中華文庫

初中第一集

數學補習用書

代數

許蒓舫編著
秦　沅校訂

中華書局印行

數學補習用書

代數

編輯大意

著者因鑒於近年投考高中學生數學程度的低落,各地補習學校、補習夜校以及暑期學校的日見增多,而所用數學教材全係普通教科書,不論教者、學者都感覺種種困難,所以特地編了這套初中數學補習用書,以應各學校的需要.

本書分算術、代數、幾何、三角四册,這是代數的一册,內容有下面的幾個特點:

(一) 取材雖與普通教科書大略相同,然而去其繁蕪,擷其精華,把在一年之內才能修完的功課,縮短在三個月裏面讀畢.

(二) 敍述法則及說明數理等等,都用極淺顯易曉的方法,不但可由教師講授,並可自己修習;不但可作補習用書,並可作投考指南用.

(三) 編制方面,務求有條不紊;排印方面,力求醒眉豁目.總之,本書全部力求整齊清楚,使學者可以一覽瞭然,以免東翻西檢的麻煩.

(四) 本書篇幅雖甚冗長,然教師所應講述的,書中已詳備無遺,不必另加補充,所以費時不多,平均每

小時可授五頁.假使每天授一時,在十一個星期之內可以全部授畢.但實際可伸可縮,如時間寬裕,把習題都詳細講解,另加黑板練習同測驗,可授一學期;如嫌時間不足,可把加 * 號的部分略去不做,這樣僅須八個星期.

(五)　數學首重理論,本書每述一法,必說其理.學者能明白他的原理,自能記熟他的方法,不必加以強記了.

(六)　本書所選習題都細加斟酌,嚴格取捨,雖爲量不多,然已能盡變化的能事.初中學生得此,很足以應付裕如了.

(七)　習題中凡是與所舉的例題略有不同的,都加以提示,俾教師可以節省講解的時間,由學生自行練習.不過學生最好能先用一番腦力試做一下,非到萬不得已的時候,不去看提示,藉此仍可得一鍛鍊思想的機會.

(八)　本書間或插入遊戲問題同有趣味的古算題,以增學者興趣.

(九)　本書附錄習題答案在後面,倘遇教師不及批閱練習簿時,學生也可以自己檢查有無錯誤.

(十)　在代數上,學生極易犯的錯誤特多,本書隨時提出,使學生特別留意,藉免錯誤.

(十一) 正、負數的四則計算,純用實例說明,學者一經對照,自會明瞭.

(十二) 正、負數的加減法可不必拘泥於代數規則,而用簡易的算術方法解.

(十三) 有些簡易的計算,像單項式的乘法、除法,對數同眞數的互求等,是各種計算的基礎,學者應多加練習的工夫.本書因這種習題俯拾卽是,所以把他略去,可由教師臨時在黑板假設問題,作口頭問答.

(十四) 在代數上,往往一種算法有不少的變化,本書盡量舉出,各設例題,使學生對於特別的問題不致束手無策.有時遇到變化極多的算法,如因式分解等,則在習題中把特殊的問題都加以提示.

(十五) 關於乘算,有許多重要定律,他書大都不去提及,本書在第六章各例的注意中特別提出,使學者隨時留意.

(十六) 本書應用問題中所插的圖形,都用最適宜的方法畫成,能使題中各數的關係,在圖中明晰的顯出.學生如能細心仿傚,在解同類的問題時,必覺非常便利.

(十七) 本書所附的四位對數表,是很新的一種,所佔篇幅僅有四面,却可求到四位數的對數,頗切實用.

本書係著者本二十餘年的教授經驗,同歷年積存的講義稿,經數月的整理修正,始克告成,又蒙老師秦沅先生加以校訂,內容或較怱促出版的稍稍完備。至書末所附習題答案,雖經著者全部校算一過,但恐雜務煩心,難免錯誤.用此書者,如有發現,尚請賜函指示,俾再版時得以更正,不勝幸甚!

著者識。

數學補習用書

代 數

目 錄

數學補習用書

代　數

第一章　緒論

第一節　代數學的效力

代數是繼續算術解算術上不易解決或不能解決的問題,方法簡而效力大.算術上只能用十個死的數字來表數,代數上可用許多活的文字來表數,這是最大的一個區別.代數學的效力,全在用文字表數.他的妙用無窮,茲舉最要的二點於下:

1. **使式簡而賅**　用文字表數,可以使算式簡明;並且可用一個算式把各種同類的算式賅括淨盡.下面舉兩個例子:

【例一】　在算術,由加法可得下列諸式:

$$1+2=2+1,$$

$$2+3=3+2,$$

$$3+4=4+3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

這些式子,每一式僅有一用,要想把諸式總括在一個式子裏面,必須用語言表成下式:

任何甲數＋任何乙數

＝任何甲數＋任何乙數.

但在代數,可用 a、b 表任何兩數,於是上式可寫成

$$a+b=b+a.$$

不是很簡明嗎?

【例二】 某人每小時行路 6 里,問 2 小時行路幾里? 3、4、5、6、……小時各行路幾里?

在算術,要表某人所行的里數,須用下列諸式:

2 小時內所行的里數$=6\times2$,

3 小時內所行的里數$=6\times3$,

4 小時內所行的里數$=6\times4$,

…………………………………………………….

這些式子,每一式僅有一用.要想把諸式總括在一個式子裏面,必須用語言表成下式:

共行的里數＝每時所行的里數

×所行的時數.

但在代數,可用 s 表共行的里數,v 表每時所行的里數,t 表所行的時數,於是上式可寫成

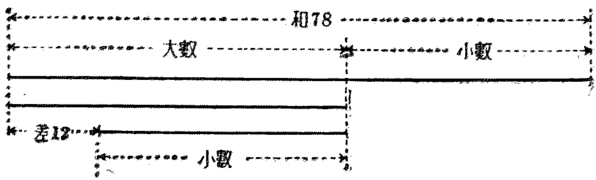
$$s=v\times t.$$

不是很簡明嗎?

2. 使解法簡明　算術解法必須用普通言語記述,才能使人明瞭;代數解法可純用式子代表言語,格外簡明.舉例於下:

【例】　大小兩數的和是78,差是12,求這兩數.

在算術,須繪出如下圖的線段,再用言語詳解.



I.　大數比小數多12,所以小數加上12就是大數.

II.　大小二數的和是78,所以小數加上12(即大數),再加上小數得78.

III.　就是兩個小數加12得78.

IV.　於是知兩個小數是 $78-12=66$, 即小數的2倍是66.

V.　$\therefore$ 小數是 $66\div 2=33$.

VI.　大數是 $33+12=45$.

在代數,可用 x 表小數, y 表大數,於是上面的解法可寫成

I.　$y=x+12$.

II.　$x+12+x=78.$

III.　$2x+12=78.$

IV.　$2x=78-12=66.$

V.　$\therefore\quad x=66\div2=33.$

VI.　$y=33+12=45.$

不是更加簡明嗎?

第二節　文字符號的使用

1. 文字　代表數的文字,普通用拉丁字 a、b、c、……、x、y、z. 間有用希臘字 α、β、ω、……的.

問題中有時含假設同所求的兩數,稱假設的數做已知數,習慣上用 a、b、c、……來代表;所求的數叫做未知數,習慣上用 x、y、z、……來代表.

2. 符號　代數上使用的符號,同算術中的大都相同,不過略有變通如下:

(a)　代數學中除數字同數字相乘外,往往略去兩因數間的乘號.

【例】　$v\times t$ 可寫成 vt; $3\times a\times b$ 可寫成 $3ab$; $5\times(a+b)\times(a-b)$ 可寫成 $5(a+b)(a-b)$.

(b)　代數學中大都用分數記法來表兩數相除,不常用除號.

【例】 $a\div b$ 可寫成 $\frac{a}{b}$；

$$(x^2-y^2)\div(x+y)\text{ 可寫成 }\frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

其餘如 $+$、$-$、$\sqrt{\ }$、$\sqrt[3]{\ }$、$=$、$>$、$<$、$\neq$、( )、[ ]、{ } 等號都同算術一樣。

第二章 簡易方程式

第一節 重要名詞

(I) 關於代數式的

1. 代數式 數字、文字、符號連結而成的，叫做代數式，略稱式.

【例】 $3a+5b-2c,\ x+7,\ mn,\ \frac{a}{b}$等，都是代數式.

2. 代數式的值 把代數式中所含的文字，各用確定的數字代入計算，所得的結果叫做代數式的值.

【例】 設 $a=5,\ b=4,\ c=2,\ d=1$，那末代數式 $a+b-cd$ 的值是 $5+4-2\times1=7$.

3. 項 代數式中若含有加、減號，那末凡被加、減號所隔的，前後都叫做項.

【例】 在 $5x^2-3x+1$ 中，$5x^2$ 是一項，$3x$ 是一項，1 是一項；在 $5(a+b)-7$ 中，$5(a+b)$ 是一項，7 是一項.這裏要注意的，a 同 b 不是整個代數式中的項，而是 $5(a+b)$ 的因數 $(a+b)$ 中的項.

4. 項的號 代數式中各項前面的加、減號，叫做該項的號.式中第一項的前面沒有號時，可當作有加號.

【例】 x^3-4x^2-2x+1中有四項,x^3的號是加,$4x^2$的號是減,$2x$的號是減,1的號是加.

【注意一】 因x^3可視作$0+x^3$,所以好當他有加號.

【注意二】 項的後面的號,同這項無關.

5.係數,因式 **幾個數同文字連乘而得一項,這幾個數同文字各叫做該項的因式或因數.認一項中的某一因式作主體,那末其餘各因式的積叫做該因式的係數.**

【例】 在$6xy$一項中,6是$6xy$的因數,x同y都是$6xy$的因式.認$6xy$中的因式x作主體,那末$6y$是他的係數;認因式y作主體,那末$6x$是他的係數.

【注意一】 通常單稱係數,而不指明是那個因式的係數時,所指的是其中的數字因數.例如$6xy$的係數是6;$8a^2b^3$的係數是8.

【注意二】 沒有數字因數的項,他的係數是1.例如xy的係數是1,因為xy可以當作$1xy$(即$1\times xy$)看.

【注意三】 通常項中的數字因數都放在文字因式之前.例如$5ab$不應寫為$a5b$或$ab5$;$7(x+y)$不應寫為$(x+y)7$.

6.同類項 **諸項中除係數外,其餘完全相同的,叫做同類項.**

【例】 $6x$ 同 $11x$ 是同類項;$3a^2b$ 同 $7a^2b$ 也是同類項;而 $3a^2b$ 同 $7ab^2$ 却不是同類項,因爲除係數外,其餘是 aab 同 abb,這是不相同的.

(II) 關於方程式的

1. 等式 兩個代數式的值若相等,中間可用等號連起來,所成的叫做等式.

【例】 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, $4x+3x=21$ 等都是等式.

【注意】 等式中間只能有一個等號,否則就不是等式,像 $\dfrac{3a+5a}{2}=\dfrac{8a}{2}=4a$,只能稱做連等式.

2. 恒等式、方程式 等式中的未知數,用任意的數代入計算,兩邊都能相等的,叫做恒等式.等式中的未知數用適當的數代入計算,兩邊的值才能相等的,叫做方程式.

【例】 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 中,a 同 b 任以何數代入,兩邊的值恆能相等,所以是恆等式; $4x+3x=21$ 中,只能用 3 代 x,兩邊才能相等,所以是方程式.

3. 方程式的根 方程式中未知數所表的值,就是方程式的根.

【例】 方程式 $4x+3x=21$ 中的未知數 x,只能表 3,否則這方程式不成立,於是稱這 3 是該方程式的根.

4.解方程式 求方程式的根的手續,叫做解方程式.

第二節 重要定律

代數中所根據的重要定律,同算術中的一樣,我們在算術中已經學過.現在再把代數中常用的十一條,用代數方法記述如下:

1.加法的交換定律: $a+b=b+a$.

2.加法的結合定律: $a+b+c=(a+b)+c$
$=(b+c)+a=(c+a)+b$.

3.加減的變序定律: $a+b-c=a-c+b$.

4.加差定律: $a+(b-c)=a+b-c$.

5.減差定律: $a-(b-c)=a-b+c$.

6.累減定律: $a-b-c=a-(b+c)$.

7.乘法的交換定律: $ab=ba$.

8.乘法的結合定律: $abc=(ab)c$
$=(bc)a=(ca)b$.

9.乘法的分配定律: $a(b+c)=ab+ac$;
$a(b-c)=ab-ac$.

10.除法的分配定律: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$;
$\frac{a-b}{c}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$.

11.定商定律: $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$; $\frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}$.

第三節　等式公理

關於等式,有四條大家可以公認他成立的公理,好用他作各種計算的根據,現在列舉於下:

1.加法公理　等式的兩邊各加上等數,兩邊仍能相等.

設有等式$a=b$,則$a+c=b+c$.

2.減法公理　等式的兩邊各減去等數,兩邊仍能相等.

設有等式$a=b$,則$a-c=b-c$.

3.乘法公理　等式的兩邊各以等數乘,兩邊仍能相等.

設有等式$a=b$,則$ac=bc$.

4.除法公理　等式的兩邊各以等數除,兩邊仍能相等.

設有等式$a=b$,則$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

第四節　基礎計算

(I)　關於代數式的

1.求代數式的值　由第一節(I)的 2,知

道用確定的數代替代數式中的文字,可求該式的值.

例題　設 $a=5, b=3, c=2$,求 $8a^2-3bc+7abc^2$ 的值.

【解】　$8a^2-3bc+7abc^2=8\times5^2-3\times3\times2$

$$+7\times5\times3\times2^2$$

$$=200-18+420=602.$$

2. 簡易加減法　諸同類項可以加減,只須把公共文字的係數加減出來,做該公共文字的係數.

例題一　$7x-6x+9x=?$

【解】　$7x-6x+9x=(7-6+9)x=10x.$

【理由】　由乘法的分配定律,知道用 x 分乘 7、6、9 三數後,求他們的積的和或差,等於用 x 直接乘 7、6、9 三數的和或差.實際 $7x$ 是 x 的 7 倍,也就是 7 個 x 的和,猶之算術上的 7 升是 7 個 1 升的和;同樣,$6x$ 是 6 個 x 的和,$9x$ 是 9 個 x 的和,所以這 x 可以當作一個單位看.假使問:7 升$-$6 升$+$9 升是多少?大家一算就知道是10升,所以 $7x-6x+9x$ 同樣可以知道是 $10x$.

【注意一】　在算術上,3 升不能同 5 斤相加減;同樣,在代數上,$3x$ 不能同 $5y$ 相加減.換句話說,就是非

同類項不能加減.

【注意二】 $5x$ 的 5 同 x 的中間是略去的乘號,不能誤作是加號.所以 $5x+2x=7+2x$, $5x-2x=5-2=3$, 都是錯的.

【注意三】 沒有數字因數的項,他的係數是 1, 不是 0, 所以 $8x-3x+x=(8-3)x=5x$ 是錯的.

【注意四】 許多項加減,要順了次序逐步計算,否則要錯誤的.例如 $9x-4x-3x=9x-x=8x$, 這就錯了.

【注意五】 算術中遇到連續的算式,有先算乘除後算加減的規定,代數中也是這樣,所以 $5+3x=8x$, $5x+x=5\times 2x$, $7x+2x=9\times 2x$ 等,都是錯誤的.

例題二 $9x+4y-2x-y=?$

【解】 $9x+4y-2x-y=9x-2x+4y-y=7x+3y.$

【理由】 根據加減的變序定律,知道可以掉換加數 $4y$ 同減數 $2x$ 的次序.

3. 簡易乘法 用一數乘一項,可用這數乘這項的數字因數.

例題 $8x\times 2=?$

【解】 $8x\times 2=(8\times 2)x=16x.$

【理由】 根據乘法的結合定律,知道

$$8x\times 2=8\times x\times 2=8\times 2\times x=16\times x=16x.$$

用一數乘諸項的和、差,等於用這數分乘

諸項,把各積依諸項中原有的加、減號加、減.

例題 $5(x+6)=?$

【解】 $5(x+6)=5x+30.$

【理由】 根據乘法的分配定律.

【注意】 用一數乘諸數的積時,不能用這數分乘諸數,再求積,所以 $5\times 4x=20\times 5x$ 是錯誤的.

4. 簡易除法 用一數除一項,可用這數除這項的數字因數.

例題 $18x\div 3=?$

【解】 $18x\div 3=(18\div 3)x=6x.$

【理由】 除是乘的逆算,所以 $18x\div 3=18x\times\frac{1}{3}.$ 根據上條的方法,知道 $18x\times\frac{1}{3}=(18\times\frac{1}{3})x=6x.$

習題一

以 $a=7$, $b=3$, $c=1$, $x=5$, $y=4$ 代入以下各題的代數式,而求他們的值:

(1) $5ab^2c^3.$　　(2) $3a-5b.$

(3) $3(a+5b).$　　(4) $\frac{3}{4}a(x+y).$

(5) $a^2-b^2+c^2.$　　(6) $\sqrt{3a+5b}.$

(7) $\frac{a+2b-3c}{x-y}.$　　(8) $\frac{14x+20}{a+b}.$

以 $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{1}{2}$ 代入以下各題的代數式,而求他們的值:

(9) $12ab+5bc$.　　(10) $8a^2b^2+35$.

(11) $\frac{1+a}{1-b}+\frac{1+b}{1-a}$.　　(12) $\frac{2-a^2-b^2}{(1-b)(1-a)}$.

(13) $(a+c)^2$.　　(14) $a^2+2ac+c^2$.

化簡下列各題:

(15) $6x-3x-x$.　　(16) $8x+5x-4x-x$.

(17) $7x-6x$.　　(18) $7x-(6x-3x)$.

(19) $6x+9y+x-4y$.　　(20) $7+9x-5$.

(21) $9y+9x-4x$.　　(22) $3x+9-2x+7$.

(23) $6\times 8x$.　　(24) $7\times 6x\times 5$.

(25) $9(3x-4y+2)$.　　(26) $2(8x-9)$.

(27) $63x\div 7$.　　(28) $2x\div\frac{2}{5}$.

(29) $5(x+8)+6(x-4)$.　　(30) $9(x+y)+4(x-y)+7y$.

(*II*)　關於方程式的

1. 去分母法　凡方程式中有分數的,應先用各分母的最小公倍數乘各項,約去他們的分母,化成簡式.

例題　去方程式 $\frac{x}{4}+\frac{2x}{3}-\frac{x}{2}=5$ 的分母.

【解】　用12乘原方程式的各項,得

$$\frac{x}{\cancel{4}}\times\cancel{12}^{3}+\frac{2x}{\cancel{3}}\times\cancel{12}^{4}-\frac{x}{\cancel{2}}\times\cancel{12}^{6}=5\times 12,$$

即 $3x+8x-6x=60.$

【理由】 根據等式的乘法公理,知道用12乘等式的兩邊,這等式仍能成立.又用12乘左邊三項的和,差,根據乘法的分配定律,知道等於用12分乘各項,再求積的和,差.

特例 假使原分數的分子不止一項的,那末約去分母後,應該用括號罩在原分子的外面.

例題 去方程式$\frac{x+5}{3}+\frac{x-7}{5}=4$的分母.

【解】 用15乘原方程式的各項,得

$$\frac{x+5}{\cancel{3}}\times\cancel{15}^{5}+\frac{x-7}{\cancel{5}}\times\cancel{15}^{3}=4\times 15,$$

即 $5(x+5)+3(x-7)=60.$

【理由】 $\frac{x+5}{3}\times 15=(x+5)\div 3\times 15$

$$=(x+5)\times\frac{1}{3}\times 15=(x+5)\times 5.$$

可見$(x+5)$是被除數,應該當作一個數看,所以必須用括號括起來.

2. 交叉乘法 凡方程式的兩邊都是單獨一個分數的,可用右邊分母乘左邊分子,左邊分母乘右邊分子,中間用等號連起來,於是

分母也就去掉.

例題 化簡方程式 $\frac{x}{25}=\frac{3}{5}$.

【解】 交叉乘,得 $5x=75$.

【理由】 交叉乘實際就是用兩分母的積乘兩邊,看下式自明:

$$\frac{x}{25}\times 25\times 5=\frac{3}{5}\times 25\times 5.$$

特例 分子不止一項的,也要用括號括起來,然後交叉乘.

例題 化簡 $\frac{5x-4}{2}=\frac{x+7}{3}$.

【解】 交叉乘,得 $3(5x-4)=2(x+7)$.

【理由】 同上條去分母法的特例一樣.

3. 去括號法 去括號法有三種,分述如下:

(A) 括號前沒有數乘,而有 + 號的,可去掉括號,不變括號內符號.

例題一 去方程式 $3x+(5x-7)=9$ 的括號.

【解】 去括號,得 $3x+5x-7=9$.

【理由】 根據加差定律.

例題二 去方程式 $2x+(3x+5)=15$ 的括號.

【解】 去括號,得 $2x+3x+5=15$.

【理由】 根據加法的結合定律.

(B) 括號前沒有數乘,而有一號的,去掉括號後,應變括號內的符號.

例題一 去方程式$7x-(3x-9)=17$的括號.

【解】 去括號,得 $7x-3x+9=17$.

【理由】 根據減差定律.

例題二 去方程式$3x-(x+7)=3$的括號.

【解】 去括號,得 $3x-x-7=3$.

【理由】 根據累減定律.

(C) 括號前有一數乘的時候,可利用分配定律去括號.

例題 去方程式$5(2x-3)=2(3x-2)-10$的括號.

【解】 去括號,得 $10x-15=6x-4-10$.

【理由】 就是簡易乘法.

特例一 括號前所乘數的前面若是一號,那末用(C)的方法脫去括號後,把乘得的各項重行放在括號裏面,再用(B)的方法去掉他.

例題 去方程式$5x=8x-2(x+10)$的括號.

【解】 乘算,得 $5x=8x-(2x+20)$,

去括號,得 $5x=8x-2x-20$.

【理由】 $2(x+10)$ 是表 2 同 $(x+10)$ 的積,要從 $8x$ 減去他,所以 $2(x+10)$ 應該當作一個數看.由乘法化 $2(x+10)$ 為 $(2x+20)$,於是要從 $8x$ 減去 $(2x+20)$,根據累減定律,知道減去 $2x$ 同 20 的和,應該累減這兩數.

特例二 凡方程式中同時有分數和括號的,如括號內無分數,可先去分母.

例題 化簡方程式 $\frac{1}{2}(x+1)-\frac{2}{3}(x-1)=1$.

【解】 先去分母,得

$$\frac{1}{2}(x+1)\times 6-\frac{2}{3}(x-1)\times 6=1\times 6,$$

即 $3(x+1)-4(x-1)=6.$

乘算,得 $3x+3-(4x-4)=6.$

去括號,得 $3x+3-4x+4=6.$

特例三 如括號內有分數,可先去括號.

例題 化簡方程式

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(2x-\frac{1}{2}\right)=1\frac{1}{4}.$$

【解】 乘算,得 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{5}x-\frac{1}{10}\right)=\frac{5}{4}.$

去括號,得 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}=\frac{5}{4}.$

去分母,得

$$\frac{1}{2}x\times 20+\frac{1}{4}\times 20-\frac{2}{5}x\times 20+\frac{1}{10}\times 20=\frac{5}{4}\times 20.$$

即 $10x+5-8x+2=25.$

4.移項法 凡方程式中沒有分數同括號的,可把含有 x 的各項移在一邊,不含 x 的各項移在另一邊;凡移過等號的項,都要變他前面的號.

例題 使方程式 $5x-7=11+3x$ 中含 x 的項同不含 x 的項分集在兩邊.

【解】 移項,得 $5x-3x=11+7.$

【理由】 根據等式的加法公理,知道在等式的兩邊各加7,仍能相等,故得 $5x-7+7=11+3x+7.$ 因從一數減去7,再加7,仍是該數.故上式即 $5x=11+3x+7.$ 再根據減法公理,兩邊各減去 $3x$,仍能相等,故得

$$5x-3x=11+7.$$

特例一 項的前面沒有號的,移項時應該當作他有加號;前面原有加號的項,若把他放在第一項,就可略去他的加號.

例題 移方程式 $15x-12=2x+14$ 的項.

【解】 移項,得 $15x-2x=14+12.$

【理由】 根據加法的交換定律,知道 $2x+14$ 同 $14+2x$ 一樣.

特例二 項移過等號後,應放在第幾項,要看能否夠減而定.

例題一　移方程式$10x-15=6x-14$的項.

【解】　移項,得　$10x-6x=15-14$.

例題二　移方程式$125-7x=145-12x$的項.

【解】　移項,得　$12x-7x=145-125$.

例題三　移方程式$3x-19=2-x-9$的項.

【解】　移項,得　$3x+x=19+2-9$.

特例三　若把含x的項移到左邊,不够減時,可改移到右邊.

例題一　移方程式$56+7x=42+9x$的項.

【解】　移項,得　$56-42=9x-7x$.

例題二　去方程式$5(4-7x)+3(6-x)=30$的括號,再移項.

【解】　去括號,得　$20-35x+18-3x=30$.

移項,得　$20+18-30=35x+3x$.

特例四　有時要避免第一項的前面有減號,須利用變序定律,在等式的一邊掉換項的次序.

例題　去方程式$5(2-x)+7(x-3)=x+3$的括號,再移項.

【解】　去括號,得　$10-5x+7x-21=x+3$.

移項,得　$7x-5x-x=21+3-10$.

5. 集項法　方程式經移項之後,可把兩邊各集成一項,含 x 的一邊照本節(I)的簡易加減法做;不含 x 的一邊照普通算術方法做.

例題　集方程式 $3x-x+5x=7+21$ 兩邊的項.

【解】　集項,得　$7x=28$.

6. 去係數法　方程式經集項之後,用 x 的係數除兩邊,就得 x 的值.

例題　去方程式 $8x=72$ 的係數.

【解】　去係數,得　$x=9$.

【理由】　根據等式的除法公理,用 8 除等式的兩邊,仍能相等;再根據簡易除法,得以 8 除 $8x$ 的商是 x.

【注意】　去係數的意思,是使 x 的係數爲 1,並非眞把係數去掉.

第五節　簡易方程式解法

解簡易方程式,不外用上述的六種基礎方法,他的步驟如下:

I.　用去分母法、交叉乘法或去括號法把原方程式化爲簡式.

II.　移含 x 的項於一邊,不含 x 的項於

另一邊.

III. 兩邊各集爲一項.

IV. 使 x 的係數爲 1,即得 x 的值.

V. 以 x 的值代入原方程式,看是否適合.

【注意】 最後一步應另備草稿,不必寫在解法裏面.

例題一 解方程式 $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=45$.

【解】 去分母 $\frac{x}{2}\times 12+\frac{x}{3}\times 12+\frac{x}{4}\times 12=45\times 12$.

即 $6x+4x+3x=540$.

集項 $13x=540$.

去係數 $x=41\frac{7}{13}$.

例題二 解方程式 $\frac{x+5}{3}+\frac{x+3}{4}=5$.

【解】 去分母 $\frac{x+5}{3}\times 12+\frac{x+3}{4}\times 12=5\times 12$.

即 $4(x+5)+3(x+3)=60$.

去括號 $4x+20+3x+9=60$.

移項 $4x+3x=60-20-9$.

集項 $7x=31$.

去係數 $x=4\frac{3}{7}$.

例題三 解方程式 $\frac{x}{17}=\frac{29}{51}$.

【解】 交叉乘 $51x=493$.

去係數 $x=\frac{493}{51}=\frac{29}{3}=9\frac{2}{3}$.

【注意】 通常方程式只能有二個代數式及中間一個等號,不能幾式連等;不過最後一步求得 x 的值後化簡時,可以連等.

例題四 解方程式 $\frac{x-4}{3}=\frac{3x-7}{4}$.

【解】 交叉乘 $4(x-4)=3(3x-7)$.

去括號 $4x-16=9x-21$.

移項 $21-16=9x-4x$.

集項 $5=5x$.

去係數 $1=x$.

即 $x=1$.

【注意】 通常方程式中的項移過等號,必須變他前面的號,但在最後一步求得 x 的值後,若 x 在等號右邊,可把兩邊對調,使 x 調在左邊,比較普通些.

例題五 解方程式 $x+(2x-7)=32-(x-9)$.

【解】 去括號 $x+2x-7=32-x+9$.

移項 $x+2x+x=32+9+7$.

集項 $4x=48$.

去係數 $x=12$.

例題六　解方程式

$$6(x-5)+2x=8x-2(x+10).$$

【解】　乘算　$6x-30+2x=8x-(2x+20).$

去括號　$6x-30+2x=8x-2x-20.$

移項　$6x+2x-8x+2x=30-20.$

集項　$2x=10.$

去係數　$x=5.$

例題七　解方程式

$$3(x-5)+4x-1=2(x-8).$$

【解】　去括號　$3x-15+4x-1=2x-16.$

移項　$3x+4x-2x=15+1-16.$

集項　$5x=0.$

去係數　$x=0.$

【理由】　以 5 除 0,商仍是 0,因爲以 0 乘 5,積是 0 的緣故.

例題八　解方程式 $\frac{3}{4}(x+2)-\frac{5}{6}(x-2)=3.$

【解】　去分母　$9(x+2)-10(x-2)=36.$

乘算　$9x+18-(10x-20)=36.$

去括號　$9x+18-10x+20=36.$

移項　$18+20-36=10x-9x.$

集項　$2=x,$

即　$x=2.$

【注意】 去分母時用12乘各項,可以利用心算,不必寫出,藉省篇幅.

例題九 解方程式

$$\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}.$$

【解】 乘算,去括號,得 $\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}=\frac{1}{6}$.

去分母 $54x+9-24x-8=6$.

移項 $54x-24x=6+8-9$.

集項 $30x=5$.

去係數 $x=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

習題二

解下列的方程式:

(1) $3x=2x+7$. (2) $2x-4=x+1$.

(3) $5x+6=x+14$. (4) $7x-19=5x+9$.

(5) $8x+7=4x+31$. (6) $12x+7=8x+15$.

(7) $27-5x=18-2x$. (8) $3x+7=5x-7$.

(9) $12x-9=8x-1$. (10) $133-3x=x-83$.

(11) $\frac{2}{x}=\frac{3}{4}$. (12) $\frac{2x}{15}=\frac{8}{45}$.

(13) $\frac{25}{27}=\frac{5}{3x}$. (14) $\frac{13}{21}=\frac{65x}{84}$.

(15) $\frac{3}{8}=\frac{x}{4}$.　　(16) $\frac{15}{2x}=\frac{5}{8}$.

(17) $\frac{3x}{4}=9$.　　(18) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=8$.

(19) $36-\frac{4x}{9}=8$.　　(20) $\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9$.

(21) $\frac{5x}{6}+2=\frac{3x}{4}+5$.　　(22) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=\frac{13}{12}$.

(23) $\frac{3}{x}-3=\frac{1}{x}-1$.　　(24) $\frac{11}{4}-\frac{3}{x}=\frac{1}{x}-\frac{325}{100}$.

(25) $\frac{3x}{2}-4=\frac{3}{4}-x$.　　(26) $\frac{5x}{6}-\frac{2}{5}=\frac{1}{3}$.

(27) $3(x-4)=2(x+7)$.　　(28) $3(2x+3)=7x+1$.

(29) $5x+2(2-x)=16$.　　(30) $5x-(x-7)=27$.

(31) $\frac{2x-7}{4}=\frac{4x-9}{3}$.　　(32) $\frac{x-8}{9}=\frac{x-9}{8}$.

(33) $\frac{13-7x}{2}=\frac{8+7x}{5}$.　　(34) $\frac{x-5}{2}+\frac{x-2}{3}=1$.

(35) $\frac{3x-7}{4}+\frac{2x+9}{6}=3$.　　(36) $\frac{4+x}{6}-\frac{6-x}{7}=3$.

(37) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{x+3}{5}+2x-9$.

(38) $2(x+2)+3(x+3)+4(x+4)=5(x+5)+8(x-1)$.

(39) $(x+1)+(x+2)+(x+3)=2(x+6)$.

(40) $112x+43=124x+19$.

(41) $2(x+5)+5(x-4)=2$.

(42) $4(1-x)+3(5+x)=17.$

(43) $5(2x-3)=2(3x-2)-10.$

(44) $x+(2x-4)=25-(7x-1).$

(45) $9(x+1)-4(3x-8)=2.$

(46) $17-2(8-x)=32-9(7-2x).$

(47) $\frac{2}{3}(x-7)+\frac{4}{5}(7x+1)=4.$

(48) $\frac{3}{4}(x-\frac{1}{3})=\frac{1}{6}(5x+\frac{1}{2})-9.$

(49) $\frac{7}{11}(6+3x)-\frac{3}{4}(9+2x)=\frac{5}{8}.$

(50) $9(x+\frac{1}{4})-7(x-\frac{1}{5})=6\frac{1}{8}.$

第六節 創立代數式法

要解應用問題,必先用 x 代題中的未知數,依題意創立方程式.要立方程式,必先創立方程式兩邊的代數式.創立代數式雖沒有一定的方法,然而可假設任何的數字,考察這各數間的關係,得出他的立式方法,然後用文字替代數字,就得所要的代數式.

例題一 x 比 a 大多少?

【解】 要解這問題,可任取二簡單的數來思索比較.假使你問自己:7 比 3 大多少?那末一定立刻可

以回答說:大4.於是研究這所得的4同原有的7及3有什麼關係,知道4是由$(7-3)$而得.拿來同本題一比較,就知道本題的答數應該是$x-a$.

例題二 父年36歲,子年11歲,x年後二人的年紀共計幾歲?

【解】 假使問:3年後二人共計幾歲?那末你一定可以算出那時父年39歲,子年14歲,共計53歲.用式子表示,他們3年後的總歲數是$(36+3)+(11+3)$.

同樣知道x年後的總歲數應是$(36+x)+(11+x)$.

例題三 龜鶴共計100只,其中有龜x只,問有鶴幾只?共有脚多少?

【解】 假使其中有龜30只,那末鶴的只數應是$(100-30=)70$,總脚數應是$[4\times30+2\times(100-30)=]260$.

同樣知道其中有龜x只時,鶴的只數應是$100-x$,總脚數應是$4x+2(100-x)$.

例題四 有二位的整數,個位數字是x,兩位數字的和是13.問十位數字是幾?這二位的整數是幾?

【解】 假使個位數字是4,那末十位數字是$(13-4=)9$.

同樣知道個位數字是x時,十位數字是$13-x$.

十位數字是9,個位數字是4,那末這二位的數

是 94.

但是十位數字是 $13-x$, 個位數字是 x 時,這二位的數却不能寫作 $13-xx$. 因爲在算術上兩數字連寫,左邊的是在十位上,表這數字的十倍;右邊的是在個位上,就表這數字;而在代數上兩代數式連寫,却是相乘的意思,所以不能弄錯.

我們應當把94看作 9 的10倍同 4 的和,就是 $10\times9+4$.

同樣知道本題所求的二位數是 $10(13-x)+x$.

習題三

(1) 連續的三個整數中,中間的數是 x,其他的兩數是多少?

(2) 連續的四個奇數中,最小數是 x,其他的兩數是多少?

(3) 二數的差是 5,小數是 x,求大數.

(4) x 加何數可得 y.

(5) 有國幣 100 元,分給甲乙二人.若甲得 x 元,問乙得多少?

(6) 二數的積是54,其中一因數是 x,求其他一因數.

(7) 某人每時行路 6 里,問 x 時行路幾里?

(8) 某人每時行路 6 里,問 x 里須行幾時?

(9) 甲有國幣35元,乙有國幣28元.若甲給乙 x 元,問二人各有幾元?

(10) 兄年 a 歲,弟年 b 歲.問 x 年前二人各幾歲?

(11) x 元中有幾角? y 角合幾元?

(12) 十元紙幣 x 張,五元紙幣比十元紙幣多 3 張.問共值幾元?

(13) 有三位的整數,百位數字是 x, 十位數字是 y, 個位數字是 z. 求這數.

(14) 有二位的整數,十位數字是 x, 個位數字比十位數字少 4. 求這數.

(15) 除數是 x, 商是 2, 餘數是 3, 求被除數.

(16) 雞兔合計 a 只,其中有兔 x 只.問共有脚多少?

(17) 某人 3 年前爲 x 歲,問 5 年後幾歲?

(18) 3 年前父年爲子年的 2 倍,今年子 x 歲,問今年父幾歲?

【提示】 3 年前的子年是 $x-3$ 歲,那末 3 年前的父年是 $2(x-3)$ 歲.

(19) 童子分桃,每人 7 枚,餘 3 枚.設人數是 x, 問共有桃幾枚?設桃數爲 x, 問有幾人?

(20) 某人有國幣 100 元.若每日收入 x 元,用去 y 元,問 3 日後有幾元?

(21) 某船在靜水中每時能行10里,若在水流速度每

時 x 里的河中,問順流每時可行幾里?逆流每時可行幾里?

(22) 兵士列成正方陣,每邊 x 人,尚餘 25 人.問有兵幾人?

(23) 每斤價 5 角的茶 x 斤,與每斤價 6 角的茶 y 斤混合.問可得平均價每斤幾角的茶?

(24) 用一水管注水入水槽中,x 時而滿.問每時注水多少?

(25) 甲、乙二地相隔 x 里.某人往返一次,往時每時行 7 里,返時每時行 5 里,問共費幾時?

(26) 馬 x 頭,每頭價 80 元;牛的頭數是馬的 2 倍,每頭價 60 元.問牛、馬的總價是多少?

(27) 上酒 x 升同下酒 30 升混合,造成每升價 2 角 5 分的酒.求混合酒的總價.

(28) 矩形地長 x 尺,闊比長少 3 尺.求面積.

(29) 工人 x 名,其中 $\frac{1}{3}$ 每人每日工資國幣 6 角;其餘每人每日工資國幣 4 角.問每日須共發工資多少?

【提示】 上等工人有 $\frac{1}{3}x$ 名,下等工人有 $\frac{2}{3}x$ 名.

(30) 甲、乙、丙三人考試所得的分數不等.甲比乙少 15 分,丙得分數是乙得分數的一半:

(a) 設甲得 x 分,問乙、丙各得幾分?

(b) 設乙得 x 分,問甲、丙各得幾分?

(c) 設丙得 x 分,問甲、乙各得幾分?

第七節 簡易方程式應用問題

解應用問題的步驟如下:

I. 用 x 代題中適當的一個未知數.

II. 根據題中簡單的關係,用含 x 的代數式表題中其他的未知數.

III. 創立兩個不同的代數式,同表某量的值;或創立一個代數式,表題中有已知數的某量,用等號連起來,得一方程式.

IV. 解這方程式,以求一個未知數的值.

V. 用這個未知數的值,代入表其他未知數的代數式,也求其他未知數的值.

VI. 把求得的諸未知數的值代入原題,看同題中已知的關係是否符合.

【注意】 不可代入所列的方程式,因爲倘方程式已經錯誤,那末求得的值雖合方程式,却不合原題.

例題一 大小二數的和是56,大數比小數的 3 倍多 4. 求這二數.

【解】 設小數爲 x, 那末大數爲 $56-x$.

得方程式 $$56-x=3x+4.$$

移項 $56-4=3x+x$.

集項 $52=4x$.

去係數 $13=x$.

即 $x=13$……………………小數.

$56-13=43$……………………大數.

【注意一】 題中有一個未知數的,已知的關係必有二種.用 x 代二個未知數後,依一種關係表他一未知數,依又一種關係列方程式.

【注意二】 大數比小數的 3 倍多 4,實在就是大數等於小數的 3 倍加 4,所以 $3x+4$ 同 $56-x$ 同表大數,一定相等.

【注意三】 題中已知的兩種關係,第一種比較簡單,所以根據他立代數式表大數.若根據第二種關係立代數式表大數,應是 $3x+4$, 得方程式 $(3x+4)+x=56$, 這樣也可以.不過別的問題有時比較不便.

【注意四】 若用 x 表大數,那末小數是 $56-x$, 得方程式 $x=3(56-x)+4$, 也可以做.

例題二 有書若干本,分給學生.每人 5 本,少 3 本;每人 3 本,多 5 本.問學生幾人,書幾本?

【解】 設學生為 x 人,則書有 $(5x-3)$ 本,或 $(3x+5)$ 本.

得方程式　$5x-3=3x+5.$

移項　$5x-3x=3+5.$

集項　$2x=8.$

去係數　$x=4$……………………學生人數.

$5\times4-3=17$……………書的本數.

例題三　五元紙幣同十元紙幣共13張,值國幣105元.問兩種紙幣各幾張?

【解】　設五元紙幣爲 x 張,則十元紙幣爲$(13-x)$張.五元紙幣共值國幣$5x$元,而十元紙幣該共值國幣$10(13-x)$元.

得方程式　$5x+10(13-x)=105.$

去括號　$5x+130-10x=105.$

移項　$130-105=10x-5x.$

集項　$25=5x.$

去係數　$5=x.$

即　$x=5$…………五元紙幣的張數.

$13-5=8$…十元紙幣的張數.

例題四　甲,乙二人年齡的和是56歲.7年前甲的歲數是乙的2倍.問二人今年各幾歲?

【解】　設甲年爲 x 歲,則乙年爲$(56-x)$歲.7年前的甲年爲$(x-7)$歲,7年前的乙年爲$(56-x-7)$歲.

得方程式 $x-7=2(56-x-7)$.

去括號 $x-7=112-2x-14$.

移項 $x+2x=112-14+7$.

集項 $3x=105$.

去係數 $x=35$……………………甲的歲數.

$56-35=21$…………乙的歲數.

例題五　有二位的整數,十位數字比個位數字多2.若把二數字的位顚倒,再加原數,得88.求原數.

【解】　設原數的個位數字爲 x,則十位數字爲 $x+2$.原數當爲 $10(x+2)+x$,倒位數當爲 $10x+(x+2)$.

得方程式 $10(x+2)+x+10x+(x+2)=88$.

去括號 $10x+20+x+10x+x+2=88$.

移項 $10x+x+10x+x=88-20-2$.

集項 $22x=66$.

去係數 $x=3,\quad 3+2=5$.

$\therefore$ 原數是　53.

例題六　甲,乙二人從同地同向而行,甲每時行12里,乙每時行8里.但知乙先走 $3\frac{1}{2}$ 時,甲從後追去,問幾時而及乙?

【解】　設甲追 x 時而及乙,則乙共走 $(x+3\frac{1}{2})$ 時.

甲行路 $12x$ 里,乙行路 $8(x+3\frac{1}{2})$ 里.

得方程式 $\quad 12x=8(x+3\frac{1}{2})$.

去括號 $\quad 12x=8x+28$.

移項 $\quad 12x-8x=28$.

集項 $\quad 4x=28$.

去係數 $\quad x=7$……甲追及乙所需的時數.

例題七　水流每時的速度爲 3 里.一船順流行50里同逆流行30里的時間相等.求這船在靜水中每時的速度.

【解】　設這船在靜水中每時能行 x 里,則順流每時行 $(x+3)$ 里,逆流每時行 $(x-3)$ 里.順流50里費 $\frac{50}{x+3}$ 時,逆流 30 里費 $\frac{30}{x-3}$ 時.

得方程式 $\quad \frac{50}{x+3}=\frac{30}{x-3}$.

交叉乘 $\quad 50(x-3)=30(x+3)$.

去括號 $\quad 50x-150=30x+90$.

移項 $\quad 50x-30x=90+150$.

集項 $\quad 20x=240$.

去係數 $\quad x=12$……………………靜水中每時所行的里數.

例題八　東倉有米 450 石,西倉有米 200

石.東倉每日取出 20 石,西倉每日存入 30 石,問幾日後西倉的米爲東倉的米的 2 倍?

【解】 設 x 日後西倉的米爲東倉的 2 倍,則這時東倉存米 $(450-20x)$ 石,西倉存米 $(200+30x)$ 石.

得方程式 $200+30x=2(450-20x).$

去括號 $200+30x=900-40x.$

移項 $30x+40x=900-200.$

集項 $70x=700.$

去係數 $x=10$……………所需的日數.

例題九 有一工程,甲獨作 10 日可成;乙獨作 12 日可成.今甲、乙合做 3 日後,餘下的歸乙獨作,問尙需幾日可成?

【解】 設乙須再做 x 日可成,則甲僅做 3 日,乙共做 $(x+3)$ 日.甲每日做全事的 $\frac{1}{10}$, 3 日做全事的 $\frac{3}{10}$;乙每日做全事的 $\frac{1}{12}$, $(x+3)$ 日做全事的 $\frac{1}{12}(x+3)$.

得方程式 $\frac{3}{10}+\frac{1}{12}(x+3)=1.$

去分母 $18+5(x+3)=60.$

去括號 $18+5x+15=60.$

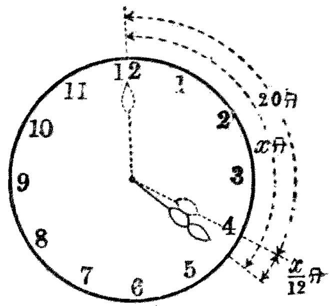
移項 $5x=60-18-15.$

集項 $5x=27.$

去係數 $x=5\frac{2}{5}$……………所需的日數.

例題十　在 4 點鐘同 5 點鐘的中間,鐘面兩針何時相重?

【解】　設二針相重在 4 點 x 分,則分針從 4 點到相重行 x 分,時針在同時間內必行 $\frac{1}{12}x$ 分.因在 4 點鐘時二針相距 20 分,故得方程式



$$x=20+\frac{x}{12}.$$

去分母　$12x=240+x.$

移項　$12x-x=240.$

集項　$11x=240.$

去係數　$x=21\frac{9}{11}.$

$\therefore$ 二針在 4 點 $21\frac{9}{11}$ 分的時候相重.

特例　特種的問題,用 x 代所求的未知數反覺不便;若用 x 代其他適宜的數,就很便利.

例題一　酒水混合,酒佔全量的 $\frac{1}{2}$ 少 5 斤,水佔全量的 $\frac{1}{4}$ 多 25 斤.問酒水各幾斤?

【解】　設全量爲 x 斤,則酒有 $(\frac{1}{2}x-5)$ 斤,水有 $(\frac{1}{4}x+25)$ 斤.

得方程式 $\frac{1}{2}x-5+\frac{1}{4}x+25=x.$

去分母 $2x-20+x+100=4x.$

移項 $100-20=4x-2x-x.$

集項 $80=x.$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\times 80-5=35$………酒的斤數.

$\frac{1}{4}\times 80+25=45$……水的斤數.

例題二　有甲、乙、丙、丁四數.已知乙、丙、丁的和是20,丙、丁、甲的和是22,丁、甲、乙的和是24,甲、乙、丙的和是27.求這四數.

【解】　設甲、乙、丙、丁四數的和爲 x,則甲數是 $x-20$,乙數是 $x-22$,丙數是 $x-24$,丁數是 $x-27$.

得方程式

$$x-20+x-22+x-24+x-27=x.$$

移項 $x+x+x+x-x=20+22+24+27.$

集項 $3x=93.$

去係數 $x=31.$

$\therefore$ 甲數是 $31-20=11,$

乙數是 $31-22=9,$

丙數是 $31-24=7,$

丁數是 $31-27=4.$

習題四

(1) 大小二數的和是37,差是 9.求這兩數.

(2) 某數比18所小的數,等於他的 2 倍比18所大的數.求某數.

(3) 三個連續整數的和是42.求這三數.

(4) 父年37歲,子年12歲.問幾年後父年是子年的 2 倍?

(5) 母年爲女年的 5 倍,3 年前則爲 8 倍.問今年各幾歲?

(6) 雞兎合計50頭,共有脚 142 只.問雞兎各幾頭?

(7) 綢每尺值國幣 8 角,緞每尺值國幣 1 元 2 角.某人以國幣42元買綢緞共 4 丈,問各買多少?

(8) 某工人搬運玻璃器 100 個.運到一個,得國幣 6 分;破壞一個,賠國幣 2 角.後共得國幣 4 元 7 角,問運到幾個?破壞幾個?

(9) 有二位的整數,兩數字的和是 9.數字交換後所成的數較原數大27.求原數.

(10) 有三位的整數,個位數字是 2.若移 2 到百位,其餘二位數字各退後一位,這樣所成的數較原數小 189.求原數.

【提示】 設原數爲 x,取去個位的 2,餘 $x-2$;前

面二位數字各退後一位,得 $\frac{1}{10}(x-2)$;

故 2 在百位所成的數是 $\frac{1}{10}(x-2)+200$.

(11) 童子分桃,若每童子 8 枚,多 2 枚;若每童 9 枚,不足 3 枚.求童數及桃數.

(12) 有犬逐兔,每秒鐘行 9 尺;兔每秒鐘行 5 尺.若兔比犬早 8 秒鐘出發,問犬追幾秒鐘後及兔?

(13) 有一繩,比一竹竿長 5 尺.把繩對折,却比竹竿短 5 尺.問各長多少?

(14) 有米一桶,甲獨吃,24 日可盡;乙獨吃,36 日可盡;丙獨吃,18 日可盡.問三人合吃,幾日可盡?

(15) 有一工程,甲獨做,5 日可成;乙獨做,7 日可成;丙獨做,9 日可成.今甲、乙合做 2 日後,再由乙、丙合做,問尚需幾日可成?

【提示】 設尚需 x 日,則甲做 2 日,乙做 $(2+x)$ 日,丙做 x 日.

(16) 有一水槽,上有甲、乙二管,可以灌水,下有丙管可以放水.若獨開甲管,5 分鐘可滿;獨開乙管,6 分鐘可滿;獨開丙管,在 12 分鐘內可使滿桶的水放盡.今三管齊開,問需幾分鐘槽中水滿?

(17) 求 7 點鐘同 8 點鐘中間,鐘面兩針相重的時刻.

(18) 求 9 點鐘同 10 點鐘中間,鐘面兩針成一直線的

時刻.

(19) 求4點鐘同5點鐘中間,鐘面兩針成一直角的時刻.

(20) 東倉存米459石,西倉存米237石.從東倉每日取出9石,西倉每日取出15石.問幾日後東倉存米是西倉存米的3倍?

(21) 某船在靜水中每時行5里;今在水流速度每時2里的河中往返一次,共費20時.問河長多少?

(22) 一汽車從甲地出發到乙地後,停30分鐘,再開回原處,共費11時.已知往時每時行18里,返時每時行24里.求兩地的距離.

(23) 甲、乙二人共有國幣40元.若乙給甲10元,則甲比乙多6元.問甲、乙二人原有國幣各多少?

(24) 甲、乙、丙三人分國幣6000元.乙所得的比甲的3倍少200元,丙所得的比乙的4倍多200元.問三人各得幾元?

(25) 甲、乙二數的和是100.甲數的$\frac{1}{5}$同乙數的$\frac{1}{3}$的和是24.求這二數.

(26) 繩長84尺,用以測井.井中一段的3倍等於井外一段的4倍.求井深.

(27) 甲種酒每升價3角,乙種酒每升價2角2分.問甲種酒6升同乙種酒幾升混合,可得平均每升

2 角 5 分的酒?

【提示】 設乙種酒用 x 升,則甲種酒 6 升值 180 分,乙種酒 x 升值 $22x$ 分,共值 $(180+22x)$ 分.但平均每升 25 分,共計 $(6+x)$ 升,應值 $6(25+x)$ 分.

(28) 一人賣去馬、牛、羊共 100 頭,其中牛數爲馬的 2 倍,平均每頭賣 2 元 3 角 5 分.已知馬每頭價 22 元,牛每頭價 12 元 5 角,羊每頭價 1 元 5 角.求馬、牛、羊的頭數.

(29) 某工場中甲種工人佔 $\frac{1}{2}$,每日工資國幣 6 角;乙種工人佔 $\frac{2}{5}$,每日工資國幣 5 角;其餘是丙種工人,每日工資國幣 4 角.已知每日共發工資國幣 270 元.求總人數.

【提示】 設全部工人爲 x 名,則甲種工人是 $\frac{1}{2}x$ 名,乙種工人是 $\frac{2}{5}x$ 名,丙種工人是

$$\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}x\right)\text{名.}$$

(30) 某人向甲、乙二銀行中借國幣若干.甲銀行所借的是全數的 $\frac{1}{4}$,年利率 5%;乙銀行所借的年利率是 4%.一年後共出利息 1700 元.問共借國幣多少?

(31) 甲、乙、丙、丁四數的和是 720.若甲數加上 3,乙數

減去 3,丙數乘以 3,丁數除以 3,結果都相等.求這四數.

