教育部審定

簡易師範學校及簡易鄉村師範學校

算學

第三册

編著者 任誠

正中書局印行

第三册 目次

第二篇 数的擴張及運算的推廣

下 编

第七章 代数式的運算III(分式四則)

第八章　分式方程式

第九章　代數式的運算IV(乘冪及開方)

第十章 二次方程式

第十一章 代數式的運算V(對數)

第十二章* 各種方程式

第十三章* 不等式

第十四章 比及比例

第二篇

數的擴張及運算的推廣

下編

第七章

代數式的運算 III (分式四則)

在第五章以前, 分式固已屢見, 而前章第 69 款因敍及最低公倍式的求法, 又曾以以文字代表的兩數求商, 而涉及具有分式形式的運算. 然均甚簡單易解, 無需特別說明. 其實此種運算與第一篇第五章所述亦正相同, 不過分子分母均爲代數的數, 其算法有進一步推廣的必要. 今因子分解及最高公因式最低公倍式的求法, 既詳前章, 正可應用以實施分式的運算.

第一節　分式的化法

70. 分式及其特性　以整式 B 除整式 A 的商寫作 $\frac{A}{B}$ 形式的叫分式. 故分式 $\frac{A}{B}$ 卽乘以 B 則爲 A 的代數式, A, B 若各爲一個代數的數, 則 $\frac{A}{B}$ 亦可稱分數, 其分子分

母皆稱項,與第一篇第五章所述分數定義同.如

計算 $(+a)\div(+b)\cdots\cdots$ 及 $(-a)\div(-b)$ 而得

$$(1)\qquad +\frac{a}{b}\cdots\cdots 及 +\frac{a}{b}. \qquad [30款]$$

解 $ax=b$ 及 $a(x-a)=b(x-b)$ 而得

$$(2)\qquad x=\frac{b}{a}\ 及\ x=\frac{a^2-b^2}{a-b}. \qquad [36, 37款]$$

求 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 的通解而得

$$(3)\qquad x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad [53款]$$

求 A, B 二式的最低公倍式而得

$$(4)\qquad L=\frac{A}{H}\cdot B=\frac{B}{H}\cdot A. \qquad [69款]$$

(1)—(4) 式在所有各文字無公約數的範圍中,皆為分式.但 (4) 及 (2) 的後半,表面雖為分式,實際其分母可為分子所包含,故結果仍為整式.

關於分式有一個最要的特性,即分式的兩項同時乘以或除以不等於零的一數或一式,其值不變(參考第一篇 44, 45 兩款).

設 $\frac{A}{B}=q$, 即 $A=Bq$, 更設 m 為不等於零的任意一數,

則　　$mA=mBq,$

故　　$$\frac{mA}{mB}=q=\frac{A}{B}.$$

若 $m=-1$, 則 $\frac{-A}{-B}=\frac{A}{B}$, 故知分式的兩項若同時變更符號,其值不變;若僅有一項的符號變更,則分式的絕對值雖同,而符號則異,例如

$$\frac{a-b}{m-n}=-\frac{b-a}{m-n}=-\frac{a-b}{n-m}=\frac{b-a}{n-m}.$$

71. 約分及通分 依前款知分數的兩項如有公因子,可以分別約分,使成為最簡分式或既約分式.(參考第一篇44款).其法卽將所設分數的兩項分別分解其因子而以兩項的最高公因式除之.

例一.　$$\frac{6a^2bc^3}{9abc^3}=\frac{2a}{3}.$$

例二.　$$\frac{7a^2\times(-3xy)\times yz}{21a^2b\times x^2y^2z}=-\frac{1}{bx}.$$

例三.　$$\frac{(a^3-b^3)(a+b)}{(a^3+b^3)(a-b)}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)}$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}.$$

例四.　化 $\frac{3x^3-x^2-2x-16}{2x^3-2x^2-3x-2}$ 為最簡分式.

解. 依68款求分子分母的H.C.F. 為 $x-2$, 以 $x-2$ 除

分子分母則得

$$\frac{3x^3-x^2-2x-16}{2x^3-2x^2-3x-2}=\frac{(3x^2+5x+8)(x-2)}{(2x^2+2x+1)(x-2)}=\frac{3x^2+5x+8}{2x^2+2x+1}.$$

若所設分式不祇一個,而以同一數或同一式各乘其兩項,使成爲同分母的分式,則爲通分(參考第一篇45款).其法卽先將所設諸分式的分母,分別分解其因子;而求其最低公倍式;再以各分母除之,而以其商乘各分式的兩項.

例五. 將 $a,\frac{c}{ab^3},\frac{d}{a^2b^2}$ 通分.

解. 所設諸分式分母的最低公倍式爲 a^2b^3,除以各分母,而以其商乘各分式的兩項,則

$$a=\frac{a}{1}=\frac{a\times a^2b^3}{1\times a^2b^3}=\frac{a^3b^3}{a^2b^3},$$

$$\frac{c}{ab^3}=\frac{c\times a}{ab^3\times a}=\frac{ac}{a^2b^3},$$

$$\frac{d}{a^2b^2}=\frac{d\times b}{a^2b^2\times b}=\frac{bd}{a^2b^3}.$$

例六. 化 $\frac{x}{x+a},\frac{x}{a-x},\frac{x^2}{x^2-a^2},\frac{x^2}{a^2-x^2}$ 爲同分母的分式.

解. 先將所設各分式的分母依 x 的降冪排列整齊,則

$$\frac{x}{x+a},\ \frac{-x}{x-a},\ \frac{x^2}{x^2-a^2},\ \frac{-x^2}{x^2-a^2}.$$

因各分母的最低公倍式爲 x^2-a^2, 故所求諸分式爲

$$\frac{x(x-a)}{x^2-a^2},\ \frac{-x(x+a)}{x^2-a^2},\ \frac{x^2}{x^2-a^2},\ \frac{-x^2}{x^2-a^2}.$$

於此有可以注意的一點:即以公倍式代最低公倍式亦可得同分母的諸分式,但不能如此簡單. 故如此化得諸分式的分母,又稱最低公分母.

習題四一

(1) 化次列各分式爲最簡分式:

(一) $\dfrac{12a^4b^2x}{18a^2b^3y},\ \dfrac{6ax-4bx}{4xy},\ \dfrac{3a^3b^2(a^2-b^2)}{4(a^2b-ab^2)^2}.$

(二) $\dfrac{m^3(a-b)^2(a^2+b^2)^3}{mn(a+b)(a-b)(a^2+b^2)},\ \dfrac{24a^3bc(x-y)^2(x+y)^5}{16ab^2c(x-y)^3(x^2+y^2)(x+y)^3}.$

(三) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12},\ \dfrac{a^3+b^3}{a^4+a^2b^2+b^4},\ \dfrac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}$

(四) $\dfrac{x^2-4xy+4y^2}{x^2-4y^2},\ \dfrac{x-xy-yz+z}{y^3-3y^2+3y-1},\ \dfrac{x^3-6x^2+14x-15}{x^3-2x^2+2x+5}.$

(2) 將次列各組的分式通分:

(一) $\dfrac{a}{b},\ \dfrac{n}{2m},\ \dfrac{x}{3y}.$　　(二) $\dfrac{x}{ab},\ \dfrac{y}{bc},\ \dfrac{z}{ca}.$

(三) $\dfrac{1}{(b-c)(b-a)},\ \dfrac{1}{(c-a)(c-b)},\ \dfrac{1}{(a-b)(a-c)}.$

(四) $\dfrac{b}{x-a},\ \dfrac{a+x}{x^2+ax+a^2},\ \dfrac{ax}{x^3-a^3}.$

(五)　$\dfrac{x+1}{x^2-8x+15}$, $\dfrac{x-10}{x^2+x-12}$, $\dfrac{x+22}{x^2-x-20}$.

第二節　分式四則

72. 分式加減法　有若干異符號的分式可以求代數和,故分式減法包括在加法中,其法有分母同異的區別.如

$$\frac{A}{M}+\frac{B}{M}-\frac{C}{M}=\frac{A+B-C}{M}.$$

因上式兩邊各乘以M,則

$$\left(\frac{A}{M}+\frac{B}{M}-\frac{C}{M}\right)\times M=\frac{A}{M}\times M+\frac{B}{M}\times M-\frac{C}{M}\times M$$
$$=A+B-C.$$

$$\frac{A+B-C}{M}\times M=A+B-C.$$

故　$$\frac{A}{M}+\frac{B}{M}-\frac{C}{M}=\frac{A+B-C}{M}.$$

此為同分母諸分式相加減的結果.觀此可知以同分母的諸分式求代數和時,即以其同分母為分母,而以各分子的代數和為分子.若分母不同,則先通分以求其同,然後適用上法(參考第一篇46,47款).

例一.　$-m+\dfrac{x}{y}=-\dfrac{my}{y}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{-my+x}{y}=\dfrac{x-my}{y}.$

例二. $\frac{x}{a-b}+\frac{y}{b-a}+\frac{z}{a-b}=\frac{x}{a-b}-\frac{y}{a-b}+\frac{z}{a-b}=\frac{x-y+z}{a-b}$

例三. $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}-\frac{c}{2ab}=\frac{2b^2}{2ab}+\frac{2ac}{2ab}-\frac{c}{2ab}=\frac{2b^2+2ac-c}{2ab}$.

例四. $\frac{2a}{a+b}+\frac{2b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{2a(a-b)}{a^2-b^2}+\frac{2b(a+b)}{a^2-b^2}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

$$=\frac{2a^2-2ab+2ab+2b^2-a^2-b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

例五. 計算 $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}-\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$.

解. 因分母的最低公倍式為 $(x+y)(x-y)$, 故

$$\text{所求的差}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{(x^3-y^3)-(x^3+y^3)}{(x+y)(x-y)}=\frac{-2y^3}{x^2-y^2}.$$

別解. 所求的差 $=\left(x+\frac{y^2}{x+y}\right)-\left(x+\frac{y^2}{x-y}\right)$

$$=\frac{y^2}{x+y}-\frac{y^2}{x-y}=y^2\left(\frac{x-y-x-y}{x^2-y^2}\right)=\frac{-2y^3}{x^2-y^2}$$

習題四二

求次列各式的代數和:

(1) $\frac{4x}{3}-\frac{2x}{5}+\frac{7x}{10}$, $\frac{8}{3x}+\frac{2}{5x}-\frac{3}{x}$.

(2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\qquad a+\frac{c}{b}$.

(3) $x-\frac{ny}{m}$, $\qquad 1+\frac{2c}{3b}$.

(4) $1+\frac{a-x}{a+x}$, $\qquad 1-\frac{x+3}{x+5}$.

(5) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$, $\qquad \frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$.

(6) $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$, $\qquad x-\frac{x^2}{x+1}+\frac{x}{x-1}$.

(7) $\frac{a-b}{b}+\frac{2a}{a-b}-\frac{a^3+a^2b}{a^2b-b^2}$, $\qquad \frac{a+b}{ab^2}-\frac{3a-b}{3a^2b}+\frac{b^2-2a^3}{2a^2b^2}$.

(8) $2-\frac{x^2-11x+18}{x^2-6x+8}$, $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}$.

73. 分式乘除法 (1)設以兩分式$\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$相乘,則有

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}.$$

因若以$\frac{A}{B}=p$, $\frac{C}{D}=q$,則$A=Bp$, $C=Dq$.

故 $$A\times C=Bp\times Dq=pq\times B\times D,$$

故 $$\frac{A\times C}{B\times D}=pq=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D},$$

即 $$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}.$$

同理 $$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}\times\frac{E}{F}\times\cdots\cdots=\frac{A\times C\times E\times\cdots\cdots}{B\times D\times F\times\cdots\cdots}.$$

由此知以諸分式相乘時,卽以各分式的兩項分別相乘作積的兩項.兩項如有公因子,則施行約分(參考第一篇48款).

例一. $$\frac{2a^2}{3bc}\times\frac{5b^2c^3}{8a^3x}=\frac{2a^2\times5b^2c^3}{3bc\times8a^3x}=\frac{5bc^2}{12ax}.$$

例二. $$\left(\frac{x}{m}+\frac{y}{n}\right)\times m^2n^2=\frac{m^2n^2x}{m}+\frac{m^2n^2y}{n}=mn^2x+m^2ny.$$

因 m^2n^2 的分母可以看做是1.

例三. $$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}\times\frac{(x-3)(x-4)}{(x-4)(x-1)}$$
$$=1.$$

先將各分式的兩項分解因子,而後相乘,以便約分;如所有公因子約盡,則兩項皆為1.故其結果為1,與分數約分同.

(2)設以兩分式 $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$ 求商,則有

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C},$$

因 $$\frac{A\times D}{B\times C}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times D\times C}{B\times C\times D}=\frac{A}{B},$$

故 $$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A\times D}{B\times C}.$$

由此知以兩分式求商時,卽顚倒除式的兩項與被除

式相乘(參考第一篇49款). 因分式的兩項顛倒,則為原分式的逆數,故以一分式除他分式時,又可看做以除式的逆數乘被除式.

例四. $\frac{3a^2xy^2}{25b^3}\div\frac{6ay^3}{10b^2x}=\frac{3a^2xy^2}{25b^3}\times\frac{10b^2x}{6ay^3}=\frac{ax^2}{5by}$.

例五. $\frac{x^3-1}{x^2-x+1}\div\frac{x^3+1}{x^2-x+1}\times\frac{x+1}{x-1}$

$$=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2-x+1}\times\frac{x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\times\frac{x+1}{x-1}$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例六. $\frac{a-b}{a+b}\div\left(1-\frac{a-3b}{a+b}\right)=\frac{a-b}{a+b}\div\frac{4b}{a+b}=\frac{a-b}{4b}$.

習題四三

(1) 求次列各分式的積:

(一) $\frac{11ax}{7b^3}\times\frac{14a^3}{bxy}$. (二) $\frac{2x^3}{3yz}\times\frac{3y^2}{5xz}\times\frac{5z^3}{2xy}$.

(三) $\frac{x^2-1}{x^2+3x-10}\times\frac{x^2-25}{x^2-3x-4}$.

(四) $\frac{3(a+b)^2}{ab(a-b)^3}\times\frac{ab^2(a-b)^2}{12(a+b)}$.

(五) $\frac{4x^2-1}{4x^2+3x+2}\times\frac{2x^2-x+2}{2x-1}$.

(六) $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a^2+b^2}$.

(2) 計算次列各乘羃:

$$\left(\frac{3b}{2a}\right)^3, \quad \left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)^2, \quad \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^3, \quad \left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2.$$

(3) 求次列各分式的商:

(一) $\dfrac{3a^2b}{5x^2y}\div\dfrac{2a}{5x}$.　(二) $\dfrac{27a^3b^4}{16x^5y^2}\div\dfrac{9a^5b^3}{4x^5y^6}$.

(三) $\dfrac{ax}{(a-x)^2}\div\dfrac{ab}{a^2-x^2}$.　(四) $\dfrac{x^3-a^3}{x^4-4a^2}\div\dfrac{x-a}{x^2+2a}$.

(五) $\dfrac{m^2-n^2}{c^3+d^3}\div\dfrac{n-m}{c+d}$.　(六) $\dfrac{(m+n)^2}{(a-b)^3}\div\dfrac{xy(m+n)}{(a-b)^2(a+b)}$.

(4) 簡化次列各式:

(一) $\left(1+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left(1-\dfrac{a-b}{a+b}\right)$.

(二) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}\div\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-9x+20}\times\dfrac{x^2-7x}{x^2-5x}$.

(三) $\left(\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}\right)\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}\right)\div\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}\right)\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}\right)$.

74.　繁分式　分式的兩項若有一方不為整式或雙方均為分式,或兩項各為以若干整式及分數聯合而成的代數式,均叫繁分式.其運算方法,即應用整式及分式四則依次化到最簡的一步(參考第一篇51款).

例一.　簡化 $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}$.

解. 分子 $=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)}$.

分母 $=\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{(a+b)^2}=\dfrac{2ab}{(a+b)^2}$.

∴ 所設分式 $=\dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)}\times\dfrac{(a+b)^2}{2ab}=\dfrac{2(a+b)}{a-b}$.

例二 $$\frac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}=\frac{x-2}{x-2-\dfrac{x(x-2)}{x^2-2x-x+1}}$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{x}{x^2-3x+1}}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}.$$

如例二所設繁分式又叫連分式.

習題四四

簡化次列各分式:

(1) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}$.

(2) $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}$.

(3) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

(4) $\dfrac{(a-b)^2-\left(\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2}{b-a+\dfrac{a^2}{a+b}}$.

(5) $$\frac{x+\dfrac{y-x}{1+xy}}{1-x\times\dfrac{y-x}{1+xy}}$$

(6) $$\frac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x+1}{x}}}$$

(7) $$\frac{1}{x^2-\dfrac{x^3+1}{x+\dfrac{1}{x-1}}}$$

(8) $$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+o}}$$

(9) $$\frac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}\times\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}.$$

(10) $$\frac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2-2}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}.$$

第三節* 分式的數值

75.* 分式的不能或不定 設分式中所含文字等於某數,則分式的值,卽爲其分子的數值除以分母的數值的商,但因其所取數值不同,有次列特別情形三種:

(1) 分子爲 0,分母不爲 0,則分式爲 0.[參考 30 款除法法則 I, II 的推論 (一)].卽

$a=0,\ b\neq 0$ 時,　$$\frac{a}{b}=\frac{0}{b}=0.$$

例如在 $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$ 中,設 $x=1$, 則其值爲 $\dfrac{0}{2}=0.$

*簡鄉師時間不敷,本節可以不教.以下各章節款凡附有*號者,簡鄉師尚可從省,習題亦當酌量節去.

(2) 分母爲 0,分子不爲 0,則分式不等於任何值[參考 30 款除法法則 I, II 的推論(二)].卽

$a \neq 0,\ b=0$ 時, $\qquad \frac{a}{b}=\frac{a}{0} \neq$ 任何值.

因以等於 0 的 b 乘任何數,不能得不等於 0 的 a [參考 29 款第(5)式],故此時分式 $\frac{a}{b}$ 爲不可能.如上例設 $x=2$,則其值爲 $\frac{-1}{0}$,卽爲不可能的形式.

然在分式 $\frac{a}{b}$ 中,若以分母 b 非直接等於0,而爲由近於 0 的數值逐漸趨向於 0,則 $\frac{a}{b}$ 的絕對值當逐漸增大,例如 b 最初若爲 0.0000001,則

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{0.0000001}=10000000\,a.$$

設 b 更減少,則 $\frac{a}{b}$ 更增大,b 若小至極小,而最終趨近於 0 時,則 $\frac{a}{b}$ 當大至無窮,而爲任何數值所不及.如此逐漸增大的情形,其終極叫無限大,以符號表之則爲 ∞.故

$a \neq 0,\ b=0$ 時, $\qquad \frac{a}{b}=\frac{a}{0}=\infty.$

(3) 分子及分母同時爲 0,則分式的值不定.卽

$a=0,\ b=0$ 時, $\qquad \frac{a}{b}=\frac{0}{0}=$ 任何值.

因以等於0的b乘任何數,總可為等於0的a[參考29款第(5)式],故此時分式$\frac{a}{b}$可以等於任何值,而無一定的限制.如上例設$x=3$,則其值為$\frac{0}{0}$,即為不定的形式.

然分式$\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}=\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-2)}$,故若約去兩項的公因子$x-3$,則上式為$\frac{x-1}{x-2}$,於此設$x=3$,則其值為2,即分式於$x=3$時有一定的數值2但$x$若等於3,則$x-3$等於0,上式兩項不能以等於0的公因子$(x-3)$去約,其數值2仍無從表現出來.故此時須如上述(2)的情形,不以x直接等於3,而以x為由近於3的數值逐漸趨向於3,則當其未等於3時,$\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$可以約為$\frac{x-1}{x-2}$,而因其逐漸接近於3,故$\frac{x-1}{x-2}$的值,亦逐漸接近於2,其對於2的差,可以隨$x$對於3的差而逐漸減少至任何程度,即其差可以比任何小的數值還小,最終$x=3$,則$\frac{x-1}{x-2}=2$.故於$x=3$時,得以$\frac{x-1}{x-2}$的數值2為$\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$的數值.由此可知

分式的兩項如因有公因子,而對於某數其值為不定時,可先行約去其公因子,再以該數代入分式,以求其數

值.

如此先對於所設分式施行適當的整理,再以某數代入,實爲分式運算中必須注意的事項,觀於次例益明:

設 $x=3$, 求 $\frac{x^2-5x}{x^2-9}+2+\frac{1}{x-3}$ 的值.

若逕以 $x=3$ 代入所設分式,則其結果爲不能.但若先行加法,使所設分式爲

$$\frac{x^2-5x}{x^2-9}+2+\frac{1}{x-3}=\frac{x-1}{x+3}+2,$$

於此再設 $x=3$,則其值爲 $\frac{7}{3}$.

習題四五*

(1) 設 $x=2$,求 (一) $\frac{x^2-4}{x-2}$, (二) $\frac{x^2+3x-10}{x^3+5x-14}$ 的值.

(2) 設 $x=0$,求 (一) $\frac{-5x^3+10x}{7x^2}$,(二) $\frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2}$ 的值.

(3) 設 $x=1$,求 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+3+\frac{1}{x-1}$ 的值.

(4) 簡化 $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$.

76.* 一元及二元一次方程式的根的討論 由前款所述三種不同的情形,討論第五章所解方程式的根如

次:

(1) 一元一次方程式的根　一元一次方程式經過種種手續,其最後恆為 $ax=b$, 由此得 $x=\frac{b}{a}$.

此時若 (I) $a\neq 0, b\neq 0$, 則 $x=\frac{b}{a}$,即適合於原方程式的根祇有一個而不為0;若 b 為 0, 則 $x=\frac{0}{a}$,即其根適等於0.

(II) $a=0, b\neq 0$, 則 $x=\frac{b}{0}$, 即原方程式無根.

(III) $a=0, b=0$, 則 $x=\frac{0}{0}$,即原方程式的根不定.

[參考49款].

(2) 二元一次方程式的根. 由53款二元一次方程式 $a_1x+b_1y=c_1$, $a_2x+b_2y=c_2$ 的根為

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

此時若 (I) $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$,此時 x 及 y 的值無論為0與否,各有一個,且非無限大.實際二元一次方程式的通解,即根據此假定 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 而得的.

(II) $a_1b_2-a_2b_1=0$, 及 $b_2c_1-b_1c_2\neq 0$, 此時 y 的分子 $a_1c_2-a_2c_1$ 亦不為0.

因 $a_1b_2-a_2b_1=0$, 故 $a_1b_2=a_2b_1$, 即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

又因 $b_2c_1-b_1c_2\neq0$，故 $b_2c_1\neq b_1c_2$，卽 $\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$.

故 $$\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{a_1}{a_2},\ 卽\ a_1c_2\neq a_2c_1.$$

故 $$a_1c_2-a_2c_1\neq0.$$

卽 x,y 的分子均不為0，故 x,y 不等於任何值；卽所設方程式無根〔參考55款〕.

如此結果從所設方程式兩邊，亦可看出．卽設以 b_1,b_2 分別除所設兩方程式的兩邊，則

$$\frac{a_1}{b_1}x+y=\frac{c_1}{b_1},\quad \frac{a_2}{b_2}x+y=\frac{c_2}{b_2}.$$

由 $a_1b_2=a_2b_1$ 及 $b_2c_1\neq b_1c_2$，知 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ 及 $\frac{c_1}{b_1}\neq\frac{c_2}{b_2}$，故兩方程式的左邊雖相等，而其右邊則不等．卽在此條件下原方程式不能聯立，故無同時適合於兩方程式的根．

(III) $a_1b_2-a_2b_1=0$ 及 $b_2c_1-b_1c_2=0$，此時

$$a_1b_2=a_2b_1\ 及\ b_2c_1=b_1c_2,$$

故 $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\quad 及\ \frac{c_1}{c_2}=\frac{b_1}{b_2}.$$

故 $$\frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2}\quad 卽\quad a_1c_2-a_2c_1=0.$$

卽 x,y 的分子分母皆為0，故其值皆不定．

如此結果亦可由原方程式兩邊看出，卽設由原方程

式作次式:

$$\frac{a_1}{b_1}x+y=\frac{c_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2}x+y=\frac{c_2}{b_2}.$$

則因　　$a_1b_2-a_2b_1=0$ 及 $b_2c_1-b_1c_2=0$,

故　　$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ 及 $\frac{c_1}{b_1}=\frac{c_2}{b_2}$.

故兩方程式的兩邊完全一致,卽實際祇有一個獨立方程式,故其根不定[參考55款].

77* 再解文字方程式　如37款所解文字方程式均甚簡單,且未涉及二元,若含有分式係數的方程式或聯立文字方程式,則解時須有關於分式運算的注意,而所求的根是否適合,或原方程式是否有根,不獨須要驗算,且須討論.玆略舉二例,以示一斑:

例一.　解 $\frac{2x+7b}{2a+b}=1+\frac{x+a}{2a-b}$.

解　兩邊乘以$(2a+b)(2a-b)$則

$$(2a-b)(2x+7b)=(2a+b)(2a-b)+(x+a)(2a+b)$$

去括號,移項,$(2a-3b)x=6a^2-13ab+6b^2$,

$$\therefore\ x=\frac{6a^2-13ab+6b^2}{2a-3b}=3a-2b.$$

驗算: $\frac{2x+7b}{2a+b}=\frac{2(3a-2b)+7b}{2a+b}=\frac{6a+3b}{2a+b}=3.$

$$1+\frac{x+a}{2a-b}=1+\frac{3a-2b+a}{2a-b}=1+\frac{4a-2b}{2a-b}=3.$$

討論: 本例的解法,係假定 $(2a+b)(2a-b)\neq 0$. 因爲 $(2a+b)(2a-b)$ 若爲 0, 則 $2a+b=0$, 或 $2a-b=0$, 無論如何, 原方程式均不成立,即其解爲不能.

例二. 解 $\begin{cases} ax-by=a^2-b^2 \cdots\cdots(1) \\ bx-ay=b^2-a^2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 以 a 乘 (1), b 乘 (2), 邊邊相減, 則

$$(a^2-b^2)x=(a^2-b^2)(a+b).$$

$$\therefore \quad x=a+b.$$

同理知 $\quad y=a+b.$

驗算: $ax-by=a(a+b)-b(a+b)=a^2-b^2.$

$bx-ay=b(a+b)-a(a+b)=b^2-a^2.$

討論: 本例解法,係假定 $a^2-b^2\neq 0$, 因 a^2-b^2 若爲 0, 則

$$x=\frac{(a^2-b^2)(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{0}{0},$$

即其解爲不定.

習題四六*

(1) 解次列各方程式:

(一) $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-c}{b-c}=2.$ (二) $x=\frac{a}{b}(x-a)+\frac{b}{a}(x-b).$

(三)　$(a+bx)(b+ax)=ab(x^2-1)$.

(四)　$(a+b)x^2-a(bx-a^2)=bx(x-a)+ax(x-b)$.

(2) 解次列各聯立方程式:

(一)　$\begin{cases} x+y=a+b, \\ bx+ay=2ab. \end{cases}$　　(二)　$\begin{cases} ax+by=a^2+b^2, \\ bx+ay=2ab. \end{cases}$

(三)　$\begin{cases} x+y=c, \\ ax-by=c(a-b). \end{cases}$　　(四)　$\begin{cases} bx+ay=a+b, \\ b^2x-a^2y=0. \end{cases}$

(五)　$\begin{cases} x+y=2a, \\ ax-by=bx+ay. \end{cases}$　　(六)　$\begin{cases} y=mx+b, \\ y=m'x+b'. \end{cases}$

(3) 以每仟克 a 圓的茶 n 仟克,與每仟克 b 圓的茶 x 仟克混合成每仟克 c 圓的茶,求 x.

(4) 甲沿 AB 線追乙,甲在 A 點時,乙在 B 點.若 AB 距離 d 公里,甲每時行 a 公里,乙每時行 b 公里,則甲追及乙的地點距 B 若干公里?

第七章的總練習

(1) 簡約次列各分式:

(一)　$\dfrac{(q-r)(r-p)(p-q)}{(r-q)(p-r)(q-p)}$.　(二)　$\dfrac{36m^2n(b-a)(a^2+b^2)}{64mn^2(a-b)(a^2+b^2)^2}$.

(三)　$\dfrac{a^2-(b+c+d)^2}{(a-b)^2-(c+d)^2}$.　(四)　$\dfrac{x^2-x-20}{5x^2+5x-60}$.

(五) $$\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{a^2-b^2-c^2-2bc}.$$

(六) $$\frac{2x^3+5x^2y+xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-4x^2y^2-xy^3+y^4}.$$

(2) 求次列各分式的代數和:

(一) $$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}-\frac{2a}{x^2+a^2}-\frac{4a^3}{x^4-a^4}.$$

(二) $$\frac{a}{b}-\left(\frac{b}{a-b}+\frac{a}{b-a}\right).$$

(三) $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}-\frac{4}{1-x^4}.$$

(四) $$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}.$$

(五) $$\frac{a^2}{(x-a)(a-b)}+\frac{b^2}{(x-b)(b-a)}.$$

(六) $$\frac{1}{(x-a)(x-b)}+\frac{1}{(b-x)(c-x)}-\frac{1}{(x-a)(c-x)}.$$

(七) $$\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}.$$

(八) $$\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{x^4+x^2+1}.$$

(九) $$\frac{x+y}{x^3-y^3}+\frac{x-y}{x^3+y^3}-\frac{2(x^2-y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4}.$$

(十) $$\frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{3}{x^2+4x-5}+\frac{4}{x^2+2x-15}+\frac{2}{3-x}.$$

(3) 求次列各分式的積或商:

(一) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)$.

(二) $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)\div\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

(三) $\frac{a-b}{a+b}\div\left(1-\frac{a-3b}{a+b}\right)$.

(四) $\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{6}\right)\div\left(\frac{x}{3}+\frac{5x}{12}\right)$.

(五) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2-2bc}\times\frac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

(六) $\left(1+\frac{12}{x+1}-\frac{4}{x+3}\right)\times\left(1+\frac{4}{x+5}-\frac{12}{x+7}\right)$.

(七) $\left(2-\frac{3n}{m}+\frac{9n^2-2m^2}{m^2+2mn}\right)\div\left(\frac{1}{m}-\frac{m+n}{(m-2n)(m+n)-4n^2}\right)$

(八) $\left(\frac{x+2a}{a-2x}-\frac{a+2x}{x-2a}\right)\times\left(\frac{3}{2a-x}-\frac{1}{a-x}\right)$.

(4) 簡化次列各繁分式:

(一) $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}{x+y}+\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2}{x-y}$.

(二) $\dfrac{a-b}{a-b+\dfrac{1}{a+b+\dfrac{1}{a-b}}}$.　　(三) $\dfrac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x+1}+1}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x-1}-x}$

(四) $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

(五) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3x^2-14xy+15y^2}+\dfrac{2}{3x^2-2xy-5y^2}\right)}{\left(\dfrac{x+y}{x-3y}-\dfrac{x-y}{x-3y}\right)}$.

(5) 設 $x=\dfrac{a}{b+c}$, $y=\dfrac{b}{c+a}$, $z=\dfrac{c}{a+b}$,

求 $xy+yz+zx+2xyz$ 的值.

(6) 設 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$, 則 $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}$ 的值為何?

(7) 設 $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$, 證明 $x+y+z=0$.

(8) 設 $2x=a+b$, 試以 a, b 表次式的值:

$$\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}-\frac{4ab}{4b^2-x^2}.$$

(9) 設 $x+\frac{1}{x}=z$, 試以 z 表 $x^3+\frac{1}{x^3}$; 再令 $z=3$, 求 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 的值.

(10) 解次列各方程式:

(一) $ax-m=n-bx.$

(二) $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3.$

(三) $4bx=3a-\frac{2b^2x+a}{1+b}$

(四) $a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx.$

(11) 解次列各聯立方程式:

(一) $(a-b)x+(a+b)y=a^2+b^2,\quad bx=ay.$

(二) $(a+h)x+(b-h)y=(b+k)x+(a-k)y=c.$

(三) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,\qquad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\frac{a}{b}.$

(四) $ax-ay-z=bx+by-z=x+y-2a=0.$

(五) $\frac{y+z-x}{b+c}=\frac{z+x-y}{c+a}=\frac{x+y-z}{a+b}=1.$

(12) 以金若干圓分給甲乙丙丁四人.甲所得比全額四分之一少 a 圓,乙所得比其餘半分多 b 圓,丙則取甲的 c 倍,而以最後所餘的 d 圓與丁.問甲得幾圓?

第八章

分式方程式

分式的運算既詳前章,可進而解含有分式的方程式.惟其解法不在於以前所述各種方程式解法外,加入分式運算的應用,便可了事,更須注意於解得的方程式是否與所設同值,及根的增減情形.初學對此,往往疏忽,故特設一章以明其理法,并以次及於聯立分式方程式及其應用問題.

第一節　一元分式方程式

78. 分式方程式及其解法一　方程式一邊或兩邊如含有未知數在分母中的項,叫分式方程式,或簡稱分方程式;以前所解各方程式,對此可稱整方程式,如:

$$\frac{8}{x}=5,\quad \frac{3x}{x-1}+2=\frac{5}{x^2-1},\quad \begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1\\[2mm] \dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91,\end{cases}$$

皆爲分方程式.欲知此等方程式的解法,先觀次例:

例一.　解　$\dfrac{x-2}{4x-5}=\dfrac{x-3}{4x-10}$.

解.　以兩邊分母的最低公倍式 $(4x-5)(4x-10)$ 乘兩

邊,則 $$4x^2-8x-10x+20=4x^2-12x-5x+15,$$

故 $$-x=-5,$$

卽 $$x=5.$$ [學者可自行驗算]

似此先以原方程式中所有分式的最低公分母乘兩邊,使成整方程式,再以整方程式的解法解之,而得所求的根,甚覺簡便.(以各分式的最低公分母乘兩邊使成整方程式的手續,叫去分母.)但如此求出的根,若可使原方程式中一個或數個分式的分母為零,則此法卽不適用,再觀次例:

例二. 解 $\dfrac{x^2-3x}{x^2-1}=\dfrac{1}{1-x}-2.$

解. 去分母, $$x^2-3x=-1-x-2x^2+2,$$

卽 $$3x^2-2x-1=0,$$

卽 $$(3x+1)(x-1)=0,$$

故 $$3x+1=0,\ 或\ x-1=0,$$

卽 $$x=-\frac{1}{3},\ 或\ x=1.$$ [參考66款]

驗算. 以 $-\dfrac{1}{3}$ 代入原方程式,則

$$左端=\frac{\frac{1}{9}+1}{\frac{1}{9}-1}=-\frac{5}{4},\qquad 右端=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}-2=-\frac{5}{4},$$

故 $x=-\frac{1}{3}$ 爲適合於原方程式的根,但以 1 代入原方程式,則

$$\frac{-2}{0}=\frac{1}{0}-2$$

此爲不能的形式卽 $x=1$ 不適合於原方程式,此因 $x=1$ 可以使原方程式中兩個分式的分母皆爲 0 的緣故.惟所求的根一經代入原方程式,而使其分式的分母爲 0,何以卽不適合?則因其分母旣爲 0,遂使原方程式陷於不能的形式,故不成立.然此僅就結果而論,尙未探討其原因,卽所以使原方程式中,所有分母爲 0 的 x 的數值,究竟從何而來,則有關於解法中去分母的一種運算.欲知其故,當明次理.

79. 再論方程式解法 從 46 款知一次方程式解法及所謂同値方程式的意義,卽凡整方程式經種種手續恆得改爲次形

$$A=0,$$

而與之同値.依同理,分式方程式亦得集各項於一邊使成一個分式而改爲次形

$$\frac{A}{B}=0,$$

且與之同値(但 A, B 各爲含有未知數的整式,且 A, B 間

無公因式).於是可述關於同值方程式的原理三則:

(I) 以含有未知數的整式M乘整方程式

$$A=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

的兩邊,所得方程式

$$MA=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

與(1)不同值.

因(1)的根皆適合於(2),故(1)的所有的根無不包含於(2)的所有根中.

但使MA為0的未知數的值,除$A=0$的根外,$M=0$的根亦有此效用,故$M=0$的根,若不與$A=0$的根完全相同,則(2)的所有根中,當有不能適合於(1)的根存在,故(2)與(1)不同值.

例如
$$(x-1)(x+3)=0$$
的根為1及-3,但兩邊如乘以$x-5$,則

$$(x-1)(x+3)(x-5)=0$$

的根為1, -3, 及5.

由此可知$M=0$與$A=0$的根如不相同,則$MA=0$的根當為$A=0$及$M=0$的根的總和,故以M乘$A=0$的兩邊時,不惟$A=0$的根不致減少,轉可引入與$A=0$絕無關係的根(卽使$M=0$的x的數值).如此於運算途中引入的根,叫

增根,又叫無緣根.

依同理,又可知以含有未知數的整式除整方程式的兩邊而適盡時,則原方程式,將有根因此而消失.

例如 $$(x-1)(x+3)=2(x-1),$$

即 $$(x-1)(x+3)-2(x-1)=0,$$

即 $$(x-1)(x+1)=0.$$

的根為1及 -1,但兩邊若自始即除以 $x-1$,則方程式為

$$x+3=2,\ 即\ x+1=0,$$

其根祇有 $x=-1$,而失卻使 $x-1$ 為0的數值1.

(II) 以含有未知數的整式 M 乘分式方程式

$$\frac{A}{B}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

的兩邊,所得方程式

$$\frac{MA}{B}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

M 適為 B 的因子外,與(3)不同值.

因(3)的根於 B 不能為 M 除盡時,在 $A=0$ 的所有根外,當含有 $M=0$ 的所有根或其一部,故(4)與(3)不同值.

例如 $$\frac{6x-5}{2x+3}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

與 $$\frac{(x-7)(6x-5)}{2x+3}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

因(5)的根爲$\frac{5}{6}$,而(6)的根則於$\frac{5}{6}$外尙有7,故(6)與(5)不同值,但

$$x+2+\frac{12}{x-5}=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

與

$$(2x-10)\left(x+2+\frac{12}{x-5}\right)=0 \quad\cdots\cdots(8)$$

則同值,因(7)爲

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-5}=0$$

而(8)的M卽$(2x-10)$,適可除(8)的B(卽$x-5$)使盡,故(8)爲

$$2(x-1)(x-2)=0$$

故與(7)同值

由(I)及(II)可知方程式若因兩邊乘以含有未知數的整式而引入無緣根時,則其根必爲使所用乘式等於0的數值;但使乘式等於0的數值,則未必卽爲無緣根.

(III) 設整式A及整式B無公因子時,則分方程式

$$\frac{A}{B}=0 \quad\cdots\cdots(9)$$

與整方程式

$$A=0 \quad\cdots\cdots(10)$$

同值.

因A,B間無公因子,故使A爲0的數值不能使B爲0.

故(10)的根亦爲(9)的根；又凡(9)的根祇須能使A爲0，故亦必適合於(10)，故(10)與(9)同値.

例如 $\dfrac{6x-5}{2x+3}=0$ 與 $6x-5=0$ 同値，故 $\dfrac{6x-5}{2x+3}=0$ 的根爲 $x=\dfrac{5}{6}$.

80. 分式方程式解法二 由79款(II)可知78款例二的根$x=1$，所以不適合於原方程式的理由.故解分式方程式時，如因去分母而引入無綠根，或因除以含有未知數的整式而使根消失，即所求的根如有使乘式中因子爲0，或與除式的因子同時約去的情形，則當依79款(III)集所設方程式各項於一邊，使成$\dfrac{A}{B}=0$的形式，然後解$A=0$即得.

例一 解78款例二的方程式.

解. 集各項於一邊，則

$$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+2=0.$$

整理成一個分式，則

$$\frac{x^2-3x+x+1+2x^2-2}{x^2-1}=0,$$

即
$$\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=0,$$

即
$$\frac{(x-1)(3x+1)}{(x+1)(x-1)}=0,$$

即
$$\frac{3x+1}{x+1}=0,$$

此與$3x+1=0$同値,故$x=-\frac{1}{3}$爲所求的根(在78款已經驗過).

例二. 解 $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}$.

解. 若以各分式的最低公分母$(x-1)(x-2)(x-3)$乘兩邊,則
$$x-3+2(x-2)=x-1.$$

由此得
$$x=3.$$

但以3代入原方程式,則原方程式不能成立,故3爲無緣根.

若集各項於一邊而整理成一個分式,則
$$\frac{x-3+2(x-2)-x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0,$$

即
$$\frac{2(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0.$$

即
$$\frac{2}{(x-1)(x-2)}=0.$$

此式應與$2=0$同値,但$2\neq 0$,故此式不能成立,即原方程式無根.

