ペインに於ける科學の進みはペルシャに於ける科學の進歩とは全く獨立して居た。

偖吾等はコルドヴァへと西方へ向ふて進む間に、其途中埃及に止まつて、其處に再燃した科學的活動を充分に觀察するを要する。併し今はアレキサンドリヤでなしに、カイロが圖書館を有し天文臺を有した科學の本據である。此地の科學者中最大なる人はアブル・ウエファの同時代の人で千八年に死んだベン・ユヌスである。彼は球面三角法の若干の六ケしき問題を解いた。尙他の埃及の天文學者は千三十八年に死んだイブン・アル・ハイタムで幾何學的軌跡に就いて論じた。

吾等は埃及を去り、一層西方へ進むと、モロッコでアブル・ハサン・アリと出會ふ、此人の書いた「天文用器械に就いて」と云ふ書を見れば彼はアポロニウスの圓錐曲線法に能く通じて居たことが分かる。尙西へ進んでスペインの首府コルドヴァに到達すると、其建築物の壯麗なることに驚かされる。此の有名な學問の本陣では數多の學校と數多の圖書館とが第十世紀の間に設けられた。

スペインに於ける數學の進歩に就いては吾等に知れて居るものが甚だ少ない。吾等に傳へられた學者中最も古き名前は千七年に死んだアル・マドシリチで、此人は親和數に關する神秘的な一論文の著者である。又彼の弟子等はコルドヴァ、ダニヤ、グラナダ等に學校を設立した。併しスペインに於けるサラセン人の間で、偉大なる天文學者は獨りセヴィルラのガビル・ベン・アフラハであつて此人は又屢々ゲベルとも呼ばれる。彼は第十二世紀の後半中に生存した。以前此人こそは代數學の發明者であつて、アルゼブラなる言葉はガビル又はゲベルから導かれたものと考へられたことがある。彼は其時代の最大な天文學者の一人であるが、其書き物を見れば、其同時代の人々と同樣に數多の神秘なものを書いてあるのに氣がつく。彼の主な著書は九卷から成る天文學の書で、其第一卷には三角法を論じて居る。彼の球面三角法の論じ方は甚だしく獨創的のもので、長い間墨守され來つた「六つの量の規則」を應用せる、トレマエウスの採用したやり方に戰を挑み「四つの量の規則」に基づいた彼自身の創めた新しき方法を記して居る。

夫れは次ぎの如きものである。若し PP_1 と QQ_1 とがA點で會合する二つの大圓上の二つの弧であり、又 PQ と P_1Q_1 とが QQ_1 に垂直なるが如く書いた二つの大圓の弧であるならば、

$$\sin AP : \sin PQ = \sin AP_1 : \sin P_1Q_1$$

と云ふ關係がある。ガビルは此定理を用ゐて、夫れから直角球面三角形の公式を出した。その四つは既にトレマエウスの記したものと同じであるが、彼は更に一つの式を附加した。此公式は彼の發見したもので、a、b、cを三つの邊としA、B、Cを三つの角とすればCが直角である場合に

$$\cos B = \cos b \sin C$$

なる關係が成立すると云ふことである。此れは屢々「ゲベルの定理」と呼ばれる。球面三角法に對する彼の革新は根本的で又大膽なものであるが、平面三角法に於てはギリシャ人の古き蹈みなれた道を從順に進行した。彼れは印度流の「正弦」、「餘弦」を採用せしにも關らず、ギリシャ流の「倍角の弦」をも尙用ゐて居る。即ち彼の如き獨立思想の高きアラビヤ人でさへも古き思想から離れるのが苦痛であつたと見える。ガビル・ベン・アフラハの時代の後、スペインに於けるサラセン人の間に有名な數學者は一人もない。コルムブスがアメリカを發見した年に、ムール人はスペインの土地に於ける彼等の最後の足場を失ふた。

吾等はアラビヤ人の間に讃ふべき叡智的活動を見た。幸にも彼等は大なる雅量を以て科學的研究を奬勵した司配者を有した。カリフの朝廷では學者に圖書館と天文臺とを與へた。多數の數學書と天文書とがアラビヤの著者に依つて書かれた。さりながらアラビヤ人によつて創められた主要な原理が、只一つでさへも見出すことは出來ない。彼等の成就した發見は其何たるを問はずギリシャ人や印度人が既に通過した範圍内に於けるもので、只ギリシャ人や印度人が急進した間に見逃がした物丈に止まつて居る。

アラビヤ人の精神には、其後歐羅巴の數學者が科學を革新したが如き鋭き洞察力と發明力とが缺けて居た。彼等は能く學なんだが、獨創的ではなかつた。彼等の科學に對してなした要用な務めはギリシャ及び印度の學問を適用し、且つ彼等の受けた此學問をば、細心の注意を拂ふて保存したことである。科學に

對する愛好の念が西洋人の間に勃興するや否や、彼等は古代の貴重な此寶をば歐羅巴人に傳へた。かくて此セミチック人種は暗黒時代の間にアルヤン人種の知識の持物の監視人の役を勉めた。

第三章　中世紀に於ける歐羅巴の數學

基督の後、第三世紀を以て歐羅巴大陸に諸國民の移住の時代が初まつた。有力なるゴッス人は北方に於ける彼等の沼地と森林とを棄て、南西へ向ふて次第〳〵に突進し、ヴァンダル人や、スエヴ人や、ブルガンヂャ人を逐ひ拂ひ、羅馬の領地を横斷し、地中海の岸に達した時に始めて其處に止まり又其近傍を廻つた。ウラル山脈から荒き遊牧人民の群がダニウブ河に沿ふて下つて來た。羅馬帝國が瓦解し、暗黒時代が始まつた。さりながら一見之が暗黒に見えるが、其實は近代歐羅巴の諸制度や國民の胚出しかゝつた時期であつた。一部分純粋で、一部分セルチック及び羅甸質と混じたチウトン人は強くして而かも華美な歐洲現代の文明を生んだ。殆んど凡ての歐洲諸國の國民はアルヤン種族に屬する。共にアルヤン種であるギリシャ及び印度の兩國民が、古代に於いて大思想家でありし如くに、アルプスの北方の國民も亦現代の知識の指導者となつた。

ローマ數學の輸入

是より吾等は、北方の尙ほ野蠻な狀態を脫せぬ國民が、如何にして漸次古代の知識の寶物を獲得するに至つたか、其次第を考へようと思ふ。基督敎の傳播と共に、ラチン語が獨り敎會の用語たるのみならず、科學上及び其他凡ての主要な浮世の取引にも用ゐらるゝに至つた。されば自ら中世紀の科學は大部分ラチン系統から得られたものである。實に此時期の初葉の間にありては、西洋で讀まれた著者はローマの人々のみであつた。ギリシャ語が全く知られて居ないとは言はねが、而かも第十三世紀以前にはギリシャの科學書は一も讀まれず、又羅甸語に譯されなかつた。ローマの著者から彼等の得た科學の知識が、此の如く貧窮なものであつた爲めに、歐洲に於いて、數學が實質的に進步をなすに至る

まで、數世紀を俟まねばならなかつた。

ビューチウス及びカッシオドリウスの時代の後に、數學の活動は羅馬で失せ去つた。北方より來た蕃族の間に於ける學問上の第一の小さな花は六百三十六年にセヴィユのビショップとして死んだイシドルスの書いた、Origines と題する一百科全書である。此書はカルセージのマルチァヌス・カペルラ及びカッシオドリウスの著はした百科全書に範をとつたものである。彼は定義を記載し、又學語の文法上の說明をなして居るが、當時流行して居た計算の方法を一向記載して居ない。

イシドルスの後一世紀の間暗黑時代が續き、而かもベデ・ゼ・ヴエネラブル(六百七十二年—七百三十五年)の出現に依つて、遂に其暗雲も消散し始めた。彼は當時西洋に於ける學問の本據であつたアイルランドの人で、其時代の最大な學者であつた。彼の著書中には耶蘇復活祭の日を計算する方法や、指計算法などを載せて居る。之で見ると指で數を表はす方法が廣く計算に用ゐられて居たやうに思はれる。耶蘇復活祭の日を正しく決定することは當時大に敎會の人々の心を用ゐた所であつた。從つて何れの寺でも一人の僧侶が宗敎に關する祭日の正しき日を決定し、又曆表を計算し得るやうにして居た。此の如き決定をなすには、算術の知識を何程か要する。其爲に僧侶の敎育の課目の一角に些少ながらも計算の技術が加へられて居た。

ベデの死せし年は、アルクイン(七百三十五年—八百四年)の生れた年であつた。アルクインはアイルランドで敎育を受け、シャーレマニュ大帝の朝廷の招聘に應じ、フランク大帝國の敎育の改良を委ねられた。大帝は學問と學者との非常な保護者で僧正廳及び他の寺にも學校を設け、詩篇書取、唱歌、計算 computus、文法等を敎えた。玆で言ふコンプッスとは獨り耶蘇復活祭の日を決定する方法を意味せず、一般の計算方法を授けたものと思はれる。當時如何なる勘定法を用ゐたか、今日吾等は之を知るに由ない。アルクインがビューチウスのアベイシスを熟知したと言ふ證跡もなければ、更にアバカスを用ゐて行ふたローマ人の方法にも通じて居たとも思はれない。

アルクインは神學に數論を加味した學者中の一人である。さればどの點か

ら見ても神に能く造られた生物の數は六である蓋し六は其約數の和が $1+2+3=6$ で完全な數なるによる。之に反して八は $1+2+4<8$ であるから不完全な數である。それであるから人類の第二の起源は八なる數から發出した、ノアの箱船に入れられた靈は八であつたと云ふ。

吾等は「心を鋭敏にする問題集」Propositiones ad acuendos iuvenes と云ふ一書を見るが、之は恐らく紀元一千年否な尚一層古き著作と思はれる。カントルは是等はより古きもので、多分アルクインの書けるならんと言ふて居る。今是等の問題の標本をあげやう。一匹の犬が兎を追ふた、が始めに兎の方は百五十尺前進して居た。犬が一跳びすれば九尺行き、兎の方が七尺である。偖幾回跳ねたならば犬の方が兎に追附くかを定める爲に、著者は百五十を二で割つた。又此問題集には三角形又は四角形をなせる土地の面積を計算する近似公式を載せて居るが、夫等は埃及人が用ゐ、ビューチウスが己が幾何學書に掲げたものと同じである。

若干の管を別々に用ゐて、水溜が一杯になる時間を與へられて、是等を同時に用ゐると何時間を要するかと云ふ問題は以前にヘロンの記したもので、又ギリシャでも見受るが、之も此集にある。其他の問題の數多を調べて見れば、此問題集はローマの源泉から編せられたものと思はれる。別して此想像を決するについて有力なのはローマにのみ特有な、双子が生れた際の遺言の解釋が符合して居ることである。蓋し此問題を見れば、ローマのものと全く同じで、只其割合を異にして居る。尚餘興的の問題が載せてあるが、其一は狼と甜菜と羊との問題で、一人の渡守があり、其船には是等の中の一つと自分丈が乘れる。底で羊が甜菜を食はず、又狼が羊を殺さないで、凡てを安全に渡すには、如何にすべきかと言ふのである。

之を要するに、此問題集中の解は測量に用ゐた若干の公式、一次方程式を解く手段及び整數を用ゐて四則の運算を行ふ手段とを集めたに過ぎず、根の開方は何處にも見出されず、分數さへも殆んど見受けない。

シャーレマニュの大帝國が大帝の死と共に動き出し、間もなく瓦解した。戰爭と混亂とが之に次ぎ、科學的研鑽が廢棄せられ、獨逸に於いてサクソンの、又佛

蘭西に於てカペチアンの司配の下に、一層平和な時代が始まつた時、卽ち第十世紀の終頃までは、科學は顧られなかつた。幸に此時に無智の深き暗雲は失せ始めた。僧侶が熱心に數學を學び出したが、夫は主としてゲルバートと云ふ一偉人の勢力と感化とによるものであつた。

ゲルバートはオヴエルニュのオーリラックに生れ、寺院敎育を受けた後、スペインで重に數學を研究した。本國に歸つた後彼は十年間ライムスで學校敎育に從事し、其深遠な學識で有名になつた。オット第一世及び彼の繼續者に依つて、ゲルバートは非常に尊敬された。先づライムスのビショップに選ばれ、次いでラヴエンナのビショップとなり、遂に彼の以前の生徒たりし帝王オット第三世に依つて、ジルヴエスター第二世の名の下にポープとなつた。併し彼は千三年に數多の政治上及び敎會の爭に取り卷かれつゝ生を終つた。彼の數學の知識は其同時代の人々に驚異の眼を以て見られた。されど又彼が惡しき靈魂と罪せらるべき交通をなしたと云ふて彼を批難した數多の人もあつた。

ゲルバートは稀有の諸書を買集めて其智嚢を擴張した。マンチュアでビューチウスの幾何學書を見出した。此著書は科學的價値の少きものであるが、而かも數學の歷史にとつては甚だ要用なものである。當時にあつては、歐洲の學者が由つて以つて幾何學を學び得べきは獨り此書のみであつた。ゲルバートは熱心に之を學び、人々の信ずる所によれば、彼自身も一幾何學を著はしたとのことである。併しハアウイセンボルンはゲルバートの著者なることを否認し此問題となつて居る本が同一著者に由來すると考へ得ざる三つの部分から成立すると主張して居る。夫はともあれ、此幾何學書はビューチウスのもの以上を含んで居ない。併しビューチウスの著書中にある誤りが、此本に削正して揭げられて居るのを見れば、其の著者が幾何學に熟達した人であるのは確かである。

ハンケルは「中世紀に於ける第一の數學論文と稱して妥當なのはユートレヒトのビショップアバルボールドに宛てたゲルバートの手紙である。其手紙の中に、ゲルバートは幾何學的には底邊に高さの半分を乘じたものとなる三角形の面積が、測量學者に依つて用ゐられる公式 $\frac{1}{2}a(a+1)$ （aは等邊三角形の一邊

を表はす)を用ゐて算術的に計算したものと異なる理由を説明した。即ち彼は後なる公式では、三角形をば數多の小さな正方形に分けたものと想像した爲めに、其等の若干の一部が三角形の外に突出して居るにも係はらず、此公式では凡てを其儘寄せ集めた爲めであると正しき説明を與へた。

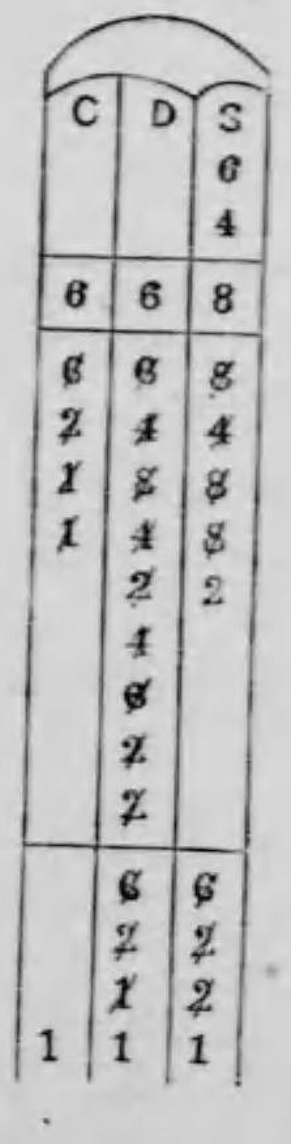
ゲルバートはビューテウスの算術書を精細に研究し、自らも亦「アバカスによる計算の規則」「數の割算」についてなる二書を著はした。是等は印度數字が歐羅巴に導かれる前に、歐洲人の實行して居た計算の方法を知らしむる。ゲルバートはアルクインには多分知られなかつたと思はれるアバカスを用ゐて居る。

ゲルバートの弟子のベルネリヌスの記したのによれば、當時の幾何學者は小さな滑かな板片に砂を振りまき、其上に線を引いたものゝ如くである。次ぎに算術の目的には、板の上に三十の行を設け、其中の三箇は分數の爲めに具へられ殘る二十七行は其各々が矢張り三行宛を含む九つの群に分けられ、其の各群中の三行は夫れ〳〵にC(百位)、D(十位)及S(單位)又はM(一位)なる文字で區別されて居た。ベルネリヌスは用ゐられた九つの數字を與へ、且つギリシヤ文字を其代りに用ゐることが出來ると述べて居る。此の如き行を具へた板を用ゐると任意の數を零なる記號を用ゐずに書くことが出來、加ふるに算術の凡ての運算が、行を用ゐずして零なる記號を採用する現今の方法と、全然同樣に行はれる。

實際算盤用者の用ゐ慣れた加法及乘法は、其實質に於いては現時の是等の方法と一致する。併し割算丈は大に趣きを異にして居る。此時代の割算の規則は次ぎの三つの條件を滿足するやうに構成されたらしい。(一)乘ヶ算表の使用は出來得る丈制限さるべきこと、少くとも二つの數字の數を一數字の數と乘けるには暗算でやり、決して乘ヶ算表を用ゐぬこと。(二)、減法は出來る丈避け、其代りに加法を用ゐること。(三)、運算が純粋に機械的に行はれ、試みを要せざるべきこと。彼等が此の如き條件をなす必要を感じたことは吾等に寧ろ不思議に思はれるが、中世紀の僧侶は小兒の時代に學校に通はず、記憶力の盛んな時代に乘け算表を學ばなかつたことを思はねばならない。

ゲルバートの割算の規則は今日に傳はつて居る最も古きものである。是等は餘りに簡單過ぎて、初學者にとりて甚だ茫漠な感がある。恐らく是等は計算

の相續ぐ道行を心に呼び起し、記憶に便ならしめる爲に作られたものであらふ。より後の原稿を見ると、是等の規則は一層充分に表明されて居る。今任意の數を一つの數字からなる他の數で割る場合、例へば六百六十八を六で割るには、先づ除數六に四を加へて十とする。夫れから後のやり方は茲に示した圖に表はされて居る。次第に續けて運算する間に、各行の數字の線を引かれたものが、削



られ、其下方にある數字で代へられたものと想像して、此圖から其規則を知り得る。先づ六〇〇を一〇で割ると、六〇になる。併し誤を正す爲めに 4×60 即ち二四〇を加へる。次ぎに二〇〇を一〇で割り二〇を得るが、誤を正すに 4×20 即ち八〇を加へる。乃ち $60+40+80=180$ を得る。依つて更に上の方法を續けて一〇〇を一〇で割ると一〇となり、之に修正 $4\times10=40$ を加へると、之と二〇とが加はゝり、六〇となる。底で、六〇を一〇で割り六を得る。そして其修正が $4\times6=24$ となる。依つて二〇を一〇で割り、二を得る。之に $4\times2=8$ の修正を加へる。すると單位の位に殘つたものゝ和は $8+4+8=20$ となる。されば例の如く運算し二〇を一〇で割り二を得、$4\times2=8$ の修正を加へる。而かも八は一〇で割れないが六では割れ商が一となり、二が剩餘となる。斯樣に運算して得た別々の商を加へ合はせると、$60+20+10+10+6+2+2+1=111$ と、なり、剩餘が 2 となる。

除數が二つ又はより以上の數字から成立つ場合には、此方法は之と似たもので、而かも一層複雜したものである。例へば除數が二十七である場合には一〇の倍數で二十七よりも次ぎに位するもの、即ち三十を除數と考へ夫れ〳〵に修正を三について行ふ。此の如き方法を忍耐して最後まで行ふて見ると、何人もゲルバートが此規則を批評して「彼は汗を流がすアバカス用者からも只僅かに理解されたやうな規則を與へた」“Regulas dedit, quæ a sudantibus abacistis vix intelliguntur.” と言ふた理由が分かり、又アラビヤの除法が始めて輸入さるゝや、夫が黄金の除法 divisio aurea と言はれ、之に反してアバカスによる方法が黑金の除法 divisio ferrea と言はれた理由も納得が出來やう。

ベルネリヌスのアバカスの本の中に、分數に就いて記した一章がある。勿論

二分數であつて、最初ローマ人に使用されたものである。之にかりし爲め、分數を用ゐた計算は非常に困難であつた。これも、分數を分子や分母で表はすことをせず、古のアバカス流$\frac{1}{12}$の代りにunica, $\frac{5}{12}$の代りにquincunx, $\frac{9}{12}$の代りにdodrans名前で表はす習慣をもつて居るものとせば、彼等と同樣困難を感ず違ない。

第十世紀中にはゲルバートが學者中の中心人物であつた。彼の時代の間に西洋人はローマ人の有した凡ての數學上の知識を確實に所有するに至つた。第十一世紀の間に、西洋人は之を勤勉に學んだ。而して當時既に數多の算術及び幾何學に關する著書が現はれたが、而かも西洋に於ける數學上の知識は尙甚だ陳腐のものであつた。彼等がローマから得た寶が實に憐れなものであつた。

