$$x-z=a,$$

$$y-z=b,$$

表二族平面包含此等直線.

通解爲$\phi(x-z, y-z)=0$,代表族中直線經過曲線

$$\phi(x, y)=0, z=0$$

者所組成之曲面.

若予一確定之曲線,例如

$$x^2+y^2=4, z=0$$

一圓,則吾人可得一相當之特解.

$$(x-z)^2+(y-z)^2=4,$$

代表族中經過此圓之直線所組成之橢柱面.

例二. $zp=-x.$ (第112節,例二)

輔助方程式爲

$$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{0}=-\frac{dz}{x},$$

其二解爲 $x^2+z^2=a, y=b.$

通解$\phi(x^2+z^2, y)=0$表一旋轉曲面,由族中曲線(在本題爲圓)與曲線

$$\phi(x^2, y)=0, z=0.$$

相交者而成.

例三. 求諸曲面,已知其切面自z軸截一定長k.

在(x, y, z)點之切面為

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

命　$X=Y=0,\ Z=z-px-qy=k,$

輔助方程式為

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z-k},$$

其解為　$y=ax,\quad z-k=bx,$

通解$\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z-k}{x}\right)=0$,表頂點為$(0,0,k)$之任一錐面,此等面易知其有題中所要之性質.

習　題　一

求下列各題之通解[比較第十一章習題一]:

(1)　$xp+yq=z.$

(2)　$(mz-ny)p+(nx-lz)q=ly-mx.$

(3)　$(y^2+z^2-x^2)p-2xyq+2xz=0.$

(4)　$yzp+zxq=xy.$

(5)　$(y+z)p+(z+x)q=x+y.$

(6)　$(z^2-2yz-y^2)p+(xy+xz)q=xy-xz.$

(7)　$p+3q=5z+\tan(y-3x).$

(8) $zp-zq=z^2+(y+x)^2$.

(9) 求第一題之一解,表經過拋物線 $y^2=4x$, $z=1$ 之一曲面者.

(10) 求第四題之最普通解,代表一二次曲面者.

(11) 求證若第六題之解,代表一球面,則球心在原點.

(12) 求曲面,已知其所有法線俱交 z 軸.

124. 通解之解析上證明. 吾人今將由 $\phi(u,v)=0$ 消去隨意函數 ϕ,因而用解析法證明,如有 $u=a$ 及 $v=b$ 爲輔助方程式

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

之二獨立解,* 則此式可合於 $Pp+Qq=R$.

視 y 爲常數,求 $\phi(u,v)=0$ 對於 x 之偏微分; z 將隨 x 而有相當之變化,於是得

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

即
$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0.$$

*如 u 及 v 不爲獨立,則 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 及他二相類似之式,均恆等於零[見愛德華士 (Edwards) 著 Differe tial Calculus 第 510 節],而使方程式 (1) 化爲 $0=0$.

同理，$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0.$$

由此二式，消去比值 $\frac{\partial\phi}{\partial u}:\frac{\partial\phi}{\partial v}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

即 $$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right)p+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)q=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\quad\cdots\cdots(\ )$$

但由 $u=a$，$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0.$$

故由以 $u=a$ 爲解之輔助方程式，而得

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

同理 $$P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}=0.$$

於是 $$P:Q:R=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}\right):\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$
$$:\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

故 (1) 式變爲所求之方程式 $Pp+Qq=R$.

125. 特解. 時或有人謂蘭格倫日平直方程式之所有解，全包括於通解 $\phi(u,v)=0$ 內，其實並不如此.

例如　方程式

$$p-q=2\sqrt{z}$$

之輔助方程式爲

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{2\sqrt{z}},$$

故吾人可取$u=x+y, v=x-\sqrt{z}$,而通解爲

$$\phi(x+y, x-\sqrt{z})=0.$$

$z=0$雖顯然不能以u及v之函數表之,但合於偏微分方程式.

此類解名曰特解,於下列習題中,將見特解發見於方程式含有一項不能展成正整冪級數者.

喜爾*於其近日之論文中,示明凡具有特解之時,則對於蘭格倫日類之輔助方程式,施以適宜之積分法,均可將其求出.喜氏並從事於積分之重行分類,此點之重要,已由福賽司(Forsyth)指出.†

習題二

證下列各方程式以所予之各式爲其通解及特解:

(1) $p+2qz^{\frac{1}{3}}=3z^{\frac{2}{3}}$; $\phi(x-z^{\frac{1}{3}}, y-z^{\frac{2}{3}})=0$; $z=0$.

(2) $p+q\{1+(z-y)^{\frac{1}{3}}\}=1$; $\phi\{x-z, 2x+3(z-y)^{\frac{2}{3}}\}$; $z=y$.

*見 (Proc. London Math. Soc. 1917).

†見 (Proc. London Math. Soc. 1905—6).

(3) $\{1+\sqrt{(z-x-y)}\}p+q=2$;

$$\phi\{2y-z,\ y+2\sqrt{(z-x-y)}\}=0;$$

$z=x+y$. [克賴斯塔耳 (Chrystal)].

(4) 於克賴斯塔耳方程式中, 命 $(z-x-y)^{\frac{1}{2}}=w$, 求得

$$w\left[2(1+w)\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial w}{\partial y}+1\right]=0.$$

此式示明 $z-x-y=0$ 爲原方程式之一解. [喜爾]

(5) 求證克賴斯塔耳方程式[第三題]之蘭氏輔助方程式(Lagrangian subsidiary equations)可書爲

$$\frac{dx}{dy}=1+(z-x-y)^{\frac{1}{2}};\ \frac{dz}{dy}=2.$$

因而推論 $\frac{d}{dy}(z-x-y)=-(z-x-y)^{\frac{1}{2}}$,

該式以 $z-x-y=0$ 爲其一特解.

(6) 試摹擬習題 4,5 所示之喜爾氏法, 求方程式

$$p-q=2\sqrt{z}$$

之通解及特解.

126. 含 n 個自變數之平直方程式. 方程式

$$P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3+\cdots\cdots+P_np_n=R.$$

式中 $p_1=\dfrac{\partial z}{\partial x_1}$, $p_2=\dfrac{\partial z}{\partial x_2}$, 等等,而諸 P 及 R 俱爲諸 x 及 z 之函數,其通解爲

$$\phi(u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots u_n)=0$$

式中 $u_1=$ 常數, $u_2=$ 常數,……等等,爲輔助方程式

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\frac{dx_3}{P_3}=\cdots\cdots=\frac{dz}{R}$$

之 n 個獨立解.

此理可仿124節證明之.讀者可作三個變數時之證明.

除通解外,對於例外之方程式,亦有特解存在,如前述含二自變數之款然.

習題三

(1) $p_2+p_3=1+p_1$.

(2) $x_1p_1+2x_2p_2+3x_3p_3+4x_4p_4=0$.

(3) $(x_3-x_2)p_1+x_2p_2-x_3p_3=x_2(x_1+x_3)-x_2^2$.

(4) $x_2x_3p_1+x_3x_1p_2+x_1x_2p_3+x_1x_2x_3=0$.

(5) $p_1+x_1p_2+x_1x_2p_3=x_1x_2x_3\sqrt{z}$.

(6) $p_1+p_2+p_3\{1+\sqrt{(z-x_1-x_2-x_3)}\}=3$.

127. 方程式 $P\dfrac{\partial f}{\partial x}+Q\dfrac{\partial f}{\partial y}+R\dfrac{\partial f}{\partial z}=0$. 若 P, Q, R 爲 x, y, z 但非 f 之函數,上述方程式,可從兩方面觀察之.

例如，　方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+2\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0, \qquad \cdots\cdots(1)$$

吾人可視此式等於三度方程式.

$$p-q=2\sqrt{z}. \qquad \cdots\cdots(2)$$

其通解爲 $\phi(x+y, x-\sqrt{z})=0$, 而 $z=0$ 爲一特解.

反之，視 (1) 式爲四變數方程式，吾人得其通解

$$\phi(f, x+y, x-\sqrt{z})=0.$$

此式等於 $f=\psi(x+y, x-\sqrt{z})$, 其中 ψ 爲一隨意函數，但若

$$f=z, \text{ 則 } \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}+2\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=2\sqrt{z}=2\sqrt{f}.$$

故雖 $f=z=0$ 確爲一解，而 $f=z$ 則非 (1) 式之解.

普遍言之，吾人可證明

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

視爲四度方程式，其中 P, Q, R 不含 f 時，無特解.* 對於任意若干個自變數之一相似定理，亦爲正確.

習　題　四

(1)　若 $f=x$, 求證 $f=0$ 爲一曲面，合於方程式

*參看附錄二.

$$\sqrt{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

因而證明此式若視爲三度，則以 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 爲其三特解，而其通解爲 $\phi(\sqrt{z}-\sqrt{x}, \sqrt{z}-\sqrt{y})=0$.

(2) 求證上題之通解，代表諸曲面經過如下之一種曲線，此種曲線若不能經過原點乃與位標面相切或全在位標面上者.

[提示： 證明 $\frac{dx}{ds}=\sqrt{\left(\frac{x}{x+y+z}\right)}$, 並證明 $x=0$ 時, $dx/ds=0$, x, y, z 俱等於零時除外.]

(3) 求證 $\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial z}{\partial y}=0$, 視爲二度時，代表一族拋物線 $\sqrt{y}=\sqrt{x}+c$, 及其包線，坐標軸 $x=0$, $y=0$; 若視爲三度時，則代表曲面 $z=\phi(y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})$.

128. 非平直方程式. 吾人現將論及方程式之含 p, q 不僅爲一次者，在論述普通方法之前，先討論四種簡易標準式，其“全解”(即含有二隨意常數者)可以用觀察或其他簡易方法求出者. 在 133—135 諸節中，吾人將示明由全解求通解及異解之法.

129. 標準式一 僅含 p 及 q 者. 試取方程式 $q=3p^2$.

其最題之解,乃以p及q為常數,使合於原方程式.例設$p=a, q=3a^2$.

則以
$$dz=p\,dx+q\,dy=a\,dx+3a^2dy,$$
$$z=ax+3a^2y+c.$$

此為全解,包含二隨意常數a及c.

普通言之,$f(p,q)=0$之全解為
$$z=ax+by+c,$$
其中a, b之間,有$f(a, b)=0$之關係.

習題五

(1)　$p=2q^2+1$.　　(2)　$p^2+q^2=1$.

(3)　$p=e^q$.　　(4)　$p^2q^3=1$.

(5)　$p^2-q^2=4$.　　(6)　$pq=p+q$.

130. 標準式二. 僅含p, q及z者. 取方程式
$$z^2(p^2z^2+q^2)=1. \qquad \cdots\cdots(1)$$

設z為$x+ay$(設為u)之一函數,其中a為隨意常數,今姑以此為一試解.

則
$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dz}{du};\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{dz}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=a\frac{dz}{du},$$

代入(1)式,
$$z^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2(z^2+a^2)=1,$$

即 $$\frac{du}{dz}=\pm z(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}},$$

即 $$u+b=\pm\frac{1}{3}(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}},$$

即 $$9(x+ay+b)^2=(z^2+a^2)^3.$$

普通言之,此法乃化 $f(z,p,q)=0$ 爲尋常微分方程式

$$f\left(z,\frac{dz}{du},\ a\frac{dz}{du}\right)=0$$

也.

習 題 六

求下式全解:

(1) $4z=pq.$ (2) $z^2=1+p^2+q^2.$

(3) $q^2=z^2p^2(1-p^2)$ (4) $p^3+q^3=27z.$

(5) $p(z+p)+q=0.$ (6) $p^2=zq.$

131. 標準式三. $f(x,p)=F(y,q)$. 取方程式

$$p-3x^2=q^2-y,$$

以此方程式之二端,俱等於一常數 a 爲一試解,得

$$p=3x^2+a;\ q=\sqrt{(y+a)}.$$

但 $$\begin{aligned}dz&=p\,dx+q\,dy.\\&=(3x^2+a)dx+\sqrt{(y+a)}dy;\end{aligned}$$

故
$$z=x^3+ax+\frac{2}{3}(y+a)^{\frac{3}{2}}+b,$$
爲所求之全解.

習題七

(1) $p^2=q+x$.　(2) $pq=xy$.

(3) $yp=2yx+\log q$.　(4) $q=xyp^2$.

(5) $pe^y=qe^x$.　(6) $q(p-\cos x)=\cos y$.

132. 標準式四. 偏微分方程式之類似克雷洛式者. 在第六章,吾人已示明
$$y=px+f(p)$$
之全原函數爲 $y=cx+f(c)$ 表一族直線.

同理,偏微分方程式
$$z=px+qy+f(p,q)$$
之全解爲　$z=ax+by+f(a,b)$ 表一族平面.

例如,　$z=px+qy+p^2+q^2$

之全解爲　$z=ax+by+a^2+b^2$.

克雷洛式之異解,表直線族之包線.吾人於次節中將見此偏微分方程式之"異解"表平面族之包面,二者蓋相當者也.

習題八

(1) 證 $z=px+qy-2p-3q$ 之全解表所有平面之經過 $(2,3,0)$ 點者.

(2) 證 $z=px+qy+\sqrt{(p^2+q^2+1)}$ 之全解表所有平面去原點爲單位距離者.

(3) 證 $z=px+qy+pq/(pq-p-q)$ 之全解表所有平面其在三位標軸上截距之代數和爲1.

133. 異解. 若一一級尋常微分方程式之全原函數所代表之曲線族有一包線,則此包線之方程式卽爲微分方程式之一異解,此理在第六章中業已示明.關於一一級偏微分方程式所代表之曲面族,有一相似定理,亦爲正確.若此曲面族有一包面,則其方程式名曰"異解,"欲明其確爲一解,吾人僅須注意過包面上之任一點,總有族中之一曲面與之相切,故此面與包面之法線相合,因之包面上任一點之 p 及 q 之值皆與族中之某一面者相同,是以合於原方程式.

吾人已述由 $c-$判別式與由 $p-$判別式求異解之二法,並已示明由此二法亦可求出節點軌跡與切點軌跡,其方程式俱不合於微分方程式,第六章所用之幾

何論據可推之於曲面,惟關於額外軌跡之不屬於異解者,其討論則較繁難耳.*論及包面,則讀者之已了解第六章者,易知由全解及其二導來方程式.

$$f(x, y, z, a, b)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=0$$

中,消去a, b其結果含有此包面;或由微分方程式及其二導來方程式.

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}=0$$

中消去p, q之結果,亦含有此包面.

在實際之習題中,作者應將認爲係異解者,各加以試驗,視其確合於微分方程式與否.

例一.　132節之方程式之全解,爲

$$z=ax+by+a^2+b^2.$$

*見喜爾在 Phil. Trans. (A), 1892 中之一文.

對於a微分之 $0=x+2a$

同理 $0=y+2b.$

消去a, b, $4z=-(x^2+y^2).$

此式易證其合於微分方程式.

$$z=px+qy+p^2+q^2,$$

並知其代表一旋轉拋物面,即全解所表之諸平面之包面也.

例二. 130節之方程式之全解,爲

$$9(x+ay+b)^2=(z^2+a^2)^3. \quad \cdots\cdots(1)$$

對於a微分之

$$18y(x+ay+b)=6a(z^2+a^2)^2. \quad \cdots\cdots(2)$$

同理 $18(x+ay+b)=0, \quad \cdots\cdots(3)$

故由(2) $a=0. \quad \cdots\cdots(4)$

由(3)及(4)代入(1)式, $z=0.$

但$z=0$時$p=q=0$,而此等值不合於微分方程式

$$z^2(p^2z^2+q^2)=1.$$

故$z=0$非異解.

例三. 取方程式 $p^2=zq.$

對於p微分之 $2p=0,$

同理 $0=z,$

由此三方程式消去p, q,吾人得

$$z=0.$$

此式合於微分方程式,故確爲一異解.

但由全解.

$$z=be^{ax+a^2y}$$

中,命$b=0$亦易得上結果.

故$z=0$同時爲一異解,又爲全解之一特例.

習 題 九

求下列各題之異解:

(1) $z=px+qy+\log pq$. (2) $z=px+qy+p^2+pq+q^2$.

(3) $z=px+qy+\frac{1}{2}p^2q^2$. (4) $z=px+qy+p/q$.

(5) $4z=pq$. (6) $z^2=1+p^2+q^2$. (7) $p^3+q^3=27z$.

(8) 求證方程式之有一異解者,不屬於標準一或三.[用普通方法得方程式$0=1$].

(9) 求證$z=0$同時爲$q^2=z^2p^2(1-p^2)$.之異解及全解之特例.

134. 通解. 吾人於上節例一中,已見全解.

$$z=ax+by+a^2+b^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

所代表之所有平面,切於異解所表之旋轉拋物面

$$4z=-(x^2+y^2). \cdots\cdots(2)$$

今若不取所有平面,而僅取平面之垂直於 $y=0$ 者,此可於(1)中命 $b=0$ 得

$$z=ax+a^2,$$

其包面爲拋物柱面

$$4z=-x^2. \cdots\cdots(3)$$

取另一組之經過(0, 0, 1)點者,

由(1) $$1=a^2+b^2,$$

故(1)式變爲 $$z=ax\pm y\sqrt{(1-a^2)}+1,$$

其包面易求出爲正圓錐面

$$(z-1)^2=x^2+y^2. \cdots\cdots(4)$$

廣言之,吾人可命 $b=f(a)$,式中 f 爲 a 之任意函數,得

$$z=ax+yf(a)+a^2+\{f(a)\}^2. \cdots\cdots(5)$$

(5)式之包面,可以其本式及其對於 a 偏微分後所得之方程式

$$0=x+yf'(a)+2a+2f(a)f'(a). \cdots\cdots(6)$$

間消去 a 而得.

若 f 爲完全隨意函數,則消去式名曰原微分方程式之"通解."(3), (4)兩方程式皆爲由此通解所引得之特解.

吾人可界說一偏微分方程式之通解為一方程式,此式代表由全解所表之二重無窮組曲面中,選出所有可能之單無窮組曲面之各包面,此等單無窮組曲面,可於全解中命 $b=f(a)$ 定之.

自此二方程式間消去 a 以求包面,在實際運算時,往往因隨意函數 f 及其微分係數關係而不可能.幾何方面之旨趣,端在取 f 為 a 之某確定函數(更欲簡易)時之諸特例而已.

135. 表徵線. 自全解所表之曲面中,選出任一單無窮組,其中二相連曲面之交線,名曰表徵線.

今自曲面族方程式中,用求包面之二方程式,即可求出此等曲線,例如在上節方程式 (5) 及 (6) 中,對於 $a, f(a)$, 及 $f'(a)$ 之任何確定數值,均可確定一直線(因係兩平面之交線),而此直線,即係表徵線.此例中之表徵線,包含一三重無窮組之直線,切於旋轉拋物面 (2).

拋物柱面 (3) 乃由一單無窮組之表徵線所組成,即其中之垂直於平面 $y=0$ 者.而錐面 (4) 則由另一組所產生,即其中之經過定點 (0, 0, 1) 者.由此吾人知通解代表表徵線所組成之各曲面之總數.

若一異解存在,則必被所有之表徵線相切,因而亦

必被切於特別組表徵線所產生之曲面,此等曲面卽通解所表者也.上節中之拋物柱面及正圓錐面,易證其切於旋轉拋物面.

136. 平直方程式之特點. 欲作平直方程式

$$Pp+Qq=R \qquad (1)$$

關於此點之討論,可設 $u=$常數,

$v=$常數,

爲輔助方程式之二獨立解.*

於是易證(1)之解爲

$$u+av+b=0. \qquad (2)$$

此式可作爲全解.通解由

$$u+av+f(a)=0, \qquad (3)$$

$$v+f'(a)=0 \qquad (4)$$

求之.

由(4)式, a僅爲v之函數,

設爲 $a=F(v)$,

代入(3) $u=v$之一函數,

設爲 $u=\psi(v)$,

*因 u,v 爲獨立,故二者中必有一含 z,設含 z 者爲 u.吾人如此約束,所以防 $u+av+b$ 爲只含 x 及 y 之函數,因在此情形下 $u+av+b=0$,將使(1)中有不定之項,而不能如常法確述之矣.

此式與本章開始所求出之通解 $\phi(u, v)=0$ 相同.

平直方程式之特點,在於全解 (2) 乃通解之一特例另一特點,則爲其表徵線(在此例乃佐方程式所表之曲線)之數目,僅爲二重無窮,而非三重無窮.經過一已知點,僅有一表徵線(普通)但在非平直之例,如上節所示者,則有無窮個經過,成一曲面.

習題十

(1) 求由

$$z=px+qy+p^2+pq+q^2$$

之表徵線之平行於 x 軸者,所組成之曲面.證明其合於微分方程式,並切於異解所代表之曲面.

(2) 證明 $z^2=4xy$ 爲

$$z=px+qy+\log pq$$

之一解,代表包含於全解,幷過原點之平面之包面.

(3) 證明 $q=3p^2$ 之表徵線之經過 $(-1, 0, 0)$ 點者,組成錐面 $(x+1)^2+12yz=0$.

(4) 方程式 $z=px+qy+p/q$

之解 $(y+1)^2+4xz=0$ 之性質如何?

(5) 證明方程式

$$z=(x+y)^2+ax+by,$$

$$z=(x+y)^2+\frac{mx^2+ny^2}{x+y}$$

中任一式,可取為某一微分方程式之全解,而其他一式,可由之得出,作為通解之一特例.[倫敦].

(6) 證明 $z=(x+a)^2e^{by}$ 為微分方程式 $p^2=4ze^{qy/z}$ 之全解.

證明 $y^2z=4\left(\frac{xy}{2-y}\right)^{2-y}$ 為同方程式之通解之一部,并自上述之已知全解求出之.[倫敦].

第十二章 雜題

(1) $z=px+qy-p^2q$.

(2) $0=px+qy-(px+z)^2q$.

(3) $z(z^2+xy)(px-qy)=x^4$.

(4) $p^{\frac{1}{2}}-q^{\frac{1}{3}}=3x-2y$.

(5) $p_1{}^2+2x_2p_2+x_3{}^2p_3=0$.

(6) $x_3p_1+x_2p_2+x_1p_3=0$.

(7) $p^3+q^3-3pqz=0$.

(8) $p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2=4z$.

(9) $p_1+p_2+p_3=4z$.

(10) $p^2+6p+2q+4=0.$

(11) $z^2p^2y+6zpxy+2zqx^2+4x^2y=0.$

(12) $zpy^2=x(y^2+z^2q^2).$

(13) $p^2z^2+q^2=p^2q.$

(14) $(z-px-qy)x^3y^2=q^2zx^3-3p^3z^2y^2.$

(15) 求 $p+q=pq$ 之通解之一特例,令其代表包括於全解,並經過 $(1,1,1)$ 點之平面之包面.

(16) 若方程式 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ 爲可積分,求證其代表一族曲面,正交於曲面族

$$Pp+Qq=R.$$

於是求正交於

$$\phi\{z(x+y)^2,\ x^2-y^2\}=0$$

之曲面族.

(17) 求諸曲面,已知其切平面經過原點.

(18) 求諸曲面,已知其法線俱割圓周.

$$x^2+y^2=1,\ z=0.$$

(19) 求諸曲面,已知其諸切平面與坐標面作一恆量體積之四面體.

(20) 求證不能有不可展之曲面 (Non-developable surface) 其各切平面在三軸上截距之代數和爲零者

(21) 求證若二曲面,對於二次曲面 $x^2+y^2=2z$, 成互爲對極 (Polar reciprocals) 且 (x, y, z), (X, Y, Z) 爲二相應點(每面上一點),使在任一點之切面爲他一點之極平面,則

$$X=p;\ Y=q;\ Z=px+qy-z;\ x=P;\ y=Q.$$

於是證明,若一曲面合於 $f(x, y, z, p, q)=0$, 則他一曲面,合於 $f(P, Q, PX+QY-Z, X, Y)=0$.

[此等方程式,用對偶原理 (Principle of duality) 謂爲可互相轉成].

(22) 求證對偶於 $z=px+qy+pq$

之方程式爲 $0=Z+XY$,

已予 $$x=P=\frac{\partial Z}{\partial X}=-Y,\ y=Q=-X,$$

$$z=PX+QY-Z=-XY.$$

於是往求 $z=-xy$. (第一方程式之一積分).

第十三章*

一級偏微分方程式　普通求法

137. 本章將述沙匹特(Charpit)氏論二自變數方程式與雅科比(Jacobi)氏論多數自變數方程式之方法,由雅科比氏之方法,自可引入聯立方程組之討論.

本章所研究之方法,較上章者爲複雜,故吾人於此僅以最簡單之形式表出之,其中有數點,頗爲緻密,於此亦僅略述之.

138. 沙匹特氏方法†. 在§131中,解方程式

$$p-3x^2=q^2-y, \qquad (1)$$

時曾用另一微分方程

$$p-3x^2=a, \qquad (2)$$

就x, y解出p, q,代入

$$dz=p\,dx+q\,dy, \qquad (3)$$

---

*初學者可略去本章不讀.

†此法一部份皆蘭格倫日所創,但沙匹特氏實完成之.沙氏之論文於1784年呈入巴黎大學院(Paris Academy of Sciences),然因著者旋卽謝世,故此稿迄未刊布.

視之爲x, y, z三變數之常微分方程式,而成可解者.

今將一類似之法,施於二自變數之一級普通偏微分方程式

$$F(x, y, z, p, q)=0. \qquad \cdots\cdots(4)$$

吾人必將求得另一方程式,如

$$f(x, y, z, p, q)=0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

者,得由(4),(5)二式解出p, q爲x, y, z之函數,能使(3)爲可積分者.

(3)式可積分之必要及充分條件爲

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0, (\text{爲恆等式})$$

式內 $$P=p, Q=q, R=-1,$$

即 $$p\frac{\partial q}{\partial z}-q\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial x}=0. \qquad \cdots\cdots(6)$$

將(4)式對x偏微分之,而視y爲常數,但認定p及q爲就(4)(5)二式解出之x, y, z函數,即得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0; \qquad \cdots\cdots(7)$$

同理, $$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0. \qquad \cdots\cdots(8)$$

由(7)及(8) $$J\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \cdots\cdots(9)$$

式內 J 表
$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p};$$

同理
$$J\frac{\partial q}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z},\qquad(10)$$
$$J\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y},\qquad(11)$$
$$J\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial z}.\qquad(12)$$

以 J* 乘 (6) 式,再行代入,則有
$$p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

即
$$-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y}-\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial f}{\partial z}$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}=0.\qquad(13)$$

此式爲第 120 節中所論形式之平直方程式,以 x, y, z, p, q 爲自變數,f 爲因變數.

其相當之輔助方程式爲
$$\frac{dx}{-\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dz}{-p\frac{\partial F}{\partial p}-q\frac{\partial F}{\partial q}}=\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{df}{0}.\qquad(14)$$

*不能全等於零,蓋如此即謂視 F 及 f 爲 p 及 q 之函數時,不爲獨立也若是,則與吾人假設(4),(5)二方程式就 p 及 q 解出者相背矣.

如能求得此方程式之一解含 p 或 q 或兼含二者,即可視此解爲額外之微分方程式(5),由此式與(4),可解得 p, q 之值,使(3)式爲可積分,如是遂得(4)式之全解,由此可按常法以引出通解及異解.

139. 今舉一例以說明上法,取方程式

$$2xz - px^2 - 2qxy + pq = 0, \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

令式之左端爲 F,代入上節中之聯立方程式(14)內,即得

$$\frac{dx}{x^2-q} = \frac{dy}{2xy-p} = \frac{dz}{px^2+2xyq-2pq} = \frac{dp}{2z-2qy} = \frac{dq}{0} = \frac{df}{0},$$

其解爲 $$q = a. \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)與(2), $$p = \frac{2x(z-ay)}{x^2-a},$$

故 $$dz = pdx + qdy = \frac{2x(z-ay)dx}{x^2-a} + ady,$$

即 $$\frac{dz-ady}{z-ay} = \frac{2xdx}{x^2-a},$$

即 $$z = ay + b(x^2-a).$$

此式爲全解,其異解

$$z = x^2y.$$

甚易求出.

由全解之形式,可知藉變換式

$$x^2=X,\ P=\frac{\partial z}{\partial X}=\frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}$$

可化(1)式爲　$z=PX+qy-Pq,$

而爲一標準式之特款.

由沙匹特氏法,可解之方程式,均得藉此種變換式解之,且較簡易,

習題一

應用沙匹特氏方法,以求下列諸題之全解:

(1) $2z+p^2+qy+2y^2=0.$　(2) $yzp^2=q.$

(3) $pxy+pq+qy=yz.$　(4) $2x(z^2q^2+1)=pz.$

(5) $q=3p^2$. (比較129節).

(6) $z^2(p^2z^2+q^2)=1$. (比較130節).

(7) $p-3x^2=q^2-y$. (比較131節).

(8) $z=px+qy+p^2+q^2$. (比較132節).

(9) 令 $y^2=Y$, $z^2=Z$, 以解第2題.

(10) 藉一適宜之變數變換,以解第4題.

140. 三個或多個自變數. 雅科比方法*. 取方程

*雅科比 (Carl Gustav Jacob Jacobi) (1804-1851) 波次但 (Potsdam) 人,可視爲橢圓函數原理之一創造者,吾人見"雅科比式"("Jacobian")或函數行列式 (Functional Determinant) 卽可憶及氏對於使行列式之通用,實有大功.

式
$$F(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)=0 \quad\cdots\cdots(1)$$
論之,式中因變數 z,僅在其對於 x_1, x_2, x_3 三自變數之偏微係數中見之,此外則不見出現,雅科比氏方法之基本觀念,與沙氏者至爲相類.

吾人試求另二方程式
$$F_1(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)=a_1, \quad\cdots\cdots(2)$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)=a_2. \quad\cdots\cdots(3)$$
(式內 a_1, a_2 爲隨意常數),俾由 (1), (2), (3) 諸式,可求得 p_1, p_2, p_3 爲 x_1, x_2, x_3 之函數,使
$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+p_3dx_3 \quad\cdots\cdots(4)$$
爲可積分,其條件爲
$$\frac{\partial p_2}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial p_1}{\partial x_2};\ \frac{\partial p_3}{\partial x_1}=\frac{\partial p_1}{\partial x_3};\ \frac{\partial p_3}{\partial x_2}=\frac{\partial p_2}{\partial x_3}. \quad\cdots\cdots(5)$$

今將(1)式對於 x_1 偏微分之,但認定 p_1, p_2, p_3 爲就 (1), (2), (3) 諸式解出之 x_1, x_2, x_3 函數,遂有
$$\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0, \quad\cdots\cdots(6)$$
同理,
$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0. \quad\cdots\cdots(7)$$
由 (6) 及 (7)
$$\frac{\partial(F, F_1)}{\partial(x_1, p_1)}+\frac{\partial(F, F_1)}{\partial(p_2, p_1)}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial(F, F_1)}{\partial(p_3, p_1)}\frac{\partial p_3}{\partial x_1}=0, \quad\cdots\cdots(8)$$

式內 $\dfrac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}$ 表示"雅氏行列式" $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial p_1}-\dfrac{\partial F}{\partial p_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}$;

同理, $$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\frac{\partial p_1}{px_2}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_3,p_2)}\frac{\partial p_3}{\partial x_2}=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_3,p_3)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_3)}\frac{\partial p_1}{\partial x_3}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_3)}\frac{\partial p_2}{\partial x_3}=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

將(8), (9), (10)諸式相加,

其中二項, 爲

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_1)}\frac{\partial p_2}{\partial x_1}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\partial x_2}\left\{\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_2,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(p_1,p_2)}\right\}=0.$$

同理, 其他二對項亦爲零, 僅留有

$$\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_1,p_1)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_2,p_2)}+\frac{\partial(F,F_1)}{\partial(x_3,p_3)}=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

卽
$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial F_1}{\partial p_1}-\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial p_2}$$
$$-\frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+\frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial F_1}{\partial p_3}-\frac{\partial F}{\partial p_3}\frac{\partial F_1}{\partial x_3}=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

此式常書爲 $(F,F_1)=0$.

同理, 有 $(F,F_2)=0$ 及 $(F_1,F_2)=0$.

但此數式之形式與126節所述之平直方程式同, 是以得下之法則:

試求輔助方程式

$$\frac{dx_1}{-\frac{\partial F}{\partial p_1}}=\frac{dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x_1}}=\frac{dx_2}{-\frac{\partial F}{\partial p_2}}=\frac{dp_2}{\frac{\partial F}{\partial x_2}}=\frac{dx_3}{-\frac{\partial F}{\partial p_3}}=\frac{dp_3}{\frac{\partial F}{\partial x_3}}.$$

之二獨立解 $F_1=a_1$ 及 $F_2=a_2$,

如其適合於方程式

$$(F_1, F_2)\equiv\Sigma\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\frac{\partial F_2}{\partial p_r}-\frac{\partial F_1}{\partial p_r}\frac{\partial F_2}{\partial x_r}\right)=0,$$

且如諸 p 可就

$$F=F_1-a_1=F_2-a_2=0$$

解出,而為 x 之函數,則將諸式代入,而積分其所成之方程式*

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+p_3dx_3,$$

141. 雅科比方法舉例.

例一.
$$2p_1x_1x_3+3p_2x_3^2+p_2^2p_3=0.\quad\cdots\cdots(1)$$

輔助方程式為

$$\frac{dx_1}{-2x_1x_3}=\frac{dp_1}{2p_1x_3}=\frac{dx_2}{-3x_3^2-2p_2p_3}=\frac{dp_2}{0}=\frac{dx_3}{-p_2^2}=\frac{dp_3}{2p_1x_1+6p_2x_3},$$

其積分為
$$F_1\equiv p_1x_1=a_1,\quad\cdots\cdots(2)$$

及
$$F_2\equiv p_2\quad=a_2.\quad\cdots\cdots(3)$$

由此諸值,顯可使 (F_1, F_2) 為零,故 (2), (3) 可作為所求

*對於此方程式常為可積分之證明,可參看附錄三.

二額外方程式

$$p_1=a_1x_1^{-1},\ p_2=a_2,\ p_3=-a_2^{-2}(2a_1x_3+3a_2x_3^2).$$

故 $$dz=a_1x_1^{-1}dx_1+a_2dx_2-a_2^{-2}(2a_1x_3+3a_2x_3^2)dx_3,$$

或 $$z=a_1\log x_1+a_2x_2-a_2^{-2}(a_1x_3^2+a_2x_3^3)+a_3.$$

爲其全解.

例二. $$(x_2+x_3)(p_2+p_3)^2+zp_1=0. \qquad (4)$$

此式不爲§140中所論之形式,因其中含有z故也.但可令

$$z=x_4,\ p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}=\frac{\partial x_4}{\partial x_1}=-\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial u}{\partial x_4}=-P_1/P_4$$

式中$u=0$爲(4)式之一解.

同理, $$p_2=-P_2/P_4;\ p_3=-P_3/P_4.$$

(4)式遂變爲 $$(x_2+x_3)(P_2+P_3)^2-x_4P_1P_4=0, \qquad (5)$$

乃一含四自變數之方程式,其中不含因變數u.

輔助方程式爲

$$\frac{dx_1}{x_4P_4}=\frac{dP_1}{0}=\frac{dx_2}{-2(x_2+x_3)(P_2+P_3)}=\frac{dP_2}{(P_2+P_3)^2}$$

$$=\frac{dx_3}{-2(x_2+x_3)(P_2+P_3)}=\frac{dP_3}{(P_2+P_3)^2}=\frac{dx_4}{x_4P_1}=\frac{dP_4}{-P_1P_4},$$

其解爲 $$F_1\equiv P_1=a_1, \qquad (6)$$

$$F_2\equiv P_2-P_3=a_2, \qquad (7)$$

$$F_3 \equiv x_4 P_4 = a_3. \quad \text{(8)}$$

吾人須決定確有 $(F_r, F_s)=0$ 方可. r, s 表 1, 2, 3 三指數中之二,此事易見其眞.

就 (5), (6), (7), (8) 解之,得

$$P_1 = a_1;\ P_4 = a_3 x_4^{-1};\quad 2P_2 = a_2 \pm \sqrt{\{a_1 a_3/(x_2+x_3)\}};$$

$$P_3 = P_2 - a_2;$$

是以
$$du = a_1 dx_1 + a_3 x_4^{-1} dx_4 + \tfrac{1}{2} a_2 (dx_2 - dx_3)$$
$$\pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\{a_1 a_3/(x_2+x_3)\}}\,(dx_2+dx_3),$$

卽 $u = a_1 x_1 + a_3 \log x_4 + \frac{1}{2} a_2 (x_2 - x_3) \pm \sqrt{\{a_1 a_3 (x_2+x_3)\}} + a_4.$

故以

z 代 x_4, A_1 代 a_1/a_3, A_2 代 $\frac{1}{2}a_2/a_3$, A_3 代 a_4/a_3. 由 $u=0$ 得

$$\log z + A_1 x_1 + A_2 (x_2 - x_3) \pm \sqrt{\{A_1 (x_2+x_3)\}} + A_3 = 0,$$

卽爲 (4) 式之全解.

習題二

應用雅科比氏法以求下列各式之全解:

(1) $p_1^3 + p_2^2 + p_3 = 1.$

(2) $x_3^2 p_1^2 p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_2^2 - p_3^2 = 0.$

(3) $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_3^2.$

(4) $p_1 p_2 p_3 + p_4^3 x_1 x_2 x_3 x_4^3 = 0.$

(5) $p_1p_2p_3=z^3x_1x_2x_3$.

(6) $p_3x_3(p_1+p_2)+x_1+x_2=0$.

(7) $p_1^2+p_2p_3-z(p_2+p_3)=0$.

(8) $(p_1+x_1)^2+(p_2+x_2)^2+(p_3+x_3)^2=3(x_1+x_2+x_3)$.

142. 聯立偏微分方程組. 下列各題,可示數種範例之情形:

例一. $$F\equiv p_1^2+p_2p_3x_2x_3^2=0, \quad\cdots\cdots(1)$$

$$F_1\equiv p_1+p_2x_2=0. \quad\cdots\cdots(2)$$

在此,

$$(F,F_1)\equiv\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial F_1}{\partial p_r}-\frac{\partial F}{\partial p_r}\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\right)=(p_2p_3x_3^2)x_2-(p_3x_2x_3^2)p_2=0.$$

故此問題,可視爲求 (1) 之解,而其一部演算(卽求 F_1)業已作出.

