

萬 有 文 庫

第 二 集 七 百 種

王 雲 五 主 編

數 理 精 蘊

(六)

清 聖 祖 數 編

商 務 印 書 館 發 行



數理精蘊

(六)

清聖祖敕編

國學基本叢書

數理精蘊下編卷十五

面部五

割圓

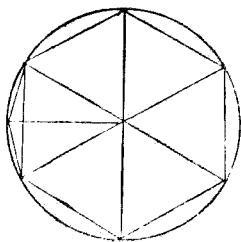
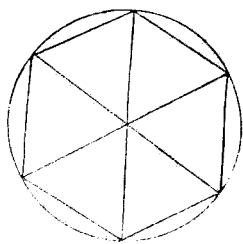
周髀曰。圓出於方。方出於矩。矩者。所謂直角。卽勾股也。蓋因方易度而圓難測。方有盡而圓無盡。故古人用割圓之法。內弦外切。屢求勾股。爲無數多邊形。以切近圓界。使弧線直線。漸合爲一。而圓周始得。是則推圓者以方。推方者以矩矣。劉宋祖冲之以圓容六邊起算。元趙友欽以圓容四邊起算。自明末西法入中國。又有割圓八線六宗三要等說。而圓度內外諸線相求之法始備。要之圓內六邊起算者。圓徑折半。卽圓內六邊之一。乃用屢求勾股之法。自六邊而十二邊。自十二邊而二十四邊。自二十四邊而四十八邊。如是累至億萬邊。設徑爲一。而周得三一四一五九二六五三有餘。圓內四邊起算者。則以圓徑爲內容正方形之斜弦。自乘折半開方而得四邊之一。亦用屢求勾股之法。自四邊而八邊。自八邊而十六邊。自十六邊而三十二邊。如是累至億萬邊。設徑爲一。而周亦得三一四一五九二六五三有餘。圓外四邊起算者。圓徑卽四邊之一。圓徑自乘倍之開方。卽圓外正方形之斜弦。減去圓徑。卽圓外兩角之餘。又卽圓外八邊之一。以八邊之一。折半爲勾。半徑爲股。求得弦。與半徑相減。卽股弦較。又卽小同式形之勾。乃以八邊之一。折半之勾爲一率。半徑之股爲二率。小同式形之勾爲三率。推得四率爲小同式形之股。倍之卽

十六邊之一。如是累至億萬邊。設徑爲一。而周亦得三一四一五九二六五三有餘。圓外六邊起算者。圓徑爲弦。半徑爲勾。求得股。倍之。卽圓外三邊之一。取其三分之一。卽圓外六邊之一。以六邊之一。折半爲勾。半徑爲股。求得弦與半徑相減。卽股弦較。又卽小同式形之勾。乃以六邊之一。折半之勾爲一率。半徑之股爲二率。小同式形之勾爲三率。推得四率爲小同式形之股。倍之。卽十二邊之一。如是累至億萬邊。設徑爲一。而周亦得三一四一五九二六五三有餘。此兩法者。或自圓內容形之邊爲勾股法。使無數勾股小弦。逼近圓周。將與圓周合而爲一。或自圓外切形之邊爲勾股法。使無數勾股小股。逼近圓周。亦將與圓周合而爲一。二法旣立。故凡圓周圓徑諸法。皆可以互相比例矣。割圓八線。則將圓周分爲三百六十度。先求弧度通弦。折半爲正弦。旣得正弦。而圓內之正矢。圓外之正切。正割。由之而生。至於餘弦。餘矢。餘切。餘割。則又由正而得。名三百六十度。平分四象限。每一象限九十度。九十度之中。得其正角爲正餘角。爲餘。是以正餘相對。而割圓八線之表。以立一象限中。成勾股形者。五千四百。故凡勾股三角測量諸法。皆可以互相比例矣。自圓內容形。屢求勾股。而得無數多邊。自圓外切形。屢求勾股。而得無數多邊。內外湊集。則圓周漸變爲直線。而設圓界爲度分者。內而正弦。外而切線。至於無數。則圓周亦漸變爲直線。二者互相參考。俱爲相符。可見理之至者。先後一揆。法之精者。中外一理。然則勾股卽割圓之體。而割圓卽勾股之用。二者交相成而兩相得乎。

圓內容六邊起算

設如圓徑二兆。用內容六邊起算。問得圓周幾何。

法以圓徑二兆折半得一兆爲圓內所容六邊形之每一邊乃以半徑一兆爲弦六邊之一邊一兆折半得五十億爲勾求得股八千六百六十億二千五百四十萬三千七百八十四小餘四三八六四七六三三七二三一七〇七五二九三六一八三四七一與半徑相減餘一千三百三十九億七千四百五十九萬六千二百一十五小餘五六一三五三二二七六八二九二四七〇六三八一六五二九復爲勾六邊之一邊折半之五千億爲股求得弦五千一百七十六億三千八百零九萬零二百零五小餘〇四一五二四六九九七七七五二四八〇九六六五七六六四爲圓內所容十二邊形之每一邊如是屢求得圓內二十四邊形之每一邊爲二千六百一十億五千二百三十八萬四千四百四十零小餘一〇三一八三〇九六八二二四五五七九〇九七八〇二〇三八七圓內四十八邊形之每一邊爲一千三百零八億零六百二十五萬八千四百六十零小餘二八六一三三六三〇六三一一一七五五〇三五〇八八二八七九圓內九十六邊形之每一邊爲六百五十四億三千八百一十六萬五千六百四十三小餘五五二二八四一二七三一二二八八二四一六〇八六七八四三三圓內一百九十二邊形之每一邊爲三百二十七億二千三百四十六萬三千二百五十二小餘九七三五六二二八五九二八五六八九九一八九八三三二一三圓內三百八十四邊形之每一邊爲一百六十三億六千



二百二十七萬九千二百零七。小餘八七四二五八五七〇三九八一四六五八九五二六六七九九六四。圓內七百六十八邊形之每一邊爲八十一億八千一百二十萬八千零五十二。小餘四六九五七九一八九二四八二一九九一〇〇三六二五二三三七。圓內一千五百三十六邊形之每一邊爲四十億九千零六十一萬二千五百八十二。小餘三二八一九〇二二八八二六一一七九六八五八五九〇〇三九。圓內三千零七十二邊形之每一邊爲二十億四千五百三十萬七千三百六十零。小餘六七六六〇九〇八二三八五九二二二九二一〇二〇七九〇二九。圓內六千一百四十四邊形之每一邊爲一十億二千二百六十五萬三千八百一十四。小餘〇二七三九五〇二二〇二八五九九五八八五二二四三九一七。圓內一萬二千二百八十八邊形之每一邊爲五億一千一百三十二萬六千九百二十三。小餘七二四八三四六二八一三三二九九〇三一九〇八八四七七九。圓內二萬四千五百七十六邊形之每一邊爲二億五千五百六十六萬三千四百六十三。小餘九五五一三〇九四八〇五二三四四九〇一一四一〇六三一七六。圓內四萬九千一百五十二邊形之每一邊爲一億二千七百八十三萬一千七百卅二。小餘二三六七六六二六〇八六九四七六四四〇四九二〇九九九七。圓內九萬八千三百零四邊形之每一邊爲六千三百九十一萬五千八百六十六。小餘一五一〇二二〇七一六〇七〇八〇七一二六三八七〇七五三。圓內一十九萬六千六百零八邊形之每一邊爲三千一百九十五萬七千九百三十三。小餘〇七九五九〇九〇三一〇九三八一五四一九三〇六五三八〇〇。圓內三十九萬三千二百一十六邊形之每一邊爲一千五百九十七萬八千九百六十六。小餘五四〇三〇五五二八八六九二四八七七九三七二七五九六七。圓內七十八萬六千四百三十二邊形之每一邊爲七百九十八萬九千四百八十三。小餘二七〇二一六四

六五四二八〇六六六八一〇五六一一一四八・圓內一百五十七萬二千八百六十四邊形之每一邊爲三百
 九十九萬四千七百四十一・小餘六三五一一七四五二九七五八六八〇七〇六八一七九三三九・圓內三百一十
 四萬五千七百二十八邊形之每一邊爲一百九十九萬七千三百七十零・小餘八一七五五九〇九六六六四
 〇三九二五四〇〇二八六七九六四・圓內六百二十九萬一千四百五十六邊形之每一邊爲九十九萬八千
 六百八十五・小餘四〇八七七九六七二八三九七五五七七四〇六一一三六一四・圓內一千二百五十八萬二
 千九百一十二邊形之每一邊爲四十九萬九千三百四十二・小餘七〇四三八九八五一九八三三二二三六三九
 八二九九六三五五・圓內二千五百一十六萬五千八百二十四邊形之每一邊爲二十四萬九千六百七
 十一・小餘三五二一九四九二七九三七〇八八六一七六九八八〇二六五六・圓內五千零三十三萬一千六百四
 八邊形之每一邊爲一十二萬四千八百三十五・小餘六七六〇九七四六四二一七二三三二二五〇四七〇九四
 一八・圓內一億零六十六萬三千二百九十六邊形之每一邊爲六萬二千四百一十七・小餘八三八〇四八
 七三二一三六二五九〇六三二〇九五八七八四三・圓內二億零一百三十二萬六千五百九十二邊形之每一
 邊爲三萬一千二百零八・小餘九一九〇二四三六六〇七一九二九二〇四二六九一一八四〇二・圓內四億零二百
 六十五萬三千一百八十四邊形之每一邊爲一萬五千六百零四・小餘四五九五二二一八三〇三六四三九四
 九七二〇七三二〇九五二・圓內八億零五百三十萬六千三百六十八邊形之每一邊爲七千八百零二・小
 餘二二九七五六〇九一五一八二七九一五〇四八二九一五一四二・圓內一十六億一千零六十一萬二千七百三
 十六邊形之每一邊爲三千九百零一・小餘一一四八七八〇四五七五九一四六九九六五八一四八七〇一五・圓內

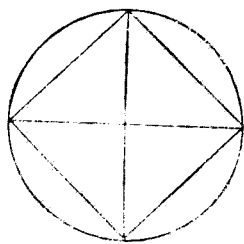
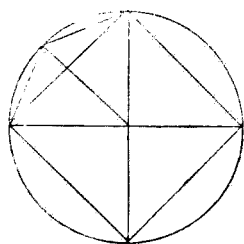
三十二億二千一百二十二萬五千四百七十二邊形之每一邊爲一千九百五十零。小餘五五七四三九〇
 二二八七九五四五二九五三四四〇六八七四。圓內六十四億四千二百四十五萬零九百四十四邊形之每一邊爲九百七十五。小餘二七七八七九五一。四三九七七八七三二九三六四一一九九二六。圓內一百二十八億八千四百九十萬一千八百八十八邊形之每一邊爲四百八十七。小餘六三九三五九七五五七一。九八九三六七七四九八九〇九九〇五。圓內二百五十七億六千九百八十八萬三千七百七十六邊形之每一邊爲二百四十三。小餘八一九六七九八七七八五九九四六八三八七四九九四九五三。圓內五百一十五億三千九百六十萬七千五百五十二邊形之每一邊爲一百二十一。小餘九〇九八三九九三八九二九九七三四一四二四七九八七九〇。乃以五百一十五億三千九百六十萬七千五百五十二邊之數。與其每一邊一百二十一。小餘九〇九八三九九三八九二九九七三四一四二四七九八七九〇。之數相乘。得六兆二千八百三十一億八千五百三十萬七千一百七十九。小餘五八六四七六五八〇一三四八二二〇三五五〇一〇八八七六八。爲圓徑二兆之周數。

圓內容四邊起算

設如圓徑二兆。用內容四邊起算。問得圓周幾何。

法以圓徑二兆折半得一兆。自乘得一穰。倍之開方得一兆四千一百四十二億一千三百五十六萬二千三百七十三。小餘〇九五〇四八八〇一六八八七二四二〇九六九八〇七八五六九。爲圓內所容四邊形之每一邊。乃以半徑一兆爲弦。四邊之一邊一兆四千一百四十二億一千三百五十六萬二千三百七十三。小餘〇九五〇四八八〇一六八八七二四二〇九六九八〇七八五六九。折半得七千零七十一億零六百七十八萬一

千一百八十六小餘五四七五二四四〇〇八四四三六二一〇四八四九〇三九二八四・爲勾亦卽爲股。四邊折半所成
 之勾股形。其勾與股相等。與半徑相減。餘二千九百二十八億九千三百二十一萬八千八百一十三。小
 餘四五二四七五五九九一五五六三七八九五一五〇九六〇七一六。復爲勾。四邊之一
 邊折半之七千零七十一億零六百七十八萬一千一百八十六。小餘五四七
 五二四四〇〇八四四三六二一〇四八四九〇三九二八四。爲股。求得弦七千六百五
 十三億六千六百八十六萬四千七百三十零。小餘一七九五四三四五六九一九
 九六八〇六〇七七七七三三五二三。爲圓內所容八邊形之每一邊。復以半徑一
 兆爲弦。八邊之一邊折半得三千八百二十六億八千三百四十三萬二千
 三百六十五。小餘〇八九七七七一七二八四九九八四〇三〇三九八八六六七六一。爲
 勾。求得股九千二百三十八億七千九百五十三萬二千五百一十一。小餘
 二八六七五六一二八一八三一八九三九六七八八二八六八三二。與半徑相減。餘七百
 六十一億二千零四十六萬七千四百八十八。小餘七一三二四三八七一一八一六
 八一〇六〇三二一一七一三一七八。復爲勾。八邊之一邊折半之三千八百二十
 六億八千三百四十三萬二千三百六十五。小餘〇八九七七七一七二八四九九
 八四〇三〇三九八八六六七六一。爲股。求得弦三千九百零一億八千零六十四
 萬四千零二十二。小餘二五六五三五六九六九七三六九五四〇四四四八一八五



五· 爲圓內所容十六邊形之每一邊。如是屢求。得圓內三十二邊形之每一邊。爲一千九百六十億三千四百二十八萬零六百五十九。小餘一二二〇三九八八三九一二七七七二八三六九一七二二。圓內六十四邊形之每一邊。爲九百八十一億三千五百三十四萬八千六百五十四。小餘八三六〇二八五〇九九一五〇七三五四一九二一八〇四五八六。圓內一百二十八邊形之每一邊。爲四百九十億八千二百四十五萬七千零四十五。小餘八二四五七六〇六三四七一六二一〇六二〇八五七五四一三二。圓內二百五十六邊形之每一邊。爲二百四十五億四千三百零七萬六千五百七十一。小餘四三九八五二一五八八一七八〇五二八三二二七〇七二六〇〇。圓內五百一十二邊形之每一邊。爲一百二十二億七千一百七十六萬九千二百九十八。小餘三〇八九五〇七一九二八一〇九八九七五三九一五〇二八七。圓內一千零二十四邊形之每一邊。爲六十一億三千五百九十一萬三千五百二十五。小餘九三四八一八四〇〇九三五六一三五六一八八八五〇三一八。圓內二千零四十八邊形之每一邊。爲三十億六千七百九十六萬零三百七十二。小餘五六九九五三一二二四六〇七五五四八二五五三五七八〇五四。圓內四千零九十六邊形之每一邊。爲一十五億三千三百九十八萬零六百三十七。小餘四八五四〇九〇五三八七七二一六八〇六九八〇五三六五二九。圓內八千一百九十二邊形之每一邊。爲七億六千六百九十九萬零三百七十五。小餘一四二七九二一七八一四四九六三四〇七九一三二八八三一。圓內一萬六千三百八十四邊形之每一邊。爲三億八千三百四十九萬五千一百九十四。小餘六二一四〇六六一四八七九八三九一四六七五四三七〇三三三。圓內三萬二千七百六十八邊形之每一邊。爲一億九千一百七十四萬七千五百九十八。小餘一九一九五四六一七四一〇四四四三三三四一二七四三

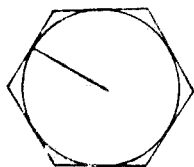
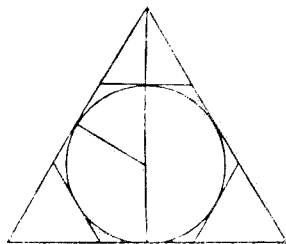
一七·圓內六萬五千五百三十六邊形之每一邊爲九千五百八十七萬三千七百九十九。小餘二〇六一
 三三七六九〇九八〇一二九八六六八三四九五八〇七。圓內一十三萬一千零七十二邊形之每一邊爲四千
 七百九十三萬六千八百九十九。小餘六一六八三六四三七四五八三七五五五七一七七一一三四八二七。圓內二十
 六萬二千一百四十四邊形之每一邊爲二千三百九十六萬八千四百四十九。小餘八一〇一三九四一二
 八四三〇四四三七四六一七五二八三三〇。圓內五十二萬四千二百八十八邊形之每一邊爲一千一百九
 十八萬四千二百二十四。小餘九〇五二八四八五五六八五七六〇〇四九三二九五五四六八八。圓內一百零四萬
 八千五百七十六邊形之每一邊爲五百九十九萬二千一百一十二。小餘四五二六六九三二二五〇〇九〇九
 九三八七二六〇〇六〇六五。圓內二百零九萬七千一百五十二邊形之每一邊爲二百九十九萬六千零
 五十六。小餘二二六三三八〇二二四五七七〇八七二四一二〇二五三九六六。圓內四百一十九萬四千三百零四
 邊形之每一邊爲一百四十九萬八千零二十八。小餘一一三一六九四三一四四二二六一〇七五三四七四三二九
 三二。圓內八百三十八萬八千六百零八邊形之每一邊爲七十四萬九千零一十四。小餘〇五六五八四七
 六八二四七八〇六三七七四六五一五五〇七七。圓內一千六百七十七萬七千二百一十六邊形之每一邊爲
 三十七萬四千五百零七。小餘〇二八二九二二九九〇六八九七三七七六八七〇六六八〇〇三二。圓內三千三百
 五十五萬四千四百三十二邊形之每一邊爲一十八萬七千二百五十三。小餘五一四一四六一九六一六五
 五九八一四四三五〇一〇八二二四。圓內六千七百一十萬八千八百六十四邊形之每一邊爲九萬三千六
 百二十六。小餘七五七〇七三〇九八一八五三九〇二三五九二四六五〇三〇六。圓內一億三千四百二十一萬七

千七百二十八邊形之每一邊爲四萬六千八百一十三。小餘三七八五三六五四九一〇五五一九〇一三四三一
 〇二四六八二。圓內二億六千八百四十三萬五千四百五十六邊形之每一邊爲二萬三千四百零六。小
 餘六八九二六八二七四五四三六二四九三六四九。九九七八四。圓內五億三千六百八十七萬零九百一十二
 邊形之每一邊爲一萬一千七百零三。小餘三四四六三四一三七七三三八一六二〇。一九二二四八三二二。圓內
 一十億七千二百七十四萬一千八百二十四邊形之每一邊爲五千八百五十一。小餘六七二三一七。六
 八六三八七一五八五六七六六四六一四六四。圓內二十一億四千七百四十八萬三千六百四十八邊形之每
 一邊爲二千九百二十五。小餘八三六一五八五三四三一。九三六一〇五九二二七。八五三九四。圓內四十二億九
 千四百九十六萬七千二百九十六邊形之每一邊爲一千四百六十二。小餘九一八〇七九二六七一五九六
 八〇九二〇九六二七七四五二九。圓內八十五億八千九百九十三萬四千五百九十二邊形之每一邊爲
 七百三十一。小餘四五九〇三九六三三五七九八四〇五〇三一四〇一六六〇二七。圓內一百七十一億七千九百
 八十六萬九千一百八十四邊形之每一邊爲三百六十五。小餘七二九五一九八一六七八九九二〇二五七六八
 四九九二八八六。圓內三百四十三億五千九百七十三萬八千三百六十八邊形之每一邊爲一百八十
 二。小餘八六四七五九九〇八三九九四九六〇一二九六〇六八六〇七七〇。乃以三百四十三億五千九百七十二萬
 八千三百六十八邊之數。與其每一邊一百八十二。小餘八六四七五九九〇八三九九四九六〇一二九六〇六八六〇
 七七〇。之數相乘。得六兆二千八百三十一億八千五百三十萬七千一百七十九。小餘五八六四七六八六
 三〇八三一〇六七五五〇〇三〇二三三六〇。爲圓徑二兆之周數。

圓外切六邊起算

設如圓徑二兆。用外切六邊起算。問得圓周幾何。

法以圓徑二兆爲弦。半徑一兆爲勾。求得股一兆七千三百二十億五千零八
 十萬七千五百六十八。小餘八七七二九三五二七四四六三四一五〇五八七二三六六九
 四。取其三分之二。得一兆一千五百四十七億零五十三萬八千三百七十
 九。小餘二五一五二九〇一八二九七五六一〇〇三九一四九一一二九五。即圓外六邊形
 之每一邊。蓋圓徑爲弦。半徑爲勾。所得股即圓外三邊形之每邊之一半。倍之爲圓外三邊
 形之每一邊。其每一邊之三分之一。即圓外六邊形之每一邊。今以六邊起算。故省求三邊。
 止以所得之股。取其三分之二。爲六邊形之每一邊也。乃以六邊形之每一邊一兆一
 千五百四十七億零五十三萬八千三百七十九。小餘三五一五二九〇一八二九七
 五六一〇〇三九一四九一一二九五。折半得五千七百七十三億五千零二十六萬
 九千一百八十九。小餘六二五七六四五〇九一四八七八〇五〇一九五七四五五六四七。
 爲勾。半徑一兆爲股。即用六邊之一邊爲弦。圓內六邊與半徑等。圓外六邊亦與本形
 半徑等。故即用六邊之一邊爲弦也。與半徑相減。餘一千五百四十七億零五十三
 萬八千三百七十九。小餘二五一五二九〇一八二九七五六一〇〇三九一四九一一二九
 五。即股弦較。又即小同式形之勾。復以六邊形之一邊折半之勾五千七百



七十三億五千零二十六萬九千一百八十九 小餘六二五七六四五〇九一四八七八〇五〇一九五七四五六四
七· 爲一率半徑之股一兆爲二率小同式形之勾一千五百四十七億零五十三萬八千三百七十九
小餘二五一五二九〇一八二九七五六一〇〇三九一四九二一二九五· 爲三率推得四率二千六百七十九億四千
九百一十九萬二千四百三十一 小餘一二二七〇六四七二五五三六五八四九四一二七六三三〇五七· 爲小同式
形之股倍之得五千三百五十八億九千八百三十八萬四千八百六十二 小餘二四五四一二九四五一〇七
三一六九八八二五五二六六一一四· 爲圓外十二邊形之每一邊如是屢求得圓外二十四邊形之每一邊爲
二千六百三十三億零四百九十九萬五千一百七十四 小餘七九一七〇六九四三〇五二九一四八一九四三四
二〇七一八四· 圓外四十八邊形之每一邊爲一千三百一十億八千六百九十二萬五千六百三十零
小餘四七六四五七一二九〇八七四四九七五九八八五五八八四二· 圓外九十六邊形之每一邊爲六百五十四
億七千三百二十二萬零八百二十五 小餘九四五一七二八七八五二七八九九一九二四七三一〇· 圓外
一百九十二邊形之每一邊爲三百二十七億二千七百八十四萬四千二百七十零 小餘六二二一六五三
三〇六八二一五七二二五九三九八八九七五六· 圓外三百八十四邊形之每一邊爲一百六十三億六千二百
八十二萬六千八百零七 小餘五八七七五二七四〇七五〇二二四一四二六二九三〇五五〇二· 圓外七百六十八
邊形之每一邊爲八十一億八千一百二十七萬六千五百零一 小餘五七七四七一三三四〇五二八六五四七〇
二〇六三七八四二四六· 圓外一千五百三十六邊形之每一邊爲四十億九千零六十二萬一千一百三
十八 小餘四三九四八七一七七〇七三八九五七六二五〇九三〇八六七〇· 圓外三千零七十二邊形之每一邊爲

二十億四千五百三十萬八千四百三十零。小餘一八九六八二三〇九八七九八九二〇四九四〇七三〇一四三八。
圓外六千一百四十四邊形之每一邊爲一十億二千二百六十五萬三千九百四十七。小餘七一六五〇
二九四〇六〇七九二三六一七〇八二四〇〇七六八。圓外一萬二千二百八十八邊形之每一邊爲五億一千
一百三十二萬六千九百四十零。小餘四三五九七二三〇一六二四八九八六三九六七七八二六二。圓外二萬
四千五百七十六邊形之每一邊爲二億五千五百六十六萬三千四百六十六。小餘〇四〇二〇一六六四
〇五二四五三七一九三三九五〇五八二。圓外四萬九千一百五十二邊形之每一邊爲一億二千七百八十
三萬一千七百三十二。小餘四九七八七七七八四〇一〇五六〇七七四〇一〇四六二三四八。圓外九萬八千二百
零四邊形之每一邊爲六千三百九十一萬五千八百六十六。小餘一八三六六一〇一四〇三三三五六四一三
七七七八四八四。圓外一十九萬六千六百零八邊形之每一邊爲三千一百九十五萬七千九百三十
三。小餘〇八三六七〇七七〇六三八九二五一四九七五〇二五一六九四。圓外三十九萬三千二百一十六邊形之
每一邊爲一千五百九十七萬八千九百六十六。小餘五四〇八一五四一八四三七〇一〇三七九二〇二九四三三
二二。圓外七十八萬六千四百三十二邊形之每一邊爲七百九十八萬九千四百八十三。小餘二七〇
二八〇二一三三五八二一〇八七二五八六〇四二〇三〇。圓外一百五十七萬二千八百六十四邊形之每一邊
爲三百九十九萬四千七百四十一。小餘六三五一二四一六九六九六五六九〇二八一四八七〇四五五八。圓外三
百一十四萬五千七百二十八邊形之每一邊爲一百九十九萬七千三百七十零。小餘八一七五六〇〇九
二七二五四六七四九七七六四四三五四。圓外六百二十九萬一千四百五十六邊形之每一邊爲九十九

萬八千六百八十五。小餘四〇八七七九九七三三四七三八一六〇七九九七四二七五二九八。圓外一千二百五十八萬二千九百一十二邊形之每一邊爲四十九萬九千三百四十二。小餘七〇四三八九八六七五四七七一七八七八〇九四六一二一四。圓外二千五百一十六萬五千八百二十四邊形之每一邊爲二十四萬九千六百七十一。小餘三五二一九四九二九八八二五二一〇一六八八二八八四八六二。圓外五千零三十三萬一千六百四十八邊形之每一邊爲一十二萬四千八百三十五。小餘六七六〇九七四六四四五四九〇二三九八八一三七二三〇八二。圓外一億零六十六萬三千二百九十六邊形之每一邊爲六萬二千四百一十七。小餘八三八〇四八七三二一六六五六四三五七〇三三九六九七六。圓外二億零一百三十二萬六千五百九十二邊形之每一邊爲三萬一千二百零八。小餘九一九〇二四三六六〇七五七二八八七三三八八七六五四二八。圓外四億零二百六十五萬三千一百八十四邊形之每一邊爲一萬五千六百零四。小餘四五九五二二一八三〇三六九一四五一八〇一一五一六〇八〇。圓外八億零五百三十萬六千三百六十八邊形之每一邊爲七千八百零二。小餘二二九七五六〇九一五一八二三八五一九二二二八九九七一〇。圓外一十六億一千零六十一萬二千七百三十六邊形之每一邊爲三千九百零一。小餘二一四八七八〇四五七五九一五四四一七一四四八四二五六二。圓外三十二億二千一百二十二萬五千四百七十二邊形之每一邊爲一千九百五十零。小餘五五七四三九〇二二八七九五五三三三六三四七〇三六八。圓外六十四億四千二百四十五萬零九百四十四邊形之每一邊爲九百七十五。小餘二七八七一九五一四三九九七八七四四四七一八一六三二〇。圓外一百二十八億八千四百九十萬一千八百八十八邊形之每一邊爲四百八十七。小餘六三九三五九七五五七一九八

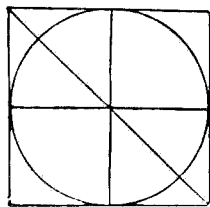
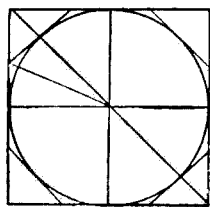
九三六九三三六九八五五八〇二・圓外二百五十七億六千九百八十萬三千七百七十六邊形之每一邊
 爲二百四十三。小餘八一九六七九八七七八五九九四六八四三〇六一二七七六〇六・圓外五百一十五億三千
 九百六十萬七千五百五十二邊形之每一邊爲一百二十一。小餘九〇九八三九九三九二九九七三四二一
 〇七七六八二五一六・乃以五百一十五億三千九百六十萬七千五百五十二邊之數與其每一邊一百
 二十一。小餘九〇九八三九九三九二九九七三四二一〇七七六八二五一六・之相數乘得六兆二千八百三十一
 億八千五百三十萬七千一百七十九。小餘五八六四七六九三二一五四六〇一七七八二八三九六〇八三二・爲圓
 徑二兆之周數。

圓外切四邊起算

設如圓徑二兆用外切四邊起算問得圓周幾何。

法以圓徑二兆爲外切四邊形之每一邊乃以圓徑二兆爲股亦卽爲勾求得弦二兆八千二百八十四
 億二千七百一十二萬四千七百四十六。小餘一九〇〇九七六〇三三七七四八四一九三九六一五七二三八・爲
 圓外四邊形之斜弦與圓徑相減餘八千二百八十四億二千七百一十二萬四千七百四十六。小餘一
 九〇〇九七六〇三三七七四八四一九三九六一五七二三八・卽圓外八邊形之每一邊又以八邊形之每一邊
 八千二百八十四億二千七百一十二萬四千七百四十六。小餘一九〇〇九七六〇三三七七四八四一九三九
 六一五七二三八・折半得四千一百四十二億一千三百五十六萬二千三百七十三。小餘〇九五〇四八八〇
 一六八八七二四二〇九六九八〇七八五六九・爲勾半徑一兆爲股求得弦一兆零八百二十三億九千二百二

十萬零二百九十二。小餘三九三九六八八九九四四六四一〇七三二七七八八四〇一二一。與半徑相減。餘八百二十三億九千二百二十萬零二百九十二。小餘三九三九六八八九九四四六四一〇七三二七七八八四〇一二一。卽股弦較。又卽小同式形之勾。復以八邊形之一邊折半之。勾四千一百四十二億一千三百五十六萬二千三百七十二。小餘〇九五〇四八八〇一六八八七二四二〇九六九八〇七八五六九。爲一率。半徑之股一兆爲二率。小同式形之勾八百二十三億九千二百二十萬零二百九十二。小餘三九三九六八八九九四四六四一〇七三二七七八八四〇一二一。爲三率。推得四率一千九百八十九億一千二百三十六萬七千三百七十九。小餘六五八〇〇六九一一五九七六二二六四四六七六二二八五九七。爲小同式形之股。倍之得三千九百七十八億二千四百七十三萬四千七百五十九。小餘三一六〇一三八二三一九五二四五二八九三五二四五七一九四。爲圓外十六邊形之每一邊。如是屢求。得圓外三十二邊形之每一邊。爲一千九百六十九億八千二百八十萬六千七百一十四。小餘三二八五〇六一五四三九五〇四二五八二六五四八六四五八四。圓外六十四邊形之每一邊。爲九百八十二億五千三百六十九萬九千五百三十八。小餘九三四五〇八二一〇六八六六四二五四二六二七三三四一五八。圓外一百二十八邊形之每一邊。爲四百九十億九千七百二十四萬四千二百一十七。小餘八五〇八八八二〇九一五九五〇七九二二八一七四四二三八四。圓外二百五十六邊形之每一邊。爲二百四



