



天元一釋上



積學齋徐乃昌感書

江都焦循學



天元一之名不著于古籍金元之間李仁卿學士作

測圓海鏡以暢發其旨趣宋末秦道古亦載此法于

數學九章元世祖并宗之後郭邢臺遂用此以造授

時術前後百年間亦可謂顯著于世矣明顧若溪不

知所謂毅然刪去細草明世餘每以此學遂微國朝

梅文穆公悟其為歐邏巴借根法之所本于是世始

知天元一之說然李氏書雖嘗板刻而海內不多有

故學者習學借根方法而于天元一之蘊或有未窺

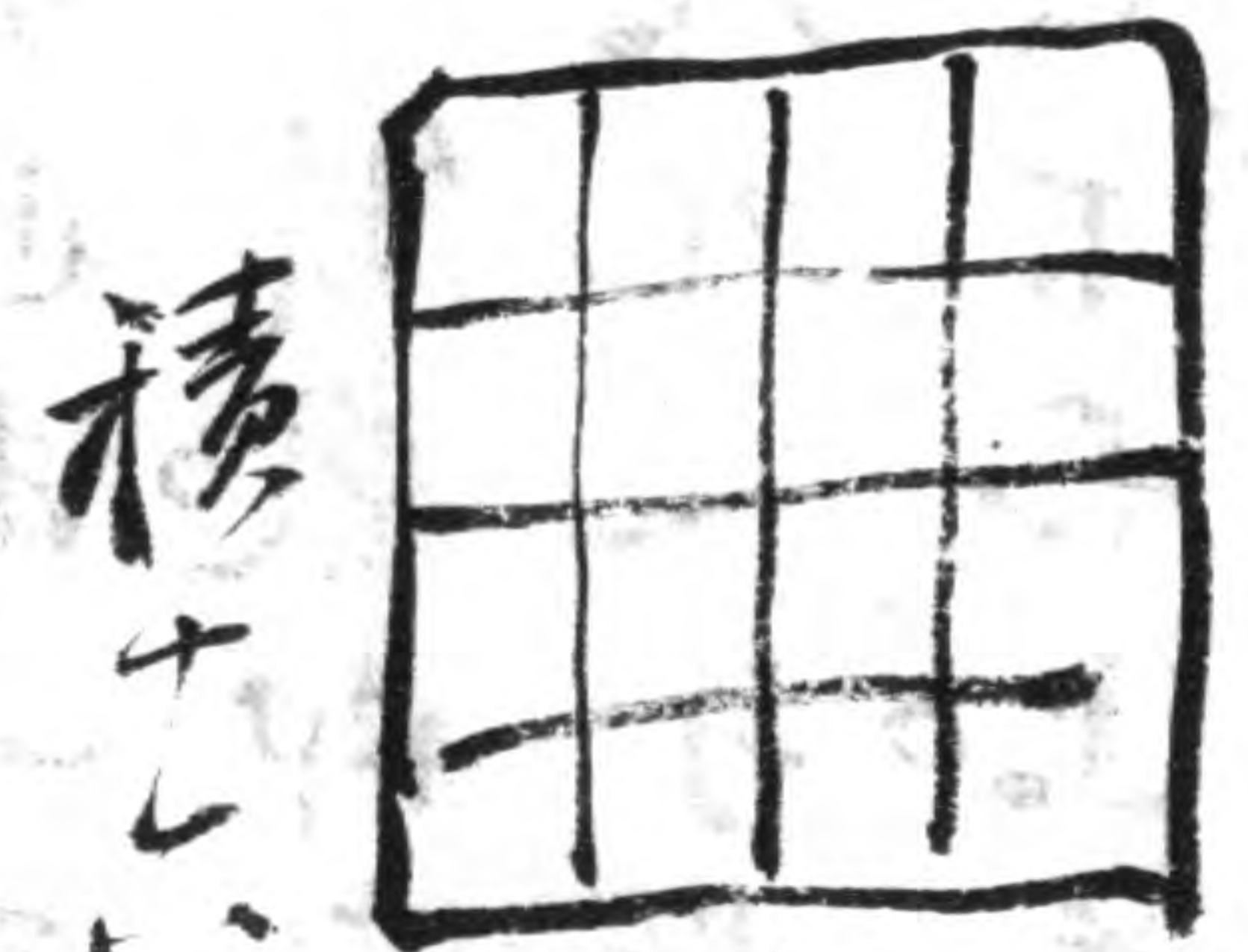
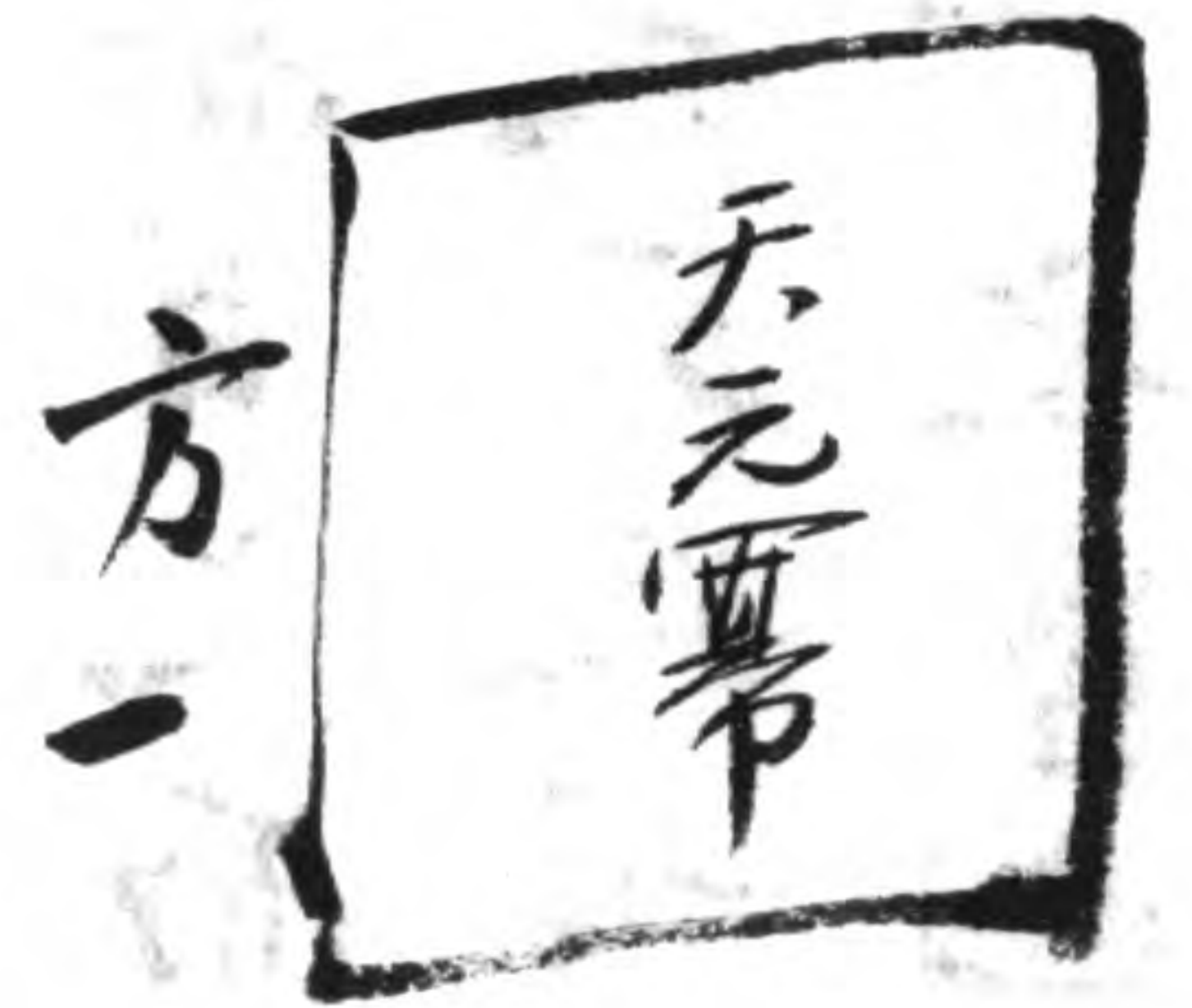
授也 有各 李異 術與 法而 天元一

者也。吾友元和李尚之銳精思妙悟，究核李氏全書，復辨別天元之相消，異乎借根之加減，重為按注，其裨益彰，信足以紹仁卿之傳，而補文穆所不逮也。循習是術，因以教授子弟，或謂謂端緒叢鮮，能知要，因會通其理，舉而明之，而所論相消相減，間與尚之之說差者，蓋尚之主明辨天元借根之殊，故指其大槩之所近，循主明主盈朒和較之理，故析其微芒之所分，閱者勿疑有異義也。嘉慶四年冬十二月除日。

天元一者，以言乎其矩也。太極者，以言乎其積也。天元冪者，以言乎其方也。

周髀算經云：方出于矩，矩出于九九八十一，一矩即直線也。八十一為積數，九九則矩矣。合之成一方，三者相為表裏，異而同者也。實有此積數八十一，即實有此矩數之九，亦即實有此方數之一。故有方數有矩數，即知積數有積數，有方數即知矩數。以天元為虛數者，非也。天元一，一即實數也。由一而二之，而十之，而百之，而千萬之，皆天元之實數，即天元之母數。有天元之母數，幾何而後得天元之子數幾何？此天元一之槩也。測圓海鏡式自下而上，蓋古演段則自上而下，義可通也。今依海鏡圖于左方。

此處按三者相例行寫



長即直線也。九九八十一者。八十一為積數。九九則
 矩矣。合之成一。方三者相為表裏。異而同者也。實有
 此積數八十一。即實有此矩數之九。亦即實有此方
 數之一。故有方數。有矩數。即知積數。有積數。有方數。
 即知矩數。是二是。一相為表裏。以天元為虛數者。非
 也。天元一者。一即實數也。由一而二之。十之。百之。千
 萬之。皆天元之實數。即天元之母數。有為天元之母
 數幾何。而後得天元之子數幾何也。

三者互相例。以成盈朒和較。

九章算術于盈不足粟米方程均輸。皆以比例齊同

與左相消。得下式 。以平方開之。按此寄左四層。第二層為天元。消去第一層。則存一天元兩太極。今仍以平方開之。是以四百一十二元天為四百一十二天元。第九問草云。得 。為圓徑。寄左。然後以 元為同數。相消得 。以平方開之。此寄左三層。最下為天元。最下為天元。則最上為立方。乃仍以平方開之。是以二萬八千八百天元為二萬八千八百太極也。大股第十四問草云。得 。元為半徑。寄左。然後得 。元為同數。相消得 。開立方。即半城徑。寄左。三層。下為天元空位。

位。又數五層。亦下為天元空位。消去空位。所得四層。則下平方。次立方。次三乘方。上四乘方。乃以立方開之。是以一萬口五百八十四萬平方。為一萬口五百八十四萬太極也。明車前第三問云。得下式 。寄左。然後以 為同數。相消得 。開五乘方。此寄左數五層。第三層以下皆太極。相消為七層。最上為三乘方。今以五乘方開之。是以一十七萬二千五百六十萬口二千八百一十六太極。為一十七萬二千五百六十萬口二千八百一十六天元也。由是推之。既消之後。無論其層之多。