其第二步,乃在求 F_2,使

$$(F,F_2)=0=(F_1,F_2).$$

用雅氏方法,由 F 引出之輔助方程式爲

$$\frac{dx_1}{-2p_1}=\frac{dp_1}{0}=\frac{dx_2}{-p_3x_2x_3^2}=\frac{dp_2}{p_2p_3x_3^2}=\frac{dx_3}{-p_2x_2x_3^2}=\frac{dp_3}{2p_2p_3x_2x_3}.$$

其一解爲 $$p_1=a. \quad\cdots\cdots(3)$$

吾人可視 p_1 爲 F_2,因其合於 $(F,F_2)=0=(F_1,F_2)$ 之關係也.

解 (1), (2), (3) 而代入 $dz=p_1dx_1+p_2dx_2+p_3dx_3$ 中,

即得

$$dz=a\,dx_1-ax_2^{-1}dx_2+ax_3^{-2}dx_3.$$

故
$$z=a(x_1-\log x_2-x_3^{-1})+b.$$

例二.
$$F\equiv p_1x_1+p_2x_2-p_3^2=0, \quad\cdots\cdots(4)$$

$$F_1\equiv p_1-p_2+p_3-1=0.\quad\cdots\cdots(5)$$

在此
$$(F,F_1)=p_1+p_2(-1)=p_1-p_2.$$

如表 dz 之式爲可積分,上式必爲零.

是以有額外之方程式

$$p_1-p_2=0.\quad\cdots\cdots(6)$$

解 (4), (5), (6) 而代入之,

$$dz=\frac{dx_1+dx_2}{x_1+x_2}+dx_3,$$

$$z=\log(x_1+x_2)+x_3+a.$$

在此類例題中,吾人不用輔助方程式,結果中已有一隨意常數,在例一中則有二.

例三.
$$F\equiv x_1^2+x_2^2+p_3=0.\quad\cdots\cdots(7)$$

$$F_1\equiv p_1+p_2+x_3^2=0.\quad\cdots\cdots(8)$$

在此
$$(F,F_1)=2x_1+2x_2-2x_3.$$

x_1, x_2, x_3 既爲自變數,此式不能常爲零.

是以吾人不能由此等無公共解之方程式,以求表 dz 之可積分式.

例四. $$F \equiv p_1 + p_2 + p_3^2 - 3x_1 - 3x_2 - 4x_3^2 = 0, \cdots\cdots (9)$$

$$F_1 \equiv x_1 p_1 - x_2 p_2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 = 0, \cdots\cdots (10)$$

$$F_2 \equiv p_3 - 2x_3 = 0. \cdots\cdots (11)$$

解 (9), (10), (11) 諸式而代入表 dz 之式中,得

$$dz = (2x_1 + x_2)dx_1 + (x_1 + 2x_2)dx_2 + 2x_3 dx_3,$$

故 $$z = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_3^2 + a.$$

此次不必算出 (F, F_1),(F, F_2), (F_1, F_2).

例五. $$F \equiv p_1 + p_2 - 1 - x_2 = 0, \cdots\cdots (12)$$

$$F_1 \equiv p_1 + p_3 - x_1 - x_2 = 0, \cdots\cdots (13)$$

$$F_2 \equiv p_2 + p_3 - 1 - x_1 = 0. \cdots\cdots (14)$$

由此等式得 $$dz = x_2 dx_1 + dx_2 + x_1 dx_3.$$

此式不能積分,故聯立方程組無公共解.

例六. $$F \equiv x_1 p_1 - x_2 p_2 + p_3 - p_4 = 0, \cdots\cdots (15)$$

$$F_1 \equiv p_1 + p_2 - x_1 - x_2 = 0. \cdots\cdots (16)$$

在此, $(F, F_1) = p_1 - x_1(-1) - p_2 + x_2(-1) = p_1 - p_2 + x_1 - x_2$.

如例二,由此可得一新方程式

$$F_2 \equiv p_1 - p_2 + x_1 - x_2 = 0, \cdots\cdots (17)$$

今 $$(F, F_2) = p_1 - x_1 - p_2(-1) + x_2(-1) = F_1 = 0,$$

及 $$(F_1, F_2)=(-1)-1+(-1)(-1)-(-1)=0,$$

故由此法,不得更得其他之方程式.

由 F 引出之輔助方程式為

$$\frac{dx_1}{-x_1}=\frac{dp_1}{p_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dp_2}{-p_2}=\frac{dx_3}{-1}=\frac{dp_3}{0}=\frac{dx_4}{1}=\frac{dp_4}{0}.$$

一適宜解為 $F_3=p_3=a,$ ……(18)

因其能合於 $(F, F_3)=(F_1, F_3)=(F_2, F_3)=0$ 故也.

故於此遂有 (15), (16), (17), (18) 四式,由此諸式得

$$p_1=x_2;\ p_2=x_1;\ p_3=a;\ p_4=a;$$

故 $$z=x_1x_2+a(x_3+x_4)+b.$$

但在此例中,可得一較普通之解. (15), (16) 二已知方程式及引伸所得之 (17) 式,與下之較簡方程組相當:

$$p_1=x_2, \quad\text{……(19)}$$

$$p_2=x_1, \quad\text{……(20)}$$

$$p_3-p_4=0. \quad\text{……(21)}$$

由 (19) (20) 得 $z=x_1x_2+$ 含 x_3, x_4 之任何函數.

(21) 為蘭格倫日式之平直方程式,其通解為

$$\phi(z, x_3+x_4)=0,$$

換言之,卽 z 為 (x_3+x_4) 之一任意方程式,當然可含有 x_1 及 x_2.

是以凡此三式或二已知式之通解為

$$z=x_1x_2+\psi(x_3+x_4),$$

其中含有一隨意函數,由別法所得之全解,亦含於其中爲一特款,其通解可如134節之從全解中求出.

習　題　三

(1) $p_1^2+p_2^2-8(x_1+x_2)^2=0,$

$(p_1-p_2)(x_1-x_2)+p_3x_3-1=0.$

(2) $x_1^2p_2p_3=x_2^2p_3p_1=x_3^2p_1p_2=1.$

(3) $p_1p_2p_3-8x_1x_2x_3=0,\ p_2+p_3-2x_2-2x_3=0.$

(4) $2x_3p_1p_3-x_4p_4=0,\ 2p_1-p_2=0.$

(5) $p_1x_3^2+p_3=0,\ p_2x_3^2+p_3x_2^2=0.$

(6) $p_2^2+p_3^3+x_1+2x_2+3x_3=0,\ p_1+p_4^2x_4-1=0.$

(7) $2p_1+p_2+p_3+2p_4=0,\ p_1p_3-p_2p_4=0.$

(8) 求第5題之通解.

(9) 求第7題之通解.

第十三章　雜題

(1) $2x_1x_3zp_1p_3+x_2p_2=0.$

(2) $x_2p_3+x_1p_4=p_1p_3-p_2p_4+x_4^2=0.$

(3) $9x_1x_4p_1(p_2+p_3)-4p_4^2=0,\ p_1x_1+p_2-p_3=0.$

(4) $9x_1zp_1(p_2+p_3)-4=0,\ p_1x_1+p_2-p_3=0.$

(5) $x_1p_2p_3=x_2p_3p_1=x_3p_1p_2=z^2x_1x_2x_3.$

(6) $p_1z^2-x_1^2=p_2z^2-x_2^2=p_3z^2-x_3^2=0.$

(7) 求 $z=p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_1^2+p_2^2+p_3^2$ 之一異解,表示全解中所含一切超曲面 (hyper-surfaces) [在此爲超平面 (hyper-planes)] 之包線.

(8) 試證方程式之有異解者,不能呈

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3)=0\text{ 形式.}$$

(9) 試證如方程式 $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$ 中無 z,則沙氏法與雅氏法相同.

(10) 試證如一組偏微分方程式爲對於諸 p 之平直齊次式,且有一公共解

$$z=a_1u_1+a_2u_2+\cdots,$$

其中諸 u 皆爲諸 x 之函數,則有一較普通解爲

$$z=\phi(u_1,\ u_2,\ \cdots).$$

試求聯立方程式

$$x_1p_1-x_2p_2+x_2p_3=0,$$

$$x_4p_3-x_4p_4+x_5p_5=0$$

之一通解.

(11) 如 p_1, p_2 爲自變數 x_1, x_2 之函數而合於聯立

方程式

$$F(x_1, x_2, p_1, p_2)=0=F_1(x_1, x_2, p_1, p_2)$$

試證　$(F, F_1)+\left(\frac{\partial p_1}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial(F, F_1)}{\partial(p_1, p_2)}=0.$

由是更證明如將聯立方程式,視爲偏微分方程式,有一公共解,$(F, F_1)=0$爲必要條件,而非充足條件.

試核驗下之聯立方程組:

(i)
$$F\equiv p_1+2p_2-2=0,$$
$$F_1\equiv(p_1+2p_2)^2-1=0.$$

[在此$\frac{\partial(F, F_1)}{\partial(p_1,p_2)}=0$爲恆等關係,方程式不能就$p_1, p_2$解之.]

(ii)
$$F\equiv p_1-p_2{}^2=0,$$
$$F_1\equiv p_1+2p_2x_1+x_1{}^2=0.$$

[在此(F, F_1)及$\frac{\partial(F, F_1)}{\partial(p_1, p_2)}$化出之函數當以$x_1, x_2$代諸$p$之式,代入時均爲零,無公共解.]

(iii)
$$F\equiv p_1-p_2{}^2+x_2=0,$$
$$F_1\equiv p_1+2p_2x_1+x_1{}^2+x_2=0.$$

[$\frac{\partial(F, F_1)}{\partial(p_1, p_2)}$化出之函數,雖於代入諸$p$值時爲零,然仍有一公共解.]

關於沙匹特氏方法之附註(參看第137-139節).

有時吾人求得一方程式 $f(x, y, p, q)=0$ 不爲輔助方程式(14)之積分,而爲從原有微分方程式(4)推得較簡方程式之積分.此式合於(13),但非恆等關係,但藉(4)式之力,並與(4)聯絡時,依然能使(3)式可積分.例如在§139第二題 $pz=a$ 爲一解,不屬於 $dz/(-2yzp^2+q)=dp/yp^3$,而屬於 $dz/(-yzp^2)=dp/yp^3$,終仍得答案中所示之結果,對於雅科比氏亦然.

第十四章

二級與高級偏微分方程式

143. 吾人將先舉若干簡易之例，可以由觀察法積分者．此後吾人當論及常係數平直偏微分方程式，對於此類所用之方法與常係數尋常微分方程式所用者相似．本章其餘部分將專論蒙日方法 (Monge's* methods) 之雜難題目，所舉之法，頗冀其足敷學者解題之需，並使讀者確信方法之正確，但關於理論方面之討論，則略而不具.†

若干習題，將涉及由幾何條件而確定解中所含之隨意函數.‡

本章末之雜題中，有若干重要之微分方程式，常見

---

*比敷內 (Beaune) 之蒙日 (Gaspard Monge) (1746—1818) 任教授於巴黎爲首創畫法幾何學 (Descriptive Geometry) 之人，氏將微分方程式應用於立體幾何學中之問題上.

†讀者如欲究此可讀谷耳薩著 Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre).

‡可讀夫洛斯德 (Frost, Solid Geometry) 第二十五章，甚爲有益.

於弦之振動,桿之振動,膜之振動等學說中.

二級偏微分係數 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 將分別以 r, s, t 表之

144. 方程式可由觀察積分者.

例一.
$$s = 2x + 2y.$$

對於 x 求積分(視 y 為常數),
$$q = x^2 + 2xy + \phi(y);$$

同理,對於 y 求積分,
$$z = x^2 y + xy^2 + \int \phi(y)\, dy + f(x),$$

或為
$$z = x^2 y + xy^2 + f(x) + F(y).$$

例二. 求一曲面經過拋物線
$$z = 0,\ y^2 = 4ax \text{ 及 } z = 1,\ y^2 = -4ax,$$

並合於
$$xr + 2p = 0.$$

微分方程式為
$$x\frac{\partial p}{\partial x} + 2p = 0,$$

由此得
$$x^2 p = f(y),$$
$$p = \frac{1}{x^2} f(y),$$
$$z = -\frac{1}{x} f(y) + F(y).$$

函數f及F則由幾何條件確定之.

命$z=0$及$x=y^2/4a$,

$$0=-\frac{4a}{y^2}f(y)+F(y);$$

同理

$$1=\frac{4a}{y^2}f(y)+F(y).$$

於是

$$F(y)=\frac{1}{2},\quad f(y)=\frac{y^2}{8a}.$$

因而

$$z=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{8ax},$$

即

$8axz=4ax-y^2$, 表一二次曲面.

習題一

(1)　$r=6x.$　　(2)　$xys=1.$

(3)　$t=\sin xy.$　　(4)　$xr+p=9x^2y^3.$

(5)　$ys+p=\cos(x+y)-y\sin(x+y).$

(6)　$t-xq=x^2.$

(7)　求一曲面合於$s=8xy$, 並經過圓

$$z=0=x^2+y^2-1.$$

(8)　求最普通之二次曲面合於 $xs+q=4x+2y+2.$

(9)　求一旋轉曲面切於$z=0$, 並合於

$$r=12x^2+4y^2.$$

(10) 求一曲面合於$t=6x^2y$,包含二直線

$$y=0=z,\quad y=1=z.$$

145. 常係數齊次平直方程式. 於第三章中,吾人已在相當範圍內,論及方程式

$$(D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\cdots\cdots+a_n)y=f(x).\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其中 $D\equiv\dfrac{d}{dx}$.

吾人今更當簡略討論含二自變數之相當方程式

$$(D^n+a_1D^{n-1}D'+a_2D^{n-2}D'^2+\cdots\cdots+a_nD'^n)z=f(x,y),\cdots\cdots(2)$$

其中 $D\equiv\dfrac{\partial}{\partial x}$, $D'\equiv\dfrac{\partial}{\partial y}$.

其最簡之款,乃 $(D-mD')z=0,$

卽 $p-mq=0,$

此式之解爲 $\phi(z,y+mx)=0,$

卽 $z=F(y+mx).$

此例表示(易證明)若$f(x,y)=0$,則(2)之解爲

$$z=F_1(y+m_1x)+F_2(y+m_2x)+\cdots\cdots+F_n(y+m_nx),$$

其中 $m_1, m_2,\cdots\cdots m_n$ 爲

$$m^n+a_1m^{n-1}+a_2m^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

之諸根(設爲完全相異).

例:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0,$$

即 $$(D^3-3D^2D'+2DD'^2)z=0.$$

$$m^3-3m^2+2m=0 \text{ 之根爲 } 0, 1, 2,$$

故 $$z=F_1(y)+F_2(y+x)+F_3(y+2x).$$

習　題　二

(1)　$(D^3-6D^2D'+11DD'^2-6D'^3)z=0.$

(2)　$2r+5s+2t=0.$

(3)　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

(4)　求一曲面，合於 $r+s=0$，並沿橢圓拋物面 $z=4x^2+y^2$ 及平面 $y=2x+1$ 之截痕而與此拋物面相切.

[提示：二曲面之 p 之各值 (q 亦然) 對於 $y=2x+1$ 上之各點必相等.]

146. 輔助方程式有等根之款. 試取方程式.

$$(D-mD')^2z=0.\text{..................................}(1)$$

命 $$(D-mD')\,z=u,$$

(1) 變爲 $$(D-mD')\,u=0,$$

得 $$u=F(y+mx);$$

故
$$(D-mD')z=F(y+mx),$$

或
$$p-mq=F(y+mx).$$

其輔助方程式為

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{F(y+mx)},$$

得
$$y+mx=a,$$

及
$$dz-F(a)dx=0,$$

即
$$z-xF(y+mx)=b,$$

故其通解為

$$\phi\{z-xF(y+mx),y+mx\}=0$$

或
$$z=xF(y+mx)+F_1(y+mx).$$

同理可得
$$(D-mD')^nz=0.$$

之解為

$$z=x^{n-1}F(y+mx)+x^{n-2}F_1(y+mx)+\cdots\cdots+F_{n-1}(y+mx).$$

習題三

(1) $(4D^2+12DD'+9D'^2)z=0.$

(2) $25r-40s+16t=0.$

(3) $(D^3-4D^2D'+4DD'^2)z=0.$

(4) 求一曲面，經過 $z=x=0$, $z-1=x-y=0$ 二直線，並合於 $r-4s+4t=0.$

147. 特解. 今當返論145節中之方程式(2),並爲簡略起見,改書之爲

$$F(D, D')z=f(x, y).$$

逐步依照第三章之法,吾人可證明z之最普通值乃一特解,及補函數之和(補函數者,於原微分方程式中,以零代$f(x, y)$所求出之z也).

特解可書爲$\frac{1}{F(D, D')}\cdot f(x, y)$,吾人對於此$D$及$D'$之函數可如以前對於$D$之函數,同樣運算之,即謂可分成因子,可分爲部分分數或展成一無窮級數也.

例如

$$\frac{1}{D^2-6DD'+9D'^2}(12x^2+36xy)=\frac{1}{D^2}\left(1-\frac{3D'}{D}\right)^{-2}(12x^2+36xy)$$

$$=\frac{1}{D^2}\left(1+\frac{6D'}{D}+27\frac{D'^2}{D^2}+\cdots\cdots\right)\cdot(12x^2+36xy)$$

$$=\frac{1}{D^2}\cdot(12x^2+36xy)+\frac{6}{D^3}\cdot 36x$$

$$=x^4+6x^3y+9x^4=10x^4+6x^3y,$$

故 $$(D^2-6DD'+9D'^2)z=12x^2+36xy$$

之解爲 $$z=10x^4+6x^3y+\phi(y+3x)+x\psi(y+3x).$$

習題四

(1) $(D^2-2DD'+D'^2)z=12xy.$

(2) $(2D^2-5DD'+2D'^2)z=24(y-x)$.

(3) 求 x 及 y 之一實函數 V，當 $y=0$ 時，變爲零，并合於

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-4\pi(x^2+y^2).$$

148. 簡法. 當 $f(x, y)$ 爲 $ax+by$ 之函數時，簡法可以應用.

今以 $D\phi(ax+by)=a\phi'(ax+by)$, $D'\phi(ax+by)=b\phi'(ax+by)$,

故
$$F(D, D')\phi(ax+by)=F(a, b)\phi^{(n)}(ax+by),$$

其中 $\phi^{(n)}$ 表 ϕ 之 n 次導來函數，n 爲 $F(D, D')$ 之次數.

反之，若 $F(a, b)\neq 0$，則

$$\frac{1}{F(D, D')}\phi^{(n)}(ax+by)=\frac{1}{F(a, b)}\phi(ax+by) \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

例如

$$\frac{1}{D^3-4D^2D'+4DD'^2}\cos(2x+3y)=\frac{-\sin(2x+3y)}{2^3-4\cdot 2^2\cdot 3+4\cdot 2\cdot 3^2}$$
$$=-\frac{1}{32}\sin(2x+3y),$$

蓋若
$$\phi'''(2x+3y)=\cos(2x+3y),$$

則 $-\sin(2x+3y)$ 可作爲 $\phi(2x+3y)$ 也.

當 $F(a, b)=0$ 時，吾人可取方程式

$$(D-mD')z\equiv p-mq=x^r\psi(y+mx),$$

此式之解，易求出爲

$$z=\frac{x^{r+1}}{r+1}\psi(y+mx)+\phi(y+mx),$$

是以吾人可命

$$\frac{1}{D-mD'}\cdot x^r\psi(y+mx)=\frac{x^{r+1}}{r+1}\psi(y+mx),$$

於是

$$\frac{1}{(D-mD')^n}\psi(y+mx)=\frac{1}{(D-mD')^{n-1}}\cdot x\,\psi(y+mx)=\cdots\cdots$$

$$=\frac{x^n}{n!}\psi(y+mx).\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

例如　$$\frac{1}{D^2-2DD'+D'^2}\tan(y+x)=\frac{1}{2}x^2\tan(y+x),$$

而　$$\frac{1}{D^2-5DD'+4D'^2}\sin(4x+y)=\frac{1}{D-4D'}\cdot\frac{1}{D-D'}\sin(4x+y)$$

$$=\frac{1}{D-4D'}\cdot-\frac{1}{3}\cos(4x+y)\qquad\text{由 A,}$$

$$=-\frac{1}{3}x\cos(4x+y).\qquad\text{由 B}$$

習　題　五

(1)　$(D^2-2DD'+D'^2)z=e^{x+2y}$.

(2)　$(D^2-6DD'+9D'^2)z=6x+2y$.

(3)　$(D^3-4D^2D'+4DD'^2)z=4\sin(2x+y)$.

(4) $2r-s-3t=5e^x/ey.$

(5) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=12(x+y)$

(6) $4r-4s+t=16\log(x+2y).$

149. 普通方法. 欲得求特解之普通方法,可取方程式

$$(D-mD')z\equiv p-mq=f(x,y).$$

此式之輔助方程式爲

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{-m}=\frac{dz}{f(x,y)},$$

其一解爲 $\qquad y+mx=c.$

用此解以求他一解,

$$dz=f(x,c-mx)dx,$$

$$z=\int f(x,c-mx)dx+\text{常數}$$

其中之c於積分後,以$y-mx$代之.

故吾人可將$\dfrac{1}{D-mD'}\cdot f(x,y)$視爲$\int f(x,c-mx)dx$,其中之$c$於積分後,以$y+mx$代之.

例. $\qquad (D-2D')(D+D')z=(y-1)e^x.$

今以 $\int f(x,c-2x)dx=\int(c-2x-1)e^xdx=(c-2x+1)e^x.$

故　$\frac{1}{D-2D'}\cdot(y-1)e^x=(y+1)e^x$, 其中以 $y+2x$ 代 c.

同理, $\frac{1}{D+D'}\cdot(y+1)e^x$ 可由 $\int(c+x+1)e^x dx=(c+x)e^x$ 求之, 以 $y-x$ 代 c 得 ye^x, 即所求之特解也.

故
$$z=ye^x+\phi(y+2x)+\psi(y-x).$$

習 題 六

(1) $(D^2+2DD'+D'^2)z=2\cos y-x\sin y.$

(2) $(D^2-2DD'-15D'^2)z=12xy.$

(3) $r+s-6t=y\cos x.$

(4) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(2x^2+xy-y^2)\sin xy-\cos xy.$

(5) $r-t=\tan^3 x\tan y-\tan x\tan^3 y.$

(6) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{4x}{t^2}-\frac{t}{x^2}.$

150. 非齊次平直方程式. 其最簡之款爲
$$(D-mD'-a)z=0,$$
即
$$p-mq=az,$$
由此得
$$\phi(ze^{-ax},y+mx)=0$$
或
$$z=e^{ax}\psi(y+mx).$$

同理, 吾人可證明

$$(D-mD'-a)(D-nD'-b)z=0$$

之解為 $$z=e^{ax}f(y+mx)+e^{bx}F(y+nx),$$

而 $$(D-mD'-a)^2z=0$$

之解為 $$z=e^{ax}f(y+mx)+xe^{ax}F(y+mx).$$

但算子記號,不能分成 D 及 D' 一次因子之方程式,不能用此法積分.

例如取 $$(D^2-D')z=0.$$

以 $$z=e^{hx+ky}\text{ 為一試解,得}$$

$$(D^2-D')z=(h^2-k)e^{hx+ky}.$$

是以 $z=e^{h(x+hy)}$ 為一特解而 $\Sigma Ae^{h(x+hy)}$,則為一較普通之解,其中之 A 及 h 在各項中,俱為完全任意,且項數之多寡,亦為任意.

此種形式之解,最適宜於物理問題,第四章中吾人業經略為解釋矣.任何平直偏微分方程式之含有常係數者,自皆可照此表出,但以含有隨意函數之簡式表之,通常恆覺較宜.

習題七

(1) $DD'(D-2D'-3)z=0.$

(2) $r+2s+t+2p+2q+z=0.$

(3) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\dfrac{\partial V}{\partial t}$.　　(4) $(D^2-D'^2+D-D')z=0$.

(5) $(2D^4-3D^2D'+D'^2)z=0$.

(6) $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}=n^2V$.

(7) $(D-2D'-1)(D-2D'^2-1)z=0$.

151. **特解.** 非齊次方程式之特解之求法,與第三章所述者甚爲相似,故吾人僅舉數例以明之.

例一.　$$(D^3-3DD'+D+1)z=e^{2x+3y},$$

$$\frac{1}{D^3-3DD'+D+1}\cdot e^{2x+3y}=\frac{e^{2x+3y}}{2^3-3\cdot2\cdot3+2+1}=-\frac{1}{7}e^{2x+3y}.$$

故　$$z=-\frac{1}{7}e^{2x+3y}+\Sigma Ae^{hx+ky},$$

其中　$$h^3-3hk+h+1=0.$$

例二.　$$(D+D'-1)(D+2D'-3)z=4+3x+6y.$$

$$\frac{1}{D+D'-1}\cdot\frac{1}{D+2D'-3}=\frac{1}{3}\{1-(D+D')\}^{-1}\left\{1-\frac{D+2D'}{3}\right\}^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}\{1+D+D'+\text{高次項}\}$$

$$\times\left\{1+\frac{D+2D'}{3}+\text{高次項}\right\},$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1+\frac{4D+5D'}{3}+\text{高次項}\right\},$$

以此算子施之於 $4+3x+6y$, 得

$$\frac{1}{3}\{4+3x+6y+4+10\}=6+x+2y,$$

故 $$z=6+x+2y+e^{x}f(y-x)+e^{3x}F(y-2x).$$

例三. $$(D^2-DD'-2D)z=\sin(3x+4y).$$

$$\frac{1}{D^2-DD'-2D}\cdot\sin(3x+4y)=\frac{1}{-3^2-(-3\cdot4)-2D}\cdot\sin(3x+4y)$$

$$=\frac{1}{3-2D}\cdot\sin(3x+4y)$$

$$=\frac{3+2D}{9-4D^2}\cdot\sin(3x+4y)=\frac{3\sin(3x+4y)+6\cos(3x+4y)}{9-4(-3^2)}$$

$$=\frac{1}{15}\sin(3x+4y)+\frac{2}{15}\cos(3x+4y),$$

故 $$z=\frac{1}{15}\sin(3x+4y)+\frac{2}{15}\cos(3x+4y)+\Sigma Ae^{hx+ky},$$

其中 $$h^2-hk-2h=0.$$

習 題 八

(1) $(D-D'-1)(D-D'-2)z=e^{2x-y}$.

(2) $s+p-q=z+xy$. (3) $(D-D'^2)z=\cos(x-3y)$.

(4) $r-s+p=1$. (5) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\dfrac{\partial y}{\partial z^2}=y+e^{x+z}$.

(6) $(D-3D'-2)^2z=2e^{2x}\tan(y+3x)$.

152. 消去之例. 吾人現將論自一一級偏微分方程中消去一個隨意函數之結果爲何.

例一.
$$2px-qy=\phi(x^2y).$$

先對於x後對於y偏微分之,吾人得

$$2rx-sy+2p=2xy\phi'(x^2y),$$

及
$$2sx-ty-q=x^2\phi'(x^2y),$$

是以
$$x(2rs-sy+2p)=2y(2sx-ty-q),$$

或
$$2x^2r-5xys+2y^2t+2(px+qy)=0,$$

此式對於r, s, t爲一次.

由
$$px-2qy=\psi(xy^2)$$

中消去ψ之結果,與前式同.

例二.
$$p^2+q=\phi(2x+y).$$

由此式得
$$2pr+s=2\phi'(2x+y),$$

及
$$2ps+t=\phi'(2x+y),$$

是以
$$2pr+s=4ps+2t,$$

仍爲r, s, t之一次式.

例三.
$$y-p=\phi(x-q).$$

由此式得
$$-r=(1-s)\phi'(x-q),$$

及
$$1-s=-t\phi'(x-q),$$

是以
$$rt=(1-s)^2,$$

或
$$2s+(rt-s^2)=1.$$

此例之異於其他二例者,在隨意函數中亦含有 p 及 q,結果中含有 $(rt-s^2)$ 一項.

習 題 九

下列諸題中,消去其隨意函數:

(1) $py-q+3y^2=\phi(2x+y^2)$. (2) $x-\dfrac{1}{q}=\phi(z)$.

(3) $p+x-y=\phi(q-2x+y)$. (4) $px+qy=\phi(p^2+q^2)$.

(5) $p^2-x=\phi(q^2-2y)$. (6) $p+zq=\phi(z)$.

153. 上述結果之推廣 若 u 及 v 爲 x, y, z, p, q 之已知函數,則對於方程式 $u=\phi(v)$ 施以前節之法,吾人得

$$r\frac{\partial u}{\partial p}+s\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}=\left(r\frac{\partial v}{\partial p}+s\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\phi'(v),$$

$$s\frac{\partial u}{\partial p}+t\frac{\partial u}{\partial q}+\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}=\left(s\frac{\partial v}{\partial p}+t\frac{\partial v}{\partial q}+\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cdot\phi'(v).$$

消去 $\phi'(v)$ 吾人知含 rs 及 st 之諸項消去,僅餘一結果,呈下形:

$$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V.$$

其中 R, S, T, U 及 V 包含 p, q, 及 u, v 對於 x, y, z, p, q 之偏微係數

若v僅爲x, y, z而不爲p, q之函數,則係數$U=\frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q}-\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial u}{\partial q}$,爲零.

當吾人自二級方程式起始,而欲在此等式中試求一級方程式時,此等結果,將預示吾人所期望如何.

154. 求積分$Rr+Ss+Tt=V$之蒙日方法. 吾人現將論及r, s, t,之一次方程式,其係數R, S, T, V俱爲p, q, x, y, z之函數,而試作第152及153節所述方法之逆轉.

因
$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy=r\,dx+s\,dy$$

及
$$dq=s\,dx+t\,dy,$$

$$Rr+Ss+Tt-V=0$$

變爲
$$R\left(\frac{dp-s\,dy}{dx}\right)+Ss+T\left(\frac{dq-s\,dx}{dy}\right)-V=0,$$

即
$$R\,dp\,dy+T\,dq\,dx-V\,dy\,dx-s(R\,dy^2-S\,dy\,dx+T\,dx^2)=0.$$

蒙日方法之特點,在求出p, q, x, y, z間之一個或兩個關係式(每式含一隨意函數),使合於聯立方程式

$$R\,dy^2-S\,dy\,dx+T\,dx^2=0,$$

$$R\,dp\,dy+T\,dq\,dx-V\,dy\,dx=0.$$

此等關係式名曰中間積分(Intermediate integrals).

詳讀下列例題,最易瞭解前述之法.

例一. $$2x^2r-5xys+2y^2t+2(px+qy)=0.$$

如上述之法進行,吾人得聯立方程式

$$2x^2\,dy^2+5xy\,dy\,dx+2y^2\,dx^2=0,\cdots\cdots(1)$$

及 $$2x^2\,dp\,dy+2y^2\,dq\,dx+2(px+qy)dy\,dx=0.\cdots\cdots(2)$$

由(1)式,得 $$(x\,dy+2y\,dx)(2x\,dy+y\,dx)=0,$$

即 $$x^2y=a \text{ 或 } xy^2=b.$$

若取$x^2y=a$并以$x\,dy$或其等式$-2y\,dx$,除(2)之各項,得

$$2x\,dp-y\,dq+2p\,dx-q\,dy=0,$$

即 $$2px-qy=c.$$

此式合以$x^2y=a$,提示中間積分,爲

$$2px-qy=\phi(x^2y),\cdots\cdots(3)$$

其中ϕ爲一隨意函數(參考15節例一).

同理,由$xy^2=b$及方程式(2),得

$$px-2qy=\psi(xy^2).\cdots\cdots(4)$$

解(3)與(4)

$$3px=2\phi(x^2y)-\psi(xy^2),$$

$$3qy=\phi(x^2y)-2\psi(xy^2),$$

於是 $$dz=p\,dx+q\,dy=\frac{1}{3}\phi(x^2y)\cdot\left(\frac{2dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)$$

$$-\frac{1}{3}\psi(xy^2)\cdot\left(\frac{dx}{x}+\frac{2dy}{y}\right),$$

即 $$z=\frac{1}{3}\int\phi(x^2y)\cdot d\log(x^2y)-\frac{1}{3}\int\psi(xy^2)\cdot d\log(xy^2),$$

或 $$z=f(x^2y)+F(xy^2).$$

例二. $$y^2r-2ys+t=p+6y.$$

如前,消去 r 及 t,得聯立方程式

$$y^2\,dy^2+2y\,dy\,dx+dx^2=0,\qquad(5)$$

及 $$y^2dp\,dy+dq\,dx-(p+6y)dy\,dx=0.\qquad(6)$$

由 (5) 式,得 $$(y\,dy+dx)^2=0,$$

即 $$2x+y^2=a.$$

用此積分,並以 $y\,dy$ 或其等式 $-dx$, 除 (6) 之各項,得

$$y\,dp-dq+(p+6y)dy=0,$$

即 $$py-q+3y^2=c.$$

此式提示中間積分為

$$py-q+3y^2=\phi(2x+y^2),$$

因吾人僅有一中間積分故必以蘭格倫日法積分之,其輔助方程式為

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-1}=\frac{dz}{-3y^2+\phi(2x+y^2)},$$

其一解為 $2x+y^2=a$, 用此式以求另一解.

$$dz+\{-3y^2+\phi(a)\}dy=0,$$

即 $$z-y^3+y\phi(2x+y^2)=b.$$

故其通解為

$$\psi\{z-y^3+y\phi(2x+y^2),2x+y^2\}=0,$$

或 $$z=y^3-y\phi(2x+y^2)+f(2x+y^2).$$

例三. $$pt-qs=q^3.$$

聯立方程式為

$$q\,dy\,dx+p\,dx^2=0, \quad \cdots\cdots(7)$$

$$p\,dq\,dx-q^3\,dy\,dx=0. \quad \cdots\cdots(8)$$

由(7)式得 $dx=0$ 或 $q\,dy+p\,dx(=dz)=0,$

即 $$x=a \text{ 或 } z=b.$$

若 $dx=0$, (8)式化為 $0=0.$

若 $z=b$, $q\,by=-p\,dx$, 而(8)式化為

$$p\,dq+q^2p\,dx=0,$$

即 $$dq/q^2+dx=0.$$

由此得

$$-\frac{1}{q}+x=c=\psi(z). \quad \cdots\cdots(9)$$

(9)式可用蘭格倫日法積分之,但有一簡法,乃改書之為

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{q}=x-\psi(z).$$

由此得
$$y=xz-\int\psi(z)dz+F(x),$$
$$y=xz+f(z)+F(x).$$

習題十

(1)　$r-t\cos^2 x+p\tan x=0.$

(2)　$(x-y)(xr-xs-ys+yt)=(x+y(p-q).$

(3)　$(q+1)s=(p+1)t.$

(4)　$t-r\sec^4 y=2q\tan y.$

(5)　$xy(t-r)+(x^2-y^2)(s-2)=py-qx.$

(6)　$(1+q)^2r-2(1+p+q+pq)s+(1+p)^2t=0.$

(7)　求一曲面，合於 $2x^2r-5xys+2y^2t+2(px+qy)=0$，並沿雙曲拋物體 $z=x^2-y^2$ 及平面 $y=1$ 之截痕而與此拋物體相切.

(8)　求 $q^2r-2pqs+p^2t=0$ 之解呈
$$y+xf(z)=F(z)$$
形者，並證明其代表一曲面，由平行於一定平面之諸直線所組成.

155.* 積分 $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$ 之蒙日方法.

*本章中此後各節，初學者可以略去，將蒙日氏之觀念加以推廣，爲來溫 (Lyons) 之安培 (André Marie Ampère) (1775—1836)，其姓氏卽用作電流之單位者.

係數R, S, T, U, V與前同,俱爲p, q, x, y, z之函數,解法自然分爲二部:

(一) 中間積分之組成,

(二) 此等積分之繼續積分,

爲明瞭起見,吾人將此二部分別述之.

156. 中間積分之組成. 如§154

$$r=(dp-s\,dy)/dx$$

及
$$t=(dq-s\,dx)/dy.$$

將r及t代入

$$Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V,$$

以dx及dy乘之(化去分數),得

$$R\,dp\,dy+T\,dq\,dx+U\,dp\,dq-V\,dx\,dy$$
$$-s(R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2+U\,dp\,dx+U\,dq\,dy)=0.$$

設爲$N-sM=0$.

吾人現試求聯立方程式

$$M=0,$$
$$N=0$$

之解.

以上俱仿傚前節之法,但M不能如前節之劈因子,蓋以含有$U\,dp\,dx+U\,dq\,dy$等項也.

既不能將M或N分別劈因子，可試求$M+\lambda N$之因子，其中λ爲待定之乘式.

將M及N完全寫出，則欲求因子之式，爲

$$R\,dy^2+T\,dx^2-(S+\lambda V)dx\,dy+U\,dp\,dx+U\,dq\,dy$$
$$+\lambda R\,dp\,dy+\lambda T\,dq\,dx+\lambda U\,dp\,dq.$$

因其不含dp^2或dq^2之項，故dp僅顯於一因子，而dq則在他一因子內.

設因子爲

$$A\,dy+B\,dx+C\,dp \text{ 及 } E\,dy+F\,dx+G\,dq$$

於是使dy^2, dx^2, $dp\,dq$等之係數，各與前式中之係數相等，

$$AE=R;\ BF=T;\ CG=\lambda U,$$

吾人可命

$$A=R,\ E=1,\ B=kT,\ F=1/k,\ C=mU,\ G=\lambda/m,$$

再使其餘五項之係數相等，得

$$kT+R/k=-(S+\lambda V), \qquad (1)$$

$$\lambda R/m=U, \qquad (2)$$

$$kT\lambda/m=\lambda T, \qquad (3)$$

$$mU=\lambda R, \qquad (4)$$

$$mU/k=U. \qquad (5)$$

由 (5), $m=k$, 而此式合於 (3).

由 (2) 或 (4), $$m=\lambda R/U.$$

故由 (1),

$$\lambda^2(RT+UV)+\lambda US+U^2=0. \quad\cdots\cdots(6)$$

是以若 λ 爲 (6) 之一根, 則所求之因子, 爲

$$\left(R\,dy+\lambda\frac{RT}{U}dx+\lambda R\,dp\right)\left(dy+\frac{U}{\lambda R}dx+\frac{U}{R}dq\right),$$

卽 $$\frac{R}{U}(U\,dy+\lambda T\,dx+\lambda U\,dp)\cdot\frac{1}{\lambda R}(\lambda R\,dy+U\,dx+\lambda U\,dq).$$

故吾人將自平直方程式

$$U\,dy+\lambda T\,dx+\lambda U\,dp=0, \quad\cdots\cdots(7)$$

及 $$\lambda R dy+U\,dx+\lambda U\,dq=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

中, 試求積分, 其中 λ 合於 (6) 式.

其餘之步驟, 可自例題中得之.