例三. 解
$$\frac{x-3}{2x+7}=\frac{x-3}{2x+5}.$$

解. 若兩邊同時以$x-3$除,則

$$\frac{1}{2x+7}=\frac{1}{2x+5}.$$

此方程式兩邊分子皆爲1,而分母則異,故一見即知其不能成立.但實際所設方程式有$x=3$的根,此根因兩邊除以$x-3$而消失,故若集各項於一邊,則

$$\frac{x-3}{2x+7}-\frac{x-3}{2x+5}=0,$$

即
$$(x-3)\left(\frac{1}{2x+7}-\frac{1}{2x+5}\right)=0,$$

即
$$(x-3)\left[\frac{2x+5-2x-7}{(2x+7)(2x+5)}\right]=0,$$

即
$$(x-3)\left[\frac{-2}{(2x+7)(2x+5)}\right]=0,$$

故
$$x-3=0,\text{ 即 } x=3.$$

驗算.
$$\frac{3-3}{6+7}=\frac{3-3}{6+5},$$

即
$$\frac{0}{13}=\frac{0}{11},$$

即
$$0=0.\qquad [75\text{ 款 }(1)]$$

觀上舉諸例,可知用解法一,則例一有二根,而其一爲

增根,例二則祇有一增根,增根而外無所得;例三任何根均不能求出;而用解法二則一一有相當的結果,故解分式方程式時,解法一雖似簡單,實以解法二較為妥適.再觀次例:

例四. 解 $\frac{x-8}{x-10}+\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-9}$.

解. 先於方程式兩邊每項各減去1,則

$$\frac{x-8}{x-10}-1+\frac{x-4}{x-6}-1=\frac{x-5}{x-7}-1+\frac{x-7}{x-9}-1,$$

即 $$\frac{2}{x-10}+\frac{2}{x-6}=\frac{2}{x-7}+\frac{2}{x-9}.$$

兩邊各除以2,同時移項,則

$$\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-6},$$

即 $$\frac{3}{(x-10)(x-7)}=\frac{3}{(x-9)(x-6)}.$$

於此若去分母,則

$$(x-9)(x-6)=(x-10)(x-7),$$

由是得 $$x=8.$$

因8不能使所去分母中任一因子為0,故可適合於原方程式(學者可自行驗算).

若不去分母而集各項於一邊,則

$$3\left[\frac{1}{(x-10)(x-7)}-\frac{1}{(x-9)(x-6)}\right]=0,$$

即
$$\frac{3(x^2-9x-6x+54-x^2+10x+7x-70)}{(x-10)(x-7)(x-9)(x-6)}=0,$$

即
$$\frac{3(2x-16)}{(x-10)(x-7)(x-9)(x-6)}=0.$$

此與 $2x-16=0$ 同值,故 $x=8$.

如例四若所解無增根發生,自以去分母爲便.但增根是否引入,須在其根解得後,始可判定,此時如有增根出現則所有去分母種種手續,已屬徒勞,故不如採用解法二.

習題四七

解次列各分式方程式:

(1) $\frac{x-2}{4x-5}=\frac{x-3}{4x-10}$.　　(2) $\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{3}{x+5}$.

(3) $\frac{3x+1}{x-2}-\frac{3x-6}{x-1}=0$.　　(4) $\frac{5}{x-1}=\frac{x+1}{4}$.

(5) $\frac{2x^2}{x^2-4}+\frac{x}{x-2}-\frac{x}{x+2}=1$.　　(6) $\frac{6x+7}{9x+6}=\frac{5x-5}{12x+8}+\frac{1}{12}$.

(7) $\frac{b-c}{bx-c}=\frac{a+c}{ax+c}$.　　(8) $\frac{ax^2}{b-cx}+a+\frac{ax}{c}=0$.

(9) $\frac{mx-a-b}{nx-c-d}=\frac{mx-a-c}{nx-b-d}$.　　(10) $\frac{x+3}{3x+2}=\frac{4x-1}{4x+1}-\frac{2x-1}{2+3x}$.

(11) $\frac{x^2-11x}{x^2-1}+\frac{5}{x-1}+2=0.$　(12) $\frac{0.3x-1}{0.5x-0.4}=\frac{0.5+1.2x}{2x-0.1}$

(13) $\frac{2x+1.5}{2x^2-1.125}=\frac{3x+1.25}{3x-2.25}.$

(14) $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x.$

(15) $\frac{3x^2-15x+7}{x-5}=\frac{3x^2-9x+21}{x-3}.$

(16) $\frac{x}{2}+\frac{5x^2-15x-8}{10(x-3)}-\frac{5x-9}{5}=1.$

第二節　多元分式方程式及應用問題

81. 聯立分式或可化爲聯立分式方程式解法　應用聯立一次方程式及分式方程式的解法,即可解聯立分式方程式.

例一.　解
$$\begin{cases}\frac{x+y}{y-x}=\frac{15}{8} & (1)\\ 9x-\frac{3y+44}{7}=100 & (2)\end{cases}$$

解.　假定 $y-x\neq 0$, 去 (1) 的分母,則

$$8(x+y)=15(y-x),$$

即　$$7y-23x=0. \qquad (3)$$

又由 (2) 得　$$21x-y=248. \qquad (4)$$

以 (3), (4) 爲聯立方程式的一組解之,則得

$$x=14,\quad y=46.$$

此值不能使(1)的分母爲0,故爲適合於(1),(2)的根.

驗算. $\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{60}{32}=\dfrac{15}{8}.$

$$9x-\frac{3y+44}{7}=126-\frac{3\times 46+44}{7}$$

$$=126-26=100.$$

例二. 解
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} & (1)\\[2ex] xy=6 & (2)\end{cases}$$

解 假定x,y不爲0,去(1)的分母,則

$$6(x+y)=5xy.$$

由此與(2)得 $x+y=5.$ (3)

以(3)及(2)爲一組聯立方程式解之,得

$$y^2-5y+6=0.$$

分解因子,則 $(y-2)(y-3)=0.$

由是得 $y=2$, 或 3.

代入(3)得 $x=3$, 或 2.

此兩組x,y的值均不使(1)的分母爲零,故爲所求的根(學者可自行驗算,以下仿此).

例三. 解
$$\begin{cases}x^2+xy+2x=14 & (1)\\ y^2+xy+2y=21 & (2)\end{cases}$$

解. 假定 $x+y+2\neq 0$, 以(1),(2),邊邊相除,則

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}.$$

由此得
$$y=\frac{3}{2}x. \tag{3}$$

以(3)及(1)爲一組聯立方程式解之,得

$$5x^2+4x-28=0.$$

分解因子,則
$$(x-2)\left(x+\frac{14}{5}\right)=0.$$

由是得
$$x=2,\text{ 或 } -\frac{14}{5}.$$

代入(3)得
$$y=3,\text{ 或 } -\frac{21}{5}.$$

此兩組 x, y 的值均不使 $x+y+2$ 爲 0,故適合於(1)及(2).

例四. 解
$$\begin{cases} yz=y-2z & (1)\\ zx=6z-x & (2)\\ xy=x-y & (3)\end{cases}$$

解. 熟察所設三方程式知 x, y, z 三未知數,如有一爲 0, 則其他兩個亦同時爲 0, 故 $x=y=z=0$ 爲適合(1),(2),(3)的一組根. 但 x, y, z 三未知數如無一爲 0, 則其他兩個亦不爲 0, 故得以 yz, zx, xy 分別除(1),(2),(3)而得

$$\frac{1}{z}-\frac{2}{y}=1,\quad \frac{6}{x}-\frac{1}{z}=1,\quad \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1.$$

以$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$爲未知數,解此三方程式,得

$$\frac{1}{x}=1,\quad \frac{1}{y}=2,\quad \frac{1}{z}=5,$$

故所求的根爲次列二組:

$$x=y=z=0,\quad 及\quad x=1,\quad y=\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{5}.$$

習題四八

解次列各聯立分式方程式:

(1) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{y-3}{y+3}=2\\[2ex]\dfrac{x-3}{2x+1}+\dfrac{y-3}{2y+3}=1\end{cases}$ (2) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{7}=\dfrac{8}{x+y+1}\\[2ex]xy=12\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}=1\\[2ex]3xy=3x-2\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x^2-xy=2x+5\\[1ex]xy-y^2=2y+2\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x^2y+xy^2=30\\[1ex]\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\end{cases}$ (6) $\begin{cases}\dfrac{13}{x+2y+3}+\dfrac{3}{4x-5y+6}=0\\[2ex]\dfrac{3}{6x-5y+4}=\dfrac{19}{3x+2y+1}\end{cases}$

(7) $\begin{cases}\dfrac{6x+9}{4}+\dfrac{3x+5y}{4x-6}=\dfrac{13}{4}+\dfrac{3x+4}{2}\\[2ex]\dfrac{8y+7}{10}+\dfrac{6x-3y}{2y-8}=4+\dfrac{4y-9}{5}\end{cases}$

(8) $\begin{cases}\dfrac{2x+5}{2y-7}=\dfrac{3}{2}\\[2ex] \dfrac{y-5}{x+10}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$　　(9) $\begin{cases}\dfrac{x-4}{y+4}=\dfrac{x-3}{y+7}\\[2ex] \dfrac{x+2}{y-2}=\dfrac{x+5}{y-1}\end{cases}$

(10) $3x=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y},\ 4y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z},\ 5z=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x},$

82. 分式方程式應用問題　分式方程式應用問題的解法的步驟及注意,與49,50,及56各款所述相同,毋煩再述.

例一. 牛肉商以32圓買入牛肉若干公斤,若買價賤十分之二,則可多買4公斤,求每公斤的買價.

解. 設每公斤的買價為x圓,依題意得方程式

$$\frac{32}{x}=\frac{32}{0.8x}-4$$

解之得　$x=2$

答每公斤的買價為2圓.

例二. 自某河上流甲港至下流乙港共長40公里,一船往復其間須10時,而下行3公里所費的時間等於上行2公里所費的時間,求此船自甲至乙所需時間及河流的速度.

解　設此船於靜水中每時行x公里,河流的速度為y公里,則此船下行每時可行$(x+y)$公里,上行每時可行

$(x-y)$公里,故得聯立方程式

$$\frac{40}{x+y}+\frac{40}{x-y}=10,\quad \frac{3}{x+y}=\frac{2}{x-y}.$$

以$x+y$及$x-y$為未知數解之得

$$x+y=10,\quad x-y=\frac{20}{3}.$$

由此得 $$\frac{40}{x+y}=4,\ 及\ y=\frac{5}{3}.$$

答此船下行需4時,流速每時$\frac{5}{3}$公里.

例三. 自距離540公里的兩車站A,B,有甲乙兩列車同時相向出發,於中途相會後,甲經4時到B,乙經9時到A,問各列車的速度每時各幾公里?

解. 設甲,乙兩列車的速度為x公里,y公里.因兩列車相會後甲經4時到B,乙經9時到A,故知

$$4x+9y=540. \qquad (1)$$

又因兩列車自出發至相會所經時間相等,故知

$$\frac{4x}{y}=\frac{9y}{x}. \qquad (2)$$

由(2)得 $$4x^2-9y^2=0,$$

即 $$(2x-3y)(2x+3y)=0.$$

因x,y所表車行速度均為正數,故知$2x\neq-3y$.

故　$2x=3y$, 卽 $y=\dfrac{2}{3}x$　(3)

由(3)及(1)得　$x=54,\quad y=36.$

答甲每時行54公里,乙每時行36公里.

習題四九

(1) 以144圓等分給若干人,若增4人,則每人所得減8圓.求人數.

(2) 某分數其分母分子各加1,則爲$\frac{1}{2}$,各減$\frac{2}{3}$,則爲$\frac{7}{19}$.求原分數.

(3) 某船於某河靜水中每時行6公里,而上行時間爲下行的2倍.求河流的速度.

(4) 有甲,乙,丙三種蘋果,每1圓中,甲種比乙種少買4個;每3圓中,丙種比乙種多買20個;而乙種每1個的價格等於甲丙各一個的平均值.問以1圓買乙種蘋果,可買若干?

(5) 甲,乙,丙三人合作若干日可成的工作,若使甲獨作,則需多6日;若使乙獨作,則比甲所要日數又須多9日;若使丙獨作,則所需日數爲三人合作日數的2倍.求

各人獨作所需日數.

(6) 甲乙二人旅行,共帶行李重500公斤,因超過路局定章准許兩人所帶行李合計的重量,甲納費3角,乙納費1圓2角;返時甲一人所帶行李重400公斤,納費1圓5角.問路局定章准許每人攜帶行李若干公斤?

(7) 甲乙二人賽跑400公尺,若許甲先跑25公尺,則甲勝乙15秒;若許甲先乙36秒發足,則乙勝甲40公尺.求各人跑完400公尺所需的時間.

(8) 某列車於開行1時至某處後,因事停駛24分,再以以前速度的五分之六進行,比定時遲15分到達目的地.若出事地點自某處更進5哩,則到達時間須更遲2分.求出事前的速度,及所行全距離.

(9) 甲乙二人同時自兩地相向而行,經5時而相會於某處,若甲每時多走1市里,乙在甲前出發1時;或乙每時少走1市里,甲在乙後出發1時,仍在原處相會,則兩地的距離為何?

第八章的總練習

(1) 解次列各分式方程式:

(一) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{4}{x}=\dfrac{x}{9}+\dfrac{9}{x}$.　　(二) $\dfrac{1-x}{4-x}=\dfrac{2x+1}{x-6}$.

(三) $\dfrac{m(x+a)}{x+b}+\dfrac{n(x+b)}{x+a}=m+n$.

(四) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+7}=\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+5}$.

(五) $\dfrac{1}{x-25}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x-24}+\dfrac{1}{x+3}$.

(六) $\dfrac{x+5}{x+4}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-15}{x-16}$.

(七) $\dfrac{2x-3}{2x-1}-\dfrac{2x-5}{2x-7}=1-\dfrac{4x^2-1}{4x^2-16x+7}$.

(八) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{4}{2x-1}+\dfrac{9}{3x-1}=\dfrac{36}{6x-1}$.

(九) $\dfrac{3x-5}{x-1}-\dfrac{8}{x+1}+\dfrac{10x+6}{x^2-1}=3$.

(十) $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}=\dfrac{3}{x^2-5x+4}$.

(十一) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}+5$.

(十二) $\dfrac{2x}{2x+3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x}{(x+2)(2x+3)}$.

(十三) $\dfrac{1}{2}\left[x-\dfrac{1}{3}\left\{x-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{x-\frac{1}{6}x}{5}\right)\right\}\right]=53$.

（十四）$\dfrac{1-\dfrac{1+\dfrac{1-x}{2}}{3}}{4}=1.$

（十五）$\dfrac{1}{4}(x-2)+\dfrac{1}{3}-\left\{x-\dfrac{1}{3}(2x-1)\right\}=0.$

(2) 解次列各聯立分式方程式

（一）$\begin{cases}3y+\dfrac{9}{x}+6=0\\ y+\dfrac{5}{x}=8\end{cases}$

（二）$\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{y+3}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{y+3}=1$

（三）$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{13}{36}\end{cases}$　　（四）$\begin{cases}x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{2}\\ y+\dfrac{3}{x}=4\end{cases}$

（五）$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{3}{x+y}=1\end{cases}$　　（六）$\begin{cases}\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3}\\ xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}\end{cases}$

（七）$\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}\\ x^2+y^2=90\end{cases}$　　（八）$\begin{cases}ax-ay-z=0\\ bx+by-z=0\\ x+y-2z=0\end{cases}$

(3) 有上下兩等米，以 12 圓買上米若干公斤，若以買

下米可多得 2 公斤;又每10公斤上下兩米的價格相差1角,求上米10公斤的價.

(4) 乘特快車行840公里比乘慢車早到 9 時,但知兩列車速度的差爲每時30公里,求兩列車的速度.

(5) 某人遠足18市里,行過 6 市里後每時增加速度2市里,比豫定時間早到1時.求豫定時間.

(6) 某船於某河靜水中每時行4哩,上下往復一次,所需時間爲8時,求河流的速度.但河長12哩.

(7) 兎走 90 步後,犬發足去追牠.兎走 9 步的時間,犬走 6 步;兎走 7 步的距離,犬走 3 步;問犬追及兎須走幾步?

(8) 分一組兒童爲甲,乙,丙三組,甲比乙少 16 人,乙比丙少25人,而甲的3倍等於丙,問三組各幾人?

第九章

代數式的運算IV(乘冪及開方)

基本運算在加減乘除外,尚有乘冪及開方,在第一篇第八章內業經說明,代數數及代數式的四則,詳本篇第三第四及第七三章,乘冪在指數爲正整數時,亦於第三第四及第六三章中29, 35, 36, 57, 及60諸款分別論列,惟代數的開方迄未述及.第一篇第八章於開平開立,僅就特例指示其法則,其理由則尚有待於證明.故本章第一節先述開方,次推論因開方運算所引起的無理數及虛數,最後更擴充至指數非正整數時的乘冪運算.

第一節 開方

83. 方根及單項式的開方 設某數或式的n乘冪爲a,則其數或式叫a的n方根,即當n爲正整數時,設有等式

$$a=x^n,$$

則x爲a的第n次方根,又叫n冪根或n乘根,其記法爲

$$x=\sqrt[n]{a}.$$

$\sqrt[n]{}$叫根號,n叫根指數.若n等於2,則爲平方根,但略而

不記；n 等於 3，則爲立方根；如 $a+b$ 爲 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 的立方根，而 $a+b$ 及 $-(a+b)$ 則都爲 $a^2+2ab+b^2$ 的平方根，故某數或式的奇數乘根祇有一個，而正數的偶數乘根，則有絕對值相等符號相反的兩個（負數的偶數乘根，見本章第三節），通常以 $\sqrt[n]{a}$ 表示正的偶數乘根，若將正負兩根一併記出，則當用複符號．如 $\sqrt{49}$ 爲 $+7$，若並記 49 的兩平方根，則當作 $\pm\sqrt{49}$, ± 7.

已知 a 及 n 而求 x，叫開方，第一篇第八章所述開平與開立卽此法的特別情形．單項式的開方甚簡，觀次列各例自明：

例一．　$\sqrt{25x^2y^4}=\sqrt{5^2x^2(y^2)^2}=5xy^2.$

此因　$[5x(y^2)]^2=5^2x^2(y^2)^2=25x^2y^4$ 的緣故 [35 款 (2)].

例二．　$\sqrt[3]{27a^3x^6}=\sqrt[3]{(3ax^2)^3}=3ax^2.$

例三．　$\sqrt[5]{\dfrac{-32a^5x^{15}}{y^{10}z^5}}=\sqrt[5]{-\left(\dfrac{2ax^3}{y^2z}\right)^5}=-\dfrac{2ax^3}{y^2z}.$

由是知求單項式的 n 乘根時先求數係數的 n 乘根，次以 n 除各文字因數的指數，而列記其結果，但各因數的指數須各爲根指數的倍數，否則不能開盡（參考第一篇 35 款）．開不盡的可冠以根號，列記於後，如

例四．　$\sqrt{49a^4b^3x^6}=7a^2bx^3\sqrt{b}.$

對於容易分解因數的數亦可應用此法以求其 n 乘根，如

例五． $\sqrt[3]{13824}=\sqrt[3]{2^9\times 3^3}=2^3\times 3=24$

［參考第一篇69款例一］

習 題 五 〇

(1) 求次列各平方根：

(一)　$64a^2b^6,\ 144x^4y^8z^2,\ 3600a^{10}b^{12}c^4,\ 169x^2y^3.$

(二)　$\dfrac{25a^4}{49b^6},\ \dfrac{9a^6}{100x^4y^2},\ \dfrac{16x^2y^2}{121m^4n^8},\ \dfrac{xy^2}{a^4b^8}.$

(2) 求次列各立方根：

(一)　$-27a^6b^9,\ 729a^{21}b^{36},\ -1000x^{27}y^{54},\ a^{3m}b^{6n}.$

(二)　$\dfrac{x^{12}}{8y^3z^6},\ \dfrac{8c^{12}d^3}{27a^9b^{42}},\ -\dfrac{8x^6}{a^3(a+b)^6},\ \dfrac{81x^5(y+z)^2}{192x^2(y+z)^5}$

(三)　$3375,\ 512000,\ \dfrac{125}{343},\ -\dfrac{216}{512}.$

(3) 求次列各乘根：

(一)　$\sqrt[4]{16a^{12}b^8c^{20}},\ \sqrt[5]{-243a^5b^{10}c^{15}};\ \sqrt[n]{a^{2n}b^{3n}}.$

(二)　$\sqrt[3]{x^3-3x^2+3x-1},\ \sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}},$

$\sqrt[6]{191102976}.$

84. 開平的理由及多項式開平　代數式開平卽57款公式 I 的逆算如

例一.　$\sqrt{a^2+2ab+b^2}.$

運算：

$$
\begin{array}{ll|l}
 & & a+b\ (\text{根}) \\
\cline{3-3}
\text{和}\left\{\begin{array}{l} a \\ a \end{array}\right. & \left.\right\}\text{積} & a^2+2ab+b^2 \\
 & & \to a^2 \\
\hline
2a+b & \left\{\text{積}\right. & \quad +2ab+b^2 \\
\quad +b & \left.\right\} & \to +2ab+b^2 \\
\hline
 & & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

將所設代數式依降冪排列,求第一項的平方根 a, 自所設代數式第一項減去 a^2, 得第一餘式;以 a 的2倍除第一餘式得商 b, 再以 b 乘 $2a+b$, 自第一餘式減其相乘積適盡.由是知

$$a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b$$

但　　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　[57款公式I]

故　　$a^2+(2a+b)b=(a+b)^2$

故　　$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=\sqrt{a^2+(2a+b)b}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b.$

而此式右邊適爲上述運算中所得商的兩項.

故所設代數式的平方根爲 $a+b$. 因偶數乘根有二,故所求的根爲 $\pm(a+b)$.

若以 b 乘 $2a+b$ 減自第一餘式,仍有所餘時則再依上述運算程序,2倍已得根的前兩項 $a+b$, 以之除第二餘式,求根的第三項.

例二.　$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}.$

運算:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a+b+c\,(\text{根}) \\ \hline
 & a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c \\
\text{和}\left\{\begin{matrix}a\\a\end{matrix}\right\}\text{積} & \rightarrow a^2 \\ \hline
 & \quad +2ab+2ac+b^2 \\
\text{和}\left\{\begin{matrix}2a+b\\+b\end{matrix}\right\}\text{積} & \rightarrow +2ab \qquad +b^2 \\ \hline
 & \qquad\qquad +2ac \qquad +2bc+c^2 \\
\left.\begin{matrix}2a+2b+c\\c\end{matrix}\right\}\text{積} & \longrightarrow +2ac \qquad +2bc+c^2 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

運算的程序及所求根爲$a+b+c$的理由與例一同,實際由57款例四 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 亦可逆推而得此結果.

第一篇第八章65款所述數的平方根,卽依據上述理由及程序運算而得的,惟須注意各個數字的位數.在代數式的運算中,則無此必要.玆復舉一例以資參考.

例三. $\sqrt{148225}$.

運算的理由:

	a	$+b$	$+\ c$
	300	+80	+ 5
a ……………… 300	14	82	25
a ……………… 300	9	00	00
$2a+b$ …………680	5	82	25
$+b$ ………… 80	5	44	00
$2a+2b+c$ …765		38	25
$+c$ ……5		38	25
			0

運算:

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & 8 & 5 \\ \hline
 & 14 & 82 & 25 \\
\text{和}\left\{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right\}\text{積} & \rightarrow 9 & & \\ \hline
 & 5 & 82 & \\
\text{和}\left\{\begin{matrix}68\\8\end{matrix}\right\}\text{積} & \rightarrow 5 & 44 & \\ \hline
 & & 38 & 25 \\
\left\{\begin{matrix}765\\5\end{matrix}\right\}\text{積} & \longrightarrow & 38 & 25 \\ \hline
 & & & 0
\end{array}
$$

答所求根爲385.

若以代數式示其運算的程序,則

(1) 因所求的根爲三位數,故其最高位的數字3,實際等於300,故設以b及c代表根的次兩項,則

$$148225=(300+b+c)^2$$
$$=90000+600(b+c)+(b+c)^2$$

由此得第一餘式

$$148225-90000=600(b+c)+(b+c)^2,$$

即
$$58225=600(b+c)+(b+c)^2$$
$$=(600+b+c)(b+c).$$

(2) 以600除58200得商的十位8,於是推定$b=80$.則

$$58225=(600+80+c)(80+c)=680\times 80+760c+c^2.$$

由此得第二餘式

$$58225-680\times 80=760c+c^2$$

即
$$3825=760c+c^2=(760+c)c.$$

(3) 以760除3825得商的個位5,於是推定$c=5$.則

$$(760+5)5=765\times 5=3825$$

由此得第三餘式

$$3825-3825=0.$$

故所求的根爲385.

依上述理由及運算程序,得計算任一多項式的平方根.

例四. 求 $x^6+4x^5-10x^3+4x+1$ 的平方根

運算:

$$
\begin{array}{l|l}
 & x^3+2x^2-2x\ -1 \\
x^3 & x^6+4x^5\qquad -10x^3\qquad\qquad +4x+1 \\
x^3 & x^6 \\
\hline
2x^3+2x^2 & \quad +4x^5\qquad -10x^3\qquad\qquad +4x+1 \\
\quad +2x^2 & \quad +4x^5+4x^4 \\
\hline
2x^3+4x^2-2x & \qquad\qquad -4x^4-10x^3\qquad +4x+1 \\
\qquad -2x & \qquad\qquad -4x^4-\ 8x^3+4x^2 \\
\hline
2x^3+4x^2-4x-1 & \qquad\qquad\qquad -\ 2x^3-4x^2+4x+1 \\
\qquad\qquad -1 & \qquad\qquad\qquad -\ 2x^3-4x^2+4x+1 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

答所求的根爲 x^3+2x^2-2x-1,

例五. 求 $4x^4-20x^3+37x^2-29x+5$ 的平方根.

運算:

$$
\begin{array}{l|l}
 & 2x^3-5x\quad +3 \\
\hline
2x^3 & 4x^4-20x^3+37x^2-29x+5 \\
2x^2 & 4x^4 \\
\hline
4x^2-5x & \qquad -20x^3+37x^2 \\
\quad -5x & \qquad -20x^3+25x^2 \\
\hline
4x^2-10x+3 & \qquad\qquad +12x^2-29x+5 \\
\qquad +3 & \qquad\qquad +12x^2-30x+9 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad x-4
\end{array}
$$

最後所得餘式 $x-4$ 不能再開,故知所設代數式非完全平方式[參考62款].

85. 開立的理由及多項式開立 代數式開立卽60款公式IV的逆算,如

例一. $\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$.

運算:

$$
\begin{array}{l|r}
 & a+b\ (\text{根}) \\
\hline
\text{和}\left\{\begin{array}{l}3a^2\\ \qquad(3a+b)b\end{array}\right. & \begin{array}{r}a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ a^3\end{array} \\
\hline
\left.\begin{array}{r}\longrightarrow 3a^2+3ab+b^2\\ +b\end{array}\right\}\text{積} \longrightarrow & \begin{array}{r}+3a^2b+3ab^2+b^3\\ +3a^2b+3ab^2+b^3\end{array} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

將所設代數式依降冪排列,求第一項的立方根 a, 自所設代數式第一項減 a^3 得第一餘式,以 a^2 的 3 倍除第一餘式得商 b, 以 b 乘 $3a+b$ 與 $3a^2$ 相加,再以 b 乘其和,自第一餘式減其相乘積適盡.

由是知 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+\{3a^2+(3a+b)b\}b$.

但 $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

故 $$a^3+\{3a^2+(3a+b)b\}b=(a+b)^3$$

故 $$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=\sqrt[3]{a^3+\{3a^2+(3a+b)b\}b}$$
$$=\sqrt[3]{(a+b)^3}=a+b.$$

而此式右邊適為上述運算中所得商的兩項,故所設代數式的立方根為 $a+b$.

若以 b 乘 $\{3a^2+(3a+b)b\}$ 減自第一餘式仍有所餘時,則再依上述程序,求根的第三項.第一篇第八章69款所述數的立方根,亦係依據上述理由及程序運算而得的.茲再舉一例,以資參攷.

例二. $\sqrt[3]{31255875}.$

運算的理由：

$$
\begin{array}{lrl}
a^3 \cdots\cdots\cdots\cdots & 300^3 \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
3a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots & 270000 & \left.\right\} \text{和} \\
(3a+b)b \cdots\cdots\cdots & 9100 & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2 \cdots\cdots & 279100 \leftarrow & (\times 10) \longrightarrow \\
+b^2 \cdots\cdots\cdots & 100 & \\
\hline
\text{和} \rightarrow 3(a+b)^2 = 3A^2 \cdots & 288300 & \left.\right\} \text{和} \\
(3A+c)c & 4675 & \\
\hline
3A^2+3Ac+c^2 \cdots & 292975 \leftarrow & (\times 5) \longrightarrow
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr}
\multicolumn{2}{c}{\overbrace{a+ \quad b+}^{A}} & c \\
300+ & 10+ & 5 \\
\hline
31 & 255 & 875 \\
27 & 000 & 000 \\
\hline
4 & 255 & 875 \\
 & & \\
\rightarrow 2 & 791 & 000 \\
\hline
1 & 464 & 875 \\
\rightarrow 1 & 464 & 875 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

若以代數式示其運算的程序,則因所求的根為三位數,故其百位的數字3實際等於300. 又依例一知商的十位數字為1, 其實際等於 10 (卽以 270000 除第一餘式 4255875 的商),故設以A表根的前兩位數字, 以c表根的末位數字,則

$$31255875=(A+c)^3=(310+c)^3$$

$$=310^3+3\times310^2\times c+3\times310\times c^2+c^3.$$

故 $$31255875-310^3=3\times310^2\times c+3\times310\times c^2+c^3,$$

卽 $$1464875=(3\times310^2+3\times310\times c+c^2)c.$$

而以3×310^2除1464875, 卽得$c=5$.

實際的運算:

$$
\text{和}\left\{\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}91\\1\end{array}\right\}\text{積}\\ \\ 1\end{array}\right.
\qquad
\left.\begin{array}{r}27\\91\end{array}\right\}\text{和}
\qquad
\text{和}\left\{\begin{array}{r}91\\ \hline 2791\\ 1\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{r}\hline 935\\5\end{array}\right\}\text{積}
\qquad
\left.\begin{array}{r}\hline 2883\\4675\end{array}\right\}\text{和}
\qquad
\begin{array}{r}\hline 292975\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & 1 & 5\\ \hline
 & 31 & 255 & 875\\
 & 27 & & \\ \hline
 & 4 & 255 & \\
(\times 1) & 2 & 791 & \\ \hline
 & 1 & 464 & 875\\
(\times 5) & 1 & 464 & 875\\ \hline
 & & & 0
\end{array}
$$

答所求的根爲 315.

依上述理由及運算程序得計算任一多項式的立方根.

例三. 求 $x^6-3x^5+5x^3-3x-1$ 的立方根.

運算:

$$
\begin{array}{ll}
3(x^2)^2 \cdots\cdots\cdots & 3x^4\\
(3x^2-x)(-x)\cdots & (-3x^3+x^2)\\ \hline
 & 3x^4-3x^3+x^2\\
 & x^2\\
3(x^2-x)^2\cdots & \overline{3x^4-6x^3+3x^2}\\
(3x^2-3x-1)(-1)\cdots & -3x^2+3x+1\\ \hline
 & 3x^4-6x^3+3x+1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
x^2-x-1\\ \hline
x^6-3x^5+5x^3-3x-1\\
x^6\\ \hline
-3x^5+5x^3\\
-3x^5+3x^4-x^3\\ \hline
-3x^4+6x^3-3x-1\\
-3x^4+6x^3-3x-1\\ \hline
0
\end{array}
$$

答所求的根爲 x^2-x-1.

習題五一

(1) 求次列各式的平方根:

(一)　$49a^4-84a^2b+36b^2$.

(二)　$4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$.

(三) $x^6-4x^5+10x^4-12x^3+9x^2$.

(四) $x^6+4ax^5-10a^3x^3-3a^4x^2+4a^5x+4a^6$.

(2) 求次列各式的立方根:

(一) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

(二) $27x^6-54x^5+63x^4-44x^3+21x^2-6x+1$.

(3) 求次列各數的平方根:

11664, 4985630881, 7043741.

(4) 求次列各數的立方根:

24642171, 29417779503.

第二節 不盡根數(無理數)

86. 何謂不盡根數 凡開不盡方的叫不盡根數,在第一篇65款業經說明.若開不盡的爲代數式,如本篇84款的例五,又叫不盡根式,或簡稱根式.

不盡根數如$\sqrt{2}$,既非整數,亦非循環性的無限小數.

因若以A表$\sqrt{2}$的數值,則

$$2=A^2,\qquad 即\ A=\frac{2}{A}.$$

於此可知A若爲整數,則上式右邊分母必爲2的約數,卽非1卽2,但A既不爲1亦不爲2,故A非整數.

於此可知A若爲循環性的無限小數,則上式右邊分母中必含有2,5以外的因數(第一篇55款),但A既不爲2,又不大於2,故A非循環性的無限小數.

故 $\sqrt{2}$ 爲整數及分數以外的一種新數. 其他不盡根數,可依同理證明. 即此等數,雖似爲帶小數(參考第一篇52款),但旣不能盡,又不循環,故非由任何分數所可化得的;然可使其逐漸接近於某某兩有限小數(參考第一篇55款),如 $\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$.

故 1 小於 2

1.4 小於 $\sqrt{2}$ 而 $\sqrt{2}$ 小於 1.5,

1.41 小於 $\sqrt{2}$ 而 $\sqrt{2}$ 小於 1.42,

1.414 小於 $\sqrt{2}$ 而 $\sqrt{2}$ 小於 1.145.

即 $\sqrt{2}$ 可夾在上列兩個整數如 1 及 2,或兩個有限小數如 1.4 及 1.5 的中間,并可使兩端小數的差逐漸減少,逐漸與 $\sqrt{2}$ 接近. $\sqrt[3]{5}$ 亦同. 如此所得新數旣非整數,又非分數(非循環性的無限小數),故又叫無理數,或稱無理式,即不可量度(或解釋爲不能以常法處理)的意思. 對於無理數稱以前所用諸數爲有理數,或稱有理式. 其實無理數的範圍很廣,不盡根數不過是無理數的一種.

因開平而不能開盡的,叫二次不盡根數,因開立而不能開盡的,叫三次不盡根數;推廣地說:某數 a 的 n 乘根若爲不盡根數,則其根 $\sqrt[n]{a}$ 叫 n 次不盡根數. 由是知 n 次不盡根數 $\sqrt[n]{a}$ 若自乘至 n 次則爲 a,即

$$(\sqrt[n]{a})^n=a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

87. **不盡根數計算諸法則** 不盡根數雖非整數及分數,但其計算則與整數及分數的各項計算同,設以 a b, c, m, n, 表正整數,則有次列諸法則:

I. $$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{ab}.$$

因 $$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b})^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m \qquad [35\text{款}(3)]$$

$$=ab, \qquad [86\text{款}(1)]$$

及 $$(\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{a})^m=(\sqrt[m]{b})^m(\sqrt[m]{a})^m=ba,$$

故 $$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{ab}.$$

同理知 $$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\cdots\cdots=\sqrt[m]{abc\cdots\cdots}.$$

例一. $$\sqrt{2}\sqrt{32}=\sqrt{2\times 32}=\sqrt{64}=8.$$

例二. $$\sqrt{8a^3b^5}=\sqrt{4a^2b^4\times 2ab}=2ab^2\sqrt{2ab}.$$

例三. $$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8\times 5}=\sqrt[3]{40}.$$

如例二,一個不盡根數可分析為有理數與他一不盡根數的相乘積.即不盡根數中如有可開的部分,則儘量地將它開出來.此開出的有理數,叫有理係數,而他一不盡根數則叫無理因子.如例三,不盡根數的有理係數,可依其根指數的數值自乘若干次後,納入根號內與根號內原有的數相乘.

II. $$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}.$$

因 $$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{a}\cdots\cdots=\sqrt[m]{aaa\cdots\cdots}=\sqrt[m]{a^n}, \qquad [I]$$

故 $$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}$$

例四.　$\sqrt[3]{1000^5}=(\sqrt[3]{1000})^5=10^5=100000.$

III.　$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

因　$$(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n\}^m \qquad [85 款 (2)]$$

$$=(\sqrt[m]{a})^m=a, \qquad [86 款 (1)]$$

及　$$(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^n=a,$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

例五.　$\sqrt[3]{\sqrt{343}}=\sqrt{\sqrt[3]{343}}=\sqrt{7}.$

例六.　$\sqrt[6]{729}=\sqrt{\sqrt[3]{729}}=\sqrt{9}=3.$

IV.　$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

因.　$$(\sqrt[m]{a})^{mn}=\{(\sqrt[m]{a})^m\}^n=a^n, \qquad [86 款 (1)]$$

及　$$(\sqrt[mn]{a^n})^{mn}=a^n, \qquad [86 款 (1)]$$

故　$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

例七.　$\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[9]{5^3}.$

由例七,得以根指數不同的若干個不盡根數,改爲根指數相同的,卽同次根數,並得比較其大小.

例八.　比較 $\sqrt{8}$ 及 $\sqrt[3]{12}$.

因 $\sqrt{8}$ 及 $\sqrt[3]{12}$ 可改爲 $\sqrt[6]{8^3}$ 及 $\sqrt[6]{12^2}$ 卽 $\sqrt[6]{512}$ 及 $\sqrt[6]{144}$,

故　$$\sqrt{8}>\sqrt[3]{12}.$$

V.　$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

因 $$\frac{a}{b}\times b=a,$$

故 $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}\times b}=\sqrt[m]{a}. \qquad [\mathrm{I}]$$

故 $$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

例九. $$\sqrt[5]{\frac{32x^{20}y^5}{243a^5b^{10}c^{20}}}=\frac{\sqrt[5]{32x^{20}y^5}}{\sqrt[5]{243a^5b^{10}c^{20}}}=\frac{2x^4y}{3ab^2c^4}. \qquad [83\text{ 款}]$$

習題五二

(1) 分析次列各數爲有理數或有理數與無理數的相乘積:

$\sqrt{50}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{847}$, $5\sqrt[3]{320}$, $\sqrt{36a^8b^2c^5}$, $\sqrt[3]{-512a^7b^5c^4}$.

(2) 試將次列各數的有理係數納入根號內:

$5\sqrt{4}$, $12\sqrt{5}$, $3\sqrt[3]{10}$, $\frac{2}{3}\sqrt{13}$, $4a^2b\sqrt{ab}$,

$3y^2\sqrt[4]{xy}$, $ab\sqrt[3]{7b^2}$, $\frac{x^2}{y}\sqrt[3]{\frac{ay^2}{x^3}}$.

(3) 求次列各式的根:

$\sqrt[3]{27^2}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{324}$, $\sqrt[5]{243^4}$, $\sqrt[4]{65536}$, $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{729}$

$\sqrt[3]{0.125^2}$, $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$, $\sqrt[8]{a^{24}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[n]{\sqrt[m]{2a^2}}}$.

(4) 化次列各數爲同次根數,並比較其大小:

$\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{13}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[9]{99}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[3]{37}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$.

(5) 簡約次列各數:

$\sqrt{12}\times\sqrt{48}$,　$3\sqrt{8}\times\sqrt{6}$,　$\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}$,　$\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{-6}$,

$\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{\frac{15}{16}}$, $2\sqrt{14}\times\sqrt{21}\times5\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{54}\times\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$,

$\sqrt{\frac{14400}{x^2y^6}}$,　$\sqrt[3]{\frac{729a^9c^{16}}{27c^3x^6}}$,　$\sqrt[5]{-3125\frac{x^5z^2}{y^{10}z^7}}$,　$\sqrt[5]{\frac{-243x^5z^2}{y^{13}z^9}}$,

$\sqrt{x^2y^2}\times\sqrt{x^3y^3}\div\sqrt{xy^2}$.

88. 無理多項式的計算　含有不盡根數若干個的代數式,叫無理多項式.其計算方法有次列諸項.

(1) 同類根數的代數和　兩個或兩個以上的無理因子若相同,則該根數叫同類根數,如 $4\sqrt{2}$ 及 $9\sqrt{2}$,或 $2\sqrt[3]{5}$ 及 $7\sqrt[3]{5}$ 皆是.凡以此諸數或與非同類根數求代數和時,可依整式同類項合併法,以求其簡單的結果.卽同類根數相加減,加減其係數;非同類根數相加減,以原符號聯結之.

例一.　$8\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=(8+3-5)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

例二.　$\sqrt{45}+\sqrt{20}-\sqrt{12}=\sqrt{9\times5}+\sqrt{4\times5}-\sqrt{4\times3}$

$=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-2\sqrt{3}=5\sqrt{5}-2\sqrt{3}$.

(2) 同次根式的積及冪　同次根式相乘依 87 款 I 行之,若非同次根式則依 87 款 IV 先化為同次根式,然後運算.

例三.　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$*

$=\sqrt{a}\sqrt{a}+\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{b}\sqrt{b}$

$=\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}=a-b$.

* 如此二因式互稱共軛根式(數),共軛根式的相乘積為有理數,可用以化無理數為有理,參考例九.