寡必以最下者為太極。太極之上。必為天元。三層則必開平方。四層則必開立方。五層則必開三乘方。以至十一層。必開九乘方。三十二層。必開三十乘方也。其故何也。所求者天元之子數。天元之子數。則太極矣。是太極必不可無。亦必不可疊也。天元冪者。無母數之天元也。均為求天元中之太極而設。則烏得不以太極天元為齊同之主乎。冪可元。元可太者。何也。乘方之理也。太極積數也。為單數之積。猶之為矩數之積。且猶之為方數之積。為立方數之積。譬如層有三。下為單數之積。則單積八十一。矩九。平方一。層有

三。下為矩數之積。則矩之積八十一。平方九。立方一。層有三。下為方數之積。則方之積八十一。立方九。三乘方一。蓋方矩積。理實相通。可升可降。可下可上也。然則未消以前。必注天元太極者何也。齊其等。不容緩也。寄數之天元在上層。同數之天元在下層。必以下層當上層。故四層消而七。三層消而五。職此故也。是記天元。記太極。明注于層之間者。為相消地也。既相消矣。太極之位。必定于最下。可不更記。故不記也。以矩例積。則上法下實也。譬如積數八十一。與九個矩數等。以九為法。除得九。

是九為天元也。法之九為九天元一。除得數九。為每
天元一之數九。此正方也。天元一多屬從方。苟舉積
數八十一。與二十七天元一等。則每一天元得三。或
舉積數八十一。與二天元一等。則每一天元得四十
口五。邊股第十一問草云。得下式 $\begin{array}{c} \text{卅} \\ \text{卅} \\ \text{卅} \end{array}$ 寄左。再
得 $\begin{array}{c} \text{卅} \\ \text{卅} \\ \text{卅} \end{array}$ 元為如積。相消得 $\begin{array}{c} \text{卅} \\ \text{卅} \\ \text{卅} \end{array}$ 上法下實。得一百二
十步。按此本有四層。消去上兩層。則下兩層為一積
數。一母數。以母除積。則得子也。凡上法下實者。放諸
此。

以冪例積。則下實中空。而上開方除也。

積數八十一。天元數九。則平方矣。是為八十一與一
天元冪比。積數一百六十二。天元數十八。則二平方
矣。是為一百六十二。與二天元冪比。邊股第十四問
草。寄左 $\begin{array}{c} \text{卅} \\ \text{卅} \\ \text{卅} \end{array}$ 與天元冪相消。得 $\begin{array}{c} \text{卅} \\ \text{卅} \\ \text{卅} \end{array}$ 開平方。是為
一萬四千四百積。當一天元積冪。底句第四問草。消
得下式 $\begin{array}{c} \text{卅} \\ \text{卅} \\ \text{卅} \end{array}$ 。以立方開之。得二百四十步。此亦
天元空。而以一立方一百三十五天元冪。當二千一
百六十萬。即三百七十五天元冪。而以二百四十為
立方也。邊股第七問草。得下式 $\begin{array}{c} \text{卅} \\ \text{卅} \\ \text{卅} \end{array}$ 。以平方開之。
得一百二十步。此積數七百三十七萬二千八百。等

于五百一十二天元冪。天元為一百二十。冪為一萬
四千四百。今五百一十二冪。適當七百三十七萬二
千八百也。五百一十二天元冪。已當四立方。三十二
天元冪。而不升為立方者。無得升之勢也。錯綜變化
以相比例。以相齊同。此天元之有相通無相碍也。
大股第三問草。消得廿。卽開立方。得一百二十。
是有積。有矩。有立方。而無平方。是為廉空。其實廉亦
借名。立方之平廉長廉。自具于上層。此非立方之廉
也。若立方之廉。何可以空乎。三乘方之有第一廉。四
乘方之有第二廉。五乘方之有第三廉。皆借名也。底

白第八問。又法草。消得下式。卽以平方開之。得
三百六十。法云。半步常法。此上層為平方之半也。大
股第十二問草。消得卅。卽開立方。得二百四十
步。法云。五分隅法。此上層為立方之半也。第十三問
草。消得卅。卽開三乘方。得三百六十步。此上
層為三乘方之半也。第十七問草。卽開三
乘方。得三百六十步。法云。二分五釐為三乘方隅。此
上層又為三乘方半之半也。明虫前第十七問草。卽
開平方。得二百四十步。法云。七分半常法。此上
層為平方四分之三也。第十八問草。卽開

三乘方得二百四十步。法云。四分三釐七豪五絲為虛隅。以上層為三乘方之半不足也。雜標第十二問草。卅。非平方開得三十六步。此中空而上得平方之半。夫平方之半。即十八天元也。不為十八天元。而為半天元。冪者。不知十八天元之數。但知為冪之半也。第十五問草。懼。下。非。開平方。得八十步。法曰。二步二分五釐益隅。明虫前第七問草。疑。下。非。開平方得三十步。法曰。三步半虛法。凡言步。即方也。凡言分。方之幾分也。言三步半。此每方三三而九。三步為二千七十。半為四十五。當一方九十之半也。

也。中不空。而上冪下實。則中為從。中恒為從也。下恒為實也。

積有盈胸。則上二層皆不空。以從合冪。即成從方。所推見下。

合上冪中從。以當下實。則下和而上中較也。

和較之義。詳見加減乘除釋第五卷天元一相消之後。和較已備。和不必皆在下。而和之在下者。則理之易明者也。正率第十四問草。卜。陰。卅。如法開之。得半徑。此積九萬六千。而等于一冪六百八十天元也。半徑一百二十。以半徑自乘。得上冪一萬四千四百。以

半徑乘天元得七萬一千六百。合之一萬四千四百。
正八萬六千。是下和而中上較。猶下五中三上二。合
三二為五也。但下和數顯。上中兩較數隱耳。

合上冪下實。以當中從。則中和而上下較也。合中從下
實。以當上冪。則上和而中下較也。

上恒為方。中恒為矩。下恒為實。必不變者也。而或和
或較。則上中下無有一定。邊股第五問又法草十
以平方開之。得一百二十步。按下恒為實。是為實
積三萬四千五百六十。中恒為矩。是為天元四百口
八。上恒為方。是為天元冪一。天元冪以一百二十自

乘。為實數一萬四千四百。四百口八天元。以一百二
十乘之。為實數四萬八千九百六十。以上冪之實數
一萬四千四百。合下積實數三萬四千五百六十。正
當中矩實數四萬八千九百六十。是中和而上下較。
不啻上五下四中九合五四而為九也。明虫前第一
問草十。益積開平方。得二百四十步。按下恒為
積。是為實積八千六百四十。中恒為矩。是為天元二
百口四。上恒為方。是為天元冪一。天元冪以得數二
百四十自乘。得實數五萬七千六百。天元二百口四。
以二百四十乘之。為實數四萬八千九百六十。以中

矩實積四萬八千九百六十。合下積八千六百四十。正當上冪實數五萬七千六百。是上和而中下較。不當中七下一上八。合七一而為八也。此二者。即梅氏所謂較數方程。但此上為方耳。加上較于下較。謂之益實。減上較于中和。謂之減從。以于中和減下較。而以其餘為上較之實。以于其餘為中較之實。皆為翻積。三者之法不同。其趨一也。

梅總憲云。借根用益實。而統宗用減縱。其理無二。循謂翻積亦然。和在下。下積適包上中。直用開方法。故

為常法也。和在上中。則下積不包上中。而轉為上中

之和數所包。以上隅中從下積言之。并隅于積以當

中從。則為益積。積不足以隅益之也。減下積以當

與上。則為翻積。積本在下。今翻在上中也。減隅于從。

則為減從。從饒一隅則減之。猶積少一隅則益之也。

測圓海鏡書中。不言減從法。益古演段第十一問。

開得三十六條段。以一為虛隅。義曰減從以為

法。又六十一問。上。開得二十條段。以三為虛常

法。義曰減從開平方。皆并隅積以當從者也。后句第

五問。又法草。一。開平方。得一百二十步。翻法在

記明車前第三問。草云。一。開翻開得一百二十。此
三層翻法也。大股第九問。草云。一。開翻開立方得
一百二十步。翻法在記。此四層翻法也。皆和在中較在
上下。明車前第四問。草云。一。開翻得百二十。明車後
第十九問。草云。一。開翻平方得一十六步。法云。倒
積開得車。句。十六。此二者。皆和在上。較在中。下。于
隅中減積。與從中減積。異用同理。蓋無論是置是元。
既反減下積。義皆得為翻也。積在下。今轉在上。形似
倒置。故又名倒置耳。
翻法在記者。蓋當有^時此書。故略之不載。秦道古數

學九章田域篇第二題。尖田求積。有。開玲瓏翻法
三乘方。以四百口。六億四千二百五十六萬為實。以
七十六萬三千二百為從上廉。以一為益隅。按三乘
方當有五層。一實。二方。三上廉。四下廉。五隅。今止有
隅。有上廉。有實。闕下廉與從。蓋空其二。故曰玲瓏。以
隅之三乘積。并八實中。乃合上廉之積。初商之積。大
于原實。故用翻法。其法云。以從廉起一位。益隅起三
位。約商得十。今再起進。乃商置百。其從上廉為七十
六億三千二百萬。其益隅為一億。約實。置商八百為
定商。以商生益隅。得八億。為益下廉。又以商生下廉。

得六十四億。為益上廉。與從上廉七十六億三千二百萬相消。從上廉餘一十二億三千二百萬。又與商相生。得九十八億五千六百萬。為從方。又與商相生。得七十八億四千八百萬。為正積。與元實四百六億四千二百五十六萬相消。正積餘三百八十二億口五百四十四萬。為正實。國式云謂以負實消正積其積乃有餘為正實之換骨 又以益隅一億與商相生。得八億。增入益下廉。為一十六億。又以益下廉與商相生。得一百二十八億。為益上廉。乃以益上廉與從上廉一十二億三千二百萬相消。餘一百一十五億六千八百萬。為益上廉。又與商相生。得九百二