アラビヤ原稿の飜譯

ゲルバートは彼の偉大な博學と稀有の活動とにより、獨り數學の研究に新たな生命を與へたのみでなしに、哲學の研究にも同樣の仕事をなした。佛蘭西、獨逸、伊太利から彼の敎を受けんが爲に學生がライムスに集り來たつた。かく彼の敎を受けた人々が矢張り敎師となつた際には、啻にアバカスや幾何學を敎えたのみでなしに、勿論彼等がアリストートルの哲學によつて學修した所を敎えた。アリストートルの哲學は最初には獨りビユーチウスの書物によりてのみ知られて居た。然るに之に對する熱心が增すに從ふてアリストートルの全集を要求するに至つた。而かもギリシヤ語の本は缺けて居る。恰かもよし、彼等は、アラビヤ人が矢張り此逍遙學派の大賞讃者であつて、アリストートルの著述の譯書を所有し、且つ是等の註解をも所有することを聞いた。玆に於いて彼等は遂にアラビヤの原稿を搜索して、夫を飜譯せんとした。此の如き探索中にアラビヤの數學上の著述も亦彼等の注意する所となり、是等が羅甸語に譯された。若干の少數の餘り要用でない著述がより早き時代に譯されたかも知れないが而かもアラビヤ書籍の飜譯が非常な熱心を以て行はるゝに至つたのは紀元千百年頃からである。羅甸民族がモハメッド敎徒の間の知識の寶を獲得せんと

是等の分數は十二分數であつて、最初ローマ人に使用されたものである。之に適當な記號法がなかりし爲め、分數を用ゐた計算は非常に困難であつた。これは今日の吾々でさへも、分數を分子や分母で表はすことをせず、古のアバカス流の人々の如くに、$\frac{1}{12}$の代りに unica, $\frac{5}{12}$の代りに quincunx, $\frac{9}{12}$の代りに dodrans と云ふ樣な名前で表はす習慣をもつて居るものとせば、彼等と同樣困難を感ずるに相違ない。

第十世紀中にはゲルバートが學者中の中心人物であつた。彼の時代の間に西洋人はローマ人の有した凡ての數學上の知識を確實に所有するに至つた。第十一世紀の間に、西洋人は之を勤勉に學んだ。而して當時既に數多の算術及び幾何學に關する著書が現はれたが、而かも西洋に於ける數學上の知識は尚甚だ陳腐のものであつた。彼等がローマから得た實が實に憐れなものであつた。

アラビヤ原稿の飜譯

ゲルバートは彼の偉大な博學と稀有の活動とにより、獨り數學の研究に新たな生命を與へたのみでなしに、哲學の研究にも同樣の仕事をなした。佛蘭西、獨逸、伊太利から彼の敎を受けんが爲に學生がライムスに集り來たつた。かく彼の敎を受けた人々が矢張り敎師となつた際には、啻にアバカスや幾何學を敎えたのみでなしに、勿論彼等がアリストートルの哲學によつて學修した所を敎えた。アリストートルの哲學は最初には獨りビユーチウスの書物によりてのみ知られて居た。然るに之に對する熱心が增すに從ふてアリストートルの全集を要求するに至つた。而かもギリシャ語の本は缺けて居る。恰かもよし彼等は、アラビヤ人が矢張り此逍遙學派の大賞讃者であつて、アリストートルの著述の譯書を所有し、且つ是等の註解をも所有することを聞いた。玆に於いて彼等は遂にアラビヤの原稿を搜索して、夫を飜譯せんとした。此の如き探索中にアラビヤの數學上の著述も亦彼等の注意する所となり、是等が羅甸語に譯された。若干の少數の餘り要用でない著述がより早き時代に譯されたかも知れないが而かもアラビヤ書籍の飜譯が非常な熱心を以て行はるゝに至つたのは紀元千百年頃からである。羅甸民族がモハメッド敎徒の間の知識の實を獲得せんと

するの熱心は、第八世紀中にアラビヤ人がギリシャ及び印度の科學の豊富なものを奪略するに示したものにも優さつて居る。

アラビヤ原稿を羅甸に飜譯することに從事した最初の學者中に、バスのアセラードと云ふ人がある。彼の活動したのは第十二世紀の最初の四分一であつた。彼は小亞細亞、埃及、スペイン等を廣く旅行し、モハメッド教徒の國語を學び且つ其科學を得んが爲に殆んど千度も危險を冒した。彼は始めてアラビヤ語からユークリッドのエレメント及びホヴアレズミの天文表を譯した。千八百五十七年に、ケンブリッヂの圖書館で一つの原稿が發見されて、夫が羅甸語で書いたモハメッド・ベン・ムサの算術書であることが分つたが、此譯は矢張り恐らくアセラードのなしたものであらう。

殆んど之と同時代にチヴオリのプラト或はプラト・チブルチヌスと云ふ人が知られ、彼はアル・バッタニの天文學及びテオドシウスのスフエリカの飜譯をなした。是等の前者によりて「正弦」なる學語が三角法に導入された。

第十二世紀の中頃に、其時トレドのアーチビショプであつたレーモンドの指導の下に、トレドで勤勉に此種の事業に從事した基數學者の一團があつた。是等の人々の中で、セヴイユのチヨンが最も傑出して居た。彼は主として、アリストートルの哲學を翻譯した。吾等にとりて必要なのは、彼がアラビヤの著者の書籍を涉獵して編纂した Liber Algorismi である。此の如き著書をアバカス用者の著述と比較すれば著しき差異があり、兩者が其の知識を異なる源泉から採つたことを告げる。

或人は、ゲルバートは彼のアバイシスや、彼の算術の知識をビユーチウスから得たのでなく却つてスペインに於けるアラビヤ人から得、ビユーチウスの幾何學の一部或は全部はゲルバートの時代になつた僞作であると論じて居る。若し此議論が當れるものであれば、セヴイユのジヨンの著書が示すと同樣に、ゲルバートの著書もアラビヤに其本源を有することを示すものと云ひ得る。然るに是等の間に類似の點が一向見出すことが出來ない。ゲルバートがアラビヤ人からアバカスの用法を傳習したとは考へられない、如何なる證據もアラビヤ人がアバカスを用ゐたことのないのを告げて居る。且つ又彼はアラビヤ人か

らアバイシスを借用したとのことも事實らしくない。蓋し此れはアバカスの上に於ての外は歐羅巴で全然行はれなかつた。第十世紀又は第十一世紀頃の數學者が、割算の例を示すに際しては、先づローマ數字を用ゐて題を表明し、然る後アバカスを書き、其中にアバイシスを以て必要な數字を挿入したものであつた。であるからアバカスとアバイシスとが同じ源から借りられたものと思はれる。アラビヤ流を汲めるセヴイユのジョンの如き著者とアバカス用者との間の差違をあげると、前者が後者と異り印度人のことを記し、アルゴリズムなる語を用ゐ、零の記號を用ゐて計算を行ひ、アバカスを使用しなかつた。前者は根の開法を教えたが、アバカス學者は之を教えなかつた。前者はアラビヤ人に依つて用ゐられた六十分的分數を教えたが、後者はローマ人の用ゐた十二分數を用ゐた。

セヴイユのジョンの少しく後に、ロムバルヂにクレモナのゲラードと云ふ人があつた。彼はアルマゼストを得んことを熱望し、トレドに行き、其處で千百七十五年に、トレマエウスの大著を翻譯した。彼はモハメッド敎徒の文献の豊富なるに感奮し其研究に沒頭するに至つた。かくて彼は七十以上のアラビヤの著書を羅甸語に譯した。此著の中で數學的のものを述べると、アルマゼストの外にユークリッドの十五卷、テオドシウスのスフェリカ、メネラウスの一著書、モハメッド・ベン・ムサ・ホウアレズミの代數學、ドシャビル・ベン・アフラハの天文學及び其他、より必要ならざる若干の著述を含んで居る。

第十三世紀中アラビヤの學問を穫得せんとの熱心が續いた。此時代に科學の保護者となつた人々の最先に帝王フレデリック第二世(千二百五十年に死んだ)があつた。彼はモハメット敎の學者と屢々接近してアラビヤの科學を知り、數多の學者を使用してアラビヤの稿本を譯さしめた、アルマゼストの一新譯を得るに至つたのは彼の力によるものである。更にアラビヤの科學を熱心に研究せしめた保護者をあげると、千二百八十四年に死んだカスチルのアルフォンソ第十世である。彼は己が周圍にユダヤ敎及び基敎の學者を數多招聘してアラビヤ語から天文學上の著述を譯し、且つ編纂をもなした。之に從事した學者中最も優れた人をあげると、ラッビ・ツアグ及びイエフダ・ベン・モセ・コヘンである。是等の二ユダヤ人に依つて編せられた天文表は忽ち西洋に流布し、第十六世紀

までの間凡ての天文學上の計算の基礎となつた。

アラビヤの科學をば基敎徒の國土に移植するのに與つた學者の數が多いが、茲には今一人丈をあげる。千二百六十年頃の人であつたノヴアラのチオヴアンニ・カムパノはユークリッドの新譯をなしたが、之が勢力を得て、他の譯書を壓服し、遂に印刷に附せられたユークリッドの基をなした。

第十二世紀の終頃に、西洋人は所謂アラビヤ數字の記法を得るに至つた。茲に於てローマから相續し來つた面倒な計算法が、印度流の計算法に依つて置き換へらるゝに至つた。代數學が一次及び二次方程式を解く規則と共にラチン人民に接近さるゝに至り、ユークリッドの幾何學、テオドシウスのスフエリカ、トレマエウスの天文學及び其他の著述はラチン語で讀み得るに至つた。かくて新たなる科學上の材料の大多數は基敎徒の手に歸した。而かも亦此等の四方八方からの知識の集め物をば消化するに必要な才能にも缺乏して居らなかつた。ピザのレオナルドの如き人物は實に第十三世紀の玄關を飾るに足りる。

茲に注意すべきは數學又は天文學に關する著述が何れも第十五世紀以前にギリシヤ語から直接に飜譯されなかつたことである。

第一の覺醒と其結果

これまで述べた所では、佛蘭西や大英諸島が基敎歐羅巴に於ける數學の本陣であつた。然るに第十三世紀の始めに當り、一偉人の才能と活動とが、一擧して數學的科學の本據をば新たに伊太利に建てしめた。此人はベデやアルクインや、又はゲルバートの樣に僧侶ではなしに、忙しき日々の業務の餘暇に科學の研究をなした商人であつた。而して彼こそ基敎國土に數學の第一の復興を促した人で、ピザのレオナルド其人である。

彼は又フイボナクチとも呼ばれた。彼の父はピザの冒險的な商人等に依つて地中海の南及東の海岸に建設された工場の一の書記であつた。父は彼の兒童であつた頃アバカスの用法を學ばせた。然るに彼は數學に對して非常な趣味を感じ、後年商人として自ら廣く埃及、シリヤ、ギリシヤ、シシリー等を旅行する間に、數學に關して彼の集め得る凡ての知識を此等諸國民から受けた。かくて

彼は言ふまでもなく、印度の計算法が最も優勝のものなるを知つた。

ピザに歸るや、千二百二年に彼は Liber Abaci と題する大著を公にした。千二百二十八年には此本を改訂したのが出された。此著述は算術及び代數學について、アラビヤ人の有して居た殆んど凡ての知識を載せて居るのみでなく、而かも數學をば自由な獨立な仕方で論じて居る。レオナルドの他の著作と同じく、此著書は彼が單に編纂者ではなかつたこと、換言すれば、中世紀の他の著者の如くに、以前の學者が其學問を表明した形式を奴隷的に摸倣する人ではなかつた、否な却つて彼は非凡の力を有する獨創的の著者であることを示して居る。

彼はアラビヤの記號の採用を勸告した最初の大數學者であつた。零を用ゐて計算することは、基敎徒に依つて最も早く採用されたアラビヤ數學の一部分であつた。當時是等の人民の心は既にアバカスとアバイシスとの使用により之を受入るゝに充分用意されて居たのであつた。行を用ゐて勘定するのは茲に於いて次第に輕んぜられ、實にアバカスなる語も其意義を變じて、アルゴリズムと同意義のものとなつた。ラチン民族は零に對してアラビヤ語で空虛を意味する sifr から轉化した zephirum なる名をつけた、英語の cipher が之に相當する。此の新たな記號は有識の人々に忽ち採用されたが、最初には學者社會には却つて排斥された。伊太利の商人は第十三世紀に早くも之を採用したのに、寺院に於ける僧侶は舊來の方式に執着した。

レオナルドの Liber Abaci の出版後殆んど百年の千二百九十九年に、フロレンスの商人は簿記にアラビヤ數字を用ゐず、其代りにローマ數字を用ゐるか或は數的形容詞を言語の儘で記載すべしと命ぜられた。第十五世紀にアバカスがスペイン及び伊太利で用ゐられざるやうになつた。佛蘭西では尚其後までも行はれ、英國及び獨逸では第十七世紀の中頃までも其使用が止まなかつた。

Liber Abaci は數世紀の間、著述家が算術及び代數學に關する材料を得る寶庫と目されて居た。其中に、當時に於いて知られて居た整數及び分數を用ゐてする完全な計算の方法が示され、開方及立方根が說明され、決定的或は不定的の問題を喚起する樣な一次及び二次方程式が、一方では「單位」或は「複位」の方法で解かれ、又他の一方では眞誠の代數學を用ゐて解かれた。此の本には數多の問題を

あげて居る。次ぎの問題は六ケしき一問題としてコンスタンチノープルのある長官がレオナルドに提出したものであると云ふ。「若し甲が乙から七デナレを貰ひば甲の額が乙の五倍になる。若し乙が甲から五デナレ丈貰へば乙のが甲のものゝ七倍になる。すると甲と乙との所持金が各何程であるか」。Liber Abaciには又歷史的に趣味のある一問題がある。即ち彼に先つこと三千年以前にアーメスによつて之と稍々異なる形ちで既に與へられたものである。「七人の老婦人等がローマに行いた。彼等の何れも七匹の騾馬を持つて居り、是等の騾馬が何れも七つ宛の嚢を運んで居り、而かも各の嚢の中には七つのパンがある、而して各のパン毎に七本のナイフがあり、又其ナイフが七つの鞘に藏められて居る。すると、茲に名指した凡てのものゝ數が幾何であるか。答十三萬七千二百五十六」。

千二百二十年にレオナルドは Practica Geometriæ と云ふ一書を著はし、彼に傳はつて來た幾何學及び三角法に關する凡ての知識を掲げた。ユークリッドや其他のギリシャの學者の書き物はアラビヤ語の稿本によりても尚又ゲラードやチヴオリのプラトーなど云ふ彼の同國人の翻譯によりても、彼に知られて居た。此書中に三邊の函數として三角形の面積を表はすヘロンの公式に、優雅な幾何學的の證明を載せて居る。

上に記したよりも尚趣味あるものは彼の獨創的の研究を含んで居る著述である。之を述べる前にレオナルドが Liber Abaci を公にした後のこと、天文學者ドミニカスの盡力で帝王フレデリック第二世に拜謁を許されしことのあるのを記したい。其時に帝王の公證人であつたパレルモのジヨンが數多の問題を提出したが、レオナルドは是等を迅速に解き去つた。其問題の第一のものは x^2+5 と x^2-5 とが何れも完全な平方數である樣に x の價を求めよと云ふのであつた。其答は $x=3\frac{5}{12}$ である、蓋し $\left(3\frac{5}{12}\right)^2+5=\left(4\frac{1}{12}\right)^2$, $\left(3\frac{5}{12}\right)^2-5=\left(2\frac{7}{12}\right)^2$ である。此問題の彼の巧みな解は彼の著書 Liber Quadratorum にあり、其寫本の一が彼によつてフレデリック第二世に献せられた。此問題はパレルモのジヨンが創始したものでなしに、アラビヤ人は既に之に類する問題を解いて居る。レオナルドの解の或部分はアラビヤ人に負ふ所があるが、而かも彼の

用ゐた奇數の和によつて平方を求むる方法は彼の創めたものである。

第二の問題は $x^3+2x^2+10x=20$ なる三次方程式の解であつた。當時尚三次方程式が代數學的に解かれて居なかつた。彼は幾回か試みて而かも出來なかつた方面即ち此問題を解くことに徒に固執せずに、其研究方法を轉じ、明瞭な嚴正な證明によつて此方程式の根がユークリッド式の無理量を以てしては表はすことが出來ない、換言すれば是等の根が定規とコンパスとのみを用ゐて作ることの出來ぬことを明かにした。而して根の値については之に甚だ近き近似値を見出すことを以て滿足した。此三次方程式に關する彼の研究は次ぎに述べるジョンの提出した第三の問題の解と共に其著 Flos に載せて居る。

「三人が共同して持つて居る金の高が未知の値 t になる。其中で甲の持分は $\frac{t}{2}$ であり、乙の持分は $\frac{t}{3}$ であり、丙の持分は $\frac{t}{6}$ である。彼等は其資をより安全な場所に貯へる事を望んで、各々若干宛を取つた。即ち甲は x 丈を取つて $\frac{x}{2}$ 丈を貯へた。乙は y 丈をとつて $\frac{y}{3}$ 丈を貯蓄し、丙が z 丈をとつて $\frac{z}{6}$ 丈を貯へた。さて全體の和の中から各自が其持分を正しく所有する爲めには、各人が貯蓄した總高から丁度 $\frac{1}{3}$ 宛を取らねばならぬ。然らば x、y、z は如何。」

レオナルドは此問題が不定のものであるを證明し、貯蓄した分から各々の人によつて引出さるべき金高を 7 と假定して $t=47$, $x=33$, $y=13$ $z=1$ を得た。

斯樣に花々しき端緒を以て、回敎徒の國土から基督教徒の國土へ移植された科學が、健全にして而かも活潑な發展を遂げたことゝ恐らく何人も想像するであらう。然るに實際はそうでなしに、第十四世紀及び第十五世紀の間には科學の進歩が停止的であつた。永き戰爭は國民の勢力を吸收し、其爲めに科學の進歩を遲滯させた。千二百五十四年に起つたフレデリック第二世の崩御が獨逸に混亂の時代を引き起した。獨逸の帝王と法王とが絕へず爭をなし、イタリヤが其結果としてウエルフ家とワイブリンゲン家との間の爭に捲き込まれた。フランスとイギリスとは百年戰爭(千三百三十八年―千四百五十三年)に從事した。續いてイギリスには薔薇軍の戰爭が起つた。

「科學の發達は獨り戰爭によつて遲れしめられたのみならず、又煩瑣哲學の有害な影響によつて妨害された。當時の知識界の指導者が、純正哲學と神學に關

した神秘な問題について爭ふた。例へば如何に多くの天使が針の先に立つことが出來るかと云ふ樣につまらぬ問題が非常な趣味を以て論議された。觀念の不明瞭と混雜とが、此時代の推理の特色であつた。中世紀の數學上の著作の中では、ピザのレオナルドの著作が塵捨場に於ける寶石の如くに見える。此の時代の數學の著者は、數に於ては敢へて少くはなかつた。併し彼等の科學上の努力が煩瑣的な考へ方によつて害なはれた。彼等はユークリッドのエレメンツを所持して居つたが、然かも數學的證明の眞の性質が全く理解されなかつた。從つてハンケルがレオナルドの以後ユークリッドから借用されたものゝ外、只一つの證明さへも此の時代の全文献中に見出すことが出來ないと云ふたのも、必ずしも過言ではない。

只注意すべき進歩は數的運算の單純化と夫れの應用範圍の擴張とである。イタリヤ人の間に於て算術が早くより發展した證據がある。ピーコックの云ふには、一般にタスカン人、特に第十三世紀及第十四世紀の文學及び算術の搖籃であつたフロレンスの人々が、算術及び簿記の知識を以て有名であつた。蓋し是等は彼等の廣き商業に必要なものであつた。イタリヤ人は歐羅巴の他の國民に先んじて商業算術に熟達して居つた。算術の本に損得、組合、交換、單利及び複利、割引其他に關する問題を區分して組織的に論ずる樣になつたのは、彼等の影響である。

代數學上の記號の進歩も又遲々たるものであつた。印度の代數學は稍々記號を所持して居つたが、モハメッド敎徒が夫れを全く無視した。其結果として、アラビヤ代數學が、殆んど記號を組織的の仕方に於いて用ゐなかつたと云ひ得べきチォフアンツスの代數學と非常に接近するに至つた。ピザのレオナルドも代數學的記號を用ゐなかつた。アラビヤ人の如くに量の相互の關係をば線か或は言葉を用ゐて表はした。然るにルカス・パシオリなる僧侶の數學の著書中に記號が表はれ始めた。是等の記號は唯イタリヤ文字の省略であつて、例へばより多くを意味する piu の代りに p を、より僅かを意味する meno の代りに m を、又物又は未知量を意味する cosa の代りに co を用ゐる樣なものであつた。

吾等の現今の記號は便利てふ點から多くの著者が略語を異なる程度に於い

て用ゐることを感じて識らず〳〵の間に進歩し單に一目する丈で完全に記號の意味を解し、量の最も複雜した關係をも、一瞥して理解し得る樣な記號的言語を生ずるに至つたもので、些細なる改良の引續いて行はれた結果である。