例四. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})=\sqrt{ac}+\sqrt{bc}-\sqrt{ad}-\sqrt{bd}.$

例五. $\sqrt[3]{3}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{9})=\sqrt[6]{3^2}(\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{9^2})$

$$=\sqrt[6]{72}+\sqrt[6]{3^2\times3^4}=3+\sqrt[6]{72}.$$

例六. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$$=a+b+2\sqrt{ab}.$$

例七. $(m-\sqrt{n})^3=m^3-3m^2\sqrt{n}+3m(\sqrt{n})^2-(\sqrt{n})^3$

$$=m^3-3m^2\sqrt{n}+3mn-\sqrt{n\times n^2}$$

$$=m^3-(3m^2+n)\sqrt{n}+3mn.$$

(3) 無理分式的分母有理化. 凡以無理式爲分母的分式,應設法化其分母爲有理式.同次根式的除法準此,若除式被除式遇有非同次的,則先行化爲同次,與(2)同.

例八. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

例九. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}$

$$=5+2\sqrt{6}.$$ [例六及例三]

觀此例分母 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 乘以 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 便成有理數,其一般的形式如 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b.$

類此用以相乘的無理式,叫二次不盡根數的有理化因子.

(4) 無理多項式的開平　多項式若含有無理數,其開方殊不易言,卽開平亦惟在特別情形下,方可有簡單

的結果.欲明其法,當先述次理.

有理數的平方根,不能等於有理數及二次不盡根數的和.

設a, m, n,爲有理數,$\sqrt{m}$爲二次不盡根數.

若 $$\sqrt{n}=a+\sqrt{m},$$

兩邊平方 $$n=a^2+2a\sqrt{m}+m,$$

即 $$\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a}.$$

則$\sqrt{m}$等於有理數,與假設相反.故

$$\sqrt{n}\neq a+\sqrt{m}. \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

由此知在$x+\sqrt{y}$與$a+\sqrt{b}$相等的前提下,

$$x=a, \quad y=b \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

爲必然的結論,但x, a爲有理數,$\sqrt{y}, \sqrt{b}$爲二次不盡根數,因(B)若不成立,姑假設

$$a=x+c, \qquad [c\text{爲有理數}]$$

則 $$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}=x+c+\sqrt{b}, \cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

即 $$\sqrt{y}=c+\sqrt{b}.$$

但由(A) $$\sqrt{y}\neq c+\sqrt{b},$$

故 $$a\neq x+c.$$

故 $$a=x, \qquad \text{即 } c=0.$$

代入(C) $$\sqrt{y}=\sqrt{b}, \qquad \text{即 } y=b.$$

故若 $$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}, \text{則 } x=a, \quad y=b.$$

例一〇. 求$5+2\sqrt{6}$的平方根.

解. 設 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

兩邊平方 $5+2\sqrt{6}=x+y+2\sqrt{xy}$, [例六]

故 $x+y=5,\quad xy=6.$ [B]

因有恆等式 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$,

故 $(x-y)^2=25-24=1$.

故 $x-y=\pm 1$.

於是解聯立方程式

$$\begin{cases}x+y=5\\x-y=1,\end{cases}\quad 及\quad \begin{cases}x+y=5\\x-y=-1,\end{cases}$$

可得$x=3$, $y=2$及$x=2$, $y=3$兩組的根. 但任採何組的數值,所求的根皆爲

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

同理知 $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ [此時x須大於y]

所設無理多項式如甚簡單,亦可視察而得一簡便的計算法.如

例一一. 求$7+4\sqrt{3}$的平方根.

解. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}$.

因其和爲7,而其積爲12的兩數是4及3,

故知 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}$ [例六]

$$=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}.$$

例一二. $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ [87 款 V]

$=\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ [例八]

習 題 五 三

(1) 求次列各數的代數和:

(一) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}$　(二) $13\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$

(三) $3\sqrt{45}-\sqrt{20}-7\sqrt{5}$

(四) $7\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}$

(五) $5\sqrt[3]{4}+\dfrac{3}{2\sqrt[3]{3}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$　(六) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

(2) 求次列各式的積或冪:

(一) $(2\sqrt{13}+5\sqrt{2})(\sqrt{13}-\sqrt{2})$

(二) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{\dfrac{5}{4}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{10}$

(三) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+5\sqrt{6})$

(四) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$

(五) $(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$　(六) $(\sqrt{m}+\sqrt{n})^3$

(3) 化次列各式的分母爲有理數:

(一) $\dfrac{4\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{11}}$　(二) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[11]{y}}$

(三) $\dfrac{20}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$　(四) $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(五) $\dfrac{2\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$　　(六) $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

(七) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$　　(八) $\dfrac{\sqrt{9+x^2}-3}{\sqrt{9+x^2}+3}$

(九) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

(4) 求次列各式的平方根:

(一) $14+6\sqrt{5}$　(二) $28-10\sqrt{3}$　(三) $4-\sqrt{15}$

(四) $16+5\sqrt{7}$　(五) $11+2\sqrt{30}$　(六) $13+2\sqrt{40}$

(七) $7-2\sqrt{10}$　(八) $15-4\sqrt{14}$　(九) $\sqrt{27}+2\sqrt{6}$

第三節　虛數及複素數

89. 由負數的偶數乘根所引起的新數　由83款知正數的偶數乘根有二,但負數的偶數乘根則如何?如 $\sqrt[n]{-a}$ 的根指數 n 若爲偶數,則在吾人向來所用的數的範圍內,不能求得一數使其自乘結果適爲 $-a$,卽任何數都非 $-a$ 的平方根.卽在以前所用各數的範圍內任何數的偶數乘冪都爲正數.故 $\sqrt[n]{-a}$ 當 n 爲偶數時,固非任何正或負的整數或分數,亦非任何無理數,實爲有理數無理數全部以外的又一新數.如此由負數開偶數次方所引起的新數叫虛數,對於虛數稱向來所用的有理數無理數及 0 爲實數.虛數的單位是 $\sqrt{-1}$,與 1 爲實數單位是相對的,通常以 i 表單位虛數,卽

$$i=\sqrt{-1}$$

i既爲虛數的單位,則兩個單位三個單位的虛數,自可記作$2i$, $3i$.推廣地說:ai便是i的a倍,與實數ax是x的a倍同.a既爲實數,則可正可負,可爲有理亦可爲無理,故以實數爲倍數的虛數有種種:如$4i$, $-i$, $\sqrt[3]{6}i$.若以負數的偶數乘根,改寫爲虛數的形式,如$\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$……當記作$\sqrt{2\times(-1)}$, $\sqrt{3\times(-1)}$,即$\sqrt{2}i$, $\sqrt{3}i$…….

以兩個單位不同的實數及虛數寫作代數和的形式,則爲複素數(一名雜數),如$3+\sqrt{3}i$, $4-\sqrt{5}i$皆是,其一般的形式爲$a+bi$.設$a=0$,則$a+bi=bi$;設$b=0$,則$a+bi=a$,故任何虛數或實數,皆可看做複素數的一種.

複素數既爲實數及虛數所合成,則其範圍較向來所用任何數的範圍廣大.初等算學上數的擴張,至此而極.今列表以明其系統如次:

複素數
- 實數(正或負)
  - 有理數
    - 整數
    - 分數
      - 有限小數
      - 循環小數
  - 無理數
- 虛數(正或負)

90. 複素數運算的一斑 複素數或虛數既爲代數數的一種,故其運算亦同爲代數數的運算規則所支配.惟複素數$a+bi$若爲0,其實數及虛數部分非各自爲0不可,因a與bi的單位既異,則無論如何不能因合併而

相消，故 $a+bi$ 惟有在 $a=b=0$ 時乃可爲 0.

由此知二複素數 $a+bi$ 與 $c+di$ 若相等，其實數及虛數部分必各自相等.

因若假設 $$a+bi=c+di,$$

則 $$(a-c)+(b-d)i=0.$$

此式左邊爲一複素數而等於 0，故

$$a-c=b-d=0,\text{ 即 } a=c,\ b=d.$$

玆舉數例以示複素數計算的一班：

例一. $\sqrt{-9}+\sqrt{-16}=3i+4i=7i.$

例二. $i^2=i\cdot i=-1,\ i^3=i^2\cdot i=-i,\ i^4=i^3\cdot i=1$

$i^5=i^4\cdot i=i\cdots\cdots$

例三. $\sqrt{-25}\times\sqrt{-4}=5i\times 2i=10i^2=-10.\quad [\because i^2=-1]$

若以 $\sqrt{-25}\times\sqrt{-4}=\sqrt{(-25)\times(-4)}=\sqrt{100}=10$ 則大誤，如此計算，實由應用公式 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 而來，此時根號中的 a,b 均假定爲正，今根號中的數旣爲負，其結果自不相同. 即兩虛數相乘時，應先乘其實係數，再以 i 自乘，以求其積，此爲虛數運算中最當注意的一件事.

例四. $(\sqrt{-4})^3=(2i)^3=8i^2\cdot i=-8i.$

例五. $\dfrac{\sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{5i}{2i}=\dfrac{5}{2}.$

例六. $2(3-4i)-4(1-2i)=6-8i-4+8i=2.$

例七. $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)=\sqrt{6}+2i+3i-\sqrt{6}=5i.$

例八. $$\frac{4}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4(1-\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)}=\frac{4(1-\sqrt{3}i)}{1+3}=1-\sqrt{3}i.$$

如例八分子分母各乘以另一複素數,而使分母化爲實數,叫分母實化,所乘的複素數,叫原分母的配偶複素數(一名共軛複素數).施行複素數的除法時,即可改爲分數的形式,以計算其商(如例八).

例九. $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{a+bi}{c+di}\times\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

例一〇. 求$1+2\sqrt{2}i$的平方根.

解. 設 $$\sqrt{1+2\sqrt{2}i}=x+yi,$$

則 $$1+2\sqrt{2}i=x^2+2xyi-y^2,$$

故 $$x^2-y^2=1,\qquad xy=\sqrt{2}.$$

各式兩邊平方, $x^4-2x^2y^2+y^4=1$, $x^2y^2=2$.

前式加後式的4倍,

$$x^4+2x^2y^2+y^4=9.$$

開方得 $$x^2+y^2=\pm 3.$$

但x, y爲實數,其平方和不能爲負,故

$$x^2+y^2=3.$$

而 $$x^2-y^2=1.$$

相加 $$2x^2=4,\qquad x^2=2.$$

相減 $$2y^2=2,\qquad y^2=1.$$

故 $$x=\pm\sqrt{2},\qquad y=\pm 1.$$
故所求平方根為 $\pm(\sqrt{2}+i)$.

習題五四

(1) 以心算答次列各式的結果:

(一) $\sqrt{-9}-\sqrt{-16}$ (二) $\sqrt{-36}-\sqrt{-1}+2\sqrt{-4}$

(三) $\sqrt{-10}\times\sqrt{-3}$ (四) $\sqrt{-10}\times\sqrt{3}$

(五) $\dfrac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-3}}$ (六) $\dfrac{\sqrt{-15}}{\sqrt{-3}}$

(2) 計算次式:

(一) $(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)$ (二) $(5+7\sqrt{2}i)^2$

(三) $(2+2i)(4+5i)$ (四) $\dfrac{2-2i}{1+i}$

(五) $\dfrac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}$ (六) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3$

(七) $\dfrac{1}{i^5}$ (八) $i^{17}-i^{10}$

(九) $(-\sqrt{-3\sqrt{-4}})^4$ (十) $\dfrac{1+2i+3i^2}{1-2i+3i^4}$

第四節* 各種指數

91.* 分數指數 代數式中某項的指數若為正整數,其計算法則已於第四章說明;若指數不為整數而為分數,如 $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}$ 等,所表為何,當先明其意義,再論其算法.

設於第四章35款的(2)式中令 $m=\frac{1}{2}$, $n=2$, 則

$$(a^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{1}{2}\times 2}=a,$$

故　$$\underset{\sim\sim\sim}{a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}}.$$

同理　$$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

由此類推,可知指數法則若能一般適用於整數及分數,則當有次列的規則:

$$\underset{\sim\sim\sim}{a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$ [n 爲正整數]

依此知　$$(a^{\frac{1}{3}})^2=(\sqrt[3]{a})^2.$$

而依35款(2)及87款 II, 知

$$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$$

故關於分數指數又可得次列的結果:

$$\underset{\sim\sim\sim}{a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

例如　$$8^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{8})^2=2^2=4.$$

又　$$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4.$$

92.* 零指數及負指數　若代數式中某項的指數不爲整數而爲0, 如 a^0, 其意義又當如何?

今設於40款的(1)式中令 $m=2$, $n=2$, 則

$$a^2\div a^2=a^{2-2}=a^0.$$

但　$$a^2\div a^2=\frac{a^2}{a^2}=1,$$

故　$$\underset{\sim\sim\sim}{a^0=1}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由此可知指數法則若能一般適用時,則任何數的零乘羃必皆為1.

更設於40款的(1)式中令 $m=0$,則由次式

$$a^m \div a^n = a^0 \div a^n = a^{0-n} = a^{-n}$$

可得負指數的數.但 $a^0=1$,故

$$a^0 \div a^n = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n},$$

故 $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \quad\cdots\cdots(4)$$

由此又可知指數法則若能一般適用於正數及負數時,則當有次列的規約.即

某數的 $(-n)$ 乘羃等於其數的 n 乘羃的逆數.

例如 $$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^{-2} = \frac{1}{a^2}.$$

又如 $$49^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{49^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}.$$

93.* 各種指數的運算　依前兩款(1),(2),(3),(4)諸式,則35款的(2)式及40款的(1)得適用於任何正整數及數分,例如在 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 中,

設 $$m = -p, \quad n = -q, \qquad [p, q \text{ 為正整數}]$$

則 $$a^m \times a^n = a^{-p} \times a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \times a^q}$$

$$= \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-(-m-n)} = a^{m+n}.$$

又如在 $(a^m)^n=a^{mn}$ 中,設 $m=-\frac{q}{p}$ [p,q 爲正整數], $n=0$,

則
$$(a^m)^n=(a^{-\frac{q}{p}})^0=\left(\frac{1}{a^{\frac{q}{p}}}\right)^0=\left(\frac{1}{\sqrt[p]{a^q}}\right)^0=1=a^0$$
$$=a^{m\times 0}=a^{mn}.$$

由此類推可知代數式中凡含有分指數或負指數的項,其運算與指數爲正整數時完全相同.

例一.
$$3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}c^{-3}\times 4^{-1}a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}}c^3$$
$$=3\times\frac{1}{4}\times a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}c^{-3+3}$$
$$=\frac{3}{4}a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}c^0=\frac{3}{4}a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}.$$

例二. $a^{\frac{2}{3}}b\div a^{\frac{1}{2}}b^{-3}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{1+3}=a^{\frac{1}{6}}b^4.$

例三. $(8a^3b^{-\frac{1}{2}}c^2)^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}a^{3\times\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}}c^{2\times\frac{2}{3}}=4a^2b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{4}{3}}.$

例四. 求 $x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}$ 與 $x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}$ 的積.

運算:
$$\begin{array}{r}
x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\qquad\qquad\\
x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\qquad\qquad\qquad\qquad\\
\hline
x+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}\qquad\quad\\
-a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}-a\\
\hline
x\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a
\end{array}$$

或應用乘法公式 $(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$, 而令

$A=x^{\frac{1}{3}}, B=a^{\frac{1}{3}}$, 則 $(x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})(x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}})=x-a.$

例五. 求 $16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6$ 與 $2a^{-1}+1$ 的商.

運算:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8a^{-2}-7a^{-1}+6\ (\text{商}) \\
\hline
2a^{-1}+1 & 16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6 \\
 & 16a^{-3}+8a^{-2} \\
\hline
 & \qquad -14a^{-2}+5a^{-1} \\
 & \qquad -14a^{-2}-7a^{-1} \\
\hline
 & \qquad\qquad +12a^{-1}+6 \\
 & \qquad\qquad +12a^{-1}+6 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

習題五五*

(1) 以正的指數改寫次式或其計算的結果:

(一) $2x^{-\frac{1}{4}}$　(二) $\dfrac{x^2}{y^{-5}}$　(三) $\dfrac{1}{4x^{-\frac{1}{2}}}$

(四) $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$　(五) $\dfrac{3}{\sqrt{y^{-3}}}$　(六) $\dfrac{a^{-2}x^{-1}}{3x^{-4}}$

(2) 以根號及正的整指數改寫次式或其計算的結果:

(一) $x^{\frac{3}{5}}$　(二) $a^{-\frac{1}{3}}$　(三) $\dfrac{2}{b^{-\frac{3}{4}}}$

(四) $7a^{-\frac{1}{3}}\times 3a^{-1}$　(五) $\sqrt[3m]{a^3}\div\sqrt[n]{a^3}$

(3) 求次式的數值(小數兩位止):

(一) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$　(二) $\dfrac{1}{(0.5)^{-2}}$　(三) 4.8^{-2}

(4) 簡化次式:

(一) $(a^2)^{-3}$　(二) $\sqrt[3]{8a^{-12}}$　(三) $\left\{(a^{-3})^{-\frac{2}{3}}\right\}^3$

(四) $ab^{-1}c^{-\frac{3}{2}}\times 3a^{-2}bc\times 2^{-2}a^5c^{\frac{1}{2}}$

(五) $2x^7y^{-2}\div 3x^{\frac{3}{2}}y^{-5}$

(六) $(ab^{-2}c^3)^{\frac{1}{2}}\times(a^3b^2c^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}$

(七) $a^{\frac{1}{21}}\left\{ab^2(ab^3)^{\frac{1}{2}}(a^2b^3)^{\frac{1}{6}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

(八) $\left(x^{\frac{a+b}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(x^{\frac{c+a}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{b+c}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$

(5) 計算次列各題:

(一) $(x^{\frac{5}{6}}-3x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}})$

(二) $(a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}b+ab^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}b^2+b^{\frac{5}{2}})\div(a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}})$

(三) $(x^{\frac{3n}{2}}+x^{\frac{-3n}{2}})\div(x^{\frac{n}{2}}+x^{-\frac{n}{2}})$

(四) $(4a-b)\div(2a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})$

(五) $(a^{-1}-1)\div(a^{-\frac{1}{3}}-1)$

(六) $(c^{-x}+c^x)(c^{-x}-c^x)+(c^x+c^{-x})^2$

(七) $(x^{\frac{5}{6}}-2x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})^2$

(八) $(x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

(九) $\dfrac{x-7x^{\frac{1}{2}}}{x-5\sqrt{x}-14}\div\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^{-1}$

(十) $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$

第九章的總練習

(1) 求 $x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1$ 的 8 乘根*.

(2) 若 $x^4+8x^3+20x^2+mx+n$ 爲完全平方,則 m, n 的數值爲何?

(3) 計算次列各式:

(一) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$

$\times(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$

(二) $2^{\frac{3}{4}}\times3^{-\frac{1}{2}}\times4^{\frac{1}{8}}\times9^{\frac{4}{3}}\times27^{\frac{1}{18}}$

(三) $(\sqrt{10+\sqrt{51}}+\sqrt{10-\sqrt{51}})^2$

(4) 比較 $(\sqrt{8}-\sqrt{6})$ 與 $(\sqrt{6}-2)$.

(5) 求 $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 的數值至小數第三位.

(6) 設 $a=\sqrt{2}+1,\ b=\sqrt{2}-1$, 求 $\dfrac{a^3-b^3}{a+b}\times\dfrac{a^3+b^3}{a-b}$ 的數值.

---

*與連開三次平方相同.

(7) 設於 $3x^2-5xy+3y^2$ 中，命 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

則其值如何?

(8) 求 $a^2-1+2a\sqrt{-1}$ 的平方根.

(9) 改次式為 $A+Bi$ 的形式:

$$\frac{(a+bi)^2}{a-bi}-\frac{(a-bi)^2}{a+bi}$$

(10) 簡化次列各式:

(一) $\sqrt{3+4i}+\sqrt{3-4i}$　(二) $\dfrac{\sqrt{16a^2x-2ax^2-32a^2}}{a(x-4)\sqrt{-2}}$

(三) $\dfrac{\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{4}}}(\sqrt[4]{x})^3}{x^{(\frac{1}{2})^2}x^{-2}}$　(四) $\dfrac{15x^{m+n}\times 2x^{m-n}}{35x^{2m}}$

(五) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}\times\dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}}$　(六) $\dfrac{2^n\times(2^{n-1})^n}{2^{n+1}\times 2^{n-1}}\times\dfrac{1}{4^{-n}}$

(七) $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{n}}\right\}^{nr}}{\{\sqrt[q]{b^n}(\sqrt[m]{b})^r\}^{mq}}\div\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^q\right\}^r$

第十章

二次方程式

在第六章66款中,已應用因子分解法解過一元高次方程式,但所設方程式的左邊,須能分解為諸個一次因子的連乘積,始可以一次方程式解法解之.又在第八章中,因簡化分式方程式的兩邊,常得到二次三項式,但兩邊的二次項或一次項須適可消去,或適可分為兩個一次式的因子,否則,不能解得其根.今關於不盡根數及複素數的運算,既詳見於第九章,故可以進論二次方程式解法.

第一節　一元二次方程式

94. 純二次方程式解法　設 a 不為 0, 則次列(1),(2)兩式都是一元二次方程式:

$$ax^2=b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

如(1)無 x 的一次項,叫純二次方程式,如(2)的二次項,一次項及絕對項俱備,則叫完全二次方程式.(1)為純二次方程式的一般形,因 a 不為 0, 故設以 a 除(1)的兩邊,則得

$$x^2=\frac{b}{a}.$$

兩邊開平方，則　$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$.

但$\frac{b}{a}$若爲負，則所求根爲虛數.

例一.　解　$4x^2=25$

解.　以4除兩邊　$x^2=\frac{25}{4}$

兩邊開平方　$x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}$.

於此有應注意的一點：方程式$x^2=\frac{25}{4}$的兩邊開平方，

應寫作　$\pm x=\pm\frac{5}{2}$

卽　$+x=+\frac{5}{2}$, $+x=-\frac{5}{2}$, $-x=+\frac{5}{2}$, $-x=-\frac{5}{2}$.

但第四解與第一解同，第三解與第二解同，故僅有二解

$x=\pm\frac{5}{2}$.（驗算由學者自行，以下仿此.）

例二.　解　$5x^2-3=0$.

解.　移-3於右邊，而兩邊各除以5

$$x^2=\frac{3}{5}.$$

兩邊開平方　$x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

例三. 解 $\frac{x^2-24}{5}+\frac{x^2-37}{4}=8$

解. 去分母整理之得

$$9x^2=441$$

兩邊各除以9　　$x^2=\frac{441}{9}=49$

兩邊開平方　　$x=\pm 7.$

95. 完全二次方程式解法 有因子分解法及配方法兩種,玆先就特例以說明.

(1)因子分解法 凡經移項整理後易於分解因子的方程式,可選用此法解之,此即66款所用的解法.觀於次例,益可了然.

例一 解 $x^2-5x+6=0$

解. 分解因子　　$(x-2)(x-3)=0$

由此得　　$x-2=0,\ x-3=0$

$$\therefore\quad x=2,\qquad x=3.$$

例二. 解 $2(x-2)^2=x^2-5x+18$

解. 移項整理　　$x^2-3x-10=0$

分解因子　　$(x+2)(x-5)=0$

由此得　　$x+2=0,\ x-5=0$

$$\therefore\quad x=-2,\quad x=5.$$

(2)配方法　先移所設方程式的絕對項於右邊,然後用62款的方法配成完全平方,再兩邊各開平方,則可得兩個一次方程式.

例三.　解　$x^2-6x-7=0$

解　移項　$$x^2-6x=7$$

依62款配方　$$x^2-6x+9=7+9$$

即　$$(x-3)^2=16$$

兩邊開平方　$$x-3=\pm 4$$

$$\therefore \quad x=3\pm 4$$

$$\therefore \quad x=7 \text{ 或 } -1.$$

觀此可知應用配方法解二次方程式時,卽於原方程式經移項整理後所得 x^2+px 的一邊,加入 x 的半係數的平方$\left(\frac{p}{2}\right)^2$,得

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+\frac{p^2}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

幷於其右邊加入同數以解之.

例四.　解　$3x^2-10x+3=0$

解.　移項,兩邊各除以3,

$$x^2-\frac{10}{3}x=-1.$$

兩邊各加 $\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right)\right\}^2$，則得

$$x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2=-1+\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

即 $$\left(x-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$$

兩邊開平方 $$x-\frac{5}{3}=\pm\frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{3}\pm\frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad x=3 \text{ 或 } \frac{1}{3}.$$

習題五六

(1) 解次列一元二次方程式:

(一) $64x^2-49=0.$　　(二) $(x-7)^2=25.$

(三) $(x-15)(x+15)=400.$　　(四) $x^2-10x+25=4.$

(五) $9(3x+2)^2=144.$

(六) $13(x^2-5)+12(x^2-7)=292.$

(七) $2x^2+\frac{x^2}{3}=9x^2-60.$

(八) $2(x^3-7)+3(x^2-11)=33.$

(九) $\frac{x^2-24}{5}+\frac{x^2-37}{4}=8.$

(十) $\frac{1}{3}(x^2-13)+\frac{1}{10}(x^2-5)=6.$

(2) 用因子分解法解次列一元二次方程式:

(一) $x^2-5x=0$.　(二) $2x^2=3x$.

(三) $x^2-9x+20=0$.　(四) $x^2+4x-77=0$.

(五) $x^2-15x+50=0$.　(六) $2x^2-8x-42=0$.

(七) $(x-3)^2=x+3$.　(八) $(x+1)(x+3)=2(x+2)+7$.

(3) 用配方法解次列一元二次方程式:

(一) $x^2-4x-5=0$.　(二) $x^2-3x=40$.

(三) $x^2+5x-84=0$.　(四) $x^2+5x-14=0$.

(五) $x^2-4x-1=0$.　(六) $6x^2-5x+1=0$.

(七) $3x^2-8x=10$.　(八) $4x^2-12x=-2$.

(九) $x^2+10x+3=2x^2-5x+53$.

(十) $x(16x+5)-3=7x^2-(x-45)$.

96. 一元二次方程式通解　由前款(2)知所設方程式無論爲純二次方程式,或完全二次方程式,亦不必問其是否易於分解因子,總可依法使方程式的左邊配成完全平方,以求其根的數值.因x^2的係數爲1或不爲1,一般二次方程式有次列兩種形式:

$$x^2+px+q=0\cdots\cdots(1)$$

$$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots(2)$$

茲分別述其解法如次:

(1) 設二次方程式爲 $x^2+px+q=0$ ………………………(1)

移絕對項於右邊，則 $x^2+px=-q$.

兩邊各加以 x 的半係數的平方卽 $\frac{p^2}{4}$，則

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=-q+\frac{p^2}{4}.$$

卽 $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

兩邊開平方 $$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$\therefore\quad x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\text{………………}[1]$$

設以 x_1，x_2 表(1)的兩根，則

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

例一. 解 $x^2-6x-7=0$.

解 所設方程式中，$p=-6$，$q=-7$，代入公式[1]，則

$$x_1=\frac{6}{2}+\sqrt{\frac{36}{4}+7}=3+4=7,$$

$$x_2=\frac{6}{2}-\sqrt{\frac{36}{4}+7}=3-4=-1.$$

〔參考前款例三〕

例二. 解 $x^2-2\sqrt{2}x-30=0$

解. 所設方程式中, $p=-2\sqrt{2}, q=-30$, 代入公式[I], 則

$$x_1=\frac{2\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{8}{4}+30}=\sqrt{2}+4\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{2\sqrt{2}}{2}-\sqrt{\frac{8}{4}+30}=\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-3\sqrt{2}.$$

驗算. $x^2-2\sqrt{2}x-30=(5\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}(5\sqrt{2})-30$

$$=50-20-30=0.$$

同理, 令 $x=-3\sqrt{2}$, 亦可驗算無誤.

例三. 解 $3(x^2-x+2)+2x-1=2(x^2+x+2)$

解. 去括弧, 移項整理, 則

$$x^2-3x+1=0.$$

應用公式[I], 則

$$x_1=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-1}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-1}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

[驗算從略]

於此有應注意的兩點:

(一) 適用公式 [I] 時,須先將所設方程式整理如 (1)

(二) 於公式[I] 中, 設以 $2p'$ 代 p, 則

$$x=-p'\pm\sqrt{p'^2-q} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots [II]$$

如例一及例二，x 的係數若爲偶數，以用公式[II]爲便.

例四. 解 $x^2-2x+3=0$

解. 應用公式[I]，則

$$x_1=\frac{2}{2}+\sqrt{\frac{4}{4}-3}=1+\sqrt{-2}=1+\sqrt{2}\,i$$

$$x_2=\frac{2}{2}-\sqrt{\frac{4}{4}-3}=1-\sqrt{-2}=1-\sqrt{2}\,i.$$

驗算. $x^2-2x+3=(1+\sqrt{2}i)^2-2(1+\sqrt{2}i)+3$

$$=1+2\sqrt{2}i-2-2-2\sqrt{2}i+3=0.$$

同理，令 $x=1-\sqrt{2}i$，亦可驗算無多

(2) 設二次方程式爲 $ax^2+bx+c=0$…………………………(2)

以 x^2 的係數的4倍卽 $4a$ 乘方程式的兩邊，則

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

移項 $\qquad 4a^2x^2+4abx=-4ac$

兩邊各加 b^2 $\qquad 4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

卽 $\qquad (2ax+b)^2=b^2-4ac$

$$\therefore\quad 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{…………………………[III]}$$

設以 x_1, x_2 表(2)的兩根，則

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

例五. 解 $3x^2+7x-26=0$.

解. 所設方程式中,$a=3,b=7,c=-26$,代入公式[III],則

$$x_1=\frac{-7+\sqrt{49+4\times3\times26}}{2\times3}=\frac{-7+\sqrt{361}}{6}=\frac{-7+19}{6}=2.$$

$$x_2=\frac{-7-\sqrt{49+4\times3\times26}}{2\times3}=\frac{-7-\sqrt{361}}{6}=\frac{-7-19}{6}=-\frac{13}{3}.$$

[驗算由學者自行,以下仿此.]

於此有應注意的三點:

(一) 適用公式[III]時,須先將所設方程式整理如(2).

(二) 於公式[III]中,設以$2b'$代b,則

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots[IV]$$

故x的係數若為偶數,以用公式[IV]為便.

(三) 於方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中,設 $a=1$, $b=p$, $c=q$, 則此方程式變為$x^2+px+q=0$,故公式[I]可看做公式[III]的變形. 又設以 a 除方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩邊, 則變為 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, 故若令$\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$, 則公式[III] 又

可由公式[I]改算而得.

例六. 解 $(a^2-b^2)(x^2-1)=4abx$.

解. 實行乘法并移項整理,則

$$(a^2-b^2)x^2-4abx-(a^2-b^2)=0.$$

適用公式[IV],則

$$x=\frac{2ab\pm\sqrt{4a^2b^2+(a^2-b^2)^2}}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{2ab\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2}}{a^2-b^2}=\frac{2ab\pm(a^2+b^2)}{a^2-b^3}$$

$$=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}\text{ 或 }-\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}.$$

$$\therefore\qquad x_1=\frac{a+b}{a-b},\quad x_2=\frac{b-a}{a+b}$$

習題五七

解次列一元二次方程式:

(1) $x^2-4x-9=0$. (2) $x^2+12x+35=0$.

(3) $x^2-19x+84=0$. (4) $x^2-21x=-110$.

(5) $x^2+30x-1296=0$. (6) $x^2-5\sqrt{3}x+18=0$.

(7) $x^2-x-1=0$. (8) $(x+1)(x+3)=2(x+2)$

(9) $(x-1)(x-2)=20$. (10 $x^2+x+1=0$

(11) $x^2-x+1=0.$ (12) $(x^2-3x)+4x^2-12x-21=0$

(13) $3x^2-4x=55.$ (14) $2x^2=6x-3.$

(15) $x^2-\frac{19}{6}x=\frac{10}{3}.$ (16) $4x^2=\frac{4}{15}x+3$

(17) $7x^2-3x-54=0.$ (18) $2x^2+5x=18.$

(19) $8x^2-5x+6=0.$ (20) $3x^2+3\sqrt{3}x+10=0.$

(21) $4x^2+4ax=b^2-a^2.$ (22) $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$

(23) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0.$

(24) $(ax-b)(bx-a)=c^2.$

第二節* 二次方程式的根

97.* 根的討論 設 x_1, x_2 爲二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad [a\neq 0, a, b, c \text{ 皆實數}]$$

的二根,則

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

此二根因根號下的代數式 b^2-4ac 爲正,爲 0,或爲負而異其數值.

(1) b^2-4ac 爲正,兩根爲相異的實數.於此又有三種不同的情形:

(i)　設 ac 爲正，卽 a, c 同號，則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 比 b 的絕對值小；故兩根同符號.

(ii)　設 $c=0$，則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 與 b 的絕對值相等；

故
$$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}.$$

(iii)　設 ac 爲負，卽 a, c 異號，則 $\sqrt{b^2-4ac}$ 比 b 的絕對值大；故兩根異符號.

(2) $b^2-4ac=0$，兩根爲相等的實數，卽

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

(3) b^2-4ac 爲負，兩根爲共軛複素數.

逆言之，方程式 $ax^2+bx+c=0$

(1) 有兩實根時，則 b^2-4ac 爲正，或 $b^2-4ac=0$.

$$\text{而此時兩實根若}\begin{cases}\text{相異而有}\begin{cases}\text{同符號}\\ \text{異符號}\end{cases}\text{則}\begin{array}{l}b^2-4ac\ \text{爲正},\ ac\ \text{爲正}\\ b^2-4ac\ \text{爲正},\ ac\ \text{爲負}\end{array}\\ \text{相等則}\ b^2-4ac=0.\end{cases}$$

(2) 有兩共軛複素根時，則 b^2-4ac 爲負.

如此根的性質由 b^2-4ac 而判別，故 b^2-4ac 叫二次方程式的判別式，若 $a=1$，方程式的一般形式爲 $x^2+px+q=0$，(p, q 皆實數)，則其判別式爲 p^2-4q.

93.*　根與係數的關係　設 x_1, x_2 爲二次方程式

$ax^2+bx+c=0$ 的根,則由96款公式 [III],知

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

然方程式兩邊若各除以 a,則

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

故得一元二次方程式的根與係數的關係為

(1) 二根的和,等於 x 的係數除以 x^2 的係數而變其符號.

(2) 二根的積,等於絕對項除以 x^2 的係數.

同理知 x^2 的係數若為 1,方程式若為 $x^2+px+q=0$ 時,其根與係數的關係則為

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

習題五八*

(1) 討論次列各方程式的根的性質:

(一) $7x^2-5x-11=0.$　　(二) $3x^2-x+\frac{1}{12}=0.$

(三) $2x^2+7x+13=0.$

(2) 證明次列各方程式恆有實根:

(一) $(x-p)(x-q)=0$. (二) $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0$

但 p, q, m, n 皆實數.

(3) 設 $3x^2-8x+c=0$ 有等根,則 c 的數值為何?

(4) 設 $ax^2+bx+c=0$ 的二根為有理數,則 a, b, c 間的關係如何?

(5) 用心算寫出次列方程式的二根的和與積:

(一) $3x^2+5x-12=0$. (二) $x^2+5x+6=0$. (三) $x^2-11=0$.

(6) 次列方程式的一根顯然為1,試由根與係數之關係求他一根.

$$(a-b)x^2+(b-c)x+c-a=0.$$

(7) 試以解前題的同樣方法解次列方程式:

$$a(x^2+1)=x(a^2+1).$$

(8) 設 $x^2-(2p-1)x+p=0$ 的二根的和為 7, 則 p 為何值?其二根各幾何?

(9) 問 $x^2-9x+a=0$ 中的 a 等於何值,則該方程式的二根的立方和為0?

(10) 設 $x^2+px+q=0$ 的一根為他根的 $\frac{2}{3}$, 證明 $6p^2=25q$.

99.* 根的性質的應用 前款所述根與係數的關係,得應用於種種方面.

(1) 關於根的計算

例一. 設 x_1, x_2 為 $ax^2+bx+c=0$ 的二根,證明

$$x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

證. 因 $x_1+x_2=-\frac{b}{a},\qquad x_1x_2=\frac{c}{a},$

故 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}.$

例二. 設 x_1, x_2 為 $x^2+px+q=0$ 的二根,試以 p, q 表 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

解. 因 $x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q,$

故 $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=-\frac{p}{q},$ 即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{p}{q}.$

(2) 作方程式　設有已知數 m, n 而欲作成以此二數為根的方程式.先假定所求方程式為 $ax^2+bx+c=0$,再依根與係數的關係,知 $m+n=-\frac{b}{a}$ 及 $mn=\frac{c}{a}$,則得以 m, n 為根的方程式為 $x^2-(m+n)x+mn=0.$

例三. 設已知二數為 $3+\sqrt{7}, 3-\sqrt{7}$,求作以此二數為根的方程式.

解. 因 $m=3+\sqrt{7}, n=3-\sqrt{7}$,故所求方程式為

$$x^2-(3+\sqrt{7}+3-\sqrt{7})x+(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=0,$$

即　　$$x^2-6x+2=0.$$

別解. 因 $x=3\pm\sqrt{7}$, 故 $x-3=\pm\sqrt{7}$,

故　　$$(x-3)^2=7,\ 即\ x^2-6x+2=0.$$

例四. 設 x_1, x_2 為 $ax^2+bx+c=0$ 的二根, 求以 $\frac{1}{x_1}$ 及 $\frac{1}{x_2}$ 為根的方程式.

解. 由例二知 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{b}{a}\div\frac{c}{a}=-\frac{b}{c}$

及　　$$\frac{1}{x_1}\times\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c},$$

故所求方程式為

$$x^2-\left(-\frac{b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0.$$　　[例二]

即　　$$x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0,$$

即　　$$cx^2+bx+a=0.$$

(3) 分解二次三項式　設有二次三項式 ax^2+bx+c 而欲分解為一次因子的連乘積, 可先令該式等於 0 解之, 以其根為 x_1, x_2. 則

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\{x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\}$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

例五.　分解 $3x^2+5x+2$.

解.　令 $3x^2+5x+2=0$, 則

$$x_1=\frac{-5+\sqrt{25-24}}{6}=\frac{-5+1}{6}=-\frac{2}{3},$$

$$x_2=\frac{-5-\sqrt{25-24}}{6}=\frac{-5-1}{6}=-1,$$

故
$$3x^2+5x+2=3(x-x_1)(x-x_2)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)$$
$$=(3x+2)(x+1).$$

例六.　分解 x^2-4x+1.

解.　令 $x^2-4x+1=0$, 則

$$x_1=2+\sqrt{4-1}=2+\sqrt{3},$$

$$x_2=2-\sqrt{4-1}=2-\sqrt{3},$$

故
$$x^2-4x+1=\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}$$
$$=(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}).$$

於此有應注意的二點:

(一)　若 b^2-4ac 非完全平方式,則分解 ax^2+bx+c 時,其因子中必含有無理數,通常以此為不能分解(參考第六章64款). 又若 $b^2-4ac<0$ 時,其二因式含有虛數,通常亦以為不能分解.

(二)　依64款分解二次三項式,有時感覺困難,但應用根的性質,則此項分解,總可成功.

習題五九*

(1) 設x_1, x_2爲$x^2-x+3=0$的根,求次列各式的值:

(一) $x_1^2+x_2^2$.　　(二) $x_1^3+x_2^3$.

(2) 設x_1, x_2爲$x^2-px+q=0$的根,求前題(一),(二)的值。

(3) 設x_1, x_1爲$ax^2+bx+c=0$的根,求次列各式的值:

(一) $(x_1-x^2)^2$.　(二) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.　(三) $\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}$.

(4) 以次列各組的數爲根作方程式:

(一) $-5, 3$.　(二) $\pm\sqrt{5}$.　(三) $7\pm\sqrt{3}$.

(四) $5\pm 2i$.　(五) $3n, -2n$.　(六) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$.

(七) $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$.　(八) $a+\sqrt{b}, a-\sqrt{b}$.

(5) 試作以$2x^2-5x-7=0$的二根的3倍爲根的方程式.

(6) 試作以$3x^2-10x+3=0$的二根的平方爲根的方程式.

(7) 設x_1, x_2爲$x^2+px+q=0$的根,試作以$\frac{x_1}{x_2}$及$\frac{x_2}{x_1}$爲根的方程式。

(8) 應用根的性質,解次列聯立方程式:

(一) $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$　(二) $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$

(9) 分解次列各式:

(一) $5x^2-8x-21$.　　(二) $4x^2-4x-15$.

(三) $22x^2-35x+3$.　　(四) $6x^2-5x-6$.

(五) $9x^2+6x-2$.　　(六) $10x^2-19x+6$.

(七) $2x^2-5xy+2y^2$.　　(八) $5x^2+18xy-8y^2$.

(10) 計算次式:

(一) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\div\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1}\times\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$.

(二) $\dfrac{x+2}{2x^2+x-1}-\dfrac{2x-3}{4x^2-1}+\dfrac{1}{2x^2+3x+1}$.