十五億四千四百九十二萬四千七百五十九。小餘一三二五五〇四六一七七五一〇六四六八五四一五九二八九
 ○。圓外五百一十二邊形之每一邊爲一百二十二億七千二百萬零三百一十五。小餘二四六八〇三九
 二八五八八七三一〇二六二一六七〇五八二。圓外一千零二十四邊形之每一邊爲六十一億三千五百九
 十四萬二千四百零二。小餘八四五三二九九七四一四七八三一三六四二四三三七六五八四。圓外二千零四十八
 邊形之每一邊爲三十億六千七百九十六萬三千九百八十二。小餘一七七三三〇五六九八五四四一六三
 六七〇〇八七四九四四。圓外四千零九十六邊形之每一邊爲一十五億三千三百九十八萬一千零八
 十八。小餘六八六一八五二一〇三四六四一五四二三五五八四七五三八。圓外八千一百九十二邊形之每一邊
 爲七億六千六百九十九萬零四百三十一。小餘五四二八八一九七六六九一四六八三六八一五四三九三二〇。
 圓外一萬六千三百八十四邊形之每一邊爲三億八千三百四十九萬五千二百零一。小餘六七一四一七
 七七〇二九一五五五二二七二六一八二二一〇。圓外三萬二千七百六十八邊形之每一邊爲一億九千一
 百七十四萬七千五百九十九。小餘〇七三二〇六〇八〇〇九二二九六〇九三一四五一四六一〇六。圓外六萬五
 千五百三十六邊形之每一邊爲九千五百八十七萬三千七百九十九。小餘三一六二九〇一九二四五二〇
 六五五二六二〇七六一九八五八。圓外一十三萬一千零七十二邊形之每一邊爲四千七百九十三萬六千
 八百九十九。小餘六三〇六〇五九九〇三七一六九七五二九八八九四六二九四四。圓外二十六萬二千一百四十
 四邊形之每一邊爲二千三百九十六萬八千四百四十九。小餘八一八六〇六〇六九五七〇二三二六九五八
 九三〇一三二〇。圓外五十二萬四千二百八十八邊形之每一邊爲一千一百九十八萬四千二百二十

四·小餘九〇五五〇〇〇四九五〇〇一一四八一五〇〇二三三六六·圓外一百零四萬八千五百七十六邊形之每一邊爲五百九十九萬二千一百一十二。小餘四五二六九六二一五一五八九三九六六〇一二八〇二〇一五四·圓外二百零九萬七千一百五十二邊形之每一邊爲二百九十九萬六千零五十六。小餘二二六三四一三八四一六四九六二三〇六三三八二四八二二〇·圓外四百一十九萬四千三百零四邊形之每一邊爲一百四十九萬八千零二十八。小餘一一三一六九八五一六五五六七七一五五三八六四一七五四·圓外八百三十八萬八千六百零八邊形之每一邊爲七十四萬九千零一十四。小餘〇五六五八四八二〇七七四四八二一七八一五三二九一四五二·圓外一千六百七十七萬七千二百一十六邊形之每一邊爲三十七萬四千五百零七。小餘〇二八二九二九九七二五五五七二二二九一二七四〇四七三〇·圓外三千三百五十五萬四千四百三十二邊形之每一邊爲一十八萬七千二百五十三。小餘五一四一四六一九六九八六三二七四四四五七〇一三三五七四·圓外六千七百一十萬八千八百六十四邊形之每一邊爲九萬三千六百二十六。小餘七五七〇七三〇九八二八七九八一三九四七八五八七三三八六·圓外一億三千四百二十一萬七千七百二十八邊形之每一邊爲四萬六千八百一十二。小餘三七七八五三六五四九一一八三五二九〇六四五五三七六〇二·圓外二億六千八百四十三萬五千四百五十六邊形之每一邊爲二萬三千四百零六。小餘六八八九二六八二七四五五五九六五四七九三六〇五九三九一六·圓外五億三千六百八十七萬零九百一十二邊形之每一邊爲一萬一千七百零三。小餘三四四六三四一三七二七七五八一九九二九四六九〇〇九六·圓外一十億七千三百七十四萬一千八百二十四邊形之每一邊爲五千八百五十一。小餘六七二三一七〇六八六三八七四〇九〇三三三一

七七五四四〇・圓外二十一億四千七百四十八萬三千六百四十八邊形之每一邊爲二千九百二十五。小餘八三六一五八五三四三一九三六四一八九八九八一七八三九四・圓外四十二億九千四百九十六萬七千二百九十六邊形之每一邊爲一千四百六十二。小餘九一八〇七九二六七一五九六八一三九八三六九八五〇二五二・圓外八十五億八千九百九十三萬四千五百九十二邊形之每一邊爲七百三十一。小餘四五九〇三九六三三九七九八四〇六〇一三四六三六七一一六六・圓外一百七十一億七千九百八十六萬九千一百八十四邊形之每一邊爲三百六十五。小餘七二九五一九八一六七八九九二〇二八八四四三三六三八三八・圓外三百四十三億五千九百七十三萬八千三百六十八邊形之每一邊爲一百八十二。小餘八六四七五九九〇八三九九六〇一四二六九二九五四四五〇・乃以三百四十三億五千九百七十三萬八千三百六十八邊之數。與其每一邊一百八十二。小餘八六四七五九九〇八三九九六〇一四二六九二九五四四五〇・之數相乘。得六兆二千八百三十一億八千五百三十萬七千一百七十九。小餘五八六四七七三一二七一一七八六一八五八九四一三三七六〇〇。爲圓徑二兆之周數。

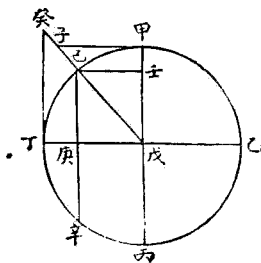
數理精蘊下編卷十六

面部六

割圓八線

圓周定爲三百六十度。大而周天。小而寸許。皆如之。蓋圓有大小。而度分隨之。其爲數則同。自圓心平分圓周爲四分。名曰四象限。每一象限九十度。一象限之中。設爲正弦餘弦正矢餘矢正切餘切正割餘割。名之曰割圓八線。

設如甲乙丙丁之圓。自圓心戊。平分全圓爲甲乙、乙丙、丙丁、丁甲四象限。其每一象限皆九十度。乃自圓心戊。任作一戊己半徑。則將甲丁九十度之弧。分爲甲己、己丁二段。己丁爲己戊丁角所對之弧。甲己爲正角。則己戊丁爲餘角。正角所對爲正弧。餘角所對爲餘弧。今以己丁爲正弧。故甲己爲餘弧。又自己與甲丙全徑平行作己辛線。謂之通弦。其對己丁正弧。而立於戊丁半徑者。曰正弦。又與戊丁半徑平行作壬己線。謂之餘弦。以其爲甲己餘弧之所對也。於戊丁半徑內減戊庚。餘庚丁。謂之正矢。於甲戊半徑內減壬戊。餘甲壬。謂之餘矢。自圓界與甲戊半徑平行立



於戊丁半徑之末作垂線。仍與己戊丁角相對者。曰正切。將己戊半徑引長。與正切相遇於癸。成戊癸線。謂之正割。又自圓界與戊丁半徑平行。作甲子線。謂之餘切。戊癸正割。被甲子餘切截於子。所分戊子謂之餘割。每一角一弧。卽有正弦餘弦。正矢餘矢。已成四線於圓界之內。復引出半徑於圓界之外。而成正切餘切。正割餘割之四線。內外共爲八線。故曰割圓八線。逐度逐分。正弧之餘。卽爲餘弧之正。餘弧之正。卽爲正弧之餘。是以前四十五度之八線。正餘互相對待爲用。不必復求後四十五度之八線也。凡此八線。皆九十度以內銳角之所成。若直角九十度者。則不能成八線。蓋因半徑卽九十度之正。弦甲戊半徑。卽甲丁弧之弦。而切線割線爲平行。終無相遇之處也。若鈍角過九十度以外者。則於半周一百八十度以內。減其角度。用其餘度之八線。卽如己庚爲己丁弧之正。弦。亦卽乙己弧之正。弦也。要之八線以正。弦爲本。有正。弦則諸線皆由此生。故六宗三要皆係正。弦之法。

六宗三要二簡法附

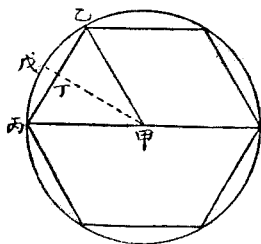
西洋曆算家作割圓八線表。始自圓內容六邊、四邊、十邊、三邊、五邊、十五邊。名曰六宗。蓋用圓徑求各等邊形之一邊。爲相當弧之通弦。以爲立表之原。故謂之宗。然六者實本於三。如六邊形之一邊。卽圓之半徑。不藉他求。數無零餘。而理最易見。此其一也。四邊形之一邊。則爲半徑所作正方形之對角斜弦。此又其一也。十邊形之一邊。則爲半徑所作連比例三率之中率。西法謂之理分中末線。此又其一也。至於三邊形則出於六邊。五邊形則出於十邊。十五邊形則又出於三邊及五邊。非別自立一法也。旣得此六種形之一邊各半之。卽得六種弧之各正。弦。爰命此六種弧爲本弧。按法可求本弧之餘。弦。可求倍本弧之

正弦餘弦。亦可求半本弧之正弦餘弦。是爲三要。又以不等兩弧之正弦餘弦。求相加相減弧之正弦。又兩弧距六十度前後之度等。得其兩正弦之較。即得距弧之正弦。是又名爲二簡法。由此錯綜之。可得正弦一百二十。其中最小者爲四十五分之弦。其次一度三十分。又次爲二度十五分。又次爲三度。如此每越四十五分而得一弦。其自一分至四十四分之弦。則以比例求之。因弧分甚微。與直線所差無幾。故以弦求弦而得之。此西法立割圓八線表之大綱也。爾來西法對數表內。有設連比例四率。以求圓內容七邊九邊二法。因推廣其理於六宗之外。增求圓內容十八邊形十四邊形之法。俱以半徑爲首率。求連比例四率之第二率。即十八邊形十四邊形之一邊。而九邊七邊。又因之以生。亦猶三邊之出於六邊。五邊之出於十邊也。有此二形。與六宗相參伍。可得正弦三百六十。其中最小者爲十五分之正弦。又增一法。求十五分之三分之一。五分之正弦。所少者止一分至四分之正弦。較之四十五分爲尤密可知矣。今以六宗三要二簡法。理分中末線并新增數法。皆按類具例於左。

六宗圓內容六邊形、四邊形、三邊形、十邊形、五邊形、十五邊形。

設如圓徑二十萬。求內容六邊形之一邊幾何。

法以圓徑二十萬折半得半徑十萬。即圓內容六邊形之每一邊也。如甲圓內容六邊形。每邊之弧。得圓周六分之一。皆六十度。試自圓心甲至圓界乙、丙二處。作甲乙、甲丙二半徑線。成甲乙丙三角形。則甲角所對之弧爲六十



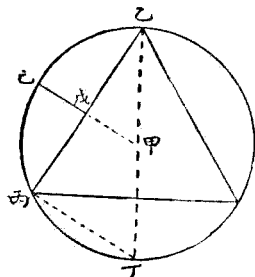
度。而甲乙、甲丙兩腰俱爲半徑。既相等。則乙角丙角亦必相等。而各爲六十度矣。三角既等。則三邊亦必相等。故乙丙邊即與甲乙甲丙半徑相等也。乙丙弧既爲六十度。則乙丙邊十萬爲六十度之通弦。折半得乙丁五萬。即乙戊弧三十度之正弦也。此即六邊起算之理。前設圓徑爲二兆者。所以求其密合。今設圓徑爲二十萬。所以取其便於用也。

設如圓徑二十萬。求內容三邊形之一邊幾何。

法以圓徑二十萬爲弦。自乘得四百億。又以半徑十萬爲勾。自乘得一百億。相減餘三百億。開方得股一十七萬三千二百零五。小餘〇八〇七五六八。即圓內容三邊形之每一邊也。如甲圓內容三邊形。每邊之弧。得圓周三分之一。皆一百二十度。爲六邊形每邊弧之一倍。試自乙角過圓心至對界。作乙丁全徑線。又自丁依半徑度至丙。作丁丙線。則成六邊形之每一邊。其丙丁弧即爲三邊形之每邊弧之一半。而丙角立於圓界之一半。必爲直角。故半徑爲勾。全徑爲弦。求得股即三邊形之每一邊也。乙丙弧既爲一百二十度。則乙丙邊一十七萬三千二百零五。小餘〇八〇七五六八。爲一百二十度之通弦。折半得乙戊八萬六千六百零二。小餘五四〇三七八四。即乙己弧六十度之正弦也。

設如圓徑二十萬。求內容四邊形之一邊幾何。

法以圓徑二十萬。折半得半徑十萬。自乘得一百億。倍之得二百億。開方得一十四萬一千四百二十一。

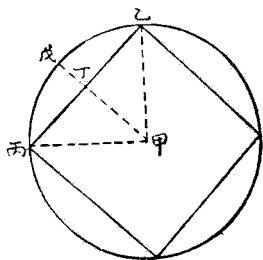


小餘三五六二三七三。即圓內容四邊形之每一邊也。如甲圓內容四邊形。每邊之弧。得圓周四分之一。皆九十度。試自圓心甲至圓界乙丙二處。作甲乙甲丙二半徑線。成甲乙丙勾股形。若命甲乙半徑爲股。則甲丙半徑爲勾。若命甲丙半徑爲股。則甲乙半徑爲勾。因勾股皆爲半徑。故以半徑自乘。倍之開方而得弦。即如勾股各自乘。併之開方而得弦也。乙丙弧既爲九十度。則乙丙邊一十四萬一千四百二十一。小餘三五六二三七三。爲九十度之通弦。折半得乙丁七萬零七百一十。小餘六七八一八六。即乙戊弧四十五度之正弦也。

理分中末線此西法名也。因命一線爲首率。將此首率分爲大小兩分。大分爲中率。小分爲末率。與原線共

爲相連比例三率。故謂之理分中末線也。

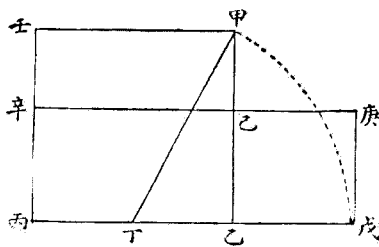
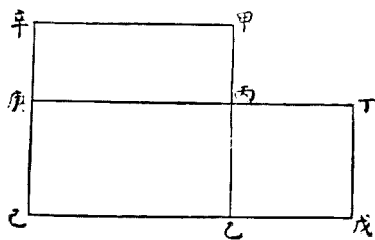
設如以十萬爲首率。作相連比例三率。使中率末率相加。與首率等。求中率末率各幾何。法以十萬自乘。得一百億爲長方積。以十萬爲長闊之較。用帶縱較數開方法算之。得闊六萬一千八百零三。即相連比例之中率。以中率與首率十萬相減。餘三萬八千一百九十七。即相連比例之末率也。此法蓋因連比例三率之首率末率相乘之長方積。與中率自乘之正方積等。而首率之中。有中率一末率之數。故首率自乘之一正方積中。有首率中率相



首率	一〇〇〇〇〇
中率	六八〇三
末率	三八一九七

乘之一長方。又有首率末率相乘之一長方。即如甲乙為首率。丙乙為中率。甲丙為末率。丙乙中率自乘之正方。為丁戊乙丙。甲丙末率與甲乙首率相乘之長方。為甲丙庚辛。甲辛與甲乙等。此一正方一長方之積等。而甲乙首率自乘之正方。為甲乙己辛。丙乙中率與甲乙首率相乘之長方。為丙乙己庚。丙庚與甲乙等。夫甲丙庚辛之長方。既與丁戊乙丙之正方等。則甲乙己辛之正方。亦必與丁戊己庚之長方等。是以丁戊己庚長方形之闊即中率。其長比闊之較即首率。故以首率自乘為長方積。仍以首率為長比闊之較。用帶縱平方法開之。得闊為中率也。

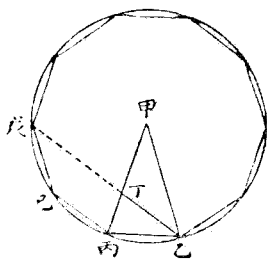
又法以首率十萬為股。首率十萬折半得五萬為勾。求得弦一十一萬一千八百零三。內減勾五萬。餘六萬一千八百零三。為相連比例之中率。以中率與首率相減。餘三萬八千一百九十七。即為相連比例之末率也。如圖甲乙與乙丙皆為首率。今以甲乙為股。乙丙折半得乙丁為勾。連作甲丁弦。試依甲丁弦度。將丁乙勾延長至戊。作丁乙戊線。仍自甲至戊作一圓界。則甲丁戊丁同為半徑。且皆為弦於戊丁弦內減乙丁勾。所餘乙戊與己乙等。即中率。



於甲乙首率內減去與乙戊相等之己乙中率。所餘甲己卽末率也。此法與前法理實相同。帶縱較數開方法。有以半較自乘。與原積相加。開方得半和。於半和內減半較得闊者。今此法以首率爲股。自乘得甲乙丙壬正方形。卽與庚戊丙辛長方形積等。乙丙卽長闊之較。乙丁卽半較。戊丁卽半和。今以乙丁爲勾。自乘。甲乙爲股。自乘。相加。開方得甲丁弦。卽如乙丁半較自乘。與甲乙自乘原積相加。開方而得甲丁。與戊丁等。戊丁內減乙丁。餘戊乙。卽半和內減半較。得闊爲中率也。

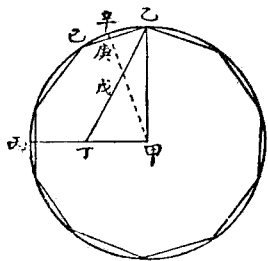
設如圓徑二十萬。求內容十邊形之一邊幾何。

法用連比例三率。有首率求中率。末率使中率末率相加。與首率等之法。以圓徑二十萬折半得十萬爲首率。自乘得一百億爲長方積。以十萬爲長闊之較。用帶縱較數開方法算之。得六萬一千八百零三。小餘三九八八七四九。爲連比例之中率。卽圓內容十邊形之每一邊也。如甲圓內容十邊形。每邊之弧得圓周十分之一。皆三十六度。其通弦卽圓內十邊形之一邊。試自圓心甲至圓界乙丙二處。作甲乙甲丙二半徑線。遂成甲乙丙三角形。復自圓界乙至圓界戊。作一乙戊線。則截甲丙線於丁。又成乙丙丁三角形。而乙戊遂爲一百零八度之通弦。此乙丙丁三角形與甲乙丙三角形爲同式形。乙丙丁三角形之乙角當戊丙弧。爲乙丙弧之倍。則乙丙丁三角形之乙角。與甲乙丙三角形之甲角等。又同用丙角。其餘一角亦必等。故爲同式形。其相當各邊。俱成相連比例。故甲乙與乙丙之比。同於乙丙與丙丁之比。爲相連比例三率。而



甲乙爲首率。乙丙爲中率。丙丁爲末率也。又甲乙丙三角形。其甲角既居全圓十分之一。爲三十六度。則乙角必比甲角大一倍。爲七十二度。三角形之三角。共一百八十度。甲角既爲三十六度。則乙丙兩角必爲一百四十四度。平分之。各得七十二度。比甲角爲大一倍也。而乙丙丁三角形之乙角。與甲乙丙三角形之甲角等。則甲丁乙三角形之乙角。亦必與甲角等。是則甲丁乙三角形。爲兩邊相等之三角形。而乙丙丁三角形。亦爲兩邊相等之三角形也。夫甲丁既與丁乙等。而丁乙又與乙丙中率等。則甲丁亦必與中率等矣。是以甲丁中率與丁丙末率相加。與甲丙首率等。故用連比例三率有首率求中率法算之。得中率爲十邊形之一邊也。

又法以圓徑二十萬。折半得半徑十萬爲股。自乘得一百億。又以半徑十萬。折半得五萬爲勾。自乘得二十五億。相加得一百二十五億。開方得弦一十一萬一千八百零三。小餘三九八八七四九。於弦數內減去勾數。餘六萬一千八百零三。小餘三九八八七四九。卽圓內容十邊形之每一邊也。如甲圓內容十邊形。每邊之弧。得圓周十分之一。皆三十六度。試自圓心甲至圓界乙。作甲乙半徑線爲股。又自圓心甲取直角。作甲丙半徑線。折半得甲丁爲勾。求得乙丁弦。內減與甲丁相等之戊丁。餘乙戊。卽與乙己等。爲圓內容十邊形之每一邊也。乙己弧既爲三十六度。則乙己邊六萬一千八百零三。小餘三九八八七四九。爲三十六度之通弦。折半得乙庚三萬零九百零一。小餘六九九四三七四。



即乙辛弧十八度之正弦也。

設如圓徑二十萬，求內容五邊形之一邊幾何。

法以半徑十萬為底，仍以半徑十萬與圓內容十邊形之一邊六萬一千八百零三，小餘三九八八七四九，為兩腰，用三角形求中垂線法算之，得中垂線五萬八千七百七十八，小餘五二五二二九二，倍之得一

一萬七千五百五十七，小餘〇五〇四五八四，即圓內容五邊形之每一邊也。如甲圓內容五邊形，每邊之

弧得圓周五分之一，皆七十二度，試自圓心甲至

圓界乙、丙二處，作甲乙、甲丙二半徑線，遂成甲乙

丙三角形，其乙丙邊為七十二度之通弦，如以乙

丙弧七十二度折半於丁，作乙丁線，即圓內容十

邊形之一邊，仍自圓心甲至圓界丁，作甲丁半徑

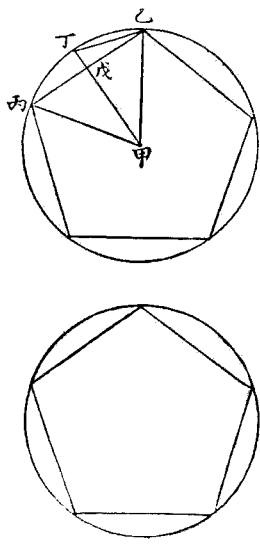
線，又成甲乙丁三角形，而甲丁線平分乙丙線於

戊，此乙戊線為甲乙丁三角形之中垂線，即五邊

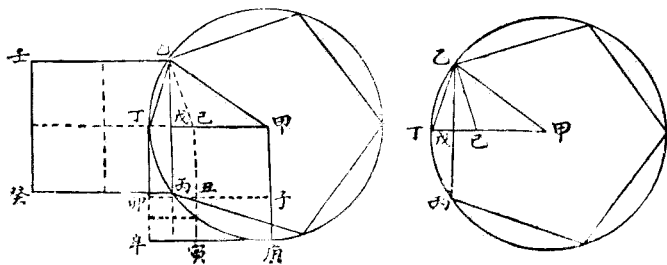
形每邊之一半，故以甲丁半徑為底，甲乙半徑為

大腰，乙丁十邊形之一邊為小腰，求得乙戊中垂線，倍之為五邊形之每一邊也。

又法以半徑十萬為股，自乘得一百億，圓內容十邊形之一邊六萬一千八百零三，小餘三九八八七四九，為勾，自乘得三十八億一千九百六十六萬零一百一十二，小餘四八九九九〇五八五八五〇〇二，相加得一

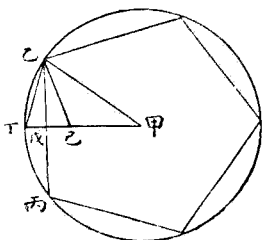


百三十八億一千九百六十六萬零一百一十二。小餘四八九九九〇五八五八五〇〇一。開方得弦一十一萬七千五百五十七。小餘〇五〇四五八四。即圓內容五邊形之每一邊也。此法蓋因半徑自乘十邊形之一邊自乘兩自乘方積相併。即與五邊形之一邊自乘之方積等。故用勾股求弦之法算之。如甲圓內容五邊形。將乙丙弧折半於丁。作乙丁線。即圓內容十邊形之一邊。仍自圓心甲至丁。作甲丁半徑線。遂成甲乙丁三角形。又依乙丁線度。截甲丁半徑於己。作乙己線。成乙己丁三角形。與甲乙丁三角形為同式形。故甲乙為首率。乙丁為中率。己丁為末率。甲己亦與乙丁等。為中率。而乙丙邊平分己丁。末率於戊。又成乙戊丁勾股形。乙戊五邊形每邊之半為股。丁戊末率之半為勾。乙丁中率為弦。試依甲丁半徑度。作甲庚辛丁正方形。又依乙丙五邊形之一邊度。作乙丙癸壬正方形。其甲庚辛丁正方形內甲子丑己。為乙丁弦自乘之一正方。甲己既與乙丁弦等。故甲子丑己為弦自乘之正方。己寅辛丁長方形。亦與乙丁弦自乘之一正方等。丁辛原與甲丁首率等。己丁末率與丁辛首率相乘。自與乙丁中率自乘之正方等。而子庚寅丑長方形。為乙丁弦自乘之一正方形內少勾自乘之四正方。蓋子庚辛卯長方形為首率與末率相乘之長方。與乙丁中率自乘之正方等。內卻少丑寅辛卯正方形。而丑寅辛卯正方形。實為戊丁勾自乘之四



正方。故子庚寅丑長方形。爲乙丁弦自乘之一正方。少勾自乘之四正方也。是則甲丁半徑自乘之甲庚辛丁正
 方形內。有弦自乘之三正方。而少勾自乘之四正方。再加乙丁弦自乘之一正方。共得弦自乘之四正方。
 而少勾自乘之四正方。大凡弦自乘之正方形內。原有勾自乘之一正方。股自乘之一正方。今弦自乘之四
 正方形內。少勾自乘之四正方形。卽與股自乘之四正方形等。而乙丙一邊自乘之乙丙癸壬正方形。實爲乙戊
 股自乘之四正方形。然則甲丁半徑自乘方。與乙丁十邊形之一邊自乘方相併。既與乙戊股自乘之四正
 方等。而乙丙一邊自乘之正方形。豈不與甲丁半徑自乘乙丁十邊形之一邊自乘之兩正方形等乎。故以甲
 丁半徑爲股。乙丁十邊形之一邊爲勾。求得弦而爲五邊形之一邊也。

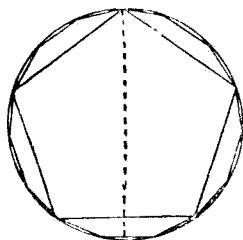
又法以半徑十萬自乘。得一百億爲長方積。仍以半徑
 十萬爲長闊之較。用帶縱較數開方法算之。得長一十
 六萬一千八百零三。小餘三九八八七四九。折半得八萬
 零九百零一。小餘六九九四三三四。爲自圓心至五邊形
 每邊之垂線。乃以半徑十萬爲弦。圓心至五邊形每邊
 之垂線爲股。求得勾五萬八千七百七十八。小餘五二五
 二二九二。倍之得一十一萬七千五百五十七。小餘〇五
 〇四五八四。卽圓內容五邊形之每一邊也。如甲圓內
 容五邊形。將乙丙弧折半於丁。作乙丁線。卽圓內容十



邊形之一邊。仍自圓心甲至丁。作甲丁半徑線。成甲乙丁三角形。又依乙丁線度。截甲丁半徑於己。作乙己線。成乙己丁三角形。與甲乙丁三角形為同式形。故甲乙為首率。乙丁為中率。己丁為末率。甲己亦與乙丁等。為中率。而乙丙邊平分己丁末率於戊。是以己戊與戊丁俱為半末率。而甲戊自圓心至邊之垂線。則為一中率。半末率之共數。今以半徑首率自乘為長方積。開帶縱平方得長。乃首率與中率之和。其內有兩中率。一末率。折半得一中率。半末率。即甲戊自圓心至邊之垂線。既得甲戊垂線。乃以甲乙半徑為弦。甲戊垂線為股。求得乙戊勾。倍之得乙丙。即圓內容五邊形之一邊也。或以乙丁中率為弦。戊丁半末率為勾。求得乙戊股。倍之亦即圓內容五邊形之一邊也。乙丙弧既為七十二度。則乙丙邊一十一萬七千五百五十七。小餘〇五〇四五八四。為七十二度之通弦。折半得乙戊五萬八千七百七十八。小餘五二五三九二。即乙丁弧三十六度之正弦也。

設如圓徑二十萬。求內容十五邊形之一邊幾何。

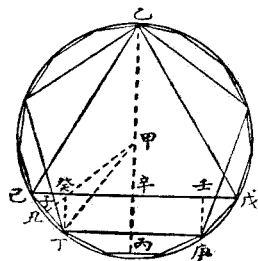
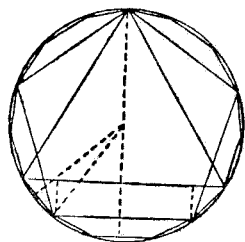
法以半徑十萬為弦。圓內容五邊形之半五萬八千七百七十八。小餘五二五三九二。為勾。求得股八萬零九百零一。小餘六九九四三七五。內減半徑之半五萬。餘三萬零九百零一。小餘六九九四三七五。為股。次以圓內容三邊形之一邊一十七萬三千二百零五。小餘〇八〇七五六八。內減圓內容五邊形之一邊一十一萬七千五百五十七。小餘〇五〇四五八四。餘五萬五千六百四十八。小餘〇三〇二九八四。折半得二萬七千八百二十四。小餘〇一五一四



九二。爲勾求得弦四萬一千五百八十二。小餘三三
 八一六三五。即圓內容十五邊形之每一邊也。如甲
 圓內容十五邊形。每邊之弧得圓周十五分之一。皆
 二十四度。試從圓界乙。作圓內容三邊形。又作圓內
 容五邊形。將三邊形之每一邊弧分五段。五邊形之
 每一邊弧分三段。即得十五邊形之每一邊弧。如戊
 庚與己丁二段。皆爲十五邊形之弧。故以甲丁半徑
 爲弦。丁丙五邊之半爲勾。求得甲丙股內減甲辛自圓心至三角底邊之
 垂線爲半徑之半。餘辛丙與癸丁或壬庚等。復於三邊形之戊己邊內減
 五邊形之庚丁邊。即如戊己線內減壬癸。餘戊壬與癸己二段。折半得癸
 己或戊壬。今任以癸丁或壬庚爲股。癸己或戊壬爲勾。求得己丁弦或戊
 庚弦。即圓內容十五邊形之每一邊也。己丁弧既爲二十四度。則己丁邊
 四萬一千五百八十二。小餘三三八一六三五。爲二十四度之通弦。折半得
 己子二萬零七百九十一。小餘一六九〇八一七。即己丑弧十二度之正弦
 也。

新增按分作相連比例四率法

數理精蘊 下編 卷十六



	三
二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	
一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	三四
三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	
一〇二七〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	
九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	
〇一二七〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇	

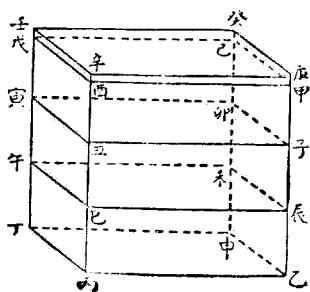
又減次位所得四千與法三百億相因之一百二十兆。又減三位所得七百與法三百億相因之二十一兆。餘七千八百一十九億二千三百萬爲第四位實。以法之三百億除之。得二十。合前三位所得三萬四千七百。共三萬四千七百二十。自乘再乘。得四十一兆八千五百四十二億一千零四萬八千。仍益於原實一千兆內。得一千零四十一兆八千五百四十二億一千零四萬八千爲其實。按除法減首位所得三萬與法三百億相因之九百兆。又減次位所得四千與法三百億相因之一百二十兆。又減三位所得七百與法三百億相因之六千億。餘二千五百四十二億一千零四萬八千爲末位實。以法之三百億除之。得八。所餘亦太多。因益積。仍取略大之數爲九。合前四位所得三萬四千七百二十。共三萬四千七百二十九。自乘再乘。得四十一兆八千八百六十七億六千六百四十萬零二千四百八十九。仍益於原實一

三四七二九
三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
— 〇四一八五四二一〇〇四八〇〇
九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
● 〇一四一八五四二一〇〇四八
— 一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇二一八五四二一〇〇四八〇
— 二一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇八五四二一〇〇四八〇〇
— 六〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二五四二一〇〇四八〇〇