【提示】 設 x 是相等的結果,則甲數是 $x-3$,乙數是 $x+3$,丙數是 $\frac{x}{3}$,丁數是 $3x$.

(32) 三角形的周圍長 33 尺.其最短邊的 2 倍,最長邊的 $\frac{1}{2}$,都等於第三邊減去 5 尺的差.問三邊各長多少?

(33) 一室中男、女雜坐.男子目中所見的人數,男女相等;女子目中所見的人數,男是女的 2 倍.問室中男、女各幾人?

【提示】 因為男子所見的男、女相等,他自己不算在內,可見實際男比女多 1 人.設女子 x 人,則男子是 $(x+1)$ 人.女子目中所見的女子,自己也不算在內,所以是 $(x-1)$ 人.

(34) 有賣柑者,第一次所售的柑,較原數的 $\frac{1}{2}$ 少 1;第二次所售的柑,較餘柑的 $\frac{1}{2}$ 少 1;第三次所售的柑,較第二次餘柑的 $\frac{1}{2}$ 少 1;結果餘柑 24 只.求原有的柑.

【提示】 第一次餘的柑較原數的 $\frac{1}{2}$ 多 1.第二次餘的柑較第一次餘柑的 $\frac{1}{2}$ 多 1,以下仿此.所以設原有柑 x 只,則第一次餘 $\left(\frac{x}{2}+1\right)$ 只,第

二次餘$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)+1\right]$只,…………….

(35) 某人賣雞蛋,第一次賣去原數的一半多半個;第二次賣去剩下的一半多半個;第三次賣去第二次剩下的一半多半個,恰巧賣盡.問原有雞蛋幾個?

【提示】　第三次所餘的蛋等於0.凡方程式的一邊是0的,把已知數移到這邊後,原有的0就不必寫出.

第三章 正負數

第一節 重要名詞

1. 正數,負數 遇被減數小於減數時,可以記「$-$」號在所小的數的前面,來表他們的差,這就是負數. 所以負數是表少幾,不足幾或欠幾的意思. 對於負數而言,尋常的數叫做正數,前面記「$+$」號.但這「$+$」號可以任意略去.

上面所說的「$+$」號同「$-$」號,叫做正號同負號,用來表數的性質;同平常用來表運算方法的加,減號相同.

【例】 $7-9=-2$, 這 -2 就是負數,表從 7 減 9,還欠 2 的意思.

【實例一】 某人負債 100 元,估計財產有80元.若以產抵債,還剩多少?

答: $80-100=-20$, 可見某人以產抵債,非但沒有剩,仍負債 20 元.

【實例二】 某公司的資本是10000元,虧本12000元.問餘資本多少?

答: $10000-12000=-2000$, 可見某公司非但沒

有資本剩下,還負債 2000 元.

【實例三】 某船在靜水中每時能行 4 里.若在水流速度每時 5 里的河中逆流而上,每時進行幾里?

答: $4-5=-1$, 可見這船非但不能進行,反每時退行 1 里.

【實例四】 日中溫度是攝氏 3 度,到夜半降 5 度,問夜半溫度是幾度?

答: $3-5=-2$, 可見夜半的溫度是零下 2 度.

2. 絕對值,相對數 略去數前的正負號,專指所餘的數字而言,這數字叫做該數的絕對值. 絕對值相同而符號相反的兩數,叫做相對數.

【例】 -2 的絕對值是 2, $+2$ 的絕對值也是 2, 而 $+2$ 同 -2 是相對數.

【注意】 0 是介於正負數中間的數,無正負可言,故 $+0=-0$, 而絕對值也是 0.

第二節 基礎計算

1. 正負數加法 同號二數相加時,可把絕對值加起來,前面冠以兩數原有的符號.

例題一 $(+7)+(+5)=?$

【解】 $(+7)+(+5)=+12$.

【實例】 設每時風力能使船進行 7 里,每時潮力能使船進行 5 里.若此船遇順風順潮,則每時可加速 12 里.

例題二　$(-7)+(-5)=?$

【解】　$(-7)+(-5)=-12.$

【實例】 同前,若此船遇逆風逆潮,則每時當減速 12 里.

【注意】 實際可說:正 7 同正 5,共正 12;負 7 同負 5,共負 12.

異號二數相加時,可把絕對值減出來,前面冠以兩數中絕對值大的所有的符號.

例題一　$(+7)+(-5)=?$

【解】　$(+7)+(-5)=+2.$

【實例】 同前,若此船遇順風逆潮,則每時可加速 2 里.

例題二　$(-7)+(+5)=?$

【解】　$(-7)+(+5)=-2.$

【實例】 同前,若此船遇逆風順潮,則每時當減速 2 里.

【注意】 實際可說:正 7 同負 5 中,正的絕對值多 2,所以和是正 2;負 7 同正 5 中,負的絕對值多 2,所以和是負 2.

兩個相對數的和是 0.

例題 $(+5)+(-5)=?$

【解】 $(+5)+(-5)=0.$

【實例】 設風力、潮力每時都能使船行 5 里,則無論順風逆潮或逆風順潮,此船的速度毫無增減.

正負數同 0 相加,和仍是該數.

例題 $(+5)+0=?$, $(-5)+0=?$

【解】 $(+5)+0=+5$, $(-5)+0=-5.$

【實例】 同前,若風忽止,則順潮時增速 5 里,逆潮時減速 5 里.

特例一 二數以上相加時,可先求出諸正數的和同諸負數的和,再相加.

例題 $(+5)+(-9)+(-3)+(+4)+(+2)=?$

【解】 $(+5)+(-9)+(-3)+(+4)+(+2)$

$$=(+11)+(-12)=-1.$$

特例二 諸數相加時,實際可把諸數間的加號完全略去,而把表諸數性質的符號當作加、減號看,用算術方法做.

例題 同上.

【解】 $(+5)+(-9)+(-3)+(+4)+(+2)$

$$=5-9-3+4+2=5+4+2-9-3$$

$$=11-12=-1.$$

【理由】　根據變序定律,可變各項的次序.再根據累減定律,知道減去 9,再減去 3,同減去 9、3 的和 12 一樣.

2. 正負數減法　兩數相減,可變減數的正、負號,來同被減數加.

例題一　$(+7)-(+5)=?$

【解】　$(+7)-(+5)=(+7)+(-5)=+2.$

【理由】　因 (-5) 同 $(+5)$ 的和是 0,所以把 $(-5)+(+5)$ 加在題中兩數之間,值仍不變.故得 $(+7)-(+5)=(+7)+(-5)+(+5)-(+5)=(+7)+(-5)$. 以下的例題都是一樣.

例題二　$(+7)-(-5)=?$

【解】　$(+7)-(-5)=(+7)+(+5)=+12.$

例題三　$(-7)-(+5)=?$

【解】　$(-7)-(+5)=(-7)+(-5)=-12.$

例題四　$(-7)-(-5)=?$

【解】　$(-7)-(-5)=(-7)+(+5)=-2.$

特例一　從正、負數減去 0,仍是該數;從 0 減去正、負數,所得的差是減數的相對數.

例題一　$(+8)-0=?$,　$(-8)-0=?$

【解】　$(+8)-0=+8$,　$(-8)-0=-8.$

例題二　$0-(+8)=?$,　$0-(-8)=?$

【解】 $0-(+8)=-8$, $0-(-8)=+8$.

特例二 從本條首列的四例,同上條特例二,可知性質的符號同運算的符號碰在一起,若是相同,可僅寫一加號;若相異時,可僅寫一減號.這樣一來,計算時可以便利得多.

例題一 用簡法求本條首列四例的差.

【解】 $(+7)-(+5)=7-5=2$.

$(+7)-(-5)=7+5=12$.

$(-7)-(+5)=-7-5=-12$.

$(-7)-(-5)=-7+5=-2$.

【注意】 第三式中的 $-7-5$,可以當作是 $0-7-5$. 根據累減定律,知 $0-7-5=0-12=-12$. 第四式中的 $-7+5$,可以當作是 $0-7+5$, 根據變序定律,知 $0-7+5=0+5-7=5-7=-2$.

例題二 $(-5)+(+7)-(-4)-(+9)+(-7)=?$

【解】 $(-5)+(+7)-(-4)-(+9)+(-7)$

$=-5+7+4-9-7=4-5-9=4-14=-10$.

【注意】 式中 $+7$ 同 -7 的和是 0,所以這兩項可以消去.

習 題 五

求下列各題的結果:

(1) $(+6)+(-7)=?$　　(2) $(+5)+(+9)=?$

(3) $(-7)+(+8)=?$　　(4) $(-16)+0=?$

(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=?$　　(6) $\left(+\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)=?$

(7) $(+7)-(+9)=?$　　(8) $(-28)-(-15)=?$

(9) $(-4)-(+9)=?$　　(10) $0-(-7)=?$

(11) $\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=?$　　(12) $\left(+\frac{5}{7}\right)-\left(+\frac{5}{6}\right)=?$

(13) $(+5)-(-7)+(-4)=?$　　(14) $(-4)+(-5)-(+7)=?$

(15) $(+50)-(-27)-(+28)=?$

(16) $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=?$

(17) $(-5)-(+7)+(-20)-(+15)-(+4)=?$

(18) $(-3)+(+15)-(+17)-(-3)=?$

(19) $(+7)-(-4)-(+5)+(-6)+(+5)-(+9)-(-4)=?$

(20) $\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(+\frac{11}{12}\right)=?$

3. 正負數乘法　兩數相乘,可把絕對值乘起來,兩數同號時,積是正數;兩數異號時,積是負數.

例題一　$(+3)(+5)=?$

【解】　$(+3)(+5)=+15$.

【實例】　每日收入 3 元,則 5 日後的財產比現今多 15 元.

例題二 $(-3)(-5)=?$

【解】 $(-3)(-5)=+15.$

【實例】 每日支出 3 元,則 5 日前的財產比現今多 15 元.

例題三 $(+3)(-5)=?$

【解】 $(+3)(-5)=-15.$

【實例】 每日收入 3 元,則 5 日前的財產比現今少 15 元.

例題四 $(-3)(+5)=?$

【解】 $(-3)(+5)=-15.$

【實例】 每日支出 3 元,則 5 日後的財產比現今少 15 元.

正負數同 0 相乘,得的積也是 0.

例題 $(-3)\times 0=?$, $0\times(+5)=?$

【解】 $(-3)\times 0=0$, $0\times(+5)=0.$

【實例】 若祇以眼前而論,則收入的未收,支出的未支,則財產毫無變動;若無收入及支出,則無論若干日前或若干日後,財產也毫無變動.

特例一 二數以上連乘時,只須看負的因數有幾個,就可以定積的符號.若負因數的個數是偶數,積是正;若負因數的個數是奇數,積是負.

例題一　$(-5)(+3)(-1)(-4)(-2)=?$

【解】　$(-5)(+3)(-1)(-4)(-2)=+120.$

【理由】　根據乘法的交換定律同結合定律,知

$$(-5)(+3)(-1)(-4)(-2)=(-5)(-1)(-4)(-2)(+3)$$
$$=(+5)(+8)(+3).$$

例題二　$(+5)(-10)(-4)(+3)(-2)=?$

【解】　$(+5)(-10)(-4)(+3)(-2)=-1200.$

【理由】　同前,知原式$=(+5)(+3)(-10)(-4)(-2)$
$$=(+5)(+3)(+40)(-2).$$

例題三　$(-3)^3=?$,　$(-3)^4=?$

【解】　$(-3)^3=-27$,　$(-3)^4=+81.$

【理由】　$(-3)^3=(-3)(-3)(-3)$,第二式亦同.

特例二　諸因數中有一數是 0,得的積就是 0.

例題　$(+3)\times 0\times(-5)(-1)=?$

【解】　$(+3)\times 0\times(-5)(-1)=0.$

【理由】　$(+3)\times 0\times(-5)(-1)=(+3)(-5)(-1)\times 0$
$$=(+15)\times 0=0.$$

4. 正負數除法　兩數相除,可把絕對值除出來,兩數同號時,商是正數;兩數異號時,商是負數.

例題一　$(+15)\div(+5)=?$,　$(-15)\div(-5)=?$

【解】 $(+15)\div(+5)=+3$, $(-15)\div(-5)=+3$.

【理由】 除法是乘法的還原,所以

從 $(+5)(+3)=+15$, 可知 $(+15)\div(+5)=+3$;

從 $(-5)(+3)=-15$, 可知 $(-15)\div(-5)=+3$.

例題二 $(+15)\div(-5)=?$, $(-15)\div(+5)=?$

【解】 $(+15)\div(-5)=-3$, $(-15)\div(+5)=-3$.

【理由】 同前.

用正,負數除 0,得的商也是 0.

例題 $0\div(+5)=?$, $0\div(-5)=?$

【解】 $0\div(+5)=0$, $0\div(-5)=0$.

【理由】 因 $(+5)\times 0=0$, 故 $0\div(+5)=0$, 第二式亦同.

(註) 用 0 除任何數,不能得確定的商數,因為 0 同任何數的積總是 0.

習 題 六

求下列各題的結果:

(1) $(-3)(+8)=?$ (2) $(-12)(-7)=?$

(3) $(-4)\times 0=?$ (4) $(+7)(-5)(-4)=?$

(5) $(+4)\div(-2)=?$ (6) $(+14)\div(+7)=?$

(7) $0\div(+5)=?$ (8) $(-24)\div(-8)=?$

(9) $(-4)^2(-3)=?$ (10) $(+3)(-4)(-2)^5=?$

(11) $\left(+\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{6}{7}\right)=$? (12) $\left(-\frac{5}{6}\right)\div\left(+\frac{2}{3}\right)=$?

(13) $(-1)(-3)(-4)(-2)(-10)(-5)(-6)=$?

(14) $(+3)(-1)^2(-7)(-9)(+5)(+4)=$?

以 $a=-3,\ b=+4,\ c=-2$ 代入下列各題的代數式,而求他們的值:

(15) $(a+b)^2+(a-b)^2$. (16) $2(a^2+b^2)$.

(17) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. (18) $(a-b)^3$.

(19) $a^2+b^2+c^2+2bc-2ac-2ab$.

(20) $(a-b-c)^2$.

第三節 負數在解方程式上的應用

1. 移項便利 前在第二章第四節(*II*)關於方程式的基礎計算中,述移項的方法,往往把含 x 的項移在左邊,不够減,須重行移到右邊,這樣很覺不便.現在有了負數,這種手續就可省去.普通解方程式,習慣上總把含 x 的項集在左邊,不含 x 的項集在右邊,所以常須應用負數.

例題一 解方程式 $2(9-4x)-3(2-x)=2$.

【解】 乘算 $18-8x-6+3x=2$.

移項 $-8x+3x=2-18+6$.

集項 $-5x=-10$.

去係數　　$x=2$.

【注意一】　把 $-3(2-x)$ 實行乘算時,以前必須用分配定律求出 3 同 $(2-x)$ 的積,仍放在括號內,再脫去他;現在可把 -3 看作一個負數,與 2 乘,得 -6,與 $-x$ 乘,得 $+3x$,可以便利得多.

【注意二】　集項時可把 $-8x+3x$ 中的號看作正、負號,兩項中間有加的意思,即 $-8x$ 加 $+3x$,於是把係數加起來做公共文字的係數,故得 $-5x$.又可以變換他們的次序得 $3x-8x$,把中間的號看作減號,因 3 個 x 減去 8 個 x 不足 5 個 x,故亦得 $-5x$.

【注意三】　集項後,x 的係數是 -5,所以去係數時當用 -5 除兩邊.因以負數除負數是同號,故兩邊的商都是正數.

例題二　解方程式 $3x-15=4x-17$.

【解】　移項　　$3x-4x=15-17$.

集項　　$-x=-2$.

去係數　　$x=2$.

【注意】　集項後所得方程式的左邊是 $-x$,他的係數是 -1,所以當用 -1 除兩邊,使他的係數為 1.

2. 負數的根　有時方程式必須利用負數才能有根.

例題　解方程式 $3(2-x)+2x=11$.

【解】 乘算 $6-3x+2x=11.$

移項 $-3x+2x=11-6.$

集項 $-x=5.$

去係數 $x=-5.$

有時在應用問題中求得的根是負數,應當就問題研究這根的適用與否.

例題一 甲年40歲,乙年25歲.問幾年後甲年是乙年的2倍?

【解】 設 x 年後甲年是乙年的2倍,則其時甲年 $(40+x)$ 歲,乙年 $(25+x)$ 歲.

得方程式 $40+x=2(25+x).$

乘算 $40+x=50+2x.$

移項 $x-2x=50-40.$

集項 $-x=10.$

去係數 $x=-10.$

這負數的根 -10,粗看好像不適用,但 x 所代的數有反對意義,所以仍能合用.即本題的答案並非在若干年後,而在10年前甲年才是乙年的2倍.

例題二 龜鶴合計58頭,共有脚102只,問龜鶴各多少?

【解】 設龜為 x 頭,則鶴為 $58-x$ 頭.

得方程式 $4x+2(58-x)=102.$

乘算 $4x+116-2x=102.$

移項 $4x-2x=102-116.$

集項 $2x=-14.$

去係數 $x=-7.$

因爲龜數不能有反對意義,所以這 -7 無法解釋,這問題就不合理.

習 題 七

解下列的方程式:

(1) $5x+8=x+5.$ (2) $2x-9=5x+3.$

(3) $1-x=\frac{3x+1}{2}.$ (4) $2(x-5)=3(x-7).$

(5) $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+1=\frac{x}{4}+\frac{7}{18}.$ (6) $\frac{2x-6}{2}-3x=15-(x-2).$

(7) $9x-6+3(x+7)=2(x-1)+8x.$

(8) $4(x-1)-(4x-1)=5(2-x)-(10+x).$

(9) 父年35歲,子年13歲.問幾年後父年是子年的3倍?

(10) 五元紙幣同十元紙幣合計18張,共值國幣80元.問兩種紙幣各幾張?

(11) 甲乙二人共有國幣30元.甲每月賺70元,乙每月賺20元.3個月後甲的財產是乙的2倍.問兩人原有國幣各多少?

(12) 攝氏寒暑表的度數何時與華氏寒暑表的度數相同?

【提示】 攝氏表 x 度時,華氏表是 $(\frac{9}{5}x+32)$ 度。

但依題意知道華氏表也是 x 度,所以得

$$\frac{9}{5}x+32=x.$$

第四章 整式四則

第一節 重要名詞

1. 整式、分式 凡分母中不含文字的代數式,都叫整式.否則是分式.

【例】 $3a^2b-5ab^2$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$, $x^2-x+\frac{1}{2}$ 等,都是整式; $\frac{y}{x}$, $\frac{a+b}{ab}$, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1$ 等,都是分式.

有時認式中的某文字作主體,那末分母中雖含其他文字,只須不含認作主體的文字,也可以稱做該文字的整式.

【例】 $\frac{x^2}{a}+\frac{x}{b}+\frac{1}{c}$ 雖不是 a、b、或 c 的整式,但是可以稱做 x 的整式.

2. 單項式、多項式 祇有一項的整式,叫做單項式. 不止一項的整式,叫做多項式.通常看他的項數是二、三、四、………等等,分別叫做二項式、三項式、四項式、………等等.

【例】 $2ab$、$3(a+b)(a-b)$、$(x-y)^2$ 等都是單項式; $a+b$ 是二項式; $x^2+2xy+y^2$ 是三項式;…….

3. 指數、底數、冪 同算術中的一樣,把 $a\times a$ 寫做 a^2; $a\times a\times a$ 寫做 a^3; $a\times a\times a\times a$ 寫做

a^4;……;$a\times a\times\cdots\cdots\times a$ 共 n 個 a 的連乘積寫做 a^n.這 a 的右肩上的 2、3、4、……、n 叫做指數;a 叫做底數;a^2、a^3、a^4、……、a^n 分別叫做 a 的二次冪、三次冪、四次冪、……、n 次冪.

【注意一】 沒有指數的文字,可當作指數是 1,如 a 即 a^1,是 a 的一次冪.

【注意二】 x^3 同 $3x$ 完全不同,初學者往往不能認清.因 $x^3=x\times x\times x$, $3x=x+x+x$;前者是 3 個 x 的連乘積,後者是 3 個 x 的總和,截然不同,應特別留意.

4. 一次項、多次項 項中的文字因式祇有一個的叫一次項;不止一個的叫多次項.通常二個的叫二次項;三個的叫三次項;……等等.

【例】 x、$7a$ 等都是一次項; $5ab$、$3x^2$ 等都是二次項; x^3、$3x^2y$、$5xyz$、$8xy^2$ 等都是三次項;…….

【注意一】 $3x^2=3xx$, 有二個文字因式,所以是二次項.其餘仿此.

【注意二】 項的次數等於項中所有文字的指數的和.例如 $3a^2b^3c^5$ 是 $(2+3+5=)10$ 次項.

5. 一次式、多次式 多項式中的各項,次數最多是一次的,這多項式叫做一次式. 若最多是二次或二次以上的,叫做多次式.通常

依項中最多的次數,分別稱該多項式爲二次式,三次式,………等等.

【例】 $2-x$ 是一次式, x^2-3x+2 是二次式, $a^3+b^3+c^3-3abc$ 是三次式,………等等.

6. 同次式 多項式中各項的次數完全相同的,叫做同次式.

【例】 $a+b$ 是一次的同次式, $x^2+2xy+y^2$ 是二次的同次式, $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 是三次的同次式,………等等.

第二節 整式的整理

1. 整理數字因數 單項式中如有數個數字因數,應移到項的前端,求出他們的積,做這項的係數.

例題 化簡 $6a^2b5c^3$.

【解】 $6a^2b5c^3=6\times5a^2bc^3=30a^2bc^3$.

2. 整理文字因式 依字母的順序,順列單項式中各文字因式於數字因數的後面,且用指數記法,把同文字的因式記做簡式.

例題 化簡 $5axcb$ 同 $8ab^3a^2cb$.

【解】 $5axcb=5abcx$,

$8ab^3a^2cb=8aa^2b^3bc=8aaabbbbc=8a^3b^4c$.

3. 順列同文字的冪　把多項式中同文字的最高次項列爲首項,其餘各依次降低,這叫做降冪排列. 若把最低次項列爲首項,其餘各依次昇高,這叫做昇冪排列.

例題　順列 $4x-7+2x^3+x^4-9x^2$ 的冪.

【解】　若依降冪排列,則爲

$$x^4+2x^3-9x^2+4x-7.$$

若依昇冪排列,則爲

$$-7+4x-9x^2+2x^3+x^4.$$

【注意】　題中的 -7 不含 x,可認爲比 x 的一次冪更低的項,通常叫做 x 的 0 次項.

4. 集合同類項　同前述解方程式基礎計算中的集項法一樣,求出諸同類項各係數的和,放在公共文字之前,做該文字的係數.

例題一　化簡 $5a^2b+7a^2b-4a^2b+6a^2b$.

【解】　$5a^2b+7a^2b-4a^2b+6a^2b$

$$=(5+7-4+6)a^2b=14a^2b.$$

例題二　化簡 $5xy+4y^2-3xy-y^2+3xy-2y^2$.

【解】　$5xy+4y^2-3xy-y^2+3xy-2y^2$

$$=5xy+(4-1-2)y^2=5xy+y^2.$$

【注意一】　$-3xy$ 同 $+3xy$ 恰巧抵消,可以不計.

【注意二】　$-y^2$ 的係數是 -1, 不可當作沒有

係數;$(4-1-2)y^2=1y^2$,通常係數1不必寫出.

第三節 整式的加法

1. 單項式加單項式 幾個單項式相加,只須記出他們的正、負號,略去加號連寫起來,再加以整理.

例題 求$7x,-4x,5x,3x,-x$的和.

【解】 $7x-4x+5x+3x-x=(7-4+5+3-1)x=10x.$

【注意】 把各項都看作正項,認爲已把正號略去,各項間的號看作加、減號做,那末係數應是$7-4+5+3-1=10$;若把各項的號當作是他們的正、負號,認爲各項間已把加號略去,那末把他們的係數加起來,得$(+7)+(-4)+(+5)+(+3)+(-1)=(+15)+(-5)=+10$,結果一樣.

2. 單項式加多項式 把各式首項的正、負號記出,連寫起來,再加以整理.

例題 求$6x^2-5,3x,-7x^2+9x,2-5x$的和.

【解】 $6x^2-5+3x-7x^2+9x+2-5x=-x^2+7x-3.$

3. 多項式加多項式 幾個多項式相加,爲求便於整理起見,通常照下面的步驟列成豎式做:

I. 先把第一式依冪的順序排列,寫在

第一列.

II. 把第二式寫在第二列,使同類的項上下對齊.

III. 其餘各式依次照樣排列,在下面劃一橫線.

IV. 順次求各同類項的和,寫在橫線的下面,即得所求的和

例題 求x^3+1+2x^2-3x, $x-9+7x^2+4x^3$, $-3x^3-1-x^2+10x$的和.

【解】

$$\begin{array}{r}
x^3+2x^2-\ \ 3x+1 \\
4x^3+7x^2+\ \ \ \ x-9 \\
-3x^3-\ \ x^2+10x-1 \\ \hline
2x^3+8x^2+\ \ 8x-9
\end{array}\ (+$$

特例一 第一整式中同文字的冪偶有缺少的,當預留空位,否則結果冪的順序就不整齊.

例題 求 $6x^2+8x+7x^4$, $3x+x^3-7$, 同x^3-16+x^4-2x的和.

【解】

$$\begin{array}{rrrrr}
7x^4 & & +6x^2 & +8x & \\
 & x^3 & & +3x & -\ \ 7 \\
x^4 & +\ \ x^3 & & -2x & -16 \\ \hline
8x^4 & +2x^3 & +6x^2 & +9x & -23
\end{array}\ (+$$

特例二 式中有二種文字的,普通可依一種文字的降冪,他種文字的昇冪排列.

例題 求$3a^2b-2ab+b^2+b^3$,$2b^2-a^2b+b^3$,$-2a^3+2ab-3a^2b+b^3$的和.

【解】

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 3a^2b & -2ab & +b^2 & +b^3 \\
 & -a^2b & & +2b^2 & +b^3 \\
-2a^3 & -3a^2b & +2ab & & +b^3\ (+ \\
\hline
-2a^3 & -a^2b & & +3b^2 & +3b^3
\end{array}$$

特例三 冪的順序不易排列的代數式,就不必順序排列.

例題 求$m^2-xy^2+2m-3xy$,$xy^2-6xy-4z$,$a^3+9xy-3xy^2+2m+4z$的和.

【解】

$$\begin{array}{llllll}
 & m^2 & -xy^2 & +2m & -3xy & \\
 & & xy^2 & & -6xy & -4z \\
a^3 & & -3xy^2 & +2m & +9xy & +4z\ (+ \\
\hline
a^3 & +m^2 & -3xy^2 & +4m & &
\end{array}$$

【注意】 m^2 在第一式中因爲是第一項,所以略去正號,在和中是第二項,不可漏去正號.

習 題 八

求下列各題中諸式的和:

(1) $25a-15b+c,\ 4c+13a-10b,\ 20b-c+a.$

(2) $a+2b-3c,\ -3a+b+2c,\ 2a-3b+c.$

(3) $5ab+bc-3ca,\ ab-bc+ca,\ -ab+bc+ca.$

【注意】 照例 ca 應寫作 ac,但通常在 a、b、c 依次循環排列時,寫 ca 較好.

(4) $4x^2-3y^2,\ 2x^2-5y^2,\ -x^2+y^2,\ -2x^2+4y^2$

(5) $6x^2+8x+7x^4,\ x+2,\ x^3-16+x^4-2x.$

(6) $2x^2-2xy+3y^2,\ 4y^2+5xy-2x^2,\ x^2-2y^2+6xy.$

(7) $x^3-x^2+x-1,\ 2x^2-2x+2,\ -3x^3+5x+1.$

(8) $2x^3-x^2-x,\ 4x^3+8x^2+7x,\ -6x^3-6x^2+x.$

(9) $a^3-ab+bc,\ ab+b^3-ca,\ ca-bc+c^3$

(10) $10x^3+5x+8,\ 3x^3-4x^2-6,\ 2x^3-2x-6.$

(11) $-2b^3+3ab^2+a^3,\ 5a^2b-ab^2-2a^3,\ 8a^3+5b^3.$

(12) $2ab+3ca+6abc,\ -5ab+2bc-5abc,$
$3ab-2bc-3ca.$

(13) $x^2+y^2-2xy,\ 2z^2-3y^2-4yz,\ 2x^2-2z^2-3zx.$

(14) $3x^3+7-5x^2,\ 2x^2-8-9x,\ 4x-2x^3+3x^2.$

(15) $\frac{1}{4}x^2+2xy,\ \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{5}xy+y^2,\ x^2+\frac{3}{10}xy+\frac{1}{8}y^2.$

(16) $a^3b^2-3a^2b^3+a^5,\ 3a^3b^2+5a^2b^3-b^5,$
$2a^5+2b^5+5ab^4.$

第四節 整式的減法

1. 單項式減單項式 兩單項式相減,只須變減式的正、負號,接寫在被減式後面. 但減式前面變得的號,雖是正也不能略去.

例題 從 $8x^2y$ 減 $-4x^2y$.

【解】 $8x^2y+4x^2y=12x^2y$.

2. 單項式同多項式相減 減式是單項式的同上;減式是多項式的,可變他的各項的正、負號,接寫在被減式的後面.

例題 從 $4x^2$

減 $-3x^2+4y^2$.

【解】 $4x^2+3x^2-4y^2=7x^2-4y^2$.

3. 多項式減多項式 兩多項式相減,爲求便於整理起見,依下面的步驟,列豎式去做:

I. 寫被減式在第一列,依冪的順序排列.

II. 寫減式在第二列,同類項上下對齊,下面劃一橫線.

III. 依次求各同類項的差,寫在橫線下面,即得所求的差.

例題 從 $5-7x+5x^3+6x^2$

減 $-2x^3+5x^2-7x-3$.

【解】
$$\begin{array}{r} 5x^3+6x^2-7x+5 \\ -2x^3+5x^2-7x-3\ (- \\ \hline 7x^3+\ x^2\qquad\ +8 \end{array}$$

【注意】 用心算變減式中各項的號,來同被減式中同類的項相加.他書多有把減式變了號列入式中的,這種方法若成了習慣,將來做除法同解聯立方程式時,極易發生錯誤.

特例一　被減式中同文字項的冪偶有缺少的,當預留空位.

例題　從 $-3x^3+9+4x^4-2x^2$

減 $x^4-9+7x-2x^3$.

【解】
$$\begin{array}{r} 4x^4-3x^3-2x^2\qquad\quad+\ 9 \\ x^4-2x^3\qquad\quad+7x-\ 9\ (- \\ \hline 3x^4-\ x^3-2x^2-7x+18 \end{array}$$

【注意】 被減式中的項,若減式中無同類項,移下時不變號;但減式中的,移下時當變號.

特例二　含二種文字的代數式,冪的排列當一降一昇.

例題　從 $a^3b-3a^2b^2+a^4$

減 $4a^2b^2+ab^3+6b^4-a^4$.

【解】
$$\begin{array}{r} a^4+a^3b-3a^2b^2\qquad\qquad\qquad\qquad \\ -a^4\qquad\quad+4a^2b^2+ab^3+6b^4\ (- \\ \hline 2a^4+a^3b-7a^2b^2-ab^3-6b^4 \end{array}$$

特例三 冪的順序不易排列的代數式，不須排列.

例題 從 x^2-y+4a^3-2b

減 $7x-2x^2-8b$.

【解】

$$\begin{array}{rrrrr} & x^2 & -y & +4a^3 & -2b \\ 7x & -2x^2 & & & -8b\ (- \\ \hline -7x & +3x^2 & -y & +4a^3 & +6b \end{array}$$

習 題 九

下列各題從左式減右式:

(1) $2x-8y+z,\ 15x+10y-18z$.

(2) $15a-27b+8c,\ 10a+3b+4c$.

(3) $ab+cd-ac-bd,\ ab+cd+ac+bd$.

(4) $3xy^2-3x^2y+x^3-y^3,\ x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

(5) $x^3+11x^2+4,\ 8x^2-5x-3$.

(6) $1-x+x^5-x^4-x^3,\ x^4-1+x-x^2$.

(7) $-8x^2y^2+15x^3y+13xy^3,\ 4x^2y^2+7x^3y-8xy^3$.

(8) $b^3+c^3-2abc,\ a^3+b^3-3abc$.

(9) $-7a^2b+8ab^2+a^3,\ 5a^2b-7ab^2-2b^3$.

(10) $-8x^2y+5xy^2-x^2y^2,\ 8x^2y-5xy^2+x^2y^2$.

(11) $x^2-x^3+4x-7y,\ -y^2+x^2+x^3-7x$.

(12) $a^3x^2+2a^2x^3-4ax^4,\ a^4x+4a^3x^2-3a^2x^3-4ax^4$.

(13) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, -a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$.

(14) $x^5+3x^3-8x, 7x^4-10x^3-8+x+5x^2$.

(15) $7x^2-8x-1, 6x+5x^2+3$.

(16) $9-7xy+4x^4y^4-2x^2y^2, x^4y^4-2x^3y^3+7xy-9$.

第五節　去括號及增括號

1. 去括號法　前在簡易方程式的基礎計算中,已經講過去括號的方法,但現在應把前述的方法略爲變通一下:

(*A*)　括號前是正號的,可把正號同括號完全去掉,括號內各項的號不變.

(*B*)　括號前是負號的,可把負號同括號完全去掉,括號內各項的號全變.

(*C*)　同前,括號前有一數乘,利用分配定律去掉括號.

例題一　去$(2x^2+3ax-2a^2)+(a^2-x^2)+(-ax+2x^2+a^2)$的括號,再加以整理.

【解】　原式

$$=2x^2+3ax-2a^2+a^2-x^2-ax+2x^2+a^2$$

$$=3x^2+2ax.$$

【注意一】　第二個括號內的a^2,本來是略去正號後的正項,現在把$+(\ )$都去掉,應補出原先略去的

正號.

【注意二】 括號前無號的,視作有正號.

【注意三】 去括號的問題,一式寫一列;去掉括號後的式子,各項同上面對齊,這樣就不容易錯誤.

例題二 去 $3a^3b-(2a^2b^2+3a^4)+ab^3-(4a^3b-a^2b^2)-(-a^2b^2-a^4)$ 的括號,再加以整理.

【解】 原式 $=3a^3b-2a^2b^2-3a^4+ab^3-4a^3b+a^2b^2+a^2b^2+a^4$

$=-2a^4-a^3b+ab^3.$

【注意】 第一個括號內的 $2a^2b^2$ 本是正項,去掉 $-(\ )$ 後變作負項.

例題三 去 $5a(-b+c)-3b(-2c+a)+4c(2a-b)$ 的括號,再加以整理.

【解】 原式 $=-5ab+5ca+6bc-3ab+8ca-4bc$

$=-8ab+2bc+13ca.$

【注意】 $-3b(-2c+a)$ 可視作 $+(-3b)(-2c+a)$, 以 $-3b$ 乘 $-2c$ 得 $+6bc$, 以 $-3b$ 乘 $+a$ 得 $-3ab$.

特例 括號有數重的,可自內到外逐層脫去他.

例題 去 $\{(x^7-2x^6)-[(3x^5+2x^4)-(x^3+x^2)]-2x\}-4$ 的括號.

【解】 原式

$=\{x^7-2x^6-[3x^5+2x^4-x^3-x^2]-2x\}-4$

$=\{x^7-2x^6-3x^5-2x^4+x^3+x^2-2x\}-4$

$=x^7-2x^6-3x^5-2x^4+x^3+x^2-2x-4.$

【注意】 自外到內逐層脫去括號也可以.

2. 增括號法 分兩種如下:

(A) 在諸項的外面增＋號及括號,這諸項的號都不變.

(B) 在諸項的外面增－號及括號,這諸項的號完全要變.

例題 把$a^3+b^2+c^2-a^4-b^3-a-c+a^2$中含$a$的項同含$c$的項各括入正括號內,把含$b$的項括入負括號內.

【解】 原式$=(a^3-a^4-a+a^2)-(-b^2+b^3)+(c^2-c)$.

【注意一】 $+c^2$括入$+(\ )$內,因放在首項,故僅寫c^2,而把＋號略去.

【注意二】 括含a的諸項的正括號,因在前端.故把＋號略去.

習題十

去以下各式的括號,再加以整理:

(1) $(a+b)+(3a+5c)-(a+6c)$.

(2) $(x+y)+(-x+y)-(x-y)$.

(3) $a-[2a+(3a-4a)]-5a-\{6a-[(7a+8a)-9a]\}$.

(4) $a-\{5b-[a-(3c-3b)+2c-(a-2b-c)]\}$.

(5) $-(-4x+3z)+2z-(-7x+5y-3z)-(x-y)$.

(6) $-\{-2x-[3y-(2x-3y)+(3x-2y)]+2x\}$.

(7) $-3(x-1)+4(x-2)-5(x-3)$.

(8) $-[-(-a)]-\{-[-(-a)]\}$.

下列各題把第一、二兩項括入正括號內,第三、四兩項括入負括號內.

(9) $x+y-2z-2w$.　　(10) $2a-3b+5c-4d$.

(11) $x+2x^2-x^3+4x^4$.　　(12) $5m-3n+2p-q$.

(13) y^5-2y^3+6y-2.　　(14) $-2a+3a^2-4a^3+a^4$.

第六節　整式的乘法

1. 單項式乘單項式　兩個單項式相乘,可把係數相乘做積的係數,把文字相乘做積的文字.

例題　求 $3x^2$ 同 $-4y$ 的積.

【解】　$3x^2(-4y)=-12x^2y$.

特例一　兩個單項式中有同文字的,這兩個同文字的積,是用該文字做底數,兩者指數的和做指數.

例題　求 $-3x^2y$ 同 $-5x^3y^3$ 的積.

【解】 $(-3x^2y)(-5x^3y^3)=15x^5y^4$.

【理由】 $x^2\times x^3=xx\times xxx=x^5$, $y\times y^3=y\times yyy=y^4$.

【注意】 $x^2+x^3\neq x^5$, $x^2\times x^3\neq x^6$.

特例二 三個或三個以上的單項式連乘,方法仍是一樣.

例題 求$-5a^2b$,$-ab^2$,$4ac$,$3abc$的連乘積.

【解】 $(-5a^2b)(-ab^2)\times 4ac\times 3abc=60a^5b^4c^2$.

2. 單項式乘多項式 依分配定律把單項式逐一乘多項式中的各項,所得各部分積的和,即所求的積.

例題 求 $-2ab$ 同 $2a^3-3a^2b+ab^2-5b^3$ 的積.

【解】 $-2ab(2a^3-3a^2b+ab^2-5b^3)$

$$=-4a^4b+6a^3b^2-2a^2b^3+10ab^4.$$

3. 多項式乘多項式 兩多項式相乘,爲求便於整理起見,通常依下列的步驟列豎式做:

I. 取項數多的一式做被乘式,依冪的順序排列,寫在第一列.

II. 乘式的冪依被乘式中同文字同爲降冪或同爲昇冪排列,寫在第二列.兩式首項相齊,下面劃一橫線.

III. 用乘式的第一項乘被乘式,得的積寫在橫線下第一列.

IV. 用乘式的第二項乘被乘式,得的積寫在橫線下第二列.惟須退後一項,那末同類項恰能上下相齊.

V. 依次再用乘式的第三、四、………項逐次乘被乘式,照上法列入式內.

VI. 把橫線下各列的積相加,卽得所求的積.

例題　求 $5x^2+3x^4-x+1-2x^3$ 同 $-3+6x+2x^2$ 的積.

【解】

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
 & & 3x^4 & -2x^3 & +5x^2 & -x & +1 & \\
 & & & & 2x^2 & +6x & -3 & (\times \\
\hline
6x^6 & -4x^5 & +10x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & & \\
 & 18x^5 & -12x^4 & +30x^3 & -6x^2 & +6x & & \\
 & & -9x^4 & +6x^3 & -15x^2 & +3x & -3 & (+ \\
\hline
6x^6 & +14x^5 & -11x^4 & +34x^3 & -19x^2 & +9x & -3 &
\end{array}$$

【理由】　設以 m 代被乘式,則根據分配定律,知

$$m(2x^2+6x-3)=m\times 2x^2+m\times 6x+m\times(-3).$$

特例一　有缺冪時當預留空位,否則部分積的同類項不能上下相齊,相加時極感不便.

例題　求 $x^3+3x^2y+y^3$ 同 $x-y$ 的積.

【解】

$$\begin{array}{l}
x^3+3x^2y \qquad\qquad +y^3 \\
\underline{x\ -y \qquad\qquad\qquad\qquad\quad} (\times \\
x^4+3x^3y \qquad\qquad +xy^3 \\
\underline{\quad -\ x^3y-3x^2y^2 \qquad -y^4} (+ \\
x^4+2x^3y-3x^2y^2+xy^3-y^4
\end{array}$$

特例二　式中有三種文字的,可任依一種文字的冪排列,不過乘得的諸部分積,有時不能順次的寫,必須使同類項上下對齊,以便相加.

例題　求$a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca$同$a+b-c$的積.

【解】

$$\begin{array}{l}
a^2-ab+ca+bc+b^2+c^2 \\
\underline{a\ +\ \ b-c \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} (\times \\
a^3-a^2b+ca^2+abc+ab^2+c^2a \\
\qquad a^2b \qquad +abc-ab^2 \qquad +b^2c+b^3+bc^2 \\
\underline{\qquad\qquad -ca^2+abc \qquad -c^2a-b^2c \qquad -bc^2-c^3} (+ \\
a^3 \qquad\qquad +3abc \qquad\qquad\qquad +b^3 \qquad -c^3
\end{array}$$

速算法　代數式的冪若是可以順列的,相乘時僅須記出各項的係數,而略去文字,但乘得的結果,仍須將文字補出.這叫做分離係數法.

例題一　求 $5x^2+3x^4-x+1-2x^3$ 同 $-3+6x+2x^2$ 的積.

【解】

$$\begin{array}{r}
3-\ 2+5\ -\ 1+1\\
\underline{2+\ 6-3}\ (\times\\
6-\ 4+10-\ 2+\ 2\\
18-12+30-\ 6+6\\
\underline{-\ 9+\ 6-15+3-3}\ (+\\
6+14-11+34-19+9-3
\end{array}$$

答:　$6x^6+14x^5-11x^4+34x^3-19x^2+9x-3.$

【注意一】　略去文字後的 $3-2+5-1+1$ 不能誤作可以用算術方法實行計算.

【注意二】　四次式同二次式相乘,故得六(4+2)次式.

例題二　求 $x^3+3x^2y+y^3$ 同 $x-y$ 的積.

【解】

$$\begin{array}{r}
1+3+0+1\\
\underline{1-1}\ (\times\\
1+3+0+1\\
\underline{-1-3-0-1}\ (+\\
1+2-3+1-1
\end{array}$$

答:　$x^4+2x^3y-3x^2y^2+xy^3-y^4.$

【注意一】　有缺冪時,可認缺的一項係數是 0.

【注意二】　三次同次式同一次同次式相乘,故得四(3+1)次同次式.

習題十一

求下列各題中兩式的積:

(1) $x^3-3x^2+2x+5,\ x^2-3x+4.$

(2) $-4x^2+6x-5,\ -x^2-7x+1.$

(3) $x^2-xy+x+y^2+y+1,\ x+y-1.$

(4) $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5,\ a-b.$

(5) $a^3x^3-a^2x^2-1,\ a^2x^2+ax+1.$

(6) $5x+4x^2-24+x^3,\ x^2+11-4x.$

(7) $7x^3+11x-5x^2-25,\ 6x^2+8+2x.$

(8) $a^3-b^3,\ a^2b+ab^2+b^3.$

(9) $a+b+c,\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$

(10) $5a^4+2a^2b^2+ab^3-3a^3b,\ 5a^3b-2ab^3+2a^2b^2+6a^4.$

(11) $2zx-z^2+2x^2-3yz+xy,\ x-y+2z.$

(12) $a^2-ax+bx+b^2,\ a+b+x.$

(13) $a^2-2ab+b^2+c^2,\ a^2+2ab+b^2-c^2.$

(14) $\frac{1}{3}a^2-b^2+\frac{1}{5}ab,\ \frac{1}{4}a^2+3b^2+\frac{2}{3}ab.$

求下列各題中諸式的積:

(15) $x-5,\ x+6,\ x-7.$

【提示】 先求二式的積,再用第三式乘這積。

(16) $x^2-ax+a^2,\ x^2+ax+a^2,\ x^4-a^2x^2+a^4.$

(17) $x^2+2x+2,\ x^2-2x+2,\ x^2+2,\ x^2-2.$

(18) $a-b, a+b, a^2+b^2, a^4+b^4$.

求下列各題的結果:

(19) $(x+y)^2$. (20) $(x-y)^2$.

(21) $(x+y)^3$. (22) $(x-y)^3$.

(23) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$. (24) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

(25) $(x+y)(x-y)$. (26) $(x+y+z)^2$.

(註) 以上八題的結果,就是第六章的重要公式,將來大有用途,學者最好在現在就記熟他.

第七節 整式的除法

1. 單項式除單項式 兩個單項式相除,可把係數相除,做商的係數;把文字相除,做商的文字.

同文字的商,用這文字做底數,從被除數中該文字的指數減去除數中同文字的指數,所得的差做指數.

例題 求以 $-2x^2y^4z$ 除 $6x^3y^4z^5$ 的商.

【解】 $6x^3y^4z^5\div(-2x^2y^4z)=-3xz^4$.

【理由】 因 $x^2\times x=x^3$, $\therefore x^3\div x^2=x$; 又因 $y^4\times 1=y^4$, $\therefore y^4\div y^4=1$, 因數 1 可以略去不寫.

【注意】 若被除數中某文字的指數小於除數中同文字的指數,得的商是分式,詳第九章.

2.以單項式除多項式 依分配定律,把單項式逐一除多項式中的各項,所得各部分商的和就是所求的商.

例題 求以 $-2abc$ 除 $10ab^2c^3-2a^2b^3c^4+6a^3b^4c^5$ 的商.

【解】 $(10ab^2c^3-2a^2b^3c^4+6a^3b^4c^5)\div(-2abc)$

$$=-5bc^2+ab^2c^3-3a^2b^3c^4.$$

【注意】 用多項式去除單項式,得的商是分式,決不能仿上法把各項分別去除.學者試以數字的例 $30\div(3+2)$ 一試便知.

3.多項式除多項式 依下列的步驟列豎式做:

I. 把被除式依冪的順序排列,左端反括一弧,上方劃一橫線.

II. 除式的冪,依被除式中同文字的昇降排列,寫在弧的左面.

III. 以除式的首項除被除式的首項,所得的是商的首項,寫在橫線之上.

IV. 以商的首項乘除式,從被除式內減去這積,所得的叫第一餘式.

V. 以除式的首項除第一餘式的首項,所得的是商的第二項,接寫在橫線之上.

VI. 以商的第二項乘除式,從第一餘式內減去這積,所得的叫第二餘式.

VII. 照此進行,直到除盡爲止.

例題 $(3x^3+2x-1-4x^2)\div(x-1)=?$

【解】

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2-x+1 \\ \hline x-1 & 3x^3-4x^2+2x-1 \\ & 3x^3-3x^2 \\ \hline & -x^2+2x-1 \\ & -x^2+x \\ \hline & x-1 \\ & x-1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

【理由】 以 $x-1$ 除 $3x^3-4x^2+2x-1$, 那就是求 $3x^3-4x^2+2x-1$ 中能含 $x-1$ 的幾倍,這倍數就是所求的商.

因 $3x^3$ 是 x 的 $3x^2$ 倍,故知被除數中必含 $x-1$ 的 $3x^2$ 倍,乃在被除式中拿出 $x-1$ 的 $3x^2$ 倍,卽 $3x^3-3x^2$, 尙餘 $-x^2+2x-1$.

再看 $-x^2+2x-1$ 中能含 $x-1$ 的幾倍.因 $-x^2$ 是 x 的 $-x$ 倍,故知 $-x^2+2x-1$ 中必含 $x-1$ 的 $-x$ 倍,卽 $-x^2+x$, 取出後尙餘 $x-1$.

最後再看所餘的 $x-1$ 中,還能含 $x-1$ 的幾倍,知道恰巧是 1 倍.

可見 $3x^3-4x^2+2x-1$ 中能含 $x-1$ 的 $3x^2$ 倍,再含 $-x$ 倍,還含 1 倍,共含$3x^2-x+1$倍.

特例一 兩式冪的順序同時反轉,結果仍是一樣.

例題 同前.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-x+3x^2 \\
\hline
-1+x & -1+2x-4x^2+3x^3 \\
 & \underline{-1+x\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad x-4x^2+3x^3 \\
 & \qquad \underline{x-x^2\qquad\quad} \\
 & \qquad\quad -3x^2+3x^3 \\
 & \qquad\quad \underline{-3x^2+3x^3} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

特例二 被除式中有缺冪的,預先留好空位.

例題 $(x^8-y^8)\div(x^3+x^2y+xy^2+y^3)=?$

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^5-x^4y\qquad\qquad\qquad+xy^4-y^5 \\
\hline
x^3+x^2y+xy^2+y^3 & x^8\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-y^8 \\
 & \underline{x^8+x^7y+x^6y^2+x^5y^3} \\
 & \quad -x^7y-x^6y^2-x^5y^3\qquad\qquad\qquad-y^8 \\
 & \quad \underline{-x^7y-x^6y^2-x^5y^3-x^4y^4} \\
 & \qquad\qquad x^4y^4\qquad\qquad\qquad\qquad-y^8 \\
 & \qquad\qquad \underline{x^4y^4+x^3y^5+x^2y^6+xy^7} \\
 & \qquad\qquad\qquad -x^3y^5-x^2y^6-xy^7-y^8 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-x^3y^5-x^2y^6-xy^7-y^8} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

特例三 式中有三種文字的,可任依一種文字的羃排列,不過以商中的項來乘除式所得的積,須與被除式或各次餘式中的同類項對齊.

例題 $(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)=?$

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2-ab-ca+b^2-bc+c^2 \\
\hline
a+b+c & a^3 \qquad -3abc \qquad +b^3+c^3 \\
 & \underline{a^3+a^2b+ca^2} \\
 & -a^2b-ca^2 \qquad -3abc \qquad +b^3+c^3 \\
 & \underline{-a^2b \qquad -ab^2-abc} \\
 & -ca^2+ab^2-2abc \qquad +b^3+c^3 \\
 & \underline{-ca^2 \qquad -abc-c^2a} \\
 & ab^2-abc+c^2a \qquad +b^3+c^3 \\
 & \underline{ab^2 \qquad +b^2c+b^3} \\
 & -abc+c^2a-b^2c \qquad +c^3 \\
 & \underline{-abc \qquad -b^2c-bc^2} \\
 & c^2a \qquad +bc^2+c^3 \\
 & \underline{c^2a \qquad +bc^2+c^3} \\
 & 0
\end{array}
$$

【注意】 各次的餘式,仍須依注意文字的羃的排列.

特例四 除不盡的問題,若祇含一種文字,必須依降羃排列,除到餘式的次數低於除式,就不能再除.

例題 $(x^3+x^4+51-28x-24x^2)\div(x^2-3+2x)=?$

【解】

$$\begin{array}{rl}
 & x^2-x\quad-19 \\
x^2+2x-3 \,\big) & \overline{x^4+\ x^3-24x^2-28x+51} \\
 & \underline{x^4+2x^3-\ 3x^2\qquad\qquad\quad} \\
 & \quad-\ x^3-21x^2-28x+51 \\
 & \quad\underline{-\ x^3-\ 2x^2+\ 3x\qquad} \\
 & \qquad\qquad-19x^2-31x+51 \\
 & \qquad\qquad\underline{-19x^2-38x+57} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 7x+6
\end{array}$$

(註) 除不盡的問題,若冪的排列順序不同,得的商形狀全異,但是用乘法還原,却都是不錯,理由可留着將來研究.

速算法 有時用分離係數法求兩式的商,時間比較節省.

例題一 $(3x^3+2x-1-4x^2)\div(x-1)=?$

【解】

$$\begin{array}{rl}
 & 3-1+1 \\
1-1\,\big) & \overline{3-4+2-1} \\
 & \underline{3-3\qquad\quad} \\
 & \ -1+2 \\
 & \ \underline{-1+1\quad} \\
 & \qquad\quad 1-1 \\
 & \qquad\quad \underline{1-1} \\
 & \qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

答：　$3x^2-x+1$.