157. 例題.

例一. $$2s+(rt-s^2)=1.$$

於前節* 方程式 (6) 中, 代入 $R=T=0$, $S=2$, $U=V=1$,

得 $$\lambda^2+2\lambda+1=0.$$

爲一二次方程式, 有二根 -1 及 -1.

*今引用前節之結果者, 乃係爲省篇幅計, 但讀者宜按基本原則逐步演算.

方程式(7)及(8)合之$\lambda=-1$, 得

$$dy-dp=0,$$

$$dx-dq=0,$$

其題明積分爲

$$y-p=\text{常數}$$

及
$$x-q=\text{常數}.$$

如第154節之例, 合併此二式, 吾人得中間積分

$$y-p=f(x-q).$$

例二.
$$r+3s+t+(rt-s^2)=1.$$

λ之二次方程式爲

$$2\lambda^2+3\lambda+1=0,$$

是以
$$\lambda=-1\ \text{或}\ -\frac{1}{2}.$$

方程式(7)及(8)合之$\lambda=-1$, 得

$$dy-dx-dp=0,$$

$$-dy+dx-dq=0,$$

其題明積分爲

$$p+x-y=\text{常數}\cdots\cdots\cdots(1)$$

及
$$q-x+y=\text{常數}.\cdots\cdots\cdots(2)$$

同理, 由$\lambda=-\frac{1}{2}$, 而得

$$p+x-2y=\text{常數}\quad\cdots\cdots(3)$$

及　$$q-2x+y=\text{常數}.\quad\cdots\cdots(4)$$

此四積分,究應如何兩兩合併乎?

試再取前節 $M=0$, $N=0$ 所表之聯立方程式觀之,若此兩式俱合,則 $M+\lambda_1 N=0$ 及 $M+\lambda_2 N=0$ 亦必俱合(其中 λ_1, λ_2 爲 λ 之二次方程式之兩根),故對於 $\lambda=\lambda_1$ 時,必有一因子爲零(顯然爲另一個,否則 $dy=0$),對於 $\lambda=\lambda_2$ 時亦然.

卽謂吾人合併積分(1)及(4),并合併(2)及(3),得二中間積分

$$p+x-y=f(q-2x+y)$$

及　$$p+x-2y=F(q-x+y).$$

例三.　$2yr+(px+qy)s+xt-xy(rt-s^2)=2-pq.$

λ 之二次方程式爲

$$\lambda^2xypq-\lambda xy(px+qy)+x^2y^2=0,$$

其根爲　$$\lambda=y/p \text{ 或 } x/q.$$

代入前節之(7),(8)兩式中,經化簡,得

$$p\,dy-dx+y\,dp=0,\quad\cdots\cdots(5)$$

$$2y\,dy-px\,dx-xy\,dq=0,\quad\cdots\cdots(6)$$

$$-qy\,dy+x\,dx-xy\,dp=0,\quad\cdots\cdots(7)$$

及　$$-2dy+q\,dx+x\,dq=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

將(5)及(8)之顯明積分合併,得

$$yp-x=f(-2y+qx).$$

但(6)與(7)俱爲不可積分由其包含 p, q 可以察知,是以雖 λ 之二次方程式有二相異之根,而吾人僅得一中間積分.

習題十一

求下列諸題之一中間積分(可能時求兩個):

(1)　$3r+4s+t+(rt-s^2)=1.$　(2)　$r+t-(rt-s^2)=1.$

(3)　$2r+te^x-(rt-s^2)=2e^x.$　(4)　$rt-s^2+1=0.$

(5)　$3s+(rt-s^2)=2.$

(6)　$qxr+(x+y)s+pyt+xy(rt-s^2)=1-pq.$

(7)　$(q^2-1)zr-2pqzs+(p^2-1)zt+z^2(rt-s^2)=p^2+q^2-1.$

158. 中間積分之繼續積分.

例一. 試取§157例一中所得之中間積分.

$$y-p=f(x-q).$$

設　$$x-q=a.$$

及　$$y-p=f(a)=b.$$

則吾人可得一"全"積分,含有隨意常數a, b, c.

蓋以 $$dz=p\,dx+q\,dy=(y-b)dx+(x-a)dy$$

因而 $$z=xy-bx-ay+c.$$

若假設中間積分中所含之函數f爲平直者,得

$$y-p=m(x-q)+n,$$

吾人由此可得一更普通之積分式.

蓋以蘭格倫日法積分之,得

$$z=xy+\phi(y+mx)-nx.$$

例二. 取157節例二中之二中間積分

$$p+x-y=f(q-2x+y)$$

及 $$p+x-2y=F(q-x+y),$$

若吾人試以例一之法,施於此二聯立方程式,得

$$q-2x-y=\alpha,$$

$$q-x+y=\beta,$$

$$p+x-y=f(\alpha),$$

$$p+x-2y=F(\beta).$$

若右端之各項俱爲常數,得x, y, p, q俱爲常數之不合理之結果.

但若假定α及β俱爲非常數,而爲參變量,即可以變化者.

解此四式，得

$$x=\beta-\alpha,$$

$$y=f(\alpha)-F(\beta),$$

$$p=y-x+f(\alpha),$$

$$q=x-y+\beta,$$

由此
$$dz=p\,dx+q\,dy.$$

$$=(y-x)(dx-dy)+f(\alpha)dx+\beta\,dy.$$

$$=-\frac{1}{2}d(x-y)^2+f(\alpha)d\beta-f(\alpha)d\alpha+\beta f'(\alpha)d\alpha-\beta F'(\beta)d\beta;$$

即
$$z=-\frac{1}{2}(x-y)^2-\int f(\alpha)d\alpha-\int\beta F'(\beta)d\beta+\beta f(\alpha).$$

欲得一不含積分符號之結果，令

$$\int f(\alpha)d\alpha=\phi(\alpha)\quad\text{及}\quad\int F(\beta)d\beta=\psi(\beta),$$

由分部求積分法，得
$$\int\beta F'(\beta)d\beta=\beta F(\beta)-\int F(\beta)d\beta,$$

$$=\beta\psi'(\beta)-\psi(\beta),$$

故
$$z=-\frac{1}{2}(x-y)^2-\phi(\alpha)-\beta\psi'(\beta)+\psi(\beta)+\beta\phi'(\alpha),$$

或最後得
$$\begin{cases}z=-\frac{1}{2}(x-y)^2-\phi(\alpha)+\psi(\beta)+\beta y,\\ x=\beta-\alpha,\\ y=\phi'(\alpha)-\psi'(\beta),\end{cases}$$

此三方程式,合爲一曲面之參變量方程式,因此解含有二隨意函數,故可視爲最普通之式.

習題十二

(完成習題十一中各題之解)

用上述方法,積分:

(1) $p+x-2y=f(q-2x+3y)$.

(2) $p-x=f(q-y)$.

(3) $p-e^x=f(q-2y)$.

(4) $p-y=f(q+x),\ p+y=F(q-x)$.

(5) $p-y=f(q-2x),\ p-2y=F(q-x)$.

(6) $px-y=f(qy-x)$.

(7) $(zp-x)=f(zq-y)$.

(8) 命 $\phi(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha^2,\ \psi(\beta)=\frac{1}{2}\beta^2$. 求 (4) 之一特解,並消去 α 及 β.

第十四章 雜題

(1) $r=2y^2$. (2) $\log s=x+y$. (3) $2yq+y^2t=1$.

(4) $r-2s+t=\sin(2x+3y)$. (5) $x^2r-2xs+t+q=0$.

(6)　$rx^2-3sxy+2ty^2+px+2qy=x+2y.$

(7)　$y^2r+2xys+x^2t+px+qy=0.$

(8)　$5r+6s+3t+2(rt-s^2)+3=0.$

(9)　$2pr+2qt-4pq(rt-s^2)=1.$

(10)　$rt-s^2-s(\sin x+\sin y)=\sin x\sin y.$

(11)　$7r-8s-3t+(rt-s^2)=36.$

(12)　求一曲面合於$r=6x+2$,並沿$z=x^3+y^3$及平面$x+y+1=0$之截痕而與之相切.

(13)　求一曲面合於$r-2s+t=6$,並沿雙曲拋物面$z=xy$被平面$y=x$所割之截痕而與之相切.

(14)　已知一曲面,合於$r+t=0$,並沿$x^2+z^2=1$被$y=0$所割之截痕而與之相切,求其方程式呈下形

$$z^2(x^2+z^2-1)=y^2(x^2+z^2).\qquad\text{[倫敦]}$$

(15)　求證應用蒙日方法於

$$2r+qs+xt-x(rt-s^2)=2$$

所得x, y, p, q之四個平直微分方程式,其中有二個為可積分,引得中間積分

$$p-x=f(qx-2y),$$

至於其餘二式,雖單獨為不可積分,但可合之而得積分

$$p+\frac{1}{4}q^2-x=a.$$

於是求得其解

$$z=\frac{1}{2}x^2-2mxy-\frac{2}{3}m^2x^3+nx+\phi\left(y+\frac{1}{2}mx^2\right),$$

及
$$z=\left(a-\frac{1}{4}b^2\right)x+\frac{1}{2}x^2+by+c,$$

並證明其一式爲另一式之特例.

(16) 有一曲面,已知其被任何平行於$x=0$之平面所割之截痕,爲經過x軸之一圓,求證其合於函數方程式及微分程式

$$y^2+z^2+yf(x)+zF(x)=0,$$

$$(y^2+z^2)t+2(z-yq)(1+q^2)=0.$$

(17) 求 $x^2r+2xys+y^2t=0$ 之解,呈

$$z=f\left(\frac{y}{x}\right)+xF\left(\frac{y}{x}\right)$$

之形,並證其代表一曲面,由直線之截z軸者所組成.

(18) 證明由 $rt-s^2=0$ 引得"全"解.

$$z=ax+by+c.$$

求證由此所得之"通"解(如§134),代表一可展曲面[參考斯密(Smith)著 Solid Geometry, 222—223 諸節].

於是證明其對於任何可展曲面，$q=f(p)$.

(19) 求合於

$$pq(r-t)-(p^2-q^2)s+(py-qx)(rt-s^2)=0$$

之可展曲面.

[設 $q=f(p)$, 此名曰怕松方法 (Poisson's method).

吾人得　　$q=ap$ 或 $p^2+q^2=b^2$,

因而　　$z=\phi(x+ay)$ 或 $z=bx\cos\alpha+by\sin\alpha+c$.

此二式中之第二式，卽組成"通"解所表之曲面之一平面].

(20) 求證若

$$X=p,\ Y=q,\ Z=px+qy-z.$$

則　　$r=T/(RT-S^2),\ s=-S/(RT-S^2),\ t=R/(RT-S^2)$,

其中　　$R=\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}$, 等等;

於是證明方程式.

$$ar+bs+ct+e(rt-s^2)=0$$

變爲　　$AT-BS+CR+E=0$

其中 a, b, c, e 爲 x, y, p, q 之函數，而 A, B, C, E 爲 P, Q, X, Y 之相當函數.

應用此對偶定理(參考第十二章雜題之21題)，以求

$$pq(r-t)-(p^2-q^2)s+(py-qx)(rt-s^2)=0$$

之二中間積分.

(21) 證明,若 x, y, u, v 爲實數,且 $u+iv=f(x+iy)$,則 $V=u$ 及 $V=v$ 俱爲

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

之解,

且 $u=$ 常數

$v=$ 常數

二組曲線互爲正交.

對於下列特例,證實此等性質:

(i) $u+iv=x+iy$,

(ii) $u+iv=(x+iy)^2$,

(iii) $u+iv=1/(x+iy)$.

[此微分方程式爲拉普拉斯方程式之二度式,對於引力,靜電學,及水力學極爲重要,u 及 v 名曰共軛函數見剌謨稷(Ramsey)著 Hydro-Mechanics 第二卷第41節.]

(22) 求
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

之解,合於當 $t=0$ 時 $y=f(x)$ 及 $\frac{\partial y}{\partial t}=F(x)$ 之條件,呈

$$y=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2}f(x-at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(\lambda)d\lambda$$

之形.

[無窮長度之振動弦,其上任一點 x 橫遷移爲 y, 其原始遷移及速度由 $f(x)$ 及 $F(x)$ 定之,見剌謨稷著 Hydro-mechanics 第二卷第248節.]

(23)　若 $y=f(x)\cos(nt+\alpha)$ 爲

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0$$

之一解,求證 $f(x)=A\sin mx+B\cos mx+H\sinh mx$

$$+K\cosh mx,$$

其中 $$m=\sqrt{(n/a^2)}.$$

[此微分方程式,乃差近適合於棍桿之側面振動,其旋轉慣性不計者,見累力(Rayleigh)著 Sound 200—206諸節.]

(24)　求證

$$w=A\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)\cos(pct+\alpha)$$

合於 $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

並當 $$x=0,\ y=0,\ x=a\ 或\ y=b$$

時爲零,但需有 m 及 n 爲正整數,合於

$$(p/\pi)^2=(m/a)^2+(n/b)^2\text{ 之條件.}$$

[對於具有長方周界之振動膜之微分方程式,此式爲其一解,見累力著 Sound 第194—199諸節.]

(25) 求證 $w=AJ_0(nr)\cos(nct+\alpha)$

合於
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right),$$

其中J_0爲零次之貝塞爾函數(參考第九章97節下習題三中之第二題).

[此題涉及一具有圓周界之振動膜見累力著 Sound 200—206諸節].

(26) 求證

$$V=(Ar^n+Br^{-n-1})P_n(\cos\theta)$$

合於
$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}=0,$$

其中P_n爲n級之勒戎德爾函數.

[關於勒氏方程式,參考第九章§99下習題五中之第2題].

[提示:命$\mu=\cos\theta$,當V已知其對於一軸爲對稱時,此方程式爲拉普拉斯位置方程式之三度式,見魯士(Routh)著Analytical Statics,第二卷第300節].

第十五章

雜　　法

159. 本章含有六部份,第一部分(160—161諸節),爲第六章之補充,對於異解理論中之困難處,有所討論,而於包線之定義,以及由判別式可得特解之法,尤爲致意.至於以判別式之軌跡爲周界之觀念,似爲人所罕知.

第二部分(162—167諸節),論及李嘉替方程式,而尤注意其推廣式.例題中均含一級數,此級數表示在何種情況之下,則李嘉替之原方程式,可以積分成有限項數.

第三部分(168—170諸節),論及全微分方程式,而爲第十一章之補充.用積分因子於齊次方程式,可爲初學之助,至於邁爾氏方法,則於理論方面,大有裨益焉.

第四部分(171—177諸節),論及二級平直微分方程式,及由級數求解之法,此乃補充第九章及第十章者,

少數高級方程式之結果,亦包含在內.

第五部分(178—181諸節),論及算學物理中之若干方程式,對於有關波動者,尤爲注意,蓋補充第四章及第十四章者也.

第六部分(182—183諸節),論及微分方程式之差近數值解法(第八章之補充),先敘述亞丹士(Adams)方法,此法大概爲已有諸法之最佳者,繼乃將著者方法(即90—93諸節)之推廣(里謨士 E. Remes 所作),作一概要.

160. 奧解理論中之困難點*. 關於包線,異解,以及特解之困難處,今將略爲指明,以爲第六章之補充.

一族曲線之包線,其舊定義乃相隣曲線基本交點之軌跡.此定義必須捨棄,蓋現已證明由此將得一可笑之結果,即一曲線幷非其曲率圓之包線是也†.發勒浦桑(De la Vallée Poussin)之定義,謂爲孤立表徵點之

*關於包線問題,可參考否勒(Fowler)著 Elementary Differential Geometry of Plane Curves, Chap. V. 關於異解者,可參考 Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften II. A 4 a 及 III D 8.

†P 及 P' 爲一曲線上之二相隣點,則其相當之曲率心 C 及 C' 位於原曲線之漸伸線(evolute)上,曲率徑 CP, $C'P'$ 之差等於漸伸線之 CC' 弧,此弧通常較大於 CC' 弦,亦即大於曲率心間之距離.故一曲率圓完全包含他一曲率圓,因而二圓間並無實交點.此外舊定義之不合者可參攷161節習題13.

軌跡(孤立表徵點者,即謂一曲線上之點,與一相隣曲線之距離,必至少爲二級之微量者是也.)然而此定義亦有時不合*.依吾人之意見,其最適宜之定義,應爲一曲線,與族中之每一曲線均相切,且其上之每一點,與族中之某一曲線相切者.此定義與55節所列之定義符合,此定義之第二部分,雖彼處未明顯表出,但於其下之辭句中,已暗示焉.

異解之定義,至少有三種.吾人之定義如下(見55節):代表全原函數之曲線族,其包線†所表之解,稱爲異解.然在例外之時,包線有時亦爲族中曲線之一.例如拋物線 $y=c(x-c)^2$ 於 $(c, 0)$ 點與直線 $y=0$ 相切,故當 c 爲異於零之各值時,此拋物線族之包線爲 $y=0$,但此線亦爲 $c=0$ 時族中之特殊曲線.按照吾人之定義,則 $y=0$ 應視爲此曲線族之微分方程式(第六章,習題三,6題)之異解,同時亦爲其特解之一.然對於異解一名詞,頗有人主張須作以下之解釋,即謂:異解者,自全原函數中,任予隨意常數以何值,均不能得出之解也.異解之第

*見湼徵爾(Neville), Proc. Camb. Phil. Soc. 1922年第二十一卷第97頁.

†但須參考本節之末,當包線平行於 y 軸時之例外情形.

三定義*, 乃p-判別式中所得之解, 謂之異解. 第161節中將證明此種解未必代表包線, 蓋有時可爲一特解或其極限式也.

讀者每以爲:凡曲線族之含一個參量者, 將有一包線, 於是凡高於一次之一級微分方程式, 必將有一異解. 此種見解, 似頗自然, 然而實際上幷不如此. 討論包線之時, 暗中實已假定曲線族方程式中所含之函數, 已合於與綿續性有關之某種條件, 當吾人對於異解作初步研究之時, 所舉之簡易微分方程式, 其全原函數, 通常恆合於上述之條件. 但其所以如此者, 蓋製作此等例題時, 實以全原函數爲起點也. 今若自形式相似而較普通之微分方程式着手, 則吾人殊無理由可以假定其全原函數, 必合於能有一包線之條件. 總之, 吾人可斷言, 異解之存在, 應視爲例外, 不應視爲常規者也†.

通常求包線之法(56節)有時對於某一形式下之全

*此定義常被高級書中所採用[見印斯(Ince)著 Ordinary Differential Equations, p, 87 及俾柏巴哈(Bieberbach)著 Differentialgleichungen, p. 85,] 當吾人言及不同來源之結果時, 必須將依爲根據之定義釋出, 否則每致混淆.

†參考本章習題一中第10題.

原函數不適用,但對於其另一形式則又適用.例如,對於 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$, 或 $x+\sin^{-1}y=c$, 其法不適用,但對於

$$(x+y-c)^2=4xy \quad 或 \quad y=\sin(c-x)$$

則爲有效.

由方程式 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$, 得 $y=xp^2$, 可以說明另一問題. $y=0$ 適合此微分方程式,但當 $x=0$ 時, $p=\infty$. 於是兩端俱不定,故 $x=0$ 頗難適合,然而 $x=0$, 及 $y=0$ 俱爲此曲線族(切於兩軸之拋物線族)之包線,并俱合於 $y(dx)^2=x(dy)^2$, 此微分式所表之幾何意義,較原微分方程式尤爲準確[參考第六章雜題9題及總雜題11題,在前題中 $x=0$ 爲一特殊曲線之極限,在後一題中, $x=0$ 同時爲一包線及一尖點軌跡].在此種情形之下,吾人不得不將 $x=0$ 視爲並非一解.但此種棄而不用,祗可謂爲微分方程式不能表示平行於 y 軸之方向,不能謂包線本身有何特異也.

161. 判別式,特解及周界. 本節中,將專論全原函數之呈 $f(x, y, c)=0$ 形者,其中 $f(x, y, c)$ 爲 x, y, c 之一多項式,亦可書爲:

$$a_0(x,y)c^n+na_1(x,y)c^{n-1}+\tfrac{1}{2}n(n-1)a_2(x,y)c^{n-2}+\cdots\cdots+a_n(x,y)=0.$$

c-判別式 Δ_c 之定義,乃根差之平方與 $a_0{}^{2n-2}$ 之乘積(數

值因子除外)引用a_0^{2n-2}者,蓋欲所得之結果爲$a_0, a_1, \cdots a_n$之一多項式也.例如當$n=2, 3, 4$時,吾人依次得

$$a_0a_2-a_1^2,$$

$$(a_0a_3-a_1a_2)^2-4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2),$$

$$(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)^3-27(a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3)^2.$$

如第六章之例,判別式一名詞,有時不僅代表函數Δ_c,且亦代表方程式$\Delta_c=0$及此方程式所表之軌跡.

解異解問題時,對於判別式之演算,最好能用一有系統之方法.對於二次式,三次式,以及四次式,上列結果,可以應用*.若照56節之例,用消去法以求Δ_c,則其中若干因子,往往有被忽視之虞.欲完成此種消去手續,必須應用西薇士德之析配法(Sylvester's dialytic method).若用此法於本節,吾人以$c^{n-2}, c^{n-3}, \cdots c, 1$,依次乘$f$,更以$c^{n-1}, c^{n-2}, \cdots c, 1$,依次乘$\partial f/\partial c$.然後自所得之$(2n-1)$方程式中,消去$c^{2n-2}, c^{2n-3}, \cdots c, 1$,於是得一$(2n-1)$級行列式.例如在二次方程式$a_0c^2+2a_1c+a_2=0$中,此行列式爲

*應用此等結果時須切記諸a並非眞正係數,蓋眞正係數尙含有二項式之數值因子也;例如在四次式c^2之係數並非a_2而爲$6a_2$.

$$\begin{vmatrix} a_0, & 2a_1, & a_2 \\ 2a_0, & 2a_1, & 0 \\ 0, & 2a_0, & 2a_1 \end{vmatrix} = 4a_0(a_0a_2 - a_1^2).$$

但此結果中,含有一多餘之因子a_0,吾人易見無論f之次數爲若干,此多餘之因子,常常存在,致使所得結果本應爲$(2n-2)$次者,變而爲$(2n-1)$次.故若用西薇士德之方法以解本節末之習題,此因子必須除去.

此等習題之主要意義,在說明幾種方法,由c-判別式及p-判別式中求出特解或其極限之式.有時此等解僅爲某特殊曲線之一部(題1),其幾何意義呈各種之形,彼等可以爲包線,因此亦爲異解(題2),或爲節點軌跡(題3),或爲尖點軌跡(題4),或爲切點軌跡(題5),或爲幾近線(題6),或爲切線,與族中所有之曲線切於同一點(題8),彼等亦可僅爲經過曲線族一公共點之直線(非切線)(題7),若與克雷洛式有關,則彼等成爲包線之拐切線(題9).

吾人有時謂:若判別式中含有特解,則在Δ_c中爲一次式,在Δ_p中爲立方式.此規律合之64節所述者,可以下列記號式表之:$\Delta_c = EN^2C^3P$, $\Delta_p = ET^2CP^3$,其中E, N, C, P, T分別代表包線,節點軌跡,尖點軌跡,特解及切

點軌跡.以上規律,對於簡易之題,用作提示,頗爲合用;但不能適用之題,亦易舉出(如 3, 4, 6, 13, 14 諸題).

將特解及其他例外之軌跡視作周界*,此種觀念,現將予以說明.吾人論列之例,以 x, y, c 之多項式 $f(x, y, c)$ 爲限,且須每予 x, y 以一組值恆得一含 c 之 n 次方程式.該式設有 m 個實根,相當於實曲線,及 $n-m$ 個虛根相當於虛曲線.以上各根,當然俱爲 x, y 之函數,故吾人須進而約定當 x, y 綿續變化時,各根亦須綿續變化.

設有一曲線 $B(x, y)=0$. (不爲重疊式或低級曲線所組合),爲兩區域間之周界,並設 m 在一區域內之值爲 M,而在他一區域內之值爲 $M-2$,當 (x, y) 點自第一區域內綿續向外移動,經過周界 B 而入於第二區域,則有一對相異實根漸趨相等,繼而相等(在 B 上),終於(在第二區域內)變爲相配虛數.Δ_c 中因含有此等根之差之平方,故在 B 上必爲零,然後卽行變號,蓋二相配虛根之差,其平方乃負號也.當 (x, y) 經過 B 時,$B(x,y)$ 亦須改號.廣而言之,倘 m 之值,自 M 變而爲 $M-2r$,其中 r 爲一奇數,則 Δ_c 將改變符號,而 $B(x, y)$ 在 Δ_c 中亦將爲奇次

*在此以及其他地方著者採用米恰爾君 (Mr. H. B. Mitchell) 有價值之建議.米君乃紐約哥倫比亞大學之算學教授.但對於余之理論,彼並不負責,蓋余二人之觀察點,頗不相同也.

(但其次數不一定卽爲 r, 參考14題, 其中 $B(x, y)$ 爲三次, 而 $r=1$). 若 r 爲偶數, 則 $B(x, y)$ 亦爲偶次. 反之, 倘 $B(x, y)$ 爲奇次, 則 r 亦爲奇數, 但若 $B(x,y)$ 爲偶次, Δ_c 因而不改號, 則 r 不必爲偶數, 有時亦可爲零, 如13題之例, 其時 B 爲一包線, 族中所有之曲線均經過之. 在此種情形之下, 包線必爲偶次, 因而與 $\Delta_c=EN^2C^3P$ 之規律相反. 若將經過一點之實曲線換爲經過此點之實方向(按卽實切線. 譯者註), 則上述理論, 可同樣應用於 Δ_p. 克雷洛式(見9題)乃一最有興趣之例. 包線之一反曲切線, 相當於 p 之二等根, 因而得 $\Delta_p=0$. 但在克雷洛式內, $\Delta_c=\Delta_p$, 故 $\Delta_c=0$.

有一交替之幾何方法*, 以研究異解者, 乃以 z 代 p, 因而將微分方程式變爲一曲面之代數方程式. 同理, 在全原函數內, 亦可以 z 代 c. 此種方法需要關於曲面之幾何智識頗深.

卽使微分方程式之係數, 俱爲 x,y 之多項式, 異解論中之困難已覺甚鉅, 若各係數爲超越函數, 含有各種複雜之異點, 則其困難將愈形增加矣†.

* Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III. D. 8 或谷耳薩著 Cours d' Analyse Mathématique, 第四版, 第2卷, 435節.

†見喜爾 Proc. Lond. Math. Soc., 1918年 第2組(Series 2)第17卷, p.149.

習題一

[下列各題中,吾人以 $C.P.$ 代表全原函數, $D.E$ 代表微分方程式, Δ_c 代表 c-判別式, Δ_p 代表 p-判別式, $S.S.$ 代表異解. Δ_c 及 Δ_p 俱用前舉之公式求得,但數值因子則經略去.

讀者應畫略圖(但不必計算 x,y 之眞正值),蓋此等略圖,可以表示族中若干曲線之形狀,並能將其與判別式軌跡之相關位置表出也.]

(1) 已知 $C.P.$ 爲 $y(x+c)+c^2=0$, 試求得 $D.E.$ 爲

$$x^2p^2+y(2x-y)p+y^2=0,$$

及
$$\Delta_c=y(4x-y),\quad \Delta_p=y^3(4x-y).$$

[對於異於零之 c 之各值, $C.P.$ 代表一族直角雙曲線. $y=0$ 爲此等雙曲線之幾近線,亦爲特解 $xy=0$ 之一部,此特解蓋於 $C.P.$ 中命 $c=0$ 所得出者也. $y=4x$ 爲一包線(爲一 $S.S$), 公式 $\Delta_c=EN^2C^3P$, $\Delta_p=ET^2CP^3$ 在此適用. 全平面可以分爲四個區域,在其中之兩個區域內,每予一點,恆有族中之兩個實曲線經過;在其他兩個區域內,則經過一點之實曲線,其數爲零. 區域之周界可由二判別式所表之軌跡中得出,

且在二判別式中俱爲奇次:此點與吾人之周界學說適相符合,蓋在本題,$M=2$, $M-2r=0$, 因而 $r=1$ 適爲奇數也.]

(2) 已知 $C.P.$ 爲 $y=c(x-c)^2$, 試求得其 $D.E.$ 爲

$$p^3-4xyp+8y^2=0,$$

及
$$\Delta_c=y(27y-4x^3),\quad \Delta_p=y^3(27y-4x^3).$$

[如 160 節所示, $y=0$ 乃一包線 (爲一 $S.S.$), 同時又爲一特解.又此式亦可視爲'一切點軌跡'. $27y=4x^3$ 乃一包線.上述四種幾何解釋中,僅第(2)及第(1)兩條合於規律 $\Delta_c=EN^2C^3P$, $\Delta_p=ET^2CP^3$ 所提示.其第一及第三兩條則不合也.]

(3) 已知 $C.P.$ 爲 $4y^2=3c^2x(x-c)^2$, 試求得其 $D.E.$ 爲

$$(2px-y)^4=3x^5(2px-3y)^2,$$

及
$$\Delta_c=x^3y^1(3x^5-64y^2),\quad \Delta_p=x^{27}y^4(3x^5-64y^2).$$

[判別式之演算,在本題頗爲繁難. $y=0$ 爲一節點軌跡,同時又爲一特解. $x=0$ 爲所有各曲線在原點之公切線,但對於 $c=0$ 時之曲線則除外(參考 8 題). $3x^5=64y^2$ 乃一包線,欲明瞭判別式中之各因子,何以或爲奇次或爲偶次,須知: $x=0$ 乃二區域之周界,經過此周界後,實曲線之數目,自零增而爲二,至於包

線,則爲另二區域之周界,實曲線之數目,在此乃自二增而爲四也.在$y=0$上所有之四曲線疊合爲二,但在其正部分(意卽須在原點之右,譯者註)之上下側,而介於此軸與包線之一枝之間,則曲線數目均相同,而爲四個.規律$\Delta_c=EN^2C^3P$,及$\Delta_p=ET^2CP^3$對於$x=0$及$y=0$兩軌跡之幾何解釋,未能提示.]

(4) 已知$C.P.$爲$4y^3=c(3x-c)^2$,試求得其$D.E.$爲

$$yp^3-3xp+2y=0$$

及

$$\Delta_c=y^3(y^3-x^3),\quad \Delta_p=y(y^3-x^3).$$

[當c之值異於零時,$C.P.$代表一族半立方拋物線,其尖點在$y=0$上.故$y=0$爲尖點軌跡,但同時亦爲一特解.$y^3=x^3$爲一包線(爲一$S.S.$)規律$\Delta_c=EN^2C^3P$, $\Delta_p=ET^2CP^3$曾提示吾人,謂$y=0$乃一尖點軌跡,但於其同時,又爲特解,則未能表明.]

(5) 已知$C.P.$爲$y^2=c(3x-c^2)$,試求得其$D.E.$爲

$$8y^2p^3-54xp+27y=0,$$

及

$$\Delta_c=y^4-4x^3,\ \Delta_p=y^2(y^4-4x^3).$$

[當c爲異於零之各值時,$C.P.$代表一族拋物線,以$y=0$爲其軸,此軸上之任一點,爲族中兩拋物線之頂點,而該兩拋物線凹面相反.$y=0$爲一切點軌

跡,同時又爲一特解. $y^4=4x^3$ 爲一包線(爲一 $S.S.$). $y^2=c(3x-c^2)$ 與包線相切於 $\{c^2,\pm\sqrt{(2c^3)}\}$ 點,當 c 爲負時,此點乃虛點,又與包線相交於$\{\frac{1}{4}c^2,\pm\frac{1}{2}\sqrt{(-c^3)}\}$點,當 c 爲正時,此點變爲虛點,前述規律,對於切點軌跡,雖曾提明,但對於同時亦爲特解,則未能表出也.]

(6) 求證,除零而外,無論 m 之值爲何,

$$y^{m-2}p^2=1$$

之 $C.P.$ 均爲

$$4y^m=m^2(x+c)^2.$$

並證,在 m 爲大於1之正整奇數, $m=1$ 以及 m 爲負整奇數三種情形之下, Δ_c 及 Δ_p 分別爲

$$y^m,\quad y,\quad y^{-m},$$

及

$$y^{m-2},\quad y,\quad y^{2-m}.$$

但求此等判別式時,須以 y 之最低冪乘各方程式,使能免去負指數爲度.

[$y=0$ 在第一款爲一尖點軌跡,在第二款爲一包線(爲一 $S.S.$),而在第三款則爲一特解之極限式,而代表全原函數中所有各曲線之幾近線. $c=\infty$ 時,若 m 爲負數則 $y^{-m}=0$, 故在普通情形此特解之極限式,包含一解爲 $y=0$ 之重疊式. 若 $m=-1$, 則此特解應得之次數,可由規律 $\Delta_c=EN^2C^3P$, $\Delta_p=ET^2CP^3$ 中表

明,但對於m爲其他之値時則不能.此規律對於尖點軌跡應得之次數,僅能於$m=3$時表示正確,餘亦不能.]

(7) 已知$C.P.$爲$y=x(x+c^2)$,試求得其$D.E.$爲

$$x^2p^2-2xyp+y^2-4x^3y=0,$$

及
$$\Delta_c=xy,\qquad \Delta_p=x^5y.$$

試證$y=0$爲一包線(爲一$S.S.$),而$x=0$爲一特解之極限式,但其本身則并非一解.

[原點爲族中各曲線之公點,兩判別式在此爲零,可以預知.蓋以在原點時,曲線族方程式對於c之任何値俱能適合,故所有c之各冪之係數,以及不含c之項,在此俱爲零,是以$\Delta_c=0$,蓋其中各項均爲零也.因各曲線在此公共點之切線各不相同,故其微分方程式對於p之任何値,在此均能適合.故用一與對於Δ_c相似之論斷,卽得$\Delta_p=0$(參考第六章雜題內7題).]

(8) 求證當c爲異於零之各値時,曲線族

$$y^2=x(x+c)^2$$

中之各曲線,俱與$x=0$相切於原點.求得其$D.E.$爲

$$4x^2p^2-4xyp+y^2-4x^3=0,$$

及 $$\Delta_c = xy^2, \qquad \Delta_p = x^5.$$

試證 $y=0$ 爲一節點軌跡,而 $x=0$ 爲一特解之極限式(雖其本身並非一解),同時爲一切線,與族中所有之各曲線,除 $c=0$ 時之曲線外,相切於同一點(此種直線與吾人之包線定義不合).

[如7題之例,Δ_c 在原點必爲零,Δ_p 亦爲零(雖此時各曲線之切線並非各不相同),參考第六章雜題內9題.]

(9) 求證對於微分方程式(乃克雷洛氏)

$$(y-px)^2 = p^3,$$

有 $$\Delta_p = y^3(27y-4x^3) = \Delta_c.$$

[$27y=4x^3$ 乃一包線(爲一 $S.S.$), $y^2=0$ 爲一特解,代表包線之拐切線.經過任何點,均可向 $27y=4x^3$ 作三切線.在第一象限,曲線與 $y=0$ 間之區域內,此三切線均爲實,在第三象限之相似區域內亦然.在其他區域內,有兩切線爲虛.在 $y=0$ 上之任一點,則有兩切線疊合,故 $y=0$ 必含於判別式內.同理,任何其他微分方程式之呈克雷洛式者,倘其包線有拐切線,則此等切線必含於判別式內.]

(10) 已知微分方程式

$$f(x, y, p)=0, \cdots\cdots (1)$$

試推得
$$\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{dp}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}=0. \cdots\cdots (2)$$

於是證明：凡由 p- 判別式所得出之解,在其上之任何點,有

$$\frac{\partial f}{\partial p}=0, \cdots\cdots (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial y}=0. \cdots\cdots (4)$$

方程式(1),(3),(4)爲一異解之必要條件,對於克雷洛式有 $f(x,y,p)\equiv y-px-F(p)$. 故方程式(4)在此款能全合(Identically satisfied). 然在普通情形,吾人實無理由可以假定此三方程式必有一聯立解,故一微分方程式通常並無異解.

[應用此例於65節,例1,吾人可得上述三條件,爲

$$p^2(2-3y)^2=4(1-y), \quad 2p(2-3y)^2=0,$$
$$p\{-6p^2(2-3y)+4\}=0.$$

由 $1-y=0$, 得 $p=0$, 合於所有三式,但 $2-3y=0$ 則不能合於第一式.]

(11) [本題應用異解之第三定義(160節), 10題則對於三種定義俱合也.]

求證若有一曲線,其上之任一點,均能使方程式

$$f(x, y, \lambda)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

對於λ有公解,則沿此曲線,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial \lambda}d\lambda=0.$$

由是而 $$-\lambda\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0.$$

由是證明,若$\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$,則$\lambda=p$,而此曲線爲微分方程式$f(x, y, p)=0$之一異解;若$\frac{\partial f}{\partial y}=0$,則$\frac{\partial f}{\partial x}=0$.

[此題表明,若加一$\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$之條件,則10題所列之必要條件,變爲充分.但此新加之條件,並非必要.在2題中,$\frac{\partial f}{\partial y}=16y-4xp$.此式對於包線$y=0$爲零,但對於他一包線$27y=4x^3$則否.]

(12) 求證10題中方程式(1)之全原函數所表各曲線之拐點之軌跡,合於10題中之方程式(4)故由此等方程式中消去p,其結果必含有此軌跡.

應用此法於7題中之諸方程式,並採用西薇式德消去法,而求得$x^6y(4y-x^3)=0$.[注意,所有Δ_p中之軌跡,以及拐點軌跡$4y=x^3$,俱已包括在內.]

(13) 求證方程式$y^2=(x-c)^3$, $y=(x-c)^3$, $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{1}{3}}$,俱代表一族曲線,其中相隣之曲線,不能相交於實點,但仍有一包線$y=0$(在第三例中,$x=0$亦爲一包線).

求得其相當之微分方程式

$$8p^3=27y,\ \ p^8=27y^2,\ \ xp^3+y=0$$

c-判別式 $y^4,\ y^2,\ x^4y^4(x-y)^2(x+y)^2$;

及p-判別式 $y^2,\ y^4,\ x^2y^2.$

[上述各款中,包線均爲偶次;其理由已詳見於以判別式軌跡爲周界之討論中.在第一族及第三族內,包線同時亦爲尖點軌跡,故普通規律對此適合.然對於第二族則否.在$x-y=0$, $x+y=0$兩軌跡上,有兩虛曲線在彼疊合,此等虛曲線,蓋於第三族方程式中予c以負值而得者也.]

(14) 求證$y=(x-c)^4$代表一族曲線,與其包線$y=0$有四點切.

