Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 12

Der Modul der Kähler-Differentiale

Der Tangentialraum zu einer polynomialen Abbildung $f\colon \mathbb{A}_K^n \to \mathbb{A}_K^m$ mit dem Nullstellengebilde $V = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ an einem Punkt $P \in V$ ist

$$T_P V := \operatorname{kern}\left(\operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P\right) = \{v \in \mathbb{A}_K^n \mid \operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P(v) = 0\}.$$

Wenn P ein regulärer Punkt der Abbildung ist und man den Satz über implizite Abbildungen anwenden kann, so handelt es sich um einen linearen Unterraum, dessen Dimension mit der (Mannigfaltigkeits-)Dimension von V übereinstimmt. Diese Konstruktion ist extrinsisch, sie hängt von der Einbettung von V in den affinen Raum ab. Wir möchten eine intrinsische Version des Tangentialraumes vorstellen, der nur von V bzw. dem affinen Koordinatenring abhängt. Dazu führen wir den Modul der Kähler-Differentiale ein, der für jede R-Algebra A eine duale Version des Tangentialraumes liefert.

Definition 12.1. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul. Dann heißt eine R-lineare Abbildung

$$\delta\colon A \longrightarrow M$$

mit

$$\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a)$$

für alle $a, b \in A$ eine R- *Derivation* (mit Werten in M).

Die dabei verwendete Regel nennt man *Leibniz-Regel*. Oft ist $M = A$. Für den Polynomring $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ sind beispielsweise die i-ten (formalen) partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial X_i}$$

R-Derivationen von A nach A. Die Menge der Derivationen von A nach M ist in natürlicher Weise ein A-Modul. Er wird mit $\operatorname{Der}_R(A, M)$ bezeichnet.

Definition 12.2. Es sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Der von allen Symbolen $d(a)$, $a \in A$, erzeugte A-Modul, modulo den Identifizierungen

$$d(ab) = ad(b) + bd(a) \text{ für alle } a, b \in A$$

und

$$d(ra + sb) = rd(a) + sd(b) \text{ für alle } r, s \in R \text{ und } a, b \in A,$$

heißt *Modul der Kähler-Differentiale* von A über R. Er wird mit

$$\Omega_{A|R}$$

bezeichnet.

Bei dieser Konstruktion startet man also mit dem freien A-Modul F mit da, $a \in A$ als Basis und bildet den A-Restklassenmodul zu demjenigen Untermodul, der von den Elementen

$$d(ab) - ad(b) - bd(a) \, (a, b \in A)$$

und

$$d(ra + sb) - rd(a) - sd(b) \, (r, s \in R \text{ und } a, b \in A)$$

erzeugt wird. Die Abbildung

$$d \colon A \longrightarrow \Omega_{A|R}, \, a \longmapsto d(a) = da,$$

heißt die *universelle Derivation*. Man prüft sofort nach, dass es sich um eine R-Derivation handelt.

Lemma 12.3. *Sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Dann besitzt der A-Modul $\Omega_{A|R}$ der Kähler-Differentiale die folgende universelle Eigenschaft. Zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation*

$$\delta \colon A \longrightarrow M$$

gibt es eine eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung

$$\epsilon \colon \Omega_{A|R} \longrightarrow M$$

mit $\epsilon \circ d = \delta$.

Beweis. Für jedes da, $a \in A$, muss $\epsilon(da) = \delta(a)$ sein. Da die da ein A-Modul-Erzeugendensystem von $\Omega_{A|R}$ bilden, kann es maximal nur einen solchen Homomorphismus geben. Sei F der freie Modul zur Basis da, $a \in A$. Die Zuordnung $\tilde{\epsilon}(da) = \delta(a)$ legt nach dem Festlegungssatz einen A-Modulhomomorphismus

$$\tilde{\epsilon} \colon F \longrightarrow M$$

fest. Es ist $\Omega_{A|R} = F/U$, wobei U der von den Elementen erzeugte Untermodul ist, die die Leibnizregel und die Linearität ausdrücken. Da δ eine Derivation ist, wird U unter $\tilde{\epsilon}$ auf 0 abgebildet. Daher gibt es nach dem Homomorphiesatz eine eindeutige A-lineare Abbildung

$$\epsilon \colon \Omega_{A|R} \cong F/U \longrightarrow M$$

mit

$$\epsilon(da) = \tilde{\epsilon}(da) = \delta(a).$$

$\square$

Diese Aussage kann man auch so ausdrücken, dass eine natürliche A-Modulisomorphie

$$\operatorname{Der}_R(A, M) \cong \operatorname{Hom}_A\left(\Omega_{A|R}, M\right)$$

vorliegt. Insbesondere ist

$$\operatorname{Der}_R(A, A) \cong \operatorname{Hom}_A\left(\Omega_{A|R}, A\right) = {\Omega_{A|R}}^*,$$

wobei rechts der Dualmodul genommen wird.