【注意】　以一次式除三次式,得的商是二$(3-1)$次式.

例題二　$(x^8-y^8)\div(x^3+x^2y+xy^2+y^3)=?$

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-1+0+0+1-1 \\
\hline
1+1+1+1 & 1+0+0+0+0+0+0+0-1 \\
 & 1+1+1+1 \\
\hline
 & \quad -1-1-1+0 \\
 & \quad -1-1-1-1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 1+0+0+0 \\
 & \qquad\qquad\quad 1+1+1+1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad -1-1-1-1 \\
 & \qquad\qquad\qquad -1-1-1-1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

答：　$x^5-x^4y+xy^4-y^5$.

【注意】　以三次同次式除八次同次式,得的商是五$(8-3)$次同次式.

習題十二

求下列各題中以右式除左式的商：

(1)　$x^4+64,\ x^2+4x+8$.

(2)　$1-x-3x^2-4x^3,\ x^2-x+1$.

(3) $4a^2b^2-3a^3b+ab^3+a^4,\ b^2-a^2.$

(4) $2x^2-3y^2+xy-xz-4yz-z^2,\ 2x+3y+z.$

(5) $2x^4-4x^3-3x^2+1-x,\ 1+x^2-3x.$

(6) $4x^2-28xy+49y^2,\ 2x-7y.$

(7) $x^7-2x^6+x^5+2x^3-3x^2+1,\ x^5+2x+1.$

(8) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3,\ a+b+c.$

(9) $4a^6b^6-16a^2b^2-16ab-4,\ a^3b^3-2ab-1.$

(10) $x^2+x+\frac{1}{4},\ x+\frac{1}{2}.$

(11) $1+x-14x^2+7x^3+3x^4-18x^5,\ 1-2x-3x^2.$

(12) $20x^5-57x^4+34x^3-73x^2-4x+20,\ 5x^3-3x^2+8x-4.$

(13) $x^5+y^5,\ x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4.$

(14) $a^3+3a^2b+b^3-1+3ab^2,\ a+b-1.$

(15) $x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x,\ x^2-\frac{1}{2}x.$

第五章　一次方程式

第一節　重要名詞

1. 一次方程式、一元一次方程式　方程式中表未知數的文字的冪,最多是一次的,叫做一次方程式.未知數又叫元,一次方程式中所含的元祇有一種的,叫做一元一次方程式.

【注意】　第二章所述的簡易方程式,就是一元一次方程式中比較簡單的.

2. 文字方程式　方程式中的已知數,用a、b、c、…………表的,叫做文字方程式.

3. 多元聯立一次方程式　一次方程式中所含的未知數有二個時,必須有二個方程式同時並立,才能決定他們的根,這叫做二元聯立一次方程式.同樣,有三個未知數的,必須有三個方程式並立,叫做三元聯立一次方程式.以下仿此.

【注意】　若祇有一個二元一次方程式,不能決定二個未知數的值.例如已知 $x+y=7$, 那末 $x=1$ 時, $y=6$; $x=2$ 時, $y=5$;………; $x=7$時, $y=0$; $x=8$時, $y=-1$;……;究竟是那一對值,不能確定.若再有一個二元一次方

程式 $x-y=3$ 同他並立,這才可以確定 $x=5, y=2$.因爲祗有這一對值,才能同時適合這二個方程式.

第二節　一元一次方程式解法

第二章所述的簡易方程式,就是一元一次方程式,他的解法我們早已學會了.現在再來舉幾個以前未見的例:

例題一　解下列的方程式:

$$(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3).$$

【解】　乘算,

$$x^3-3x^2+3x-1+x^3-6x^2+12x-8+x^3-9x^2+27x-27$$
$$=3x^3-18x^2+33x-18.$$

移項,消去同類項,

$$3x+12x+27x-33x=1+8+27-18.$$

集項　$9x=18.$

去係數　$x=2.$

例題二　解下列的方程式:

$$3(x-1)-\{3x-[2x-(-x-2)]\}=5.$$

【解】　去括號　$3x-3-\{3x-[2x+x+2]\}=5.$

$3x-3-\{3x-2x-x-2\}=5.$

$3x-3-3x+2x+x+2=5.$

移項　$3x-3x+2x+x=5+3-2.$

集項 $3x=6.$

去係數 $x=2.$

*第三節 文字方程式解法

把代已知數的文字當作數字看,解法仍與前同.

例題一 解方程式 $a(x-a)+b(x-b)=2ab.$

【解】 乘算 $ax-a^2+bx-b^2=2ab.$

移項 $ax+bx=a^2+2ab+b^2.$

集項 $(a+b)x=a^2+2ab+b^2.$

去係數 $x=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=a+b.$

例題二 解方程式 $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$

【解】 乘算

$a^2b^2+a^2x+b^2x+x^2=a^2b^2+2abx+x^2.$

移項

$x^2-x^2+a^2x-2abx+b^2x=a^2b^2-a^2b^2.$

集項 $(a^2-2ab+b^2)x=0.$

去係數 $x=\dfrac{0}{a^2-2ab+b^2}=0.$

(參閱第三章第二節 4.)

習題十三

試解下列諸方程式:

(1) $(x+1)(x+2)=(x-2)(x-4)$.

(2) $2x^2=(x+1)^2+(x+3)^2$.

(3) $(x+4)(x-5)=x^2-8$.

(4) $(x+1)(x+3)=(x+5)(x-6)$.

(5) $7x-5\{x-[7-6(x-3]\}=3x+1$.

(6) $4-\{-x+[5-(-2x+3)]\}=0$.

(7) $(1+6x)^2+(2+8x)^2=(1+10x)^2$.

(8) $(4x-3)(9x+6)=(6x-5)^2+14$.

(9) $(x+1)(x+2)(x+3)=x(x^2+6x-6)$.

(10) $(x-1)(x-3)=(x+1)^2-5$.

(11) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$. (12) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}=a^2+b^2$.

(13) $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx$.

(14) $a(x+a)+b(b-x)=2ab$.

(15) $(x-a)(x-b)+(a+b)^2=(x+a)(x+b)$.

(16) $\frac{a}{b}(x-a)+\frac{b}{a}(x-b)=x$.

(17) $(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x+c)(x-c)+ab$.

(18) 三個連續整數的積,比當中一個數的立方少 2,求這三數.

(19) 三個連續整數的立方的和,等於三數連乘積的 3 倍.求這三數.

(20) 兵士若干人,列作正方陣,尚餘60人.若縱行增 5 人,橫列減 3 人,列成一矩形陣,則不足 1 人.求總

兵數.

【提示】 設正方陣的每邊爲 x 人,則總兵數爲 (x^2+60) 人.

第四節 聯立一次方程式解法

1. 加減消元法 這是解聯立方程式最通俗的方法,當依下列的幾個步驟:

I. 整理二個方程式,使都成 $ax+by=c$ 的形狀.

II. 求二式中 y 的係數的最小公倍數,以第一式中 y 的係數除他,得商,乘第一式的各項;以第二式中 y 的係數除他,得商,乘第二式的各項.

III. 含 y 的項異號時,把二式相加;同號時把兩式相減,使含 y 的項消去.

IV. 去 x 的係數,即得 x 的值.

V. 以 x 的值代入題中任一方程式,可得 y 的值.

VI. 以 x、y 的值代入原方程式,實驗是否適合.

(註) 這最後一步,凡解方程式的問題,都必須實行,不過本書以下所述,爲節省篇幅計,都從略.

例題　解 $\begin{cases} 3x+2y=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 4x-7y=\ \ 6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】

$(1)\times 7$	$21x+14y=133$
$(2)\times 2$	$8x-14y=\ \ 12\ (+$
	$29x\qquad\quad=145.$
去係數	$x=5.$
代入(1)	$15+2y=19.$
移項,集項	$2y=4$
去係數	$y=2.$

答 $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

【理由】　根據等式公理 3 同 1.

特例一　若消去 x 而先求 y,方法仍是一樣.

例題　同前.

【解】

$(1)\times 4$	$12x+\ \ 8y=76$
$(2)\times 3$	$12x-21y=18\ (-$
	$29y=58.$
去係數	$y=2.$
代入(1)	$3x+4=19.$
移項,集項	$3x=15.$
去係數	$x=5.$

答 $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

特例二　一式中某文字的係數是 1 的,以消去這文字爲便.

例題　解 $\begin{cases} 5x+y=2 \cdots\cdots (1), \\ 3x-2y=22 \cdots\cdots (2). \end{cases}$

【解】

$$\begin{array}{lrl} (1)\times 2 & 10x+2y= & 4 \\ (2)\times 1 & 3x-2y= & 22\ (+ \\ \hline & 13x\qquad = & 26. \end{array}$$

去係數　$x=2.$

代入(1)　$10+y=2.$

移項,集項　$y=-8.$

答 $\begin{cases} x=2, \\ y=-8. \end{cases}$

特例三　方程式中的已知數是文字的,解法仍同.

例題　解 $\begin{cases} (a+c)x-by=bc \cdots\cdots (1), \\ x+\quad y=a+b \cdots\cdots (2). \end{cases}$

【解】

$$\begin{array}{lrl} (1)\times 1 & (a+c)x-by= & bc \\ (2)\times b & bx+by= & ab+b^2\ (+ \\ \hline & (a+b+c)x\quad = & ab+b^2+bc. \end{array}$$

去係數　$x=\dfrac{ab+b^2+bc}{a+b+c}=b.$

代入(2)　$b+y=a+b.$

移項,集項　$y=a+b-b=a.$

答 $\begin{cases} x=b \\ y=a. \end{cases}$

特例四　含三個未知數的聯立方程式,可先就(1),(2)兩式消去某文字,再就(2),(3)兩式〔(1),(3)兩式亦可〕消去同文字,得(4),(5)兩式,各含二個同樣的文字,於是仍用前法來解.

例題 解 $\begin{cases}2x+5y+3z=39 \cdots\cdots(1), \\ 7x+3y-2z=16 \cdots\cdots(2), \\ 5x-\ \ y+5z=31 \cdots\cdots(3).\end{cases}$

【解】

$$\begin{array}{ll} (1)\times 2 & 4x+10y+\ 6z=\ 78 \\ (2)\times 3 & \underline{21x+\ 9y-\ 6z=\ 48}\ (+ \\ & 25x+19y \qquad\ =126 \cdots\cdots(4). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (2)\times 5 & 35x+15y-10z=\ 80 \\ (3)\times 2 & \underline{10x-\ 2y+10z=\ 62}\ (+ \\ & 45x+13y \qquad\ =142 \cdots\cdots(5). \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (4)\times 9 & 225x+171y=1134 \\ (5)\times 5 & \underline{225x+\ 65y=\ 710}\ (- \\ & \qquad\quad 106y=\ 424 \end{array}$$

去係數 $y=4.$

代入(4) $25x+76=126.$

解得 $x=2.$

代入(1) $4+20+3z=39.$

解得 $z=5.$

答 $\begin{cases}x=2, \\ y=4, \\ z=5.\end{cases}$

【注意】 先消 x 或 y 都可以,而以用(1)同(3),(2)同(3)消 y 爲最便,因爲(3)的 y 係數是 1 的緣故.

特例五 三式中有一式缺少某一未知數時,先用其他二式消去該未知數,再同前式聯立解之,可省消一次.

例題

$$\text{解}\begin{cases} x+y+z=5 \cdots\cdots(1), \\ 3x-5y+7z=75 \cdots\cdots(2), \\ 9x-11z=-10 \cdots\cdots(3). \end{cases}$$

【解】

$(1)\times 5$　$5x+5y+5z=25$

$(2)\times 1$　$3x-5y+7z=75$ (+

$8x+12z=100 \cdots\cdots(4).$

$(3)\times 2$　$18x-22z=-20$

$(4)\times\frac{9}{4}$　$18x+27z=225$ (−

$-49z=-245.$

去係數　$z=5.$

代入(4)　$8x+60=100.$

解得　$x=5.$

代入(1)　$5+y+5=5.$

解得　$y=-5.$

$$\text{答}\begin{cases} x=5, \\ y=-5, \\ z=5. \end{cases}$$

【注意】 因(4)的各項有公約數4,故以$\frac{9}{4}$乘,比較簡單.

習題十四

用加減消元法解下列的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x+y=4, \\ 2x+4y=10. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 4x+y=2, \\ 6x-3y=3. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-3y=1, \\ 2x+\ \ y-6=0. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 5x-2y=x+y-1, \\ 8x+3y=x-3. \end{cases}$

【提示】 整理後,再在兩式右邊註(1),(2)的記號.

(5) $\begin{cases} \frac{1}{3}x=y+5, \\ \frac{1}{3}y=x+5. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} xy-(x-1)(y-1)=6(y-1), \\ x-y=1. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} \frac{1}{3}y-\frac{1}{4}x=1, \\ \frac{2}{3}y+\frac{3}{4}x+3=0. \end{cases}$

(8) $\begin{cases} (x+y)^2=(x-y)^2+2x(2y+1), \\ x(x-4)=x^2+4y-1. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+y=c, \\ ax-by=c(a-b). \end{cases}$

(10) $\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1, \\ a(x-y)+b(x+y)=1. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x+\ \ y=a+b, \\ bx+ay=2ab. \end{cases}$

(12) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab, \\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2). \end{cases}$

(13) $\begin{cases} 2x+4y+z=7, \\ 3x+2y+2z=8, \\ 5x-4y+4z=9. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} 6x-7y-2z=14, \\ 3x-4y+5z=-10, \\ -2x+4y-9z=21. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x+y+z=14, \\ 2x+5y-4z=1, \\ 7x-2y+3z=25. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} 4x-y-32=0, \\ 7x+5y+z=48, \\ 2x-9y+11z=-72. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} 7x-3y=30, \\ 9y-5z=34, \\ x+y+z=33. \end{cases}$ (18) $\begin{cases} x-2y=-3, \\ 3y-4z=0, \\ 5z-6x=-15. \end{cases}$

2. 代入消元法 步驟如下:

I. 使一方程式含 y(或 x)的項獨居一邊.

II. 去 y(或 x)的係數,得(3)式.

III. 以(3)代入他一方程式,得 x(或 y)的一元一次方程式.

IV. 解這一元一次方程式,得 x(或 y)的值.

V. 以 x(或 y)的值代入(3),得 y(或 x)的值.

例題 解 $\begin{cases} 3x+2y=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 4x-7y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 變(1)爲 $2y=19-3x$.

去係數 $y=\dfrac{19-3x}{2}$ ……………………(3).

代入(2) $4x-\dfrac{7(19-3x)}{2}=8$.

去分母 $8x-7(19-3x)=12$.

去括號 $8x-133+21x=12$.

移項,集項 $29x=145$.

去係數 $x=5$

代入(3) $y=2$ 答.

習題十五

用代入消元法解習題十四從(1)到(8)的聯立方程式.

3.比較消元法 步驟如下:

I. 使一方程式中含 y(或 x)的項獨居一邊,去 y(或 x)的係數,得(3)式.

II. 用同法變他一方程式,得(4)式.

III. 比較(3),(4)二式,用等號連結同與 y(或 x)相等的二個代數式,得 x(或 y)的一元一次方程式.

IV. 解這一元一次方程式,得 x(或 y)的值.

V. 以 x(或 y)的值代入(3)或(4),得 y(或 x)的值.

例題 同上條.

【解】 變(1)爲 $2y=19-3x.$

去係數 $y=\dfrac{19-3x}{2}$ ……………………(3).

變(2)爲 $-7y=6-4x.$

去係數 $y=\dfrac{6-4x}{-7}$ ……………………(4).

比較(3),(4)得 $\dfrac{19-3x}{2}=\dfrac{6-4x}{-7}.$

交叉乘 $-7(19-3x)=2(6-4x).$

即 $-133+21x=12-8x.$

解得 $\left.\begin{aligned}x&=5\\ y&=2\end{aligned}\right\}$ 答.

代入(3)得

習題十六

用比較消元法解習題十四從(1)到(8)的聯立方程式.

4. 特別解法 常見的有下列三種:

(*A*) x 同 y 都在分母內的聯立方程式,若去分母,必成二次方程式,當把 $\frac{1}{x}$ 同 $\frac{1}{y}$ 各看作一個未知數解.

例題 解 $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=10 \cdots\cdots\cdots(1), \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{y}=-25 \cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (1)×3 $\dfrac{6}{x}+\dfrac{9}{y}=30,$

(2)×1 $\dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{y}=-25$ (+

$\dfrac{10}{x}=5.$

交叉乘 $5x=10.$

去係數 $x=2.$

代入(1) $1+\dfrac{3}{y}=10.$

去分母 $y+3=10y.$

解得 $y=\dfrac{1}{3}.$ 答 $\begin{cases} x=2, \\ y=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

(B) 兩方程式中 x 同 y 的係數恰巧互相對調的,可立即加､減,求出 x 同 y 的和､差.

例題 解 $\begin{cases} 19x-21y=100 \cdots\cdots\cdots(1), \\ 21x-19y=140 \cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (2)−(1) $2x+2y=40.$

以 2 除 $x+y=20 \cdots\cdots\cdots(3).$

(2)+(1) $40x-40y=240.$

以 40 除 $x-y=6 \cdots\cdots\cdots(4).$

$\frac{(3)+(4)}{2}$ $\quad x=13$

$\frac{(3)-(4)}{2}$ $\quad y=7$ } 答.

(C) 含三個未知數的聯立方程式,有時可把三式相加,求出 x、y、z 三數的和.

例題 解 $\begin{cases} x+y=25 \cdots\cdots(1), \\ y+z=27 \cdots\cdots(2), \\ z+x=26 \cdots\cdots(3). \end{cases}$

【解】 $(1)+(2)+(3)$ $\quad 2x+2y+2z=78.$

以 2 除 $\quad x+y+z=39 \cdots\cdots(4).$

$(4)-(2)$ $\quad x=12$

$(4)-(3)$ $\quad y=13$ } 答.

$(4)-(1)$ $\quad z=14$

習題十七

用特別法解下列的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} \frac{9}{x}-\frac{4}{y}=1, \\ \frac{18}{x}+\frac{20}{y}=16. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=7, \\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=-1. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-\frac{3}{y}=3, \\ 8x+\frac{15}{y}=-6. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \frac{3}{x}-y=8, \\ \frac{12}{x}-5y=39. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x-5y=19, \\ 5x-3y=69. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 15x+13y=56, \\ 13x+15y=0. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y+z=4, \\ z+x=8, \\ x+y=14. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} -x+y+z=15, \\ x-y+z=9, \\ x+y-z=5. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}=5, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=1. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=3, \\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=5, \\ \dfrac{z}{c}+\dfrac{x}{a}=4. \end{cases}$

第五節 聯立一次方程式應用問題

解聯立一次方程式應用問題的步驟如下:

I. 題中所有的未知數,完全用文字替代.

II. 依題意列成方程式,題中有 n 個未知數,一定能得 n 個方程式.

III. 解這聯立方程式,得諸未知數的值.

例題一 若干人等分國幣若干元,若人數多 6,則每人少得 2 元;若人數少 3,則每人多得 2 元.求人數同每人得的元數.

【解】 設人數為 x,每人分得 y 元,則總元數是 xy 元.

若人數變為$(x+6)$,則每人僅得$(y-2)$元,所以總元數又是$(x+6)(y-2)$元.

若人數變為$(x-3)$,則每人可得$(y+2)$元,所以總元數又是$(x-3)(y+2)$元.

得方程式 $$\begin{cases}(x+6)(y-2)=xy,\\(x-3)(y+2)=xy.\end{cases}$$

化簡得 $$\begin{cases}-2x+6y=12\cdots\cdots(1),\\2x-3y=\ \ 6\cdots\cdots(2).\end{cases}$$

(1) + (2) $3y=18.$

去係數 $y=6.$

代入(2) $2x-18=6.$

解得 $x=12.$

答:有 12 人,每人得國幣 6 元.

例題二 有二位的整數,恰巧等於二數字和的 5 倍.若這數加 9,則等於他的倒位數.求原數.

【解】 設原數的十位數字為 x,個位數字為 y,則原數為 $10x+y$,倒位數為 $10y+x$.

得方程式 $$\begin{cases}10x+y=5(x+y),\\10x+y+9=10y+x.\end{cases}$$

化簡得 $\begin{cases} 5x-4y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 9x-9y=-9 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

(1)×1 $\quad 5x-4y=0$

(2)×$\frac{4}{9}$ $\quad \underline{4x-4y=-4(-}$

$\qquad x \qquad =4.$

代入(1) $\quad 20-4y=0.$

解得 $\quad y=5.$

答原數是45.

例題三　有一工程,甲、乙、丙三人合做,30日可成;甲、乙合做,32日可成;乙、丙合做,120日可成.問各人獨做,各需幾日可成?

【解】　設甲、乙、丙三人獨做所需的日數順次各是 x、y、z,則三人每日所做的事,各是 $\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$、$\frac{1}{z}$,

得方程式 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30} \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \qquad =\frac{1}{32} \cdots\cdots\cdots\cdots(2), \\ \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120} \cdots\cdots\cdots\cdots(3). \end{cases}$

(1)−(3) $\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{40}.$

(2)+(3)−(1) $\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{160}.$ $\therefore \begin{cases} x=40 \cdots\cdots 甲獨做所需日數 \\ y=160 \cdots\cdots 乙獨做所需日數 \\ z=480 \cdots\cdots 丙獨做所需日數. \end{cases}$

(1)−(2) $\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{480}.$

習題十八

(1) 試用聯立方程式解習題四的(1)、(5)、(6)、(9)、(24)、(28)、(32).

(2) 有甲乙、二數,甲數的$\frac{1}{2}$同乙數的$\frac{1}{3}$的和是32;甲數的$\frac{1}{4}$同乙數的$\frac{1}{5}$的和是18.求這二數.

(3) 7年前甲的歲數是乙的3倍,7年後甲的歲數是乙的2倍.求二人現今的歲數.

(4) 運送貨物385斤,用5匹馬同14個人可以一次運盡;用8匹馬同7個人也可一次運盡.求每馬、每人所運的重.

(5) 甲、乙二人相距27里,同時起行.若二人相向而行,則6時後相會;若二人同向而行,則18時後甲追及乙.求二人每時的速度.

(6) 甲、乙二牧童,各有羊一羣.甲若取乙羊9只,甲羊是乙羊的2倍;乙若取甲羊9只,二人的羊數相等.問甲、乙各有羊多少?

(7) 某人有十元、五元、一元三種紙幣共20張,共值國幣89元.若以十元紙幣掉成五元紙幣,以五元紙幣掉成十元紙幣,則三種紙幣共22張.求三種紙幣原有的張數.

(8) 某人以國幣2500元買牛10頭和馬20匹.出賣時

牛每頭賺20元;馬每匹賺原價的$\frac{1}{10}$;共賣得2860元.問牛、馬每頭的原價各多少?

(9) 用甲、乙二管注水入水槽.若甲管開10分鐘,乙管開6分鐘,水槽可滿;若甲管開8分鐘,乙管開9分鐘,水槽亦滿.問獨開一管各需幾分鐘可滿?

(10) 有三位的整數,各位數字的和是9.把三位數字的次序倒過來,所成的新數較原數大396.又百位數字同個位數字的和是十位數字的2倍.求原數.

(11) 甲、乙、丙三人共有國幣600元.甲比乙多的元數等於乙比丙多的元數.甲、丙元數的差加乙的元數是300元.問三人各有國幣多少?

(12) 有兩輪車,行1哩,前輪比後輪多轉176次;行10哩,兩輪共轉7040次.求各輪周圍的呎數.

【提示】 1哩＝5280呎.又各輪轉一次所行的路等於他的周圍.

(13) 若干人等分國幣若干元.若1人自願犧牲,則每人可多得1元;若有3人要各得雙份,則每人須少得2元.求人數同總元數.

【提示】 3人各得雙份,等於多加入3個人.仿例題一用y代每人所得的元數做.

(14) 有矩形的地面,若長增3尺,闊減2尺,面積不變;

若長增 9 尺,闊減 4 尺,面積也不變.求長同闊.

(15) 有矩形的地面,若長增 18 尺,闊增 12 尺,則面積增 2304 方尺;若長增 12 尺,闊增 18 尺,則面積增 2448 方尺.求這矩形的面積.

第六章　應用公式的乘法

第一節　二項式的平方

公式 1.　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

二數和的平方,等於各數平方的和,加上二數積的二倍.

公式 2.　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

二數差的平方,等於各數平方的和,減去二數積的二倍.

【注意】　$(a+b)^2\neq a^2+b^2$, $(a-b)^2\neq a^2-b^2$, 初學者往往誤會.

從上列的兩個公式,知道要求二項式的平方,可先把第一項自乘,再把二項相乘而二倍之,然後把第二項自乘,相加即得.

例題一　$(5xy+z)^2=?$

【解】　原式$=(5xy)^2+2(5xy)z+z^2$

$$=25x^2y^2+10xyz+z^2.$$

【注意一】　$(5xy)^2=5xy\times5xy=25x^2y^2$,學者不可誤作 $10xy$ 或 $5xy^2$. 在此可得一定律:「**積的平方等於各因式平方的積.**」

【注意二】　熟諫後,上列解法的中間一步可不

必寫出.

例題二 $(a-2b)^2=?$

【解】 原式$=a^2+2a(-2b)+(-2b)^2$

$$=a^2-4ab+4b^2.$$

【注意】 $(-2b)^2=(-2b)(-2b)=+4b^2.$

例題三 $(-3x^3+2y^3)^2=?$

【解】 原式$=(-3x^3)^2+2(-3x^3)2y^3+(2y^3)^2$

$$=9x^6-12x^3y^3+4y^6.$$

【注意】 $(2y^3)^2=2y^3\times 2y^3=4y^6$, 不可誤作$4y^5$.因此就得一定律:「**某數$m$次冪的$n$次冪,等於該數的$mn$次冪.**」

例題四 $(-a-b)^2=?$, $(-a+b)^2=?$

【解】 $(-a-b)^2$

$$=(-a)^2+2(-a)(-b)+(-b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$(-a+b)^2$

$$=(-a)^2+2(-a)b+b^2=a^2-2ab+b^2.$$

【注意】 從上例同公式1、2,可知$(-a-b)^2=(a+b)^2$,$(-a+b)^2=(a-b)^2$.可用下面的方法說明他:

$$(-a-b)^2=[-(a+b)]^2=[-(a+b)][-(a+b)]$$
$$=(a+b)^2.$$

其他一式仿此.因此又得一定律:「**一式中各項的號全變,那麼他的平方不變.**」

例題五　$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2=?$

【解】　原式 $=\left(\frac{x}{2}\right)^2+2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{y}{3}\right)^2$

$$=\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{3}+\frac{y^2}{9}.$$

【注意一】　$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x}{2}\times\frac{x}{2}=\frac{x^2}{4}$,不可誤作 $\frac{x^2}{2}$.在此得一定律:「**二數商的平方,等於二數平方的商.**」

【注意二】　$2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{3}\right)=\frac{xy}{3}$,不可誤作 $\frac{xy}{12}$.

第二節　三項式的平方

公式 3.

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

三數和的平方,等於三數平方的和,加上三數中每二數積的二倍.

【注意】　$(a+b+c)^2\neq a^2+b^2+c^2$.

從上列的公式,知道要求三項式的平方,可把三項各自乘,再求第一、二兩項積的二倍,第二、三兩項積的二倍,第一、三兩項積的二倍,相加卽得.

例題一　$(a+2b+3c)^2=?$

【解】　原式 $=a^2+(2b)^2+(3c)^2+2a(2b)+2(2b)(3c)$

$$+2a(3c)$$

$$=a^2+4b^2+9c^2+4ab+12bc+6ca.$$

【注意】 本題也可以用公式1做:

$$\text{原式}=[(a+2b)+3c]^2$$
$$=(a+2b)^2+2(a+2b)3c+(3c)^2$$
$$=a^2+4ab+4b^2+6ca+12bc+9c^2.$$

例題二 $(x^2-x+1)^2=?$

【解】 $$\text{原式}=(x^2)^2+(-x)^2+1^2+2x^2(-x)+2(-x)1+2x^2\times 1$$
$$=x^4+x^2+1-2x^3-2x+2x^2$$
$$=x^4-2x^3+3x^2-2x+1.$$

【注意】 各項自乘時,不論該項是正是負,結果必是正數.

特例 求二項式的四次冪,可根據上節例題三的注意,先求這二項式的平方,得一個三項式,再求這三項式的平方.

例題 $(x-y)^4=?$

【解】 $$\text{原式}=[(x-y)^2]^2=[x^2-2xy+y^2]^2$$
$$=x^4+4x^2y^2+y^4-4x^3y-4xy^3+2x^2y^2$$
$$=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4.$$

習題十九

用公式求下列各題的結果:

(1) $(2x+3y)^2$.

(2) $(ap-bq)^2$.

(3) $(2ab-5c)^2$.

(4) $(3x^2+1)^2$.

(5) $(5a^2+3b^2)^2$.

(6) $(4m^3+n^3)^2$.

(7) $(-4x+1)^2$.

(8) $(x-\frac{1}{2})^2$.

(9) $(-x^3-1)^2$.

(10) $(a^2-b^2)^2$

(11) $\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{3}\right)^2$.

(12) $(1-x^2y^2)^2$.

(13) $\left(\frac{x}{3}+\frac{yz}{4}\right)^2$.

(14) $\left(a-\frac{1}{4}\right)^2$.

(15) $(-x+y+z)^2$.

(16) $(x^4-x^2-1)^2$.

(17) $(x-y-z)^2$.

(18) $(3a^2-a+5)^2$

(19) $(x+y)^4$.

(20) $(x^2-5x-7)^2$.

第三節　二數和差的積

公式 4.　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

二數和同差的積,等於二數平方的差.

從上列的公式,知道要把二數的和同該二數的差相乘,只須從第一數的平方減去第二數的平方.

例題　$(3a+2b)(3a-2b)=?$

【解】　原式 $=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$.

【注意】　若求$(3a+2b)(2a-3b)$的結果,就不能用公式 4,因為前後兩個因數裏面的二項不相同.

特例一　如二數中有一負數,他們的和同差相乘時,方法仍同.

例題　$(-a-b)(-a+b)=?$

【解】　原式 $=[(-a)-b][(-a)+b]=(-a)^2-b^2$

$=a^2-b^2.$

【注意】　從上例同公式 4,可知 $(-a-b)(-a+b)=(a+b)(a-b)$. 可用下面的方法說明他的理由:

$$(-a-b)(-a+b)=[-(a+b)][-(a-b)]$$

$$=(a+b)(a-b).$$

由此得一定律:「**二因式中各項的號全變,他們的積不變.**」

特例二　有時須變換二數的次序,使成正數的和同差,再相乘.

例題　$(2x^2+3y^2)(-2x^2+3y^2)=?$

【解】　原式 $=(3y^2+2x^2)(3y^2-2x^2)=9y^4-4x^4.$

【注意】　$(-2x^2+3y^2)$ 變作 $(3y^2-2x^2)$,不過變了二項的順序,並未變號.

特例三　求二數和同差的平方的積時,可先求二數和同差的積,得一個二項式,再求這二項式的平方.

例題　$(x+y)^2(x-y)^2=?$

【解法一】　原式 $=(x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2)$

$$=[(x^2+y^2)+2xy][(x^2+y^2)-2xy]$$
$$=(x^2+y^2)^2-(2xy)^2$$
$$=x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2$$
$$=x^4-2x^2y^2+y^4.$$

【解法二】 原式 $=[(x+y)(x-y)]^2=[x^2-y^2]^2$
$$=x^4-2x^2y^2+y^4.$$

【注意】 據本章第一節例題一注意一,知 $a^2b^2=(ab)^2$. 上例的解法二同此式對照,自易明瞭.

特例四 二個三項式或二個四項式相乘時,有時可化作二項式的形狀,再應用公式4乘算.

例題 $(a+b+c+d)(a-a+c-d)=?$

【解】 原式 $=[(a+c)+(b+d)][(a+c)-(b+d)]$
$$=(a+c)^2-(b+d)^2$$
$$=(a^2+2ac+c^2)-(b^2+2bd+d^2)$$
$$=a^2+2ac+c^2-b^2-2bd-d^2.$$

【注意一】 就二式絕對值相同的各項中,選出同號的及異號的,各視作一項.

【注意二】 $-(b+d)^2$ 的一號,屬於 $(b+d)^2$, 而 $(b+d)^2$ 變為三項後,這一號就屬於這三項,所以要用括號括好,再依去括號法脫去他.又 $(a+c)^2$ 是正,所以乘得的三項,不必一定要用括號括起來求.

習題二十

求下列各題的結果:

(1) $(2x+5y)(2x-5y)$.　　(2) $(7a-8b)(7a+8b)$.

(3) $(1+x)(x-1)$.　　(4) $(-x^2+y^2)(x^2+y^2)$.

(5) $(2x-1)(-2x-1)$.　　(6) $(3a-5)(3a+5)$.

(7) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$.

(8) $\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}y^2\right)\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}y^2\right)$.

(9) $(5x^3-3)(5x^3+3)$.　　(10) $(a^2x-b^2y)(a^2x+b^2y)$.

(11) $(2a^2-3ab+4b^2)(2a^2+3ab+4b^2)$.

(12) $(a+b-c)(a-b+c)$.

【提示】　原式 $=[a+(b-c)][a-(b-c)]=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(13) $(a+b+c)(a-b-c)$.　　(14) $(a+b-c)(a+b+c)$.

(15) $(a+b+c)(-a+b+c)$.　　(16) $(a+b-c)(a-b-c)$.

(17) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

(18) $(9a^2+6ab+4b^2)(9a^2-6ab+4b^2)$.

(19) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

(20) $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

(21) $(5a+3b)^2(5a-3b)^2$.

(22) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$.

【提示】　原式 $=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

$=(a^4-b^4)(a^4+b^4)=\cdots\cdots\cdots.$

(23) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$.

(24) $(2x-1)^2(2x+1)^2(4x^2+1)^2$.

第四節 二項式的立方

公式 5. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

公式 6. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

二數和或差的立方,等於第一數的立方,加或減第一數平方乘第二數的 3 倍,加第一數乘第二數平方的 3 倍,再加或減第二數的立方.

從上列的公式,知道可依上列所敘述的方法,求二項式的立方.

例題一 $(2x+3y)^3=?$

【解】 原式 $=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$

$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

【注意】 $(2x)^3=2x\times2x\times2x=8x^3$,不可誤作 $6x^3$ 或 $2x^3$.在此可得一定律:「**積的立方等於各因式立方的積.**」

例題二 $(-a+b)^3=?$

【解法一】 原式 $=(b-a)^3=b^3-3b^2a+3ba^2-a^3$

$=-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$.

【解法二】　原式 $=(-a)^3+3(-a)^2b+3(-a)b^2+b^3$

$$=-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$$

【注意】　從上例同公式 6,可知 $(-a+b)^3=-(a-b)^3$.理由如下:

$$(-a+b)^3=[-(a-b)]^3$$

$$=[-(a-b)][-(a-b)][-(a-b)]=-(a-b)^3.$$

得定律:「**一式中各項的號全變,他的立方的各項的號也全變.**」

推廣一下,又得定律:「**三個因式中各項的號全變,他們的積中各項的號也全變.**」

特例一　求二數和同差的立方的積時,可先求二數和同差的積,得一個二項式,再求這二項式的立方.

例題　$(a+b)^3(a-b)^3=?$

【解】　原式 $=[(a+b)(a-b)]^3=[a^2-b^2]^3$

$$=a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6.$$

【注意】　$(a^2)^3=a^2\times a^2\times a^2=a^6$,不可誤作 a^5.

特例二　求三項式的立方,可把三項中的二項當作一項看.

例題　$(2a^2-a+3)=?$

【解】　原式 $=[(2a^2-a)+3]^3$

$$=(2a^2-a)^3+3(2a^2-a)^2\times 3$$

$$+3(2a^2-a)\times 3^2+3^3$$
$$=8a^6-12a^5+6a^4-a^3+36a^4-36a^3$$
$$+9a^2+54a^2-27a+27$$
$$=8a^6-12a^5+42a^4-37a^3+63a^2$$
$$-27a+27.$$

第五節　積是二數立方和或差的

公式 7.　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

公式 8.　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

從上列的二個公式,知道二項式同三項式相乘時,若三項式中的二項是二項式中二項的平方,其他一項又是二項式中二項的積的相對數,那末得的積是二項式中二項的立方和或差.加、減號與二項式中的相同.

例題一　$(4x+3y)(16x^2-12xy+9y^2)=?$

【解】　原式 $=(4x+3y)[(4x)^2-(4x)(3y)+(3y)^2]$

$$=(4x)^3+(3y)^3=64x^3+27y^3.$$

【注意】　$(a+b)(a^2+ab+b^2)$ 或 $(a+b)(a^2-2ab+b^2)$,不能應用公式 7 乘算.

例題二　$(2x-1)(4x^2+2x+1)=?$

【解】　原式 $=8x^3-1$.

特例　有時須把一因式放在負括號內

當作負數看,再應用公式乘算.

例題 $(-a-b)(a^2-ab+b^2)=?$

【解】 原式 $=[-(a+b)](a^2-ab+b^2)$

$=-(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=-(a^3+b^3)=-a^3-b^3.$

【注意】 從上例同公式 7,得定律:「**諸因式中,一因式的各項的號全變,他們的積中各項的號也全變.**」

習 題 二 十 一

求下列各題的結果:

(1) $(x+2y)^3$. (2) $(x-1)^3$.

(3) $(6a+5)^3$. (4) $(x+1)^3$.

(5) $(3xy-z)^3$. (6) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^3$.

(7) $(4m^2-3n^2)^3$. (8) $(10x+y)^3$.

(9) $(a+b+c)^3$. (10) $\left(a+\frac{1}{3}\right)^3$.

(11) $(2x-y)^3(2x+y)^3$. (12) $(x^2-x+1)^3$.

(13) $(x+1)(x^2-x+1)$. (14) $(x-1)(x^2+x+1)$.

(15) $(m^2+n^2)(m^4-m^2n^2+n^4)$.

(16) $(9x^2+3xy+y^2)(3x-y)$.

(17) $(xy+z)(x^2y^2-xyz+z^2)$.

(18) $(-3x+2y)(9x^2+6xy+4y^2)$.

(19) $(-1-2a)(1-2a+4a^2)$.

(20) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}\right)$.

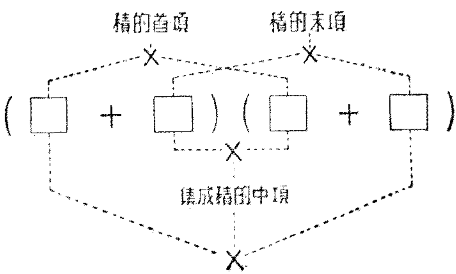
第六節　兩個二項式的積

公式9. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$.

公式10. $(ax+b)(cx+d)$

$$=acx^2+(ad+bc)x+bd.$$

從上列的兩個公式,知道要把兩個二項式相乘,可把二式中兩個前項先乘,再把內二項同外二項各相乘,集為一項,最後把兩個後項相乘,如下式的次序:



例題一　$(x-2)(x-5)=?$

【解】 原式 $=x^2-7x+10$.

例題二 $(7x+2y)(3x-4y)=?$

【解】 原式 $=21x^2-22xy-8y^2$.

特例 兩個三項式相乘時,若兩式有二項完全相同,可把這二項當作一項看,仍照上法相乘.

例題 $(x+y-3z)(x+y+2z)=?$

【解】 原式 $=[(x+y)-3z][(x+y)+2z]$

$$=(x+y)^2-z(x+y)-6z^2$$

$$=x^2+2xy+y^2-zx-yz-6z^2.$$

習題二十二

求下列各題的結果:

(1) $(x+5)(x+9)$. (2) $(x-3)(x+4)$.

(3) $(5x+3y)(3x-5y)$. (4) $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

(5) $(-x+5)(-2x-7)$. (6) $(3x^3-1)(x^2+1)$.

(7) $(2x^2-3)(3x^2-4)$. (8) $\left(3x+\frac{3}{4}\right)\left(2x-\frac{1}{3}\right)$.

(9) $\left(\frac{x}{2}+8\right)\left(\frac{x}{3}-9\right)$ (10) $(a+b+2c)(a+b-3c)$.

(11) $(2m-3n+p)(2m-3n-3p)$.

(12) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

【提示】 原式 $=[(x-1)(x-7)][(x-3)(x-5)]$

$$=[x^2-8x+7][x^2-8x+15]$$

$$=[(x^2-8x)+7][(x^2-8x)+15]=\cdots\cdots.$$

(13) $(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)$.

(14) $(x+2y)(2x+y)(x-2y)(2x-y)$.

【提示】 原式 $=(2x^2+5xy+2y^2)(2x^2-5xy+2y^2)$

$$=[(2x^2+2y^2)+5xy][(2x^2+2y^2)-5xy]=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

或原式 $=[(x+2y)(x-2y)][(2x+y)(2x-y)]$

$$=[x^2-4y^2][4x^2-y^2]=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(15) $(2a-3b)(4a-5b)(2a+3b)(4a+5b)$.

(16) $(x+2y)(x+3y)(x-2y)(x-3y)(x^2+4y^2)(x^2+9y^2)$.

第七章 因式分解

知道了積而求他的各個因式的手續,叫做因式分解,同上章的乘法,手續剛正相反.凡因式分解的問題,都是多項式,要把他化做諸因式的連乘式,所以結果一定是單項式.凡因式分解的問題,都應分解到不能再分解爲止,就是要到所得的各因式中不再含有因式時爲止.

第一節 分解單項因式

一式中諸項有公共的因式時,可增一括號,把這因式放在括號的外面,用這因式除原式所得的商放在括號裏面.

例題 分解$9x^4y^3-15x^3y^2+3x^2y$的因式.

【解】 原式$=3x^2y(3x^2y^2-5xy+1)$.

【注意一】 9, 15, 3 的最大公約數是 3,故原式有公共因式 3;又x^2同y也都是三項的公共因式,所以把$3x^2y$放在括號外面.如把原式分解爲$3xy(3x^3y^2-5x^2y+x)$,那末括號內的三項仍有公共因式x,這就是分解不完全.

【注意二】 題中的末項$3x^2y$的因式全部放到

括號的外面,所以括號內的第三項是 $(3x^2y\div 3x^2y=)$ $+1$, 決不能漏去.

特例一　式中的各項有相同的多項因式時,可把他看作單項因式放在括號外面.

例題一　分解$(a+b)^2+2(a+b)^3$的因式.

【解】　原式 $=(a+b)^2[1+2(a+b)]$.

【注意一】　本題中的$(a+b)$當看作一個單項因式,假定用 x 代表,那末可改本題爲x^2+2x^3.這個式子的結果,一望而知是 $x^2(1+2x)$. 用此式同本題一對照,立刻可以得到他的結果.初學者大多不能懂得此法,所以對於因式分解的問題,每望而却步.

【注意二】　因原題中有括號( ),所以另增的要用括號[ ].又因裏面的括號( )若脫去,結果並不比較簡單,故不必脫去.

例題二　分解$(x+y)^2-(x+y)(x-y)+6(x+y)$的因式.

【解】　原式 $=(x+y)[(x+y)-(x-y)+6]$

$=(x+y)(x+y-x+y+6)=(x+y)(2y+6)$

$=2(x+y)(y+3)$.

【注意一】　括號[ ]內的括號( )脫去後,括號僅有一重,所以把括號[ ]改成括號( ).

【注意二】　第二個因式中的項,經整理後,得二

項的因式$(2y+6)$,其中又有公共因數 2,須把他放到括號外面,否則分解不完全.

【注意三】 單項因數 2,通常應放在多項因式的前面.

特例二 有時式中各項雖沒有相同的因式,卻有符號全反的因式,這時可根據上章第三節特例一的注意,把符號化做全同,然後用上法做.

例題 分解

$(a+b)(x+y-z)-(a-b)(-x-y+z)$的因式.

【解】 原式 $=(a+b)(x+y-z)-(-a+b)(x+y-z)$

$=(x+y-z)[(a+b)-(-a+b)]$

$=(x+y-z)(a+b+a-b)=2a(x+y-z)$.

習題二十三

分解下列各題的因式:

(1) $14a^2b^3-63b^2c+7ab^4$. (2) x^3+3x^2-x.

(3) $24a^2+16b^2+8c^2$.

(4) $27a^3b^5+54a^5b^3-81a^2b^6$.

(5) $2(a-b)+4(a-b)^2$. (6) $2a(a+b)-c(a+b)$.

(7) $(x+y)(x+2)-2(x+y)$. (8) $(x+y)^3+3x(x+y)$.

(9) $(a+b)^2(x+y)-(a+b)(x+y)^2$.

(10) $ax^2(b-c)-3(c-b)$.

【提示】 原式 $=ax^2(b-c)+3(b-c)=$ ……………

(11) $(a-b)c+(b-a)c^2$.

(12) $(x+y)(a+b-c)+(x+y)(a-b+c)$.

(13) $(a-b)^2x-(b-a)^2y$.

【提示】 據上章第一節例四的注意,知 $(b-a)^2=(a-b)^2$.

(14) $(x-y)^3(b+c)-(y-x)^3(b-c)$.

【提示】 據上章第四節例二的注意,知 $(y-x)^3=-(x-y)^3$.

第二節　分組分解

將一式分為數組,使各組中有單項因式可以分解出來.若各組的單項因式分出以後,諸組間的另一因式完全相同,可再把他當作單項因式看,仍用上法分解.

例題一　分解 $ax+by+ay+bx$ 的因式.

【解法一】 原式 $=(ax+ay)+(bx+by)$

$=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$.

【解法二】 原式 $=(ax+bx)+(ay+by)$

$=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$.

例題二　分解 x^4-2x^3+2x-4 的因式.

【解】　原式 $=(x^4-2x^3)+(2x-4)=x^3(x-2)+2(x-2)$
$=(x-2)(x^3+2)$.

例題三　分解 $2ax+4bx-6cx+ay+2by-3cy$ 的因式.

【解】　原式 $=(2ax+4bx-6cx)+(ay+2by-3cy)$
$=2x(a+2b-3c)+y(a+2b-3c)$
$=(a+2b-3c)(2x+y)$.

特例一　有時在一組中雖沒有單項因式可以分解,但可把這組當作一個因式看.

例題　分解 a^3x-a^2+ax-1 的因式.

【解】　原式 $=(a^3x-a^2)+(ax-1)$
$=a^2(ax-1)+(ax-1)$
$=(ax-1)(a^2+1)$.

特例二　有時須使一組中分出的單項因式爲負數,以免各組中另一因式的號相反.

例題　分解 $3x^2-4xy-3xy^2+4y^3$ 的因式.

【解】　原式 $=(3x^2-4xy)-(3xy^2-4y^3)$
$=x(3x-4y)-y^2(3x-4y)$
$=(3x-4y)(x-y^2)$.

特例三　有時須把一項分作二項,再分組分解.

例題　分解 $x^4+x^3+2x^2+x+1$ 的因式.

【解】 原式 $=(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^2+1)$.

特例四 有時須先分出單項因式,再分組分解.

例題 分解 $5x^3+10x-5x^2-10$ 的因式.

【解】 原式 $=5(x^3+2x-x^2-2)$

$=5[(x^3+2x)-(x^2+2)]$

$=5[x(x^2+2)-(x^2+2)]=5(x^2+2)(x-1)$.

【注意】 第三個等號下的一節,可看作$5(xy-y)$,應等於 $5y(x-1)$.

習題二十四

分解下列各題的因式:

(1) $ax-by+ay-bx$. (2) $ab+ac+bx+cx$

(3) $ax-bx-b+a$. (4) x^3+x^2+x+1.

(5) x^5-x^4+x-1. (6) x^4-2x^3+2x-4

(7) $x^2+2ax+3bx+6ab$. (8) $8x^2-12ax-10bx+15ab$.

(9) $x^6+3x^4+3x^2+9$.

(10) $2a^3-5a^2b+4a^2bx-10ab^2x$.

(11) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+5x-5$.

(12) $x^3+x^2y+x^2z-xyz-y^2z-yz^2$.

(13)　$ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$.

【提示】　去括號,重行分組.

(14)　$(2a^2+3y^2)x+(2x^2+3a^2)y$.

(15)　$ax^2-(a+b)xy+by^2$.

(16)　$xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$.

(17)　$2a+(a^2-4)x-2ax^2$.

(18)　$ax^3+(a+b)x^2+(a+b)x+a$.

(19)　$x^3-(2a-b)x^2-(2ab-a^2)x-2a^3$.

(20)　$a^2y-a^2x(1+y)+ax^2(1+xy)-x^4$.

第三節　完全平方的三項式

公式 1.　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

公式 2.　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

從上列公式,可知三項式的冪順列後,若首、末二項是二數的完全平方,中間一項是這二數積的二倍,那末可化爲二數和或差的完全平方;加、減號與三項式的中間一項的號相同.

下面列一模範式,凡三項式可化爲左邊的形式時,看□內同△內應是什麼數,那末右邊的□內同△內也應是什麼數.

$$\square^2\pm2\square\triangle+\triangle^2=(\square\pm\triangle)^2.$$

(註) ± 是正或負的記號,這是為簡便計,把二式合寫在一起的方法.

例題 分解 $4x^2-12xy+9y^2$ 的因式.

【解】 原式 $=(2x)^2-2(2x)(3y)+(3y)^2=(2x-3y)^2$.

【注意】 $2x$ 同模範式的□相當,$3y$ 同模範式的△相當,切不可誤作 $4x$ 同 $9y$ 各與□同△相當.

特例一 三項式中完全平方的二項若是負數,應放在負括號內,然後仿上法做.

例題 分解 $-x^2-y^2+2xy$ 的因式.

【解】 原式 $=-(x^2-2xy+y^2)=-(x-y)^2$.

【注意】 有人以為負數自乘得正數,$-(x-y)^2$ 應等於 $(x-y)^2$,這是極大的錯誤;因為 $-(x-y)^2$ 只能看作 $-[(x-y)^2]$(即一數平方的相對數),決不能看作 $[-(x-y)]^2$ (一數相對數的平方).

特例二 有時可把一個多項式當作單項式看,用上法分解因式.

例題 分解下式的因式:

$$(m+5n)^2+2(m+5n)(3m-n)+(3m-n)^2.$$

【解】 原式 $=[(m+5n)+(3m-n)]^2$

$=(m+5n+3m-n)^2=(4m+4n)^2$

$=[4(m+n)]^2=16(m+n)^2$.

【注意】 學者切勿誤認 $(4m+4n)^2=4(m+n)^2$.

特例三 有時可把六項式分成三組,使成完全平方的三項式,再用公式1、2分解.

例題 分解 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 的因式.

【解】 原式 $=(a^2+2ab+b^2)+(2ca+2bc)+c^2$

$$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

$$=[(a+b)+c]^2=(a+b+c)^2.$$

【注意】 本題實際就是:

公式 3.

$$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2}.$$

習 題 二 十 五

分解下列各題的因式:

(1) $x^2-4xy+4y^2$.

(2) $16x^2+8x+1$.

(3) $1+8a+16a^2$.

(4) $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$.

(5) $\frac{a^2}{4}-\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}$

(6) $x^2y^2-6xyz+9z^2$.

(7) $x^2-3x+\frac{9}{4}$.

(8) $25a^4+60a^2b^2+36b^4$.

【提示】 原式 $=(5a^2)^2+2(5a^2)(6b^2)+(6b^2)^2=\cdots\cdots$.

(9) $1+4y(y-1)$.

(10) $-12x^3+36ax^2-27a^2x$.

【提示】 原式 $=-3x(4x^2-12ax+9a^2)=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(11) $4a^2x^2+4abx+b^2$. (12) $-8x^2-4x^4-4$.

(13) $-3m^2-6m-3$. (14) $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$.

(15) $(a-b)^2-2(a-b)(c+d)+(c+d)^2$.

【提示】 原式 $=[(a-b)-(c+d)]^2=\cdots\cdots$. $(c+d)$的括號,初時不能略去,否則 d 的號易於錯誤.

(16) $9(a+b)^2-6c(a+b)+c^2$.

【提示】 原式 $=[3(a+b)]^2-2[3(a+b)]c+c^2=\cdots$.

(17) $4x^2y^2+4(a+b)xy+(a+b)^2$.

(18) $(x^2-5x+4)^2+2(x^2-5x+4)(5x-3)+(5x-3)^2$.

(19) $x^2-2xy+y^2-4x+4y+4$.

(20) $4a^2+b^2+c^2+4ab-2bc-4ca$.