三四七二九
三〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
— 〇四一八八六七六六四〇二四八九
九〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
● 〇一四一八八六七六六四〇三
— 一二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇二一八八六七六六四〇二四
— 二一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇〇八八六七六六四〇二四八
— 六〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二八六七六六四〇二四八九
— 二七〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
〇一六七六六四〇二四八九

千兆內得一千零四十一兆八千八百六十七億六千六百四十萬二千四百八十九爲其實。按除法以五次所得之數與法相因之數遞減之仍餘一百六十七億六千六百四十萬二千四百八十九不盡。是共除得三萬四千七百二十九爲相連比例之二率也。以二率之三萬四千七百二十九自乘得一十二億零六百一十萬三千四百四十一。以一率之十萬除之得一萬二千零六十一爲三率。以二率之三萬四千七百二十九三倍之得十萬四千一百八十七內減去一率之十萬餘四千一百八十七爲四率。如以三率之一萬二千零六十一自乘以二率之三萬四千七百二十九除之亦得四千一百八十七爲四率也。此爲益實歸除之法。蓋因此法止有一率之數。作相連比例四率。使一率與四率之共數與二率三倍等。而連比例四率之理。一率自乘用四率再乘與二率自乘再乘之數等。今立法以一率自乘再乘爲原實。較之三倍二率與一率自乘之面積相乘之數。卻少一二率自乘再乘之數。故以累除所得之數。屢次自乘再乘。益入原實。然後按法除之。始足二率三倍之數也。如圖甲乙爲一率。庚子、子辰、辰乙皆爲二率。庚甲爲四率。庚乙爲一率。四率之共數。又爲二率之三。倍。甲乙丙丁戊己爲一率。自乘再乘之。正。方體。庚乙丙丁壬癸爲三倍二率與一率自乘

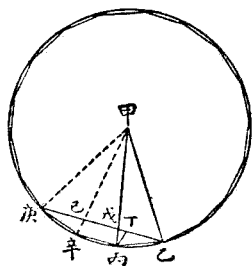
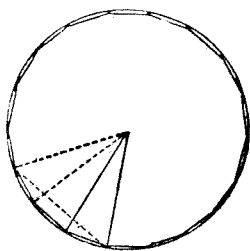
一率	一〇〇〇〇〇
二率	三四七二九
三率	一二〇六一
四率	四一八七



面積相乘之長方體。一率自乘。三因之。得三平面。如以二率乘之。成三扁方體。合之即成三倍二率乘一率自乘面積之一長方體。比一率自乘再乘之正方體。多一庚甲酉戌壬癸扁方體。此扁方體即一率自乘用四率再乘之數。與二率自乘再乘之積等。若於一率自乘再乘之正方體內。加入二率自乘再乘之正方體。即如於甲乙丙丁戊己正方體上。加一庚甲酉戌壬癸之扁方體。成庚乙丙丁壬癸之長方體。而以一率自未之乙丙丁申方面除之。必得庚乙為二率之三倍。苟合乙丙丁申與辰巳午未及子丑寅卯三方面除之。必得庚子或子辰。或辰乙。為二率。若不加積。止以三方面除之。則所得仍為一率之三分之一。比二率數必小。故以屢除所得之數。屢次自乘再乘。益入原積。則積漸增而得數亦漸大。遞及末位。則所少之積已足。而除得之數。即為二率之全數焉。

設如圓徑二十萬。求內容十八邊形之一邊幾何。

法用連比例四率有一率求二率使一率與四率相加與二率三倍等之法。以圓徑二十萬折半得十萬為一率。自乘再乘得一千兆為實。又以半徑十萬自乘三因之得三百億為法。按益實歸除之法。除實得三萬四千七百二十九小餘六三五五三四。為二率。即圓內十八邊形之每一邊也。如甲圓內容十八邊形。每邊之弧得



圓周十八分之一。皆二十度。其通弦即圓內十八邊形之一邊。試自圓心至圓界乙、丙。作甲乙、甲丙二半徑線。遂成甲乙丙三角形。復自圓界乙至圓界庚。作一乙庚線。則截甲丙線於戊。又成乙丙戊三角形。而乙庚爲六十度之通弦。復自圓界丙按丙戊線度。至乙庚線之丁。作一丙丁線。則又成丙丁戊三角形。此三三角形皆爲同式形。乙丙戊三角形之乙角當庚丙弧。爲乙丙弧之倍。則乙丙戊三角形之乙角。與甲乙丙三角形之甲角等。又與甲乙丙三角形同用丙角。丙丁戊三角形之丁丙線。與甲丙半徑平行。則丙丁戊三角形之丙角與甲丙辛三角形之甲角。爲相對錯角。亦必等。又與乙丙戊三角形同用戊角。是此三三角形之各角互相等而爲同式形也。其相當各邊俱成相連比例。故甲乙與乙丙之比。同於乙丙與丙戊之比。乙丙與丙戊之比。又同於丙戊與戊丁之比。爲相連比例四率。而甲乙爲一率。乙丙爲二率。丙戊爲三率。戊丁爲四率也。又乙庚爲六十度之通弦。與甲乙一率等。而乙戊、丁己、己庚三段皆與乙丙二率等。是乙庚一率中。有乙丙二率之三倍。而少一丁戊四率也。必以乙庚一率與丁戊四率相加。方與乙丙二率之三倍等。故用連比例四率有一率求二率法算之。得二率爲十八邊形之一邊也。乙丙弧既爲二十度。乙丙邊三萬四千七百二十九。小餘六三五五三三四。爲二十度之通弦。折半得一萬七千三百六十四。小餘八一七七六六七。卽十度之正弦也。

設如圓徑二十萬。求內容九邊形之一邊幾何。

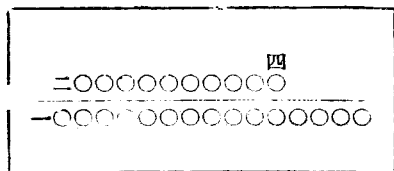
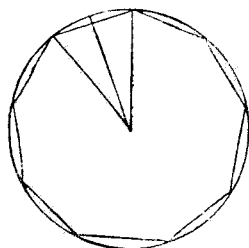
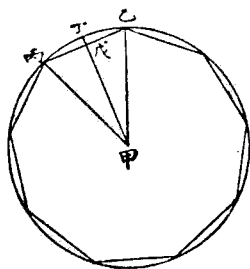
法以半徑十萬爲底。仍以半徑十萬與圓內容十八邊形之一邊三萬四千七百二十九。小餘六三五五三三四。爲兩腰。用三角形求中垂線法算之。得中垂線三萬四千二百零二。小餘〇一四三三二六。倍之得六萬八千四百零四。小餘〇二八六六五二。卽圓內容九邊形之每一邊也。如甲圓容九邊形。每邊之弧。得圓

周九分之一，皆四十度。試自圓心甲至圓界乙、丙二處，作甲乙、甲丙二半徑線，遂成甲乙丙三角形。其乙丙邊爲四十度之通弦。如以乙丙弧四十度折半於丁，作乙丁線，卽圓內容十八邊形之一邊，仍自圓心甲至圓界丁，作甲丁半徑線，又成甲乙丁三角形，而甲丁線平分乙丙線於戊。此乙戊線爲甲乙丁三角形之中垂線，卽九邊形每邊之一半。故以甲丁半徑爲底，甲乙半徑爲大腰，乙丁十八邊形之一邊爲小腰，求得中垂線倍之爲九邊形之每一邊也。乙丙弧既爲四十度，乙丙邊爲四十度之通弦，其乙戊中垂線三萬四千二百零二小餘〇二四三三二六，卽乙丁弧二十度之正弦也。

按分作相連比例四率又法

設如以十萬爲一率，作相連比例四率，使一率與四率相加，與二率兩倍再加一三率之數等，問二率三率四率各幾何。

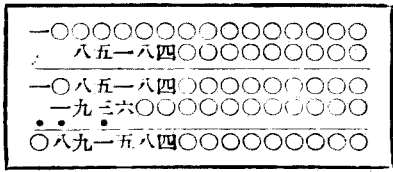
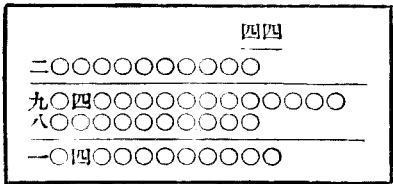
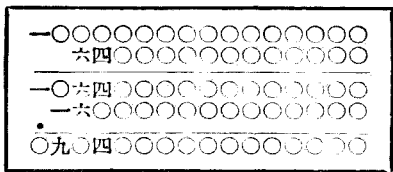
法以一率十萬自乘再乘得一千兆，成一立方體，爲實。



又以一率十萬自乘二因之得二百億。成二平面積。爲法。以除原實一千兆。得五萬爲盡數。因減實大於益實。故取略小之數爲四萬。乃以四萬自乘再乘。得六十四兆。益於原實一千兆內。得一千零六十四兆。爲益實。復以所得四萬自乘。得一十六億。以一率十萬再乘。得一百六十兆。於益實內減之。餘九百零四兆。爲正實。按除法。以所得四萬與法二百

億相因。得八百兆。與正實相減。餘一百零四兆。爲第二位實。以法之二百億除之。得五千。仍取略小之數爲四千。乃以首位所得四萬。合次位所得四千。共四萬四千。自乘再乘。得八十五兆一千八百四十億。益於原實一千兆內。得一千零八十五兆一千八百四十億。爲益實。復以所得四萬四千自乘。得一十九億三千六百萬。以一率十萬再乘。得一百九十三兆六千億。於益實內減之。餘八百九十一兆五千八百四

十億。爲正實。按除法。減首位所得四萬與法二百億相因之八百兆。又減次位所得四千與法二百億相因之八十兆。餘一十一兆五千八百四十億。爲第三位實。以法之二百億除之。得五百。合前兩位所得四



萬四千。共四萬四千五百。自乘再乘。得八十八兆一千二百一十一億二千五百萬。益於原實一千兆內。得一千零八十八兆一千二百一十一億二千五百萬為益實。復以所得四萬四千五百自乘。得一十九億八千零二十五萬。以一

率十萬再乘。得一百九十八兆零二百五十億。於益

實內減之。餘八百九十兆

零九百六十一億二千五

百萬為正實。按除法。減首

位所得四萬與法二百億

相因之八百兆。又減次位

所得四千與法二百億相

因之八十兆。又減三位所

得五百與法二百億相因

之一十兆。餘九百六十一億二千五百萬為第四位實。以法之二百億除之。實不足法。乃以第四位為空

位。而第五位得四。故以四為末位。合前四位所得四萬四千五百空十。共四萬四千五百零四。自乘再乘。

得八十八兆一千四百四十八億九千零一十三萬六千零六十四。益於原實一千兆內。得一千零八十八

四四五

$$\begin{array}{r}
 200000000000 \\
 \hline
 8915840000000000 \\
 80000000000000 \\
 \hline
 0915840000000000 \\
 80000000000000 \\
 \hline
 115840000000000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 100000000000000000 \\
 \hline
 8812112500000000 \\
 10881211250000000 \\
 1980250000000000 \\
 \hline
 0890096125000000
 \end{array}$$

四四五〇四

$$\begin{array}{r}
 200000000000 \\
 \hline
 8900961250000000 \\
 80000000000000 \\
 \hline
 0900961250000000 \\
 80000000000000 \\
 \hline
 10096125000000 \\
 100000000000000 \\
 \hline
 0009612500000000
 \end{array}$$

八兆一千四百四十八億九千零一十三萬六千零六十四爲益實。復以所得四萬四千五百零四自乘。得一十九億八千零六十萬六千零一十六。以十萬再乘。得一百九十八兆零六百零六億零一百六十六萬。於益實內減之。餘八百九十兆零八百四十二億八千八百五十三萬六千零六十四爲正實。按除法。以五次所得之數。與法相

因之數遞減之。仍餘四十

二億八千八百五十三萬

六千零六十四不盡。是其

除得四萬四千五百零四。

爲相連比例之二率也。以

二率之四萬四千五百零

四自乘。得一十九億八千

零六十萬六千零一十六。

以一率之十萬除之。得一

萬九千八百零六爲三率。

以二率之四萬四千五百零四二因之。與三率之一萬九千八百零六相加。得十萬八千八百一十四。減

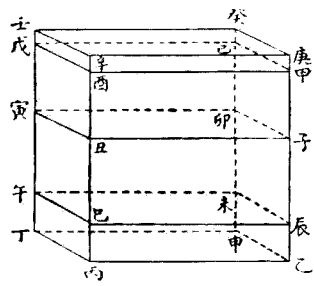
去一率之十萬餘八千八百一十四爲四率。如以三率之一萬九千八百零六自乘。以二率之四萬四千

$$\begin{array}{r}
 \text{一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇} \\
 \text{〇八八一四四八九〇一三六〇六四} \\
 \hline
 \text{一〇八八一四四八九〇一三六〇六四} \\
 \text{一九八〇六〇六〇一六〇〇〇〇〇〇〇} \\
 \hline
 \text{〇八九〇〇八四二八八五三六〇六四}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{四四五〇四} \\
 \hline
 \text{二〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇} \\
 \text{八九〇〇八四二八八五三六〇六四} \\
 \hline
 \text{八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇} \\
 \hline
 \text{〇九〇〇八四二八八五三六〇六四} \\
 \text{八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇} \\
 \hline
 \text{一〇〇八四二八八五三六〇六四} \\
 \text{一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇} \\
 \hline
 \text{〇〇〇八四二八八五三六〇六四} \\
 \text{八〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇} \\
 \hline
 \text{〇四二八八五三六〇六四}
 \end{array}$$

一率	一〇〇〇〇〇〇〇
二率	四四五〇四
三率	一九八〇六
四率	八八一四

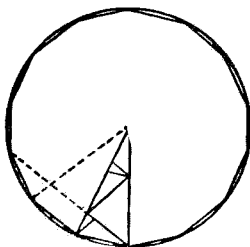
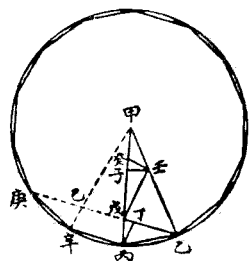
五百零四除之。亦得八千八百一十四爲四率也。此爲益實兼減實歸除之法。蓋因此法止有一率之數。作相連比例四率。使一率與四率之共數。與二率兩倍再加一三率之數等。而相連比例四率之理。一率自乘。用四率再乘。與二率自乘再乘之數等。又一率自乘。用三率再乘。與二率自乘。用一率再乘之數等。今立法以一率自乘再乘爲原實。較之二率加倍與一率自乘之面積相乘之數。卻少一一率自乘四率再乘之數。又多一一率自乘三率再乘之數。故以屢除所得之數。屢次自乘再乘。益入原實。又以屢除所得之數。屢次自乘。以一率再乘。與益實相減。然後按法除之。始足二率兩倍之數也。如圖甲乙爲一率。庚子。子辰皆爲二率。辰乙爲三率。庚甲爲四率。庚乙爲一率。四率之共數。又爲二率兩倍再加一三率之共數。甲乙丙丁戊己爲一率。自乘再乘之正方體。庚乙丙丁壬癸爲兩倍二率併一三率與一率自乘面積相乘之長方體。比一率自乘再乘之正方體。多一庚甲西戊壬癸扁方體。此扁方體卽一率自乘四率再乘之扁方體。與二率自乘再乘之積等。比兩倍二率與一率自乘面積相乘之扁方體。多一辰乙丙丁午未扁方體。此扁方體卽一率自乘三率再乘之扁方體。與二率自乘一率再乘之積等。若於一率自乘再乘之正方體內。加入二率自乘再乘之數。再減去二率自乘一率再乘之數。卽如於甲乙丙丁戊己正方體內。加入庚甲西戊壬癸之扁方體。減去辰乙丙丁午未之扁方體。成一庚辰巳午壬癸之扁方體。而以一率自乘之辰巳午未方面除



之必得庚辰爲二率之兩倍。苟合辰巳午未子丑寅卯二方面除之。必得庚子或子辰爲二率。若不益少減多。而以二方面除之。則所得仍爲一率之二分之一。比二率數必大。故以屢除所得之數。屢次自乘再乘。益入原積。復以屢除所得之數自乘。用一率再乘。逐層與原積相減。遞及末位。則所少之積漸足。所多之積漸消。而除得之數。卽爲二率之全數焉。

設如圓徑二十萬。求內容十四邊形之一邊幾何。

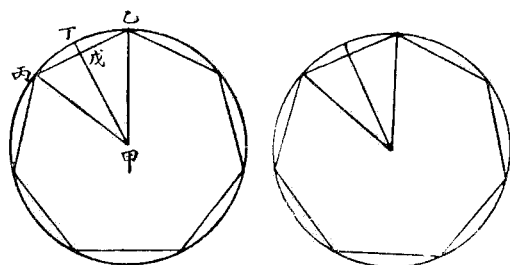
法用連比例四率有一率求第二率。使一率與四率相加。與二率兩倍再加一三率等之法。以圓徑二十萬折半得十萬爲一率。自乘再乘得一千兆爲實。又以半徑十萬自乘。倍之得二百億爲法。按益實兼減實歸除之法。除實得四萬四千五百零四小餘一八六七九一三。爲二率。卽圓內十四邊形之每一邊也。如甲圓內容十四邊形每邊之弧。得圓周十四分之一。皆二十五度四十二分五十一秒有餘。其通弦卽圓內十四邊形之一邊。試自圓心至圓界乙丙。作甲乙甲丙二半徑線。遂成甲乙丙三角形。復自圓界乙至圓界庚。作一乙庚線。則截甲丙線於戊。又成乙丙戊三角形。復自圓界丙按丙戊線度。至乙庚線之丁。作一丙丁線。則又成丙丁戊三角形。此三三角形皆爲同式形。乙戊丙三角形之乙角當丙庚弧。爲乙丙弧之倍。則乙戊丙三角形之乙角。與乙甲丙三角形之甲角等。又與乙甲丙三角形同用丙角。而丙



丁戊三角形之丁丙線。與甲辛半徑平行。即丙丁戊三角形之丙角。與甲丙辛三角形之甲角。爲相對錯角。亦必等。又與乙丙戊三角形同用戊角。是此三三角形之各角互相等。而爲同式形也。其相當各邊。俱成相連比例。故甲乙與乙丙之比。同於乙丙與丙戊之比。乙丙與丙戊之比。又同於丙戊與戊丁之比。爲相連比例四率。而甲乙爲一率。乙丙爲二率。丙戊爲三率。戊丁爲四率也。又按乙戊度作壬戊線。與丁丙平行。則截甲乙線於壬。乃自壬與乙丙平行。作壬子線。復自壬與乙戊平行。作壬癸線。則又成甲壬子與壬戊癸丙三角形。與乙丙戊三角形等。成壬癸子一三角形。與丙丁戊三角形等。其甲子。癸戊皆與乙丙二率等。而癸子與丁戊四率等。是甲丙一率內。有兩二率。一三率。而少一四率也。若以甲丙一率。與癸子四率相加。方與二率之兩倍再加一三率之數等。故用連比例四率。有一率求二率。法算之。得二率。爲十四邊形之每一邊也。

設如圓徑二十萬。求內容七邊形之一邊幾何。

法以半徑十萬爲底。仍以半徑十萬與圓內容十四邊形之一邊四萬四千五百零四。小餘一八六七九一三。爲兩腰。用三角形求中垂線法算之。得中垂線四萬三千三百八十八。小餘三七三九一八。倍之得八萬六千七百七十六。小餘七四七八二三六。即圓內容七邊形之每一邊也。如甲圓容

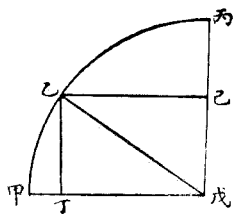


七邊形每邊之弧得圓周七分之一。皆五十一度二十五分四十二秒有餘。試自圓心甲至圓界乙、丙二處。作甲乙、甲丙二半徑線。遂成甲乙丙三角形。其乙丙邊爲五十一度二十五分四十二秒有餘之通弦。如以乙丙弧五十一度二十五分四十二秒有餘。折半於丁。作乙丁線。即圓內容十四邊形之一邊。仍自圓心甲至圓界丁。作甲丁半徑線。又成甲乙丁三角形。而甲丁線平分乙丙線於戊。此乙戊線爲甲乙丁三角形之中垂線。即七邊形每邊之一半。故以甲丁半徑爲底。甲乙半徑爲大腰。乙丁十四邊形之一邊爲小腰。求得乙戊中垂線。倍之爲七邊形之每一邊也。

三要。有本弧之正弦。求本弧之餘弦。有本弧之正弦餘弦。求倍弧之正弦餘弦。有本弧之正弦餘弦。求半弧之正弦餘弦。

設如本弧三十六度之正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九二。求餘弧五十四度之正弦幾何。法以三十六度之正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九二。爲勾。半徑十萬爲弦。求得股八萬零九百零一。小餘六九九四三七五。爲五十四度之正弦。即三十六度之餘弦也。如甲乙丙九十度之一象限。其甲乙正弧三十六度。乙丙餘弧五十四度。乙丁爲三十六度之正弦。試自乙至象限中心戊。作乙戊半徑線。遂成乙丁戊勾股形。乙戊爲弦。乙丁爲勾。求得丁戊股。與乙己等。爲乙丙餘弧五十四度之正弦。即甲乙正弧三十六度之餘弦也。

設如本弧三十六度之正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九二。餘弦



八萬零九百零一。小餘六九九四三七五。求倍弧七十二度之正弦餘弦各幾何。

法以半徑十萬爲一率。本弧之正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九二。爲二率。本弧之餘弦八

萬零九百零一。小餘六九九四三七五。爲三率。求得四率四萬七千五百五十二。小餘八二五八一四七。倍之

得九萬五千一百零五。小餘六五一六二九四。卽倍弧七十二度之正弦也。

求餘弦。則以三十六度之正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九

二。自乘以半徑十萬除之。得三萬四千五百四十九。小餘一五〇二八一

二。倍之得六萬九千零九十八。小餘三〇五六二四。與半徑十萬相減。

餘三萬零九百零一。小餘六九九四三七六。卽倍弧七十二度之餘弦也。如

甲乙丙九十度之一象限。其甲乙弧三十六度。倍之爲甲丁弧七十二度。

乙己爲三十六度之正弦。庚乙爲三十六度之餘弦。與戊辛等。蓋辛甲與乙

己等。則戊辛必與戊己等。戊己卽庚乙也。丁壬爲七十二度之正弦。試與乙

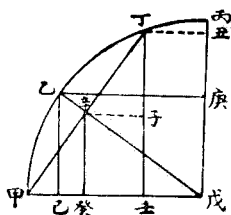
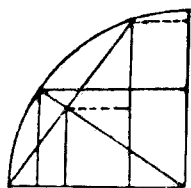
己平行。作辛癸線。遂成戊乙己。戊辛癸。同式兩勾股形。其戊乙己勾股形

之戊乙弦。與乙己勾之比。同於戊辛癸勾股形之戊辛弦。與辛癸勾之比。

爲相當比例四率。而辛癸與壬等。爲丁壬之半。蓋辛甲爲丁甲之半。則辛

癸亦爲丁壬之半。故倍之得丁壬。爲甲丁七十二度之正弦也。又如求餘弦。

其甲辛戊。甲癸辛。爲同式兩勾股形。其甲辛戊勾股形之甲戊弦。與甲辛



勾之比。同於甲癸辛勾股形之甲辛弦。與甲癸勾之比。為相連比例三率。既得甲癸。倍之得甲壬。蓋甲丁為甲辛之倍。則甲壬亦為甲癸之倍。與甲戊半徑相減。餘壬戌。與丁丑等。即甲丁七十二度之餘弦也。

設如本弧四十五度之正弦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。餘弦亦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。一一八六。求半弧二十二度三十分之正弦幾何。

法以本弧之正弦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。為股。本弧之餘

弦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。與半徑十萬相減。餘二萬九

千二百八十九。小餘三二二八八一四。為勾。求得弦七萬六千五百三十六。

小餘六八六四七三〇。折半得三萬八千二百六十八。小餘三四三二三六五。

即半弧二十二度三十分之正弦也。如甲乙丙九十度之一象限。其甲乙

弧四十五度。折半為丁乙弧二十二度三十分。乙己為四十五度之正弦。

戊己與庚乙等為四十五度之餘弦。於戊甲半徑內減去戊己。餘己甲為

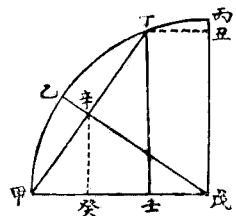
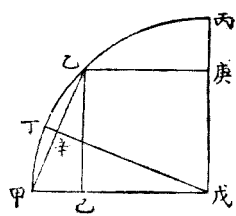
勾。乙己為股。求弦得乙甲。為四十五度之通弦。折半得乙辛。即丁乙二十

二度三十分之正弦也。

又捷法以本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。

與半徑十萬相減。餘二萬九千二百八十九。小餘三二二八八一四。折半得一

萬四千六百四十四。小餘六六〇九四〇七。與半徑十萬相乘。開方得三萬



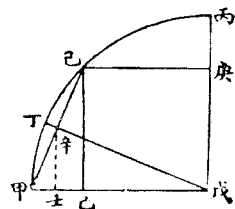
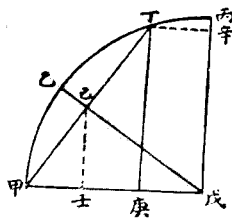
八千二百六十八。小餘三四三二三六五。即半弧二十二度三十分之正弦也。蓋乙己爲四十五度之正弦。甲己爲四十五度之正矢。乙辛、辛甲皆二十二度三十分之正弦。如與乙己平行。作一辛壬線。平分甲己於壬。成甲辛戊、甲壬辛。同式兩勾股形。其甲辛戊勾股形之甲戊弦。與甲辛勾之比。同於甲壬辛勾股形之甲辛弦。與甲壬勾之比。爲連比例三率。故首率甲戊與末率甲壬相乘。首率甲戊與末率甲壬相乘。與中率甲辛自乘之積相等。開方得甲辛。爲二十二度三十分之正弦也。

新增有本弧之餘弦求倍弧之餘弦及半弧之餘弦

設如本弧三十六度之餘弦八萬零九百零一。小餘六九九四三七五。求倍弧

七十二度之餘弦幾何。

法以本弧三十六度之餘弦八萬零九百零一。小餘六九九四三七五。自乘。以半徑十萬除之。得六萬五千四百五十。小餘八四九七一八七。與半徑十萬相減。餘三萬四千五百四十九。小餘一五〇二八二三。倍之。得六萬九千零九十九。小餘三〇〇五六二六。仍與半徑十萬相減。餘三萬零九百零一。小餘六九九四三七四。即倍弧七十二度之餘弦也。如甲乙丙九十度之一象限。其甲乙弧三十六度。倍之爲甲丁弧七十二度。丁己爲三十六度之正弦。戊己爲三十六度之餘弦。丁庚爲七十二度之正弦。辛丁爲七十二度之餘弦。與戊庚等。試自己



至壬作己壬垂線遂成甲己戊己壬戊同式兩勾股形其甲己戊勾股形之戊甲弦與戊己股之比同於己壬戊勾股形之戊己弦與戊壬股之比為連比例三率故中率戊己自乘以首率戊甲除之得末率戊壬既得戊壬與戊甲半徑相減餘壬甲倍之得庚甲仍與戊甲半徑相減餘戊庚與辛丁等即甲丁弧七十二度之餘弦也

設如本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一八六求半弧十二度三十分之餘弦幾何

法以本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六七八一八六與半徑十

萬相減餘二萬九千二百八十九小餘三二一八八四折半得一萬四千六百

四十四小餘六六〇九四〇七與本弧四十五度之餘弦七萬零七百一十小餘六

七八一八六相加得八萬五千三百五十五小餘三三九〇五九三與半徑十萬

相乘開方得九萬二千三百八十七小餘九五三二五一即半弧二十二度三

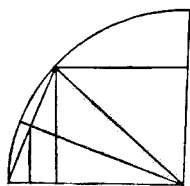
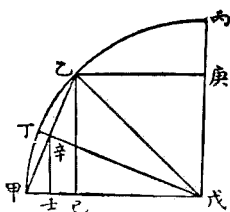
十分之餘弦也如甲乙丙九十度之一象限其甲乙弧四十五度折半為丁乙

弧二十二度三十分乙己為四十五度之正弦戊己與庚乙等為四十五度之

餘弦乙辛為二十二度三十分之正弦戊辛為二十二度三十分之餘弦戊己

四十五度之餘弦與戊甲半徑相減餘己甲折半得己壬再與戊己相加得戊

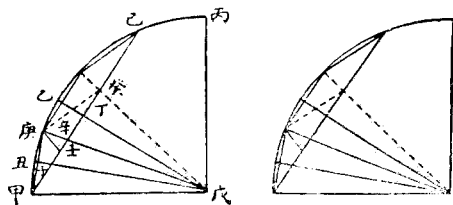
壬試自辛至壬作辛壬垂線遂成甲辛戊辛壬戊同式兩勾股形其甲辛戊勾



股形之戊甲弦與戊辛股之比同於辛壬戊勾股形之戊辛弦與戊壬股之比爲連比例三率故首率戊甲與末率戊壬相乘開方得戊辛爲二十二度三十分之餘弦也。

新增有本弧之正弦求其三分之一弧之正弦

設如三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五三九二。求其三分之一十二度之正弦幾何。法用連比例四率。有一率求二率使一率與四率相加與二率三倍等之法。以三十六度之正弦五萬八千七百七十八小餘五二五三九二。倍之得一十一萬七千五百五十七小餘〇五〇四五八四。爲七十二度之通弦。乃以半徑十萬自乘得一百億。用七十二度之通弦再乘得一千一百七十五兆五千七百零五億零四百五十八萬四千爲實。又以半徑十萬自乘三因之得三百億爲法。按益實歸除之法。除實得四萬一千五百八十二小餘三三八一六三四。爲二十四度之通弦。折半得二萬零七百九十一小餘一六九〇八一七。卽十二度之正弦也。如甲乙丙九十度之一象限。其甲乙弧三十六度。甲丁爲其正弦。倍之得甲己卽甲乙己七十二度弧之通弦。試以七十二度取其三分之一二十四度爲甲庚弧。其通弦甲庚與甲戊庚戊兩半徑成一戊甲庚三角形。又庚戊半徑截甲己通弦於辛。成一庚甲辛三角形。又依庚辛度向辛甲邊作庚壬線。成一庚辛壬三角形。此兩三角形俱與戊甲庚三角形



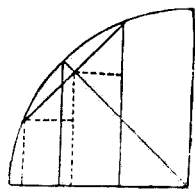
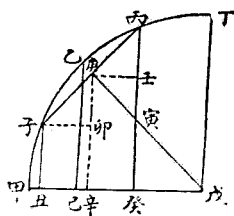
爲同式形。其相當各邊俱成相連比例。故戊甲爲一率。甲庚爲二率。庚辛爲三率。辛壬爲四率也。今甲己七十二度之通弦。內有甲庚二率之三倍。而少一辛壬四率。蓋己癸、癸壬、辛甲、三段。皆與甲庚二率等。而癸壬、辛甲、二段內。卻重辛壬一小段。是甲己通弦內。有己癸、癸壬、辛甲、三二率。而少一辛壬四率也。若以甲己通弦爲高。與一率半徑自乘之方面相乘所成之長方體。則比三倍二率爲高。與一率半徑自乘之方面相乘所成之長方體。必少一四率爲高。與一率半徑自乘之方面相乘所成之扁方體。此扁方體與二率自乘再乘之正方體等。故以一率半徑自乘之三方面爲法除實。每次所得二率之數自乘再乘。益入原積。則積漸增。與三倍二率與一率半徑自乘之方面相乘所成之長方體合。而除得之數。卽爲二率。既得甲庚二率。爲二十四度之通弦半之得甲子。卽甲丑弧十二度之正弦也。

二簡法。有兩弧之正弦餘弦。求兩弧相加相減之正弦。有距六十度前後相等弧之正弦。求距弧之正弦。

設如四十五度之正弦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。餘弦亦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。又有二十四度之正弦四萬零六百七十三。小餘六六四三〇七五。餘弦九萬一千三百五十四。小餘五五七六四二。求兩弧相加六十九度之正弦。及兩弧相減二十一度之正弦各幾何。

