757294	4.600841	8.317057	24
25	1.000000	1.958392	2.876846	3.756967	4.600299	8.314633	25
26	1.000000	1.958328	2.876660	3.756604	4.599697	8.311989	26
27	1.000000	1.958264	2.876471	3.756225	4.599065	8.309175	27
28	1.000000	1.958199	2.876269	3.755818	4.5983[illegible]2	8.306141	28
29	1.000000	1.958121	2.876041	3.755372	4.597655	8.302832	29
30	1.000000	1.958042	2.875808	3.754907	4.596873	8.299269	30
31	1.000000	1.957961	2.875561	3.754402	4.596025	8.295389	31
32	1.000000	1.957867	2.875275	3.753832	4.595085	8.291103	32
33	1.000000	1.957760	2.874961	3.753217	4.594062	8.286419	33
34	1.000000	1.957651	2.874041	3.752568	4.592975	8.281334	34
35	1.000000	1.957540	2.874291	3.751861	4.591778	8.275746	35
36	1.000000	1.957402	2.873887	3.751048	4.590422	8.269517	36
37	1.000000	1.957262	2.873450	3.750171	4.588948	8.262699	37
38	1.000000	1.957093	2.872957	3.749182	4.587304	8.255118	38
39	1.000000	1.956921	2.872428	3.748122	4.585530	8.246782	39
40	1.000000	1.956720	2.871837	3.746943	4.583564	8.237467	40
41	1.000000	1.956514	2.871208	3.745675	4.581422	8.227099	41
42	1.000000	1.956278	2.870501	3.744243	4.579014	8.215365	42
43	1.000000	1.956022	2.869713	3.742651	4.576318	8.202106	43
44	1.000000	1.955721	2.868815	3.740831	4.573248	8.187020	44
45	1.000000	1.955398	2.867815	3.738799	4.569802	8.169972	45
46	1.000000	1.955013	2.866657	3.736455	4.565825	8.150574	46
47	1.000000	1.954589	2.865360	3.733798	4.561306	8.128710	47
48	1.000000	1.954097	2.863849	3.730722	4.556103	8.104012	48
49	1.000000	1.953521	2.862100	3.727191	4.550164	8.[illegible]76287	49
50	1.000000	1.952868	2.860127	3.723216	4.543498	8.045433	50
51	1.000000	1.952135	2.857915	3.718771	4.536047	8.011212	51
52	1.000000	1.951315	2.855448	3.713809	4.527743	7.973354	52
53	1.000000	1.950403	2.852693	3.708280	4.518497	7.931550	53
54	1.000000	1.949376	2.849013	3.702111	4.508208	7.885455	54
55	1.000000	1.948241	2.846197	3.695277	4.496829	7.834817	55
56	1.000000	1.946971	2.842398	3.687702	4.484232	7.779244	56
57	1.000000	1.945570	2.838210	3.679345	4.470342	7.718421	57
58	1.000000	1.944024	2.833577	3.670106	4.455005	7.651914	58
59	1.000000	1.942299	2.828431	3.659871	4.438057	7.579272	59
60	1.000000	1.940393	2.822745	3.648582	4.419409	7.500167	60

IX 期首付定期生存年金(續)

3½%

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = (N_x - N_{x+n})/D_x$$

x	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$	To Age 60 $n=60-x$	To Age 65 $n=65-x$	x
20	11.33100	13.75182	15.69403	17.24231	19.40221	20.10008	20
21	11.32665	13.74396	15.68137	17.22307	19.19611	19.92408	21
22	11.32205	13.73558	15.66777	17.20219	18.98208	19.74150	22
23	11.31715	13.72659	15.65307	17.17942	18.75978	19.55204	23
24	11.31190	13.71688	15.63711	17.15447	18.52883	19.35539	24
25	11.30622	13.70636	15.61969	17.12704	18.28885	19.15125	25
26	11.30003	13.69487	15.60056	17.09677	18.03944	18.93928	26
27	11.29337	13.68242	15.57964	17.06346	17.78037	18.71935	27
28	11.28615	13.66884	15.55662	17.02668	17.51122	18.49109	28
29	11.27825	13.65393	15.53119	16.98596	17.23152	18.25414	29
30	11.26969	13.63763	15.50314	16.94100	16.94100	18.00832	30
31	11.26033	13.61968	15.47207	16.89123	16.63915	17.75321	31
32	11.25001	13.59977	15.43753	16.83606	16.32545	17.48840	32
33	11.23867	13.57772	15.39918	16.77502	15.99955	17.21366	33
34	11.22625	13.55332	15.35667	16.70762	15.66107	16.92872	34
35	11.21251	13.52615	15.30940	16.63311	15.30940	16.63311	35
36	11.19717	13.49574	15.25673	16.55070	14.94393	16.32633	36
37	11.18015	13.46189	15.19830	16.45994	14.56433	16.00824	37
38	11.16111	13.42404	15.13336	16.35996	14.16993	15.67831	38
39	11.13990	13.38190	15.06146	16.25023	13.76034	15.33634	39
40	11.11608	13.33479	14.98173	16.12981	13.33479	14.98173	40
41	11.08942	13.28230	14.89363	15.99814	12.89278	14.61423	41
42	11.05936	13.22364	14.79617	15.85422	12.43346	14.23317	42
43	11.02556	13.15827	14.68869	15.69750	11.95621	13.83820	43
44	10.98749	13.08542	14.57031	15.52724	11.46020	13.42877	44
45	10.94483	13.00460	14.44046	15.34317	10.94483	13.00460	45
46	10.89693	12.91495	14.29822	15.14467	10.40910	12.56503	46
47	10.84350	12.81603	14.14321	14.93184	9.852326	12.10982	47
48	10.78393	12.70704	13.97469	14.70440	9.273443	11.63832	48
49	10.71782	12.58748	13.79237	14.46259	8.671487	11.15015	49
50	10.64491	12.45700	13.59623	14.20688	8.045433	10.64491	50
51	10.56476	12.31512	13.38620	13.93767	7.393922	10.12198	51
52	10.47688	12.16134	13.16226	13.65537	6.715354	9.580556	52
53	10.38076	11.99519	12.92454	13.36054	6.007846	9.019679	53
54	10.27584	11.81631	12.67321	13.05386	5.269182	8.438189	54
55	10.16172	11.62461	12.40874	12.73634	4.496829	7.834817	55
56	10.03785	11.41993	12.13152	12.40888	3.687702	7.207894	56
57	9.903836	11.20244	11.84[illegible]20	12.07266	2.838210	6.555528	57
58	9.759216	10.97227	11.54139	11.72872	1.944024	5.875322	58
59	9.603619	10.72966	11.22989	11.37821	1.000000	5.164407	59
60	9.436989	10.47516	10.90890	11.02264	0.000000	4.419409	60

