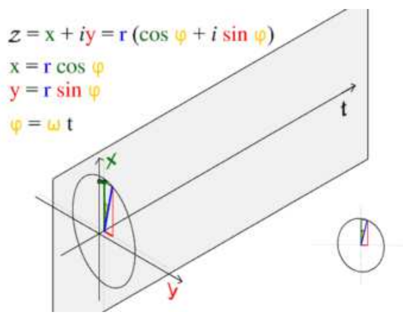
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 37

Differenzierbare Kurven



Eine Animation des Graphen der trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises. Die grünen Punkte sind Punkte des Graphen.

Es sei I ein reelles Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$f\colon I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir auch eine *Kurve* oder einen *Weg* in V. Häufig stellt man sich dabei I als ein Zeitintervall und die Abbildung als einen Bewegungsprozess im Raum V vor. Jedem Zeitpunkt $t \in I$ wird also ein Ortspunkt $f(t) \in V$ zugeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, sich eine solche Abbildung zu veranschaulichen. Bei eindimensionalem V, also $V \cong \mathbb{R}$, ist der Graph die übliche Darstellungsweise. Einen Graphen gibt es bekanntlich zu jeder Abbildung. Bei $V \cong \mathbb{R}^2$ ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$. Häufig skizziert man bei einer Kurve bei $V = \mathbb{R}^2$ oder $V = \mathbb{R}^3$ nur das Bild (man spricht auch von der *Bahn* oder der *Spur* der Kurve) der Kurve. Man beachte aber, dass das Bild nur eine Teilinformation der Abbildung aufzeigt.

Bei einem Bewegungsprozess interessiert man sich natürlich für die „Geschwindigkeit“ zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei versteht man unter Geschwindigkeit nicht nur deren Betrag (oder Norm), sondern auch deren Richtung (die Sprechweisen sind uneinheitlich).

Eine gleichmäßige Bewegung auf einem Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius r, bei der eine volle Kreisbewegung die Zeit a benötigt, die zum Zeitpunkt 0 im Punkt $(r,0)$ startet und gegen den Uhrzeigersinn verläuft, wird durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto \left(r \cos \frac{2\pi}{a} t,\, r \sin \frac{2\pi}{a} t \right),$$

beschrieben. Der Geschwindigkeitsvektor der Kreisbewegung ist zu jedem Zeitpunkt t *tangential* an den Ortspunkt auf dem Kreis (und steht senkrecht zum Ortsvektor). Die Norm der Geschwindigkeit ist bei einer Kreisbewegung konstant, aber die Richtung ändert sich kontinuierlich.

Die Vorstellung der *Momentangeschwindigkeit* wird durch den Begriff der *differenzierbaren Kurve* und ihrer Ableitung präzisiert, der eine direkte Verallgemeinerung von differenzierbaren Funktionen ist. Die Idee ist wieder, zu zwei Zeitpunkten $t < t'$ den Durchschnittsgeschwindigkeitsvektor (die wir den *Differenzenquotienten* nennen)

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \in V$$

zu betrachten und davon den Limes für $t' \mapsto t$ zu bestimmen.

Um einen Limes bilden zu können, brauchen wir, wie schon im Eindimensionalen, eine Metrik (eine Abstandsfunktion) auf V. Wir werden daher euklidische Vektorräume betrachten, also reelle endlichdimensionale Vektorräume, für die ein Skalarprodukt erklärt ist. Ein Skalarprodukt auf V definiert über

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm und über

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

eine Metrik. Für einen Vektor v, der bezüglich einer Orthonormalbasis durch die Koordinaten

$$v = (v_1, \ldots, v_n)$$

gegeben ist, lautet die Formel für die Norm

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Da es auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ und damit eine dadurch induzierte bijektive lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto v_i,$$

gibt, gibt es auch auf jedem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ein Skalarprodukt und damit eine euklidische Metrik. Diese hängt jedoch von der gewählten Basis ab. Allerdings hängen die offenen Mengen,[1] der Konvergenzbegriff und Grenzwerteigenschaften nicht von einer solchen Wahl ab, wie das folgende Lemma zeigt.

[1] Die Menge der offenen Mengen eines metrischen Raumes wird als *Topologie* bezeichnet. Wesentliche Begriffe wie Konvergenz und Stetigkeit hängen nur von der Topologie ab.

