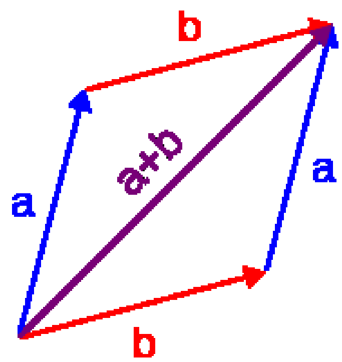
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 6

Vektorräume



Die Addition von zwei Pfeilen a und b, ein typisches Beispiel für Vektoren.

Der zentrale Begriff der linearen Algebra ist der Vektorraum.

Definition 6.1. Es sei K ein Körper und V eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

$$+ \colon V \times V \longrightarrow V, \, (u,v) \longmapsto u+v,$$

und

$$\cdot \colon K \times V \longrightarrow V, \, (s,v) \longmapsto sv = s \cdot v.$$

Dann nennt man V einen K-*Vektorraum* (oder einen Vektorraum über K), wenn die folgenden Axiome erfüllt sind[1] (dabei seien $r,s \in K$ und $u,v,w \in V$ beliebig) [2]

(1) $u+v = v+u$,
(2) $(u+v)+w = u+(v+w)$,
(3) $v+0 = v$,
(4) Zu jedem v gibt es ein z mit $v+z = 0$,
(5) $r(su) = (rs)u$,
(6) $r(u+v) = ru+rv$,

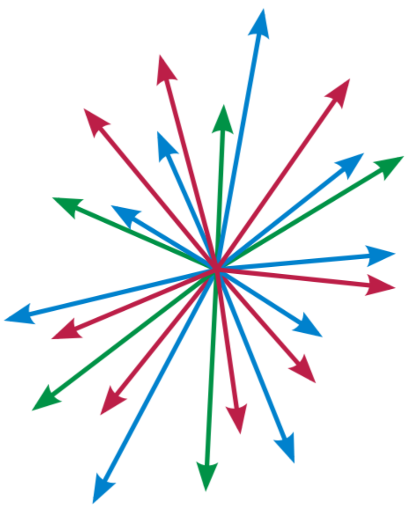
[1] Die ersten vier Axiome, die unabhängig von K sind, bedeuten, dass $(V,0,+)$ eine kommutative Gruppe ist.

[2] Auch für Vektorräume gilt die *Klammerkonvention*, dass Punktrechnung stärker bindet als Strichrechnung.

(7) $(r+s)u = ru + su$,
(8) $1 \cdot u = u$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Wie in Ringen gilt wieder *Punktrechnung vor Strichrechnung*, d.h. die Skalarmultiplikation bindet stärker als die Vektoraddition.

Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werden, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Beispiel 6.2. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) |\, x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$s(x_1, \ldots, x_n) \;=\; (sx_1, \ldots, sx_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Man nennt ihn den n-dimensionalen *Standardraum*. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Die Vektoren im Standardraum K^n kann man als Zeilenvektoren

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

oder als Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Vektor

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 1 an der i-ten Stelle steht, heißt i-ter *Standardvektor*.

Beispiel 6.3. Es sei E eine „Ebene“ mit einem fixierten „Ursprungspunkt“ $Q \in E$. Wir identifizieren einen Punkt $P \in E$ mit dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{QP}$. In dieser Situation kann man ein anschauliche koordinatenfreie Vektoraddition und eine koordinatenfreie Skalarmultiplikation einführen. Zwei Vektoren $\overrightarrow{QP}$ und $\overrightarrow{QR}$ werden miteinander addiert, indem man das Parallelogramm zu diesen beiden Vektoren konstruiert. Das Ergebnis der Addition ist die Ecke des Parallelogramms, das Q gegenüberliegt. Bei der Konstruktion muss man die zu $\overrightarrow{QP}$ parallele Gerade durch R und die zu $\overrightarrow{QR}$ parallele Gerade durch P zeichnen. Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist der gesuchte Punkt. Eine entsprechende Vorstellung ist, dass man den Vektor $\overrightarrow{QP}$ parallel verschiebt und an $\overrightarrow{QR}$ „anlegt“, d.h. dass man den Startpunkt des einen Pfeiles an den Endpunkt des anderen anheftet.

Für die Multiplikation eines Vektors $\overrightarrow{QP}$ mit einem Skalar s muss dieser als ein Punkt auf einer Geraden G gegeben sein, auf der darüber hinaus ein Nullpunkt $0 \in G$ und eine Eins $1 \in G$ fixiert sind. Wie diese Gerade in der Ebene liegt, ist zunächst gleichgültig. Man bewegt die Gerade (dabei darf man verschieben und auch drehen) so, dass der Nullpunkt auf Q zu liegen kommt und vermeidet, dass die Gerade deckungsgleich zu der von $\overrightarrow{QP}$ erzeugten Geraden - nennen wir sie H - wird. Nun verbindet man 1 und P mit einer Geraden L und zeichnet dazu die zu L parallele Gerade L' durch s. Der Schnittpunkt von L' und H ist $s\overrightarrow{QP}$.

Diese Überlegungen kann man auch höherdimensional anstellen, wobei sich allerdings das Wesentliche in der von den beiden beteiligten Vektoren (bzw. Geraden) erzeugten Ebene abspielt.

Beispiel 6.4. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Struktur gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + bi$ mit einer reellen Zahl $s = (s, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 6.5. Zu einem Körper K und gegebenen natürlichen Zahlen m, n bildet die Menge

$$\mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$$

der $m \times n$-Matrizen mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum. Das Nullelement in diesem Vektorraum ist die *Nullmatrix*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} .$$

Polynome werden wir später einführen, sie sind vermutlich aus der Schule bekannt.

