理學士松邨定次郎著

新撰微分積分學

東京　博文館藏版

序

微積分學ハ西暦千六百六十六年ノ頃數學物理學ノ泰斗英人にうとん(Newton)ノ發明ニ係ル(後レテ西暦千六百七十四年ノ頃獨國數學者らいぶにっつ(Leibnitz)ハ獨立ニ之レヲ發明セリ)數學ノ一大分枝ニシテでかると(Descartes)ノ解析幾何學、らぐらんじゅ(Lagrange)ノ力學ト並ビ近世ニ於ケル數學三大進歩ノ一ナリ。爾來諸大家ノ研究ハ益々燦然タル光ヲ與ヘ。理論ノ深遠ナル應用ノ弘大ナル現時數學諸分枝中之レニ及ブモノナシ。實ニ理學進歩ノ根元ハ此思想ニシテ理學ニ嗜好ヲ有スルモノヽ欠クベカラザル要素ナリ。カヽル大問題ナレバ泰西原著ノ最簡ナルモノト雖モ數百ノ紙數ニ渉リ之レヲ修メントシテ其困難實ニ大ナリ。著者素ヨリ若輩ニシテ此難局ニ當リ得ズト雖モ尤モ嶄新ナル諸大家ノ說ヲ基礎トシ。煩ヲ省キ要ヲ拔キ眞ニ

微積分學ノ心髓タル處ヲ此小册子ニ集メテ而モ講義錄的ニ初學者ヲシテ短時日ニ其大意ヲ了解シ得セシメンコトヲ務メタリ。サレバ素ヨリ本書ヲ以テ微積分學ニ堪能ナルモノトスルニアラズ。理論上ニ應用上ニ未ダ紹介セントスル處極メテ多ケレトモコハ他日ノ好機ニ委スルコトセリ。讀者之レヲ諒セヨ

明治三十四年三月

著者識

新撰微分積分學目次

第一編　微分學

第一章　微分學總論

第二章　微分係數

第參章　函數ノ微分法

第四章　基礎函數ノ微分法

第五章　疊次微分係數

第六章　偏微分係數

第七章　疊次偏微分係數

第八章　函數ノ展開

第九章　不定形式ノ極限値

第十章　函數ノ極大、極小

第二編　積分學

第十一章　不定積分

新撰微分積分學目次終

新撰微分積分學

理學士 松村定次郎 著

第壹編 微分學

第壹章 微分學總論

第一節 變數ト常數

量ヲ表スニ數ヲ以テシ得ルヿハ人々ノ善ク知ル處ナルガ一般ニ文字例ヘバxヲ以テ表ストキハ量ノ變化スルニ從テ此文字xノ表ス數ハ常ニ一定セズ。此意味ニ於テ此文字xヲ變數。ト稱シ之ニ對シテ通常ノ數ノ如キ變化セザル數ヲ常數。ト稱ス。量ノ特値ヲ表スベキ數ハ常數ナリ。例ヘバ定處ノ温度ヲtトセバtハ或ハ10ナルヿアリ或ハ50ナルヿアリテ時日ヲ指定スルニ非ラザレバtノ表ス

自變數、被變數

數ハ一定ナラズ。故ニtハ變數ナリ。然レ𪜈時日ヲ指定セバ定處ノ温度tハ從テ確定シ常數トナルナリ。

變數ヲ表スニ通常u、v、w、x、y、z、等ヲ以テシ。常數ヲ表スニa、b、c、d、等ヲ以テスレ𪜈コハ一種ノ設定ニ他ナラズ。

變數ニ二種アリ。自變數、被變數是ナリ。自變數トハ他ノ變數ニ關係ナク自由ニ其値ヲ變化シ得ベキモノノヿニシテ被變數トハ他ノ變數ノ變化ニ從テ其値ヲ變ズルモノノヿナリ。例ヘバ球ノ半徑ヲrトシ其躰積ヲVトセバ

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

ニシテVトrトハ何レモ變數ナリ。而シテ半徑rヲ任意ニ變化セバVハrノ變化ニ相應セル變化ヲナシ決シテ自由ナル變化ヲナスヿ能ハズ。此故ニrヲ自變數トセバVハ被變數トナル。逆ニVヲ任意ニ變化セハrハVノ變化ニ相應セル變化ヲナシ決シテ自由ナル變化ヲナスヿ能ハズ。此故ニVヲ自變數トセバrハ被變數トナル。一般ニ自變數ト被變數トハ關係的ノ名稱ニシテ就中一ヲ自變數トセバ他ハ被變數トナルナリ。

函數

第二節　函數

茲ニ二變數x、yアリテxノ値ノ確定ニヨリyノ値モ確定シxノ値ヲ變化スレバyノ値モ亦從テ變化スル如キ變數yハxノ函數ナリト云フ。

$$x^n,\quad a^x,\quad \log x,\quad \sin x$$

等皆xノ函數ナリ。一般ニ被變數ハ自變數ノ函數ニシテ特ニ被變數ノ名ヲ設クルノ必要ナシ。

xノ函數ナルヿヲ表スニ通常$f(x)$、$F(x)$、$\phi(x)$、$\psi(x)$、……ナル記號ヲ用ヰル。今

$$f(x)=x^3+ax\sin x+\log(1-x)+a^2$$

トセバ

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+a\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\log\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+a^2=\frac{\pi^3}{8}+\frac{\pi a}{2}+\log\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+a^2$$

$$f(o)=o^3+a\sin o+\log(1-o)+a^2=a^2$$

yガxノ函數ナリト云ヘルヿハ必ラズシモ

$$y=f(x)$$

ノ如キ等式ヲ以テ表サルヽノ必要ナシ。例ヘバ級數

單値函數、複値函數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}$$

ノ和ハ明カニnノ函數ナリ。然レ𪜈一算式ヲ以テ表スヿ能ハズ。又與ヘラレタル整數nヨリ小ナル素數ノ數モ明カニnノ函數ナリト雖𪜈コレ又一算式ヲ以テ表スヿ能ハズ。

尙函數ノ例トシテ落躰運動ノ公式

$$s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

ヲ見ルニ、首速度v_0ト重力ノ加速度gトハ不變ノモノニシテ所謂常數ナリ。而シテ始メノ位置ヨリt秒後ニ於ケル質點ノ距離sハtノ函數ニシテtヲ確定セバsハ一樣ニ確定ス。又逆ニtハsノ函數ニシテsヲ確定セバ從テtハ確定ス。然レ𪜈此場合ニtハ

$$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^2+2gs}}{g}$$

ノ二樣ニ確定ス。斯ク自變數ノ確定値ニ對シテ函數値ノ一樣ニ確定スルモノアリ又二樣以上ニ確定スルモノアリ。前者ヲ單値函數ト云ヒ後者ヲ複値函數ト云フ。特ニn樣ニ確定スルモノヲn値函數ト云フ。前例ニ於テsハtノ單値函數ニ

單變數函數、複變數函數

シテtハsノ二値函數ナリ。

函數ヲ自變數ノ數ニヨリ分チテ單變數函數、複變數函數ノ二トス。單變數函數トハ自變數一個ノ函數ノヿニシテ複變數函數トハ自變數二個以上ノ函數ノヿナリ。特ニ自變數n個ノ函數ヲn變數函數ト稱ス。

x、yナル二自變數ノ函數ヲ表スニ

$$f(x,y)\ ,\ F(x,y)\ ,\ \phi(x,y)\ ,\ \psi(x,y)\ \ldots\ldots$$

ナル記號ヲ用ヰ。三自變數以上ノ函數皆之レニ倣フ。一般ニx、y、z……ナルn自變數ノ函數ヲ表スニ

$$f(x,y,z,\ldots\ldots)\ ,\ \&c.$$

ナル記號ヲ用ヰル。

物理學ニ於テ一定量ノ瓦斯躰ノ壓力ヲpトシ其容積ヲvトシ當時ノ攝氏温度ヲtトセバ、ボイルシヤールノ定律ナル

$$pv=R(t+273)$$

ハp、v、tノ内就中任意ノ一個ハ他ノ二個ノ函數ナルヿニ〆二變函數ノ例ナリ、

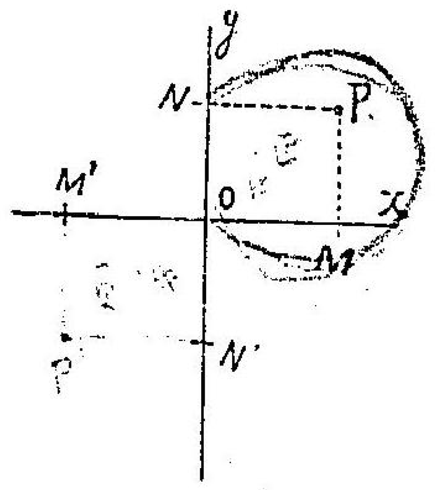
本書ハ主ニ單變數函數ノ然モ單値ナルモノニ就テ論ゼントス。

第三節　函數ノ曲線表示

變數 x ノ函數

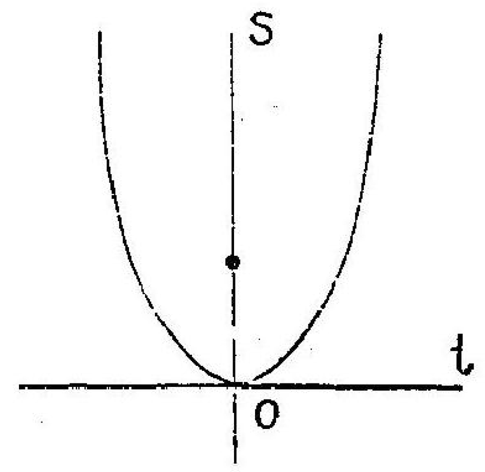
$$y=f(x)$$

アリテ變數値ノ變化ニ相應スル函數値ノ變化ノ有樣ヲ見ルニ曲線表示ナルモノヲ用ウ。即チ直交二軸 Ox Oy ヲ取リ Ox ニ沿フテ x ノ一特値ニ等シク OM ヲ取リ Oy ニ沿フテ之レニ相應スル y ノ値 ON ヲ取リ矩形 OMPN ヲ作ラバ P 點ノ位置ハ x、y ノ相應スル値ヲ表ス。但シ x ノ値負ナレバ OM′ ニ取リ y ノ之レニ相應スル値負ナレバ ON′ ニ取ルモノトス。



今 M 點ヲ種々 Ox 上ニ動カシ相應スル N 點ヲ取リ從テ一々 P 點ノ位置ヲ求メバ P 點ノ無限ニ集マリタルモノ此平面上ニ曲線ヲ為ス。此曲線ノ形狀大小ニヨリテ諸函數ヲ區別シ及ビ函數値變化ノ有樣ヲ知リ得ベシ。例ヘバ首速度 o ナル落躰運動ノ s ヲ t ノ函數トシテ曲線ヲ以テ表セバ

連續函數



$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

$$t^2=\frac{2}{g}s$$

ニヨリ t ヲ x 軸上ニ s ヲ y 軸上ニ取レバ此曲線ハ焦點距離 $\frac{1}{2g}$ ニシテ y 軸上ニ焦點ヲ有スル上圖ノ如キ抛物線ヲナス。

第四節　函數ノ連續ト不連續

自變數 x ノ函數

$$y=f(x)$$

アリ x ニ無限大ナラザル a ト b トノ間ノ任意ノ値ヲ與フレバ函數 $f(x)$ ノ之レニ相應スルモノハ各一ノ確定有限値ニシテ此範圍內ニ於ケル極メテ小ナル x ノ値ノ變化ニ相應スル $f(x)$ ノ値ノ變化モ亦極メテ小ナルトキハ $f(x)$ ハ a ト b トノ間ニ於テ x ノ連續函數ナリト云フ。例ヘバ

$$f(x)=x^2$$

ノ x ニ h ナル變化ヲ與フレバ

增分

不連續函數

$$f(x+h)=(x+h)^2$$

從テ函數值ノ變化ハ

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2$$

然シテ x ノ變化ヲ極メテ小ナリトセバ x ノ値無限大ナラザル限リハ函數ノ變化モ亦極メテ小ナリ。此故ニ x^2 ハ x ノ有限値ニ關シテ連續函數ナリ。

自變數ノ變化 h 及ビ函數ノ變化

$$f(x+h)-f(x)$$

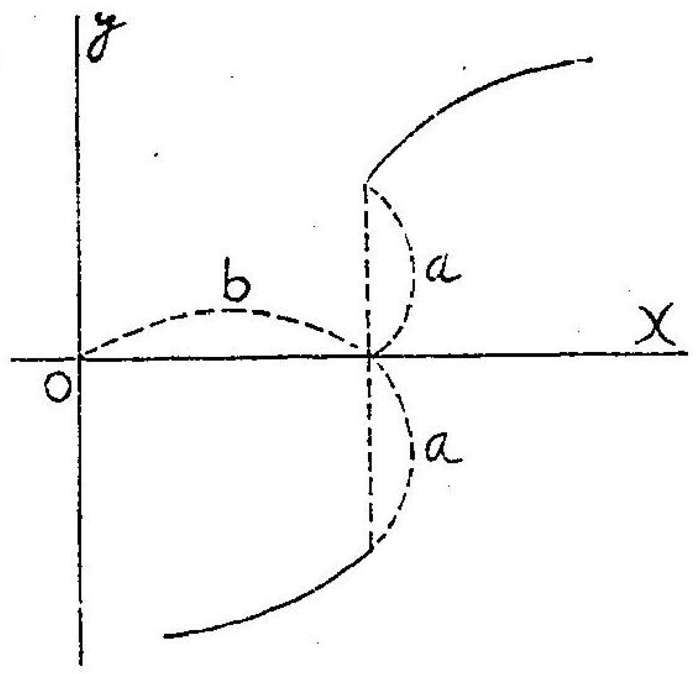
ヲ夫々自變數及ビ函數ノ增分ト稱シ。表スニ $\triangle x$、$\triangle y$ ヲ以テス。但シ增分ハ必ラズシモ正ニアラザルナリ。

x ノ或値ニ就テ連續ノ條件ニ適セザルモノヲ x ノ此値ニ就テ不連續ナリト云フ。例ヘバ $\frac{1}{1-x}$ ノ $x=1$ ニ於ケル。$\tan x$ ノ $x=\frac{\pi}{2}$ ニ於ケル値ハ $\pm\infty$ ニシテ、$\sqrt{1-x}$ ノ $x>1$ ニ於ケル値ハ虛數トナリ。$\sin\frac{1}{x}$ ノ $x=0$ ニ於ケル値ハ不定ニシテ何レモ不連續ノ例ナリ

又

$$y=a\frac{e^{\frac{1}{x-b}}-1}{e^{\frac{1}{x-b}}+1}$$

ハ b ヨリ僅小ナル x ノ値 $b-h$ ニ於テハ $-a$ ニシテ b ヨリ僅大ナル x ノ値 $b+h$ ニ於テハ a トナル之レ又 $x=b$ ニ於ケル不連續ノ一種ナリ。上圖ハ此函數ノ曲線ナリ。



第五節　函數ノ連續ニ關スル諸定理

連續函數ノ和及ビ差

[I] 二個ノ連續函數

$$u=f(x)\text{ , }v=\phi(x)$$

ノ代數的和 $u\pm v$ ハ又連續函數ナリ。

何トレバ x ノ增分 h ニ相應スル u、v ノ增分ヲ夫々 $\triangle u$ $\triangle v$ トセバ $u\pm v$ ノ增分

$$\triangle(u\pm v)=\{(u+\triangle u)\pm(v+\triangle v)\}-(u\pm v)$$
$$=\triangle u\pm\triangle v$$

然ルニu、vガxノ連續函數ナルヿヨリhヲ極メテ小ナリトセバ$\triangle u$ト$\triangle v$トハ又極メテ小。從テ$u\pm v$ノ增分モ亦極メテ小ナリ。故ニ$u\pm v$ハxノ連續函數ナリ。同樣ニ三個ノ連續函數ノ代數的和モ亦連續函數ナリ。此理ヲ推シテ一般ニ

有限個ノ連續函數ノ代數的和ハ又連續函數ナリ。

トノ定理ヲ得ベシ。

連續函數ノ積

[II] 二個ノ連續函數u、vノ積uvモ亦連續函數ナリ。

$$\triangle(uv)=(v+\triangle u)(v+\triangle v)-uv$$
$$=v\triangle u+u\triangle v+\triangle u\triangle v$$

hガ極メテ小ナルトキハ$\triangle u$ト$\triangle v$トハ又極メテ小。從テ$\triangle(uv)$モ亦極メテ小ナリ。故ニuvハxノ連續函數ナリ。特ニ常數ハ連續函數ノ特別ノ場合ナルヲ以テ連續函數ト常數トノ積ハ又連續函數ナリ。同樣ニ三個ノ連續函數ノ積モ亦連續函數ナリ。此理ヲ推シテ一般ニ

有限個ノ連續函數ノ積ハ又連續函數ナリ。

トノ定理ヲ得ベシ。

連續函數ノ商

[III] 二個ノ連續函數u、vノ商$\frac{u}{v}$ハ$v=0$ナルxノ値ヲ除キxノ連續函數ナリ。

$$\triangle\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u+\triangle u}{v+\triangle v}-\frac{u}{v}=\frac{v\triangle u-u\triangle v}{v(v+\triangle v)}$$

hヲ極メテ小ナリトセバ$\triangle u$ト$\triangle v$トハ又極メテ小。且ツ假定ニヨリ$v\neq 0$　從テ$\triangle\left(\frac{u}{v}\right)$モ亦極メテ小ナリ。故ニ$\frac{u}{v}$ハ又連續函數ナリ。

連續函數ノ連續函數

[IV] uガvノ連續函數ニシテvガxノ連續函數ナラバuハ又xノ連續函數ナリ。

hヲ極メテ小ナリトセバvハxノ連續函數ナルニヨリ$\triangle v$ハ又極メテ小。從テvノ連續函數ナルuノ增分$\triangle u$モ亦極メテ小ナリ。故ニuハxノ連續函數ナリ。

第六節　基礎函數ノ連續性

代數函數

[I] 代數函數

自變數xノ代數函數トハ自變數及ビ常數ノ加、減、乘、除、冪、根ヨリナリ項數ノ有限ナル函數ナリ。例ヘバ

$$3ax^2-2b\sqrt{x^2-1}+\frac{2x}{a-x^3}+\frac{bx^2}{\sqrt{x-1}}$$

有理代數函數

自變數xノ有理代數函數トハ自變數及ビ常數ノ加、減、乘、除冪ヨリナル代數函數

然ルニu、vガxノ連續函數ナルコトヨリhヲ極メテ小ナリトセバ$\triangle u$ト$\triangle v$トハ又極メテ小。從テ$u\pm v$ノ增分モ亦極メテ小ナリ。故ニ$u\pm v$ハxノ連續函數ナリ。同樣ニ三個ノ連續函數ノ代數的和モ亦連續函數ナリ。此理ヲ推シテ一般ニ。

有限個ノ連續函數ノ代數的和ハ又連續函數ナリ。

トノ定理ヲ得ベシ。

連續函數ノ積

[II] 二個ノ連續函數u、vノ積uvモ亦連續函數ナリ。

$$\triangle(uv)=(v+\triangle u)(v+\triangle v)-uv$$
$$=v\triangle u+u\triangle v+\triangle u\triangle v$$

hガ極メテ小ナルトキハ$\triangle u$ト$\triangle v$トハ又極メテ小。從テ$\triangle(uv)$モ亦極メテ小ナリ。故ニuvハxノ連續函數ナリ。特ニ常數ハ連續函數ノ特別ノ場合ナルヲ以テ連續函數ト常數トノ積ハ又連續函數ナリ。同樣ニ三個ノ連續函數ノ積モ亦連續函數ナリ。此理ヲ推シテ一般ニ

有限個ノ連續函數ノ積ハ又連續函數ナリ。

トノ定理ヲ得ベシ。

連續函數ノ商

[III] 二個ノ連續函數u、vノ商$\frac{u}{v}$ハ$v=0$ナルxノ値ヲ除キxノ連續函數ナリ。

$$\triangle\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u+\triangle u}{v+\triangle v}-\frac{u}{v}=\frac{v\triangle u-u\triangle v}{v(v+\triangle v)}$$

hヲ極メテ小ナリトセバ$\triangle u$ト$\triangle v$トハ又極メテ小。且ツ假定ニヨリ$v\neq 0$從テ$\triangle\left(\frac{u}{v}\right)$モ亦極メテ小ナリ。故ニ$\frac{u}{v}$ハ又連續函數ナリ。

連續函數ノ連續函數

[IV] uガvノ連續函數ニシテvガxノ連續函數ナラバuハ又xノ連續函數ナリ。

hヲ極メテ小ナリトセバvハxノ連續函數ナルニヨリ$\triangle v$ハ又極メテ小。從テvノ連續函數ナルuノ增分$\triangle u$モ亦極メテ小ナリ。故ニuハxノ連續函數ナリ。

第六節　基礎函數ノ連續性

代數函數

[I] 代數函數

自變數xノ代數函數トハ自變數及ビ常數ノ加、減、乘、除、冪、根ヨリナリ項數ノ有限ナル函數ナリ。例ヘバ

$$3ax^2-2b\sqrt{x^2-1}+\frac{2x}{a-x^3}+\frac{bx^2}{\sqrt{x-1}}$$

有理代數函數

自變數xノ有理代數函數トハ自變數及ビ常數ノ加、減、乘、除冪ヨリナル代數函數

ノヿニシテ一般ノ形式ハ

$$\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots\ldots+b_{n-1}x+b_n}$$

ナリ。但シ m ト n トハ正整數ヲ表ス。

有理整代數函數

自變數 x ノ有理整代數函數トハ自變數及ビ常數ノ加、減、乘羃ヨリナル有理代數函數ノヿニシテ一般ノ形式ハ

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

ナリ但シ m ハ正整數ヲ表ス。

x ノ有理整代數函數ハ x ノ凡テ有限値ニ關シテ連續ナリ。何トナレハ x^m ハ x ノ有限値ニ關シテ連續ナル x ノ有限數 m 個ノ相乘積ナル故ニ前節定理[II]ニヨリテ x ノ有限値ニ關シテ又連續函數ナリ。從テ a_0x^m、a_1x^{m-1}、……$a_{m-1}x$、a_m モ又總テ x ノ有限値ニ關シテ連續ナリ。而シテ有理整代數函數ハ此等ノ和ナルヲ以テ前節定理[I]ニヨリテ又 x ノ有限値ニ關シテ連續函數ナリ。

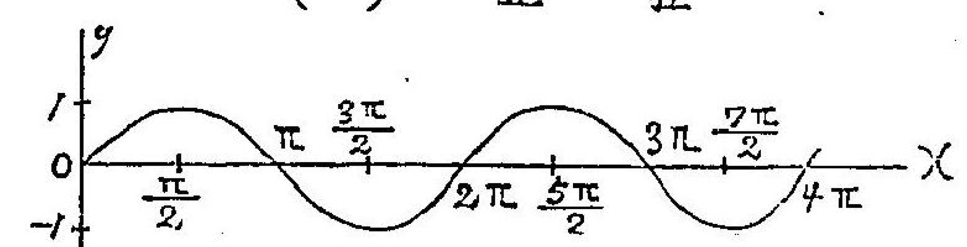
尚 x ノ有理代數函數ハ有理整代數函數ノ商ナルガ故前節定理[III]ニヨリテ分母ノ 0 トナル x ノ値ヲ除キ x ノ有限値ニ關シテ連續函數ナリ。