求得其微分方程式$p^4=256y^3$,及其判別式

$$\Delta_c=y^3,\ \Delta_p=y^9.$$

[包線之次數,在此題又高於1.在本題此次數爲奇數,實亦應爲奇數.蓋經過任一點之實曲線,其數

目在包線之一邊爲二,而在他一邊則爲零也.]

(15) 求證方程式 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=c^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=c$,

$$(x+y-c)^2=4xy,\ (x+y-c^2)^2=4xy,$$

俱代表一族拋物線,有一公共軸,平分 xOy 角,並以 $x=0$ 及 $y=0$ 爲包線.試證於第一第二兩式,欲求 Δ_c 爲不可能.[在此,或可視其爲 $0=1$, 此乃在無窮遠之直線方程式,與所有拋物線相切者也.] 在第三式,則 $\Delta_c=xy$, 在第四式則 $\Delta_c=x^2y^2(x-y)^2$.

[$x-y=0$ 乃一特別曲線,與 $c=0$ 相當.在討論判別式時,如第一第二兩式者須避去.蓋其中諸項,俱非單值,如第四式者,亦須除去蓋以其中之曲線,俱與 c^2 之值相當,而非與 c 之值相當也.]

162. 李嘉替方程式. 此名最初乃用於微分方程式*

$$y_1+by^2=cx^m$$

者,其中 b, c, m 均爲常數.對於 m 之某組特別值,此式可以積分成有限項數(見以下 7 至 14 諸題),但通常恆爲一無限級數與貝塞爾函數有密切之關係†.

---

*式中下標表示對於 x 求微分.

†對於李嘉替方程式之歷史以及其與貝塞爾函數之關係,可參考瓦特孫(Watson)著 Theory of Bessel Functions, 第 1—3 頁及 85—94 頁.

此後所稱之李嘉替方程式,通常恆指其推廣式

$$y_1=P+Qy+Ry^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而言,其中 P, Q, R 俱爲 x 之函數,此方程式在微分幾何方面,有相當之重要*.

163. 化成二級平直方程式之方法. 命

$$y=-\frac{u_1}{Ru}, \quad 得 \quad y_1=-\frac{u_2}{Ru}+\frac{u_1{}^2}{Ru^2}+\frac{R_1u_1}{R^2u}.$$

若以之代入(1)式,則含 $u_1{}^2$ 之項消去†,乘以 R^2u,得

$$-Ru_2+R_1u_1=PR^2u-QRu_1,$$

即

$$Ru_2-(QR+R_1)u_1+PR^2u=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此式乃一二級平直方程式.在特殊之例(如以下習題),此式可以積分成有限項數,但通常恆爲一級數之解.然而無論如何,其解將呈下式

$$u=Af(x)+BF(x),$$

因而

$$y=-\frac{u_1}{Ru}=-\frac{Af_1(x)+BF_1(x)}{R\{Af(x)+BF(x)\}}$$

$$=-\frac{cf_1(x)+F_1(x)}{cRf(x)+RF(x)}.$$

---

*在達部(Darboux)著 Lecons sur la Th orie Gènérale des Surfaces 之索引中,引證李嘉替方程式有二十條.並參攷埃塞哈德(Eisenhart)著 Differential Geometry, pp. 25, 158, 249, 429 及富賽司著 Differential Geometry, pp. 20, 383.

†此特性乃吾人所以採用上述代換之眞正理由,卽使此種代換有時遺忘,則因此特性,亦可重復記憶也.

其中以 c 代替 A/B.

由此式得一重要之結果：李嘉替方程式之通解，乃積分常數之一單應函數 (Homographic function)，反之，自任何方程式之形如

$$y=\frac{cg(x)+G(x)}{cf(x)+F(x)}$$

者，消去隨意常數 c，易證其即得李嘉替方程式(如下列6題所略示者).

164. 李嘉替方程式任意四特解之乂比不含 x. 命此四解爲 $p(x), q(x), r(x), s(x)$，該式等乃由 $\dfrac{cg(x)+G(x)}{cf(x)+F(x)}$ 中命 c 爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 四特殊值而得.

於是 $$p-q=\frac{\alpha g+G}{\alpha f+F}-\frac{\beta g+G}{\beta f+F}=\frac{(\alpha-\beta)(gF-fG)}{(\alpha f+F)(\beta f+F)},$$

而 p, q, r, s 其他任兩式之差與上式爲相似之式，當吾人作成乂比時，所有含 x 之各項，均經消去，因而得

$$\frac{(p-q)(r-s)}{(p-s)(r-q)}=\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\delta)(\gamma-\beta)}=C,$$

其中 C 不含 x.

165. 已知三個特解之解法. 設已知之解爲 $q(x)$, $r(x), s(x)$，則由上節結果中，將 $p(x)$ 換爲 y，即得其通解爲

$$\frac{\{y-q(x)\}\{r(x)-s(x)\}}{\{y-s(x)\}\{r(x)-q(x)\}}=C.$$

故在本款,可不藉求積分,而得其通解.

166. 已知兩個特解之解法. 設已知之解爲 $q(x)$, $r(x)$,

於是,因
$$y_1=P+Qy+Ry^2,$$
且
$$q_1=P+Qq+Rq^2.$$
故
$$y_1-q_1=(y-q)\{Q+(y+q)R\};$$
同理,
$$y_1-r_1=(y-r)\{Q+(y+r)R\}.$$
是以,
$$\frac{y_1-q_1}{y-q}-\frac{y_1-r_1}{y-r}=(q-r)R,$$
因而得,
$$\log\frac{y-q}{y-r}=c+\int(q-r)R\,dx.$$
故在本款,僅須一次求積分,即可得通解.

167. 已知一個特解之解法. 設已知之解爲 $q(x)$.

用 $y=q(x)+\dfrac{1}{z}$ 之代換*,即將方程式(1)變爲
$$q_1-\frac{z_1}{z^2}=P+\left(q+\frac{1}{z}\right)Q+\left(q^2+\frac{2q}{z}+\frac{1}{z^2}\right)R.$$
但因 $q(x)$ 乃一解,故
$$q_1=P+qQ+q^2R,$$
相減並以 z^2 相乘,即得

*此代換似覺矯作,有一較自然之方法(但亦較長),乃先命 $y=q(x)+u$,此式可使方程式之呈李嘉替式者,其中之 P 換爲零.但此乃柏努利方程式之一特款(21節),而此式通常求解之法乃用代換式 $1/u=z$,將以上兩種代換加以合併,即得本節所用之代換.

$$-z_1 = zQ + (2zq+1)R,$$

或
$$z_1 + (Q+2qR)z = -R.$$

此乃一平直方程式，用一積分因子 $e^{\int(Q+2qR)dx}$，即可積分.欲定此因子，只須一次求積分，而完成此題之解(如18—20諸題之例)，又需求積分一次，故共需二次.

習題二

下列1—5諸題，讀者於求解時，應仿照上述方法，先自原理着手，不應僅取其結果，代入即得也.

(1) 用化爲平直方程式法，證明

$$y_1 = -2 - 5y - 2y^2$$

之解爲
$$2y(ce^{3x}+1) = -(ce^{3x}+4).$$

(2) 試證 $x^2y_1 + 2 - 2xy + x^2y^2 = 0$

之解爲
$$y(x^2+cx) = 2x + c.$$

(3) 試證 $\tan x$ 爲 $y_1 = 1 + y^2$ 之一解，因而求得其通解呈下形

$$y(c - \tan x) = c\tan x + 1.$$

(4) 求證常數 k 共有兩值，能使 k/x 爲 $x^2(y_1+y^2)=2$ 之一解，因而求其通解.

$$[k=2 \text{ 或 } -1;\ y(cx^4 - x) = 2cx^3 + 1.]$$

(5) 求證 $1, x, x^2$ 爲

$$x(x^2-1)y_1+x^2-(x^2-1)y-y^2=0$$

之三個解,因而求得其通解爲

$$y(x+c)=x+cx^2.$$

(6) 自方程式

$$y=\frac{cg(x)+G(x)}{cf(x)+F(x)}$$

中,消去常數 c, 以求得李嘉替方程式

$$(gF-Gf)y_1=(gG_1-g_1G)+(Gf_1-G_1f-gF_1+g_1F)y$$
$$+(fF_1-f_1F)y^2.$$

(7) 求證當 $m=0$ 時,李嘉替方程式

$$y_1+by^2=cx^m$$

可以積分成有限項數.

[若 bc 爲正, $yk(Ae^{2xk}+1)=c(Ae^{2xk}-1)$, 其中 $k=\surd(bc)$,

若 bc 爲負, $yk=c\tan(A-kx)$, 其中 $k=\surd(-bc)$,

若 $b=0$, $y=cx+A$; 若 $c=0$, $y(bx+A)=1$.]

(8) 求證由 $y=z/x$ 之代換,李嘉替方程式變爲:

$$xz_1-z+bz^2=cx^{m+2},$$

因而證明若 $m=0$, 則此方程式可積分成有限項數

[用 7 題之結果.]

(9) 用 $z=yx^a$ 之代換,改變方程式

$$xz_1 - az + bz^2 = cx^n$$

成爲
$$x^{1-a}y_1 + by^2 = cx^{n-2a}.$$

用更進一步之代換 $X=x^a$, 求得一李嘉替方程式,其中分別以 b/a, c/a, $(n-2a)/a$ 代替 b, c, m, 於是證明若 $n=2a$, 則本題之第一方程式,可以積分成有限項數.

(10) 求證代換式 $z=\frac{a}{b}+\frac{x^n}{u}$, 能將9題中第一方程式改成另一相似之式,其中 a, b, c 分別以 $n+a, c, b$ 代之.於是證明若 $n=2a$ 或 $n=2(n+a)$, 則此兩方程式俱能積分成有限項數.重複用此理由,求證當 $n=2(sn+a)$, 時,則9題中第一方程式,可以積分成有限項數,式中(下列習題中亦然) s 爲零或爲其他正整數.

(11) 求證 $z=\frac{x^n}{u}$ 之代換,將9題中第一方程式改成另一相似之式,其中 a, b, c 分別代以 $n-a, c, b$. 推證當 $n=2(sn-a)$ 時,此二式俱可積分成有限項數.

(12) 由 9, 10, 11 諸題所得之結果,試推證當

$$m+2=2s(m+2)\pm 2$$

時,李嘉替方程式可以積分成有限項數.

求證此結果與 $m=-4r/(2r\pm 1)$ 相當,其中之 r 與

s同,可以爲零或其他正整數,又與$2/(m+2)$=一奇整數(或正或負)相當.

(13) 求證$y=\frac{1}{bx}+\frac{1}{x^2Y}$, $X=x^{m+3}$之代換,將李嘉替方程式變成另一相似之式,其中b, c, m分別代以

$$c/(m+3),\ b/(m+3),\ -(m+4)/(m+3).$$

若m之形爲$-4s/(2s-1)$,試證此種變換,使s被$(s-1)$所代替,此種變換視爲s,求證在本款,李嘉替方程式可積分成有限項數.

(14) 求證$y=1/Y, X=x^{m+1}$之代換,將李嘉替方程式變成另一相似之式,其中b, c, m分別代以$c/(m+1)$, $b/(m+1)$, $-m/(m+1)$. 試推證(用13題之結果)若m之形爲$-4s/(2s+1)$,則李嘉替方程式可以積分成有限項數.

168. 積分全微分方程式 $Pdx+Q\,dy+R\,dz=0$ 之二法. 此方程式可積分時之必要及充分條件,前已舉出(第十一章內),當此條件能適合時,則其求解之普通方法,亦經示明.吾人現將更舉二法,其中之一法(用及一積分因子),有一缺點,卽僅能用於某數種齊次方程式是也.然而對於此種方程式,此法實又爲最簡便者.其另一法(邁爾方法),則十分普通.此法僅需一次積分,而

此點在理論上似較其他普通方法(117節)爲便,蓋以其須用兩次積分也.然而對於初學者,則不望其應用此法,蓋因此法所需之一次積分,往往較117節所需之兩次積分爲尤困難(因其所含之式缺少對稱).尤有進者,應用邁爾方法時,倘對於一定之條件,不加以深切之注意,甚至可得出絕對錯誤之結果焉.

169. 對於齊次方程式之積分因子. 設

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

爲一可積分之方程式,式中 P, Q, R 俱爲 x, y, z 之齊次函數,其次數同爲 n,換言之,亦卽 P, Q, R 可以分別表成下式

$$x^n f(u, v),\ x^n g(u, v),\ x^n h(u, v),$$

其中 $$u=y/x, \quad v=z/x.$$

於是 $$dy=u\,dx+x\,du,\ dz=v\,dx+x\,dv.$$

是以方程式(1)變爲

$$x^n\{f(u, v)dx+g(u, v)(u\,dx+x\,du)+h(u, v)(v\,dx+x\,dv)\}=0,$$

卽 $$x^n\{(f+ug+vh)dx+x(g\,du+h\,dv)\}=0,$$

若 $x^{n+1}(f+ug+vh)$ 不爲零,則以此式除上式,卽得

$$\frac{dx}{x}+\frac{g\,du+h\,dv}{f+ug+vh}=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

今以方程式(1)爲可積分,故方程式(2)亦然,或立卽可積分或乘以積分因子後卽可積.但方程式(2)中之第一項僅含x,而其第二項則僅含變數u及v.一變數已與其他二變數分開,而此種分離實爲最便於積分之形式,無論用何種因子(僅爲一常數者除外)相乘,必將此種業經分離之形式破壞.故必無積分因子存在(常數除外),因而方程式(2),在其現在形式之下,必爲一恰當方程式.但方程式(2)實自方程式(1)改換變數後,除以因子$x^{n+1}(f+ug+vh)$而得,此因子則又等於$Px+Qy+Rz$,故除$Px+Qy+Rz=0$外,$1/(Px+Qy+Rz)$乃此可積分齊次式

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0,$$

之一積分因子.對於方程式

$$P_1dx_1+P_2dx_2+\cdots+P_ndx_n=0$$

可用一與此相似之定理.

例. $$(y^2+yz)dx+(zx+z^2)dy+(y^2-xy)dz=0.$$

在此 $$Px+Qy+Rz=xy^2+xyz+xyz+yz^2+y^2z-xyz$$

$$=y(xy+xz+z^2+yz)=y(x+z)(y+z),$$

故其積分因子爲 $1/\{y(x+z)(y+z)\}$,

以之乘微分方程式,得

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{z\,dy}{y(y+z)}+\frac{(y-x)dz}{(x+z)(y+z)}=0,$$

卽
$$\frac{dx}{x+z}+\frac{\{(y+z)-y\}dy}{y(y+z)}+\frac{\{(y+z)-(x+z)\}dz}{(x+z)(y+z)}=0,$$

或
$$\frac{dx}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy}{y+z}+\frac{dz}{x+z}-\frac{dz}{y+z}=0,$$

或
$$\frac{dx+dz}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy+dz}{y+z}=0,$$

是以
$$\log(x+z)+\log y-\log(y+z)=\log c,$$

因而得
$$y(x+z)=c(y+z).$$

習題三

應用此結果於下列諸習題:第十一章,習題三中,2題;第十一章雜題中 10 (i), 10 (ii) 及 11 諸題.

170. 邁爾方法. 將全微分方程式書爲

$$dz=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy.$$

若可積分之條件適合,且若函數 P 與 Q 在一點 (x_0,y_0,z_0),附近俱爲全純的,則可證明此微分方程式有一解,(且僅有一解),代表經過此點之一曲面*.邁爾氏方法之定此曲面,乃由求此曲面與一變平面之相交曲線,此變平

*見谷耳薩著 Cours d'Analyse Mathématique, 第四版, 第二卷第 385 及 441 節.

面經過 (x_0,y_0,z_0) 點,平行於 z 軸,對於 x_0 及 y_0 均予以最簡而又合於全純條件之值,例如 0 及 0,或 0 及 1,或 1 及 1. 在最後結果中,z_0 視為隨意常數.詳讀下列諸例題,可以明瞭上述之步驟(此等例題當然一望可解,但若取難題,作為例題,則此方法之原理,或將為繁雜之積分手續所掩蔽.蓋邁爾氏方法往往含有繁難之積分也).

例一. $$dz=2x\,dx+4y\,dy.\qquad\qquad(1)$$

此式之可積分條件為

$$2x(0-0)+4y(0-0)-1(0-0)=0,$$

恰能適合.吾人可命 $x_0=0$ 及 $y_0=0$,蓋以函數 $2x$ 及 $4y$ 在 $(0,0,z_0)$ 點附近均為全純也.經過此點,平行於 z-軸之平面,乃

$$y=mx,\ dy=m\,dx.\qquad\qquad(2)$$

由方程式(1)及(2),

$$dz=(2+4m^2)x\,dx$$

因而得 $$z-z_0=(1+2m^2)x^2,\qquad\qquad(3)$$

其中之積分常數,蓋由 $x=0$ 時 $z=z_0$ 之條件而得.

方程式(3)代表一柱面(其母線平行於 y 軸),經過平面(2)及所求曲面之交線.

自方程式(2)及(3)中消去 m,吾人得所求之曲面方

程式

$$z-z_0=x^2+2y^2.$$

若將z_0視爲隨意常數，則此式乃方程式(1)之通解.

例二.
$$dz=\frac{3z\,dx}{x}-\frac{2z\,dy}{y}. \qquad\qquad (4)$$

此式之可積分條件，爲

$$\frac{3z}{x}\left(\frac{-2}{y}-0\right)-\frac{2z}{y}\left(0-\frac{3}{x}\right)-1(0-0)=0,$$

恰能適合. 吾人不能命 $x_0=0$, $y_0=0$, 蓋如此將使函數 $3z/x$ 及 $2z/y$ 俱爲無限也. 然而 $x_0=1, y_0=1$ 可以取用. 命

$$y=1+m(x-1), \qquad\qquad (5)$$

方程式(4)變爲

$$dz=\frac{3z\,dx}{x}-\frac{2zm\,dx}{1+m(x-1)},$$

得 $$\log z-\log z_0=3\log x-2\log\{1+m(x-1)\},$$

因之 $$z\{1+m(x-1)\}^2=z_0x^3. \qquad\qquad (6)$$

自(5)(6)兩式間消去m，吾人得所求之解

$$zy^2=z_0x^3.$$

此族中之所有曲面，易見其均經過$(0, 0, z_0)$點

習題四

(1) 求證，當解上列例二時，若試以$(0, 0, z_0)$爲定

點,則於欲使相當於方程式(6)之柱面經過該點時,卽告失敗.

(2) 解 $y^2\,dz=y\,dx+(y^2-x)dy.$

[其正確結果,以 $(0,1,z_0)$ 爲定點者,爲

$$y(z-z_0)=y(y-1)+x.$$

欲取 $(0,0,z_0)$ 爲定點,則得一錯誤之結果 $z-z_0=y$.]

(3) 解 $(1+xy)dz=(1+yz)dx+x(z-x)dy.$

[結果 $z=x+z_0(1+xy)$.]

171. 二級平直微分方程式. 下列之討論(第171—177諸節),乃第九章及第十章之補充.下標用以表示對於 x 求微分.吾人將以 $h(x)$, $k(x)$, $j(x)$, $H(x)$, $K(x)$, 或有時以 h, k, j, H, K, 代表在原點爲全純之 x 之函數(卽謂在以原點爲圓心,而小至充分程度之圓內可以展成收斂性冪級數之函數也.)且更有在原點不爲零之性質,此等函數之反商,亦將爲全純*,故其對數之引數如

$$h_1(x)/h(x)$$

亦然.

此後無論何時,吾人言及異點時,均係指孤立者,卽謂以任一點爲心,充分小之半徑作圓,則其他各異點

*見布綸尉契(Bromwich)著 Infinite Series, 第二版, 第54及84節.

俱不含於此圓內.

172. 有法積分. 在第94節中已曾提及夫洛柏奴斯式之解,名曰有法積分.此解之含義如何,今更予以詳細之觀察.吾人試考察第九章中諸習題答案之形式,在求解之方法中,吾人雖將其別爲四*款,然全原函數 $au+bv$ 僅有兩種重要相異之形式.其一積分,譬如 u 恆呈 $x^{\alpha}h(x)$ 之形.第二積分 v 在若干習題中,如第95及99節中之例,呈相似之形.譬如 $x^{\beta}k(x)$,而在其他習題中,如第97及98節之例,則呈

$$x^{\alpha}\{h(x)\log x+x^{s}k(x)\}$$

之形,其中 s 爲一可正可負之整數(例如在97節下1題中,s 爲1,而在98節下,1題中,則 s 爲 -4 也).

*夫洛柏努斯方法用於 m 級方程式時 (Crelle, 1873 年, 第76卷, p.p. 214—224, 或福賽司著 Theory of Differential Equations, 第四卷, p.p. 78—93, 或印斯著 Ordinary Differential Equation pp. 396—402) 在理論方面以僅分爲兩款爲較便利,其中之第二款包含吾人之第二,第三及第四款,處理此第二款之時,以 $f(c+1)f(c+2)\cdots f(c+r)$, 乘代表一解之級數,此級數之係數蓋俱爲 c 之函數.上式中 $f(c)=0$ 爲指示方程式,r 爲其任意兩根差之最大者,此等根均屬於相差爲一整數之類者(參考吾人方法中之第三款).此級數以及其對於 c 之各級偏微係數,均以 c 之根代入,此等根之排列次序,務使其中任一個與其下一個之差爲一正整數或爲零.然而解題之時,此法往往引入若干非必要之工作,故吾人於第九章中,尤其在第四款中,予以甚多之修正.

吾人對於在原點爲有法*之積分(二級平直微分方程式者),以上列諸式爲其定義,加以微細之修正,使s之值可以爲零.此層實際上並無區別,蓋若s爲0,則積分$v=x^\alpha\{h(x)\log x+k(x)\}$可以下列線性組合之積分式

$$v-\frac{k(0)u}{h(0)}=x^\alpha\left\{h(x)\log x+k(x)-\frac{k(0)}{h(0)}h(x)\right\}$$

代之,此式爲一相似之式,僅$k(x)$已代以另一全純函數,而x則爲此新全純函數之一因子也.同理,對於v之第一式,即$x^\beta k(x)$,吾人恆可假定α及β不等,蓋否則v亦可代以$v-\frac{k(0)}{h(0)}u$,而此式則有一因子$x^{\alpha+1}$也.

對於m級平直微分方程式,其在原點爲有法之積分,係指呈下式之形者而言

$$x^\alpha\{h(x)(\log x)^r+x^s k(x)(\log x)^{r-1}+\cdots\cdots+x^n j(x)\},$$

其中$s,\cdots\cdots n$爲零或任意整數(正或負),而r則可爲$0,1,2,\cdots\cdots m-1$中之任一値.是以對於一級方程式,有法積分中不能含有$\log x$,對於二級者,則對數式或爲線性或即無有.此層亦可由第十章推出如下:在107節中

*原點以外各點將在175節論及,有法一語不幸在微分方程式中與通常在函數論中有一不同之意義,蓋在後者中其意義等於全純也(如在171節之定義).例如含有$\log x$或x^α(其中α不爲零或正整數)之式可以在原點爲一有法之積分,但在該點不能爲一有法函數.

兩積分俱不含對數. 在 110 節中吾人自級數 $x^c\sum_0^\infty a_nx^n$, 其中諸 a 俱爲 c 之函數者, 對於 c 求偏微分, 然後以 β 代 c, 而求得第二積分. 其結果(在 110 節中並未舉出)爲

$$x^\beta\left\{\left(\sum_0^\infty a_n(\beta)x^n\right)\log x+\left(\sum_0^\infty\frac{\partial a_n(\beta)}{\partial\beta}x^n\right)\right\}.$$

此式呈
$$x^a\{h(x)\log(x)+x^sk(x)\}$$
之形. 倘諸係數 $a_n(\beta)$ 之前 λ 個俱爲零, 而諸係數 $\dfrac{\partial a_n(\beta)}{\partial\beta}$ 之前 μ 個亦俱爲零, 則 $a=\beta+\lambda$, 而 $s=\mu-\lambda$.

$\log x$ 之餘子式, 其自身亦爲一積分, 此點亦可獨立證明. 設微分方程式爲

$$y_2+y_1P(x)+yQ(x)=0,\qquad\qquad(1)$$

其中 $P(x)$ 及 $Q(x)$ 在原點附近俱爲一致*者(即單值者).

若在此方程式之左端, 吾人對於 y 以積分

$$x^a\{h(x)\log x+x^sk(x)\}=u\log x+w$$

代之, 則由積分之定義, 其結果必全等於零. 在此結果中, $\log x$ 與一餘子式 (u_2+u_1P+uQ) 同時出現. 此式及結果中其他各項, 除 $\log x$ 之外, 俱爲 x^a 及一一致函數之乘積. 蓋以 u 及 w 因而 u_1, u_2, w_1, w_2 俱係此類乘積, 而 P 及 Q 則俱爲一致也. 倘吾人能以 $\log x$ 之餘子式除此恆等

*此微分方程式包含第九章及第十章諸式, 有如特款.

式,則吾人將得一無理之結果,卽謂非一致之函數 $\log x$ 乃另二一致函數之商,亦卽其自身又爲一一致函數也.故如此相除,實不合理,而此必係因餘子式爲零所致,亦卽 u 自身須爲一解.

在一 m 級方程式(其係數在原點附近均爲一致者)之一有法積分中,對於其最高級 $\log x$ 之餘子式,適用一與上理相似之定理.故在能有有法積分之各款中,至少必有一積分,不含 $\log x$ 而呈 $x^\alpha h(x)$ 之形.

173. 富克斯定理. 有一二級平直微分方程式,其各係數在原點附近俱爲一致,若欲此式之所有積分俱在原點爲有法者,則其必要及充分之條件,乃此方程式可以書成下形

$$x^2y_2+xy_1p(x)+yq(x)=0,$$

其中 p 及 q 在原點俱爲全純.

夫洛柏奴斯方法之討論(第106—110諸節),已證明此條件爲充分.現將證其爲必要.由172節之理,最少有一積分呈 $x^\alpha h(x)$ 之形,以 $u(x)$ 表此式,命 $y=u\int z\,dx$, 並以之代入172節方程式(1)中,含有積分符號之各項,有一因子 (u_2+u_1P+uQ), 因而爲零,蓋以 u 乃一積分也.

由此得
$$2u_1z+uz_1+Puz=0. \qquad\qquad (2)$$

今積分 y 可爲下列二式中之一:

$$x^{\beta}k(x), \quad x^{\alpha}\{h(x)\log x + x^{s}k(x)\}.$$

故 $$\frac{y}{u(x)} = x^{\beta-\alpha}\frac{k(x)}{h(x)}, \quad \text{或} \quad \log x + x^{s}\frac{k(x)}{h(x)}$$

$$= x^{\beta-\alpha}H(x), \quad \text{或} \quad \log x + x^{s}H(x),$$

因而 $$z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{u}\right) = x^{\beta-\alpha-1}\{(\beta-\alpha)H + xH_1\},$$

或 $$x^{-1} + x^{s-1}(sH + xH_1).$$

在此兩款中, z 均可書爲 $x^{\gamma}K(x)$ 之形*, 其中 $K(x)$ 爲全純而 $K(0) \neq 0$. 故由方程式 (2),

$$P = -\frac{z_1}{z} - \frac{2u_1}{u} = -\frac{\gamma}{x} - \frac{K_1}{K} - \frac{2\alpha}{x} - \frac{2h_1}{h} = \frac{p(x)}{x},$$

式中 p 在原點爲全純.

又因 $x^{\alpha}h(x)$ 爲方程式 (1) 之一積分,

$$x^{\alpha}h_2 + 2\alpha x^{\alpha-1}h_1 + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}h + (x^{\alpha}h_1 + \alpha x^{\alpha-1}h)P + x^{\alpha}hQ = 0,$$

故得 $$Q = \frac{1}{x^2}\left\{-\frac{x^2h_2}{h} - \frac{2\alpha xh_1}{h} - \alpha(\alpha-1) - \left(\frac{xh_1}{h} + \alpha\right)p\right\} = \frac{q(x)}{x^2},$$

式中 q 在原點爲全純.

以 x^2 乘方程式 (1) 之兩端, 並分別以 p 及 q 代替 xP 及 x^2Q, 卽得本定理所需要之式.

---

*在第一款 $\gamma = \beta - \alpha - 1$. 在第二款 $\gamma = -1$ 或 $s-1$, 依整數 s 之爲正爲負而定.

習題五

由 $y=Ax^{\frac{1}{2}}+Bx^{\frac{1}{4}}\log x$ 中,消去隨意常數,得微分方程式

$$8x^2(4-\log x)y_2+2x(8-\log x)y_1-y\log x=0,$$

此式爲一二級平直方程式,其所有積分,在原點均爲有法,但不能表成富克斯定理中之式.

[此題表示微分方程式之係數,應在原點附近爲一致之重要.事實上,此層約定,賦有一種嚴重之限制,蓋凡全原函數之呈

$$y=Ax^{\beta}j(x)+Bx^{\alpha}\{h(x)\log x+x^{s}k(x)\}$$

形者,俱因之而被除外,除非 $x^{\beta}j(x)$ 僅爲 $x^{\alpha}h(x)$ 之數值倍數也.]

174. 尋常點及異點. p 及 q 有時可偶在原點爲零(與其他全純函數 h, k, j, H, K 不同).在特例,若 p 能被 x 除盡,而 q 能被 x^2 除盡,則方程式在其原來之形式(1)中,必有 P 及 Q 俱在原點爲全純.在此種情形之下,原點名曰尋常(Ordinary)點.若施以夫洛柏奴斯之方法,則吾人將得一指數方程式,以0及1爲其二根,因而生出一個不定之係數(如99節),而結果則得兩個線性獨立之

積分,俱爲冪級數者.對數及正整數(或零)以外之指數,俱不能得出.但指數方程式可以以0及1爲其二根,而原點不爲尋常點,如98節下2題之例.

點之不爲尋常者,名曰異(Singular)點.倘所有積分,在一異點(方程式之係數在其附近俱爲一致),俱爲有法,則此點名曰有法異點.

以上諸定義,係對於微分方程式本身之異點而言,卽當其書爲(1)式時,對其係數之異點而言.吾人對於尋常點之討論,示明凡積分之奇異性(Singularities),乃方程式之奇異性,但其逆理則不一定常常正確.例如自$y=Ax^m+Bx^n$中消去隨意常數A, B,得

$$x^2y_2-(m+n-1)xy_1+mny=0.$$

若m及n爲不等之正整數,或其一爲零,而其他爲異於1之正整數,則原點爲方程式之一異點,但非積分之異點.當所有之積分,在一點俱爲全純,而此點對於微分方程式則爲異點,如上述之例者,則此種奇異性名之曰假(Apparent).在其他各款,則其奇異性名之曰眞(Real).在一假奇異處,其必要條件,乃指示方程式之根,應爲不等之正整數,或爲零及一大於1之正整數.此外其較小之根,應引入一個不定係數,亦屬必要(與99

節甚相似).

習題六

(1) 求證欲原點爲方程式

$$x^2y_2+xy_1p(x)+yq(x)=0$$

之一假異點,式中 $p(x)$ 及 $q(x)$ 在原點均爲全純,其必要之條件(但非充分),乃 $p(0)$ 等於一負整數.而原點爲一尋常點之必要及充分之條件,乃

$$p(0)=q(0)=q_1(0)=0.$$

(2) 求證原點爲

$$x(1+x^2)y_2-y_1-x^3y=0$$

之一假異點,並求得其全原函數爲

$$y=A(1+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6+\frac{1}{24}x^8-\cdots\cdots)$$

$$+B(x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6-\frac{7}{64}x^8\cdots\cdots).$$

(3) 求證原點爲 $x^2y_2+(x^2-2)y=0$ 之一眞異點,但其所有積分,俱不含對數.

[指數方程式之根爲 -1 及 2. 較小之根使 a_3 不定(參考99節),所得之無窮級數,可以求和,最後得

$$y=Ax^{-1}(\cos x+x\sin x)+Bx^{-1}(\sin x-x\cos x).]$$

175. 富克斯式方程式. 欲處理原點以外之各點,吾人作一變數代換,命 $X=x-a$, 或 $X=x^{-1}$, 依所欲討論之點究爲有限點 $x=a$, 或在無窮遠 $x=\infty$ 而定.在方程式 (1) 中,倘函數 P 及 Q 除有限數之 $a, b, c, \cdots$, 等點外,在其餘有限之點均爲全純,則此等點爲僅有之有限異點.由是吾人可不作變數代換,而用觀察法考察在何處時 P 及 Q 不能爲全純,以求出此等異點.例如,若

$$P=\frac{x+2}{x(x-3)} \quad \text{而} \quad Q=\frac{x^3+10}{x^2(x-3)(x-4)^3},$$

則其僅有之有限異點由 $x=0, 3, 4$ 得之.此外,欲試驗一異點 $x=a$ 是否爲有法,吾人僅須考察 $(x-a)P$ 及 $(x-a)^2Q$ 是否俱在 $x=a$ 爲全純即可.上列例題中 0 及 3 俱爲有法異點,但 4 則否,蓋以 $(x-4)^2Q$, 因分母中有一因子 $(x-4)$, 在 $x=4$ 不爲全純也.

處理在無窮遠 $x=\infty$ 之點,最好須作變數代換.

若一方程式(其係數在無論何處均爲一致)之所有異點均爲有法者,則此方程式名曰富克斯式.

習題七

(1) 求證,對於超比方程式

$$x(1-x)y_2+\{c-(a+b+1)x\}y_1-aby=0,$$

其僅有之異點爲0, 1及8, 且均爲有法者.

(2) 求證,對於勒戎德耳方程式

$$(1-x^2)y_2-2xy_1+n(n+1)y=0,$$

其僅有之異點,乃1, −1及∞, 且俱爲有法者.

(3) 求證,對於貝塞耳方程式

$$x^2y_2+xy_1+(x^2-n^2)y=0,$$

其僅有之異點,乃0及∞, 就中第一個爲有法,第二個則否.

(4) 求證,若

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1,$$

則里曼之P-方程式(Riemann's P-equation)

$$y=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\},$$

即
$$y_2+\sum\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x-a}\right)y_1$$
$$+\left\{\sum\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{x-a}\right\}\frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}=0,$$

以a, b, c爲其有法異點,而其餘諸點,包括∞在內,則俱爲尋常點.

改換變數,因而證明α及α'爲相當於a之指數方程式之根.

(5) 求證1,2及4諸題中之方程式,俱爲富克斯式,但3題則否.

(6) 求證下列方程式乃富克斯式:

$$y_2+\frac{P}{\psi}y_1+\frac{Q}{\psi^2}y=0,$$

式中ψ爲任意個(設爲n)線性因子$(x-a),(x-b),(x-c),\cdots$之乘積,其中任意兩因子,俱不相等,而P,Q則爲x之多項式,其次數不高於$(n-1)$及$(2n-2)$.

176. 表徵指數(Characteristic index). 試取方程式

$$y_2+x^{-\lambda}p(x)y_1+x^{-\mu}q(x)y=0,$$

式中λ,μ爲正整數或零,而p,q爲x之全純函數,當$x=0$時不爲零.

倘吾人試以夫洛柏奴斯法解此方程式,則以x之一冪級數(自x^c起)代y,而於上列微分方程式左端所得之結果中,命最低級x之指數爲零,即得其指數方程式.由其第一項,第二項,第三項所得x之最低指數將分別爲$c-2,c-\lambda-1$,及$c-\mu$.下列三款,因而可以發生:

(i) 倘第一數不大於其他之任一數,則指數方程式爲一二次式,

(ii) 倘第二數小於第一數,而不大於第三數,則指數方程式爲一次式(可與第100節下習題中2,4二題比較).

(iii) 倘第三數爲其中之最小者,則指數方程式爲零次方程式(參考第100節之例).

在款(i)中,$\lambda \leqq 1$,而$\mu \leqq 2$,故按之富克斯定理,必有兩個有法積分.

在款(ii)中,可以有一個有法積分,但若如常常發生之例(參較100節下4題),所得之單一級數,對於x之所有各值,俱爲發散時,則無有法積分矣.

在款(iii)中,無級數,故無有法積分.

表徵指數者,其定義可視爲一數,代表所發生之款者也.但須自零起計算.例如,對於款(i),其數爲0,對於款(ii),其數爲1;對於款(iii),其數爲2.此定義以及指數方程式之最大可能次數,對於任何級方程式之討論,俱易推廣,且得一結論,謂:一微分方程式之級爲m,而表徵指數爲r,則該式不能有多於$m-r$之有法積分.

177. 法及次法積分. 在100節中,吾人已見夫洛柏奴斯方法,對於積分之有一因子$e^{\frac{1}{x}}$者,不能適用.此乃

法積分之一特款.所謂法積分者,其式爲 $e^z u$, 式中 z 爲 $1/x$ 之一多項式(最簡之例,爲 $1/x$ 之數值倍數),而 u 則爲 x 之一函數,與見於有法積分者相同.次法積分異於法積分者,僅爲以 x 之平方根代替 x(當微分方程式高於二級時,則以其立方根或高級方根代 x).

下列諸例題,示明求法積分或次法積分之一方法:

例一.
$$y_2-2x^{-1}y_1+x^{-4}(-4+2x^2)y=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

在此,指數方程式無根,故無有法積分(即其表徵指數爲2).此層蓋以 y 之係數有一項爲 $-4x^{-4}$ 之故.

命
$$y=e^z u,$$

得
$$y_1=e^z(u_1+z_1u),\quad y_2=e^z\{u_2+2z_1u_1+(z_1^2+z_2)u\}.$$

用 e^z 除過之後,方程式(1)變爲

$$u_2+(-2x^{-1}+2z_1)u_1$$
$$+(-4x^{-4}+2x^{-2}-2x^{-1}z_1+z_1^2+z_2)u=0.\cdots\cdots\cdots(2)$$

欲除去 $-4x^{-4}$,可命 z_1 爲 ax^{-2},其中 $a=\pm 2$.方程式(2)變爲

$$u_2+(-2x^{-1}+2ax^{-2})u_1+(2x^{-2}-4ax^{-3})u=0,$$

此式之表徵指數爲1,故可有一個有法積分.應用夫洛柏奴斯方法,以求此積分,得其簡單結果 $u=x^2$,對於 a 之兩值俱合.乘以指數因子,吾人求得兩個法積分

$$x^2e^{-2/x} \quad 及 \quad x^2e^{2/x}.$$

例二. $y_2+4x^{-2}y_1+x^{-6}(-4+6x^2-4x^3)y=0.$

此式亦無有法積分.如例一之法,吾人得

$$u_2+(4x^{-2}+2z_1)u_1$$
$$+(-4x^{-6}+6x^{-4}-4x^{-3}+4x^{-2}z_1+z_1^2+z_2)u=0.$$

欲除去 $-4x^{-6}$, 命 z_1 中包含一項 bx^{-3}, 其中 $b=\pm 2$. 若 $z_1=ax^{-2}+bx^{-3}$, 則當 $4b+2ab=0$, 卽 $a=-2$.時, u 之係數,將不含 x^{-5} 之項.