Beispiel 6.6. Sei $R = K[X]$ der Polynomring in einer Variablen über dem Körper K, der aus sämtlichen Polynomen, also Ausdrücken der Form

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

mit $a_i \in K$ besteht. Mit (komponentenweiser) Addition und der ebenfalls komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar $s \in K$ (was man auch als die Multiplikation mit dem konstanten Polynom s auffassen kann) ist der Polynomring ein K-Vektorraum.

Beispiel 6.7. Wir betrachten die Inklusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen. Mit der reellen Addition und mit der Multiplikation von rationalen Zahlen mit reellen Zahlen ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wie direkt aus den Körperaxiomen folgt. Dies ist ein ziemlich unübersichtlicher Vektorraum.

Beispiel 6.8. Es sei K ein Körper und es sei M eine Menge. Wir betrachten die Menge der Funktionen von M nach K, also

$$V = \{f \mid f : M \to K \text{ Abbildung}\} .$$

Diese Menge ist mit komponentenweiser Addition, bei der also die Summe von zwei Funktionen f und g durch

$$(f + g)(z) := f(z) + g(z)$$

erklärt wird, und mit der durch

$$(\lambda f)(z) := \lambda f(z)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum.

LEMMA 6.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $s \in K$).*

(1) *Es ist $0v = 0$.* [3]
(2) *Es ist $s0 = 0$.*
(3) *Es ist $(-1)v = -v$.*
(4) *Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.17. □

Untervektorräume

DEFINITION 6.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Auf einen solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe 6.5. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

LEMMA 6.11. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 6.3. □

[3]Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere ist die Summe von zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems wieder eine Lösung. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Man kann aber, wie in Korollar 5.13 gezeigt, zu einer Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems hinzuaddieren und erhält wieder eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

Beispiel 6.12. Wir knüpfen an die homogene Version von Beispiel 5.1 an, d.h. wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 0 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 0 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 0\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$. Aufgrund von Lemma 6.11 ist die Lösungsmenge L ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$. Wir haben ihn in Beispiel 5.1 explizit als

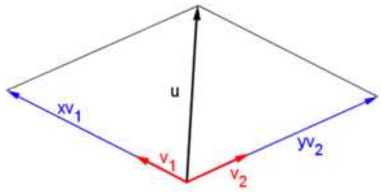
$$\left\{ u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

beschrieben, woraus ebenfalls erkennbar ist, dass dieser Lösungsraum ein Vektorraum ist. In dieser Schreibweise wird klar, dass L in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$ steht, und zwar respektiert diese Bijektion sowohl die Addition als auch die Skalarmultiplikation (der Lösungsraum L' des inhomogenen Systems steht ebenfalls in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$, allerdings gibt es keine sinnvolle Addition und Skalarmultiplikation auf L'). Allerdings hängt diese Bijektion wesentlich von den gewählten „Basislösungen“ $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$ und $\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{4}{13}, 0, 1\right)$ ab, die von der gewählten Eliminationsreihenfolge abhängen. Es gibt für L andere gleichberechtigte Basislösungen.

An diesem Beispiel kann man sich Folgendes klar machen: Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems über K ist „in natürlicher Weise“, d.h. unabhängig von jeder Auswahl, ein Untervektorraum des K^n (wenn n die Anzahl der Variablen ist). Der Lösungsraum kann auch stets in eine „lineare Bijektion“ (eine „Isomorphie“) mit einem K^d ($d \leq n$) gebracht werden, doch gibt es dafür keine natürliche Wahl. Dies ist einer der Hauptgründe dafür, mit dem abstrakten Vektorraumbegriff zu arbeiten anstatt lediglich mit dem K^n.

Erzeugendensysteme

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen über einem Körper K ist ein Untervektorraum des K^n. Häufig wird dieser Lösungsraum durch die Menge aller „Linearkombinationen“ von endlich vielen (besonders einfachen) Lösungen beschrieben. In dieser und der nächsten Vorlesung entwickeln wir die dazu notwendigen Begriffe.



Die von zwei Vektoren v_1 und v_2 erzeugte Ebene besteht aus allen Linearkombinationen $u = xv_1 + yv_2$.

Definition 6.13. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$s_1v_1 + s_2v_2 + \cdots + s_nv_n \text{ mit } s_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* $(s_1, \ldots, s_n)$).

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

Definition 6.14. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ als

$$v = \sum_{j \in J} s_j v_j$$

darstellen kann mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $s_j \in K$.

Im K^n bilden die Standardvektoren e_i, $1 \leq i \leq n$, ein Erzeugendensystem. Im Polynomring $K[X]$ bilden die Potenzen X^n, $n \in \mathbb{N}$, ein (unendliches) Erzeugendensystem.

Definition 6.15. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer Familie v_i, $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i \middle|\, s_i \in K,\, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten Untervektorraum*.

Der von der leeren Menge erzeugte Unterraum ist der Nullraum.[4] Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{sv \mid s \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt“ des aufgespannten Raumes davon ab, wie die

[4]Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus der Definition ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn $w = sv$ gilt, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Unterraum stimmt mit dem von v erzeugten Unterraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene“.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

Lemma 6.16. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist auch der Durchschnitt*[5]
$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$
ein Untervektorraum.

(2) *Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum*[6] *von V.*

(3) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$
ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.16. □

[5] Der Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} T_j$ zu einer beliebigen Indexmenge J und einer durch J indizierten Familie T_j, $j \in J$, von Teilmengen einer festen Obermenge M besteht aus allen Elementen aus M, die in allen Mengen T_j enthalten sind.

[6] In der Bezeichnung „erzeugter Unterraum“ wurde diese Eigenschaft schon vorweg genommen.

Abbildungsverzeichnis