式云一變

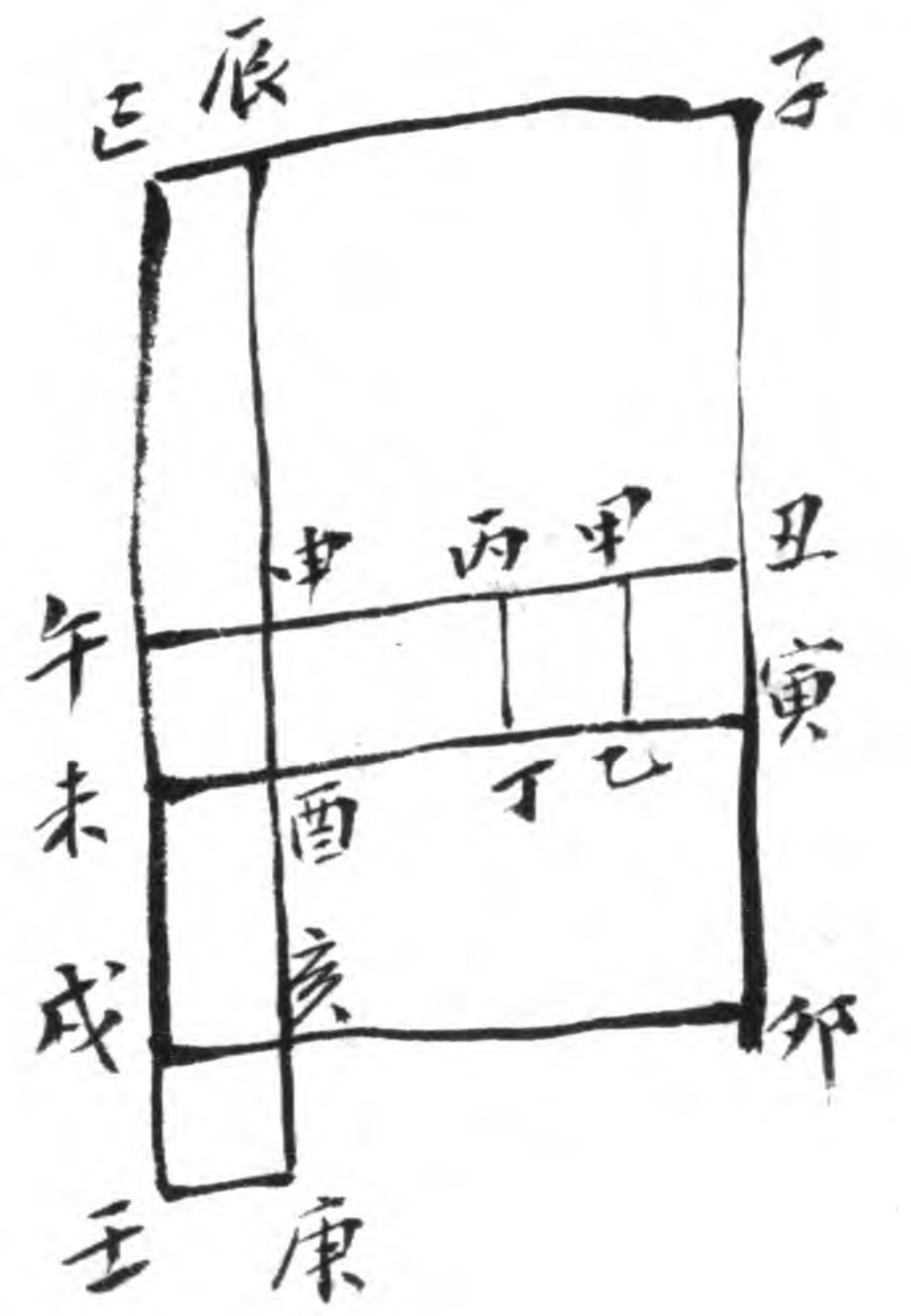
十五億四千四百萬。為益方。與從方九十八億五千六百萬相消。益餘八百二十六億八千八百萬。為益方。又以商生益隅一億。得八億。增入益下廉。得二十四億。又以商相生。得一百九十二億。入益上廉。得三百七億六千八百萬。為益上廉。又以商生益隅一億。得八億。入益下廉。得三十二億。畢其益方一退。為八十二億六千八百八十萬。益上廉再退。得三億口七百六十八萬。益下廉三退。得三百二十萬。益隅四退。為一萬畢。乃約正實。續置商四十步。與益隅一萬相生。得四萬。入益下廉。為三百二十四萬。又與商相生。

得一千二百九十六萬。入益上廉內。為三億二千口。六十四萬。又與商相生。得十二億八千二百五十六萬。入從方內。為九十五億五千一百三十六萬。乃命上續商四十。餘實。這盡。式云以續商四十。命方法除實。這盡。所得八百四十步。為田積。此言翻法甚明。益所得正積。大于原積。于正積中。減去原積。翻以正積所餘為積。故謂之翻法。又謂之換骨也。測望篇第五題。遙度圓城。開玲瓏九乘方。凡九乘方。必有十一層。秦氏立名別之。曰隅。曰下廉。曰星廉。曰文廉。曰行廉。曰維廉。曰方廉。曰次廉。曰上廉。曰方。曰實。其方與次廉。維廉。行廉。文廉。下廉。皆空。

故亦名玲瓏。其一商即盡。故相生相消。同于前法。但不以正積翻減去原積。故不為翻法。尖田求積注中言一位開盡者。不用翻法。是也。又測望篇第六題。望敵圓營。用開連枝三乘玲瓏方。此五層有實。有隅。有上廉。從與下廉空。同于尖田求積之式。商得數。雖有兩次。而初商之積。小于原積。故雖同玲瓏三乘。而不名翻法。翻以減去下實為義。其例益明矣。益古演段第二十四問云。卍卍卍倒積倒從開平方。得四十二步。按者演之云。法列積一千四百四十九步。為實。以一百零八步。為長。與濶一又七分半之和。

即從數求濶。初商四十步。以一濶七分半乘之。得七十步。以減和數。餘三十八步。以初商乘之。得一千五百二十步。以初商積大于原積。反減之。餘實七十一步。乃二因一濶七分半所乘初商之數。得一百四十步。大于和數。反減之。餘三十二步。為次商。廉次商二步。以一濶七分半乘之。得三十三步。為次商。隅凡和數。廉隅相減。此反相加。得三十五步。半。以次商乘之。得七十一步。為次商積。與餘積相減。恰盡。開得濶四十二步。又云。倒積倒從。即翻積法也。蓋初商積常減原積。此獨以原積減初商積。倍廉常減從步。此獨以

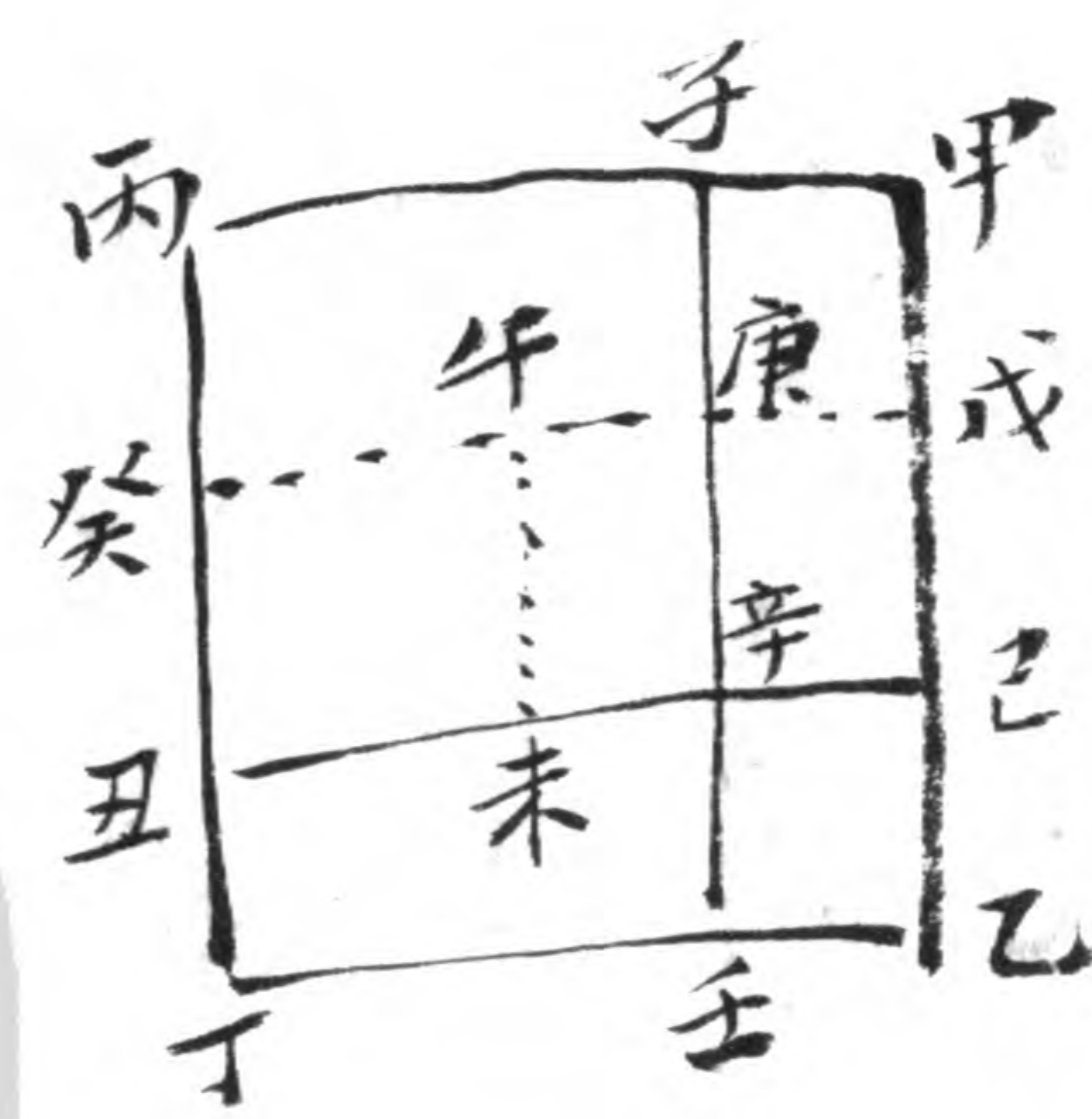
從步減倍廉。乃平方中之一變也。循按此所演翻法。即原諸數學九章其減與乘之故。試略言之。以得數四乘乘從得^二。又以四二乘乘虛隅得^二。與實相加。正符于從積。是從之數。兼隅實而合之也。以初商乘隅而減從。是從積中。減去一初商隅積矣。尚存一次商廉隅積。及原實。減去原積。止存一次商廉隅積矣。廉有二故。二因之。反減從數。所存者惟廉之所餘。及次商隅。故殘廉餘加隅。與次商相乘。而得數也。至所減之實。與所餘之廉。其間消息甚微。非明以圖。不可了然。今擬于左方。隅為七分五釐。今易為一步。



子卯己戌為從積。子寅己未為為隅積。寅卯未戌為
 原實。子丑為初商。同申丑寅為次商。同申甲乙丙丁。同申
 申酉午未。同申申酉。同申酉亥未戌。同申甲乙丙丁。
 亥庚戌壬子子卯全從。減去初商子丑。存丑卯。以初
 商乘丑卯。為丑卯申亥。大于原實。翻去原實。即減去
 寅卯酉亥。及甲乙申酉。尚存辰亥己戌。及甲乙寅卯。
辰庚己壬即是