第三節　聯立二次方程式

100. 聯立二元二次方程式解法　由第五章53款知任何二元一次方程式,均可依該款(9),(10)兩公式算出其根,但二元二次方程式的解,則不能一般地求得.例如解次列兩聯立方程式:

$$\begin{cases} 3x^2-y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+2y^2=88 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

時,自(1)得　$y=3x^2-5$.

代入(2),則　$x^2-x(3x^2-5)+2(3x^2-5)^2=88$.

即　$18x^4-3x^3-59x^2+5x-38=0$.

欲解此完全四次方程式,非初等範圍內所可能,故聯立方程式若高至二次,除特殊情形外,解之甚難.玆惟就二三特例以說明其解法.

(1) 一次與二次的組合

例一. 解聯立方程式 $\begin{cases} 2x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+3xy-y^2-3y=4 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由(1)得 $y=2x-1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

代入(2) $x^2+3x(2x-1)-(2x-1)^2-3(2x-1)=4,$

即 $3x^2-5x-2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

解之得 $x=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

或 $x=-\frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

由(5)及(3)得 $x=2, y=3.$

由(6)及(3)得 $x=-\frac{1}{3}, y=-\frac{5}{3}.$

[驗算由學者自行,以下仿此]

例二. 解聯立方程式 $\begin{cases} xy+x=25 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2xy-3y=28 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 自(1)×2減(2),則 $2x+3y=22 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

依前例解(1)及(3),則得 $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{15}{2} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases}$

(2) 二次同次方程式的組合

例三. 解聯立方程式 $\begin{cases} 3x^2-5y^2=28 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3xy-4y^2=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 令 $x=my \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (1) 及 (2) 得 $x^2(3m^2-5)=28 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$y^2(3m-4)=8 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

故 $8(3m^2-5)=28(3m-4)$,

由此得 $2m^2-7m+6=0.$

$\therefore\ m=2$ 或 $\dfrac{3}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

代入 (5) 則 $y^2=4$, 或 $y^2=16$.

即 $y=\pm2$, 或 $y=\pm4 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

由 (6), (7) 及 (3) 得次列四組的根:

$$\begin{cases} y=2 \\ x=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2 \\ x=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-4 \\ x=-6 \end{cases}$$

別解. 自 (1) 的 2 倍減 (2) 的 7 倍而簡約其結果, 得

$$2x^2-7xy+6y^2=0,$$

$$\therefore\ x=2y, \text{或 } x=\frac{3}{2}y.$$

以此代入 (1) 或 (2) 則得 x, y 的值如上.

習題六〇

解次列各組聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x-y=2 \\ 2xy=3x^2-5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} xy=15 \\ 2x+y=13 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x^2-y^2=14 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2y-3x=1 \\ 13x^2-8xy+3=0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+4y=14 \\ y^2-2y+4x=11 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 2x^2-xy+y^2=22 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x^2-3xy=10 \\ xy-4y^2=1 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x^2-xy=6 \\ x^2+y^2=61 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 3x^2+xy=18 \\ 3xy+4y^2=54 \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21 \\ y^2-2xy+15=0 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=39 \\ 2x^2+3xy+y^2=63 \end{cases}$　　(12) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3} \\ x^2+y^2=45 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} 2xy-13x-8y+49=0 \\ 3xy-9x-19y+77=0 \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} 3x^2+xy-2y^2=16y \\ x^2-2y^2=4y \end{cases}$

(3)和與積的組合

例四. 解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 自(1)的平方減(2)的4倍,則

$$x^2-2xy+y^2=1.$$

故 $$x-y=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

或 $$x-y=-1\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)及(1)得 $x=3, y=2.$

由(4)及(1)得 $x=2, y=3.$

別解. 因 x 與 y 的和為5, 而其積為6, 故知 x, y 為次列方程式的二根:

$$z^2-5z+6=0.$$

解之得 $z=2$, 或 3.

故所求根 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

例五. 解聯立方程式

$$x^2y^2+400=41xy\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(2x-y)^2=xy\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解. 以 xy 看做一個未知數,由(1)解之,則得

$$xy=25 \text{ 或 } 16.$$

代入(2)得 $\begin{cases} xy=25 \\ 2x-y=\pm 5 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} xy=16 \\ 2x-y=\pm 4 \end{cases}$

依例四解此四組方程式可得次列八組的根:

$$\begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=-10 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-8 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ x=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}$$

例六. 解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=13 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^3+y^3=559 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 由(2)得 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=559.$

以(1)代入 $x^2-xy+y^2=43 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

$(1)^2-(3)$ $3xy=126$

$\therefore \quad xy=42 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

依例四解(1)及(4)得 $\begin{cases} x=6 \\ y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=6. \end{cases}$

(4)其他組合

例七. 解聯立方程式 $\begin{cases} x^2+xy+2x=14 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y^2+xy+2y=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解. 假定 $x+y+2\neq 0$, 以兩方程式各邊相除, 則

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore \quad y=\frac{3}{2}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 (3) 代入 (1) 或 (2) 則得 $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{4}{3} \end{cases}$　$\begin{cases} x=-\frac{14}{5} \\ y=-\frac{21}{5}. \end{cases}$

習題六一

解次列各聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2+y^2-xy=21 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=10 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=8xy \\ x^2+y^2=40x^2y^2 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x^2=ax+by \\ y^2=ay+bx \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+y=a+b+c \\ xy=bc+ca \end{cases}$　(6) $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \\ xy=ab \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$　(8) $\begin{cases} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=91 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x^3+y^3=91 \\ x^2-xy+y^2=13 \end{cases}$　(10) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=133 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} \frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\frac{1}{3} \\ \frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=\frac{5}{9} \end{cases}$　(12) $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ x^2y-xy^2=6 \end{cases}$

101. 聯立三元二次方程式解法

例一 解聯立方程式 $\begin{cases} x(x+y+z)=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y(x+y+z)=16 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ z(x+y+z)=40 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

解. $(1)+(2)+(3)$, $(x+y+z)^2=64$

故 $x+y+z=8 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

或 $x+y+z=-8 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

由 (4) 及 (1),(2),(3) 得 $x=1, y=2, z=5.$

由 (5) 及 (1),(2),(3) 得 $x=-1, y=-2, z=-5.$

例二. 解聯立方程式 $\begin{cases} yz=20 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ zx=15 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ xy=12 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

解. $(1)\times(2)\times(3)$, $x^2y^2z^2=20\times15\times12$

故 $xyz=3\times4\times5 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

或 $xyz=-(3\times4\times5) \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

由 (4) 及 (1), (2), (3) 得 $x=3, y=4, z=5.$

由 (5) 及 (1), (2), (3) 得 $x=-3, y=-4, z=-5.$

別解. $\dfrac{(2)\times(3)}{(1)}$, $x^2=3^2$, $\therefore\ x=\pm3.$

$\dfrac{(3)\times(1)}{(2)}$, $y^2=4^2$, $\therefore\ y=\pm4.$

$\dfrac{(1)\times(2)}{(3)}$, $z^2=5^2$, $\therefore\ z=\pm5.$

例三. 解聯立方程式 $\begin{cases} yz=y-2z \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ zx=6z-x \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ xy=x-y \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

解. 所設方程式有一組根爲 0, 不難由視察而得, 而 x, y, z 有一爲 0, 則其餘兩個亦必爲 0, 故他組根中必無單獨爲 0 的. 今欲將此等不等於 0 的根求出, 可以 yz, zx, xy 遞除所設方程式, 則

$$\frac{1}{z}-\frac{2}{y}=1,\ \frac{6}{x}-\frac{1}{z}=1,\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1.$$

依 54 款例二的方法解之, 則得

$$\frac{1}{x}=1,\ \frac{1}{y}=2,\ \frac{1}{z}=5.$$

故所求根爲 $\begin{cases} x=y=z=0, \\ x=1,\ y=\dfrac{1}{2},\ z=\dfrac{1}{5}. \end{cases}$

例四. 解聯立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=21 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ x+y-z=5 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ xz=4 \cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$

解. $\dfrac{(2)^2-(1)}{2}$　　$xy-yz-zx=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(3)+(4)　　$xy-yz=6 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

卽　　$y(x-z)=6$

由 (2) 得　　$x-z=5-y \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

以(6)代入(5) $y(5-y)=6$

由此得 $y=2$ 或 $3.$

代入(6)得 $x-z=3$ 或 2

以此與(3)組合成 $\begin{cases} x-z=3 \\ xz=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-z=2 \\ xz=4. \end{cases}$

故所求根為

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1+\sqrt{5} \\ y=3 \\ z=-1+\sqrt{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1-\sqrt{5} \\ y=3 \\ z=-1-\sqrt{5} \end{cases}$$

習題六二

解次列各聯立方程式:

(1) $\begin{cases} x(y+z)=14 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=20 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x(y-z)+6=0 \\ y(z-2x)=5 \\ z(2x-3y)+63=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (x+y)(x+z)=12 \\ (y+z)(y+x)=15 \\ (z+x)(z+y)=20 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} xy+x+y=19 \\ yz+y+z=29 \\ zx+z+x=23 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=12 \\ (z+x)(x+y+z)=24 \\ (x+y)(x+y+z)=36 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c \end{cases}$

(7) $\begin{cases}(y+b)(z+c)=a^2\\(z+c)(x+a)=b^2\\(x+a)(y+b)=c^2\end{cases}$ (8) $\begin{cases}xy=a(x+y)\\yz=b(y+z)\\zx=c(z+x)\end{cases}$

(9) $\begin{cases}x-y-z=2\\x^2+y^2-z^2=28\\xy=6\end{cases}$ (10) $\begin{cases}(y+z)(z+x)=a^2\\(z+x)(x+y)=b^2\\(x+y)(y+z)=c^2\end{cases}$

第四節 二次方程式應用問題

102. 一元二次方程式應用問題

例一. 有二數其和為63,其積為972求二數.

解. 設x表一數,則他數為$(63-x)$.

依題意得 $x(63-x)=972$

即 $x^2-63x+972=0$

解之得 $x=36$ 或 27

故 $x=36$ 則 $63-x=27$

又 $x=27$ 則 $63-x=36.$

故所求二數為36, 27或27, 36.

驗算. 因36及27的和為63,而其積為972,故所求為適合於題意的二數.

例二. 有矩形的地面縱橫相加為100公尺,其面積為2700平方公尺,問此矩形縱橫各幾何?

解. 設矩形的縱長為 x 公尺,則橫長為 $(100-x)$ 公尺,

依題意得 $$x(100-x)=2700.$$

即 $$x^2-100x+2700=0.$$

解之得 $$x=50\pm\sqrt{-200}=50\pm10\sqrt{-2}.$$

因 x 含有虛數,故此題為不能.

例三. 某人以銀若干買得的物品復以24圓賣出,對於每圓所獲的利益適相當於買價的百分之一,求買價.

解. 設買價為 x 圓,則對於每圓所獲的利益為 $\frac{x}{100}$ 圓,

故知全部的利益為 $x\times\frac{x}{100}$ 圓.

依題意得 $$x\times\frac{x}{100}=24-x.$$

即 $$x^2+100x-2400=0.$$

解之得 $$x=20 \text{ 或 } -120.$$

因物品的價格不能為負數,故所求的買價為20圓(驗算由學者自行).

習題六三

(1) 有三個相鄰正整數,其平方的和為1454,求三數.

(2) 有兩個正的分數,其和為 $\frac{5}{6}$, 而其差等於其積,

求兩分數.

(3) 有正方形地面兩方,其邊相差12市尺.今於各地鋪以1平方市尺的石,共鋪 2120 塊,求兩地各邊的長.

(4) 試分長 80 公尺的直線爲二份;即以二份爲矩形的二邊,使其面積等於1431平方公尺,問如何分法?

(5) 有列成方陣的一隊兵士,若改列爲各面 4 列的中空方陣,則外側一邊的人數,較原方陣的一邊多16人,求兵士的人數.

(6) 某生年齡的自乘數,比其5年前的年齡與其8年後的年齡相乘積的$\frac{6}{7}$多37,問此生年齡幾何?

(7) 父子年齡的和爲 100, 其相乘積的十分一比父年大140,問父子年齡各幾何?

(8) 有二位數等於其數字相乘積的3倍,而其個位數比其十位數多2,求此數.

(9) 二城相距320哩,甲乙二人同時自二城出發,相向而行,甲一日所行比乙一日所行速8哩,而自二人出發至相會時所經的日數,適等於乙每日所行哩數的一半,問二人在何處相會?

(10) 側面人數比前列多14人的縱隊,行至前敵而展

開爲橫隊時,若前列增828人,而側面的人數爲5,則此隊的兵士共有幾人?

103. 聯立二次方程式應用問題.

例一 馬車行經1哩時,其前輪比其後輪多轉132次,若前後兩輪的周長各增2呎,則回轉次數的差爲88,求各輪的周長.

解. 設前輪周長爲x呎,後輪周長爲y呎,依題意得

$$\begin{cases}\dfrac{5280}{x}=\dfrac{5280}{y}+132 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[2mm] \dfrac{5280}{x+2}=\dfrac{5280}{y+2}+88 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

去分母,整理,得

$$\begin{cases}40(y-x)=xy \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\ 60(y-x)=(x+2)(y+2) \cdots\cdots\cdots\cdots(4)\end{cases}$$

以(4)除(3) $\qquad xy=4(x+y)+8 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

以(5)代入(3) $\qquad 9y=11x+2 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

由(3)及(6) $\qquad 11x^2-78x-80=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

解(7)及(6)得 $\quad x=8$ 或 $-\dfrac{50}{11}$; $y=10$ 或 $-\dfrac{48}{9}$.

因輪的周長不能爲負數,故前輪的周長爲8呎,後輪的周長爲10呎.

例二. 某商以銀19圓買入甲乙二種糖各若干公斤,甲種比乙種每1公斤貴5分,而其總值則甲種比乙種少1圓,又買入的斤數,乙種比甲種多5公斤.問買入的斤數及每1公斤的價各幾何?

解. 設甲種買入的量為x公斤,則乙種買入的量為$(x+5)$公斤;再設每1公斤的價甲種為y分,則乙種為$(y-5)$分.

依題意得

$$\begin{cases} xy+(x+5)(y-5)=1900 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=(x+5)(y-5)-100 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)+(2)　$2xy=1800$

$\therefore$　$xy=900 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

又由(2)得　$y=x+25 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

以(4)代入(3)　$x^2+25x-900=0$

$\therefore$　$x=20$ 或 -45.

因買入的量不能為負數,故以$x=20$,則$y=45$.

答 $\begin{cases} \text{甲種20公斤每公斤4角5分,} \\ \text{乙種25公斤每公斤4角.} \end{cases}$

例三. 甲乙二工友受人雇用若干日.甲全勤,得工資16圓,乙於被雇期中缺勤5日,得工資9圓,若乙全勤而

甲缺勤15日,則乙比甲多得8圓.問雇工日數及甲乙每日工資各幾何?

解. 設雇工的日數爲x;甲乙每日的工資爲y圓,z圓;依題意得

$$\begin{cases} xy=16 \cdots\cdots(1) \\ (x-5)z=9 \cdots\cdots(2) \\ xz=y(x-15)+8 \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

由(1)得 $$\frac{xy}{16}=1 \cdots\cdots(4)$$

(2)×(4) $$(x-5)z=\frac{xy}{16}\times 9 \cdots\cdots(5)$$

又 $$\frac{xy}{2}=8 \cdots\cdots(6)$$

以(6)代入(3) $$xz=y(x-15)+\frac{xy}{2} \cdots\cdots(7)$$

(7)÷(5) $$\frac{x}{x-5}=\frac{16(x-15)}{9x}+\frac{8}{9}$$

去分母,整理得 $$x^2-24x+80=0$$

解之得 $x=20$ 或 4.

因雇工日數不能小於15,故所求日數爲20.

以x的數值代入(1)則 $y=\dfrac{16}{20}=\dfrac{4}{5}$

以x的數值代入(2)則 $z=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

$$答\begin{cases}雇工20日\\甲每日工資8角\\乙每日工資6角.\end{cases}$$

習題六四

(1)有二數,其和,其積,及其平方的差均相等,求二數.

(2)有三數,任取其二相加,皆等於第三數的逆數,求三數.

(3)由一位的整數及第一位小數所成的帶小數與其數字位置相反的數相加等於11,而各位數字的平方差為20,求此數.

(4)某音樂堂有長椅若干張,可容聽衆800人,若增設長椅20張,則每張可少坐2人,問椅數及每椅所坐人數各幾何?

(5)有甲乙兩正方形,甲的周圍比乙長100公尺,而甲的面積的3倍比乙的面積的20倍大300平方公尺.求各邊的長.

(6)有一室,其地面的面積為117平方市尺,而其相鄰兩壁的面積,一為130平方市尺,一為90平方市尺,求此室的長,闊,及高.

(7) 兩車站距離若干哩,一火車以等速駛行其間,若速度每時增6哩,則可早到4時,若減少6哩,則當遲到6時,問兩站距離幾何?

(8) 甲乙丙三船同行一航線,甲船的速度比乙船的速度速$\frac{1}{2}$浬,乙船比丙船速$\frac{3}{4}$浬,而其航行的時間,則甲船比乙船早到1時30分,乙船比丙船早到2時30分,求航線的長.

第十章的總練習

(1) 解次列一元二次方程式:

(一) $3(13-x)=417-5x^2.$ (二) $(x+2)^2=4(x-1)^2.$

(三) $(3x-5)^2-8(3x-5)+7=0.$

(四) $(2x+1)^2+(3x+1)^2=(2x+3)^2.$

(五) $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)=2.$

(六) $\frac{2}{5}(3x^2-x-5)-\frac{1}{3}(x^2-1)=2(x-2)^2.$

(七) $\frac{2+x^2}{3}-\frac{x-x^2}{2}=1-x+x^2.$

(八) $x^2-2(1+\sqrt{2})x+2\sqrt{2}=0.$

(九) $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0.$

(六) $(b^2-a^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x.$

(2) 設方程式 $x^2+2(1+k)x+2(1+k^2)=0$ 有等根,則 k 爲何值?

(3) 設 $p=k+\dfrac{q}{k}$,證明方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根爲有理數.

(4) 設方程式 $x^2-px+15=0$ 的二根的差的平方爲 4,求 p 的數值.

(5) 設 x_1, x_2 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根,證明次列各式:

(一) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{b}{c}=0.$ (二) $\dfrac{x_1{}^2}{x_2}+\dfrac{x_2{}^2}{x_1}=\dfrac{3abc-b^2}{a^2c}.$

(6) 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的一根是他根的 n 倍,則 a, b, c 間的關係如何?

(7) 設 x_1, x_2 爲方程式 $px^2+qx+r=0$ 的二根,證明以 $x_1+x_2, \dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}$ 爲根的方程式爲

$$pqx^2+(pr+q^2)x+qr=0.$$

(8) 試作以方程式 $3x^2+3ax-a^2=0$ 的二根的和的平方與其差的平方爲根的方程式.

(9) 由觀察知方程式 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 有一根爲 1,試由此求他根.

(10) 由視察解次列各方程式:

(一) $x(x+1)=7\times 8.$

(二) $a(x^2+1)-x(a^2+1)=0.$

(三) $(x-5)(x-6)=(a-5)(b-6).$

(四) $(x+a)(1-a^2)=2a(1-x^2).$

(11) 分解次列各式:

(一) $5x^2-38x+48.$　　(二) $12x^2-37x-144.$

(三) $99x^2-4xy-143y^2.$　　(四) $x^2+30x-1296.$

(12) 解次列各聯立二次方程式:

(一) $\begin{cases} x^2-3xy=0 \\ 5x^2+3y^2=48 \end{cases}$　　(二) $\begin{cases} 2(x-y)+xy=7 \\ 3xy-(x-y)=7 \end{cases}$

(三) $\begin{cases} x^2+x+y^2=15 \\ 2xy+y=15 \end{cases}$　　(四) $\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=4 \\ (x+y)^2-3xy=1 \end{cases}$

(五) $\begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{2} \\ y+\dfrac{3}{x}=4 \end{cases}$　　(六) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3} \\ xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \end{cases}$

(七) $\begin{cases} x+y=63 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{41}{20} \end{cases}$　　(八) $\begin{cases} xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3} \\ xy+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$

(九) $\begin{cases} 3x=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \\ 4y=\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z} \\ 5z=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \end{cases}$　　(十) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^2+yz=7 \end{cases}$

(十一) $\begin{cases} (x+1)(y+1)=30 \\ (y+1)(z+1)=42 \\ (z+1)(x+1)=35 \end{cases}$　　(十二) $\begin{cases} xy+x+y=6 \\ yz+y+z=11 \\ zx+z+x=7 \end{cases}$

(13) 有甲乙兩個二位數,顛倒甲數數字的順序,則成乙數.甲數及乙數數字的和的平方等於甲乙兩數的和,二數字中較小一數字的平方的5倍等於甲乙兩數的差.求甲乙兩數.

(14) 某船由甲村沿河下行到乙村需3時.若任其順流而下,不加人力,則所需時間,比在靜水中用人力上行等距離所要時間多8時,求自乙村至甲村上行所需時數.

(15) 以薪110束分給平民,設每人所得束數加1,則與平民數相等,求平民數.

(16) 若干人聚餐共費17圓5角,若有兩人除外,則其他各人擔負的餐費,比全體平均每人所費多1圓,求人數.

(17) 具有兩個給水管的水槽,若開其一管,則滿水需要時間比開他管少6時,若兩管齊開,則經4時而水滿,

求各管充水的時數

(18) 某商以銀675圓買進羅若干卷,其賣價爲每卷48圓,所得利益適相當於1卷的買價,求卷數.

(19) 甲乙二人合作須$14\frac{2}{5}$日做成一事.甲一人獨作,比乙一人獨作早12日完成.求甲一人獨作完成所需的日數.

(20) 上種茶價比次種每14市斤多2圓1角.若以銀24圓所可買得的茶的斤數,上茶比次茶少8市斤,求各茶每14斤的價.

(21) 某人買雞蛋不知其單價爲何,但知蛋若較貴,於每付銀2角4分少買雞蛋2個時,則雞蛋每12個當漲價2分,求雞蛋每12個的價.

(22) 甲乙兩列車同時自同地出發,行90市里.若甲比乙每時多行1市里,則甲比乙早到1時.問兩車每時各行若干市里?

(23) 自8市斗1市升的容器中汲出酒若干市升後用水來充滿它,若再自混合液汲出同量的混合液,則器中所餘的純酒爲6市斗4市升.問兩次汲出的量各幾何?

(24) 以一小隊的兵士排列一中實方陣,又以七小隊編成的中隊,排成一4重的中空方陣,若中空方陣的面

積,適爲中實方陣的16倍,則一小隊的人數幾何?

(25) 有容量相等的甲乙丙三樽,甲樽盛水,乙樽盛酒,丙樽盛水與酒的混合液.若混合乙丙,以其中所有水的量除酒的量,則其分數爲混合甲丙時所得分數的9倍,求丙樽中所有水與酒相除的結果.

(26) 兩列車各自一站同時出發,相向而行,當兩車在途中相遇時,一車所行路程已多於他車108哩,若於相會後仍各以原速度進行,則一車再經9時,他車再經16時,卽行完所餘路程,求兩站距離及各車的速度.

(27) 甲乙二馬賽跑,第一次乙在甲前2分到達終點,第二次甲的速度每時增2哩,乙的速度每時減2哩,甲在乙前2分到達終點.若所跑距離爲2哩,問第一次賽跑時,甲乙的速度各幾何?

(28) 甲乙二旅客同時自丙丁二城出發(甲自丙起身與乙同方向進行),若干時後甲追及乙,其時兩人經過的距離相加爲15公里.又甲於4時前經過丁城,而乙與丙城的距離,以乙的速度旅行須9時始可到,問丙丁二城距離若干公里?

(29) 蘋果12個所值一分輔幣的個數比以2角4分所買得的蘋果數多2.問有銀1圓8角,可買蘋果若干個?

(30) 某人遠足 7 市里,豫定若干時可到,因行過 1 市里後,速度每時增加 1 市里,故早到半時,問豫定時間如何?

第十一章

代數式的運算V(對數)

開方爲乘冪的逆算,在第一篇第八章內業經說明.惟乘冪的逆算有二,如第九章第一節所述開方爲已知某數的n乘冪而逆求某數的一種運算,即由

$$a=x^n$$

求出x,如 $$x=\sqrt[n]{a}.$$

若我們的目的在求n,便是對數的運算,故研究對數,仍不出基本運算的範圍.不過在代數的數未經導入以前,不便說明此種方法.今關於乘冪及開方既詳見第九章,自應推廣至對數的運算.

第一節　對數的性質

104. 對數的記法及其底 設b爲正的實數,其x乘冪爲N,而欲由次式

$$N=b^x \tag{1}$$

求x時,就是問有正實數b,須自乘若干次乃等於N?此時所設的b叫做底,所求的x叫以b爲底,N的對數,若以代數式表明其關係,則寫作

$$x=\log_b N. \tag{2}$$

例如以2爲底8的對數爲3,以3爲底81的對數爲4,以10爲底100的對數爲2,以10爲底0.1的對數爲 -1. 可各記如次式:

$$3=\log_2 8, \qquad 4=\log_3 81,$$

$$2=\log_{10} 100, \quad -1=\log_{10} 0.1.$$

蓋因

$$8=2^3, \qquad 81=3^4,$$

$$100=10^2, \qquad 0.1=\frac{1}{10}=10^{-1}$$

的緣故.於是有應注意的三點:

(一) 上舉(1),(2)兩式雖形式不同,然實際所表示的關係則一.因其目的均在求 x,不過(1)式爲指數的記法,(2)式則專爲對數的運算而設.

(二) 因 b 爲正實數,而由(1)知 x 不論爲負爲正,N 俱爲正,故在底爲正實數的條件下,負數的對數不能求得.

(三) 底如不同,雖同一 N,而 x 各異,如以2爲底,16的對數爲4,而以4爲底,16的對數則爲2.惟底如相同,則其底可省略不記.例如有二數 N, N' 而同以 b 爲底,則該二數的對數 x, x' 可記爲

$$x=\log N, \qquad x'=\log N'.$$

105. 對數的基本性質 對數的記法既與指數同其根原,則欲知對數的性質爲何,當以指數定則爲基礎.玆

略舉對數的重要性質如次:

I. 不論底爲何數, 1 的對數爲 0.

因 $b^0=1$, 故 $0=\log_b 1$.

II. 以 b 爲底, b 的對數爲 1.

因 $b^1=b$, 故 $1=\log_b b$.

III. 積的對數等於各因子的對數的和.

設 $a=b^x$, 則 $x=\log_b a$;

$c=b^y$, 則 $y=\log_b c$;

$d=b^z$, 則 $z=\log_b d$;

$\cdots\cdots$, $\cdots\cdots\cdots\cdots$.

由是得 $$a\cdot c\cdot d\cdots\cdots=b^x\cdot b^y\cdot b^z\cdots\cdots$$
$$=b^{x+y+z+\cdots\cdots},$$

故 $$x+y+z+\cdots\cdots=\log_b(a\cdot c\cdot d\cdots\cdots).$$

但 $$x+y+z+\cdots\cdots=\log_b a+\log_b c+\log_b d+\cdots\cdots,$$

故 $$\log_b(a\cdot c\cdot d\cdots\cdots)=\log_b a+\log_b c+\log_b d+\cdots\cdots.$$

IV. 商的對數等於被除數與除數的對數的差.

設 $a=b^x$, 則 $x=\log_b a$;

$c=b^y$, 則 $y=\log_b c$.

由是得 $$\frac{a}{c}=\frac{b^x}{b^y}=b^{x-y},$$

故 $$x-y=\log_b\frac{a}{c}.$$

但 $$x-y=\log_b a-\log_b c,$$

故 $$\log_b \frac{a}{c}=\log_b a-\log_b c.$$

V. 一數的某乘冪的對數等於以冪指數與該數的對數相乘積.

$$設\ a=b^x,\quad 則\quad x=\log_b a.$$

由是得 $$a^n=(b^x)^n=b^{nx},$$

故 $$nx=\log_b a^n,$$

但 $$x=\log_b a,$$

故 $$\log_b a^n=n\log_b a.$$

VI. 方根的對數等於以根指數除該數的對數.

$$設\ a=b^x,\quad 則\quad x=\log_b a.$$

由是得 $$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}=(b^x)^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{x}{n}},$$

故 $$\frac{x}{n}=\log_b \sqrt[n]{a}.$$

但 $$x=\log_b a,$$

故 $$\log_b \sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\cdot\log_b a.$$

應用上述諸性質,可計算一數或一代數式的對數如次:

例一. 求以10為底 $\sqrt{0.0001}$ 的對數

解. $\log_{10}\sqrt{0.0001}=\frac{1}{2}\log_{10}0.0001$

$$=\frac{1}{2}\log_{10}\frac{1}{10000}$$

$$=\frac{1}{2}\log_{10}(10)^{-4}$$

$$=\frac{-4}{2}\log_{10}10=-\frac{4}{2}=-2.$$

例二. 設 a, b, c 的對數爲已知數, 求 $\log\frac{a^2b\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2}}$.

解. $\log\frac{a^2b\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2}}=\log(a^2\cdot b^{1+\frac{1}{2}}\cdot c^{-\frac{2}{3}})=2\log a+\frac{3}{2}\log b-\frac{2}{3}\log c.$

如此算法,又叫對數式的展開,對於任何底均可適用.故其底未曾註明,以下仿此.

例三. 化 $\log\frac{4}{\sqrt{125}}+\log\frac{125}{3\sqrt{8}}-\log\frac{5\sqrt{2}}{3}$ 爲最簡式.

解. $\log\frac{4}{\sqrt{125}}+\log\frac{125}{3\sqrt{8}}-\log\frac{5\sqrt{2}}{3}$

$$=\log 2^2-\log(5^3)^{\frac{1}{2}}+\log 5^3-\log 3-\log(2^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$-\log 5-\log 2^{\frac{1}{2}}+\log 3$$

$$=2\log 2-\frac{3}{2}\log 5+3\log 5-\log 3-\frac{3}{2}\log 2$$

$$-\log 5-\frac{1}{2}\log 2+\log 3$$

$$=\left(2-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\log 2+(1-1)\log 3+(3-\frac{3}{2}-1)\log 5$$

$$=\frac{1}{2}\log 5.$$

若 $\log 5$ 爲已知數,則最後的數值就可求得.

習題六五

(1) 以 2 爲底,問次列各數的對數爲何?

$$2,\ 64,\ 128,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32}.$$

(2) 以 3 爲底,問次列各數的對數爲何?

$$27,\ 729,\ 1,\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{3}.$$

(3) 以 5 爲底,問次列各數的對數爲何?

$$1,\ 5,\ 25,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{25},\ \frac{1}{625}.$$

(4) 以 4 爲底,問次列各數爲何數的對數?

$$0,\ 2,\ 3,\ -1,\ -2,\ \frac{1}{2}.$$

(5) 問次列各對數的底爲何?

$$\log 2=1,\qquad \log 36=2,\qquad \log 121=2,$$

$$\log 9=2,\qquad \log 512=8,\qquad \log\frac{1}{49}=-2.$$

(6) 證明次列各式:

(一)　$\log_{10} 0.001 - \log_{10} 0.01 + \log_{10} 0.1 = -2.$

(二)　$2\log_a a + 2\log_a \frac{1}{a} + \log_a 1 = 0$

(三)　$3\log_{27} 3 - \frac{1}{3}\log_3 27 + \log_9 3 = \frac{1}{2}.$

(四)　$4\log_{16} 4 + 2\log_4 \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\log_2 16 = 0.$

(五)　$\log_8 64 + \log_4 64 + \log_2 64 = 11.$

(六)　$2\log_{36} 6 - \log_6 36 + \log_6 \frac{1}{36} = -3.$

(7) 求次列各式的值:

(一)　$\log_2 \sqrt{8} + \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^2.$　(二)　$\log_2 (0.5)^3 - \log_4 \sqrt[3]{16}.$

(三)　$\log_5 \sqrt{125} + \log_{11} \sqrt[3]{121}.$

(四)　$\log_8 2^5 + \log_7 \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{3}}$

(8) 展開次列各式:

(一)　$\log \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$　(二)　$\log \frac{a^3 b^2 c^{\frac{1}{3}}}{4\sqrt[3]{d}}.$

(三)　$\log \frac{\sqrt[5]{p^2(1-q)}}{\sqrt{p}\,(1+q)}.$　(四)　$\log \sqrt[4]{\left(\frac{a^4(b-c)}{c\sqrt{a-b}}\right)^3}$

(9) 簡化次列各式:

(一)　$3\log(1-x) - 2\log(2+x) + \log c.$

(二)　$\log y - \frac{1}{2}\log(y^2+4) + \log c.$

(三) $3\log(x+1)+3\log(x-1)+\frac{1}{2}\log x-2\log(x^2+1)$.

(四) $\frac{1}{3}\{2\log(x-1)+3\log(x+1)+\frac{1}{2}\log x$

$-\frac{2}{3}\log(x^2+1)\}$.

(10) 已知 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}5=0.6990$, 求次列各數的對數:

$\log_{10}15$, $\log_{10}6$, $\log_{10}30$, $\log_{10}\frac{3}{2}$, $\log_{10}\sqrt{2}$,

$\log_{10}\sqrt[3]{5}$, $\log_{10}25$, $\log_{10}(\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{5^3})$,

$\log_{10}(625\cdot\sqrt[4]{24})$, $\log_{10}(\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt{6})$.

第二節 常用對數

106. 對數之由來及其求法 由前款諸例,知式中各數的對數設為已知,則該式的數值不難算出.如習題六五第10題欲求以10為底15, 6, 30,等數的對數,必先以10為底, 2, 3, 5 等數的對數為已知.但此等對數又如何求得?因底如不同,雖同一數而其對數各異,故底的數值為何?實為計算對數的要素.又由前款知一切正數的對數,其底皆為正的實數,故對於正數得以任何正的實數為底.為便利計算起見,通常以10為底,求一切正數的對數,叫常用對數.

某數的對數不論其底爲何,除在特別情形下得爲整數外,恆由整數及小數兩部所合成.如以10爲底,10的對數爲1,100的對數爲2,而夾在10與100中間的數的對數則大於1小於2而爲1.……,如此組成對數的整數部分,叫定位部分,又叫指標.因由此部分可知某數的位數多寡,即由此可得一指出某數的位數的標準.如由對數的整數1,可知某數在10與100的中間,爲一位乃至二位的數.而組成對數的小數部分,則叫定值部分,又叫尾數.因某數僅有指標,祇可指定其位數,必於指標後添記相當的末尾,其數值乃可確定.

對於任何正數,求其對數的定位及定值的部分,惟以10爲底時最爲簡便.玆分別說明如次:

(1) 定位部分

因　$10^4=10000$,　故　$\log 10000=4$;

[因以10爲底,故10可不記.]

因　$10^3=1000$,　故　$\log 1000=3$;

因　$10^2=100$,　故　$\log 100=2$;

因　$10^1=10$,　故　$\log 10=1$;

因　$10^0=1$,　故　$\log 1=0$;

因　$10^{-1}=0.1$,　故　$\log 0.1=-1$;

$$因\quad 10^{-2}=0.01, \qquad 故\quad \log 0.01=-2;$$

$$因\quad 10^{-3}=0.001, \qquad 故\quad \log 0.001=-3;$$

$$因\quad 10^{-4}=0.0001, \qquad 故\quad \log 0.0001=-4.$$

由此類推,10的指數若爲大於4及小於-4的整數,其乘冪的對數,不難直接寫出.故凡正數的對數,其指標可依次列兩法則而決定:

(I) 凡大於1或等於1的數,其位數若爲n,則其對數的指標爲$n-1$.

(II) 凡小於1而大於0的數,其首位有效數字與小數點的中間若有n個0,則其對數的指標爲$-(n+1)$.

(2) 定值部分 凡十進數無不可看做10的冪數的某數倍,故底若爲10,則大於0的數若以同一數字依同一順序排列而成,其對數的指標,雖因其位數而各異,但不論該數原有小數的位置何在,其對數的尾數恆相同,例如

$$\log 30=\log(10\times 3)=\log 10+\log 3=1+\log 3,$$

$$\log 300=\log(100\times 3)=\log 100+\log 3=2+\log 3,$$

$$\log 0.003=\log\frac{3}{1000}=-\log 10^{3}+\log 3=-3+\log 3.$$

即有效數字3的位置無論如何,其對數的尾數終與$\log 3$無異,此實以10爲底的優點,於實際運算至爲方便,

不可不知.

依上例又可知小數的對數祇有指標爲負,其尾數則皆爲正.因一切正的小數,皆可化作以10的冪數爲分母的分數,故其對數的負號,祇屬於指標部分,而與其尾數無關,且負號不當記於對數的左側,祇應記於指標的上端,以表明尾數不爲負,則計算時自不致混淆.例如已知 $\log 3=0.4771$, 則

$$\log 0.03=\bar{2}.4771, \text{而非} \log 0.03=-2.4771.$$

$$\log 0.003=\bar{3}.4771, \text{而非} \log 0.003=-3.4771.$$

亦不可以其値爲 $-2+0.4771$ 及 $-3+0.4771$, 逕記爲 -1.5229 及 -2.5229. 因如是記法,則有效數字相同而數值不同的數的對數,其相異的部分,不僅屬於指標,運算上轉覺不便.故應以負號記於指標的上端,而不當記於對數的左側.或有時爲運算方便計,以原有指標對於10的補數爲指標,而於其右減10,以保持其數值不變.如

$$\log 0.03=\bar{2}.4771=8.4771-10.$$

此則不獨便於加減,亦且便於乘除,故實際常適用此種記法.

107. 對數表及其用法　一數的對數,其指標雖可由其位數決定,然其尾數則不能由視察而知.如三位數的

對數,雖知其大於2而小於3,但2以下的小數爲何,則非有法以計算不可.此項計算,叫造表法,其法詳第四篇,茲不具論,惟依法造成的對數表(參考蓋氏對數表),其構造及用法,則不可不先爲說明,以便實用

(1)構造　數的常用對數表內所載事項有三:

(一)自然數　因任何正數的對數,其指標部份均可由§106 (1)所論(I)(II)二條法則求得,其尾數部份均可由其同數字依同次序排列的整數對數表中求得.故造表者但算出整數的對數,已够應用,卽以表中最左一行與最上一列所組成的自然數,均爲整數,而小數自可通用,惟所載自然數有限於萬以內或近於萬,也有大於萬或十萬以上的.

(二)對數　因以10爲底的對數,其指標可視察而得,故表中祇記其定値的部分.但凡數若不等於10的羃數,其對數恆爲不盡小數,故表中所載尾數的小數位數無論多至何位,皆爲該對數的近似値.其簡便的僅有四位(如前款所舉2, 3, 5等數的對數)或五位,也有詳至七位以上的.又因尾數恆爲正,故表中數字都是正的小數,爲便於排印,故小數點悉略去.

(三)表差　表中所載自然數,無論大至何位,其應用終

有時而窮.故表載連續兩數的對數差叫表差,以示該兩數間對數的增大或減小,而於其下附載1至9與表差的相乘積,以便於計算該兩數間所有小數的對數.

(2) 用法　對數表的用途有二:凡為計算便利,對於某某諸數不直接實施乘除乘方或開方,而先行各取其對數的算法,叫做有某數求對數.凡由實施對數的運算而得一結果,於是就表看何數的對數與此結果相當,因而求得該數的算法,叫做有某數的對數求某數.試舉例以說明其用法.

(一) 有某數求對數　例如有數1347而欲求其對數,則先於表檢得與1347相當的尾數為0.12937,再依指標的法則,以3記於此數的左側,得3.12937,卽為所求的對數.若所設的位數甚多,為表中所無,例如求134.76的對數.檢表得

$$
\begin{array}{r}
\log 134.8 = 2.12969 \\
\underline{\log 134.7 = 2.12937} \\
0.00032
\end{array}
$$

由是知二數的差為0.1,而其對數的差則為0.00032;故二數的差若為1,其對數的差可為0.00032÷0.1,今所設的數與表中所有較小一數的差為(134.76－134.7)卽0.06,故其對數的差應為

$$\frac{0.00032}{0.1}\times 0.06=0.00019.$$

此數可直接由表差32的行下6的右側檢得，故

$$\log 134.76=2.12937+0.00019=2.12956.$$

(二)有某數的對數求某數　例如有某數的對數2.87904求某數，則先於表中檢得7569的對數，適與此數的尾數相當，又因2爲其指標，故所求的數爲756.9. 若所設對數的尾數不能與表載各數密合，例如求以$\bar{1}.26379$爲對數的數．

檢表得

$$\begin{array}{r} \log 0.1836=\bar{1}.26387 \\ \underline{\log 0.1835=\bar{1}.26364} \\ 0.00023 \end{array}$$

由是得二數的差爲 0.0001，而其對數的差則爲 0.00023，故對數的差若爲 1，則二數的差可爲 $0.0001\div 0.00023$. 今所設對數的尾數與表中所有較小一尾數的差爲$(\bar{1}.26379-\bar{1}.26364)$即 0.00015，故相當於此二尾數的二數，其差應爲

$$\frac{0.0001}{0.00023}\times 0.00015=0.000065.$$

此數可直接由表差23的行下近於15的兩數 13.8 及 16.1 的中間，檢得其左側一數爲65，故與$\bar{1}.26379$相當的

數爲 0.1835+0.000065 卽 0.183565.