X 期首付分紅生存年金

$3\frac{1}{2}\%$　　　　${}_{n}u_{x}=(N_{x}-N_{x+n})/D_{x+n}$

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=10$	x
20	1.043141	2.131394	3.266821	4.451587	5.687960	12.73278	20
21	1.043194	2.131559	3.267165	4.452182	5.688887	12.73784	21
22	1.043248	2.131727	3.267514	4.452786	5.689893	12.74319	22
23	1.043303	2.131897	3.267867	4.453450	5.690968	12.74896	23
24	1.043358	2.132070	3.268264	4.454163	5.692100	12.75528	24
25	1.043415	2.132270	3.268692	4.454913	5.693346	12.76211	25
26	1.043484	2.132485	3.269140	4.455742	5.694682	12.76941	26
27	1.043554	2.132704	3.269633	4.456626	5.696083	12.77743	27
28	1.043625	2.132951	3.270162	4.457552	5.697607	12.78614	28
29	1.043710	2.133216	3.270713	4.458564	5.699299	12.79581	29
30	1.043796	2.133485	3.271314	4.459689	5.701124	12.80635	30
31	1.043884	2.133785	3.271993	4.460906	5.703059	12.81804	31
32	1.043986	2.134130	3.272726	4.462191	5.705221	12.83079	32
33	1.044102	2.134495	3.273488	4.463629	5.707561	12.84486	33
34	1.044221	2.134868	3.274348	4.465183	5.710187	12.86032	34
35	1.044343	2.135302	3.275282	4.466943	5.713054	12.87760	35
36	1.044493	2.135773	3.276349	4.468862	5.716259	12.89675	36
37	1.044647	2.136308	3.277498	4.471001	5.719727	12.91836	37
38	1.044830	2.136884	3.278789	4.473314	5.723560	12.94265	38
39	1.045018	2.137529	3.280170	4.475864	5.727758	12.97018	39
40	1.045237	2.138219	3.281702	4.478664	5.732494	13.00173	40
41	1.045463	2.138984	3.283379	4.481831	5.737746	13.03787	41
42	1.045721	2.139826	3.285296	4.485352	5.743747	13.07916	42
43	1.046001	2.140793	3.287419	4.489384	5.750521	13.12617	43
44	1.046331	2.141862	3.289864	4.493939	5.758258	13.17949	44
45	1.046684	2.143096	3.292618	4.499140	5.767195	13.23995	45
46	1.047106	2.144490	3.295775	4.505172	5.777475	13.30821	46
47	1.047571	2.146082	3.299438	4.512101	5.789203	13.38522	47
48	1.048111	2.147946	3.303653	4.520004	5.802499	13.47184	48
49	1.048745	2.150082	3.308442	4.528932	5.817462	13.56901	49
50	1.049463	2.152493	3.313826	4.538945	5.834300	13.67814	50
51	1.050272	2.155197	3.319853	4.550201	5.853157	13.80065	51
52	1.051176	2.158218	3.326624	4.562792	5.874301	13.93825	52
53	1.052185	2.161615	3.334190	4.576899	5.897924	14.09279	53
54	1.053323	2.165403	3.342662	4.592640	5.924258	14.26629	54
55	1.054585	2.169639	3.352094	4.610153	5.953684	14.46133	55
56	1.055999	2.174349	3.362573	4.629710	5.986551	14.68124	56
57	1.057563	2.179568	3.374264	4.651529	6.023285	14.92931	57
58	1.059296	2.185394	3.387301	4.675897	6.064316	15.20959	58
59	1.061234	2.191886	3.401847	4.703079	6.110082	15.52711	59
60	1.063385	2.199114	3.418040	4.733335	6.161182	15.88701	60

X 期首付分紅生存年金(續)