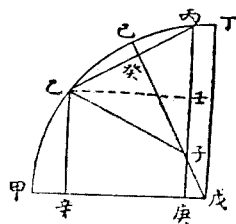
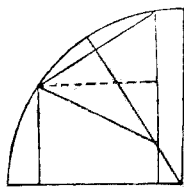
法以半徑十萬爲一率。四十五度之正弦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。爲二率。二十四度之餘弦九萬一千三百五十四。小餘五五七六四二。爲三率。求得四率六萬四千五百九十七。小餘四一八八〇。二〇。又以半徑十萬爲一率。四十五度之餘弦七萬零七百一十。小餘六七八一八六。爲二率。二十四度之正弦四萬零六百七十三。小餘六六四三〇七五。爲三率。求得四率二萬八千七百六十。小餘六二三八。

四七六。乃以兩四率相加，得九萬三千三百五十八。小餘〇四二六四九六。卽兩弧相加所得六十九度之正弦。如以兩四率相減，餘三萬五千八百三十六。小餘七九四九五五。卽兩弧相減所餘二十一度之正弦也。如甲乙丙丁九十度之一象限，其乙甲弧四十五度，乙己爲四十五度之正弦，己戊爲四十五度之餘弦，於乙甲弧四十五度，加丙乙弧二十四度，得丙甲弧六十九度。又於乙甲弧四十五度，減乙子弧二十四度，餘子甲弧二十一度。試自丙至子作丙子線，則丙乙弧乙子弧皆爲二十四度。丙庚與庚子皆爲二十四度之正弦，庚戊則爲二十四度之餘弦。今以乙戊半徑爲一率，乙己四十五度之正弦爲二率，庚戊二十四度之餘弦爲三率，求得四率庚辛與壬癸等。又以乙戊半徑爲一率，己戊四十五度之餘弦爲二率，丙庚二十四度之正弦爲三率，求得四率丙壬。故以丙壬加於庚辛，庚辛原與壬癸等，共得丙癸卽丙甲弧六十九度之正弦。如於庚辛內減與丙壬相等之庚卯，餘卯辛與子丑等。卽子甲弧二十一度之正弦也。蓋乙己戊與庚辛戊爲同式勾股形，故乙戊與乙己之比，同於庚戊與庚辛之比，爲相當比例四率。又寅癸戊與乙己戊亦爲同式勾股形，而寅癸戊勾股形之寅角與丙角，與丙角之寅角，爲兩尖相對角，其度等。癸角與庚角俱爲直角，其度又等。則戊角必與丙角等。如作庚壬線，成丙壬庚勾股形，則此形之丙角，既與乙己戊勾股形之戊角等，而壬角又爲直角，與乙己戊勾股



形之己角等。故亦爲同式勾股形。而乙戊與己戊之比。同於丙庚與丙壬之比。爲相當比例四率也。
 設如八十四度之弧。距六十度二十四度。其正弦九萬九千四百五十二。小餘一八九五三六八。又有三十
 六度之弧。距六十度亦二十四度。其正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九二。求距弧二十四
 度之正弦幾何。

法以八十四度之正弦九萬九千四百五十二。小餘一八九五三六八。內減三
 十六度之正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九二。餘四萬零六百
 七十三。小餘六六四三〇七六。卽距弧二十四度之正弦也。如有距六十度前
 二十四度爲三十六度。其正弦五萬八千七百七十八。小餘五二五二二九二。
 距弧二十四度之正弦四萬零六百七十三。小餘六六四三〇七六。求距六十
 度後二十四度爲八十四度之正弦。則以三十六度之正弦五萬八千七百
 七十八。小餘五二五二二九二。與距弧二十四度之正弦四萬零六百七十
 三。小餘六六四三〇七六。相加。得九萬九千四百五十二。小餘一八九五三六八。
 卽八十四度之正弦也。又有有距六十度後二十四度爲八十四度。其正弦
 九萬九千四百五十二。小餘一八九五三六八。距弧二十四度之正弦四萬零
 六百七十三。小餘六六四三〇七六。求距六十度前二十四度爲三十六度之
 正弦。則以八十四度之正弦九萬九千四百五十二。小餘一八九五三六八。與



距弧二十四度之正弦四萬零六百七十三。小餘六六四三〇七六。相減餘五萬八千七百七十八。小餘五二五三九二。卽三十六度之正弦也。如甲乙丙丁九十度之一象限。其己甲弧六十度。丙甲弧八十四度。丙距己二十四度。乙甲弧三十六度。乙距己亦二十四度。丙庚爲八十四度之正弦。乙辛爲三十六度之正弦。與壬庚等。丙壬爲兩正弦之較。試自己至象限中心戊。作己戊線。又自丙至乙作丙乙線。則丙癸癸乙皆爲距弧二十四度之正弦。與丙壬兩正弦之較相等。蓋己戊甲角六十度。則己戊丁角爲三十度。丙庚與丁戊平行。則丙子己角。與丁戊己角。爲二平行線上所成之內角必相等。皆爲三十度。丙癸子角爲直角。則子丙癸角必爲六十度矣。又自乙至子作乙子線。則乙癸子與丙癸子爲同式勾股形。癸乙子角亦必爲六十度。癸子乙角亦必爲三十度。兩勾股形合之共成一丙乙子三角形。而丙子乙角亦必爲六十度矣。三角度既等。則三邊必相等。今丙壬爲丙子之半。丙癸爲丙乙之半。丙子既與丙乙等。故丙壬亦必與丙癸等也。有此法。凡有六十度以前各弧之正弦。則以各距弧之正弦與之相加。可得六十度以後三十度各弧之正弦。若有六十度以後各弧之正弦。則以各距弧之正弦與之相減。可得六十度以前三十度各弧之正弦。六十度前後三十度之正弦。用加減而卽得較之勾股比例諸法。甚爲簡便也。

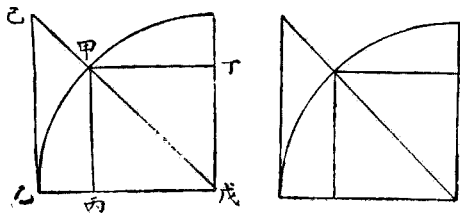
八線相求

設如四十八度之正弦七萬四千三百一十四。小餘四八二五四七七。餘弦六萬六千九百一十三。小餘〇六

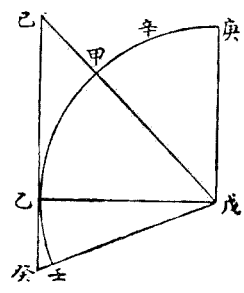
○六三五八。求正矢正切正割各幾何。

法以半徑十萬內減四十八度之餘弦六萬六千九百一十三。小餘〇六〇六三五八。餘三萬三千零八十六。小餘九三九三六四二。爲正矢。以餘弦六萬六千九百一十三。小餘〇六〇六三五八。爲一率。正弦七萬四千三百一十四。小餘四八二五四七七。爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率一十一萬一千零六十一。小餘二五一四八三〇。爲正切。以餘弦六萬六千九百一十三。小餘〇六〇六三五八。爲一率。半徑十萬爲二率。仍以半徑十萬爲三率。求得四率一十四萬九千四百四十七。小餘六五四九八六六。爲正割也。如圖甲乙弧四十八度。甲丙爲正弦。甲丁爲餘弦。與丙戊等。乙丙爲正矢。故乙戊半徑內減與甲丁餘弦相等之丙戊。餘乙丙卽爲正矢。己乙爲正切。己戊爲正割。甲丙戊己乙戊兩勾股形爲同式形。故丙戊餘弦與甲丙正弦之比。同於乙戊半徑與己乙正切之比。爲相當比例四率。又丙戊餘弦與甲戊半徑之比。同於乙戊半徑與己戊正割之比。亦爲相當比例四率也。

又正切求正割捷法。以餘弧折半得二十一度。乃以二十一度之正切三萬八千三百八十六。小餘四〇三三五〇三六。與本弧之正切一十一萬一千零六十一。小餘二五一四八三〇。相加得一十四萬九千四百四十七。小餘六五四八三三三。卽爲本弧之正割也。如圖甲乙弧四十八度。己乙爲正切。己戊爲正割。試將



甲庚餘弧四十二度折半得庚辛二十一度。移於乙壬。又作乙癸爲乙壬弧二十一度之正切。與己乙相加。得己癸。與己戊正割相等。蓋甲戊乙角四十八度。己乙戊角爲直角九十度。二角併之爲一百三十八度。於一百八十度內減之。餘四十二度爲戊己乙角。今於甲戊乙角四十八度。加乙戊壬角二十一度。遂成己戊癸角爲六十九度。仍與戊己乙角四十二度相加。於一百八十度內減之。所餘亦六十九度。卽爲戊癸己角。戊癸己角既與己戊癸角相等。則己戊與己癸邊亦必相等也。有

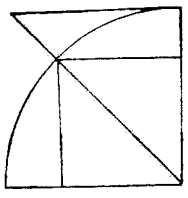


此法。則凡有逐度逐分之切線。求割線。可止用加法。不用四率矣。又凡有本弧之正切正割。相減卽得半餘弧之正切。若有本弧之正割及半餘弧之正切。相減卽得本弧之正切也。

設如四十八度之正弦七萬四千三百一十四。小餘四八二五四七七。餘弦六萬六千九百一十三。小餘〇六

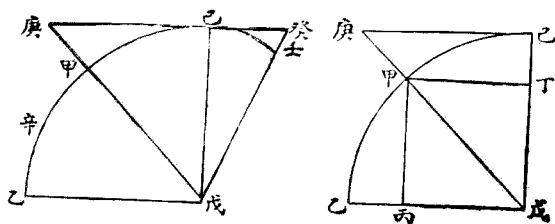
〇六三五八。求餘矢餘切餘割各幾何。

法以半徑十萬內減四十八度之正弦七萬四千三百一十四。小餘四八二五四七七。餘二萬五千六百八十五。小餘五一七四五三三。爲餘矢。以正弦七萬四千三百一十四。小餘四八二五四七七。爲一率。餘弦六萬六千九百一十三。小餘〇六〇六三五八。爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率九萬零四十。小餘四〇四四二九七。爲餘切。以正弦七萬四千三百一十四。小餘四八二五四七七。爲一率。半徑十萬爲二率。仍以半徑十萬



爲三率。求得四率一十三萬四千五百六十三。小餘二七二九六〇七。爲餘割也。如圖甲乙弧四十八度。甲丙爲正弦。與丁戊等。甲丁爲餘弦。己丁爲餘矢。故己戊半徑內減與甲丙正弦相等之丁戊。餘己丁。卽爲餘矢。庚己爲餘切。之比。同於己戊半徑與庚己餘切之比。爲相當比例四率。又丁戊正弦與甲戊半徑之比。同於己戊半徑與庚己餘切之比。亦爲相當比例四率也。

又餘切求餘割捷法。以本弧折半得二十四度。乃以二十四度之正切四萬四千五百二十二。小餘八六八五三一〇。與本弧之餘切九萬零四十小餘四〇四四二九七。相加得一十三萬四千五百六十三。小餘二七二九六〇七。卽爲本弧之餘割也。如圖甲乙弧四十八度。庚己爲其餘切。庚戊爲其餘割。試將甲乙正弧四十八度折半得辛乙二十四度。移於壬己。又作癸己爲壬己弧二十四度之正切。與庚己相加得庚癸。與庚戊餘割相等。蓋甲戊己角四十二度。庚己戊角爲直角九十度。二角相併爲一百三十二度。於一百八十度內減之餘四十八度。爲戊庚己角。今於甲戊己角四十二度加己戊壬角二十四度。遂成庚戊癸角爲六十六度。仍與戊庚己角四十八度相加於一百八十度內減之。所餘亦爲六十六度。卽爲戊癸庚角。戊癸庚角既與庚戊癸角相等。則庚戊與庚癸邊亦必相等也。有此法。則凡有逐



度逐分之切線。求餘割亦可止用加法。不用四率矣。又凡有本弧之餘切餘割。相減即得半本弧之正切。若有本弧之餘割。及半本弧之正切。相減即得本弧之餘切矣。

求象限內各線總法

六宗併新增十八邊形。及九邊形之每邊。各半之得八弧之正弦。用要法之一。各求其餘弦。次取十二度。十五邊之半。用要法之三。折半四次。得六度。三度。一度。三十分。及四十五分之正弦。復用新增法求其三分之一。得十五分之正弦。復求其三分之一。即得五分之正弦。既得五分之正弦。乃用簡法之一。求六十度以內之正弦。每越五分而得一弦。可得七百二十。又用簡法之二。求六十度以外之正弦。亦越五分而得一弦。又得三百六十。如以一度之弦。與五十九度之弦相加。即六十一度之弦。以二度之弦。與五十八度之弦相加。即六十二度之弦。以至二十九度之弦。與三十一度之弦相加。即得八十九度之弦也。總而計之。一象限中共得正弦一千零八。已居全表五分之一。象限中逐分計之。共正弦五千四百。故一千零八。爲五分之一也。再以五分之弦。用要法之三。得二分三十秒之弦。復用新增法。求其三分之一。得五十秒之弦。乃以五十秒之弧爲一率。五十秒之弦爲二率。一分之弧化六十秒爲三率。得四率爲一分之弦。既得一分之弦。即用簡法之一。簡法之二。錯綜加減之。則一象限中每度每分之正弦悉得矣。既得每度每分之正弦。則用前八線相求之法。即得每度每分之切割諸線矣。如於一分之中。欲析爲六十秒。則以比例四率求之。即得每秒之八線也。

數理精蘊下編卷十七

面部七

三角形邊線角度相求

三角形有直角者爲勾股。無直角者作中垂線。分爲兩直角形。則亦成兩勾股。是皆有其二而得其一。或有其三而分爲二。槩以邊線相求者也。至於割圓之法。則凡三角形有一角。卽有八線。皆成勾股。而可比例以相求。故三角形不論角之直與銳鈍。要以角度爲準。而三角之度。必與兩直角之度等。角之大者。所對之邊亦大。角之小者。所對之邊亦小。凡三角三邊。但知其三而其餘者。悉可得。若直角。則惟知其二而其餘者。亦可得。此三角之法。所由立。而測量之用。所由廣也。如知兩角一邊。求又一邊者。以對所知之角。與對所求之角爲比。卽如所知之邊與所求之邊爲比也。知兩邊一角。求又一角者。以對所知之邊與對所求之邊爲比。卽如所知之角與所求之角爲比也。或所知之一角。在所知兩邊之間。而求又一角者。則角無所對之邊。而邊亦無所對之角。必用兩邊之和較。與所知角之外角半弧之切線爲比。而得所求兩角。與所知角之外角半弧之較。旣得較。而角度亦得矣。又如知三邊。而求三角者。則以三角形中垂線法。分爲兩直角形。而三角自隨之。而得。或用三邊之方面。按法比例。而得兩直角形之各一角。旣得一角。而三角亦可得矣。若止有三角。則三邊無所約束。故不成法。蓋角度爲虛率。而邊線爲實數。有實數而虛

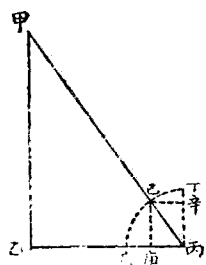
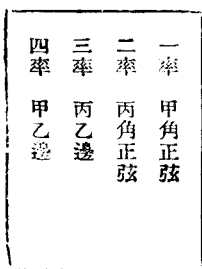
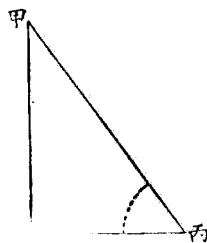
率可馭。總以比例四率。展轉用之。惟在分合有法。相度得宜耳。

設如甲乙丙直角三角形。乙角爲直角九十度。知丙角五十七度。丙乙邊

五丈。求甲乙邊幾何。

法以丙角五十七度。與象限九十度相減。餘三十三度。爲甲角。乃以甲角爲對所知之角。其正弦五萬四千四百六十四。爲一率。丙角爲對所求之角。其正弦八萬三千八百六十七。爲二率。丙乙邊爲所知之邊。其數五丈。爲三率。求得四率七丈六尺九寸九分三釐有餘。卽甲乙爲所求之邊也。如丙丁戊一象限。己戊弧爲丙角之正弧。己庚線爲丙角之正弦。丁己弧爲丙角之餘弧。卽甲角之正弧。辛己線爲丙角之餘弦。卽甲角之正弦。是故丙角五十七度之餘弧。爲三十三度。丙角五十七度之餘弦。爲三十三度之正弦。己庚丙與甲乙丙兩勾股形爲同式形。故甲角正弦丙庚。卽辛己。與丙角正弦己庚之比。同於丙乙邊與甲乙邊之比。爲相當比例四率也。

又法以半徑十萬爲一率。丙角五十七度之正切一十五萬三千九百八十六。爲二率。丙乙邊五丈。爲三率。求得四率七丈六尺九寸九分三釐。卽甲乙邊也。如丙丁戊一象限。切己戊弧作庚戊線。爲丙角之正切。則丙戊



爲半徑。庚戌丙與甲乙兩勾股形爲同式形。故丙戌半徑與庚戌正切之比。同於丙乙邊與甲乙邊之比。爲相當比例。四率也。

設如甲乙丙直角三角形。乙角爲直角。九十度。知丙角二十三度三十五分。甲乙邊三十二丈。求丙乙邊幾何。

法以丙角二十三度三十五分與九十度相減。餘六十六度二十五分。丙角二十三度三十五分之餘弦。爲六十六度二十五分。丙角二十三度三十五分之餘弦。爲六十六

一率。以甲角爲對所求之角。其正弦九萬一千

六百四十八爲二率。甲乙邊爲所知之邊。其數

三十二丈爲三率。求得四率七十三丈三尺零

三分有餘。卽丙乙爲所求之邊也。如丙丁戊一

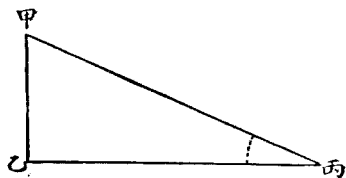
象限。己戌弧爲丙角之正弧。己庚線爲丙角之

正弦。丁己弧爲丙角之餘弧。卽甲角之正弧。辛

己線爲丙角之餘弦。卽甲角之正弦。故丙角二

十三度三十五分之餘弦。爲六十六度二十五

分。丙角二十三度三十五分之餘弦。爲六十六



一率	半徑
二率	丙角正切
三率	丙乙邊
四率	甲乙邊

一率	丙角正弦
二率	甲角正弦
三率	甲乙邊
四率	丙乙邊

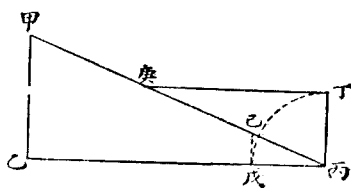
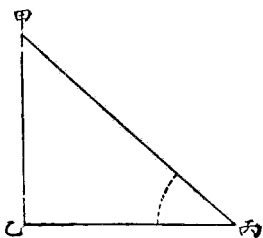
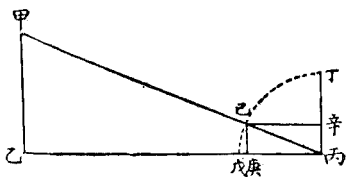
度二十五分之正弦。己庚丙與甲乙丙兩勾股形。爲同式形。故丙角正弦己庚與甲角正弦丙庚之比。同於甲乙邊與丙乙邊之比。爲相當比例四率也。

又法以半徑十萬爲一率。丙角二十三度三十五分之餘切線二十二萬九千零七十三爲二率。甲乙邊三十二丈爲三率。求得四率七十三丈三尺零三分有餘。卽丙乙邊也。如丙丁戊一象限。切丁己弧。作丁庚線。爲丙角之餘切。卽甲角之正切。則丁丙爲半徑。丙丁庚與甲乙丙兩勾股形。爲同式形。故丁丙半徑與丁庚餘切之比。同於甲乙邊與丙乙邊之比。爲相當比例四率也。

設如甲乙丙直角三角形。乙角爲直角九十度。知丙角四十三度三十七分。丙乙邊二十一尺。求甲丙邊幾何。

法以丙角四十三度三十七分與九十度相減。餘四十六度二十三分爲甲角。乃以甲角爲對所知之角

一率	半徑
二率	丙角餘切
三率	甲乙邊
四率	丙乙邊

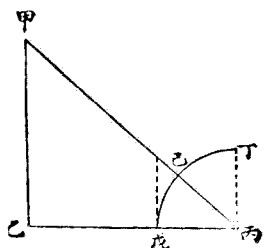
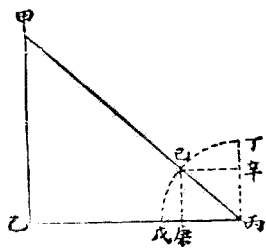


其正弦七萬二千三百九十七爲一率。甲角正弦即丙角餘弦。或直用丙角餘弦亦可。以乙角爲對所求之角。其正弦即半徑十萬爲二率。丙乙邊爲所知之邊。其數二十一尺爲三率。求得四率二十九尺零六釐有餘。即甲丙爲所求之邊也。如丙丁戊一象限。己戊弧爲丙角之正弧。丁己弧爲丙角之餘弧。即甲角之正弧。辛己線爲丙角之餘弦。即甲角之正弦。與丙庚等。己丙線爲半徑。即九十度之正弦。己庚丙與甲乙丙兩勾股形爲同式形。故甲角正弦丙庚與半徑己丙之比。同於丙乙邊與甲丙邊之比。爲相當比例四率也。

又法以半徑十萬爲一率。丙角四十三度三十七分之正割一十三萬八千一百二十七爲二率。丙乙邊二十一尺爲三率。求得四率二十九尺零六釐有餘。即甲丙邊也。如丙丁戊一象限。切己戊弧作庚戊線。爲丙角之正切。則丙戊爲半徑。庚丙爲

一率	甲角正弦
二率	半徑
三率	丙乙邊
四率	甲丙邊

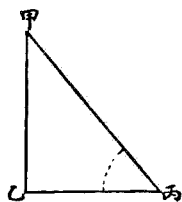
一率	半徑
二率	丙角正割
三率	丙乙邊
四率	甲丙邊



正割庚戊丙與甲乙丙兩勾股形爲同式形。故丙戊半徑與庚丙正割之比。同於丙乙邊與甲丙邊之比。爲相當比例四率也。

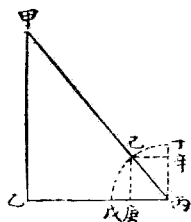
設如甲乙丙直角三角形。乙角爲直角九十度。知丙角五十一度五十一分。甲丙邊八十九丈零二寸二分。求甲乙邊丙乙邊各幾何。

法以丙角五十一度五十一分與九十度相減。餘三十八度零九分爲甲角。求甲乙邊。則以乙角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬爲一率。以丙角爲對所求之角。其正弦七萬八千六百四十爲二率。甲丙邊爲所知之邊。其數八十九丈零二寸二分爲三率。求得四率七十丈零六分有餘。卽甲乙爲所求之邊也。求丙乙邊。亦以乙角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬爲一率。而以甲角爲對所求之角。其正弦六萬一千七百七十二爲二率。甲丙邊爲所知之邊。其數八十九丈零二寸二分爲



一率	半徑
二率	甲角正弦
三率	甲丙邊
四率	丙乙邊

一率	半徑
二率	丙角正弦
三率	甲丙邊
四率	甲乙邊



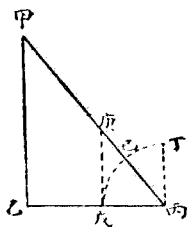
三率求得四率五十四丈九尺九寸有餘。卽丙乙爲所求之邊也。如丙丁戊一象限。己戊弧爲丙角之正弧。己庚線爲丙角之正弦。丁己弧爲丙角之餘弧。卽甲角之正弧。辛己線爲丙角之餘弦。卽甲角之正弦。己庚丙與甲乙丙兩勾股形爲同式形。故半徑己丙與丙角正弦己庚之比。同於甲丙邊與甲乙邊之比。爲相當比例四率。又半徑己丙與甲角正弦丙庚之比。同於甲丙邊與丙乙邊之比。爲相當比例四率也。

又法求甲乙邊。以丙角五十一度五十一分之正割一十六萬一千八百八十五爲一率。其正切一十二萬七千三百零六爲二率。甲丙邊八十九丈零二寸二分爲三率。求得四率七十丈零六分有餘。卽甲乙邊也。求丙

乙邊。則仍以丙角正割一十六萬一千八百八十五爲一率。而以半徑十萬爲二率。仍以甲丙邊八十九丈零二寸二分爲三率。求得四率五十四丈九尺九寸有餘。卽丙乙邊也。如丙丁戊一象限。己戊弧爲丙角之正弧。庚戊線爲丙角之正切。庚丙線爲丙角之正割。庚戊丙與甲乙丙兩勾股形爲同式形。故丙角正割庚丙與正切庚戊之比。同於甲丙邊與甲乙邊之比。又丙角正割庚丙與半徑丙戊之比。同於甲丙邊與丙乙邊之比。皆爲相當比例四率也。

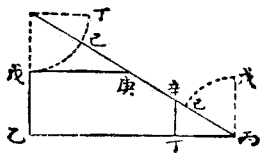
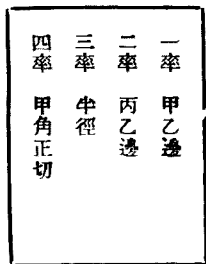
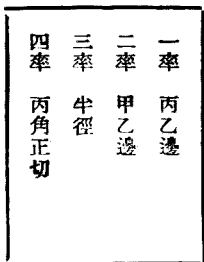
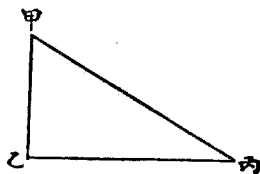
一率	丙角正割
二率	半徑
三率	甲丙邊
四率	甲乙邊

一率	丙角正割
二率	丙角正切
三率	甲丙邊
四率	甲乙邊



設如甲乙丙直角三角形。乙角爲直角九十度。知
 甲乙邊二十丈。丙乙邊三十四丈六尺四寸一
 分。求甲角丙角各幾何。

法以甲乙邊二十丈爲一率。丙乙邊三十四丈六
 尺四寸一分爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率
 一十七萬三千二百零五。爲甲角之正切。檢八線
 表得六十度。卽甲角之度。與九十度相減。餘三十
 度。卽丙角之度也。如先求丙角。則以丙乙邊三十
 四丈六尺四寸一分爲一率。甲乙邊二十丈爲二
 率。半徑十萬爲三率。求得四率五萬七千七百三
 十五。爲丙角之正切。檢八線表得三十度。卽丙角
 之度。與九十度相減。餘六十度。卽甲角之度也。如
 圖先求甲角。則如甲丁戊一象限。己戊弧爲甲角
 六十度之弧。庚戊爲甲角之正切。甲戊爲半徑。甲
 戊庚與甲乙丙兩勾股形。爲同式形。故甲乙邊與
 丙乙邊之比。同於甲戊半徑與庚戊正切之比。爲



相當比例四率。先求丙角。則如丙丁戊一象限。己丁弧爲丙角三十度之弧。辛丁爲丙角之正切。丙丁爲半徑。丙丁辛與丙乙甲兩勾股形爲同式形。故丙乙邊與甲乙邊之比。同於丙丁半徑與辛丁正切之比。爲相當比例四率也。

又法以甲乙邊二十丈。與丙乙邊三十四丈六尺四寸一分相加。得五十四丈六尺四寸一分。爲兩邊之和。爲一率。又以

甲乙邊二十丈。與丙乙邊三十四丈六尺四寸一分相減。餘

一十四丈六尺四寸一分。爲兩邊之較。爲二率。以乙角之外角九十度。折半

得四十五度。爲半外角。其正切十萬。爲三率。四十五度之正切。與半徑十萬等。

求得四率二十六萬七千九百四十八。爲半較角之正切。檢八線表得十五

度爲半較角。與半外角四十五度相減。餘三十度。即丙角之度。如以半較角

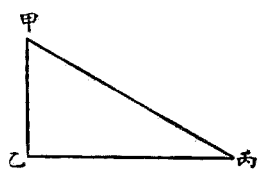
十五度與半外角四十五度相加。得六十度。即甲角之度也。如圖甲乙丙直

角三角形。以乙直角爲心。甲乙小邊爲半徑。作一甲戊丁圓。截丙乙大邊於

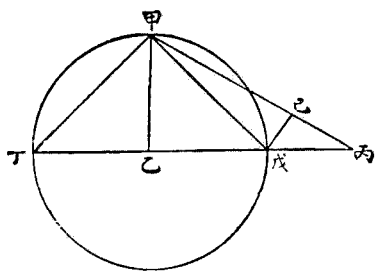
戊。將丙乙引長至圓界丁。則丁乙、戊乙俱爲半徑。與甲乙等。自丁至丙。即兩

邊之和。自戊至丙。即兩邊之較。甲乙丁角。即乙角之外角。試自甲至戊作一

甲戊線。則成甲乙戊直角三角形。其乙甲戊與乙戊甲二角相併。與甲乙丁



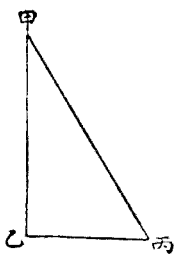
一率	兩邊之總
二率	兩邊之較
三率	半外角切線
四率	半較角切線



外角度等。今折半用其正切。卽如用甲戊乙角之正切。又心角與邊角度等。其切線亦等。故自甲至丁作一丁甲線。卽甲戊丁角之正切。又戊甲丙角。卽甲角大於甲戊乙角之較。又卽丙角小於甲戊乙角之較。故於圓界戊至甲丙邊已作己戊線。與甲丁線平行。卽戊甲己角之正切。且丙丁甲三角形與丙戊己三角形。爲同式形。故兩邊之和丙丁與甲戊丁半外角切線甲丁之比。卽同於兩邊之較丙戊與半較角切線己戊之比。爲相當比例四率也。

設如甲乙丙直角三角形。乙角爲直角九十度。知甲乙邊六十尺。丙乙邊三十二尺。求甲丙邊幾何。

法以甲乙邊六十尺爲一率。丙乙邊三十二尺爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率五萬三千三百三十三。爲甲角之正切。檢八線表得二十八度零四分。卽甲角之度。如用丙乙邊作一率。甲乙邊作二率。卽先得丙角度。乃以甲角爲對所知



之角。其正弦四萬七千零五十爲一率。乙角爲對所求之角。其正弦卽半徑十萬爲二率。丙乙邊爲所知之邊。其數三十二尺爲三率。求得四率六十八尺零一分二釐有餘。卽甲丙爲所求之邊也。又既得甲角之後。用割線法。則以半徑

一率	甲角正弦
二率	半徑
三率	丙乙邊
四率	甲丙邊

一率	甲乙邊
二率	丙乙邊
三率	半徑
四率	甲角正切

一率	半徑
二率	甲角正割
三率	甲乙邊
四率	甲丙邊

爲一率。甲角之正割爲二率。甲乙邊爲三率。求得四率。卽甲丙。爲所求之邊也。或得丙角。則用丙角之正割爲二率。丙乙邊爲三率。亦得甲丙邊。若得丙角。仍用甲乙邊爲三率。則用丙角餘割。卽甲角之正割。爲二率。而亦得甲丙邊也。

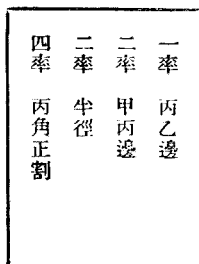
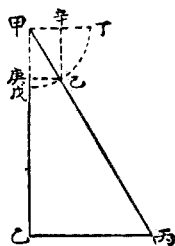
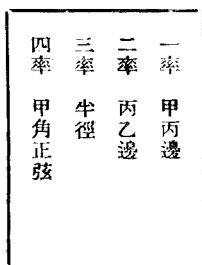
又法用勾股求弦。以甲乙爲股。丙乙爲勾。求得弦。卽甲丙邊也。法已載於勾股集中。