108. 對數計算的例

例一. 計算 $\dfrac{1627.3\times(0.0326)^3}{\sqrt{0.005274}}$.

解. $\log\dfrac{1627.3\times(0.0326)^3}{\sqrt{0.005274}}$.

$$=\log 1627.3+3\log 0.0326-\frac{1}{2}\log 0.005274.$$

檢表得 $\log 1627.3=3.21147$,

又 $3\log 0.0326=3\times\bar{2}.51322=\bar{5}.53966$,

又 $\frac{1}{2}\log 0.005274=\frac{1}{2}\times\bar{3}.72214=\bar{2}.86107$,

故 $\log\dfrac{1627.3\times(0.0326)^3}{\sqrt{0.005274}}=3.21147+\bar{5}.53966-\bar{2}.86107$,

$$=-0.10994=\bar{1}.89006.$$

再檢表得 $\log 0.77635=\bar{1}.89006$,

故所求分數的數值爲 0.77635.

例二 求 $\dfrac{28\times\sqrt{8753}}{1275000}$ 的立方根.

解 設 $x=\sqrt[3]{\dfrac{28\times\sqrt{8753}}{1275000}}$,

則 $\log x=\log\sqrt[3]{\dfrac{28\times\sqrt{8753}}{1275000}}$

檢表得 $\log 28 = 1.44716,$

$$\frac{1}{2}\log 8753 = \frac{1}{2} \times 3.94211 = 1.97106,$$

$$\log 1275000 = 6.10551,$$

故 $$\log x = \frac{1}{3} \times [1.44716 + 1.97106 - 6.10551]$$

$$= \frac{1}{3} \times [3.41822 - 6.10551]$$

$$= \frac{1}{3} \times [(13.41822 - 10) - 6.10551]$$

$$= \frac{1}{3} \times (7.31271 - 10)$$

$$= \frac{1}{3} \times (27.31271 - 30)$$

$$= 9.10424 - 10.$$

故 $$x = 0.12712.$$

例三. 問 $(1.028)^{1000}$ 為若干位的數?

解. 因 $\log (1.028)^{1000} = 1000 \log 1.028$

$$= 1000 \times 0.01199$$

$$= 11.99.$$

故所求為12位的大數,但尾數只有兩位,其數值不能確知,若必欲定值,非有較詳的對數表不可.

習題六六

(1) 驗算次列各結果:

(一) $\log 16.426 = 1.21553$　(二) $\log 1000.7 = 3.00030$

(三) $\log 1.0108 = 0.00466$　(四) $\log 0.0004586 = \bar{4}.66143$

(2) 求相當於次列各對數的數:

(一) 1.80557　(二) $\bar{2}.05293$

(三) 0.21648　(四) $8.44305-10$

(3) 用對數求次列各數的積:

(一) 2.364×934.25　(二) 9.238×9.152

(三) $2 \times 3.1416 \times 29.52$　(四) 370.62×0.00064573

(4) 用對數求次列各數的商:

(一) $336.8 \div 7984$　(二) $0.0054156 \div 25.324$

(三) $367.21 \div 1467.9$　(四) $\dfrac{1357 \times 0.06423}{76420}$

(5) 用對數求次列各乘冪:

(一) $(1.3872)^5$　(二) $(1.23)^{11}$

(三) $(2.1346)^8$　(四) $(346.58)^{\frac{1}{12}}$

(6) 用對數求次列各方根:

(一) $\sqrt{23.587}$　(二) $\sqrt[3]{38.275}$

(三) $\sqrt[4]{\dfrac{128}{9657}}$　(四) $\sqrt[17]{\left(\dfrac{31.63}{429}\right)^3}$

(7) 計算次列各式:

(一) $\dfrac{31.071 \times 21.372 \times 7.259}{0.515 \times 0.719 \times 0.021}$　(二) $\left(\dfrac{0.08726}{0.1321}\right)^{\frac{5}{3}}$

(三) $\sqrt[3]{\dfrac{43.16\times 237.5}{(579)^4}}$ (四) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{7194}\times 87}{98080000}}$

(8) 問次列各乘冪爲何位數?

(一) 65^{31} (二) 47^{28}

(9) 問 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$ 的有效數字自小數第幾位起?

(10) 設 $y\log_x a=1$, 證明 $x=a^y$.

第十二章

各種方程式

一元及多元的一次及二次方程式解法,業於以前諸章次第講過.但在初等範圍內可解的方程式,尚有多種,其法亦僅以二次方程式解法為限,而應用的方面則甚廣,故有繼續敘述的必要.

第一節* 準二次方程式

凡可運用種種手段使其結果化為二次方程式的形式,得以解二次方程式的法則來解的,總叫準二次方程式.

109.* 偶數次三項方程式 凡次數為大於2的偶數,其左邊僅有三項,其最高次項的次數適二倍於第二項的次數,而第三項則為絕對項的方程式,皆屬此類,皆得以二次方程式解法解之.

例一. 解$100x^4-229x^2+9=0$.

解. 命$x^2=y$,則$x^4=y^2$.

由是得 $$100y^2-229y+9=0$$

故 $$y=\frac{229\pm\sqrt{229^2-400\times 9}}{200}=\frac{9}{4}\text{或}\frac{1}{25}$$

即 $$x^2=\frac{9}{4}\text{或}\frac{1}{25}$$

故 $$x=\pm\frac{3}{2}\text{或}\pm\frac{1}{5}$$

[驗算由學者自行,以下仿此.]

如此例所設方程式表面雖爲四次,而實際得以二次方程式解法來解的,叫複二次方程式.觀此可知所設方程式的最高次數雖爲大於4的偶數,亦可化作二次方程式解之.

例二. 解 $x^6-7x^3-8=0$

解. 介 $x^3=y$, 則 $x^6=y^2$

由是得 $$y^2-7y-8=0$$

故 $$(y-8)(y+1)=0$$

故 $$y=8\text{ 或 }-1$$

即 $$x^3=8\text{ 或 }-1$$

故 $$x=2\text{ 或 }-1$$

於是有應注意的二點:

(一) $x^3=8$, $x^3=-1$ 的根各有三個,此處僅各得其一,若

欲知他二根如何求法,可參考110款例一.

(二)所設方程式的最高次若爲8,仍可照例一計算,若爲10,當令$x^5=y$,結果必須解x^5等於常數的方程式,亦祇能得其一根,其他則非初等的方法所能解.最高次數大於10時,可以類推.

觀此又可知所設方程式左邊若表面雖不止三項,而其簡約的結果終成二次三項式時,仍得以二次方程式解法解之.

例三.　解$(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$.

解.　令$x^2+x=y$,則

$$y^2+4y-12=0$$

故　$$y=2,\text{或} -6$$

由是得　$x^2+x=2$,　即　$x^2+x-2=0$

故　$$x=1 \text{ 或 } -2$$

又　$x^2+x=-6$,　即　$x^2+x+6=0$

故　$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{23}\,i.$$

如例三,即所設方程式的前兩項括弧中所有各項不盡同,亦得依同法解之.

例四.　解$(x^2+4x+5)^2-12(x^2+4x)-40=0$.

解.　令$x^2+4x=y$,則

$$(y+5)^2-12y-40=0$$

即 $$y^2+10y+25-12y-40=0$$

即 $$y^2-2y-15=0$$

故 $$y=5 \text{ 或 } -3$$

由是得 $$x^2+4x=5,\quad \text{即}\quad x^2+4x-5=0$$

故 $$x=1 \text{ 或 } -5$$

又 $$x^2+4x=-3, \text{即}\quad x^2+4x+3=0$$

故 $$x=-1 \text{ 或 } -3.$$

110.* 二項方程式 凡次數在二次以上,而其左邊僅有最高次項及絕對項的方程式,叫二項方程式,其一般的形式如 $x^n+A=0$. 玆舉其可以二次方程式解法來解的二例如次:

例一. 解 $x^3-1=0$

解. 分解因子 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

由是得 $$x-1=0 \text{ 或 } x^2+x+1=0$$

若 $$x^2+x+1=0$$

則 $$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

故 $$x=1 \quad \text{或} \quad \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

觀此例可知1的立方根有三,其一根為1,他二根則

為虛數.

例二. 解 $x^4=1$.

解. 命 $x^2=y$, 則 $y^2=1$, 故 $y=\pm 1$.

若 $y=1$ 則 $x^2=1$ 故 $x=\pm 1$;

若 $y=-1$ 則 $x^2=-1$ 故 $x=\pm i$.

111.* 逆根方程式 凡方程式經整理後,其各項的係數自左端或右端依次看來無不相同的,叫逆根方程式.因此種方程式若有某數的根,則亦有該數的逆數根,觀於次例自明.

例一. 解 $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

解. 因 $x^2\neq 0$, 故以 x^2 除兩邊, 則

$$6x^2-35x+62-\frac{35}{x}+\frac{6}{x^2}=0$$

即
$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$$

命
$$x+\frac{1}{x}=y,\quad 則\quad y^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$$

故
$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$$

由是得
$$6(y^2-2)-35y+62=0$$

解之得
$$y=\frac{5}{2}\quad 或\quad \frac{10}{3}$$

故 $$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \quad 或 \quad x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$$

由是得 $$x=2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3}.$$

觀於所得四根,兩兩互爲逆數,可知該方程式得名的原因.

例二. 解 $x^3-5x^2+5x-1=0$

解. 此方程式各項的係數旣自左或自右依次看來均相同,則其根必兩兩互爲逆數.但此方程式祇有三根,故必有一根,其數與其逆數相等,而合於此種性質的祇有一數,卽"1",故知所設方程式有一根爲1.由是得

$$(x-1)(x^2-4x+1)=0$$

故 $$x-1=0 \quad 或 \quad x^2-4x+1=0$$

解之得 $$x=1,\ -2\pm\sqrt{3}$$

除1外,他二根亦互爲逆數.何故?

112.* 由分式方程式引起的高次方程式

例一. 解 $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$.

解. 此題若先去分母,則成四次方程式.

若令 $\frac{x}{x^2+1}=y$, 則 $$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$$

再去分母,則 $$2y^2-5y+2=0$$

故 $$y=2 \quad 或 \quad \frac{1}{2}$$

由是得 $$\frac{x}{x^2+1}=2 \quad 卽 \quad 2x^2-x+2=0$$

故 $$x=\frac{1\pm\sqrt{15}i}{4}$$

又 $$\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{2} \quad 卽 \quad x^2-2x+1=0$$

故 $$x=1.$$

例二. 解 $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{9+x}{9-x}-\frac{9-x}{9+x}$.

解. 此題若先去分母,則亦成四次方程式,若兩邊各自計算,則

$$\frac{(x+4)^2-(x-4)^2}{x^2-16}=\frac{(9+x)^2-(9-x)^2}{81-x^2}.$$

卽 $$\frac{16x}{x^2-16}=\frac{36x}{81-x^2}$$

卽 $$4x\left\{\frac{9}{81-x^2}-\frac{4}{x^2-16}\right\}=0$$

由是得 $$x=0 \quad 或 \quad \frac{9}{81-x^2}-\frac{4}{x^2-16}=0$$

若 $$9x^2-144-324+4x^2=0$$

則 $$13x^2=468 \quad 卽 \quad x^2=36$$

故 $$x=0 \quad 或 \quad \pm 6$$

113*　左邊可分爲一次及二次因子的高次方程式

此種方程式在前已屢經遇到，茲再舉二例以示其特殊的解法.

例一.　解 $(x-2)(x-5)(x-7)=8\cdot5\cdot3$.

解.　由觀察知 $x-2=8$，即 $x=10$（即 $x-5=5$ 或 $x-7=3$，x 亦等於 10）爲所設方程式的一根，旣係明顯的事實，故若集所設方程式

$$x^3-14x^2+59x-70=120$$

的各項於左邊而除以 $x-10$，則

$$(x^3-14x^2+59x-190)\div(x-10)=0.$$

由是得
$$x^2-4x+19=0.$$

所設方程式的其他二根，可由此方程式求出，即

$$x=2\pm\sqrt{15}\,i.$$

故
$$x=10 \quad 或 \quad 2\pm\sqrt{15}\,i.$$

例二.　解 $3x^3-14x^2+20x-8=0$.

解.　設 $x=2$，則左邊爲 0，故 2 爲方程式的一根.由是得

$$(x-2)(3x^3-8x+4)=0.$$

故
$$x-2=0, \quad 或 \quad 3x^2-8x+4=0.$$

由是得
$$x=2,\ 2,\ \frac{2}{3}.$$

習題六七*

解次列各方程式:

(1) $x^4-2x^2-8=0$

(2) $x^4+36=13x^2$

(3) $x^6-7x^3=-10$

(4) $(x^2-9)^2=3+11(x^2-2)$

(5) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=54$

(6) $a^2x^4-(a^4+1)x^2+a^2=0$

(7) $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$

(8) $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$

(9) $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$

(10) $x^2+x+\frac{1}{x^2+x}=2\frac{1}{2}$

(11) $\frac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\frac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\frac{5}{2}$

(12) $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=2$

(13) $16\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=257$

(14) $x^2-x+\frac{72}{x^2-x}=18$

(15) $x^2+\frac{a^2b^2}{x^2}=a^2+b^2$

(16) $x(x-2a)=\frac{8a^4}{x^2-2ax}+7a^2$

(17) $2x^4+3x^3-9x^2-3x+2=0$

(18) $\frac{x}{9}+\frac{16}{x^2}=\frac{10}{3}\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$

(19) $2x^3-7x^2+7x-2=0$

(20) $x(x-1)(x-3)=12$

(21) $(x-2)(x-3)(x-4)=1\cdot2\cdot3$

(22) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=5\cdot6\cdot7\cdot8$

(23) $x^3+3ax^2=4a^3$

(24) $5x^2(a-x)=(a^2-x^2)(x+3a)$.

第二節* 根式方程式及指數方程式

114.* 根式方程式及其解法 凡未知數或含有未知數的代數式在根號下的方程式，叫根式方程式，又叫無理方程式.如

例一. 解 $x-\sqrt{x}-6=0$. (1)

解. 移項 $x-6=\sqrt{x}$ (2)

兩邊自乘整理 $x^2-13x+36=0$ (3)

故 $x=4$ 或 9

驗算. $x-\sqrt{x}-6=4-\sqrt{4}-6=-4\neq0$

$x-\sqrt{x}-6=9-\sqrt{9}-6=0$

卽9雖適合於所設方程式，而4則非(1)的根.因(2)卽(1)，而(3)與(2)不同值，故(3)與(1)不同值，故由(3)求得的根不盡爲(1)所有.但(3)與(2)何以不同值?因(3)本由

$$x^2-12x+36=x \quad (4)$$

整理而得,(4)雖爲(2)的兩邊自乘的結果,然若以

$$-(x-6)=\sqrt{x} \qquad (5)$$

兩邊自乘亦可得(4),故(3)與(2)不同値.

推廣地說, $$A=B \qquad (6)$$

與方程式 $$A^2=B^2 \qquad (7)$$

不同値(A, B均爲含未知數的代數式),因(6)若移項,則

$$A^2-B^2=0,$$

卽 $$(A-B)(A+B)=0. \qquad (8)$$

(8)的所有根,於(6)外,猶有$A+B=0$,卽$A=-B$,故(7)非(6)的同値方程式.卽以方程式兩邊自乘時,不嘗以含有未知數的代數式乘兩邊,則非其所有的根常於此時導入.如此因自乘而導入的根,叫"無綠根".

解根式方程式旣常以施行自乘爲便,則常有導入無綠根的可能,故旣解根式方程式後,必以所得各根一一代入原方程式,驗其是否適合,與解分式方程式同.且如上例,若不以兩邊自乘,則可免無綠根的導入.尤可證明無綠根的來由實爲經於自乘的綠故.因(1)式亦得改寫爲 $$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)=0,$$

由是知 $$\sqrt{x}+2=0 \quad 或 \quad \sqrt{x}-3=0.$$

但$\sqrt{x}$恆代表x的正根(參考83款),不能等於負數,故

$$\sqrt{x}+2\neq 0,$$

$$\therefore\quad x=9.$$

如此解法,則無緣根4自無從產生.

例二. 解 $\sqrt{x+15}=\sqrt{x}-15$.

解. 兩邊平方,則

$$x+15=x+225-30\sqrt{x},$$

即
$$30\sqrt{x}=210,$$

故
$$x=49.$$

驗算. $\sqrt{x+15}-\sqrt{x}+15=\sqrt{49+15}-\sqrt{49}+15\neq 0$

即49非原方程式的根,而由原方程式又無法解得他數,故知原方程式無根.由此可知無理方程式有時在表面雖可假定兩邊相等,實際乃無適合於該方程式的根.

例三. 解方程式 $\sqrt{4x+24}+\sqrt{4x+9}=15$.

解. 兩邊各乘以 $\sqrt{4x+24}-\sqrt{4x+9}$, 則

$$4x+24-4x-9=15(\sqrt{4x+24}-\sqrt{4x+9}),$$

即
$$15=15(\sqrt{4x+24}-\sqrt{4x+9}).$$

故
$$\sqrt{4x+24}-\sqrt{4x+9}=1,$$

以此與原方程式相加,則

$$2\sqrt{4x+24}=16,$$

即
$$\sqrt{4x+24}=8,$$

故 $$4x+24=64,$$

即 $$x=10.$$

此根適合於原方程式.

例四. 解 $3x^2-12x+18=2\sqrt{x^2-4x+13}$.

解. 設 $y=\sqrt{x^2-4x+13}$, 則

$$3y^2=3x^2-12x+39.$$

故 $$3y^2-2y-21=0.$$

故 $$(y-3)(3y+7)=0.$$

但 y 不爲負數, 故 $$3y+7\neq 0,$$

故 $$y=3,$$

即 $$\sqrt{x^2-4x+13}=3.$$

故 $$x^2-4x+13=9,$$

即 $$x^2-4x+4=0.$$

故 $$(x-2)^2=0,$$

故 $$x=2.$$

此根適合於原方程式.

115.* **指數方程式及其解法** 凡指數中含有未知數的方程式,叫指數方程式.其解法須應用對數的計算.

例一. 解 $(0.3)^x=0.02$.

解. 兩邊取對數, 則

$$x\log 0.3=\log 0.02,$$

故
$$x=\frac{\log 0.02}{\log 0.3}=\frac{\bar{2}.30103}{\bar{1}.47712}=\frac{-\bar{2}.30103}{-\bar{1}.47712}$$

$$=\frac{1.69897}{0.52288}=3.2492.$$

例二. 解 $a^{2x+3}b^x=c$.

解. 兩邊取對數,則

$$(2x+3)\log a+x\log b=\log c,$$

即
$$2x\log a+3\log a+x\log b=\log c,$$

即
$$x(2\log a+\log b)=\log c-3\log a,$$

故
$$x=\frac{\log c-3\log a}{2\log a+\log b}.$$

例三. 解
$$\begin{cases}2^{3x+2y}=5 & (1)\\ 4^{2x}=2^{2y+3} & (2)\end{cases}$$

解. 由 (1) 得 $(3x+2y)\log 2=\log 5,$ (3)

由 (2) 得
$$2x\log 4=(2y+3)\log 2,$$

即
$$4x\log 2=(2y+3)\log 2,$$

故
$$4x=2y+3,$$

即
$$2y=4x-3. \quad (4)$$

以 (4) 代入 (3), 則

$$(7x-3)\log 2=\log 5,$$

故
$$x=\frac{\log 5+3\log 2}{7\log 2}$$
$$=\frac{0.69897+3(0.30103)}{7(0.30103)}$$
$$=\frac{0.69897+0.90309}{2.10721}$$
$$=\frac{1.60206}{2.10721}$$
$$=0.7603.$$

代入(4)得
$$y=\frac{4x-3}{2}=\frac{4(0.7603)-3}{2}$$
$$=\frac{3.0412-3}{2}=\frac{0.0412}{2}$$
$$=0.0206.$$

如本例及例一的x,亦可再用對數以計算其值.

習題六八

解次列各方程式:

(1) $\sqrt{x^2-4x+4}-3=0$　　(2) $x+\sqrt{5x+10}=8$

(3) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}$

(4) $\sqrt{x^2+7x+6}-\sqrt{x^2+5x-8}=2$

(5) $\sqrt{x}+\sqrt{(x+\sqrt{1-x})}=1$

(6) $\sqrt{(x^2-6x+16)}+(x-8)^2=13$

(7) $6\sqrt{x^2-2x+5}=22+2x-x^2$

(8) $\sqrt{2x+9}+\sqrt{3x-15}=\sqrt{7x+8}$

(9) $x^2+3-\sqrt{(2x^2-3x+2)}=\frac{3}{2}(x+1)$

(10) $\frac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$

(11) $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$

(12) $\sqrt{3ax-x^2}-\sqrt{x^2-3bx}=\sqrt{3}\sqrt{a-bx}$

(13) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=84 \\ x-\sqrt{xy}+y=6 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=12 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

(15) $\begin{cases} x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y} \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$

(16) $2^x\cdot 15^x=5$

(17) $3^x-3^{-x}=5$

(18) $4^{x-1}=5^{x+1}$

(19) $(0.9)^{\frac{1}{x^2}}=4.7^{-\frac{1}{3}}$

(20) $a^{x^2+2x}=b$

(21) $\begin{cases} 2^x=8^{y+1} \\ 9^y=3^{x-9} \end{cases}$

(22) $\begin{cases} 2^{x+2y}=50 \\ 3^x=4^y \end{cases}$

(23) $\begin{cases} a^x b^y=m \\ c^x d^y=n \end{cases}$

(24) $\begin{cases} a^{2x-8}a^{3y-2}=a^{8} \\ 3x+2y=17 \end{cases}$

第十三章

不　等　式

自第三章21款提出代數式的等式後,各章所講的方程式,或代數式運算中所表示式與式的關係,都屬於相等的範圍.而不等式則尚未述及.其實不等式在代數學上固甚占重要地位,即爲啓發初學者的心思,養成其對於代數的數及其問題有深切注意多方考慮的習慣,而無濫用公式連行計算的弊端,亦當令其學習不等式.故於各種代數式運算及方程式解法後,增列此章,以略示不等式的算法.

第一節* 不等式的性質

116.* 自然數的數列及不等號 在實數範圍內,* 正負整數若依其大小的順序排列如次:

$$\cdots\cdots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\cdots\cdots$$

且各整數間均依次插入若干分數,則任何一數無不比在其右的小,亦無不比在其左的大(參考第三章24款).表示數與數比較大小的關係,通常用 $>$ 及 $<$ 兩種符號,其尖端所指的,爲較小的一數,如

*本章所論各數,均以實數爲限.

$$4>3,\ 2>1,\ 0>-3,\ -2>-4 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

及 $$\frac{2}{3}<\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}<\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}<0,\ -\frac{4}{3}<-1 \cdots (2)$$

而上列各數從前者減去後者,其結果(1)列皆為正,(2)列皆為負.故表明a, b兩數不等的方式有二,而實際則一.即$a>b$,或$a<b$與$a-b>0$或$a-b<0$所表示的關係為同一事實.故二數a,b的大小依次列標準判定,最為簡便.

設$a-b>0$,則$a>b$; $a-b<0$,則$a<b$.如此以不等號結合而成的代數式叫不等式.其較為複雜的如$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$, $\sqrt{7}+2\sqrt{3}<\sqrt{6}+\sqrt{14}$等.而不等式中所有不等號的角的張開,則叫不等的方向,如$a>b$與$c>d$為同向不等式,$a>b$與$c<d$為異向不等式.

117.* 不等式的運算 關於不等式的運算與等式有顯然區別的地方,即對於不等式的兩邊,因用以加減或乘除的數有正負不同,其不等的方向,則有時變,或有時不變.茲分述如次:

(1) 於不等式的兩邊加減同一實數,其不等的方向不變.

設 $A>B$, 則 $\quad A\pm C>B\pm C$

因 $A>B$, 故 $\quad A-B>0.$

但 $$A-B=(A\pm C)-(B\pm C),$$

故 $$(A\pm C)-(B\pm C)>0,$$

故 $$A\pm C>B\pm C.$$

由是可知於不等式中,設變更某一項的符號,則該項得從一邊移至他邊(此與方程式移項的規則相同)而不變不等的方向.

又若 $A>B$, 自兩邊減去 $A+B$, 則

$$A-(A+B)>B-(A+B),$$

即 $$-B>-A.$$

由是又可知不等式兩邊若同時變其符號,則不等式的方向亦變.

(2) 不等式兩邊乘以或除以同一實數時,(一)若其數爲正,則不等的方向不變.

設 $A>B$, $m>0$, 則 $mA>mB$.

因 $$A-B>0,\ m>0,$$

故 $$m(A-B)\ \text{即}\ mA-mB>0,$$

故 $$mA>mB.$$

同理 $$\frac{1}{m}A>\frac{1}{m}B.$$

由是可得不等式去分母的法則.

(二) 若兩邊所乘或所除的數爲負,則不等的方向變.

設 $A>B, n<0$, 則 $nA<nB$.

因 $$A-B>0,\ n<0.$$

故 $$n(A-B) \text{ 卽 } nA-nB<0,$$

故 $$nA<nB.$$

同理 $$\frac{1}{n}A<\frac{1}{n}B.$$

由是可知不等式的兩邊若乘以 -1, 則其不等的方向變.例如 $a-b>c-d$ 時, 則 $b-a<d-c$ (此與(1)的最後結論同).

然則不等式的兩邊不可以正負未明的數來乘或除,實爲最當注意的事項.

(3) 以若干個同向不等式各邊相加所得不等式仍與原不等式同向.

設 $$A>B,\ C>D,\ E>F, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

則 $$A+C+E+\cdots\cdots>B+D+F+\cdots\cdots\cdots.$$

因 $$A-B>0, C-D>0, E-F>0, \cdots\cdots\cdots,$$

故 $$A-B+C-D+E-F+\cdots>0\cdots\cdots\cdots,$$

卽 $$A+C+E+\cdots\cdots>B+D+F+\cdots\cdots\cdots.$$

(4) 以兩邊皆爲正的若干個同向不等式各邊相乘,所得不等式仍與原不等式同向.

設 $A>B,\ C>D$, 則 $AC>BD$.

因 $A>B$, $C>D$ 而其兩邊又皆爲正,故若假定

$$A=B+p,\ C=D+q\,[\text{但 } p>0,\ q>0],$$

則 $$AC=(B+p)(D+q)=BD+\text{正數},$$

故 $$AC>BD.$$

如此不等式任增至若干個,其結果亦同.且由此可知兩邊皆爲正的不等式若兩邊升高至同一乘羃時,所得不等式仍與原不等式同向,因此時 $A=C$, $B=D$,……故 $AC\cdots\cdots>BD\cdots\cdots$,卽 $A^n>B^n$.

至對於不等式施行減法除法或開方,以及若干個異向不等式相加,兩邊皆爲負或互有正負的奇數或偶數個不等式相乘或自乘,其結果究與原不等式同向,抑異向,尚有種種研究的餘地,但可由(3),(4),及(5)類推而知,不必細述.

習題六九*

(1) 設 (一) $a\times b>0$, (二) $\dfrac{a}{b}>0$, (三) $a\times b<0$, (四) $\dfrac{a}{b}<0$, 則 a, b 正負如何?

(2) 以不等式兩邊自同一數中減去,則不等的方向如何?

(3) 自等式各邊各減不等式各邊,或自不等式各邊

減等式各邊時,其不等的方向變動如何?

(4) 以兩邊不皆爲正或不皆爲負的兩個同向的不等式各邊相乘時,其不等的方向變動如何?

(5) 前題兩個不等式若爲異向則如何?

(6) 以不等式$c>d$的左邊及右邊除等式$a=b$的左邊及右邊則其結果如何?

第二節* 絕對不等式及條件不等式

118.* 絕對不等式及其證法 等式中有恆等式與方程式的區別,不等式與此相似,亦有絕對不等式與條件不等式兩種.玆先論絕對不等式.

所謂絕對不等式,卽不論式中所有文字的數值如何,其不等的關係皆成立.如$x^2+1>0$的x,卽不論等於任何值皆可,又如a, b若不相等,則不拘其值何似,$(a-b)^2>0$,故$a^2+b^2>2ab$.凡此不等式固屬絕對的眞,亦可一見明瞭.但有時所提不等式是否絕對的成立,尙待證明,試觀次例(設下列各例中所有文字皆爲不相等的正數).

例一. 證明$a^3+b^3>ab(a+b)$.

證. 因$a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2-ab)$

$$=(a+b)(a-b)^2>0,$$

故　$$a^3+b^3>ab(a+b).$$

例二.　證明 $\dfrac{x^2+3y^2}{2y}>x+y.$

證.　假設　$$\frac{x^2+3y^2}{2y}>x+y,$$

則　$$x^2+3y^2>2y(x+y),$$

即　$$x^2+3y^2>2xy+2y^2,$$

即　$$x^2-2xy+y^2>0,$$

即　$$(x-y)^2>0.$$

因此不等式爲絕對的眞,故知假設爲不誤.

故　$$\frac{x^2+3y^2}{2y}>x+y.$$

例三.　比較 $\dfrac{a+b}{2}$ 與 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 孰大?

解.　先求所設二式的差,則

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

而此差顯然爲正,故知

$$\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b}.$$

例四.　設 $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{c}{d}$, 證明

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2.$$

證.　因　$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2.$$

又因　$$(ac+bd)^2=a^2c^2+b^2d^2+2abcd,$$

及 $$(ad-bc)^2=a^2d^2+b^2c^2-2abcd,$$

故 $$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

但 $$\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)^2=\frac{(ad-bc)^2}{b^2d^2}>0,$$

故 $$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2.$$

觀例四,可知證明不等式時常須要因子分解.如第六章65款所提各公式,皆可參考.

習題七〇*

(1) 設 a, b 爲不相等的正數,則

(一) $a+b>2\sqrt{ab}$,

(二) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

(2) 設 $a \neq b$ 而 a, b 爲同符號,則

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

(3) 設 n 爲正數,比較 n^3+1 及 n^2+n.

(4) 不拘 x 爲何,$1+2x^4$ 恆不比 x^2+2x^3 小.

(5) 設 $xy>1$,則 $\left(x-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+y\right)>0$.

(6) 設 a, b, c 皆爲正而不相等,證明次列不等式:

(一) $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$

（二）　$bc(b+c)+ca(c+a)+ab(x+b)>6abc$

（三）　$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc$

（四）　$a^5+b^5>a^4b+b^4a$

（五）　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)>9abc$

（六）　$3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

(7) 設 $ac\neq bd$, 證明 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ad+bc)^2$.

(8) 設a, b皆為正數,比較$\frac{2a+3b}{3a+4b}$與$\frac{5a+6b}{9a+8b}$.

(9) 設a, b為不相等的正數,問$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}$與$\sqrt{a}+\sqrt{b}$孰大?

119.*　條件不等式及其解法　所謂條件不等式,即式中所有未知數的值,惟限於一定區域間,其不等的關係乃成立.如 $x+2>0$ 惟成立於x的數值大於 -2 時,而$(x-3)(x-5)<0$則以x的數值大於3小於5為限.凡此x所有的界限,實為含有此x的不等式所以成立的條件,故叫條件不等式.至如何決定此條件,換句話說,如何求出適合於所設不等式的x所在的區域或所有的界限,則叫解不等式.

條件不等式又因所含未知數的個數及次數不同,而有一元,二元,及一次,二次的區別.

例一. 解一元一次不等式$5x-\frac{1}{4}>7+\frac{17}{8}x$.

解. 兩邊乘以正數12,則

$$60x-3>84+68x.$$

移項 $$60x-68x>84+3,$$

即 $$-8x>87,$$

故 $$x<-\frac{87}{8}.$$

即凡比$-\frac{87}{8}$小的x,皆可使所設不等式成立.

例二. 解一元一次不等式$ax+b>cx+d$.

解. 移項 $$(a-c)x>d-b.$$

故適合於此不等式的x有兩種條件,即

(1) 若$a-c>0$,則 $$x>\frac{d-b}{a-c}.$$

(2) 若$a-c<0$,則 $$x<\frac{d-b}{a-c}.$$

例三. 求同時適合於次列兩個一元一次不等式的x的整數值:

$$2x+1<8-x,\ 5x+7>3(x+1).$$

解. 由第一式知 $$x<\frac{7}{3}.$$

由第二式知 $$x>-2.$$

故所求x的界限為 $$-2<x<\frac{7}{3}.$$

而 -2 與 $\frac{7}{3}$ 的中間所有整數為 $-1, 1, 2$, 故所求 x 的值為 $-1, 1, 2$. 但 0 亦在 -2 與 $\frac{7}{3}$ 的中間, 故 0 亦為同時適合於所設兩不等式的一值.

例四. 解二元一次不等式

$$\begin{cases} 8x-3y>7, & (1) \\ -2x+5y>11. & (2) \end{cases}$$

解. $(1)\times 5+(2)\times 3$, 則

$$34x>68, \text{ 即 } x>2.$$

又 $(1)+(2)\times 4$, 則

$$17y>51, \text{ 即 } y>3.$$

故所求 x, y 的界限為 $x>2$, $y>3$.

但此僅為 x, y 的最小界限, 即適合於所設不等式的 x, y 祇知其一須大於 2, 而一須大於 3.

例五. 解一元二次不等式 $x^2-6x+8<0$.

解. 左邊分解因子, 則

$$(x-2)(x-4)<0.$$

因兩因子須不同符號, 其積乃得為負. 故設以 $x-2>0$, 則 $x-4<0$, 由是得 $x>2, x>4$. 故所求條件為

$$2<x<4.$$

習題七一*

解次列不等式(1)—(14):

(1) $x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2$

(2) $\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$

(3) $ax(a+1)+(1+x)>a^3$

(4) $\frac{3x}{4}>\frac{x}{5}+1,\ \frac{7}{5}x-1<\frac{2x}{3}+2$

(5) $\begin{cases}5x+3y>121\\7x+4y=168\end{cases}$

(6) $\begin{cases}5x-3y>10\\2y-3x>2\end{cases}$

(7) $-3x^2+26x-35>0$

(8) $x^2-7x+12>0$

(9) $6x^2+15>19x$

(10) $x^2>3x$

(11) $x^2<25$

(12) $\frac{x^2-4}{x-5}<0$

(13) $\frac{9-x^2}{x-7}>0$

(14) $\begin{cases}x^2-4<0\\x^2-6x+8>0\end{cases}$

(15) 求同時適合於次列不等式的x的正整數值:

$$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}<\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3$$

(16) 若次列方程式的根為實數,則a所可取的數值的界限如何?

$$x^2+2(a-1)x+5a-9=0$$

(17) 若次列方程式的根為實數,而(一)不等,(二)相等,

則m所可取的數值的界限如何？若根爲虛數又如何？

$$x^2+(m-3)x=2m-6.$$

(18) 求適合於次列方程式l的界限：

$$(x+a)^3-x^3=la^3$$

(19) 不論x爲若何實數值，證明$x^2-6x+10$不小於1.

(20) 不論x爲若何實數值，證明$5-4x-x^2$不大於9.

第十四章

比及比例

在本篇第二章第13款,曾提及凡問題可用比例法解的,都可看數四則應用問題.依題意逐步解出,不濫用機械的計算,而注重理解的說明,於學者轉較有益.但思考既經訓練,而欲求一以簡馭繁的方法,則比例尚矣.且以比率表明數量間互變的關係,卽用以解決常遇的問題,如利息算,如成分算等,其應用方面固甚廣,其計算亦甚便.惟在代數的數未曾導入以前,說明多感不便,今各種代數式運算及方程式解法都已講過,宜亟補足是章,先述關於比及比例諸性質,再依次推論其如何應用於日常生活諸事項,以完成本篇.

第一節　比

120. 比及比之值　設一數 a 為他數 b 的幾倍或幾分之幾,則其關係叫 a 對於 b 的比,或簡稱 a 比 b. 以式表之,則為

$$a:b$$

其中 a, b 都為比的項, a 叫前項, b 叫後項.

欲知 a 究為 b 的幾倍或其幾分之幾,以 b 除 a 卽得.如

此除得的商叫比之值,又叫比率,或簡稱比.故比又可改書如次形:

$$a:b=\frac{a}{b}$$

因 a 比 b 的值乘以 b 則爲 a, 故 a 對於 b 的比,旣可解若爲 a 除以 b 的商,卽當作 b 分之 a 亦可.惟比的兩項可各爲正或負的整數或分數,亦可爲不盡數;比的值也如此,但不得爲虛數,而比的兩項從比的意義說來,非各爲不名數卽當爲同名數(因不同類卽不能相比),但比之值則都爲不名數.如

$$15:5=3,\quad 8\text{時}:4\text{時}=2$$

因比的前後項不同,其所成的比有種種:

(1) 設以比的兩項互相交換,則交換後所成的比,叫原比的反比,或稱逆比.反比與原比有互爲反比或逆比的關係.如 $a:b$ 與 $b:a$ 卽互爲反比.又如

$$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$$

故 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ 與 $a:b$ 亦互爲反比

(2) 設以若干個比的前項相乘積,比其後項相乘積,則所成的比叫複比,如 $a:b$, $c:d$ 的複比爲 $ac:bd$. 及

$a:b, c:d, e:f$ 的複比爲 $ace:bdf$.

複比又可連書如次形:

$$\left.\begin{matrix} a:b \\ c:d \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} a:b \\ c:d \\ e:f \end{matrix}\right\}$$

(3) 設有相等的二比或相等的三比,則其複比叫各比的二乘比或各比的三乘比.如

$$a:b=c:d,$$

則 $ac:bd$ 爲 $a:b$ 或 $c:d$ 的二乘比.又如

$$a:b=c:d=e:f,$$

則 $ace:bdf$ 爲 $a:b, c:d$ 或 $e:f$ 的三乘比.

若 $a=c, b=d$, 則 $a^2:b^2$ 爲 $a:b$ 的二乘比.

若 $a=c=e, b=d=f$ 則 $a^3:b^3$ 爲 $a:b$ 的三乘比.

121.* 比的性質 比 $a:b$ 旣可當作分數 $\frac{a}{b}$ 看,則凡關於分數的性質,均可實用於比,其中最重要的,如:

(1) 關於兩數的比,則有

(一) 比的兩項乘以同數或除以同數,其比不變.即

$$a:b=ma:mb=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$$

(二)設有兩項爲正的比,若於各項加入同一的正

數則其比近於1.

[證I]　設 a, b, x 爲正數,並設 $a>b$,比較 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{a+x}{b+x}$.

因 $$a>b$$

故 $$\frac{a}{b}>1,\quad \frac{a+x}{b+x}>1$$

但 $$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b},\quad \frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x}$$

而 $$a-b>0,\quad b<b+x$$

故 $$\frac{a-b}{b}>\frac{a-b}{b+x}$$

卽 $$\frac{a}{b}-1>\frac{a+x}{b+x}-1$$

故 $$\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}.$$

卽凡兩項爲正而其值大於1的比,若於其兩項各加一正數,則其值減少而近於1.

[證II]　設 a, b, x 爲正數,並設 $a<b$,比較 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{a+x}{b+x}$

因 $$a<b$$

故 $$\frac{a}{b}<1,\quad \frac{a+x}{b+x}<1$$

但 $$1-\frac{a}{b}=\frac{b-a}{b},\quad 1-\frac{a+x}{b+x}=\frac{b-a}{b+x}$$

而 $$b-a>0,\quad b<b+x$$

故
$$\frac{b-a}{b}>\frac{b-a}{b+x},$$

即
$$1-\frac{a}{b}>1-\frac{a+x}{b+x},$$

故
$$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}.$$

即凡兩項爲正而其值小於 1 的比,若於其兩項各加一正數,則其值增大而近於1.

(三) 設有兩項爲正的比,若自兩項減去同一的正數,則其比的值或增大或減小而遠於1. [證與(二)同,從略.]

(2) 關於兩量的比,則有:

(四) 同類二量的比,等於以同單位度得的數值相比.

設以同類的二量 A, B, 而求其比之值 $A:B$, 則不啻以 B 度 A, B 即此時所用的單位, A 即以 B 爲單位所測得的數值,故又叫測度.如以1公尺爲單位,則4公尺7公寸3公分的長的測度爲 4.73, 此卽4公尺7公寸3公分對於1公尺的比值.

若令 u 表所用的單位,幷令 A, B 二同類量以同單位 u 測得的數值爲 a, b, 則

$$A=au,\quad B=bu$$

卽
$$u=\frac{1}{b}B$$

故
$$A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B$$

卽
$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

由是知凡以上所述關於二數的比的諸性質,在不與量的意義牴觸時,都可適用.

習題七二

(1) 求 $x:y$,設

(一) $2x^2+12y^2=11xy$.

(二) $7(5x-y)=6(2x+3y)$.

(三) $\dfrac{6x-y}{4x-y}=\dfrac{y+x}{y-x}$.

(四) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=3\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$.

(2) 求 $a:b$, $b:c$, $c:d$ 的複比.

(3) 設 a,b 爲正數,比較次列各組的比:

(一) $(a+2b):(a+b)$ 與 $(a+3b):(a+2b)$.

