大學用書

微分方程通論

ABRAHAM COHEN 著
李緒文
倪可權 譯

正中書局印行

大學用書

微分方程通論

ABRAHAM COHEM 著

李緒文
倪可權 譯

正中書局

中華民國三十四年七月初版
中華民國三十六年七月滬四版

微分方程通論

全一册　定價國幣十六元
（外埠酌加運費匯費）

編訂者	ABRAHAM COHEM
翻譯者	李緒文 倪可權
發行人	吳秉常
印刷所	正中書局
發行所	正中書局

(1887)

本(本)(林)　2/2

譯　序

本書於 1933 年經著者增加材料，改善編制，已在原序中略述。茲就譯者所見，將此增訂本與原版之異同，逐章比較如下：

第一章大部改編，由數理化各問題而引起微分方程之說明甚詳。初學讀此，當較原版易感興趣。

第二章與原版大體相同，新增齊權方程一節。

第三章之末新增應用問題甚多，除關於物理學者以外，亦有三數化學應用題。餘與原版大致相同。

第四、五兩章與原版無大區別。

第六章卽原版之第七章，所述平直方程諸解法，雙方大略相同。惟新增應用一節，內分九款，盡係平直方程在物理學各部門之應用，例解詳盡，習題尤多，此節竟占二十餘頁之篇幅。至於原版則僅有極少數之例題與習題耳。

第七、八兩章卽原版之第八、九章，兩者大致相同。

第九章卽原版之第十一章。著者在序文中曾言此章幾已完全改編。改編以後，較前明晰，存在定理敍述較詳，且新增 Frobenius 解法，指標方程有重根或倍根諸款，及 Legendre 方程，Bessel 方程等。

第十章卽原版之第六章，僅新增特別解法一節。

第十一章卽原版之第十章，兩者大略相同。

第十二章亦與原版大略相同.

第十三章新增一級偏微分方程之解之幾何意義一節,餘僅稍有更動.

第十四章新增特別之解,Fourier 級數及其應用數節.此兩者對於已知原始條件之應用問題頗切實用.餘尚無甚相異之處.

就全書言之,增訂較多者爲第一、三、六、九、十四諸章.餘若文字之修正,及其他微末之改易,隨處皆有,不勝枚舉.原版第六、十兩章移作第十、十一兩章,亦較合事理.因全微分方程及聯立方程組對於初學固稍嫌困難,且以其與偏微分方程關係甚切,允宜將其置於後者之前也.又在篇幅方面,本書較原版多五十餘頁,約當原版五分之一.經此增訂,原版晦澀不明、材料不豐、編制不善諸弊俱已除去,而新增實用問題,材料之多亦足以顯明微分方程效用之宏,尤爲本書特色,對於初學堪稱優良教本之一.

統觀全書,習數學者固可以此爲來日進窺高深理論之基礎,而理工學生用作教本或參考用書亦頗合宜.

本書譯述以直譯爲主,力求信達.數學名詞以最通用者爲準.物理學名詞悉遵二十三年教育部公布之審定名詞.初見各名詞皆附註原文,並於書後附列譯名表,以便查考.

譯文疵謬,在所難免,至希讀者隨時見示.

三十一年五月　　譯者謹識

增訂本原序

本書大概保存原版面目，惟其若干節目編排之次序及陳述之格式曾有重要之改進．就經驗所示，習題均已校訂並增加其數量．常微分方程及偏微分方程關於物理學之主要應用問題，增益尤多．以級數求積分一章幾已完全改編．

著者接受多方面之積極建議，曷勝榮幸，玆已採用之以改善原書矣．Johns Hopkins大學之 John Williamson 博士與 Pennsylvania 州學院之 Teresa Cohen 博士曾詳讀本書之證，並賜以多數有價値之指示，著者尤爲感荷．在準備稿件時承 Inez T. Loewus 夫人切實相助，亦深爲銘感．

Abraham Cohen.

1933 年，三月．

原　　序

著者曾在數年內爲有志進修工程學或其他物理科學，與志在繼續研習純粹數學及數學物理學之學生講授微分方程．本書卽就該學程內容編輯而成．

本書要旨，在使學生對於所習見之方程大率能瞭解其求積之原理與方法．所示各種解法爲數雖多，曾習全年微積分學之學生當易領悟，且於多數方程及其各不相涉之種種解法當知如何融會貫通．著者頗有意於使本書內容充分廣博，俾可用作參考手册而無害於其爲教本之功用．許多小註與注意皆分處插入，此等註釋均不致令正文有間斷之弊，而其本身又予學生以興趣與實益．書中又有若干歷史方面與參考文籍方面之敍述．

*　　*　　*　　*　　*　　*

著者嘗就方程之可藉初等方法解出者分類整理，並注意減少其解法．爲令學生對於本學程之全部獲得更清晰之整個觀念起見，特於章末各附撮要，並於書末另附全書撮要，凡此皆可自證其各具相當價値．

在正文中與習題中引用之幾何應用題與物理科學之應用題爲數甚多．

多數習題雖曾散見各書，然新擬者亦不少，且所採納之題均足

以說明微分方程與積分學之各種解法．多數例題皆詳細演算，藉以解釋書中較重要之各種解法；學生自可應用積分表，但不宜稍存非此不可之念．多數之解，形雖簡而其涵義頗饒趣味．印校之誤曾極力減免．果仍有此，著者甚願讀者見告．

藉未定係數法求常係數平直方程特解解法之完備，據著者所知，當以此書爲始．

偏微分方程所賅至廣，本書僅述其少數要目，即此已足以適應讀者之需要矣．

經熟慮後，著者決心放棄敍述 Lie 氏理論之一章，希能另撰專書述此重要部門．

Massachusetts 工業專校教授 F. S. Woods，Iowa 州大學 L. G. Weld 與 Illinois 州大學 E. J. Townsend 諸先生曾各以高見惠示，均著者所心感，謹誌其謝忱於此，以爲殿焉．

Abraham Cohen.

Johns Hopkins 大學，

Baltimore, Maryland,

1906 年．十月．

目　　次

第一章　微分方程及其解

I·1. 微分方程　一方程式之含有微分 (differential)或一個或多個導式 (derivatives) 者曰**微分方程**(differential equation).

此類方程乃由多種問題之解析的敍述所引起. 舉例言之, 任一幾何問題涉及曲線之斜率或曲率者, 當以解析方式表示時, 即得一微分方程. 例如以一曲線上任意一點 (x,y) 之切線垂直於至該點動徑(radius vector) 之性質定該曲線, 則表此性質之解析式具下形式

(1)
$$y'\equiv\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},\qquad \text{即}\quad xdx+ydy=0.$$

若此切線不垂直於動徑而與之成一定角 α, 則此解析式爲

(2)
$$\frac{y'-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{yy'}{x}}=m,\qquad \text{其中}\quad m=\tan\alpha.$$

上式去分數後亦可書作

(2′)
$$mx+y-(x-my)y'=0,$$

$$\text{即}\quad (mx+y)dx-(x-my)dy=0.$$

若用極坐標, 則方程式 (2) 具較簡之形式

(3)
$$\frac{\rho}{\rho'}=m,\qquad \text{即}\quad \frac{md\rho}{\rho}=d\theta.$$

某曲線之一切切線與原點之距離皆爲k之性質可表以微分方程

(4) $$\frac{y-xy'}{\sqrt{1+y'^2}}=k,\qquad 即\ (y-xy')^2=k^2(1+y'^2).$$

如一曲線有曲率半徑爲常數之性質，則表此事之解析式爲

(5) $$\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}=k,\qquad 即\ k^2y''^2=(1+y'^2)^3.$$

在可以數學方法駕馭之多種問題中，當其定律表以解析方式時，則得微分方程．試研究一質點沿一直線之運動，當其受一力作用而得一加速度與其至此直線上某定點之距離成比例，且其方向常對該點．如以定點爲原點，則表示此定律之解析式爲

(6) $$\frac{d^2x}{dt^2}=-\mu^2x,$$

其中μ乃一常數．

在化學方面吾人可引下列之事爲例．在某項化學反應中，一物質變質之速率與其在該時刻所存留之量成比例．以x表示至某時t此物已變質之量，以a表示其原有量，則此定律可以微分方程

(7) $$\frac{dx}{dt}=k(a-x)$$

表之，其中k爲一常數．

一曲面上每點(x, y, z)處之法線須與$z=0$平面遇於點$(x_0, y_0, 0)$而使$x_0/y_0=x/y$之性質可表以

(8) $$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

在緊張彈性索之運動情形,於某種假定之下,其運動律以微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \tag{9}$$

表示之,式中 x 乃一點在此索兩端聯絡線上量得之坐標,y 則爲其去平衡位置 (position of equilibrium) 之位移 (displacement).

I·2. **微分方程之分類** 微分方程之僅含一自變數者(因之祇含有通常導式者),曰**常微分方程** (ordinary differential equation). 方程 (1),(2),(3),(4),(5),(6) 與 (7) 卽其例也.

一方程中之自變數如不祇一個,以致含有偏導式者,則曰**偏微分方程** (partial differential equation). 方程 (8) 與 (9) 卽屬此類.

所謂一微分方程之**級** (order) 者乃指其所含最高級導式之級. 方程 (1),(2),(3),(4),(7) 及 (8) 爲一級;方程 (5),(6) 及 (9) 則爲二級.

所謂一微分方程之**次** (degree) 者乃指其化爲有理且去分數後所含最高級導式之次. 方程 (1),(2),(3),(6),(7),(8) 及 (9) 爲一次;(4) 及 (5) 則爲二次.

I·3. **解** 聯絡自變數與應變數之一關係式*,不論自變數之值爲何,如恆能適合一微分方程,則稱爲該方程之**解** (solution).

微分方程爲其解所適合,可以下述各種方法驗之.最普通之方法

---

* 此類關係式常稱爲此微分方程之積分 (integral),而解一名詞則限用於應變數已解出之形式,卽其值已顯明表出者. 此乃通行歐陸之習慣,但本書之命名原則與英美所習用已久者相同.

爲求出應變數及其導式之値以自變數之函數表之，代入微分方程.其結果當爲一恆等式.

關係式 $x^2+y^2=1$ 及 $x^2+y^2=c$,（c 爲任意常數）爲 (1) 之解，因可求其微分以驗其無誤也.

又 $\rho=e^{\theta/m}$ 及 $\rho=ce^{\theta/m}$（c 爲任意常數）爲 (3) 之解，因可求其微分而得 ρ 與 ρ' 之値代入原方程驗其無誤也.

在方程 (4) 之情形，以 c 表任意常數，固可將 $y-cx=k\sqrt{1+c^2}$ 之導式代入 (4) 而驗明其爲一解，但 $x^2+y^2=k^2$ 亦甚易驗明其爲一解.

從微分方程 (5) 作成之方法觀之，a 及 b 表兩任意常數，則圓族 (family of circles) 方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$ 必適合 (5). 此可作一習題留待學者求兩次微分，以 y' 及 y 表 y''，以 x 及 y 表 y' 而自驗之. 將兩者代入，則得一恆等式或與圓族方程相一致之關係式.

a 及 b 爲兩任意常數，則 $x=\sin\mu t$，或 $x=\cos\mu t$，或 $x=a\sin\mu t$，或 $x=b\cos\mu t$，或 $x=a\sin\mu t+b\cos\mu t$；經兩次微分後，吾人易見其皆能適合方程 (6).

試求 $\partial z/\partial x$ 及 $\partial z/\partial y$，代入偏微分方程 (8)，易見 $z=x^2+y^2$，及 $z=a\sqrt{x^2+y^2}+b$（a,b 爲任意常數），及 $z=f(x^2+y^2)$〔$f(x^2+y^2)$ 爲 x^2+y^2 之任意函數〕皆爲其解.

仿此，$y=x+at$，$y=x-at$，$y=f(x+at)+\phi(x-at)$ 皆爲 (9) 之解〔f 及 ϕ 各爲 $(x+at)$ 及 $(x-at)$ 之任意函數〕.

由上述說明，可見一微分方程之解可有無限個. 此恰爲應有之事，蓋學者咸知求一函數之積分後固當加一積分常數，如

$\int \cos x dx = \sin x + c$, 此 c 即常數也.

在微積分中所習見之積分問題,無非微分方程問題之最特殊者耳. 求積分 $\int \cos x dx$ 乃求一函數 $\sin x + c$, 其導式適爲 $\cos x$ 者. 就微分方程之方法言之, 即求 $y' = \cos x$ 之通解 $y = \sin x + c$ 也.

若解中一常數之值可以隨意指定, 則曰**任意常數** (arbitrary constant), 如 $y = \sin x + c$ 常爲 $y' = \cos x$ 之解, 固無論 c 之取何值也. 於上述解之說明中有須注意者, 一級常微分方程之解含有一個任意常數, 或不含任意常數. 至於二級微分方程之解則含有二個或一個任意常數, 或竟不含任意常數.

爲與解中任意常數區別起見, (2) 及 (3) 中之 m, (4) 及 (5) 中之 k, (6) 中之 μ, (7) 中之 k 及 a 則曰**文字常數** (literal constants). 敍述問題時此等常數之值可隨需要而指定*, 但一經指定, 則在此解中其值即不容更易.

如上所示, 任意函數可出現於偏微分方程之解中. 偏微分方程之討論將於第十二章中述之. 吾人現在所論以常微分方程爲限. 然則常微分方程之解最多究能含若干任意常數之問題自將隨之而起.

I·4. 由原函數求微分方程　由關係式

(1) $$y = a \cos x$$

論之, 其中 a 爲任意常數. 求其微分, 得

(2) $$y' = -a \sin x.$$

---

* 在特殊問題中此等常數之值已預先規定, 如 (2), (3) 中 m 之值隨已知之 a 而定; (6) 中之 μ 則視所用儀器而定其值; 其他亦然.

由上二式消去 a,得

(3) $$y'+y\tan x=0,$$

按(§I·3),此式乃一微分方程,而以(1)爲其解.

但此非以(1)爲解之唯一微分方程,求(2)之微分,得

(4) $$y''=-a\cos x.$$

由(1)及(4)消去 a,得

(5) $$y''+y=0,$$

爲以(1)爲解之二級微分方程.

或由(2)及(4)消去 a,而得

(6) $$y''-y'\cot x=0$$

爲以(1)爲解之另一微分方程.

或求(3)之微分,吾人又得二級微分方程

(7) $$y''+y'\tan x+y\sec^2 x=0,$$

該方程必仍以(1)爲其解,因(3)已如此也.

更進而求(4)之微分,從此結果分別與(1),(2),或(4)消去 a,則得三個三級微分方程,各以(1)爲其解.

此方法可無限進行.

a 及 b 爲任意常數,求

(8) $$y=a\cos x+b\sin x$$

之微分,則有

(9) $$y'=-a\sin x+b\cos x.$$

普徧言之,欲消去兩量如 a 及 b 者,須有含此兩量之三個關係式.故須再求(9)之微分以得第三關係式

(10) $$y''=-a\cos x-b\sin x.$$

吾人現可消去 a 及 b，並求得其結果爲微分方程

(11) $$y''+y=0,$$

按定義，該方程當以 (8) 爲其解.

求 (10) 之微分，則有

(12) $$y'''=a\sin x-b\cos x.$$

用此關係式及 (9) 以消去 a 及 b，吾人求得

(13) $$y'''+y'=0,$$

爲以 (8) 爲解之三級微分方程.

此方法亦可無限進行.

爲正確計，吾人將云與一含有一個或多個任意常數之已知關係式相當而以之爲原函數(primitive)之微分方程，乃一以之爲解之最低級微分方程. 因此，以 (1) 爲原函數之微分方程爲 ( )，以 (8) 爲原函數者則爲 (11).

在通常情形，由一含有 n 個獨立的* 任意常數之關係式求 n 次

---

* 關係式中所含任意常數如何乃爲獨立之問題，在此討論，殊太繁複. 如一組常數不互相獨立，以視察法或其他淺易方法亦常可發現之. 例如 $y=ae^b\sin x$ 中之 ae^b，並不較單一之任意常數 a 更爲普通. 再於 $ax^2-2by+c=0$ 中實祇含兩獨立常數，而非三獨立常數，因任意選擇三者之一組值，較之任意選其二者對於第三者之比，並不更爲普通. 又如關係式 $ax^2-2bxy+y^2=0$，就 y 解之，得

$$y=(b\pm\sqrt{b^2-a})x,$$

可見其祇含有一個任意常數而非二個任意常數，因其實與

$$y=cx$$

無異，並不更爲普通也.

微分，則另得 n 個關係式. 蓋在通常情形+，欲消去 n 個獨立量之充要條件，爲有含該 n 個量之 $(n+1)$ 個獨立關係式. 由此方法之結式必無歧異. 因原函數須恰求 n 次微分，故由一含有 n 個獨立的任意常數之原函數，可得唯一之 n 級微分方程.

玆求相當於下列諸原函數之微分方程以說明之:

習題 1. $y=ae^{-x}+be^{2x}$.

於此 a 及 b 爲任意常數. 求兩次微分，有

$$y'=-ae^{-x}+2be^{2x},$$

$$y''=\quad ae^{-x}+4be^{2x}.$$

吾人必須從此三式中消去 a, b. 第二式加第三式，第一式加第二式，乃得僅含 b 之兩關係式

$$y''+y'=6be^{2x},\quad y'+y=3be^{2x},$$

從此二式消去 b，得

$$y''+y'=2(y'+y),\qquad 即\qquad y''-y'-2y=0,$$

爲所求之微分方程.

習題 2. $(x-c)^2+y^2=r^2$.

此中 c 爲任意常數. 求一次微分，有

$$x-c+yy'=0.$$

從此二式消去 c，今有

$$x-c=-yy'.$$

代入原方程，乃得

$$y^2y'^2+y^2=r^2.$$

+ 令此事眞實之條件之正確敍述，置此殊嫌太繁.

3. $y=cx+\sqrt{1-c^2}$.

4. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

〔a 及 b 爲任意常數〕

5. $y=c_1x^2+c_2$.

6. $x^2+y^2+cx=0$.

7. $c_1x^2+c_2y^2=1$.

8. $y=ae^{kx}+be^{lx}$.

〔a 及 b 爲任意常數〕

9. $x^2=2cy+c^2$.

10. $y^2=4c(x+c)$.

11. $y=\sin(x+c)$

12. $y=\sin cx$.

I.5. **通解與特解** 吾人若就一微分方程言之,則其含有最多個獨立的任意常數之解乃其所從自之原函數.蓋按§I·4之定理,其解所含之任意常數不能多於 n. 又解中所含任意常數之個數,亦必適爲 n;否則,此解將爲一較低級微分方程之原函數矣.

解之含有最多個之任意常數者,曰**通解**(或**全解**)(general or complete solution).

可從通解中指定任意常數之值而得之解,曰**特解**(particular solution).例如 $y=\cos x$ 及 $y=\cos x-\sin x$ 皆爲 $y''+y=0$ 之特解.

如§I·3中所云,微分方程之問題,以積分問題爲其特例,故積分中之通常問題:求解

$$\frac{dy}{dx}=f(x),$$

僅爲求一含有兩變數之一級微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

[$f(x, y)$ 可爲兩變數之函數]之解之問題一特殊情形耳．吾人通常稱爲求積分或解方程式(integrating or solving the equation)；在較簡之積分問題，則曰求積(quadrature)．

求與所設原函數相當之微分方程之直接問題，可按求微分與消常數之通則進行．至於其逆問題，求一微分方程之原函數或通解，則無通則可循．

以下諸章，就方程之可求其通解者分類列論．在此初等教本中，吾人所論，僅係可以求積法求得其解之數種微分方程．

實則，微分方程有不能以初等方法解決者．在此種情形，常須引用函數論之有力方法．此皆超出於本書範圍，惟有數種較簡易之問題，其解可作無窮級數之形式者，則將論及．

因研究特殊問題而引起之微分方程，則僅求其適合於此問題之特種情形之特解．如可求得通解，則往往可由此以得其所需要之特解．有時通解雖不可求或不易求，而此類特解仍可求得．

再則，偏微分方程之通解常含有任意函數，而該函數又過於廣汎，故所需之特解不能常由通解直接求得．此時所需之特解卽以他法求之，而與通解無涉．

第二章　一級微分方程

II·1. 變數已分離或可分離　就 dy/dx 解之，則一級微分方程將具下形式

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y),$$

或去其分數，更可寫成較爲勻稱之形狀

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0.$$

如 M * 僅爲 x 之函數，N 僅爲 y 之函數，即

$$M(x)dx+N(y)dy=0,$$

則兩變數稱爲已經分離（separated）．在此，將兩項分別求積而使其和與一任意常數相等，即得其解

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=c.$$

分離變數往往甚易．如 $M=f_1(x)f_2(y)$ 及 $N=\phi_1(x)\phi_2(y)$，以 $\phi_1(x)f_2(y)$ 徧除全方程，則得

---

* 本書中所謂某組變數之函數，並不必含有其全體變數．此函數可爲一常數，並不含有變數．故 $M(x,y)$ 可兼含 x 及 y，可祗含其一，或竟爲一常數而二者俱不含．仿此，$M(x)$ 可含 x，或爲一常數；但決不含 y．

$$\frac{f_1(x)}{\phi_1(x)}dx+\frac{\phi_2(y)}{f_2(y)}dy=0,$$

其變數業已分離矣.

微分方程之解常可以數種形式之一表示. 至於何者最爲適宜,則無一通則. 事雖如此,惟就常情言之,與其寫成含有超越函數(transcendental functions)之形式,則不如用代數式之形狀,而含有根式者則又不如有理式爲佳. 不特此也,在可能情形任意常數之函數,亦宜以一單獨之文字代之.

習題 1. $xydx-(1+x^2)dy=0.$

以 $y(1+x^2)$ 除之,得

$$\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{dy}{y}=0.$$

求積分,有

$$\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)-\log y=c,$$

即

(1) $$\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{y}=c,$$

此即通解也.

因按此處所用自然對數之定義,$e^{\log u}=u$, 故 (1) 可改書爲

(2) $$\frac{\sqrt{1+x^2}}{y}=e^c,$$

此乃一代數式. c 既爲一任意常數,故 e^c 亦然,吾人可以一文字 C 代之. 此解乃可寫成

(3) $$\sqrt{1+x^2}=Cy$$

之形狀，或以一任意常數之倒數$\frac{1}{k}$代e^c，則此通解具下形式

$$(4)\qquad y=k\sqrt{1+x^2}.$$

且若以c_1代C^2，c_2代k^2，則(3)及(4)各可改成

$$(5)\qquad 1+x^2=c_1y^2 \quad 及 \quad y^2=c_2(1+x^2).$$

吾人可擇(1)，(2)，(3)，(4)或(5)之任一形式以作通解.

習題 2. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0.$

分離變數，有

$$\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0.$$

求積分，得

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=c.$$

取兩端之正切可使各項爲x及y之代數函數，

$$\frac{x+y}{1-xy}=\tan c,\quad 或更簡爲\ \frac{x+y}{1-xy}=c_1.$$

學者可證明通解之另一形式爲

$$y=\frac{c_1-x}{1+c_1x}.$$

習題 3. $e^xy^3dx-x^2dy=0.$

分離變數並求積分，吾人求得其解爲

$$\int\frac{e^x}{x^2}dx+\frac{1}{2y^2}=c.$$

此中所含第一項之積分不能以初等函數 (elementary functions) 表之. 在此類情形,有時祇求其適合於已知問題中所有條件之近似解(approximate solution),而使其誤差(error)在預定範圍內,此種積分之結果以無窮級數表之爲便. 此處須注意

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

故此解可書作如下形式*

$$-\frac{1}{x} + \log x + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \cdots + \frac{1}{2y^2} = c.$$

4. $xydx + \sqrt{1+x^2}dy = 0.$

5. $(x - xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0.$

6. $(y+3)dx + \cot x dy = 0.$

7. $\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0.$

8. $\sin x \cos y\, dx + \cos^2 x dy = 0.$

11·2. **齊次方程** 通常所見之一類方程,其變數有不能由視察而分離,但經簡易之變數變換 (transformation of variables) 後卽可分離之者. 此類方程中之 M 及 N 乃 x 及 y 兩次數相同之齊次函數 (homogeneous functions). 果爾,則 M/N 爲一零次之齊次函數,因之

---

* 凡級數各項爲變數之整次冪者可逐項求積.

亦爲 y/x 之一函數.*

吾人今可書上方程爲

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=F\left(\frac{y}{x}\right).$$

令 $\frac{y}{x}$ 爲一新變數 v, 則

$$y=vx, \quad \text{及} \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx},$$

而此微分方程改成

$$(2)\qquad v-F(v)+x\frac{dv}{dx}=0$$

之形式, 其中兩變數可以分離 (separable) 矣.

---

* 一 x 及 y 之 r 次齊次函數, 乃此二變數之如是一函數. 當其中之 x 及 y 順次代以 tx 及 ty (t 表任一乘數), 其結果將爲原函數之 t^r 倍者 (此定義可推廣至於任何個變數之函數, 且亦顯然與齊次多項式之定義相一致). 此定義可以表之如次: 設 $f(x,y)$ 爲一 r 次之齊次函數, 則

$$f(tx,ty)\equiv t^r f(x,y),$$

其中符號≡, 不僅用以表示其爲 x 及 y 之方程式, 且爲一恆等式, 對於 x 及 y 之一切值咸能適合.

今苟令 $t=1/x$, 則

$$f\left(1,\frac{y}{x}\right)\equiv\frac{1}{x^r}f(x,y), \quad \text{即} \quad f(x,y)\equiv x^r f\left(1,\frac{y}{x}\right)\equiv x^r F\left(\frac{y}{x}\right).$$

在特例中, 當 $r=0$ 時, 則 $f(x,y)\equiv F\left(\frac{y}{x}\right)$.

參考著者微積分學之 §113,

求積分後，再以 x 及 y 表 v 之值代入，即得所求之通解。

習題 1. $(xe^{y/x}+y)dx-xdy=0$.

令 $y=vx$，則 $dy=vdx+xdv$，且原方程取下形式

$$x(e^v+v)dx-xvdx-x^2dv=0,$$

即
$$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{e^v}=0.$$

求積分，有 $\log x+e^{-v}=c$，即 $\log x+e^{-y/x}=c$.

習題 2. $x\frac{dy}{dx}+y=2\sqrt{xy}$.

令 $y=vx$，則 $dy/dx=v+x\,dv/dx$，且原方程取下形式

$$x^2\frac{dv}{dx}+2xv=2x\sqrt{v},$$

即
$$\frac{dv}{2(v-\sqrt{v})}+\frac{dx}{x}=0.$$

令 $\sqrt{v}$ 為一新變數以求第一項之積分．作成此積分，則有

(3) $$\log(\sqrt{v}-1)+\log x=c.$$

化簡之，即得 $x\sqrt{v}-x=e^c$，或 $\sqrt{xy}-x=c_1$.

化為有理，最後乃得

(4) $$x^2-xy+2cx+c^2=0.$$

此處用 c 以代任意常數 c_1．此與 (3) 之 c 並不相同．因 (4) 為解之另一形式，用常數 (constant) 一字之第一字母 c 以代此二形式通解中之任意常數，當不致混淆而有錯誤。

3. $(y^2-xy)dx+x^2dy=0$.

4. $x\dfrac{dy}{dx}-y+\sqrt{y^2-x^2}=0$.

5. $(2x^2y+3y^3)dx-(x^3+2xy^2)dy=0$.

6. $\left(x+y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx-x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$.

7. $(x^2+y^2)dx-axydy=0$.

8. $(y^2-x^2+2mxy)dx+(my^2-mx^2-2xy)dy=0$.

II·3. **方程中 M 及 N 爲平直式而非齊次式者**　設 M 及 N 均係一次式而非齊次式，則可變換其變數而使之化爲齊次式．設此方程有下形式

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0.$$

令

$$x=X+\alpha,\qquad y=Y+\beta,$$

則此方程取下形式

$$(a_1X+b_1Y+a_1\alpha+b_1\beta+c_1)dX$$
$$+(a_2X+b_2Y+a_2\alpha+b_2\beta+c_2)dY=0.$$

若能選取 α 及 β 使

$$a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0,\quad 及\quad a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0,$$

則此方程卽化成齊次，而 § II·2 之方法可應用於此矣．

習題 1.　$(4x+3y+1)dx+(x+y+1)dy=0$.

方程

$$4\alpha+3\beta+1=0,\quad 及\quad \alpha+\beta+1=0,$$

其解爲　　$\alpha=2$,　　及　$\beta=-3$.

故可變換

$$x=X+2, \qquad y=Y-3,$$

即化原方程爲齊次方程

$$(4X+3Y)dX+(X+Y)dY=0.$$

令 $Y=vX$, 得

$$\frac{1+v}{(2+v)^2}dv+\frac{dX}{X}=0.$$

因　$$\frac{1+v}{(2+v)^2}=\frac{2+v-1}{(2+v)^2}=\frac{1}{2+v}-\frac{1}{(2+v)^2},$$

故易於求積分而得

$$\log(2+v)+\frac{1}{2+v}+\log X=c,$$

即　$$\log X(2+v)=c-\frac{1}{2+v};$$

因之　$$\log(2X+Y)=c-\frac{X}{2X+Y}.$$

仍易爲 x 及 y, 乃得

$$\log(2x+y-1)=c-\frac{x-2}{2x+y-1}.$$

2. $(4x-y+2)dx+(x+y+3)dy=0$.

3. $(2x-y)dx+(x-2y-3)dy=0$

當 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時, 此法不能適用. 於此, 可另求一種變換法

使變數分離。因 $a_2/a_1=b_2/b_1=k$ 係一常數，故原方程取下形式

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+[k(a_1x+b_1y)+c_2]dy=0.$$

如令 $a_1x+b_1y=v$，則 $dy=(dv-a_1dx)/b_1$，而上方程變爲

$$b_1(v+c_1)dx+(kv+c_2)(dv-a_1dx)=0$$

之形式，其中並無 x，故變數可因之而分離；蓋當 M 及 N 中俱無某一變數時，變數之得以分離固顯然也，

4. $(2x+y)dx-(4x+2y-1)dy=0.$

5. $(2x-y+3)dx+(4x-2y+7)dy=0.$

6. $(15x+6y-7)dx+(5x+2y-3)dy=0.$

* II·4. **齊權方程** 推廣§II·2附註中齊次函數之定義，可得一齊權函數之定義如次：如可求得一數 m，而以 tx，t^my，及 $t^{m-1}y'$ 順次代函數 $f(x,y,y')$† 中之 x，y 及 y'，其結果適爲原函數之 t^r 倍；即若

$$f(tx,t^my,t^{m-1}y')\equiv t^rf(x,y,y').$$

則 $f(x,y,y')$ 謂爲**一 r 權之齊權函數**(an isobaric function of weight r)。在特例中，如 $t=1/x$，則上式化爲

$$f\left(1,\frac{y}{x^m},\frac{y'}{x^{m-1}}\right)\equiv\frac{1}{x^r}f(x,y,y'),$$

---

* 有此符號之各節，如學程簡短，可刪去。

† 本書常以 y' 表 $\dfrac{dy}{dx}$，此處亦然。

卽

(1) $$f(x,y,y')\equiv x^r f\left(1,\frac{y}{x^m},\frac{y'}{x^{m-1}}\right),$$

亦卽

(2) $$f(x,y,y')\equiv x^r F\left(\frac{y}{x^m},\frac{y'}{x^{m-1}}\right);$$

換言之,齊權函數可書作 y/x^m, 及 y'/x^{m-1} 之一函數與 x^r 之乘積.

命形式如 (1) 之一齊權函數等於零之微分方程,曰**齊權微分方程**(isobaric differential equation).由(2),知如此之方程作下形式

$$F\left(\frac{y}{x^m},\frac{y'}{x^{m-1}}\right)=0$$

就 y'/x^{m-1} 解之,並乘以 x^{m-1},則此方程改成下形式

(3) $$y'\equiv\frac{dy}{dx}=x^{m-1}\phi\left(\frac{y}{x^m}\right).$$

引用新變數 $v=y/x^m$,則 $y=vx^m$,而上式又成

$$x^m\frac{dv}{dx}+mx^{m-1}v=x^{m-1}\phi(v)$$

之形狀,其中變數卽可分離矣.

§ 11·2 中所論之齊次微分方程,乃此種方程當 $m=1$ 時之特殊情形.

稍有經驗者卽易察知一所設含 x,y,y' 之式是否爲齊權.如命 y 及 y' 之權依次爲 m 及 $m-1$, 則 $x^a y^b y'^c$ 一項顯有 $a+bm+c(m-1)$ 權,其中 a, b 及 c 乃任意之正數,負數,整數或分數.至於 x 之權則常爲 1.

欲一式爲齊權，則其一切項必爲齊權且有相同之權. 如

$$2x^2y'-x^2y^2+2xy+1$$

之各項之權順次爲

$$2+(m-1)\equiv m+1,\quad 2+2m,\quad 1+m,\quad 0,$$

如 $m=-1$，則皆爲 0. 故就 $m=-1$ 而言，此式爲 0 權之齊權式.

又微分方程

(4) $$x^4y'^2-xy'-y=0$$

各項之權順次爲

$$4+2(m-1)\equiv 2m+2,\quad 1+(m-1)\equiv m,\quad m,$$

令三者相等，則於 $m=-2$ 時各等於 -2. 故就 $m=-2$ 言之，方程 (4) 乃爲 -2 權之齊權方程.

如就 $2y'$ 解此方程，則成

(5) $$2y'=\frac{1}{x^3}\pm\frac{\sqrt{1+4x^2y}}{x^3}$$

於 $m=-2$ 時仍爲齊權，此可由易 x 爲 tx，y 爲 y/t^2，y' 爲 y'/t^3 而見之. 或就另一觀點言之，x^2y 既爲零權，則 $1+4x^2y$ 亦然. 因之 $\sqrt{1+4x^2y}/x^3$ 之權爲 -3，該數亦爲 y' 及 $1/x^3$ 之權.

因此方程於 $m=-2$ 時爲齊權，引用新變數 $v=x^2y$，卽可分離其變數.

在微分方程

(6) $$2xyy'=y^2+\sqrt{y^4-4x^2}$$

之情形，如 y^4 之權 $4m$ 等於 x^2 之權 2，則 $\sqrt{y^4-4x^2}$ 一項爲齊權；換言之，如 $4m=2$，卽 $m=\frac{1}{2}$，則此項之權爲 1，如 $m=\frac{1}{2}$，則他項之權亦各爲 1，故引用新變數 $v=y/\sqrt{x}$，可分離其變數.於實用時以其平方，卽令 $v^2=y^2/x$，爲新變數，亦確有同等效力，且大爲簡易，試閱習題 6 卽知其然矣.

習題 1. $2x^2y'-x^2y^2+2xy+1=0$.

因求得其當 $m=-1$ 時爲齊權，乃令 $v=xy$，則 $y=v/x$，$x^2y'=xv'-v$，而此微分方程成爲

$$2x\frac{dv}{dx}-v^2+1=0.$$

分離變數，有

$$\frac{2dv}{1-v^2}+\frac{dx}{x}=0.$$

求積分，得

$$\log\left(\frac{1+v}{1-v}\right)+\log x=c, \quad \text{或} \quad \frac{x(1+v)}{1-v}=c_1.$$

以 v 之值代入，求得此解如下：

$$x+x^2y=c_1(1-xy).$$

2. $x^3y'-x^2y+y^2=0$.　　3. $x^3y'+4x^2y+1=0$.

4. $(x+2x^2y)y'+2y+3xy^2=0$.

5. $2x^3y'=1+\sqrt{1+4x^2y}$.　　6. $2xyy'=y^2+\sqrt{y^4-4x^2}$.

7. 求證 $yf_1(xy)+xf_2(xy)y'$ 於 $m=-1$ 時爲齊權，此中

$f_1(xy)$ 及 $f_2(xy)$ 乃乘積 xy 之函數.

II·5. **方程之形式爲 $y'=F(ax+by+c)$ 者** 他種方程之可以引用新應變數而分離其變數者,具有下形式

(1) $$y'=F(ax+by+c).$$

該方程因 y' 適爲平直式 (linear expression) $ax+by+c$ 之一函數之事實而著稱. 令 $ax+by+c=v$, 則 $by'=v'-a$, 而此微分方程改爲

(2) $$v'\equiv\frac{dv}{dx}=a+bF(v),$$

其變數可以分離矣.

習題 1. $(x+y)^2dx-dy=0$. 2. $y'=(x-y+a)^2$.

2. $(2x+y-2)y'=4$. 4. $y'=\sin^2(x-y)$.

II·6. **正合微分方程. 積分因式.** 至此吾人已採用一甚合實用之方法以解一級微分方程, 依此方法引用一新應變數, 即可化此方程爲可分離變數者. 顧此法亦未能普徧適用. 由下文之探討, 可得另一應用頗廣之方法:

試就一微分方程

(1) $$Mdx+Ndy=0$$

之通解中之積分常數而解之, 其形式爲

(2) $$u(x,y)=c.$$

以此爲原函數之微分方程, 易知爲

(3) $$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0.^{*}$$

因祇有一個一級微分方程相當於僅含一個任意常數之原函數,故(1)與(3)必互相恆等,或其係數成比例,即

(4) $$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N} = \mu(x, y).$$

此公比最多為 x 及 y 之函數;可僅為一變數之函數,或竟為一常數.命之為 μ,則有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu M, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N,$$

因之

(5) $$\mu(Mdx + Ndy) \equiv du.$$

一式為一個或多個變數之函數之微分者,吾人名之曰正合微分(exact differential).(5)中之 $\mu(Mdx+Ndy)$ 即為正合微分,以其為函數 $u(x, y)$ 之微分也.將微分方程各項盡遷左端,而該端恰為一

---

* 於僅含一變數之函數,如 $y=f(x)$, y 之微分定為

$$dy \equiv f'(x)dx;$$

故於數變數之函數,$u=f(x, y)$, u 之微分定為

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

例見著者微積分學,§106.

正合微分*者,曰**正合微分方程**(exact differential equation). 上文可彙述如次: 對於通解可寫成形式(2)之微分方程(1),有一因式 $\mu(x,y)$ 存在,如經引用,卽可使此方程化爲正合.

上述乘式名曰**積分因式**(integrating factor),因吾人將知(§II·8)正合微分方程之積分,可以一通法完成之.

有可注意者,微分方程之積分因式,一旦求出其一,卽可求得其無數個(只須其中決定 u 之積分可以作成).

設 μ 爲一積分因式. 則

$$\mu(Mdx+Ndy)\equiv du(x,y),$$

而符號 $\equiv$ 表示 $\mu M=\partial u/\partial x$ 與 $\mu N=\partial u/\partial y$.

若 $F(u)$ 爲 u 之任一函數,其不定積分 $\phi(u)$ 爲已知者,今有

$$\mu F(u)Mdx+\mu F(u)Ndy=F(u)\frac{\partial u}{\partial x}dx+F(u)\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$=F(u)du=d\phi(u).$$

故 $\mu F(u)$ 亦爲一積分因式. $F(u)$ 既可有無數個選法,可見積分因

---

* 形如

$$M+N\frac{dy}{dx}=0,\quad 或\quad M+Ny'=0$$

之微分方程之左端,如爲某函數 $u(x,y)$ 關於 x 之全導式(total derivative)者,亦稱正合. 因 $y+xy'$ 爲 x,y 關於 x 之導式,故微分方程

$$y+xy'=0$$

稱爲正合,亦如方程

$$ydx+xdy=0$$

者然.

式亦爲數無限. 例如由視察法易知 $xdy-ydx=0$ 有 $1/x^2$ 之一積分因式. 蓋此時確有 $(xdy-ydx)/x^2=d(y/x)$, 而 $\mu=1/x^2$, $u=y/x$ 也. 故 $(1/x^2)F(y/x)$ 爲一積分因式. 就特例言之, 易知由

$$F\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y},\quad 或\ \frac{x^2}{y^2},\quad 或\ \frac{x^2}{x^2+y^2},\quad 或\ \frac{2x^3}{x^2-y^2},$$

可求得諸積分因式. 引用此等因式, 則順次求得諸正合微分如下:

$$d\log\left(\frac{y}{x}\right),\quad d\left(-\frac{x}{y}\right),\quad d\tan^{-1}\frac{y}{x},\quad d\log\frac{x+y}{x-y}.$$

II·7. **微分方程爲正合之條件** 設

(1) $$Mdx+Ndy=0$$

爲一正合方程, 有一函數 u 使

$$Mdx+Ndy\equiv du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

卽

(2) $$M=\frac{\partial u}{\partial x}\quad 及\quad N=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

隨此等關係而得

(3) $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

蓋由 (2) 求微分, 有

(4) $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\quad 及\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},$$

且常有 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 也. 因此方程 (1) 爲正合之性質而引導至關係

式(3),故可見(3)係方程(1)爲正合之必要條件(necessary condition).

(3)亦係方程(1)爲正合之充分條件(sufficient condition).在證明中,設關係式(3)成立時,吾人確能求一微分爲 $Mdx+Ndy$ 之一函數 u. 換言之,在(3)成立時,吾人卽可求得一函數 u 合於次之關係

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=M \quad 及 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=N.$$

欲令(2)之第一方程能適合,須有

$$(5)\qquad u=\int^{(x)}Mdx+Y(y),^{*}$$

其中 Y 僅爲 y 之一函數,而所居地位如一積分常數,因在(5)中求積分時,y 固視作常數也. 惟須 $Y(y)$ 不爲 x 之函數,(5)式所示之 u 卽可適合(2)之第一方程. 此 Y 可爲 y 之任一函數. 欲令 u 適合於(2)之第二方程,須有

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int^{(x)}Mdx+\frac{dY}{dy}=N;$$

換言之,Y 必須適合方程

$$(6)\qquad \frac{dY}{dy}=N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{(x)}Mdx.$$

(6)之左端既僅爲 y 之函數,其右端亦必如此;卽右端須不含 x,或易一言以明之,就 x 而言,右端必爲一常數,且其關於 x 之導式必爲

* 吾人視 y 作常數時,以 $\int^{(x)}Mdx$ 表示 Mdx 求積分之結果.

零.實則此導式 $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$* 固已因 (3) 而為零矣.故可以求積法求得適合於 (6) 之 Y 如下:

$$Y=\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{(x)}Mdx\right]dy,$$

由是,(5) 中 u 之最後之值將適合於 (2) 中兩方程矣.

習題. 應用 (3) 為正合之充要條件之事實,求證如 μ 為一積分因式,而使 $\mu(Mdx+Ndy)\equiv du$, 則 $\mu F(u)$ 亦為一積分因式. 參考 § 11·6 中之小體字及下列定理 11.

此外,尚有數事可敍述於此:

定理 I. 如 $u(x,y)=$常數,為方程

$$Mdx+Ndy=0 \tag{1}$$

之一解,則 u 適合於方程

$$N\frac{\partial u}{\partial x}-M\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{7}$$

且其逆亦眞.

按 § 11·6,如 $u=$常數,為 (1) 之一解,則微分方程

---

* 因求微分之次序常無關重要,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int^{(x)}Mdx=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int^{(x)}Mdx.$$

且在所云兩法中俱視 y 為常數.故

$$\frac{\partial}{\partial x}\int^{(x)}Mdx=M.$$

(8) $$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$$

必與 (1) 相同.二者之左端或可相差一不含 dy/dx 之因式;換言之,

(9) $$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N},$$

即

(7) $$N\frac{\partial u}{\partial x}=M\frac{\partial u}{\partial y}.$$

欲證明其逆定理,吾人注意 u 如適合於 (7),即得關係式 (9).但 (9) 表示方程 (1) 與 (8) 有同解,而 $u=$常數,顯爲 (8) 之一解.

吾人今可證明

定理 II. 如 μ_1 及 μ_2 爲方程 (1) 之二獨立的 * 積分因式,則 $\mu_1/\mu_2=$常數,乃 (1) 之一解.

因 μ_1 及 μ_2 爲 (1) 之積分因式,有

$$\frac{\partial(\mu_1 M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu_1 N)}{\partial x}=0 \text{ 及 } \frac{\partial(\mu_2 M)}{\partial y}-\frac{\partial(\mu_2 N)}{\partial x}=0,$$

即 $$M\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-N\frac{\partial\mu_1}{\partial x}+\mu_1\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0,$$

及 $$M\frac{\partial\mu_2}{\partial y}-N\frac{\partial\mu_2}{\partial x}+\mu_2\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=0.$$

順次以 μ_2 及 μ_1 乘之,並取其差,則有

* 所謂獨立者言 μ_2 不等於 μ_1 與一常數之乘積也.

$$M\left(\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)-N\left(\mu_2\frac{\partial\mu_1}{\partial x}-\mu_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right)=0.$$

以 μ_2^2 除之,得

$$M\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)-N\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)=0.$$

將此與方程 7)相較,再按前定理,可見 $\mu_1/\mu_2=$ 常數,乃方程(1)之一解.

II·8. **正合微分方程** §II·7中條件(3)亦爲充分條件之證明,提示吾人以求解正合微分方程之一方法.因在此中 $Mdx+Ndy\equiv du$,而

$$u=\int^{(x)}Mdx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{(x)}Mdx\right]dy,$$

故通解爲

$$\int^{(x)}Mdx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{(x)}Mdx\right]dy=c.$$

此公式似頗繁複;但於應用時,其中手續並不難記憶.

1° 先求出 $\int^{(x)}Mdx$.

2° 次取此關於 x 之偏積分(partial integral),而求其關於 y 之偏導式(partial derivative),並由 N 中減去之,而得

$$N-\frac{\partial}{\partial y}\int^{(x)}Mdx\equiv R(y).$$

3° 於此,須知 $R(y)$ 或爲零,或爲一常數,或至多爲 y 之一函數.

故此微分方程之解爲

$$\int^{(x)} M dx + \int R(y) dy = c.$$

讀者須證明通解亦得爲

$$\int^{(y)} N dy + \int \left[M - \frac{\partial}{\partial x} \int^{(y)} N dy \right] dx = c$$

之形狀以作練習.

習題 1. $\frac{2xy+1}{y} dx + \frac{y-x}{y^2} dy = 0.$

因 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-x}{y^2}\right)$, 故此方程式爲正合.

於此

$$\int^{(x)} \frac{2xy+1}{y} dx = x^2 + \frac{x}{y}.$$

由此易求 $R(y) = \frac{1}{y}$, 及 $\int R(y) dy \equiv \log y.$

故

$$x^2 + \frac{x}{y} + \log y = c$$

爲通解.

習題 2. $\frac{y^2 - 2x^2}{xy - x^3} dx + \frac{2y^2 - x^2}{y^3 - x^2 y} dy = 0.$

此式爲正合之證明留作一習題.於此

$$\int^{(x)}\frac{y^2-2x^2}{xy^2-x^3}dx=\int^{(x)}\frac{(y^2-x^2)-x^2}{x(y^2-x^2)}dx$$

$$=\int^{(x)}\frac{dx}{x}-\int^{(x)}\frac{xdx}{y^2-x^2}$$

$$=\log x+\tfrac{1}{2}\log(y^2-x^2).$$

其關於 y 之偏導式爲 $y/(y^2-x^2)$. 故

$$R(y)=N-\frac{y}{y^2-x^2}=\frac{1}{y},$$

因之其解爲

$$\log x+\tfrac{1}{2}\log(y^2-x^2)+\log y=c_1,\ 或\ x^2y^2(y^2-x^2)=c.$$

習題 3. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0.$

此式須證明其爲正合.於此

$$\int^{(x)}\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=\log(x+\sqrt{x^2+y^2}).$$

其關於 y 之偏導式爲

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

以 $x-\sqrt{x^2+y^2}$ 乘其分子分母,即見其可化爲 N 之值.故 $R(y)=0$.

而其解爲

$$\log(x+\sqrt{x^2+y^2})=c_1,\ 即\ y^2+2cx=c^2.$$

4. $(x+y)dx+xdy=0$.

5. $(6x-2y+1)dx-(2x-2y+3)dy=0$.

6. $\dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=0$.

7. $\dfrac{dx}{\sqrt{xy}}+\left(\dfrac{2}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}\right)dy=0$.

8. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}[(5xy-3y^3)dx+(3x^2-7xy^2)dy]=0$.

9. $(2xy^{-3}-3x^2)dx+3(1-x^2)y^{-4}dy=0$.

10. $\left(2x\sin\dfrac{y}{x}-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$.

II·9. **一級平直微分方程** 一平直微分方程(任何級者)乃其所含應變數及其所有導式之一次式.故一級平直微分方程(linear differential equation of the first order)之通式爲

$$X_0y'+X_1y=X_2,$$

其中 X_0, X_1, X_2 皆僅爲 x 之函數.此三者皆有爲常數之可能.以 y' 之係數 X_0 除之,上式可書作

$$y'+Py=Q,\quad \text{卽}\quad \frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{1}$$

之形式.其中 P 及 Q 皆僅爲 x 之函數.

假定此微分方程有一積分因式存在,吾人卽可證明 $e^{\int Pdx}$ 乃如是之一因式.於此,吾人須求一僅含 x 之積分因式 $\mu(x)$.故此問題在

求 $\mu(x)$，而使

$$\mu y' + \mu P y - \mu Q = 0$$

爲一正合方程.

在 § II·7 中，吾人已知 $M + Ny'$ 爲正合之條件係 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

今

$$M = \mu P y - \mu Q, \quad 及 \quad N = \mu,$$

因 μ 僅含 x，故

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \mu P, \qquad 及 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{d\mu}{dx}.$$

因之，若有

$$\mu P = \frac{d\mu}{dx}, \qquad 即 \qquad \frac{d\mu}{\mu} = P dx,$$

則此方程將爲正合.

解之得 $\mu = ce^{\int pdx}$. 若 $c=1$，則有積分因式 $\mu = e^{\int pdx}$.

利用

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int pdx}\right] = y'e^{\int pdx} + Pye^{\int pdx}$$

之事實，可知以積分因式 $e^{\int Pdx}$ 乘微分方程(1)之兩端，並求其兩端之積分，即得其解如

$$ye^{\int pdx} = \int Qe^{\int pdx} dx + c$$

之形式.

凡可用以解任何級平直微分方程之方法，亦可用以解一級平直.

微分方程.* 但於實用時,引入一積分因式顯然爲一最簡便之方法,且便於記憶焉.

習題 1. $xy'+(1+x)y=e^x$.

以 y' 之係數偏除之,吾人之方程乃取

$$y'+\left(\frac{1}{x}+1\right)y=\frac{e^x}{x}$$

之形式. 此中 $P=1/x+1$, 故 $\int Pdx=\log x+x$, 而積分因式爲

---

* 此種方法(見§VII·1)之一如下:

暫令 $Q=0$,方程(1)變成

$$\frac{dy}{dx}+Py=0, \tag{2}$$

其中變數可以分離. 易知 $y=e^{-\int Pdx}$ 乃(2)之一解. 以 $y=y_1$ 代之.

今引入一新應變數 v,令 $y=y_1v$, 則 $\frac{dy}{dx}=y_1\frac{dv}{dx}+v\frac{dy_1}{dx}$. 方程(1)變成

$$y_1\frac{dv}{dx}+\left(\frac{dy_1}{dx}+Py_1\right)v=Q.$$

因 y_1 爲(2)之一積分,此方程化爲

$$e^{-\int Pdx}\frac{dv}{dx}=Q, \qquad 即\ dv=Qe^{\int Pdx}dx.$$

求積分,得
$$v=\int Qe^{\int Pdx}dx+c.$$

最後,從 $y=y_1v$, 有
$$y=e^{-\int Pdx}\int Qe^{\int Pdx}dx+ce^{-\int Pdx}.$$

按推解任何級平直微分方程之第二通法以求(1)之解,將於§VI·9中見之.

$e^{\log x+x}$，卽 xe^x. 準此，求得之解當爲

$$yxe^x=\int e^{2x}dx=\tfrac{1}{2}e^{2x}+c,\quad 或\quad 2xy=e^x+c_1e^{-x}.$$

2. $y'+y\cot x=\sec x$.　　3. $(x^2+1)y'-xy=1$.

4. $(x+1)y'-2y=(x+1)^4$.　　5. $(x+x^3)y'+4x^2y=2$.

6. $x^2y'+(1-2x)y=x^2$.　　7. $(x^2-1)y'-xy=x^3-2x$.

9. $ydx-(3x+y^4)dy=0$. [令 x 爲應變數.]

II·10. **可化爲平直方程之方程** 有時一顯而易見之變數可將一方程改易爲平直方程，其常見之例爲方程

$$y'+Py=Qy^k,^*$$

式中 P 及 Q 僅爲 x 之函數，俱如前設，而 k 爲任何數.

除以 y^k，有

$$y^{-k}y'+Py^{-k+1}=Q.$$

令 $y^{-k+1}=v$，則 $(1-k)y^{-k}y'=v'$，而吾人之方程變成

$$v'+(1-k)Pv=(1-k)Q,$$

此固爲一平直方程也.

視察一所設方程，有時可提示一應變數之變換而化之成一平直方程. 下列習題 2, 3, 與 4, 卽按此法解出.

習題 1. $3(1+x^2)y'+2xy=2xy^4$.

---

* 因紀念 James Bernoulli (1654—1705) 而名之曰 Bernoulli 方程.

以 y^4 除之，有

$$3(1+x^2)y^{-4}y'+2xy^{-3}=2x.$$

乘積 $y^{-4}y'$ 表示其爲 y^{-3} 之導式，而 y^{-3} 亦見於此方程中．令 $y^{-3}=v$，則 $-3y^{-4}y'=v'$，又以 $-(1+x^2)$ 除之，即得平直微分方程

$$v'-\frac{2x}{1+x^2}v=-\frac{2x}{1+x^2}.$$

其一積分因式爲 $1/(1+x^2)$．引入此式，並求積分，有

$$\frac{v}{1+x^2}=-\int\frac{2x}{(1+x^2)}dx+c.$$

令 $1+x^2=u$，所應求之積分成 $-\int\frac{du}{u^2}$，該式等於 $\frac{1}{u}$．是以吾人所求之解具有下形式

$$\frac{y^{-3}}{1+x^2}=\frac{1}{1+x^2}+c,\quad \text{即}\quad y^{-3}=1+c(1+x^2).$$

習題 2．$xy'-y\log y=x^2y.$

書此方程如下形式

$$\frac{xy'}{y}-\log y=x^2,$$

y'/y 示 $\log y$ 之導式，而 $\log y$ 亦見於此方程中．如令 $\log y=v$，則此方程改成平直方程

$$xv'-=x^2.$$

該方程之解，留待學者自求之．

3．$yy'+xy^2=x^3.$

4. $\sin y\cdot y'+\sin x\cos y=\sin x.$

5. $4xy'+3y+e^x x^4 y^5=0.$

6. $(1-x^2)y'-2(1+x)y=y^{5/2}.$

7. $(x+1)y'=y+1+(x+1)\sqrt{y+1}.$

8. $(x^3y^3+xy)y'=1.$ 〔令 y 爲自變數.〕

9. 求證由新變數 $y^{s+1}=v$ 之引入可化方程 $x^r y^s(my\,dx+nx\,dy)=f(x)dx$ 爲一平直微分方程.

10. 若視 y 爲自變數,求證由新變數 $x^{r+1}=u$ 之引入可化方程 $x^r y^s(my\,dx+nx\,dy)=f(y)dy$ 爲一平直微分方程.

II.11. §11·2 中齊次方程及 §11·4 中齊權方程之積分因式

1° 當 M 及 N 同爲 r 次之齊次式時,方程 $Mdx+Ndy=0$ 之一積分因式爲

$$\frac{1}{xM+yN}.$$

欲驗此節,吾人須證明

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{M}{xM+yN}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{N}{xM+yN}=0. \tag{1}$$

若完成(1)式左端所示之手續,並簡化之,則該式取下形式

$$\frac{N\left(x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}\right)-M\left(x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{(xM+yN)^2}. \tag{2}$$

按齊次函數之 Euler 定理,* 知

* 見著者微積分學,pp.766—767 之 §113.

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=rM \quad 及 \quad x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=rN.$$

因之，(2) 式爲零. 故 $1/(xM+yN)$ 爲一積分因式.

2° §II·4 中所研究之齊權方程（該種方程包含齊次方程爲其 $m=1$ 時之特例），如就 dy/dx 解之，則成下形式

$$\frac{dy}{dx}=x^{m-1}\phi\left(\frac{y}{x^m}\right).$$

去分數後，復可書作 $Mdx+Ndy=0$ 之形狀，其中

$$M=x^{m-1}\phi\left(\frac{y}{x^m}\right) \quad 及 \quad N=-1.$$

此方程之一積分因式爲

$$\frac{1}{xM+myN}.$$

欲驗此節，吾人須證明

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x^{m-1}\phi\left(\frac{y}{x^m}\right)}{x^m\phi\left(\frac{y}{x^m}\right)-my}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-1}{x^m\phi\left(\frac{y}{x^m}\right)-my}.$$

此中並無困難，故留作習題以待學者自解之.

注意. 在前者如 $xM+yN=0$，又在後者如 $xM+myN=0$，則此二方法不能應用.但在此兩情形，方程之解俱易直接求得. 蓋若 $xM+yN=0$，則方程具有 $y'=-\frac{M}{N}=\frac{y}{x}$ 之形式，而其解爲 $y=cx$；又當 $xM+myN=0$ 時，則方程具有 $y'=-\frac{M}{N}=\frac{my}{x}$ 之形式，而其解

爲 $y=cx^m$.

Leibniz (1646—1716) 及其從者欲以應用新變數法解一切一級方程,使變換後之方程可分離其變數 Euler (1707—1783) 及其從者則試以求一切一級方程之積分因式之方法解之.故積分因式稱爲 Euler 因式或乘式. 但首有積分因式之觀念者似爲其同輩之 Clairaut (1713—1765). 普偏言之,適如每一一級微分方程 $Mdx+Ndy=0$ 之有一積分因式,故能證明*以一適當之變數變換此類方程,各可化爲一變數可以分離之方程,此實可注意者也.但在實際上,盡用此法或固守積分因式一法,二者之愚昧與困難,殊無軒輊.

上述兩種方程,+ 乃此二通法俱易應用之例.

習題. 求 §§ 11·2 及 11·4 諸習題中各方程之積分因式以解之.

× 11·12. **具有 $x^ry^s(mydx+nxdy)+x^\rho y^\sigma(\mu ydx+\nu xdy)=0$ 形式之方程**

從 $d(x^ay^b)=x^{a-1}y^{b-1}(aydx+bxdy)$,可見方程

$$x^ry^s(mydx+nxdy)=0$$

有一積分因式形若 $x^\alpha y^\beta$, 此中 $\alpha+r=m-1$ 及 $\beta+s=n-1$.

更推廣之,可見形爲

$$x^ry^s(mydx+nxdy)+x^\rho y^\sigma(\mu ydx+\nu xdy)=0$$

---

* 參閱著者之 Lie Theory of One Parameter Groups 之第二章,尤以 §§ 12, 15,20 爲要.

\+ 本節所述兩法,只能於此時驗明,此二者乃前註中提及之 Sophus Lie 所發明一普偏定理之特例.

× 此節於簡短學程中,可删去之.

之一方程，亦有形若 $x^{\alpha}y^{\beta}$ 之一積分因式.

乘以 $x^{\alpha}y^{\beta}$，且重列各項，有

$$(mx^{\alpha+r}y^{\beta+s+1}+\mu x^{\alpha+\rho}y^{\beta+\sigma+1})dx$$
$$+(nx^{\alpha+r+1}y^{\beta+s}+\nu x^{\alpha+\rho+1}y^{\beta+\sigma})dy=0.$$

祇須 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，該方程即為正合；即對 x, y 之一切值，須有

$$m(\beta+s+1)x^{\alpha+r}y^{\beta+s}+\mu(\beta+\sigma+1)x^{\alpha+\rho}y^{\beta+\sigma}$$
$$\equiv n(\alpha+r+1)x^{\alpha+r}y^{\beta+s}+\nu(\alpha+\rho+1)x^{\alpha+\rho}y^{\beta+\sigma};$$

即須

$$m(\beta+s+1)=n(\alpha+r+1),$$

及

$$\mu(\beta+\sigma+1)=\nu(\alpha+\rho+1).$$

除

$$\frac{\mu}{m}=\frac{\nu}{n}=k$$

時外，此二平直方程，常可就 α 及 β 解之，但在此例外情形，此方程化為

(1) $$(x^{r}y^{s}+kx^{\rho}y^{\sigma})(my\,dx+nx\,dy)=0,$$

或更簡為

(2) $$my\,dx+nx\,dy=0,$$

其中兩變數可以分離.

令 (1) 之另一因式為零，如

$$x^{r}y^{s}+kx^{\rho}y^{\sigma}=0,$$

卽得其一異常之解(special solution). 此解與由(2)求得之通解常無關係,故不可棄去.

習題 1. $x^4y(3ydx+2xdy)+x^2(4ydx+3xdy)=0$.

乘以 $x^\alpha y^\beta$ 並整列之,則有

$$(3x^{\alpha+4}y^{\beta+2}+4x^{\alpha+2}y^{\beta+1})dx+(2x^{\alpha+5}y^{\beta+1}+3x^{\alpha+3}y^{\beta})dy=0.$$

若

$$(3\beta+6)x^{\alpha+4}y^{\beta+1}+(4\beta+4)x^{\alpha+2}y^{\beta}$$

$$\equiv(2\alpha+10)x^{\alpha+4}y^{\beta+1}+(3\alpha+9)x^{\alpha+2}y^{\beta},$$

卽 $$3\beta+6=2\alpha+10 \text{ 及 } 4\beta+4=3\alpha+9;$$

換言之,如 $\alpha=1$, $\beta=2$, 則上式爲正合方程. 如此,求得一積分因式 xy^2. 引用之,有

$$(3x^5y^4dx+2x^6y^3dy)+(4x^3y^3dx+3x^4y^2dy)=0.$$

此中兩羣之項各爲正合. 故所求之解爲

$$\tfrac{1}{2}x^6y^4+x^4y^3=c, \quad \text{或} \quad x^6y^4+2x^4y^3=c_1.$$

2. $2ydx+xdy+xy(3ydx+2xdy)=0$.

3. $x^2y(ydx+2xdy)-(ydx-xdy)=0$.

4. $y^2(3ydx-6xdy)-x^3(ydx-2xdy)=0$.

5. $2x^3(ydx-xdy)-y(ydx+xdy)=0$.

6. $x^2y(10ydx+9xdy)-(2ydx-3xdy)=0$.

***11·13. 可求得積分因式之其他形式** 於應用正合之檢驗中,

(§ II·7) 須求得$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$之值. 如此值爲零 則方程爲正合; 否則, M 或 N 可爲其一因式. 在特例中,

1° 如$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\cdot f(x)$, 其中 $f(x)$ 僅爲 x 之一函數, 則 $e^{\int f(x)dx}$ 爲一積分因式.

2° 如$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=M\cdot\phi(y)$, 其中 $\phi(y)$ 僅爲 y 之一函數, 則 $e^{\int \phi(y)dy}$ 爲一積分因式.

於建立第一語中, 吾人須證明當 M 及 N 適合 1° 中所示條件時, 方程

(1)
$$Mdx+Ndy=0$$

有一僅含 x 之積分因式 $\mu(x)$.

以 $\mu(x)$ 乘 (1) 並表示正合之條件如次, 則

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}-\mu\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{d\mu}{dx}=0,$$

即

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{N}{\mu}\frac{d\mu}{dx}=N\frac{d\log\mu}{dx},$$

以此與 M 及 N 之條件相較, 乃知吾人可令

$$\frac{d\log\mu}{dx}=f(x),\qquad 即\ \mu=e^{\int f(x)dx}.$$

* 如學程簡短, 此節可删去.

2° 之證明將留作一習題.

習題 1. $(3x^2+6xy+3y^2+2y)dx+(2x^2+3xy+x)dy=0$.

2. $2xydx-(x^2+y^2-a^2)dy=0$.

3. $(y^4+2y)dx+(xy^3+2y^4-4x)dy=0$.

II·14. 以視察法求積分因式 詳察方程之各項,往往可求得其積分因式,惜無通則可循. 惟某種配合常示吾人以易知之積分因式,至於其顯明之程度自難一致.

常見之一羣項爲

$$ydx-xdy,$$

由視察法,易知 $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{x^2-y^2}$ 各可爲使之變成正合微分之因式.因

$$\frac{ydx-xdy}{x^2}=-d\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=d\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{ydx-xdy}{xy}=d\log\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=d\tan^{-1}\frac{x}{y}=-d\tan^{-1}\frac{y}{x},$$

$$\frac{ydx-xdy}{x^2-y^2}=\tfrac{1}{2}d\log\frac{x-y}{x+y}.$$

故 $ydx-xdy+f(x)dx$ 可以 $1/x^2$ 爲一積分因式; $ydx-xdy+f(y)dy$ 可以 $1/y^2$ 爲一積分因式;同理, $1/xy$ 可用作 $ydx-xdy+f(xy)$

$x(ydx+xdy)$ 之一積分因式；$1/(x^2\pm y^2)$ 可用作

$$ydx-xdy+f(x^2\pm y^2)(xdx+ydy)$$

之一積分因式.

如已知 $f(x,y)dx+\phi(x,y)dy$ 爲正合，暫以 du 表之，則方程之有下形式

$$f(x,y)dx+\phi(x,y)dy=F(u)\Phi(x)dx\ [\text{或}=F(u)\Phi(y)dy]$$

者顯然以 $1/F(u)$ 爲一積分因式.

在實用時，吾人尚可發現他種配合之方法.

習題 1. $(y^2-x^2y)dx+x^3dy=0.$

書作下形式

$$y^2dx-x^2(ydx-xdy)=0,$$

可見 $1/x^2y^2$ 爲一積分因式. 準此，則得

$$\frac{dx}{x^2}-\frac{ydx-xdy}{y^2}=0;$$

故
$$-\frac{1}{x}-\frac{x}{y}=c, \qquad \text{即}\ x^2+cxy+y=0.$$

習題 2. $(mx+y)dx-(x-my)dy=0.$

書作下形式

$$m(xdx+ydy)+ydx-xdy=0,$$

可見 $1/(x^2+y^2)$ 爲一積分因式.* 準此，則得其解爲

$$m\log\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\frac{y}{x}=c.$$

* § II·11, 1° 法提示積分因式 $1/m(x^2+y^2)$.

習題 3. $xdy-ydx=x\sqrt{x^2-y^2}dy.$

書作下形式

$$\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{xdy-ydx}{x\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=xdy.$$

可見 $1/x$ 為一積分因式. 準此,求得其解為

$$\sin^{-1}\frac{y}{x}=y+c.$$

習題 4. $(2x^3-y^3-3x)dx+3xy^2dy=0.$

書作下形式

$$(2x^3-3x)dx-(y^3dx-3xy^2dy)=0.$$

則新變數 $v=y^3$ 自將引用. 其中第二組項乃成次形式

$$-(vdx-xdv).$$

按此方程其他部分之形式,故 $1/x^2$ 應用作積分因式. 引用之,則有

$$\left(2x-\frac{3}{x}\right)dx-\frac{vdx-xdv}{x^2}=0.$$

求積分,得

$$x^2-3\log x+\frac{v}{x}=c.$$

將 v 之值代入且去分數,吾人終乃求得

$$x^3-3x\log x+y^3-cx=0.$$

5. $xdy-ydx=(x^2+y^2)dx.$

6. $xdx - ydy = x\sqrt{x^2 - y^2}\,dx.$

7. $(x - y^2)dx + 2xydy = 0.$

8. $(y - xy^2)dx + xdy = 0.$

9. $(x^2y^2 - y)dx + (2x^3y + x)dy = 0.$

10. $(x^2 - y^2 + a^2)dx + 2xydy = 0.$

II·15. **積分因式之可用他法求得者** 上述各種方程之積分因式皆已求得. 此外尙有不時遇及者, 求一已知微分方程之積分因式之普偏問題, 引導至一級平直偏微分方程之解法 (見 § XIII·3). 此普偏方程有時可指示求積分因式之一實用方法.

II·16. **變數之變換** 在若干情形, 吾人已利用引入新變數之事實, 以改易微分方程之形式. 如可有一變數之變換, 能將求解之方程化爲已知之一類, 或可化簡其形式者, 吾人即宜求得之. 此乃解題之通常手續, 惜無通則可循. 在 §§ II·2, II·3, II·4, II·5, II·10 中, 適用之變換俱曾引用. 又在他種場所, 方程之形式可示吾人以合用之變換. 下列諸習題, 其數例也.

習題 1. $xdy - ydx = (x^2 + y)^2dx.$

配合 $xdy - ydx$ 提示一變換 $y = vx$. 因

$$xdy - ydx = x^2\,dv,$$

在此變換後, 此方程變成

$$\frac{dv}{dx} = (x + v)^2.$$

此乃與 § II·5 中所論一類方程之相同者, 其解留待學者自求之.

習題 2. $xdy + ydx = (x^2y^2 - x)dx.$

配合 $xdy+ydx$ 提示一變換 $v=xy$. 引用之，則此方程取下形式

$$dv=x(v^2-1)dx,$$

其變數可以分離. 其解留待學者自求之.

習題 3. $y^2(xdx+ydy)+x(ydx-xdy)=0$.

於此，$xdx+ydy$ 示其爲 $d(x^2+y^2)$，而 $ydx-xdy$ 則示其爲 $d(y/x)$. 此配合乃引起極坐標之變換

$$x^2+y^2=\rho^2 \quad 及 \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}=\theta.$$

求二者之微分，有

$$xdx+ydy=\rho d\rho \quad 及 \quad ydx-xdy=-\rho^2 d\theta.$$

故當新變數 ρ 及 θ 引入時，微分方程卽取下形式

$$\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho d\rho-\rho\cos\theta\cdot\rho^2 d\theta=0,$$

卽
$$d\rho-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta=0.$$

求積分，則有

$$\rho+\csc\theta=c, \quad 卽 \quad \rho\sin\theta+1=c\sin\theta.$$

仍改爲原變數，吾人求得上式變成

$$y+1=\frac{cy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

或更簡爲

$$(x^2+y^2)(y+1)^2=c_1y^2.$$

習題 4. $(x-y^2)dx+y(1+x)dy=0$.

因 y 及 dy 只於 y^2 及 ydy 二配合中見之，故用新變數 $y^2=v$.

如改書原方程成下形式

$$xdx+ydy-y(ydx-xdy)=0,$$

則當引用極坐標矣.

學者須分別引用此二變換以解之.

5. $(x-y^2)dx+y(1-x)dy=0.$

6. $xdy-ydx+x^2(2y-x)dx=0.$

7. $(x^2-y^2-1)xdx+(x^2+y^2-3)ydy=0.$

8. $y'+x=\sqrt{x^2+y}$. ［令 $x^2+y=u^3$.］

II·17. **撮要** 在解題時，欲求方程 $Mdx+Ndy=0$ 之積分，吾人進行之步驟如下:

由視察法，吾人可知在何時

1° 方程中之變數方可分離 (§ II·1),

2° M 及 N 方爲同次之齊次式 (§§ II·2, II·11),

3° 此方程方爲平直式或易化爲平直式者 (§§ II·9, II·10),

4° M 及 N 爲平直式而非齊次式 (§ II·3),

5° 此方程之形式方爲 $y'=F(ax+by+c)$ (§ II·5),

6° 此方程之形式方爲 (§ II·12)

$$x^r y^s(mydx+nxdy)+x^\rho y^\sigma(\mu ydx+\nu xdy)=0.$$

若視察法示知此方程不屬於上列各款，吾人須再驗其是否有下列各種可能.

7° 此方程方爲正合，即 $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=0$ (§ II·8).

8° $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\cdot f(x)$ (§II·13).

9° $\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=M\cdot\phi(y)$ (§II·13).

10° 此方程可爲齊權 (§§ II·4, II·11).

11° 可由視察法或 § XIII·3 之通法，以求得一積分因式 (§§ II·14, II·15).

12° 可求一變換以改易此方程爲已知之形式或簡約之 (§ II·16).

解一級微分方程之其他方法見第四章.

習題 1. $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$.

2. $\sqrt{1-y^2}dx+\sqrt{1-x^2}dy=0$.

3. $y'-x^2y=x^5$.

4. $(y-x)^2y'=1$.

5. $xy'+y+x^4y^4e^x=0$.

6. $(1-x)ydx+(1-y)xdy=0$.

7. $(y-x)dy+ydx=0$.

8. $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

9. $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$.

10. $(x+a)y'-3y=2(x+a)^5$.

11. $\left(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$.