設如甲乙丙直角三角形。乙角爲直角九十度。知甲丙邊一百零二丈二尺。丙乙邊四十八丈。求甲角丙角各幾何。

法以甲丙邊爲對所知之邊。其數一百零二丈二尺爲一率。丙乙邊爲對所求之邊。其數四十八丈爲二率。乙角爲所知之角。其正弦卽半徑十萬爲三率。求得四率四萬六千九百六十六。爲甲角之正弦。檢八線表得二十八度零一分。

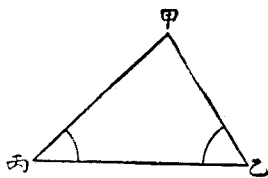
卽甲角之度也。甲角之餘弦。卽丙角之正弦。如檢八線表餘弦數得六十一度五十九分。卽丙角之度也。如甲丁戊一象限。己庚爲

甲角正弦。辛己與甲庚等。爲甲角之餘弦。卽丙角之正弦。甲庚己與甲乙丙兩勾股形。爲同式形。故甲丙邊與丙乙邊之比。同於甲己半徑與己庚正弦之比。爲相當比例四率也。

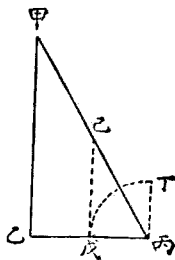


又法以丙乙邊四十八丈爲一率。甲丙邊一百零二丈二尺爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率二十一萬二千九百一十六。爲丙角之正割。撿八線表得六十一度五十九分。卽丙角之度也。其丙角之餘割。卽甲角之正割。如撿餘割數得二十八度零一分。卽甲角之度也。如丙丁戊一象限。丙戊爲半徑。己戊爲丙角之正切。己丙爲丙角之正割。甲乙丙與己戊丙兩勾股形。爲同式形。故丙乙邊與甲丙邊之比。同於丙戊半徑與己丙正割之比。爲相當比例四率也。

設如甲乙丙銳角三角形。知乙丙邊三十二丈。乙角六十度。丙角四十六度。求甲乙邊甲丙邊各幾何。法以乙角六十度與丙角四十六度相加。得一百零六度。與半圓一百八十度相減。餘七十四度。爲甲角。求甲丙邊。則以甲角爲對所知之角。其正弦九萬六千一百二十六。爲一率。以乙角爲對所求之角。其正弦八萬六千六百零三。爲二率。乙丙邊爲所知之邊。其數三十二丈。爲三率。求得四率二十八丈八尺二寸九分有餘。卽甲丙。爲所求之一邊也。求甲乙邊。則仍以甲角爲對所知之角。其正弦九萬六千一百二十六。爲一率。而以丙角爲對所求之角。其



一率	甲角正弦
二率	乙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲丙邊



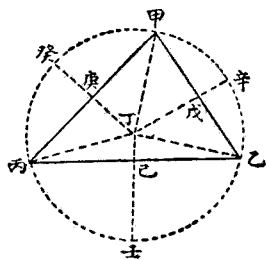
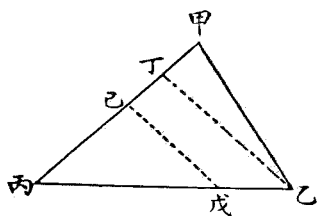
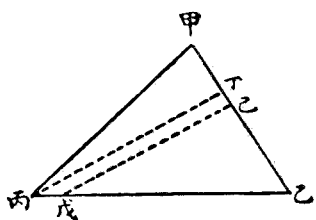
正弦七萬一千九百三十四爲二率。仍以乙丙邊爲所知之邊。其數三十二丈爲三率。求得四率二十三丈九尺四寸六分有餘。卽甲乙爲所求之。又一邊也。如圖甲乙丙三角形。作含三角形之圓。則每界角各對一弧。試自圓心丁作三角形各邊之垂線。卽將每角所對之弧平分一半。各成兩心角。其每一心角與相當各界角之度等。見叢何原本四卷第十三節。是以乙角所對甲丙弧。原係一百二十度。今爲丁庚癸垂線所平分。各爲六十度。一爲甲丁癸。一爲癸丁丙。皆與乙角原度等。丙角所對甲乙弧。原係九十二度。今爲丁戊辛垂線所平分。各爲四十六度。一爲甲丁辛。一爲辛丁乙。皆與丙角原度等。甲角所對乙丙弧。原係一百四十八度。今爲丁己壬垂線所平分。各爲七十四度。一爲乙丁壬。一爲壬丁丙。皆與甲角原度等。乙己爲乙丁壬角之正弦。己丙爲壬丁丙角之正弦。亦卽甲角之正弦。甲庚爲甲丁癸角之正弦。庚丙爲癸丁丙角之正弦。亦卽乙角之正弦。甲戊爲甲丁辛角之正弦。戊乙爲辛丁乙角之正弦。亦卽丙角之正弦。故求甲丙邊者。以乙己與甲庚之比。或己丙與庚丙之比。皆同於乙丙與甲丙之比。又如求甲乙邊者。以己丙與甲戊之比。或乙己與戊乙之比。皆同於乙丙與甲乙之比。俱是半與半全與全之比例。而各爲相當比例四率也。又圖求甲丙邊者。則用甲丙

一率	甲角正弦
二率	乙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲丙邊

一率	甲角正弦
二率	丙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊

爲半徑。自丙角至甲乙界作丙丁垂線。爲甲角正弦。又依甲丙度截丙乙於戊。使戊乙與甲丙等。凡用正弦比例。因在圖內。皆同半徑。今使戊乙與甲丙相同。而後正弦之大小乃見。乃自戊至甲乙界又作戊己垂線。爲乙角正弦。觀戊己小於丙丁。則知甲丙同戊乙。亦小於乙丙。故甲角正弦丙丁與乙角正弦戊己之比。同於乙丙邊與甲丙邊之比。爲相當比例四率也。又如求甲乙邊者。則用甲乙爲半徑。自乙角至甲丙界作乙丁垂線。爲甲角正弦。又依甲乙度截乙丙於戊。使戊丙與甲乙等。乃自戊至甲丙界又作戊己垂線。爲丙角正弦。觀戊己小於乙丁。則知甲乙同戊丙。亦小於乙丙。故甲角正弦乙丁與丙角正弦戊己之比。同於乙丙邊與甲乙邊之比。爲相當比例四率也。

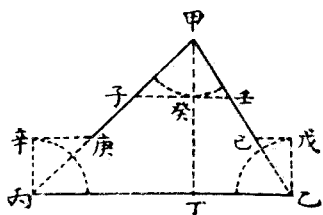
又法求甲乙邊。以乙角六十度之餘切五萬七千七百三十五。與丙角四十六度之餘切九萬六千五百六十九相加。得一十五萬四千



一率	乙角丙角兩餘切
二率	乙角餘割
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊

三百零四爲一率。乙角之餘割一十一萬五千四百七十爲二率。乙丙邊三十二丈爲三率。求得四率二十三丈九尺四寸六分有餘。卽甲乙邊。求甲丙邊。則仍以兩角餘切相加之。一十五萬四千三百零四爲一率。而以丙角餘割一十三萬九千零一十六爲二率。仍以乙丙邊三十二丈爲三率。求得四率二十八丈八尺二寸九分有餘。卽甲丙邊也。此法蓋以甲乙丙一銳角三角形。分爲甲丁乙。甲丁丙兩直角三角形。卽如乙角六十度。與象限九十度相減。餘三十度。爲甲丁乙三角形之甲角。又丙角四十六度。與象限九十度相減。餘四十四度。爲甲丁丙三角形之甲角。乙角之餘切戊己。卽甲丁乙三角形之甲角之正切。如壬癸。乙角之餘割己乙。卽甲丁乙三角形之甲角之正割。如甲壬。而丙角之餘切庚辛。卽甲丁丙三角形之甲角之正切。如癸子。丙角之餘割庚丙。卽甲丁丙三角形之甲角之正割。如甲子。若乙角丙角兩餘切相加。卽兩甲角正切相加之和。如壬子。甲癸壬與甲丁乙兩三角形。爲同式形。甲癸子與甲丁丙兩三角形。爲同式形。故甲壬子與甲乙丙兩三角形。亦爲同式形。是故求甲乙邊者。以壬子與甲壬之比。同於乙丙與甲乙之比。求甲丙邊者。以壬子與甲子之比。同於乙丙與甲丙之比。皆爲相當比例四率也。

一率	乙角丙角兩餘切
二率	丙角餘割
三率	乙丙邊
四率	甲丙邊



設如甲乙丙銳角三角形。知甲角五十度。乙角

七十度。乙丙邊九丈七尺八寸。求丙角甲乙

邊甲丙邊各幾何。

法以甲角五十度。與乙角七十度相加。得一百

二十度。與半圓一百八十度相減。餘六十度。爲

丙角。求甲乙邊。則以甲角爲對所知之角。其正

弦七萬六千六百零四爲一率。以丙角爲對所

求之角。其正弦八萬六千六百零三爲二率。乙

丙邊爲所知之邊。其數九丈七尺八寸爲三率。求得四率一十一丈零五寸六分有餘。卽甲乙、爲所求之

一邊也。求甲丙邊。則仍以甲角爲對所知之角。其正弦七萬六千六百零四爲一率。而以乙角爲對所求

之角。其正弦九萬三千九百六十九爲二率。仍以乙丙邊爲所知之邊。其數九丈七尺八寸爲三率。求得

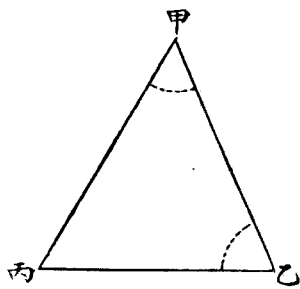
四率一十一丈九尺九寸六分有餘。卽甲丙、爲所求之。又一邊也。此法所知之角與邊。雖與前法少異。然

總是有兩角一邊。得其所餘一角。則仍與前法同矣。

設如甲乙丙鈍角三角形。知乙角二十四度。丙角三十六度三十分。乙丙邊七十九丈零一寸。求甲乙邊

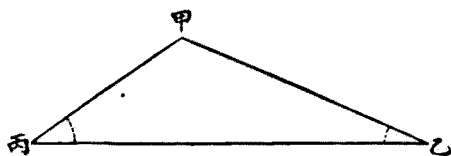
甲丙邊各幾何。

法以乙角二十四度。與丙角三十六度三十分相加。得六十度三十分。與半圓一百八十度相減。餘一百



一率	甲角正弦
二率	丙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊

一十九度三十分爲甲鈍角。求甲乙邊。則以甲鈍角爲對所知之角。夫甲角既爲鈍角。過九十度。乃用其外角。將甲角一百一十九度三十分與半圓一百八十度相減。餘六十度三十分。爲甲角之外角。其正弦八萬七千零三十六爲一率。凡鈍角之外角。其正弦。卽鈍角之正弦。解見割圓集內。丙角爲對所求之角。其正弦五萬九千四百八十二爲二率。乙丙邊爲所知之邊。其數七十九丈零一寸爲三率。求得四率五十三丈九尺九寸七分。卽甲乙爲所求之一邊也。如求甲丙邊。則仍以甲角爲對所知之角。用其外角。正弦八萬七千零三十六爲一率。而以乙角爲對所求之角。其正弦四萬零六百七十四爲二率。仍以乙丙邊七十九丈零一寸爲三率。求得四率三十六丈九尺二寸三分有餘。如既得甲乙邊。而以丙角爲對所知之角。其正弦爲一率。甲乙邊爲所知之邊。其數爲三率。所得亦同。卽甲丙爲所



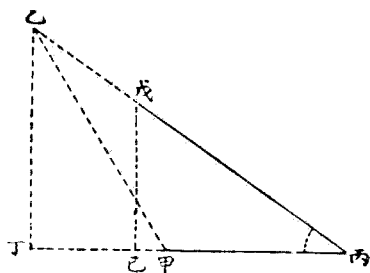
一率	甲角正弦
二率	乙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲丙邊

一率	甲外角正弦
二率	丙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊

一率	甲外角正弦
二率	乙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲丙邊

求之又一邊也。此法亦有兩角一邊。但甲爲鈍角。故用外角正弦。求法略異。試以求甲乙邊言之。則甲乙邊爲半徑。於甲角之外。作乙丁垂線。則成乙甲丁之外角。其乙丁垂線。卽乙甲丁外角之正弦。又按甲乙邊度。截乙丙邊於戊。使戊丙與甲乙半徑等。作戊己垂線。卽丙角之正弦。夫戊己丙與乙丁丙兩勾股形。爲同式形。故乙甲丁外角之正弦。乙丁與丙角之正弦。戊己之比。卽同於乙丙邊與等甲乙邊之戊丙之比。爲相當比例。四率也。其求甲丙邊用外角正弦。其理亦同。

又法求甲乙邊。以乙角二十四度之餘切二十二萬四千六百零四。與丙角三十六度三十分之餘切一十三萬五千一百四十二相加。得三十五萬九千七百四十六爲一率。乙角之餘割二十四萬五千八百五十九爲二率。乙丙邊七十九丈零一寸爲三率。求得四率五十三丈九尺九寸七分有餘。卽甲乙邊。求甲丙邊。則仍以兩角餘切相加之。三十五萬九千七百四十六爲一率。而以丙角之餘割一十六萬八千一百一十七爲二率。乙丙邊七十九丈零一寸爲三率。求得四率三十六丈九尺二寸三分有餘。卽甲丙邊也。此法蓋以甲乙丙一鈍角三角形。分爲甲丁乙、甲丁丙兩直角三角形。其乙角之餘切戊己。卽甲丁乙三角形之甲角之正切。如壬

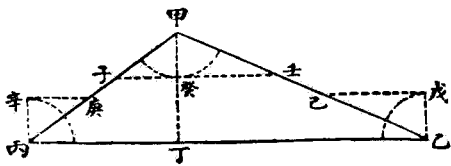


一率	乙角丙角兩餘切
二率	乙角餘割
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊

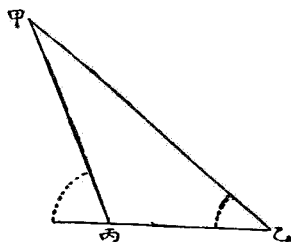
癸乙角之餘割己乙，即甲丁乙三角形之甲角之正割，如甲壬，而丙角之餘切庚辛，即甲丁丙三角形之甲角之正切，如癸子，丙角之餘割庚丙，即甲丁丙三角形之甲角之正割，如甲子，乙角丙角兩餘切相加之數，即兩甲角正切相加之和，如壬子，甲癸壬與甲丁乙兩三角形為同式形，甲癸子與甲丁丙兩三角形為同式形，故甲壬子與甲乙丙兩三角形亦為同式形，是以求甲乙邊者，以壬子與甲壬之比，同於乙丙與甲乙之比，求甲丙邊者，以壬子與甲子之比，同於乙丙與甲丙之比，皆為相當比例四率也。

設如甲乙丙鈍角三角形，知乙角三十三度三十分，八分四十秒，丙外角五十五度五十三分，乙丙邊一十六丈，求甲角甲乙邊甲丙邊各幾何。
 法以乙角三十三度三十八分四十秒，與丙外角五十五度五十三分相減，餘二十二度一十四分。

一率	乙角丙角兩餘切
二率	丙角餘割
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊



一率	甲角正弦
二率	丙外角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊



二十秒。即甲角。取甲角。當以丙外角與半圓一百八十度相減。餘爲丙鈍角。仍以丙鈍角與乙角相加。又與半圓一百八十度相減。餘爲甲角。今止以丙外角內減乙角。即得甲角者。蓋因丙外角與乙甲二內角相併之度等。又三角形三角相併共爲一百八十度。與半圓等。今於半圓內減去丙鈍角。所餘爲丙外角。而一百八十度內減丙鈍角。則餘乙甲二角共度。是甲乙二角共度與丙外角之度等。故於丙外角內減去乙角。即甲角也。求甲乙邊。則以甲角爲對所知之角。其正弦三萬七千八百四十七爲一率。以丙外角爲對所求之角。其正弦八萬二千七百九十爲二率。乙丙邊爲所知之邊。其數一十六丈爲三率。丙邊者。以壬子與甲子之比。同於乙丙與甲丙之比。皆爲相當比例四率也。

設如甲乙丙鈍角三角形。知乙角三十三度三十八分四十秒。丙外角五十五度五十三分。乙丙邊一十六丈。求甲角甲乙邊甲丙邊各幾何。

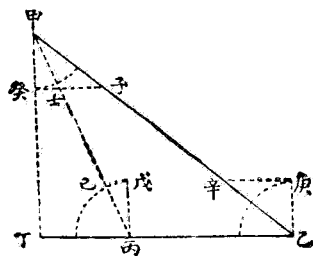
法以乙角三十三度三十八分四十秒與丙外角五十五度五十三分相減。餘二十二度一十四分二十秒。即甲角。取甲角。當以丙外角與半圓一百八十度相減。餘爲丙鈍角。仍以丙鈍角與乙角相加。又與半圓一百八十度相減。餘爲甲角。今止以丙外角內減乙角。即得甲角者。蓋因丙外角與乙甲二內角相併之度等。又三角形三角相併共爲一百八十度。與半圓等。今於半圓內減去丙鈍角。所餘爲丙外角。而一百八十度內減丙鈍角。則餘乙甲二角共度。是甲乙二角共度與丙外角之度等。故於丙外角內減去乙角。即甲角也。求甲乙邊。則以甲角爲對所知之角。其正弦三萬七千八百四十七爲一率。以丙外角爲對所求之角。其正弦八萬二千七百九十爲二率。乙丙邊爲所知之邊。其數一十六丈爲三率。求得四率三十五丈。即甲乙爲所求之一邊。求甲丙邊。則仍以甲角爲對所知

之角。其正弦三萬七千八百四十七爲一率。而以乙角爲對所求之角。其正弦五萬五千四百零四爲二率。仍以乙丙邊爲所知之邊。其數一十六丈爲三率。求得四率二十三丈四尺二寸二分有餘。如既得甲乙邊。而以丙外角爲對所知之角。其正弦爲一率。甲乙邊爲所知之邊。其數爲三率。所得亦同。即甲丙爲所求之。又一邊也。此法亦有兩角一邊。與前法同。但先有外角少異耳。

又法求甲乙邊。以乙角三十三度三十八分四十分秒之餘切一十五萬零二百五十九。與丙外角五十五度五十三分之餘切六萬七千七百四十八相減。餘八萬二千五百一十一爲一率。乙角之餘割一十八萬零四百九十三爲二率。乙丙邊一十六丈爲三率。求得四率三十五丈。即甲乙邊。求甲丙邊。則仍以兩角餘切相減之八萬二千五百一十一爲一率。而以丙外角之餘割一十二萬零七百八十八爲二率。仍以乙丙邊一十六丈爲三率。求得四率二十三丈四尺二寸二分有餘。即甲丙

一率	甲角正弦
二率	乙角正弦
三率	乙丙邊
四率	甲丙邊

一率	乙角丙角兩餘切較
二率	乙角餘割
三率	乙丙邊
四率	甲乙邊

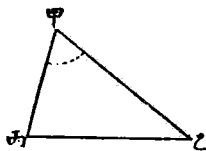


一率	乙角丙角兩餘切較
二率	丙外角餘割
三率	乙丙邊
四率	甲丙邊

邊也。此法蓋以乙丙邊引長，自甲角作甲丁垂線，遂成甲丁乙、甲丁丙兩直角三角形。甲丁丙三角形之丙角，即甲乙丙三角形之丙角之外角。其餘切戊己，即甲丁丙三角形之甲角之正切，如壬癸。丙外角之餘割己丙，即甲丁丙三角形之甲角之正割。如甲壬。甲乙丙三角形之乙角之餘切庚辛，即甲丁乙三角形之甲角之正切，如子癸。甲乙丙三角形之乙角之餘割辛乙，即甲丁乙三角形之甲角之正割。如甲子。甲丁丙三角形之丙角餘切，與甲丁乙三角形之乙角餘切相減之數，即兩甲角之正切相減之較，如子壬。甲癸壬三角形與甲丁丙三角形，為同式形。甲癸子三角形與甲丁乙三角形，為同式形。故甲子壬三角形與甲乙丙三角形，亦為同式形。是以子壬與甲子之比，同於乙丙與甲乙之比。又子壬與甲壬之比，同於乙丙與甲丙之比。皆為相當比例四率也。

設如甲乙丙銳角三角形，知甲角六十度，甲乙邊四十丈，甲丙邊二十六丈一尺零八分，求乙角丙角及乙丙邊各幾何。

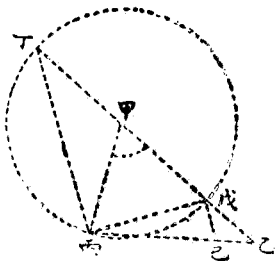
法以甲乙邊四十丈，與甲丙邊二十六丈一尺零八分相加，得六十六丈一尺零八分，為兩邊之和，為一率。又以甲乙邊四十丈，與甲丙邊二十六丈一尺零八分相減，餘一十三丈八尺九寸二分，為兩邊之較，為二率。以甲角六十度，與半圓一百八十度相減，餘一百二十度，為外角，折半得六十度，為半外角。其正切一十七萬三



一率	兩邊之總
二率	兩邊之較
三率	半外角切線
四率	半較角切線

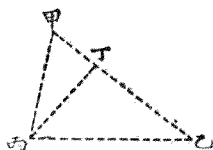
千二百零五爲三率求得四率三萬六千三百九十七爲半較角之正切。檢八線表得二十度爲半較角與半外角六十度相減餘四十度卽乙角之度。如以半較角二十度與半外角六十度相加得八十度卽丙角之度也。既得乙丙兩角卽以丙角爲對所知之角其正弦九萬八千四百八十一爲一率以甲角爲對所求之角其正弦八萬六千六百零三爲二率。甲乙邊爲所知之邊其數四十丈爲三率求得四率三十五丈一尺七寸五分有餘卽乙丙爲所求之邊也。如圖甲乙丙銳角三角形以甲角爲心甲丙小邊爲半徑作一丙丁戊圓截甲乙大邊於戊將甲乙引長至圓界丁則甲丁甲戊俱爲半徑與甲丙等自丁至乙卽兩邊之和自戊至乙卽兩邊之較丁甲丙角卽甲角之外角試自丙至戊作一丙戊線則成甲丙戊三角形其甲丙戊與甲戊丙二角併之與丁甲丙外角度等今折半用其正切卽如用丁戊丙角之正切又心角與邊角度等其切線亦等故自丙至丁作一丙丁線卽丁戊丙角之正切又戊丙乙角卽丙角大於甲戊丙角之較亦卽乙角小於甲戊丙角之較故自圓甲戊至乙丙邊已作己戊線與丙丁平行卽戊丙己角之正切且乙丁丙三角形與乙戊己三角形爲同式形故兩邊之和丁乙與丁戊丙半外角切線丁丙之比卽同於兩

一率	丙角正弦
二率	甲角正弦
三率	甲乙邊
四率	乙丙邊



邊之較戊乙與半較角切線戊己之比爲相當比例四率也。

又法自丙角作丙丁垂線分爲丙丁甲丙丁乙兩直角形算之先用丙丁甲直角形求丙丁垂線及甲丁分邊以丁角爲對所知之角其正弦即半徑十萬爲一率以甲角爲對所求之角其正弦八萬六千六百零三爲二率甲丙邊



爲所知之邊其數二十六丈一尺零八分爲三率求得四率二十二丈六尺一寸有餘爲丙丁垂線又以丁角爲對所知之角其正弦即半徑十萬爲一率以甲角六十度與九十度相減餘三十度即甲丙丁角即丙之分角爲對所求之角其正弦五萬爲二率直用甲角餘弦亦可甲丙邊爲所知之邊其數二十六丈一尺零八分爲三率求得四率十三丈零五寸四分爲甲丁分邊既得甲丁分邊乃與甲乙邊四十丈相減餘二十六丈九尺四寸六分爲丁乙分邊於是用丙丁乙直角形求乙角及乙丙邊以丁乙二十六丈九尺四寸六分爲一率丙丁二十二丈六尺一寸有餘爲二率半徑十萬爲三率求得四率八萬三千九百零八爲乙角正切檢八線表得四十度爲乙角以乙角四十度與甲角六十度相加得一百度與一

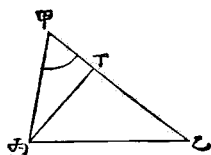
一率	半徑
二率	甲角正弦
三率	甲丙邊
四率	丙丁邊

一率	半徑
二率	丙分角正弦
三率	甲丙邊
四率	甲丁邊

一率	丁乙分邊
二率	丙丁垂線
三率	半徑
四率	乙角正切

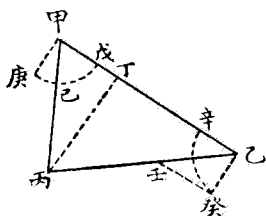
百八十度相減。餘八十度爲丙角。既得乙丙兩角。則用兩角一邊求又一邊之法算之。即得乙丙邊矣。或先求乙丙邊。則以丁乙二十六丈九尺四寸六分爲勾。丙丁二十二丈六尺一寸爲股。求得弦三十五丈一尺七寸五分有餘。即乙丙邊也。

又法先求甲丁分邊。比例而得乙角。以半徑十萬爲一率。即丁直角之正弦。以甲角六十度之餘弦五萬爲二率。即丙分角之正弦。以甲丙邊二十六丈一尺零八分爲三率。求得四率十三丈零五寸四分。爲甲丁分邊。乃以甲丁分邊十三丈零五寸四分爲一率。以甲丁分邊與甲乙全邊四十丈相減。餘二十六丈九尺四寸六分。爲丁乙分邊。爲二率。甲角六十度之餘切五萬七千七百三十五爲三率。求得四率一十一萬九千一百七十六。爲乙角餘切。檢表得四十度。即乙角也。如甲角之戊庚一象限。其庚已爲甲角之餘切。而庚已甲與甲丁丙爲同式形。又如乙角之辛癸一象限。其壬癸爲乙角之餘切。



一率	半徑
二率	甲角餘弦
三率	甲丙邊
四率	甲丁分邊

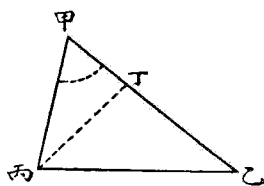
一率	甲丁分邊
二率	丁乙分邊
三率	甲角餘切
四率	乙甲角餘切



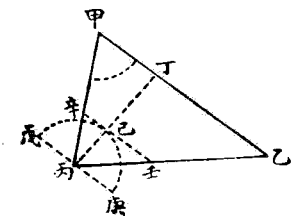
而壬癸乙與乙丁丙爲同式形。故甲丁與丁乙之比同於庚己與壬癸之比也。

又法用甲角餘割餘切求乙角丙角。以甲丙邊二十六丈一尺零八分爲一率。甲乙邊四十四丈爲二率。甲角六十度餘割一十一萬五千四百七十爲三率。求得四率一十七萬六千九百一十一爲甲角餘切與乙角餘切之共數。卽甲丙丁與乙丙丁兩分角之共切。又將甲角

六十度與象限九十度相減。餘三十度。卽甲丙丁之分角。檢其正切五萬七千七百三十五。與兩分角之共切一十七萬六千九百一十一相減。餘一十一萬九千一百七十六。爲丁丙乙分角之正切。卽乙角之餘切。檢表得四十度。卽乙角之度也。以乙角四十度與甲角六十度相加。得一百度。又與半圓一百八十度相減。餘八十度。卽丙甲之度也。如甲乙丙銳角三角形。作丙丁垂線。分爲甲丁丙與乙丁丙兩直角形。以丙角爲心。作一戊己庚半圓。則丙丁垂線平分於己。兩邊各成一象限。試與甲乙邊平行。作一辛壬線。則辛己一段爲甲丙丁分角之正切。卽甲角之餘切。己壬一段爲乙丙丁分角之正切。又卽乙角之餘切。而辛丙爲甲丙丁分角之正割。亦卽甲角之餘割。辛壬丙與甲乙丙兩三角形。爲同式形。故甲丙邊與



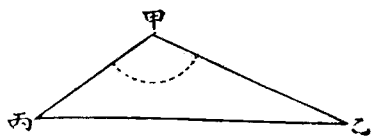
一率	甲丙邊
二率	甲乙邊
三率	甲角餘割
四率	丙兩分角正切



甲乙邊之比。即同於甲角餘割辛丙。即甲丙丁分角之正割。與甲丙丁乙丙丁兩分角之正切相合之辛壬之比。爲相當比例四率也。既得辛壬兩分角之共切。內減去甲丙丁分角三十度之正切辛己。所餘己壬爲乙丙丁分角之正切。即爲乙角之餘切。檢表即得乙角也。

設如甲乙丙鈍角三角形。知甲角一百一十九度三十四分。甲乙邊五十四尺。甲丙邊三十六尺九寸。求乙角丙角及乙丙邊各幾何。

法以甲乙邊五十四尺。與甲丙邊三十六尺九寸相加。得九十尺九寸。爲兩邊之和。爲一率。又以甲乙邊與甲丙邊相減。餘一十七尺一寸。爲兩邊之較。爲二率。以甲角一百一十九度三十四分。與半圓一百八十度相減。餘六十度二十六分。爲外角。折半得三十度一十三分。爲半外角。其正切五萬八千二百四十六。爲三率。求得四率一萬零九百五十六。爲半較角之正切。檢八線表得六度一十五分。爲半較角。與半外角三十度一十三分相減。餘二十三度五十八分。即乙角之度。如以半較角六度一十五分。與半外角三十度一十三分相加。得三十六度二十八分。即丙角之度也。既得乙丙二角。求乙丙邊。則以丙角爲對所知之角。其正弦五萬九千四百三十五。爲一率。甲外角爲對所求之角。甲角爲鈍角。故用外角。其正弦八萬六千九百七十八。爲二率。甲乙邊爲所知之邊。其

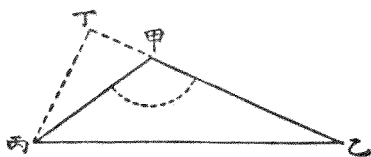


一率	兩邊之總
二率	兩邊之較
三率	半外角正切
四率	半較角正切

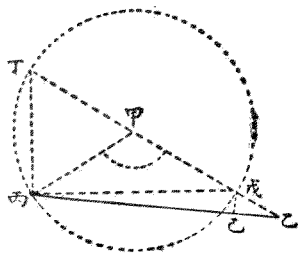
數五十四尺爲三率。求得四率七十九尺零二分四釐有餘。卽乙丙邊也。如圖甲乙丙鈍角三角形。以甲角爲心。甲丙爲半徑。作一丙丁戊圓。其乙丁爲兩邊之和。乙戊爲兩邊之較。丙丁爲半外角之正切。己戊爲半較角之正切。乙丁丙三角形與乙戊己三角形爲同式形。故以兩邊之和乙丁。與丁戊丙半外角切線丙丁之比。卽同於兩邊之較乙戊。與半較角切線己戊之比。爲相當比例四率也。

又法自丙角作丙丁垂線於形外。成丙丁乙與丙丁甲兩直角形。先用丙丁乙直角形。求丙丁垂線。及甲丁虛邊。以丁直角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬爲一率。以甲角一百一十九度三十四分。與半圓一百八十度相減。餘六十九度二十六分。卽甲外角。爲對所求之角。其正弦八萬六千九百七十八爲二率。甲丙邊爲所知