(二)　$(a+b):(a-b)$ 與 $(a^2+b^2):(a^2-b^2)$.

(4) 設二次方程式 $x^2+px+144$ 二根的比為 $9:4$ 求 p.

(5) 設 $\dfrac{3y-2x}{2x-4y}=2$, 求 $\sqrt{x+y}:\sqrt{x-y}$ 的數值.

(6) 地球表面的四分之一為陸地，陸地的四分之三為北半球,求北半球陸地面積對於海的比.

(7) 甲及乙一年間收入的比為 $5:3$, 其支出的比為 $7:4$, 而二人每年共餘 300 圓, 問各人歲入各幾何?

(8) 甲乙二人競走 880 碼, 其速度的比為 $22:21$, 而乙雖先發 5 秒, 倘比甲後 5 碼到, 問甲乙每分鐘的速度各幾何?

(9) 冰的比重為 0.918, 海水的比重為 1.026. 設冰山全部皆為冰, 則沉入海中的部分對於其全部的比為何?

(10) 有金,銀的合金 A, B 兩塊, A 中金與銀的比為 $3:2$, B 中金與銀的比為 $7:3$. 問 A, B 依若何的比熔合則成金:銀 $=11:5$ 的合金?

(11) 某人以每時 10 哩的速度騎馬沿鐵路進行, 被一快車追過後, 又與前方開來的區間車相遇, 而各車的全長通過此人所需的時間相同, 求兩車的長的比. 但快車每時行 50 哩, 區間車每時行 40 哩.

第二節　比例

122. 比例及比例項　設a對於b的比與c對於d的比相等,則a,b,c,d四數成比例.

$$a:b=c:d \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

即
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

如此四數叫比例項,(1)式叫比例式,或簡稱比例,比例式又可書寫如次:

$$a:b::c:d.$$

式中a,d叫比例的外項,b,c叫比例的內項,d又叫第四比例項.

若有三數a,b,c而成比例如次式:

$$a:b=b:c$$

則c叫a及b的第三比例項,而b叫a及c的比例中項.

於是有應注意的一點,即正數a,b,c,d成比例時,因$a>b, a=b, a<b$而知$c>d, c=d, c<d$,既係明顯的事實,則某某二數的比例中項,其值當在二數的中間,即若

$$a:b=b:c$$

則
$$a>b>c \text{ 或 } a<b<c$$

123.* **比例的性質** 關於比例式的成立及其運算時所依據的法則有:

(一) 比例的外項相乘積等於其內項相乘積.

〔證〕 設 a, b, c, d 成比例

$$a : b = c : d,$$

則
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

兩邊各乘以 bd, 則 $\qquad ad = bc.$

設有 a, b, c 三數成比例

$$a : b = b : c,$$

則
$$b^2 = ac,$$

即
$$b = \pm\sqrt{ac}.$$

由是又可知比例式中若含一未知數,則其値得依比例式而決定,如此運算叫解比例式.

(二) 一組兩數相乘積,若等於他一組兩數相乘積則四數成比例.而以一組為外項,以他組為內項.

〔證〕 設 a, b, c, d 四數適合於次式:

$$ad = bc.$$

兩邊除以 bd, 則 $\qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

由此可得 $a:b=c:d$ (1) 或 $c:d=a:b$ (1′)

若兩邊除以 cd, 則 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$

由此可得 $a:c=b:d$ (2) 或 $b:d=a:c$ (2′)

若兩邊除以 ab, ac 則 $\dfrac{d}{b}=\dfrac{c}{a}$, $\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{a}$

由此又可得　$d:b=c:a$　(3)　$d:c=b:a$　(4)

或　$c:a=d:b$　(3′)　$b:a=d:c$　(4)

觀 (1) 與 (2) 及 (3) 與 (4), 可知比例的內項卽互換, 其比例仍成立, 再觀 (1) 與 (3) 及 (2) 與 (4), 又知比例的外項卽互換, 其比例亦成立. 且 (1), (2), (3), (4) 又可改寫爲 (1′), (2′), (3′), (4′), 而由 (1) 與 (4′), (2) 與 (3′), (3) 與 (2′), (4) 與 (1′) 又可知兩比若相等, 其反比亦相等. 故上列八式 [自 (1) 至 (4′)] 中有一式成立, 則 $ad=bc$, 其他七式亦無不成立.

(三) 設 $a:b=c:d$, 則 $(a+b):b=(c+d):d$ 及 $(a-b):b=(c-d):d$ 卽 $\dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d}$

[證] 因　$a:b=c:d$

故　$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

故　$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1.$$

卽　$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

即 $\quad (a+b):b=(c+d):d$
同理知 $\quad (a-b):b=(c-d):d$

$$\left.\begin{array}{l}(a+b):b=(c+d):d\\(a-b):b=(c-d):d\end{array}\right\}\therefore\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

（四）設 $a:b=c:d$，則 $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ 及 $(a-b):(a+b)=(c-d):(c+d)$ 即 $\dfrac{a\pm b}{a\mp b}=\dfrac{c\pm d}{c\mp d}$.

證明與（三）同，可從略.惟（三），（四）兩性質均得由其結論推出 $a:b=c:d$，則不可不知.

（五）設有二組的數 a, b, c……及 a', b', c',……間有次列的關係：

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\cdots\cdots$$

則 a, b, c……各數因一一與 a', b', c',……各數相對應而成比例，而此時次列比例式亦均成立：

$$a:b=a':b'$$
$$b:c=b':c'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

故 a, b, c……中任意二數的比與 a', b', c',……中對應二數的比相等，即

$$a:b:c:\cdots\cdots=a':b':c':\cdots\cdots.$$

如此又叫連比.

又設 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots\cdots=K$$

則 $$a=a'K,\ b=b'K,\ c=c'K\ \cdots\cdots$$

故 $a, b, c,$ ……若與 $a', b', c',$……成比例,則將一一與 $a', b', c',$……乘以同一某數的相乘積相等.

(六) 設 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$$

則 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots} \quad (1)$$

[證] 設 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots\cdots=K$$

則 $$a=a'K,\ b=b'K,\ c=c'K,\cdots\cdots$$

各邊相加,則 $$a+b+c+\cdots\cdots=(a'+b'+c'+\cdots\cdots)K$$

故 $$K=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots}$$

卽 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}$$

同理知 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\frac{pa+qb+rc+\cdots\cdots}{pa'+qb'+rc'+\cdots} \quad (2)$$

及 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=\sqrt[n]{\frac{pa^n+qb^n+rc^n+\cdots}{pa'^n+qb'^n+rc'^n+\cdots}} \quad (3)$$

121.* 比例運算的例 依上舉諸性質,得解次列各題:

例一. 設 $a:b=c:d$,證明

$$(a+b+c+b):(a+b-c-d)=(a-b+c-d):(a-b-c+d)$$

〔證 I〕 因 $\quad a:b=c:d$ ………………………… (1)

故 $\quad (a+b):(c+d)=b:d$

故 $\quad (a+b+c+d):(a+b-c-d)=(b+d):(b-d)$ …… (2)

又由(1)知 $\quad (a-b):b=(c-d):d$

卽 $\quad (a-b):(c-d)=b:d$

故 $\quad (a-b+c-d):(a-b-c+d)=(b+d):(b-d)$ …… (3)

由(2)及(3)得

$$(a+b+c+d):(a+b-c-d)=(a-b+c-d):(a-b-c+d)$$

〔證 II〕 若 $\quad (a+b+c+d):(a+b-c-d)$

$$=(a-b+c-d):(a-b-c+d)$$

則次式須成立:

$$(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a+b-c-d)(a-b+c-d).$$

卽去括弧並整理同類項所得的次式須成立:

$$2ad-2bc=-2ad+2bc$$

卽 $\quad ad=bc$

須成立,今由 $a:b=c:d$ 知 $ad=bc$ 確係事實,故所提比例式不謬.

〔證 III〕 因 $\quad a:b=c:d$

故設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=K$, 則 $\quad a=bK,\ c=dK.$

由此得

$$(a+b+c+d):(a+b-c-d)$$

$$=(bK+b+dK+d):(bK+b-dK-d)$$

$$=(K+1)(b+d):(K+1)(b-d)$$

$$=(b+d):(b-d).$$

及

$$(a-b+c-d):(a-b-c+d)$$

$$=(bK-b+dK-d):(bK-b-dK+d)$$

$$=(K-1)(b+d):(K-1)(b-d)$$

$$=(b+d):(b-d).$$

$\therefore (a+b+c+d):(a+b-c-d)=(a-b+c-d):(a-b-c+d).$

例二.　設$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$, 證明

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2.$$

〔證 I〕　$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}$〔前款(六)的(2)〕

$$=\frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}.$$

故　$\frac{a^2+b^2+c^2}{aa'+bb'+cc'}=\frac{aa'+bb'+cc'}{a'^2+b'^2+c'^2}.$

由是得$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2.$

〔證 II〕　設$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=K$, 則$a=a'K$, $b=b'K$, $c=c'K$

$\therefore (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(a'^2K^2+b'^2K^2+c'^2K^2)(a'^2+b'^2+c'^2)$

$$=K^2(a'^2+b'^2+c'^2)^3$$

及 $$(aa'+bb'+cc')^2=(Ka'^2+Kb'^2+Kc'^2)^2$$

$$=K^2(a'^2+b'^2+c'^2)^2$$

$\therefore (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)=(aa'+bb'+cc')^2$

例三. 設 $\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$, 證明

$$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}=\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}.$$

[證] 設 $$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}=K.$$

則 $y+z=K(b-c),\ z+x=K(c-a),\ x+y=K(a-b).$

各邊相加, 則 $x+y+z=0.$

故 $y+z=-x=K(b-c),\ z+x=-y=K(c-a),$

$$x+y=-z=K(a-b).$$

由是得 $$\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}=\sqrt[3]{\frac{-K^3(b-c)(c-a)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}}=A.$$

故 $$\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}=\sqrt[3]{\frac{xyz}{(a-b)(a-c)(b-c)}}.$$

例四. 由三元一次方程式

$$ax+by+cz=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a'x+b'y+c'z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

求 $\dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{z}{ab'-a'b}$

解. 由 (1) 得 $a\left(\dfrac{x}{z}\right)+b\left(\dfrac{y}{z}\right)+c=0$

(2) 得 $a'\left(\dfrac{x}{z}\right)+b'\left(\dfrac{y}{z}\right)+c'=0$

解之得 $\dfrac{x}{z}=\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ \dfrac{y}{z}=\dfrac{ca'-c'a}{ab'-a'b}$

故 $\dfrac{x}{bc'-b'c}=\dfrac{y}{ca'-c'a}=\dfrac{z}{ab'-a'b}$.

習題七三*

(1) 由次列各式求 x:

(一) $(8+x):(3+x)=2:1$

(二) $(a+x):(b+x)=(c+x):(d+x)$

(三) $(x^2-4x+2):(x^2-2x-1)=(x^2-4x):(x^2-2x-2)$

(2) 求 136 及 1224 的比例中項.

(3) 設 $(5+x):(3+x)$ 的二乘比爲 $9:4$, 則 x 的值如何?

(4) 設 $a:b=b:c$, 證明次列各式:

(一) $(a+b):(b+c)=a:b$

(二) $a^2:b^2=a:c$

(三) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

(四) $(a-b+c)(a+b+c)(a^2-b^2+c^2)=a^4+b^4+c^4$

(五) $a+c>2b$ [但 a, b, c 爲正數]

(5) 設 $a:b=c:d$, 證明次列各式:

(一) $(5a+2b):b=(5c+2d):d$

(二) $(ma+nb):(ma-nb)=(mc+nd):(mc-nd)$

(三) $(a+c):(b+d)=a^2d+b^2c$

(四) $(ma^2+nc^2):(mb^2+nd^2)=a^2:b^2$

(五) $a:(a+c)=(a+b):(a+b+c+d)$

(六) $(a^3+a^2b+b^3)(a+b):(c^3+c^2d+d^3)(c+d)$

$=(a^4+b^4):(c^4+d^4)$

(七) $(a-c):(b-d)=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$

(八) $(a^2+ab+b^2):(c^2+cd+d^2)$

$=(a^2-ab+b^2):(c^2-cd+d^2)$.

(6) 設 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, 則 $\dfrac{x^2+a^2}{x+a}+\dfrac{y^2+b^2}{y+b}=\dfrac{(x+y)^2+(a+b)^2}{x+y+a+b}$.

(7) 設 $\dfrac{l}{l'}=\dfrac{m}{m'}=\dfrac{n}{n'}$, 則 $\dfrac{l^2}{l'^2}=\dfrac{m^2}{m'^2}=\dfrac{n^2}{n'^2}=\dfrac{(l+m+n)^2}{(l'+m'+n')^2}$.

(8) 設 $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$, 則

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0.$$

(9) 設 $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}\neq 0$. 則 $ax+by+cz=0$.

(10) 解次列方程式 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $x^2+y^2+z^2=1$.

(11) 設 $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$, 則各比與 $\frac{2a-3b-5c}{2x-3y-5z}$ 相等.

(12) 設 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, 則各比與 $\sqrt{\frac{x^2+2y^2-5z^2}{a^2+2b^2-5c^2}}$ 相等.

(13) 設 $\frac{y+z}{b-c}=\frac{z+x}{c-a}=\frac{x+y}{a-b}$, 則各比與

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}}$$ 相等.

(14) 由次列方程式 $3x+5y-7z=0$, $11x-13y+17z=0$, 求 $x:y:z$ 的值.

(15) 由次列方程式 $x+3y+5z=0$, $2x+4y+7z=0$, 求 $\frac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}$ 的值.

(16) 由次列方程式 $x+y+z=\frac{14}{3}x=\frac{7}{2}y$, 求 $\frac{x+y+z}{z}$ 的值.

第三節　比的應用 I (成分算)

125. 成數及百分率　某量與其同類的他量相比而用小數表其比率時,其數值叫成數,比的前項叫成數的子數,後項叫成數的母數.表子母數的數值,按照小數的

位次,稱分,釐,毫,絲……* 如 0.3 叫 3 分,0.03 叫 3 釐等.母數等於100的成數叫百分率,或簡稱百分,其記號爲 %,其單位爲 $\frac{1}{100}$,而與小數及分數的關係,則有

(一) 由小數化百分: 只須將小數點移右二位而附加百分符號,如 $0.3=30\%$,讀爲百分之30.

(二) 由分數化百分: 先化分數爲小數,再依(一)改算,如 $\frac{3}{8}=0.375=37.5\%$,讀爲百分之37.5.

(三) 由百分化小數: 先去百分符號,再將小數點移左二位,如 $13\%=0.13$.

(四) 由百分化分數: 先去百分符號,再改作以 100 爲分母的分數而簡約之.如 $22\frac{1}{2}\%=\frac{22\frac{1}{2}}{100}=\frac{9}{40}$.

關於成數或百分的計算,有可以依據的公式數則,如 (1)—(6):

設 A 爲成數 r 的母數, B 爲其子數,則

$$\frac{B}{A}=r \qquad \cdots\cdots(1)$$

由是得

$$B=Ar \qquad \cdots\cdots(2)$$

* 他書有按照小數位次稱成,分,釐,毫的,但與小數固有的位次不符合,致用時不免糾紛,固不若依次稱分,釐,毫,絲爲便.

$$A=\frac{B}{r}\cdots\cdots(3)$$

在實際問題中,母數恆較子數大,故 r 恆比 1 小.更設 S 爲母數與子數的和(以後簡稱母子和),D 爲母數與子數的差(以後簡稱母子差)則

$$S=A(1+r)\cdots\cdots(4)$$

$$D=A(1-r)\cdots\cdots(5)$$

故
$$A=\frac{S}{1+r}=\frac{D}{1-r}\cdots\cdots(6)$$

例一. 某埠前十年茶的出口總值爲 36954 兩,本年則爲 12806 兩.求本年出口的茶量對於十年前的比率.

解. 依題意知 36954 兩爲母數, 12806 兩爲子數, 故所求成數爲

$$\frac{12806\text{ 兩}}{36954\text{ 兩}}=0.347\text{ 弱}.$$

答 3 分 4 釐 7 毫弱.

例二 某月刊發行數爲 16800 份,其中有 8 分 5 釐銷售於本國,問其份數爲何?

解. 本題係由母數及成數求子數,故依 (2) 得所求份數爲

$$16800\times0.85=14280.$$

例三. 某商從所屯麥內,賣出 48 市石 6 市斗 4 市升,若所賣麥量爲原有的 2 分 5 釐,則此人原有麥幾何?

解. 此題所求爲母數,故由(3)式知此人原有麥

48.64市石÷0.25=194市石5市斗6市升.

例四. 布一疋價5圓4角,若布價高漲1分3釐,則其價爲若干?

解. 因布的原價爲母數(A),所漲的價爲子數(B),而高漲後的價則爲母子和(S).高漲的成數爲r,故由公式(4)得

$$S=5.4\text{圓}(1+0.13)=6.102\text{圓}$$

答6圓1角2釐.

此題先以0.13乘5圓4角,再加5圓4角亦可.若布價低廉1分3釐,則當用(5)式.若已知高漲後的布價(S)爲6.102圓,而求其原價(A)時,則當用(?)式如次:

$$A=\frac{6.102\text{圓}}{1+0.13}=5\text{圓}4\text{角}.$$

例五. 設有貨照定價減3分賣出,得245圓,求定價.

解. 依題意知所求定價爲母數,而賣得的245圓則爲母數與子數的差,故由(6)式得

$$A=\frac{245\text{圓}}{1-0.3}=350\text{圓}.$$

答定價350圓.

[本題所謂減三分,即照定價打7折,參考126款(二).]

例六. 某校學生共1236人,其中女生佔$16\frac{2}{3}\%$,求男生

人數.

解. 因學生1236人爲母數,$16\frac{2}{3}\%$爲百分率,女生數爲子數,所求男生數爲母子差,故由(5)式得

$$D=1236\text{人}\left(1-16\frac{2}{3}\%\right)$$
$$=1236\text{人}\left(1-\frac{50}{300}\right)=\frac{1236\text{人}\times 250}{300}$$
$$=206\text{人}\times 5=1030\text{人}.$$

答男生數爲1030人.

習題七四

(1) 讀次列各成數:

0.9, 0.37, 0.05, 0.006, 0.014, 0.208.

(2) 以小數表次列各成數:

二〇分,八釐,五毫,四分一毫,三分六釐,七釐九毫.

(3) 將上列二題各成數表以百分率.

(4) 以小數表次列各成數:

45%, 6%, 0.2%, 0.37%, 0.009%, $7\frac{1}{8}\%$.

(5) 某校招生錄取180人,若考生每100人中祇有12人錄取,求考生人數.

(6) 某公司年終結算，獲利10000圓，以百分之25作公積金，以百分之55作股東紅利，其餘作職員工人的獎金．問各得若干？

(7) 某人從其儲金內取出20864圓購地，若此數適當其全金額的三分之二．問此人儲金共若干圓？

(8) 某市鹽價較去年貴2分5釐，致每市石貴9角9分：求今去兩年某市的鹽價．

(9) 某書局以其所發行的圖書批發某肆售出，照定價減2分5釐，某月底結算賣出的金額照定價爲2360.8圓，問實得若干圓？

(10) 有甲乙二時鐘，甲價爲18.5圓，乙價較甲價貴1分6釐．求乙價．

(11) 某年某省豐收，共得米22167486公石，較平年多收2654012公石．求多收的成數．

(12) 某煤商以所販若干噸的煤賣去其4分6釐，後又賣去其餘的2分5釐．問第二次所賣的，兩次所共賣的及所餘的各當販入的成數爲何？若此商販入200噸，問兩次賣出各若干？

126. 成分算的種種 可應用成分算以解決的日常生活問題甚多，其中較爲重要的，如

(一)損益問題　物產買賣,因原價或定價與賣價的不同,發生了損益問題,常應用成分算以比較其得失.原價或定價即母數,利益或損失即子數,賣價即母子和或母子差.125 款例四及例五即屬此類.茲更舉一例如次.

例一. 依原價680圓的物品,照定價減1分5釐賣出,尙可得原價的2分5釐利益.求定價.

解. 設所求定價爲x圓,則賣價爲$x(1-0.15)$圓.〔前款(1)〕.依題意得方程式

$$x(1-0.15)=680(1+0.25).$$

解之得　$$x=1000.$$

答定價爲 1000 圓.

(二)折扣問題　買賣物產,照原價或定價減成計算時,所減成數叫折扣率,或簡稱折扣,如原價10圓的物品只賣8圓5角,通常叫做八五折,實則照原價減1分5釐賣出.因原價10圓爲母數,賣價8圓5角爲母子差,而折扣率則爲子數對於母數的成數,故由125款(6)得

$$1-r=\frac{D}{A}=\frac{8.5\text{圓}}{10\text{圓}}=0.85.$$

即　$$r=1-0.85=0.15$$

或以所損的金額(卽照原價減折賣得的金額)爲子數,而以原價爲母數,亦可得成數爲

$$\frac{1.5\text{圓}}{10\text{圓}}=0.15.$$

故通常所謂折扣,實卽照原價減售的金額對於原價的成數.

但若以減售的金額對於賣價而不對於原價求成數,則其成數叫外折.如原價12圓的物品以10圓賣出,損失2圓,而以此2圓與賣價10圓相比得2分,此2分卽原價12圓的外折.因所損失的2圓是子數,而賣價10圓是母子差,故所謂某量的外折幾分,卽以該量爲母數所生的子數對於母子差的成數.而與此相對的卽通常的所謂折扣(卽子數對於母數的成數)則叫內折.

設母數爲A,子數爲B,內折爲r,外折爲r',則

$$r=\frac{B}{A}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$r'=\frac{B}{A(1-r)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(1)代入(2)則 $$r'=\frac{r}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由是得 $$r=\frac{r'}{1-r'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

故折扣率若同爲 r，則母數經內 r 折後，其結果爲

$$A(1-r) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

經外 r 折後，其結果爲 $A\left(1-\frac{r'}{1+r'}\right)$，即

$$\frac{A}{1+r} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

又折扣率若同爲 r 則因

$$A(1-r)=\frac{A(1-r)(1+r)}{1+r}=\frac{A(1-r^2)}{1+r}<\frac{A}{1+r}$$

知某量經內折後的結果，恆小於經外折後的結果.

例二. 以次米6.5市斗舂成上米 6 市斗，則此損耗的比率，爲內幾折? 又爲外幾折?

解　因所損0.5市斗是子數，6.5市斗是母數，6市斗，是母子差，故所求的比率爲

(1)　$$\frac{0.5\text{ 市斗}}{6.5\text{ 市斗}}=0.077\text{ 強}\cdots\cdots\text{內折.}$$

(2)　$$\frac{0.5\text{ 市斗}}{6\text{ 市斗}}=0.083\text{ 弱}\cdots\cdots\text{外折.}$$

例三. 內0.2折相當於外幾折? 外0.25折相當於內幾折?

解. 由(4)知　$\frac{r}{1+r'}=0.2$，$\therefore\ r'=0.25$

又由(3)知　$\frac{r}{1-r}=0.25,\ \therefore\ r=0.2$

答内 0.2 折相當於外 0.25 折.

外 0.25 折相當於内 0.2 折.

(三)酬金問題　買賣物產,因託人居間說合或介紹或代理而成立交易後,按照賣價給與酬金(又叫佣錢)時,若應用成分算,則原價爲母數,所酬金爲子數,賣主實收額爲母子差,買主實支額爲母子和.

例四. 某甲以地產25市畝託乙代爲賣出.獲利 2 分,而以 1 分 2 釐的酬金給乙,其數適爲90圓.求每市畝的原價.

解. 設地產25市畝的原價爲 A 圓,因甲須獲利 2 分,故賣價爲 $A(1+0.2)$ 圓,而酬金 90 圓適當賣價的 0.12, 故

$$\frac{90\text{圓}}{A(1+0.2)\text{圓}}=0.12.$$

即　$$A=\frac{90}{0.12\times1.2}=\frac{90000}{144}=625.$$

故每市畝原價爲 $\frac{625\text{圓}}{25}$ 即 25 圓.

至於其他問題,如租稅,如保險,如匯兌,得各視所稅的產量,所保或所匯的金額,按照規定的比率,以計算其應徵的稅款,應納的保險費,或應付的匯費,此均爲成分算

的應用,祇須事實了解,卽可依據125款各公式,由所設諸數以求其他.其例甚多,不勝枚舉.惟成分算的最大應用,莫如計算利息,當詳述於次節.

習題七五

(1) 汽車,以759圓賣出可得1分的利益,若賣價為621圓,則損益的成數如何?

(2) 某物品照定價減2分賣出,猶可得原價的1分利益.問定價應照原價加幾分?

(3) 書販以8折買進定價若干圓的書籍若干部,若照定價賣去買進部數的5分之3多10部,則原付書價卽可收回.求買進的部數.

(4) 某宗貨物雖以494圓售出,但須照賣價1分2釐5毫給予承售者作手續費,致對於原價損失1釐2毫.求原價.

(5) 有甲乙二商品,甲以八五折,乙以八八折購入,共付銀69.44圓,其利益平均為1分3釐2毫.問甲乙的買價各幾何?

(6) 總發行所以某種刊物批發分店,照原價獲利2分,分店於批給小販時又獲利1分,若小販賣得227.7圓亦

獲利1分5釐,則總發行所批出的價值為何?

(7) 某冰商以15.75圓,購入63磅的冰,若每磅賣價半圓,則除融解部分外,仍可得純益2分.求融解的磅數.

(8) 某磁商購入磁器若干件,其總件數的2分5釐,雖經破損,但以所餘賣出時,仍欲得2分3釐的利益,問賣價應照原價加幾分幾釐?

(9) 某人以其金指戒賣得168圓,獲外5釐的利益,問原價及利益各幾何?

(10) 某金額經內0.06折後與外0.06折後的差若為1圓2分,則此金額為何?

(11) 某廠以其出品委託某商店代售,除給予商店酬金3釐2毫外,仍欲得利益1分2釐.問賣價150圓的出品其賣價應為若干圓?

(12) 甲所得為4952.25圓,乙所得為5024.6圓.問甲乙於繳納所得稅後,其所有金額孰多?但所得在3000圓以上而未滿5000圓時,其稅率為1000分之46,所得在5000圓以上而未滿10000圓時,其稅率為1000分之60.

(13) 某翁由房牙介紹買入價值15000圓的房產,除給房牙酬金2分外,還須納契稅1000分之35.問此翁置產費用總計若干?

(14) 某家以其價值5500圓的不動產保火險,年納1釐2毫的保險費,若三年後竟罹火災,問此家損失幾何?

(15) 有銀600圓自甲地託銀行匯往乙地,匯率爲0.5%若由郵匯去,匯率爲1%,且須加信資及單掛號費,問郵匯較銀行匯貴若干?

(16) 某君由上海託銀行電匯某款到張家口,出費23.4圓,其中3圓是電費,若匯率爲2%,問該款爲若干圓?

第四節　比的應用II (利息算)

127. 利率及單利法　凡人類社會因事發生借貸關係,或以款存放銀行時,債務者對於債權者或銀行對於存戶給與的報酬或利益,統叫利息,其所借金額叫本金,借貸的時日叫期限.而在一定期間應付利息幾何,則依其對於本金的成數而定,此成數叫利率,本金與利息的和叫本利和.

計算利息因期限有年,月,日的不同,故又有年利率,月利率,及日利率的區別(或簡稱年利,月利及日利).所謂年利1分或1釐,指一年間的利息對於本金的成數爲十分之一,或百分之一;所謂月利1分或1釐指一月間的利息對於本金的成數爲百分之一,或千分之一.如本金100

圓年利2分一年的利息爲20圓,月利2分一月的利息爲2圓,而日利2分則一日的利息爲0.02圓,卽僅有銀2分而已.故各種利率的命名,雖同一分釐字樣,而因其計算期間有別,其意義卽顯然不同.且關於利息算的分釐用法,與前款所述成數的命位,亦不盡符.至計算利息,對於期限若不滿一年,則以12個月或365日爲一年,改算年利,若不滿一月,則以30日爲一月,改算月利.惟計算期間的起訖,是否除去首日及末日,當各依社會上習慣而定.

凡與旣生的利息無關,祇比例於本金及期限,而按照利率計利的方法,叫單利法.

設本金爲 P, 一期間的利率爲 i, 期限數爲 n, 利息爲 I, 本利和爲 S, 則

$$I=Pin \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$S=P(1+in) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由是得

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{I}{in}\\ &=\frac{S}{1+in}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} i&=\frac{I}{Pn}\\ &=\frac{S-P}{Pn}\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{I}{Pi} \\ &= \frac{S-P}{Pi} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

例一．求本金1000圓，年利5釐，4年間的利息．

解．由(1)知 $I=1000$ 圓 $\times 0.05 \times 4 = 200$ 圓．

例二．求本金500圓，月利1分，2年3個月的本利和．

解．由(2)知 $S=500$ 圓 $(1+0.01\times 27)=635$ 圓．

例三．設自今年四月二日至明年十一月八日，年利7釐5毫的本利和爲896圓，求本金(但首日及末日均不計利)．

解．除去首日及末日，自今年四月三日起至明年十一月七日止，共1年219日卽 $1\frac{219}{365}$ 年．

由(3)知 $$P=\frac{896\text{ 圓}}{1+0.075\times 1\frac{219}{365}}=800\text{ 圓}.$$

例四．設本金2000圓1年8個月的利息爲400圓，求月利率．

解．1年8個月 $=20$ 月．

由(4)知 $$i=\frac{400\text{ 圓}}{2000\text{ 圓}\times 20}=0.01$$

答月利率1分．

例五. 設有本金300圓以年利8釐借出,問借出若干時,則可得利息64圓?

解. 由(5)知 $n=\dfrac{64\text{圓}}{300\text{圓}\times 0.08}=2\dfrac{2}{3}.$

答2年8個月.

例六. 求本金1280圓,日利1分7釐5毫,39日的利息.

解. 因日利爲1分7釐5毫,而本金100圓1日間的利息則爲1分7釐5毫卽0.0175圓,故1280圓39日間的利息爲

$$0.0175\text{圓}\times 12.8\times 39=8.736\text{圓}.$$

答8圓7角3分6釐.

128. 計算單利的別法 計算單利,遇時期奇零,不便應用公式時,其方法有二:

(一)六釐法 因一年爲兩個月的6倍,故年利率若爲6釐,則兩個月的利率當爲1釐.故若欲計算年利6釐,兩個月的利息,卽將本金的小數點向左移兩位便得,又兩個月卽60日,適爲6日的10倍,故若欲計算年利6釐6日的利息,卽將本金的小數點向左移三位便得.若利率非年利6釐,而期間非兩個月,亦非六日,可先以年利6釐爲準,計算兩個月及六日的利息,再以所設利率及期限改算,實甚方便,觀於次例自明.

例一. 求本金2500圓年利5釐1年又7個半月的利

息.

解. 用6釐法先計算1年6個月卽18個月的利息爲

$$25.00\text{圓}\times 9=225\text{圓}\ [\because 18\text{月}=2\text{月}\times 9]$$

再計算1個月的利息爲

$$25.00\text{圓}\times\frac{1}{2}=12.5\text{圓}\left[\because 1\text{月}=2\text{月}\times\frac{1}{2}\right]$$

再計算12日的利息爲

$$2.500\text{圓}\times 2=5\text{圓}\ [\because 12\text{日}=6\text{日}\times 2]$$

再計算3日的利息爲

$$2.500\text{圓}\times\frac{1}{2}=1.25\text{圓}\left[\because 3\text{日}=6\text{日}\times\frac{1}{2}\right]$$

故年利6釐1年7個半月的利息爲243.75圓. 今年利5釐

故所求利息爲 $243.75\text{圓}\times\frac{5}{6}$ 卽203.125圓.

(二) 計日法 通常借款雖以月計或年計,然商家款項往來,利息須按日計算.若利率以年爲準,而期限爲日,則殊多不便,故127款(1)式有改寫的必要.

設n爲日數,則n日相當於 $\frac{n}{365}$ 年,再設i爲年利率,則

$$I=P\cdot i\cdot\frac{n}{365}=\frac{Pn}{\frac{365}{i}}=\frac{Pn}{D}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

但 $D=\frac{365}{i}$,若以種種年利率算出相當於D的數值而

列爲一表,如 (*A*), *I* 固不難算得,若更有日數表如 (*B*),*則計算尤較便利.

(*A*)

年利率 r	定除數 D
2 %	18250
2.5%	14600
3 %	12167
3.5%	10429
4 %	9125
4.5%	8111
5 %	7300
5.5%	6636
6 %	6083
6.5%	5615
7 %	5214
7.5%	4867
3 %	4562
8.5%	4292
9 %	4055
9.5%	3842
10 %	3650

(*B*)

自＼到	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
一月	365	31	59	90	120	151	181	212	242	273	304	334
二月	334	365	28	59	89	120	150	181	212	242	273	303
三月	305	337	365	31	61	92	122	153	184	214	245	275
四月	275	306	334	365	30	61	91	122	153	183	214	244
五月	245	276	304	335	365	31	61	92	123	153	184	214
六月	214	245	273	304	334	365	30	61	92	122	153	183
七月	184	215	243	374	304	335	365	31	62	92	123	153
八月	153	184	212	243	273	304	334	365	31	61	92	122
九月	122	153	181	212	242	273	303	334	365	30	61	91
十月	92	123	151	182	212	243	273	304	335	365	31	61
十一月	61	92	120	151	181	272	242	273	304	334	365	30
十二月	31	62	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365

例二. 某人於四月八日以銀 2400 圓存入銀行,至九月十日取出,設年利率爲 6 釐,則應得利息若干?

*表列各數係指自某月某日至某月某日相距的日數,如欲知三月某日至七月同日其間有幾日,則查看表中自三月到七月的122便是.如欲知三月十三日到七月二十二日其間有幾日,則加9[即22−13]於122,即得.

解.　依(1)知　　$I=\dfrac{2400\text{圓}\times n}{D}$.

檢表(A)知 D 爲 6083；檢表(B)，知 n 爲 155，故

$$I=\frac{2400\text{圓}\times 155}{6083}=61.318\text{圓}.$$

例三.　某小學教師檢查其銀行活存簿，有如次的記載，問在 6 月終可得利息若干？(銀行活存利率爲年利 4 釐)

年	月	日	存入		付出		結餘	
			圓		圓		圓	
25	3	12	60	00			60	00
	4	1			10	00	50	00
	5	10	45	00			95	00
	6	3			50	00	45	00
	6	9	45	00			90	00

解.　先計算日數：　　　　再計算 Pn：

3 月 12 日至 4 月 1 日計 20 日　　60 圓 × 20 = 1200 圓.

4 月 1 日至 5 月 10 日計 39 日　　50 圓 × 39 = 3150 圓.

5 月 10 日至 6 月 3 日計 24 日　　95 圓 × 24 = 2280 圓.

6 月 3 日至 6 月 9 日計 6 日　　45 圓 × 6 = 270 圓.

6 月 9 日至 6 月 30 日計 21 日　　90 圓 × 21 = 1890 圓.

合計 8790 圓.

更檢表(A),知年利4釐的 D 為 9125.

故六月終可得的利息為 8790 圓 ÷9125 即 0.96 圓.

習題七六

(1) 按次列所設各要項依單利法計算，再以其結果填入表的空格內.

題	本金	利率	期限	利息	本利和	備註
一	320 圓	(年)0.065	2年2個月			* * *
二	320 圓	(年)0.035	3年82日			* * *
三	800 圓	(月)0.012	2年2個月			* * *
四	800 圓	(月)0.012	3月17日			* * *
五	1500圓	(年)0.1	某年3月6日至次年5月10日		* * *	首末兩日均算入
六	750 圓	(月)0.015	今年2月至明年8月		* * *	首末兩日均算入
七		(年)0.064	2年6個月	51.2圓	* * *	* * *
八		(年)0.075	3年4個月	* * *	1000圓	* * *
九	1200圓		3年5個月	246 圓	* * *	* * *
十	800 圓	(年)0.075		165 圓	* * *	* * *

(2) 用六釐法計算(1)的(二)及(四).

(3) 用計日法計算(1)的(五)及(六).

(4) 求次列各題的利息:

	本金	期限	年利率
(一)	650圓	2年2個月9日	0.05
(二)	3146圓	1年9個月12日	0.045

(5) 次列兩活存簿,均半年一結.求結算時應得的本利和(年利率4釐).

(一) 9月10日存400圓,10月2日付100圓,
10月15日存300圓,11月3日付100圓,
12月12日存200圓.(12月31日結算)

(二) 1月5日存50圓, 2月1日付10圓.
2月11日存60圓, 3月28日付45圓,
5月17日存40圓 (6月30日結算)

129. 複利法 凡以一定本金,在一定期限,按照一定利率,所生的利息,加入本金內作爲次期的本金,以計算利息的方法,叫複利法,所謂一定期限,通常以一年或半年爲期,也有以四個月或三個月爲期的.

設本金爲P,期限數爲n,一期間的利率爲i,第n期終所有的本利和爲S,則由127款(2)知

第一期終的本利和卽第二期的本金爲

$$P(1+i)$$

第二期終的本利和卽第三期的本金爲

$$P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2.$$

第三期終的本利和卽第四期的本金爲

$$P(1+i)^3.$$

如此逐次推算,可得n期終的本利和.卽

$$S = P(1+i)^n. \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此爲複利計算的基本公式,兩邊取對數,則

$$\log S = \log P + n\log(1+i) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)式或(2)式所有$S, P, n,$及i中,任何三事設爲已知,則其餘卽可算出.

由(1)得 $$P = \frac{S}{(1+i)^n} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

兩邊取對數,則

$$\log P = \log S - n\log(1+i) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

如此算得的P,實爲按照利率i,自今經n期後,本利和適爲S的本金.故P又叫依此所求S的現價.

若按照年利所生利息每半年卽加入本金計算,則其期限數當爲$2n$,而利率則爲$\frac{i}{2}$;若利息於每3個月加入本金一次,則期限數當爲$4n$,而利率則爲$\frac{i}{4}$;由此類推,可知利息若於$\frac{1}{K}$年加入本金一次,則期限數當爲Kn,而

利率則爲$\frac{i}{K}$；故(1)改書如次：

$$S=P\left(1+\frac{i}{K}\right)^{Kn}\text{..............................} (5)$$

觀於(1)，(3)，(5)可知期限如甚長，則S及P皆不易計算，雖可由(2)，(4)用對數間接去求，但爲直接算出計，本册後附有複利表(表I)及現價表(表II)，可以查用.

例一. 求本金500圓，年利8釐，以半年爲期，2年後的本利和.

解. 以$K=2$, $n=2$, $i=0.08$, $P=500$圓，代入第(5)式，則

$$S=500\text{圓}\left(1+\frac{0.08}{2}\right)^4$$

檢表得　$(1.04)^4=1.169859$

故　$S=500\text{圓}\times1.169859$

$=584.929$圓.

例二. 本金500圓，年利5釐，6年7個月的本利和爲若干圓？但利息每年加入本金一次.

解. 先由(1)求6年終的本利和爲

$$S'=500\text{圓}(1+0.05)^6.$$

此爲第7年的本金，故所求6年7個月的本利和爲

$$S=500\text{圓}(1+0.05)^6\left(1+0.05\times\frac{7}{12}\right)$$

檢表得 $(1+0.05)^6=1.340096.$

故 $S=500\text{圓}\times1.340096\times1.029166$

$=689.591$ 圓.

若 n 不為整數,而未滿 1 圓的本金又不計利息,則不能適用(1)及(5),而當如次例計算.

例三. 求本金3500圓,年利5釐,4年8個月的本利和.但利息每年加入本金一次,本金未滿1圓時不計利息.

運算: 本金……3500 圓

第一期的利息…… $\underline{175}$ (卽 3500×0.05)

第二期的本金……3675

第二期的利息…… $\underline{183.75}$ (卽 3675×0.05)

第三期的本金……3858.75

第三期的利息…… $\underline{192.90}$ (卽 3858×0.05)

第四期的本金……4051.65

八個月的利息…… $\underline{135.03}$ $\left(\text{卽 }4051\times0.05\times\frac{8}{12}\right)$

本利和……4186.68 圓.

例四. 年利率 8 釐,半年一期按複利計算,將於10年後得10000圓,問現價應為若干圓?

解. 以 $S=10000$ 圓, $i=0.08\times\frac{1}{2}=0.04$, $n=10\times 2=20$ 代入 (3) 則

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=\frac{10000}{(1+0.04)^{20}}$$
$$=10000\times\frac{1}{2.191123}$$
$$=10000\times 0.4563409$$
$$=4563.409\text{ 圓}.$$

例五. 本金 2000 圓, 年利率5釐, 半年一期, 問幾年後可得本利和 2436.8 圓?

解. 以 $P=2000$, $S=2436.8$, $i=\frac{0.05}{2}$ 代入 (2) 式, 則

$$\log 2436.8=\log 2000+n\log(1+0.025)$$

由是得

$$n=\frac{\log 2436.8-\log 2000}{\log 1.025}$$
$$=\frac{3.38682-3.30103}{0.01072}$$
$$=\frac{0.08579}{0.01072}=8.$$

故所求年數爲 $\frac{8}{2}$ 年卽 4 年.