12. $(x-2y+5)dx+(2x-y+4)dy=0$.

13. $(x^2+y^2)dx+2ydy=0$.

14. $(2x^2-1)y\,dx-(x^2-1)x\,dy=0$.

15. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}=\dfrac{x+(1-x^2)^{1/2}}{(1-x^2)^2}$.

16. $(1-x^2)y'-xy=axy^2$.

*17. $xy^2(3y\,dx+x\,dy)-(2y\,dx-x\,dy)=0$.

*18. $(5xy-3y^3)dx+(3x^2-7xy^2)dy=0$.

19. $y\,dx-x(1+xy^3)dy=0$.

20. $(1+x^2)y'+y=\tan^{-1}x$.

21. $y'+y\cos x=\sin 2x$.

22. $(xy^2+y)dx-x\,dy=0$.

23. $3x^2y\,dx-(x^3+y^2)dy=0$.

24. $3x^2y\,dx+(x^3+y^2)dy=0$.

25. $(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=(x^2+y^2+x)(x\,dy-y\,dx)$.

26. $(2x+3y-1)dx+(2x+3y-5)dy=0$.

27. $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0$.

28. $(y^3-2x^2y)dx+(2xy^2-x^3)dy=0$.

29. $x\,dy+(y-y^2\log x)dx=0$.

30. $(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)+(1+x^2+y^2)^{1/2}(y\,dx-x\,dy)=0$.

*31. $(x^4y^3-x^3y^2-x^2y+x)y'+(x^3y^4+x^2y^3+xy^2+y)=0$.

32. $(2xy-x)dy+y\,dx=0$.

33. $4x^2y^2dx+(2x^3y-1)dy=0$.

34. $(e^x+3y^2)dx+2xy\,dy=0$.

---

* 如學程簡短,此習題可刪去.

35. $y'+2xy=2ax^3y^3$.

36. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$.

37. $3x-x^2+2y^2-xy^2+2xyy'=0$.

38. $(\sqrt{x^2+y^2}-x)(xdx+ydy)-y(xdy-ydx)=0$.

第三章　應　用

III·1. **曲線族之微分方程**　當一個一級一次微分方程

(1) $$f(x,y,y')=0$$

就導式解出而書作

(2) $$y'=F(x,y)$$

時，可見其確定導式之唯一數值，即相當於變數之任一組所設數值 $F(x,y)$，必有一定值.＊

若 x 與 y 為曲線 $y=y(x)$ 上一點之直角坐標，則導式 y' 之數值等於該曲線在點 (x,y) 處切線之斜率＋. 據此，可知在平面上 $F(x,y)$ 具有定值之各點 (x,y) 處，一級一次微分方程 (1) 確定唯一之方向. 因無窮大之斜率與一固定方向相當，故令 $F(x,y)$ 成無窮大之點均不必由此除去.

若

(3) $$\phi(x,y,c)=0$$

為(1)或(2)之通解，令 c 取各特殊數值，即得諸特解. 例如，令 $c=c_0$

＊ 當 x 與 y 各取某特定數值時，$F(x,y)$ 可成不定式，例如在 $x=0$，$y=0$ 時，$y'=y/x$ 即係如此.

＋ 吾人此後間或採用較簡之語句曰點 (x,y) 處"曲線之斜率"

(一固定常數),吾人即得特解

(4) $$\phi(x,y,c_0)=0.$$

相當於適合(4)中 x 與 y 之一組所設值而由該方程求得之 y' 值,亦必爲微分方程所定之 y' 值. 曲線(4)即稱爲微分方程之一**積分曲線** (integral curve),並因在其上各點(x,y)處,其所有之方向恰爲微分方程在該點處所確定者此一事實而著稱.

專就 $F(x_0,y_0)$ 有一定值之任一特殊點 (x_0,y_0) 論之,吾人由方程

(5) $$\phi(x_0,y_0,c)=0$$

解出 c,並將此值代入(3)中,即可求得通過該點之積分曲線.

若微分方程爲二級者,$F(x,y)$ 將爲一二值函數(two-valued function),因而相當於 x 與 y 之各組值,在通常情形,* y' 應有兩值;換言之,在通常情形,微分方程在平面上各點處定兩方向. 通過如是之點,必各有兩相異之積分曲線(除非積分曲線在各該點處有一個二重點 double point). 在通常情形,相當於 x 與 y 之一組已知值,方程(3)即定出 c 之兩值. 故 $\phi(x,y,c)$ 若爲 c 之多項式,必爲 c 之二次式.

推廣上述理論至一級 n 次微分方程之情形,吾人即可建立下述之

定理. 若將 $\phi(x,y,c)$ 書作 c 之多項式,則一級 n 次微分方程

---

* 相當於 x 與 y 令 $f(x,y,y')$ 成一完全平方之各組值,y'之兩值必相等. 今後(第五章)將知此類特殊點軌跡之地位至爲重要.

之通解 $\phi(x,y,c)=0$ 必爲 c 之 n 次方程.

除平直微分方程外,關於高級微分方程並無相當於此之定理.

另一極關重要之觀念可由下述論究闡發之.

通解(3)表一族曲線(a family of curves),相當於 c 之一值卽有一確定之積分曲線. 因 c 所能選取之值有無窮個,故(3)可謂爲**一族單一無窮個曲線** (a single infinity of curves)之方程,或卽簡稱**一族 ∞^1 個曲線** (a family of ∞^1 curves)之方程.(3)既爲(1)之原函數,故(1)卽稱爲曲線族(3)之微分方程.由此可見,(3)與(1)實爲表示一族單一無窮個曲線方程之兩方法,其一含有一任意常數,其他則爲一個一級微分方程.

仿此,吾人將稱含有 k 個任意常數之

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \cdot\cdot\cdot, c_k)=0 \tag{6}$$

爲一族 ∞^k 個曲線之方程,而此族曲線之微分方程,則爲以(6)爲其原函數之 k 級微分方程*

$$f(x, y, y', y'', \cdot\cdot\cdot, y^{(k)})=0. \tag{7}$$

始自(3)式〔或(6)〕,吾人常可直接推得(1)式〔或(7)〕.當(1)〔或(7)〕爲已知,從而推求(3)〔或(6)〕,乃一經常遇及之問題.

下列諸習題說明上述之第一類問題.關於若干 ∞^1 個曲線族之第二類問題,則留待§III.2論之.

習題1. 試求通過原點且中心均在 x 軸上所有諸圓之微分方

* 曲線族方程用他種坐標系表示者,可採用類似於此之論究.在此後諸節中,吾人亦將論及用極坐標之曲線族.

程.

此圓族之方程顯爲 $x^2+y^2-2cx=0$. 此中僅有 c 之一次項. 微分之,有

$$x+yy'-c=0.$$

消去 c, 卽得一次微分方程

$$2xyy'+x^2-y^2=0.$$

〔學者須將該方程求積分以作練習.〕

習題 2. 試求有一定半徑 r, 且中心均在 x 軸上所有諸圓之微分方程.

此圓族之方程爲

$$(x-c)^2+y^2=r^2.$$

此中有 c 之二次項. 微分上式,有

$$(x-c)+yy'=0.$$

消去 c, 卽得二次微分方程

$$y^2y'^2+y^2=r^2.$$

3. 試求兩軸重合於兩坐標軸上之一組共焦點圓錐曲線之微分方程.

提示. 因由圓錐曲線 $x^2/a^2\pm y^2/b^2=1$ 之中心至其一焦點之距離爲 $\sqrt{a^2\mp b^2}$, 是以無論 c 取何值, 所有諸圓錐曲線 $x^2/c+y^2/(c-\lambda)=1$ 均有相同之焦點. 故此乃以點 $(\pm\sqrt{\lambda},0)$ 爲焦點之一組共焦點圓錐曲線之方程. 此中之 c, 卽爲正待消去之任意常數.

4. 試求焦點均在原點且其軸均與 x 軸相重之一組拋物線之微

分方程.

5. 試求與圓

$$x^2+y^2=r^2$$

相切之一族直線之微分方程.

6. 試求在坐標軸上兩截段之和爲一常數之一族直線之微分方程.

7. 試求叉形三次曲線族(nodal cubics)

$$(y-c)^2=2x(x-1)^2$$

之微分方程,族中各曲線與 y 軸相切且以點 $(1,c)$ 爲其叉點(node).

8. 試求叉形三次曲線族

$$y^2=2x(x-c)^2$$

之微分方程,族中各曲線與 y 軸相切且以點 $(c,0)$ 爲其叉點.

9. 試求平面上一切直線之微分方程.

10. 試求切於 y 軸所有諸圓之微分方程.

11. 試求兩軸重合於兩坐標軸上一切有中心圓錐曲線(central conics)之微分方程.

12. 試求兩軸平行於兩坐標軸之一切圓錐曲線之微分方程.

13. 試求主軸平行於(a) x 軸,(b) y 軸所有諸拋物線之微分方程.

14. 試求半徑均爲 r 所有諸圓之微分方程.

15. 試求平面上所有諸圓之微分方程.

III·2. 含有微分方程解法之幾何問題 幾何問題中,曲線諸

性質藉解析式表示之而式中含有一坐標對於他一坐標之導式者，必產生一微分方程，且須從而解出之. 下述諸習題將說明其事.

習題 1. 某曲線上各點處切線，該點與原點之聯絡線（吾人將稱此曰至該點之動徑 radius vector）及 x 軸可圍成一等腰三角形，而以後者爲底邊. 試求如是之一族曲線.

切線與 x 軸所成角之正切爲 y'，而動徑與 x 軸所成角之正切則爲 y/x. 是以吾人必有

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \qquad \text{即} \quad xdy + ydx = 0.$$

求積分，有

$$xy = c,$$

該式乃一族等軸雙曲線（equilateral hyperbolas）之方程也.

按積分曲線族中某一曲線所應適合之條件，例如通過一所設點等，可將其由族中選出而得一特解. 一特解所應適合之此種條件，以備選取之用者，稱爲**邊界條件**（boundary condition）或**原始條件**（initial condition）. 例如雙曲線族中通過點(1,2)之曲線，可因 $x=1$，$y=2$ 代入曲線族方程中而得之. 準此決定之 c 值爲 2. 故 $xy=2$ 爲該族中通過點 (1,2) 之曲線.

習題 2. 由原點至一曲線上各切線之垂直距離，等於該切線切點之橫標. 試求此曲線族.

按下列之公式(k)，吾人求得此族曲線之微分方程爲

$$\frac{xy' - y}{\sqrt{1+y'^2}} = x,$$

或去分數與根號，而得

$$y^2-x^2-2xyy'=0.$$

求其積分，卽得此族曲線之方程如次

$$x^2+y^2-cx=0,$$

是乃一圓族也.

在特例中，該族中通過所設點 (x_0, y_0) 之圓甚易求得其爲

$$x_0(x^2+y^2)-(x_0^2+y_0^2)x=0.$$

由上述兩簡易習題，卽可發現解法通則如下：

第一，吾人先將曲線族之已知性質，用解析式表明（微分方程卽由此產生）.

次之，吾人解出該方程.

最後，吾人乃就幾何方面解釋所得結果．若欲得一特殊曲線，可先求出邊界條件所能適合之積分常數之値，更藉此値以求其方程式.

在微分學中，曲線若干性質之含有微分者俱已論及，學者當已具備此類智識．爲便於檢閱起見，特列成下表：

I．直角坐標

(a) y' 爲曲線上點 (x, y) 處切線之斜率；

(b) $-1/y'$ 爲在 (x, y) 處法線之斜率；

(c) $Y-y=y'(X-x)$ 爲曲線上點 (x, y) 處切線之方程，X 與 Y 乃切線任意點之坐標；

(d) $X-x+y'(Y-y)=0$ 爲在 (x, y) 處法線之方程；

(e) $x-y/y'$ 與 $y-xy'$ 爲切線在 x 軸上與 y 軸上之截段;

(f) $x+yy'$ 與 $y+x/y'$ 爲法線在 x 軸上與 y 軸上之截段;

(g) $(y/y')\sqrt{1+y'^2}$* 與 $x\sqrt{1+y'^2}$ 爲由切點至 x 軸與至 y 軸之切線長;

(h) $y\sqrt{1+y'^2}$ 與 $(x/y')\sqrt{1+y'^2}$ 爲由曲線上之點至 x 軸與至 y 軸之法線長;

(i) $\dfrac{xy'-y}{y'}\sqrt{1+y'^2}$ 爲介於兩坐標軸間之切線長;

(j) $\dfrac{x+yy'}{y'}\sqrt{1+y'^2}$ 爲介於兩坐標軸間之法線長;

(k) $\dfrac{xy'-y}{\sqrt{1+y'^2}}$ 爲由原點至切線之距離;

(l) y/y' 爲次切線之長;

(m) yy' 爲次法線之長;

(n) $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}dy$ 爲微弧之長 (the element of length of arc);

(p) ydx 或 xdy 爲微面面積 (the element of area).

II. 極坐標

(q) $\tan\psi=\rho/\rho'$,其中 ρ' 表 $\dfrac{d\rho}{d\theta}$,而 ψ 則爲在 (ρ,θ) 處切線與至該

---

* 算式之含有根號者僅示其絕對值 (numerical value). 當方程中需用此種算式時,應置於其前之適當符號須按問題之性質而定,下之習題 5 即其一例. 此代數符號亦有毋須計及者,其例甚多. 當所得微分方程在使其有理化時即係如此.

點動徑所成之角；

(r) $\tau=\theta+\psi$，其中 τ 爲切線與始線（initial line）所成之角；

(s) $\rho\tan\psi=\rho^2/\rho'$ 爲極次切線（polar subtangent）之長；

(t) $\rho\cot\psi=\rho'$ 爲極次法線（polar subnormal）之長；

(u) $ds=\sqrt{d\rho^2+\rho^2d\theta^2}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$ 爲微弧之長；

(v) $\frac{1}{2}\rho^2d\theta$ 爲微面面積；

(w) $p=\rho\sin\psi=\rho^2\frac{d\theta}{ds}=\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}$ 爲由極（pole）至切線之垂線長.

習題 3. 某曲線之法線長（由曲線上一點至 x 軸）與點之縱標之平方成正比例，試定此曲線族. 在特例中，若由原點至該曲線與 y 軸相交處之距離爲 b，則該曲線爲何？

吾人可由 (h) 求得此曲線族之微分方程，爲

$$y\sqrt{1+y'^2}=ky^2,\qquad 即\ y^2(1+y'^2-k^2y^2)=0.$$

令因式 y^2 爲零，即得無關重要之特殊曲線 $y=0$，該曲線顯然適合所示條件，但無研討之價值.

採用不含 x 之他一因式，更從而積分之，吾人即得

$$\log\left(ky+\sqrt{k^2y^2-1}\right)=k(x+c),$$

$$[或\ \cosh^{-1}ky=k(x+c)];$$

是即　族懸鏈線

$$y=\frac{1}{2k}\left[e^{k(x+c)}+\frac{1}{e^{k(x+c)}}\right]$$

$$\left[\text{或}\ y=\frac{1}{k}\cosh\left[k(x+c)\right]\right].$$

欲求特定之曲線,吾人必須求出適合下列方程之 c 值

$$b=\frac{1}{2k}\left(e^{ck}+\frac{1}{e^{ck}}\right).$$

解此方程,得知 c 可採取下列二值之一

$$\frac{1}{k}\log\left(bk\pm\sqrt{b^2k^2-1}\right).$$

吾人由此可見該族中適合此條件之曲線有二. 此與 § III·1 中所陳述之事實適相符合,因所用者爲一二次微分方程也.

習題 4. 某曲線之一弧,一固定縱標,一變動縱標及 x 軸所圍成之面積與相當弧之長成正比例. 試定此曲線.

吾人採用 (n) 與 (p),卽有

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx=k\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

微分兩端,有

$$y=k\sqrt{1+y'^2}.$$

此與習題 3 中所用之微分方程相同. 故懸鏈線又有此性質.

習題 5. 求定切線介於兩坐標軸間之線段恰爲切點所平分之曲線.

因按本題之性質,當 x 與 y 同號時 y' 爲負,當 x 與 y 異號時 y' 爲正,故 y/y' 與 x 常有異號. 是以吾人欲藉 (g) 求得曲線族之微分方程時,必須令

$$\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}=-x\sqrt{1+y'^2}.$$

6. 通過曲線上點 (x,y) 之法線之 x 截段等於 x 之 k 倍，試定此曲線族.

7. 曲線上任一點處切線之 x 截段等於該點處法線之 y 截段，試定此曲線族.

8. 曲線上任一點處切線與法線爲兩坐標軸所截成之兩線段相等，試定此曲線族.

9. 曲線上各點處切線與法線所夾之角爲至該點之動徑所平分，試定此曲線族.

10. 求定次法線爲定長之曲線族.

11. 曲線上各點處次切線等於該點處次法線之平方，試定此曲線族.

12. 由原點至曲線上各切線之垂線等於各該切點縱標之長，試定此曲線族.

13. 求定極次切線爲定長之曲線族.

14. 曲線上任一點處極次切線與至該點之動徑成正比例，試定此曲線族.

15. 曲線上任一點處極次切線與該點處極次法線成正比例，試定此曲線族.

16. 求定極次法線爲定長之曲線.

17. 曲線上任一點處之切線與至該點之動徑所成之角等於向角 (vectorial angle)，試定此曲線族.

18. 曲線上切線與至切點之動徑所成之角二倍於向角，試定此曲線族.

19. 曲線上切線與至切點之動徑所成之角等於向角之半，試定此曲線族.

20. 曲線上各點處切線與 x 軸及至切點之動徑圍成一等腰三角形，而以切線爲底邊，試定此曲線族.

III·3 **正交曲線** 一曲線依某種規則割另一曲線族中各曲線，則此曲線謂爲該族之一**交割曲線**（trajectory）. 例如該曲線可與族中每一曲線交成定角*而稱之曰**等角曲線**（isogonal trajectory）. 在特例中，此定角若爲直角，則稱此交割曲線曰**正交**(orthogonal)者.

仿此，若另一族 ∞^1 個曲線中各曲線均爲所設族之正交曲線，則稱各族爲他族之一正交曲線組.

始自第一族曲線論之，設其方程爲

$$\phi(x,y,c)=0, \tag{1}$$

吾人求得其相當微分方程

$$f(y',x,y)=0, \tag{2}$$

該式恰如吾人前所指陳者，可以決定族中通過點 (x,y) 之曲線（或諸曲線）之斜率 y'. 微分方程

$$f\left(-\frac{1}{y'},x,y\right)=0 \tag{3}$$

在各點 (x,y) 處爲 $-1/y'$ 所定之值（或一組值），顯與方程(2)爲 y'

---

* 所謂兩相交曲綫之夾角者乃此兩曲線在交點處切線之夾角也.

所決定者完全相同；換言之，(3) 之積分曲線族中通過點 (x,y) 者在該處之斜率，等於 (2) 之積分曲線族中通過該點者在該處斜率之負倒數.故此二積分曲線族各爲他族之一正交曲線組.

如上所言，可知 (3) 之通解卽爲 (1) 之正交曲線組之方程.

習題 1. 求一同心圓族之正交曲線.

若取原點爲公有之中心，則此圓族之方程爲 $x^2+y^2=r^2$，而其微分方程爲 $x+y\dfrac{dy}{dx}=0$. 故其正交曲線之微分方程爲

$$x-y\frac{dx}{dy}=0, \qquad 卽 \quad \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0.$$

求積分，有

$$y=cx,$$

此乃通過圓族中心之一族直線.

習題 2. 兹有通過原點且中心均在 x 軸上之一圓族，試求其正交曲線.

此圓族之方程爲 $x^2+y^2-cx=0$. 吾人前曾求得 (§ III.1, 習題 1) 其相當微分方程爲 $2xy\dfrac{dy}{dx}+x^2-y^2=0$. 故其正交曲線之微分方程爲 $2xy\dfrac{dx}{dy}-x^2+y^2=0$.

試互換 x 與 y，顯然可由前者導出此方程，故其解必爲 $x^2+y^2-cy=0$，是乃通過原點且中心均在 y 軸上之一圓族.

[學者務須實際求此方程之積分，以驗上述結果.]

習題 3. 求證一族有中心之共焦點圓錐曲線自成正交 (self-orthogonal).

如是之一族圓錐曲線，若以其兩軸爲坐標軸，則其方程爲（§III·1，習題3）$\frac{x^2}{c}+\frac{y^2}{c-\lambda}=1$，又其微分方程爲

$$xyy'^2+(x^2-y^2-\lambda)y'-xy=0.$$

因此方程不因 y' 代以 $-1/y'$ 而有所改變，由此可見此族曲線自成正交．在事實上，吾人固已習聞一族有中心之共焦點圓錐曲線乃由橢圓與雙曲線所構成，通過任意一點卽有一橢圓與一雙曲線，而此二者適成直角互交也．

4．求證一族拋物線公有一焦點且公有一軸者自成正交．

5．求通過兩點 $(a,0)$ 與 $(-a,0)$ 之圓族之正交曲線．

6．求諸拋物線 $y^2=cx$ 之正交曲線．

7．求諸等軸雙曲線 $x^2-y^2=c$ 之正交曲線．

8．求諸等軸雙曲線 $x^2-y^2-cx=0$ 之正交曲線．

9．求諸相似有中心圓錐曲線 $ax^2+by^2=c$ 之正交曲線，其中 a 與 b 爲定數，而 c 則爲任意常數．

10．求諸曲線 $ax^n+by^n=c\,(n\neq 2)$ 之正交曲線．

11．求諸有中心圓錐曲線 $ax^2+y^2-cx=0$ 之正交曲線．試就 $a\neq 2$ 與 $a=2$ 兩款分論之．

12．求圓 $x^2+y^2=a^2$ 之漸伸線（involute）族之方程．

提示．　吾人已知（§III·1，習題5）此圓切線族之微分方程爲

$$y=xy'+a\sqrt{1+y'^2}.$$

圓之諸漸伸線卽此等切線之正交曲線．故漸伸線族之微分方程爲

$$x+yy'=a\sqrt{1+y'^2}.$$

將此方程改為極坐標者即可解出.

13. 求證與 $f(y',x,y)=0$ 諸積分曲線交成定角 α 之一族交割曲線之微分方程為

$$f\left(\frac{y'-m}{1+my'},x,y\right)=0,$$

其中 $m=\tan\alpha$.

在特例中,試證與諸直線 $y=cx$ 交成定角 α 之交割曲線為諸對數螺線 (logarithmic spirals)

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+k=\frac{1}{m}\tan^{-1}\frac{y}{x},\qquad \text{或}\ \rho=ce^{\theta/m}.$$

14. 試求與通過原點,且中心皆在 x 軸上諸圓交成定角 α 之交割曲線.

15. 試求與一組同心圓交成定角 α (異於直角者)之交割曲線.

在極坐標系中,一曲線族之方程可書作

$$(1')\qquad \phi(\rho,\theta,c)=0,$$

其微分方程則為

$$(2')\qquad f(\rho',\rho,\theta)=0.$$

後者可確定各點 (ρ,θ) 處之 ρ' (即 $d\rho/d\theta$).

吾人曾於 § III·2 (q) 中見及一事,若 ψ 為在 (ρ,θ) 處切線與至該點之動徑所成之角,則 $\tan\psi=\rho/\rho'$. 今若以 ψ_1 表示與此曲線在點 (ρ,θ) 處交成直角之另一曲線之相當角,則 $\psi_1=\psi\pm\pi/2$. 故

$$\tan\psi_1=-\cot\psi=-1/\tan\psi.$$

以附有下標1之諸文字表第二曲線諸相當量,即有

$$\rho_1/\rho_1'=-\rho'/\rho,\quad 故\ \rho'=-\rho\rho_1/\rho_1'.$$

在兩曲線交點處 $\rho_1=\rho,\theta_1=\theta$. 故

$$(3')\qquad f(-\rho^2/\rho',\rho,\theta)=0$$

為(1′)諸正交曲線之微分方程,蓋以此方程所示 ρ/ρ' 之值等於(2′)所定 $-\rho'/\rho$ 之值也.

16. 求雙扭線(lemniscate)族 $\rho^2=c\cos 2\theta$ 之正交曲線.

微分此方程並消去 c,求得此族之微分方程為 $\rho'/\rho=-\tan 2\theta$. 是以諸正交曲線之微分方程為 $\rho/\rho'=\tan 2\theta$,即

$$\frac{d\rho}{\rho}=\cot 2\theta\,d\theta.$$

求積分,得 $\rho^2=c\sin 2\theta$,仍為一雙扭線族,其公共軸線與第一族者成45°之角.

17. 求心臟線(cardioid)族 $\rho=c(1-\cos\theta)$ 之正交曲線.

18. 求對數螺線族 $\rho=e^{c\theta}$ 之正交曲線.

19. 求曲線族 $\rho^m\sin m\theta=c$ 之正交曲線.

試令 m 依次採用諸特定值,如 $1,2,-1,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$,並解釋其結果,以作特例.

20. 求曲線族 $1/\rho=\sin^2\theta+c$ 之正交曲線.

21. 求曲線族 $(\rho+1/\rho)\cos\theta=c$ 之正交曲線.

III·4. **引起微分方程解法之其他習題** 在物理科學中,其問題之解法含有微分方程之解者不一而足,其解法通則與幾何問題相仿,有如下述.

第一,以解析式表明問題所示諸事實(微分方程卽由此產生).

次之,解此方程,並解釋其結果.

最後,另一步驟為決定積分常數(或諸常數)之值,使其能適合問題之要求,卽所謂原始條件或邊界條件也.

下述諸習題將釋明其事:

習題1. 一質點僅因重力之作用而鉛直落下.若其初速度為 v_0,問其在任何時刻之速度為何,又在該時刻之位置如何?

此質點旣作直線運動,故僅用一單獨之坐標,x,卽足以確定其位置.設此物在 $t=0$ 時之位置為 x_0(稱此曰物體之初位置).

吾人卽將表以 v 之速度為 dx/dt,又表以 a 之加速度為 dv/dt.若僅受重力之作用,則其加速度為常數,並以 $-g$ 表此常數.此處所以用一負號者,乃因距離,速度及加速度俱以向上量度者為正也.吾人今有

$$\frac{dv}{dt}=-g.$$

求此方程之積分,卽得

$$v=-gt+c.$$

因在 $t=0$ 時 $v=v_0$,故 $c=v_0$,而吾人第一問題之答案為

$$v=-gt+v_0.$$

欲求此物在任何時刻之位置,吾人必須求

$$\frac{dx}{dt}=-gt+v_0$$

之積分．此方程之通解爲

$$x=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_0t+c.$$

因在 $t=0$ 時 $x=x_0$，吾人必有 $c=x_0$．故在任何時刻 t，

$$x=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_0t+x_0,$$

又在任何時刻 t 由出發處至此質點所在位置之距離爲

$$x-x_0=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_0t.$$

2．一質點在與水平面成 α 角之光滑平面上滑下．作用於此質點者僅有重力．若此質點由靜止出發，試求其在任何時刻 t 之速度，及其在時間 t 內已經過之距離〔提示：其加速度爲 $g\sin\alpha$，此乃 g 在質點運動方向內之分加速度．〕．若一質點由一鉛直圓周之最高點靜止出發，試證其沿任意一弦運動至他端所需之時間與直接下落至最低點所需之時間相等．——Tait 與 Steele，質點之力學 (Dynamics of a partical)．

3．一質點經一有阻力之介質（例如空氣）而下落，介質之阻力與其速度之平方成正比例；問其運動狀態如何？

此運動之微分方程爲 $\dfrac{dv}{dt}=k^2v^2-g.$

於此 k^2 爲正數，因阻力之方向與落*體之方向相反也．分離變數，有

$$\frac{dv}{k^2v^2-g}=dt,\quad 或\quad \frac{gdv}{r^2v^2-g^2}=dt,$$

---

* 若此物體原有一向上之初速度，則在上昇時間內，必須另有處理本問題之論究．參考著者之微積分學，在 § 80，即有一例．

其中 $gk^2=r^2$. 求其積分，並稍化簡，即有

$$\frac{rv-g}{rv+g}=ce^{2rt}.$$

因 $t=0$ 時 $v=0$，故 $c=-1$；故

$$\frac{rv-g}{rv+g}=-e^{2rt}.$$

就 v 解之，有

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{g}{r}\,\frac{1-e^{2rt}}{1+e^{2rt}}=-\frac{g}{r}\,\frac{e^{rt}-e^{-rt}}{e^{rt}+e^{-rt}}.$$

$$\therefore\ x=-\frac{g}{r^2}\log\left(e^{rt}+e^{-rt}\right)+c.$$

欲確定 c 值，吾人必須利用當 $t=0$ 時 $x=x_0$ 之事實. 故

$$x_0=-\frac{g}{r^2}\log 2+c,$$

且

$$x_0-x=\frac{g}{r^2}\log\frac{e^{rt}+e^{-rt}}{2}=\frac{g}{r^2}\log\cosh rt$$

為質點在時間 t 內落下之距離.

4. 一質點在某液體中徐徐下沈，其所受之阻力與其速度成正比例. 若此質點由靜止出發，試求其在時間 t 內下沈之距離.

5. 一質點在直線上運動之加速度與其速度之立方成正比例，且與後者之方向相反. 質點之初速度為 v_0. 試求其在時間 t 內已經過之距離. 量度該距離之起點乃質點之初位置，即 $x_0=0$.

此運動之微分方程為

$$\frac{dv}{dt}=-k^2v^3,\qquad \text{即}\quad \frac{dv}{-v^3}=k^2dt;$$

故
$$x=\frac{\sqrt{2k^2v_0^2t+1}-1}{k^2v_0}.$$

6. 如加速度與速度成正比例，試求在時間 t 內所經過之距離. 就加速度與速度有同號及二者有異號之兩款分論之.

7. 電學中諸重要微分方程之一，乃因討論至電阻爲定值 R 之電路而引起，電路中有一產生電動勢 E 之電源及一具有固定自感係數 L 之線圈. 當電路接通時，電流立卽開始. 若在任何時刻 t 之電流爲 i，則應電動勢爲 Ldi/dt，此與 E 之方向相反. 電動勢之實値爲 $E-Ldi/dt$，故

$$E-L\frac{di}{dt}=Ri,$$

卽
$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E}{L},$$

是卽用以確定 i 爲 t 之一函數之微分方程也.

試求 i (a) 若 E 爲常數，(b) 若 $E=E_0\sin\omega t$，而 E_0 與 ω 俱爲常數，(c) 若 E 爲時間之一所設函數，卽 $E(t)$，(d) 若在時刻 t_0 之電流爲 i_0，且由該時刻起撤去電源，因而此後之 $E=0$.

(b)款在電學中之地位至爲重要，特將其解詳述於此. 此方程乃因論及交流電而引起，產生該電流之電動勢乃時間之一週期函數 (periodic function)，其週期 (period) 爲 $2\pi/\omega$. 又此電動勢之最大値爲 E_0.

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}\sin\omega t.$$

其一積分因式爲 $e^{Rt/L}$

$$\therefore\ ie^{Rt/L}=\frac{E_0}{L}\int e^{Rt/L}\sin\omega t\,dt+c.$$

因
$$\int e^{at}\sin\omega t\,dt=\frac{a\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{a^2+\omega^2}e^{at}$$

$$\therefore\ ie^{Rt/L}=\frac{E_0}{L}\frac{\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}e^{Rt/L}+c,$$

卽
$$ie^{Rt/L}=E_0\left(\frac{R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t}{R^2+\omega^2L^2}\right)e^{Rt/L}+c$$

$$=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\frac{R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{Rt/L}+c$$

$$=\frac{E_0e^{Rt/L}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\phi)+c,$$

其中
$$\sin\phi=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},\quad\cos\phi=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

$$\therefore\ i=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\phi)+ce^{-Rt/L}.$$

因在 $t=0$ 時 $i=0$，故

$$c=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\phi;$$

而
$$i=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\sin(\omega t-\phi)+\sin\phi e^{-Rt/L}\right].$$

經過一極短促之時間後，$ce^{-Rt/L}$ 一項常減小至可以略去之程度，自此以後之電流即變爲週期性者，且與電動勢具有同一之頻率(frequency).但此二者並不同相(phase)，而電流落後一角 ϕ.

吾人今若另加一較爲普徧之原始條件或邊界條件

$$當\ t=t_0\ 時,\quad i=0,$$

則在表示 i 之式中，c 之數值可求之如下:

在此式中令 $t=t_0$，有

$$0=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t_0-\phi)+ce^{-Rt_0/L};$$

故
$$c=-\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t_0-\phi)e^{Rt_0/L}.$$

將此代入表示 i 之式中，有

$$i=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\phi)$$

$$-\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t_0-\phi)e^{-R(t-t_0)/L},$$

即

$$i=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\sin(\omega t-\phi)-\sin(\omega t_0-\phi)e^{-R(t-t_0)/L}\right].$$

以 ω, L, 與 R 三者表示 ϕ 之值代之，即可得此解之另一合意之形式.由上舉 $\sin\phi$ 與 $\cos\phi$ 之值，有

$$\tan\phi=\frac{\omega L}{R};\qquad 故\quad \phi=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}.$$

吾人由此求得解之形式如下:

$$i=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)\right.$$

$$\left.-\sin\left(\omega t_0-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)e^{-R(t-t_0)/L}\right].$$

若 $t_0=0$,則表示 i 之式可書作下形式

$$i=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left[\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)+\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{-Rt/L}\right].$$

學者須取此證明以作一簡易之習題.

8. 一溫暖物體喪失熱量之速率幾與物體本身及周圍介質溫度之差成正比例.若溫度在暖室內記載之溫度爲 θ_0 度,今攜此計至一較冷之室中,該處溫度爲 θ_1 度,則用以確定此溫度計讀數 θ 之微分方程爲

$$\frac{d\theta}{dt}=-k^2(\theta-\theta_1).$$

問入冷室後在時間 t 之末一時刻,此溫度計之讀數爲何?

若此溫度計係由溫度爲 64° 之室內攜至戶外,而戶外之溫度爲 0°,又在 1 分鐘末之讀數爲 32°,問須隔若干時間此計之讀數方爲 20°? 10°? 1°?

解此微分方程,並利用其原始條件後,求得

$$\theta-\theta_1=(\theta_0-\theta_1)e^{-k^2t}$$

比例因數 $-k^2$ 之值,可求之如下:

在本題中 $\theta_0=64$, $\theta_1=0$. 故 $\theta=64e^{-k^2t}$. 因在 $t=1$ 時 $\theta=32$,

乃有 $e^{-k^2}=\frac{1}{2}$，即 $-k^2=\log(\frac{1}{2})=-\log 2$. 此乃自然對數，卽在微積分學所習用之對數也. 據此，知解可書作

$$\theta=64(\tfrac{1}{2})^t,\quad \text{卽}\ \theta=64\cdot 2^{-t}.$$

當 θ 取一所設值，如 θ_2 時，欲確定 t 值，吾人須就 t 解

$$\theta_2=64\cdot 2^{-t}.$$

取兩端之常用對數，卽最易解出；例如

$$\log\theta_2=\log 64-t\log 2;\qquad \text{故}\ t=\frac{\log 64-\log\theta_2}{\log 2}.$$

9. 在任一時刻 t 鐳之分解速率與在該時刻所餘鐳之分量成正比例. 若在 1,500 年內消失其原有量之半，問在 1,000 年之末剩餘若干?

若在任何時刻 t 剩餘之量爲 x，則其分解律爲

$$\frac{dx}{dt}=-k^2x,$$

其中 $-k^2$ 爲一常數，且必爲負者，因鐳之分量固常在減少也.

10. 在某項化學反應中，一物質變質之速率與在該時刻此物尙未變質之量成正比例. 若 x 爲在時間 t 內此物已變質之量，又 a 爲此物原有之量，求證

$$x=a(1-e^{-kt}),$$

其中 k 爲比例常數.

11. 若一物質在任一時刻變質之速率與在該時刻尙未變質之量之平方成正比例，試求一式表示在時間 t 內此物已變質之量.

12. 若一物質在任一時刻變質之速率與在該時刻尙未變質之量

之立方成正比例,試求一式表示在時間 t 內此物已變質之量.

13. 在某化學反應中,一物質 A 分解爲二物質 B 與 C.在任一時刻 t 後二物質產生之速率各與在該時刻 A 所殘餘之量成正比例,在普通情形,二比例常數並不相等. 若在 $t=0$ 時 A 之質量等於 a,又若在時刻 t, B 與 C 之質量依次爲 x 與 y,則後二者必須適合微分方程

$$\frac{dx}{dt}=h(a-x-y) \quad 與 \quad \frac{dy}{dt}=k(a-x-y).$$

解此二者,並特就下列兩條件:

當 $t=0$ 時, $x=0$, $y=0$; 又當 $t=1$ 時, $x=\frac{a}{6}$, $y=\frac{a}{3}$,

求 x 與 y 之值,以 t 之函數表之.

吾人於此有一組微分方程. 但二者之解可因依次解出若干,各含一單獨應變數之微分方程而得之. 吾人據此,以第一方程除第二方程,即得一僅含 x 與 y 之微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k}{h},$$

其解爲

$$hy=kx+c.$$

藉 $t=0$ 與 $t=1$ 時兩條件,得 $c=0$ 與 $k=2h$. 故

$$y=2x.$$

將此代入上列一組中第一微分方程,即得

$$\frac{dx}{dt}=h(a-3x),$$

其解可寫作下形式

$$a-3x=ce^{-3ht}.$$

藉 $t=0$ 與 $t=1$ 時兩條件,得 $c=a$ 與 $e^{-3h}=\frac{1}{2}$,故

$$a-3x=a\cdot(\tfrac{1}{2})^t=a\cdot 2^{-t}.$$

$$\therefore\ x=\frac{a}{3}(1-2^{-t}),\qquad 又\ y=2x=\frac{2a}{3}(1-2^{-t}).$$

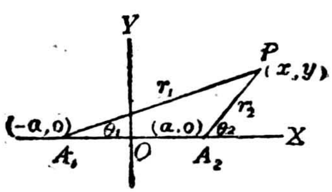
14. 若兩種化學藥品 A 與 B 互相作用而成化合物 C,則其通用之定律,爲化合成 C 之速率與 A 及 B 尚未變質之量之乘積成正比例,設 C 之各分子含有 m 個 A 之分子與 n 個 B 之分子.若 A 之分子原有 a 個,B 者原有 b 個;在時刻 t,A 之分子尚未變質者有 $a-mx$ 個,B 者有 $b-nx$ 個.如 $bm-an\neq 0$,試證

$$x=\frac{ab[e^{(bm-an)kt}-1]}{bme^{(bm-an)kt}-an}.$$

$bm-an=0$ 之情形,試再論之.

15. 求證以等角速度繞一鉛直軸線而轉動之液體,其表面呈旋轉拋物面 (paraboloid of revolution) 之形狀.[作用於液體各質量之力有二,卽離心力與重力;二者之合力必在曲面之法線上.]

16. 一反光鏡可將來自某定點之一切光線反射成平行於某定直線之光線,試證其表面爲一旋轉拋物面.[取定點作原點,又以經過原點且平行於定直線之直線作 x 軸.]



17. 相距 $2a$ 之兩磁極,其強度相等,各爲 m.試就下列兩款,求諸磁力線之方程.

(a) 若兩極同號;

(b) 若兩極異號.

就第一款 (a) 論之.

若二極位於兩點 A_1 與 A_2, 取二者之聯線作 x 軸, 且以二者之中點爲原點, 如圖所示.

A_1 與 A_2 之坐標各爲 $(-a,0)$ 與 $(a,0)$.

A_1 處磁極作用於在 (x,y) 處一單位磁極之磁力爲 m/r^2. 其在 x 軸方向之分力等於

$$\frac{m}{r_1^2}\cos\theta_1, \qquad 即 \qquad \frac{m(x+a)}{r_1^3}.$$

其在 y 軸方向之分力等於

$$\frac{m}{r_1^2}\sin\theta_1, \qquad 即 \qquad \frac{my}{r_1^3}.$$

仿此, A_2 處磁極作用於在 (x,y) 處該單位磁極之磁力之兩分力各爲

$$\frac{m(x-a)}{r_2^3} \qquad 與 \qquad \frac{my}{r_2^3}.$$

故兩極合力之 x 向分力與 y 向分力順次爲

$$m\left[\frac{x+a}{r_1^3}+\frac{x-a}{r_2^3}\right] \qquad 與 \qquad my\left[\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}\right].$$

此力之方向之斜率爲

$$\frac{y\left(\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}\right)}{\frac{x+a}{r_1^3}+\frac{x-a}{r_2^3}}, \qquad 即 \qquad \frac{y(r_1^3+r_2^3)}{(x+a)r_2^3+(x-a)r_1^3}.$$

故力線之微分方程爲

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(r_1^3+r_2^3)}{(x+a)r_2^3+(x-a)r_1^3},$$

即 $$(x+a)r_2^3dy-yr_2^3dx+(x-a)r_1^3dy-yr_1^3dx=0,$$

即 $$\frac{(x+a)dy-ydx}{r_1^3}+\frac{(x-a)dy-ydx}{r_2^3}=0.$$

因 $r_1^2=(x+a)^2+y^2$, 與 $r_2^2=(x-a)^2+y^2$, 故此微分方程之解爲

$$\frac{x+a}{r_1}+\frac{x-a}{r_2}=c, \quad \text{即} \quad \cos\theta_1+\cos\theta_2=c,$$

此固不難見及者,學者須自證之,以資練習.

18. 肱梁(cantilever beam,即一端固定而他端自由之梁)所載擔負(load)爲 P 磅,係懸於其自由端者,梁乃因此而微曲,其在上之表面微伸長,在下之表面微縮短.介於上下兩表面間,梁之某一截面原爲平面,今成一圓柱面(cylindrical surface),而其長度則無增減.此一截面稱爲梁之中立面(neutral surface).在與中立面諸元素(elements)垂直之平面上,該中立面有一截線.在此截線任一點處之曲率公式*爲

$$\text{曲率}\equiv\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{M}{EI},$$

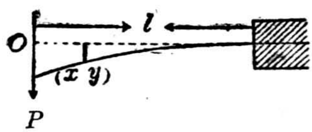
式中 M 爲在該點處之彎曲矩(bending moment),E 爲造成此梁之物質之彈性係數,又 I 爲此梁之轉動慣量.因撓度(deflection)頗微,y' 甚小而其平方則尤小於此.故中立面平面上截線之微分方程可取

* 參考 J. E. Boyd,材料力學(Strength of Materials),第三版,§70,即有一例.

$$EIy''=M$$

爲其第一差近式（a first approximation）.

若梁之長度爲 l，且其自由端伸向左方，試求距自由端 x 處一點之撓度 y 之值．再求其最大撓度，即在 $x=0$ 之撓度，及在該點處 y' 之值．（在此被撓曲之梁之中立面上實無 $x=0$ 之點．但中立面左端邊界上諸點距此之偏差渺小至可以略而不計．）今茲所用之 x 軸乃一鉛直平面與此中立面在撓曲前之交線，又原點亦爲其在撓曲前之自由端．凡此皆見附圖．



吾人將設 E 與 I 爲常數，並將梁之重量略去不計．

由基本原理，吾人得知 P 關於距自由端 x 處一點之彎曲矩爲

$$M=-Px.$$

式中所以採用－號，乃因吾人量度向上之距離爲正也．吾人在中立面上所論之曲線，其凹陷處係面向下方者，故 y'' 爲負．吾人之微分方程爲

$$EIy''=-Px.$$

求積分，即

$$EIy'=-\frac{Px^2}{2}+c.$$

因在 $x=l$ 時 $y'=0$，乃有 $c=Pl^2/2$．故

$$EIy'=-\frac{Px^2}{2}+\frac{Pl^2}{2}.$$

再求積分，得

$$EIy=-\frac{Px^3}{6}+\frac{Pl^2x}{2}+c.$$

因在 $x=l$ 時 $y=0$，乃有 $c=Pl^3/6-Pl^3/2=-Pl^3/3$. 故

$$y=-\frac{P}{6EI}(x^3-3l^2x+2l^3).$$

當 $x=0$ 時，其最大撓度為

$$y_0=-\frac{Pl^3}{3EI}.$$

當 $x=0$ 時，吾人求得 y' 之最大值為

$$y'_0=\frac{Pl^2}{2EI}.$$

19. 在前題中，若自由端伸向右方，取固定端為坐標系之原點，並用此系求梁上距離 x 處之 y 與 y'；更求 $x=l$ 時之 y 與 y'.

於此

$$M=-P(l-x).$$

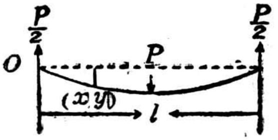
20. 若擔負係沿習題 18 之梁均勻分布，其每單位長載重 w，試求 x 為任何數時之 y 與 y'，及 $x=0$ 時之 y 與 y'.

於此，從自由端至距該端 x 處一點間之擔負關於該點之彎曲矩等於 $-wx\cdot x/2$，即 $-wx^2/2$. 故其微分方程為

$$EIy''=-\frac{wx^2}{2}.$$

其原始條件或邊界條件則與習題 18 者相同.

21．若擔負係沿習題19之梁均勻分布，其每單位長載重 w，試求 x 爲任何數時之 y 與 y'，及 $x=l$ 時之 y 與 y'.



於此，從自由端至距該端 x 處一點間之擔負關於該點之彎曲矩等於 $-w(l-x)^2/2$.

22．此同一之微分方程

$$EIy''=M$$

亦適用於支點在兩端之梁．試就擔負 P 懸於梁之中點之情形論之．求在 $x=l/2$ 時 y 之值，與在 $x=0$ 時 y' 之值．

其原始條件或邊界條件爲

當 $x=0$ 時 $y=0$，　又 當 $x=l/2$ 時 $y'=0$.

作用於此梁之外力爲在 $x=l/2$ 點處之擔負 $-P$，及在兩端支點處各爲 $P/2$ 之兩反作用力．就 $x=0$ 之左端至距該端 x 點處梁之一段言之，需用以確定關於該點之彎曲矩之力，僅爲作用於左端之反作用力 $P/2$．故在此款中，$M=Px/2$．（此僅適用於梁之左半段，卽 $0\leqq x\leqq l/2$．就梁之右半而言，x 必須代以 $l-x$.）

23．在習題22中，設擔負係沿梁均勻分布，其每單位長載重 w．由梁之左端起取其長度爲 x 之一段言之，在求此段彎曲矩（關於梁之右端）之計算中，吾人必須計及之力，有

在 $x=0$ 處鉛直向上作用之阻力 $wl/2$，

在沿梁 $x/2$ 點處鉛直向下作用之力 wx，此卽所論梁之一段之重量．故

$$M=\frac{wlx}{2}-\frac{wx^2}{2}.$$

其原始條件或邊界條件與習題 22 者相同.

24. 就砲管言之係一中空圓柱體,在管質中距柱體軸線爲 r 之一點處之張應力(tensile stress)f,如 John Perry 在其所著 Calculus of Engineers, §56 所示者,爲 $p-2A$;其中 p 爲在該點處因火藥爆炸而在沿徑方向 (radial direction) 內發生之壓力. A 爲一常數,視實驗之情況而定其值,p 爲微分方程

$$r\frac{dp}{dr}+2p=2A$$

所決定. 若砲管內表面之半徑爲 r_0, 其外表面者爲 r_1, 又若在內表面上因爆炸而發生之壓力爲 p_0 (並略去大氣壓力,而假設作用於外表面上之壓力爲零),試求以 r 表 f 之函數. 其最大值爲何?

用以定 p 之微分方程之通解應爲

$$pr^2=Ar^2+B,$$

學者須自證之,以資練習.

欲確定 A 與 B 之值,吾人應用邊界條件

$$\text{當 } r=r_0 \text{ 時 } p=p_0; \qquad \text{又} \quad r=r_1 \text{ 時 } p=0.$$

換言之,

$$p_0{r_0}^2=Ar_0^2+B, \qquad \text{又} \quad 0=Ar_1^2+B;$$

故

$$A=-\frac{p_0r_0^2}{r_1^2-r_0^2}, \qquad \text{又} \quad B=\frac{p_0r_0^2r_1^2}{r_1^2-r_0^2}.$$

$$\therefore\ p=-\frac{p_0r_0^2}{r_1^2-r_0^2}+\frac{p_0r_0^2r_1^2}{(r_1^2-r_0^2)r^2},$$

又
$$f=\frac{p_0r_0^2}{r_1^2-r_0^2}+\frac{p_0r_0^2r_1^2}{(r_1^2-r_0^2)r^2}$$
$$=\frac{p_0r_0^2}{r_1^2-r_0^2}\cdot\frac{r_1^2+r^2}{r^2}.$$

吾人求得 f 之值以在 $r=r_0$ 處者最大.此最大值爲

$$f_0=p_0\frac{r_1^2+r_0^2}{r_1^2-r_0^2}.$$

第 四 章

一級微分方程之其他解法

IV·1. 方程之可就 y' 解出者 吾人今論微分方程

$$(1)\qquad f(x,y,y')=0$$

之解法，其中 $f(x,y,y')$ 爲 y' 之高於一次之多項式．其係數乃 x 與 y 之有理式．如 $f(x,y,y')$ 可代以若干因式之乘積，各因式爲 x,y 之有理式且爲 y' 之較低次者，則方程 (1) 謂爲**可約** (reducible).

苟 y' 之多項式不能如此分解，則(1)謂爲**不可約**(irreducible).

今設 (1) 可書作

$$(2)\qquad f(x,y,y')=f_1(x,y,y')f_2(x,y,y')\cdots f_k(x,y,y')=0$$

之形式，而 k 個方程

$$(3)\qquad f_i(x,y,y')=0\qquad (i=1,2,\cdots,k)$$

各爲不可約者．k 當然可等於 1，此卽原方程爲不可約時之情形．吾人假設此 k 個方程 (3) 俱爲互異* 者.

---

* 如 $f(x,y,y')$ 有重複之因式，則在 (2) 中僅以相異之不可約因式之乘積代之並無不可．因微分方程 $[f_i(x,y,y')]^r=0$ (r 爲一正整數)，恰與 $f_i(x,y,y')=0$ 規定 x,y,y' 之同一關係，故二者有同一之通解．

$f(x,y,y')$ 由其某一因式之爲零而亦爲零. 故解方程 (1) 之問題可代以解諸方程 (3) 之問題. 設後者之解爲

$$(4)\qquad \phi_i(x,y,c)=0\qquad (i=1,2,\cdot\cdot\cdot,k),$$

則此 k 個解所成之一組可取作 (1) 之通解.

果有必要, (1) 之通解可書作

$$(5)\qquad \phi_1(x,y,c)\phi_2(x,y,c)\cdot\cdot\cdot\phi_k(x,y,c)=0$$

之形式. 蓋 (5) 之左端爲零之意乃表示其某一因式爲零; 更有進者, 此一因式等於零時, 卽爲 (3) 中某一方程之解, 因之亦爲 (1) 之一解. 但 (4) 中 k 個關係式通常互異, 以次法馭之較佳.

今取 (3) 中一不可約方程

$$(3')\qquad f_i(x,y,y')=0$$

考究之. 設其次數爲 r, r 亦可爲 1. 如 r 大於 1, $f_i(x,y,y')$ 仍可以 y' 之 r 個一次因式之乘積代之, 但此等因式不復爲 x 與 y 之有理式矣. 是則 (3′) 可代以

$$(6)\qquad [y'-F_1(x,y)][y'-F_2(x,y)]\cdot\cdot\cdot[y'-F_r(x,y)]=0.$$

因 $f_i(x,y,y')$ 爲 x,y 之有理式, 故知上式之一因式, 卽可寫出其他各因式. 方程 (6) 與令其左端各因式爲零之 r 個方程

$$(7)\qquad y'-F_j(x,y)=0\qquad (j=1,2,\cdot\cdot\cdot,r)$$

相同. 若 (7) 中任一方程之解

$$(8)\qquad \Phi_j(x,y,c)=0$$

爲 x 與 y 之一代數方程, 則 (6) 之通解常可將 (8) 化爲有理方程而

求得之．此乃由 $F_1(x,y), F_2(x,y), \cdots, F_r(x,y)$ 爲一不可約方程之根之事實而推知之．

如 (8) 並非代數方程，(6) 之通解仍可由 (8) 求得．試察下列之習題 3，即知其然．

習題 1． $y'^2+(x+y)y'+xy=0$．

此方程爲可約，且可以二方程

$$y'+x=0 \text{ 及 } y'+y=0$$

代之．該二方程之解順次爲

$$2y+x^2=c \text{ 及 } y=ce^{-x},$$

此二者組成原微分方程之通解．

此通解亦可書作下形式

$$(2y+x^2-c)(y-ce^{-x})=0.$$

習題 2． $xy'^2-2yy'+x=0$．

此方程不可約，但可以二方程

$$xy'-y=\sqrt{y^2-x^2} \quad \text{及} \quad xy'-y=-\sqrt{y^2-x^2}$$

代之．前者可認作一齊次方程，其解甚易求知爲

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=cx.$$

化爲有理並去分數，則得

$$c^2x^2-2cy+1=0,$$

爲原微分方程之解．令 $c=1/b$，則此解又可書作

$$x^2-2ky+k^2=0$$

之形式.

習題 3. $y^2+y'^2=1$.

此方程不可約,但可以二方程

$$y'=\sqrt{1-y^2} \quad 及 \quad y'=-\sqrt{1-y^2}.$$

代之.其前者之解爲

$$\sin^{-1}y=x+c, \quad 或 \quad y=\sin(x+c).$$

此中任一形式爲原微分方程之通解.因後一輔助方程之解爲

$$\cos^{-1}y=x+k, \quad 或 \quad y=\cos(x+k),$$

而當 $k=c-\pi/2$ 時,此二者實與前二者全同.

4. $xyy'^2+(x^2-y^2)y'-xy=0$.

5. $(2xy'-y)^2=8x^3$.　　6. $(1+x^2)y'^2=1$.

7. $y'^3-(2x+y^2)y'^2+(x^2-y^2+2xy^2)y'-(x^2-y^2)y^2=0$.

8. $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$.

9. $(4y^2-x^2)y'^2-6xyy'+4x^2-y^2=0$.

IV·2. **方程之可就 y 解出者** 如一方程可就 y 解出 *,則下述方法常可採用.

就 y 解出,有

(1) $$y=\psi(x,y').$$

* 並無解出 y 之必要,只須 (1) 爲 y 之平直方程,且 y 之係數爲一常數,本節之方法即可採用.

求其微分，得一微分方程

(2) $$y'=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y'}\frac{dy'}{dx},$$

該方程雖係二級，但以其不含 y，故可視作含有變數 x 及 y' 之一級方程．有時可求此方程之積分．設其解爲

(3) $$\omega(x,y',c)=0.$$

由 (1) 及 (3) 中消去 y'，有

(4) $$\phi(x,y,c)=0$$

爲 (1) 之一解；且因其含一任意常數，故爲一通解．

吾人由下述之討論，知 (4) 應爲 (1) 之一解：

因 (2) 係由 (1) 之微分而得，視 (2) 爲 x 及 y 之二級微分方程，則 (1) 之一解亦爲 (2) 之一解．(3) 旣爲 (2) 之一解，如視 (3) 爲 x 及 y 之一級微分方程，則其解亦必爲 (2) 之解．因(3)之通解含有 c 以外之第二個任意常數，故亦爲(2)之通解，且因之必包含 (1) 之解於其中．吾人茲於 (3) 之解中擇其能適合 (1) 者以爲其解．方程 (1) 有無數個積分曲線*，且對於 c 之每一值，方程 (3) 亦有無數個積分曲線．求此二族積分曲線所公有之一曲線或諸曲線，吾人須求 (1) 與 (3) 決定同一 y' 值†之點之軌跡方程式；而此一軌跡顯然可由 (1) 及 (3) 中消去 y' 而得之．如此對於 c 之一值求得 (1) 之一積分

---

* 吾人用此幾何的解釋，並非論證所必需，惟以其可助人堅定其理解耳．

† 如 § III·1 所述，一個一級微分方程可視作決定積分曲線在各點 (x,y) 之斜率，y'，之關係式．

曲線.故當 c 爲任意常數時,即求得其通解.

有時易求(3)之積分.藉此求得

$$\Phi(x,y,c,c')=0, \tag{5}$$

如上所述,對於 c 及 c' 之某一關係,上式必化爲(1)之一通解. 將(5)代(1),且注意其能適合此方程所應有之條件,如此即求得上述 c 及 c' 之關係.於解題時,此法常不若前述一法之爲吾人所需要.

習題 1. $4xy'^2+2xy'-y=0.$

此乃 y 之平直方程,y 之係數又爲常數.求其微分,合併同類項及分解因式後,得

$$(4y'+1)\left(2x\frac{dy'}{dx}+y'\right)=0.$$

因式 $4y'+1$ 不含導式 dy'/dx,其意義將於以後見之(§ V·3 之註),吾人姑略而不論.如此得一微分方程

$$2xdy'+y'dx=0,$$

其變數可以分離.求積分,得

$$xy'^2=c, \qquad 即 \qquad y'=\sqrt{c/x}.$$

將其代入原微分方程,且化爲有理,得

$$(y-4c)^2=4cx.$$

令 $4c=k$,終有

$$(y-k)^2=kx.$$

習題 2. $4xy'-2y+\log y'=0.$

求微分，且去分數，有

$$y'^2dx+4xy'dy'+dy'=0.$$

此爲正合方程，且其解爲

$$2xy'^2+y'=c.$$

由此及原微分方程中消去 y'，即得通解．此項消去法雖屬可能，但結式之形式不佳．其較簡易之法爲由此二方程解出 x 及 y 爲 y' 之函數

$$x=\frac{c-y'}{2y'^2},\qquad y=\frac{c-y'}{y'}+\frac{\log y'}{2}.$$

此處求得之解乃參數方程之形式 (parametric form)，以參數 (parameter) y' 表之．

此種參數方程常被採用．例如橢圓之參數方程爲

$$x=a\cos\theta,\qquad y=b\sin\theta,$$

其中 θ 爲離心角 (eccentric angle)．又如旋輪線 (cycloid) 之參數方程則爲

$$x=a(\theta-\sin\theta),\qquad y=a(1-\cos\theta).$$

3. $xy'^2-2yy'-x=0.$　　4. $8y'^3+12y'^2=27(x+y).$

5. $y+xy'=x^4y'^2.$　　6. $y'^2+2xy'-y=0.$

7. $2x^2y-x^3y'+3y'^3=0.$　　8. $(a^2-x^2)y'^2+2xyy'+x^2=0.$

9. $x^3y'^2+x^2yy'+a=0.$　　10. $4xy-2x^2y'+ay'^2=0.$

IV·3.　方程之可就 x 解出者　有一完全類似前節之方法，可

用於方程之可就 x 解出者*. 設原方程可書作

$$(1)\qquad x=\theta(y,y')$$

之形式. 求其關於 y 之微分, 有

$$(2)\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}=\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial y'}\frac{dy'}{dy}.$$

此中不含 x, 吾人可視其爲 y 及 y' 之一級方程. 如可求其積分而得一含有一任意常數之關係式

$$(3)\qquad \chi(y,y',c)=0,$$

則由 (1) 與 (3) 消去 y', 即得所求之通解.

習題 1. $a^2yy'^2-2xy'+y=0$.　2. $x+yy'(2y'^2+3)=0$.

3. $y^2y'^2-3xy'+y=0$.　4. $y'^3-4xyy'+8y^2=0$.

5. $x^2y'^2+(2xy-y^2)y'+y^2=0$.

6. $2yy'^3-3xy'+2y=0$.　7. $y^2y'^3+2xy'-y=0$.

8. 一曲線之法線長 (由切點至 x 軸之長), 常等於該法線在 x 軸上截距之平方根. 試求此族曲線之方程.

IV·4. Clairaut **方程**+　如一方程之形狀爲

$$(1)\qquad y=xy'+f(y'),$$

---

* 此處亦不必解出 x. 當其爲 x 之平直方程, 且 x 之係數爲常數時, 此法即可應用.

+ 此類方程乃因 Alexis Claude Clairaut (1713—1765) 而得名. 氏爲首用微分法 (§§ IV·2, IV·3) 於微分方程之解法者. 彼應用此法於以其名命名之方程, 其論文見 Histoire de l'Academie des Sciences de Paris, 1734.

其中 $f(y')$ 僅爲 y' 之函數，則其解易於求得. 是以此類方程須特加注意，期能一見而熟識之.

引用 § IV·2 之方法，有

$$y'=y'+[x+f'(y')]\frac{dy'}{dx},$$

或

$$[x+f'(y')]\frac{dy'}{dx}=0.$$

因式 $x+f'(y')$ 不含微分式（見 § V·3 之註），暫置勿論，則有

$$\frac{dy'}{dx}=0; \qquad 故\ y'=c.$$

代入 (1) 中，有

$$y=cx+f(c), \tag{2}$$

是卽 (1) 之通解也.

縱未就 y 解出，學者亦須能識別一 Clairaut 方程. 此類方程之特色，顯係 x 及 y 僅以 $y-xy'$ 之組合而出現於其中. 故 $y-xy'$ 及 y' 之任一函數等於零，如 $F(y-xy',y')=0$ 者，乃一 Clairaut 方程，且其解爲 $F(y-cx,c)=0$.

習題 1. $(xy'-y)^2=y'^2+1$.

此題係一 Clairaut 方程，故卽知其解應爲

$$(cx-y)^2=c^2+1.$$

2. $xy'^2-yy'+3=0$, 　　　3. $(x^2+1)y'^2-2xyy'+y^2=1$.

4. $x^2y'^2-2(xy-4)y'+y^2=0$.

欲解一方程之不能歸入一已知種類者，則常引用一個或數個新變數以馭之．在次組習題中所提及之變數變換，可化已知方程爲 Clairaut 之形式．學者須知引用新變數後，往往不能預測一方程將成何形式．在某種特例中，如第二章所列舉者，方程之最後形式可以得知．但一個一級微分方程如何方可化爲 Clairaut 方程，則無定則可循．實則，此種變換僅在若干特殊情形爲可能耳．下列習題之意義有二：一則使學者於變數之變換多得練習；再則使其遇一 Clairaut 方程時即能鑒定之．

5．$4x^2y=2x^3y'-ay'^2$．（§IV·2，習題 10．）

令 $x^2=u$．則 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=2x\dfrac{dy}{du}$，而知方程化爲

$$y=u\frac{dy}{du}-a\left(\frac{dy}{du}\right)^2.$$

其解爲

$$y=cu-ac^2,\quad \text{卽}\quad y=cx^2-ac^2.$$

6．$4e^{2y}y'^2+2xy'-1=0$．

令 $e^{2y}=v$．則 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2v}\dfrac{dv}{dx}$，而方程化爲

$$v=x\frac{dv}{dx}+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2.$$

其解爲

$$v=cx+c^2,\quad \text{卽}\quad e^{2y}=cx+c^2.$$

7．$y=2xy'+y^2y'^3$．（§IV·3，習題 7．）〔令 $y^2=v$．〕

8. $a^2yy'^2-2xy'+y=0$. （§IV·3 習題 1.）[令 $y^2=v$.]

9. $xy^2y'^2-y^3y'+a^2x=0$. [令 $x^2=u$, $y^2=v$.]

10. $(x^2+y^2)(1+y')^2-2(x+y)(1+y')(x+yy')+(x+yy')^2=0$.

[令 $x+y=u$, $x^2+y^2=v$.]

11. $(xy'-y)^2=x^2(2xy-x^2y')$. [令 $y=vx$.]

12. $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$. [§IV·1, 習題 8.)

[令 $x^2+y^2=v$.]

13. $(a^2-x^2)y'^2+2xyy'+x^2=0$. [§IV·2, 習題 8.]

[令 $x^2=u$, $2y=v$.]

14. $y+xy'=x^4y'^2$. （§ V·2, 習題 5.）[令 $xy=v$.]

15. $4e^{2y}y'^2+2e^{2x}y'-e^{2x}=0$. [令 $e^x=u$, $e^{2y}=v$.]

16. $e^{2y}y'^3+(e^{2x}+e^{3x})y'-e^{3x}=0$. [令 $e^x=u$, $e^y=v$.]

17. $x^3y'^2+x^2yy'+a=0$. （§IV·2, 習題 9.）[令 $1/x=u$.]

18. $2x^3y-x^4y'+3y'^3=0$. （§IV 2, 習題 7.）[令 $x^2=u$.]

19. $4x^2y^2y'^2-2(x^3+2y^2)xyy'+y^2(2x^3+y^2)=0$. [令 $y^2=xv$.]

20. $2y^2y'^2+2xyy'+x^2+y^2-1=0$. [令 $x^2+y^2-1=v$.]

IV·5. **撮要** 本章所論高於一次之一級微分方程之解法有三*. 在演題時 須依下列次序試用之.

1° 就 y' 解出，然後再解所得諸一級微分方程（§IV·1).

---

* 此等分法並非互拒（mutually exclusive），固不待言．其中二法或三法，常可應用於同一方程．

2° 就 y 解出，求其關於 x 之微分後，再求所得微分方程之積分，並由此解與原方程中消去 y' (§IV·2).

3° 就 x 解出，求其關於 y 之微分後，再求所得微分方程之積分，並由此解與原方程中消去 y' (§IV·3).

方法 2° 與 3° 亦可應用於一次微分方程，固甚顯然.

Clairaut 方程 (§IV·4) 以其求解之易，在本章中之地位尤爲著稱. 此固依方法 2° 以求解者.

如此等方法俱不合用，則一變數代換法或可求得而化之爲可以處理之形式.

吾人有時能預知此等方法之某數方法或各方法均可適用. 彼時苟有困難，常在代數方面或積分方面，而不在微分方程方面，試以下列各款爲例:

(a) 設有 y' 之代數方程，其各係數均爲 x 及 y 之同次齊次式. 如以主要係數除之，則各係數皆化爲零次齊次式. 故如能就 y' 解出 (此係一代數手續)，則求得 y' 爲 x 及 y 之零次齊次函數. 所得諸方程皆爲齊次者 (§II·2).

如前所示，以其任一係數除之，則此微分方程具有 $f(y', y/x)=0$ 之形式. 是以如就 y (或 y/x) 解出，卽得 $y=x\psi(y')$. 求其微分，有

$$y'=\psi(y')+x\psi'(y')\frac{dy'}{dx}.$$

其中變數可以分離.

學者可用類此之方法證明方法 3° 亦能引用，以資練習.

故在此款，上述三法俱可應用.

(b) 若方程中無 x，則其形式爲 $f(y',y)=0$. 就 y' 解出，得 $y'=dy/dx=\phi(y)$. 此中變數可以分離.

吾人就 y 解出之而得 $y=\psi(y')$. 求微分，得 $y'=\psi'(y')dy'/dx$. 此中變數亦可分離.

故在此款，方法 1° 及 2° 俱可應用.

(c) 若方程中無 y，則其形式爲 $f(y',x)=0$. 學者可證明方法 1° 及 3° 俱可應用於此款，以資練習.

(d) 若方程爲 x 及 y 之一次式，如

$$xf_1(y')+yf_2(y')+f_3(y')=0,^*$$

則易見方法 2° 可以適用. 因就 y 解出，有

$$y=x\psi_1(y')+\psi_2(y').$$

求其微分，卽有

$$y'=\psi_1(y')+[x\psi_1'(y')+\psi_2'(y')]\frac{dy'}{dx}.$$

以 y' 爲自變數，此方程可書作

$$\frac{dx}{dy'}+x\frac{\psi_1'(y')}{\psi_1(y')-y'}=\frac{\psi_2'(y')}{y'-\psi_1(y')},$$

是乃一平直方程也 (§II·9).

習題 1. $y^2(1+y'^2)=a^2$.　　2. $yy'=(x-b)y'^2+a$.

3. $x^3y'^2+x^2yy'+1=0$.　　4. $3xy'^2-6yy'+x+2y=0$.

5. $y=y'^2(x+1)$.

6. $xyy'^2+(x^2-y^2-a^2)y'-xy=0$.　[令 $x^2=u$, $y^2=v$.]

---

* Clairaut 方程乃其一特例.

7. $y'^2+2yy'\cot x=y^2$.

8. $(1+x^2)y'^2-2xyy'+y^2-1=0$.

9. $x^2y'^2-2(xy+2y')y'+y^2=0$.

10. $yy'^2+x^2y'-x^2y=0$. [令 $x^2=u,\ y^2=v$.]

11. $x^2y'^2-3xyy'+x^3+2y^2=0$. [令 $y=xv$.]

12. $x^2y'^2+(2xy-x^2)y'+y^3=0$. [令 $xy=v$.]

13. $y^2y'^2-4xyy'+2x^2+y^2=0$.

14. $x^2y'^2-2xyy'+y^2=x^2y^2+x^4$.

15. $\dfrac{y-xy'}{\sqrt{1+y'^2}}=f(\sqrt{x^2+y^2})$. [令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$.]

16. 有一曲線族,自原點至切線之距離隨原點至切點之距離而正變.求其方程.

17. 有一曲線族,自其上一定點量至另一點之弧長之平方,常等於動點之縱標之一定倍數.求其方程.[令此一定倍數爲 $8k$.]

18. 有一曲線族,在其每一切線上各有一質點由靜止而向下滑動,適以同一時間而抵 x 軸.求其方程.[據§III·4,習題 2 所示質點在時間 t 內所經距離爲 $\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha$. 令 $\sin\alpha=\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$,故所經距離爲 $\dfrac{y\sqrt{1+y'^2}}{y'}$. §III·2,(g).]

第五章 異 解

V·1. 異解 設

$$(1)\qquad \phi(x,y,c)=0$$

為

$$(2)\qquad f(x,y,y')=0$$

之通解．如(1)所規定之曲線族有一包線 (envelope)，則後者之方程為 (2) 之一解．

於此試一回憶，知一族 ∞^1 個曲線之包線，乃一曲線(或數曲線)於其每一點與族中之一曲線相切者*．吾人曾言 (§III·1)，(2)之一積分曲線在其每點 (x,y) 之斜率，等於由(1)所定之 y' 之值相當於該對數 x 及 y 者．因包線在其任意一點處之斜率與與之相切於該點之積分曲線之斜率相同，故包線之方程亦必適合該微分方程．且以包線常非族中之一曲線〔卽其方程不能以指定 c 之數值，由(1)求得〕，故其方程概非特解．是以另以異解 (singular solution) 名之．

吾人更宜憶及曲線族 $\phi(x,y,c)=0$ 之包線，乃由

$$\phi(x,y,c)=0 \quad 及 \quad \frac{\partial\phi}{\partial c}=0$$

中消去 c 而得之．

---

* 參閱著者微積分學 § 115.

習題 1.　$xy'^2-yy'+1=0$.

書作下式

$$y'(xy'-y)+1=0,$$

吾人知其爲一Clairaut 方程，其解爲

(3)
$$c^2x-cy+1=0.$$

求 (3) 關於 c 之微分，有

(4)
$$2cx-y=0.$$

從 (3) 及 (4) 中消去 c，而得

$$y^2=4x,$$

是爲異解．留待學者證明其爲一解．

習題 2.　$xy'^2-2yy'+x=0$.

此乃 §IV·1，習題 2 之方程．吾人已在該處求得其解爲

$$c^2x^2-2cy+1=0.$$

求其關於 c 之微分，有

$$cx^2-y=0.$$

消去 c 後，即得異解

$$x^2-y^2=0.$$

試證其爲所設微分方程之一解．

V·2. **判別式**　若 $f(z)$ 爲一 n 次之多項式

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdot\cdot\cdot+c_{n-1}z+c_n,$$

則按 Taylor 定理，應有

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\frac{f'''(a)}{3!}h^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n,$$

其中

$$f'(a)=\left[\frac{df(z)}{dz}\right]_{z=a}=nc_0a^{n-1}+(n-1)c_1a^{n-2}+\cdots+2c_{n-2}a+c_{n-1},$$

$$f''(a)=\left[\frac{d^2f(z)}{dz^2}\right]_{z=a}=n(n-1)c_0a^{n-2}+(n-1)(n-2)c_1a^{n-3}+\cdots+2c_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(a)=\left[\frac{d^nf(z)}{dz^n}\right]_{z=a}=n!\,c_0.$$

令 $h=z-a$,則有

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

準此易知,a 若爲 $f(z)=0$ 之一根,卽若 $f(a)=0$,則 $f(z)$ 有一因式 $z-a$;逆之,欲令 $f(z)$ 有一因式 $z-a$,吾人須有 $f(a)=0$. 仿此,如 a 爲一二次根,則 $(z-a)^2$ 爲 $f(z)$ 之一因式,因之,吾人須有 $f(a)=0$ 及 $f'(a)=0$;逆之,如 $f(a)=0$ 及 $f'(a)=0$,則 $f(z)$ 有一因式 $(z-a)^2$,而 a 爲一二次根.* 因之,$f(z)=0$ 能以 a 爲二次根之充要條件,乃

---

* 如亦有 $f''(a)=0$,則 $f(z)$ 有一因式 $(z-a)^3$,而 a 爲一三次根 故 $f(a)=0$, $f'(a)=0$,而 $f''(a)\neq 0$, 乃 a 恰爲二次根但非更高次根之條件.