圓函數

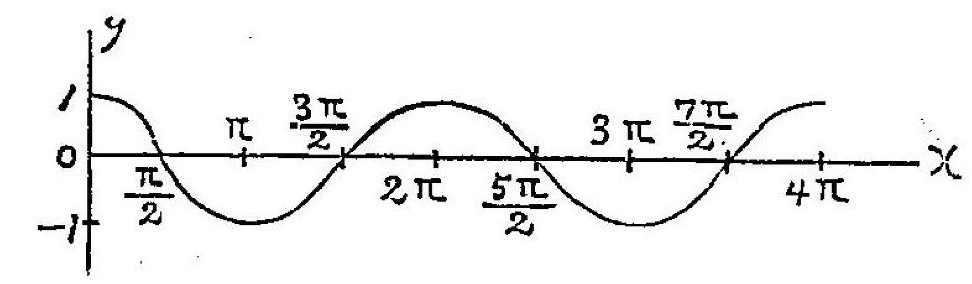
[II] 圓函數

自變數 x ノ圓函數トハ正弦 $\sin x$、餘弦 $\cos x$、正切 $\tan x$、餘切 $\cot x$、正割 $\sec x$、餘割 $\operatorname{cosec} x$ ノヿニシテ其曲線次ノ如シ

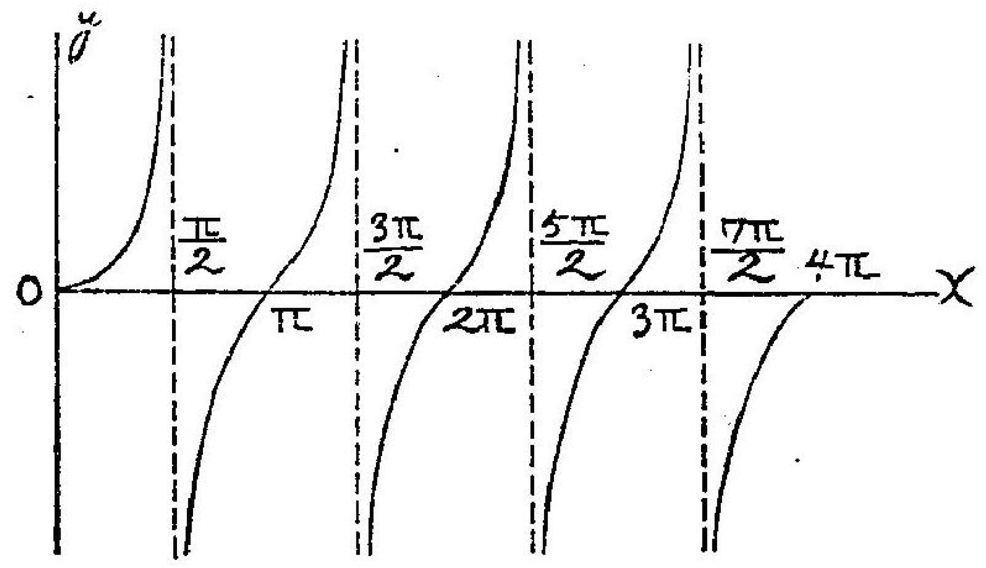
(一) 正弦



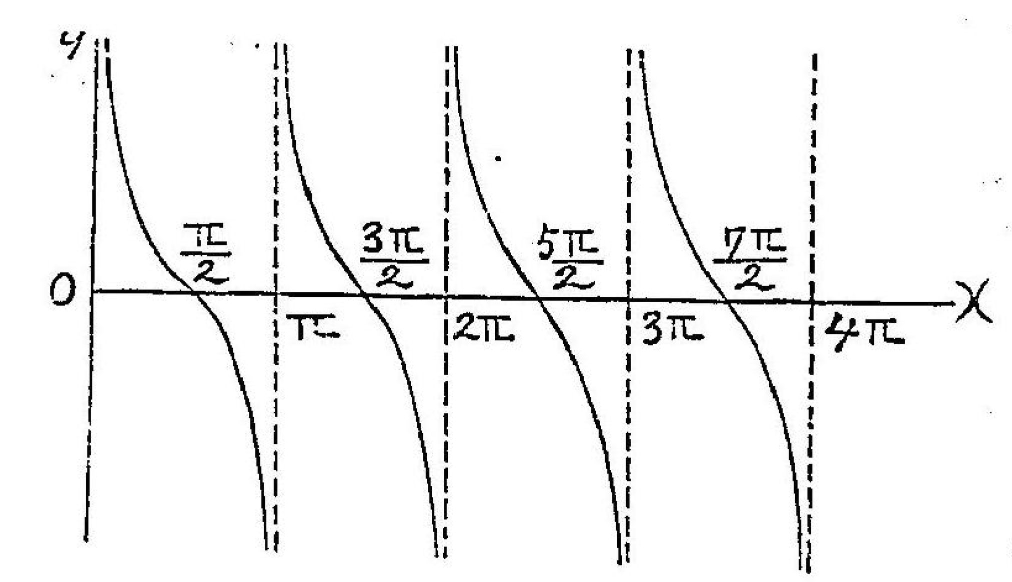
(二) 餘弦



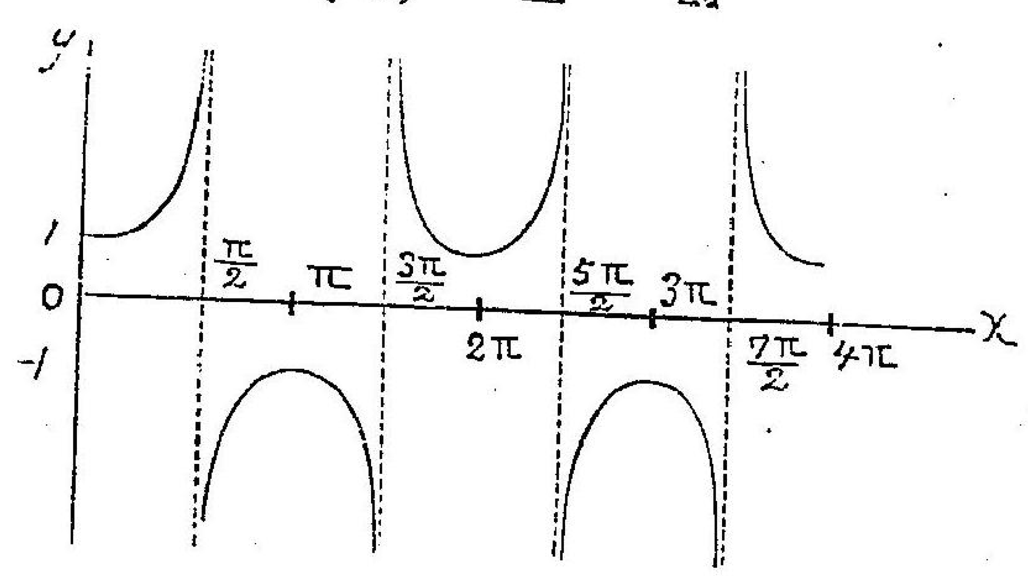
(三) 正切



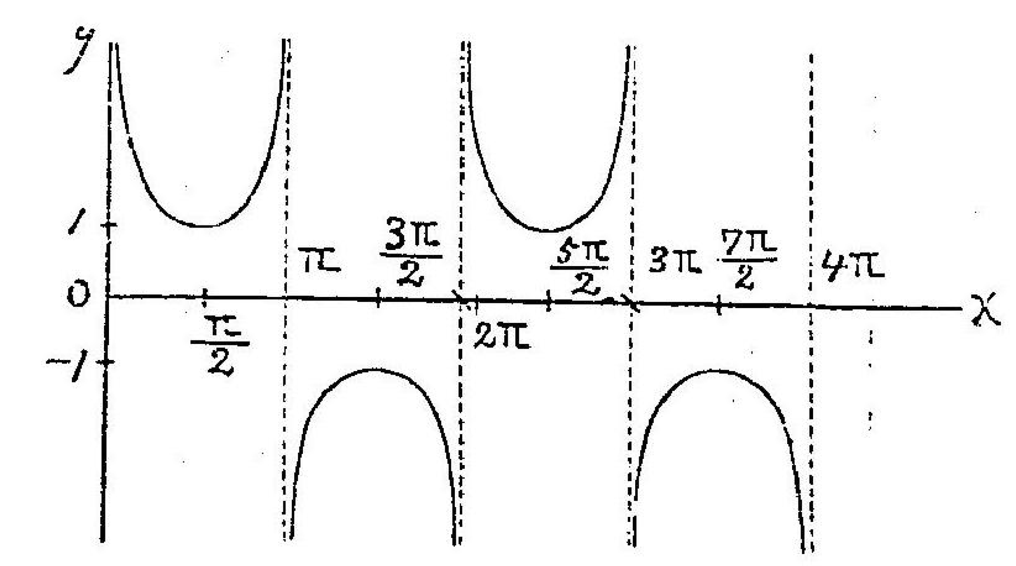
(四)　餘切



(五)　正割



(六)　餘割



圓函數ノ連續性ヲ檢スルニ

$$\Delta(\sin x) = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$\cos x$ ハ x ノ有限値ニ就テ確定有限値ヲ取リ $\sin\frac{h}{2}$ ハ h ヲ極メテ小ナリトセバ其値又極メテ小ナリ。故ニ $\sin x$ ハ x ノ有限値ニ關シテ連續函數ナリ。又

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

ニヨリ $\cos x$ モ x ノ有限値ニ關シテ連續函數ナリ。次ニ

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

等ノ關係ト前節定理[III]トニヨリ $\tan x$ ト $\sec x$ トハ $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$。$\cot x$ ト $\operatorname{cosec} x$ トハ $x = n\pi$ ヲ除キ x ノ凡テ有限値ニ關シテ連續函數ナリ。

[III]　指數函數

自變數 x ノ指數函數トハ

$$e^x = \mathrm{E}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^3}{|\underline{3}} + \cdots\cdots$$

ノコトナリ。

$$\Delta \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(x+h) - \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(x)\mathrm{E}(h) - \mathrm{E}(x) = \mathrm{E}(x)\{\mathrm{E}(h) - 1\}$$

$$= \mathrm{E}(x)\left\{h + \frac{h^2}{|\underline{2}} + \frac{h^3}{|\underline{3}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$=E(x)\left\{h\left(1+\frac{h}{\lfloor 2}+\frac{h^2}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)\right\}$$

然ルニ級數

$$1+\frac{h}{\lfloor 2}+\frac{h^2}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

ノ第m項ノ第$(m-1)$項ニ對スル比

$$\frac{\dfrac{h^{m-1}}{\lfloor m}}{\dfrac{h^{m-2}}{\lfloor m-1}}=\frac{h}{m}$$

ハmヲ大ニセハ1ヨリ小ナリ。故ニ此級數ハ絕對的收斂級數ニシテ有限極限ヲ有ス。$E(x)$モ亦xノ有限值ニ就テハ有限值ヲ取ル。此故ニ$\triangle E(x)$ハhヲ極メテ小ナリトセバ又從テ極メテ小ナリ。即チ$E(x)$ハxノ總テ有限值ニ關シテ連續函數ナリ。

次ニ此函數ノ曲線ノ形狀ヲ撿スルニ

$$y=E(x)=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$$

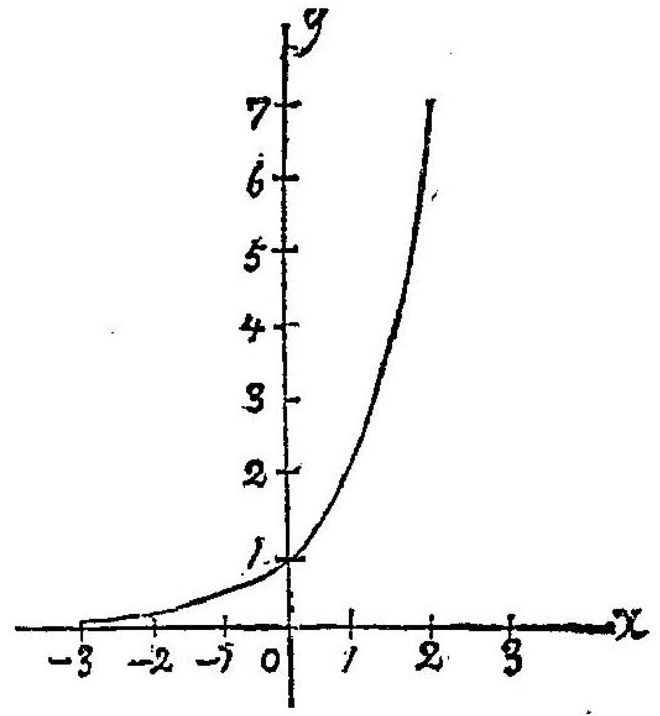
$x=0$ ナレバ $y=1$

$x>0$ ナレバ y ハ漸々增加ス

$x=\infty$ ナレバ $y=\infty$

$x=-x'<0$ ナレバ $y=E(-x')=\dfrac{1}{E(x')}$ ニシテ y ハ漸々減ズレドモ正ナリ。

$x=-\infty$ ナレバ $y=0$。故ニ次ノ如キ曲線ヲナス。



[IV] 双曲線函數

$$=E(x)\left\{h\left(1+\frac{h}{|\underline{2}}+\frac{h^2}{|\underline{3}}+\ldots\ldots\right)\right\}$$

然ルニ級數

$$1+\frac{h}{|\underline{2}}+\frac{h^2}{|\underline{3}}+\ldots\ldots$$

ノ第 m 項ノ第 $(m-1)$ 項ニ對スル比

$$\frac{\dfrac{h^{m-1}}{|\underline{m}}}{\dfrac{h^{m-2}}{|\underline{m-1}}}=\frac{h}{m}$$

ハ m ヲ大ニセハ1ヨリ小ナリ。故ニ此級數ハ絕對的收斂級數ニシテ有限極限ヲ有ス。$E(x)$ モ亦 x ノ有限值ニ就テハ有限值ヲ取ル。此故ニ $\triangle E(x)$ ハ h ヲ極メテ小ナリトセバ又從テ極メテ小ナリ。即チ $E(x)$ ハ x ノ總テ有限值ニ關シテ連續函數ナリ。

次ニ此函數ノ曲線ノ形狀ヲ撿スルニ

$$y=E(x)=1+x+\frac{x^2}{|\underline{2}}+\frac{x^3}{|\underline{3}}+\ldots\ldots$$

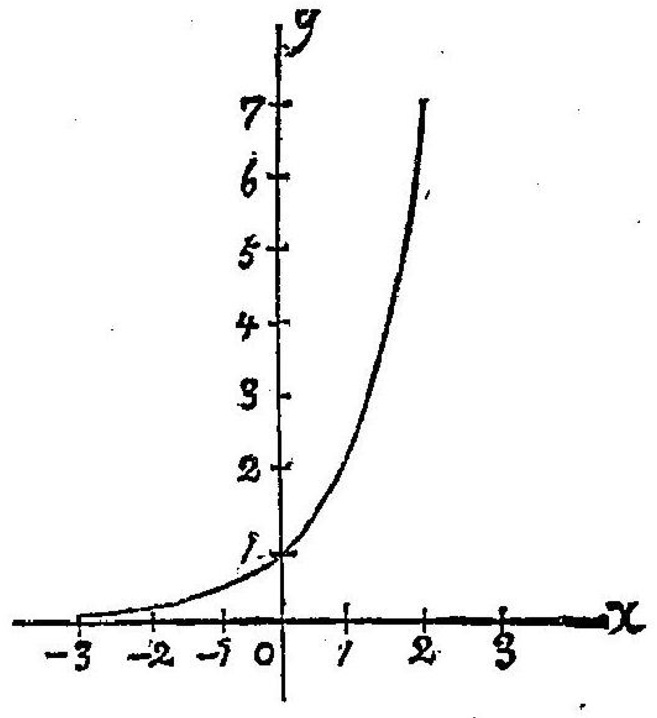
$x=0$ ナレバ $y=1$

$x>0$ ナレバ y ハ漸々增加ス

$x=\infty$ ナレバ $y=\infty$

$x=-x'<0$ ナレバ $y=E(-x')=\dfrac{1}{E(x')}$ ニシテ y ハ漸々減ズレモ正ナリ。

$x=-\infty$ ナレバ $y=0$。故ニ次ノ如キ曲線ヲナス。



[IV] 双曲線函數

双曲線函數

自變數 x ノ双曲線函數トハ双曲線正弦 $\sinh x$、双曲線餘弦 $\cosh x$、双曲線正切 $\tanh x$、双曲線餘切 $\coth x$、双曲線正割 $\mathrm{sech}\,x$、双曲線餘割 $\mathrm{cosech}\,x$ ノ⼀ナリ。

$$\sinh x=\frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(x)-\mathrm{E}(-x)\Big)=x+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$$

$$\cosh x=\frac{1}{2}\Big(\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}(-x)\Big)=1+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$$

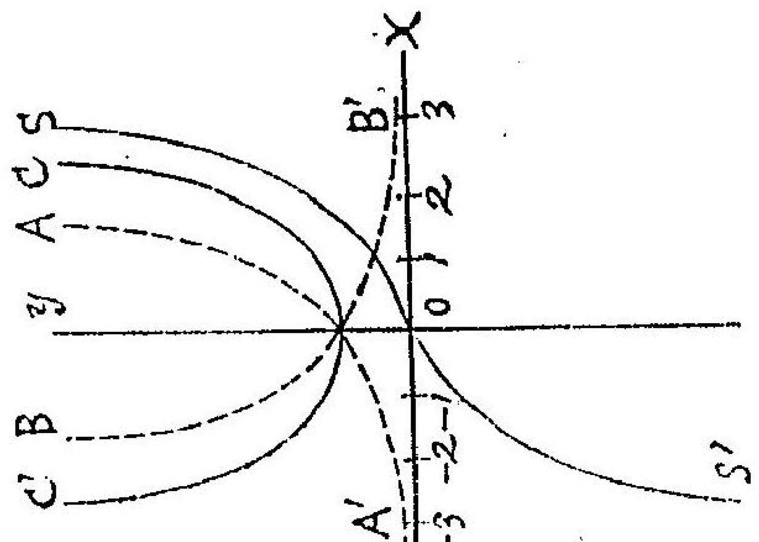
$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\mathrm{sech}\,x=\frac{1}{\cosh x},\quad \mathrm{cosech}\,x=\frac{1}{\sinh x}$$

此等ノ函數ノ連續性ヲ檢スルニ $\sinh x$, $\cosh x$ ハ $\mathrm{E}(x)$ 及ビ $\mathrm{E}(-x)$ ガ x ノ總テ有限値ニ關シテ連續ナル⼀ト前節定理(I)トニヨリテ又 x ノ總テ有限値ニ關シテ連續函數ナリ。從テ又前節定理(III)ニヨリ $\tanh x$, $\mathrm{sech}\,x$ ハ x ノ總テ有限値ニ就テ $\coth x$, $\mathrm{cosech}\,x$, ハ 0 ヲ除クノ他 x ノ總テ有限値ニ就テ連續函數ナリ。

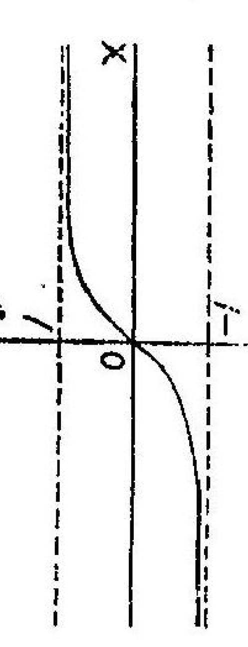
懸鏈曲線

双曲線函數ノ曲線ハ指數函數 $\mathrm{E}(x)$,$\mathrm{E}(-x)$ ノ曲線 AA′, BB′ ノ組合セニヨリテ得ラルベク、次圖ニ於ケル SS′ ハ $\sinh x$ ノ曲線ニシテ CC′ ハ $\cosh x$ ノ曲線ナリ。$\cosh x$ ノ曲線ヲ懸鏈曲線ト云フ。

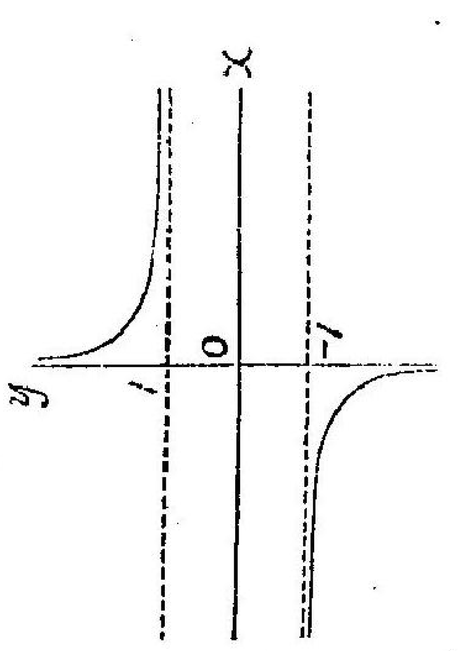


其他ノ曲線畧次ノ如シ。

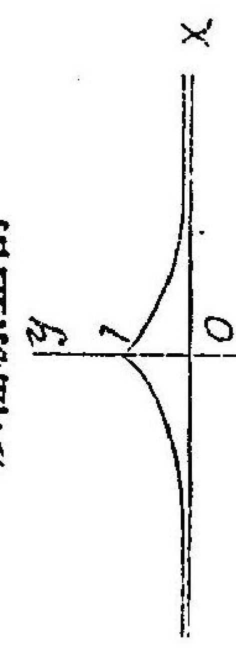
双曲線正切



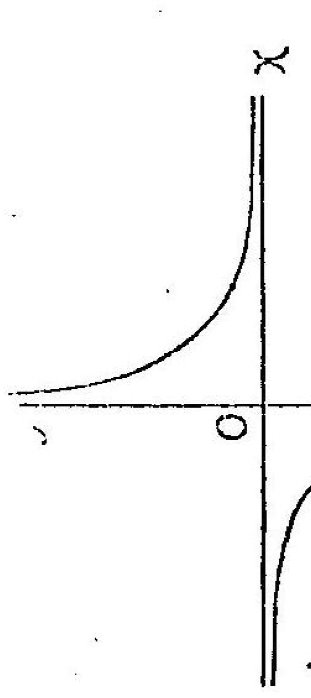
双曲線餘切



双曲線正割



双曲線餘割



定義ヨリ容易ニ證明シ得ラルベキ双曲線函數間ノ關係次ノ如シ。

$$\sinh x+\cosh x = \mathrm{E}(x)$$

$$\cosh x-\sinh x = \mathrm{E}(-x)$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x = 1$$

$$\mathrm{sech}^2 x = 1-\tanh^2 x$$

$$\mathrm{cosech}^2 x = \coth^2 x-1$$

$$\sinh(x\pm y) = \sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$$

$$\cosh(x\pm y) = \cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x+\sinh^2 x = 2\cosh^2 x-1 = 2\sinh^2 x+1$$

$$\sinh 3x = 3\sinh x+4\sinh^3 x$$

$$\cosh 3x = 4\cosh^3 x-3\cosh x$$

$$2\sinh x\cosh y = \sinh(x+y)+\sinh(x-y)$$

$$2\cosh x\sinh y=\sinh(x+y)-\sinh(x-y)$$

$$2\cosh x\cosh y = \cosh(x+y)+\cosh(x-y)$$

$$2\sinh x\sinh y = \cosh(x+y)-\cosh(x-y)$$

$$\sinh\mathrm{S}+\sinh\mathrm{T} = 2\sinh\frac{\mathrm{S}+\mathrm{T}}{2}\cosh\frac{\mathrm{S}+\mathrm{T}}{2}$$

$$\sinh\mathrm{S}-\sinh\mathrm{T} = 2\cosh\frac{\mathrm{S}+\mathrm{T}}{2}\sinh\frac{\mathrm{S}-\mathrm{T}}{2}$$

$$\cosh\mathrm{S}+\cosh\mathrm{T} = 2\cosh\frac{\mathrm{S}+\mathrm{T}}{2}\cosh\frac{\mathrm{S}-\mathrm{T}}{2}$$

$$\cosh\mathrm{S}-\cosh\mathrm{T} = 2\sinh\frac{\mathrm{S}+\mathrm{T}}{2}\sinh\frac{\mathrm{S}-\mathrm{T}}{2}$$

