幾何作圖題
之
方法與理論

比特邁著
高懷萬譯述
庇華甫校閱

解 幾 何 作 圖 題
之
方 法 與 理 論

用於四百一十題上

METHODS AND THEORIES
FOR THE SOLUTION OF
PROBLEMS OF GEOMETRICAL CONSTRUCTIONS
APPLIED TO 410 PROBLEMS
BY

JULIUS PETERSEN.

高 懷 萬 譯

目　錄

原　序

在耶穌紀元前數世紀時，幾何已甚發達．以前代數輔助幾何之處甚多，但以其進展較慢，故古人解作圖題之方法，祗限于單純之幾何；因之此種問題之解答，在彼等之工作上，佔一主要部分．近代之數學家，雖有亦致力于此枝之學問者，而解此類問題之方法，發展較慢．例 Apollonius 亦如 Steiner 曾解 Malfattie's 之問題．所以人皆認作圖題爲謎之一種，祗有少數天賦特才之人，能全解之．結果作圖題頗難在還有此種訓練之學校內，得相當之地位；且無他類問題能如此類問題使觀察及聯想之天才銳敏，並使思想清晰合理；亦無他類問題能如此類問題引學生之注意．

此書乃試教學生如何解作圖題．

已解許多問題後，余致力于解問題之分析，且分類之，爲普通法則．故若余之解答，與其他著作者不同，或更爲複雜時，此因余對于有特性之問題，採一定之方法故也．

余之目的，注重方法；故在普通情形，祗示解答之關鍵，置詳細之討論，則留諸讀者或教者．

書中附有少數插圖；凡一圖形，能令人見之，即可[illegible]記憶其在作圖時之程序步驟、讀此書者，[illegible]，俾[illegible]

單之披閱.

"方法與理論"在1866年初現於丹麥.後經詳細之試驗,始告成功.較有許多有利於研究幾何之証明,此不僅在 Denmark 爲然而在斯俱抵納威牙(Scandinavian)之其他國中亦然.因在本國成功之鼓勵,亦想獻給國外之諸多學子,希其用途,不僅有助于初等幾何之教學,亦可爲研究近世幾何之預備焉.

Copenhagen 1879

Julius Peterson.

緒　　論

命題在幾何中，有兩種情形：1）表示以一定方法所作之定圖形，必適合一定之條件；2）要作之圖形適合一定之已知條件。第一種為定理，第二種為作圖題。

解作圖題時，須用一定之工具，即直尺（有直邊而無度分），以之可作一直線通過二點，及圓規，以之可由一定圓心，以一定半徑作一圓。故任一題之解答，須為此二種運算。

已知此限制，因之諸多顯然簡單之問題，不能解答（例，三分一角，平方一圓等）；蓋凡問題導為方程式，而非一次或二次時，則可証其為不能解之情形。

凡一問題，當其已知之條件，較其所需之條件為多時，則此問題較所決定者為多；設一問題有有限數之解答，則為確定，有無限數之解答，則為不定。

作解確定之問題時，必須陳述：

進行之方法，

正確之証明，

……叙述定數並之極限；以便得0，1，2，…之解答。

……中，頗有題者，為加一條件，即可使之確定。……

……數之解答，而任何之圖形，不能適合焉；但一

切解答，將依已知條件自分爲組。如一點當其適合二條件時卽決定；設祇知一條件，則該點爲不定；但一切適合此一條件之點，必在一直線上或一曲綫上；此種情形，稱爲適合已知條件時，該點之軌跡。同理對于祇滿一條件而不確定之圖形亦然，且其任一點，普通皆有一軌跡。

在解析幾何中，可得一解幾何題之普通方法，顯然設一方法，必須用于相異之問題上，則勢必間接用之，如此在解析幾何內，任一點，以其對于二軸之坐標而決定，但此常與所作之問題無關；此外諸方程之幾何意義，常不易瞭解，且諸方程式，有時非常複雜，實際不能解答。

因直接應用狄卡兒 (Descartes) 幾何之困難，故又有特別之方法(不同之作圖制等)，以此種方法之助，簡單問題之解答，變爲更自然更簡潔；但此種困難可以選擇適當之方法而轉移之。以此方法由代數法變爲單純之幾何法，已告成功，由之可考查圖形已知之部分與所求之部分二者間幾何上之關係，而試求此問題之解答。

欲使此種關係之考查簡單，須先設此問題已解作一圖形，然後再以已知之幾何定理，檢查此圖形。

今設各事皆依一未知點之決定，(此爲普通簡單問題中之情形)，則所應用之方法，可直接由前法得到，卽：分開該點必須適合之二條件，每一條件，必有相當之軌跡，若此軌跡爲一直綫或一圓，則此問題卽可解答，因點位于二者之軌跡上。

則所求點必爲彼等之交點。

若此二軌跡爲二直線，則此題祇有一解答，且祇有在二線平行之情形爲不能解，若此二軌跡爲二圓，或一圓及一直綫，如彼等相交，則此問題有二解答，如相切則有一解答，如無公共點，則無解答。在後一情形及前二平行線之下，其不能解答之性質不同，因其不可能性乃極限之問題。

設軌跡爲他種曲綫，而不能直接用于作圖上；則此問題必須另與考查。然此亦値注意，卽一點可用一直線及一圓錐曲線而決定之，亦可用一直線及一圓決定之；反之設此點由二無關之圓錐曲線所決定，則此作圖爲不可能。

凡用于最簡單之問題上之方法，可推廣至更複雜之問題上，而其法則如下，

設所求圖形之一已知條件移去，再求此不定圖形上諸點之軌跡。

繼然求許多軌跡，至彼等爲直線或圓爲止，爲最重要之事。故在第一章，以以上諸法則之高度發展，叙述此事之重要。

設不能直接應用軌跡，則可用以下之法則：

對于所求之圖形，試作一其他圖形，令已知成分及所求成分間之關係，更加適合；此法則之應用，將于第二章討論之。

以後，以ABC表示三角形；a，b及c爲邊，h_a爲以a爲底之高，m_a爲A之中線或由A平分a之線，v_a爲平分∠A之線之長。R及r爲外接及內切圓之半徑，r_a，r_b及r_c爲傍切圓之半徑（r_a

爲切于b,c之延長線及a邊之圓之半徑)。

在ABCD四邊形內,頂點隨所記載之順序而定。$\angle(a,b)$爲a及b二線間之角。

第一章

軌跡

A 點之軌跡

a. 距一定點,有定距離之點之軌跡為一圓,其圓心為定點,半徑為定距離。

系1. 凡一定圓,其等長諸切線之終點之軌跡,為另一圓,與定圓為同心。

系2. 一定圓之諸切線,其相交含一定角之交點之軌跡為一圓,與定圓為同心。

系3. 切一定圓,有一定半徑之諸圓,其圓心之軌跡為二圓,與定圓為同心,其半徑為二定半徑之和或差。

b. 距一定線,有定距離之點之軌跡,為二線,在定距離上,平行于定線。

系1. 等面積等底並等高之諸三角形,其頂點之軌跡,為一平行于底線之線。

c. 距二定點等距離之點之軌跡,為一線,即垂直並平分二定點間之聯線。

d. 距二定線(交線)等距離之點之軌跡,為二線,伴其二

直角，並平分此二定線間之角。

e. 由諸點連線至一定線之兩端而含一定角，則此諸點之軌跡為一圓之弧，其弦為定線。弧須之含此定角，弦為由弧上各點所含定角下之弦。

設弧上一點適合已知條件，則諸點必皆適合。因諸角皆為同一弧上之角。因弧角 (Angle of segment) 等于定角；故其作法，為在弦之一端作一角等于定角，令一邊為切線，以頂點為切點；垂直此切線于其切點之線必含圓心，而此圓心亦必在弦之垂直平分線上。

設定角為直角則弧必為半圓。

注意，設所求點不知位于定線之何邊，則含此定角之兩弧，必須每邊作一。此二圓之餘弧含此定角之補角。

吾人可以全圓為角之頂點之軌跡下角之定義。設二定點為A及B；則不設為過A及B二線間之角，祇說為過A點之線轉至過B點之線所成之角，即依一定方向，旋轉過A點之線所成之角。因在圓周上各點C，由AC至BC之角，必等於由在A點之切線轉至AB線之角。

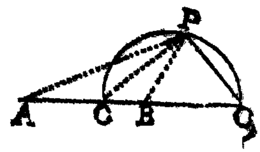
系1. 過圓內一定點之諸弦，其中點之軌跡為一圓；因由中點作線至定點及至圓心二線間之角為直角故也。

系2. 設在一圓內，作內接諸ABC三角形，皆以AB為底，並在此諸三角形內，再作內切圓，則諸內切圓圓心之軌跡為一在AB上之弧，其圓心為AB弧之中點；其餘之圓弧，為切AB線

及BC，AC之二延長線上諸圓圓心之軌跡。因AB爲在所求圓心$R+\frac{1}{2}C$及$R-\frac{1}{2}C$諸角下所對之弦，且AB爲由AB弧之中點作$2R-C$角所對之弦。（R表直角，C表對AB邊之角，譯者）。

f. 與二定點，有定比例（m : n）距離之點之軌跡爲一圓。

設A及B爲定點，P爲一所求點以PC及PC_1線平分∠APB及其補角。



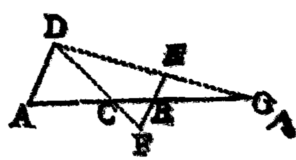
則

$$\frac{AC}{CB}=\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{m}{n}\ ;\quad \angle CPC_1=R$$

C點及C_1點分AB爲定比，並對于每一P點皆相同，至于CC_1線則爲在P點直角下所對之線，依e P之軌跡必爲一圓，CC_1爲其直徑。

C點及C_1點謂之分AB爲調和比m : n，故此問題成爲：分一線爲一定調和比。

此種作法已表之于圖形。AD及BE爲二彼此平行之線，並且



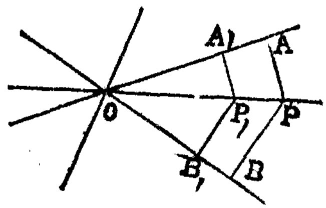
$$\frac{AD}{BE}=\frac{m}{n}$$

令BF = BE；畫DF線及DE線，彼將交AB線于所求之點上

C爲f之一特殊情形，即m = n。

g. 由發點至二定線之距離，具有已知比(m : n)，則發點之軌跡，爲一過過二定線交點之二直線。

定線為OA及OB，設一P點，具此所求之性質，則OP上各點必皆有相同之性質。



因 $\dfrac{OP_1}{OP}=\dfrac{A_1P_1}{AP}=\dfrac{B_1P_1}{BP}$，

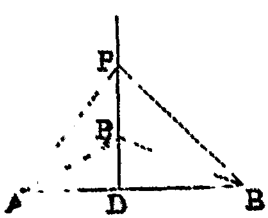
或 $\dfrac{A_1P_1}{B_1P_1}=\dfrac{AP}{BP}$。

如此設已知其一點，則此線即可作出，依b作距二具此已知比之距離，則此點不難求出。

他一線可用相同之方法于∠AOB之隣角中作出，通過O點之四線稱為調和射線 (harmonical rays)，彼交任一線于四個調和點上。

d為g之特殊情形，m=n。

系1. 設已知二直線AB及CD，求一點P，使△PAB及△PCD具一定比，則P之軌跡與在g節者相同，諸高之比為一常數。



h. 由諸點至二定點之距離，其平方差a^2不變，則該諸點之軌跡，為一垂直此二定點聯線之線。

設A及B為定點，P為一所求點，則在AB之垂直線PD上各點，必適合此關係；例如P_1

$$\overline{AP_1}^2=\overline{AD}^2+\overline{P_1D}^2\ ;\ \overline{BP_1}^2=\overline{BD}^2+\overline{P_1D}^2;$$

因此 $$\overline{P_1B}^2-\overline{P_1A}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2$$

同理 $$\overline{PB}^2-\overline{PA}^2=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2.$$

設作一任意直角三角形，其一垂直邊＝a，並以B及A爲圓心，以弦及他一垂直邊爲半徑作二圓，則所求線必過二圓之交點。他垂直邊，必令之够大以便二圓相交。於此可知P點距A點，具有其最大之距離。

系1. 由諸點可作等長之切線至二圓上，則此諸點之軌跡，爲一垂直于圓心聯線之直線並稱爲此二圓之等冪軸 (radical axis)。作一圖形，極易看出，該諸點離二圓心之距離，其平方之差等于二半徑平方之差。設二圓相交，等冪軸必通過二者之交點。三圓之等冪軸，必通過一點，稱爲等冪心 (radical center)，二未交圓之等冪軸可作一第三圓交此二圓而決定之。

系2. 諸圓交二定圓于正相反之點上，其圓心之軌跡，爲一垂直于聯心線之直線，且其距一圓心之距離，與等冪軸距他一圓心之距離相等。

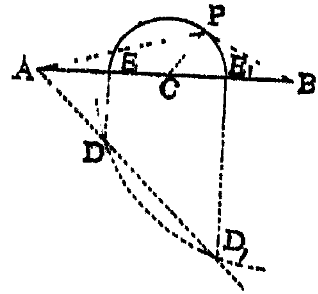
系3. 諸圓正交二定圓（即能使切于交點之切線互相垂直），則此諸圓心之軌跡，爲二定圓之等冪軸。

i. 由諸點至二定點之距離，其平方和a^2不變，則此諸點之軌跡爲一圓，其圓心在二定點聯線之中點上。

設A及B爲定點，P爲一所求點，作中線PC則

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2\overline{PC}^2+\tfrac{1}{2}\overline{AB}^2$$

或 $\overline{PC}^2=\tfrac{1}{2}a^2-\tfrac{1}{4}\overline{AB}^2$.

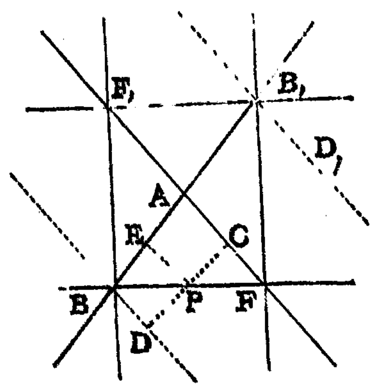


故所求諸點離C點之距離不變，在AB線上求圓所通過之點，作∠BAD=45°，以a為半徑由B作圓交AD線於D點及D_1點，由此點作線垂直於AB，即得E點及E_1點；因

$$a^2=DE^2+EB^2 \text{ 及 } a^2=D_1E_1^2+E_1B^2$$

但 $DE=AE$ 及 $D_1E_1=AE_1$

k. 距二定線之點，其距離具一定和或定差者，則其軌跡為一四直線組。



設AB及AC為定線，P為一所求點，PC+PE等於a，延長CP至D令PD=PE，D之軌跡必為二線，且在a距離處平行於AC。設為BD線及D_1B_1線。所求諸點皆離AE及BD或D_1B_1等遠，故該等皆位於該線交角之平分線上。此亦為取距離之差等於a之問題之解答；檢查此圖形，極易見內有限部分BF，FB_1，B_1F_1

，及F，B其各點距定線之距離之和爲 a；未限部分，其各點距定線之距離之差爲a。

注意， 取P爲正或負，依P之位置在定線AF 之一邊或他邊而定，取EP爲正或負，依P對于AB之位置而定，如此即可得一整線爲軌跡；四線分別具有：

$$CP+EP=a; \qquad CP-EP=a;$$

$$-CP+EP=a; \qquad -CP-EP=a.$$

以此諸軌跡之助，下面之問題，不難解答；所求之點，其必須適合之二條件，分別討論之，則點之軌跡皆可求得。

例 題

1. 求距三定點等遠之點。(c)。
2. 求一距三定線等遠之點。(d)。
3. 求作一已知三邊之三角形。(a)。

以一定半徑，求作一圓，疵

4. 過二定點。(a 。
5. 過一定點及切一定線。(a及b)。
6. 過一定點及切一定圓。(a)。
7. 切二定線。(b)。
8. 切一定線及一定圓。(a及b)。
9. 切二定圓。(a)。
10. 已知a，h_a 及 m_a，求作一三角形。(a及b)。

11. 求作一切線至一定圓上，與一定線相交，使交點離切點之長，等于一定長。(a系1)。

12. 求作一圓過一定點，並切一定線或一定圓于一定點。(c)。

13. 在一定圓上，求作一點，使離一定線，具一定距離。(b)。

14. 在一定線上，求作一離二定點等遠之點。(c)。

15. 求作一圓，切二平行線，並過一定點。(d及a)。

16. 由一定點，求作一切線至一圓上。(e)。

17. 已知A，a及h_a求作一三角形。(e及b)。

18. 已知A，a及m_a求作一三角形。(e及a)。

19. 求作一點由之看二定線自二定角下(Pothenot's problem)。(e)。

20. 已知一角，一鄰邊及二對角線，求作一可內切之四邊形。(e及a)。

21. 求作一點，使其離二定線之距離，具定比。(g)

22. 在一三角形內，求作一點，使其離三頂點之距離具定比。(f)。

23. 過一定點，求作一線，交一定圓，使一定線離其二交點之距離，具一定和。

    決定弦之中點。(e系1及b)。

24. 求作一點，由之切二定圓之切線，具二定長。(a系1)。

25. 求作一點，由之看二定圓，在二定角下.(g系2).

