Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 4

Aufgabe 4.1. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf dem topologischen Raum X. Zeige, dass durch $U \mapsto \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U)$ mit den natürlichen Produktabbildungen eine Garbe auf X gegeben ist.

Aufgabe 4.2. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf einem nicht zusammenhängenden Raum X mit einer Zerlegung $X = U \uplus V$ in disjunkte nichtleere offene Mengen. Zeige $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(U) \times \mathcal{G}(V)$.

Aufgabe 4.3. Es sei X ein topologischer Raum mit einer Zerlegung $X = Y \uplus Z$ in disjunkte offene nichtleere Teilmengen. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y und $\mathcal{H}$ eine Garbe auf Z. Zeige, dass durch

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{G}(U \cap Y) \times \mathcal{H}(U \cap Z)$$

für $U \subseteq X$ eine Garbe auf X definiert ist.

Aufgabe 4.4. Es sei X ein Hausdorffraum mit zumindest zwei Punkten und es sei $M \neq \emptyset$. eine Menge. Zeige, dass die konstante Prägarbe zu M keine Garbe ist.

Aufgabe 4.5. Zeige, dass die Einschränkung einer Garbe auf eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ eine Garbe ist.

Aufgabe 4.6. Zeige, dass der Halm der Garbe der holomorphen Funktionen in $0 \in \mathbb{C}$ gleich dem Ring der konvergenten Potenzreihen in einer Variablen ist.

Aufgabe 4.7. Es sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenmorphismus zwischen Garben auf einem topologischen Raum X und es sei $\varphi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ surjektiv für jede offene Menge $U \subseteq X$. Zeige, dass dann auch jede Halmabbildung $\varphi_P \colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ surjektiv ist.

Aufgabe 4.8. Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum X. Zeige $\mathcal{G}(\emptyset) = 0$.

Abbildungsverzeichnis