一率	丙角正弦
二率	甲外角正弦
三率	甲乙邊
四率	乙丙邊



一率	半徑
二率	甲外角正弦
三率	甲丙邊
四率	丙丁垂線



之邊。其數三十六尺九寸爲三率。求得四率三十二尺零九分五釐。爲丙
 丁垂線。又以丁直角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬爲一率。又以甲
 外角六十度二十六分。與九十度相減。餘二十九度三十四分。爲甲丙丁
 角。卽丙外分角。爲對所求之角。其正弦四萬九千三百四十四爲二率。如
 直用甲外角之餘弦爲二率亦可。甲丙邊爲所知之邊。其數三十六尺九寸爲
 三率。求得四率十八尺二寸零八釐。爲甲丁虛邊。與甲乙邊五十四尺相
 加。得七十二尺二寸零八釐。爲乙丁全邊。又以乙丁全邊七十二尺二寸
 零八釐爲一率。丙丁垂線三十二尺零九分五釐爲二率。半徑十萬爲三
 率。求得四率四萬四千四百四十八。爲乙角正切。檢八線表得二十三度
 五十八分。爲乙角之度。與甲外角六十度二十六分相減。餘三十六度二
 十八分。卽丙角之度。甲外角與乙丙二內角等。故減去乙角。餘卽丙角。既得乙
 丙二角。則用兩角一邊求又一邊之法算之。卽得乙丙邊。或先求乙丙邊。
 則以乙丁全邊七十二尺二寸零八釐爲股。丙丁垂線三十二尺零九分
 五釐爲勾。求得弦七十九尺零二分。卽乙丙邊也。又法用甲角餘割餘切。
 求乙角丙角。以甲丙邊三十六尺九寸爲一率。甲乙邊五十四尺爲二率。
 以甲外角六十度二十六分之餘割一十一萬四千九百七十一爲三率。

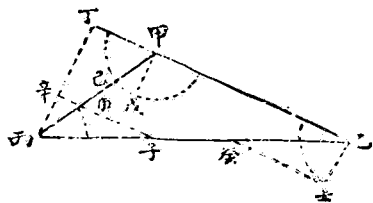
一率	半徑
二率	丙外分角正弦
三率	甲丙邊
四率	甲丁虛邊

一率	乙丁邊
二率	丙丁垂線
三率	半徑
四率	乙角正切

一率	甲丙邊
二率	甲乙邊
三率	甲外角餘割
四率	甲外角乙角兩餘切較

求得四率一十六萬八千二百五十。爲甲外角餘切與乙角餘切之較數。乃以甲外角六十度二十六分之餘切五萬六千七百三十一。與兩餘切之較相加。得二十二萬四千九百八十一。爲乙角餘切。檢表得二十三度五十八分。卽乙角之度。與甲角一百一十九度三十四分相加。得一百四十三度三十二分。與半圓一百八十度相減。餘三十六度二十八分。卽丙角之度也。如甲乙丙鈍角形。將甲乙邊引長。自丙角作丙丁垂線。遂成丙丁甲。丙丁乙兩直角三角形。丙丁甲三角形之甲角。卽甲乙丙三角形之甲角之外角。其餘切戊己。卽丙丁甲三角形之丙角之正切。如庚丙。而丙丁乙三角形之乙角之餘切壬癸。卽丙丁乙三角形之丙角之正切。如子辛。若丙丁乙三角形之乙角餘切。與丙丁甲三角形之甲角餘切相減。卽兩丙角相差之較。如子庚。丙辛庚三角形與丙丁甲三角形。爲同式形。丙辛子三角形與丙丁乙三角形。爲同式形。故丙庚子三角形與丙甲乙三角形。亦爲同式形。是以甲丙邊與甲乙邊之比。同於甲外角餘切庚丙卽甲己。與兩餘切之較子庚之比。爲相當比例四率也。旣得子庚兩餘切之較。與甲外角之餘切庚辛卽戊己。相加得子辛。卽乙角之餘切。檢表得乙角度。旣得乙角。則以乙角與甲角相併。與半圓相減。餘卽丙角矣。

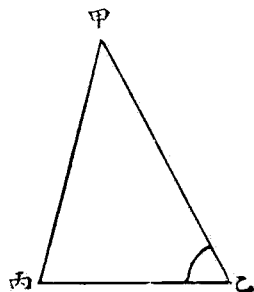
設如甲乙丙銳角三角形。知乙角六十度。甲乙邊八十丈。甲丙邊七十丈。三尺四寸。求甲角丙角及乙丙



邊各幾何。

法以甲丙邊爲對所知之邊。其數七十丈三尺四寸爲一率。甲乙邊爲對所求之邊。其數八十丈爲二率。乙角爲所知之角。其正弦八萬六千六百零三爲三率。求得四率九萬八千四百九十六。爲丙角正弦。檢表得八十度零三分。卽丙角度也。既得丙角度。則以乙角六十度。與丙角八十度零三分相加。得一百四十度零三分。與一百八十度相減。餘三十九度五十七分。卽甲角度也。既得甲角。求乙丙邊。則以乙角爲對所知之角。其正弦八萬六千六百零三爲一率。甲角爲對所求之角。其正弦六萬四千二百一十二爲二率。甲丙邊爲所知之邊。其數七十丈三尺四寸爲三率。求得四率五十二丈一尺五寸三分有餘。卽乙丙爲所求之邊也。

又法用餘割求丙角。以甲乙邊八十丈爲一率。甲丙邊七十丈三尺四寸爲二率。乙角六十度之餘割十一萬五千四百七十爲三率。求得四率十萬一千五百二十六。爲丙角餘割。檢表得八十度零三分。卽丙角度也。如甲乙丙銳角三角形。作甲丁垂線。分爲甲丁乙、甲丁丙兩直角三角形。其乙角之餘割戊乙。卽甲丁乙三角形之甲角之正割。如甲庚。



一率	甲丙邊
二率	甲乙邊
三率	乙角正弦
四率	丙角正弦

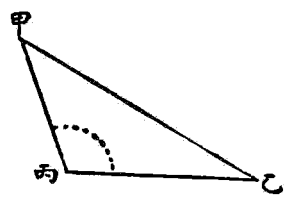
一率	乙角正弦
二率	甲角正弦
三率	甲丙邊
四率	乙丙邊

丙角之餘割已丙。即甲丁丙三角形之甲角之正割。如甲辛。甲庚辛與甲乙丙兩三角形爲同式形。故甲乙邊與甲丙邊之比。同於乙角餘割甲庚。即戊乙。與丙角餘割甲辛。即已丙。之比。爲相當比例四率也。

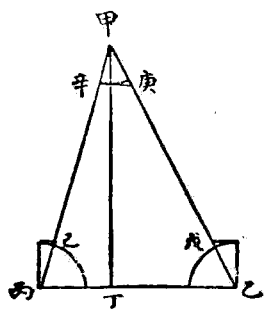
設如甲乙丙鈍角三角形。知丙角一百一十度。甲乙邊二十二丈五尺五寸。甲丙邊十二丈。求甲角乙角及乙丙邊各幾何。

法以甲乙邊爲對所知之邊。其數二十二丈五尺五寸爲一率。甲丙邊爲對所求之邊。其數十二丈爲二率。丙角爲所知之角。其外角七十度之正弦九萬三千九百六十九爲三率。求得四率五萬爲乙角正弦。檢表得三十度。即乙角度也。既得乙角度。則以乙角三十度。與丙角一百一十度相加。得一百四十度。與一百八十度相減。餘四十度。即甲角度也。

一率	甲乙邊
二率	甲丙邊
三率	乙角餘割
四率	丙角餘割



一率	甲乙邊
二率	甲丙邊
三率	丙外角正弦
四率	乙角正弦



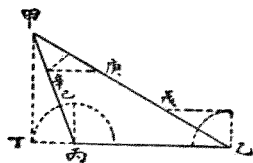
既得甲角。求乙丙邊。則以乙角爲對所知之角。其正弦五萬爲一率。甲角爲對所求之角。其正弦六萬四千二百七十九爲二率。甲丙邊爲所知之邊。其數十二丈爲三率。求得四率十五丈四尺二寸七分。卽乙丙爲所求之邊也。又法用餘割求乙角。以甲丙邊十二丈爲一率。甲乙邊二十二丈五尺五寸爲二率。丙外角七十度之餘割十萬六千四百一十八爲三率。求得四率一十九萬九千九百七十七。爲乙角之餘割。檢表得三十度。卽乙角度也。如甲乙丙鈍角三角形。將乙丙邊引長。自甲角作甲丁垂線。遂成甲丁丙。甲丁乙兩直角三角形。甲丁丙三角形之丙角。卽甲乙丙三角形之丙角之外角。其餘割已丙。卽甲丁丙三角形之甲角之正割。如甲辛。甲丁乙三角形之乙角之餘割戊乙。卽甲丁乙三角形之甲角之正割。如甲庚。甲庚辛與甲乙丙兩三角形。爲同式形。故甲丙邊與甲乙邊之比。同於丙外角餘割甲辛卽已丙。與乙角餘割甲庚卽戊乙。之比。爲相當比例四率也。

設如甲乙丙銳角三角形。知甲乙邊一百二十二尺。甲丙邊一百一十二尺。乙丙邊一百五十尺。求甲乙丙三角各幾何。

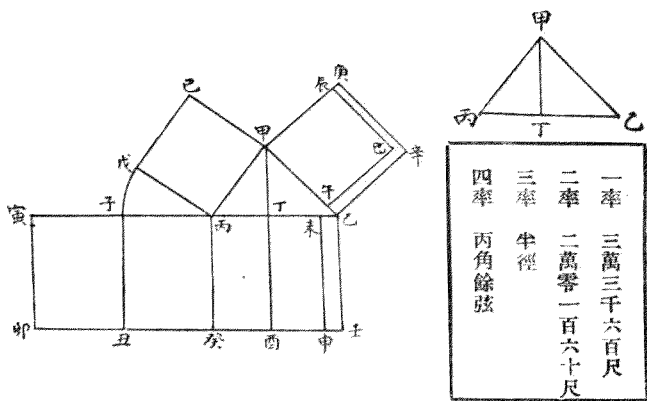
法求丙角。以甲丙邊一百一十二尺。與乙丙邊一百五十尺相乘。得一萬六千八百尺。倍之得三萬三千六百尺。爲一率。以甲丙邊一百一十二尺自乘。

一率	乙角正弦
二率	甲角正弦
三率	甲丙邊
四率	乙丙邊

一率	甲丙邊
二率	甲乙邊
三率	丙外角餘割
四率	乙角餘割



得一萬二千五百四十四尺。乙丙邊一百五十尺自乘得二萬二千五百尺。以兩邊各自乘數相加得三萬五千零四十四尺。又以甲乙邊一百二十二尺自乘得一萬四千八百八十四尺。與兩邊各自乘相加數三萬五千零四十四尺相減。餘二萬零一百六十尺爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率六萬。爲甲分角之正弦。卽丙角之餘弦。檢表得五十三度零八分。卽丙角之度也。求乙角。則以甲乙邊與乙丙邊相乘。得數倍之爲一率。以甲乙邊乙丙邊各自乘相加。內減去甲丙邊自乘之數。餘爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率爲甲分角之正弦。卽乙角之餘弦。檢表卽得乙角之度也。或既得丙角。用兩邊一角比例之法。卽得甲乙二角矣。此法蓋以三邊之面積互相加減。使面與面比。而得線與線之比也。如甲乙丙三角形。自甲角至乙丙邊。作一甲丁垂線。分爲甲丁丙。甲丁乙兩勾股形。又作三邊之各正方。復作兩邊相乘之長方。其甲丙戊己爲甲丙邊自乘之一正方。庚辛乙甲爲甲乙邊自乘之一正方。乙壬癸丙爲乙丙邊自乘之一正方。丙癸丑子爲甲丙邊與乙丙邊相乘之一長方。倍



一率	三萬三千六百尺
二率	二萬零一百六十尺
三率	半徑
四率	丙角餘弦

之爲丙癸卯寅一大長方。今於甲丙戊己與乙壬癸丙兩正方形相併數內減庚辛乙甲一正方形。則是減去辰巳午甲一正方形。卽如甲丙戊己之一正方形。又減去庚辛乙午巳辰一磬折形。卽如庚辛乙甲之正方形。比甲丙戊己之正方形所多之較。其積與乙壬申未一長方等。甲丁丙。甲丁乙兩勾股形。同用一甲丁股。是以甲丙弦方內。有甲丁一股方。丁丙一勾方。而甲乙弦方內。有甲丁一股方。乙丁一勾方。因兩三角形同用一股。故其兩弦較與兩弦和相乘之數。兩勾較與兩勾和相乘之數。必然相等。午乙卽兩弦之較。辰巳與辛乙相併卽兩弦之和。庚辛乙午巳辰磬折形。卽兩弦較與兩弦和相乘之積。而乙未爲兩勾之較。乙丙爲兩勾之和。乙壬申未卽兩勾較與兩勾和相乘之積。所以知其相等也。所餘爲未申癸丙一長方。試以甲丁垂線引長則平分未申癸丙一長方。爲未申西丁與丁酉癸丙二長方。此二長方與丙癸丑子子丑卯寅二長方同用一邊。爲二平行線內所有二方面互相爲比。同於其底互相爲比之例。故丙癸卯寅之長方與未申癸丙之長方之比。卽同於丙寅邊與未丙邊之比也。又比例之理。全與全半與半之比例相同。故丙癸卯寅之長方。爲甲丙邊與乙丙邊相乘又加一倍之積。與未申癸丙之長方。卽甲丙邊乙丙邊兩正方形相併內。減甲乙邊一正方形所餘之積。相比。同於丙子邊與甲丙邊同。與丁丙邊之比也。又甲丙邊卽如甲丁垂線所分丁直角之正弦。而甲丁垂線所分之丁丙邊卽如甲分角之正弦。是以甲丙邊與乙丙邊相加倍之丙癸卯寅長方積爲一率。甲丙邊乙丙邊兩正方形相併積內減甲乙邊一正方形所餘未申癸丙長方積爲二率。對丁直角之正弦半徑十萬爲三率。求得四率。爲甲分角之正弦。卽丙角之餘弦也。

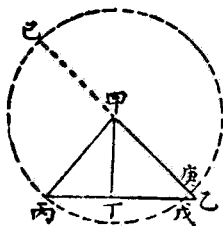
又求分邊得角法。以乙丙邊爲底。其數一百五十尺爲一率。甲乙邊大腰一百二十二尺。與甲丙邊小腰

一百一十二尺相加得二百三十四尺爲二率。兩邊相減餘一十尺爲三率。求得四率一十五尺六寸爲分邊之較。與乙丙邊一百五十尺相減餘一百三十四尺四寸折半得六十七尺二寸爲丁丙分邊之數。乃以甲丙邊爲對所知之邊其數一百一十二尺爲一率。丁丙分邊爲對所求之邊其數六十七尺二寸爲二率。丁角爲所知之角。其正弦半徑十萬爲三率。求得四率六萬爲甲丁丙三角形之甲角正弦。又卽丙角之餘弦檢表得五十三度零八分爲丙角之度。旣得丙角則用兩邊一角比例之法。遂得甲乙二角矣。如圖以甲角爲心。甲丙小邊爲半徑。作一戊丙己庚圓。截甲乙邊於庚。截丙乙邊於戊。將甲乙引長至圓界己。則甲己與甲丙等。自己至乙。卽兩邊之和。自庚至乙卽兩邊之較。乙戊卽乙丁。丁丙兩分邊之較。是故分邊之和乙丙。與兩邊之和己乙之比。卽同於兩邊之較庚乙。與分邊之較乙戊之比。爲轉比例四率也。

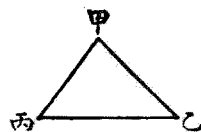
又法以甲乙邊一百二十二尺。乙丙邊一百五十尺。甲丙邊一百一十二尺。三數相加得三百八十四尺。爲三邊之總。折半得一百九十二尺爲半總。以甲乙邊一百二十二尺與半總一百九十二尺相減餘七十尺爲甲乙邊與半總之較。以乙丙邊一百五十尺與半總一百九十二尺相減餘

一率	分邊之和
二率	兩腰之和
三率	兩腰之較
四率	分邊之較

一率	甲丙邊
二率	丁丙分邊
三率	半徑
四率	丙角餘弦



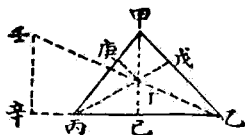
四十二尺爲乙丙邊與半總之較。以甲丙邊一百一十二尺與半總一百九十二尺相減。餘八十尺爲甲丙邊與半總之較。乃以半總一百九十二尺爲一率。甲丙邊與半總之較八十尺爲二率。甲乙邊與半總之較七十尺。與乙丙邊與半總之較四十二尺相乘。得二千九百四十尺爲三率。求得四率一千二百二十五尺。開方得三十五尺。爲三角形自中心至三邊之垂線。先求丙角則用甲乙邊與半總之較七十尺爲一率。三角形自中心至三邊之垂線三十五尺爲二率。半徑十萬爲三率。求得四率五萬。爲丙半角之正切。檢表得二十六度三十四分。倍之得五十三度零八分。卽丙角之度也。如先求乙角。則用甲丙邊與半總之較八十尺爲一率。先求甲角。則用乙丙邊與半總之較四十二尺爲一率。俱用三角形自中心至三邊之垂線三十五尺爲二率。半徑十萬爲三率。卽各得各半角之正切焉。此法蓋一率二率以線與線爲比。三率四率以面與面爲比也。如甲乙丙三角形。自中心丁至三邊。各作一垂線。又自中心丁至三角。各作一分角線。卽成六直角三角形。俱兩兩相等。丁己丙與丁庚丙等。丁己與丁戊乙等。丁戊甲與丁庚甲等。又按甲戊度引乙丙線至辛。則乙辛爲三邊之半總。卽三較之和。乙己與乙戊等。卽甲丙



一率 半總
 二率 甲丙邊與半總之較
 三率 甲乙邊與半總之較與乙丙邊與半總之較相乘之數
 四率 三角中心至邊垂線自乘之數

一率 甲乙邊與半總之較
 二率 三角中心至邊垂線
 三率 半徑
 四率 丙分角正切

邊與半總之較。己丙與丙庚等。即甲乙邊與半總之較。丙辛與甲戊。甲庚等。即乙丙邊與半總之較。試自辛作直角。將乙丁線引長。作一乙辛壬直角形。則壬辛與丁己平行。乙辛壬形與乙己丁形。遂爲同式形。其乙辛與乙己之比。即同於壬辛與丁己之比。然乙辛一率乙己二率之數雖有。而壬辛之數却無。又但知己丙與丙辛相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。故以己丙與丙辛相乘之數爲三率。何以知己丙與丙辛相乘之數。即丁己與壬辛相乘之數。試作壬丙線壬癸線。使丙癸與丙辛等。癸角辛角皆爲直角。癸丙辛角與辛壬癸角相合。共成一百八十度。然庚丙己角。爲癸丙辛角之外角。相合亦共成一百八十度。是庚丙己角與辛壬癸角等。庚丁己角與癸丙辛角等。是以壬癸丙辛形與丙庚丁己形。爲同式形。而丙辛壬勾股形與丁己丙勾股形。亦爲同式形。可互相比例矣。以丁己作一率。己丙作二率。丙辛作三率。即得四率壬辛。是以己丙二率與丙辛三率相乘之數。即與丁己一率壬辛四率相乘之數等。故直以己丙、丙辛相乘之數作三率也。其所得四率。即丁己自乘之數。是故乙辛與乙己之比。同於丁己與壬辛相乘之面。即己丙與丙辛相乘之面。與丁己自乘之面之比也。既得丁己自乘之面。故開方而得丁己。爲三角形自中心至三邊之垂線。與丁戊與丁庚俱相等。又即三角形容圓之半徑也。



數理精蘊下編卷十八

面部八

測量

周髀曰。偃矩以窺高。覆矩以測深。臥矩以知遠。蓋以矩度或表杆相度窺測。立者則取其直。平者則取其方。必使成直角。以大小勾股爲比例。以在器之勾股。比所測之勾股。彼此相形而得之者也。然勾股必爲直角。而三角形則惟變所適。而無定形。要以角度爲準。而用割圓八線以爲比例。凡求角求邊。皆以三角形之法爲本總。以對所知爲一率。對所求爲二率。所知爲三率。得四率。卽所求也。或一測。或屢測。惟在隨時而致用。或用正。或用餘。惟在比例之相當。不特凡物之高深廣遠。可得而推。卽七政之躔度。天地之形體。俱可得而測也。

勾股測量 凡用矩度。或立表杆。必用垂線。取其與地平成直角。以爲準則。若地不平。須記取某處。與人目所看。和平爲記。

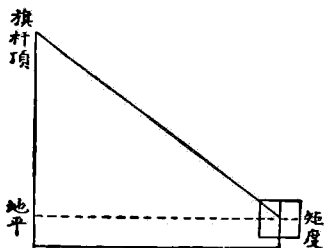
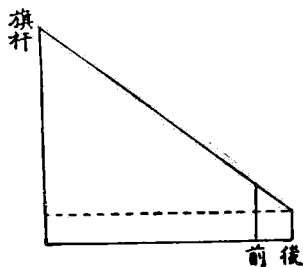
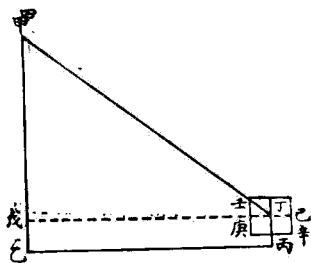
設如有一旗杆欲測其高。但知距旗杆之遠爲三丈。問得高幾何。

法用矩度。矩度之制。必用正方。每邊定一百分。或二百分。橫豎俱界線畫成小方分。自中心所出線。俱平分每邊一半。對中心所出線。兩邊安定表。取中心安遊表。看分數必以其自中心所出線爲準。見幾何原本十二卷。定準墜線。以定表。

看地平。遊表看旗杆頂。得距地平分四十分。此矩度全邊爲百分。自中心平分半邊爲五十分。乃以中心平分距分五十分爲一率。所得距分四十分爲二率。距旗杆之遠三丈爲三率。求得四率二丈四尺。即矩度中心定表所對地平至旗杆頂之高。加矩度中心距地之高四尺。共得二丈八尺。即所求旗杆之高也。如圖甲乙爲旗杆之高。丙乙爲距旗杆之遠。丁爲矩度中心。丁丙爲矩度中心距地之高。己庚爲定表所對地平爲戊。辛壬爲遊表。看旗杆頂甲。其丁庚爲矩度中心平分距分五十分。壬庚爲遊表距地平分四十分。其丁庚與壬庚之比

同於丁戊與甲戊之比。故丁庚五十分爲一率。壬庚四十分爲二率。丁戊距旗杆之遠三丈爲三率。得四率甲戊二丈四尺。加同丁丙高之戊乙四尺。即得甲乙二丈八尺爲旗杆之高也。

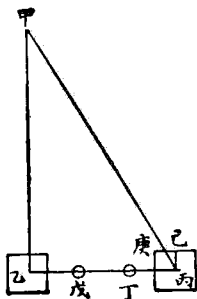
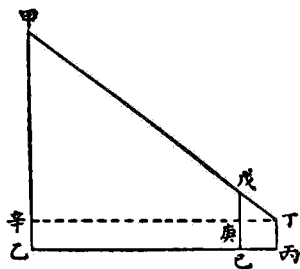
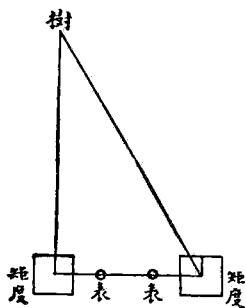
又用表杆測法。於距旗杆三丈處立一表高四尺。向前又立一表高八尺。看二表端與旗杆頂齊。量二表間相距得五尺。乃以五尺爲



一率。前表八尺內減後表四尺。餘四尺爲二率。距旗杆之遠三丈爲三率。求得四率二丈四尺。加入後表高四尺。得二丈八尺。卽旗杆之高也。如圖甲乙爲旗杆之高。乙丙爲距旗杆之遠三丈。丁丙爲後表之高四尺。戊己爲前表之高八尺。丙己爲二表之距五尺。戊庚爲二表之較四尺。丁戊甲爲人目視線。試與乙丙平行作辛丁線。遂成甲辛丁戊庚丁兩勾股形。爲同式形。故丁庚與戊庚之比。同於丁辛與甲辛之比。既得甲辛。加與丁丙相等之辛乙。卽得甲乙爲旗杆之高也。

設如一樹。欲測其遠。爰取一直角。橫量十五丈。問得遠幾何。

法以矩度定表與遊表定準直角。以定表對樹。遊表隨直角立表杆二三處。橫量十五丈。於此處復安矩度。以定表對所立表杆取直看原處。以遊表看樹。得距。矩度中心平分線距分三十分。乃以所得距分三十分爲一率。矩度中心平分

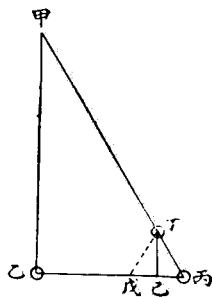


距分五十分爲二率。橫量十五丈爲三率。求得四率二十五丈。卽離樹之遠也。如圖甲爲樹。甲乙爲離樹之遠。乙爲直角。乙丙爲橫量十五丈。丁戊爲所立二表杆。丙爲矩度中心。丙己爲矩度中心平分距分五十分。己庚爲所得距分三十分。丙己庚勾股形與甲乙丙勾股形爲同式形。故己庚與己丙之比。卽同於丙乙與甲乙之比也。

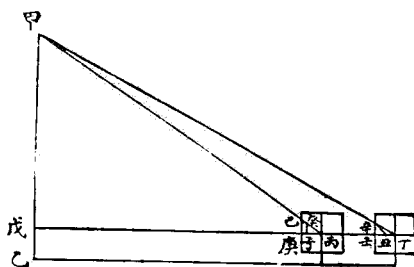
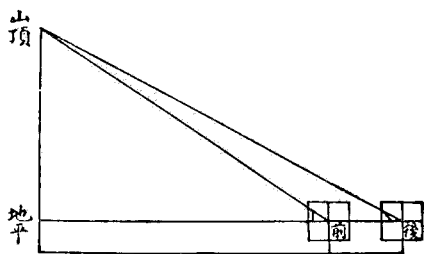
又用表杆測法。先立一表於乙。取直角橫量十五丈至丙。次立一表於丙。自丙對甲相直。復立一表於丁。次依丁丙度引至乙。丙線上截乙丙於戊。乃以丙戊折半於己。遂得丁己丙勾股形。與甲乙丙勾股形爲同式形。因量丙己得三丈爲一率。丁己得五丈爲二率。丙乙十五丈爲三率。求得四率二十五丈。卽甲乙之遠也。

設如有山一座。欲知其高。用重矩之法。測之。問山之高得幾何。

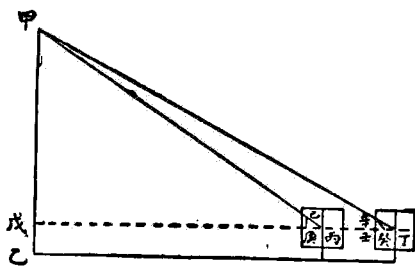
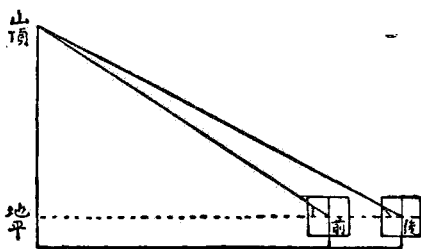
法用矩度定準墜線。以定表看地平。遊表看山頂。得距地平分四十分。又向後量九丈。復安矩度。定準墜線。以定表仍看前矩度定表所看地平原處。遊表看山頂。得距地平分三十二分。乃以前矩度距地平分四十分爲一率。中心平分距分五十分爲二率。後矩度距地平分三十二分爲三率。求得四率四十分。爲前矩度遊表與後矩度遊表同距地平分所得之中心距分。乃以所得四十分與後矩度中心平分距分五十分相減。餘十分爲一率。後矩度距地平分三十二分爲二率。向後量九丈爲三率。求得四率二十八



丈八尺。卽矩度中心定表所對地平至山頂之高。加矩度中心距地之高四尺。共得二十九丈二尺。卽所求之山之高也。如圖甲乙爲山之高。丙爲前矩度中心。丙庚爲定表。所對地平爲戊。丙己爲遊表。看山頂甲。其己庚爲遊表距地平分四十分。丙庚爲中心平分距分五十分。丙丁爲向後量九丈。丁爲後矩度中心。丁壬爲定表。所對地平亦爲戊。丁辛爲遊表。看山頂甲。其辛壬爲遊表距地平分三十二分。丁壬爲中心平分距分五十分。試依後矩度遊表距地平分辛壬度。於前矩度作癸子線。則丙子中心距分必小於丙庚。故己庚與丙庚之比。同於癸子與丙子之比。而得丙子之分。既得丙子。則以丙子與丁壬相減。餘丁丑。與前矩度子庚等。卽前後兩矩度遊表同距地平分所得中心距分之較。乃自辛至丑作辛丑線。遂成辛壬丑勾股形。與癸子丙同度俱與甲戊丙勾股形爲同式形。而辛壬丁勾股形。又與甲戊丁勾股形爲同式形。且丁丙與丁丑皆爲兩勾股形之各股之較。故辛丑丁三角形與甲丙丁三角形亦爲同式形。是以丁丑與辛壬之比。同於丁丙與甲戊之比。而爲相當比例四率也。



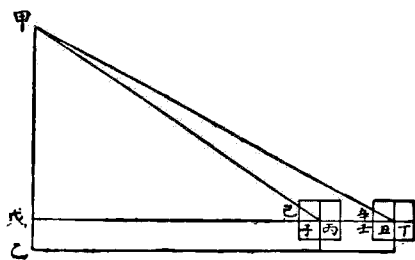
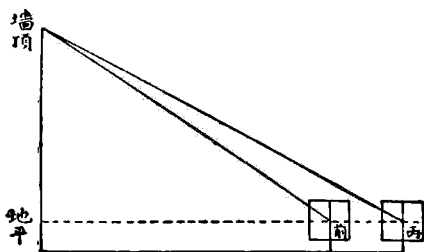
又法用矩度定準墜線。以定表看地平。遊表看山頂。向後量九丈。復安矩度定準墜線。以定表仍看前矩度。定表所看地平原處。遊表看山頂。得距地平分三十二分。其中心平分距分爲五十分。爰察前矩度距地平分三十二分處。得距中心距分爲四十分。乃以所得四十分。與後矩度中心平分距分五十分相減。餘十分爲一率。距地平分三十二分爲二率。向後量九丈爲三率。求得四率二十八丈八尺。卽矩度中心定表所對地平至山頂之高。加矩度中心距地之高四尺。共得二十九丈二尺。卽所求之山之高也。如圖甲乙爲山之高。丙爲前矩度中心。定表所對地平爲戊。遊表看山頂甲。丙丁爲向後量九丈。丁爲後矩度中心。其辛壬爲遊表距地平分三十二分。丁壬爲中心平分距分五十分。試依後矩度距地平分三十二分。辛壬度於前矩度三十二分處。作己庚線。其丙庚距中心距分得四十分。乃以丙庚四十分截後矩度。丁壬中心平分距分於癸。則丁癸爲減餘十分。其丁癸與辛壬之比。卽同於丁丙與甲戊之比也。前法兩矩度遊表距地平分不同。故用比例四率而得其距地平相等之中心



距分。以取其兩中心距分之較。此法因取其距地平相等之分。故其兩中心距分不同。相減即得其兩中心距分之較也。

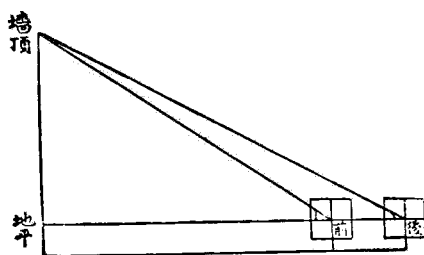
設如一牆欲知其遠。用重矩之法測之。問牆之遠得幾何。

法用矩度定準墜線。以定表看地平。遊表看牆頂。得距地平分四十分。又向後量一丈。復安矩度。定準墜線。以定表仍看前矩度。定表所看地平原處。遊表看牆頂。得距地平分二十四分。乃以前矩度距地平分四十分為一率。中心平分距分五十分為二率。後矩度距地平分二十四分為三率。求得四率三十分。為前矩度遊表與後矩度遊表同距地平分所得之中心距分。乃以所得三十分。與後矩度中心平分距分五十分相減。餘二十分為一率。前矩度所得中心距分三十分為二率。向後量一丈為三率。求得四率一丈五尺。即前矩度距牆之遠。若求後矩度距牆之遠。則以後矩度中心平分距分五十分為二率。所得四率二丈五尺。即後矩度距牆之遠也。如圖甲乙為牆之高。丙為前矩度