3½%　$_nu_x=(N_x-N_{x+n})/D_{x+n}$

x	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$	To Age 60 $n=60-x$	To Age 65 $n=65-x$	x
20	21.49255	32.45392	46.32141	64.22588	122.8694	177.4557	20
21	21.50904	32.50055	46.44125	64.54301	116.5366	168.6271	21
22	21.52706	32.55136	46.57497	64.90209	110.4658	160.1636	22
23	21.54659	32.60715	46.72410	65.30874	104.6463	152.0506	23
24	21.56812	32.66836	46.89157	65.76914	99.06808	144.2739	24
25	21.59157	32.73628	47.08113	66.29111	93.72138	136.8199	25
26	21.61746	32.81133	47.29606	66.88235	88.59687	129.6758	26
27	21.64569	32.89531	47.53988	67.55262	83.68558	122.8288	27
28	21.67678	32.98918	47.81641	68.31194	78.97896	116.2672	28
29	21.71092	33.09487	48.12981	69.17188	74.46876	109.9795	29
30	21.74892	33.21483	48.48542	70.14711	70.14711	103.9546	30
31	21.79098	33.35121	48.88839	71.25366	66.00643	98.18201	31
32	21.83822	33.50624	49.34535	72.51063	62.03950	92.65163	32
33	21.89115	33.68233	49.86294	73.93959	58.23933	87.35374	33
34	21.95091	33.88208	50.44886	75.56540	54.59927	82.27906	34
35	22.01902	34.10889	51.11296	77.41874	51.11296	77.41874	35
36	22.09669	34.36596	51.86588	79.53775	47.77430	72.76424	36
37	22.18517	34.65737	52.72022	81.96511	44.57740	68.30738	37
38	22.28582	34.98726	53.69025	84.75320	41.51667	64.04037	38
39	22.40006	35.36028	54.79225	87.96718	38.58676	59.95572	39
40	22.52981	35.78256	56.04633	91.68236	35.78256	56.04633	40
41	22.67677	36.26055	57.47755	95.99422	33.09916	52.30535	41
42	22.84322	36.80197	59.11366	101.0138	30.53190	48.72628	42
43	23.03131	37.41538	60.98855	106.8697	28.07627	45.30285	43
44	23.24349	38.11049	63.14439	113.7163	25.72801	42.02910	44
45	23.48303	38.89932	65.62924	121.7467	23.48303	38.89932	45
46	23.75331	39.79691	68.50414	131.2128	21.33744	35.90812	46
47	24.05837	40.81959	71.83902	142.4469	19.28756	33.05034	47
48	24.40267	41.98734	75.71378	155.9098	17.32989	30.32112	48
49	24.79118	43.32497	80.22336	172.2387	15.46113	27.71584	49
50	25.23014	44.86033	85.48571	192.3096	13.67814	25.23014	50
51	25.72750	46.62884	91.65470	217.4844	11.97803	22.85998	51
52	26.29164	48.67062	98.93289	249.5630	10.35805	20.60153	52
53	26.93280	51.02917	107.6018	291.1667	8.815605	18.45119	53
54	27.66371	53.75731	118.0496	346.1446	7.348256	16.40553	54
55	28.49822	56.91867	130.8072	420.7869	5.953684	14.46133	55
56	29.45397	60.59659	146.7036	526.3334	4.629710	12.61555	56
57	30.55005	64.90054	166.8148	683.4763	3.374264	10.86531	57
58	31.80687	69.98353	192.6949	932.3630	2.185394	9.207882	58
59	33.24761	76.05613	226.6020	1352.737	1.061224	7.640669	59
60	34.90042	83.40367	272.2193	2115.527	1.000000	6.161182	60

XI 定期保險之躉繳保費

3½% $1000\cdot A^{1}_{x:\overline{n}|}=1000(M_x-M_{x+n})/D_x$

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=10$	x
20	7.540731	14.81638	21.83627	28.60935	35.14431	64.61659	20
21	7.589535	14.91226	21.97755	28.79443	35.37163	65.09144	21
22	7.639029	15.00950	22.12083	28.98213	35.61140	65.59066	22
23	7.689228	15.10812	22.26615	29.18213	35.86424	66.12328	23
24	7.740148	15.20815	22.42361	29.39507	36.13078	66.69890	24
25	7.791803	15.32012	22.59385	29.62161	36.42117	67.31978	25
26	7.855151	15.44467	22.77754	29.87230	36.73668	67.98831	26
27	7.919537	15.57126	22.97453	30.13740	37.06766	68.71254	27
28	7.984988	15.71070	23.18553	30.41763	37.42454	69.49544	28
29	8.062744	15.86367	23.41126	30.72385	37.81847	70.35657	29
30	8.141901	16.01940	23.65162	31.05634	38.24023	71.28933	30
31	8.222499	16.18898	23.91800	31.41651	38.69127	72.31431	31
32	8.316080	16.38428	24.21185	31.80585	39.19316	73.43658	32
33	8.423085	16.59496	24.52299	32.23523	39.73723	74.66741	33
34	8.532275	16.80994	24.86232	32.69518	40.33455	76.01021	34
35	8.643719	17.05218	25.23142	33.20862	40.98809	77.49720	35
36	8.781321	17.32325	25.65418	33.77861	41.72176	79.14533	36
37	8.921984	17.62358	26.10950	34.40605	42.51636	80.97625	37
38	9.090094	17.95488	26.62185	35.09425	43.39648	83.01840	38
39	9.262189	18.31770	27.16992	35.84434	44.35354	85.29698	39
40	9.463171	18.71390	27.77882	36.67109	45.42435	87.87151	40
41	9.669206	19.14421	28.43874	37.58797	46.60200	90.77316	41
42	9.905757	19.62284	29.18803	38.61185	47.93693	94.05922	42
43	10.16136	20.16388	30.01857	39.77001	49.43611	97.76738	43
44	10.46264	20.77066	30.97067	41.08142	51.14220	101.9504	44
45	10.78560	21.45817	32.03736	42.56427	53.08709	106.6509	45
46	11.17082	22.24389	33.26224	44.27631	55.31971	111.9296	46
47	11.59468	23.13206	34.66497	46.22858	57.85410	117.8262	47
48	12.08623	24.16777	36.28148	48.46004	60.73223	124.3991	48
49	12.66280	25.35931	38.12379	50.98641	63.97354	131.6881	49
50	13.31541	26.70209	40.19169	53.81188	67.59870	139.7360	50
51	14.04883	28.20567	42.49956	56.96832	71.63271	148.5941	51
52	14.86853	29.88098	45.07711	60.47870	76.11653	158.3212	52
53	15.78074	31.75455	47.94434	64.38247	81.08403	168.9742	53
54	16.80741	33.84207	51.13802	68.71117	86.57423	180.6085	54
55	17.94300	36.16123	54.67143	73.48701	92.63136	193.2773	55
56	19.21267	38.73324	58.57587	78.76520	99.30826	207.0571	56
57	20.61370	41.56749	62.88740	84.58084	106.6524	221.9926	57
58	22.15995	44.70711	67.64930	90.99138	114.7216	238.1416	58
59	23.88410	48.18666	72.91282	98.05015	123.5709	255.5646	59
60	25.79070	52.03093	78.70751	105.7910	133.2525	274.2768	60