吾等はこれから第十三世紀及第十四世紀の間及び第十五世紀の前半中に生存した若干の著者に就いて記載しやう。ピザのレオナルドの時代の頃(紀元千二百年)獨逸の僧侶ジオルダヌス・ネモラリウスが生存しピユーチウスの算術に範を採り千四百九十六年に數の性質に關した著書を公にした。其中に最も平凡な數の性質が誇張的の言葉を以て論ぜられて居るが、一時は有名であつた。印度の記號法に基いた實用算術も亦彼れによつて書かれた。千二百五十六年に死せるジョン・ハリファクスは巴里に於て敎授をなし、又アルマゼストから拔萃をなし、其中に此書の最も簡單な部分を載せた。此拔萃が殆んど四百年の間非常に名聲を博し、又標準的權威と考へられたものであつた。他の偉大な著者は獨逸のアルベルツス・マグヌス及びゲオルジ・プルバツク及びイギリスのロージヤー・ベーコンであつた。

吾等の現代の觀念の若干が中世紀の著者に依つて、あちらこちらに暗示されてる樣に見える、例へば千三百八十二年に死んだニコレ・オレスメは其後更にスチヴイヌスに依り再發見された分數の羃の記號を始めて考案し、之等を用ゐて計算する規則を與へた。彼れの記號は吾々の現今採用するものと全く異つて居る。トーマス・ブラッドワルチンが星形五邊形の問題を研究した。斯くの如き五邊形の始めて現はれたのはピタゴラス及び彼れの學派の人によつてであつた。續いてピユーチウスの幾何學にも斯かる五邊形が記され、又アセラルドがアラビヤ語から譯したユークリッドの翻譯の中にも見受ける、ブラッドワルチンの哲學的著作には無限及微分に關する議論を記して居る。三角法に於ける最初の歐羅巴の著者を生んだ名譽は英國に落ちる。ブラッドワルチン、ワリングフオルドのリチヤード及びジョン・モーヂス及ウインチコムのシモン・ブレドン等の著書中には源をアラビヤに有する三角法が載せてある。

第十四世紀の初めに生存したギリシヤの僧侶マキシムス・プラヌデスの著述は當時印度の數學がギリシヤに知られて居つた事を示す點に於てのみ、趣味が

ある**モスコプルス**は**プラヌデス**の如くにビサンチンの學派に屬する一著者で、第十五世紀の初葉にコンスタンチノープルに生存した。歐羅巴に「不思議な方形配數」を輸入したのは彼れであるやうに見える。彼れは此問題に就いて一つの著書をなした。不思議な方形配數がアラビヤ人に知られて居たものであるが、恐らく印度人にも知られて居た。中世紀の星占者及び醫者は此等のものが神秘的の特性を有し、若し銀の板に之れを彫刻すれば疫病除の御守になると信じて居た。

千四百九十四年にタスカンの僧侶**ルカス・パシオリ**に依つて書かれた Summa de Arithemetica, Geometria, Proportione et Proportionarita が印刷された。此人こそは既に注意した如く、代數學に始めて記號を使用した人である。此本は其當時の算術、代數學及び三角法に關するすべての規則を含むもので、**レオナルド**の Liber Abaci の後に現はれた最初の包括的の著書である。併し之より三世紀より以前に公にされた**レオナルド**の大著に發見し得ざるもので而かも要用なものは殆んど此中に見出されない。

恐らくアラビヤ學問の影響の最も大なる結果は大學の設立であつた。僣數學に對する大學の態度は如何なるものであつたか。**アセラルド**が教授したが爲めに、第十二世紀の始めの頃に有名であつた巴里大學は中世紀の間には此の科學に餘り注意を拂はなかつた。幾何學が輕んせられ**アリストートル**の論理學が人々の好んだ研究題目であつた。千三百三十六年に規則が制定せられ、數學の講義に出席せざる學生が學位を得ることが出來ぬやうになつた。更に千五百三十六年の日附を有する**ユークリッド**の始めの六卷の註解を見るのに、A. M. の學位の候補者が之等の六卷の講義を聽いたといふ誓をなす必要があつた。併し試驗が恐らく第一卷以上に涉らなかつたと思はれる、何となれば第一卷の最後の定理卽ち**ピタゴラス**の定理に與へて居つた綽名マギステル・マテセオスと云ふのが、試驗の名前にも矢張用ゐられて居つたからである。千三百八十四年に設立されたプラーグの大學では數學に對して尚一層注意を拂ふた。パチロルの學位に對して、學生は**サクロ・ボスコ**の書いた天文學に關する有名な著書の講義を聽くことを要求された。A. M. の候補者に對しては、啻に**ユークリッ**

ドの始めの六卷のみならず、更に應用數學の知識をも加へられた。講義がアルマゼストの本で與へられた。プラーグの大學の娘とも云ふべきライプチヒの大學では稍々程度が低くかつた。併し第十六世紀に到つては第十四世紀に於けるプラーグの大學と同じやうな條件が課せられた。ボロニヤ、パジユア、ピザの各大學は獨逸に於ける大學と同じやうな位置で、唯純正星占學の講義がアルマゼストの講義の代りに與へられた。第十五世紀の中頃に、オクスフオールドではユークリッドの始めの二卷を學習させた。

斯くの如くにして數學の研究が大學に於いて不熱心な有樣で行はれて居つたと見ることが出來る。學生を感化する程の大數學者も大なる教師も居なかつた。學者の勢力はつまらない彼等の神秘な哲學を考ふるのに消盡された。ピザのレオナルドの天才も、其時代に永遠的の感化を殘し得ず、更に數學の復興が必要であつた。

第三編　近世歐州の數學

吾等は茲で、土耳古人によつてコンスタンチノープルの占領された時代を、中世紀が終つて近世が始つまた年代とするを便利と考へる。千四百五十三年に土耳古人は大砲を以て此の有名な都の城壁を攻撃し遂に此市を占領した。かくてビザンチンの帝國が倒れて再び立ち得ざるに至つた。此の出來事は東洋に取りては悲しむ可き事件であつたが、而かも西洋に於ける學問の進步にとつては甚だ好都合であつた。有識階級の多數のギリシヤ人はギリシヤ文字の尊き稿本を携へて、イタリヤに逃れた。これは古典的學問の復興に對して大なる貢献をなした。此時代に至るまで歐洲人には、ギリシヤの學者が只屢々甚だしく誤まれたアラビヤの翻譯によつてのみ知られて居つた。が今や其本源より而かも又其原語によつて研究されるやうになつた。ユークリッドの著書が千五百七十年にジヨン・デーの助力を得サー・ヘンリー・ブリングスリーによつてギ

リシャ語から翻譯された。第十五世紀の中頃に印刷術が發明され、本が安價になり、又豊富になつた。印刷場が歐羅巴を聽講室に變じた。第十五世紀の終頃にアメリカ大陸が發見され、夫れより間もなく世界の周航が成し遂げられた。世界の脈搏と歩みとが速くなつた。人々の心が益々自由になり又其意識がより明瞭になり且つより強くなつた。中世紀の學問の特徴であつた思想の不明瞭が主に純正數學及天文學の熱心なる研究によつて矯正せられ獨斷說が攻撃され、教會の權威及び哲學の各學派の間に長き爭闘が起つた。永く信せられて居た**トレマエウス**の系統に反對して**コパルニカス**の系統が提出された。この二者間の長き而かも熱心な爭は、**ガリレオ**の時代に頂點に達し、遂に新たなる系統の勝利に歸した。斯くの如くにして徐々に人心が古き煩鎖な繫ぎ場を脫し得て、眞理の新しき島及び大陸を發見せんとして、科學研究の大海に進航するに至つた。

文藝復興

第十六世紀と共に、知識の進歩に對する活動の增進した時代が始まつた。人心が其自由を得んとして大なる努力をなした。教會の權威から脫却せんとの企が前にもなされたが、而かも其計畫が萎微として振はなかつた。然るに教會の權威に對する始めの偉大な而かも成功を得た謀叛が獨逸に於いてなされた。宗教上の事柄に對して自由且つ獨立に判斷せんとの新しき望みは先達ちとなり、これに伴ふて科學の研究の精神が勃興した。斯くの如くにして一時獨逸が科學の先鋒たるに到つた。斯くてフランスやイギリスは尙偉大な科學者を產せざる間に、**レギオモンタヌス**、**コパルニカス**、**リウチカス**、**ケプレル**、及び**チホ・ブラヘ**等を產んだ。此の著しき科學的產物は疑ひもなく、多分は獨逸の商業的繁榮によつたものである。物質的繁榮は知識の進歩に取つて要用な一條件である。各個人が其生存に必要な物品を集めるに餘儀なき間は、より高尚な研究に餘暇を見出すことは出來ない。此時機に當りて獨逸は著しき富を集めた。ハンサ組合は北方のイタリヤ貿易の指導者であつた。獨逸とイタリヤとの間には親密な商業的關係が存在した。イタリヤも又商業的活動と冒險思想に於いて優

ぐれて居つた。吾等は十字軍と共に繁榮したベニスの市及び銀行家と絹及び羊毛の製造者を有するフロレンスの市を記載する必要がある。是等の二市は知識の中心ともなつた。かくしてイタリヤは再び技術、文學及び科學に關する人々を生み、是等の人々が最も偉大なる人として現はるゝに至つた。實にイタリヤは文藝復興と稱せられたものゝ本土である。

故に數學的科學に對する大なる貢獻に就いては、イタリヤ及び獨逸に求めざるを得ぬ。イタリヤに於いては代數學が大なる進歩をなし、獨逸に於いては天文學及三角法が大なる進歩をなした。

此の新しき時代の始めに吾等は獨逸に於いて一般に**レギオモンタヌス**(千四百三十六年―千四百七十六年)と稱せられた**ジヨン・ミユラー**なる偉人と出會ふ、三角法の復興に就いては、吾等は重に彼れに依るものである。彼は有名な**ゲオルグ・プルバツク**に就いてヴイアナで天文學及三角法を學んだ。**プルバツク**はアルマゼストのラテン譯で當時存在して居たものが誤を有すること多く、アラビヤの著者がギリシヤの言語を誤りなしに翻譯し得たものでないことを知つた。故に彼れはギリシヤ語より直接に翻譯をなし始めたが、之を完成せずして歿した。**レギオモンタヌス**は**プルバツク**の事業を繼承し、更に一歩を進めた。**レギオモンタヌス**はカルジナル**ベツサリオン**に就いてギリシヤ語を學修したが、先生は彼れをイタリヤに伴ふた。斯くては八年間イタリヤに止り、土耳古から爰に逃げ來つたギリシヤ人より數多の原稿を蒐集した。アルマゼストの翻譯と註解との外に彼れは**アポロニウス**の圓錐曲線法、**アルキメデス**の著書及び**ヘロン**の力學書の翻譯をも完成した。

レギオモンタヌスと**プルバツク**とはギリシヤ流の二倍の弧の弦の代りに印度流の正弦を採用した。ギリシヤ人や其後アラビヤ人も亦半徑を六十等分し其一分をば更に六十等分した。印度人は圓周の長さを21600等分し、其單位で半徑の長さを計り3438とした。**レギオモンタヌス**は尚一層精確を期する爲めに、半徑を六十萬分した單位を用ゐたものと、更に千萬分の一を單位としたものを用ゐて、正弦表を二種類丈計算した。彼は三角法に正切を使用すべきを高唱し、彼の先生の考を追ふて正切表を計算した。併し此函數を使用した最初の歐

洲人は獨逸の數學者ではなかつた。イギリスでは夫より一世紀もより前に之が**ブラッドワルチン**に知られて居て、此人は正切や餘切について述べ、**ジョン・マウチス**も亦之を用ゐて居る。**レギオモンタヌス**は算術書及び平面及球面三角法の解法を兩方とも包含した三角法の完全な敎科書を著した。彼が此後者に於て三角法に與へた主要な組立は大部分現今までも傳へられて居る。

レギオモンタヌスは獨逸が生んだ偉人中の一人で、彼の天文學及び數學に能く通曉して居たことゝ是等の學問に對する熱心とは獨逸中に遠大なる感化を及ぼした。彼の名聲が高かりし爲め、法王**シクスツス**第四世は彼をイタリヤに招聘して、暦の改良を行ふに至つた。底で彼は愛したニュルンベルグの市を去つてローマに行いたが翌年其處で歿した。

ブルバックや**レギオモンタヌス**の時代の後、三角法就中表の計算が、獨逸の學者の心を占領した。一層改良された精密な觀測結果を與へる天文器械も作られたが、若し之に伴ふやうな精密な三角函數の表がなければ、其効果を奏し得なかつたであらう。當時數多の表が計算された中で一般に**レウチクス**と稱せられて居る**ゲオルグ・ヨアキム**の計算したものは別して注意すべきものである。彼は半徑を 10,000,000,000 として十秒毎に正弦の値を計算せる表を作つたが、其後更に半徑を 1,000,000,000,000,000 として一秒毎に計算した。彼は又正切及正割の表をも同じ精度で計算し出したが、之を完成するに先だつて歿した。

此事業は千五百九十六年に彼の生徒**ヴアレンチン・オト**によつて完成された。これは實に獨逸人の勤勉と堅忍不拔とを示す記念碑とも言ふべき偉業である。千六百十三年に**ピチスクス**は此表を再版したが、其際前の出版に含まれた誤りを叮嚀に訂正した。此の如く精密さの高き天文表はギリシヤ人にも、印度人にも亦アラビヤ人にも曾て夢想だにされなかつた。**レウチクス**が單に計算者たるに止まらなかつたことは三角法の線に關する彼の見解に依つて示されて居る。彼の時代まで三角函數が常に弧に照らして考へられて居たが、彼は始めて直角三角形を畫いて、三角函數をば直接に三角形の角に照らすやうにした。**レウチクス**が斜邊を計算すること、卽ち正割表の計算を思ひついたのは直角三角形を用ゐたのに因る。尙三角法に關する要用な仕事は**ヴイエタ**及び**ロマヌス**

によつてもなされた。

これから三角法の問題を去つて代數學的方程式の解の進歩について考へて見やう。そうするには、吾等は獨逸を去つてイタリヤに行くを要する。印刷された代數學の包含的の著書の第一のものはルカス・パシオリのものである。彼は其書の終りに、$x^3+mx=n$, $x^3+n=mx$ なる方程式の解が、丁度圓の平方化と同樣に、科學の現狀態に於いては不可能であると言ふた。此注意は疑もなく思想界を刺戟した。三次方程式の代數學的解に對する第一歩は、千五百二十六年に死んだボロニヤ大學の數學の敎授スキピオ・フエルロによつて企てられ、彼は方程式 $x^3+mx=n$ を解いた。併し彼の此發見については、其解法を千五百五年に其弟子フロリダスに傳へたとの外全く知られて居ない。當時及び其後二世紀の間は發見を秘密にし、かくて己が敵の及び得ないやうな問題を提出して勝を制すると云ふ習慣があつた。此習慣の爲めに發明の先占權について無數の爭を生じた。

三次方程式の第二の解はブレスシアのニコロ(千五百六年?—千五百五十七年)によつて與へられた。彼は六歲の小兒であつたときに、佛蘭西の一兵卒に斬られ、其爲めに生涯舌を充分用ゐ得ざるに至り、タルタグリア(吃る人)と稱せられた。寡婦であつた彼の母が餘りに貧困であつた爲めに彼の月謝を拂ふことが出來ず、彼は自らラチン語やギリシャ語や數學などを拾ひ讀みした。併し非凡な精神を有する彼は若年の時にも既に數學の敎師として見ゆるに適當して居た。千五百三十年にコルラなる人が數多の問題を提出したが此中の一題が方程式 $x^3+px^2=q$ を解くことを要するものとなる。タルタグリアは此方程式を解く一つの不完全な方法を見出したが、之を秘した。

タルタグリアは此秘密について公に話した所が、フエルロの弟子のフロリダスが、自分が $x^3+mx=n$ なる方程式の解法を知つて居ると云ふことを宣言した。タルタグリアはフロリダスを一の凡庸な人で大言して居るものと信じ、千五百三十五年二月二十二日を期して、公論をしやうと挑んだ。然るに其中に彼の敵が實際既に死せる先生から其方法を授かつたことを傳聞し、公論の席で敗北するかも知られぬとの恐を抱き、茲に勇猛心を起して此問題の研究を始じめ、非常

な熱心で、遂に彼が正直に白狀した如く、公論の定日の十日前に之を解くことが出來た。此際最も困難であつたのは昔から使ひなれた二次無理數から三次の無理數へ移ることであつた。タルタグリアは $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ と置き、$n=t-u$ となせば、三次の無理數が方程式 $x^3+mx=n$ から消失することを知つた。此最後の等式と $\left(\frac{1}{3}m\right)^3=tu$ とが直ちに

$$t=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^3+\left(\frac{m}{3}\right)^3}+\frac{n}{2},\qquad u=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^3+\left(\frac{m}{2}\right)^3}-\frac{n}{2}$$

とを與へる。これはタルタグリアの $x^3+mx=n$ に對する解である。二月十三日に、彼は $x^3=mx+n$ なる方程式についても之に似た解を得た。愈々公論が開かれた。双方から三十題づゝ問題が提出された、而して夫から五十日間に是等の問題を最も多數解き得た人が勝利者であるべしとせられた。然るにタルタグリアはフロリダスの提出した問題を二時間内に解き去つたのに、フロリダスの方では、タルタグリアの提出したのを一題も解き得なかつた。

此時よりタルタグリアは決心して三次方程式を研究した。千五百四十一年に三次方程式 $x^3\pm px^2=\pm q$ をば $x^3\pm mx=\pm n$ なる形に變じて、其一般的解式を求め得た。タルタグリアが此勝利を得たとの報知がイタリヤ全國に鳴り響いた。玆に於いて人々から此方法の敎授を懇請されたが、彼はユークリッドやアルキメデスの著述をギリシャ語から翻譯し終つた後に、自ら發見した方法をも包含する代數學の大著を公にすべしとの理由の下に、敎えることを拒んだ。然るにミランの一學者なるヒーロニモ・カルダノ(千五百一年－千五百七十六年)が何回となしに懇請し、おごそかな誓をなして夫れを秘密にすることを約し、遂にタルタグリアから彼れの解法の知識を授かることが出來た。

恰かも此の時に、カルダノは Ars Magna なる本を書いて居た。彼れは思ふに、學者が長く探がして居た三次方程式を解する規則を挿入することが、彼れの著書を飾るに最もよき方法であると。かくて、カルダノは彼れの神聖な誓を破つて、千五百四十五年に、彼れの著書中にタルタグリアの三次方程式の解法を公にした。タルタグリアは此れを見て失望した。彼れの深き學問と獨創的の力を示すに最も良き記念碑たるべき不滅の著書を世に出さうとの彼れの望が、彼れの本の飾たるべき三次方程式の解法をカルダノが奪ひ去つた爲めに、突然破ら

れた。底で彼れのとるべき第一歩は彼れの發明の歷史を書くことであつた。而かも先づ彼れの敵を全滅せんとして、**タルタグリア**は**カルダノ**と彼れの弟子なる**ロドヴイコ・フエラリ**に公論を申し込んだ。即ち各の側が三十一問題宛を提出して他の側で出したものを十五日間に解くべしとのことであつた。愈々公論を始めたが、**タルタグリア**は七日間に問題の大部分を解いた。然るに相手方は五ヶ月を經るも其の解を送らなかつた。加ふるに愈々送つた彼等の解は一問題の外は皆間違つて居た。之に對して應答又應答が相次ぎ、更に問題が出され、解かるゝなど、兩方の相手方を非常に激昂させた。別して**タルタグリア**の方は數多の他の失望にも遭遇した。漸くにして煩悶を脫し得た後に、**タルタグリア**は千五百五十六年に、彼れの長く心に思つて居た著述の出版を初めた。然るに彼れは三次方程式の解法に到達する前に、不幸にして死んだ。此の如く**タルタグリア**の生涯の熱望は成就されなかつた。第十六世紀に於いて代數學に最大の貢獻をなした偉人は忘れられて、彼れの方法は**カルダノ**の發見と考へられ遂に「**カルダノ**の解法」と稱せられた。

三次方程式の解が伊太利全國を通じて著しく大なる趣味を呼び起した。此の大勝利の後に多くの數學者が四次方程式を解せんと務めたのは甚だ自然の事である。三次方程式の場合の如くに、此の場合にも亦、其最初の刺戟は千五百四十年に**コルラ**なる人が方程式 $x^4+6x^2+36=60x$ の解を求めたことによつた。確かに、**カルダノ**は千五百三十九年の頃に、四次方程式の特別の場合を研究した。かくて、彼れは**ジオフアンツス**及び印度人によつて用ゐられたものと似た方法で、方程式 $13x^2=x^4+2x^3+2x+1$ を解いた。即ち此の式の兩方に $3x^2$ を加へ、斯して兩側を完全な平方に直ほして其の解を得た。然るに**カルダノ**は一般的解法を發見しそこのふた。彼れの弟子**フエラリ**は四次方程式の一般的解法の立派な發見をなし、彼の先生の名聲を支へた。**フエラリ**は**コルラ**の方程式を $(x^2+6)^2=60x+6x^2$ なる形に導いた。さて又右の側を完全な平方の形に直す爲めに、兩方の側に一つの新らしき未知量 y を含む $2(x^2+6)y+y^2$ を加へた。斯の如くにして $(x^2+6+y)^2=(6+2y)x^2+60x+12y+y^2$ を得た。さて此の右側の完全な平方である條件は三次方程式 $(2y+6)(12y+y^2)=900$ によつて表される。此の四次方程