同理,易見 $f(a)=0$, $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $\cdots$, $f^{(r-1)}(a)=0$,而 $f^{(r)}(a)\neq 0$ 乃 a 爲一 r 次根之條件.

$f(z)$ 與 $f'(z)$ 公有一相當因式 $z-a$. 此條件顯然有賴於 $f(z)$ 諸係數之處. 此等係數之一有理整* 函數(rational entire function),在等於零時表示 $f(z)=0$ 有一二次根之充要條件者,稱爲 $f(z)$ 之判別式(discriminant). 吾人可證其等於方程各根之差之平方乘積(以 c_0 之某次冪乘之以去分數). 推算此式之法頗多. 求 $f(z)$ 及 $f'(z)$ 之最高公因式時,可示知該二函數如何乃有一公因式 $z-a$. 但此法往往引入額外因式(extraneous factor). 其較佳之一法爲由 $f(z)$ 及 $f'(z)$ 中消去 z〔或由 $nf(z)-zf'(z)=0$ 及 $f'(z)=0$ 兩 $n-1$ 次方程中消去 z〕. 所得之結式爲 $f(z)$ 所有係數之一關係式,表 $f(z)=0$ 及 $f'(z)=0$ 能同時適合之條件. 如盡遷此關係式之項至方程式之一端,且化去其分式及根式,吾人卽得判別式等於零之式. 吾人稱此爲**判別式關係**(discriminant relation). 由兩多項式消去其公共變數之法甚多,詳示於方程論中. 吾人在此果能熟知二次式 az^2+bz+c 之判別式爲

$$4ac-b^2,$$

及三次式 az^3+bz^2+cz+d 之判別式爲

$$27a^2d^2+4ac^3+4b^3d-18abcd-b^2c^2,$$

卽已足用.

視 $\phi(x,y,c)=0$ 爲 c 之一方程,則其係數爲 x 及 y 之函數,吾人偶爾可求 x 及 y 之值俾該方程具有等根. 從幾何方面觀之,吾人知其意義乃云平面上有若干點而經過其處之積分曲線之個數少於平

---

* 代數之有理運算爲加、減、乘、除四法 其前三者謂爲整(entire)運算; 因其不致引入分數也.

時;蓋平時相當於 c 之一值卽有一積分曲線也．斯時判別式關係卽表示此等點之軌跡．

V·3．**由微分方程直接求得之異解** 求 $\phi(x,y,c)=0$ 之包線方程之問題既與求其判別式關係者完全相同,吾人乃知經過包線上每點處,積分曲線之個數少於經過平面上普通地位之點者;換言之,經過包線上每點處之積分曲線至少有其二相合爲一．

故微分方程所決定之方向在此等點處至少有二者相合;換言之,視微分方程 $f(x,y,y')=0$ 爲 y' 之方程,則對於適合包線方程之 x 及 y 之一對值,必有一二次根．由此觀之,從 $f(x,y,y')=0$ 及 $\partial f/\partial y'=0$ 間消去 y' 之結果,亦必示吾人以包線之方程,故苟有異解,此其是矣．

試以圓族 $(x-c)^2+y^2=r^2$ 爲例而考究之,其中 r 爲一固定常數而 c 爲參數．其判別式關係爲 $y^2=r^2$,卽 $y=\pm r$．此二直線俱與該族中各圓相切．經過此包線上之一點僅有此族中之一圓,而經過平面上其他一點則有二圓(或實或虛,視該點縱標之小於 r 或大於 r 而定之)．

此圓族之微分方程固易求得爲

$$y^2(1+y'^2)=r^2.$$

在一點 (x,y) 處,此方程通常可定兩相異之方向．惟於 $y=\pm r$ 時,則此方程決定唯一之值 $y'=0$．又於 $y=0$ 時,y' 之二值 $\pm\infty$ 決定同一方向．此例外之情形詳見 §V·4．

註． 吾人在前章曾於解題時,遇有因式爲方程之解但不含任意常數,故彼時未嘗論及．此類因式實常爲異解之淵藪,今可知其所

以然矣. 例如在 Clairaut 方程(§IV·4)

$$(1)\qquad y=xy'+f(y')$$

之情形, 吾人曾略去因式

$$(2)\qquad x+f'(y')=0.$$

但此實爲方程(1)關於 y' 之導式. 故若由(1)及(2)中消去 y', 卽得本題之異解. 又如在(§IV·2)習題1中, 吾人曾略去因式 $4y'+1=0$. 若由此方程及原方程消去 y', 卽得 $x+4y=0$ 爲原方程之一異解.

注意. 一方程有兩根相等, 則其根至少有兩個. 由此可知, 一級一次方程決不能有異解存在. 但高於一次之方程亦可無異解, 然此非常情也.

尤可注意者, 有時異解較通解更可玩索.

例如今有曲線, 其切線爲兩坐標軸所截之一段等於定長 l. 求其方程.

由 §III·2 公式(i), 得

$$(y-xy')^2(1+y'^2)=l^2y'^2.$$

因其爲 Clairaut 式(§IV·4), 易見其通解在求出 y 後之形式爲

$$y=cx\pm\frac{cl}{\sqrt{c^2+1}}.$$

此方程代表一族直線, 其爲兩軸所截之長均爲 l. 吾人最可玩索者, 乃其異解所示之曲線方程. 此可由原方程之 y' 判別式關係或 c 判別式關係(在 Clairaut 方程之情形兩者相同)求得之. 二者俱爲

$$x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3},$$

此乃一個四歧點圓內旋輪線(hypocycloid of four cusps).

此題可證明如下:

始自

$$(3)\qquad (y-cx)^2(1+c^2)=l^2c^2$$

言之,求其關於 c 之微分,有

$$(4)\qquad c(y-cx)^2-x(y-cx)(1+c^2)=l^2c.$$

以(3)除(4),得

$$\frac{c}{1+c^2}-\frac{x}{y-cx}=\frac{1}{c},\qquad \text{卽}\ \frac{c^2}{1+c^2}=\frac{y}{y-cx},$$

$$\text{卽}\ \frac{1+c^2}{c^2}=\frac{y-cx}{y};$$

故
$$\frac{1}{c^2}=-\frac{cx}{y},\qquad \text{卽}\ c=-(y/x)^{1/3}.$$

代入(3)中,有

$$(y+x^{2/3}y^{1/3})^2(1+y^{2/3}/x^{2/3})=l^2y^{2/3}/x^{2/3}.$$

以 $x^{2/3}/y^{2/3}$ 乘兩端,得

$$(y^{2/3}+x^{2/3})^3=l^2,\ \text{或}\ x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}.$$

習題 1. 有一曲線,自兩定點至其各切線之垂線之乘積皆相等,求其方程.

2. 有一曲線,自原點至其切線之距離皆相等,求其方程.

3. 有一曲線,其切線與兩坐標軸所成三角形之面積常爲 a^2,求其方程.

4. 有一曲線,其各切線在兩坐標軸上截距之和皆相等,求其

方程.

5. 求下列方程之積分並考察其異解:

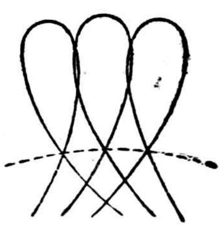
(a) $x^2y'^2-2(xy-2)y'+y^2=0$,　(b) $xy'^2-y=0$,

(c) $xy'^2-yy'+1=0$,　(d) $(y-xy')^2=b^2+a^2y'^2$,

(e) $yy'^2-2xy'+y=0$,　(f) $(1-x^2)y'^2+y^2-1=0$.

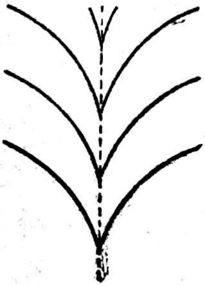
V·4. **額外軌跡** 吾人前嘗言及 c 判別式關係乃一軌跡之方程,積分曲線之經過其任意一點者其個數必少於平時. 吾人又曾見及 y' 判別式關係乃一軌跡,在其上任意點處有比平時爲數較少之方向爲微分方程所決定. 一族積分曲線包線上之點應兼在此兩軌跡上. 於此有一問題隨之而起,卽此兩軌跡是否含有包線以外之點?

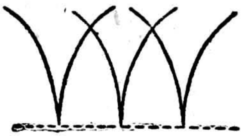
如積分曲線有一個二重點,則過此二重點應有曲線之兩支,各具有一互異之切線. 因僅有 y' 之 n 個值(如微分方程爲 n 次),故除上述一曲線外,僅另有 $n-2$ 個曲線經過此點. 故此點必在 c 判別式關係之軌跡上. 若具有二重點(或稱叉點 node)之曲線有 ∞^1 個,則此類點之軌跡(稱爲**叉點軌跡** nodal locus)當爲 c 判別式關係所示者. 在極不常遇之情形,此軌跡可偶爲包線. 除此以外,其方程不能適合於微分方程. 茲以附圖表示此兩例之狀態. 又在通常情形,因叉點軌



跡上仍有 n 個相異之 y' 值，故其方程不能發現於 y' 判別式關係中.

二重點之一特例爲歧點 (cusp). 該點可視作二重點之極限情形，由其線圈收縮而成點且曲線之兩支在此相切者也. 積分曲線之歧點軌跡之方程，即所謂**歧點跡軌** (cuspidal locus) 者，可在探求包線方程時求得之. 此軌跡僅在其兼爲包線時方可爲一解，否則不能若是也. 參觀附圖當知其義.





經過歧點之積分曲線，其個數固較平時少一個或多個; 換言之，不僅 c 判別式在此爲零，且因曲線兩支之切線在此相合，故在此之 y' 值，必有兩個相等，換言之，在如是之一點，y' 判別式亦必爲零. 是以歧點軌跡之方程，必再見於 y' 判別式關係中.

就常情言之，此諸**額外軌跡** (extraneous loci) 之方程均不爲解，乃因積分曲線所具有之特性而引起. 故如預知積分曲線無二重點或歧點，即易知其不能有叉點軌跡或歧點軌跡. 但額外軌跡之發生有時與積分曲線之性質無關. 若兩積分曲線互切而過其切點之積分曲線爲數如初，則相異之 y' 值之個數必因而減小. 故在此切點處，y' 判別式應等於零，且此類點之軌跡若竟存在，即將爲 y' 判別式關係所示知. 吾人稱此曰**切點軌跡** (tac-locus); 其方程通常不能適合微分方程，亦不發現於 c 判別式關係中.

例如 §V·3 所提及之圓族，其 y' 判別式關係爲 $y^2(y^2-r^2)=0$; 此時 $y=\pm r$ 爲包線，而 $y=0$ 則爲切點軌跡. 試核驗之，知 $y=0$ 並

不適合微分方程.

尤可注意者,因式 $y+r$ 及 $y-r$ 俱於 c 及 y' 兩判別式發現一次,而因式 y 則以平方之态態發現於 y' 判別式中.

此等事實與 M.J.M.Hill 教授在 Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 19 (1888), p.561 所發表之普徧原理,若合符節. 彼在此文中嘗證明云在通常情形,在 c 判別式中相當於包線之因式發現一次,相當於叉點軌跡者二次,相當於歧點軌跡者三次;而在 y' 判別式中,相當於包線之因式發現一次,相當於切點軌跡者二次,相當於歧點軌跡者一次.

在積分曲線族中,偶有其一當參數趨近某一定値時各曲線與之接近而以之爲極限曲線.此一曲線之形狀常與其他各曲線相異. 此特別曲線往往有與其他各曲線切於相同諸點之性質*. 除此諸點以外(通過此諸點之積分曲線各有無限個),經過特別曲線上每點之積分曲線較諸平時爲數更少.故前者之方程,應兼爲 y' 及 c 兩判別式關係所示.尤有進者,此特解之相當因式應一見於 c 判別式,三見於 y' 判別式中.

例如微分方程

$$x^2y'^2+x^2yy'+a=0\ (\S\,\mathrm{IV}\cdot 2,\text{習題 }9)$$

之 y' 判別式爲

$$x^3(xy^2-4a).$$

---

* 參閱 H. Bateman, 微分方程 (1918), §§ 8, 39; 及 M. Petrovitch, Mathematical Annalen, Vol 50 (1918), p.103.

積分曲線則爲一族等軸雙曲線

$$ax+cxy+c^2=0,$$

各以 y 軸爲其漸近線之一. 令 $c=0$, 則 y 軸亦爲一特別曲線, 此特別曲線與族中其他各曲線均切於無窮遠處. 其他積分曲線無一經過 $x=0$ 上與原點爲有限距離之任何點. 微分方程之 c 判別式爲

$$x(xy^2-4a).$$

此處之 $xy^2-4a=0$ 爲異解.

下表指示上列各種軌跡之相當因式, 在 c 及 y' 兩判別式中通常 * 發現之次數.

c 判別式		y' 判別式	
包線	1	包線	1
特別曲線	1	特別曲線	3
叉點軌跡	2	切點軌跡	2
歧點軌跡	3	歧點軌跡	1

若一軌跡兼爲二者, 則其相當因式發現之次數, 應爲表中各者之和. 舉例言之, 一切點軌跡若兼爲包線, 則其因式應一見於 c 判別式而三見於 y' 判別式中; 又若有一歧點軌跡兼爲包線, 則其因式應四見於 c 判別式中而兩見於 y' 判別式中; 他例亦然.

如任意常數之兩相異值決定同一積分曲線, 則此曲線之方程爲一切點軌跡; 卽其左端將於 y' 判別式發現兩次.

* 此等數目常有不能適用之例, 見 H. T. H. Piaggio, 微分方程, 第二版, §161.

試取叉點三級曲線族

$$y^2=2x(x-c)^2$$

研究之.其微分方程爲

$$(2xy'-y)^2=8x^3.$$

又 c 及 y' 兩判別式於略去常數因式後順次爲

$$xy^2 \text{ 及 } x^5.$$

因式 y 兩見於 c 判別式中而未呈現於 y' 判別式中,可見 $y=0$ 似爲一叉點軌跡.審察本題之積分曲線族卽知其然.

將此族曲線更予考查,乃知 y 軸係一特別曲線,因其與其餘各積分曲線皆在原點相切也.此足以說明因式 x 在 c 判別式中發現一次與在 y' 判別式中發現三次之故.但由其他方面言之,$x=0$ 亦可由通解中令 $c=+\infty$ 及 $c=-\infty$ 求得之.故 $x=0$ 爲一切點軌跡.此層足以說明 y' 判別式中,因式 x 所以多發現兩次而共爲五次之原因.

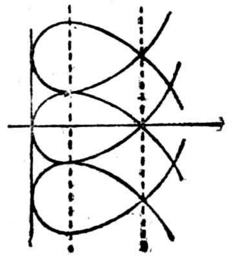
吾人須知一因式在各判別式中發現之次數,常可輔助吾人識別令該因式等於零時之軌跡.然諸數之同一組合往往可有數種解釋,因之此類組合之研究只可利用之爲一線索耳.作一組足爲表率之積分曲線之圖形方切實用.因吾人往往可藉此以說明由解析所求得之結果.

尤有進者,在推求判別式之運算中,極易引入額外因式或遺漏其本有因式,故運算苟不細心,則所得各因式發現之次數未必正確,據此推出之結論亦易謬誤.實際運算,宜將 y' 及 c 兩判別式同時求出,並令各因式爲零以驗其是否適合原微分方程.如是則在任一判別式中,倘將一因式遺漏,其在他一判別式之發現,可爲改正之助,以免

應得之解或有所失.

亦有無歧義之事者. 方程之次數若爲二或三,則用 §V·2 所示之公式,必得各因式所發現之正確次數. 再則積分曲線果爲直線或圓錐曲線,則知其決無叉點軌跡或歧點軌跡.

習題 1. $xy'^2-(x-1)^2=0$.



本方程之通解

$$9(y+c)^2=4x(x-3)^2,$$

乃一族叉點三級曲線之方程,其各曲線與 y 軸相切且各有叉點在 $(3,c)$ 處,如附圖所示.

其 y' 判別式關係爲 $x(x-1)^2=0$, c 判別式關係爲 $x(x-3)^2=0$.

此中 $x=0$ 爲兩判別式所公有,且適合於微分方程(因在直線 $x=0$ 上任一點處之 $y'=\infty$). 故知其爲一異解.

$x-1=0$ 僅發現於 y' 判別式中(注意此因式發現兩次). 故知其係一切點軌跡.

又 $x-3=0$ 僅發現於 c 判別式中(注意此因式發現兩次). 故知其係一叉點軌跡.

習題 2. $27xy'^3=8$.

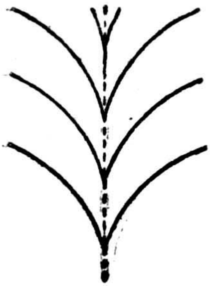
本方程之通解易知其爲

$$(y+c)^3=x^2,$$

此乃一族半三級拋物線(semi-cubical parabolas). 如略去常數因式,則 c 及 y' 兩判別式可順次書作

$$x^4 \text{ 及 } x^2.$$

考查此族積分曲線,知 $x=0$ 爲包線方程,因沿此直線之 $y'=\infty$ 與由



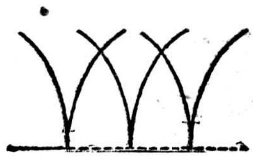
微分方程所示者相符合也.

再則, $x=0$ 兼爲歧點軌跡. 參觀附圖當可明瞭.

習題 3. $4y'^2=9x$.

本方程之通解爲

$$(y+c)^2=x^3.$$



於此, y' 判別式關係爲 $x=0$, c 判別式關係爲 $x^3=0$.

$x=0$ 顯然不能適合於微分方程, 而爲一歧點軌跡, 如附圖所示.

4. $yy'^2=1$.

5. $y(3-4y)^2y'^2=4(1-y)$.

6. $(a-x)y'^2+(y-x)y'^2+y=0$.

7. 考察下列方程之異解及額外軌跡.

§IV·1, 習題 3, 8.

§IV·2, 習題 1, 4, 5, 6, 7, 8, 10.

§V·3, 習題 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

§IV·4, 習題 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 19, 20.

§IV·5, 習題 2, 3, 4, 5, 8, 12, 13.

V·5. **撮要** 吾人已知異解(即包線)之方程兼爲 c 及 y' 兩判別式所示(§§V·1, V·3). 除此以外, c 判別式嘗示吾人以叉點軌跡及歧點軌跡; y' 判別式又嘗示吾人以歧點軌跡及切點軌跡, 此二者有時又可同時引起一特解 (§V·4). 關於各種因式在各判別式中所

應發現之次數,則可參考 §V·4 之表.

Arthur Cayley (1821—1895) 在 Messenger of Mathematics Vol. II (1873), p.6; Vol. VI, p.23 中首先發揮本節之原理. 在同書 Vol. XII, p.1, J. W. L. Glaisher 曾設有例解若干,可供參考.

吾人須知,一微分方程通常並無異解,蓋由 $f(x,y,y')=0$ 及 $\partial f/\partial y'=0$ 解出 y 與 y' 而得

$$y=\phi(x), \qquad y'=\phi_1(x).$$

欲此 y 之值能爲題之一解,吾人須有

$$\phi_1(x)=\frac{d\phi(x)}{dx},$$

而此在平時並不常真也. 由上二式消去 y' 之結果, Darboux 曾證明其通常係一歧點軌跡 (Bulletin des Sciences Mathematiques, Vol. IV, 1873, p.158). Picard 在其 Traité d'Analyse, Vol. III, 第三章中亦示有一證. Fine 在 American Journal of Mathematics, Vol. XII 中; Chrystal 在 1896 之 Nature 中; Liebmann 在 Differentialgleichungen, p. 95 中, 曾各討論此問題. 如微分方程含有導式之超越函數, 則關於其異解之問題可參考 M. J. M. Hill 教授在 Prcceedings of the London Mathematical Society, Series 2, Vol. 17 (1918), p. 149 之論文. 該文對於異解之理論頗多發揮. 關於此點亦可參考 S. Rothenberg, 在 Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Leipzig, Vol. 20 (1908), p. 3 之論文 "Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie Singulären Lösungen".

第六章

常係數平直微分方程

VI·1. **平直微分方程之通式** **平直微分方程**(linear differential equation)者乃其所含應變數及其一切導式之一次方程也. 其通式爲

(1) $X_0y^{(n)}+X_1y^{(n-1)}+X_2y^{(n-2)}+\cdot\cdot\cdot+X_{n-1}y'+X_ny=X,$

其中 $X_0, X_1, X_2, \cdot\cdot\cdot, X_n, X$ 皆爲 x 之函數或常數. 如令 $y'=Dy$, $y''=D^2y, \cdot\cdot\cdot, y^{(n)}=D^ny$, 則(1)可書成簡便之形式

$$(X_0D^n+X_1D^{n-1}+X_2D^{n-2}+\cdot\cdot\cdot+X_{n-1}D+X_n)y=X,$$

或卽

$$F(D)y=X,$$

而 $F(D)$, 卽多項式 $X_0D^n+X_1D^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+X_n$, 則代表微分運算符號

$$X_0\frac{d^n}{dx^n}+X_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdot\cdot\cdot+X_{n-1}\frac{d}{dx}+X_n.$$

平直微分方程有二特性有助於其解者, 宜特別注意. 今述之如下:

1° 設 $X=0$. 此時該方程稱爲齊次平直微分方程, 因其諸項俱

各爲y及其一切導式之一次式也(如非齊次,則稱爲不齊次 complete 平直微分方程). 如$y=y_1$適合此方程,則$y=c_1y_1$(c_1爲常數)亦必適合之. 其故在$D^k(c_1y_1)=c_1D^ky_1$, $F(D)(c_1y_1)=c_1F(D)y_1$. 但由假設, $F(D)y_1=0$, 故$F(D)(c_1y_1)=0$.

尤有進者,若$y=y_2$亦爲一解,又c_1及c_2爲任何二常數,則$y=c_1y_1+c_2y_2$將爲一解. 蓋和之導式等於導式之和,即

$$D^k(y_1+y_2)=D^ky_1+D^ky_2,$$

故有

$$F(D)(c_1y_1+c_2y_2)=F(D)(c_1y_1)+F(D)(c_2y_2)$$
$$=c_1F(D)y_1+c_2F(D)y_2=0.$$

仿此,如已知r個特別積分* $y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot, y_r$, 則

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdot\cdot\cdot+c_ry_r$$

將爲一解. 因n級微分方程之通解應爲含有n個獨立的任意常數之一解,故吾人知一特性:

A. 若$y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot, y_n$爲一$n$級齊次平直微分方程之$n$個平直無關+(linearly independent)之特別積分,則函數$c_1y_1+c_2y_2+\cdot\cdot\cdot+c_ny_n$爲其普遍積分(general integral).

---

* 如$y=y_k$爲一平直微分方程之一解,則稱y_k爲該方程之一積分(integral).

\+ 設$y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot, y_n$爲僅含一個變數之$n$個函數,如吾人不能求得$n$個常數$a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_n$使$a_1y_1+a_2y_2+\cdot\cdot\cdot+a_ny_n$在變數任取何值時俱化爲零,則此$n$個函數謂爲平直無關. 例如$y_1=2x-x^2$, $y_2=x+x^2$, $y_3=x$顯非平直無關,因$y_1+y_2-3y_3\equiv0$; 即其對於x之一切値常爲零也. 或以通用之語表之曰$y_1+y_2-3y_3$恆等於零.

含一變數之一組函數平直無關之條件之正確敘述與證明,見附錄二.

如各特別積分並非平直無關，則此法所得者即非通解．例如設有關係式 $a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n=0$ 存在，其中諸 a 均爲常數而不全爲零．苟有 a_n 者異於零，則

$$y_n\equiv-\frac{a_1}{a_n}y_1-\frac{a_2}{a_n}y_2-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_n}y_{n-1},$$

且所得之積分變爲

$$\left(c_1-\frac{a_1}{a_n}c_n\right)y_1+\left(c_2-\frac{a_2}{a_n}c_n\right)y_2+\cdots+\left(c_{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n}c_n\right)y_{n-1},$$

其中僅含 $n-1$ 個獨立常數矣．

注意． 吾人須知特別積分之如何求出，並不關緊要．此後將見方程中有常見之一類，可純用代數方法求出其特別積分；在其他情形亦有可由視察以得其若干特別積分者．

令(1)之右端爲零，則得一齊次平直微分方程．爲行文便利起見，吾人稱該方程之通解曰(1)之補充函數(complementary function)．

2° 設 $Y\equiv c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ 爲(1)之補充函數，且另知其一特別積分 V(不問其係用何法求出)，則 $Y+V$ 爲(1)之通解．因其爲平直方程，應有

$$f(D)(Y+V)=f(D)Y+f(D)V=0+X=X.$$

故又得一特性：

B．不齊次平直微分方程之普通積分，等於其補充函數與任一特別積分之和．

VI.2．**常係數平直微分方程*** **補充函數** 試取下列方程論之

* 此法係 Leonhard Euler (1707—1783) 及 Jeanle—Rond d'Alembert (1717—1783) 所創．

(1) $$k_0 y^{(n)}+k_1 y^{(n-1)}+k_2 y^{(n-2)}+\cdots+k_{n-1}y'+k_n y=X,$$

即

$$(k_0D^n+k_1D^{n-1}+k_2D^{n-2}+\cdots+k_{n-1}D+k_n)y=X,$$

即

$$f(D)y=X,$$

其中 $k_0, k_1, \cdots, k_n$ 均爲常數. 在 §§VI·2, VI·3, VI·4 諸節中,吾人設 $X=0$,則

(2) $$f(D)y=0.$$

令 $y=e^{mx}$, 則 $Dy=me^{mx}, \cdots, D^ry=m^re^{mx}$;

故 $$f(D)e^{mx}=e^{mx}f(m).$$

欲 e^{mx} 爲 (2) 之一積分, m 須適合於方程

(3) $$f(m)\equiv k_0m^n+k_1m^{n-1}+k_2m^{n-2}+\cdots+k_{n-1}m+k_n=0.$$

由 (3) 之每根可導出 (2) 之一積分. 設諸根 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 各不相同, 則 $e^{m_1x}, e^{m_2x}, \cdots, e^{m_nx}$ 將爲平直無關, 且按 §VI·1,A 之結論, 知 $c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdots+c_ne^{m_nx}$ 將爲 (2) 之普通積分.

注意. 方程 (3) 易由方程 (2) 求得之, 常稱爲輔助方程* (auxiliary equation).

習題 1. $y''-3y'+2y=0.$

其輔助方程 $m^2-3m+2=0$ 之根爲 1, 2. 故其通解爲

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}.$$

習題 2. $y''-6y'+25y=0.$

---

* 亦稱 characteristic equation.

輔助方程 $m^2-6m+25=0$ 之根爲 $3\pm 4i$，而 $i=\sqrt{-1}$.

$$\therefore\ y=c_1e^{(3+4i)x}+c_2e^{(3-4i)x},$$

$$\text{卽}\ y=e^{3x}(c_1e^{4ix}+c_2e^{-4ix}).$$

3. $y'''-y'=0$.
4. $(D^3-2D^2-D+2)y=0$.
5. $y''+4y=0$.
6. $y'''+y''-4y'-4y=0$.
7. $(D^4-1)y=0$.
8. $(6D^2+D-1)y=0$.

VI·3. **輔助方程之有重根者** 如輔助方程有重根,則 §VI·2之法並不能示吾人以 n 個平直無關之積分.因之亦不能示吾人以通解.於此,試以更普通之代替法,令 $y=e^{mx}\phi(x)$,其中 $\phi(x)$ 乃 x 之一函數,可由吾人任意選擇者.如此,則

$$Dy=e^{mx}[m\phi+D\phi],$$

$$D^2y=e^{mx}[m^2\phi+2mD\phi+D^2\phi],$$

$$D^3y=e^{mx}[m^3\phi+3m^2D\phi+3mD^2\phi+D^3\phi],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^ny=e^{mx}\Big[m^n\phi+nm^{n-1}D\phi+\frac{n(n-1)}{2!}m^{n-2}D^2\phi+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}m^{n-r}D^r\phi+\cdots+D^n\phi\Big].$$

故

$$f(D)y=e^{mx}\Big[f(m)\phi+f'(m)D\phi+\frac{1}{2!}f''(m)D^2\phi+\cdots$$
$$+\frac{1}{r!}f^{(r)}(m)D^r\phi+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(m)D^n\phi\Big],$$

其中

$$f'(m)=\frac{d}{dm}f(m),\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ f^{(r)}(m)=\frac{d^r}{dm^r}f(m).$$

若 m_1 爲 $f(m)=0$ 之 r 次根，則有（§V·2）

$$f(m_1)=0,\ f'(m_1)=0,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ f^{(r-1)}(m_1)=0,\ 但\ f^{(r)}(m_1)\neq 0.$$

在此情形，欲令 $f(D)y$ 在 $y=e^{m_1x}\phi(x)$ 時爲零，僅須 $D^r\phi\equiv 0$，因之 ϕ 之更高級導式亦均爲零；換言之，僅須 $\phi=c_1x^{r-1}+c_2x^{r-2}+\cdot\cdot\cdot+c_{r-1}x+c_r$ 即可，其中 $c_1, c_2, \cdot\cdot\cdot, c_r$ 爲任何常數． 故吾人得知 m_1 若爲輔助方程之一 r 次根，則不僅 e^{m_1x} 爲方程之一積分，xe^{m_1x}，$x^2e^{m_1x}$，$\cdot\cdot\cdot$，及 $x^{r-1}e^{m_1x}$ 亦莫不然．即相當於一 r 次根，吾人仍有 r 個平直無關之積分．循是以推，無論輔助方程有無重根，而所需以決定補充函數之 n 個平直無關之積分（A，§VI·1），必常可由此方程求得之．

習題 1．$(4D^3-3D+1)y=0.$

方程 $4m^3-3m+1=0$ 之根爲 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$．故通解爲

$$y=(c_1+c_2x)e^{x/2}+c_3e^{-x}.$$

2．$(D^3-D^2-D+1)y=0.$　　3．$(D^4+2D^3-2D-1)y=0.$

4．$(D^3-6D^2+9D)y=0.$　　5．$(D^4+3D^3+3D^2+D)y=0.$

6．$(D^4-D^2)y=0.$

VI·4. **輔助方程之有複數之根者**　如微分方程之係數盡爲實數，而其根之若干或全體爲複數，則可將補充函數之項排列合宜，使之僅含實數之項． 蓋若輔助方程有一根 $\alpha+i\beta$，則因其係數俱爲

實數，故亦必以 $\alpha-i\beta$ 爲一根．補充函數中相當於此複數根之兩項爲

$$c_1e^{(\alpha+i\beta)x}+c_2e^{(\alpha-i\beta)x},\quad \text{卽}\quad e^{\alpha x}(c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x}).$$

但 $$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x,\quad e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x,$$

故此兩項可書作

$$e^{\alpha x}[(c_1+c_2)\cos\beta x+i(c_1-c_2)\sin\beta x].$$

令

$$c_1+c_2=A,\quad \text{及}\quad i(c_1-c_2)=B,$$

則有

$$e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x),$$

其中 A 及 B 爲二任意常數．

此式又可書作

$$ae^{\alpha x}\sin(\beta x+\phi)^*,\quad \text{或}\quad ae^{\alpha x}\cos(\beta x+\psi),$$

其中 a,ϕ，及 ψ 皆爲任意常數．在解釋物理學問題之解答時，應用後二形式有時較便．

若此對複數之根又係重根，則易證其在補充函數中之相當部分

* 蓋 $A\cos\beta x+B\sin\beta x$ 可書作

$$\sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\beta x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\beta x\right).$$

因 $A/\sqrt{A^2+B^2}$ 及 $B/\sqrt{A^2+B^2}$ 之平方和等於 1，故可取爲一角 ϕ 之正弦及餘弦．如令 $\sqrt{A^2+B^2}=a$，則原式變爲 $a(\sin\phi\cos\beta x+\cos\phi\sin\beta x)$，卽 $a\sin(\beta x+\phi)$．

或令 $A/\sqrt{A^2+B^2}=\cos\Psi$ 及 $B/\sqrt{A^2+B^2}=-\sin\Psi$，則原式變爲

$$a(\cos\Psi\cos\beta x-\sin\Psi\sin\beta x),\quad \text{卽}\quad a\cos(\beta x+\Psi).$$

爲

$$e^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+B_1\sin\beta x)+xe^{\alpha x}(A_2\cos\beta x+B_2\sin\beta x),$$

即

$$e^{\alpha x}[(A_1+A_2x)\cos\beta x+(B_1+B_2x)\sin\beta x].$$

又若此對複數根爲 r 次根,則補充函數中之相當部分可書作

$$e^{\alpha x}[(A_1+A_2x+\cdot\cdot\cdot+A_rx^{r-1})\cos\beta x$$
$$+(B_1+B_2x+\cdot\cdot\cdot+B_rx^{r-1})\sin\beta x].$$

習題 1. 在 §VI.2, 習題 2 之情形.

$\alpha=3, \beta=4$, 故其解亦可書作

$$y=e^{3x}(A\cos 4x+B\sin 4x),$$

或 $\quad y=ae^{3x}\sin(4x+\phi),\quad$ 或 $\quad y=ae^{3x}\cos(4x+\psi).$

2. $y''+2y=0.$ 3. $y^{\text{iv}}-y=0.$

4. $(D^4+2D^2+1)y=0.$ 5. $(D^3-D^2+D)y=0.$

注意. 爲解釋某種物理學問題起見,有時須引用雙曲線函數以代指數函數之相當於輔助方程之二實根者. 吾人在此將利用公式
$e^x=\cosh x+\sinh x,\ e^{-x}=\cosh x-\sinh x.$

先設輔助方程有等值異號之二實根. 令其爲 m 及 $-m$. 輔助方程中之兩相當項爲

$$c_1e^{mx}+c_2e^{-mx},$$

該式可書作

$$(c_1+c_2)\cosh mx+(c_1-c_2)\sinh mx,$$

或

$$A\cosh mx+B\sinh mx.$$

用雙曲線函數和角公式,則上式亦可

於 $A^2 > B^2$ 時，書作 $a\cosh(mx+b)$，

於 $A^2 < B^2$ 時，書作 $c\sinh(mx+d)$

之形式，其中 a, b, c, d 均係任意常數.

試於上列各款分別求出以 A 及 B 表 a 及 b 與 c 及 d 之值，以資練習.

今再設輔助方程有二實根 m_1 及 m_2，因可有 k 及 l 兩實數，使

$$m_1 = k + l \quad 及 \quad m_2 = k - l,$$

故

$$c_1 e^{(k+l)x} + c_2 e^{(k-l)x}$$

可書作

$$e^{kx}(c_1 e^{lx} + c_2 e^{-lx}),$$

或

$$e^{kx}(A\cosh lx + B\sinh lx).$$

VI·5. **特別積分** 按以上數節所論，吾人已知求解一常係數不齊次平直微分方程之問題當分兩層，即先求其補充函數，次求其一特別積分也.

前者之求法業經充分說明其有賴於一代數方程之解答.

同樣，吾人即將證明（§§VI·7, VI·8, VI·9）在平直微分方程爲 n 級時，求其一特別積分之問題，可以 n 次求積術解之. 在若干情形，此等求積式甚易運算，且可證明此項通則至合實用. 但用此法亦有至爲繁重且非必要者，吾人已獲有若干特殊方法以代之. 本書將提供三個通行法則，各具特長，且藉以推得特殊方法適用於許多習見之例.

VI·6. 運算符號 $(D-\alpha)$ 之性質 在本問題中 α 乃一常數.

1° $(D-\alpha)y$ 者意云 $\frac{dy}{dx}-\alpha y$ 也. 仿此, $(D-\beta)y$ 係 $\frac{dy}{dx}-\beta y$ 之意. 故 $(D-\alpha)y+(D-\beta)y$ 之意爲 $2\frac{dy}{dx}-(\alpha+\beta)y$, 該式可以符號書作 $[2D-(\alpha+\beta)]y$. 換言之, 兩運算符號 (symbolic operator) $(D-\alpha)$ 及 $(D-\beta)$ 分別施於 y 上並取其和, 則結果與逕用 $[2D-(\alpha+\beta)]$ 於 y 上之結果相同. 由此可知, 上述兩符號運算結果之和可由其符號之和之運算結果以得之. 因此, 吾人可書

$$(D-\alpha)+(D-\beta)=2D-(\alpha+\beta).$$

吾人易知此項規則可以應用於此類符號有限個數之和, 及其任意二者之差.

2° $(D-\beta)(D-\alpha)y$ 之意爲 $\left(\frac{d}{dx}-\beta\right)\left(\frac{dy}{dx}-\alpha y\right)$, 亦卽 $\frac{d^2y}{dx^2}-(\alpha+\beta)\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y$. 換言之, 在 y 上先用運算符號 $(D-\alpha)$ 後, 續用運算符號 $(D-\beta)$ 之結果, 與逕用 $[D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta]$ 於 y 上之結果相同. 由此可知, 累次施用此類符號之運算結果可由用其符號之積之符號運算以得之. 因此, 吾人可書

$$(D-\beta)(D-\alpha)=D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta.$$

再者, 上式右端係 α 與 β 之對稱函數, 故左端諸符號運算之先後無關重要, 或以習用之語述之, 卽所論之二運算符號可以互易 (commutative).

所論之符號若爲數有限, 則不論多寡此理仍可適用, 固一易知之

事也.

本節諸結果可彙述如下:

此處所論之一類運算符號對於加、減、乘三事與代數數運算之方法相同.

注意. 因 D 之任一常係數多項式,可分解爲若干平直因式之乘積,故上述定理亦適用於運算符號爲 D 之常係數多項式者. 是以一常係數平直微分方程之輔助方程之根若爲 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ (無論其值是否互異),吾人卽可書此微分方程爲下列之形式

$$k_0(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)y=X.$$

VI·7. **特別積分之求法** 求常係數不平直微分方程之特別積分,有一通用之法(且由此法兼得補充函數之另一求法)可由次之研究導出之.

試取一個三級微分方程

(1) $$f(D)y=(D-m_1)(D-m_2)(D-m_3)y=X$$

論之,其中 $k_0=1$,且諸 m 互異 *.

欲求此方程之一積分,吾人須決定 x 之一函數,而使 $f(D)$ 運用於其上之結果恰爲 X.

令 $(D-m_2)(D-m_3)y=u$,而 u 係一新函數,則 (1) 化爲

$$(D-m_1)u=X, \quad 卽 \quad \frac{du}{dx}-m_1u=X.$$

此係一個一級平直方程,e^{-m_1x} 爲其一積分因式 (§II·9). 故

* 因求簡明而如是選定,惟對於普偏情形亦莫不適用.

$$e^{-m_1x}u=\int e^{-m_1x}Xdx+c,\ \text{或}\ u=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Xdx+ce^{m_1x};$$

即

$$(D-m_2)(D-m_3)y=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Xdx+ce^{m_1x}.$$

今設

$$(D-m_3)y=v.$$

則

$$(D-m_2)v=e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Xdx+ce^{m_1x}.$$

此亦爲一個一級平直方程;故有積分因式 e^{-m_2x}.引用此因式,則有

$$ve^{-m_2x}=\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}Xdx\right]dx+\frac{c}{m_1-m_2}e^{(m_1-m_2)x}+c',$$

即

$$v=e^{m_2x}\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}Xdx\right]dx+\frac{c}{m_1-m_2}e^{m_1x}+c'e^{m_2x}.$$

故

$$(D-m_3)y=e^{m_2x}\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}Xdx\right]dx+c''e^{m_1x}+c'e^{m_2x},$$

其中

$$c''=\frac{c}{m_1-m_2}.$$

此又爲平直方程,以 e^{-m_3x} 爲其一積分因式.引用之,則有

$$ye^{-m_3x}=\int e^{(m_2-m_3)x}\left\{\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}Xdx\right]dx\right\}dx$$

$$+\frac{c''}{m_1-m_3}e^{(m_1-m_3)x}+\frac{c'}{m_2-m_3}e^{(m_2-m_3)x}+c_3,$$

卽

$$y=e^{m_2x}\int e^{(m_2-m_3)x}\left\{\int e^{(m_1-m_2)x}\left[\int e^{-m_1x}Xdx\right]dx\right\}dx$$

$$+c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+c_3e^{m_3x}.$$

若原微分方程爲 n 級,且其輔助方程之根各不相同,則其解當爲

$$\text{I}.\quad y=e^{m_nx}\int e^{(m_{n-1}-m_n)x}\int\cdot\cdot\cdot\int e^{(m_1-m_2)x}\int e^{-m_1x}X(dx)^n$$

$$+c_1e^{m_1x}+c_2e^{m_2x}+\cdot\cdot\cdot+c_ne^{m_nx}.$$

之形式*,此固不難推知者也.

注意. (I) 之第二列卽吾人所熟知之補充函數也 (§VI·2) (學者可自證如輔助方程有重根,則由此可導出 §VI·3 之結果). 無論輔助方程諸根是否互異,(I) 之第一列常爲特別積分. 方程 (1) 中諸因式之次序既無關緊要,故宜取諸 m 之一適當排列法,使所須完成之累次求積 (successive quadrature) 趨於簡易.

習題 1. $y'''-y''-2y'=e^{-x}$.

其輔助方程爲

$$m^3-m^2-2m=0,\qquad \therefore\ m=0,-1,2.$$

其補充函數爲

$$Y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}.$$

特別積分爲

---

* 欲證明之,可設其對於 n 級方程爲眞,而證其對於 $(n+1)$ 級方程亦眞,此層留待學者自爲之.

$$V=e^{2x}\int e^{(-1-2)x}\int e^{(0+1)x}\int e^{-x}(dx)^3$$

$$=e^{2x}\int e^{-3x}\int e^{x}(-e^{-x})(dx)^2=-e^{2x}\int e^{-3x}\left[\int dx\right]dx$$

$$=-e^{2x}\int e^{-3x}xdx=\frac{1}{3}xe^{-x}+\frac{1}{9}e^{-x}.$$

因 e^{-x} 既爲補充函數之一部分，僅用 $\frac{1}{3}xe^{-x}$ 即可，如此，則通解爲

$$y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+\frac{1}{3}xe^{-x}.$$

諸 m 若取 $0,2,-1$ 之次序，則較易求積.

2. $y''+3y'+2y=e^{e^x}$.

3. $(D^3+3D^2+3D+1)y=2e^{-x}-x^2e^{-x}$.

4. $(D^3-D-2)y=\sin x$.　　5. $(D-1)^2y=\dfrac{e^x}{(1-x)^2}$.

VI·8. **求特別積分之又一方法*** §VI.7 所示求特別積分之通法類皆冗長. 其第一積分雖易求得，但續求以後各積分則往往令人厭倦. 吾人本節中將說明如何修改此法，使於輔助方程各根互異時，僅須 n 個簡單求積，即可求得一特別積分.

設

$$(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)y=X,$$

---

* 此法首由 Lobatto 在 Théorie des Caratéristiques, Amsterdam, 18?7, 發表. Boole 亦嘗自得其法，文見 Cambridge Mathematical Journal, 1st Series, Vol. II, p. 114.

吾人可用符號將其書作

$$y=\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}X,$$

其中 $\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}$ 係 $(D-m_1)(D-m_2)\cdot\cdot\cdot(D-m_n)$ 之逆運算之符號. 猶之 x 爲運算符號 "sin" 運用於 $\sin^{-1}x$ 上之結果,吾人若將 $(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ 運用於

$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}X$$

上,卽當得 X. 吾人並須注意各符號 $(D-m_1)$, $(D-m_2)$, $\cdots$, $(D-m_n)$ 運用之先後無關緊要.

若輔助方程之根各異其値,則由代數之立場觀之,分數

$$\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}$$

可等於部分分式 (partial fractions) 之和

$$\frac{a_1}{D-m_1}+\frac{a_2}{D-m_2}+\cdots+\frac{a_n}{D-m_n}.$$

縱視之爲運算符號,此等式仍當成立;因運用 $(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ 於二者之上可驗明其相等也. 上述運算符號中各因式之次序可任意顚倒,故當其運用於部分分式之和上時,所得各項之運算符號均係多項式,且可視作代數式而處理之. 是以所得兩種符號視作代數式時之相等,猶云二種運算之相等. 因符號 $(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)$ 並無兩歧之意義,故原有之分數形式之運

算符號亦相等;即

$$y=\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)}X$$

$$\equiv\frac{a_1}{D-m_1}X+\frac{a_2}{D-m_2}X+\cdots+\frac{a_n}{D-m_n}X.$$

若令 $u=\frac{a}{D-m}X$, 則 $(D-m)u=aX$.

求此平直方程之積分,得 $ue^{-mx}=a\int e^{-mx}Xdx$, 即

$u=ae^{mx}\int e^{-mx}Xdx$. 故所求之特別積分可書作下列形式

II. $a_1e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Xdx+a_2e^{m_2x}\int e^{-m_2x}Xdx+\cdots$

$$+a_ne^{m_nx}\int e^{-m_nx}Xdx.$$

輔助方程若有一重根,則此法顯須修正如下:

為說明起見,設 m_1 為三次根,則相當諸部分分式之和為

$$\frac{a_1}{D-m_1}+\frac{a_2}{(D-m_1)^2}+\frac{a}{(D-m_1)^3},$$

且特別積分中相當各項應為(§VI·7, I)

$$a_1e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Xdx+a_2e^{m_1x}\int\int e^{-m_1x}X(dx)^2$$

$$+a_3e^{m_1x}\int\int\int e^{-m_1x}X(dx)^3.$$

習題 1. $(D^2-3D+2)y=e^x$.

2. $(D^3-3D^2-D+3)y=x^2$. 3. $y'''-4y''+5y'-2y=x$.

VI·9. **參數變值法*** **參數變值法**(variation of parameters)爲另一普徧適用之方法,有時應用甚便,如方程之級不高,則此法更合實用. 其法係將補充函數中之常數視作 x 之未定函數,而使此修正後之補充函數代入 $f(D)y$ 之結果,恰爲 X 而不復爲零.

今未定函數有 n 個而其必須適合之條件僅有一個,此外可另加與此條件相容(consistent)之 $n-1$ 個其他條件,故其適合此僅有條件之法爲數無限. 在實際作題時,吾人加添其餘各條件之法,爲使其僅含各未定函數之第一級導式.

試取三級方程爲例,以示此法運用之道(其理論之可以應用於任何級之方程,固甚顯然).

設此方程爲

(1) $$f(D)y\equiv(k_0D^3+k_1D^2+k_2D+k_3)y=X,$$

且設其補充函數爲

$$c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3.$$

此法之關鍵在求 x 之三函數,如 v_1, v_2, v_3 者,而使

(2) $$y=v_1y_1+v_2y_2+v_3y_3$$

能爲(1)之通解. 吾人尚可另加二條件於 v_1, v_2, v_3.

求(2)之微分,有

$$Dy=v_1y_1'+v_2y_2'+v_3y_3'+y_1v_1'+y_2v_2'+y_3v_3'.$$

今令

(3) $$y_1v_1'+y_2v_2'+y_3v_3'=0$$

* 此法創自 Joseph Louis Lagrange (1736—1813).

爲吾人可以任意選定之兩條件之一；因之

(4) $$Dy=v_1y_1'+v_2y_2'+v_3y_3'.$$

再求微分，有

$$D^2y=v_1y_1''+v_2y_2''+v_3y_3''+y_1'v_1'+y_2'v_2'+y_3'v_3'.$$

於此更令

(5) $$y_1'v_1'+y_2'v_2'+y_3'v_3'=0$$

爲吾人可以任意選定之第二條件，則有

(6) $$D^2y=v_1y_1''+v_2y_2''+v_3y_3''.$$

再求微分，有

(7) $$D^3y=v_1y_1'''+v_2y_2'''+v_3y_3'''+y_1''v_1'+y_2''v_2'+y_3''v_3'.$$

將(2)，(4)，(6)與(7)所示諸值代入(1)中，吾人求得

$$v_1f(D)y_1+v_2f(D)y_2+v_3f(D)y_3$$
$$+k_0(y_1''v_1'+y_2''v_2'+y_3''v_3')=X.$$

因 y_1,y_2,y_3 係 $f(D)y=0$ 之解，上式化成

(8) $$k_0y_1''v_1'+k_0y_2''v_2'+k_0y_3''v_3'=X.$$

因 y_1,y_2,y_3 乃由令(1)之 $X=0$ 所得之齊次平直微分方程之三個平直無關之解，乃知(3)，(5)與(8)爲互相獨立．故可由此三方程解出 v_1',v_2' 及 v_3'．經求積後卽得 v_1,v_2 及 v_3 之値，如將其代入(2)中，則得(1)之通解矣．其由此等積分所得包含積分常數之各項，亦卽前述之補充函數也．

吾人須注意此參數變値法適用於一切平直方程，固無論其係數

是否爲常數也．至於前述二法之用以求得特別積分者（§§VI·7, VI·8），則僅限於常保數方程.

茲以參數變值法解普通一級平直微分方程（§II·9）

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{9}$$

爲例以說明之.

首先討論變數可以分離之齊次平直微分方程

$$\frac{dy}{dx}+Py=0.$$

其解爲

$$y=ce^{-\int P dx}.$$

吾人之問題乃求一函數 v，使

$$y=ve^{-\int P dx} \tag{10}$$

能適合於（9）．求其微分，得

$$\frac{dy}{dx}=-vPe^{-\int P dx}+e^{-\int P dx}\frac{dv}{dx}.$$

代入（9）後，如有

$$e^{-\int P dx}\frac{dv}{dx}=Q, \qquad 即 \quad \frac{dv}{dx}=Qe^{\int P dx},$$

則（10）將爲（9）之一解；換言之，即須

$$v=\int Qe^{\int P dx}dx+C$$

也.是以吾人求得 (9) 之通解呈下形式

$$y=e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right].$$

試以之與前在 §II·9 中所求得者比較之.

習題1. $y''+y=\sec x$.

其輔助方程之根爲 $\pm i$,故補充函數爲 $c_1\cos x+c_2\sin x$.引用參數變値法,則有

$$y=v_1\cos x+v_2\sin x,$$

$$Dy=-v_1\sin x+v_2\cos x+\left|\cos x\frac{dv_1}{dx}+\sin x\frac{dv_2}{dx}=0,\right.$$

$$D^2y=-v_1\cos x-v_2\sin x-\sin x\frac{dv_1}{dx}+\cos x\frac{dv_2}{dx}.$$

代入微分方程,得

$$-\sin x\frac{dv_1}{dx}+\cos x\frac{dv_2}{dx}=\sec x.$$

此外,令

$$\cos x\frac{dv_1}{dx}+\sin x\frac{dv_2}{dx}=0.$$

$$\therefore\ \frac{dv_1}{dx}=-\sin x\sec x=-\frac{\sin x}{\cos x},\qquad v_1=\log\cos x+C_1.$$

$$\frac{dv_2}{dx}=1,\qquad v_2=x+C_2.$$

故其全解爲

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\log\cos x+x\sin x.$$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\tan x.$　　3. $y''+y=\cot^2 x.$

4. $y''-y=\dfrac{2}{e^x-1}.$　　5. $y'''+y'=\tan x.$

6. $(D-1)\,y=\dfrac{e^x}{(1-x)^2}.$　　(§VI·7, 習題 5.)

VI·10. **待定係數法**　今將陳述特別積分之另一求法以結束本問題. 此法雖不能普徧適用,然在可用時,則較爲簡便. 凡方程之右端僅具有有限個平直無關之導式之各項者均可應用此法. 項之爲 x^h, e^{lx}, $\sin mx$, $\cos nx$ 及其乘積 (h 爲正整數, l, m, n 爲常數) 者卽其例也.

吾人試取右端 X 之各項,各冠以一未定係數之式爲特別積分 V,而代入不齊次平直微分方程之左端,則因經過微分運算之故,所得結果有新項發現於其中. 因之吾人所取之 V 除應含 X 中諸項外,並應兼含由各該項之微分所引起之一切函數,且與之成一平直無關之組合者(由假設此類項僅有有限個),各冠以一未定係數. 吾人將此式代換微分方程中之 y,並令其結果恆等於 X (卽令兩端相當項係數相等之意). 如是求得諸未定係數間一組條件方程,往往可由之求得諸係數之值. 下列習題卽將說明此法:

習題 1.　$y''+4y=x^2+\cos x.$

其輔助方程之根爲 $\pm 2i$,

$$\therefore\ Y=A\cos 2x+B\sin 2x.$$

為求一特別積分起見，設

$$V=ax^2+bx+c+f\cos x+g\sin x,$$

則

$$DV=2a-f\cos x-g\sin x.$$

$$\therefore\ f(D)V=4ax^2+4bx+2a+4c+3f\cos x+3g\sin x.$$

令右端各係數與 X 中相當係數相等，則有

$$\begin{array}{ll} 4a=1 & \therefore\ a=\frac{1}{4}, \\ 4b=0 & b=0, \\ 2a+4c=0 & c=-\frac{1}{8}, \\ 3f=1 & f=\frac{1}{3}, \\ 3g=0 & g=0. \end{array}$$

故其通解為

$$y=A\cos 2x+B\sin 2x+\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{3}\cos x.$$

習題 2. $(D^2-2D+1)y=2xe^{2x}-\sin^2 x.$

其補充函數易知為

$$Y=(c_1+c_2x)e^x.$$

為易求特別積分起見，先以 $\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$ 代 $-\sin^2 x$. 如此，則右端變為

$$2xe^{2x}+\tfrac{1}{2}\cos 2x-\tfrac{1}{2}.$$

試取下式為特別積分

$$V=axe^{2x}+be^{2x}+c\cos 2x+f\sin 2x+g.$$

$$\therefore\ DV=2axe^{2x}+(a+2b)e^{2x}+2f\cos 2x-2c\sin 2x.$$

$$D^2V=4axe^{2x}+4(a+b)e^{2x}-4c\cos 2x-4f\sin 2x.$$

$$f(D)V=axe^{2x}+(2a+b)e^{2x}-(3c+4f)\cos 2x$$
$$-(3f-4c)\sin 2x+g.$$

故必有

$$a=2 \qquad \therefore\ a=2,$$

$$2a+b=0 \qquad b=-4,$$

$$3c+4f=-\tfrac{1}{2}$$

$$3f-4c=0 \qquad c=-\tfrac{3}{50},\quad f=-\tfrac{2}{25},$$

$$g=-\tfrac{1}{2} \qquad g=-\tfrac{1}{2},$$

因得通解如下:

$$y=(c_1+c_2x)e^x+2xe^{2x}-4e^{2x}-\tfrac{3}{50}\cos 2x-\tfrac{2}{25}\sin 2x-\tfrac{1}{2}.$$

3. $(D^2+1)y=2e^x+x^3-x.$

4. $(D^2+2D+1)y=3e^{2x}-\cos x.$ 5. $(D^3-1)y=x^2.$

此法不能適用於下列兩款:

1° 如方程右端某項亦爲補充函數中之一項,則將此項或其各導式代入 $f(D)y$ 之結果顯然爲零. 此蓋由於補充函數之定義與補充函數一項之導式仍爲其一項之事實而來.

吾人首先假設輔助方程之根相當於所論及之項者爲一單根;設此項爲 u,有

$$f(D)u=0,\qquad 但\ f'(D)u\neq 0.$$

今 $f(D)$ 既爲 D 之一多項式，且以

$$D^k(xu)=xD^ku+kD^{k-1}u,$$

故易知

$$f(D)(xu)=xf(D)u+f'(D)u$$
$$=f'(D)u\neq 0.$$

無論 m 是否爲實數，如 u 取 e^{mx} 之形式，則在此例，$f'(D)u$ 確含 u 之一項立卽可知；蓋以 $f'(D)e^{mx}=f'(m)e^{mx}$，而當 m 爲輔助方程之一單根時，$f'(m)\neq 0$ 也.

如 u 取 $e^{ax}\cos\beta x$ 之形式，$f'(D)(e^{ax}\cos\beta x)$ 或不含 $e^{ax}\cos\beta x$ 之項亦屬可能. 但 $f'(D)u$ 既非恆等於零，因之 $f'(D)(e^{ax}\cos\beta x)$ 必含有一項 $e^{ax}\sin\beta x$，且 $f'(D)(e^{ax}\sin\beta x)$ 必含有一項 $e^{ax}\cos\beta x$. 此乃由於 $\sin\beta x=\cos(\beta x-\pi/2)$ 之事實而知其然. 仿此，如 $u=e^{ax}\sin\beta x$ 且 $f'(D)(e^{ax}\sin\beta x)$ 不含有 $e^{ax}\sin\beta x$ 之項，則其必含有 $e^{ax}\cos\beta x$ 之一項；又由 $\cos\beta x=\sin(\beta x+\pi/2)$ 之關係，知 $f'(D)(e^{ax}\cos\beta x)$ 將含有 $e^{ax}\sin\beta x$ 之一項. 再則，吾人亦知不能有他項隨之發生.

由是可知，以 xu 及求其微分時所得互爲平直無關諸項（各乘以一未定係數）之和作 y 代入 $f(D)y$ 之結果，必仍爲含 u 之一組項，且此組中其餘各項盡係由 u 之微分而得.

茲設 u 爲補充函數之項，而與此項相當之輔助方程之根係一 r 次根，則

$$f(D)u=0,f'(D)u=0,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ ,f^{(r-1)}(D)u=0,$$

而

$$f^{(r)}(D)u\neq 0.$$

因

$$D^k(x^r u)=x^r D^k u+krx^{r-1}D^{k-1}u+\frac{k(k-1)}{2!}r(r-1)x^{r-2}D^{k-2}u+$$

$$\cdots+\frac{k(k-1)\cdots(k-s+1)}{s!}r(r-1)\cdots(r-s+1)x^{r-s}D^{k-s}u+$$

$$\cdots+k(k-1)\cdots(k-r+1)D^{k-r}u,^{*}$$

且以 $f(D)$ 係 D 之常係數多項式,故

$$f(D)(x^r u)=x^r f(D)u+rx^{r-1}f'(D)u+\frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}f''(D)u+\cdots$$

$$+\frac{r(r-1)\cdots3\cdot2}{(r-1)!}xf^{(r-1)}(D)u+f^{(r)}(D)u.$$

右端各項除 $f^{(r)}(D)u$ 確非零外,餘皆為零.如前所述,即可證明,若以 $x^r u$ 及求其微分時所得互為平直無關諸項(各乘以一未定係數)之和作 y 代入 $f(D)y$ 中,必僅得 u 項及求其微分所引起之諸項,而更無他項.

2° 原法不能適用之第二款為右端含有 $x^t u$ 類之項,而 u 乃補充函數之一項者.將原法作類似之修正即可應用於此.設 u 為與輔助方程一 r 次根相當之項[+],則如前例,有

---

* 按 Leibniz 關於乘積之導式之定理即可逕得此式,且此式並非專用於在補充函數中所發現之特殊形式之 u.例見著者微積分學,§47.

+ xu, x^2u, $\cdots$, $x^{r-1}u$ 自亦皆為補充函數中之項,本文所設之 u 係原設其不含 x 為因式之一項.

$$f(D)(x^{t+r}u)=x^{t+r}f(D)u+(t+r)x^{t+r-1}f'(D)u$$

$$+\frac{(t+r)(t+r-1)}{2!}x^{t+r-2}f''(D)u+\cdots$$

$$+\frac{(t+r)(t+r-1)\cdots(t+2)}{(r-1)!}x^{t+1}f^{(r-1)}(D)u$$

$$+\frac{(t+r)(t+r-1)\cdots(t+1)}{r!}x^{t}f^{(r)}D(u).$$

右端各項,除 $f^{(r)}(D)u$ 確非零外,餘皆爲零.故可仿前款證明,若以 $x^{t+r}u$ 及求其微分時所得互爲平直無關諸項(各乘以一未定係數)之和作 y 而代入 $f(D)y$,吾人必僅得 $x^t u$ 及求其微分所引起之諸項.

吾人今可陳述其通則如次:

若微分方程右端所含諸項,僅爲式之祗有有限個平直無關之導式者,則可試取此類之項及其導式中與之平直無關之項,各冠以一未定係數後之和爲特別積分.此等係數可由將此試設之特別積分代入微分方程,並令其兩端相當係數相等而定之*.

若方程之右端含有一項 $x^t u$,其中 t 爲正整數或零,u 爲補充函數中與輔助方程一 r 次根相當之項,則在試設特別積分中應改該項爲 $x^{t+r}u$.

注意. 通則所舉諸項有時可毋須全設.此常可由觀察而預知

* 令雙方相當係數相等所得諸未定係數之條件方程爲相容且足以決定各該係數之值,乃一事實,其證明見 A. B. Coble, American Mathematical Monthly, Vol. 3 (1919), pp. 12—15.

之.例如在習題 1 之微分方程中 y' 之係數爲零,故在試設特別積分中 x 與 $\sin x$ 實不必加入,因代 $ax^2+f\sin x$ 於方程之結果,顯然不含此類之項也.任何不必要之項苟已列入試設特別積分中,則其係數必將求得爲零.在他方面言之,吾人亦不須將補充函數之任意一項引入試設積分中(若將此類之項列入試設積分中,則其係數必不見於所得條件方程所含諸係數中.故此係數之值可任意選定;此正應有之事也).

6. $(D^3-2D^2-3D)y=3x^2+\sin x$.

提示. 輔助方程既有一單根爲 0,補充函數乃有一項爲 1.故吾人應試設 ax^3+bx^2+cx 以求 x^2 之項.又 $\sin x$ 並非補充函數之一部分.故試設積分爲

$$V=ax^3+bx^2+cx+f\sin x+g\cos x.$$

7. $(D^4-2D^2+1)y=e^x+4$.

8. $(D^2-2D)y=e^{2x}+e^x+x+3$.

9. $(D^4+2D^2+1)y=\cos x$.

註. 求與方程右端各類項相當之特別積分,各有專律可循.本節之方法已示吾人以若干規律之屬於此類者.次表所示諸法,毋庸記憶,惟望學者一一證明之,以爲應用本節諸方法之習題.

(a) 若 a 非輔助方程之根,則相當於 X 中 e^{ax} 之項,應設 $V=e^{ax}/f(a)$.

(b) 若 a 爲輔助方程之一 r 次根,則相當於 X 中 e^{ax} 之項,應設 $V=x^re^{ax}/f^{(r)}(a)$.

(c) 若 $f(D)$ 僅含 D 之偶次項,書作 $F(D^2)$.在 a 非此輔助方程之根之情形,則

$$V=\cos ax/F(-a^2)\text{ 相當於 }X\text{ 中 }\cos ax\text{ 之項},$$

$$V=\sin ax/F(-a^2)\text{ 相當於 }X\text{ 中 }\sin ax\text{ 之項}.$$

VI·11. Cauchy **平直方程** 平直方程

$$(1)\qquad k_0x^ny^{(n)}+k_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdot\cdot\cdot+k_{n-1}xy'+k_ny=X^*,$$

其中 $y^{(n)}$ 之係數為一常數與 x^n 之積者,可以 $x=e^u$ 之變換化為一常係數平直方程.因

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{du},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}= \qquad =\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right),$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}= \qquad =\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{du^3}-3\frac{d^2y}{du^2}+2\frac{dy}{du}\right).$$

. . . .

吾人若書 $\frac{dy}{du}=\mathfrak{D}y$,則有

$$xDy=\mathfrak{D}y,$$

$$x^2D^2y=\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)y,$$

---

* 此種形式之平直方程有時亦稱為齊次平直方程.此事似頗不幸.著者願循本學程多數作家之習慣,將此名留作平直方程之為 y 及其導式之齊次式者之名稱,而稱所舉平直方程(1)曰 Cauchy 平直方程,以紀念 Augustin Louis Cauchy (1789—1857).參閱彼所著 Exercises d'Analyse, Vol. I, p. 262.

$$x^3D^3y=\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)y,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^nD^ny=\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)\cdots(\mathfrak{D}-n+1)y,^*$$

而(1)變爲

$$(2)\quad [k_0\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)\cdots(\mathfrak{D}-n+1)+k_1\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)\cdots(\mathfrak{D}-n+2)$$
$$+\cdots+k_{n-1}\mathfrak{D}+k_n]y=U,$$

其中 U 爲變數變換後,由前之 X 所化成之式.

易知(2)亦爲平直方程,但其係數則爲常數.

推廣言之,方程

$$k_0(a+bx)^ny^{(n)}+k_1(a+bx)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots$$
$$+k_{n-1}(a+bx)y'+k_ny=X^+$$

亦可由 $a+bx=e^u$ 之變換,變爲一常係數平直微分方程.

習題 1. $x^3y'''+xy'-y=x\log x.$

---

* 此變換之普通公式可以次法證明之.設

$$y^{(n)}=\frac{1}{x^n}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)\cdots(\mathfrak{D}-n+1)y.$$

而證其關於 x 之微分,導得

$$y^{(n+1)}=\frac{1}{x^{n+1}}\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)\cdots(\mathfrak{D}-n)y.$$

因此公式於 $n=2$ 時成立,故於 n 爲任意正整數時亦能成立.以此法證明本公式,係承 Dr. Teresa Cohen 向著者建議.

+ 此類平直方程稱爲 Legendre's linear equation,所以紀念 Adrien Marie Legendre (1752—1833)者也.

如令 $x=e^u$，則原方程變爲

$$[\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)+\mathfrak{D}-1]y=ue^u,$$

即
$$(\mathfrak{D}^3-3\mathfrak{D}^2+3\mathfrak{D}-1)y=ue^u.$$

其輔助方程之根爲 1, 1, 1.

故其補充函數爲 $Y=(c_1+c_2u+c_3u^2)e^u$.

本題之特別積分可逕由方法 I(§VI·7) 得之，其式爲

$$V=e^u\iiint e^{-u}ue^u(du)^3=e^u\frac{u^4}{24}.$$

$$\therefore \text{通解爲 } y=(c_1+c_2u+c_3u^2)e^u+\frac{u^4e^u}{24},$$

即
$$y=[c_1+c_2\log x+c_3(\log x)^2]x+\frac{x(\log x)^4}{24}.$$

2. $(x^3D^3+2x^2D^2+2)y=10\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

3. $(x D^2+3xD+1)y=\frac{1}{(1-x)^2}$.

4. $(x+1)y''-4(x+1)y'+6y=x$.

5. $(x+2)^2y'''+(x+2)y''+y'=1$. [乘以 $x+2$.]

VI·12. **撮要**　求解平直微分方程之問題，分爲兩步，即求補充函數與求一特別積分是也(§VI·1).

在 $f(D)=X$ 爲一常係數平直方程之款，則探求補充函數之事僅有賴於代數方程 $f(m)=0$ 求解之問題. 按其根爲相異之實數，相等之實數或爲複數，而補充函數順次採取 §§VI·2, VI·3, VI·4 所示之形式. 推求特別積分之四種方法，則示於 §§VI·7, VI·8, VI·9, VI·10 中.

審度推求特別積分各法之利便，可彙述如次：§§VI·7 及 VI·8 兩法(以後將稱之曰法 I 及法 II.)及參數變值法 (§VI·9) 具有普徧適用之益，且後者又可適用於各係數爲自變數之函數之平直方程．但應用上述三法之際，運算工作之繁重每令人厭倦．參數變值法有甚易記憶之利，但往往長而且繁，遇方程之高過二級者其繁冗尤甚．待定係數法(§VI·10)雖非通法，但於實際遇及之題大率可用．果能合用，則此法有僅含推求微分及推解聯立一次代數方程二事之便利，而不需積分方法，且此法亦極易記憶．應用此法時，其運算之途徑直而且易．有時布式或繁，然竟冗長至超過他法之事則甚鮮矣．

故普徧言之，待定係數法苟能應用，殆爲最合宜之方法．其例外情形已於 §VI·11 之習題 1 中陳述其一矣．〔法 I 常適用於具有

$$(D-\alpha)^n y=e^{\alpha x}F(x)$$

形式之微分方程，其中 $F(x)$ 爲一易於推求 n 次積分之式.〕

法 II 較少實用價值，惟以欲說明其應用之理論，故亦陳述之．

於 §VI·1,2° 中，吾人已知

$$F(D)(V_1+V_2)=F(D)V_1+F(D)V_2.$$

故若右端各項由視察法卽知其各有捷徑，則宜分別採用最佳之方法以求各項或一組項之相當積分後，再取其和．下列之習題 3 卽宜參用此理以解之．

方程

$$k_0(a+bx)^n y^{(n)}+k_1(a+bx)^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots$$

$$+k_{n-1}(a+bx)y'+k_n y=X$$

（包含 $a=0, b=1$ 時之 Cauchy 方程爲其特例）可藉變換 $a+bx=e^{w}$ (§VI·11) 化爲一常係數平直方程.

習題 1. $(D^2-5D+6)y=\cos x-e^{x}$.

2. $(D^4-1)y=e^x \cos x$.

3. $(D^2+2D+1)y=2x^3-xe^{-x}+e^{-x}\sin x$.

4. $(D+1)^3 y=xe^{-x}-e^x$. 5. $(D^3-4D)y=x^2-3e^{2x}$.

6. $(D^4-2D^2+1)y=\cos x$.

7. $(x^4D^4+6x^3D^3+9x^2D^2+3xD+1)y=(1+\log x)^2$.

8. $(D^3+2D^2+D)y=x^2-x+x^{-1}-2x^{-2}+2x^{-3}$.

9. $(D^2+4)y=\sin^2 x$. 10. $(D^2+1)y=\sec^2 x$.

11. $(D-1)^3 y=x-x^3e^x$.

12. $(D^4-D^3-3D^2+5D-2)y=e^{3x}$.

13. $(D^2+1)y=x\cos x$.

14. $(x^3D^3+2x^2D^2-xD+1)y=1/x$.

15. $(D^3-1)y=xe^x+\cos x$.

16. $(D-1)^2 y=\cos x+e^x+x^2e^x$.

VI·13. **應用** 物理學諸重要問題解法中，含有常係數平直微分方程者爲數甚多. 吾人於此試討論其若干，以見一斑.

1° **簡諧運動** (simple harmonic motion). 設一質點爲一力所吸引而沿一直線運動，如力之方向指定該直線上一定點 O，且其大小與由 O 至質點之距離成比例，則此質點之運動稱爲簡諧運動. 單擺

(simple pendulum)在一極小圓弧上之往復運動,非阻尼電流計指針(undamped galvanometer needle)之振動,音叉叉股(prong of a tuning fork)上一點之顫動,及螺形彈簧(coiled spring)所懸質點之上下振盪皆其差近之例也.吾人於此,將討論擺長爲 l,質量爲 m 之單擺在眞空中擺動之狀態.

此擺僅受重力之作用;其方向係鉛直向下,又其強度(intensity)爲 $-mg$. 如以 s 表示自擺之最低點量起之弧長,則在擺與鉛直線成角 θ 之任一時刻,$s=l\theta$, 又其加速度爲 $l\frac{d^2\theta}{dt^2}$. 沿擺弧切線上重力之分力爲 $-mg\sin\theta$. 故表示其運動狀態之方程爲

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta.$$

若 θ 在此運動中始終爲一極小之角,則吾人可以 θ 代替 $\sin\theta$,而爲其第一差近值.如此,則吾人之方程卽取下形式

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

此乃簡諧運動之微分方程.解此,卽得簡諧運動之方程

(1) $$\theta=A\cos\mu t+B\sin\mu t,$$

而 $\mu^2=g/l$. 如在 §VI·4 所述,此解之又一形式爲

(2) $$\theta=a\cos(\mu t+b).$$

於此 a 爲其擺動之振幅(amplitude),而 b 則決定其相(phase).在任何特殊實驗中,當 θ 及 $d\theta/dt$ 在某一時刻之值爲已知之際,二者各有定值.此二者乃所設問題之邊界條件或原始條件.

在相續二時刻，若擺之地位（如在平衡位置）相同且向同一方向移動，則介於該兩時刻間之時間稱爲擺動之週期（period）. 若 $\mu(t_2-t_1)=2\pi$，則由 (2)，吾人可知 t_1 及 t_2 將爲如是之兩時刻. 故其週期等於 $2\pi/\mu$ 即 $2\pi\sqrt{l/g}$. 此由所用儀器之性質而定，與原始條件完全無關.