二因初商。為己午午壬。大于己戌。翻減之。存戌壬。從
 數。即丑甲從數。以此為廉。而午未隅數。即是甲丙。是
 戌壬午未廉隅相加。即是丙丑。以次商丑寅乘之。得
 丑寅丙丁。減實恰盡。觀此圖。知以初商積翻減原實。
 與以初商數翻減原從。兩相消息之妙。其翻法開三
 乘方。其用雖繁。而理可類推矣。
 上和中下較。以初商減從。乘從。其數小于原實。于原
 實中減去此數。以為次商之實。乃倍初商為廉商。得
 數為隅。減去從。以次商乘之。恰盡。此法翻從而翻
 積。若以翻積取之。則初商自乘。翻原實以為實。又以

初商乘從。又其數大于所翻得之實。復翻去之。以所存者為實。然後倍初商為廉。次商得數為隅。相加減去從。以次商乘之。亦減實恰盡。擬圖於左方。



甲乙丙丁為上隅和數。戊乙癸丁為實。甲戌為從。以甲己初商。減從餘戊己。以庚癸乘之。庚癸與甲己等為庚辛癸丑。小于實。減之餘戊庚辛丑丁乙。曲尺形。即廉隅共數。

中少一甲戌從也。此不翻積若以甲戌丙癸為實。戊乙為從。于初商自乘。子辛丙丑平方中。減去原實。存午未癸丑。甲戌子庚與庚辛午未等又以從數庚壬。即戊乘初商。為庚壬癸丁。減去所存數。餘庚午未丑丁壬。曲尺形。即甲戌子庚與辛壬丑丁兩形。此兩形。亦即廉隅共數中。少一戊乙從也。此翻積

二因初商為己午即甲從教與庚壬此為原亦壬長於庚即甲丙是戊壬與成即甲丙是戊壬與翻減之存

戌壬從數及午未即甲從教偶數二者相加即丙即甲丙是戊壬與丑即甲丙是戊壬與以次商即甲丙是戊壬與丑即甲丙是戊壬與午未即甲從教

寅乘之得丑寅丙丁減實恰盡觀此圖知初商積翻減原實

原實與初商數之翻減原從兩相消息之妙由此而推

翻法開三乘方其用雖繁而理可類推矣

太極自乘仍為太極何也太極相乘是太極為矩也矩

相乘故得積也

太極本是積今用兩積相乘則積數以進為邊矣

如積數九今以九乘九為八十一八十一為積九進

為邊矣此亦邊積相通之故

太極天元相乘仍為天元。何也？天元之數不可知，故不能得其積。止得天元也。

天元者，統舉一矩也。以數乘之，止得若干矩耳。非自乘不可為方。不知數不可為積。有如天元一者三，以二乘之，二三如六，得天元一者六耳。若知其數，則設每天元一數九，三之為二十七，以二乘之，積五十四，乃為實積。今止乘得六，但天元一者六耳。

以天元自除得太極，何也？兩數等，其除得之數，法化為

實也。

天元非實數。以天元除之，轉為實數者。譬如天元九，以天元除天元，即以九除九也。九除九得一，故天元一化為積數一也。又如天元九，以三天元除之，即以二十七除九也。二十七除九得三，故三天元一化為積數三也。

以天元除太極。得太極下之太極。何也。勢所逐也。天元除冪為天元。天元除天元為太極也。

除者乘之反。知乘方累乘之數。即知天元除得之數矣。

冪八得五天元
冪四得二元

得四冪
得二元自冪

二元得二元
二元得二元

一元得一元
一元得二元

立八

冪天元四

天元二

太極一

太極五

天元二除立方
八得天元冪四

天元二除天元
冪四得天元二

天元二自除
得太極一



天元二除太極一
得太極下太極五

以天元除太極。所得必下于太極。以太極乘天元。所得

不上于天元。何也。冪為天元。所自乘。太極為天元。所自除。乘其所自除。猶除其所自乘也。除其所自除。猶乘其所自乘也。

天元一為乘除之樞紐。二乘二得四。上為冪。二除二得一下為太極。二乘四得八。又上為立方。二除一得五。又下為太極下之太極。一乘一除。兩相比例。其理自然。昭合。非由彊致矣。義備前表。
異數
號式者。筭之布也。斜畫者。負所紀也。

古筭算一枚當一數。從橫布之。橫者至五則從。從者至五則橫。梅徵君古算器考詳說之。測圓海鏡于數

俱用號式。此即筭之象耳。從橫相間。無有一定也。邊
白第十一問草。于寄左作  于後作  是
一四三三下。即一三三上。也。一三上三三二。
即一三下三三上。也。負則加以一。正則否。疑一
亦布筭時所加之筭。或謂正負筭分紅黑。今皆未有
考也。紅黑之法。可依之。

連

常法亦謂之隅法。益隅亦謂之虛隅。益從亦謂之益方。
益方者。別于從方也。益廉者。別于從廉也。常法者。別于
益隅也。

測圓海鏡所標諸名號。其大略以下和而中上較者
為常。止稱曰實。曰從。曰隅。因而隅法通稱常法。若和
在上。則稱益隅。和在中。則稱益從。或稱益方。亦有和

益古字誤
 十四內義云行
 負隅正或作
 正隅負共字
 皆同

在中而稱上為益隅。大股弟三問和在上而稱中為益從。雜錄第十
六間且有和在下而稱上中為益隅益從。三事和弟三問更有從
 空而稱上為益隅。明惠後弟二問推之邊股弟十五問與底句
 十五問相脗合者也。乃于底句之下，一和上三較稱
 實稱從稱廉稱隅。一依常法，于邊股則實仍稱實。而
 從則稱益從。廉則稱益廉。隅則稱虛隅。然則諸稱弟
 以標其同異。故不論正負和較，而各以類相齒也。下
 層定稱實。不加益字。其上中或以異于下而加益字。
 如和在中稱益方。和在上稱益隅也。或以合于下而
 加益字。如和在中稱上為益隅。和在中上稱中為益從。

也。益從又稱虛從。益隅又稱虛隅。虛之云者，當緣其為
 少數而名之。其立法之初，蓋以少為虛，以多為益。如
 和在中，宜稱中為益方。以別于上隅下實。或不別中
 而別上，則稱上為虛隅。而仍稱中為從。如和在上，宜
 稱上為益隅。以別于中從下實。或不別上而別中，則
 稱中為虛從。而仍稱上為隅。總之稱虛稱益，俱所以
 為別。久而弟取其有別，不復各當其名。此所由而無
 定指也。然所指無定，所別有定。草中以斜畫定之，亦
 此義也。既有斜畫，則同異自見。尤簡便也。今備錄于
 左方。斜畫者，以負為號。