中心丙庚爲定表。所對地平爲戊。丙己爲遊表。看牆頂甲。其己庚爲遊表距地平分四十分。丙庚爲中心平分距分五十分。丙丁爲向後重一丈。丁爲後矩度中心。丁壬爲定表。所對地平亦爲戊。丁辛爲遊表。看牆頂甲。其辛壬爲遊表距地平分二十四分。丁壬爲中心平分距分五十分。試依後矩度遊表距地平分辛壬度。於前矩度作癸子線。則丙子中心距分必小於丙庚。故己庚與丙庚之比。同於癸子與丙子之比。而得丙子之分。既得丙子。則以丙子與丁壬相減。餘丁丑。與前矩度子庚等。即前後兩矩度遊表同距地平分所得中心距分之較。乃自辛至丑作辛丑線。遂成辛壬丑勾股形。與癸子丙同度。俱與甲戊丙勾股形爲同式形。而辛壬丁勾股形。又與甲戊丁勾股形爲同式形。且丁丙與丁丑。皆爲兩勾股形之各股之較。故辛丑丁三角形與甲丙丁三角形亦爲同式形。是以丁丑與丑壬之比。同於丁丙與丙戊之比。又丁丑與丁壬之比。亦同於丁丙與丁戊之比也。

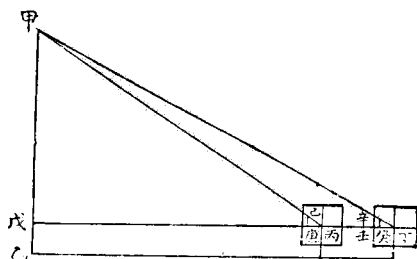
又法用矩度定準墜線。以定表看地平。遊表看牆頂。得距地平分二十四分。定準墜線。以定表對前矩度中心。遊表看牆頂。得距地平分二十四分。其中心平分距分爲五十分。爰察前矩度距地平分二十四分處。得距中心距分爲三十分。乃以所得三十分。與後矩度中心平分距分五十分相減。餘二十分爲一率。前矩度中心距分三十分爲二率。向後量一丈爲三率。求得四率一丈五尺。即前矩度距牆之遠。若求後矩度距牆之遠。則以



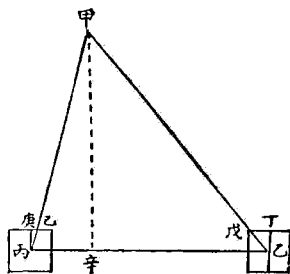
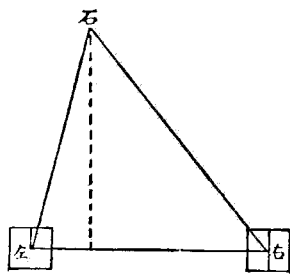
後矩度中心平分距分五十分爲二率。所得四率二丈五尺。卽後矩度距牆之遠也。如圖甲乙爲牆之高。丙爲前矩度中心。定表所對地平爲戊。遊表看牆頂甲。丙丁爲向後量一丈。丁爲後矩度中心。其辛壬爲遊表距地平分二十四分。丁壬爲中心平分距分五十分。試依後矩度距地平分二十四分。辛壬度於前矩度二十四分處。作己庚線。其丙庚距中心距分得三十分。乃以丙庚三十分。截後矩度丁壬中心平分距分於癸。則丁癸爲減餘二十分。其丁癸與癸壬之比。同於丁丙與丙戊之比。又丁癸與丁壬之比。亦同於丁丙與丁戊之比也。

設如一石欲知其遠。不取直角。於左右兩處橫量三十九丈。測之。問兩處各距石常何。

法先平安矩度於右。以定表看左矩度之中心。遊表看石。得距矩度中心距分三十七分五釐。其遊表之斜距分爲六十二分五釐。次平安矩度於左。以定表看右矩度之中心。遊表看石。得距矩度中心距分十一分二釐五豪。其遊表之斜距分爲五十一分二釐五豪。乃以所得兩距分相併。得四十八分七釐五豪。爲一率。右矩度所得之遊表斜距分六十二分五釐。爲二率。橫量三十九丈。爲三率。求得四率五十一丈。爲右矩度距石之遠。若求左矩度距石之遠。則仍以兩距分相併爲一率。左矩度所得之遊表斜距分五十一



分二釐五豪爲二率。橫量三十九丈爲三率。求得四率四十一丈。爲左矩度。距石之遠也。如圖甲爲石。乙爲右矩度中心。其丁戊爲距分三十七分五釐。戊乙爲遊表斜距分六十二分五釐。乙丙爲橫量三十九丈。丙爲左矩度中心。其己庚爲距分十一分二釐五豪。己丙爲

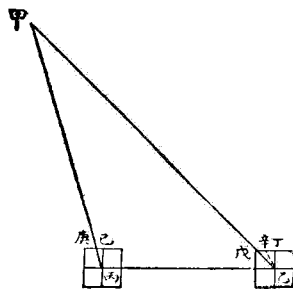
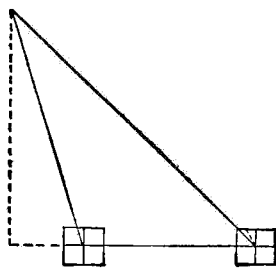
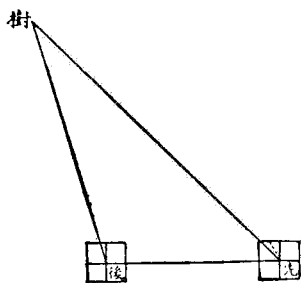
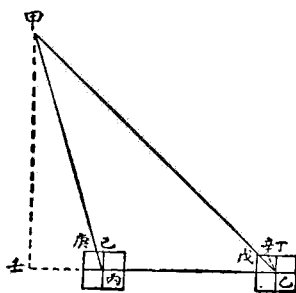


遊表斜距分五十一分二釐五豪。試自甲角至乙丙線作甲辛垂線。分爲兩勾股形。則丁戊乙勾股形與甲辛乙勾股形爲同式形。己庚丙勾股形與甲辛丙勾股形爲同式形。而乙丙卽爲兩勾之和。故以丁戊與己庚兩勾相併與戊乙之比。同於乙丙與甲丙之比。俱爲相當比例四率也。

設如隔河一樹。欲測其遠。不能定直角。爰取兩處俱斜對樹。橫量十七丈。測之。問離樹之遠得幾何。

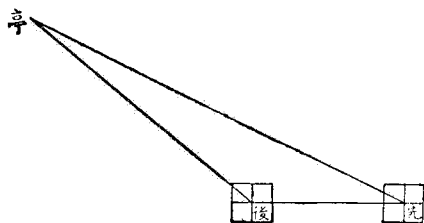
法先平安矩度於一處。隨定表橫量十七丈。復安一矩度。若止用一矩度。則記準一處亦可。以先安矩度定表。看後安矩度中心。遊表看樹。得距矩度中心距分四十九分。其遊表之斜距分爲七十分。次以後安矩度定表。看先安矩度中心。遊表看樹。得距矩度中心距分十五分。其遊表之斜距分爲五十二分二釐。乃

以先安矩度之中心距分四十九分。與後安矩度之中心距分十五分相減。餘三十四分爲一率。先安矩度遊表斜距分七十分爲二率。橫量十七丈爲三率。求得四率三十五丈。爲先安矩度距樹之遠。若以後安矩度遊表斜距分五十二分二釐爲二率。則得四率二十六丈一尺。爲後安矩度距樹之遠也。如圖甲爲樹。乙爲先安矩度中心。其丁戊爲距矩度中心距分四十九分。戊乙爲遊表斜距分七十分。乙丙爲橫量十七丈丙爲後安矩度中心。其己庚爲距矩度中心距分十五分。庚丙爲遊表斜距分五十二分二釐。按己庚十五分截丁戊四十九分於辛。則辛戊爲減餘三十四

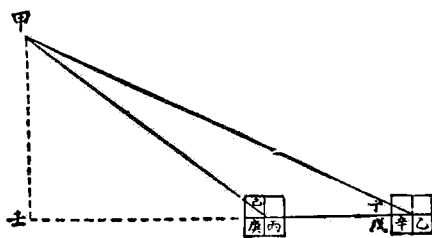
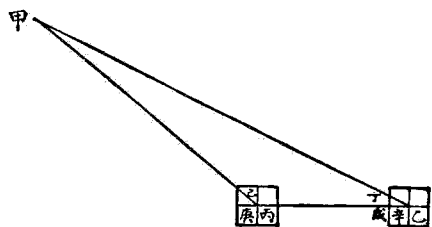


分。乃自辛至乙作辛乙線。與庚丙等。又將乙丙線引長於壬。自甲作甲壬垂線。遂成甲壬丙。甲壬乙兩勾股形。其乙丁辛勾股形。與丙己庚勾股形同度。俱與甲壬丙勾股形爲同式形。而乙丁戊勾股形。又與甲壬乙勾股形爲同式形。故乙戊辛三角形與甲乙丙三角形亦爲同式形。是以辛戊與乙戊之比。同於乙丙與甲乙之比。而辛戊與乙辛。乙辛即與丙庚度等。之比。又同於乙丙與甲丙之比也。此法蓋因遊表視線。俱在對角以外。故甲壬垂線所成甲壬乙。甲壬丙兩勾股形。同以甲壬爲股。而矩度上所得之乙丁戊。乙丁辛兩勾股形。乙丁辛即丙己庚。亦同以乙丁爲股。故即成兩兩同式形。若遊表視線在對角以內。或一在對角之內。一在對角之外。所得矩度中心距分不同者。則須取其同距矩度中心距分之度。以爲比例。如後法。設如隔河一亭。欲測其遠。不得定直角。爰取兩處俱斜對亭。橫量三十丈。測之。問距亭之遠得幾何。

法。先安矩度於一處。隨定表橫量三十丈。復安一矩度。以先安矩度定表。看後安矩度中心。遊表看亭。得距矩度中心距分二十七分。其遊表之斜距分爲五十六分八釐有餘。次以後安矩度。看先安矩度中心。遊表看亭。亦察距矩度中心距分二十七分處。得距中心距分三十分。其遊表之斜距分爲四十分三釐有餘。乃以所得距中心距分三十分。與先安矩度中心平分距分五十分相減。餘二十分爲一率。先安矩度遊表斜距分五



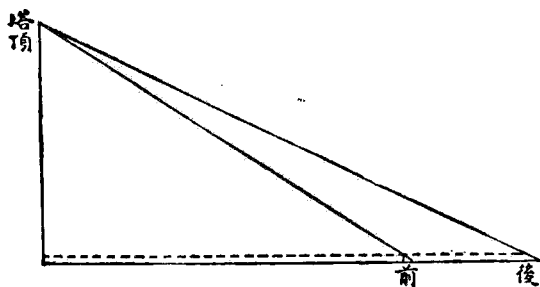
十六分八釐有餘爲二率。橫量三十丈爲三率。求得四率八十五丈二尺有餘。爲先安矩度距亭之遠。若以後安矩度遊表斜距分四十分三釐有餘爲二率。則得四率六十丈四尺五寸有餘。爲後安矩度距亭之遠也。如圖甲爲亭。乙爲先安矩度中心。其丁戊爲距矩度中心。距分二十七分。乙戊爲中心平分距分五十分。丁乙爲遊表斜距分五十六分八釐有餘。乙丙爲橫量三十丈。丙爲後安矩度中心。其己庚亦爲距矩度中心。距分二十七分。丙庚爲距中心平分距分三十分。己丙爲遊表斜距分四十分三釐有餘。按丙庚三十分。截乙戊中心平分距分五十分於辛。則乙辛爲減餘二十分。又自丁至辛作丁辛線。與己丙等。又將乙丙線引長於壬。自甲作甲壬垂線。遂成甲壬丙。甲壬乙兩勾股形。其丁戊辛勾股形。與己庚丙勾股形同度。俱與甲壬丙勾股形爲同式形。而丁戊乙勾股形。又與甲壬乙勾股形爲同式形。故丁乙辛三角形。與甲乙丙三角形亦爲同式形。是以乙辛與丁乙之比。同於乙丙與甲乙之比。又乙辛與丁辛。卽己丙之比。同於乙丙與甲丙之比也。此法蓋因遊表視線。俱在對角以內。故甲壬垂線所成甲壬乙



甲壬丙兩勾股形同以甲壬爲勾。而兩矩度上亦取與丁戊相等之己庚爲勾。使成兩兩同式形。然後可以爲比例也。

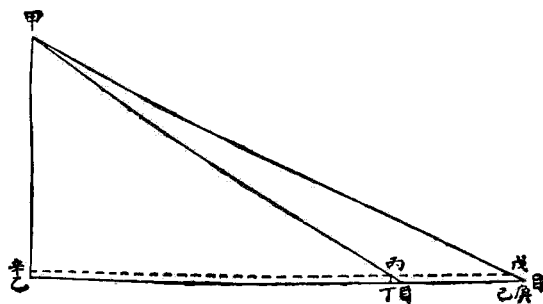
設如有塔一座。欲知其高。用相等兩表測之。問得高幾何。

法先立一表。比人目高四尺。看塔頂得距分六尺。又自前表向後量六丈。復立一表。亦比人目高四尺。看塔頂得距分八尺。乃以前距分六尺與後距分八尺相減。餘二尺爲一率。表比人目高四尺爲二率。向後量六丈爲三率。求得四率十二丈。加表比人目之高四尺。共得十二丈四尺。卽人目以上之高也。若求前表距塔頂下地平之遠。則以兩距分相減之較爲一率。前表距分六尺爲二率。向後量之數爲三率。得四率十八丈。爲前表距塔頂下地平之遠。若求後表距塔頂下地平之遠。則以後表距分八尺爲二率。得四率二十四丈。卽後表距塔頂下地平之遠也。如圖甲乙爲塔之高。丙丁與戊己爲兩表比人目之高。四尺。丁目爲前表距分六尺。丁己爲向後量六丈。己目爲後表距分八尺。試依前距分丁目六尺度截後距分己目於庚。則庚目爲減餘二尺。乃自戊過丙至辛作戊丙辛線。又自戊至庚作戊庚線。遂成戊己庚勾股形。與丙丁目



勾股形同度。俱與甲辛丙勾股形爲同式形。而戊己目勾股形又與甲辛戊勾股形爲同式形。且丙戊與庚目皆爲兩勾股形之各股之較。故戊庚目三角形與甲丙戊三角形又爲同式形。是以庚目與戊己之比。同於戊丙與甲辛之比。又庚目與己庚之比。同於丙戊與辛丙之比。庚目與己目之比。並同於丙戊與辛戊之比也。

設如有樓一座。欲知其高。用不等兩表測之。問得高幾何。法先立長表。比人目高六尺。看樓脊得距分五尺四寸。又自先立長表向後量二丈立短表。比人目高四尺。看樓脊得距分六尺四寸。乃以前表比人目之高六尺爲一率。前表距分五尺四寸爲二率。後表比人目之高四尺爲三率。求得四率三尺六寸。爲前表與後表同高所得之距分。爰以所得之三尺六寸。與後表距分六尺四寸相減。餘二尺八寸。爲一率。後表比人目之高四尺爲二率。以前表距分五尺四寸內減所得之三尺六寸。餘一尺八寸。與兩表相距二丈相減。餘一丈八尺二寸。爲三率。求得四率二丈六尺。加後表比人目之高



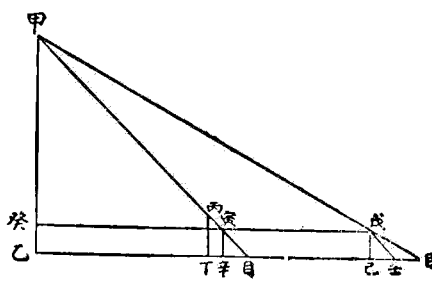
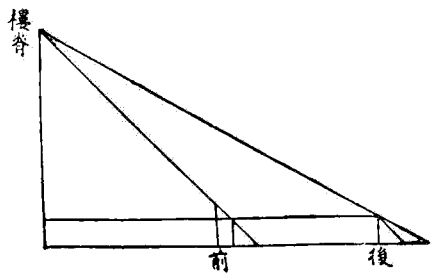
四尺得三丈。即人目以上之高也。如圖甲乙爲樓之高。丙丁爲前表比人目之高六尺。丁目爲前表距分五尺四寸。丁已爲向後量二丈。戊己爲後表比人目之高四尺。己目爲後表距分六尺四寸。試依後表戊己度作庚辛垂線。截丁目於辛。則辛目距分必小於丁目。故丙丁與丁目之比。同於庚辛與辛目之比。而得辛目之分。既得辛目。則以辛目與己目相減。餘壬日。即前後兩表同高所得距分之較。又於兩表相距丁己內減丁辛。餘辛己。即同高兩表相距之分。故壬日與戊己。即庚辛之比。即同於戊庚。即辛己。與甲癸之比也。

三角度數測量度數測量。必取資於儀器。全圖儀半圖儀。象限儀。雖爲體不同。其爲用則一。以九十度爲準。

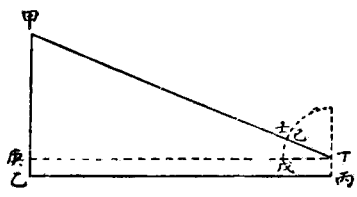
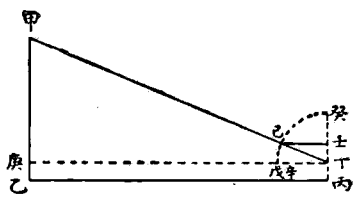
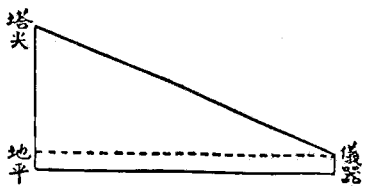
以定表遊表。爲二視線。其相距之度。即爲所測之角。

設如一塔不知其高。但知距塔之遠爲三十丈。欲測其高幾何。

法以儀器定準墜線。以定表看地平。遊表看塔尖。得兩表相距二十四度。乃以二十四度與九十度相減。



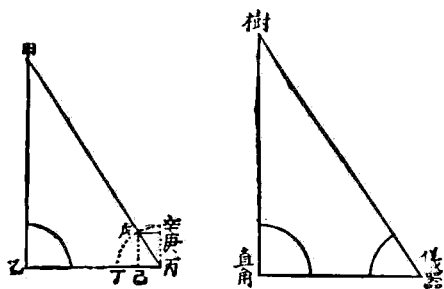
餘六十六度爲對所知之角。其正弦九萬一千三百五十五爲一率。儀器上二十四度爲對所求之角。其
 正弦四萬零六百七十四爲二率。距塔之遠三十丈爲所知之邊。爲三率。求得四率十三丈三尺五寸七
 分。加儀器之高。卽所求之塔之高也。如圖甲乙爲塔之高。丙乙爲距塔之遠。儀器中心爲丁。丁丙爲儀器
 中心距地之高。丁戊爲定表。所對地
 平爲庚丁。己爲遊表。看塔尖甲。得兩
 表距弧二十四度爲己戊。其正弦爲
 己辛。其餘弦爲壬己。與丁辛等。象限
 九十度內減二十四度。餘六十六度
 爲癸己。卽甲角之正弦。其正弦卽壬
 己。是以與壬己相等之丁辛與己辛
 之比。同於丁庚與甲庚之比。爲相當
 比例四率。既得甲庚。加同丁丙高之
 庚乙。得甲乙。卽塔之高也。
 又法以半徑十萬爲一率。二十四度
 之切線四萬四千五百二十三爲二
 率。距塔之遠三十丈爲三率。求得四率十三丈三尺五寸七分。加儀器之高。卽塔之高也。如圖己戊弧爲



二十四度。丁戊爲半徑。壬戌爲二十四度之正切。故丁戊與壬戌之比。同於丁庚與甲庚之比。爲相當比例四率也。

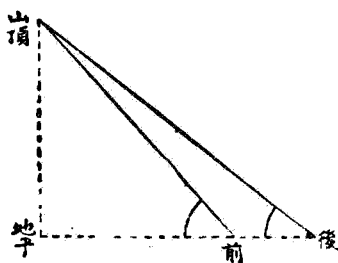
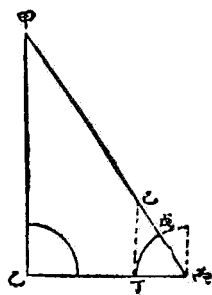
設如一樹。欲知其遠。取一直角。橫量十五丈。測之。問得幾何。法以儀器定遊表於九十度。定表看樹。對遊表立兩表竿。取直橫量十五丈。復安儀器於此。以定表看原處。遊表看樹。得兩表相距六十度。乃以六十度與九十度相減。餘三十度。爲對所知之角。其正弦五萬爲一率。儀器上六十度爲對所求之角。其正弦八萬六千六百零三爲二率。橫量十五丈爲所知之邊。爲三率。求得四率二十五丈九尺八寸。卽所測之樹之遠也。如圖甲爲樹。甲乙爲距樹之遠。乙爲所定直角。丙乙爲橫量十五丈。丙爲儀器中心。丙丁爲定表。看原處乙。丙戊爲遊表。看甲。得兩表距弧六十度爲戊丁。其正弦爲戊己。餘弦爲庚戊。與丙己等。象限九十度內減六十度。餘三十度爲辛戊。卽甲角之正弧。其正弦卽庚戊。是以與庚戊相等之丙己與戊己之比。同於丙乙與甲乙之比。爲相當比例四率也。

又法以半徑十萬爲一率。丙角六十度之正切十七萬三千



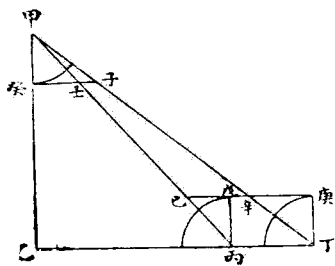
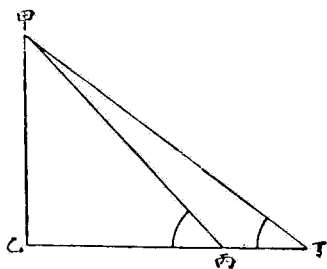
二百零五爲二率。橫量十五丈爲三率。求得四率二十五丈九尺八寸。卽所測之樹之遠也。若求甲丙斜距。則以半徑十萬爲一率。丙角六十度之正割二十萬爲二率。橫量十五丈爲三率。求得四率三十丈。卽甲丙斜距之遠也。如圖戊丁弧爲六十度。丙丁爲半徑。己丁爲六十度之正切。己丙爲六十度之正割。故丙丁與己丁之比。同於丙乙與甲乙之比。又丙丁與己丙之比。同於丙乙與甲丙之比。俱各爲相當比例四率也。

設如一山。欲知其高。用重測之法測之。退步十丈問山之高得幾何。法先安儀器。定準墜線。以定表看地平。遊表看山頂。得兩表相距五十度。又退行十丈。復安儀器。定準墜線。以定表仍看前儀器定表所看地平。原處仍以遊表看山頂。得兩表相距四十度。乃以前儀器所得五十度內減後儀器所得四十度。餘十度爲對所知之角。其正弦一萬七千三百六十五爲一率。後儀器所得四十度爲對所求之角。其正弦六萬四千二百七十九爲二率。退行十丈爲所知之邊。爲三率。求得四率三十七丈零一寸。爲前儀器中心至山頂之斜距。次以山頂垂線與地平所成直角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬爲一率。前儀器所得五



十度爲對所求之角。其正弦七萬六千六百零四爲二率。前儀器中心至山頂之斜距五十七丈零一寸爲所知之邊。爲三率。求得四率二十八丈三尺五寸。卽所測之山之高也。如圖甲乙爲山之高。丙丁爲退行十丈。前測得丙角五十度。後測得丁角四十度。而丙角爲甲丙丁三角形之外角。與丁甲二內角相併之度等。解見三角形邊線角度相求卷中。故丙角五十度內減丁角四十度。餘十度。卽甲丙丁三角形之甲角。故先用甲丙丁鈍角三角形求甲丙邊。既得甲丙邊。然後用甲乙丙直角三角形求甲乙邊。爲山之高也。

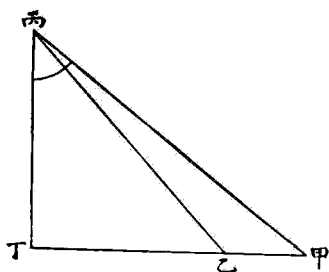
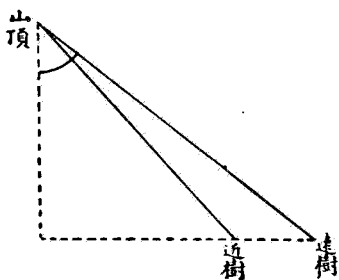
又法以前測所得五十度之餘切八萬三千九百一十。與後測所得四十度之餘切十一萬九千一百七十五相減。餘三萬五千二百六十五爲一率。半徑十萬爲二率。退行十丈爲三率。求得四率二十八丈三尺五寸。卽所求之山之高也。如圖戊己爲丙角之餘切。卽丙甲乙角之正切。與壬癸等。庚辛爲丁角之餘切。卽丁甲乙角之正切。與子癸等。壬卽兩餘切之較。甲癸與戊丙及庚丁俱同爲半徑。甲癸壬三角形與甲乙丙三角形爲同式形。而甲癸子三角形與甲乙丁三角形爲同式形。故甲壬子三角形與甲丙丁三角形亦爲同式形。



是以子壬與甲癸之比同於丁丙與甲乙之比而為相當比例四率也。

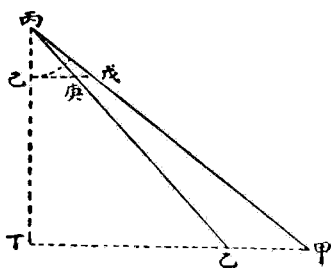
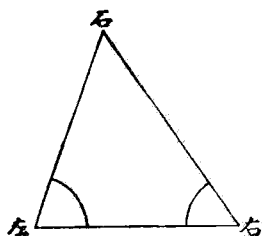
設如人在山上欲測山之高。但知山前有二樹與山參直。二樹相距十八丈。問山之高得幾何。

法於山頂安儀器。定準墜線。以定表向空中取一平線。先以遊表看遠樹。得遊表距垂線四十九度。次以遊表看近樹。得遊表距垂線三十八度。乃以所得兩數相減。餘十一度。為對所知之角。其正弦一萬九千零八十一。為一率。以看遠樹所得之四十九度與九十度相減。餘四十一度。為對所求之角。其正弦六萬五千六百零六。為二率。二樹相距十八丈。為三率。求得四率六十一丈八尺九寸。為近樹距山頂之斜距。次以山頂垂線與地平所成直角為對所知之角。其正弦即半徑十萬。為一率。以看近樹所得之三十八度與九十度相減。餘五十二度。為對所求之角。其正弦七萬八千八百零一。為二率。近樹距山頂之斜距六十一丈八尺九寸。為所知之邊。為三率。求得四率四十八丈七尺七寸。即所測之山之高也。如圖甲乙為兩樹相距十八丈。丙丁為山之高。甲丙丁角為看遠樹所得之四十九度。乙丙丁角為看近樹所得之三十八度。兩數相減。餘十一度。為甲丙乙角。甲丙丁角四十九



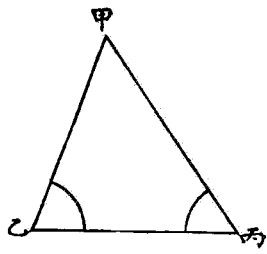
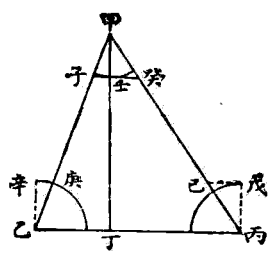
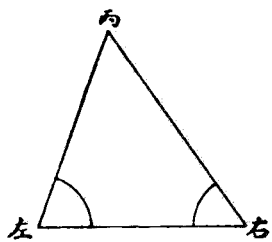
度與九十度相減。所餘之四十一度爲甲角。乙丙丁角三十八度與九十度相減。所餘之五十二度爲乙角。先用甲乙丙鈍角三角形求丙乙邊。既得丙乙邊。然後用乙丙丁直角三角形求丙丁邊。爲山之高也。又法以先看遠樹所得四十九度之正切十一萬五千零三十七。與後看近樹所得三十八度之正切七萬八千一百二十九相減。餘三萬六千九百零八爲一率。半徑十萬爲二率。二樹相距之十八丈爲三率。求得四率四十八丈七尺七寸。卽山之高也。如圖戊己爲甲丙丁角之正切。庚己爲乙丙丁角之正切。戊庚卽兩正切之較。丙己爲半徑。故戊庚與丙己之比。同於甲乙與丙丁之比。而爲相當比例四率也。設如一石。欲知其遠。不取直角。於左右兩處橫量五十丈測之。問兩處各距石幾何。

法先平安儀器於左。以定表看右儀器之中心。遊表看石得兩表相距七十度。次平安儀器於右。以定表看左儀器之中心。遊表看石得兩表相距六十度。乃以兩角度相併得一百三十度。與一百八十度相減。餘五十度爲對所知之角。其正弦七萬六千六百零四爲一率。求右邊。則以左邊儀器所得七十度爲對所求之角。其正弦九萬三千九百六十



九爲二率。左右相距五十丈爲所知之邊。爲三率。求得四率六十一丈三寸。三寸爲右邊距石之遠。若求左邊距石之遠。則以右邊儀器所得六十度爲對所求之角。其正弦八萬六千六百零三爲二率。左右相距五十丈爲所知之邊。爲三率。求得四率五十六丈五尺三寸。爲左邊距石之遠也。如圖甲爲石。乙丙爲左右相距五十丈。乙角爲左邊所測七十度。丙角爲右邊所測六十度。兩角相併。與一百八十度相減。得甲角五十度。共爲甲乙丙銳角三角形。蓋知乙丙二角及乙丙邊。而求甲乙邊及甲丙邊也。

又法以左邊儀器所得七十度之餘切三萬六千三百九十七。與右邊儀器所得六十度之餘切五萬七千七百三十五相併。得九萬四千一百三十二爲一率。右邊儀器所得六十度之餘割十一萬五千四百三十爲二率。左右相距五十丈爲三率。求得四率六十一丈三寸。爲右邊距石之遠。右求左邊距石之遠。則以左邊儀器所得七十度之餘割十萬六千四百一十八爲二率。左右相距五十丈爲三率。求得四率五十六丈五尺三寸。爲左邊距石之遠也。如圖甲爲石。乙丙爲左右相距五十丈。乙角爲左邊所



測七十度。丙角爲右邊所測六十度。試自甲至乙丙線上作甲丁垂線。分爲甲丁乙、甲丁丙兩直角形。戊己爲丙角之餘切。卽丁甲丙角之正切。與壬癸等。己丙爲丙角之餘割。卽丁甲丙角之正割。與甲癸等。庚辛爲乙角之餘切。卽丁甲乙角之正切。與壬子等。庚乙爲乙角之餘割。卽丁甲乙角之正割。與甲子等。而癸子卽兩餘切之和。甲壬癸與甲丁丙爲同式形。甲壬子與甲丁乙爲同式形。故甲子癸與甲乙丙亦爲同式形。是以癸子與甲癸之比同於丙乙與甲丙之比。又癸子與甲子之比同於丙乙與甲乙之比。皆爲相當比例四率也。