習題七七

(1) 按照次表所列各要項, 依複利法計算, 以其結果填入表的空格內.

題	本金(現價)	年利率	期限	利息	本利和	註備
(一)	475 圓	5 釐	8 年	• • •		每年一轉
(二)	800 圓	4 釐		• • •	1200 圓	每年一轉
(三)	1000 圓	5 釐		• • •	2000 圓	每年一轉
(四)		6 釐	7 年	• • •	500 圓	每年一轉
(五)		5 釐	3 年	• • •	1000 圓	每年一轉
(六)	400 圓		3 年	• • •	463.05 圓	每年一轉
(七)	500 圓	4 釐	2 年		• • •	每半年一轉
(八)	500 圓	9 釐		• • •	678.458 圓	每年一轉
(九)	450 圓	3 釐 5 毫	4年4個月	• • •		每年一轉

(2) 以金若干圓存銀行,2 年得本利和 26460 圓,若多存一年,則得本利和 27783 圓.求所存金額及利率.

(3) 以金若干圓借與某店,年利率 6 釐,3 年間所得複利與單利的差爲 93 圓 6 角 3 分 6 釐.求所借金額.

(4) 某人以 400 圓存銀行,每年末更以 100 圓連同所得利息加入生利,至第三年開始時,其存額爲 646 圓.求年利率.

130. 利息算的種種 利息算法,不僅適用於簡單的借貸或銀行存款問題,凡事關社會經濟組織,商業往來及一切投資負債各方面,均有分配利率,核算利息,統計資本等等的需要.茲略舉社會上最習見的數種,以示此

項算法應用的一斑.

(一)公債及股票　政府所發行的公債票,及股分公司所填給股東的股票,因買賣的價格(即時價)有漲落,致持票人可得的實利(即對於時價的成數),不能如票面計算.且因公司營業有盈虧,致股東應得紅利幾何,不能預定,於是發生種種問題

例一. 設年利5釐,票面100圓,某種公債的時價爲83.5圓,求持票人可得的實利.

解　照票面算,一年間的利息爲100圓×0.05,即5圓,故持票人可得的實利爲5圓÷83.5圓,即0.0599.

答年利率約6釐.

例二. 某公司每股50圓的股票,其時價爲90圓,設該公司的股息爲年利2分5釐,問此種股票的實利?

解　照票面算某公司的股息爲50圓×0.25,即12.5圓,故此種股票的實利爲12.5圓÷90圓,即0.139弱.

答年利率1分3釐9毫弱.

(二)期票及折扣　商業上或銀行間所用支票,無論其性質爲付與或匯兌,要必有一定支付的日期,故稱期票.若持票人欲於指定日期以前預行支取,則應自預支日至定期,照票面金額計算利息,從該金額內扣除.

如此行爲,叫做折扣,又叫貼現.所扣的金額叫折扣值,從票面金額減去折扣值,其餘額叫現價.

設票面金額爲 P, 預支日期至指定日期間之期限爲 n, 折扣率爲 i, 現價爲 P', 在銀行所據以計算現價的公式爲

$$P'=P(1-in). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其實預支的金額爲 P' 而非 P, 故應由次式算出現價

$$P'(1+in)=P,$$

卽

$$P'=\frac{P}{1+in}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然銀行以依據(2)式計算爲較繁,恆採用(1)式.故適用(1)式的叫銀行折扣,而適用(2)式的則叫眞折扣.銀行折扣相當於票面金額的內折,眞折扣則相當於其外折.由126款(5)及(6),知由(1)算得的現價小於由(2)算得的.故銀行折扣恆較眞折扣大.在通常期限不長時,此兩種折扣相差無多,彼亟於付現的人,尙可忍受其虧耗.

例三. 以票面580圓支付日期爲十一月十日的支票,在六月三日持向銀行按年利5分5釐貼現,問可得現價幾何?

解. 查128款表(B),可得自六月三日至十一月十日相距160日故由(1)知

$$P' = 580\text{圓}\left(1 - 0.55 \times \frac{160}{365}\right)$$

$$= 580\text{圓} \times 0.759 = 440.22\text{圓}.$$

但若依(2)式計算則

$$P' = \frac{580\text{圓}}{1 + 0.55 \times \frac{160}{365}} = \frac{580\text{圓}}{1.241} = 467.45\text{圓}.$$

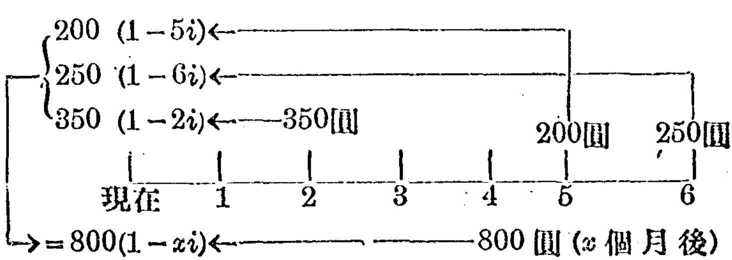
兩數相差爲27.23圓,於此可見銀行折扣於持票人虧耗實大.

(三)支付平均日　以支付日期不同的諸款,欲於同時付清,須求一適當日期,其利益乃無所損益,如此求得的日期,叫支付平均日.

例四. 有2個月後支付的350圓,6個月後支付的250圓,及5個月後支付的200圓,今欲同時支付,問應在何時?

解. 設月利率爲i,先求此三款支付金額的現價.

$$350\text{圓}(1-2i),\quad 250\text{圓}(1-6i),\quad 200\text{圓}(1-5i).$$



再設所求的日期在自今x個月後,則支付總金額800圓的現價爲800圓$(1-xi)$.此數若與上列三款現價的總和相等,則利息的計算可無所損益.故

$$350(1-2i)+250(1-6i)+200(1-5i)=800(1-xi)$$

由是得 $$800xi=350\times 2i+250\times 6i+200\times 5i$$

故 $$x=\frac{350\times 2+250\times 6+200\times 5}{800}=4.$$

答4個月後.

推廣地說:若有自今l日後支付的a圓,m日後支付的b圓,n日後支付的c圓,其支付平均日爲自今x日後,則

$$(a+b+c)(1-xi)=a(1-li)+b(1-mi)+c(1-ni)$$

由是得 $$x=\frac{al+bm+cn}{a+b+c}\quad\cdots\cdots(3)$$

(3)式不含有i,故支付平均日與折扣率無關.

習題七八

(1) 某人有年利5釐,票面100圓某種公債票15張,以93圓的時價賣出.即以其總額買入票面150圓,時價77圓5角的鐵路股票若干張,設股票利率爲年利1分,則此人歲入增加幾何?

(2) 某人以年利7釐借金若干圓,買進年利6釐,時價

96圓的票面100圓某種公債票若干張,其票面合計爲4500圓,問半年間此人借款與公債票的利息相差幾何?

(3) 某人賣出年利5釐的公債票面50000圓,對於票面每100圓收入90.46圓.今以此收入總額買進年利6釐的公債票,設半年間收入增加130圓,求6釐公債每100圓的時價.

(4) 預計本年12月終可得60圓利息的股票,在七月一日買進,而欲得年利5釐的利益,則其買價當如何?

(5) 某公司某年所得純益當股本金額的1分.今以此純益的1分爲公積金,而以其7釐爲股東紅利,分配後仍餘560圓,求該公司股本的金額.

(6) 金2645圓將於一年半後付出,若收回年利1分5釐的折扣值,則卽時可付.問現付的金額爲何?

(7) 自今一年後可以支付的2500圓在8個月後付出5分之3,問其餘應於何時支付?

(8) 以票面250圓,支付期八月三十一日的支票,於六月三日持向銀行按日利2分6釐的折扣率貼現,則其現價爲何?

(9) 預定一年後支付的500圓,經過三個月,按年利4

釐的眞折扣付出,問所付金額爲何?

(10) 今有30日後支付的1000圓,60日後支付的1500圓,90日後支付的2000圓,若卽時支付3000圓,則其餘應於何時支付?

(11) 求五月十五日的150圓,六月二十九日的200圓,及七月二十一日的500圓的支付平均日.

(12) 原價700圓的物品以835圓賣出,取得35圓的現金,及三個月後支付的期票.若以此期票卽向銀行按年利8釐貼現,則耗去的利益相當於原價幾分?

第五節 比例的應用

131. 正比例與反比例 由121款(四),知同類二量的比,等於以同單位度得的數值相比.卽設以a, b爲A, B二同類量被同單位所度的數值時,則

$$A : B = a : b. \text{ 卽 } \frac{A}{B} = \frac{a}{b}$$

故

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$

此處A, B二量可看做某人於某時間所行的距離,a, b可看做以單位時間所行距離度A, B的數值,而單位時間所行的距離卽速度,以速度度某時間所行距離的數

値即時間,故某某時間所行距離,實與其時間數成比例.其所以得成爲比例,卽速度不變的緣故.他如工人應得的工資所以與工作的日數成比例,則因其每日的工價相同;物品的總值所以與物品的件數成比例,則因其單價相同.此在123款(五)業經說明,卽設以

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=K,\ 則\ A=aK,\ B=bK.$$

K爲比之值,雖是不名數,然A, B所以能與a, b成比例,K的不變實爲其主因.故二同類量若與其他二量或二數成比例時,其間必有一不變的關係存在,卽一組的量與他組的量或數依某種關係有所變動時,若其關係能一定不變,則此兩組的量成比例.故於某問題所設各量間,若能確知有一定關係在,則該量等可成比例,該問題卽可以比例解之.[參考123款(一)]

例一. 有一打値4角的鉛筆15枝,其總價爲何?

解. 因15枝鉛筆的單價與12枝鉛筆的單價相同,卽設以15枝鉛筆的總價爲x角,則

$$\frac{4}{12}角=\frac{x}{15}角$$

故 $$12枝:15枝=4角:x角$$

由是得 $$12x=4\times15$$

故 $$x=4\times\frac{15}{12}=5$$

答 鉛筆15枝的總價為5角.

觀此可知鉛筆的總價與其枝數有對應[123款(五)]而變的關係,即枝數增大若干倍,其總值亦增大若干倍,此依對應關係所成的比例,叫正比例.再觀次例.

例二. 某女工紡織4時得布1市丈,織布5市丈6市尺,需時幾何?

解. 因女工每時所織的布同長,則

$$\frac{10}{4}\text{市尺}=\frac{56}{x}\text{市尺} \quad [\text{設}x\text{為所求時間}]$$

故 $$4\text{時}:x\text{時}=10\text{市尺}:56\text{市尺}$$

由是得 $$10x=4\times56$$

故 $$x=4\times\frac{56}{10}=22\frac{2}{5}$$

答 22時24分.

又如本篇第二章14款(3)的例一,亦可以比例解之.其他應用問題,屬於此類的很多(如關於溫度,比重及時差等問題),不勝枚舉.

惟題中一組的量與他組的量或數依某種關係有所變動時,其關係雖一定不變,但兩組的量若不相對應而

適相反,卽某量增大若干倍,他量轉減小若干倍,如此各量所成的比例,叫反比例.

例三. 設每日每人平均食米5市合,所儲的米可供若干人36日的食糧.若每日每人平均少食5市勺,則以同數的人需幾日食盡此米?

解. 因人數雖同,每人的食量則變.而每人每日所食的米若減少,則可支持的日數當然增多,卽由次式

5市合 $\times 36 =$ 4.5市合 $\times x$ [設x爲所求日數]

可知x必大於36,故知食米的量與日數成反比例.卽

5市合 : 4.5合市 $= x$日 : 36日

故
$$x = 36 \times \frac{5}{4.5} = 40$$

答40日.

觀此可知所設各量若成反比例,則比例式中兩比的前項後項,其位置不相應而相反.

例四. 第二章14款(3)的例二

解. 因每一工人每日所可完成的工程始終不變,而工人於作同一工程時,其人數若增加,則所需的日數當然減少.故知日數與人數成反比例.卽

6人 : 3人 $= x$日 : 4日

故 $$x=4\times\frac{6}{8}=3.$$

答3日.

132. 複比例 今於三同類量A, B, C間,假定A對於B的比爲$a:b$,B對於C的比爲$c:d$,則A對於C的比爲$a:b$及$c:d$的複比.因

$$A:B=a:b,\quad B:C=c:d,$$

即 $$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{B}{C}=\frac{c}{d},$$

而 $$\frac{A}{B}\times\frac{B}{C}=\frac{A}{C},\quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

故 $$A:C=ac:bd\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由120款(2)知$ac:bd$爲$a:b$及$c:d$的複比,故A對C的比爲$a:b$及$c:d$的複比.例如米3市石的價若等於麥5市石的價,則6市石米價與4市石麥價的比可依此算出.

設以A, B, C順次表米6市石,米4市石,麥4市石的價,因穀類的單價若相同,則其總價與以該價所買的穀量成正比,故

$$A:B=6\text{市石}:4\text{市石}=6:4$$

又因所買的穀量若相同,則其總價與以同額的代價所可買得的穀量成反比,故

$$B:C=5\text{市石}:3\text{市石}=5:3$$

由(1)知 $A:C=6\times5:4\times3=30:12=5:2$

即6市石米價對於4市石麥價的比等於6∶4及5∶3的複比.由120款(2)此種複比又可連書如次形,即

$$A:C=\begin{cases}6\text{市石}:4\text{市石}\\5\text{市石}:3\text{市石}\end{cases}$$

若此種複比,適等於其他二量或二數的比,則成複比例.如上例,設已知米6市石的價爲96圓,則麥4市石的價不難求得.因假令麥4市石的價爲x圓,則

$$A:C=96\text{圓}:x\text{圓}$$

由是得
$$\left.\begin{matrix}6\text{市石}:4\text{市石}\\5\text{市石}:3\text{市石}\end{matrix}\right\}=96\text{圓}:x\text{圓}$$

故
$$x=96\times\frac{4\times3}{6\times5}=38.4.$$

即麥4市石的價爲38.4圓.再觀次例:

例一. 設每袋35市斤的煤6袋,其價值爲4.2圓,問每袋40市斤的煤5袋,其價爲何?

解. 設所求煤價爲x圓.當袋數不變時,煤價與每袋容量成正比,故

$$35\text{市斤}:40\text{市斤}=4.2\text{圓}:x\text{圓}$$

又當每袋容量不變時,煤價與袋數成正比,故

$$6\text{袋}:5\text{袋}=4.2\text{角}:x\text{角}$$

由是得
$$\left.\begin{array}{lcl}35\text{市斤} & : & 40\text{市斤}\\ 6\text{袋} & : & 5\text{袋}\end{array}\right\}=4.2\text{角}:x\text{角}$$

故
$$x=4.2\times\frac{40\times5}{35\times6}=4.$$

答所求煤價爲4角.

例二. 有甲乙二書記生:甲寫3頁的時間,乙寫4頁;甲於10日間寫完480頁,乙於15日間寫完720頁;已知甲每日工作8時,求乙每日的工作時數.

解. 設乙每日工作x時,所需日數及所寫總頁數若不變,則兩人工作時間與同時間可寫頁數成反比,故

$$4\text{頁}:3\text{頁}=8\text{時}:x\text{時}$$

又同時間可寫頁數,及所寫總頁數若不變,則兩人工作時間與所需日數成反比,故

$$15\text{日}:10\text{日}=8\text{時}:x\text{時}$$

又同時間可寫頁數及所需日數若不變,則兩人工作時間與所寫總頁數成正比,故

$$480\text{頁}:720\text{頁}=8\text{時}:x\text{時}$$

由是得
$$\left.\begin{array}{rcr}4\text{頁} & : & 3\text{頁}\\ 15\text{日} & : & 10\text{日}\\ 480\text{頁} & : & 720\text{頁}\end{array}\right\}=8\text{時}:x\text{時}$$

故 $$x=8\times\frac{3\times10\times720}{4\times15\times480}=6$$

答乙每日工作6時

習題七九

(1) 在以1市寸當1市里的縮寫地圖上,求相距2.25市寸兩地的實際距離.

(2) 以長2.6呎的手杖立紀念塔前,量其影爲3.2呎,若塔影長4.8呎,則塔高幾何?

(3) 農夫3人於60日間可耕的田,以農夫8人去耕需幾日?

(4) 煤2500噸,其15分之7的價爲10050圓,若購入5分之1,需若干圓?

(5) 雞蛋若干個,以每4個7分買入,而以每3個8分賣出,設所得總利益爲6.5圓,求雞蛋的個數.

(6) 某人的手錶每16時慢3分,其妻的手錶每日快3分,自星期日正午校準兩錶的時刻後,經過若干日兩錶又相差10分,問此時何時?兩錶所指時刻各如何?

(7) 糖5公斤與茶2公斤同價,若以3.6圓買糖20公斤,則5.4圓可買茶幾何?

(8) 男生3人的食量與女生5人相等.問以男生8人於

14日間所需的米供給男生10人女生2人,可支持幾日?

(9) 每時行18哩的某次列車,自某站出發,經5時後快車自該站開行,行過120哩,尚距前列車15哩.問此後快車再行若干哩卽可追及前車?

(10) 自東港於某時出發向西港駛行的甲船,先與同時自西港出發向東港駛行的乙船在某地相遇,經1時後,又與自西向東而且同時出發的丙船相遇,求兩港距離.但甲船每時速度爲14浬,乙船12.5浬,丙船10浬.

(11) 鈔每頁15行每行32字共3頁的書需45分.問鈔每頁13行每行25字共8頁的書需幾分鐘?

(12) 男工對於女工工資的比爲7:4,雇男工20人,15日間需500圓.問雇女工30人,兩星期間需若干圓?

(13) 自行車與汽車速度的比爲16:9,汽車行40公里需2.5時,問自行車行30公里需幾時?

(14) 用小管3個注滿深25公寸長21公寸闊20公寸的水槽,需7分鐘,問用大管4個注滿深24公寸長20公寸闊18公寸的水槽,需幾分鐘?但小管6個所注的水量等於大管5個所注的水量.

(15) 大人走3步的時間小人走2步,大人走3步的距離相當於小人走5步,問大人走360市尺時小人走若干

距離?又大人走1時間的距離,小人需走若干時?

(16) 用馬車5輛可於4日間運糧500袋至距離$1\frac{5}{9}$市里的地方,間用牛車於3日間運糧700袋至半市里處需若干輛?但馬車與牛車速率的比爲5:3,力的比爲4:5.

133. 連鎖比例　設有一羣的量$A, B, C \cdots G, H$兩兩相比,各有定值,如$\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \cdots \frac{G}{H}$,則$A$對於$H$的比亦爲一定.

設各量的數值順次爲$a, b, c, \cdots g, h$,其兩兩相比的定値順次爲$K_1, K_2, K_3 \cdots K_n$,則

$$a = K_1 b,\ b = K_2 c, \cdots g = K_n h$$

故
$$\frac{a}{h} = K_1 K_2 K_3 \cdots K_n = K$$

故A對於H的比爲一定.

應用此理,可以解連鎖比例問題.何謂連鎖比例?觀於次例可知:

例.　米p市石的價等於麥q市石的價,麥r市石的價等於豆s市石的價,問米m市石的價等於豆幾市石的價?

解.　設a, b, c爲米,麥,豆各1市石的價,則

$$ap = bq,\quad br = cs$$

即
$$\frac{q}{p}=\frac{a}{b}=K_1,\ \frac{s}{r}=\frac{b}{c}=K_2$$

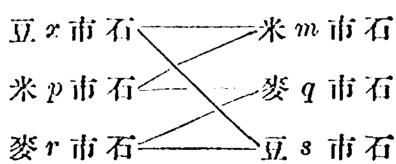
故
$$\frac{a}{c}=K_1K_2 \qquad [\text{其值一定}]$$

即
$$a=K_1K_2c=\frac{q}{p}\times\frac{s}{r}\times c \tag{1}$$

再設所求豆的石數爲x,則
$$ma=xc \tag{2}$$

由(1),(2)得
$$x=\frac{mqs}{pr} \tag{3}$$

實際運算時,可將所設各量排列如次:



即先將所求及與其等價的量排在第一列,以橫線相連,示其關係,再以斜線連鎖同類的量,以橫線連鎖其他等價的量,則得第二三列,然後以橫線左端的數相乘等於右端的數相乘,x即可算出.如此解法叫連鎖法.

連鎖比例亦可用解複比例的方法解之,如上例等價的豆量對於米量的比,與p市石:q市石及r市石:s市石的複比相等,即

$$\left.\begin{array}{l} p\text{市石}:q\text{市石} \\ r\text{市石}:s\text{市石} \end{array}\right\}=m\text{市石}:x\text{市石}.$$

由是得 $$x=m\times\frac{qs}{pr}.$$

結果與(3)同,但不若連鎖法簡便.

134. 按分比例 分某量爲若干部,使各部與所設的數(或其等比的數)成比例,如此運算叫比例配分,其所成比例叫按分比例,如以A分作三部x, y, z,使與l, m, n成比例,則

$$x+y+z=A, \tag{1}$$

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}. \tag{2}$$

由(2)得 $$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=\frac{x+y+z}{l+m+n}, \qquad [123(六)]$$

即 $$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}=\frac{A}{l+m+n},$$

故 $$x=\frac{lA}{l+m+n}, y=\frac{mA}{l+m+n}, z=\frac{nA}{l+m+n}.$$

如此A的各部即可算出.按分比例亦可解之如次,因各部既比例於l, m, n,則全部的分數爲$l+m+n$,而總和爲A,故比例於l部的x,可由次式求得:

$$(l+m+n):l=A:x$$

同理　$$(l+m+n):m=A:y$$

$$(l+m+n):n=A:z$$

由此三比例式算出 x, y, z 與上同,但不若上法簡便.

例一. 男工每日工資的7分之1與女工每日工資的4分之1相等,而女工每日工資爲童工工資的2倍.今男工6人女工5人童工3人的1日工資總計爲6.8圓,問男工女工童工每日工資各幾何?

解. 設男工女工童工每日的工資爲 x 角, y 角, z 角,則

$$6x+5y+3z=68$$

又因　$$\frac{x}{7}=\frac{y}{4},\ \therefore\ x:y=7:4$$

同理　$$y:z=2:1=4:2$$

故　$$x:y:z=7:4:2$$

故　$$\frac{x}{7}=\frac{y}{4}=\frac{z}{2}=\frac{6x+5y+3z}{7\times 6+4\times 5+2\times 3}$$

$$=\frac{6x+5y+3z}{42+20+6}=\frac{68}{68}=1$$

由是得　$$x=7,\ y=4,\ z=2.$$

答男工每日工資7角,女工4角,童工2角.

例二. 甲乙丙三人合資經商,甲出資本600圓,8個月收回,乙出500圓,7個月收回,丙出1000圓,5個月收回,結

果獲利332.5圓,問三人如何分配?

解. 設甲,乙,丙應得利益爲x圓,y圓,z圓,則

$$x+y+z=332.5$$

又
$$\frac{x}{600\times 8}=\frac{y}{500\times 7}=\frac{z}{1000\times 5}$$

$$=\frac{x+y+z}{4800+3500+5000}$$

故
$$\frac{x}{4800}=\frac{332.5}{13300}$$

由是得
$$x=\frac{332.5}{13300}\times 4800=\frac{3325}{133000}\times 4800=120$$

同理知
$$y=\frac{3325}{133000}\times 3500=87.5$$

$$z=\frac{3325}{133000}\times 5000=125$$

答甲應得利120圓,乙87.5圓,丙125圓.

觀此例可知按分比例又叫合資算.

135. 混合比例 混合比例問題的形式有二:一爲已知各原料的價及混合比,而求混合物的價;一爲已知各原料及混合物的價,而求混合比.茲分別舉例說明如次:

(1) 求混合物的價

例一. 設以每市斤值 a 角的酒,值 b 角的酒,值 c 角的酒混合,使其比為 $l:m:n$,則可得每市斤值幾角的酒?

解. 因三種酒在混合物中其斤數的比為 $l:m:n$,故混合物中三種酒的斤數為 lK, mK, nK,由是知混合物的斤數為 $lK+mK+nK$. 其總價為 $(alK+bmK+cnK)$ 角,故設以混合物1市斤為 x 角,則

$$(lK+mK+nK)x=alK+bmK+cnK$$

由是得
$$x=\frac{alK+bmK+cnK}{lK+mK+nK} \tag{1}$$

即混合物的價為 $\dfrac{alK+bmK+cnK}{lK+mK+nK}$ 角.

今假定 $a>b>c$, 則

$$\frac{al+bm+cn}{l+m+n}<\frac{al+am+an}{l+m+n}$$

故
$$x<\frac{a(l+m+n)}{l+m+n}, \text{ 即 } x<a$$

又
$$x>\frac{c(l+m+n)}{l+m+n}, \text{ 即 } x>c$$

觀此可知在 $a>b>c$ 的假定下,非 $a>x>c$,則其解法為不合理,又因 x 的數值與 K 無關,故 l, m, n 亦可看做合於題意的三種斤數的一組.

例二. 以每市斤值8角的酒與每市斤值6角的酒混合使其比爲3:2,求混合酒每市斤的價.

解. 設混合酒每市斤的價爲x角,則由(1)得

$$x=\frac{8\times3+6\times2}{3+2}=7.2$$

答混合酒每市斤的的價爲7角2分.

(2) 求混合比

例三. 設以每市斤值a角的酒與每市斤值b角的酒混合爲每市斤值c角的酒,則其混合比爲何?

解. 設兩種酒的混合比爲$x:y$,則與前節同理可得

$$ax+by=c(x+y)$$

故 $$(a-c)x=(c-b)y$$

卽 $$\frac{x}{y}=\frac{c-b}{a-c} \qquad (2)$$

因混合比例須爲正數,故在次列任何條件下,

$$c-b>0,\ a-c>0\ 卽\ c>b,\ a>c$$

或 $$c-b<0,\ a-c<0\ 卽\ c<b,\ a<c$$

c的數值必須在a與b的中間,否則問題不能成立.又混合酒的斤數若爲已知,則x,y實在的數值亦可求得.因於所設a,b,c各值外,若更設d爲混合酒的斤數,則於(2)外,更有

$$x+y=d$$

由是得 $$\frac{x}{c-b}=\frac{y}{a-c}=\frac{x+y}{a-b}=\frac{d}{a-b}$$

故 $$x=\frac{(o-b)d}{a-b},\ y=\frac{(a-c)d}{a-b}$$

例四. 設以每市斤值8角的酒與每市斤值6角的酒混合成每市斤值7角2分的酒,求混合比.

解. 設所求的混合比為$x:y$;由(2)得

$$\frac{x}{y}=\frac{7.2-6}{8-7.2}=\frac{1.2}{0.8}=\frac{3}{2}$$

此種問題實際可運算如次:

運算:

混合價	原價	比　較	混合比	
7.2角	8角	損0.8角	12	2
	6角	益1.2角	8	2

答所求的比為3:2.

說明: 因每市斤8角的酒價被混合酒降低(8−7.2)角,即0.8角,此項損失須利用每市斤6角的酒來彌補,而所可補益的酒價則為每市斤(7.2−6)角,即1.2角.故如此移補的分量若適相當,則每市斤值6角的酒對於值8角的1市斤必須混入的斤數,可依次列比例式算出:

$$1.2\text{角}:0.8\text{角}=1\text{市斤}:x\text{市斤},$$

即
$$x=\frac{0.8}{1.2}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}.$$

故兩種酒的混合比爲$1:\frac{2}{3}$即$3:2$.此值適與兩種酒價與混合酒價的差成反比,故混合比的求法,即先求兩原價與混合價的差,再求其反比便得.

若每市斤值8角的酒用15市斤,則每市斤值6角的酒須混入幾市斤?可計算如次:

混合價	原價	比　較	混合比		混　合　量
7.2角	8角	損0.8角	12	3	15=3×5(市斤)
	6角	盆1.2角	8	2	10=2×5(市斤)

$$1.2\text{角}:0.8\text{角}\times 15=1\text{市斤}:x\text{市斤}$$

$$x=10.$$

答每市斤值6角的酒須混入10市斤.

又混合酒的量若爲30市斤,則可按所求混合比$3:2$,依配分法算出兩原料應混入的斤數:一爲18市斤,一爲12市斤.

此類問題,亦可以解雞兔問題的方法解之.

例五. 設以每市斤值8角的酒,值6.5角的酒,值6角的酒三種混合成每市斤7.2角的酒,求混合的連比.

運算:

混合價	原價	比較	混合比				
7.2角	8角	損0.8角	7	12	3	10	5
	6.5角	益0.7角	8			8	4
	6角	益1.2角		8	2	2	1

答所求比爲5:4:1.

說明: 如例四,欲得每市斤值7.2角的酒,則每市斤值8角的酒與每市斤值6.5角的酒的比項等於7:8,又每市斤值8角的酒與每市斤值6角的酒的比項等於3:2.故此三種酒的比爲(7+3):8:2,卽5:4:1.

於是有應注意的一點:卽三種酒依(7+12):8:8卽19:8:8的連比混合亦可得每市斤值7.2角的酒;又8角的酒對於6.5角的酒的比可等於7:8,亦可等於14:16及21:24…;8角的酒對於6角的酒的比可等於3:2,亦可等於6:4及9:6….;如是則三種酒的連比可得種種:例如

(一) 14+9:16:6,卽 23:16:6

(二) 21+6:24:4 卽 27:24:4

故解答很多,卽問題爲不定.

此種事實,若仿例五的解法,益可證明:

設8角的酒混合x市斤,6.5角的酒混入y市斤,6角的

酒混入z市斤，則

$$8x+6.5y+6z=7.2(x+y+z)$$

即　$$8x-7y-12z=0 \qquad (3)$$

未知數有三，而方程式祇有一個，故不定．卽以z遍除上式得

$$8\cdot\frac{x}{z}=12+7\cdot\frac{y}{z}$$

其中未知數仍有兩個，故仍不定．但因$\frac{x}{z}$，$\frac{y}{z}$不可為負，故

$$8\cdot\frac{x}{z}\geqq 12,\ \text{即}\ \frac{x}{z}\geqq\frac{3}{2}$$

而$\frac{x}{z}$若為$\frac{3}{2}$，則y為0，卽專就8角的酒與6.5角的酒兩方面說，其比必為3：2．同理，

$$8\cdot\frac{x}{y}\geqq 7,\ \text{即}\ \frac{x}{y}\geqq\frac{7}{8}$$

而$\frac{x}{y}$若為$\frac{7}{8}$，則z為0，卽專就6.5角的酒與6角的酒兩方面說其比必為7：8．苟不以此兩比為限，則問題為不定．

若本例於所設諸量外並預定8角的酒與6.5角的酒為3：2，則於

$$8\cdot\frac{x}{y}-7-12\cdot\frac{z}{y}=0\ [(3)\text{式兩邊除以}y]$$

外，又有　$$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$$

故 $$\frac{z}{y}=(8\times\frac{3}{2}-7)\div12=\frac{5}{12}$$

由是得 $$x:y:z=18:12:5$$

即運算如次亦可:

混合價	原價	比較	混合比
	8角	損0.8角	3
7.2角	6.5角	益0.7角	2
	6角	益1.2角	x

假定8角的酒混入3市斤,6.5角的酒混入2市斤,則因此產生的損失(0.8角×3−0.7角×2)即1角,如欲謀適當的補償,6角的酒必須混入$\frac{1}{1.2}$市斤,即$\frac{5}{6}$市斤.由此亦可得三種酒的混合比爲$3:2:\frac{5}{6}$,即18:12:5.

又若本例於所設諸量外,更附加一條件:如混合酒量爲140市斤,則可按所求混合比18:12:5,依比例配分法,算出8角的酒爲72市斤,6.5角的爲48市斤,6角的爲20市斤.

習題八〇

(1) 設米5市擔的價等於鹽14市擔的價,鹽24市擔的價等於油5市擔的價,油10市擔的價等於柴6市擔的價,則米1市擔的價等於柴幾市擔的價?又柴7市擔的價

等於米幾市擔的價?

(2) 設糖5公斤的價等於茶3公斤的價,茶6公斤的價等於咖啡5公斤的價,而糖3公斤的價為5角4分,則咖啡8公斤的價為幾何?

(3) 1日間甲作完一事的3分之2,乙作完該事的5分之3;又乙於5日間所作的事,丙於6日間可以作完.問當甲製成某項出品20件時,丙可製成若干件?

(4) 三時鐘於某日正午一齊校準.次日日間甲鐘指12點時,乙鐘比甲慢5分;乙鐘指12點時,丙鐘比乙慢3分.問丙指12點時,甲鐘所指的時刻為何?

(5) 某家庭費用的成數預算如次:食費5,住,衣,及儲蓄各2,雜費3,若依此成數支配其月入75圓,則此等費用應各佔幾何?但各費若不滿1角,則以之併入儲金.

(6) 某校一年級學生142人,二年級121人,三年級98人,四年級77人,五年級60人.今依各級學生數的比,選出對外代表共10人,問各級所可選出的人數?但當選的額若不滿1人時,可視其分數大小,由比較大的儘先撿整.

(7) 某車站於某日調查乘客,在總數4675人中,三等客人數與二等客人數的比為10:3,二等客人數與頭等客人數的比為4:1.求各等的人數.

(8) 以水果92個分給兄弟及妹.若所得與其年齡成反比,則各得幾何?但兄12歲,弟9歲,妹8歲.

(9) 某校運動會奬品規定每一個的價格:二等比一等少3分之1,三等又比二等少4分之1.若依此比例,以20圓製備一等奬品40個,二等奬品30個,三等奬品20個,則各等奬品每1個的價格應定爲若干?但每個價格務儘高額支配,若不滿1分,則捨去.

(10) 甲出資本10000圓,於開業後兩個月,乙加入5000圓,又經三個月,甲讓3000圓給丙.開業一年後,於所得利益中提出3400圓分配於三人.問各得利益幾何?

(11) 以上酒,下酒,上酒與下酒依3:2混合而成的酒,及上酒與下酒依4:1混合而成的酒四種混合,其連比若爲3:1:4:2,則四種混合酒中,上酒與下酒的比如何?

(12) 賣每市斤3.8角與每市斤2.4角兩種糖果各若干市斤,其價平均爲3.2角,問所賣斤數的比?又3.8角的糖果若賣出20市斤,則2.4角的糖果賣出幾何?

(13) 每3個1角與每5個1角2分的兩種蘋果混合賣出600個,共得20圓,其利益爲2圓1角,問兩種各賣出若干?

(14) 雞兔共18隻,其足數總計爲62.問雞兔各幾何?(用

混合法解之)

(15) 以每公斤4.8角,4.2角,3.2角的茶三種混合成每公斤4角的茶.若4.8角的茶用12公斤,3.2角的茶用14公斤,則4.2角的茶須用幾公斤?

第十四章的總練習

(1) 簡化$\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right):\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

(2) 設$2x^2+3x+4=0$二根的比爲$m:n$,證明

$$9mn=8(m+n)^2$$

(3) 已知$a:b=c:d$,求證

(一) $\frac{a+c}{a-c}:\frac{b+d}{b-d}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}:\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$.

(二) $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$.

(三) $\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\right):\left(\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}\right)=ab:cd$.

(四) $a^2(c^2+d^2)=c^2(a^2+b^2)$.

(五) $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2=\frac{b}{d}\times\frac{a}{c}$.

(六) $a^n:b^n=(la^n+mc^n):(lb^n+md^n)$.

(4) 若$b(a-c):c(b-d)=a-b:c-d$,則$b=c$或$a:b=c:d$.

(5) 若$a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$，則x, y, z的連比如何？又在此條件下，試證

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

(6) 設$\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$，證明

$$x:y:z=a:b:c.$$

(7) 設$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}$，則

$$\frac{bz-cy}{b-c}=\frac{cx-az}{c-a}=\frac{ay-bz}{a-b}.$$

(8) 若$x+3y+5z=0$, $2x+4y+7z=0$，則$\frac{x^2+3y^2+5z^2}{2x^2+4y^2+7z^2}$的值如何？

(9) 解聯立方程式

$$\begin{cases}x+y+z=0\\ax+by+cz=0\\bcx+cay+abz=(b-c)(c-a)(a-b).\end{cases}$$

(10) 有人自開行中的甲列車的窗注視他一平行軌道上從對方開來的乙列車，經2秒鐘完全通過甲窗；若乙車與甲車同方向進行，則乙車通過甲窗須30秒，求兩車速度的比.

(11) 求次列八數的平均值,幷求其最大一數及最小一數對於平均值的百分數:

79.23	81.07	87.90	76.42
73.65	80.88	79.51	78.31.

(12) 某村某年的收成比前年減2釐,比平年增9釐2毫,求前年比平年增收的成數.

(13) 某農本年的收穫比前兩年間的平均額增收8釐,而此三年間收穫合計爲5236市石,問本年收穫幾市石?

(14) 設物品的定價比原價增2分5釐,而賣價又照定價減1分,則所得利益相當於原價幾分?

(15) 某酒商混合每市斤2角4分的酒及每市斤3角6分的酒賣得36圓,其利益適當原價的2分,問最初買入的兩種酒量各幾何?

(16) 依3:2的比混合每罎21圓的純酒及每罎15圓的純酒,幷加入1分5釐的水.若以每市斤7角賣出,則其損益當原價幾分?但每罎容38市斤,而零賣時以1.2市斤作1市斤算.

(17) 某種貨物出賣時,若不照定價減1分而加給1分的貨,則其結果等於外折扣1分,其理由安在?幷問此兩種出賣方式,以何種利益較大?

(18) 以金780圓存於某銀行,一年間的本利和與以金795圓按同利率存入該行,於8個月間所生的本利和相等,求該行的年利率.

(19) 某人借得200圓,2個月後還50圓,再經4個月,又還75圓,再經6個月,又還89.5圓.於是本利一併還清,求年利率.

(20) 分1300圓為兩部,分別存入甲乙兩銀行,一年終從兩行可得同額的利息.若以存入甲行的改存乙行,以存入乙行的改存甲行,則一年終甲行的利息為49圓,乙行的利息為36圓.求兩行的利率.

(21) 以3000圓存入某行一年後,若利率增加5毫,則第二年終本利和為3450.75圓.問最初利率為何?

(22) 某人以所有金的一部買票面25圓,時價20.8圓的債券5張,以他一部買票面50圓,時價49.5圓的債券10張,而以其餘金存入某行,年終結算票面20圓的債券業經還本,多得300圓.總計所獲利息及債券利益對於所有金的成數為2分6釐2毫,問此人原有金若干?但銀行利率7釐,債券5釐.

(23) 某人以利率5釐於某年開始借入若干圓,第一年末於本利和內償還11576.25圓,而以其餘撥作第二年的

本金;第二年末仍於本利和內償還11576.25圓,而以其餘撥作第三年的本金;若第三年末的本利和適爲11576.25圓,則最初借入金額爲何?

(24) 某市人口39000人,若每年增1分2釐,則三年後該市共有若干人?

(25) 某人以年利1分4釐的單利借入450圓,第一年末償還213圓,第二年末還米8市石,第三年末再付273.6圓,於是本利一併算結.問米價?但每年末所還金額係該年利息及本金的一部.

(26) 金18000圓以年利4釐,金15000圓以年利4釐5毫存入銀行,同按複利計算,問幾年後雙方本利和相等?

(27) 某翁以7500圓買地產,當付現金2500圓,其餘金額則豫定本年九月三十日付1500圓,十二月三十一日付2500圓,次年二月十二日付1000圓,後因事故欲於一時付清,若利息無所損益,其支付日期應在何月何日?

(28) 某甲須付給乙的金額爲3個月後100圓,6個月後200圓,9個月後300圓;乙須付給甲的金額則爲9個月後1000圓.今若於一時雙方結清,彼此無所損益,其日期應如何決定?

(29) 甲乙丙作880碼的賽跑,若甲勝乙11碼,勝丙33碼,

則乙勝丙幾碼?

(30) 以金 A 圓分配於甲乙丙丁,而使甲與乙所得的比爲 $l:m$,乙與丙所得的比爲 $n:p$,丙與丁所得的比爲 $q:r$,問四人各得幾何?

(31) 以金590圓分配於甲乙丙丁戊.甲與乙的比爲2:3;甲的4分之3,與丙的5分之3,與丁的8分之5相等;丁的9倍與戊的16倍相等;問乙得幾何?

(32) 甲出3500圓,乙出2700圓,丙出2500圓,合資經商,開業3個月後,乙增250圓,丙增700圓,第一年共得利益3028圓,問三人如何分配?

(33) 以純金42兩與21開金(每24兩中含有純金21兩)56兩及銅若干,熔成18開金,問銅應混入幾何?

(34) 每公斤7角2分,8角,4角5分的茶,依5:7:4混合成每公斤7角5分的茶.若賣出後共得25圓的利益,問各茶的混合量?

(35) 每市斤 a 分的糖與每市斤 b 分的糖依 $l:m$ 混合;每市斤 c 分的糖與每市斤 d 分的糖依 $p:q$ 混合;此兩種混合物若再依 $r:s$ 混合,則可得每市斤價值幾何的糖?

