Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 4

Übungsaufgaben

Die beiden ersten Aufgaben sollen dazu anregen, über die Güte von Dezimalbruchentwicklungen zu diskutieren.

Aufgabe 4.1. Stimmen die beiden reellen Zahlen

$$\frac{\pi\sqrt{163}}{3} \text{ und } \ln 640320$$

überein?

Aufgabe 4.2. Stimmen die beiden reellen Zahlen

$$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}} \text{ und } \sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

überein?

Aufgabe 4.3. Es sei $q = a/b$ eine rationale Zahl in gekürzter Darstellung. Zeige, dass die Dezimaldarstellung von q genau dann abbricht, wenn in der Primfaktorzerlegung des Nenners nur die Primzahlen 2 und 5 vorkommen.

Aufgabe 4.4. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 4.5.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 4.6. Sei a eine reelle Zahl. Zeige, dass die Gleichung $x^2 = a$ höchstens zwei Lösungen in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 4.7.*

Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe 4.8. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 4.9. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 4.10. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{10^n}$$

gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 4.11.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Die folgende Aussage nennt man auch das *Quetschkriterium für Folgen*.

Aufgabe 4.12.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Für die folgende Aufgabe können Sie bekannte Eigenschaften der Sinusfunktion verwenden.

Aufgabe 4.13.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+\,.$$

Aufgabe 4.14. Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4.15. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

Aufgabe 4.16. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 4.17. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge und $c \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $(c \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

ist.

Aufgabe 4.18.*

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle konvergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$. Zeige, dass $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$$

ist.

Aufgabe 4.19. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen. Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}.$$

Aufgabe 4.20. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten Folge.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 1.13 hilfreich.

Aufgabe 4.21. Zeige, dass die reelle Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 4.22. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n+5\sqrt{n}+7}{-5n+3\sqrt{n}-4}$$

definierten reellen Folge.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen. Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 4.23.*

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt (für $n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 \;=\; (-1)^n.$$

Aufgabe 4.24. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n \;=\; \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 4.25. Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 4.26. Betrachte die folgenden (Pseudo)-Definitionen.

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$.

(1) Man sagt, dass die Folge gegen x *hypervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Beziehung

$$|x_n - x| \le \epsilon.$$

(2) Man sagt, dass die Folge gegen x *supervergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon \geq 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \le \epsilon$$

gilt.

(3) Man sagt, dass die Folge gegen x *megavergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ und jedes $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, die Beziehung

$$|x_n - x| \le \epsilon$$

gilt.

(4) Man sagt, dass die Folge gegen x *pseudovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \le \epsilon$$

gilt.

(5) Man sagt, dass die Folge gegen x *semivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, derart, dass die Beziehung

$$|x_n - x| \le \epsilon$$

gilt.

(6) Man sagt, dass die Folge gegen x *protovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$|x_n - x| \le \epsilon$$

gilt.

(7) Man sagt, dass die Folge gegen x *quasivergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Es gibt ein $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \le \epsilon$$

gilt.

(8) Man sagt, dass die Folge gegen x *deuterovergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$x_n - x \leq \epsilon$$

gilt.

Vergleiche diese Definitionen mit der Definition von Konvergenz. Worin besteht der Unterschied? Welche Bedeutung haben die einzelnen Definitionen? Welche Definitionen sind zueinander äquivalent, zwischen welchen besteht eine Implikation (Beweis oder Gegenbeispiel)? Für welche Definitionen ist das x eindeutig bestimmt?

Aufgabe 4.27.*

Betrachte die Folge $x_n = (-1)^n$ und $x = -1$. Welche der Pseudokonvergenzbegriffe (siehe Anhang) treffen zu?

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 3.25 an.

Aufgabe 4.28. Zwei Personen A und B spielen Polynome-Erraten. Dabei denkt sich A ein Polynom $P(x)$ aus, wobei alle Koeffizienten aus $\mathbb{N}$ sein müssen. Person B darf fragen, was der Wert $P(n_1), P(n_2), \ldots, P(n_r)$ zu gewissen natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ ist, vergleiche Aufgabe 3.25. Zeige, dass die Abfrage der Werte zu fixierten Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ (also unabhängig von vorhergehenden Teilantworten) im Allgemeinen keine erfolgreiche Strategie ist.

Abbildungsverzeichnis