Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 48

Übungsaufgaben

Aufgabe 48.1.*

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei u_i, $i \in I$, eine Basis von U und v_j, $j \in J$, eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Gesamtfamilie $u_i, i \in I, v_j, j \in J$, genau dann eine Basis von V ist, wenn $[v_j]$, $j \in J$, eine Basis des Restklassenraumes V/U ist.

Aufgabe 48.2. Wir betrachten $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Man mache sich klar, dass in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ die Gleichheit $[r] = [s]$ für zwei reelle Zahlen r, s genau dann gilt, wenn die Differenz $r - s$ eine rationale Zahl ist.

Aufgabe 48.3. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V. Zeige

$$V_{i+1}/V_i \cong K$$

für $i = 0, \ldots, n-1$.

Aufgabe 48.4. Der K-Vektorraum V sei die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2 und es seien $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ Untervektorräume. Zeige

$$V_1 \oplus V_2/\left(U_1 \oplus U_2\right) \cong V_1/U_1 \oplus V_2/U_2.$$

Man interpretiere die Aussage der folgenden Aufgabe im Kontext des Faktorisierungssatzes.

Aufgabe 48.5.*

Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K mit dem Rang r. Zeige, dass es eine $r \times n$-Matrix A und eine $m \times r$-Matrix B, beide mit dem Rang r, mit $M = B \circ A$ gibt.

Aufgabe 48.6. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Zeige, dass dies eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

auf dem Restklassenraum V/U mit der Eigenschaft induziert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ V/U & \stackrel{\varphi_{V/U}}{\longrightarrow} & V/U \end{array}$$

kommutiert.

Aufgabe 48.7. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Es sei $u_1, \ldots, u_s$ eine Basis von U und $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ eine Basis von V, bezüglich der φ durch die Matrix M beschrieben werde. Durch welche Matrix wird die in Aufgabe 48.6 definierte lineare Abbildung

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

bezüglich der Basis $[v_1], \ldots, [v_s]$ von V/U beschrieben?

Zur folgenden Aufgabe vergleiche man Aufgabe 16.21.

Aufgabe 48.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Es sei φ_U die Einschränkung von φ auf U und

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

die in Aufgabe 48.6 definierte lineare Abbildung. Zeige

$$\det \varphi = \det \varphi_U \cdot \det \varphi_{V/U} .$$

Aufgabe 48.9. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und es sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Untervektorraum. Es sei φ_U die Einschränkung von φ auf U und

$$\varphi_{V/U} \colon V/U \longrightarrow V/U$$

die in Aufgabe 48.6 definierte lineare Abbildung. Zeige, dass für das charakteristische Polynom die Beziehung

$$\chi_\varphi = \chi_{\varphi_U} \cdot \chi_{\varphi_{V/U}}$$

gilt.

AUFGABE 48.10. Es sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$ der reelle Vektorraum aller Folgen. Zeige, dass die folgenden Teilmengen Untervektorräume sind.

(1) Die Menge der konstanten Folgen.
(2) Die Menge $\mathbb{R}^{(\mathbb{N}_+)}$ der Folgen, für die nur endlich viele Folgenglieder von 0 verschieden sind.
(3) Die Menge F der Folgen, die bis auf endlich viele Folgenglieder konstant sind.
(4) Die Menge E der Folgen, die nur endlich viele verschiedene Werte haben.
(5) Die Menge der konvergenten Folgen.
(6) Die Menge N der Nullfolgen.

Welche Beziehungen gelten zwischen diesen Untervektorräumen?

AUFGABE 48.11. Wir betrachten die beiden reellen Folgen

$$x_n = \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } n \text{ gerade}\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und

$$y_n = \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } n \text{ ungerade}\,, \\ 0\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

und wir verwenden einige Bezeichnungen aus Aufgabe 48.10.

(1) Zeige, dass die beiden Folgen x_n und y_n in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/\mathbb{R}^{(\mathbb{N}_+)}$ linear unabhängig sind.
(2) Zeige, dass die beiden Folgen x_n und y_n in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/F$ linear abhängig sind.
(3) Wie sieht es in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}/N$ aus?

AUFGABE 48.12. Es sei $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$ der reelle Vektorraum aller konvergenten Folgen und

$$U \subseteq W$$

der Untervektorraum der Nullfolgen. Zeige

$$W/U \cong \mathbb{R}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 48.13. (2 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und den Untervektorraum

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1 \subset \mathbb{C}.$$

Zeige, dass im Restklassenraum $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ zwei komplexe Zahlen genau dann gleich werden, wenn ihre Imaginärteile übereinstimmen.

Aufgabe 48.14. (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und U_1, U_2, U seien Untervektorräume. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V/U$$

die kanonische Projektion. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Für die Bildräume gilt
$$\varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) = 0.$$
(2) Es ist
$$U_1 \cap (U_2 + U) \subseteq U.$$
(3) Es ist
$$(U_1 + U) \cap (U_2 + U) \subseteq U.$$

Aufgabe 48.15. (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum zusammen mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ und es sei $T \subseteq V$ der Ausartungsraum. Zeige, dass auf dem Restklassenraum V/T ein symmetrische Bilinearform $\langle -, - \rangle'$ mit

$$\langle [v], [w] \rangle' = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in V$ existiert.

Aufgabe 48.16. (6 (1+3+2) Punkte)

Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V und es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir definieren auf E eine Relation $\sim$ durch

$$P \sim Q \text{ genau dann, wenn } \exists v \in U \text{ mit } P = Q + v\,.$$

(1) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Zeige, dass $F := E/\sim$ ein affiner Raum über dem Restklassenraum V/U ist.
(3) Zeige, dass die kanonische Projektion
$$E \longrightarrow E/\sim$$
eine affine Abbildung ist.