尙精細ハ新撰三角法ニ論ジ置キタルヲ以テ茲ニハ畧シヌ。

第七節　函數ノ極限値

函數ノ極限値

自變數xノ定値aニ對スル函數$f(x)$ノ極限値Lトハaニ極メテ近キ値ヲxニ與フルコニヨリL$-f(x)$ノ絶躰値ヲシテ如何ナル數ヨリモ小ニスルコヲ得ベキLノコナリ。之レヲ表スニ

$$\mathop{\mathrm{Lim}}_{x=a} f(x) = \mathrm{L}$$

ナル記號ヲ以テス。

$f(x)$ ガ $x=x_1$ ト $x=x_2$ トノ間ニ連續函數ニシテ a ガ其範圍内ニアルトキ

$$\lim_{x=a} f(x) = L$$

トセバ $L-f(a\pm h)$ ノ絶躰値ハ h ヲ極メテ小ニセバ如何ナル數ヨリモ小ニスルヿヲ得。而ルニ連續函數ノ定義ニヨリ $f(a)-f(a\pm h)$ ノ絶躰値モ亦 h ヲ極メテ小ニセバ如何ナル數ヨリモ小ニスルヿヲ得ルモノナリ。故ニ $f(x)$ ガ $x=a$ ニ於テ連續ナラバ

$$L=f(a) \quad 即チ \quad \lim_{x=a} f(x)=f(a)$$

ナリ。例ヘバ

$$\lim_{x=1}\frac{2x^2}{2-x}=\frac{2\times 1^2}{2-1}=2$$

此對偶定理トシテ直チニ

$$\lim_{x=a} f(x)=f(a)$$

ナラザルトキハ $f(x)$ ハ $x=a$ ニ於テ連續ナラザル函數ナルヿヲ知リ得ベシ。然レドモ $x=a$ ニ於テ不連續ナル函數ニアリテハ $\lim_{x=a} f(x)$ ハ果シテ $f(a)$ ナルカ否カニ就テハ一般ニ確言スルヿヲ得ズ。三角法ニ於テ屢々見ル

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

ニ $x=0$ ト置ケバ

$$f(0)=\frac{0}{0}$$

ニシテ全ク不定ナレドモ

$$\lim_{x=0} f(x)=1$$

ナルガ如キ此例ナリ。又

$$f(x)=\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$$

ニ $x=\infty$ ト置ケバ

$$f(\infty)=\frac{\infty}{\infty}$$

ニシテ不定ナリ。然ルニ

$$1-f(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$x = 100 \text{ ト置ケバ } \quad \frac{1}{1+x} < \frac{1}{100}$$

$$x = 1000 \text{ ト置ケバ } \quad \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1000}$$

&c　　　　&c

x ヲ充分大ニセバ $\frac{1}{1+x}$ ノ絶躰値ハ如何ナル數ヨリモ小ニスルヿヲ得ベク從テ $\operatorname*{Lim}_{x=\infty} f(x)$ ハ 1 ナル確定極限値ヲ有スルモ亦此例ナリ。

不連續函數ニ限リ特ニ注意スベキヿアリ。$\tan x$ ハ $x=\frac{\pi}{2}$ ニ於テ不連續ナリ。而シテ $\operatorname*{Lim}_{x=\frac{\pi}{2}} \tan x$ ハ x ヲ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ小ナル値ヨリ $\frac{\pi}{2}$ ニ近クルトキハ ∞ トナリ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ大ナル値ヨリ $\frac{\pi}{2}$ ニ近クルトキハ $-\infty$ トナル。又

$$a\,\frac{e^{\frac{1}{x-b}}-1}{e^{\frac{1}{x-b}}+1}$$

ハ $x=b$ ニ於テ不連續ナリ。而シテ $x=b$ ニ於ケル極限値ハ x ヲ b ヨリ小ナル値ヨリ b ニ近クルトキハ $-a$ トナリ。b ヨリ大ナル値ヨリ b ニ近クルトキハ a トナル。此ク不連續函數ノ極限値ヲ求ムルニ當リテハ x ノ指定値ニ近ヨル方向ヲ

モ指定セザルベカラズ

第八節　函數ノ極限値ニ關スル諸定理

和及ビ差ノ極限値

[I] 二個ノ函數ノ代數的和ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ代數的和ニ等シ。但シ各函數ノ極限値ハ總テ有限ナルモノトス。

何トナレバ

$$\operatorname{Lim} f(x) = u,\ \operatorname*{Lim}_{x=a}\phi(x) = v$$

トシ

$$f(a+h) = u+\triangle u,\ \phi(a+h) = v+\triangle v$$

トセバ

$$f(a+h)\pm\phi(a\pm h) = (u\pm v)+\triangle u\pm\triangle v$$

然ルニ $\triangle u$ ト $\triangle v$ トハ h ガ極メテ小ナル極限ニ於テハ又極メテ小ナルモノナリ。

$$\therefore \operatorname*{Lim}_{x=a}\left\{f(x)\pm\phi(x)\right\} = u\pm v = \operatorname*{Lim}_{x=a} f(x) \pm \operatorname*{Lim}_{x=a}\phi(x).$$

此定理ヲ擴張シテ一般ニ

有限個ノ函數ノ代數的和ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ代數的和ニ等シ。但シ

各函數ノ極限値ハ總テ有限ナルモノトス。

ナル定理ヲ得ベシ。

積ノ極限値

[II] 二個ノ函數ノ積ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ積ニ等シ。但シ各函數ノ極限値ハ總テ有限ナルモノトス。

何トナレバ

$$f(a+h)\phi(a+h) = (u+\triangle u)(v+\triangle v)$$

$$= uv + v\triangle u + u\triangle v + \triangle u.\triangle v$$

然ルニ$\triangle u$ト$\triangle v$トハhガ極メテ小ナル極限ニ於テハ又極メテ小ナルモノナリ。

$$\therefore \lim_{x=a}\left\{f(x)\phi(x)\right\} = uv = \lim_{x=a} f(x) \lim_{x=a}\phi(x)$$

特別ノ場合トシテAヲ常數トセバ

$$\lim_{x=a}\left\{Af(x)\right\} = A\lim_{x=a} f(x)$$

此定理ヲ擴張シテ一般ニ

有限個ノ函數ノ積ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ積ニ等シ。但シ各函數ノ極限

値ハ總テ有限ナルモノトス。

ナル定理ヲ得ベシ。

商ノ極限値

[III] 二個ノ函數ノ商ノ極限値ハ各函數ノ極限値ノ商ニ等シ。但シ各函數ノ極限値ハ共ニ有限ニシテ分母ノ極限値ハ0ナラヌモノトス。

何トナレバ

$$\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)} = \frac{u+\triangle u}{v+\triangle v}$$

$$\frac{u+\triangle u}{v+\triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{v\triangle u - u\triangle v}{v(v+\triangle v)}$$

然ルニ$\triangle u$ト$\triangle v$トハhガ極メテ小ナル極限ニ於テハ又極メテ小ナルモノニシテ且ツvハ0ナラズ。故ニ

$$\lim_{x=a}\frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x=a} f(x)}{\lim_{x=a}\phi(x)}$$

對數ノ極限値

[IV] 函數ノ對數ノ極限値ハ函數ノ極限値ノ對數ニ等シ。

何トナレバ

$$\lim_{x=a} \log f(x) = u$$

トセバ

$$\log f(a+h) = u + \Delta u$$

$$f(a+h) = e^{u+\Delta u}$$

$$\therefore \lim_{x=a} f(x) = e^{u}$$

從テ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$\log \lim_{x=a} f(x) = u = \lim_{x=a} \log f(x)$$

此定理ヨリ從テ續ク定理アリ。nヲ有理數トセバ

$$\log \lim_{x=a} \left\{ f(x) \right\}^{n} = \lim_{x=a} \log \left\{ f(x) \right\}^{n} = \lim_{x=a} \left\{ n \log f(x) \right\}$$

$$= n \lim_{x=a} \log f(x) = n \log \lim_{x=a} f(x) = \log \left\{ \lim_{x=a} f(x) \right\}^{n}$$

$$\therefore \lim_{x=a} \left\{ f(x) \right\}^{n} = \left\{ \lim_{x=a} f(x) \right\}^{n}$$

第九節　函數ノ極限値ノ例

[I]　$\displaystyle \lim_{z=\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^{z} = e^{a}$.

$\displaystyle \lim_{z=\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^{z}$ ハ一見シテ1ノ如ケレモコハ括弧內ノzヲ先ヅ∞トシ次デ指數zヲ∞トセルヨリ起リシ誤ニシテ括弧內zト指數zトハ同時ニ∞トセザルベカラザルモノナリ。

指數函數ノ展開式

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{\underline{|2}} + \frac{x^{3}}{\underline{|3}} + \cdots\cdots$$

ヨリ

$$\frac{e^{x}-1}{x} = 1 + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^{2}}{3.4} + \frac{x^{3}}{3.4.5} + \cdots\cdots\right)$$

而シテ級數

$$1 + \frac{x}{3} + \frac{x^{2}}{3.4} + \frac{x^{3}}{3.4.5} + \cdots\cdots$$

ハ絕躰的收歛級數ナル故ニxヲ極メテ小ニスルヿニヨリテ$\dfrac{e^{x}-1}{x}$ト1トノ差ハ又極メテ小トナスヿヲ得ベシ。

$$\therefore \lim_{x=0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad (1)$$

今(1)ニ

$$e^x = 1+\frac{a}{z} \quad 即チ \quad e^x-1 = \frac{a}{z}$$

ト置ケハ

$$x = \log\left(1+\frac{a}{z}\right)$$

且ツ a ヲ常數トセバ $x=o$ ハ $z=\infty$ ニ相應スルヲ以テ

$$\lim_{z=\infty} \frac{\frac{a}{z}}{\log\left(1+\frac{a}{z}\right)} = 1$$

$$\lim_{z=\infty} \frac{a}{z\log\left(1+\frac{a}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{a}{\log\left(1+\frac{a}{z}\right)^z} = 1$$

前節定理[III]ニヨリ

$$\lim_{z=\infty} \frac{a}{\log\left(1+\frac{a}{z}\right)^z} = \frac{a}{\lim\limits_{z=\infty} \log\left(1+\frac{a}{z}\right)^z}$$

$$\therefore \lim_{z=\infty} \log\left(1+\frac{a}{z}\right)^z = a$$

従テ前節定理[IV]ニヨリ

$$\lim_{z=\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^z = e^a \qquad (2)$$

特ニ $a=1$ ト置ケバ

$$\lim_{z=\infty} \left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e \quad (3)$$

(2)ノ a ニ $-a$ ヲ置ケバ

$$\lim_{z=\infty} \left(1-\frac{a}{z}\right)^z = e^{-a}$$

倘又 $\lim\limits_{z=-\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^z$, ニ $z=-y$ ト置ケバ

$$\lim_{z=\infty} \left(1+\frac{a}{z}\right)^z = \lim_{y=\infty} \left(1-\frac{a}{y}\right)^{-y} = \lim_{y=\infty} \left(\frac{y}{y-a}\right)^y$$

$y-a=x$ ト置ケバ

$$= \lim_{x=\infty} \left(\frac{x+a}{x}\right)^{x+a} = \lim_{x=\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \left(1+\frac{a}{x}\right)$$

前節定理[II]ニヨリ

$$= \underset{x=\infty}{\mathrm{Lim}} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x \underset{x=\infty}{\mathrm{Lim}} \left(1+\frac{a}{x}\right)$$

然ルニ(2)ニヨリ

$$\underset{x=\infty}{\mathrm{Lim}} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\underset{x=\infty}{\mathrm{Lim}} \left(1+\frac{a}{x}\right) = 1$$

$$\therefore \quad \underset{z=-\infty}{\mathrm{Lim}} \left(1+\frac{a}{x}\right)^z = e^a \tag{4}$$

又(2)ニ $\frac{1}{z} = y$ ト置ケバ $z = \infty$ ハ $y = 0$ ニ相應スルヲ以テ

$$\underset{y=0}{\mathrm{Lim}} (1 \pm ay)^{\frac{1}{y}} = e^{\pm a} \tag{5}$$

特ニ

$$\underset{y=0}{\mathrm{Lim}} (1 \pm y)^{\frac{1}{y}} = e^{\pm 1} \tag{6}$$

尙

$$\log_a(1+z)^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\log_a(1+z)$$

$$\underset{z=0}{\mathrm{Lim}} \frac{\log_a(1+z)}{z} = \underset{z=0}{\mathrm{Lim}} \log_a(1+z)^{\frac{1}{z}}$$

前節定理(IV)ニヨリ

$$= \log_a \underset{z=0}{\mathrm{Lim}} (1+z)^{\frac{1}{z}} = \log_a e$$

$$\therefore \quad \underset{z=0}{\mathrm{Lim}} \frac{\log_a(1+z)}{z} = \log_a e \tag{7}$$

(7)ニ $a=e$ ト置ケバ

$$\underset{z=0}{\mathrm{Lim}} \frac{\log(1+z)}{z} = 1 \tag{8}$$

[II]　$\underset{x=a}{\mathrm{Lim}} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$　n ハ有理數トス。

此證明ニ場合ヲ分チテ

(i) n 正整數

$$\therefore \quad \frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots\dots\dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

前節定理(I)ニヨリ

$$\underset{x=a}{\mathrm{Lim}} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \underset{x=a}{\mathrm{Lim}}\, x^{n-1} + \underset{x=a}{\mathrm{Lim}}\, ax^{n-2} + \underset{x=a}{\mathrm{Lim}}\, a^2x^{n-3} + \dots\dots\dots + \underset{x=a}{\mathrm{Lim}}\, a^{n-2}x + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \dots\ . \ + a^{n-1} + a^{n-1} = na^{n-1}$$

[11]

(ii) n 正分數

$n=\frac{p}{q}$ トセバ p ト q トハ正整數ト見做スコヲ得ベシ。

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{x^{\frac{p}{q}}-a^{\frac{p}{q}}}{x-a}$$

$x^{\frac{1}{q}}=z,\ a^{\frac{1}{q}}=b$ ト置ケバ

$$=\frac{z^p-b^p}{z^q-b^q}=\frac{\frac{z^p-b^p}{z-b}}{\frac{z^q-b^q}{z-b}}$$

前節定理(III)ニヨリ

$$\lim_{x=a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{\lim\limits_{z=b}\frac{z^p-b^p}{z-b}}{\lim\limits_{z=b}\frac{z^q-b^q}{z-b}}$$

コハ場合(i)ニヨリ

$$=\frac{pb^{p-1}}{qb^{q-1}}=\frac{p}{q}b^{p-q}=\frac{p}{q}b^{q\left(\frac{p}{q}-1\right)}=\frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}-1}=na^{n-1}$$

[3]

(iii) n 負數

$n=-m$ トセバ m ハ正數ナリ。

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a}=\frac{\frac{1}{x^m}-\frac{1}{a^m}}{x-a}$$

$$=\frac{\frac{a^m-x^m}{a^mx^m}}{x-a}=-\frac{1}{a^mx^m}\cdot\frac{x^m-a^m}{x-a}$$

前節定理(II)ニヨリ

$$\lim_{x=a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x=a}\left(-\frac{1}{a^mx^m}\right)\lim_{x=a}\frac{x^m-a^m}{x-a}$$

コハ場合(i)(ii)ニヨリ

$$=-\frac{1}{a^{2m}}ma^{m-1}=-ma^{-m-1}=na^{n-1}$$

依テ(i)(ii)(iii)ノ場合ヲ合シテ凡テ n ノ有理數ニ就テ

$$\lim_{x=a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1} \qquad (9)$$

以上諸例ニ就テ示シタル如ク不連續函數ノ極限値ヲ求ムル問題ハ各特種ノ

工夫ヲ要シ從テ困難尠カラズ然ルニ微分學ノ發明以來此等ヲ統一シ得タルハ微分學應用ノ一端ニノ後節ニ論ズル所ヲ俟テ其趣味ヲ感ズベシ。

第二章　微分係數

第十節　微分係數ノ定義

茲ニ a ト b トノ間ニ於テ連續ナル x ノ函數

$$y = f(x)$$

アリ此連續ノ範圍內ニ於テ x ニ $\triangle x$ ナル增分ヲ與ヘテ y ハ $\triangle y$ ナル增分ヲ得タリトセバ

$$y+\triangle y = f(x+\triangle x)$$

$$\therefore \quad \triangle y = f(x+\triangle x)-f(x)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

$\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ハ x 及ビ $\triangle x$ ノ函數ナレ𪜈 x ヲ固定值トセバ $\triangle x$ ノミノ函數ナリ今 $\triangle x$ ヲ減少シテ極メテ小ニセバ y ハ x ノ連續函數ナル故ニ $\triangle y$ ハ又極メテ小トナル其結果

微分係數
誘導函數
微分法

$\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ハ唯一ノ有限極限値ニ向フ此極限値ヲ y ノ x ニ關スル微分係數若クハ微係數ト云ヒ或ハ之レヲ y ノ x ニ關スル誘導函數ト云フ之レヲ求ムル方法ヲ微分法ト云フ。

此故ニ連續函數

$$y = f(x)$$

ノ x ニ關スル微分係數トハ

$$\lim_{\triangle x=0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ノコトニシテ

$$\frac{dy}{dx}, \ Dy, \ y', \ f'(x)$$

等ノ記號ヲ用ヰテ之レヲ表ス。

例

$$y = \frac{1}{4p}x^2 \qquad p > o$$

$$y+\triangle y = \frac{1}{4p}(x+h)^2 = \frac{1}{4p}x^2 + \frac{1}{2p}xh + \frac{1}{4p}h^2$$

$$\Delta y=\frac{1}{2p}xh+\frac{1}{4p}h^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2p}x+\frac{1}{4p}h$$

極限ニ進メバ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2p}x \qquad (10)$$

可微分函數

微分係數ヲ定義スルニ當リ特ニ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ガ唯一ノ極限値ニ近クト云ヒシハ Δx ガ正數ヨリ0ニ近クト負數ヨリ0ニ近クトニ拘ラズ同一極限値ニ近クヿノ意ナリシナリ。而ルニ時トシテ其極限値ヲ異ニセル函數アレトモ微分學ハ前者所謂可微分函數ニ就テノミ論スルモノナリ。

函數ノ可微分函數ナル爲メニハ連續函數ナルヿ必要ナル條件ナレトモ連續函數ナリトテ必ラズシモ可微分函數ニアラズ。甚ダ稀ニ連續函數ニシテ可微分函數ナラザルモノアリ。

第十一節　微分

微分

前節ノ定義ヨリ得タル微分係數 $\frac{dy}{dx}$ ハ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ノ極限値ヲ表ス只記號ニシテ $dy \div dx$ ナル商ニアラズ。然レトモ未ダ極限ニ進マザル $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ一種ノ商ニシテ $\frac{dy}{dx}$ 即チ $f'(x)$ トハ異レルモノナリ。今

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\sigma$$

トセバ σ ハ Δx ノ無限小ナル極限ニ於テ0トナルベキモノナリ。$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ハ商ナル故

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\sigma.\Delta x$$

此ニ於テ Δx ヲ漸々0ニ近クルニ從テ $\sigma\Delta x$ ハ $f'(x)\Delta x$ ニ比シテ甚ダ小トナリ漸々

$$\Delta y=f'(x)\Delta x$$

ガ眞ニ近クベシ。斯ク此等式ノ兩邊ガ0ナリトノ意味ニアラズ兩邊ノ比ノ1ニ近クトノ意味ヲ記號

$$dy=f'(x)dx$$

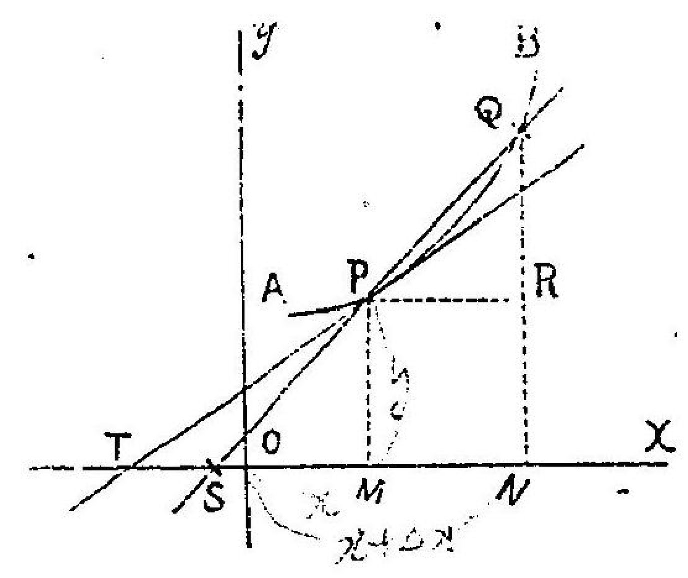
ヲ用ヰテ表シ。極小數 dx、dy ヲ夫々 x、y ノ微分ト稱ス。$f'(x)$ ノ微分係數ノ名ハ此ニ起リシナリ。此定義ニ從ヘバ微分係數 $f'(x)$ 即チ $\frac{dy}{dx}$ ハ微分 dy、dx ノ商ト見做スヿヲ得ルニ至ル。

第十二節　微分係數ノ幾何學的意味

x ノ連續函數

$$y=f(x)$$

アリ函數ノ曲線表示ニヨリ直交軸 Ox, Oy ニ關シテ曲線 AB ヲナセリトセバ此曲線上ノ各點ノ坐標ハ自變數ノ値ト之レニ相應スル函數ノ値ナリ。今此曲線上ニ $P(x,y)$, $Q(x+\triangle x, y+\triangle y)$ ナル二點ヲ取ラバ



$$OM=x\ ,\quad MP=y$$
$$ON=x+\triangle x\ ,\quad NQ=y+\triangle y$$
$$\therefore\ MN=PR=\triangle x$$
$$RQ=\triangle y$$

從テ

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{RQ}{PR}=\tan(RPQ)$$

即チ $P(x,y)$ 點ニ於ケル $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ ハ割線 PQ ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切ニ等シ。