取 $z_1=-2x^{-2}+2x^{-3}$, 引得

$$u_2+4x^{-3}u_1-4x^{-4}u=0,$$

此式有一個有法積分 $u=x$.

若取 $z_1=-2x^{-2}-2x^{-3}$, 則得

$$u_2-4x^{-3}u_1+8x^{-4}u_1=0.$$

此式無有法積分,蓋僅能求得之級數

$$x^2\left(1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1\cdot 3}{4^2}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4^3}x^6+\cdots\right)$$

乃發散者也.故原方程式僅有一個法積分 $xe^{(2x^{-1}-x^{-2})}$.

例三. $y_2+x^{-2}(-1+3x)y_1+x^{-2}y=0.$

本題表徵指數爲1,指數方程式乃一次式,但(如第九章習題六中,4題所示)所得之級數爲發散.

依上述之法,吾人得

$$u_2+(-x^{-2}+3x^{-1}+2z_1)u_1$$
$$+\{x^{-2}+(-x^{-2}+3x^{-1})z_1+z_1{}^2+z_2\}u=0.$$

因在原方程式中,其感覺困難之項,乃 y_1 之係數 $-x^{-2}$,而 y 之係數,則當積分爲有法時,亦可如此,故有時或以爲宜命 $z_1=\frac{1}{2}x^{-2}$,以化簡 u 之係數.但如此將於 u 之係數中,引入一項含 x^{-4} 者,因而得一無有法積分之方程式.

吾人今試另求一方程式,其表徵係數爲1,並盼其相當之級數可以收斂.命 $z_1=ax^{-2}$,若 $a^2-a=0$ 卽 $a=0$ 或 1,則 u 之係數將不含 x^{-4} 之項.由 $a=0$,得原設方程式,但 $a=1$ 時,得

$$u_2+(3x^{-1}+x^{-2})u_1+(x^{-2}+x^{-3})u=0,$$

此式之有法積分爲 $u=x^{-1}$,因而求得一個法積分 $y=x^{-1}e^{-1/x}$.

例四.　$$y_2+\frac{1}{2}x^{-1}y_1-x^{-3}y=0.$$

此方程式無有法積分.解之如前,得

$$u_2+\left(\frac{1}{2}x^{-1}+2z_1\right)u_1+(-x^{-3}+\frac{1}{2}x^{-1}z_1+z_1{}^2+z_2)u=0.$$

欲除去 $-x^{-3}$ 項,命 $z_1=kx^{-3/2}$,其中 $k=\pm1$,

由此得　$$u_2+\left(\frac{1}{2}x^{-1}+2kx^{-3/2}\right)u_1-kx^{-5/2}u=0,$$

$u=x^c\sum_0^\infty a_n x^{\frac{1}{2}n}$ 將爲一積分，只須

$$a_0(2kc-k)=0,\quad 因而\quad c=\frac{1}{2},$$

$$a_1\left\{2k\left(c+\frac{1}{2}\right)-k\right\}+a_0\left\{c(c-1)+\frac{1}{2}c\right\}=0,$$

即 $ka_1+0=0$, 因而 $a_1=0$.

同理，對於 $n>1$ 之各値，$a_n=0$, 故 $u=x^{\frac{1}{2}}$.

原方程式有二次法積分

$$x^{\frac{1}{2}}e^{-2x-\frac{1}{2}}\quad 及\quad x^{\frac{1}{2}}e^{2x-\frac{1}{2}}.$$

習題八

求下列 (1) 至 (5) 題之法積分及次法積分：

(1) $y_2+2x^{-1}y_1-x^{-4}y=0.$ [答案. $e^{1/x}, e^{-1/x}$]

(2) $y_2+x^{-1}y_1+x^{-4}(1-\frac{1}{4}x^2)y=0.$

[答案. $x^{\frac{1}{2}}e^{i/x}, x^{\frac{1}{2}}e^{-i/x}$; 或 $x^{\frac{1}{2}}\cos(1/x)$, $x^{\frac{1}{2}}\sin(1/x)$.]

(3) $y_2+x^{-2}(-2+x)y_1+x^{-4}(1+x-x^2+x^4)y=0.$

[答案. $ue^{-1/x}$, $ve^{-1/x}$, 其中之 u, v 如89節所列.]

(4) $y_2-\frac{1}{2}x^{-1}y_1-4x^{-3}y=0.$

[答案. $x\left(1+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}\right)e^{-4x^{-\frac{1}{2}}}$, $x\left(1-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}\right)e^{4x^{-\frac{1}{2}}}$.]

(5) $y_2-x^{-6}(1+5x^2)y=0.$

$$[\text{答案.}\ x^{-1}(1+\frac{1}{2}x^2)e^{\frac{1}{2}x^{-2}};\ z=-\frac{1}{2}x^{-2}.]$$

(6) 作變數代換 $x=1/X$, 改變貝塞耳零級方程式,並試求改變方程式之法積分.求證所得之級數為發散,轉回原來變數,求得級數

$$e^{-ix}x^{-\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{1^2}{8ix}+\frac{1^2\cdot 3^2}{2!(8ix)^2}-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!(8ix)^3}+\cdots\right\}$$

及一相似級數,其中 i 之符號改變.

[貝塞爾方程式之變換式,見第九章習題六中1題之答案.

此等級數雖係發散,但甚有用.該級數名為幾近(Asymptotic),蓋予 x 以任何值,大至充分程度,則此級數得一差近值,其差誤雖不能為無窮小,但可使為合理之小,參考惠塔克 (Whittaker), 及瓦特孫著 Modern Analysis, 第四版,第 8.1 至 8.32 及 17.5 節.]

(7) 由惠塔克之聯合超比方程式 (Whittaker's confluent hypergeometric equation).

$$y_2+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{x}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{x^2}\right)y=0,$$

求得級數(用6題之法)

$$e^{-\frac{1}{2}x}x^k\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\{m^2-(k-\frac{1}{2})^2\}\{m^2-(k-\frac{3}{2})^2\}\cdots\{m^2-(k-r+\frac{1}{2})^2\}}{r!\,x^r}\right].$$

[此級數普通為一函數,以 $W_{k,m}(x)$ 表之者之幾近展式,但若 $(k-\frac{1}{2}\pm m)$ 為一正整數,則此級數項數有限,因而得一有限項數之積分.另一級數 $W_{-k,m}(-x)$ 可由 $W_{k,m}(x)$ 中改換 k 及 x 之符號而得.]

178. 振動弦方程式. 此式乃

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中 a 為常數.

命 $$X=x-at,\ T=x+at,$$

則 $$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial T},$$

而 $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial X}+\frac{\partial}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial T}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2 V}{\partial X\partial T}+\frac{\partial^2 V}{\partial T^2};$$

同理, $$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(-\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial T}\right),$$

而 $$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}-2\frac{\partial^2 V}{\partial X\partial T}+\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right).$$

代入方程式(1)中,得

$$4\frac{\partial^2 V}{\partial X\partial T}=0,$$

因而

$$\frac{\partial V}{\partial T}=\phi(T),$$

而

$$V=f(X)+\int\phi(T)\,dT,$$

或

$$V=f(X)+F(T),$$

即

$$V=f(x-at)+F(x+at), \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

其中f及F俱爲隨意函數.

倘x增加a,而t增加1,則$f(x-at)$不變,故此式代表一波,沿x軸之正向,以速度a移動.同理,$F(x+at)$代表一波,在同線上,以相同之速度,向相反之方向移動.

解方程式(1)之別法,乃用145節中之普通結果,而分別以t, x, V代替x, y, z,將方程式書如

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)V=0,$$

或

$$(D^2-a^2D'^2)V=0,$$

吾人得其輔助方程式$m^2-a^2=0$,其二根爲$-a$及a,因而得

$$V=f(x-at)+F(x+at).$$

179. 波動方程式之特解. 此式乃

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

其中a爲常數.此式爲三度,與一度之方程式(1)相類

似.吾人今試求與(2)相似之一解,但其中以x, y, z, t代x, t.

試取 $V=f(lx+my+nz-at)+F(lx+my+nz+at)$ ········(4)

式中l, m, n俱爲常數,倘

$$l^2+m^2+n^2=1,$$

則方程式(3)可以適合.在本款l, m, n爲某一直線之眞正方向餘弦.若x, y, z, t分別增加$la, ma, na, 1$,則(4)式中之第一函數不變,故代表一平面波動(其法線之方向餘弦爲l, m, n),以速率a平行於其本身移動.第二函數代表一平行波動,以相同之速率,在相反之方向移動.故方程式(4)代表平面波動之傳布.此爲波動方程式之一特解.

欲求球面波動之一解,改變方程式(3)爲球面極位標,此工作實僅爲拉普拉斯方程式之改換*,故得

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

對於在原點周圍各方向,俱爲對稱之解,亦即對於

*參考愛德華士著 Differential Calculus, 第532節;或欲得較簡之法可用高斯定理(Gauss' Theorem),參考任何分析靜力學之書籍可也.

θ及ϕ爲獨立之解.上式化爲

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \qquad \text{(6)}$$

由代換式$U=rV$,吾人得

$$\frac{\partial U}{\partial r}=V+r\frac{\partial V}{\partial r},$$

及 $$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=2\frac{\partial V}{\partial r}+r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$

故方程式(6)乘r之後,變爲

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

由此得 $$U=f(r-at)+F(r+at),$$

即 $$V=\frac{1}{r}\{f(r-at)+F(r+at)\}. \qquad \text{(7)}$$

此式代表兩個球面波動,其速度同爲a,一自原點散出,一向原點趨近.因子$1/r$表示當距原點之距離增加時,則擾亂之強度(The intensity of disturbance)減少.

180 怕松(或利烏微爾)之通解[Poisson's (or Liouville's) general solution].此解求得V於任何時間t在一點P之值,以函數g及G在一球面上之中值表之,此球之心爲P,半徑爲變數at,至函數g及G,則表$t=0$時V及$\dfrac{\partial V}{\partial t}$在空間任一點之值.

用球面極位標並以P爲原點.

函數$f(r,\theta,\phi,t)$在一半徑爲r之球面上之中值$\bar{f}$,乃自下式求得之:

$$\bar{f}=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} fr^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f\sin\theta\,d\theta\,d\phi.$$

將波動方程式(5)之各項,在一半徑爲r之球面上求中值,其第二項變爲

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)d\theta\,d\phi=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right]_0^{\pi}d\phi,$$

而其第三項爲

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}d\theta\,d\phi=\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi}\right]_0^{2\pi}d\theta.$$

此兩式俱爲零,蓋以$\sin\theta$在兩限俱爲零,而$\frac{\partial V}{\partial\phi}$則在$\phi=2\pi$所得之值與在$\phi=0$所得者相同也(其實係在同一地位). 其第一項及第四項不爲零,此二項得

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\overline{V}}{\partial r}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial t^2},\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

因而

$$r\overline{V}=f(r-at)+F(r+at),\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$=f(-at)+F(at)+r\{f'(-at)+F'(at)\}$$

$$+\frac{1}{2}r^2\{f''(-at)+F''(at)\}+\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

倘$\overline{V}$在原點$(r=0)$對於t之各值俱爲有限,則

$$f(-at)+F(at)=0,$$

因而得 $f'(-at)=\dfrac{df(-at)}{d(-at)}=-\dfrac{d\{-F(at)\}}{d(at)}=F'(at)$

故自方程式(10),並以下標0代表使$r=0$之結果

$$\overline{V}_0=f'(-at)+F'(at)=2F'(at). \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

由方程式(9)

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{V})=f'(r-at)+F'(r+at),$$

及
$$r\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}=-af'(r-at)+aF'(r+at),$$

故
$$2F'(r+at)=\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{V})+\frac{r}{a}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t},$$

對r及t之所有各值俱合.命$t=0$,並應用原始條件,吾人得

$$2F'(r)=\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{g})+\frac{r\overline{G}}{a},$$

是以予r以特別值at,並用方程式(11),

$$\overline{V}_0=\frac{\partial}{\partial(at)}(at\overline{g})+t\overline{G}.$$

但$\overline{V}_0$,乃V在以零為半徑之球面上之平均值,故即為V_0.

是以
$$V_0=\frac{\partial}{\partial t}(t\overline{g})+t\overline{G}.$$

由此解之形式觀之,因而知:於任何時間t,V在任

一點P之值,僅依球面上諸點之原始擾亂而定.該球蓋即以P爲心,以at爲半徑者也.在一爆發之時,其原始擾亂,往往限於一區域內,該區域乃一閉曲面S包圍所成者.若P在此面之外,而d爲自P至S之最短距離,則在時間d/a以前,在P點將不受影響.蓋在此時間以前,則吾人所謂之球面,將在無原始擾亂之區域內進行也.在任何時間t,其波前(wave front)(蓋即剛與擾亂接觸之點之軌跡)乃一曲面由S面延長其所有之外向法線至一距離at而得.

波動方程式之其他通解,已由克希荷夫* (Kirchhoff)(其所得之式在光學上頗關重要)惠塔克†,及貝特盟‡諸氏求出.

習題九

求證:

$$V=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x\sin u\cos v+y\sin u\sin v+z\cos u+ct,u,v)\,du\,dv,$$

*參考耶方斯(Jeans)著 Electricity and Magnetism (第五版) 第580節;或德魯德(Drude)Theory of Optics [由梅因(Mann)及彌力根(Millikan)翻譯者]. 關於波浪展布之另一方程式,欲知其物理討論,可參考耶方斯,第465節.

†參考惠塔克及瓦特孫 modern analysis (第四版) 第186節.

‡見同書第402頁.

爲波動方程式之一解,式中函數f乃適於在積分號下求微分者.[此爲惠塔克之解].

181. 算學物理之其他微分方程式. 此等式包括拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0;$$

怕松之方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\gamma\rho;$$

熱之傳導方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial t};$$

電報學方程式

$$LK\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+KR\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2};$$

士勒丁革方程式(Schrödinger's equation)[此乃波動力學之方程式]

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m(w-V)\psi}{h^2}=0,$$

該式在特款時之一解,見本章末之習題.

此等方程式,可自兩種觀察點加以討論.純粹之算學論文*中,對於其通解加以邏輯之討論,但物理學家

*參考谷耳薩著 Cours d'Analyse Mathématique, 第三卷.

對於此種冗長之討論,以及此等通解之難於應用,頗以爲苦.反之,在物理之論文中,則聯合邏輯與直覺以求其解(通常爲特解而非通解),該解具有一物理意義,且往往爲僅用邏輯所不能求得者.

通常對此等結果,在實質上之正確,雖少懷疑,但任何不確定之點,縱使甚微,純粹算學家對之,終覺反對.此蓋因鑒於直覺在純粹算學上之不可信任,因而對於直覺在物理上之價値,以及其通常可信之點,亦不復能贊同之故也.

各種觀察點,均須甚多之論證,故在此不能舉出*.

[算學物理之較淺近方程式,在本書各處均有提及,例如第二章雜題,第36—42題,28節下第13—16題,36節下第5題;第三章雜題第35—42題,第四章全章,第十四章雜題,第21—26題;總雜題中,第35—39第81—104第

*參考里曼及韋柏(Riemann-Weber)著 Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendnng aut physikalische Fragen (其最近版本頗有改變并易其書名爲 Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik); 澤立夫(Jeffreys)著 Operational Methods in Mathematical Physics (希微賽第之方法);皮伽耳著 Lecons sur Quelques Types Simples d' Equations aux Dérivées Partielles avec des Applications à la Physique Mathémaique; 韋白斯特(Webster), Partial Differential Equations of Mathematical Physics; 惠塔克及培克耳(Baker)著 Partial Differential Epuations of Mathematical Physics.

107—108等題皆是.]

習題十

由士勒丁革方程式,其中以K代$h/2\pi$,並予V以特殊之形式$-e^2/r$,試由笛氏坐標,改爲球面極位標,並將ψ以$r^{-1}U(r)S(\theta,\phi)$,代之(參考179節),求得

$$\left\{\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2m}{K^2}\left(w+\frac{e^2}{r}\right)U\right\}S+\frac{U}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}\right\}=0.$$

以r^lS爲拉普拉斯方程式之一解(因而$r^{l+1}S$爲吾人上述方程式當m爲零時之一解),

試求得

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\left\{\frac{2}{K^2}m\left(w+\frac{e^2}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}U=0.$$

最後由代換式

$$R=\frac{2r}{K}\sqrt{(-2mw)},\quad k=\frac{e^2}{K}\sqrt{\left(\frac{-m}{2w}\right)}$$

化之爲惠塔克聯合超比方程式(177節下,7題)以U, R,及$\left(l+\frac{1}{2}\right)$分別代$y, x, m$.

[關於本題之物理意義,參考比格茲(Biggs)著 Wave Mechanics.]

182. 數值差近法. 亞丹士之方法. 爲繼續第八章之論題起見,吾人現將示明一法*,該法乃經惠塔克教授在愛丁堡算學實驗室中試驗,認爲所有各法中之最佳者.簡略言之,此法蓋係合用泰羅(Taylor)之公式及某一公式者;此公式屬於有限差之計算學(Calculus of Finite Differences),下文將述及之.泰氏級數,對於充分小之x之增量,能使該級數收歛迅速時用之.如此求得y之若干值(通常爲四個)以後,則吾人已有充分之已知數,可以由有限差之公式,以求其下之值;因此對於x之大增量,可免應用泰氏級數.最後結果中之差誤,可由以後所述方法計算之.

例. 已知微分方程式$x\frac{dy}{dx}+y-2x=0$,及原始值$x=2$, $y=2.5$,求y之值,相當於$x=2.05$, 2.10, 2.15, 2.20, 2.25, 2.30, 2.35, 2.40, 2.45, 2.50等值者,並求所得結果中差誤之級

吾人將以h代表x之增量,x_n代表(x_0+nh),而以y_n代表與x_n相當之y值.

*亞丹士所作,並經巴士福耳司(F. Bashforth)及亞丹士在Theories of Capillary Action中記載.另參考惠塔克及魯濱孫(G. Robinson)所著之The Calculus of Observations,第十四章.

劍橋之又一亞丹士氏(1819—1892)因其自土星之擾亂,推斷行星海王星之存在而著名,蓋彼時對於此行星當未發現也.

y 對於 x 之各級微分係數,以 $y', y'', y''', \cdots$ 等代之,並以下標 $_0$ 代表其原始之值.

欲定泰氏級數

$$y = y_0 + (x-2)y_0' + \frac{(x-2)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x-2)^3}{3!}y_0''' + \cdots$$

之各係數,在原微分方程式中,並在其依次求微分之結果中,命 $x=2$, $y=2.5$, 吾人得

$$xy' + y - 2x = 0, \qquad y_0' = \frac{3}{4};$$

$$xy'' + 2y' - 2 = 0, \quad y_0'' = 1 - y_0' = \frac{1}{4};$$

依此類推,最後得

$$y = 2\frac{1}{2} + \frac{3}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$$

$$+ \frac{1}{32}(x-2)^4 - \frac{1}{64}(x-2)^5 + \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

若在此級數中,依次命 $x=2.05, 2.10, 2.15, 2.20$, 則上式所書之末項,其最大數值將為

$$\frac{1}{64}(0.2)^5 = 0.000005,$$

故各相當之 y 值,將有五位小數正確.

是以得

$$y_1=2.53780,\ y_2=2.57619,\ y_3=2.61512,\ y_4=2.65455.$$

應用有限差之公式*,

$$y_{n+1}-y_n=q_n+\frac{1}{2}\Delta q_{n-1}+\frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2}$$

$$+\frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}+\frac{251}{720}\Delta^4 q_{n-4}+.\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

式中 q_n 代表當 $x=x_n,\ y=y_n$ 時 $h\frac{dy}{dx}$ 之值,故在本題

$$q_n=0.05(2-y_n/x_n),$$

Δq_n 代表 $q_{n+1}-q_n$,

$\Delta^2 q_n$ 代表 $\Delta q_{n+1}-\Delta q_n$, 依此類推.

命 $n=5$, 方程式(2)得

$$y_5=y_4+q_4+\frac{1}{2}\Delta q_3+\frac{5}{12}\Delta^2 q_2+\frac{3}{8}\Delta^3 q_1+\frac{251}{720}\Delta^4 q_0+.\cdots \quad (3)$$

今 $$q_0=0.05(2-y_0/x_0)=0.03750,$$

*此公式乃自插入公式 (Interpolation formula)

$$q_n(x_n+rh)=q_n+r\Delta q_{n-1}+\frac{r(r+1)}{2!}\Delta^2 q_{n-2}+\frac{r(r+1)(r+2)}{3!}\Delta^3 q_{n-3}\cdots.$$

在0與1之間對於 r 求積分而來.

參考惠塔克及魯濱孫之 Calculus of Observation 第365頁.

同理，

$$q_1=0.03810,\ q_2=0.03866.\ q_3=0.03918,\ q_4=0.03967,$$

故 $\Delta q_0=q_1-q_0=0.00060$，依此類推. 計算此等差時，以將各數書成下表，較為便利：

q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$	$\Delta^4 q$
$q_0=0.03750$				
	0.00060			
$q_1=0.03810$		-0.00004		
	0.00056		0.00000	
$q_2=0.03866$		-0.00004		0.00001
	0.00052		0.00001	
$q_3=0.03918$		-0.00003		
	0.00049			
$q_4=0.03967$				

今試考察本表中各級差之數值，由 Δq 以至 $\Delta^2 q$，其間有顯明之減少. 然在 $\Delta^3 q$ 中，則減少甚微，而在 $\Delta^4 q$ 中，則全未減少. 此點表示 $\Delta^3 q$ 及 $\Delta^4 q$ 均不正確. 故吾人捨棄此二值，而應用方程式(3)之差近式如下：

$$y_5=y_4+q_4+\frac{1}{2}\Delta q_3+\frac{5}{12}\Delta^2 q_2$$

$$=2.65455+0.03967+0.00025-0.00001$$

$$=2.69446$$

僅取級數之四項，因此所生之差誤，可望其分明較小於現存之末項，因而對於五位小數，可以棄置不計.

在另一方面,第一項及第二項之眞值,各與其現在五位差近値之差,雖不能多於0.000005,但此等差誤,有時不幸在Δq中,或可加倍,而在$\Delta^2 q$中再加倍.

縱使用以計算y_5之各項俱有其最大可能之差誤,並設此等差誤俱爲同號,然y_5中之結果差誤,將小於0.000025.

吾人現計算$q_5=0.05(2-y_5/x_5)=0.04012$. 此數可信其正確至第五位小數,蓋$y_5$中之差誤0.000025將以小數0.05/2.25,乘之,故對於吾人之差近級,可以棄置也.將q_5加入表中,吾人立刻可得$\Delta q_4=0.00045$,而

$$\Delta^2 q_3=-0.00004,$$

因而

$$y_6=y_5+q_5+\frac{1}{2}\Delta q_4+\frac{5}{12}\Delta^2 q_3$$

$$=2.69446+0.04012+0.00022=2.73478.$$

(因Δq_3及Δq_4中之末位數字俱係奇數,故在折半之時,對於此兩個同屬適宜之五位差近數,須加以選擇,吾人輪流選用此一大一小之值,庶可免除差誤之纍集.)

依此進行,吾人由下表中得各結果:

y	q	Δq	$\Delta^2 q$
$y_0=2.50000$	$q_0=0.03750$		
		0.00060	
$y_1=2.53780$	$q_1=0.03810$		-0.00004
		0.00056	
$y_2=2.57619$	$q_2=0.03866$		-0.00004
		0.00052	
$y_3=2.61512$	$q_3=0.03918$		−0·00003
		0.00049	
$y_4=2.65455$	$q_4=0.03967$		-0.00004
		0.00045	
$y_5=2.69446$	$q_5=0.04012$		−0 00002
		0.00043	
$y_6=2.73478$	$q_6=0.04055$		-0.00003
		0.00040	
$y_7=2.77554$	$q_7=0.04095$		-0.00003
		0.00037	
$y_8=2.81668$	$q_8=0.04132$		-0.00002
		0.00035	
$y_9=2.85817$	$q_9=0.04167$		
$y_{10}=2.90001$			

各 y 之末位數字,可盼其差誤甚小.按諸事實,吾人所取之微分方程式,其正確之解爲 $y=x+1/x$.依此計算,吾人得 y_5 中之差誤爲 0 00002, y_7, y_8, y_9, y_{10} 中俱爲 0.00001,而其後各值中,則俱爲零矣.

欲求更精密之值,可計算 y_1, y_2, y_3, y_4 至多位小數,例如八位.讀者應自作此工作.所有 Δq, $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$ 及 $\Delta^4 q$ 等值,將知其俱屬可靠,故能用於有限差之公式.其最後結果爲:

$$y_0 = 2.500,000,00;$$

$$y_1 = 2.537,804,88;$$

$$y_2 = 2.576,190,48;$$

$$y_3 = 2.615,116,28;$$

$$y_4 = 2.654,545,45;$$

$y_5 = 2.694,444,42$ (末位數字中差誤 -2)

$y_6 = 2.734,782,58$ (末位數字中差誤 -3)

$y_7 = 2.775,531,88$ (末位數字中差誤 -3)

$y_8 = 2.816,666,61$ (末位數字中差誤 -6)

$y_9 = 2.858,163,23$ (末位數字中差誤 -4)

$y_{10} = 2.899,999,93$ (末位數字中差誤 -7)

用以計算 y_{10} 之末項,即 $\frac{251}{720}\Delta^4 q_5$,其值爲 $-0.000,000,09$,此值之大小,表示本次之差誤(與求五位數者不同),大抵因棄置高級差而來.欲矯正此點,可自泰氏級數精確計算 y_5 之值,幷用 $\Delta^5 q$ 或(通常大抵用此法)充分縮小間隔,使 $\Delta^5 q$ 在吾人欲得之差近級中,確可棄置不計.

183. 里譔士對於 90-93 節所述方法之推廣. 里譔士曾發表*一有系統之方法,以求 92 節中所確定之 m 及 M 兩數之數值.即

*見 Phil. Mag., Series 7, Vol. 5 Feb. 1928.

款 (i), 若 $\qquad df/dx>0, \partial f/\partial y>0,$

則 $\qquad m=f(a, b),\ M=f\{a+h,\ b+hf(a+h,\ b+h)\};$

款 (ii), 若 $\qquad df/dx>0, \partial f/\partial y<0,$

則 $\qquad m=f(a, b),\ M=f\{a+h,\ b+hf(a, b)\};$

款 (iii), 若 $\qquad df/dx<0, \partial\ /\partial y>0,$

則 $\qquad m=f\{a+h,\ b+hf(a+h,\ b-h)\},\ M=f(a, b);$

款 (iv), 若 $\qquad df/dx<0, \partial f/\partial y<0,$

則 $\qquad m=f\{a+h,\ b+hf(a, b)\},\ M=f(a, b).$

此等值合於92節中不等式(7),(8),(9),(10), 里謨士證得若以下列關係式確定R及r:

$$r=\frac{1}{2}h\{f(a, b)+f(a+h,\ b+mh)\},$$

$$R=\frac{1}{2}h\{f(a, b)+f(a+h,\ b+Mh)\},$$

則以r代q, R代Q諸不等式仍然適合.

若 $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}>0.$ 命Σ'代表$\dfrac{1}{3}(p+2Q)$,

但若 $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}<0,$ 則代表 $\dfrac{1}{3}(P+2q)$,

若 $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}>0,$ 命Σ''代表$\dfrac{1}{3}(2p+R)$,

但若 $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2f}{dx^2}<0,$ 則代表 $\dfrac{1}{3}(2P+r).$

里謨士於是證明,若$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dx^2}<0$, 則差近值$\Sigma'$及$\Sigma''$中之差誤,至少分別爲第四級及第三級者(以增量爲第一級小),但若$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{df}{dx}\frac{d^2f}{dx^2}>0$,則至少分別爲第三級及第四級者.此結論之根據,在於m及M乃依前述說明所選擇.第93節例題中之差誤,遠過預期由此結果所得者爲小,但此層似由於m及M選擇之順利,而在里謨士所預定之計劃中,則未能有此幸運也.通常言之,亞丹士或庫塔之方法,似屬較佳.

附錄一

方程式 $Mdx+Ndy=0$ 爲恰當式之必要及充分條件.

(a) 設此方程式爲恰當

$$Mdx+Ndy=\text{一完全微分},\ \text{命}=df,$$

則
$$M=\frac{\partial f}{\partial x}\ \text{及}\ N=\frac{\partial f}{\partial y},$$

故
$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y};$$

是以條件爲必要.

(b) 反之,設 $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$, 命 $F=\int M\,dx$, 其中於積分時,設 y 爲常數,

於是 $\frac{\partial F}{\partial x}=M$, 而 $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$,

是以
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N-\frac{\partial F}{\partial y}\right)=0.$$

$N-\frac{\partial F}{\partial y}=$ 對於 x 而言乃一常數,即云 y 之一函數,

設爲 $$=\phi(y),$$

於是 $$N=\frac{\partial F}{\partial y}+\phi(y).$$

今命 $$f=F+\int\phi(y)dy;$$

則 $$N=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

並有 $$M=\frac{\partial F}{\partial x},\ (\text{由 } F \text{ 之定義})$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x},\ \text{因 } F \text{ 及 } f \text{ 僅相差 } y \text{ 之函數}.$$

是以 $Mdx+Ndy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=df$, 乃一完全微分.

故方程式爲恰當,亦即謂條件爲充分.

[若 f 及其一級及二級偏係數俱爲綿續,吾人之假設 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ 方合,見拉穆 (Lamb) 著 Infinitesimal calculus 第二版 210 節,或第三版 193 節.]

附 錄 二

方程式 $P(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y}+R(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$, 視爲四度時,無特解(見127解).

設
$$u(x, y, z)=a,$$
$$v(x, y, z)=b,$$
爲方程式
$$dx/P=dy/Q=dz/R$$
之二獨立解,

則吾人易證明

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

及

$$P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}=0. \qquad (2)$$

(1) 之左端不含 a, 故不能僅因 $u=a$ 之關係而爲零,是以必全等於零.同理,方程(2)亦然.

今設 $f=w(x, y, z)$ 爲原偏微分方程式之任一積分因而合於

$$P\frac{\partial w}{\partial x}+Q\frac{\partial w}{\partial y}+R\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

此又爲一全等式,因不含 f 故也.

由 (1), (2), (3) 消去 P, Q, R, 吾人得

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}=0 \text{ 全等於零.}$$

故 w 爲 u 及 v 之一函數,設爲

$$w=\phi(u, v).$$

卽謂 $f=w$ 爲通解之一部,並因 $f=w$ 爲任一解,故無特解.

[上述作法中,對於一微分方程式,能全合,讀者當知此點之重要.喜爾氏對於蘭格倫日平直方程式之積分之新分類,(見 Proc. London Math. Soc., 1917) 將全合於一方程式之解,與不含此性質之解,予以顯明之分別.]

附錄三

由雅科比方法解一一級偏微分方程式所得之式(§ 140),恆爲可積分.

欲證 $$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+p_3dx_3$$

爲可積,但證

$$L=M=N=0,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

即爲必要而且充分,其中

$$L\equiv\frac{\partial p_2}{\partial x_3}-\frac{\partial p_3}{\partial x_2},\quad M\equiv\frac{\partial p_3}{\partial x_1}-\frac{\partial p_1}{\partial x_3},\quad N\equiv\frac{\partial p_1}{\partial x_2}-\frac{\partial p_2}{\partial x_1}.$$

今將140節中之(8),(9),(10)相加,並用$(F, F_1)=0$之關係,但不假設(A)式爲成立,吾人得

$$L\frac{\partial(F,\ F_1)}{\partial(p_2,\ p_3)}+M\frac{\partial(F,\ F_1)}{\partial(p_3,\ p_1)}+N\frac{\partial(F,\ F_1)}{\partial(p_1,\ p_2)}=0.\cdots\cdots(B)$$

同理 $$L\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(p_2,\ p_3)}+M\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(p_3,\ p_1)}+N\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(p_1,\ p_2)}=0,\cdots\cdots(C)$$

及 $$L\frac{\partial(F_2, F)}{\partial(p_2,\ p_3)}+M\frac{\partial(F_2, F)}{\partial(p_3,\ p_1)}+N\frac{\partial(F_2, F)}{\partial(p_1,\ p_2)}=0.\cdots\cdots(D)$$

由方程式(B),(C),(D),吾人見非$L=M=N=0$,即爲

$\Delta=0$, 式中 Δ 爲一行列式, 以 (B), (C), (D) 中 L, M, N 之係數爲其元素.

但此等係數,其自身即爲行列式

$$J=\frac{\partial(F_2, F, F_1)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}$$

之元素之餘子式, 且由行列式之理 $\Delta=J^2$.

今 J 不能爲零,*否則將暗示有一函數關係存在, 而與 140 節之假設相反,蓋將使諸 p 可以由

$$F=F_1-a_1=F_2-a_2=0$$

求出,爲諸 x 之函綫也.

於是 $\Delta\neq 0$ 故 $L=M=N=0$.

* 本附錄中之一切方程式皆爲全合(Satisfied identically).

附錄四

繼續研習之提示

此處之意,並不欲將關於微分方程式之著作提出一完全之目錄,吾人僅將分爲三類,舉出少數最著名者.

I. 以分析爲主旨者(與第十一章相連續).

(a) 福賽司 Theory of Differential Equations (1890 年起出版,劍橋大學印刷所).

此重要著作,共有六卷,爲英國關於此問題之最詳盡著作,惟須注意,勿與彼所著較淺者之一卷相混(麥美倫 (Macmillan) 書局, 1914 年,第四版).

(b) 谷耳薩 Cours d' Analys Mathématique Vols. II and III(Gauthier-Villars 出版, 1911——15 第二版; 英譯本由 Ginn 書館出版).

此書幾完全係關於存在定理之探討.

(c) 士雷辛革(Schlesinger): Handbuch der Theorie der

linearen Differential-gleichungen (1895——8, 3 卷 Teubner 出版).

(*d*) 印斯: Ordinary Differential Equations (1927 Longmans 出版).

(*e*) 俾柏巴哈: Differential-gleichungen (1926年 第二版, Springer 公司印行).

II. 一部爲分析並涉及幾何者.

(*a*) 谷耳薩: Equations aux dérivées partielles du premier ordre (1891) (譯者註:第二版於 1921 年刊行)

(*b*) 谷耳薩: Equations aux dérivées partielles du second ordre (1896——98 卷二, Hermann et fils 出版).

(*c*) 佩治 (Page): Ordinary Differential Equations from the Standpoint of Lie's Transformation Groups (1897, 麥美倫出版).

此書論微分方程式之要素極有創見.

(*d*) 狄克生: Differential Equations from the Group Standpoint (1924, Princeton 大學印刷所出版).

III. 關於物理者 (與第三第四兩章銜接).

(*a*) 里曼: Partiele differential-gleichungen und deren Anwendung auf Physikalische Fragen (1869 Vieweg 出版).

(*b*) 里曼及韋柏之改正版,增加材料甚多(1900—01 Vieweg 出版).

(*c*) 貝特盟 (Bateman): Differential Equations(1918, Longmans 出版).

此書於最近研究,頗多述及.

於此不能詳述諸家之原著,但關於喜爾教授之最近劄記,刊載於 London Mathematical Society 上者,不可忽視

尙有其他參考書,載本書181節內之第二附註, I. (*b*) 及 Forsyth 一册之著述,均有新版,然無多改動.

全書總雜題

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^3+3x^2y}{x^3+3xy^2}$. [London.]

(2) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=2x(1+x^2)$. [London.]

(3) $\tan y\dfrac{dy}{dx}+\tan x=\cos y\cos^3 x$. [London.]

(4) $y=2x\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ [London.]

(5) $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=x^2y^2$. [London.]

(6) $(D^2+4)y=\sin 2x$. [London.]

(7) $(D^3-D^2+3D+5)y=x^2+e^x\cos 2x$. [London.]

(8) $(x^3D^3+x^2D^2)y=1+x+x^2$. [London.]

(9) $\cos x\sin x\dfrac{dy}{dx}=y+\cos x$. [London.]

(10) $\left.\begin{aligned}\dfrac{dx}{dt}&=x+y+2\cos t,\\ \dfrac{dy}{dt}&=3x-y\end{aligned}\right\}$ [London.]

(11) $y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 1.$ [London.]

(12) $y\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2.$ [London.]

(13) $(D^4 + 8D^2 + 16)y = x\cos 2x.$ [London.]

(14) $\int x^2dy + \int xy\,dx = x^3.$ [London.]

(15) $(y^2 + yz - z)dx + (x^2 + xz - z)dy + (x + y - xy)dz = 0.$

[London.]

(16) $(2x^3 - y^3 - z^3)yz\,dx + (2y^3 - z^3 - x^3)zx\,dy$

$+ (2z^3 - x^3 - y^3)xy\,dz = 0.$ [London.]

(17) $xp - yq + (x^2 - y^2) = 0.$ [London.]

(18) $(x + 2y - z)p + (3y - z)q = x + y.$ [London.]

(19) $xp + yq + \frac{2(xz - yz + xy)}{4y - x + z} = 0.$ [London.]

(20) $p(x + p) + q(y + q) = z.$ [London.]

(21) $r + s = p.$ [London.]

(22) $z - \frac{1}{2}px - qy = p^2/x^2.$ [London.]

(23) $r - x = t - y.$ [London.]

(24) $z = px + qy - sxy.$ [London.]

(25) $z(rt - s^2) + pqs = 0.$ [London.]

(26) $x^2r+2xys+y^2t=xy.$ [London.]

(27) $rq(q+1)-s(2pq+p+q+1)+tp(p+1)=0.$ [London.]

(28) $y^3=xy^2p+x^4p^2.$ [Math. Trip.]

(29) $5y\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

(30) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{n}{x}\dfrac{dy}{dx}+x^{2n}y=0.$ [Math. Trip.]

(31) $(zp+x)^2+(zq+y)^2=1.$ [Math. Trip.]

(32) 求方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{3x}$ 之一解,當 $x=0$ 及 $x=\log_e 2$ 時,其值爲零者. [Math. Trip.]

(33) 解方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\kappa\frac{dx}{dt}+(\kappa^2+\lambda^2)x=A\cos pt,$$

試證對於 p 之各值,其特解之幅 (Amplitude) 以當 $p^2=\lambda^2-\kappa^2$ 時爲極大,而證此特解爲

$(A/2\kappa\lambda)\cos(pt-\alpha)$, 式中 $\tan\alpha=p/\kappa$. [London.]