正率第十四問

負較

負較

正和

邊股第二問

負較常法

負較從方

正和實

邊股第三問

負較常法

負較從方

正和實

邊股第八問

負較常法

負較從方

正和實

邊股第十二問

負較隅法

負較從

正和實

底股第二問

負較常法

負較從

正和實

底股第三問

負較隅

負較從

正和實

底白第八問

負較常法

負較從

正和平實

底白第十二問

負較常法

負較從

正和實

大股第四問

負較常法

負較從

正和實

大股第六問

負較常法

負較從

正和實

大白第四問

負較常法

負較從

正和實

大白第六問

負較常法

負較從

正和實

太白第十問

負較常法

負較從

正和實

明虫前一問又法

負較常法

負較從

正和實

明虫前第九問

負較虛法

負較益從

正和平實

明虫前第十七問

負較常法

負較從

正和平實

明虫後第十三問又法

負較常法

負較從

正和平實

明虫後第十五問又法

負較常法

負較從

正和平實

明虫後第十五問又法

負較常法

負較從

正和平實

明虫後第十五問又法

負較常法

負較從

正和平實

三事和第一問

負較常法

負較從

正和平實

三事和第三問 負較 益隅

大斜第二問 負較 平隅

大斜第三問 負較 常法

大斜第四問 負較 常法

雜糅第一問 負較 常法

雜糅第三問 正較 常法

雜糅第九問 正較 常法

之分第九問 負較 常法

右下和上中較

邊股第五問又 負較 虛法平開

負較 益從

負較 從

負較 從

負較 從

負較 從

正較 從

正較 從

負較 從

正和 從

正和 平實

正和 實

正和 實

正和 實

正和 實

負和 實

負和 平實

正和 實從

負較 實

邊股第六問 正較 常法

邊股第八問又 正較 常法

邊股第十問又 正較 常法

邊股第十七問 正較 常法

底股第五問又 正較 益隅翻開

底白第八問又 正較 常法

底白第十問 正較 隅法

大股第二問 負較 益隅

大股第七問 負較 益隅

大股第七問又 正較 隅

法 正較 隅

負和 益方

負和 益方

負和 益從

負和 益從

負和 從

負和 從

負和 從

正和 從

正和 從

正和 從

負和 益方

正較 實

正較 實

正較 實

正較 實

正較 實

正較 實

正較 實

正較 實

負較 平實

負較 實

正和 實

大股弟八問 負較 益隅

大股弟十一問 負較 益隅

大白弟一問 負較 益隅

大白弟二問 負較 虛法平問

大白弟七問 負較 益隅

大白弟七問又 正較 隅法

法 太白弟八問 負較 益隅

大白弟十一問 負較 虛常法

明車前弟三問 正較 常法翻開

明車前弟十五問 正較 常法

明車前弟十六問 正較 常法平開

明車後弟六問 正較 常法

明車後弟七問 正較 常法

明車後弟十問 正較 隅法

大斜弟一問 正較 常法

大斜弟二問又 正較 常法

大和弟一問 正較 隅法

大和弟二問 負較 虛隅

大和弟六問 負較 虛法

三事和弟一問 正較 常法

正和 從

正和 從

正和 從

正和 從

正和 從

負和 益方

正和 從

正和 從

負和 益從

負和 益從

負和 虛從

負和 益從

負和 益從

負和 益從

負和 益從

負和 益從

正和 從

正和 從

正和 從

負和 益從

負較 實

負較 實

負較 實

負較 實

負較 實

正較 實

負較 實

負較 實

正較 平方實

正較 平方實

正較 實

正較 平方實

正較 平方實

正較 平方實

正較 平方實

正較 平方實

負較 平方實

負較 平方實

正較 實

正較 實

三事和第五問 負較 常法
正和 益從
負較 平實

三事和第六問 正較 虛平方
負和 從
正較 平實

三事和第八問 負較 虛隅翻開
正和 從
負較 實

雜糅第二問 正較 平隅
負和 益從
正較 實

雜糅第十五問 負較 益隅
正和 從
負較 平實

之分第一問 正較 常法
負和 益從
正較 實

之分第二問 正較 常法
負和 益從
正較 實

右上下較中和

明虫前第一問 負和 虛隅
正較 從
正較 平實

明虫前第一問 負和 虛隅
正較 從
正較 實

明虫前第一問 負和 益隅
正較 從
正較 平實

又法 明虫前第一問 負和 益隅
正較 從
正較 平實

明虫前第四問 負和 虛隅翻法
正較 從
正較 平實

明虫前第十二問 負和 虛法
正較 從
正較 平實

明虫後第八問 負和 常法
正較 從
正較 平實

明虫後第九問 正和 常法倒積
負較 益從
負較 平實

雜糅第四問 負和 益積翻法
正較 從
正較 平實

雜糅第十六問 正和 常法
負較 益從
負較 實

右上和 中下較

邊股第五問 正 常法
負 益廉
正 從方
正 實

邊股第十五問 負 虛隅
負 益廉
負 益從
正 實

底句第五問 正 常陽 負 益廉 正 從方 正 實

底句第十五問 負 虛陽 負 廉 負 益從 正 實

大白第九問 正 陽常法 負 益廉 正 從 正 實

大和第十二問 正 陽常法 負 益廉 正 從方 正 實

右四層一和三較

底句第四問又法 負 益陽 正 從 負 益方 正 實

大股第九問 正 常法 負 益廉 正 從方 負 實

大股第十二問 正 陽法 負 益廉 正 從方 負 實

大股第十四問 負 虛常法 正 從廉 負 益從 正 實

大股第十五問 負 益陽 正 從廉 負 益從 正 實

大股第十八問 正 常法 負 益廉 正 從方 負 實

大股第十八問又法 正 陽 負 益廉 正 從方 負 實

大白第十四問 負 虛陽 正 從廉 負 益從 正 實

大白第十五問 負 虛法 正 從廉 負 益從 正 實

大白第十八問 正 陽法 負 益廉 正 從 負 實

大白第十八問又法 負 虛常法 正 從廉 負 益從 正 實

右四層二和二較

邊股第十三問 正 常法 負 益廉 正 從 負 實

底句第十三問 正 陽法 負 益廉 正 從 負 實

大股第十三問 正 常法 負 益廉 正 從方 負 實

大股第十三問 正 常法 負 第二廉 正 第一廉 負 益方 正 實

又法 大股第十六問 正 常法 正 第二從 負 益廉 負 益從 正 實

大股第十七問 正 隅 負 第二益 正 從廉 正 從方 負 實

大向第十三問 正 常法 負 益三廉 正 第一廉 正 從方 負 實

大向第十六問 正 常法 正 第二廉 負 益廉 負 益從 正 實

大向第十七問 正 常法 負 第二益 正 從廉 正 從方 負 實

明車前第二問 負 虛法益 正 第二廉 正 第一廉 負 益從 正 實

又法 明車前第十問 正 常法翻 負 益二廉 正 從廉 負 益從 正 實

明車前第十八問 負 虛隅 正 第二廉 負 第一益 負 益從 正 實

問 雜標第十七問 負 虛隅 負 第二益 負 益廉 正 從 正 實

右五層二和三較

雜標第十八問 負 常法 負 第二廉 負 第一廉 負 從 正 實

右五層一和四較

明車前第二問 負 虛法 負 第四 負 第三 負 第二 正 第一 正 從方 正 實

右七層三和四較

又法 邊股第七問 負 隅法 空 從方空 正 實

邊股第九問 負 隅 空 正 實

邊股第十四問 負 開平方 空 正 實

底白第七問 負 隅 空 從空 正 實

底白第九問 負 常法 空 正 實

底句第十四問 負 開平方

明虫前第一問 正 隅法

又法 明虫前第五問 負 常法

明虫後第二問 負 益隅

又法 明虫後第二問 負 虛隅

三事和第七問 負 益隅

雜糅第五問 負 如法

雜糅第六問 負 常法

雜糅第七問 負 常法

雜糅第十問 負 隅

雜糅第十二問 負 常法

雜糅第十三問 負 益隅

之分第六問 負 隅法

之分第七問 負 隅法

右三層有空位

邊股第四問 負 隅法

底句第四問 負 常法

又法 底句第四問 負 常法

大股第三問 負 隅法

又法 大股第十四問 負 虛隅

空

空

空

空

空

空

空

空

空

空

空

空

空

空

負 廉

負 廉

負 廉

空 廉空

空 廉無入

正

負

正

正

正

正

正

正

正

正

正

正

正

正

空 從空

空 從空

空 從空

負 從方

負 益從

正

平實

平實

平實

平實

實

平實

平實

實

平實

平實

平實

實

實

正

正

正

正

正

大句第十四問負常法

空廉空

負從

正實

右四層有空位

明車前第二問負虛常法

正第二廉

空第一廉

負益從

正實

明車前第二問負益隅

空第二廉

正第一廉

正從

正實

又法

右五層有空位

益古演段六十四問其相消數不標正負其條段所

釋大略與海鏡相同第二問唯此原本實在上今移在下開得二

十條段以二分半為虛常法義曰二分半為虛隅此

隅二分半乘二十自乘之數得一入實為三二又以

二十乘此透得三二故三問此開得六十四條

段以四分七釐為益隅義曰四分七釐為虛常法以

六四為乘得此一三三一此大于實以六四自乘為三

三三下以乘四分七釐得此一三三三一此益入實透

得一三三一此以此二問參之是稱常法與稱隅同

亦是稱虛隅與稱益隅同也第十四問義云此問原

係虛從今以虛隅命之又云從負隅正或從正隅負

其實皆同第十八問云此式原係虛從今却為虛隅

命之故以四為虛常法是可知正負為別同異之通

稱也第四十問法云相消得此合以平方開之

今不可開先以隅法二十二步半乘實二萬三千單

二步得五十一萬七千五百四十五步正。為實元從六百四十八負。依舊為從一益隅平方開。得四百六十五步。以元隅二十二步半約之。得二十萬三分之二。此二二五本是常法而非益隅。是必以商數自乘更以二二五乘之為常法矣。今二二五不乘商數之自乘數。而下乘實數。其為下和中上較無異。但多一報除以復之耳。謂之益隅者。蓋既標五十一萬七千五百四十五為正。標六百四十八為負。而隅與從類。故依從之負。而稱益從。此猶明車前第九問稱從為益從。隅為虛法。此又正負通稱之例矣。

天元一釋下

江都焦循學

欲求所不知。則以所求者為矩。是為天元一。

測圓海鏡立天元一為圓徑者三十一。為半徑者十六。為大差者六。為大句者四。為平句者五。為車句者二。為車股者七。為車弦者二。為明句者六。為明股者二。為句圓差者二。為太虛黃方面者三。為小差者七。為虛句者三。為虛弦者四。為皇極弦者二。為中差者二。為乙南行者二。為乙東行。甲南行。柳至城心步。槐樹至城心步。小句。車小句。皇極弦上股弦差。皇極

句。虛較小差股大弦通弦。半大弦平弦黃極黃方面。各一。其之分。則立為一分之數。或立為此。則兼彼。如邊股第九問。立為半徑。就以為小句。明車前第一問。立為圓徑。便以為三事和。是也。有兼而為三者。明車後十六問。立為半虛黃。便為明小差。又為車大差。是也。或不立于寄數。而立于又數者。如雜糝第五問。本知大小差數。相乘為圓霽。寄左。然後立天元為圓徑。以自之。與左相消。是也。若明車前第三問。前既立天元一為半徑。寄左。後又再立天元一為半徑。半徑即半圓徑。文偶累耳。斷無前立一天元。後別立一天元之

理也。益古演段第三問云。立天元為內池。又云。立天元為池徑。其說亦同。

秦道古數學九章卷一大衍術。有立天元一法。其名同。其用異。未可強為合也。其一為求衍數法。云。以定相乘為衍母。以各定約衍母。得各衍數。或列各定數于右方。各立天元一為子。于左行。以母互乘子。亦得衍數。又云。以右行互乘左行異子。弗乘對位本子。各得對數。按此。即張邱建蕩杯之法。衍母者。右行三母連乘之數也。衍數者。右行二母與左行一子連乘之數也。左行本無子數。借一為子。是為立天元一。

乘不長。其實仍右行二母相乘耳。衍母為三母相乘。衍數為二母相乘。以一母除衍母。猶之二母相乘。故或立天元一。以乘二母之所乘。或不立天元一。而以各定約衍母。其理可通也。

此行即大衍數之定母

此行即大衍數之立天元一

以右行互乘左行異子一母
乘對位本于右上于左上為
本于于左中下為異子

此行即大衍術之衍數

張邱建云置人數二三四列于右行置一一一杯數左行以右中三乘左上一得三又以右杯四乘之得十二又以右上一乘左中一以右下一乘之得八以右上一乘左下二乘之得六以右上一乘左下三乘之得四

三二四
二二二
二二二
二二二
二二二
二二二
二二二
二二二
二二二
二二二

以定相乘為衍母

此行即大衍術之衍母

中三乘之得六
又以二三四相乘得二十四
二乘三得六
三乘六得廿四

其一為大衍求一術云。置右^奇上。定居右下。立天元一

于左上。先以右上除右下。所得商數與左上一相生

入左下。然後乃以右行上下。以少除多。遞互除之。所

得商數。隨即遞互累乘。歸左行上下。須使右上末後

奇一而止。乃驗左上所得。以為乘率。或奇數已見單

一者便為乘率。說者謂其極和較之用。窮^偶奇之情。又

謂遞互乘除之語未詳。循按大衍求一之術。即孫子

算經三三五五七七之術也。此術九章所無。而見于

孫子。今則婦人孺子。或以為戲。孫子雖詳其術。而秦氏則闡其微。而暢發之。其置七十。即大衍求一術也。大衍術者。以元母用連環求等法。求得定母。定母連乘得衍母。立天元一。互乘得衍數。以定母約衍數。得奇。以奇與定母用求一術。得乘率。以乘率乘定母。得用數。以用數乘所問之餘數。併之為總。滿衍母去之。不滿為所分。今先以孫子術解之。

題云。今有物不知其數。三三數之。賸二。五五數之。賸三。七七數之。賸二。問物幾何。答曰。二十三。三五七元母也。約之得一。為無等。則元母即定母也。賸二。賸三。

不用連環求等法

賸二。分數也。二十三。總數也。術曰。三三數之。賸二。置一百四十。五五數之。賸三。置六十三。七七數之。賸二。置三十。并之得二百三十三。以二百一十減之。即得一百四十四。六十三。三十。用數也。二百三十三。總數也。二百一十。衍母約兩次也。術又曰。凡三三數之。賸一。則置五十五。五五數之。賸一。則置二十一。七七數之。賸一。則置十五。一百六以上。以一百五減之。即得置七。置二十一。置十五。乘率也。二十一。十五。以衍數為乘數也。七十。以定母與奇用求一術。得之也。何也。三七二十一。以五約之餘一。三五一十五。以七約之亦

母互約之而得奇。約之而奇。一無煩更齊之美。約之而奇不止一。則務齊其奇數之一。而不妨數倍其母。以化不一者為一也。倍其母以齊其奇。有二法焉。一以奇遞加以母遞減之。餘一而止。列其減數為乘率。一以奇遞減母。又以母遞減奇。餘一而止。列其減數與餘為乘率。即求一法也。立天元一于左上者。與右上餘一為預存倍數也。既以奇減母。而母亦存奇。以母之奇減奇。故商一即一倍。商二即二倍。惟右上奇減母一次。固猶是一耳。若二三以上。則必以母之奇所減奇之數與此相乘。而後加于天元一。故曰遞互