切線ノ方程式

扨 $\triangle x$ ヲ漸々ニ減小セバ $\triangle y$ モ亦從テ小サクQ點ハ漸々ニP點ニ近ツキ $\triangle x$ ノ無限小ナル極限ニ於テハ $\triangle y$ モ亦無限小トナリQ點ハP點ト合シ割線PQハP點ニ於ケル切線PTトナリ

$$\frac{dy}{dx}=\tan(xTP)$$

トナル。故ニ微分係數 $\dfrac{dy}{dx}$ ハ曲線

$$y=f(x)$$

上ノ一點 (x,y) ニ於ケル切線ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切ヲ表ス。

一般ニ $\dfrac{dy}{dx}$ ハ x ノ函數ニシテ x ノ値ニヨリ其値ヲ異ニス。例ヘバ曲線上ノ一點 (x',y') ニ於ケル切線ガ x 軸ノ正ノ方向トナス角ノ正切ハ $\dfrac{dy}{dx}$ 中ノ x ニ x', 從テ y ニ y' ヲ置キタルモノニシテ表スニ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x'}$ ナル記號ヲ以テス。之レヲ解析幾何學ノ結果ニ應用セバ曲線上ノ一點 $(x'y')$ ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-y'=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x'}(x-x')$$

トナル。例トシテ抛物線

$$x^2 = 4py$$

ニ適用セバ(10)ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2p}x \quad , \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x'} = \frac{1}{2p}x'$$

依テ此曲線上ノ一點(x',y')ニ於ケル切線ノ方程式ハ

$$y-y' = \frac{1}{2p}x'(x-x')$$

$$2p(y-y') = xx'-x'^2$$

(x',y')點ハ此曲線上ノ點ナルヲ以テ

$$x'^2 = 4py'$$

之レヲ代用セバ解析幾何學ニ得ルト同形ナル切線ノ方程式

$$2p(y+y') = xx'$$

ヲ得ベシ。

今(x',y')點ニ於ケル切線ガx軸ノ正ノ方向トナス角ヲαトセバ

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x'} = \tan\alpha$$

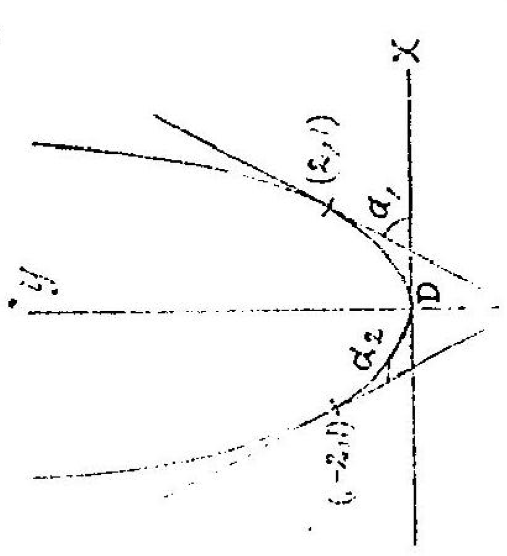
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x'} > 0$ ナレバ $\tan\alpha > 0$ 即チ $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x'} = 0$ ナレバ $\tan\alpha = 0$ 即チ $\alpha = 0$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x'} < 0$ ナレバ $\tan\alpha < 0$ 即チ $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$

ナリ。例トシテ抛物線

$$x^2 = 4y$$



上ノ二點$(2,1)$、$(-2,1)$ニ於ケル微分係數ノ値ヲ見ルニ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{1}{2}\times 2 = 1$$

$$\tan\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{-2} = \frac{1}{2}\times(-2) = -1$$

$$\tan a_2 = -1 \qquad a_2 = \frac{3\pi}{4}$$

倘又$\dfrac{dy}{dx}$ノ正ナルヿハ$\triangle x$ト$\triangle y$トガ符號ヲ同ウスルヿニシテxノ增スニ從テyモ亦增スヿヲ示シ。$\dfrac{dy}{dx}$ノ負ナルヿハ$\triangle x$ト$\triangle y$トガ符號ヲ異ニスルヿニシテxノ增スニ從テyハ減ズルヿヲ示ス。コレ又前例ノ$(2,1)$ $(-2,1)$點ニ就テ其符合スルヿヲ驗シ得ベシ。

第十三節　物理學ニ起ル微分係數

運動ノ速度

物理學ニ屢起ル微分係數ハ運動ノ速度ナリ。茲ニ直線運動ヲナセル質點アリ。靜止ノ位置ヨリ運動ヲ起シ。t秒間ニ距離sヲ運動シタリトセバsハ一般ニtノ函數ナリ。而シテ$t+\triangle t$秒間ニハ$s+\triangle s$ノ距離運動シタリトセバ$\triangle s$ハ$\triangle t$秒間ニ運動シタル距離ニシテ$\dfrac{\triangle s}{\triangle t}$ハ$\triangle t$秒間等速運動ヲナシタルトメノ速度即チ$\triangle t$秒間ノ平均速度ナリ。一般ニ運動ノ速度ハ各瞬間ニ變ズルモノナレバ$\triangle t$ヲ充分小ナル時間トセバ其間ハ等速運動ト見做スヿヲ得ベク。從テ

$$\lim_{\triangle t=0} \frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{ds}{dt}$$

ハt秒ノ終ニ於ケル速度ヲ表スナリ。

運動ノ加速度

倘加速度ハ速度ノ變化スル割合ナレバt秒後ノ速度ヲvトシ。$t+\triangle t$秒後ノ速度ヲ$v+\triangle v$トセバ$\triangle v$ハ$\triangle t$秒間ニ增加セル速度ニシテ$\dfrac{\triangle v}{\triangle t}$ハ$\triangle t$秒間ノ平均加速度ナリ。依テ速度ノトキト同ジク

$$\lim_{\triangle t=0} \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{dv}{dt}$$

ハt秒後ニ於ケル加速度ヲ表スナリ。

角速度

同様ニt秒間ニ回轉セル角ヲθトセバ

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

角加速度

ハt秒後ニ於ケル回轉ノ角速度ニシテ$\dfrac{d\omega}{dt}$ハ回轉ノ角加速度ナリ。

第十四節　平均値定理

豫備ノ定理

aトbトノ間ニ於テ連續ナルxノ單値函數$f(x)$アリ$x=a$ト$x=b$トニ於テ0トナリ。且ツ其微分係數$f'(x)$ガ此連續ノ範圍內ニ於テ有限確定値ヲ有スルトキハ$f'(x)$ハxノaトbトノ間ノ或値x_1ニ於テ0トナルベシ。

平均值定理

何トナレバ假ニ $f'(x)$ ガ此範圍內ニ於テ常ニ正ナリトセバ $f(x)$ ハ x ノ値ノ a ヨリ b ニ增スニ從テ絕ヘズ增加スベクコハ連續函數 $f(x)$ ノ $x=a$ ト $x=b$ トニ於テ 0 トナルノ假定ニ負ク。又假ニ $f'(x)$ ガ此範圍內ニ於テ常ニ負ナリトセバ $f(x)$ ハ x ノ値ノ a ヨリ b ニ增スニ從テ絕ヘズ減少スベクコハ又前ト同ヲ假定ニ負ク。依テ $f'(x)$ ハ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ於テ正ヨリ負若クハ負ヨリ正ニ移ラザルヲ得ズ。而シテ $f'(x)$ ハ又假定ニヨリ此範圍ニ於テ無限大トナルヿナキモノナルヲ以テ $f'(x)$ ハ x ノ a ト b トノ間ノ或値 x_1 ニ於テ必ラズ 0 ヲ通ズベシ.

此定理ヨリ甚ダ要用ナル**平均值定理** (Mean Value Theorem)

$f(x)$ ガ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ於テ連續ナル單值函數ニシテ $f'(x)$ ガ此範圍內ニ於テ有限確定値ヲ有スルトキハ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$$

但シ　$a<x_1<b$

ヲ得ベシ。何トナレバ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\mathrm{K}$$

ト置キ

$$\Phi(x)=f(x)-f(a)-\mathrm{K}(x-a)$$

ナル函數 $\Phi(x)$ ヲ考フルニ

$$\Phi(a)=f(a)-f(a)-\mathrm{K}(a-a)=0$$

$$\Phi(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$$

故ニ前定理ヨリ其微分係數

$$\Phi'(x)=f'(x)-\mathrm{K}$$

ハ x ノ a ト b トノ間ノ或値 x_1 ニ就テ 0 トナルベシ。

$$\therefore\quad \Phi'(x_1)=f'(x_1)-\mathrm{K}=0$$

$$f'(x_1)=\mathrm{K}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$b>x_1>a$$

之レ即チ本定理ナリ。今

$$b-a=h\ ,\quad a=x$$

ト置クバ

$$b=x+h\ ,\quad x_1=x+\theta h\ ,\quad 0<\theta<1$$

從テ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x+\theta h)\qquad 0<\theta<1\ .$$

第三章　函數ノ微分法

第十五節　函數ノ和ノ微分係數

x ノ連續函數

$$u=f(x)\ ,\quad v=\phi(x)$$

アリ。x ノ增分 $\triangle x$ ニ相應スル u、v ノ增分ヲ夫々 $\triangle u$、$\triangle v$ トセバ

$$y=u+v$$

ナル y ハ x ノ連續函數ニシテ又相應スル增分 $\triangle y$ ヲ受クベシ。

$$y+\triangle y=u+\triangle u+v+\triangle v$$

$$\triangle y=\triangle u+\triangle v$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\triangle u}{\triangle x}+\frac{\triangle v}{\triangle x}$$

而ルニ $\triangle x$ ガ無限小ナル極限ニ於テハ $\frac{\triangle y}{\triangle x}$、$\frac{\triangle u}{\triangle x}$、$\frac{\triangle v}{\triangle x}$ ハ夫々 $\frac{dy}{dx}$、$\frac{du}{dx}$、$\frac{dv}{dx}$ トナル。

從テ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

和ノ微分係數　即チ

差ノ微分係數　同様ニシテ

$$\left.\begin{aligned}\frac{d(u+v)}{dx}&=\frac{du}{dx}+\frac{du}{dx}\\ \frac{d(u-v)}{dx}&=\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

特ニ $v=c$ 常數ナルトキハ

$$\triangle v=0\ ,\quad \frac{\triangle v}{\triangle x}=0$$

常數ノ微分係數

$$\therefore\quad \frac{dc}{dx}=0\qquad(12)$$

$$\frac{d(u\pm c)}{dx} = \frac{du}{dx} \qquad (13)$$

次ニxノ連續函數u、v、w三個ノ場合ヲ取リ

$$y = u+v-w$$

トセバ(11)ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{d(v-w)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

依テ一般ニ

有限個ノ函數ノ代數的和ノ微分係數ハ各函數ノ微分係數ノ代數的和ニ等シ

第十六節　函數ノ積ノ微分係數

$$y = uv,\quad u = f(x),\quad v = \phi(x)$$

$$y+\triangle y = (u+\triangle u)(v+\triangle v) = uv+u\triangle v+v\triangle u+\triangle u.\triangle v$$

$$\triangle y = u\triangle v+v\triangle u+\triangle u.\triangle v$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = u\frac{\triangle v}{\triangle x}+v\frac{\triangle u}{\triangle x} + + \frac{\triangle u}{\triangle x}\,\frac{\triangle v}{\triangle x}\triangle x$$

$\triangle x$ノ無限小ナル極限ニ於テハ$\frac{\triangle y}{\triangle x}$、$\frac{\triangle u}{\triangle x}$、$\frac{\triangle v}{\triangle x}$ハ夫々$\frac{dy}{dx}$、$\frac{du}{dx}$、$\frac{dv}{dx}$トナル。

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \qquad (14)$$

$y = uv$ヲ以テ兩邊ヲ除セバ

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}\,\frac{dv}{dx} + \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx} \qquad (15)$$

特ニ

$$y = au$$

ニシテaガ常數ナレバ(14)ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx}+u\frac{da}{dx}$$

(12)ニヨリ$\frac{da}{dx}$ハoナル故ニ

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} \qquad (16)$$

尙

$$y = uvw$$

トセバ(14)ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{d(vw)}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

$$= u\left(v\frac{dw}{dx} + w\frac{dv}{dx}\right) + vw\frac{du}{dx}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

$y = uvw$ ニテ兩邊ヲ除セバ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

一般ニ m 個ノ函數ノ積

$$y = uvw\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= vw\ldots\ldots\frac{du}{dx} + uw\ldots\ldots\frac{dv}{dx} + uv\ldots\ldots\frac{dw}{dx} + \ldots\ldots \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

有限個ノ函數ノ積ノ微分係數ハ各函數ノ微分係數ニ他ノ總テノ函數ヲ乘ジ

タルモノヽ和ニ等シ。

第十七節　函數ノ商ノ微分係數

$$y = \frac{u}{v}, \qquad u = f(x), \qquad v = \phi(x)$$

$$y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v}$$

$$\triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v} = \frac{v\triangle u - u\triangle v}{v(v + \triangle v)}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\dfrac{\triangle u}{\triangle x} - u\dfrac{\triangle v}{\triangle x}}{v(v + \triangle v)}$$

$\triangle x$ ノ無限小ナル極限ニ於テ $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$、$\dfrac{\triangle u}{\triangle x}$、$\dfrac{\triangle v}{\triangle x}$、ハ夫々 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{du}{dx}$、$\dfrac{dv}{dx}$ トナリ $\triangle v$ モ亦無限小トナル。

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2} \qquad (18)$$

二函數ノ商ノ微分係數ハ分子ノ微分係數ニ分母ヲ乘ジタルモノヨリ分母ノ微分係數ニ分子ヲ乘ジタルモノヲ減ジ之レヲ分母ノ自乘ニテ除シタルモノニ等シ。

(18)ハ又(14)ヨリモ導キ得ベシ。

$$y = \frac{u}{v}$$

$$u = yv$$

(14)ニヨリ

$$\frac{du}{dx} = v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx} = v\frac{dy}{dx} + \frac{u}{v}\frac{du}{dx}$$

$$v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} = v^2\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(18)ニ $u=a$ トセバ $\frac{du}{dx}=0$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{a}{v}\right) = -\frac{a}{v^2}\frac{dv}{dx} \qquad (19)$$

第十八節　反函數ノ微分係數

反函數

yガxノ函數$f(x)$ナレバ逆ニxハ又yノ函數ニシテ通常之レヲ

$$x = f^{-1}(y)$$

ナル記號ヲ以テ表シf^{-1}ヲfノ反函數ト稱ス。

對數函數

反圓函數

反双曲線函數

指數函數ノ反函數ハ對數函數$\log_a x$ニシテ圓函數ノ反函數ハ反圓函數即チ反正弦$\sin^{-1}x$、反餘弦$\cos^{-1}x$、反正切$\tan^{-1}x$、反餘切$\cot^{-1}x$、反正割$\sec^{-1}x$、反餘割$\mathrm{cosec}^{-1}x$ナリ。又双曲線函數ノ反函數ハ反双曲線函數ニシテ反双曲線正弦$\sinh^{-1}x$、反双曲線餘弦$\cosh^{-1}x$、反双曲線正切$\tanh^{-1}x$、反双曲線餘切$\coth^{-1}x$、反双曲線正割$\mathrm{sech}^{-1}x$、反双曲線餘割$\mathrm{cosech}^{-1}x$、是ナリ。

一般ニ反函數

$$y = f^{-1}(x)$$

反函數ノ曲線

ノ曲線ハ唯原函數

ノ y 軸ト x 軸トヲ轉換シタルモノニメ從テ對數函數、反圓函數、反双曲線函數ノ

$$y = f(x)$$

曲線モ夫々指數函數、圓函數、双曲線函數ノ曲線ヨリ知リ得ラルベシ。

扨初メ y ハ x ノ連續單值函數ナリトスルモ x ハ必ラズシモ y ノ單值函數ニアラズ。先ヅ x ガ y ノ單值函數ナル場合例ヘバ對數函數ノ如キ反函數ヲ取リ。原函數ニ於テ x ノ增分 Δx ニ對シ y ニ Δy ナル增分アリトセバ反函數ニ於テ y ニ Δy ナル增分ヲ與フレバ從テ x ハ Δx ナル增分ヲ受クルコト明ナリ。且ツ原函數ハ x ノ連續函數ナルヲ以テ Δx ガ減少シテ無限小トナレバ Δy ハ又從テ減少シテ無限小トナル。故ニ反函數ニ於テモ Δy ガ減少シテ無限小トナレバ Δx ハ從テ又減少シテ無限小トナル。即チ反函數ハ又 y ノ連續函數ナルナリ。依テ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

極限ニ進メバ

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

次ニ反圓函數ノ如キ x ガ y ノ複值函數ナル時ニ於テハ y ニ Δy ナル增分ヲ與フ

反函數ノ微分係數

レバ x ハ種々ノ增分ヲ得ベシト雖モ就中一ハ先ノ Δx ト同ジ增分アルベシ。依テ反函數ノ諸值 x 中特ニ斯樣ナルモノノミヲ取ラバ反函數ハ y ノ連續函數ニメ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1$$

極限ニ進メバ

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

此故ニ一般ニ上記條件ノ下ニ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

第十九節　函數ノ函數ノ微分係數

茲ニ y ノ連續函數

$$u = f(y)$$

重函數ノ微分係數

アリテ y 又 x ノ連續函數

$$u = f(y)$$
$$y = \phi(x)$$

ナルトキハ第五節定理(IV)ニヨリテ u ハ又 x ノ連續函數ナリ。今 x ノ増分 $\triangle x$ ニ相應スル y ノ増分ヲ $\triangle y$ トシ之レニ相應スル u ノ増分ヲ $\triangle u$ トセバ

$$\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle y}\,\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$\triangle x$ ノ無限小ナル極限ニ於テハ $\frac{\triangle u}{\triangle x}$、$\frac{\triangle u}{\triangle y}$、$\frac{\triangle y}{\triangle x}$ ハ夫々 $\frac{du}{dx}$、$\frac{du}{dy}$、$\frac{dy}{dx}$ トナルヲ以テ

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = f'(y)\,\phi'(x) \qquad (21)$$

同様ニシテ

$$u = f(z) \quad , \quad z = \phi(y) \quad , \quad y = \psi(x)$$

ナルトキハ

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = f'(z)\,\phi'(y)\,\psi'(x)$$

本定理ハ尙一般ニ布延スルコトヲ得ベク其例後節ニ屢〻見ル所アルベシ。

第四章　基礎函數ノ微分法

第二十節　代數函數ノ微分法

冪ノ微分係數

[I] 冪 x^n　n ハ有理數

$$y = x^n$$
$$y + \triangle y = (x+h)^n$$
$$\triangle y = (x+h)^n - x^n$$
$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \operatorname*{Lim}_{\triangle x=0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}$$

第九節(9)ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$
$$\therefore \quad \frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1} \qquad (22)$$

例 (1)　$y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2$$

例 (2)　$y = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$

$$\frac{dy}{dx} = (-5)x^{(-5)-1} = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$$

例 (3)　$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

例 (4)　$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(-\frac{1}{2}\right)x^{(-\frac{1}{2})-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

[II] 有理整代數函數

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n$$

(11) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(a_0x^n) + \frac{d}{dx}(a_1x^{n-1}) + \frac{d}{dx}(a_2x^{n-2}) + \cdots\cdots + \frac{d}{dx}(a_{n-1}x) + \frac{da_n}{dx}$$

有理整代數函數ノ微分係數

(11) ト (12) トニヨリ

$$= a_0\frac{d(x^n)}{dx} + a_1\frac{d(x^{n-1})}{dx} + a_2\frac{d(x^{n-2})}{dx} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{d(x)}{dx}$$

(22) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} \qquad (23)$$

例 (1)　$y = 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5$

$$\frac{dy}{dx} = 2\times5x^{5-1} - 3\times3x^{3-1} + 4\times2x^{2-1}$$

$$= 10x^4 - 9x^2 + 8x$$

例 (2) 地球上落體運動ニ關スル公式

$$s = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$

ヨリ t 秒後ノ速度ヲ v トセバ

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 + gt$$

此式ニ $t=0$ ト置ケバ首速度

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = v_0$$

ヲ得ベク $t=1$, $t=2$, ……ト置ケバ夫々一秒後二秒後ニ於ケル速度

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_1 = v_0+g$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = v_0+2g$$

……　……

ヲ得ベク尚又加速度ヲ a トセバ

$$v = v_0+gt$$

ヨリ

$$a = \frac{dv}{dt} = g$$

ヲ得ベシ。

[III] 有理代數函數

$$y = \frac{f(x)}{\phi(x)}$$

有理代數函數ノ微分係數

$$f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$$\phi(x) = b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots\cdots+b_{m-1}x+b_m$$

(18) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\phi(x)f'(x)-f(x)\phi'(x)}{\{\phi(x)\}^2} \qquad (24)$$

例

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$f(x) = x^2+1 \qquad \phi(x) = x^2-1$$

$$f'(x) = 2x \qquad \phi'(x) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

[IV] $y = u^n$　$u=f(x)$　n ガ有理數

u = f(x)　　y = f(x)^n

(21) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(u^n)}{du}\frac{du}{dx}$$

(22) ニヨリ

u^n ノ微分係數

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \qquad (25)$$

例　$y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$x^2-1 = u$ ト置カバ

$$y = u^{-\frac{1}{2}} \ , \quad u = x^2-1 \ , \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}.2x = -\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$f(a+x)$ ノ微分係數

[V]　$y = f(a+x)$

$$y = f(u) \ , \quad u = a+x \ , \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)$$

$$\frac{df(a+x)}{dx} = f'(a+x) \qquad (26)$$

例　$y = \sqrt{(x-1)} = (x-1)^{\frac{1}{2}} = f(x-1)$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x-1) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$f(kx)$ ノ微分係數

[VI]　$y = f(kx)$

$$y = f(u) \ , \quad u = kx \ , \quad \frac{du}{dx} = k$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = kf'(u)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}[f(kx)] = kf'(ku) \qquad (27)$$

例　$y = \sqrt{(8x)} = (8x)^{\frac{1}{2}} = f(8x)$

$$\frac{dy}{dx} = 8f'(8x) = 8\frac{3}{2}(8x)^{\frac{1}{2}} = 12(8x^{\frac{1}{2}} = 24\sqrt{2x}$$

第二十一節　指數函數ノ微分法

[I]　$y = e^x$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\frac{e^h-1}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname*{Lim}_{h=0} e^x\frac{e^h-1}{h}$$

指數函數ノ微分係數(一)

節定理II)ニヨリ

$$=e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}$$

第九節(1)ニヨリ $\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$

$$\therefore\ \frac{d(e^x)}{dx}=e^x \qquad (28)$$

指數函數ノ微分係數(二)

[II] $y=e^{kx}$

(27)ト(28)トニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=ke^{kx} \qquad (29)$$

特ニ $k=-1$ ト置ケバ

$$\frac{d}{dx}(e^{-x})=-e^{-x}$$

指數函數ノ微分係數(三)

[III] $y=a^x=e^{x\log a}$ a 正數

(29)ニ $k=\log a$ ト置ケバ

$$\frac{d(a^x)}{dx}=\log a.e^{x\log a}=a^x\log a \qquad (30)$$

指數函數ノ微分係數(四)

[IV] $y=a^{kx}$

(27)ト(30)トニヨリ

$$\frac{d(a^{kx})}{dx}=ka^{kx}\log a \qquad (31)$$

第二十二節 對數函數ノ微分法

對數函數ハ指數函數ノ反函數ナレバ公式(20)ヲ適用シテ其微分係數ヲ求メ得ベシ。

$$y=\log_a x,\quad x=a^y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

(30)ニヨリ

$$\frac{dx}{dy}=a^y\log a$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^y\log a}=\frac{1}{x\log a}=\frac{1}{x}\log_a e$$

對數函數ノ微分係數(一)

