Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 53

Norm von Endomorphismen und Matrizen

Definition 53.1. Es seien V und W endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$$|| \varphi || := \sup \left(|| \varphi(v) ||, || v || = 1 \right)$$

die *Norm* von φ.

Dies ist eine Norm auf dem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\operatorname{Hom}_K (V,W)$. Sie ist ein Spezialfall der Supremumsnorm von Arbeitsblatt 32, wenn man die Inklusion $\operatorname{Hom}_K (V,W) \subseteq C^0(\{v \in V \mid \, || v || = 1\}, W)$ heranzieht. In dieser Situation kann man statt des Supremums auch das Maximum nennen, da das Supremum aufgrund der Kompaktheit angenommen wird. Diese Norm hängt von den gewählten Normen auf V und W ab, aufgrund der Ergebnisse der letzten Vorlesung ist allerdings die Topologie auf dem Homomorphismenraum für jede Norm gleich. Eine wichtige Abschätzung ist

$$|| \varphi(v) || \leq || \varphi || \cdot || v ||$$

für alle $v \in V$, siehe Aufgabe 53.19.

Bei $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$ erhält man bei fixierten Normen auf diesen Räumen ausgewählte Normen auf dem Matrizenraum

$$\operatorname{Mat}_{m \times n}(K) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) .$$

Wegen

$$\operatorname{Mat}_{m \times n}(K) = \mathbb{K}^{nm}$$

kann man den Matrizenraum auch mit der euklidischen Norm, der Maximumsnorm (bezogen auf die einzelnen Matrixeinträge) und der Summennorm versehen. Es gibt darüberhinaus noch weitere Normen, die Bezug auf die Matrixstruktur nimmt. Es sei φ durch die Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ gegeben. Man nennt

$$\max \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| , j = 1, \ldots, n \right)$$

die *Spaltensummennorm* und

$$\max \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| , i = 1, \ldots, m \right)$$

die *Zeilensummennorm*. Die Spaltensummennorm ist die Maximumsnorm im Sinne von Definition 53.1, wenn man die beiden Räume mit der Summennorm versieht, siehe Aufgabe 53.4.

Konvergenz von Matrixpotenzen

Zu einer komplexen Zahl z hängt das Konvergenzverhalten der Potenzen z^n, $n \in \mathbb{N}$, wesentlich vom Betrag der Zahl ab. Bei $|z| < 1$ konvergiert die Folge z^n gegen 0, bei $|z| = 1$ ist die Folge zwar beschränkt, konvergiert aber nur bei $z = 1$, und bei $|z| > 1$ ist die Folge divergent. Die entsprechende Fragestellung ergibt auch für Potenzen von quadratischen Matrizen mit Einträgen über $\mathbb{C}$ Sinn. All diese Potenzen liegen in $\operatorname{Mat}_d(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{d^2}$. Da dies ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum ist, hängt die Konvergenz in ihm nach den Ergebnissen der letzten Vorlesung nicht von einer gewählten Norm ab. Für eine Diagonalmatrix

$$M = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{d-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_d \end{pmatrix}$$

hängt das Konvergenzverhalten der Potenzen

$$M^n = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{d-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} z_1^n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{d-1}^n & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_d^n \end{pmatrix}$$

direkt von den Einträgen in der Diagonalen ab. Beispielsweise konvergieren die Potenzen der Matrix gegen die Nullmatrix, wenn der Betrag eines jeden Diagonaleintrags kleiner als 1 ist.

Beispiel 53.2. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist nach Aufgabe 28.15

$$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Für

$$|\lambda| < 1$$

konvergiert diese Matrixfolge gegen die Nullmatrix, da jeder Eintrag gegen 0 konvergiert, für

$$\lambda = 1$$

konvergiert die Folge nicht, da der Eintrag rechts oben nicht konvergiert und noch nicht einmal beschränkt ist.

Die Konvergenz von Matrixpotenzen hat viel mit Eigenvektoren der Matrix zu tun.