(21) $x^2+y^2+2xy+xz+yz+\frac{1}{4}z^2$.

(22) $m^2-2mn+n^2-m+n$.

【提示】 原式 $=(m-n)^2-(m-n)=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(23) $a^2b+a^2c+2ab^2+2abc+b^3+b^2c$.

【提示】 原式 $=a^2(b+c)+2ab(b+c)+b^2(b+c)$

$=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

第四節 二式平方的差

公式 4. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

從上列公式,可知二項式中的二項,若是二數的完全平方,且中間是－號,那末可化為

二數的和同二數的差兩個因式.

下面列一模範式,凡二項式可化爲左邊的形狀時,看□內同△內各是什麼數,那末右邊□內同△內亦是什麼數.

$$\square^2-\triangle^2=(\square+\triangle)(\square-\triangle)$$

例題一　分解$a^2b^2-81c^2$的因式.

【解】　原式$=(ab)^2-(9c)^2=(ab+9c)(ab-9c)$.

例題二　分解

$(a+b+c+d)^2-(a+b-c-d)^2$的因式.

【解】　原式$=[(a+b+c+d)+(a+b-c-d)]$

$[(a+b+c+d)-(a+b-c-d)]$

$=(a+b+c+d+a+b-c-d)$

$(a+b+c+d-a-b+c+d)$

$=(2a+2b)(2c+2d)=2(a+b)2(c+d)$

$=4(a+b)(c+d)$.

例題三　分解x^5-16xy^4的因式.

【解】　原式$=x(x^4-16y^4)=x[(x^2)^2-(4y^2)^2]$

$=x(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$

$=x(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$.

【注意】　$x(x^4-16y^4)=x[(x^2+4y^2)(x^2-4y^2)]$,括號[]可以略去,因各因式相乘的順序可以掉換;但在後面習題二十九(12),$2(x^4-7x^2+1)=2[(x^4+2x^2+1)-9x^2]$

的括號[ ]却不能略去,因以2乘兩數的差,不能單獨乘第一數.

特例一 有時可將式中諸項分成兩組,各分解爲完全平方,再用上法分解.

例題 分解 $2bd-a^2-c^2+b^2+d^2+2ac$ 的因式.

【解】 原式 $=(b^2+2bd+d^2)-(a^2-2ac+c^2)$

$=(b+d)^2-(a-c)^2$

$=[(b+d)+(a-c)][(b+d)-(a-c)]$

$=(b+d+a-c)(b+d-a+c).$

特例二 有時須用一數乘各項,再用這數的倒數乘全式,然後才能分解.

例題 分解 $\frac{3}{5}\left(a+b\right)^2-\frac{5}{3}\left(a-b\right)^2$ 的因式.

【解】 原式 $=\frac{1}{15}[9(a+b)^2-25(a-b)^2]$

$=\frac{1}{15}[3(a+b)+5(a-b)]$

$[3(a+b)-5(a-b)]$

$=\frac{1}{15}(3a+3b+5a-5b)$

$(3a+3b-5a+5b)$

$=\frac{1}{15}(8a-2b)(8b-2a)$

$$=\frac{1}{15}\times 2(4a-b)2(4b-a)$$

$$=\frac{4}{15}(4a-b)(4b-a).$$

習 題 二 十 六

分解下列各題的因式:

(1) $64a^2-49b^2$. (2) $b^2c^2-4d^2$.

(3) $1-16x^2y^2$. (4) $\frac{1}{4}a^2-1$.

(5) a^8-b^8. (6) $16x^4-81y^4$.

(7) $-3+48x^4$. (8) $(a+b)^2-1$.

(9) $(2a+b)^2-(a+2b)^2$. (10) $9(x+y)^2-4(x-y)^2$.

(11) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.

(12) $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$.

(13) $4ab-a^2-4b^2+c^2$.

【提示】 原式 $=c^2-(a^2-4ab+4b^2)$

$$=c^2-(a-2b)^2=\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(14) $a^2-2ab+b^2-c^2$. (15) $2ab+1-a^2-b^2$.

(16) $x^2+a^2-y^2-b^2-2ax+2by$.

(17) $1-a^2+x-ab+\frac{1}{4}(x^2-b^2)$.

【提示】 先去括號.

(18)* $a^4-ab^2+b^2-1$.

【提示】 原式 $=(a^4-1)-(ab^2-b^2)$

$=(a^2+1)(a+1)(a-1)-b^2(a-1)=\cdots\cdots$.

(19) $x(x+4)-y(y+4)$. (20) $1+bx-(a^2+ab)x^2$.

(21) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.

【提示】 原式 $=(2ab+a^2+b^2-c^2)$

$(2ab-a^2-b^2+c^2)$

$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$

$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(22) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$. (23) $4(x+y)^3-(x+y)$.

【提示】 原式 $=(x+y)[4(x+y)^2-1]=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(24) $a^2x-b^2x-a^2y+b^2y$.

(25) $mn(a-b)^2-mn(c-d)^2$.

(26) $x^4-(2+m^2)x^2y^2+y^4$.

【提示】 先去括號.

(27) $(4x^2-9y^2)^2$.

【提示】 原式 $=[(2x+3y)(2x-3y)]^2$,視作 $(ab)^2$,可化爲 a^2b^2.

(28) $\frac{1}{3}a^2-2a+3-3x^2$.

【提示】 原式 $=3\left(\frac{1}{9}a^2-\frac{2}{3}a+1-x^2\right)$

$=3\left[\left(\frac{1}{3}a-1\right)^2-x^2\right]=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(29) $2x^2-\frac{1}{8}$

(30) $(a+2b)a^3-(b+2a)b^3$.

【提示】 原式 $=a^4-b^4+2a^3b-2ab^3$

$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)+2ab(a^2-b^2)$

$=(a^2-b^2)(a^2+2ab+b^2)=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

第五節 完全立方的四項式

公式 5. $\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3}$.

公式 6. $\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3}$.

從上列兩個公式,可知四項式中若有二項是二數的完全立方,一項是第一數平方乘第二數的 3 倍,又一項是第一數乘第二數平方的 3 倍,那末可化爲二數和或差的立方.惟須注意公式中的符號.

列模範式如下:

$$\square^3\pm3\square^2\triangle+3\square\triangle^2\pm\triangle^3=(\square\pm\triangle)^3.$$

例題一 分解 $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ 的因式.

【解】 原式 $=x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3$

$=(x+2y)^3$.

例題二 分解 $27a^3-27a^2+9a-1$ 的因式.

【解】 原式 $=(3a)^3-3(3a)^2\times1+3(3a)\times1^2-1^3$

$=(3a-1)^3$.

習題二十七

分解下列各題的因式:

(1) x^3-3x^2+3x-1. (2) $x^3+9x^2+27x+27$.

(3) $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$.

(4) $m^6-15m^4n^2+75m^2n^4-125n^6$.

(5) $x^3-x^2y+\frac{1}{3}xy^2-\frac{1}{27}y^3$.

(6) $1-3(x+y)+3(x+y)^2-(x+y)^3$.

(7) $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+3x^2+3y^2+6xy+3x+3y+1$.

【提示】 原式 $=(x+y)^3+3(x+y)^2+3(x+y)+1=\cdots$.

(8) $8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3-4a^2+b^2$.

【提示】 原式 $=(2a-b)^3-(2a+b)(2a-b)=\cdots\cdots$

第六節 二式立方的和或差

公式 7. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

公式 8. $a^3-b^3= a-b)(a^2+ab+b^2)$.

從上列兩個公式,可知二數立方的和或差,都可分解爲二個因式:第一個因式是二數的和或差;第二個因式是三項式,其中二項是

第一因式中二數的平方,其他一項是第一因式中二數積的相對數.

列模範式如下:

$$\square^3 \pm \triangle^3 = (\square \pm \triangle)(\square^2 \mp \square\triangle + \triangle^2).$$

例題一 分解 $8x^3+27y^3$ 的因式.

【解】 原式 $=(2x)^3+(3y)^3$

$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$

【注意】 第二因式中間一項的數是負;又絕對值不是$2x$同$3y$積的 2 倍,初學者每易錯誤.

例題二 分解 $128a^3-2$ 的因式.

【解】 原式 $=2(64a^3-1)=2(4a-1)(16a^2+4a+1).$

例題三 分解 $(a+b)^3-b^3$ 的因式.

【解】 原式 $=[(a+b)-b][(a+b)^2+(a+b)b+b^2]$

$=(a+b-b)(a^2+2ab+b^2+ab+b^2+b^2)$

$=a(a^2+3ab+3b^2).$

特例 二數六次方的差,可視爲二數立方的平方差,先用公式4分解.

例題 分解 x^6-64y^6 的因式.

【解】 原式 $=(x^3)^2-(8y^3)^2=(x^3+8y^3)(x^3-8y^3)$

$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

$(x-2y)(x^2+2xy+4y^2).$

【注意】 若把原式看作 $(x^2)^3-(4y^2)^3$, 先用公

式8分解亦可,但須應用下節的配方分解法,手續較繁。

習題二十八

分解下列各題的因式:

(1) $64m^3-125n^3$. (2) $2x^3y^3+16z^3$.

(3) x^3+1. (4) x^3-1.

(5) $3a^4b-24ab^4$. (6) $27x^3+\frac{1}{8}y^3$.

(7) $\frac{a^3}{64}+\frac{b^3}{27}$. (8) $\frac{x^3}{9}-\frac{y^3}{72}$.

【提示】 原式 $=\frac{1}{9}\left(x^3-\frac{y^3}{8}\right)=\cdots\cdots$.

(9) $\frac{x^3}{4}+\frac{2y^3}{27}$. (10) $-64-x^3$.

【提示】 原式 $=-(64+x^3)=\cdots\cdots$.

(11) a^6-64b^6. (12) x^6-1.

(13) $(x+y)^6-(x-y)^6$. (14) $(a+2b)^3-b^3$.

(15) $8x^3+125(y-z)^3$.

(16) $(1-x)^2-(1-x)^5$.

【提示】 原式 $=(1-x)^2[1-(1-x)^3]=\cdots\cdots$.

(17) $(a+b)^4(a-b)-(a+b)(a-b)^4$.

(18) $a^{12}+b^{12}$.

【提示】 原式 $=(a^4)^3+(b^4)^3=\cdots\cdots$.

(19) $x^{12}+1$.

(20) $x^3-27y^3-x^2+9y^2$.

【提示】 原式 $=(x^3-27y^3)-(x^2-9y^2)=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(21) $x^3-y^3-x^2+2xy-y^2$.

(22) $x^3+y^3+6x+6y$.

(23) $a^3-a^2-a-b^3+b^2+b$.

(24) $a^3-a^2-a+2ab+b-b^2-b^3$.

(25) $4x^6y^6-x^3y^3-108x^2y^2+27$.

(26) $x^4+x^3+x^2y+xy^2+y^3-y^4$.

(27) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$.

【提示】 用本節的方法解.

第七節 配方分解

在因式分解的問題中,有時可在原式內插入絕對值相同,符號相反的二項,或把一項分爲二項,配成完全平方的三項式,或完全立方的四項式,然後再應用公式 4、7 或 8 分解.

例題一 分解 x^4+4 的因式.

【解】 原式 $=(x^4+4x^2+4)-4x^2$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=[(x^2+2)+2x][(x^2+2)-2x]$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

【注意一】　$x^4=(x^2)^2$, $4=2^2$,所以在 x^4+4 的中間須插入 x^2 同 2 的積的 2 倍,才能配成完全平方的三項式.

【注意二】　答案中的 $2x$,須放在中間的一項,冪的順序比較整齊.

例題二　分解 $x^4+x^2y^2+y^4$ 的因式.

【解】　原式 $=(x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

例題三　分解 x^3+3x^2+3x+2 的因式.

【解】　原式 $=(x^3+3x^2+3x+1)+1=(x+1)^3+1^3$

$=[(x+1)+1][(x+1)^2-(x+1)+1]$

$=(x+2)(x^2+x+1)$.

例題四　分解 x^2-4x-5 的因式.

【解】　原式 $=(x^2-4x+4)-9=(x-2)^2-3^2$

$=(x-2+3)(x-2-3)=(x+1)(x-5)$.

【注意】　$x^2-4x=x^2-2x\times 2$, 所以須配以 2^2, 才能成爲完全平方的三項式.

習題二十九

分解下列各題的因式.

(1)　x^4+4y^4.　　　　(2)　x^4+64.

(3) $x^4+\frac{1}{4}$.　　(4) $x^4+\frac{1}{64}$.

(5) x^4+x^2+1.　　(6) $a^8+a^4b^4+b^8$.

(7) $x^4+3x^2y^2+4y^4$.　　(8) x^4+12x^2+64.

(9) $9a^4+2a^2b^2+b^4$.

(10) $x^4-23x^2y^2+y^4$.

【提示】 原式 $=(x^4+2x^2y^2+y^4)-25x^2y^2=\cdots\cdots$.

(11) x^4-11x^2+1.　　(12) $2x^4-14x^2+2$.

(13) $a^4-13a^2b^2+4b^4$.　　(14) $16a^4-a^2+1$.

(15) x^3+3x^2+3x+9.　　(16) $a^3-3a^2b+3ab^2+7b^3$.

(17) $8x^3-12x^2+6x-2$.　　(18) $a^3+9a^2+27a+26$.

(19) $a^3+b^3+3a^2+3b^2+3a+3b+2$.

【提示】 原式 $=(a^3+3a^2+3a+1)+$
$(b^3+3b^2+3b+1)=\cdots\cdots\cdots\cdots$.

(20) $a^3+b^3+3a^2-6b^2+3a+12b-7$.

(21) $x^2+8x+15$.　　(22) $x^2-16x+39$.

(23) $x^2+2x-15$.　　(24) x^2-6x-7.

第八節 二次三項式(一)

公式 9. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$.

把上面公式中的號加以變化,可得同類的三公式:

$$x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b).$$
$$x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b).$$
$$x^2-(a-b)x-ab=(x-a)(x+b).$$

從上列四式,可知凡 x 的二次三項式中,若二次項的係數是 1,那末可分解爲兩個二項的因式,他們的第一項都是 x;第二項(用 a、b 代表)應看題中一次項的係數同不含 x 的項而定,定的方法分二步述之於下:

I. 定符號法:

不含 x 的項爲正時,a、b 同號;

(*A*)若 x 的項亦正,則 a、b 同正.

(*B*)若 x 的項爲負,則 a、b 同負.

不含 x 的項爲負時,a、b 異號;

(*A*)若 x 的項爲正,則 a、b 中絕對值大的是正,小的是負.

(*B*)若 x 的項亦負,則 a、b 中絕對值大的是負,小的是正.

II. 定絕對值法:

先把不含 x 的項的絕對值分成可能的各對因數:

(*A*)若 a、b 同號時,看那一對因數的和等於 x 的係數(絕對值),那末這對因數就是 a、

b 的絕對值.

(B)若 a、b 異號時,看那一對因數的差等於 x 的係數(絕對值),那末這對因數就是 a、b 的絕對值.

例題一　分解 $x^2+8x+15$ 的因式.

【解】　原式 $=(x+3)(x+5)$.

【說明】　因 15 是正,故 a、b 同號;又因 $8x$ 亦正,故 a、b 同爲正.把 15 分成二因數,有 1×15,3×5 兩對,其中 3 同 5 的和是 8,所以 a、b 的值就是 3 同 5.

【注意】　本題就是習題二十九的(21)題,這裏的解法要比配方法便當得多,以下各例亦然.

例題二　分解 $x^2-16x+39$ 的因式.

【解】　原式 $=(x-3)(x-13)$.

【說明】　因 39 爲正,故 a、b 同號;又因 $16x$ 爲負,故 a、b 同爲負.把 39 分成二因數,有 1×39,3×13 二對,其中 3 同 13 的和是 16,所以 a、b 的值是 3 同 13.

例題三　分解 $x^2+2x-15$ 的因式.

【解】　原式 $=(x+5)(x-3)$.

【說明】　因 15 是負,故 a、b 異號;又因 $2x$ 是正,故 a、b 中絕對值大的是正,小的是負.把 15 分成各對因數,有 1×15,3×5 二對,其中 3 同 5 的差是 2,所以正號下是 5,負號下是 3.

例題四　分解x^2-6x-7的因式.

【解】　原式$=(x+1)(x-7)$.

【說明】　因7是負,故a、b異號;又因$6x$亦爲負,故a、b中絕對值大的是負,小的是正.把7分成二因數,僅有1同7一對,差恰是6,所以負號下是7,正號下是1.

例題五　分解$x^2+12x-72$的因式.

【解】　原式$=(x+18)(x-4)$.

【注意】　求72的各對可能的因數時,可把72分解爲$2\times2\times2\times3\times3$.就這五個質因數中任意取出一個,求其餘的積,可得$2\times36$, 3×24二對;取出二個求積,再求其餘的積,得4×18, 6×12, 9×8三對;連同1×72共六對,其中4同18可以適用.

特例　二次三項式中若有二種文字時,仍仿上法分解.

例題　分解$x^2-11xy+18y^2$的因式.

【解】　原式$=(x-2y)(x-9y)$.

習題三十

分解下列各題的因式.

(1) x^2-5x+4.　　(2) x^2+x-42.

(3) $x^2-5x-14$.　　(4) x^2-x-20.

(5) $x^2y^2+6xy+8$. (6) $x^2y^2-14xyz+48z^2$.

(7) $x^2+4xy-32y^2$. (8) $x^2-17xy-84y^2$.

(9) $x^2-39x+224$. (10) $a^2+3a-108$.

(11) $x^2-\frac{3}{4}xy-\frac{1}{4}y^2$. (12) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

(13) $(a+b)^2-7(a+b)+12$.

(14) $(x+y)^2-7(x+y)z+10z^2$.

(15) $(x+y-z)^2+15(x+y-z)+56$.

(16) $x^4-17x^2y^2+16y^4$.

【提示】 原式 $=(x^2-y^2)(x^2-16y^2)=\cdots\cdots$.

(17) x^4-5x^2+4. (18) x^4-29x^2+100.

(19) x^6-7x^3-8. (20) x^6+28x^3+27.

(21) $(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20$.

【提示】 原式 $=(x^2+3x+2)(x^2+3x-10)=\cdots\cdots$.

(22) $x^2+y^2-20+x+y+2xy$.

【提示】 原式 $=(x+y)^2+(x+y)-20=\cdots\cdots$.

(23) $x^2+2xy+y^2-x-y-2$.

(24) $a^2+b^2+15+2ab+8a+8b$.

(25) $9x^2-6xy+y^2+15x-5y-24$.

(26) $(a^2-4)^2-(a+2)^2$

【提示】 原式 $=[(a^2-4)+(a+2)][(a^2-4)-(a+2)]$

$=(a^2+a-2)(a^2-a-6)=\cdots\cdots$.

第九節　二次三項式(二)

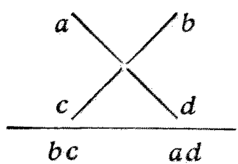
公式10.

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d).$$

從上列公式,可知二次三項式中二次項的係數不是 1 時,可用下法分解爲兩個二項的因式:

I.　把 x^2 的係數分成二個因數 a、c,分上、下列在左邊;把不含 x 的項也分成二個因數 b、d,分上、下列在右邊.

II.　交叉相乘,得兩個積 ad 同 bc 如下式:



III.　不含 x 的項爲正時,須使 bc、ad 的和等於 x 的係數;爲負時須使 bc、ad 的差等於 x 的係數.

IV.　把各對因數更換或上下對掉,這樣逐次試驗,到 bc 同 ad 的和或差適等於 x 的係數時爲止.

V. 把 a、b、c、d 的值填入兩個因式中,再仿上節的方法,定中間的符號.

例題一 分解 $10x^2+19x+6$ 的因式.

【解】 原式 $=(2x+3)(5x+2)$.

【說明】 分10同6成各對因數,交叉相乘,有下列八種:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 10 & & 6 \\ \hline 10 & & 6 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 1 & & 6 \\ & \times & \\ 10 & & 1 \\ \hline 60 & & 1 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 10 & & 3 \\ \hline 20 & & 3 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \times & \\ 10 & & 2 \\ \hline 30 & & 2 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \times & \\ 5 & & 6 \\ \hline 5 & & 12 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 2 & & 6 \\ & \times & \\ 5 & & 1 \\ \hline 30 & & 2 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 2 & & 2 \\ & \times & \\ 5 & & 3 \\ \hline 10 & & 6 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \times & \\ 5 & & 2 \\ \hline 15 & & 4 \end{array}$$

因6為正,所以在上列八式中去看,那式中兩個積的和是19,知道最後一式恰巧適合.

例題二 分解 $24x^2+14x-3$ 的因式.

【解】 原式 $=(4x+3)(6x-1)$.

【說明】 從下列八式,知道第四式中的數恰能合用,因為兩個積的差恰是14.

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 1 \\ & \times & \\ 8 & & 3 \\ \hline 8 & & 9 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 3 & & 3 \\ & \times & \\ 8 & & 1 \\ \hline 24 & & 3 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 4 & & 1 \\ & \times & \\ 6 & & 3 \\ \hline 6 & & 12 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 4 & & 3 \\ & \times & \\ 6 & & 1 \\ \hline 18 & & 4 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & \times & \\ 12 & & 3 \\ \hline 12 & & 6 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \times & \\ 12 & & 1 \\ \hline 36 & & 2 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 24 & & 3 \\ \hline 24 & & 3 \end{array}\quad \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \times & \\ 24 & & 1 \\ \hline 72 & & 1 \end{array}$$

别法 如把 x^2 的係數同不含 x 的項分成各對因數,他的對數很多時,用上法非常不便,可用同數乘、除原式,使化為 y^2+my+n 的形狀,再照上節的方法分解.

例題 分解 $12x^2-8x-15$ 的因式.

【解】 原式 $=\frac{1}{12}[(12x)^2-8(12x)-180]$

$$=\frac{1}{12}(12x-18)(12x+10)$$

$$=\frac{1}{12}\times 6(2x-3)2(6x+5)$$

$$=(2x-3)(6x+5).$$

習題三十一

分解下列各題的因式:

(1) $3x^2-16x+5$. (2) $2x^2+11x+12$.

(3) $4x^2+x-3$. (4) $3x^2-17x+10$.

(5) $6x^2-x-35$. (6) $5x^2-38x+21$.

(7) $6x^3-13xy+5y^2$. (8) $10x^2+3xy-y^2$.

(9) $7x^2-33xy-54y^2$. (10) $7x^2+24xy-55y^2$.

(11) $16x^2y^2z^2+39xyz-27$. (12) $16m^2n^2-218mn+27$.

(13) $9x^4-37x^2y^2+4y^4$. (14) $8x^6+7x^3-1$.

(15) $6(x-4)^2+11(x-4)(y-3)-7(y-3)^2$.

第八章　最高公因式、最低公倍式

第一節　重要名詞

1. 公因式、最高公因式　諸整式中公有的因式,稱做諸式的公因式.諸整式的公因式往往不止一種,其中係數最大,冪最高的,叫做諸式的最高公因式,略記爲 $H.C.F.$

【例】　$12a^3x^2y$、$8ax^3y^2$、$6a^4x^4$ 三式的公因式有 2、a、x、x^2、$2a$、$2x$、$2x^2$、ax、ax^2、$2ax^2$ 等,而 $2ax^2$ 是最高公因式.

2. 公倍式、最低公倍式　若諸整式同做某式的因式,這某式就是諸整式的公倍式.諸整式的公倍式,種數無限,其中係數最小,冪最低的,叫做諸式的最低公倍式,略記爲 $L.C.M.$

【例】　$4x^3y$、$10xy^3$ 二式的公倍式,有 $20x^3y^3$、$20x^4y^3$、$20x^4y^5$、$40x^3y^3$、……等,而 $20x^3y^3$ 是最低公倍式.

第二節　求最高公因式法

1. 分解因式法　分解各式的因式到不能再分時爲止.就諸式中公有的因式,選出指數最小的連乘,再求諸式係數的最大公約數

做係數,即得 $H.C.F.$

例題一　求 $63a^3b^5x$、$35a^4b^2c$、$14a^2b^3x^2$ 的 $H.C.F.$

【解】　$H.C.F.=7a^2b^2$.

例題二　求 $4a^2x^2-16a^2$, $8a^3x^2-24a^3x+16a^3$, $12a^2x^2y-12a^2xy-24a^2y$ 的 $H.C.F.$

【解】　第一式 $=4a^2(x^2-4)=4a^2(x+2)(x-2)$.

第二式 $=8a^3(x^2-3x+2)=8a^3(x-1)(x-2)$.

第三式 $=12a^2y(x^2-x-2)$

$=12a^2y(x+1)(x-2)$.

$\therefore$　$H.C.F.=4a^2(x-2)$.

特例　有時二式中有符號全反的因式,但也是他們的公因式.

例題　求 $8a(x-y)(x+y)$,　$12a^2b(y-x)$ 的 $H.C.F.$

【解】　第二式 $=-12a^2b(x-y)$.

$\therefore$　$H.C.F.=4a(x-y)$.

【注意】　變第一式為 $-8a(y-x)(x+y)$,則 $H.C.F.=4a(y-x)$.兩種答案都對,因為變 $H.C.F.$ 的號後,仍是原有諸式的 $H.C.F.$

習題三十二

求下列各題諸式的 $H.C.F.$

(1) $24a^3b^3x^4, 60a^2b^4x^5$. (2) ab^3, a^2bc, abc^2.

(3) $x^4-a^4, (x+a)^2$. (4) x^2-4, x^2+x-6.

(5) $x^4-y^4, x^3-y^3, x^2-y^2, x-y$.

(6) $ax^2+2a^2x+a^3, 2ax^2-4a^2x-6a^3, 3(ax+a^2)^2$,

(7) $12x^2+x-1, 15x^2+8x+1$.

(8) x^2-x-2, x^2+5x+4, x^3+1.

(9) $8a^2b^3+16a^3b^2, 4a^2b^4-16a^4b^2$.

(10) $3x^3-3xy^2, x^3y^2-y^5, x^2-7xy+6y^2$.

(11) $x^2-3x+2, x^2-1, x^2+6x-7$.

(12) $x^3-xy^2+3x^2y-3y^3, x^3-xy^2+2x^2y-2y^3, x^4-y^4$.

(13) $x^2+3x+2, x^2-3x-4, x^3+3x^2+3x+1$.

(14) $ac(a-b)(a-c), bc(b-a)(b-c)$.

*2. 輾轉相除法 不易分解因式的兩個多項式,可用輾轉相除法求他們的 $H.C.F.$,步驟如下:

I. 將二式依降冪排列,用次數低的做除式,高的做被除式,除得餘式.

II. 用餘式除初時的除式,再得餘式.

III. 繼續用餘式除上一次的除式,直到除盡爲止.那最後的除式,就是 $H.C.F.$

例題 求 $4x^3-9x^2-15x+18, x^2-4x+3$ 的

$H.C.F.$

【解】
$$
\begin{array}{rrl}
x^2-4x+3) & 4x^3-\ \ 9x^2-15x+18 & (4x+7 \\
 & 4x^3-16x^2+12x & \\ \hline
 & 7x^2-27x+18 & \\
 & 7x^2-28x+21 & \\ \hline
 & x-3)\,x^2-4x+3 & (x-1 \\
 & x^2-3x & \\ \hline
 & -\ x+3 & \\
 & -\ x+3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore\quad H.C.F.=x-3.$

【理由】 設題中的三次式為A,二次式為B,以B除A,得的整商是P,餘式是C,則得下列二式:

$A-BP=C$……………………(1), $BP+C=A$……………………(2).

由(1)式,根據單項因式的分解,知A、B的公因式都是C的因式,於是A,B的$H.C.F.$也是C的因式.

A,B的$H.C.F.$既是C的因式,那一定是A,B,C的$H.C.F.$

同樣,由(2)式可知B、C的$H.C.F.$也是A,B,C的$H.C.F.$

但A,B,C三式的$H.C.F.$一定,故A,B二式的$H.C.F.$同B,C二式的$H.C.F.$一樣.

今 C 可以除盡 B,那末 C 是 B、C 的 $H.C.F.$,也就是 A、B、C 的 $H.C.F.$

【注意】 輾轉相除時,學者用分離係數法較便。

特例一 有時欲免所得的商是分數,可用一數乘被除式,再輾轉相除。

例題 求 $2x^3-7x^2+13x-5$, $3x^3-11x^2+21x-10$ 的 $H.C.F.$

【解】

$$
\begin{array}{r}
3x^3-11x^2+21x-10 \\
2 \qquad\qquad\qquad (\times \\
\hline
2x^3-7x^2+13x-5)\,6x^3-22x^2+42x-20\,(3 \\
6x^3-21x^2+39x-15 \\
\hline
-x^2+3x-5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
-x^2+3x-5)\,2x^3-7x^2+13x-5\,(-2x+1 \\
2x^3-6x^2+10x \\
\hline
-x^2+3x-5 \\
-x^2+3x-5 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$\therefore\quad H.C.F.=-x^2+3x-5.$

或 $\quad H.C.F.=x^2-3x+5.$

【理由】 設有 $3a^2b$ 同 $5ab^2$ 二式,$H.C.F.$ 爲 ab。若以 2 乘第二式,得 $10ab^2$,則 $3a^2b$、$10ab^2$ 的 $H.C.F.$ 仍是 ab;若用 3 乘第二式,得 $15ab^2$,則 $3a^2b$、$15ab^2$ 的 $H.C.F.$ 變爲 $3ab$。

從上例,可見一數不做第一式的因式時,用來乘第二式後,他們的 $H.C.F.$ 不變.

特例二 有時欲免所得的商是分數,可用一數除除式,再輾轉相除.

例題 求 $x^3+x^2-2,\ x^4-x^3-7x^2-12x-6$ 的 $H.C.F.$

【解】
$$
\begin{array}{l}
x^3+x^2-2\,)\,x^4-x^3-7x^2-12x-6\,(\,x-2 \\
\qquad\qquad\quad x^4+x^3 \qquad\quad -2x \\
\hline
\qquad\qquad\quad -2x^3-7x^2-10x-6 \\
\qquad\qquad\quad -2x^3-2x^2 \qquad\quad +4 \\
\hline
\qquad\qquad\quad -5\ \Big|\ -5x^2-10x-10 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+2x+2\,)\,x^3+x^2-2\,(\,x-1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^3+2x^2+2x \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x^2-2x-2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x^2-2x-2 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$\therefore\quad H.C.F.=x^2+2x+2.$

【理由】 設有 $6x^3y^2$、$2xy^3$ 二式,$H.C.F.$ 是 $2xy^2$.若以 3 除第一式,則 $H.C.F.$ 仍是 $2xy^2$;若以 2 除第一式,則 $H.C.F.$ 變為 xy^2.

可見一數不做第二式的因式時,可用來除第一式,他們的 $H.C.F.$ 不變.

【注意】 上例的餘式若用 5 除,得 $-x^2-2x-2$,同題中第一式相除,仍能除盡,故 $H.C.F.=-x^2-2x-2$ 亦可.但通常因原式最高次項是正,故 $H.C.F.$的最高次項最好也是正.

特例三 求三式或三式以上的 $H.C.F.$,可先求第一、二兩式的 $H.C.F.$,再求這結果同第三式的 $H.C.F.$照此進行,那最後的 $H.C.F.$ 就是所求的數.

例題 求 x^3+x^2-x-1, x^3+3x^2-x-3, x^3+x^2-2 的 $H.C.F.$

【解】 第一、二兩式的 $H.C.F.=x^2-1$(豎式從略),

x^2-1 同第三式的 $H.C.F.=x-1$.

$\therefore$ 所求的 $H.C.F.=x-1$.

【理由】 x^2-1 同第三式的公因式既是 x^2-1 的因式,一定做第一、二兩式的公因式.所以是題中三式的公因式.

反過來說,題中三式的公因式,既是第一、二兩式的公因式,一定做 x^2-1 的因式,所以是 x^2-1 同第三式的公因式.

可見 x^2-1 同第三式的一切公因式,都是題中三式的公因式,於是 x^2-1 同第三式的 $H.C.F.$ 也就是題中三式的 $H.C.F.$

習題三十三

求下列各題中諸式的 $H.C.F.$

(1) $x^3+7x^2+17x+15,\ x^3+8x^2+19x+12.$

(2) $4x^3-3x^2-24x-9,\ 8x^3-2x^2-53x-39.$

(3) $x^3-4x^2+2x+3,\ 2x^4-9x^3+12x^2-7.$

(4) $x^3-4a^2x+15a^3,\ x^4+a^2x^2+25a^4.$

(5) $2x^3+x^2-x-2,\ 3x^3-2x^2+x-2.$

(6) $2x^4-7x^3-4x^2+x-4,\ 3x^4-11x^3-2x^2-4x-16.$

(7) $6x^2+x-2,\ 9x^3+48x^2+52x+16.$

(8) $x^3-5x^2+x+12,\ x^4-x^3-4x^2+x+3.$

(9) $x^3-41x-30,\ x^3-11x^2+25x+25.$

(10) $x^3-39x+70,\ x^3-48x+7,\ x^3-4x^2-67x+70.$

第三節　求最低公倍式法

1. 分解因式法　分解各式的因式,到不能再分為止,就各式中所有的因式,每種取出一個指數最大的來連乘,再求諸式係數的最小公倍數做係數,即得 $L.C.M.$

例題一　求 $4ab^2xy^4,\ 6a^3bcy^2,\ 10b^4xy$ 的 $L.C.M.$

【解】　$L.C.M.=60a^3b^4cxy^4.$

【理由】 要求一式做題中三式的公倍式,必須含三式所有的一切因式.三式中除係數外,有a、b、c、x、y五種因式.就a論,若取a或a^2,則不能做第二式的倍數,故至少須取a^3;同樣可知其他因式至少須取b^4、c、x、y^4.又係數的最小公倍數是60,故$60a^3b^4cxy^4$是三式的公倍式.因爲指數已是最小,所以是$L.C.M.$

例題二 求$4a^2x^2-16a^2$,$8a^3x^2-24a^3x+16a^3$,$12a^2x^2y-12a^2xy-24a^2y$的$L.C.M.$

【解】 第一式 $=4a^2(x^2-4)=4a^2(x+2)(x-2)$.

第二式 $=8a^3(x^2-3x+2)=8a^3(x-1)(x-2)$.

第三式 $=12a^2y(x^2-x-2)$

$=12a^2y(x+1)(x-2)$.

$\therefore$ $L.C.M.=24a^3y(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$.

特例 諸式中有符號全反的因式,可變作同一因式,再求$L.C.M.$,否則求得的公倍式不是最低的.

例題 求$(a-b)(c-b)$,$(b-c)(a-c)$,和$(c-a)(b-a)$的$L.C.M.$

【解】 第一式 $=-(a-b)(b-c)$.

第二式 $=-(b-c)(c-a)$.

第三式 $=-(c-a)(a-b)$.

$\therefore$ $L.C.M.=(a-b)(b-c)(c-a)$.

習題三十四

求下列各題中諸式的 $L.C.M.$

(1) $24a^4bc^3, 60ab^3c$. (2) $a^3-ab^2, a+b$.

(3) $3x^2-12, x-2$. (4) x^2+3x+2, x^2+8x+7.

(5) $3a^2+9ab, 2a^3-18ab^2, a^3+a^2b-6ab^2$.

(6) $x^2+x-42, x^2-11x+30, x^2+2x-35$.

(7) $a^2-b^2, a^3-b^3, a^3-a^2b-ab^2+b^3$.

(8) $60x^4+5x^3-5x^2, 60x^2y+32xy+4y, 40x^3y-2x^2y-2xy$.

(9) $x^3+2x^2-8x-16, x^3+3x^2-8x-24$.

(10) $2x^2+xy-3y^2, x^3-x^2y-xy^2+y^3, x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

(11) $x^3-x^2-4x+4, x^3-2x^2-x+2, x^3+2x^2-x-2$.

(12) $(a+b)^2-c^2, (b+c)^2-a^2, (c+a)^2-b^2$.

(13) $(x-y)(x-z), (y-z)(y-x), (z-x)(z-y)$.

(14) $m-n, n^3-m^3, m^2+mn+n^2, m^2-3mn+2n^2$.

***2. 先求最高公因式法** 不易分解因式的二個多項式,要求他們的 $L.C.M.$,可先求他們的 $H.C.F.$,用這 $H.C.F.$ 除二式中的任何一式,再乘以他式,即得 $L.C.M.$

例題 求 $4x^3-3x^2-24x-9, 8x^3-2x^2-53x-39$ 的 $L.C.M.$

【解】

$$
\begin{array}{r}
4x^3-3x^2-24x-9)\,8x^3-2x^2-53x-39\,(2\\
8x^3-6x^2-48x-18\\
\hline
4x^2-\ \ 5x-21
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
4x^2-5x-21)\,4x^3-3x^2-24x-9\,(x\\
4x^3-5x^2-21x\\
\hline
2x^2-3x-9\\
2\qquad\quad (\times\\
\hline
4x^2-6x-18\,(1\\
4x^2-5x-21\\
\hline
-1\,|\ -x+3\\
\hline
x-3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
x-3)\,4x^2-\ \ 5x-21\,(4x+7\\
4x^2-12x\qquad\quad\\
\hline
7x-21\\
7x-21\\
\hline
0
\end{array}
$$

$H.C.F.=x-3.$

$$\therefore\quad L.C.M.=\frac{4x^3-3x^2-24x-9}{x-3}\times(8x^3-2x^2-53x-39)$$

$$=(4x^2+9x+3)(8x^3-2x^2-53x-39).$$

【理由】 設有 a^3bc^2y, ac^3x^2 二式,求 $H.C.F.$ 時須取出公有的因式中指數最小的連乘,得 ac^2; 求 $L.C.M.$ 時須取出不能公有的全部因式,同公有的因式中指數最大的連乘,得 $a^3bc^3x^2y$. 這樣一來,兩次取出連乘的諸因式,恰是原有二式中全部的因數.就任何問題試驗,都是如此.於是得定律:「**二式的積,等於他們的 $H.C.F.$ 同 $L.C.M.$ 的積.**」

設二式為 A, B, 則得

$$L.C.M.\times H.C.F.=A\times B.$$

$$\therefore\quad L.C.M.=\frac{A}{H.C.F.}\times B=\frac{B}{H.C.F.}\times A.$$

(註) 上法的理由,尚有更普遍的證明,因不合初學程度,所以略去不講.

特例一 二式沒有公因式時,他們的積就是二式的 $L.C.M.$

例題 求 x^3-2x+1, x^3+x+3 的 $L.C.M.$

【解】 題中二式沒有公因式,

$$\therefore\quad L.C.M.=(x^3-2x+1)(x^3+x+3).$$

特例二 求三式或三式以上的 $L.C.M.$,可先求第一、二兩式的 $L.C.M.$,再求這結果同第三式的 $L.C.M.$ 照此進行,那最後的 $L.C.M.$ 就是所求的數.

例題 求 x^3+x^2-2, x^3+2x^2-3, $a^2x^2+3a^2x+3a^2$ 的 $L.C.M.$

【解】 第一、二兩式的 $H.C.F.=x-1$.

$\therefore$ 第一、二兩式的 $L.C.M.=\dfrac{x^3+x^2-2}{x-1}\times(x^3+2x^2-3)$

$=(x^2+2x+2)(x^3+2x^2-3)$……第四式.

第三、四兩式的 $H.C.F.=x^2+3x+3$.

$\therefore$ 所求的 $L.C.M.=\dfrac{a^2x^2+3a^2x+3a^2}{x^2+3x+3}\times$

$$(x^2+2x+2)(x^3+2x^2-3)$$

$$=a^2(x^2+2x+2)(x^3+2x^2-3).$$

【理由】 可仿上節2的特例三說明他.

習題三十五

求下列各題中諸式的 $L.C.M.$

(1) $x^3+2x^2-13x+10,\ x^3+x^2-10x+8.$

(2) $x^3-5x^2-99x+40,\ x^3-6x^2-86x+35.$

(3) $x^3-7x-6,\ x^3+8x^2+17x+10.$

(4) $x^4-1,\ x^4+x^3+2x^2+x+1.$

(5) $2x^4+x^3-20x^2-7x+24,\ 2x^4+3x^3-13x^2-7x+15.$

(6) $x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3,\ x^3-2x^2y+3xy^2-6y^3$

(7) $x^3-9x^2+26x-24,\ x^3-12x^2+47x-60.$

(8) $x^3+6x^2+11x+6,\ x^3+8x^2+19x+12.$

(9) $x^2-4x+7,\ x^3+8x^2-5x+4.$

(10) $x^2+2x-3,\ x^3+3x^2-x-3,\ x^3+4x^2+x-6.$

第九章　分式

第一節　基礎計算

1. 號的變化　分式的分子就是被除式,分母就是除式,根據正負數的除法,知道分式中分子、分母的號同變,分式的值不變;若僅變分子的號,或僅變分母的號,則分式的號應變.可用下式表示:

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}.$$

例題一　變 $\frac{a-b}{x-y}$、$\frac{a-b}{y-x}$、$\frac{2a}{(y-x)^2}$、$\frac{b+a}{(x-y)^3}$、$\frac{b+2a}{(y-x)^3}$ 的號,使諸分母的因式相同.

【解】　使第一、四兩式不變,則第二式當變為 $\frac{b-a}{x-y}$,第三式當變為 $\frac{2a}{(x-y)^2}$,第五式當變為 $\frac{-b-2a}{(x-y)^3}$.

【注意】　根據第六章第一節的定律,知 $(y-x)^2=(x-y)^2$;又根據第六章第四節的定律,知 $(y-x)^3=-(x-y)^3$.

例題二　變 $\frac{2}{(a-b)(a-c)}$、$\frac{3}{(b-c)(b-a)}$、和 $\frac{4}{(c-a)(c-b)}$ 的號,使諸分母中因式的種數最少.

【解】 第一式 $=\dfrac{-2}{(a-b)(c-a)}$,

第二式 $=\dfrac{-3}{(b-c)(a-b)}$,

第三式 $=\dfrac{-4}{(c-a)(b-c)}$,

或 第一式 $=\dfrac{2}{(a-b)(a-c)}$.

第二式 $=\dfrac{-3}{(b-c)(a-b)}$.

第三式 $=\dfrac{4}{(a-c)(b-c)}$.

【注意】 根據第六章第三節的定律,知

$$(c-a)(c-b)=(a-c)(b-c).$$

2. 通分 求諸分母的最低公倍式做公共的分母,用各分式的原分母除公分母,所得的商乘各該分子,得新分子.

例題一 通 $\dfrac{a}{yz}$、$\dfrac{b}{zx}$、$\dfrac{c}{xy}$ 爲最簡的同母分式.

【解】 諸分母的 $L.C.M.$ 是 xyz,

$\therefore$ 第一式 $=\dfrac{ax}{xyz}$, 第二式 $=\dfrac{by}{xyz}$,

第三式 $=\dfrac{cz}{xyz}$.

【理由】 根據定商定律,知第一式的分子、分母同以 x 乘,分式的值不變,其他諸式亦然.又因 xyz 是

諸分母的 L. C. M.,所以要諸分母相同,必須用 xyz 做公分母,才能最簡.

例題二 通 $\frac{x+3}{x^2-3x+2}$, $\frac{x+2}{x^2-4x+3}$, $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ 爲最簡的同母分式.

【解】 第一式 $=\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}=\frac{x^2-9}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

第二式 $=\frac{x+2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x^2-4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

第三式 $=\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}=\frac{x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

特例 整式也可以當作是用 1 做分母的分式,來同其他分式通分.

例題 通 a, $\frac{c}{ab^3}$, $\frac{d}{a^2b^2}$ 爲最簡的同母分式.

【解】 $a=\frac{a^3b^3}{a^2b^3}$, $\frac{c}{ab^3}=\frac{ac}{a^2b^3}$, $\frac{d}{a^2b^2}=\frac{bd}{a^2b^3}$.

習題三十六

通下列各題中的諸分式爲最簡的同母分式:

(1) $\frac{3}{4x}$, $\frac{5}{8x^2}$, $\frac{7}{10x^3}$.

(2) $\frac{3a}{x+y}$, $\frac{2a}{x^2-y^2}$.

(3) $\frac{ab}{a^2-b^2}$, $\frac{a}{a-b}$, $\frac{b}{a-b}$.

(4) $\frac{x^3-1}{x^4-1}$, $\frac{x-1}{x^2-1}$, $\frac{1}{x-1}$.

(5) $a+4$, $\frac{1+4a}{a-4}$.

(6) $\frac{2}{3x-3},\ \frac{5}{4x+4},\ \frac{8}{1-x^2}.$

(7) $\frac{a}{1-a},\ \frac{1}{a^2-a},\ \frac{3a-1}{a-a^2}.$

(8) $\frac{1}{(x+a)^2},\ \frac{1}{(x-a)^2},\ \frac{1}{x^2-a^2}.$

(9) $\frac{x}{y(x-y)},\ \frac{y}{x(y-x)},\ \frac{1+xy}{xy}.$

(10) $\frac{1}{m-n},\ \frac{3mn}{n^3-m^3},\ \frac{m-n}{m^2+mn+n^2}.$

(11) $\frac{1}{a^2b(x+y)},\ \frac{x}{a^2b^2(x-y)},\ \frac{1+x}{ab^2(x^2-y^2)}.$

(12) $\frac{1}{x^2-3x+2},\ \frac{2}{x^2-1},\ \frac{3}{x^2-4},\ \frac{4}{x^2+3x+2}.$

(13) $\frac{1}{2x^2-5x+3},\ \frac{1}{3x^2-x-2},\ \frac{2}{6x^2-5x-6}.$

(14) $\frac{y+z}{(x-y)(x-z)},\ \frac{z+x}{(y-z)(y-x)},\ \frac{x+y}{(z-x)(z-y)}.$

3. 約分　求分子、分母的最高公因式,用以除分子、分母,即得最簡的分式.

例題　化$\frac{16a^4b^2c}{20a^3b^3d}$爲最簡分式.

【解】　分子、分母的$H.C.F.$是$4a^3b^2$,用以除分子、分母,得$\frac{4ac}{5bd}$.

【理由】　根據定商定律,知分子、分母以同數除,分式的值不變.又用以除分子、分母的是他們的$H.C.F.$,所以得的商不會再有公因式,即所得的分式是最

簡分式.

別法　可撇去分子、分母中同文字的因式,而以該文字指數的差做指數,記在指數大的一方.

例題　化$\dfrac{6a^3b^2xy^4}{9ab^3x^3y^2}$爲最簡分式.

【解】
$$\frac{\overset{2a^2}{\cancel{6}\cancel{a^3}}\cancel{b^2}\cancel{x}\overset{y^2}{\cancel{y^4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}\cancel{a}\underset{b}{\cancel{b^3}}\underset{x^2}{\cancel{x^3}}\cancel{y^2}}=\frac{2a^2y^2}{3b\,x^2}.$$

特例一　分子、分母爲多項式時,先分解因式,然後約分.

例題　化$\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$爲最簡分式.

【解】　原式$=\dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}.$

【注意】　分子、分母中的因式可以約去,但分子、分母中的項却不能約去.所以$\dfrac{\cancel{x}+\cancel{1}}{x^2+\cancel{x}+\cancel{1}}=\dfrac{1}{x^2}$是錯誤的.但有時可把全部的項當作一個因式看,也可把他約去,如$\dfrac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}.$

特例二　分母中的因式若全部約去,得的結果是整式.

例題　化$\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$爲最簡分式.

【解】　原式$=\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=a+b.$

特例三　分子、分母不易分解因式時，可用輾轉相除法求 H. C. F.，用以除分子、分母.

例題　化$\dfrac{x^3-3x^2-4x+12}{x^3-6x^2+13x-10}$爲最簡分式.

【解】　分子、分母的 H. C. F. 是 $x-2$，用以除分子、分母，得$\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4x+5}$.

習題三十七

化下列各題的分式爲最簡分式：

(1) $\dfrac{18a^2bx^2}{54a^3xy^4}$.　(2) $\dfrac{12xyz}{60x^2y^2z^2}$.

(3) $\dfrac{x^4-y^4}{(x-y)(x^2+y^2)}$.　(4) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-2x-15}$.

(5) $\dfrac{(x^3-y^3)(x+y)}{(x^3+y^3)(x-y)}$.　(6) $\dfrac{15a^3xy}{5a^4x-10a^3x}$.

(7) $\dfrac{(a+x)^2}{a^2+3ax+2x^2}$.　(8) $\dfrac{3a^5b^2-3a^3b^4}{4a^2b^2-4ab^2}$.

(9) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}$.　(10) $\dfrac{a^2-(b+c+d)^2}{(a-b)^2-(c+d)^2}$.

(11) $\dfrac{(x^3+1)(x^3-1)}{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}$.　(12) $\dfrac{a^6+a^4-a^2-1}{a^8-a^6+a^2-1}$.

(13) $\dfrac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-3x+2}$.　(14) $\dfrac{a^3+2a^2-13a+10}{a^3+a^2-10a+8}$.

第二節　分式四則

1. 分式的加減法　依下列的步驟:

I. 將各分式通分,化做同母分式.

II. 將各分子用各分式間原有的號連寫起來做分子,公共的分母做分母,併成一個分式.

III. 化簡分子.

IV. 可約分的把他化做最簡分式.

例題一　求 $\frac{x+2y}{x^2-xy}+\frac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2}-\frac{x-3y}{x^2-2xy}$ 的結果.

【解】　原式 $=\frac{x+2y}{x(x-y)}+\frac{2x+y}{(x-y)(x-2y)}-\frac{x-3y}{x(x-2y)}$

$$=\frac{x^2-4y^2}{x(x-y)(x-2y)}+\frac{2x^2+xy}{x(x-y)(x-2y)}-\frac{x^2-4xy+3y^2}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{x^2-4y^2+2x^2+xy-x^2+4xy-3y^2}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{2x^2+5xy-7y^2}{x(x-y)(x-2y)}=\frac{(2x+7y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$=\frac{2x+7y}{x(x-2y)}.$$

【理由】　根據除法的分配定律,知$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}-\frac{C}{D}=\frac{A+B-C}{D}$.

【注意】　三個分式併爲一式時,第三個分子中三項的號應全變,因爲那分式的前面是－號的緣故.

例題二　求$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$的結果.

【解】　原式$=\frac{-a}{(a-b)(c-a)}+\frac{-b}{(b-c)(a-b)}+\frac{-c}{(c-a)(b-c)}$

$$=\frac{-ab+ca}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\frac{-bc+ab}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\frac{-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

習題三十八

求下列各題的結果:

(1)　$\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$.　　(2)　$\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x+y}$.

(3) $\dfrac{x}{y(x-y)}-\dfrac{1}{x-y}$. (4) $x+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x^2}{x+1}$.

(5) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b}{a^3-b^3}$. (6) $1+\dfrac{a+b}{a-b}$.

(7) $a-b-\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$. (8) $x-1+\dfrac{2}{x+1}$.

(9) $x^2-x+1-\dfrac{2}{x+1}$. (10) $\dfrac{1+2a}{1-2a}+\dfrac{1-2a}{1+2a}$.

(11) $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{2}{x}$ (12) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-3}$.

(13) $\dfrac{a^2}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{b^2}{(x-b)(b-a)}$.

(14) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{4x}{y}$.

(15) $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-8x+15}$.

(16) $\dfrac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2}-\dfrac{2xy}{2x^2+8xy}$.

(17) $\dfrac{a}{b^2-bc}+\dfrac{b}{c^2-ca}+\dfrac{c}{a^2-ab}$.

(18) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}-\dfrac{2}{x^4+x^2+1}$.

(19) $\dfrac{a+b}{(a-c)(b-c)}+\dfrac{b+c}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{c+a}{(c-b)(a-b)}$.

(20) $\dfrac{1}{x^2-(y-z)^2}-\dfrac{1}{y^2-(z-x)^2}-\dfrac{1}{z^2-(x-y)^2}$.

2. 分式的乘法 把諸分式的分子連乘做分子,分母連乘做分母,再約分即得.

實際可先分解各分式中分子、分母的因

式,把相同的因式約去,然後把分子、分母各連乘起來.

例題一　求 $\frac{1-a^2}{b+b^2}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}\cdot\frac{b+ab}{a-ab}$ 的結果.

【解】　原式 $=\frac{\cancel{(1+a)}(1-a)}{\cancel{b}\cancel{(1+b)}}\cdot\frac{\cancel{(1+b)}\cancel{(1-b)}}{a\cancel{(1+a)}}\cdot\frac{\cancel{b}(1+a)}{a\cancel{(1-b)}}$

$$=\frac{1-a^2}{a^2}.$$

(註)　兩分式間的乘號,可記作 $\cdot$.