式の平方根を開いて彼れは $x^2+6+y=x\sqrt{2y+6}+\dfrac{900}{\sqrt{2y+6}}$ を得た。y の三次方程式を解き、而して其 y の値を二次式に入れ替へると、出來た二次方程式から x を決定すればよい。フエラリは他の數的四次方程式をば同じ方法を用ゐて研究した。カルダノは千五百四十五年に彼れの「アルス・マクナ」中に此の發見を公にすることが出來た。フエラリの解は時としては「ボンベリの解法」と稱せられて居る。併しながらボンベリの發見者でないことは、カルダノが所謂「カルダノの解法」の發見者でないと同じである。

代數學のカルダノに負ふことは多大である。彼れの「アルス・マグナ」中には、方程式の負根を記し、此れ等を「假」と呼び、正の根を「實」と呼んだ。彼れは虛根を考へなかつた、虛根の表はれる場合を不可能の場合と稱した。カルダノは三次方程式の導き得ざる場合に於ける困難を觀察した。これは圓の平方化の如くに數學者の强情な巧妙をも非常に惱ましたものであると云つて居る。然るに彼れは其の性質を解することは出來なかつた。ボロニアのラフイエル・ボンベリは千五百七十二年に非常に價値ある一の代數學書を書き、其の根のとる見掛け上虛なる式の意味を指摘し、斯くて尙一層虛量の眞の知識の基礎を据えることが出來た。

三次及四次方程式の解が、此の如く成功した後に、何人もより高次の無理數を用ふれば、如何なる次の方程式の解をも見出すことが出來るであらうと考へるのは無理のないことである。然るに五次方程式の代數學的解の凡ての企ては効果を奏せず。遂にエーベルは四次以上の方程式の代數學的解を見出さんとすることは、全くユトピアであるとのことを證明した。

より高次の方程式を根數によつて、解し得ざることが分つた爲めに、根の數値丈でも、確かめ得べき規則を考案せんとする望みが起つた。カルダノは三次方程式にフオルサ・ボジシオの印度の規則を適用した。併し此の近似法は非常に粗雜なものであつた。幾多の必要な改良をなして數學を發達させた佛蘭西の偉大の天才、フランスカス・ヴイエタによつて發見された方法は夫れに比較し得ざる程より良き方法である。即ち方程式 $f(x)=Q$ をとり、其の中で $f(x)$ は數で表はした係數を有する x の異なる冪の多項式であり、Q は與へられた數であ

る。ヴイエタは先づ $f(x)$ に知られて居る根の近似値を代入した、而して根の他の數字は割り算によりて得ることが出來るといふことを證明した。同じ方法を繰返へせば根の次の數字が出で來り、次第に根のより次の數字が得られる。例へば $x^2+14x=7929$ なる方程式に於て、根の近似數を80とし $x=80+b$ と置けば、此の方程式は $(80+b)^2+14(80+b)=7929$ 卽ち $174b+b^2=409$ を與へる。さて $174b$ は b^2 よりも著しく大なるが爲めに、上の式の代りに $174b=409$ と置く。かくて b の値として2を得る。故に根の第二の近似數は82である。再び $x=82+c$ と置けば $(82+c)^2+14(82+c)=7929$ 或は $178c+c^2=57$ となる。前と同樣に $178c=57$ と置けば、c の値は0.3となる。斯くて x の第三の近似數は82.3である。

尚進んで $x=82.3+d$ と假定し、前の通りに進行すれば、d の値として0.01を得、第四の近似數は82.31となる。更に續いて行へば e は0.009となり、與へられた方程式の根の値として82.319………を得る。ヴイエタは此の方法を發見した爲めに彼れの同時代の人々によつて大いに尊敬された。此の方法はハリオツト、オートレツド、ペル其他によつて用ゐられた。又其原理はニユートン及ホルナーの漸近法の原理と同じである。唯此の方法がそれと排置を異にして居るに過ぎない。

我等はこれから、一寸の間、第十六世紀の佛蘭西の最も大なる數學者たるヴイエタの傳を物語らんとする。彼れは千五百四十年ポアトーに生れ千六百三年にパリーで死んだ。彼れはアンリー第三世と第四世との下に、彼れの全生涯を國家の爲めに捧げた。從つて彼の職業は數學者でない。併し數學に對する愛好心が甚だ大にして、時としては僅かに生命を支へるだけ以上に飲食及ひ睡眠をせずして、數日室に坐せる儘研究したこともある。彼れが政治的及び宗教的の絕えざる擾亂の時代中に生存したことを考へると、彼れの此の抽象的科學に對する敬虔が一層注目するに足りる。スペインとの戰爭の間に、彼れは暗號の一種類を以て記しスペインの裁判所からネーザランドの主權者に送つた手紙を判讀してアンリー第四世に盡くす所があつた。

ネーザランドの一公使は或時アンリー第四世に、ベルギーの數學者アドリアヌス・ロマヌスによつて幾何學者に提出された問題を解き得る幾何學者は佛蘭

西に一人もないといふことを話した。其の問題と云ふのは次ぎの如き四十五次の方程式の解である。

$$45y-3795y^3+95634y^5-\cdots\cdots+945y^{41}-45y^{43}+y^{45}=C$$

アンリー第四世はヴイエタを呼んだ。所が、彼れは既に此れに類せる研究をなしたことがあるので、直ちに此の恐ろしく見える問題は其の實、單に $C=2\sin\phi$ の値が $y=2\sin\frac{1}{45}\phi$ の項で表はされたものであることを看破した。即ち $45=3\times3\times5$ である故に、角を先づ五等分し、續いて各の分を三等分することが必要である。ヴイエタは此の方程式の二十三個の根を發見した。なぜ彼れが四十五個の解を見出し得ざりしかと言ふに、殘る二十二個の根が彼れに理解の出來ざりし負の正弦を含んで居つた爲めである。角を奇數の等しき部分に分つ有名な古き問題に關する細かき研究がヴイエタをしてカルダノが三次式に於ける整約し得ざる場合としたものに、三角法的解法を與ふるに至らしめた。彼れは $a>\frac{1}{2}b$ なる時に、$x^3-3a^2x=a^2b$ の解を求める爲めに $x=2a\cos\frac{1}{3}\phi$ と置き、ϕ を $b=2a\cos\phi$ から決定し、方程式 $\left(2\cos\frac{1}{3}\phi\right)^3-3\left(2\cos\frac{1}{3}\phi\right)=2\cos\phi$ を應用した。

彼れの方程式の解法に用ゐた主な原理は、整約の原理である。彼れは二次方程式をば、之に適當な置換をなして x を含む項を去り、之を一次方程式と直して解いた。カルダノの如く三次方程式の一般の式をば $x^3+mx+n=0$ なる形ちに直した後 $x=\left(\frac{1}{3}a-z^2\right)\div z$ を假定し、又これを上の式に置換へて、$z^6-bz^3-\frac{1}{27}a^3=0$ を得た。底で此式に $z^3=y$ と置けば、それは二次方程式となる。四次方程式の解の場合にも彼れは矢張り整約の原理を固執した。ヴイエタの代數學を見れば、彼れが方程式の係數と根との間に存在する關係を稍々知つて居たのは分かる。二次方程式の第二の項の係數が、其の積が第三の項となるが如き二數の和をマイナスにしたものであるならば、此の二數は此の方程式の根であることを證明して居る。ヴイエタは正の根の外凡てのものを排斥した。其の爲めに係數と根との關係を充分に理解することが出來なかつた。

代數學に於いて最も新時機を畫した革新は、アルファベットの文字を利用して一般的の量或は不定の量を表はしたことである。確かに獨逸のレギオモン

タヌス及びステフエル、又イタリヤのカルダノは、彼れ以前に矢張り文字を用いた。けれども、彼れは此の觀念を大に擴張して之を代數學の要用な部分となした。新たな代數學は彼れによりて古き logistica numerosa と區別して logistica speciosa と呼ばれた。ヴイエタの記法は現今我々の用ゐるものと著しく異なつて居る。例へば方程式 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ は彼れによれば、次の如く記された a cubus+b in a quadr. 3+a in b quadr. 3+b cubo aequlia $\overline{a-b}$ cubo. 數的方程式に於いては、未知量はNによりて表はされ、其の平方はQにて、又其の立方はCにて表はされた。例へば $x^3-8x^2+16x=40$ なる方程式は 1C−8Q+16N aequal. 40 と書かれた。

此處に注意すべきことは指數と吾等が現今用ゐる記號の＝とが未だ用ゐられなかつたことである。併し加法を速記的に表はす＋と減法の－とは彼れに用ゐられた。此等の二つの記號はヴイエタの前には一般に用ゐられてなかつた。ハラムは言ふには「最も便利な此の記號、而かも見掛けた所田舍學校の敎師以上の知識を要し相にも見えぬものゝ發見が、タルタグリア、カルダノ及フエラリの如き非凡な人々によつて看過されたといふことは、甚だ不思議である。否な彼等が、彼等の非凡なるが爲めに却つて現今の我々にとりては代數學的式の効用の大部分が此れによると思はるゝ仕組の助が必要でなかつたと考ふることがより不思議でないかも知れない。」

記號に他の改良が提出された後でさへもこれが普通一般に用ゐらるゝやうになるまでは著しく緩慢であつた。記號の改良が考案と云ふよりもより屢々偶然に成立したと云ふべく、從つて其改良を始めた人は彼等の爲した變化の効果が、どれ程大なるものかを意識して居なかつた。＋及び－の導入は獨逸人によるものと見える。但し彼等は文藝復興の時代に當つてはイタリヤ人の如くに大なる發明を以つて代數學を進歩させ得なかつたが、而かも非常に熱心に之れを開拓した。

千四百八十九年にライプチッヒで印刷したジョン・ウイドマンの算術は＋及－の記號を用ゐた最も古き本である。是等の記號は最初に商人間に用ゐられたものと推量するに足るべき證據がある。次いでヴインナ大學の敎授グラムマテウスの算術にも亦＋－の記號が見える。彼の弟子クリストフ・ルドルフは

初めて獨逸語を用ゐた代數學の教科書を書き、千五百二十五年に印刷したが、其の中にも是等の記號が用ゐられて居る。千五百五十三年に、スチフエルはルドルフの Coss の第二版を公けにしたが、矢張り其の中に是等の記號を用ゐて居る。此の如く次第〳〵に此等の記號法の應用が一般的になつた。

尚其他獨逸人に起源を有する速記的記號がある。第十五世紀の或時に公にされた一原稿中には數の前に一つの點を置いて其の根を開くことを表はして居る。此の點は平方根に對する我々の現今の記號の胚子である。クリストフ・ルドルフは彼れの代數學中に「平方根が簡單に√で、例へば四の平方根が√4の如き記號で表はされ得る」と記して居る。即ち點が進化して現今、吾等が用ゐるが如き記號となつたのである。此の同じ記號がスチフエルによりても用ゐられた。次ぎに等號＝はロバート・レコルド（千五百十年―千五百五十八年）によるものである。此の人は千五百五十七年に The Whetstone of Witte を著したが、之れは英語を以て書かれた最初の代數學教科書である。彼れは二つのものが二つの平行した線以上に等しくあり得ざる理由の下に等號に＝なる記號を採用した。割り算の記號÷はヨハン・ハインリッヒ・ラーンと云ふ瑞西人によつて千六百五十九年に始めて用ゐられ、千六百六十八年にジヨン・ペルによつて英國に輸入された。

ミケエル・スチフエル（千四百八十六年？―千五百六十七年）は第十六世紀の獨逸の最も偉大な代數學者であるが、エスリンゲンで生れ、エーナで死んだ。彼れは彼れの故郷の寺院で教育を受け、其後新教の牧師となつた。默示錄及びダニエルの書にある神秘的の數の意味を研究した結果、彼れは數學に趣味を有するに至つた。彼れは獨逸及びイタリヤの著書を研究し、千五百四十四年に羅典語で Arithmetica Integra と稱せらるゝ本を公にし、ミランクトンは夫に序文を書いて居る。其本の三つの部分が夫れ〳〵に有理數、無理數及代數學に就いて論じたものである。スチフエルは第十八項以下の各冪に對する二項係數の數値を含む一つの表を乘せて居る。彼れは等比級數をば等差級數と對立せしめ、整數冪の記號を數で表はすことを便利と考へた。即ち此處に指數の理論の胚子が現はれて居ると云ふべきである。千五百四十五年にチケフエルは獨逸語で書い

た算術書を公にした。ルドルフの「コス」を彼れの増訂した版にはカルダノの書物から導かれた三次方程式を解く規則をも載せて居る。

我等は前にヴイエタが方程式の負の根を排斥した事實を述べた。文藝復興の以前及び其の時代には負量の意味さへも能く理解して居た代數學者は實に少ない。レオナルドは稀に負量を用ゐて居る。パシオリは「マイナスにマイナスを乗ずるとプラスになる」との規則を記して居る。併し實際は唯(a−b)(c−d)の積の展開の際にのみ此の法則を用ゐ、純粹なる負量は彼の著書に現はれて居ない。獨逸の大なる代數學者ミケエル・スチフエルが千五百四十四年に、既に「不合理數」或は「零以下の假數」と名づけた數を述べて居る。而して斯くの如きものが零以上の實數が零より引かれた場合に生ずると言ふて居る。又カルダノは純粹なるマイナスと云ふことに就て話して居る。されど、ハンケルが言ふには、「是等の觀念は稀に述べられ、第十七世紀の初めまでは、數學者が主に絶對的の正の量のみを取扱つた」。折々方程式の一方に純粹に負の量を集めることをした最初の代數學者はイギリスのハリオットである。負根の認識に關しては、カルダノ及びボンベリはヴイエタをも含んで居る文藝復興時代の凡ての著者を遙かに卓んでて居る。されど、彼等でさへも、是等の所謂「僞り」の或は「假りの根」をば、唯序でに記載したまでゝ、是等の眞の意味と必要とを把握したのではない。此の問題に就いてカルダノとボンベリとは、丁度印度のバースカラが負の根を見出したが是等のものを承認しなかつたのと同じ程度に進んで居たのである。負量の意識が統一されて負のものをも含むに至つたのは、代數學の進歩の上に、甚だ遲々たりしもので又甚だ困難な作業であつた。

これから文藝復興時代の幾何學の歴史を考へて見やう。代數學と異なり、此時代に幾何學は何等の進歩をもなさなかつた。當時の最も大なる收獲はたゞギリシヤ幾何學と親炙し得たことのみで、而かも何等の實質的の進歩がデカルトの以前にはなされなかつた。レギオモンタヌス、アウグスブルグのクシランダー、タルタグリア、イタリヤのウルベノのコンマンチヌス其他の人々はギリシヤ語から幾何學的の著書の翻譯をなした。ニユルンベルグのジョン・ヱルネルは千五百二十二年に圓錐曲線に關する著述を公にしたが、それは基教歐洲に於

いて此の問題に就いて初めて現はれたものである。昔の幾何學者と異にして、彼れは圓錐に照らして其の切り口を研究し、是等の切口の特性をば、それから直接に導いた。圓錐曲線の此の研究法はメッシナのマウロリクス(千四百九十四年―千五百七十五年)によつて繼承された。マウロリクスは疑ひもなく、第十六世紀の最も大なる幾何學者であつた。パップスの備忘錄から彼れはアポロニウスが極大及び極小に關して論じた第五卷を回復せんと試みた。彼の主な仕事は圓錐曲線に就いて有名な獨創的な論じ方をしたものであつて、其の中にアポロニウスがなしたよりも一層充分に切線及漸近線に就いて論じ、且つ是等を物理學的及天文學的の種々の問題に應用した。

ホルトガルの最も大なる幾何學者はノニウスであつた。フランスではヴイエタの前に、ペーター・ラムスと云ふ人があつたが、彼れはセント・バルソルミューの虐殺の場合に殺された。ヴイエタは昔の幾何學をよく知つて居た。彼れは一般的の量を文字によつて表はすことにより、代數學に新たなる形を與へたが、それは又三次方程式の根の作法が、球の倍加及び角の三等分に關する有名な古き問題に關係して居ることを容易く指示した。彼れは前なる問題はタルタグリアの公式中の根數が實數である場合の凡ての三次方程式の解を包含するが、後なる問題は整約し得ざる場合となる三次方程式の解のみを含んで居るといふ面白き結論を得た。

圓の平方化の問題は此の時代に再興され、偉大なる數學者に依つてさへも熱心に研究された。かくて圓平方化の一軍が第十七世紀の間に最も堅くなつた。此の問題を復活するによつて力ある第一の人々の中に、大なる論理學者として名聲を博した獨逸のカルジナルニコラウス・クサヌス(千四百六十四年に死んだ)と云ふ人があつた。彼れの似而非なる論が、レギオモンタヌスによつて充分に批評された。此の場合に於ける如くに、他の場合にも凡ての平方化論者が彼れに反對する數學者を生じた。卽ちオロンチウスはブテオとノニウスとによつて反對され、ジヨセフ・スカリガはヴイエタ、アドリアヌス・ロマヌス及クラヴイウスによつて反對され、クエルキユはペーター・メチウスによつて反對された。ネーザランドの二數學者なるアドリ。アヌス・ロマヌスとルドルフ・キユレンと

は圓周と直徑との間の比を精密に計算することに盡力した。前者はπの値を十五桁計算し後者は三十五桁までに及んだ。此の理由でπの値が屢ルドルフの數と稱せられる。彼れの仕事は其時代の人々に著しく非凡のものと考へられ、爲めに其の數がライデンのセント・ピテロの寺院にある彼れの墓石に彫刻せられた。ロマヌスはヴイエタによつて解かれた四十五次の方程式に關する問題を考へた人である。彼れはヴイエタの解を受取るや否や、直ちにバリーに出發し、それを解いた偉大なる學者に交際を求めた。ヴイエタは彼れに三つの與へられた圓に接するやうな一つの圓を畫くアポロニウスの問題を提出した。アドリアヌス・ロマヌスは此問題をば二つの雙曲線の會合によつて解いた。併し此の解は古代幾何學の嚴正を有して居ない。そこでヴイエタは此の點を注意し望まるべき凡ての嚴正を保て居る一つの解を自ら提出した。ロマヌスは或る投影法を用ゐて、當時唯六つとのみ考へられて居つた三角形に廿八の場合のあることを誘導して、球面三角法を著しく簡單にした。

これからユリウス暦の改良に就いて少しく述べる必要がある。移り變る祭日を年々に決定することが、永い間話し得ざる混雜を起したものである。天文學の迅速な進歩は此の問題の考察を促がし、數多の新たな暦法が提出された。法屋王グレゴリオ第十三世は數學者天文學者及僧侶の數多の人々を招集し、彼等と相談した後、リリウス・クラヴイウスによつて提出された暦法を採用することに決した。かくてユリウス暦の誤りを直す爲に、新たな暦では千五百八十二年の十月四日の後に直ちに十月十五日といふ日を書くことに決した。此のグレゴリオ暦法が科學者並びに新教徒から盛んに反對をされた。幾何學者として高き位置を占めたクラヴイウスは科學者の反對に對しては最も適當に又有効に答へた、又一方に新教徒の偏見の方は時と共に失せ去つた。

數の神秘的な性質に對する熱情は古代の人々から近來の人に傳へられ、パシオリ、スチフエルの如き大家によつてさへも、これに關する論文が書かれて居る。ペーター・ブンガスの Numerorum Mysteria は四つ折の七百頁を有する大著であつて、彼れはアンチキリストの記號たる默示錄中の野獸の數である六百六十六に就いて非常なる勤勉と滿足とを以て記して居る。彼れは不敬虔なマルチン・

ルーテルの名をば、此の動かし得ざる數を表し得べき形に直した。即ち a=1, b=2,…… k=10, l=20,…… のやうな工合に置いて、ルーテルの名前を綴り直せば M(30) A(1) R(80) T(100) I(9) N(40) L(20) V(200) T(100) E(5) R(80) A(1) となつて、要せらるゝ六百六十六の數となる。大なる改革者に對しての此の如き攻撃は他の人々を激昂せしめずには居らなかつた。早き時代の獨逸の數學者中で最も鋭敏で又獨創的であつたミケエル・スチフエルはブンガスに劣らざる巧みさを以て六百六十六なる數は、其の實、法王レオ第十四世に當たると云ふことを證明した。

占星術は當時、尚人々に好かれた問題であつた。カルダノ、マウロリクス、レギオモンタヌス及び之れよりも幾らかより後に生存した數多の他の偉大な科學者の尚占星術の研究に熱中したことは、よく知られた事實である。されど是等の怪しげな學問の外、學者が星狀五邊形や不思議な方形配數の神秘的な研究にも耽けつたことは一般には知られて居ない。ファウストがメフイストフエレスに「五邊形が、お前に苦痛を與へる」といふて居る。大なるケプレルの如き學者が、一つの頁には星狀五邊形に關する定理を幾何學的嚴正を以て論じて居ながら、次の頁に此の五邊形の御守り或は咒文としての効能を說明して居るのは、心理學上甚だ面白きことである。ブレーフエーアは占星學者としてのカルダノに就いて批評し「此れは高き叡智的才能が愚鈍或は低能と一致した不思議な證である」と見て居る。併し吾等の判斷を餘りに慘酷になすべきでない。今吾等の考究して居る時代は中世紀に著しく接近して居るが故に、科學者の間ですらも神秘主義から完全に脫却し得なかつたのである。されば ケプレル、ネーピーア、アルブレヒト・デューレルの如き學者が、進歩の爲めには一方の足をば眞の科學的研究の固き地盤に置きながら、他の一の足をば尚前代の煩瑣思想に留めたのであつた。