XI 定期保險之躉繳保費(續)

$2\frac{1}{2}\%$ $1000 \cdot A^{1}_{x:\overline{n}|} = 1000(M_x - M_{x+n})/D_x$

x	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$	To Age 60 $n=60-x$	To Age 65 $n=65-x$	x
20	89.61998	111,2291	130.4770	148.4633	185 9773	207.0191	20
21	90.37387	112.3445	132.0518	150.7310	186.1345	208.0841	21
22	91.18414	113.5454	133.7732	153.2352	186.2572	209.1548	22
23	92.05371	114.8473	135.6584	156.0043	186.3431	210.2310	23
24	92.99896	116.2612	137 7349	159.0684	186.3901	211.3125	24
25	94.02389	117.8099	140.0369	162.4636	186.3959	212.3989	25
26	95.14625	119.5064	142.5958	166.2238	186.3581	213.4900	26
27	96.36097	121 3715	145.4352	170.3799	186.2649	214.5766	27
28	97.68668	123.4259	148.5899	174.9698	186.1130	215.6578	28
29	99.13631	125 7033	152.0969	180.0338	185.8989	216.7325	29
30	100.7270	128.2353	155.9905	185.6093	185.6093	217.7906	30
31	102.4735	131.0596	160.3123	191.7411	185.2397	218.8305	31
32	104.4128	134.2165	165.1113	198.4771	184.7854	219.8503	32
33	106.5594	137.7387	170.4245	205.8540	184.2314	220.8387	33
34	108.9430	141.6606	176.2916	213.9067	183.5619	221.7836	34
35	111.6134	146.0360	182.7697	222.6816	182.7697	222.6816	35
36	114.6168	150.9156	189.9147	232.2284	181.8473	223.5290	36
37	117.9802	156.3389	197.7657	242.5671	180.7662	224.3024	37
38	121.7548	162.3630	206.3799	253.7341	179.5164	224.9965	38
39	125.9730	169.0277	215.7925	265.7447	178.0665	225.5854	39
40	130.6998	176.4036	226.0617	278.6160	176.4036	226.0617	40
41	135.9745	184.5384	237.2298	292.3430	174.4924	226.3969	41
42	141.8700	193.5049	249.3460	306.9158	172.3165	226.5807	42
43	148.4341	203.3537	262.4374	322.2820	169.8363	226.5916	43
44	155.7298	214.1433	276.5384	338,3805	167.0201	226.3757	44
45	163.8109	225.9164	291 6442	355.1236	163.8109	225.9164	45
46	172.7507	238.7412	307 7646	372.4405	160.1691	225.1740	46
47	182.5952	252.6401	324.8536	390.2347	156.0171	224.0842	47
48	193.4102	267.6537	342.8534	408.4361	151.2928	222.5979	48
49	205.2376	283.8003	361.6668	426.9586	145.9039	220.6396	49
50	218.1146	301.0645	381 1771	445.6990	139 7360	218.1146	50
51	232.0967	319.4371	401.2763	464.5922	132.6737	214.9292	51
52	247.2221	338.8754	421.8570	483 5071	124.5883	210.9789	52
53	263.5282	359.3000	442.8239	502.3079	115.3349	206 1466	53
54	281.0523	380.6060	464.0826	520.8528	104.7494	200.3002	54
55	299.7932	402.6655	485.5180	539.0346	92 63136	193.2773	55
56	319.7581	425.3607	507.0612	556 7998	78.76520	184.9048	56
57	340.9037	448.5642	528.5492	574.0821	62.88740	174.9707	57
58	363.1510	472.1734	549.8170	590.7970	44.70711	163.2423	58
59	386.3885	496.0856	570 6875	606.8183	23 88410	149.4479	59
60	410.4771	520.1716	591.0262	622.0435	0 000000	133.2525	60

XII 保險之積存成本

3½%　　$1000\,{}_nk_x = 1000(M_x - M_{x+n})/D_{x+n}$

x	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=10$	x
20	7.866049	16.12318	24.78988	33.88556	43.43053	98.82475	20
21	7.917361	16.22918	24.95414	34.11186	43.72290	99.61345	21
22	7.969405	16.33670	25.12078	34.34147	44.03148	100.4438	22
23	8.022195	16.44577	25.28984	34.58626	44.35708	101.3310	23
24	8.075748	16.55643	25.47309	34.84700	44.70053	102.2914	24
25	8.130081	16.68033	25.67128	35.12452	45.07497	103.3290	25
26	8.196721	16.81818	25.88521	35.43181	45.48206	104.4480	26
27	8.264463	16.95833	26.11474	35.75694	45.90943	105.6627	27
28	8.333333	17 11274	26.36070	36.10084	46.37063	106.9785	28
29	8.415164	17.28220	26.62394	36.47688	46.88016	108.4291	29
30	8.498483	17.45476	26.90439	36.88550	47.42622	110.0044	30
31	8.583333	17.64275	27.21540	37.32848	48.01075	111.7401	31
32	8.681869	17.85932	27.55867	37.80771	48.66192	113.6459	32
33	8.794563	18.09306	27.92236	38.33674	49.36866	115.7427	33
34	8.909584	18.33167	28.31933	38.90401	50.14568	118.0384	34
35	9.027007	18.60067	28.75145	39.53798	50.99705	120.5907	35
36	9.172028	18.90185	29.24682	40.24261	51.95434	123.4314	36
37	9.320320	19.23575	29.78086	41.01933	52.99297	126.6028	37
38	9.497603	19.60432	30.38243	41.87249	54.14561	130.1590	38
39	9.679154	20.00828	31.02670	42.80394	55.40174	134.1514	39
40	9.891261	20.44974	31.74338	43.83240	56.81056	138.6934	40
41	10.10879	20.92964	32.52121	44.97532	58.36407	143.8525	41
42	10.35866	21.46396	33.40578	46.25441	60.13033	149.7457	42
43	10.62879	22.06861	34.38798	47.70491	62.12056	156.4612	43
44	10.94738	22.74756	35.51616	49.35197	64.39405	164.1202	44
45	11.28911	23.51794	36.78298	51,22036	66.99713	172.8343	45
46	11.69704	24.39974	38.24135	53.38546	70.00010	182.7580	46
47	12.14626	25.39834	39.91642	55.86484	73.42834	194.0197	47
48	12.66771	26.56524	41.85327	58.71238	77.34652	206.7969	48
49	13.28004	27 91094	44.06916	61.95390	81 79126	221.2499	49
50	13.97403	29.43161	46.56726	65.60166	86.80340	237.5669	50
51	14.75509	31.13965	49.36895	69.70510	92.43235	255.9780	51
52	15.62944	33.04934	52.51528	74.30423	98.75371	276.7618	52
53	16.60427	35.19330	56.03673	79.46326	105.8377	300.2335	53
54	17 70364	37.59240	59.98607	85.23936	113.7676	326.7552	54
55	18.92242	40.27059	64.38900	91.68092	122.6415	356.7467	55
56	20.28855	43.25672	69.29559	98.88545	132.5788	390.7648	56
57	21.80029	46.56689	74.76498	106.9294	143.7022	429.3878	57
58	23.47394	50.25796	80.86902	115.9275	156.1633	473.3503	58
59	25.34662	54.37867	87.69465	125.9983	170.1259	523.5568	59
60	27.42545	58.96845	95.30631	137.2436	185.7699	580.9787	60