【理由】　設兩分式為 $\frac{A}{B}$、$\frac{C}{D}$, 以 x、y 各表他們的值,

即　　$x=\frac{A}{B}$,　　$y=\frac{C}{D}$.

去分母,得　$Bx=A$,　　$Dy=C$.

相乘,得　　$BDxy=AC$.

以 BD 除,得　　$xy=\frac{AC}{BD}$.

例題二　求 $\left(\frac{a}{bc}-\frac{b}{ac}-\frac{c}{ab}-\frac{2}{a}\right)\cdot\left(1-\frac{2c}{a+b+c}\right)$ 的結果.

【解】　原式 $=\left(\frac{a^2}{abc}-\frac{b^2}{abc}-\frac{c^2}{abc}-\frac{2bc}{abc}\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{a+b+c}-\frac{2c}{a+b+c}\right)$

$$=\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{abc}\cdot\frac{a+b+c-2c}{a+b+c}$$

$$=\frac{a^2-(b+c)^2}{abc}\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a-b-c)}{abc}\cdot\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a-b-c)(a+b-c)}{abc}$$

$$=\frac{a^2-2ac+c^2-b^2}{abc}.$$

特例 有時分子、分母的因式全部約去，那末得的積是 1.

例題 求 $\frac{x^2-3x+2}{x^2-10x+24}\cdot\frac{x^2-7x+12}{x^2-7x+10}\cdot\frac{x^2-11x+30}{x^2-4x+3}$ 的結果.

【解】

$$原式=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-4)(x-6)}\cdot\frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-5)}\cdot\frac{(x-5)(x-6)}{(x-1)(x-3)}=1.$$

習題三十九

求下列各題的結果:

(1) $\frac{3x^2y}{5xy^2z}\cdot\frac{2xyz^2}{9x^4y}$.　　(2) $\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ca}\cdot\frac{c^2}{ab}$.

(3) $\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{(x-1)^2}$.　　(4) $\frac{1-x^3}{x^4+x^2+1}\cdot\frac{x^3+1}{1-x^2}$.

(5) $\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x+2}{x^2-1}\cdot\frac{x-1}{(x+2)^2}$.

(6) $\dfrac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}\cdot\dfrac{a(a-x)}{a^2+2ax+x^2}$.

(7) $\dfrac{16x^2-9y^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x-2}{4x-3y}$.

(8) $\dfrac{a^4-27a}{2a^2+5a}\cdot\dfrac{4a^2-25}{2a^2-11a+15}$.

(9) $\dfrac{x^4-y^4}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{a^2-ab+b^2}{x-y}\cdot\dfrac{a+b}{x+y}$.

(10) $\dfrac{(a-b)^2-c^2}{(a-c)^2-b^2}\cdot\dfrac{b^2-(c-a)^2}{c^2-(a-b)^2}$.

(11) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\cdot\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}\cdot\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}$.

(12) $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(b-\dfrac{ab}{a-b}\right)$.

(13) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}+2\right)\left(\dfrac{xy^2-x^2y}{x^2-y^2}+x-y\right)$.

(14) $\dfrac{x^6-y^6}{x^4+2x^2y^2+y^4}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\cdot\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$.

3. 分式的除法　把除式的分子、分母倒轉來,同被除式相乘就得.

例題一　求$\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a^3-b^3}{(a+b)^2}$的結果.

【解】　原式$=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{(a+b)^2}{a^3-b^3}$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)(a-b)}\cdot\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{a+b}{(a-b)^2}.$$

【理由】　設兩分式為 $\frac{A}{B}$、$\frac{C}{D}$, 以 x、y 表他們的值.

即　　$$x=\frac{A}{B},\quad y=\frac{C}{D}.$$

去分母,得　$Bx=A,\quad Dy=C.$

相除,得　$$\frac{Bx}{Dy}=\frac{A}{C}.$$

以 $\frac{D}{B}$ 乘,得　$$\frac{x}{y}=\frac{AD}{CB}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}.$$

例題二　求 $\left(\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{x}\right)\div\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$的結果.

【解】　$$\text{原式}=\left(\frac{x^3}{xy^3}-\frac{y^3}{xy^3}\right)\div\left(\frac{x^2}{xy^2}+\frac{xy}{xy^2}+\frac{y^2}{xy^2}\right)$$

$$=\frac{x^3-y^3}{xy^3}\div\frac{x^2+xy+y^2}{xy^2}$$

$$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy^3}\cdot\frac{xy^2}{x^2+xy+y^2}$$

$$=\frac{x-y}{y}.$$

習　題　四　十

求下列各題的結果:

(1) $\frac{4a^2b}{5x^2y}\div\frac{2ab^2}{15xy^2}$.　　(2) $\frac{1}{x^2-y^2}\div\frac{1}{x-y}$.

(3) $\dfrac{ab-b^2}{(a+b)^2}\div\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$.　(4) $\dfrac{a^2b^2+3ab}{4a^2-1}\div\dfrac{ab+3}{2a+1}$.

(5) $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a^2-b^2)^2}\div\dfrac{a-b+c}{a^4-b^4}$.

(6) $\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\div\dfrac{x+y}{x^3-y^3}$.

(7) $\dfrac{6a^2}{x^3+y^3}\div\dfrac{2a}{x^2-xy+y^2}$.

(8) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-6x+9}\div\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

(9) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{c^2-a^2-b^2+2ab}\div\dfrac{a+b+c}{a-b+c}$.

(10) $\dfrac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^3+y^3}\div\dfrac{(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}$.

(11) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$.

(12) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)$.

4. 繁分式化簡法　分下列的二種:

(A) 分子、分母各是幾個分式加減的,可先把他們加減出來,再用分式除法化簡.

例題　化簡 $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}$.

【解】　原式 $=\dfrac{\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{x-1}{x^2-1}}{\dfrac{x+1}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2-1}}=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2-1}}{\dfrac{2}{x^2-1}}$

$$=\frac{2x}{x^2-1}\div\frac{2}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{2}=x.$$

(*B*) 分子或分母中又有繁分式的,可順次用加､減法同除法逐步化簡.

例題 化簡 $\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x-1}{x}}}$.

【解】 原式 $=\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2+2x}{x}-\dfrac{x-1}{x}}}$

$$=\frac{x}{x-\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2+x+1}{x}}}$$

$$=\frac{x}{x-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x^3+x^2+x}{x^2+x+1}-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x^3-x}{x^2+x+1}}=x\cdot\frac{x^2+x+1}{x^3-x}$$

$$=x\cdot\frac{x^2+x+1}{x(x^2-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}.$$

習題四十一

化簡下列的繁分式:

(1) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{a+b-\dfrac{2ab}{a+b}}$.

(2) $\dfrac{\dfrac{x+y}{y}+\dfrac{y}{x-y}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$.

(3) $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$.

(4) $\dfrac{\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{1-a}{a}}{\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{1-a}{a}}$.

(5) $\dfrac{\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{x}{a^2}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ax}+\dfrac{1}{x^2}}$.

(6) $\dfrac{a+\dfrac{ab}{a-b}}{a-\dfrac{ab}{a-b}}$.

(7) $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$.

(8) $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{x}{x^2-y^2}}{\dfrac{x}{xy+y^2}-\dfrac{y}{x^2+xy}}$.

(9) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

(10) $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

(11) $\dfrac{a^2}{x+\dfrac{a^2}{x-\dfrac{a^2}{x}}}$.

(12) $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

第三節 分式方程式解法

含分式的方程式,叫做分式方程式,解法

有下列的數種:

1.化整法　先用方程式中各項分母的 L. C. M. 乘各項,化為整方程式,然後用普通方程式的解法做.

例題　解方程式 $\frac{x-2}{x-1}+1=\frac{1}{x-1}$.

【解】　去分母　$x-2+x-1=1$.

移項　$x+x=1+2+1$.

集項　$2x=4$.

去係數　$x=2$.

特例　有時用化整法求得的根代入原題,不能合用,稱為假根.凡用化整法求得的根都應代入原題,看他是不是假根.

例題　解方程式 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=0$.

【解】　去分母　$x+1=0$.

移項　$x=-1$.

【實驗】　以 $x=-1$ 代入原方程式,得

$$\frac{1}{0}+\frac{1}{0}=0.$$

但 0 不能做除數,這等式毫無意義,所以 -1 是原方程式的假根.

【理由】　分式方程式的所以有假根,因為去分母時曾以 $x+1$ 乘各項;這 $x+1$ 的值也許是 0.若果是

0,這解法就不合理,因爲等式的兩邊用 0 乘,所得的應是恆等式 $0=0$,決不能用他來求 x 的緣故.

【注意】　用化整法求得的根,只須代入原方程式的各分母,就能決定他是否假根:若代入後有一個或數個分母的值等於 0,求得的是假根;若都不是 0,求得的是眞根.

2. 加減法　集方程式中的各項於一邊,使其他一邊是 0,加減各項得一個分式,命分子等於 0,得一個整方程式,然後用普通的方法解.

例題　解方程式 $\dfrac{x-2}{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$.

【解】　移項　$\dfrac{x-2}{x-1}+1-\dfrac{1}{x-1}=0.$

通分　$\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-1}-\dfrac{1}{x-1}=0.$

集項　$\dfrac{x-2+x-1-1}{x-1}=0.$

整理　$\dfrac{2x-4}{x-1}=0.$

命　$2x-4=0.$

解得　$x=2.$

【理由】　一個分式等於 0,就是分子被分母除得的商是 0,但必須被除數是 0,而除數不是 0,那末商才能是 0,所以分子 $2x-4=0$.

特例 加減後所得的一個分式,若可以約分,必須約成最簡分數,然後命分子等於 0.

例題 解方程式 $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x(x+1)}=0$.

【解】 通分 $\frac{x}{x(x+1)}+\frac{1}{x(x+1)}=0$.

集項 $\frac{x+1}{x(x+1)}=0$.

約分 $\frac{1}{x}=0$.

但分子 1 決不能等於 0,所以原方程式沒有根.

【注意一】 集項後若不去約分,即命 $x+1=0$,那末分母中也含因式 $x+1$,分母也就等於 0;但以 0 除 0,得的商不一定是 0 (因 $0\times$ 任何數 $=0$,故 $0\div 0=$ 任何數),所以非經約分不可.

【注意二】 凡用加減法求得的根,必是眞根.

習 題 四 十 二

解下列的分式方程式(若是假根應棄掉他):

(1) $\frac{x-6}{x-8}=3$. (2) $\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}$.

(3) $\frac{x-2}{x-6}=\frac{x-7}{x+9}$. (4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{8}{x}$.

(5) $\frac{x-6}{2x-3}=\frac{4}{17}$. (6) $x-\frac{x^2+3}{x+2}=1$

(7) $\frac{x-2}{x+1}=\frac{x-5}{x-2}$.　　(8) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{7x-21}{7x-26}$.

(9) $\frac{16}{3x-4}=\frac{27}{5x-6}$.　　(10) $\frac{x}{x+4}-\frac{x-1}{x+3}=0$.

(11) $\frac{3+4x}{1+x}+\frac{3+2x}{1-x}=\frac{2x+1}{1+x}$.

(12) $\frac{x+3}{2+3x}+\frac{1-4x}{4x+1}=\frac{1-2x}{2+3x}$.

(13) $\frac{4x-17}{x-3}+\frac{3x-10}{x-4}=7$.

(14) $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x$.

3. **特別法**　有時把分式方程式的分母去掉後,得的整方程式不止一次,這時當用特別法解.

例題　解方程式

$$\frac{x-7}{x-9}+\frac{x-3}{x-5}=\frac{x-4}{x-6}+\frac{x-6}{x-8}.$$

【解】　除算

$$1+\frac{2}{x-9}+1+\frac{2}{x-5}=1+\frac{2}{x-6}+1+\frac{2}{x-8}.$$

兩邊各減去 2,

$$\frac{2}{x-9}+\frac{2}{x-5}=\frac{2}{x-6}+\frac{2}{x-8}.$$

以 2 除 $\frac{1}{x-9}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-8}.$

移項 $\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-8}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-5}.$

集項 $\frac{1}{(x-9)(x-8)}=\frac{1}{(x-6)(x-5)}.$

交叉乘 $(x-6)(x-5)=(x-9)(x-8).$

乘算 $x^2-11x+30=x^2-17x+72.$

解得 $x=7.$

【注意一】 除算的手續,就是用分母除分子,得的餘數仍做分子,而把整商加在這分式的前面,理由如下:

$$\frac{x-7}{x-9}=\frac{x-9+2}{x-9}=\frac{x-9}{x-9}+\frac{2}{x-9}=1+\frac{2}{x-9}.$$

【注意二】 移項的目的在使兩邊都成兩分式的差,且使各邊兩分母中數字的差相等,這樣一來,集項後可使兩邊分子中為相等的兩數字而不含 x.

【注意三】 交叉乘卽是去分母,所以求得的根不一定是眞根,應代入原方程式實驗.

4. 聯立方程式解法 可把各方程式都化為整方程式再解.

例題　解聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{1}{3x+1}=\dfrac{2}{5y+4}, \\ \dfrac{1}{4x-3}=\dfrac{2}{7y-6}. \end{cases}$

【解】　交叉乘　$\begin{cases} 5y+4=6x+2, \\ 7y-6=8x-6. \end{cases}$

整理　$\begin{cases} -6x+5y=-2 \cdots\cdots(1), \\ -8x+7y=0 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

$(1)\times 4$　$-24x+20y=-8$

$(2)\times 3$　$-24x+21y=\ \ 0\ (-$

$-y=-8.$

$\therefore$　$y=8.$

代入(2)　$-8x+56=0.$　答 $\begin{cases} x=7, \\ y=8. \end{cases}$

解得　$x=7.$

特例一　含二次項的分式方程式,有時可化成如第五章第四節特別解法(A)的形式再做.

例題　解聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+4y}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{xy}{3x-8y}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

【解】　交叉乘　$\begin{cases} x+4y=3xy, \\ 3x-8y=4xy. \end{cases}$

以 xy 除
$$\begin{cases} \dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{x}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\[2ex] \dfrac{3}{y}-\dfrac{8}{x}=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$$

$(1)\times 3-(2)$ $\qquad \dfrac{20}{x}=5.$

$(1)\times 2+(2)$ $\qquad \dfrac{5}{y}=10.$

解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

特例二 分母中不僅含 x 或 y 時,有時仍可仿第五章第四節特別解法的 (A) 做.

例題 試解
$$\begin{cases} \dfrac{12}{x-3}+\dfrac{8}{y-1}=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\[2ex] \dfrac{27}{x-3}-\dfrac{12}{y-1}=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$$

【解】 $(1)\div 2$ $\qquad \dfrac{6}{x-3}+\dfrac{4}{y-1}=4$

$(2)\div 3$ $\qquad \dfrac{9}{x-3}-\dfrac{4}{y-1}=1 \quad (+$

$$\dfrac{15}{x-3}=5.$$

交叉乘 $\qquad 5x-15=15.$

解得 $\qquad x=6.$

代入(1) $\qquad 4+\dfrac{8}{y-1}=8.$

解得 $\qquad y=3.$

答 $\begin{cases} x=6, \\ y=3. \end{cases}$

習題四十三

解下列的分式方程式(應棄掉假根):

(1) $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}$.

(2) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}$.

(3) $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-6}{x-7}-\frac{x-7}{x-8}$.

(4) $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-2}{x-3}$.

(5) $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}$.

(6) $\frac{16x-13}{4x-3}-\frac{40x-43}{8x-9}=\frac{32x-30}{8x-7}-\frac{20x-24}{4x-5}$.

(7) $\begin{cases}\frac{x+3y}{x-y}=8,\\ \frac{7x-13}{3y-5}=4.\end{cases}$

(8) $\begin{cases}\frac{3x+1}{4-2y}=\frac{4}{3},\\ x+y=1.\end{cases}$

(9) $\begin{cases}\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{5y+4},\\ \frac{1}{4x-3}=\frac{1}{7y-6}.\end{cases}$

(10) $\begin{cases}\frac{x+3}{y+7}=\frac{x-2}{y-3},\\ \frac{x+3y-4}{x+y}=2.\end{cases}$

(11) $\begin{cases}\frac{x+1}{y+1}=\frac{x+5}{y},\\ x-y=1.\end{cases}$

(12) $\begin{cases}\frac{x+1}{y-1}-\frac{x-1}{y}=\frac{6}{y},\\ x-y=1.\end{cases}$

(13) $\begin{cases} \dfrac{xy}{2x+y}=\dfrac{1}{10}, \\ \dfrac{xy}{3x+4y}=\dfrac{1}{20}. \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} \dfrac{xy}{y+2x}=\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{xy}{3y-2x}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} \dfrac{5y}{3y-4x}=\dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{6x}{4y-5x}=\dfrac{1}{y}. \end{cases}$　　(16) $\begin{cases} \dfrac{14}{x+1}-\dfrac{9}{y-2}=4, \\ \dfrac{8}{x+1}+\dfrac{3}{y-2}=5. \end{cases}$

5. 應用問題解法　舉二例於下:

例題一　有一分數,若從分子、分母各減1,所得分數的值等於$\frac{1}{3}$;若分子、分母各加3,所得分數的值等於$\frac{1}{2}$.求原分數.

【解】　設分子爲 x, 分母爲 y,得方程式

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x+3}{y+3}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

化簡,得　$\begin{cases} 3x-y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 2x-y=-3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

(1)−(2)　　$x=5.$

代入(1)　　$15-y=2.$

解得　　$y=13.$

故原分數爲$\frac{5}{13}$.

例題二　有二位的整數,用二數字的和除他,得整商 6,餘數 11;用二數字的和除他的倒位數,得整商 4,餘數 3.求原數.

【解】　設原數的十位數字爲 x,個位數字爲 y,

得方程式
$$\begin{cases}\dfrac{10x+y}{x+y}=6+\dfrac{11}{x+y},\\[2ex]\dfrac{10y+x}{x+y}=4+\dfrac{3}{x+y}.\end{cases}$$

去分母
$$\begin{cases}10x+y=6x+6y+11,\\10y+x=4x+4y+3.\end{cases}$$

整理
$$\begin{cases}4x-5y=11,\\-3x+6y=3.\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x=9,\\y=5.\end{cases}$$

故原數爲　95.

習題四十四

(1) 有一分數,若在分子加 1,其值等於 $\frac{1}{2}$;若在分母加 1,其值等於 $\frac{1}{3}$.求原分數.

(2) 有一分數,若在分子加 1,從分母減 1,其值等於 1;若在分子上加分母,從分母內減分子,其值等於 4.求原分數.

(3) 有一眞分數,用分子、分母的和除分子、分母的差,得的商是$\frac{5}{12}$;若在分子加 5,從分母減 5,其值爲 1.求原分數.

(4) 有二位的整數,用二數字的和除他,得商 7;若用從十位數字減去個位數字所得的差除他的倒位數,得商 12.求原數.

(5) 有二位的整數,用二數字的和除他,得商 7;若除他的倒位數,得商 4.求原數.

(6) 有上、中、下三種茶葉,中茶比下茶貴 4 角 5 分,上茶比中茶貴 3 角 5 分.用10元 8 角所買上茶的斤數,同用 2 元 8 角所買下茶的斤數的和,等於用13元 6 角所買中茶的斤數.問三種茶每斤的價各多少?

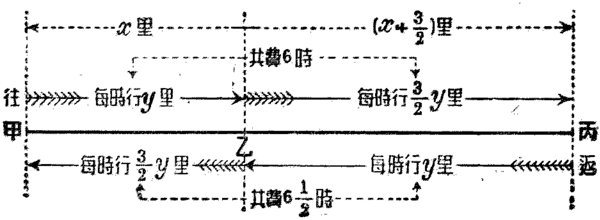
(7) 一船逆流行 6 里同順流行10里,共費 4 時;若逆流行10里,順流行20里,共費 7 時.求此船在靜水中的速度同水流的速度.

【提示】 列方程式後,仿本節聯立方程式的特例二解.

(8) 沿河有甲、乙、丙三鎭,從甲到乙比從乙到丙近$1\frac{1}{2}$里.某船往時從甲到乙後,加速一半,共經 6 時而抵丙;返時從丙到乙,速度與往時的原速度相等,從乙到甲,又加速一半,共費 $6\frac{1}{2}$ 時.求甲、乙及乙、

丙間的距離。

【提示】 設甲、乙間的距離為 x 里,某船初速每時為 y 里,從下圖可得二個聯立方程式。



第十章　二次方程式

第一節　重要名詞

1. 二次方程式,高次方程式　方程式中項的次數最多是二的,叫做二次方程式;最多是三的,叫做三次方程式;最多是四的,叫做四次方程式;………三次及三次以上的方程式,總稱高次方程式.

【例】　$2x^2-5x+2=0$, $4x^2-25=0$, $3x-4y=xy$, 都是二次方程式. $x^3+6x^2+11x+6=0$, $x^4=64$, 都是高次方程式.

2. 純二次方程式,普通二次方程式　二次方程式中缺掉 x 的一次項的,叫做純二次方程式;除此以外,都是普通二次方程式.

【例】　$4x^2-25=0$ 是純二次方程式, $2x^2-5x+2=0$ 是普通二次方程式.

用 a、b、c 代已知數,得下列的模範式:

(A)　純二次方程式　　$x^2=a$.

(B)　普通二次方程式　$ax^2+bx+c=0$(a、b 都不能等於 0. 若 $a=0$ 時,成一次方程式; 若 $b=0$ 時,成純二次方程式).

3. 等根二次方程式　二次方程式通常都有二個根,但有時僅有一個根.這一個根可以認爲是二個相等的根(理由見本章第三節2),這種方程式叫做等根二次方程式.

【例】　$x^2-5x+6=0$ 的根有 2, 3 兩種,學者可代入實驗;而 $x^2-14x+49=0$ 的根僅有 7 一種,所以後者是等根方程式.

4. 不盡根數　解二次方程式時,常要把一數開平方.若這數不是整平方數,那末開平方永遠不盡.在實用上可開幾位小數,得一近似值.但在代數上,只須用根號表出,不必實行開方.這種開方不盡而用根號表出的數,叫做不盡根數.不盡根數是一種特殊的無理數,通常也可以稱做無理數.

【例】　$\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt[3]{4}$、$\sqrt[3]{6}$ 等,都是不盡根數.

5. 虛數　解二次方程式時,有時須把負數開平方.把負數開平方的意義,就是要求一個數,使他的平方等於這負數.然實際不論正、負整數,分數或不盡根數,他們的平方都是正數,決不能得負數,所以不得不擴張數的範圍,稱負數的平方根爲虛數.

【例】　$\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-a}$ 等,都是虛數.

虛數可用$\sqrt{-1}$做單位,爲便利計可把$\sqrt{-1}$省寫做i,詳下節.

第二節　基礎計算

1.不盡根數的化簡　分下列的三種:

(A)根號下的數有整平方因數的　可把整平方的因數開出來,放在根號的前面,使根號下的數不再有整平方的因數.

例題　化簡$\sqrt{288}$.

【解】　$\sqrt{288}=\sqrt{12^2\times 2}=12\sqrt{2}$.

【理由】　因二數積的平方等於二數平方的積,

故　$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$.

兩邊各開平方,得　$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

就是二數積的平方根等於二數平方根的積.

於是知　$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.

【注意一】　先用因數分解法把288化做質因數連乘式,得$2\times2\times2\times2\times2\times3\times3$,就同因數中取出成對的各組,得$2\times2$, 2×2, 3×3三對,尚餘單獨的因數2,故知$288=(2\times2\times3)^2\times2=12^2\times2$.

【注意二】　12同$\sqrt{2}$的中間略去的是乘號,與帶分數中略去加號不同.

(B)根號下是一個分數的　先化這分數

的分母成整平方數,再把分子、分母分別開方,所得的分數的分母中就沒有不盡根數.

例題一 化簡 $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

【解】 $\sqrt{\frac{4}{7}}=\sqrt{\frac{4\times 7}{7\times 7}}=\frac{\sqrt{4\times 7}}{\sqrt{7\times 7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$.

【理由】 因二數商的平方等於二數平方的商,

故 $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$.

兩邊各開平方,得 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

就是二數商的平方根等於二數平方根的商.

【注意】 根號下的數不能同根號外的數約分,所以 $\frac{2}{7}\sqrt{7}$ 不能等於 2.

例題二 化簡 $\sqrt{\frac{5}{8}}$.

【解】 $\sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{5\times 2}{8\times 2}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{10}$.

(C)分母中有不盡根數的 用分母中的不盡根數乘分子.分母,就可化去分母中的不盡根數.

例題一 化簡 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

【解】 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

【理由】 一數平方根的平方,仍是這數,所以 $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$.

例題二 化簡 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$.

【解】 $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8\times3}}{3}=\frac{\sqrt{4\times6}}{3}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

【注意】 本題實在就是 $\sqrt{\frac{8}{3}}$, 所以也好用(B)的方法化簡.

2. 虛數的化簡 用 i 表 $\sqrt{-1}$,根據 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$,可把虛數化簡.

例題一 化簡 $\sqrt{-9}$.

【解】 $\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}=\sqrt{9}\sqrt{-1}=3i$.

例題二 化簡 $\sqrt{-5}$.

【解】 $\sqrt{-5}=\sqrt{5\times(-1)}=\sqrt{5}\sqrt{-1}=\sqrt{5}i$.

例題三 化簡 $\sqrt{-12}$.

【解】 $\sqrt{-12}=\sqrt{4\times3\times(-1)}=\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{-1}$

$=2\sqrt{3}i$.

3. 純二次方程式解法 化純二次方程式為 $x^2=a$ 的形式,兩邊各開平方,即得 x 的值.

例題一 解方程式 $2x^2-8=0$.

【解】 移項 $2x^2=8$.

去係數 $x^2=4.$

開方 $x=\pm 2.$

【注意】 4 的平方根在算術上僅有 $+2$ 一種，但在代數上，-2 的平方也是 4，所以 4 的平方根有 $+2$ 同 -2 兩種. ± 2 是 $+2$ 或 -2 的意義.

例題二 解方程式 $3x^2-5=0.$

【解】 移項 $3x^2=5.$

去係數 $x^2=\frac{5}{3}.$

開方 $x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}.$

化簡 $x=\pm\frac{1}{3}\sqrt{15}.$

例題三 解方程式 $\frac{x^2}{2}+9=0.$

【解】 去分母 $x^2+18=0.$

移項 $x^2=-18.$

開方 $x=\pm\sqrt{-18}.$

化簡 $x=\pm 3\sqrt{2}i.$

習題四十五

化簡下列各題的不盡根數或虛數:

(1) $\sqrt{250}.$ (2) $\sqrt{147}.$ (3) $\sqrt{50}.$ (4) $\sqrt{128}.$

(5) $\sqrt{4725}.$ (6) $\sqrt{\frac{2}{7}}.$ (7) $\sqrt{\frac{1}{3}}.$ (8) $\sqrt{\frac{27}{8}}.$

(9) $\sqrt{\frac{2}{3}}$. (10) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{6}}$ (11) $\sqrt{-4}$. (12) $\sqrt{-8}$.

(13) $\sqrt{-\frac{1}{2}}$. (14) $\sqrt{-25}$. (15) $\sqrt{-7}$. (16) $\sqrt{-\frac{3}{4}}$.

解下列的純二次方程式:

(17) $x^2-3=61$. (18) $4x^2-25=0$.

(19) $\frac{2}{3}x^2=24$. (20) $2x^2+48=0$.

(21) $\frac{x^2}{8}=1$. (22) $\frac{x^2}{6}=\frac{1}{7}$.

(23) $(x-2)(x+2)=12$. (24) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}$.

(25) $\frac{5}{x-1}=\frac{x+1}{4}$. (26) $\frac{x+1}{x+4}=\frac{2x-1}{x+6}$.

(27) $(5+x)^2+(5-x)^2=58$. (28) $(4x-3)^2+(4x+3)^2=26$.

(29) $\frac{x^2}{4}+7-\frac{2x^2}{3}=\frac{5x^2}{6}-153$.

(30) $(x-3)^2=25$.

【提示】 若實行乘算,得的是普通二次方程式,解法較繁.現在可把$(x-3)$當作 y 看,於是原方程式是一個純二次方程式$y^2=25$.

第三節　普通二次方程式解法

1. 配方法　依下列的步驟:

I.　把原方程式整理,使含 x 的項集於等號的左邊,不含 x 的項則在等號的右邊,且

使 x^2 的係數爲 1.

II. 兩邊各加 x 係數一半的平方,使左邊成爲完全平方的三項式.

III. 兩邊各開平方,得二個一次方程式.

IV. 解這二個一次方程式,得原方程式的二個根.

例題一 解方程式 $x^2-8x+15=0$.

【解】 移項 $x^2-8x=-15$.

配方 $x^2-8x+16=-15+16$.

即 $(x-4)^2=1$.

開方 $x-4=1$, 或 $x-4=-1$.

解得 $x=5$, 或 $x=3$.

【理由】 由 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2=x+(2a)x+\left(\frac{2a}{2}\right)^2$, 知道 x^2 的係數是 1 時,不含 x 的項必須是 x 係數一半的平方,才是完全平方的三項式.

例題二 解方程式 $x^2-3x-28=0$.

【解】 移項 $x^2-3x=28$.

配方 $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=28+\frac{9}{4}$.

即 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{121}{4}$.

開方 $x-\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$, 或 $x-\frac{3}{2}=-\frac{11}{2}$.

解得 $x=7$, 或 $x=-4$.

例題三 解方程式 $14-19x=3x^2$.

【解】 移項 $-3x^2-19x=-14$.

去係數 $x^2+\frac{19}{3}x=\frac{14}{3}$.

配方 $x^2+\frac{19}{3}x+\left(\frac{19}{6}\right)^2=\frac{14}{3}+\frac{361}{36}$.

即 $\left(x+\frac{19}{6}\right)^2=\frac{529}{36}$.

開方 $x+\frac{19}{6}=\frac{23}{6}$,

或 $x+\frac{19}{6}=-\frac{23}{6}$.

解得 $x=\frac{2}{3}$, 或 $x=-7$.

【注意】 移項後所得 x^2 的係數是負,當用負數除各項,使 x^2 的項爲正,以下各法都須如此.

例題四 解方程式 $x^2+25=10x$.

【解】 移項 $x^2-10x=-25$.

配方 $x^2-10x+5^2=-25+25$.

即 $(x-5)^2=0$.

開方 $x-5=0$.

解得 $x=5$.

【注意】 本題是等根二次方程式.

例題五 解方程式 $3x^2-x+5=2(x^2+x+2)$.

【解】 整理得 $x^2-3x=-1$.

配方　　$x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-1+\frac{9}{4}$.

即　　$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

開方　　$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

解得　　$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

【注意】　求得的根有$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$同$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$二個,上面的結果是把二個根合寫在一起的簡式.

例題六　解方程式$\frac{x^2}{2}-x+3=0$.

【解】　整理,得　　$x^2-2x=-6$.

配方　　$x^2-2x+1=-6+1$.

即　　$(x-1)^2=-5$

開方　　$x-1=\pm\sqrt{5}\,i$.

$\therefore$　　$x=1\pm\sqrt{5}\,i$.

習題四十六

解下列的二次方程式:

(1)　$x^2-7x+12=0$.　　(2)　$x^2-x-30=0$.

(3)　$x^2+5x=2x^2-10x+50$.　　(4)　$3x^2-4x=39$.

(5)　$2x^2-1=5x+2$.　　(6)　$x^2-x=\frac{4}{9}$.

(7)　$x^2-12x+6=\frac{1}{4}$.　　(8)　$x^2+4=4x$.

(9)　$3x^2-17x=0$.　　(10)　$7x^2+6x-1=0$.

(11) $24x^2-5x=14$. (12) $x^2-(x-4)^2=2(x-5)^2$.

(13) $(x-2)(2x-3)=10$.

(14) $(2x+4)^2-(3x-1)^2=(4x-6)^2$.

(15) $x^2-3=\frac{1}{6}(x-3)$. (16) $(x-1)^2=2x$.

(17) $2x^2-2x+1=0$. (18) $x^2-x-1=0$.

(19) $9x^2=18x+11$. (20) $3x^2+4x+3=0$.

2. 分解因式法 步驟如下:

I. 集各項於左邊,使右邊爲 0,且使 x^2 的係數爲正.

II. 分解左邊的因式.

III. 命兩因式各等於 0,得二個一次方程式.

IV. 解這二個一次方程式,得原方程式的二個根.

例題一 解方程式 $-3x^2+5x=-2$.

【解】 移項 $-3x^2+5x+2=0$.

以 -1 乘各項 $3x^2-5x-2=0$.

分解因式 $(x-2)(3x+1)=0$.

命 $x-2=0$, 則 $x=2$.

命 $3x+1=0$, 則 $x=-\frac{1}{3}$.

【理由】 一數必須與 0 相乘,得的積才能是 0,所以知道 $(x-2)$ 同 $(3x+1)$ 兩因式都可以等於 0.

例題二　解方程式$5x^2-3x=0$.

【解】　分解因式　$x(5x-3)=0$.

$\therefore$　$x=0$,　或　$5x-3=0$.

若　$5x-3=0$,　則　$x=\frac{3}{5}$.

$\therefore$　所求的根是 0 同 $\frac{3}{5}$.

【注意】　二次方程式中不含 x 的項是 0 的,必有一個根是 0.

例題三　解方程式$x^2-6x+9=0$.

【解】　分解因式　$(x-3)^2=0$.

則　$x-3=0$,

得　$x=3$.

【注意】　分解原式的因式後,左邊的兩個因式都是 $(x-3)$. 使二個因式各等於 0,得二個 x 的值都是 3,所以這 3 可以看做是原方程式的兩個相等的根,而原方程式是等根方程式.

習題四十七

用分解因式法解習題四十六(1)到(15)諸題.

3. 應用公式法　設有二次方程式

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

移項　$ax^2+bx=-c$.

去係數 $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

兩邊各加係數一半的平方,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

即 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

開方 $$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

凡二次方程式都可化爲(1)的形式,這時可用相當於(1)式中 a、b、c 的數值代入(2)中實行計算,即得 x 的值.

例題一　解方程式 $x^2+3x+2=0$.

【解】　與公式比較,知　$a=1, b=3, c=2$,代入公式,得

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm1}{2}=-1\text{ 或 }-2.$$

例題二　解方程式 $3x^2-4x=7$.

【解】　移項,得　$3x^2-4x-7=0$.

與公式比較,知 $a=3, b=-4, c=-7$.

$$\therefore\quad x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times3\times(-7)}}{2\times3}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{6}=\frac{4\pm 10}{6}=2\frac{1}{3}\text{ 或 }-1.$$

例題三 解方程式 $\frac{x}{3}+\frac{5}{x}=0$.

【解】 去分母,得 $x^2+15=0$.

與公式比較,知 $a=1,\ b=0,\ c=15,$

$$\therefore\quad x=\frac{-0\pm\sqrt{0-4\times 1\times 15}}{2\times 1}=\pm\frac{\sqrt{-60}}{2}$$

$$=\pm\frac{2\sqrt{15}i}{2}=\pm\sqrt{15}i.$$

例題四 解方程式 $2x^2-7x=0$.

【解】 與公式比較,知 $a=2,\ b=-7,\ c=0$.

$$\therefore\quad x=\frac{7\pm\sqrt{49-4\times 2\times 0}}{2\times 2}=\frac{7\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{7\pm 7}{4}$$

$$=3\frac{1}{2}\text{ 或 }0.$$

例題五 解方程式 $4x^2-4x+1=0$.

【解】 由公式,得 $x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\times 4\times 1}}{2\times 4}$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{4\pm 0}{8}=\frac{4}{8}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例題六 解方程式 $9x^2+6x-4=0$.

【解】 由公式,得 $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\times 9(-4)}}{2\times 9}$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{180}}{18}=\frac{-6\pm6\sqrt{5}}{18}$$

$$=\frac{\cancel{6}(-1\pm\sqrt{5})}{\underset{3}{\cancel{18}}}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{3}$$

習 題 四 十 八

應用公式解習題四十六.

第四節　二次方程式應用問題

解二次方程式應用問題的步驟,仍與解一次方程式同;不過求得的根應研究其是否適用,以定取捨.舉例如下:

例題一　有四個連續的正整數,順次求出相鄰兩數的積,再求首末兩數的積,把四個積相加,得 224. 求這四個正整數.

【解】　設最小的數是 x,則其餘三數順次是 $x+1, x+2, x+3$. 由題意得方程式

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+x(x+3)=224.$$

即　$x^2+x+x^2+3x+2+x^2+5x+6+x^2+3x=224.$

整理,得　$4x^2+12x-216=0.$

以 4 除,化簡,得　$x^2+3x-54=0.$

$$\therefore \qquad x=\frac{-3\pm\sqrt{9+216}}{2}=\frac{-3\pm15}{2}$$

$$=6 \text{ 或 } -9.$$

因負數不適用,故所求的四數順次是6, 7, 8, 9.

例題二 有二位的整數,二數字的和是6,二數字的積的3倍恰巧等於原數.求原數.

【解】 設原數的十位數字為 x,則個位數字為 $(6-x)$,

得方程式 $10x+(6-x)=3x(6-x)$.

整理,得 $3x^2-9x+6=0$.

化簡,得 $x^2-3x+2=0$.

分解因式 $(x-1)(x-2)=0$.

命 $x-1=0$, 則 $x=1$, $6-x=5$.

命 $x-2=0$, 則 $x=2$, $6-x=4$.

故原數為15或24,都能合用.

例題三 矩形面積是432方尺,長、闊的和是42尺.問長、闊各幾尺?

【解】 設長為 x 尺,則闊為 $(42-x)$ 尺,得方程式

$$x(42-x)=432.$$

整理,得 $x^2-42x+432=0$.

$$\therefore \qquad x=\frac{42\pm\sqrt{1764-1728}}{2}=\frac{42\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$=\frac{42\pm 6}{2}=24\text{ 或 }18.$$

$$42-x=18\text{ 或 }24.$$

但矩形的長、闊並無絕對的區別,所以本題雖似有二種答數,實則僅有一種,即長24尺,闊18尺.

例題四 兄弟二人歲數的和是40,歲數平方的和是750.求二人的歲數.

【解】 設兄年爲 x 歲,則弟年爲 $(40-x)$ 歲.得方程式 $x^2+(40-x)^2=750.$

化簡,得 $x^2-40x+425=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{40\pm\sqrt{1600-1700}}{2}=\frac{40\pm\sqrt{-100}}{2}$$

$$=\frac{40\pm 10i}{2}=20\pm 5i.$$

但歲數不能是虛數,故原題不合理.

習題四十九

(1) 有連續的二個正整數,其平方和爲365.求這二數.

(2) 有連續的三個正整數,其平方和爲365.求這三數.

(3) 大小二數的差是7,其平方差爲133.求這二數.

(4) 二數的比是2:3,其積爲294.求這二數.

【提示】 小數:大數 =2:3, 根據單比例解法,知

$$小數=\frac{2\times大數}{3}=\frac{2}{3}\times大數.$$

(5) 二個正整數的比是4:5,若各加15,則其平方差為999. 求這二數.

(6) 二個連續正整數的積是 992. 求這二數.

(7) 二個連續正奇數的和,等於夾在中間的一個偶數的平方.求這二個奇數.

(8) 有連續的五個正整數,其中較小的三數的平方和,等於較大的二數的平方和.求這五數.

(9) 某數的平方加該數 $\frac{1}{2}$ 的平方,再加該數 $\frac{1}{3}$ 的平方,得 441, 求這數.

(10) 二數的和是20,其立方的和是2240,求這二數.

(11) 有一正立方體,若各邊都增 3 寸,則體積增 8937 立方寸.問各邊原長多少?

(12) 一矩形田,長、闊相差 3 尺.若闊增 5 尺,長減 8 尺,則面積比原面積的一半多250方尺.求長同闊.

(13) 矩形的周是 4 丈 2 尺,若闊減 1 尺,長減 $\frac{1}{4}$,則面積是原面積的 $\frac{2}{3}$.問長、闊各多少?

(14) 兵士若干人,列成正方陣,尚餘 35 人;後改列成長方陣,縱行較前多 15 人,橫列為 27 人,恰盡.求總兵數.

【提示】 設正方陣每邊爲 x 人,則總兵數爲 x^2+35.

(15) 兵士若干人,初排一正方陣,尚餘 100 人;次再排一正方陣,每邊人數比前次的一半多13人,則不足29人.求總兵數.

(16) 一矩形的公園,長70丈,闊50丈.圍繞此園有一等闊的馬路,面積是1024方丈.求馬路的闊.

(17) 有二位的整數,等於二數字積的 2 倍.已知個位數字較十位數字大 3,求原數.

(18) 父子歲數的和是 100,歲數的積的 $\frac{1}{10}$ 比父的歲數大 180.求二人的歲數.

(19) 東西兩地相距72里.甲、乙二汽車同時從東向西開行,甲車比乙車早到24分鐘.已知甲車每時比乙多行15里,求二車每時的速度.

【提示】 兩車所行的時數,乙比甲多 $\left(\frac{24}{60}=\right)\frac{2}{5}$ 時.

(20) 某商買緞若干尺,費國幣 150 元.後以每尺 1 元 5 角的價售去,所獲的利等於緞24尺的原價.求買得的尺數.

(21) 會員若干人,平均分派會費 120 元.後臨時加入會員 2 人,於是每人可少出會費 2 元.問原有會員幾人?

(22) 某船在靜水中每時的速度比水流速度多 4 里.今往返於相距 144 里的兩地,共經 15 時.求這船在靜水中每時的速度.

(23) 有甲、乙二管,可以注水入水槽.若獨開乙管,比獨開甲管須多費 6 時才能注水滿槽;若同時開二管,則 4 時可滿.問獨開一管,注水滿槽各需幾時?

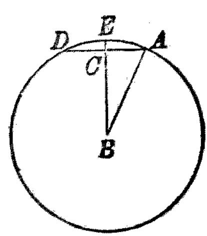
(24) 有兩輪車,前、後輪的周圍相差 2 尺.行 2520 丈的路,前輪比後輪多轉 60 次.求兩輪的周圍.

(25) 直角三角形的三邊的尺數是連續的三整數.求這三邊的長.

【提示】 三角形的一角是直角的,叫直角三角形.直角所對的邊是最長的邊,叫斜邊.根據幾何學中的畢氏定理,知道直角三角形斜邊的平方,必等於其他二邊平方的和.

(26) 直角三角形的斜邊長 17 尺,其他二邊的和是 23 尺.求這二邊的長.

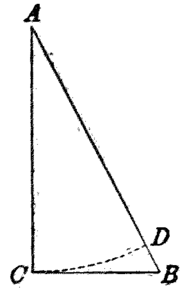
(27) 正圓的木柱,大部嵌入壁中,不知他的直徑.用鋸鋸入 1 寸,鋸道長 1 尺.求木柱的直徑.



【提示】 如右圖,設半徑 AB 為 x 寸,則 ABC 是直角三角形.AC 是鋸道的一半,即 5 寸;

BC是半徑同鋸深的差,即$(x-1)$寸.

(28) 從旗竿頂垂下的索,有 2 尺拖在地下,把索的下端拉到離竿足 8 尺的地方,這索恰巧拉直.求旗竿的高.



【提示】 如右圖,設竿高 AC 爲 x 尺,則 ABC 爲直角三角形,BC 是索端同竿足的距離,即 8 尺;AB 是索長,比竿高多 2 尺,即 $(x+2)$尺.

第五節 二次方程式的根同係數的關係

1. 二根的和同係數的關係 二次方程式的公式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

把他化做 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

設 $\frac{b}{a}=P,\quad \frac{c}{a}=Q,$

則得 $x^2+Px+Q=0$.

上式也可以認爲是二次方程式的公式,因爲任何二次方程式都可化做這種形式的緣故.

設　$x^2+Px+Q=0$ 的二根是 α (希臘字,讀如 *Alpha*),β (讀如 *Beta*),根據二次方程式根的公式,得

$$\alpha=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2},\quad \beta=\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}+\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

$$=-P.$$

用言語表示,就是「**二次方程式中 x^2 的係數是 1 時,二根的和等於 x 係數的相對數.**」

【注意】　$\alpha+\beta=-P$,　則 $P=-(\alpha+\beta)$.

2. 二根的積同係數的關係　據上條,可得

$$\alpha\beta=\frac{-P+\sqrt{P^2-4Q}}{2}\cdot\frac{-P-\sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

$$=\frac{P^2-(P^2-4Q)}{4}=Q.$$

用言語表示,就是「**二次方程式中 x^2 的係數是 1 時,二根的積等於不含 x 的項.**」

3. 由預定根作二次方程式　使 x^2 的係數是 1;求二個預定根的和,附以相反的號,做 x 的係數;求二個預定根的積,做不含 x 的項;放在等號左邊.再使右邊爲 0,即得所求的二次方程式.

例題一　以 3 及 -4 為根,作二次方程式.

【解】　已知 $\alpha=3,\ \beta=-4$,

$\therefore\qquad P=-(3-4)=1,\qquad Q=3(-4)=-12.$

所求的二次方程式是　$x^2+x-12=0.$

例題二　以 $1\frac{1}{3}$ 及 $\frac{1}{2}$ 為根,作二次方程式.

【解】　已知 $\alpha=1\frac{1}{3},\qquad \beta=\frac{1}{2}$,

$\therefore\qquad P=-\left(1\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{6},\qquad Q=1\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}.$

所求的二次方程式為　$x^2-\frac{11}{6}x+\frac{2}{3}=0.$

即　$6x^2-11x+4=0.$

例題三　以 $\frac{-3\pm2\sqrt{5}}{2}$ 為根,作二次方程式.

【解】　已知 $\alpha=\frac{-3+2\sqrt{5}}{2},\qquad \beta=\frac{-3-2\sqrt{5}}{2}$,

$$\therefore\qquad P=-\left(\frac{-3+2\sqrt{5}}{2}+\frac{-3-2\sqrt{5}}{2}\right)=-\frac{-6}{2}$$

$$=3,$$

$$Q=\frac{-3+2\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{-3-2\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{(-3)^2-(2\sqrt{5})^2}{4}=\frac{9-20}{4}=-\frac{11}{4}.$$

所求的二次方程式為　$x^2+3x-\frac{11}{4}=0.$

即 $$4x^2+12x-11=0.$$

【注意】 $(2\sqrt{5})^2=(2\times\sqrt{5})^2=2^2\times(\sqrt{5})^2=4\times5=20.$

例題四 以$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{5}$爲根,作二次方程式.

【解】 已知 $\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{5},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{3}i}{5},$

$$\therefore \quad P=-\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{5}+\frac{1-\sqrt{3}i}{5}\right)=-\frac{2}{5},$$

$$Q=\frac{1+\sqrt{3}i}{5}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{5}=\frac{1^2-(\sqrt{3}i)^2}{25}$$

$$=\frac{1+3}{25}=\frac{4}{25}.$$

所求的二次方程式是 $$x^2-\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}=0.$$

即 $$25x^2-10x+4=0.$$

【注意】 $(\sqrt{3}i)^2=(\sqrt{3}\times\sqrt{-1})^2=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{-1})^2=3\times(-1)=-3.$

4. 變已知方程式的根作二次方程式

設有一已知方程式,不去求出他的根來,要另作一二次方程式,使這所作方程式的根是原方程式根的變形.舉例於下:

例題一 設有二次方程式$ax^2+bx+c=0$,試另作一二次方程式,使他的二根是上列

方程式二根的平方.

【解】 設$ax^2+bx+c=0$的二根是α、β,

則所求方程式的二根是α^2、β^2.

故所求方程式若用α、β表出,應爲

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0.$$

欲將α、β換成a、b、c,必須應用下列二式:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1),\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$(1)^2$ $$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}$$

$(2)\times 2$ $$2\alpha\beta=\frac{2c}{a}\ (-$$

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

$(2)^2$ $$\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

以(3)、(4)代入用α、β表出的方程式,得所求的方程

式: $$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0.$$

即 $$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$$

【注意】 設有方程式$2x^2-7x+3=0$(二根是$\frac{1}{2}$同3),以$a=2$, $b=-7$, $c=3$代入上例的結果,得$4x^2-37x+9=0$(二根是$\frac{1}{4}$同9),這所得方程式的二根,恰是原方程式二根的平方.

例題二 設二次方程式$ax^2+bx+c=0$

的二根爲 α、β，試作以 $\frac{\alpha}{\beta}$、$\frac{\beta}{\alpha}$ 爲二根的方程式.

【解】 所求的方程式若用 α、β 表，應爲

$$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+1=0\left(因\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1\right).$$

利用分式加法及根據上例的(3)及(2)，得

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\div\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{ac}.$$

代入前式，得 $x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}x+1=0.$

故所求的方程式是 $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0.$

5. 求等根方程式中的缺項 已知一方程式是等根方程式，可利用根同係數的關係，求出這方程式中的缺項.

例題 方程式 $3x^2+4mx+m=0$ 是等根方程式，求 m 的值.

【解】 變原方程式爲 $x^2+\frac{4m}{3}x+\frac{m}{3}=0$，設其根爲 α、β，

則 $\alpha+\beta=-\frac{4m}{3}$， $\alpha\beta=\frac{m}{3}.$

但 $\alpha=\beta$，

$\therefore$ $2\alpha=-\frac{4m}{3}$……………(1)， $\alpha^2=\frac{m}{3}$……………(2).

(1)÷2 $\alpha=-\frac{2m}{3}$，自乘得 $\alpha^2=\frac{4m^2}{9}$……(3).

由(2),(3)得 $\frac{4m^2}{9}=\frac{m}{3}$.

$\therefore$ $12m^2=9m,\ 4m^2-3m=0,\ m(4m-3)=0,$

於是得 $m=0$, 或 $m=\frac{3}{4}$.

【別解】 前已知方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 若 b^2-4ac 為 0,則原方程式的根是 $-\frac{b}{2a}$,而為等根方程式(參閱第三節,3,例題五). 本題既是等根方程式,

則必 $(4m)^2-4\times3\times m=0$.

即 $16m^2-12m=0$.

解得 $m=0$, 或 $m=\frac{3}{4}$.

(註) 若 $b^2-4ac=0$,則原方程式的二根相等;若 $b^2-4ac<0$,則根是虛數;若 $b^2-4ac>0$,而非整平方數,則根含不盡根數.所以利用 b^2-4ac 的值,可判別二次方程式根的種類,因此稱 b^2-4ac 為二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的**判別式**.

習題五十

由下列各題中的預定根作二次方程式:

(1) $7,\ -5$. (2) $3,\ 11$. (3) $\frac{1}{2},\ -5$.

(4) $-\frac{2}{3},\ 4\frac{1}{5}$. (5) $2\pm i$. (6) $1\pm\sqrt{3}$.

(7) $-2\pm3\sqrt{7}$. (8) $-1\pm2\sqrt{2}i$. (9) $-5\pm4i$.

(10) $\frac{3\pm2i}{2}$. (11) $\frac{-1\pm5\sqrt{2}}{4}$. (12) $\frac{-7\pm\sqrt{5}i}{3}$.

(13) 設方程式$ax^2+bx+c=0$的二根是α、β,試作以$\frac{1}{\alpha}$、$\frac{1}{\beta}$爲根的二次方程式.

(14) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是α、β,試作以$\alpha+\beta$,$\frac{1}{\alpha+\beta}$爲根的二次方程式.

(15) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是α、β,試作以$\alpha\beta$、$\frac{1}{\alpha\beta}$爲根的二次方程式.

(16) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根是α、β,試作以$\frac{1}{\alpha^2}$、$\frac{1}{\beta^2}$爲根的二次方程式.

(17) 方程式$4x^2+(1+a)x+1=0$的二根相等,求 a 的值.

(18) 方程式 $x^2-(a-3)x+a=0$ 的二根相等,求 a 的值.