(34) 令 $z=\sin x$ 以解方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\tan x+y\cos^2 x=0.$$

(35) (i) 設方程式 $\dfrac{\partial^2V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2V}{\partial z^2}=0$ 之一解呈 $F(r+z)$ 之形,其中 $r^2=x^2+y^2+z^2$, 求得函數 F; 由對 z

求積分，推出方程式之一解 $V=z\log(r+z)-r$.

(ii) 設方程式 $\dfrac{\partial V}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ 之一解呈 $\phi(\xi)$ 之形，其中 $\xi=x/\sqrt{t}$，求函數 ϕ，再對 x 求微分，以推得第二解.

[London.]

(36) 求一含 x, y, z 之有理整函數 V，使能適合於

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

者，且使其在以原點爲心，單位爲半徑之球面上時，所得之值爲 Az^4. [Math. Trip.]

(37) 試證蘭格倫日之程式 $\nabla^2 u=0$ 之一解爲

$$u=(A\cos n\theta+B\sin n\theta)e^{-\lambda z}J_n(\lambda r),$$

式中 r, θ, z 爲柱位標 (Cylindrical co-ordinates) 而 A, B, n, λ 爲隨意常數. [London.]

(38) 試證 $J_n(r)(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)$ 爲方程式

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+V=0$$

之解，其中 r, θ 爲極位標，a_n, b_n 爲隨意常數. [London.]

(39) 試示求方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

之級數解法,而就當 $x=0$ 時,有 $u=a\frac{\partial u}{\partial x}=C\cosh t$ 之情形下完全解決之. [London.]

(40) 求以 x 之升冪級數表方程式

$$4\frac{d^2y}{dx^2}+9xy=0$$

之二獨立解;並試證將方程式變數作一代換或用他法,即可得其全解如下形

$$y=Ax^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}})+Bx^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{3}}(x^{\frac{3}{2}}),$$

式中 A, B 為隨意常數. [London.]

(41) 試證方程式

$$\frac{dy}{dx}+P+Qy+Ry^2=0,$$

(式中 P, Q, R 為 x 之函數)之一特解 y_1 為已知時,則可作一代換 $y=y_1+1/z$ 以得其全解.

試證如知其二特解 y_1 及 y_2, 則其全解為

$$\log\left(\frac{y-y_1}{y-y_2}\right)=\int R(y_2-y_1)dx+\text{常數}.$$

已知方程式

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}+x+1-(x^2+1)y+(x-1)y^2=0$$

有二特解,而乘積為1者,試求其全解. [London.]

(42) 試證微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+2\{b+(a-1)x\}\frac{dy}{dx}+2ay=0$$

有呈 $(1+x)^p(1-x)^q$ 形狀之一解,式中 $p\,q$ 爲確定常數.試完全解此方程式,并由是推證,或由他法證明,如 $2a$ 爲一正整數 n 時,方程式之一解爲 x 之 n 次多項式.

[London.]

(43) 驗證 $1-x^2$ 爲方程式

$$x(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x^2)(1+3x^2)\frac{dy}{dx}+4x(1+x^2)y=0$$

之一特解,并完全解之.

以 $(1-x^2)^3$ 代上式右端之零,而用參數變值法或他法完全解之.

(44) 如方程式

$$\frac{du}{dx}+u^2+Q-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}P^2=0$$

(其中 P, Q 爲 x 之已知函數)之一解爲已知,則下式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

之全解,可以求得.

由是或以他法解下式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+(x^4-3)y=0.$$ [London.]

(45) 試證命 $v=we^{ix}$, 則方程式 $x\frac{d^2v}{dx^2}-2n\frac{dv}{dx}+xv=0$,

(其中 n 爲一整數)之全解,可表之如下形

$$(A\cos x+B\sin x)f(x)+(A\sin x-B\cos x)\phi(x),$$

式中 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 均爲適當之多項式. [London.]

(46) 如 u, v 爲方程式

$$f(x)y'''-f'(x)y''+\phi(x)y'+\chi(x)y=0$$

(式中撇號表對 x 求微分)之二獨立解,求證其全解爲 $Au+Bv+Cw$, 而

$$w\equiv u\int\frac{vf(x)dx}{(uv'-u'v)^2}-v\int\frac{uf(x)dx}{(uv'-u'v)^2},$$

且 A, B, C 爲隨意常數.

求解有呈 x^n 形之解之方程式

$$x^2(x^2+5)y'''-x(7x^2+25)y''+(22x^2+40)y'-30xy=0.$$

[London.]

(47) 求二獨立羃級數而爲方程式

$$(x^2-a^2)\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0$$

之解者,並定其收斂範圍. [London.]

(48) 試證方程式

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}y=0$$

有二積分

$$\sum_0^\infty a_n x^n,\quad \sum_0^\infty a_n\left(\frac{1}{4}\log x+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots-\frac{1}{2n}\right)x^n,$$

式中 $$a_n=\left\{\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)}\right\}^2.$$ [London.]

(49) 求作一以

$$y=A\left(\sin x+\frac{\cos x}{x}\right)+B\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$$

(式中 A, B 爲隨意常數)爲原函數之微分方程式.

[London.]

(50) 試求方程式

$$P dx+Q\,dy=0$$

有一積分因數僅爲 x 函數之情形.應用此結果,以解

$$(3xy-2ay^2)dx+(x^2-2axy)dy=0.$$ [London.]

(51) 證明方程式

$$y-x\frac{dy}{dx}+\frac{2ax^2}{x^2-y^2}\,\frac{dy}{dx}=0,$$

$$x^2-y^2+2(xy+bx^2)\frac{dy}{dx}=0,$$

有一公共原函數,幷試求出之. [London.]

(52) 試證方程式

$$P\frac{d^2u}{dx^2}+Q\frac{du}{dx}+Ru=0$$

之任何解均爲

$$\frac{d^2}{dx^2}(Pu)-\frac{d}{dx}(Qu)+Ru=0$$

之積分因數.且反之,後一方程式之任何解,亦爲前者之積分因數.

已知 $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{P}{Q}\right)+\frac{R}{Q}=0$, 試由上理,以求首一方程式之完全積分. [London.]

(53) 如方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

(式中 P, Q 爲 x 之函數)能有

$$y=A\sin(nx+\alpha)$$

之一解,其中 A 及 α 均爲隨意常數,試求 P, Q 間之關係. [London.]

(54) 已知方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4y=\frac{2y}{(1-x)^2}$$

有二呈 $y=\dfrac{a+bx}{1-x}e^{kx}$ 形之積分,試求其解.　[London.]

(55) 試證平直微分方程式,以

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

之解之平方為解者,可書為

$$\left(\frac{d}{dx}+2P\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+2\,Qy\right)+2\,Q\frac{dy}{dx}=0.$$

(56) 試證全微分方程式

$$3x^2(y+z)dx+(z^2-x^3)dy+(y^2-x^3)dz=0$$

能合於可積分條件,並積分之.　[London.]

(57) 以 D 表算子 $\dfrac{d}{dx}$, 如 X 為 x 之一函數,而 $\phi(D)$ 為 D 之一有理整函數,則

$$\phi(D)xX=x\phi(D)X+\phi'(D)X,$$

試證明之.

推廣此結果於 $1/\phi(D)$ 為 D 之有理整函數之情形.

試解微分方程式

$$\frac{d^3y}{dx^3}+8y=3x^2+xe^{-2x}\cos x \qquad \text{[London.]}$$

(58) 證明　$3\dfrac{d^2y}{dx^2}+4x\dfrac{dy}{dx}-8y=0$

有一積分為 x 之多項式,試推求其通解.　[Sheffield.]

(59) 在方程式 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ 中,如 $P,\ Q,\ R$ 爲 $x,\ y,\ z$ 之齊次函數,且次數亦同,則必可使一變數與他二者分離,且此方程式如爲可積分者,則必可由是化爲恰當方程式,試證明其理.

求積分

$$z^3(x^2dx+y^2dy)+z\{xyz^2+z^4-(x^2+y^2)^2\}(dx+dy)$$
$$+(x+y)\{z^4-z^2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2\}dz=0,$$

使其積分爲代數式. [London.]

(60) 如方程式 $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$ 爲恰當者,試證其可化爲 $\lambda\,du+\mu\,dv=0$ 之形;且 λ/μ 爲僅含 $u,\ v$ 之函數,而 $u=$常數 $v=$常數爲

$$\frac{dx}{\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}}=\frac{dy}{\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

之二獨立解.

由是或以他法積分下之方程式

$$(yz+z^2)dx-xz\,dy+xy\,dz=0.$$ [London.]

(61) 證明 $z^2=2xy$ 雖不含於

$$\{2\sqrt{(z^2-2xy)}-2x-1\}zp+\{1+2y-2\sqrt{(z^2-2xy)}\}zq=x-y$$

之通解 $x+y+\sqrt{(z^2-2xy)}=f(x+y+z^2)$

中,然亦爲此方程式之一解. [Sheffield.]

(62) (i) 試示化李嘉替方程式

$$\frac{dy}{dx}=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2$$

爲一二級平直方程式之方法,由是或用他法證明其任意四積分式之乂比爲常數.

(ii) 證驗 $\frac{1}{2}+x\tan x$, $\frac{1}{2}-x\cot x$ 均爲

$$x\frac{dy}{dx}=x^2-\frac{1}{4}+y^2$$

之積分,而推求其原函數. [London.]

(63) 用常法解 $\frac{dx}{dt}=-\omega y,$

$$\frac{dy}{dt}=\omega x,$$

而自結果中消去 t,由是證明 (x, y) 點在一圓上.

將 x 乘第一式,與 y 乘第二式相加,以證上述結果.

[由此二方程式,可得一點,以角速度 ω 依一圓運動時,取與二軸平行向分解所得之速度.]

(64) 求曲線 $y^2(a-x)=x^3$

之正交曲線族.

證明其可化爲下族:

$$r^2=b^2(3+\cos 2\theta).$$ [Sheffield.]

(65)
$$\frac{dx}{dt}=ny-mz,$$
$$\frac{dy}{dt}=lz-nx,$$
$$\frac{dz}{dt}=mx-ly$$

中 l, m, n 皆常數,試證

$$lx+my+nz,$$
$$x^2+y^2+z^2,$$

及
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

皆爲定值,試解釋此等結果.

(66) 一平曲線上任一點 P 之縱標爲 PN, 次切線爲 NT, 原點 A 在曲線上, 而三角形 PNT 之面積 m 倍於弓形 APN 者, 試證其方程式爲 $y^{2m-1}=a^{2m-2}x$.

如將弓形依 x 軸旋轉, 所得之體積, 與將三角形 PNT 旋轉所成之錐形者成定比, 試證明之.

[London.]

(67) 用代換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 或以他法求解微分方程式

$$(x^2+y^2)(xp-y)^2=1+p^2.$$

并求其異解,而釋其幾何意義. [London.]

(68) 如以 y^2-x^2 爲一新變數,則方程式

$$(x^2+y^2-2xpy)^2=4a^2y^2(1-p^2)$$

可化爲克雷洛式,試證明之.求解此式,幷示明其異解表二正雙曲線,且證驗此解合於已知之方程式.

[London.]

(69) 如一曲線之曲率半徑等於其法線被一定直線截取之長,則此曲線必爲圓或懸鏈線(Catenary),試證明之. [London.]

(70) 解方程式

$$y=x-2ap+ap^2,$$

而求其異解,且以一圖示之. [London.]

(71) 一曲線之曲率半徑爲 ρ,其法線介於曲線與 x 軸間一段之長爲 ν,二者間以關係式 $\rho\nu=c^2$ 聯絡之,如其曲線背 x 軸成凹形,則

$$y^2=c^2\sin^2\phi+b,$$

式中 ϕ 爲切線與 Ox 所成之傾斜角.在 $b=0$ 之情形中,求以 ϕ 之函數表 x 之值,幷描製此曲線之形狀.

[London.]

(72) 如一族之曲線之微分方程式以雙極位標(Bipolar co-ordinates) $r,\ r',\ \theta,\ \theta'$ 表之,則以 $r\,d\theta$ 代 dr,

$r'd\theta'$ 代 dr', $-dr$ 代 $rd\theta$, $-dr'$ 代 $r'd\theta'$ 時,可得其正交曲線族之微分方程式,試證明之.

試求曲線族 $$\frac{a}{r}+\frac{b}{r'}=c$$

(c 爲一變參數)之正交曲線族. [London.]

(73) 一曲線上 P 點之法線與過 G 點之一定直線相交,而 PG 中點之軌跡,爲一直線,與該定直線之交角爲 $\cot^{-1}3$, 試證 P 點之軌跡爲一拋物線. [London.]

(74) 解方程式 $2(p-1)y=p^2x$, 證明 p-判別式爲此方程式之一解,而爲其通解所表曲線族之包線.

[London.]

(75) 作拋物線 $y^2=4ax$ 之漸縮線 (Involute) 之微分方程式,幷求積分之,其異解之性質如何? [London.]

(76) 如一曲面之諸法線,盡交於一定直線上,則此曲面必爲一旋轉面,試證明之. [London.]

(77) 求積分偏微分方程式

$$px+qy=\sqrt{(x^2+y^2)},$$

幷述其通解及佐積分之幾何意義. [London.]

(78) 求積分微分方程式

$$z(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-z(y+2x)\frac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2,$$

并求特解被與 $z=0$ 平行之任何平面截成 (i) 一圓, (ii) 一正雙曲線者. [London.]

(79) 一族曲線,由下方程式表之

$$x^2+y^2+6z^2=\alpha,\quad 2x^2+5y^2+z^2+4xy=\beta,$$

式中 α, β 爲參數.

證明此族曲線,能被一族曲面正交;並求該曲面族之方程式. [London.]

(80) 解 $b(bcy+axz)p+a(acx+byz)q=ab(z^2-c^2)$,

且示明其解所表者,乃與二已知直線相遇諸直線所成之任何面.

(81) (i) 解

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E,$$

式中 L, R, E 均爲常數.

[由定電壓 (Voltage) E 經電阻爲 R 及自感係數 (Coefficient of self-induction) 爲 L 之線,所生電流 I, 其關係卽由上之方程式表之]

(ii) 如當 $t=0$ 時, $I=I_0$, 求定解中隨意常數之值.

(iii) 如 t 甚大時, I 趨於何值?

[卽歐姆 (Ohm) 氏之穩定電流 (Steady currents) 定律.]

(82) 解 $$L\frac{dI}{dt}+RI=E\cos qt.$$

[此處符號之意義,除電壓 $E\cos pt$ 必爲週期而非常值外,餘均同上題.其補函數旋可忽去,即電流之自由振動,已衰耗失去也.]

(83) 求下列之特解

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E\cos pt.$$

[當一週期電壓力 $E\cos pt$ 在連結來頓瓶衣之電路上使用時,在一面衣上之電荷 Q 即由此式表之,其特解所表者,即爲自由電振動耗失後之電量.]

(84) 證明方程式

$$2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}-16x-3y=0,\quad 7\frac{dx}{dt}-2x-3y=0$$

能由試解式 $y=mx$ 滿足之,但 m 爲二次方程式

$$\frac{2+3m}{7}=\frac{16+3m}{2+3m}$$

之根,而 x 則合於 $$7\frac{dx}{dt}-(2+3m)x=0.$$

由是證明該微分方程式之二組解爲

$$y=4x=4Ae^{2t}$$

及 $$y=-3x=-3Be^{-t},$$

因而其通解為 $x=Ae^{2t}+Be^{-t}$

$$y=4Ae^{2t}-3Be^{-t}.$$

(85) 用上題之方法,以解

$$7\frac{d^2x}{dt^2}+23x-8y=0,$$

$$3\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{d^2y}{dt^2}-13x+10y=0.$$

[諸體系在二度自由中小振動之問題內,得遇此類方程式.由 $y=2x$(或 $y=-5x$) 所定之運動,稱為振動之主態 (Principal or normal mode of vibration) 此等體系之一切各部份,以同週期及同位相 (Phase) 作調和運動,其理顯然可見,是以 $y-2x$ 及 $y+5x$ 作新變數,以代 x 及 y,則前者稱為主柱標 (Principal or normal coördinates)].

(86) 已知 L, M, N, R, S 皆正數,且 LN 大於 M^2,試證由

$$L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}+Rx=0$$

$$M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+Sy=0,$$

確定之 x, y,於 t 增加時,其值無窮減小.

[試證 $x=Ae^{at}+Be^{bt}$, $y=Ee^{at}+Fe^{bt}$, 式中 a, b, 為負實

數,此等方程式表二互相響影之電路中之自由振動,L, N 爲自感係數,M 爲互感 (Mutual induction) 者,R 及 S 爲電阻].

(87) 在聯立方程式

$$L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}+Rx+\int\frac{x\,dt}{c}=E\sin pt,$$

$$M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}+Sy=0$$

中,如將第一式內之 $\int\frac{x}{c}dt$ 項除去,而以 $L-\frac{1}{cp^2}$ 易 L, 其特解仍不變,試證明之(但不必將解完全演出).

[因特解爲 $A\sin(pt-a)$ 形,故此理立可闡明.

有二互相影響之電路,第一者中含一電容爲 c 之容電器,而有一交流電壓(Alternating electromotive force) 施之,則二者中之電流由題式表示,此例表明增加自感應卽可補償容電器之效力.]

(88) 如 $$L\frac{dx}{dt}+M\frac{dy}{dt}+\frac{1}{c}\int x\,dt=f(t)$$

及 $$M\frac{dx}{dt}+N\frac{dy}{dt}=0,$$

而 $LN-M^2$ 爲一甚小之正量時,試證關於 x 之補函數,表示一甚速之振動.

[一感應圈 (Induction coil) 有閉接 (Closed) 之第二電路,其第一電路中容電器振動放電之累力氏理論內,有此等方程式.注意第二方程式乃表示第一電流極小時,第二電流爲極大,見格雷 (Gray) 著 Magnetism and Electricity, 489, 490 等節.]

(89) 試證聯立方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-a(x-X)+k\cos pt,$$

$$M\frac{d^2X}{dt^2}=-AX+a(x-X)$$

之特解可書如

$$x=\frac{Bk}{a^2-bB}\cos pt,$$

$$X=\frac{-ak}{a^2-bB}\cos pt,$$

式中 $b=mp^2-a,\quad B=Mp^2-(a+A)$.

由是證明對於 p 之二特值, x 及 X 均爲無窮大.

[此等方程式可定"彈性複擺 (Elastic double pendulum)"之振動.安置 m 及 M 二質量,使其只能在同一橫線上運動,一彈簧連 M 至此線上一定點,又以一彈簧連接 M 及 m. 一週期性之力,施於 m 上,則上述之解,示明二質量作強迫振動 (Forced vibration), 其幅對

p 之二特值爲無窮大. 此卽共振之現象也. 於此有應注意者, 卽在此情形中, 可生共振之 p 值, 與只有一質量時之 p 值不同. 此理可應用以討論輪軸(Turbine shaft)之旋廻(Whirling)"見斯托多拉(Stodola)之 Steam Turbine].

(90) 試證聯立微分方程式

$$\left(\frac{1}{3}m+M\right)4a\frac{d^2\theta}{dt^2}+2Mb\frac{d^2\phi}{dt^2}=-g(m+2M)\theta,$$

$$\frac{4b}{3}\frac{d^2\phi}{dt^2}+2a\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\phi$$

之解, 於 $m=M$, $a=b$ 時, θ 及 ϕ 得各以 $2\pi/p_1$ 及 $2\pi/p_2$, 爲週期之二簡諧振動合成, 而 p_1^2 及 p_2^2 爲一含 p^2 之二次方程式

$$28a^2p^4-84agp^2+27g^2=0$$

之根.

[有二桿, 質量各爲 m 及 M, 長各爲 $2a$ 及 $2b$, 在一垂直平面上擺動, 如一複擺, 其第一桿之一端, 繫於一定點, 第二桿則繫於第一桿之下, 此二桿與垂直所成之傾斜角, 卽由上之方程式表之. 此處所述之二振動, 稱爲主振動 (Principal or normal oscillation). 在若干關於小搖動之方程式中, 亦有相類之方程式.

在魯斯(Routh)所著 Advanced Rigid Dynamics 一書中,對此有詳細之討論,並特別言及定 p 之方程式,有等根之情形.]

(91)
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\kappa\frac{dy}{dt}+c^2x=0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}-\kappa\frac{dx}{dt}+c^2y=0.$$

[一迴轉擺(Gyrostatic pendulum)之垂擺不能遠離垂直線搖動時,其運動情形卽以上式表之.吾人須注意,如原始條件爲 $B=0$, 則其運動在一圓上,以 p 爲角速度.如爲 $A=0$, 則仍爲圓運動,但角速度爲 q, 而方向與前者相反(對於 p, q, A, B 見答案中).

當解釋最曼影響(Zeemann effect){卽一光帶(Spectrum)中光線受磁場影響而擴爲三倍}論旋轉伊洪(Ions and electricity)565——569諸節.]

(92) 已知

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+ax=0,\\[2ex] \dfrac{dz}{dt}=by,\\[2ex] x+y+z=c,\end{cases}$$

式中 a, b, c 爲常數,試求一對於 z 之微分方程式.

由是證明如 $t=0$ 時，$z=\dfrac{dz}{dt}=0$，則

$$z=c+\frac{c}{a-b}[be^{-at}-ae^{-bt}.]$$

[此種方程式於理論化學中,論一物質 A 化成一中間物質 B，再由之變為一第三物質 C 時見之．x，y，z 各為 A，B，C 在任何時間 t 之濃度，見哈科耳特(Harcourt)，及厄商(Esson)之 Phil. Trans. 1866——1867.]

(93) 一有一度自由之簡單動力系接於他一動力系上,則後者對前者之影響,得以方程式

$$\ddot{x}+2\mu\dot{x}+n^2x=X$$

表之.

如使波之激動系不變,而 $X=A\cos pt$，求有共振時之 p 值;且證明如 μ 大於某定值,卽無共振;幷作曲線以說明此二種情形. [Math. Trip.]

(94) 解微分方程式

$$\ddot{x}+2k\dot{x}+n^2x=0,\qquad \text{式中 } k^2<n^2.$$

一擺作小振動，完全振動一次之時間為 2 秒，幷取因空氣所致之角阻礙 (Angular retardation) 為 $.04\times$(擺之角速度)，試證 1° 之幅，於十次完全振動後;將減為 $40'$ [取 $\log_{10}e=.4343.$] [Math. Trip.]

(95) 一系之運動,實際上僅有關於一位標 x,則在任何時間之能力,以公式 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}ex^2$ 表之,而其能力之磨擦衰耗之時間率 (t-rate) 為 $\frac{1}{2}k\dot{x}^2$, 試證其自由週期 (τ_0) 為

$$2\pi\left(\frac{e}{m}-\frac{1}{16}\frac{k^2}{m^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

試證由 $A\cos pt$ 形之擾動力所支之強迫振動,在 $p^2=\frac{e}{m}-\frac{k^2}{8m^2}$ 時為最大,其時此振動之幅為 $\frac{Am\tau_0}{\pi k}$, 而其位相在動力者之後,相差為 $\tan^{-1}\frac{4mp}{k}$.

[Math. Trip.]

(96) 試證代換 $T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, 可化

$$\frac{d^2s}{dt^2}+P\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=Q$$

為平直式

$$\frac{dT}{ds}+2PT=Q.$$

由

$$(s+a)\frac{d^2s}{dt^2}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=(s-a)g,$$

附以 $t=0$ 時 $\frac{ds}{dt}=0$ 而 $s=2a$ 之條件,以求得

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{2g}{3}(s-2a)$$

及
$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{g}{3}.$$

[由此可得下述動力學問題之解,"一匀稱之鏈,盤繞於一横平面上,而一端過一輕滑車,車在平面上距離爲 a 處,開始時即有一段鏈長 $2a$ 自由掛於他一側上,試證此種運動,爲匀稱加速者."見羅內 (Loney) 著 Dynamics of a particle and of Rigid Bodies, p 131].

(97) 求方程式

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0$$

之一解呈
$$\phi=f(r)\cos\theta$$
之形者.

已知當 $r=a$ 時,
$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}=V\cos\theta,$$

及當 $r=\infty$ 時,
$$-\frac{\partial\phi}{\partial r}=0.$$

[當一半徑爲 a 之球,以速度 V 穿過在無窮遠之靜止液體作直線運動時, ϕ 爲其速位 (Velocity-potential). 參考刺謨稷 (Ramsey) 著 Hydro-Mechanics 第二部,第 152 頁.]

(98) 求
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

之一解，當 $x=0$ 時爲零，而當 $x=b$ 時化爲 $A\cos(pt+\alpha)$ 者.

[此式代表引張弦之一段，該弦兩端固定，其上之一已知點使作 $A\cos(pt+\alpha)$ 之週期遷移．所謂該弦之一段，乃指在已知點及一端之間者而言．參考刺謨稷著 Hydro-mechanics 第二部，第 312 頁].

(99) 求
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)$$

之解，呈
$$r\phi=f(ct-r)+F(ct+r)$$
之形者.

[ϕ 乃在空氣中球形起源之聲浪之勢速度．參考刺謨稷書第 345 頁.]

(100) 求
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

之一解，

合於 $y=-h$ 時，$\partial\phi/\partial y=0$

及 $y=0$ 時，ϕ 視 $\cos(mx-nt)$ 而變.

[ϕ 乃運河中波浪之速位，該河之深爲 h，其兩岸俱爲垂直．參考刺謨稷書第 265 頁.]

(101) 求聯立微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2n\frac{dy}{dt}+p^2x=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+p^2y=0$$

之解,呈 $z=\frac{a}{2q}\{(q+n)e^{i(q-n)t}+(q-n)e^{-i(q+n)t}\}$

之形者,式中 $z=x+iy$ 及 $q=\sqrt{(p^2+n^2)}$,

已知其原始條件爲:

$$x=a,\quad y=0,\quad \frac{dx}{dt}=0,\quad \frac{dy}{dt}=0.$$

求證所得之解,代表一內擺線,包含於以 a 及 an/q 爲半徑之二同心圓內.

[此題表明布倫尉契擺試驗(Pendulum experiment)之理論,該試驗乃證明地球之旋轉者.參考布倫尉契 Proc. London Math. Soc. 1914.]

(102) 求愛因斯坦 (Einstein) 之行星運動方程式

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{m}{h^2}+3\,mu^2$$

之一差近解,並按下列方式進行.

(a) 棄置小項 $3mu^2$, 因而求得

$$u=\frac{m}{h^2}\{1+e\cos(\phi-\varpi)\},$$

與在牛頓之動力學內相同;

(b) 將u之此值代入小項$3mu^2$內,因而求得

$$\frac{d^2u}{d\phi^2}+u=\frac{m}{h^2}+\frac{3m^3}{h^4}+\frac{6m^3}{h^4}e\cos(\phi-\tilde{\omega})$$

$$+\frac{3m^3e^2}{2h^4}\{1+\cos 2(\phi-\tilde{\omega})\};$$

(c) 除$\frac{m}{h^2}$及$\frac{6m^3}{h^4}e\cos(\phi-\tilde{\omega})$外,棄置此微分方程式右端之各項,含$\cos(\phi-\tilde{\omega})$之項,必須保留,該項與補函數有相同之週期,因而產生一繼續增加之特別積分.[卷考第三章雜題36題,關於共振之問題者],於是得

$$u=\frac{m}{h^2}\left\{1+e\cos(\phi-\tilde{\omega})+\frac{3m^2}{h^2}e\phi\sin(\phi-\tilde{\omega})\right\}$$

$$=\frac{m}{h^2}\{1+e\cos(\phi-\tilde{\omega}-\epsilon)\},\ (\text{差近的}),$$

其中$\epsilon=\frac{3m^2}{h^2}\phi$,而$\epsilon^2$則經棄置.

[此結果證明:當行星旋轉一次時,其近日點(由$\phi-\tilde{\omega}-\epsilon=0$得之)前進一轉之一分數,由$\frac{\epsilon}{\phi}=\frac{3m^2}{h^2}$定之.當各常數均予以數值時,愛因斯坦之理論,可以除去水星近日點由觀測及由計算所生之著名差異.參考愛丁頓(Eddington)著 Report on the relativity theory of gravitation第 48——52 頁.]

(103) $L(x, y, x', y')$ 爲變數 x, y, x', y' 之一函數,X, Y 由方程式

$$X=\frac{\partial L}{\partial x'},\quad Y=\frac{\partial L}{\partial y'}$$

定之.

若此等方程式可就 x', y' 解之,使成 X, Y, x, y 之函數,且若 $H(X, Y, x, y)$ 爲

$$Xx'+Yy'-L$$

完全以 X, Y, x, y 表之之後所得之函數,於是求證

$$\frac{\partial H}{\partial X}=x' \qquad\qquad (1)$$

及
$$\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\partial L}{\partial x}. \qquad\qquad (2)$$

並證方程式
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)=\frac{\partial L}{\partial x} \qquad\qquad (3)$$

改爲
$$\frac{dX}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}. \qquad\qquad (4)$$

[此爲動力學中哈密爾敦式變形 (Hamiltonian transformation) 方程式,(3) 乃推廣坐標系中蘭格倫日運動方程式之標準式,哈密爾敦以方程式 (1) 及 (4) 代之.參考牢斯 (Routh) 著 Elementary Rigid Dynamics 第八章.此種變形,應與第十二章雜題 21 題相比較.

在彼,吾人有二偏微分方程式,可以用對偶原理互相求得.]

(104) 求證應用雅科比之方法(第140節)於哈密爾敦之偏微分方程式

$$\frac{\partial z}{\partial t}+H(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, p_1, p_2, \cdots\cdots p_n, t)=0,$$

引得
$$\frac{dx_r}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_r} \qquad (r=1, 2, \cdots\cdots n).$$

此等式,乃動力學系之運動方程式呈哈密爾敦之形式者(參考惠塔克著 Analytical Dynamics 第二版,第142節).

(105) (i) 求證若

$$u(x, y, z)=a$$

及
$$v(x, y, z)=b$$

為微分方程組

$$\frac{dx}{p(x, y, z)}=\frac{dy}{q(x, y, z)}=\frac{dz}{r(x, y, z)}$$

之任意二積分,則

$$\frac{1}{p}\frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)}=\frac{1}{q}\frac{\partial(u, v)}{\partial(z, x)}=\frac{1}{r}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=m(x, y, z)$$

[m 名曰此組之乘式.]

(ii) 試證 m 合於偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}(mp)+\frac{\partial}{\partial y}(mq)+\frac{\partial}{\partial z}(mr)=0.$$

(iii) 若 $n(x, y, z)$ 爲此組任一其他之乘式,試證

$$p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{n}\right)+q\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m}{n}\right)+r\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{m}{n}\right)=0,$$

因而
$$\frac{\partial(m/n, u, v)}{\partial(x, y, z)}\equiv 0,$$

以致 m/n 爲 u 及 v 之一函數,而 $m/n=c$ 爲原微分方程組之一積分.

(iv) 若 $u(x, y, z)=a$ 可就 z 解之,使得 $z=f(x, y, a)$, 且若以 z 之此值,代入 V, P, Q, R, M 中,而以 v, p, q, r, m, 代表所得之 x, y, a 之各函數,試證 $V(x, y, a)=b$ 爲 $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}$ 之一積分.

並證
$$MP=-\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z},$$

及
$$MQ=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}$$

(式中 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 以 x, y, a 表之), 因而

$$dV=M(Q\,dx-P\,dy)\bigg/\frac{\partial u}{\partial z}.$$

[此式提明,若任意積分 $u=a$ 及任意乘式 m 爲已

知，則 $M(Q\,dx-P\,dy)\Big/\frac{\partial u}{\partial z}$ 將爲一全微分，當 a 以 $u(x,y,z)$ 代之時，引得方程組之一積分.

關於此定理之證明，參考惠塔克著 Analytical Dynamics, 第二版第 119 節. 其較普遍之定理，乃若微分方程組

$$\frac{dx_1}{p_1}=\frac{dx_2}{p_2}=\cdots\cdots=\frac{dx_n}{p_n}=\frac{dx}{p}$$

之 $(n-1)$ 個積分爲已知，而任何乘式亦爲已知，則另一積分可以求出. 此理普通名爲雅科比之尾乘式定理 (Theorem of Jacobi's last multiplier). 在動力學中，此定理有相當之重要，而此最後乘式在彼爲 1.]

(v) 試證 1 爲

$$\frac{dx}{xz-2y}=\frac{dy}{2x-yz}=\frac{dz}{y^2-x^2}$$

之一乘式，而 $x^2+y^2+z^2=a$, 設爲 $u(x,y,z)=a$, 爲一積分，試證在本款

$$M(Q\,dx-P\,dy)\Big/\frac{\partial u}{\partial z}=d\left\{-\frac{1}{2}xy-\sqrt{(a-x^2-y^2)}\right\},$$

因而求得其第二積分 $xy+2z=b$.

(106) 試證若 $y=\int_a^b e^{xt}f(t)\,dt$, 其中 a 及 b 俱爲常數,

則
$$x\phi\left(\frac{d}{dx}\right)y+\psi\left(\frac{d}{dx}\right)y=e^{bx}\phi(b)f(b)-e^{ax}\phi(a)f(a)$$
$$-\int_a^b e^{xt}\{\phi(t)f'(t)+\phi'(t)f(t)-\psi(t)f(t)\}dt.$$

因而證明

若
$$\phi(t)f(t)=\exp\left\{\int\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}dt\right\}$$

且
$$e^{bx}\phi(b)f(b)=0=e^{ax}\phi(a)f(a),$$

則 y 合於微分方程式
$$x\phi\left(\frac{d}{dx}\right)y+\psi\left(\frac{d}{dx}\right)y=0.$$

應用此法,以求
$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-xy=0$$

之一解
$$y=A\int_{-\infty}^{-1}e^{xt}\frac{dt}{\surd(t^2-1)}+B\int_{-1}^{1}e^{xt}\frac{dt}{\surd(t^2-1)},$$

在 $x>0$ 時俱合者.

對於 $x<0$ 時之相當解,乃在上式之第一積分中,將其兩限 $-\infty$ 至 -1 易爲 1 至 ∞ 而得.

[習題 106 至 108,表明若干最重要之方法,以求微分方程式之解,呈定積分之形.]

(107) 求證 $v=v_0+\frac{2V}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{(\kappa t)}}e^{-z^2}dz$

爲
$$\frac{\partial v}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

之一解,當 $t=0$ 時,對於 x 所有之正值,此解化爲 v_0+V,而對於 x 之所有負值,則化爲 v_0-V.

[v 爲一點在時間 t 之溫度,該點與一立體之某平面相距 x,此立體乃向各方延長至無窮者. 並已假定在平面 $x=0$ 兩面之原始溫度爲常數 v_0+V 及 v_0-V.

克爾文於計算地球年齡時,曾用此式代表 v (參考湯姆孫及退特 (Tait) 著 Natural Philosophy 附錄 D). 自發現因岩石之銳性分解,而繼續產生熱量後,此問題又新增一繁雜之點.]

(108) (a) 求證若 l, m, n 俱爲常數,或爲 s 及 t 之函數,使
$$F(l, m, n)=0$$
者,則
$$V=\iint e^{lx+my+nz}f(s, t)ds\,dt$$
(其限爲任何隨意常數,對於 x, y, z 爲獨立者) 爲常係數平直偏微分方程式
$$F\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V=0$$

之一解.

推廣此定理於有 n 個自變數 $x, y, z, \cdots\cdots$ 及 $(n-1)$ 個助變量 $s, t, \cdots\cdots$ 之款.

求得 $$V=\iint e^{s(x\cos t+y\sin t+sz)}f(s, t)\,ds\,dt$$

為 $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial V}{\partial z}$$

之一解. [H. Todd.]

(b) 求證若 $F\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)V=0$ 為一常係數齊次平直偏微分方程式,則其一解為

$$V=\int f(lx+my+nz, t)\,dt,$$

其中之限為對於 x, y, z 為獨立之任意隨意常數,而 l, m, n 為任意常數,或 t 之函數合於

$$F(l, m, n)=0$$

者.

推廣此定理於有 n 個自變數及 $(n-2)$ 個助變量之款 [參考托德 (H. Todd), Messenger of Mathematics, 1914.]

求得 $$V=\int_0^{2\pi} f(x\cos t+y\sin t+iz, t)\,dt$$

爲
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

之一解.

[拉普拉斯方程式之惠脫克解法.]

(109) 以試解

$$y=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots\cdots$$

代入微分方程式 $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x}$

求得級數 $y=\frac{0!}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\frac{3!}{x^4}+\cdots\cdots.$

試證此級數對於 x 之所有值,均爲發散.

求得特解

$$y=e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x}dx,$$

繼續應用分部求積法,試證

$$e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^x}{x}dx=\frac{0!}{x}+\frac{1!}{x^2}+\frac{2!}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{n!}{x^{n+1}}+e^{-x}\int_{-\infty}^{x}\frac{(n+1)!\,e^x}{x^{n+2}}dx$$

於是證明若 x 爲負,則取此級數之 $n+1$ 項以代特解,其所生之差誤,小於第 $(n+1)$ 項之數值.

[此種級數名曰幾近,參考布倫尉契著 Infinite Series 第 130——139 節,或其第二版,第 106——118 節.]

(110) 求證若函數數列 $f_n(x)$ 由下式確定:

$$f_0(x)=a+b(x-c),\ 其中\ a,\ b,\ c\ 俱爲常數,$$

而
$$f_n(x)=\int_c^x (t-x)F(t)f_{n-1}(t)dt,$$

則
$$\frac{d^2}{dx^2}f_n(x)=-F(x)f_{n-1}(x).$$

於是證明 $y=\sum_0^\infty f_n(x)$ 爲

$$\frac{d^2y}{dx^2}+yF(x)=0$$

之一解,倘關於無窮級數之若干運算,俱係合法.(關於此層之證明.參考惠塔克及瓦特孫所著 Modern Analysis 第 189 頁,* 二氏曾應用此法作一二級平直微分方程式,存在定理之一證明).

(111) 試證二聯立常係數平直微分方程式

$$f(D)x+F(D)y=0,$$
$$\phi(D)x+\psi(D)y=0$$

(其中 D 代表 d/dt) 之解† 可以書爲

* 在第三及第四版中,第 195 頁.

† 若 x 及 y 中所有相異隨意常數數目之和小於 V 中隨意常數之數目.則此解不能爲最普通解(可以證明).例如若 $f(D)$ 及 $F(D)$ 有一非常數之公因子時,上述情形即將發生.

$$x=F(D)V,$$

$$y=-f(D)V,$$

其中 V 爲

$$\{f(D)\psi(D)-F(D)\phi(D)\}V=0$$

之完全原函數.