除之。又曰遞互累乘也。此可詳者也。如總數十五。以三約之。約去十二。奇三。欲齊奇因而倍母。以三列右上。四列右下。立天元一于左上。以三約四。一次即得奇一。乃列一于左下。又列奇一于右下。以一約三。二次而得奇一。以二次乘左下。仍是二。加于天元為三。是為乘率。以三乘衍數一五。為四十五。以四約之。約去四十四。餘一。此左下歸數是一。不見累乘之妙也。設如衍數十七。以七七數之。約去十四。奇三。欲齊奇因而倍母。三列右上。以七列右下。立天元一于左上。以三約七。二次而得奇一。乃列二于左下。又

左乃同類之一率。寄之以待符之合也。秦氏之寄左則未齊之行數。寄之以俟奇之齊也。李氏之所立。可
以取一切之算。秦氏之所立。止以定歸奇之用。二者
貌不相同。各有秘奧。或言李演秦說。其說野且毛。
約以化繁為簡。所以為奇一也。耳如八與十二。其等
為四。何也。八為兩四。十二為三四也。可約八為二。亦
可約十二為三。益可半則半之遺意也。三數以上。彼
此遞約。故有連環之名。等數為偶。則約奇為奇。約
偶如二與四。其等為二。偶奇若約回為二。則亦偶矣。

必約二為一。乃為一偶一奇也。連環求後。猶有可約
之等。則續約之。續約者。約此則乘彼。如甲九。乙二十
七。丙五十四。死^甲乙之等三。乙丙之等九。甲丙之等九。
以三約甲為三。以九約丙為六。以九約乙為三。此連
環求等也。甲三乙三。不復可約。乙三丙六。尚可求等
得三。乃以三除六為二。以三乘五為九。十八。此續等
也。秦氏所謂皆約而猶有類數存。姑置之。俟與他約
編。而後乃與姑置者求等約之。是也。術又云。求定位
勿使兩位見偶。又云。約奇弗約偶。或云。數俱偶。勿使
兩位一位見偶。解者云。家數連乘中。有兩偶數。則所

蓋古傳稱
太極為真積
又云真象

是為四百八十步減一天元在四百八十則盈在所
減天元則胸盈者四百八十多于差也胸者四百八
十中當少去此數也減為分數加為合數分者分于
太極之中合者合于太極之外分于太極之中而合
之以所分之餘比例得矣合于太極之外而分之以
所合之形比例得矣

太極可減天元天元亦可減太極故如積之數在太極
位也

太極加天元天元加太極其義一也惟減則有不同
如全股六百容圓半徑一百二十但知四百八十則

立天元一為股而減去四百八十為半徑是為一天
元少四百八十步也是天元一盈于四百八十之實
數而四百八十之實數轉宜減于天元之中矣明虫
之數或小于半徑故測圓海鏡于明虫之下多于天
元一之中減太極明虫前第二問云立天元一為半
徑上減明白得阮卅為虛句下減虫股得阮卅為虛
股句股相乘倍之加差羣得阮卅為弦羣寄左然
後并二行步以自之得阮卅于太極位為同數蓋差在
太極位故必于太極位比例得同數也
同名相加則異名相減減以平加之溢也同名相減則

異名相加加以補減之過也。從子盈以為正負者，餘本在盈也。異加之正負亦隨減餘之所在。反減則正負相變者，消息之妙也。變其名使數不_齊也。消息之妙也。兩同名為母，兩異名為子。兩母均正，兩子一正一負。是必以母子皆正者同加入母之正也。而母之正者，其子又負，是母之正且非全數，故必減去此負也。余于加減乘除釋卷五已詳言之。減者于盈之中去其胸所存者盈，其從乎盈自然之數如此也。因思其理餘在左則異加之正負依乎左行，餘在右則異加之正負依乎右行。又有反減之法，專以本行為主，減餘

在本行不必言。若在彼行而異加，既_因專依本行之正負，則同減之_所餘轉必變正為負，變負為正，以就本行之異加也。因反復于其理，盈在彼而彼之加數為正，是益于盈數者也。此之加數本_于為減數之_為負，減_中未_中去此數則減_者過_于所_宜減_故以_此負_之數_予以_此補之。彼之加數為負，是損于盈數者也。此之加數本_與減數之_同正減數未加此數，則所以減之者不及所_宜減_而餘_之故以_此正_之數_予以_此減則胸之中去其盈不足符其所去，必取諸加數以充之。是所減為彼之餘，轉為此之歎也。餘為多而歎

為少。烏得不正負相變哉。然假如左行為三多二右行為五少一。以左為主。三反減五為歎。二一加二為三。必于此三數減去所歎之二。故本是子三多母二。却顛倒為母三少子二矣。又如本若以右為主。則五中減三餘子二。此多數也。而母加為三。是少數。以三減二。亦是反減。是又宜以子二少母三變為子三少子二何也。右五雖盈于左三。而五少一為四。三多二為五。以五減四。則左胸而實盈。右盈而實胸。故以五與三言之。明有減餘。而以五少一與三多二較之。正是反減。反減而多少相變例也。明為減陰實反減。此

又反減中之變例也。又如本是左三少二。右五多一。多少既則反減異加之後。必右皆多數。左皆少數。此既盈俱在右。本宜從乎右。強右于左。而左數皆少于術。則通于理未協。此反減之又一義也。又設左為三少二。右為五少一。以右為主。五中減三餘二。多仍為多也。一中減二。則必反減。反減則不為餘。一轉為歎。一乃在左。本是三中之少數。三少二。止宜以一減五為四。今竟以三減五為二。已多減二數。則此反減所餘之二數。正用以補之。故不為歎而轉為餘。理雖平易。而實造微矣。

置本數于左為寄左。設又數與之加減為相消。相消與相減皆同減而異加也。然相減者有減餘者也。相消者無減餘者也。

相減者隨舉一母子為本數。又隨舉一母子以減之。同減異加之後得數或加或減皆得所餘。相消者彼此俱為同數。雖參差不齊而平其差則皆齊。如云五少一四也。二多二亦四也。五與二減得三一與二加亦得三。上下相比數本相合而特叢雜于或盈或胸之差。去其叢雜使數之相合了然。明露夫陰消陽息易卦有之。此云相消亦其義也。相消乃相減之一端。

猶開方為除法之一端。開方者自乘無從之除。相消者減盡無差之減。名義可通而用有辨矣。

接上寫

同名相乘均得盈。異名相乘均得胸。胸乘胸轉得盈者。胸中之盈也。胸乘盈必得胸者。盈外之胸也。

盈之乘盈其得盈也。可知者也。胸之乘胸亦轉得盈。蓋胸在實數之內。實數已乘得積。而又以胸乘實數。以為減之地。兩胸交乘實數。成兩廉形。而兩廉之交處。必疊兩隅。疊兩隅是多一隅也。多一隅即多此胸乘胸之數也。多此胸乘胸之數。是于宜減之數。而又減之。減于廉之中。不當益于實之中。于實為胸。于廉轉為盈。故胸乘胸得盈也。若所加之天元在實外。實乘為方矣。天元自仍在方外。雖與實相乘。難與實相

混矣。

於甲乙丙丁內減去甲戊乙丁壬己曲尺形今
乘得甲戊乙庚及壬丁辛乙兩形比曲尺形多
一辛乙己庚胸乘胸之形
甲戊為胸甲乙為盈壬丁為胸丁乙為盈

丙戌與丙壬實也戊甲壬丁天元也丙甲丙丁
為實外加天元
此皆盈與盈同名相乘



其不可除者。為不受除。不受除者寄之。謂之寄分母。分

母之中。有不受除者。則分母之中。又寄分母。

邊股第四問云。置東行步為小句。以中股乘之。得數

合以中句除。今不受除。便以為小股也。下注云。內寄

中句分母。舊按云。不受除者。無可除之理也。凡二數

此數與彼數無可除之理。則不受除也。蓋除有法有

實。實可二。法不可二。此題以中句為法。而中句內有

一元。又有十六步。其為數已二矣。又何以均分不一

之數乎。故曰不受也。第九問草云。立天元一為半徑。

即以為小句率。其二行差。即以為小股率。乃置甲南

行步加入天元一為股。以小句乘之。合以股除。今不

受除。便以此為大句。內寄小股分母。舊按云。此所謂不受除。乃其數奇零不能盡。非無可除之理也。第五題云。置大股在地。以小句乘之。得下式。合以小股除之。今不受除。便以為大句。內寄小股分母。又置天元半徑。以分母小股乘之。以減大句。循按此問。欲得底句。因先求大句。大句必求從小句比例。乃有小句。而小股不可用以除。因委曲而用寄分之法。徑得大句。然大句較底句。尚多一半徑。而此大句者。既為寄分徑。得之大句。不可與半徑減。故必以分母乘半徑。而後可減也。大句為分母所乘之大句。則半徑亦必為分

母所乘之半徑。此問蓋李氏示人以相減例也。大股第十三問草云。立天元一為半徑。二之。減甲南行為大差。以自之。為大差冪。加于南行冪。半之。為大弦。內帶大差分母。別寄。又置乙斜行。為小弦。以大股乘之。合大弦除。不除。便以此為小股也。內帶大弦分母。按此大弦為小股中所帶之分母。而大弦之分母中。又帶大差分母。蓋欲得小股。先求大弦。欲求大弦。先得大差。轉轉寄帶。不憚委曲。餘瑣者。為同數相消地也。心思之妙。不啻蟻之穿九曲珠。夫所以啓後學之聰明者。可謂至矣。

分母以不除寄之。即以不乘消之。寄左不可消。則又數以分母乘之。分母之中有分母。則寄左以分母中之分母乘之。分母中之分母。帶分母者無之也。

寄分母之法。其相消之例。有數端。邊股第六問草云。置大股以小句乘之。合以小股除。今不受除。便以此為大句內帶小股分母。又倍天元以小股乘之。以減于大句。為句圓差。合以股圓差乘之。緣此句圓差內。已帶小股分母。小股即股圓差更不須乘。便以此為半段黃方冪。更無分母也。按此言相消之法。甚明了。句圓差乘股圓差。得城冪之半。即半段黃方冪。是必乘而得冪。

也。小股為一率。小句為二率。大股為三率。必小股除之。乃得大句也。而小股既即為股圓差。則前之不除。正可以代後之乘。而後之不乘。正可以代前之除。故前不除而寄分母者。後不乘而更無分母也。第四問寄左中寄中句分母。其又數以中句乘之。為同數。第五問寄左中寄小股分母。又數以分母小股乘之。為同數。此緣寄左中。不能以一乘一除。兩相消抵。故于又數中乘之。以消此不受除之數。同在寄數中。以不乘消之。分在寄數。又數中。以乘消之。不除則數多而溢于彼。不損此之溢。而增彼之坳。則兩相平矣。譬之

市僧負我債。我取其貨物而不留值。此以不乘消之之義也。醫者欲制肝而先強肺。相墓者苦右高而左加隄焉。則乘以消之之謂也。第十問草云。置乙南行步為小股。以句率乘之。合以股率除。今不受除。乃便以此為小句。內寄股率分母。以小句大句相乘為半徑。內帶股率。為分母。寄左。然後置天元自乘。又以股率。乘之為同數。按此兩相比例。大句小句內。皆寄股率分母。小句大句既相乘。則所寄兩股率亦相乘而為股。故寄左中帶股。而又數亦以股。幕乘也。大股第十三問草云。大弦帶大差分母。別寄