26. 在一定三角形內，求作一內接等腰三角形，已知其高，並其底與定三角形之一邊平行.(b及c).

27. 已知圓心在一定線上，並其圓周離他二定線之距離，求作一圓.(k).

28. 已知A, V_A及r，求作一三角形.(d b及6).

29. 已知AB,BC,AC及二對角線間之角，求作一可內切之四邊形.(3及1).

30. 求作一點.由之切三定圓之切線爲等長.(b系1).

31. 已知A, a及a^2+c^2，求作一三角形.(e及1).

32. 在一定三角形內，求作一點，由之畫線至三頂點，分此三角形爲三等分.

設ABC爲此三角形，O爲所求點.則$\triangle AOB=\triangle AOC$之條件，決定O之軌跡爲一過A之直線.因中線平分此三角形，BC之中點必爲軌跡上之一點，故此軌跡必爲中線本身，如此則所求點爲三中線相交之點.

33. 在一三角形內，以二定邊，及一頂點在一定點上作一內接三角形.(a).

34. 求作一圓，切三定等圓，並抱括彼等.(f).

35. 已知a, h_b及h_c，求作一三角形.(e及a).

36. 求作一點，使之離一定角之頂點，具一定距離，離其二邊，具一定比.(a及g).

37. 已知a,A及 b^2-c^2,求作一三角形.(e及h).

38. 已知a,h_a及b^2+c^2,求作一三角形.(h及i).

39. 已知在弦上之角,弦上二點,及其他各邊上一點,求作此直角三角形.(b及c).

40. 以一平方形外接於一等邊三角形上,其一頂點與此三角形之一頂點相同.

求平方形之對頂點.(e及c).

41. 已知a,A及r,求作一三角形.(e系2).

42. 分一定線為二部,令另一定線為一比例中項,(e及b).

43. 已知一直角三角形;求作一圓切其弦,過弦所對之角,並使圓心在一邊上.(d).

44. 已知二平行線,其一線上一點A,及線外一點O,求作一線過O,交過A之線于X點,交他一平行線于Y,使AX=AY.

求XY之中點.

45. 求作一點,由之看一定線之三部分AB,BC,CD在相等角下(f).

46. 在一三角形內,求作一點,由之三邊似乎相等,(即由之看三邊在相等角下).(e)

47. 求作一點,由之看三圓,似乎相等.(即在等角下).

所求點到諸圓心之距離,必具如諸半徑之比之比例;故此點可用f求得.

48. 已知a, h_a及b : c, 求作一三角形。(b及f)。

49. 在一定四邊形內, 求作一點, 由之至一對對邊之距離, 具一定和, 至他對邊之距離, 具一定比。(g及k)。

50. 在一圓周上, 求作一點, 使之至二定線之距離之和, 爲極小。(k)。

51. 求作一圓正交 (intersecting orthogonally) 三定圓。(h系3)

52. 求作一圓交三定圓于正相反對之點上。(h系2)。

53. 在一定圓內, 求作一內接直角三角形, 使其夾直角之邊, 各過一定點。(e)。

54. 在一定圓內, 求作一內接直角三角形, 已知一銳角及一垂直邊上一點。(e)。

55. 在一圓臺球桌上, 二球位于同一直徑上; 一球必如何被彈, 才能使之由圓周上反回後, 打中他球? (f)。

在以上例題中, 可直接應用軌跡; 一點或直接求出, 或問題以該點之決定而被解。非此情形者, 須用下列諸法則:

附定成分導于圖形上; 如已知二線之和, 此仍不能求得此二線, 但已知之和, 其本身必須引出, 普通皆令其一端落于一定點上而作出。

以聯慣之觀察瞭解圖形, 以便將已知成分之助, 更易于求得未知之線及角。

然後試求圖形本身為已知成分所決定之部分，並求可直接作出而能決定圖形之他部分者。故于諸部分中令擇其一，選一能決定圖形之大部分者最佳。此原則多用于求已知三成分之三角形上。

凡三角形之邊，或彼等之和或差，常用切諸邊之四圓導出之。每邊及其延長線含有二頂點及四切點，並此六點中任何二點間之距離可以三角形之邊表出。普通以S爲周長之半。

a) 內切圓分邊所成之部分，等于S−a，S−b，及S−c。

b) 以r_a爲半徑之圓，其二切點b及c離A之距離皆等于S。從此切點至內切圓之切點之距離爲a。

c) 內切圓及傍切圓，切a於二點，彼離B及C等遠。此切點間之距離爲b−c或c−b.

例　題

56. 已知AB，BC，AC，BD及∠D，求作一ABCD四邊形。

作△ABC，再決定D點。(a及e)。

57. 已知∠A，∠ABD，AC及BD，求作一可內切之ABCD四邊形。

作△ABD；因是外接圓即被決定，則C可依a求出。

58. 已知AB，AC及AD，求作一平行四邊形。

59. 已知A，h_a及V_A，求作一三角形。

先以h_a及V_A爲二邊作一三角形。

60. 已知h_a，m_a及V_a，求作一三角形。

先以h_a及m_a爲二邊作一三角形，再依a及c 決定外接圓之圓心。

61. 已知a，R及h_b，求作一三角形。

以a及h_b爲邊作一三角形，再依a求外接圓之圓心。

62. 已知B，a及r，求作一三角形。

63. 已知a，b＋c及h_b求作一三角形。

64. 已知一邊及二對角線，求作一四邊形。

65. 已知h_a，m_a及$a=2b$，求作一四邊形。

66. 已知AC，∠CAB，∠ACD，CD及DB，求作一四邊形

作△ABC，于是B卽決定。

67. 過一定點，求作一線交一三角形之二邊于二點，使此二點在過第三邊二端點之圓上。

68. 已知a，h_b及 m_a求作一三角形。

69. 已知h_a，m_a及b，求作一三角形。

70. 已知h_a，h_b及B，求作一三角形。

71. 已知h_a，m_a及a：b，求作一三角形。

72. 已知h_a，B及C，求作一三角形。

73. 已知a，A及b＋c，求作一三角形。

延長AC于A外至D，令AD＝C，導引b＋c于圖形上，並作BD；于是作出△CDB，$\angle D=\frac{1}{2}A$，A卽可依C求得

由此顯然，設BC爲一定弦，及一弦BA延長至D，令AD=DC，D之軌跡必爲一圓，其圓心在BC弧之中點上。

74. 已知A，b及a－c，求作一三角形。

延長c於A外，使延長部分等于a－c。

75. 分一定弧爲二部，使其二弦之和爲最小。

76. 已知A，b＋c，h_b＋DC及D爲h_b之垂足，求作一三角形。

77. 已知a，b＋c及B－C，求作一三角形。

78. 已知a，A及b－c，求作一三角形。

79. 以另一定平方，外接于一定平方上(73)。

80. 以另一定n邊之正多邊形，外接于一定n邊之正多邊形上。

81. 已知AB，BC，BD，∠A及∠B，求作一四邊形。

82. 已知AB，AC，∠A，∠D及∠C，求作一四邊形。

83. 已知R，AC，BD及AB＋BC，求作一可內切之四邊形。

作圓；再作AC；求B(73)；再求D。

84. 已知AB，BC，AC及CD＋DA，求作一可內切之四邊形。

85. 已知AB，CD，AC，∠BAC及∠ABD，求作一四邊形。

86. 已知AB＋BC，DA，BD及∠A，求作一可內切之四邊形，

87. 已知a，b－c及B－C，求作一三角形。

作BD，使AD＝AB，故 DC＝b－c；于是 ∠DBC＝$\frac{1}{2}$(B－C)得易看出，而△BDC即决定，再依c求得A。

88. 已知C，V_A 及B－C，求作一三角形。

以c及V_A 爲邊作一三角形，使∠(V_A ，a) ＝90°－$\frac{1}{2}$(B－C)。

89. 已知對角線一平行邊及一角，求作一梯形。

90. 已知一線含A點及線外一點P，在此線上，求作一點X，使AX＋XP等于一定線m，(取AX時并其符號取之)。

由A點置m于已知線上；于是依c得X。

91. 已知二點，A及B，及一線過B，在此線上求二點，X及Y使離B等遠，並由A視XY在一定角下。

延長AB至C令BC＝AB。

92. 二定平行線，各線上一點A，B，及一定點O在二定平行線間，求作一線過O交定平行線于X及Y，使AX及BY(并其符號取之)具一定和。

平分AC，YC之線等于AX。

93. 已知a，A及CD×b，並D爲h_b之垂足，求作一三角形。

h_a交a之點極易決定。

94. 已知B角，c－a並b爲h_b所分部分之差。求作此三角形。

置此定長AD及AE于AB及AC上，得∠AED(BE＝BD＝BC)。

95. 已知三點A,B,C,及一線過A;求作一圓過A及B並交已知線于另一點D,使CD線為切圓于D點之切線。

$\angle BDC = \angle BAD$,因之D即易求得。

96. 已知R,h_a及$B-C$,求作一三角形。

在至A之半徑與h_a間之角已知。

97. 在$\triangle ABC$內,求作一線$XY \parallel BC$,使$XY = XB + YC$。

所求線含內切圓之圓心。

98. 已知$B-C$,V_A及$\dfrac{b+c}{a}$之比,求作一三角形。

99. 在一平行四邊形ABCD內,求作一線AX過CD線上一點X,使$AX = AB + XD$。

AX上一點E,由之$AE = AB$,亦必為BD上之一點。

100. 已知AB及∠A,及一直徑過C交AB之點;試以一圓外接于此三角形上。

由圓心視DB在一已知角下。

101. 已知AD,$AB-BD$及$AC-CD$,AD為∠A之平分線,試作一三角形,

在BC上截BA及CD,使DA_1及DA_2為已知之差。AA_1A_2圓及內切圓為同心圓,且有一已知直徑。

102. 已知由對角線之交點上垂直線至四邊上之點求,作一四邊形。

已知相對邊之垂線間之角。

103. 在一直角三角形之一邊上,已知A及B二點,在他一

線上，求一X點，使∠ XB＝°∠ABX。

求XY之中點，Y為XB上之點而AX＝AY。

104. 過一定點，求作一線，交一定角作成一三角形，使其周圍等於一定長。

作一傍切圓。

105. 已知A，V_A及$a+b+c$，求作一三角形。

106. 已知A，r及$a+b+c$，求作一三角形。

107. 已知A，R及$a+b+c$，求作一三角形。

a為已知，則此題變為73或187。

108. 已知r，r_a及V_A求作一三角形。

r及r_a可決定h_a

109. 已知r，r_a及$b-c$，求作一三角形。

$b-c$為二切點間之距離。

110. 已知a，r及$b+c$，求作一三角形。

已知S及a並可決定二切點，因即可決定一頂點。

111. 已知a，r及$b-c$，求作一三角形。

112. 已知h_a，r及$a+b+c$，求作一三角形。

a已知。

113. 已知a，r_b及r_c，求作一三角形。

二切點間之距離已知。

114. 已知r_a，r_b及$a+b$，求作一三角形。

二切點間之距離已知。

115. 已知 r_b, r_c 及B—C，求作一三角形。

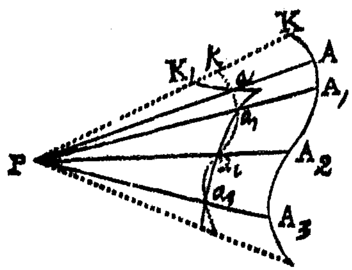
二圓之聯心線與BC線間之角已知。

116. 已知a, b+c及V_A，求作一三角形。

因內切及傍切圓之圓心，及彼等公共切線之交點爲調和之安置，則諸點在AB上之射影亦必爲調和之安置，關于此四點如已知其三點，則第四點即可從而求得。

此問題之簡單解答爲畫V_A，並決定B及C，此二點離V_A兩端之距離，具一定比(b+c) : a。

曲線之倍乘法 (Multiqlication of curyes)
(放大或縮小)



設由一點P畫線至一定曲線K之任一點A上，此線爲a點分爲Pa : PA = m : n，則a之軌跡，必爲一曲線k，與定曲線相似。

此二曲線稱爲相似安置 (similarly situatud)，P點則稱彼等之相似中心(centre of similitude)。在曲線上，相似安置點，爲含在過相似中心之同一線上之點。此種觀念，可擴大之，設在曲線之平面上任一點爲屬于一組者，則其相似安置點在

另一組上。設認相似中心爲屬於一組之點，則在另一組上，其相似安置點，必與之相合。此種相似之理論，在普通幾何教科書中，已論及之，于此祗陳述下面之定理：

凡一直線或圓卻有一相當之直線或圓。

凡相似安置線皆平行。

凡相似安置角皆相等。

凡相似安置線，皆爲m : n之比。故此諸圖形，稱爲依此比相似。

設在PA上延長Pa于P外，以上諸定理，仍然真確。則此組稱爲反相似安置(inuersely similarly situated)。

凡二圓可認爲正或反相似安置，其二相似中心稱爲外相似及內相似中心。

以上述之助，可解一應用甚廣之問題：

過一點P，求作一線，交二定線，K及K'于A及a點，令PA及Pa具一定比m : n。

令定點P爲相似中心，依m : n之比，作一曲線k，與K相似；此曲線交K'于所求點上，解答之數等于K'及k交點之數，設定曲線爲諸直線及諸圓弧所構成，則此問題恆可以直尺及圓規解之。

設A及a位于定點之一邊 (m : n爲正)，則所作之k與K之安置爲正相似；設在相對邊，則k與K之安置爲反相似。

對于一定曲線，依m : n之比，作一曲線與之相似並爲相似

安置，則稱爲對于相似中心以 $\pm\frac{m}{n}$ 倍乘定曲線，其正負依相似安置爲正或反而決定。

倍乘一直線，祇倍乘其一點卽足，線之方向不變。

倍乘一圓，倍乘其圓心及半徑，或其圓心及圓周上一點卽可。

例　題

117. 過一定點 O，求作一線，使交二定線之點離 O 之距離具 m : n之比。

以 O 爲相似中心，以 $\pm\frac{m}{n}$ 倍乘任一定線，並作線至所求之交點上。

118. 過圓內一點 O，求作一弦，被 O 分爲m : n之比。

以 O 爲相似中心，並以 $-\frac{m}{n}$ 倍乘定圓；則所求線通過新圓與定圓之交點。設定點在圓外卽以 $\frac{m}{n}$ 或$\frac{n}{m}$倍乘之。

設弦及圓外截下之部分，二者間之比爲m/n，卽以 $\frac{m}{m+n}$ 或 $\frac{m+n}{m}$ 倍乘之。

119. 過二圓之一交點 O，求作一線，使其爲二圓所截之弦相等。

以 O 爲相似中心，以 -1 倍乘一圓。

120. 在一定四邊形內，求作一內接平行四邊形，其中心爲一定點。

121. 已知a，b及 m_c，求作一三角形。

作CE $=m_c$，以C爲圓心，以a及b爲半徑作二圓；再以E爲相似中心，以－1倍乘一圓。

設先作一定邊，則此解答必以$\frac{1}{2}$倍乘一弧，或以2倍乘他一弧，後者最易，但需大篇幅。

122. 已知a，A及 m_b，求作一三角形。

于a上作一弧含A，由B以 m_b 爲半徑作一弧；以C爲相似中心，以2倍乘此弧，或以$\frac{1}{2}$倍乘第一弧。

123. 過圓周上一定點，求作一弦爲另一定弦所平分。

以定點爲相似中心，以2倍乘定弦，或以$\frac{1}{2}$倍乘定圓。

124. 過二同心圓，求作一線，使小圓之弦爲大圓者之半。

125. 已a，$\frac{b}{c}$ 及 m_c，求作一三角形。

126. 已知一角及二中線，求作一三角形。

127. 已知三中線，求作一三角形。

變爲121之中線，被其交點分爲1：2之比。

128. 已知重心（三中線之交點）、一頂點及二曲線（直線或圓）含其餘二頂點，求作一三角形。

129. 已知a，m_b及$\angle(m_a, b)$，求作一三角形。

130. 已知b，m_b及$\angle(m_a, b)$，求作一三角形。

131. 已知∠A，DB，∠ACB並AC部分間之比，求作一可內切之四邊形。

132. 求作一平行四邊形，使其二對頂點在二定點上，其他二頂點在一定圓上。

133. 在一三角形內，由A向BC作一線AD，使之為BD及DC之比例中項。

用外接圓。

134. 已知a，b及V_c，求作一三角形。

135. 已知A，b及∠(m_a，a)，求作一三角形。

136. 在一定三角形內，求作一線過A，使AY及AX具一定比，BX及CY皆垂直於AX。

137. 作二定圓之公共切線。

認二定圓為相似形，則有二相似中心，此相似中心，必位於連心線上。一線過二圓之平行半徑之頂端，使半徑為相同或相反之方向，而該線過其外或內相似中心，由相似中心至一圓，之切線亦必切于他一圓。

138. 一定點O及二定圓，對此圓作平行切線，令其離O之距離為一定比。

對于O倍乘任一定圓，此題即變為137。

139. 已知A，m_b及∠(a，m_c)，求作一三角形。

140. A及B為在一圓周上之二定點；在圓周上求一點X，使XA及XB交一定直徑於Y點及Z點，使此二點，距

圓心之距離，具一定比。

對于圓心倍乘AX，Y落于Z點上；則A必落于一已知點A_1，則$\angle A_1ZB$卽知。

141. 已知三點，並此點分三邊爲三定比之比，求作此三角形。

設ABC爲定三角形，D，E及F爲定點，及BD：DA＝m：n；AF：FC＝p：q；CE：EB＝r：s。以D爲相似中心，以一$\frac{n}{m}$倍乘BD；D必不動而B落于一未知點A；然後對于F以一$\frac{q}{p}$倍乘DA，A必落于C，D落于一知點D_1；再對于E以一$\frac{s}{r}$倍乘D_1C，則C必落于B，D_1落于一新知點D_2。

倍乘後線之方向不變，則必得BD_2平DB_1並DD_2落于AB線上。由E點起再以同樣相反之運算求得BC線。

凡多邊形，皆可用此種作法作之。

在特殊情形，已知諸邊之中點，且邊爲偶數，則此題爲不定，或不能解。

142. 已知四同心圓；求作一線，依次交此圓于A，B，C及D諸點，使AB＝CD。

設(AB)爲A圓上一點對于B圓之冪(power)，並設他組交點爲A_1，B_1，C_1及D_1，則可得$(AD)=AD\times AD_1$；$(BC)=BC\times BC_1$；AD_1等于BC_1，于是得

$AD : EC = (AD) : (EC)$.