(36) 甲乙丙丁四種酒,其每市斤的價:甲4角,乙3角8分,丙3角5分,丁3角4分.今以四種混合成每市斤3角4

分的酒2市石80市斤,若乙,丙,丁的比爲2:5:6,則甲酒須混入幾何?

(37) 甲酒2公斤及乙酒3公斤的價爲3.6圓,甲酒3公斤與乙酒4公斤的價爲5.07圓.今以兩種混合成每公斤7角5分的酒38公斤,問各需幾何?

(38) 12000噸的戰鬪艦與8000噸的巡洋艦共10艘,其製造經費需97600000圓.若戰鬪艦每噸需1000圓,巡洋艦每噸需800圓,則兩種軍艦各幾艘?

表 I

複 利 表

本金1圓經過某期之本利和

期	二　釐	二釐五毫	三　釐	三釐五毫	四　釐	四釐五毫	五　釐
1	1.02	1.025	1.03	1.035	1.04	1.045	1.05
2	1.0404	1.050625	1.0609	1.071225	1.0816	1.092025	1.1025
3	1.061208	1.076891	1.092727	1.108718	1.124864	1.141166	1.157625
4	1.082432	1.103813	1.125509	1.147523	1.169859	1.192519	1.215506
5	1.104081	1.131408	1.159274	1.187686	1.216653	1.246182	1.276282
6	1.126162	1.159693	1.194052	1.229255	1.265319	1.302260	1.340096
7	1.148686	1.188686	1.229874	1.272279	1.315932	1.360862	1.407100
8	1.171659	1.218403	1.266770	1.316809	1.368569	1.422101	1.477455
9	1.195093	1.248863	1.304773	1.362897	1.423312	1.486095	1.551328
10	1.218994	1.280085	1.343916	1.410599	1.480244	1.552969	1.628895
11	1.243374	1.312087	1.384234	1.459979	1.539454	1.622853	1.710339
12	1.268242	1.344889	1.425761	1.511069	1.601032	1.695881	1.795856
13	1.293607	1.378511	1.468534	1.563956	1.665074	1.772196	1.885649
14	1.319479	1.412974	1.512590	1.618695	1.731676	1.851945	1.979932
15	1.345868	1.448298	1.557967	1.675349	1.800944	1.935282	2.078928
16	1.372786	1.484506	1.604706	1.733986	1.872981	2.022370	2.182875
17	1.400241	1.521618	1.652848	1.794676	1.947900	2.113377	2.292018
18	1.428246	1.559659	1.702433	1.857489	2.025817	2.208479	2.406619
19	1.456811	1.598650	1.753506	1.922501	2.106849	2.307860	2.526950
20	1.485947	1.638616	1.806111	1.989789	2.191123	2.411714	2.653298
21	1.515666	1.679582	1.860295	2.059431	2.278768	2.520241	2.785962
22	1.545980	1.721571	1.916103	2.131512	2.369919	2.633652	2.925261
23	1.576899	1.764611	1.973587	2.206114	2.464716	2.752166	3.071524
24	1.608437	1.808726	2.032794	2.283328	2.563304	2.876014	3.225100
25	1.640610	1.853944	2.093778	2.363245	2.665836	3.005434	3.386355

六　釐	七　釐	八　釐	九　釐	一　分	一分一釐	一分二釐	期
1.06	1.07	1.08	1.09	1.1	1.11	1.12	1
1.1236	1 1449	1.1664	1.1881	1.21	1.2321	1.2544	2
1.191016	1.225043	1.259712	1.295029	1.331	1.367631	1.404908	3
1.262477	1.310796	1.360489	1.411582	1.4641	1.518070	1.573519	4
1.338226	1.402552	1.469328	1.538624	1.61051	1.685058	1.762342	5
1.418519	1.500730	1.586874	1.677100	1.771561	1.870414	1.973822	6
1.503030	1.605781	1.713824	1.828039	1.948717	2.076160	2.210681	7
1.593848	1.718186	1.850930	1.992593	2.143589	2.304534	2.475963	8
1.689479	1.838459	1.999005	2.171893	2.357948	2.558036	2.773073	9
1.790848	1.967151	2.158925	2.367364	2.593742	2.839420	3.105848	10
1.898299	2.104852	2.331639	2.580426	2.853117	3.151757	3.478549	11
2.012196	2.252192	2.518170	2.812665	3.138428	3.498450	3.895975	12
2.132928	2.409845	2.719624	3.065805	3.452271	3.883279	4.363492	13
2.260904	2.578534	2.937194	3.341727	3.797498	7.310440	4.837111	14
2.396558	2.759031	3.172169	3.642482	4.177248	4.784588	5.473565	15
2.540352	2.952164	3.425943	3.970306	4.594973	5.310893	6.130392	16
2.692773	3 158815	3.700018	4.327633	5.054470	5.875091	6.866040	17
2.854339	3.379932	3.996019	4.717120	5.559917	6.543551	7.689964	18
3.025600	3.616527	4.315701	5.141661	6.115909	7.263324	8.612760	19
3.207135	3.869684	4.660957	5.604411	6.727500	8.062309	9.646291	20
3.399564	4.140562	5.033834	6 108808	7.400250	8.949163	10.803846	21
3.603537	4.430402	5.436540	6.658600	8.140275	9.933571	12.100308	22
3.819750	4.740530	5.871464	7.257874	8.954302	11.026264	13.552345	23
4 048935	5.072367	6.341181	7.911083	9.849733	12.239153	15.178626	24
4.291871	5.427433	6.848475	8.623081	10.834706	13.58546	17.000061	25

表 II

現價表

對於本利和爲1的本金

期數	四釐	五釐	五釐五毫	六釐	六釐五毫	七釐	八釐	一分
1	0.9615	0.9524	0.9479	0.9434	0.9390	0.9346	0.9259	0.9[illegible]91
2	0.9246	0.9070	0.8985	0.8900	0.8817	0.8734	0.8573	0.8264
3	0.8890	0.8638	0.8510	0.8396	0.8279	0.8163	0.7938	0.7513
4	0.8548	0.8227	0.8072	0.7921	0.7773	0.7629	0.7350	0.6830
5	0.8219	0.7835	0.7651	0.7473	0.7299	0.7130	0.6806	0.6209
6	0.7903	0.7462	0.7258	0.7050	0.6853	0.6663	0.6302	0.5645
7	0.7599	0.7107	0.6874	0.6651	0.6435	0.6228	0.5835	0.5132
8	0.7307	0.6768	0.6516	0.6274	0.6042	0.5820	0.5403	0.4665
9	0.7026	0.6446	0.6176	0.5919	0.5674	0.54[illegible]9	0.5002	0.4241
10	0.6756	0.6139	0.5854	0.5584	0.5327	0.5083	0.4632	0.3855
12	0.6246	0.5568	0.5260	0.4970	0,4697	0.4440	0.3971	0.3186
15	0.5553	0.4810	0.4479	0.4173	0.3888	0.3624	0.3152	0.2394
20	0.4564	0.3769	0.3427	0.3118	0.2838	0.2584	0.2145	0.1486
25	0.3751	0.9253	0.232[illegible]	0.2330	0.2071	0.1842	0.1460	0.0923
30	0.3083	0.2314	0.2[illegible]0[illegible]	0.1741	0.1512	0.1314	0.0994	0.0573

答

習 題 四 一

(1) (一) $\frac{2a^2x}{3by}$, $\frac{3a-2b}{2y}$, $\frac{3a}{4(a-b)}$.

(二) $\frac{m^2(a-b)(a^2+b^2)}{a(a+b)}$, $\frac{3a^2(x+y)^2}{2b(x-y)(x^2+y^2)}$.

(三) $\frac{x-2}{x-4}$, $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$, 1.

(四) $\frac{x-2y}{2+2y}$, $\frac{-(x+z)}{(y-1)^2}$, $\frac{x-3}{x+1}$.

(2) (一) $\frac{6amy}{6bmy}$, $\frac{3bny}{6bmy}$, $\frac{2bmx}{6bmy}$.

(二) $\frac{cx}{abc}$, $\frac{ay}{abc}$, $\frac{bz}{abc}$.

(三) $\frac{-(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$, $\frac{-(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$, $\frac{-(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$.

(四) $\frac{b(x^2+ax+a^2)}{x^3-a^3}$, $\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$, $\frac{ax}{x^3-a^3}$.

(五) $\frac{(x+1)(x+4)}{(x-3)(x+4)(x-5)}$, $\frac{(x-10)(x-5)}{(x-3)(x+4)(x-5)}$, $\frac{(x+22)(x-3)}{(x-3)(x+4)(x-5)}$.

習 題 四 二

(1) $\frac{49x}{30}$, $\frac{1}{15x}$.

(2) $\frac{a+b}{ab}$, $\frac{ab+c}{b}$.

(3) $\frac{mx-ny}{m}$, $\frac{3b+2c}{3b}$.

(4) $\frac{2a}{a+x}$, $\frac{2}{x+5}$.

(5) $\frac{a+b+c}{abc}$, $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$.

(6) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $\frac{2x^2}{x^2-1}$.

(7) $\frac{b}{(a-b)}$, $\frac{5}{6a^2}$. (8) $\frac{x+1}{x-4}$, 0.

習題四三

(1) (一) $\frac{22a^3}{b^4y}$, (二) xyz, (三) $\frac{(x-5)(x-1)}{(x-2)(x-4)}$,

(四) $\frac{b(a+b)}{4a(a-b)}$, (五) $\frac{(2x+1)(2x^2-x+2)}{4x^2+8x+2}$,

(六) $\frac{a^2+b^2}{a}$.

(2) $\frac{27b^3}{8a^3}$, $\frac{b^2}{a^2}-2+\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{x^3}{y^3}+\frac{3x}{y}+\frac{3y}{x}+\frac{y^3}{x^3}$, $x^2-2+\frac{1}{x^4}$.

(3) (一) $\frac{3ab}{2xy}$, (二) $\frac{3b^2y^4}{4a^2x^2}$, (三) $\frac{a+x}{a-x}$,

(四) $\frac{x^2+ax+a^2}{x^2-2a}$, (五) $-\frac{m+n}{c^2-cd+d^2}$, (六) $\frac{(m+n)(a^2-b^2)}{xy(a^2-ab+b^2)}$.

(4) (一) $\frac{a}{b}$, (二) 1, (三) 1.

習題四四

(1) $\frac{x^2-1}{x^2+1}$, (2) $\frac{xy}{x+y}$, (3) $x+1$,

(4) $-\frac{4a^2}{a+b}$, (5) y, (6) $\frac{x^2+x+1}{x^2-3}$,

(7) 1, (8) $\frac{a^2+b^2}{2ab}$, (9) b,

(10) $\frac{2x}{x^2+1}$.

習題四五

(1) (一) 4, (二) $\frac{7}{9}$, (2) (一) ∞, (二) $-\frac{1}{2}$.

(3) 3, (4) 0.

習題四六

(1) (一) b, (二) $a+b$, (三) $-\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

(四) $\frac{a}{b^2}$.

(2) (一) a, b, (二) a, b, (三) $\frac{ac}{a+b}, \frac{bc}{a+b}$,

(四) $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$, (五) $a+b, a-b$,

(六) $\frac{b'-b}{m-m'}, \frac{mb'-m'b}{m-m'}$.

(3) $\frac{n(c-a)}{b-c}$ 仟克.

(4) $\frac{bd}{a-b}$ 公里.

第七章的總練習

(1) (一) -1, (二) $-\frac{9m}{16n^2(a^2+b^2)}$, (三) $\frac{a+b+c+d}{a-b+c+d}$,

(四) $\frac{x-5}{5(x-3)}$, (五) $\frac{a+b+c}{a-b-c}$, (六) $\frac{2x+3y}{3x^2-y^2}$.

(2) (一) $\frac{8a^7}{x^8-a^8}$, (二) $\frac{a+b}{b}$, (三) $\frac{8x^4}{1-x^8}$,

(四) $\frac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$, (五) $\frac{(a+b)-ab}{(x-a)(x-b)}$,

(六) $\frac{3x-a-b-c}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, (七) 1.

(八) $\frac{4}{x^4+x^2+1}$, (九) $\frac{4x^2y^2}{x^8-y^8}$, (十) $-\frac{2(x+1)}{(x-3)(x+5)}$.

(3) (一) $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2b^2}$, (二) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$, (三) $\frac{a-b}{4b}$,

(四) $\frac{8}{9}$, (五) $\frac{a+b-c}{a-b+c}$, (六) 1,

(七) $-\frac{m-3n}{2}$, (八) $-\frac{5(x+a)}{(x-2a)^2}$.

(4) (一) $\frac{2}{y}$, (二) $\frac{a^2-b^2+1}{a^2-b^2+2}$, (三) x,

(四) 1, (五) $\frac{x+3y}{8xy(x+y)}$.

(5) 1,

(6) $-\frac{9}{16}$,

(8) $-\frac{8(a^2+b^2)}{a^2+2ab-15b^2}$,

(9) $z(z^2-3)$; 18.

(10) (一) $\frac{m+n}{a+b}$, (二) $a+b+c$, (三) $\frac{a}{2b}$,

(四) $a+b$.

(11) (一) a, b, (二) $x=y=\frac{c}{a+b}$, (三) $a, 0$,

(四) $a+b, a-b, 2ab$, (五) $a+\frac{b+c}{2}$, $b+\frac{c+a}{2}$, $c+\frac{a+b}{2}$,

(12) $\frac{2(2a-b-d)}{2c-3}$ 圓.

習題四七

(1) 5, (2) $-\frac{24}{5}$, (3) $\frac{13}{10}$,

(4) $\pm\sqrt{21}$, (5) 無根, (6) $-\frac{41}{6}$,

(7) 1, (8) $\frac{bc}{c^2-b}$, (9) $\frac{a+b+c+d}{m+n}$,

(10) 不成立, (11) 無根, (12) $\frac{1}{6}$,

(13) 2.25, (14) 0, (15) 6,

(16) 4.

習題四八

(1) $\begin{cases} x=-\frac{69}{16} \\ y=\frac{27}{16} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3, 4, 26 \\ y=4, 3, 6, 2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=1, 2 \\ y=\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x=5, & -\frac{5}{3} \\ y=2, & -\frac{2}{3} \end{cases}$　　(5) $\begin{cases} x=2,3,1,-6 \\ y=3,2,-6,1 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x=7 \\ y=9 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x=20, \\ y=\frac{49}{2} \end{cases}$　　(9) $\begin{cases} x=7 \\ y=5 \end{cases}$

(10) $\begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ z=\pm\sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases}$

習題四九

(1) 12人，　　(2) $\frac{3}{7}$，　　(3) 2公里，

(4) 20個，　　(5) 甲6日，乙18日，丙6日，

(6) 100公斤，　　(7) 甲2分，乙2分24秒，

(8) 原速度爲25哩，距離爲$47\frac{1}{2}$哩．　　(9) 50市里．

第八章的總練習

(1) (一) ±6，　　(二) $\pm\sqrt{10}$，　　(三) $\frac{-ma+nb}{m-n}$；

(四) 無根，　　(五) $\frac{21}{2}$，　　(六) 6．

(七) -1，　　(八) $\frac{2}{5}$，　　(九) 無根，

(十) 不定，　　(十一) 無根，　　(十二) 1，

(十三) 144，　　(十四) 21，　　(十五) -6．

(2) (一) $\frac{1}{6}$，-17，　　(二) 3,2，　　(三) 2,3；3,2；

(四) $\frac{3}{2}$, 2; $\frac{5}{4}$, $\frac{8}{5}$, (五) 2, 1; 1, 2,

(六) $\pm\frac{1}{2}$, ± 3; $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, (七) $+9$, ± 3; -9, ± 3,

(八) 0, 0, 0.

(3) 2圓5角.

(4) 特快70公里,慢車40公里.

(5) 4.5時.

(6) 2哩.

(7) 103步.

(8) 不能.

習題五〇

(1) (一) $8ab^3$, $12a^2y^4z$, $60a^5b^8c^2$, $13x\sqrt{y^3}$

(二) $\frac{5a^2}{7b^3}$, $\frac{3a^3}{10x^2y}$, $\frac{4xy}{11m^2n^4}$, $\frac{\sqrt{xy}}{a^2b^4}$.

(2) (一) $-3ab^2$, $9a^7b^{12}$, $-10x^9y^{11}$, a^mb^{2n}.

(二) $\frac{x^4}{2yz^2}$, $\frac{2c^4d}{9a^3b^{14}}$, $\frac{2x^2}{-a(a+b)^2}$, $\frac{3x}{4(y+z)}$.

(三) 15, 80, $\frac{5}{7}$, $-\frac{3}{4}$.

(3) (一) $2a^3b^2c^5$, $-3ab^2c^3$, $a^2b^{\frac{3m}{n}}$.

(二) $x-1$, $1+\frac{1}{x}$, 24.

習題五一

(1) (一) $7a^2-6b$, (二) $2x^2-3x-1$, (三) x^3-2x^2+3x,

(四) $x^3+2ax^2-2a^2x-a^3$ 餘……$-3a^4(x^2-a^2)$.

(2) (一) $2a+3y$, (二) $3x^2-2x+1$.

(3) 103, 70609, 2654 餘 25.

(4) 218 餘 95851, 3087.

習題五二

(1) $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$, $11\sqrt{7}$, $20\sqrt[3]{5}$, $6abc^2\sqrt{ac}$, $-8a^2bc\sqrt[3]{ab^2c}$.

(2) $\sqrt{100}$, $\sqrt{720}$, $\sqrt[3]{270}$, $\sqrt{\frac{52}{9}}$, $\sqrt{16a^5b^3}$, $\sqrt[4]{81xb^9}$, $\sqrt[8]{\frac{ax^2}{y}}$.

(3) 9, 3, 16, 81, 16, 2, 3, 0.25, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{15}}$, a^3, $(2a^2)^{\frac{1}{3mn}}$.

(4) $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{169}$; $\sqrt[9]{283}$, $\sqrt[9]{99}$; $\sqrt[6]{1331}$, $\sqrt[6]{1369}$; $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{b^2}$.

(5) 24, $12\sqrt{3}$, 2, $2\sqrt[3]{-9}$, $\frac{5}{2}$, 420, $3\sqrt[3]{5}$, $\frac{120}{xy^3}$, $\frac{9a^3c^4\sqrt[3]{c}}{3x^2}$, $\frac{-5x}{y^2z}$,

$\frac{-3x}{y^2z\sqrt[5]{y^3z^2}}$, $x^2y\sqrt{y}$.

習題五三

(1) (一) $3\sqrt{3}$,　(二) $8\sqrt{2}$,　(三) 0,

(四) 0,　(五) $\frac{11}{2}\sqrt[3]{4}$,　(六) $\frac{4\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+4}{3}$.

(2) (一) $16+3\sqrt{26}$,　(二) $\frac{31}{2}\sqrt{2}$,

(三) $42\sqrt{2}+18\sqrt{3}+5\sqrt{6}-17$,　(四) $a-b$,

(五) $a+4b+9c+4\sqrt{ab}+6\sqrt{ac}+12\sqrt{bc}$,

(六) $\sqrt{m^3}+3\sqrt{m^2n}+3\sqrt{mn^2}+\sqrt{n^3}$.

(3) (一) $\frac{2\sqrt{5}\sqrt[3]{121}}{11}$,　(二) $\frac{\sqrt[3]{x}\sqrt[11]{y^{10}}}{y}$,　(三) $5(\sqrt{7}-\sqrt{3})$,

(四) $\frac{30+2\sqrt{21}+3\sqrt{15}+4\sqrt{35}}{17}$,　(五) $14+6\sqrt{6}$,

(六) $\frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$,　(七) $\sqrt{2}+\sqrt{6}-2$,

(八) $\frac{18+x^2-6\sqrt{9+x^2}}{x^2}$,　(九) $\frac{5\sqrt{3}-6}{3}$.

(4) (一) $3+\sqrt{5}$,　(二) $-5+\sqrt{3}$,　(三) $\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$,

(四) $\sqrt{\frac{25}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}$,　(五) $\sqrt{6}+\sqrt{5}$,　(六) $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$,

(七) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$,　(八) $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$,　(九) $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}+1)$.

習題五四

(2) (一) 19,　(二) $11+70\sqrt{2}i$,

(三) $8-\sqrt{10}+(4\sqrt{2}+2\sqrt{5})i$,　(四) -2

(五) $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$,　(六) $-$　(七) $-i$,

(八) $1+i$,　(九) -36,　(十) $-i$.

習題五五

(1) (一) $\frac{2}{x^{\frac{1}{4}}}$,　(二) x^2y^5,　(三) $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}$,

(四) $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$,　(五) $3y^{\frac{3}{2}}$,　(六) $\frac{x^3}{3a^2}$.

(2) (一) $\sqrt[5]{x^3}$,　(二) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$,　(三) $2\sqrt[4]{x}$.

(四) $\frac{21}{\sqrt[3]{a^2}}$,　(五) $\frac{1}{\sqrt[m]{a^2}}$.

(3) (一) $\frac{3}{2}$,　(二) $\frac{1}{4}$,　(三) 0.04.

(4) (一) a^{-3},　(二) $2a^{-4}$,　(三) a^4,

(四) $\frac{3}{4}a^4$,　(五) $\frac{2}{3}x^{\frac{11}{2}}y^3$,　(六) $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{23}{12}}$.

(七) $a^{\frac{27}{35}}b^2$,　(八) 1.

(5) (一) $x^{\frac{11}{6}}-9x^{\frac{4}{3}}+4x^{-\frac{3}{2}}$.

(二) $a^4-a^{\frac{7}{2}}b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}}-4a^2b^2+5a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}}+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{2}}-b^4$,

(三) $\frac{x^{-\frac{3m-n}{2}}(1+x^{3m})}{1+x^n}$,　(四) $2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}$,　(五) $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1$,

(六) $2(1+c^{-2x})$,　(七) $x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{1}{3}}$,

(八) $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}$,　(九) 1.　(十) $\frac{8}{1-x^2}$.

第九章的總練習

(1) $x+1$.

(2) 16.4, 9.24.

(3) (一) $(8-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{10}+4\sqrt{15})$, (二) 18, (三) 34,

(4) $(\sqrt{8}-\sqrt{3})>(\sqrt{6}-2)$.

(5) -9.30.

(6) 35.

(7) 25.

(8) $\pm(a+i)$.

(9) $\dfrac{2b(3b^2-b^2)}{a^2+b^2}i$.

(10) (一) 4, (二) 1, (三) $x^{\frac{8}{4}}$

(四) $\dfrac{6}{7}$, (五) $x^{\frac{1}{3}}$, (六) $2n^2$,

(七) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{mp}$

習題五六

(1) (一) $\pm\dfrac{7}{8}$, (二) 12, 2. (三) ± 25,

(四) 7, 3, (五) $\dfrac{2}{3}$, -2, (六) $\pm\dfrac{21}{5}$,

(七) ± 3, (八) ± 4, (九) $\pm\dfrac{21}{3}$,

(十) ± 5.

(2) (一) 0, 5, (二) 0, $\dfrac{3}{2}$, (三) 5, 4,

(四) -11, 7, (五) 10, 5, (六) -3, 7,

(七) 6, 1, (八) -4, 2.

(3) (一) 5, -1, (二) [illegible], -5, (三) -2, 7

(四) -7, 2, (五) $2\pm\sqrt{5}$, (六) $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$

(七) $\frac{4\pm\sqrt{46}}{3}$, (八) $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$, (九) 6, 3,

(十) 2, $-\frac{8}{3}$.

習題五七

(1) $2\pm\sqrt{13}$, (2) $-5, -7$, (3) 12, 7,

(4) $-10, -11$, (5) 24, -54, (6) $2\sqrt{3}, \sqrt{3}$,

(7) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, (8) $-1\pm\sqrt{2}$, (9) 6, 3,

(10) $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$ (11) $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$, (12) $\frac{15\pm\sqrt{645}}{10}$,

(13) 5, $-\frac{11}{3}$, (14) $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$, (15) $-\frac{5}{6}$, 4,

(16) $\frac{9}{10}$, $-\frac{5}{6}$, (17) 3, $-\frac{18}{7}$, (18) 2, $-\frac{9}{2}$,

(19) $\frac{5\pm\sqrt{167}i}{16}$, (20) $\frac{\sqrt{3}}{6}(-3\pm\sqrt{31}i)$, (21) $\frac{-a\pm b}{2}$,

(22) $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b}$, (23) 1, $\frac{a-b}{b-c}$,

(24) $\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(a^2-b^2)^2+4abc^2}}{2ab}$.

習題五八

(1) (一) 實, (二) 等, (三) 虛.

(3) $5\frac{1}{3}$.

(4) (b^2-4ac) 爲完全平方數.

(6) 1, $\frac{c-a}{a-b}$.

(7) a, $\frac{1}{a}$.

(8) $p=4$, 二根爲 $\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{33})$.

(9) 27.

習題五九

(1) (一) -5, (二) -8.

(2) p^2-2q, p^3-3pq.

(3) (一) $\frac{b^2-4ac}{a^2}$, (二) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$, (三) $\frac{b^2-2ac}{ac}$.

(4) (一) $x^2+2x-15=0$, (二) $x^2-5=0$, (三) $x^2-14x+46=0$,
(四) $x^2-10x+29=0$, (五) $x^2-nx-6n^2=0$, (六) $15x^2-22x+8=0$,
(七) $mnx^2-(m+n)x+1=0$. (八) $x^2-2ax+a^2-b=0$.

(5) $2x^2-15x-63=0$.

(6) $9x^2-82x+9=0$.

(7) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.

(8) (一) $\frac{1}{2}[a\pm\sqrt{a-4b^2}]$ (二) 3, 2; 2, 3; 5, 1; 1, 5.

(9) (一) $(x-3)(5x+7)$, (二) $(2x-5)(2x+3)$,
(三) $(11x-1)(2x-3)$, (四) $(3x+2)(2x-3)$,
(五) $(3x+1-\sqrt{3})(3x+1+\sqrt{3})$, (六) $(2x-3)(5x-2)$,
(七) $(2x-y)(x-2y)$, (八) $(5x-2y)(x+4y)$.

(10) (一) 1, (二) $\frac{4}{(2x-1)(x+1)}$.

習題六〇

(1) 1, -1; -5, -7, (2) 5, 3; $\frac{3}{10}$, 10, (3) 3, 2; -5, 6,

(4) 1, 2; 3, 5, (5) 2, 3; -46, 15,

(6) 3, 1; $-\frac{109}{53}$, $\frac{148}{53}$, (7) 5, 1; 4, $\frac{1}{2}$,

(8) 6, 5; -6, -5, (9) 2, 3; -2, -3,

(10) $3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; 4, 5; $-3\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; -4, -5.

(11) 2, 5; -2, -5; $-4\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$,

(12) 6, 3; -6, -3, (13) 3, 5; 5, 8,

(14) $4, 2; \frac{12}{7}, \frac{4}{7}; 0, 0.$

習題六一

(1) $5, 4; 4, 5.$

(2) $5, 2; -2, -5.$

(3) $0, 0; \frac{1}{2}, \frac{1}{6}; \frac{1}{6}, \frac{1}{2}.$

(4) $0, 0; a+b, a+b.$

(5) $a+b, c;\ c, a+b.$

(6) $a, b.$

(7) $3, 5; 5, 3.$

(8) $\frac{1}{6}, \frac{1}{5}; -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}.$

(9) $3, 4; 4, 3.$

(10) $\frac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{10}}{2}.$

(11) $\frac{3}{2}a, 3b;\ -3a, -\frac{3}{2}b.$

(12) $3, 2;\ -2, -3.$

習題六二

(1) $2, 3, 4; -2, -3, -4.$

(2) $3, 5, 7; -3, -5, -7.$

(3) $1, 2, 3; -1, -2, -3.$

(4) $3, 4, 5; -5, -6, -7.$

(5) $4, 2, 0; -4, -2, 0.$

(6) $\frac{\pm a\sqrt{a+b+c}}{a+b+c}, \frac{\pm b\sqrt{a+b+c}}{a+b+c}, \frac{\pm c\sqrt{a+b+c}}{a+b+c}.$

(7) $\frac{\pm bc}{a}-a, \frac{\pm ca}{b}-b, \frac{\pm ac}{c}-c.$

(8) $0, 0, 0; \frac{2abc}{bc+ab-ca}, \frac{2abc}{ca+bc-ab}, \frac{2abc}{ab+ca-bc}.$

(9) $-6, 1, 3; -1, -6, 3.$

(10) $\frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{abc}$, etc.

習題六三

(1) 21, 22, 23.

(2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$

(3) 26 市尺, 38 市尺.

(4) 53 公尺, 27 公尺.

(5) 576 人.

(6) 19 歲.

(7) 70 歲, 30 歲.

(8) 24.

(9) 128 哩.

(10) 44[illegible]0 人.

習題六四

(1) $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 或 $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

(2) $\pm\frac{1}{\sqrt{\ }}$ [illegible].　(3) 6.4, 4.6　(4) 80 張, 10 人.

(5) 40 公尺, 15 公尺.　(6) 9 市尺, 13 市尺, 7 市尺.

(7) 720 哩.　(8) 450 哩

第十章的總練習

(1) (一) $9,\ -\frac{42}{5}$.　(二) $0,\ 4$.　(三) $2,\ 4$.

(四) $1,\ -\frac{7}{9}$.　(五) $1,\ 3$.　(六) $5,\ \frac{20}{17}$.

(七) $1,\ 2$.　(八) $1+\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$.　(九) $a\pm\frac{1}{a}$.

(十) $-\frac{a+b}{a-b},\ -\frac{a-b}{a+b}$.

(2) 1.　(4) ± 8.　(6) $(1+n)^2ac=nb^2$.

(8) $2x^2-10a^2x+5a^4=0$.　(9) $\frac{c-a}{a-b}$.

(10) (一) $7,\ -8$.　(二) $a,\ \frac{1}{a}$.　(三) $a,\ 11-a$.

(四) $a,\ -\frac{1}{2a}(1+a^2)$.

(11) (一) $(5x-8)(x-6)$.　(二) $(8x-16)(4x+9)$.

(三) $(9x-11y)(11x+13y)$.　(四) $(x+51)(x-21)$.

(12) (一) $0,\ 4;\ 0,\ -4$.　(二) $3,\ 1;\ -1,\ -3$.

(三) $2, 3;\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{2}$; 其他虛根.　(四) $1,\ 1$; 其他虛根.

(五) $\frac{3}{2}, 2;\ \frac{5}{4},\ \frac{8}{5}$.

(六) $\frac{1}{2}, 3;\ -\frac{1}{2}, -3;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$.

(七) $35, 28;\ 28, 35$.　(八) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$; 其他虛根.

(九) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, (十) 2, 3, 1; 2, 1, 3; 1, 3, 2; 1, 2, 3.

(二) 4, 5, 6; −6, −7, −8. (三) 1, 2, 3; −3, −4, −5.

(13) 甲 83, 乙 38. (14) 6 時. (15) 11人.

(16) 7 人. (17) 12 時, 6 時. (18) 15 卷.

(19) 24. (20) 10.5圓, 8圓 4角. (21) 1 角 6 分.

(22) 10 市里, 9 市里. (23) 9 市升. (24) 64 人.

(25) 1. (26) 756 哩. (27) 每時 10 哩, 每時 12 哩.

(28) 3 公里. (29) 120. (30) $\frac{7}{3}$時.

習題六五

(1) 1, 6, 7, −1, −3, −5. (2) 3, 6, 0, −2, −4, −1.

(3) 0, 1, 2, −1, −2, −4. (4) 1, 16, 64, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, 2.

(5) 0, 6, 11, 3, 8, 7.

(7) (一) $-\frac{1}{2}$. (二) $-\frac{11}{3}$. (三) $\frac{13}{6}$.

(四) 1.

(9) (一) $\frac{c(1-x)^3}{(2+x)^2}$. (二) $\frac{cy}{\sqrt{y+1}}$.

(三) $\frac{(x+1)^3(x-1)^3\sqrt{x}}{(x^2+1)^2}$. (四) $\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{6}}}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$

(10) 1.176, 0.778, 1.477, 0.176, 0.1505, 0.233, 1.398, 0.409, 3.141, 0.855.

習題六六

(2) (一) 63.908 (二) 0.011293. (三) 1.6462.

(四) 0.027737.

(3) (一) 2208.6. (二) 8.451. (三) 185.48.

(四) 0.23932.

(4) (一) 0.04218. (二) 0.0002183. (三) 0.25016.

(四) 0.0011555.

(5) (一) 5.1368. (二) 9.7502. (三) 481.03.

(四) 1.6280.

(6) (一) 4.8567. (二) 3.3701. (三) 0.33931.

(四) 0.631.

(7) (一) 619886. (二) 0.5010. (四) 0.04222.

(8) (一) 五十七位數. (二) 三十九位數.

(9) 自第十八位起.

習題六七

(1) $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i$. (2) $\pm 2, \pm 3$.

(3) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}(-1\pm\sqrt{3}i), \frac{1}{2}\sqrt[3]{5}(-1\pm\sqrt{3}i)$.

(4) $\pm 5, \pm 2$. (5) $3\pm\sqrt{8}, \frac{-9\pm\sqrt{7}i}{2}$.

(6) $a, -a, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}$. (7) $-1, \pm 2, 3$. (8) $1, -2, 4, -5$.

(9) $2, -3, \frac{1}{2}(-1\pm 3\sqrt{3}i)$. (10) $1, -2, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. (11) $0, -8, 1, 3$.

(12) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. (13) $\pm 4, \pm\frac{1}{4}$. (14) $-2, \pm 3, 4$.

(15) $\pm a, \pm b$, (16) $a, 4a, -2a$.

(17) $\frac{-5\pm\sqrt{41}}{4}, \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, (18) $3\pm\sqrt{21}, -2, 6$. (19) $1, 2, \frac{1}{2}$.

(20) $4, \pm\sqrt{3}i$. (21) $5, 2\pm\sqrt{2}i$.

(22) $4, -9, \frac{1}{2}(5\pm\sqrt{159}i)$. (23) $a, -2a$. (24) $a, \frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}$.

習題六八

(1) $5, -1$. (2) 3. (3) 無根.

(4) 3. (5) 0. (6) $0, 6$.

(7) $1\pm\sqrt{5}$. (8) 8. (9) $1, \frac{1}{2}$.

(10) $0, \pm\sqrt{2}$. (11) $\pm 1, 2$. (12) $0, 3b$.

(13) 8, 2; 2, 8. (14) 5, 4. (15) 5, 3; −5, −3,

(19) 0.45. (20) $-1\pm\sqrt{\frac{\log ab}{\log a}}$.

(23) $\frac{\log d \log m-\log b \log n}{\log a \log d-\log b \log c}$, $\frac{\log a \log n-\log c \log m}{\log a \log d-\log b \log c}$.

(24) 5, 1.

習題六九

(1) (一) 同符號, (二) 同符號. (三) 異符號,
(四) 異符號.

(2) 相反. (2) (一) 方相向反. (二) 方向不變.

(4) 不定. (5) 不定. (6) $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$.

習題七〇

(4) 前者大. (9) 前者大. (10) 前者大.

習題七一

(1) $x>\frac{171}{49}$. (2) $a<4$. (3) $x>(a-1)$.

(4) $x>\frac{20}{11}$. (5) $x<40$, $y>-28$. (6) $x>26$, $y>40$.

(7) $\frac{5}{2}>x>\frac{5}{3}$. (8) $x>4$, $x<3$. (9) $x>\frac{5}{3}$, $x>\frac{3}{2}$.

(10) $x>3$, $x<0$. (11) $5>x>-5$. (12) $x<-2$, $5>x>2$.

(13) $x<-3$, $7>x>3$. (14) $2>x>-2$. (15) $6>x>4$.

(16) $2>a>5$.

(17) (一) $m<-5$, $m>3$, (二) $m=3$, -5, (三) $3>m>-5$,

(18) $l>\frac{1}{4}$.

習題七二

(1) (一) 4 : 1, 3 : 2. (二) 25 : 23. (三) [illegible] : 5.
(四) $(3\pm\sqrt{8}) : 1$.

(2) $a:d$.　　(4) ± 26.　　(5) $\sqrt{\frac{5}{17}}$.

(6) 3:5.　　(7) 甲 4500 圓, 乙 2700 圓.

(8) 甲 440 磅, 乙 420 磅.　　(9) $\frac{17}{19}$.　　(10) 1:7.

(11) 4:5.　　(12) 甲 $\frac{2ac-bc}{a+b}$, 乙 $\frac{2bc-ac}{a+b}$.

習 題 七 三

(1) (一) 2.　　(二) $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$.　　(三) ± 2.

(2) 408.　　(3) $1, \frac{-19}{5}$.

(10) $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$;

$\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(14) 3:64:47.　　(15) $\frac{8}{11}$.　　(16) 2.

習 題 七 四

(7) 65200 圓.　　(8) 3.96 圓, 4.95 圓.　　(9) 1770.6 圓.

(10) 21.46 圓.　　(11) 0.136 強.

(12) 0.135, 0.595, 0.405, 27 噸, 92 噸.

習 題 七 五

(2) 0.375.　　(3) 50 部.　　(4) 437.5 圓.

(5) 甲 27.2 圓, 乙 42.24 圓.　　(6) 180 圓.

(7) 25.2 磅.　　(9) 160 圓, 8 圓.

習 題 七 六

(1) (一) 45.067 圓, 355.067 圓.　　(二) 67.073 圓, 337.073 圓.

(三) 249.6 圓, 1049.6 圓.　　(四) 34.24 圓, 834.24 圓.

(五) 177.123 圓. (六) 213.75 圓.
(七) 320. 圓. (八) 800 圓.
(九) 0.06 (年), 0.005 (月). (十) 2 年 9 個月.

習題七七

(1) (一) 701.8 圓. (二) 10.3 年. (三) 14.2 年.
(四) 332.5 圓. (五) 863.83 圓. (六) 5 釐.
(七) 41.216 圓. (八) 3 年 6 個月.
(2) 24000 圓, 5 釐. (3) 8500 圓. (4) 5 釐.

習題七八

(1) 195 圓. (2) 16.2 圓. (3) 100.5 圓.
(4) 2400 圓. (5) 28000 圓. (6) 2049.875 圓.
(7) 1.5 年後. (12) 1 分 7 釐.

習題七九

(1) $2\frac{1}{4}$ 市里. (2) 39 呎. (3) 2 日 3 時.
(4) 4350 圓. (5) 1800 個.
(6) 星期午後 8 時, 7 時 54 分, 8 時 4 分. (7) 12 公斤.
(8) 10 日. (9) 24 哩. (10) 339.2 浬.
(11) 1 時 $21\frac{1}{4}$ 分. (12) 84 圓. (13) 6 時 40 分.
(14) $3\frac{3}{5}$ 分. (15) 144 市尺, 2.5 時. (16) 4 桶.

習題八〇

(1) 0.35 市擔, 20 市擔. (2) 6 角 3 分強.
(3) 15 個. (4) 零時 8 分 2 秒餘.
(5) 26.7 圓, 10.7 圓, 10.7 圓, 10.9 圓, 16 圓.
(6) 3 人, 2 人, 2 人, 2 人, 1 人. (7) 3400 人, 1020 人, 255 人.
(8) 24 個, 32 個, 36 個. (9) 2 角 8 分, 1 角 9 分, 1 角 4 分.
(10) 1980 圓, 1000 圓, 420 圓. (11) 7:3.

(12) 4:3, 15 市斤. (13) 375 個 225 個.

(14) 雞 5 隻, 兎 13 隻. (15) 8 公斤.

第十四章的總練習

(1) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$.

(5) $(-bc+ca+ab):(bc-ca+ab):(bc+ca-ab)$.

(8) $\frac{8}{11}$. (9) $c-b, a-c, b-a$. (10) 7:8.

(11) 79.62125, 110%, 93%. (12) 0.11 強. (13) 1836 市石.

(14) 1.25 分. (15) 2 市斗, 7 市斗. (16) 3 分 7 釐強.

(17) 以加貸為有利. (18) 年利 6 釐. (19) 1.2 分.

(20) 7 釐, 6 釐. (21) 7 釐. (22) 1500 圓.

(23) 31525 圓. (24) 54792 人. (25) 12.75 圓.

(26) 38 年強. (27) 十二月十二日. (28) 十二個月後.

(29) $22\frac{22}{79}$ 碼. (30) 甲 $\frac{lnqA}{lnq+mnq+mpq+mpr}$.

(31) $157\frac{1}{3}$ 圓. (32) 1120, 圓, 940 圓, 968 圓.

(33) $23\frac{1}{3}$ 兩. (34) 125 公斤, 175 公斤, 100 公斤.

(35) $\frac{r(al+bm)(p+q)+s(cp+bq)(l+m)}{(l+m)(p+q)(r+s)}$. (36) 112 市斤.

(37) 22.8 公斤, 15.2 公斤. (38) 6 艘, 4 艘.

本書奉　教育部編總陸7第19692號批審定

中華民國二十五年五月京初版
中華民國三十五年十月滬三版

簡師
簡鄉師　算　學

第三冊　定價國幣一元四角
(外埠酌加運費匯費)

編著者　任　誠
發行人　吳秉常
印刷所　正中書局
發行所　正中書局

(321)

本(本)(林)，　12/2