第六節 聯立二次方程式解法

(I) 一次與二次聯立的

1. 代入法 凡一次同二次聯立的方程式,都可用代入法解,步驟如下:

I. 變一次的方程式,使含 y 的項獨居一邊,且係數爲 1(換以 x 亦可).

II. 代入二次的方程式,消去未知數 y,得含 x 的一元二次方程式.

III. 解這一元二次方程式,得 x 的二個值.

IV. 以 x 的二個值代入 *I* 所得的方程式,得 y 的二個對應值.

例題　試解下列的聯立方程式:

$$\begin{cases} 4x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1). \\ 3x^2-2xy-y^2+4x+7y=13 \cdots\cdots\cdots\cdots (2). \end{cases}$$

【解】　變(1)為　$y=7-4x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3).$

以(3)代入(2)

$$3x^2-2x(7-4x)-(7-4x)^2+4x+7(7-4x)=13.$$

化簡,得　$5x^2-18x+13=0.$

$$\therefore\quad x=\frac{18\pm\sqrt{324-260}}{10}=\frac{18\pm 8}{10}=1 \text{ 或 } 2\frac{3}{5}.$$

代入(3),得　$y=3$ 或 $-3\frac{2}{5}.$

$$\text{答}\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}\qquad \text{或}\begin{cases} x=2\frac{3}{5}, \\ y=-3\frac{2}{5}. \end{cases}$$

【注意】　所得的兩組根須分列清楚,不可混亂.因 $x=1$ 時,y 必須是 3,才能適合原方程式.若以 $x=1$,

$y=-3\frac{2}{5}$ 代入原方程式,結果一定不對.

2. 特別法　特種的問題,可先求出 x、y 的和同差,再用一次聯立方程式的加減法做,比代入法便利.

例題一　試解 $\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ x^2-y^2=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 $(2)\div(1)$　　$x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

$[(1)+(3)]\div 2$　　$x=5$

$[(1)-(3)]\div 2$　　$y=2$　} 答.

例題二　試解 $\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 $(1)^2$　　$x^2+2xy+y^2=49 \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

$(3)-(2)$　　$2xy=24 \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

$(2)-(4)$　　$x^2-2xy+y^2=1,$

開方　　$x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(5).$

或　　$x-y=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(6).$

(1),(5) 聯立,得 $\begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$　(1),(6) 聯立,得 $\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$

習題五十一

解下列的聯立方程式.

(1) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2-y^2=39. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=10, \\ x^2+y^2=58. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=6 \cdots\cdots\cdots(1), \\ xy=5 \cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-y=2 \cdots\cdots\cdots(1), \\ xy=143 \cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【提示】 $(1)^2-(2)\times 4$.　　【提示】 $(1)^2+(2)\times 4$.

(5) $\begin{cases} x^2-xy=-3, \\ x-y=-1. \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} xy+y^2=4, \\ x+y=1. \end{cases}$

【提示】 $(1)\div(2)$. 上列二題一樣.

(7) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x-y=17, \\ x^2-xy+y^2=219. \end{cases}$

【提示】 $(1)^2-(2)=(3)$, $(2)-(3)\times 3$. 上二題一樣,下四題仿此.

(9) $\begin{cases} x+y=15, \\ x^2-xy+y^2=57. \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} x-y=-3, \\ x^2+xy+y^2=3. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2-5xy+y^2=25. \end{cases}$　　(12) $\begin{cases} x-y=-5, \\ x^2+3xy+y^2=205. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} 4x+3y=3, \\ 7xy=1\frac{1}{6}. \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} 2x+5y=-12, \\ x^2-y^2+3x-y=16. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} 2x-5y=3, \\ x^2+xy=20. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} 4x+9y=12, \\ 2x^2+xy=6y^2. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} 4x-5y=1, \\ 2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47. \end{cases}$

(18) $\begin{cases} 4x-y=4, \\ 4x^2+2xy+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{5}{12}(4x+y)=41. \end{cases}$

(II) 二次與二次聯立的

通常二次與二次聯立的方程式消去一元後,得的方程式不止二次,他的解法不在初等代數範圍以內,現在僅就能用二次解法做的問題,分類舉例於後.

1.可用加減法消成一次的 兩式中所含的全部二次項都相同,或都成倍數的,可用加減法把二次項完全消去,得一個一次方程式,然後用代入法做.

例題 試解 $\begin{cases} xy+x=15 \cdots\cdots(1), \\ xy-y=8 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (1)−(2) $x+y=7 \cdots\cdots(3).$

變(3)為 $y=7-x.$

代入(1) $x(7-x)+x=15.$

化簡,得 $x^2-8x+15=0.$

分解因式, $(x-3)(x-5)=0.$

命 $x-3=0,$ 或 $x-5=0,$

$\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

2. 可用除法消成一次的 兩式中含未知數的項移於一邊後,若有相同的因式,可用除法消得一個一次方程式,再用代入法做.

例題 試解 $\begin{cases} x^2-y^2=16, \\ 2x^2-3xy+y^2=14. \end{cases}$

【解】 化原式為 $\begin{cases} (x+y)(x-y)=16 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ (2x-y)(x-y)=14 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

(1)÷(2) $\dfrac{x+y}{2x-y}=\dfrac{16}{14}.$

交叉乘 $14x+14y=32x-16y.$

化簡,得 $5y=3x.$

$\therefore$ $y=\dfrac{3}{5}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

以(3)代入(1) $x^2-\dfrac{9}{25}x^2=16.$

解得 $x=\pm 5,$

代入(3),得 $y=\pm 3.$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-5, \\ y=-3. \end{cases}$$

3. 一式中各項全是二次的　一個方程式中沒有一次項,且不含 x 的項是 0 的,可把這式分解因式,求得 $x=?y$ (或 $y=?x$),再代入他式.

例題　試解 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 3x^2-y^2+2x-y=31 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】　分解(1)的因式　$(x-2y)(x-3y)=0.$

命　$x-2y=0,$　則　$x=2y \cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

命　$x-3y=0,$　則　$x=3y \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

以(3)代入(2)　$12y^2-y^2+4y-y=31.$

化簡,得　$11y^2+3y-31=0.$

$$\therefore \quad y=\frac{-3\pm\sqrt{9+1364}}{22}=\frac{-3\pm\sqrt{1373}}{22}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{1373}}{11}, \\ y=\dfrac{-3+\sqrt{1373}}{22}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{1373}}{11}, \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{1373}}{22}. \end{cases}$$

以(4)代入(2)　$27y^2-y^2+6y-y=31.$

化簡,得　$26y^2+5y-31=0.$

$$\therefore \quad y=\frac{-5\pm\sqrt{25+3224}}{52}=\frac{-5\pm57}{52}$$

$$=1 \text{ 或 } -1\frac{5}{26}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3\frac{15}{26}, \\ y=-1\frac{5}{26}. \end{cases}$$

【注意】 利用 $x=2y$ 求得 y 後，應仍代入該式以求 x，不能代入 $x=3y$ 中.

4. 可以消成各項全是二次的 兩方程式中除二次項外，其他的若是祇有不含 x 的項，或同文字的一個一次項，可用加減法把他消去，然後仿上條的方法做.

例題 試解 $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=2y \cdots\cdots(1), \\ 2x^2+4xy \quad =5y \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 $(1)\times5$ $\quad 10x^2-5xy+5y^2=10y$

$(2)\times2$ $\quad \underline{4x^2+8xy \quad =10y}\ (-$

$\quad 6x^2-13xy+5y^2=0.$

分解因式 $\quad (2x-y)(3x-5y)=0.$

命 $\quad 2x-y=0,$ 則 $\quad y=2x \cdots\cdots(3).$

命 $\quad 3x-5y=0,$ 則 $\quad y=\frac{3}{5}x \cdots\cdots(4).$

以(3)代入(2)；解得 $\quad x=1$ 或 0，$y=2$ 或 0.

以(4)代入(2)，解得 $\quad x=\frac{15}{22}$ 或 0，$y=\frac{9}{22}$ 或 0.

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{15}{22} \\ y=\dfrac{9}{22}. \end{cases}$$

(註) 2.條的例題也可仿此法消去不含文字的項再解.

習題五十二

解下列各題的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} xy+2=9y, \\ xy+2=x. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-2y=5xy, \\ 15x-4y=4xy. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+xy+x-y=14, \\ x^2+xy-x+y=16. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} xy+x=25, \\ 2xy-3y=28. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=6, \\ 4x^2-y^2=3. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2=9, \\ 4x^2-9y^2=7. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44, \\ 2x^2-xy+y^2=16. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} 2x^2-xy=15x, \\ 2xy-y^2=5x. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3y^2=0, \\ 2x^2-y^2+x-y=15. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0, \\ x^2+3xy-y^2+2x-3y=2. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39, \\ 2x^2+3xy+y^2=63. \end{cases}$

(12) $\begin{cases} x(x+y)+y(x-y)=158, \\ 7x(x+y)=72y(x-y). \end{cases}$

5. 可求出二根的和差的 有時可用加、減及乘方、開方,求出二根的和同差,再仿一次聯立方程式解.

例題一 試解 $\begin{cases} x^2+y^2=13 \cdots\cdots(1), \\ xy=6 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 $(2)\times 2$ $2xy=12 \cdots\cdots(3).$

$(1)+(3)$ $x^2+2xy+y^2=25.$

開方,得 $x+y=\pm 5 \cdots\cdots(4).$

$(1)-(3)$ $x^2-2xy+y^2=1.$

開方,得 $x-y=\pm 1 \cdots\cdots(5).$

把(4)、(5)分別聯立,得四組聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-1. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=3, \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=-3, \end{cases} \begin{cases} x=-3 \\ y=-2. \end{cases}$

例題二　試解 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+y^2=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】　(1)－(2)　$2xy\quad =20\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$

(3)÷2　$xy\quad =10\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$

(1)＋(4)　$x^2+2xy+y^2=49.$

開方,得　$x+y=\pm 7\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$

(2)－(4)　$x^2-2xy+y^2=9.$

開方,得　$x-y=\pm 3\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$

把(5)、(6)分別聯立,得四組聯立方程式:

$$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=\ \ 7 \\ x-y=-3, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=\ \ 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-3, \end{cases}$$

解得　$\begin{cases} x=5 \\ y=2, \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=5, \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=-5, \end{cases} \begin{cases} x=-5 \\ y=-2. \end{cases}$

6. 特殊的三元聯立方程式　通常三元聯立方程式不能用二次方程式的解法做,但下列的例題却是例外.

例題　試解 $\begin{cases} xy+zx=27 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ yz+xy=32 \cdots\cdots\cdots\cdots(2), \\ zx+yz=35 \cdots\cdots\cdots\cdots(3). \end{cases}$

【解】 $[(1)+(2)+(3)]\div 2$ $xy+yz+zx=47$ ……(4).

從(4)分別減去(1),(2),(3),得

$$\begin{cases} yz=20 \cdots\cdots(5), \\ zx=15 \cdots\cdots(6), \\ xy=12 \cdots\cdots(7). \end{cases}$$

(5)×(6)×(7) $x^2y^2z^2=3600$.

開方,得 $xyz=\pm 60$ ……(8).

以(5),(6),(7)分別除(8),得

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=-5. \end{cases}$$

習題五十三

解下列各題的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=65 \\ xy=28. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 9x^2+4y^2=52 \\ xy=4. \end{cases}$

【提示】 (1)±(2)×12,開方,得 $3x\pm 2y$ 的值.

(3) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ xy=-4. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=79 \\ xy=21. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-5xy+y^2=37 \\ xy=9. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=-8 \\ xy=-4. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=189, \\ x^2-xy+y^2=117. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=109, \\ x^2-6xy+y^2=73. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x(y+z)=6, \\ y(z+x)=12, \\ z(x+y)=10. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} yz=4, \\ zx=9, \\ xy=16. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} 3x^2-4y^2=44, \\ 5x^2+6y^2=86. \end{cases}$

【提示】 把 x^2 同 y^2 都看作一次項,用加減法求他們的值,得二個純二次方程式.上二題一樣.

(13) $\begin{cases} x^2-1=9y, \\ x^2+x=6y. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x+y=xy-2. \end{cases}$

【提示】 消去含 y 的項,或消去 x^2 都可以.

【提示】 $(2)^2-(1)$,把 xy 看作一次項,求值,與(1)聯立.

(15) $\begin{cases} x^2+xy=8x+3 \\ y^2+xy=8y+6. \end{cases}$

【提示】 相加得 $(x+y)$ 的二次方程式,解得 $(x+y)$ 的值;變(1)爲 $x(x+y)=8x+3$,以 $(x+y)$ 的值代入求 x.

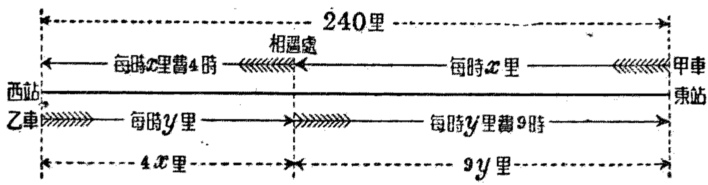
(16) $\begin{cases} 2(x+y)^2-9(x+y)-18=0, \\ (x-y)^2+(x-y)-6=0. \end{cases}$

【提示】 就(1)求 $(x+y)$ 的值;就(2)求 $(x-y)$ 的值。

(III) 應用問題

例題 東西兩車站相距 240 里,甲車在東站,乙車在西站,同時相向開行.二車在途中相遇後,甲經 4 時達西站,乙經 9 時達東站.求二車的速度.

【解】 設甲車每時行 x 里,乙車每時行 y 里,



則甲在相遇後行 $4x$ 里,即乙在相遇前所行的里數;乙在相遇後行 $9y$ 里,即甲在相遇前所行的里數.

由是知從出發到相遇,甲費 $\frac{9y}{x}$ 時,乙費 $\frac{4x}{y}$ 時,

得方程式 $$\begin{cases} 4x+9y=240, \\ \dfrac{9y}{x}=\dfrac{4x}{y}. \end{cases}$$

化得 $$\begin{cases} y=\dfrac{240-4x}{9} \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 4x^2-9y^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$$

以(1)代入(2),化簡,得 $x^2+96x-2880=0.$

分解因式　$(x+120)(x-24)=0.$

命　$x+120=0,$　則　$x=-120$(不適用).

命　$x-24=0,$　則　$x=24.$

以 $x=24$ 代入(1),得　$y=16.$

答甲車每時行24里,乙車每時行16里.

習題五十四

(1) 甲在東鎮,乙在西鎮,同時相向起行,相遇時甲已比乙多走24里.相遇後甲再行4時達西鎮,乙再行9時達東鎮.求二人的速度.

(2) 有二整數,其和為其差的6倍,而積比和多23.求這二數.

(3) 二正分數的和是$\frac{5}{6}$,他們的積等於他們的差.求這二個分數.

(4) 矩形各邊都增1尺,則面積為48方尺;各邊都減1尺,則面積為24方尺.求各邊的長.

(5) 直角三角形的斜邊長2尺,面積是96方寸,求其他二邊的長.

【提示】　其他二邊的積,是面積的2倍.

(6) 某人向銀行借國幣若干元,用單利計算利息.若在6年後歸還,應出本利和5200元;若在10年後歸還,應出本利和6000元.求本金及年利率.

(7) 某甲借國幣 200 元與某乙,預算在某期限間可得單利息 48 元.若年利率減少.01,而欲得同樣的利息,則期限當延長 2 年.求時期同年利率.

(8) 某人買上、下二種糖,上種比下種少 4 斤,而上種比下種每斤貴 1 分 5 釐.已知上糖共價 1 元 4 角 8 分,下糖共價 2 元零 4 分.求二種糖的斤數同每斤的價.

第十一章　根式方程式、簡易高次方程式

第一節　根式方程式

方程式中含有根式的,叫做根式方程式.解法的步驟如下:

I. 移根式同非根式使各集於一邊.

II. 兩邊各自乘,使化爲普通方程式.

III. 解這方程式,求出 x 的值.

IV. 以 x 的值代入原方程式,實驗是否適合.那不適合的是假根,應棄掉他.

例題　試解 $7+\sqrt{x^2-x-5}=2x$.

【解】　移項　$\sqrt{x^2-x-5}=2x-7$.

自乘　$x^2-x-5=4x^2-28x+49$.

化簡,得　$x^2-9x+18=0$.

解得　$x=3$ 或 6.

【實驗】　以 3 及 6 分別代入原方程式,得

$$7+\sqrt{3^2-3-5}=7+1\neq 2\times 3;$$

$$7+\sqrt{6^2-6-5}=7+5=2\times 6.$$

所以求得的 6 是眞根,3 是假根.

【理由】　根式方程式的所以有假根,因爲曾經

自乘的手續.凡一式,不論正負,自乘後得的式總是正,所以本題若改爲$7-\sqrt{x^2-x-5}=2x$,照上法解出來,得的根也是3同6,這時的3反是眞根,6反是假根.

特例一 若一方程式中不止有一個根式時,自乘一次後仍有根式,應再移項自乘,才得普通方程式.

例題 試解$2\sqrt{5+2x}-\sqrt{13-6x}=\sqrt{37-6x}$.

【解】 自乘

$$4(5+2x)-4\sqrt{5+2x}\sqrt{13-6x}+(13-6x)=37-6x.$$

移項,化簡 $2x-1=\sqrt{5+2x}\sqrt{13-6x}$.

自乘 $4x^2-4x+1=(5+2x)(13-6x)$.

化簡 $16x^2=64$.

解得 $x=2$(眞根), 或$x=-2$(假根).

【注意】 如上例,曾經自乘二次的,有時得的二根會都是假根.

特例二 若把根式方程式的兩邊各自乘後,所得的是四次方程式時,在特殊情形之下,可用特別法解.

例題 試解$9\sqrt{x^2-9x+28}=x^2-9x+36$.

【解】 變原式爲

$$(x^2-9x+28)-9\sqrt{x^2-9x+28}+8=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

設 $\sqrt{x^2-9x+28}=y\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$

則　$x^2-9x+28=y$ ……………………(3).

以(2),(3)代(1),得　$y^2-9y+8=0$.

解得　$y=1$ 或 8.

分別代入(3),得　$x^2-9x+27=0$,

或　$x^2-9x-36=0$.

解得　$x=\dfrac{9\pm3\sqrt{3}i}{2}$ 或 12, -3.

【注意】　如上的方程式,得的 y 是正時,求得 x 的值都是眞根;若 y 是負時,求得 x 的值都是假根,因爲用 y 代的根式是正的緣故.

習題五十五

解下列各題的根式方程式(應棄去假根):

(1) $2x-\sqrt{x^2-4x-5}=10$.　(2) $\sqrt{x^2-x-5}-2x=5$.

(3) $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-4}=4$.　(4) $3x-\sqrt{x^2-2x-6}=12$.

(5) $x=7\sqrt{2-x^2}$.　(6) $x+\sqrt{x+5}=7$.

(7) $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$.　(8) $\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}=6$.

(9) $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$.　(10) $x-\sqrt{(x-4)(5x-24)}=2$.

(11) $\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+1}$.

(12) $x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6$.

(13) $2\sqrt{x^2-2x+1}+x^2=23+2x$.

(14) $2x^2+6x=226-\sqrt{x^2+3x-8}$.

【提示】　變原式爲

$$2(x^2+3x-8)+\sqrt{x^2+3x-8}-210=0.$$

*第二節　簡易高次方程式

1. 純三次方程式　像$x^3=a$的形式的是純三次方程式.只須將a開立方,即得x的值;但在算術上a的立方根只有一數,在代數上却有三數.

例題　試解$x^3=8$.

【解】　移項　　$x^3-8=0$.

分解因式　　$(x-2)(x^2+2x+4)=0$.

命$x-2=0$,則$x=2$.

命$x^2+2x+4=0$,則$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=-1\pm\sqrt{3}\,i$.

2. 複方程式　把高次方程式中的某式看作一個一次因式,求出他的值來,再重複求解.

例題　試解$(x^2+x)^2+4(x^2+x)=12$.

【解】　移項　　$(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$.

設$(x^2+x)=y$,得　　$y^2+4y-12=0$.

解得　　$y=2$ 或 -6.

即　　$x^2+x=2$……………………(1),

或　　$x^2+x=-6$…………………(2).

就(1)解,得　　　　$x=1$ 或 -2.

就(2)解,得　　　　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{23}i}{2}$.

【注意】　n 次方程式必有 n 個根,有時缺少的是等根.

習題五十六

解下列各題的方程式:

(1) $x^3-27=0$.　　(2) $x^3+8=0$.

(3) $x^4-13x^2+36=0$.　　(4) $x^4-7x^2-8=0$.

【提示】　上二題可視作

$$(x^2)^2-13(x^2)+36=0,\quad (x^2)^2-7(x^2)-8=0.$$

(5) $x^4+x^2+1=0$.　　(6) $x^4-x^2+1=0$.

(7) $x^6-1=0$.　　(8) $x^6+1=0$.

(9) $x^6-64=0$.　　(10) $x^6-7x^3-8=0$.

(11) $x^4+1=0$.　　(12) $x^4-1=0$.

(13) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)=-12$.

(14) $(x^2-2)^2=14(x^2-2)+15$.

(15) $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$.

(16) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{17}{4}$.

3. 逆係數方程式　方程式中的 n 項集於一邊,將冪順列後,若第一項與第 n 項,第二項與第$(n-1)$項,……的係數都相同,叫做逆係

數方程式,可用因式分解法求他的根(若係數的絕對值相同而符號相反,亦可用此法).

例題一　試解 $3x^3-7x^2-7x+3=0$.

【解】　分解因式　$(3x^3+3)-(7x^2+7x)=0$.

$3(x+1)(x^2-x+1)-7x(x+1)=0$.

$(x+1)[3(x^2-x+1)-7x]=0$.

$(x+1)(3x^2-10x+3)=0$.

$(x+1)(3x-1)(x-3)=0$.

命　$x+1=0$,　$3x-1=0$,　$x-3=0$;

得　$x=-1$,　$x=\frac{1}{3}$,　$x=3$.

例題二　試解 $4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0$.

【解】　以 x^2 除各項　$4x^2-4x-7-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}=0$.

分解因式

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0\cdots\cdots\cdots(1).$$

設　$x+\frac{1}{x}=y\cdots\cdots\cdots(2)$.

自乘　$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$.

移項　$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\cdots\cdots\cdots(3)$.

以(2)、(3)代入(1)　$4(y^2-2)-4y-7=0$.

化簡　$4y^2-4y-15=0$.

$\therefore\qquad y=\dfrac{4\pm\sqrt{16+240}}{8}=\dfrac{4\pm16}{8}$

$=\dfrac{5}{2}$ 或 $-\dfrac{3}{2}$.

代入(2),得　$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$;　$x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{2}$.

化簡,得　$2x^2-5x+2=0$;　$2x^2+3x+2=0$

解得　$x=2,\ x=\dfrac{1}{2}$;　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{7}\,i}{4}$.

4.其他簡易高次方程式　下面再舉二個可用因式分解法解的簡易高次方程式.

例題一　試解 $2x^3-3x^2=2x-3$.

【解】　移項　$2x^3-3x^2-2x+3=0$.

分解因式　$x^2(2x-3)-(2x-3)=0$.

$(2x-3)(x^2-1)=0$.

$(2x-3)(x+1)(x-1)=0$.

命　$2x-3=0,\ x+1=0,\ x-1=0$.

得　$x=1\frac{1}{2},\quad x=-1,\quad x=1$.

例題二　試解 $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)=-8$.

【解】　變得　$[(x-1)(x-6)][(x-3)(x-4)]+8=0$.

乘算　$(\overline{x^2-7x}+6)(\overline{x^2-7x}+12)+8=0$.

$(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+80=0$.

解得　$(x^2-7x)=\dfrac{-18\pm\sqrt{324-320}}{2}$

$$=\frac{-18\pm2}{2}=-10\text{ 或 }-8.$$

就 $x^2-7x+10=0$, 解得 $x=2$ 或 5.

就 $x^2-7x+8=0$, 解得 $x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{2}$.

習題五十七

解下列各題的方程式:

(1) $12x^3+5x^2-5x-12=0$.

(2) $7x^4-17x^3+17x-7=0$.

(3) $x^3-8x^2-8x+1=0$.

(4) $x^4+5x^3+6x^2+5x+1=0$.

(5) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

(6) $x^3+x^2=4x+4$.

(7) $x^3-3x^2-28x=0$.

(8) $(x^2-6)(x-2)=3x-6$.

(9) $(3x-2)(x^2-26)=9x^2-4$.

(10) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$.

(11) $(x-3)(x+4)(x+1)(x-6)=-108$.

(12) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=24$.

(13) $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)=280$.

(14) $(x+3)(x+6)(x+8)(x+16)=1050x^2$.

【提示】 原方程式可化爲

$$(\overline{x^2+48}+19x)(\overline{x^2+48}+14x)-1050x^2=0.$$

$$(x^2+48)^2+33x(x^2+48)-784x^2=0.$$

*第三節　簡易聯立高次方程式

例題一　試解 $\begin{cases} x+y=4 \cdots\cdots(1), \\ x^3+y^3=28 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】　(2)÷(1)　$x^2-xy+y^2=7 \cdots\cdots(3).$

$(1)^2$　$x^2+2xy+y^2=16 \cdots\cdots(4).$

(4)−(3)　$3xy=9 \cdots\cdots(5).$

(5)÷3　$xy=3 \cdots\cdots(6).$

(3)−(6)　$x^2-2xy+y^2=4.$

開方　$x-y=\pm2 \cdots\cdots(7).$

(7)的二式分別同(1)聯立,得

$$\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

解得　$\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$

【別解】　$(1)^3$　$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=64 \cdots\cdots(3).$

(3)−(2)　$3x^2y+3xy^2=36.$

化得　$xy(x+y)=12.$

以(1)代入,得　$4xy=12.$

$$\therefore \qquad xy = 3 \cdots\cdots(4).$$

(1),(4)聯立即得解,與上相同.

例題二 試解 $\begin{cases} x+y=4 \cdots\cdots(1), \\ x^5+y^5=244 \cdots\cdots(2). \end{cases}$

【解】 (2)÷(1) $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=61.$

變得 $(x^4+y^4)-xy(x^2+y^2)+x^2y^2=61 \cdots\cdots(3).$

$(1)^2$ $x^2+2xy+y^2=16.$

變得 $x^2+y^2=16-2xy \cdots\cdots(4).$

$(4)^2$ $x^4+2x^2y^2+y^4=256-64xy+4x^2y^2.$

變得 $x^4+y^4=2x^2y^2-64xy+256 \cdots\cdots(5).$

以(4),(5)代入(3),得

$$(2x^2y^2-64xy+256)-xy(16-2xy)+x^2y^2=61.$$

化簡,得 $x^2y^2-16xy+39=0.$

解得 $xy=3 \cdots\cdots(6),\quad xy=13 \cdots\cdots(7).$

(1),(6)聯立,解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$

(1),(7)聯立,解得 $\begin{cases} x=2+3i, \\ y=2-3i; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-3i, \\ y=2+3i. \end{cases}$

習題五十八

解下列各題的聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=65. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^3-y^3=152. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^5+y^5=33. \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^5-y^5=242. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=9, \\ x^4+x^2y^2+y^4=243. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y=4, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^4+y^4=82. \end{cases}$

【提示】　(7)題仿例二求得 $x^4+y^4=2x^2y^2-64xy+256$, 代入(2)式,可求 xy 的值.(8)題亦同.

(9) $x^2y(x+y)=80$…………(1),　　$x^2y(2x-3y)=80$…………(2).

【提示】　(1)÷(2),得 $\dfrac{x+y}{2x-3y}=1$,化爲 $x=4y$;代入(1),得 y 的純四次方程式.

(10) $xy(x-y)=12$…………(1),　　$x^3-y^3=63$…………………(2).

【提示】　(2)÷(1), 化簡得各項全是二次的方程式,可求得 $y=4x$ 及 $x=4y$, 各代入(1)求解.

(11) $x^2-2xy+y^2-1=0$……(1),　　$xy(xy+1)=6$…………(2).

【提示】　由(1)可求 $x-y$ 的值;由(2)可求 xy 的值.

*第十二章 簡易不等式

第一節 重要名詞

1. 不等式 兩個代數式的中間用>或<的記號連起來,表示他們不等,叫做不等式.

【例】 $a+b>0$, $x-3<7$ 等,都是不等式.

2. 恆不等式、條件不等式 不等式中的文字用任何數替代都能成立的,叫做恆不等式;所含文字必須用某種界限內的數替代,方能成立的,叫做條件不等式.

【例】 $a^2+b^2>2ab$ 是恆不等式,因爲用任何數代 a、b,都能成立;$x-3<7$ 是條件不等式,因爲 $x\geqq 10$ 時就不成立.

第二節 重要公理及定理

1. 基礎公理一 正數大於0,負數小於0.

2. 基礎公理二 a 比 b 大時,$a-b>0$;a 比 b 小時,$a-b<0$.

3. 加法公理 不等式的兩邊各加上等數,大的一方仍大.

4. **減法公理** 不等式的兩邊各減去等數,大的一方仍大.

5. **倒減公理** 不等式的兩邊各從等數減去,大的一方變小.

6. **正數乘法公理** 不等式的兩邊各用同一的正數乘,大的一方仍大.

7. **正數除法公理** 不等式的兩邊各用同一的正數除,大的一方仍大.

8. **累加公理** 幾個不等式中,大的一方諸式的和大於小的一方諸式的和.

9. **比較公理** 若$a>b$, $b>c$,則$a>c$.

10. **移項定理** 移不等式中的項到另一邊,當變他的符號.

【理由】 設$a+b>c$,則$a+b-b>c-b$(減法公理).

$$\therefore\quad a>c-b.$$

設$a-b>c$,則$a-b+b>c+b$(加法公理).

$$\therefore\quad a>c+b.$$

11. **變號定理** 不等式中各項的號若全變,則大的一方變小.

【理由】 設$a>b$,則$-b>-a$(移項定理),

$$\therefore\quad -a<-b.$$

12. **負數乘法定理** 不等式的兩邊各用

同一的負數乘,大的一方變小.

【理由】　設 $a>b$, $m>0$(卽 m 爲正數),

則 $ma>mb$(正數乘法公理),

$-ma<-mb$(變號定理).

$\therefore\quad (-m)a<(-m)b.$

13. 負數除法定理　不等式的兩邊各用同一的負數除,大的一方變小.

【理由】　同上條.

第三節　重要問題舉例

1. 證恆不等式　利用上節的公理同定理,可以證明恆不等式的成立.

例題一　設 $a\neq b$,試證 $a^2+b^2>2ab$.

【證】　因 $a\neq b$,　故 $a-b\lessgtr 0$ (基礎公理二).

卽 $a-b$ 是正數或負數,於是他的平方必是正數.

卽　$(a-b)^2>0$,　$a^2-2ab+b^2>0$.

$\therefore\quad a^2+b^2>2ab$ (移項定理).

例題二　設 $a\neq b$,且都是正數,試證

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}.$$

【證】　因 $a\neq b$,故 $\sqrt{a}\neq\sqrt{b}$,卽 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 是正

數或是負數.於是　$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$.

即　$a-2\sqrt{ab}+b>0$.

$\therefore$　$a+b>2\sqrt{ab}$ (移項定理).

以 2 除,得　$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ (正數除法定理).

2. 解不等式　利用上節的公理同定理,求條件不等式中的未知數應在何種界限內,才能使不等式成立,叫做解不等式.

例題一　試解 $5x-\dfrac{1}{4}>7+\dfrac{17x}{3}$.

【解】　以 12 乘　$60x-3>84+68x$(正數乘法公理).

移項　$60x-68x>84+3$ (移項定理).

即　$-8x>87$.

以 -8 除　$x<-10\dfrac{7}{8}$ (負數除法定理).

故知凡比 $-10\dfrac{7}{8}$ 小的一切數值,都能適合題中的不等式.

例題二　求適合於下列不等式中 x 的正整數值:

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}<\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3.$$

【解】　先就　$\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{4}(x+2)+\dfrac{1}{3}x$ 解:

以 12 乘　$6(x+1)+4<3(x+2)+4x$,

(正數乘法公理).

即　　$6x+6+4<3x+6+4x$.

移項　　$6x-3x-4x<6-6-4$(移項定理).

即　　$-x<-4$.

$\therefore$　　$x>4$(變號定理).

次就　　$\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3$ 解:

以12乘　　$3(x+2)+4x<6(x-4)+36$,

(正數乘法公理).

即　　$3x+6+4x<6x-24+36$.

移項　　$3x+4x-6x<36-24-6$(移項定理).

即　　$x<6$.

於是 x 的正整數值僅有 5 一種.

習題五十九

(1) 設$a\neq b\neq c$,試證$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

【提示】 仿第三節1例一,可得同類的三式,再利用累加定理同正數除法定理,即得.

(2) 設$a\neq b$,且同號,試證$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

【提示】 化第三節1例一的恆不等式即得.

(3) 設$a\neq b$,而$a+b$為正數,試證$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

【提示】 仿第三節1例一得 $a^2-2ab+b^2>0$,兩邊各加ab,以$a+b$乘,再以a^2b^2除,即得.

(4) 設$\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$,試證$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

【提示】　變題設爲 $ad \neq bc$,仿第三節 1 例一得 $a^2d^2+b^2c^2>2abcd$. 兩邊各加 $a^2c^2+b^2d^2$,分解因式卽得.

試解下列的不等式:

(5)　$2x-5>7$.　　(6)　$3-4x<5$.

(7)　$5x-8<3x+2$.　　(8)　$\frac{1}{15}x<\frac{7}{3}$.

(9)　$x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2$.　　(10)　$\frac{5}{2}x-4<7-\frac{1}{3}x$.

(11)　$\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$.

(12)　求適合於下列二個不等式中 x 的正整數值:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x>\frac{x}{5}+1 \\ \frac{7}{5}x-1<\frac{2}{3}x+2. \end{cases}$$

第十三章　函數圖解

第一節　重要名詞

1. 常數,變數　前述的各種數,不論已知數或未知數,在同一問題中常固定不變,叫做常數.若在一問題中,一數可以變動不居的,叫做變數.

【例一】　某人現有國幣10元,逐日收入2元,設 x 日後此人應有國幣 y 元,則得等式

$$y=2x+10.$$

在這個等式中,x 同 y 的關係如下:

若 $x=$	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
則 $y=$	……	2	4	6	8	10	12	14	16	18	……

故 x 同 y 都是變數,而2同10是常數.

【例二】　某工廠工人每名每日織布5丈,x 人於 y 日內共織布 $5xy$ 丈.則人數 x,日數 y 同布的丈數 $5xy$ 都是變數,祇有5是常數.

2. 函數(應變數),自變數　在有相互關係的二數中,若一數變,則他數跟他變;若一數定,則他數跟他定;這時稱自變,自定的一數爲自

變數,跟了自變數變或定的他數爲函數,或應變數.

通常用 x 表自變數, y 表函數.但 x 的函數亦可用 $f(x)$ 來表.

【例一】　若行路的速度一定,則所行路的長短,是所行時刻的函數.又所行時刻也是所行路長的函數.

【例二】　在 $y=2x+10$ 中,可把 x 視作自變數,而把 y 視作 x 的函數.因爲 x 的值若變或定,則 y 的值也就跟了他變或定.

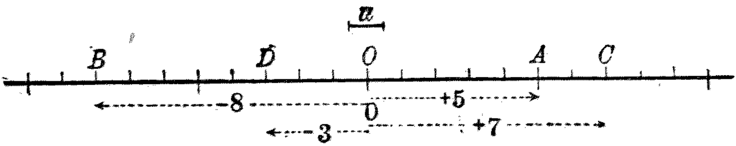
3. 數尺、原點　函數變遷的情狀,可用圖形表出,惟應先述用點表數的方法.

作一直線,在其中定一 0 點,稱爲原點.另定一單位長的線段 u,用 u 的長量這直線,若從 0 起向右量,所得 u 的倍數表正數;若從 0 起向左量,所得 u 的倍數表負數:這直線叫做數尺.

在數尺上的任何一點,都可以表一個數.反之,凡一數,都可以在數尺上取出一點來表他.

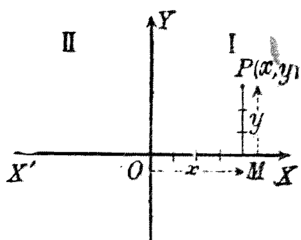
【例】　如下圖, $+5$ 以數尺上的 A 點表, -8 以數尺上的 B 點表,數尺上的 C 點表 $+7$, D 點表 -3,

O 點表 0.



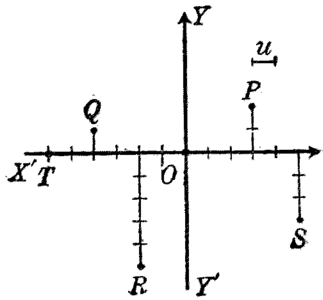
4. 坐標,軸,象限 用數尺,只能用數表一直線上的諸點,若欲用數表一平面上的諸點,當用坐標.

如右圖,在一平面上取縱,橫互相垂直的二直線 $X'X$、$Y'Y$,命其交點爲 O.這 O 點亦稱原點,$X'X$ 叫做橫軸或 x 軸,$Y'Y$ 叫做縱軸或 y 軸.二軸分平面爲四部分,各部都叫象限,依圖中所記(I)、(II)、……分別叫做第一、第二、……象限.



橫軸上的點,在 O 右的表正數,在 O 左的表負數,同數尺一樣;縱軸上的點,在 O 上的表正數,在 O 下的表負數.不在二軸上的點,如 P,可從這點引橫軸的垂線 PM,量從 O 到垂足 M 的距離,向右爲正,向左爲負,得數以 x 表;再

量從 M 到 P 的距離,向上爲正,向下爲負,得數以 y 表;把這二數記作 (x, y),叫做 P 點的坐標. x 是 P 的橫坐標,y 是 P 的縱坐標.



【例一】 如右圖,P 點的坐標爲 $(3, 2)$.

【例二】 Q 點的坐標爲 $(-4, 1)$.

【例三】 R 點的坐標爲 $(-2, -5)$.

【例四】 點 $(5, -3)$ 爲 S.

【例五】 點 $(-6, 0)$ 爲 T.

【例六】 點 $(0, 0)$ 爲 O.

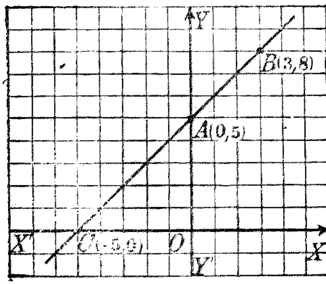
第二節 一次函數的圖形

x 的一次式,可以稱做 x 的一次函數.欲畫一次函數的圖形,可任意假定 x 的值,作橫坐標,再求出這函數的值,作縱坐標,在圖中定出一點,作記號"×"表之;再用同法定出第二點,然後過這兩點作直線即得.

例題一 試畫函數 $x+5$ 的圖形.

【解】 設 $y=x+5$.

命 $x=0$, 則 $y=5$;



命 $x=3$, 則 $y=8$.

在圖中定出二點 $A(0,5)$, $B(3,8)$, 過這二點作直線,即得所求的圖形.

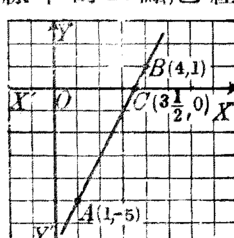
【理由】 一次函數的圖形總是直線,他的理由應在解析幾何學中證明,不在本書範圍以內.但若用實驗的方法,也能知道這定理的真確:設順次用各數表 x 的值,逐一求出函數 $x+5$ (即 y)的值,得下表:

x	......	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	......
y	......	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	......

從上圖知點 $(-5,0)$、$(-4,1)$、$(-3,2)$、.........、$(4,9)$、$(5,10)$、..........都在求得的一直線上.

根據初等幾何學,知通過二點的直線必有一條,且祇有一條,所以我們只須定出直線中的二點,已經可以畫出全部的圖形了.

例題二. 試畫函數 $2x-7$ 的圖形.



【解】 設 $y=2x-7$,

命 $x=1$, 則 $y=-5$;

命 $x=4$, 則 $y=1$.

在圖中定出二點 $A(1,-5)$、$B(4,1)$，過這二點作一直線，即得所求的圖形.

第三節　一次方程式的圖解

1. 一元一次方程式　用圖形可以解一元一次方程式，其步驟如下:

I.　整理原方程式，使化為 $ax+b=0$ 的形狀.

II.　畫出函數 $ax+b$ 的圖形，使與橫軸相交.

III.　圖形與橫軸的交點的橫坐標，就是原方程式中 x 的值.

例題一　用圖解方程式 $x+5=0$.

【解】　畫出函數 $x+5$ 的圖形(見上節例題一)，與橫軸交於 C 點，這 C 點的橫坐標是 -5，故所求的根是 -5.

【理由】　據上節例題一，知圖形中的任何一點，其橫坐標若表 x 的值，則縱坐標必表 $x+5$ 的值. 今欲解 $x+5=0$，就是要求 x 是幾的時候，$x+5$ 才是 0. 換句話說，就是橫坐標是幾，那末縱坐標是 0. 因為縱坐標是 0 的點必在橫軸上，所以圖形與橫軸的交點的橫坐標，就是 x 的值.

例題二　用圖解方程式 $2x-7=0$.

【解】　畫出函數 $2x-7$ 的圖形(見上節例題二),與橫軸交於 C 點,這 C 點的橫坐標是 $3\frac{1}{2}$. 故所求的根是 $3\frac{1}{2}$.

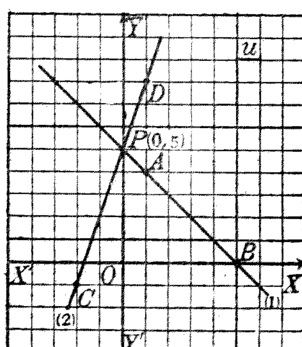
2. 二元聯立一次方程式　步驟如下:

I.　把兩方程式各化做 $y=?x+?$ 的形狀.

II.　畫出函數 $?x+?$ 的圖形,每式一個,得兩個圖形,通常可相交於一點.

III.　兩個圖形的交點的橫坐標是 x 的值,縱坐標是 y 的值.

例題一　用圖解 $\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 3x-y+5=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$



【解】　化(1)為　$y=5-x$,

命　$x=1$,　則　$y=4$;

命　$x=5$,　則　$y=0$.

在圖中定二點 $A(1,4)$、$B(5,0)$, 得圖形(1).

化(2)為 $y=3x+5$,

命　$x=-2$, 則 $y=-1$;

命　$x=1$,　則 $y=8$.

在圖中定二點 $C(-2,-1)$,$D(1,8)$,得圖形(2).

兩形相交於 P 點,這 P 點的橫坐標為 0,縱坐標為 5,故得所求的根 $x=0, y=5$.

【理由】 仿上節例題一,知圖形(1)中的任何一點,其橫坐標若表 x 的值,則縱坐標必表 y(卽 $5-x$)的值.故圖形(1)中的各點的坐標,都能適合於方程式(1).

同樣,知圖形(2)中的各點的坐標,都能適合於方程式(2).

於是兩個圖形的交點 P 的坐標 $x=0, y=5$ 必能同時適合於兩個方程式.

例題二　用圖解 $\begin{cases} x-4y=11 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1), \\ 2x+3y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2). \end{cases}$

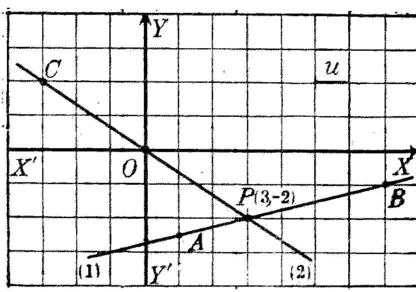
【解】 化(1)為　$y=\dfrac{x-11}{4}$,

命 $x=1$,　則 $y=-2\frac{1}{2}$;

命 $x=7$,

則 $y=-1$.

在右圖中定 $A\left(1,-2\frac{1}{2}\right)$、$B(7,-1)$ 二點(註),得圖形(1).



化(2)為

$$y=-\frac{2}{3}x,$$

命 $x=-3$,　則 $y=2$;

命 $x=0$, 　　則 $y=0$.

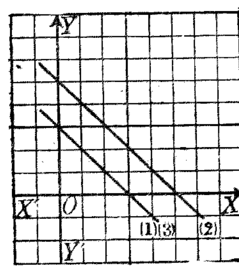
在圖中定 $C(-3,2)$、$O(0,0)$ 二點,得圖形(2).

兩形的交點 P 的橫坐標為 3,縱坐標為 -2,故得所求的根 $x=3, y=-2$.

(註) 作圖時,可以任意取一格、二格或三格、………作一單位.本題的 u 取一格.

【注意】 在代數解法中,有時遇到如

$$\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$



的方程式,不能求得他的根.如用圖形解,則所得的兩個圖形是兩條平行線,不能相交,即不能求得他們的交點的坐標.

又如方程式

$$\begin{cases} x+\ y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x+2y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3), \end{cases}$$

他的兩個圖形是同一直線,線中各點,都可以認為是二線的交點,所以交點的坐標沒有一定,即原方程式沒有根.

習題六十

用圖解求下列一元一次方程式的根:

(1)　$5x-12=0$.　(2)　$2x=-6$.

(3)　$3x=-7$.　(4)　$x+15=0$.

(5)　$8x-7=6x+1$.　(6)　$2(x-3)=0$.

用圖解求下列二元聯立一次方程式的根:

(7)　$\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=3. \end{cases}$　(8)　$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x-y=-13. \end{cases}$

(9)　$\begin{cases} x-y=0, \\ 6x-5y=1. \end{cases}$　(10)　$\begin{cases} 2x+y=6, \\ x+2y=3. \end{cases}$

(11)　$\begin{cases} 7x-3y=24, \\ 3x+2y=-16 \end{cases}$　(12)　$\begin{cases} 4x+3y=7, \\ -2x+y=4. \end{cases}$

(13)　$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0. \end{cases}$　(14)　$\begin{cases} 9x-4y=-1, \\ x+2y=\dfrac{7}{3}. \end{cases}$

(15)　$\begin{cases} 7y-9x=15, \\ 3y-x=-5. \end{cases}$　(16)　$\begin{cases} x-4y=5, \\ 3x+7y=-\dfrac{27}{2}. \end{cases}$

第十四章 開方

第一節 開平方

代數式的開平方同算術中數的開平方法類似,現在僅就開得盡的問題,述其步驟如下:

I. 把代數式中的各項依某文字的冪順列.

II. 求出首項的平方根,就是所求的根的首項.

III. 從原式減去根的首項的平方,得第一餘式.

IV. 2倍根的首項,來除第一餘式,得根的次項.

V. 2倍根的首項,加這次項,用次項乘,從第一餘式內減去,得第二餘式.

VI. 2倍已得的首、次二項,仿*IV*求根的第三項;以下仿*V*繼續做下去,直到開盡為止.

例題一 求 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 的平方根.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b+c \\
\hline
 & a^2+2ab+2ca+b^2+2bc+c^2 \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b & 2ab+2ca+b^2+2bc+c^2 \\
 & 2ab \qquad +b^2 \\
\hline
2a+2b+c & 2ca \qquad +2bc+c^2 \\
 & 2ca \qquad +2bc+c^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

【理由】　因　$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$= a^2+b(2a+b);$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+b^2+2ca+2bc+c^2$$

$$= a^2+b(2a+b)+c(2a+2b+c);\cdots\cdots\cdots;$$

$$(a+b+c+\cdots\cdots+n)^2 = a^2+b(2a+b)+c(2a+2b+c)$$

$$+\cdots\cdots\cdots+n(2a+2b+2c+\cdots\cdots\cdots\cdots+n).$$

故知平方根是 n 項的,冪可分爲 n 部:第一部是根的首項的平方;第二部是根的首項的 2 倍加次項,再乘次項;第三部是……;第 n 部是前面 $(n-1)$ 項和的 2 倍加第 n 項,再乘第 n 項.

例題二　求 $4x^4-12x^3+25x^2-24x+16$ 的平方根.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 4 \\
\hline
 & 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16 \\
 & 4x^4 \\
\hline
4x^2 - 3x & -12x^3 + 25x^2 - 24x + 16 \\
 & -12x^3 + 9x^2 \\
\hline
4x^2 - 6x + 4 & 16x^2 - 24x + 16 \\
 & 16x^2 - 24x + 16 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

特例 有缺冪的應預留空位.

例題 求$x^6+4x^5-10x^3+4x+1$的平方根.

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^3 + 2x^2 - 2x - 1 \\
\hline
 & x^6 + 4x^5 \qquad - 10x^3 \qquad + 4x + 1 \\
 & x^6 \\
\hline
2x^3 + 2x^2 & 4x^5 \qquad - 10x^3 \qquad + 4x + 1 \\
 & 4x^5 + 4x^4 \\
\hline
2x^3 + 4x^2 - 2x & -4x^4 - 10x^3 \qquad + 4x + 1 \\
 & -4x^4 - 8x^3 + 4x^2 \\
\hline
2x^3 + 4x^2 - 4x - 1 & -2x^3 - 4x^2 + 4x + 1 \\
 & -2x^3 - 4x^2 + 4x + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

【注意一】 實際代數式的平方根除照上法求

得的一個外,還有符號全反的一個根.

【注意二】 三項式的開平方,可用因式分解法.

*第二節 開立方

代數式的開立方,也同算術類似,現在也祇就開得盡的問題,述其步驟如下:

I. 依式中某文字的羃順列.

II. 求出首項的立方根,就是所求的根的首項.

III. 從原式減去根的首項的立方,得第一餘式.

VI. 3 倍根的首項的平方,來除第一餘式,得根的次項.

V. 3 倍根的首項的平方,加首、次二項積的 3 倍,再加次項的平方,然後乘以次項,從第一餘式減去,得第二餘式.

VI. 3 倍已得的首、次二項和的平方,仿 *IV* 求根的第三項,以下仿 *V* 繼續做下去,直到開盡爲止.

例題一 求 $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2+3c^2a+3ca^2+6abc$ 的立方根,

【解】 $a+b+c$

$$a^3+3a^2b+3ca^2+3ab^2+6abc+3c^2a+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$a^3$$

$3a^2+3ab+b^2$

$$3a^2b+3ca^2+3ab^2+6abc+3c^2a+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$3a^2b+3ab^2+b^3$$

$3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2=3a^2+6ab+3b^2+3ca+3bc+c^2$

$$3ca^2+6abc+3c^2a+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$3ca^2+6abc+3c^2a+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$0$$

【理由】 因 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$=a^3+b(3a^2+3ab+b^2);$$

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3ca^2+6abc+3b^2c+3c^2a+3bc^2+c^3$$

$$=a^3+b(3a^2+3ab+b^2)+c[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2];$$

……………………………………………………;

$$(a+b+c+\cdots\cdots+n)^3=a^3+b(3a^2+3ab+b^2)+c[3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]+\cdots\cdots+n[3(a+b+c+\cdots)^2+3(a+b+c+\cdots)n+n^2].$$

故知立方根是 n 項的,冪可分爲 n 部:第一部是根的首項的立方;第二部是根的首項平方 3 倍,加首、次二項積的 3 倍,再加次項的平方,乘以次項;第三部是………;第 n 部是前面 $(n-1)$ 項和的平方 3 倍,加前面 $(n-1)$ 項的和乘第 n 項的 3 倍,再加第 n 項的平方,乘以第 n 項.

例題二 求 $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$ 的立方根.

【解】

$$\begin{array}{l|l}
 & \underline{\quad x^2-\ x\ +2\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
 & \underline{x^6\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
3(x^2)^2+3x^2(-x)+(-x)^2 & -3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
=3x^4-3x^3+x^2 & \underline{-3x^5+3x^4-\quad x^3\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
3(x^2-x)+3(x^2-x)\times 2+2^2 & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
=3x^4-6x^3+9x^2-6x+4 & \underline{6x^4-12x^3+18x^2-12x+8} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

【注意一】 實際代數式的立方根除照上法求得的一個外,還有二個虛數的根,現在暫且不論.

【注意二】 求四項式的立方根,可用因式分解法.

習題六十一

求下列各題的平方根:

(1) $x^4-2x^3+7x^2-9x+9$.　　(2) x^4-4x^3+8x+4.

(3) $9x^4+12x^3-2x^2-4x+1$.

(4) $x^4-4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4$.

(5) $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$.

(6) $x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+289$.

求下列各題的立方根:

(7) $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

(8) $8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$.

(9) $8x^6-12x^5+18x^4-13x^3+9x^2-3x+1$.

(10) $x^6-3ax^5+5a^3x^3-3a^5x-a^6$.

(11) 求 $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$ 的四次根.

【提示】 先開平方,把所得的平方根再開平方.

(12) 求 $729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1$ 的六次根.

【提示】 先開平方,把所得的平方根再開立方.

第十五章　比、比例

第一節　重要名詞

1. 比、前項、後項　a 是 b 的幾倍或幾分之幾,這倍數或分數叫做 a 對於 b 的比,記作 $a:b$ 或 $\frac{a}{b}$. a 是前項,b 是後項,同算術中的完全一樣.