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x\log a} = \frac{1}{x}\log_a e$$

特ニ $a=e$

對數函數ノ微分係數(二)

$$\frac{d(\log x)}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (32)$$

然レド對數函數ノ微分係數ハ次ノ如ク直接ニモ求メ得ベシ。

$$y = \log_a x$$

$$\triangle y = \log_a(x+h) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x}\,\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

$\frac{h}{x} = v$ ト置ケバ

$$= \frac{1}{x}\,\frac{\log_a(1+v)}{v}$$

$h=o$ ナルトキハ $v=o$ ナリ。

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\,\mathrm{Lim}\,\frac{\log_a(1+v)}{v}$$

(7) ニヨリ

$$= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log a}$$

第二十三節　圓函數ノ微分法

(I)　$y = \sin x$

$$\triangle y = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathop{\mathrm{Lim}}_{h=0}\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right)$$

第八節定理(II)ニヨリ

$$= \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \operatorname*{Lim}_{h=0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$\frac{h}{2} = \theta$ ト置ケバ

$$= \operatorname*{Lim}_{\theta=0} \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \operatorname*{Lim}_{\theta=0} \cos(x+\theta)$$

x ガ角ノ弧度ヲ表ストキハ三角法ノ定理(新撰三角法公式(102)p115)ニヨリ

$$\operatorname*{Lim}_{\theta=0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

$$\operatorname*{Lim}_{\theta=0} \cos(x+\theta) = \cos x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

正弦ノ微分係數

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \qquad (33)$$

[II] $y = \cos x$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{-2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= -\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \operatorname*{Lim}_{h=0} \sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = -\sin x$$

餘弦ノ微分係數

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x \qquad (34)$$

[III] $y = \tan x$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} = \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \frac{\sin h}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname*{Lim}_{h=0} \left\{\frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \frac{\sin h}{h}\right\}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{\sin h}{h}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

正切ノ微分係數

$$\therefore \quad \frac{d(\tan x)}{dx} = \sec^2 x \qquad (35)$$

コハ又(18)ニヨリ(33)(34)ヲ用ヰテ導キ得ベシ。

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \dfrac{d(\sin x)}{dx} - \sin x \dfrac{d(\cos x)}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

〔IV〕 $y = \cot x$

〔III〕ト同様ニシテ

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{cosec}^2 x$$

餘切ノ微分係數

$$\frac{d(\cot x)}{dx} = -\mathrm{cosec}^2 x \qquad (36)$$

〔V〕 $y = \sec x$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h \cos x \cos(x+h)}$$

$$= \frac{2\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h\cos x\cos(x+h)} = \frac{\sin\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{\cos x\cos(x+h)} \frac{\sin\dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

正割ノ微分係數

$$\frac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \tan x \qquad (37)$$

コハ又(19)ト(34)トニヨリテ導キ得ベシ

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 x}\frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

〔VI〕 $y = \mathrm{cosec}\, x$

〔V〕ト同様ニシテ

餘割ノ微分係數

$$\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}x\cot x$$

$$\frac{d(\operatorname{cosec}x)}{dx}=-\operatorname{cosec}x\cot x \qquad (38)$$

第二十四節　反圓函數ノ微分法

x ガ y ノ圓函數ナレバ y ハ x ノ反圓函數ナリ。反圓函數ハ總テ複値函數ニシテ三角法(新撰三角法公式(94)p.109)ニ見ル如ク

$x=\sin\alpha$ ナレバ　$\sin^{-1}x=n\pi+(-1)^n\alpha$

$x=\cos\alpha$　:　$\cos^{-1}x=2n\pi\pm\alpha$

$x=\tan\alpha$　:　$\tan^{-1}x=n\pi+\alpha$

$x=\cot\alpha$　:　$\cot^{-1}x=n\pi+\alpha$

$x=\sec\alpha$　:　$\sec^{-1}x=2n\pi\pm\alpha$

$x=\operatorname{cosec}\alpha$　:　$\operatorname{cosec}^{-1}x=n\pi+(-1)^n\alpha$

但シ n ハ　若クハ整數ヲ表ス。

[I]　$y=\sin^{-1}x$

反正弦ノ微分係數

$$x=\sin y$$

(33) ニヨリ　$\dfrac{dx}{dy}=\cos y$

(20) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore\ \frac{d(\sin^{-1}x)}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (39)$$

但シ $\pm$ ハ $\cos y$ ノ $\pm$ ニ從フ。故ニ

$-\dfrac{\pi}{2}<\sin^{-1}x<\dfrac{\pi}{2}$ ナレバ　$\dfrac{d(\sin^{-1}x)}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\dfrac{\pi}{2}<\sin^{-1}x<\dfrac{3\pi}{2}$ ナレバ　$\dfrac{d(\sin^{-1}x)}{dx}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

[II]　$y=\cos^{-1}x$

$$x=\cos y$$

反餘弦ノ微分係數

(34) ニヨリ

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = \mp\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{d(\cos^{-1}x)}{dx} = \mp\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{40}$$

但シ干號ハ $\sin y$ ノ　ニ從フ故ニ

$0 < \cos^{-1}x < \pi$ ナレバ $\dfrac{d(\cos^{-1}x)}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\pi > \cos^{-1}x < 2\pi$ ナレバ $\dfrac{d(\cos^{-1}x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

[III] $y = \tan^{-1}x$

$x = \tan y$

(35) ニヨリ

反正切ノ微分係數

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 x = 1+x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d(\tan^{-1}x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \tag{41}$$

[IV] $y = \cot^{-1}x$

$x = \cot y$

(36) ニヨリ

反餘切ノ微分係數

$$\frac{dx}{dy} = -\mathrm{cosec}^2 y = -(1+x^2)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d(\cot^{-1}x)}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} \tag{42}$$

[V] $y = \sec^{-1}x$

反正割ノ微分係數

$$x = \sec y$$

(37) ニヨリ

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \tan y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d(\sec^{-1}x)}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad (43)$$

但シ±號ハ $\tan y$ ノ±ニ從フ。故ニ

$0 < \sec^{-1}x < \frac{\pi}{2}$ 若クハ $\pi < \sec^{-1}x < \frac{3\pi}{2}$ ナレバ

$$\frac{d(\sec^{-1}x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$\frac{\pi}{2} < \sec^{-1}x < \pi$ 若クハ $\frac{3\pi}{2} < \sec^{-1}x < 2\pi$ ナレバ

$$\frac{d(\sec^{-1}x)}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

反餘割ノ微分係數

〔VI〕 $$y = \operatorname{cosec}^{-1}x$$

$$x = \operatorname{cosec} y$$

(38) ニヨリ

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec} y \cot y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{cosec} y \cot y} = \mp\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad (44)$$

但シ∓號ハ $\cot y$ ノ±ニ從フ。故ニ

$0 < \operatorname{cosec}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$ 若クハ $\pi < \operatorname{cosec}^{-1}x < \frac{3\pi}{2}$ ナレバ

$$\frac{d(\operatorname{cosec}^{-1}x)}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$\frac{\pi}{2} < \operatorname{cosec}^{-1}x < \pi$ 若クハ $\frac{3\pi}{2} < \operatorname{cosec}^{-1}x < 2\pi$ ナレバ

$$\frac{d(\operatorname{cosec}^{-1}x)}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

第二十五節　双曲線函數ノ微分法

双曲線正弦ノ微分係数

[I]　$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

(11) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(e^x)}{dx} - \frac{1}{2}\frac{d(e^{-x})}{dx}$$

(28) ト (29) トニヨリ

$$= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh x$$

$$\frac{d(\sinh x)}{dx} = \cosh x \qquad (45)$$

或ハ直接ニ

$$\triangle y = \sinh(x+h) - \sinh x = 2\cosh\left(x+\frac{h}{2}\right)\sinh\frac{h}{2}$$

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \cosh\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sinh\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\operatorname*{Lim}_{h=0}\frac{\sinh\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \operatorname*{Lim}_{\theta=0}\frac{\sinh\theta}{\theta}$$

$$= \operatorname*{Lim}_{\theta=0}\left(1+\frac{\theta^2}{\underline{|3}}+\frac{\theta^4}{\underline{|5}}+\cdots\cdots\right) = 1$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \cosh x$$

$$\frac{d(\sinh x)}{dx} = \cosh x \qquad (45)$$

双曲線餘弦ノ微分係数

[II]　$y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(e^x)}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d(e^{-x})}{dx}$$

$$= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh x$$

$$\therefore\ \frac{d(\cosh x)}{dx} = \sinh x \qquad (46)$$

[III]　$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

(18) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x\frac{d}{dx}(\sinh x) - \sinh x\frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh^2 x}$$

(45) (46) ニヨリ

双曲線正切ノ微分係數

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d(\tanh x)}{dx} = \operatorname{sech}^2 x \qquad (47)$$

[IV] $y = \coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$

[III] ト同様ニシテ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x$$

双曲線餘切ノ微分係數

$$\therefore \quad \frac{d(\coth x)}{dx} = -\operatorname{cosech}^2 x \qquad (48)$$

[V] $y = \operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

(19) ト (46) トニヨリ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cosh^2 x}\frac{d}{dx}(\cosh x) = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech} x \tanh x$$

双曲線正割ノ微分係數

$$\therefore \quad \frac{d(\operatorname{sech} x)}{dx} = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad (49)$$

[VI] $y = \operatorname{cosech} x = \dfrac{1}{\sinh x}$

[V] ト同様ニシテ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cosech} x \coth x$$

双曲線餘割ノ微分係數

$$\therefore \quad \frac{d(\operatorname{cosech} x)}{dx} = -\operatorname{cosech} x \coth x \qquad (50)$$

第二十六節　反双曲線函數ノ微分法

[I] $y = \sinh^{-1} x$ ，$x = \sinh y$

(45) ニヨリ

$$\frac{dx}{dy} = \cosh y$$

反双曲線正弦ノ微分係数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cosh y}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

但シ $\cosh y$ ハ常ニ正ナル故根號ハ正ヲ取ル。

$$\therefore\quad \frac{d(\sinh^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (51)$$

[II] $y=\cosh^{-1}x \ ,\quad x=\cosh y$

(46) ニヨリ

反双曲線餘弦ノ微分係数

$$\frac{dx}{dy}=\sinh y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sinh y}=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore\quad \frac{d(\cosh^{-1}x)}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (52)$$

但シ±號ハ $\sinh y$ ノ±ニ從フ。即チ $y>0$ ナレバ+ヲ取リ $y<0$ ナレバ－ヲ取ル。

[III] $y=\tanh^{-1}x \ ,\quad x=\tanh y$

(47) ニヨリ

反双曲線正切ノ微分係数

$$\frac{dx}{dy}=\operatorname{sech}^2 y=1-x^2$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{d(\tanh^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{1-x^2} \qquad (53)$$

[IV] $y=\coth^{-1}x,\ x=\coth y$

(48) ニヨリ

反双曲線餘切ノ微分係数

$$\frac{dx}{dy}=-\operatorname{cosech}^2 y=-(x^2-1)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2-1}$$

$$\therefore\quad \frac{d(\coth^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{1-x^2} \qquad (54)$$

[V] $y=\operatorname{sech}^{-1}x,\quad x=\operatorname{sech} y$

(49) ニヨリ

反双曲線正割ノ微分係數

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{sech}y\tanh y$$

$$\therefore\quad \frac{d(\operatorname{sech}^{-1}x)}{dx} = \mp\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

但シ干號ハ $\tanh y$ ノ±即チyノ±ニ從フ。

反双曲線餘割ノ微分係數

(50) [VI] ニヨリ

$$y = \operatorname{cosech}^{-1}x,\quad x = \operatorname{cosech}y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosech}y\coth y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosech}y\coth y} = \mp\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore\quad \frac{d(\operatorname{cosech}^{-1}x)}{dx} = \mp\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad (55)$$

但シ干號ハ $\coth y$ ノ±即チyノ±ニ從フ。

第二十七節　對數微分法

複雜ナル函數ノ微分係數ヲ求ムルニ當リ此法ヲ用ヰテ大ニ便ナルコアリ、例

對數微分法

ヘバ

$$y^m = \frac{u_1u_2u_3\cdots\cdots}{v_1v_2v_3\cdots\cdots}$$

ヨリ $\frac{dy}{dx}$ ヲ求メンニ先ヅ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$m\log y = \log u_1+\log u_2+\log u_3+\cdots\cdots -\log v_1-\log v_2-\log v_3-\cdots\cdots$$

兩邊ノ微分係數ヲ取レバ(21)及ビ(32)ニヨリ

$$\frac{m}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\frac{1}{u_3}\frac{du_3}{dx}+\cdots\cdots -\frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}-\frac{1}{v_2}\frac{dv_2}{dx}-\frac{1}{v_3}\frac{dv_3}{dx}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{m}\left(\frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx}+\frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx}+\frac{1}{u_3}\frac{du_3}{dx}+\cdots\cdots -\frac{1}{v_1}\frac{dv_1}{dx}-\frac{1}{v_2}\frac{dv_2}{dx}-\frac{1}{v_3}\frac{dv_3}{dx}-\cdots\cdots\right) \qquad (56)$$

積ノ微分係數ノ公式(17)モ亦此法ニヨリテ容易ニ導キ得ベシ。

$$y = uvw \ldots\ldots\ldots$$

$$\log y = \log u + \log v + \log w + \ldots\ldots\ldots$$

兩邊ノ微分係數ヲ取レバ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{w}\frac{dw}{dx} + \ldots\ldots\ldots$$

例(1)　$y^2 = a^2 - x^2$ ノ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求ム。

$$y^2 = (a-x)(a+x)$$

$$2\log y = \log(a-x) + \log(a+x)$$

$$\frac{2}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{a-x} + \frac{1}{a+x} = \frac{-2x}{a^2-x^2}$$

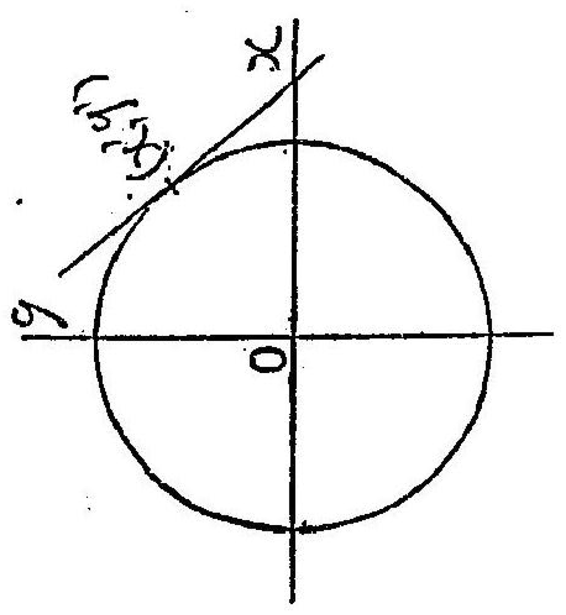
$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{a^2-x^2} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

コハ又(21)ニヨリテ求ムルモ

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

此曲線ハ原點Oヲ中心トセル圓ニシテ從テ圓周上ノ一點(x', y')ニ於テハ



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)' = -\frac{x'}{y'}$$

ナリ。依テ此點ニ於ケル切線ノ方程式ハ第十二節ノ公式ヨリ

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$$

即チ　$$yy' - y'^2 = -xx' + x'^2$$

$$yy' + xx' = x'^2 + y'^2$$

(x', y')點ガ圓上ノ點ナルニヨリ

$$x'^2 + y'^2 = a^2$$

從テ切線ノ方程式ハ

$$xx' + yy' = a^2$$

例(2)　$$y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\log y = \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\log(1-x^2)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{-2x}{1-x^2}$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1-x^2} = \frac{2x}{(1+x^2)(1-x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{2x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

第二十八節　u^v ノ微分法

コハ對數微分法ニヨルヲ善トス。

$$y = u^v$$

$$\log y = v\log u$$

兩邊ノ微分係數ヲ取レバ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log u.\frac{dv}{dx} + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\therefore\quad \frac{d(u^v)}{dx} = u^v\left\{\log u.\frac{dv}{dx} + \frac{v}{u}\frac{du}{dx}\right\} \qquad (57)$$

特ニ　$v=n$ トセバ $\dfrac{dv}{dx} = o$

$y = u^n$

$$\therefore\quad \frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

之レ(25)ト同結果ナリ。又 $u=a$ トセバ $\dfrac{du}{dx} = o$

$y = a^v$

$$\therefore\quad \frac{d(a^v)}{dx} = a^v\log a\frac{dv}{dx} \qquad (58)$$

例(1)　$y = x^x$

$$\log y = x\log x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + \frac{x}{x} = \log x + 1$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1)$$

例(2)　$y=(x^2-1)^{a\log x}$

$$\log y = a\log x.\ \log(x^2-1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{a}{x}\log(x^2-1)+a\log x\frac{2x}{x^2-1}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{a}{x}\log(x^2-1).\ (x^2-1)^{a\log x}+a\log x\frac{2x}{x^2-1}(x^2-1)^{a\log x}$$

$$=\frac{a}{x}(x^2-1)^{a\log x}\log(x^2-1)\frac{2ax}{x^2-1}(x^2-1)^{a\log x}\ \log x$$

第二十九節　$\left.\begin{matrix}y=f(t)\\x=\phi(t)\end{matrix}\right\}$ ノ微分法

$y=f(t)$ $x=\phi(t)$ 係數ノ微分

$y=f(t)$, $x=\phi(t)$

ノ x ハ t ノ函數ナルヲ以テ逆ニ t ハ x ノ函數ナリ。而シテ y ハ　ノ函數ナレバ

(21) ヲ適用シテ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

從テ又 (20) ニヨリ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\qquad(59)$$

例 (1)　$y=a(1-\cos\theta)$,　$x=a(\theta-\sin\theta)$

$$\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta,\qquad\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\cot\frac{\theta}{2}$$

例 (2)　$\left.\begin{matrix}v=v_0+gt\\s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2\end{matrix}\right\}$ ヨリ $\frac{dv}{ds}$ ヲ求ム。

$$\frac{dv}{dt}=g,\qquad\frac{ds}{dt}\quad v_0+gt$$

$$\frac{dv}{ds}=\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{g}{v_0+gt}=\frac{g}{v}$$

第三十節　複雜ナル函數ノ微分法ノ例

例 (1)　$y=\sin ax$

$$y=\sin u,\quad u=ax,\quad\frac{du}{dx}=a$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=a\cos u.=a\cos ax$$

例(2)　$y=\sin^n x$

$$y=u^n,\quad u=\sin x,\quad \frac{du}{dx}=\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}=n\sin^{n-1}x\cos x$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{du}$

$=e^x,$

例(3)　$y=x^2\cos x$

$$y=uv,\quad u=x^2,\quad v=\cos x$$

$\frac{dy}{dx}=ny^{n-1}$

$$\frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{dv}{dx}=-\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}=x^2(-\sin x)+\cos x.2x$$

$$=2x\cos x-x^2\sin x$$

例(4)　$y=e^x\cos x$

$$y=uv,\quad u=e^x,\quad v=\cos x$$

$$\frac{du}{dx}=e^x,\quad \frac{dv}{dx}=-\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}=e^x(-\sin x)+\cos x.e^x$$

$$=e^x(\cos x-\sin x)$$

例(5)　$y=e^{\sin x}$

$$y=e^u,\quad u=\sin x,\quad \frac{du}{dx}=\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=e^u\cos x=e^{\sin x}\cos x$$

例(6)　$y=e^{ax}\cos mx$

$$\frac{dy}{dx}=e^{ax}\frac{d(\cos mx)}{dx}+\cos mx\frac{d(e^{ax})}{dx}$$

$$=e^{ax}(-m\sin mx)+\cos mx.ae^{ax}$$

$$=e^{ax}\{a\cos mx-m\sin mx\}$$

例(7)　$y=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$

$$y=\frac{u}{v},\quad u=1+x+x^2,\quad v=1-x+x^2$$

$$\frac{du}{dx}=1+2x,\quad \frac{dv}{dx}=-1+2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}=\frac{(1+2x)(1-x+x^2)-(2x-1)(1+x+x^2)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$=\frac{2(1-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$$

例 (8)　$y=\log\sin x$

$$y=\log u,\quad u=\sin x,\quad \frac{du}{dx}=\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cos x=\cot x$$

例 (9)　$y=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\log(1-x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2\pm1}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}\left\{1+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2\pm1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2\pm1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm1}}\left\{1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm1}}$$

例 (10)　$y=\sin(\log x)$

$$y=\sin u,\quad u=\log x,\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\cos u.\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cos(\log x)$$

例 (11)　$y=\log(\tanh x)$

$$y=\log u,\quad u=\tanh x,\quad \frac{du}{dx}=\mathrm{sech}^2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\mathrm{sech}^2 x = \frac{1}{\tanh x}\mathrm{sech}^2 x = \frac{1}{\sinh x \cosh x}$$

$$= \frac{1}{\sinh 2x} = 2\mathrm{cosech} 2x$$

例 (12)　$y = \cosh x \cos x + \sinh x \sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\cosh x \cos x\right) + \frac{d}{dx}\left(\sinh x \sin x\right)$$

$$= \cos x \frac{d(\cosh x)}{dx} + \cosh x \frac{d(\cos x)}{dx}$$

$$+ \sin x \frac{d(\sinh x)}{dx} + \sinh x \frac{d(\sin x)}{dx}$$

$$= \cos x \sinh x - \cosh x \sin x$$

$$+ \sin x \cosh x + \sinh x \cos x$$

$$= 2\sinh x \cos x$$

$\frac{d(\cosh x)}{dx} = \sinh x$

例 (13)　$y = \sin^{-1}(1-x) \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} \frac{d(1-x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

例 (14)　$y = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a^2}{a^2+x^2}\frac{1}{a} = \frac{a}{a^2+x^2}$$

例 (15)　$y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-1}{1+x^2}$$

例 (16)　$y = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$　,　$0 < y < \pi$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{(1+x^2)\frac{d(1-x^2)}{dx} - (1-x^2)\frac{d(1+x^2)}{dx}}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} \frac{\{(1+x^2)(-2x)-(1-x^2)(2x)\}}{(1+x^2)}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{4x^2}} \frac{-4x}{1+x^2}$$

$$= \frac{4x}{2x(1+x^2)} = \frac{2}{(1+x^2)}$$

例 (17) $y = \cot^{-1}(\sinh x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\sinh^2 x} \frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{1}{1+\sinh^2 x} \cosh x$$

$$= \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x$$

例 (18) $y = \tanh^{-1}(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\sin^2 x} \frac{d(\sin x)}{dx} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

例 (19) $y = \tan\frac{1+x^n}{1-x^n}$

$$y = \tan u\ ,\ u = \frac{1+x^n}{1-x^n}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 u\ \frac{du}{dx} = \sec^2 u\ \frac{(1-x^n)\frac{d}{dx}(1+x^n)-(1+x^n)\frac{d}{dx}(1-x^n)}{(1-x^n)^2}$$

$$= \sec^2 u . \frac{nx^{n-1}(1-x^n)+nx^{n-1}(1+x^n)}{(1-x^n)^2}$$

$$= \frac{2nx^{n-1}}{(1-x^n)} \sec^2\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)$$

例 20) $y = \frac{\cosh x}{\cos x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\cosh x) - \cosh x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \sinh x + \cosh x \sin x}{\cos^2 x}$$

例 (21) $y = x^{x^x}$

$\log y = x^x \log x$.