ヴイエタよりデカルトに至る

無智なる時代にあつては有益なものなりし敎會の力も一層文化の進んだ時代に於いては、劇しき害毒を流がすに至つた。かくてフランスに於いてはアン

リー第四世に先だつた朝廷の間には、神學的の氣分が有力にして、其の然かりし事實は痛ましくヴアッシー、及セント・バルソルミューの虐殺として現はるゝに至つた。宗教的爭論に從事して居た人々は科學や文學に對しての餘暇を有しなかつた。されば**アンリー**第四世の時代に至るまで、フランス人は、それがなければ現今の歐羅巴の現存に影響すると云ふやうな何等の仕事をもなさなかつた。これに反して英國では宗教的戰爭はなかつた。人民は宗教的の爭に對して比較的冷淡であり、彼等の能力をば永久的の事柄に注ぎ、第十六世紀中に**シエクスピーア**及**スペンサー**の如き天才が出でゝ不朽の文學を得るに至つた。英國に於ける此の文學時代は科學時代によつて嗣がれた。第十六世紀の終り頃に教會の勢力がフランスによつて拋棄さるゝに至つた。**アンリー**第四世の位に卽くや、千五百九十八年にナントの勅令が發布され、新教徒等に崇拜の自由を與へ、斯くて宗教的戰爭は終りを告げた。玆に於いて佛國民の天才が咲き初め、**ルイス**第十三世の御代に、カルジナル**リシリユー**は何の宗派の說にも偏せずして、國民の利益を增進するとの廣き政策を執つた。されば彼れの時代に於ける知識の進步は著しきものであつた。第十六世紀に於ける英國の文化と權衡を保ち得る程に大なる永久的の文學を生ずるに至つた。而して此の第十七世紀は又**ロバルヴアル**、**デカルト**、**デザルグ**、**フエルマー**、及**パスカル**の如きフランスの大數學者によつて飾られた。

獨逸に於ける狀態は一層暗黑なものであつた。第十六世紀に於いて世界を改革した大變化はイギリスをば國民的偉大に導いたが、夫は反對に獨逸をば墮落に導いた。革命の最初の効果は良結果を生じた。卽ち第十五世の終り及び第十六世紀の間に獨逸は科學的硏究を以て著しくなり、天文學及三角法の指導者であつた。代數學に於いても亦、三次方程式に於ける發見を除けば、**ヴイエタ**の時代以前にありては、獨逸では其の他の國に於けるよりも一層進步した狀態を示して居た。然るに科學の太陽がフランスに昇り初めた第十七世紀の初めに、獨逸ではそれが沒した。神學的爭論と宗教的爭鬪とが續き、三十年戰年の(一六一八年―一六四八年)破壞的時代が生じ、爲めに獨逸國は搖ぎ出だし、狹量な獨斷主義のあはれな同盟となつた。商業が破壞され、國民的感情が失せ、美術は消

失し、文學がフランスの奴隷的模倣に過ぎざるに至つた。獨逸は此の憐れな狀態から二百年の間脱却し得なかつた。蓋し千七百五十六年には更に七年戰爭が起り、プロシアをば荒れたる土地と化したのによる。されば第十七世紀の初めに方つて、大なるケプレルが獨逸に於ける唯一人の大數學者であり、之れより二百年の間を經てケプレルとガウスとの間には、ライブニッツを除けば此國には大數學者と稱すべき人が生じなかつた。

第十七世紀に至るまで、數學は大英國に於て餘り開發されなかつた。第十六世紀の間にはヴイエタかスチフエル或はタルタグリア等と比較し得べき數學者はイギリスに出でなかつた。然るにレコルドの時代と共にイギリス人は數を取扱ふに巧者になつた。英人に著はされた最初の要用な算術の著述は千五百二十二年にクスベルト、トンストール(千四百七十四年―千五百五十九年)によつて羅典語で公にされたものである。彼れはオックスフォルド、ケンブリッジ及びバヂュアに於いて勉强し、バシオリ及レギオモンタヌスの著述をば自由に引用する力を以て居た。彼れの算術の再版等がイギリス及びフランスに現はれた。レコルドの後に數學の高等なる部門が研究され始めた。より後にスコットランドは對數の發見者たるネーピーアを產した。對數の價値が忽ち認められたのは疑ひもなく計算上優越の結果を示す爲めであつた。イタリヤに於いては又特にフランスに於いては、永い間殆んど停止的科學であつた幾何學が、結果を見るに至つた。ガレリオ、トルリチリ、ロバルヴアル、フエルマー、デザルグ、パスカル、デカルト及イギリスのワルリスは此の學問の大なる改革者であつた。理論的力學も研究し始められた。數論及び公算論の基礎はフエルマー及びパスカルによつて据えられた。

吾等は之れより計算の技術になされた進歩を考へて見よう。古代の國民は彼等の所謂アラビヤ數字に出で會ふまでに、數的記號法に就いて數千年間實驗をなした。基督紀元前第五世紀或は第六世紀の頃に印度人によつて用ゐ始められた零なる記號の單純なる採用によつて、數學は最も有力な刺戟の一つを受取つた。一旦アラビヤ記號法が充分に理解されたならば、十分的の分數即ち小數は其必然的擴張として直ちに現はれたであらうと恐らく何人も思ふであら

う。然るにアラビヤ記數法の優越なる簡易性が、無限降冪級數に於いても無限昇冪級數に於ける如くに價値あるべきものであり、又取扱ふに便利なものであることの解せらるゝまでに、科學が如何に數多の物理的研究を企て、如何に深く數に就いて考慮したかを回想すると、不思議である。小數は吾等には簡單に見えるけれど、其發明は只一個人の結果でもなければ、一時代の產物でもない。

却つて是等のものは識らざる間に次第〳〵に發展し來つた。是等の歷史と同定された最初の數學者は是等の眞の性質も亦必要も感じ得なかつた。從つて適當なる記號をも發明しそこならた。小數の觀念は數の平方根を近接する方法に初めて現はれたものである。セヴイユのジヨンは、恐らく印度の規則を眞似たものであらうが、數に $2n$ 丈の零を加へて然る後に其の平方根を見出し、それを分子となし、分母としては一の後に n 個だけの 0 の附いて居るのを用ゐた。同じ方法はカルダノによつて繼承せられたが、彼れのイタリヤの同時代の人によつてさへも一般に採用されなかつた。蓋し若しそれが採用せられたならばカタルチ(千六百二十六年に死んだ)が根の開方に就いてのみ論じた書中には、少なくとも記るさるべきことであつたであらう。カタルチは平方根を連續分數を用ゐて見出して居る。此方法は巧みにして新奇なものではあるが、實用上から云へばカルダノの方法に劣る。オロンチウス・フイネウス(千五百五十五年に死す)はフランスで、又ウイリアム・バツクレー(大凡千五百五十年に死す)はイギリスで、カルダノやジヨンのと矢張り同じ方法を用ゐて平方根を求めた。

小數の發明は屢々レギオモンタヌスに歸せられ、其理由としては彼がギリシヤ流に正弦をば六〇の倍數とする代りに之を 100,000 としたことをあげて居る。併し其處で三角法の線は整數で表はされて居り、小數で表はされて居ない。よし彼れは半徑の十分的の部分を採用したにせよ、彼も彼の繼續者も共に三角法の外では、此觀念を採用しなかつた。加ふるに小數の觀念は全く何處にも見ることが出來ない。ベルギーのシモン・ステヴイン(千五百四十八年—千六百二十年)は科學の各方面に亘つて、數多の仕事をなした人であるが、此人こそ小數を始めて組織的に論じた人である。彼の著 La Disme (1585) 中に、彼は甚だ明瞭な言葉で、獨り小數のみでなしに、更に度量衡の制度にも十分的の分け方をするの

が便利であると記載した。彼は十分的の小數をば普通算術の凡ての運算に應用した。唯玆に缺けて居るのは之を表はす適當な記號である。彼は今日用ゐる小數點の代りに零を以てし、小數の各位に對しては之に相應する示數を附した。例へば 5.912 を彼の記號で書けば $\overset{0}{5}\,\overset{1}{9}\,\overset{2}{1}\,\overset{3}{2}$ 或は 5(0)9(1)1(2)2(3) である。是等の示數は實用上面倒なものではあるが、之が要用な一發見の萠芽である點から趣味あるものである。

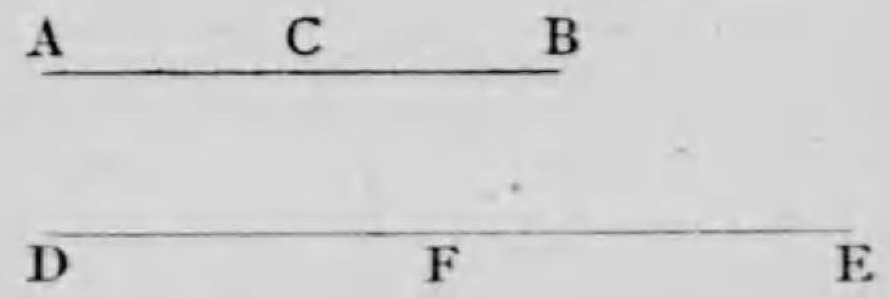
吾等は代數學に羃を表はす現今の方法と分數的の指數を採用したことに就いてステヴインに負ふものである。嚴格に言へば、之が可なり以前にオレスメによつてなされたが、併し夫は全く人々の注意する所とならなかつた。否ステヴインの發見でさへも、直ちに賛成もされず、採用もされなかつた。

小數の記號が第十七世紀の初めまで何等改良されなかつた。ステヴインの後に、小數は千五百九十二年の後間もなく代數の原稿を書いた瑞西生れのヨースト・ビュルギによつて用ゐられ、更にヨハン・ハルトマン・バイエルは己が發見として之を使用した。此人は千六百三年にメインのフランクフルドで Logistica Decimalis を出版した。ビュルギは單位の位の數字の後に一つの零を記し、之を小數部分の別れ目とした。又バイエルの記號の方はステヴインのに似て居る。ビーコックの言ふには「小數點はネーピーアによるものである」彼は千六百十七年に Rabdologia を公にしたが、夫には小數に關する敎材を與へ、其中の一、二ヶ所で小數點を用ゐて居る。又エドワード・ライトは千六百十六年にネーピーアの Mirifici logarithmorum canonis descriptio の英語の翻譯をなし、著者が之を修正したものを見るに、表に小數點を用ゐて居る。

千六百十九年より千六百三十一年までの英語の算術書に小數が記されて居ない。千六百三十一年にオートレッドは例へば小數 0.56 を $0\underline{|56}$ と記した。ステヴインの弟子アルベルト・ギラルドは千六百二十九年に一度小數點を用ゐて居る。ジョン・ワルリスは千六百五十七年に $12\underline{|345}$ と記して居るが、其後著はされた彼の代數學中には通例の如く點を用ゐて居る。ド・モルガンは言ふ「吾等は獨り小數點が完全に而かも決定的に勝利を得るに至つたことのみならず、今日一般に用ゐて居る割り算の運算や平方根の開き方が普く用ゐらるゝに至

つたのは第十八世紀の最初の二十五年中であるとせざるを得ぬ」と吾等は小數記號の進步を可成長く述べ來つた、蓋し「言語の歷史は………最も趣味あるもので、而かも亦有用なものであるからである。而して夫等の與へる暗示は默考的の人々に將來を洞見せしめる最上の課業である」。

現代の計算の奇蹟的の力は三つの發明卽ちアラビヤ記號小數、及び對數によるものである。第十七世紀の最初の二十五年間になされた對數の發見は、恰かも**ケプレル**が其時惑星の軌道を吟味しつゝあり、又**ガリレオ**が丁度星に望遠鏡を向けた頃になされ、特筆すべきものである。文藝復興の間に獨逸の數學者は非常に精密な三角表を作つた、併しこの、より大なる精密てふことは計算者の仕事を無暗に增大した。されば對數の發明が「勞力を省くことによつて天文學者の壽命を二倍にした」と言ふのも必ずしも過言ではない。對數はスコットランドの男爵**ジョン・ネーピーア**(千五百五十年—千六百十七年)によつて發明された。彼が指數が未だ用ゐられぬ前に對數を發見したことは科學史上最も不可思議なものゝ一である。確かに**スチフエル**や、**ステヴィン**は示數で以つて冪を表はさんとした、併し其記號は一般に知られず、**ネーピーア**の死後餘程年經つて代數學を公にした**ハリオット**にさへも知られなかつた。對數が指數の記號から自ら起り來るべしとのことは、可成後まで學者に知られなかつた。對數を冪の示數であるとして論じ始めたのは**オイレル**であつた。然らば**ネーピーア**は如何なる考へ方をなしたのであらう?



今ABを長さの定まつた直線とし、DEをDから無限に及ぶ直線とする。偖同一の瞬間に同じ速度で出發する二つの點を考へて、其一はAよりBに向ひ、他の一はDよりEに向ふものとした。併しDE線上に於ける速度の方は一樣であるが、AB線上の點の速度が變化し、其の變化の規則は點が任意の點Cに到達するとき、其速度が殘りの距離BCに比例するが如きものであるとする。かくて第一の點がAからBへ到達した時刻に、第二の點はDからDFなる距離を畫いてFに達したと考へる。**ネーピーア**はDFをばABの對數と稱した。

ネーピーアの方法は、此發明が彼自身のものであることに疑を挿む餘地なき程に珍奇なもので、此問題を取扱ふ他の諸方法から全く別なものである。實に之は他の助を借らず單獨に彼の沈思した結果である。彼は最初たゞ正弦の對數のみを探がした。AB なる線を九十度の正弦とし之を 10^7 と取つた。BC は弧の正弦で DF は其對數である。運動の進むと共に BC が等比級數で減じて、同時に DF の方が等差級數で増加する。今 $AB=a=10^7$, $x=DF$, $y=BC$ とすれば $AC=a-y$ である。又C點の速度は $\frac{d(a-y)}{dt}=y$ で、$-\text{nat. log}\, y=t+c$. $t=o$ なるとき $y=a$, $c=-\text{not. log}\, a$ となる。次ぎにF點の速度が $\frac{dx}{dt}=a$ であると、$x=at$ となる。茲に於いて t と c とに是等の値を代入し $a=10^7$ 又定義により $x=\text{Nap. log}\, y$ であることを考に入れて吾等は $\text{Nap. log}\, y=10^7\text{nat. log}\frac{10^7}{y}$ を得る。

之を見れば分かる通りネーピーアの對數は自然對數と同じものでない。彼の對數は數自らが減ずるときに増すもので $\text{log. of sin } 90^\circ=0$; i. e. $\text{log. of } 10^7=0$ の如くし、α が九十度から減ずると共に、α の正弦の對數が零から漸次増加するやうにしたものである。ネーピーアが二つの流點の考から對數を導いたのはニユートンの「流動の原理」即ち微分法を回想せしめる。等比級數と等差級數との關係はアルキメデス、スチフエル、及其他の學者の觀察したものであるが、夫はネーピーアによつてかくも巧みに利用された。ネーピーアは彼の對數に基數を定めなかつた。基數なる觀念は彼に自ら暗示されなかつた。彼の推理による基數は今日の對數の基數の逆數であるが、表の計算に於ける些細の誤差に影響されて、此の如き基數がネーピーアの凡ての數を精密に再生するに適せない。

ネーピーアの大發明は千六百十四年に Mirifici logarithmorum canonis descriptio と題された著書で公にされた。彼は此書中に彼の對數の性質を説明し、九十度間の自然正弦の對數を一分毎に計算した表を載せた。

ヘンリー・ブリッグス(千五百五十六年—千六百三十一年)はネーピーアの時の頃はロンドンでグレシャム・カレヂッの幾何學教授で其後オクスフォードの教授となつた人であるが、此人はネーピーアの本を見て非常に感服し、ロンドンで研究するのを止めて、此スコットランドの哲人に敬意を表はする爲めに旅行した。然るに此旅は後れたので、ネーピーアは待ちあぐみ、側の一友に「嗚呼、ジョン

！ブリッグスは來ないのだらう」と話して居ると、其瞬間に戸を敲く音が聞こえ、ブリッグスは男爵の室に導かれた。殆んど十五分間も兩人は感に打たれて互に顔を見合はせた儘、一語をも話し得なかつた。遂にブリッグスは「閣下！私は閣下にお目にかゝるのを唯一の目的として長き旅を企てました。閣下は如何なる智慧に依つて、天文學に最上の輔助たる此對數を始めて考へるに至りましたかを敎へて戴きたい。併し閣下！あなたに一度發明されてから見ると、かくも容易に見える對數が以前に何人にも發見されなかつたことは不思議であります。」と述べた。

かくて後ブリッグスはネーピーアに全正弦の對數を零とし、而かも同じ正弦の十分の一卽ち五度四十四分二十二秒の正弦の對數を 10,000,000,000 と取れば便利であることを話した。之に對してネーピーアは自分も既に其事を考へたと告げ、ブリッグスの考案に對し更に改良すべき點を述べた。卽ち零は一の對數ならざるべからざるも、全正弦の對數を 10,000,000,000 となし、ブリッグスの注意した如くに一よりも大なる數の指標を正ならしめて、負となるのを避けしめることであるが、ブリッグスも其方が一層便利であると賛成した。されば所謂ブリッグスの對數の發明は彼とネーピーアとが獨立に成したもので、かくすることの實用上の大なる利益は此やり方は吾々の紀數法の基數たる一〇に調節されて居ると云ふことである。

ブリッグスは此の新案に基づき對數表を計算することに其全力を注いだ。ネーピーアは千六百十七年に死んだが、而かも己が終了せざる事業を完成するに適した有力な友ブリッグスを得たので滿足して瞑目した。千六百二十四年にブリッグスは一から二萬まで、九萬から十萬までの數に對して十四桁までの對數を含む表 Arithmetica logarithmica を公にした。又二萬から九萬までに至る缺陷はネーピーア及びブリッグスの相續者として偉なる和蘭の人アドリアン・ヴラックによつて計算された。ヴラックは千六百二十八年に一より十萬までの對數表を公にしたが、其内七萬丈が自ら計算したものであつた。

ブリッグス流の三角函數の對數表はブリッグスの同輩の一人なるグンテルによつて千六百二十年に始めて公にされた。此人は正弦及び正切の對數を分

毎に七桁まで計算し、又餘弦、餘切なる言葉を發明した人である。ブリッグスは彼れの晩年を一層大仕掛の對數表の計算に用ゐたが、其業が大成せざる間に千六百三十一年に死んだ。此事業はイギリスのヘンリー・ゲリブランドによつて、繼がれ、ヴラックによりて己が費用を以て公にされた。ブリッグスは此際一度を百等分したが、而かも既に六十分法に基いて作られた表が公にされて居たので、此改良は餘り認められずになつた。ブリッグスとヴラックとは四つの基本的著述を公にしたが、是等は其後の如何なる計算によりても凌駕されない。

自然基數 e を用ゐて計算した最初の對數表はジョン・スペイデルにより New Logarithmes (1619, London) と題して公にされた、これには正弦、正切及び正割の自然對數を載せて居る。對數の發明についてジョン・ネーピーアとの相手たり得べきは瑞西人ユスッス・ビルギウス(ヨースト・ビュルキ)である。彼は Canon Mirificus の現はれて後六年に對數表の粗なるものを公にした。併し彼はネーピーアがなしたよりもより早くないにしても之と同じ頃に早くも對數を考へつき對數表を計算したやうに見える。而かもネーピーアの對數が全歐洲を通じて知ら

れ且つ賞讃されるまで、ビュルギは己が結果を發表するのを怠つて居たらしい。

ネーピーアが學生又は計算者の記憶に便ならしむる爲めになした種々の發明中に、球面直角三角形の解に對するネーピーアの圓分の規則と言ふのがある。

第十六世紀中に、代數學になされた最も偉大な勝利は三次及び四次の方程式の解法であつた。然るに是等よりも高次の方程式を代數學的に解かんとする凡ての企てが成功を奏せざるや、新たな研究の方向卽ち方程式と其根との性質の研究が漸次開拓された。ヴィエタが根と係數との間の關係を一部分丈知り得たことは既に述べた。フランス人ペレタリウスは千五百五十八年の頃に早くも方程式の根が其方程式の最後の項の因數であることを注意した。ヴィエタよりも稍々遙か方程式の理論を擴張した人はアルベルト・ギラルド(千五百九十年—千六百三十四年)である。彼はヴィエタの如く代數學を幾何學に應用し、幾何學的の問題の解決に負根を用ゐることを始めて理解した。彼は又虚量についても說き、歸納法によつて方程式は一般に其「次」を表はすべき數が含む單位の數丈の根を有するもののなるを推論した。且つ彼は始めて是等の根の羃乘の