2. 比例、內項、外項　若 $a:b=c:d$, 就說 a、b、c、d 四數成比例. a 同 d 是外項,b 同 c 是內項.

3. 比例中項、比例第三項　若 $a:b=b:c$, 那末 b 叫做是 a、c 的比例中項; c 叫做是 a、b 的比例第三項.

第二節　重要定理

1. 定比定理　比的兩項各乘以同數,或除以同數,比值不變.

【公式】　$a:b=ma:mb$,　$a:b=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$.

【理由】　比的前項就是被除數,後項就是除數,根據定商定律,知道用同數乘或除,他們的商不變.

2. 連比定理　諸比相等時,諸前項的和

比諸後項的和等於原有的諸比.

【公式】 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,

則 $\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{c}{f}=\frac{g}{h}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.

【理由】 設以 r 表原有諸比的值,得

$a=br$(以 b 乘 $\frac{a}{b}=r$,卽得),$c=dr$, $e=fr$, $g=hr$,$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.

$$\therefore \frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}=\frac{br+dr+fr+hr+\cdots\cdots}{b+d+g+h+\cdots\cdots}$$

$$=\frac{(b+d+g+h+\cdots\cdots)r}{b+d+g+h+\cdots}=r=\text{原有諸比}.$$

【注意】 用 r 表原有諸比的值,可以利用他來證明等式,這種方法很重要.

3. 等積定理 比例式中二外項的積等於二內項的積.

【公式】 若 $a:b=c:d$, 則 $ad=bc$.

【理由】 因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 以 bd 乘兩邊,得 $ad=bc$.

4. 逆等積定理 若 a、d 的積等於 b、c 的積,則四數成比例,可以 a、d 作二個外項,b、c 作二個內項.

【公式】 若 $ad=bc$, 則 $a:b=c:d$,

【理由】 因 $ad=bc$, 以 bd 除兩邊,得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

5. 反比定理 兩比相等時,他們的反比

也相等.

【公式】　若 $a:b=c:d$，則 $b:a=d:c$.

【理由】　因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，故 $1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$，即 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

6. 更迭定理　把比例式的兩外項對調，或把兩內項對調，所得的比例式仍能成立.

【公式】　若 $a:b=c:d$，則 $d:b=c:a$，$a:c=b:d$.

【理由】　因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，以 $\frac{d}{a}$ 乘兩邊，得 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$；

以 $\frac{b}{c}$ 乘兩邊，得 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

7. 合比定理　兩比相等時，第一比中兩項的和比後項，等於第二比中兩項的和比後項.

【公式】　若 $a:b=c:d$，則 $a+b:b=c+d:d$.

【理由】　因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，兩邊各加 1，得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

即
$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

【注意】　$a:a+b=c:c+d$ 亦可，應先利用反比定理證.

8. 分比定理　兩比相等時，第一比中兩項的差比後項，等於第二比中兩項的差比後

項.

【公式】 若 $a:b=c:d$, 則 $a-b:b=c-d:d$.

【理由】 因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 兩邊各減去 1, 得

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

即 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

【注意】 $a:a-b=c:c-d$ 亦可.

9. 分合定理 兩比相等時,第一比中兩項的和比差,等於第二比中兩項的和比差

【公式】 若 $a:b=c:d$,

則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

【理由】 根據合比定理,知 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ……(1).

根據分比定理,知 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ……(2).

(1)÷(2), 得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

第三節 重要問題舉例

1. 求比值的問題 求兩個代數式的比值,實際就是把分式化簡;又求方程式中兩個未知數 x、y 的比值,須先求得 $?x=?y$. 各舉一例於下:

例題一　求 $a^2-b^2:a^2-2ab+b^2$ 的比值.

【解】 $$a^2-b^2:a^2-2ab+b^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$$
$$=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}$$
$$=\frac{a+b}{a-b}.$$

例題二　從 $x^2+2y^2=3xy$ 求 $x:y$ 的值.

【解】 移項　　$x^2-3xy+2y^2=0.$

分解因數　　$(x-y)(x-2y)=0.$

命 $x-y=0$, 則 $x=y$, 以 y 除得 $\frac{x}{y}=1.$

命 $x-2y=0$, 則 $x=2y$, 以 y 除得 $\frac{x}{y}=2.$

2. 求比例的未知數　根據等積定理,可以求比例式中的未知數,同算術中的解比例式一樣.

例題一　$a+b:a-b=a^2+2ab+b^2:x$, 求 x 的值.

【解】 根據等積定理,知

$$(a+b)x=(a-b)(a^2+2ab+b^2).$$

$$\therefore\quad x=\frac{(a-b)(a^2+2ab+b^2)}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)^2}{a+b}$$
$$=(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

例題二　$a^2+2ab+b^2:x=x:a^2-2ab+b^2$,

求 x 的值.

【解】 根據等積定理,知

$$x^2=(a^2+2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$$
$$=(a+b)^2(a-b)^2=[(a+b)(a-b)]^2$$
$$=(a^2-b^2)^2.$$

開平方,得 $x=a^2-b^2$, 或 $x=-a^2+b^2$.

習題六十二

求下列各題中的比值:

(1) $x^3-y^3:x^2-y^2$.　(2) $x^2+5x+6:x^2+4x+4$.

(3) $\dfrac{1}{x+y}:\dfrac{1}{x^3+y^3}$.

(4) $\dfrac{1}{x^4+x^2y^2+y^4}:\dfrac{1}{x^3-y^3}$.

求下列各式中的 x 同 y 的比:

(5) $3x+5y=2x-y$.　(6) $4x^2-5xy+y^2=0$.

(7) $\dfrac{x}{5x+6y}=\dfrac{y}{x+6y}$.　(8) $\dfrac{y-x}{y+x}=\dfrac{4x-y}{6x-y}$.

求下列比例式中的 x:

(9) $(a-b)^2:a^3-b^3=a^2-b^2:x$.

(10) $a+b:x=x:a-b$.

(11) $1:x^2=x^2:64$.

(12) $x+4:x+2=x+8:x+5$.

(13)　$3x+2:x+7=9x-2:5x+8$.

(14)　$x^2+x+1:62(x+1)=x^2-x+1:63(x-1)$.

3. 等式的證明　利用上節的定理,可證明比例式或等式.

例題一　設 $a:b=b:c=c:d$, 試證

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}.$$

【證】　若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=r$,

應用定比定理,得　$\frac{a^2}{ab}=\frac{b^2}{bc}=\frac{c^2}{cd}=r$.

應用連比定理,得　$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=r$ ……………………(1).

仿上法,可得　$\frac{ab}{b^2}=\frac{bc}{c^2}=\frac{cd}{d^2}=r$,

$\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}=r$ ……………………(2).

比較(1),(2),得　$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$.

例題二　設 $a:b=c:d$, 試證

$$a^2+ab:c^2+cd=a^2-2ab:c^2-2cd.$$

【證】　因　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

各加 1, 得　$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ……………………(1).

各減 2, 得　$\frac{a-2b}{b}=\frac{c-2d}{d}$ ……………………(2).

(1)÷(2) $$\frac{a+b}{a-2b}=\frac{c+d}{c-2d}.$$

根據定比定理,左邊兩項各用 a 乘;右邊兩項各用 c 乘,得 $$\frac{a^2+ab}{a^2-2ab}=\frac{c^2+cd}{c^2-2cd}.$$

根據更迭定理,得 $$\frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{a^2-2ab}{c^2-2cd}.$$

即 $$a^2+ab:c^2+cd=a^2-2ab:c^2-2cd.$$

習題六十三

(1) 設 $a:d=b:e=c:f$, l、m、n 爲任意的數,試證
$a+b+c:d+e+f=la+mb+nc:ld+me+nf.$

【提示】 以 r 表原有的各比,得 $a=dr$, $b=er$, $c=fr$, 於是可證等式兩邊的比都等於 r,下二題仿此.

(2) 設 $a:d=b:e=c:f$,試證
$a+b+c:d+e+f$
$$=\sqrt{la^2+mb^2+nc^2}:\sqrt{ld^2+me^2+nf^2}.$$

(3) 設 $l:a-b=m:b-c=n:c-a$,試證
$$l+m+n=0.$$

(4) 設 $ab=cd$, $be=df$,試證 $a:c=e:f$.

【提示】 根據逆等積定理,得二個比例式,比較一下即得.

設 $a:b=c:d$,試證下列各題:

(5) $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

【提示】　以 $\frac{a}{c}$ 乘 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$,再應用分合定理.

(6) $la+mb:pa+qb=lc+md:pc+qd$.

【提示】　以 l 乘原式,加 m 得第一式;以 p 乘原式,加 q 得第二式;兩式相除卽得.

(7) $a:a+b=a+c:a+b+c+d$.

【提示】　由合比定理,得 $a:a+b=c:c+d$,再順次應用更迭定理同合比定理.

(8) $a:\sqrt{a^2+b^2}=c:\sqrt{c^2+d^2}$.

【提示】　自乘後,應用合比定理,再開平方.

(9) $a^2+c^2:b^2+d^2=c^2:d^2$.

(10) $a^2+c^2:ab+cd=ab+cd:b^2+d^2$.

*第十六章 指數,對數

第一節 關於指數的重要公式

關於指數的重要定律已散見前面各章,現在把他們彙集起來,得下面的幾個公式:

從第四章第六節,得

1. 冪的積 $a^m a^n = a^{m+n}$ ……………………(1)

(式中的 m、n 必須是正整數,以下諸式亦然.)

從第四章第七節,得

2. 冪的商 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}(m>n)$ ……………………(2).

$\dfrac{a^m}{a^m} = 1$ ……………………(3).

從第九章第一節,得

$\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}(m<n)$ ……………………(4).

從第六章第一節,得

3. 冪的冪 $(a^m)^n = a^{mn}$ ……………………(5).

從第十四章,得

4. 冪的根 $\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$($m$ 是 n 的倍數)……(6).

5. 根的冪 $(\sqrt[n]{a})^m = a^{m \div n}$(同上)……………(7).

從第六章第一節,得

6. 積的羃 $(abc\cdots\cdots)^m = a^m b^m c^m\cdots\cdots,$ ……………(8).

7. 商的羃 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ ……………(9).

從第十章第二節,得

8. 積的根 $\sqrt[n]{abc\cdots\cdots} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\cdots\cdots,$ ……(10).

9. 商的根 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ……………(11).

第二節 特殊的指數

上節許多公式中的指數,都限於正整數,並且有時須規定 m 同 n 的大小,或 m 是 n 的倍數,不免範圍太狹;於是數學家另創下列的三種指數,使他的範圍推廣,將來有極大的用途.

1. 零指數 不論何數,他的指數若是 0,那末他的值一定是 1.

【理由】 據公式(2),知 $\dfrac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0,$

據公式(3),知 $\dfrac{a^m}{a^m} = 1,$

$\therefore$ $a^0 = 1$ ……………(12).

2. 負指數 $-m$ 次羃的意義,就是 m 次羃的倒數.

【理由】 由公式(2),得 $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

設 $n=0$, 則 $a^n=a^0=1$,

$\therefore$ $\frac{1}{a^m}=a^{-m}$,

即 $$\boldsymbol{a^{-m}=\frac{1}{a^m}}\qquad\cdots\cdots(13).$$

3. 分指數 $\frac{m}{n}$次冪的意義,就是m次冪的n次根,或n次根的m次冪.

【理由】 若公式(6),(7)的m不成n的倍數,那末$m\div n$是一個分數$\frac{m}{n}$.

故 $$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m}\qquad\cdots\cdots(14).$$

第三節 關於指數的重要計算

1. 特殊指數的初步應用 創立特殊的指數以後,第一節的公式除(8)到(11)四個外,其餘只須(1),(5)二式,已經足夠.凡求冪的商,冪的根或根的冪,都可應用這二式求出來.

例題一 $\frac{a^5}{a^3}=?$

【解】 $\frac{a^5}{a^3}=a^5\times\frac{1}{a^3}=a^5\times a^{-3}=a^{5+(-3)}=a^2$.

例題二 $\frac{a^3}{a^3}=?$

【解】 $\frac{a^3}{a^3}=a^3\times\frac{1}{a^3}=a^3\times a^{-3}=a^{3+(-3)}=a^0=1.$

例題三 $\frac{a^3}{a^5}=?$

【解】 $\frac{a^3}{a^5}=a^3\times\frac{1}{a^5}=a^3\times a^{-5}=a^{3+(-5)}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$

【注意】 上列三例本來應該應用公式(2)、(3)、(4)解,現在有了零指數同負指數,就可用公式(1)解.

例題四 $\sqrt[3]{a^6}=?$

【解】 $\sqrt[3]{a^6}=(a^6)^{\frac{1}{3}}=a^{6\times\frac{1}{3}}=a^2.$

或 $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2.$

例題五 $(\sqrt[3]{a})^6=?$

【解】 $(\sqrt[3]{a})^6=(a^{\frac{1}{3}})^6=a^{\frac{1}{3}\times 6}=a^2.$

或 $(\sqrt[3]{a})^6=a^{\frac{6}{3}}=a^2.$

【注意】 上列二例本來應該應用公式(6)、(7)解,現在有了分指數,就可用公式(5)解.

2. 特殊指數式的化簡 數字或代數式中含特殊指數的,可應用上節公式,把他化得簡單.

例題一 化簡 $25^{\frac{1}{2}}, 3^{-2}, 64^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}, 81^{0.25}$.

【解】 $25^{\frac{1}{2}}=\sqrt{25}=5,\qquad 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9},$

$$64^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{64^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{(\sqrt[3]{64})^2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16},$$

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^3}=\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3}$$

$$=\frac{1}{\frac{8}{125}}=\frac{125}{8}=15\frac{5}{8}.$$

$$81^{0.25}=81^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{81}=3.$$

例題二　化簡 $a^{-3}, a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{a^{-3}}, \sqrt{a^{-4}}$。

【解】　$a^{-3}=\dfrac{1}{a^3}$，　　　$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$，

$$\sqrt[3]{a^{-3}}=a^{\frac{-3}{3}}=a^{-1}=\frac{1}{a},$$

$$\sqrt{a^{-4}}=a^{\frac{-4}{2}}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$$

3. 特殊指數式的積、商、羃、根　舉例如下：

例題一　$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{3}{4}}=?$

【解】　原式 $=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{7}{12}}c^{\frac{5}{4}}$.

例題二　$x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}=?$

【解】　原式 $=x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$.

例題三　$\left(a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{5}}\right)^2=?$

【解】　原式 $=(a^{-\frac{1}{2}})^2(b^{\frac{2}{5}})^2=a^{-\frac{1}{2}\times 2}b^{\frac{2}{5}\times 2}=a^{-1}b^{\frac{4}{5}}$。

例題四　$\sqrt[3]{x^{-3}y^3z^{\frac{1}{2}}}=?$

【解】　原式 $=\sqrt[3]{x^{-3}}\sqrt[3]{y^{3}}\sqrt[3]{z^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{-3}{3}}y^{\frac{3}{3}}z^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=x^{-1}yz^{\frac{1}{6}}$。

例題五　$(x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1})=?$

【解】

$$
\begin{array}{llllll}
x & +x^{\frac{1}{3}} & +x^{-\frac{1}{3}} & & & \\
x^{\frac{1}{3}} & +x^{-\frac{1}{3}} & -x^{-1} & & & \\
\hline
x^{\frac{4}{3}} & +x^{\frac{2}{3}} & +1 & & & \\
 & x^{\frac{2}{3}} & +1 & +x^{-\frac{2}{3}} & & \\
 & & -1 & -x^{-\frac{2}{3}} & -x^{-\frac{4}{3}} & \\
\hline
x^{\frac{4}{3}} & +2x^{\frac{2}{3}} & +1 & & -x^{-\frac{4}{3}} &
\end{array}
$$

例題六　$(a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}})$

$\div(a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}})=?$

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^{\frac{1}{6}}-b^{-\frac{1}{6}} \\
\cline{2-2}
a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}} & a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}} \\
 & a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}} \\
\cline{2-2}
 & -a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}} \\
 & -a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}} \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

4. 解含特殊指數的方程式　含特殊指數的方程式,有時試把他化做二次方程式的形式來解.

例題 試解 $x^{\frac{1}{3}}-5x^{\frac{1}{6}}+4=0$.

【解】 原方程式為 $(x^{\frac{1}{6}})^2-5(x^{\frac{1}{6}})+4=0$.

解得 $x^{\frac{1}{6}}=1$, 或 $x^{\frac{1}{6}}=4$.

即 $\sqrt[6]{x}=1$, 或 $\sqrt[6]{x}=4$.

求 6 次冪,得 $x=1$, 或 $x=4096$.

有時須看作是分式方程式,化整後再用上法解.

例題 試解 $x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-4=0$.

【解】 原方程式為 $x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{x^{\frac{1}{2}}}-4=0$.

去分母 $x+3-4x^{\frac{1}{2}}=0$.

即 $(x^{\frac{1}{2}})^2-4(x^{\frac{1}{2}})+3=0$.

解得 $x^{\frac{1}{2}}=1$, 或 $x^{\frac{1}{2}}=3$.

即 $\sqrt{x}=1$, 或 $\sqrt{x}=3$.

自乘,得 $x=1$, 或 $x=9$.

習題六十四

化簡下列各題:

(1) $27^{\frac{2}{3}}$. (2) $4^{-\frac{3}{2}}$. (3) $16^{0.75}$. (4) $64^{-0.5}$.

(5) $100^{-\frac{7}{2}}$. (6) $81^{-\frac{3}{4}}$. (7) $36^{-\frac{1}{2}}$. (8) 2^{-3}.

(9) $\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$. (10) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$. (11) $\left(\dfrac{27}{62}\right)^{-\frac{2}{3}}$. (12) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$

求下列各題的結果:

(13) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$.　　(14) $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}$.

(15) $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

(16) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}c^{-1}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c\times a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}$.

(17) $(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}})^2$.　　(18) $[(a^{-2})^2]^{\frac{3}{4}}$.

(19) $(a^{-1}b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}$.　　(20) $[(a^{-\frac{5}{6}})^3]^{-\frac{1}{5}}$.

化下列各題的根號爲分指數,再求其結果:

(21) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a}$.　　(22) $\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a^4}$.

(23) $\sqrt{a^3x}\sqrt[3]{a^2x^5}$.　　(24) $\sqrt{a^3b^{-2}}\div\sqrt[3]{a^{-4}b^5}$.

(25) $(\sqrt[3]{a^7}\sqrt[5]{a^7}\sqrt[3]{a^{-1}}\div a^{\frac{4}{5}}$.

(26) $\sqrt[3]{a^6\sqrt{b^3\sqrt{c}}}\div\sqrt{a^4b\sqrt[3]{c}}$.

求下列各題的積或商:

(27) $(x^{\frac{1}{2}}-4)(x^{\frac{1}{2}}+5)$.

(28) $(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{3}})$.

(29) $(x+y)\div(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})$.　　(30) $(x-y)\div(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})$.

解下列各題的方程式:

(31) $6x+x^{\frac{1}{2}}-2=0$.　　(32) $x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}+6=0$.

(33) $x+x^{-1}=3\frac{1}{3}$.　　(34) $x^{\frac{1}{3}}+5x^{-\frac{1}{3}}=6$.

第四節　關於對數的重要名詞

1. 對數、底數、眞數　在等式$3^2=9$中,

(*A*)　若已知3同2,求$3^2=?$,這是乘方問題.3叫做底數,2叫做冪指數(通常簡稱指數),所求的叫做冪數.

(*B*)　若已知9同2,求$?^2=9$,在算術中可改寫做$\sqrt[2]{9}=?$(通常2字略去不寫),這是開方問題.9叫做被開數,2叫做根指數,所求的叫做根數.

(*C*)　若已知3同9,求$3^?=9$,在代數中特創新的記法,寫做$\log_3 9=?$,這是對數問題.3叫做底數,9叫做眞數,所求的叫做9的對數(用3做底).

從此知道下列二式所表3,9,?三者的關係完全一樣:

$$(1)\quad 3^?=9,\qquad (2)\quad \log_3 9=?$$

普遍的說,若$a^x=m$,則稱x是m的對數(用a做底);a是底數,m是眞數.

下列二式所表a、m、x三者的關係完全一樣:

$$(1)\quad a^x=m,\qquad (2)\quad \log_a m=x.$$

【注意】　對數同指數的記法固然不同,他們的意義亦不可混同.例如在$a^x=m$中,對a說,x是他的

指數;對 m 說,x 是他的對數.

例題一　$\log_3 81=?$

【解】　因　$3^4=81$,　　$\therefore\ \log_3 81=4$.

例題二　$\log_2\frac{1}{8}=?$

【解】　因　$2^{-3}=\frac{1}{8}$,　　$\therefore\ \log_2\frac{1}{8}=-3$.

例題三　$\log_4 2=?$

【解】　因　$4^{\frac{1}{2}}=2$,　　$\therefore\ \log_4 2=\frac{1}{2}$.

例題四　$\log_4 0.125=?$

【解】　因　$4^{-\frac{3}{2}}=0.125$(即$\frac{1}{8}$),

$\therefore\ \log_4 0.125=-\frac{3}{2}$.

習題六十五

(1) 求 8、128、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{64}$的對數(用 2 做底),逐一用式子表出來.

(2) 求 27、81、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{243}$的對數(用 3 做底),逐一用式子表出來.

(3) 求 64 的對數,用 8 做底是多少?用 4 做底是多少?

求以下各式的結果:

(4) $\log_9 27=?$　　(5) $\log_5 125=?$

(6) $\log_5\frac{1}{125}=?$ (7) $\log_2\sqrt{8}=?$

(8) $\log_3\sqrt{27}=?$ (9) $\log_9\frac{1}{27}=?$

(10) $\log_5\sqrt{125}=?$ (11) $\log_4(8\sqrt{2})=?$

(12) $\log_7\sqrt[3]{49}=?$ (13) $\log_{10}1=?$

(14) $\log_{10}10=?$ (15) $\log_{10}100=?$

(16) $\log_{10}1000=?$ (17) $\log_{10}.1=?$

(18) $\log_{10}.01=?$ (19) $\log_{10}.001=?$

2. 常用對數 用10做底的對數,叫做常用對數.通常爲便利計,都用這種對數.下面凡單說對數而不指明他的底的,必指常用對數.又 $\log_{10}m$ 常省寫做 $\log m$.

3. 指標,假數 除 1、10、100、1000、……及 .1、.01,001、……的對數外,其餘各數的對數都從整數同小數兩部分所成.

對數的整數部分叫做指標,小數部分叫做假數.

對數的指標依眞數中小數點的位置而定;對數的假數,非習高深數學不易直接求得,但在實用上只須檢表就得.方法詳第六節.

【例】 欲求 $\log\sqrt[3]{10000}=?$時,因 $10^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{10000}$, 故 $\log\sqrt[3]{10000}=\frac{4}{3}=1.3333\cdots\cdots$.其中的 1 是指標,.3333……是

假數.

4. 對數表 對數的假數部分,從前的算學家已經把他算出若干位(以下各位四捨五入),列表以供應用,叫做對數表.本書附錄二所載的是取小數四位的對數表.

第五節 對數的重要性質

(*I*) 不限於常用對數的(以 a 爲底)

1. 積的對數 積的對數,等於各因數的對數相加.

公式 $\log_a mn = \log_a m + \log_a n.$

【理由】 設 $\log_a m = x,\quad \log_a n = y.$

則 $a^x = m \cdots\cdots\cdots\cdots (1),\quad a^y = n \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$

(1)×(2) $a^x a^y = mn,$ 卽 $a^{x+y} = mn.$

$\therefore$ $\log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n.$

推廣一下,得

$$\log_a mnp\cdots = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \cdots.$$

2. 商的對數 商的對數,等於被除數的對數減去除數的對數.

公式 $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n.$

【理由】 仿上條,

(1)÷(2) $\frac{a^x}{a^y}=\frac{m}{n}$, 即 $a^{x-y}=\frac{m}{n}$.

∴ $log_a\frac{m}{n}=x-y=log_a m-log_a n$.

3. 羃的對數 某數 p 次羃的對數,等於某數的對數乘以 p.

公式 $\boldsymbol{log_a N^p=plog_a N}$.

【理由】 設 $log_a N=x$, 則 $a^x=N$……………(1).

求其 p 次羃,得 $(a^x)^p=N^p$, 即 $a^{px}=N^p$.

∴ $log_a N^p=px=plog_a N$.

4. 根的對數 某數 r 次根的對數,等於某數的對數除以 r.

公式 $\boldsymbol{log_a\sqrt[r]{N}=\frac{1}{r}log_a N}$.

【理由】 仿上條,

求(1)的 r 次根,得 $\sqrt[r]{a^x}=\sqrt[r]{N}$, 即 $a^{\frac{x}{r}}=\sqrt[r]{N}$.

∴ $log_a\sqrt[r]{N}=\frac{x}{r}=\frac{1}{r}log_a N$.

5. 1 的對數 1 的對數,無論以何數爲底,都等於 0.

公式 $\boldsymbol{log_a 1=0}$.

【理由】 因 $a^0=1$, ∴ $log_a 1=0$.

6. 底數的對數 眞數與底數相同,則對數爲 1.

公式 $\log_a a=1$.

【理由】 因 $a^1=a$, $\therefore\ \log_a a=1$.

(II) 限於常用對數的

7. 若諸數祗有小數點的位置相異,那末他們的對數祗有指標相異,其假數仍相同.

換句話說,如把一數的小數點移後 n 位或移前 n 位,則其對數較原數的對數多 n 或少 n. 因 n 是正整數,故兩個對數的假數部分仍相同.

公式 $\left.\begin{array}{l}\log(M\times10^n)=\log M+n\\ \log(M\div10^n)=\log M-n\end{array}\right\}$ (n 是正整數).

(註) 10^n 爲 10、100、1000、……. 以 10^n 乘 M,就是把小數點移後 n 位;以 10^n 除 M,就是把小數點移前 n 位.

【理由】 據本節 1,3 及 6,得

$$\begin{aligned}\log(M\times10^n)&=\log M+\log10^n\\&=\log M+n\log10\\&=\log M+n(\text{因 }\log10=1).\end{aligned}$$

據本節 2,3 及 6,得

$$\begin{aligned}\log(M\div10^n)&=\log M-\log10^n\\&=\log M-n\log10\\&=\log M-n.\end{aligned}$$

第六節　定指標法,對數表用法

1. 定整數的對數指標　整數有 n 位時,他的對數指標是 $n-1$.

【理由】　因 $10^0=1$,　　故 $log1=0$;

$10^1=10$,　　$log10=1$;

$10^2=100$,　　$log100=2$;

$10^3=1000$,　　$log1000=3$;

………………………………………………….

由上表,知眞數(1、10、100、1000、……)增大時,他的對數(0、1、2、3、……)也增大.所以我們可以推想到,凡大於 1 而小於 10 的數,即 1 位的整數,他們的對數必比 0 大,比 1 小,即是 0.……依此類推,2 位的整數的對數是 1.………;3 位的整數的對數是 2.………;……….

普遍的說,n 位的整數,他的對數指標是 $n-1$;

【例】　$log32$ 的指標是 1,$log1302$ 的指標是 3,$log\,7$ 的指標是 0,$log389.23$ 的指標是 2, $log\,56000$ 的指標是 4.

2. 定小數的對數指標　小數的第 n 位才有有效數字(註)的,他的對數指標是 $-n$,可記做 $\bar{n}$.但通常爲便利計,記做 $(10-n)-10$,這 -10 應記在假數的後面.

(註)　1、2、3、……8、9 是九個有效數字,而 0 不是有效數字.

【理由】　因 $10^0=1$,　　故 $log1=0$;

$10^{-1}=.1$,　　$log.1=-1$;

$10^{-2}=.01$,　　$log.01=-2$;

$10^{-3}=.001$,　　$log.001=-3$;

…………………………………………….

由上表,知眞數(1、.1、.01、.001、…)減小時,他的對數(0、-1、-2、-3、…)也減小.所以我們可以推想到,凡小於 1 而大於 .1 的數,即小數第 1 位就有有效數字的數,他們的對數必比 0 小,比 -1 大,即是 -1 加上一個小數。因假數必須是正的小數,所以凡小數第 1 位就有有效數字的數,他們的對數指標是 -1. 依此類推,凡小數第 2 位才有有效數字的數,他們的對數指標是 -2;

…………….

普遍的說,小數第 n 位有有效數字的,他的對數指標是 $-n$.

【例】　$log.0818$ 的指標是 -2, 記做 $8.\cdots-10$; $log.723$ 的指標是 -1, 記做 $9.\cdots-10$; $log.00053$ 的指標是 -4, 記做 $6.\cdots-10$.

3. 求三位數的對數假數　眞數有三位時,要求他的對數假數,可在本書附錄二的對

數表第 1, 2 兩頁中 N 的下方檢得首二位數字,再在 N 的右方檢得第三位數字,那行列相交的格裏的四位數字,就是所求的假數.

【例】 $log\,237$ 的假數是 3747, $log\,904$ 的假數是 9562.

特例一 眞數的三位數字後面有若干個 0 的,或有小數點的,可丟去 0 或小數點,而由所餘的三位數字求他的假數.

【理由】 根據上節 7, 知 $log(M\times 10^n)$ 或 $log(M\div 10^n)$ 與 $logM$ 的假數相同,所不同的僅有指標.

【例】 $log\,743000$ 的假數是 8710, $log\,5.53$ 的假數是 7427, $log\,.00918$ 的假數是 9628.

特例二 眞數不滿三位時,可在後面添 0, 補滿三位,仿上法求對數的假數.

【例】 $log\,2$ 的假數是 3010, $log\,.81$ 的假數是 9085.

4. 求四位數的對數假數 眞數有四位時,可仿上法在左行檢得首二位數字,上列檢得第三位數字,於行列相交處得較小數假數,再在同頁附表的橫線上方檢得第四位數字,於下方與首二位數字的同列中得一數,加在較小的假數上面就得.

【例】 欲求 $log\,7524$ 的假數,先檢得 $log\,752$ 的假

數是8762,再在附表的橫線上4的下方,左行75的同列檢得2,與8762相加,得所求的假數是8764.

特例一 若眞數的第四位大於5,附表的橫線上沒有這數,可先在第三位數字加1,就這首三位數字檢得較大的假數,再在附表的橫線上方檢得第四位數字的補數(註),於下方照前法得一數,從較大的假數減去就得.

(註) 一數的補數,就是同這數相加可以得10的數.例如7的補數是3,9的補數是1等.

【例一】 欲求$log5668$的假數,先檢得$log\,567$的假數是7536,再在附表的橫線上2(8的補數)的下方,左行56的同列檢得2,從7536減去,得所求的假數是7534.

【例二】 欲求$log8697$的假數,可在左行檢86,上列檢10,行列相交處的數是9395,同$log\,870$的假數一樣,再檢附表3字的下方,86的右邊是2(若看下列87的右邊却是1,比較少精確些),從9395減得所求的假數是9393.

特例二 四位數的首位是1時,在第1頁中沒有附表,可在對數表第3、4兩頁的左行檢首三位數字,上列檢第四位數字,於行列相交處一檢便得.

【例】 $log\ 1527$ 的假數是1838.

特例三 眞數是四位以上的數時,可把第四位以下的數字用四捨五入法略去,然後仿上法求假數.

【例】 欲求 $log\ 377425$ 的假數,只須檢 $log 3774$ 的假數得5768.

5. 由眞數求對數 用本節1、2的方法求得指標,用3、4的方法求得假數,然後連寫起來,中間用小數點隔開,卽得所求的對數.

【例】 $log\ 27680=4.4422$, $log\ 2.34=0.3692$, $log .6543=9.8158-10$, $log .0003=6.4771-10$.

(註) $log\ .6543$ 也可記作 $\bar{1}.8158$, 但因指標是負數,假數是正數,計算不便,所以應記作 $9.8158-10$.

6. 由對數求眞數 知道某數的對數,要求某數,是上法的還原,當先由已知的假數部分,用對數表求出眞數的各位數字,再由已知的指標,定眞數中小數點的位置.

【例一】 已知 $log\ N=5.5684$, 檢表中的假數,最近的是5682,比題中的假數末位多2,在同列的附表下方,檢得2,橫線上方也是2,故得 $N=370200$ (因指標是5,故應有整數6位).

【例二】 已知 $logN=0.8246$,檢表得最近的假數

是8248,末位少了2,附表中同列的2字上方是3,故得$N=6.677$.

【例三】　已知$\log N=8.4784-10$,檢表得最近的假數是4786,少了2,附表中同列沒有2,可取相近的數1(取3亦可),上方也是1,故得$N=.03009$(因指標是$8-10$,即-2,故首位3應是小數的第二位).

第七節　對數計算

1. 求諸數的積　由第五節1的公式,可利用對數求諸數的積.這樣可節省不少時間,但所得的積祇有首三位數字精確.凡不必十分精密的計算,應用這法很便.以下三法亦然.

例題　求$654.3\times30.47\times.0258$的結果.

【解】　設所求的積是N,

則
$$\begin{aligned}\log 654.3&=2.8158\\ \log 30.47&=1.4839\\ \log .0258&=8.4116-10\quad(+\\ \hline \log N&=2.7113.\\ \therefore\quad N&=514.4.\end{aligned}$$

【注意】　$\log N$的指標應是$12.\cdots-10$,可直接寫做2.

2. 求兩數的商　由第五節2的公式,可

利用對數求兩數的商.

例題一 求 $384900\div35133$ 的結果.

【解】 設所求的商是N,

則
$$\begin{array}{ll} \log 384900 & =5.5854 \\ \log \ \ 35133 & =4.5457\ (- \\ \hline \log \ \ N & =1.0397. \end{array}$$

$\therefore$ $N=10.96$.

例題二 求$14390\div.375$的結果.

【解】 設所求的商是N,

則
$$\begin{array}{ll} \log 14390 & =4.1581 \\ \log .375 & =9.5740-10\ (- \\ \hline \log \ \ N & =4.5841. \end{array}$$

$\therefore$ $N=38380$.

【注意】 一數減去-10,同加10無異,所以可由$14.1581-9.5740$求得$\log N$的值.

3. 求某數的冪 由第五節3的公式,可利用對數求某數的冪.

例題一 求3649^3的結果.

【解】 設所求的冪是N,

則 $\log N=3\log 3649=3\times3.5622=10.6866$.

$\therefore$ $N=48600000000$.

例題二 求 $.0584^5$ 的結果.

【解】　設所求的冪爲 N,

則　$$\log N=5\log .0584=5\times(8.7664-10)$$

$$=43.8320-50=3.8320-10.$$

$\therefore$　$N=.0000006792.$

4. 求某數的根　由第五節 4 的公式,可利用對數求某數的根.

例題一　求 $\sqrt[3]{18490000}$ 的結果.

【解】　設所求的根是 N,

則　$$\log N=\frac{1}{3}\log 18490000=\frac{1}{3}\times 7.2669$$

$$=2.4223.$$

$\therefore$　$N=264.4.$

例題二　求 $\sqrt[5]{.000566}$ 的結果.

【解】　設所求的根是 N,

則　$$\log N=\frac{1}{5}\log .000566=\frac{1}{5}\times(6.7528-10)$$

$$=\frac{1}{5}\times(46.7528-50)=9.3506-10.$$

$\therefore$　$N=.2242.$

5. 指數方程式　凡含未知的指數的方程式,叫做指數方程式.若指數方程式可化爲 $a^x=b$ 的形狀的,可用對數求解.舉例於下:

例題　**解方程式** $3^x=5.$

【解】　在原方程式的兩邊各取對數,得

$$log3^x = log5.$$

由第五節 3, 得 $\qquad xlog3 = log5.$

$$\therefore \qquad x = \frac{log5}{log3} = \frac{0.6990}{0.4771} = 1.465.$$

6. 應用問題 凡求積、商、冪、根的應用問題,都可利用對數求解.現在僅就複利的問題,詳述於下:

設本金為 P, 利率為 r, 期數為 n, 本利和為 A, 則算術中的複利公式,可改寫為

$$A = P(1+r)^n \cdots\cdots\cdots\cdots(1), \qquad P = \frac{A}{(1+r)^n} \cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{P}} \cdots\cdots\cdots\cdots(3), \qquad (1+r)^n = \frac{A}{P} \cdots\cdots\cdots(4).$$

這裏不必用複利表,可利用對數由公式(1)、(2)求 A 同 P; 由公式(3) 求$(1+r)$,減去 1 得 r; 由公式(4),用指數方程式求 n.

例題一 本金500元,一年為一期, 4 年後得本利和655.4元.求年利率.

【解】 由公式(3),知 $\quad log(1+r) = \frac{1}{n}(logA - logP).$

已知 $\quad A = 655.4, \quad P = 500, \quad n = 4,$

$$\therefore \qquad log(1+r) = \frac{1}{4}(log655.4 - log500)$$

$$= \frac{1}{4} \times (2.8165 - 2.6990) = 0.0294,$$

$$\therefore \qquad 1 + r = 1.07, \qquad r = .07 = 7\%.$$

例題二　本金 500 元,年利率 7%,一年爲一期.問幾年後得本利和 655.4 元?

【解】　已知　$A=655.4$,　$P=500$,　$r=.07$,

由公式(4),得　$1.07^n=\frac{655.4}{500}$.

兩邊各取對數,得 $n\log 1.07=\log 655.4-\log 500$.

$$\therefore\quad n=\frac{\log 655.4-\log 500}{\log 1.07}=\frac{2.8165-2.6990}{0.0294}=4.$$

習題六十六

利用對數求下列各題的結果:

(1)　2731×0.05283.　　(2)　$66760\div 384$.

(3)　$399\times .04317\times 8.599$.　　(4)　$9.126\div 643.7$.

(5)　$\frac{121.6\times 9.025}{3662}$.　　(6)　$\frac{3.84\times 670700}{6909\times .03483}$.

(7)　$.0839^3$.　　(8)　$\sqrt[3]{0.03824}$.

(9)　12.34^{10}.　　(10)　$\sqrt[7]{165.6}$.

(11)　$2331^8\times\sqrt[3]{1.537}$.　　(12)　$\sqrt{153300}\div\sqrt[5]{1849}$.

(13)　解下列的二個方程式:

$a.\quad 30^x=10,\qquad b.\quad 7^x=14.$

(14)　圓的半徑是 44.24 尺,求他的面積(圓面積 $=3.1416\times$ 半徑^2).

(15)　圓的面積是 100 方尺,求他的半徑.

(16) 本金 700 元,年利率 6%, 一年爲一期.問 100 年後的本利和多少?

【提示】 由複利公式(1),知

$$\log A=\log P+n\log(1+r)$$

(17) 年利率 6%, 一年爲一期, 100 年之後得本利和 237200 元.求本金.

【提示】 由複利公式(2),知

$$\log P=\log A-n\log(1+r).$$

(18) 本金 700 元,一年爲一期, 100 年之後得本利和 237200 元.求年利率.

(19) 本金 700 元,年利率 6%, 一年爲一期.問幾年後得本利和 237200 元?

(20) 某人存款若干元於銀行,每年複利一次.欲於 20 年後得 9 倍於本金的本利和,問年利率多少?

【提示】 已知$\frac{A}{P}=9, n=20.$

*第十七章 級數

第一節 重要名詞

1. 級數 依一定規則構成的諸數,連續表出,其中任何相鄰的兩項,都有一定的關係,這樣的一羣數,叫做級數.

【例】 1, 3, 5, 7, 9, ……………是逐項多 2 的級數.

1, 2, 4, 8, 16, ……………是逐項大 2 倍的級數.

1, 4, 9, 16, 25, …………是逐項成連續平方數的級數.

2, 6, 12, 20, 30, ………是逐項成依次遞增的二個連續數的積的級數.

級數的種類極多,本書僅論最簡單的二種.

2. 等差級數、公差 以一定的差增、減的級數,叫等差級數.從等差級數中的任何一項減去前一項所得的差,是一個定數,叫做公差.

【例】 1, 3, 5, 7, 9, …………是等差級數,公差是 2.

9, 6, 3, 0, -3, ………是等差級數,公差是-3.

$1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \cdots\cdots$是等差級數,公差是$\frac{1}{3}$.

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \cdots\cdots$

是等差級數,公差是d.

3. 等差中項 等差級數中除首、末二項外,其餘的項叫做是首、末二項的等差中項.

【例】 5、8、11、14、17、20是等差級數,其中8、11、14、17四數是5同20的等差中項.

4. 等比級數、公比 以一定的比增、減的級數,叫等比級數.等比級數中的任何一項對於前一項的比,是一個定數,叫做公比.

【例】 1, 2, 4, 8, 16, ………是等比級數,公比是2.
$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, ………是等比級數,公比是$\frac{1}{3}$.
1, -2, 4, -8, 16, ……是等比級數,公比是-2.
a, ar, ar^2, ar^3, ar^4,是等比級數,公比是r.

5. 等比中項 等比級數中除首、末二項外,其餘的項叫做是首、末二項的等比中項.

【例】 2、8、32、128是等比級數,其中8、32二數是2同128的等比中項.

第二節 等差級數

1. 求第 n 項 從等差級數$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$, ……,可見其中任何一項都是前一項同公差的和,公差d的係數總比該項所在的項數少1.所以命首項爲a,第n項爲t_n,得公式

$$t_n = a + (n-1)d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

例題一　求 3, 7, 11, 15, 19, ………的第100項.

【解】　已知 $a=3, d=7-3=4, n=100$, 由公式(1),

得 $$t_{100} = 3 + (100-1) \times 4 = 399.$$

例題二　等差級數的第 2 項是13,第 7 項是 -12, 求第20項.

【解】　根據公式(1),得下列的聯立方程式:

$$\begin{cases} 13 = a + (2-1)d, \\ -12 = a + (7-1)d. \end{cases}$$

解得　$a=18, \quad d=-5,$

$$\therefore \quad t_{20} = 18 + (20-1) \times (-5) = -77.$$

2. 插入等差中項　設首項爲 a,末項爲 l,要在 a、l 之間插入 m 個等差中項,則 l 應是第 $(m+2)$ 項,代入公式(1),得

$$l = a + [(m+2)-1]d.$$

即 $$l = a + (m+1)d.$$

$$\therefore \quad d = \frac{l-a}{m+1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

例題　試在 0 同 30 之間插入 5 個等差中項.

【解】　已知 $a=0, l=30, m=5$, 代入公式(2),得

$$d = \frac{30-0}{5+1} = 5.$$

$\therefore$ 所求的 5 個等差中項是 5、10、15、20、25.

3. 求等差級數 n 項的和 設首項為 a，末項為 l，公差為 d，項數為 n，這 n 項的和為 S_n，則

$$\begin{array}{rl} & S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l. \\ +) & S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a. \\ \hline & 2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l) \\ & \qquad +(a+l) \\ & \quad =n(a+l). \end{array}$$

$$\therefore \quad S_n=\frac{n(a+l)}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

例題一 求 $1+4+7+10+13+\cdots\cdots+100$.

【解】 已知 $a=1,\ l=100,\ d=4-1=3$，代入公式(1)，得 $\quad 100=1+(n-1)\times 3$，解得 $n=34$.

代入公式(3)，得 $\quad S_{34}=\dfrac{34\times(1+100)}{2}=1717$.

例題二 求 $8+6+4+2+0+(-2)+\cdots\cdots\cdots\cdots+$ 第 500 項.

【解】 已知 $a=8,\ n=500,\ d=6-8=-2$，代入公式(1)，得

$$l=8+(500-1)\times(-2)=-990.$$

代入公式(3)，得 $\quad S_{500}=\dfrac{500\times(8-990)}{2}=-245500.$

習題六十七

(1) 求級數 $5, 9, 13, \cdots\cdots$ 的第 14 項.

(2) 求級數 $-3, -4, -5, \cdots\cdots$ 的第 37 項.

(3) 求級數 $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}, \cdots\cdots$ 的第 15 項.

(4) 求級數 $a, a+3b, a+6b, \cdots$ 的第 10 項.

(5) 等差級數的首項是 2, 公差是 $\frac{1}{8}$, 問 10 是第幾項?

(6) 等差級數的首項是 1, 第 15 項是 -1, 問公差是幾?

(7) 等差級數的公差是 6, 第 17 項是 103, 問首項是幾?

(8) 等差級數的第 3 項是 10, 第 13 項是 30, 求他的第 7 項.

(9) 試在 3 同 30 之間插入 9 個等差中項.

(10) 試在 -4 同 17 之間插入 6 個等差中項.

(11) 求 $3+7+11+\cdots\cdots+$ 第 100 項.

(12) 求 $1+3+5+\cdots\cdots+555$.

(13) 求 $1+2+3+\cdots\cdots+n$.

(14) 求 $\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+\cdots\cdots+70$.

(15) 等差級數的和是 1000, 項數是 50, 首項是 10, 求末項同公差.

【提示】 代入公式(3)求末項, 再用公式(1)求公

差.以下二題仿此.

(16) 等差級數的和是165,項數是10,末項是30.求首項同公差.

(17) 等差級數的和是 -105,首項是7,末項是 -21,求項數同公差.

(18) 等差級數的和是600,公差是5,首項是5,求末項同項數.

【提示】 代入公式(1)及(3),得含未知數 l、n 的二個聯立方程式.以下二題仿此.

(19) 等差級數的和是312,公差是3,末項是42,求首項同項數.

(20) 等差級數的和是186,公差是 $\frac{1}{3}$,項數是31,求首項同末項.

(21) 從飛機上擲下的炸彈,經15秒而達地面.已知第一秒內降下49公寸,以下每秒所降的距離都比前一秒多98公寸.問飛機離地多少高?

【提示】 本題就是求 $49+(49+98)+(49+2\times98)+\cdots\cdots+$ 第15項.

第三節　等比級數

1. 求第 n 項　從等比級數 $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \cdots\cdots$,可見任何一項都是前一項同公比的

積,公比 r 的指數總比該項所在的項數少 1. 所以命首項爲 a,第 n 項爲 t_n,得公式

$$t_n = ar^{n-1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

例題　求 1, 2, 4, 8, ……的第 15 項.

【解】　已知 $a=1$, $r=\frac{2}{1}=2$, $n=15$, 代入公式(1), 得

$$t_{15}=1\times2^{15-1}=2^{14}=8192.$$

2. 插入等比中項　設首項爲 a, 末項爲 l, 要在 a、l 之間插入 m 個等比中項,則 l 應是第 $m+2$ 項,代入公式(1),得

$$l=ar^{(m+2)-1}.$$

即　$$l=ar^{m+1}.$$

$\therefore$　$$r=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

例題　試在 3 同 48 之間插入 3 個等比中項.

【解】　已知 $a=3$, $l=48$, $m=3$, 代入公式(2),得

$$r=\sqrt[3+1]{\frac{48}{3}}=\sqrt[4]{16}=\pm2.$$

故所求的 3 個等比中項是 ±6, 12, ±24.

3. 求等比級數 n 項的和　設首項爲 a, 末項爲 l, 公比爲 r, 項數爲 n, 這 n 項的和爲 S_n, 則

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}.$$

以 r 乘,得 $rS_n = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$

相減,得 $(1-r)S_n = a \qquad\qquad - ar^n.$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \cdots\cdots(3).$$

例題　求 $1+3+9+27+\cdots\cdots+$ 第10項.

【解】　已知 $a=1$, $r=\frac{3}{1}=3$, $n=10$, 代入公式(3),

得
$$S_{10} = \frac{1\times(1-3^{10})}{1-3} = 29524.$$

習題六十八

(1) 求級數 $2, 6, 18, \cdots\cdots$ 的第 7 項.

(2) 求級數 $6, 3, 1\frac{1}{2}, \cdots\cdots$ 的第 8 項.

(3) 求級數 $1, -2, 4, -8, \cdots\cdots$ 的第 9 項.

(4) 求級數 $4a, -6ma^2, 9m^2a^3, \cdots\cdots$ 的第 5 項.

(5) 試在 $\frac{1}{2}$ 同 $\frac{1}{16}$ 之間插入 2 個等比中項.

(6) 試在 14 同 224 之間插入 3 個等比中項.

(7) 求 $3+6+12+\cdots\cdots+$ 第 8 項.

(8) 求 $1-3+9-\cdots\cdots+$ 第 7 項.

(9) 求 $.1+.5+2.5+\cdots\cdots+$ 第 7 項.

(10) 求 $m-\frac{m}{4}+\frac{m}{16}-\cdots\cdots+$ 第 5 項.

(11) 某人在每年初存國幣 100 元於儲蓄銀行,年利

率 5 釐,每年複利一次.求 4 年末的本利和.

【提示】 第一年初的 100 元到第 4 年末應得本利和 (100×1.05^4) 元;同樣知第二年初的100元到第 4 年末應得本利和(100×1.05^3)元;…….所以本題就是求$100\times1.05^4+100\times1.05^3+\cdots\cdots+100\times1.05$.化簡單些,就是求$100\times(1.05+1.05^2+\cdots\cdots+1.05^4)$.

(12) 等比級數的末項是2916,公比是 3,計有 7 項.求首項.

(13) 等比級數的首項是 1,末項是 16384,項數是 8.求公比.

【提示】 由公式(1),得 $r=\sqrt[n-1]{\dfrac{t_n}{a}}$,用對數解.

(14) 等比級數的首項是1024,末項是$\frac{1}{8}$,公比是$\frac{1}{2}$.求項數.

【提示】 由公式(1),得 $r^{n-1}=\dfrac{t_n}{a}$,用指數方程式求 $n-1$ 的值,再加 1 即得.

附錄一

習題答案

習題一

(1) 315. (2) 6. (3) 66. (4) $47\frac{1}{4}$.

(5) 41. (6) 6. (7) 10. (8) 10.

(9) $7\frac{2}{3}$. (10) 37. (11)(12) $11\frac{11}{12}$. (13)(14) $1\frac{9}{16}$.

(15) $2x$. (16) $8x$. (17) x. (18) $4x$.

(19) $7x+5y$. (20) $9x+2$. (21) $9y+5x$. (22) $x+16$.

(23) $48x$. (24) $210x$. (25) $27x-36y+18$.

(26) $16x-18$. (27) $9x$. (28) $5x$. (29) $11x+16$.

(30) $13x+12y$.

習題二

(1) 7. (2) 5. (3) 2. (4) 14. (5) 6.

(6) 2. (7) 3. (8) 7. (9) 2. (10) 54.

(11) $2\frac{2}{3}$. (12) $1\frac{1}{3}$. (13) $1\frac{4}{5}$. (14) $\frac{4}{5}$. (15) $1\frac{1}{2}$.

(16) 12. (17) 12. (18) 16. (19) 63. (20) 60.

(21) 36. (22) $1\frac{1}{12}$. (23) 1. (24) 1. (25) $1\frac{9}{10}$.

(26) $\frac{22}{25}$. (27) 26. (28) 8. (29) 4. (30) 5.

(31) $1\frac{1}{2}$ (32) 17. (33) 1. (34) 5. (35) 3.

(36) $10\frac{4}{13}$. (37) 7. (38) 3. (39) 6. (40) 2.

(41) $1\frac{5}{7}$. (42) 2. (43) $\frac{1}{4}$. (44) 3. (45) 13.

(46) 2. (47) $1\frac{12}{47}$. (48) 104. (49) $8\frac{25}{36}$. (50) $1\frac{19}{80}$.

習 題 三

(1) $x-1, x+1$.

(2) $x+2, x+4, x+6$.

(3) $x+5$.

(4) $y-x$.

(5) $(100-x)$ 元.

(6) $\frac{54}{x}$.

(7) $6x$ 里.

(8) $\frac{x}{6}$ 時.

(9) 甲 有 $(35-x)$ 元,乙 有 $(28+x)$ 元.

(10) 兄$(a-x)$歲,弟$(b-x)$歲.

(11) $10x$ 角,$\frac{y}{10}$元.

(12) $[10x+5(x+3)]$ 元.

(13) $100x+10y+z$.

(14) $10x+(x-4)$.

(15) $2x+3$.

(16) $[4x+2(a-x)]$ 只.

(17) $(x+3+5)$ 歲.

(18) $[2(x-3)+3]$ 歲.

(19) $(7x+3)$ 枚,$\frac{x-3}{7}$人.

(20) $(100+3x-3y)$ 元.

(21) 順 流 $(10+x)$ 里,逆 流 $(10-x)$ 里.

(22) (x^2+25) 人.

(23) $\frac{5x+6y}{x+y}$角.

(24) 全 槽 的 $\frac{1}{x}$.

(25) $\left(\frac{x}{7}+\frac{x}{5}\right)$時.