畫二線，使其一線被A及D二圓所截之部分，等于他一線被B及C二圓所截者，則得此比。再知AB:AC之比，則可得所求之線，而A爲任意所選之點。

143. 在一四邊形ABCD內，已知AB，BC，CD及AC；第一線爲固定，求下之軌跡：

α）頂點D，

β）對角線，BD之中點。

γ）聯二對角線中點之線之中點？

144. 在一以O爲圓心之圓內，作一固定直徑AOB及一弦BC延長至D，使CD＝BC，求OD及AC交點之軌跡。

145. 已知一定點A及一線繞另一定點B旋轉，求A點之對稱點之軌跡。

相似法 (Method of similitvde)

曲線之倍乘法，爲一更普通之相似法內之一種。此法當與一定條件而得一組相似（及相似安置）圖形時用之。在前曾考圖形中完全被決定之部分，今試求圖形中已知其形之部分。

最重要之情形如下：

a）知一定長，其他知數定角及數定比，捨定長，試作一圖形具此定角及定比，如此所作成之任一圖形，明與求者爲相似

,則所求之圖形,可藉定線導出而求得。

146. 已知二角及一線(中線,高,周圍等)求作一三角形。

任作一三角形含已知角,並另作一與此三角形相似之三角形含已知線。

147. 已知A,a及b:c,求作一三角形。

其已知比並含A角之三角形,必與所求之三角形相似。

148. 已知對角線與邊之差,求作一平方形。

149. 已知A,b及a:c,求作一三角形。

150. 在ACB圓心上一定角;求作一切線,使切點及定角兩邊交切線之點,分爲一定比。

先作一任意大小之切線;則圓心即可決定。如此所得之圖形與所求之圖形相似,再以圓心爲相似中心,則所求之大小,極易得到。

151. 已知A, h_a並a爲h_a所分之部分之比,求作一三角形。

152. 已知三高線,求作一三角形。

可知邊之比。由圓外一點作三割線,使割線之外部等于諸已知高,則三割線對于三角形之邊成比例。

153. 在一半圓內,求作一內接四邊形與一定四邊形相似並令其二頂點在直徑上,他二頂點在圓周上。

繞定四邊形,作一外接半圓,則此圖形與所求者必相似。

b)在以上例題中,所求圖形之位置無定;若圖形對于某定線或點必具某種位置,則必須試去一該種條件,如此得一組相似安置之圖形.圖形上一切點之軌跡,必為過相似中心之諸直線,作任一此種圖形,即得所求之圖形,因其與此種圖形為相似安置,故亦必適合該去之條件.此種條件,普通為一線必具某定長,或一點必置于一定線上,或一線必過一定點.

154. 在一定三角形ABC內,求作一內接三角形abc,令其邊平行于三定線.

將a必在BC上之條件除去,則一組以A為其相似中心之相似安置之三角形,必適合其他之條件,作任一$a_1b_1c_1$及Aa_1,則Aa_1交BC于a.

155. 在一定三角形扇形或弓形內,求作一內接正方形.

156. 在一定三角形內,求作一平行四邊形,與一定平行四邊形相似.

157. 過一定點,求作一線與二定線作成相等之角.

158. 過一定點,求作一線,為過一點之二定線截下之二部分具一定比.

在一定線上,任取一點代替定點(117).

159. 過一定點,求作一線,截一定角之邊為定比.

160. 在一三角形內,求作一線平行于其一邊並分其一邊為一定比

161. 依一定方向,求作一線,交二定角之邊,使被截部分

為一定比。

設BAC及DEF為定角，X為在EF上所求之點，如去EF，X必畫一直線過DE之一點，該點為一線依定方向過A點交DE之點。

162. 已知高及一等邊之中綫，求作一等腰三角形。

以已知綫為邊之三角形可即劃畫出；于是知以中線為一邊，以等腰三角形之底點為其對頂點之三角形之形狀。

163. 在一圓周上，已知一點A及弦EC，求作一弦AD交EC於F，使DE：DC之比為一定比。

已知△CFD之形狀，以C為相似中心，另作一相似三角形。

164. 在一圓內，已畫二半徑；求作一弦，為此二半徑三分。

165. 在一四邊形內，求作一內接菱形，令其邊平行於四邊形之對角線。

166. 在一定三角形內，求另作一內接三角形XYZ，其YZ之方向，X在BC上之點及XY：XZ之比皆知，

去BC(但非由A過BC上定點之綫)，並以A為相似中心。

167. 依一定方向，求作一綫分一四邊形之一對對邊為比例線段。(154)。

168. 在一三角形內，求作一綫平行于一邊，使之為分他為

段之比例中項。

169. 已知一點B及二平行線，並其一線過A，過A及B求作二平行線，使之與已知平行線作成1)菱形，2)具一定周圍之平行四邊形，3)一平行四邊形，其邊具一定比。

170. 在一三角形內，求作一內接菱形，令其一頂點與定三角形之一頂點相合。

171. 在一圓內，求作一內接等腰三角形，已知其底及高之和。

設△ABC為所求之三角形，於此三角形上，延長高BD至E令BE等於底及高之和。則必得DE＝2AD，故△ADE之形狀可知。今以E為相似中心，則此問題，極易解決。

172. 在一三角形內，作一具定周圍之內接長方形。

將周圍之半，引于此圖形中。

173. 在一三角形內，求作一內接三角形，使一頂點A在前一三角形一邊之一定點上，已知A角，並其對邊平行于一定線。

174. 在一定三角形內，求作一內接平行四邊形，使其邊具一定比。而一邊在BC上，並此邊之一端，在BC之一定點上。

175. 在一定三角形之一邊上，求作一點，由之依一定方向畫線至他二邊上，使具一定和。

176. 已知一點B及二平行線AX及CY，過B點求作一線交二

平行線于二點X及Y，令AX及AY具一定比。

求B；在AX上任擇X_1代X，並在AY上決定相當于Y之Y_1點。

177. 已知一角及一點，過此點求作XY線，交已知角之二邊於X及Y。使XY離頂點之距離，與一依定方向聯X及他邊上一點Z之線XZ，具一定比。

求P並在AX上任擇一點X_1代X。

178. 在一三角形ABC內，依一定方向求作一線，交AB于X，BC於Y，使AX及CY具一定比。

知AXYC之形狀；以A為相似中心，並擇B代X。

179. 在一三角形ABC內，求由AB一點X至AC一點Y，作XY線使BX＝XY＝YC。

已知BXYC之形狀。

凡作A，a＋b及a＋c之三角形之問題可變為179。

180. 在一三角形內，求作一線XY∥BC，使一定關和關係(例 $\overline{XY}^2=XB\times YC$；$\overline{XY}^2=\overline{XB}^2+\overline{YC}^2$等)存在于XY，XB及YC之間。

181. 求作一圓，過一定點A，並切于在O點相交之二定線。

以O為相似中心，則凡切此二定線之圓，必與所求圓為相似安置。OA線必交此圓于一點，而與在所求圓上之A點為相似安置。故二交點決定二解答。今欲求圓之圓心，可由A畫線平行于在此圓上交點與圓心之中線而

決定之。

182. 在一定線上，求作一點，使之離一定點及一定線之距離相等。(一直線及一拋物線之交點)。

決定點，以二定線之交點為相似中心。此問題實際上與前一題相同。

183. 在一定線上，求作一點，使其離一定點之距離及離一定線之距離成一定比。(一直線及一錐面曲線截面之交點，以焦點，準線及離中心excentricity而決定之)。

由所求點至定線之垂直線可用一同定線作成一定角之線代替之，而此解答不變。

184. 過一定點，求作一圓，使其圓心在一定線上，並為另一定線所截之弧同一定圓心角相當。

185. 過二定點，並切于一定直線求作一圓。

186. 在三角形ABC內，依一定方向求作一線，交AB于X，BC于Y，令XY＋YA為一定長。

187. 已知a，B及$b-h_a$，求作一三角形。

延長h_a于a外使延長部分等于$b-h_a$。

188. 已知A，$a-c$及h_b+CD，並D為h_b之垂足。求作一三角形。

延長CD至E令ED＝h_b，延長BA至F，令AF＝$a-c$。則CE及∠CEB＝45°可畫出。于是B可依183而決定。

189. 已知a，A及$b+nc$，並n為一已知數，求作一三角形。

190. 已知A, $b+c$及$a+c$，求作一三角形。

延長b於A外至D，令AD等于C，並延長C于B外，令延長部分等于a。作CD，DB，並決定B。

191. 在一定三角形ABC內，求作一內切半圓，切BC于一定點P上，並直徑之兩端在他二邊上。

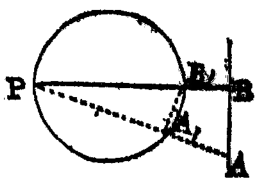
對于P以－1倍乘AB或AC，則此問題變爲173。

反映圖形 (Inverse figure)

設一線繞一定點(反映中心 centre of inversion)旋轉，並其一可動點A沿一定曲線K而動。線上另一點A_1在$PA\times PA_1=l$之情形下畫一曲線K_1，于此l(反映冪 the power of inversion)爲一常數(正數或負數)。則曲線K及K_1彼此互稱反映曲線，(依互逆半徑之變形transformed by reciprocal radii)，A及A_1爲相當點。

一直線之反映曲線爲一過反映中心之圓。

設PB垂直于AB，及B_1爲B之相當點，同時A及A_1爲另一對相當點。因之由



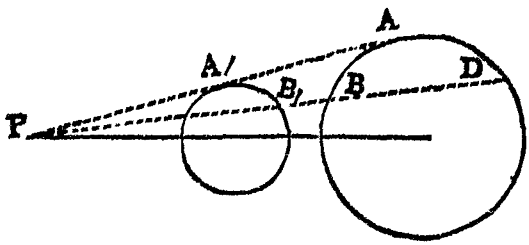
$$PA\times PA_1=PB\times PB_1$$

得三角形BPA與A_1PB_1相似，故$\angle PA_1B_1=R$。故A_1之軌跡爲一以PB_1爲直徑之圓。

設定直線通過反映中心，彼卽與其反映曲線相合。

當A_1畫圓時A即畫直線；所以通過反映中心之圓，其反映曲線為一直線。

未通過反映中心之圓，其反映曲線為另一圓，且反映中心為二圓之一相似中心。



設B及B_1表二相當點，D為PB交圓之另一點。$PB \times PB_1$及$PB \times PD$，二乘積皆為常數。故PB：PD之比亦為常數。B_1之軌跡可將D之軌跡（定圓）對于P點以一常數倍乘之，而求得。故B_1之軌跡為一圓，而定圓為相似安體，而P為相似中心，設反映冪(power of inversion)為P對于定圓之冪(power)，則此定圓必為其自身之反映曲線。

B及B_1同時畫圓，已證明之，但須注意者，即彼等非同時畫相似之弧；而B_1及D則畫相似並相似安體之弧。

今可解下問題：

過一定點P，求作一線，被二定曲線K及K_1截為PX段及PY段，已知此二段之乘積。

于K_1，則Y之軌跡必為K之反映曲線，而以P為反映中心及

已知之乘積爲反映冪。故Y爲此曲線及K_1之交點。設定曲線爲直線及圓弧所構成，則此問題，可以直尺及圓規解之。

192\. 由一定點P，求作一線，交一定角之邊於A及B，使$PA \times PB = a^2$，a爲一定線。

193\. 已知一圓及其一直徑並一點P；過P點求作一線交圓于X，並交直徑于Y，使$PX \times PY = a^2$。

194\. 過二圓交點之一，求作一線，使爲二圓所截之弦，具一定乘積。

195\. 求作一三角形ABC；已知在BC邊上內接正方形之邊並∠A及AB邊爲此正方形一頂點所分之部分之積。

196\. 已知a，A及$BD \times BA$，並D爲h_c之垂足，求作一三角形。

反映圖形常較定圖形爲簡單，故用之頗便；于此須注意下面反映圖形之關係：

a)設二曲線相交或相切于A，則其反映圖形必相交或相切于A_1，A_1與A爲相當點。

設A在二曲線上，則A_1亦必在二反映之曲線上。設二交點同落于A，則其二相當點必落于A_1。

設A同反映中心相合，此定理卽失其效。因反映中心將與無限遠之直線，並且于該處無一相當點。

b)設二曲線交于A點，作成一定角（切線間之角），則其反映曲線必交于A_1點，作成相同之角（設計此角爲由一線轉至他一線時，則其符號相反）。

此証明（38頁圖）設一曲線為圓及他一為過反映中心之直線，此定理真確。因由A至反映中心之直線過A_1，故對于任何二圓亦真確。因在A點上二曲線間之角與切此曲線于A點之二圓間之角相同，故此定理又可推廣至任何二曲線上。

應　用　題

197. 求作一圓過一定點P並切二定圓。

按反映法，以P為反映中心，此問題變為作二定圓之公共諸切線。可選擇反映冪，使一定圓不變。

198. 凡一圓，過二定圓之二交點，與一組切此二定圓之諸圓（此組圓含一公共切線）相交，其交角皆相等，試証之。

題斷可依反映法，由下定理引出：作一過一組相似安置諸圓之相似中心之直線，交此諸圓之角必相等。

199. 求作一圓，切于通過一點之三定圓。

200. 在一定圓內，求作一內接四邊形，使其各邊各過一定點。

設AB，BC，CD及DA為依次過a，b，c及d四定點之四邊。以此諸點為反映中心，以其對于定圓之冪(power)為每一點之反映冪。A經a，b，c及d四次連續反映後，必又落于A。設P為經a，b及c三次連續反映後落于d之點；此點可以反映d連續經c，b及a而決定：作一圓或直線過P，將以其經a，b及c之反映而變為一過C之圓。再經d反映之則變為一直線，故直線PA經四次反映，必為P A

點P_4爲P_1連續經b，c及d三次反映而得之點。因爲PA及圓間之角，經四次反映後即不變其大小，亦不變其符號，並此圓不動。故PA及P_1A必爲一直線。

201. 在一圓內，求作一內接三角形，其每邊必各過三定點a，b及c之一。

依200題之方法，但祇反映三次，結果PA及P_1A不將在一直線上，因彼等同圓所成之角，其符號不同故也。過a，b及c連續反映Pa線交定圓之點，以如此所得之點爲Q。aP線及PA線被反映後變爲QP_1及P_1A。此二線所成之角必與首二線所成之角相同，且二角具相同之符號（其所以然者按反映法觀之，極易明瞭；每對相當線，其交點不相當），故此四點作成一可內切之四邊形，則A必爲一過PP_1，及aP與P_1Q之交點之圓所決定。

此種解法，可推廣至任何奇數邊之多邊形上。

普　通　軌　跡 (Loci in general)

在前面所討論之諸軌跡外，尚有許多常用之軌跡；但一一陳述，未免太煩。故凡不能應用所規定之諸軌跡之問題，須求此圖形諸點之軌跡所作成之諸直線或諸圓。一正確之圖形，雖非解問題時一種科學之方法，但可爲實用之助。