和を係數の項で表はすことを知り得た。

有力な他の代數學者はイギリスのトーマス・ハリオット（千五百六十年―千六百二十一年）である。此人はサー・ウォルター・レーレーによつてヴァルジニアに送られた最初の移住民に伴はれ、其國を測量して後本國に歸つた。數學者としては彼は實に彼の國の誇りである。彼はヴィエタやギラルドが唯近接し得た方程式の理論をば十分に把握して、方程式論を樹立した。卽ち方程式を最も簡單な形ちに直した時に、第二項の係數は根の和の符號を逆にしたものであること、第三項の係數は根の各の二つの積の和に等しきこと、…………を明にした。又彼は方程式をば始めて是等の單純な因數に分解した。彼は、虛根否な負根をさへも認めざりし爲めに何れの方程式も此の如く凡て單純な因數に分解し得るものなることを認め得なかつた。彼はヴィエタが頭文字で量を表はした代りに小文字を採用して、代數式を表はすのに改革をなした。不等號＜及び＞を導入したのも彼である。Artis Analyticae praxis なる彼れの著書は彼の死後十年の千六百三十一年に公にされた。

ヴィリアム・オートレッド（千五百七十四年―千六百六十年）は彼れの教科書によつて英國中に數學を普及することに大なる貢献をなし、是等は久しく大學で用ゐられた。乘け算の記號として×を導き、比例の記號に :: を導いたのは彼れである。彼は比に對しては一つの點を用ゐたが、第十八世紀中にクリスチアン・ウォルフは乘け算の記號に一つの點を用ゐ、比の記號を二つ（:）の點で表はすことにした。オートレッドの聖職上の用務が晝間彼れをして唯僅かに數學の研究をなし得せしめた、其上彼の妻が經濟家で夜間彼に燈火を用ゐるのを拒んだ。代數學は、今や數學史上大改新期の一となつたデカルトの發明を迎ふるに―卽ち代數學的解析法を應用して代數學的曲線の本質を定義し且つ其性質を研究するほどに充分完全な域に到達した。

幾何學では、曲線形の面積の「決定」が、此時代に勤勉に考究された。瑞西の數學者パウル・グルチン（千五百七十七年―千六百四十三年）はパップスの數學論文集にあるものではあるが、之れと獨立に次ぎの定理を再發見した。「回轉體の容積は之を作る回轉形の面積と其重心の回轉によつて出來た圓周とを乘けたもの

に等し。」此方法は一層精密な又自然的な徑路をとる點に於いてケプレルやカヴァリエリの方法を凌ぐが、而かも時としては問題自身よりも一層困難なものとなる重心を決定する必要があるので、不利である。グルヂンは此定理を證明せんと企てたがカヴァリエリは其證明の不充分なことを指摘した。

ヨハンネス・ケプレル（千五百七十一年―千六百三十年）はウュルテンベルグの人でテュビンゲン大學に在る間にコパルニカスの學説を聞いた。彼の科學的研究は戰爭、宗教的迫害、金錢上の困難、住所の頻繁な變化、其他家事上の煩雜の爲めに折々中斷された。千六百年にプラーグに近い一天文臺で、和蘭の天文學者チホ・ブラヘの助手となつた。併し是等兩天文學者間の關係は常に良くはなかつた。ケプレルの出版物は大部のものである。彼が初めて太陽系を説明せんとの企をなしたのは、千五百九十六年に自ら五つの正多面體、惑星の數及び距離との間に奇妙な關係あることを發見したと考へた時のことであつた。此似而非なる發見の出版はケプレルの名聲を高くした。併しより成熟せる沈思とチホ・ブラヘ、やガリレオなどとの交際は彼をば其の天才に一層適當した研究をなすに至らしめ、遂に「ケプレルの法則」なる結果を生むに至つた。

ケプレルは純正數學並に天文學に貢献した。彼れが數學に對して趣味を有つたことには蓋し不思議でない、何となれば「若しギリシャ人が圓錐曲線を開拓して呉れなかつたならば、ケプレルはトレマエウスを凌駕し得ざりしならむ」。アリステウスやアポロニウスは唯彼等の知識の慾求に導かれて、其熱望を滿足せんと努力したのであつた。而かも圓錐曲線はケプレルが惑星が其楕圓軌道上を進行するのを檢出するのを助けた。ケプレルは又對數や小數の廣き應用をなし、且つ是等の知識の普及にも努力した。

彼は或時、葡萄酒を購ふたが、一般に人々が酒樽の内容を決定するに用ゐる方法の不精密なことに氣がつき、此動機から回轉體の容積の研究にかゝり、遂に千六百十五年に Stereometria Doliorum を出版した。彼は之れで先づアルキメデスに知られた立體を論じ、夫より進んで他のものをも論じた。ケプレルは幾何學に新たな觀念卽ち無限に大きな量と無限に小さな量の觀念を導いた。ギリシャ

の數學者は此觀念を避けたが、近代の數學者は此觀念を用ゐて數學を革新した。

直線形を比較するに古人は重ね合せの方法を用ゐた。然るに直線形と曲線形とを比較するには此方法が適當なものでない、蓋し直線形を加へるも引くも、決して曲線形を生じないからである。此難關を救ふ爲めにギリシヤ人は化醇論證を考案した。而かも之は長くして又六ケしい。其論法は綜合的であつて、一般に其結論が研究の首途に既に知られて居ることを要する。所が新しい無限の觀念は次第〳〵に化醇論證と比較し得ざる程有力な數多の方法の發見を促した。**ケプレル**は圓をば其中心に共通の頂點を有し、其底を圓周上に有する無限に多くの三角形の集合したもの、又球をば同樣に角錐の無限の數の和であると解した。彼は此考へ方をば、任意の直線を軸として其周に任意の曲線が廻轉する際生成される形ちの面積や容積を決定するのに應用した。併し彼が「ステリオミトリア」中に研究事項として提出した八十四問題中僅かに簡單な若干の場合を解くことが出來た。

ケプレルの仕事の中で數學上趣味あるものをあげると(一)逆正切の最も早き問題の表明。(二)遂には $\int_0^{\phi} \sin\phi \, d\phi = 1 - \cos\phi$ なる定積分の決定となるべき問題の研究。(三)其軸か2aと2bとである楕圓の周りは殆んど $\pi(a+b)$ であるとの斷定。(四)それに由れば**ケプレル**が函數の其極大の値の近くに於ける變化が消失する事實を知つて居たと思はるゝ文句。(五)彼が拋物線が無限の外に一つの焦點を有して居り、其焦點から輻射する線は平行であり、無限の「外」では其他の點を有せないことを證明したことに含まるゝ連續の原理の假定。である。

「ステリオメトリア」はイタリヤの**ボナヴエンツラ・カヴァリエリ**(千五百九十八年—千六百四十七年)に無限に小さな量についての考慮を促した。彼は**ガリレオ**の一弟子で千六百三十、五年に Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota を出したので有名である。此書で彼は所謂「不可分の方法」を說いて居る。此方法は丁度化醇論證と**ニユートン**や**ライプニッツ**の方法との中間に位するものである。即ち彼は線をば點の無限から成立したもの、面をば線の無限から成るもの、立體をば平面の無限からなるものと考へた。されば二個の立體や面の相對的大きさは單に面や線の一級數の總和によつて求めることが出來る。

例へば彼は三角形を構成する凡ての直線の平方の總和は此三角形と等しき底を有し又之に等しき高さを有する平行四邊形を構成する凡ての線の平方の總和の三分一に等しきことを見出した。何となれば三角形の方では頂點の所を作る第一の直線の長さが一であれば、其次ぎのは二で、又其次ぎのは三である、………。從つて是等の平方の和は $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=n(n+1)(2n+1)\div6$ となる。次ぎに平行四邊形の場合を考へるに之を作る凡ての線の長さがnで、其數もnである。從つて是等の平方の總和は n^3 である。茲に於いて兩方の比を求めると $n(n+1)(2n+1)\div6n^3$ で、nが無限大であると $1/3$ になる。是れから彼は角錐や圓錐が之等と底を等うし又高さを等する角壔や圓壔の $1/3$ であることを推論した。蓋し前者を作る多角形や圓が底から頂點までに次第に減ずる割合は、恰かも三角形に於いて底に平行な線の平方が底から頂へ向ふと共に減ずるのと同様であるからである。

カヴァリエリは此「不可分の方法」を用ゐてケプレルの提出した問題の大部分を解くことが出來た。其方法は有力で又正しき結果を與へるものではあるが而かも科學的の基礎を缺いて居る。若し線が絶對的に幅を有せざるものならば線の數を如何に多く集むるとも面を得ることが出來ず、又面が全く厚さのなきものならば、面の數を限りなく、集めても立體を作ることが出來ない。然るに何故に此方法が正しき結果を與へるかと言ふに、一の面積と他の面積とが、一方に於ける諸々の線の一列の和と他方に於ける諸線の一列の和との間の比と同じ比を有して居るからである。さればカヴァリエリの方法は其原理に於いては非科學的であるが、五十年の間積分法の一種として用ゐられた。此方法は數多の困難な問題を解かしめる。

グルチンはカヴァリエリ及び彼の方法に對して烈しき攻撃をなした。之に對しカヴァリエリは Exercitationes geometricæ sex を書きそれは千六百四十七年彼の死後に公にされた。之で彼は敵の非難に答へ、且つ彼の方法をより明瞭に説明せんと企てた。グルチンは己が名を有する定理をば純正哲學的推理に依るの外、之を證明することが出來なかつたが、カヴァリエリの方は「不可分の方法」を用ゐて證明することが出來た。千六百五十三年には不可分の幾何學の改訂版

が現はれた。

古人には知られて居なかつたが、此の頃非常に熱心に研究し始められた要用な曲線がある。ロバルヴァルは之を trochoid と呼び、パスカルは roulette と稱しガリレオは cycloid なる名を附した。此曲線の發明者はガリレオであつたと思はれる。彼は此曲線が建築上アーチに優美な形を與へるものと賞して居る。ガリレオは其面積を決定するのに、之を生成する圓形を紙に畫いて之を拔取り、更にサイクロイドの形をも同質の紙より拔取り是等の重さを比較した而してサイクロイドの面積が圓の面積の殆んど三倍であるが併し正しく三倍ではないことを知つた。然るに彼の弟子のエヴァンジェリスタ・トルリチリ（千六百八年—千六百四十七年）は夫れの數學的の決定をなした。

彼は數學者としてよりも物理學者として知られて居るが不可分の方法を用ゐてサイクロイドの面積が回轉する圓の面積の三倍であることを證し其解法を公にした。所が此求積は夫よりも數年以前にフランスで、ロバルヴァルに由つて得られたが、それはイタリヤ人に知られて居なかつた。ロバルヴァルはトルリチリの解を見て、怒を發し不正にも温和なトルリチリを罵つて、己が證明を竊んだと言ふた。此非難はトルリチリに大なる悲痛を起し爲めに早生したと言はれて居る。ガリレオの今一人の弟子のヴィンセンツォ・ヴィヴィアンはサイクロイドの切線を決定した。之はフランスではデカルト及びフェルマーによつても成就された。

フランスでは幾何學は開拓され最も大なる成功をなした、ロバルヴァル、パスカル、フェルマー等は不可分の方法を用ゐ且つ之を改良した。ギレス・ペンソン・ド・ロバルヴァル（千六百二年—千六百七十五年）は四十年間パリーでカレッヂ・ド・フランスの數學教授であつた人で彼れ自ら不可分の方法の發明をなしたと主張して居る。併し彼の全集が彼の死後まで出版されなかつたから、其發見の占先權を決定するに困難である。之に對してモンックラとチャスレスとは、彼はカヴアリエリと獨立に而かもより早く此方法を發明したと云ふ說を持して居る。又マリーは此イタリヤ人から何等の助を藉らなかつたとは考へられない、蓋し兩人が全く獨立に此「不可分」なる言葉をも用ゐたとは信せ

られない、カヴァリエリの方では此言葉で無限に小なる量を意味して居るが、ロバルヴァルの方では左樣でないとの意見を出して居る。

ロバルヴァルとパスカルは面積をば線の代りに直方形の無限數からなるものと考へ、同樣に立體をば面の代りに無限に小さき立體から成れるものと考へて、不可分の方法の基礎を有理ならしめた。ロバルヴァルは此方法をば面積、容積及び重心の決定に應用した。かくて彼は任意の次の拋物線 $y^m=a^{m-n}x^n$ の求積をなし得た。彼がサイクロイドの求積を實行したのは既に述べた通りである。併し彼は切線を引く方法で最も能く知られて居る。彼は此要用な問題に始めて運動を應用し始めた。此方法はニュートンの微分法の原理に類似して居る。ロバルヴァルは此考へを凡ての曲線に擴張した。アルキメデスは彼の螺線を二重運動によつて生成されたものと考へた。ロバルヴァルは此考へを凡ての曲線に擴張した。例へば圓錐曲線の如き平面曲線は一點が二つの力によつて作用されて生じたものと考へることが出來る、卽ち二運動の合成である。若し曲線の任意の點に於ける此合結果を夫れ〲の部分に分解すると、是等の部分によつて作られる平行四邊形の對角線は其點で此曲線に切線となる。此の巧みな方法について最も大なる困難は合結果を如何にして適當な長さと適當な方向を有するやうな兩部分に分解すべきかである。ロバルヴァルは常に之を成功し得たとは言はれない、されど此新法が一大進步であつたことは確かである。

ロバルヴァルは從來切線をば其曲線と共通な唯一つの點を有する一直線であると定義したのを打破した。蓋し此の如きは高次の曲線に對しては正しからざるのみならず、二次の曲線に於いてさへも切線の性質を闡明し、又此曲線を生成すべき各部分を得るに適當して居ない。切線の問題は又フェルマー、デカルト、バルローなどの特別に注意した所で、微分學の發明後非常な發展をなした。フェルマーとデカルトとは切線をば曲線との會合の二點が一致した割線であると定義を與へ、バルローは又曲線をば多邊形であると考へて、其邊の一が切線を生ずるとした。

ピエール・ド・フェルマー(千六百一年―千六百六十五年)は各方面の學問に精通し且つ非凡の力を有する數學者であつた。彼はトウルーズにて法律を學び千

六百三十一年にトゥルーズの議會の評議員となされた。併し彼は其餘暇を以て主に數學を熱心に研究した。デカルトやパスカルと異にして、彼は平穩な生活を送つた。彼は其時代に知れて居た數學の各部分に亘つて彼の天才の印しを殘した。幾何學に對する彼の一大貢献は彼の著 De maximis et minimis である。

殆んど二十年以前にケプレルは始めて例へば一曲線の縱線の如き變量の增率が其變量の極大又は極小の値に著しく接近した所では消失することを知つた。フェルマーは此觀念を進めて、極大及び極小についての彼の規則を得た。彼は與へられた x の函數に x の代りに $x+e$ を入れたものを作り、然る後に函數の是等の引續いた二つの値を等しくした方程式を作り之を e で割る。偖 e を零に取り、此方の根を求むれば、是等の x の値は函數を極大又は極小になすものである。フェルマーは千六百二十九年に此規則を知つて居た。此規則と微分學を用ゐる方法との重なる差は只無限に小さき dx の代りに e なる不定量を入れるにある。フェルマーはこれを基礎として切線を引く方法を求めた。

表明の明瞭を缺いたが爲めにフェルマーの極大及び極小の規則と切線の作法とが彼の同時代のデカルトによつて烈しく攻擊された。此論戰に際しロバルヴァルとパスカル(父の方)とは彼を熱心に辯護し、之に反してミドルジユ、デザルグ、ハーデー等はデカルトに與みした。

フェルマーが函數の相續ぐ値の間の小さな差の考へを導き、極大及び極小を見出す原理に到達せし故を以て、ラグランジユ、ラプラース、フーリエー等はフェルマーを微分學の最初の發明者と考ふべきであると主張した。併し此れは、矢張りフランス人であるポァッソンが微分學と云ふのは「一又は二の離れた問題の解を得るに無限に小さな變化を用ゐて成功したことではなしに、凡ての函數の微分を見出すに適當な規則の一系統である」と正しく云ふた如く、正鵠を得たものでない。

偉大なるフェルマーの天才をも凌いだ此時代の一大數學者はブレース・パスカル(千六百二十三年—千六百六十二年)であつた。彼はオーヴェルニユのクレルモンで生れた。彼れの父は彼の教育を他人に委ぬることを欲せず、千六百二十六年に彼の教育の爲めにパリーに移つた。彼の幾何學に天才を有して居る

ことは十二才の時に既に認められた。彼の父は數學を能くしたが、彼が羅甸語やギリシャ語を充分に學び得るまでは數學を學ばせることを欲しなかつた。爲めに數學書類は彼の目に觸れないやうに匿された。幼パスカルは或時父に數學とは如何なるものを敎えるものかと尋ねた。父は「夫は形ちを精密に作る方法や是等がどんな割合を有して居るか相互の比例を見出す方法である」と答へ、且つ更に深く數學に就いて尋ねることや又之に就いて考へることを禁せられた。されど此天才はかゝる束縛丈では制限されなかつた。彼の父から聞いた數學が形狀を誤るなく作る方法を敎えるものであるとの事實から出發し、自分自らの考丈で之を究め白墨の一片を以つて路上に圖を引き、例へば正しき圓や正三角形を書く方法を試みた。彼は是等の形ちに自ら勝手の名を附け、かくて後公理を作り、更に完全な證明をなさんとした。其結果彼は他の助けをからずして三角形の三角の和が二直角に等しいと云ふ定理を發明した。丁度此場合に父は之を發見し、己が子の天才を驚嘆し、喜の餘り泣いた。父は今彼にユークリッドのエレメンツを與へたが、彼は他人の助をからず容易に之を學び了つた。彼の正課は語學であつた爲め、彼は遊戯の時間をのみ用ゐて幾何學を學んだのであるが、而かも彼の鋭敏な頭腦は此學の眞髓を穿がち、十六才の時に早くも圓錐曲線の本を書いたが、これはアルキメデス以後此の如く有力なる著書を見ないとまで言はれて居る。さればデカルトの如きも夫が若きパスカルによつて書かれたものなることを信じなかつた。此書は出版されず今は失せてない。ライブニッツはパリーで之を見其內容の一部を報じて居る。此少年は凡ての科學に上達したが、絶えず烈しく勉強した爲めに著しく健康を害した。而かも尚仕事を續けて十九歳の時算術の運算を機械的に行ふことの出來る彼れの有名な一器械を發明した。此の如く引續き精神の過勞をなした爲めに其後不治の病を釀し、十八才の時以後一日たりとも苦痛を感せぬ日がなかつたとのことである。二十四才の時科學の研究を放棄し專ら宗敎に心身を委ねんとした。併し折々は幼時の好んだ數學に歸へつたこともある。一夜齒痛の爲め目醒めたが、期せずしてルーレット即ちサイクロイドに關する思想が頭に浮んで來、遂に此曲線の性質やら其證明までを發見した。彼とフェ

ルマーとの文通は公算論の端緒を開いた。彼の病氣が増惡し三十九才の時にパリーで早世した。

カヴァリエリの不可分の方法の非難に對する彼の答は最も明瞭に記され、ロバルヴァルの如く「直線の和」と云ふのは「無限に小さき直方形の和」を意味することを説明した。パスカルはサイクロイドの知識を大に進めた。彼は此曲線の底に平行する任意の直線で生せらるゝ部分の面積を求め、又其底や或は又其軸の周りに此曲線が廻轉するによつて生ずる形ちの容積を求め、更に其重心を、且つ又此等の形を其對稱の平面で切つた容積の半分などを求めた。彼は其結果を公にする前に、千六百五十八年凡ての數學者に是等の問題の解答を懸賞の上競爭を申込んだ。然るにワルリスとルエールとのみが論文を送つた。後者は其題意に適せず又前者は時間の切迫から幾多の誤りをなせる爲め正しき解をなした人がなかつた。パスカルは玆に於いて自らの解を公にしたが之れが學者を驚かした。ワルリスも其後誤を削正して自分の解を公にした。懸賞には應せなかつたが、フィゲンス、レン、フェルマー等は是等の問題の若干を解いた。

クリストフアリ・レン（千六百三十二年—千七百二十三年）の重な發見はサイクロイドの長さを求めること及び其重心の決定であつた。フェルマーはサイクロイドの弧で生成された面の面積を見出し、フィゲンスはサイクロイド振子を發明した。

第十七世紀の初葉に綜合的幾何學の復興が起つた。圓錐曲線法を昔時の方法を用ゐ、而かもアポロニウスの數多の六ケしき證明を非常に簡單にするのに成功した人は、デカルトの一友人ヂラウド・ミドルジュ（千五百八十五年—千六百四十七年）である。併しギラルド・デザルグ（千五百九十三年—千六百六十二年）やパスカルは古く蹈みならされた道を棄てゝ新たな道を開拓し始めた。彼等は要用な投影法を導いた。圓形の底を有する圓錐體上の凡ての圓錐曲線は頂點で見れば圓形に見える。それ故デザルグとパスカルとは圓錐曲線を圓の投影として取扱ふことを考へ出した。デザルグによつて二つの要用な定理が與へられた。其一は「六點の捲込」で、其上で一つの斷線が一つの圓錐曲線及び其内接四邊形と會するが如きもので、他の一は、若し空間又は一平面上に位する二つの