XII 保險之積存成本(續)

$3\frac{1}{2}\%$　　$1000\,{}_nk_x = 1000(M_x - M_{x+n})/D_{x+n}$

x	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$	To Age 60 $n=60-x$	To Age 65 $n=65-x$	x
20	169.9904	262.4978	385.1068	553.0108	1177.748	1827.690	20
21	171.6179	265.6628	391.0786	564.8607	1129.994	1761.116	21
22	173.3721	269.0863	397.6624	578.1408	1083.919	1696.882	22
23	175.2600	272.8168	404.9375	593.0612	1039.464	1634.907	23
24	177.3188	276.8896	413.0307	609.8580	996.5719	1575.110	24
25	179.5582	281.3773	422.1018	628.8237	955.1876	1517.415	25
26	182.0190	286.3236	432.3064	650.2655	915.2584	1461.749	26
27	184.6924	291.8017	443.7826	674.5180	876.6795	1407.966	27
28	187.6223	297.8834	456.7208	701.9882	839.4052	1356.001	28
29	190.8399	304.6840	471.3350	733.1512	803.3914	1305.793	29
30	194.3890	312.3205	487.8537	768.5470	768.5470	1257.216	30
31	198.3067	320.9322	506.5521	808.8372	734.8340	1210.216	31
32	202.6835	330.6740	527.7706	854.8141	702.2159	1164.742	32
33	207.5608	341.6890	551.8390	907.3468	670.6134	1120.685	33
34	213.0183	354.1388	579.1431	967.4595	639.9529	1077.940	34
35	219.1853	368.2590	610.2068	1036.471	610.2068	1036.471	35
36	226.1869	384.2961	645.6227	1116.021	581.3483	996.2386	36
37	234.1124	402.4915	686.0144	1207.904	553.2752	957.1014	37
38	243.1126	423.1688	732.1963	1314.476	525.9676	919.0312	38
39	253.3061	446.6384	785.0340	1438.553	499.3343	881.9014	39
40	264.8993	473.3613	845.6919	1583.662	473.3613	845.6919	40
41	278.0545	503.7879	915.5181	1754.157	447.9678	810.2903	41
42	293.0340	538.5327	996.1868	1955.487	423.1444	775.6836	42
43	310.0640	578.2339	1089.660	2194.117	398.8196	741.7719	43
44	329.4387	623.6797	1198.454	2478.185	374.9581	708.5061	44
45	351.4696	675.7603	1325.469	2817.875	351.4696	675.7603	45
46	376.5649	735.6715	1474.529	3226.809	328.3282	643.4985	46
47	405.1221	804.6692	1650.061	3722.765	305.4293	611.5747	47
48	437.6629	884.3973	1857.553	4330.620	282.7308	579.9303	48
49	474.7311	976.8156	2103.636	5084.760	260.1445	548.4423	49
50	516.9664	1084.198	2396.634	6033.146	237.5669	516.9664	50
51	565.2060	1209.487	2747.521	7249.532	214.9292	485.4068	51
52	620.4015	1356.197	3170.848	8836.485	192.1704	453.6782	52
53	683.7222	1528.511	3686.680	10946.81	169.2365	421.7057	53
54	756.6244	1731.634	4322.883	13811.26	146.0807	389.4237	54
55	840.7605	1971.610	5118.105	17808.78	122.6415	356.7467	55
56	938.2636	2257.055	6131.770	23617.14	98.88543	323.6279	56
57	1051.575	2598.725	7445.394	32500.82	74.76498	290.0012	57
58	1183.568	3011.624	9179.743	46064.81	50.25798	255.8355	58
59	1337.672	3516.453	11515.61	72143.61	25.34662	221.1061	59
60	1518.050	4141.628	14748.40	119386.1	0.000000	185.7699	60