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x^x\frac{1}{x} + \log x \,.\, \frac{d(x^x)}{dx}$$

$$\frac{d(x^x)}{dx} = x^x(\log x+1) \qquad \text{(第廿八節例(1))}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x\left\{\frac{1}{x} + \log x(\log x+1)\right\}$$

例(22)

$$y = \frac{\sqrt{ax(x-3a)}}{\sqrt{(x-4a)}}$$

$$\log y = \frac{1}{2}\Big\{\log a + \log x + \log(x-3a) - \log(x-4a)\Big\}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{0 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-3a} - \frac{1}{x-4a}\right\}$$

$$= \frac{(x-3a)(x-4a)+x(x-4a)-x(x-3a)}{2x(x-3a)(x-4a)}$$

$$= \frac{x^2-8ax+12a^2}{2x(x-3a)(x-4a)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a}\,(x^2-8ax+12a^2)}{2\{x(x-3a)\}^{\frac{1}{2}}(x-4a)^{\frac{3}{2}}}$$

例(23)

$$y = \sin x \,.\, \tan^{-1}x \,.\, a^x\log x$$

$$\log y = \log\sin x + \log\tan^{-1}x + x\log a + \log\{\log x\}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2} + \log a + \frac{1}{\log x}\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \,.\, \tan^{-1}x \,.\, a^x\log x + \frac{\sin x\ a^x\log x}{1+x^2}$$

$$+\sin x\tan^{-1}x \,.\, a^x\log a\log x + \frac{\sin x\tan^{-1}x \,.\, a^x}{x}$$

第五章　疊次微分係數

第三十一節　疊次微分係數ノ定義

前節諸例ニ於テ見ルカ如ク單變數函數

$$y = f(x)$$

ノ微分係數ハ又一般ニxノ可微分函數ナレハ其微分係數ヲ求ムルヿヲ得ヘシ。之レヲ原函數yノ第二又ハ二階微分係數ト呼ビ之レニ對シテ始メノ微分係數

第一微分係數
第二微分係數
疊次微分係數

ヲ第一又ハ一階微分係數ト呼ブ。尙第二微分係數ハ又一般ニxノ可微分函數ニシテ從テ其微分係數ヲ求ムルコヲ得ベシ。之レヲ原函數ノ第三又ハ三階微分係數ト呼ブ。以下之ニ倣フ。此等ノ各階微分係數ヲ總稱シテ原函數ノ疊次微分係數ト呼ブ。

此定義ニ從ヘバ原函數ノ第二微分係數ハ第一微分係數ノ第一微分係數ニシテ原函數ノ第三微分係數ハ第一微分係數ノ第二微分係數ニシテ第二微分係數ノ第一微分係數ナリ。一般ニ原函數ノ第$p+q$微分係數ハ第p微分係數ノ第q微分係數ナリ。通常第一、第二、第三、……微分係數ヲ表スニ夫々

$$\frac{dy}{dx}\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ \frac{d^3y}{dx^3}\ ,\ \cdots\cdots$$

ナル記號ヲ以テス。或ハ又

$$Dy\ ,\ D^2y\ ,\ D^3y\ ,\ \cdots\cdots$$

$$f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ f'''(x)\ ,\ \cdots\cdots$$

$$y'\ ,\ y''\ ,\ y'''\ ,\ \cdots\cdots$$

ヲ用ヰルコアリ。

例 (1) 運動ノ速度ヲvトシ加速度ヲαトセバ

$$v=\frac{ds}{dt}\ ,\quad \alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\quad 從テ\quad s=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$$

ナル地球上落躰運動ニ於テハ

$$\frac{ds}{dt}=v_0+gt\ ,\ \frac{d^2s}{dt^2}=g$$

ニシテ加速度gナル等加速運動ナリ。

例 (2)

$$s=a\cos(nt+b)$$

ナル運動ノ速度ハ

$$\frac{ds}{dt}=-an\sin(nt+b)$$

加速度ハ

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-an^2\cos(nt+b)=-n^2s$$

故ニ此運動ハ加速度ガ固定點$(s=0)$ニ向ヒ。且ツ其點ヨリノ距離ニ正比例スル運動即チ單一弦運動ナリ。

例 (3)

$$y=x^n$$

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n}=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)x^{m-n}$$

$m=\dfrac{1}{2}$ トセバ

$$\frac{d^n(\sqrt{x})}{dx^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)x^{\frac{1}{2}-n}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)x^{-(n-\frac{1}{2})}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-3)}{2^nx^{n-\frac{1}{2}}}$$

m ガ正整數ナレバ

$$\frac{d^my}{dx^m}=\underline{|m}\ ,\quad \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}=0\ ,\quad \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}=0\ ,\ \cdots\cdots$$

例(4)　$y=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}x+a_m$

$$\frac{dy}{dx}=ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\ \cdots\ +a_{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)a_0x^{m-2}+(m-1)(m-2)a_1x^{m-3}+\ \cdots\cdots+2a_{m-2}$$

....

$$\frac{d^my}{dx^m}=m(m-1)(m-2)\cdots\cdots3.2.1\,a_0=\underline{|m}\,a_0$$

$$\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}=0\ ,\quad \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}=0\ ,\ \cdots\cdots$$

例(5)　$y=\dfrac{1}{x^m}=x^{-m}$

例(3)ノ m ニ $-m$ ヲ置ケバ

$$\frac{d^ny}{dx^n}=-m(-m-1)(-m-2)\cdots\cdots(-m-n+1)x^{-m-n}$$

$$=(-1)^n\frac{m(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+n-1)}{x^{m+n}}$$

特ニ　$m=\dfrac{1}{2}$ トセバ

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = (-1)^n\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}{x^{\frac{1}{2}+n}}$$

$$= (-1)^n\frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{2^n x^{n+\frac{1}{2}}}$$

例 (6)

$$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x\log a$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^x(\log a)^2$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^x(\log a)^n$$

例 (7)

$$y = e^{ax}$$

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2e^{ax}$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n} = a^ne^{ax}$$

例 (8)

$$y = \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(-1)(-2)}{x^3} = (-1)^2\frac{\underline{|2}}{x^3}$$

....

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{\underline{|n-1}}{x^n}$$

例 (9)

$$y = \sin mx$$

$$\frac{dy}{dx} = m\cos mx = m\sin\left(mx+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2\cos\left(mx+\frac{\pi}{2}\right) = m^2\sin\left(mx+\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m^3\cos\left(mx+\frac{2\pi}{3}\right) = m^3\sin\left(mx+\frac{3\pi}{2}\right)$$

....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n \sin\left(mx + \frac{n\pi}{2}\right)$$

特ニ　$m = 1$ トセバ

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{3}\right)$$

例(10)　$y = \cos mx$

同様ニシテ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n \cos\left(mx + \frac{n\pi}{2}\right)$$

特ニ　$m = 1$ トセバ

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

例(11)　$y = e^{ax}\cos bx$

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$$

$$= e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx)$$

$\frac{b}{a} = \tan\phi$ ト置ケバ

$$b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\phi \ , \quad a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\phi$$

$$\frac{dy}{dx} = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax}\cos(bx+\phi)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (a^2+b\ )^{\frac{1}{2}} e^{ax}\{a\cos(bx+\phi) - b\sin(bx+\phi)\}$$

$$= (a^2+b^2)\, e^{ax}\cos(bx+2\phi)$$

....

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+n\phi)$$

例(12)　$y = e^{ax}\sin bx$

同様ニシテ

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+n\phi)$$

例(13)　$y = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\frac{1}{x} = \tan y \qquad x = \cot y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-1}{1+x^2}=-\sin^2 y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{d}{dx}(\sin^2 y)=-\frac{d(\sin^2 y)}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$=\sin^2 y\frac{d(\sin^2 y)}{dy}=2\sin^2 y\sin y\cos y$$

$$=\sin^2 y\sin 2y$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}(\sin^2 y\sin 2y)=\frac{d}{dy}(\sin^2 y\sin 2y)\frac{dy}{dx}$$

$$=\sin^2 y\frac{d}{dy}(\sin^2 y\sin 2y)$$

$$=-\sin^2 y\{2\sin y\cos y\sin 2y+2\cos 2y\sin^2 y\}$$

$$=-2\sin^3 y\sin 3y.$$

同様ニシテ

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\underline{|3}\sin^4 y\sin 4y$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^n\underline{|n-1}\sin^n y\sin ny$$

例(14)　$y=\tan^{-1}x$

$$\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore\ \frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^{n-1}\underline{|n-1}\sin^n z\sin nz\ ,\quad z=\cot^{-1}x$$

第三十二節　らいぷにっつノ定理

x ノ二函數

$$u=f(x)\ ,\quad v=\phi(x)$$

ノ積 uv ノ第 n 微分係數ニ關スルらいぷにっつ(Leibnitz)ノ定理トハ

$$y=uv$$

らいぶにっつノ定理

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^ny}{dx^n} &= u\frac{d^nv}{dx^n}+n\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\ &+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\frac{d^ru}{dx^r}\frac{d^{n-r}v}{dx^{n-r}}+\qquad+n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx}+\frac{d^nu}{dx^n}v\end{aligned}\right\}(60)$$

ノ如クナリ。

（證明）　$y=uv$

$y'=uv'+u'v$

$y''=uv''+u'v'+u'v'+u''v=uv''+2u'v'+u''v$

$y'''=uv'''+u'v''+2u'v''+2u''v'+u''v'+u'''v$

$\quad=uv'''+3u'v''+3u''v'+u'''v$

此右邊ノ各係數ハ夫々$(a+b)^3$ノ展開ノ各係數ニ等シ。今假リニ同ジ規則ガ$y^{(n)}$ニ就テ成立スルモノトセバ

$$y^{(n)}=uv^{(n)}+nu'v^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}u''v^{(n-2)}+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}u^{(r)}v^{(n-r)}$$
$$+\cdots\cdots+nu^{(n-1)}v'+u^{(n)}v$$

此兩邊ノ微分係數ヲ取レバ

$$y^{(n+1)}=uv^{(n+1)}+u'v^{(n)}+n(u'v^{(n)}+u''v^{(n-1)})$$
$$+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(u''v^{(n-1)}+u'''v^{(n-2)})+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}(u^{(r)}v^{(n-r+1)}+u^{(r+1)}v^{(n-r)})$$
$$+(u^{(n)}v'+u^{(n+1)}v)$$
$$=uv^{(n+1)}+(n+1)u'v^{(n)}+\left(n+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\right)u''v^{(n-1)}+\cdots\cdots$$
$$+\left(\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}\right)u^{(r)}v^{(n-r+1)}+\cdots\cdots+u^{(n+1)}v$$

而シテ

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}=\frac{\underline{|n}\,(r+n-r+1)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}$$
$$=\frac{\underline{|n}\,(n+1)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}=\frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n+1-r}}$$

$$\therefore\quad y^{(n+1)}=uv^{(n+1)}+(n+1)u'v^{(n)}+\frac{(n+1)n}{\underline{|2}}u''v^{(n-1)}+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n+1-r}}u^{(r)}v^{(n+1-r)}$$
$$+\cdots\cdots+u^{(n+1)}v$$

斯クnニ就テ公式ヲ眞實ナリト假定セバ同公式ハ又$(n+1)$ニ就テモ眞實ナルヿヲ知レリ。然ルニ先ニ$n=3$ニ就テ此公式ノ成立スルヿヲ證明セリ。故ニ$n=4$ニ就テモ此公式ハ成立スベク。從テ$n=5,6,\cdots\cdot$即チ一般ニ此公式ノ眞實ナルヿヲ斷言シ得ベシ。

例(1)　$y=xv$

公式中ニ$u=x$ト置ケバ．

$$u'=1\ ,\quad u''=0\ ,\quad u'''=0\ ,\quad \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \frac{d^ny}{dx^n}=x\frac{d^nv}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}$$

例(2)　$v=\sin mx$ トセバ　$y=\ \sin mx$

$$\frac{d^nv}{dx^n}=m^n\sin(mx+\frac{n\pi}{2})$$ （前節例(9)）

$$\therefore\quad \frac{d^ny}{dx^n}=m^nx\sin(mx+\frac{n\pi}{2})+nm^{n-1}\sin(mx+\frac{(n-1)\pi}{2})$$

例(3)　$v=\log x$ トセバ　$y=x\log x$

$$\frac{d^nv}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{|\underline{n-1}}{x^n}$$ （前節例(8)）

$$\therefore\quad \frac{d^ny}{dx^n}=x(-1)^{n-1}\frac{|\underline{n-1}}{x^n}+n(-1)^{n-2}\frac{|\underline{n-2}}{x^{n-1}}$$

$$=(-1)^n\frac{|\underline{n-2}\,(n-n+1)}{x^{n-1}}=(-1)^n\frac{|\underline{n-2}}{x^{n-1}}$$

例(4)　v　　セバ　$y=xe^x$

$$\frac{d^nv}{dx^n}=e^x$$

$$\therefore\quad \frac{d^ny}{dx^n}=xe^x+ne^x=e^x(x+n)$$

例(5)　$y=x^2e^x$

$$u=x^2\qquad v=e^x$$

$$\frac{du}{dx}=2x\ ,\quad \frac{d^2u}{dx^2}=2\ ,\quad \frac{d^3u}{dx^3}=0\ ,\quad \cdots\cdots\ ,\quad \frac{d^nv}{dx^n}=e^x$$

$$\therefore\quad \frac{d^ny}{dx^n}=x^2e^x+n.2x\,e^x+\frac{n(n-1)}{|\underline{2}}2e^x$$

$$=e^x\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)$$

例(6)．　$y=ue^{ax}$，　$v=e^{ax}$，　$\dfrac{d^nv}{dx^n}=a^ne^{ax}$

$$\therefore\ \frac{d^ny}{dx^n}=a^ne^{ax}u+na^{n-1}e^{ax}\frac{du}{dx}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}e^{ax}\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$+\cdots\cdots+e^{ax}\frac{d^nu}{dx^n}$$

$$=e^{ax}\left(a^nu+na^{n-1}\frac{du}{dx}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}\frac{d^2u}{dx^2}+\cdots\cdots+\frac{d^nu}{dx^n}\right)$$

$$=e^{ax}\left(+\frac{d}{dx}\right)^nu$$

但シ　$\left(a+\dfrac{d}{dx}\right)^nu$ ハ $\left(a+\dfrac{d}{dx}\right)$ ヲ二項定理ニヨリテ展開シタル結果ノ演算ヲ u ニ適用スルノ意ナリ。

第六章　偏微分係數

第三十三節　偏微分係數ノ定義

偏微分係數
偏誘導函數

上來論ジタル微分法ハ皆單變數函數ニ關スルモノノミナリシガ更ニ歩ヲ進メテ複雜ナル複變數 x、y、z、……ノ函數

$$u=f(x,y,z,\ \cdots\cdots)$$

ノ微分法ニ及バントス。

自變數 x、y、z、……ノ內就中一個例ヘバ x ヲ除キ總テ他ノ變數ヲ常數ト見做スキハ u ハ x ノ函數ナリ。斯ク u ヲ x ノ函數トシ而モ可微分函數ナルキニ u ノ x ニ關スル微分係數ヲ u ノ x ニ關スル偏微分係數若クハ偏誘導函數ト稱ス。

此故ニ複變函數ノ x ニ關スル偏微分係數トハ x ノ他總テノ變數ヲ常數ト見做シタルキノ u ノ x ニ關スル微分係數ノコトナリ。而シテ u ノ x、y、z、……ニ關スル偏微分係數ヲ表スニ夫々

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \cdots\cdots\cdots$$

或ハ　$f_x(x,y,z,\cdots\cdots),\ f_y(x,y,z,\cdots\cdots),\ f_z(x,y,z,\ \cdots)$

$$D_xu,\ D_yu,\ D_zu,\ \cdots\cdots$$

ヲ以テス。即チ

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname*{Lim}_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x,y,z,\ldots\ldots)-f(x,y,z,\ldots\ldots)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname*{Lim}_{\Delta y=0}\frac{f(x,y+\Delta y,z,\ldots\ldots)-f(x,y,z,\ldots\ldots)}{\Delta y}$$

$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

例(1)　$u=x^n\sin(ay+bz)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=nx^{n-1}\sin(ay+bz)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=ax^n\cos(ay+bz)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=bx^n\cos(ay+bz)$$

例(2)　$u=x^y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=x^y\log x$$

第三十四節　全微分係數

xノ函數ナル

$$y=\phi(x),\ z=\psi(x)$$

ノ又函數ナル

$$u=f(y,z)$$

アリxノ增分Δxニ相當スルy、zノ增分ヲ夫々Δy、Δzトシ此等ニ相當スルuノ增分ヲΔuトセバ

$$\Delta u=f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y,z)$$

$$=f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y,z+\Delta z)$$

$$+f(y,z+\Delta z)-f(y,z)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{f(y+\Delta y,z+\Delta z)-f(y,z+\Delta z)}{\Delta y}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+\frac{f(y,z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta z}\ \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Δxノ無限小ナル極限ニ於テハ

$$\Delta y=0,\ \Delta z=0$$

$$\operatorname*{Lim}_{\Delta x=0}\frac{f(y,z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\lim_{\substack{\triangle y=0\\ \triangle z=0}} \frac{f(y+\triangle y, z+\triangle z)-f(y, z+\triangle z)}{\triangle y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\lim_{\triangle x=0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}, \quad \lim_{\triangle x=0} \frac{\triangle z}{\triangle x} = \frac{dz}{dx}, \quad \lim_{\triangle x=0} \frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} \qquad (61)$$

斯ク複變數函數

$$u = f(y,z)$$

全微分係數

ノ變數y、z又他ノ變數xノ函數ナルキニxノ變化スルニ從テy、z共ニ變化ス。此場合ノuノxニ關スル微分係數ヲuノ全微分係數ト稱シ。$\frac{du}{dx}$ナル記號ヲ用キレ。

微分ニ關シテハ

全微分

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (62)$$

但シdu、dy、dz、ハ何レモ微分ニシテ　ニduヲ全微分ト云フ。

例　$u = z^2+y^3+zy$,　$y = e^x$,　$z = \sin x$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2+z \qquad \frac{dy}{dx} = e^x, \quad \frac{dz}{dx} = \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z+y$$

$$\frac{du}{dx} = (3y^2+z)e^x+(2z+y)\cos x$$

$$= (3e^{2x}+\sin x)e^x+(2\sin x+e^x)\cos x$$

$$= 3e^{3x}+e^x(\sin x+\cos x)+\sin 2x$$

コハ又始メニuニy、zノ式ヲ代用シテ

$$u = \sin^2 x+e^{3x}+e^x\sin x$$

トナシ此微分係數ヲ求ムレバ

$$\frac{du}{dx} = 2\sin x\cos x+3e^{3x}+e^x\sin x+e^x\cos x$$

$$= 3e^{3x}+e^x(\sin x+\cos x)+\sin 2x.$$

ナル同結果ヲ得ベシ。

(61)ニ$z=x$ト置ケバ

$$\frac{dz}{dx} = 1 \qquad , u = f(y,x)$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{63}$$

例　$u = x^3y^2$,　$y = \sin x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2 \quad \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3y$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 3x^2y^2 + 2x^3y\cos x$$

(61) ハ尚擴張スルヿヲ得ベシ

$$u = F(y,z,w)\ ,\ y = f(x)\ ,\ z = \phi(x)\ ,\ w = \psi(x)$$

$$\begin{aligned}\triangle u &= F(y+\triangle y, z+\triangle z, w+\triangle w) - F(y,z,w)\\ &= F(y+\triangle y, z+\triangle z, w+\triangle w) - F(y, z+\triangle z, w+\triangle w)\\ &\quad + F(y, z+\triangle z, w+\triangle w) - F(y, z, w+\triangle w)\\ &\quad + F(y, z, w+\triangle w) - F(y, z, w)\end{aligned}$$

$$\frac{\triangle u}{\triangle x} = \frac{F(y+\triangle y, z+\triangle z, w+\triangle w) - F(y, z+\triangle z, w+\triangle w)}{\triangle y}\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$+\frac{F(y, z+\triangle z, w+\triangle w) - F(y,z,w+\triangle w)}{\triangle z}\frac{\triangle z}{\triangle x}$$

$$+\frac{F(y, z, w+\triangle w) - F(y,z,w)}{\triangle w}\frac{\triangle w}{\triangle x}$$

$\triangle x$ ノ無限小ナル極ニ於テハ前ト同様ニシテ

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{dw}{dx} \tag{64}$$

微分ニ關シテハ

$$du = \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial w}dw \tag{65}$$

(64) ニ $w = x$ ト置ケバ

$$u = f(y, z, x)\ ,\ \frac{dw}{dx} = 1$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} \tag{66}$$

一般ニ

$$u = F(y, z, w, \ldots\ldots\ldots)\ ,\ y = f(x),\ z = \phi(x),\ w = \psi(x),\ \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{dw}{dx}+\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (67)$$

微分ニ關シテハ

$$du=\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial w}dw+\cdots\cdots\cdots \qquad (68)$$

例　$u=\mathrm{F}(y,\ z,\ w,\ x)$, $y=f(z,w,x)$, $z=\phi(w,x)$, $w=\psi(x)$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}\frac{dw}{dx}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}+\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial w}\frac{dw}{dx}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\}$$

$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$

$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}.$$

$$=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\left\{\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\psi'(x)+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial f}{\partial w}\psi'(x)+\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$$

$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\left\{\frac{\partial \phi}{\partial w}\psi'(x)+\frac{\partial \phi}{\partial x}\right\}$$

$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}\psi'(x)$$

$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$$

$$=\psi'(x)\left\{\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial w}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial w}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial w}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial w}\right\}$$

$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$$

第三十五節　陰函數ノ微分法

陰函數

自變數xト被變數yトノ關係式

$$y=f(x)$$

ノ如ク相等號ノ一邊ハ被變數yニシテ他邊ハ自變數xノミヨリ成レル式ナルトキハyハxノ陽函數ナリト云ヒ然ラザル場合

$$f(x,y)=0$$

陰函數

ニ y ハ x ノ陰函數ナリト云フ。例ヘバ

$$y = ax^2+\sin(a-x)$$

ノ y ハ x ノ陽函數ニシテ

$$y^3+2axy+\cos(x+y)=0$$

ノ y ハ x ノ陰函數ナリ。自變數二個以上アル場合ニモ同樣ノ定義ヲ用ヰ

$$u=f(x, y, z, \cdots\cdots)$$

ノ u ハ x y z ……ノ陽函數ナリト云ヒ、

$$f(u, x, y, z, \cdots\cdots)=0$$

ノ u ハ x、y、z、……ノ陰函　ナリト云フ。

陽函數若クハ容易ニ陽函數ノ形式ニ變化シ得ラルベキ陰函數ハ前來說キシ微分法ヲ適用シ得レド然ラザル陰函數ニアリテハ次ノ法ニヨラザルベカラズ前節ノ公式(63)ヲ

$$f(x, y)=0$$

ニ適用セバ u ハ常ニ0ナル故ニ其 x ニ關スル微分係數 $\frac{du}{dx}$ モ亦0ナリ。從テ

陰函數ノ微分法

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \qquad (69)$$

之レ x ノ陰函數ナル y ノ x ニ關スル微分係數ナリ。

例(1)

$$x^5-ax^3y+bx^2y^2-y^5=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=5x^4-3ax^2y+2bxy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-ax^3+2bx^2y-5y^4$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{5x^4-3ax^2y+2bxy^2}{-ax^3+2bx^2y-5y^4}$$