三角形の角頂が一點に會合する三直線上に位するならば、是等の三角形の三邊が一直線上に位する三點で會合すること及び其逆である。

第二の定理はブリアンコン、スツルム、ゲルゴンヌ、ポンセレ等に用ゐられ、ポンセレは之を關係の同じき形の理論の基礎となした。吾等は捲込及び斷線の理論についてはデザルグに負ふものである。尙一直線の兩端が無限の外で會合するものと考ふるを得ることや平行線は其會點を無限に於いて有するものと考へらるゝことは彼の考へによる。パスカルは彼の Essais les Coniques 中の結果を非常に賞讃し「余が此問題に關して發見し得た少し許りの知識についてはデザルグの著書に負ふことの多大なることを承諾せんと欲す」と述べた。パスカルとデザルグとの著述は近世綜合幾何學の基本的觀念を包含して居る。パスカルが十六才の時に書いたと云ふ圓錐曲線法の本には最初にパップスの發見した非調和比とパスカルの定理として知らるゝ神秘的六邊形に關する有名な問題を載せて居る。パスカルの定理と云ふのは次のものである。一つの圓錐曲線に內接する六邊形の對邊は一直線上に位する三點で出會ふ。此定理は彼の理論の根本でパスカル自身はこれから四百題以上の系を導いた、而して是等の中にはアポロニウスの圓錐曲線や其他の結果を含んで居る。かくてデザルグやパスカルの天才は近世綜合學の豊富な寶の若干を發いた。されど間もなく現はれたパスカルの解析幾何學と、其後の微分法とに科學者の注意が集注された爲めに、綜合幾何學の方は現世紀まで全く無視されて居た。

數の理論に於いては、ヂォファンッス及び印度人の時代より第十七世紀の初葉までの千年以上の間に科學上價値ある何等の結果もなかつた。然るに吾々の今考へて居る著しき時代に永く神秘主義と迷信とに閉されて居た數の理論が、其束縛を脫し得て、科學的に研究し出された。彼等は印度の不定解析論を知らなかつたが、波羅門族の得た立派な結果が歐洲人によつて此時代に再發見された。即ち一次の不定方程式の整數での解はフランス人バッケー・ド・メッイリアク(千五百八十一年―千六百三十八年)によつて再發見された、此人は最も早き歐羅巴に於けるヂォファンッスとも云ふべき人であつた。千六百十二年に彼は Problèmes plaisant et délectables qui se font par les nombres を又千六百二十一年にはヂ

チォフアンツスのギリシャ版に註解を附したものを公にした。近世數論の父はフェルマーである。彼の性質は其方法を秘して唯結果のみを報ずると云ふやうに甚だ非公開的であつた。爲めに若干の場合には後の解析學者が其證明を補充するに大に迷ふたことがある。フェルマーはバッケーのチォフアンッスの一本を藏して居たが、夫れの餘白中に數多のノートを書き込んで居る。これは千六百七十年に彼の息子が公にしたチォフアンツスの新版中に加へられた。フェルマーの發見した數に關する他の定理が矢張り彼の息子の出版した彼の Opera varia 及び千六百五十八年に出たワリルスの Commercium epistolicum 中に見ることが出來る。次ぎにあげる初めの七題は餘白中のノートにあつたものである。

(一)　$x^n+y^n=z^n$ は $n>2$ のときに x、y、z の整數的の値に對しては不可能になる。注意。「余は之れについて誠に不思議な證明を見出したが、餘白が餘りに少くして之を記することが出來ない」。此定理は屢々種々の學會の懸賞問題となつた。而してオイレル、ラグランジュ、チリクレ及びクンメル等の大に趣味を以て研究した困難な問題である。

(二)　$4n+1$ なる形ちの素數は唯一度だけ直角三角形の斜邊たり得又、其平方は二度、又其立方が三度、……だけ斜邊となれる。例へば　$5^2=3^2+4^2$,　$25^2=15^2+20^2=7^2+24^2$,　$125^2=75^2+100^2=35^2+120^2=44^2+117^2$.

(三)　$4n+1$ なる形ちの素數は二個の平方の和として一度併し唯一度丈表はすことが出來る。これはオイレルによつて證明された。

(四)　二個の立方から成立つ一數は種々樣々な無數の方法で二つの立方の和と直すことが出來る。

(五)　各の數は三角數であるか或は二又は三の三角數の和である。又各の數は平方であるか、或は二、三又は四個の平方の和である。更に各の數は五邊數であるか、或は二、三、四、又は五の五邊數の和である。一般に多邊數についても同樣のことが言へる。此定理や他の定理の證明がフェルマーによつて將來の著書中に公にさるべしと約束されたが、併し其著述は遂に世に出なかつた。此定理は又パーテル・メルセンヌに宛てた手紙(千六百三十七年？)の中にも記されて居

る。

(六)　各數の平方が之に凡て是等の數の和を加へるか、又は之から夫を引いても矢張平方に殘るやうに、いくらでも數を見出すことが出來る。

(七)　$x^4+y^4=z^2$ は不可能である。

(八)　千六百四十年の一つの手紙に、彼は「フエルマーの定理」として一般に知られて居る有名な定理を與へて居る。今ガウスの記號を用ゐて、之を表明すると、次のやうになる。「若しpが素數であり、aがpに對して素數であるならば $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$」此定理はオイレルによつて證明された。

(九)　フエルマーは $2^{2^n}+1=$素數なる公式で、永らく探された法則を發見し得たと信じて居た。併し彼自身も其理を嚴正に證明することが出來ないと承認して居た。所が此法則は正しいものでない、オイレルは例へば $2^{2^5}+1=4{,}294{,}967{,}297=6{,}700{,}417\times 641$ であることを指摘して其正しからざるを示した。

(十)　一つの奇の素數は二つの平方の差として表はすことが出來る。併しそれは只一度に限る。此定理は Relation に載せて居るもので、フエルマーによつて大なる數を素數の因數に分解するときに用ゐられた。

(十一)　若しa、b、cなる整數が一つの直角三角形の三邊を表はすならば、其面積は平方數たることか出來ない。これはラグランジュによつて證明された。

(十二)　aが整數で而かも平方ならざるときに $ax^2+1=y^2$ をフエルマーの解いたものは Relation 中に極めて大體丈傳へられて居る。彼れは此問題をフランス人ベルナール・フレニクル・ド・ベッシーに提出し、更に千六百五十七年に凡ての當時の數學者に提出した。英國ではワルリスとロールド・ブラウンケルとが連名で一つの面倒な解を見出し、夫れが千六百五十八年に公にされ、又千六百六十八年に、ジョン・ペルの出版した一代數學書で公にされた。ペルは此問題とは何等の關係がないが、之が「ペルの問題」と呼ばれた。併し此問題の最初の解は印度人によつて與へられた。

吾等は、フエルマーは凡て彼の定理に嚴正な證明を與へたか否やを確かに知り得ない。彼の證明法は千八百七十九年まで全然失はれて居た。而かも其時に一の書類がライデンの圖書館でフイゲンスの原稿の間に發見されたが、それ

は Relation des découvertes en la science des nombres と題するものであつた。之を見ると、フエルマーは自ら la descente infinie ou indéfinie と名附けた歸納法を用ゐたものらしい。彼は此方法が例へば上に列擧した第十一の定理の如き或關係の不成立を證明するに特に適して居ると言ふて居る。但し彼は之を又肯定的表明を證明する場合にも用ゐて成功して居る。例へば彼は第三の定理を次ぎのやうに證明して居る。今若し此性質を有せずして $4n+1$ なる形の一素數ありとすれば矢張り此性質を有せぬ $4n+1$ なる形ちのより小さな一素數があるべきである。又更に此第二の素數よりも、より小さい同じ關係のものあるべく、以下次第により小さな素數がある筈であゑ。此の如く次第に限なく下り行き、遂に $4n+1$ なる形の最も小さい素數五に到達する。偖上の想定によれば此五なる素數が二つの平方の和でないと云ふに歸着する、併しこれは事實と矛盾する結論である。從つて想定が僞りであり、此定理が設定される。フエルマーは此方法を數多の定理に應用して成功した。オイレル、ルジャンドル、チリクレ等も此方法を用ゐてフエルマーの問題や其他の數に關係した問題を證明した。

既に述べた如くパスカルとフエルマーとの偶然性の勝負事に關係した文通が公算論の胚子となり、此理論が其後大に開拓された。シヴアリエー・ド・メーレはパスカルに試合の任意の與へられた組に競技者が勝利を占める公算を決定すべき、公算論の基本問題を提出した。パスカルとフエルマーとは競技者は一點を得る機會が何れも同一であるものと想像した。

パスカルは此問題をフエルマーに通知した所が、彼は之を非常な熱心を以て研究し、彼とパスカルとが共に勤勉に開拓して居た順列の理論を應用して之を解いた。公算論はフイゲンスも亦注意を拂ふた題目で、彼の到達した最も要用な定理は「若し、甲が a 丈の金をかち得る機會が p であり、又同時に b 丈の高を得る機會が q であるならば、此人は $\frac{ap+bq}{p+q}$ 丈の高を得ることを期望し得べし」と云ふものである。尙公算論に對して其次ぎになされた大著はヤコブ・ベルヌーリの Ars conjectandi である。

古人の中で、理論的靜力學に關する明瞭にして正しき觀念を有して居た人はアルキメテスである。彼は機械學の根柢に橫はつて居る壓力の觀念を正しく

把握し得た。然るに彼の考はステヴィンやガリレオの時代まで殆んど二百年間眠つて居た。ステヴィンは地平線に任意の角度をなして傾いた一平面上に一物體を支へるのに必要な力を正しく決定した。彼は平衡の原理を完全に知つて居た。ステヴィンが靜力學を研究して居た間にガリレオは主として動力學を究めた。ガリレオは物體が其重さに比例して、重い程、より速かに落下すると云ふアリストートルの考を始めて排斥した。彼は運動の第一法則を設立し、落體の運動の法則を決定し、加速度の明瞭な考を得、且つ異なる運動の獨立性を知り、遂に拋射體が拋物線的の曲線上に運動するとのことを證明した。彼の時代まで大砲丸は最初直線的に前進し最後に垂直に地上に落下するものと信ぜられて居た。ガリレオは遠心力をも知つて居り、又運動量の正しき定義を與へた。力の平行四邊形として知られて居る靜力學の基礎原理を据えたのはガリレオであるが、併し彼は其應用の廣い區域を充分に飲み込まなかつた。假運動の原理は一部分はグイドウバルド(千六百七年に死す)によつて抱かれたものであるが、其後ガリレオによつて一層充分に開拓された。

ガリレオは力學の創立者である。彼の同時代の人々の間に彼を有名ならしめたのは彼が天空に檢出した珍らしき天體であるが、ラグランジュの言ふには「彼の天文學上の發見には望遠鏡と根氣とを要した。然るに吾等が日常目擊し而かも其眞の說明が凡ての以前の哲學者にも知られなかつた現象から、其法則を發見するには非凡な天才を要した」。ガリレオの後力學に始めて貢獻をなした人はデカルトである。

デカルトよりニユートンに至る

古き思想を打破し、新思想を建設するのに精神を注いだ第十七世紀及び第十八世紀の早き思想家中にレネ・デカルト(千五百九十六年—千六百五十年)がある。彼は全生涯宗敎的に正統派なることを宜して居たが、科學上では極めて深き懷疑家であつた。彼は從來世界の最も大なる哲人が純正哲學を永く學んで來たにも係らず彼等は何物をも發見し得ず、加ふるに彼等の唱ふる所が互に矛盾して居る事實を發見した。されば彼は何者をも權威として認むることをせず、專

ら新しき研究方法に從ふて萬物を綿密に檢査せんとの大決心をなした。幾何學及び算術の結論の正確なることは、眞理を探がす方法の僞れるものと正しきものとの對照を彼の心に映せしめた。玆に於いて彼は凡ての科學的研究に數學的推理を應用せんと企てた。「數學の法則と自然の神秘とを比較して、彼は恐らく是等兩方の秘密が同じ鍵を用ゐて開くことが出來ようと考ふるに至つた」。かくて彼はデカルト主義と稱せらるゝ哲學の一系を創立した。

彼の純正哲學者としての名聲は高いが、後世の人が彼を大數學者として記憶することは、より一層適切ではなからうか。純正哲學に於ける彼の系統が長き以前に他の系統によつて代へられた。併し彼の解析幾何學は永久に有益な知識である。デカルトは二十一才の時にマウリス公の軍に加はつた。軍隊的生活を送つた數年間は彼にとつては暇な時で、勉强をすることが出來た。其頃彼の好んだ學問は數學であつた。併し千六百二十五年に純數學の研究を止めた。之についてサー・ウィリアム・ハミルトンはデカルトが數學的研究が內的修養の方法としては絕對的に有害なものと考へたやうに言ふて居るが、夫は間違である。彼がメルセンヌに宛てた手紙の中に、「デザルグは自分が幾何學をもう研究せぬと心配して居らるゝことについては誠に辱ないことではあるが、自分は純正幾何學即ち心の錬習になる問題の考究を止めた丈で、而かも夫は自然現象の說明を目的とする他の種類の幾何學の研究をなさんが爲めである。云々と述べて居る。

千六百二十九年より千六百四十九年に至る間彼は和蘭に住み、主に物理學と純正哲學とを勉强した。千六百三十七年に Discours de le Méthode を公にしたが、其中に幾何學に關する百六頁の一論文が含まれて居る。彼の幾何學は讀みにくいものであるが、其後彼の友人ド・ボーヌが其困難を除かんとして、數多の註解を加へて更に之を出版した。

デカルトは幾何學に始めて代數學を應用したとは屢々聞く所であるが夫は正しくない。ヴイエタ及び其他の人々は彼以前に既に之をなした。否印度人さへも折り〳〵幾何學と聯絡して代數學を用ゐた。デカルトが新たになしたものは幾何學に變數と常數との考に基づいた解析の方法を導入したことであ

る、彼は之をなした爲めに曲線を代數學的方程式を以て表はすことが出來た。ギリシャの幾何學には運動の觀念が缺けて居た、然るにデカルトの幾何學では之が甚だ有用な觀念となつた。彼は一平面上の點の位置を、二つの定まつた直線卽ち軸から其點の距離を測ることに由つて決定した。若し點が位置を變化すると、是等の距離が從つて變ずる。坐標的表現の幾何學的觀念と、同時的に相應する兩價の無限の一列を有する一方程式中の二變數の代數學的觀念とが結合して、玆に軌跡の問題に新たな一研究法を創めた、而かも此は其解の一般的なるに於いて賞すべきものである。此の如くにしてアポロニウスの圓錐曲線法の全部が二次の唯一つの方程式中に包含さるゝに至つた。

デカルトの用ゐた ordinate の羅句語はローマの測量師が平行線に對して用ゐた lineæ ordinatæ から由來し、又 abscissa なる語はローマの一數學敎授ステファノ・デ・グリ・アンチエリ(千六百二十三年—千六百九十七年)が書いた千六百五十九年の羅句文の書籍に始めて見受けられる。デカルトの幾何學の解析幾何と稱せらるゝ所以は、一は古人の綜合幾何學と異なり、此語が論理學で用ゐらるると同じ意味で實際解析的であるのと、又一には解析法なる語によつて一般的の量での計算を表はす慣習が當時既にあつたからである。

デカルトが其幾何學中に解いた要用な例の第一はパップスの問題である。卽ち一平面上に數多の直線が與へられ、一點より是等への垂線否な尙一般的に是等へ任意の角で交る距離の若干の積が、殘りのものゝ積と與へられた比を有するやうになる點の軌跡を求むると云ふのである。此の有名な問題で與へられた直線の數が四である特別の場合は、既にギリシャ人に解かれ、かゝる點の軌跡が圓錐曲線になる。然るにデカルトは之を完全に解き、解析法の軌跡の研究に有效なるを實證した。其後ニュートンは此問題に他の解を與へた。

切線を引く方法がロバルヴアルとフエルマーとによつて發明されたのは、既に記した如くであるが、デカルトは第三の方法を創めた。彼の幾何學上の數多き發明の中で此切線を引く方法程デカルトに喜びを與へたものがないと言はれて居る。併し此方法は深遠ではあるが面倒である、爲めにフエルマーの方法に劣る。彼の此方法は不定係數の方法に基づくもので、不定係數の方法其もの

ゝ發明者としての名譽は彼に歸する。デカルトは四次方程式を解くにも不定係數の方法を用ゐた。

デカルトの光學及び幾何學に關する論文は鋭どく批評され、フェルマーは其前なる論文に對しては反對をかき、且つデカルトの幾何學に省略があることを示す爲めに極大極小に關する己が著述を送つた。之に對してデカルトは更にフェルマーの切線を引く方法に對して攻擊をなした。デカルトの此攻擊は間違ふて居る。而かも彼は頑固に爭論を繼けた。彼は又サイクロイドに關して、ロバルヴァルとも爭論をなした。此曲線は其美しき性質と學者の此曲線の發見が喚起した論爭との關係から「幾何學者のヘレン」と稱せられた。ロバルヴァルがなし遂げた此曲線の求積をば一般に立派な仕事と言ふて居るが、デカルトは幾何學に可なり精通して居る人であれば、何人も之をなし得べきものと稱した。かくて彼は自分のなした短き一證明を送つた。所がロバルヴァルが、夫が前の解の助を借りたと言ふたのに對して、デカルトはサイクロイドに切線を引き、ロバルヴァルとフェルマーとに同じことをせよと挑んだ。フェルマーは之を成し遂げたが、ロバルヴァルは此問題に成功を奏し得なかつた。

デカルトは收斂レンズの製作に役立てやうとして、現今「デカルトの卵形」と呼ばれる若干の曲線を研究したが、夫は實用的の結果を來たさなかつた。

曲線の理論に代數學を應用したのは、代數學に對して良好な反響を與へた。デカルトは指數の秩序的使用をなしたこと、負量の十分な説明と作法とにより抽象的科學としての代數學を進步させた。彼は方程式論に若干の定理を設定した。就中、正及び負の根の數を決定する爲の符號の規則が有名なものである。其規則に曰く、一つの方程式は符號の變化があるだけ夫れだけ多數の＋の根を、又符號の不變があるだけ夫れだけ多くの－の根を有することが有り得る。ワルリスはデカルトが之を明記せずに、ハリオットの方程式論を利用したことを非難して居るが、其根據が充分でない。ワルリスは更に上に記した「符號の規則」は其方程式が虛根を有する場合には正しくないと指摘して居る。併しデカルトの言ふたのは方程式が常に然か〳〵の根を有すと言ふのでなしに、然か〳〵

の根を有し得るとの事である。デカルトが虚根の場合を直接に考へなかつたのは事實であるが、而かも彼の幾何學中に此の如き場合をも論じ得たとの爭ふべからざる證據がある。

力學に於いては、デカルトはガリレオ以上に進んだとは殆んど言ふことが出來ない。運動の第一及び第二の法則の彼の表明は形ちに於いては改良をなしたものであるが、第三の法則は實質に於いて間違ひて居る。物體が直接に衝突した場合の運動はガリレオに不充分に理解され、デカルトには誤つて論ぜられて居る。之を始めて正したのはレン、ワルリス、フイゲンスである。

デカルトの弟子の一人にフレデリック第五世の王女エリザベスと呼ぶ學者があり、新らしき解析幾何學をアポロニウスの問題の解法に應用した。尙グスタヴス・アドルフアスの娘なる女王クリスチナも亦デカルトの弟子で、デカルトをば強いて瑞典の朝廷に招いだ。彼は甚だ躊躇をしたが、千六百四十九年に之に應じ、其後一年にしてストックホルムで世を去つた。

「デカルトの數學と哲學とが最初彼の同國人によつてよりも、より多く外國人によりて賞揚されたと云ふことは注目するに足る。蓋しデカルトの不謹愼な性質が當時の佛蘭西の大數學家ロバルヴアル、フエルマー、パスカル等を疎んじた。又是等の學者は自分等の研究を續け而かも若干の點では強くデカルトに反對した。佛蘭西の諸大學は敎會の嚴恪な束縛の下にありデカルトの數學や哲學を受入れなかつた。されば、デカルト流の敎義の効化が最も揚つたのは和蘭に於ける若き諸大學であつた。」

偉大なる此の先生の足跡を直接に繼いだ佛蘭西の人で優れたのは獨りド・ボーヌ(千六百一年―千六百五十二年)である。此人は曲線の性質が其切線の性質より誘導することが出來ることを始めて指摘した最初の一人であつた。此研究方法は「切線の逆法」と稱せられた。彼は又數的方程式の根の上の限りと下の限りとを始めて考へ出し、方程式論に貢獻する所があつた。

ネーデルランドでは卓越した數學者の多數は忽ちデカルト式の幾何學に大に感服した。是等の學者の最先のものはフアン・シユウテン、ヨハン・ドウイト、フアン・ホイラエト、スルツエ、フツテ等であつた。ライデンの數學の敎授であつた