XIII　每千元保險金額年繳純保費

美國經驗死亡表　　　　利率 3 %

年齡	終身壽險躉繳保費	終身壽險	期限繳費終身壽險 五年	十年	十五年	二十年	儲蓄壽險 十年	十五年	二十年	二十五年	三十年	三十五年	年齡
	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$	$	
20	284.97	13.48	61.91	34.23	25.15	20.72	86.30	54.44	38.90	29.90	24.18	20.35	20
21	289.40	13.77	62.88	34.77	25.55	21.05	86.33	54.47	38.94	20.95	24.25	20.43	21
22	293.99	14.08	63.89	35.33	25.97	21.40	86.36	51.51	38.99	30.01	24.32	20.53	22
23	298.73	14.41	64.92	35.91	26.40	21.76	86.39	54.55	39.04	30.07	24.39	20.63	23
24	303.65	14.75	66.00	36.51	26.84	22.14	86.42	54.59	39.09	30.13	24.46	20.74	24
25	308.73	15.10	67.11	37.13	27.31	22.53	86.45	54.63	39.14	30.21	24.57	20.85	25
26	314.01	15.48	68.27	37.78	27.79	22.93	86.49	54.68	39.20	30.28	24.68	21.00	26
27	319.47	15.88	69.46	38.45	28.29	23.35	86.53	54.78	39.27	30.37	24.79	21.15	27
28	325.12	16.20	70.70	39.14	28.81	23.79	86.58	54.79	39.34	30.47	24.92	21.32	28
29	330.97	16.73	71.99	39.86	29.35	24.24	86.63	54.85	39.42	30.57	25.06	21.51	29
30	337.02	17.10	73.31	40.61	29.91	24.71	86.68	54.92	39.51	30.69	25.21	21.71	30
31	343.28	17.68	74.69	41.38	30.40	25.21	86.73	54.99	39.61	30.82	25.39	21.94	31
32	349.76	18.19	76.12	42.19	31.00	25.72	86.80	55.07	39.72	30.96	25.58	22.20	32
33	356.46	18.73	77.59	43.02	31.72	26.25	86.86	55.16	39.83	31.12	25.80	22.48	33
34	363.39	19.30	79.12	43.88	32.37	26.81	86.94	55.26	39.97	31.30	26.04	22.80	34
35	370.55	19.91	80.70	44.78	33.05	27.40	87.02	55.37	40.12	31.50	26.31	23.15	35
36	377.95	20.55	82.33	45.70	33.75	2[illegible].01	87.11	55.49	40.28	31.73	26.60	23.53	36
37	385.60	21.22	84.03	46.67	34.49	28.64	87.21	55.63	40.47	31.98	26.94	23.96	37
38	393.49	21.94	85.78	47.67	35.26	29.31	87.32	55.78	40.68	32.26	27.31	24.43	38
39	401.63	22.70	87.59	48.70	36.05	30.01	87.44	55.95	40.91	32.58	27.72	24.95	39
40	410.03	23.50	89.46	49.78	36.89	30.75	87.58	56.14	41.18	32.93	28.18	25.53	40
41	418.69	24.36	91.39	50.80	37.73	31.52	87.73	56.36	41.47	33.33	28.69	26.16	41
42	427.62	25.26	93.50	52.05	38.67	32.34	87.91	56.61	44.81	33.77	29.26	26.85	42
43	436.81	26.23	95.45	53.26	39.62	33.20	88.10	56.88	42.18	34.26	29.89	27.62	43
44	446.28	27.26	97.58	54.51	40.62	34.11	88.33	57.20	42.61	34.82	30.59	28.45	44
45	456.00	28.35	99.79	55.82	41.06	35.07	88.58	57.55	43.08	35.43	31.86	29.37	45
46	466.00	29.51	102.06	57.18	42.77	36.08	88.83	57.95	43.61	36.12	32.21	30.37	46
47	476.26	30.75	104.41	58.59	43.92	37.16	89.21	58.41	44.21	36.89	33.16	31.45	47
48	486.77	32.07	106.84	60.07	45.14	38.31	89.59	58.92	44.88	37.74	34.19	32.64	48
49	497.52	33.48	109.34	61.60	46.42	39.53	90.00	59.49	45.63	38.69	35.33	33.93	49
50	508.49	34.99	111.92	63.20	47.77	40.82	90.48	60.13	46.46	39.73	36.57	35.33	50
51	519.67	36.59	114.56	64.87	49.19	42.20	91.01	60.84	47.39	40.89	37.93	……	51
52	531.04	38.29	117.29	66.60	50.69	43.67	91.60	61.63	48.41	42.16	39.42	……	52
53	542.58	40.11	120.08	68.41	52.27	45.23	92.26	62.52	49.85	43.56	41.03	……	53
54	554.30	42.06	122.95	70.29	53.94	46.91	93.00	63.50	50.81	45.09	4[illegible].79	……	54
55	566.51	44.13	125.90	72.26	55.71	48.70	93.82	64.59	52.21	46.77	44.70	……	55
56	578.13	46.34	128.93	74.32	57.60	50.63	94.73	65.81	53.76	48.61	……	……	56
57	590.22	48.71	132.03	76.47	59.60	52.60	95.74	67.16	55.46	50.63	……	……	57
58	602.30	51.23	135.22	78.72	61.73	54.90	96.87	68.65	57.32	52.83	……	……	58
59	614.63	53.94	138.49	81.09	64.00	57.28	98.12	70.31	59.38	55.23	……	……	59
60	626.92	56.83	141.89	83.59	66.43	59.85	99.51	72.15	61.65	57.85	……	……	60

習題答數

第　一　章

練　習　一

2. 1/4; 5/12; 2/3.

3. 1/36; 1/3[illegible]; 1/18.

4. 0.72; 0.18; 0.1.

5. 1/221; 1/221; 4/663; 4/663; 8/663.

6. 1/8; 3/8;

7. 1/552[illegible]; 2/5525; 16/5525.

8. (5) 1/169; 1/169; 1/169; 1/169; 2/169;
   (7) $(1/13)^3$; $(1/13)^3$; $6(1/13)^3$.

9. 81/25[illegible].

10. 81/125.

11. (a) 3/7; (b) 1/840;
    (c) 4/7; (d) 839/840.