凡一圖形，必須位于某定位置時，恆可求一定條件，而作

此圖形于任何之位置，再以平行移動法或繞一定點旋轉之，使之至所求之位置。如此則圖形諸點之軌跡為平行直線或同心圓。

例　　題

202. 以一定半徑求作一圓，使其圓心在一定線上並在他一定線截一定長之弦。

于線上任一點作圓截定長之弦；再在一平行于此線之線上移其圓心，使之至所求之位置。

203. 以一定半徑求作一圓，使其圓心在一定圓上，並由他一定圓上截一弧，具定長之弦。

204. 以一定半徑，求作一圓過一定點，並在一定線上，截一定弦。

205. 求作一三角形與一定三角形相符合，令其一邊在一定線上及此邊之對頂點在另一定線上。

206. 在一定弓形內，求作一內接三角形，與一定三角形相合。

207. 以一定半徑，求作一圓，截二定線為二定長之弦，或截二定圓之弧，具定長之弦。

208. 對于一圓，求作一切線，使此切線被截于二定平行線或二同心圓間之部分為一定長。

209. 由一定點，求作一線，使之被截于二同心圓間之部分，由圓心觀之，在一定角下。

210. 已知二圓，求作一點，由之切于二定圓之切線，作成一

定角，故其一切線，亦具一定長。

作一定長之切線，切一圓于任一點；在切線之一端，作此定角；繞第一圓之圓心，旋轉第二圓，至其切于定角之邊爲止；再轉至原來之位置，二切線亦隨之移動。如此即得所求之點。

211. 求作一圓，切二定平行線且過一定點。

212. 過一定點，求作一線，使被截于兩對定平行線間之部分相等。

所求線必平行于以兩對平行線所作成之平行四邊形之對角線。

213. 以二定半徑，求作二圓，使一圓在一定線上截一定長之弦，他一圓在另一定線上一定長之弦，此二圓亦必相切，並彼等之公共切線，具一定方向。

214. 在一定圓內，求作一內接三角形，已知其一邊及此邊之中線；且中線須過一定點。

215. 在一定圓內，求作一內接三角形，已知其一邊及另一邊之中線；但端中線之交點須在一定直徑上。

216. 在一圓內，求作一定長之弦，爲一定直徑分爲定比。

217. 在一定四邊形內，求畫一內接平行四邊形，使其各邊皆具定方向。

共四邊形之一邊，則此平行四邊形之自由頂點，必畫一直線。

218. 過一定點，求作一線，交三定直線于三點，使此三點與定點爲調和定階。

共一定直線，此自由點將畫一直線過其他二定線之交點。

219. 已知 V_A，B及由C至 V_A 之距離，求作一三角形。

作 V_A 及在A點垂直于 V_A 之直線。

此問題，祇將含B之弧代一定線，卽變爲前一問題。

B 線之軌跡（Loci of lines）

直線與點相彷，當其適合二條件時，卽可決定，且其在一條件下，有部分之決定，亦如點在一條件下有部分之決定然。是以常有一曲線，凡適合此一條件之線皆切之。此曲線稱爲線之軌跡。在特殊情形，此曲線可變爲一點，故適合定條件之諸切線，必過此點。除此情形外，于此祇注意曲線爲一圓之情形。

故設能決定一線之二軌跡，則此問題卽變爲下列之一種：

1. 求作一直線過二定點。
2. 由一定點，求作一圓之切線，(16)。
3. 求作二定圓之公共切線。(137)。

茲陳述諸線之最要軌跡。

1. 在同一圓內，等長弦之軌跡，爲一圓，與定圓爲同心，且切于作一此定長之弦。

III. 離二定點之距離具一定比之諸線，其軌跡爲分二定

之聯線爲定比之點。此距離同其符號一并取之。

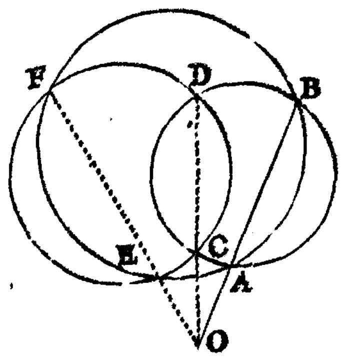
n. 離二定點之距離具一定和之諸線，其軌跡爲一圓，其圓心爲二定點聯線之中點。

設已知此距離之差，則此軌跡爲二無限遠之點。故諸線爲二組平行線。彼等之方向可由一定點至一圓上所畫之切線而決定之，而該圓之圓心在他一定點上，並其半徑等于定差。

注意，此處之距離同其符號一并取之，設對于其一定點，使之爲負數，此軌跡必只爲二無限遠點之一。

o. 在一圓內同一弧上，作諸圓周角，並作諸角之平分線；此分角線之軌跡，必爲圓周上之一點，在此已知情形下任一角之平分線即決定此點。

p. 作諸圓過二定點並交（或切）一定圓；則諸公共弦之軌跡爲二定點聯線上之一點。



設A及B爲定點，過A及B作一圓交定圓于C及D，則CD線必交AB于O，此點即爲所求之軌跡；因過A及B作其他圓，交定圓於E點及F點，FE，DC及AB三線必爲此三圓之等冪軸，但等冪軸交於一點，故FE必過O點。

例　題

220. 過一定點,求作一線,爲一定圓截定長之弦。

依 I 此題變爲16。

221. 求作一線,爲二定圓截二定長之弦。

222. 求作一線,交一定線于X及一定圓于Y及Z,使YX及YZ爲二定長。

依 I 此題變爲11。

223. 在一圓內,求作一內接三角形,令其一邊過一定點,並與一定三角形相似。

224. 在一定圓內,依一定方向,求作一定長之弦。

225. 在一定圓內,求作一內接三角形,使其一邊等于並平行于一定線;並令此邊對角之平分線過一定點.

一邊可依 I 求得;則對角之平分線上二點可知。

226. 在一定圓內,求作一內接三角形,已知其一邊之方向,且此邊對角之平分線,須等于一定長,並過一定點。

邊之定方向決定相當弧之中點;則對角之平分線即可決定。

227. 過一定點,求作一線,令其離一定點之距離等于其離他二定點之距離之和。

228. 在一定圓周上,已知A點及B點,過另一定點P,求作一線交此圓于二點X及Y,使AX及BY作成一定角(220)。

229. 分一圓之一定弧爲二部，令二部之弦具一定比。

所求之弦作成一角，此角之平分線分定弧之弦爲定比，且過圓周餘弧之中點。

230. 二定線，假充分延長時能相交，由一定點，試作一線當引長之，過二定線之交點。

所求線分二平行線被截于定線間之部分爲相同之比；過定點作一平行線。

231. 求作一三角形，已知其∠A及a同爲AD線所平分。

作一圓及其一弦等于a；于是AD之兩端可知。

232. 已知h_a, V_A 及 m_a求作一三角形。

三已知線可即時作出；于是知A點及a邊。B點及C點可作外接圓而求得。假延長V_A 並作一線，垂直于a于其中點，則諸線相交之点，必爲a之相當弧之中點；此點決定後，圓即易作出。

233. 對于一定圓，求作一切線，令其離二定點之距離，具一定和。

234. 已知一四邊形ABCD；求作一線，使其離A及C等遠，亦如離B及D者然。

（此等距離，其符號相反）。

235. 在一定圓內，求作一內接四邊形ABCD；已知其對角線AC及他對角線間之角。此四邊形須爲可內切之四邊形。

作對角線AC；則BD之方向知矣。故相當於BD線之

弧之中點亦知。則平分$\angle A$及$\angle C$之線可作出，且必交於四邊形內切圓之圓心，而平分$\angle B$及$\angle D$之線必過此點(圓心)，亦如其過相當於AC弧之中點然；今此諸線可作出，故B及D即決定矣。

236. 已知四定點A,B,C及D，求作一正方形，令其每邊過一定點。

以AB線及CD線為直徑作二圓；此二圓為正方形二頂點之軌跡；因對角線平分正方形之角，且必過此二半圓之中點，故對角線可以作出。因之二頂点即被決定，則其他二頂點，更易求得。

237. 求作一四邊形，與一定四邊形相似，並令其邊各過一定點。

此題之解法與236題相似；因已知此四邊形之諸角為對角線所分成之部分。

238. 求作一圓過二定點，並切一定圓。

作一圓過二定點A及B並交定圓。公共弦必交AB線於一點，而定圓同所求圓相切點之公共切線，亦必過之，如此可得二圓之切點，則所求圓之圓心極易求得。

此題亦可如此敘述：已知一定圓及二定點A及B；在圓周上求一點X，使AX及BX交定圓於二點，而二點之聯線，平行於AB。

239. 求作一圓，過二定點，並同一定圓相交，令公共弦

等于定長。

240. 已知CA,BD,∠A及∠ACD，求作一可內切之四邊形，作DB並依1及0決定A點。

241. 求作一圓，過二定點並交一定圓，使其公共弦爲他一定圓之切線。

242. 求作一圓，過二定點並交一定圓，使其公共弦離二定點之距離具一定比。

243. 求作一三角形，同一定三角形相似，使其二邊各過一定點，並此二邊夾角之平分線，爲一定圓之切線。

244. 已知二定平行線及其一線上一點A，他一線上一點B。過另一定點P，求作一線，交二平行線于X及Y，使AX及BY具一定比。

245. 已知一定圓及三定點A,B,C。過A求作一線交圓于X及Z，過B作一線交圓于Y及V；令XY及VZ二線過C點。

第 二 章

圖形之變換（tranformation of the figure）

欲應用前章所與之方法，則聯接圖形已知之部分，爲某一輔圖，非常緊要，因在此情形下，恒可將圖形之大部分作出，如此可變問題爲一點或一線之決定。如非此情形則不能直接應用軌跡；但必須遵循前面所指示之原理，且彼等可作成下面研討之基礎。吾人試將所作之圖形，作成別一圖形，而于此圖形中，集合已知之諸部分，但須能使作圖實現方可。作此圖形後，普通即易反至所求之圖形。用于變換之方法爲：

A. 平移法.

B. 換體法.

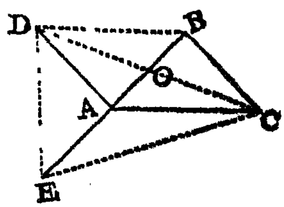
C. 旋轉法.

A. 平 移 法.

此方法當集合已知之諸部分時用之，即當圖形之數線移至一新位置，並平行于原來之諸線時用之。此法尤可用于已知二線或二線作成之角之問題上；將一線平移，待其一端點與另一線之端點相合，即得一三角形，並可即時作出。凡一多邊形，皆可平移其邊，而集合其各部分，因之諸邊將由一點射出。諸線可依原方向作之，使其作成之諸角，等于多邊形之諸外角。

此諸外角之和等于4 R。以直線聯諸線之端點，如此作成之新多邊形，較原圖形，常易作出。下之特殊情形，說明此種方法。

三角形。CDE三角形，由于平移ABC而求得，AE＝AB並DB＝AC。由A射出之線爲原三角形之邊，繞A之角等于原三角形之諸外角，因DC＝2CO故新三角形之諸邊皆二倍于原三角形之諸中線，且A爲新三角形之重心(centre of gravity)(中線之交點)。B及D離AC等遠，因之繞A諸三角形之高，等于原三角形之諸高。因平行移動，諸角並未改變，則必可于新三角形內，求得原三角形諸邊作成之諸角，諸高及諸中線。△DAC之面積等于△ABC之面積，並△DEC之面積三倍于△ABC之面積。



設△DEC(或任一繞A之小三角形)可作，則易反至△ABC。

例　題

求作ABC三角形已知。

246. 三中線。

作DEC，再求A及B。

247. m_c，h_a 及h_b

作DOC(35)；再作OB＝OA。

248. h_a，m_a 及 m_b。

249. h_a, m_b 及 h_c .

250. h_a, m_b 及 m_c .

251. A, h_a 及 m_a .

252. h_a, m_a 及 $h_c : b$.

253. A, h_a 及 m_b

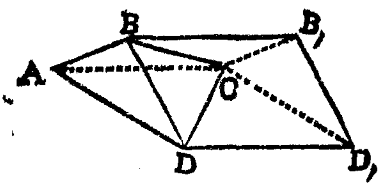
254. m_a, m_c 及$\angle(m_b, a)$.

255. m_a, h_a 及 h_b

256. h_a, h_b 及$\angle(m_a, b)$

257. h_a, a 及$\angle(m_b, c)$

258. h_a, $b+c$及 $h_b : h_c$.



四邊形。在四邊形ABCD上可將AB及 AD 依次平移至 CB_1及CD_1；在如此得到之四行四邊形 BD_1內，可求得此二四邊形諸部分間相互之關係，詳言之，即：

由 C 射出之諸線爲四邊形之邊。

繞C之諸角爲四邊形之角。

平行四邊形之邊，爲四邊形之對角線，且平行四邊形之角等于四邊形對角線作成之角。

由C射出之諸線，與平行四邊形諸邊之夾角，等于四邊形之邊與其對角線之夾角。

平行四邊形之面積等于四邊形面積之二倍。

平行四邊形之對角線，兩倍于四邊形對邊中點之聯線；顯然以四邊形諸邊之中點爲頂點作平行四邊形，即可証明之。

由此可見平行四邊形，含有四邊形內一切最重要之部分

設已知對角線及其夾角，此種平移最爲適用；在此種情形可直接作平行四邊形，則此問題即變爲C點之决定。設在上陳述之部分中，已知其兩個或數個間之關係，(例二邊之比，彼等平方之和或差等等)，則可得C之二軌跡。在平行四邊形上之二對邊可作爲四邊形之對角線，及四邊形之對角線可作爲平行四邊形之邊，此種實事，如牢記之，則凡如此易解之問題，尤可擴大其範圍；于此祇解已知對邊及彼等夾角之問題。

下面諸問題，將進一步說明此種方法

例　　題

259. 已知四邊，求作一梯形。

平移二平行邊之一，至他一之端點，則可得一三邊皆知之三角形，

260. 在一圓內，作二弦AB及CD，在圓周上求一點X，由之XA及XB二線在CD弦上截一定長FG。

設平移FG至F與A相合；則G至一點H，此點可立即決定；因已得$\angle G=\angle X=\frac{1}{2}\smile AB$，故可依1決定G點，

261. 已知四邊及AB與CD之中點聯線EF，求作一四邊形。

平移BC及AD至FC_1及FD_1而集合已知諸部分。因$\triangle C_1CF \cong \triangle D_1DF$，$C_1$，F及$D_1$位于一直線上，作$\triangle C_1ED_1$(121)；則C及D卽決定。此作圖表明二對邊間之角，與他二邊間之角無關。

此作圖亦可用上面之普通移動法作之。

262. 過二圓交點之一，試作一線爲二圓截下之弦具一定差，（弦之正號或負號依其在交點之此邊或彼邊而定）。

聯心線在所求線上之射影，等于定差之半，故設平移此射影，令其一端在一圓心上，則可作成一直角三角形。所求之線，必與此三角形之一邊平行。

若已知二弦之和，則可對於交點，用-1倍乘一定圓，而將定和引于圖形中，以新圓代此一定圓，再依上法進行。

263. 已知一邊，並四定點，求作一長方形，令每邊過一定點。(262)

264. 在一定三角形ABC內，由AB上一點X作一線至BC上一點Y；使XY具一定長，並AX : CY = P : Q。

平移XY至AY_1；Y_1點卽可決定，因知其離A之距離，及$\triangle Y_1YC$之形狀故也。

265. 過二圓，依一定方向，求作一線，使其被截之弦具一定

和或定差。

依定方向平移一圓，至其交他一圓于所求線上；在此位置圓心即易決定。

266. 過一定點，求作一線，爲二定圓截下等長之弦。

平移一圓至二等弦相合。在此位置，圓心即易決定；由之視聯心線在一直角下，且亦知其離定點之距離，因由定點至此圓之切線，必等於由定點至定圓之切線

267. 在二定圓內，由圓心A及B，求作二平行半徑AX及BY，使由一定點P觀之，在等角下。

沿聯心線平移△AXP一距離，等于聯心線之長；變此三角形爲半徑之比，令AX及BY彼此相覆。則P點據一新位置P 此點甚易決定，因已知BP 之長及其方向故也。又因$\angle YP_1B = \angle XPA_1$則此四點P，$P_1$，B及Y必在同一圓上，故Y可決定矣。