フアン・シユウテン(千六百六十年に死す)は**ド・ボーヌ**の書いた註解を添へて**デカルト**の新版を出した。**シユウテン**の重な著述は Exercitationes Mathematicæ であつて、此中で數多の趣味あり且つ困難な問題の解に解析幾何學を應用した。**ウイト**は政治家としても又最後の悲劇的なるに於いても有名であるが、而かも亦熱心な數學者であつた。彼は圓錐曲線を作るに新しい又巧みな一方法を案出した、これは其要點に於いては近世綜合幾何學で輻射線の投影的束線形によるものと同じである。併し彼は之を解くに綜合的ではなしに**デカルト**流の解析法によつた。

レネ・フランソア・ド・スルツエ(千六百二十二年―千六百八十五年)と**ヨハン・フツテ**(千六百三十三年―千七百四年)とは**デカルト**の及び**フエルマー**の切線を引く方法や、又極大極小の理論に若干の改良を施した。解析幾何學で三個の變數を初めて取扱ふたのは**フツテ**であつた。彼は又等しき根を見出すのに用ゐる一つの巧者な法則の發明者である。今之を $x^3-x^2-8x+12=0$ なる方程式を取つて例解しやう。其最高の項が此方程式の次數と等しいやうに等差級數 3,2,1,0, を作り、偖て是等の級數の各項をば原方程式の夫れ〳〵相應する各項に乘じたもので方程式を書けば、$3x^3-2x^2-8x=0$ 即ち $3x^2-2x-8=0$ を得る。此最後の方程式は原方程式よりも一次だけ低次のものである。偖此等兩方程式の最大公約數を見出せば $x-2$ を得るであるから 2 は等しき根である。此際若し最大公約數を見出し得ないならば、其原方程式は等しき根を有せざるものであるべし。**フツテ**は此法則に對して證明を與へた。

ハインリツヒ・フアン・ホイラエトは曲線の長さを求めるのに成功した早き幾何學者の一人として記載すべきである。彼は一般的の仕方で、面積を求める問題と線の長さを求める問題とが本來同じものである、從つて一方の問題が他方の問題に直すことが出來ると言ふことを觀察した。かくて彼は双曲線の長さを決定することをば双曲線の求積の問題に化した。半三乘的拋物線 $y^2=ax^3$ は絶對的に其長さを決定された最初の曲線である。而してこれは和蘭の**ホイラエト**と**イギリス**の**ウイリアム・ネイル**(千六百三十七年―千六百七十年)とによつて各々獨立に成遂げられた如くである。**ワルリス**によれば**ネイル**の方が早か

つたとのことである。之に次いで間もなくサイクロイドの長さがレン及びフエルマーによつて求められた。

第十七世紀の最大科學者の一人である和蘭のクリスチアン・フィゲンス(千六百二十九年―千六百九十五年)はハーグの住民である。彼は物理學者としても、數學者としても亦天文學者としても共に卓越して居り實にサー・アイザーク・ニユートンの先達としての價値がある。彼はライデンで小ファン・シュウテンについて學んだ。デカルトは彼が最も若い頃に得た定理の若干を吟味してフィゲンスの將來偉人となるべきを豫言した。千六百五十一年にフィゲンスは一論文を書きグレゴリー・セント・ヴィンセント(千五百八十四年―千六百六十七年)が求積の問題に關して論じた似而非論を指摘した。彼は圓の弧の長さを近似的に計算する著しく精密で而かも便利な方法を與へた。千六百六十年に又千六百六十三年に彼はパリーに又ロンドンに行いた。千六百六十六年に彼はルイス第十四世によつてフランスのアカデミーの會員に任せられた。彼は其時からパリーに止つたが千六百八十一年に健康の故とナントの勅令が廢止されたとの理由から其本國に歸へつた。

彼は時としてはデカルト流の、又カヴァリエリ流の又或はフェルマー流の幾何學を用ゐたが而かも彼の深遠な發見の大部分は舊式幾何學の助けを藉りて得られたものであつた。かくて彼は彼の友人ニュートンの如くにギリシャ幾何學に偏愛心を表はした。ニュートンとフィゲンスとは互に親しき間柄であり、互に非常に尊敬し合ふた。ニュートンはフィゲンスを呼ぶのに Summus Hugenius (フイゲンス先生)の語を用ゐた。

從來其長さを決定し得た二つの曲線(半三乘的拋物線とサイクロイド)の外に、彼は今一つの曲線シッソイドの長さをも決定した。彼はカテナリーの問題を解き、拋物線的及双曲線的のコノイドの表面を決定し、又對數曲線の性質を闡明し且つ此曲線の回轉によつて生ぜられる立體を發明した。フイゲンスの De horologio oscillatorio (Paris 1673) はニュートンのプリンシピアにのみ次ぐ大著で、而かも歷史的には之にとりて必要な入門である。此書は先づフィゲンスが其發明者である振子時計の記載を以て卷を開き、夫より自由に落下する物體、斜面上

を辿り落ちる物體や、與へられた曲線上に落下する物體の加速運動を論じサイクロイドは等時性の曲線であるとの立派な發見を記せる部分で甚だ振ふて居る。彼は曲線論に縮閉線の要用な理論を加へた。縮閉線の切線が漸開線への法線であることを說明した後で、彼は此理論をサイクロイドに應用し、簡單な推理を經て此曲線の縮閉線は矢張り等しきサイクロイドであることを證明した。かくて後彼は振動の中心の完全な一般論を與へた。此問題はメルセンヌが提出したものでデカルトやロバルヴァルに論ぜられた。水平な軸の周りに振動する物體の一群の共通重心がそれの元の高さまで上るが、それ以上は上らないと云ふフイゲンスの假定の中に、力學の最も有力な原理の一、即ち其後勢力不滅の原理と稱せられたものが始めて表はされて居る。此著述の終に載せて居る十三の定理は圓運動に於ける遠心力の理論に關するもので此理論はニュートンが引力の法則を發見するに助力を與へたものである。

フイゲンスは始めて公算論に關する最初の組織立つた敎科書を書いた。彼は光の波動論を提出し、之を論ずるのに幾何學を非常に巧みに用ゐた。此波動論は長らく人々の注意を逸して居たが、夫れが一世紀より後に至つてヤングやフレネルによつて復活させられ成功を以て開拓された。フイゲンスと彼の兄弟とはレンズを琢磨する方法を改良して望遠鏡を進歩させ、かくて以前よりも一層有力な器械を作りて土星の附屬物の環狀をなす事實を決定し且つ其他多くの天文學上の疑問を氷解した。彼の Opuscula posthuma は千七百三年に現はれた。

和蘭からイギリスへ渡れば當時最も獨創的な數學者の一人であるジョン・ワルリス(千六百十六年—千七百三年)に出會ふ。彼はケムブリッヂで僧侶の敎育を受け聖職に入つたが、其天才は數學の研究に主に用ゐられた。千六百四十九年に彼はオクスフォードの幾何學敎授に任せられた。彼は千六百六十三年に創立されたローヤル・ソサイエチイの創立員の一人である。ワルリスはカウアリエリ及びデカルトの數學を能く會得した。彼の著書 Conic Sections は是等の曲線をば最早圓錐の截口として考へず却つて是等を二次の曲線として論じデカルトの坐標法を用ゐて解析的に論を進めた最初の著述である。此著述では

ワルリスはデカルトの功勞を能く認めて居るが、而かも彼は彼の Algebra の中で充分の理由もなしにデカルトをばハリオットから竊盜したものと非難して居る。ワルリスがパスカルのサイクロイドに關する懸賞問題に應じたことは既に述べた。

千六百五十五年に公にされた Arithmetic of Infinites は彼の最も大なる著述である。不可分の方法に解析法を應用して此方法を有力にし、面積を求めるのに有効のものとした。彼は連續の法則をば一層廣く活用した點に於いて、ケプレルよりも一歩を進めて居る。此法則によつて彼は分數の分母をば負の指數を有する羃數と考へることになつた」卽ち彼は降羃等比級數 x^3, x^2, x^1, x^0 を一層連續して行き x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}……を得た、而かも是等は $1/x$、$1/x^2$、$1/x^3$ と同じものである。此等比級數の指數は連續した等差級數 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3 である。彼は分數指數をも用ゐた、之は負指數と等しく長き以前に發明されたものであるが、一般に用ゐらるゝに至らなかつたものである。尚記號∞を無限大の代りに用ゐたのも彼である。

カヴアリエリ及びフランスの幾何學者は任意次數の拋物線 $y=x^m$（但しmは正の整數）の面積を求める公式を得た。無限等差級數の諸項の羃を加へ合せて $y=x^m$ の面積と、之と等しき底と高さとを有する平行四邊形の面積とが $1:(m+1)$ の如き比を有することを知り得た。連續の法則の助けを得て、ワルリスは此公式が獨りmが正の整數なる場合のみに止らずして、夫が分數なる場合でも負なる場合でも共に正しとの結果に到達した。例へばmが $\frac{1}{2}$ である $y=\sqrt{px}$ なる拋物線では此曲線の斷片の面積は之れに外接する直四邊形の面積に對して $1:1\frac{1}{2}$ 卽ち $2:3$ なる比を有して居る。又 $m=-\frac{1}{2}$ の場合は拋物線の式が $y=\sqrt{\frac{1}{x}}$ となり、其漸近線に照らした双曲線の一種となる。而して此曲線と漸近線との間の空間の面積は、之に相當する平行四邊形の面積に對して $1:\frac{1}{2}$ の比を有する。若し又 $m=-1$ であれば曲線は正双曲線 $xy=1$ となり、上述の比は $1:(-1+1)=1:0$ となつて、漸近線との間の空間が無限大となることを敎える。

然るにmが一よりも大にして而かも負の値である場合にワルリスは彼の結果を正しく說明することが出來なかつた。例へば $m=-3$ であれば上述の比は

$1:-2$ となり一と負の數との間の比になる。此意義は何であらうか。**ワルリス**は次の如く推理した、分母が唯零になつた丈でも既に其面積が無限大となる。然るに分母が零よりも一層減じて負の値をとれば、面積は無限大よりもより大なるものでなければならない。然るに其後**ヴアリニヨン**は彼によりて無限大よりもより大であると考へられた此空間は其實一定の値を有し、只負の方向に勘定したものに外ならないことを指摘した。**ワルリス**の方法は、別々に各項の求積を行ひ其結果を加算すれば、これを $y=ax^{\frac{m}{n}}+bx^{\frac{p}{q}}$ なる場合にも容易に擴張することが出來る。

ワルリスが圓の求積を研究して π の價に對する彼の式を得るに至つた徑路は意外なものである。彼は坐標軸、値 x に相當する縱線及び方程式 $y=(1-x^2)^0$、$y=(1-x^2)^1$, $y=(1-x^2)^2$, $y=(1-x^2)^3$, ……… によつて表はされる曲線とによつて圍まれた面積が、其邊が x 及び y である外接直四邊形の函數で表はされ、級數

$$x,\quad x-\frac{1}{3}x^3,\quad x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,\quad x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7,\quad \ldots\ldots$$

となることを見出した。借 $x=1$ とすれば、此級數の値は $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{15},\ \frac{48}{105},\ \ldots\ldots$ になる。所で圓の縱線が $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ で表はされ、指數が $\frac{1}{2}$ で、上の級數の指數0と1との平均である。茲に於いて圓の求積の問題は次の如きものに直ほすことが出來る。若し $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ が或法則は作用されて $1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{45}{105}, \ldots\ldots$ を與へるものとすれば、同じ法則が $\frac{1}{2}$ に作用すると如何なる値を與へるか。**ワルリス**は此問題を挿入法で解かんと試みた。かくて彼は甚だ複雜な而かも困難な解析を行ふた後に遂に次の式に到達した。

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2\cdot4.4\cdot6.6\cdot8.8\cdot\ldots\ldots}{1.3.3\cdot5.5.7\cdot7.9.9.\ldots\ldots}$$

挿入法は彼によりて始めて頭を擡げた題目であるが、彼は上述の問題の場合に挿入をなすことに成功せなかつた。蓋し彼は文字で表はした一般的の指數を用ゐず、此際挿入された級數が有すべき筈である、一つの項よりも多くの項を有し而かも二つの項より以下であるべき級數を意識することが出來なかつた爲めである。

然るに此難關を考慮した**ニユートン**は遂に其結果として二項式の定理を發見するに至つた。されば茲で二項式の發見を物語るのは適當と思はれる。**ニ**

ニユートンは上に述べた面積に關して與へた一般的の式を司配する條件が、矢張り挿入せらるべき式にも其儘當嵌まるものと假定した。偖第一に彼は上記の級數の各式を吟味して各の初項が x であり、又各式の諸項は何れも x の奇數の羃乘であること、且つ各項の符號は代る〳〵に＋－となり居ること、更に各式の第二項を注意するに $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, …… となつて居り等差級數をなして居ること等を觀察した。されば挿入せらるべき級數の最初の二項は $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$ でなければならない。ニユートンは、次いで各式の分母を見るに 1, 3, 5, 7, …… となり之も亦等差級數をなして居り、加ふるに各式に於ける其分子の係數が 11 なる數の或羃の數字である、卽ち $11^0=1$ が第一式の分子の係數、又 $11^1=11$ 卽ち 1 と 1 とが第二式の其もの、第三式については $11^2=121$ で 1、2、1 が其係數、第四式では矢張り同樣に $11^3=1331$、卽ち 1、3、3、1 が分子の係數である、以下次第に同樣のことが言へる。茲に於いてニユートンは是等の關係から各式の分子の係數の第二のもの(之を m とす)が與へられると、其他のものは $\frac{m-0}{1}$. $\frac{m-1}{2}$. $\frac{m-2}{3}$. $\frac{m-3}{4}$. ……の連乘積を考へて知ることが出來るとの事實を發見した。例へば $m=4$ とすれば、$4.\frac{m-1}{2}=6$, $6.\frac{m-2}{3}=4$, $4.\frac{m-3}{4}=1$ を得る。

茲に於いて此規則を只今考へて居る挿入すべき級數に應用して見るのに、此級數の第二項は既述の如く $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$ である故、$m=\frac{1}{2}$ である。依つて此級數の分子の係數を計算すれば是等は夫れ〳〵に $-\frac{1}{8}$, $+\frac{1}{16}$, $-\frac{5}{128}$, …… となる。從つてワルリスの考へた圓の斷片の面積は $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\dots\dots$ なる式で與へられることになる。卽ちニユートンは、ワルリスが然らざるべからずと考へたやうに項の數が一以上で二以下であるが如き式の代りに挿入された式が一つの無限級數であることを發見した。

此挿入法の研究は更にニユートンをして $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 否倚より一般に $(1-x^2)^{\frac{m}{n}}$ を一の級數に展開することを考へさせた。彼は此爲めには丁度上に見出した式で各項の分母である 1, 3, 5, 7, …… を省き、x の各羃を一單位丈低くすれば、夫れで望むものを得ることを知つた。オルデンブルダへ宛てた手紙(千六百七十六年六月十三日附)にニユートンは此定理を次ぎの如く表はした。

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots\dots$$

但し此式でAは初項即ち$P^{\frac{m}{n}}$を表はし、Bは第二項、Cは第三項……を表はしたものである。此定理をば根を開くことに應用して大に利益を得た。ニュートンは實際乘ケ算を行ふて見て此定理の正しいことを檢算したが規則立つた證明を與へなかつた。彼は指數が任意のものである場合に其證明をなしたが、指數が正の整數である場合とか其他の場合を一々區別して考へなかつた。

尙茲に注意して置くべきことがある。夫れと云ふのは二項定理の抑も〳〵の端緒は甚だ早く發見されて居たことである。印度人及びアラビヤ人は根を開くのに$(a+b)^n$及び$(a+b)^n$の展開式を用ゐ、ヴイエタは$(a+b)^n$の展開式を知つて居た。併し是等は之を展開する爲めの法則を發見したのではなしに、單に乘ケ算を實行して得た結果に過ぎない。正の完全數を指數とする場合の二項係數がアラビヤ及び歐羅巴の若干の數學者に知られて居た。パスカルは是等をば算術三角形と稱せられた方法によつて導いた。ルカス・ド・ブルゴ、スチフエル、ステヴイヌス、ブリツグス其他の人々は、何れも尙少しく注意を拂ふたならば、恐らく二項定理が得られたであらうと思はれる丈の之に關する知識を有して居る。

併し此の如く簡單な關係も發見するには困難なもので、遂にニユートンを要したのである。

ワルリスはπに對して全く新たな式を得たが彼は之を以て滿足せなかつた。蓋し此式が絕對値を與へるやうな一定數の項を有するものでなしに、因數は無限で次第〳〵に其價へ接近し得るに過ぎないものであるによる。夫れで彼はローヤル・ソサイエチーの最初の會長であつたロールド・ブラウンケル（千六百二十年？―千六百八十四年）に此問題を研究せんことをすゝめた。勿論ブラウンケルは彼等の欲したやうなものを發見し得なかつた。併し彼は次ぎの如き式を得た。

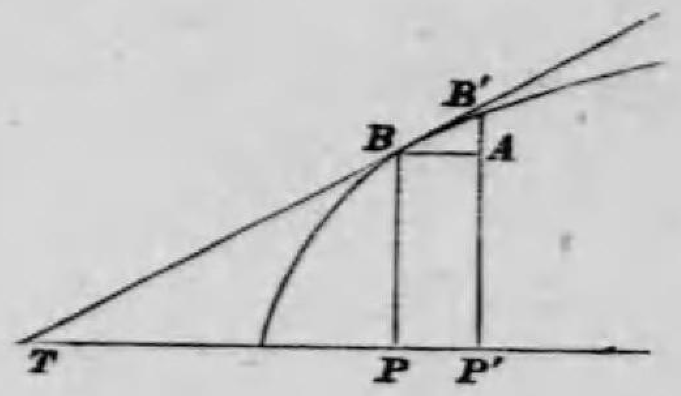
$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cdots\cdots}}}}}$$

昇冪順幷びに降冪順の連續分數は、現今吾等の用ゐるが如き形式ではないが、ギリシヤ人や印度人に旣に知られで居たらしい。併しブラウンケルの式は連續分數の理論を生んだ。

ワルリスの面積決定法は彼の弟子等に依つて熱心に研究された。ブラウン

ケルは兩漸近線と正双曲線との間の面積を始めて無限級數で表はした。其後イギリスに移住したホルスタインのニコラウス・マルカトルは彼の著書 Logarithmotechnica (London, 1668) 中に、類似した一級數を與へた。彼は千六百四十七年にグレゴリー・セント・ヴィンセントに發見された正双曲線の其漸近線との間の空間をは自然對數と連絡した(其故に此對數が双曲線的對數と稱せられた)正双曲線の大きな性質から出發した。夫れによつてマルカトルはワルリスが企てたが、得損じた對數級數に到達した。彼は對數表の作製が此双曲線の占める空間の面積決定に直されることを明かにした。ワルリスの指圖に從ひウィリアム・ネイルは三乘拋物線の長さを決定し、又レンは任意のサイクロイドの長さを計算した。

ワルリスと同時代の卓越したイギリスの一數學者はアイザーク・バルロー(千六百三十年—千六百七十七年)であつた。彼はロンドンで數學の教授であつた、其後ケムブリッヂに移り、千六百六十九年には其講座を彼の弟子アイザーク・ニュートンに讓り、自らは神學の研究に從ふて數學の研究を止めた。數學者としては彼は自ら考案した切線を引く方法で最も有名である。彼は一つの微分の代りに二つの微分を導いて、フェルマーの方法を著しく簡單にし、而して其後ニュートンの究竟比の原理に用ゐた推理に近接した。



彼は微分的直三角形ABB'を考へた、而して其三邊としては、二つの引續いた縦線の差、是等の間の距離及び是等の縦線間に含まるゝ曲線の一部とを取つた。然るに此三角形は縦線、切線及び次切線とで作られた BP'T に相似である。故に若し B'A と BA との比を知れば、縦線と次切線との比が分かり、從つて切線が直ちに引かれる。任意の曲線例へば $y^2=px$ に於いて B'A と BA との比は其方程式から次の如くにして定めることが出來る。若し x が $PP'=e$ 丈の微分増加を得れば y が之に伴ふて $B'A=a$ 丈の増加を受ける。そして縦線 B'P' の方程式は $y^2+2ay+a^2=px+pe$ となる。然るに $y^2=px$ であるから、$2ay=pe$ を得る。故に次式を得る。$a:e=p:2y=p:2\sqrt{px}$ 然るに $a:e=$(縦線):(次切線) であるから、$q:2\sqrt{px}:$(次切線) となり、$2x$ を次切線で

與へる。此方法は實に其記號丈が微分學の方法と異なるのみである。

カヂヨリ數學史講義上卷（終）

大正七年八月三十一日印刷
大正七年九月　十　日發行

定價貳圓參拾錢

著作兼發行者　東京市外下澁谷二一五　一戸直藏
印刷人　東京市外下澁谷二二七　山浦松太郎

發行所　現代之科學社
賣捌所　裳華房

終