Lemma 53.3. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Es sei $v \in V$ derart, dass die Folge $\varphi^n(v)$ konvergiert. Dann ist der Grenzvektor

$$w := \lim_{n\to\infty} \varphi^n(v)$$

der Nullvektor oder ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert 1.

Beweis. Es sei w der Grenzvektor. Dann ist

$$\varphi^{n+1}(v) = \varphi(\varphi^n(v))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Stetigkeit von φ sind die Limiten vertauschbar, also

$$w = \lim_{n\to\infty} \varphi^n(v) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(v) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\varphi^n(v)) = \varphi(\lim_{n\to\infty} \varphi^n(v)) = \varphi(w).$$

Daher ist w ein Fixpunkt von φ, also der Nullvektor oder ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. $\square$

Lemma 53.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus mit der Zerlegung (im Sinne von Satz 28.1)

$$\varphi = \varphi_{\text{diag}} + \varphi_{\text{nil}}$$

mit einer (untereinander vertauschbaren) diagonalisierbaren und einer nilpotenten Abbildung mit

$$\varphi_{\text{nil}}^k = 0.$$

Dann besitzen die Potenzen von φ die Darstellung

$$\varphi^n = \varphi_{\text{diag}}^n + n\varphi_{\text{diag}}^{n-1} \circ \varphi_{\text{nil}} + \binom{n}{2} \varphi_{\text{diag}}^{n-2} \circ \varphi_{\text{nil}}^2 + \binom{n}{3} \varphi_{\text{diag}}^{n-3} \circ \varphi_{\text{nil}}^3 + \cdots + \binom{n}{k-1} \varphi_{\text{diag}}^{n-k+1} \circ \varphi_{\text{nil}}^{k-1}$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$\varphi^n = (\varphi_{\text{diag}} + \varphi_{\text{nil}})^n,$$

der Vertauschbarkeit und der allgemeinen binomischen Formel. $\square$

Asymptotische Stabilität und Stabilität

Definition 53.5. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann heißt φ *asymptotisch stabil*, wenn die Folge φ^n in $\operatorname{End}(V)$ gegen die Nullabbildung konvergiert.

Im Folgenden werden in der reellen Situation auch die komplexen Eigenwerte eine Rolle spielen. Diese sind die komplexen Nullstellen des charakteristischen Polynoms bzw. die Eigenwerte der Matrix, wenn man sie über $\mathbb{C}$ auffasst. Sie sind nicht Eigenwerte der reellen Matrix im Sinne der Definition. Auch die jordansche Normalform, die ja im Allgemeinen nur komplex existiert, wird ebenfalls in der reellen Situation verwendet.

Satz 53.6. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

(1) *φ ist asymptotisch stabil.*
(2) *Zu jedem $v \in V$ konvergiert die Folge $\varphi^n(v)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $0 \in V$.*
(3) *Es gibt ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_m \in V$ derart, dass $\varphi^n(v_j)$, $j = 1, \ldots, m$, gegen 0 konvergiert.*
(4) *Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von φ ist kleiner als 1.*

Beweis. Aus (1) folgt (2). Sei $v \in V$. Wir können mit einer beliebigen Norm auf V und dem Endomorphismenraum arbeiten, beispielsweise mit der Maximumsnorm. Dann konvergiert wegen

$$|| \varphi^n(v) || \leq || \varphi^n ||_{\max} \cdot || v ||$$

$\varphi^n(v)$ gegen 0. Von (2) nach (3) ist klar. Wenn umgekehrt (3) erfüllt ist, und