因股第十三問草。大弦帶大差分母。別寄小股。又帶大弦分母。因以邊股乘小股為半徑。此半徑。內有大弦分母。緣別寄大弦分母。元帶大差分母。故又用大差分母。乘上半徑。為帶分半徑。也。所帶之分。謂只帶大弦分母也。寄左。然後以大弦乘天元。為同數。循按此寄分中。又有寄分之相消法也。帶大差分母之大弦。既別寄矣。而小股中所帶之大弦分母。乃不帶分之。大弦非別寄帶分之。大弦也。又數以大弦乘天元。此大弦正別寄之大弦。中有大差分母者也。然則寄左數中所帶之分。別無所帶。而又數

中所乘之大弦轉多一大差分母矣。故豫于寄左數中。以大差分母乘之。以為同數相消地耳。別寄之分母隨乘而入。不用之以除。則大差分母無由入小股中。不受除而帶分母。自帶大弦之正數。不帶大弦之假數也。第十四問草。以股冪加大差冪半之為大弦。內帶大差分母。又置股冪減大差冪半之為大弦。內帶大差分母。又置股冪減大差冪半之為大句。亦帶大差分母。大差即白弦較乃置明弦以大句乘之。合以大弦乘。不除。便以此為小句。內帶大弦為母。其大句內。元有大差分母。不用。即明白也。以底句乘明句。為半徑冪。

內帶大差及大弦為母。寄左。然後置天元冪以大差通之。又以大弦通之。為同數。此寄數帶兩分母。而又數。又以兩分母乘之也。大句中有分母不用者。又教之大弦。其中有大差分母。依前法。則寄數中之半徑冪。宜豫以大差乘之。今因小句中。本帶大差大弦兩母。故以不乘抵之。非不用也。有以消抵之也。蓋寄數小句中。有分母二。底句中有分母一。在小句中者。其一為不帶分之。大弦。其一為大句中。所帶之大差。在底句中者。為大句中。之大差。是帶兩大差一大弦也。又數既以大差通之。又以帶大差分母之大弦通之。

是亦兩大差一大弦。適相消抵。因不必復用相抵之法。冥然化其消息之跡。故曰不用也。是明帶兩分母。實暗帶三分母也。又一法。草云。股圓差。即大差。加股。半之。為大弦。寄大差分母。減股。半之。為大句。寄大差分母。以大白乘明弦。合大弦除。不除。便以為小句。寄大弦分母。又以股乘明弦。合以大弦除。為小股。不除。而又以同母通分之。為同分小股也。又置明弦。以大弦通之。得通分小弦也。三位相併。為股圓差。寄左。然後以天元大差。以大弦分母通之。為同數。此則寄數中。共帶六分母。而以一。分母齊之。法至此。精妙極矣。

矣。六者何。大差三。大弦三也。其在小句中有大白所帶大差。有不帶大差之大弦。是為一大差。一大弦也。其在小股中。有同母通分之大差。有不帶大差之大弦。是又一大差。一大弦也。其在小弦中。有通分之大弦。有大弦中所帶之大差。是亦一大差。一大弦也。而小句小股小弦併之。即股圓差。則以帶大差之大弦通之。不啻以六分母通句股弦之三位也。原注云。大股乘時。無大差分母。故令通之。以齊大句上所有大差分也。云大股乘時無大差分母者。言大股中無大差分母。非若大白中有之。故前大白乘明白弦為小

向。其中有大有差母。其股乘明弦為小股。則無大有差母也。以同母分通之。則均有大有差母。故曰通之以齊也。同分同于大句中之分也。審此用同分以齊大句中
之大差分母。則前所謂大差分母不用者。詎真不用乎哉。第十八問草下注云。其大句內有大有差分母。其大股內却無分母。故今乘過復。以大差通之。齊分母也。此注尤彰明較著矣。寄分之法。為天元一造微之境。比例齊同。全賴此以濟其窮。故李氏詳言之。即其一隅。可以知三。因復闡明其故。俾學者易知。故不憚煩云。

接連
寫

又數與寄數相齊。謂之同數。亦謂之如積。如積之例。當其較。則舍所盈。故加于盈而數合也。當其和。則包所胸。

故減其胸其數合也。

測圓海鏡^{卷中}列加減二法。謂之正率。天元一之術。實無出此二者。其他變化錯綜。皆由此而推之耳。題云。或問出西門南行四百八十步有樹。出北門東行二百步見之。問徑幾里。其減法云。立天元一為半徑。置南行步在地內減天元半徑。得^三。為股圓差。又置乙東行步在地內減天元。得下式^{一〇}。為句圓差。以句圓差乘股圓差。得^一。為半段黃方冪。即城徑之半也。寄左。又置天元冪以倍之。得^一。亦為半段黃方冪。與左相消。得^十。如法開之。得半徑一百

二十步。循按置南行步減天元者。積數四百八十中少天元一也。置東行步減天元者。積數二百中少天元一也。兩行步本是一半徑帶一圓差。今減去天元半徑。故為句圓差股圓差也。減雖在天元。實不當在積也。及兩積相乘除。去天元所當之積。餘為半城冪之積。故如積者。但如此半城冪之積。以為之冪。或為之天元。以合于除去之天元。則與下積適相當矣。譬之積如粟。天元。天元冪如錢。粟一斗值錢二百。先付錢六十。當減去粟三升。今不減。但記曰。已納錢六十。則他日持錢取粟。僅持七升之值百四十錢。而遂當

一斗之償矣。粟未減也。亦非妄以七升之值當一斗之償也。前後之值相合也。此乘得積數九萬六千。如斗粟也。六百八十天元多一天元。如先付三升值也。如積之二天元。與一天元。相減。為一天元。如他日持七升之值也。夫付過三升之值。則我他日之持錢。胸三升之值。而取盈三升之值矣。後所持合于先所付。自不虧缺。而後之所持。則必舍于先之所付。此減法之如積也。其加法云。置南行步。加天元一。得阮卅為大股。又置乙東行步。加天元。得阮卅為大句。相乘得阮卅為一个大直積。以天元除之。得下式

阮卅卅為三事和。寄左。然後併二行步。又併入句股。共得阮卅為同數。與左相消。得十阮卅。以平方開之。循按加于行步之外。則為四百八十步多一天元。二百步多一天元也。句股相乘為句股積。今句股中各胸一半徑。則所乘得之實數。不足一句股積數。不知積數所缺者若干。惟知所缺之天元及天元。若干。故為九萬六千步。多六百八十元。一天元。此之所多在實積外。而如積之數。必如句股積以為之。天元以為及天元。而齊之。夫天元既在實積之外。而如積。又合天元與實積之形。則于如積中。減去實外之

天元及冪自適當乎積矣。譬之以錢二百買粟一斗。而此一斗粟中適欠六十錢之粟。今持錢二百買之。而粟止有七升。則必于所持之錢除去六十。而後相合也。白股冪如粟一斗值也。九萬六千步。如七升也。六百八十元一天元冪。如所欠六十錢之粟也。一千三百六十步二天元。即白股冪之如積者也。蓋白股冪不可得其同數。故以天元除之。為三事和。三事和者。白股弦相併也。而白股弦又無實數。故但為一千三百六十多二天元也。試又譬之。農與市僧交易。農舊負僧錢三十。僧舊負農粟六升。今農持錢八十。向

僧買粟八升半。僧曰。于錢減三十。餘五十。粟減六升。餘二升半。蓋粟八升半。暨錢三十。與粟六升暨錢八十。適相等。九萬六千步多六百八十天元一天元冪。與一千六百步二天元適相等。其義亦猶是也。三層之相消。或有三餘。餘均在^較上。則和在下也。或有三餘。餘均在^較下。則積必益也。其餘必分兩畔^者也。兩畔之數既等。其相消之餘。亦必兩邊相等。其兩層者。一法一實。不待言矣。三層者。相消之後。必分兩畔。而兩畔所分。必一畔得一層之減餘。一畔得兩層之減餘。其兩層之減餘。與一層之減餘。數既相等。則此

兩層者。必為一層之較。而一層者。必為兩層之和。兩層餘在上中。則和在下。兩層有一層餘在下。則和必在上中。而其一層在上中。與下相耦者。則益隅益方也。其情甚隱。其理實平。余于加減乘除釋卷五。已發明此旨。相消必分兩畔者。緣兩畔之相等也。若不相等。則減餘可偏在一邊。此相消與相減。所以同而異也。亦惟減餘必分兩畔。所以天元一之相消。與方程之直除。亦有間也。譬之粟。每斗值錢一百二十。豆每斗值錢八十。今一農有粟一斗。豆二斗。錢二十文。一農有粟一斗五升。豆五升。錢八十文。數各不同。而值

實相等。皆三百文因而相消。一農餘豆一斗五升。一農餘粟五升。各餘一百二十而豆之一斗五升。已足敵粟與錢之兩色。是豆和而錢粟較矣。必益錢于粟。乃可敵豆。是錢為益隅也。

借根之用加減。與相消法異。而數同。何也。試質言之。有如左之數五。右之數十。不等也。今日左之數五多。五則與右之十等矣。其相消以下五減十。餘五。上多五。無對。是上下皆五。為相等矣。其用加減也。則左右各減以五。左之多五者。今不復多。而右之十者。今以減去五。而亦止存五。是亦兩相等也。蓋兩邊各減。仍

不啻以左減右。故為法不同。而數必同耳。或左數五。右數十。不曰五多五。而曰十少五。亦相等。則相消以五減十。亦上下皆五。而相等矣。或各加以五。則右十之少五者不少。^復而左五亦加五。而為十。是亦兩相等也。此所加減之五。未嘗一乘再乘。故明了易知。若以乘隱之。假如以五為一根之數。則左五之多五。為左五多一根。右十之少五。為右十之少一根。相消。則是以五當一根。以一根除五。仍得五。猶五與五等也。相減。則左五本多一根。今減一根。相抵為五。右十減一根。為十少一根。相加。則左五加一根。為五多一根。右

十本少一根。今加一根。相抵為十。然後均用相減。為一根與五等。仍相消也。是多費一番加減也。學者言算數之術。後人勝于前人。恐亦未盡然乎。

不啻行

當其空。則正負相變者。同名相就。同必化為異也。異名相投。異必化為同也。

相消之理。既詳之矣。兩畔俱空。則此層為從空。廉空矣。若一畔空。一畔有數。九章謂之無入。無入者。無對也。試以三層言之。此畔上下皆正。彼止有中正。此同名也。然此中正者。與彼上正下正為相等。則以此就

彼此和而彼較不得仍皆稱正。而混淆無別。故正變為負也。若負則必有两層。或彼一畔上正下正。此一畔中負下正。兩下正同名相減。而彼之上正投入此畔。化而為負。何也。此下正為和中負為較。尚少一較。移彼正于此。全其為較矣。故亦負變為正也。若不以此上正投此。而以此中負下正就彼。亦變為中正下負。蓋下本為和。雖經減去。恰合增入之數。仍為和也。表之于左方。