於是求證若 f, F, ϕ, ψ 對於 D 之次數分別爲 $p, q, r, s,$ 則解中隨意常數之數目,通常將爲 $(p+s)$ 及 $(q+r)$ 二數中之較大者,但若 $(p+s)=(q+r)$, 則隨意常數之數目可以較小,且甚至爲零,如在方程式

$$(D+1)x+Dy=0,$$

$$(D+3)x+(D+2)y=0$$

之例.

(112) (*a*) 試證若 $y=u(x),$

$$y=v(x)$$

爲一級平直微分方程式

$$P(x)y_1+Q(x)y=0$$

之二解,則

$$(vu_1-uv_1)/u^2=0,$$

因而 $v=au$, 其中 a 爲一常數.

(*b*) 求證若 $y=u(x),\quad y=v(x),\quad y=w(x)$

爲二級平直微分方程式

$$P(x)y_2+Q(x)y_1+R(x)y=0$$

之任意三解,則

$$P\frac{d}{dx}(wv_1-vw_1)+Q(wv_1-vw_1)=0,$$

而
$$P\frac{d}{dx}(uv_1-vu_1)+Q(uv_1-vu_1)=0,$$

於是證明 $w=au+bv.$

[照此情形,逐步進行,吾人可以證明:一微分方程式之形式相似,但其級爲 n 者,不能有多於 n 個之線性獨立積分 (Linearly independent integrals)]

(113) 設 u, v, w 爲 x 之任意三函數.

求證,若常數 a, b, c 可以求出,使 $y\equiv au+bv+cw$ 全等於零,則

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}=0.$$

反之若此行列式[倫斯基行列式(The Wronskian)]爲零,則各函數不爲線性獨立.

推廣以上結果於 n 函數之款.

[試取一二級微分方程式,該式乃由上述行列式

中,分別以 y, y_1, y_2 代替 u, u_1, u_2 而得.此種方程式,不能有多於二個之線性獨立積分.

倫斯基行列式一名,蓋由倫斯基 (Hoëné Wronski) 而來,該氏爲行列式早年作者之一].

(114) 求證 $z=e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)}$ 合於偏微分方程式

$$t\frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\frac{1}{4}x^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^2 z+\frac{1}{2}x\left(t-\frac{1}{t}\right)z.$$

若 $J_n(x)$ 爲展開式

$$e^{\frac{1}{2}x(t-1/t)}=\sum_{-\infty}^{\infty}t^n J_n(x)$$

中 t^n 之係數,求證 $y=J_n(x)$ 合於貝賽爾 n 級方程式

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0.$$

[關於無窮級數之運算,需要相當之考慮].

(115) 若 u_x 代表 x 之一函數,而 E 代表一算子,使 u_x 改變爲 u_{x+1}, 者,求證下列諸結果:

(i) $Ea^x=a\cdot a^x$, 即 $(E-a)a^x=0$.

(ii) $E^2a^x=a^2\cdot a^x$.

(iii) $E(xa^x)=a(xa^x)+a\cdot a^x$, 即 $(E-a)(xa^x)=a\cdot a^x$.

(iv) $(E-a)^2(xa^x)=0$.

(v) $(p_0E^2+p_1E+p_2)a^x=(p_0a^2+p_1a+p_2)a^x$, 式中諸 p

均爲常數.

(vi) $u_x=Aa^x+Bb^x$ 爲平直有限差方程式(Linear difference equation).

$$p_0u_{x+2}+p_1u_{x+1}+p_2u_x=0$$

即
$$(p_0E^2+p_1E+p_2)u_x=0$$

之一解,倘其中 A 及 B 爲隨意常數,而 a 及 b 爲輔助方程式 $p_0m^2+p_1m+p_2=0$ 之二根.(參考第25節),由此法解方程式 $(2E^2+5E+2)u_x=0$.

(vii) $u_x=(A+Bx)a^x$ 爲 $(E^2-2aE+a^2)u_x=0$ 之一解.

在此,其輔助方程式 $m^2-2am+a^2=0$ 有等根(參考第34節).

(viii) $u_x=r^x(P\cos x\theta+Q\sin x\theta)$ 爲

$$(p_0E^2+p_1E+p_2)u_x=0$$

之一解,倘其中 P 及 Q 俱爲隨意常數, $p\pm iq$ 爲輔助方程式

$$p_0m^2+p_1m+p_2=0$$

之二根,而
$$p+iq=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$
[參考第26節.]

用此法解

$$(E^2-2E+4)u_x=0.$$

(ix) 常係數平直差方程式

$$F(E)u_x \equiv (p_0E^n + p_1E^{n-1} + \cdots\cdots + p_{n-1}E + p_n)u_x = f(x)$$

之普通解,乃一特解及補函數之和,所謂補函數,乃以零代替右端 x 之函數所得方程式之解(參考第29節)

(x) 若 $F(a) \neq 0$, 則 $a^x/F(a)$ 爲

$$F(E)u_x = a^x$$

之一特解(參考第35節).

用此法解

$$(E^2+8E-9)u_x = 2^x.$$

[關於有限差方程式及微分方程式間其他相類之點,參考布爾 (Boole) 著 Finite differences, 第十一章.]

(116) 如將53節之方法,應用於蘭格倫日方程式

$$y = xF(p) + f(p),$$

則可常得(但對於 $F(p)=p$ 時之克雷洛式則不然)以參數式表全原函數如下:

$$x = c\phi(p) + \psi(p),$$

$$y = cF(p)\phi(p) + F(p)\psi(p) + f(p),$$

試證明之.

由是證明下理:令 c 之值爲 c_1, c_2, c_3, 在原函數中之相應三曲線爲 C_1, C_2, C_3, 且 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$

各爲 C_1, C_2, C_3 上之一點,而使在諸點處之切線皆平行,則

$$(x_3-x_1)/(x_3-x_2)=(c_3-c_1)/(c_3-c_2)=(y_3-y_1)/(y_3-y_2).$$

換言之,即 P_1, P_2, P_3 三點,共在一直線上,且諸點各在其曲線上移動,而使相當切線仍爲平行時,$P_1P_3:P_2P_3$ 之比值爲一定[如是只須知全原函數中之二曲線,則可用幾何方法,任作其他曲線].

(117) 在一平曲線上,任何點其曲率徑之長二倍於其法線被該曲線及另一定直線截取一段之長,則必爲以該直線爲底之擺線(Cycloid)或以爲導線(Directrix)之抛物線,試證之. [London.]

(118) 設 ρ 爲一曲線之曲率半徑,ψ 爲切線與 x 軸之交角,k 爲一正數,而有 $\rho=k\tan\psi$ 之關係,試證此曲線之一枝,由方程式

$$x=k(1-\cos\theta),$$

$$y=k\{\log(\sec\theta+\tan\theta)-\sin\theta\}$$

確定,式中 $0\leqq\theta<\frac{1}{2}\pi$, 且原點在 $\theta=0$ 一點處;并證明如 s 爲此枝上自原點量得之弧長,則

$$s=k\log\frac{k}{k-x}.$$ [London.]

(119) 求方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 之一解,而呈

$$f(x)\sin mt$$

之形者,且該解

於 $x=0, t=0$ 時, $\frac{\partial u}{\partial t}=K$, 一常數,

於 $x=0$, t 爲任何值時, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$. [London.]

(120) 求方程式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 之一解,而合於下列各條件者:

(i) $y=0$ 時, $z=\sin x$;

(ii) $z=0$ 或 π 時, $x=0$;

(iii) 在 $y>0$ 與 $\pi>x>0$. 所限之區域內任何處, z 均不爲無窮大.

(121) 如以 P, Q, R 表 x 之函數而下標表對 x 求微分,試用二次分部積分法以證明.

$$\int z(Py_2+Qy_1+Ry)dx=z(Py_1+Qy)-y(Pz)_1$$
$$+\int y\{(Pz)_2-(Qz)_1+Rz\}dx.$$

由是推證在下列二方程式

$$Py_2+Qy_1+Ry=0,$$
$$(Pz)_2-(Qz)_1+Rz=0$$

中,任一式之任何積分,均為他式之積分因數[此種方程式,互稱為相助 (Adjoint).]

證明如以 D 表算子 d/dx, 則與

$$\{D+p(x)\}\{D+q(x)\}y=0$$

相助之式為

$$\{D-q(x)\}\{D-p(x)\}z=0.$$

試就方程式

$$y_2+(x+x^2)y_1+(2x+x^3)y=0$$

證驗此種結果(在此 $p(x)=x$, $q(x)=x^2$).

習題答案

第一章

§5.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=4y.$ (2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=-9y.$

(3) $y\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$ (4) $y=x\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3.$

(5) 一圓之切線,與自切點至中心之聯線正交.

(6) 在任何點之切線,即爲直線本身.

(7) 曲率爲零.

§8.

(1) $y=a+ax+a\dfrac{x^2}{2!}+a\dfrac{x^3}{3!}+a\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\cdots=ae^x.$

(2) $y=a+bx-a\dfrac{x^2}{2!}-b\dfrac{x^3}{3!}+a\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\cdots=a\cos x+b\sin x.$

雜題

(1) $\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{dy}{dx}.$ (2) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-6\dfrac{d^2y}{dx^2}+11\dfrac{dy}{dx}-6y=0.$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0.$

(4) $y\log_e\left[\frac{dy}{dx}+\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\right]=x\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}.$

(5) $\frac{d^3y}{dx^3}=0.$

(6) $\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$, 卽 $\rho^2=a^2$.

(7) $(x^2+y^2)\frac{d^2y}{dx^2}=2\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}.$

(8) $\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^3y}{dx^3}=3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}.$

(11) $y=ax+bx^2.$　　(12) $y=ae^x+be^{-x}.$

(14) $60°$ 及 $-60°$.

(15) 微分, 而令 $x=1$, $y=2$, 如是得 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 及 ρ.

(17) (i) $x+1=0$; (ii) $y^2=x^2+6x+1.$

第 二 章

§ 14

(1) $6x^2+5xy+y^2-9x-4y=c.$

(2) $\sin x\tan y+\sin(x+y)=c.$

(3) $\sec x\tan y-e^x=c.$　　(4) $x-y+c=\log(x+y).$

(5) $x+ye^{x^3}=cy.$　　(6) $y=cx.$

(7) $e^y(\sin x+\cos x)=c$. (8) $x^4y+4cy+4=0$.

(9) $ye^x=cx$. (10) $\sin x\cos y=c$.

§ 17.

(1) $(x+y)^3=c(x-y)$. (2) $x^2+2y^2(c+\log y)=0$.

(3) $xy^2=c(x-y)^2$ (4) $cx^2=y+\sqrt{(x^2+y^2)}$.

(5) $(2x-y)^2=c(x+2y-5)$.

(6) $(x+5y-4)^3(3x+2y+1)=c$.

(7) $x-y+c=\log(3x-4y+1)$.

(8) $3x-3y+c=2\log(3x+6y-1)$.

§ 21

(1) $2y=(x+a)^5+2c(x+a)^3$. (2) $xy=\sin x+c\cos x$.

(3) $y\log x=(\log x)^2+c$. (4) $x^3=y^3(3\sin x+c)$.

(5) $y^2(x+ce^x)=1$. (6) $x=y^3+cy$.

(7) $x=e^{-y}(c+\tan y)$.

§ 22.

(1) 抛物線, $y^2=4ax+c$.

(2) 直角雙曲線, $xy=c^2$.

(3) 柏努利氏雙紐線, $r^2=a^2\sin 2\theta$.

(4) 懸鏈線 $y=k\cosh\dfrac{x-c}{k}$.

(5) $xy=c^2$　　(6) $y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}$

(7) $y^p=cx^q$.　　(8) $r^2=ce^{\theta^2}$.

(9) $\log r+\dfrac{1}{2}\theta^2+\dfrac{1}{3}\theta^3=c$.

(10) 等角螺旋線, $r=ce^{\pm\theta\tan\alpha}$.

雜　題

(1) $xy=y^3+c$.　　(2) $cx^3=y+\sqrt{(y^2-x^2)}$.

(3) $\sin x\sin y+e^{\sin x}=c$.　　(4) $2x^2-2xy+3y+2cx^2y=0$.

(5) $cxy=y+\sqrt{(y^2-x^2)}$.　　(11) $x^3y^{-2}+2x^5y^{-3}=c$.

(12) $\tan^{-1}(xy)+\log(x/y)=c$.

(14) $(x^2-1+y^4)e^{x^2}=c$.

(15) (i) 反螺旋線, $r(\theta-\alpha)=c$.

(ii) 亞奇默德螺旋線, $r=c(\theta-\alpha)$.

(16) 拋物線, $3ky^2=2x$.

(18) $x=y(c-k\log y)$.

(19) (i) $x^2+(y-c)^2=1+c^2$, 一族共軸圓與已知之圓族正交.

(ii) $r^2=ce^{-\theta^2}$.

(iii) $n^2 = r\{c + \log(\operatorname{cosec} n\theta + \cot n\theta)\}$.

(20) $\left(x + y\dfrac{dy}{dx}\right)\left(x - y\dfrac{dx}{dy}\right) = a^2 - b^2$.

(21) $\log(2x^2 \pm xy + y^2) + \dfrac{6}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\dfrac{x \pm 2y}{x\sqrt{7}} = c$.

第 三 章

§ 28.

(1) $y = Ae^{-x} + Be^{-3x}$. (2) $y = A\cos 2x + B\sin 2x$

(3) $y = Ae^{-3x} + Be^{-4x}$. (4) $y = e^{2x}(A\cos x + B\sin x)$

(5) $s = e^{-2t}(A\cos 3t + B\sin 3t)$

(6) $s = A + Be^{-4t}$.

(7) $y = Ae^{x} + Be^{-x} + Ce^{-2x}$. (8) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

(9) $y = A\cos(2x - \alpha) + B\cos(3x - \beta)$.

(10) $y = A\cosh(2x - \alpha) + B\cosh(3x - \beta)$, 或

$y = Ee^{2x} + Fe^{-2x} + Ge^{3x} + He^{-3x}$.

(11) $y = Ae^{-2x} + Be^{x}\cos(x\sqrt{3} - \alpha)$.

(12) $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + Ee^{-x}\cos(x\sqrt{3} - \alpha)$

$+ Fe^{x}\cos(x\sqrt{3} - \beta)$.

(13) $\theta = \alpha\cos t\sqrt{(g/l)}$ (14) $k^2 < 4mc$.

(16) $Q=Q_0e^{-Rt/2L}\left(\cos nt+\frac{R}{2Ln}\sin nt\right)$, 式内

$n=\sqrt{\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)}$.

§ 29.

(1) $y=e^x(1+A\cos x+B\sin x)$.

(2) $y=3+Ae^x+Be^{12x}$.

(3) $y=2\sin 3x+A\cos 2x+B\sin 2x$.

(4) $a=2$; $b=1$.

(5) $a=6$; $b=-1$.

(6) $a=-4$; $p=2$.

(7) $a=1$; $b=2$; $p=1$.

(8) $a=2$.

(9) $4e^{3x}$.

(10) $3e^{7x}$.

(11) $-\frac{5}{2}\sin 5x$.

(12) $\frac{25}{29}\cos 5x-\frac{10}{29}\sin 5x$.

(13) 2.

§ 34.

(1) $y=A+Bx+(E+Fx)e^{-x}$.

(2) $y=(A+Bx+Cx^2)\cos x+(E+Fx+Gx^2)\sin x$.

(3) $y=(A+Bx)e^x+E\cos x+F\sin x$.

(4) $y=A+Bx+Ce^x+(E+Fx)e^{-\frac{1}{2}x}$。

§ 35.

(1) $y=2e^{3x}+e^{-3x}(A\cos 4x+B\sin 4x)$.

(2) $y=e^{-px}(A\cos qx+B\sin qx)+e^{ax}/\{(a+p)^2+q^2\}$.

(3) $y=(A+9x)e^{3x}+Be^{-3x}$.

(4) $y=A+\left(B+\frac{1}{2}x\right)e^x+\left(C+\frac{1}{2}x\right)e^{-x}$.

(5) $y=(A+ax/2p)\cosh px+B\sinh px$.

(6) $y=A+(B+Cx-2x^2)e^{-2x}$.

§ 36.

(1) $y=2\sin 2x-4\cos 2x+Ae^{-x}$

(2) $y=4\cos 4x-2\sin 4x+Ae^{2x}+Be^{3x}$

(3) $y=2\cos x+e^{-4x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$.

(4) $y=\sin 20x+e^{-x}(A\cos 20x+B\sin 20x)$.

§ 37.

(1) $y=x^3-3x^2+6x-6+Ae^{-x}$.

(2) $y=6x^2-6x+A+Be^{-2x}$.

(3) $y=6x+6+(A+Bx)e^{3x}$.

(4) $y=x^3+3x^2+Ex+F+(A+Bx)e^{3x}$.

(5) $y=24x^2+14x-5+Ae^{-x}+Be^{2x}$.

(6) $y=8x^3+7x^2-5x+Ae^{-x}+Be^{2x}+C$

§ 38.

(1) $y=A\cos x+(B+2x)\sin x$.

(2) $y=Ae^{x}+(x+2)e^{2x}$.

(3) $y=Ae^{2x}+(B+Cx-20x^2-20x^3-15x^4-9x^5)e^{-x}$.

(4) $y=\{A\sin x+(B-x)\cos x\}e^{-x}$.

(5) $y=(A+Bx-x^3)\cos x+(E+Fx+3x^2)\sin x$.

(6) $y=A+(B+3x)e^{x}+Ce^{-x}+x^2+E\cos x+(F+2x)\sin x$

(7) $y=\{A\sin 4x+(B-x+x^2)\cos 4x\}e^{3x}$.

§ 39.

(1) $y=Ax+Bx^2+2x^3$

(2) $y=2+Ax^{-4}\cos(3\log x)+Bx^{-4}\sin(3\log x)$.

(3) $y=8\cos(\log x)-\sin(\log x)+Ax^{-2}$

$$+Bx\cos(\sqrt{3}\log x-\alpha).$$

(4) $y=4+\log x+Ax+Bx\log x+Cx(\log x)^2+Dx(\log x)^3$.

(5) $y=(1+2x)^2[\{\log(1+2x)\}^2+A\log(1+2x)+B]$

(6) $y=A\cos\{\log(1+x)-\alpha\}+2\log(1+x)\sin\log(1+x)$.

§40.

(1) $y=A\cos(x-\alpha)$; $z=-A\sin(x-\alpha)$.

(2) $y=Ae^{5x}+Be^{3x}$; $z=6Ae^{5x}-7Be^{3x}$.

(3) $y=Ae^{x}+B\cos(2x-\alpha)$; $z=2Ae^{x}-B\cos(2x-\alpha)$.

(4) $y=e^{x}+A+Be^{-2x}$; $z=e^{x}+A-Be^{-2x}$.

(5) $y=A\cos(x-\alpha)+4B\cos(2x-\beta)+\cos 7x$;

$z=A\cos(x-\alpha)+B\cos(2x-\beta)-2\cos 7x$.

(6) $y=-5Ae^{3x}-4Be^{4x}+2e^{-x}+\cos 2x-\sin 2x$;

$z=Ae^{3x}+Be^{4x}+3e^{-x}+4\cos 2x+5\sin 2x$.

雜　題

(1) $y=(A+Bx+Cx^2)e^{x}+2e^{3x}$.

(2) $y=(A+Bx+6x^3)e^{-3x/2}$.

(3) $y=Ae^{-3x}+Be^{-2x}+Ce^{-x}+E+2e^{-2x}(\sin x-2\cos x)$.

(4) $y=Ae^{x}+B\cos(2x-\alpha)-2e^{x}(4\sin 2x+\cos 2x)$.

(5) $y=(A+Bx+Cx^2)e^{-x}+(E+x+2x^2)e^{3x}$.

(6) $y=A\sin(x-\alpha)+B\sinh(3x-\beta)-2\sinh 2x$.

(7) $y=(A+Bx+5x^2)\cosh x+(E+Fx)\sinh x$.

(8) $y=3+4x+2x^2+(A+Bx+4x^2)e^{2x}+\cos 2x$.

(9) $y=(A+Bx+3\sin 2x-4x\cos 2x-2x^2\sin 2x)e^{2x}$.

(10) $y=A\cos(x-\alpha)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$-\frac{3}{4}x\cos x+\frac{1}{16}\sin 3x.$$

(11) $y=A\cos(x-\alpha)+B\cos(3x-\beta)-3x\cos x+x\cos 3x$.

(12) $y=(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_{a-1}x^{a-1})e^{ax}+a^x/(\log a-a)^a$.

(13) $y=A+B\log x+2(\log x)^3$.

(14) $y=A+Bx^{-1}+\frac{5}{3}x^2$.

(15) $y=Ax^3+B\cos(\sqrt{2}\log x-\alpha)$

(16) $y=A+B\log(x+1)+\{\log(x+1)\}^2+x^2+8x$

(17) $x=Ae^{3t}+Be^{-3t}+E\cos t+F\sin t-e^t$;

$y=Ae^{3t}+25Be^{-3t}+(3E-4F)\cos t+(3F+4E)\sin t-e^t$.

(18) $x=Ae^{2t}+Be^{-t}\cos(\sqrt{3}t-\alpha)$;

$y=Ae^{2t}+Be^{-t}\cos(\sqrt{3}t-\alpha+2\pi/3)$;

$z=Ae^{2t}+Be^{-t}\cos(\sqrt{3}t-\alpha+4\pi/3)$.

(19) $x=At+Bt^{-1}$; $y=Bt^{-1}-At$.

(20) $x=At\cos(\log t-\alpha)+Bt^{-1}\cos(\log t-\beta)$;

$y=At\sin(\log t-\alpha)-Bt^{-1}\sin(\log t-\beta)$.

(27) (i) $(x-1)e^{2x}$; (ii) $\frac{1}{2}(x^2-2x+1)\sin x+\frac{1}{2}(x^2-1)\cos x$

(31) $y=e^{2x}+Ae^{x}.$

(32) $y=(\sin ax)/(p^2-a^2)+A\cos px+B\sin px.$

(33) $y=Ae^{ax}+Be^{bx}+e^{bx}\int xe^{(a-b)x}(\log x-1)dx.$

(35) (iii) $y=A\cos(x-\alpha)-x\cos x+\sin x\log\sin x.$

(37) (i) $k/(2phe)$; (ii) 零.

(38) $y=E\cos nx+F\sin nx+G\cosh nx+H\sinh nx$

第 四 章

§ 42.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\alpha\dfrac{\partial z}{\partial x}.$

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$ (二度之 Laplace's 方程式).

(3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$ (4) $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

(5) $b\dfrac{\partial z}{\partial x}+a\dfrac{\partial z}{\partial y}=2abz.$

(6) $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=nz$ (尤拉氏對於齊次式定理).

§43.

(1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial z}{\partial t}.$ (2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0.$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1.$ (4) $z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$

(5) $4z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$ (6) $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=1.$

§ 45.

(1) $y=Ae^{-p^2(x+t)}$ (2) $z=A\sin px\sin pay.$

(3) $z=A\cos p(ax-y).$

(4) $V=Ae^{-px+qy}\sin z\sqrt{(p^2+q^2)}$, 式內 p 及 q 均爲正.

(5) $V=C\cos(pqx+p^2y+q^2z).$

(6) $V=Ae^{-rt}\sin(m\pi x/l)\sin(n\pi y/l)$ 式內, m 及 n 爲任何整數, 且 $rl^2=\pi^2(m^2+n^2).$

§ 48.

(1) $\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots).$

(2) $2(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots).$

(3) $$\frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{\pi^3}{1}-\frac{6\pi}{1^3}\right)\sin x-\left(\frac{\pi^3}{2}-\frac{6\pi}{2^3}\right)\sin 2x+\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{6\pi}{3^3}\right)\sin 3x\cdots\right].$$

(4) $$\frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{2^2-1}\sin 2x+\frac{4}{4^2-1}\sin 4x+\frac{6}{6^2-1}\sin 6x+\cdots\right].$$

(5) $\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}(1+e^{\pi})\sin x+\frac{2}{5}(1-e^{\pi})\sin 2x+\frac{3}{10}(1+e^{\pi})\sin 3x\right.$

$$\left.+\frac{4}{17}(1-e^{\pi})\sin 4x+\cdots\right].$$

(6) $\frac{32}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi}{2}\left(4\sin\frac{n\pi}{4}-n\pi\cos\frac{n\pi}{4}\right)\sin nx.$

(7) (a) (2), (3), 及 (6); (b) (6).

雜　題

(2) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{1}{K}\frac{\partial V}{\partial t}.$　　(5) $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right).$

(7) $V=V_0e^{-gx}\sin(nt-gx)$, 式中 $g=+\sqrt{(n/2K)}$.

(12) $V=\frac{8}{\pi}(e^{-Kt}\sin x+\frac{1}{27}e^{-9Kt}\sin 3x$

$$+\frac{1}{125}e^{-25Kt}\sin 5x+\cdots).$$

(13) 以 $\pi x/l$ 代 x, 以 $\pi^2 t/l^2$ 代 t, 以 $8l^2/\pi^3$ 代因數 $8/\pi$.

(14) $V=\frac{\pi^2}{6}-(e^{-4Kt}\cos 2x+\frac{1}{4}e^{-16Kt}\cos 4x$

$$+\frac{1}{9}e^{-36Kt}\cos 6x+\cdots).$$

(15) $V=\frac{400}{\pi}(e^{-Kt}\sin x+\frac{1}{3}e^{-9Kt}\sin 3x$

$$+\frac{1}{5}c^{-25Kt}\sin 5x+\cdots).$$

[注意: 雖當 x 之值介於 0 及 π 間內時, $V=100$, 但 $x=0$ 或 π 時, $V=0$ 而爲不綿續].

(16) 在(15)題之解中,以 $100-V$ 代 V.

(18) $$V=\frac{4V_0}{\pi}\{e^{-K\pi^2t/4l^2}\cos(\pi x/2l)-\frac{1}{3}e^{-9K\pi^2t/4l^2}\cos(3\pi x/2l)+\cdots\}.$$

(19) $$y=\frac{4m}{\pi}(\sin x\cos vt-\frac{1}{9}\sin 3x\cos 3vt+\frac{1}{25}\sin 5x\cos 5vt-\cdots).$$

(22) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial X\partial T}=0;\ y=f(x-at)+F(x+at)$

第五章

§ 52.

(1) $(y-2x-c)(y+3x-c)=0.$

(2) $(2y-x^2-c)(2y+3x^2-c)=0.$

(3) $49(y-c)^2=4x^7.$

(4) $(2y-x^2-c)(2x-y^2-c)=0.$

(5) $(2y-x^2-c)(y-ce^x)(y+x-1-ce^{-x})=0.$

(6) $(y-e^x-c)(y+e^{-x}-c)=0.$

§ 54.

(此處所示者,僅爲其全原函數,在若干情形下,有異解存在,其故待後自明).

(1) $x=4p+4p^3$; $y=2p^2+3p^4+c$.

(2) $x=\frac{1}{2}(p+p^{-1})$; $y=\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}\log p+c$.

(3) $(p-1)^2x=c-p+\log p$; $(p-1)^2y=p^2(c-2+\log p)+p$.

(4) $x=\frac{3}{2}p^2+3p+3\log(p-1)+c$;

$y=p^3+\frac{3}{2}p^2+3p+3\log(p-1)+c$.

(5) $x=2\tan^{-1}p-p^{-1}+c$; $y=\log(p^3+p)$.

(6) $x=p+ce^{-p}$; $y=\frac{1}{2}p^2+c(p+1)e^{-p}$.

(7) $x=2p+cp(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}$; $y=p^2-1+c(p^2-1)^{-\frac{1}{2}}$.

(8) $x=\sin p+c$; $y=p\sin p+\cos p$.

(9) $x=\tan p+c$; $y=p\tan p+\log\cos p$.

(10) $x=\log(p+1)-\log(p-1)+\log p+c$;

$y=p-\log(p^2-1)$.

(11) $x=p/(1+p^2)+\tan^{-1}p$; $y=c-1/(1+p^2)$.

(12) $c=1$.

第　六　章

§ 58.

(1) C.P. $(y+c)^2=x^3$; $x=0$ 爲一尖點軌跡.

(2) C.P. $(y+c)^2=x-2$; S.S. $x=2$.

(3) C.P. $x^2+cy+c^2=0$; S.S. $y^2=4x^2$.

(4) C.P. $y=\sin(x+c)$; S.S. $y^2=1$.

(5) C.P. $(2x^3+3xy+c)^2-4(x^2+y)^3=0$; $x^2+y=0$ 爲一尖點軌跡.

(6) C.P. $c^2-12cxy+8cy^3-12x^2y^2+16x^3=0$; $y^2-x=0$ 爲一尖點軌跡.

(7) C.P. $c^2+6cxy-2cy^3-x(3y^2-x)^2=0$; $y^2+x=0$ 爲一尖點軌跡.

§ 65.

(1) C.P. $(y+c)^2=x(x-1)(x-2)$; S.S. $x(x-1)(x-2)=0$; $x=1-1/\sqrt{3}$ 爲一切點軌跡, 及 $x=1+1/\sqrt{3}$ 爲虛切點之軌跡.

(2) C.P. $(y+c)^2=x(x-1)^2$; S.S. $x=0$; $x=1/3$ 爲一切點軌跡; $x=1$ 爲一節點軌跡.

(3) C.P. $y^2-2cx+c^2=0$; S.S. $y^2=x^2$.

(4) C.P. $x^2+c(x-3y)+c^2=0$; S.S. $(3y+x)(y-x)=0$.

(5) C.P. $y-cx^2-c^2=0$; S.S. $x^4+4y=0$; $x=0$ 爲一切點軌跡.

(6) C.P. $y=c(x-c)^2$; $y=0$ 爲一 S.S., 且爲特解; $27y-4x^3=0$ 爲一 S.S.

(7) 微分方程式$p^2y^2\cos^2\alpha-2pxy\sin^2\alpha+y^2-x^2\sin^2\alpha=0$;

S.S. $y^2\cos^2\alpha=x^2\sin^2\alpha$; $y=0$ 爲一切點軌跡.

(8) 微分方程式$(x^2-1)p^2-2xyp-x^2=0$; S.S $x^2+y^2=1$; $x=0$ 爲一切點軌跡.

(9) 微分方程式$(2x^2+1)p^2+(x^2+2xy+y^2+2)p+2y^2+1=0$; S S. $x^2+6xy+y^2=4$; $x=y$ 爲一切點軌跡.

(10) 微分方程式 $p^2(1-x^2)-(1-y^2)=0$; S.S. $x=\pm1$ 及 $y=\pm1$.

§ 67.

(1) C.P. $y=cx+c^2$; S.S. $x^2+4y=0$.

(2) C.P. $y=cx+c^3$; S.S. $27y^2+4x^3=0$.

(3) C.P. $y=cx+\cos c$; S.S. $(y-x\sin^{-1}x)^2=1-x^2$

(4) C.P. $y=cx+\sqrt{(a^2c^2+b^2)}$; S.S. $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

(5) C.P. $y=cx-e^c$; S.S $y=x(\log x-1)$.

(6) C.P. $y=cx-\sin^{-1}c$;

S. S. $y=\sqrt{(x^2-1)}-\sin^{-1}\sqrt{(1-1/x^2)}$.

(7) $\frac{1}{2}(y-px)^2=-pk^2$; $2xy=k^2$ 爲一直角雙曲線, 以坐標軸爲漸近線者.

(8) $(x-y)^2-2k(x+y)+k^2=0$ 爲一拋物線,與軸相切者.

(9)　四尖內輪線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}$.

雜　題

(1)　無異解；$x=0$ 爲一切點軌跡；

(2)　$Y=PX+P/(P-1)$.

(5)　$2y=\pm 3x$ 表包線，$y=0$ 爲包線，且爲尖點軌跡.

(6)　C.P. $xy=yc+c^2$.

(7)　C.P. $x=yc+xyc^2$; S.S. $y+4x^2=0$，(令 $y=1/Y$; $x=1/X$).

(8)　(i)　令 $p+x=3t^3$，可得

$$2x=3(t^3-t^2);\ 40y=9(5t^6+2t^5-5t^4)+c.$$

(ii)　C.P. $y^2+4c^2=1+2cx$; S.S. $x^2-4y^2+4=0$;

$y=0$ 爲一切點軌跡.

(11)　C.P. $r=a\{1+\cos(\theta-\alpha)\}$ 爲一族相等之心臟曲線，而內切於 $r=2a$ 一圓者，此圓爲一異解，$r=0$ 一點爲一尖點軌跡，且爲異解.

第　七　章

§ 70.

(1)　$y=\log\sec x+ax+b$.

(2)　$x=a+y+b\log(y-b)$.

(3) $ay=\cos(ax+b)$.

(4) $x=\log\{\sec(ay+b)+\tan(ay+b)\}+c$.

(5) $y=x^3+ax\log x+bx+c$.

(6) $y=-e^x+ae^{2x}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\cdots\cdots+hx+k$.

(7) 圓 $(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$. 微分方程式表示曲率徑常等於 k.

(9) $\sqrt{(1+y_1^2)}=ky_2$; 懸鏈線 $y-b=k\cosh\{(x-a)/k\}$.

§ 73.

(1) $y=x(a\log x+b)$.

(2) $y=ax\cos(2\log x)+bx\sin(2\log x)$

(3) $y=x(a\log x+b)^2$. (4) $y=x^2(a\log x+b)^2$.

§ 74.

(1) $y=\pm\coth\dfrac{x-c}{\sqrt{2}}$ (2) $y=-\log(1-x)$.

(3) $y=\sin^{-1}x$.

(4) $t=\dfrac{1}{a}\sqrt{\left(\dfrac{h}{2g}\right)}\left\{h\cos^{-1}\sqrt{\dfrac{x}{h}}+\sqrt{(xh-x^2)}\right\}$.

(5) (i) 錐線 $u=\mu/h^2+(1/c-\mu/h^2)\cos\theta$;

(ii) $cu=\cos\theta\sqrt{(1-\mu/h^2)}$ 或 $\cosh\theta\sqrt{(\mu/h^2-1)}$,

由 $\mu\lessgtr h^2$. 而定.

§ 75.

(1) $y=a(x^2+1)+be^{-x}$. (2) $y=a(x-1)+be^{-x}$.

(3) $y=a(x-1)+be^{-x}+x^2$. (4) $y=1+e^{-x^2/2}$.

(5) $y=e^{2x}$.

§ 77.

(2) $y=x^3+ax-b/x$. (3) $y=(x^2+ax)e^x+bx$.

(4) $y=e^{2x}+(ax^3+b)e^x$. (5) $y=ax^3+bx^{-3}$.

(6) $y=ax^2+b\sin x$.

§ 80.

(1) $y=(a-x)\cos x+(b+\log\sin x)\sin x$

(2) $y=\left\{a-\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}\cos 2x+b\sin 2x$.

(3) $y=\{a-e^{-x}+\log(1+e^{-x})\}e^x+\{b-\log(1+e^x)\}e^{-x}$.

(4) $y=ax+bx^{-1}+(1-x^{-1})e^x$.

(5) $y=ae^x+(b-x)e^{2x}+ce^{3x}$.

雜　題

(1) $y=ae^{x/b}-b$. (2) $y=a+\log(x^2+b)$.

(3) $$y=\frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}+2a\frac{x^n}{n!}+a^2\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\cdots+hx+k.$$

(4) $y=-3^{2-n}\cos\{3x-\frac{1}{2}\pi(n-2)\}$

$+a\cos x+b\sin x+cx^{n-3}+\cdots+hx+k.$

(5) $y=ax+b\log x.$　　(6) $y=ae^x+b(x^2-1)e^{2x}.$

(7) $y=a\cos nx+b\sin nx+\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n^2}\cos nx\log\sec nx.$

(8) $y(2x+3)=a\log x+b+e^x.$

(9) (i) $y=\sqrt{(ax+b)}$; (ii) $y=\sqrt{(a\log x+b)}$.

(10) $y=(a\cos x+b\sin x+\sin 2x)e^{x^2}.$

(12) $y=x^2z.$　　(14) $I=-\frac{1}{4}.$

(17) (i) $y=ae^{x^2}+be^{-x^2}-\sin x^2$. (設 $z=x^2$).

(ii) $y(1+x^2)=a(1-x^2)+bx$. (設 $x=\tan z$).

(18) $\frac{d^2y}{dz^2}-2y=2(1-z^2)$; $y=\sin^2 x+A\cosh(\sqrt{2}\sin x+\alpha).$

(19) $y=a\cos\{2(1+x)e^{-x}\}+b\sin\{2(1+x)e^{-x}\}+(1+x)e^{-x}.$

第　八　章

§ 83.

(1) $y=2+x+x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{15}x^5$; 眞解 $y=2+x+x^2.$

(2) $y=2x-2\log x-\frac{1}{3}(\log x)^3$: 眞解 $y=x+\frac{1}{x}.$

(3) $y=2+x^2+x^3+\frac{3}{20}x^5+\frac{1}{10}x^6$;

$$z=3x^2+\frac{3}{4}x^4+\frac{6}{5}x^5+\frac{3}{28}x^7+\frac{3}{40}x^8.$$

(4) $y=5+x+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^6+\frac{2}{63}x^7+\frac{1}{72}x^9$;

$$z=1+\frac{1}{3}x^3+x^5+\frac{2}{9}x^6+\frac{1}{8}x^8+\frac{11}{324}x^9+\frac{7}{264}x^{11}.$$

(5) y與4題中者同值.

§ 87.

(1) 2.19. (2) 2.192. (3) (a) 4.12; (b) 4.118.

(4) 差誤爲0.0018; 0.00017; 0.000013;

上限爲0.0172; 0.00286; 0.000420.

§ 89.

1.1678487; 1.16780250; 1.1678449.

第 九 章

§ 95.

(1) $u=\left\{1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\cdots\right\}=\cos\sqrt{x}$;

$$v=x^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\cdots\right\}=\sin\sqrt{x}.$$

(2) $u=\left\{1-3x+\frac{3x^2}{1\cdot3}+\frac{3x^3}{3\cdot5}+\frac{3x^4}{5\cdot7}+\frac{3x^5}{7\cdot9}+\cdots\right\};\ v=x^{\frac{1}{2}}(1-x).$

(3) $u=\left\{1+\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot4}{3\cdot6}x^2+\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}x^3+\cdots\right\}=(1-x)^{-\frac{1}{3}};$

$$v=x^{7/3}\left\{1+\frac{8}{10}x+\frac{8\cdot11}{10\cdot13}x^2+\frac{8\cdot11\cdot14}{10\ 13\cdot16}x^3+\cdots\right\}.$$

(4) $u=x^n\left\{1-\frac{1}{4(1+n)}x^2+\frac{1}{4\cdot8(1+n)(2+n)}x^4\right.$

$$\left.-\frac{1}{4\cdot8\cdot12(1+n)(2+n)(3+n)}x^6+\cdots\right\}.$$

欲從u求v,可以$-n$易n.如以常數$\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$乘u,其值稱爲n級貝塞爾函數,而以$J_n(x)$表之.