268. 已知對角線作成之角及二邊，求作一平行四邊形。

平移一對角線至其端點與他一之端點相合；則以兩對角線爲邊之三角形，可立即作出(18)。

269. 已知二對角線、二不平行邊中點之聯線及一角；求作一梯形。

依268之方法進行，則此題可以3解之。

270. 在上一情形，依四邊形之普通移動法，Q點是否適于

平行四邊行之一對角線上？

以平移法，可解一普通常遇之問題：

求置一線以其兩端在二定曲線上，與一定線相等並平行。

平行于定線平移一曲線，使其移動之距離，等於定線之長；則此曲線將交他一曲線于一定點，由之可作所求之線，此問題設其曲線爲直線及圓之組織，則恒可以直尺及圓規解之。

271. 求置一線，以其兩端在二定圓上。與一定線相等並平行

272. 在一三角形內，求作一定長之線，並平行于一邊。

273. 在一圓內，求作一弦與一定線相等並平行。

274. 由一船觀二定點在一定角下；此船依一定方向，行駛一定距離，今觀此二定點在他一已知角下，求船之位置。

通此二定點作二弧含此二定角，則此問題變爲271。

可類爲平移法之某一方法，常用于諸圓切其他諸圓或切諸直線之問題上；此法爲漸縮一圓之半徑至零，變圓爲一點，同時諸線及諸圓隨之變動；但線之方向與圓之圓心不變。如此以一點代一圓則此問題普通變爲一較簡單之問題，而其已

知定條件，仍保持不變。

275. 求作二圓之公共切線。

變較小之圓爲一點，切線及圓隨之變動，但圓仍須切于切線，且具一半徑等于二定圓半徑之和或差。設爲內切切線則用其和，外切切線則用其差。因之此問題變爲16。

276. 求作一圓切二定線及一定圓

將定圓變爲一點，則變此問題爲181，所求圓與定圓，有時可有二種情形相切，卽外切及內切是也。

277. 求作一圓，切一定線于一定點，並切一定圓。

278. 求作一圓，切二定圓，切其一于一定點上。

平移法之混合例題

279. 已知四邊及二對邊之夾角，求作一四邊形。

280. 已知二對角線及其夾角及二相對角，求作一四邊形。

281. 已知二對角線，此二線之夾角及二相鄰邊之和或差，求作一梯形。

282. 已知 m_a, $\angle(m_b, m_c)$ 及面積，求作一三角形。

283. 在一$\angle B=R$之ABC三角形內，求作一定長之線XY使 $\overline{AX}^2+\overline{XY}^2+\overline{YC}^2$ 等于一定正方形。

以a決定Y1點（看264）

284. 已知二對角線，此二線之夾角，及　對角線與一邊作

成之角；求作一可內切之四邊形。

285. 已知二對角線，此二線之夾角，一對相隣邊之比及他對相隣邊之夾角；求作一四邊形。

286. 以最大而可能之等邊三角行外接于一定三角形上。

287. 已知二對角，面積及聯對邊中點間之二線；求作一四邊形。

二已知線之夾角，可以該線及面積而決定之，再用四邊形之普通平移法，求得所作之四邊形。

288. 已知AB,CD,∠BAC, ∠ACD及∠BDA，求作一四邊形ABCD

289. 已知一對角線，此二線之夾角及一邊，求作一梯形，

290. 已知二對角線，此二線之夾角及一邊，求作一梯形。

291. 已知三邊，及第四邊與其二隣邊之二夾角。求作一四邊形。

292. 已知AB,CD,AC,∠ ABD 及∠BDC，求作一四邊形ABCD。

293. 已知∠BCA,∠ CAD，二對角線及其夾角，求作一四邊形。

294. 已知二平行線L及M，並一第三線N及一點P；求作一線過P交此已知線依此于A,B及C，使AB及CP具一定比。

平移AB至A_1Q，CP至QP_1，Q為M與N之交點，再決

定P_1。

295. 在一三角形AXBYC內，依一定方向，求作XY，使AX及YC，具一定和。

296. 已知二對角線及二邊，求作一梯形。(142)。

297. 解169之問題，設A爲任一點。

298. 已知二對角線，一對對邊及其夾角，求作一四邊形。

299. 已知一對邊中點之聯線，二對角線，一對邊之比及他對邊之平方和。求作一四邊形。

因已知其邊及一對角線，故可作出普通之平行四邊形。

300. 已知四邊及對角線中點之聯線求作一四邊形。

此題與299或261相似。

301. 已知二中線及第三中線與其相當邊之夾角，求作一三角形。

302. 已知上下二底及二對角線，求作一梯形。

303. 在一定圓內，求作一內接梯形，已知其高及上下底之差。

304. 已知一對邊，分他一對邊爲定比之線，此對邊之夾角及其比；求作一四邊形。

與261相似。

305. 已知二對角線，對角線中點之聯線及一對邊中點之聯線；求作一梯形。

306. 有一圓內,求作一內接梯形,已知其高及上下底之和。

可設此梯形,爲直徑所斷爲平分,一邊之中點,必務于一已知平行于直徑之線上.如此由一邊之端上,所畫之弧之端點,卽可決定。(271及336)。

307. 在一定線AB上,求設一定長之線CD,使C及D分AB爲調和比。

以AB爲一弦,任作一圓;設此問題已解,由C及D作CF及DE二線至AB二弧之中點上,此線互相垂直,並交于圓周上,平移CD至EG,則由D觀FG在一直角下。

設M爲AB之中點,則知MC及MD之乘積及其差;如此亦易解之。(220)

308. 二定點A及B,及此點間二平線。依一定方向,求置一線MN于此二平行線上,使AMNB爲一極小。

309. 過一定點P,求作一線,使其離二定點A及B之距離AX及BY,具一定比。

平移YB至Y_1A,則Y_1之軌跡必爲一直線,X之軌跡爲一以AP爲半徑之圓。平移此直線一距離,等於AB,則Y之二軌跡爲一直線及一圓。

310. 由一定點P,作一線PA至一定曲線之一定點A上,並由他一定點L作線LB∥PA;設LB:PA=m:n,則B之軌跡如何?

B. 換置法

此法,亦如前法,多用于拼置已知之諸部分于一位置,使作圖更爲便利.以此方法,置圖形之一部于一新之位置.因之試作:

1). 集已令知諸部分.

311. 在一定圓內,求作一內接四邊形ABCD,已知其一對邊AB及CD之大小及他對邊之比.

換置三角形ABC,以A于C及C于A;則B仍爲圓周上之一點.今已得諸已知部分之一更便利之位置,即知二相鄰邊並他二相鄰邊之比;此二相鄰邊可立即畫出,于是第四頂點即決定矣,(229).

作此圖形後,須將△ABC置于原位置,方可求得.

312. 已知AD,AB,∠D及∠B;求作一可內切之四邊形ABCD.

繞∠A之平分線旋轉ABC;則D及C佔D_1及C_1之位置,D_1C_1仍爲一切線.以BD爲一邊之三角形,因知此邊及其兩端之角,故可立即作出;則此圓即易作出,因其必切于此三角形之三邊故也

2). 導引已知諸部分于圖形中.

313. 已知a,b及A－B,求作一三角形.

換置此三角形以A于B,及B于A;于是以a,b爲邊

及A－B為腰等夾角之三角形，即可作出。

314. 已知a，h_a及B－C，求作一三角形。

換置此三角形，以B于C，C于B及A在一點A_1，而引出B－C。今以AA_1為一對角線，B為第三頂點之平行四邊形，可被作出，因由A觀過B之一對角線，在一已知角下。

315. 已知bXC，m_a及B－C，求作一三角形。

換置三角形于BA_1C之位置；此已知面積A_1BA必等于以m_a為等邊之等腰三角形之面積。

3). 使相等諸線或諸角互相遮覆；此法當已知部分相等時可用之前大于已知二線之比時，可用相似之法；使其一線，覆于他一線上，並于換置時，依定比增大圖形之一部分。

316. 已知四邊，求作一可內切之四邊形ABCD。

先將諸邊以AD：AB乘之，換置ABC為ADC_1之位置；DC_1及DC同落于一直線上，則三角形CAC_1可以作出，因知CD，DC_1，及CA：C_1A之比故也。

317. 在一圓內，求作一內接三角形，已知其三邊所對三弧之中點。

設ABC為所求三角形，γ為AB之中點，β為AC之中點及α為BC之中點，繞γ旋轉A，再繞α及β旋轉之，彼必仄回其原位置A，同時在離A一定距離之圓周

上一點，必落于A之對邊上，且在離A同樣之距離處，此距離必于運算前指定之。如此逐漸使γ，α及β旋轉γβ弧上之任一點，再取此始終二位置之中點即得A點此問題可推廣至n邊之多邊形；設n 為偶數則此問為不定或不可解；設n 為奇數則此問題必為確定之問題。

318、 一定線及此線上一定點A，由一定圓之圓心O，求作一線，交定圓于Y，交定線于X，使XY及XA具一定比。

設使XY(增大)置于XA上，O必落于一已知點O_1，並$AY \parallel O_1O$。

319、 已知AB，AD，∠B，∠D及BC：CD之比，求作一ABCD四邊形。

依316之方法進行。

4) 作一對稱圖形，令對稱軸含一所求點。

320、 在一定線上求作一點，使其離此同一線上一定點之距離及離他一定線之距離相等。

過定點作一垂直線，再平分此線與他一定線之夾角。

321、 求作一圓，切一定線于一定點上，並與一定圓相交作成一定角。

換置定圓，使之交定線于定點並作成定角；則此二圓之對稱軸必含所求圓之圓心。

5）置圖形之一部，使未知點相合，同時使二線過此相合點，作成一已知角，並每一線含一定點。

322. 二定圓及其一圓周上二點A及B。在此一圓上，求作一點X，過X點作AX及BX，設M及N為AX及BX交他一圓之點；使MN等于一定長。

已知∠MON，O為他一圓之圓心，繞O轉MA一角度等于∠MON，則M落于N，A落于一點A_1故知A_1。又MA及NB作成一已知角A，故亦知NB，是以N即決定，

換置法之混合例題

323. 在一定圓內，求作一內接四邊形，已知其一對對邊，並他一對邊之和。

324. 已知A，h_a及m_a求作一三角形。

換置此三角形以B于C及C于B。A落于A_1並在BC之對邊上，今AA_1可被作出，是以B即決定。

325. 求外切一定圓作一三角形，使其三頂點在由圓心射出之三定線上。

與317相似。

326. 已知二邊在二定平行線上，他二邊一過A點，一過B點，求作一菱形。

換置此菱形以其他二邊在此平行線上；于是AB有一新位置平行此線，並知其方向，則此線及AB之夾角決

定菱形之角。

327. 求作一三角形,使其頂點在一定線L,其底邊等於一定長,及在底邊之二角,具一定比。

依313之情形,換置此三角形,並應用相似法,即可求得。

328. 在一三角形內,由頂點至底邊上一定點連線;在此線上求一點,由之觀底邊之二部分,在等角下。

329. 在一三角形ABC內,分AC為AD及DC。在AB上求一點X,由之觀AC及DC在等角下。

設DX為對稱軸則在AB線上同C點對稱之點即可決定。

330. 過一三角形之頂點B,求作一線,並垂於此線作線AP及CQ;使如此決定之三角形ABP及CBQ之面積,具一定比。

換置ABP,變其大小為CBP$_1$,以BC為弦作一圓;P$_1$Q被其一已知長,且為BC分為一已知比。

331. 已知m_a,b^2-c^2及$\angle(a\ m_a)$,求作一三角形。

332. 已知四邊,並一對角線平分一角,求作一四邊形。

333. 知知二圓,A及B為其圓心。求作一圓過A及B並交此二圓彼夫于X及Y(在AB之對邊);使角ABY及角BAX之和等于一定角。

換置△ABY為BAY$_1$之位置,令∠XAY$_1$等于

定角.

334. 已知A,r及$c-b$,求作一三角形.

設內切圓之圓心爲K,乃易知$\triangle BXC$之三個成分,即$\angle K$,高KF及由F至BC之中點之距離.

335. 已知r,$c-b$及$C-B$,求作一三角形.

依334題,作同樣之三角形.

C 繞一軸旋轉法(或翻摺法)

(Revolution around an axis)

此法爲換置法之一特殊情形,但以其應用甚廣,故特別討論之.由繞一直線旋轉圖形之一部,可求得與換置法相同之便利,則所繞之直線必爲二位置之對稱軸.因之下列常遇之問題卽易解答:

336. 求作一線垂直於一定線,使之爲二定曲線截下之部分相等.

以定線爲軸,旋轉一曲線;乃送彼交他一曲線于所求之點上.

337. 求設一正方形,以其二相對頂點在一定線上,及他二頂點在二定圓上.(336).

338. 在一定線上,求作一點X.由之作二線至定點A及B(位于定線之一邊),使此二線與定線作成相等之

角。

繞定線旋轉定點A至A_1，則BXA_1線必爲一直線。

注意，此問題于自然界常遇之；如一有彈性之物擊一平面，一光線過一平面鏡等，皆反射一角，等于入射角。如此A可爲一發光點，定線爲鏡之截面。故此問題爲求自A點一射線反射後過B點之路，光線所走之路長，等于直線BA_1，且凡X外之點，在B，A_1二點間，均是一折線。故所走之路爲最小之距離。

設此射線過任一X外之點，彼之反射同由A_1發出之射線相同；則在此類問題中，可假定原射線移去，而祇以A_1代A。

339. 置二球M及N于臺球案上，案爲四邊之多邊形。試對AB邊擊M，使之反回，繼續撞一切之邊，並由最後一邊反至N。

繞AB線旋轉M至M_1，假定AB移去，並以M_1代M。依此進行，以至此題變爲338爲止。故在最後一邊上之點首先決定，由此即易反至其他諸點。設所求點之一，最後落于一邊之延長線上，此題即不能解。

340. 在一定多邊形內，求作一內接多邊形，使其周圍爲最小。

二鄰邊與定多邊形之邊，必作成相等之角，多邊形之邊含其交點。設諸點中一點非此情形，則使此點于

適合以上條件之處，而得一較小之周圍。此題與前一題有關，故可以類似之方法解之。

由所求之點在一邊上起始，因不知其位置，故須連續繞多邊形之其他邊，旋轉此一條邊。如此所求多邊形之周圍，被伸成一直線，其末端之部分，即在被旋轉之線上相交之二邊。因此邊之一隨被旋轉之邊而旋轉，故二者所成之角不變是以此問題可變為下之問題：

過二等長之線作一第三線，此線與前二線作成相等之角，並截取等部分，此部分由一定端點計量之。

設等角變為錯角，並線亦平行時，則此問題為不定，如非此情形，則不可解。後一情形，當多邊形之邊為偶數時遇之；當邊為奇數時，設多邊形之頂點在定多邊形諸邊之延長線上，亦稱為內接多邊形，則可解。

341. 已知平分諸邊之諸垂直線之位置，求作一多邊形。

設A為一所求頂點，B為任一其他點；連續繞一切諸垂直線旋轉AB線，A必反至A，同時B佔B_1之位置。因AB線在運算時不變其大小，則必得$AB=AB_1$。故此問題可用任一點B決定B_1起而解之。A之軌跡為平分BB_1之垂直線。選B一其他位置，並重復此種運算；則A之位置即可決定。此題之討論與340之討論相似。

342. 已知諸角平分線之位置，求作一多邊形。

與341題之解法類似。

343. 二定圓；求作其二切線，使在一定線上相交，並同定線作成等角。

與338類似。此問題可變爲137。

344. 在一定線上，求作一點X，使之離二定點A及B之距離，具一定和。

將AX延長至B_1等于定和，則XB_1等于BX. X必爲一過B點圓之圓心，並切于以A爲圓心，以AB_1爲半徑所作之圓。因以定線爲對稱軸，與B點爲對稱之點所求圓必過之，故此問題變爲238.

345. 在一定線上，求作一點，使其離二定點之距離，具一定差。

與344類似

注意. 上二題亦可述之如下：

已知圓錐曲線之焦點軸(Focal axis)及二焦點，求一定線與此圓錐曲線之交點。此問題恆可以直尺及圓規解之。設以圓代直線，則此問題普通不能以直尺及圓規去解。

346. AD爲ABC三角形A角之平分線，由AD上一點M，作MB及MC線；使DMC及DMB二角之差爲最大，試定M點。

繞AD線旋轉AB，則此問題變為185

347. 已知二圓，一過A點，一過B點，試在二者之等冪軸上決定一點P，使QR線(Q及R為PA及PB交二圓之點)垂直于等冪軸。

繞等冪軸旋轉過A之圓；設A_1為A之新位置，Q_1為Q之新位置，由是可知QABR及Q_1A_1BR二四邊形，作內切圓，故AA_1B圓必過P點。

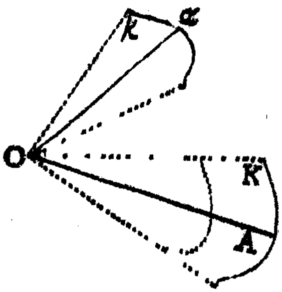
348. 二定點A及B在一定線PQ之一邊。于線上求一點X使$\angle BXQ=2\angle AXP$。

繞PQ旋轉AX至A_1X，並在A_1X上決定B之射影。

第 三 章

旋轉論 (The Theory of Revolution.)