LEMMA 12.4. *Sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $\Omega_{A|R}$ der Modul der Kähler-Differentiale. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist $dr = 0$ für alle $r \in R$.*
(2) *Man kann*

$$\Omega_{A|R}$$

als den Restklassenmodul des freien A-Moduls zur Basis da, $a \in A$, modulo dem Untermodul, der von den Leibnizrelationen und von dr, $r \in R$, erzeugt wird, beschreiben.
(3) *Bei $A = R[x_1, \ldots, x_n]$ ist dx_i, $i = 1, \ldots, n$, ein A-Modulerzeugendensystem von $\Omega_{A|R}$.*
(4) *Sei $A = R[x_1, \ldots, x_n] = R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. Für ein Polynom $F \in R[X_1, \ldots, X_n]$ und das zugehörige Element $f = F(x_1, \ldots, x_n) \in A$ gilt in $\Omega_{A|R}$ die Beziehung*

$$df = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)dx_n,$$

wobei $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ die i-te partielle Derivation bezeichnet.
(5) *Zu einem kommutativen Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array},$$

wobei die Pfeile Ringhomomorphismen repräsentieren, gibt es eine eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung

$$\Omega_{A|R} \longrightarrow \Omega_{B|S},\ da \longmapsto d\varphi(a).$$

Beweis. (1) Sei $r \in R$. Wegen der R-Linearität ist $d(r1) = rd(1)$. Wegen der Produktregel ist

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = 1d(1) + 1d(1),$$

so dass durch Subtraktion $d(1) = 0$ folgt.
(2) Wir zeigen, dass der in Frage stehende Untermodul V mit dem Untermodul U übereinstimmt, der von allen Leibnizrelationen und von

den Linearitätsrelationen erzeugt wird. Nach Teil (1) ist die Inklusion $V \subseteq U$ klar. Für $a, b \in A$ und $r, s \in R$ gilt modulo V die Gleichheit

$$d(ra + sb) = d(ra) + d(sb) = rda + adr + sdb + bds = rda + sdb,$$

so dass also auch die Linearitätsrelationen zu V gehören.

(3) Dies folgt aus der Linearität und der Leibnizregel.

(4) Beide Seiten sind R-linear, so dass es genügt, die Aussage für Monome zu zeigen. Für Monome beweist man die Aussage durch Induktion über den Gesamtgrad des Monoms.

(5) Da B über $\varphi\colon A \to B$ eine A-Algebra ist, ist auch $\Omega_{B|S}$ ein A-Modul. Die Verknüpfung

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{d} \Omega_{B|S}$$

ist eine R-Derivation, wie man unmittelbar nachrechnet. Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\Omega_{A|R}$ gibt es eine eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \Omega_{A|R} \longrightarrow \Omega_{B|S}$$

mit $d\varphi(a) = \tilde{\varphi}(da)$.

□

LEMMA 12.5. *Es sei R ein kommutativer Ring und $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen über R. Dann ist der Modul der Kähler-Differentiale der freie R-Modul zur Basis*

$$dX_1, dX_2, \ldots, dX_n\,.$$

Die universelle Derivation ist bezüglich dieser Basis durch

$$A \longrightarrow AdX_1 \oplus \cdots \oplus AdX_n,\ F \longmapsto dF = \frac{\partial F}{\partial X_1} dX_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial X_n} dX_n,$$

gegeben.

Beweis. Es sei G der von den Symbolen dX_i erzeugte freie R-Modul. Die Abbildung

$$\varphi\colon G \longrightarrow \Omega_{A|R},$$

die das Basiselement dX_i auf das Differential dX_i schickt, ist nach Lemma 12.4 (3) surjektiv. Die i-te partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\colon A \longrightarrow A,\ F \longmapsto \frac{\partial F}{\partial X_i},$$

ist eine R-Derivation, so dass es aufgrund der universellen Eigenschaft des Moduls der Differentialformen eine A-lineare Abbildung

$$p_i\colon \Omega_{A|R} \longrightarrow A$$

mit $d \circ p_i = \frac{\partial}{\partial X_i}$ gibt. Dabei ist $p_i(dX_i) = 1$ und $p_i(dX_j) = 0$ für $j \neq i$. Diese Abbildungen ergeben zusammen eine A-lineare Abbildung

$$p = p_1 \times \cdots \times p_n \colon \Omega_{A|R} \longrightarrow A^n \cong G,$$

für die $p \circ \varphi = \mathrm{Id}_G$ gilt. Daher ist φ auch injektiv. □

Im Allgemeinen ist der Modul der Kähler-Differentiale nicht frei. Wenn R ein Körper und A der lokale Ring zu einem Punkt auf einer Varietät ist, so charakterisiert die Freiheit des Moduls sogar, dass der Punkt glatt ist, siehe Satz 21.6 und Satz 21.7.

Lemma 12.6. *Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Dann ist*

$$\Omega_{A_S|R} \cong \left(\Omega_{A|R}\right)_S .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 13.9. □

Lemma 12.7. *Es sei R ein kommutativer Ring und es seien A und B kommutative R-Algebren und*

$$\varphi \colon A \longrightarrow B$$

ein R-Algebrahomomorphismus. Dann ist die Sequenz

$$\Omega_{A|R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B|R} \longrightarrow \Omega_{B|A} \longrightarrow 0$$

von B-Moduln exakt. Dabei geht $da \otimes b$ auf $bd\varphi(a)$ und db (in $\Omega_{B|R}$) auf db (in $\Omega_{B|A}$).

Beweis. Die Surjektivität rechts ist klar. Zur Exaktheit an der zweiten Stelle verwenden wir die Beschreibung aus Lemma 12.4 (2). Die beiden Moduln $\Omega_{B|A}$ und $\Omega_{B|R}$ besitzen das gleiche Erzeugendensystem und auch die Leibnizrelationen sind für beide gleich. Der Modul $\Omega_{B|A}$ ergibt sich aus $\Omega_{B|R}$ gerade dadurch, dass man den von den da, $a \in A$, erzeugten B-Untermodul zu 0 macht. Dieser Untermodul ist genau das Bild der Abbildung links. □

Abbildungsverzeichnis