習題 1. 移擺至 $\theta=\theta_0$ 之位置，令其靜止片刻後再任其擺動，試求 a 與 b 之值，及 (2) 之最後形式.

本題之原始條件爲

$$(3)\qquad \text{在 } t=0 \text{ 時}, \qquad \theta=\theta_0, \qquad \frac{d\theta}{dt}=0.$$

求 (2) 之微分，有

$$(4)\qquad \frac{d\theta}{dt}=-a\mu\sin(\mu t+b).$$

在 (2) 與 (4) 中引用 (3)，則有

$$(5)\qquad \theta_0=a\cos b \text{ 與 } 0=-a\mu\sin b.$$

因 $\theta_0\neq 0$，故 $a\neq 0$；又 $\mu\neq 0$ 亦甚易知. 故由 (5) 之第二方程導得

$$\sin b=0, \qquad \therefore\ b=0.$$

將其代入 (5) 之第一方程中，求得

$$a=\theta_0;$$

故

$$\theta=\theta_0\cos\mu t.$$

習題 2. 擺本靜止，吾人驟與一擊，使之以角速度 $d\theta/dt=\omega_0$ 向旁飛起後，再任其往復擺動，求 a 與 b 之值，及 (2) 之最後形式.

本題之原始條件爲

$$在\ t=0\ 時, \qquad \theta=0, \qquad \frac{d\theta}{dt}=\omega_0.$$

在 (2) 與 (4) 中引用此等條件，則有

(6) $$0=a\cos b \ 與\ \omega_0=-a\mu\sin b.$$

因 $\omega_0\neq0$, $a\neq0$; 故由 (6) 之第一方程，知

$$\cos b=0 \quad \therefore\ b=\frac{\pi}{2}.$$

將其代入 (6) 之第二方程，求得

$$a=-\frac{\omega_0}{\mu};$$

故

$$\theta=\frac{\omega_0}{\mu}\sin\mu t.$$

3. 設原始條件爲

$$在\ t=0\ 時, \qquad \theta=\theta_0, \qquad \frac{d\theta}{dt}=\omega_0,$$

試求 (2) 之形式.

4. 設原始條件爲習題 1, 2 與 3 中所載者，試依次求 A 與 B 之值，及 (1) 之最後形式.

2° 阻尼振動(damped vibration). 若在有阻力之介質(medium)中運動，而阻力與速度成比例，則此運動之微分方程（第一差近式）亦爲常係數平直方程. 阻力若爲 $-2km\frac{ds}{dt}$ 或 $-2kml\frac{d\theta}{dt}$，則此運動

之微分方程為

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\theta-2kml\frac{d\theta}{dt},$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2k\frac{d\theta}{dt}+\mu^2\theta=0,$$

仍如前例，$\mu^2=g/l$. 其輔助方程之根乃

(7) $$-k\pm\sqrt{k^2-\mu^2}.$$

k 與 μ 之大小對於本題解答之形式影響頗巨.

(a) 如 $k<\mu$; 換言之,如阻力相當微弱,則 (7) 所示之根為虛數. 令 $k^2-\mu^2=-\lambda^2$, 則可書運動之方程如下形式

(8) $$\theta=e^{-kt}(A\cos\lambda t+B\sin\lambda t),$$

即

(9) $$\theta=ae^{-kt}\cos(\lambda t+b).$$

其振幅為 ae^{-kt}, 該數連續減少,而漸近於零,且以零為極限.

其週期為$2\pi/\lambda$, 係一常數,且大於在眞空中運動之週期 $2\pi/\mu$.

(b) 如 $k=\mu$, 則運動方程為

(10) $$\theta=(c_1+c_2t)e^{-kt}.$$

(c) 如 $k>\mu$, 則運動方程為

(11) $$\theta=e^{-kt}(c_1e^{\nu t}+c_2e^{-\nu t}),$$

其中 $\nu^2=k^2-\mu^2$.

習題 5. 設原始條件為習題 1, 2 與 3 所載者,試求 (8) 與 (9)

之形式.

6. 利用習題 1 與 2 之原始條件,求(10)之形式.求證在各款中,θ 之符號常相同,且其絕對值連續減小,漸近於零,而以零爲極限.

7. 求證原始條件苟如習題 3 所載,則 (10) 之形式爲

$$\theta=[\theta_0+(\omega_0+k\theta_0)t]e^{-kt}.$$

討論 θ_0 及 $\omega_0+k\theta_0$ 異號時,及二者同號時之兩種運動. 在後一款中,更研究在 θ_0 及 ω_0 具有同號時及二者具有異號時所各應發生之情事.

8. 試用習題 3 之原始條件而求 (11) 之形式. 在運動開始後之任一有限時刻, θ 不能爲零,試證明之.

3° 强迫振動 (forced vibration). 若有一週期性之外力引入 1° 款或 2° 款,則因此而加添之運動稱爲強迫振動. 在此二款中,運動之微分方程順次爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\mu^2\theta=C\cos pt, \tag{12}$$

及

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2k\frac{d\theta}{dt}+\mu^2\theta=C\cos pt. \tag{13}$$

(12) 右端之一項卽表示強迫振動者,因其存在而應有之特別積分,學者可證其爲

$$\text{於 } p\neq\mu \text{ 時,爲 } \frac{C}{\mu^2-p^2}\cos pt, \tag{14}$$

又

$$\text{於 } p=\mu \text{ 時,爲 } \frac{Ct}{2\mu}\sin\mu t. \tag{15}$$

至於(13)之特別積分則為

$$(16)\qquad \frac{C[(\mu^2-p^2)\cos pt+2kp\sin pt]}{(\mu^2-p^2)^2+4k^2p^2}.$$

如令

$$l=+\sqrt{(\mu^2-p^2)^2+4k^2p^2},\quad \cos\alpha=(\mu^2-p^2)/l,\quad \sin\alpha=2kp/l,$$

則上式可書作

$$(17)\qquad \frac{C}{l}\cos(pt-\alpha).$$

如 $p=\mu$,則 $\alpha=\pi/2$,而(16)與(17)俱呈下形式

$$(18)\qquad \frac{C}{2k\mu}\sin\mu t.$$

(14)與(17)所示之強迫振動均為簡諧運動,其週期為 $2\pi/p$,與外力之週期相同.再者,吾人又知其並非阻尼振動.在阻尼振動中,由(13)之補充函數(9)察知自由振動之振幅連續遞減.故在相當時後強迫振動較佔優勢.當 k 值甚小,而 p 幾與 μ 相等時,此事即將發生,緣強迫振動之固定振幅,C/l,是時殊為龐大也.此振幅將於 p 之值使 l 為極小時而有極大之值.令 l 之導式等於零,求得如此之 p 當為 $\sqrt{\mu^2-2k^2}$.果爾,則 $l=2k\lambda$,而極大之振幅則為 $C/2k\lambda$.

在此情形下,具有週期性之外力即謂為與振動物體共振(in resonance).於此,強迫振動之週期,$2\pi/p=2\pi/\sqrt{\mu^2-2k^2}$,幾與自由振動之週期,$2\pi/\lambda=2\pi/\sqrt{\mu^2-k^2}$,相等.

共振之現象在聲學及物理學其他各部門俱有重要之應用.此項原理之應用於無線電訊,及地震紀錄儀等皆其例也.

當 $p=\mu$ 時，從（18）可知在阻尼振動中，強迫振動之相實較外加之力者落後一角 $\pi/2$. 在簡諧運動中，(15) 指示其振幅應隨 t 而無限增大. 假定振幅有某項界限，吾人方可求得運動之微分方程，固不待言. 是以上述論證在逾此界限後即不復眞實，然在此情形，該實驗若繼續進行，則所用儀器必將受損矣.

習題 9. 求

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2k\frac{d\theta}{dt}+\mu^2\theta=Ce^{-kt}\cos pt$$

之特別積分，此方程表示外加之力亦係阻尼者. 試分 $p\neq\lambda=\sqrt{\mu^2-k^2}$ 與 $p=\lambda$ 兩款論之.

4° **導線上溫度之分布**（distribution of temperature along a wire）. 設有一導線懸於溫度固定不變之空氣中. 吾人即以空氣之溫度為溫度上之零度，固不稍失其普徧性也. 今若保持此線一端之溫度於 θ_0，則有熱在此線上流動，且在線上各點處亦繼續放熱於其周圍之空氣. 經若干時間後，沿線流熱之速率與其在各點放熱之速率將各成定數. 既達此穩定狀態後，沿線各點處之溫度其將如何?

試取此線上由 x 至 $x+dx$ * 之一小段論之，其因傳導（conduction）而流入此段之熱量為

$$-ka\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_x, \tag{19}$$

其中 k 係一常數視製此線之質料而定其值，a（或 πr^2，r 乃此線截面

---

* 此處不用 Δx 而用 dx，乃因吾人將略去後者諸高次項之故.

之半徑) 係截面之面積,又$\left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)_x$為沿線溫度在點 x 處之變率. 因 $\left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)_x$ 為負數,故冠一負號於其前.

由 x 至 $x+dx$ 一段中放出之熱有兩部分:

首為在點 $x+dx$ 處沿線流過之熱,其量為

$$-ka\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x+dx}, \qquad \text{即} \quad -ka\left[\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_x+\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)_x dx+\cdot\cdot\cdot\right].$$

式中 $\cdot\cdot\cdot$ 代表 dx 諸高次項.

次為放入周圍空氣之熱,其量幾比例於以線段所暴露之面積及線與空氣間溫度差 θ 之乘積. 在此短線段上,後者之值可視為處處相同. 如線之周圍之長為 $c=2\pi r$, 則此量為

$$lc\theta dx$$

其中 l 乃比例因數. 故從此小線段放出之熱量共有

$$-ka\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_x-ka\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)_x dx+\cdot\cdot\cdot+lc\theta dx. \tag{20}$$

因熱之流動已達穩定狀態,(19) 與 (20) 兩量必須相等. 故表示溫度分布狀態之微分方程*為

$$ka\frac{d^2\theta}{dx^2}-lc\theta=0,$$

即

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-\mu^2\theta=0, \tag{21}$$

* 因 $d^2\theta/dx^2$ 與 $(d^2\theta/dx^2)_x$ 之意義相同,故可不用後一記號.

其中 $\mu^2=lc/ka=2l/kr$.

(21) 之通解爲

$$\theta=c_1e^{\mu x}+c_2e^{-\mu x},\quad \text{或}\ \theta=A\cosh\mu x+B\sinh\mu x. \tag{22}$$

習題 10. 試按下列兩款求表示 θ 之式,(a) 若線長爲 L 且在較遠一端處之固定溫度爲 θ_1,(b) 若此線極長,因而在實際上可視 L 爲無窮大,且 θ_1 爲零.在兩款中,當 $x=0$ 時 $\theta=\theta_0$.

5° **空球內溫度之分布** (distribution of temperature in a hollow sphere).一空球置於溫度固定不變之空氣中.設於空球內外兩表面公共中心處置一固定熱源,向各方均匀輻射.內表面之溫度因而升高,熱遂沿徑流出經過球質而達外表面,更由此放入空氣中.經片刻後,此項熱流卽將穩定;換言之,球體各點之溫度 θ 各爲常數,乃由空球內外兩表面公共中心至各該點距離 r 之一函數.吾人之問題在求此函數之形式.

試取一球形之薄層而考察經過該層之熱流,此薄層內外表面與空球同心,其半徑爲 r 及 $r+dr$.仍仿前款,吾人卽用微分 dr,因吾人將略去其諸高次項也.

經過薄層內表面之熱量爲

$$-4\pi r^2k\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r, \tag{23}$$

其中 $4\pi r^2$ 爲內表面之面積,k 爲一常數,視製此空球之質料而定其值,又 $\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r$ 爲 θ 在距中心 r 處之沿徑變率.

經過薄層外表面之熱量爲

$$-4\pi(r+dr)^2k\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r+dr},$$

卽

$$-4\pi(r+dr)^2k\left[\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r+\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)_r dr+\cdots\right],$$

其中···代表 dr 諸高次項. 展開上式並略去 dr 一次以上諸項而得

(24) $$-4\pi k\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r+\left\{2r\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r+r^2\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)_r\right\}dr\right].$$

因此外無其他熱流, (23) 與 (24) 勢必相等. 令二者相等並棄去 $\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r$ 與 $\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)_r$ 之下標 r, 卽得微分方程

(25) $$r^2\frac{d^2\theta}{dr^2}+2r\frac{d\theta}{dr}=0,$$

蓋未附下標 r 之導式與原有下標者意固無殊也. 上述方程之解應爲

(26) $$\theta=\frac{c_1}{r}+c_2.$$

習題 11. 若空球內表面之溫度爲 θ_0 外表面之溫度爲 θ_1, 又內外兩表面之半徑爲 r_0 與 r_1, 試定通解 (26) 中兩任意常數之值. 如溫度計取 $\theta_1=0$, 則此二者之値如何? 更求通過半徑爲 r 之一等溫球面 (spherical) 之熱量, 而 $r_0<r<r_1$, 且取 $\theta_1=0$.

6° **極長空圓筒溫度之分布** (distribution of temperature in a very long hollow cylinder). 一空心圓筒爲溫度固定不變之空氣所圍繞. 設有一固定熱源沿此圓筒內外兩表面之公共軸而均勻分布, 則內表面之溫度因而升高. 若圓筒極長而就其與兩端距離甚遠

之某一部分言之，熱流應循垂直於軸之各直線達於外表面後再放入空氣中．經片刻後，此熱流即將穩定；換言之，其各點處之溫度 θ 各爲常數，乃由軸線至該點距離 r 之一函數．吾人之目的即在決定此函數之形式．

試取一圓筒形之薄層而考察經過該層之熱流，此薄層與原空心圓筒共軸，其內外兩表面之半徑爲 r 與 $r+dr$．吾人於此又用微分 dr，因將略去其諸高次項也．再則，吾人專論此薄層近於中部之一小段，其長爲 l，該數與圓筒之全長相較可謂微不足道．

經過薄層內表面之熱量爲

$$(27)\qquad -2\pi rlk\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r,$$

其中 $2\pi rl$ 爲內表面面積，k 爲一常數，視製此筒之質料而定其値，又 $\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r$ 爲 θ 在距軸 r 處沿垂直該軸之直線上之變率．

經過薄層外表面之熱量爲

$$-2\pi(r+dr)lk\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_{r+dr},$$

即

$$-2\pi(r+dr)lk\left[\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r+\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)_r dr+\cdot\cdot\cdot\cdot\right],$$

其中···代表 dr 諸高次項．展開上式並略去 dr 一次以上諸項而得

$$(28)\qquad -2\pi rlk\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r-2\pi lk\left[\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r+r\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)_r\right]dr.$$

此外並無其他熱流經過此薄層，故(27)與(28)必須相等．令二者相

等，並棄去$\left(\frac{d\theta}{dr}\right)_r$及$\left(\frac{d^2\theta}{dr^2}\right)_r$之下標 r，即得微分方程

$$(29)\qquad r\frac{d^2\theta}{dr^2}+\frac{d\theta}{dr}=0.$$

其解為

$$(30)\qquad \theta=c_1+c_2\log r.$$

習題 12. 設空心圓筒內表面之溫度為 θ_0，外表面之溫度為 0，又此二表面正截面之半徑為 r_0 及 r_1，試定(30) 中兩任意常數之值．更求通過距軸 r 處等溫圓筒面上一單位長之熱量，而 $r_0<r<r_1$.

7° **含有容電器之電路** (electric circuit in a condenser). 若將一電容(capacity)為 C，已荷有電量 Q 之容電器連入一電路中，則此器立即放電而使電路中有電流通過．設 q 為容電器在放電期中任一時刻之電量，則該量當適合微分方程

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0,$$

其中 L 為自感係數，R 為電路中之電阻.

其輔助方程為

$$m^2+\frac{R}{L}m+\frac{1}{LC}=0,$$

$$\therefore\ m_1, m_2=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}.$$

1. 若 $R^2>4L/C$，則有

$$q=Ae^{m_1t}+Be^{m_2t}.$$

欲定 A 與 B,吾人利用原始條件,當 $t=0$ 時,$q=Q$ 及 $-dq/dt\equiv i=0$,而 i 爲電流;換言之,

$$A+B=Q,\text{ 與 } m_1A+m_2B=0;$$

故

$$A=-\frac{m_2Q}{m_1-m_2},\quad B=\frac{m_1Q}{m_1-m_2}.$$

故

$$q=\frac{Q}{m_1-m_2}(m_1\epsilon^{m_2t}-m_2\epsilon^{m_1t}),$$

又

$$i=-\frac{dq}{dt}=\frac{m_1m_2Q}{m_1-m_2}(\epsilon^{m_1t}-\epsilon^{m_2t}).$$

試察 m_1 與 m_2 之值,吾人得知 q 與 i 連續減小,但在 t 爲有限數時二者決不能爲零.當 $R/2L$ 甚大時,二者之值遞減甚速,不久卽小至可以略而不計矣.

2. 若 $R^2=4L/C$,則有

$$q=\epsilon^{-Rt/2L}(A+Bt).$$

仍利用前款原始條件以定 A 與 B,求得

$$q=\frac{Q}{2L}(2L+Rt)\epsilon^{-Rt/2L},$$

又

$$i=-\frac{dq}{dt}=\frac{QR^2t}{4L^2}e^{-Rt/2L}.$$

此處之 q 與 i 亦減小甚速,但於 t 爲有限數時斷不爲零.通常祇可小至可以略去之程度耳.

3. 若 $R^2<4L/C$,則有

$$m_1, m_2 = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{k^2}{4L^2}} = \alpha \pm i\beta.$$

$$\therefore\ q = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t),$$

又

$$i = -\frac{dq}{dt} = -e^{\alpha t}[(\alpha A + \beta B)\cos\beta t + (\alpha B - \beta A)\sin\beta t].$$

仍用前述原始條件以定 A 與 B,求得

$$q = \frac{Qe^{\alpha t}}{\beta}(\beta\cos\beta t - \alpha\sin\beta t),$$

又

$$i = \frac{Q(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta}e^{\alpha t}\sin\beta t,$$

其中 $\alpha = -R/2L$,又 $\beta = \sqrt{1/LC - k^2/4L^2}$.

q 與 i 均係週期爲 $T = 2\pi/\beta$ 之振動函數(oscillating function),故二者之值時正時負. 二者之振幅俱爲一常數與 $e^{-Rt/2L}$ 之乘積,其值常因 t 之增大而急遽減小. 但在特製之電路中,如 R 遠較 L 爲小,則振動放電之事即可實現.

8° **有心力** (central force). 一質點因力 $F(\rho)$ 之吸引而運動,該力之方向常對準一定點,且爲該點至質點距離之一函數. 以定點爲原點. 當質點位於點 (x,y) 處時,作用於該質點之力有二分力,其

在 x 軸方向內者爲 $-F\cos\theta$,即 $-Fx/\rho$,

在 y 軸方向內者爲 $-F\sin\theta$,即 $-Fy/\rho$.

於此,ρ 與 θ 乃點 (x,y) 之極坐標.

如以質點之質量爲單位,則運動方程爲

(31) $$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{Fx}{\rho}\quad 與\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{Fy}{\rho}.$$

以 y 與 x 分乘兩式，並取其差，則有

(32) $$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

其左端之式乃 $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$ 之導式，固極易證明．故於積分後，即得

(33) $$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=h,$$

而 h 表一常數．

因 $\theta=\tan^{-1}(y/x)$，

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}}{x^2+y^2}=\frac{x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}}{\rho^2}.$$

故方程(33)可書作

(34) $$\rho^2\frac{d\theta}{dt}=h.$$

此方程有一頗饒興趣之解釋．

當質點由(ρ,θ)移至$(\rho+d\rho,\theta+d\theta)$時，其動徑所掃過之面積之微分等於$\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$．故方程(34)表示其動徑掃過面積之速率乃一常數．* 如以 A 表此面積，則方程(34)可書作

$$\frac{dA}{dt}=\frac{h}{2}.$$

* 此即 Kepler 關於行星繞日運動諸定律之一．

求積分，有

$$A=\frac{ht}{2}+c。$$

如自 $t=0$ 時開始量 A；換言之，如以 $t=0$ 時 $A=0$ 爲原始條件，則有

$$A=\frac{ht}{2}.$$

欲求質點所經路徑之微分方程，吾人須作變數變換

(35)　　$$\rho=\frac{1}{u};$$

如是，則(34)改成

(36)　　$$\frac{d\theta}{dt}=hu^2$$

且以 $x=\cos\theta/u$，故

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=hu^2\frac{dx}{d\theta}=hu^2\left(-\frac{\sin\theta}{u}-\frac{\cos\theta}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$=-h\left(u\sin\theta+\cos\theta\frac{du}{d\theta}\right),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}=hu^2\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=-h^2u^2\cos\theta\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$$

吾人須知(31)之第一方程亦可書作

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-F(\rho)\cos\theta,$$

故此路徑之微分方程應具下形式

(37) $$h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right)-F\left(\frac{1}{u}\right)=0.$$

[將變換(35)施用於(31)之第二方程當然可得與此相同之微分方程.]

上列方程中不含自變數 θ.

習題 13. 若 $F(1/u)=ku^2$,求解方程(37);換言之,卽設此力與由中心至該質點距離之平方成反比例也.

在此款中,微分方程化爲一常係數平直方程

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{k}{h^2}.$$

其通解當爲

(38) $$u=c\cos(\theta-\alpha)+\frac{k}{h^2},$$

其所含兩任意常數須視原始條件爲如何而定之. 學者須證明此解,以資練習.

玆設 e 爲任意常數,而以 ke/h^2 代 c,則方程(38)改取下形式

(39) $$u=\frac{k}{h^2}[1+e\cos(\theta-\alpha)].$$

仍改爲變數 ρ,吾人卽得此路徑之極坐標方程爲

(40) $$\rho=\frac{\frac{h^2}{k}}{1+e\cos(\theta-\alpha)}.$$

吾人熟知其爲一圓錐曲線之方程,而以原點(或極點)* 爲其一焦點,以通過焦點並與始線交成角 α 之直線爲軸. 此圓錐曲線之離心率 (eccentricity) 爲 e, 半正焦弦 (semi-latus rectum) 爲 h^2/k.

吾人試於次一特款中確定積分常數. 當 $\theta=0$ 時設由力之中心至質點之距離爲 ρ_0, 且正以速率 v_0 在與始線交成角 θ 之方向內移動. 如曲線之切線與至切點之動徑交成角 ψ,則吾人已知 $d\rho/d\theta=\rho\cot\psi$ 〔見 §111·2, 公式(q)〕. 故原始條件爲

$$\text{當 } \theta=0 \text{ 時}, \quad \rho=\rho_0, \quad \frac{d\rho}{d\theta}=\rho_0\cot\psi_0,$$

即

$$\text{當 } \theta=0 \text{ 時}, \quad u=\frac{1}{\rho_0}, \quad \frac{du}{d\theta}=-\frac{\cot\psi_0}{\rho_0}.$$

將此三者代入方程(39)及

$$\frac{du}{d\theta}=-\frac{ke}{h^2}\sin(\theta-\alpha),$$

則有

$$\frac{1}{\rho_0}=\frac{k}{h^2}(1+e\cos\alpha) \quad \text{及} \quad \frac{\cot\psi_0}{\rho_0}=-\frac{ke}{h^2}\sin\alpha,$$

即

$$e\sin\alpha=-\frac{h^2\cot\psi_0}{\rho_0 k} \quad \text{及} \quad e\cos\alpha=\frac{h^2}{\rho_0 k}-1.$$

故得

(4) $$\tan\alpha=\frac{h^2\cot\psi_0}{\rho_0 k-h^2}$$

---

* 此乃 Kepler 關於行星繞日運動之又一定律.

與

$$e^2=\frac{h^4\csc^2\psi_0}{\rho_0{}^2k^2}-\frac{2h^2}{\rho_0 k}+1. \tag{42}$$

圓錐曲線離心率 e 之值確定該曲線之性質．爲考察此事起見，吾人利用 § III·2 (w) 所述極坐標系中表示從原點至切線之距離公式

$$p=\rho^2\frac{d\theta}{ds}.$$

由(34)，有

$$h=\rho^2\frac{d\theta}{dt}=\rho^2\frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dt}=pv.$$

於此，v 乃質點之速率．又以 $p=\rho\sin\psi$，故

$$h=\rho v\sin\psi.$$

因 h 爲常數，有

$$h=\rho_0 v_0\sin\psi_0.$$

將此代入(42)中，經簡易計算後，求得

$$1-e^2=\frac{\rho_0{}^2v_0{}^2\sin^2\psi_0}{k^2}\left(\frac{2k}{\rho}-v_0{}^2\right). \tag{43}$$

略去 $\sin\psi_0=0$，卽當 $\psi_0=0$ 或 π * 之情形，吾人易見 ψ_0 之値對於決定此圓錐曲線之類別毫無作用。自(43)觀之，當 $\sin\psi_0\neq 0$ 時，

若 $v_0{}^2<2k/\rho_0$，則其路徑爲一橢圓，

若 $v_0{}^2=2k/\rho_0$ 則其路徑爲一拋物線，

* 果爾，則如 §III·10 習題 22 所論者成一直線運動矣．

若 $v_0^2>2k/\rho$，則其路徑爲一雙曲線.

在特例中，若 $\psi_0=\pi/2$ 且 $v_0^2=k/\rho_0$，則 c 等於零而此路徑爲一圓矣.

習題 14. 若 $F(1/u)=ku^3$；卽設此力與距離之立方成反比例，求解方程(37).

在此款中，其微分方程亦化爲一常係數平直方程，卽

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(1-\frac{k}{h^2}\right)u=0.$$

試就 $1-k/h^2$ 大於及小於零之兩種情形分論之.

9° 其他習題之引起常係數平直微分方程解法者.

習題 15. 一質點沿一光滑而無質量之直桿滑動，該桿在鉛直平面內圍繞其上一點依等角速度 ω 而轉動. 試求此質點之運動狀態.

首先討論質點沿桿之運動. 於此，質點之加速度有二來源，卽質點之重量及桿之旋轉也.

設 $t=0$ 時桿係水平，則因重力而生之沿桿加速度等於 $-g\sin\omega t$.

其因桿之轉動而生之沿桿加速度等於 ω^2r，r 乃由動轉中心至質點之距離.

故沿桿運動之微分方程爲

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\omega^2r=-g\sin\omega t.$$

試求其適合原始條件當 $t=0$ 時，$r=r_0$ 及 v（或 dr/dt）$=v_0$ 之解.

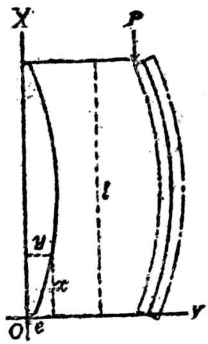
問 r_0 與 v_0 須取何值方可令此沿桿之運動成簡諧運動?

習題 16. 有長度為 l 而具有彈性之弦,其一端固定,他端繫一質點.該點之運動微分方程當為

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{g}{e}(s-l),$$

其中 e 為該弦因懸質點而伸長之長度.設 $t=0$ 時,$s=s_0, v=0$,試求 s 與 v (或 ds/dt).

習題 17. 設一鉛直之柱載一重物於其頂上,該物適在柱之中心線上,如是則此柱必因而壓縮.但此重心若與中心線之水平距離為 e,則此柱勢將彎曲.柱之兩端可各繞一水平軸線而旋轉,但不能循直線移動.試參觀附圖.



如以力之作用線為 x 軸,並取其下端為原點,則決定中心線上各點位置水平撓度之微分方程為(仿§1.1·4,習題 18 中肱梁撓曲之情形)

$$曲率 \equiv \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{M}{EI}.$$

仍與前同,因 y' 極小,吾人乃略去 y'^2 之項以作第一差近式,而討論微分方程

$$EIy''=M.$$

若所載擔負之重為 P,則關於任一點(x,y)之彎曲矩為

$$M=-Py.$$

故所須解出者乃一常係數微分方程

$$EIy''+Py=0.$$

其原始條件或邊界條件爲於 $x=0$ 時 $y=e$，於 $x=l/2$ 時 $y'=0$；至於柱之長度則以 l 表之.

求沿中心線上各點處 y 及 y' 之值，更求二者之最大值.

第七章

二級平直微分方程

VII·1 **應變數變換法** 一級平直微分方程雖常可化為一求積問題解之(§II·9),而解一級以上平直微分方程則無通法可循.

本章專論對於二級平直微分方程特別適用之三種方法.用其中第一方法可化一類方程之有特殊形式者為一個一級平直微分方程;其他兩法則使吾人化某種形式之方程為常係數平直方程.

上述諸法只能適用於少數習見之方程,且在通常情形甚易驗知其中某一方法是否適用於一所設方程.故此諸法苟不能應用於某特殊問題,僅耗極少時間以檢驗之即可.

二級平直微分方程之通式為

$$y''+Py'+Qy=X, \tag{1}$$

其中 P, Q, X 為僅含 x 之函數.

試作應變數之變換如下:

$$y=y_1v, \tag{2}$$

其中 v 為新應變數,而 y_1 為待定之 x 之函數,其目的在使求得之方程(3)能因之而化簡.如是,則

$$y'=y_1v'+y_1'v,\qquad y''=y_1v''+2y_1'v'+y_1''v;$$

而方程改成

(3) $$v''+P_1v'+Q_1v=X_1,$$

其中 $P_1=\dfrac{2y_1'}{y_1}+P,\ Q_1=\dfrac{y_1''+Py_1'+Qy_1}{y_1},\ X_1=\dfrac{X}{y_1}.$

此等方程之用處有二:

1° 由視察法* 或他法,卽可求以零代 X 後所得相當齊次微分方程

(4) $$y''+Py'+Qy=0$$

之一特別積分. 設此特別積分爲(2)中之 y_1, 故 $Q_1=0$,而方程(3)改爲

$$v''+P_1v'=X_1.$$

該式可書作 v' 之一級平直方程

$$\frac{dv'}{dx}+P_1v'=X_1,$$

並可就 v' 解之(§11·9). 經一次求積卽得 y.

習題 1. $y''-x^2y'+xy=x$.

因此中之 $P\equiv-Qx$,故知 x 爲一特別積分. 令 $y=xv$,則有

$$xv''+(2-x^2)v'=x,$$

---

* 例如 $P\equiv-Qx$ 卽易見 x 爲一特別積分. 又若 $1+P+Q\equiv0$ 則 e^x 爲一特別積分,或 $1-P+Q\equiv0$ 則 e^{-x} 爲一特別積分; 或更推廣言之,若由視察法知 m 適合於關係式 $m^2+Pm+Q\equiv0$,則 e^{mx} 爲一特別積分.

即
$$\frac{dv'}{dx}+\left(\frac{2}{x}-x^2\right)v'=1.$$

其一積分因式爲 $\epsilon^{\int(2/x-x^2)dx}$, 或 $x^2\epsilon^{-x^3/3}$.

$$\therefore\quad v'x^2\epsilon^{-x^3/3}=\int x^2\epsilon^{-x^3/3}dx=-\epsilon^{-x^3/3}+c_1,$$

即
$$v'=-\frac{1}{x^2}+c_1x^{-2}\epsilon^{x^3/3},$$

而
$$v=\frac{1}{x}+c_1\int x^{-2}\epsilon^{x^3/3}dx+c_2;$$

故
$$y=1+c_1x\int x^{-2}\epsilon^{x^3/3}dx+c_2x.$$

如在 §II·1,習題 3 所示,含求積之項不能以初等函數表之,而可以一無窮級數代之,學者可證明此項應等於

$$c_1\left(-1+\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^6}{5\cdot3^2\cdot2!}+\frac{x^9}{8\cdot3^3\cdot3!}+\frac{x^{12}}{11\cdot3^4\cdot4!}+\cdots\right).$$

2. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=x^2-x-1$.

3. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=3x$.

4. $(1-x)y''+xy'-y=(1-x)^2$.

令其右端爲零,則 x 及 e^x 俱爲特別積分. 故按 § VI·1,特性 A,其補充函數爲 $c_1x+c_2e^x$. 欲求其應加於補充函數上之特別積分,可用參數變值法(§VI·9).

5. $xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=x^2-2$.

6. $xy''+(2x-1)y'+(x-1)y=x^3+3x^2-2x+2$.

7. $(x^3-2x^2)y''-(x^3+2x^2-6x)y'+(3x^2-6)y=2x^3-2x^4$.

〔其相當齊次微分方程有形若 x^m 之一特別積分之事實允宜利用.〕

2° 如齊次微分方程 (4) 之特別積分不易求得，則用變數變換 (2). 而使方程 (3) 中之 $P_1=0$，有時亦頗見便利，即令

$$\frac{2y_1'}{y_1}+P=0.$$

苟已如此，必有

$$y_1=e^{-\int(P/2)dx}. \tag{5}$$

求微分後，得

$$y_1'=-(P/2)y_1 \text{ 及 } y_1''=-(P'/2)y_1+(P/2)^2y_1.$$

將此二者代入表 Q_1 之式中，則得

$$Q_1=Q-\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{2}\right)-\left(\frac{P}{2}\right)^2. \tag{6}$$

如 $Q-P'/2-(P/2)^2$ 等於一常數，則(3)爲一常係數平直微分方程；如其爲一常數被 x^2 除得之商，則(3)爲一 Cauchy 方程(§VI·11). 如 Q_1 不具上述之兩種形式，則此法不能應用.

吾人須注意 Q_1 之值與 y_1 之值並無關係. 由(6)所示，知其純爲原微分方程諸係數所表示. 由是可知，毋庸計算 y_1，即可推斷此法之是否合用矣.

習題 8. $\sin x\cdot y''+2\cos x\cdot y'+3\sin x\cdot y=e^x$.

以 y'' 之係數除之，有

$$y''+2\cot x\cdot y'+3y=e^x\csc x.$$

於此 $Q=3, P/2=\cot x$.故

$$Q_1=Q-P'/2-(P/2)^2=3+\csc^2 x-\cot^2 x=4,$$

乃知此法可以合用.今求得 y_1 如次:

$$y_1=e^{-\int(P/2)dx}=e^{-\int\cot x\,dx}=\csc x;$$

又由(3)之形式,知變換 $y=v\csc x$ 將變吾人之微分方程爲

$$v''+4v=e^x.$$

解之,求得

$$v=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+e^x/5;$$

故經簡約後,得

$$y=c_1(\cos x\cot x-\sin x)+c_2\cos x+\csc x\cdot e^x/5.$$

9. $y''-2\tan x\cdot y'-(a^2+1)y=\sin x$.

10. $x^2y''-4x^3y'+2(2x^2+1)(x^2-1)y=2xe^{x^2}$.

11. $xy''+2y'-xy=2e^x$.

12. $x^2y''-2x^2y'+(x^2-6)y=x^5-6x^4$.

VII·2 **自變數變換法** 吾人若引用一新自變數 u,則有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=u'\frac{dy}{du},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}=u'^2\frac{d^2y}{du^2}+u''\frac{dy}{du},$$

而微分方程

$$y''+Py'+Qy=X$$

改成

(1) $$\frac{d^2y}{du^2}+\frac{u''+Pu'}{u'^2}\frac{dy}{du}+\frac{Q}{u'^2}y=\frac{X}{u'^2}.$$

若令 $Q/u'^2=\pm 1$，即 $u'=\sqrt{\pm Q}$（吾人選用其能令此平方根爲實數之符號），則(1)中 dy/du 之係數，偶爾可化爲一常數．果爾，則(1)爲一常係數平直方程；否則，此法卽不合用．於此，吾人亦須注意檢驗其是否合用，固毋須求出 u 也．

習題 1．　$y''+(2e^x-1)y'+e^{2x}y=e^{4x}$．

令 $u=e^x$，則 $\dfrac{u''+Pu'}{u'^2}=2$，乃知此法合用．故若引用新自變數 $u=e^x$，則微分方程變爲

$$\frac{d^2y}{du^2}+2\frac{dy}{du}+y=u^2.$$

其解爲

$$y=(c_1+c_2u)e^{-u}+u^2-4u+6.$$

以 x 表 u 之值代入上式，吾人終得

$$y=(c_1+c_2e^x)e^{-e^x}+e^{2x}-4e^x+6.$$

2．　$y''+\tan x\cdot y'+\cos^2 x\cdot y=0$．

3．　$(1-x^2)y''-xy'+4y=3x+8x^3$．

4．　$x^6y''+3x^5y'+y=1/x^2$．

5．　$xy''-(2x^2+1)y'-8x^3y=4x^3e^{-x^2}$．

VII·3　**撮要**　解二級平直微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P\dfrac{dy}{dx}+Qy=X$，並無以求積或其他初等方法爲主之普徧規律可資遵循．本章所論，僅係數種二級平直微分方程之可以變換其變數而化簡者．

1°　若由視察或其他方法，可得一右端爲零時之特別積分 y_1，則 $y=y_1v$ 之變換可化原方程爲以 dv/dx 爲新變數之一級平直方程

(§VII·1, 1°).

2° 此類特別積分苟非預知,則須先求出 $Q-P'/2-(P/2)^2$ 之值.若此爲常數或一常數被 x^2 所除得之商,則原方程可化爲一常係數者,或以 $y=y_1v$,而 $y_1=e^{-\int(P/2)dx}$,代入而化之爲一 Cauchy 方程(§.II·1, 2°).*

3° 前法如不適用,則令 $u'=\sqrt{\pm Q}$(選用其能令此平方根爲實數之符號);然後計算 $(u''+Pu')/u'^2$ 之值.如其爲一常數,則 §VII·2 之方法可以應用.*

習題 1. $xy''-(x+3)y'+3y=2x-3$.

2. $(x-3)y''-(4x-9)y'+(3x-6)y=0$.

3. $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=0$.

4. $(x^2+1)y''-2xy'+2y=4$.

5. $x^2y''-xy'-4x^4y=2+4x^4\log x$.

6. $x^2y''-4xy'+(6+x^2)y=x^5$.

7. $xy''-(3x^2+1)y'-4x^3y=4x^5$.

8. $x^2y''-2x(1+x)y'+2(1+x)y=x^3$.

9. $x^2y''-2nxy'+(n^2+n+a^2x^2)y=0$.

10. $x^4y''+2x^3y'+n^2y=0$. 11. $x^4y''-xy'+y=0$.

[以 x 之負整次冪之一無窮級數表示習題 11 之解.]

12. $(x^2+2x)y''+(x^2-2)y'-2(x+1)y=(2x^3+6x^2)e^{-x}$.

---

* 在檢驗一法是否合用時,吾人須知並無推求積分之需要.必俟驗明其法爲合用後,乃進而探求新變數之形式.

第　八　章

一級以上諸高級方程之各種解法

VIII·1. **解法綱領**　一級以上諸高級微分方程並無普徧而淺近之解法可以駕馭之,至於常係數平直方程及方程之可化爲該形式者則不在此例(第六章).解他種方程之公共程序在將其化爲一解較低級方程之問題.玆將數種方程之可循此程序而進行者,分論於後.

VIII·2. **缺應變數之方程**　如方程中無 y,則其形如

$$f(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0.$$

令 $y'=p$,並注意於

$$y''=\frac{dp}{dx}=p',\ y'''=p'',\cdots,\ y^{(n)}=p^{(n-1)},$$

即可見代換以後尙待解決之方程仍與原方程同一形式,而爲 $n-1$ 級者,即

$$f(x,p,p',\cdots,p^{(n-1)})=0.$$

如此微分方程可以解出,則有

$$p=\phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}),$$

而 y 可經求積以得之如次

$$y=\int\phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})dx+c_n.$$

再則，$y,y',y'',\cdots,y^{(r-1)}$若均不出現，而原方程呈

$$f(x,y^{(r)},y^{(r+1)},\cdots,y^{(n)})=0$$

之形式，則變換 $y^{(r)}=v$，化之爲一形式相同之 $n-r$ 級方程

$$f(x,v,v',\cdots,v^{(n-r)})=0.$$

如此微分方程可以解出，則有 $v=\phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_{n-r})$，而 y 可經 r 次累次求積以得之，即

$$y=\int\int\cdots\int\phi(x,c_1,c_2,\cdots,c_{n-r})dx^r+c_{n-r+1}x^{r-1}$$
$$+c_{n-r+2}x^{r-2}+\cdots+c_{n-1}x+c_n.$$

如 y 與其各級導式，除最高級者外，均不出現，則就此最高級導式解出後，該方程之形式當如

$$y^{(n)}=f(x),$$

而其解可由 n 次累次求積以求得之．蓋 $y^{(n-1)}=\int f(x)dx+a_1$，故 $y^{(n-2)}=\int\int f(x)dx^2+a_1x+a_2$，循是以推，吾人終得

$$y=\int\int\cdots\int f(x)dx^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}x+c_n.$$

習題 1. $(1+x^2)y''+1+y'^2=0.$

令 $y'=p$，即有

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx}+1+p^2=0,\quad 即\quad \frac{dp}{1+p^2}+\frac{dx}{1+x^2}=0.$$

$$\therefore\ \tan^{-1}p=c-\tan^{-1}x,\ 即\ p=\frac{c_1-x}{1+c_1x},\ 而\ c_1=\tan c.$$

求積分，得

$$c_1^2 y=(c_1^2+1)\log(1+c_1x)-c_1x+c_2.$$

習題 2. $(xy'''-y'')^2=y'''^2+1$.

令 $y''=v$, 並解出 v, 則

$$v=xv'\pm\sqrt{v'^2+1}$$

爲一 Clairaut 方程 (§IV.4)，其解爲*

$$v=y''=cx\pm\sqrt{c^2+1}.$$

求積分，得

$$y'=\frac{c}{2}x^2\pm x\sqrt{c^2+1}+c'.$$

再求積分，即得所求之解

$$y=\frac{c}{6}x^3\pm\frac{x^2}{2}\sqrt{c^2+1}+c'x+c''.$$

3. $xy''+(x^2-1)(y'-1)=0$.　　4. $y''=xe^x$.

5. $a^2y''^2=(1+y'^2)^3$.　　6. $y''+y'^2+1=0$.

7. $x^2y''^2-2xy'y''(1+y'^2)-(1+y'^2)^2=0$.

VIII·3 缺自變數之方程 如方程中無 x，吾人可令 y' 爲新應變數而視 y 爲自變數. 令 $y'=p$，則有

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

$$y'''=\frac{dy''}{dx}=p^2\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,$$

---

* 由此方程之異解亦可求得原微分方程之一解. 但此解僅含兩個任意常數.

$$y^{\text{iv}}=\frac{dy'''}{dx}=p^3\frac{d^3p}{dy^3}+4p^2\frac{dp}{dy}\ \frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

而原微分方程化爲一 $n-1$ 級者.如此方程可以解出,則有

$$y'=\phi(y,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1}),$$

而 y 可自求積式

$$\int\frac{dy}{\phi(y,c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})}=x+c_n$$

推得之.

習題 1. $yy''-y'^2-y^2y'=0$.

令 $y'=p$, 則 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$,而原方程改爲

$$p\left(y\frac{dp}{dy}-p-y^2\right)=0,$$

該方程相當於兩方程.

其一,$p=0$ 之解 $y=c$ 爲原微分方程之一解.

其二,
$$y\frac{dp}{dy}-p-y^2=0$$

有一積分因式 $1/y^2$.引用之,則得

$$\frac{p}{y}=y+c.$$

既知 $p=dy/dx$,即有

$$\frac{dy}{y(y+c)}=dx.$$

其解易知爲

$$\frac{y}{y+c}=a\epsilon^{cx}.$$

是乃原微分方程之通解,而包含另一解 $y=c$ 於其中,爲其相當於 $a=\infty$ 之特值者.若將通解書作

$$\frac{y+c}{y}=\alpha e^{-cx}$$

之形式,則令 $\alpha=0$ 卽得上述之特解.

2. $yy''+y'^2+1=0$. 3. $2y''=e^y$.

4. $yy''+2y'-y'^2=0$. 5. $3y''^2-y'y'''=0$.

VIII·4 y 及其導式之齊次方程 若微分方程

(1) $$f(x,y,y',\cdot\cdot\cdot,y^{(n)})=0$$

爲 $y,y',\cdot\cdot\cdot,y^{(n)}$ 之 k 次齊次方程(x 雖亦出現,但不計其次數),而引用新應變數 $v=\log y$. 如是,則

$$y=e^v,\quad y'=e^vv',\quad y''=e^v(v''+v'^2),$$
$$y'''=e^v(v'''+3v''v'+v'^3),\quad \cdot\cdot\cdot,$$

於此 v 僅發現於因式 e^v 中.將此等數值代入(1)中,則該方程改爲

$$e^{kv}F(x,v',v'',\cdot\cdot\cdot,v^{(n)})=0$$

之形式,蓋原設(1)爲 y 及其諸導式之齊次方程也.如略去異於零之因式 e^{kv},卽可見其爲不含應變數 v 之微分方程,而 §VIII·2 之方法可以應用.

習題 1. $yy''-y'^2-6xy^2=0$.

2. $xyy''-xy'^2=y\sqrt{y^2+y'^2}$.

3. $xyy''+xy'^2-yy'=0$. 4. $xyy''+2yy'-xy'^2=0$.

* VIII·5 **齊權方程** 在 §II·4 中所引用之齊權一詞,可推廣至含有高級導式之函數.如有一數 m 存在而將函數 $f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})$ 中之 x 代以 tx,y 代以 t^my,y' 代以 $t^{m-1}y'$,y'' 代以 $t^{m-2}y''$,$\cdots$,$y^{(n)}$ 代以 $t^{m-n}y^{(n)}$ 之結果爲原函數之 t^r 倍;換言之,若

$$f(tx,t^my,t^{m-1}y',\cdots,t^{m-n}y^{(n)})\equiv t^rf(x,y,y',\cdots,y^{(n)}),$$

則原函數謂爲一 r **權之齊權函數**.如前所述,令 $t=1/x$,則有

$$f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\equiv x^rf\left(1,\frac{y}{x^m},\frac{y'}{x^{m-1}},\cdots,\frac{y^{(n)}}{x^{m-n}}\right).$$

故齊權函數可書作 x^r 與諸比 $y/x^m,y'/x^{m-1},\cdots,y^{(n)}/x^{m-n}$ 之另一函數之乘積;有如

$$(1)\qquad f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\equiv x^rF\left(\frac{y}{x^m},\frac{y'}{x^{m-1}},\cdots,\frac{y^{(n)}}{x^{m-n}}\right).$$

者.於此,$x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 所有之權數依次謂爲 $1,m,m-1,m-2,\cdots,m-n$,又 $x^ay^by'^c\cdots y^{(n)k}$ 之權數則爲 $a+bm+c(m-1)+\cdots+k(m-n)$.

如 $x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 之一多項式對於某數 m 爲齊權,求 m 之法在取其能令多項式各項具有同權之數值(見下列習題 1).此公有之權爲 r,亦即多項式之權也.

令 $x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 之一齊權函數等於零之方程謂爲一**齊權微分方程**.以 x^r 除之 則由(1)可見一齊權方程可書作下形式

---

* 在淺近學程中,此節可以删去.

(2)
$$F\left(\frac{y}{x^m},\frac{y'}{x^{m-1}},\cdots,\frac{y^{(n)}}{x^{m-n}}\right)=0,$$

其中各元之權均爲零.此處之 m 可爲任何有限之有理數,或正或負,或竟爲零.

如 $m=0$,則微分方程(2)具有

(3)
$$F(y,xy',x^2y'',\cdots,x^ny^{(n)})=0$$

之形式.Cauchy 平直方程(§VI·11)之右端爲零者乃此類之一方程.如在 Cauchy 方程之情形,自變數之變換 $u=\log x$ 可化形式爲(3)之任一方程爲一不含自變數者.此語之眞確不誤,至易明瞭,蓋按§VI·11 所示,有上述之變換,卽應有

$$xy'=\frac{dy}{du}\equiv\mathfrak{D}y,\ x^2y''=\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)y,\ x^3y'''=\mathfrak{D}(\mathfrak{D}-1)(\mathfrak{D}-2)y,\cdots$$

之事實,可以知其然也.故§VIII·3 之方法可應用於此.

如 $m\neq0$,則作應變數之變換 $v=y/x^m$,卽 $y=x^mv$.因之

$$y'=x^mv'+mx^{m-1}v,$$
$$y''=x^mv''+2mx^{m-1}v'+m(m-1)x^{m-2}v,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y^{(k)}=x^mv^{(k)}+kmx^{m-1}v^{(k-1)}+\frac{k(k-1)}{2!}m(m-1)x^{m-2}v^{(k-2)}+\cdots$$
$$+m(m-1)\cdots(m-k+1)x^{m-k}v,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

及

$$\frac{y}{x^m}=v,\ \frac{y'}{x^{m-1}}=xv'+mv,\ \frac{y''}{x^{m-2}}=x^2v''+2mxv'+m(m-1)v,\cdots,$$

$$\frac{y^{(k)}}{x^{m-k}}=x^k v^{(k)}+kmx^{k-1}v^{(k-1)}+\cdots+m(m-1)\cdots(m-k+1)v,\cdots.$$

故此應變數之變換可化微分方程(2)爲一形式如(3)者,關於後考之$m=0$.此例之解法前曾述及.

如一齊權微分方程並非零權[如(2)之形式]而係r權,則按(1)所示,其左端當爲(2)之左端被x^r所乘者.此額外之因式並不受應變數變換之影響,而隨自變數之變換改爲ϵ^{ru}.

總上所論,吾人業已建立下述之

定理.　當$x, y, y', \cdots, y^{(n)}$之權順次指定爲$1, m, m-1, \cdots, m-n$時,設有一$r$權之齊權微分方程;則將變數變換

$$x=\epsilon^u,\quad y=v\epsilon^{mu}$$

代入之結果爲一微分方程,該方程中當無新自變數,或雖有之而可除以異於零之因式ϵ^{ru}以消去之.

今可應用§VIII·3之方法矣.

注意.　經變數變換

$$x=\epsilon^u,\quad y=vx^m$$

後,$y^{(k)}/x^{m-k}$將爲

$$(\mathfrak{D}+m)(\mathfrak{D}+m-1)\cdots(\mathfrak{D}+m-k+1)v$$

所代替,而$\mathfrak{D}$乃關於u求微分之符號.於$m=0$時,吾人卽得§VI·11所論之例.

習題 1.　$x^2yy''-3xyy'+x^2y'+2y^2+x^2=0.$

如順次指定x, y, y', y''之權爲$1, m, m-1, m-2$,則此微分方程各項之權順次爲

$$2+m+m-2\equiv 2m,\qquad 1+m+m-1\equiv 2m,$$

$$2+2m-2\equiv 2m,\qquad 2m,\qquad 2.$$

此數者於 $m=1$ 時各等於 2. 故於指定 x, y, y', y'' 之權順次爲 1, 1, 0, -1 時原方程乃一 2 權之齊權方程. 應用吾人之定理, 令

$$x=\epsilon^u,\quad y=v\epsilon^u.$$

則

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d(v\epsilon^u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\epsilon^u\left(\frac{dv}{du}+v\right)\cdot\epsilon^{-u}=\frac{dv}{du}+v;$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d\left(\frac{dv}{du}+v\right)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(\frac{d^2v}{du^2}+\frac{dv}{du}\right)\epsilon^{-u}.$$

將二者代入原微分方程, 並簡約之, 求得

$$\epsilon^{2u}\left[v\frac{d^2v}{du^2}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2+1\right]=0.$$

除以 ϵ^{2u} 後, 則此方程不復含 u. §VIII·3 之方法雖可應用, 若注意於

$$v\frac{d^2v}{du^2}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{d}{du}\left(v\frac{dv}{du}\right)$$

之關係, 則本例尤易直接求積. 試與 §VIII·6 比較之. 本題之後半部將留待學者自解之.

2. $x^3y''+x^2y'^2-(x^2+2xy)y'+x^2+xy+y=0.$

3. $x^2yy''+x^2y'^2-7xyy'-x^4+8y^2=0.$

4. $x^4yy''+x^4y'^2+3x^3yy'-1=0.$

VIII·6 **正合微分方程** 將一微分方程中含應變數及其導式

之項盡遷至方程之一端，該端若爲含自變數、應變數及後者諸導式之某函數之導式，則此方程謂爲正合．令一正合方程兩端之積分相等，卽成一個 $n-1$ 級之新微分方程，該方程固仍待解決也．此新方程之含有一任意常數者，稱爲原微分方程之初積分(first integral)．

在平直微分方程之例，有一簡易方法檢驗其是否正合．爲說明起見，玆取一三級方程論之，例如平直微分方程

(1) $$P_0y'''+P_1y''+P_2y'+P_3y=X.$$

首項 P_0y''' 乃因求 P_0y'' 之微分而引起，蓋後者之導式爲 $P_0y'''+P_0'y''$ 也．從(1)之左端減去此正合導式，卽得

(2) $$(P_1-P_0')y''+P_2y'+P_3y,$$

該式必隨(1)之爲正合而亦然．

仿此，吾人知其首項 $(P_1-P_0')y''$ 乃因求 $(P_1-P_0')y'$ 之微分而引起，蓋後者之導式爲 $(P_1-P_0')y''+(P_1'-P_0'')y'$ 也．從(2)中解去之，則得

(3) $$(P_2-P_1'+P_0'')y'+P_3y,$$

該式亦隨(1)之爲正合而亦然．

其項 $(P_2-P_1'+P_0'')y'$ 乃因求 $(P_2-P_1'+P_0'')y$ 之微分而引起，蓋後者之導式爲

$$(P_2-P_1'+P_0'')y'+(P_2'-P_1''+P_0''')y$$

也．從(3)中減去之，則得

(4) $$(P_3-P_2'+P_1''-P_0''')y$$

是知如(1)爲正合，須有

(5) $$P_3-P_2'+P_1''-P_0'''\equiv 0.$$

尤有進者，條件(5)顯係充分，因有此條件，則方程(1)必爲求

$$P_0y''+(P_1-P_0')y'+(P_2-P_1'+P_0'')y=\int Xdx+c$$

之微分之結果矣.

按相仿之方法，吾人可證明一 n 級平直微分方程

(6) $$P_0y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-r}y^{(r)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=X$$

爲正合之充要條件乃

(7) $$P_n-P_{n-1}'+P_{n-2}''-\cdots+(-1)^rP_{n-r}{}^{(r)}+\cdots+(-1)^nP_0{}^{(n)}\equiv 0.$$

有一與此類似之方法可適用於非平直之方程，但在此款無簡便之正合檢驗法；吾人須求出其初積分以斷其是否爲正合．下列習題將闡明其事.

習題 1. $(x+y^2)y'''+6yy'y''+3y''+2y'^3=0.$

$(x+y^2)y''$ 之導式爲 $(x+y^2)y'''+y''+2yy'y''$. 從微分方程之左端減去此式，卽有

$$4yy'y''+2y''+2y'^3.$$

$2yy'^2$ 之導式爲 $4yy'y''+2y'^3$. 再減去此式，則有

$$2y'',$$

該式乃 $2y'$ 之導式. 故知

$$(x+y^2)y''+2yy'^2+2y'=c$$

係一初積分.

學者可取此作一習題，重覆應用此項手續以至解出此微分方程

而後已.

2. $(x-1)y''+(x+1)y'+y=2x.$

3. $(x^2+x)y''+(3x+2)y'+y=4x.$

4. $(x^3-x)y'''+(8x^2+3)y''+14xy'+4y=0.$

5. $(y-x)y''+y'^2-2y'=1-\sin x.$

6. $x^3yy'''+3x^3y'y''+9x^2yy''+9x^2y'^2+18xyy'+3y^2=0.$

7. $(x-x^2)y''-3y'+2y=2x-1.$

8. $x^4y'''+6x^3y''+(6x^2+1)y'=2x+1/x.$

9. $(x-x^2)y''+4y'+2y=0.$

VIII·7. **積分因式**　吾人已知一級微分方程就 y' 解出後常各具一積分因式. 惟微分方程之級數高於一級者,就最高級導式解出後,並不如此. 關於任何級數之平直微分方程之積分因式本有一普徧原理,但其論證軼出本書範圍,故不具述. 至於在一級以上之非平直微分方程之情形,則無此項原理.

吾人將於本節中提及數類方程,其積分因式可由視察法或簡易檢驗以發現之者.

1° 形如

$$y''=f(y) \tag{1}$$

之微分方程有一積分因式 $2y'$, 固甚明顯. 引用之,即有

$$2y'y''=2f(y)y';$$

經一次求積後,即得其初積分

$$y'^2=2\int f(y)dy+c.$$

在 §VIII·3 所示之方法適用於微分方程之缺少 x 者，導至同一求積式，此事頗堪注意也.

動力學 (dynamics) 問題中，常遇有此類方程. 未習微分方程者往往應用上述方法.

2° 僅須約略視察，卽可發現 $1/y'$ 爲與

(2) $$y''+f(x)y'+\phi(y)y'^2=0\ *$$

同類之方程之一積分因式. 引用之，則有

$$\frac{y''}{y'}+f(x)+\phi(y)y'=0.$$

求各項之積分而得

$$\log y'+\int f(x)dx+\int\phi(y)dy=c.$$

改書作指數函數

$$e^{\int\phi(y)dy}dy=c_1e^{-\int f(x)dx}dx,$$

則其中變數業經分離矣. 再求積分，得解如次

$$\int e^{\int\phi(y)dy}dy=c_1\int e^{-\int f(x)dx}dx+c_2,$$

其形式恰與本頁小註中所示者相同.

3° 係數爲多項式之平直微分方程是否有一形如 x^m 之積分因式，甚易判定. 其法在以 x^m 乘原方程式而察 m 是否可有一値合於

---

* Joseph Liouville(1809——1882) 首先研究此類方程. 學者須證明此微分方程相當於形如 $F(y)=a\Phi(x)+b$ 之一原函數，其中 F 及 Φ 順次爲 y 及 x 之函數，而 a 與 b 則爲任意常數之尙待消去者.

§VIII·6 之條件(7). 下列習題將說明之:

習題 1. $y''-x^2y'+xy=x.$ (§VII·1, 習題 1.)

以 x^m 乘之, 使成

$$x^my''-x^{m+2}y'+x^{m+1}y=x^{m+1}.$$

檢驗此方程正合之式爲

$$(m+3)x^{m+1}+m(m-1)x^{m-2}\equiv 0.$$

欲求 m 之一值令其適合兩方程

$$m+3=0 \quad 及 \quad m(m-1)=0$$

乃不可能. 故原微分方程不能有形如 x^m 之積分因式.

習題 2. $x^5y''+(2x^4-x)y'-(2x^3-1)y=0.$

此非正合方程, 甚易證明.

以 x^m 乘之, 並應用正合檢驗法, 吾人求得

$$(m^2+7m+10)x^{m+3}+(m+2)x^m\equiv 0.$$

因 $m=-2$ 適合於兩方程

$$m^2+7m+10=0 \quad 及 \quad m+2=0,$$

故 x^{-2} 爲一積分因式. 引用之, 則有

$$x^3y''+(2x^2-x^{-1})y'-(2x-x^{-2})y=0.$$

此係正合方程, 按 §VIII·6 之方法求得其初積分爲

$$x^3y'-(x^2+x^{-1})y=c,$$

此乃一一級平直微分方程. 其解待學者求之, 以資練習.

3. $x^2(1-x^2)y''-x^3y'-2y=0.$

4. $x^2y''' - 5xy'' + (4x^4+5)y' - 8x^3y = 0.$

5. $y'' + 2\cot x \cdot y' + 2\tan y \cdot y'^2 = 0.$

6. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$ (§VIII·4，習題 3.)〔解出 y''.〕

7. $y'' + y = \sec x.$ (§VI·9，習題 1.)〔$\cos x$ 乃一積分因式.〕

VIII·8 **已知特別積分之平直方程** 設方程爲任何級之平直式，且已知其右端爲零時之一特別積分，則 §VII·1 之方法 1° 可以適用.*設方程爲

$$P_0y^{(n)} + P_1y^{(n-1)} + \cdot\cdot\cdot + P_{n-1}y' + P_ny = X,$$

又 y_1 爲已預知之特別積分. 令 $y = y_1v$，則有

$$y' = y_1v' + y_1'v,$$

$$y'' = y_1v'' + 2y_1'v' + y_1''v,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\quad \cdot\ \cdot\ \cdot,$$

$$y^{(n)} = y_1v^{(n)} + \cdot\ \cdot\ \cdot + y_1^{(n)}v.$$

代入原方程中，得

$$P_0y_1v^{(n)} + \cdot\cdot\cdot + [P_0y_1^{(n)} + P_1y_1^{(n-1)} + \cdot\cdot\cdot + P_ny_1]v = X.$$

v 之係數原設爲零. 故以 v' 爲應變數，則此方程化爲 $n-1$ 級者矣.

習題 1. $(x^2+2x+2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$

其一特解爲 $y = x$. 令 $y = xv$，則有

$$(x^3 - 2x^2 + 2x)v''' - (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)v'' = 0.$$

v' 之係數旣亦爲零，此方程乃可書作

$$\frac{dv''}{v''} = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 6}{x^3 - 2x^2 + 2x}dx = dx - \frac{3dx}{x} + \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2}dx.$$

---

* 該節下小註所示如何可由觀察而知特別積分之理，亦適用於此.

故

$$\log v''=x-3\log x+\log(x^2-2x+2)+c,$$

卽

$$v''=\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{c_1(x^2-2x+2)e^x}{x^3}.$$

續求積分,得

$$\frac{dv}{dx}=\frac{c_1(x-1)e^x}{x^2}+c_2,$$

及

$$v=\frac{c_1e^x}{x}+c_2x+c_3.$$

故

$$y=c_1e^x+c_2x^2+c_3x.$$

習題 2. $xy'''-y''-xy'+y=1-x^2.$

由視察而知 e^x, e^{-x}, x 均爲特別積分;因此立卽知其補充函數爲

$$Y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3x.$$

學者須以參數變値法 (§VI·9) 證明其中之 c_1, c_2, c_3 順次代以 $\frac{e^{-x}}{2}(x+2-x^{-1})+k_1,\ \frac{e^x}{2}(x^{-1}+2-x)+k_2,\ x+\frac{1}{x}+k_3$ 時,此式卽爲通解.故本題之解爲

$$y=k_1e^x+k_2e^{-x}+k_3x+x^2+3.$$

爲練習本節通法起見,學者宜再將此方程用該法解出之.先取 $y_1=e^{-x}$,再按 § VII·1, 1° 中小註末段之提示以求所得二級微分方程於其右邊易爲零時之一特解.

3. $x^3y'''-(2x^3+3x)y''+(x^3+4x^2+6x)y'-(x^2+4x+6)y=0.$

吾人已在本節中闡明一事——如已知一平直方程在右端爲零時之一特別積分，則可求得一應變數之變換而化之爲低一級之方程;是以求解此平直微分方程之問題,變爲求解一個 $n-1$ 級平直方程及另一求積之問題矣.*

尤有進者,如已知一 n 級平直微分方程在右端爲零時之 r 個平直無關之特別積分,則求此方程之問題可化爲求解一個 $n-r$ 級平直方程及 r 個求積之問題.

設此微分方程之補充函數爲

$$y=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+\cdots+c_ny_n.$$

如已知 y_1,則變換 $y=y_1v$, 即 $v=y/y_1$,改此平直微分方程爲一以 v 爲應變數者,其補充函數爲

$$v=c_1+c_2y_2/y_1+c_3y_3/y_1+\cdots+c_ny_n/y_1. \tag{1}$$

因有 c_1 一項,吾人又知新方程無 v 之一項.

如又知 y_2,則由(1)可知 y_2/y_1 係以 v 作應變數之微分方程易右端爲零時之一已知之特別積分.故 $\dfrac{d(y_2/y_1)}{dx}$ 爲 v' 之 $(n-1)$ 級微分方程之一特別積分.因之再作一次變換 $v'=u\dfrac{d(y_2/y_1)}{dx}$,即得一缺少 u 項而爲 u 之 $n-1$ 級之微分方程;換言之,此即 u' 之 $n-2$ 級方程也.

按歸納法,當已知 r 個特別積分時,吾人亦可建立此定理.

---

* 如習題 1 所云,其降低之級數可不止一級,如降低 k 級,則求積之個數亦爲 k.

為說明此中所含之步驟，學者須應用之於本節各習題．慎擇諸特別積分之次第，可簡約其運算手續．

VIII·9 **變數變換法** 在 §§VIII·2, VIII·3, VIII·4, VIII·5, VIII·8 中，吾人曾見變數變換可使一已知微分方程改為一較易解決者．至於一變數變換卽可引導吾人實行求解之一例，亦偶爾發現．此事無通則可言，方程之形式往往能自示吾人以變換之途徑．

習題 1. $x^2yy''+(xy'-y)^2=0.$

諸項 $(xy'-y)^2$ 提示 $y=vx$ 之變換．用此變換後，方程化為

$$xvv''+2vv'+xv'^2=0.$$

此係正合方程，其初積分為

$$xvv'+\frac{1}{2}v^2=c.$$

此又係正合方程；故

$$xv^2=c_1x+c_2,$$

卽

$$y^2=c_1x^2+c_2x.$$

將原方程諸項排列如下：

$$x^2(yy''+y'^2)-2xyy'+y^2=0,$$

則引起變換 $y^2=v$．學者宜用此變換再解本題．

2. $x^3y''-(xy'-y)^2=0.$

3. $yy''-y'^2=y^2\log y-x^2y^2.$ ［令 $\log y=v$，卽 $y=e^v$.］

4. $\sin^2x\cdot y''-2y=0.$ ［令 $\cot x=u$.］

如用較易察知之變換 $\sin x=u$，則所得方程亦可因乘以 u 之一相當次冪而化為正合，並可進而求其積分．

5. $x(2yy''-y'^2)-4xyy'+8y^2=0$.(參考§VIII·10,習題8.)

此方程對於 y 及其導式爲齊次,自示變換 $\log y=v$, 可以試用.此變換果能將其變爲一可化爲一級方程者; 但此乃一 Riccati 方程(§IX·11),其一解法殊爲晦澀.

更審視原方程,則見諸項 $2yy''-y'^2$ 指示其頗與 $y^{1/2}$ 之第二級導式相涉.以 $4y^{3/2}$ 除之,卽得此第二級導式. 其餘諸項乃亦與 $y^{1/2}$ 密切相關.故變換 $y=v^2$ 須取而嘗試之.

6. $x(yy''+y'^2)+3yy'=2x^3$.

取 $yy''+y'^2$ 及 yy' 視察之卽見其與 y^2 之導式相涉,故可用 $y^2=v$ 之變換.

VIII·10. **撮要** 一級以上之高級微分方程有已知之普偏解法者,類數極少.

1° 如方程中無應變數,則令其中最低級之導式*爲新應變數(§VIII·2).

2° 如方程中無自變數,則令應變數之初級導式爲新應變數而視原應變數爲新自變數 (§VIII·3).

3° 如方程爲一平直式,且於其右邊改爲零時有一特別積分 y_1 可以求得,則令 $y=y_1v$, 且於變換後之方程中視 v' 作新應變數.如能求得 r 個平直無關之特別積分,則此題可化爲求解一個 $n-r$ 級之方程及諸求積之問題(§VIII·8).

4° 如方程爲一二級平直式,則第七章中所述諸方法可以擇用(§VII·3).

---

* 若此又爲最高級之導式,則令其低一級之導式爲新變數.

5° 如方程爲 y 及其諸導式之齊次式,則令 $\log y=v$ (§VIII·4).

6° 如於指定 $x,y,y',\cdot\cdot\cdot,y^{(n)}$ 之權順次爲 $1,m,m-1,\cdot\cdot\cdot,m-n$ 時,方程爲齊權,則令 $x=e^u$, $y=vx^m=ve^{mu}$ (§VIII·5).

如上述各款無一發生,則檢驗此方程,察其是否正合(§VIII·6).

如方程並非正合,則特別方法,如求一積分因式(§VIII·7),或求一適宜之變換等,均可試用. 最後一途,以級數求積分之方法(第九章)亦可試用.

習題 1. $y''=y'^2+1$.

2. $(1-x^2)y''-xy'=2$. 3. $y''+yy'=0$.

4. $(1+x^3)y'''+9x^2y''+18xy'+6y=0$.

5. $(x^2-x)y''+(4x+2)y'+2y=0$.

6. $y(1-\log y)y''+(1+\log y)y'^2=0$. 7. $y''=e^{2y}$.

8. $x^2yy''-x^2y'^2-4xyy'+8y^2=0$.

9. $xy''-(2x+1)y'+4x^3=0$.

10. $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$.

11. $3y'y''y^{\text{iv}}-4y'y'''^2-3y''^2y'''=0$.

12. $xyy''-yy'-xy'^2+(1-2x)y^2=0$.

13. $x(x+2y)y''+2xy'^2+4(x+y)y'+2y+x^2=0$.

14. $(x-x^3)y''-y'+x^3=0$.

15. $x^4y''+(2x^3+x^2)y'+1=0$.

16. $\sin x\cdot y''-\cos x\cdot y'+2\sin x\cdot y=0$.

17. 在曲線上任意一點處之曲率半徑等於由該點至 x 軸間之法線長,求定(a)二者取同向時,(b)二者取異向時之曲線族.

〔曲率半徑$=(1+y'^2)^{3/2}/y''$. 題中所指法線之一段乃起自曲線上之點而迄於 x 軸者. 若曲率半徑亦向 x 軸引伸,則 y 與 y'' 應取相異之號,若曲率半徑係背 x 軸而引伸,則 y 與 y'' 應取相同之號.〕

18. 在曲線上任意一點處之曲率半徑兩倍於由該點至 x 軸間之法線長,(a)當二者取同向時,(b)當二者取異向時,求定此曲線族.

19. 在曲線上任意一點處之曲率半徑 k 等於由該點至 x 軸間法線長之立方之 k 倍. 求定此曲線族.

20. 一質點自 x 軸上距原點 a 處一點出發以等速度在與 y 軸平行之方向內行動. 另一質點自原點同時起程,向前質點追蹤而行,其速度 n 倍於前質點者. 試求後一質點之路程.

〔此種路程卽通常所稱之追蹤曲線(curve of pursuit). 就通款言之,其微分方程可由下述之研究求得之: 令 (x,y) 爲追點之坐標,(ξ,η) 爲被追點之坐標. 後者之路程既爲已知,設其方程爲

$$f(\xi,\eta)=0. \tag{1}$$

因被追之點常在追蹤曲線之切線內,故

$$\eta-y=y'(\xi-x). \tag{2}$$

方程(1)與(2)規定以 x,y,y' 表示 ξ 及 η 之式. 如被追點與追點速度之比爲 $1:n$,則

$$n\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

或視 x 作自變數,且平方之,則得

$$n^2(\xi'^2+\eta'^2)=1+y'^2. \tag{3}$$

將由(1)與(2)所求得之 ξ' 及 η' 代入其中,吾人卽得追蹤曲線之微分方程.〕

21. 長度爲 l 之單擺,底端懸有重物,擺動於眞空中.設在 $t=0$ 時,$v=0$,$\theta=\alpha$,而 α 之値大至不能以之代替 $\sin\alpha$ 而爲其第一差近式(參閱 §VI·13 之 1°). 試求其重端之速度.

22. 在直線上一質點爲集中於該線上某點之力所吸引,該力依其與質點間距離之平方而反變.〔運動方程乃 $d^2x/dt^2=-k^2/x^2$.〕設質點原與吸力中心之距離爲 a,且知其初速度爲零.

(a) 求此質點在其路程中任一點處之速度,

(b) 求其達到該點所需之時間,

(c) 另一質點自無窮遠處出發,初速度爲零,且依同律進行.迨原質點之速度與此質點在 a 處之速度相等時,試求前者所已行之距離.

(d) 一物體(例如隕石等物)自高 h 處下墜,求其觸及地面時之速度.

〔重力依平方反比律(inverse square law)而作用.在地面上緣是而生之加速度常以 $-g$ 表之.故 $k^2=gR^2$,R 係地球之半徑.此處之 $a=R+h$.〕

第九章

以級數求積分

IX·1 **存在定理** 可藉求積或其他純粹初等方法推解之微分方程,其種類較諸可發生之一切微分方程者爲數亟少. 一切微分方程是否各有一解之疑問乃自陳於吾人之前.

在本學程之普偏理論中,曾證明有解之微分方程頗數甚多. 但欲正確瞭解此等定理之證明須具有函數論之智識,而本書並未預設讀者嘗習此科也.