1. 由一定點O，畫線至一曲線k之諸點上；繞O旋轉此諸線一定角v，同時依一定比f增大之，則諸線端點之軌跡必為一新曲線。此曲線與k相似；故可設此運算，為二分別之運算完成，即先旋轉此曲線，變其位置，再對于O以f倍乘之。在曲線k上一點a，必在K上決定一點A。a及A稱為相似安置點，(Similarly Situated Points)，聯相似安置點之線，稱為相似安置線，(Similarly Situated lines)，相似安置線作成之角稱為相似安置角，(Similarly Situated angles)，稱O為軸點(Pivot Point)，V為旋轉角(angle of revolution)，f為旋轉比(ratio of revolution)。凡二相似安置點，A及a，則△AOa必具相同之形狀，∠aOA等于V及 $\frac{AO}{aO}=f$ 為常數。曲線K亦可視為以三角形aOA之一頂點A所作成，當三角形繞其另一頂點O旋轉，同時第三頂點a沿定曲線k移動，但旋轉時三角形之形狀不變。繞O旋轉一曲線，以V為旋轉角及f為旋轉比，則稱為對于O以f倍乘此曲線。



2. 在平面上，每一點可認爲屬于一組之點，而具其相似variously對應點在另一組上，于此情形，轉點變爲自身之相似對應點，故可稱爲此二組之公共點。同時可以全平面爲繞O轉，同時其一點作一定曲線；設全點組，當旋轉時，其形狀不變，則組之每一點作一曲線，同定曲線相似。

3. 已知轉點，旋轉角及旋轉比，則任何諸直線組及諸圓組，可藉直尺及圓規旋轉之。繞O旋轉一點a，可作$\angle aOA = V$，並令$OA = f \times Oa$而成之。旋轉一直線，可轉直線上一點而成之，因所選點及轉點之聯線，與直線作成之角不變故也。旋轉一圓，可旋轉其圓心及圓周上一點而成之。

4. 藉以上之助，可解下之普通問題：

求作一三角形，與一定三角形相似，以一頂點在一定點上，他二頂點在二定曲線上。

令定點O爲轉點，繞此點旋轉一曲線，旋轉角爲以O爲頂點之三角形之角，並旋轉比爲此三角形夾旋轉角之二邊之比，此曲線于旋轉後，交他一定曲線于一點，此點可爲三角形之第二頂點；則第三頂點，可于O作定角而求得。

設不知三角形之形狀，祇知一角在定點上及夾此角二邊之乘積，則此問題，可以相似之情形解之；但須旋轉定曲線之反映曲線。

例題

349. 求作一等邊三角形，以其三頂點在三平行線上。

作一平行線上，任取一點為一頂點；以此點為轉點；$V=60^{\circ}, f=1$。

350. 求作一等邊三角形，以其三頂點在三同心圓上。

351. 在一平行四邊形內，求作一內接等腰三角形，已知其角；並一頂點同平行四邊形之一頂點相合。

352. 在一定三角形內，另作一三角形，與另一定三角形相似，並使其一頂點，在一邊之一定點上。

353. 在一定弓形內，求作一內接三角形，與一定三角形相似，並使其一頂點在弦之一定點上。

354. 在一定圓內，求作一弦，使其長，同其二端點離一定點之距離，具定比。

355. 在一平行四邊形內，求作一內接長方形，使其對角線，作成一定角。

此二圖必具同一中心。

356. 在一平行四邊形內，求作一內接菱形，使其對角線，具一定比。

357. 在一正方形內，求作一內接等邊三角形。

358. 已知一圓及二點A及B，求作一線切于圓，並由B作切線之垂線；使切線及其垂線離A之距離，具一定比。

繞A旋轉令B落于切線上

359. 在一定平行四邊形內，求作一內接菱形，具定面積。

360. 已知二點，A及B，及二線交於C；過A及B作二線夾一定角，並交定線依次於X及Y；使AX及BY具定比。

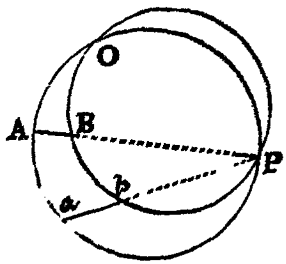
平移AX及BY至A，C，及B，C之位置。

361. 已知h_a，B－C及b×c，求作一三角形。

362. 求作二圓，過一定點A，使相交之角等於一定角V；二半徑之比等於r，並每一圓切一定線，

對於A以倍乘一定線，則變此問題爲181。

5. 吾人普通皆可求一轉點，繞此點可旋轉二相似圖形之一，使之覆于他一圖形上，設其各部分在旋轉時向同序之方向進行（普通設相似圖形皆爲同序相似）；已知旋轉比爲二相似安置線之比，旋轉角爲該二線之夾角，則轉點，可以其距二相似安置點之距離之比求之，但尚有更簡易之作法。設A及a，B及b爲兩對相似安置點；則相似安置線AB及ab必作成旋轉角；此角亦爲由二相似安置點至轉點之線所夾之角，是以該轉點在一圓上，此圓過二相似安置線之交點，並過此二線上二相似安置點。



在二相似圖形上，二相似安置綫之轉點，爲此圖形之轉點

；因設旋轉一線使之覆于他一線上，則各圖形亦必覆于他一圖形上。

二無限直線，如認為相似圖形，則其轉點為不定；若二點各在一直線上，認為相似安置，則轉點之軌跡必為一圓；再取二點為相似安置，而判定旋轉比，則轉點可決定；因圓之他一交點為線之交點，故祇此一點。

二圓之轉點為不定，因二圓周上任何二點，皆可認為相似安置點；轉點離二圓心之距離，必與圓半徑相同之比，故其軌跡必為一圓，並分聯心線為此比，（其圓心在定圓之聯心線上，並過二相似中心）。決定二圓上二相似安置點後，則轉點可由二相似安置半徑求得，而二圓永為相似安置。

6. 四邊形二相對邊之轉點，亦為他二邊之轉點。

設O為BA及CD之轉點；則得$\triangle AOB \backsim \triangle DOC$故$\triangle AOD \backsim \triangle BOC$；故O必為AD及BC之轉點。在第一情形B及C為相似安置，A及D為相似安置；在第二情形B及A為相似安置，C及D為相似安置。

以相同之方法，可知AB及CD之轉點亦為AC及BD之轉點。

設延長相對邊，使之相交，則在作成之四三角形上所作之二圓，決定轉點；設圖形上任何二部分，不在其端點上相交，則此二圓亦可決定其轉點；如此得下定理：

依次去四邊形之一邊，得四三角形，其外接圓，皆過一

相同點；設圖形上任何二部分，不在其轉點上相交，則此點為其轉點。

7. 設二相似曲線之諸相似安置點之聯線，分為比例線段，諸分點之軌跡，必為一曲線與定曲線相似，並且凡二如此曲線，其轉點與定曲線之轉點相同。

設A及a為二相似安置點，並Aa線被P點分為定比，O為轉點，△AOa之形狀必不變，△AOP亦然，故當此三角形繞O旋轉時，P點必作一曲線與定曲線相似。

系．分一四邊形兩對對邊為比例線段之二線，被此分為比例線段。

例題

363. 二定線，各線上一點，A及B，並一定點P．求作一線過P，交定線於X及Y，使AX及BY，具一定比。

決定二定線之轉點O，以A及B為相似安置，如以X及Y為相似安置然，則定比為旋轉比；因△OXY ∽ △OAB，由X點觀OP線在一已知角下，則X點即可決定。

注意．此問題為 Apollonius 所發者，並在其 "de rectione rationis" 書中討論之，此書已失傳，但Halley由一阿拉伯翻譯中重述之。

364. 過一定點，求作一線，交二定線於二相似安置點上。

此問題祇爲前一題之推廣，可以相同之法解之。

365. 二定線，各線上一點，A及B，並一定點P。求作一線過P，交定線于X及Y，使AX及BY，具一定和。

在一線上，令BD等于定和；則AX=YD，因之此問題變爲363。

366. 過一定點P，求作一線，同二定線作成一定面積之三角形。

設A爲定線之交點；以AP爲一邊，他一邊在一定線上，作一三角形，具定面積；今所求之線可令所加之面積，等于減去之面積而作出。因二面積爲已知其高爲由P至二定線之距離之二三角形，故知此二三角形底邊之比，則此問題變爲363。

注意。此問題亦爲 Apollonius 所發表，討論此問題之 'de sectione spatii' 書已失傳，Halley 只將其一部恢復。

367. 二定圓，各過一點，A及B。在此二圓上，試決定二點X及Y，使AX弧及BY弧相似，並XY線具一定長。

以A及B爲相似安置點，求此二圓之轉點，于是X及Y亦變爲相似安置點，故三角形ABO及XYO彼此相似。

此問題包括364題，其二圓之第二交點爲轉點。

368. 已知每邊經過一定點，並對角線之長，求作一長方

形。

作二對頂點軌跡之圓，則此問題變爲367。

369. 二定線AB及CD；過彼等之交點作一圓，交AB于X，CD于Y，使AX：CY及XB：YD等于二定比。

過AX及CY之轉點之圓，亦過XB及YD之轉點。

370. 過二定點A及B，求作二線，作成一定角，並交一定線于X，交一定圓于Y，使AX：BY等于一定比1：k

對于AX及BY之轉點，以k倍乘定線。

371. 一定點A及二定線BC及DE，于BC上求作X點，DE上求作Y點，使BX及DY之比爲定比及∠XAY爲定角。

轉BX至DY；于是A落于一已知點A_1，並知∠AYA_1

372. 已知B－C及BA：CD之比，求置一四邊形ABCD，以B及C置于二定點上，A及D置于二定線上。

以換置法變之。(4)

373. 過二定圓之一交點S，求作二線ASa，BSb，(A及B在一圓上，a及b在他一圓上)，使作成一定角，並使三角形ASB及aSb之面積相等。

二圓之他一交點，爲Aa及Bb之轉點，因之爲AB及ab之轉點，旋轉AB及ab則S落于一已知點S_1。ab具一已知長，並其離S及S_1之距離具一已知比。

註釋。過S垂直于二弦之二線，必交聯心線于離其中點等距離之二點上，亦可得一較簡之解答。

374. 二定圓，在一圓上一點A及他一圓上一點B。求作一圓過A及B並交二定圓于X及Y，使AY弧及BY弧相似。

決定二定圓之轉點O，在此二圓上A及B爲相似安置點，AX及BY爲相似安置線，且必在ABO圓周上相交；亦在二定圓之等冪軸上相交。

375. 聯一三角形三邊之中點，作成另一三角形，彼同此定三角形相似；顯然二三角形之旋轉角爲180^0，旋轉比爲$\frac{1}{2}$，轉點必分聯任何二相似安置點之線爲二部，且具$\frac{1}{2}$之比，並因諸中線即相似安置線，故轉點必爲諸中線之交點。因此二三角形諸高之二交點爲相似安置，又因小三角形諸高之交點，爲大三角形外接圓之圓心，故在任一三角形內，其諸中線並其諸高相交之二點，及外接圓之圓心，皆位于一直線上，並其部分具1：2之比。

376. 已知一圓，O點及P點，及V角，一線過P交此圓于A及B；求一X點之軌跡，由之$\angle OBX = \angle OAX = V$。

AOXB圓交OB于一定點；因之具轉點O，圓之圓心作一直線，故X作一直線。設O爲定圓之圓心，及$V = 90^0$，則X作P之極線(Polar to P)。

8. 設有三組相似曲線A，B及C，並一點O爲A及B之轉點，亦爲B及C之轉點，則O亦必爲A及C之轉點；于是O爲此三

組之公共轉點；此理論可推廣至任何多組之相似曲線上。

將此三組之相似安置點a,b及c與轉點相聯，此線之比及彼等作成之角之比，必為常數；因此△ abc之形狀必不變；故稱為基本三角形(Fundamental triangle)。同理可知凡具一公共轉點之許多相似圖形，必可得一相當不變形狀之基本多邊形；當此多邊形繞轉點旋轉時，每一頂點作一此圖形，其他諸頂點同時作其他之圖形；在此平面上，基本多邊形上任一點，將作一圖形與其他諸圖形相似。故當其轉動時，諸定圖形之轉點，亦必為基本多邊形之轉點。

9. 已知二直線與二相似安置點，其轉點必在過此二點及該線交點之圓上；如在三線上三相似安置點已知，則其轉點必為二該圓之交點；而第三圓亦必過此同一之點。聯三相似安置點，即得基本三角邊形；因在此三線上，可決定任何三點，故此三角形可具任何之形狀，但不同之基本三角形，有不同之轉點。如已知基本三角形，則轉點甚易決定；置一固定三角形相似之三角形于此三線上(例154)，如此可決定三個相似安置點。

設此三線過一點O，此點必為任何基本三角形之轉點；故凡與定基本三角形相似之三角形，必為相似安置，O為其相似中心。在特殊情形，轉點為不定；設直點A及B作AO及BO並，∠C＝∠AOB，則C必作一線過O點，

10. 依5二圓上之轉點為不定；而對於三圓則可決定一公共

轉點；因此點由二圓之交點(看6)而得，故可有二解，即二點離二圓心之距離，具有與半徑相同之比。

判定一此點，作為諸圓之轉點，則諸旋轉角，可以諸圓心與轉點之聯線為相似安置而決定之；則頂點為諸圓心之三角形，變為基本三角形，並且凡聯三相似安置點所成之三角形，必與此基本三角形相似。

11. 設一與定多邊形相似之多邊形，當其移動時，使三點作三直線(此線不交于一點)，則此圖形上各點，必皆作一直線。

因聯三點作成之三角形，其形狀不變，設認為基本三角形，則三點移動時所在之三線，其轉點可被決定。依8此點亦為基本三角形各位置之轉點，故為含此三角形之多邊形之各位置之轉點；多邊形之轉動為繞一定點之旋轉，故多邊形上之諸點，必作許多相似曲線，今此曲線為許多直線。此定理，當此三線交于一點時，不能存在(看9)。

在11中，可用具有公共轉點之三相似曲線代三直線，並可推廣該定理包括此種情形。三點當其移動時必恆同曲線之三相似點相合，故此三點決定之三角形必為諸曲線之基本三角形；設上述者為此情形，則多邊形之任一點，必作一曲線同定曲線相似。此甚顯然，設所指定之條件，較實實決定移動之條件為多時，則必試尋多餘之條件！以後限定三曲線為圓，以其為惟一之重要情形故也。吾人要特別推究者

，爲基本三角形在三曲線上移動，是否祇遵相似安置點移動？但已知此情形在三直線上爲然。

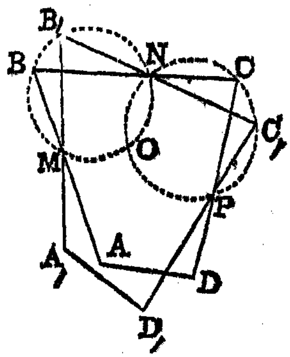
已知三圓有二相當公共轉點；對于此二點之基本三角形必相同，因三圓心爲相似安置點，並基本三角形爲聯如此三點所成。設用一轉點，則對于一圓上一點A，必有相當之相似安置點B及C在他二圓上，設用另一轉點，則有b及c爲相當之相似安置點。因之得基本三角形之二位置，ABC及Abc，其一頂點爲A，此外無其他頂點，此甚易証明。設解此問題，求置基本三角形以其一頂點于A，其他頂點在他二圓上，依以前之法則，祇可得二解，該解與上面用不同之方法所求得者必恰同。

此基本三角形，在三圓上，祇能遵相似安置點而移動，但可用二種方法去作：

12。當一與定多邊形相似之多邊形，如旋轉之，使其三線（彼不交于一點）各含一定點，則此圖形中任一其他線必含一定點。

設AB，BC及CD三線，各含一定點M，N及P；求証任一第四線必含一定點。首先可知此多邊形之一切位置必具一公共轉點。對于此二位置ABCD及$A_1B_1C_1D_1$，可作一圓，過相似安置點B及B_1並過相似安置線之交點M而得其轉點（看5）；此圓亦必過N，並可立即作出，因其過定點M及N，並含B角故也。故轉點O，爲此圓與他一以同樣之方法過N及

P所作之圓之交點。一圓過O，P及D，亦必過D_1，同樣過相似安置線AD及A_1D_1之交點，A_1D_1爲任一位置；故此交點爲一定點。



此定理亦可自然推廣，將以不同之方法証明之。

13。繞一固定轉點，旋轉一同定多邊形相似之多邊形，以前以諸多邊形諸點之一，遵某一曲線移動而決定其運動；但亦可以諸邊之一，當運動時切于一定曲線而決定之。在此種情形，多邊形之任一線，當運動時將切一同定曲線相似之曲線。設AB連續取A_1B_1，A_2B_2，等之位置，同時切于定曲線，並他一線BC取B_1C_1，B_2C_2等之位置，于是可繞一定點旋轉，以二如此線所夾之不變角爲旋轉角，以該二線距轉點距離之不變比爲旋轉比，而使此二組互相遮覆。因此二組線所成之圖形，結果相似，並在此種情形下與位置之個數無關，故對于無限數之位置，圖形不變，諸圖形而在該情形爲曲線，且爲運動之線所切。