Lemma 37.1. *Es sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum. Es seien zwei Skalarprodukte $\langle -,-\rangle_1$ und $\langle -,-\rangle_2$ auf V gegeben. Dann stimmen die über die zugehörigen Normen $\|-\|_1$ und $\|-\|_2$ definierten Topologien überein, d.h. eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann offen bezüglich der einen Metrik, wenn sie offen bezüglich der anderen Metrik ist.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Für uns bedeutet das, dass die im Folgenden zu entwickelnden Differenzierbarkeitsbegriffe nicht vom gewählten Skalarprodukt abhängen. Mit etwas mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass eine beliebige (nicht notwendigerweise euklidische) Norm auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ebenfalls die gleiche Topologie definiert, und man genauso gut mit einer beliebigen Norm arbeiten könnte. Zunächst müssen wir den Grenzwertbegriff für Abbildungen, den wir im Reellen in der zehnten Vorlesung eingeführt haben, zwischen metrischen Räumen erweitern.

Definition 37.2. Es sei (M,d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$g\colon T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum L. Dann heißt $b \in L$ der *Grenzwert* (oder *Limes*) von g in a, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in B(a,\delta) \cap T$ ist $g(x) \in B(b,\epsilon)$. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Statt mit abgeschlossenen Ballumgebungen kann man auch mit offenen Ballumgebungen arbeiten. Eine alternative Bedingung ist, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus T, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.

Diese Definition werden wir hier hauptsächlich in der Situation $M = I$ ein reelles Intervall, $T = I \setminus \{t\}$, $a = t$, $L = V$ ein euklidischer Vektorraum und den Differenzenquotienten

$$g\colon t' \longrightarrow \frac{f(t')-f(t)}{t'-t}$$

anwenden. Dieser ist für $t' = t$ nicht definiert, wir suchen aber dennoch einen sinnvollen Wert für ihn.

Definition 37.3. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f\colon I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f in $t \in I$ *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

existiert. Dieser Limes heißt dann die *Ableitung* von f in t und wird mit

$$f'(t)$$

bezeichnet.

Die Ableitung ist selbst wieder ein Vektor in V. Statt Ableitung spricht man auch vom *Differentialquotienten* in einem (Zeit)-Punkt t. Bei $f'(t) \neq 0$ versteht man unter der *Tangente* an $f(t)$ zum Zeitpunkt t die durch

$$\{f(t) + s \cdot f'(t) \mid s \in \mathbb{R}\}$$

gegebene Gerade.

Definition 37.4. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f\colon I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar ist. Die Abbildung

$$I \longrightarrow V,\, t \longmapsto f'(t),$$

heißt dann die *Ableitung* von f.

Die Ableitung einer differenzierbaren Kurve ist damit selbst wieder eine Kurve. Wenn die Ableitung stetig ist, so nennt man die Kurve *stetig differenzierbar*. Wenn die Ableitung selbst differenzierbar ist, so nennt man die Ableitung der Ableitung die zweite Ableitung der Ausgangskurve.

Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Differenzierbarkeitsbegriff nichts wesentlich neues ist, da er auf die Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

Lemma 37.5. *Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f\colon I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Es sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis von V und es seien

$$f_j\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Komponentenfunktionen von f. Es sei $t \in I$. Dann ist f genau dann differenzierbar in t, wenn sämtliche Funktionen f_j in t differenzierbar sind. In diesem Fall gilt

$$f'(t) \,=\, f_1'(t) \cdot v_1 + f_2'(t) \cdot v_2 + \cdots + f_n'(t) \cdot v_n.$$

Beweis. Sei $t' \in I$, $t' \neq t$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} &= \frac{\sum_{j=1}^n f_j(t') \cdot v_j - \sum_{j=1}^n f_j(t) \cdot v_j}{t' - t} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{f_j(t') - f_j(t)}{t' - t} \cdot v_j. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 37.5 existiert der Limes links für $t' \to t$ genau dann, wenn der entsprechende Limes rechts komponentenweise existiert. $\square$

Die vorstehende Aussage wird hauptsächlich für die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ angewendet.

Beispiel 37.6. Die Kurve

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto \left(t^2 - t^3,\, t \cdot \sin t,\, e^{-t}\right)$$

ist in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und zwar ist

$$f'(t) \,=\, \left(2t - 3t^2,\, \sin t + t \cdot \cos t,\, -e^{-t}\right).$$

Beispiel 37.7. Es sei $f\colon\, I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem reellen Intervall. Dann wird der Graph zu f als Bahn durch die differenzierbare Kurve $I \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$, realisiert. Ihre Ableitung ist $g'(t) = (1, f'(t))$. Der Graph wird in horizontaler Richtung mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen und folgt vertikal dem Funktionsverlauf von f.

Beispiel 37.8. Die trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (\cos t,\, \sin t)$$

besitzt nach Lemma 37.5 und nach Satz 16.8 die Ableitung

$$f'(t) \,=\, (-\sin t,\, \cos t)\,.$$

Wegen

$$\left\langle \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle \,=\, -\cos t \sin t + \sin t \cos t \,=\, 0$$

steht der Geschwindigkeitsvektor stets senkrecht auf dem Ortsvektor. Die Norm des Geschwindigkeitsvektors ist stets gleich 1, der Kreis wird also mit konstanter Geschwindigkeitsnorm durchlaufen.