1° 關於一級微分方程 $dy/dx=F(x,y)$ 之**存在定理** (existence theorem) 可敍述如下:

如 $F(x,y)$ 可依 Taylor 定理展*爲 $x-x_0$ 與 $y-y_0$ 之一冪級數 (power series),且在此二元素之絕對值不超過某定量時爲絕對收斂(absolutely convergent),則有一唯一之解 $y=y(x)$ 存在,該解恰適合於原始條件 $y_0=y(x_0)$.

在此定理之若干論證中,求得 y 爲無窮級數之形式

$$y_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

* 例如 $F(x,y)$ 在 $x=x_0$, $y=y_0$ 時變爲無窮或不定,或在 x_0 域內或 y_0 域內並非單值函數,則不能如此展開. 所謂 x_0 域 (region) 者乃概括與 x_0 之差之絕對值小於某固定正數之諸 x 之總稱也.

該級數代替 y 後，應適合於原方程，且在 x 之值與 x_0 充分接近時為收歛.

因 y_0 之值可隨意選取(雖在相當限制之下)，故知一級微分方程之解含有一個任意常數.

注意. 存在定理嘗予吾人以有唯一之解之充分條件，且又示吾人以該解可取之形式. 其不能適合此存在定理者大概由於選取 x_0 值及 y_0 值之未能合用. 但此二者之值縱不能適合於存在定理之條件，方程仍然可有一解. 如是之解不能按 Taylor 定理展為 $x-x_0$ 之冪級數，或本非唯一之解. 此事雖非盡然，但在通常情形，殆無不如此. 玆舉數例以說明之:

例如 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ 有 $y=cx$ 之解，其中 $\frac{y}{x}$ 於 $x=y=0$ 時成一不定式，又於 $x=0$, $y\neq 0$ 時為無窮. 當 $x=0$ 時，由 $y=cx$ 之關係，y 取 0 之值. 此解係一(有盡者，finite) Taylor 級數，但 c 之值不能由 $x=0$ 時，$y=0$ 之條件決定；換言之，此與合於存在定理者不同，而有無窮個解合於題之原始條件. 尤有進者，吾人斷不能求得 c 之一有限值而令 y 在 $x=0$ 時取零以外之值.

又如，$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x}$ 有 $y=x\log x+cx$ 之解，其 y 值於 $x=0$ 時為零. 而 $\frac{x+y}{x}$ 在 $x=0$, $y=0$ 時成為不定式，又在 $x=0$, $y\neq 0$ 時為無窮. 此處之解不能展為 x 冪之 Taylor 級數. 在此例中，關於初值為 0 之解有無窮個，又於 $x=0$ 時，關於 y 之其他初值則不能有解.

微分方程 $2\frac{dy}{dx}=\frac{1+2x}{y}$ 有 $y=\sqrt{c+x+x^2}$ 之通解. 於此，在

$x=x_0, y=0$ 時，$\dfrac{1+2x}{y}=\infty$．欲 $x=x_0$ 時 $y=0$，須有 $c=-x_0-x_0^2$．如此則得單解 $y=\sqrt{x-x_0+x^2-x_0^2}$．此解除於 $x_0=-\dfrac{1}{2}$ 時以外不能按 Taylor 定理展爲 $x-x_0$ 之冪級數．

微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{y}$ 有通解 $4y=(x+c)^2$．此處之 $\sqrt{y}$ 在 $y=0$ 之任何鄰域內不爲單值函數．相當於原始條件 $x=x_0$, $y=0$, 吾人有二解 $4y=(x-x_0)^2$ 及 $y=0$．

2° 於陳述關於 n 級微分方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}=F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

之存在定理以前，吾人先代以 n 個一級微分方程組．其法在引入 $(n-1)$ 個新變數

$$y_1=\frac{dy}{dx}, y_2=\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, y_{n-1}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

如是得一組方程

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=y_1,\\
&\frac{dy_1}{dx}=y_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dy_{n-1}}{dx}=F(x, y, y_1, \cdots, y_n).
\end{aligned}$$

其以此組爲一特例之一較普偏之方程組乃

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,y,z,\cdots,w),$$

$$\frac{dz}{dx}=f_2(x,y,z,\cdots,w),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dw}{dx}=f_n(x,y,z,\cdots,w),$$

其中 $y,z,\cdots,w$ 係 x 之 n 個函數.

關於此組微分方程之存在定理可陳述如次:

若函數 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 $x_0,y_0,z_0,\cdots,w_0$ 諸域內爲有法*(regular),則有適合於此組方程且於 $x=x_0$ 時順次取 $y_0,z_0,\cdots,w_0$ 諸值之一單組(single set)函數 $y,z,\cdots,w$ 存在.

在本定理之若干證明中,此等函數嘗書作無窮級數之形式如次:

$$y=y_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

$$z=z_0+b_1(x-x_0)+b_2(x-x_0)^2+\cdots+b_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

$$w=w_0+k_1(x-x_0)+k_2(x-x_0)^2+\cdots+k_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

此等級數皆於 x 與 x_0 充分接近時爲收斂.

此處之 $y_0,z_0,\cdots,w_0$ 可以任意選擇(在上述小註之限制中).是以包含 n 個應變數之 n 個一級方程組之通解含有 n 個任意常數.吾人已知含一個應變數之一個 n 級方程可代以 n 個一級方程所構成

* 若 $x,y,z,\cdots,w$ 之一函數可按 Taylor 定理展爲 $x-x_0,y-y_0,z-z_0,\cdots,w-w_0$ 之一冪級數,且當此等元素之絕對値不超過某定量時爲絕對收斂,則此函數謂爲在 $x_0,y_0,z_0,\cdots,w_0$ 之區域內爲有法.如此解釋已可適應此處之需要矣.

之一方程組．既知關於含 n 個應變數之 n 個一級方程所構成之一方程組之存在定理，俱如上述，故吾人可知應如何從此推得下述關於 n 級方程之存在定理矣：

如 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 在 $x_0,y_0,y_0',\cdots y_0^{(n-1)}$ 諸域內爲有法函數，則微分方程

$$y^n=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$

有一唯一之解，$y=y(x)$，存在，該解適合於下列諸條件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

如將 $y(x)$ 書作冪級數

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+\cdots+c_{n-1}(x-x_0)^{n-1}+c_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

則選用以確定此唯一之解之 $y_0,y_0'\cdots,y_0^{(n-1)}$，當恰爲該級數中前 n 個常數．選擇之法既可任意(在相當限制中)，可見此解含有 n 個任意常數．

在幾何方面言之，其意云：

在一級一次微分方程之單一無窮個積分曲線中，通常必有一個曲線經過一所設點(合於存在定理之條件者)．

在二級一次微分方程之雙重無窮個積分曲線中，通常必有一個曲線經過一所設點，且沿所設方向．

在三級一次微分方程之三重無窮個積分曲線中，通常必有一個曲線經過一所設點，且沿一所設方向，並於該點取一所設曲率．

IX·2．**異解** 在前節存在定理中，吾人須着重於 $y'=F(x,y)$ 之唯一之解能於 $x=x_0$ 時其值爲 y_0 者，僅當 $F(x,y)$ 在 x_0 域及 y_0 域

內爲有法時方可確實存在之事實. 當 x 及 y 爲實變數時,吾人將以 (x_0, y_0) 域稱之.

如所設微分方程爲

$$f(x, y, y') = 0,$$

由隱函數(implicit function)之一存在定理*,卽知僅須在 (x_0, y_0) 域內有

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} \neq 0,$$

則 y' 可書作此域內 x 及 y 之一有法函數. 但若有

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

則表 y' 之 x 與 y 之函數將不復爲單值函數. 在此情形中, §IX·1, 1° 之存在定理不必予吾人以唯一之解, 實則此時之解常不存在. 因解出 $f = 0$ 及 $\partial f/\partial y' = 0$ 中之 y 及 y',得

$$y = \phi(x), \quad y' = \phi_1(x),$$

僅於極罕見之例中方有

$$\phi_1(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}.$$

果有 $\phi_1(x) = d\,\phi(x)/dx$ 之事,則 $y = \phi(x)$ 爲方程之一解; 又因其常異於通解,故爲異解. 尤有進者,此實與第五章所論之異解完全相同.

仿此,高於一級之高級微分方程亦可有異解. 例如對於 $f(x, y, y', \cdot\cdot\cdot, y^{(n)}) = 0$ 之一解 $\partial f/\partial y^{(n)}$ 如亦爲零,則此解常爲一異解.

---

* 此定理之證明,常見於分析書籍論隱函數之部分中.

IX·3. **以級數求解** 當存在定理諸條件均能適合時，應有書作無窮級數之一解存在.此項事實指示吾人以推求此解之方法如下:

吾人假定應變數與係數未定之一冪級數相等.將此應變數之值及因求此級數之微分*所得應變數諸導式之值一併代入原微分方程後，再分兩端自變數同冪項之係數相等，即可決定諸未定係數之值.

解中諸係數間之規律常不明顯. 即在此等情形，有時仍可決定其若干必要之係數，以得一結果準確至其誤差不軼出相當於原始條件或邊界條件之一所設範圍.

亦有可以求得貫串諸係數之通律者.在平直微分方程之例常有此事.

下列諸習題即說明此等事件. 吾人假定 $x_0=0$（此與在開始時先作變換 $x-x_0=\bar{x}$ 者無殊)，以簡約運算之工作.

習題 1. $y'=x+y^2$.

此中 $x+y^2$ 在平面上任一有限點之域內爲有法.令

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots.$$

代入原方程，必得

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots\equiv x+(c_0+c_1x+\cdots)^2.$$

分兩端相當係數相等，即得

$$c_1=c_0^2 \qquad \therefore\ c_1=c_0^2,$$

---

* 在所設間隔(interval)內爲一冪級數所規定之函數之導式，在同一間隔內爲以原級數各項之導式爲項之級數所表示.

$$2c_2=2c_0c_1+1 \qquad \therefore\ c_2=\frac{1}{2}+c_0^3,$$

$$3c_3=2c_0c_2+c_1^2 \qquad \therefore\ c_3=\frac{1}{3}c_0+c_0^4,$$

$$4c_4=2c_0c_3+2c_1c_2 \qquad \therefore\ c_4=\frac{5}{12}c_0^2+c_0^5,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2kc_{2k}=2c_0c_{2k-1}+2c_1c_{2k-2}+\cdots+2c_{k-1}c_k,$$

$$(2k+1)c_{2k+1}=2c_0c_{2k}+2c_1c_{2k-1}+\cdots+2c_{k-1}c_{k+1}+c_k^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中每一係數,均可以在其前之諸係數之式表示之.故究其極,必能以 c_0 之式表示之,c_0 者乃 $x=0$ 時 y 所取之値也.係數之個數無論多寡,吾人常可算出,一如所需,但諸係數間並無通律,固甚顯然.吾人之解具下列形式

$$y=c_0+c_0^2x+\left(\frac{1}{2}+c_0^3\right)x^2+\left(\frac{1}{3}c_0+c_0^4\right)x^3+\cdots.$$

就 c_0 之某值,可求出必要之項數以得 y 之值,使之準確至其誤差限於已知範圍中.

例如,若 $|c_0|<1$,則其他係數有一上限可以指明.如在 $|c_0|\leqq\frac{1}{2}$ 時,則每一係數小於 1.故本題級數各項之絕對值逐一小於等比級數

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

之項,此等比級數在 $-1<x<1$ 時爲收斂者.取表示 y 值之級數之 r 項,並就上舉間隔中 x 之某一定值代入計算之,則其誤差之絕對值必小於 $\frac{|x|^r}{1-|x|}$.

習題 2. $y''+x^2y'+xy=0$.

令

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots,$$

吾人求得

$$y''=2c_2+2\cdot 3c_3x+3\cdot 4c_4x^2+\cdots+(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n+\cdots,$$

$$x^2y'=\qquad c_1x^2+\cdots+\qquad (n-1)c_{n-1}x^n+\cdots,$$

$$xy=\qquad c_0x+\quad c_1x^2+\cdots+\qquad c_{n-1}x^n+\cdots.$$

取三者之和，並令其 x 冪各項之係數等於零，則有

$$c_2=0, c_3=-\frac{c_0}{2\cdot 3}, c_4=-\frac{2c_1}{3\cdot 4},\cdots, c_{n+2}=-\frac{nc_{n-1}}{(n+1)(n+2)},\cdots.$$

由此項關於係數之通律，吾人可書出通解如下形式

$$\begin{aligned} y=c_0\Big[&1-\frac{x^3}{3!}+\frac{4^2x^6}{6!}-\frac{4^2\cdot 7^2x^9}{9!}+\cdots \\ &+(-1)^r\frac{4^2\cdot 7^2\cdot 10^2\cdots(3r-2)^2x^{3r}}{(3r)!}+\cdots\Big] \\ +c_1\Big[&x-\frac{2^2x^4}{4!}+\frac{2^2\cdot 5^2x^7}{7!}-\frac{2^2\cdot 5^2\cdot 8^2x^{10}}{10!}+\cdots \\ &+(-1)^r\frac{2^2\cdot 5^2\cdot 8^2\cdots(3r-1)^2x^{3r+1}}{(3r+1)!}+\cdots\Big]. \end{aligned}$$

此處之 c_0 與 c_1 乃 $x=0$ 時，y 與 y' 所取之值.

3. $y''=xy$.　　　　4. $y''=xy+y^2$.

5. $y''-x^2y'+xy=x$.　　(§VII·1，習題1.)

6. $(1-x^2)y''+2xy'+4y=0$.

IX·4 關於平直微分方程之存在定理 見於 §IX·1 之存在定理固可應用於平直及非平直微分方程者. 吾人將舉其一於此，此定

理對於本章後部所論具簡單形式之諸方程頗有聯繫. 吾人僅論二級平直微分方程,縱將此項論證推廣至高級方程,亦並不另含新原理.

取平直微分方程

$$X_0y''+X_1y'+X_2y=0 \tag{1}$$

論之. 因陳述存在定理之文字欲求簡潔,乃以 X_0 偏除上式而書作

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0. \tag{2}$$

如 a 非 $P(x)$ 或 $Q(x)$ 之一異點*(singular point),則 §IX·1,2' 之存在定理可以應用. 此處之 a 卽該定理中之 x_0.

此種情形,亦如 a 爲 $P(x)$ 或 $Q(x)$ 之一異點之例,僅係該定理中所提及之特殊情形耳,故吾人乃有下述之存在定理,可分兩部陳述之. 如方程之解可以級數表示之,而該級數收斂於平面上有限點之域內,則適用部分(a);如解在無窮遠之域內,能有上述性質,則適用部分(b).

(a) 若 $(x-a)P(x)$ 及 $(x-a)^2Q(x)$ 可依 Taylor 定理展爲 $(x-a)$ 之整次冪級數,則有形如 $(x-a)^{m_1}\cdot P_1(x-a)$ 及 $(x-a)^{m_2}\times[P_2(x-a)+\alpha P_1(x-a)\log(x-a)]$ 而互相獨立之二特別積分(可藉以求得通解)存在,其中 $P_1(x-a)$ 及 $P_2(x-a)$ 乃 $(x-a)$ 之冪級數收斂於以 a 爲中心之任何圓內+,該圓除 a 以外不含 P 或 Q 之其他異點. 又常數 α 在 m_1-m_2 非一整數或零時爲零. 卽在 m_1-m_2 爲異於零之一整數時,常數 α 仍可爲零. 但此定理示吾人以普偏之情形.

---

* 如一函數在 a 域內不爲有法,則後者謂爲該函數之一異點.

\+ 在此原理中,變數俱視作複數. 關於 x 實值之收斂間隔,爲 x 爲複數時之收斂圓所定.

(b) 若 $xP(x)$ 及 $x^2Q(x)$ 可展爲 $1/x$ 之冪級數收斂於充分龐大之 x 值時,則有形如

$$x^{m_1}P_1\left(\frac{1}{x}\right) \text{ 與 } x^{m_2}\left[P_2\left(\frac{1}{x}\right)+\alpha P_1\left(\frac{1}{x}\right)\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

而互相獨立之二特別積分存在,其中 $P_1(1/x)$ 及 $P_2(1/x)$ 乃 $1/x$ 之冪級數收斂於 x 值之絕對值大於 P 與 Q 之有限異點中具最大之絕對值者.又常數 α 在 m_1-m_2 非一整數或零時爲零. 此處之 α 縱在 m_1-m_2 爲一異於零之整數時亦仍可爲零.

此項平直微分方程之原理常稱爲 Fuchs 原理,以紀念 L. Fuchs 氏,其劃時代之論文載於 Crelle's Journal für die reine und angewandle Mathematik 在 1866 出版之第 66 卷內,是乃氏發揮其原理之第一篇文字.

IX·5. **解平直微分方程之方法*** 在通常情形,前節存在定理中所提及之冪級數,其係數之計算法概頗繁難. 吾人所論將限於一種平直微分方程,其係數爲自變數之多項式,且以 $y=x^m$ 代入微分方程左端之結果,可以寫成 x 兩異次冪之式者.

在 Cauchy 方程(§VI·11)之例,則其結果僅含 x 某次冪之項.+

---

* 首用此法者係 G. Frobenius,其陳述此法之論文載於 Crelle's Journal, Vol.76, (1873).

\+ 例如令 $y=x^m$ 代入 §VI·11 方程(1)之左端,則有

$$[k_0m(m-1)\cdots(m-n+1)+k_1m(m-1)\cdots(m-n+2)$$
$$+\cdots+k_{n-1}m+k_n]x^m.$$

令 x^m 之係數等於零並解出 m,吾人常得 n 個互異之特解,且因之而得其補充函數;甚易見其與在 §VI·11 中所求得者相同也.

在正式陳述本節方法之前，吾人先解方程

$$2x^2y''-xy'+(1-2x^2)y=0,$$

以說明其片斷. 令左端之 $y=x^m$，則得

$$(2m-1)(m-1)x^m-2x^{m+2}.$$

此處 x 之二相異指數差 2，而 m 爲其小者. 故若令

$$(1)\qquad y=c_0x^m+c_1x^{m+2}+c_2x^{m+4}+\cdots+c_rx^{m+2r}+\cdots,$$

並依下法選定 m 及 c，則吾人將有一解.

1° 擇 m 之值以令 $(2m-1)(m-1)=0$，卽 $m=1$ 或 $\frac{1}{2}$;

2° 擇諸 c 之值使(1)式代入微分方程左端之結果，其他各項能逐對互消；卽

$$(2)\qquad \begin{cases}(2m+3)(m+1)c_1-2c_0=0,\\(2m+7)(m+3)c_2-2c_1=0,\\(2m+11)(m+5)c_3-2c_2=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\(2m+4r-1)(m+2r-1)c_r-2c_{r-1}=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{cases}$$

當 $m=1$ 時，吾人應有

$$2\cdot5c_1=2c_0\qquad\therefore\ c_1=\frac{c_0}{1\cdot5},$$

$$4\cdot9c_2=2c_1\qquad\therefore\ c_2=\frac{c_1}{2\cdot9}=\frac{c_0}{1\cdot2\cdot5\cdot9},$$

$$6\cdot 13c_3=2c_2 \qquad \therefore\ c_3=\frac{c_2}{3\cdot 13}=\frac{c_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 9\cdot 13},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2r(4r+1)c_r=2c_{r-1} \quad \therefore\ c_r=\frac{c_{r-1}}{r(4r+1)}=\frac{c_0}{r!\,5\cdot 9\cdot 13\cdots(4r+1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故

$$c_0y_1\equiv c_0\left[x+\frac{x^3}{1\cdot 5}+\frac{x^5}{2!\,5\cdot 9}+\cdots+\frac{x^{2r+1}}{r!\,5\cdot 9\cdot 13\cdots(4r+1)}+\cdots\right]$$

為一特別積分.

當 $m=\frac{1}{2}$ 時,吾人應有

$$\frac{3}{2}\cdot 4c_1=2c_0 \qquad \therefore\ c_1=\frac{c_0}{1\cdot 3},$$

$$\frac{7}{2}\cdot 8c_2=2c_1 \qquad \therefore\ c_2=\frac{c_1}{2\cdot 7}=\frac{c_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7},$$

$$\frac{11}{2}\cdot 12c_3=2c_2 \qquad \therefore\ c_3=\frac{c_2}{3\cdot 11}=\frac{c_0}{3!\,3\cdot 7\cdot 11},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{4r-1}{2}\cdot 4r\,c_r=2c_{r-1} \quad \therefore\ c_r=\frac{c_{r-1}}{r(4r-1)}=\frac{c_0}{r!\,3\cdot 7\cdot 11\cdots(4r-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故

$$c_0y_2\equiv c_0x^{1/2}\left[1+\frac{x^2}{1\cdot 3}+\frac{x^4}{2!\,3\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{2r}}{r!\,3\cdot 7\cdot 11\cdots(4r-1)}+\cdots\right]$$

乃另一特別積分，與前者互相獨立．由是求得其通解為

$$y=Ay_1+By_2.$$

直接視察表示 y_1 及 y_2 之級數，卽見其關於 x 之一切有限值俱屬收歛．前節存在定理之部分(a)亦足以證實此事，蓋於原微分方程之第一係數化爲1後，$x=0$ 乃其諸係數僅有之有限異點也．

吾人卽將陳述本節之方法，該法可應用於若干緊要之二級平直微分方程．

設以 x^m 作 y 代入*§IX·4中微分方程(1)之左端(其中 X_0,X_1 及 X_2 乃 x 之多項式)之結果，可書作 x 兩異次冪之和

$$f(m)x^h+\phi(m)x^{h+l},$$

其中 l 係一正整數．

從 $f(m)$ 與 $\phi(m)$ 發生之過程觀之，得知其一至少必爲 m 之二次式．

I. 求補充函數時，當依下法進行：

(a) 設 $f(m)$ 爲 m 之二次式+，因 $f(m)=0$ 有兩根 m_1 及 m_2．

令 $y=c_0x^m+c_1x^{m+l}+\cdots+c_rx^{m+rl}+\cdots$，其代入微分方程左端之結果爲

---

* 爲簡單起見，吾人乃用 $y=x^m$．若 a 能令平直微分方程中最高級導式之係數爲零，則求此方程在 a 域內之解之手續，可以遷移原點至 a 點處之方法簡約之．此事可以變換 $x-a=u$ 完成之．

+ 當前節存在定理之部分(a)爲眞確時，此係常有之事．

$$
(3)\quad \begin{cases}
\quad c_0 f(m) x^h + c_0\phi(m) x^{h+l} \\
+c_1 f(m+l) x^{h+l} + c_1\phi(m+l) x^{h+2l} \\
+c_2 f(m+2l) x^{h+2l} + c_2\phi(m+2l) x^{h+3l} \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+c_{r-1} f(m+[r-1]l) x^{h+(r-1)l} + c_{r-1}\phi(m+[r-1]l) x^{h+rl} \\
+c_r f(m+rl) x^{h+rl} + c_r\phi(m+rl) x^{h+(r+1)l} \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

若有下列情形,則上式爲零:

1° $f(m)=0$,* 即若 $m=m_1$ 或 m_2;

2° $c_r f(m+rl)+c_{r-1}\phi(m+[r-1]l)=0$, 而 $\begin{Bmatrix} r=1,2,3,\cdots \\ m=m_1,m_2 \end{Bmatrix}$

即
$$
c_r=-\frac{\phi(m+[r-1]l)}{f(m+rl)}c_{r-1}
$$
$$
=(-1)^r\frac{\phi(m+[r-1]l)\phi(m+[r-2]l)\cdots\phi(m+l)\phi(m)}{f(m+rl)f(m+[r-1]l)\cdots f(m+2l)f(m+l)}c_0.
$$

相當於 m 之一値,通常有一特別積分. 如有 c_i 爲零, 則其後者亦然,因之該積分之項數爲有限.

若 m 之二値相等,則其相當之特別積分當然相同. 又若此二 m 相差 l 之一整倍數,如 $m_2=m_1+gl$,則相當於較小之 m_1,係數 c_g 將趨於無窮[因 $f(m_2)=f(m_1+gl)=0$],除非其分子亦同時爲零. 故此法往往僅予吾人以一特別積分. 必須將此法稍改方可求得另一積分,

---

* 方程 $f(m)=0$ 名曰指標方程(indicial equation). 相當於每一有限點 a 即有一指標方程. 以後應用之方程 $\phi(m)=0$, 則爲關於無窮遠點之指標方程.

參閱下列兩節可也.

當 m 取指標方程一根之值從而推求以 c_{r-1} 表 c_r 之式時，如遇該式分子分母俱含一等於零之因式(次數相同)時，吾人可以證明乘去此等因式之結果，可用作 c_r 之值(參閱 §IX·8).

若 $f(m)$ 之次數猶低於 2，由上述方法仍可求得一級數適合於原微分方程. 但普徧原理不能保證其收斂於一有限域內，蓋在此款，存在定理之條件並不成立也.

(b) 如 $\phi(m)$ 爲 m 之二次式，$\phi(m)=0$ 將爲 m 之兩值所適合，設其爲 m_1' 及 m_2'. 令

$$y=c_0x^m+c_{-1}x^{m-l}+c_{-2}x^{m-2l}+\cdots+c_{-r}x^{m-rl}+\cdots,$$

並代入方程之左端，則有

$$\begin{aligned}&c_0\phi(m)x^{h+l}+c_0f(m)x^h\\&+c_{-1}\phi(m-l)x^h+c_{-1}f(m-l)x^{h-l}\\&+c_{-2}\phi(m-2l)x^{h-l}+c_{-2}f(m-2l)x^{h-2l}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+c_{-r+1}\phi(m-[r-1]l)x^{h-(r-2)l}+c_{-r+1}f(m-[r-1]l)x^{h-(r-1)l}\\&+c_{-r}\phi(m-rl)x^{h-(r-1)l}+c_{-r}f(m-rl)x^{h-rl}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

若有下列情形，則上式爲零:

1° $\phi(m)=0$，即若 $m=m_1'$ 或 m_2';

2° $c_{-r}=-\dfrac{f(m-[r-1]l)}{\phi(m-rl)}c_{-r+1}$ 而 $\left\{\begin{matrix}r=1,2,3,\cdots\\m=m_1',m_2'\end{matrix}\right\}$

$$=(-1)^r\frac{f(m-[r-1]l)f(m-[r-2]l)\cdots f(m-l)f(m)}{\phi(m-rl)\phi(m-[r-1]l)\cdots\phi(m-2l)\phi(m-l)}c_0.$$

相當於 m 之一値，通常有一特別積分，其形如 $x^m(c_0+c_{-l}x^{-l}+c_{-2l}x^{-2l}+\cdots+c_{-r}x^{-rl}+\cdots)$．此處之 x^m 爲 x 之一負升冪冪級數所乘．關於甚大之 x 値，前節存在定理之部分（b）保證此級數之收斂性．

如 $\phi(m)=0$ 之二根相等或相差 l 之一倍數，則由此法求得積分之個數常少於 2．必將此法稍改方可求得另一積分，參閱下列兩節可也．

如第 207 頁第一小註所示，方法（a）常使吾人求得微分方程之二特別積分收斂於各點 a 之可以明定之域內，而 §IX·4 存在定理部分(a)之條件，在各該點俱能成立，

方法(b)常予吾人以二特別積分於 x 値甚大時爲收斂．

II．方程右端爲 x 之冪如 Ax^s 時，求其一特別積分，當循下法進行：

如 $f(m)$ 爲二次式，則將方法(a)修改如次：

令(3)之首項恆等於 Ax^s，則有

$$c_0f(m)x^h\equiv Ax^s.$$

從此求得

$$(4)\qquad h=s \text{ 及 } c_0f(m)=A.$$

因 h 爲 m 之平直函數，(4)中第一關係式決定 m 唯一之値 m_s．

將此 m 値代入(4)中第二關係式，吾人卽得所求 c_0 之値．

其餘諸係數皆循方法(a)求之，惟於此法中吾人今以 m_s 代 m．

在 $f(m_s)=0$ 時，此法失效．斯時當無特別積分其形如此處所求者．遇有 s 之値能令某 c 之値趨於無窮之例，則有此種事實．本節及

前節之習題中有此等例題數則.

當 $\phi(m)$ 爲二次時,將方法 (b) 作相仿之修改,卽可用以求一特別積分書作 x 之降羃序者.

至於求一特別積分之通法軼出本書範圍,故不具述.

注意. 吾人須知前述以 $\phi(m)$ 及 $f(m)$ 表示 c_r 之通式,固毋庸強記,且亦不宜用之以解微分方程.該式等可供核驗之用;卽就核驗而言,亦以將級數之最初若干項代入微分方程而驗算之爲佳. 吾人所須記憶者乃此法之原理.

習題 1. $(x-x^2)y''-3y'+2y=x+3x^4$.

以 x^m 作 y 代入左端,則有

$$m(m-4)x^{m-1}-(m+1)(m-2)x^m.$$

此處 x 之二相異指數差 1,而 $m-1$ 爲其小者. 又 x^{m-1} 之係數爲 m 之二次式,故可應用方法(a).令

$$y=c_0x^m+c_1x^{m+1}+c_2x^{m+2}+\cdots+c_rx^{m+r}+\cdots,$$

吾人必有

1° $m(m-4)=0$, 卽 $m=0$ 或 4;

2° $(m+1)(m-3)c_1=(m+1)(m-2)c_0 \quad \therefore \ c_1=\dfrac{m-2}{m-3}c_0,$

$(m+2)(m-2)c_2=(m+2)(m-1)c_1 \quad \therefore \ c_2=\dfrac{m-1}{m-2}c_1,$

$(m+3)(m-1)c_3=(m+3)mc_2 \quad \therefore \ c_3=\dfrac{m}{m-1}c_2,$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

$(m+r)(m+r-4)c_r$
$\quad =(m+r)(m+r-3)c_{r-1} \quad \therefore \ c_r=\dfrac{m+r-3}{m+r-4}c_{r-1}.$

當 $m=0$ 時,有

$$c_1=\frac{2}{3}c_0,\quad c_2=\frac{1}{2}c_1=\frac{1}{3}c_0,\quad c_3=0,\quad \therefore\ c_4=c_5=\cdot\cdot\cdot=0.$$

故

$$c_0\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^2\right),\ 或\ A(3+2x+x^2)$$

為一積分.名之曰 Ay_1.

當 $m=4$ 時,有

$$c_1=2c_0,\quad c_2=\frac{3}{2}c_1=3c_0,\quad c_3=4c_0,\cdot\cdot\cdot,c_r=(r+1)c_0,\cdot\cdot\cdot.$$

故

$$c_0(x^4+2x^5+3x^6+\cdot\cdot\cdot+rx^{r+3}+\cdot\cdot\cdot)$$

為另一積分.名之曰 By_2.

補充函數乃可書作

$$y=Ay_1+By_2.$$

積分 y_1 既為一多項式,故無有限異點.但表示 y_2 之級數僅收斂於 $|x|<1$ 時.此與前節存在定理之部分(a)相符,蓋 $x=1$ 恰令 X_0 為零也.

因 $\phi(m)$ 為 m 之二次式,方法(b)亦可應用.令

$$y=c_0x^m+c_{-1}x^{m-1}+c_{-2}x^{m-2}+\cdot\cdot\cdot+c_{-r}x^{m-r}+\cdot\cdot\cdot,$$

吾人必有

1° $(m+1)(m-2)=0$, 即 $m=2$ 或 -1;

2° $m(m-3)c_{-1}=m(m-4)c_0$ $\qquad\therefore\ c_{-1}=\dfrac{m-4}{m-3}c_0,$

$$(m-1)(m-4)c_{-2}=(m-1)(m-5)c_{-1} \qquad \therefore c_{-2}=\frac{m-5}{m-4}c_{-1},$$

$$(m-2)(m-5)c_{-3}=(m-2)(m-6)c_{-2} \qquad \therefore c_{-3}=\frac{m-6}{m-5}c_{-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\begin{aligned}(m-r+1)(m-r-2)c_{-r}&\\ =(m-r+1)(m-r-3)c_{-r+1}&\qquad \therefore c_{-r}=\frac{m-r-3}{m-r-2}c_{-r+1},\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

當 $m=2$ 時,有

$$c_{-1}=2c_0,\quad c_{-2}=3c_0,\quad c_{-3}=4c_0,\cdots,\quad c_{-r}=(r+1)c_0,\cdots.$$

故

$$c_0(x^2+2x+3+4x^{-1}+5x^{-2}+\cdots+rx^{3-r}+\cdots)$$

為一積分.名之曰 $A\bar{y}_1$.

當 $m=-1$ 時,有

$$c_{-1}=\frac{5}{4}c_0,\quad c_{-2}=\frac{6}{4}c_0,\quad c_{-3}=\frac{7}{4}c_0,\cdots,\quad c_{-r}=\frac{r+4}{4}c_0,\cdots.$$

故

$$\frac{c_0}{4}[4x^{-1}+5x^{-2}+6x^{-3}+\cdots+(r+3)x^{-r}+\cdots]$$

為另一積分.名之曰 $B\bar{y}_2$.

於此 $\bar{y}_1-\bar{y}_2=y_1$. y_1 既無有限異點,$\bar{y}_1$ 及 $\bar{y}_2$ 又僅收斂於 $|x|>1$ 時,吾人可將 $\bar{y}_1$ 代以 y_1,而取

$$y=Ay_1+B\bar{y}_2$$

為 $|x|>1$ 時之補充函數.

欲求一特別積分,吾人將右端各項分別考究之.

關於項 x,應用方法(a),命 $c_0m(m-4)x^{m-1}\equiv x$;故有

$$m=2,\ \text{及}\ c_0=-\frac{1}{4}.$$

當 $m=2$ 時,

$$c_r=\frac{r-1}{r-2}c_{r-1}.$$

$\therefore\ c_1=0$, 因之以後諸 c 亦均爲零.

故 $-\frac{1}{4}x^2$ 爲相當於 x 之一特別積分.

相當於 $3x^4$,吾人命 $c_0m(m-4)x^{m-1}\equiv 3x^4$;故有

$$m=5\ \text{及}\ c_0=\frac{3}{5}.$$

當 $m=5$ 時,

$$c_r=\frac{r+2}{r+1}c_{r-1}.$$

$$\therefore\ c_1=\frac{3}{2}c_0=\frac{3}{10}\cdot 3,\ \ c_2=\frac{4}{3}c_1=\frac{3}{10}\cdot 4,\ \ c_3=\frac{5}{4}c_2=\frac{3}{10}\cdot 5,\ \cdots\cdots$$

故

$$\frac{3}{10}\left[2x^5+3x^6+4x^7+\cdots+(n+1)x^{n+4}+\cdots\right]$$

乃相當於 $3x^4$ 之一特別積分. 試與上述之 y_2 比較,吾人見其等於 $\frac{3}{10}(y_2-x^4)$. 故一特別積分爲 $-\frac{3}{10}x^4$.

所求之通解乃爲

當 $|x|<1$ 時, $y=Ay_1+By_2-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{10}x^4$.

當 $|x|>1$ 時, $y=Ay_1+B\bar{y}_2-\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{10}x^4$.

此二者乃 x 取 1 與 -1 以外各實數值之一解.

因 $x=1$ 爲一異點,前節存在定理部分(a)之條件在該點成立. 按方法 I(a),吾人可求 $(x-1)$ 諸冪之一展式充作 y_1 以外之又一特別積分.

如前所示(第 211 頁第一小註),引用自變數之變數 $x-1=u$ 可使之較簡. 斯時 $u=0$ 係一異點,吾人可求其一解書作 u 之升冪式者. 變換後之方程,在右端爲零時,當係

$$u(u+1)\frac{d^2y}{du^2}+3\frac{dy}{du}-2y=0,$$

姑留作習題,以待證明.

指標方程之根爲 0 與 -2. 用其前者則求得一積分

$$c_0\left(1+\frac{2}{3}u+\frac{1}{6}u^2\right),\quad 即\quad A(6+4u+u^2).$$

名之曰 Ay_{11}. 以 x 之式表之,則與 Ay_1 相同,即 $A(3+2x+x^2)$.

當 $m=-2$ 時,吾人求得積分

$$c_0(u^{-2}+4u^{-1}+6+4u+u^2),\ 即\ c_0(u^{-2}+4u^{-1}+y_{11}).$$

故另一特別積分可書作

$$y_{12}=u^{-2}+4u^{-1}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}=\frac{4x-3}{(x-1)^2}.$$

然則相當於 $x=1$,吾人有下述之解

$$y=A(3+2x+x^2)+B\frac{4x-3}{(x-1)^2}-\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{10}.$$

此中並無無窮級數. 故此種僅含代數函數之解,可視爲具有吾

入所希冀之形式，且爲在平面上到處成立之解.

在事實上，至易證明

$$\text{如}\ |x|<1,\text{則}\quad y_2=x^4(1+2x+3x^2+\cdots)=\frac{x^4}{(1-x)^2}.$$

蓋因

$$\text{如}\ |x|<1,\text{則}\quad 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

求此冪級數逐項之微分，知

$$\text{若}\ |x|<1,\text{則}\quad 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

仿此，

$$\text{若}\ |x|>1,\text{則}\quad \bar{y}_1=x^4\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\cdots\right)=\frac{x^4}{(1-x)^2}.$$

此可由

$$\text{如}\ |x|>1,\text{則}\quad \frac{1}{1-x}=\frac{1}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\cdots$$

見之；求此 Laurent 級數逐項之微分，則有

$$\text{如}\ |x|>1,\text{則}\quad \frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\cdots.$$

尤有進者，

$$\frac{x^4}{(1-x)^2}-(3+2x+x^2)=\frac{4x-3}{(1-x)^2}.$$

當一微分方程之解可表以含初等函數之式時，此解常可藉初等

方法求得之.此時之微分方程爲正合，故其解可僅以求積分之方法求得之.學者須自爲之.

習題2. 若習題1中微分方程之右端有一項爲 x^s,如

$$(x-x^2)y''-3y'+2y=x^s.$$

試求與此項相當之特別積分之形式.

求下列諸習題之解,以 x 諸乘冪之項表之.

3. $y''+x^2y'+xy=x^s$. 4. $(x^2-x)y''+(x-3)y'-4y=0$.

5. $4xy''+2y'+y=0$.

6. $2x(1-x)y''+(1-x)y'+3y=0$.

7. $(2x+x^3)y''-y'-6xy=0$.

8. $9x(1-x)y''-12y'+4y=0$.

9. $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$,而 n 非整數或零.

10. $(1-x^3)y''-x^2y'+xy=0$.

11. $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$.

12. $x^4y''+xy'+y=0$.

13. $2x^2y''-xy'+(1-x^2)y=x^2$.

14. $4(x-x^2)y''+(6-8x)y'-y=0$.

IX·6. **指標方程之有重根者** 吾人將介紹適用於此種場合之方法,玆卽以例題說明之.

習題1. $xy''+y'+y=0$.

於其左端令 $y=x^m$ 之結果爲

$$m^2x^{m-1}+x^m.$$

此處 x 之二相異指數差1,而 $m-1$ 爲其小者,又 x^{m-1} 之係數乃 m

之二次式. 故可應用 §IX·5 之方法 1(a).

斯時之指標方程爲 $m^2=0$, 其根乃 0, 0. 如令

$$y=c_0x^m+c_1x^{m+1}+c_2x^{m+2}+\cdots,$$

則求得諸 c 之值當依下述之規律定之:

$$c_1=-\frac{c_0}{(m+1)^2},\quad c_2=-\frac{c_1}{(m+2)^2}=\frac{c_0}{(m+1)^2(m+2)^2},\cdots,$$

$$c_r=-\frac{c_{r-1}}{(m+r)^2}=(-1)^r\frac{c_0}{(m+1)^2(m+2)^2\cdots(m+r)^2},\cdots.$$

故 $m=0$ 時之

$$v=c_0x^m\Big[1-\frac{x}{(m+1)^2}+\frac{x^2}{(m+1)^2(m+2)^2}-\cdots$$

$$+(-1)^r\frac{x^r}{(m+1)^2(m+2)^2\cdots(m+r)^2}+\cdots\Big]$$

當爲一解. 吾人據此卽得一特別積分

$$y_1=1-\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}-\frac{x^3}{(3!)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(n!)^2}+\cdots.$$

欲再求一特別積分, 吾人當進行如次:

以 v 之值代微分方程中之 y, 其結果爲

(1) $$c_0m^2x^{m-1}.$$

以 $\partial v/\partial m$ 之值代微分方程中之 y, 則其結果爲

(2) $$\frac{\partial}{\partial m}c_0m^2x^{m-1},\text{ 或 }2c_0mx^{m-1}+c_0m^2x^{m-1}\log x.$$

因 x 及 m 可視作 v 中之自變數，故關於二者以求微分之次序可以互易．是以

$$x\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial v}{\partial m}+\frac{d}{dx}\frac{\partial v}{\partial m}+\frac{\partial v}{\partial m}=x\frac{\partial}{\partial m}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{\partial}{\partial m}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial}{\partial m}v$$

$$=\frac{\partial}{\partial m}\left[x\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}+v\right]=\frac{\partial}{\partial m}c_0m^2x^{m-1}.$$

但(2)於 $m=0$ 時亦爲零．故另一積分爲

$$\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)_{m=0},$$

而 $(\partial v/\partial m)_{m=0}$ 乃 $m=0$ 時 $\partial v/\partial m$ 之值．此時之

$$\frac{\partial v}{\partial m}=v\log x+$$

$$2c_0x^m\left[\left(\frac{1}{m+1}\right)\frac{x}{(m+1)^2}-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right)\frac{x^2}{(m+1)^2(m+2)^2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}\right)\frac{x^3}{(m+1)^2(m+2)^2(m+3)^2}-\cdots\right].$$

故令 $m=0$ 及 $y_2=\frac{1}{c_0}\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)_{m=0}$，則有

$$y_2=y_1\log x+2\left[\frac{x}{(1!)^2}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{(2!)^2}+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{x^3}{(3!)^2}-\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{(n!)^2}+\cdots\right].$$

因之求得通解

$$y=Ay_1+By_2$$

$$=(A+B\log x)\left[1-\frac{x}{(1!)^2}+\frac{x^2}{(2!)^2}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{(n!)^2}+\cdots\right]$$

$$+2B\left[\frac{x}{(1!)^2}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{(2!)^2}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{(n!)^2}+\cdots\right].$$

此種形式與 §IX·4 中存在定理之部分(a)相符.

吾人解習題 1 之步驟闡明通法:

如指標方程有一個二次根,$m=m_1$,則先按 §IX·5 方法 I(a) 對於 m 之通值求出積分之形式. 名之曰 v. 於 v 及 $\partial v/\partial m$ 中令 $m=m_1$,即得兩獨立之積分.

指標方程如有三次根或更高次根,此理亦可應用. 但以其軼出本書範圍,故不具論.

習題 2. 設習題 1 中微分方程之右端為 ax^s,如

$$xy''+y'+y=ax^s.$$

試求其應加於補充函數後之特別積分.

3. $xy''+y'+xy=0.$

4. $(x-x^2)y''+(1-5x)y'-4y=0.$

5. $xy''+(1+x)y'+2y=0.$

IX·7. 指標方程有二根之差為 l 之一整倍數者 為說明適用於此種場合之方法起見,吾人即取次之習題研究之.

習題 1. $(x-x^2)y''-3xy'-y=0.$

於其左端，令 $y=x^m$ 之結果為

$$m(m-1)x^{m-1}-(m+1)^2 x^m.$$

此處 x 之二相異指數差 1，而 $m-1$ 為其小者．故可應用 §IX·5 之方法 I(a)．

指標方程為 $m(m-1)=0$，其根為 0, 1．如令

$$(1)\qquad y=c_0x^m+c_1x^{m+1}+c_2x^{m+2}+\cdots,$$

則求得諸 c 之值當依下述之規律定之：

$$c_1=\frac{m+1}{m}c_0,\quad c_2=\frac{m+2}{m+1}c_1=\frac{m+2}{m}c_0,\cdots,c_r=\frac{m+r}{m}c_0\cdots.$$

當 $m=1$ 時，則得特別積分之一為

$$y_1=x+2x^2+3x^3+\cdots.$$

當 $m=0$ 時，則 c_0 以後諸 c 俱為無窮．

欲去此障礙，如令試擬級數(1)之第一係數為 mk_0．如是，則

$$c_1=(m+1)k_0,\quad c_2=(m+2)k_0,\cdots,c_r=(m+r)k_0,\cdots,$$

又以

$$v=k_0x^m[m+(m+1)x+(m+2)x^2+\cdots+(m+r)x^r+\cdots]$$

作 y 代入微分方程之結果為

$$(2)\qquad k_0m^2(m-1)x^{m-1}.$$

如在前款，其平方之因式 m^2 表示 $m=0$ 時不僅(2)式為零，即其關於 m 之導式

$$(3)\qquad 2k_0m(m-1)x^{m-1}+k_0m^2x^{m-1}+k_0m^2(m-1)x^{m-1}\log x$$

亦復爲零.但如前款,(3)乃以 $\partial v/\partial m$ 爲 y 代入微分方程之結果.故 $\left(\dfrac{\partial v}{\partial m}\right)_{m=0}$ 亦爲一積分.此處之

$$\frac{\partial v}{\partial m}=v\log x+k_0x^m(1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots).$$

故令 $y_2=\dfrac{1}{k_0}\left(\dfrac{\partial v}{\partial m}\right)_{m=0}$,並注意於 $m=0$ 時 v 將化爲 y_1 之事實,* 則有

$$y_2=y_1\log x+1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots.$$

此題闡明應付此種問題之通法,該法可陳述如下:

如指標方程有二根爲 m_1 與 m_1+gl,而 g 爲一正整數,l 爲以 $y=x^m$ 代入微分方程所得 x 兩相異冪之指數之差,則以

$$y=(m-m_1)k_0x^m+c_1x^{m+l}+c_2x^{m+2l}+\cdots+c_rx^{m+rl}+\cdots$$

爲試用級數.按§IX·5之方法I(a),求出以 x^m 之係數表示諸 c 之式.令 y 之最後形式爲 v.以 $m=m_1$ 代入 v 及 $\partial v/\partial m$,卽得兩獨立積分.

於 v 中令 $m=m_1+gl$ 亦可得一積分.此與在 v 中令 $m=m_1$ 時之積分相差一常數因式.然後者在表示另一獨立特別積分之式中較爲有用.

注意. 習題1中微分方程之解可以初等函數之項表示之.如在§IX·5之習題1,

$$x+2x^2+3x^3+\cdots=x(1+2x+3x^2+\cdots)=\frac{x}{(1-x)^2},$$

---

* 在實用時,y_1 須按第二法求之.參閱通法.

及

$$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}.$$

故

$$y_1=\frac{x}{(1-x)^2} \quad 及 \quad y_2=\frac{x\log x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}.$$

試察原方程即知其為正合．既為二級平直微分方程，故其解可以求積術得之．玆提示於此，以待學者為之．

習題 2.　$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$.

3.　$xy''+y=0$.　　　4.　$x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0$.

5.　$x^2y''+x(1+x)y'+(2x-1)y=0$.

6.　$(x^2-x)y''+(x+2)y'-4y=0$.

IX·8.　Gauss 方程　超比級數　方程

$$(Az^2+Bz+C)\frac{d^2y}{dz^2}+(Dz+E)\frac{dy}{dz}+Fy=0$$

中 A,B,C,D,E 均係常數，且 $B^2-4AC\neq 0$，其積分曾引起一著名之級數，經 Karl Friedrich Gauss(1777—1855) 之充分研究而益顯．此級數及其微分方程之發現者乃 Euler(1707—1783)．

今 $z=ax+b$，則有

$$[Aa^2x^2+(2Aab+Ba)x+Ab^2+Bb+C]\frac{d^2y}{dx^2}+(D'x+E')\frac{dy}{dx}$$
$$+F'y=0,$$

其中 D',E',F' 均為常數．

選 a 與 b 之值，以令*

$$Ab^2+Bb+C=0 \text{ 及 } 2Ab+B=-Aa\neq 0,$$

再以 Aa^2 除之，則有

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(Px+Q)\frac{dy}{dx}+Ry=0,$$

其中 P,Q,R 均爲常數. 如令

$$P=\alpha+\beta+1,\ Q=-\gamma,\ R=\alpha\beta,$$

則吾人之方程取下列形式

$$(x^2-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0.$$ +

以 $y=x^m$ 代入其左端之結果爲

$$-m(m-1+\gamma)x^{m-1}+(m+\alpha)(m+\beta)x^m.$$

用 §IX·5 之方法 I(a)，則有

$$m=0 \text{ 或 } 1-\gamma,$$

$$c_1=\frac{(m+\alpha)(m+\beta)}{(m+1)(m+\gamma)}c_0,$$

$$c_2=\frac{(m+\alpha+1)(m+\beta+1)}{(m+2)(m+\gamma+1)}c_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$c_r=\frac{(m+\alpha+r-1)(m+\beta+r-1)}{(m+r)(m+\gamma+r-1)}c_{r-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

---

* 如 $B^2-4AC<0$，則 a 與 b 不爲實數. 但此事並無影響於方程之形式；且應用冪級數之原理當然可推廣至係數及變數爲複數之情形.

\+ 常稱之曰 Gauss 方程.

當 $m=0$ 時,有

$$c_1=\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}c_0,\quad c_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}c_1=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$c_r=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+r-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+r-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+r-1)}c_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

命 $c_0=1$,則得特別積分

$$y_1=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n+\cdots.$$

此即所謂**超比級數**(hypergeometric series),常以下式表之

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x).$$

當 $m=1-\gamma$ 時,學者須證明其積分爲 c_0y_2,而

$$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x).$$

如 $1-\gamma$ 並非整數或零,則通解爲

$$y=Ay_1+By_2.$$

又若 α 或 β 爲一負整數,則在此款,y_1 化爲一多項式.

如 $1-\gamma=-g$,而 g 爲一正整數或零,則 y_1 仍爲一積分,但 y_2 之形式將改爲(§§IX·7,IX·6)

$$y_1\log x+x\text{ 之一冪級數},$$

除非 α 或 β 等於正數 $1,2,\cdots,g$ 之一.如此時與 α 或 β 相等之整數大於1,則 y_2 亦仍爲一積分,且化爲一多項式.否則,如 α 或 $\beta=1$,

則自 c_g 起每一係數之分子及分母各含一等於零之因式．如 §IX·5 所示，棄去此等因式(卽視其商爲 1)之結果，予吾人以 y_2* 之一可用之形式．

如 $1-\gamma=h$，而 h 爲一正整數，則表 y_2 之式仍爲一積分，但表 y_1 之式將含一對數之項 (§ IX·7)，除非 α 或 β 等於諸數 $0,-1,-2,\cdots,-(h-1)$ 之一．如此時與 α 或 β 相等者係按代數規則大於 $-(h-1)$ 之一整數，則 y_1 仍爲一積分，且化爲一多項式．否則，自 c_h 起，每一係數之分子及分母各含一等於零之因式．仿前例，棄去分子中同時爲零之因式之結果，卽得 y_1 之一可用之形式．

表示 y_1 及 y_2 兩式中之冪級數收斂於 $|x|<1$ 之時．

用 §IX·5 之方法 I(b)，學者須證明

$$\bar{y}_1=\frac{1}{x^\alpha}F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta,\frac{1}{x}\right),$$

$$\bar{y}_2=\frac{1}{x^\beta}F\left(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\alpha,\frac{1}{x}\right)$$

乃一雙平直無關之積分．

在 $\alpha-\beta$ 等於零，或一正或負之整數時可仿上文討論之．

表示 $\bar{y}_1$ 及 $\bar{y}_2$ 兩式中之冪級數收斂於 $|x|>1$ 之時．

超比級數有時或可代表著名之函數．

習題 1.　若 β 爲隨意之常數，則

$$F(-n,\beta,\beta-x)=(1+x)^n.$$

---

* 參考 Schlesinger, Einführung in die Theorie der Differential-gleichungen, §34.

2. $xF(1,1,2,-x)=\log(1+x)$.

3. $\text{limit}_{\beta\to\infty} F(1,\beta,1,\frac{x}{\beta})=e^x$.

4. $\text{limit}_{\alpha,\beta\to\infty} xF(\alpha,\beta,\frac{3}{2},-\frac{x^2}{4\alpha\beta})=\sin x$.

5. $xF(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2)=\sin^{-1}x$.

6. $xF(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2)=\tan^{-1}x$.

7. $\text{limit}_{\alpha,\beta\to\infty} F(\alpha,\beta,\frac{1}{2},\frac{x^2}{4\alpha\beta})=\cosh x$.

8. 試以超比級數表示下列各函數:$\frac{1}{1-x}$, $(1+x)^n+(1-x)^n$, $(1+x)^n-(1-x)^n$, $\cos x$, e^x+e^{-x}. 欲參考他例,可讀 Gauss, Collected Works, Vol. III, p, 127.

IX·9. Legendre **方程** 微分方程

$$(1-x^2)y''-2\ y'+n(n+1)y=0$$

中之 n 係一常數.此方程乃因法國著名數學家 Adrien Marie Legendre (1752—1833) 而得名. 吾人常於應用數學中遇此方程. n 常爲一正整數.

利用 §IX·8 開頭所提出之自變數之簡易平直變換,此方程卽可改爲一Gauss 方程之形式. 然按 §IX·5 之方法至易求得其解書作 x 或 $1/x$ 之冪級數.學者須證明,按方法 1(a),則有

$$y_1=1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!}x^4$$

$$-\frac{n(n-2)(n-4)(n+1)(n+3)(n+5)}{6!}x^6+\cdots,$$

$$y_2=x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!}x^5$$

$$-\frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n+2)(n+4)(n+6)}{7!}x^7+\cdots;$$

又按方法 I(b),則得

$$\bar{y}_1=x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2\cdot 2!(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2^3\cdot 3!(2n-1)(2n-3)(2n-5)}x^{n-6}+\cdots$$

$$\bar{y}_2=x^{-n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}x^{-n-3}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2^2\cdot 2!(2n+3)(2n+5)}x^{-n-5}$$

$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+6)}{2^3\cdot 3!(2n+3)(2n+5)(2n+7)}x^{-n-7}+\cdots.$$

如 $|x|<1$,則表示 y_1 及 y_2 之級數爲收斂. n 若爲偶正整數,零,或奇負整數,則表示 y_1 者化爲一多項式. n 若爲奇正整數或偶負整數,則表示 y_2 者亦然.

如 $|x|>1$,則表 $\bar{y}_1$ 及 $\bar{y}_2$ 之無窮級數爲收斂.

若 n 爲一整數或零,則表示 $\bar{y}_1$ 者爲有盡級數,該式於 n 爲偶數或零時與表示 y_1 者僅相差一常數因式,又於 n 爲奇數時與表示 y_2 者亦僅相差一常數因式.

仿此,若 n 爲一負整數,則表 $\bar{y}_2$ 者爲有盡級數,該式視 n 爲奇數或偶數而與表示 y_1 或 y_2 者相同至僅差一常數因式.

因指標方程之根爲 n 及 $-n-1$,又 l 等於 2,因之,如 $2n+1$ 爲零或一偶整數,則所求得之特別積分 $\bar{y}_1$ 或 $\bar{y}_2$ 必具有一新形式,其中含有一對數之項(§§IX·6,IX·7).

當 n 爲一正整數時,代表 $\bar{y}_1$ 及 $\bar{y}_2$ 之級數在物理學應用題中至爲重要.乘以固定常數後,此二者常書作

$$P_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\bar{y}_1 \quad 及 \quad Q_n=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\bar{y}_2.$$

函數 P_n 係一 n 次之多項式.吾人不難證明

$$P_0=1\ [n=0 \text{ 時 } n!=1], \qquad P_1=x,$$

$$P_2=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}, \qquad P_3=\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}x,$$

$$P_4=\frac{7\cdot5}{4\cdot2}x^4-2\frac{5\cdot3}{4\cdot2}x^2+\frac{3\cdot1}{4\cdot2},$$

$$P_5=\frac{9\cdot7}{4\cdot2}x^5-2\frac{7\cdot5}{4\cdot2}x^3+\frac{5\cdot3}{4\cdot2}x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

函數 P_n 稱爲 n 級之 Legendre 係數(Legendrean coefficient of the nth order,亦曰帶函數(zonal harmonic).

函數 Q_n 爲一無窮級數,稱爲第二種帶函數(zonal harmonic of the second kind).

IX·10 Bessel **方程** 數學物理學中另一極重要之微分方程爲

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0,$$

其中n係一常數.此方程乃因著名德國天文學家 Friedrich Wilhelm Bessel (1784—1846)而得名.在研究循軌道運動(orbital motion)之問題時,彼首先利用發現於吾人所論微分方程之解中之函數,今名曰 Bessel 函數者.

按§IX·5之方法 I(a),不難證明 Bessel 方程之二獨立積分通常爲

$$y_1=x^n\left[1-\frac{x^2}{2^2(1+n)}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!(1+n)(2+n)}\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!(1+n)(2+n)(3+n)}+\cdots\right],$$

$$y_2=x^{-n}\left[1-\frac{x^2}{2^2(1-n)}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!(1-n)(2-n)}\right.$$

$$\left.-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!(1-n)(2-n)(3-n)}+\cdots\right]$$

所示.表示y_2之式可從y_1之式中改n爲$-n$而得.

如n既非整數亦不爲零,* 則此二級數收斂於x之一切有限值.此外,當n爲一正整數時表y_1之級數爲收斂,又當n爲一負整數時表y_2之級數爲收斂.

Bessel 函數乃

$$J_n(x)=\frac{y_1}{2^n\Gamma(1+n)} \quad 及 \quad J_{-n}(x)=\frac{y_2}{2^{-n}\Gamma(1-n)}$$

---

* 如n爲一正或負之整數或零,則祗有二解之一能成立.其第二解可以§IX·7或§IX·6之方法求之.

二積分之常數倍數,式中 $\Gamma(1+n)$ 乃 Euler 之 gamma 函數. J_{-n} 之為 $-n$ 之函數與 J_n 之為 n 者,顯然相同.

如 n 為一正整數, $\Gamma(1+n)=n!$, 此時則有

$$J_n=\frac{y_1}{2^n n!}.$$

吾人稱之為 **n 級之 Bessel 函數** (Bessel's function of order n). 視 0! 作 1,則有

$$J_0(x)=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\cdots.$$

IX·11 Riccati **方程** 因 Riccati 伯爵(1676—1754)曾經研究而得名之方程乃

$$\frac{dy}{dx}+by^2=cx^m,$$

其中 b,c,m 皆為常數*. §IX·3 習題 1 之方程具此形式. 若 b,c,m 取特殊數值,則此方程可以求積術解之+. 但在通常情形,求解之唯一方法乃以級數求積分.

Riccati 方程之發生至為頻仍,有時雖不知解之形式而屢欲利用其性質. 反之,箇中消息若有所知,則其通解有時可由求積或純粹之代數方法求得之. 下列諸性質,間或有用. 吾人將使此數者建立於

---

* 方程 $x\frac{dy}{dx}-ay+\beta y^2=\gamma x^n$ 常視為屬於 Riccati 方程之類,此方程經變換 $z=x^a$, $y=uz$ 後,顯見其可化為後者之形式也.

+ 例如 A. R. Forsyth, A Treatise on Differential Equations, 第四版之 § 108 及以後數節可供參考.

較普徧之形式,即今人通常視爲 Riccati 方程者,如

$$\frac{dy}{dx}=X_0+X_1y+X_2y^2,$$

其中 X_0, X_1, X_2 皆爲 x 之函數.

1° 如已知一特別積分 y_1,則變換 $y=1/z+y_1$ 化之爲一平直方程

$$\frac{dz}{dx}+(X_1+2y_1X_2)z=-X_2,$$

故可用兩次求積術以解之.因之吾人乃有重要之結論曰:若 Riccati 方程之一特別積分 y_1 爲已知,則施用變換 $y=1/z+y_1$ 後引起 z 之一平直方程,該方程可用兩次求積術解之.

2° 因一級平直方程之解可書爲 $z=\gamma(x)+C\delta(x)$ 之形式,換言之,此乃任意常數之平直式,可見

$$y=\frac{1}{z}+y_1(x)=\frac{1}{\gamma(x)+C\delta(x)}+y_1(x)$$

$$=\frac{\alpha(x)+C\beta(x)}{\gamma(x)+C\delta(x)}.$$

故 Riccati 方程之通解係積分常數之雙平直式 (bilinear).

3° 方程 $y=\dfrac{\alpha+\beta C}{\gamma+\delta C}$ 在指定 C 爲一定值時即定一特解.相當於 C 之隨意四值 C_1, C_2, C_3, C_4 即有 y_1, y_2, y_3, y_4. 因重比 (double ratios) 之值,經雙平直變換 (bilinear transformation) 後,並不更改,由表示 y 之方程之形式,吾人乃知

$$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}=\text{一常數}.$$

故知，若 y_1, y_2, y_3, y_4 爲隨意四個特別積分，則函數 $\dfrac{(y_1-y_3)(y_2-y_4)}{(y_4-y_1)(y_2-y_3)}$ 對於 x 之一切值均等於一常數.

4° 因 3° 之故而直接推知，若已知三個特別積分 y_1, y_2, y_3，則通解可由

$$\frac{y-y_3}{y-y_1}=c\frac{y_2-y_3}{y_2-y_1}$$

逕得之；換言之，通解 y 可用純粹代數方法求出如下：

$$y=\frac{y_3(y_2-y_1)-cy_1(y_2-y_3)}{y_2-y_1-c(y_2-y_3)}.$$

5° 若 y_1 及 y_2 爲二已知之特別積分，令 $z=\dfrac{y-y_1}{y-y_2}$. 求兩端對數式之導式而得

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{y-y_1}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy_1}{dx}\right)-\frac{1}{y-y_2}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dy_2}{dx}\right).$$

因
$$\frac{dy}{dx}=X_0+X_1y+X_2y^2,$$

$$\frac{dy_1}{dx}=X_0+X_1y_1+X_2y_1^2,$$

$$\frac{dy_2}{dx}=X_0+X_1y_2+X_2y_2^2,$$

乃有

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx}=X_2(y_1-y_2);$$

故

$$z=\frac{y-y_1}{y-y_2}=Ce^{\int X_2(y_1-y_2)dx},$$

y 可由此式立卽求得. 是以,若有兩個特別積分 y_1 及 y_2 爲已知,則變換 $z=\frac{y-y_1}{y-y_2}$ 引導吾人至一變數已經分離之方程,因之可以一次求積術解之.

從 1°, 4°, 5° 所述諸性質觀之,吾人須知 Riccati 方程頗有類似平直微分方程之處;蓋每多知一特別積分,吾人卽愈與通解接近.例如,已知一特別積分,則求解 Riccati 方程之問題,卽化爲求解一個一級平直方程之問題,換言之,卽化爲包含兩次求積之問題;已知二特別積分,則用一次求積卽可求得通解;如已知三個特別積分,則其通解可以簡易之代數手續求得之.

6° 質直言之,變換

$$y=-\frac{1}{X_2z}\frac{dz}{dx},$$

卽可將一 Riccati 方程化爲二級齊次平直方程

$$X_2\frac{d^2z}{dx^2}-(X_1X_2+X_2')\frac{dz}{dx}+X_0X_2{}^2z=0.$$

反之,變換 $y=e^{\int vdx}$ 化一二級齊次平直方程爲一 Riccati 方程,學者可自證之.

第 十 章

全 微 分 方 程

X·1. **可求積分之全微分方程** 一微分方程含有三個或更多個變數而具有

(1) $$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$$

之形式者，稱爲**全微分方程**(total differential equation). 吾人將就方程之解可書作

(2) $$u(x,y,z)=c$$

者，加以討論，如是之微分方程謂爲可求積分(integrable).

由(2)引起而以之爲原函數之微分方程爲

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0.$$

故此式必與(1)全同或與之相差一積分因式 $\mu(x,y,z)$; 即(1)之積分如可求，則該方程必有一積分因式，因事果如此，則有一函數 $\mu(x,y,z)$ 存在，合於下列之關係

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\mu R.$$

尤有進者，

因 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$, 故 $\mu\dfrac{\partial Q}{\partial z}+Q\dfrac{\partial \mu}{\partial z}=\mu\dfrac{\partial R}{\partial y}+R\dfrac{\partial \mu}{\partial y}$,

因 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$, 故 $\mu\dfrac{\partial R}{\partial x}+R\dfrac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\dfrac{\partial P}{\partial z}+P\dfrac{\partial \mu}{\partial z}$,

因 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, 故 $\mu\dfrac{\partial P}{\partial y}+P\dfrac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial Q}{\partial x}+Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x}$.

函數 μ 必須適合此三方程，因之函數 P, Q, R 須先適合某一條件或諸條件，乃必要之事.

順次以 P, Q, R 乘此三方程後再取其和，則 μ 之導式盡可消去，而得

(3) $$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0,\text{*}$$

其中公共因式 μ 業經棄去，因其並不等於零也.

此為可求(1)之積分時，其係數 P, Q, R 所應適合之必要條件. 吾人將證其亦為充分之條件.

暫將變數之一，如 z 者，視作常數，如是則方程(1)取下形式

(4) $$Pdx+Qdy=0.$$

仍視 z 為常數，以求(4)之積分；但此時之積分常數可含有 z，令

---

* 此式亦可書作符號的行列式如下:

(3) $$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0,$$

該式極易記憶.

其解爲

(5) $$u(x,y,z)=\phi(z).$$

吾人將證明條件(3)若已適合，則吾人可選擇 $\phi(z)$ 以令(5)爲(1)之解. 蓋若視一切變數爲變數以求(5)之微分，則有

(6) $$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=d\phi.$$

當 z 視作常數時，(5)旣爲(4)之解，故有

(7) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu(x,y,z)P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu(x,y,z)Q,$$

其中之 μ 實爲(4)之一積分因式（參考 §11, 6）. 取(6)與以 μ 乘(1)後之方程比較之，則有

(8) $$\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\mu R\right)dz=d\phi.$$

此方程中之 $\partial u/\partial z-\mu R$ 若能因(5)式之關係而化爲 z 及 ϕ 之函數，亦卽 z 及 u 之函數，則可從此方程中解出 ϕ. 若視 $\partial u/\partial z-\mu R$ 及 u 爲 x 及 y 之函數，而以 z 爲參數，則 $\partial u/\partial z-\mu R$ 能爲 u 之一函數之唯一條件，爲其 Jacobi 式（Jacobian）*

(9) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}-\mu\dfrac{\partial R}{\partial x}-R\dfrac{\partial \mu}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\mu\dfrac{\partial R}{\partial y}-R\dfrac{\partial \mu}{\partial y} \end{vmatrix}$$

爲零. 利用(7)式，吾人可書如

* 參考附錄 I.

$$\begin{vmatrix} \mu P, \mu\dfrac{\partial P}{\partial z}+P\dfrac{\partial \mu}{\partial z}-\mu\dfrac{\partial R}{\partial x}-R\dfrac{\partial \mu}{\partial x} \\ \mu Q, \mu\dfrac{\partial Q}{\partial z}+Q\dfrac{\partial \mu}{\partial z}-\mu\dfrac{\partial R}{\partial y}-R\dfrac{\partial \mu}{\partial y} \end{vmatrix},$$

即

$$\mu^2\left[P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right]-\mu R\left(P\frac{\partial \mu}{\partial y}-Q\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)$$

設(3)已適合，則此又變為

$$\mu R\left[\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y}\right],$$

即

$$\mu R\left[\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}\right].$$

μ 既為(4)之一積分因式，此式即當為零．故 Jacobian(9)等於零，且方程(8)乃可就 ϕ 解出；將其代入(5)式，吾人即得方程(1)之解，吾人之理因以證明矣．

條件(3)之充要性可以極簡之法證明如下(但條件縱已適合，此證仍不能示吾人以推解全微分方程之通法)：

方程

(1) $$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

在可求積分時等於兩偏微分方程

(10) $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R} \quad 及 \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R}.$$

因如前所示，若

$$\mu(Pdx+Qdy+Rd\ )\equiv du(x,y,z),$$

必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu P,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\mu Q,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\mu R.$$

又從其解 $u(x,y,z)=c$，應有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}=-\frac{P}{R}\ \text{及}\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}=-\frac{Q}{R}.$$

欲方程(10)能同時成立之充要條件爲

(11) $$\left(\frac{\partial\left(\frac{P}{R}\right)}{\partial y}\right)_{y,z}=\left(\frac{\partial\left(\frac{Q}{R}\right)}{\partial x}\right)_{x,z}.$$

此處所用之符號，

$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{x,z}$ 之意爲 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_{y,z}$ 之意爲 $\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

參閱著者之微積分學，§108，346 頁.

完成(11)式之運算，則得

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-P\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$=R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)-Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

因 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{P}{R}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{Q}{R}$，故此式立即化爲上述(3)式之形狀.

X·2. **解法** §X·1 所示之第一證法除證明條件 (3) 之充分性

外，並指示適合該條件之全微分方程之解法如下:

視變數之一*爲常數以求此方程之積分，更以含此變數之一未定函數 ϕ 代替積分常數．取此積分重求其對於一切變數之微分，並將其結果與原微分方程相較，如是乃引起一新微分方程，其中僅含 ϕ 及此函數中所含之變數．從此新微分方程之解，ϕ 之形式可以求得，內中含一任意常數．原方程式之全解至此已完全求得．

檢驗下列諸方程有無可積分性 (integrability)，並求其積分．

習題 1.　$y^2dx+zdy-ydz=0.$

$$\begin{vmatrix} y^2 & z & -y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z & -y \end{vmatrix}=y^2(-1-1)+z(0-0)-y(0-2y)=-2y^2+2y^2=0.$$

在此例中，當選何變數爲常數，殊無軒輊於其間．令 y 爲如是之一變數或有若干便利之處，由是得

$$y^2dx-ydz=0;\quad 故\quad xy-z=\phi(y).$$

求其微分，得

$$ydx+xdy-dz=d\phi,$$

卽
$$y^2dx+xydy-ydz=y\,d\phi.$$

將其與原微分方程相較，則有

$$(xy-z)dy=yd\phi,$$

卽
$$\phi dy=yd\phi,\qquad \therefore\ \phi=cy.$$

---

* 吾人選以視作常數之變數，在使其能令所得含有其餘兩變數之方程愈簡愈妙．

故得通解爲

$$xy-z=cy.$$

2. $zydx-zxdy-y^2dz=0.$

3. $xdx+ydy-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dz=0.$

4. $(x^2-y^2-z^2)dx+2xydy+2xzdz=0.$

5. 試求 $f(z)$，俾

$$(1+z^2)\cos x dx+f(z)dy+(yz-z\sin x)dz=0$$

可求積分. 求得該函數後，再解此方程.

X·3. 特殊解法

1° 凡可求積分之方程必原爲正合，或於引用一積分因式後卽可使之爲如此者；在以視察法或其他方法可以求得此類因式時，吾人卽宜引用之，並逕求所得正合方程之積分.

關於此事，吾人須注意一可求積分之全微分方程所含變數之一，若與其他二者"已經分離"，則此方程爲正合. 設 P 及 Q 均不含 z，而 R 不含 x 及 y，且知 $R\neq 0$ *，則 z 與其他諸變數謂爲"已經分離"矣. 如此之方程可書作

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy+R(z)dz=0 \tag{1}$$

之形式，又其可求積分之條件簡約爲

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{2}$$

因 $R\neq 0$，$\partial P/\partial y-\partial Q/\partial x=0$；故 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 必係 x

---

* 如 $R\equiv 0$，則原方程自始無 z，而爲僅含 x 及 y 之一常微分方程矣.

及 y 之某函數之微分. 再則, $R(z)dz$ 乃 $\int R(z)dz$ 之微分, 是以(1)爲正合.

例如在 §X·2 習題 1 中, 如先以 y^2 偏除該方程, 則 x 與其他諸變數分離, 如此則有

$$dx+\frac{zdy-ydz}{y^2}=0.$$

此題爲正合方程, 且其解爲

$$x-\frac{z}{y}=c.$$

學者試考查 §X·2 諸習題, 舉其有一變數可以分離者, 以資練習.

2° 有時可將兩個或更多個變數之一函數代換爲一新變數, 而使所得方程改成兩變數之一常微分方程, 縱或不然, 亦至少可使其式較前簡易.

例如在 §X·2 之習題 4 中, 如 $y^2+z^2=u^2$, 則此微分方程變爲正常者

$$x^2dx+xdu-udx=0.$$

其一顯而易見之積分因式乃 $1/x^2$; 故求得其解爲

$$x+\frac{u}{x}=c,\quad 即\quad x+y+z^2=cx.$$

習題 1. $xdx+\sqrt{x^2-2z}\,dy-dz=0.$

2. $(x+y+z+1)dx-(x+y+z-1)dy+dz=0.$

3. $(x^2+y+z)dx-xdy-xdz=0.$

4. $(y^2+z^2)dx-xydy-xzdz=0$.