設如隔河一樹。欲知其遠。不能定直角。爰取兩處。俱斜對樹。橫量十二丈。測之。問離樹之遠得幾何。

法平安儀器於一處。隨定表橫量十二丈。復安

一儀器。若止用一儀器。則記準一處亦可。以先安

儀器定表看後安儀器中心。遊表看樹。得兩表

相距一百一十度。次以後安儀器定表看先安

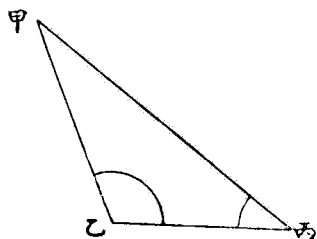
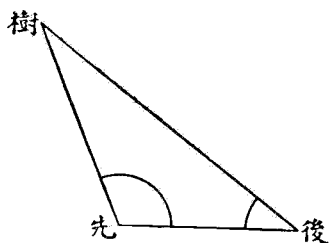
儀器中心。遊表看樹。得兩表相距四十度。乃以

兩角度相併。得一百五十度。與一百八十度相

減。餘三十度。爲對所知之角。其正弦五萬爲一

率。後安儀器所得四十度。爲對所求之角。其正

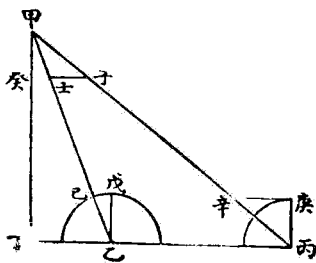
弦六萬四千二百七十九。爲二率。橫量十三丈



爲所知之邊爲三率求得四率十五丈四尺二寸七分。即所測之樹之遠也。如圖甲爲樹，甲乙爲離樹之遠，乙丙爲橫量十二丈，乙角爲一百一十度，丙角爲四十度，兩角相併與一百八十度相減，得甲角三十度，共爲甲乙丙鈍角三角形，蓋知乙丙二角及乙丙邊而求甲乙邊也。

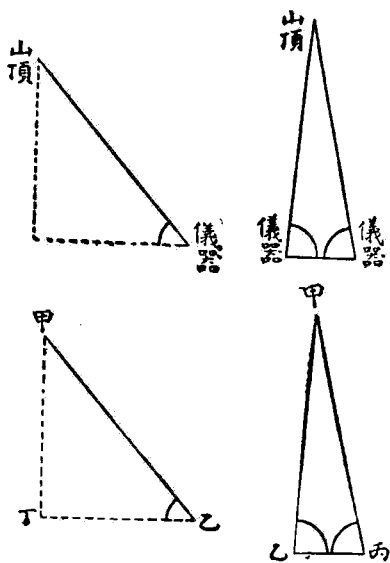
又法以先安儀器所得之外角七十度之餘切三萬六千三百九十七，與後安儀器所得四十度之餘切十一萬九千一百七十五相減，餘八萬二千七百七十八爲一率，先安儀器所得之外角七十度之餘割十萬六千四百一十八爲二率，橫量十二丈爲三率，求得四率十五丈四尺二寸七分，即所測之樹之遠也。如圖甲爲樹，甲乙爲離樹之遠，乙丙爲橫量十二丈，乙角爲先安儀器所得一百一十度，丙角爲後安儀器所得四十度，試將乙丙線引長，自甲角作甲丁垂線，遂成甲丁乙直角三角形，而甲乙丁角即乙角之外角，戊己爲乙外角之餘切，即乙甲丁角之正切，與壬癸等，己乙爲乙外角之餘割，即乙甲丁角之正割，與甲壬等，庚辛爲丙角之餘切，即丙甲丁角之正切，與子癸等，子壬即兩餘切之較，甲癸壬三角形與甲丁乙三角形爲同式形，甲癸子三角形與甲丁丙三角形爲同式形，故甲壬子三角形與甲乙丙三角形亦爲同式形，是以子壬與甲壬之比，同於丙乙與甲乙之比，而爲相當比例四率也。

設如遠望一山，欲知其高，不得退步，爰取左右兩處橫量一百丈，先求



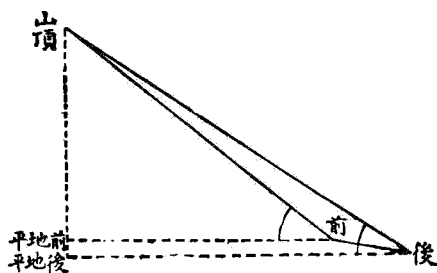
斜距測之問山之高得幾何。

法以儀器斜對山頂。隨定表橫量一百丈。任記一處。遊表看山頂。得兩表相距八十六度五十三分。又隨定表橫量一百丈。所記之處。復安儀器。斜對山頂。以定表看原處。遊表看山頂。得兩表相距七十八度零七分。乃以兩角度相併。得一百六十五度。與一百八十度相減。餘一十五度。為對所知之角。其正弦二萬五千八百八十二。為一率。後測所得七十八度零七分。為對所求之角。其正弦九萬七千八百五十七。為二率。橫量一百丈。為所知之邊。為三率。求得四率三百七十八丈零九寸。為先安儀器至山頂之斜距。次以儀器安於原處。定準墜線。定表看地平。遊表看山頂。得兩表相距五十一度。乃以山頂垂線與地平所成直角。為對所知之角。其正弦即半徑十萬。為一率。儀器所得五十一度。為對所求之角。其正弦七萬七千七百一十五。為二率。儀器至山頂之斜距三百七十八丈零九寸。為所知之邊。為三率。求得四率二百九十三丈八尺三寸。即所測之山之高也。如圖甲為山頂甲乙為先安儀器至山頂之斜距。乙丙為橫量一百丈。甲丙為後安儀器至山頂之斜距。乙角為八

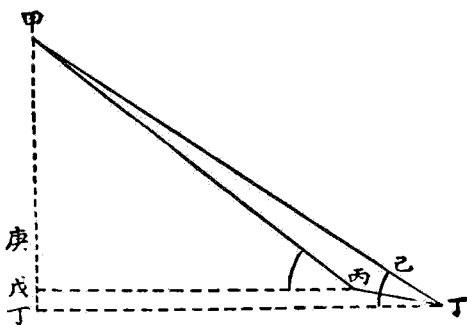
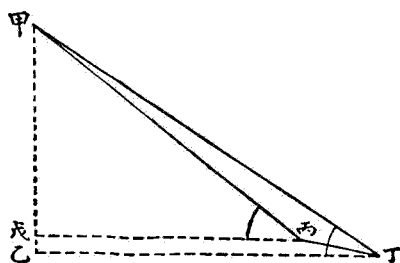


十六度五十三分。丙角爲七十八度零七分。兩角相併與一百八十度相減得甲角一十五度。遂成甲乙丙銳角三角形。今有乙丙二角與乙丙邊。求甲乙邊。卽先安儀器至山頂之斜距。又甲丁爲山之高。甲乙爲儀器至山頂之斜距。丁角卽山頂垂線與地平所成直角。乙角爲五十一度。復成甲丁乙直角三角形。今有乙丁二角與甲乙邊。求甲丁邊。卽山之高也。

設如人在山坡測山之高。前後不得地平。爰取斜坡前後兩處相距一百丈測之。問山之高得幾何。法於山坡先安儀器。定準墜線。以定表空取一地平。以遊表看山頂。得兩表相距四十度。於是向後就斜坡直量一百丈。復安儀器。定準墜線。以定表空取一地平。以遊表看山頂。得兩表相距三十五度。又以遊表看前儀器中心。得兩口相距十三度。乃以前儀器所得四十度內減後儀器所得三十五度。餘五度。爲對所知之角。其正弦八千七百一十六爲一率。以前儀器所得四十度內減後儀器看前儀器中心所得十三度。餘二十七度。爲對所求之外角。其正弦四萬五千三百九十九爲二率。退量一百丈爲所知之邊。爲三率。求得四率五百二十丈八尺七寸。爲山頂至後儀器之斜距。次以山頂垂線與地平所成直角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬。爲一率。後儀器所得三十五度爲對所求之角。其正弦五萬七千三百五十八爲二率。



山頂至後儀器之斜距五百二十丈八尺七寸爲所知之邊。爲三率。求得四率二百九十八丈七尺六寸。卽所測之山之高也。如圖甲乙爲山之高。丙丁爲山坡斜距一百丈。甲丙戊角爲前儀器所得四十度。甲丁乙角爲後儀器所得三十五度。丙丁乙角爲後儀器看前儀器中心所得十三度。若將戊丙線引長至己。則甲己戊角與甲丁乙角爲二平行線之內外角。其度必等。故於甲丙戊角四十度內減甲丁乙角三十五度。餘五度爲丁甲丙角。此卽前題退步兩測之理。又試將丁丙線引長至庚。則庚丙戊角與丙丁乙角亦爲二平行線之內外角。其度亦等。故於甲丙戊角四十度內減庚丙戊角相等之丙丁乙角十二度。餘甲丙庚角二十七度。爲甲丙丁鈍角之外角。故先用甲丙丁鈍角三角形求甲乙邊。爲山之高也。直角三角形求甲乙邊。爲山之高也。



設如東西二樹。欲知其相距之遠。測處距西樹五十丈。距東樹七十丈。問二樹相距幾何。

法以儀器定表看東樹。遊表看西樹。得兩表相距五十度。乃以距西樹五十丈與距東樹七十丈相加。得

一百二十丈爲一率。又以五十丈與七十丈相減。餘二十丈爲二率。

兩表相距五十度與一百八十度相減。餘一百三十度爲外角。折半

得六十五度爲半外角。其正切二十一萬四千四百五十一爲三率。

求得四率三萬五千七百四十二爲半較角之正切。檢表得十九度

四十分。與半外角六十五度相減。餘四十五度二十分爲小角。與半

外角六十五度相加。得八十四度四十分爲大角。既得二角。則以小

角四十五度二十分爲對所知之角。其正弦七萬一千一百二十一

爲一率。兩表相距五十度爲對所求之角。其正弦七萬六千六百零

四爲二率。距西之之遠爲所知之邊。其數五十丈爲三率。求得四率

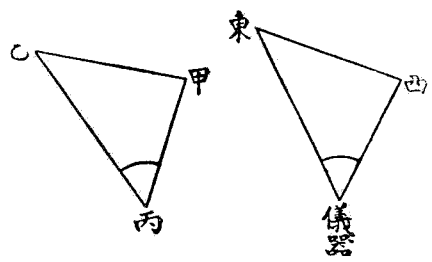
五十三丈八尺五寸。卽東西二樹相距之遠也。如圖甲爲西樹。乙爲

東樹。丙爲儀器中心。甲丙爲距西樹五十丈。乙丙爲距東樹七十丈。

丙角爲兩表視線相距五十度。今以丙角爲心。甲丙小邊爲半徑。作一甲丁戊圓。截乙丙大邊於戊。將乙

丙引長至圓界丁。則丙戊丙丁俱爲半徑。與甲丙等。自丁至乙。卽兩邊之和。自戊至乙。卽兩邊之較。試自

甲至戊作甲戊線。則成丙甲戊三角形。其丙甲戊與丙戊甲二角併之。與甲丙丁外角度等。今折半用其



正切。卽如用丁戊甲角之正切。故自甲至丁作甲丁線。卽丁戊甲角之正切。又戊甲乙角。卽甲角大於丙甲戊角之較。亦卽乙角小於丙戊甲角之較。故自圓界戊至甲乙邊作己戊線。與甲丁平行。卽戊甲乙角之正切。且乙甲丁與乙己戊爲同式形。故兩邊之和。乙丁與丁戊甲半外角切線甲丁之比。卽同於兩邊之較。乙戊與半較角切線己戊之比。爲相當比例四率也。

又法以半徑十萬爲一率。兩表相距五十度之正弦七萬六千六百零四爲二率。距西樹之遠五十丈爲三率。求得四率三十八丈

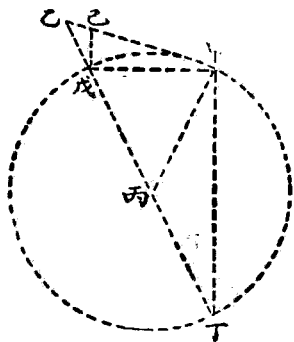
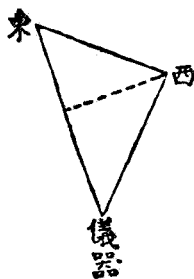
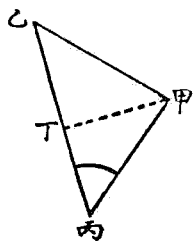
三尺。爲西樹至看東樹視線之上垂線。又以半徑十萬爲一率。兩表相距五十度之餘弦六萬四千二百七十九爲二率。距西樹之遠五十丈爲三率。求得四率三十二丈一尺四寸。爲西樹至看東樹視線上垂

線所分之小段分邊線。將此數與距東樹之遠七十丈相減。餘三十七丈八尺六寸。亦爲西樹至看

東樹視線上垂線所分之大段分邊線。爰以此線爲勾。所得垂線爲股。求得弦五十三丈八尺五寸。

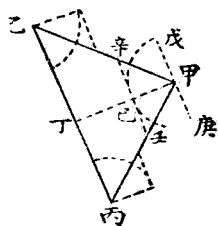
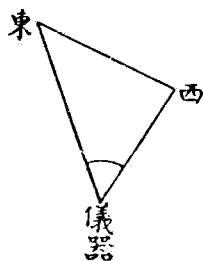
卽東西二樹相距之遠也。如圖甲乙丙三角形。甲

爲西樹。乙爲東樹。丙爲儀器中心。甲丙爲距西樹



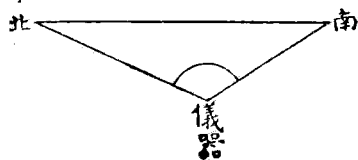
五十丈。乙丙爲距東樹七十丈。試自甲角至乙丙視線。上作甲丁垂線。遂分甲乙丙三角形爲甲丁乙、甲丁丙兩直角三角形。先求得甲丁垂線爲股。次求得丁丙小段分邊線。與乙丙相減。餘乙丁大段分邊線爲勾。求得甲乙弦。卽二樹相距之遠也。

又法以距西樹之遠五十丈爲一率。距東樹之遠七十丈爲二率。兩表相距五十度之餘。割一十三萬零五百四十一爲三率。求得四率一十八萬二千七百五十七。爲西樹至看東樹視線上垂線所分兩分角之兩正切之和。內減兩表相距五十度之除。切八萬三千九百一十。餘九萬八千八百四十七。爲對西樹視線之對邊角之餘切。檢表得四十五度二十分。卽對西樹視線之對邊角。乃以此角度爲對所知之角。其正弦七萬一千一百二十一爲一率。兩表相距五十度爲對所求之角。其正弦七萬六千六百零四爲二率。距西樹之遠爲所知之邊。其數五十丈爲三率。求得四率五十三丈八尺五寸。卽東西二樹相距之遠也。如圖甲乙丙三角形。甲爲西樹。乙爲東樹。丙爲儀器中心。甲丙爲距西樹五十丈。乙丙爲距東樹七十丈。丙角爲兩表視線相距五十度。試自甲角至乙丙視線上作甲丁垂線。遂分甲乙丙三角形爲甲丁乙、甲丁丙兩直角三角形。以甲角爲心作一戊己庚半圓。則甲丁垂線平分於己。兩邊各成一象限。又與乙丙平行作一



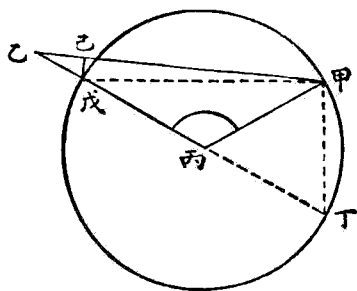
辛壬線。則辛己一段爲乙甲丁分角之正切。卽乙角之餘切。己壬一段爲丙甲丁分角之正切。卽丙角之餘切。而甲壬爲丙甲丁分角之正割。亦卽丙角之餘割。甲辛壬與甲乙丙兩三角形爲同式形。故甲丙邊與乙丙邊之比。同於丙角餘割甲壬。卽丙甲丁分角之正割。與丙甲丁乙甲丁兩分角之正切相合之。辛壬之比爲相當比例四率。既得辛壬兩分角之共切內減去丙甲丁分角之正切己壬。卽丙角之餘切。所餘辛己爲乙甲丁分角之正切。卽爲乙角之餘切。檢表卽得乙角。既得乙角則用兩角一邊比例求之而得甲乙邊矣。

設如南北二橋。欲知其相距之遠。測處距南橋九十丈。距北橋一百二十丈。問二橋相距幾何。法以儀器定表看北橋。遊表看南橋。得兩表相距一百二十度。乃以距南橋九十丈與距北橋一百二十丈相加。得二百一十丈爲一率。又以九十丈與一百二十丈相減。餘三十丈爲二率。兩表相距一百二十度與一百八十度相減。餘六十度爲外角。折半得三十度爲半外角。其正切五萬七千七百三十五爲三率。求得四率八千二百四十八。爲半較角之正切。檢表得四度四十三分。與半外角三十度相減。餘二十五度一十七分爲小角。與半外角三十度相加。得三十四度四十三分爲大角。既得二角。則以小角二十五度一十七分爲對所知之角。其正弦四萬二千七百零九爲一率。兩表相距一百二十度爲對所求之角。其外角六十度之正弦八萬六千六百零三爲二率。距南橋之遠爲所知之邊。



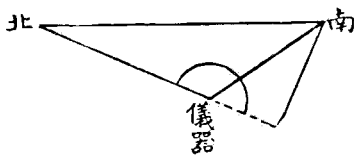
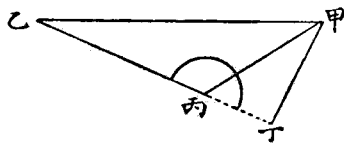
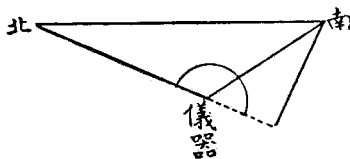
其數九十丈爲三率。求得四率一百八十二丈四尺九寸。爲南北二橋相距之遠也。如圖甲爲南橋。乙爲北橋。丙爲儀器中心。甲丙爲距南橋九十丈。乙丙爲距北橋一百二十丈。丙角爲兩表視線相距一百二十度。今以丙角爲心。甲丙小邊爲半徑。作一甲丁戊圓。截乙丙大邊於戊。將乙丙引長至圓界丁。則乙丁爲兩邊之和。乙戊爲兩邊之較。試自甲至戊作甲戊線。成甲丙戊三角形。其丙甲戊與丙戊甲二角併之。與甲丙丁外角度等。今折半用其正切。卽如用丁戊甲角之正切。故自甲至丁作甲丁線。卽丁戊甲角之正切。又戊甲乙角。卽甲角大於丙甲戊角之較。亦卽乙角小於丙戊甲角之較。故自圓界戊至甲乙邊作己戊線。與甲丁平行。卽戊甲乙角之正切。且乙甲丁與乙己戊爲同式形。故兩邊之和乙丁與丁戊甲半外角切線甲丁之比。卽同於兩邊之較乙戊與半較角切線己戊之比。爲相當比例四率也。

又法以半徑十萬爲一率。兩表相距一百二十度之外角六十度之正弦八萬六千六百零三爲二率。距南橋之遠九十丈爲三率。求得四率七十七丈九尺四寸。爲南橋至看北橋視線引長虛邊線上之垂線。又以半徑十萬爲一率。兩表相距一百二十度之外角六十度之餘弦五萬爲二率。距南橋之遠九十丈爲三率。求得四率四十五丈。爲南橋至看北橋視線引長所成直角之虛邊線。與距北橋一百二十丈相



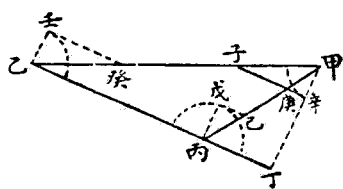
加得一百六十五丈爲南橋至看北橋視線引長之總邊線。爰以此線爲股。所得南橋至虛邊之垂線爲勾。求得弦一百八十二丈四尺八寸。卽南北二橋相距之遠也。如圖甲乙丙三角形。甲爲南橋。乙爲北橋。丙爲儀器中心。甲丙爲距南橋九十丈。乙丙爲距北橋一百二十丈。試將乙丙線引長自甲角作甲丁垂線。遂成甲丁丙。甲丁乙兩直角三角形。先求得甲丁垂線爲勾。次求得丙丁虛邊線。與乙丙相加得乙丁總邊線爲股。求得甲乙弦。卽二橋相距之遠也。

又法以距南橋之遠九十丈爲一率。距北橋之遠一百二十丈爲二率。兩表相距一百二十度之外角六十度之餘割一十一萬五千四百七十爲三率。求得四率一十五萬三千九百六十爲南橋至看北橋視線引長虛邊線上之垂線所成兩分角之正切之較。與兩表相距一百二十度之外角六十度之餘切五萬七千七百三十五相加得二十一萬一千六百九十五爲對南橋視線之對邊角之餘切。檢表得二十五度十七分。卽對南橋視線之對邊角。乃以此角度爲對所知之角。其正弦四萬二千七百零九爲一率。兩表相距一百二十度爲對所求之角。其外角六十度之正弦八萬六千六百零三爲二率。

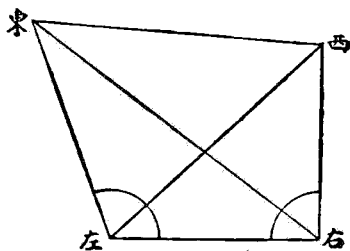


距南橋之遠爲所知之邊。其數九十丈爲三率。求得四率一百八十二丈四尺九寸。卽南北二橋相距之遠也。如圖甲乙丙三角形。甲爲南橋。乙爲北橋。丙爲儀器中心。甲丙爲距南橋九十丈。乙丙爲距北橋一百二十丈。丙角爲兩表視線相距一百二十度。試將乙丙邊引長。自甲角作甲丁垂線。遂成甲丁丙。甲丁乙兩直角三角形。甲丁丙三角形之丙角。卽甲乙丙三角形之丙角之外角。其餘切戊己。卽甲丁丙三角形之甲角之正切如庚辛。丙外角之餘割己丙。卽甲丁丙三角形之甲角之正割如甲庚。而甲乙丙三角形之乙角之餘切壬癸。卽甲丁乙三角形之甲角之正切如子辛。若甲丁乙三角形之乙角餘切。與甲丁丙三角形之丙角餘切相減。卽兩甲角相差之較如子庚。甲辛庚三角形與甲丁丙三角形爲同式形。甲辛子三角形與甲丁乙三角形爲同式形。故甲子庚三角形與甲乙丙三角形亦爲同式形。是以甲丙邊與乙丙邊之比。同於丙外角餘割甲庚卽己丙。與兩餘切之較子庚之比。爲相當比例四率。既得子庚兩餘切之較。與丙外角之餘切庚辛卽戊己。相加。得子辛。卽乙角之餘切。檢表得乙角。既得乙角。則用兩角一邊比例求之。而得甲乙邊矣。

設如隔河東西二樹。欲知其相距之遠。爰對一樹取一直角。左右橫量十三丈。測之。問二樹相距幾何。法先對西樹安儀器於右。定遊表於九十度。以定表看西樹。隨遊表橫量十三丈。乃以遊表看東樹。得西樹視線距橫量邊線九十度。東樹視線距橫量邊線三十八度。西樹東樹兩視線距爲五十二度。次於直

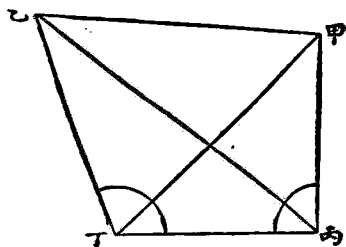


角橫量十三丈處安儀器於左。以定表看右儀器中心。遊表看東樹。得東樹視線距橫量邊線一百一十度。復以遊表看西樹。得西樹視線距橫量邊線四十五度。乃先求右儀器距西樹之遠。以左儀器看西樹距橫量邊線之四十五度與九十度相減。餘四十五度為對所知之角。其正弦七萬零七百一十一為一率。以左儀器看西樹距橫量邊線之四十五度為對所求之角。其正弦七萬零七百一十一為二率。左右橫量十三丈為所知之邊。為三率。求得四率十三丈。為右儀器距西樹之遠。次求右儀器距東樹之遠。以右儀器看東樹距橫量邊線三十八度。與左儀器看東樹距橫量邊線一百一十度相併。得一百四十八度。與一百八十度相減。餘三十二度為對所知之角。其正弦五萬二千九百九十二為一率。以左儀器看東樹距橫量邊線一百一十度為對所求之角。其外角七十度之正弦九萬三千九百六十九為二率。左右橫量十三丈為所知之邊。為三率。求得四率二十三丈零五寸。為右儀器距東樹之遠。末求東西二樹相距之遠。以右儀器距西樹十三丈。與右儀器距東樹二十三丈零五寸相加。得三十六丈零五寸為一率。又以十三丈與二十三丈零五寸相減。餘十丈零五寸為二率。以右儀器看西樹東樹兩表相距五十二度。與一百八十度相減。餘一百二十八度為外角。折半得六十四度為半外角。其正切二十萬零五千零三十為三率。求得四率五萬七千一百五十八。為半較角之正切。檢表得二十九度四十五分。與半外角六十四度相減。餘三十四度

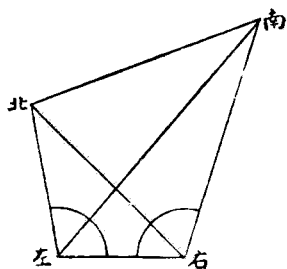


十五分爲小角。以半較角二十九度四十五分。與半外角六十四度相加。得九十三度四十五分爲大角。乃以小角三十四度十五分爲對所知之角。其正弦五萬六千二百八十爲一率。看西樹東樹兩表相距之五十二度爲對所求之角。其正弦七萬八千八百零一爲二率。右儀器距西樹之遠十三丈爲所知之邊。爲三率。求得四率十八丈二尺。爲東西二樹相距之遠也。如圖甲爲西樹。乙爲東樹。丙爲右儀器中心。丁爲左儀器中心。丙丁爲兩測之距十三丈。甲丙丁角爲直角九十度。甲丙乙角爲右儀器看東樹西樹兩表相距之五十二度。乙丙丁角爲左儀器看東樹視線距橫量邊線一百一十度。甲丁丙角爲左儀器看西樹距橫量邊線四十五度。先以甲丁丙角四十五度與九十度相減。餘四十五度。爲丁甲丙角。遂成甲丙丁三角形。求甲丙邊。爲右儀器距西樹之遠。次以乙丙丁角三十八度與乙丁丙角一百一十度併之。與一百八十度相減。餘三十二度。爲丙乙丁角。遂成乙丙丁三角形。求乙丙邊。爲右儀器距東樹之遠。末以甲乙丙三角形之甲丙、乙丙二邊。甲丙乙一角。求乙甲丙大角九十三度四十五分。甲乙丙小角三十四度十五分。而得甲乙邊。爲東西二樹相距之遠也。

設如南北二峯。欲知其相距之遠。不取直角。於左右兩處橫量一百丈測之。問二峯相距幾何。法安儀器於右。隨定表向左橫量一百丈。乃以遊表看南峯。得南峯視線距橫量邊線一百零七度。復以



遊表看北峯。得北峯視線距橫量邊線四十六度。南峯北峯兩視線相距爲六十一度。次於橫量一百丈處安儀器於左。以定表看右儀器中心。遊表看北峯。得北峯視線距橫量邊線九十九度。復以遊表看南峯。得南峯視線距橫量邊線五十度。北峯南峯兩視線相距爲四十九度。乃先求左儀器距北峯之遠。以右儀器看北峯距橫量邊線之四十六度。與左儀器看北峯距橫量邊線之九十九度相併。得一百四十五度。與一百八十度相減。餘三十五度爲對所角。其正弦五萬七千三百五十八爲一率。以右儀器看北峯距橫量邊線之四十六度爲對所求之角。其正弦七萬一千九百三十四爲二率。橫量一百丈爲所知之邊。爲三率。求得四率一百二十五丈四尺一寸。爲左儀器距北峯之遠。次求左儀器距南峯之遠。以左儀器看南峯距橫量邊線之五十度。與右儀器看南峯距橫量邊線之一百零七度相併。得一百五十七度。與一百八十度相減。餘二十三度。爲對所角。其正弦三萬九千零七十三爲一率。右儀器看南峯距橫量邊線一百零七度爲對所求之角。其外角七十三度之正弦九萬五千六百三十爲二率。橫量一百丈爲所知之邊。爲三率。求得四率二百四十四丈七尺四寸。爲左儀器距南峯之遠。末求南北二峯相距之遠。以左儀器距北峯一百二十五丈四尺一寸。與左儀器距南峯二百四十四丈七尺四寸相加。得三百七十丈一尺五寸爲一率。又以一百二十五丈四尺一寸。與二百四十四丈七尺四寸相減。餘一百一十九丈三尺三寸爲二率。以左儀



器看南峯北峯兩視線相距四十九度。與一百八十度相減。餘一百三十一度爲外角。折半得六十五度。三十分爲半外角。其正切二十一萬九千四百三十爲三率。求得四率七萬零七百四十爲半較角之正切。查表得三十五度十六分。與半外角六十五度三十分相減。餘三十度十四分爲小角。與半外角六十五度三十分相加。得一百度四十六分爲大角。乃以小角三十度十四分爲對所知之角。其正弦五萬零三百五十二爲一率。左儀器看南峯北峯兩視線相距之四十九度爲對所求之角。其正弦七萬五千四百七十一爲二率。左儀器距北峯之遠一百二十五丈四尺一寸爲所知之邊。爲三率。求得四率一百八十七丈九尺七寸。爲南北二峯相距之遠也。又法求自北峯至左儀器距南峯視線之上垂線。作勾股法算之。則以垂線所分直角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬爲一率。左儀器看南峯北峯兩視線相距之四十九度爲對所求之角。其正弦七萬五千四百七十一爲二率。左儀器距北峯之遠爲所知之邊。其數一百二十五丈四尺一寸爲三率。求得四率九十四丈六尺四寸。爲自北峯至左儀器距南峯視線之上垂線。次求左儀器至垂線末之分邊線。仍以垂線所分直角爲對所知之角。其正弦卽半徑十萬爲一率。以左儀器看南峯北峯兩視線相距之四十九度。與九十度相減。餘四十一度。爲對所求之角。其正弦六萬五千六百零六爲二率。卽四十九度之餘弦。左儀器距北峯之遠爲所知之邊。其數一百二十五丈四尺一寸爲三率。求得四率八十二丈二尺七寸。爲自左儀器至垂線末之分邊線。與左儀器距南峯之二百四十四丈七尺四寸相減。餘一百六十二丈四尺七寸。爲南峯距垂線末之分邊線。乃以此數爲股。所得垂線九十四丈六尺四寸爲勾。求得弦一百八十八丈零二寸。卽南北二峯相距之遠也。如圖甲爲南

峯。乙爲北峯。丙爲右儀器中心。丁爲左儀器中心。丙丁爲兩測之距一
 百丈。甲丙丁角爲右儀器看南峯視線距橫量邊線一百零七度。乙丙
 丁角爲右儀器看北峯視線距橫量邊線四十六度。乙丁丙角爲左儀
 器看北峯視線距橫量邊線九十九度。甲丁丙角爲左儀器看南峯視
 線距橫量邊線五十度。甲丁乙角爲左儀器看南峯北峯兩表相距之
 四十九度。先以乙丙丁角四十六度與乙丁丙角九十九度併之。與一
 百八十度相減。餘三十五度爲丁乙丙角。遂成乙丁丙三角形。而求乙
 丁邊。爲左儀器距北峯之遠。次以甲丁丙角五十度與甲丙丁角一百
 零七度併之。與一百八十度相減。餘二十三度爲丁甲丙角。遂成甲丙丁三角形。而求甲丁邊。爲左儀器
 距南峯之遠。末以甲乙丁三角形之甲丁乙丁二邊。甲丁乙一角。求甲乙丁大角一百度四十六分。乙甲
 丁小角三十度十四分。而得甲乙邊。爲南北二峯相竝之遠也。又或求得乙戊垂線。又求得丁戊爲左儀
 器至垂線末之分邊線。則以丁戊與甲丁相減。餘甲戊爲股。乙戊垂線爲勾。而得甲乙弦。爲南北二峯相
 距之遠也。