§ 96.

(1) 及 (4) 對於x之一切值. (2) 及 (3) $|x|<1$.

§ 97.

(1) $u=\left\{1+x+\frac{2}{4}x^2+\frac{2\cdot5}{4\cdot9}x^3+\frac{2\cdot5\cdot10}{4\cdot9\cdot16}x^4+\cdots\right\};$

$$v=u\log x+\left\{-2x-x^2-\frac{14}{27}x^3\cdots\right\}.$$

(2) $u=\left\{1-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot4^2}x^4-\frac{1}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}x^6+\cdots\right\};$

$$v=u\log x+\left\{\frac{1}{2^2}x^2-\frac{1}{2^2\cdot4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^4\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^6-\cdots\cdots\right\}.$$

u稱為零級之貝塞爾函數,而以$J_0(x)$表之.

(3) $$u=\left\{1-2x+\frac{3}{2!}x^2-\frac{4}{3!}x^3+\cdots\cdots\right\};$$

$$v=u\log x+\left\{2\left(2-\frac{1}{2}\right)x-\frac{3}{2!}\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^2\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3!}\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)x^3-\cdots\cdots\right\}.$$

(4) $$u=x^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1\cdot3}{4^2}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4^2\cdot8^2}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{4^2\cdot8^2\cdot12^2}x^6+\cdots\cdots\right\};$$

$$v=u\log x+2x^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1\cdot3}{4^2}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x^2\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{4^2\cdot8^2}\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots\cdots\right\}$$

§ 98.

(1) $$u=x^{-2}\left\{-\frac{1}{2^2\cdot4}x^4+\frac{1}{2^3\cdot4\cdot6}x^6-\frac{1}{2^3\cdot4^2\cdot6\cdot8}x^8\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^3\cdot4^2\ 6^2\cdot8\cdot10}x^{10}-\cdots\cdots\right\};$$

$$v=u\log x+x^{-2}\left\{1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^2\cdot4^2}x^4-\frac{11}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}x^6\right.$$

$$\left.+\frac{31}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}x^8\cdots\right\}.$$

(2) $u=x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots=x(1-x)^{-2}$;

$v=u\log x+1+x+x^2+\cdots\cdots=u\log x+(1-x)^{-1}$.

(3) $u=\{1.\ 2x^2+2.\ 3x^3+3.\ 4x^4+\cdots\cdots\}$;

$v-u=u\log x+\{-1+x+3x^2+5x^3+7x^4+\cdots\cdots\}$.

(4) $u=\{2x+2x^2-x^3-x^4+\frac{5}{4}x^5\cdots\cdots\}$;

$v=u\log x+\{1-x-5x^2-x^3+\frac{11}{3}x^4\cdots\cdots\}$.

§ 99.

(1) $$y=a_0\left\{1-x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^6\cdots\cdots\right\}+a_1x$$

$$=a_0\left\{1-\frac{1}{2}x\log\frac{1+x}{1-x}\right\}+a_1x.$$

(2) $$y=a_0\left\{1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\cdots\cdots\right\}$$

$$+a_1\left\{x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3\right.$$

$$\left.+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\cdots\cdots\right\}.$$

[以$1/x$乘冪表示之解,見第九章雜題之第七題.]

(3) $$y=a_0\left\{1-\frac{1}{3\cdot4}x^4+\frac{1}{3\cdot4\cdot7\cdot8}x^8-\frac{1}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12}x^{12}+\cdots\cdots\right\}$$

$$+a_1\left\{x-\frac{1}{4\cdot5}x^5+\frac{1}{4\cdot5\cdot8.9}x^9-\frac{1}{4\ 5.8.9\ 12.13}x^{13}+\cdots\cdots\right\}.$$

(4) $$y=a_0\left\{1-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3+\frac{5}{96}x^4\cdots\cdots\right\}$$
$$+a_1\left\{x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{24}x^5\cdots\cdots\right\}.$$

§ 100.

(1) $$z^4\frac{d^2y}{dz^2}+z^3\frac{dy}{dz}+(1-n^2z^2)y=0.$$

(2) $y=ax^2(1+2x)$

(3) $$y=x^2(1+2x)\left\{a+b\int x^{-2}(1+2x)^{-2}e^{\frac{1}{x}}dx\right\}.$$

(5) $$ze^{-z}\text{ 及 }\left[ze^{-z}\log z+z^2\left\{1-\frac{1}{2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)z\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)z^2-\cdots\cdots\right\}\right],$$ 式內 $z=1/x$.

雜 題

(1) $$u=x^{-\frac{1}{3}}\left\{1+\frac{3}{3!}x+\frac{9}{6!}x^2+\frac{27}{9!}x^3+\cdots\cdots\right\};$$
$$v=\quad\left\{\frac{1}{1!}+\frac{3}{4!}x+\frac{9}{7!}x^2+\frac{27}{10!}x^3+\cdots\cdots\right\};$$
$$w=x^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{1}{2!}+\frac{3}{5!}x+\frac{9}{8!}x^2+\frac{27}{11!}x^3+\cdots\cdots\right\}.$$

(2) $$u=\left\{1+\frac{1}{1^2}x+\frac{1}{1^2\cdot2^2}x^2+\frac{1}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}x^3+\cdots\right\};$$

$$v=u\log x+2\left\{-\frac{1}{1^2}x-\frac{1}{1^2\cdot2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\cdots\right\};$$

$$w=u(\log x)^2+2(v-u\log x)\log x$$
$$+\left\{6x+\left(\frac{6}{1^4\cdot2^2}+\frac{8}{1^3\cdot2^3}+\frac{6}{1^2\cdot2^4}\right)x^2+\cdots\right\}.$$

第十一章

§ 113.

(1) $x/a=y/b=z$; 過原點之諸直線.

(2) $lx+my+nz=a$; $x^2+y^2+z^2=b$; 諸圓.

(3) $y=az$; $x^2+y^2+z^2=bz$; 諸圓

(4) $x^2-y^2=a$; $x^2-z^2=b$; 二族正雙曲線柱形之交線.

(5) $x-y=a(z-x)$; $(x-y)^2(x+y+z)=b$.

(6) $x^2+y^2+z^2=a$; $y^2-2yz-z^2=b$; 一族球, 與一族正雙曲線柱形之交線.

(7) $\sim(m^2+n^2)$.

(8) 雙曲線面 $y^2+z^2-2x^2=1$.

(9) $(x^2+y^2)(k\tan^{-1}y/x)^2=z^2r^2$.

(10) $1/x=1/y+1/2=1/z+2$.

§ 114.

(1) $y-3x=a$; $5z+\tan(y-3x)=be^{5z}$.

(2) $y+x=a$; $\log\{z^2+(y+x)^2\}-2x=b$.

(3) $xy=a$; $(z^2+xy)^2-x^4=b$.

(4) $y=ax$; $\log(z-2x/y)-x=b$.

§ 116.

(1) $x^2+y^2+z^2=c^2$; 以原點爲心之諸球.

(2) $x^2+y^2+z^2=cx$; 心在 x 軸, 而經過原點之諸球.

(3) $xyz=c^3$.

(4) $yz+zx+xy=c^2$; 以原點爲心之相似二次曲面.

(5) $x-cy=y\log z$.

(6) $x^2+2yz+2z^2=c^2$; 以原點爲心之相似二次曲面

§ 117.

(1) $y=cx\log z$. (2) $x^2y=cze^z$.

(3) $(x+y+z^2)e^{x^2}=c$. (4) $y(x+z)=c(y+z)$.

(5) $(y+z)/x+(x+z)/y=c$.

(6) $ny-mz=c(nx-lz)$. 共公之直線爲 $x/l=y/m=z/n$

§ 120.

(3) $z=ce^{2x}$. (4) $x^2z+4=0$.

雜 題

(1) $y=ax$; $z^2-xy=b$. (2) $x^3y^3z=a$; $x^3+y^3=bx^2y^2$.

(3) $y+z=ae^x$; $y^2-z^2=b$. (4) $y=\sin x+cz/(1+z^2)$.

(5) $x^2+xy^2+x^2z=t+c$. (6) $f(y)=ky$; $x^k=cy^z$.

(8) $dx/x=dy/2y=dz/3z$. (9) $y+z=3e^{x-3}$; $y^2-z^2=3$.

(10) (i) $x^2+y^2+z^2=c(x+y+z)$; (ii) $x^2-xy+y^2=cz$;

(iii) $y^2-yz-xz=cz^2$.

(14) $xy=ce^z\sin w$.

第十二章

§ 123.

(1) $\phi(x/z, y/z)=0$.

(2) $\phi(lx+my+nz,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

(3) $\phi\{y/z, (x^2+y^2+z^2)/z\}=0$.

(4) $\phi(x^2-y^2, x^2-z^2)=0$.

(5) $\phi\{(x-y)^2(x+y+z), (x-y)/(z-x)\}=0$.

(6) $\phi\{x^2+y^2+z^2, y^2-2yz-z^2\}=0.$

(7) $\phi[y-3x, e^{-5x}\{5z+\tan(y-3x)\}]=0.$

(8) $\phi\{y+x, \log(z^2+y^2+2yx+x^2)-2x\}=0.$

(9) $y^2=4xz.$

(10) $a(x^2-y^2)+b(x^2-z^2)+c=0.$

(12) $\phi(x^2+y^2, z)=0$；以 z 軸爲軸之旋轉曲面.

§ 126

(1) $\phi(z+x_1, x_1+x_2, x_1+x_3)=0.$

(2) $\phi(z, x_1^2x_2^{-1}, x_1^3x_3^{-1}, x_1^4x_4^{-1})=0.$

(3) $\phi(z-x_1x_2, x_1+x_2+x_3, x_2x_3)=0.$

(4) $\phi(2z+x_1^2, x_1^2-x_2^2, x_1^2-x_3^2)=0.$

(5) $\phi(4\sqrt{z}-x_3^2, 2x_3-x_2^2, 2x_2-x_1^2)=0$；特解 $z=0.$

(6) $\phi\{z-3x_1, z-3x_2, z+6\sqrt{(z-x_1-x_2-x_3)}\}=0$；特解 $z=x_1+x_2+x_3.$

§ 129.

(1) $z=(2b^2+1)x+by+c.$ (2) $z=x\cos\alpha+y\sin\alpha+\alpha.$

(3) $z=ax+y\log a+c.$ (4) $z=a^3x+a^{-2}y+c.$

(5) $z=2x\sec\alpha+2y\tan\alpha+c.$

(6) $z=x(1+a)+y(1+1/a)+c.$

§ 130.

(1) $az=(x+ay+b)^2$.

(2) $z=\pm\cosh\{(x+ay+b)/\surd(1+a^2)\}$.

(3) $z^2-a^2=(x+ay+b)^2$, 或 $z=b$.

(4) $z^2(1+a^3)=8(x+ay+b)^3$.

(5) $(z+a)e^{x+ay}=b$. (6) $z=be^{ax+a^2y}$

§ 131.

(1) $3z=2(x+a)^{\frac{3}{2}}+3ay+3b$ (2) $2az=a^2x^2+y^2+2ab$.

(3) $az=ax^2+a^2x+e^{ay}+ab$. (4) $(2z-ay^2-2b)^2=16ax$.

(5) $z=a(e^x+e^y)+b$.

(6) $az=a^2x+a\sin x+\sin y+ab$.

§ 133.

(1) $z=-2-\log xy$. (2) $3z=xy-x^2-y^2$.

(3) $8z^3=-27x^2y^2$. (4) $zx=-y$.

(5) $z=0$. (6) $z^2=1$. (7) $z=0$.

§ 136.

(1) $4z=-y^2$.

(4) 通解之一特殊情形,表示由表徵線所生曲面經過 $(0, -1, 0)$ 一點.

雜 題

(1) $z=ax+by-a^2b$; 異解 $z^2=x^2y$.

(2) $zx=ax+by-a^2b$; 異解 $z^2=y$.

(3) $\phi\{xy, (z^2+xy)^2-x^4\}=0$.

(4) $z=3x^3-3ax^2+a^2x+2y^4-4ay^3+3a^2y^2-a^3y+b$

(5) $z=ax_1+b\log x_2+(a^2+2b)x_3^{-1}+c$.

(6) $z=\phi\{(x_1+x_3)/x_2, x_1^2-x_3^2\}$.

(7) $3a(x+ay+b)=(1+a^3)\log z$, 或 $z=b$. $z=0$ 一解含於 $z=b$ 之內,但此式亦為一異解.

(8) $z(1+a^2+b^2)=(x_1+ax_2+bx_3+c)^2$.

(9) $\phi(z\div e^{4x_1}, z\div e^{4x_2}, z\div e^{4x_3})=0$.

(10) $z=ax-\left(2+3a+\frac{1}{2}a^2\right)y+b$.

(11) $z^2=ax^2-\left(2+3a+\frac{1}{2}a^2\right)y^2+b$.

(12) $z^2=(1+a^2)x^2+ay^2+b$.

(13) $z=a\tan(x+ay+b)$, 或 $z=b$. $z=0$ 為一異解,但亦含於 $z=b$ 之內.

(14) $z^2=ax^2+by^2-3a^3+b^3$ 異解 $z^2=\pm 2x^3/9-y^4/4$.

(15) $z=x+y-1\pm 2\sqrt{\{(x-1)(y-1)\}}$

(16) $z^2-xy=c$.

(17) $\phi(c/x, z/y)=0$; 以原點爲頂之錐形面.

(18) $x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha+2y\sin\alpha+c$; 心在與圓上之諸球.

(19) $xyz=c$ (此式爲一異解,其全解表示諸切平面).

(20) 微分方程式 $(z-px-qy)(1-1/p-1/q)=0$ 無異解,且其全解表示平面.凡含於通解內之一切解,皆表示一平面之包面,此平面之方程式,只含一參變數,而爲一可展面.

第十三章

§ 139.

(1) $y^2\{(x-a)^2+y^2+2z\}=b$.

(2) $z^2=2ax+a^2y^2+b$

(3) $z=ax+be^y(y+a)^{-a}$.

(4) $z^2=2(a^2+1)x^2+2ay+b$.

(5) $z=ax+3a^2y+b$.

(6) $(z^2+a^2)^3=9(x+ay+b)^2$.

(7) $z=x^3+ax+\frac{2}{3}(y+a)^{3/2}+b$.

(8) $z=ax+by+a^2+b^2$.

§ 141.

(1) $z=a_1x_1+a_2x_2+(1-a_1{}^3-a_2{}^2)x_3+a_3$.

(2) $z=a_1x_1+a_2x_2\pm\sin^{-1}(a_1a_2x_3)+a_3$.

(3) $z=a_1\log x_1+a_2\log x_2\pm x_3\sqrt{(a_1+a_2)}+a_3$.

(4) $2z=a_1x_1{}^2+a_2x_2{}^2+a_3x_3{}^2-2(a_1a_2a_3)^{1/3}\log x_4+a_4$.

(5) $2(a_1a_2a_3)^{1/3}\log z=a_1x_1{}^2+a_2x_2{}^2+a_3x_3{}^2+1$.

(6) $4a_1z=4a_1{}^2\log x_3+2a_1a_2(x_1-x_2)-(x_1+x_2)^2+4a_1a_3$.

(7) $(1+a_1a_2)\log z=(a_1+a_2)(x_1+a_1x_2+a_2x_3+a_3)$.

(8) $z=-(a_1+a_2)x_1+(2a_1-a_2)x_2+(-a_1+2a_2)x_3$

$$-\frac{1}{2}(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)\pm\frac{2}{3}\{x_1+x_2+x_3-2a_1{}^2+2a_1a_2$$

$$-2a_2{}^2\}^{3/2}+a_3$$

§ 142.

(1) $z=\pm(x_1+x_2)^2+\log x_3+a$.

(2) 無公解.

(3) $z=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+a$, 或 $z=x_1{}^2+2x_2x_3+a$.

(4) $z=a(x_1+2x_2)+b\log x_3+2ab\log x_4+c$.

(5) $z=a(3x_1+x_2{}^3-x_3{}^3)+b$ (6) 無公解.

(7) $z=a(x_1-x_4)+b(x_2-x_3)+c$, 或

$z=a(x_1-2x_2)+b(2x_3-x_4)+c$.

(8) $z=\phi(3x_1+x_2{}^3-x_3{}^3)$.

(9) $z=\phi(x_1-x_4,\ x_2-x_3)$, 或 $z=\phi(x_1-2x_2,\ 2x_3-x_4)$.

雜 題

(1) $z^2=a_1\log x_1-a_1a_2\log x_2+a_2\log x_3+a_3$.

(2) 無公解.

(3) $z=a_1\log x_1+a_2x_2+(a_1+a_2)x_3$

$$\pm\sqrt{\{a_1(a_1+2a_2)x_4{}^3\}}+a_3.$$

(4) $0=a_1\log x_1+a_2x_2+(a_1+a_2)x_3$

$$\pm\sqrt{\{a_1(a_1+2a_2)z^3\}}+1.$$

(5) $2\log z=c\pm(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)$

(6) $z^3=x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3+c$. (7) $4z+x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=0$

(10) $z=\phi(x_1x_2,\ x_2+x_3+x_4,\ x_4x_5)$.

(11) (iii)$3z=x_1{}^3-3x_1x_2+c$.

第十四章

§ 144.

(1) $z=x^3+xf(y)+F(y)$.

(2) $z=\log x\log y+f(x)+F(y)$.

(3) $z=-\dfrac{1}{x^2}\sin xy+yf(x)+F(x)$.

(4) $z=x^3y^3+f(y)\log x+F(y)$.

(5) $z=\sin(x+y)+\dfrac{1}{y}f(x)+F(y)$.

(6) $z=-xy+f(x)+e^{xy}F(x)$.

(7) $z=(x^2+y^2)^2-1$.

(8) $z=y^2+2xy+2y+ax^2+bx+c$.

(9) $z=(x^2+y^2)^2$.　　(10) $z=x^3y^3+y(1-x^3)$.

§ 145

(1) $z=F_1(y+x)+F_2(y+2x)+F_3(y+3x)$.

(2) $z=f(y-2x)+F(2y-x)$.

(3) $z=f(y+x)+F(y-x)$

(4) 二次曲面 $4x^2-8xy+y^2+8x-4y+z+2=0$.

§ 146.

(1) $z=f(2y-3x)+xF(2y-3x)$.

(2) $z=f(5y+4x)+xF(5y+4x)$.

(3) $z=f(y+2x)+xF(y+2x)+\phi(y)$.

(4) $z(2x+y)=3x$.

§ 147.

(1) $z=x^4+2x^3y+f(y+x)+xF(y+x)$.

(2) $z=6x^2y+3x^3+f(y+2x)+F(2y+x)$.

(3) $V=-2\pi x^2y^2$.

§ 148.

(1) $z=e^{x+2y}+f(y+x)+xF(y+x)$.

(2) $z=x^2(3x+y)+f(y+3x)+xF(y+3x)$.

(3) $z=-x^2\cos(2x+y)+f(y+2x)+xF(y+2x)+\phi(y)$.

(4) $z=xe^{x-y}+f(y-x)+F(2y+3x)$.

(5) $V=(x+y)^3+f(y+ix)+F(y-ix)$.

(6) $z=2x^2\log(x+2y)+f(2y+x)+xF(2y+x)$.

§ 149.

(1) $z=x\sin y+f(y-x)+xF(y-x)$.

(2) $z=x^4+2x^3y+f(y+5x)+F(y-3x)$.

(3) $z=\sin x-y\cos x+f(y-3x)+F(y+2x)$.

(4) $z=\sin xy+f(y+2x)+F(y-x)$.

(5) $z=\frac{1}{2}\tan x\tan y+f(y+x)+F(y-x)$.

(6) $y=x\log t+t\log x+f(t+2x)+F(t-2x)$.

§ 150

(1) $z=f(x)+F(y)+e^{3x}\phi(y+2x)$.

(2) $z=e^{-x}\{f(y-x)+xF(y-x)\}$.

(3) $V=\Sigma Ae^{h(x+ht)}$.

(4) $z=f(y+x)+e^{-x}F(y-x)$.

(5) $z=\Sigma Ae^{h(x+hy)}+\Sigma Be^{k(x+2ky)}$.

(6) $V=\Sigma Ae^{n(x\cos a+y\sin a)}$.

(7) $z=e^{x}\{f(y+2x)+\Sigma Ae^{k(y+2kx)}\}$.

(8) $z=1+e^{-x}\{(y-x)^2-1\}$.

§ 151.

(1) $z=\frac{1}{2}e^{2x-y}+e^{x}f(y+x)+e^{2x}F(y+x)$.

(2) $z=1+x-y-xy+e^{x}f(y)+e^{-y}F(x)$.

(3) $z=\frac{1}{82}\{\sin(x-3y)+9\cos(x-3y)\}+\Sigma Ae^{k(y+kx)}$.

(4) $z=x+f(y)+e^{-x}F(y+x)$.

(5) $y=-e^{x+z}+\Sigma Ae^{x\sec\alpha+z\tan\alpha}$.

(6) $z=e^{2x}\{x^2\tan(y+3x)+xf(y+3x)+F(y+3x)\}$.

§ 152.

(1) $y^2r-2ys+t=p+6y$. (2) $pt-qs=q^3$.

(3) $r+3s+t+(rt-s^2)=1$.

(4) $pq(r-t)-(p^2-q^2)s+(py-qx)(rt-s^2)=0$.

(5) $2pr+qt-2pq(rt-s^2)=1$.

(6) $qr+(zq-p)s-zpt=0$.

§ 154.

(1) $z=f(y+\sin x)+F(y-\sin x)$.

(2) $z=f(x+y)+F(xy)$.

(3) $y-\psi(x+y+z)=\phi(x)$, 或 $z=f(x)+F(x+y+z)$.

(4) $z=f(x+\tan y)+F(x-\tan y)$.

(5) $z=f(x^2+y^2)+F(y/x)+xy$.

(6) $y=f(x+y+z)+xF(x+y+z)$.

(7) $3z=4x^2y-x^2y^4-6\log y-3$.

§ 157.

(1) $p+x-2y=f(q-2x+3y)$; $\lambda=-\frac{1}{2}$.

(2) $p-x=f(q-y)$; $\lambda=\infty$.

(3) $p-e^x=f(q-2y)$; $\lambda=\infty$.

(4) $p-y=f(q+x)$; $p+y=F(q-x)$; $\lambda=\pm 1$.

(5) $p-y=f(q-2x)$; $p-2y=F(q-x)$; $\lambda=-1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

(6) $px-y=f(qy-x)$; $\lambda=-x$ 或 $-y$.

(7) $zp-x=f(zq-y)$; $\lambda=z/pq$.

§ 158.

(1) $z=ax+by-\frac{1}{2}x^2+2xy-\frac{3}{2}y^2+c$;

$$z=\frac{1}{2}x^2(1+3m^2)+(2+3m)xy+nx+\phi(y+mx)$$

$$=2xy-\frac{1}{2}(x^2+3y^2)+nx+\psi(y+mx).$$

(2) $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+ax+by+c$;

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+nx+\psi(y+mx).$$

(3) $z=e^x+y^2+ax+by+c$; $z=e^x+y^2+nx+\psi(y+mx)$.

(4) $x=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$; $y=\dfrac{1}{2}\{\psi'(\beta)-\phi'(\alpha)\}$;

$$z=xy+\frac{1}{2}\{\phi(\alpha)-\psi(\beta)\}+\beta y.$$

(5) $x=\beta-\alpha$; $y=\phi'(\alpha)-\psi'(\beta)$; $z=xy-\phi(\alpha)+\psi(\beta)+\beta y$.

(6) $z+y/m+mx-n\log x=\phi(x^m y)$; 他一法不能應用.

(7) $z^2=x^2+y^2+2ax+2by+c$;

$$z^2=x^2+y^2+2nx+\psi(y+mx).$$

(8) $2z=y^2-x^2$.

雜 題

(1) $z=x^2y^2+xf(y)+F(y)$. (2) $z=e^{x+y}+f(x)+F(y)$.

(3) $yz=y\log y-f(x)+yF(x)$.

(4) $z=f(x+y)+xF(x+y)-\sin(2x+3y)$.

(5) $z=f(y+\log x)+xF(y+\log x)$.

(6) $z=x+y+f(xy)+F(x^2y)$.

(7) $z=\log(x+y).f(x^2-y^2)+F(x^2-y^2)$.

(8) $4z=6xy-3x^2-5y^2+4ax+4by+c$;

$$4z=6xy-3x^2-5y^2+2nx+2\psi(y+mx).$$

(9) $3z=3c\pm 2(x+a)^{3/2}\pm 2(y+b)^{3/2}$.

(10) $mz + \sin y + m^2 \sin x - mnx = m\phi(y + mx)$.

(11) $2x = \alpha - \beta;\ 2y = \psi'(\beta) - \phi'(\alpha)$

$2z = 3x^2 - 6xy - 7y^2 + \phi(\alpha) - \psi(\beta) + 2\beta y$.

(12) $z = x^3 + y^3 + (x + y + 1)^2$.

(13) $z = x^2 - xy + y^2$.

(20) $px + qy = f(p^2 + q^2)\ \ py - qx = F(q/p)$.

總 雜 題

(1) $(x^2 - y^2)^2 = cxy$. (2) $y = x^2 + ce^{-x^2}$.

(3) $2 \sec x \sec y = x + \sin x \cos x + c$.

(4) $(xy + c)^2 = 4(x^2 + y)(y^2 - cx)$.

(5) $1 + xy = y(c + \sin^{-1} x)\sqrt{(1 - x^2)}$.

(6) $y = \left(A - \frac{1}{4}x\right)\cos 2x + B \sin 2x$.

(7) $y = \frac{x^2}{5} - \frac{6x}{25} + \frac{28}{125} + \frac{1}{16}xe^x(\sin 2x - \cos 2x)$

$+ Ae^{-x} + Be^x \cos(2x + \alpha)$.

(8) $y = A + Bx + Cx \log x + \log x + \frac{1}{2}x(\log x)^2 + \frac{1}{2}x^2$.

(9) $y + \sec x = c \tan x$.

(10) $x = Ae^{2t} + Be^{-2t} - \frac{2}{5}(\cos t - \sin t)$;

$$y=Ae^{2t}-3Be^{-2t}-\frac{6}{5}\cos t.$$

(11) $x^{2/3}=(y-1)^{2/3}+c$; S.S. $y=1$.

(12) $y=a\operatorname{cosec}(b-x)$.

(13) $y=\left(A+Bx+\dfrac{x^2}{64}\right)\sin 2x+\left(E+Fx-\dfrac{x^3}{96}\right)\cos 2x$.

(14) $2xy=3x^2+c$.　(15) $z+xy=c(x+y-xy)$

(16) $x^3+y^3+z^3=cxyz$.　(17) $z=f(xy)-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2$.

(18) $(x-y)e^{(x-z)/(x-y)}=f\{(x-3y+z)/(x-y)^2\}$.

(19) $(z+x)^2=(z+2y)f(y/x)$.

(20) $z=ax+by+a^2+b^2$; 異解 $4z+x^2+y^2=0$.

(21) $z=e^z f(x-y)+F(y)$.

(22) $z=ax^2+by+4a^2$, 異解 $16z+x^4=0$.

(23) $z=f(x+y)+F(x-y)+\dfrac{1}{6}(x^3+y^3)$

(24) $z=xf(y)+yF(x)$.　(25) $cz=(x+a)(y+b)$.

(26) $z=\dfrac{1}{2}xy+f(y/x)+xF(y/x)$.

(27) $z=f(z+x)+F(z+y)$.

(28) $y(x+c)=c^2x$, 異解 $y=0$ 及 $y+4x^2=0$.

(29) $ay^4=(x+b)^5$.

(30) $y=A\cos\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)+B\sin\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right).$

(31) $x^2+y^2+z^2=2(x\cos\alpha+y\sin\alpha+c).$

(32) $y=e^x-\frac{3}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{3x}.$

(33) $x=e^{-\kappa t}(a\cos\lambda t+b\sin\lambda t)+C\cos(pt-\alpha)$, 式內

$C=A/\surd\{(\kappa^2+\lambda^2-p^2)^2+4\kappa^2p^2\}$,

$\tan\alpha=2\kappa p/(\kappa^2+\lambda^2-p^2)$, 而 a 與 b 爲隨意常數

(34) $y=A\cos(\sin x)+B\sin(\sin x).$

(35) (i) $F=A\log(r+z)+B;$

(ii) $\phi=A\int e^{-\xi^2/4a^2}d\xi+B;\ \frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{A}{\surd t}e^{-x^2/4a^2t}.$

(36) $V=A\left\{\frac{1}{5}+\frac{2}{7}(3z^2-r^2)+\frac{1}{35}(35z^4-30z^2r^2+3r^4)\right\},$

式中 $r^2=x^2+y^2+z^2.$

(39) $u=C\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^4}{4!\,a^4}+\frac{x^5}{5!\,a^5}+\cdots\right)\cosh t$

$+C\left(\frac{x^2}{2!\,a^2}+\frac{x^3}{3!\,a^3}+\frac{x^6}{6!\,a^6}+\frac{x^7}{7!\,a^7}+\cdots\right)\sinh t.$

(41) $y-x=c(xy-1)e^{-x}.$

(42) $y=(1+x)^{a-b}(1-x)^{a+b}$

$\{A+B\int(1+x)^{-a+b-1}(1-x)^{-a-b-1}dx\}.$

如 $2a$ 爲一整數，則令 $z=(1+x)/(1-x)$，可由此求解.

(43) (i) $y=(1-x^2)(A+B\log x)$;

( ) $y=(1-x^2)(x+A+B\log x)$.

(44) $(1-x^2)y=(a+b\int e^{-x^2}dx)e^{\frac{1}{2}x^2}$.

[令 $\log y=\int(u-\frac{1}{2}P)dx$. $u=x$ 爲含 u 之微分方程式之解.]

(45) $f(x)=1-\dfrac{(2n-2)}{(2n-1)}\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}\dfrac{x^4}{4!}-\cdots$;

$$\phi(x)=x-\frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-2)}\frac{x^3}{3!}+\cdots.$$

(46) $y=Ax^5+Bx^3+E(x^2+1)$，式中以 E 代 $C/6$.

(47) $u=1+\dfrac{c}{2!}\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\dfrac{c\{c+2(b+1)\}}{4!}\left(\dfrac{x}{a}\right)^4$

$$+\frac{c\{c+2(b+1)\}\{c+4(b+3)\}}{6!}\left(\frac{x}{a}\right)^6+\cdots;$$

$$v=\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{\{c+b\}}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{\{c+b\}\{c+3(b+2)\}}{5!}\left(\frac{x}{a}\right)^5+\cdots;$$

二式均在 $|x|=|a|$ 圓內爲收歛.

(49) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=(2-x^2)y$.

(50) $\dfrac{1}{Q}\left\{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right\}$ 必爲僅含 x 之函數；$x^3y-ax^2y^2=c$.

(51) $x^2+y^2+2bxy=2ax.$

(52) $uve^w=a\int v^2e^w dx+b$, 式內 $v=Q/P$ 及 $w=\int v\,dx.$

(53) $Pn\cot(nx+\alpha)+Q=n^2.$

(54) $y(1-x)=A(3-2x)e^{2x}+B(1-2x)e^{-2x}.$

(56) $x^3+yz=c(y+z).$

(57) $$y=Ae^{-2x}+e^x(B\cos x\sqrt{3}+C\sin x\sqrt{3})$$
$$+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{24649}e^{-2x}\{157x(6\cos x+11\sin x)$$
$$+3(783\cos x-56\sin x)\}.$$

(58) $y=(3+4x^2)\{A+B\int(3+4x^2)^{-2}e^{-\frac{2}{3}x^2}\,dx\}.$

(59) $z^4(x+y)^4(x^2+y^2+z^2)=c(x^2+y^2-z^2).$

(60) $xz=c(y+z).$

(62) (i) 令 $y=-\frac{1}{ua_2(x)}\frac{du}{dx}$; (ii) $y-\frac{1}{2}=\frac{x(c+\tan x)}{1-c\tan x}.$

[方法見第41題.]

(65) 如一點 P 運動時,其速度與動徑 OP 成比例,并與 OP 及另一定直線 OK 垂直,則此點以常速在圓上運動,OK 為圓之軸.

(67) $r^2\sin 2(\theta+\alpha)=1$; 異解 $r^4=1.$

(68) $y^2-x^2=cx+2a^2\pm a\sqrt{(4a^2-c^2)}$; 異解 $y^2-x^2=\pm 2ay$.

(70) $4a(y-c)=(x-c)^2$; 異解 $y=x-a$.

(71) $x+a=c\cos\phi+c\log\tan\frac{1}{2}\phi$.

(72) $a\cos\theta+b\cos\theta'=k$.

(74) $2cy=(x+c)^2$; 異解 $y(y-2x)=0$.

(75) $x+py+ap^2=0$; $(y+ap)\sqrt{(p^2+1)}=c+a\sinh^{-1}p$,

$x\sqrt{(p^2+1)}+p(c+a\sinh^{-1}p)=0$.

在此無異解,p-判別式 $y^2=4ax$, 表示漸伸線(Involutes)之尖點軌跡.

(77) $y=ax$, $z=b+\sqrt{(x^2+y^2)}$; $z=\sqrt{(x^2+y^2)}+f(y/x)$.

諸佐解表示一族過 z 軸之平面,及一族以 z 軸爲軸之正圓錐.通解卽表一族曲面,其中各曲面均含有無窮數對之直線,卽諸平面與錐形面相交之直線.

(78) $x^2+y^2+z^2=f\{x^2+y^2+(x+y)^2\}$;

$x^2+y^2+z^2=c^2$; $z^2=xy+c$.

(79) $(2x-y)^7=c^5z(x+2y)$.

(80) $(ax-by)/(z+c)=f\{(ax+by)/(z-c)\}$.

(81) (i) $I=E/R+Ae^{-Rt/L}$; (ii) $A=I_0-E/R$;

(iii) $I=E/R$.

(82) $I=a\cos(pt-\epsilon)+Ae^{-Rt/L}$, 式內 $a=E/\sqrt{(R^2+L^2p^2)}$,

$\tan\epsilon=Lp/R$, 且 A 值為隨意者.

(83) $Q=a\sin(pt-\epsilon)$, 式內 $\tan\epsilon=(CLp^2-1)/pCR$,

且 $a=EC/\sqrt{\{(CLp^2-1)^2+p^2C^2R^2\}}$.

(85) $x=A\cos(t-\alpha)+B\cos(3t-\beta)$;

$y=2A\cos(t-\alpha)-5B\cos(3t-\beta)$.

(86) a 與 b 為 $\lambda^2(LN-M^2)+\lambda(RN+LS)+RS=0$ 之根.

(91) $x=A\cos(pt-\alpha)+B\cos(qt-\beta)$,

$y=A\sin(pt-\alpha)-B\sin(qt-\beta)$, 式內

$2p=\sqrt{(4c^2+\kappa^2)}+\kappa,\ 2q=\sqrt{(4c^2+\kappa^2)}-\kappa$.

(92) $\dfrac{d^2z}{dt^2}+(a+b)\dfrac{dz}{dt}+abz=abc$.

(93) $p=\sqrt{(n^2-2\mu^2)}$ 時,使特解之幅為極大,但在此須設 $2\mu^2$ 不大於 n^2.

(94) $x=Ae^{-kt}\cos(pt-\epsilon)$, 式內 $p=\sqrt{(n^2-k^2)}$.

(97) $\phi=\dfrac{1}{2}Va^3r^{-2}\cos\theta$.

(98) $y\sin(pb/c)=A\sin(px/c)\cos(pt+\alpha)$.

(100) $\phi=C\cosh m(y+h)\cos(mx-nt)$.

(115) (vi) $u_x=A(-2)^x+B\left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$;

(viii) $u_x=2^x\left(P\cos\frac{\pi x}{3}+Q\sin\frac{\pi x}{3}\right)$;

(x) $u_x=A(-9)^x+B+\frac{2^x}{11}$.

(119) $u=\frac{K}{m}\cos\frac{mx}{c}\sin mt$.

(120) $z=e^{-y}\sin x$.

答案之不同形式

在若干例題,解法稍有變更,所得全原函之形式遂異.例如在§70之第三題中,此處錄出之答案爲$ay=\cos(ax+b)$,但學生亦可得$ay=\sin(ax+b)$,或$ay=\sinh(ax+b)$爲其答案.在第一種形式中,以$\left(b-\frac{1}{2}\pi\right)$代$b$,即得第二式,若各以$ai$, bi代第二式中之a, b,而以i遍除,即得第三式矣.如以$1/a$代a,尙可得出他種形式.

在§116之第4題中,c^2可代以$-c^2$,或c,或$-c$.一般言之,一隨意常數,可設其能有一切之實虛或複值,可以一新隨意常數之任何函數代之.

如答案含一對解,則每有他對解,亦爲答案.例如§116中第五第六題之答案,可以

$$y-z=a(y-x),\ (y-z)^2(x+y+z)=b,$$

及 $$x^2+y^2+z^2=a,\quad x^2+2y^2-2yz=b$$

代之.

在此類題中, $u=a$, $v=b$ 一對式, 可以 $f(u, v)=a$, $F(u, v)=b$ 代之, 其 f 及 F 爲 u, v 之任何二獨立函數.

於偏微分方程式之數題中, 亦可得不同形式之解答. 例如 § 42 第3題之答案, 可爲 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\sin\alpha=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha$. § 139 第3題之答案, 可爲 $z^2(a-y^2)=(x+b)^2$.

英漢名詞對照表

A

頁數

B

C

D

E

F

H

I

J

K

L

O

P

R

S

T

U

Z

中華民國二十四年五月初版

(52801·1)

微分方程式一册

An Elementary Treatise on Differential Equations and their Applications

每册定價大洋叁元貳角

外埠酌加運費匯費

原著者 H. T. H. PIAGGIO

譯述者 國立中央大學算學系教員 余介石

國立中央大學算學系教員 周雪鷗

校閱者 國立中央大學算學系主任 孫鏞

出版者 國立編譯館 上海河南路

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

七三六上

周

期 限 卡

Date Due

首借到期 79.1.23	95. 1. 17
首借到期 80.12.10	
首借到期 80.12.10	
86. 1. 17	