5. $yzdx-xzdy-(x^2+y^2)dz=0$.

6. $(y^2z^2-xyz)dx+x^2zdy+x^2ydz=0$.

7. $2xydx-zdy-y\log y\cdot dz=0$.

X·4. **齊次方程** 如 P,Q,R 爲同次之齊次函數，則其變數之一可以從他者分離，一如吾人對於一個一級齊次常微分方程之所爲者（§II·2）．吾人於此選擇二變數，如 x 及 y，並按變換式 $x=uz, y=vz$ 而引用新變數 u 及 v，然則，

$$dx=zdu+udz,\quad dy=zdv+vdz,$$

而原微分方程變爲

$$z(P_1du+Q_1dv)+(uP_1+vQ_1+R_1)dz=0, \tag{1}$$

其中 $\quad P_1=P(u,v,1),\ Q_1=Q(u,v,1),\ R_1=R(u,v,1).$

如 $uP_1+vQ_1+R_1\neq 0$，則此方程可書作

$$\frac{P_1du+Q_1dv}{uP_1+vQ_1+R_1}+\frac{dz}{z}=0. \tag{2}$$

如原方程適合可求積分之條件，則方程(2)亦然；故後者爲正合，因 z 已從他二變數分離也．

如竟有 $uP_1+vQ_1+R_1\equiv 0$ * 之事，則求解此全微分方程之問題改爲求解一個一級常微分方程

$$P_1du+Q_1dv=0 \tag{3}$$

---

* 此事發生於 $xP+yQ+zR\equiv 0$ 之時，其故在

$$xP+yQ+zR\equiv z^{r+1}(uP_1+vQ_1+R_1),$$

r 乃 P,Q 及 R 之公共次數也．

之問題矣.

習題 1. $(y^2+z^2)dx-2(xy+yz)dy+(x^2+y^2)dz=0.$

如令 $x=uy$ 及 $z=vy$,則此方程變爲正合方程

$$\frac{(v^2+1)du+(u^2+1)dv}{(u+v)(uv-1)}+\frac{dy}{y}=0. \tag{4}$$

應用§II·8之方法,吾人須先求積分

$$\int^{(u)}\frac{(v^2+1)du}{(u+v)(uv-1)},$$

此中之 v 係一常數.

加 uv 於被積分式之分子,復由之減去之,則該式可分解爲分項分數.因之,

$$\int^{(u)}\left(\frac{v}{uv-1}-\frac{1}{u+v}\right)du=\log\frac{uv-1}{u+v}.$$

該式顯係方程(4)中第一項全部之積分.故(4)之解爲

$$\frac{yuv-y}{u+v}=c.$$

吾人復以 y 乘其分子分母,乃終得

$$\frac{xz-y^2}{x+z}=c.$$

習題 2.

$z(x^2+2xy-y^2)dx+z(2xy+y^2-x^2)dy-(x^2+y^2)(x+y)dz=0.$

此處之 $xP+yQ+zR\equiv 0$. 故如令 $x=uz, y=vz$,則本方程變爲一常微分方程

$$(u^2+2uv-v^2)du+(v^2+2uv-u^2)dv=0,$$

雖非正合,但係齊次.故(§11·11)$1/(uM+vN)$,即 $1/(u^2+v^2)(u+v)$ 乃一積分因式.引用之,即得

$$(5)\qquad \frac{u^2+2uv-v^2}{(u^2+v^2)(u+v)}du+\frac{v^2+2uv-u^2}{(u^2+v^2)(u+v)}dv=0.$$

加 u^2 於(5)式第一項之分子,復由之減去之,則有

$$\int^{(u)}\frac{u^2+2uv-v^2}{(u^2+v^2)(u+v)}du=\int^{(u)}\frac{2u}{u^2+v^2}-\frac{1}{u+v}=\log\frac{u^2+v^2}{u+v}.$$

吾人易見此式為(5)式左端全部之積分.故(5)之解為

$$\frac{u^2+v^2}{u+v}=c.$$

以 z^2 乘其分子分母,終得

$$\frac{x^2+y^2}{xz+yz}=c.$$

3. $(z^2-yz)dx+(z^2+xz)dy+(x^2+xy)dz=0.$

4. $2(xy+xz)dx+(y^2+2yz-x^2)dy-(x^2+y^2)dz=0.$

5. $(y+z)dx+(z-x)dy-(x+y)dz=0.$

6. $xydx-(2x^2+y^2+2z^2)dy+yzdz=0.$

7. $(y^2+yz+z^2)dx+(x^2+xz+z^2)dy+(x^2+xy+y^2)dz=0.$

8. $(x^2y-y^3-y^2z)dx+(xy^2-x^2z-x^3)dy+(xy^2+x^2y)dz=0.$

9. 準由(1)至(2)之步驟,試證方程 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 如為齊次,且 $xP+yQ+zR\neq 0$ 時,$xP+yQ+zR$ 乃一積分因式.

10. 設方程 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 係由原函數 $u(x,y,z)=c$ 所引

起，而 $u(x,y,z)$ 爲零次之齊次式，求證 $xP+yQ+zR\equiv 0$；並證明其逆定理.

X·5. **含三變數以上之全微分方程** 試就方程

$$Pdx+Qdy+Rdz+Sdt=0 \tag{1}$$

論之. 如此方程可求積分，則視其任一變數爲常數時當仍爲此. 令 x, y,z,t 先後視爲常數，則其可求積分之條件爲

$$Q\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial t}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial y}\right)+S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)=0, \tag{2}$$

$$R\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial x}\right)+S\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+P\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial t}\right)=0, \tag{3}$$

$$S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)+P\left(\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial t}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial x}\right)=0, \tag{4}$$

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0. \tag{5}$$

但此四條件並非完全獨立，蓋以 $P,-Q,R$ 順次乘(2),(3),(4)後再相加，卽得(5)爲 S 所乘之式. 除此以外，吾人又可證明其任意三者往往獨立.

若方程中有 n 個變數，則所有之條件，其個數應與在 n 個變數中每次取其三個之組合數相同；換言之，條件之個數當爲 $n(n-1)\times(n-2)/3!$. 此等條件中祇有 $(n-1)(n-2)/2$ 個爲獨立.

抑有進者，此等條件亦可證明其爲充分. 若條件成立，則求解一含 n 變數之方程之方法，在將昔所施用於含三變數之方程者重覆應用. 其法首在視二變數以外之一切變數爲常數而求積分. 此中之積分

常數應代以暫時視作常數之諸變數之一函數 ϕ，重求此積分對於一切變數之微分，並將其結果與原方程相較，得一可求積分之新微分方程，其中不復含有前曾始終視爲變數之兩變數，而至多包含其餘 $n-2$ 個變數及 ϕ，即共含 $n-1$ 個變數．上述手續可以重覆．茲以習題說明其程序．

習題 1. $z(y+z)dx+z(t-x)dy+y(x-t)dz+y(y+z)dt=0$.

暫視 y 及 z 爲常數．求積分得

$$xz+yt=\phi(y,z).$$

求其微分，且與原方程相較，則有

$$(ty+zx)(dy+dz)=(y+z)d\phi,$$

即
$$\phi(dy+dz)=(y+z)d\phi.$$

吾人今得一含三變數 y,z,ϕ 之方程，可按通法（§X·2）解之．但有一易見之積分因式 $1/(y+z)\phi$，藉此求得

$$\phi=c(y+z).$$

故其通解爲

$$xz+yt=c(y+z).$$

相當於 §§X·3 及 X·4 之特殊方法亦有時可用，

例如前題之方程係齊次者，令

$$x=ut,\quad y=vt,\quad z=wt.$$

則變換後之結果爲正合方程

$$\frac{w(v+w)du+w(1-u)dv+v(u-1)dw}{(v+w)(uw+v)}+\frac{dt}{t}=0, \tag{6}$$

如將 dv 及 dw 之係數順次書作

$$u(1-u)=w-wu+v-v=v+w-(uw+v)$$

及

$$v(u-1)=uv-v+uw-uw=u(v+w)-(uw+v),$$

則方程(6)可書作

$$\frac{wdu+dv+udw}{uw+v}-\frac{dv+dw}{v+w}+\frac{dt}{t}=0.$$

其解爲

$$\frac{t(uw+v)}{v+w}=c,$$

最後卽得

$$xz+yt=c(y+z).$$

2. $xtdx+ztdy+ytdz+(t+1)(x^2+2yz)dt=0.$

3. $(yt-yz-zt)dx+(x+t)(x+z)dy+(x+t)(y+t)dz$

$$+(xz-xy-yz)dt=0.$$

4. $(y+z-t)dx-(x+2z-t)dy-(x-2y+t)dz$

$$+(x-y+z)dt=0.$$

X·6. **不可求積分之款** 如方程 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 不能適合可求積分之條件,則不能求得形如

$$u(x,y,z)=c$$

之通解.但因原方程含有三個變數,吾人當可求得其無窮個解.質言之,吾人若設一任意關係式如 $\psi(x,y,z)=0$ 者,則此式決定一變數爲其他兩變數之函數之形式.將此函數代入原方程,卽得一僅含兩變數

之新微分方程.由此可知,所謂不合可求積分條件之一全微分方程之通解者,包含兩式,其一爲任意選取之諸變數間之關係式,其二爲含有一任意常數之關係式. 後者之形式視乎前者之如何選取,苟非前者已經選定,後者之式即無從決定.

習題. $ydx+xdy-(x+y+z)dz=0$.

本題方程不能適合可求積分之條件至爲明瞭.如假定 $x+y+z=0$,則吾人之方程變爲

$$ydx+xdy=0,\ 其解爲\ xy=c.$$

故得一解

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ \qquad xy=c. \end{cases}$$

如假定 $x+y=0$,則吾人之方程變爲 $ydx+xdy-zdz=0$,其解爲 $2xy-z^2=c$.故又得一解

$$\begin{cases} \quad x+y=0, \\ 2xy-z^2=c. \end{cases}$$

X·7. 幾何解釋 一三元方程

$$u(x,y,z)=c \tag{1}$$

代表三維空間內一曲面,此固吾人所習知之事也. 如 (x,y,z) 爲此面上之一點,則在該點對於此面之法線之方向餘弦,當順次比例於偏導式

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z}$$

在該點之值.設(1)爲可求積分之全微分方程

(2) $$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

之通解,按 §X·1 知 $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z$ 當順次與 P, Q, R 成比例.故在曲面(1)上任意一點處,法線之方向餘弦當與 P, Q, R 在該點處之值成比例.吾人所論將限於一域,在該域中,函數 P, Q, R 爲有法且不同時爲零.在此域內,每點(x, y, z)處 P, Q, R 各有定值.此三者可視爲與通過該點某一直線之方向餘弦成比例之一組值.所謂(1)爲(2)之通解者,其幾何的意義今可陳述如下:在吾人所論之空間一域內,微分方程(2)於其每一點處定一方向.解(1)乃一族曲面,即所謂**積分曲面**(integral surface)者之方程,其在每點處之法線,乃原微分方程在該點所定之直線.

在不可求積分之情形,假定之關係

(3) $$\psi(x, y, z)=0$$

乃一曲面之方程,在其每一點處,法線之方向餘弦順次比例於

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

在該點之值.此三者通常不與 P, Q, R 在該點之值成比例.然則在曲面(3)之每一點處,吾人當有二直線,一爲法線,一爲微分方程(2)所定之直線.此時之解包含兩關係式,即假定之關係(3)及含一任意常數之另一關係.因含有三個變數之兩方程定一曲線,又因解中二方程有一爲(3),故知此時之解就幾何方面言之,其所代表者乃在假定曲面(3)上之一族曲線.尤有進者,吾人可以證明,在所論域內之每一點處,爲微分方程(2)所決定之直線,當與此曲線族中通過該點之一曲線垂直.例如 §X·6 中習題之解,乃平面 $x+y+z=0$ 爲一族柱面

$xy=c$ 所截成之諸曲線，然亦可視爲平面 $x+y=0$ 爲一族雙曲拋物面(hyperbolic paraboloids) $2xy-z^2=c$ 所截成之諸曲線.

此理亦適用於可求積分之方程,其與前稍有不同者,乃此時在一任意選取之曲面上之諸曲線,恰爲此面與積分曲面族所交成之諸曲線.

X·8. **撮要** 如全微分方程

$$Pdx+Qdy+Rdz=0$$

適合可求積分之條件,則在其普徧之解法中,須求兩個一級常微分方程之解(§X·2).

求解此類方程之問題,往往可以化簡,因有一積分因式存在,如此因式可由視察法求得,卽宜引用之,使求解之問題化簡爲求積者(§X·3).

如變數之一可從他者分離,則有一積分因式可以求得(§X·3).

如 P,Q 及 R 爲同次數之齊次式,則求解之問題可化簡爲求積或變爲一求解一個一級常微分方程之問題(§X·4).

有時,可引用一新變數而化此全微分方程爲一級常微分方程(§X·3).

如可求積分之條件不能適合,其解仍可求得,但爲較特殊之形式耳(§X·6).

含 n 個變數之一全微分方程,如能適合可求積分之條件,則其普徧解法中須求解 $n-1$ 個一級常微分方程(§X·5).

求解如此一方程之問題常可化簡,其法與 $n=3$ 時諸方法相彷彿.

檢驗下列諸習題之可積分性，並求其解:

習題 1. $(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0.$

2. $(z+1)(xdx+ydy)-(x^2+y^2)dz=0.$

3. $(x+y^2+z^2+1)dx+2ydy+2zdz=0.$

4. $(y+a)^2dx+zdy-(y+a)dz=0.$

5. $(y+z)dx+dy+dz=0.$

6. $2xdx+dy+(2x^2z+2yz+2z^2+1)dz=0.$

7. $(2x+y^2+2xz)dx+2xydy+x\,dz-dt=0.$

8. $zxdy-yzdx+x\,dz=0.$

9. $x(y-1)(z-1)dx+y(z-1)(x-1)dy$

$$+z(x-1)(y-1)dz=0.$$

10. $(y-z)dx+2(x+3y-z)dy-2(x+2y)dz=0.$

11. $t(y+z)dx+t(y+z+1)dy+tdz-(y+z)dt=0.$

12. $z(y+z)dx+z(t-x)dy+y(x-t)dz+y(y+z)dt=0.$

13. $(yz-xyz)dx+(zx-xyz)dy+(xy-xyz)dz=0.$

14. $(ly-kz)dx+(hz-lx)dy+(kx-hy)dz=0.$

15. $yzdx-xtdy+xy\log x\cdot dz-xy\log y\cdot dt=0.$

16. $(y^4+z^4+t^4)dx-4(x^3zt+xy^3)dy$

$$-4(x^3yt+xz^3)dz-4(x^2yz+xt^3)dt=0.$$

第十一章

聯立方程組

XI·1. **解題通法** 含有 n 個應變數之 n 個微分方程組通常皆可解出,此在常微分方程之學理中可以證明者也.

吾人將取 $n=2$* 之例言之.設方程爲

(1) $$f_1[(x)_m,\ (y)_r,\ t]=0,$$

(2) $$f_2[(x)_{m+p},(y)_s,\ t]=0,$$

出現於(1)及(2)中之 x 之導式其級數最高者順次爲 m 及 $m+p$, y 之導式其級數最高者順次爲 r 及 s. 又 t 爲自變數, m,p,r,s 諸數中可有若干爲零者. 求此二方程之微分,吾人乃得含有應變數較高級導式諸新方程,此項手續可運用至所有方程之數比某一變數之最高級導式之級數多二之時爲止.此應變數及其一切導式通常可從此等方程中消去,其結果爲僅含一個應變數之微分方程.例如求(1)之累次微分 p 次,吾人卽得

(3) $$f_3[(x)_{m+},(y)_{r+},t]=0,$$

(4) $$f_4[(x)_{m+},(y)_{r+},t]=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$(p+2)$ $$f_{p+2}[(x)_{m+p},(y)_{r+p},t]=0.$$

---

* 將此法稍加修改,卽可使之應用於 n 爲任何正整數之情形.

吾人今有 $p+2$ 個方程,由此應將 x 及其所有之 $p+m$ 個導式一併消去.在通常情形,此數尚有不敷*,蓋所需方程之數較諸所應消去諸量之個數應多一個也.吾人今更進而求(2)及($p+2$)之微分,如是引入新方程二,而 x 之新導式則僅因之增加一個,故將此法繼續施用一適宜之次數後,必可令所得方程之數比所應消去諸量之個數多一.完成此消去之工作即得一僅含 y 之方程.求其積分,並將 y 之值代(1),則得一僅含 x 之方程,該方程須再解出.如 $m>0$,則除 y 之通解中所已含有者外,此中尚另有若干個積分常數出現.惟二組常數並非互相獨立,諸常數間之關係可利用 x 與 y 之值代入方程 (2) 後應爲恆等式之事實以推定之.吾人將於下節中說明之.

如先消去 y 及其導式以求 x,固亦無不可,惟視其是否較便耳.

或將 x 及 y 分別解出亦可.諸積分常數間之關係可代 x 及 y 之通解於(1)及(2)兩方程之一(或因需要而代入二者)中以求之.

消去 x 及其導式與消去 y 及其導式而得之兩微分方程常爲同

---

*如 $m=0$,則此數已經足用.又在此項過程中,如得一組微分方程其中不含 x 或其若干導式.則其所確實含有者可從較少數之方程中消去.試取一組方程

$$A\frac{d^2x}{dt^2}+Ey=0 \quad 及 \quad C\frac{dx}{dt}+D\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

爲例,其中 A,B,C,D 皆係常數.求第二方程之微分,則得

$$C\frac{d^2x}{dt^2}+D\frac{d^3y}{dt^3}=0,$$

如此共有三方程,而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{d^2x}{dt^2}$ 可從其中消去之.所得含 y 之微分方程爲三級而非四級如通法所指示者.然此組方程之通解仍當含有四個任意常數.

級，果爾，則出現於此組微分方程之通解中之獨立常數之個數，應即等於此公有之級數.如所得兩方程之級數並不相同，則獨立常數之個數等於兩級數之較大者.

XI·2. **常係數平直方程組** 所設方程如爲常係數平直式，則應用前節通法至爲簡捷.例如方程組

$$\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}+x=\cos t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+3x-y=e^{2t}$$

可書作

(1) $$(D+1)x-Dy=\cos t,$$

(2) $$(D^2+3)x-(D+1)y=e^{2t},$$

而 $D\equiv d/dt$. 求(1)之微分，得

(3) $$(D^2+D)x-D^2y=-\sin t.$$

今須將 x, Dx, D^2x 消去，必先有四個方程，方可實行.故吾人須再求(2)及(3)之微分，而得

(4) $$(D^3+3D)x-(D^2+D)y=2e^{2t},$$

(5) $$(D^3+D^2)x-D^2y=-\cos t.$$

吾人今有方程五個，故可消去其所含之四量 x, Dx, D^2x, D^3x. 取 $-3\times(1), 1\times(2), 1\times(4), -1\times(5)$之結果而加之，得

(6) $$(D^3-D^2+D-1)y=3e^{2t}-2\cos t,$$

此乃僅含 y 之一平直方程，且可逕求其解.

然在求解之前，吾人須察知(6)式如何可從(1)與(2)直接求得．吾人若將後二者視作代數方程，則(3)爲 D 乘(1)之結果，(5)爲 D^2 乘(1)之結果，而(4)則爲 D 乘(2)之結果，故上述之消去法實無異於由$(D+1)$乘(2)減去(D^2+3)乘(1)之結果．但此與將(1)及(2)中之 D 及其諸冪不視作微分符號，而視作代數數從而消去 x 之程序完全相同．如所論者均爲常係數平直方程，則在消去 x 之程序中，僅有關於微分符號 D 字之加、減、乘三種運算，是以本法恆能應用於此種情形，故僅須將吾人之方程書作(1)與(2)之形式，視之爲代數方程而解之卽得．其所須留意者在右端之 D 仍當視作微分符號，宜按其作用運算之．在馭題時，如用行列式，尤見便利．例如從(1)及(2)中解出 y，卽得

$$\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D^2+3 & -(D+1) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D+1 & \cos t \\ D^2+3 & e^{2t} \end{vmatrix},$$

卽

$$(6)\qquad (D^3-D^2+D-1)y=3e^{2t}-2\cos t.$$

其補充函數爲 $Y=c_1e^t+c_2\sin t+c_3\cos t$.

欲求特別積分，吾人試擬 $V=ae^{2t}+bt\sin t+ct\cos t$. 以此作 y 代入(6)式，求得 $a=\dfrac{3}{5}, b=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{1}{2}$; 故

$$(7)\qquad y=c_1e^t+c_2\sin t+c_3\cos t+\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}t\sin t+\frac{1}{2}t\cos t.$$

爲求 x 起見,吾人將此 y 代入(1)或(2 後,再解所得方程.*

吾人或以消去 y 及其諸導式之法而得一 x 之平直方程,如

$$\begin{vmatrix} D+1 & -D \\ D+3 & -(D+1) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} D & \cos t \\ D+1 & e^t \end{vmatrix},$$

卽

$$(8)\qquad (D^3-D^2+D-1)x=2e^t+\sin t-\cos t.^{\dagger}$$

方程(8)之解爲

$$(9)\qquad x=c_1'e^t+c_2'\sin t+c_3'\cos t+\frac{2}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}t\cos t.$$

式中諸常數與(7)中諸常數並非互相獨立,兩者之關係可由將(7)與(9)代入原二方程之一,再等置其係數而定之.依此,求得 $c_1'=\frac{1}{2}c_1$, $c_2'=\frac{1}{2}(c_2-c_3)+\frac{3}{4}$, $c_3'=\frac{1}{2}(c_2+c_3)+\frac{1}{4}$.

故本方程組之通解爲

---

* 求第一次消去之變數時,通常須解一微分方程.舉例言之,如以(7)所示之 y 代入(1),吾人須解一個一級方程.如將其代入(2),則須解一個二級方程.玆所引起之積分常數非可任意,其值以叉能適合另一方程者爲限.代 x 及 y 入另一方程並等置其係數,卽可推定諸常數之關係.在本題中,實以先解 x 爲較易,次求 y 之值,乃可逕由(2)中減去(1)後所得之方程解出之.

† 由此解法觀之,知消去其一變數後所得他一變數之微分方程,二者左端之形式相同,故二者補充函數之形式亦必相同.此事在 n 個應應數爲 n 個常係數平直方程所決定之例中,極易見其仍然如此也.

$$4x=2c_1e^t+(2c_2-2c_3+3)\sin t+(2c_2+2c_3+1)\cos t$$
$$+\frac{8}{5}e^{2t}+2t\cos t,$$

$$y=c_1e^t+c_2\sin t+c_3\cos t+\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{1}{2}t(\sin t+\cos t).$$

習題 1. $\begin{cases}3\dfrac{dx}{dt}+3x+2y=e^t,\\ 4x-3\dfrac{dy}{dt}+3y=3t.\end{cases}$

2. $\begin{cases}2\dfrac{dy}{dt}-\dfrac{dx}{dt}-4y=2t,\\ 4\dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dy}{dt}-3x=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}-3x-4y=\sin t,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}+x+y=\cos t.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt^2}+x-y=\sin\omega t,\\ 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}+y=0.\end{cases}$

XI·3. 一級方程組 如方程盡爲一級,吾人將設其爲已就各應變數之第一級導式解出之形式〔吾人將考究含有兩個應變數之情形,但所用方法固易見其能應用於 n 個應變數之例也〕.設方程組爲

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{P(x,y,t)}{R(x,y,t)}, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{Q(x,y,t)}{R(x,y,t)}. \end{cases}$$

§XI·1 之通法適用於此，惟在某種情形，其解可以特殊方法立即求得之.本節將討論此類問題數則，吾人首先改書(1)爲較前對稱之式.

$$(2)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dt}{R}.$$

1° 方程之一僅含變數之二，或可因適當選擇 (2)之兩端，並約去一公共因式後，而得一僅含兩變數之方程.例如 $dx/P=dy/Q$ 中，若原無變數 t，或可以消去之，則解出此式，即得

$$(3)\qquad u(x,y)=c_1.$$

若此事可實行兩次，則可求得形如

$$(4)\qquad v(y,t)=c_2$$

之另一關係式.合(3)與(4)兩關係式乃成全解.

注意. 準 §XI·1 之通法，知(1)及(2)之通解乃由變數間兩關係式含有二任意常數如

$$x=f(t,c_1,c_2),\quad y=\phi(t,c_1,c_2)$$

者所合成，而本節所求得之解則具有

$$u(x,y,t)=c_1,\quad v(x,y,t)=c_2$$

之形式，吾人須知函數 u 及 v 並無唯一之形式，吾人又將於 §XIII·1

中知

$$\phi(u,v)=\text{常數},$$

亦爲(1)與(2)之一解,而ϕ爲任意選取之u及v°之一函數.

習題1. $\dfrac{dx}{yt}=\dfrac{dy}{tx}=\dfrac{dt}{xy}$.

由首兩端所成之方程,得$u\equiv x^2-y^2=c_1$.

由後兩端所成之方程,得$v\equiv y^2-t^2=c_2$.

(若取首末兩端所成之方程,則得$t^2-x^2=c$.但此與前二者,顯然無異).

2° 若按1°節方法,祇能求得一積分式如(3)者,則吾人可利用之,以c_1及一變數之式表他一變數;例如x可由(3)式解出而以c_1及y之式表示之.將此x之值代入$dy/Q=dt/R$,即得一包含y,t及常數c_1之方程.解之乃得第二關係式

(5) $$w(y,t,c_1)=c_2.$$

關係式(3)與(5)組合而成通解.有時(5)中之c_1須以其以x及y表示之值代替之.如是則解爲

$$u(x,y)=c_1,\quad w(y,t,u)=c_2.$$

習題2. $\dfrac{dx}{xt}=\dfrac{dy}{yt}=\dfrac{dt}{xy}$.

此處有 $$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y};\quad 故\ \frac{x}{y}=c_1.$$

因之,$x=c_1y$;又有

$$\frac{dy}{yt}=\frac{dt}{c\ y^2},\quad 即\ c\ ydy=tdt;$$

故 $$c_1y^2-t^2=c_2,\quad 即\quad xy-t^2=c_2.$$

其解爲

$$x-c_1y=0,\quad xy-t^2=c_2.$$

3° 有時或可求得諸乘式 $\lambda(x,y,t),\mu(x,y,t),\nu(x,y,t)$,而令吾人可以利用下列之事實:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dt}{R}=\frac{\lambda dx+\mu dy+\nu dt}{\lambda P+\mu Q+\nu R}.$$

(a) 末端與其他諸端之一可以相合,而引起一可解之方程.

(b) 可選出兩組乘式而使

$$\frac{\lambda_1dx+\mu_1dy+\nu_1dt}{\lambda_1P+\mu_1Q+\nu_1R}=\frac{\lambda_2dx+\mu_2dy+\nu_2dt}{\lambda_2P+\mu_2Q+\nu_2R}$$

成一可解之方程.

(c) $\lambda P+\mu Q+\nu R$ 可等於零,同時 $\lambda dx+\mu dy+\nu dt=0$ 又適合可求積分之條件(§X·1).

按上述諸法之一,若能求得兩獨立關係式各含一任意常數,則此二者即爲通解.

習題 3. $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dt}{t}.$

從 $$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x},\quad 得\quad x^2-y^2=c_1.$$

令 $$\lambda=\mu=1,\quad \nu=0,$$

則有 $$\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{dt}{t};\quad 故\quad x+y=c_2t.$$

再令 $\lambda=1,\ \mu=-1,\ \nu=0,$

另一解 $$(x-y)t=c_3$$

可以求得.但此與其他兩者並不獨立.

習題 4. $$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dt}{(x+y)t}.$$

令 $\lambda_1=1,\ \mu_1=1,\ \nu_1=0$, 又 $\lambda_2=1,\ \mu_2=-1,\ \nu_2=0,$

則有 $$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=\frac{dx-dy}{(x-y)^2};\ 故\ \frac{1}{x+y}=\frac{1}{x-y}-c_1,$$

即 $$2y=c_1(x^2-y^2).$$

再則, $$\frac{dx+dy}{(x+y)^2}=\frac{dt}{(x+y)t};\ 故\ x+y=c_2t.$$

習題 5. $$\frac{dx}{cy-bt}=\frac{dy}{at-cx}=\frac{dt}{bx-ay}.$$

令 $\lambda=a,\ \mu=b,\ \nu=c$, 則有 $\lambda P+\mu Q+\nu R=0.$

$$\therefore\ adx+bdy+cdt=0;\ 故\ ax+by+ct=c_1.$$

仿此,令 $\lambda=x,\ \mu=y,\ \nu=t$,則有

$$xdx+ydy+tdt=0;\ 故\ x^2+y^2+t^2=c_2.$$

6. $\dfrac{dx}{y+1}=\dfrac{dy}{x+1}=\dfrac{dt}{t}.$ 7. $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dt}{1+t^2}.$

8. $\dfrac{dx}{yt}=\dfrac{dy}{xt}=\dfrac{dt}{x+y}.$ 9. $\dfrac{dx}{x^2-y^2-t^2}=\dfrac{dy}{2xy}=\dfrac{dt}{2xt}.$

10. $\dfrac{dx}{y+t}=\dfrac{dy}{t+x}=\dfrac{dt}{x+y}.$

11. $\dfrac{dx}{x^2+y^2+yt}=\dfrac{dy}{x^2+y^2-xt}=\dfrac{dt}{(x+y)t}$.

12. $\dfrac{dx}{y^3x-2x^4}=\dfrac{dy}{2y^4-x^3y}=\dfrac{dt}{9t(x^3-y^3)}$.

13. $\dfrac{dx}{x(y^2-t^2)}=\dfrac{dy}{y(t^2-x^2)}=\dfrac{dt}{t(x^2-y^2)}$.

14. $\dfrac{dx}{y^2-t^2}=\dfrac{dy}{-3x^2t-xy}=\dfrac{dt}{3x^2y+xt}$.

15. $\dfrac{xdx}{t^2-2yt-y^2}=\dfrac{dy}{y+t}=\dfrac{dt}{y-t}$.

16. $\dfrac{dx}{xt(xy+t^2)}=\dfrac{dy}{-yt(xy+t^2)}=\dfrac{dt}{x^4}$.

XI·4. **幾何解釋** $P(x,y,z)$*, $Q(x,y,z)$及 $R(x,y,z)$ 可視爲規定經過一點(x,y,z)之直線之三個函數,此三者在該點處爲有法且不全爲零(參閱§X·7).如是則方程組$\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$之一積分曲線在其上任一點處,切於爲 P,Q,R 所決定經過該點之直線.如前所言,通解爲兩關係式 $u(x,y,z)=c_1$, $v(x,y,z)=c_2$ 所組成,其中包含兩個任意常數.換言之,通解所表示者爲一雙重無窮的曲線族,乃由兩個單一無窮曲面族相交而成.

積分曲線族雖爲微分方程所決定,而規定此族曲線之曲面族則不能如此.設 $u(x,y,z)=c_1$ 及 $v(x,y,z)=c_2$ 爲如是之兩個曲面族,

* 自此以後,吾人將用 x,y,z 代替 x,y,t.

則吾人亦可代以 $\phi(u,v)=a$ 及 $\psi(u,v)=b$，其中 ϕ 及 ψ 乃隨意選取之二獨立函數含有 u 及 v 者．觀 §XI·3 之注意欄，卽知其果當有此也．例如 §XI·3，習題 3 之積分曲線實爲圓柱族 $x^2-y^2=c$ 及平面族 $x+y-c_2z=0$ 之交線．此等曲線亦可由圓柱族 $xz-yz=c_1$ 及平面族之相交而得之．

在 §X.7 中，吾人曾言全微分方程 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 之解爲一族曲面，在其面上各點處法線之方向餘弦係與 P,Q,R 在該點處之值成比例．故知 $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ 之積分曲線與 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 之積分曲面互成正交，吾人僅在 P,Q,R 能適合可求積分之條件[§X·1，(3)]時方可求得 $Pdx+Qdy+Rdz=0$ 之一積分曲面族，故僅在此種情形，方能有一族曲面，以 $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ 之積分曲線族爲正交曲線者存在，例如，因 $yzdx+zxdy+xydz=0$ 有通解 $xyz=c$，故吾人由 §XI·3，習題 1，知兩圓柱族 $x^2-y^2=c_1$ 及 $y^2-z^2=c_2$ 相交之曲線族爲曲面族 $xyz=c$ 所正交，反之因 $xzdx+yzdy+xydz=0$ 不能適合可求積分之條件，故知 $x-c_1y=0$ 及 $xy-z^2=c_2$ 所表示之曲線族（§XI·3，習題 2）不能有曲面族與之正交，至於其逆問題，卽由一族曲面 $f(x,y,z)=c$ 以求其正交曲線之事，則往往可能．緣其所需僅在解方程組

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

之事耳．

習題 1. 求球面族 $x^2+y^2+z^2=c$ 之正交曲線.

2. 求球面族 $x^2+y^2+z^2=cx$ 之正交曲線.

3. 求有中心二次曲面(central quadrics)族 $hx^2+ky^2+lz^2=c$ 之正交曲線.

4. 求雙曲拋物面族 $xy=cz$ 之正交曲線.

5. 求橢圓拋物面族 $x^2+y^2+cz=0$ 之正交曲線.

6. 求圓錐面(circular cones)族 $x^2+y^2+cz^2=0$ 之正交曲線.

7. 求雙曲拋物面族 $yz+zx+xy=c$ 之正交曲線.

XI·5. **全微分方程組** 吾人可證包含三變數之兩全微分方程

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1dx+Q_1dy+R_1dz=0, \\ P_2dx+Q_2dy+R_2dz=0 \end{cases}$$

之通解,爲含有兩個任意常數之兩個關係式.在實際運算中,吾人進行之程序如下:

如(1)中每一方程各能適合可求積分之條件[§X·1,(3)],則吾人可分別解出之以得此組方程之解.

如(1)中僅有一方程能適合可求積分之條件,吾人卽先求其積分,得一關係式 $\phi(x,y,z)=c_1$.(1)中另一方程旣不可求積分,吾人乃用§X·6之方法,並以 $\phi(x,y,z)=c_1$ 爲其假設之關係式.最後所得此不可求積分之方程之解卽(1)組之解也.

如(1)中兩方程,各無可求積分性,有時須將其書作

$$(2)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

之形式,其中 $P=Q_1R_2-Q_2R_1$, $Q=R_1P_2-R_2P_1$, $R=P_1Q_2-P_2Q_1$. 今可試用 §XI·3 之諸方法.

如此等方法均不能用,則可取變數之一,如 z 者,爲自變數,而改書上列方程爲

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dz}=\dfrac{P}{R}, \\ \\ \dfrac{dy}{dz}=\dfrac{Q}{R}; \end{cases}$$

§XI·1 之通法今可應用於此.

XI·6. **高級微分方程常可化爲一級方程組** 茲有一含有一個應變數之微分方程,吾人設其最高級導式業經解出如下:

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\cdot\cdot\cdot,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

若引用新變數

$$y_1=\frac{dy}{dx},\quad y_2=\frac{d^2y}{dx^2},\cdot\cdot\cdot,y_{n-1}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

一如吾人在 §IX·1 中所爲者,則方程 (1) 可代以 n 個一級方程所成之組

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y_1, \\ \\ \dfrac{dy_1}{dx}=y_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx}=f(x,y,y_1,\cdot\cdot\cdot,y_{n-1}). \end{cases}$$

舉例言之,微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

實與方程組

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\ \frac{dy_1}{dx}=-y,$$

卽
$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{y_1}=\frac{dy_1}{-y}$$

相同. 由後兩端,有

$$y^2+y_1^2=c_1^2,\ \text{卽}\ y_1=\sqrt{c_1^2-y^2}.$$

$$\therefore\ \frac{dy}{\sqrt{c_1^2-y^2}}=dx.$$

求其積分,得

$$\sin^{-1}\frac{y}{c_1}=x+c_2,\ \text{卽}\ y=c_1\sin(x+c_2).$$

由類似之方法,一組任何級數之 n 個方程, 含有 n 個應變數者, 可視應變數之一切導式(最高級者不在此例)爲新變數之法而化之爲一級方程組. 例如 §XI·2 之方程組可因假設 $x_1=dx/dt$ 而書作

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x_1,\\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=x_1+x-\cos t,\\[2ex] \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-2x+y+e^{2t}-\cos t.\end{cases}$$

XI·7. **撮要** 欲解含有兩個應變數之兩個常微分方程,吾人須求此二方程之微分若干次,以至所得方程之個數,足以將應變數之一及其一切導式完全消去爲止,如是得一僅含一個應變數及其諸導式之方程.求此方程之積分並將此變數及其導式爲自變數之函數所表諸式代入原有二方程之任一方程中,吾人卽得一新微分方程,其解定出另一應變數之值.或則吾人以同樣方法處理此二應變數而分別解出之.如是則須將二應變數之式代入原方程之一或因需要而代入其二而推定諸積分常數間之關係(§XI·1).

雖在實際,上法常不適用,然施之於常係數平直方程組,則至爲簡易(§XI·2).

若方程均爲一級,有時可用特殊方法(§XI·3).

含有三變數之二全微分方程所成之組可改書爲一常微分方程組,因而§XI·1及§XI·3之方法可以應用(§XI·5).

僅含一個應變數之一高級微分方程可化爲一個一級微分方程組,因而§XI·3之特殊方法或可應用(§XI·6).

若組中方程各含一應變數,卽可各自解出,固不待言,下列之習題1,2,3及4卽其例也.

習題 1. 在眞空中運動之一質點,僅受重力之作用,初速爲v_0,而其方向與水平面成α之角.試求其路線.

2. 若上題中之質點,在一介質中運動,而後者之阻力與質點之速度成比例,試求其路線.

3. 一質點因受引力之作用而運動,引力隨質點至引力中心O之距離而正變,其方向則沿質點與O之聯結線.以O爲坐標系之原

點，設此質點係由 x 軸上距中心 a 處出發，其初速度 v_0 之方向與 x 軸交成 α 之角，試求其運動之方程.

〔設因引力而生之加速度爲 P，r 爲引力中心至質點之距離，則運動方程爲

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-P\frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-P\frac{y}{r}.$$

此時之 $P=k^2r$.〕

4. 設習題 3 之引力改爲斥力 (repulsive force)，試求其運動方程.

5. 在對稱軸上有一固定點之旋轉體 (solid of revolution) 因受重力作用而運動. 試求其角速度(angular velocity)及其體中瞬時的轉動軸線(instantaneous axis of rotation)之位置.

〔就固定點言之，在任一時刻，設此體關於瞬時橢體 (momental ellipsoid) 三主軸之轉動慣量爲 A,B,C，又設其角速度在該三軸上之分速度爲 p,q,r，則按 Euler 方程，得

$$A\frac{dp}{dt}+(C-A)qr=0,$$

$$A\frac{dq}{dt}-(C-A)rp=0,$$

$$C\frac{dr}{dt}\qquad\qquad=0,$$

蓋因 $B=A$ 也.〕

6. 一質點速度之分速度平行於任一坐標軸者與其他兩坐標

之乘積成比例，求其路線．若路線通過原點，試求此質點通過其路線上一所設段所耗之時間．

7. 一荷電之質點(charged partical)於$t=0$時在xy平面內由靜而動．此質點受一與x軸平行而強度(strength)爲X之均強電場(uniform electric field)之作用，又受一與z軸平行之均強磁力(uniform magnetic force)H之作用．試求此質點之路線，假定運動方程爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=eX-eH\frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=eH\frac{dx}{dt}.$$

此中之m,e,X,H均爲常數.〔H. Bateman，微分方程.〕

第十二章

偏微分方程

XII·1. **含任意常數之原函數** 偏微分方程可由包含任意常數或任意函數之原函數求得之.本節所論限於前款.

設有一族半徑爲定長 R 之球面,其中心常在平面 $z=0$ 上,此族球面之方程顯爲

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,$$

其中 a 及 b 均爲任意常數.

吾人將以 x 及 y 爲自變數,而令

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

求(1)關於 x 及 y 之微分,得

$$(2)\qquad x-a+zp=0,$$

$$(3)\qquad y-b+zq=0.$$

從(1),(2),(3)中消去 a 及 b 而得

$$(4)\qquad z^2(p^2+q^2+1)=R^2,$$

稱爲相當於原函數(1)之微分方程;反之,(1)則稱爲(4)之解.

普偏言之，設有一包含兩任意常數與二變數之一關係式

$$(1') \qquad \phi(x,y,z,a,b)=0,$$

其中 z 爲應變數，則因求其關於 x 及 y 之微分而得

$$(2') \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x}+p\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,$$

$$(3') \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}+q\frac{\partial\phi}{\partial z}=0.$$

吾人今有三方程，通常可從而消去 a 及 b. 消去以後之結果

$$(4') \qquad f(x,y,z,p,q)=0,$$

係一個一級微分方程，而以(1′)爲其原函數.

如原函數包含兩個以上之獨立的任意常數，則所需藉以消去此等常數之方程必多於三個. 故如僅有兩個自變數，則所得之微分方程當高於一級. 例如，設有

$$(5) \qquad ax^2+by^2+cz^2=1.$$

求其關於 x 及 y 之微分，則有

$$(6) \qquad ax+czp=0,$$

$$(7) \qquad by+czq=0.$$

吾人今僅有三個方程，尚不足以從之消去 a,b,c 三常數，故須再求其微分. 求(6)式關於 x 之微分，有

$$(8) \qquad a+c(zr+p^2)=0.$$

由(5)，(6)，(7)，(8)消去 a,b,c，得

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & -1 \\ x & 0 & zp & 0 \\ 0 & y & zq & 0 \\ 1 & 0 & zr+p^2 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

(9) $$xzr+xp^2-zp=0,$$

是為以(5)為原函數之一微分方程.

如求(6)式關於 y 之微分而得

(8′) $$czs+cpq=0;$$

如是,則由(5),(6),(7),(8′)消去 a,b,c, 而得

(9′) $$zs+pq=0,$$

是亦為以(5)為原函數之一微分方程.再求(7)式關於 y 之微分而得

(8″) $$b+c(zt+q^2)=0.$$

由(5),(6),(7),(8″)消去 a,b,c, 而得

(9″) $$yzt+yq^2-zq=0,$$

是又一以(5)為原函數之微分方程也.

(9),(9′),(9″)三式均為二級微分方程,固無軒輊於其間.故三者均可謂為屬於(5)之微分方程.

原函數若包含兩個任意常數,則所引起之一級微分方程,不復有類此之歧義.

僅含一任意常數之原函數引起兩個獨立之一級微分方程.

吾人將於次章見及一個一級偏微分方程之解含兩個獨立之任意常數者,在決定此微分方程所有之解時,極爲重要.

欲得一唯一無二之二級偏微分方程,其原函數必須含有五個獨立之任意常數.因在此情形,求其關於各自變數之微分一次,卽得兩新關係式,又求原函數之微分關於 x 者兩次,關於 x 及 y 者各一次,關於 y 者兩次,卽另得三個新關係式.

普徧言之,吾人可以證明欲由一原函數求得一唯一無二之 n 級偏微分方程,則此原函數必須含有 $n(n+3)/2$ 個獨立之任意常數.此數乃由 2 至 $n+1$ 之整數之和.

求以下列各方程爲原函數之微分方程,其中 a,b,c,f,g 乃行將消去之任意常數.

習題 1.　$(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=b^2$.

2.　$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=a^2$,

3.　$z=ax+by+\sqrt{a^2+b^2}$.　　4.　$z=(x+a)(y+b)$.

5.　$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=f$.

6.　$z=ax+by+cxy$.　　7.　$ax^2+by^2+cz^2+2gx+2fy=1$.

XII·2.　**含任意函數之原函數**　在本節中,吾人將約略指陳如何由含有任意函數之原函數推求其所生之偏微分方程.吾人所論限於兩種簡單形式之原函數.

1°　設 u 與 v 爲含 x,y,z 之兩已知函數.吾人以關係式

$$\phi(u,v)=0 \tag{1}$$

爲一原函數,$\phi(u,v)$ 乃 u 及 v 之一任意函數.求其關於 x 及 y 之微

分，則有

$$(2)\qquad \frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0,$$

$$(3)\qquad \frac{\partial\phi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)=0.$$

(2)及(3)中固均無 ϕ，且皆爲 $\partial\phi/\partial u$ 及 $\partial\phi/\partial v$ 之齊次平直式．故令此二者之係數行列式爲零，卽可以消去之，而得

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}p & \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}q \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}p & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}q \end{vmatrix}=0,$$

卽

$$(4)\qquad Pp+Qq=R,$$

而

$$P=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix},\quad Q=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix},\quad R=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

方程(4)乃相當於原函數(1)之偏微分方程，吾人因其形式特殊，而稱之爲一個**一級平直偏微分方程**．所謂如是之一偏微分方程者乃一方程，其中所含應變數之導式均爲平直式之意也（至於所含應變數之情形固無關緊要）．*

---

* 學者須注意此定義，與一級平直常微分方程之定義(§II·9)間之區別．

2° 若 u 與 v 爲 x,y,z 之兩已知函數，且有

$$f[x,y,z,\phi(u),\psi(v)]=0, \tag{5}$$

其中 f 乃一已知函數，而 ϕ 與 ψ 則爲兩任意函數. 吾人求其微分，卽得

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p+\frac{\partial f}{\partial \phi}\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\frac{\partial f}{\partial \psi}\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q+\frac{\partial f}{\partial \phi}\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\frac{\partial f}{\partial \psi}\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)=0. \tag{7}$$

因(6)與(7)引入兩新函數 $\phi'(u),\psi'(v)$，須有方程五個方能消去四函數 $\phi(u),\psi(v),\phi'(u),\psi'(v)$. 如求(6)與(7)之微分，吾人又得三個新方程含有 z 之二級導式及兩新函數 $\phi''(u)$ 與 $\psi''(v)$. 吾人今有方程六個，通常不能消去六個任意函數，故吾人須再求微分，此次得四個新方程含有 z 之三級導式及兩新函數 $\phi'''(u)$ 與 $\psi'''(v)$. 換言之，吾人今共有方程十個，由是以消去八個函數之方法，其相異者常有兩途，故就通常情形論之，吾人應得兩個三級偏微分方程.

當函數 f 具有特殊形式時，吾人可將六函數 $\phi(u),\psi(v),\phi'(u),\psi'(v),\phi''(u),\psi''(v)$ 由最初求得之六方程中消去. 試設 $f\equiv w-[\phi(u)+\psi(v)]=0$，而 w 爲 x,y,z 之一已知函數，則

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}p-\left[\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)\right]=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}q-\left[\phi'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\psi'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)\right]=0.$$

此兩方程僅含 $\phi'(u)$ 與 $\psi'(v)$ 而不含 $\phi(u)$ 與 $\psi(v)$. 故再求微分而求得之三個方程中將僅含四函數 $\phi'(u),\phi''(u),\psi'(v),\psi''(v)$, 此四者通常可由包含此四者之五個方程中消去, 如是求得一個二級微分方程而以含有兩個任意函數 ϕ 及 ψ 之 $w=\phi(u)+\psi(v)$ 爲其原函數. *

求從下列諸原函數所引起之微分方程:

習題 1. $\phi(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)=0$.

令 $x+y+z=u, x^2+y^2+z^2=v$, 則有 $\phi(u,v)=0$.

求微分, 得

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(1+p)+\frac{\partial\phi}{\partial v}(2x+2zp)=0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}(1+q)+\frac{\partial\phi}{\partial v}(2y+2zq)=0.$$

$$\therefore\ (1+p)(y+zq)-(1+q)(x+zp)=0,$$

即 $$(y-z)p+(z-x)q=x-y.$$

2. $\phi\left(z^2-xy,\dfrac{y}{x}\right)=0$.　　　3. $\phi(x^2+y^2,z-xy)=0$.

---

* 此五者係 $\phi'(u),\phi''(u),\psi'(v),\psi''(v)$ 之平直方程, 故此處之消去法至易實施. 再者此等方程亦係 r,s,t 之平直式, 且知所得之微分方程亦將爲此三者之平直式, 即其形式當爲 $Rr+Ss+Tt=V$, 而 R,S,T,V 乃 x,y,z,p,q 之函數. 此類平直二級偏微分方程較諸非平直之二級偏微分方程易以求解之通法駕馭之.

4. $z=\phi(x+y)+\psi(x-y)$. 5. $z=\phi(x+y)+\psi(xy)$.

XII·3. **偏微分方程之解** 因一微分方程係由一原函數而生，故該函數卽爲其一解. 偏微分方程之解中，按前所論，不僅可含任意常數，並可含有任意函數. 按偏微分方程中通用之存在定理，一偏微分方程或一組偏微分方程常有一解爲含有一定個數之任意函數者. 因一個任意函數可含無限個任意常數，故含有一個任意函數之解較諸含有任何個任意常數之解，尤爲普徧. 吾人將稱此存在定理所示之解(是爲含一個或多個任意函數之解)爲通解焉.

關於一組任何級偏微分方程之存在定理至爲繁冗，頗不易述. 吾人僅將一個含有三變數之一級及二級方程之存在定理陳述於此:

1° 取方程 $f(x,y,z,p,q)=0$ 論之，吾人假定 p 果發現於其中.* 就 p 解之，得

$$p=F(x,y,z,q).$$

如是，則存在定理云: 若函數 $F(x,y,z,q)$ 在 $x=x_0, y=y_0, z=z_0, q=q_0$ 域內爲有法，又若 $\phi(y)$ 爲一任意選取之函數，在 $y=y_0$ 域內爲有法，且 $\phi(y_0)=z_0, \phi'(y_0)=q_0$，則本方程有一解且僅有一解 $z=\psi(x,y)$. 在 $x=x_0, y=y_0$ 域內爲有法函數，且於 $x=x_0$ 時化爲 $z=\phi(y)$.

在幾何方面言之，意云: 在平面 $x=x_0$ 內，有一所設曲線 $z=\phi(y)$，則有一積分曲面且僅有一積分曲面(在不含本微分方程之異點 + 之

---

* 若方程中無 p，則必有 q. 故若互換 p 與 q 及 x 與 y 之地位，則所述理論，仍能適用.

+ 所謂本方程之異點者，乃該點之坐標及其相當之 q 成一組值，使 F 在此域內不復爲有法之謂也.

任一域內)經過該曲線.

此說可以推廣.吾人可以證明,經過任意選取之一平面的或空間的 (plane or skew) 曲線(域中須無本方程之異點),常有一唯一無二之積分曲面. 參閱 Goursat-Bourlet, Équations anx dérivées partielles du premier ordre, p.21.

2° 取方程 $f(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$ 論之,若其中本無 r 及 t,則一平直變換,可引入其一或二,故吾人毋妨假定其一果然存在,且竟可設此爲 r,因此固無害於理論也.解出,則此方程取下之形式

$$r=F(x,y,z,p,q,s,t).$$

存在定理云:若 F 在 $x=x_0, y=y_0, z=z_0, p=p_0, q=q_0, s=s_0, t=t_0$ 域內爲有法,又若 $\phi(y)$ 及 $\psi(y)$ 爲兩任意選取之 y 之函數,在 y_0 域內爲有法,且 $\phi(y_0)=z_0, \phi'(y_0)=q_0, \phi''(y_0)=t_0, \psi(y_0)=p_0, \psi'(y_0)=s_0$,則本方程有一解且僅有一解, $z=\Phi(x,y)$,在 $x=x_0, y=y_0$ 域內爲有法,且於 $x=x_0$ 時 $z=\phi(y)$ 而 $p=\psi(y)$.

在幾何方面言之,意云:在平面 $x=x_0$ 內有一所設曲線 $z=\phi(y)$,則有無窮個積分曲面,經過此曲線.如在此曲線上每一點處,吾人選定一直線,則積分曲面之經過此曲線且以此等直線爲其法線者能有一個且亦僅能有一個.蓋積分曲面之法線之方向餘弦當與 $p, q, -1$ 成比例.在曲線爲已知時,吾人卽知 $\phi(y)$.此曲線上每一點處之 q 卽爲 $\phi'(y)$,故亦爲已知.故在每一點處指定一法線卽足以定 p,是卽吾人之 $\psi(y)$ 也.由此觀之,$\phi(y)$ 及 $\psi(y)$ 一旦已知,則按存在定理,有一唯一無二之積分曲面確實存在,仍如前款,在所論之域中本微分方程並無異點.

本定理亦可推廣而應用於任何曲線,固不論其在平面上或在空間也.

第十三章

一級偏微分方程

XIII·1. **一級平直偏微分方程** Lagrange 法 Lagrange 首創下列之優良方法以解一個一級平直偏微分方程. 此類方程之含一應變數及二自變數者之通式爲

$$(1) \qquad Pp+Qq=R,$$

其中 P,Q,R 均爲 x,y,z 之函數.

取一含三自變數 x,y,z 之平直方程

$$(2) \qquad P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

論之. 此乃一**齊次式**(對於偏導式而言), 且諸係數爲僅含自變數之函數. 若 $u(x,y,z)=c$ 適合於(1), 則 $f=u(x,y,z)$ 將爲(2)之一解; 因吾人先求 $u=c$ 關於 x 之微分, 次求其關於 y 之微分, 並就兩次之結果解出 p 及 q, 則得

$$p=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}, \qquad q=-\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial z}}.$$

將此二者代入(1)式,吾人即見 $f=u$ 之適合(2)式矣.

反之,如 $f=u$ 爲(2)之一解,則 $u=c$ 將適合於(1);蓋從(2)式,令 $f=u$,並解出 R,則

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}P-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}Q=R.$$

但在 $u=c$ 時,

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}=p,\quad -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}=q;$$

故(1)隨之而成立.由此觀之,解(1)式之問題實無異於解(2)式之問題.

今更取下列常微分方程組論之

(3) $$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}.$$

若 $f=u$ 爲(2)之一解,則 $u=c$ 適合於(3);因吾人若以 $\partial u/\partial x,\partial u/\partial y,\partial u/\partial z$ 順次乘上列諸分數之分子分母,則按和比定理,(3)式諸分數均等於

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz}{P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}}.$$

此式之分母既按原設爲零,其分子(即 du)亦必爲零,是以 $u=c$ 乃(3)之一解[§XI·3,3(c)].

反之，如 $u=c$ 爲 (3) 式之一解，則 $f=u$ 適合於 (2)；因由微分而有

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0, \tag{4}$$

若 $u=c$ 適合於(3)，卽應有

$$dx:dy:dz=P:Q:R.$$

將此比例關係代入(4)式，卽得

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0;$$

質言之，(2)式實爲 $f=u$ 所適合也．故解(2)式之問題實同於解(3)式之問題．

吾人至此業已證明，求解平直偏微分方程(1)之問題，可代換爲求解常微分方程組(3)之問題，因後者之解卽爲前者之解，且逆之亦然也．

不寧唯是，若 $u=c_1, v=c_2$ 爲(3)之兩個獨立之解，又若 $\phi(u,v)$ 爲任意選取之含 u 與 v 之一函數，則 $f=\phi(u,v)$ 將適合(2)式．因將其代入(2)之左端，卽有

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\left(P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial\phi}{\partial v}\left(P\frac{\partial v}{\partial x}+Q\frac{\partial v}{\partial y}+R\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

u 與 v 旣各能適合於(2)式，故此式亦當爲零．因之，$f=\phi(u,v)$ 亦當爲(2)之一解．

$\phi(u,v)=0$ * 旣含有一任意函數，故爲 (1) 之通解．因 ϕ 爲任意

* 此解亦可書爲 $u=f(v)$，或 $v=\psi(u)$，而 f 與 ψ 俱爲任意函數．

函數，故其右端不妨以零代替任意常數之地位，因如此固無所失也.

對於一平直方程之含有 n 個自變數者，上述方法亦可由推廣而應用之，其中僅有數處與前者顯然不同耳. 因此吾人僅陳述其結果如下:

欲求

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdot\cdot\cdot+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R$$

之通解，先解方程組

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdot\cdot\cdot=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{dz}{R}.$$

設此組之通解爲

$$u_1=c_1,u_2=c_2,\cdot\cdot\cdot,u_n=c_n,$$

則 $\phi(u_1,u_2,\cdot\cdot\cdot,u_n)=0$ 將爲(1)之通解，其中 ϕ 乃 $u_1,u_2,\cdot\cdot\cdot,u_n$ 之一任意函數.

習題 1. $xzp+yzq=xy.$

欲解本題，吾人須先求

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}$$

之二獨立之解.

上式三端之分子分母順次乘以 $y,x,-2z$，吾人求得

$$ydx+xdy-2zdz=0.\quad(\S\text{XI}\cdot3,3^\circ(c)\text{法})$$

$$\therefore\ xy-z^2=c_1.$$

再由$\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}$，卽$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$，求得一解$\dfrac{y}{x}=c_2$。

$$\therefore\ \phi\left(xy-z^2,\frac{y}{x}\right)=0\ 爲通解.$$

習題 2. $-y\dfrac{\partial u}{\partial x}+x\dfrac{\partial u}{\partial y}+(1+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

取常微分方程組

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{1+z}=\frac{du}{0}$$

觀之，吾人立卽求得一解

$$u=c_1.$$

取其前兩端而成之微分方程，有一解

$$x\ +y^2=c_2.$$

將前兩端之分子分母順次乘以 $-y$ 及 x，則按和比定理，當有

$$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{dz}{1+z^2}.\quad(\S\text{XI}\cdot 3,3^\circ(a)法)$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{y}{x}-\tan^{-1}z=c,$$

卽
$$\frac{y-xz}{x+yz}=c_3.$$

$$\therefore\ \phi\left(u,x^2+y^2,\frac{y-xz}{x+yz}\right)=0,或\ u=f\left(x^2+y^2,\frac{y-xz}{x+yz}\right)$$

爲通解

3. $yp-xq=x^2-y^2$. 4. $(y-z)p+(z-x)q=x-y$.

5. $(1+y)p+(1+x)q=z$.

6. $(xz+yz)p+(xz-yz)q=x^2+y^2$.

XIII·2. **缺 p 或 q 之方程** 若微分方程中缺少一級導式之一，則可解出其發現之導式，而求得平直偏微分方程之一特殊形式. 例如，方程中無 q，則其式爲

$$f(x,y,z,p)=0, \tag{1}$$

就 p 解出，卽得

$$p=F(x,y,z). \tag{2}$$

按 §XIII·1，與之相當之常微分方程組(3)當爲

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{F(x,y,z)}. \tag{3}$$

其一解爲 $y=a$，其二當爲

$$\frac{dz}{dx}=F(x,a,z) \tag{4}$$

之一解. 設此解爲 $\phi(x,a,z)=c$，則原偏微分方程(1)之通解爲

$$\phi(x,y,z)=\psi(y), \tag{5}$$

而 $\psi(y)$ 乃 y 之一任意函數.

實則，吾人並不須解出方程(1)中之 p 而化之爲一平直方程. 將(1)式書作

$$f\left(x,y,z,\frac{dz}{dx}\right)=0 \tag{6}$$

之形式，其中 dz/dx 乃一常導式，並視 y 爲常數. 吾人按第二章及第四章之任何方法解此常微分方程. 設其解爲

$$\phi(x,y,z,c)=0,$$

其中之 y 仍爲一常數，則(1)之通解將爲

$$\phi[x,y,z,\psi(y)]=0, \tag{7}$$

此時之 y 爲變數，又 $\psi(y)$ 乃一任意函數.

若方程中無 p，則吾人暫視 x 爲常數，q 爲常導式 dz/dy. 解所得之常微分方程，並於其解中，將其所含之任意常數代換爲 x 之一任意函數.

習題 1. $xp^2-2zp+xy=0$.

視 y 爲常數，並以 $p=dz/dx$ 代入，吾人即得一個一級常微分方程. 試用 §IV·2 之方法，書 dz/dx 作 z'，並解出 z，乃有

$$2z=xz'+\frac{xy}{z'}. \tag{8}$$

求其關於 x 之微分，並排列其諸項使成下形式

$$\left(z'-\frac{y}{z'}\right)\left(1-\frac{x}{z'}\frac{dz'}{dx}\right)=0.$$

略去因式 $z'-y/z'$ 而求所得方程之積分，即得

$$z'=cx.$$

從此式與(8)中消去 z'，吾人求得常微分方程(8)之解如

$$2z=cx^2+\frac{y}{c}$$

之形狀;故題設之偏微分方程之解當爲

$$(9) \qquad 2z = x\psi(y) + \frac{y}{\psi(y)}.$$

方程(8)之異解

$$z^2 - xy = 0$$

亦當爲偏微分方程之一解.因其不能以令任意函數 $\psi(y)$ 爲任何形狀之方法而由(9)式推得,故稱之爲一異常之解*(special solution).

2. $(x-y)q^2-(x+z)=0$. 3. $x^2+(z-yq)^2=1$.

4. $y(p^2-1)=x^2p^2$. 5. $q^2+(2x+y)q+x^2-z=0$.

注意. 異常之解亦可發現於一級平直偏微分方程之情形.例如§XIII·1 所論之方程,當其諸係數 P,Q,R 不爲單值函數時,卽可有此異常之解矣.+ 試取下題論之.

6. $(1+\sqrt{z-x-y})p+q=2$.

爲解此方程起見,吾人取常微分方程組

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}$$

論之.採用§XI·3 之 3°(a)法,吾人令 $\lambda=-1,\mu=-1,\nu=1$,則有

$$\frac{dz-dx-dy}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}.$$

---

* Prof. Hill 於本頁所援引之論文中,用此名稱.

+ 關於此等異常之解及其他異常之解,若欲知其詳,可參閱 M. T. M. Hill, Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, Vol. 16(1917), pp 219—272. 本節習題中若干個卽由該論文選出.

求積分，得

$$2\sqrt{z-x-y}+y=a.$$

其第二解顯係

$$2y-z=b.$$

故本題之通解爲

$$\phi(2y-z,\ 2\sqrt{z-x-y}+y)=0.$$

但 $z-x-y=0$ 亦顯然爲其一解；蓋以果如所云，則 $p=1, q=1$，而此微分方程可以爲之所適合矣．不寧唯是，此異常之解固不能以選取任意函數 ϕ 之形式之法而由通解推得之也．

亦如許多例題之屬於此類者，將微分方程中所發現之根式代換爲一新變數，則異常之解 $z-x-y=0$ 之存在可以證明如次．因令

$$\sqrt{z-x-y}=w, \text{ 卽 } z-x-y=w^2.$$

則
$$p=2w\frac{\partial w}{\partial x}+1 \text{ 及 } q=2w\frac{\partial w}{\partial y}+1.$$

將此二者代入原微分方程，吾人求得

$$w\left[2(1+w)\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial w}{\partial y}+1\right]=0.$$

使因式 w 等於零，吾人卽得此異常之解矣．

學者爲練習起見，宜證明於習題 1 之方程中作應變數之代換

$$\sqrt{z^2-x^2y}=w,$$

則其異常之解甚易看出．代換式中之根式發現於由原微分方程解出（代數解法）p 後之式中．

7. $p+xq=xy\sqrt{z}$. 8. $\sqrt{x}p+\sqrt{y}q=\sqrt{z}$.

9. $(1+x^2)p+(1+y^2)q=\sqrt{1-z^2}$.

10. $[1+(z-x-y)\log(z-x-y)]p+q=2$.

XIII·3. **常微分方程 $Mdx+Ndy=0$ 之積分因式** 吾人今可詳論探求一級一次常微分方程之積分因式之通法矣. 吾人夙知(§II·7) μ 可爲 $Mdx+Ndy=0$ 之一積分因式之充要條件爲

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}-\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=0,$$

即

$$\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)+N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=0;$$

故得

$$(1)\qquad \frac{N}{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{M}{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu.^{*}$$

爲解方程(1)起見, 吾人取常微分方程組

$$(2)\qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}dx=\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}dy=\frac{d\mu}{\mu}$$

論之.

在運算中, 當試求 $Mdx+Ndy=0$ 之積分時, 吾人並不欲得 μ 之最普通形式, 而常願求其一簡單之形式. 故吾人須注意本節之方法並不常便於應用, 惟在 M 與 N 取特別形式時, (2)之一解可以求得.

---

* 因此平直偏微分方程之解爲數無窮, 是以吾人又見一級一次常微分方程可有無限個積分因式之故(§ [illegible]).

下列各則為幾種普通方程，其(2)式之一解易於求得者，* 吾人臚列於此，以便參考.

1° 若$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$為僅含$x$之一函數，如$f_1(x)$者，則由(2)式，求得一積分因式$\mu=e^{\int f_1(x)dx}$(§11·13).

2° 若$\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$為僅含$y$之一函數，如$f_2(y)$者，則$\mu=e^{\int f_2(y)dy}$顯然為一積分因式(§11.13).

3° 若方程為平直式，則$M=Py-Q$，$N=1$，而方程(2)變為$Pdx=\dfrac{-P}{Py-Q}dy=\dfrac{d\mu}{\mu}$，故$\mu=e^{\int Pdx}$為一積分因式(§11·9).

4° 若M與N同為n次之齊次式，則以y及x分乘(2)式前兩端之分子分母後，再按和比定理，吾人即得

$$\text{(3)}\qquad \frac{\left(y\dfrac{\partial M}{\partial y}-y\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)dx+\left(x\dfrac{\partial N}{\partial x}-x\dfrac{\partial M}{\partial y}\right)dy}{xM+yN}=\frac{d\mu}{\mu}.$$

按 Euler 關於齊次方程之定理，知

$$x\frac{\partial M}{\partial x}+y\frac{\partial M}{\partial y}=nM\qquad\therefore\ y\frac{\partial M}{\partial y}=nM-x\frac{\partial M}{\partial x},$$

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=nN\qquad\therefore\ x\frac{\partial N}{\partial x}=nN-y\frac{\partial N}{\partial y};$$

---

* 此類方程，曾列論於第二章可求積分因式之各款中.

故(3)式可書作

$$\frac{x\left(\frac{\partial M}{\partial x}dx+\frac{\partial M}{\partial y}dy\right)+y\left(\frac{\partial N}{\partial x}dx+\frac{\partial N}{\partial y}dy\right)-n(Mdx+Ndy)}{xM+yN}=-\frac{d\mu}{\mu}.$$

但 $Mdx+Ndy=0$,故可加 $(n+1)(Mdx+Ndy)$ 於左邊之分子而不變其值.如此,則得

$$\frac{d(xM+xN)}{xM+yN}=-\frac{d\mu}{\mu}.$$

求其積分,吾人乃有

$$\mu=\frac{1}{xM+yN}(\S\text{II}\cdot 11).$$

XIII·4. **幾何解釋** 曲面 $z=\phi(x,y)$ 上任意一點 (x,y,z) 處之法線之方向餘弦當與

$$p:q:-1$$

成比例,此乃吾人所熟知之事實.一個一級偏微分方程

$$f(x,y,z,p,q)=0 \tag{1}$$

決定空間每一點 (x,y,z) 處之 p 及 q 之關係.一切直線之通過點 (x,y,z) 且其方向餘弦能與

$$p:q:-1$$

[p 與 q 須適合於(1)]成比例者,往往集合而成一錐面,以 (x,y,z) 爲頂點,以此諸直線爲母線.

如在曲面 $z=\phi(x,y)$ 上各點 (x,y,z) 處之法線與原微分方程在該點所定錐面之一母線相合,則此曲面之方程將顯然爲原微分方程

之一解.蓋事苟如此,則由求曲面方程之微分而得之 p 與 q 在曲面上每一點處之值,將適合於原微分方程也.

在一平直偏微分方程

$$Pp+Qq-R=0 \tag{2}$$

之例,上舉之錐面變成一平面.蓋在此例,函數 P,Q,R 在任一已知點 (x,y,z)* 處各有定値,此等數値可視爲比例於通過點 (x,y,z) 之某一直線之方向餘弦.微分方程(2)示明此直線當垂直於通過點 (x,y,z) 而方向餘弦與

$$p:q:-1$$

成比例之一切直線,是即錐面之一切母線也.故此錐面當爲一平面.如 $z=\phi(x,y)$ 爲通過點 (x,y,z) 之一積分曲面,則其在 (x,y,z) 處之法線必在此平面內.

XIII.5. **一級非平直偏微分方程　異解**　吾人曾見(§XII·1)由含有兩個任意常數之原函數

$$\phi(x,y,z,a,b)=0, \tag{1}$$

可得一唯一無二之一級偏微分方程

$$f(x,y,z,p,q)=0. \tag{2}$$

反之,關係式(1)則爲微分方程(2)之一解.

在微積分學中,吾人已證明方程(1)所規定之雙重無窮個曲面若有一包面,則由方程(1)及

$$\frac{\partial\phi}{\partial a}=0 \quad 與 \quad \frac{\partial\phi}{\partial b}=0 \tag{3}$$

---

* 所論之點限於一域,在該域內 P,Q,R 均爲有限之單値函數,且不同時爲零.

消去 a 及 b 之結果中，當含有此包面之方程．今知一族曲面之包面有一特性，卽其上每一點處之法線，當與族中通過該點之曲面在該點處之法線相合．因之曲面族(1)之包面之方程，當亦爲(2)之一解．此解稱爲原微分方程之異解．吾人亦可由微分方程(2)及

(4) $$\frac{\partial f}{\partial p}=0 \quad 與 \quad \frac{\partial f}{\partial q}=0^{*}$$

中消去 p 及 q 而求得之．

又有一事與一級常微分方程之異解相仿者，卽額外軌跡可隨上述兩法而引入也．[+]

XIII·6． **通解，全解，特解** 當微分方程

(1) $$f(x,y,z,p,q)=0$$

之一解

(2) $$\phi(x,y,z,a,b)=0$$

包含兩任意常數者爲已知時，吾人尙可採用上述之原理以求其他諸解．

a 與 b 間之一關係式，如

(3) $$b=\psi(a)$$

者，由(2)所規定之雙重無窮個曲面中選出一單一無窮個之曲面．若

---

* 參閱 Goursat-Bourlet, Équations anx dérivées partielles du premier ordre, p. 24.

\+ 參閱 M. J. H. Hill, Philosophical Transactions, Vol. 183 (A), 1892, pp. 141—278.

此單一無窮個曲面有一包面，則後者之方程亦必爲(1)之一解.* 此當從(2),(3)及

$$\frac{\partial\phi}{\partial a}+\psi'\frac{\partial\phi}{\partial b}=0 \tag{4}$$

中消去 a 及 b 而求得之.

每選定一 $\psi(a)$，則與之相當者，有一單一無窮個曲面之一包面，吾人亦卽得一解，稱爲原微分方程之一**特解**. 諸特解亦可因指定(2)中 a 與 b 之值而得之.

至於包含兩任意常數之原函數，並非出自該式之一級偏微分方程之僅有之解，其他諸解至少就理論言之，當盡能由該式得之. 故 Lagrange 稱之曰微分方程之**全解**(complete solution)，而將**通解**一詞留作諸特解集合之總稱焉.

按一級偏微分方程之解之存在定理(§XII·3)，當通解書作一單一之關係式時，應含一任意函數. 但僅在平直偏微分方程及非平直方程之具有特殊形式之例中，方可求得如是形式之通解(§§ XIII·1, XIII·2). 實則，多數問題之涉及偏微分方程之解者，吾人僅求其合於已知邊界條件之若干特解耳. 此常可單獨求得，而與通解無涉. 蓋因一通解之含有一任意函數者，縱然可求，亦往往具有極端之普偏性，竟使吾人不易由此通解求得所需之特解也.

吾人曾於 §XII·1 中見及，僅就一級偏微分方程而言，一原函數之恰含兩任意常數者占有特殊之地位. 仿此，吾人在一級非平直偏微分方程之例，得知一解之含兩任意常數者因其爲一全解而益昭

---

* 此亦由 §XIII·5 所舉一族曲面之包面之特性而知其然.

著.然有須鄭重表白者,全解並非唯一無二,凡含有兩任意常數之解均可視爲全解.

吾人曾於§XII·1中,見及$z^2(p^2+q^2+1)=R^2$之全解

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,$$

表示一族球面,其半徑爲R,球心在$z=0$平面上,其包面爲一對平面$z^2=R^2$,後者可由

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2,\quad x-a=0,\quad y-b=0$$

消去a,b而得,或由

$$z^2(p^2+q^2+1)=R^2,\quad z^2p=0,\quad z^2q=0$$

消去p,q而得之亦可.由此易知$z^2=R^2$當爲一異解也.