(26) $(80x+60\times 2x)$ 元.

(27) $25(x+30)$ 分.

(28) $x(x-3)$ 方 尺.

(29) $\left(6\times\frac{1}{3}x+4\times\frac{2}{3}x\right)$ 角.

(30)(a) 乙 $(x+15)$ 分,丙 $\frac{x+15}{2}$ 分.

(b) 甲 $(x-15)$ 分,丙 $\frac{x}{2}$ 分. (c) 乙 $2x$ 分,甲 $2x-15$ 分.

習題四

(1) 23, 14. (2) 12.

(3) 13, 14, 15. (4) 13 年.

(5) 母 35 歲,女 7 歲. (6) 雞 29 頭,兔 21 頭.

(7) 綢 25 尺,緞 15 尺. (8) 運到 95 個,破壞 5 個.

(9) 36. (10) 432.

(11) 5 人, 42 枚. (12) 4 秒.

(13) 繩 20 尺,竹 15 尺. (14) 8 日.

(15) $1\frac{19}{80}$ 日. (16) $4\frac{4}{5}$ 分.

(17) 7 時 $38\frac{2}{11}$ 分. (18) 9 時 $16\frac{4}{11}$ 分.

(19) 4 時 $5\frac{5}{11}$ 分, 4 時 $21\frac{9}{11}$ 分.

(20) 7 日. (21) 42 里.

(22) 108 里. (23) 甲 13 元,乙 27 元.

(24) 甲 425 元,乙 1075 元,丙 4500 元.

(25) 甲 70,乙 30. (26) 48 尺,

(27) 1 斗. (28) 馬 2 頭,牛 4 頭,羊 94 頭.

(29) 500 人. (30) 40000 元.

(31) 甲 132, 乙 138, 丙 45,丁 405.

(32) 4 尺, 13 尺, 16 尺. (33) 男 4 人,女 3 人.

(34) 178 只. (35) 7 個.

習 題 五

(1) -1. (2) 14. (3) 1. (4) -16. (5) $-1\frac{1}{4}$.

(6) $\frac{11}{12}$. (7) -2. (8) -13. (9) -13. (10) 7.

(11) $-\frac{1}{6}$. (12) $-\frac{5}{42}$. (13) 8. (14) -16. (15) 49.

(16) $\frac{2}{3}$. (17) -51. (18) -2. (19) 0. (20) $\frac{1}{6}$.

習 題 六

(1) -24. (2) 84. (3) 0. (4) 140.

(5) -2. (6) 2. (7) 0. (8) 3.

(9) -48. (10) 384. (11) $\frac{2}{7}$. (12) $-1\frac{1}{4}$.

(13) -7200. (14) 3780. (15)(16) 50. (17)(18) -343.

(19)(20) 25.

習 題 七

(1) $-\frac{3}{4}$. (2) -4. (3) $\frac{1}{5}$. (4) 11.

(5) $-\frac{2}{3}$. (6) -20. (7) $-8\frac{1}{2}$. (8) $\frac{1}{2}$.

(9) 2 年前. (10) 不合理. (11) 甲負債 10 元,乙有國幣 40 元. (12) $-40°$.

習 題 八

(1) $39a-5b+4c$. (2) 0.

(3) $5ab+bc-ca$. (4) $3x^2-3y^2$.

(5) $8x^4+x^3+6x^2+7x-14$. (6) $x^2+9xy+5y^2$.

(7) $-2x^3+x^2+4x+2$. (8) x^2+7x.

(9) $a^3+b^3+c^3$. (10) $15x^3-4x^2+3x-4$.

(11) $7a^3+5a^2b+2ab^2+3b^3$.

(12) abc.

(13) $3x^2-2y^2-2xy-4yz-3zx$.

(14) x^3-5x-1.

(15) $2x^2+\frac{21}{10}xy+\frac{9}{8}y^2$.

(16) $3a^5+4a^3b^2+2a^2b^3+5ab^4+b^5$.

習 題 九

(1) $-13x-18y+19z$. (2) $5a-30b+4c$.

(3) $-2ac-2bd$. (4) $-6x^2y-2y^3$.

(5) x^3+3x^2+5x+7. (6) $x^5-2x^4-x^3+x^2-2x+2$.

(7) $8x^3y-12x^2y^2+21xy^3$. (8) $-a^3+c^3+abc$.

(9) $a^3-12a^2b+15ab^2+2b^3$.

(10) $-16x^2y-2x^2y^2+10xy^2$.

(11) $-2x^3+11x-7y+y^2$. (12) $-a^4x-3a^3x^2+5a^2x^3$

(13) $2a^3+6a^2b+6ab^2+2b^3$.

(14) $x^5-7x^4+10x^3-2x^2-9x+8$.

(15) $2x^2-14x-4$.

(16) $3x^4y^4+2x^3y^3-2x^2y^2-14xy+18$.

習　題　十

(1)　$4b-c$.　(2)　$-x+3y$.　(3)　$-5a$.　(4)　a.

(5)　$10x-4y+2z$.　(6)　$x+4y$.　(7)　$-4x+10$.　(8)　0.

(9)　$(x+y)-(-2z+2w)$.　(10)　$(2a-3b)-(-5c+4d)$.

(11)　$(x+2x^2)-(x^3-4x^4)$.　(12)　$(5m-3n)-(-2p+q)$.

(13)　$(y^5-2y^3)-(-6y+2)$.　(14)　$(-2a+3a^2)-(4a^3-a^4)$.

習　題　十　一

(1)　$x^5-6x^4+15x^3-13x^2-7x+20$.

(2)　$4x^4+22x^3-41x^2+41x-5$.

(3)　$x^3+3xy+y^3-1$.　(4)　a^6-b^6.

(5)　$a^5x^5-2a^2x^2-1$.　(6)　$x^5+151x-264$.

(7)　$42x^5-16x^4+112x^3-168x^2+38x-200$.

(8)　$a^5b+a^4b^2+a^3b^3-a^2b^4-ab^5-b^6$.

(9)　$a^3+b^3+c^3-3abc$.

(10)　$30a^8+7a^7b+7a^6b^2+15a^4b^4-2a^3b^5-2a^2b^6$.

(11)　$2x^3-x^2y+6x^2z-3xyz+3xz^2-xy^2+3y^2z-5yz^2$
$-2z^3$.

(12)　$a^3+a^2b+ab^2+b^3+2b^2x-ax^2+bx^2$.

(13)　$a^4-2a^2b^2+b^4+4abc^2-c^4$.

(14)　$\frac{1}{12}a^4+\frac{49}{180}a^3b+\frac{53}{60}a^2b^2-\frac{1}{15}ab^3-3b^4$.

(15)　$x^3-6x^2-37x+210$.　(16)　$x^8+a^4x^4+a^8$.

(17)　x^8-16　(18)　a^8-b^8.

(19) $x^2+2xy+y^2$. (20) $x^2-2xy+y^2$.

(21) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. (22) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

(23) x^3+y^3. (24) x^3-y^3.

(25) x^2-y^2 (26) $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

習題十二

(1) x^2-4x+8. (2) $-4x-7$, 餘 $-4x+8$.

(3) $-a^2+3ab-5b^2$, 餘 $-2ab^3+5b^4$.

(4) $x-y-z$. (5) $2x^2+2x+1$.

(6) $2x-7y$. (7) x^2-2x+1.

(8) $a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2$.

(9) $4a^3b^3+8ab+4$. (10) $x+\frac{1}{2}$.

(11) $1+3x-5x^2+6x^3$. (12) $4x^2-9x-5$.

(13) $x+y$. (14) $a^2+2ab+b^2+a+b+1$.

(15) $x^2-\frac{3}{4}x+1$.

習題十三

(1) $\frac{2}{3}$. (2) $-1\frac{1}{4}$. (3) -12. (4) $-6\frac{3}{5}$.

(5) 4. (6) 0. (7) $-\frac{1}{6}$. (8) 1.

(9) $-\frac{6}{17}$. (10) $1\frac{1}{6}$. (11) $\frac{abc}{a+b}$. (12) ab.

(13) $a+b$. (14) $-a+b$. (15) $\frac{a+b}{2}$. (16) $a+b$.

(17) $\frac{ac}{a+b}$. (18) 1, 2, 3. (19) $-1, 0, 1$. (20) 1504 人.

習題十四

(1) $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=0. \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=2\frac{1}{9}, \\ y=1\frac{7}{9}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=-\frac{4}{11}, \\ y=-\frac{5}{33}. \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x=-7\frac{1}{2}, \\ y=-7\frac{1}{2}. \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x=2\frac{1}{2}, \\ y=1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=-4, \\ y=0. \end{cases}$　(8) $\begin{cases} x=0, \\ y=\frac{1}{4}. \end{cases}$　(9) $\begin{cases} x=\frac{ac}{a+b}, \\ y=\frac{bc}{a+b}. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=\frac{1}{a+b}, \\ y=0. \end{cases}$　(11) $\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$　(12) $\begin{cases} x=a+b, \\ y=a-b. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=3, \\ y=\frac{1}{2}, \\ z=-1. \end{cases}$　(14) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=-3. \end{cases}$　(15) $\begin{cases} x=2, \\ y=5, \\ z=7. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x=8, \\ y=0, \\ z=-8. \end{cases}$　(17) $\begin{cases} x=9, \\ y=11, \\ z=13. \end{cases}$　(18) $\begin{cases} x=5, \\ y=4, \\ z=3. \end{cases}$

習題十五,習題十六

與習題十四(1)到(8)同.

習題十七

(1) $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=-1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=3, \\ y=-7. \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x=18, \\ y=7. \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x=15, \\ y=-13. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=9, \\ y=5, \\ z=-1. \end{cases}$　(8) $\begin{cases} x=7, \\ y=10, \\ z=12. \end{cases}$　(9) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}, \\ z=\frac{1}{4}. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=a, \\ y=2b, \\ z=3c. \end{cases}$

習 題 十 八

(1) 見習題四.　(2) 甲 24,乙 60.

(3) 甲 49 歲,乙 21 歲.　(4) 馬 35 斤,人 15 斤.

(5) 甲 3 里,乙 $1\frac{1}{2}$ 里.　(6) 甲 63 只,乙 45 只.

(7) 十元的 5 張,五元的 6 張,一元的 9 張,

(8) 牛 90 元,馬 80 元.　(9) 甲 14 分,乙 21 分.

(10) 135.

(11) 甲 250 元,乙 200 元,丙 150 元.

(12) 前 12 呎,後 20 呎.　(13) 9 人,72 元.

(14) 長 9 尺,闊 8 尺　(15) 5040 方尺.

習 題 十 九

(1) $4x^2+12xy+9y^2$. (2) $a^2p^2-2abpq+b^2q^2$.

(3) $4a^2b^2-20abc+25c^2$. (4) $9x^4+6x^2+1$.

(5) $25a^4+30a^2b^2+9b^4$. (6) $16m^6+8m^3n^3+n^6$.

(7) $4x^2-8x+1$. (8) $x^2-x+\frac{1}{4}$.

(9) x^6+2x^3+1. (10) $a^4-2a^2b^2+b^4$.

(11) $\frac{m^2}{4}+\frac{mn}{3}+\frac{n^2}{9}$. (12) $1-2x^2y^2+x^4y^4$.

(13) $\frac{x^2}{9}+\frac{xyz}{6}+\frac{y^2z^2}{16}$. (14) $a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}$.

(15) $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$.

(16) $x^8-2x^6-x^4+2x^2+1$. (17) 與(15)同.

(18) $9a^4-6a^3+31a^2-10a+25$.

(19) $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$.

(20) $x^4-10x^3+11x^2+70x+49$.

習 題 二 十

(1) $4x^2-25y^2$ (2) $49a^2-64b^2$.

(3) x^2-1. (4) $-x^4+y^4$.

(5) $-4x^2+1$. (6) $9a^2-25$.

(7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$. (8) $\frac{4}{9}x^4-\frac{9}{16}y^4$.

(9) $25x^6-9$, (10) $a^4x^2-b^4y^2$.

(11) $4a^4+7a^2b^2+16b^4$. (12) $a^2-b^2+2bc-c^2$.

(13) $a^2-b^2-2bc-c^2$. (14) $a^2+2ab+b^2-c^2$.

(15) $b^2+2bc+c^2-a^2$. (16) $a^2-2ac+c^2-b^2$.

(17) $x^4+x^2y^2+y^4$. (18) $81a^4+36a^2b^2+16b^4$.

(19) $a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$

(20) $a^2-2ab+b^2-c^2+2cd-d^2$

(21) $625a^4-450a^2b^2+81b^4$.

(22) a^8-b^8. (23) $x^{16}-1$.

(24) $256x^8-32x^4+1$.

習題二十一

(1) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$. (2) x^3-3x^2+3x-1.

(3) $216a^3+540a^2+450a+125$. (4) x^3+3x^2+3x+1

(5) $27x^3y^3-27x^2y^2z+9xyz^2-z^3$.

(6) $\frac{a^3}{8}-\frac{a^2b}{4}+\frac{ab^2}{6}-\frac{b^3}{27}$.

(7) $64m^6-144m^4n^2+108m^2n^4-27n^6$,

(8) $1000x^3+300x^2y+30xy^2+y^3$.

(9) $a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2$
$+6abc$.

(10) $a^3+a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{27}$.

(11) $64x^6-48x^4y^2+12x^2y^4-y^6$.

(12) $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$.

(13) x^3+1. (14) x^3-1.

(15) m^6+n^6. (16) $27x^3-y^3$.

(17) $x^3y^3+z^3$. (18) $-27x^3+8y^3$.

(19) $-1-8a^3$. (20) $\frac{x^3}{8}-\frac{y^3}{27}$.

習題二十二

(1) $x^2+14x+45$. (2) x^2+x-12.

(3) $15x^2-16xy-15y^2$. (4) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$.

(5) $2x^2-3x-35$. (6) $3x^6+2x^3-1$.

(7) $6x^4-17x^2+12$. (8) $6x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

(9) $\frac{x^2}{6}-\frac{11x}{6}-72$.

(10) $a^2+2ab+b^2-ca-bc-6c^2$.

(11) $4m^2-12mn+9n^2-4mp+6np-3p^2$.

(12) $x^4-16x^3+86x^2-176x+105$.

(13) $x^4-20x^3+140x^2-400x+384$.

(14) $4x^4-17x^2y^2+4y^4$. (15) $64a^4-244a^2b^2+225b^4$.

(16) $x^8-97x^4y^4+1296y^8$.

習題二十三

(1) $7b^2(2a^2b-9c+ab^2)$. (2) $x(x^2+3x-1)$.

(3) $8(3a^2+2b^2+c^2)$. (4) $27a^2b^3(ab^2+2a^3-3b^3)$.

(5) $2(a-b)[1+2(a-b)]$. (6) $(a+b)(2a-c)$.

(7) $x(x+y)$. (8) $(x+y)[(x+y)^2+3x]$.

(9) $(a+b)(x+y)(a+b-x-y)$.

(10) $(b-c)(ax^2+3)$. (11) $c(a-b)(1-c)$.

(12) $2a(x+y)$. (13) $(a-b)^2(x-y)$.

(14) $2b(x-y)^3$.

習題二十四

(1) $(x+y)(a-b)$.　(2) $(b+c)(a+x)$.

(3) $(a-b)(x+1)$.　(4) $(x+1)(x^2+1)$.

(5) $(x-1)(x^4+1)$.　(6) $(x-2)(x^3+2)$.

(7) $(x+2a)(x+3b)$.　(8) $(2x-3a)(4x-5b)$.

(9) $(x^2+3)(x^4+3)$.　(10) $a(2a-5b)(a+2bx)$.

(11) $(x-1)(x^4-2x^2+5)$.　(12) $(x+y+z)(x^2-yz)$.

(13) $(bx+ay)(ax+by)$.　(14) $(a^2+xy)(2x+3y)$.

(15) $(x-y)(ax-by)$.　(16) $(y+xz)(x+yz)$.

(17) $(2+ax)(a-2x)$.　(18) $(x+1)(ax^2+bx+a)$.

(19) $(x-2a)(x^2+bx+a^2)$.　(20) $(ay-x)(a^2-ax+x^3)$.

習題二十五

(1) $(x-2y)^2$.　(2) $(4x+1)^2$.

(3) $(1+4a)^2$.　(4) $(x+\frac{1}{2}y)^2$.

(5) $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^2$.　(6) $(xy-3z)^2$.

(7) $(x-\frac{3}{2})^2$.　(8) $(5a^2+6b^2)^2$.

(9) $(1-2y)^2$.　(10) $-3x(2x-3a)^2$.

(11) $(2ax+b)^2$.　(12) $-4(x^2+1)^2$.

(13) $-3(m+1)^2$.　(14) $(x+y+z)^2$.

(15) $(a-b-c-d)^2$.　(16) $(3a+3b-c)^2$.

(17) $(2xy+a+b)^2$.　(18) $(x^2+1)^2$.

(19) $(x-y-2)^2$. (20) $(2a+b-c)^2$.

(21) $(x+y+\frac{1}{2}z)^2$. (22) $(m-n)(m-n-1)$.

(23) $(b+c)(a+b)^2$.

習 題 二 十 六

(1) $(8a+7b)(8a-7b)$. (2) $(bc+2d)(bc-2d)$.

(3) $(1+4xy)(1-4xy)$. (4) $(\frac{1}{2}a+1)(\frac{1}{2}a-1)$.

(5) $(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.

(6) $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$.

(7) $3(4x^2+1)(2x+1)(2x-1)$. (8) $(a+b+1)(a+b-1)$.

(9) $3(a+b)(a-b)$. (10) $(5x+y)(x+5y)$.

(11) $4a(b+c)$. (12) $4ab(a^2+b^2)$.

(13) $(c+a-2b)(c-a+2b)$. (14) $(a-b+c)(a-b-c)$.

(15) $(1+a-b)(1-a+b)$. (16) $(x-a+y-b)(x-a-y+b)$.

(17) $\left(1+\frac{1}{2}x+a+\frac{1}{2}b\right)\left(1+\frac{1}{2}x-a-\frac{1}{2}b\right)$.

(18) $(a-1)(a^3+a^2+a+1-b^2)$.

(19) $(x-y)(x+y+4)$. (20) $(1-ax)(1+ax+bx)$.

(21) $(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$.

(22) $(a+b)^2(a-b)^2$. (23) $(x+y)(4x^2+8xy+4y^2-1)$.

(24) $(x-y)(a+b)(a-b)$.

(25) $mn(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

(26) $(x^2+mxy-y^2)(x^2-mxy-y^2)$.

(27) $(2x+3y)^2(2x-3y)^2$.

(28) $3\left(\frac{1}{3}a-1+x\right)\left(\frac{1}{3}a-1-x\right)$.

(29) $2\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$. (30) $(a+b)^3(a-b)$.

習題二十七

(1) $(x-1)^3$. (2) $(x+3)^3$.

(3) $(3a+2b)^3$. (4) $(m^2-5n^2)^3$.

(5) $\left(x-\frac{y}{3}\right)^3$. (6) $(1-x-y)^3$.

(7) $(x+y+1)^3$.

(8) $(2a-b)(4a^2-4ab+b^2-2a-b)$.

習題二十八

(1) $(4m-5n)(16m^2+20mn+25n^2)$

(2) $2(xy+2z)(x^2y^2-2xyz+4z^2)$.

(3) $(x+1)(x^2-x+1)$. (4) $(x-1)(x^2+x+1)$.

(5) $3ab(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$.

(6) $\left(3x+\frac{1}{2}y\right)\left(9x^2-\frac{3}{2}xy+\frac{1}{4}y^2\right)$.

(7) $\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a^2}{16}-\frac{ab}{12}+\frac{b^2}{9}\right)$.

(8) $\frac{1}{9}\left(x-\frac{y}{2}\right)\left(x^2+\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}\right)$.

(9) $2\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{9}\right)$.

(10) $-(4+x)(16-4x+x^2)$.

(11) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$.

(12) $(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$.

(13) $4xy(x^2+3y^2)(3x^2+y^2)$. (14) $(a+b)(a^2+6ab+9b^2)$.

(15) $(2x+5y-5z)(4x^2+25y^2+25z^2-10xy+10xz-50yz)$.

(16) $x(1-x)^2(x^2-3x+3)$. (17) $2b(a+b)(a-b)(3a^2+b^2)$.

(18) $(a^4+b^4)(a^8-a^4b^4+b^8)$. (19) $(x^4+1)(x^8-x^4+1)$.

(20) $(x-3y)(x^2+3xy+9y^2-x-3y)$.

(21) $(x-y)(x^2+xy+y^2-x+y)$.

(22) $(x+y)(x^2-xy+y^2+6)$.

(23) $(a-b)(a^2+ab+b^2-a-b-1)$.

(24) $(a-b)(a^2+ab+b^2-a+b-1)$.

(25) $(2xy+1)(2xy-1)(xy-3)(x^2y^2+3xy+9)$.

(26) $(x+y)(x^2+y^2)(x-y+1)$. (27) $(x+2y)^3$.

習 題 二 十 九

(1) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

(2) $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.

(3) $\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$.

(4) $\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\right)$.

(5) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

(6) $(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

(7) $(x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$.

(8) $(x^2+2x+8)(x^2-2x+8)$.

(9) $(3a^2+2ab+b^2)(3a^2-2ab+b^2)$.

(10) $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$.

(11) $(x^2+3x-1)(x^2-3x-1)$. (12) $2(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$.

(13) $(a^2+3ab-2b^2)(a^2-3ab-2b^2)$.

(14) $(4a^2+3a+1)(4a^2-3a+1)$.

(15) $(x+3)(x^2+3)$. (16) $(a+b)(a^2-4ab+7b^2)$.

(17) $2(x-1)(4x^2-2x+1)$. (18) $(a+2)(a^2+7a+13)$.

(19) $(a+b+2)(a^2-ab+b^2+a+b+1)$.

(20) $(a+b-1)(a^2+b^2+4a-5b-ab+7)$.

(21) $(x+5)(x+3)$. (22) $(x-3)(x-13)$.

(23) $(x+5)(x-3)$. (24) $(x+1)(x-7)$.

習題三十

(1) $(x-1)(x-4)$. (2) $(x+7)(x-6)$.

(3) $(x-7)(x+2)$. (4) $(x-5)(x+4)$.

(5) $(xy+2)(xy+4)$. (6) $(xy-6z)(xy-8z)$.

(7) $(x-4y)(x+8y)$. (8) $(x-21y)(x+4y)$.

(9) $(x-32)(x-7)$. (10) $(a+12)(a-9)$.

(11) $(x-y)(x+\frac{1}{4}y)$. (12) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

(13) $(a+b-3)(a+b-4)$. (14) $(x+y-2z)(x+y-5z)$.

(15) $(x+y-z+7)(x+y-z+8)$.

(16) $(x+y)(x-y)(x+4y)(x-4y)$.

(17) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$. (18) $(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)$.

(19) $(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$.

(20) $(x+1)(x^2-x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$.

(21) $(x+1)(x+2)(x+5)(x-2)$.　(22) $(x+y+5)(x+y-4)$.

(23) $(x+y-2)(x+y+1)$.　(24) $(a+b+3)(a+b+5)$.

(25) $(3x-y+8)(3x-y-3)$.　(26) $(a+2)^2(a-1)(a-3)$.

習題三十一

(1) $(x-5)(3x-1)$.　(2) $(x+4)(2x+3)$.

(3) $(x+1)(4x-3)$.　(4) $(x-5)(3x-2)$.

(5) $(2x-5)(3x+7)$.　(6) $(x-7)(5x-3)$.

(7) $(2x-y)(3x-5y)$.　(8) $(2x+y)(5x-y)$.

(9) $(x-6y)(7x+9y)$　(10) $(x+5y)(7x-11y)$.

(11) $(xyz+3)(16xyz-9)$.　(12) $(8mn-1)(2mn-27)$.

(13) $(3x+y)(3x-y)(x+2y)(x-2y)$.

(14) $(x+1)(x^2-x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1)$.

(15) $(2x-y-5)(3x+7y-33)$.

習題三十二

(1) $12a^2b^3x^4$.　(2) ab.　(3) $x+a$.

(4) $x-2$.　(5) $x-y$.　(6) $a(x+a)$.

(7) $3x+1$.　(8) $x+1$.　(9) $4a^2b^2(b+2a)$.

(10) $x-y$.　(11) $x-1$.　(12) x^2-y^2.

(13) $x+1$.　(14) $c(a-b)$.

習題三十三

(1) $x+3$.　(2) $x-3$.　(3) x^2-x-1.

(4) $ax^2-3a^2x+5a^3$. (5) $x-1$.

(6) x^2-3x-4. (7) $3x+2$. (8) x^2-x-3.

(9) x^2-6x-5. (10) $x+7$.

習題三十四

(1) $120a^4b^3c^3$. (2) $a(a^2-b^2)$.

(3) $3(x^2-4)$. (4) $(x+1)(x+2)(x+7)$.

(5) $6a(a^2-9b^2)(a-2b)$. (6) $(x-5)(x-6)(x+7)$.

(7) $(a^2-b^2)(a^3-b^3)$. (8) $20x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$.

(9) $(x+2)(x+3)(x^2-8)$. (10) $(x+y)(2x+3y)(x-y)^3$

(11) $(x^2-1)(x^2-4)$.

(12) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

(13) $(x-y)(y-z)(z-x)$. (14) $(m-2n)(m^3-n^3)$.

習題三十五

(1) $(x+5)(x^3+x^2-10x+8)$.

(2) $(x+8)(x^3-6x^2-86x+35)$.

(3) $(x-3)(x^3+8x^2+17x+10)$

(4) $(x^4-1)(x^2+x+1)$.

(5) $(2x^2-3x-8)(2x^4+3x^3-13x^2-7x+15)$.

(6) $(x^2y-xy^2+y^3)(x^3-2x^2y+3xy^2-6y^3)$.

(7) $(x-2)(x^3-12x^2+47x-60)$.

(8) $(x+2)(x^3+8x^2+19x+12)$.

(9) $(x^2-4x+7)(x^3+8x^2-5x+4)$.

(10) $(x+3)(x-1)(x+1)(x+2)$.

習 題 三 十 六

(1) $\frac{30x^2}{40x^3}, \frac{25x}{40x^3}, \frac{28}{40x^3}$.　　(2) $\frac{3a(x-y)}{x^2-y^2}, \frac{2a}{x^2-y^2}$.

(3) $\frac{ab}{a^2-b^2}, \frac{a(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{b(a-b)}{a^2-b^2}$.

(4) $\frac{x^3-1}{x^4-1}, \frac{(x-1)(x^2+1)}{x^4-1}, \frac{(x^2+1)(x+1)}{x^4-1}$.

(5) $\frac{a^2-16}{a-4}, \frac{1+4a}{a-4}$.

(6) $\frac{8(x+1)}{12(x^2-1)}, \frac{15(x-1)}{12(x^2-1)}, \frac{-96}{12(x^2-1)}$.

(7) $\frac{a^2}{a-a^2}, \frac{-1}{a-a^2}, \frac{3a-1}{a-a^2}$.

(8) $\frac{(x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}, \frac{(x+a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}, \frac{x^2-a^2}{(x+a)^2(x-a)^2}$.

(9) $\frac{x^2}{xy(x-y)}, \frac{-y^2}{xy(x-y)}, \frac{(1+xy)(x-y)}{xy(x-y)}$.

(10) $\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}, \frac{-3mn}{m^3-n^3}, \frac{(m-n)^2}{m^3-n^3}$.

(11) $\frac{b(x-y)}{a^2b^2(x^2-y^2)}, \frac{x(x+y)}{a^2b^2(x^2-y^2)}, \frac{a(1+x)}{a^2b^2(x^2-y^2)}$.

(12) $\frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)(x^2-4)}, \frac{2(x^2-4)}{(x^2-1)(x^2-4)}, \frac{3(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-4)}$,

$\frac{4(x-1)(x-2)}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

(13) $\frac{3x+2}{(2x-3)(x-1)(3x+2)}, \frac{2x-3}{(2x-3)(x-1)(3x+2)}$,

$\frac{2(x-1)}{(2x-3)(x-1)(3x+2)}$.

(14) $\frac{z^2-y^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$, $\frac{x^2-z^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$,

$\frac{y^2-x^2}{(x-y)(y-z)(z-x)}$.

習 題 三 十 七

(1) $\frac{bx}{3ay^4}$. (2) $\frac{1}{5xyz}$.

(3) $x+y$. (4) $\frac{x-2}{x-5}$.

(5) $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$. (6) $\frac{3y}{a-2}$.

(7) $\frac{a+x}{a+2x}$. (8) $\frac{3}{4}a^2b(a+b)$.

(9) $\frac{a+b-c}{a-b-c}$. (10) $\frac{a+b+c+d}{a-b+c+d}$.

(11) 1. (12) $\frac{a^2+1}{a^4-a^2+1}$.

(13) $\frac{x-3}{x+2}$. (14) $\frac{a+5}{a+4}$.

習 題 三 十 八

(1) $\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$. (2) $\frac{1}{x-y}$.

(3) $\frac{1}{y}$. (4) $\frac{2x^2}{x^2-1}$.

(5) $\frac{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3-b}{a^3-b^3}$,

(6) $\frac{2a}{a-b}$.　　(7) $\frac{-2ab}{a-b}$.

(8) $\frac{x^2+1}{x+1}$.　　(9) $\frac{x^3-1}{x+1}$.

(10) $\frac{2+8a^2}{1-4a^2}$.　　(11) $\frac{2a^2-ax-x^2+a+x}{x(x^2-a^2)}$.

(12) $\frac{6x+2}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.　　(13) $\frac{ax+bx-ab}{(x-a)(x-b)}$.

(14) $\frac{4x^3}{y(x^2-y^2)}$.

(15) $\frac{x^2-12x+30}{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}$.

(16) $\frac{x}{x-4y}$.

(17) $\frac{ca^2(c-a)(a-b)+ab^2(a-b)(b-c)+bc^2(b-c)(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$.

(18) 0.　　(19) 0.

(20) $\frac{y+z-3x}{(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}$.

習題三十九

(1) $\frac{2z}{15x^2y}$.　　(2) 1.

(3) $\frac{1}{x-1}$.　　(4) 1.

(5) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$.　　(6) $\frac{a^2}{a^2-x^2}$.

(7) $\frac{4x+3y}{x+2}$.　　(8) a^2+3a+9.

(9) x^2+y^2　　(10)(11) 1.

(12) $\dfrac{-a^2b^2}{(a-b)^2}$. (13) $\dfrac{x^3-2xy^2-y^3}{xy}$. (14) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

習題四十

(1) $\dfrac{6ay}{bx}$. (2) $\dfrac{1}{x+y}$. (3) $\dfrac{(a-b)^2}{b(a+b)}$.

(4) $\dfrac{ab}{2a-1}$. (5) $\dfrac{(a^2+b^2)(a+b-c)}{a^2-b^2}$.

(6) $x^4+x^2y^2+y^4$. (7) $\dfrac{3a}{x+y}$. (8) $\dfrac{x-1}{x-3}$.

(9) $\dfrac{a+b-c}{c-a+b}$. (10) 1. (11) $x-y$.

(12) $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$.

習題四十一

(1) $\dfrac{2}{a-b}$. (2) $\dfrac{x^3}{x^2-y^2}$. (3) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$.

(4) $\dfrac{1}{2a^2-1}$. (5) $a-x$. (6) $\dfrac{a}{a-2b}$.

(7) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$. (8) $\dfrac{xy^2}{(x+y)(x-y)^2}$. (9) $\dfrac{x+1}{x}$.

(10) $\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}$. (11) $\dfrac{a^2x^2-a^4}{x^3}$. (12) 1.

習題四十二

(1) 3. (2) 2. (3) 3. (4) -4.

(5) 10. (6) 5. (7) $-\dfrac{1}{4}$. (8) 8.

(9) 12. (10)(11)(12) 無根. (13) $4\dfrac{2}{9}$.

(14) 0.

習題四十三

(1) -2. (2) -6. (3) $6\frac{1}{2}$.

(4) 4. (5) 5. (6) 1.

(7) $\begin{cases} x=11, \\ y=7. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=5, \\ y=-4. \end{cases}$ (9) $\begin{cases} x=36, \\ y=21. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=5, \\ y=9. \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x=-\frac{1}{5}, \\ y=-1\frac{1}{5}. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{4}. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=1. \end{cases}$ (15) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

習題四十四

(1) $\frac{3}{8}$. (2) $\frac{3}{5}$. (3) $\frac{7}{17}$.

(4)(5) 84.

(6) 上茶 1 元 2 角,中茶 8 角 5 分,下茶 4 角.

(7) 靜水中 6 里,水流 4 里.

(8) 甲乙間 3 里,乙丙間 $4\frac{1}{2}$ 里.

習題四十五

(1) $5\sqrt{10}$. (2) $7\sqrt{3}$. (3) $5\sqrt{2}$.

(4) $8\sqrt{2}$. (5) $15\sqrt{21}$. (6) $\frac{1}{7}\sqrt{14}$.

(7) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. (8) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$. (9) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

(10) $\frac{1}{3}\sqrt{33}$. (11) $2i$. (12) $2\sqrt{2}\,i$.

(13) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,i$. (14) $5i$. (15) $\sqrt{7}\,i$.

(16) $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$. (17) ± 8. (18) $\pm 2\frac{1}{2}$.

(19) ± 6. (20) $\pm 2\sqrt{6}\,i$. (21) $\pm 2\sqrt{2}$.

(22) $\pm\frac{1}{7}\sqrt{42}$. (23) ± 4. (24) $\pm\frac{3}{4}$.

(25) $\pm\sqrt{21}$. (26) $\pm\sqrt{10}$. (27) ± 2.

(28) $\pm\frac{1}{2}$. (29) $\pm 8\sqrt{2}$. (30) $8, -2$.

習 題 四 十 六

(1) $3, 4$. (2) $-5, 6$. (3) $5, 10$.

(4) $-3, 4\frac{1}{3}$. (5) $3, -\frac{1}{2}$. (6) $1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$.

(7) $\frac{1}{2}, 11\frac{1}{2}$. (8) 2. (9) $0, 5\frac{2}{3}$.

(10) $\frac{1}{7}, -1$. (11) $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}$. (12) $11, 3$.

(13) $4, -\frac{1}{2}$. (14) $3, \frac{1}{3}$. (15) $-1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}$.

(16) $2\pm\sqrt{3}$. (17) $\frac{1\pm i}{2}$. (18) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(19) $\frac{3\pm 2\sqrt{5}}{3}$. (20) $\frac{-2\pm\sqrt{5}\,i}{3}$.

習題四十七

與習題四十六(1)到(15)同.

習題四十八

與習題四十六同.

習題四十九

(1) 13, 14.　　(2) 10, 11, 12.

(3) 13, 6; −13, −6.　　(4) 14, 21; −14, −21.

(5) 36, 45.　　(6) 31, 32.

(7) 1, 3.　　(8) 10, 11, 12, 13, 14.

(9) 18; −18.　　(10) 8, 12.

(11) 3 尺.　　(12) 長 28 尺,闊 25 尺.

(13) 長 12 尺,闊 9 尺.　　(14) 1404 人.

(15) 500 人.　　(16) 4 丈.

(17) 36.　　(18) 父 60 歲,子 40 歲.

(19) 甲 60 里,乙 45 里.　　(20) 120 尺.

(21) 10 人.　　(22) 20 里.

(23) 甲 6 時,乙 12 時.　　(24) 前 28 尺,後 30 尺.

(25) 3 尺, 4 尺, 5 尺.　　(26) 8 尺,15 尺.

(27) 2 尺 6 寸.　　(28) 1 丈 5 尺.

習題五十

(1) $x^2-2x-35=0$.　　(2) $x^2-14x+33=0$.

(3) $2x^2+9x-5=0$.　　(4) $15x^2-53x-42=0$.

(5) $x^2-4x+5=0.$ (6) $x^2-2x-2=0.$

(7) $x^2+4x-59=0.$ (8) $x^2+2x+9=0.$

(9) $x^2+10x+41=0.$ (10) $4x^2-12x+13=0.$

(11) $16x^2+8x-49=0.$ (12) $3x^2+14x+18=0.$

(13) $cx^2+bx+a=0.$ (14) $abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0.$

(15) $acx^2-(a^2+c^2)x+ac=0.$

(16) $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0.$

(17) $-3, 5.$ (18) $1, 9.$

習題五十一

(1) $\begin{cases} x=8, \\ y=5. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=7, \\ y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=-7. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=5, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=13, \\ y=11; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-11, \\ y=-13. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=3, \\ y=4. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=-3, \\ y=4. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=1. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=10, \\ y=-7; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7, \\ y=-10. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=8, \\ y=7; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7, \\ y=8. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=-2, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=3, \\ y=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=3. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=4, \\ y=9; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-9, \\ y=-4. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x=4, \\ y=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5\frac{16}{21}, \\ y=-\frac{2}{21}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x=4, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3\frac{4}{7}, \\ y=-2\frac{1}{35}. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} x=-24, \\ y=12; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1\frac{1}{5}, \\ y=\frac{4}{5}. \end{cases}$

(17) $\begin{cases} x=\frac{7}{13}, \\ y=\frac{3}{13}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3}{13}, \\ y=-\frac{5}{13}. \end{cases}$ (18) $\begin{cases} x=2, \\ y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1\frac{5}{24}, \\ y=-8\frac{5}{6}. \end{cases}$

習題五十二

(1) $\begin{cases} x=3, \\ y=\frac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=6, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{2}{7}, \\ y=-1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=-3, \\ y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\frac{1}{2}, \\ y=3\frac{1}{2}. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=5, \\ y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7\frac{1}{2}, \\ y=2\frac{1}{3}. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\frac{4}{5}\sqrt{5}, \\ y=\mp\frac{7}{5}\sqrt{5}. \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\frac{17}{24}\sqrt{6}, \\ y=\mp\frac{11}{36}\sqrt{6}. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\sqrt{2}, \\ y=\pm 3\sqrt{2}. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=9, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\pm\sqrt{15}, \\ y=\pm\sqrt{15}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3\frac{3}{14}, \\ y=-2\frac{1}{7}. \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=1, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{2}{3}, \\ y=-\frac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=-\frac{1}{3}. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 4\sqrt{3}, \\ y=\mp\sqrt{3}. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=\pm 9, \\ y=\pm 7; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 8\sqrt{2} \\ y=\pm\sqrt{2}. \end{cases}$

習題五十三

(1) $\begin{cases} x=\pm 7, \\ y=\pm 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\pm 7. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1\frac{1}{3}, \\ y=\pm 3. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\mp 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\mp 1, \\ y=\pm 4. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=\pm 7, \\ y=\pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 7. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\pm 9, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 9. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\mp 2. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=\pm 12, \\ y=\pm 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 12. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=\pm 12, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 12. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 4, \\ z=\pm 2. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=\pm 6, \\ y=\pm 2\frac{2}{3}, \\ z=\pm 1\frac{1}{2}. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 3, \\ y=\mp 2. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\mp 1. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=-1, \\ y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2, \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x=\pm 4, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\pm\sqrt{6}, \\ y=2\mp\sqrt{6}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\pm\sqrt{6}, \\ y=-2\mp\sqrt{6}. \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x=3, \\ y=6; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}, \\ y=-\frac{2}{3}. \end{cases}$

(16) $\begin{cases} x=4, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1\frac{1}{2}, \\ y=4\frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=-1\frac{3}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\frac{1}{4}, \\ y=\frac{3}{4}. \end{cases}$

習題五十四

(1) 甲 12 里,乙 8 里.　(2) 7, 5.

(3) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.　(4) 5, 7.　(5) 16 寸, 12 寸.

(6) 4000 元, 5%.　(7) 6 年, 4 釐.

(8) 上糖 8 斤,每斤 1 角 8 分 5 釐;下糖 12 斤,每斤 1 角 7 分.

習題五十五

(1) 7, 5.　(2) -2.　(3) $13, 4\frac{1}{9}$.

(4) 5.　(5) 無根.　(6) 4.

(7) 7, 2.　(8) ± 12.　(9) 無根.

(10) $5\pm\sqrt{2}$.　(11) $-1, -\frac{1}{2}$　(12) $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

(13) $-3, 5$.　(14) $9, -12$.

習題五十六

(1) $3, \frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$　(2) $-2, 1\pm\sqrt{3}i$.

(3) $\pm2, \pm3$.　(4) $\pm i, \pm2\sqrt{2}$.

(5) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.　(6) $\pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$.

(7) $\pm1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

(8) $\pm i, \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}}$.

(9) $\pm2, 1\pm\sqrt{3}i, -1\pm\sqrt{3}i$.

(10) $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}, 2, -1\pm\sqrt{3}i$.

(11) $\pm\sqrt{\pm i}$.　(12) $\pm1, \pm i$.

(13) $-1, \pm2, 3$.　(14) $\pm1, \pm\sqrt{17}$.

(15) $1, 2, 3, 4$.　(16) $\pm2, \pm\frac{1}{2}$.

習題五十七

(1) $1, \frac{-17\pm\sqrt{287}i}{24}$.　(2) $\pm1, \frac{17\pm\sqrt{93}}{14}$.

(3) $-1, \frac{9\pm\sqrt{77}}{2}$.

(4) $-2\pm\sqrt{2}, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$.

(5) $3, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.　(6) $-1, \pm2$.

(7) $0, 7, -4$.　(8) $2, \pm3$.

(9) $\frac{2}{3}, -4, 7.$ (10) $1, -6, \frac{-5\pm\sqrt{39}i}{2}.$

(11) $5, -3, 1\pm\sqrt{13}.$ (12) $0, -5, \frac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}.$

(13) $1, -8, \frac{-7\pm\sqrt{55}i}{2}.$ (14) $4, 12, -1, -48.$

習題五十八

(1) $\begin{cases} x=4, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=4. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=6, \\ y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4, \\ y=-6. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{19}i}{2}, \\ y=\frac{3\mp\sqrt{19}i}{2}. \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm1+\sqrt{6}i, \\ y=\pm1-\sqrt{6}i. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\pm3, \\ y=\pm2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm2, \\ y=\pm3. \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x=\pm3, \\ y=\pm3. \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2\pm5i, \\ y=2\mp5i. \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x=3, \\ y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-3; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm\sqrt{10}i+1, \\ y=\pm\sqrt{10}i-1. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=\pm4, \\ y=\pm1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm4i, \\ y=\pm i. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4, \\ y=1; \end{cases}$

$\begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \\ y=2\pm2\sqrt{3}i; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\pm2\sqrt{3}i, \\ y=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}. \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x=\pm 2, \\ y=\pm 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\pm 1, \\ y=\pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{11}i\pm 1}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{11}i\mp 1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{11}i\pm 1}{2}, \\ y=\dfrac{-\sqrt{11}i\mp 1}{2}. \end{cases}$

習題五十九

(1) 到(4)係證明題. (5) $x>6$. (6) $x>-\frac{1}{2}$.

(7) $x<5$. (8) $x<35$. (9) $x>3\frac{24}{49}$.

(10) $x<3\frac{15}{17}$. (11) $x<4$. (12) 2, 3, 4.

習題六十

(1) $2\frac{2}{5}$. (2) -3. (3) $-2\frac{1}{3}$. (4) -15.

(5) 4. (6) 3. (7) $\begin{cases} x=5 \\ y=2. \end{cases}$ (8) $\begin{cases} x=-4 \\ y=5. \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x=3, \\ y=0. \end{cases}$ (11) $\begin{cases} x=0, \\ y=-8. \end{cases}$ (12) $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=3. \end{cases}$

(13) $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ (14) $\begin{cases} x=\frac{1}{3}, \\ y=1. \end{cases}$ (15) $\begin{cases} x=-4, \\ y=-3. \end{cases}$ (16) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1\frac{1}{2}. \end{cases}$

習題六十一

(1) x^2-x+3. (2) x^2-2x-2.

(3) $3x^2+2x-1$. (4) $x^2-2xy+3y^2$.

(5) $x^3-6x^2+12x-8$. (6) $x^2-11x+17$.

(7) x^2+x+1. (8) $2x^2+4x-3$.

(9) $2x^2-x+1$. (10) x^2-ax-a^2.

(11) $2x-3y$. (12) $3x-1$.

習題六十二

(1) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$. (2) $\frac{x+3}{x+2}$.

(3) x^2-xy+y^2. (4) $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.

(5) -6. (6) $1, \frac{1}{4}$.

(7) $-3, 2$. (8) $\frac{1}{5}$.

(9) $(a+b)(a^2+ab+b^2)$. (10) $\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

(11) $\pm2\sqrt{2}, \pm2\sqrt{2}i$. (12) 4.

(13) $2, 2\frac{1}{2}$. (14) $5, \frac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$.

習題六十三

係證明題.

習題六十四

(1) 9. (2) $\frac{1}{8}$. (3) 8.

(4) $\frac{1}{8}$. (5) $\frac{1}{10000000}$. (6) $\frac{1}{27}$.

(7) $\frac{1}{6}$. (8) $\frac{1}{8}$ (9) $7\frac{58}{81}$

(10) $\frac{2}{3}$. (11) $1\frac{7}{9}$. (12) 64.

(13) $a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{13}{12}}c$. (14) $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}}$ (15) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

(16) ab. (17) $a^{3}b^{-1}$. (18) a^{-3}.

(19) $a^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{4}}$. (20) $a^{\frac{1}{2}}$. (21) a.

(22) $a^{\frac{11}{6}}$ (23) $a^{\frac{13}{6}}x^{\frac{13}{6}}$. (24) $a^{\frac{17}{6}}b^{-\frac{8}{3}}$.

(25) $a^{\frac{39}{15}}$. (26) 1. (27) $x+x^{\frac{1}{2}}-20$.

(28) $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$. (29) $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

(30) $x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{3}{4}}$ (31) $\frac{1}{4}, \frac{4}{9}$.

(32) 16, 81. (33) $3, \frac{1}{3}$.

(34) 1, 125.

習題六十五

(1) 3, 7, −2, −6. (2) 3, 4, −1, −5. (3) 2, 3.

(4) $\frac{3}{2}$. (5) 3. (6) −3. (7) $\frac{3}{2}$.

(8) $\frac{3}{2}$. (9) $-\frac{3}{2}$. (10) $\frac{3}{2}$. (11) $\frac{7}{4}$.

(12) $\frac{2}{3}$. (13) 0. (14) 1. (15) 2.

(16) 3. (17) −1. (18) −2. (19) −3.

習題六十六

(1) 144.3. (2) 173.9. (3) 148.1.

(4) .01451. (5) .2996. (6) 10700.

(7) .0005907. (8) .3369. (9) 8184×10^{7}.

(10) 2.075. (11) 1007×10^{24}. (12) 86.99.

(13) $a.677, b.1.356$. (14) 6149 方尺. (15) 5.641 尺.

(16) 237200 元. (17) 700 元. (18) 6%.

(19) 100 年. (20) 11.6%.

習題六十七

(1) 57. (2) -39. (3) $9\frac{2}{3}$.

(4) $a+27b$. (5) 第 65 項. (6) $-\frac{1}{7}$.

(7) 7. (8) 18.

(9) 5.7, 8.4, 11.1, 13.8, 16.5, 19.2, 21.9, 24.6, 27.3.

(10) $-1, 2, 5, 8, 11, 14$. (11) 20100. (12) 77284.

(13) $\frac{n(1+n)}{2}$. (14) 4935. (15) $30, \frac{20}{49}$.

(16) 3, 3. (17) 15, -2. (18) 75, 15.

(19) -3, 16. (20) 1, 11. (21) 11025 公寸.

習題六十八

(1) 1458. (2) $\frac{3}{64}$. (3) 256.

(4) $\frac{81}{4}m^4a^5$. (5) $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. (6) 28, 56, 112.

(7) 765. (8) 547. (9) 1953.1.

(10) $\frac{205}{256}m$. (11) \$452.56. (12)(13) 4.

(14) 14.

附錄二

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	附表 1	2	3	4	5
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	0414					
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	0792					
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	1139					
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	1461					
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	1761					
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	2041					
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	2304					
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2553					
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2788					
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	3010					
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	3222	2	4	6	8	11
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	3424	2	4	6	8	10
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	3617	2	4	6	8	10
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	3802	2	4	5	7	9
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	3979	2	4	5	7	9
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	4150	2	3	5	7	9
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	4314	2	3	5	7	8
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	4472	2	3	5	6	8
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	4624	2	3	5	6	8
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	4771	1	3	4	6	7
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	4914	1	3	4	6	7
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	5051	1	3	4	6	7
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	5185	1	3	4	5	7
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	5315	1	3	4	5	6
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	5441	1	3	4	5	6
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	5563	1	2	4	5	6
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	5682	1	2	4	5	6
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	5798	1	2	3	5	6
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	5911	1	2	3	5	6
39	5911	5922	5933	5944	5955	5996	5977	5988	5999	6010	6021	1	2	3	4	6
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	6128	1	2	3	4	5
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	6232	1	2	3	4	5
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	6335	1	2	3	4	5
43	6335	6345	6355	6265	6375	6385	6395	6405	6415	6425	6435	1	2	3	4	5
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	6532	1	2	3	4	5
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	6628	1	2	3	4	5
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	6721	1	2	3	4	5
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	6812	1	2	3	4	5
48	6812	6921	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	6902	1	2	3	4	4
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	6990	1	2	3	4	4

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	附表 1	2	3	4	5
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	7076	1	2	3	3	4
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	7160	1	2	3	3	4
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	7243	1	2	2	3	4
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	7324	1	2	2	3	4
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	7404	1	2	2	3	4
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	7482	1	2	2	3	4
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	7559	1	2	2	3	4
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	7634	1	2	2	3	4
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7709	1	1	2	3	4
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7782	1	1	2	3	4
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7853	1	1	2	3	4
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7924	1	1	2	3	4
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7993	1	1	2	3	3
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	8062	1	1	2	3	3
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	8129	1	1	2	3	3
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	8195	1	1	2	3	3
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	8261	1	1	2	3	3
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	8325	1	1	2	3	3
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	8388	1	1	2	3	3
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	8451	1	1	2	3	3
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	8513	1	1	2	2	3
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	8573	1	1	2	2	3
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	8633	1	1	2	2	3
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	8692	1	1	2	2	3
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	8751	1	1	2	2	3
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	8808	1	1	2	2	3
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	8865	1	1	2	2	3
77	8365	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	8921	1	1	2	2	3
78	8921	8927	8932	8938	8343	8949	8954	8960	8965	8971	8976	1	1	2	2	3
79	8976	8882	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	9031	1	1	2	2	3
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	9085	1	1	2	2	3
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	9138	1	1	2	2	3
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	9191	1	1	2	2	3
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	9243	1	1	2	2	3
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	9294	1	1	2	2	3
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	9345	1	1	2	2	3
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	9395	1	1	2	2	3
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	9445	0	1	1	2	2
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	9494	0	1	1	2	2
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	9542	0	1	1	2	2
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	9590	0	1	1	2	2
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	9638	0	1	1	2	2
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	9685	0	1	1	2	2
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	9731	0	1	1	2	2
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	9777	0	1	1	2	2
95	9777	9782	9776	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	9823	0	1	1	2	2
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	9868	0	1	1	2	2
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	9912	0	1	1	2	2
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	9956	0	1	1	2	2
99	9856	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996		0	1	1	2	2

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
110	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449
111	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488
112	0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527
113	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565
114	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603
115	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641
116	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678
117	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715
118	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752
119	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788
120	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824
121	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860
122	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896
123	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931
124	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966
125	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000
126	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035
127	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069
128	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103
129	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136
130	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169
131	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202
132	1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235
133	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268
134	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300
135	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332
136	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364
137	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396
138	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427
139	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458
140	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489
141	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520
142	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550
143	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581
144	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611
145	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641
146	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670
147	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1770
148	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729
149	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787
151	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816
152	1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844
153	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872
154	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901
155	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928
156	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956
157	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984
158	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011
159	1014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038
160	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066
161	2063	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092
162	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119
163	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146
164	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172
165	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198
166	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225
167	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251
168	2253	2256	2258	2261	2263	2266	2269	2271	2274	2276
169	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302
170	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327
171	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353
172	2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378
173	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403
174	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428
175	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453
176	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477
177	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502
178	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526
179	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550
180	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574
181	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598
182	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622
183	2625	2627	2629	2632	2634	2626	2639	2641	2643	2646
184	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669
185	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693
186	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716
187	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739
188	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762
189	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785
190	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808
191	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831
192	2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853
193	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876
194	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898
195	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920
196	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942
197	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964
198	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986
199	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	2006	3008

(12621