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$$

eine Linearkombination ist, so ist

$$\varphi^n (a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = a_1\varphi^n(v_1) + \cdots + a_m\varphi^n(v_m)$$

und aus der Konvergenz der beteiligten Folgen $\varphi^n(v_j)$ gegen 0 folgt die Konvergenz dieser Summenfolge gegen 0. Von (2) bzw. (3) nach (4). Wir können $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen: Im reellen Fall kann man von $V = \mathbb{R}^d$ ausgehen und die Abbildung durch eine reelle Matrix ausdrücken und diese als komplexe Matrix auffassen. Das gegebene reelle Erzeugendensystem ist dann auch ein komplexes Erzeugendensysten für den $\mathbb{C}^d$. Es sei λ ein Eigenwert und $v \in V$ ein Eigenvektor zu λ. Da nach Voraussetzung

$$\varphi^n(v) = \lambda^n v$$

gegen 0 konvergiert, muss λ^n gegen 0 konvergieren und daher ist

$$|\lambda| < 1.$$

Für den Schluss von (4) auf (1) verwenden wir Lemma 53.4, es ist also

$$\begin{aligned}\varphi^n = & \varphi_{\text{diag}}^n + n\varphi_{\text{diag}}^{n-1} \circ \varphi_{\text{nil}} + \binom{n}{2}\varphi_{\text{diag}}^{n-2} \circ \varphi_{\text{nil}}^2 + \binom{n}{3}\varphi_{\text{diag}}^{n-3} \circ \varphi_{\text{nil}}^3 + \cdots \\ & + \binom{n}{k-1}\varphi_{\text{diag}}^{n-k+1} \circ \varphi_{\text{nil}}^{k-1},\end{aligned}$$

wobei k der Nilpotenzordnung des nilpotenten Anteils φ_{nil} ist. Die Eigenwerte von φ sind die Eigenwerte des diagonalisierbaren Anteils φ_{diag}, sie seien mit z_j bezeichnet. Die Summanden sind von der Form

$$p(n)\varphi_{\text{diag}}^{n-s} \circ \varphi_{\text{nil}}^s$$

zu einem festen $s < k$ und einem Polynom $p(n)$. Die Diagonaleinträge von $p(n)\varphi_{\text{diag}}^{n-s}$ sind (nach Diagonalisieren) von der Form

$$p(n)z_j^{n-s}$$

und wegen $|z_j| < 1$ konvergiert dies für $n \to \infty$ gegen 0. Daher konvergiert $p(n)\varphi_{\text{diag}}^{n-s}$ gegen die Nullabbildung und das gilt nach Aufgabe 53.1 auch für das Produkt mit der festen Abbildung φ_{nil}^s. Daher konvergiert auch die Summe gegen die Nullabbildung. $\square$

Definition 53.7. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Der *Spektralradius* von φ ist

$$\rho(\varphi) = \max\left(|\lambda|, \lambda \text{ ist ein komplexer Eigenwert von } \varphi\right).$$

Da es im endlichdimensionalen Fall nur endlich viele (komplexe) Eigenwerte gibt, ist der Spektralradius wohldefiniert. Gemäß Satz 53.6 ist der Endomorphismus genau dann asymptotisch stabil, wenn der Spektralradius < 1 ist. Wir betonen, dass im Reellen der Spektralradius unter Bezug auf die Komplexifizierung berechnet wird.

Lemma 53.8. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Es sei eine Norm auf V gegeben und $||-||_{\max}$ die entsprechende Norm auf dem Endomorphismenraum. Dann gilt für den Spektralradius die Abschätzung

$$\rho(\varphi) \leq ||\varphi||_{\max}.$$

Beweis. Es sei λ ein Eigenwert von φ mit

$$|\lambda| = \rho(\varphi).$$

Es sei $v \in V$ ein Eigenvektor zu λ. Dann ist

$$|\lambda| \cdot ||v|| = ||\lambda v|| = ||\varphi(v)|| \leq ||\varphi||_{\max} \cdot ||v||$$

und Division durch $||v||$ liefert die Behauptung. $\square$

Definition 53.9. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann heißt φ *stabil*, wenn die Folge φ^n in End (V) beschränkt ist.

Beispielsweise ergibt sich aus dem folgenden Satz, dass eine Isometrie auf einem euklidischen Raum V stabil ist, da für jeden Vektor $v \in V$ ja $||\varphi^n(v)||$ sogar konstant ist.