選擇$b=\psi(a)$之結果,乃爲選取諸球面使其中心位於$z=0$平面中之曲線$y=\psi(x)$上之意.此羣球面之包面,乃一管形之面(tubular surface),由一半徑爲R之球面因其中心移動於曲線$y=\psi(x)$之全長上而作成者.在特例中,若$\psi(x)$爲x之平直函數,則其包面爲一圓柱面.舉例言之,設$b=ha+k$.求相當之解時,須由

$$(x-a)^2+(y-ha-k)^2+z^2=R^2,$$

$$(x-a)+h(y-ha-k)=0$$

中消去a.吾人從其後者,得

$$a=\frac{x+hy-hk}{1+h^2}.$$

將其代入他一方程,則有

$$\frac{h^2(hx-y+k)^2+(hx-y+k)^2}{(1+h^2)^2}=R^2-z^2,$$

即

$$(hx-y+k)^2=(1+h^2)(R^2-z^2),$$

該式顯爲圓柱面之方程，其軸爲直線

$$y=hx+k,\quad z=0.$$

因此解中有二任意常數，故爲一全解（參閱 §XIII·7，習題 4）.

學者須取

$$(hx-y+k)^2=(1+h^2)(R^2-z^2)$$

作原函數，將 h 及 k 視作任意常數，而證明由此所得之偏微分方程亦爲 $z^2(p^2+q^2+1)=R^2$.

XIII.7. Lagrange 與 Charpit **之方法**　下文所述求全解之方法係 Lagrange 所首創，據 Lacroix 之微積分學第二版第二卷 p.548 所云，知此法爲 Charpit 所完成. 後者之論文係於 1784 年六月送至法國科學學院，惟未嘗刊行問世.

設已知之微分方程爲

(1)　$$f(x,y,z,p,q)=0,$$

其法在求一第二關係式

(2)　$$\phi(x,y,z,p,q,a)=0,$$

其中含 p 或 q，或兼含兩者，而使由(1)及(2)解出 p 與 q*，並將其值

---

* 此須於 f 與 ϕ 視作 p 與 q 之函數時，二者之間並無關係. f 與 ϕ 互相獨立之條件爲

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \phi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial \phi}{\partial p}\neq 0.$$

參閱附錄 I.

代入全微分方程

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{3}$$

則後者成一可求積分之全微分方程(§X.1).此外,ϕ 必須含一任意常數.如是,則(3)之解爲(1)之全解,蓋由此決定之 z 乃 x 與 y 之一函數,而由之求出之 p 與 q 之値,與 z 合成一組恰可適合於方程(1);且其中已含有兩個任意常數也.求 ϕ 之法如下:

求(1)與(2)關於 x 之微分,則有

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x,z} + \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x,z} = 0,^{*} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + p\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x,z} + \frac{\partial \phi}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x,z} = 0. \tag{5}$$

仿此,求二者關於 y 之微分,則有

$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y,z} + \frac{\partial f}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_{y,z} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + q\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y,z} + \frac{\partial \phi}{\partial q}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_{y,z} = 0. \tag{7}$$

按(3)可求積分之條件,以現用之符號表之,爲

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y,z} - \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x,z} = 0. \tag{8}$$

從方程(4),(5),(6),(7),(8),吾人可消去四量 $(\partial p/\partial x)_{x,z}$,

---

* 此處之 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x,z}$ 代表 $\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}$,又 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y,z}$ 代表 $\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}$. 關於此種符號可參閱著者之微積分學,p.248.

$(\partial p/\partial y)_{y,z}$, $(\partial q/\partial x)_{x,z}$, $(\partial q/\partial y)_{y,z}$. 以 $\partial\phi/\partial p$ 及 $\partial f/\partial p$ 分乘(4)及(5)後,並取其差,卽可消去 $(\partial p/\partial x)_{x,z}$. 其結果爲

$$(9)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\phi}{\partial p}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+p\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial\phi}{\partial p}-\frac{\partial\phi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{x,z}=0.$$

以 $\partial\phi/\partial q$ 及 $\partial f/\partial q$ 分乘(6)及(7)後,並取其差,卽可消去 $(\partial q/\partial y)_{y,z}$ 而得

$$(10)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\phi}{\partial q}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+q\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial q}+\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial q}-\frac{\partial\phi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{y,z}=0.$$

用(8)之關係,取(9)與(10)之和,並整列其項,則得平直偏微分方程

$$(11)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\phi}{\partial p}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial\phi}{\partial q}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$
$$-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial\phi}{\partial z}=0.$$

故欲求 ϕ 時,須取常微分方程組

$$(12)\quad \frac{dp}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+p\dfrac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{\dfrac{\partial f}{\partial y}+q\dfrac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dx}{-\dfrac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{-\dfrac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dz}{-\left(p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)}$$

論之. 吾人並不欲求 ϕ 之最普通形式, 而僅求其含有 p 或 q 及一任意常數之某一形式,在運算時所欲求者乃其一簡單之式.

注意. 方程組(12)並不難熟記. 如令

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x,z}=\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\ \text{及}\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y,z}=\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z},$$

則吾人卽有逆對稱 (skew symmetrical)形式之

(12′)
$$\frac{dp}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,z}}=\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dq}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y,z}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}};$$

此諸項之各各等於$\dfrac{dz}{-\left(p\dfrac{\partial f}{\partial p}+q\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)}$可由等式$\dfrac{dx}{-\dfrac{\partial f}{\partial p}}=\dfrac{dy}{-\dfrac{\partial f}{\partial q}}$,以 p 乘前項之分子分母,以 q 乘後項之分子分母,並利用(3)之關係,由和比定理之運算而得之.

習題1. $z-pq=0$.

在求 ϕ 之前,吾人須先求

$$\frac{dp}{p}=\frac{dq}{q}=\frac{dx}{q}=\frac{dy}{p}=\cdots$$

之一解.用其前兩端,得

$$\phi\equiv p-aq=0.$$

使其與原方程聯立以求 p 及 q,得

$$p=a\sqrt{\frac{z}{a}},\quad q=\sqrt{\frac{z}{a}}.$$

如是,則(3)成

$$dz=a\sqrt{\frac{z}{a}}dx+\sqrt{\frac{z}{a}}dy,$$

即
$$\frac{\sqrt{a}\,dz}{\sqrt{z}}=adx+dy.$$

求積分,得

$$2\sqrt{az}=ax+y+b,$$

卽

(13) $$4az=(ax+y+b)^2,$$

是卽一全解也.

若自始卽用二、三兩端,則吾人求得

$$\phi\equiv q-x-a=0;$$

因之 $$q=x+a \quad 及 \quad p=\frac{z}{x+a}.$$

如是,則(3)成

$$dz=\frac{z}{x+a}dx+(x+a)dy,$$

卽 $$dy=\frac{(x+a)dz-zdx}{(x+a)^2}.$$

求積分,得

$$y+b=\frac{z}{x+a},$$

卽

(14) $$z=(x+a)(y+b),$$

是亦一全解也.

通解與異解可由(13)或(14)求得之.如用後者,則由

$$z=(x+a)[y+\psi(a)]$$

及 $$y+\psi(a)+\psi'(a)(x+a)=0.$$

(其中 $\psi(a)$ 爲 a 之一任意選取之函數)消去 a 而得其通解爲諸特解之集合.

在特例中,如令

$$\psi(a)=-ha+k,$$

其中 h 及 k 爲任意常數,試證其相當之解爲

$$4hz=(hx+y+k)^2,$$

此卽(13)也.

從下列三式

$$z=(x+a)(y+b),\ y+b=0,\ x+a=0,$$

消去 a 與 b 而得之異解之方程爲 $z=0$.

學者可證此方程亦可得自他一形式之解(13).

2. $p=(z+yq)^2$. 3. $\sqrt{p}+\sqrt{q}=2x$.

4. $z^2(p^2+q^2+1)=R^2$.

XIII·8. **變數之變換** 吾人須注意下述各變數之簡單變換之效果.

(a) 令 $X=\log x$,因之 $\dfrac{dX}{dx}=\dfrac{1}{x}$,故

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X}.$$

$$\therefore\ xp=\frac{\partial z}{\partial X};$$ 此式不含 X.

(b) 令 $Y=\log y$,因之 $\dfrac{dY}{dy}=\dfrac{1}{y}$,故

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial Y}\frac{dY}{dy}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y}.$$

$$\therefore\ yq=\frac{\partial z}{\partial Y};\ \text{此式不含 } Y.$$

(c) 令 $Z=\log z$，因之 $z=e^Z$，故

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=e^Z\frac{\partial Z}{\partial x}=z\frac{\partial Z}{\partial x},\qquad \therefore\ \frac{p}{z}=\frac{\partial Z}{\partial x};$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=e^Z\frac{\partial Z}{\partial y}=z\frac{\partial Z}{\partial y},\qquad \therefore\ \frac{q}{z}=\frac{\partial Z}{\partial y}.$$

此二者均不含 Z.

尤有進者，如同時應用此等變換之任意二者，或盡用其三者，則兼得各變換之效果. 例如

合用(a)與(b)之效果爲以 $\frac{\partial z}{\partial X}$ 代 xp 及以 $\frac{\partial z}{\partial Y}$ 代 yq，

合用(b)與(c)之效果爲以 $\frac{\partial Z}{\partial x}$ 代 $\frac{p}{z}$ 及以 $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ 代 $\frac{yq}{z}$，

合用(a)，(b)，(c)之效果爲以 $\frac{\partial Z}{\partial X}$ 代 $\frac{xp}{z}$ 及以 $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ 代 $\frac{yq}{z}$

等是也.

有時可藉此等事實而使吾人化一已知微分方程成一不含一個或多個變數之方程，因之更使 Lagrange–Charpit 方法之運用趨於簡易. 下列數種方程乃易於應用 Lagrange–Charpit 方法之例題.

1) $f(p,q)=0$. 式中無變數.

按 Lagrange–Charpit 方法，藉以求 ϕ 之方程組爲

$$\frac{dx}{0}=\cdot\ \cdot\ \cdot\ .$$

吾人由此求得 $p=a$.

解出 $f(a,q)=0$ 中之 q,得 $q=$ 常數,名之曰 b. 最後吾人須解

$$dz=adx+bdy, \text{ 而 } f(a,b)=0.$$

故得一全解

$$z=ax+by+c, \text{ 而 } f(a,b)=0.$$

因此類方程之易於求解,故在可能時吾人甚宜將所遇方程化歸此類. 從上述各變換(a),(b),(c)之效果觀察之,吾人易知方程之具有 $f(xp,q)=0$, $f(xp,yq)=0$, $f(p/z,q/z)=0$, $f(p/z,yq/z)=0$ 之形式,及與之相若者,均可按此等變換之一個或數個而立即簡約之使成範式 1°.

習題 1. $x^2p^2+q^2=z^2$.

如將其書作

$$\left(\frac{xp}{z}\right)^2+\left(\frac{q}{z}\right)^2=1$$

之形式,易知變換 $X=\log x$ 及 $Z=\log z$, 將化此方程為

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2=1,$$

其中並無變數,故屬於範式 1° 之類,其一全解為

$$Z=aX+by+c, \text{ 而 } a^2+b^2=1,$$

即 $$\log z=a\log x+by+c, \text{ 而 } a^2+b^2=1$$

此解亦可書作

$$z=cx^a e^{by}, \text{ 而 } a^2+b^2=1,$$

吾人在此式中,已將任意常數 c^c 代以 c,以免多用一文字.

換所設 a 與 b 之關係,知其可以 $\sin\alpha$ 與 $\cos\alpha$ 順次代之,而 α 乃一任意常數,如是,則此解又可書作

$$z=cx^{\sin\alpha}e^{y\cos\alpha}.$$

2. $pq=z^2$.　　3. $x^2p^2-q^2=1$.

4. $ypq=p^2+z^3$.

2° $f(z,p,q)=0$. 式中無自變數.

按 Lagrange-Charpit 方法,藉以求 ϕ 之方程組爲

$$\frac{dp}{p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{q\frac{\partial f}{\partial z}}=\cdots\cdot$$

從此得 $p=aq$. 將此 p 值代入微分方程,得

$$f(z,aq,q)=0.$$

解出 q,求得其爲 z 與 a 之一函數,如 $q=\psi(z,a)$;故 $p=a\psi(z,a)$. 最後,吾人須解全微分方程

$$dz=a\psi(z,a)dx+\psi(z,a)dy.$$

以 $\psi(z,a)$ 除之,則成一正合方程,而可以一次之求積解之.

由此觀之,方程之式爲 $f(z,xp,q)=0, f(z,xp,yq)=0$, $f(z,p,yq)=0$ 者,宜用變換(a)及(b)以化簡之.

5. $xp(1+q)=qz$.　　6. $xypq=z$.

3° $f_1(x,p)=f_2(y,q)$. 式中無應變數,又所含之變數幾已分離 (quasi separation).

求 ϕ 之方程組爲

$$\frac{dp}{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}}=\cdots\cdots=\frac{dx}{-\dfrac{\partial f_1}{\partial p}}=\cdots\cdots.$$

由此得

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial p}dp=0,\text{ 即 } df_1=0.$$

故 $f_1(x,p)=a$;因之 $f_2(y,q)=a$.

解出此中之 p 及 q,得

$$p=\psi_1(x,a)\text{ 及 }q=\psi_2(y,a).$$

是以應得之全微分方程

$$dz=\psi_1(x,a)dx+\psi_2(y,a)dy$$

恰爲正合.

如所遇方程之形式爲

$$f_1\left(x,\frac{p}{z}\right)=f_2\left(y,\frac{q}{z}\right),$$

則於採用 Lagrange-Charpit 方法之前,吾人顯須先按變換(c)以化簡之.

7. $zq=2yp^2$. 8. $xzp-yz^2=q^2$.

注意. 上述之方法雖似爲求解形如範式 3° 之方程之一易見之途徑,然亦有應用 §XIII·7 中方程組(12)之他一微分方程以求 ϕ 爲較便捷者.例如

9. $p-yq=q^2$.

吾人可先解出 $q^2+yq=a$ 之 q,更進而求其全解.惟若利用 §XIII·7 中方程組(12)亦含有

$$\cdots=\frac{dq}{-q}=\frac{dx}{-1}=\cdots$$

之事實,則全解之又一較爲合宜之形式可以求得.

XIII·9. **推廣之 Clairaut 方程** 回憶一 Clairaut 方程之解之形式(§IV·4),吾人不難由察閱而求得推廣之 Clairaut 方程

$$z=xp+yq+f(p,q).$$

之一全解之形式爲

$$z=ax+by+f(a,b)$$

此爲所舉微分方程之解,固甚易證明也.

此解爲 ∞^2 個平面之方程.此等平面之包面之方程乃所舉微分方程之異解,常爲吾人所注意.

習題 1. $z=xp+yq+\sqrt{p^2+q^2+1}$.

2. $z=xp+yq+p^2+q^2$.

3. $z=xp+qy+\dfrac{1}{p^2+q^2}$.

4. $z=xp+yq+p^2+pq+q^2$.

XIII·10. **提要** 一級偏微分方程可彙集爲兩通類:其一類爲應變數之導式之平直式者,其又一類爲不若是者.

1° 對於一級平直偏微分方程,可應用 Lagrange 法而得通解(§XIII·1).

當一平直偏微分方程之係數爲無理式時,異常之解,可以發現(§XIII·2).

2° 對於一級非平直偏微分方程,可應用 Lagrange-Charpit 通

法(§XIII·7)而得全解.從此可求得其他之解(§§XIII·5及XIII·6).

變數之變換有時可助一微分方程之推解.新變數之選取常按微分方程之形式而定之.吾人曾在§XIII·8中討論若干變換,應用此等變換後所得之方程缺少新變數之一個或數個.在應用 Lagrange-Charpit 法之前,往往應將所遇之微分方程作如是之簡約.

按§XIII·9之方法以求一推廣之 Clairaut 方程之全解爲最簡捷之道.在此款中,其異解常居緊要地位.

一級偏微分方程中僅含有偏導式之一者,可視作常微分方程而解之(§XIII·2).

習題 1. $x^2p+y^2q=z^2$.　　2. $x^2p^2+y^2q^2=z^2$.

3. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=xyz$.　　4. $z=px+qy+pq$.

5. $xypq=z^2$.　　6. $y^2zp+x^2zq=y^2x$.

7. $q=xp+x^2p^2$.　　8. $(p+q)(px+qy)=1$.

9. $(x+y)(p+q)^2+(x-y)(p-q)^2=1$.

[令 $x+y=u^2$, $x-y=v^2$.]

10. $(p^2+q^2)x-pz=0$.

11. $(x^2+y^2)(p^2+q^2)=1$.　[令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.]

12. $(y^2+z^2-x^2)p-2xyq+2xz=0$.

13. $q^2=z^2(p-q)$.

14. $(y-x)(qy-px)=(p-q)^2$.　[令 $xy=u$, $x+y=v$.]

15. $z-xp-yq=n\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

16. $pq=px+qy$.

17. $(y+z+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+u+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(u+x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}$

$$=x+y+z.$$

18. $yq=x^2p^2+1$.　　　　19. $p^2+q^2=(x+y)z^2$.

20. $z^2(p^3+q^2)=x^2+y^2$.　［令 $xy=u, x^2-y^2=2v$.］

21. $(x^2-y^2)pq-xy(p^2-q^2)=1$.　［引用極坐標.］

22. $yzp^2=q$.　　　　23. $x^2+(z-yq)^2=1$.

24. $p^{1/2}+q^{1/2}=x$.　　　　25. $z=px+qy+3x^{1/3}y^{1/3}$.

26. 有一曲面,其每點之法線與 xy 平面成一定量之角,求定此曲面族.

27. 有一曲面,其法線與 xy 平面交點之坐標,與其曲面上相當點之坐標成比例.求定此曲面族.

28. 有一曲面,其所有切面與兩定點之距離之乘積,無不相同.求定此曲面族.

29. 有一曲面,其所有切面在坐標軸上之截距之乘積,無不相同.求定此曲面族.

30. 有一曲面,其所有切面在坐標軸上之截距之和,無不相同.求定此曲面族.

註. 關於習題 26－30,吾人須知

(a) $p/\sqrt{p^2+q^2+1},\ q/\sqrt{p^2+q^2+1},\ -1/\sqrt{p^2+q^2+1}$ 乃曲面 $z=f(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$ 在 (x,y,z) 處之法線之方向餘弦;

(b) $\dfrac{X-x}{p}=\dfrac{Y-y}{q}=\dfrac{Z-z}{-1}$ 乃曲面在 (x,y,z) 處之法線之方

程，式中 X,Y,Z 係法線上一動點之坐標；

(c)　$(x+pz,y+qz)$ 乃法線與 xy 平面相遇之點；

(d)　$p(X-x)+q(Y-y)=Z-z$ 乃曲面在 (x,y,z) 處之切面方程，式中 X,Y,Z 係切面上一動點之坐標；

(e)　$\dfrac{p(X_0-x)+q(Y_0-y)-(Z_0-z)}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ 乃由切面至點 (X_0,Y_0,Z_0) 之距離.

(f)　$(xp+yq-z)/p,(xp+yq-z)/q,-(xp+yq-z)$ 順次爲切面在 x,y,z 軸上之截距之長.

第十四章

高級偏微分方程

XIV·1. 平直偏微分方程 吾人首先討論偏微分方程之爲應變數及其一切導式之平直式者.此類方程之通式爲

$$(1)\quad P_{n,0}\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+P_{n-1,1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}+P_{n-2,2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}+\cdots+P_{0,n}\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$$

$$+P_{n-1,0}\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}+\cdots$$

$$+P_{s,r}\frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^s\partial y^r}+\cdots$$

$$+P_{1,0}\frac{\partial z}{\partial x}+P_{0,1}\frac{\partial z}{\partial y}+P_{0,0}z=f(x,y),$$

其各係數乃 x 與 y 之函數.如令 $\partial/\partial x=D$ 及 $\partial/\partial y=\mathfrak{D}$,則(1)可書作

$$(P_{n,0}D^n+P_{n-1,1}D^{n-1}\mathfrak{D}+P_{n-2,2}D^{n-2}\mathfrak{D}^2+\cdots+P_{0,n}\mathfrak{D}^n$$

$$+P_{n-1,0}D^{n-1}+\cdots$$

$$+P_{s,r}D^s\mathfrak{D}^r+\cdots$$

$$+P_{1,0}D+P_{0,1}\mathfrak{D}+P_{0,0})z=f(x,y),$$

或更簡爲

(1) $$F(D,\mathfrak{D})z=f(x,y),$$

其中 $F(D,\mathfrak{D})$ 係一運算符號，如視為代數式，乃 D 與 $\mathfrak{D}$ 之一 n 次多項式．此式與 n 級平直常微分方程頗多相似處(§IV·1)．

$$F(D,\mathfrak{D})(u+v)=F(D,\mathfrak{D})u+F(D,\mathfrak{D})v,$$

固甚顯然．故如在平直常微分方程之情形，求解(1)之問題亦可分為兩部分：其一為求

(2) $$F(D,\mathfrak{D})z=0$$

之通解，該式將稱為(1)之補充函數；其二為求其任一特別積分．兩者之和即成(1)之通解．

XIV·2．**常係數齊級平直方程** 按一種通行之例，一平直偏微分方程之各導式俱屬同級者稱為齊級(homogeneous)．在此情形，運算符號，$F(D,\mathfrak{D})$，乃 D 與 $\mathfrak{D}$ 之齊次式．此外，設其係數又均為常數且右邊為零．如此，則吾人之方程將成下式：

(1) $$(k_0D^n+k_1D^{n-1}\mathfrak{D}+\cdot\cdot\cdot+k_{n-1}D\mathfrak{D}^{n-1}+k_n\mathfrak{D}^n)z=0,$$

即 $$F(D,\mathfrak{D})z=0.$$

設 ϕ 為 $y+mx$ 之一函數，則

$$D^r\mathfrak{D}^s\phi(y+mx)=m^r\phi^{(r+s)}(y+mx),$$

式中 $\phi^{(r+s)}(y+mx)$ 即 $\dfrac{d^{r+s}\phi(y+mx)}{[d(y+mx)]^{r+s}}$．故知以 $z=\phi(y+mx)$ 代入(1)之結果為

$$\phi^{(n)}(y+mx)F(m,1)=0.$$

是則當 $F(m,1)=0$ 時，$z=\phi(y+mx)$ 應爲題之一解；換言之，卽須有

$$k_0m^n+k_1m^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+k_{n-1}m+k_n=0. \tag{2}$$

吾人此後將稱(2)爲輔助方程. 如其根 $m_1, m_2, \cdot\cdot\cdot, m_n$ 之值各異，則

$$z=\phi_1(y+m_1x)+\phi_2(y+m_2x)+\cdot\cdot\cdot+\phi_n(y+m_nx)$$

乃題之一解. 因其旣含 n 個任意函數，故卽爲通解 *.

習題 1. $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=0.$

輔助方程爲

$$m^2-a^2=0, \quad \therefore\ m=\pm a.$$

故得其通解爲

$$z=\phi(y+ax)+\psi(y-ax).$$

2. $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}-3\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=0.$

3. $\dfrac{\partial^3z}{\partial x^3}-7\dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}+10\dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}=0.$

---

* 如 $F(D,\mathfrak{D})$ 中以 $\mathfrak{D}$ 爲一因式，則 $F(m,1)$ 僅爲一個 $n-1$ 次之式. 此中所失之根係 ∞，以 $\phi(x)$ 爲其相當積分. 在此種情形，就微分方程之形式言，此理已甚顯然. 因吾人謂 $\mathfrak{D}$ 爲 $F(D,\mathfrak{D})$ 之一因式者，卽謂 z 之一切導式至少曾一度爲關於 y 者. 故

$$F(D,\mathfrak{D})\phi(x)=0.$$

仿此，如 $F(D,\mathfrak{D})$ 中有一因式爲 $\mathfrak{D}^r$，則 $\phi_1(x), y\phi_2(x), \cdot\cdot\cdot, y^{r-1}\phi_r(x)$ 亦皆易知爲本題之積分.

如自始卽以 ϕ 爲 $mx+ny$ 之一任意函數，則僅就 m/n 或 n/m 之比值之大小觀之，卽可將上舉諸款合而爲一. 但本書所用之方法(包含本註第一部分)在實用上似較簡易.

4. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}-2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}-3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$

XIV·3. **輔助方程之有重根者** 若輔助方程有重根,則 §XIV·2 之法不能示吾人以通解. 在此情形, 吾人用一完全類似 §IV·7 之方法以解之.

運算符號 $F(D,\mathfrak{D})$可書作因式之乘積

$$(D-m_1\mathfrak{D})(D-m_2\mathfrak{D})\cdots(D-m_n\mathfrak{D}).$$

再按與 §VI·6 相仿之證法,易知此等因式孰先孰後,並無關係. 設 m_1 爲二次根,則吾人須求

$$(D-m_1\mathfrak{D})(D-m_1\mathfrak{D})z=0$$

之一解. 如設 $(D-m_1\mathfrak{D})z=v$,則上式成

$$(D-m_1\mathfrak{D})v=0.$$

故按 §XIV·2 或 §XIII·1 之方法,

$$v=\phi(y+m_1x).$$

吾人今須求解

$$(D-m_1\mathfrak{D})z=\phi(y+m_1x).$$

此乃一級平直式,並可書爲

$$p-m_1q=\phi(y+m_1x).$$

故可應用 Lagrange 法(§XIII·1). 準此,則有

$$\frac{dx}{1}=-\frac{dy}{m_1}=\frac{dz}{\phi(y+m_1x)}.$$

由其前兩端，得

$$y+m_1x=a.$$

將其代入最後一端，得

$$dx=\frac{dz}{\phi(a)}.$$

$$\therefore\ x\phi(a)-z=b.$$

故本題之通解應爲

$$x\phi(y+m_1x)-z=\psi(y+m_1x),$$

即
$$z=\psi(y+m_1x)+x\phi(y+m_1x).$$

易言之，如 m_1 爲補助方程之二次根，則不僅 $\phi(y+m_1x)$ 爲一積分，且 $\psi(y+m_1x)$ 亦然.

吾人可按完全類似之方法證明，m_1 若爲一 r 次之重根，則

$$\phi_1(y+m_1x), x\phi_2(y+m_1x), x^2\phi_3(y+m_1x), \cdot\cdot\cdot, x^{r-1}\phi_r(y+m_1x)$$

均係本題之積分.

仿上述之證法，吾人可以證明

$$\phi_1(y+m_1x),\ y\phi_2(y+m_1x),\ \cdot\cdot\cdot, y^{r-1}\phi_r(y+m_1x)$$

亦爲此例之一組 r 個獨立之積分.

習題 1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

2. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}-\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$

3. $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^4}-2\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 z}{\partial y^4}=0.$

XIV·4. 輔助方程有複數之根者 如微分方程之係數爲實數，則輔助方程之複數之根必成對發現，兩兩共軛．是以 $\alpha+i\beta$ 若爲一根，則 $\alpha-i\beta$ 亦必爲一根．補充函數之兩項與此兩根相當者將爲

$$(1)\qquad \phi(y+\alpha x+i\beta x)+\psi(y+\alpha x-i\beta x).$$

設 ϕ_1 與 ψ_1 表示兩個任意選取之函數，並令

$$\phi=\phi_1+i\psi_1 \text{ 及 } \psi=\phi_1-i\psi_1,$$

則(1)式化爲

$$\phi_1(y+\alpha x+i\beta x)+\phi_1(y+\alpha x-i\beta x)$$
$$+i[\psi_1(y+\alpha x+i\beta x)-\psi_1(y+\alpha x-i\beta x)].$$

因 ϕ_1 與 ψ_1 本爲任意之實函數，故此式亦然．

習題． $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

其輔助方程乃

$$m^2-2m+2=0,\quad \therefore\ m=1\pm i$$

故得通解爲

$$z=\phi(y+x+ix)+\psi(y+x-ix).$$

此又可書作實式

$$z=\phi_1(y+x+ix)+\phi_1(y+x-ix)$$
$$+i[\psi_1(y+x+ix)-\psi_1(y+x-ix)],$$

因 ϕ_1 與 ψ_1 乃任意二實函數也．

例如吾人若令 $\phi_1(u)$ 爲 $\cos u$，$\psi_1(u)$ 爲 e^u，則得

$$\cos(y+x+ix)=\cos(x+y)\cos ix-\sin(x+y)\sin ix$$

$$=\cos(x+y)\cosh x-i\sin(x+y)\sinh x,$$

$$\cos(y+x-ix)=\cos(x+y)\cos ix+\sin(x+y)\sin ix$$

$$=\cos(x+y)\cosh x+i\sin(x+y)\sinh x.$$

$$\epsilon^{y+x+ix}-\epsilon^{y+x-ix}=\epsilon^{y+x}(\epsilon^{ix}-\epsilon^{-ix})=2i\epsilon^{y+x}\sin x.$$

$$\therefore\ z=2\cos(x+y)\cosh x-2\epsilon^{x+y}\sin x.$$

XIV.5. **特別積分** 方程右端如不爲零，則欲得其通解，須再求其一特別積分以加於補充函數之後．求此特別積分之通法盡可遵循關於常係數平直微分方程特別積分之各種求法之途徑（§§ VI·7, VI·8）而推演之．在多數之例，此等特別積分之推求，以試擬方法爲較便，此中所涉及者以與待定係數法（§VI·10）相仿之方法爲主．下列數習題將說明其事．

習題 1.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin(x+2y)-2\sin(x+y)+x+xy.$$

其補充函數乃 $\phi(y+x)+\psi(y-2x)$.

求特別積分中與 $\sin(x+2y)$ 相當之部分，吾人試擬 $z=a\sin(x+2y)$，蓋因題中導式盡爲二級也．如是，則

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=5a\sin(x+2y).$$

如 $a=\dfrac{1}{5}$，則此式化爲 $\sin(x+2y)$，故所求特別積分爲 $\dfrac{1}{5}\sin(x+2y)$.

$\sin(x+y)$ 既爲補充函數之一部分，故毋庸試擬 $z=b\sin(x+y)$

以得右邊之第二項，$-2\sin(x+y)$. 試令 $z=bx\sin(x+y)$，則得 $3b\cos(x+y)$. 故須改令 $z=bx\cos(x+y)$. 如此，則代入方程之結果爲 $-3b\sin(x+y)$，該式於 $b=2/3$ 時化爲 $-2\sin(x+y)$. 故關於此項之特別積分爲 $\frac{2}{3}x\cos(x+y)$.〔所擬積分設爲 $z=by\cos(x+y)$ 亦無不可，學者須自證之.〕

關於 x 項，吾人試擬 $z=cx^3$. 代入原式，則得 $6cx$. 此式於 $6c=1$ 時爲 x; 故相當於此之特別積分爲 $x^3/6$.

關於 xy 項，吾人試擬 $z=fx^3y$. 準此，則得 $6fxy+3fx^2$. 故另以 $z=fx^3y+gx^4$ 試之，而得 $6fxy+(3f+12g)x^2$. 此式於 $f=\frac{1}{6}, g=-\frac{1}{24}$ 時爲 xy. 故所求關於此項之特別積分爲 $\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{24}x^4$. 綜上所論，知通解爲

$$z=\phi(y+x)+\psi(y-2x)+\frac{1}{5}\sin(x+2y)+\frac{2}{3}x\cos(x+y)$$
$$+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{24}x^4.$$

習題 2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{x+2y}+e^{x+y}$.

其補充函數爲 $\phi(y+x)+\psi(y+2x)$.

關於 e^{x+2y}，吾人試擬 $z=ae^{x+2y}$. 準此，則有 $3ae^{x+2y}$. 故 $\frac{1}{3}e^{x+2y}$ 爲所需之特別積分.

因 e^{x+y} 爲補充函數之一部分，姑令 $z=bxe^{x+y}$. 準此，則得 $-be^{x+y}$.

故 $-xe^{x+y}$ 爲所需之特別積分〔以 $z=bye^{x+y}$ 代之亦可〕. 故通解爲

$$z=\phi(y+x)+\psi(y+2x)+\frac{1}{3}e^{x+2y}-xe^{x+y}.$$

習題 3. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\dfrac{1}{x^2}.$

其輔助方程爲 $m^2-2m+1=0$. $\therefore\ m=1,1$.

因得補充函數 $\phi(x)+\psi(y+x)+x\chi(y+x)$.

本方程中無 $\partial^3 z/\partial x^3$ 之項, 欲得 $1/x^2$, 可取 x 之一函數與 y 之乘積, 使其二級導式爲 $1/x^2$ 與一常數之乘積; 換言之, 吾人須試擬 $z=ay\log x$. 準此, 則於 $a=-1$ 時, 卽求得 $1/x^2$. 故通解爲

$$z=\phi(x)+\psi(y+x)+x\chi(y+x)-y\log x.$$

4. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin(x+y)+3x^2y.$

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x-y.$

XIV·6. **常係數非齊級平直方程** 若 §XIV·1 中之 $F(D,\mathfrak{D})$ 並非 D 與 $\mathfrak{D}$ 之齊次式, 而各係數仍爲常數, 則其解之含無限個任意常數者雖往往可求, 而其解之含有任意函數者則僅於數種情形之下方可求得.

因 $$D^r e^{ax+by}=a^r e^{ax+by},\quad \mathfrak{D}^s e^{ax+by}=b^s e^{ax+by},$$

故將 $z=ce^{ax+by}$ 代入

(1) $$F(D,\mathfrak{D})z=0$$

之左端之結果應爲 $ce^{ax+by}F(a,b)$. 若 a 與 b 適合於所謂輔助方程之

關係式

(2) $$F(a,b)=0,$$

則 $z=ce^{ax+by}$ 將爲(1)之一解，其中 c 乃一任意常數．相當於 b 之任一値，當有一定個數之 a 値各能適合於(2)．故予 b 以各種數値，吾人即可求得諸特別積分，使其個數恰合吾人之需要．今以(1)之任何個數積分之和仍爲其積分之故，乃知

(3) $$z=\sum ce^{ax+by}$$

爲其一解，其中諸 c 與諸 b 均係任意常數，爲數無限．而各 a 之選取乃視其與與之相當之 b 能同時適合於(2)式爲準．

相當於任一 b 値，a 値之適合(2)者，若有 k 個，如 $f_1(b),f_2(b)$，$\cdot\cdot\cdot,f_k(b)$ 之形式，則(3)式可書作

(4) $$z=\sum ce^{f_1(b)x+by}+\sum ce^{f_2(b)x+by}+\cdot\cdot\cdot+\sum ce^{f_k(b)x+by},$$

其中諸 c 與諸 b 均係任意常數．

$F(D,\mathfrak{D})$ 在通常情形並無有理因式，如竟有一平直因式 $D-\lambda\mathfrak{D}-\mu$，則方程(2)含有因式 $a-\lambda b-\mu$，從而 $a=\lambda b+\mu$．故諸 f 之一，如 $f_1(b)$，變爲 $\lambda b+\mu$，而(4)式中諸項之與此相當者可書作

(5) $$z=\sum ce^{b(\lambda x+y)+\mu x}=e^{\mu x}\sum ce^{b(\lambda x+y)}.$$

因諸 c 與諸 b 原爲任意常數，故 $\sum ce^{b(\lambda x+y)}$ 乃 $\lambda x+y$ 之一任意函數，如 $\phi(\lambda x+y)$ 之類．果爾，則(5)式可書爲

(6) $$z=e^{\mu x}\phi(\lambda x+y).$$

由此觀之，相當於(2)中每一各異之平直因式，吾人即有形如(6)式*之一解.

$F(D,\mathfrak{D})$ 若有一平直因式不含 D 字，則(2)將有一相當因式亦不含 a；設此爲 $b-\mu$. 果爾，則在(4 中相當於此之項可書作

$$(5')\qquad z=\sum c\epsilon^{ax+\mu y}=e^{\mu y}\sum c e^{ax}.$$

諸 c 與諸 a 均爲任意常數，故 $\sum c\epsilon^{ax}$ 乃 x 之一任意函數.(5′)式又可書如下形式

$$(6')\qquad z=e^{\mu y}\phi(x).$$

若微分方程之右端本不爲零，則有時可按 §XIV·5 之試擬方法，以求得其一特別積分.

習題 1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}-z=\sin(x+2y).$

其輔助方程(2)爲

$$a^2+ab+b-1=0,$$

即

$$(a+1)(a+b-1)=0.$$

用 $a+1=0$，則 $\lambda=0$，$\mu=-1$，故於微分方程之右端代換爲零時，由(6)式而知其一解爲 $z=e^{-x}\phi(y)$.

用 $a+b-1=0$，則 $\lambda=-1$，$\mu=1$. 故又得其一解 $z=e^{x}\psi(y-x)$. 故本方程之補充函數爲

---

* 在齊級方程之例(§XIV·2)一切因式俱係平直者，且在該例，$\mu=0$，故彼時所得之結果，恰與此處所得者相同.

$$e^{-x}\phi(y)+e^{x}\psi(y-x).$$

吾人須求一特別積分，姑令 $z=\alpha\sin(x+2y)+\beta\cos(x+2y)$. 將其代入原方程之左端，則得

$$(-4\alpha-2\beta)\sin(x+2y)+(-4\beta+2\alpha)\cos(x+2y).$$

此式將於 $\alpha=-\frac{1}{5}$, $\beta=-\frac{1}{10}$ 時與 $\sin(x+2y)$ 相等. 故得一特別積分

$$-\frac{1}{5}\sin(x+2y)-\frac{1}{10}\cos(x+2y),$$

而通解爲

$$z=e^{-x}\phi(y)+e^{x}\psi(y-x)-\frac{1}{10}[2\sin(x+2y)+\cos(x+2y)].$$

習題 2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+z=e^{-x}$.

其輔助方程(2)爲

$$a^2-b^2+2a+1=0,$$

即

$$(a+b+1)(a-b+1)=0.$$

故補充函數爲

$$e^{-x}[\phi(y-x)+\psi(y+x)].$$

e^{-x} 既爲補充函數之一部分，吾人自應試擬以 $z=\alpha xe^{-x}$. 但此亦爲補充函數之一部分，苟令 $\phi=-\frac{y-x}{2}$, $\psi=\frac{y+x}{2}$, 即可知其然矣. 然則吾人須改擬以 $z=\alpha x^2e^{-x}$. 將其代入左端，則得 $2\alpha e^{-x}$. 故在 $\alpha=\frac{1}{2}$

時，即得所需之特別積分爲$\frac{1}{2}x^2e^{-x}$. 是以所求之通解爲

$$z=e^{-x}\left[\phi(y-x)+\psi(y+x)+\frac{1}{2}x^2\right].$$

3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x+3y}+\sin(2x+y)$.

4. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}-z=\cos(x+2y)+e^y$.

XIV·7. **可化爲常係數平直式之方程** 在 §XIV·1 之 $F(D,\mathfrak{D})$ 中，$D^r\mathfrak{D}^s$ 之係數若爲一常數與 x^ry^s 之乘積，則該方程可按 $\log x=X$，$\log y=Y$ 之變換（參閱 §VI·11 之方法）而化爲一常係數方程. 從此變換可以推知

$$Dz=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial X}, \qquad \therefore\ xDz=\frac{\partial z}{\partial X}.$$

$$D^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial X}, \qquad \therefore\ x^2D^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}-\frac{\partial z}{\partial X}.$$

$$\mathfrak{D}z=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial Y}, \qquad \therefore\ y\mathfrak{D}z=\frac{\partial z}{\partial Y}.$$

$$\mathfrak{D}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial Y}, \qquad \therefore\ y^2\mathfrak{D}^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}-\frac{\partial z}{\partial Y}.$$

$$D\mathfrak{D}z=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y}, \qquad \therefore\ xyD\mathfrak{D}z=\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y}.$$

習題 1. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2.$

如令 $\log x=X$, $\log y=Y$, 則原方程化為

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}-\frac{\partial z}{\partial X}-\frac{\partial z}{\partial Y}=\epsilon^{2X}+\epsilon^{2Y},$$

其係數均為常數. 此式之輔助方程 §XIV·6, (2) 乃

$$a^2+2ab+b^2-a-b=0, \text{即 } (a+b)(a+b-1)=0.$$

故其補充函數為 $\phi(Y-X)+\epsilon^X\psi(Y-X)$.

因欲求特別積分, 可試擬 $z=\alpha e^{2X}+\beta e^{2Y}$. 準此以求, 得 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, 故通解為

$$z=\phi(Y-X)+\epsilon^X\psi(Y-X)+\frac{1}{2}(\epsilon^{2X}+\epsilon^{2Y}).$$

仍易為 x 與 y, 並注意於 $Y-X=\log y/x$ 之關係, 則求得通解

$$z=\phi_1\left(\frac{y}{x}\right)+x\psi_1\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

2. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$

3. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+6y\frac{\partial z}{\partial y}=x^3y^4.$

他種方程有時亦可化為常係數平直式(但所需之變換方法不常若上例之易於察閱). 學者可應用 $X=\frac{1}{2}x^2$, $Y=\frac{1}{2}y^2$ 之變換於下題.

4. $\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{x^3}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{y^3}\frac{\partial z}{\partial y}$.

XIV·8. **特別之解** 在若干主要物理問題中，吾人須求適合於某某原始條件或邊界條件之特解. 是以包含任意函數之通解，不若包含任意常數且形如指數函數之解，如在 § XIV·6 中所曾提及者之合用. 下列諸習題將說明之.

習題 1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.*

吾人欲求一解，其值不能無限增加，且於 $t=0$ 時爲零，又於 $x=0$ 時亦爲零.

按 § XIV·6 之方法，吾人得知 $u=ce^{\alpha x+\beta t}$ 將爲一解，若

$$\beta^2-a^2\alpha^2=0,\text{ 即 }\beta=\pm a\alpha.$$

故可取

$$u=e^{\alpha x}(c_1e^{a\alpha t}+c_2e^{-a\alpha t}),$$

其中 c_1, c_2, α 乃任意常數. 因在 $t=\infty$ 時，u 值必爲有限，故 α 必爲虛數. 令 $\alpha=i\mu$. 則

$$u=e^{i\mu x}(c_1e^{ia\mu t}+c_2e^{-ia\mu t}).$$

如在 §VI·4 中所爲，此式可書爲

---

* 此方程適用於一緊張弦之橫振動（transverse vibration）. 吾人求得其通解（§ XIV·2，習題 1）爲

$$u=\phi(x+at)+\psi(x-at),$$

該式代表兩波以速率 a 而進行，此向左則彼向右（參閱 Ames and Murnaghan, Theoretical Mechanics, § 106）.

$$u=e^{i\mu x}(A_1\cos a\mu t+B_1\sin a\mu t).$$

仿此，

$$u=e^{-i\mu x}(A_2\cos a\mu t+B_2\sin a\mu t)$$

爲一解，且下式亦然

$$u=e^{i\mu x}(A_1\cos a\mu t+B_1\sin a\mu t)+e^{-i\mu x}(A_2\cos a\mu t+B_2\sin a\mu t).$$

後者可仿前例書作

$$u=A\cos\mu x\cos a\mu t+B\sin\mu x\cos a\mu t+C\sin\mu x\sin a\mu t$$
$$+D\cos\mu x\sin a\mu t.$$

其中 A,B,C,D 均爲任意常數.

因於 $t=0$ 時及於 $x=0$ 時 u 値爲零，是以 $A=B=D=0$，而通解爲狀若

$$u=C\sin\mu x\sin a\mu t$$

之任意個數之項之和，其中 C 與 μ 仍爲任意常數.

習題 2. $h^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\dfrac{\partial\theta}{\partial t}=0.$

物體一表面，卽平面 $x=0$，之溫度作簡單之週期變易（simple-periodic variation）.本題方程，卽係用以決定與此物體中直線式熱流（rectilinear flow of heat）成正交之平面，$x=$常數，上任意一點處之溫度者.* 其邊界條件爲

---

* 一長度無限之桿業經絕緣，若熱其一端，使該端溫度作週期變易，則本問題隨之發生矣. 又於研究地面下一處溫度之狀態時亦引起此題. 例如 Ingersoll and Zobel, Mathematical Theory of Heat Conduction 之第五章，卽可取以參考.

當 $x=0$ 時，$\theta=\theta_0\sin\omega t$.

如令 $\theta=ce^{ax+bt}$，則求得補助方程

$$h^2a^2-b=0.$$

按本問題之性質，b 必爲虛數. 令 $b=\pm i\alpha$，則 $a=\pm\sqrt{\pm i\alpha}/h$. 但

$$\pm i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},$$

應用 De Moivre 定理，有

$$\sqrt{i}=\pm\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pm\sqrt{2}(1+i)}{2}$$

及

$$\sqrt{-i}=\pm\left[\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pm\sqrt{2}(1-i)}{2}.$$

$$\therefore\ \theta=ce^{\pm\sqrt{2\alpha}(1\pm i)x/2h\pm i\alpha t}$$

$$=ce^{\pm\sqrt{2\alpha}x/2h}e^{\pm(\sqrt{2\alpha}x/2h\pm\alpha t)i}.$$

因 θ 並不隨 x 而無限增大，吾人必須於其第一指數函數之因式中選用負號，使成 $e^{-\sqrt{2\alpha}x/2h}$.

如於他一指數函數之因式中選用 αt 前之正號，其普徧性並不因之稍減. 吾人對於式中第三個 ± 仍有一選擇符號之權. 兼用其二者並任擇 c 之二值，則吾人可書

$$\theta=e^{-\sqrt{2\alpha}x/2h}\left[c_1e^{(\sqrt{2\alpha}x/2h+\alpha t)i}+c_2e^{-(\sqrt{2\alpha}x/2h+\alpha t)i}\right].$$

仍如以前，括號中各項可代以包含正弦與餘弦之實項，而得

$$\theta=e^{-\sqrt{2\alpha}x/2h}\left[A\sin(\sqrt{2\alpha}x/2h+\alpha t)+B\cos(\sqrt{2\alpha}x/2h+\alpha t)\right].$$

若 $A=\theta_0$, $B=0$, 及 $\alpha=\omega$,則此式將適合於原始條件.故所求之解之形式當爲

$$\theta=\theta_0 e^{-\sqrt{2\omega}x/2h}\sin(\sqrt{2\omega}x/2h+\omega t).$$

3. 求 $\partial^2u/\partial x^2-\partial^2u/\partial y^2=0$ 之一解,其式在 $x=\infty$ 時及在 $y=0$ 時均爲零.

4. 求 $\partial^2u/\partial x^2-\partial^2u/\partial y^2=0$ 之一解,其式在 $x=\infty$ 時及在 $y=\infty$ 時均爲零;又求一解,其式在 $x=\infty$ 時爲零,及在 $y=\infty$ 時趨於無窮.

XIV·9. Fourier **級數** 在論分析學之書籍中,曾證明在定限內變值(of bounded variation)之一單值函數 $f(x)$,在間隔 2π* 中若僅有有限個極大值與極小值,則可表以一唯一無二之 Fourier 級數

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\cdots. \tag{1}$$

按此函數之性質及所選用之間隔之爲如何,或須將間隔中變數之有限個值視爲例外外,上式可用於間隔之全部.舉例言之,如間隔爲 $(-\pi,\pi)$,則此 Fourier 級數之係數等於

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

---

* 如間隔不等於 2π,以他一變數之項表之,仍可得一唯一之展開式.例如間隔之長若爲 a,則其相當之 Fourier 級數含 $y=2\pi x/a$ 各整倍數之正弦與餘弦.

就特例言之，如 $f(x)$ 爲一奇函數 (odd function)，即若

$$f(-x)=-f(x),$$

則不難知*

$$a_0=a_1=\cdots=a_n=\cdots=0,$$

及此 Fourier 級數之僅含諸正弦項.

上述者旣已成立，吾人可將一所設函數 $f(x)$，其式爲單值，在定限內變值，且在間隔 $(0,\pi)$ 中僅有有限個極大值與極小值者，表以一 Fourier 級數，該級數僅含諸正弦項且可通用於全間隔 $(0,\pi)$ 中 x 之一切值. 但其間有有限個值，連 $x=0$ 及 $x=\pi$ 在內，或當視爲例外. 緣吾人若取函數 $F(x)$ 論之，而

在間隔 $(0,\pi)$ 中，$F(x)=f(x)$,

在間隔 $(-\pi,0)$ 中，$F(x)=-f(-x)$,

則吾人得一函數在間隔 $(0,\pi)$ 中與原有之函數相同，而在較大之間隔 $(-\pi,\pi)$ 中則爲奇函數. 故其級數僅含諸正弦項.

求其諸數字係數，有

---

* 緣 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx dx+\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$. 如令 $x=-y$, 並注意 $f(-y)=-f(y)$ 之關係，則右端二積分式之前者變成 $\int_{\pi}^{0} f(y)\cos ny dy$，則 $-\int_0^{\pi} f(y)\cos ny dy$ 恰爲在右端所見第二積分式之負值.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(-x)\sin nxdx$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

如令 $x=-y$,右端第一積分式將成

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}f(y)\sin(-ny)(-dy)=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}f(y)\sin nydy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(y)\sin nydy.$$

此與右端第二積分式相等,故

(3) $$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

按(3)以定諸 b,則級數

(4) $$b_1\sin x+b_2\sin 2x+\cdot\cdot\cdot+b_n\sin nx+\cdot\cdot\cdot,$$

謂爲 Fourier **半段正弦級數**(Fourier half-range sine series). 此級數對於間隔$(0,\pi)$中 x 之一切值*均等於 $f(x)$,但對於 $x=0$ 及 $x=\pi$ 二者或不如此. 蓋按(4)之形式易知其於 $x=0$ 及 $x=\pi$ 時之值爲零,固不論所選之 $f(x)$ 爲何函數也.

仍仿前法,一函數 $f(x)$ 之適合前舉條件者可展爲 Fourier **半段餘弦級數**(Fourier half-range cosine series)

(5) $$a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdot\cdot\cdot+a_n\cos nx+\cdot\cdot\cdot,$$

而

(6) $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ (n=1,2,\cdot\cdot\cdot).$$

---

* 祇須 $f(x)$ 在此間隔內亦爲繼續函數.

爲證明此計，作一偶函數(even function)$F(x)$，規定如下：

$$\text{在間隔 } (0,\pi) \text{ 內}, F(x)=f(x)$$

$$\text{在間隔 } (-\pi,0) \text{ 內}, F(x)=f(-x);$$

並仿前求 Fourier 半段正弦級數之法進行卽得.

習題 1. 將 $f(x)=x$ 展爲半段正弦級數.

此處之

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^\pi=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

$$\therefore\ x=2\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots\right).$$

此級數適用於 $x=0$，而不適用於 $x=\pi$.

習題 2. 將 $f(x)=x$ 展爲半段餘弦級數.

按(6)式，求得

$a_0=\dfrac{\pi}{2}$，n 爲偶數時 $a_n=0$，n 爲奇數時 $a_n=-\dfrac{4}{\pi n^2}$.

$$\therefore\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right).$$

習題 3. 設有函數 $f(x)$，而在間隔 $(0,\pi/2)$ 中 $f(x)=x$，又在間隔 $(\pi/2,\pi)$ 中 $f(x)=\pi-x$. 試展之成一半段正弦級數.

此處之

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\sin nx dx+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2}+\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi-x)\cos nx}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}.$$

該式於 n 爲奇數時等於 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{4}{\pi n^2}$，又於 n 爲偶數時等於 0.

$$\therefore\ f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}-\cdots\right).$$

習題 4. 對於間隔 $0<x<\pi$，試展下列各函數爲半段正弦級數：

(a) $f(x)=1$；(b) 自 $x=0$ 至 $\pi/2$，$f(x)=0$，又自 $x=\pi/2$ 至 π，$f(x)=\cos x$；(c) $f(x)=\cos x$；(d) $f(x)=\epsilon^x$.

XIV·10. Fourier **級數之應用** 凡題之原始條件或邊界條件，就其簡單者言之，其中若有一條件爲於一自變數爲零時應變數爲他一自變數之一已知函數，則函數按 Fourier 級數展開之式常可供吾人利用，此函數可爲常數，但不能爲零. 下列習題將闡明其事.

習題 1. 一無限長之矩形金屬薄片之兩面俱已絕緣. 吾人試考究沿此薄片之穩定熱流. 設此片之寬爲 a，沿長邊之無窮遠處之溫度爲 $0°$，而短邊之溫度則保持於 θ 度.

如取短邊爲 x 軸，長邊之一爲 y 軸，則所須推解之微分方程爲

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0,$$

而其原始條件或邊界條件爲

$$\theta(0,y)=\theta(a,y)=0,\ \theta(x,\infty)=0,\ \theta(x,0)=\theta_0.$$

按 § XIV·6 之方法，令 $\theta=c\epsilon^{\alpha x+\beta y}$. 輔助方程爲

$$\alpha^2+\beta^2=0.$$

故與

(1) $$c_1\epsilon^{\beta y}\epsilon^{i\beta x}+c_2\epsilon^{\beta y}\epsilon^{-i\beta x},\ 即\ \epsilon^{\beta y}(c_1\epsilon^{i\beta x}+c_2\epsilon^{-i\beta x})$$

形式相同之項無論若干，其和必適合於該微分方程．吾人曾已證明（§VI·4），(1)式可書作

$$(2)\qquad Ae^{\beta y}\sin\beta x+Be^{\beta y}\cos\beta x,$$

其中 A, B, β 爲任意常數．

因 $\theta(0,y)=0$，故須令 $B=0$．

因 $\theta(a,y)=0$，故須令 $\beta=n\pi/a$，而 n 爲一整數．

因 $\theta(x,\infty)=0$，故 β 必爲負數，即 $-n\pi/a$，而 n 爲一正整數．故吾人所求之 $\theta(x,y)$ 必爲若干項之和，形如

$$(3)\qquad \theta=\sum_n A_n e^{-n\pi y/a}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

最後，吾人須選定諸 A 之值，而令 $\theta(x,0)=\theta_0$，即於 $0<x<a$ 間隔內須有

$$(4)\qquad \theta_0=A_1\sin\frac{\pi x}{a}+A_2\sin\frac{2\pi x}{a}+\cdots+A_n\sin\frac{n\pi x}{a}+\cdots.$$

此乃一 Fourier 半段正弦級數，其中變數爲 $\pi x/a$．

在 §XIV·9 之習題 4 中，吾人已求得

$$1=\frac{4}{\pi}\left(\sin z+\frac{1}{3}\sin 3z+\frac{1}{5}\sin 5z+\cdots\right);$$

且此式通用於 $0<z<\pi$．令 $z=\pi x/a$，有

$$(5)\qquad 1=\frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{a}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{a}+\cdots\right),$$

該式通用於 $0<x<a$．以 θ_0 乘 (5) 之兩邊，吾人即求得 (4) 中諸 A

之值.故本題所需之解爲

$$\theta=\frac{4\theta_0}{\pi}\left[e^{-\pi y/a}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{e^{-3\pi y/a}}{3}\sin\frac{3\pi x}{a}+\frac{e^{-5\pi y/a}}{5}\sin\frac{5\pi x}{a}+\cdots\right].$$

習題 2. 設吾人加熱於一金屬細棒,其長爲 a 者,令其上至一端之距離爲 x 處一點之温度爲 x 之一已知函數 $f(x)$.旋使此棒與熱源完全絕緣而立即置其兩端於冰中.試求表示其每點處温度之函數 $\theta(x,t)$,其所含變數爲 x 及時間 t,後者以兩端置入冰中之時間爲 0.

表示熱流之微分方程在本題爲

$$h^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\frac{\partial\theta}{\partial t}=0;$$

而原始條件或邊界條件爲

$$\theta(0,t)=\theta(a,t)=0,\ \theta(x,\infty)=0,\ \theta(x,0)=f(x).$$

爲確定本題意義起見,吾人假定

$$\text{於 } 0\leqq x\leqq\frac{a}{2}\text{ 時 } f(x)=x,\text{ 又於 }\frac{a}{2}\leqq x\leqq a\text{ 時 } f(x)=a-x.$$

令 $\theta=ce^{\alpha x+\beta t}$ 以解此方程.輔助方程爲

$$h^2\alpha^2-\beta=0.$$

故與

(6) $$ce^{\alpha x+h^2\alpha^2 t}$$

形式相同之項無論若干,其和必適合於本微分方程.此處之 c 與 α 均爲任意常數.

因 $\theta(x,\infty)=0$,故 α^2 必爲負數.設其等於 $-p^2$.如是則 $\alpha=\pm ip$.

取形若(6)者二項之和,有

$$e^{-h^2p^2t}(c_1e^{ipx}+c_2e^{-ipx}).$$

可仿前例,書之如

$$e^{-h^2p^2t}(A\sin px+B\cos px),$$

而 A,B,p 爲任意常數.

因 $\theta(0,t)=0$,故須令 $B=0$.

因 $\theta(a,t)=0$,故須令 $p=n\pi/a$,而 n 爲一整數.n 並不限於正值.故吾人之式 $\theta(x,t)$ 必爲若干項之和,形如

$$\theta=\sum_n A_n e^{-h^2n^2\pi^2t/a^2}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

最後,吾人須選定諸 A 以令 $\theta(x,0)=f(x)$,即須於 $0\leqq x\leqq a$ 中,

$$f(x)=\sum_n A_n\sin\frac{n\pi x}{a},\text{ 而 } 0\leqq x\leqq a.$$

是乃一 Fourier 半段正弦級數,其中變數爲 $\pi x/a$.

在本題中,$f(x)$ 規定如下:

於 $0\leqq x\leqq a/2$ 時,$f(x)=x$;於 $a/2\leqq x\leqq a$ 時,$f(x)=a-x$.

令 $z=\pi x/a$,即 $x=az/\pi$,則

於 $0\leqq z\leqq \pi/2$ 時,$f(az/\pi)=F(z)=az/\pi$;

於 $\pi/2\leqq z\leqq \pi$ 時,$F(z)=(\pi-z)a/\pi$.

取此與 §XIV·9 之習題 3 較閱之,吾人即知關於此函數之 Fourier 半段正弦級數爲

$$F(z)=\frac{4a}{\pi^2}\left(\sin z-\frac{\sin 3z}{3^2}+\frac{\sin 5z}{5^2}-\cdots\right);$$

且此式通用於 $0\leqq z\leqq\pi$ 內. 故本題所需之解爲

$$\theta=\frac{4z}{\pi}\left[\epsilon^{-h^2\pi^2t/a^2}\sin\frac{\pi x}{a}-\frac{\epsilon^{-9h^2\pi^2t/a^2}}{9}\sin\frac{3\pi x}{a}\right.$$

$$\left.+\frac{\epsilon^{-25h^2\pi^2t/a^2}}{25}\sin\frac{5\pi x}{a}-\cdots\right].$$

此解通用於 $0\leqq x\leqq a$.

習題 3. 設 $f(x)=100°$, 一常數, 以求習題 2 中問題之解. 如此棒原係侵於沸水中, 則此種情形即可實現矣.

XIV·11. **二級偏微分方程爲二級導式之平直式者. Monge 方法** 二級偏微分方程之爲二級導式之平直式者, 其通式爲

$$Rr+Ss+Tt=V, \tag{1}$$

其中 R,S,T,V 乃 x,y,z,p,q 之函數. Gaspard Monge (1746—1818) 嘗創一因彼而得名之解法. 據此, 吾人須先求得包含一任意函數之一個一級偏微分方程, 以爲其**初積分**或曰**中間積分** (first or intermediary integral). 再按第十三章中諸法之一或以他法求得後者之解, 即原方程之通解也. 此法雖僅能應用於 R,S,T,V 合於某某諸條件之微分方程, 然以其發現至爲頻仍, 實有陳述其法於此之必要, 至少亦應陳述按此法以求解之規則焉.*

除

$$dz=pdx+qdy \tag{2}$$

---

* 欲知本法之詳情, 參閱 Forysth, A Treatise on Differential Equations, §229 及以次諸節. 欲知此問題之較新之論證, 參考 Goursat, Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.

以外，吾人尚有

(3)
$$\begin{cases} dp = rdx + sdy, \\ dq = sdx + tdy. \end{cases}$$

消去(1)與(3)中之 r 與 t，而得

(4)
$$s(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2) - (Rdydp + Tdxdq - Vdxdy) = 0.$$

如可同時兼有

(5)
$$Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2 = 0$$

與

(6)
$$Rdydp + Tdxdq - Vdxdy = 0,^*$$

則(4)可以適合，因之(1)亦如是. 方程(5)實與下列兩個一級方程

(7)
$$dy - W_1(x, y, z, p, q)dx = 0 \text{ 及 } dy - W_2(x, y, z, p, q)dx = 0$$

相同，而該二者在

(8)
$$4RT = S^2$$

時，成爲完全相同之方程. 方程(2)與(6)及(7)之任一式，合成一組包含五個變數 x, y, z, p, q 之三個全微分方程. 此類方程組，僅在某某諸條件能滿足時方可解出，此卽 Monge 之法不能常合實用之故也. 如能求得上組方程兩獨立之解

$$u_1(x, y, z, p, q) = c_1, \quad u_2(x, y, z, p, q) = c_2,$$

則可引用此法. 在此情形，吾人可以證明

(9)
$$u_1 = \phi(u_2),$$

* 方程(5)與(6)常稱爲 Monge 方程.

(ϕ 表一任意函數)，乃一中間積分．視(9)爲一個一級偏微分方程，吾人須再求其積分，所得之通解即(1)之解也．

苟(7)之兩方程可各與(2)及(6)合成可解之方程組，則吾人將求得二中間積分有若(9)者．解出二者之 p 與 q，並代其值於 $dz=pdx+qdy$ 中，則此方程之積分即(1)之通解也．

習題1. $q^2r-2pqs+p^2t=0$.

Monge 方程爲

$$q^2dy^2+2pqdxdy+p^2dx^2=0,\quad q^2dydp+p^2dxdq=0,$$

其第一方程係一完全平方，即

$$(qdy+pdx)^2=0.$$

將其代入第二方程，則得

$$qdp-pdq=0;$$

故
$$\frac{p}{q}=c_1.$$

Monge 方程之第一式與 $dz=pdx+qdy$ 聯立，則得

$$dz=0;$$

因之
$$z=c_2$$

故得一中間積分爲

$$p=q\phi(z).$$

本題之中間積分只此一個．故吾人須求其積分，因其爲一平直式，故可以 Lagrange 方法解之．其通解爲

$$x\phi(z)+y=\psi(z).$$

習題 2. $r-a^2t=0$. *

Monge 方程爲

$$dy^2-a^2dx^2=0, \text{ 即 } dy-adx=0 \text{ 及 } dy+adx=0,$$

$$dydp-a^2dxdq=0.$$

用 $dy-adx=0$,得 $y-ax=c_1$.與 Monge 第二方程相合,則得

$$dp-adq=0; \text{ 因之 } p-aq=c_2.$$

故一中間積分應爲

$$p-aq=\psi(y-ax).$$

再用另一方程,$dy+adx=0$,吾人又求得一中間積分爲

$$p+aq=\phi(y+ax).$$

解出二中間積分之 p 及 q,而得

$$p=\frac{1}{2}[\phi(y+ax)+\psi(y-ax)],$$

$$q=\frac{1}{2a}[\phi(y+ax)-\psi(y-ax)].$$

---

* 解此方程之一簡法見 §XIV·2. 此方程在數學物理學中之地位甚爲重要. 首解此方程者爲 Jean-le-Rond D'Alembert (1718—1783), 氏於 1747 年陳送至柏林學院之論文 Récherches sur les vibration des cordes sonores 中載有此法. 蓋氏於研究緊張彈性弦之振動時,曾討論方程 $\partial^2y/\partial t^2-\partial^2y/\partial x^2=0$,其中 t 爲時間,x,y 爲弦上一點之直角坐標,x 乃沿聯弦兩端之直線所量得之坐標,y 乃該點在振動時離開平衡位置之位移(displacement). Marie 嘗述其證明載於 Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques, t. VIII, p. 2?7.

吾人今須推解正合方程

$$dz=\frac{1}{2}[\phi(y+ax)+\psi(y-ax)]dx+\frac{1}{2a}[\phi(y+ax)-\psi(y-ax)]dy$$

$$=\frac{1}{2a}\phi(y+ax)(dy+adx)-\frac{1}{2a}\psi(y-ax)(dy-adx),$$

因 ϕ 與 ψ 原係任意函數之符號，吾人不妨保留此二者而書此解如

$$z=\phi(y+ax)+\psi(y-ax),$$

式中毋庸另加任意常數，蓋可設二任意函數之一已含有此常數也.

習題 3. $r-t=-\dfrac{4p}{x+y}$.

Monge 方程爲

$$dy^2-dx^2=0,\ \text{卽}\ dy-dx=0\ \text{及}\ dy+dx=0,$$

$$dydp-dxdq+\frac{4p}{x+y}dxdy=0.$$

用 $dy-dx=0$，得 $y-x=c_1$. 與 Monge 第二方程相合，則得

(10) $$2xdp+4pdx-2xdq+c_1(dp-dq)=0.$$

又 $$dz=pdx+qdy$$

變爲 $$dz=pdx+qdx.$$

取此與(10)合併，求得

$$2(xdp+pdx)-2(xdq+qdx)+c_1(dp-dq)+2dz=0.$$

此乃一正合方程，其解爲

$$(2x+c_1)(p-q)+2z=c_2,$$

卽
$$(x+y)(p-q)+2z=c.$$

故一中間積分應爲

$$(x+y)(p-q)+2z=\phi(y-x).$$

吾人若用方程 $dy+dx=0$，卽得一不能求積分之全微分方程組。故須求中間積分之積分。因其係一平直式，按 Lagrange 方法，應有

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{-dy}{x+y}=\frac{dz}{\phi(y-x)-2z}.$$

由前兩端所成之方程，得

$$x+y=a.$$

以 $a-x$ 代 y，則有

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{\phi(a-2x)-2z},$$

卽

$$\frac{dz}{dx}+\frac{2}{a}z=\frac{1}{a}\phi(a-2x).$$

此係一級平直常微分方程，有一積分因式（§11·9）爲 $e^{2x/a}$，故其解爲

$$aze^{2x/a}=\int e^{2x/a}\phi(a-2x)dx+b.$$

以 $x+y$ 代 a，則得通解

$$(x+y)ze^{2x/(x+y)}-\int e^{2x/a}\phi(a-2x)dx=\psi(x+y).$$

此處之通解亦如一級非平直偏微分方程之例（§XIII·6），不能明白書出。蓋若不先知 ϕ 之形式，上式之積分固無從推求也。問題之原始條件如能決定函數 ϕ，則發現於積分中之 a 須於積分求出之後改

爲 $x+y$.

4. $q(1+q)r-(p+q+2pq)s+p(1+p)t=0$.

5. $ps-qr=0$.

6. $(b+cq)^2r-2(b+cq)(a+cp)s+(a+cp)^2t=0$.

XIV·12. **特別解法** 有時因暫視自變數之一爲常數而方程可視爲一常微分方程. 由此求出之解中所含之任意常數自應代以暫時視作常數之自變數之一任意函數. 茲以下列數習題爲例解:

習題 1. $xr=p$.

暫視 y 爲常數,吾人可書之如常微分方程

$$x\frac{dp}{dx}=p,\quad 即\quad \frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}.$$

求其積分,得 $p=xf(y)$,而 $f(y)$ 係一任意函數. 再視 y 爲常數,有

$$\frac{dz}{dx}=xf(y);$$

因而解得 $z=x^2f(y)+\phi(y)$,$\phi(y)$ 係另一任意函數. 解之右端本有一因數 $\frac{1}{2}$,業已併入 $f(y)$ 中矣.

習題 2. $r+s+p=0$.

如視 y 爲常數而求積分,則有

$$p+q+z=f(y).$$

此係一級平直方程. 按 Lagrange 方法,應得

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{f(y)-z}.$$

從前兩端,求得

$$x-y=a.$$

由後兩端,得平直常微分方程

$$\frac{dz}{dy}+z=f(y).$$

其一積分因式(§II·9)爲 e^y,其解爲

$$ze^y=\int f(y)e^y dy+b=\phi(y)+b.$$

故通解爲

$$ze^y-\phi(y)=\psi(x-y),$$

即 $$z=\phi(y)+e^{-y}\psi(x-y),$$

而因式 e^{-y} 已併入 $\phi(y)$ 中矣.

3. $yt-q=xy^2$. 4. $s=xy$. 5. $r+p=xy$.

XIV·13. **撮要** 按初等方法即可求積分之偏微分方程,其級高於一者,就其種類言之,爲數極少. 吾人在本章中所論及者幾盡屬於微分方程之爲應變數及其一切導式之平直式者,或爲二級微分方程之爲其所含最高級導式之平直式者. 後述一類偶爾可用 §XIV·11 中 Monge 方法解之.

如方程爲應變數及所有導式之常係數平直式,則 §XIV·6 之通法可以適用.

如常係數平直方程又爲齊級,換言之,即方程中若無變數,且其所有導式俱爲同級,則 §XIV·2 之方法可以適用.

如方程爲平直式,而其係數並非常數,則由變換方法,或可化之

爲常係數方程(§XIV·7).

有時§XIV·12之特別解法可直接應用於一方程.

習題 1. $ys=x+y$.

2. $r-s-6t=xy$. 3. $zr+p^2=3xy^2$.

4. $xr-(x+y)s+yt=\dfrac{x+y}{x-y}(p-q)$.

[用 Monge 方法,並令 $x+y=u, xy=v$.]

5. $xr-p=xy$. 6. $r-t-3p+3q=\epsilon^{x+y}$.

7. $x^2r-y^2t=(x+1)y$.

8. $x^2r+2xys+y^2t+xp+yq-n^2z=0$.

9. $xr+p=9x^2y^2$. 10. $s-t=x/y^2$.

11. $s=pq$. 12. $r-2s+t=(x+y)$.

13. $(q+1)^2r-2(pq+p+q+1)s+(p+1)^2t=0$.

14. $qs-pt=0$. 15. $s+p-q=z+xy$.

附 錄 I.

包含兩個變數之兩函數間可有一關係存在之條件. 設 u 與 v 均為 x 與 y 之函數,則兩者之間能有一恆同關係 *(identical relation) 存在之充要條件,為其函數行列式(functional determinant,亦稱為二者之 Jacobi 式)須對於 x 及 y 之一切值而恆等於零,即

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=J_{x,y}(u,v)=(u,v)_{x,y}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0.$$

1° 先證明此條件之必要性:

設 $u=\phi(v)$,求微分得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

---

* 所謂 u 與 v 間之一恆同關係者,言其對於 x 與 y 所有之值俱能成立之意也. 例如 $u=x+y$, $v=(x+y)^2$,則 $u^2=v$ 對於 x 與 y 所有之值俱能成立. 如 u 與 v 間並無恆同關係存在,吾人仍可書其一為他者之一函數. 但所得關係不復為恆同; 而僅能成立於 x 與 y 選取某某若干對數值之時. 例如 $u=x+y$, $v=x-y$ 則關係式 $u^2=v$ 僅能成立於 x 與 y 為拋物線 $(x+y)^2=x-y$ 上諸點坐標之時.

欲此二個含有$\frac{\partial\phi}{\partial v}$之方程能同時成立,僅須

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=0,$$

由是證明此條件具有必要性.

2° 次證明此條件之充分性:

設 u 與 v 兩函數爲 $u=f_1(x,y)$,$v=f_2(x,y)$. 由此二者消去 y 而得一關係式,設解出其 u 後之形式爲

$$u=\phi(x,v).$$

因 x 與 y 係自變數,求其關於此二者之微分,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\qquad\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

如 $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=0$,則上二式僅能在 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=0$ 時方可同時成立. 但 $\partial\phi/\partial x=0$,乃 ϕ 不含 x 之意. 故在 Jacobi 式爲零時,

$$u=\phi(v),$$

故本條件亦具有充分性.

注意. 本定理可推廣應用於 n 自變數之 n 個函數間之關係.

附　錄　II.

包含一個變數之 n 個函數適合一常係數恆同平直關係之條件.

首取兩函數 $y_1(x)$ 及 $y_2(x)$ 一款論之. 設有一恆等式 *

(1)
$$a_1y_1+a_2y_2=0$$

存在, 其中 a_1 與 a_2 為常數, 二者俱異於零. 求微分, 得

(2)
$$a_1y_1'+a_2y_2'=0.$$

欲 a_1 與 a_2 之二齊次關係式能同時成立, 對於 x 所有之值, 須有

(3)
$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=0,$$

故(3)為一必要條件.