12. 1/6; 1/36; 1/18; 5/18;

13. 26/49.

14. $1/2^n$; $n/2^n$.

15. 5/12.

16. 0.224.

練　習　三

2. $l_{19}=97,779$; $d_{19}=681$; $p_{19}=0.9930$.

練　習　四

1. (a) 0.8[illegible]0[illegible]; (b) 0.0097; (c) 0.2365; (d) 0.0851; (e) 0.058[illegible]; (f) 0.0472

5. 0.5733.

練　習　六

1. $d_{90}=400$; $q_{90}=0.4706$; $p_{90}=0.5294$; $e_{90}=0.89$; $\mathring{e}_{90}=1.39$; 等等.

2. (a) 0.99035; (b) 0.00336; (c) [illegible].00408.

4. 0.7 或 0.8.

5. 0.[illegible]265; 0.1184.

6. 0.1261; 0.5525; 0.09[illegible]0.

8. 73-74; 0.0306.

第二章

練習七

2. $1161.75; $888.89.

3. (a) $8979.58; $22,225.65; (b) $ 08.92; $32.06.　4. $14, 33.97.

練習八

2. $2626.03.　3. (c) 0.677232.

4. (a) v^n; (b) ${}_n p_x$; (c) 1.　5. $2383.40.

8. $11,545.18.　9. (a) $258.30; (b) $236.05.

10. (a) 9.2660898, (b) 17.89059.

練習九

1. $11,163.24; $11,763.24; $8720.79; $870.79.

2. $996.77.　3. $1109.65.

4. $ 8 .27.　10. $l_{21}=95,530$; $l_{20}=96,031$.

練習十

1. (b) (1) 1 .30613; (2) 10.759 0; (3) 11.2 968.

5. (a) $ 82.70; (b) $933.62.

7. $1057.2 ; $105 . 4.　8. $ 22.39

9. $q_{90}=0.167$, $p_{90}=0.833$; $a_{90}=1.972$; $e_{90}=2.50$; $\mathring{e}_{90}=3.00$.

練習十一

. (b) 25.57957.　4. $880.28.

5. $4 9. 0.　6. $\dfrac{10,000 D_{25}}{N_{18}-N_{22}}$.

7. $41,187.60.

8. $50\dfrac{N_{30}+N_{40}}{D_{30}}$.　9. $437.60.

10. $9,878.30.

練習十二

4. $49.10.　　5. (a) $\frac{10N_{24}+S_{25}-S_{40}}{D_{24}}$; (b) $\frac{100N_{30}-5S_{31}+5S_{51}}{D_{30}}$.

練習十三

1. (a) $20,[illegible]91.72; (b) $19,691.72.　　2. $1,811.37.

3. $8.69; $25.83.　　4. $25.32.

練習十四

3. $7047.29.　　4. $\frac{N^{4\%}_{30}-N^{4\%}_{40}+\frac{D^{4\%}_{40}}{D^{5\%}_{40}}\cdot N^{5\%}_{40}}{D^{4\%}_{30}}$.

5. (a) $2232.65; (b) $226[illegible].65; (c) $2277.65; (d) $228[illegible].65.

7. 1.　　1[illegible]. (b) $[illegible]9.20; (c) $56.71.

第三章

練習十五

2. (a) $1[illegible]9.92; (b) $1640.14; (c) $3[illegible]8[illegible].13.　　3. $4877.54.

練習十七

1. (a) $[illegible]3.81; (b) $40.61; (c) $19.89.

$[illegible]9[illegible].24; $103.51; $96.16.

練習十八

3. (a) $8.59, (b) $15.45; (c) $1[illegible].98.

練習十九

2. $[illegible]8.90; $[illegible]1.18; $31.65.

2.(a) \$ 87.02; (b) \$ 52.87; (c) \$ 32.35. 4. \$ 181.91.

練習二十

2. \$ 38.78. 3. \$ 67.99. 4. \$ 41.47.

練習二十一

4.(a) \$ 127.29; (b) \$ 27.85. 6.(b) \$ 94.48.

練習二十二

2. $\dfrac{M_x}{N_x-N_{x+20}-R_x+R_{x+20}+20M_{x+20}}$.

3. (a) $\dfrac{M_x}{D_x-M_x}$; (b) 0.58868 . \$ 187.33

練習二十三

1. \$ 0.08. 8. $\dfrac{1000\,a_{10|}\cdot M_x}{N_x}$.

5. $\dfrac{1000\,D_{x+n}}{D_x-M_x+M_{x+n}}$. 8.(a) $v-\dfrac{a_{x:\,20|}}{a_{x:\,20|}}$; (b) $\dfrac{a_{x:\,21|}}{a_{x:\,20|}}-1$.

10. \$ 1474.93. 11. 1.

13. $a_x=60(1-.01x)$; $P_x=\dfrac{x}{60(100-x)}$.

第四章

練習二十四

1. 保險費 0.186278; 準備金 0.18112, 0.1715, 等等.

2. 保險費 0.00763552; 準備金 0.0001, 0.0001, 等等.

練習二十五

2.(a) 0; (b) A_{x+n}; (c) 1. 4.(a) \$ 19.91; (b) \$ 83.17;
(c) \$ 177.78; (d) \$ 1.07.

5. (a) \$89.42; (b) \$181.14 (c) \$396.?1; (d) \$370.55.

6 (a) \$?66.16; (b) \$847.98; (c) \$503.?8.

練習二十六

2. (a) \$40.91; (b) \$83.17; (c) \$177.78; (d) \$1.02.

3. $\frac{M_{x+25}-M_{x+30}+D_{x+30}}{D_{x+35}}$.

4. \$255.93.

5. (a) \$143.54; (b) \$410.03; (c) \$815.00; (d) \$350.93.

練習二十七

3. (a) \$46.75 1?; (b)與(c) \$54 .83.

4. (a)與(b) \$358.31.