此甚顯明，定點爲相切曲線之公共轉點；旋轉角，爲運動線之夾角；並旋轉比，爲運動線離轉點之距離之比。[illegible]

必切此所生之諸曲線于諸相似安置上，故必變爲此諸曲線上之相似安置線。在此諸曲線上，凡一組相似安置線，自然作成一多邊形，與定多邊形相似；稱此多邊形爲副基本多邊形。(Secondary fundamental polygon)。此二基本多邊形，有密切之關係；基本多邊形能內接于副本多邊形內，並且設內接多邊形之一頂點在外接多邊形之一邊上不變，則當其繞一定點旋轉時，仍爲內接而不變。

以上所討論之運動，亦可以他種方法決定之；于此祇討論多邊形之三邊在諸相似曲線上旋轉所決定之情形；欲使此種運動，與在上面所陳述者相同，此三曲線必具一公共轉點，並此三邊必永切此三曲線于相似安置點上；此可充分決定該種運動，與在上面之運動相同。故多邊形之旋轉爲繞諸曲線之轉點之旋轉，其每一邊切一與定曲線相似之曲線；由于在諸定曲線上旋轉之三邊所成之三角形，必爲諸曲線之副基本三角形。定理12，其曲線皆變爲點，爲此定理之特殊情形。

14. 已決定二圓之轉點，再定二點A及a爲相似安置點，則在此二點之切線作成一定角，此角當A及a作相似之弧時，其大小不變。反之，設已知此角，則可決定一對相似安置及相當之轉點，並作成此已知角之任何二切線，必切此二圓于相似安置點上。(有二解)

15. 繞一定點之旋轉，恒可以繞任一點之旋轉及一平移

代替之，旋轉比及旋轉角不變，並平移祇依諸成分與諸轉點之位置而定

依新之旋轉，設旋轉比不變，則得所求之圖形之大小，旋轉角不變，則圖形之線落于所求之方向。平移之距離及方向，由于聯曲線之任一點在兩次旋轉之位置而定。

設O為定轉點，O_1為新轉點。認O_1為定曲線之一點，則O_1繞O旋轉將落于一新點O_2，若繞O_1旋轉，則靜止不變。故O_1O_2線決定此平移。故平移為新轉點繞定轉點旋轉所作之線所決定。

反之，凡一平移及一旋轉，可以繞一新點之旋轉代替之，依上法此新點極易求得。

16. 作成二連續旋轉之次序，可以加一平移而反轉之。

無論選擇任何之次序，在此組上之各線必旋轉一角等于諸定旋轉角之和，並須以諸定旋轉比之積倍乘之。則所得之二圖形其大小必相等，並彼等之相似安置線之方向相同；故一平移，可使其一圖形，覆于他一上。

設二轉點為A及B，當A繞A旋轉時，其位置不變，繞B旋轉則落于一點C設相反行之，先繞B旋轉，則A落于C點，再繞A旋轉，則落于一點D。如此CD或DC表示平移，故必加此平移，方能反轉二次旋轉之次序。

17. 二次旋轉可湊為一次旋轉。

設二轉點為A及B，在代替此二旋轉之旋轉內，祇轉點C為

未知。A點當繞A旋轉，其位置不變，繞B旋轉，則落于一點A_1。今使$\angle ACA_1$等于定旋轉角之和，同時使$CA_1 : CA$之比等于定旋轉比之積，則C可決定。設三角形之三頂點為三轉點，則定旋轉角及定旋轉比，可決定其各邊之夾角及邊之比。如前面所示，設二點落于一點，則三點必皆落於同一點；設諸定旋轉角為零，則三轉點必在一直線上。在此情形，各對圖形，皆為相似安置，故諸轉點，變為諸圖形之相似中心。此定理，將以不同之方法証之於下。

18. 已知諸點組之旋轉法及反映法。此種點組，凡一組上一點，在他一組上即有一相當點，凡一組上一圓，在他一組上即有一相當圓，（此名詞"圓"包括直線在內）；在初等幾何學內，此諸變換（tsânsformation）之意義皆依上述之關係。故設無他種變換，則一點必有一相當點，一圓必有一相當圓，此種推究，甚為合理。因之凡平面上之點，皆含于兩組之內。

設A，B及C為一組之三點，a，b及c為他組上之相當點。設M為第一組上一點，並不在ABC圓上。則在此組上二圓ABM及BCM，在他組上，必有二相當圓abm及bcm，因之m必與M相當。故此二組之相依性，完全為三對點所決定。今在ABC圓內，作一內接三角形$a_1b_1c_1 \backsim abc$，則Aa_1，Bb_1及Cc_1交于一點O。因已知在O之各角，此問題極易解答。故以ABC組之反映，可作成一組與$a_1b_1c_1$相似，並可用一旋轉（設須繞一軸旋轉），變成abc組。

于是証明，凡有相當點及相當圓之兩組，恒可用旋轉法及反映法，將一組變爲他一組。

19. 在旋轉論中証明之諸定理，可藉近世幾何之助，推論新定理及更普通之定理，至其應用，在此書中，未許及之，故祇舉例説明之：在11已証明一直線，在其被三定線截成之ab及bc二部之比爲常數時運動，爲繞一定轉點之旋轉；故任一分ab線爲比之點，亦必作一直線。當討論可移線與無限遠直線之交點時，此比可以非調比(anharmonic-ratio)表之，在此定理之該種形式，表示一透射性即：

當一可移動直線，交四定直線于四點，其一非調和比爲常數，則此線上任一點(爲非調和比所決定者)將作之一直線。

設此定線中有二線過任一圓之二無限遠之虛點，則可推出下之定理：

當一已知角BAC其一定頂點，A，並B及C作二定直線，則BC線上任一點D(爲角BAD所決定者)，將作一直線。

應 用 題

377. 在一定三角形 ABC 内，求作一内接三角形與另一定三角形相似。

依9.内接于一定三角形之一組相似三角形，具一公共轉點；故在定三角形内，内接一三角形具所求之形狀，以之爲基本三角形，再決定轉點；則所求之

三角形，可旋轉基本三角形而求得，此種運算，若對于轉點倍乘基本三角形，則得所求之大小，再繞轉點旋轉之，至各頂點落于定三角形之邊上為止，此尤為簡單。

378. 在一四邊形內，求作一內接四邊形與一定四邊形相似。

設一與定四邊形相似之四邊形，以其三頂點在三邊上，並依前一題決定其轉點；今之問題為如何繞此轉點旋轉此四邊形，使其第四頂點落于第四邊上；當旋轉時，此頂點將作一直線(11)，此線可重用上法作出，如此確定邊上另一點，或繞求得之轉點旋轉定四邊形之邊而作出。設用第一法，則無須求此轉點。

379. 在四定線上，求置一第五線，使被截之三部分，具有定比。

此問題為前一題之特殊情形，因所求之線可認為一已知形狀之四邊形。

注意，此問題見於牛頓之第一卷'Principia mathematica Philosophiae naturalis'

380. 在一定三角形內，求內接一三角形，與一定三角形相似，並具一最小之面積。

381. 以已知諸角及一已知周圍，求作一平行四邊形，並使每邊過一定點。

設AB,BC,CD及DA諸邊,依次含定點P,Q,R及S。設T為SAP及PBQ二圓之交點,則T為AB及在二圓周間A_1PB_1線之轉點,因之

$$AT : AB = A_1T : A_1B_1$$

V為PAS及SDR二圓之交點,以相似之情形,決定AV : AD之比,則A即可決定(189)。

382. 在三定圓周上,求畫一三角形,與一以三圓心為頂點之三角形相合。

求三圓之公共轉點;以三圓心為相似安置點,則定三角形變為基本三角形;形故此三角形同所求者之轉點在三圓之轉點上;繞此點旋轉第一三角形,至其一頂至圓周上,于是得所求之三角形。在此情形,定旋轉比為1,但對于任何其他比之問題,均可以相似之情形解之。

383. 求作一三角形與一定三角形相合,並每邊過一定點。

凡一三角形,其三邊過三點,並與一定三角形相似,甚易作出;今以此三點為相似曲線,則所作之三角形為副基本三角形;決定其轉點,並倍乘所作之三角形,因之得所求之大小。因如此所得之三角形,其旋轉比及所求三角形之旋轉比,皆等于一,則二相似安置邊離轉點之距離必相同,故所求邊之一為切于一已知圓並過一定點之線。

384. 作一四邊形與一定四邊形相似並使其每邊過一定點。

任作一與定四邊形相似之四邊形，令其三邊過三定點，並依383決定轉點。再轉此四邊形，使其第四邊過第四定點；此甚易作，因此邊亦過一定點，且可用二方法決定之（與378類似）。

385. 已知三角形ABC及其外接圓；由圓周上一點O，作三線與三角形之三邊，皆作成一定角，試証此三線交三邊之點，在一直線上。

選A，B及AB上一相當點，為在三邊上之相似安置點，則O必為轉點；相交之三點必為相似安置點，此點必在一直線上，因从本三角形為一直線故也。

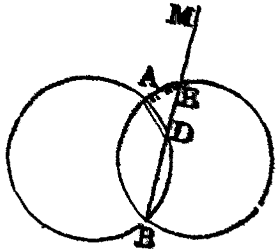
386. 三圓其圓心在一平行四邊形之其三頂點B，C及D上。求設一具定角之平行四邊形，以其一頂點在先一平行四邊形之第四頂點A上，並以其他三頂點在三圓周上。

對于A點以$\frac{1}{2}$倍乘C圓，則得一新圓；此圓及B圓，D圓，之从本三角形在一直線上。其兩部分相等，故所求平行四邊形之對角線B_1D_1必交此三圓于相似安置點上，且由A觀之在一定角下。旋轉BB_1至DD_1，則A至一已知點A_1，于是知$\angle AD_1A_1$矣。

387. 求點之軌跡，由之作切線至二定圓上，其定比。

設二定圓交于A及B，M為一所求點；則MB線交此

二圓于D及E，並依定條件MD×MB及ME×MB之比爲常數；故MD及ME之比爲常數；此外因△ADE之各角皆爲常數；則全圖形



ADEM必具一不變之形狀，且當其旋轉一周，A，D及B作圓時，M亦必作一圓。A爲此圓及二定圓之公共轉點，則前一圓必過A點。DEM表基本三角形，因聯三圓心所成之三角，必與基本三角形相似，此顯然三圓心必位于一直線上，而所求圓心離二定圓心之距離，與MD：ME之比，卽定比之平方。

388. 求作二線，作成一定角並切一圓，使聯切點之線過一定點。

依14此問題變爲364。

389. 求作二線，作成一定角並切二圓，使聯切點之線，具一定方向。

此問題爲前一題之特殊情形，其定點在無限遠之距離處。

390. 在一三角形內，求內接一三角形，與另一定三角形相似，並令其一邊過一定點。

在諸邊上，決定三相似安置點，以內接之三角形爲

此本三角形，則此問題變爲364。

391. 在一定三角形內，求作一內接三角形，與另一定三角形相似；並令所求三角形之重心，在定三角形之一中線上。

內接任何二三角形與定三角形相似；聯此二三角形重心之線，必交定中線于所求之點上。因在定三角形一邊上，一組三角形之三頂點所決定之部分，與其三重心所決定之部分，有相同之比，故所求三角形之頂點卽易決定。

392. 在一三角形內，求作一內接三角形，使其二邊與定方向，第三邊爲定長。

設abc爲內接三角形，bc爲定長；則abc之外接圓將交a所在之邊于二點，卽a及他一點d。于是知三角形dbc之各邊。

393. 求作三圓，已知由一定點觀三圓似爲相等(卽在等角下)，並知各圓內上一點，半徑之比及由定點，可見諸聯心線之諸角。

知三圓之公共轉點，諸旋轉角及諸旋轉比；故可旋轉二定點至過第三點之圓上，于是再作過此三點之圓。

394. 已知二圓交于A及B，及二點P及R。在每一圓上求作一弦，分別過P及R；使聯此二弦端點之線，過A點。

設以此二弦爲相似圖形，B必爲此圖形及二已知圓之轉點．知旋轉角及旋轉比，則可旋轉一定點至含他一定點之線上；于是在此弦上知兩點

395. 已知A，B及C，X爲AB及CY之轉點；問當Y作一定曲線時，X將作何種曲線？

平移BAX三角形至B_1CX_1．此相似三角形，表明B_1Y及CX_1有一不變之乘積，並且以相同之旋轉速度向相反之方向旋轉，故X及Y將作反映曲線．

396. 一測量員能于地面上見三點A，B及C；其相當點a，b及c平置于平案上．彼在平案上須求一點O，而其在地面上所站之位置相當．(三點之題)．

所求點爲ABC及abc二三角形之轉點．過a，b及c作至A，B及C之視線，此諸線作成誤差三角形 (triangle of error)；設爲$\alpha\beta\gamma$，γ爲a及b二線之交點，依此類推．因至A，B及C之距離甚大，故角α，β及γ，當平案之位置微有變動時，可認爲不變；故所求點爲$a\gamma b$及$a\beta c$二圓之交點．

在地面上不能精確作此二圓，並彼等之圓心，非永在案上，設以a爲反映中心$a\beta\times a\gamma$爲反映冪(Power of inversion)，取此二圓之反映圖形，則與所求點相當之點，必爲二線之交點，此二線分別過β及γ並與$\beta\gamma$作成之角，分別等于$ab\gamma$及$ac\beta$，故此作圖爲：作二

線過β及γ，交于一點O_1，與$\beta\gamma$作成上述之二已知角。旋轉平案令O_1a指向A；則三角形ABC及abc為相似安置，而誤差三角形，縮為一點O，即為所求點。

令　$\angle\beta\gamma O_1 = \angle\beta ca$及$\angle\gamma\beta O_1 = \angle\gamma ba$，此相等之諸角為在同方向轉旋所作出者。此作法無論已知點之位置如何，皆能應用。

附錄

關于諸圓弧之交切

已知嘗求圖形各部間之關係，尤其是角之關係，對謹慎考查圖形，是如何之重要。此事恆可以專論諸角間及諸圓弧間之關係之定理及相似之初等定理而成之；但若諸圖形，非常複雜，並角之個數太多時，則常難尋得簡單之關係。故最好求許多方法，使精密之考查可變簡易。其一法，即以圖形之諸角為諸圓弧所作成。于此不詳細討論而祇引用數定理。此定理在許多情形下，引用之非常便利。

1．以諸圓弧作成之多邊形，其邊之和，加其外角之和等于4R．

設一直線，自一頂點起並切于一邊，沿此多邊形轉動，待其至次頂點；再繞此頂點旋轉至其變為次一邊之切線為止，如此進行，最後至起始之位置；則此線將連續作許多角等于多邊形之邊並等于多邊形之外角，但此線已作完全之旋轉，則該諸角之和必等于4R．前假設線經一周旋轉後，回至其起始之位置；則在非凸形多邊形之情形下，此線可作數次之旋轉（或無）；故其諸角之和，可為4R之倍數．

欲此定理能普遍化，必須依旋轉之方向，定諸角及諸弧之正負．

2. 凡此三角形，其諸角之和，減諸邊之和等于2R。若諸邊邊過同一點(此點非爲三角形之一頂點)，則諸角之和等于2R，諸邊之和等于零。

設以諸邊在交點之諸角，代替三角形之角，則此定理，甚易証明，因諸邊在交點之諸角，等于三角形之諸角故也。

3. 凡二邊之圓形，其兩角爲同樣之大小，並等于二邊之和之半。

4. 凡圓周上一角，皆等于二邊之和之半，並等于所對之弧之半。

引長其二邊，作成一兩邊之圓形，在此圓形內，其二邊之和之半等于此角；但此二邊引長線之和，等于在圓周上此角所對之弧(2)。此弧分圓形爲二三角形，可以爲一三角形之一邊或他三角形之一邊，在此二情形，其符號相反。