次證(3)亦為充分. 吾人改書之為

$$y_1y_2'-y_2y_1'=0,$$

並求積分, 即得一常係數平直關係式

$$y_2=c_1y_1.$$

今再取三函數 $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ 一款論之. 設有一恆等式

(4)
$$a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3=0$$

存在, 其中 a_1, a_2, a_3 俱為異於零之常數. 求其微分兩次, 而得

(5)
$$\begin{cases} a_1y_1'+a_2y_2'+a_3y_3'=0, \\ a_1y_1''+a_2y_2''+a_3y_3''=0. \end{cases}$$

---

* 所謂一恆等式者, 意云一方程對於其變數之一切值俱能成立者也.

欲此三關係式，俱爲 a_1, a_2, a_3 之齊次式者，能同時成立，必須

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

故(6)在函數 y_1, y_2, y_3 間有一常係數平直恆同關係式存在之必要條件．爲再證明其充分性起見，吾人依次法進行：

如一行列式爲零，則有一恆同平直關係式(不必爲常係數者)以結合其各列(及各行)之相當元素．例如，因(6)之爲零，則有均不爲零之三數 μ_1, μ_2, μ_3 存在，而令

$$(7)\qquad \begin{cases} \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3 = 0, \\ \mu_1 y_1' + \mu_2 y_2' + \mu_3 y_3' = 0, \\ \mu_1 y_1'' + \mu_2 y_2'' + \mu_3 y_3'' = 0. \end{cases}$$

舉例言之，吾人可取

$$(8)\qquad \mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ y_3' & y_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

如此三個二行行列式中有任一個爲零，其結果卽得形如(4)之一平直恆等式．設上列第一個二行行列式爲零．吾人已證明其爲在 y_2 及 y_3 間有一恆同平直關係式，如

$$y_2 - c y_3 = 0$$

者，存在之條件．且此爲(4)之形式，惟其爲 $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -c$ 者耳．

如此等二行行列式無一爲零,則 μ_1, μ_2, μ_3 亦無一爲零. 不寧唯是,吾人且將證明其比例於三常數,因之可令(7)之第一恆等式具有(4)之形式.

求(7)中首二方程之微分,並因其後二方程之故,而得

$$
(9)\qquad \begin{aligned} &\mu_1'y_1+\mu_2'y_2+\mu_3'y_3=0,\\ &\mu_1'y_1'+\mu_2'y_2'+\mu_3'y_3'=0. \end{aligned}
$$

因其俱爲 μ_1', μ_2', μ_3' 之齊次式,故有

$$
(10)\qquad \mu_1' : \mu_2' : \mu_3' = \left\| \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ y_2' & y_3' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ y_3' & y_1' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.
$$

取此與(8)相較,即有

$$
(11)\qquad \frac{\mu_1'}{\mu_1} = \frac{\mu_2'}{\mu_2} = \frac{\mu_3'}{\mu_3} = \lambda(x),
$$

其中 $\lambda(x)$ 往往含有 x,雖在特例亦可爲常數. 依此求(11)中各微分方程之積分,得

$$
\mu_1 = c_1 e^{\int \lambda(x)dx},\quad \mu_2 = c_2 e^{\int \lambda(x)dx},\quad \mu_3 = c_3 e^{\int \lambda(x)dx};
$$

即

$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = c_1 : c_2 : c_3$,是乃一組常數也. 條件(6)之充分性因此得以成立.

循歸納法進行,此法可用以證明一組包含同一個變數之 n 個函數 $y_1(x), y_2(x), \cdot\cdot\cdot, y_n(x)$ 適合一常係數恆同平直關係式

$$
a_1y_1 + a_2y_2 + \cdot\cdot\cdot + a_ny_n = 0,
$$

而其係數不全爲零之充要條件爲

$$
(12)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots y_n' \\ y_1'', & y_2'' & \cdots y_n'' \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.
$$

故 n 個函數 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 爲平直無關之充要條件爲(12)中之行列式不恆等於零.

(12)中行列式稱爲 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 之 Wronski 式(Wronskian). 此乃因 J. Hoëné-Wronski(1778 –1853)而得名.

附錄 III.

本書撮要. 本書所述各種微分方程解法之綱領如次:

1° 一個常微分方程

(a) 之爲一級者

其通解之求法,見第 II, IV, IX 章,

其異解之求法,見第 V 章,

(b) 之爲高級者

而又屬於常係數平直式之類,見第 VI 章,

如爲 Cauchy 方程,見 §VI·11.

如爲變數係數者,見第 VII, VIII, IX 章及 §XI·6.

而又屬於非平直式之類,見第 VIII, IX 章及 §XI·6.

2° 一個偏微分方程

(a) 之爲一級者,見第 XIII 章,

(b) 之爲高級者,見第 XIV 章.

3° 一個全微分方程,見第 X 章.

4° 常微分方程或全微分方程組,俱見第 XI 章.

索　　引

所附數字表示頁次

本索引採用下列諸簡稱: c.c.＝常數係數，d.e.＝微分方程，l.＝平直，o.＝常，p.＝偏，t.＝全.

答　　案

§I·4

3. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$.　　4. $r^2 y''^2 = (1 + y'^2)^3$.

5. $xy'' - y' = 0$.　　6. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$.

7. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.　　8. $y'' - (k+l)y' + kly = 0$.

9. $xy'^2 - 2yy' - x = 0$.　　10. $yy'^2 + 2xy' - y = 0$.

11. $y'^2 + y^2 = 1$.　　12. $y = \sin \dfrac{xy'}{\sqrt{1 - y^2}}$.

§II·1

4. $\sqrt{1 + x^2} + \log y = c$.　　5. $x^2 + cy^2 = c - 1$.

6. $y = c \cos x - 3$.　　7. $\cos x \cos y = c$.

8. $\sec x + \tan y = c$.

§II·2

3. $\log x - x/y = c$.　　4. $x^2 - 2cy + c^2 = 0$.

5. $(x^2 + y^2)y^2 = cx^6$.　　6. $\log x - \sin \dfrac{y}{x} = c$.

7. $[x^2 + (1-a)y^2]^a = cx^2$.　　8. $x^2 + y^2 = c(my - x)$.

§II·3

2. $\tan^{-1}\left(\dfrac{y+2}{2x+2}\right) + \log[4(x+1)^2 + (y+2)^2] = c$.

3. $(x + y + 3)^3 (x - y - 1) = c$.

4. $5x-10y+\log(10x+5y-2)=c$.

5. $5x+10y-\log(10x-5y+17)=c$.

6. $3x+y-2\log(5x+2y+1)=c$.

§11·4

2. $(x^2+y)=cxy$, $[m=2]$. 3. $x^2+2x^4y=c$, $[m=-2]$.

4. $x^2y+x^3y^2=c$, $[m=-1]$. 5. $xy=c^2x+c$, $[m=-2]$.

6. $cy^2-x^2=c^2$, $\left[m=\dfrac{1}{2}\right]$.

§11·5

1. $x+y=\tan(x+c)$. 2. $x-y+a=\dfrac{e^{2x}-c}{e^{2x}+c}$.

3. $y=2\log(2x+y)+c$. 4. $\tan(x-y)=x+c$.

§11·8

4. $x^2+2xy=c$. 5. $3x^2-2xy+y^2+x-3y=c$.

6. $\log\sqrt{x^2+y^2}+\tan^{-1}\dfrac{x}{y}=c$. 7. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\log y=c$.

8. $x^{5/2}y^{3/2}-x^{3/2}y^{7/2}=c$. 9. $(x^3-1)y^{-3}-x^3=c$.

10. $x^2\sin\dfrac{y}{x}=c$.

§11·9

2. $y\sin x=\log\sec x+c$. 3. $y=x+c\sqrt{x^2+1}$,

4. $2y=(x+1)^4+c(x+1)^2$. 或 $(x-y)^2=c_1(x^2+1)$.

5. $y(1+x^2)^2=x^2+2\log x+c$.

6. $y=x^2(1+ce^{1/x})$.

7. $y=x^2+c\sqrt{x^2-1}$，或 $(x^2-y)^2=c(x^2-1)$.

8. $x=y^2+cy^3$.

§11·10

2. $\log y=x^2+cx$　　3. $y^2=x^2-1+ce^{-x^2}$.

4. $\cos y=1+ce^{-\cos x}$.　　5. $x^2y(e^x+c)=1$.

6. $4y^{-3/2}(1+x+x^2)+3=c(1-x)^2$.

7. $\sqrt{y+1}=x+1+c\sqrt{x+1}$.　8. $x^{-2}=1-y^2+ce^{-y^2}$.

§11·12

2. $x^2y+x^3y^2=c$.　　3. $x^2y^2+y=cx$.

4. $y^2=cx$.〔另有 $x^3=3y^2$.〕　5. $x^3+y=cxy^2$.

6. $(x^2y+1)y^{1/2}=cx^{1/3}$.

§11·13

1. $3x^4+8x^3y+6x^2y^2+4x^2y=c$.

2. $x^2-y^2-cy=a^2$.　　3. $y^4+xy^3+2x=cy^2$.

§11·14

5. $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=x+c$.　　6. $x^2+2(c-2)x+4y^2+c^2=0$.

7. $x\log x+y^2=cx$.　　8. $2xy^2-1=cx^2y^2$.

9. $x^2y+y=cx$.　　10. $x^2+y^2-cx=a^2$.

§11·16

1. $x^2+y=x\tan(x+c)$.　　2. $\log\dfrac{xy-1}{xy+1}=x^2+c$.

4. $x^2+y^2=c(1+x)^2$.　　5. $(1-x)^2y^2+x^2-\frac{2}{3}x^3=c$.

6. $2y=x(1+ce^{-x^2})$.

7. $\log[(x^2-2)^2+(y^2-1)^2]+2\tan^{-1}\frac{y^2-1}{x^2-2}=c$.

8. $4(x^2+y)^3=(2x^3+3xy+c)^2$.

§II·17

1. $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c$, 或 $(x^2-y^2)^2+2c_1(x^2+y^2)+c_1^2$.

2. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c$, 或 $x^2+y^2+2c_1xy=1-c_1^2$.

3. $x^3+y+3=ce^{x^3/3}$.　　4. $\frac{y-x+1}{y-x-1}=ce^{2y}$.

5. $x^3y^3(3e^x+c)=1$.　　6. $xy=ce^{x+y}$.

7. $\log y+\frac{x}{y}=c$.　　8. $x^2-2cy-c^2=0$.

9. $\sin^{-1}\frac{y}{x}=\log x+c$.　　10. $y=(x+a)^5+c(x+a)^3$.

11. $x\sin\frac{y}{x}=c$.　　12. $(x+y-1)^3=c(x-y+3)$.

13. $x^2+y^2-2x+2=ce^{-x}$.　　14. $x^4-x^2=cy^2$.

15. $y=x/(1-x^2)^{1/2}+ce^{-x/(1-x^2)^{1/2}}$.

16. $(ay+1)^2=c(1-x^2)y^2$.　　17. $x^3y^2-x^2=cy$.

18. $x^{5/2}y^{3/2}-x^{3/2}y^{7/2}=c$,　　19. $xy^4+4y=cx$.

或 $x^3y^3(x-y^2)^2=c$.　　20. $y=\tan^{-1}x-1+ce^{-\tan^{-1}x}$.

21. $y=2\sin x-2+ce^{-\sin x}$.　　22. $x^2y+2x=cy$.

23. $x^3-y^2=cy$.　　　24. $3x^3y+y^3=c$.

25. $x^2+y^2=c(x^2+y^2)^{1/2}e^{\tan^{-1}y/x}+\frac{1}{2}(y-x)$.

26. $x+y-4\log(2x+3y+7)=c$.

27. $xy(x^2+y^2-c)+1=0$.　　　28. $x^2y^2(y^2-x^2)=c$.

29. $\frac{1}{y}=\log x+1+cx$.　　　30. $(1+x^2+y^2)^{1/2}=\tan^{-1}\frac{y}{x}+c$

31. $x^2y^2=2xy\log cy+1$. 當 $m=1$ 時,此方程爲齊權者.

32. $x=cye^{-2y}$.　　　33. $y(2x^3y-3)^2=c$.

34. $x^3y^2+(x^2-2x+2)e^x=c$.　35. $2y^{-2}=a(2x^2+1)+ce^{2x^2}$.

36. $ye^{\sqrt{x/y}}=c$.　　　37. $x^2y^2+x^3=ce^x$.

38. $(x^2+y^2)^2+2cx(x^2+y^2)-c^2y^2=0$.

在極坐標 $\rho=c_1(1-\cos\theta)$.

§III·1

3. $xyy'^2+(x^2-y^2-\lambda)y'-xy=0$.

4. $yy'^2+2xy'-y=0$.　　　5. $y=xy'+r\sqrt{1+y'^2}$.

6. $xy'^2+(k-x-y)y'+y=0$.

7. $2xy'^2=(3x-1)^2$.　　　8. $(2xy'-y)^2=8x^3$.

9. $y''=0$. 此中不含平行於 y 軸諸直線 $x=c$. 就此等直線而言, $y'=\infty$. 此 ∞^1 個直線之微分方程爲 $dx/dy=0$.

10. $x^2y''^2-2xy'y''(1+y'^2)-(1+y'^2)^2=0$.

11. $xyy''+xy'^2-yy'=0$.

12. $3y'y''y^{\mathrm{iv}}-4y'y'''^2-3y''^2y'''=0$.

13. (a) $y'y''' - 3y''^2 = 0$. (b) $y''' = 0$.

14. $r^2y''^2 - (1+y'^2)^3 = 0$.　　15. $(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$.

§III·2

5. $xy = c$, 等軸雙曲線.

6. $y^2 + (1-k)x^2 = c$, 有中心圓錐曲線.

7. $\log\sqrt{x^2+y^2} = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} + c$, 或 $\rho = c_1e^{\theta}$, 對數螺線.

8. 與習題 7 同.　　9. $\rho = ce^{\pm\theta}$.

10. $y^2 = 2kx + c$, 拋物線.　　11. $y = ce^{-1/x}$.

12. $x^2 + y^2 - cy = 0$, 經過原點, 且中心在 y 軸上之圓. 又 $y = c$.

13. $\rho(\theta+c) + k = 0$, 倒數螺線.

14. $\rho = ce^{\theta/k}$, 對數螺線.　　15. $\rho = ce^{\theta/\sqrt{k}}$.

16. $\rho = k(\theta+c)$, Archimedes 螺線.

17. $\rho = c\sin\theta$, 與習題 12 中之圓族相同.

18. $\rho^2 = c\sin 2\theta$, 雙扭線.

19. $\rho = c\sin^2(\theta/2)$, 或 $\rho = c_1(1-\cos\theta)$, 心臟線.

20. $\rho = 2c/(1+\cos\theta)$, 焦點在原點之拋物線.

§III·3

5. $x^2 + y^2 - cx + a^2 = 0$.　　6. $2x^2 + y^2 = c$.

7. $xy = c$.　　8. $3x^2y + y^3 = c$.

9. $y^a = cx^b$.　　10. $ay^{-n} - bx^{-n} = c$.

11. $(a-2)x^2 - y^2 = cy^a, a \neq 2$; $\log y = c - x^2/y^2, a = 2$.

12. $\sqrt{\rho^2-a^2}-a\cos^{-1}(a/\rho)=a\theta+c$, 或

$\sqrt{x^2+y^2-a^2}-a\cos^{-1}(a/\sqrt{x^2+y^2})=a\tan^{-1}(y/x)+c$.

14. $x^2+y^2=c(my-x)$.　　15. $\rho=ce^{-m\theta}$, (參考習題 13).

17. $\rho=c(1+\cos\theta)$.　　18. $\rho=e^{\sqrt{c-\theta^2}}$.

19. $\rho^m\cos m\theta=c$.　　20. $2\rho=\log\tan\theta+c$.

21. $(\rho-1/\rho)\sin\theta=c$.

§III·4

4. $x=-\frac{gt}{k}+\frac{g}{k^2}(1-e^{kt})$.　　6. $v=v_0e^{kt}$, $x=\frac{v_0}{k}(e^{kt}-1)$.

若 $k>0$, 則 v 與 x 無限增大.

若 $k<0$, v 綿續減小而漸近於 0, x 綿續增大而漸近於 $-v_0/k$.

7. (a) $i=\frac{E}{R}(1-e^{-Rt/L})$;　　(c) $i=\frac{e^{-Rt/L}}{L}\int_0^t E(t)e^{Rt/L}dt$;

(d) $i=i_0e^{-R(t-t_0)/L}$.

8. 1.68 分; 2.68 分; 6 分.

9. $\log\frac{x}{x_0}=-\frac{\log 2}{1,500}t$, $\frac{x}{x_0}=2^{-2/3}=0.63$.

11. $x=a^2kt/(akt+1)$.

12. $x=a-a/(2a^2kt+1)^{1/2}$.

14. $x=a^2k\mu t/(akm\mu t+1)$, 而 $\mu=b/a=n/m$.

17. (b) $(x+a)/r_1-(x-a)/r_2=c$, 或 $\cos\theta_1-\cos\theta_2=c$.

19. $y=-\frac{P}{6EI}(3lx^2-x^3)$; $y_0=-\frac{Pl^3}{3EI}$, $y_0'=-\frac{Pl^2}{2EI}$.

20. $y=-\dfrac{w}{24EI}(x^4-4l^3x+3l^4)$; $y_0=-\dfrac{wl^4}{8EI}$, $y_0'=\dfrac{wl^3}{6EI}$.

21. $y=-\dfrac{w}{24EI}(x^4-4lx^3+6l^2x^2)$; $y_0=-\dfrac{wl^4}{8EI}$, $y_0'=-\dfrac{wl^3}{6EI}$.

22. $y=-\dfrac{P}{48EI}(3l^2x-4x^3)$; $y_0=-\dfrac{Pl^3}{48EI}$, $y_0'=-\dfrac{Pl^2}{16EI}$.

23. $y=-\dfrac{w}{24EI}(x^4-2lx^3+l^3x)$; $y_0=-\dfrac{5wl^4}{384EI}$, $y_0'=-\dfrac{wl^3}{24EI}$.

§IV·1

4. $y=cx,\ x^2+y^2=c$.

5. $y^2=2x(x+c)^2$.

6. $2x=ce^y-\dfrac{1}{ce^y}$.

7. $xy-cy+1=0,\ x+y+1=ce^x,\ x-y-1=ce^{-x}$.

8. $x^2+y^2+4cx+2c^2=0$.

9. $(y-x)^3(y+x)=c,\ (y+x)^3(y-x)=c$.

§IV·2

3. $x^2-2cy-c^2=0$.

4. $(x+c)^3=(y-c)^2$.

5. $xy=c^2x+c$.

6. $4(x^2+y)^3=(2x^3+3xy+c)^2$.

7. $2y-cx^2+3c^3=0$.

8. $x^2=2cy+a^2+c^2$.

9. $cxy+ax+c^2=0$.

10. $y-cx^2+ac^2=0$.

§IV·3

1. $y^2-2cx+a^2c^2=0$.

2. $x=\dfrac{-cy'(2y'^2+3)}{(1+y'^2)^{3/2}}$,

3. $y^3=3cx-c^2$.

4. $y=c(x-c)^2$.

5. $xy-cy+c^2=0$.

$y=\dfrac{c}{(1+y'^2)^{3/2}}$；或

$(x^2+y^2-4c_1)^3+27c_1y^4=0.$

6．$4y^3=c(3x-2c)^2.$

7．$y^2=2cx+c^3.$

8．圆 $(x-c)^2+y^2=c.$

§IV·4

2．$c^2x-cy+3=0.$

3．$c^2(x^2+\quad)-2cxy+y^2=1.$

4．$c^2x^2-2c(xy-4)+y^2=0.$

9．$cy^2-c^2x^2=a^2.$

10．$x^2+y^2=c(x+y)-c^2/4,$

或 $(x-c_1)^2+(y-c_1)^2=c_1^2.$

11．$y=cx^2+c^2x.$

15．$e^{2y}=ce^x+c^2.$

16．$e^y=c(e^x+1)+c^3.$

19．$y^2-cx^2+c^2x=0.$

20．$(x-c)^2+y^2=1-c^2.$

§IV·5

1．$(x-c)^2+y^2=a^2.$

2．$cy=c^2(x-b)+a.$

3．$cxy+x+c^2=0.$

4．$x^2+c(x-3y)+c^2=0.$

5．$(x-y+1)^2+2c(x+y+1)+c^2=0.$

6．$y^2=cx^2-a^2c/(c+1)$，或 $\dfrac{x^2}{c_1}+\dfrac{y^2}{c_1-a^2}=1.$

7．$y(1-\cos x)=c, y(1+\cos x)=c.$

8．$(y-cx)^2=1-c^2.$

9．$y-cx-2c=0,\ y-cx+2c=0.$

10．$y^2=cx^2+c^2.$

11．$c^2x^2-cy+x=0.$

12．$xy-cx+c^2=0.$

13．$x^2-y^2=2cx+c^2.$

14. $2y = x[e^{x+c} - e^{-(x+c)}]$.

15. $\theta = \int \frac{f(\rho)d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - [f(\rho)]^2}} + c$.

16. $\rho = ce^{\theta\sqrt{1-k^2}/k}$.

17. $x = 2k\left(\tan^{-1} y' + \frac{y'}{1+y'^2}\right) + c$, $y = \frac{2ky'^2}{1+y'^2}$; 否則,若令 $y' = \tan(t/2)$,則 $x = k(t+\sin t)+c$, $y = k(1-\cos t)$,是乃半徑為 k 之圓所生之旋輪線族.若 $y'=0$ 時 $x=0$,則 $c=0$. 果爾,則定點為此旋輪線拱形之頂點. 圓周滾動之直線乃 $y=k$.

18. 與習題 17 中之旋輪線族相同.

§V·3

1. $\frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{k} = 1$. 視 k 為正數或負數,此曲線為一橢圓或一雙曲線,以兩點為其焦點,與 $\sqrt{\pm k}$ 為其半配軸.

2. $x^2+y^2=k^2$, 一圓.

3. $xy = a^2$, 一等軸雙曲線.

4. $(x-y)^2 - 2a(x+y) + a^2 = 0$, 一拋物線.

5. (a) $(y-cx)^2 + 4c = 0$, g.s.*, $xy-1=0$, s.s.

(b) $(x+y-c)^2 = 4xy$, g.s., $xy=0$, s.s.

(c) $c^2x - cy + 1 = 0$, g.s., $y^2 = 4x$, s.s.

(d) $(y-cx)^2 = b^2 + a^2c^2$, g.s., $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, s.s.

(e) $y^2 + 2cx + c^2 = 0$, g.s., $x^2 - y^2 = 0$, s.s.

---

* 於本節及次節諸習題答案中,採用下列諸簡稱: 以 g.s. 代通解, s.s. 代異解, p.c. 代特殊曲線, t.l. 代切點軌跡, n.l. 代叉點軌跡, c.l. 代歧點軌跡.

(f) $x^2+y^2-2cxy+c^2=1$, g.s., $(x^2-1)(y^2-1)=0$, s.s.

§V·4

4. $4y^3=9(x+c)^2$, g.s., $y=0$, c.l.

5. $y^3-y^4=(x+c)^2$, g.s., $y=1$, s.s., $y=0$, c.l., $y=\frac{3}{4}$, t.l.

6. $y+c(x-y)+c^2(a-x)=0$, g.s., $(x+y)^2=4ay$, s.s.

7. §IV·1,3. $y^2-1=0$, s.s.

8. $x^2-y^2=0$, s.s., $y=0$, t.l.

§IV·2,1. $x(x+4y)=0$, s.s.

4. $27(x+y)=4$, s.s., $x+y=0$, c.l.

5. $4x^2y+1=0$, s.s., $x=0$, t.l.

6. $x^2+y=0$, c.l.

7. $x^6-81y^2=0$, s.s., $x=0$, t.l.

8. $x^2+y^2=a^2$, s.s., $x=0$, t.l.

10. $x^4-4ay=0$, s.s., $x=0$, t.l.

§IV·3,1. $x^2-a^2y^2=0$, s.s.

3. $9x^2-4y^3=0$, s.s.

4. $4x^3-27y=0$, s.s., $y=0$, s.s. 與 t.l.

5. $y-4x=0$, s.s., $y=0$, p.c.

6. $x^3-2y^3=0$, s.s., $y=0$, c.l.

7. $32x^3+27y^4=0$, s.s., $y=0$, t.l.

8. $4y^2=4x+1$, s.s., $y=0$, t.l.

§IV·4, 1. $x^2+y^2=1$, s.s.

2. $y^2-12x=0$, s.s.

3. $y^2-x^3=1$, s.s.

4. $xy=2$, s.s.

9. $y^4-4a^2x^2=0$, s.s., $y=0$, t.l.

19. $xy=0$, s.s., $x-y=0$, t.l.

11. $x^3+4y=0$, s.s., $x=0$, t.l. 與 p.c.

19. $x^3-4y^2=0$, s.s., $y=0$, t.l., $x=0$, p.c. 與 t.l.

20. $x^2+2y^2-2=0$, s.s., $y=0$, t.l.

§IV·5, 2. $y^2=4a(x-b)$, s.s.

3. $xy^2-4=0$, s.s., $x=0$, p.c.

2. $(x-y)(x+3y)=0$, s.s.

5. $(x+1)y=0$, s.s.

8. $y^2-x^2=1$, s.s.

12. $x-4y=9$, s.s., $x=0$, p.c.

13. $2x^2-y^2=0$, s.s., $y=0$, t.l.

§VI·2

3. $y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-x}$.

4. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}$.

6. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$.

7. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{ix}+c_4e^{-ix}$.

5. $y=c_1e^{2ix}+c_2e^{-2ix}$.　　8. $y=c_1e^{x/3}+c_2e^{-x/2}$.

§VI·3

2. $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-x}$.

3. $y=c_1e^x+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{-x}$.

4. $y=c_1+(c_2+c_3x)e^{3x}$.

5. $y=c_1+(c_2+c_3x+c_4x^2)e^{-x}$.

6. $y=c_1+c_2x+c_3e^x+c_4e^{-x}$.

§VI·4

2. $y=c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x$.

3. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x$.

4. $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$.

5. $y=c_1+e^{x/2}\left(c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

§VI·7

2. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+e^{-2x}e^{e^x}$.

3. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}+e^{-x}(20x^3-x^5)/60$.

4. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+(\cos x-3\sin x)/10$.

5. $y=(c_1+c_2x)e^x-e^x\log(1-x)$.

§VI·8

1. $y=c_1e^x+c_2e^{2x}-xe^x$.

2. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}+(9x^2+6x+20)/27$.

3. $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{2x}-(2x+5)/4$.

§VI·9

2. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\log(\sec x+\tan x)$.

3. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\cos x\log(\csc x+\cot x)-2$.

4. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+(e^x-e^{-x})\log(e^x-1)-xe^x+1$.

5. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3+\log\sec x-\sin x\log(\sec x+\tan x)$.

§VI·10

3. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+e^x+x^3-7x$.

4. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+\dfrac{1}{3}e^{2x}-\dfrac{1}{2}\sin x$.

5. $y=c_1e^x+c_2e^{-x/2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{3}+c_3\right)-x^2$.

6. $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^{3x}-x^3/3+2x^2/3-14x/9+(\sin x$
$+2\cos x)/10$.

7. $y=(c_1+c_2x)e^x+(c_3+c_4x)e^{-x}+x^2e^x/8+4$.

8. $y=c_1+c_2e^{2x}+xe^{2x}/2-e^x-x^2/4-7x/4$.

9. $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x-\dfrac{1}{8}x^2\cos x$.

§VI·11

2. $y=(c_1\cos\log x+c_2\sin\log x)x+c_3x^{-1}+5x+2x^{-1}\log x$.

3. $y=(c_1+c_2\log x)x^{-1}-x^{-1}\log(1-x)$.

4. $y=c_1(x+1)^2+c_2(x+1)^3+(3x+2)/6$.

5. $y=(x+2)[c_1\cos\log(x+2)+c_2\sin\log(x+2)]+c_3+x$.

§VI·12

1. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}+(\cos x-\sin x)/10+xe^{2x}$,

2. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x-\dfrac{1}{5}e^{x}\cos x$.

3. $y=(c_1+c_2x)e^{-x}+2x^3-12x^2+36x-48-xe^{3x}/16+e^{3x}/32$
$-e^{-x}\sin x$.

4. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}+x^4e^{-x}/24-e^{x}/8$.

5. $y=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}-x^3/12-x/8-3xe^{2x}/8$.

6. $y=(c_1+c_2x)e^{x}+(c_3+c_4x)e^{-x}+\dfrac{1}{4}\cos x$.

7. $y=(c_1+c_2\log x)\sin\log x+(c_3+c_4\log x)\cos\log x$
$+(\log x)^2+2\log x-3$.

8. $y=c_1+(c_2+c_3x)e^{-x}+x^3/3-5x^2/2+8x+\log x$.

9. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+(1-x\sin 2x)/8$.

10. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\log(\tan x+\sec x)-1$.

11. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{x}-x-3-x^6e^{x}/120$.

12. $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{x}+c_4e^{-x}+e^{3x}/40$.

13. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+(x^2\sin x+x\cos x)/4$.

14. $y=(c_1+c_2\log x)x+c_3x^{-1}+\dfrac{\log x}{4x}$.

15. $y=c_1e^{x}+c_2e^{-x/2}\sin\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+c_3\right)+xe^{x}(x-2)/6$
$-(\cos 2x+8\sin 2x)/130-1/2$.

16. $y=(c_1+c_2x)e^x-\frac{1}{2}\sin x+e^x(6x^2+x^4)/12.$

§VI·13

3. $\theta=\sqrt{\theta_0^2+\omega_0^2/\mu^2}\cos[\mu t-\tan^{-1}(\omega_0/\mu\theta_0)].$

4. $\theta=\theta_0\cos\mu t;\ \theta=\frac{\omega_0}{\mu}\sin\mu t;\ \theta=\theta_0\cos\mu t+\frac{\omega_0}{\mu}\sin\mu t.$

5. 關於 (8), $\theta=\theta_0e^{-kt}\left(\cos\lambda t+\frac{k}{\lambda}\sin\lambda t\right);\ \theta=\frac{\omega_0}{\lambda}e^{-kt}\sin\lambda t;$

$$\theta=e^{-kt}\left(\theta_0\cos\lambda t+\frac{k\theta_0+\omega_0}{\lambda}\sin\lambda t\right).$$

關於 (9), $\theta=\frac{\mu\theta_0}{\lambda}e^{-kt}\cos\left(\lambda t-\tan^{-1}\frac{k}{\lambda}\right),\ \mu=\sqrt{k^2+\lambda^2};$

$$\theta=\frac{\omega_0}{\lambda}e^{-kt}\sin\lambda t;$$

$$\theta=\frac{\sqrt{\mu^2\theta_0^2+2k\theta_0\omega_0+\omega_0^2}}{\lambda}e^{-kt}\cos\left(\lambda t-\tan^{-1}\frac{k\theta_0+\omega_0}{\lambda\theta_0}\right).$$

6. $\theta=\theta_0(1+kt)e^{-kt};\ \theta=\omega_0te^{-kt}.$

7. $\theta=[\theta_0+(\omega_0+k\theta_0)t]e^{-kt};\ \theta=[\omega_0-k(\omega_0+k\theta_0)t]e^{-kt}.$

若 θ_0 與 $\omega_0+k\theta_0$ 異號，則於 $t=-\theta_0/(\omega_0+k\theta_0)$ 時 θ 爲零.此後該角變換符號並增大其絕對值，以迄 $d\theta/dt$ 爲 0 而 $t=\omega_0/k(\omega_0+k\theta_0)$。自此以後，$\theta$ 綿續減小其絕對值，而漸近於零.

若 θ_0 與 $\omega_0+k\theta_0$ 同號，則在有限時間內 θ 不能爲零.

若 θ_0 與 ω_0 同號，則 θ 增大其絕對值，以迄 $t=\omega_0/k(\omega_0+k\theta_0)$，自

此以後，該角綿續減小其絕對值，而漸近於零. 若 θ_0 與 ω_0 異號，則 θ 綿續減小其絕對值，而漸近於零.

8. $\theta=\dfrac{e^{-kt}}{2\nu}[\{(\nu+k)\theta_0+\omega_0\}e^{\nu t}+\{(\nu-k)\theta_0-\omega_0\}e^{-\nu t}]$.

9. $V=\dfrac{C}{\lambda^2-p^2}e^{-kt}\cos pt$，設 $p\neq\lambda$；

$V=\dfrac{C}{2p}te^{-kt}\sin pt$，設 $p=\lambda$.

於後款中，振幅之極大值爲 $C/2pke$，且於 $t=1/k$ 時取得此值. 自此以後，該振幅卽漸近於零.

10. (a) $A=\theta_0$, $B=(\theta_1-\theta_0\cosh\mu L)/\sinh\mu L$.

$$\therefore\ \theta=\frac{\theta_1\sinh\mu x+\theta_0\sinh\mu(L-x)}{\sinh\mu L}.$$

(b) $c_1=0$, $c_2=\theta_0$.　$\therefore\ \theta=\theta_0e^{-\mu x}$.

11. $c_1=\dfrac{r_0r_1(\theta_0-\theta_1)}{r_1-r_0}$, $c_2=\dfrac{r_1\theta_1-r_0\theta_0}{r_1-r_0}$.

若 $\theta_1=0$, $\theta=\dfrac{\theta_0r_0r_1}{r_1-r_0}\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r_1}\right)$.

流過單位面積之熱量 $\equiv W=-k\,d\theta/dr$.

流過半徑爲 r 之球面之熱量 $=4\pi r^2W=\dfrac{4\pi k\theta_0r_0r_1}{r_1-r_0}$.

12. $c_1=\dfrac{\theta_0\log r_1}{\log r_1-\log r_0}$, $c_2=\dfrac{-\theta_0}{\log r_1-\log r_0}$.

$\theta=\theta_0\dfrac{\log r_1-\log r}{\log r_1-\log r_0}$.

熱量$=2\pi rW=\dfrac{2\pi k\theta_0}{\log r_1-\log r_0}$.

14. 若 $1-k/h^2=\mu^2$, $u=c_1\cos\mu t+c_2\sin\mu t$;

若 $1-k/h^2=-\nu^2$, $u=c_1e^{\nu t}+c_2e^{-\nu t}$.

15. 沿此桿之運動方程爲

$$r=r_0\cosh\omega t+\left(\frac{v_0}{\omega}-\frac{g}{2\omega}\right)\sinh\omega+\frac{g}{2\omega}\sin\omega t.$$

若 $r_0=0$ 且 $v_0=g/2\omega$,則得簡諧運動.

以 ρ 代 r,以 θ 代 ωt 卽得在空間之極坐標運動方程.普徧言之,該方程應爲螺線方程.在特款中,則爲圓 $\rho=\dfrac{g}{2\omega}\sin\theta$.

16. $s-l=(s_0-l)\cos(\sqrt{g/e}\,t)$.

17. $y=e\sec(\mu l/2)\cos[\mu(x-l/2)]$, $\mu=\sqrt{P/EI}$.

y 之最大值$=e\sec(\mu l/2)$;y'之最大值$=e\mu\tan(\mu l/2)$.

§VII·1

2. $y=c_1e^x+c_2x^2e^x+x$.

3. $y=c_1x+c_2(1+x\tan^{-1}x)+x\log\sqrt{1+x^2}$.

4. $y=c_1x+c_2e^x+x^2+1$.

5. $y=c_1e^x+c_2e^x\log x+x+3$.

6. $y=c_1e^{-x}+c_2x^2e^{-x}+x^2-2$.

7. $y=c_1x^3+c_2xe^x+x$.

9. $y=\sec x(c_1e^{ax}+c_2e^{-ax})-\dfrac{\sin x}{a^2+4}$.

10. $y=(c_1x^2+c_2x^{-1}-x)e^{x^2}$.

11. $xy=c_1e^x+c_2e^{-x}+xe^x$.

12. $y=e^x(c_1x^3+c_2x^{-1})+x^3$.

§VII·2

2. $y=c_1\sin(\sin x)+c_2\cos(\sin x)$.

3. $y=c_1x\sqrt{1-x^2}+c_2(1-2x^2)+x+1-2x\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x$.

4. $y=c_1\cos\dfrac{1}{2x^2}+c_2\sin\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{x^2}$.

5. $y=c_1e^{x^2}+c_2e^{-x^2}-\dfrac{1}{3}x^2e^{-x^2}$.

§VII·3

1. $y=c_1e^x+c_2(x^3+3x^2+6x+6)+x$.

2. $y=c_1e^x+c_2e^{3x}(4x^3-42x^2+150x-183)$.

3. $y=(c_1e^x+c_2e^{-x})/x^2$.　　4. $y=c_1x+c_2(x^2-1)+2$.

5. $y=c_1e^{x^2}+c_2e^{-x^2}-\log x$.　　6. $y=(c_1\cos x+c_2\sin x)x^2+x^3$.

7. $y=c_1e^{x^2}+c_2e^{-x^2/2}-x^2+3/2$.

8. $2y=x(c_1e^x+c_2-x)$.　　9. $y=c_1x^n\cos(ax+c_2)$.

10. $y=c_1\cos(n/x)+c_2\sin(n/x)$.

11. $$y=c_1x+c_2\left(1-\frac{1}{2\cdot3x^2}+\frac{1}{2!\,2^2\cdot5x^4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!\,2^n(2n+1)x^{2n}}+\cdots\right).$$

12. $y=c_1e^{-x}+c_2x^2-x^2e^{-x}$.

§VIII·2

3. $y=c_1+c_2e^{-x^2/2}+x$. 4. $y=c_1+c_2x+(x-2)e^x$.

5. $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=a^2$. 6. $y=\log\cos(x+c_1)+c_2$.

7. $x^2-2c_1x+(y-c_2)^2=0$.

§VIII·3

2. $(x-c_1)^2+y^2=c_2$. 3. $e^y=4ac^2e^{cx}/(1-ae^{cx})^2$,

4. $ay+2=be^{ax}$. 或 $e^y=c^2\sec[(cx+a)/2]$

5. $(y-c)^2=ax+b$ $=2c^2/[1+\cos(cx+a)]$.

與 $y=ax+b$.

§VIII·4

1. $\log y=x^3+c_1x+c_2$. 2. $x^2y'^a=be^{a^2x^2}$.

3. $y^2=ax^2+b$. 4. $\log y=c_1+c_2/x$.

§VIII·5

1. $(\log x+c_1)^2+(y/x)^2=c_2$.

2. $y/x=\log\cos(c_1-\log x)+c_2$.

3. $(\log x+c_1)^2-y^2/x^4=c_2$. 4. $x^2y^2+\log x=ax^2+b$.

§VIII·6

1. $3xy+y^3=c_1x^2+c_2x+c_3$.

2. $(x-1)y=x^2-2x+c_1+c_2e^{-x}$.

3. $xy=x^2-2x+c_1\log(x+1)+c_2$.

4. $xy\sqrt{x^2-1}=c_1\sqrt{x^2-1}+c_2\log(x+\sqrt{x^2-1})+c_3$.

5. $y^2-2xy=x^2+2\sin x+c_1x+c_2$.

6. $x^3y^2=c_1x^2+c_2x+c_3$.

7. $(1-x)^2y=x^3-x^2+x/3+c_1(4x-3)+c_2x^4$.

8. $y=c_1\cos(1/x)+c_2\sin(1/x)+\log x+c_3$.

9. $x^3y=c_1(1-5x+10x^2)+c_2(10x^3-5x^4+x^5)$.

§VIII·7

2. $y=c_1x+c_2xe^{-1/3x^3}$.

3. $xy=c_1x+(c_2-c_1\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}$.

4. $y=c_1\cos x^2+c_2\sin x^2+c_3x^2$.

5. $\tan y=c_1\cot x+c_2$.

§VIII·8

3. $y=c_1x+(c_2x+c_3x^2)e^x$.

§VIII·9

2. $y=x\log[c_1x/(c_2+x)]$.　3. $\log y=c_1e^x+c_2e^{-x}+x^2+2$.

4. $y=c_1\cot x+c_2(1-x\cot x)$.

5. $y^{1/2}=c_1x+c_2x^3$.　6. $y^2=c_1+c_2x^{-2}+x^4/6$.

§VIII·10

1. $y=c_1-\log\cos(x+c_2)$.

2. $y=c_1+c_2\sin^{-1}x+(\sin^{-1}x)^2$.

3. $(a+y)/(a-y)=e^{a(x+b)}$.

4. $(1+x^3)y=c_1x^2+c_2x+c_3$.

5. $(x-1)^5y=c_1(x^4-6x^2+2x-1/3-4x^3\log x)+c_2x^3$.

6. $\log y=1+1/(c_1x+c_2)$.

7. $e^y=c\sec[c(x+a)]$,

或 $e^y=2c/[e^{c(x+a)}-e^{-c(x+a)}]=c\operatorname{csch}[c(x+a)]$.

8. $5\log y=c_1+c_2x^5+8\log x$. 9. $y=x^2+c_1e^{x^2}+c_2$.

10. $(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=c_3$ 與 $y=ax+b$.

11. $(x-c_1)^2+c_2(y-c_3)^2=c_4$ 與 $y=ax^2+bx+c$.

12. $\log y=c_1+c_2x^2+x+x^2\log x$.

13. $x^2y+xy^2=c_1x+c_2-x^4/12$.

14. $y=c_1+c_2\sqrt{x^2-1}+x^2/2$. 15. $y=c_1+c_2e^{1/x}+1/x$.

16. $y=c_1\sin^2x+c_2\cos x+c_2\sin^2x\log(\csc x+\cot x)$.

17. (a) 圓 $(x-c_1)^2+y^2=c_2$,

(b) 懸鏈線 $2y=a[e^{(x-b)/a}+e^{-(x-b)/a}]$.

18. (a) 擺線 $x-a=b\cos^{-1}[(b-y)/b]-\sqrt{2by-y^2}$,

(b) 拋物線 $(x-a)^2=2by-b^2$.

19. 有中心圓錐曲線 $kcy^2-c^2(x-a)^2=b$.

20. 若 $n\neq 1$, $2y=\dfrac{na^{1/n}(a-x)^{(n-1)/n}}{1-n}$

$$+\frac{na^{-1/n}(a-x)^{(n+1)/n}}{1+n}-\frac{2na}{1-n^2};$$

若 $n=1$, $\pm 4ay=(a-x)^2-2a^2\log[(a-x)/a]-a^2$.

21. $v\equiv l\,d\theta/dt=\sqrt{2gl(\cos\theta-\cos\alpha)}$.

22. (a) $v=-k\sqrt{2(a-x)/ax}$.

(b) $t=(\sqrt{a/2}/k)(a\cos^{-1}\sqrt{x/a}+\sqrt{ax-x^2})$.

(c) $a/2$.

(d) $v=-\sqrt{2gRh/(R+h)}$;

若 $h=\infty$, $v=-\sqrt{2gR}=-6.96$ 哩/秒.

[於此, $R=4,000$ 哩, $g=32$ 呎/秒^2.]

§IX·3

3. $$y=c_0\left(1+\frac{x^3}{3!}+\frac{4x^6}{6!}+\frac{4\cdot 7x^9}{9!}+\cdots+\frac{4\cdot 7\cdots(3r-2)x^{3r}}{(3r)!}+\cdots\right)$$

$$+c_1\left(x+\frac{2x^4}{4!}+\frac{2\cdot 5x^7}{7!}+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdots(3r-1)x^{3r+1}}{(3r+1)!}+\cdots\right).$$

4. $y=c_0+c_1x+c_0^2x^2/2+c_0(2c_1+1)x^3/3!$

$$+2(c_0^3+c_1+c_1^2)x^4/4!+5c_0^2(2c_1+1)x^5/5!+\cdots.$$

6. $y=c_0(1-2x^2+x^4)$

$$+c_1[x-x^3+x^5/5+x^7/5\cdot 7+3x^9/5\cdot 7\cdot 9+\cdots$$

$$+3x^{2n+1}/(2n-3)(2n-1)(2n+1)+\cdots].$$

2. $$\text{P.I.}=\frac{x^{s+1}}{(s+1)(s-3)}\left[1+\frac{s-1}{s-2}x+\frac{s}{s-2}x^2+\cdots+\frac{s+r-2}{s-2}x^r+\cdots\right]$$

若 $s=-1, 2, 3$ 則無如此形式之特別積分存在.

3. $$y=A\left[1-\frac{x^3}{3!}+\frac{4^2x^6}{6!}-\frac{4^2\cdot 7^2x^9}{9!}+\cdots+(-1)^r\frac{4^2\cdot 7^2\cdots(3r-2)^2x^{3r}}{(3r)!}+\cdots\right]$$

$$+E\left[x-\frac{2^2x^4}{4!}+\frac{2^2\cdot 5^2x^7}{7!}-\cdots+(-1)^r\frac{2^2\cdot 5^2\cdots(3r-1)^2x^{3r+1}}{(3r+1)!}+\cdots\right]$$

$$+\frac{x^{s+2}}{(s+1)(s+2)}-\frac{(s+3)x^{s+5}}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+5)}$$

$$+\frac{(s+3)(s+6)x^{s+8}}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+5)(s+7)(s+8)}-\cdots.$$

4. $y=A(6-8x+3x^2)+Bx^{-}$.

5. $y_1=1-x/2!+x^2/4!-\cdots=\cos\sqrt{x}$,

$y_2=x^{1/2}[1-x/3!+x^2/5!-\cdots]=\sin\sqrt{x}$.

6. $y_1=1-3x+3x^2/1\cdot 3+3x^3/3\cdot 5+3x^4/5\cdot 7+\cdots$

$+3x^r/(2r-3)(2r-1)+\cdots$,

$y_2=x^{1/2}(1-x)$.

7. $y_1 = 1 + 3x^2 + \frac{3x^4}{5} - \frac{3\cdot 1}{5\cdot 9}x^6 + \frac{3\cdot 1\cdot 3}{5\cdot 9\cdot 13}x^8 - \cdots$

$$+(-1)^r\frac{3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2r-5)}{5\cdot 9\cdot 13\cdots(4r-3)}x^{2r} + \cdots$$

$$y_2 = x^{3/2}\left[1 + \frac{3x^2}{8} - \frac{3\cdot 1}{8^2\cdot 2!}x^4 + \frac{3\cdot 1\cdot 5}{8^3\cdot 3!}x^6 - \frac{3\cdot 1\cdot 5\cdot 9}{8^4\cdot 4!}x^8 + \cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^{r-1}\frac{3\cdot 1\cdot 5\cdot 9\cdots(4r-7)}{8^r\cdot r!}x^{2r} + \cdots\right].$$

8. $y_1 = 1 + \frac{x}{3} + \frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!}x^3 + \cdots = (1-x)^{-1/3}$,

$$y_2 = x^{7/3}\left[1 + \frac{8}{10}x + \frac{8\cdot 11}{10\cdot 13}x^2 + \cdots\right.$$

$$\left.+\frac{8\cdot 11\cdot 14\cdots(3r+5)}{10\cdot 13\cdot 16\cdots(3r+7)}x^r + \cdots\right].$$

9. 見 §IX·10 之 Bessel 方程.

10. $y_1 = 1 - \frac{x}{3!} - \frac{1\cdot 4}{5\cdot 3^2\cdot 2!}x^3 - \cdots - \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3r-2)}{(3r-1)3^r r!}x^{3r} - \cdots$,

$y_2 = x$.

11. $y_1 = 1 - 3x^2,\ y_2 = x\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}x^2 - \frac{3}{3\cdot 5}x^4 - \frac{4}{5\cdot 7}x^6 - \cdots\right.$

$$\left.-\frac{r+1}{(2r-1)(2r+1)}x^{2r} - \cdots\right].$$

12. $\bar{y}_1 = 1 - \frac{x^{-2}}{3!} - \frac{x^{-4}}{5!} - \frac{3x^{-6}}{7!} - \frac{3\cdot 5x^{-8}}{9!} - \cdots$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2r-3)x^{-2r}}{(2r+1)!} - \cdots,$$

$\bar{y}_2 = x - x^{-1}$.

13. $y_1=x+\frac{x^3}{2\cdot5}+\frac{x^5}{2\cdot4\cdot5\cdot9}+\cdots+\frac{x^{2r+1}}{2^r r!\,5\cdot9\cdot13\cdots(4r+1)}+\cdots,$

$$y_2=x^{1/2}\left[1+\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot4\cdot3\cdot7}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{x^{2r}}{2^r r!\,3\cdot7\cdot11\cdots(4r-1)}+\cdots\right],$$

$$\text{P.I.}=\frac{x^3}{3}\left[1+\frac{x^2}{3\cdot7}+\frac{x^4}{3\cdot5\cdot7\cdot11}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{x^{2r}}{3\cdot5\cdot7\cdots(2r+1)\cdot7\cdot11\cdots(4r+3)}+\cdots\right].$$

14. $y_1=1+\frac{x}{3!}+\frac{3^2x^2}{5!}+\frac{3^2\cdot5^2x^3}{7!}+\cdots$

$$+\frac{3^2\cdot5^2\cdot7^2\cdots(2r-1)^2}{(2r+1)!}x^r+\cdots,$$

$$y_2=x^{-1/2}.$$

§IX·6

2. $\text{P.I.}=a\left[\frac{x^{s+1}}{(s+1)^2}-\frac{x^{s+2}}{(s+1)^2(s+2)^2}\right.$

$$\left.+\frac{x^{s+3}}{(s+1)^2(s+2)^2(s+3)^2}-\cdots\right].$$

若 s 爲一負整數,則無此種形式之積分存在.

若 s 爲一正整數,吾人可將其書作

$$\text{P.I.}=a(s!)^2\left\{\frac{x^{s+1}}{[(s+1)!]^2}-\frac{x^{s+2}}{[(s+2)!]^2}+\cdots\right\}.$$

將此與 $a(s!)^2 y_1$ 比較，吾人可代 P.I. 以多項式

$$V=(-1)^s a(s!)^2\left[1-x+\frac{x^2}{(2!)^2}-\cdots+(-1)^s\frac{x^s}{(s!)^2}\right];$$

即待定係數法（§VI·10）可應用於此。

3. $y_1=1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{2^{2r}(r!)^2}+\cdots,$

$$y_2=y_1\log x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{(1+\frac{1}{2})x^4}{2^4(2!)^2}+\frac{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^6}{2^6(3!)^2}-\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{r+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right)x^{2r}}{2^{2r}(r!)^2}+\cdots.$$

4. $y_1=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+(r+1)^2x^r+\cdots,$

$$y_2=y_1\log x-2[1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$$

$$+r(r+1)x^r+\cdots].$$

5. $y_1=1-2x+\frac{3x^2}{2!}-\frac{4x^3}{3!}+\cdots,$

$$y_2=y_1\log x+2(2-\frac{1}{2})x-3(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\frac{x^2}{2!}$$

$$+4(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\frac{x^3}{3!}-\cdots.$$

§IX·7

2. $y_1=-x^{-1}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{2^2\cdot 4}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}-\cdots\right.$

$$\left.+(-1)^{r+1}\frac{2rx^{2r}}{2^{2r}(r!)^2}+\cdots\right],$$

$$y_2=y_1\log x+x^{-1}\left[1+\frac{x^2}{2^2}-\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\right)\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}-\cdots\right].$$

3. $$y_1=-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1^2\cdot 2^2}-\frac{x^3}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{(-1)^r x^r}{(r!)^2}+\cdots,$$

$$y_2=y_1\log x+\left[1+\frac{x}{1^2}-\left(\frac{2}{1^3\cdot 2^2}+\frac{1}{1^2\cdot 2^2}\right)x^2\right.$$

$$+\left(\frac{2}{1^3\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{2}{1^2\cdot 2^3\cdot 3^2}+\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\right)x^3$$

$$-\left(\frac{2}{1^3\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{2}{1^2\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{2}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^2}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^3}\right)x^4+\cdots\right].$$

4. $$y_1=-x^{-2}\left[\frac{x^4}{2^2\cdot 4}-\frac{x^6}{2^3\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2^3\cdot 4^2\cdot 6\cdot 8}\right.$$

$$\left.-\frac{x^{10}}{2^3\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8\cdot 10}+\cdots\right],$$

$$y_2=y_1\log x+x^{-2}\left[1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}-\frac{11x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6}\right.$$

$$\left.+\frac{31x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}-\cdots\right].$$

5. $$y_1=-x+\frac{x^2}{1!}-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}-\cdots\equiv -xe^{-x},$$

$$y_2=y_1\log x+x^{-1}\left[1+x-x^3+\frac{x^4}{2^2}-\left(\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}\right)x^5\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3^2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4^2}\right)x^6-\cdots\right].$$

6. $y_1=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\equiv 1/(1-x)^2$,

$y_2=1+2x+3x^2$.

§IX·8

8. 此組習題之答案並非唯一者.

$F(1,1,1,x),2F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},\frac{1}{2},x^2\right)$,

$$2nxF\left(-\frac{n-1}{2},-\frac{n}{2}+1,\frac{3}{2},x\right),$$

$\text{Limit}_{\alpha,\beta\to\infty} F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2},-\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$,

$\text{Limit}_{\alpha,\beta\to\infty} 2F\left(\alpha,\beta,\frac{1}{2},\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right)$.

§X·2

2. $z=ce^{x/y}$.　3. $x^2+y^2+(z-c)^2=a^2$.　4. $x^2+y^2+z^2=cx$.

5. $f(z)=-(1+z^2)+k(1+z^2)^{3/2}$,

$\sin x-y(1-k\sqrt{1+z^2})=c\sqrt{1+z}$.

§X·3

1. $x^2-(y-c)^2=2z$.　2. $x+y+z=ce^{y-x}$.

3. $x^2-y-z=cx$.　4. $y^2+z^2=cx^2$.

5. $\tan^{-1}(y/x)+\log z=c$.　6. $\log x-x/yz=c$.

7. $x^2-z\log y=c$.

§X·4

3. $z(x+y)=c(x+z)$.　4. $x^2+y^2=c(y+z)$.

5. $y+z=c(z-x)$.

6. $x^2+y^2+z^2=cy^4$.

7. $xy+yz+zx=c(x+y+z)$.

8. $(y+z)/x+(z+x)/y=c$.

§X·5

2. $(x^2+2yz)t^2e^{2t}=c$.

3. $xy+yz+zt=c(x+t)$.

4. $x-y+z=c(y+z-t)$.

§X·8

1. $yz+zx+xy=c$.

2. $x^2+y^2=c(z+1)^2$.

3. $e^x(x+y^2+z^2)=c$.

4. $x=z/(y+a)+c$.

5. $e^x(y+z)=c$.

6. $(x^2+y+z)e^{z^2}=c$.

7. $x^2+xy^2+x^2z-t=c$.

8. $y/x+\log z=c$.

9. $(x-1)(y-1)(z-1)e^{x+y+z}=c$.

10. $(x+2y)(y-z)^2=c$.

11. $(y+z)e^{x+y}=ct$.

12. $xz+yt=c(y+z)$.

13. $xyz=ce^{x+y+z}$.

14. $kx-hy=c(lx-hz)$.

15. $x^5=cy^3$.

16. $y^4+z^4+t^4+4xyzt=cx$.

§XI·2

1. $x=c_1e^{t/3}+c_2e^{-t/3}-6t,\ y=-2c_1e^{t/3}-c_2e^{-t/3}+\frac{1}{2}e^t+9t+9$.

2. $x=(6c_2-2c_1-2c_2t)e^t-\frac{1}{3}c_3e^{-3t/2}-\frac{1}{3}$,

$y=(c_1+c_2t)e^t+c_3e^{-3t/2}-t/2$.

3. $x=(c_1+c_2t)e^t+(c_3+c_4t)e^{-t}+\cos t$,

$$2y=(c_4-c_1-c_2t)e^t-(c_3+c_4+c_4t)e^{-t}-2\cos t-\frac{1}{2}\sin t.$$

4. $$x=\frac{c_2-c_1}{2}\cos t-\frac{c_1+c_2}{2}\sin t+c_3e^{-t/3}+\frac{2\omega\cos\omega t}{(9\omega^2+1)(\omega^2-1)}$$

$$-\frac{(3\omega^2+1)\sin\omega t}{(9\omega^2+1)(\omega^2-1)},$$

$$y=c_1\cos t+c_2\sin t+c_3e^{-t/3}+\frac{2\omega\cos\omega t}{(9\omega^2+1)(\omega^2-1)}$$

$$+\frac{6\omega^2\sin\omega t}{(9\omega^2+1)(\omega^2-1)}.$$

§XI·3

6. $(x-y)t=c_1$, $x+y+2=c_2t$.

7. $x^2+y^2=c_1$, $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}-\tan^{-1}t=\tan^{-1}c_2$ 或 $\dfrac{y-xt}{x+yt}=c_2$.

8. $x^2-y^2=c_1$, $2(x+y)-t^2=c_2$.

9. $y=c_1t$, $x^2+y^2+t^2=c_2t$.

10. $x-y=c_1(x-t)$, $(x+y+t)(x-t)^2=c_2$.

11. $x-y-t=c_1$, $x^2+y^2=c_2t^2$.

12. $x^3y^3t=c_1$, $(x^3+y^3)^3t^2=c_2$.

13. $x^2+y^2+t^2=c_1$, $xyt=c_2$.

14. $x^2+y^2+t^2=c_1$, $x^3-yt=c_2$.

15. $x^2+y^2+t^2=c_1$, $y^2-2yt-t^2=c_2$.

16. $xy=c_1$, $x^4-2xyt^2-t^4=c_2$.

§XI·4

1. $y/x=c_1$, $z/x=c_2$; 或 $x/c_1=y/c_2=z/c_3$, 其中有關係者僅爲諸 c 之比.

2. $y=c_1z$, $x^2+y^2+z^2=c_2z$.

3. $\dfrac{x^{1/h}}{c_1}=\dfrac{y^{1/k}}{c_2}=\dfrac{z^{1/l}}{c_3}$, 其中有關係者僅爲諸 c 之比.

4. $x^2+z^2=c_1$, $y^2+z^2=c_2$.

5. $y=c_1x$, $x^2+y^2+2z^2=c_2$.

6. $x=c_1x$, $x^2+y^2+z^2=c_2$.

7. $y-x=c_1(z-x)$, $(x+y+z)(y-x)^2=c_2$.

§XI·7

1. 所求之路線爲一拋物線位於初速度所定之鉛直平面內. 如以質點之原位置爲原點, 更以該鉛直平面內經過原點之水平直線與鉛直線作 x 軸與 y 軸, 則此路徑之方程式爲

$$x=v_0t\cos\alpha,\quad y=v_0t\sin\alpha-gt^2/2.$$

或消去 t, 則有

$$y=x\tan\alpha-gx^2/2v_0^2\cos^2\alpha.$$

2. $x=v_0\cos\alpha(1-e^{-kt})/k$,

$y=(kv_0\sin\alpha+g)(1-e^{-kt})/k^2-gt/k$.

3. $kx=ak\cos kt+v_0\cos\alpha\sin kt$, $ky=v_0\sin\alpha\sin kt$.

消去 t, 則有

$$(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2+a^2k^2y^2/v_0^2=a^2\sin^2\alpha,$$

是乃一以原點爲中心之橢圓．因 x 與 y 俱爲週期函數，其週期爲 $2\pi/k$，故此運動亦具週期性，其週期與橢圓之大小無關係．

4．$2kx=ka(e^{kt}+e^{-kt})+v_0\cos\alpha(e^{kt}-e^{-kt})$，

$2ky=v_0\sin\alpha(e^{kt}-e^{-kt})$；

即

$$kx=ka\cosh kt+v_0\cos\alpha\sinh kt,\quad ky=v_0\sin\alpha\sinh kt.$$

消去 t，則有

$$(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2-a^2k^2y^2/v_0^2=a^2\sin^2\alpha,$$

是乃一以原點爲中心之雙曲線．

5．$p=a\cos(kt+b),q=a\sin(kt+b),r=c,k=c(C-A)/A.$

若於 $t=0$ 時，$p=p_0,q=q_0,r=r_0$，則

$$a=\sqrt{p_0^2+q_0^2},\quad b=\tan^{-1}(q_0/p_0),c=r_0,k=r_0(C-A)/A.$$

角速度 $\equiv\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{p_0^2+q_0^2+r_0^2}$，乃一常數．

6．若比例因式爲 a^2,b^2,c^2，則表示此路徑之兩方程應具下形式

$$x^2/a^2-y^2/b^2=c_1 \text{ 與 } x^2/a^2-z^2/c^2=c_2.$$

關於經過原點某曲線之 $c_1=c_2=0$．故所求路徑爲下列諸直線之一 $x/a=\pm y/b=\pm z/c$．

若於 $t=t_0$ 時，$x=x_0,y=y_0,z=z_0$，則所耗時間爲

$$t-t_0=\frac{\pm 1}{bc}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2c_1)(x^2-a^2c_2)}}.$$

當 $c_1=c_2=0$，

$$t-t_0=\frac{\pm 1}{bc}\left(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x}\right)=\frac{\pm 1}{ca}\left(\frac{1}{y_0}-\frac{1}{y}\right)=\frac{\pm 1}{ab}\left(\frac{1}{z_0}-\frac{1}{z}\right).$$

7. $x=\dfrac{mX}{eH}\left(1-\cos\dfrac{eH}{m}t\right), y=\dfrac{mX}{eH}\left(\dfrac{eH}{m}t-\sin\dfrac{eH}{m}t\right)$，乃一擺線，

而以質點之原位置爲原點.

§XII·1

1. $z(p-q)+x-y=0$.　　2. $z^2q^2-2xzp-x^2+z^2=0$.

3. $z=xp+yq+\sqrt{p^2+q^2}$.　　4. $pq=z$.

5. $(1+q^2)r-(1+p^2)t=0$，或 $pqr-(1+p^2)s=0$.

6. $r=0$，或 $t=0$，或 $z=xp+yq-xys$.　　7. $zs+pq=0$.

§XII·2

2. $xzp+yzq=xy$.　　3. $yp-xq=y^2-x^2$.　　4. $r-t=0$.

5. $xr-(x+y)s+yt=\dfrac{x+y}{x-y}(p-q)$.

§XIII·1

3. $\phi(x^2+y^2, xy+z)=0$.　　4. $\phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$.

5. $x+y+2=z\phi(xz-yz)$.　　6. $\phi(x^2-y^2-z^2, 2xy-z)=0$

§XIII·2

2. $[y+z-\psi(x)]^2=4\psi(x)(x-y)$;

$x+z=0, x-y=0$ 異常之解.

3. $x^2+[z-y\psi(x)]^2=1$; $x\pm1=0$ 異常之解.

4. $z=y\sin^{-1}(x/y)+\psi(y)$; $y-x=0, y+x=0$ 異常之解.

5. $z-y\psi(x)=[\psi(x)+x]^2$; $y^2+4xy+4z=0$ 異常之解.

7. $\phi(x^2-2y, y^2-4\sqrt{z})=0$; $z=0$ 異常之解.

8. $\phi(\sqrt{x}-\sqrt{z}, \sqrt{y}-\sqrt{z})=0$; $x=0, y=0, z=0$ 異常之解.

9. $\phi(\tan^{-1}x-\tan^{-1}y, \tan^{-1}x-\sin^{-1}z)=0$,

或 $\phi\left(\dfrac{x-y}{1+xy}, \dfrac{x\sqrt{1-z^2}-z}{\sqrt{1-z^2}+xz}\right)=0$;

$z-1=0, z+1=0$ 異常之解.

10. $\phi[2y-z, e^y\log(z-x-y)]=0$; $z-x-y=0$ 異常之解.

§XIII·7

2. $y=(b-x)(a+yz)$. *　　　3. $6z=(2x-a)^3+6a^2y+b$.

4. $(ax+y+b)^2=(1+a^2)(R^2-z^2)$.

§XIII·8

2. $\log z=ax+y/a+b$.　　　3. $z=a\log x+\sqrt{a^2-1}y+b$,

4. $\log z=ax+(a+1/a)\log y+b$.　5. $z-a=bxe^{y/a}$.

6. $2\sqrt{az}=\log(x^a y)+b$.　　　7. $\log z=ax+a^2y^2+b$.

8. $3\log z=3a\log x-2(a-y)^{3/2}+b$;

又(引用注意), $3\log z=3y(a+\log x)+(a+\log x)^3+b$.

9. $2z=a^2e^{2x}+2aye^x+b$.

§XIII·9

1. $z=ax+by+\sqrt{a^2+b^2+1}$, c.s., $x^2+y^2+z^2=1$, s.s.

---

* 務須注意一通解決不能有唯一答案之事實. 選用 ϕ 之各種形式即可求得與此處所示者不相上下之他種形式之答案.

2. $z=ax+by+a^2+b^2$, c.s., $x^2+y^2+4z=0$, s.s.

3. $z=ax+by+1/(a^2+b^2)$, c.s., $27(x^2+y^2)=4z^3$, s.s.

4. $z=ax+by+a^2+ab+b^2$, c.s., $x^2-xy+y^2+3z=0$, s.s.

§XIII·10

1. $\phi(1/x-1/y, 1/x-1/z)=0$. 2. $z=cx^a y^{\sqrt{1-a^2}}$.

3. $3u=xyz+\phi(y/x, z/x)$.

4. $z=ax+by+ab$, c.s., $xy+z=0$, s.s. 5. $z=cx^a y^{1/a}$.

6. $\phi(x^3-y^3, x^2-z^2)=0$. 7. $z=a\log x+(a+a^2)y+b$.

8. $(a+1)(z-b)^2=4(ax+y)$.

9. $z=a\sqrt{x+y}+\sqrt{1-a^2}\sqrt{x-y}+b$.

10. $z^2=a^2x^2+(ay+b)^2$.

11. $z=a\log\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{1-a^2}\tan^{-1}(y/x)+b$.

12. $x^2+y^2+z^2=z\phi(y/z)$. 13. $(a-1)(ax+y+b)z+1=0$.

14. $z=axy+a^2(x+y)+b$. 15. $z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x^{1-n}\phi(y/x)$.

16. $2az=(ax+y)^2+b$.

17. $(x-u)^3(x+y+z+u)=\phi\left(\dfrac{x-y}{z-u}, \dfrac{y-z}{z-u}\right)$.

18. $z=a\log x+(a^2+1)\log y+b$.

19. $3\log z=2(x+a)^{3/2}+2(y-a)^{3/2}+b$.

20. $z^2\sqrt{a^2+1}=2axy+x^2-y^2+b$.

21. $z=a\log\sqrt{x^2+y^2}+(1/a)\tan^{-1}(y/x)+b$.

22. $z^2(a-y^2)=(x+b)^2$.　　23. $x^2+[z-y\phi(x)]^2=1$.

24. $3z=(x-a)^3+3a^2y+b$.　　25. $9x^{1/3}y^{1/3}-z=x\phi(y/x)$.

26. 平面族 $z=ax+\sqrt{k^2-1-a^2}\,y+b$; 於 b 爲一常數時，此諸平面圍成一錐

$$(k^2-1)(x^2+y^2)-(z-b)^2=0,$$

其頂點爲 $(0,0,b)$.

27. 旋轉曲面 $z=\phi(x^2+y^2)$.

28. 平面族 $z=ax+by+\sqrt{(k+c^2)a^2+kb^2+k}$，其中 k 表固定之乘積，又兩定點爲 $(c,0,0)$ 與 $(-c,0,0)$. 此諸平面圍成旋轉二次曲面

$$x^2/(c^2+k)+(y^2+z^2)/k=1,$$

是乃一橢圓面或雙葉雙曲面，視 k 爲正數或負數而定之.

29. 平面族 $z-ax-by=(kab)^{1/3}$. 此諸平面圍成曲面 $27xyz=k$.

30. 平面族 $z-ax-by=kab/(ab-a-b)$. 此諸平面圍成曲面 $x^{1/2}+y^{1/2}+z^{1/2}=k^{1/2}$.

§XIV·2

2. $z=\phi(y+x)+\psi(y+2x)$.

3. $z=\phi_1(y)+\phi_2(y+2x)+\phi_3(y+5x)$.

4. $z=\phi_1(x)+\phi_2(y-x)+\phi_3(y+3x)$.

§XIV·3

1. $z=\phi(y+x)+x\psi(y+x)$.

2. $z=\phi_1(y+x)+\phi_2(y-x)+x\phi_3(y-x)$.

3. $z=\phi_1(x+y)+x\phi_2(x+y)+\phi_3(x-y)+x\phi_4(x-y)$.

§XIV·5

4. $z=\phi(y-x)+\psi(3x+2y)+\dfrac{1}{2}\sin(x+y)+(10x^4y+x^5)/80$

5. $z=\phi(y-x)+\psi(y+2x)-x^2y/2$.

§XIV·6

3. $z=\phi(y-x)+e^{-2x}\psi(y+2x)-\dfrac{1}{10}e^{x+2y}-\dfrac{1}{6}\cos(2x+y)$.

4. $z=e^x\phi(y)+e^{-x}\psi(x+y)+\dfrac{1}{2}\sin(x+2y)-xe^y$.

§XIV·7

2. $z=\phi(y/x)+\psi(xy)$.

3. $z=\phi(x^2y)+x\psi(x^2y)+x^3y^4/30$.

4. $z=\phi(x^2+y^2)+\psi(x^2-y^2)$.

§XIV·8

3. $u=Ae^{-ax}\sin ay, a>0$.

4. $u=Ae^{-a(x+y)}, a>0$; $u=Ae^{a(y-x)}, a>0$.

§XIV·9

4. (a) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}+\cdots\right)$.

(b) $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\left(-\sin x+\dfrac{4\sin 2x}{3}-\sin 3x\right.$

$$\left.+\frac{8\sin 4x}{15}-\frac{\sin 5x}{3}+\cdots\right);$$

n 爲偶數時，$b_n = \dfrac{2n}{\pi(n^2-1)}$.

n 爲奇數時，$b_n = -\dfrac{1-(-1)^{(n+1)/2}}{\pi(n+1)} - \dfrac{1-(-1)^{(n-1)/2}}{\pi(n-1)}$.

(c) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{2\sin 2x}{3} + \dfrac{4\sin 4x}{15} + \cdots + \dfrac{2n\sin 2nx}{(2n)^2-1} + \cdots\right]$.

(d) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{1+e^{\pi}}{2}\sin x + \dfrac{2(1-e^{\pi})}{5}\sin 2x + \cdots\right.$

$$\left. + \frac{n[1+(-1)^{n-1}e^{\pi}]}{n^2+1}\sin nx + \cdots\right].$$

§XIV·10

3. $\theta = \dfrac{400}{\pi}\left[e^{-h^2\pi^2t/a^2}\sin\dfrac{\pi x}{a} + \dfrac{1}{3}e^{-9h^2\pi^2t/a^2}\sin\dfrac{3\pi x}{a}\right.$

$$\left. + \frac{1}{5}e^{-25h^2\pi^2t/a^2}\sin\frac{5\pi x}{a} + \cdots\right].$$

§XIV·11

4. $x = \phi(z) + \psi(x+y+z)$.　　　5. $x = \phi(y) + \psi(z)$.

6. $y = \phi(ax+by+cz) + x\psi(ax+by+cz)$.

§XIV·12

3. $z = \phi(x) + y^2\psi(x) + xy^3/3$.

4. $z = \phi(x) + \psi(y) + x^2y^2/4$.

5. $z = \phi(y) + e^{-x}\psi(y) + x^2y/2 - xy$.

§XIV·13

1. $z = \phi(x) + \psi(y) + \dfrac{1}{2}x^2\log y + xy$.

2. $z=\phi(y+3x)+\psi(y-2x)+x^3y/6+x^4/24$.

3. $z^2=\phi(y)+x\psi(y)+x^3y^2$.

4. $z=\phi(x+y)+\psi(xy)$.

5. $z=\phi(y)+x^2\psi(y)+\frac{1}{2}x^2y\log x$.

6. $z=\phi(y+x)+e^{3x}\psi(y-x)-ye^{x+2y}$.

7. $z=\phi(xy)+x\psi(y/x)+(x-1)y\log x$.

8. $z=x^n\phi(y/x)+x^{-n}\psi(y/x)$.

9. $z=\phi(y)+\psi(y)\log x+x^3y^3$.

10. $z=\phi(x)+\psi(x+y)+(x+y)\log x$.

11. $e^{-z}=\phi(x)+\psi(y)$.

12. $z=\phi(x+y)+x\psi(x+y)+\frac{1}{2}x^2(x+y)^2$.

13. $y+\phi(x+y+z)+x\psi(x+y+z)=0$.

14. $y=\phi(x)+\psi(z)$.

15. $z=e^x\phi(y)+e^{-y}\psi(x)-xy+x-y+1$.