Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 36

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 36.1. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen die inversen Matrizen zu den Elementarmatrizen aus?

Übungsaufgaben

Aufgabe 36.2. Beschreibe die Umkehrabbildungen zu den elementargeometrischen Abbildungen Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung, Streckung, Verschiebung.

Aufgabe 36.3. Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{5}{3} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 17 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.4. Bestimme die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.5. Zeige, dass eine invertierbare Matrix M weder eine Nullzeile noch eine Nullspalte besitzt.

Aufgabe 36.6.*

Es sei M eine $n \times n$-Matrix derart, dass es $n \times n$-Matrizen A, B mit $M \circ A = E_n$ und mit $B \circ M = E_n$ gibt. Zeige $A = B$ und dass M invertierbar ist.

Aufgabe 36.7. Es seien M und N invertierbare $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass auch $M \circ N$ invertierbar ist, und dass

$$(M \circ N)^{-1} = N^{-1} \circ M^{-1}$$

gilt.

Aufgabe 36.8. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

Aufgabe 36.9.*

Es seien $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ Matrizen über einem Körper K mit

$$A \circ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass dann auch

$$M \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 36.10. Es sei M eine $m \times n$-Matrix und $\varphi\colon K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn es eine $n \times m$-Matrix A mit $M \circ A = E_m$ gibt.

Aufgabe 36.11. Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).

Aufgabe 36.12. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

Aufgabe 36.13. Zeige, dass man eine Scherungsmatrix

$$A_{ij}(a) = E_n + aB_{ij}$$

als Matrizenprodukt $M \circ N \circ L$ schreiben kann, wobei M und L Diagonalmatrizen sind und N eine Scherungsmatrix der Form $A_{ij}(1)$ ist.

Aufgabe 36.14. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 36.15. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 36.16. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.17.*

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.18. Führe für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & -4 \\ 9 & 17 & -2 \end{pmatrix}$$

das Invertierungsverfahren durch bis sich herausstellt, dass die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe 36.19.*

(1) Überführe die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in ein lineares Gleichungssystem.

(2) Löse dieses lineare Gleichungssystem.

AUFGABE 36.20. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 36.21. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 36.22.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige

$$M^2 = E_2.$$

b) Bestimme die inverse Matrix zu M.

c) Löse die Gleichung

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 36.23. Löse die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

simultan.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 36.24. (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $k \in K$ zu sich selbst invers ist.

AUFGABE 36.25. (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

AUFGABE 36.26. (4 (1+3) Punkte)

(1) Überführe die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in ein lineares Gleichungssystem.

(2) Löse dieses lineare Gleichungssystem.

AUFGABE 36.27. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 36.28. (4 Punkte)

Löse die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_6 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

simultan durch Invertieren der Matrix.

Aufgabe 36.29. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Abbildungsverzeichnis