練習二十八

2. $\frac{_tV_x}{1-{_tV_x}}$; ?$({_tV_x})$.

3. $\frac{_tV_x}{1-{_tV_x}}$; 1/2; ?/3.

練習二十九

4. 第十年期末準備金 \$72.78.

6. (b) \$179.47.

練習三十

3. 0.18734.

5. \$38.35.

練習三十二

3. 第五年期末準備金 \$447.13.

4. (a) \$ 7.7?1; \$ 8.2775; \$ 8.83?8; \$ 19.?891; \$ 20.1535; \$ 20.8617

(b) \$ 3.64; \$?6.41; \$?8.40; \$ 49.66; \$ 60.26; \$?0.24.

練習三十三

1. 第三年 \$7.24; \$?4.24; 344 日.

2. \$?58.00; \$353.49; 10年繳清定期壽險及 \$245.27 生存保險.

3. \$ .90.? ; \$?97.11; 5年繳清定期壽險及 \$670.81 生存保險.

練習三十四

1. $9.83; $16.12; $22.66; $29.[illegible]1; $3[illegible].41.

練習三十五

2. $322.06.　　3. $726.02.　　6. 0.[illegible]761.

第五章

練習三十六

2. (a) $17.0[illegible]; (b) $10.30[illegible].

3. α=18.46[illegible]; β=58.[illegible]66[illegible]; 第十年期末準備金 $577.02.

練習三十七

1. (a) $51.58; (b) $88.87.　　2. (a) $51.58; (b) $88.87.

3. P=87.0196; α=8.6[illegible]37; β=97.7907; 均衡純保費制 $416.14;
一年定期修正制 $396.77.

5. (a) 8.1[illegible]19; 128.954; (b) $[illegible]37.92.

練習三十八

2. (a) 74.4947; 89.3881; (b) 與 (c) $4[illegible]6.98.

3. $[illegible]. [illegible]; $816.33.

5. 保險費 78.2906, 87.8[illegible]49;
準備金 $73.22, $159.53, 等等.

7. $[illegible]42.88, $544.99, 等等.

練習三十九

2. (a) 3[illegible].697[illegible]; 23.0101; (b), (c), (f), (g) $468.57;
(d) 及 (e) 15.21[illegible]3.

3. (a) 31.[illegible]69; (b), (c), (d) $240.70.

保單	α_0	β_0	第五年修正準備金
十年儲蓄壽險	75.[illegible]6	88.46	439.[illegible]6
限期十年繳費之十五年儲蓄壽險	64.56	76.46	371.00
限期十年繳費之二十年儲蓄壽險	55.10	67.00	316.99
限期十年繳費之六十歲養老壽險	47.82	59.72	275.33
限期十年繳費六十五歲養老壽險	42.41	54.31	244.45

6. (a) 2.7800; (b) 8.[illegible]48; (c) 20.6879.

7. $ 36[illegible].17; $ [illegible]52.[illegible]0.

練習四十

3. (a) $ 49.70; $ 37.08; (b) $ 21.58; $ 12.7[illegible]; (c) $ 13.51; $ 1.49.

5. $ 458.37; $ 41.23; 等等.

6 保險費 72.4723, 83.2649; 準備金 $ 37.40, $ 154.43, 等等.

7. $ 373.66; $ 850.55.

練習四十一

1. (a) 16.720[illegible]; 30.9358; 20.9021; (b) $ 2[illegible]3.33; (c) $ 875.37.

2. (a) 10.1626; 33.1743; (b) $ 256.31.

練習四十二

3. (a) 31.997[illegible]; 14.1164; (b) $ 167.02; (c) 5.9745.

4. (a) 7.6804; (b) 2.0459.

練習四十三

1. 13.3154; 78.30[illegible]0, 33.5720; 第五年期末準備金 $ 105.94.

2. 屬於(c)類; 7.5467; 18.5237; 17.7241; 第十年期末準[illegible]金 $ 120.22.

3. 9.4382; 24.6411; 23.5028; 第五年期末準備金 $ 65.46.

練習四十四

1.

保單	α_I	β_I	第五年修正準備金
十年儲蓄壽險	$ 70.9[illegible]	$ 88.83	$ 436.83
限十年繳費之十五年儲蓄壽險	58.85	76.73	357.83
限十年繳費之二十年儲蓄壽險	49.29	67.08	312.[illegible]2

2.

保單	α_1	β_I	第十年修正準備金
二十年儲蓄壽險	$ 22.91	$ 40.82	$ 385.18
三十年儲蓄壽險	8.64	26.52	2[illegible]2.07
二十五年儲蓄壽險	14.12	32.00	272.18
限廿年繳費之二十年儲蓄壽險	14.75	32.63	23[illegible].23

6. 均衡保費制 \$ 86.68; 一年定期修正制 \$ 8.14; \$ 97.44; 終身壽險修正制 \$ 78.2 , \$ 87.8 ; 限二十年繳費終身壽險修正制 \$ 70.?5, \$ 88. 3.

9. (a) \$ 177,927.17; (b) \$ 1 0, 34.80; (c) \$ 1,491,848; (d) \$ 31.751.

10. 十年.　　11. \$ 29.418.　　12. \$ 39.733.

第 六 章

練 習 四 十 五

1. \$ 8 19.　　2. \$ 92.95.

3 (a) \$ 36.91; (b) \$ 22.01.

練 習 四 十 六

1. (a) \$ 2.67, \$ 18.30, \$ 30.95; \$ 45.78; \$ 70.94; (b) \$ 5.50.

2. (a) \$ 1.57; \$ 52.12; \$ 98.32; \$ 139.25; \$ 181.8 ; (b) \$ 6.30.

練 習 四 十 七

2. \$ 38.4 ; \$ 45.37.　　3. 0.01572; 0.08575.

符號索引

下列數字表示符號定義所見之節數

英 漢 名 詞 索 引

下列數字表示名詞定義所見之節數