三正	口	四正	三正	七負	四正
口	七正	口	三負	七正	四負

右同名變異表一

三正	口	四正	三正	六負	三正
口	六正	一正	三負	六正	三負

減餘三

右同名變異表二

三負	口	十正	三負	二正	一正
口	二負	九正	三正	二負	一負

減餘一

右同名變異表三

三正	口	四正	三正	二正	五負
口	二負	九正	三負	二負	五正

減餘五

右異名變同表一

八正 口 一負
 二負 九正 加得十
 八正 二正 十負
 八負 二負 十正

右異名變同表二

其同減異加。則盈不足之義也。

同數相消。似于方程。乃細揆之。實為盈不足之理。何也。方程之直除。可同減異加。亦可異減同加。惟盈不足。則止可同減。不可異減。止可異加。不可同加。天元一之相消亦然。蓋方程之兩色相對待。各樹一幟。雖有隱伏。而自脩和較之全。盈不足之多處^數。止露其端倪。兩行之差。不啻呼吸相關。縷牽身動。和較脩

者。加減可無定。止有差者。加減必有定也。天元一下為實數。即盈不足之出率也。上為多數。少數即盈不足之兩盈兩胸一盈一胸也。必兩相消而後和較。乃脩是未消則盈不足之兩行。既消則方程之一色也。邊股第八問。大白阮^卅。自乘得白冪^一。寄左。又以大弦六百八十。加大股阮^卅得阮^卅。以小差阮^卅。乘之得^卅。為同數。相消得^卅。按舊術。股弦較乘股弦和。即白冪。小差即股弦較。故乘股加弦之數。而與白冪同數也。此數方矩積皆有對。在左者積四萬。則多四百天元。一天元冪也。^{在右者積}明為假令之三

萬則少九百六十天元一天元冪也。分明為假令之一盈一胸矣。于是兩實同名相減。兩天元兩冪異名相加。而得一十九萬二千少一百三十六天元二天元冪。此天元一數為一百二十。乘一百三十六。得一十六萬三千二百一十。自乘得一萬四千四百。二之得二萬八千八百。合此二者。正與實合。是實為和。而天元與冪為較也。即此三層皆對者。而推諸無對。無不皆然。若以兩實同名相加。則實愈多。兩天元兩冪異名相減。則愈少。何以成一和兩較之式。不成一和兩較之式。而天元一之數。何從而得之乎。

其有和有較。則方程之體也。

既消之後。和較皆脩。與方程之一行色同。但方程之隱伏。在通色一乘。此則多一層。多一乘。方程層層俱隱伏。此則下層必露真數。天元以上。乃遞增乘為隱伏。故方程無論幾色。一以除法馭之。天元一必視多層。以乘方馭之。仍報除之理耳。盈不足方程。均用互乘。此不用者。互乘所以齊同。此則已同數矣。不必更齊也。方程和較脩。用直除。此和較脩無須更消者。消在前也。合方程盈臆不復之理。以推之。天元如積之妙。豈能外九章哉。之分第九問。皆以方程法入之。其一純用。

減而首色減盡。謂之曰直減。直減者直除也。減盡謂之空。其一首色相加。謂之直加。次色減盡。謂之中空。前一法同減。後一法同加。異減。此方程異于天元一者。故標之以方程也。而方程之同加同減。可以隨用。蓋九章古法。藥城時猶守未替也。其用開方。則少廣之法也。

天元一之術。惟上實下法者。僅用法除。其三層以上。不明諸乘方算法。未可通也。但其為方也。無論一乘再乘三乘。多則可至幾千幾百。如邊股第七問五百一十二天元零下之可半。可二分半。可七分半。故一乘再乘三乘之後。更須

有以乘之。則于開方恒法。又有變化也。

其貫方于從。則商功之也也。

王孝通緝古算經。亭臺羨道諸術。以積求邊。以差求全。以所知者為從。以不知者為方。開方得之。天元一之所本也。然緝古之術。有積有差。而天元一術。有差而積不具。彼為徵實。故減其不齊。以為齊。此為扣虛。故必有立天元寄分母。如積相消諸法。蓋造于微也。其如積相比。則均輸之趨也。其寄分取率。則衰分粟米之變也。

均輸者。于無比例中。求為比例。如積者。亦于無比例

之中。求為比例也。惟均輸所求者相同之率。天元一
所求者相同之數。相同之率。由似以得其真。故異乘
而除之。相同之數。緣分以得其合。故相消而除之。邊
股第四問云。置東行步為小句。以中股乘之。合以中
句除。今不受除。便以為小股。按此即三率比例。中句
為所有率。中股為所求率。小句為今有數。小股為所
求數。緣中句半虛半實。不可以除。故有寄分之法。以
參其變。而其本原。則衰分粟米之今有而已矣。以乘
代除之法。一見于方田章注。七人賣馬之題。一見于
均輸章太倉三返之題。詳見加減乘除釋卷七彼因後有所除。而豫

以乘代之。此因前未曾除。而後以乘齊之。彼相代于
今有之外。此相齊于今有之中也。且今有之理。中二
率相乘。同于首尾兩率相乘。今寄數以中二率相乘。
又數以首率乘尾率。自然相等。其義甚常。并不必以
乘代除之深曲矣。

其就分則方田之餘也

測圓海鏡未有之分一卷。所以課諸分也。夫諸分之
有分母。正不啻天元一術之立天元。故幾分之幾。即
以一分為一天元也。但諸分之子母。同是渾稱。而天
元之下實或則為真數。下實者。未除之子數也。故術有

不同耳。

其測圓則句股之精也

測圓海鏡一書專以明白股之精微也。第一卷詳列
識別雜記極神明變化之用。所以如積。所以同數。其
樞機全在于此。如大直積必化為三事。和兩相乘即
為半段黃方。是也。識別已詳。茲不備錄。
或謂李冶之說天元一為演秦九韶之法。蓋以秦為
宗人。李為元人。元宜在宋後也。循按元史。治以至元
二年卒于家。年十八。是為宋度宗咸淳元年。上溯生
年。為金世宗大定十九年。當宋孝宗淳熙六年。治卒

後十六年。元世祖始并宋。又按秦九韶之名。不著宗

史。惟周密癸辛雜識續集言九韶字道古。秦鳳間人。

數學九章叙自稱其籍為魯郡近盧氏補宗
史藝文志因以九韶為魯郡人蓋失考核年十八。在鄉里為義

兵首。既出東南。多交豪富。性極機巧。星象音律算術

以至營造等事。無不精究。從李梅亭學駢儷詩詞。游

戲裘馬弓劍。莫不能知。性喜侈好。大嗜進謀身。或以

歷學薦于朝。得對有奏稿及所述數學大略。淳祐四年
韓祥請台

山林布衣造歷從之
薦九韶宜在此時與吳復齋交尤稔。復齋即
吳潛吳有地在湖

州西門外。皆水所經入城。而勢浩蕩。乃以術攫取之。

建堂其上。位置皆出自心匠。齋錢如揚。遍謁臺幕。賈

以術攫取說亦

其術果如是也
惟履考去何得
又有片履考

在卷中與
絕妙詞選
云李公甫
名劉號梅
事

秋聲宛轉得瓊州。至郡數月罷歸。又言吳復齋在鄞。亟往投之。吳時入相。使之先行。曰：當思所處。秦復追隨之。吳旋得謫。賈當國。徐撫奏事。竄之梅州。在梅治。政不輟。竟殂于梅。癸辛雜識所紀甚詳。今撮其略。考賈鎮淮揚時。在理宗淳祐十年。當元憲宗時。復齋之謫。在景定初年。其殂梅之時。與治之卒相先後。其年必大。于李。况李居河北。秦處浙東。同時異國。不得謂李演秦說也。九韶為秦鳳閣人。若以秦鳳閣言之。建炎間已入于金。九韶為義兵首年。已十八。則年百餘歲矣。然秦鳳閣所屬之階成。岷鳳四州終金之世。未嘗去。宋九韶蓋此四州人。周密本舊時地名。稱之曰。但為義兵首。不知在何年。其年齒遂無可考。治本傳。治登金進士第。辟知鈞州事。歲壬辰。城潰。治北渡。流落忻崞間。世祖在

聚書環堵

中州集李治中適子治字仁卿正大七年叔世科

小字双行

自叙云。老大以來。得洞淵九客之說。日夕玩繹。而嚮之病我者。使爆然落去。而無遺餘。山中多暇。客有從余求其說者。于是手又為衍之。累一百七十問。本傳云。治晚家元氏。買田封龍山下。學徒益眾。按言山中多暇。則是買田。即後日。蓋甲辰台對後。即歸元氏山下。言客有求其說者。即學

潛邸聞其賢。召之。太宗紀。四年攻鈞州。克之。世祖紀。歲甲辰。帝在潛邸。思有為于天下。延藩府舊臣。及四方文學之士。問以治道。辛亥。憲宗即位。盡屬以漠南漢地軍國庶事。遂南駐瓜忽都之地。是治以元太宗四年北渡。其名見潛邸。則在憲宗辛亥以前。測圓海鏡。自叙。標戊申。秋九月。去甲辰。止五年。則此書蓋始創于流落忻崞時也。九韶數學九章叙。標淳祐七年。是年歲次丁未。比戊申。止前一年。治書之不本于秦明矣。郭守敬授時術。用天元一算。向股弧矢容圓。郭卒于仁宗三年。年八十六。上溯藥城叙書之年。相距七

往益泉之一端也乃
叙稱病我者使爆
然落去稱又為行
之可見先已有成
稿至元氏山中復
理之耳所云老大
以素蓋指忻峙時
際書特事壬辰
已五十五故稱老
大

十載邢臺時年十六歲。方治學洞淵九客之說。蓋猶
未生邢臺之學。本始於樂城啓之。乃世祖至元十三
年召修授時術而治已前卒。故一代制作遂首推邢
臺。無復知有樂城矣。學者稱秦在李前。或叙郭于李
前。均非實也。王德淵海鏡後叙云。敬齋先生病且革。
語其子克修曰。吾生平著述。死後可盡燔去。獨測圓
海鏡一書。雖九九小數。吾常精思。致力於此。後世必
有知者。嗚乎。百餘年來。不絕如綫。至今日而其學大
著。精神所結。鬼神護之。樂城自信。詎虛言哉。秦九韶
為周密所醜詆。至于不堪。而其書亦晦而復顯。密以

和密向之深

一樣大字寫

填詞小說之才。實學非其所知。即所稱與吳履齋交
稔。為賈相竄于梅州。力政不輟。則其人亦有足多者。
益亦瑰奇有用之才也。元史李治傳。不言其天元一
之學。且誤海鏡為鏡海。自叙稱取天臨海鏡之
義。則必不名鏡海矣。益古猶段為
益古。通疑。明儒之苟率。又何至若溪始然耶。

密又述楊守齋
之言稱斷事不
平。為楊如墨
必遭其毒手
此亦影借之言
又言以劍殺命
絲殺所善子
又言同透渡而
色善密自標
同于陳腔視又
惡。其觀之非獨
即乃九韶之履歷。既類此。以信則福。之世正。好以著之。其