5. 設兩對圓，每對圓之交點，各在他一對圓之一圓上，則此兩對圓作成相等之角(2)。

6. 在一可內切之四邊形內，一對對角之和等于他對對角之和。如四邊形通過一相同之點，則相等之二和皆爲2R，並且諸邊之和=O.(4)。

7. 設在四邊形內，一對對角之和等于他對對角之和，則此四邊形爲一可內切之四邊。

依1. 一對對角之和，減諸邊之和之半，等于2R。設直線四邊形之頂點與此定四邊形之頂點相合，則其對角之和與直

線四邊形對角之和相同。

8. 設二圓切二其他圓于同樣情形下(外切或內切),則四切點皆在一圓周上。(7)。

9. 凡一圓過二定圓之交點,與一組切此二定圓之諸圓相交(在相同情形下),其交角皆相等。

此定理已用反映法(inversion)証明之(198),今直接証之,並含二定圓不相交之情形,而以一圓過彼等之交點說明之,此圓與二定圓有公共等冪軸。

我們可令一圓具此公共切線;設A及B爲公共切線之切點,S_1及S_2爲二定圓,並C及D爲他一圓S之切點。過二定圓二交點之圓,交公共切線于E,交S圓于F。AC及BD線交于S之O點,而切于O點之切線,平行于公共切線。A,B,C及D諸點位于一圓上,O對于S_1及S_2必具相同之冪(Power);因之O必爲此三圓中任意二圓之等冪軸上之一點。F爲三圓之公共點,OF必爲彼等之公共等冪軸,則諸圓必另有一公共點在OF線上。此諸圓有二公共點則彼等之圓心必位于一直線上。因ACF及BDF圓過此二切點,每一圓將交公共切線及切于F點之線成相等之角,則彼等之圓心必爲二切線夾角之平分線上一點。EF圓之圓心爲此同一線上之點,故EF必交公共切線及切于F或S圓之線,成相等之角,

圓　　組

在決定一圓之諸條件中，我們要特別注意者，爲1)圓必過一定點，2)圓必切一定直線，及3)圓必切一定圓。選擇此三條件決定一圓，我們可得一組問題，此問題除四個外，皆在前面解之。在解此問題及少數其他新問題前，須述二定理，此定理，將于後面用之：

10. 設A及B爲一圓切二其他圓之點，則AB線過該二圓之一相似中心。

AB交B圓之點，命爲第二點b，則顯然至b之半徑與在他一圓至A之半徑相平行。因之A及b在此二圓上爲相似安置點，以之爲相似安置點，故Ab必過相似中心。

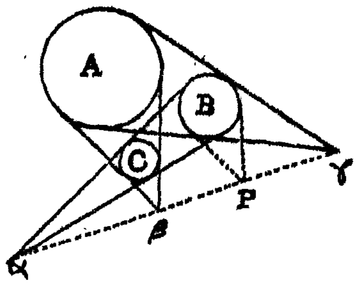
設此圓切二圓在相同之情形下，即皆外切或內切，則此線過外相似中心；設外切一圓內切他一圓，則此線過內相似中心。

設O爲相似中心，則此二圓對于O點爲反映曲線，而以O爲其反映中心；故OA×OB之積爲一常數。

11. 三圓，其每對之外相似中心，同在一直線上。

設A，B及C爲三圓，γ爲A及B之相似中心，β爲A及C之相似中心，α爲B及C之相似中心。作于A及C之二切線

，作B圓之二切線，彼交于P點，P及β對于B及A爲相似安置點，故Pβ線必過A及B之相似中心γ。同理P及β對于B及C爲相似安置點，故Pβ線過α；因此α，β及γ必在一直線上。



系1。同上相類似之定理，爲一直線過二內相似中心，必過第三對圓之外相似中心。

系2。此定理對於任何三相似並每對爲相似安置之曲線，皆眞；此外對于此三曲線上三相似安置圓亦然；此定理對于此三圓之相似中心亦眞，因該相似中心同曲線之相似中心相同。

例　題

397。求作一圓切二定圓；使過二切點之線，過一定點。

398。求作一圓于相同之情形下切二定圓，並自一通過二定圓外相似中心之線上，截一定長之弦。

399。二定圓A及B，及定點D，E及F，求作一C圓過D點，使A及C之等冪軸過E點，並B及C之等冪軸過F點。

400。在一四邊形ABCD內，AB爲圓定邊及在二對角線將

部分間之比爲常數。求CD之軌跡。

命對角線相交之點爲O，及

$$AO:OC=m:n,$$

$$BO:OD=p:q;$$

設O點作一曲線K；對于A點以 $\frac{m+n}{m}$ 倍乘此曲線。再對于B點以 $\frac{p+q}{p}$ 倍乘之，由是得C及D同時所作之曲線；此曲線爲依 $\frac{p(m+n)}{m(p+q)}$ 之比之相似曲線，並彼等之相似中心爲AB線上一點M(11系2)。因C及D爲相似安置，CD過M點，故MC:MD爲上述之比。同樣求得MB:MA之比爲常數，故M爲一定點，並爲CD之軌跡。

401. 求作一圓，過一定點並切二定圓。

吾人知相似中心對于所求圓之冪；是以在該圓上決定另一點，則此問題變爲238。

402. 求作一圓過一定點並切一定線及一定圓。

此題爲401題之特殊情形，可認定線爲一以無限大半徑所作之圓。

403. 求作一圓，切三定圓。

應用50頁所述之平移法，變此題爲401。

此題亦可依類似于201題之法解之。所求之三角形，

在此形，其諸頂點爲所求之諸切點；其三邊必過此三相似中心；設以此相似中心作爲反映中心，並選擇反映冪，使每對圓爲反映所互換，則任一此圓，經過三次反映後，必反回其原位。如此，則此題同前所解者，無甚差異。

最簡而最精之解法，爲應用下定理所得者，此定理爲二圓之等冪軸，交切此二圓之一圓並交一公共切線，作底相等之角。依此定理，過二圓之等冪軸與所求圓之交點，作所求圓之切線必平行于公共切線，此切線屬于同一組相切之圓，如所假者。（外公共切線屬于在同一情形下相切之組圓，內公共切線屬于在相異情形下，相切之圓組）。設A，B及C爲定圓，若認所求圓及A圓爲相似安置，切點爲相似中心，則A及B之等冪軸，與在A圓內聯A及B公共切線之切點之線，必爲相似安置，此二線之交點與定圓之等冪心爲相似安置；故聯此二點之線，過所求之切點。

凡上述之條件所決定之圓之問題，皆可作爲此題之特殊情形解之。

404. 在ABC三角形內，求作三內切圓S_a，S_b及S_c，每一圓切其他二圓，並切三角形之兩邊。

此著名問題，首先爲意大利數學家Malfatti（+1807）所解，彼計算諸圓之半徑並求彼等之數值，此

數值可簡易作出。在1826年Steiner第二圓切點上之公共切線，亦必爲內切于定三角形諸角之平分線所作成之三角形內二圓之切線；此定理予一簡易之作法。Steiner 雖謂此定理可以一組圓于相似中心，等冪軸，冪圓(power circle)等諸推斷之定理証明，而並未証明之。至1874 Schröter首先藉其諸定理並藉圓錐之反映定理，証明其作法。

今由最初等之定理，推斷Steiners之作法。

設各圓與邊之切點，依周圍之順序分別爲A, c_1, c_2, B, a_1, a_2, C, b_1, b_2；命γ爲Sa及Sb之切點，β爲Sa及Sc之切點，α爲Sb及之Sc切點。一圓切Sa及Sc于β並過c_2點，必交AC于一點D，其交角與其交AB于c_2點所作成之角相等。切此圓于c_2及D之二切線，交于A角之平分線上，並與二邊作成一可內切之四邊形，故c_2D弧等于$\angle A$。$c_2\alpha\beta$圓過c_1點；此圓及βDb_2圓交于E點，則可得$\angle c_1Fb_2=\angle c\,c_2\beta+\angle b_2D\beta=180^\circ-\frac{1}{2}\angle A$；故$c\,Eb_2$圓之圓心在A點。$c_1c_2\alpha\beta$圓從AB，AE及切$D\beta c_2$圓于$c_2$點之切線上，截下相等之弦；因$Ac_1=AE$，並此圓交AB及$D\beta c_2$之角相等故也。同理$E\beta Db_2$從AB及過D之切線上，截下相等之弦。命F點爲過D及c_2二切線之交點，同時此二線分別交AE于G及H；$c_2F=DF$，$c_2G=EG$，$DH=EH$

，因之GFH三角形之一邊等于他二邊之和，故G及H點必與F相同，並AEF線平分A角，結果$c_1c_2\alpha\beta$圓交，AB，AE及圓α及β之切線之角皆相等，如此吾人可作一圓，與$c_1c_2\alpha\beta$圓為同心，並切此四線。以相同之方法可証此圓切B角之平分線，Steiners定理，于是証明矣。

設諸圓切諸邊之延長線，則此問題另有解答，此解答僅將上之推斷微變之即得到。

設此問題以三圓代三角形之三邊，吾人可以此圓之一交點為反映中心，將圖形反映之，顯然設以平分二定圓夾角之圓代各角之平分線，以反映圖形之相當圓代切于β之切線，依此類推，則在上所証明之定理，可推廣之；使含此情形。

關于以直尺及圓規解一問題之可能性.

設解一問題，而未能成功，其故因未求得適當之方法，或此問題不能以直尺及圓規解之。在諸情形下，解決此疑問之方法，將于下面述之。

設一題可解，其解答雖極複雜，亦必為兩種運算和成：過二定點作一直線及以定圓心及半徑作一圓。凡一點皆可決定為二直線之交點，或一直線及一圓之交點或二圓之交點。設若用解析幾何之公式及方法，于作諸點時，計算其作標，

一切要解之方程，必爲一次或二次，故由作圖所決定之諸成分，可以已知之成分表之，因此所決定之數量，以有理平方根表之或無理平方根表之；但此類方式皆可畫出，故所求圖形可以用直尺及圓規解之之可能性，其必要及充分之條件，爲所求之數量可以用已知數量表之，且只爲有理或無理平方根。

方程式能以平方根解之檢查，可于著者之"Om Ligninger ,der loses ved Kvadratrod"及其"Theore der algebraischen Gleichungen"(Kopenhagen 1878)，見之。在此書中，下之定理，已經証明：

1.除諸圓錐曲線外，無其他曲線能以直尺及圓規決定其同一直線之諸交點。

2.除諸圓錐曲線外，無其他曲線，可以用直尺及圓規由任一點，作其切線。

3.設能以直尺及圓規，決定線束(Pencil lines)之任一線同一曲線之交點，(該曲線不經過線束之頂點)，則此曲線必爲二次方程，並線束至少要有二線同此曲線之交點兩兩相合。

由此諸定理之變化，可生許多新定理。如除線束外，可將考查法推廣至他種線及圓組等等。于此祇述下之定理：

4.除圓及直線外，無其他曲線，能以直尺及圓規決定其同任何圓之交點。

此定理由1極易演出，因圓及直線爲惟一能經任一反映而作成圓錐曲線之曲線。

此諸定理，適合許多情形。

例，設在一問題中已知X點必在一直線上，則此點之位置可任意選擇。設問題可以直尺及圓規解，去此條件，則X必有一軌跡，依1，其軌跡爲一圓錐曲線。同理當圖形含一點，其位置可以隨意選擇時，可應用第二定理。

更詳考第一情形，即可得解諸問題之一種普通作圖法。去直線，進作二圖形使適合其餘諸條件，即得X之二位置；命爲X_1及X_2。設X之軌跡爲一直線，則X_1X_2線將交所去之線于一點，此點必爲所求點。設非所求點，試決定第三點X_3，如果$X_1X_2X_3$圓不交所去之線于所求點，可試決定X_4及X_5。所去之線與用五點所決定之圓錐曲線，其相交之諸點，可用直尺及圓規決定之。如上諸點，非所求者，則此題不能以直尺及圓規解之。在第二種情形，可用相同之方法進行。

以直尺及圓規解問題後，吾人依以上之諸定理，可推斷某種點之軌跡爲圓錐曲線；如此即易決定此圓錐曲線，爲圓，爲直線，或爲其他圓錐曲線。

應用題

405. 過一定點，作一線，爲一定角之兩邊截一定之長。

去定角之一邊，則所求點之軌跡必爲蚌形線(Conchoid)，但被去之邊，其位置與蚌形線無關，故此問題不能以直尺及圓規解之。在特殊情形(例定點位于定角之平分線上)，此線對於蚌形線可佔一特殊位置，使此問題能解。

406. 由二定點作線至一定圓之任一點上，將其第二次交圓之點，以直線聯之，試証此諸聯線之軌跡為一圓錐曲線。

已知201題可用直尺及圓規解之，該題即可証明此定理。

407. 求置一定三角形，以其三頂點在三定圓上。

此問題不能以直尺及圓規解之；因設去一圓，則三角形之自由點，必有一軌跡，既不為一圓，亦不能為一直線，若在特殊情形，二圓皆為直線並此三角形亦為直線，則此軌跡必為一橢圓。

408 已知a，C及B－C，求作一三角形。

作BC並由B作二線，令一線與BC作成一角等于定角之半，他一線垂直此線，則此問題變為下之情形：由C作一線為直角之二邊截2c之長。此問題為405之一特殊情形，故必詳察之。去C點則2c線將以其二端在直角之二邊上移動作一內旋輪線(hypocycloid)。因a及定角可使C佔任何之位置而此內旋輪線不變，故此問題不能以直尺及圓規解之。

409. 求三分一定角。

此問題頗易變爲下問題：過圓周一定點A，作一線AX，交任一定直徑于Y，使XY等于此圓之半徑。由定直徑可得Y之軌跡爲一四次方之曲線，其雙重點 (double point)在任一圓之無限遠之虛點上並在A點上，且該曲線亦過圓心。因諸直徑作成線束，其頂點爲此曲線之一普通點。曲線必爲三次方程爲此題解答之必要條件，故此題不能以直尺及圓規解之。

吾人已如此証明此著名問題不能以直尺及圓規解之，但不能証明同樣著名之問題，如平方一圓。于此所証明者，爲π不能以平方根表之，至今此問題尚無一人能証明之。

410. 已知一點P及二圓；過P點求作一線，並每一圓上作一切線，作成一三角形，使P及二切點，爲其三邊之中點。

設X及Y爲二切點；則XYP三角形之位置，須使由X及Y所作之高通過二定圓心。繞P轉過X之圓，使置于過Y之圓上，則X至一點X_1，PY及PX_1與由P至圓心之線相交作成等角。至X_1之半徑與PY作成一已知角，因其在未轉之前垂直于PY，並被轉一已知角故也。試作此三角形PX_1O，O爲圓心，此問題變爲408，故不能以直尺及圓規解之。

勘誤表

頁	行	誤	正	頁	行	誤	正
3	7	一圓	作一圓	27	6	狐	弧
5	1	.矣	矣.		15	已	已知
	21	v_a	V_A		21	$\angle(m_ab)$	$\angle(m_a,b)$
9	8	$\angle CPC$	$\angle CPC_1$	28	8	V_c	V_C
	9	,點	點,		16	,之切線	之切線,
	10	,線	線,	29	10	$\frac{S}{r}$	$\frac{s}{r}$
	12	,點	點,				
	18	C	c	30	14	v	u
12	17	DB_1	D_1B_1		16	考	考查
	18	或DB	或D_1B_1	31	8	舍	含
15	17	,上	上,	33	22	他	他邊
19	1	V_a	R	35	11	,線	線,
	9	四邊	三角	36	18	,線	線,
	20	=C	=c	37	2	函AD	令AD
	21	△GDB	△CDB		2	于 C	于 c
	21	依 C	依 c		2	延長 C	延長 c
21	3	已知 C	已知 c	38	6	故PB	故PB_1
24	10	Q	P	40	20	過 C	過 c
	10	y	V		21	爲PA	爲P_1A
	17	Situatud	Situated	41	1	線 P	線,P_1
25	10	inu	inv,		2	即	既
	17	交k'	交k'		9	PA.	P_1A.

	13	PP_1,	P,P_1	68	17	距A	距A_1
	15	Leei	Loci		17	估B	估B_1
43	12	上一	上截一	69	10	之點	之點,
44	13	切線	線		11	求	求之
44	21	分二定	分二定點	71	17	當	當此
47	21	此	並此	72	8	×oa	×Oa
49	6	二過	過二	80	6	每一	一
51	4	ABC	ABC之邊	81	22	曲線爲	曲線皆爲
52	14	四行	平行	84	1	安價	安價點
53	15	二平行	二不平行		19	同上	同上
54	2	EC	EC_1	87	8	調	調和
	8	△CCF	$\triangle C_1CF$	89	10	形故	故
	8	DDF。	D_1DF。		17	則	以
55	13	P	P_1	90	17	圓,	圓
	13	BP	BP_1	92	16	定點,	定點
58	20	依此	依次	96	2	邊邊	邊皆
61	5	已合	合已	101	1	此形	此情形
	16	BD	BD_1	102	16	$\angle cc_2\beta$	$\angle c_1c_2\beta$
62	7	bXC	$b\times c$		17	cEb_2	c_1Eb_2
63	5	問	問題		20	AB	AE
34	9	題例合混	換置法之	103	3	,AB	AB
		之法置換	混合例題	106	15	C及	c及
	21	置諸此置,	置,	107	2	圓周	圓周上
66	3	X	K				

58 289 題。已知一雙對邊及四角，求作一四邊形。

中華民國二十三年八月初版

解幾何作圖題
之
方法與理論

每冊定價大洋四角	
外埠酌加郵費	

原著者 JULIUS PETERSEN

譯　者 高懷萬

校閱者 底華甫

印刷者 前外楊梅竹斜街 中華印書局 電南一六七三號

代售處 絨線胡同·景山書局 東安市場 中原書店