例(2)

$$x\log y-y\log x=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\log y-\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y}-\log x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\log y - \dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y} - \log x} = \frac{(x\log y - y)y}{(y\log x - x)x}$$

第三十六節　同次函數ニ關スルをいれるノ定理

をいれるノ定理

茲ニ x、y ニ關スル同次函數

$$u = \mathrm{A}x^p y^q + \mathrm{B}x^{p'}y^{q'} + \mathrm{C}x^{p''}y^{q''} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p+q = p'+q' = p''+q'' = \cdots\cdots = n$$

アレバ

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu \qquad (70)$$

ナリ。之レヲをいれる (Euler) ノ定理ト稱ス。

（證明）

$$x\frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{A}px^p y^q + \mathrm{B}p'x^{p'}y^{q'} + \mathrm{C}p''x^{p''}y^{q''} + \cdots\cdots\cdots$$

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{A}qx^p y^q + \mathrm{B}q'x^{p'}y^{q'} + \mathrm{C}q''x^{p''}y^{q''} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{A}(p+q)x^p y^q + \mathrm{B}(p'+q')x^{p'}y^{q'} + \mathrm{C}(q''+p'')x^{p''}y^{q''} + \cdots\cdots$$

$$= \mathrm{A}nx^p y^p + \mathrm{B}nx^{p'}y^{q'} + \mathrm{C}nx^{p'}y^{q''} + \cdots\cdots = nu$$

此定理ハ尚擴張シテ x、y ニ關シ夫々 n 次、m 次ノ同次式ナル ϕ_1 ϕ_2 ノ商

$$u = \frac{\phi_1}{\phi_2}$$

ニ適用スルコヲ得ベシ。何トナレバ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\phi_2\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} - \phi_1\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}}{(\phi_2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\phi_2\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y} - \phi_1\dfrac{\partial\phi_2}{\partial y}}{(\phi_2)^2}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x\left(\phi_2\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} - \phi_1\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x}\right) + y\left(\phi_2\dfrac{\partial\phi_1}{\partial y} - \phi_1\dfrac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)}{(\phi_2)^2}$$

$$= \frac{\phi_2\left(x\dfrac{\partial\phi_1}{dx} + y\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x}\right) - \phi_1\left(\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x} + y\dfrac{\partial\phi_2}{\partial y}\right)}{(\phi_2)^2}$$

$$x\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + y\frac{\partial\phi_1}{\partial y} = n\phi_1$$

$$x\frac{\partial\phi_2}{\partial x} + y\frac{\partial\phi_2}{\partial y} = m\phi_2$$

$$\therefore\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{n\phi_2\phi_1-m\phi_1\phi_2}{(\phi_2)^2}=(n-m)\frac{\phi_1}{\phi_2}$$

$$=(n-m)u \qquad (71)$$

例(1)　$u=x^2y^3+2xy^4-5x^5$

コハ x、y ニ關シ五次ノ同次函數ナリ、故ニ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=5u$$

例(2)　$u=\dfrac{x^3+y^3}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$

分子ハ x、y ニ關シ三次ノ同次式ニシ分母ハ $\frac{1}{2}$ 次ノ同次式ナリ。故ニ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\left(3-\frac{1}{2}\right)u=\frac{5}{2}u$$

例(3)　$u=\dfrac{x^3+ax^2y+by^3}{a'x^2+b'y^2}$

分子ハ x、y ニ關シ三次ノ同次式ニシ分母ハ二次ノ同次式ナリ。故ニ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(3-2)u=u$$

例(4)　$u=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

分子ハ x、y ニ關シテ二次ノ同次式ニシ分母モ二次ノ同次式ナリ。故ニ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=(2-2)u=0$$

をいれるノ定理ハ二個以上ノ自變數 x、y、z、……ノ同次式ノ場合ニモ布延スルコヲ得。例ヘバ三個ノ自變數 x、y、z ノ場合ヲ取リ

$$u=\mathrm{A}x^py^qz^r$$

トセバ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{A}px^py^qz^r\ ,\quad y\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{A}qx^py^qz^r\ ,\quad z\frac{\partial u}{\partial z}=\mathrm{A}rx^py^qz^r$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=\mathrm{A}(p+q+r)x^py^qz^r=(p+q+r)u$$

次ニ

$$u=\Sigma\,\mathrm{A}x^py^qz^r\ ,\quad p+q+r=p'+q'+r'=\cdots\cdots=n$$

トセバ

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{du}{dz}=\Sigma(p+q+r)\mathrm{A}x^py^qz^r$$

$$= n\Sigma A x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = nu \qquad (72)$$

尚二個ノ自變數ノ場合ト同樣ニシテ二個ノ同次式ノ商ニ就テ

$$u = \frac{\phi_1}{\phi_2}, \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = (n-m)u \qquad (73)$$

ノ成立スルヿヲ證明シ得ベシ。

第七章 疊次偏微分係數

第三十七節 疊次偏微分係數ノ定義

自變數 x、y、z、……ノ函數

$$u = f(x, y, z, \ldots\ldots)$$

ノ偏微分係數

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \ldots\ldots$$

ハ又一般ニ x、y、z、……ノ可微分函數ナレバ其偏微分係數ヲ求ムルヿヲ得ベ

疊次偏微分係數

シ。而シテ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ノ x、y、z……ニ關スル偏微分係數

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ヲ表スニ夫々

$$\frac{d^2u}{dx^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \quad \ldots\ldots$$

或ハ

$$f_{xx}(x, y, z, \ldots\ldots), \quad f_{xy}(x, y, z, \quad), \quad f_{zx}(x, y, z, \quad), \quad \ldots\ldots$$

$$D_{xx}u, \quad D_{xy}u, \quad D_{zx}u, \quad \ldots\ldots$$

ナル記號ヲ以テス。此故ニ

$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial y^m \partial x^n}$$

ハ u ヲ先ヅ x ニ關シテ n 回偏微分係數ヲ取リ更ニ y ニ關シテ m 回偏微分係數ヲ取リタルモノヲ表ス。總テ此等ヲ u ノ疊次偏微分係數ト稱ス。

例

$$u = x^n \sin(ay + bz)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}\sin(ay + bz), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = ax^n \cos(ay + bz)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2}\sin(ay+bz) \;,\quad \frac{\partial^2 u}{dy^2} = -a^2x^n\sin(ay+bz)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = nax^{n-1}\cos(ay+bz) \;,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = nax^{n-1}\cos(ay+bz)$$

第三十八節　疊次偏微分係數ニ關スル定理

轉換ノ定理

先ヅ

$$u = f(x\,,y)$$

ニ就テ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

ナルコヨリ證明センニ自變數x、yノ總テ有限值ニ就テ

$$u\,,\;\frac{\partial u}{\partial x}\,,\;\frac{\partial u}{dy}\,,\;\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\,,\;\frac{d^2 u}{\partial x\partial y}$$

ハ總テ連續ナルモノトシ

$$\frac{f(x+h\,,y+k)-f(x+h\,,y)-f(x\,,y+k)+f(x\,,y)}{hk} = \Phi(h,k)$$

ト置キxトyトハ固定值トシhトkトガ終ニ無限小ニ向フモノトス。尙

$$f(x\,,y+k)-f(x\,,y) = \mathrm{F}(x)$$

トセバ第十四節平均值定理ニヨリ

$$\mathrm{F}(x+h)-\mathrm{F}(x) = h\mathrm{F}'(x+\theta_1 k) \qquad 0<\theta_1<1$$

即チ

$$f(x+h\,,y+k)-f(x+h\,,y)-\{f(x\,,y+k)-f(x\,,y)\}$$
$$= h\{f_x(x+\theta_1 h\,,y+k)-f_x(x+\theta_1 h\,,y)\}$$
$$\therefore\quad \Psi(h,k) = \frac{f_x(x+\theta_1 h,\,y+k)-f_x(x+\theta_1 h,\,y)}{k}$$

尙

$$f_x(x+\theta_1 h\,,y) = \phi(y)$$

トセバ又平均值定理ニヨリ

$$\phi(y+k)-\phi(y) = k\phi'(y+\theta_2 k) \qquad 0<\theta_2<1$$

$$f_x(x+\theta_1 h\,,y+k)-f_x(x+\theta_1 h\,,y) = kf_{yx}(x+\theta_1 h\,,y+\theta_2 k)$$

$$\therefore\quad \Psi(h\,,k) = f_{yx}(x+\theta_1 h,\,y+\theta_2 k)$$

$$0<\theta_1<1 \;,\quad 0<\theta_2<1$$

全ク同樣ノ手續ヲ經テ

$$\Psi(h\,,k) = f_{xz}(x+\theta_1'h\;,\;y+\theta_2'k)$$

$$0<\theta_1'<1 \;,\quad 0<\theta_2'<1$$

$$\therefore\quad f_{yx}(x+\theta_1 h\,,\,y+\theta_2 k)=f_{xy}(x+\theta_1' h\,,\,y+\theta_2' k)$$

此ニ於テhトkトガ無限小トナリシトセバf_{xy}トf_{yx}トハ連續函數ナル故ニ

$$f_{yx}(x\,,y)=f_{xy}(x\,,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\qquad(74)$$

ヲ得。此結果ヲ繰返シ用ヰレバ

$$u=f(x\,,y\,,z)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial y}=\&c.$$

一般ニ

複變數函數ノ疊次偏微分係數ハ其偏微分係數ヲ取ル順序ニ關係セズ。

トノ定理ヲ得ベシ

第三十九節　疊次全微分係數

$$u=f(y\,,z)\quad,\quad y=\phi(x)\quad,\quad z=\Psi(x)$$

ナレバ(61)ニヨリ

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{dz}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}$$

$\frac{\partial u}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial z}$ハ一般ニ$y$ト$z$トノ函數ナリ故ニ再ビ(61)ニヨリ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z}\frac{dz}{dx}$$

此等ヲ上式ニ入レ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$$

ヲ用ヰテ改ムレバ

第二全微分係數

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{d^2z}{dx^2}\qquad(75)$$

特ニ $z=x$ トセバ

$$u=f(x,y)\quad,\quad y=\phi(x)$$

$$\frac{dz}{dx}=1\quad,\quad\frac{d^2z}{dx^2}=0$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}\qquad(76)$$

同樣ニシテ

$$\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\ ,\ \frac{\partial^4u}{\partial x^4}\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

ヲモ求メ得ベシ。

例　$u=x^3y^2\quad,\quad y=\sin x$　　（第三十四節公式(63)ノ例）

$$\frac{du}{dx}=3x^2y^2+2x^3y\cos x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2y^2\quad,\quad\frac{\partial u}{\partial y}=2x^3y$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=6xy^2\ ,\ \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2x^3$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=6x^2y\ ,\ \frac{dy}{dx}=\cos x\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{dx^2}=2x^3\cos^2x+12x^2y\cos x+6xy^2-2x^3y\sin x$$

$$=2x^3\cos^2x+12x^2\sin x\cos x+6x\sin^2x-2x^3\sin^2x$$

第四十節　陰函數ノ疊次微分係數

陰函數

$$f(x,y)=0$$

ヨリ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メンニ (76) ニ

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

ト置ケバ

$$0=\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{\partial^2f}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

陰函數ノ第二微分係數

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

(69) ナル

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

ヲ代用セバ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3} \qquad (77)$$

例　$x\log y - y\log x = 0$　（第三十五節例(2)）

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log y - \frac{y}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} - \log x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(-\frac{x}{y^2}\right)\left(\log y - \frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\left(\log y - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} - \log x\right) + \left(\frac{y}{x^2}\right)\left(\frac{x}{y} - \log x\right)^2}{\left(\frac{x}{y} - \log x\right)^3}$$

$$= -\frac{-xy\left(\log y - \frac{y}{x}\right)^2 - 2y\left(1 - \frac{y}{x}\right)\left(\log y - \frac{y}{x}\right)\left(x - y\log x\right) + \frac{y^2}{x^2}\left(\frac{x}{y} - y\log x\right)^2}{(x - y\log x)^3}$$

$$= -\frac{-xy(x\log y - y)^2 - 2y(x-y)(x\log y - y)(x - y\log x) + y^2(x - y\log x)^2}{x^2(x - y\log x)^3}$$

第八章　函數ノ展開

第四十一節　ていらーノ定理

$f(x)$ ガ $x=a$ ト $x=b$ トノ間ニ於テ連續單値函數ニシテ其各次ノ誘導函數 $f'(x)$、$f''(x)$、……$f^{(n-1)}(x)$ モ同シ範圍內ニ於テ連續ナリトセバ平均値定理ニヨリ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'\{a+\theta(b-a)\} \qquad 0<\theta<1$$

即チ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\{a+\theta(b-a)\}$$

今

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{(b-a)^2}=\mathrm{K}$$

$$f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\mathrm{K}(b-x)^2=\Psi(x)$$

ト置クバ

$$\Psi(a)=f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\mathrm{K}(b-a)^2$$

$$=f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)\}=0$$

$$\Phi(b)=f(b)-f(b)-(b-b)f'(b)-\mathrm{K}(b-b)^2=o$$

カク $\Phi(x)$ ハ $x=a$ ト $x=b$ トニ於テ o トナル。故ニ第十四節ノ定理ニヨリ

$$\Phi'(x)=-f'(x)-(b-x)f''(x)+f'(x)+2\mathrm{K}(b-x)$$

$$=-(b-x)f''(x)+2\mathrm{K}(b-x)$$

ハ x ノ a ト b トノ間ノ或値

$$x_1=a+\theta_1(b-a) \quad , \quad 0<\theta_1<1$$

ニ於テ o トナルベシ。

$$\therefore\ f''\{a+\theta_1(b-a)\}-2\mathrm{K}=o$$

$$\mathrm{K}=\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)}{(b-a)^2}=\frac{f''\{a+\theta_1(b+a)\}}{2}$$

$$o<\theta_1<1$$

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{\underline{|2}}f''\{a+\theta_1(b-a)\}$$

尙又

$$\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\frac{(b-a)^2}{\underline{|2}}f''(a)}{(b-a)^3}=\mathrm{K}$$

$$f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{\underline{|2}}f''(x)-(b-x)^3\mathrm{K}=\Phi(x)$$

ト置ケバ

$$\Phi(a)=o\,,\quad \Phi(b)=o$$

故ニ

$$\Phi'(x)=-f'(x)+f'(x)-(b-x)f''(x)+\frac{2(b-x)f''(x)}{\underline{|2}}-\frac{(b-x)^2f'''(x)}{\underline{|2}}+3\mathrm{K}(b-x)^2$$

$$=-\frac{(b-x)^2}{\underline{|2}}f'''(x)+3\mathrm{K}(b-x)^2$$

ハxノaトbトノ間ノ或値

$$x_2=a+(b-a)\theta_2 \qquad 0<\theta_2<1$$

ニ於テoトナルベシ。

$$\therefore\quad -\frac{f'''\{a+(b-a)\theta_2\}}{\underline{|2}}+3\mathrm{K}=o$$

$$\mathrm{K}=\frac{f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\dfrac{(b-a)^2}{\underline{|2}}f''(a)}{(b-a)^3}=\frac{f'''\{a+(b-a)\theta_2\}}{\underline{|3}}$$

従テ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{\underline{|2}}f''(a)+\frac{(b-a)^3}{\underline{|3}}f'''\{a+\theta_2(b-a)\}$$

$$o<\theta_2<1$$

次ニ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{\underline{|2}}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{(b-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n-1)}(a)+\frac{(b-a)^p}{p}\mathrm{K}$$

$$\Phi(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f'(x)-\frac{(b-x)^2}{\underline{|2}}f''(x)-\cdots\cdots-\frac{(b-x)^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{\underline{|n-1}}-\frac{(b-x)^p}{p}\mathrm{K}$$

ト置ケバ容易ニ

$$\Phi(b)=o\,,\quad \Phi(a)=o$$

ナルコチ知リ得ベク従テ

$$\Phi'(x)=-f'(x)+f'(x)-(b-x)f''(x)+(b-x)f''(x)$$

$$-\frac{(b-x)^2}{\underline{|2}}f'''(x)+\frac{(b-x)^2}{\underline{|2}}f'''(x)-\ldots\ldots$$

$$+\frac{(b-x)^{n-2}}{\underline{|n-2}}f^{(n-1)}(x)-\frac{(b-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n)}(x)+(b-x)^{p-1}\mathrm{K}$$

$$=\frac{-(b-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n)}(x)+(b-x)^{p-1}\mathrm{K}$$

ハ x ノ a ト b トノ間ノ或値

$$x=a+\theta(b-a)\quad,\quad o<\theta<1$$

ニ於テ o トナルベシ。

$$\therefore\quad \mathrm{K}=\frac{\{b-(a+\theta\overline{b-a})\}^{n-p}}{\underline{|n-1}}f^{(n)}\{a+\theta(b-a)\}$$

$$=\frac{(b-a)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{\underline{|n-1}}f^{(n)}\{a+\theta(b-a)\}$$

$$o<\theta<1$$

此故ニ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n-1)}(a)$$

$$+\frac{(b-a)^{2n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p\underline{|n-1}}f^{(n)}\{a+\theta(b-a)\}$$

$$o<\theta<1$$

$p=n$ トセバ

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots\ldots+\frac{(b-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n-1)}(a)$$

$$+\frac{(b-a)^n}{\underline{|n}}f^{(n)}\{a+\theta(b-a)\}$$

テイラーノ定理

以上二式ニ $b-a=h$ ト置ケバ

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n-1)}(a) \qquad (78)$$

$$+\frac{h^{2n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p\underline{|n-1}}f^{(n)}(a+\theta h)$$

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(a)+\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}}f^{(n-1)}(a)$$

$$+\frac{h^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(a+\theta h) \qquad (79)$$

$$0<\theta<1$$

まくろーりんノ定理

之レヲていらー(Taylor)ノ定理ト稱ス。

此定理ニヨレバ $f(x)$ ガ x ノ a ト $a+h$ トノ間ノ値ニ於テ連續單値函數ニシテ其各次ノ微分係數 $f'(x)$、$f''(x)$、……ガ同ジ範圍內ニ於テ連續ナル上ニ

$$\lim_{n=\infty}\frac{h^n}{\lfloor n}f^{(n)}(a+\theta h)=0 \qquad 0<\theta<1$$

ナルキハ $f(a+h)$ ハ h ノ遞昇冪無限級數ニ展開スルヿヲ得ルナリ。

ていらーノ定理中特ニ $a=0$, $h=x$ トセバ

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^{2n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p\lfloor n-1}f^{(n)}(\theta x) \qquad (80)$$

$$0<\theta<1$$

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{\lfloor n}f^{(n)}(\theta x) \qquad (81)$$

$$0<\theta<1$$

之レヲまくろーりん(Maclaurin)ノ定理ト稱ス。

ていらー或ハまくろーりんノ定理ニ於テ

$$\lim_{n=\infty}\frac{h^n}{\lfloor n}f^{(n)}(a+\theta h) \text{ 或ハ } \lim_{n=\infty}\frac{h^n}{\lfloor n}f^{(n)}(h\theta)$$

ノ 0 トナルヿハ單ニ

$$\lim_{n=\infty}f^{(n)}(a+\theta h) \text{ 或ハ } \lim_{n=\infty}f^{(n)}(h\theta)$$

ノ有限ナルヿニ歸ス。何トナレバ

$$u_n=\frac{h^n}{\lfloor n},\quad u_{n+1}=\frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1}$$

トセバ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{h}{n+1}$$

此故ニ h ガ有限ナル以上ハ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ハ n ノ增加スルニ從テ漸々ニ減少シ n ヲ充分大ニセバ u_{n+1} u_{n+2} ……ハ非常ニ小トナル。

$$\therefore \quad \operatorname*{Lim}_{n=\infty} u_n = o$$

ナリ。而ルニ

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(a+\theta h) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{h^n}{\underline{|n}} \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f^{(n)}(a+\theta h)$$

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(\theta h) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{h^n}{\underline{|n}} \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f^{(n)}(\theta h)$$

依テ

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} f^{(n)}(a+\theta h) \text{ 或ハ } \operatorname*{Lim}_{n=\infty} f^{(n)}(\theta h)$$

ノ∞ナラザル以上ハ

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(a+\theta h) \text{ 或ハ } \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{h^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(\theta h)$$

ハoトナルナリ。

第四十二節　正弦餘弦ノ展開

(I)　$\sin x$　x ハ弧度法ニヨリテ計リシ角トス

$$\begin{array}{ll} f(x)=\sin x & f(o)=o \\ f'(x)=\cos x & f'(o)=1 \\ f''(x)=-\sin x & f''(o)=o \\ f'''(x)=-\cos x & f'''(o)=-1 \\ f^{\mathrm{VI}}(x)=\sin x & f^{\mathrm{IV}}(o)=o \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

第三十節例(9)ニヨリ

$$f^{(n)}(\theta x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)$$

まくろーりんノ定理ニヨリ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{\underline{|n}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)$$

$$0 < \theta < 1$$

而ルニ

正弦ノ展開式

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right) \neq \infty$$

故ニ前節ノ終ニ證明シタルコニヨリ

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\ \frac{x^n}{\underline{|n}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)=0$$

從テxノ有限値ニ就テ

$$\sin x = x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\cdots\cdots\quad\cdots\cdots \tag{82}$$

[II]　$\cos x$

$$\begin{array}{ll} f(x)=\cos x & f(o)=1 \\ f'(x)=-\sin x & f'(o)=o \\ f''(x)=-\cos x & f''(o)=-1 \\ f'''(x)=\sin x & f'''(o)=o \\ f^{\mathrm{IV}}(x)=\cos x & f^{\mathrm{IV}}(o)=1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

第三十節例(10)ニヨリ

$$f^{(n)}(\theta x)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)$$

正弦ノトキト同理ニテ

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{x^n}{\underline{|n}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)$$

故ニxノ有限値ニ就テ

$$\therefore\quad \cos x = 1-\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}-\cdots\cdots\cdots \tag{83}$$

餘弦ノ展開式

[I][II]ハ又てしらーノ定理ニヨリ次ノ如クシ同時ニ求メ得ベシ。

$$\begin{array}{ll} f(x+y)=\sin(x+y) & f(x)=\sin x \\ f'(x+y)=\cos(x+y) & f'(x)=\cos x \\ f''(x+y)=-\sin(x+y) & f''(x)=-\sin x \\ f'''(x+y)=-\cos(x+y) & f'''(x)=-\cos x \\ f^{\mathrm{IV}}(x+y)=\sin(x+y) & f^{\mathrm{IV}}(x)=\sin x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$f^{(n)}(x+\theta y)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x+\theta y\right)$$

yノ有限値ニ就テ

$$\lim_{n=\infty}\frac{y^n}{\underline{|n}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x+\theta y\right)=0$$

$$\therefore\quad \sin(x+y)=\sin x+y\cos x-\frac{y^2}{\underline{|2}}\sin x-\frac{y^3}{\underline{|3}}\cos x+\frac{y^4}{\underline{|4}}\sin x$$

$$+\frac{y^5}{\underline{|5}}\cos x-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此級數ハ絶躰的收斂級數ナルヲ以テ其項ノ順序ヲ變更スルモ差支ナシ。

$$\therefore\quad =\sin x\left(1-\frac{y^2}{\underline{|2}}+\frac{y^4}{\underline{|4}}-\frac{y^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots\right)$$

$$+\cos x\left(y-\frac{y^3}{\underline{|3}}+\frac{y^5}{\underline{|5}}-\cdots\cdots\right)$$