Satz 53.10. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

(1) *φ ist stabil.*
(2) *Zu jedem $v \in V$ ist die Folge $\varphi^n(v)$, $n \in \mathbb{N}$, beschränkt.*
(3) *Es gibt ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_m \in V$ derart, dass $\varphi^n(v_j)$, $j = 1, \ldots, m$, beschränkt ist.*
(4) *Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von φ ist kleiner oder gleich 1 und die Eigenwerte mit Betrag 1 sind diagonalisierbar, d.h. ihre algebraische Vielfachheit ist gleich ihrer geometrischen Vielfachheit.*
(5) *Für eine beschreibende Matrix M von φ, aufgefasst über $\mathbb{C}$, sind die Jordan-Blöcke der jordanschen Normalform gleich*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $|\lambda| < 1$ oder gleich (λ) mit $|\lambda| = 1$.

Beweis. Aus (1) folgt (2). Sei $v \in V$. Wir können mit einer beliebigen Norm auf V und dem Endomorphismenraum arbeiten, beispielsweise mit der Maximumsnorm. Dann ist wegen

$$||\varphi^n(v)|| \leq ||\varphi^n||_{\max} \cdot ||v||$$

auch $\varphi^n(v)$ beschränkt. Von (2) nach (3) ist klar. Wenn umgekehrt (3) erfüllt ist, und

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$

eine Linearkombination ist, so ist

$$\varphi^n (a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_1 \varphi^n(v_1) + \cdots + a_m \varphi^n(v_m)$$

und aus der Beschränktheit der beteiligten Folgen $\varphi^n(v_j)$ folgt die Beschränktheit dieser Summenfolge. Die Äquivalenz von (4) und (5) ist klar, da über $\mathbb{C}$ die jordansche Normalform existiert und man die Eigenwerte und die Vielfachheiten aus den Jordan-Blöcken ablesen kann. Von (2) nach (5). Wir können $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ annehmen. Es sei

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein Jordan-Block der jordanschen Normalform. Bei

$$|\lambda| > 1$$

ergibt sich für einen zugehörigen Eigenvektor v wegen

$$|| \varphi^n(v) || = |\lambda|^n \, || v ||$$

direkt ein Widerspruch zur Beschränktheit. Sei also

$$|\lambda| = 1$$

und sei angenommen, dass der Jordan-Block mindestens die Länge zwei besitzt. Nach Aufgabe 53.16 ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n + n\lambda^{n-1} \\ \lambda^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist aber die erste Komponente

$$\lambda^n + n\lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda + n)$$

nicht beschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für den Schluss von (5) auf (1) können wir die einzelnen Jordan-Blöcke getrennt voneinander analysieren, da die Stabilität nach Aufgabe 53.14 mit einer Zerlegung in die direkte Summanden verträglich ist. Für den ersten Typ folgt die Aussage aus Satz 53.6, für den Typ λ mit $\lambda = 1$ ist es klar, da die Norm der Potenzen konstant gleich 1 ist. □

Für die Konvergenz der Matrixpotenzen gibt es die folgende Charakterisierung.

SATZ 53.11. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

(1) *Die Folge φ^n konvergiert in* $\operatorname{End}(V)$.
(2) *Zu jedem $v \in V$ konvergiert die Folge $\varphi^n(v)$, $n \in \mathbb{N}$.*
(3) *Es gibt ein Erzeugendensystem $v_1, \ldots, v_m \in V$ derart, dass $\varphi^n(v_j)$, $j = 1, \ldots, m$, konvergiert.*
(4) *Der Betrag eines jeden komplexen Eigenwerts von φ ist kleiner oder gleich* 1 *und falls der Betrag* 1 *ist, so ist der Eigenwert selbst* 1 *und diagonalisierbar.*
(5) *Für eine beschreibende Matrix M von φ, aufgefasst über $\mathbb{C}$, sind die Jordan-Blöcke der jordanschen Normalform gleich*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $|\lambda| < 1$ oder gleich (1).

Beweis. Siehe Aufgabe 53.17. □