Lemma 37.9. *Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien*

$$f, g\colon\, I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Summe*

$$f + g\colon\, I \longrightarrow V,\, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) \,=\, f'(t_0) + g'(t_0).$$

(2) *Das Produkt*

$$hf\colon\, I \longrightarrow V,\, t \longmapsto h(t)\cdot f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) \,=\, h(t_0)\cdot f'(t_0) + h'(t_0)\cdot f(t_0).$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) \,=\, cf'(t_0).$$

(3) *Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion*

$$\frac{f}{h}\colon\, I \longrightarrow V,\, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(t_0) \,=\, \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 37.13. □

Man kann natürlich zwei Abbildungen $f, g\colon\, I \to V$ nicht miteinander multiplizieren, so dass in der obigen Produktregel eine differenzierbare Kurve und eine differenzierbare Funktion auftreten. Ebenso muss die Kettenregel mit Bedacht formuliert werden. In Satz 49.2 werden wir noch eine allgemeinere Kettenregel kennenlernen.

Lemma 37.10. *Es seien I und J zwei reelle Intervalle, es sei*

$$h\colon\, I \longrightarrow J,\, s \longmapsto h(s),$$

eine in $s_0 \in I$ differenzierbare Funktion und es sei

$$f\colon\, J \longrightarrow V,\, t \longmapsto f(t),$$

eine in $t_0 = h(s_0)$ differenzierbare Kurve in einen euklidischen Vektorraum V. Dann ist auch die zusammengesetzte Kurve

$$f\circ h\colon\, I \longrightarrow V,\, s \longmapsto f(h(s)),$$

in s_0 differenzierbar und es gilt

$$(f\circ h)'(s_0) \,=\, h'(s_0)\cdot f'(h(s_0)).$$

Beweis. Es seien $f_1, \ldots, f_n$ die Komponentenfunktionen von f bezüglich einer Basis von V. Nach der Kettenregel in einer Variablen gilt

$$(f_i\circ h)'(s_0) \,=\, h'(s_0)\cdot f_i'(h(s_0))$$

für jedes $i = 1, \ldots, n$. Dies ist wegen Lemma 37.5 die Behauptung. □

In der vorstehenden Situation sollte man sich h als eine Umparametrisierung der Zeit vorstellen. Die Bahn der Kurve bleibt erhalten, es ändert sich aber die Geschwindigkeit und eventuell die Orientierung, mit der die Bahn durchlaufen wird. Wenn $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Negation ist, so wird die Kurve mit umgekehrter Zeitrichtung durchlaufen. Die Aussage besagt in diesem Fall, dass die Ableitung der umgekehrten Kurve negiert werden muss.

Lemma 37.11. *Es sei I ein reelles Intervall, V und W seien euklidische Vektorräume und es sei*

$$f\colon I \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Kurve. Es sei

$$L\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$L \circ f\colon I \longrightarrow W,\, t \longmapsto L(f(t)),$$

differenzierbar und es gilt

$$(L \circ f)'(t) \,=\, L(f'(t)).$$

Beweis. Sei $t_0 \in I$ fixiert und sei $t \in I$, $t \neq t_0$. Wegen der Linearität ist

$$L\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) \,=\, \frac{L(f(t)) - L(f(t_0))}{t - t_0}.$$

D.h. der Differenzenquotient zu $L \circ f$ ist gleich dem Wert unter L des Differenzenquotienten zu f. Wegen der Voraussetzung und der Stetigkeit einer linearen Abbildung existiert der Limes links für $t \to t_0$, also existiert auch der Limes rechts, und das bedeutet, dass der Differentialquotient der zusammengesetzten Abbildung $L \circ f$ existiert und mit dem Wert unter L des Differentialquotienten zu f übereinstimmt. □

Beispiel 37.12. Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine differenzierbare Bewegung im Raum, bei der man sich nur für die lineare Projektion der Bewegung auf eine Ebene interessiert. Eine solche Situation liegt beispielsweise vor, wenn man zu einer Flugbewegung nur die Bewegung des Schattens des Flugkörpers auf der Erdoberfläche beschreiben möchte (bei parallel gedachten Lichtstrahlen). Die Projektion wird (in geeigneten Koordinaten) durch eine lineare Abbildung

$$L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

beschrieben. Lemma 37.11 besagt in dieser Situation, dass der Geschwindigkeitsvektor der Schattenbewegung einfach die Projektion des Geschwindigkeitsvektors der Flugbewegung ist.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = ComplexSinInATimeAxe.gif , Autor = Nashev, Lizenz = 1

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9