然ルニ

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\therefore\quad \cos y=1-\frac{y^2}{\underline{|2}}+\frac{y^4}{\underline{|4}}-\frac{y^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin y=y-\frac{y^3}{\underline{|3}}+\frac{y^5}{\underline{|5}}-\cdots\cdots\cdots$$

第四十三節　指數函數ノ展開

指數函數ノ展開式(一)

$$f(x)=a^x \qquad f(o)=1$$

$$f'(x)=a^x\log a \qquad f'(o)=\log a$$

$$f''(x)=a^x(\log a)^2 \qquad f''(o)=(\log a)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=a^x(\log a)^n$$

$$\frac{x^n}{\underline{|n}}f^{(n)}(\theta x)=\frac{x^n}{\underline{|n}}a^{\theta x}(\log a)^n=\frac{(x\log a)^n}{\underline{|n}}a^{\theta x}$$

$a\neq o$　，　$a\neq\infty$　，　$a>o$　ナレバ

$$\lim_{n=\infty}\frac{(x\log a)^n}{\underline{|n}}=o\quad,\quad a^{\theta x}\neq\infty$$

故ニまくろーりんノ定理ニヨリ

$$a^x=1+x\log a+\frac{x^2}{\underline{|2}}(\log a)^2+\cdots\cdots+\frac{x^n}{\underline{|n}}(\log a)^n+\cdots\cdots\cdots \tag{84}$$

$a=e$ トセバ　　$\log e=1$ ナルニヨリ

指數函數ノ展開式(二)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{\underline{|n}} + \cdots\cdots\cdots \qquad (85)$$

(84) (85) ハ x ノ凡テ有限値ニ就テ成立スル展開式ナリ。

eノ級數

(85) ニ $x = 1$ トセバ

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} \cdots\cdots + \frac{1}{\underline{|n}} + \cdots\cdots\cdots \qquad (86)$$

(85) ノ x ニ cx ヲ置ケバ

指數函數ノ展開式(三)

$$e^{cx} = 1 + cx + \frac{c^2x^2}{\underline{|2}} + \frac{c^3x^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots + \frac{c^nx^n}{\underline{|n}} + \cdots\cdots\cdots \qquad (87)$$

(87) ニ $c = -1$ トセバ

指數函數ノ展開式(四)

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\underline{|2}} - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \cdots\cdots\cdots \qquad (88)$$

(85) ニ $x = \frac{1}{2}$ トセバ

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\underline{|2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\underline{|3}}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots\cdots\cdots$$

(85) ニ $x = 2$ トセバ

$$e^2 = 1 + 2 + \frac{1}{\underline{|2}}2^2 + \frac{1}{\underline{|3}}2^3 + \cdots\cdots\cdots$$

(85) ニ $x = -1$

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{\underline{|2}} - \frac{1}{\underline{|3}} + \cdots\cdots\cdots$$

第四十四節　對數函數ノ展開

$f(x) = \log(1+x)$ 　　　$f(o) = o$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 　　　$f'(o) = -1$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$ 　　　$f''(o) = -1$

$f'''(x) = (-1)^2\dfrac{\underline{|2}}{(1+x)^3}$ 　　　$f'''(o) = \underline{|2}$

$f^{\mathrm{IV}}(x) = (-1)^3\dfrac{\underline{|3}}{(1+x)^4}$ 　　　$f^{\mathrm{IV}}(o) = -\underline{|3}$

第三十節例(8)ト同様ニシ

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{\underline{|n-1}}{(1+x)^n}$$

$$\frac{x^n}{|\underline{n}}f^{(n)}(\theta x) = (-1)^{n-1}\frac{|\underline{n-1}}{|\underline{n}}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta x)^n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^n$$

$0\leqq x<1$ ナレバ各次ノ微分係數ハ連續ニシテ且ツ

$$0\leqq\frac{1}{1+\theta x}<1$$

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\frac{x^n}{|\underline{n}}f^{(n)}(\theta x) = 0$$

故ニまくろーりんノ定理ニヨリ

$$\therefore\ \log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

$$0\leqq x<1$$

今此 x ニ $-x$ ヲ置ケバ

$$\log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots-\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{x^n}{n(1-\theta x)^n}$$

此殘餘ノ代リニ(80)ニ $p=1$ ト置キシモノ

$$-\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1-\theta x)^n}\quad,\quad 0<\theta<1$$

ヲ取ルコト便ナリ。

$$\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1-\theta x)^n} = \frac{(x-\theta x)^{n-1}}{(1-\theta x)^{n-1}}\frac{x}{1-\theta x}$$

$0\leqq x<1$ ナレバ

$$\frac{x}{1-\theta x}$$

ハ有限ニシテ

$$0\leqq\frac{x-\theta x}{1-\theta x}<1$$

即チ

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)^{n-1} = 0$$

$$\therefore\ \log(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0\leqq x<1$$

以上二式ヲ合シテ

對數函數ノ展開式

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots \tag{89}$$

尚又此範圍外ノxニ就テハ此級數ノ發散スルヤ明カナリ。

第四十五節 二項定理

二項定理(1)

$$f(x)=(1+x)^m \qquad f(o)=1$$

$$f'(x)=m(1+x)^{m-1} \qquad f'(o)=m$$

$$f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2} \qquad f''(o)=m(m-1)$$

$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \qquad f'''(o)=m(m-1)(m-2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

mハ有理數トス。今場合ヲ分チテ先ヅ

(i) m 正整數

$$f^{(m)}(\theta x)=\underline{|m} \quad , \quad f^{(m+1)}(\theta x)=o, \quad \cdots\cdots$$

$$\therefore\ (1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(90)$$

(ii) m 分數若クハ負數

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)}{\underline{|n-1}}x^{n-1}+\mathrm{R}$$

(81) ニヨレバ $\mathrm{R}=m_n x^n(1+\theta x)^{m-n}$

(80) ニヨレバ $\mathrm{R}=m_n n x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}$

$$m_n=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{\underline{|n}}$$

此場合ニ第二ノ形式ヲ用ヰルヿ便ナリ。今

$$\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}=z\ ,\ (1+\theta x)^{m-1}x=\mathrm{E}$$

$$\mathrm{R}=m\frac{(m-1)}{1}\cdot\frac{(m-2)}{2}\cdots\frac{(m-\kappa)}{\kappa}\cdots\frac{m-(n-1)}{n-1}z^{n-1}\mathrm{E}$$

$$=m\frac{(m-1)z}{1}\cdot\frac{(m-2)z}{2}\cdots\cdots\frac{(m-\kappa)z}{\kappa}\cdots\cdots\frac{(m-\overline{n-1})z}{n-1}\mathrm{E}$$

mトEトハ有限數ナリ。Rノ諸因子中或因子以下ノ各因子ノ絶躰値ガ1ヨリ小ナル分數ナレバ

$$\lim_{n=\infty}\mathrm{R}=o$$

ナリ。何トナレバGヲ以テ絶躰値ノ1ヨリ小ナル諸因子

$$\frac{(m-\kappa)x}{\kappa},\ \frac{(m-\kappa-1)x}{\kappa+1},\ \dots,\ \frac{(m-\overline{n-1})x}{n-1}$$

中ノ絶躰値ノ最大ナルモノトセバ此等ノ諸因子ノ積ノ絶躰値ハ $G^{n-\kappa}$ ノ絶躰値ヨリ小ニシテ且ツ

$$\lim_{n=\infty} G^{n-\kappa}=0$$

ナル故ナリ。之レニ反シテRノ諸因子中或因子以下ノ各因子ノ絶躰値ガ1ヨリ大ナレバ

$$\lim_{n=\infty} R=\infty$$

トナルナリ。

扨

$$\frac{(m-\overline{n-1})x}{n-1}$$

ノ n ヲ充分大ニシタル極限ノ絶躰値ハ x ノ絶躰値ニ等シ。依テ

$$\lim_{n=\infty} R=0$$

ナルベキ條件ハ x ノ絶躰値ノ1ヨリ小ナルコトナリ。故ニ

二項定理(11)

$x>0$ ニ於テハ

$$\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}<1\ ,\qquad 0<\theta<1$$

$$(1-\theta)x<1+\theta x$$

$$\therefore\ x<1$$

$x<0$ ニ於テハ

$$\frac{(1-\theta)x}{1+\theta x}>-1$$

$$(1-\theta)x>-1-\theta x$$

$$\therefore\ x>-1$$

從テ　$-1<x<1$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{\underline{|3}}x^3+\dots\dots \qquad (91)$$

又 $\begin{matrix}x>1\\x>-1\end{matrix}$ ナレバ此級數ハ明カニ發散ス。

一般ニ

$$(x+y)^m = x^m\left(1+\frac{y}{x}\right)^m = y^m\left(1+\frac{x}{y}\right)^m$$

mガ分數若クハ負數ニシテ $y<x$ ナルトキハ

$$(x+y)^m=x^m\left(1+\frac{y}{x}\right)^m=x^m\left(1+m\frac{y}{x}+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\cdots\cdot\right)$$

$$=x^m+mx^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^{m-2}y^2+\cdots\cdots$$

ハ成立スレ𪜈

$$(x+y)^m=y^m\left(1+\frac{x}{y}\right)^m=y^m\left(1+m\frac{x}{y}+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{x}{y}\right)^2+\cdots\cdots\right)$$

$$=y^m+my^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}y^{m-2}x^2+\cdots\cdots$$

ハ成立セズ。前者ハ收斂スレ𪜈後者ハ發散スル故ナリ。

第四十六節　ていらーノ定理ノ別證明

$f(x+h)$アリhノ收斂遞昇冪無限級數ニ展開サレ得ルモノト假定シ

$$f(x+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+a_3h^3+\cdots\cdots+a_nh^n+\cdots\cdot \quad [A]$$

ト置ケバ $h=0$ ト置クコトニヨリ

$$f(x)=a_0$$

ヲ得。次ニ[A]ノ兩邊ヲhニ關シ微分係數ヲ取レバ

$$f'(x+h)=a_1+2a_2h+3a_3h^2+\cdots\cdots+na_nh^{n-1}+\quad\cdots[B]$$

$h=o$ ト置ケバ

$$f'(x)=a_1$$

再ビ[B]ノ兩邊ヲhニ關シテ微分係數ヲ取レバ

$$f''(x+h)=2.1a_2+3.2a_3h+\cdots\cdots+n(n-1)a_nh^{n-2}+\quad\cdots\cdots[C]$$

$h=o$ ト置ケバ

$$f''(x)=2.1a_2 \qquad \therefore a_2=\frac{f''(x)}{\underline{|2}}$$

$$f'''(x+h)=3.2.1a_3+\cdots\cdots+n(n-1)(n-2)a_nh^{n-3}+\cdots\cdots$$

$h=o$ ト置ケバ

$$f'''(x)=\underline{|3}\,a_3 \qquad \therefore\ a_3=\frac{f'''(x)}{\underline{|3}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\ a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{\lfloor n}$$

$$\therefore\ f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^{(n)}(x)+\cdots\cdots\cdots$$

ていらーノ定理是ナリ。此級數ニ $x=0$ ト置キ尚 h ニ x ヲ置ケバ

$$f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{\lfloor n}f^{(n)}(0)+\cdots\cdots\cdots$$

まくろーりんノ定理是ナリ。此證明法ハ極メテ簡ナリト雖モ此結果ヲ導クニ當リテ本節ノ始メニナシタル假定即チ $f(x+h)$ ガ x ノ收斂遞升器無限級數ニ展開セラレ得ルコト及ビ收斂級數ノ微分係數ヲ取リシコトハ一々證明ナクンバ許スベカラザル假定ナリ。從テ此證明ハ確實ナルモノニアラザルモノト知ルベシ

第四十七節　ていらーノ定理ニ依ラヌ展開法

函數ヲ展開スルニ當リ此函數ガ收斂遞升器無限級數ニ展開セラレ得ルコトヲ假定セバ其展開法大ニ簡單ナリ。勿論此假定ハ前節ニモ述タル如ク證明ヲ要スルコトニシテ從テ展開式ハ必ズシモ確實ナルモノニアラズト雖モ須臾ク微分法ノ

應用トシテ其結果ノ正シキ二三ノ例ヲ擧ゲン。

[I]　$-\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{Tan}^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ トシ

$$f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots \quad \text{(A)}$$

ト置キ $x=0$ トセバ

$$\mathrm{Tan}^{-1}0 = 0 = a_0$$

[A] ノ兩邊ノ微分係數ヲ取レバ

$$f'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots \quad \text{[B]}$$

又一方ニハ (41) ニヨリ

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$-1 < x < 1$ ナレバ二項定理ニヨリ

$$= 1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{[C]}$$

[B] ト [C] トヲ比較セバ

$$a_1 = 1\ ,\ a_2 = 0\ ,\ a_3 = -\frac{1}{3}\ ,\ a_4 = 0\ ,\ a_5 = \frac{1}{5}\ ,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

反正切ノ展開式

$$a_{2n} = 0 \quad , \quad a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots$$

$$-1 < x < 1 \qquad (92)$$

$$-\frac{\pi}{4} < \mathrm{Tan}^{-1}x < \frac{\pi}{4}$$

又まくろーりんノ定理ニヨルモ同結果ヲ得ベシ。

$$f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad f'(0) = 1$$

第三十一節例(14)ヨリ

$$f''(x) = -\sin^2 z \sin 2z \quad , \quad z = \mathrm{Cot}^{-1}x$$

$x = 0$ ナレバ $z = \frac{\pi}{2}$ トナリ

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \underline{|2}\sin^3 z \sin 3z \qquad f'''(0) = -\underline{|2}$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\underline{|3}\sin^4 z \sin 4z \qquad f^{\mathrm{IV}}(0) = 0$$

$$f^{\mathrm{V}}(x) = \underline{|4}\sin^5 z \sin 5z \qquad f^{\mathrm{V}}(0) = \underline{|4}$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(m)}(x) = (-1)^{m-1}\underline{|m-1}\sin^m z \sin mz$$

故ニ

$$f^{(2n)}(0) = 0$$

$$f^{(2n+1)}(0) = \underline{|2n}\sin^{2n+1}\frac{\pi}{2}\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n\underline{|2n}$$

$$\frac{x^m}{\underline{|m}}f^{(m)}(\theta x) = (-1)^{m-1}\underline{|m-1}\sin^m z \sin mz$$

依テ $-1 < x < 1$ ナレバ

$$\lim_{m=\infty}\frac{x^m}{\underline{|m}}f^{(m)}(\theta x) = 0$$

$$\therefore \quad \mathrm{Tan}^{-1}x = x - \frac{\underline{|2}\,x^3}{\underline{|3}} + \frac{\underline{|4}\,x^5}{\underline{|5}} - \cdots\cdots + (-1)^n\frac{\underline{|2n}}{\underline{|2n+1}}x^{2n+1} + \cdots\cdots$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots$$

$$-1<x<1$$

$$-\frac{\pi}{4}<\mathrm{Tan}^{-1}x<\frac{\pi}{4}$$

[II]　$-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Sin}^{-1}x<\frac{\pi}{2}$　トシ

$$f(x)=\mathrm{Sin}^{-1}x=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots$$

ト置キ兩邊ニ $x=0$ トセバ

$$\mathrm{Sin}^{-1}0=0=a_0$$

次デ兩邊ノ微分係數ヲ取レバ

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots$$

又一方ニハ二項定理ニヨリ

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\quad+\frac{1.3\cdots\cdot(2r-1)}{2.4.\cdots\cdot(2r)}x^{2r}+\cdots\cdot$$

$$-1<x<1$$

反正弦ノ展開式

以上二式ヲ比較セバ

$$a_1=1\ ,\ a_2=0\ ,\ a_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\ ,\ a_4=0\ ,\ a_5=\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5},\cdots\cdots$$

$$a_{2n}=0\ ,\ a_{2n+1}=\frac{1.3.\cdots\cdots(2n-1)}{2.4.\cdots\cdots(2n)}\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore\ \mathrm{Sin}^{-1}x=1+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots+\frac{1.3.\cdots\cdots(2n-1)}{2.4.\cdots\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots$$

$$-1<x<1\qquad(93)$$

第四十八節　微分方程式ニヨリテノ展開

[I]　$y=e^x$

$$\frac{dy}{dx}=e^x=y$$

$$y=e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots$$

ト置ケバ

$$\frac{dy}{dx}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots\cdots\cdots$$

以上二式ヲ比較セバ

$$a_0 = a_1$$

$$2a_2 = a_1 \quad , \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$3a_3 = a_2 \quad , \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{2.3}$$

$$\cdots\cdots \quad , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n \ , \ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} = \frac{a_0}{\lfloor n+1}.$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

初式ニ $x=0$ ト置クトキハ $a_0=1$ ナルコトヲ知ル。

$$\therefore \quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{x^n}{\lfloor n}+\cdots\cdots$$

[II]

$$y = e^{a\mathrm{Sin}^{-1}x} \qquad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{a\mathrm{Sin}^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{a\mathrm{Sin}^{-1}x}\frac{a^2}{1-x^2} + \frac{a\,x\,e^{a\mathrm{Sin}^{-1}x}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = a^2y \qquad \text{[A]}$$

今

$$y = e^{a\mathrm{Sin}^{-1}x} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots \text{[B]}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{a\mathrm{Sin}^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} = a_1+2a_2x+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots \text{[C]}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2+\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\cdots \qquad \text{[D]}$$

[B] [C] [D] ヲ [A] ニ代用シ兩邊ニ於ケル x^n ノ係數ヲ比較セバ

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n = a^2a_n$$

$$a_{n+2} = \frac{a^2+n^2}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad \text{[E]}$$

此關係ニヨリ a_0 ト a_1 トヲ知ラバ其他ハ求メ得ベキナリ。[B] ニ $x=0$ ト置ケバ

$$a_0 = 1$$

(C) ニ $x=0$ ト置ケバ

$$a_1 = a$$

ナルコトヲ知ル (E) ニ $n=0$ トセバ

$$a_2 = \frac{a^2}{1.2}a_0 = \frac{a^2}{\underline{|2}}$$

$n=1$ トセバ

$$a_3 = \frac{a^2+1^2}{2.3}a_1 = \frac{a(a^2+1^2)}{\underline{|3}}$$

$n=2$ トセバ

$$a_4 = \frac{a^2+2^2}{3.4}a_2 = \frac{a_2(a^2+2^2)}{\underline{|4}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般ニ

$$a_{2n} = \frac{a^2+(2n-2)^2}{(2n-1)2n}a_{2n-2} = \frac{a^2(a^2+2^2)(a^2+4^2)\cdots\cdots(a^2+\overline{2n-2}^2)}{\underline{|2n}}$$

$$a_{2n+1} = \frac{a^2+(2n-1)^2}{2n(2n+1)}a_{2n-1} = \frac{a(a^2+1^2)(a^2+3^2)\cdots\cdots(a^2+\overline{2n-1}^2)}{\underline{|2n+1}}$$

$$\therefore\quad e^{a\operatorname{Sin}^{-1}x} = 1+ax+\frac{a^2}{\underline{|2}}x^2+\frac{a(a^2+1^2)}{\underline{|3}}x^3+\frac{a^2(a^2+2^2)}{\underline{|4}}x^4+\frac{a(a^2+1^2)(a^2+3^2)}{\underline{|5}}x^5 + \cdots\cdots\cdots$$

$$-1 < x < 1$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$$

(85) ニヨリ

$$e^{a\operatorname{Sin}^{-1}x} = 1+a\operatorname{Sin}^{-1}x+\frac{a^2}{\underline{|2}}(\operatorname{Sin}^{-1}x)^2+\frac{a^3}{\underline{|3}}(\operatorname{Sin}^{-1}x)^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$-1 < x < 1$$

以上二式ノ a ノ係數ヲ比較セバ

$$\operatorname{Sin}^{-1}x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2}\ ,\quad -1 < x < 1$$

反正弦自乘ノ展開式

ヲ得。又 a^2 ノ係數ヲ比較セバ

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)^2 = x^2+\frac{2^2}{3.4}x^4+\frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6+\frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8+\cdots\cdots \qquad (95)$$

反正弦三乘ノ展開式

ヲ得。又 a^3 ノ係數ヲ比較セバ

$$(\mathrm{Sin}^{-1}x)^3 = x^3+\frac{\lfloor 3}{\lfloor 5}3^2\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x^5+\frac{\lfloor 3}{\lfloor 7}3^2.5^2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)x^7 + \qquad (96)$$

ヲ得ベシ以下之ニ倣フ。但シ凡テ(94)ト同條件

[II　$y = \sin\left\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\right\}$,　$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\cos\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2\cos^2\left\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\right\} = m^2(1-y^2)$$

此兩邊ノ x ニ關スル微分係數ヲ取レバ

$$2(1-x^2)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+(-2x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2(-2y)\frac{dy}{dx}$$

$2\frac{dy}{dx}$ ニテ除セバ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=o \qquad [A]$$

今

$$y = \sin\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\} = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots [B]$$

ト置ケバ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\cos\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\}}{\sqrt{1-x^2}} = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+na_nx^{n-1} +\cdots\cdots [C]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2+3.2a_3x+\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\cdots [D]$$

[B][C][D]ヲ[A]ニ代用シ x^n ノ係數ヲ o ト置ケバ

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-n(n-1)a_n-na_n+m^2a_n=o$$

$$\therefore\ a_{n+2} = \frac{n^2-m^2}{(n+1)(n+2)}a_n \qquad [E]$$

[B] ニ　$x=0$ ト置ケバ

$$a_0 = 0$$

從テ [E] ヨリ

$$a_0 = a_2 = a_4 = \cdots\cdots = a_{2n} = 0$$

ナルコチ知ル又 [C] ニ　$x=0$ ト置ケバ

$$a_1 = m$$

從テ [E] ニ　$n=1$ トセバ

$$a_3 = \frac{1-m^2}{2.3}a_1 = -\frac{m(m^2-1)}{\underline{\lvert 3}}$$

$n=3$ トセバ

$$a_5 = -\frac{m^2-3^2}{4.5}a_3 = \frac{m(m^2-1)(m^2-3^2)}{\underline{\lvert 5}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \sin\left\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\right\} = \frac{m}{\underline{\lvert 1}}x - \frac{m(m^2-1^2)}{\underline{\lvert 3}}x^3 + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{\underline{\lvert 5}}x^5$$

$$-\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots$$

$$-1 < x < 1,\qquad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2} \tag{97}$$

$\mathrm{Sin}^{-1}x = z$，$x = \sin z$ ト置ケバ

sin$m$ ノ展開式

$$\sin mz = m\sin z\left\{1 - \frac{m^2-1}{\underline{\lvert 3}}\sin^2 z + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{\underline{\lvert 5}}\sin^4 z - \cdots\right\} \tag{98}$$

[IV]　$y = \cos\left\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\right\}$，$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2}$

[III] ト全ク同樣ニシテ

cosmz ノ展開式

$$\cos\left\{m\mathrm{Sin}^{-1}x\right\} = 1 - \frac{m^2}{\underline{\lvert 2}}x^2 + \frac{m^2(m^2-2^2)}{\underline{\lvert 4}}x^4 - \cdots\cdots \tag{99}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Sin}^{-1}x < \frac{\pi}{2},\quad -1 < x < 1$$

$\mathrm{Sin}^{-1}x = z$，$x = \sin z$ ト置ケバ